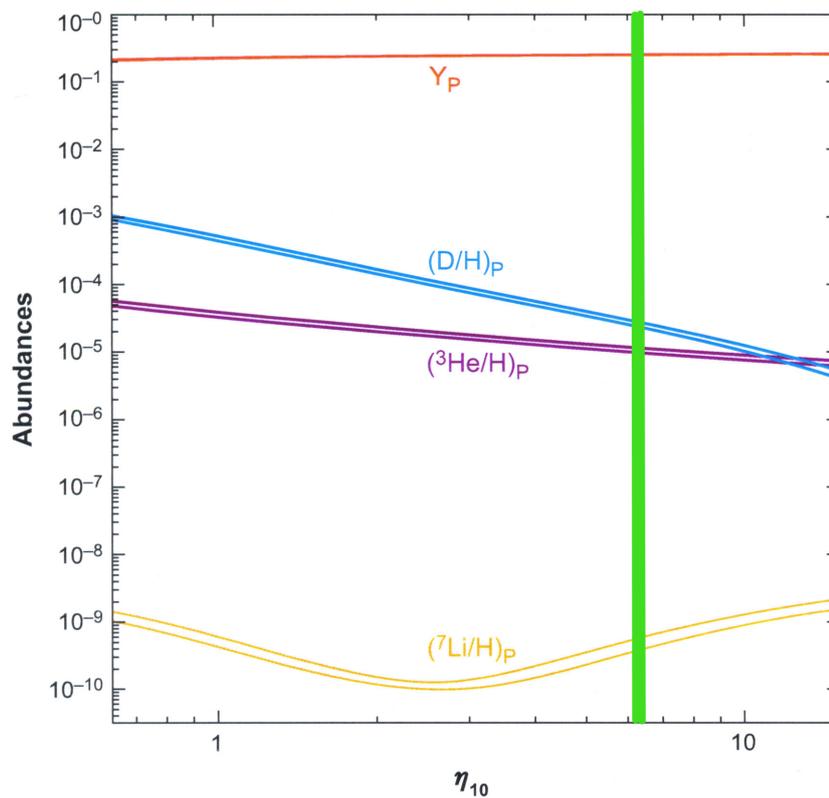


# Berechnungen zur primordialen Nukleosynthese

Dissertation  
der Fakultät für Physik  
der Ludwig-Maximilians-Universität  
München



vorgelegt von  
Josef Martin Gaßner  
aus Ergolding

November 2008

1. Gutachter: Prof. Dr. Harald Lesch
2. Gutachter: Prof. Dr. Achim Weiß

Mündliche Prüfung: 3. Februar 2009

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort / Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1. Die primordiale Nukleosynthese</b>	<b>3</b>
1.1. Überblick . . . . .	3
1.2. Zeitlicher Verlauf der SBBN . . . . .	4
1.3. Numerische Simulationen zur SBBN . . . . .	8
1.4. Beobachtungsdaten zu den primordialen Häufigkeiten . . . . .	11
1.4.1. Deuterium . . . . .	11
1.4.2. Tritium . . . . .	14
1.4.3. Helium-3 . . . . .	14
1.4.4. Helium-4 . . . . .	16
1.4.5. Lithium . . . . .	19
1.5. Erweiterungen der SBBN . . . . .	21
<b>2. Analytische Berechnung von <math>Y_p</math></b>	<b>25</b>
2.1. Überblick . . . . .	25
2.2. Die Temperatur-Zeit-Relation im frühen Universum . . . . .	25
2.3. Freeze-out des Betazerfalls . . . . .	29
2.4. Start der effektiven Fusion . . . . .	38
2.5. Ende der primordialen Nukleosynthese . . . . .	48
2.6. Vergleich mit numerischen und Beobachtungsdaten . . . . .	50

<b>3. Variation der Schlüsselparameter</b>	<b>53</b>
3.1. Motivation . . . . .	53
3.2. Der Higgs Vakuum Erwartungswert . . . . .	54
3.2.1. Überblick . . . . .	54
3.2.2. Die Beziehung zwischen $Y_p$ und $v$ . . . . .	55
3.2.3. Die zeitliche Änderung des Higgs Vakuum Erwartungswertes . . . . .	68
3.3. Das Verhältnis von Baryonen- zu Photonendichte . . . . .	69
3.4. Die Newtonsche Gravitationskonstante . . . . .	71
3.4.1. Überblick . . . . .	71
3.4.2. Die Beziehung zwischen $Y_p$ und $G$ . . . . .	71
3.4.3. Die zeitliche Änderung der Gravitationskonstante . . . . .	74
3.5. Die Anzahl der Neutrinofamilien . . . . .	74
3.6. Das Plancksche Wirkungsquantum . . . . .	77
3.7. Gesamtdarstellung . . . . .	80
<b>4. Zusammenfassende und weiterführende Gedanken</b>	<b>81</b>
<b>Anhang</b>	<b>83</b>
A. Zur Photodesintegration des Deuterons . . . . .	85
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>86</b>

# Einleitung / Überblick

*“Warum?*

*Ewig törichte Frage des Menschen,  
der im Kleinsten keine Antwort findet  
und doch stets wieder an das Größte sich wagt.”*

Franz Carl Endres (1878-1954)

Ungeachtet dieser eindringlichen Worte von Franz Carl Endres werden wir mit der vorliegenden Arbeit eben diesen Weg beschreiten und ihn sogar zur Methode erheben. Mit Hilfe makroskopischer Beobachtungsdaten der Kosmologie – dem Größten – wollen wir Einblick gewinnen in fundamentale Parameter der mikroskopischen Teilchenphysik – das Kleinste.

Als Brücke über 43 Größenordnungen hinweg wird uns die primordiale Nukleosynthese (pN) dienen, eine der tragenden Säulen des Standardmodells der Kosmologie. Sie allein bietet bislang einen gesicherten Blick hinter den optisch dicken Vorhang des kosmischen Mikrowellenhintergrundes.

Mit der immer weiter voran getriebenen Genauigkeit der einfließenden Größen hat sich die pN in den letzten Jahren zu einer parameterfreien Theorie gemausert, wodurch sie nochmals wesentlich an Aussagekraft zulegen konnte. Diese neu gewonnene Stärke im Verbund mit deutlich verbesserten Beobachtungsdaten der primordialen Elementhäufigkeiten wollen wir uns zu Nutze machen um interessante Eigenschaften der Schlüsselparameter zu berechnen.

Den Schwerpunkt dieser Arbeit bildet eine analytische Berechnung der primordialen Häufigkeit von  ${}^4\text{He}$ . Sie bildet die Ausgangsbasis für weitere Überlegungen und ermöglicht es insbesondere, die Abhängigkeiten von den einfließenden Größen herauszuarbeiten.

Abschließend zeigen wir mögliche Anwendungsbeispiele, indem wir einer zeitlichen Varianz des Higgs Vakuum Erwartungswertes und der Newtonschen Gravitationskonstante Grenzen setzen, basierend auf Beobachtungsdaten zur primordialen  ${}^4\text{He}$ -Häufigkeit. Für die Anzahl der effektiven Neutrino-Generationen werden ebenfalls Schranken abgeleitet.



# 1. Die primordiale Nukleosynthese

*“Auf einem stark abgekühlten Aschehaufen stehend,  
beobachten wir das allmähliche Verlöschen der Sonnen,  
und wir versuchen uns des entschwundenen Glanzes  
des Ursprungs der Welten zu erinnern.”*

Georges-Henri Lemaître (1895-1966)

## 1.1. Überblick

Das Universum ist kalt und leer und mit jedem Augenblick verstärkt es diese Eigenschaften weiter. Wenn es demnach in der Vergangenheit wärmer und dichter war, so gelangt man für sehr frühe Phasen an einen Punkt, bei dem Temperatur und Dichte an jedem Ort im Universum ausreichen um leichte Atomkerne miteinander zu verschmelzen. So ähnlich muss der Gedankengang von George Gamov gewesen sein, als er 1948 die Theorie der primordialen Nukleosynthese (pN) mit begründete.

Die pN wurde zur wesentlichen tragenden Säule des Standardmodells der Kosmologie, insbesondere des heißen Urknalls. Im Rahmen der pN wurde beispielsweise erstmals die Temperatur der kosmische Hintergrundstrahlung abgeschätzt.

Die pN beschreibt also die Entstehung leichter Elemente in den ersten Minuten nach dem Urknall. Neben George Gamow sind als Wegbereiter auch Chushiro Hayashi (Neutron-Proton-Gleichgewichtsprozesse zur Erzeugung leichter Elemente, 1950) und Ralph Alpher (Modell zur  $^4\text{He}$ -Synthese, 1966) zu nennen. Der Nachweis der kosmischen Hintergrundstrahlung motivierte weitere detaillierte Berechnungen von Peebles sowie Wagoner, Fowler und Hoyle (1967). In Folge kam es zu Verfeinerungen des Modells (Weinberg 1972; Zeldovich und Novikov 1983), bis hin zur "precision cosmology era", die Ende der 90er Jahre ausgerufen wurde.

Bis zum heutigen Tage konnte die pN ihre Bedeutung weiter festigen und ausbauen; sie allein bietet bislang einen gesicherten Blick hinter den optisch dicken Vorhang des kosmischen Mikrowellenhintergrundes (CMB). Damit liefert sie beispielsweise das zentrale Indiz für die Existenz nicht baryonischer Dunkler Materie.

Heute basiert die sogenannte Standard Big Bang Nucleosynthesis (SBBN) nahezu unverändert auf den Annahmen der 50er und 60er Jahre wie folgt:

- Die physikalischen Gesetze gelten uneingeschränkt auch im frühen Universum, insbesondere das Standardmodell der Elementarteilchenphysik
- Es gilt das kosmologische Prinzip, bzw. das Universum ist homogen und isotrop
- Die Raum-Zeit im frühen Universum genügt der allgemeinen Relativitätstheorie, insbesondere lässt sich der zeitliche Verlauf der Expansion durch die Friedmann-Gleichung beschreiben

Interessanterweise müssen wir über diese durchweg unkritischen Annahmen hinaus an den Urknall selbst lediglich die Forderung stellen, dass die auftretenden Temperaturen chemisches und thermisches Gleichgewicht erlauben, wie Hayashi bereits 1950 treffend formulierte:

*"The numerical results show that (...) the n-p ratio in the beginning of the element formation is nearly 1:4 almost irrespective of its initial values, as long as initial temperatures are so high ( $T \geq 2 \cdot 10^{10}$  K) that equilibrium has once been attained."*

Die wesentlichen Meilensteine wurden demnach nicht an den Rahmenbedingungen erzielt, sondern an der stetig verbesserten Kenntnis der einfließenden Parameter:

- Verhältnis der Baryonen- zur Photonendichte ( $\eta$ )
- Anzahl der Neutrino flavours ( $N_\nu$ )
- Hubblekonstante ( $H_0$ )
- Lebensdauer des freien Neutrons ( $\tau_n$ ),
- sowie den beteiligten Kernreaktionsraten.

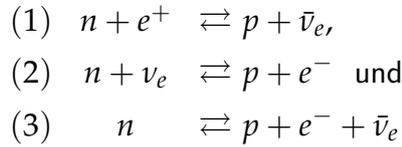
Mit der immer weiter voran getriebenen Genauigkeit dieser Parameter – insbesondere durch das Experiment "Wilkinson Microwave Anisotropy Probe" (WMAP) – konnte sich die pN in den letzten Jahren schließlich zu einer parameterfreien Theorie entwickeln.

## 1.2. Zeitlicher Verlauf der SBBN

Beginnen wir unsere Betrachtungen bei einer Temperatur von ca.  $10^{12}$  K (86 MeV). Quarks und Antiquarks haben sich soeben zu farblosen Protonen und Neutronen verbunden. Das Universum besteht darüber hinaus aus Elektronen, Positronen, Neutrinos und Antineutrinos. (Einige wenige  $\pi$ - und  $\mu$ -Mesonen sind nur noch von kurzer Lebensdauer, weshalb wir sie bereits vernachlässigen.) Eine sehr hohe Dichte bedingt hohe Wechselwirkungsraten und somit ein thermisches Gleichgewicht, das die gesamte sichtbare Materie umfasst. Vermutlich existiert

zusätzlich Dunkle Materie, die jedoch für die Betrachtung der SBBN keine Rolle spielt, da sie lediglich gravitativ wechselwirkt.

Ein Überschuss an Elektronen ggü. den Positronen gleicht die Ladungen der Protonen aus. Protonen und Neutronen werden durch die Reaktionen



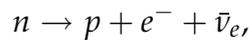
(sowie deren Umkehrreaktionen) im chemischen Gleichgewicht gehalten.

Unterhalb einer Temperatur von  $10^{11}$  K (8,6 MeV) werden die Umkehrreaktionen spürbar verringert durch die Energiedifferenz der Ruhemassen von Neutron und Proton ( $Q \simeq 1,29$  MeV). Das Ungleichgewicht zugunsten der Protonen verstärkt sich mit fallender Temperatur stetig gemäß (Boltzmannverteilung)

$$\frac{n_n}{n_p}(T) = e^{-\frac{Q}{kT}}. \quad (1.1)$$

Auch die Dichte des Universums ist mittlerweile so weit abgefallen, dass die Neutrinos nurmehr gelegentlich mit dem restlichen Plasma reagieren und sich somit aus dem thermodynamischen Gleichgewicht entkoppeln.

Schließlich reicht die thermische Energie kaum mehr dazu aus, die Umkehrreaktionen aufrecht zu erhalten. Bei der Umkehrreaktion (1) muss zur Massendifferenz von Neutron und Proton zusätzlich noch die Masse des Positrons aufgebracht werden, deshalb friert sie zuerst aus. Die Umkehrreaktionen (2) und (3) folgen, sobald die thermische Energie  $kT$  unter die Ruhemassendifferenz von Neutron und Proton gefallen ist. Wir befinden uns also bei einer Temperatur von  $T_F = (m_n - m_p) c^2 / k \simeq 9,15 \cdot 10^9$  K. Der Index  $F$  kennzeichnet hierbei, dass es sich um die Freeze-out-Temperatur der angegebenen Reaktionen handelt. Zu diesem Zeitpunkt  $t_F$  erfolgt also der Startschuss für den effektiven Betazerfall (ein Auffrischen der zerfallenen Neutronen durch Umkehrreaktionen ist nun nicht mehr möglich) des Neutrons in jeweils ein Proton, ein Elektron und ein Antielektronneutrino gemäß



mit einer mittleren Lebensdauer von  $\tau_n = 885,7$  s (Amsler et al., 2008).

Das Neutron-Proton-Verhältnis gemäß Gl. (1.1) ist mittlerweile auf ca 1/5 abgefallen.

All dies geschieht wohlgermerkt innerhalb der ersten Sekunde, d. h.  $t_F \simeq 1$  s.

Wenig später, bei  $T \simeq 8,7 \cdot 10^9$  K, wird die Schwelle für die Paarproduktion von Elektronen und Positronen gemäß  $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$  unterschritten. In Folge werden sämtliche Positronen in der Reaktion  $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$  annihiliert und die freigesetzte Energie verlangsamt vorübergehend den Temperaturabfall der Hintergrundstrahlung.

Im weiteren Verlauf verstreichen wertvolle Sekunden, in denen Neutronen zerfallen und für die spätere Nukleosynthese verloren gehen. Diese Verzögerung entsteht dadurch, dass erfolgreiche Viererkollisionen der Form



höchst unwahrscheinlich sind und die Nukleosynthese deshalb über die Bildung eines Zwischenproduktes abläuft, dem Deuteron  ${}^2_1\text{d}$ :



Genau hierin liegt bereits das Problem. Die fusionierten Deuteronen werden fortwährend von energiereichen Photonen wieder dissoziiert, da ihre Bindungsenergie  $B_d$  lediglich 2,225 MeV beträgt.

Nun ist die mittlere Photonenenergie zwar bereits weit unter 1 MeV abgefallen, durch die immense Anzahl an Photonen im Verhältnis zu den Baryonen, üblicherweise ausgedrückt durch den Parameter  $\eta = 6,2 \cdot 10^{-10}$  (Komatsu et al., 2008), mit

$$\eta \equiv \frac{\text{Baryondichte} - \text{Antibaryondichte}}{\text{Photonendichte}}, \quad (1.4)$$

(gebräuchlich ist auch die Bezeichnung  $\eta_{10} \equiv \eta \cdot 10^{10}$ ), sind jedoch im Ausläufer der Planckverteilung noch genügend Photonen mit Energien über 2,225 MeV vorhanden.

Erst unterhalb einer Temperatur von  $T = 3 \cdot 10^9$  K entspricht die Anzahl dieser energiereichen Photonen etwa der Anzahl der Baryonen und erste Spuren von Deuteron stehen für weitere Fusionsprozesse ausreichend lange zur Verfügung. Hat erst einmal die Deuteronproduktion gegenüber der Dissoziation obsiegt, so verlaufen die nächsten Fusionschritte



bei deutlich höheren Bindungsenergien und sind somit unkritisch.

Wir befinden uns mittlerweile bei  $t = 225$  s; die Nukleosynthese ist unvermittelt in eine äußerst effektive Phase eingetreten. Innerhalb einer Temperaturverringerung um lediglich einen Faktor 3 gewinnt die Deuteronkonzentration (und mit ihr die  ${}^4\text{He}$ -Konzentration) um mehr als 6 Größenordnungen, wie nachfolgende Graphik veranschaulicht:

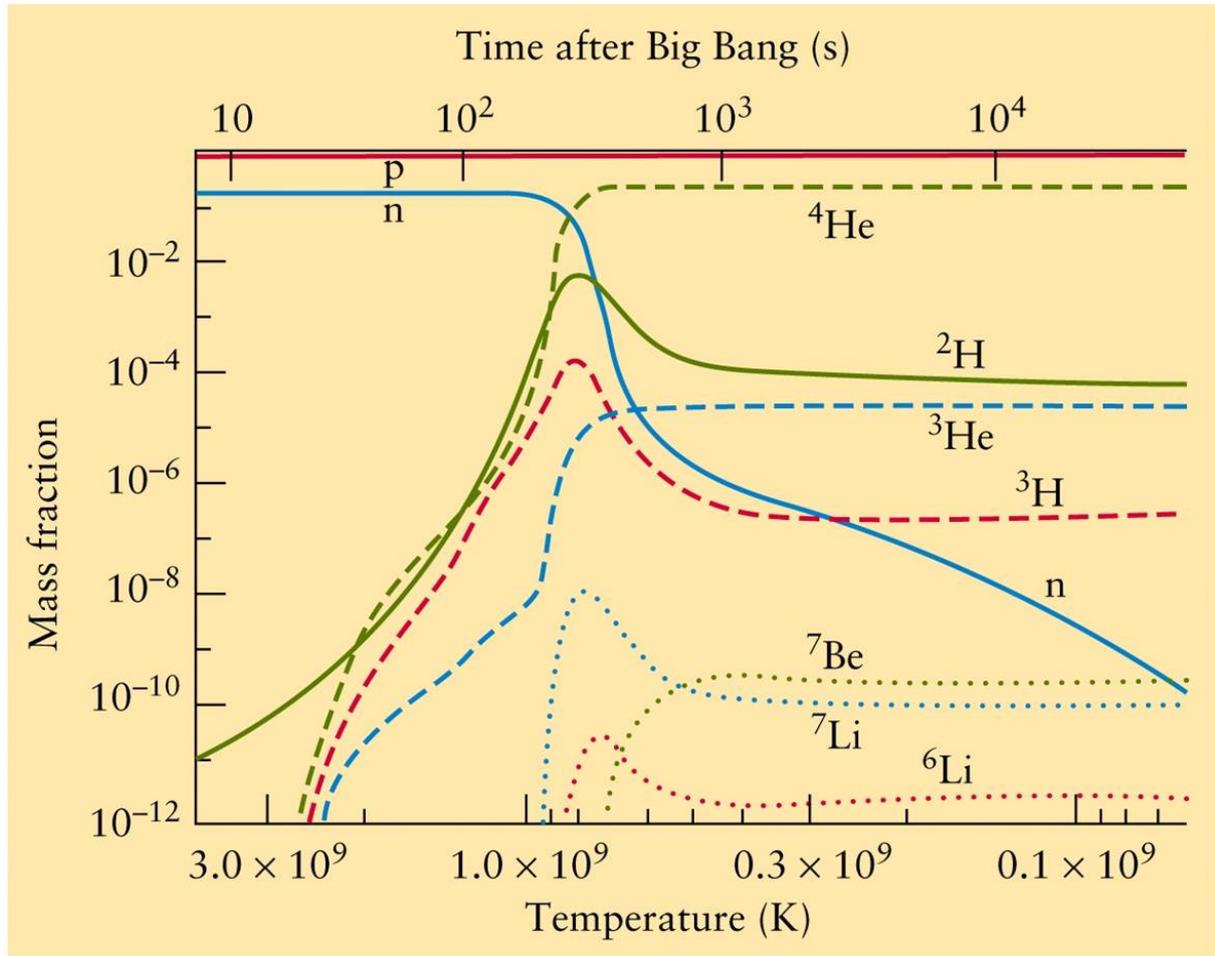


Abb. 1.1.: Zeitlicher Verlauf der primordialen Elementhäufigkeiten aus numerischen Simulationen (vgl. Burles, Nollett und Turner 1999).

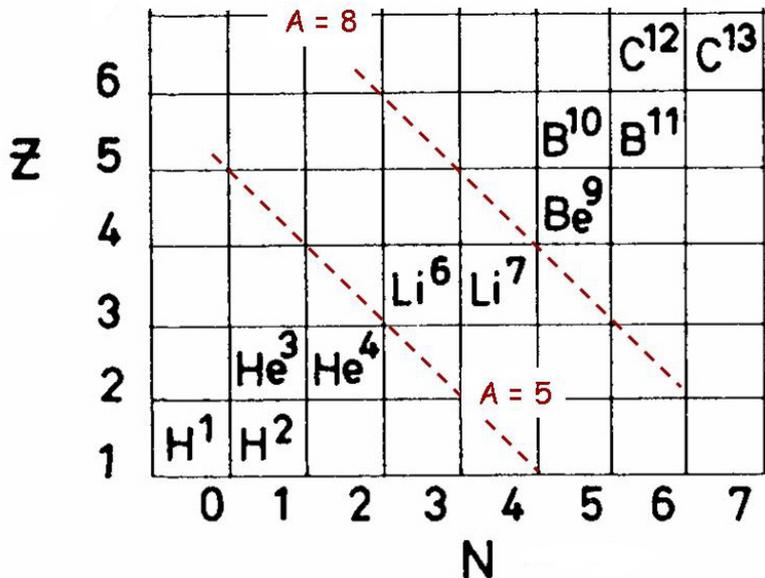
In den nächsten Minuten entstehen die leichten Elemente, bis nach etwa 20 min ( $T < 30$  keV) praktisch keine freien Neutronen mehr zur Verfügung stehen und der Coulomb-Wall der Fusion geladener Kerne ein Ende setzt. Die instabilen Isotope  ${}^3\text{H}$  und  ${}^7\text{Be}$  zerfallen im Anschluss in  ${}^3\text{He}$  bzw.  ${}^7\text{Li}$ , so dass die abschließende Inventur der pN folgendes Bild ergibt :

$$\begin{aligned} (D/H)_p &= 2,54 \cdot 10^{-5} \\ ({}^3\text{He}/H)_p &= 1,04 \cdot 10^{-5} \\ Y_p &= 0,2482 \\ ({}^7\text{Li}/H)_p &= 4,57 \cdot 10^{-10} \end{aligned}$$

Hierbei gilt es zu beachten, dass die primordialen Häufigkeiten von D,  ${}^3\text{He}$  und  ${}^7\text{Li}$  üblicherweise als Verhältnisse ihrer Anzahl zur Anzahl der Wasserstoffkerne angegeben werden, während  $Y_p$ , die primordiale Häufigkeit von  ${}^4\text{He}$ , in Form ihres Massenverhältnisses zur Gesamtmasse aller Baryonen ausgedrückt wird. Darüber hinaus werden wir uns dem allgemeinen Sprachgebrauch anpassen und ebenfalls von den *Elementen* Deuterium, Helium und Lithium sprechen, wohlwissend, dass es sich de facto um deren *Kerne* handelt, weshalb man korrekterweise von Deuteron,

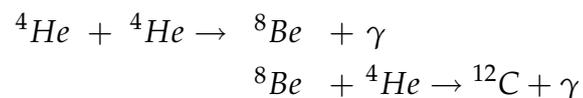
Helium- und Lithiumkernen sprechen sollte.

Offensichtlich wurden keine schwereren Kerne als Lithium gebildet. Dafür ist das Fehlen stabiler Kerne mit Massenzahlen  $A=5$  und  $A=8$  verantwortlich.



**Abb. 1.2.:** Die stabilen leichteren Elemente des Periodensystems aufgetragen nach ihren Ordnungszahlen  $Z$  versus der Anzahl ihrer Neutronen im Kern. Für die Massenzahlen  $A=5$  sowie  $A=8$  existieren keine stabilen Elemente.

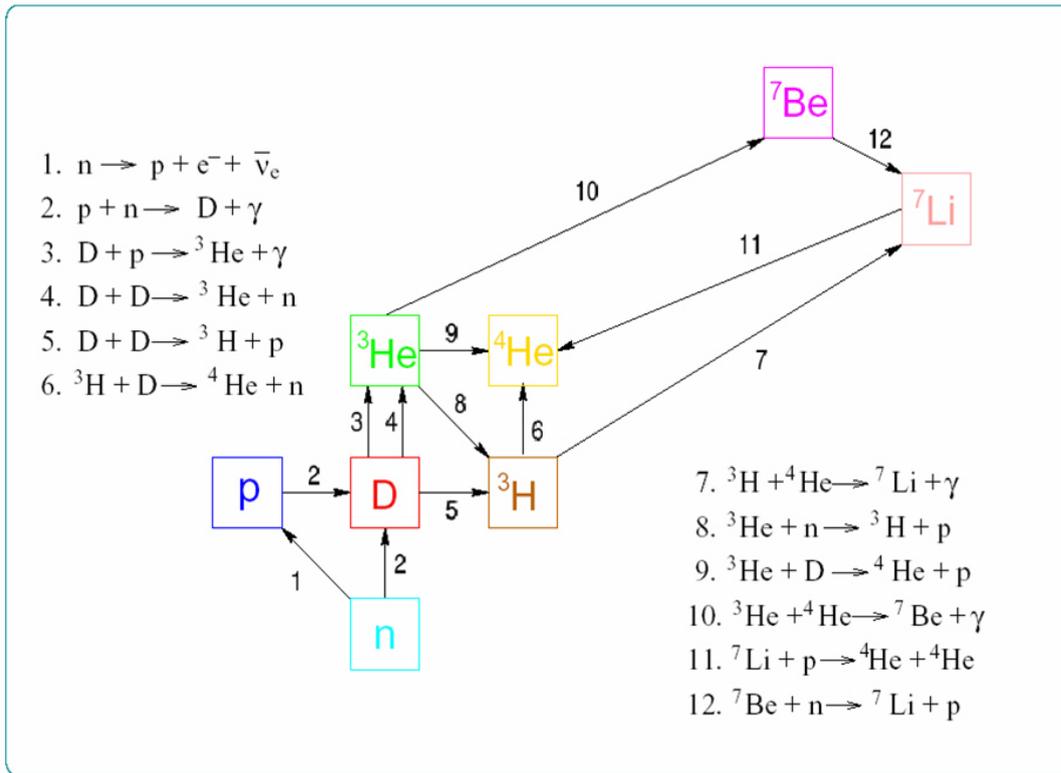
Diese Instabilitätslücken stellen eine wirksame Barriere für die pN dar, da die herrschenden Dichten und Temperaturen für den Triple-Alpha-Prozess



nicht ausreichen, der in der stellaren Nukleosynthese die Instabilitätslücken überwindet.

### 1.3. Numerische Simulationen zur SBBN

Heute erlauben moderne Computer innerhalb von Sekunden Monte-Carlo-Simulationen, die zumeist auf den 12 wesentlich Kernreaktionen der pN basieren, deren Zusammenspiel in der folgenden Graphik veranschaulicht wird:



**Abb. 1.3.:** Die 12 wesentlichen Kern-Reaktionen der primordialen Nukleosynthese und ihr Zusammenspiel

Der bekannteste Fortran-Code hierzu wurde von Wagoner (1973) entwickelt und von Kawano (1992) verbessert. Aufgrund seiner guten Verfügbarkeit (online verfügbar unter <http://www-thphys.physics.ox.ac.uk/users/SubirSarkar/bbn.html>) findet er nach wie vor Einsatz, obgleich bereits Ergebnisse aus neueren Codes (Descouvemont et al. 2004) veröffentlicht wurden.

Eine wesentliche Fehlerquelle bei den numerischen Simulationen stellen die einfließenden Wechselwirkungsquerschnitte dar. Entsprechende Messungen können zumeist nur bei vergleichsweise hohen Energien durchgeführt werden und müssen entsprechend zu den niedrigen Energien der pN extrapoliert werden. Eine umfangreiche Zusammenstellung findet man in Angulo et al. (1999).

Die Ergebnisse werden üblicherweise in Abhängigkeit des Parameters  $\eta$  (Gl. 1.4) oder des Parameterpaares  $\Omega_b h^2$  dargestellt, die gemäß der Beziehung (Steigman, 2006)

$$\eta = (273,9 \pm 0,3) 10^{-10} \Omega_b h^2 \quad (1.7)$$

verknüpft sind, wobei  $\Omega_b$  für das Verhältnis der Baryondichte zur kritischen Dichte

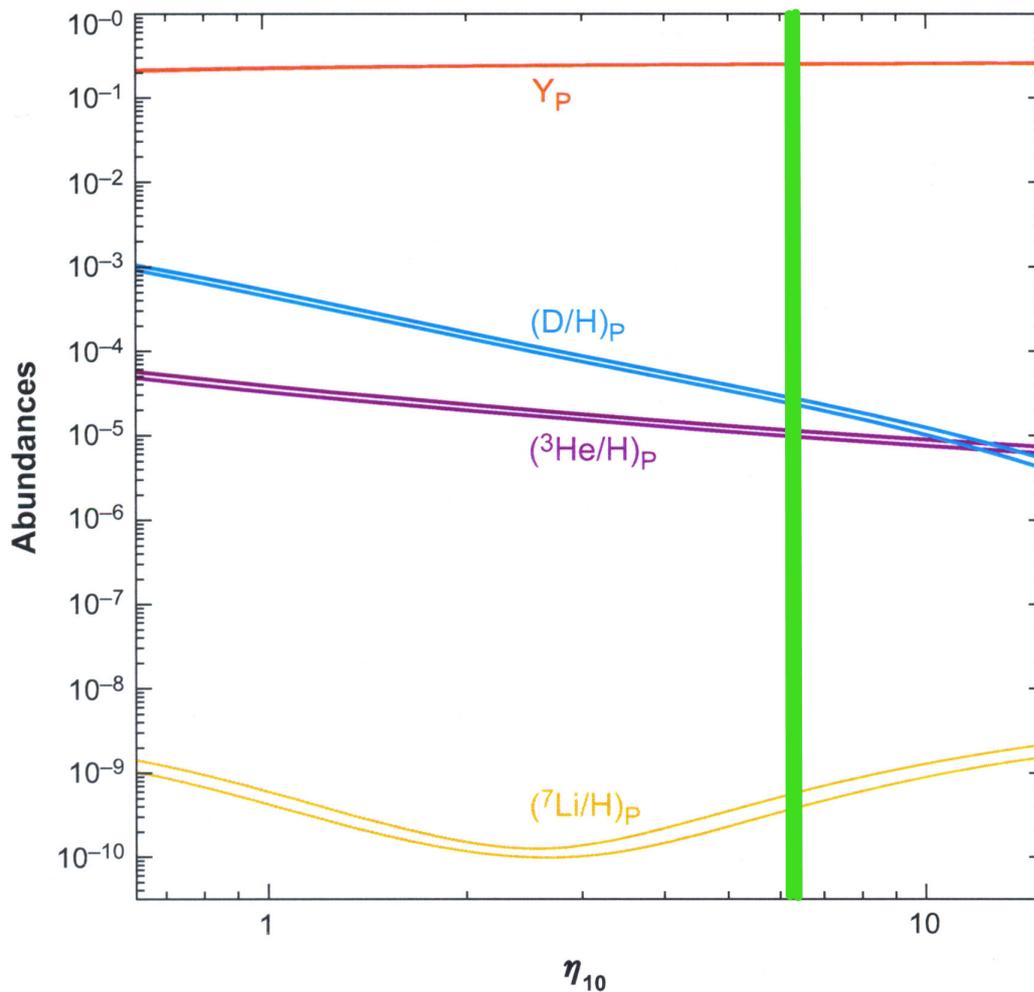
$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (1.8)$$

steht ( $G$  ist die Gravitationskonstante) und  $h = H_0/100$  mit der Hubblekonstante  $H_0$  in Einheiten von  $\text{kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ .

Mit Hilfe der 5-Jahres-WMAP-Daten:  $100 \Omega_b h^2 = 2,273 \pm 0,062$  (Komatsu et al., 2008) liefert Gl. (1.7) einen zulässigen Wertebereich für  $\eta$ :

$$6,049 \cdot 10^{-10} \leq \eta \leq 6,403 \cdot 10^{-10},$$

den wir grün in das Ergebnis der numerischen Berechnungen einzeichnen:



**Abb. 1.4.:** Die primordialen Häufigkeiten der leichten Elemente gemäß SBBN sowie der Wertebereich für  $\eta$  gemäß der 5-Jahres-WMAP-Daten (grün). Die Unsicherheiten sind in Form von Doppellinien bzw. Liniestärken kenntlich gemacht.

Die Struktur der Graphen ist leicht zu verstehen: Deuterium und  $^3\text{He}$  fungieren als Zwischenprodukte auf dem Weg zur Bildung von  $^4\text{He}$ , wobei die Reaktionsraten mit zunehmender Baryondichte ansteigen. Entsprechend fallen die finalen Häufigkeiten von Deuterium und  $^3\text{He}$  streng monoton für ansteigendes  $\eta$ . Mit der selben Argumentation wird  $Y_p$  entsprechend streng monoton steigen. Lediglich bei  $^7\text{Li}$  ist es etwas komplexer: Zunächst fällt die finale Häufigkeit ebenfalls, da sich die Vernichtung von  $^7\text{Li}$  durch Stöße mit Protonen mit zunehmendem  $\eta$  verstärkt. Allerdings wird für große Werte von  $\eta$  neben der Reaktion  $^3\text{H}(\alpha, \gamma) ^7\text{Li}$

auch die Reaktion  ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma) {}^7\text{Be}$  von Bedeutung und  ${}^7\text{Be}$  ist stärker gebunden und somit weniger anfällig gegen Dissoziation. Erst später wird  ${}^7\text{Be}$  durch Elektroneneinfang und anschließenden Betazerfall zu  ${}^7\text{Li}$ ; die finale Häufigkeit steigt somit für zunehmendes  $\eta$  wieder an.

