

Zur mikroskopischen Begründung der Streutheorie

Dissertation
an der Fakultät für Mathematik, Informatik und Statistik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Tilo Moser

am 26. Februar 2007

Berichterstatter:
Prof. Dr. D. Dürr, Prof. Dr. H. Spohn, Prof. Dr. S. Teufel

Tag der mündlichen Prüfung: 15.06.2007

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
Zusammenfassung	9
1 Mathematische Grundlagen	13
1.1 Die zugrunde liegende Dynamik: Bohmsche Mechanik	13
1.2 Mathematische Grundlagen der Streutheorie	17
2 Die Streutheorie aus Sicht der Bohmschen Mechanik	23
3 Zur Austrittsstatistik	29
3.1 Die Austrittsstatistik in Bohmscher Mechanik: Definitionen	29
3.2 Die Austrittsstatistik für ein Teilchen: das Flux-Across-Surfaces Theorem .	32
3.3 Zur Austrittsstatistik für N Teilchen: das asymptotische Verhalten der Bohmschen Bahnen	42
4 Die Definition des Streuquerschnitts	51
4.1 Eine typische Streusituation	51
4.2 Ein stochastisches Modell für den Teilchenstrahl	54
4.3 Die Definition des empirischen Streuquerschnitts	56
5 Das Streuregime	59
5.1 Das stationäre Bild aus Sicht der zeitabhängigen Streutheorie	60
5.2 Detaillierte Klassifikation des Streuregimes	70

6 Die Anwendung der Austrittsstatistik: der Streuquerschnitt als Theorem	75
6.1 Formulierung des Theorems: eine spezielle Skalierung der Parameter	75
6.2 Beweis des Theorems über den Streuquerschnitt	78
Anhang	93
A.1 Zum Beweis von Proposition 2	93
A.2 Beweis von Lemma 1	93
A.3 Beweis von Lemma 2	95
A.4 Zum Beweis von Proposition 4	105
Literaturverzeichnis	111

Einleitung

Viele der wichtigsten Erkenntnisse über den Aufbau der Materie wurden bzw. werden durch die Analyse von Streuprozessen erlangt. Sie reichen von der Entdeckung des Atomkerns durch die Experimente von Rutherford bis zur Entdeckung von verschiedensten Elementarteilchen und deren Eigenschaften in modernen Beschleunigern.

Die Relevanz der Streutheorie führte zu einer enorm umfangreichen physikalischen Literatur, die Entwicklung der zugehörigen Mathematik dagegen verlief sehr viel langsamer. Erst 60 Jahre nach der Entdeckung der Schrödinger-Gleichung konnte die in der mathematischen Streutheorie alles dominierende Frage der asymptotischen Vollständigkeit für recht allgemeine N -Teilchensysteme beantwortet werden. Asymptotische Vollständigkeit, also die Existenz und Vollständigkeit der sog. Wellenoperatoren, führt zu einem asymptotischen Formalismus, bei dem die Streumatrix (oder S -Matrix) im Vordergrund steht. Die S -Matrix bildet einlaufende auf die entsprechenden auslaufenden Asymptoten ab, die eine Approximation des wirklichen Zustandes für große negative bzw. positive Zeiten sind. Wenn es zur experimentell relevanten Größe, dem Streuquerschnitt, kommt, vermittelt die Literatur den Eindruck, als ob die S -Matrix und der damit verbundene asymptotische Formalismus alles zu sein scheint: “An experimentalist generally prepares a state [...] at $t \rightarrow -\infty$, and then measures what this state looks like at $t \rightarrow +\infty$ ” ([63], S. 113).

Ist es nicht so, dass der Streuquerschnitt, definiert mit asymptotischen Ausdrücken wie S -Matrixelementen und Übergangsamplituden zwischen Asymptoten, nur eine Idealisierung der realen experimentellen Situation darstellt, die vollständig durch endliche Parameter charakterisiert ist? Welche Parameter sind das? Durch welche Ausdrücke wird eine reale, d.h. “endliche” Situation beschrieben? Ist es wirklich die Zeit, die bei einem eventuell anzuwendenden Limes die entscheidende Rolle spielt, oder nicht doch räumliche Größen, wie z.B. der Abstand eines Detektors von einem Target? Schließlich ist die Zeit der Detektion eine zufällige Größe, nicht bestimmt durch den Experimentator und nicht gegeben durch irgendeine Observable. Auch wenn ein System asymptotisch vollständig ist, stellt sich also die Frage, inwiefern der asymptotische Formalismus der Streutheorie aus einer zugrunde liegenden Dynamik ableitbar ist.

Für eine solche Ableitung ist es zunächst notwendig, empirische Größen wie den Streuquerschnitt für eine reale, durch endliche Parameter charakterisierte Situation zu definieren. Ein Beispiel für so einen Parameter ist der Abstand R des Detektors vom Streuzentrum. Wir nennen den Streuquerschnitt für diese realistische Situation den empirischen Streuquerschnitt. Es hat sich gezeigt, dass die Definition des empirischen Streuquerschnitts innerhalb der üblichen Darstellung der Quantenmechanik kaum möglich ist, und wir werden in dieser Arbeit eine Bohmsche Analyse der Streutheorie geben. Die Existenz von Trajektorien in der Bohmschen Mechanik liefert den entscheidenden Beitrag zur mikroskopischen Begründung der Streutheorie, da diese Existenz die Definition des empirischen Streuquerschnitts möglich macht.

Nun muss gezeigt werden, dass der empirische Streuquerschnitt in einem gewissen Limes, dem Streuregime, den asymptotischen Formalismus der Streutheorie approximiert. In einer typischen Streusituation sind nämlich die den experimentellen Aufbau charakterisierenden Parameter auf einer mikroskopischen Skala groß oder einem anderen Limes nahe. Wir werden z.B. den empirischen Streuquerschnitt für große R analysieren. Dabei zeigt sich, dass eine genaue Analyse des Streuregimes notwendig ist, um eine passende Skalierung der Parameter zu finden.

Die beteiligten Parameter sind hauptsächlich räumliche Größen. Der Schwerpunkt liegt also auf großen Distanzen und damit nur indirekt auf großen Zeiten. Schon Reed und Simon haben in ihrem Standardwerk über Streutheorie den Misstand beklagt, dass in der Streutheorie ein Ungleichgewicht zugunsten von großen Zeiten anstatt von großen Abständen herrscht. Sie bemerken aber: "There is considerable geometry lurking in the background" (siehe Einleitung in [50]). In dieser Arbeit wird die sonst im Hintergrund stehende Geometrie der Streuprozesse in den Vordergrund gestellt.

Einen Beitrag, den die vorliegende Arbeit zur mikroskopischen Begründung der Streutheorie liefert, ist eine mikroskopische Ableitung des Streuquerschnitts genau in dem oben geschilderten Sinne. Wir beschränken uns dabei auf die Potentialstreuung eines spinlosen Teilchens im Rahmen der nichtrelativistischen Quantenmechanik. Grundlegend für die Ableitung des Streuquerschnitts ist die sog. Austrittsstatistik eines Teilchens durch eine weit entfernte Kugeloberfläche. Der Bezeichnung liegt die Tatsache zugrunde, dass bei einem Streuprozess ein Teilchen mit einem Target wechselwirkt und anschließend von einem der das Streuzentrum umschließenden Detektoren detektiert wird. Die Detektoren sind dabei auf einer mikroskopischen Skala weit entfernt vom Streuzentrum. Zusätzlich zur Ableitung und Anwendung der Austrittsstatistik für ein Teilchen werden wir auch die Austrittsstatistik für die Mehrteilchenstreuung angeben. Während das Ergebnis über die Austrittsstatistik im Mehrteilchenfall das erste verfügbare Resultat ist, existieren dafür im 1-Teilchenfall schon einige Resultate (siehe Kapitel 2 für Hinweise zur Literatur). Die

Anwendung auf eine mikroskopische Ableitung des Streuquerschnitts gab es bisher nicht.

Ein wichtiger Bestandteil für die Ableitung der Austrittsstatistik im 1-Teilchenfall wird (neben der Existenz der Bohmschen Trajektorien) zunächst das Flux-Across-Surfaces Theorem (FAST) sein, welches nach dem Artikel [11] von Combes, Newton und Shtokhammer als wichtiges mathematisch-physikalisches Problem erkannt wurde. Das FAST verbindet die quantenmechanische Wahrscheinlichkeitsstromdichte (kurz: Fluss) mit dem asymptotischen Formalismus der Streutheorie. Es zeigt sich aber, dass im Mehrteilchenfall der Fluss die Bedeutung verliert. Daher wird ein alternativer Zugang zur Austrittsstatistik vorgestellt. Vom Standpunkt der Bohmschen Mechanik ist dieser Zugang der direkteste und darüber hinaus auch auf N -Teilchensysteme anwendbar: Es ist die asymptotische Geradlinigkeit der Bohmschen Bahnen, welche sich direkt auf die Austrittsstatistik anwenden lässt.

Wir geben nun ein Überblick über den Aufbau der Arbeit. Nach Einführung in die notwendigen mathematischen Grundlagen (Kapitel 1), d.h. insbesondere in die Bohmsche Dynamik, werden wir im Kapitel 2 die Hauptideen, die eine mikroskopische Begründung der Streutheorie aus Sicht der Bohmschen Mechanik möglich machen, vorstellen. Ebenso präzisieren wir in diesem Kapitel die einzelnen Schritte der mikroskopischen Begründung und nennen die bisherige Literatur dazu. Auch die zu erwartenden mathematischen Probleme werden vorgestellt. Die grundlegende Größe bei der Ableitung des Streuquerschnitts ist die Austrittswahrscheinlichkeit durch eine weit entfernte Kugeloberfläche. Diese werden wir im Kapitel 3.1 definieren und im darauf folgenden Kapitel mit Hilfe des FAST (Theorem 2, Korollar 2) eine Formel dafür ableiten (Korollar 3). Im Kapitel 3.3 werden die Problematik des Flusses für N -Teilchensysteme angesprochen und der alternative Zugang zur Austrittsstatistik mit Hilfe der asymptotischen Geradlinigkeit vorgestellt. Im Kapitel 4 folgt die Definition des empirischen Streuquerschnitts mit Hilfe der Größen der Austrittsstatistik und eines stochastischen Modells für den Teilchenstrahl. Nach Analyse des Streuregimes im Kapitel 5 wird im Kapitel 6 das Theorem über den Streuquerschnitt formuliert und bewiesen.

Die mathematischen Hauptresultate dieser Arbeit sind das FAST in zwei verschiedenen Formulierungen, siehe Theorem 2 und Korollar 2, und das damit verbundene Resultat über die Austrittsstatistik eines Teilchens, siehe Korollar 3. Diese Ergebnisse bilden die Grundlage für den Beweis der Theoreme 4 und 5 über den Streuquerschnitt. Theorem 3 ist das Resultat über die Austrittsstatistik von N Teilchen.

Danksagung

Es ist mir eine Freude, Prof. Dr. D. Dürr für das interessante und ergiebige Thema sowie die sehr intensive Betreuung zu danken. Es war seine überaus motivierende Art, die mich immer wieder angespornt hat, auch wenn mal nichts “weiterging”. In der Zeit der Promotion habe ich sehr viel von ihm gelernt—menschlich wie fachlich—und ich kann mir nicht vorstellen, wie eine Betreuung optimaler sein könnte.

Prof. Dr. S. Goldstein und Prof. Dr. N. Zanghì danke ich für unzählige Diskussionen. Unsere Zusammenarbeit war manchmal aufreibend und anstrengend, aber immer produktiv und erfolgreich. Ich konnte von beiden enorm profitieren.

Weiterhin danke ich Prof. Dr. H. Spohn und Prof. Dr. S. Teufel für die Bereitschaft, Korreferenten zu sein.

Ebenso freut es mich, Dr. P. Pickl für die letzten 10 Jahre zu danken. In dieser Zeit durfte ich an seinem sprudelnden Ideenreichtum teilhaben. Seine Ideen haben diese Arbeit maßgeblich beeinflusst. Dipl. Phys. S. Römer hat mit ihrem Ergebnis über das asymptotische Verhalten der Bohmschen Bahnen den Weg zur Mehrteilchenstreuung geebnet. Darüber hinaus danke ich Ihr für viele Diskussionen—häufig über mathematische Details—und eine bestens “umsorgte” Zeit, während wir uns ein Arbeitszimmer teilten. Mit Dipl. Phys. D. Deckert erlebte ich einen perfekten Zimmerkollegen, der mir mit etlichen Diskussionen und mit gemeinsamen Streifzügen durch die weite Welt der Mathematik ein produktives Jahr und insbesondere eine gelungene Prüfungsvorbereitung ermöglicht hat.

Prof. Dr. M. Fässler sei gedankt für eine Diskussion über die experimentelle Seite der Streutheorie.

Zu guter Letzt möchte ich meinem Bruder Florian danken, der mir durch intensives und geduldiges Korrekturlesen enorm geholfen hat.

Zusammenfassung

Das Ziel der Arbeit ist es, einen Beitrag zur mikroskopischen Begründung der Streutheorie zu liefern, d.h. zu zeigen, inwiefern der asymptotische Formalismus der Streutheorie, mit Objekten wie der S -Matrix sowie den ein- und auslaufenden Asymptoten ψ_{in} und ψ_{out} , aus einer mikroskopischen Beschreibung des zugrunde liegenden Systems abgeleitet werden kann. Wir konzentrieren uns dabei auf zwei Dinge. Zunächst wird die Austrittsstatistik (genauere Beschreibung weiter unten) von einem N -Teilchensystem durch weit entfernte Oberflächen abgeleitet. Anschließend beschränken wir uns auf die 1-Teilchenstreuung und verwenden die Austrittsstatistik, um den Streuquerschnitt aus einer mikroskopischen Beschreibung der Streusituation abzuleiten. Die zugrunde liegende Dynamik ist die Bohmsche Mechanik, eine Theorie über die Bewegung von Punktteilchen, die alle Ergebnisse der nichtrelativistischen Quantenmechanik reproduziert.

Nun zur Ableitung der Austrittsstatistik, zunächst für den Fall $N = 1$. In einem Streuexperiment werden Teilchen an einem Target gestreut und in einem Detektor detektiert. Die zugrunde liegende Theorie muss also einen Ausdruck für die Detektionsstatistik liefern. Grundlegend dafür ist die Situation eines Teilchens, welches durch ein Potential gestreut wird und dann eine Detektoroberfläche durchkreuzt. Die Detektoroberfläche $R\Sigma := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x = R \text{ und } \frac{\mathbf{x}}{x} \in \Sigma\}$ befindet sich im Abstand R vom Streuzentrum und bedeckt den Raumwinkel $\Sigma \subset S^2$. Die Existenz der Bohmschen Trajektorien ermöglicht die Definition einer Zufallsgröße $N_{\text{det}}^\psi(R, \Sigma)$, die eins ist, wenn das Teilchen die Kugeloberfläche RS^2 zum ersten mal nach außen in $R\Sigma$ durchkreuzt, und Null sonst. Der Erwartungswert davon ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen die Kugel mit Radius R durch die Fläche $R\Sigma$ verlässt. Daher der Name Austrittsstatistik. Man kann nun das asymptotische Verhalten der Bohmschen Bahnen verwenden, um zu zeigen, dass (vgl. Korollar 3)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{E}^\psi \left(N_{\text{det}}^\psi(R, \Sigma) \right) = \int_{C_\Sigma} \left| \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \right|^2 d^3k, \quad (1)$$

wobei C_Σ der durch Σ aufgespannte Kegel und ψ_{out} die zu ψ zugehörige auslaufende Asymptote ist. Da es um eine Begründung des asymptotischen Formalismus der Streutheorie geht, ist es wichtig, die Voraussetzungen nur an ψ und nicht an Elemente des

asymptotischen Formalismus selbst zu stellen. Das ist der zusätzliche Schritt, der in dieser Arbeit im Vergleich zu den bisherigen Resultaten gemacht wird. Um (1) abzuleiten, verwenden wir zunächst das Flux-Across-Surfaces Theorem (vgl. Theorem 2 und Korollar 2). Es besagt, dass für alle $T \in \mathbb{R}$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_T^\infty \int_{R\Sigma} \mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_T^\infty \int_{R\Sigma} |\mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}| dt = \int_{C_\Sigma} |\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})|^2 d^3k, \quad (2)$$

wobei \mathbf{j}^{ψ_t} die quantenmechanische Wahrscheinlichkeitsstromdichte (oder kurz: Fluss) $\text{Im}(\psi^* \nabla \psi)$ ist. Mit der Bedeutung der Fluss-Integrale in der Bohmschen Mechanik kann man aus dem FAST (2) direkt die Austrittsstatistik (1) ableiten, siehe Kapitel 2 und 3. Man beachte, dass ohne Bohmsche Mechanik weder die Zufallsgröße $N_{\text{det}}^\psi(R, \Sigma)$ definiert noch dem Fluss-Integral

$$\int_T^\infty \int_{R\Sigma} \mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} dt$$

eine nichtasymptotische (d.h. für endliches R) Bedeutung zugeordnet werden kann, siehe Kapitel 2.

Es zeigt sich (siehe Kapitel 3.3), dass der Fluss im Mehrteilchenfall die Bedeutung verliert. Man kann aber das asymptotische Verhalten der Bohmschen Bahnen direkt ausnützen, um die Austrittsstatistik auch im Mehrteilchenfall abzuleiten. Es lässt sich nämlich beweisen, dass die Geschwindigkeit einer Bohmschen Trajektorie für große Zeiten gegen eine asymptotische Geschwindigkeit konvergiert. Der Fehler zwischen tatsächlicher und asymptotischer Geschwindigkeit ist gut kontrollierbar, und die asymptotische Geschwindigkeit ist $|\widehat{\psi}_{\text{out}}|^2$ -verteilt (siehe Proposition 4). Mit diesem Resultat kann man zeigen, dass die Austrittsstatistik allein durch die Verteilung der asymptotischen Geschwindigkeit gegeben ist. Damit erhält man für den Spezialfall $N = 1$ wieder das Resultat (1). Für allgemeines N kann man für jedes Teilchen ähnlich zum 1-Teilchenfall die Zufallsgröße $N_{l,\text{det}}^\psi(R, \Sigma_l)$ definieren, die eins ist, wenn das Teilchen l , $l = 1, \dots, N$, die Fläche $R\Sigma_l$ nach außen durchkreuzt, und Null sonst. Das Produkt dieser Zufallsgrößen sei mit $N_{\text{det}}^\psi(R, \Sigma_1, \dots, R\Sigma_N)$ bezeichnet. Dann gilt (siehe Theorem 3)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{E}^\psi \left(N_{\text{det}}^\psi(R, \Sigma_1, \dots, \Sigma_N) \right) = \int_{C_{\Sigma_1}} \cdots \int_{C_{\Sigma_N}} |\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})|^2 d^3k_1 \cdots d^3k_N. \quad (3)$$

Der Beweis von der zugrunde liegenden Proposition 4 ist eine Erweiterung des entsprechenden Resultats für ein Teilchen in [52] und findet sich in [24]. In dieser Arbeit werden wir den Beweis skizzieren.