Soweit zu den theoretischen Betrachtungen der SBBN. Als nächstes werden wir detailliert auf die einzelnen primordialen Häufigkeiten eingehen, insbesondere hinsichtlich ihrer Beobachtbarkeit.

## 1.4. Beobachtungsdaten zu den einzelnen Häufigkeiten

Mit der Frage nach den Beobachtungsdaten sind wir bei der Achillesferse der pN angelangt. Eine erste Bestandsaufnahme erscheint zwar durchaus ermutigend: Die Beobachtungen zu den verschiedenen Elementen werden unabhängig voneinander durchgeführt, umspannen immerhin 10 Größenordnungen und werden mit bis zu vier Stellen Genauigkeit angegeben.

Allerdings steckt die Tücke im Detail, da es keinen ausgewiesenen Ort im Universum gibt, an dem wir *primordiale* Häufigkeiten messen können. Die beobachteten Häufigkeiten sind vielmehr bereits verfälscht durch stellare und andere Einflüsse; durch Beobachtungen bei niedriger Metallizität<sup>1</sup> lässt sich dieser Einfluss nur verringern, aber nicht vollständig eliminieren.

Letztendlich bleibt nur die Möglichkeit, mit Hilfe theoretischer Modelle diesen "kontaminierten" Anteil wieder heraus zu rechnen. Der Begriff "Beobachtungsdaten" wird dabei bis an die Grenzen der Belastbarkeit strapaziert, wie eine detailliertere Betrachtung der verschiedenen primordialen Elemente im Folgenden erweisen wird.

### 1.4.1. Deuterium

Deuterium ( ${}^2_1\text{H}$  oder auch D) ist ein stabiles Wasserstoff-Isotop mit einem Proton und einem Neutron im Kern. Das farblose Gas (Siedepunkt  $-249,58^\circ\text{C}$ ) nimmt eine Sonderstellung ein bei den Beobachtungen zur Bestimmung der primordialen Häufigkeiten, weil es in der stellaren Nukleosynthese ausschließlich vernichtet wird. Somit stellt jedwede beobachtete Häufigkeit eine sichere untere Schranke für die tatsächliche primordiale Häufigkeit dar.

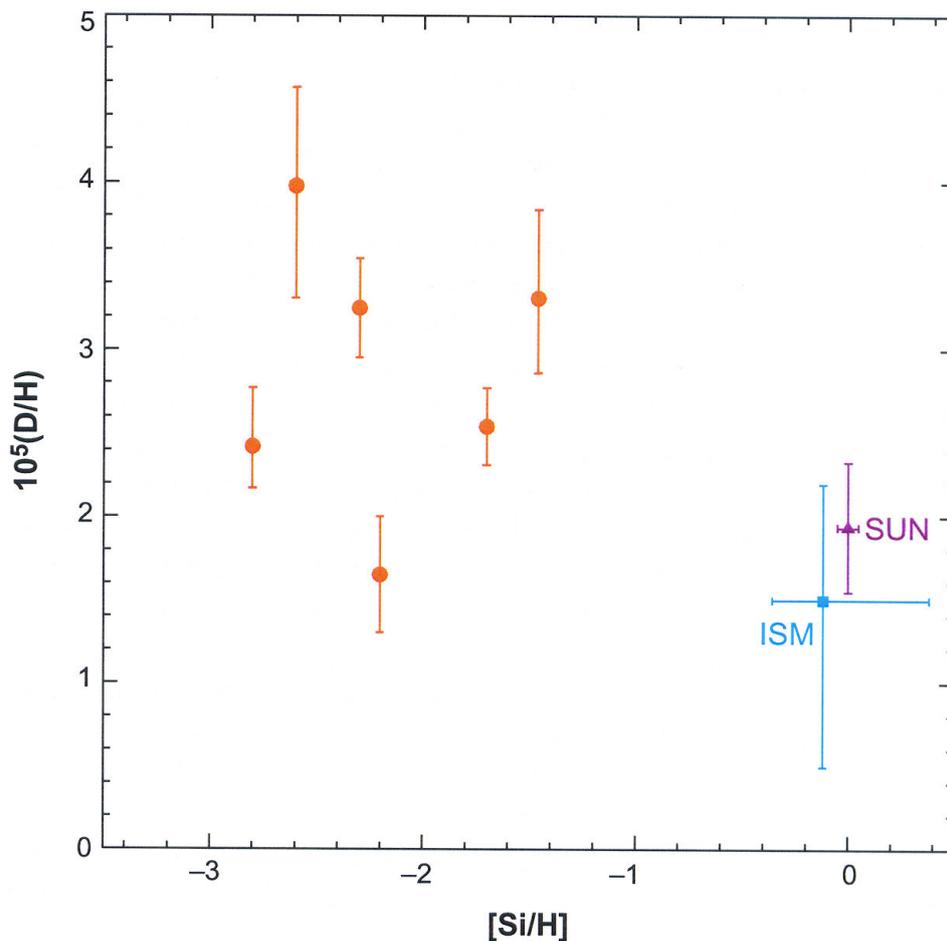
Untersuchungen wurden bislang an Meteoritengestein durchgeführt sowie innerhalb unseres Sonnensystems (Geiss und Glöckler, 1998) und im interstellaren Medium (Linsky et al., 2006). Allerdings sollten die Beobachtungen bei möglichst hohen Rotverschiebungen oder in Gebieten niedriger Metallizität, idealerweise unter beiden Voraussetzungen durchgeführt werden, um die Verfälschung der Deuteriumhäufigkeit durch stellare Vernichtung möglichst gering zu halten.

<sup>1</sup>Der Begriff "Metallizität" steht - abweichend von seiner chemischen Bedeutung - für die Gesamthäufigkeit aller Elemente außer Wasserstoff und Helium

Diese Gebiete sind naturgemäß nicht besonders lichtstark, deshalb benötigen wir einen zusätzlichen glücklichen Umstand, in Form eines Quasars, der in Sichtlinie hinter dem neutralen Deuterium und Wasserstoff liegt und entsprechende Absorptionslinien zur Verfügung stellt.

Bislang konnten sieben unabhängige Beobachtungen dieser Art durchgeführt werden, die aktuellen Resultate und weitere Referenzen findet man in Pettini et al. (2008).

Man würde erwarten, dass sich mit abnehmender Metallizität ein Plateau ausbildet, nahe der tatsächlichen primordialen Häufigkeit; nachfolgende Graphik verdeutlicht allerdings, dass die bisherigen Beobachtungsdaten ein derartiges Plateau nicht erlauben:



**Abb. 1.5.:** Beobachtungsdaten zur primordialen Häufigkeit von Deuterium durch quasare Absorptionslinien (rot) sowie im interstellaren Medium (ISM) und in unserem Sonnensystem (SUN), jeweils versus einer logarithmisch aufgetragenen Metallizität in Einheiten der solaren Metallizität.

Deshalb wird - mangels Alternativen - üblicherweise der gewichtete Mittelwert aus den Beobachtungsdaten der quasaren Absorptionslinien gebildet:

$$(D/H)_p = \left(2,70^{+0,22}_{-0,20}\right) \cdot 10^{-5}$$

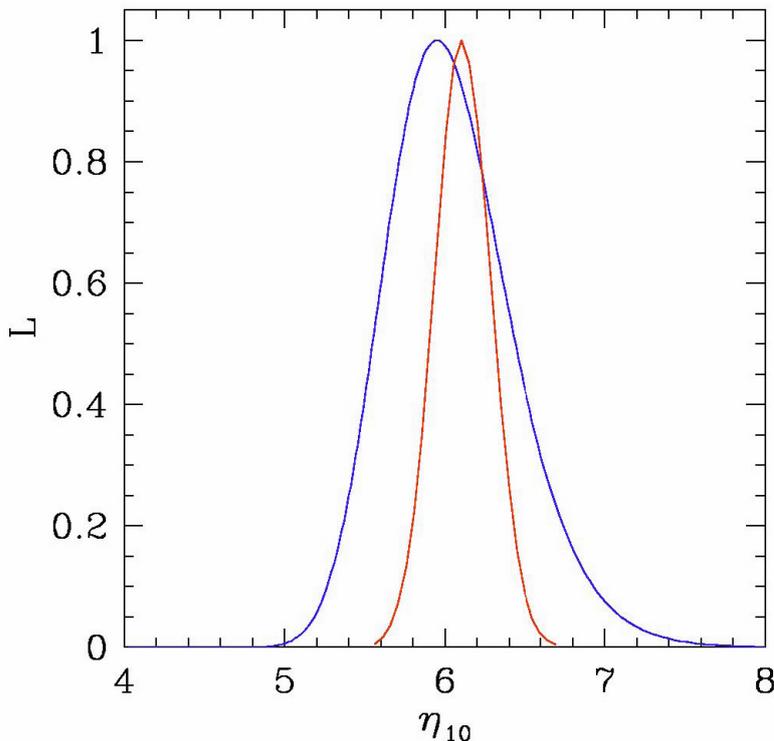
Dabei wurde der angegebene Fehler nahezu verdoppelt, um deutlich zu berücksichtigen, dass

die Streuung der Beobachtungsdaten größer ausfällt, als es die individuellen Fehlerbalken erwarten ließen.

Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung von  $(D/H)_p$  ergibt sich aus ihrer starken Abhängigkeit von  $\eta$  gemäß Kneller & Steigman (2004)

$$(D/H)_p = 46,5 \eta^{-1,6}. \quad (1.9)$$

Diese starke Beziehung spiegelt wider, dass die verbleibende Deuteriumhäufigkeit ganz wesentlich von der Effizienz derjenigen Prozesse abhängt, die Deuteron zu Helium fusionieren. Eine höhere Baryonendichte bedeutet hierbei eine höhere Reaktionsrate. Zusätzlich bewirkt eine geringere Photonendichte im Verhältnis zur Baryonendichte ein früheres Einsetzen der pN, wodurch mehr Zeit für die "Weiterverarbeitung" von Deuterium zur Verfügung steht. Durch eine möglichst genaue Bestimmung von  $\eta$  (basierend auf den 5-Jahres-WMAP-Daten und der Beziehung (1.7)) lässt sich somit der gewonnene Mittelwert für die primordiale Häufigkeit von Deuterium verifizieren. Die nachfolgende Graphik verdeutlicht die hohe Übereinstimmung (Steigman, 2007):



**Abb. 1.6.:** Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $L$  für  $\eta$  in Einheiten von  $10^{-10}$  jeweils basierend auf der beobachteten primordialen Häufigkeit von Deuterium (blau) sowie den SBBN-Simulationen unter Verwendung der 5-Jahres-WMAP-Daten (rot).

### 1.4.2. Tritium

Das radioaktive Wasserstoff-Isotop Tritium ( ${}^3_1\text{H}$  oder auch T) besitzt neben dem Proton noch zwei Neutronen im Kern. Mit einer mittleren Halbwertszeit von 12,32 Jahren zerfällt es gemäß der Reaktion (Betazerfall)  $T \rightarrow {}^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}_e$  zu  ${}^3\text{He}$ . Während der pN spielt Tritium durchaus eine tragende Rolle, beispielsweise wird der größte Anteil von  ${}^4\text{He}$  über die Reaktion  $T + p \rightarrow {}^4\text{He}$  fusioniert. Seine primordiale Häufigkeit ergibt sich aus numerischen Simulationen in der Größenordnung  $8 \cdot 10^{-8}$ , eine Verifikation durch Beobachtungen ist jedoch aufgrund des raschen Zerfalles nicht möglich.

### 1.4.3. Helium-3

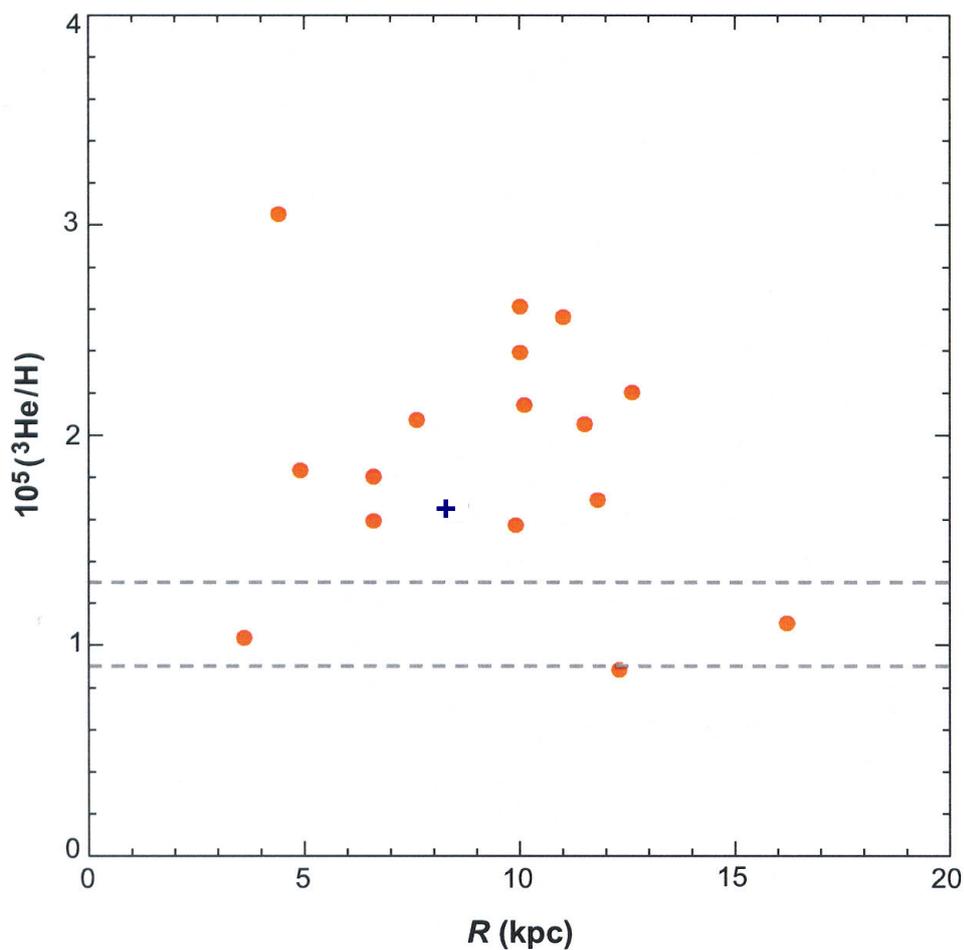
Das stabile Edelgas  ${}^3_2\text{He}$  (Siedepunkt 3,19 K) besitzt einen Kern aus zwei Protonen und einem Neutron. Auf der Suche nach seiner primordialen Häufigkeit untersucht man Meteoritengestein, den Sonnenwind sowie Emissionslinien in ionisierten Wasserstoffwolken (HII-Gebieten) und planetarischen Nebeln. Eine wesentliche Herausforderung hierbei besteht darin, das äußerst seltene  ${}^3\text{He}$  vom zweithäufigsten Element im Universum -  ${}^4\text{He}$  - zu unterscheiden. Hierzu nutzt man den Übergang durch die unterschiedlichen Spineinstellungen des einfach ionisierten  ${}^3_2\text{He}$ -Kernes und des verbliebenen Elektrons (analog zur 21 cm Linie bei neutralem Wasserstoff). Das schwache Signal bei 3,46 cm ermöglicht lediglich Beobachtungen innerhalb unserer Galaxie, wobei man zur Unterscheidung die abnehmende Metallizität mit zunehmender Entfernung vom Galaktischen Zentrum nutzt. Auch hier sucht man vergeblich nach einem entsprechenden Plateau bei abnehmender Metallizität - die Entwicklungsgeschichte von  ${}^3_2\text{He}$  nach der pN ist hierzu schlichtweg zu bewegt. In der frühen Phase der Sternentstehung wird Deuterium beispielsweise zu  ${}^3_2\text{He}$  umgewandelt, während später im heißen Sterninneren  ${}^3_2\text{He}$  zu schwereren Kernen fusioniert wird. In den kühleren, äußeren Schichten kann  ${}^3_2\text{He}$  bei entsprechend geringer Konvektion durchaus überleben, allerdings herrscht Uneinigkeit darüber, welcher Anteil hiervon wiederum ins interstellare Medium freigesetzt wird.

Aus der Beobachtung von planetarischen Nebeln ist zumindest gesichert, dass es durch geeignete Sternkonstellationen zu einer Anreicherung von  ${}^3_2\text{He}$  kommen kann.

Als Beobachtungswert halten wir fest (Bania et al. , 2002)

$$({}^3\text{He}/\text{H})_p = (1,1 \pm 0,2) \cdot 10^{-5} \quad (1.10)$$

Insgesamt ergeben die relevanten Publikationen folgendes Bild:



**Abb. 1.7.:** Beobachtungsdaten zur primordialen Häufigkeit von  ${}^3\text{He}$  durch Emissionslinien in HII-Gebieten (Bania et al. , 2002) (rot) sowie in einem kollabierenden Nebel (Geiss und Glöckler, 1998) (blaues +), jeweils versus des Abstandes  $R$  vom Galaktischen Zentrum in kpc. Die gestrichelten grauen Linien kennzeichnen den Wertebereich der numerischen Simulation.

### 1.4.4. Helium-4

Das stabile Edelgas  ${}^4_2\text{He}$  (Siedepunkt 4,21 K) besitzt einen Kern aus zwei Protonen und zwei Neutronen. Bezogen auf seinen Massenanteil besteht das sichtbare Universum zu etwa einem Viertel aus  ${}^4\text{He}$ , allerdings geht es selbst unter extremen Bedingungen keine Molekülverbindungen ein.

Durch stellare Nukleosynthese wird die Häufigkeit von  ${}^4\text{He}$  zwar wesentlich beeinflusst - immerhin verbringen unzählige Sterne den Großteil ihres Lebens auf der Hauptreihe damit, Wasserstoff zu Helium zu fusionieren - glücklicherweise wird  ${}^4\text{He}$  jedoch dabei ausschließlich vermehrt. Aufgrund dieser stetigen Zunahme erhalten wir mit jeder Beobachtung eine obere Schranke für die tatsächliche primordiale Häufigkeit.

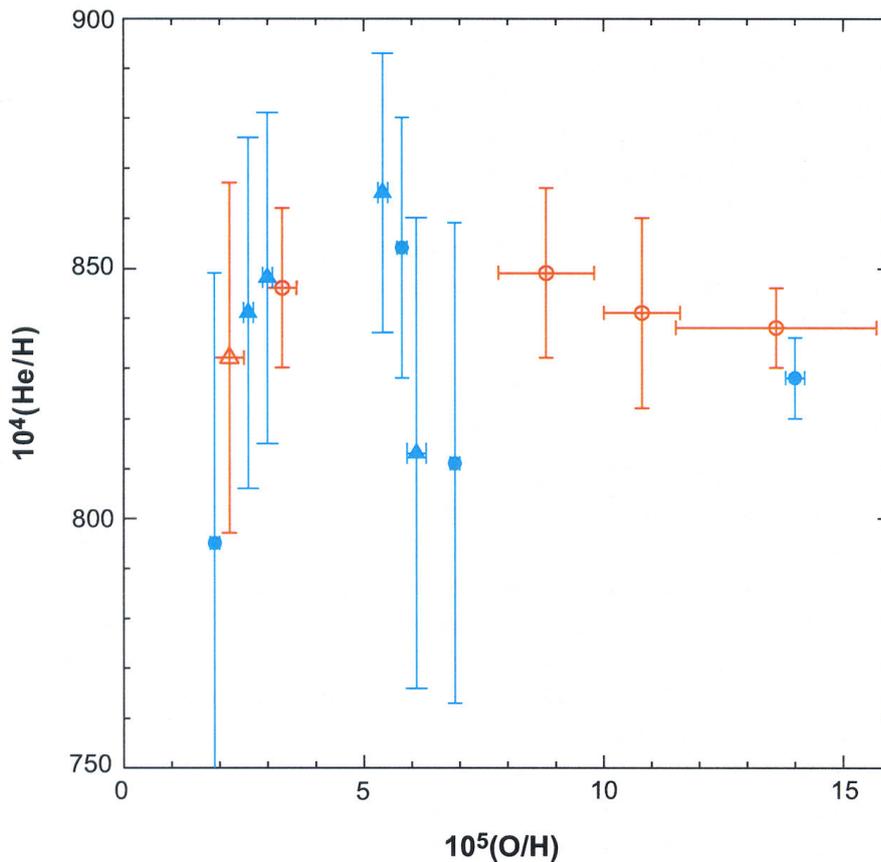
Um den stellaren Einfluß so gering wie möglich zu halten, werden die Beobachtungen wiederum in Gebieten möglichst niedriger Metallizität durchgeführt, bei gleichzeitig hohen Rotverschiebungen. (Tatsächlich werden auch Daten aus der Beobachtung unserer Sonne und von HII-Regionen innerhalb der Milchstrasse gewonnen, die jedoch von untergeordneter Bedeutung sind.) Als ausreichend starke Emissionslinie zur Beobachtung extragalaktischer HII-Regionen nutzt man jeweils den Übergang bei der Rekombination von ionisiertem Wasserstoff und ionisiertem Helium. In der geeigneten Interpretation dieser Rekombinationslinien liegt wiederum die Tücke im Detail. Aus den Beobachtungsdaten von Izotov & Thuan (2004), die mehr als 80 Objekte zusammengetragen haben, vermochten verschiedene Autoren unterschiedliche primordiale Häufigkeiten von  ${}^4\text{He}$  abzuleiten. Dies zeigt, wie stark der Begriff "Beobachtungsdaten" an dieser Stelle strapaziert wird. De facto handelt es sich um Beobachtungen, die mittels verschiedener theoretischer Modelle interpretiert werden, um letztendlich die gesuchten Werte zu extrahieren.

Hat man auf diese Weise unterschiedliche Häufigkeiten von Helium ( $Y$ ) bei Objekten unterschiedlicher Metallizität ( $Z$ ) "beobachtet", steht man vor einem weiteren Problem: Die gesuchte primordiale Häufigkeit ( $Y_p$ ) ergibt sich durch Extrapolation der Metallizität gegen null; im einfachsten Fall bedeutet dies

$$Y_p = Y - \frac{dY}{dZ}Z \quad (1.11)$$

wobei die Meinungen wieder auseinander gehen, welcher Zahlenwert für  $dY/dZ$  der geeignete wäre. Fukugita & Kawasaki (2006) geben beispielsweise  $dY/dZ = 1,1 \pm 1,4$  an mit einem Fehler von mehr als 100 %.

Als Maß für die Metallizität werden üblicherweise die Häufigkeiten von Sauerstoff, Stickstoff oder Silizium verwendet. Am Beispiel Sauerstoff ergibt sich folgendes Bild



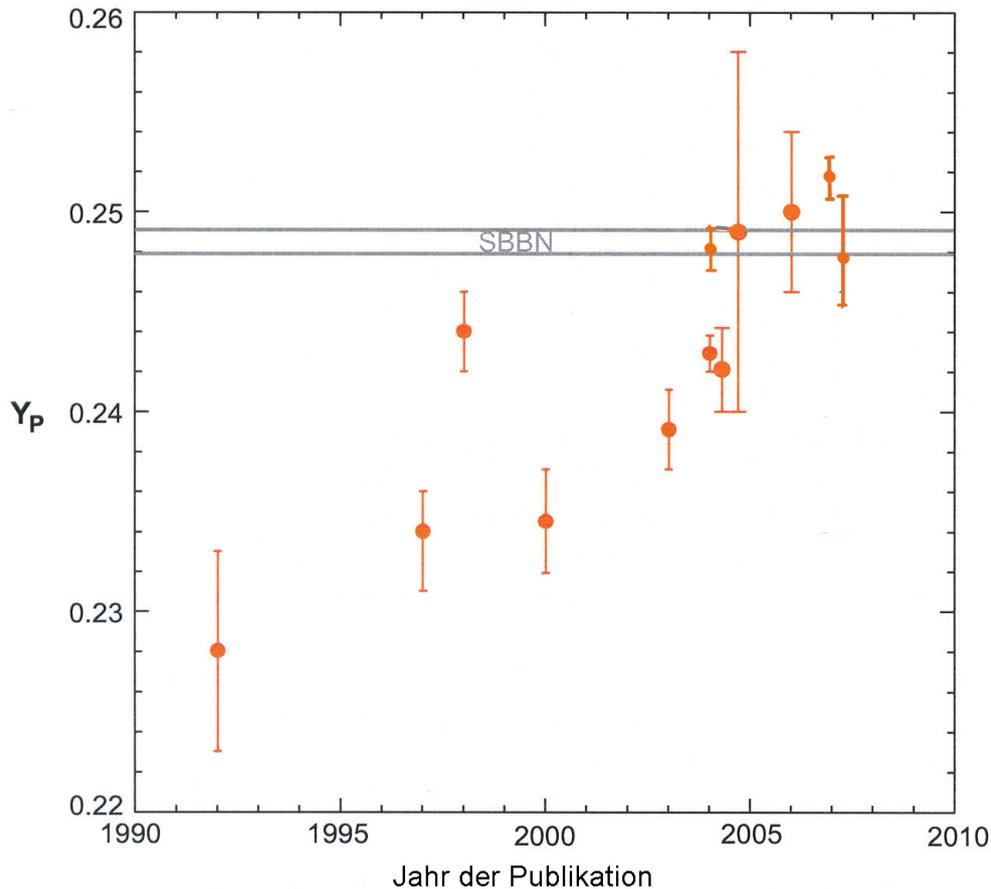
**Abb. 1.8.:** Das Mengenverhältnis  $He/H$  in ausgewählten HII-Regionen aufgetragen gegen das jeweilige Mengenverhältnis  $O/H$ . Verwendete Daten: Olive & Skillman (2004) (blau) und Peimbert et al. (2007) (rot)

Berücksichtigt man die hohe Auflösung der Ordinate, ist durchaus ein Plateau erkennbar. Die blauen und roten Kreise sollen nochmals die unterschiedliche Interpretation der Beobachtungsdaten veranschaulichen - sowohl hinsichtlich der Werte als auch der Fehlerbalken - es handelt sich nämlich um gemeinsame Daten der verwendeten Publikationen.

Alles in allem erscheint es unmöglich, eine einzelne Publikation als besonders glaubwürdig hervorzuheben, die unterschiedlichen Arbeiten weisen individuelle Stärken und Schwächen auf. Beispielsweise wurden von Luridiana et al. (2003) die Stoßanregungen bei der Auswertung der Balmerlinien berücksichtigt und von Fukugita & Kawasaki (2006) die stellare Absorption mit eingerechnet. Peimbert et al. (2007) haben weitere Beobachtungsdaten aus HII-Regionen in der Kleinen Magellanschen Wolke beigetragen und neueste Ergebnisse zu den betrachteten Reionisationslinien (Porter et al., 2007) verwendet.

Alle genannten Autoren müssen sich dem Vorwurf aussetzen, mit einer vorselektierten Statistik zu arbeiten von zumeist weniger als einem Dutzend Beobachtungsdaten, die sich aus den Isotop/Thuan-Daten sowie den Peimbert-Daten rekrutieren. Schließlich wäre noch zu bemängeln, dass das verwendete Verfahren (basierend auf Rekombinationslinien) unfähig ist, neutralen Wasserstoff oder Helium zu erkennen.

Für eine weitergehende Diskussion siehe Steigman (2007). Die einzelnen Publikationen sind - nach ihrem Erscheinungsjahr geordnet - in folgender Graphik zusammengetragen:



**Abb. 1.9.:** Primordiale Häufigkeiten von  $^4\text{He}$ , basierend auf Beobachtungsdaten; geordnet nach dem Jahr der Publikation. Zusätzlich ist die Bandbreite der numerischen Simulationen gemäß SBBN eingezeichnet.

Es fällt schwer, für  $Y_p$  einen verlässlichen Wert anzugeben. Wir bilden den gewichteten Mittelwert aus den Daten nach 2005

Autor (Jahr)	$Y_p$
Fukugita & Kawasaki (2006)	$0,250 \pm 0,004$
Izotov et al. (2007)	$0,2516 \pm 0,0011$
Peimbert et al. (2007)	$0,2477 \pm 0,0029$

und erhalten mit ( $1 \leq i \leq 3$ ):

$$\bar{Y}_p = \frac{\sum_i \frac{Y_i}{\Delta Y_i^2}}{\sum_i \frac{1}{\Delta Y_i^2}} = 0,2510, \quad (1.12)$$

$$\Delta \bar{Y}_p = \frac{1}{\sqrt{\sum_i \frac{1}{\Delta Y_i^2}}} = 0,0010 \quad (1.13)$$

### 1.4.5. Lithium

Mit dem Element Lithium entsteht bereits primordial das erste Metall - ein Alkalimetall mit Schmelzpunkt 453,69 K und Siedepunkt 1.615 K um genauer zu sein. Die Instabilitätslücke bei der Massenzahl  $A = 5$  (Abb. 1.2) in Verbindung mit einer hohen Coulomb-Barriere bei der Fusion von drei positiven Ladungen erklärt die äußerst geringe beobachtete primordiale Häufigkeit von (Steigman, 2007)

$$({}^7\text{Li}/\text{H})_p = 1,3 \cdot 10^{-10}. \quad (1.14)$$

Üblicherweise wählt man eine logarithmische Darstellung in der Form

$$[\text{Li}]_p = 12 + \log(\text{Li}/\text{H}) = 2,1 \quad (1.15)$$

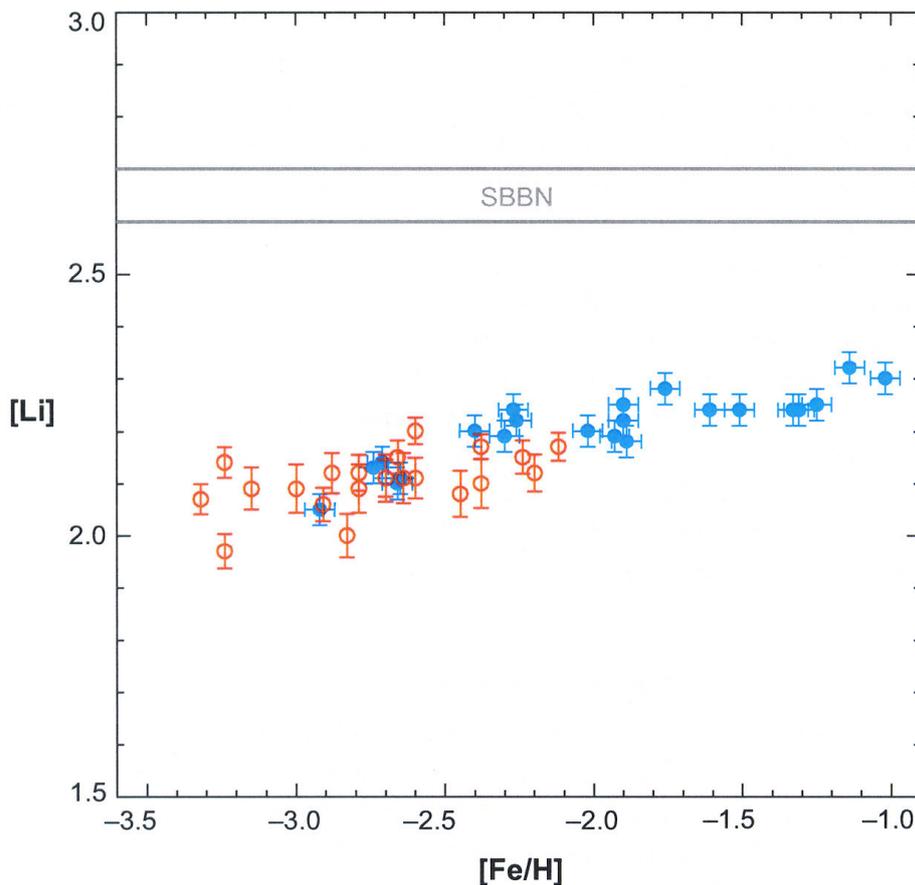
Die Bestimmung dieses Wertes stellt für die Beobachter die größte Herausforderung unter allen primordialen Häufigkeiten dar. Sowohl unser Sonnensystem, als auch das lokale interstellare Medium stellen zwar ausreichend Beobachtungsquellen zur Verfügung, allerdings wird das reaktionsfreudige  ${}^7\text{Li}$  durch verschiedenste Prozesse dort sowohl erzeugt als auch vernichtet. (Zumeist wird Lithium im Verbund mit Beryllium und Bohr erzeugt, beispielsweise durch Spallation von Kohlenstoff, Sauerstoff oder Stickstoff durch Protonen oder  $\alpha$ -Teilchen der kosmischen Strahlung.)

Generell scheint die Erzeugung von Lithium dabei zu obsiegen - zumindest weisen Beobachtungen bei höherer Metallizität auch höhere Häufigkeiten aus - eine Extrapolation zu primordialen Werten ist jedoch nicht möglich. Dies führt uns wiederum zu der Überlegung, die Absorptionsspektren möglichst metallarmer Objekte zu untersuchen, geeignete Vertreter sind Halosterne in unserer Galaxie und Sterne in Kugelsternhaufen.

Lithium wird zwar im Inneren dieser Sterne rasch zerstört, in den äußeren Schichten hofft man jedoch, die ursprüngliche Häufigkeit aus der frühen Zeit des kollabierenden Protosterns vorzufinden. Darin besteht die Krux: Man sucht möglichst metallarme Sterne, gleichbedeutend mit sehr alten Sternen, die ihre lange Lebensdauer allerdings nicht dazu genutzt haben, die Lithium-Häufigkeit in den äußeren Schichten signifikant zu ändern (beispielsweise durch Konvektion).

Letztendlich bleibt nur die Möglichkeit, durch geeignete Sternmodelle die Beobachtungsdaten um diesen Einfluss zu korrigieren - mit den damit verbundenen Unsicherheiten.