Nun kann man das Ergebnis über die Austrittsstatistik verwenden, um den Streuquerschnitt für die 1-Teilchenstreuung abzuleiten. Wir definieren dazu den empirischen

Streuquerschnitt $\sigma_{\text{emp}}(\Sigma)$, der die Anzahl der detektierten Teilchen im Raumwinkel Σ für eine reale Situation, d.h. eine Situation, die nur durch endliche Parameter beschrieben wird, widerspiegelt. Ein Parameter ist z.B. der Abstand R des Detektors vom Streuzentrum. Die Definition des empirischen Streuquerschnitt umfasst die oben genannte Zufallsgröße $N_{\text{det}}^{\psi}(R, \Sigma)$, ein stochastisches Modell für den Teilchenstrahl und natürlich die den experimentellen Aufbau charakterisierenden Parameter (vgl. Kapitel 4). Wir schreiben deshalb für den empirischen Streuquerschnitt $\sigma_{\text{emp}}(\text{Parameter}, \Sigma)$. Der empirische Streuquerschnitt wird nun in einer speziellen Situation, dem sog. Streuregime, ausgewertet. Im Streuregime, das in Kapitel 5 analysiert wird, sind die Parameter auf einer mikroskopischen Skala groß oder einem anderen Limes nahe. Wir werden z.B. den empirischen Streuquerschnitt für $R \rightarrow \infty$ und $|\widehat{\psi}(\mathbf{k})|^2 \rightarrow \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ analysieren. Das Resultat ist dann, dass der empirische Streuquerschnitt im Streuregime durch den üblichen Ausdruck mit der S - bzw. T -Matrix gegeben ist:

$$\lim_{\text{Parameter} \rightarrow \text{Streuregime}} \sigma_{\text{emp}}(\text{Parameter}, \Sigma) = \sigma(\Sigma) = 16\pi^4 \int_{\Sigma} |T(k_0\boldsymbol{\omega}, \mathbf{k}_0)|^2 d\Omega, \quad (4)$$

vgl. Kapitel 2 sowie Theorem 4 und 5. Natürlich werden auch diese Theoreme nur unter Bedingungen an den Streuzustand ψ bewiesen, ohne Bedingungen an die zugehörigen Asymptoten ψ_{in} oder ψ_{out} stellen zu müssen.

Die Ergebnisse beruhen auf punktwisen Abschätzungen der Wellenfunktion ψ_t und dessen Gradienten. Mit der Formel (Proposition 1)

$$\psi_t(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \varphi_+(\mathbf{x}, \mathbf{k}) e^{-i\frac{k^2}{t}} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) d^3k, \quad (5)$$

wobei φ_+ die generalisierten Eigenfunktionen von H sind, und der Methode der stationären Phase werden die notwendigen Abschätzungen an die Wellenfunktion verfügbar sein. Dabei werden zunächst Bedingungen an $\widehat{\psi}_{\text{out}}$ gestellt, die mit

$$\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \varphi_+^*(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \psi(\mathbf{x}) d^3x \quad (6)$$

auf ψ übertragen werden (Lemma 1). Dabei werden die Regularitätseigenschaften der generalisierten Eigenfunktionen, die in [57, 58] ausgearbeitet wurden (siehe Zusammenfassung in Proposition 1 und 2), eine wichtige Rolle spielen.

Kapitel 1

Mathematische Grundlagen

1.1 Die zugrunde liegende Dynamik: Bohmsche Mechanik

Bohmsche Mechanik ist eine Theorie über die Bewegung von Partikeln, welche alle nichtrelativistischen quantenmechanischen Ergebnisse reproduziert, vgl. z.B. [7, 8, 18, 30, 34]. Wir betrachten also ein System von N Teilchen mit den Orten $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N \in \mathbb{R}^3$ und den Massen m_1, \dots, m_N . Der Raum der zulässigen Konfigurationen $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N)$ heißt Konfigurationsraum und sei mit Ω bezeichnet. Der Konfigurationsraum ist eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^{3N} . Die Konfiguration zur Zeit t wird mit \mathbf{X}_t^ψ bezeichnet, und deren zeitliche Entwicklung ist durch

$$\dot{\mathbf{X}}_t^\psi = \mathbf{v}^{\psi_t}(\mathbf{X}_t^\psi), \quad (1.1)$$

einer Differentialgleichung erster Ordnung, gegeben. Der hochgestellte Index ψ verdeutlicht die Abhängigkeit der Konfiguration von der Schrödingerschen Wellenfunktion ψ_t , einer komplexwertigen Funktion auf Ω , die die l -te Komponente des Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{v}^{\psi_t} = (\mathbf{v}_1^{\psi_t}, \dots, \mathbf{v}_N^{\psi_t})$ folgendermaßen bestimmt: Auf der Teilmenge von Ω , auf der $\psi_t(\mathbf{x}) \neq 0$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in \Omega$, und differenzierbar ist, gilt

$$\mathbf{v}_l^{\psi_t} = m_l \operatorname{Im} \left(\frac{\nabla_l \psi_t}{\psi_t} \right), \quad l \in \{1, \dots, N\}, \quad (1.2)$$

wobei ∇_l den Gradienten im \mathbb{R}^3 in Bezug auf \mathbf{x}_l bezeichnet. Die Schrödingersche Wellenfunktion ψ_t ist ein Element des Hilbert-Raums $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathbb{C})$ des Systems,¹ welche sich

¹Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir im Folgenden $L^2(\Omega)$ anstatt $L^2(\Omega, \mathbb{C})$.

gemäß der Schrödinger-Gleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_t(\mathbf{x}) = H \psi_t(\mathbf{x}) := \left(\sum_{l=1}^N -\frac{\hbar^2}{2m_k} \Delta_l + V(\mathbf{x}) \right) \psi_t(\mathbf{x}) \quad (1.3)$$

entwickelt. Dabei bezeichnet Δ_l den Laplace-Operator des l -ten Teilchens und V das reellwertige, glatte ($V \in C^\infty(\Omega)$) Potential, z.B. die Coulomb-Wechselwirkung von einem N -Teilchensystem.

Wir kommen nun zur Existenz von Lösungen des Systems (1.1) und (1.3). Zunächst zur Schrödinger-Gleichung (1.3): Das Theorem von Stone sichert die Existenz der Lösungen von (1.3), wenn man zeigen kann, dass H selbstadjungiert auf einer geeigneten Domäne ist (siehe z.B. Theorem VIII.7 und VIII.8 in [51]): Sei H selbstadjungiert und definiere $U(t) = e^{-iHt}$. Dann ist $U(t)$ eine stark stetige einparametrische Gruppe,² und $\psi_t := U(t)\psi$, $\psi \in D(H)$, erfüllt die Schrödinger-Gleichung (1.3). Das Problem der Lösungen der Schrödinger-Gleichung reduziert sich damit auf die Frage, auf welcher Domäne der Hamilton-Operator H selbstadjungiert ist. Ein Weg, diese Frage zu beantworten, ist der Satz von Kato-Rellich. Er besagt, dass H und H_0 bezüglich der Selbstadjungiertheit dieselben Eigenschaften haben, wenn das Potential in einem geeigneten Sinne “schwach” ist. Ein Potential nennt man in diesem Zusammenhang “schwach”, wenn es H_0 -beschränkt ist mit $a < 1$: Seien A und B dicht definierte lineare Operatoren in einem Hilbert-Raum \mathcal{H} . Weiterhin sei $D(A) \subset D(B)$. Man nennt B A -beschränkt, wenn Konstanten a, b in \mathbb{R} existieren, so dass $\|B\varphi\| \leq a\|A\varphi\| + b\|\varphi\|$ für alle $\varphi \in D(A)$. In der gesamten Arbeit beschränken wir uns auf Potentiale, die H_0 -beschränkt sind mit $a < 1$. Diese Klasse von Potentialen ist sehr groß und umfasst sogar das Coulomb-Potential mit beliebiger Ladung, welches vom Standpunkt der mathematischen Streutheorie wegen des schwachen Abfalls im Unendlichen ohnehin eine gesonderte Behandlung erfordert. Um die Frage nach Lösungen von (1.3) zu beantworten, ist es also ausreichend, sich auf die Selbstadjungiertheit des freien Hamilton-Operators H_0 zu beschränken: H_0 ist selbstadjungiert auf der (dicht in $L^2(\mathbb{R}^{3N})$) Domäne $D(H_0) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}^{3N}) \mid k^2 \mathcal{F}(\varphi) \in L^2(\mathbb{R}^{3N})\}$, $k = |\mathbf{k}|$. Dabei bezeichnet \mathcal{F} die Fourier-Transformierte

$$\mathcal{F}(f)(\mathbf{k}) := (2\pi)^{-\frac{3N}{2}} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) d^{3N}x, \quad (1.4)$$

welche auf $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ definiert ist. Für mehr Einzelheiten bezüglich der Selbstadjungiertheit von H_0 siehe z.B. [51], Theorem IX.27. Manchmal werden wir die Fourier-Transformierte auch mit \hat{f} bezeichnen.

²Eine operatorwertige Funktion $U(t)$ nennt man eine stark stetige einparametrische Gruppe, wenn

- (a) für jedes $t \in \mathbb{R}$ $U(t)$ ein unitärer Operator ist, $U(t+s) = U(t)U(s)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und
- (b) wenn $U(t)\varphi \rightarrow U(t')\varphi$ für $\varphi \in \mathcal{H}$ und $t \rightarrow t'$.