Nicht zuletzt deshalb zeigt Lithium auch die größte Diskrepanz zwischen den SBBN-Simulationen und den Beobachtungsdaten, wobei letztere durchwegs niedrigere Resultate liefern. Trägt man die Ergebnisse von Ryan et al. (2000) für niedrige Metallizität und von Asplund et al. (2006) bei höheren Metallizitäten in einem Diagramm zusammen, ergibt sich folgende Darstellung (Steigman, 2007):



**Abb. 1.10.:** Die logarithmische Häufigkeit  $[Li] \equiv 12 + \log(Li/H)$  gemäß Ryan et al. (2000) (rot) und Asplund et al. (2006) (blau) gegen die logarithmische Metallizität (in Einheiten der solaren Metallizität) aufgetragen.

Die logarithmische Skala täuscht auf den ersten Blick über den beträchtlichen Abstand zu den SBBN-Werten hinweg - de facto ist es jedoch mehr als ein Faktor drei.

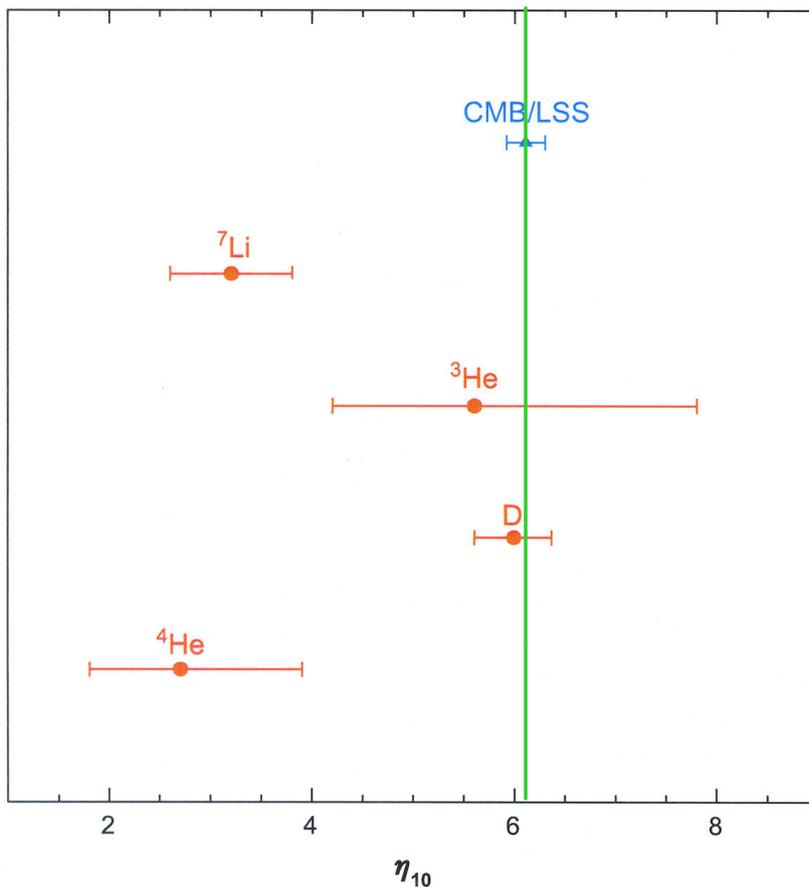
Ein erster Hoffnungsschimmer lässt sich aus den Daten von Korn (2006) ableiten, dem es gelungen ist im Kugelsternhaufen NGC 6397 Sterne mit sehr ähnlichem Alter (und damit ähnlicher Metallizität) zu beobachten. Nach der Korrektur durch Sternmodelle ergibt sich die logarithmische Häufigkeit

$$[Li] = 2,54 \pm 0,10 \quad (1.16)$$

die erfreulich nahe an die SBBN-Werte heranreicht.

## 1.5. Erweiterungen der SBBN

Der nachhaltige Erfolg der SBBN-Theorie kann nicht darüber hinwegtäuschen, dass verschiedene Inkonsistenzen verbleiben. Dies wird besonders deutlich bei dem Versuch, mittels SBBN einen Wert für das Verhältnis der Baryonen- zur Photonendichte,  $\eta$ , abzuleiten. Während die Kombination aus den Beobachtungen der kosmischen Hintergrundstrahlung (WMAP) und den großräumigen Strukturen (LSS) mittlerweile  $\eta$  äußerst erfolgreich eingrenzen, so kann SBBN lediglich mittels der primordialen Deuteriumhäufigkeit vergleichbare Genauigkeiten dagegenhalten. Das wäre prinzipiell noch verschmerzbar, allerdings sind die Korrelationen der einzelnen Häufigkeiten mit  $\eta$  untereinander nicht kompatibel, wie nachfolgende Graphik veranschaulicht:



**Abb. 1.11.:** Die unterschiedlichen Wertebereiche für  $\eta$  basierend auf den SBBN-Häufigkeiten (orange) sowie der Kombination aus WMAP und LSS (blau bzw. grün)

Eine vollkommene Abkehr von SBBN fällt schwer, ist es doch gleichbedeutend damit, heilige Kühe zu schlachten, wie das Standardmodell der Kosmologie oder das Standardmodell der Elementarteilchenphysik. Entsprechend gering sollten die Abweichungen ausfallen - üblicherweise werden sie durch folgende Parameter ausgedrückt:

Abweichungen von der Hubble-Expansion ( $H \rightarrow \tilde{H}$ ) lassen sich durch das Verhältnis

$$S \equiv \frac{\tilde{H}}{H} \quad (1.17)$$

ausdrücken. Modifikationen dieser Art werden beispielsweise motiviert durch eine Abkehr von der (3+1)-dimensionalen Friedmann-Gleichung in höherdimensionalen Modellen, durch unterschiedliche gravitative Kopplungsstärken von Fermionen und Bosonen sowie durch eine zeitabhängige Gravitationskonstante.

An dieser Stelle schlägt nun leider der Pragmatismus mancher theoretischer Physiker mit ungebremseter Härte zu. In der frühen, strahlungsdominierten Phase des Universums wird  $H$  nämlich durch die Anzahl der relativistischen Teilchen bestimmt, wodurch sich die gewünschte Variation von  $H$  indirekt auch durch eine veränderte Anzahl dieser Teilchen erreichen lässt - z. B. durch eine veränderte Anzahl der Neutrinofamilien. Für die Phase vor der Elektron-Positron-Annihilation ergibt sich beispielsweise

$$S = \sqrt{1 + \frac{7}{43} \Delta N_\nu} \quad (1.18)$$

Selbstverständlich steht  $\Delta N_\nu$  dabei nicht für real existierende Neutrinofamilien und ist auch nicht als ganzzahlig zu verstehen.

Zusätzliche unterstellte relativistische Teilchen in der frühen Phase des Universums lassen sich ebenso über den Parameter  $\Delta N_\nu$  abhandeln wie eventuelle Heizungsprozesse durch den Zerfall unterstellter massiver Teilchen, deren freigesetzte Energie nicht oder nicht vollständig auf die Neutrinos übertragen werden kann.

Weitere gebräuchliche Parameter zur Erweiterung der SBBN betreffen die Leptonasymmetrie, d. h. die Differenz aus Leptonen- und Antileptonendichte dividiert durch die Photonendichte. Nachdem die Asymmetrie der geladenen Leptonen durch die Ladungserhaltung an die winzige Baryonasymmetrie gekoppelt ist, geht man gemeinhin auch von einer winzigen Leptonasymmetrie aus. Ungeladene Leptonen - Neutrinos - könnten jedoch theoretisch eine signifikant höhere Leptonasymmetrie bedingen, was sich durch die Parameter  $\xi_\alpha$  mit  $\alpha \equiv e, \mu, \tau$  (für Elektron-, Myon- und Tauonneutrino) ausdrücken lässt. Durch ihre chemischen Potentiale  $\mu_\alpha$  ausgedrückt definiert man (in Energieeinheiten)

$$\xi_\alpha \equiv \frac{\mu_\alpha}{kT} \quad (1.19)$$

Oftmals wird auch nur von einem Parameter  $\xi_e$  gesprochen, da er das Freeze-out-Verhältnis von Neutronen zu Protonen maßgeblich beeinflusst gemäß

$$\frac{n_n}{n_p}(T_F) = e^{-\left(\frac{Q}{kT} + \xi_e\right)}. \quad (1.20)$$

Durch eine geeignete Wahl von  $S$  (bzw.  $\Delta N_\nu$ ) und  $\xi_e$  lassen sich nun aufgetretene Inkonsistenzen beseitigen.

Im Umkehrschluss bedeutet dies jedoch, dass eine weiter verbesserte Beobachtung der primordialen Häufigkeiten, beispielsweise von  $Y_p$  - in Verbindung mit einer analytischen Berechnung von  $Y_p$  - diese Parameter immer besser eingrenzen könnte.  $Y_p$  wäre prädestiniert für derartige Betrachtungen, weil es von allen primordialen Häufigkeiten am stärksten von der Freeze-out-Konzentration der Neutronen - und damit von den Parametern  $\Delta N_\nu$  und  $\xi_e$  - abhängt. Auf diesem Wege lassen sich also die theoretischen Erweiterungen sowohl des Standardmodells der Kosmologie als auch des Standardmodells der Elementarteilchenphysik verifizieren bzw. falsifizieren.



## 2. Analytische Berechnung von $Y_p$

*“Man soll öfters dasjenige untersuchen,  
was von den Menschen meist vergessen wird,  
wo sie nicht hinsehen  
und was so sehr als bekannt angenommen wird,  
dass es keiner Untersuchung mehr wert geachtet wird.”*

Georg Christoph Lichtenberg

### 2.1. Überblick

Der Siegeszug der numerischen Simulationen scheint derart ungebrochen, dass man schon bei Georg Christoph Lichtenberg Zuspruch suchen muss, um sich an eine analytische Berechnung heran zu wagen. Gleichwohl liegt der wesentliche Vorteil dieser Herangehensweise auf der Hand: Die analytische Berechnung endet nicht nur mit einem Wert, sondern gibt darüber hinaus Aufschluss über die genauen Abhängigkeiten von den einfließenden Parametern.

Im Umkehrschluss werden wir diese Abhängigkeiten in Verbindung mit den Beobachtungsdaten nutzen, um interessante Eigenschaften der einzelnen Parameter zu bestimmen. Die Genauigkeiten bisheriger analytischer Arbeiten, beispielsweise von Esmailzadeh et al. (1991) oder Mukhanov (2004), sind hierzu nicht aussagekräftig genug.

Als Ziel unserer Berechnungen fällt unter den primordialen Häufigkeiten die Wahl auf  $Y_p$ , die primordiale Häufigkeit von  ${}^4\text{He}$ , aus Gründen, die sich “unterwegs” noch erweisen werden.

### 2.2. Temperatur-Zeit-Relation im frühen Universum

Für die Fusion von Atomkernen - der Nukleosynthese - ist es unabdingbar, Protonen gegen ihre elektrostatische Abstoßung so nahe aneinander zu bringen, dass die kurzreichweitige, stark anziehende Kernkraft wirksam werden kann. Dies setzt eine entsprechend hohe Energie voraus, wie wir sie zunächst im frühen Universum vorfinden.

Um die relevanten Zeiträume in Sekunden angeben zu können, ermitteln wir vorab den Zusammenhang zwischen thermischer Energie des Universums und der kosmischen Zeit. Hierfür

beschreiben wir das Universum als ideales Gas gemäß

$$dE = -p dV \quad (2.1)$$

und nehmen für sehr frühe Phasen des Universums den Strahlungsdruck als dominant an: (Der guten Ordnung halber geben wir noch an, dass die Variablen  $E$ ,  $p$ ,  $V$ ,  $\rho$  und  $R$  entsprechen ihren üblichen Bedeutungen Energie, Druck, Volumen, Dichte und Radius verwendet werden.)

$$dE = d(\rho c^2 R^3) \quad \text{und} \quad p = \frac{1}{3} \rho c^2. \quad (2.2)$$

Mit  $dV = d(R^3)$  folgt

$$d(\rho R^3) + \frac{1}{3} \rho d(R^3) = 0 \quad (2.3)$$

$$R^3 d\rho + \frac{4}{3} \rho d(R^3) = 0 \quad (2.4)$$

und mit  $d(R^3) = \frac{3}{4} d(R^4) \frac{1}{R}$  schließlich

$$R^4 d\rho + \rho d(R^4) = 0 \quad \text{bzw.} \quad (2.5)$$

$$d(\rho R^4) = 0. \quad (2.6)$$

Mit anderen Worten, die Energiedichte fällt mit der vierten Potenz des Skalenfaktors.

Wie aber erhalten wir die Energiedichte? Sie setzt sich zusammen aus Bosonen und Fermionen, wobei lediglich die relativistischen Teilchen signifikant beitragen. Hierfür ist der Faktor  $e^{-(mc^2)/(kT)}$  verantwortlich, der den nichtrelativistischen Anteil gegen null drückt (Kolb & Turner, 1990).

Betrachten wir zunächst die Bosonen, d. h. wir multiplizieren die Boseverteilung mit der Zustandsdichte  $\frac{d^3p}{h^3}$  und erhalten:

$$f(\vec{p}) d^3p = \frac{d^3p}{h^3} \frac{1}{e^{\frac{E}{kT}} - 1}. \quad (2.7)$$

Integration über Polar- und Azimutwinkel liefert:

$$f(p) dp = \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} \frac{1}{e^{\frac{E}{kT}} - 1}. \quad (2.8)$$

Jetzt wechseln wir in die Energiedarstellung mit  $E = cp$  bzw.  $dE = dp c$ :

$$f(E) dE = \frac{4\pi E^2 dE}{h^3 c^3} \frac{1}{e^{\frac{E}{kT}} - 1}. \quad (2.9)$$

Die Bosonenzahldichte  $n_b$  ergibt sich durch Integration

$$n_b = \frac{4\pi}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{E^2 dE}{e^{\frac{E}{kT}} - 1} = 4\pi \left( \frac{kT}{hc} \right)^3 \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{e^z - 1}. \quad (2.10)$$

Mit Hilfe der Riemannschen Zetafunktion

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad (2.11)$$

erhalten wir schließlich

$$n_b = 8\pi \left( \frac{kT}{hc} \right)^3 \zeta(3). \quad (2.12)$$

Jetzt bedarf es nur noch einer Wichtung um von der Teilchenzahldichte zur Energiedichte ( $\rho_b c^2$ ) zu gelangen:

$$\rho_b c^2 = \frac{4\pi}{h^3 c^3} \int_0^\infty E \frac{E^2 dE}{e^{\frac{E}{kT}} - 1} = \frac{4\pi}{h^3 c^3} (kT)^4 \int_0^\infty \frac{z^3 dz}{e^z - 1}. \quad (2.13)$$

Für den Beitrag der relativistischen Bosonen ergibt sich somit für jeden Freiheitsgrad:

$$\rho_b c^2 = \frac{\pi^2 k^4}{30 (\hbar c)^3} T^4. \quad (2.14)$$

Für die Fermionen gestaltet sich die Berechnung völlig analog, wir müssen lediglich das unterschiedliche Vorzeichen in der Fermi-Dirac-Statistik berücksichtigen. Anstelle von (2.10) erhalten wir für die fermionische Teilchenzahldichte  $n_f$

$$n_f = \frac{4\pi}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{E^2 dE}{e^{\frac{E}{kT}} + 1} = 4\pi \left( \frac{kT}{hc} \right)^3 \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{e^z + 1} \quad (2.15)$$

und schließlich

$$n_f = 6\pi \left( \frac{kT}{hc} \right)^3 \zeta(3). \quad (2.16)$$

Für den fermionischen Beitrag ( $\rho_f c^2$ ) zur Energiedichte ergibt sich wiederum pro Freiheitsgrad:

$$\rho_f c^2 = \frac{4\pi}{h^3 c^3} \int_0^\infty E \frac{E^2 dE}{e^{\frac{E}{kT}} + 1} = \frac{4\pi}{h^3 c^3} (kT)^4 \int_0^\infty \frac{z^3 dz}{e^z + 1} \quad (2.17)$$

$$= \frac{7}{8} \frac{\pi^2 k^4}{30(\hbar c)^3} T^4. \quad (2.18)$$

Weisen Bosonen und Fermionen die identische Temperatur  $T$  auf, beträgt die gesamte Energiedichte demnach

$$\rho c^2 = (\rho_b + \rho_f) c^2 = g_* \frac{\pi^2 k^4}{30(\hbar c)^3} T^4, \quad (2.19)$$

mit den relativistischen Freiheitsgraden

$$g_* = \left( g_b + \frac{7}{8} g_f \right), \quad (2.20)$$

die sich aus dem bosonischen Anteil  $g_b$  sowie dem fermionischen Anteil  $g_f$  zusammensetzen.

Für spätere Zwecke halten wir noch fest, dass sich die Energiedichte für den Fall unterschiedlicher Temperaturen von Bosonen ( $T_b$ ) und Fermionen ( $T_f$ ) vor einem Hintergrund der Temperatur  $T$  durch den selben Term ausdrücken lässt gemäß

$$\rho c^2 = [\rho_b(T_b) + \rho_f(T_f)] c^2 = g_* \frac{\pi^2 k^4}{30(\hbar c)^3} T^4, \quad (2.21)$$

falls man als effektive Freiheitsgrade

$$g_* = \left[ g_b \left( \frac{T_b}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} g_f \left( \frac{T_f}{T} \right)^4 \right] \quad (2.22)$$

annimmt.

Wir setzen ein in die Friedmann-Gleichung

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho - \frac{kc^2}{R^2} \quad (2.23)$$

und vernachlässigen für ein nahezu flaches Universum den Krümmungsterm:

$$\left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho = \left( \frac{\dot{T}}{T} \right)^2 = \frac{8\pi^3 k^4 G}{90 \hbar^3 c^5} g_* T^4. \quad (2.24)$$

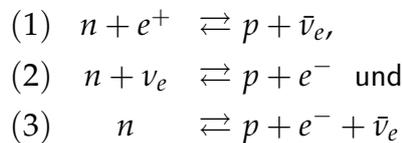
Trennung der Veränderlichen und Integration mit der Bedingung  $T(t \rightarrow \infty) = 0$  ergibt die gesuchte Beziehung:

$$t = \sqrt{\frac{90\hbar^3 c^5}{32\pi^3 k^4 G g_*}} \frac{1}{T^2} \quad (2.25)$$

Damit sind wir gewappnet für eine zeitliche Beschreibung der pN.

## 2.3. Freeze-out des Betazerfalls

Holen wir uns nochmals unsere bisherigen Betrachtungen zum zeitlichen Verlauf der pN (Kap. 1.2) in Erinnerung. Bereits vor dem Start der pN beginnt ein Prozess, der ihre Resultate wesentlich mitbestimmen wird - der Betazerfall der freien Neutronen. Unterhalb einer Temperatur von ca.  $10^{12}$  K (86 MeV) haben sich Quarks zu farblosen Protonen und Neutronen verbunden, die anschließend durch die Reaktionen (schwache Wechselwirkung)



- sowie deren Umkehrreaktionen - im chemischen und thermischen Gleichgewicht gehalten werden. Das Verhältnis Neutronen- zu Protonendichte ergibt sich demnach durch die Boltzmannverteilung in der Form

$$\frac{n_n}{n_p}(T) = e^{-\frac{(m_n - m_p)c^2}{kT}}, \quad (2.26)$$

bis zu einer Temperatur  $T_F$ , bei der die thermische Energie unter das Energieniveau der Umkehrreaktionen abgefallen ist. Bei der Umkehrreaktion (1) muß zur Massendifferenz von Neutron und Proton zusätzlich noch die Masse des Positrons aufgebracht werden, deshalb friert sie zuerst aus. Die Umkehrreaktionen (2) und (3) folgen, sobald die thermische Energie  $kT$  unter  $(m_n - m_p) c^2$  abgefallen ist. Hieraus konnten wir eine erste grobe Abschätzung treffen:  $T_F \simeq 9,15 \cdot 10^9 \text{K}$ .

Für eine detailliertere Betrachtung greifen wir im Folgenden auf Berechnungen von Mukhanov (2004) zurück. Wir beginnen mit der Reaktion  $n + \nu_e \rightarrow p + e^-$ , die wir mit der Bezeichnung  $n\nu$ -Prozess abkürzen. Die Fermi-Theorie liefert für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

einer Vier-Fermionen-Reaktion der Form  $a + b \rightarrow c + d$ :

$$\frac{d\sigma_{ab}}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{|M|^2}{(p_a + p_b)^2} \sqrt{\frac{(p_c \cdot p_d)^2 - m_c^2 m_d^2 c^8}{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2 c^8}} \quad (2.27)$$

wobei die Terme  $(p_a \cdot p_b)$  und  $(p_c \cdot p_d)$  für die jeweiligen Skalarprodukte der Viererimpulse stehen. Die Viererimpulse selbst sind verknüpft durch die Impulserhaltung  $p_a + p_b = p_c + p_d$ . Das Matrixelement für die Vier-Fermionen-Wechselwirkung lautet

$$|M|^2 = 16(1 + 3g_A^2) G_F^2 (p_a \cdot p_b)(p_c \cdot p_d),$$

mit der Fermikonstante  $G_F \simeq 1,166371 \cdot 10^{-11} [\frac{1}{\text{MeV}^2}]$  (Amsler et al., 2008) sowie der axialen Kopplungskonstante  $g_A = 1,2739$  (Abele et al., 2002). Der Faktor  $g_A$  trägt im Wesentlichen dem Effekt Rechnung, dass innerhalb von Neutron und Proton die Gluonen ihrerseits mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit in Quark-Antiquark-Paare zerfallen können, wodurch sich die schwache Kopplung entsprechend erhöht.

Für den betrachteten  $n\nu$ -Prozess erhalten wir

$$\frac{d\sigma_{n\nu}}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{|M|^2}{(p_n + p_\nu)^2} \sqrt{\frac{(p_p \cdot p_e)^2 - m_p^2 m_e^2 c^8}{(p_n \cdot p_\nu)^2 - m_n^2 m_\nu^2 c^8}} \quad (2.28)$$

mit dem Matrixelement

$$|M|^2 = 16(1 + 3g_A^2) G_F^2 (p_n \cdot p_\nu)(p_p \cdot p_e).$$

Bei den herrschenden Temperaturen von einigen MeV sind die Neutronen und Protonen bereits nichtrelativistisch und wir finden folgende Relationen:

$$\begin{aligned} (p_n + p_\nu)^2 &\simeq m_n^2 c^4 \\ (p_n \cdot p_\nu) &= m_n c^2 \cdot \epsilon_\nu - m_n v_n \frac{\epsilon_\nu}{c} \simeq m_n c^2 \epsilon_\nu \\ (p_p \cdot p_e) &= m_p c^2 \cdot \epsilon_e - m_p v_p \frac{\epsilon_e}{c} \simeq m_p c^2 \epsilon_e \\ \sqrt{(p_p \cdot p_e)^2 - m_p^2 m_e^2 c^8} &= m_p c^2 \epsilon_e \sqrt{1 - \left(\frac{m_e c^2}{\epsilon_e}\right)^2} = m_p c^2 \epsilon_e \sqrt{\frac{\left(\frac{v_e}{c}\right)^2}{1 + \left(\frac{v_e}{c}\right)^2}} \\ &\simeq m_p c \epsilon_e v_e \end{aligned}$$

$m_p$ ,  $m_n$  und  $m_e$  kennzeichnen die Massen des Protons, des Neutrons und des Elektrons.  $\epsilon_\nu$  ist die Energie des Neutrinos und  $\epsilon_e$  die Energie des Elektrons. Mit Hilfe der Energiedifferenz von Neutron- und Protonruhemasse  $Q \simeq 1,293$  MeV halten wir für spätere Zwecke noch die Beziehung

$$\epsilon_e \simeq \epsilon_\nu + Q \quad (2.29)$$

fest. Setzen wir nun unsere Impulsrelationen und das Matrixelement in Gl. 2.28 ein:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{n\nu}}{d\Omega} &= \frac{1}{(8\pi)^2} 16 (1 + 3g_A^2) G_F^2 \frac{m_n \epsilon_\nu m_p \epsilon_e}{m_n^2} \frac{m_p \epsilon_e \frac{v_e}{c}}{\sqrt{(m_n \epsilon_\nu)^2 - (m_n m_\nu c^2)^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} (1 + 3g_A^2) G_F^2 \frac{m_p^2}{m_n^2} \epsilon_e^2 \frac{v_e}{c}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Im letzten Schritt haben wir die Neutrinomasse als vernachlässigbar klein erachtet. Integration über den Raumwinkel liefert

$$\sigma_{n\nu} = \frac{1 + 3g_A^2}{\pi} G_F^2 \frac{m_p^2}{m_n^2} \epsilon_e^2 \frac{v_e}{c}. \quad (2.31)$$

Jetzt müssten wir prinzipiell noch berücksichtigen, dass oberhalb einer Energie  $kT > 2 m_e c^2$  zahlreiche Elektron-Positron-Paare existieren, wodurch mögliche Energiezustände für das Elektron in unserer Reaktion bereits besetzt wären. Gemäß dem Pauliprinzip würde sich somit der gesuchte Wechselwirkungsquerschnitt auf

$$\sigma_{n\nu}^* = \sigma_{n\nu} \frac{1}{1 + e^{-\frac{\epsilon_e}{kT}}} \quad (2.32)$$

reduzieren. Es wird sich allerdings erweisen, dass die gesuchte Freeze-out-Temperatur unterhalb der Elektron-Positron-Annihilation liegt, weshalb wir zur besseren Übersichtlichkeit den zusätzlichen Faktor bereits von vornherein vernachlässigen und mit  $\sigma_{n\nu}$  weiter rechnen.

Damit sind wir in der Lage, die Anzahl  $\Delta N_n$  der Neutronen zu berechnen, die pro Zeitintervall  $\Delta t$  in einem mitbewegten Volumenelement durch den betrachteten Prozess zerfallen. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  seien darin genau  $N_n$  Neutronen enthalten:

$$\Delta N_n = - \left( \sum_{\epsilon_\nu}^{\epsilon_\nu + \Delta\epsilon_\nu} \sigma_{n\nu} n_{\epsilon_\nu} v_\nu \Delta g_{\epsilon_\nu} \right) N_n \Delta t. \quad (2.33)$$

Dabei kennzeichnet

$$n_{\epsilon_\nu} = \frac{1}{1 + e^{\frac{\epsilon_\nu}{kT_\nu}}} \quad (2.34)$$

die Besetzungszahl der Neutrinos und

$$\Delta g_{\epsilon_\nu} \simeq \frac{1}{2\pi^2} \epsilon_\nu^2 \Delta\epsilon_\nu \quad (2.35)$$

das Volumenelement des Phasenraums.

Die relative Neutronenkonzentration

$$X_n = \frac{N_n}{N_n + N_p} = \frac{n_n}{n_n + n_p} \quad (2.36)$$

wird sich durch den  $nv$ -Prozess mit der Zeit ändern gemäss

$$\left( \frac{dX_n}{dt} \right)_{nv} = -\lambda_{nv} X_n, \quad (2.37)$$

wobei  $\lambda_{nv}$  die zugehörige Zerfallskonstante darstellt und die Gesamtbaryonenzahl  $N_n + N_p$  als konstant vorausgesetzt wird. Zur Bestimmung von  $\lambda_{nv}$  setzen wir nun den Wirkungsquerschnitt aus Gl. 2.32 in Gl. 2.33 ein und erhalten:

$$\lambda_{nv} = \frac{1 + 3g_A^2}{2\pi^3} G_F^2 \frac{m_p^2}{m_n^2} \mathfrak{J}(T_\nu), \quad (2.38)$$

mit dem Hilfsintegral

$$\mathfrak{J}(T_\nu) = \int_0^\infty \epsilon_e^2 \sqrt{1 - \left( \frac{m_e c^2}{\epsilon_e} \right)^2} \frac{\epsilon_\nu^2}{1 + e^{\frac{\epsilon_\nu}{kT_\nu}}} d\epsilon_\nu. \quad (2.39)$$

Zur Lösung dieses Integrals müssen wir nun ein wenig Federn lassen. Mit Hilfe der Substitution  $x = \frac{\epsilon_\nu}{kT_\nu}$ , der Beziehung (2.29) und der Riemannschen Zetafunktion (Gl. 2.11) erhalten wir zwar eine analytische Lösung

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(T_\nu) &= \int_0^\infty (kT_\nu x + Q)^2 \sqrt{1 - \left( \frac{m_e c^2}{kT_\nu x + Q} \right)^2} \frac{(kT_\nu)^3 x^2}{1 + e^x} dx \\ &= (kT_\nu)^5 \int_0^\infty x^2 \frac{\left( x + \frac{Q}{kT_\nu} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{m_e c^2}{kT_\nu} \right)^2}{1 + e^x} dx \\ &= Q^5 \left( \frac{kT_\nu}{Q} \right)^3 \left[ \frac{45}{2} \zeta(5) \left( \frac{kT_\nu}{Q} \right)^2 + \frac{7\pi^4}{60} \left( \frac{kT_\nu}{Q} \right) + \frac{3}{2} \zeta(3) \left( 1 - \frac{m_e^2 c^4}{2Q^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.40)$$

müssen dafür aber die Wurzel nach führenden Ordnungen entwickeln (unter der Annahme  $m_e c^2 / \epsilon_e \ll 1$ ). Der Vergleich mit der numerischen Lösung zeigt jedoch in unserem Temperaturbereich eine maximale Abweichung von lediglich 1 %, damit müssen wir uns begnügen. Wir konvertieren die gesuchte Zerfallsrate  $\lambda_{nv}$  von [MeV] zu  $[\frac{1}{s}]$  und erhalten

$$\lambda_{nv} \simeq \frac{1 + 3g_A^2}{1,75 \cdot 10^{-21}} G_F^2 (kT_\nu)^3 \left[ (kT_\nu + 0,244 Q)^2 + 0,0345 Q^2 - 0,139 m_e^2 c^4 \right] \left[ \frac{1}{s} \right]. \quad (2.41)$$

Soweit zum  $nv$ -Prozess. In völlig analoger Weise erhalten wir für den  $ne$ -Prozess (wir vertauschen lediglich  $\epsilon_\nu$  mit  $\epsilon_e$  und  $m_e$  mit  $m_\nu = 0$ ):

$$\lambda_{ne} = \frac{1 + 3g_A^2}{2\pi^3} G_F^2 \frac{m_p^2}{m_n^2} \int_{m_e c^2}^{\infty} \epsilon_\nu^2 \frac{\epsilon_e^2}{1 + e^{\frac{\epsilon_e}{kT}}} d\epsilon_e \quad (2.42)$$

und schließlich für die Umkehrreaktionen ( $T_\nu = T$ )

$$\lambda_{pe} = e^{-\frac{Q}{kT}} \lambda_{nv} \quad \text{und} \quad (2.43)$$

$$\lambda_{p\nu} = e^{-\frac{Q}{kT}} \lambda_{ne}. \quad (2.44)$$

Für die zeitliche Änderung der Neutronenkonzentration ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \frac{dX_n}{dt} &= -(\lambda_{nv} + \lambda_{ne})X_n + (\lambda_{pe} + \lambda_{p\nu})(1 - X_n) \\ &= -(\lambda_{nv} + \lambda_{ne})(X_n - e^{-\frac{Q}{kT}} + e^{-\frac{Q}{kT}} X_n) \\ &= -(\lambda_{nv} + \lambda_{ne})(1 + e^{-\frac{Q}{kT}})(X_n - \frac{e^{-\frac{Q}{kT}}}{1 + e^{-\frac{Q}{kT}}}) \\ &= -(\lambda_{nv} + \lambda_{ne})(1 + e^{-\frac{Q}{kT}})(X_n - X_n^{eq}) \end{aligned} \quad (2.45)$$

mit der Gleichgewichtskonzentration der Neutronen

$$X_n^{eq} = \frac{1}{1 + e^{\frac{Q}{kT}}}. \quad (2.46)$$

Für die lineare Differenzialgleichung (2.45) wählen wir die Anfangsbedingung  $X_n \rightarrow X_n^{eq}$  für  $t \rightarrow 0$  und erhalten

$$X_n(t) = X_n^{eq}(t) - \int_0^t \exp\left(-\int_{\tilde{t}}^t (\lambda_{nv}(\hat{t}) + \lambda_{ne}(\hat{t}))(1 + e^{-\frac{Q}{k\hat{T}}}) d\hat{t}\right) \dot{X}_n^{eq}(\tilde{t}) d\tilde{t}, \quad (2.47)$$

Wir führen die Hilfsfunktion  $F(t)$  ein

$$F(t) = \int_0^t (\lambda_{nv}(t) + \lambda_{ne}(t))(1 + e^{-\frac{Q}{kT}}) dt, \quad (2.48)$$

wodurch das Integral in (2.47) folgende Form annimmt:

$$\int_0^t e^{-F(t)+F(\tilde{t})} \dot{X}_n^{eq}(\tilde{t}) d\tilde{t}. \quad (2.49)$$

Für eine schnell wachsende Funktion  $F(t)$  wird das Integral vom Beitrag  $\tilde{t} \simeq t$  dominiert und wir entwickeln nach Potenzen des Ausdrucks  $(t - \tilde{t})$ :

$$X_n(t) = X_n^{eq}(t) - \int_0^t [\dot{X}_n^{eq}(t) + \ddot{X}_n^{eq}(t)(\tilde{t} - t) + \dots] e^{-\tilde{F}(t-\tilde{t})} \left(1 + \frac{1}{2}\ddot{F}(t)(\tilde{t} - t)^2 + \dots\right) d\tilde{t}. \quad (2.50)$$

Die Terme lassen sich einzeln integrieren mit Hilfe der Beziehung

$$\int_0^t e^{-A(t-\tilde{t})} (t - \tilde{t})^n d\tilde{t} \simeq A^{-n-1} n!, \quad (2.51)$$

wobei wir Terme der Ordnung  $e^{-At}$  vernachlässigen können:

$$X_n(t) = X_n^{eq}(t) \left(1 - \frac{1}{(\lambda_{nv} + \lambda_{ne})(1 + e^{-\frac{Q}{kT}})} \frac{\dot{X}_n^{eq}(t)}{X_n^{eq}(t)} + \dots\right). \quad (2.52)$$

Wir suchen den Freeze-out-Zeitpunkt und das Ziel scheint in greifbare Nähe gerückt. Zu sehr frühen Zeiten, gleichbedeutend mit sehr hohen Temperaturen, entspricht die Neutronenkonzentration der Gleichgewichtskonzentration, d. h. die Klammer in Gl. (2.52) liegt sehr nahe am Wert 1. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da die hohen Raten  $\lambda_{nv}$  und  $\lambda_{ne}$  den Term

$$\frac{1}{(\lambda_{nv} + \lambda_{ne})(1 + e^{-\frac{Q}{kT}})} \frac{\dot{X}_n^{eq}(t)}{X_n^{eq}(t)} \quad (2.53)$$

dominieren und vernachlässigbar klein halten. Den Freeze-out-Zeitpunkt wollen wir also genau dadurch kennzeichnen, dass eben dieser Term signifikant wird, woraus sich die Bedingung ergibt

$$\left| \frac{\dot{X}_n^{eq}}{X_n^{eq}} \right| \simeq (\lambda_{nv} + \lambda_{ne}). \quad (2.54)$$

$kT$  ist bereits unter die Energiedifferenz der Ruhmassen von Neutron und Proton ( $Q$ ) gefallen; wir befinden uns allerdings noch oberhalb der Elektron-Positron-Vernichtung, wodurch sich die Näherung  $\lambda_{nv} + \lambda_{ne} \simeq 2\lambda_{nv}$  rechtfertigt.

$X_n^{eq}$  ergibt sich gemäß Gl. (2.46) und für die zeitliche Ableitung folgt

$$\dot{X}_n^{eq} = \frac{Q e^{\frac{Q}{kT}}}{\left(1 + e^{\frac{Q}{kT}}\right)^2 k T^2} \frac{dT}{dt} \quad (2.55)$$

mit  $\frac{dT}{dt}$  aus Gl. (2.25):

$$\frac{dT}{dt} = - \frac{T^3}{2 \sqrt{\frac{90\hbar^3 c^5}{32\pi^3 k^4 G g_*(T)}}} \quad (2.56)$$

Mit  $\lambda_{nv}$  aus Gl. (2.41) erhalten wir schließlich die Bestimmungsgleichung für die Freeze-out-Temperatur

$$\sqrt{\frac{G g_*(T_F)}{\hbar^3 c^5}} \frac{3,7 \cdot 10^{-35}}{(1 + 3g_A^2) G_F^2} = (kT_F)^3 \left[ (kT_F + 0,244 Q)^2 + 0,0345 Q^2 - 0,139 m_e^2 c^4 \right]. \quad (2.57)$$

Die rechte Seite lässt sich näherungsweise quadratisch ergänzen zu

$$\sqrt{\frac{G g_*(T_F)}{\hbar^3 c^5}} \frac{3,7 \cdot 10^{-35}}{(1 + 3g_A^2) G_F^2} = Q^3 \left( \frac{kT_F}{Q} \right)^2 \left( \frac{kT_F}{Q} + 0,25 \right)^2, \quad (2.58)$$

und die quadratische Gleichung für den Term  $\frac{kT_F}{Q}$  führt schließlich auf

$$T_F \simeq 1,16 \cdot 10^6 \frac{Q}{k} \left[ -\frac{1}{8} + \sqrt{\frac{1}{64} + \sqrt{\frac{3,7 \cdot 10^{-35}}{(1 + 3g_A^2) G_F^2 Q^3} \left( \frac{G g_*(T_F)}{\hbar^3 c^5} \right)^{1/4}}} \right] [K]. \quad (2.59)$$

Bei der betrachteten Temperatur  $T_F$  haben wir es mit einem Gemisch aus Neutrinos, Antineutrinos, Elektronen, Positronen und Photonen zu tun. Die Photonen tragen zwei Polarisationsfreiheitsgrade bei, Elektronen und Positronen je zwei weitere Freiheitsgrade (sie treten rechts- und linkshändig auf) sowie Neutrinos (nur linkshändig) und Antineutrinos (nur rechtshändig) jeweils einen Freiheitsgrad. Daraus ergeben sich im Falle von drei Neutrinofamilien zwei bosonische Freiheitsgrade und 10 fermionische Freiheitsgrade.

Wir setzen demnach vermöge Gl. (2.20)

$$g_*(T_F) = \left( 2 + \frac{7}{8} 10 \right) = 10,75 \quad (2.60)$$

und erhalten

$$T_F \simeq 0,84 [MeV] \Leftrightarrow 9,76 \cdot 10^9 [K]. \quad (2.61)$$

Gleichung (2.25) liefert  $t_F = 1,04 [s]$ .

Für die Berechnung der Neutronenkonzentration zu diesem Zeitpunkt kehren wir nochmals zurück zu Gl. (2.47).

Offensichtlich wird  $X_n^{eq}$  mit fallender Temperatur gegen null und somit das Integral in Gl. (2.47) gegen einen endlichen Wert streben. Damit ergibt sich die Freeze-out-Konzentration der Neutronen gemäß  $X_n(t \rightarrow \infty)$ .

$$X_n(t \rightarrow \infty) = - \int_0^\infty \exp \left( - \int_{\tilde{t}}^\infty (\lambda_{nv}(\hat{t}) + \lambda_{ne}(\hat{t})) (1 + e^{-\frac{Q}{\hat{t}}}) d\hat{t} \right) \dot{X}_n^{eq}(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (2.62)$$

Der Integrand leistet lediglich für Temperaturen oberhalb der Ruhemasse des Elektrons wesentliche Beiträge, wodurch sich wiederum der Ansatz  $\lambda_{nv} + \lambda_{ne} \simeq 2 \lambda_{nv}$  rechtfertigt ( $\lambda_{nv}$  aus Gl. (2.41)). Wir verwenden ferner Gl. (2.56) um die Integrationsvariable von  $dt$  nach  $dT$  zu wechseln (mit  $T$  und  $Q$  in den Einheiten MeV) und verwenden für den entstehenden länglichen Vorfaktor die Abkürzung  $\tilde{C}$ :

$$X_n(T_F) = \int_0^\infty \exp \left\{ \tilde{C} \int_0^T \left[ (x + 0,244 Q)^2 + 0,0345 Q^2 - 0,139 m_e^2 c^4 \right] (1 + e^{-\frac{Q}{x}}) dx \right\} \cdot \frac{Q e^{\frac{Q}{T}}}{T^2 (1 + 2 e^{\frac{Q}{T}} + e^{\frac{2Q}{T}})} dT \quad (2.63)$$

$$X_n(T_F) = \int_0^\infty \frac{Q \exp \left\{ \tilde{C} \int_0^T \left[ (x + 0,24 Q)^2 + 0,03 Q^2 - 0,14 m_e^2 c^4 \right] (1 + e^{-\frac{Q}{x}}) dx \right\}}{2 T^2 \left( 1 + \cosh \frac{Q}{T} \right)} dT.$$

$$\text{mit } \tilde{C} \equiv -2,68 \cdot 10^{34} \sqrt{\frac{\hbar^3 c^5}{G g_f}} (1 + 3g_A^2) G_F^2$$

(2.64)

Das Integral ergibt schließlich

$$X_n(T_F) \simeq 0,1549. \quad (2.65)$$

Das zugehörige Verhältnis von Neutronen- zu Protonendichte folgt unmittelbar zu

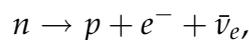
$$\frac{n_n}{n_p}(T_F) = \frac{1}{\frac{1}{X_n(T_F)} - 1} \approx 0,183. \quad (2.66)$$

Zum Vergleich wäre das Verhältnis von Neutronen- zur Protonenanzahl bei chemischem und thermischem Gleichgewicht durch die Boltzmannverteilung (2.26) gegeben, in der Form:

$$\frac{n_n}{n_p}(T_F) = e^{-\frac{(m_n - m_p)c^2}{kT_F}} \approx 0,214. \quad (2.67)$$

Wir registrieren eine Abweichung ggü. der Gleichgewichtsannahme (Gl. 2.26) um immerhin 14 %. Interessanterweise würde man mittels der eingangs skizzierten groben Abschätzung der Form  $T_F \approx 9,15 \cdot 10^9$  K zusammen mit dem Gleichgewichtsansatz (Gl. 2.26) einen Wert für  $\frac{n_n}{n_p}(T_F)$  von 0,194 erhalten, der sich nur um ca. 5 % von unserem Ergebnis unterscheidet. In jedem Falle werden wir für sämtliche weitere Betrachtungen den Nichtgleichgewichtswert (2.66) verwenden.

Zum Zeitpunkt  $t_F$  erfolgt also der Startschuß für den effektiven Betazerfall des Neutrons in jeweils ein Proton, ein Elektron und ein Antielektronneutrino gemäss



mit einer mittleren Lebensdauer von  $\tau_n = 885,7$  sec (Amsler et al., 2008). Die Neutronendichte nimmt infolge ab:

$$n_n(t) = n_n(t_F) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (2.68)$$

während die Protonendichte genau um diesen Betrag zunimmt:

$$n_p(t) = n_p(t_F) + (n_n(t_F) - n_n(t)). \quad (2.69)$$

Wir erhalten

$$\frac{n_p}{n_n}(t) = \frac{1}{X_n(T_F)} e^{\frac{t-t_F}{\tau_n}} - 1. \quad (2.70)$$

## 2.4. Start der effektiven Fusion

Der nächste Meilenstein ist dann bereits  $t_N$ , der Start der effektiven Fusion. Natürlich finden bereits zu früheren Zeiten fortwährend Fusionen statt, allerdings aufgrund der zerstörerischen Hintergrundstrahlung ohne nachhaltige Ergebnisse. Dies wird sich zum Zeitpunkt  $t_N$  ändern, daher die Bezeichnung "effektive" Fusion.

Seit  $t_F$  können die zerfallenen Neutronen nicht wieder aufgefrischt werden, deshalb wird das Ergebnis der primordialen Nukleosynthese ganz wesentlich von der Zeitspanne bestimmt, die zwischen  $t_F$  und  $t_N$  verstreicht. Wie in Kap. 1.2 bereits ausgeführt, entsteht diese Verzögerung durch die geringe Bindungsenergie des Deuterons ( $B_d \simeq 2,225$  MeV) in Verbindung mit einer immensen Anzahl an Photonen pro Baryon. Obwohl die mittlere Photonenenergie bereits weit unter 1 MeV abgefallen ist, sind im Ausläufer der Planckverteilung noch genügend Photonen mit entsprechend hoher Energie zur effektiven Photodissoziation der Deuteronen vorhanden.

Der Zeitpunkt  $t_N$  wird also durch zwei Kriterien gekennzeichnet: Einerseits muss die Rate der Deuteronproduktion  $\Gamma_{(np \rightarrow d\gamma)}$  sowohl gegen die Rate der Deuterondissoziation  $\Gamma_{(d\gamma \rightarrow np)}$  als auch der Expansionsrate des Universums  $\Gamma_{exp}$  obsiegen:

$$\Gamma_{(np \rightarrow d\gamma)} > \Gamma_{(d\gamma \rightarrow np)} + \Gamma_{exp} \quad (2.71)$$

Zusätzlich muss die Anzahl der gebundenen, stabilen Neutronen bereits die Größenordnung der verbliebenen freien Neutronen angenommen haben, damit wir näherungsweise ab  $t_N$  Neutronenerhaltung annehmen dürfen. Wir fordern dementsprechend

$$n_d(T_N) = n_n(T_N). \quad (2.72)$$

Interessanterweise brauchen wir uns hierbei nicht darum zu kümmern, in welchen Prozessen und mit welchen zugehörigen Raten Deuteron zu Tritium oder Helium weiter fusioniert wird. Diese Prozesse stellen natürlich de facto ebenfalls eine "Vernichtung" von Deuteron dar, allerdings verbleiben die darin verwickelten Neutronen in Kernen gebunden und somit stabil. Auf welchem Wege auch immer, durch die Bildung welchen Zwischenproduktes auch immer, letztendlich wird jedwedes weiter fusionierte Deuteron früher oder später als  ${}^4\text{He}$ -Kern enden. Dies vereinfacht unsere Betrachtungen ganz wesentlich, sind wir doch einzig und allein an der finalen primordialen Häufigkeit von eben diesem  ${}^4\text{He}$  interessiert.

Der gesamte bisherige Rechenweg wäre identisch gangbar auf der Suche nach der primordialen Häufigkeit jedes beliebigen Elementes. Die Relation (2.71) stellt nun die Weggabelung dar, an der wir uns dafür entscheiden, ausschließlich die Häufigkeit von  ${}^4\text{He}$  zu berechnen - es wird uns nicht möglich sein, Aussagen über die restlichen primordialen Häufigkeiten zu treffen. Die Annahme, alle Deuteronen würde zu Helium fusionieren, setzt unserer maximal erreichbaren Rechengenauigkeit zudem bereits im Vorfeld eine Grenze. Glücklicherweise ist die tatsächlich "überlebende" primordiale Häufigkeit von Deuterium jedoch lediglich in der Größenordnung von  $10^{-5}$ ; eine Genauigkeit, die wir ohnehin nicht erreichen.

Die Expansionsrate des strahlungsdominierten Universums erhalten wir aus den Gleichungen (2.24) und (2.25). Die Beziehung

$$H^2 = \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{1}{4t^2} \quad (2.73)$$

liefert unmittelbar

$$H = \frac{1}{2t}. \quad (2.74)$$

Die Raten der Erzeugung und Vernichtung von Deuteron ergeben sich aus dem jeweiligen Produkt aus Teilchendichte, Geschwindigkeit und Wechselwirkungsquerschnitt. Die Baryonen sind Maxwell-Boltzmann-verteilt, mit der mittleren Geschwindigkeit

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 k T}{\pi m_N}}, \quad (2.75)$$

wobei  $m_N$  die Nukleonmasse  $(m_n + m_p)/2$  kennzeichnet. Mit den Wechselwirkungsquerschnitten  $\sigma_{(\gamma d \rightarrow np)}$  für die Deuteron-Photodissoziation sowie  $\sigma_{(np \rightarrow d\gamma)}$  für die Deuteron-Fusion erhalten wir

$$n_n n_p \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_N}} \sigma_{(np \rightarrow d\gamma)} > n_d n_\gamma^* c \sigma_{(\gamma d \rightarrow np)} + \frac{n_d}{2t}, \quad (2.76)$$

wobei  $n_\gamma^*$  die Dichte derjenigen Photonen kennzeichnet, die bei einem Zusammenstoß mit einem Deuteron über ausreichend Energie zur Dissoziation verfügen. Hierzu reicht es allerdings nicht aus, die Planckverteilung ab der relevanten Energie aufzuintegrieren. Wir müssen vielmehr berücksichtigen, dass sowohl die Anzahl dieser Photonen als auch ihre mittlere Energie entscheidend durch Comptonstreuung an Elektronen vermindert werden. Dieser Effekt ist um so mehr von Bedeutung, als sich die entsprechenden Wechselwirkungsquerschnitte von Elektron und Deuteron um mehrere Größenordnungen unterscheiden.

Die gesamte Photonendichte bei einer gegebenen Temperatur  $T$  erhalten wir aus der Bosonendichte (Gl. 2.10) unter Beachtung zweier Polarisationsfreiheitsgrade:

$$n_\gamma = \frac{8\pi}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{E_\gamma^2}{e^{\frac{E_\gamma}{kT}} - 1} dE_\gamma = 16\pi \zeta(3) \left( \frac{kT}{hc} \right)^3, \quad (2.77)$$

Daraus ergäbe sich durch Aufintegrieren der Planckverteilung ab einer Mindestenergie  $B_d \gg kT$  prinzipiell

$$n_{(\gamma > B_d)} = \frac{8\pi}{(hc)^3} \int_{B_d}^\infty E_\gamma^2 e^{-\frac{E_\gamma}{kT}} dE_\gamma = 8\pi \left( \frac{kT}{hc} \right)^3 \left[ \left( \frac{B_d}{kT} + 1 \right)^2 + 1 \right] e^{-\frac{B_d}{kT}}, \quad (2.78)$$

wohingegen lediglich der Bruchteil

$$\frac{n_d \sigma_{(\gamma d \rightarrow np)}}{n_p \sigma_{(\gamma e \rightarrow e\gamma)}} \quad (2.79)$$

effektiv zur Deuterondissoziation beiträgt. Wir erhalten demnach

$$n_\gamma^* = 8\pi \left( \frac{kT}{hc} \right)^3 \left[ \left( \frac{B_d}{kT} + 1 \right)^2 + 1 \right] e^{-\frac{B_d}{kT}} \frac{n_d \sigma_{(\gamma d \rightarrow np)}}{n_p \sigma_{(\gamma e \rightarrow e\gamma)}}. \quad (2.80)$$

Der relevante WW-Querschnitt für die Streuung der Photonen an Elektronen ( $\sigma_{(\gamma e \rightarrow \gamma e)}$ ) ergibt sich in Form des Klein-Nishina WW-Querschnitts (Rybicki & Lightman, 1979)

$$\sigma_{(\gamma e \rightarrow e\gamma)} = 2\pi r_e^2 \left[ \frac{1+\beta}{\beta^2} \left( \frac{2(1+\beta)}{1+2\beta} - \frac{\ln(1+2\beta)}{\beta} \right) + \frac{\ln(1+2\beta)}{2\beta} - \frac{1+3\beta}{(1+2\beta)^2} \right] \quad (2.81)$$

mit dem Elektronenradius

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \quad (2.82)$$

und

$$\beta = \frac{\langle E_\gamma \rangle}{m_e c^2}, \quad (2.83)$$

mit einer mittleren Energie der einfallenden Photonen  $\langle E_\gamma \rangle$

$$\langle E_\gamma \rangle = \frac{1}{n_{(\gamma > B_d)}} \frac{8\pi}{(hc)^3} \int_{B_d}^{\infty} E_\gamma^3 e^{-\frac{E_\gamma}{kT}} dE_\gamma \quad (2.84)$$

$$= kT \left[ \frac{\left( \frac{B_d}{kT} \right)^3}{\left( \frac{B_d}{kT} + 1 \right)^2 + 1} + 3 \right] \simeq B_d + kT. \quad (2.85)$$

Die Näherung im letzten Schritt basiert auf der Annahme  $B_d \gg kT$  wie folgt:

Sei  $y = \frac{B_d}{kT} \gg 1$ , dann ergibt sich für den Bruch innerhalb der eckigen Klammer

$$\frac{y^3}{(y+1)^2 + 1} \simeq \frac{y^3}{(y+1)^2} = \frac{y^3}{y^2(1+\frac{1}{y})^2} \simeq y \left( 1 - \frac{2}{y} \right) = y - 2. \quad (2.86)$$

Als nächstes gilt es den WW-Querschnitt der Photodesintegration,  $\sigma_{(d\gamma\rightarrow np)}$ , geeignet zu modellieren. Wer ausschließlich daran interessiert ist, einen Zahlenwert für  $Y_p$  zu berechnen, der kann hierzu auf eine Zusammenstellung experimenteller Daten von (Rustgi & Pandey, 1989) zurückgreifen. Die notwendige Energieabhängigkeit des WW-Querschnitts erhält man unmittelbar durch eine Approximation im Energieintervall von 2,3 bis 3,6 MeV. Im Anhang wird diese Möglichkeit detailliert dargestellt.

Für uns ist diese Abkürzung leider nicht gangbar, da wir über den reinen Zahlenwert für  $Y_p$  hinaus auch und vor allem an den individuellen Abhängigkeiten von den einfließenden Parametern interessiert sind. Wir benötigen  $\sigma_{(d\gamma\rightarrow np)}$  als Funktion all dieser Parameter und werden schließlich fündig bei Bethe & Longmire (1950) in der Form:

$$\sigma_{BL} = E1 + M1. \quad (2.87)$$

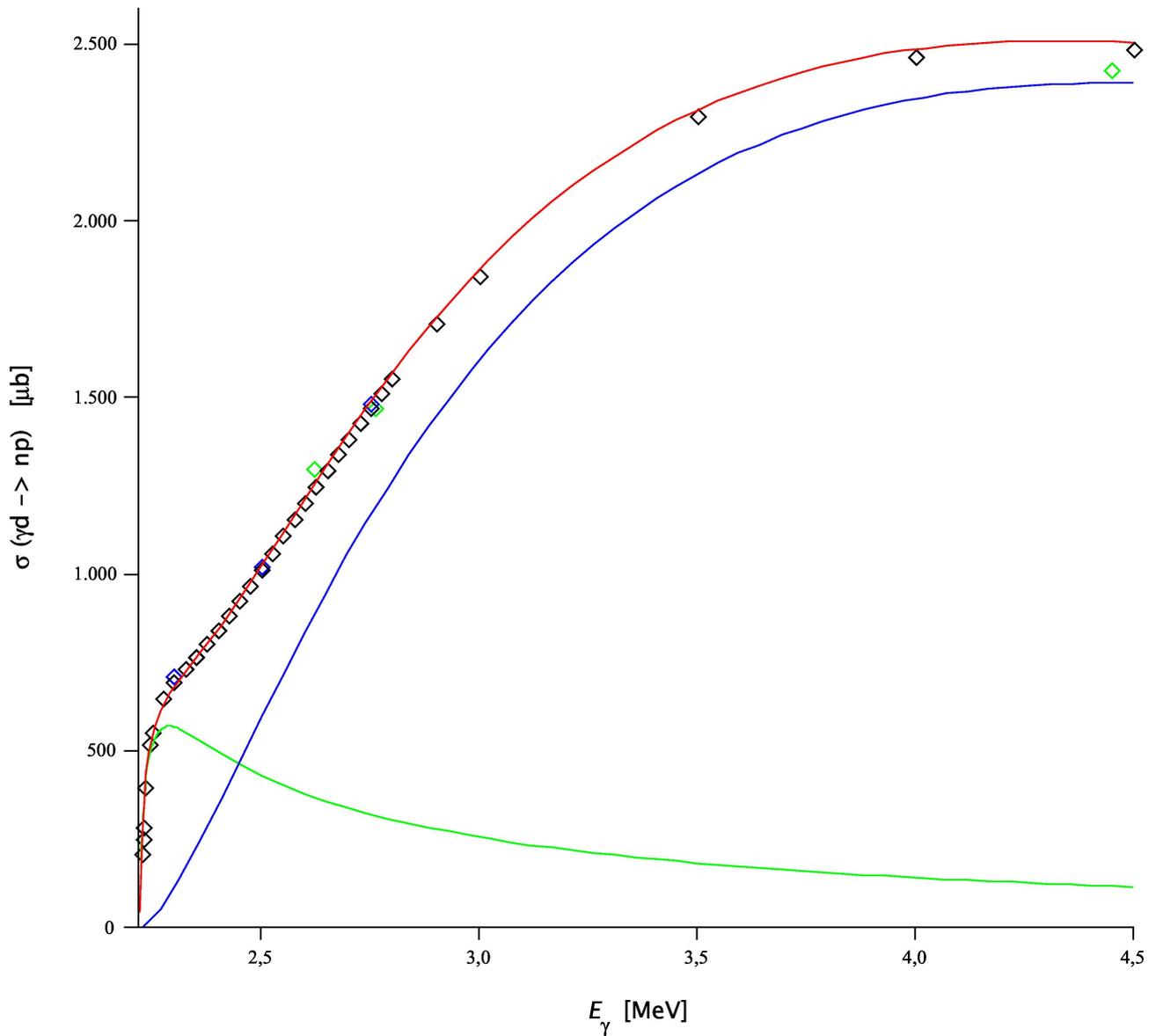
Wir drücken  $E1$ , den Anteil des elektrischen Dipols,

$$E1 = \frac{2}{3} \frac{e^2 \hbar \sqrt{B_d} (E_\gamma - B_d)^{\frac{3}{2}}}{c \epsilon_0 m_N E_\gamma^3 \left(1 - \frac{r_t}{\hbar} \sqrt{m_N B_d}\right)} \quad (2.88)$$

und  $M1$ , den Beitrag des magnetischen Dipols,

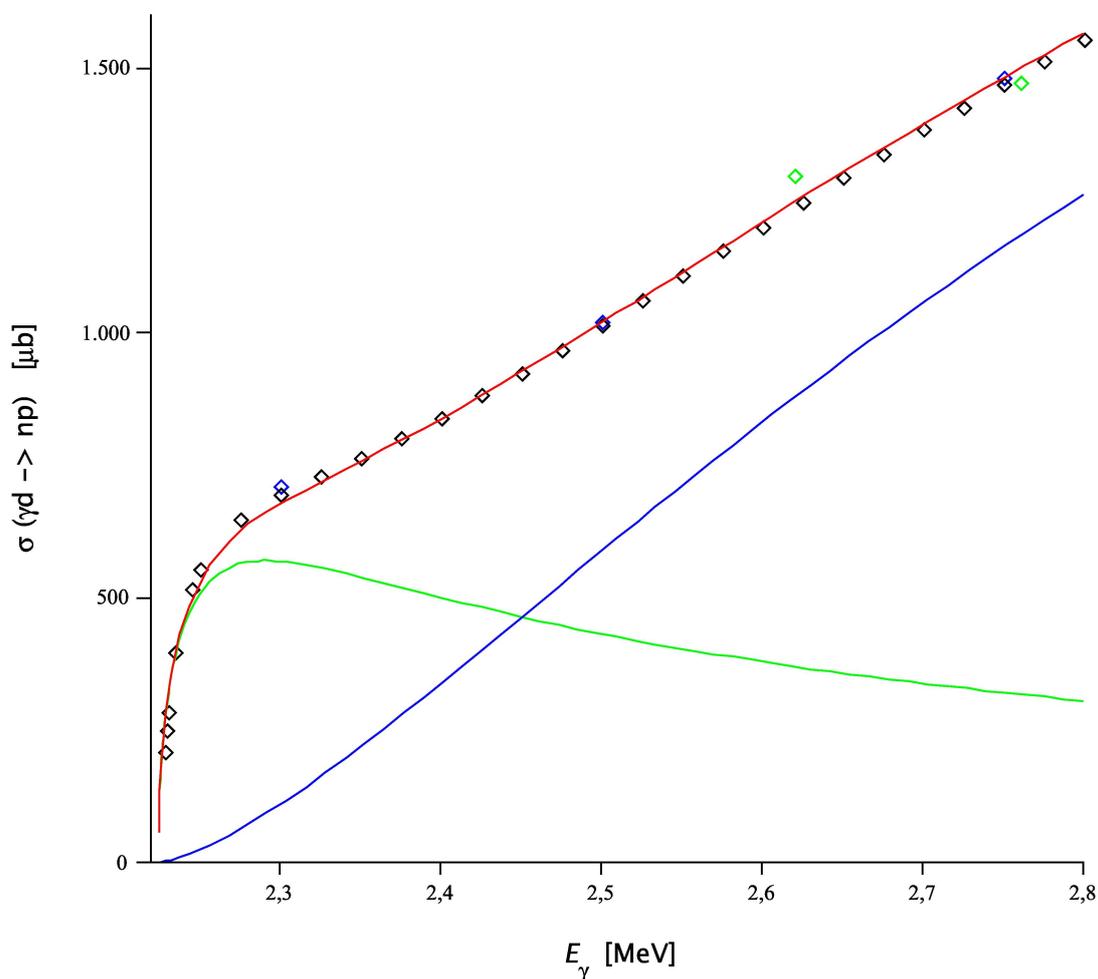
$$M1 = \frac{e^2 \hbar (\mu_p - \mu_n)^2}{6 \epsilon_0 m_N^2 c^3} \sqrt{\frac{B_d}{E_\gamma} - \left(\frac{B_d}{E_\gamma}\right)^2} \cdot \frac{\left(1 - \sqrt{m_N B_d} \frac{a_s}{\hbar} + a_s (r_s + r_t) \frac{m_N B_d}{4\hbar^2} - a_s (r_s - r_t) \frac{m_N (E_\gamma - B_d)}{4\hbar^2}\right)^2}{\left(1 + a_s^2 \frac{m_N (E_\gamma - B_d)}{\hbar^2}\right) \left(1 - \frac{r_t}{\hbar} \sqrt{m_N B_d}\right)} \quad (2.89)$$

als Funktionen von  $B_d$  und  $E_\gamma$  aus.  $\epsilon_0$  ist die Dielektrizitätskonstante des Vakuums,  $a_s$  und  $a_t$  stehen für die Singlet- und Triplet-Streulängen,  $r_s$  und  $r_t$  für Singlet und Triplet effektive Reichweite,  $\mu_p$  und  $\mu_n$  schließlich für die magnetischen Momente von Proton und Neutron. Tragen wir die Anteile  $E1$  und  $M1$ , ihre Überlagerung  $\sigma_{BL}$  sowie Referenzdaten in einem Diagramm zusammen, ergibt sich folgendes Bild:



**Abb. 2.1.:**  $E1$  (blaue Linie),  $M1$  (grüne Linie) sowie deren Überlagerung  $\sigma_{BL}$  (rote Linie) versus  $E_\gamma$  aufgetragen. Die Referenzdaten (Rauten) setzen sich zusammen aus Messdaten aus Rustgi & Pandey (1989) (grün) sowie Messdaten (blau) und Rechenaten (schwarz) aus Arenhövel & Sanzone (1991).

Für unsere Belange ist in erster Linie der Bereich nahe der Dissoziationsschwelle entscheidend, weshalb wir nochmals höher auflösen:



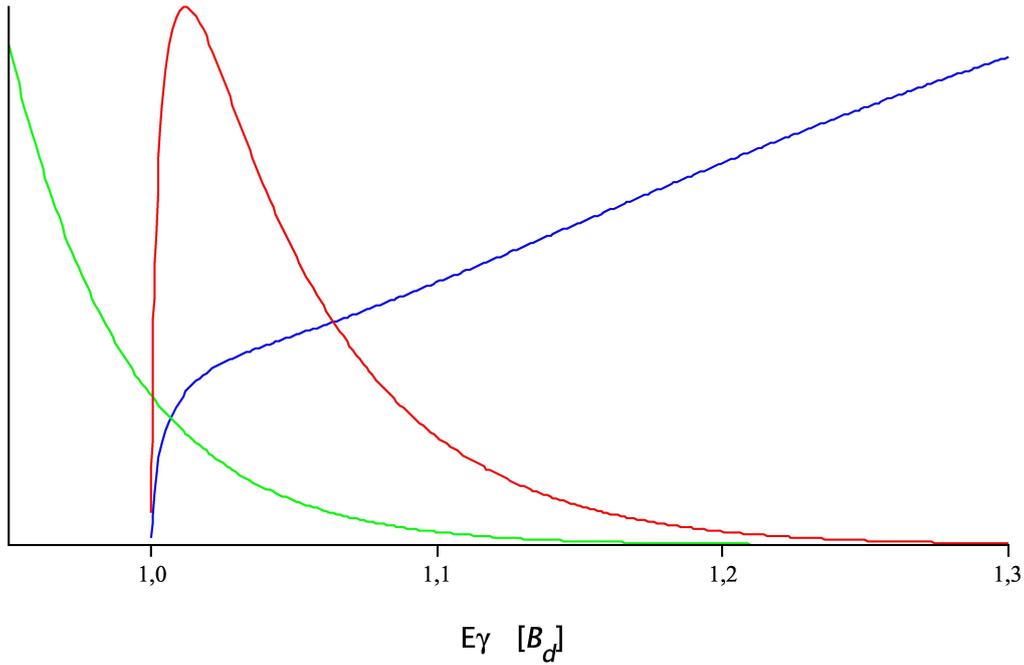
**Abb. 2.2.:**  $E1$  (blau),  $M1$  (grün),  $\sigma_{BL}$  (rot) versus  $E_\gamma$ . Die Referenzdaten (Rauten) setzen sich zusammen aus Messdaten von Rustgi & Pandey (1989) (grün) sowie Messdaten (blau) und Rechenaten (schwarz) aus Arenhövel & Sanzone (1991).

Sehr nahe der Schwelle untertreibt  $\sigma_{BL}$  bekanntermaßen (vergl. Arenhövel & Sanzone (1991) S. 96), insgesamt akzeptieren wir jedoch die erreichte Genauigkeit für unsere Zwecke.

Mit diesem Wechselwirkungsquerschnitt  $\sigma_{BL}$  für eine bestimmte Photonenenergie  $E_\gamma$  sind wir nunmehr eine Wichtung mit der Energieverteilung der Photonen für  $E_\gamma > B_d$  von unserem gesuchten Ausdruck  $\sigma_{(\gamma d \rightarrow np)}$  entfernt:

$$\sigma_{(\gamma d \rightarrow np)} = \frac{1}{n_{(\gamma > B_d)}} \frac{8\pi}{(hc)^3} \int_{B_d}^{\infty} E_\gamma^2 e^{-\frac{E_\gamma}{kT}} \sigma_{BL}(E_\gamma) dE_\gamma. \quad (2.90)$$

Der Integrand zeigt dabei ein interessantes Verhalten, das ein wenig an den Gamow-Peak bei der Wichtung von Planckverteilung und Tunnelwahrscheinlichkeit erinnert. Nachfolgende Graphik verdeutlicht, dass der Hauptbeitrag bei Energien sehr nahe der Schwelle geleistet wird:



**Abb. 2.3.:** Die Verteilung der Hintergrundphotonen (grün),  $\sigma_{BL}$  (blau) und das resultierende Produkt (rot) jeweils nicht maßstabsgetreu in einem Diagramm aufgetragen gegen die Photonenergie in Einheiten der Bindungsenergie des Deuterons.