Die Frage der Existenz der Bohmschen Dynamik konnte in [7] und [59] geklärt werden. Es wurde gezeigt, dass die Dynamik für fast alle (bezüglich eines geeigneten Maßes) anfänglichen Konfigurationen eindeutig und global existiert. Die Bedingungen an das Potential und die anfängliche Wellenfunktionen werden weiter unten näher erläutert. Wir wollen zuerst auf das Maß fokussieren, mit welchem die Konfigurationen gemessen werden. Es ist das bekannte $|\psi|^2$ -Maß, das von Born in [9] eingeführt wurde:

$$\mathbb{P}^\psi(\mathbf{X} \in A) = \int_A |\psi(\mathbf{x})|^2 d^{3N}x, \quad A \subset \Omega. \quad (1.5)$$

Während (1.5) von Born als Regel eingeführt wurde, um den Kontakt zu experimentellen Daten herzustellen, hat sie in der Bohmschen Mechanik eine tiefere Bedeutung und Begründung, auf welche wir im Folgenden eingehen werden. Bohmsche Mechanik ist durch zwei Gleichungen definiert: Die Schrödinger-Gleichung (1.3) bestimmt die Entwicklung der Wellenfunktion, die durch (1.1) die Bewegung der Teilchen steuert. Gleichung (1.1) bedeutet, dass sich eine anfängliche Dichte $\rho = \rho_0$ auf dem Konfigurationsraum gemäß der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_t + \nabla \cdot (\rho_t \mathbf{v}^{\psi_t}) = 0 \quad (1.6)$$

zu einer Dichte ρ_t zur Zeit t entwickelt. Die Schrödinger-Gleichung führt eine anfängliche Wellenfunktion $\psi = \psi_0$ zu der Wellenfunktion ψ_t zur Zeit t . Die Bornsche Regel $\rho = |\psi|^2$ steht damit im Einklang mit der Bohmschen Dynamik, denn $\rho_t = |\psi_t|^2$ erfüllt (1.6), was man wie folgt sieht: Die Schrödinger-Gleichung führt zu

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi_t|^2 + \sum_{l=1}^N \frac{\hbar}{2im_l} \nabla_l \cdot (\psi_t^* \nabla_l \psi_t - \psi_t \nabla_l \psi_t^*) = 0, \quad (1.7)$$

welche sich mit der quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsstromdichte³

$$\mathbf{j}^{\psi_t} = (\mathbf{j}_1^{\psi_t}, \dots, \mathbf{j}_N^{\psi_t}), \quad \mathbf{j}_l^{\psi_t} = \frac{\hbar}{2im_l} (\psi_t^* \nabla_l \psi_t - \psi_t \nabla_l \psi_t^*) = \frac{\hbar}{m_l} \text{Im}(\psi_t^* \nabla_l \psi_t) \quad (1.8)$$

kompakter und vertrauter als

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi_t|^2 + \nabla \cdot \mathbf{j}^{\psi_t} = 0 \quad (1.9)$$

schreiben lässt. Dabei ist $\nabla = (\nabla_1, \dots, \nabla_N)$. Gleichung (1.9) führt mit $\rho_t = |\psi_t|^2$ nun zu (1.6), denn $\mathbf{j}^{\psi_t} = |\psi_t|^2 \mathbf{v}^{\psi_t}$. Die Eigenschaft, dass eine anfängliche Dichte $\rho = |\psi|^2$ zu einer späteren Zeit t durch $\rho_t = |\psi_t|^2$ gegeben ist, nennt man Äquivarianz.

³Wir werden im folgenden nicht immer ganz präzise mit dieser Bezeichnung umgehen: Häufig werden wir einfach "Fluss" sagen.

Äquivarianz sagt uns also, dass Teilchen (man denke dabei an ein Ensemble von Systemen mit Wellenfunktion ψ), die anfänglich $|\psi|^2$ -verteilt waren, immer $|\psi|^2$ -verteilt bleiben. Mit Hilfe der Bohmschen Mechanik kann man nun noch weiter gehen. In einem sehr großen System, z.B. im Universum, kann man zeigen, [22], dass in einem Ensemble von Subsystemen mit Wellenfunktion ψ die Orte typischerweise $|\psi|^2$ -verteilt sind, wenn das Ensemble hinreichend groß ist. Siehe dazu auch [18, 30].

Wir können nun zur Existenz der Bohmschen Dynamik zurückkommen. In [7] (siehe auch [59]) wurde folgendes Resultat gezeigt:⁴

Theorem 1. *Man nehme an, dass*

(i) *das Potential $V = V_1 + V_2$ eine C^∞ -Funktion auf Ω ist, wobei V_1 von unten beschränkt ist, und V_2 H_0 -beschränkt ist mit relativer Schranke $a < 1$. Ferner nehme man an, dass der Rand $\partial\Omega$ eine endliche Vereinigung von $(3N - 3)$ -dimensionalen Hyperflächen ist.*

(ii) *der Hamilton-Operator H der zur Operatorsumme $H_0 + V$ gehörige selbstadjungierte Operator ist.*

(iii) *die anfängliche Wellenfunktion ψ ein C^∞ -Vektor von H , d.h. $\psi \in C^\infty(H) := \bigcap_{n=1}^{\infty} D(H^n)$, und normiert, d.h. $\|\psi\| = 1$, ist.*

Dann besitzt Bohmsche Mechanik definiert durch (1.1) und (1.3) eindeutige und globale Lösungen für \mathbb{P}^ψ -fast alle anfänglichen Konfigurationen.

Wir schließen das Kapitel mit einer Bemerkung:

Bemerkung 1. Die Bedingung an den Rand $\partial\Omega$ von Ω erlaubt im physikalischen 3-dimensionalen Raum endlich viele singuläre Punkte (z.B. die Singularität des Coulombfelds einer Punktladung). In [7] ist das Resultat auch für Hamilton-Operatoren formuliert, die nur durch die Formsumme $H_0 + V$ definiert sind. Die Menge der zulässigen Wellenfunktionen $C^\infty(H)$ ist dicht in L^2 (für explizitere Bedingungen an die anfängliche Wellenfunktionen und das Potential V siehe Theorem 4 und 5). Beispiele für Wellenfunktionen aus $C^\infty(H)$ sind Eigenfunktionen von H , und Zustände $\psi \in \text{Ran}(E_I(H))$, wobei $E_I(H)$ die spektrale Projektion auf ein endliches Energieintervall $I \subset \mathbb{R}$ bezeichnet. Die Bedingung $\psi \in C^\infty(H)$ scheint eine natürliche Bedingung zu sein: Wellenfunktionen im thermischen Gleichgewicht sind typischerweise in $C^\infty(H)$, siehe [62].

⁴Das Theorem und die anschließende Bemerkung sind in ähnlicher Form schon in [57] zusammengefasst worden.

1.2 Mathematische Grundlagen der Streutheorie

Die Literatur zur Streutheorie ist ungemein umfangreich. Wir beziehen uns im Wesentlichen auf Standardresultate aus [3, 37, 42, 48, 50, 51]) sowie neuere Ergebnisse über generalisierte Eigenfunktionen aus [57, 58], die für spätere Abschätzungen an die Wellenfunktion benötigt werden.

Da sich der Großteil der Arbeit mit der 1-Teilchenstreuung befasst, beschränken wir uns in diesem Kapitel auf die Beschreibung eines nichtrelativistischen Teilchens ohne Spin im \mathbb{R}^3 mit einem externen Potential V , d.h. auf ein System mit dem Hamilton-Operator H (im folgenden setzen wir $\hbar = m = 1$),

$$H := -\frac{1}{2}\Delta + V(\mathbf{x}) =: H_0 + V(\mathbf{x}),$$

wobei das reellwertige Potential $V \in (V)_n$ wie folgt definiert ist:

Definition 1. V ist in $(V)_n$, $n=2,3,4,\dots$, wenn gilt:

(i) $V \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

(ii) V ist lokal Hölder stetig außer an höchstens endlich vielen Singularitäten.

(iii) Es existieren positive Konstanten δ , C , R_0 , so dass

$$|V(\mathbf{x})| \leq C\langle x \rangle^{-n-\delta} \text{ für } x \geq R_0.$$

Dabei bezeichnet $\langle \cdot \rangle := (1 + (\cdot)^2)^{\frac{1}{2}}$.

Dieses Potential ist H_0 -beschränkt, und damit ist H selbstadjungiert auf dem Definitionsbereich

$$D(H) = D(H_0) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^3) : \int |k^2 \widehat{f}(\mathbf{k})|^2 d^3k < \infty \right\}, \quad k = |\mathbf{k}|.$$

Also gilt für $\psi \in D(H)$ auch $\psi_t \equiv U(t)\psi \in D(H)$, und ψ_t erfüllt die Schrödinger-Gleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_t(\mathbf{x}) = \left(-\frac{1}{2}\Delta + V(\mathbf{x}) \right) \psi_t(\mathbf{x}).$$

In einer typischen Streusituation bewegen sich die Teilchen frei, wenn sie weit genug vom Streuzentrum entfernt sind. "Weit genug entfernt" im Ortsraum lässt sich mit "lang

bevor” bzw. “lang nach” der Wechselwirkung mit dem Potential umschreiben. Streuzustände sind also diejenigen Zustände, für die Asymptoten $\psi_{\text{in}}, \psi_{\text{out}}$ mit