Allmählich sollten wir darauf achten, unser ursprüngliches Etappenziel nicht aus dem Auge zu verlieren. Wir suchen die Temperatur  $T_N$ , die den effektiven Beginn der Nukleosynthese festlegt. Kehren wir also nochmals zurück zu Relation (2.71). In der für unsere Zwecke besser geeigneten Form

$$\frac{\Gamma_{(np \rightarrow d\gamma)}}{\Gamma_{(\gamma d \rightarrow np)}} = 1 + \frac{\Gamma_{exp}}{\Gamma_{(\gamma d \rightarrow np)}} \quad (2.91)$$

bietet es sich an, die einzelnen Terme separat zu analysieren. Beginnen wir mit

$$\frac{\Gamma_{(np \rightarrow d\gamma)}}{\Gamma_{(\gamma d \rightarrow np)}} = \frac{n_n n_p \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_N}} \sigma_{(np \rightarrow d\gamma)}}{n_d n_\gamma^* c \sigma_{(\gamma d \rightarrow np)}}. \quad (2.92)$$

Wir nutzen die Beziehung

$$n_p = \frac{n_n + n_p}{1 + \frac{n_n}{n_p}} \quad (2.93)$$

und erhalten unter Verwendung von  $\eta$ , dem Verhältnis von Baryonen- zu Photonendichte

$$n_p = \frac{\eta n_\gamma}{1 + \frac{n_n}{n_p}}. \quad (2.94)$$

Eingesetzt in (Gl. 2.92) führt das auf die nützliche Form

$$\frac{\Gamma_{(np \rightarrow d\gamma)}}{\Gamma_{(\gamma d \rightarrow np)}} = \frac{n_n \eta \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_N}} \sigma_{(np \rightarrow d\gamma)}}{n_d \left(1 + \frac{n_n}{n_p}\right) \frac{n_\gamma^*}{n_\gamma} c \sigma_{(\gamma d \rightarrow np)}}. \quad (2.95)$$

Für das Verhältnis  $\frac{n_\gamma^*}{n_\gamma}$  im Nenner erhalten wir unter Verwendung von Gl. (2.77) und Gl. (2.80)

$$\frac{n_\gamma^*}{n_\gamma} = \frac{\left[ \left( \frac{B_d}{kT} + 1 \right)^2 + 1 \right] e^{-\frac{B_d}{kT}} \sigma_{(\gamma d \rightarrow np)} n_d}{2 \zeta(3) \sigma_{(\gamma e \rightarrow e\gamma)} n_p} \quad (2.96)$$

und somit

$$\frac{\Gamma_{(np \rightarrow d\gamma)}}{\Gamma_{(\gamma d \rightarrow np)}} = \frac{3,84 \eta \sqrt{\frac{kT}{m_N c^2}} e^{\frac{B_d}{kT}} \frac{n_p}{n_d} \frac{\sigma_{(\gamma e \rightarrow e\gamma)}}{\sigma_{(\gamma d \rightarrow np)}} \sigma_{(np \rightarrow d\gamma)}}{\left(1 + \frac{n_n}{n_p}\right) \left[ \left( \frac{B_d}{kT} + 1 \right)^2 + 1 \right] \sigma_{(\gamma d \rightarrow np)}}. \quad (2.97)$$

Die Wechselwirkungsquerschnitte  $\sigma_{(np \rightarrow d\gamma)}$  und  $\sigma_{(\gamma d \rightarrow np)}$  sind durch das *Detaillierte Gleichgewicht* verbunden gemäß

$$\frac{\sigma_{(np \rightarrow d\gamma)}}{\sigma_{(\gamma d \rightarrow np)}} \simeq \frac{3 \langle E_\gamma \rangle^2}{2 m_N c^2 (\langle E_\gamma \rangle - B_d)}' \quad (2.98)$$

wobei wir  $\langle E_\gamma \rangle$  wiederum mittels Gl. (2.85) erhalten. Es folgt

$$\frac{\Gamma_{(np \rightarrow d\gamma)}}{\Gamma_{(\gamma d \rightarrow np)}} = \frac{5,755 \eta}{1 + \frac{n_n}{n_p}} \left( \frac{kT}{m_N c^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{B_d}{kT}} \frac{\sigma_{(\gamma e \rightarrow e\gamma)}}{\sigma_{(\gamma d \rightarrow np)}} \left( \frac{n_n}{n_d} \right)^2 \frac{n_p}{n_n}. \quad (2.99)$$

Wenden wir uns nun dem zweiten Term in Gl. (2.92) zu:

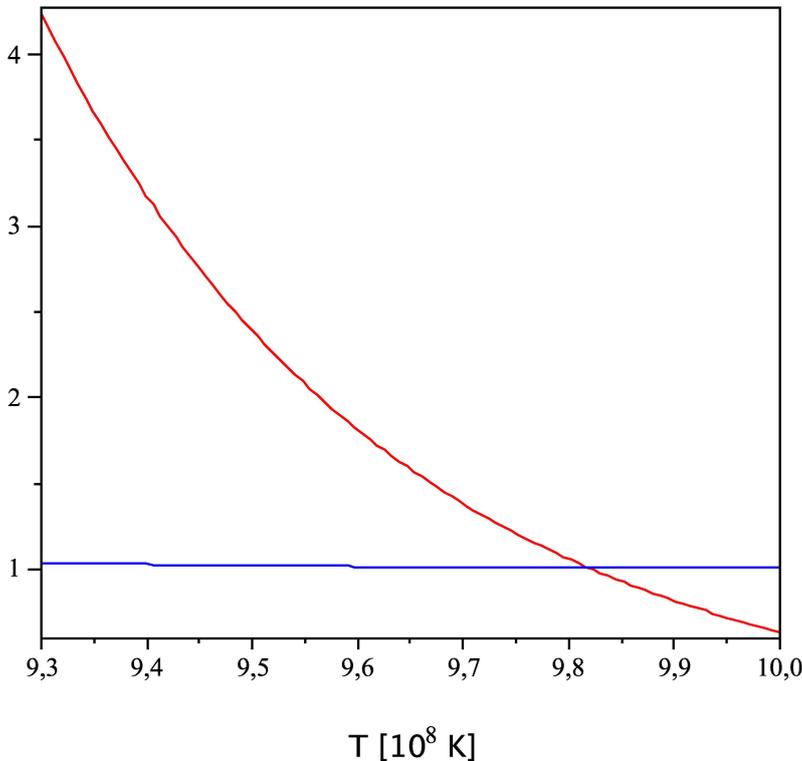
$$\frac{\Gamma_{exp}}{\Gamma_{(\gamma d \rightarrow np)}} = \frac{\frac{n_d}{2t}}{n_d n_\gamma^* c \sigma_{(\gamma d \rightarrow np)}}. \quad (2.100)$$

Mit  $t$  aus Gl. (2.25) und  $n_\gamma^*$  aus Gl. (2.80) eingesetzt erhalten wir

$$\frac{\Gamma_{exp}}{\Gamma_{(\gamma d \rightarrow np)}} = \frac{\sqrt{\frac{32\pi^3 k^4 G g_*(T)}{90 \hbar^3 c^5}} T^2}{2 \cdot 8\pi \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 \left[\left(\frac{B_d}{kT} + 1\right)^2 + 1\right] e^{-\frac{B_d}{kT}}} \frac{n_p \sigma_{(\gamma e \rightarrow e\gamma)}}{n_d \sigma_{(\gamma d \rightarrow np)}} \quad (2.101)$$

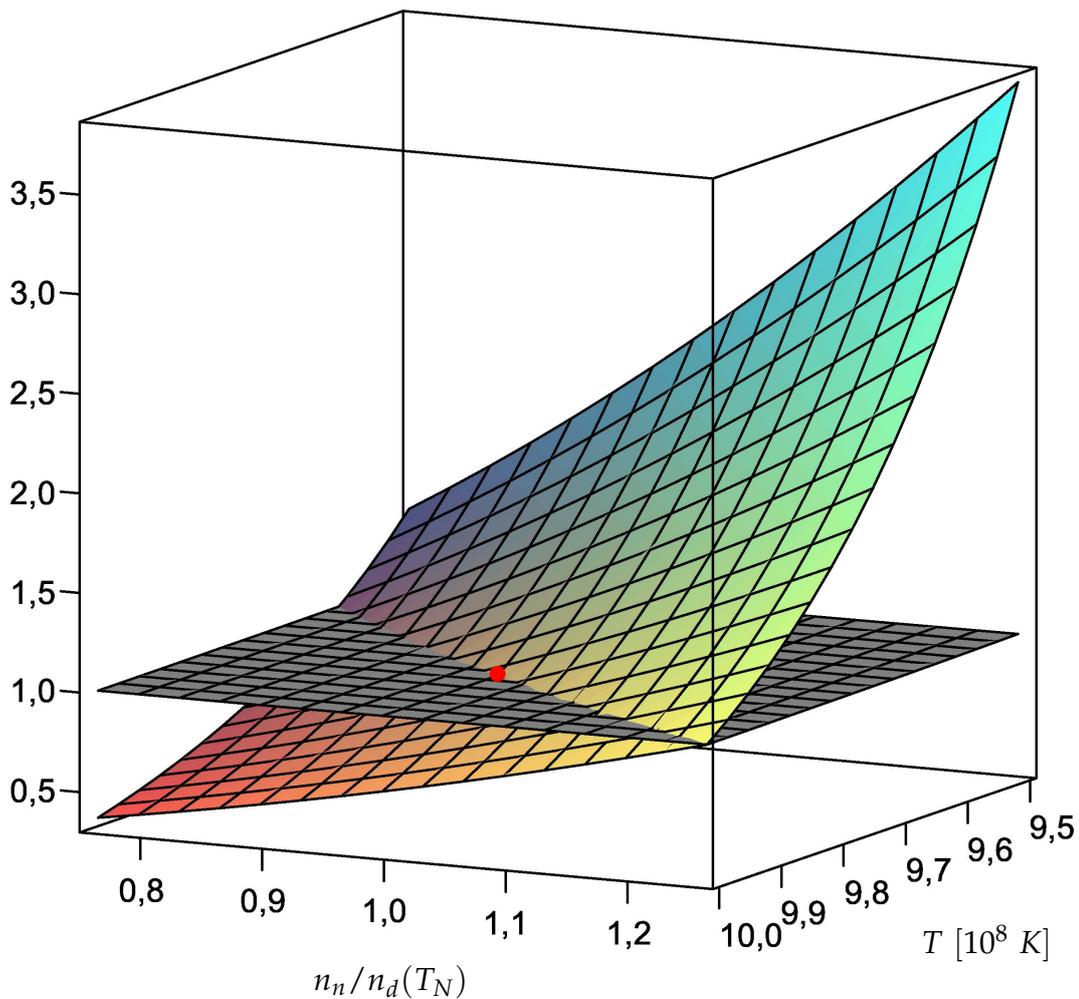
$$= 1,040 \sqrt{\frac{G g_*(T) h^3}{c}} \frac{kT e^{\frac{B_d}{kT}}}{(B_d + kT)^2} \frac{\sigma_{(\gamma e \rightarrow e\gamma)}}{\sigma_{(\gamma d \rightarrow np)}} \frac{n_p}{n_n} \frac{n_n}{n_d}. \quad (2.102)$$

Soweit zur individuellen Betrachtung der Terme (2.99) und (2.102), die beide Exponentialfunktionen von  $T$  sind. Mit dem Erreichen des Wertes "1,01" vermag Term (2.99) bereits die Bedingung (2.91) zu erfüllen, da Term (2.102) noch unterhalb von  $10^{-2}$  liegt. Die Dominanz von  $\frac{\Gamma_{(np \rightarrow d\gamma)}}{\Gamma_{(\gamma d \rightarrow np)}}$  (rot) gegenüber  $1 + \frac{\Gamma_{exp}}{\Gamma_{(\gamma d \rightarrow np)}}$  (blau) wird deutlich, wenn man beide im Bereich um  $t_N$  gegen die Temperatur aufträgt:



**Abb. 2.4.:** Die Terme  $\frac{\Gamma_{(np \rightarrow d\gamma)}}{\Gamma_{(\gamma d \rightarrow np)}}$  (rot) und  $1 + \frac{\Gamma_{exp}}{\Gamma_{(\gamma d \rightarrow np)}}$  (blau) gegen die Temperatur aufgetragen. Der Schnittpunkt kennzeichnet den Start der Nukleosynthese.

Diese Darstellung ist natürlich stark vereinfacht, da wir bei der Temperatur  $T_N$  die Dichte der freien Neutronen gleich der Dichte der gebundenen Neutronen (gleichbedeutend mit den Deuteronendichte) gesetzt haben, gemäß Gl. (2.72). De facto ist der Graph nur eine Schnittlinie der tatsächlichen Hyperfläche, die sich für ein beliebiges Verhältnis  $\frac{n_n}{n_d}(T_N)$  wie folgt ergibt:



**Abb. 2.5.:** Die Terme  $\frac{\Gamma_{(np \rightarrow d\gamma)}}{\Gamma_{(\gamma d \rightarrow np)}}$  (farbig) und  $1 + \frac{\Gamma_{exp}}{\Gamma_{(\gamma d \rightarrow np)}}$  (grau) gegen die Temperatur und gegen das Verhältnis  $\frac{n_n}{n_d}(T_N)$  aufgetragen. Der rote Punkt kennzeichnet den Start der Nukleosynthese für  $\frac{n_n}{n_d}(T_N) = 1$ .

Der Start der Nukleosynthese (roter Punkt) würde somit für  $\frac{n_n}{n_d}(T_N) > 1$  zu höheren Temperaturen und für  $\frac{n_n}{n_d}(T_N) < 1$  zu niedrigeren Temperaturen wandern, entlang der Schnittlinie der beiden Hyperflächen.

Die weitaus wichtigere Erkenntnis aus Abbildung (2.5) besteht jedoch darin, dass der Start der pN eindeutig dominiert wird vom Verhältnis  $\frac{\Gamma_{(np \rightarrow d\gamma)}}{\Gamma_{(\gamma d \rightarrow np)}}$ , während wir den Term  $\frac{\Gamma_{exp}}{\Gamma_{(\gamma d \rightarrow np)}}$  vernachlässigen können. Dies vereinfacht unsere Suche nach  $T_N$  dramatisch und wir erhalten

folgende Bestimmungsgleichung:

$$\frac{5,755 \eta}{1 + \frac{n_n}{n_p}(T_N)} \left( \frac{kT_N}{m_N c^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{B_d}{kT_N}} \frac{\sigma_{(\gamma e \rightarrow e \gamma)}(T_N)}{\sigma_{(\gamma d \rightarrow np)}(T_N)} \frac{n_p}{n_n}(T_N) = 1 \quad (2.103)$$

mit dem zugehörigen Verhältnis von Protonen- zu Neutronendichte

$$\frac{n_p}{n_n}(T_N) = \frac{1}{X_n(T_F)} \exp \left[ \frac{1}{\tau_n} \sqrt{\frac{90 \hbar^3 c^5}{32 \pi^3 k^4 G}} \left( \frac{1}{\sqrt{g_*(T_N)} T_N^2} - \frac{1}{\sqrt{g_*(T_F)} T_F^2} \right) \right] - 1 \quad (2.104)$$

und  $X_n(T_F)$  aus Gleichung (2.63).

Dieser Temperatur lässt sich vermöge (2.25) wieder eine kosmische Zeit  $t_N$  zuordnen. Hierbei ist allerdings Vorsicht geboten bei der Ermittlung der nun relevanten Freiheitsgrade  $g_*(T_N)$ . Wir müssen berücksichtigen, dass die geringen Wechselwirkungen der Neutrinos bereits vor der Annihilation der Elektron-Positron-Paare nicht mehr ausreichen um am thermodynamischen Gleichgewicht teilzunehmen. Die freiwerdende Energie aus der Zerstrahlung wird also ausschließlich auf die Photonen und eben nicht auf die Neutrinos übertragen, wodurch die Neutrinotemperatur  $T_\nu$  gegenüber der Hintergrundstrahlung um den Faktor

$$\frac{T}{T_\nu} = \left( \frac{11}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.105)$$

zurückfällt. Wir nutzen deshalb Beziehung (2.22) für die relativistischen Freiheitsgrade bei unterschiedlichen Temperaturen von Bosonen und Fermionen und erhalten

$$g_*(T_N) = 2 + \frac{7}{8} 2 N_\nu \left( \frac{4}{11} \right)^{\frac{4}{3}} = 3,36. \quad (2.106)$$

Die Beziehung (2.105) und damit auch der Wert von  $g_*$  wird sich im weiteren Verlauf des Universums bis zum heutigen Tage nicht mehr verändern.

## 2.5. Ende der primordialen Nukleosynthese

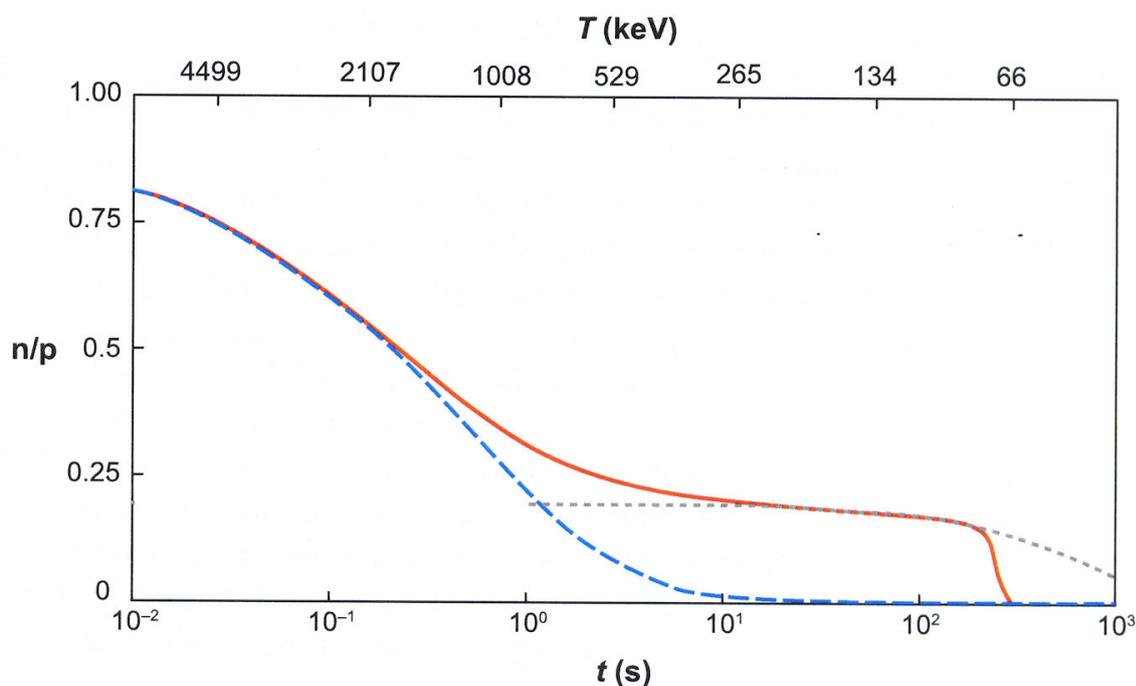
Ist nun erst einmal ausreichend Deuteron vorhanden, so verlaufen alle weiteren Reaktionen, beispielsweise



bei deutlich höheren Bindungsenergien und sind somit unkritisch. Einmal entfesselt, fusioniert die pN äußerst effizient sämtliche noch vorhandene Neutronen über diverse Zwischenprodukte letztendlich zu Helium. Dort kommt die Fusion zum Erliegen, da Kerne mit Massenzahlen  $A=5$  und  $A=8$  nicht ausreichend stabil sind, um als Zwischenprodukte für die Fusion schwererer Elemente zu dienen. Für "raumgreifendere" Reaktionen der Form  $\text{He} + \text{He}$  ist dann der Coulombwall bereits zu hoch, um ihn bei den herrschenden Dichten nennenswert durchtunneln zu können.

Nach ca. 20 min bzw. bei  $T < 30$  keV stehen praktisch keine freien Neutronen mehr zur Verfügung und der Coulomb-Wall setzt der Fusion geladener Kerne ein Ende.

Zur besseren Übersicht fassen wir den zeitlichen Verlauf der freien Neutronen nochmals in einer Graphik (basierend auf Steigman (2007)) zusammen:



**Abb. 2.6.:** Rot eingezeichnet ist der zeitliche Verlauf des  $\frac{n}{p}$ -Verhältnisses (freie Neutronen zu Protonen). Die unterbrochenen Linien kennzeichnen den Betazerfall (grau) und das Gleichgewichtsverhältnis (blau).

Unter der Annahme, dass sämtliche zum Zeitpunkt  $t_N$  noch vorhandenen Neutronen (sowie die selbe Anzahl Protonen) zu Helium fusioniert werden, lässt sich schlussendlich das Massenverhältnis He zur Gesamtbaryonenmasse nach durchlaufener primordialer Nukleosynthese berechnen. Dabei vernachlässigen wir die primordialen Häufigkeiten von Deuterium,  $^3\text{He}$  und Lithium, die zwar ebenfalls Neutronen in ihren Kernen binden, jedoch in einem Maße, das

unterhalb unserer Rechengenauigkeit liegt:

$$Y_p = \frac{\frac{1}{2}n_n m_{He}}{\frac{1}{2}n_n m_{He} + (n_p - n_n)m_p} = \frac{1}{1 + 2\frac{m_p}{m_{He}} \left( \frac{n_p}{n_n}(T_N) - 1 \right)}. \quad (2.109)$$

Wir setzen die Beziehung (2.104) ein und erhalten den gesuchten Ausdruck für die primordiale Häufigkeit von  ${}^4\text{He}$ :

$$Y_p = \frac{1}{1 + 2\frac{m_p}{m_{He}} \left( \frac{1}{X_n(T_F)} \exp \left[ \frac{1}{\tau_n} \sqrt{\frac{90\hbar^3 c^5}{32\pi^3 k^4 G}} \left( \frac{1}{\sqrt{g_*(T_N)T_N^2}} - \frac{1}{\sqrt{g_*(T_F)T_F^2}} \right) \right] - 2 \right)}, \quad (2.110)$$

wobei  $m_{He}$  die Masse des Helium Kernes kennzeichnet und  $X_n(T_F)$  durch Gl. (2.64) gegeben ist. Diesen Ausdruck für  $Y_p$  werden wir für alle unsere weiteren Überlegungen heranziehen und lediglich der guten Ordnung halber geben wir noch an, dass sich unter Verwendung der gängigen Näherung  $m_{He} \simeq 4 m_p$  folgende Vereinfachung ergäbe:

$$Y_p \simeq \frac{2 X_n(T_F)}{\exp \left[ \frac{1}{\tau_n} \sqrt{\frac{90\hbar^3 c^5}{32\pi^3 k^4 G}} \left( \frac{1}{\sqrt{g_*(T_N)T_N^2}} - \frac{1}{\sqrt{g_*(T_F)T_F^2}} \right) \right]}. \quad (2.111)$$

## 2.6. Vergleich mit numerischen und Beobachtungsdaten

Nach der ersten Freude über eine gelungene analytische Berechnung von  $Y_p$  brennen wir nun darauf, anhand einer numerischen Simulation und von Beobachtungsdaten die Genauigkeit unserer Rechnung zu verifizieren.

Für einen Vergleich mit einem numerischen Referenzwert bemühen wir den Standardcode von Wagoner (1973) and Kawano (1992). Unsere Wahl fällt auf diesen Fortrancode - obgleich es bereits neuere Implementierungen mit veränderten Wechselwirkungsraten verschiedener Kernreaktionen gibt (Descouvemont et al., 2004) - weil er problemlos verfügbar ist und für unsere Zwecke ausreichende Genauigkeiten liefert.

Mit Hilfe von Gl. (1.7) und den 5-Jahres-WMAP-Daten für  $100 \Omega_b h^2 = 2,273 \pm 0,062$  (Komatsu et al., 2008) setzen wir den freien Parameter  $\eta = 6,226 \cdot 10^{-10}$ . Für  $\tau_n$  wählen wir

885,7 s (Amsler et al., 2008) und die Leptonasymmetrie erachten wir als vernachlässigbar, d. h.  $\zeta_\alpha = 0$  für  $\alpha = e, \mu$  und  $\tau$ . Der numerische Code liefert:

$$Y_p^{num}(\eta = 6,226 \cdot 10^{-10}, \tau_n = 885,7) = 0,2482$$

Gl. (2.110) ergibt:

$$Y_p(\eta = 6,226 \cdot 10^{-10}, \tau_n = 885,7) = 0,2506.$$

Für den Vergleich mit Beobachtungsdaten greifen wir auf den Wert aus Gl. (1.12) zurück:

$$Y_p^{obs} = 0,2510.$$

Damit liegen wir erfreulich gut aufgehoben zwischen dem numerischen und dem beobachtungsbasierten Wert.

An diesem Punkt wollen wir ein erstes gedankliches Basislager errichten. Mit Hilfe des Ausdrucks (2.110) für das Massenverhältnis  ${}^4\text{He}$  zur Gesamtbaryonenmasse nach durchlaufener pN werden wir uns im folgenden Kapitel an weitere Überlegungen heranwagen.



## 3. Variation der Schlüsselparameter

*“Ich will wissen, wie Gott diese Welt erschaffen hat.  
Ich bin nicht an dieser oder jener Erscheinung interessiert,  
am Spektrum dieses oder jenen Elements.  
Ich möchte Seine Gedanken kennen, das übrige sind Details.  
Was mich wirklich interessiert ist,  
ob Gott bei der Erschaffung der Welt eine Wahl hatte.”*

Albert Einstein (1879-1955)

### 3.1. Motivation

Nach den Mühen der analytischen Berechnung gilt es nun die Früchte dieser Arbeit zu ernten. Die einzelnen Terme zu den Schlüsselstellen der pN ermöglichen es uns, das Netzwerk zu entwirren und die verschiedenen Abhängigkeiten offenzulegen. Im folgenden Kapitel werden wir uns also über den absoluten Wert von  $Y_p$  hinaus insbesondere für die einzelnen Abhängigkeiten von den Schlüsselparametern interessieren. Dabei gilt es zu berücksichtigen, dass  $G, \eta, N_\nu$  und  $h$  unabhängig in den Ausdruck (2.110) einfließen, während  $\tau_n, G_F, Q, m_e$  und  $B_d$  eng durch den Higgs-Vakuum-Erwartungswert  $v$  miteinander verzahnt sind.

Um Missverständnisse auszuschließen, weisen wir an dieser Stelle noch darauf hin, wie im Folgenden der Sprachgebrauch “Variation des Parameters  $x$ ” zu verstehen ist. Grundsätzlich müssten wir dimensionslose Größen wie die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante variieren und in einem zweiten Schritt daraus Rückschlüsse auf dimensionsbehaftete Parameter wie das Plancksche Wirkungsquantum ziehen. Wir beschreiten jedoch den pragmatischen Weg, die Parameter  $x/x_0$ , (wobei  $x_0$  für den heutigen Wert des Parameters steht) direkt zu variieren und behalten den gedanklichen Zwischenschritt stets im Hinterkopf.

Sind die Beziehungen von  $Y_p$  zu den Schlüsselparametern erst einmal herausgearbeitet, lassen sich damit Prognosen zu den Parametern ableiten. Als Anwendungsbeispiele hierzu werden wir auf die mögliche zeitliche Änderung der Größen  $G$  und  $v$  eingehen und Grenzen hierfür ableiten, basierend auf den Referenzdaten zu  $Y_p$ . Des Weiteren werden wir eine Schranke für die Anzahl der Neutrinogenerationen ermitteln.

Mit Hilfe der Beziehung (2.72) haben wir uns die Möglichkeit bewahrt, unser Ergebnis für die anstehenden Variationen fein zu justieren. Bei der Bestimmung von  $t_N$ , dem Zeitpunkt ab dem wir Neutronenerhaltung annehmen, erhalten wir nämlich mit  $\frac{n_n}{n_d}(T_N) = 1,05$  den

beobachtungsbasierten Wert und mit  $\frac{n_n}{n_d}(T_N) = 0,75$  das Ergebnis der numerischen Simulation mit jeweils 4 Stellen Übereinstimmung. Damit sind wir in der Lage, zu den unterschiedlichen Referenzdaten individuelle Variationsergebnisse anzugeben. Für die Erstellung der Graphiken werden wir stets  $\frac{n_n}{n_d}(T_N) = 1$  annehmen, mit der zugehörigen Häufigkeit  $Y_p = 0,2506$ .

Historisch betrachtet wurde die Frage nach veränderlichen Naturkonstanten erstmals in den 30er Jahren des letzten Jahrhunderts von Dirac und Milne aufgeworfen – anhand der Newtonschen Gravitationskonstante. Obgleich diese frühen Hypothesen rasch wieder verworfen wurden, hat sich die grundlegende Idee hartnäckig bis zum heutigen Tage gehalten – unbeeindruckt von einer Vielzahl an ernüchternden Experimenten.

Heutzutage lassen sich drei wesentliche Forschungsfelder abgrenzen:

- Gravitation: Fallexperimente und Sternmodelle.
- Atomphysik: Atomuhren, quasare Absorptionsspektren und Hintergrundstrahlung.
- Kernphysik:  $\alpha$ - und  $\beta$ -Zerfall, Oklo-Reaktor und Nukleosynthese.

Einen sehr guten Überblick zur Suche nach veränderlichen Naturkonstanten und relevante Referenzen erhält man in Uzan (2003). In puncto Higgs Vakuum Erwartungswert wären noch folgende Publikationen anzufügen: (Gaßner & Lesch, 2008; Gaßner, Lesch & Arenhövel, 2008; Dent et al., 2008; Chamoun et al., 2007; Landau et al., 2006; Li & Chu, 2006; Yoo & Scherrer, 2003; Ichikawa & Kawasaki, 2002; Kujat & Scherrer, 2000; Scherrer & Spergel, 1993; Dixit & Sher, 1988).

Ein besonderer Charm – sich dieser Fragestellung mittels pN zu nähern – besteht darin, dass die Beobachtungsdaten aus der Kosmologie stammen, einem Wissenschaftsbereich, der im Vergleich zur elementaren Teilchenphysik auf ganz anderen Größenordnungen beheimatet ist. Wir werden also aus einer makroskopischen Beobachtungsgröße – der primordialen Häufigkeit von  ${}^4\text{He}$  – Einschränkungen ableiten für einen der fundamentalsten Parameter der mikroskopischen Teilchenphysik.

## 3.2. Der Higgs Vakuum Erwartungswert

### 3.2.1. Überblick

Das Standardmodell (Griffiths, 1987) ist seit Jahrzehnten breiter Konsens in der Teilchenphysik. Gruppentheoretisch lässt es sich als  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)$ -Modell abbilden, wobei sämtliche elektroschwach wechselwirkenden Teilchen Basiszustände der Gruppe  $SU(2)_L \otimes U(1)$  und alle stark wechselwirkenden Teilchen Basiszustände der Gruppe  $SU(3)_C$  sind.

Spätestens mit der Eichfeldtheorie zur schwachen Wechselwirkung (Glashow, Salam und Weinberg, 1962) mit der erfolgreichen Vereinigung von elektromagnetischer und schwacher Wechselwirkung hin zur elektroschwachen Wechselwirkung wurde eine eklatante Schwäche des Standardmodells offenbar: Ein Massenterm  $\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$  in der Lagrangedichte verhindert die notwendige Invarianz unter lokalen Phasentransformationen der  $SU(2)_L$ . Etwas weniger formal ausgedrückt bedeutet das, dass sowohl elementare Fermionen als auch die Austauscheteilchen sämtlicher Wechselwirkungen zwangsläufig masselos sind. Experimentell ist hingegen ausreichend belegt, dass Fermionen sowie W- und Z-Bosonen eine von Null verschiedene Masse aufweisen.

Diesen scheinbaren Widerspruch löst man nun durch den sog. Higgs-Mechanismus (Higgs, 1964). Demnach ist das Universum von einem skalaren Feld durchdrungen, dem sog. Higgs-Feld. Dieses Feld wiederum besitzt im Grundzustand einen von null verschiedenen Erwartungswert, den sog. Higgs Vakuüm Erwartungswert ( $v \simeq 246,2$  [GeV/ $c^2$ ]). Das Phänomen, das wir gemeinhin als Masse bezeichnen, wäre also genau betrachtet eine Wechselwirkung der jeweiligen massiven Eichbosonen und elementarer Fermionen mit dem Higgs-Feld. Die tatsächlichen Massen skalieren dabei linear mit dem Higgs Vakuüm Erwartungswert, wodurch dieser Parameter seine fundamentale Bedeutung für die Teilchenphysik erhält.

### 3.2.2. Die Beziehung zwischen $Y_p$ und $v$

Ermutigt durch die hohe Übereinstimmung unseres analytischen Ausdrucks für die primordiale Häufigkeit von  ${}^4\text{He}$  (Gl. 2.110) mit den Beobachtungsdaten, werden wir nun Aussagen über den Higgs Vakuüm Erwartungswert ableiten. Hierzu werden wir im ersten Schritt die Schlüsselparameter unserer Berechnung in Abhängigkeit von  $v$  darstellen um eine Beziehung zwischen  $Y_p$  und  $v$  zu gewinnen.

Die Schlüsselrolle der primordialen Nukleosynthese kommt dem Zeitpunkt  $t_N$  zu, bzw. der zugehörigen Temperatur  $T_N$ , das wissen wir bereits.  $T_N$  wiederum hängt ganz wesentlich von der Bindungsenergie des Deuterons  $B_d$  ab. Das erste Etappenziel wird also darin bestehen, einen Ausdruck für  $B_d$  in Abhängigkeit von  $v$  zu finden.

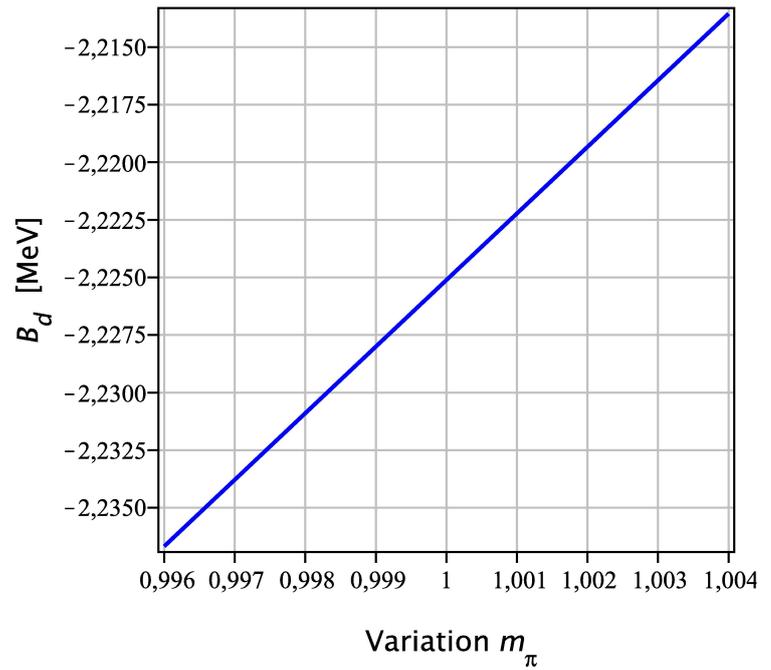
Zunächst berechnen wir  $B_d$  mit Hilfe verschiedener Nukleon-Nukleon-Potentiale (Machleidt et al., 1987; Lacombe et al., 1980; Wiringa et al., 1984) und leiten daraus eine Abhängigkeit zur Pionmasse ab.

Im zweiten Schritt hilft uns dann die Gell-Mann-Oakes-Renner-Relation (Gell-Mann, Oakes und Renner, 1968) entscheidend weiter, d. h. innerhalb der geringen Schwankungsbreite, für die wir uns interessieren ( $|\frac{v-v_0}{v_0}| < 0,5 \%$ ), setzen wir  $v$  proportional zum Quadrat der Pionmasse.