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \|e^{-iH_0 t} \psi_{\text{in}}(\mathbf{x}) - e^{-iHt} \psi(\mathbf{x})\| &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{-iH_0 t} \psi_{\text{out}}(\mathbf{x}) - e^{-iHt} \psi(\mathbf{x})\| &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

existieren. Gegeben (1.10), ist es natürlich die sog. Wellenoperatoren $\Omega_{\pm} : L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \text{Ran}(\Omega_{\pm})$ durch die starken Limiten

$$\Omega_{\pm} := \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t} \quad (1.11)$$

einzuführen. Die Wellenoperatoren bilden die einfallenden bzw. ausfallenden Asymptoten auf die jeweiligen Streuzustände ab. Ikebe hat für $V \in (V)_n$ in [37] bewiesen, dass die Wellenoperatoren existieren und das Bild

$$\text{Ran}(\Omega_{\pm}) = \mathcal{H}_{\text{cont}}(H) = \mathcal{H}_{\text{a.c.}}(H) \quad (1.12)$$

haben. Die Streuzustände sind also in dem absolut stetigen Spektrum $\mathcal{H}_{\text{a.c.}}(H)$ zu finden, und das singular stetige Spektrum ist leer. Darüber hinaus hat Ikebe gezeigt, dass der Hamilton-Operator keine positiven Eigenwerte hat. Es gibt somit für jeden Streuzustand $\psi \in \mathcal{H}_{\text{a.c.}}(H)$ Asymptoten $\psi_{\text{in}}, \psi_{\text{out}} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ mit

$$\Omega_- \psi_{\text{in}} = \psi = \Omega_+ \psi_{\text{out}}. \quad (1.13)$$

Bemerkung 2. Wenn die Wellenoperatoren (1.11) existieren, und zusätzlich (1.12) erfüllt ist, spricht man von einem asymptotisch vollständigen System. Asymptotische Vollständigkeit wurde in großer Allgemeinheit gezeigt und war lange eines der großen Probleme der mathematischen Streutheorie, vgl. [50] für eine Zusammenfassung der existierenden Resultate. Vom Standpunkt der asymptotischen Vollständigkeit sind Ikebes Bedingungen an das Potential V (Definition 1) ziemlich restriktiv. Unsere Beweismethoden beruhen aber stark auf den Eigenschaften der generalisierten Eigenfunktionen, die ohnehin stärkere Bedingungen an das Potential verlangen (siehe Proposition 2).

Auf der Domäne $D(H_0)$ erfüllen die Wellenoperatoren die sog. “intertwining property”

$$H\Omega_{\pm} = \Omega_{\pm}H_0. \quad (1.14)$$

Ganz ähnlich gilt auf $\mathcal{H}_{\text{a.c.}}(H) \cap D(H) = \mathcal{H}_{\text{a.c.}}(H) \cap D(H_0)$

$$H_0\Omega_{\pm}^{-1} = \Omega_{\pm}^{-1}H. \quad (1.15)$$

Die Streumatrix $S : L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ ist gegeben durch

$$S := \Omega_+^{-1} \Omega_-.$$

Bezeichnet man mit I die Identität, ist die T -Matrix durch

$$T := S - I. \quad (1.16)$$

definiert. Wenn das System asymptotisch vollständig ist, sind die Bilder der Wellenoperatoren gleich und die Streumatrix S daher unitär. Da die Wellenoperatoren die Streuzustände auf die entsprechenden Asymptoten abbilden, erhält man

$$\psi_{\text{out}} = S\psi_{\text{in}}.$$

Wichtig für die Empirik der Streutheorie ist die T -Matrix, welche für $V \in (V)_3$ durch die Formel (siehe Theorem 1 in [38]):

$$\widehat{Tg}(\mathbf{k}) = -2\pi i \int_{k'=k} T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \widehat{g}(\mathbf{k}') k' d\Omega', \quad (1.17)$$

anzuwenden ist (im L^2 -Sinne). Die T -Matrixelemente sind durch

$$T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = (2\pi)^{-3} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) \varphi_-(\mathbf{x}, \mathbf{k}') d^3x. \quad (1.18)$$

gegeben. Dabei sind φ_- (sowie φ_+) die generalisierten Eigenfunktionen von H , auf die im Folgenden eingegangen wird.

Der Hamilton-Operator H wird auf $\mathcal{H}_{\text{a.c.}}(H)$ durch die generalisierten Eigenfunktionen φ_{\pm} diagonalisiert, welche der Gleichung

$$\left(-\frac{1}{2}\Delta + V(\mathbf{x})\right)\varphi_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \frac{k^2}{2}\varphi_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \quad (1.19)$$

genügen. Durch das Invertieren von $(-\frac{1}{2}\Delta - \frac{k^2}{2} \pm i0)$ erhält man die Lippmann-Schwinger-Gleichung. Wir fassen die wichtigsten Resultate dazu von Ikebe [37] zusammen, wie es schon in [58] getan wurde.

Proposition 1. *Sei $V \in (V)_2$. Dann existieren für jedes $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ eindeutige Lösungen $\varphi_{\pm}(\cdot, \mathbf{k}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ der Lippmann-Schwinger-Gleichung*

$$\varphi_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{\mp ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} V(\mathbf{x}') \varphi_{\pm}(\mathbf{x}', \mathbf{k}) d^3x', \quad (1.20)$$

welche die Randbedingung $\lim_{x \rightarrow \infty} (\varphi_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) = 0$ erfüllen, klassische Lösungen der stationären Schrödinger-Gleichung (1.19) sind und folgende Eigenschaften besitzen:

(i) Für jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ existieren die generalisierten Fourier-Transformierten⁵

$$(\mathcal{F}_\pm f)(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \text{l. i. m.} \int \varphi_\pm^*(\mathbf{x}, \mathbf{k}) f(\mathbf{x}) d^3x$$

in $L^2(\mathbb{R}^3)$.

(ii) Es gilt $\text{Ran}(\mathcal{F}_\pm) = L^2(\mathbb{R}^3)$. Weiterhin sind $\mathcal{F}_\pm : \mathcal{H}_{a.c.}(H) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ unitär und die dazugehörigen inversen Abbildungen sind gegeben durch:

$$(\mathcal{F}_\pm^{-1} f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \text{l. i. m.} \int \varphi_\pm(\mathbf{x}, \mathbf{k}) f(\mathbf{k}) d^3k.$$

(iii) Für jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ gilt $\Omega_\pm f = \mathcal{F}_\pm^{-1} \mathcal{F} f$, wobei \mathcal{F} die gewöhnliche Fourier-Transformierte (1.4) ist.

(iv) Für jedes $f \in \text{D}(H) \cap \mathcal{H}_{a.c.}(H)$ gilt:

$$Hf(\mathbf{x}) = \left(\mathcal{F}_\pm^{-1} \frac{k^2}{2} \mathcal{F}_\pm f \right) (\mathbf{x}),$$

und damit für jedes $f \in \mathcal{H}_{a.c.}(H)$:

$$e^{-iHt} f(\mathbf{x}) = \left(\mathcal{F}_\pm^{-1} e^{-i\frac{k^2}{2}t} \mathcal{F}_\pm f \right) (\mathbf{x}).$$

Bemerkung 3. Der Beweis von Proposition 1 in [37] enthielt einen Fehler, auf den Simon in [55], Kapitel V, aufmerksam gemacht hat. Er hat dort einen alternativen Weg für eine geringfügig andere Potentialklasse vorgestellt. Ikebe selber hat den Fehler in [39] korrigiert.

Um die Methode der stationären Phase anzuwenden, werden wir vor allem Abschätzungen an die Ableitungen der generalisierten Eigenfunktionen benötigen:

Proposition 2. Sei $V \in (V)_n$ für ein $n \geq 3$. Dann gilt:

(i) $\varphi_\pm(\mathbf{x}, \cdot) \in C^{n-2}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ und die partiellen Ableitungen⁶
 $\partial_{\mathbf{k}}^\alpha \varphi_\pm(\mathbf{x}, \mathbf{k})$, $|\alpha| \leq n - 2$, sind stetig bezüglich \mathbf{x} und \mathbf{k} .

⁵l. i. m. f ist eine kürzere Schreibweise für $\text{s-lim}_{R \rightarrow \infty} \int_{B_R}$, wobei s-lim den Limes in der L^2 -Norm, und B_R eine Kugel mit Radius R um den Koordinatenursprung bezeichnen.

⁶Wir gebrauchen die übliche Multiindex-Notation: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $\partial_{\mathbf{k}}^\alpha f(\mathbf{k}) := \partial_{k_1}^{\alpha_1} \partial_{k_2}^{\alpha_2} \partial_{k_3}^{\alpha_3} f(\mathbf{k})$ und $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

Ist zusätzlich Null weder ein Eigenwert noch eine Resonanz von H , sind $\varphi_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ stetig auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ und es gilt:

$$(ii) \quad \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} |\varphi_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{k})| < \infty,$$

für jedes α mit $|\alpha| \leq n - 2$ existiert ein $c_{\alpha} < \infty$, so dass

$$(iii) \quad \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} |\kappa^{|\alpha|-1} \partial_{\mathbf{k}}^{\alpha} \varphi_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{k})| < c_{\alpha} \langle x \rangle^{|\alpha|}, \quad \text{mit } \kappa := \frac{k}{\langle k \rangle},$$

und für jedes $l \in \{1, \dots, n - 2\}$ existiert ein $c_l < \infty$, so dass

$$(iv) \quad \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} \left| \frac{\partial^l}{\partial \mathbf{k}^l} \varphi_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \right| < c_l \langle x \rangle^l, \quad \text{wobei } \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \text{ die radiale partielle Ableitung im } \mathbf{k}\text{-Raum ist.}$$

Bemerkung 4. Diese Proposition, außer die Aussage (iii), wurde in [58], Theorem 3.1, bewiesen. Aussage (iii) korrigiert die Entsprechende in Theorem 3.1, welche nicht den notwendigen Faktor $\kappa^{|\alpha|-1}$ enthielt. Für $|\alpha| = 1$, welcher der entscheidende Fall in jener Arbeit war, ist dieser Faktor 1. Siehe dazu auch den Anhang.