Für die Berechnung der Bindungsenergie des Deuterons greifen wir auf den Originalcode von Arenhövel & Sanzone (1991) zurück. Wir bestimmen die Abhängigkeit von  $B_d$  und  $m_\pi$  ausschließlich durch den Ein-Pion-Austauschanteil der jeweiligen Nukleon-Nukleon-Potentiale und nehmen die restlichen Anteile als unverändert an. Im Detail erhalten wir folgende Ergebnisse:

### Bonn-A Potential (Machleidt et al., 1987)

$m_\pi/m_{\pi 0}$	$B_d$ [MeV]
0,996	-2,236674
0,997	-2,233788
0,998	-2,230901
0,999	-2,228013
1,000	-2,225124
1,001	-2,222233
1,002	-2,219342
1,003	-2,216449
1,004	-2,213555



**Abb. 3.1.:** Die Bindungsenergie des Deuterons basierend auf dem Bonn-A-Potential, in Abhängigkeit der Variation der Pionmasse.

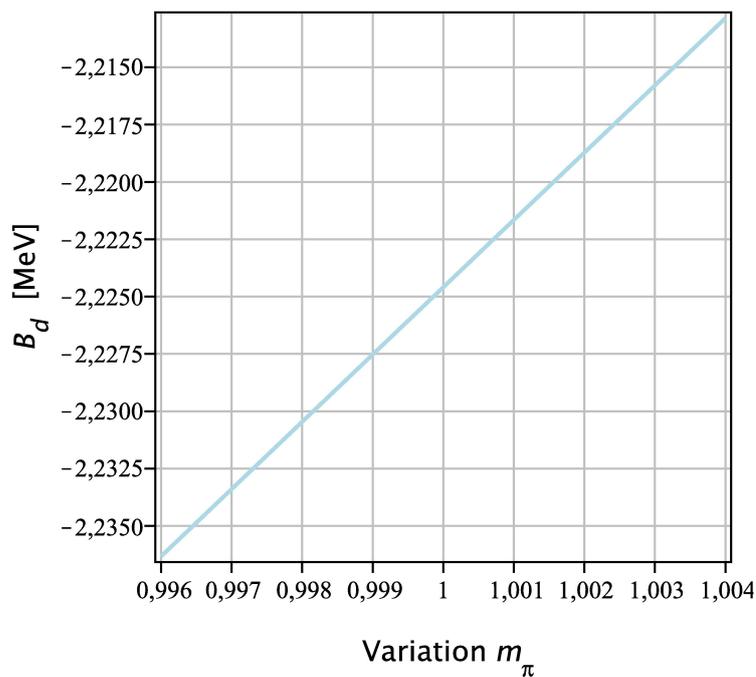
Eine lineare Approximation nach der Methode der minimalen Fehlerquadratsumme ergibt:

$$B_d(v) \simeq B_d(v_0) \left( 2,3 - 1,3 \frac{m_\pi}{m_{\pi 0}} \right). \quad (3.1)$$

Der Index 0 kennzeichnet wiederum, dass es sich um den heutigen Wert handelt.

**Bonn Potential** (Machleidt et al., 1989)

$m_\pi/m_{\pi 0}$	$B_d$ [MeV]
0,996000	-2,236327
0,997000	-2,233397
0,998000	-2,230466
0,999000	-2,227534
1,000000	-2,224601
1,001000	-2,221667
1,002000	-2,218731
1,003000	-2,215794
1,004000	-2,212856



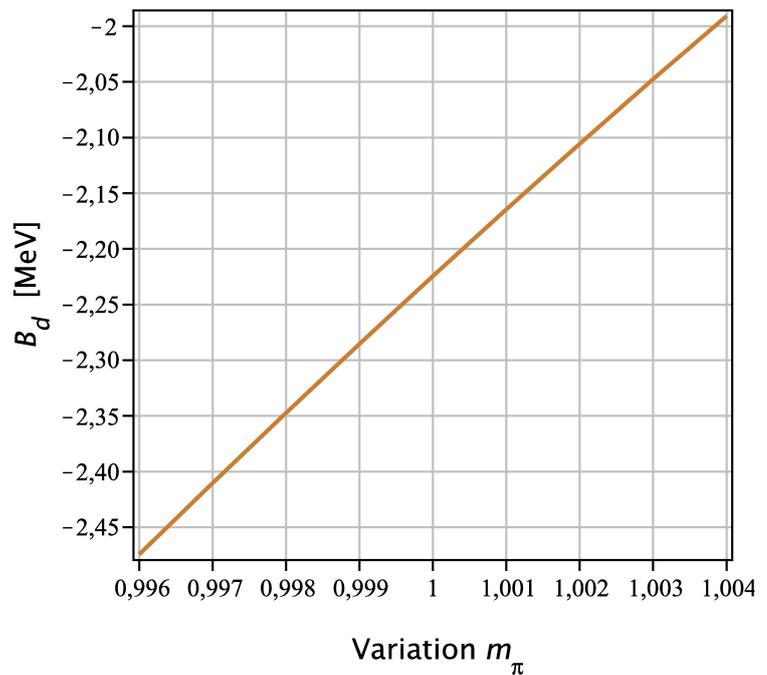
**Abb. 3.2.:** Die Bindungsenergie des Deuterons basierend auf dem Bonn-Potential, in Abhängigkeit der Variation der Pionmasse.

Eine lineare Approximation nach der Methode der minimalen Fehlerquadratsumme ergibt das zum Bonn-A-Potential identische Ergebnis:

$$B_d(v) \simeq B_d(v_0) \left( 2,3 - 1,3 \frac{m_\pi}{m_{\pi_0}} \right). \quad (3.2)$$

### Paris Potential (Lacombe et al., 1980)

$m_\pi / m_{\pi 0}$	$B_d$ [MeV]
0,996000	-2,474365
0,997000	-2,410306
0,998000	-2,347300
0,999000	-2,285340
1,000000	-2,224415
1,001000	-2,164518
1,002000	-2,105639
1,003000	-2,076579
1,004000	-1,990902



**Abb. 3.3.:** Die Bindungsenergie des Deuterons basierend auf dem Paris-Potential, in Abhängigkeit der Variation der Pionmasse.

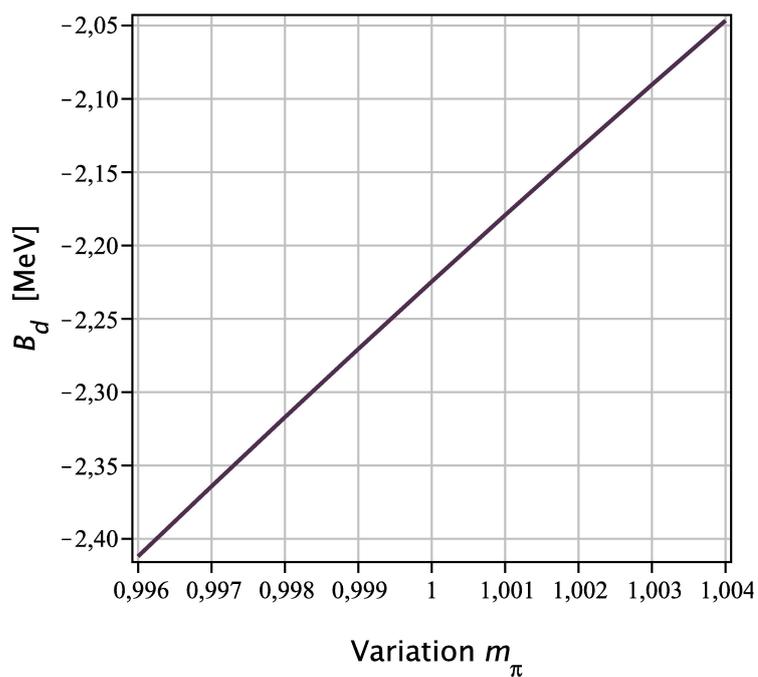
Eine lineare Approximation nach der Methode der minimalen Fehlerquadratsumme ergibt:

$$B_d(v) \simeq B_d(v_0) \left( 28,2 - 27,2 \frac{m_\pi}{m_{\pi 0}} \right). \quad (3.3)$$

Das Paris-Potential weist von allen betrachteten Potentialen die stärkste Abhängigkeit von der Pionmasse auf.

**Argonne V18** (Wiringa et al., 1995)

$m_\pi/m_{\pi_0}$	$B_d$ [MeV]
0,996000	-2,411998
0,997000	-2,364239
0,998000	-2,317082
0,999000	-2,270524
1,000000	-2,224560
1,001000	-2,179186
1,002000	-2,134399
1,003000	-2,090194
1,004000	-2,046568



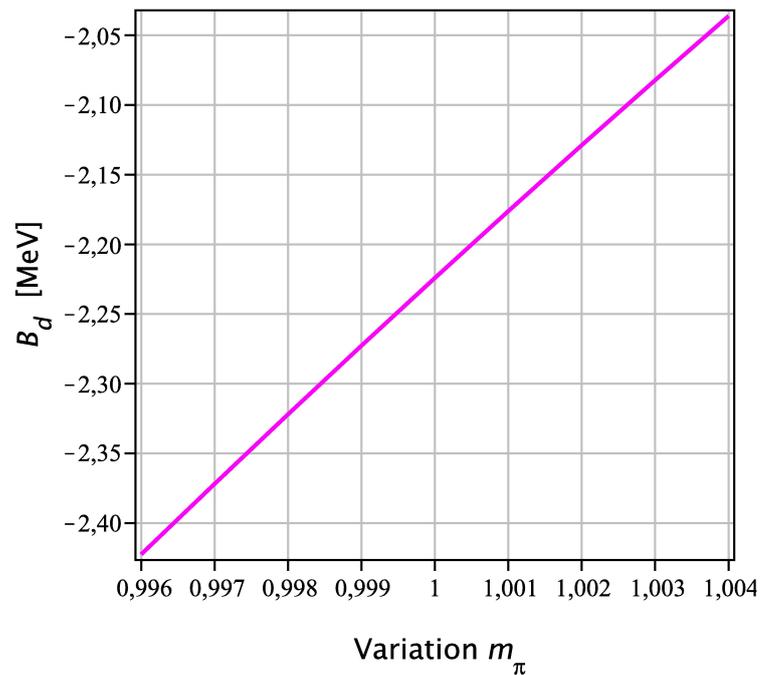
**Abb. 3.4.:** Die Bindungsenergie des Deuterons basierend auf dem Argonne-V18-Potential, in Abhängigkeit der Variation der Pionmasse.

Eine lineare Approximation nach der Methode der minimalen Fehlerquadratsumme ergibt:

$$B_d(v) \simeq B_d(v_0) \left( 21,5 - 20,5 \frac{m_\pi}{m_{\pi_0}} \right). \quad (3.4)$$

### Argonne V14 Potential (Wiringa et al., 1984)

$m_\pi / m_{\pi_0}$	$B_d$ [MeV]
0,996000	-2,422378
0,997000	-2,371820
0,998000	-2,321924
0,999000	-2,272686
1,000000	-2,224101
1,001000	-2,176165
1,002000	-2,128873
1,003000	-2,082222
1,004000	-2,036206



**Abb. 3.5.:** Die Bindungsenergie des Deuterons basierend auf dem Argonne-V14-Potential, in Abhängigkeit der Variation der Pionmasse.

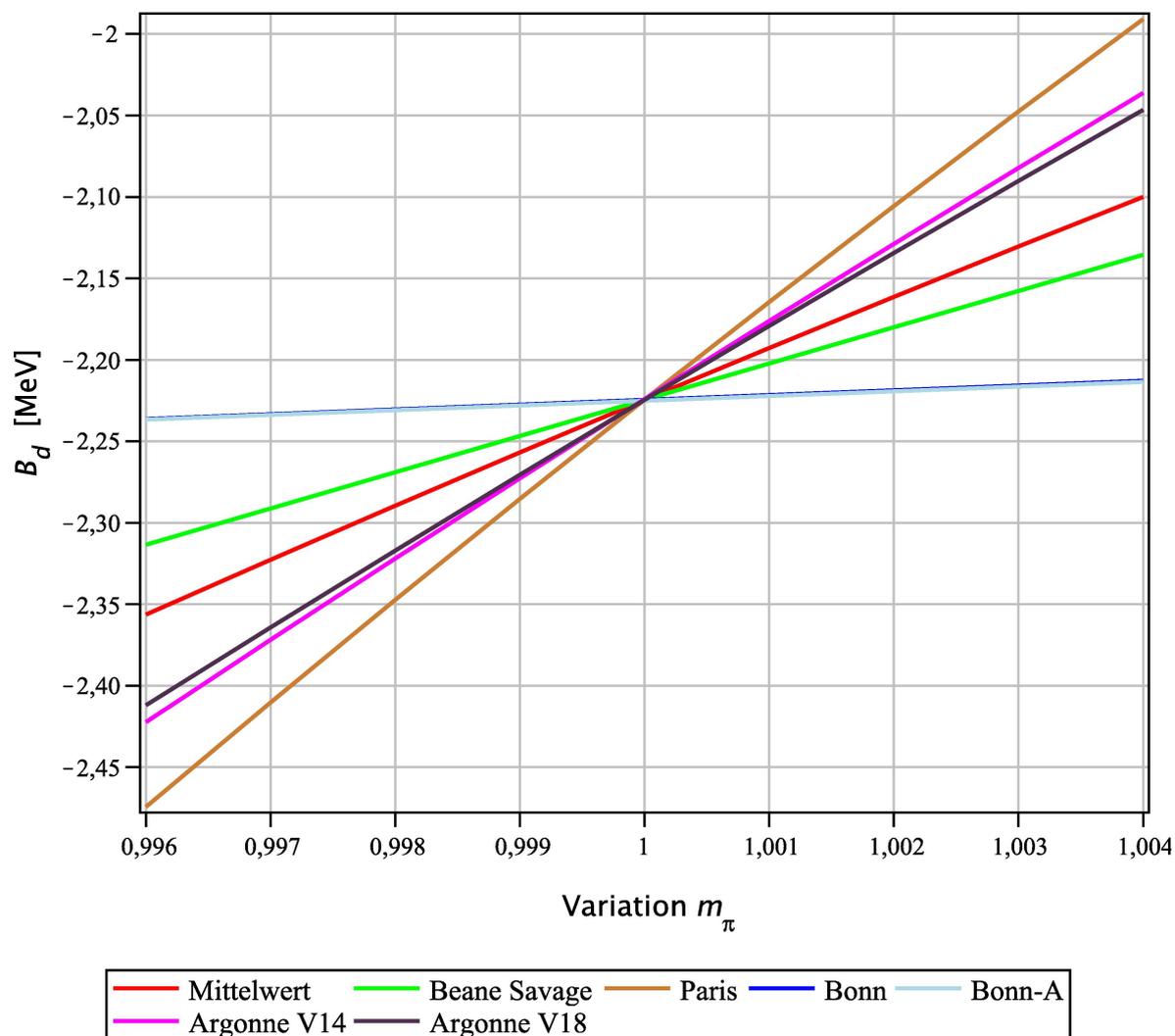
Die lineare Approximation ergibt:

$$B_d(v) \simeq B_d(v_0) \left( 22,7 - 21,7 \frac{m_\pi}{m_{\pi_0}} \right). \quad (3.5)$$

Als Vergleichsdaten zu unseren Berechnungen finden wir bei Yoo & Scherrer (2003) und Müller et al. (2004) (basierend auf Beane & Savage (2003)) den ebenfalls linearisierten Zusammenhang

$$B_d(v) \simeq B_d(v_0) \left( 11 - 10 \frac{m_\pi}{m_{\pi_0}} \right). \quad (3.6)$$

Zur besseren Übersicht tragen wir nochmals alle Abhängigkeiten in einem Diagramm zusammen:



**Abb. 3.6.:** Die Bindungsenergie des Deuterons unter Variation der Pionmasse. Für den Mittelwert wurden die fünf Nukleon-Nukleon-Potentiale herangezogen.

Leider zeigen die verschiedenen Ansätze deutlich unterschiedliche Abhängigkeiten von der Pionmasse. Mangels Alternativen werden wir für unsere Zwecke den linearisierten Mittelwert

$$B_d(v) \simeq B_d(v_0) \left( 15,4 - 14,4 \frac{m_\pi}{m_{\pi_0}} \right) \quad (3.7)$$

verwenden. Innerhalb unserer geringen Schwankungsbreite von  $|\frac{v-v_0}{v_0}| < 0,5\%$  greifen wir auf Gell-Mann, Oakes und Renner (1968) zurück in der Form

$$v \propto m_\pi^2 \quad (3.8)$$

und erhalten schließlich

$$B_d(v) \simeq B_d(v_0) \left( 15,4 - 14,4 \sqrt{\frac{v}{v_0}} \right). \quad (3.9)$$

An jede Veränderung der Bindungsenergie  $B_d$  sind natürlich untrennbar Änderungen der Größen  $n_\gamma^*$ ,  $\langle E_\gamma \rangle$  und der WW-Querschnitte  $\sigma_{(\gamma d \rightarrow np)}$ ,  $\sigma_{(np \rightarrow d\gamma)}$  und  $\sigma_{(\gamma e \rightarrow e\gamma)}$  gekoppelt. Dies liefert einen ersten Eindruck, wie eng verzahnt die einzelnen Parameter letztendlich beitragen. In puncto  $\sigma_{(e\gamma \rightarrow e\gamma)}$  müssen wir zusätzlich berücksichtigen, dass sich proportional mit  $v$  ebenfalls die Masse des Elektrons ändert gemäß

$$m_e(v) = m_e(v_0) \frac{v}{v_0}, \quad (3.10)$$

was wiederum in die Klein-Nishina-Formel (Gl. 2.81) einfließt. Selbst kleine Variationen einzelner Parameter vermögen durchaus unser gesamtes Rechengebäude deutlich zu erschüttern, mit entsprechenden Auswirkungen auf die resultierende primordiale Häufigkeit von  ${}^4\text{He}$ .

In die Freeze-out-Konzentration von Neutronen zu Baryonen  $X_n(T_F)$  fließt der Higgs Vakuum Erwartungswert einerseits über die Fermi-Kopplungskonstante und andererseits über die Energiedifferenz zwischen Ruhemassen von Neutron und Proton ein. Für Letztere berücksichtigen wir, dass der elektromagnetische Anteil in Höhe von  $-0,76$  MeV (Gasser & Leutwyler, 1982) nicht von  $v$  abhängt, während der verbleibende Betrag von  $2,0533317$  MeV auf die Quarkmassen zuzurechnen ist und somit linear mit  $v$  skaliert. Wir erhalten

$$Q \simeq \left( -0,76 + 2,0533317 \frac{v}{v_0} \right) [\text{MeV}]. \quad (3.11)$$

Die Fermi-Kopplungskonstante steht mit  $v$  wiederum in Beziehung gemäß (Dixit & Sher, 1988)

$$G_F(v) = \frac{1}{v^2 \sqrt{2}}. \quad (3.12)$$

Neben der Freeze-out-Konzentration verändert sich natürlich auch der Freeze-out-Zeitpunkt  $t_F$  entsprechend.

Ein weiterer wichtiger Kandidat, der sich unter Variation von  $v$  ändert, ist die mittlere Lebensdauer des freien Neutrons  $\tau_n$ . Wir stützen uns hierzu auf Müller et al. (2004) in der Form:

$$\frac{\tau_n - \tau_{n_0}}{\tau_{n_0}} = 3,86 \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} + 4 \frac{v - v_0}{v_0} + 1,52 \frac{m_e - m_{e_0}}{m_{e_0}} - 10,4 \frac{(m_d - m_u) - (m_{d_0} - m_{u_0})}{(m_{d_0} - m_{u_0})}, \quad (3.13)$$

wobei  $\alpha$  die elektromagnetische Feinstrukturkonstante bezeichnet sowie  $m_d$  und  $m_u$  die Quarkmassen des Up- und des Down-Quarks. (Der Index 0 kennzeichnet wieder, dass es sich um die heutigen Werte handelt.) Diese Beziehung wurde mit Hilfe einer Linearitätsanalyse gewonnen,

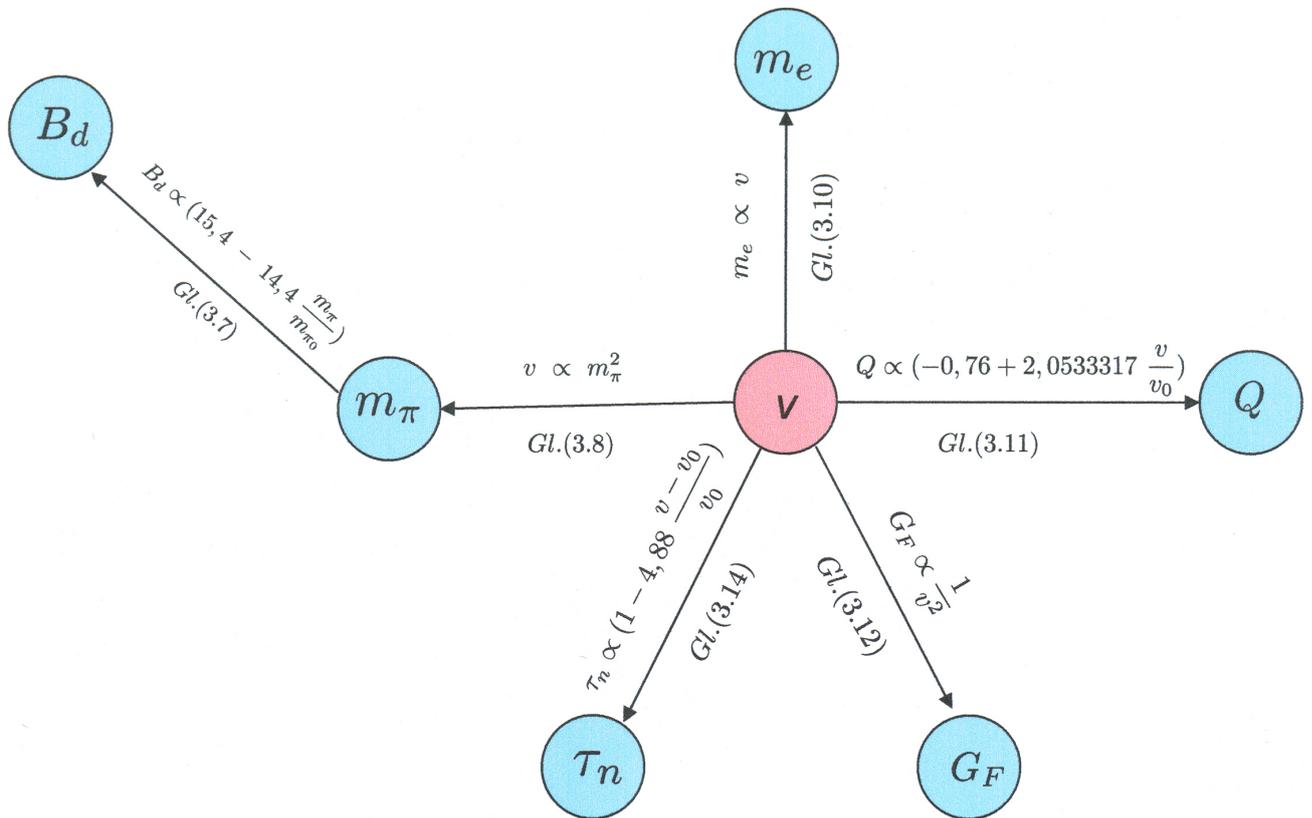
basierend auf dem Standardmodell, wobei die wesentliche Einschränkung darstellt, dass in jedem Schritt nur jeweils einer der Parameter als veränderlich betrachtet und die restlichen als konstant angenommen wurden.

Für unsere Zwecke müssen wir noch berücksichtigen, dass die Massen der Elementarteilchen linear von  $v$  abhängen und erhalten für die gesuchte Beziehung von  $\tau_n$  und  $v$ :

$$\tau_n(v) \simeq \tau_n(v_0) \left(1 - 4,88 \frac{v - v_0}{v_0}\right). \tag{3.14}$$

Dabei haben wir unterstellt, dass die Feinstrukturkonstante nicht von  $v$  abhängt.

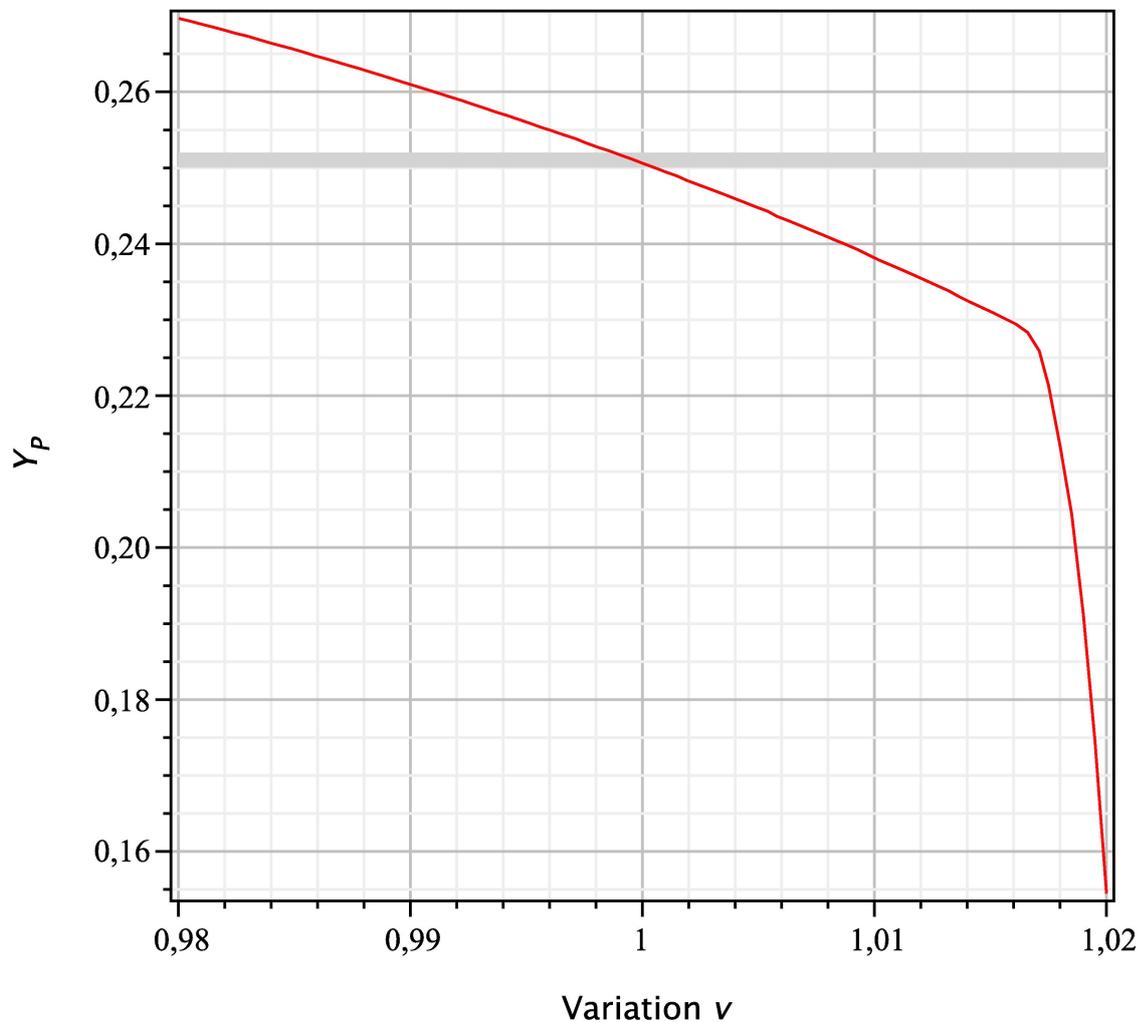
Zur besseren Übersicht tragen wir sämtliche Abhängigkeiten nochmals in einer Graphik zusammen:



**Abb. 3.7.:** Die Abhängigkeiten der Schlüsselparameter vom Higgs Vakuum Erwartungswertes  $v$ .

Damit sind wir auf die Zielgerade eingebogen. Wir ersetzen sämtliche Schlüsselparameter in unserem Ausdruck für  $Y_p$  (Gl. 2.110) durch ihre jeweilige  $v$ -Abhängigkeit und erhalten eine Beziehung zwischen  $Y_p$  und  $v$ . Die algebraische Vereinfachung dieses Ausdruckes ist dann reines "handwerkliches" Arbeiten, die einzige Herausforderung besteht darin, den Überblick über das Netzwerk der gegenseitigen Beeinflussungen der Parametervariationen zu behalten und die ausladenden Terme zu bändigen.

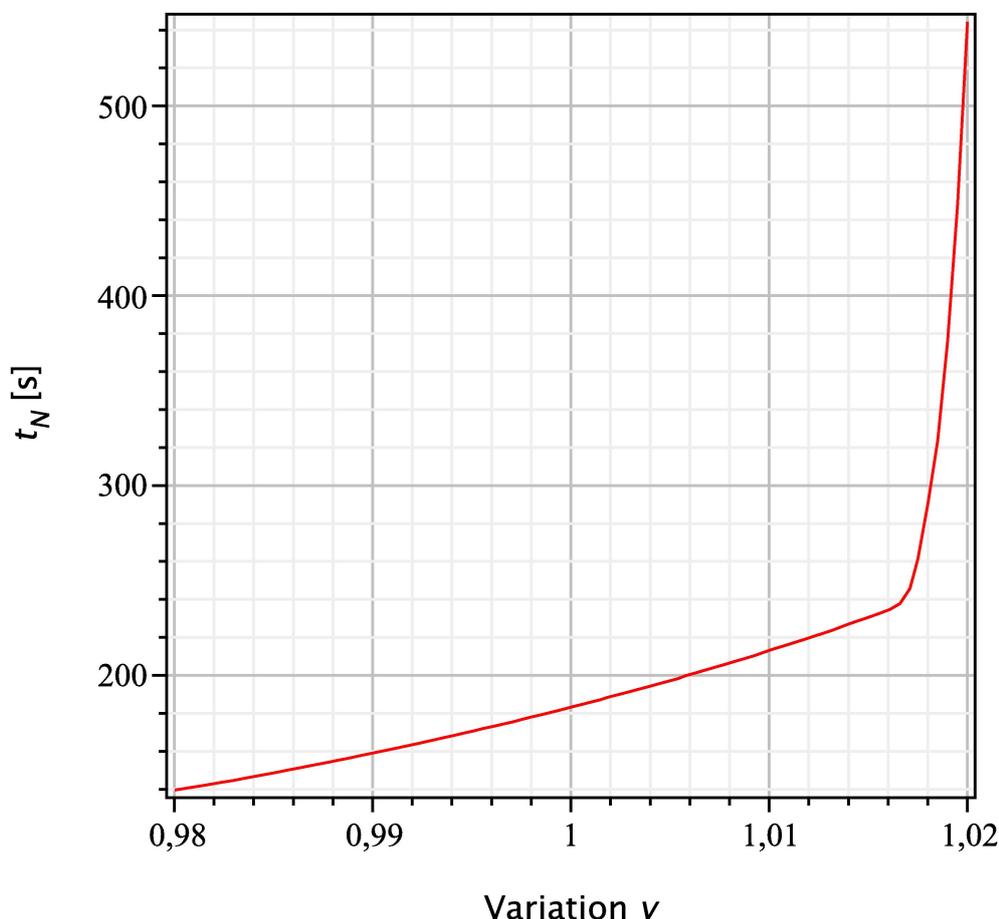
Wie also sieht sie aus, unsere finale Beziehung zwischen der primordialen Häufigkeit von  ${}^4\text{He}$  und dem Higgs Vakuum Erwartungswert? Zunächst eine Graphik:



**Abb. 3.8.:** Die primordiale  ${}^4\text{He}$ -Häufigkeit  $Y_p$  unter Variation des Higgs Vakuum Erwartungswertes  $v$ . Der graue Balken kennzeichnet den Wertebereich der Beobachtungsdaten ( $Y_p = 0,2510 \pm 0,0010$ ) gemäß Gl. (1.12) und (1.13).

Offensichtlich fällt die primordiale Häufigkeit von  ${}^4\text{He}$  streng monoton mit steigendem Higgs Vakuum Erwartungswert und bei  $v \simeq 1,017 v_0$  verstärkt sich dieser Abfall dramatisch. Mit Hilfe der analytischen Berechnung ist dies leicht zu verstehen, obgleich es sich um eine Überlagerung mehrerer Effekte handelt. In erster Linie erhöht sich mit  $v$  die Masse des Pions, wodurch sich die Bindung des Deuterons verringert und die Öffnung des Deuterium-Bottlenecks sich immer weiter hinauszögert. Je später nun die pN in die Phase der effektiven Fusion eintritt, desto weniger freie Neutronen stehen für die Bildung von Helium zur Verfügung - das erklärt den grundlegenden monoton fallenden Trend.

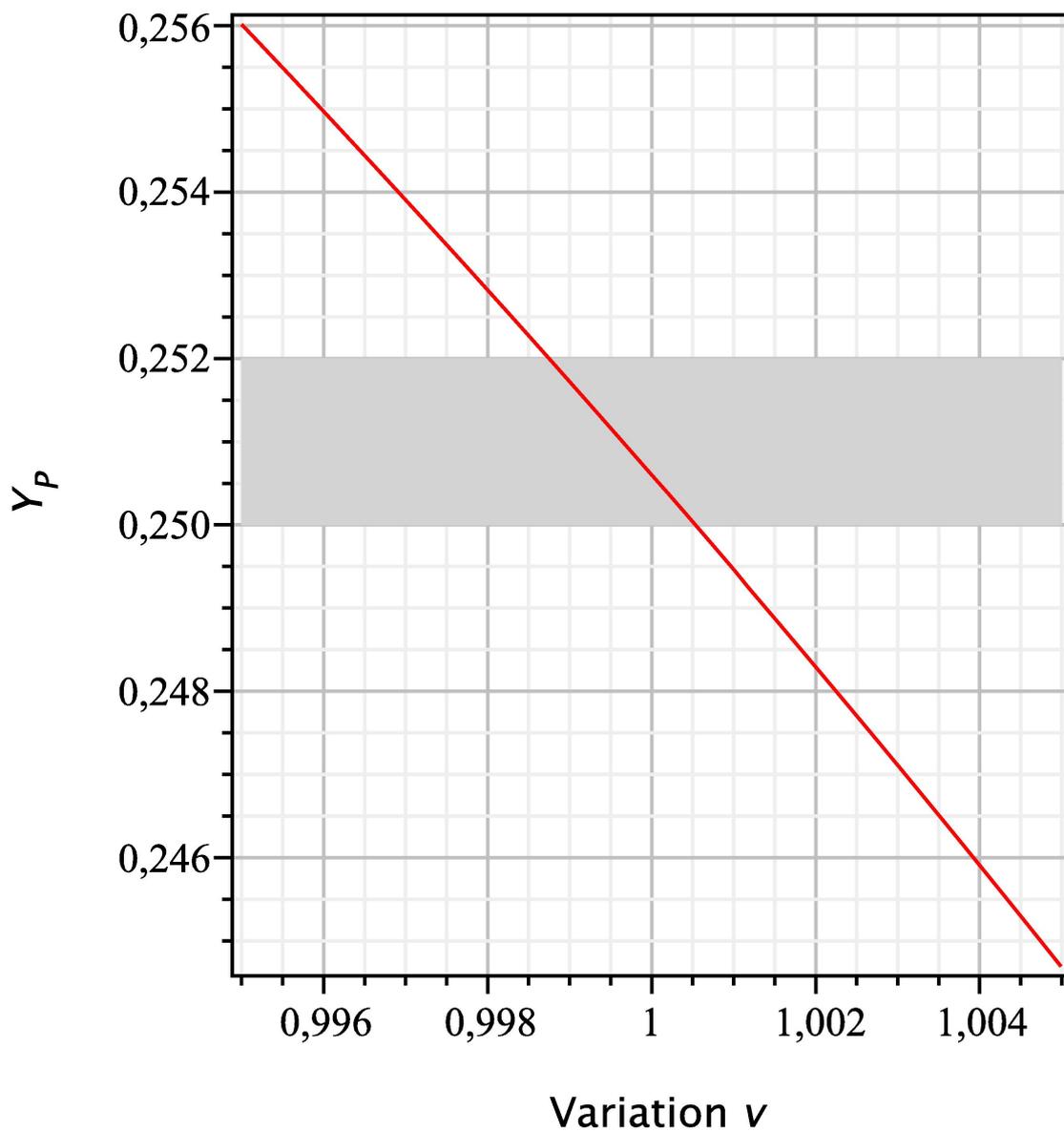
Um den Knick bei  $v \simeq 1,017 v_0$  zu verstehen, müssen wir  $t_N$  näher betrachten:



**Abb. 3.9.:** Der Start der effektiven Fusion  $t_N$  unter Variation des Higgs Vakuum Erwartungswertes  $v$ .

Bei  $v \simeq 1,017 v_0$  ist die Bindungsenergie des Deuterons gemäß Gl. (3.9) bereits unter 2 MeV abgefallen, wodurch der Schwellenwert für die Photodissoziation den steileren Bereich der Planckverteilung (Gl. 2.78) erreicht hat. Jede weitere Verringerung der Schwellenenergie führt nunmehr zu einer dramatisch ansteigenden Anzahl derjenigen Photonen, die über ausreichend Energie zur Dissoziation der Deuterone verfügen. Im Gegenzug verringert sich zwar der mittlere Wechselwirkungsquerschnitt der Photodissoziation gemäß Gl. (2.90) – schließlich hatten wir bereits bei Abbildung (2.3) bemerkt, dass die Photonen nahe der Schwelle über den geringsten Wechselwirkungsquerschnitt verfügen – die schiere Anzahl an “bedrohlichen” Photonen gemäß Gl. (2.80) dominiert jedoch den Gesamteffekt exponentiell und in Verbindung mit einem ebenfalls exponentiellen Zerfall der freien Neutronen (Gl. 2.68) ergibt sich der vorliegende Knick.

Für unsere weiteren Betrachtungen ist dies jedoch nicht weiter von Bedeutung, da wir uns ausschließlich für den Verlauf in der näheren Umgebung der Beobachtungsdaten interessieren, den wir nochmals höher auflösen:

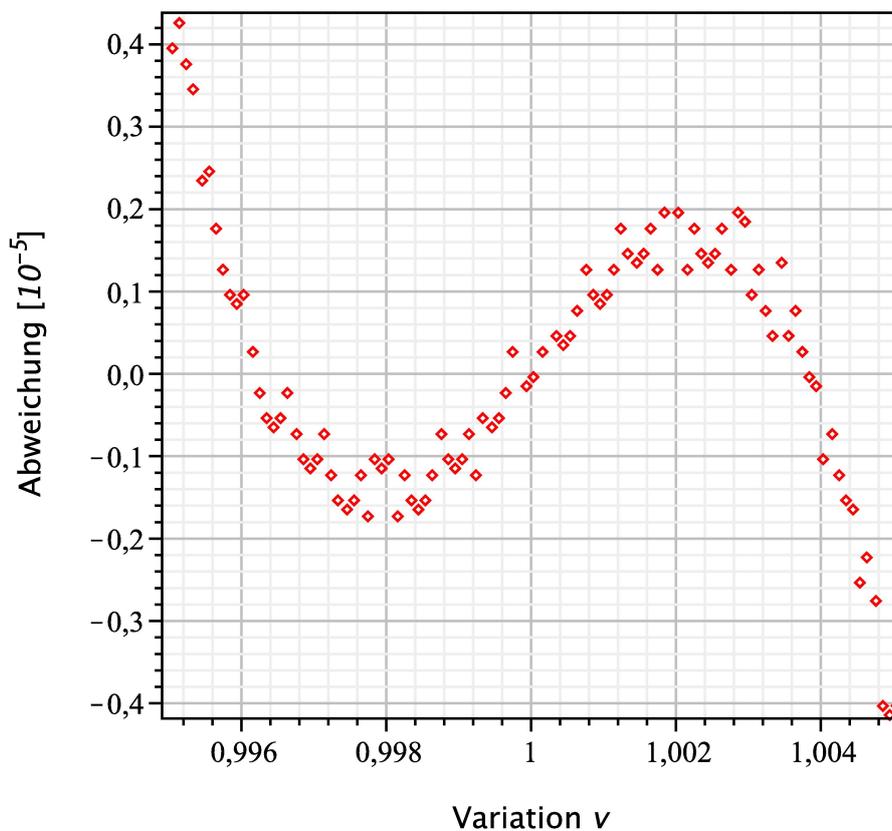


**Abb. 3.10.:** Die primordiale  ${}^4\text{He}$ -Häufigkeit  $Y_p$  unter Variation des Higgs Vakuums Erwartungswertes  $v$ . Der graue Balken kennzeichnet den Wertebereich der Beobachtungsdaten ( $Y_p = 0,2510 \pm 0,0010$ ) gemäß Gl. (1.12) und (1.13).

Nah an den Beobachtungsdaten lassen sich die berechneten Werte – im Rahmen unserer geforderten Genauigkeit von vier Stellen – verlustfrei durch eine Parabel approximieren und der Zusammenhang zwischen der primordialen Häufigkeit von  ${}^4\text{He}$  und dem Higgs Vakuum Erwartungswert nimmt folgende Form an:

$$\Delta Y_P \simeq -1,132 \left( \frac{\Delta v}{v} \right) - 10,0 \left( \frac{\Delta v}{v} \right)^2. \quad (3.15)$$

Um die hohe Übereinstimmung zu verdeutlichen, tragen wir die Abweichung der Approximation gegenüber den exakten Werten in einem Diagramm auf:



**Abb. 3.11.:** Die Abweichung der Approximation (3.15) gegenüber den exakten Werten gemäß Gl. (2.110) versus Variation von  $v$ . Einzelne Ausreißer sind auf Zwischenrundungen zurückzuführen.

### 3.2.3. Zeitliche Änderung des Higgs Vakuum Erwartungswertes

Damit haben wir nun ausreichend "Werkzeug" an der Hand, um uns der nächsten Fragestellung zu widmen: der maximal möglichen zeitlichen Änderung des Higgs Vakuum Erwartungswertes. Als Referenzdaten stehen uns sowohl Beobachtungsdaten (siehe 1.4.4 für Details), als auch numerische Daten zur Verfügung, die wir mit Hilfe des Kawano-Codes (siehe 1.3 für Details) mit folgendem Parametersatz (Amsler et al. (2008) und Komatsu et al. (2008) in Verbindung mit (Steigman, 2006)) erzeugen:

$$\begin{array}{ll}
 N_\nu = 3 & \eta = 6,226 \pm 0,171 \\
 \zeta_e = 0 & \tau_n = 885,7 \text{ [s]} \\
 \zeta_\mu = 0 & G = 6,6742 \cdot 10^{-11} \left[ \frac{m^3}{kg \text{ s}^2} \right] \\
 \zeta_\tau = 0 &
 \end{array}$$

Der numerische Code liefert

$$Y_p^{num} = 0,2482 \pm 0,0003.$$

Gleichung (3.15) ergibt damit folgende Grenzen für eine zeitliche Varianz von  $v$ :

$$Y_p^{num} = 0,2482 \pm 0,0003 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\Delta v}{v} \right| \leq 2,6 \cdot 10^{-4}.$$

Die Beobachtungsdaten in Gl. (3.15) eingesetzt ergeben folgende Schranken:

$$Y_p^{obs} = 0,2510 \pm 0,0010 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\Delta v}{v} \right| \leq 8,8 \cdot 10^{-4}.$$

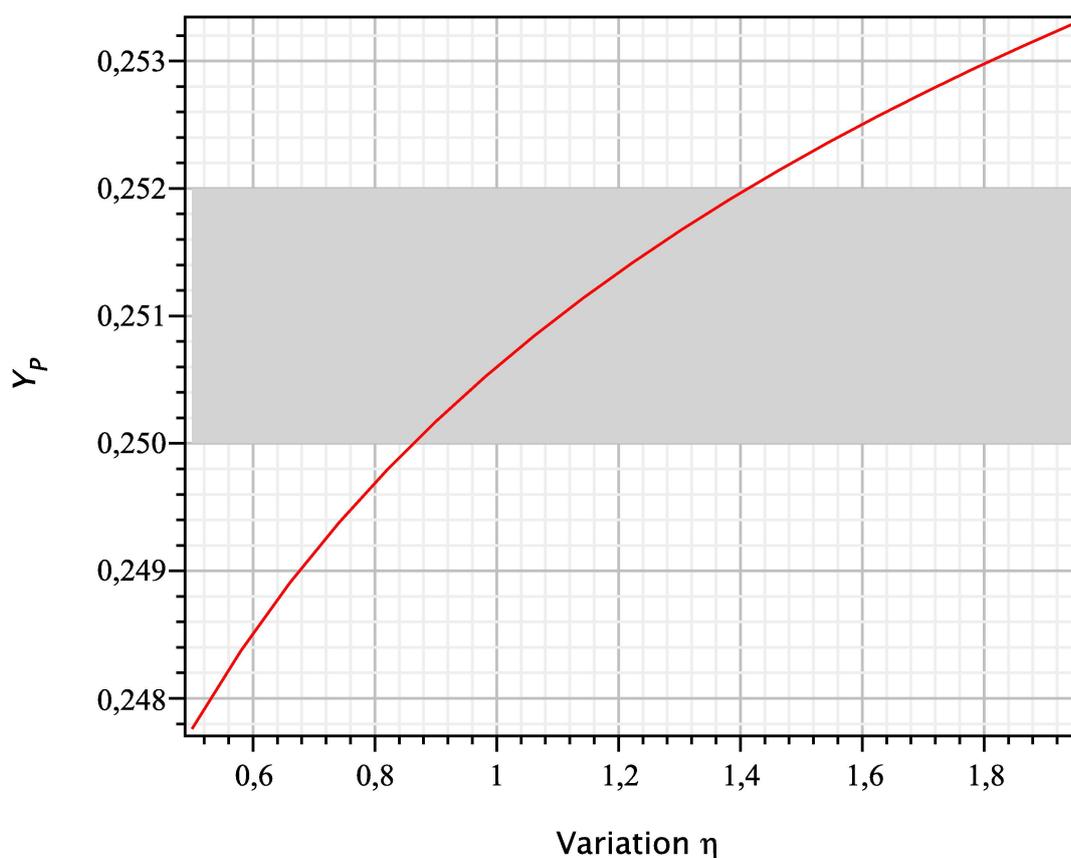
Dies stellt durchaus eine beträchtliche Verbesserung gegenüber den Resultaten der bisherigen Publikationen dar, die wir zum besseren Vergleich in einer Tabelle zusammentragen:

Autoren	Grenzen für $\left  \frac{\Delta v}{v} \right $
Yoo & Scherrer (2003)	$-7 \cdot 10^{-3} \leq \frac{\Delta v}{v} \leq (1,5 - 2,0) \cdot 10^{-2}$
Kujat & Scherrer (2000)	$\left  \frac{\Delta v}{v} \right  \leq 10^{-2}$
Scherrer & Spergel (1993)	$\left  \frac{\Delta v}{v} \right  \leq 5 \cdot 10^{-2}$
Dixit & Sher (1988)	$\left  \frac{\Delta v}{v} \right  \leq 10^{-1}$

**Tab. 3.1.:** Ergebnisse bisheriger Publikationen zur zeitlichen Varianz des Higgs Vakuum Erwartungswertes.

### 3.3. Das Verhältnis von Baryonen- zu Photonendichte

Völlig analog zur Bestimmung der maximalen zeitlichen Änderung des Higgs Vakuum Erwartungswertes können vermöge Gl. (2.110) in Verbindung mit den Referenzdaten zur primordialen  ${}^4\text{He}$ -Häufigkeit prinzipiell sämtliche unabhängigen Parameter eingegrenzt werden. Traditionell wurde in analoger Weise mit Hilfe numerischer Simulationen das Verhältnis der Baryonen- zur Photonendichte bestimmt, allerdings ist  $Y_p$  bekanntermaßen ein schlechter Baryometer, d. h. der Zusammenhang mit  $\eta$  ist vergleichsweise schwach, wie der graphische Verlauf verdeutlicht:

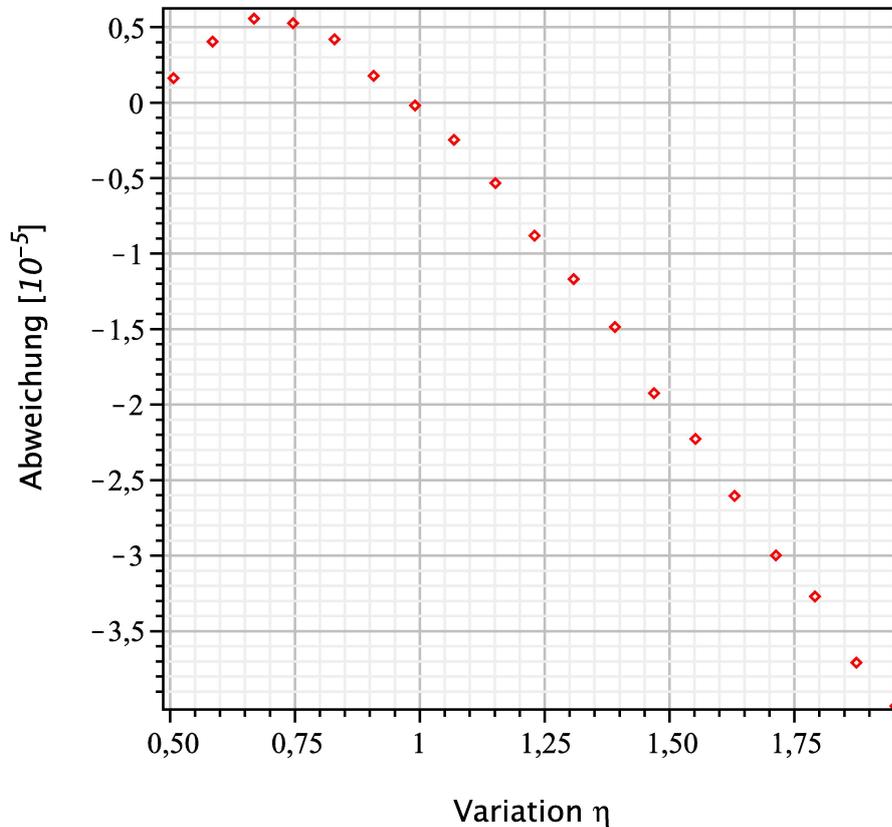


**Abb. 3.12.:** Die primordiale  ${}^4\text{He}$ -Häufigkeit  $Y_p$  unter Variation von  $\eta$ . Der graue Balken kennzeichnet den Wertebereich der Beobachtungsdaten ( $Y_p = 0,2510 \pm 0,0010$ ) gemäß Gl. (1.12) und (1.13).

Der Funktionsverlauf erinnert sehr an den natürlichen Logarithmus, es ergibt sich deshalb eine sehr gute Beschreibung des Graphen durch die Funktion

$$\Delta Y_p \simeq 0,0041 \ln \left( \frac{\Delta \eta}{\eta} + 1 \right). \quad (3.16)$$

Um die hohe Übereinstimmung zu verdeutlichen, tragen wir wiederum die Abweichung der Approximation gegenüber den exakten Werten in einem Diagramm auf:



**Abb. 3.13.:** Die Abweichung der Approximation (3.16) gegenüber den exakten Werten gemäß Gl. (2.110) versus Variation von  $\eta$ .

Der mögliche Wertebereich für  $\eta$  lässt sich damit im Vergleich zur Kombination WMAP (Komatsu et al., 2008) plus Steigmanfit (1.7) nur ungenau eingrenzen zu

$$Y_p^{num} = 0,2482 \pm 0,0003 \quad \Rightarrow \quad 5,8 \cdot 10^{-10} \leq \eta \leq 6,6 \cdot 10^{-10}.$$

$$Y_p^{obs} = 0,2510 \pm 0,0010 \quad \Rightarrow \quad 4,5 \cdot 10^{-10} \leq \eta \leq 7,5 \cdot 10^{-10}.$$

## 3.4. Die Newtonsche Gravitationskonstante

### 3.4.1. Überblick

Im nächsten Schritt werden wir den Einfluss der Newtonschen Gravitationskonstante

$$G = 6,6742 \cdot 10^{-11} \left[ \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \right] \text{ (Amsler et al., 2008)}$$

auf Gl. (2.110) herausarbeiten und eine mögliche zeitliche Veränderung dieser fundamentalen Naturkonstante anhand der vorliegenden Beobachtungsdaten zu  $Y_p$  eingrenzen.

Seit dem heuristischen Ansatz von Dirac 1938 wurden eine Reihe von Methoden entwickelt, einer möglichen zeitlichen Änderung von  $G$  Grenzen zu setzen:

Methoden der Himmelsmechanik (Entfernungsmessungen des Mondes mittels Laserinterferometrie oder des Mars mittels Radar) sowie Methoden basierend auf Neutronensternmassen, dem Alter von Kugelsternhaufen, Zeitnahmen von binären Pulsar Systemen und Helioseismologie.

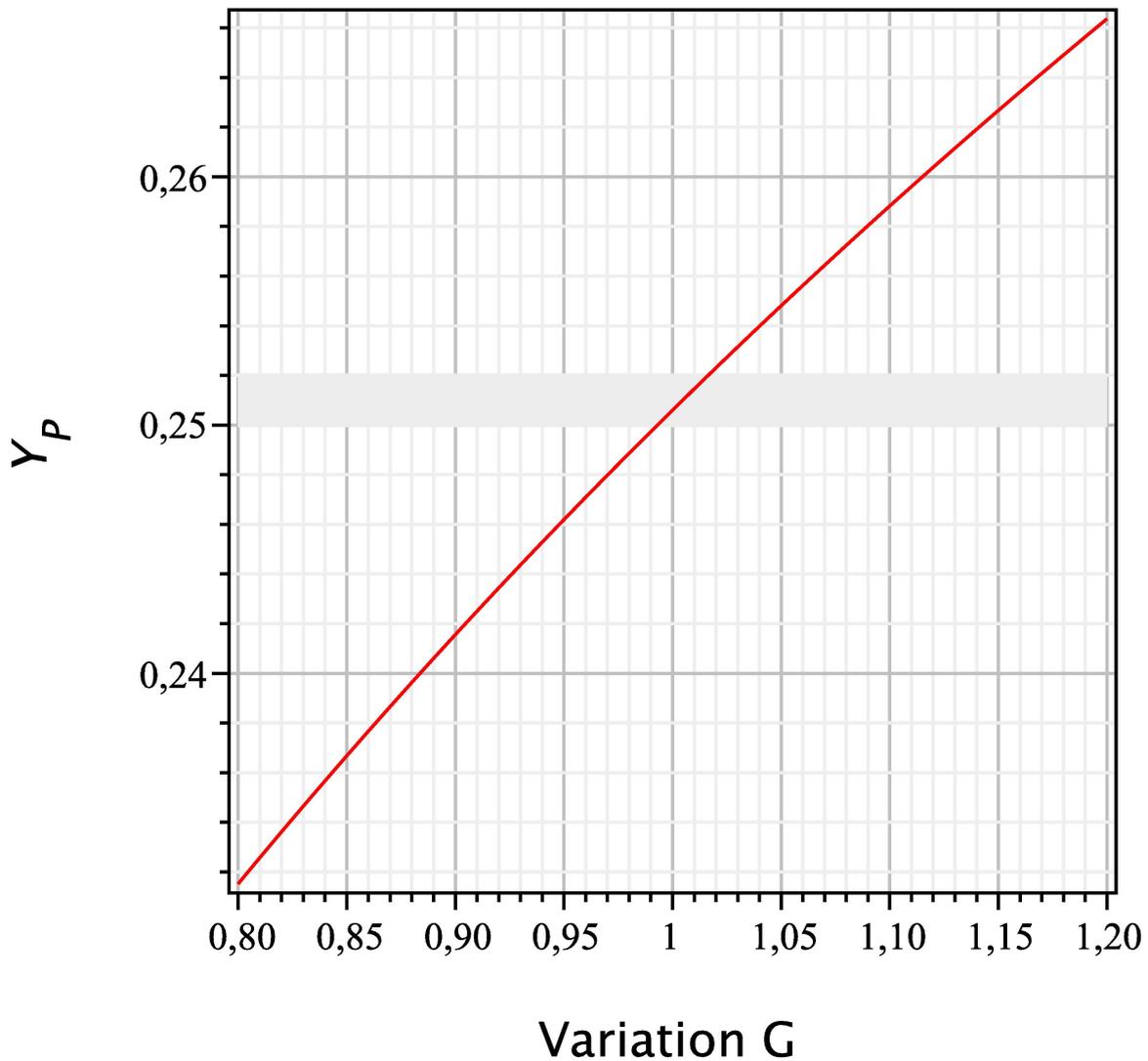
In nachfolgender Tabelle sind einzelne Ergebnisse zur zeitlichen Varianz der Gravitationskonstante zusammengetragen. Für weiterführende Informationen und Referenzen siehe Uzan (2003).

Autoren	Verfahren	Grenzen für $\left  \frac{\Delta G}{G} \right $
Accetta et al., 1990	SBBN	$\left  \frac{\Delta G}{G} \right  \leq (0 \pm 9) \cdot 10^{-13}$
Chandler, 1993	Vikingmessung	$\left  \frac{\Delta G}{G} \right  \leq (0 \pm 1) \cdot 10^{-11}$
Williams et al., 1996	Mondabstandsmessung	$\left  \frac{\Delta G}{G} \right  \leq (0 \pm 8) \cdot 10^{-12}$
Thorsett, 1996	Pulsarfrequenzmessung	$\left  \frac{\Delta G}{G} \right  \leq (-0,6 \pm 4,2) \cdot 10^{-12}$
Del'Innocenti et al., 1996	Kugelsternhaufen	$\left  \frac{\Delta G}{G} \right  \leq (-1,4 \pm 2,1) \cdot 10^{-11}$
Günther et al., 1998	Helioseismologie	$\left  \frac{\Delta G}{G} \right  \leq (0 \pm 1,6) \cdot 10^{-12}$

**Tab. 3.2.:** Ergebnisse bisheriger Publikationen zur zeitlichen Varianz der Gravitationskonstante. Weiterführende Informationen und Referenzen siehe Uzan (2003).

### 3.4.2. Die Beziehung zwischen $Y_p$ und $G$

Wir bedienen uns der pN und Gl. (2.110) liefert folgenden Verlauf:

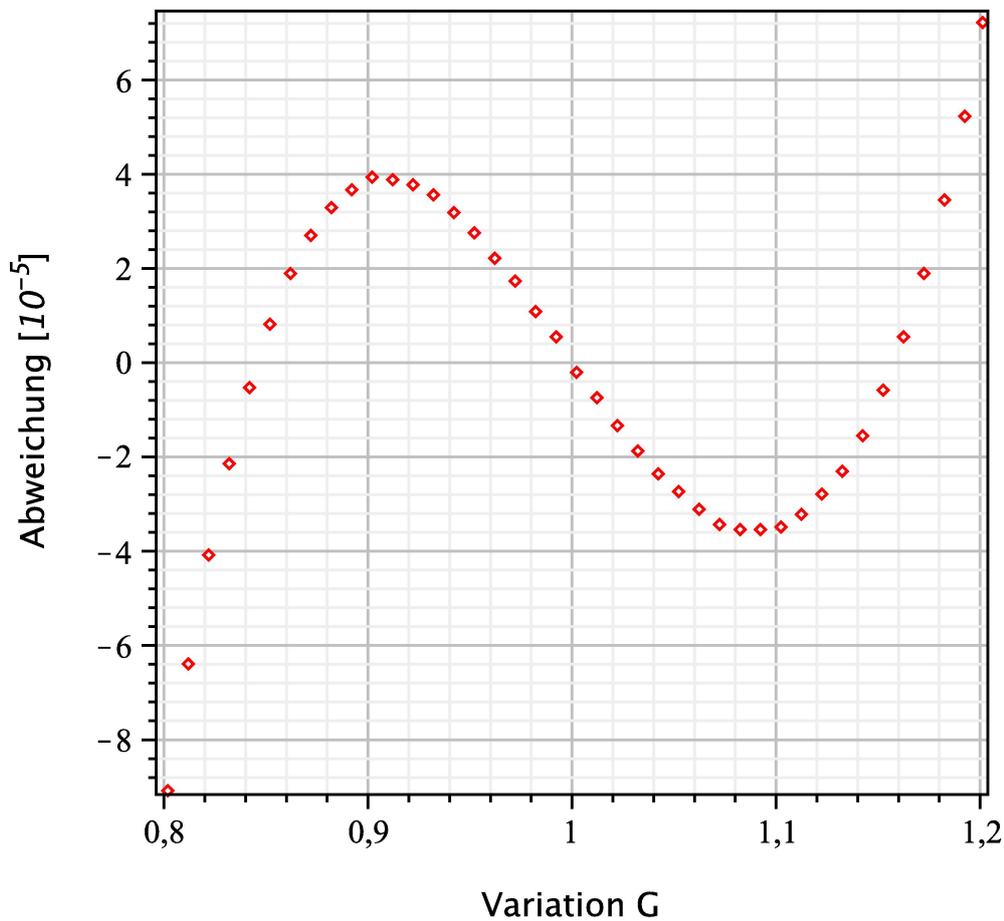


**Abb. 3.14.:** Die primordiale  ${}^4\text{He}$ -Häufigkeit  $Y_p$  versus Gravitationskonstante  $G$ .  
Der graue Balken kennzeichnet den Wertebereich der Beobachtungsdaten ( $Y_p = 0,2510 \pm 0,0010$ ) gemäß Gl. (1.12) und (1.13).

Die Approximation ergibt

$$\Delta Y_p \simeq 0,0867 \left( \frac{\Delta G}{G} \right) - 0,0413 \left( \frac{\Delta G}{G} \right)^2. \quad (3.17)$$

Um die hohe Übereinstimmung zu verdeutlichen, tragen wir die Abweichung der Approximation gegenüber den exakten Werten in einem Diagramm auf:



**Abb. 3.15.:** Die Abweichung der Approximation (3.17) gegenüber den exakten Werten gemäß Gl. (2.110) versus Variation von G.

Abschließend sei noch erwähnt, dass Gl. (3.17) eine zusätzliche Verifikationsmöglichkeit für unsere Berechnung von  $Y_p$  darstellt. Der Vergleich mit numerischen Ergebnissen (Bambi et al., 2005)

$$\Delta Y_p \simeq 0,0877 \left( \frac{\Delta G}{G} \right) \quad (3.18)$$

zeigt eine beruhigende Übereinstimmung.

### 3.4.3. Die zeitliche Änderung der Gravitationskonstante

In bewährter Manier stützen wir uns wiederum auf die Referenzdaten zur primordialen Häufigkeit von  ${}^4\text{He}$  und grenzen mittels Gl. (3.17) eine mögliche zeitliche Varianz der Gravitationskonstante ein:

$$\begin{aligned} Y_p^{num} &= 0,2482 \pm 0,0003 &\Rightarrow & \left| \frac{\Delta G}{G} \right| \leq 3,5 \cdot 10^{-3}. \\ Y_p^{obs} &= 0,2510 \pm 0,0010 &\Rightarrow & \left| \frac{\Delta G}{G} \right| \leq 1,2 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Zu Vergleichszwecken geben wir die mögliche Varianz von  $G$  nochmals in der üblichen Form "Abweichung pro Jahr" an, wobei wir ein Alter des Universums von 13,7 Mrd. Jahren unterstellen:

$$\begin{aligned} Y_p^{num} &\Rightarrow \left| \frac{\Delta G}{G} \right| \leq 2,6 \cdot 10^{-13}. \\ Y_p^{obs} &\Rightarrow \left| \frac{\Delta G}{G} \right| \leq 8,4 \cdot 10^{-13}. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit Tabelle 3.2 zeigt, dass unsere Schranken durchaus konkurrenzfähig sind, zumal wir einen linearen Zusammenhang zwischen  $G$  und  $t$  unterstellt haben, während in zahlreichen Arbeiten der Ansatz  $G \propto t^{-\beta}$  mit  $|\beta| < 10^{-2}$  Anwendung findet.

## 3.5. Die Anzahl der Neutrinofamilien

Interpretieren wir zunächst  $N_\nu$  gemäß seiner ursprünglichen Bedeutung als Anzahl der Neutrino-Generationen, so würde eine zusätzliche Neutrinosorte, zusammen mit dem korrespondierenden Antiteilchen, den Faktor  $g_*$  zum Zeitpunkt  $t_F$  gemäß Gl. (2.60)

$$g_*(T_F) = 2 + \frac{7}{8} (4 + 2 N_\nu) \quad (3.19)$$

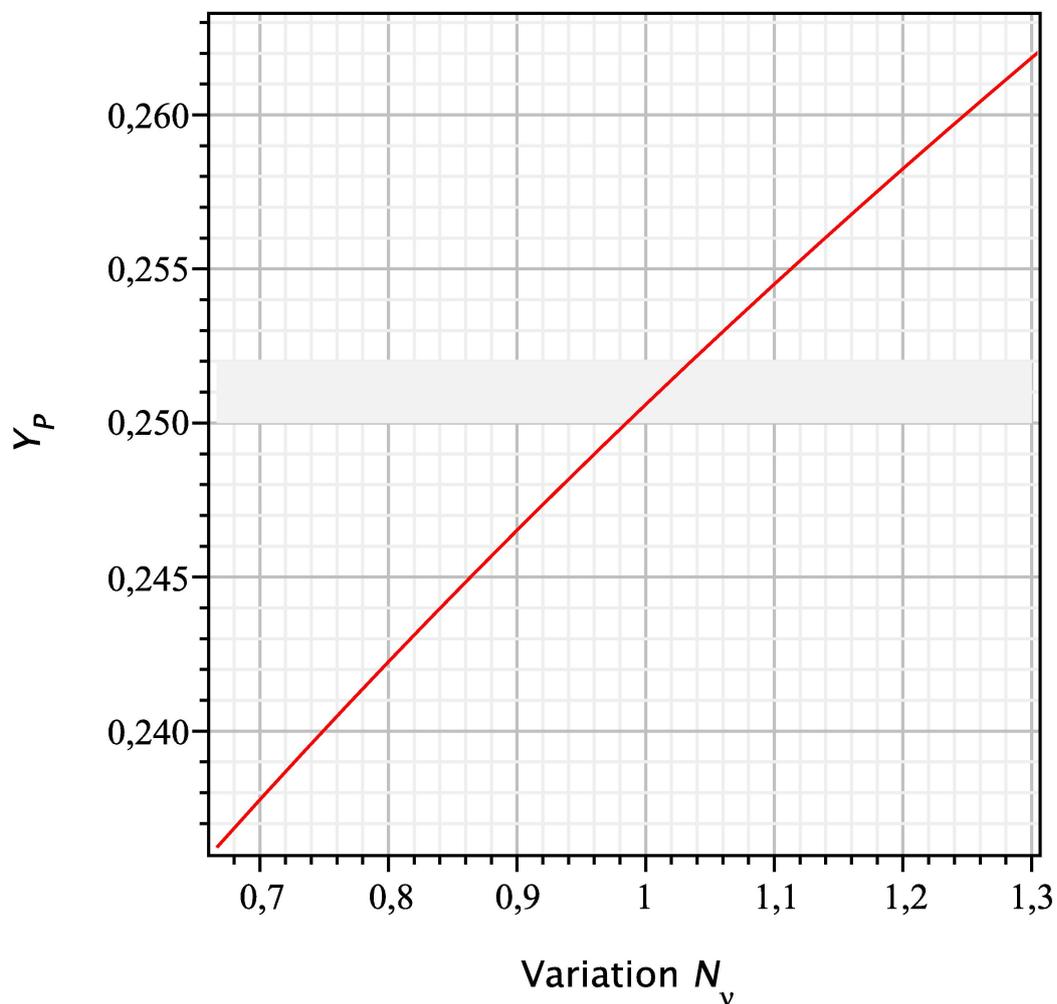
um 13,6 % und zum Zeitpunkt  $t_N$  gemäß Gl. (2.106)

$$g_*(T_N) = 2 + 2 \frac{7}{8} N_\nu \left( \frac{4}{11} \right)^{4/3} \quad (3.20)$$

um 16,3 % erhöhen. Mit anderen Worten,  $N_\nu$  nimmt in zweierlei Hinsicht Einfluss auf das Ergebnis der primordialen Nukleosynthese:

- Das Universum expandiert bei einer gegebenen Temperatur um so schneller, je mehr relativistische Teilchen vorhanden sind. Dadurch verschiebt sich der Freeze-out-Zeitpunkt zu früheren Zeiten.
- Der effektive Start der Nukleosynthese wird früher erreicht, wodurch weniger Neutronen zerfallen, d. h. das zugehörige Neutron-Proton-Verhältnis steigt.