Bemerkung 5. Null ist eine Resonanz von H wenn eine Lösung f von $Hf = 0$ existiert, so dass $\langle x \rangle^{-\gamma} f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ für jedes $\gamma > \frac{1}{2}$, aber nicht für $\gamma = 0$.⁷ Das Auftreten einer solchen Resonanz oder des Eigenwerts Null kann man als sehr speziell bezeichnen: Ein Hamilton-Operator $H = H_0 + cV$, $c \in \mathbb{R}$, kann diese Eigenschaft nur für c aus einer diskreten Teilmenge von \mathbb{R} haben, siehe [2], S. 20 und [41], S. 589.

Als eine direkte Konsequenz aus Proposition 2 und (1.18) erhalten wir⁸

Korollar 1. Sei $V \in (V)_3$, und sei Null weder ein Eigenwert noch eine Resonanz von H . Dann ist die T -Matrix (1.18) eine beschränkte und stetige Funktion auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Darüber hinaus gibt es, falls $V \in (V)_n$ für ein $n \geq 3$, für jeden Multiindex α mit $|\alpha| \leq n - 3$ eine Konstante $c_{\alpha} > 0$, so dass

$$\sup_{\mathbf{k}' \in \mathbb{R}^3, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} \kappa^{|\alpha|-1} |\partial_{\mathbf{k}}^{\alpha} T(\mathbf{k}', \mathbf{k})| \leq c_{\alpha}. \quad (1.21)$$

⁷Es gibt verschiedene Definitionen, siehe z.B. [65], S. 552, [2], S. 20 und [41], S. 584.

⁸Siehe dazu auch Korollar 2.24 in [57] und Korollar 3.9 in [58].

Kapitel 2

Die Streutheorie aus Sicht der Bohmschen Mechanik

Die vorliegende Arbeit behandelt die mikroskopische Begründung der Streutheorie im Sinne der Einleitung auf mathematisch rigorem Weg. In diesem Kapitel werden wir vorbereitend die dazu grundlegenden Ideen und Zusammenhänge aus Sicht der Bohmschen Mechanik vorstellen. Zusätzlich werden die mathematischen Fragestellungen, die daraus erwachsen, präzisiert. Auf die Problematik, die eine Begründung ohne Bohmsche Mechanik, wie z.B. die Arbeiten von Newton et al. [11, 46] und Dollard [15, 16], birgt, wurde insbesondere schon in [13, 14, 21, 26, 27] eingegangen und ist nicht mehr Gegenstand dieser Arbeit.¹ Wir werden aber die Problematik weiter unten zumindest kurz ansprechen.

In einem typischen Streuexperiment detektiert man Teilchen, die aus einer Reaktion eines Strahls mit einem Target hervorgegangen sind. Im Allgemeinen werden eine Reihe von Effekten eine Rolle spielen. Ganz sicher ist aber folgende Situation absolut grundlegend und wichtig:² Ein Teilchen mit Wellenfunktion ψ und der Trajektorie $\mathbf{X}_t^\psi(\mathbf{x})$ abhängig vom Anfangsort \mathbf{x} durchläuft ein Potential V und durchkreuzt dann z.B. die Detektoroberfläche $R\Sigma$. Die Oberfläche $R\Sigma$ ist definiert als derjenige Teil einer Kugeloberfläche mit Radius R , die den (offenen) Raumwinkel $\Sigma \in S^2$ abdeckt, d.h. $R\Sigma := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x = R \text{ und } \frac{\mathbf{x}}{x} \in \Sigma\}$. Siehe dazu auch Abbildung 2.1. Stellt man sich das Streuzentrum umringt von Detektoren vor, ist es natürlich, ein Detektionsereignis in $R\Sigma$ mit dem Ereignis “Erster Austritt von der Trajektorie $\mathbf{X}_t^\psi(\mathbf{x})$ aus dem Gebiet $x \leq R$

¹Auch Reed und Simon sprechen bei den Ergebnissen von Dollard und Newton et al. von “attempts”, siehe S. 356 in [50].

²Wir beschränken uns zunächst auf die Wechselwirkung von jeweils 2 Teilchen, die wiederum auf die Bewegung eines Teilchens im externen Potential reduziert werden kann, siehe dazu z.B. auch [57], S. 17.

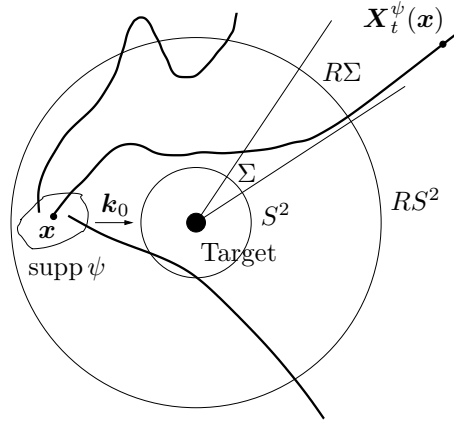


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung der Streuung eines Wellenpakets ψ mit kompaktem Träger $\text{supp } \psi$.

liegt in $R\Sigma$ “ gleichzusetzen.³ Der grundlegende Ausdruck für eine empirisch zugängliche Größe ist also die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}^\psi \left(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \text{erster Austritt von } \mathbf{X}_t^\psi(\mathbf{x}) \text{ liegt in } R\Sigma \right). \quad (2.1)$$

Da die Detektoren typischerweise weit vom Streuzentrum entfernt sind, muss man diese Wahrscheinlichkeit für große R analysieren. Ein möglicher Zugang dazu liegt in der Bedeutung der quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsstromdichte (vgl. Kapitel 1.1, bzw. (1.8)) in der Bohmschen Mechanik: Bezeichnet man mit $N_{\text{sig}}^\psi(R\Sigma, \Delta T)$ die signierten Durchkreuzungen durch $R\Sigma$, also die Summe von Durchkreuzungen nach außen, die als $+1$ gezählt werden und denen nach innen, welche mit -1 verrechnet werden, kann man zeigen, dass

$$\mathbb{E}^\psi(N_{\text{sig}}^\psi(R\Sigma, \Delta T)) = \int_{\Delta T} \int_{R\Sigma} \mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} dt. \quad (2.2)$$

Dabei bezeichnet $d\boldsymbol{\sigma}$ das infinitesimale Oberflächenelement $\frac{\mathbf{x}}{x} d\sigma$. Der Beweis von (2.2) findet sich in [7] und wird später nochmals als Proposition formuliert. Heuristisch kann man (2.2) so verstehen: Damit ein Teilchen das infinitesimale Oberflächenelement $d\sigma \subset R\Sigma$ in dem Zeitintervall $[t, t + dt)$ durchkreuzt, muss es zur Zeit t in einem Zylinder der Größe $|\mathbf{v}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} dt|$ sein. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist also

$$|\psi_t(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{v}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} dt| = |\mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} dt|.$$

³Das setzt voraus, dass die Detektion eines Teilchens nicht zu sehr in seine Bewegung eingreift. Für große R ist das eine sehr milde Voraussetzung. Wir greifen diesen Punkt nochmals bei der Mehrteilchenstreuung auf (Kapitel 3.3), bei der die Übereinstimmung von ungemessener und gemessener Austrittsstatistik aufgrund von möglicherweise verschränkten Wellenfunktionen zunächst viel kritischer erscheint.

Wegen der infinitesimalen Intervalle ist $N_{\text{sig}}^\psi(dt, d\sigma) \in \{-1, 0, 1\}$, wobei das Vorzeichen dasselbe wie das von $\mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\sigma$ ist. Deshalb ist $\mathbb{E}^\psi(N_{\text{sig}}^\psi(dt, d\sigma)) = \mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\sigma dt$ und die Integration über $R\Sigma$ und ΔT ergibt (2.2). Ebenso findet man, dass der Erwartungswert der totalen Durchkreuzungen N_{tot}^ψ , also der Summe aller Durchkreuzungen, gegeben ist durch

$$\mathbb{E}^\psi(N_{\text{tot}}^\psi(R\Sigma, \Delta T)) = \int_{\Delta T} \int_{R\Sigma} |\mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\sigma| dt. \quad (2.3)$$

Nun erwartet man, dass der Fluss für ein asymptotisch freies und auswärtslaufendes Teilchen nach außen gerichtet ist. In der Tat kann man zeigen, dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_{R\Sigma} \mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\sigma dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_{R\Sigma} |\mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\sigma| dt. \quad (2.4)$$

Es ist also asymptotisch $\mathbb{E}^\psi(N_{\text{tot}}^\psi(R\Sigma, [0, \infty))) = \mathbb{E}^\psi(N_{\text{sig}}^\psi(R\Sigma, [0, \infty)))$. Das bedeutet wiederum, dass das Teilchen weit entfernte Flächen nur nach außen durchkreuzt und damit höchstens nur einmal. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{P}^\psi \left(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \text{erster Austritt von } \mathbf{X}_t^\psi(\mathbf{x}) \text{ liegt in } R\Sigma \right) \\ = \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{E}^\psi(N_{\text{sig}}^\psi(R\Sigma, [0, \infty))) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_{R\Sigma} \mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\sigma dt. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Der letzte Term in (2.5) ist aber Teil des Flux-Across-Surfaces Theorem (FAST), welches von Newton et al. in [11] eingeführt wurde. Das FAST besagt, dass der letzte Term in (2.5) direkt mit dem asymptotischen Formalismus der Streutheorie verbunden ist:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_{R\Sigma} \mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\sigma dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_{R\Sigma} |\mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\sigma| dt = \int_{C_\Sigma} \left| \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \right|^2 d^3k, \quad (2.6)$$

wobei $C_\Sigma := \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{e}_k \in \Sigma\}$ ist. Die Aussage wird heuristisch schnell klar, wenn man sich die asymptotische Formel

$$\psi_t(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{(it)^{\frac{3}{2}}} e^{i\frac{\mathbf{x}^2}{2t}} \widehat{\psi}_{\text{out}}\left(\frac{\mathbf{x}}{t}\right) \quad (2.7)$$

vor Augen führt, vgl. z.B. [18], S. 319 f. Bohmsche Mechanik zusammen mit dem FAST liefert also

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{P}^\psi \left(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \text{erster Austritt von } \mathbf{X}_t^\psi(\mathbf{x}) \text{ liegt in } R\Sigma \right) = \int_{C_\Sigma} \left| \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \right|^2 d^3k. \quad (2.8)$$

Die Idee, (2.8) mit Hilfe des FAST abzuleiten, sowie erste Resultate zum FAST sind in [12, 13, 14] zu finden. Weitere Resultate folgten in [57, 58]. Das FAST ist auch Teil dieser Arbeit, siehe Theorem 2 und Korollar 2 im Kapitel 3, bzw. entsprechende Resultate in [19]. Weiter unten und im Kapitel 3 werden die einzelnen Resultate näher erläutert.

Man beachte, dass das FAST allein (also ohne der Existenz von Trajektorien) nicht als mikroskopische Begründung ausreicht: Ohne eine Verknüpfung des letzten Terms in (2.5) mit (2.1) über den Erwartungswert der signierten Durchkreuzungen bleibt die nicht asymptotische Bedeutung des Flusses unklar. Für endliches R ist das Fluss-Integral im Allgemeinen nicht positiv und kann daher nicht eine Wahrscheinlichkeit darstellen. Der relevante Ausdruck für ein endliches R ist (2.1), der für große R durch das Fluss-Integral approximiert wird. Für mehr Details zu dieser Problematik siehe z.B. [13, 14, 18, 21].

Die mikroskopische Ableitung des Streuquerschnitts umfasst nun folgende Schritte: Ausgehend von der Existenz der Trajektorien wird im Kapitel 4 der Streuquerschnitt definiert, der relativ unmittelbar mit der Austrittsstatistik (2.1) zusammenhängt. Die Definition erfolgt für eine realistische Situation, die keinerlei asymptotischen Ausdrücke enthält, sondern nur endliche Parameter, die den experimentellen Aufbau widerspiegeln (z.B. den Abstand R des Detektors vom Target oder die Breite des einfallenden Teilchenstrahls, genaue Definition der Parameter siehe Kapitel 4). Wir nennen den Streuquerschnitt für die realistische (d.h. "endliche") Situation den empirischen Streuquerschnitt und bezeichnen ihn mit $\sigma_{\text{emp}}(\Sigma)$ oder—um die Abhängigkeit von den Parametern zu verdeutlichen—mit $\sigma_{\text{emp}}(\text{Parameter}, \Sigma)$. Nun werden die Parameter passend skaliert (u.a. $R \rightarrow \infty$, $|\widehat{\psi}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)|^2 \rightarrow \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$), da in einer typischen Streusituation die relevanten Parameter in einem gewissen Sinne groß oder einem anderweitigen Limes nah sind. Der Limes $|\widehat{\psi}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)|^2 \rightarrow \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ z.B. spiegelt einen sehr gut kollimierten Strahl wider. Die genaue Analyse dieses Limes, den man Streuregime nennt, ist im Kapitel 5 zu finden. Das Hauptresultat ist dann, dass der empirische Streuquerschnitt im Streuregime durch die wohlbekannt Formel gegeben ist, d.h.

$$\lim_{\text{Parameter} \rightarrow \text{Streuregime}} \sigma_{\text{emp}}(\text{Parameter}, \Sigma) = \sigma(\Sigma) = 16\pi^4 \int_{\Sigma} |T(k_0\boldsymbol{\omega}, \mathbf{k}_0)|^2 d\Omega, \quad (2.9)$$

wobei \mathbf{k}_0 der Impuls⁴ der Teilchen im Strahl ist. Der vorbereitende Artikel zum Resultat (2.9) ist [21]. Die technische Ausarbeitung, d.h. das Durchführen der Skalierung der Parameter, findet sich in Kapitel 6, Theorem 4 und 5 (bzw. [20]). Die rechte Seite von (2.9) wird manchmal auch durch das Quadrat der Streuamplitude ausgedrückt (siehe auch Kapitel 5). Da die Formel erstmals von Born in [9] angegeben wurde, wird die zweite Gleichung in (2.9) Bornsche Formel genannt.⁵

⁴Es wurde bereits $\hbar = c = 1$ gesetzt, so dass $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} = \mathbf{k}$.

⁵Nicht zu verwechseln mit "Bornscher Näherung", mit der man die rechte Seite von (2.9) für spezielle

Nun gehen wir kurz auf den N -Teilchenfall ein. Es wurde in [27] gezeigt, dass der Fluss im N -Teilchenfall nicht mehr die Bedeutung wie im 1-Teilchenfall hat; der Zugang, wie er oben für den 1-Teilchenfall geschildert wurde, kann nicht auf den N -Teilchenfall übertragen werden. Bohmsche Mechanik ermöglicht aber den Zugang zur Austrittsstatistik ohne den Fluss. Im Folgenden erläutern wir diesen Zugang wieder für den 1-Teilchenfall, die Übertragung auf N Teilchen erfolgt im Kapitel 3.3. Die Idee ist einfach und vom Standpunkt der Bohmschen Mechanik unmittelbar einleuchtend: Es ist die asymptotische Geradlinigkeit der Bahnen, welche ein direktes Auswerten von (2.1) ermöglicht. Man kann nämlich zeigen, dass die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{X}}_t^\psi$ der Trajektorie für große Zeiten gegen die asymptotische Geschwindigkeit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{X}_t^\psi}{t}$$

konvergiert, die gemäß $|\widehat{\psi}_{\text{out}}|^2$ verteilt ist. Darüber hinaus zeigt sich, dass man die Differenz zwischen tatsächlicher und asymptotischer Geschwindigkeit so gut kontrollieren kann, dass die Austrittsstatistik allein durch die Verteilung der asymptotischen Geschwindigkeit gegeben ist. Damit erhält man wieder das Ergebnis (2.8). Das asymptotische Verhalten der Bahnen wurde in [52] zunächst für ein Teilchen studiert, die Übertragung der Ergebnisse auf N Teilchen sowie die Anwendung auf die Streutheorie erfolgt in Kapitel 3.3 (siehe dazu auch [24]).

Wir wollen nun die zu erwartenden mathematischen Herausforderungen skizzieren. Zunächst kommen wir zum FAST, d.h. zur Aussage (2.6). Da es um eine Begründung des asymptotischen Formalismus (S -Matrix, ψ_{out} , ψ_{in}) der Streutheorie geht, dürfen die Bedingungen natürlich nicht an Elemente dieses Formalismus gestellt werden, sondern nur an die Wellenfunktion ψ und das Potential V . Das ist der zusätzliche Schritt, der in dieser Arbeit im Vergleich zum letzten Ergebnis über das FAST in unserem Kontext ([57, 58]) genommen wird. Wir werden dafür folgendermaßen vorgehen: Wie schon im Kapitel über die mathematischen Grundlagen der Streutheorie angedeutet worden ist, werden wir intensiven Gebrauch der verallgemeinerten Eigenfunktionen φ_\pm machen. Mit Hilfe der Relation (vgl. Proposition 1)

$$\psi_t(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \varphi_+(\mathbf{x}, \mathbf{k}) e^{-i\frac{\mathbf{k}^2}{t}} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) d^3k \quad (2.10)$$

und der Methode der stationären Phase werden detaillierte Abschätzungen an die Wellenfunktion verfügbar sein. Neben den grundlegenden Eigenschaften der generalisierten Eigenfunktionen, die auf [37] zurückgehen und in Proposition 1 zusammengefasst sind, werden insbesondere die Regularitätseigenschaften bezüglich \mathbf{k} entscheidend sein. Diese wurden in [57, 58] ausgearbeitet und sind Gegenstand der Proposition 2. Um die

Situationen auswerten kann.

Abschätzungen an ψ_t zu erhalten, muss man zunächst Bedingungen an $\widehat{\psi}_{\text{out}}$ stellen. Diese kann man mit Hilfe der zu (2.10) entsprechenden Formel

$$\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \varphi_+^*(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \psi(\mathbf{x}) d^3x \quad (2.11)$$

auf ψ übertragen. An (2.11) wird klar, dass die Differenzierbarkeitseigenschaften von $\widehat{\psi}_{\text{out}}$ mit denen von den generalisierten Eigenfunktionen verbunden sind. Diese sind aber gemäß Proposition 2 relativ schlecht, vgl. insbesondere (iii). Das liegt nicht etwa daran, dass Proposition 2 ein vorläufiges Resultat ist, sondern an der Tatsache, dass in der Greenschen Funktion der Lippmann-Schwinger-Gleichung ein k , also der Betrag von \mathbf{k} , vorkommt, was schlechte Differenzierbarkeitseigenschaften zur Folge hat. Insbesondere Voraussetzungen wie $\widehat{\psi}_{\text{out}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ sind damit schwer auf ψ übertragbar. Weiterhin sind natürlich auch Voraussetzungen eines kompakten Trägers von $\widehat{\psi}_{\text{out}}$ schwer auf explizite Bedingungen an ψ übertragbar. Die Schwierigkeit beim Beweis des FAST besteht also darin, Abschätzungen an ψ mit Hilfe von (2.10) unter sehr schwachen Voraussetzungen an $\widehat{\psi}_{\text{out}}$ ableiten zu können (ein wichtiges Resultat ist dabei Lemma 2). Man beachte auch, dass es nicht ausreicht, das FAST auf einer dichten Teilmenge einer bestimmten Klasse von Wellenfunktionen zu zeigen und anschließend die Gültigkeit auf diese Klasse mit einem Dichtheits-Argument auszudehnen. Das liegt daran, dass das Fluss-Integral

$$\int_0^\infty \int_{R\Sigma} \mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} dt$$

eine unbeschränkte Sesquilinearform ist, siehe auch [58], S. 2.