Diese Verschiebungen würden sich wiederum auf die resultierende primordiale  ${}^4\text{He}$ -Häufigkeit folgendermaßen auswirken:



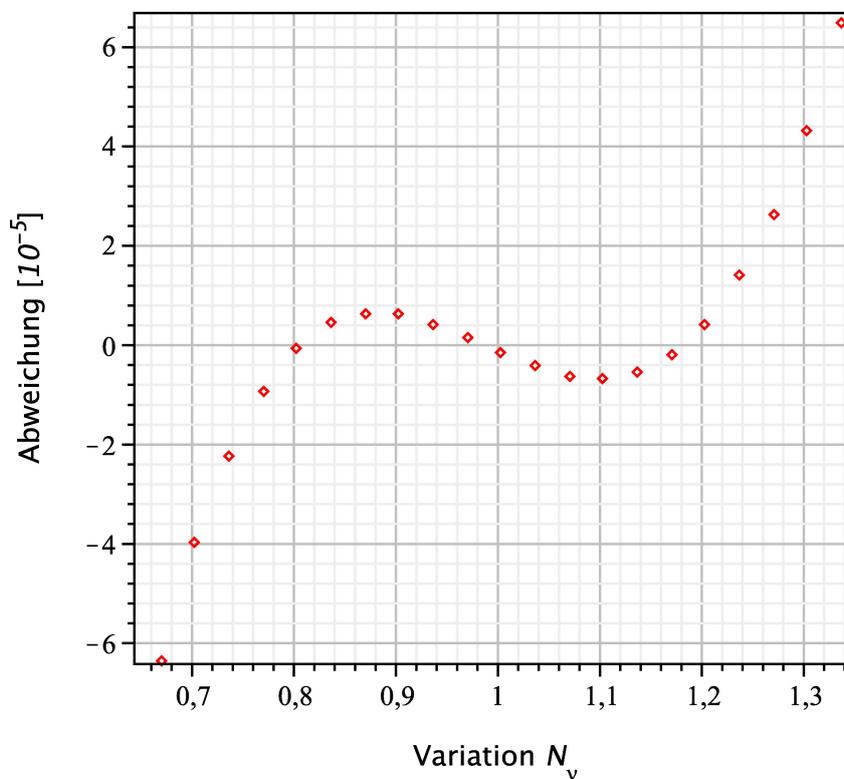
**Abb. 3.16.:** Die primordiale  ${}^4\text{He}$ -Häufigkeit  $Y_p$  unter Variation von  $N_\nu$ .  
Der graue Balken kennzeichnet den Wertebereich der Beobachtungsdaten ( $Y_p = 0,2510 \pm 0,0010$ ) gemäß Gl. (1.12) und (1.13).

Bereits für eine weitere Neutrinofamilie liegt der zugehörige Wert von  $Y_p$  außerhalb sämtlicher Beobachtungswerte.

Durch Approximation gewinnen wir die Beziehung

$$\Delta Y_P \simeq 0,040 \left( \frac{N_\nu - 3}{3} \right) - 0,00876 \left( \frac{N_\nu - 3}{3} \right)^2. \quad (3.21)$$

und tragen die Abweichung gegenüber den exakten Werten in einem Diagramm auf:



**Abb. 3.17.:** Die Abweichung der Approximation (3.21) gegenüber den exakten Werten gemäß Gl. (2.110) versus Variation von  $N_\nu$ .

Die Existenz einer vierten Neutrinofamilie können wir damit ruhigen Gewissens ausschließen.

Wie bereits erwähnt, wird  $N_\nu$  jedoch über seine traditionelle Bedeutung hinaus auch als ein zentraler Parameter für mögliche Erweiterungen der SBBN genutzt (siehe 1.5).  $N_\nu$  stellt gewissermaßen das Einfallstor für zusätzliche hypothetische Elementarteilchen dar und ist dabei nicht notwendigerweise als ganzzahlig zu verstehen. Jedes relativistische Teilchen trägt nämlich gemäß Gl. (2.22) statistische Freiheitsgrade bei, auf die sich das thermodynamische Gleichgewicht verteilen kann.

Zur Eingrenzung möglicher Erweiterungen der SBBN gewinnen wir folgende nichtganzzahligen Schranken:

$$Y_p^{num} = 0,2482 \pm 0,0003 \quad \Rightarrow \quad N_\nu \leq 3,023.$$

$$Y_p^{obs} = 0,2510 \pm 0,0010 \quad \Rightarrow \quad N_\nu \leq 3,075.$$

### 3.6. Das Plancksche Wirkungsquantum

Zu guter Letzt wenden wir uns dem Planckschen Wirkungsquantum  $h = 6,62606896 \cdot 10^{-34}$  [Js] (Amsler et al., 2008) zu. Bei der Frage der Veränderlichkeit der Naturkonstanten wird das dimensionsbehaftete Plancksche Wirkungsquantum stets in Form der dimensionslosen Sommerfeldschen Feinstrukturkonstante

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c}$$

untersucht, d. h. implizit im Verbund mit Elementarladung und Lichtgeschwindigkeit. Als Meilensteine hierzu wären die Oklo-Reaktoren und quasare Absorptionslinien zu nennen. Eine detaillierte Darstellung und relevante Referenzen findet man wiederum in (Uzan, 2003).

Unter allen Parametern, die wir in diesem Kapitel untersucht haben, wollen wir die nachfolgenden Ergebnisse zu  $h$  auf kleinster Flamme kochen. Vermutlich werden wir mit Hilfe der verwendeten Modelle den diversen elektromagnetischen Einflüssen nicht vollständig gerecht. Trotzdem wollen wir auf diese mögliche Anwendung unserer analytischen Berechnung hinweisen und zumindest das Fundament für weitergehende Betrachtungen bereiten.

Auf der Suche nach der Abhängigkeit unseres Ergebnisses zur primordialen Häufigkeit von  $Y_p$  (Gl. 2.110) von  $h$  kehren wir nochmals zurück zu den Gleichungen (3.11) und (3.13). Berücksichtigen wir den Einfluss von  $\alpha$  auf den elektromagnetischen Anteil von Gl. (3.11) so erhalten wir:

$$Q \simeq \left(-0,76 \frac{\alpha}{\alpha_0} + 2,0533317\right) [MeV]. \quad (3.22)$$

Gl. (3.13) wiederum liefert unmittelbar die Beziehung

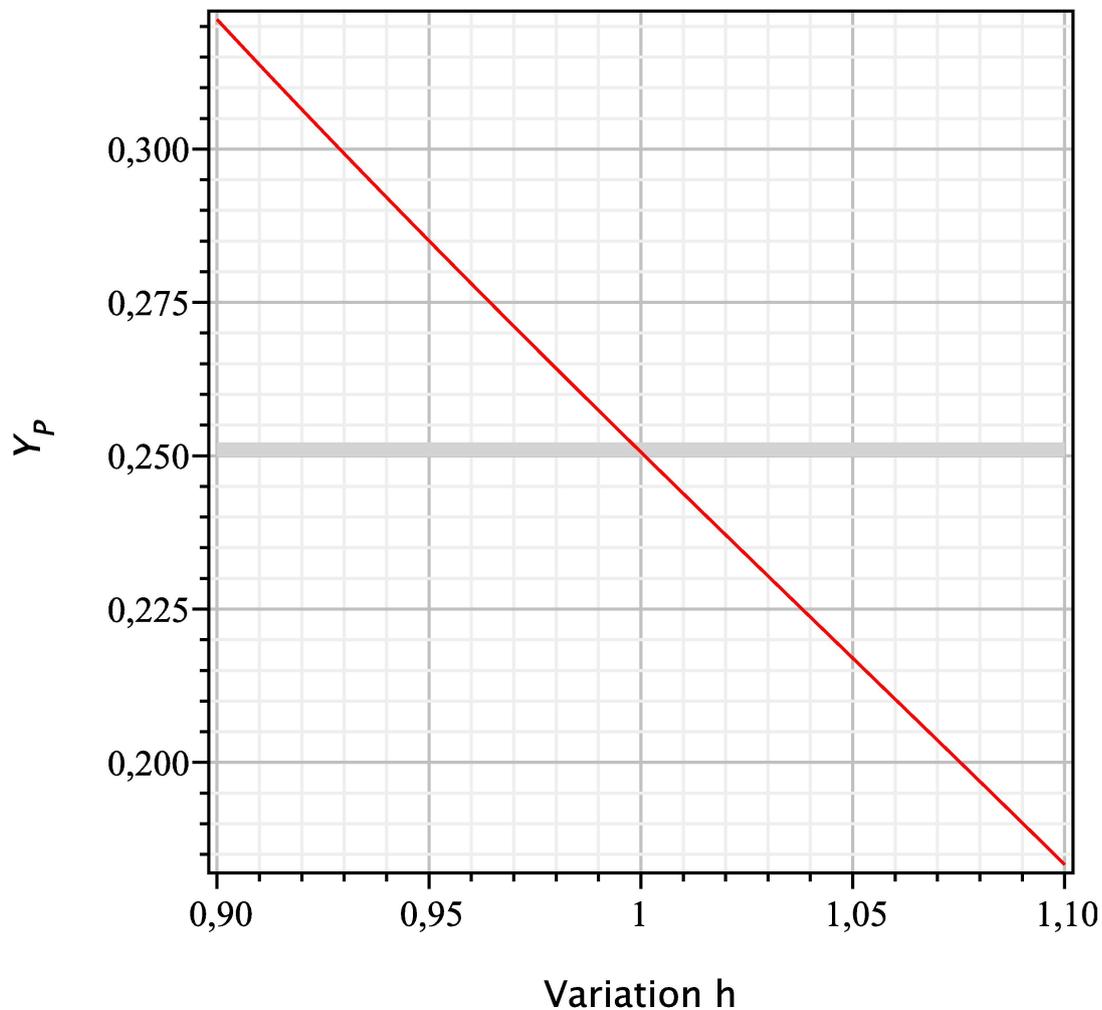
$$\tau_n = \tau_{n_0} \left(1 + 3,86 \frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right) \quad (3.23)$$

Den Einfluss von  $\alpha$  auf die Bindungsenergie des Deuterons entleihen wir uns aus Müller et al. (2004):

$$B_d = B_{d_0} - 0,018 \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \quad (3.24)$$

Des weiteren ändern sich mit  $h$  die Raten der Deuteronfusion und der Deuterondissoziation. Insbesondere ist auch der Bethe-Longmire-Wechselwirkungsquerschnitt  $\sigma_{BL}$  (Gl. 2.87) Funktion von  $h$ .

Wir erhalten folgendes Ergebnis:

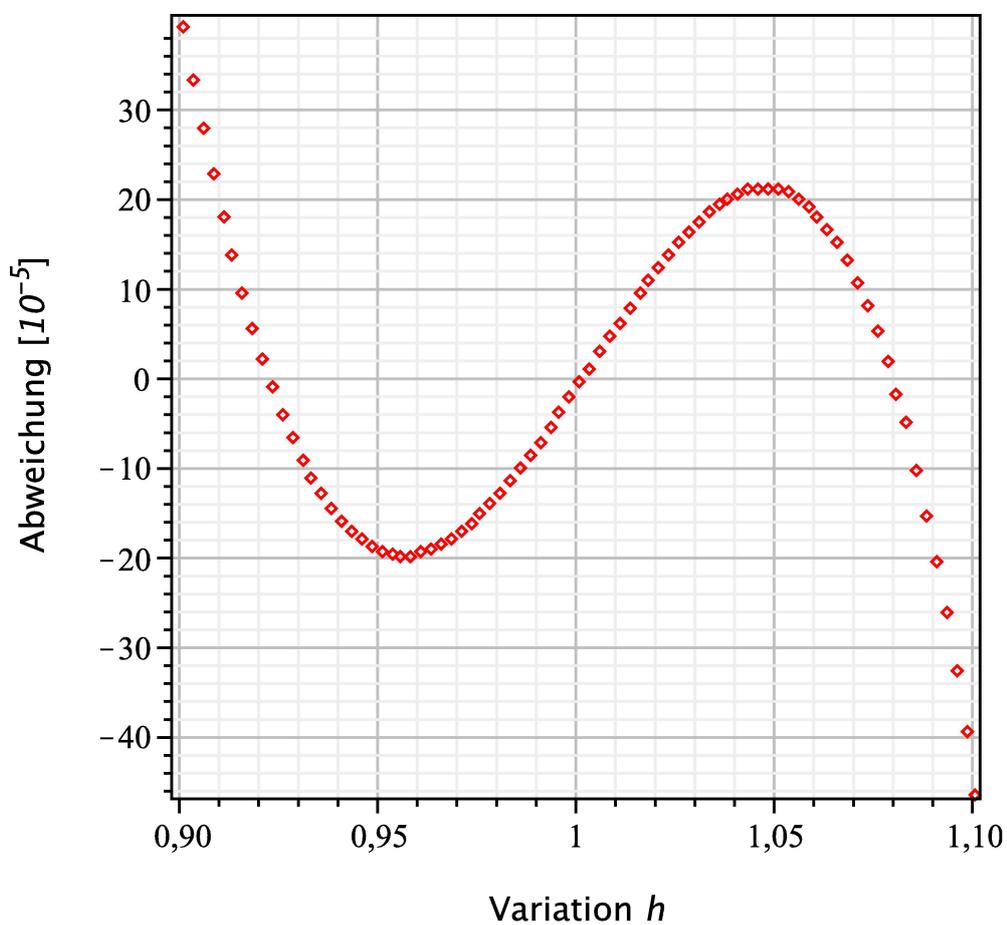


**Abb. 3.18.:** Die primordiale  ${}^4\text{He}$ -Häufigkeit  $Y_p$  versus Plancksches Wirkungsquantum  $h$ . Der graue Balken kennzeichnet den Wertebereich der Beobachtungsdaten ( $Y_p = 0,2510 \pm 0,0010$ ) gemäß Gl. (1.12) und (1.13).

Die Approximation ergibt

$$\Delta Y_P \simeq -0,6846 \left( \frac{\Delta h}{h} \right) + 0,1668 \left( \frac{\Delta h}{h} \right)^2. \quad (3.25)$$

Um die hohe Übereinstimmung zu verdeutlichen, tragen wir die Abweichung der Approximation gegenüber den exakten Werten in einem Diagramm auf:



**Abb. 3.19.:** Die Abweichung der Approximation (3.25) gegenüber den exakten Werten gemäß Gl. (2.110) versus Variation von  $h$ .

### 3.7. Gesamtdarstellung

Abschließend tragen wir die Ergebnisse der einzelnen Variationen nochmals zu einem Gesamtausdruck zusammen:

$$\begin{aligned}\Delta Y_P \simeq & - 1,132 \left( \frac{\Delta v}{v} \right) - 10,0 \left( \frac{\Delta v}{v} \right)^2 + \\ & + 0,040 \left( \frac{N_v - 3}{3} \right) - 0,00876 \left( \frac{N_v - 3}{3} \right)^2 + \\ & + 0,0867 \left( \frac{\Delta G}{G} \right) - 0,0413 \left( \frac{\Delta G}{G} \right)^2 + \\ & - 0,6846 \left( \frac{\Delta h}{h} \right) + 0,1668 \left( \frac{\Delta h}{h} \right)^2 + \\ & + 0,0041 \ln \left( \frac{\Delta \eta}{\eta} + 1 \right).\end{aligned}\tag{3.26}$$

## 4. Zusammenfassende und weiterführende Gedanken

*“Wozu eigentlich Gedanken schreiben?  
Kein Mensch kann Gedanken lesen.”*

Bruno Ziegler

Wir sind angetreten, die Aussagekraft der pN als mittlerweile parameterfreie Theorie unter Beweis zu stellen. Hierzu wurde als wesentlicher Inhalt dieser Arbeit eine analytische Berechnung der primordialen Häufigkeit von  ${}^4\text{He}$  aufgestellt. Hauptaugenmerk haben wir dabei darauf gelegt, innerhalb der Berechnung sämtliche Abhängigkeiten der Terme von den einfließenden Parametern abzubilden. So wurden beispielsweise bei den Betrachtungen zur Photodissoziation des Deuterons nicht die entsprechenden experimentellen Daten eingesetzt, sondern vielmehr sämtliche Wechselwirkungsquerschnitte wiederum als Funktionen der Schlüsselparameter ausgedrückt. Diese Vorgehensweise ermöglichte es uns, letztendlich das Netzwerk der verschiedenen Prozesse weitestgehend zu entwirren und die Abhängigkeiten der primordialen  ${}^4\text{He}$ -Häufigkeit von den Schlüsselparametern herauszuarbeiten.

Der Vergleich mit beobachtungsbasierten Daten zur primordialen  ${}^4\text{He}$ -Häufigkeit erlaubte schließlich interessante Betrachtungen zu den einfließenden Parametern.

Als mögliche Anwendungsbeispiele hierzu haben wir Grenzen für eine mögliche zeitliche Varianz des Higgs Vakuum Erwartungswertes und der Newtonschen Gravitationskonstante abgeleitet. Darüber hinaus konnten wir die Anzahl der effektiven Neutrinogenerationen eingrenzen.

Soweit also unsere Argumentationskette nochmals im Schnelldurchlauf; allerdings haben wir dieses Kapitel auch überschrieben mit den Worten “weiterführende Gedanken” und darüber hinaus drängt es uns, einige Einschränkungen zu beichten:

Der massivste Kritikpunkt dürfte die angegebene Genauigkeit sowohl der beobachtungsbasierten Werte als auch der Ergebnisse der numerischen Simulationen betreffen. Letztere unterstellen bei Ihren Fehlerrechnungen beispielsweise, dass sämtliche freie Parameter – wie die mittlere Lebensdauer des freien Neutrons oder das Verhältnis von Baryonen- zu Photonendichte – fehlerfrei einfließen. In puncto Beobachtungsdaten zu  $Y_p$  verweisen wir auf die Diskussion in Kap. 1.4.4.

Unsere grundsätzliche Argumentation erleidet hierdurch jedoch keinen Schaden. Die Gleichung (3.26) lässt sich für beliebige Fehlerbalken zukünftiger Publikationen zur Häufigkeit von  $Y_p$  anwenden. Größere Fehlerbalken werden zu schwächeren Schranken, kleinere Fehlerbalken zu en-

geren Schranken führen. Selbst wer sich grundsätzlich nicht mit dem Gedanken veränderlicher Naturkonstanten anfreunden kann, mag Kapitel 3 ignorieren und sich allein am selbsttragenden Kapitel 2 erfreuen mit der analytischen Berechnung von  $Y_p$ .

Damit wären wir bei der Diskussion der Berechnung angelangt. Sie stützt sich im wesentlichen auf eine möglichst genaue Bestimmung zweier Zeitpunkte: des Freeze-out-Zeitpunkts des Betazerfalls der freien Neutronen ( $t_F$ ) und des Starts der effektiven Fusion ( $t_N$ ).

Innerhalb des Zeitintervalls  $t_N - t_F$  führt der Betazerfall der freien Neutronen zu einer weiteren Verringerung des Neutron-Proton-Verhältnisses. Die primordiale Häufigkeit von  ${}^4\text{He}$  wird dann aus dem Neutron-Proton-Verhältnis zum Zeitpunkt  $t_N$  berechnet, unter der Annahme, dass alle verbliebenen Neutronen instantan, d. h. ohne weitere Zerfallsverluste zu  ${}^4\text{He}$  fusioniert werden.

Dabei begehen wir zwei gegenläufige Fehler: Vor dem Zeitpunkt  $t_N$  überschätzen wir den Zerfall insofern, da wir alle vorhandenen Neutronen als "freie" Neutronen annehmen, ungeachtet der Tatsache, dass nahe an  $t_N$  bereits Neutronen stabile Zustände in leichten Kernen erreichen. Zum Zeitpunkt  $t_N$  unterstellen wir einen sprunghaften Anstieg der gebundenen Neutronen auf ein ausgeglichenes Niveau mit den verbleibenden freien Neutronen. Ab dem Zeitpunkt  $t_N$  untertreiben wir schließlich, da wir nun den Zerfall der jeweils noch verbleibenden freien Neutronen vernachlässigen.

Motiviert werden diese zugegebenermaßen holprigen Vereinfachungen durch Abbildung 1.1, die das peitschenartige Einsetzen der effektiven Fusion verdeutlicht. Trotzdem scheint es für zukünftige Betrachtung lohnend, an dieser Stelle den Hebel anzusetzen und stetige Übergänge zu erzwingen.

Grundsätzlich ist die hohe Übereinstimmung der analytischen Berechnung mit den beobachtungsbasierten Daten und den numerischen Simulationen jedoch sehr beruhigend, zumal nicht nur die finalen Häufigkeiten von  ${}^4\text{He}$  sondern auch die Abhängigkeiten von den Schlüsselparametern sehr gut übereinstimmen. Die numerische Simulation ergibt beispielsweise für die Abhängigkeit von  $Y_p$  und  $G$  den linearisierten Zusammenhang  $\Delta Y_p = 0,0877 \left( \frac{\Delta G}{G} \right)$  anstelle unserer Beziehung  $\Delta Y_p = 0,0867 \left( \frac{\Delta G}{G} \right)$ .

Für die effektiven Neutrinogenerationen erhalten wir numerisch und analytisch sogar das identische Ergebnis  $\Delta Y_p = 0,040 \left( \frac{N_\nu - 3}{3} \right)$ .

Zu den in Kap. 3 gezeigten Anwendungsbeispielen gäbe es eine Reihe an Kritikpunkten anzufügen - insbesondere zu den einfließenden Modellen. Beispielsweise hängt die Beziehung  $B_d(v)$  (Gl. 3.9) unglücklicherweise entscheidend vom jeweils verwendeten Nukleon-Nukleon-Potential ab. Mangels Alternativen konnten wir letztendlich nur den Mittelwert aus verschiedenen Potentialen bilden. Hier erscheinen weitergehende Betrachtungen lohnenswert.

Im wesentlichen wollten wir jedoch anhand der Anwendungsbeispiele die Aussagekraft und Mächtigkeit der analytischen Berechnung unter Beweis stellen, um die Frage "Warum analytisch und nicht numerisch?" bereits im Vorfeld zu beantworten.

Diesbezüglich konnten wir das eng verzahnte Netzwerk der pN zumindest ein Stück weit ent-

wirren und die Abhängigkeiten von den Schlüsselparametern offenlegen. In jedem Falle ist das Fundament für weitere Betrachtungen bereitet.

Insbesondere verbleibt am Ende dieser Arbeit die Faszination darüber, dass Prozesse analytisch berechenbar erscheinen, die sich Sekunden nach dem Urknall abgespielt haben – weit jenseits des optisch dicken Vorhangs der Kosmischen Hintergrundstrahlung – und dass kosmologische Beobachtungen in Verbindung mit diesen Berechnungen über viele Größenordnungen hinweg Einblicke in fundamentale Eigenschaften des Mikrokosmos bieten.

Wer könnte dies besser ausdrücken als Albert Einstein:

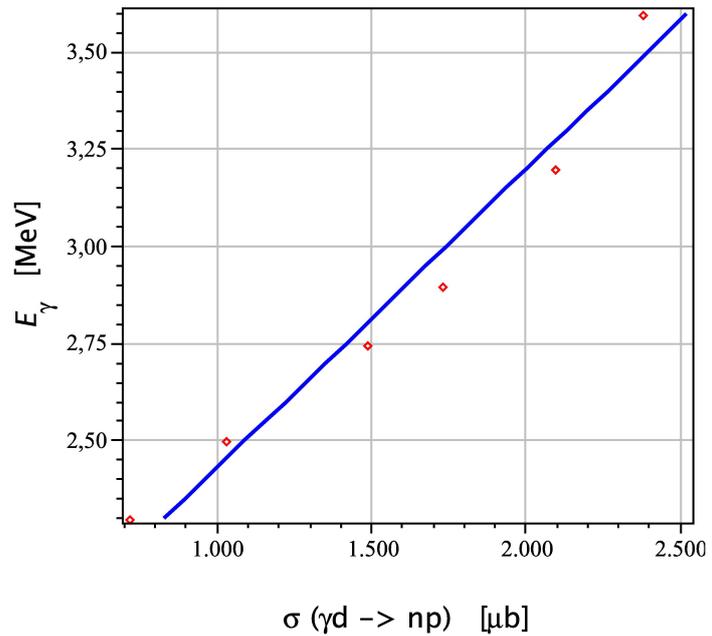
*"Das ewig Unbegreifliche an der Welt ist die Tatsache,  
dass wir sie begreifen können."*



## A. Zur Photodesintegration des Deuterons

Der Wechselwirkungsquerschnitt der Photodesintegration von Deuteron,  $\sigma_{(\gamma d \rightarrow np)}$ , lässt sich anhand der Zusammenstellung experimenteller Daten von Rustgi & Pandey (1989) näherungsweise angeben. Die notwendige Energieabhängigkeit erhält man unmittelbar durch eine Approximation im Energieintervall von 2,3 bis 3,6 MeV nach der Methode der minimalen Fehlerquadratsumme.

$E_\gamma$ [MeV]	$\sigma_{(\gamma d \rightarrow np)}$ [ $\mu b$ ]
2,300	712,69
2,500	1022,71
2,750	1482,54
2,754	1489,42
2,900	1722,81
3,200	2088,77
3,600	2373,29



**Abb. A.1.:** Energie der einfallenden Photonen versus Wechselwirkungsquerschnitt der Photodesintegration von Deuteron.

Wir erhalten eine Energieabhängigkeit in der Form

$$\sigma_{(\gamma d \rightarrow np)} \simeq -2162,3 + 1301,1 \cdot E_\gamma. \quad (4.1)$$

Die Wichtung mit der Verteilungsfunktion ergibt schließlich

$$\sigma_{(\gamma d \rightarrow np)} = \frac{1}{n_{(\gamma > B_d)}} \frac{8\pi}{(hc)^3} \int_{B_d}^{\infty} E^2 e^{-\frac{E}{kT}} (-2162,3 + 8,1208 \cdot 10^{15} E) dE \quad (4.2)$$

$$= -2162,3 + 8,1208 \cdot 10^{15} k T \left[ \frac{\left(\frac{B_d}{kT}\right)^3}{\left(\frac{B_d}{kT} + 1\right)^2 + 1} + 3 \right] \quad (4.3)$$

$$\simeq -2162,3 + 8,1208 \cdot 10^{15} (B_d + kT) [\mu b]. \quad (4.4)$$

Im letzten Schritt wurde wieder auf die Näherung (Gl. 2.86) zurückgegriffen. Der Wechselwirkungsquerschnitt des Neutroneneinfangs  $\sigma_{(np \rightarrow d\gamma)}$  ergibt sich dann aus dem detaillierten Gleichgewicht

$$\frac{\sigma_{(np \rightarrow d\gamma)}}{\sigma_{(\gamma d \rightarrow np)}} \simeq \frac{3E_\gamma^2}{2m_N c^2 (E_\gamma - B_d)}, \quad (4.5)$$

mit  $E_\gamma$  aus Gleichung (2.85).

# Literaturverzeichnis

- Abele, H., Astruc Hoffmann, M., Baeßler, S., Dubbers, D., Glück, F., Müller, U., Nesvizhevsky, V., Reich, J., & Zimmer, O. 2002, Phys. Rev. Lett. **88**, 21
- Amsler, C., et al. 2008, Phys Lett. B, **667**, 1
- Angulo, C., et al. 1999, Nucl. Phys. A, **656**, 3
- Arenhövel, H., & Sanzone, M. 1991, Photodisintegration of the Deuteron: A Review of Theory and Experiment, Springer, Germany
- Asplund, M., Lambert, D.L., Nissen, P.E., Primas, F., & Smith, V.V. 2006, ApJ, **644**, 229
- Bambi, C., Giannotti, M., & Villante, F.L. 2005, Phys. Rev. D **71:12**, 123524.1-123524.8
- Bania, T.M., Rood, R.T., & Balser, D.S. 2002, Nature **415**, 54
- Beane, S.R., & Savage, M.J. 2003, Nucl. Phys. A **717**, 91
- Bethe, H. A., & Longmire, C. 1950, Phys. Rev. **77**, 647
- Chamoun, N., Landau, S. J., Mosquera, M. E., & Vucetich, H. 2007, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **34**, 163
- Chen, J.-W., & Savage, M.J. 1999, Phys. Rev. C **60**, 065205
- Coc, A., Vangioni-Flam, E., Descouvemont, P., Adahchour, A., & Angulo, C. 2004, ApJ, **600**, 544
- Cuoco, A., et al. 2004, Int. J. Mod. Phys. A **19**, 4431
- Dent, T., Stern, S., & Wetterich, Ch. 2007, Phys. Rev. D **76**, 063513
- Descouvemont, P., Adahchour, A., Angulo, C., Coc, A., & Vangioni-Flam, E. 2004, At. Data Nucl. Data Tables **88**, 203
- Dixit, V.V., & Sher, M. 1988, Phys. Rev. D **37**, 1097
- Esmailzadeh, R., et al. 1991, ApJ, **378**, 504
- Fukugita, M., & Kawasaki, M. 2006, ApJ, **646**, 691
- Gasser, J., & Leutwyler, H. 1982, Phys. Rep. **87**, 77
- Gaßner, J. M., & Lesch, H. 2008, Int. J. Theor. Phys. **47**, 438
- Gaßner, J. M., Lesch, H., & Arenhövel, H. 2008, ApJ, **685**, 681
- Geiss, J., & Glöckler, J.G. 1998, Space Sci. Rev. **84**, 239
- Gell-Mann, M., Oakes, R.J., & Renner, B. 1968, Phys. Rev. **175**, 2195

- Glashow, S.L., Salam, A., & Weinberg, S. 1962, Phys. Rev. **127**, 965-970
- Griffiths, D. 1987. Introduction to elementary particles, Wiley, Canada.
- Higgs, P.W. 1964, Phys. Rev. Lett. **13**, 508-509
- Ichikawa, K., & Kawasaki, M. 2002, Phys. Rev. D **65**, 123511
- Izotov, Y.I., & Thuan, T.X. 2004, ApJ, **602**, 200
- Izotov, Y. I., Thuan, T. X., & Stasinska, G. 2007, ApJ **662**, 15
- Kawano, L. 1992, Fermilab Report No. FERMILAB-PUB-92, 004-A
- Kolb, E.W., & Turner, M.S. 1990, The Early Universe, Westview Press
- Komatsu, E., Dunkley, J., Nolta, M. R., Bennett, C. L., Gold, B., Hinshaw, G., Jarosik, N., Larson, D., Limon, M., Page, L., Spergel, D. N., Halpern, M., Hill, R. S., Kogut, A., Meyer, S. S., Tucker, G. S., Weiland, J. L., Wollack, E., & Wright, E. L. 2008, arXiv:0803.0547v2
- Korn, A.J. 2006, Nature **442**, 657
- Kujat, J., & Scherrer, R.J. 2000, Phys. Rev. D **62**, 023510
- Kneller, J.P., Steigman, G. 2004, New J. Phys. **6**, 117
- Lacombe, M., Loiseau, B., Richard, J. M., Vinh Mau, R., Côté, J., Pirès, P., & de Turreil, R. 1980, Phys. Rev. C **21**, 861
- Landau, S. J., Mosquera, M. E., & Vucetich, H. 2006, ApJ, **637**, 38
- Li, B., & Chu, M.-C. 2006, Phys. Rev. D **73**, 023509
- Linsky, J., et al. 2006, ApJ, **647**, 1106
- Luridiana, V., Peimbert, A., Peimbert, M., & Cerviño, M. 2003, ApJ, **592**, 846
- Machleidt, R., Holinde, K., & Elster, Ch. 1987, Phys. Rep. **149**, 1
- Machleidt, R. 1989, Adv. Nucl. Phys. **19**, 189-376
- Müller, Ch.M., Schäfer, G., & Wetterich, Ch. 2004, Phys. Rev. D **70**, 083504
- Mukhanov, V. 2004, Int. J. Theor. Phys. **43**, 669
- Olive, K.A., & Skillman, E. 2004, ApJ, **617**, 29
- Peimbert, A., Luridiana, V., & Peimbert, A. 2007, ApJ **666**, 636
- Pettini, M., Zych, B.J., Murphy, M.T., Lewis, A., & Steidel, C.C. 2008, Preprint: astro-ph 0805.0594
- Porter, R. L., Ferland, G. J., & MacAdam, K. B. 2007, ApJ, **657**, 327
- Rustgi, M.L., & Pandey, L.N. 1989, Phys. Rev. C **40**, 1581
- Ryan, S.G., Beers, T.C., Olive, K.A., Fields, B.D., & Norris, J.E. 2000, ApJ, **530**, L57
- Rybicki, G.B., & Lightman, A.P. 1979, Radiative Processes in Astrophysics, Wiley, Canada.

- 
- Scherrer, R.J., & Spergel, D.N. 1993, Phys. Rev. D **47**, 4774
- Serebrov, A., Varlamov, V., Kharitonov, A., Fomin, A., Pokotilovski, Yu., Geltenbort, P., Butterworth, J., Krasnoschekova, I., Lasakov, M., Taldaev, R., Vassiljev, A., & Zherebtsov, O. 2005, Phys. Lett. B **605**, 72-78
- Steigman, G. 2006, Int. J. Mod. Phys. E **15**, 1-35
- Steigman, G. 2007, Annu. Re. Nucl. Part. Sci. 2007, **57**, 463
- Uzan, J.P. 2003, Rev. Mod. Phys. **75**, 403
- Wagoner, R. V. 1973, ApJ, **179**, 343 (code available for public download at <http://www-thphys.physics.ox.ac.uk/users/SubirSarkar/bbn.html>)
- Wiringa, R.B., Smith, R., & Ainsworth, T.L. 1984, Phys. Rev. C **29**, 1207
- Wiringa, R.B., Stoks, V.G.J., & Schiavilla, R. 1995, Phys. Rev. C **51**, 38
- Yoo, J.J., & Scherrer, R.J. 2003, Phys. Rev. D **67**, 043517



## Danksagung

*“Erfolg ist ein Mosaik,  
an dem sich viele beteiligen.”*

Franz Schmidberger

Vorweg möchte ich meiner Familie danken, für all' die Mosaiksteine, die sie stets wie selbstverständlich zu meinem Tun beitragen. Allein diese Erkenntnis war alle Mühen der vorliegenden Arbeit wert.

Daran knüpft sich unmittelbar der Dank an Prof. Dr. Harald Lesch für sein Vertrauen sowie seinen fachlichen und menschlichen Rückhalt. Rückblickend kann ich es nur als Glücksfall bezeichnen, Harald Lesch kennengelernt zu haben.

Als außerordentlich hilfreich hat sich auch die Mitarbeit von Prof. Dr. Hartmuth Arenhövel erwiesen, der neben seinem eigenen Mosaikbaustein - der Photodissoziation des Deuterons - an vielen Ecken und Enden der Arbeit wertvolle Beiträge geliefert hat.

Zu guter Letzt möchte ich noch Dr. Sergei Winitzki danken für hilfreiche Gespräche und Dr. Jörn Müller für seine Unterstützung bei der abschließenden Fehlersuche.