Der alternative Zugang zur Austrittsstatistik über das asymptotische Verhalten der Bohmschen Bahnen weist ganz ähnliche Charakteristika wie der über das FAST auf. Das liegt darin begründet, dass der Fluss und das Bohmsche Geschwindigkeitsfeld über $\mathbf{j}^{\psi_t} = |\psi_t|^2 \mathbf{v}^{\psi_t}$ eng verknüpft sind. Die Abschätzungen an ψ , die schon für das FAST entwickelt wurden, können auch für das asymptotische Verhalten der Bohmschen Bahnen genutzt werden.

Wir werden das FAST für die Ableitung des Streuquerschnitts verwenden. Die Notwendigkeit, die Bedingungen an ψ anstatt an die Asymptoten zu stellen, erfordert auch über das FAST hinaus weitere Ergebnisse: Die rechte Seite von (2.6) enthält $\psi_{\text{out}} = S\psi_{\text{in}}$. Für die Ableitung des Streuquerschnitts wird üblicherweise ψ_{out} unter geeigneten Bedingungen an ψ_{in} ausgerechnet. Um hier die Bedingungen an die Wellenfunktion ψ stellen zu können, werden entsprechende Abschätzungen zwischen ψ_{in} und ψ benötigt (Lemma 3 und Bemerkung 16).

Kapitel 3

Zur Austrittsstatistik

Wir werden nun die im letzten Kapitel vorgestellte Heuristik mathematisch präzisieren.

3.1 Die Austrittsstatistik in Bohmscher Mechanik: Definitionen

Zunächst werden die relevanten Größen der Austrittsstatistik basierend auf der Existenz der Bohmschen Dynamik definiert. Wir ersetzen die recht allgemeinen Voraussetzungen von Theorem 1 durch speziellere und dem Rahmen der verallgemeinerten Eigenfunktionen (vgl. Kapitel 1.2) angepassten Bedingungen:

- A1.** Die anfängliche Wellenfunktion ψ ist normiert, $\|\psi\| = 1$, und es gilt: $\psi \in C^\infty(H)$.
- A2.** Das Potential V ist in $(V)_2$ und C^∞ außer an höchstens endlich vielen Singularitäten.

Gemäß Theorem 1 existiert dann die Bohmsche Dynamik $|\psi|^2$ -fast sicher global in der Zeit. Das bedeutet, dass, abhängig von der anfänglichen Position $\mathbf{x} \in \Omega$, wobei Ω die Menge der “guten” Punkte ist, das Teilchen die Trajektorie $\mathbf{X}_t^\psi(\mathbf{x})$ hat. Auf der Menge der “guten” Punkte ist $\psi(\mathbf{x})$ ungleich Null und differenzierbar. Das Komplement $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ von Ω hat Maß Null (in Bezug auf $|\psi|^2$).

Gegeben eine Trajektorie $\mathbf{X}_t^\psi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, können wir die Anzahl von Durchkreuzungen in natürlicher Weise definieren: Für die Oberfläche $R\Sigma \subset R\mathbb{S}^2$ mit dem Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{x}$, $\mathbf{x} \in R\Sigma$, definieren wir $N_+^\psi(R\Sigma)$ auf Ω durch

$$N_+^\psi(R\Sigma)(\mathbf{x}) := \left| \left\{ t \geq 0 \mid \mathbf{X}_t^\psi(\mathbf{x}) \in R\Sigma \text{ und } \dot{\mathbf{X}}_t^\psi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}_t^\psi(\mathbf{x})) > 0 \right\} \right|, \quad (3.1)$$

d.h. durch die Anzahl der Durchkreuzungen von der Trajektorie $\mathbf{X}_t^\psi(\mathbf{x})$ durch $R\Sigma$ in Richtung der Orientierung der Oberfläche in dem Zeitintervall $[0, \infty)$. (“Kritische Durchkreuzungen”, bei denen die Geschwindigkeit senkrecht zur Orientierung von $R\Sigma$ verläuft, haben Maß Null und können daher vernachlässigt werden, siehe [6], S. 28-34.) Wenn $N_+^\psi(R\Sigma)(\mathbf{x}) \geq 1$, können wir $t_{\text{exit}}^{R\Sigma}$, $R\Sigma \subset RS^2$, als die Zeit definieren, bei der das Teilchen die Oberfläche $R\Sigma$ zum ersten Mal in positiver Richtung durchkreuzt, d.h.

$$t_{\text{exit}}^{R\Sigma}(\mathbf{x}) := \min \left\{ t \geq 0 \mid \mathbf{X}_t^\psi(\mathbf{x}) \in R\Sigma \text{ und } \dot{\mathbf{X}}_t^\psi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}_t^\psi(\mathbf{x})) > 0 \right\}. \quad (3.2)$$

Für den Fall, dass das Teilchen die Oberfläche nicht in positiver Richtung durchkreuzt, setzen wir

$$t_{\text{exit}}^{R\Sigma}(\mathbf{x}) := \infty, \text{ wenn } N_+^\psi(R\Sigma)(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.3)$$

Analog zu (3.1) ist $N_-^\psi(R\Sigma)$ die Anzahl der Durchkreuzungen in der entgegengesetzten Richtung. Wir definieren $N_+^\psi(R\Sigma)$ und $N_-^\psi(R\Sigma)$ auf ganz \mathbb{R}^3 , in dem wir $N_+^\psi(R\Sigma) = N_-^\psi(R\Sigma) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ setzen. Damit können wir die Anzahl der signierten Durchkreuzungen ebenfalls auf \mathbb{R}^3 durch

$$N_{\text{sig}}^\psi(R\Sigma) := N_+^\psi(R\Sigma) - N_-^\psi(R\Sigma) \quad (3.4)$$

definieren. Die Anzahl der totalen Durchkreuzungen ist dann gegeben durch

$$N_{\text{tot}}^\psi(R\Sigma) := N_+^\psi(R\Sigma) + N_-^\psi(R\Sigma). \quad (3.5)$$

Diese Größen sind Zufallsgrößen auf dem Raum \mathbb{R}^3 der anfänglichen Konfigurationen, siehe [6], Lemma 4.2. Die Erwartungswerte von $N_{\text{sig}}^\psi(R\Sigma)$ und $N_{\text{tot}}^\psi(R\Sigma)$ sind—wie schon in Kapitel 2 vorweggenommen—gegeben durch Integrale über den Fluss:

Proposition 3. *Sei A1 und A2 erfüllt. Dann sind die Erwartungswerte von $N_{\text{sig}}^\psi(R\Sigma)$ und $N_{\text{tot}}^\psi(R\Sigma)$ gegeben durch*

$$\mathbb{E}^\psi(N_{\text{sig}}^\psi(R\Sigma)) = \int_0^\infty \int_{R\Sigma} \mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} dt, \quad (3.6)$$

$$\mathbb{E}^\psi(N_{\text{tot}}^\psi(R\Sigma)) = \int_0^\infty \int_{R\Sigma} |\mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}| dt. \quad (3.7)$$

Der Beweis von Proposition 3 findet sich in [6], S. 34-37. Das Resultat ist auch unter dem allgemeineren Rahmen von Theorem 1 und für allgemeinere Oberflächen gültig. Für weitere Resultate zu Fluss-Integralen und Erwartungswerte von Durchkreuzungen siehe [61].

Wir betrachten nun die Streusituation von Abbildung 2.1, bei der wir die Austrittsstatistik angeben wollen. Dafür definieren wir $N_{\text{det}}^\psi(R, \Sigma) := 1$, wenn das Teilchen mit der Wellenfunktion $\psi_0 = \psi$ in dem Zeitintervall $[0, \infty)$ die Oberfläche RS^2 zum ersten Mal nach außen in $R\Sigma$ durchquert und Null sonst, d.h.

$$N_{\text{det}}^\psi(R, \Sigma) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \{0, 1\},$$

$$N_{\text{det}}^\psi(R, \Sigma)(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \leq R, t_{\text{exit}}^{RS^2} < \infty \text{ und } \mathbf{X}_{t_{\text{exit}}^{RS^2}}^\psi(\mathbf{x}) \in R\Sigma, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.8)$$

Da RS^2 eine geschlossene Oberfläche ist, können wir abschätzen:

$$\left| N_{\text{det}}^\psi(R, \Sigma) - N_{\text{sig}}^\psi(R\Sigma) \right| \leq N_-^\psi(RS^2),$$

so dass mit der Dreiecksungleichung

$$\left| \mathbb{E}^\psi(N_{\text{det}}^\psi(R, \Sigma)) - \mathbb{E}^\psi(N_{\text{sig}}^\psi(R\Sigma)) \right| \leq \mathbb{E}^\psi(N_-^\psi(RS^2)) \quad (3.9)$$

folgt. Mit (3.4), (3.5) und Proposition 3 erhalten wir für die rechte Seite von (3.9)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\psi(N_-^\psi(RS^2)) &= \frac{1}{2} \mathbb{E}^\psi(N_{\text{tot}}^\psi(RS^2) - N_{\text{sig}}^\psi(RS^2)) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{RS^2} (|\mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}| - \mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}) dt, \end{aligned} \quad (3.10)$$

und daher

$$\left| \mathbb{E}^\psi(N_{\text{sig}}^\psi(R\Sigma)) - \mathbb{E}^\psi(N_{\text{det}}^\psi(R, \Sigma)) \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{RS^2} (|\mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}| - \mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}) dt. \quad (3.11)$$

Wenn die Fluss-Integrale endlich sind, und wenn $\mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \geq 0$ für alle $d\boldsymbol{\sigma} \in RS^2$ und $t > 0$, erhalten wir $\mathbb{E}^\psi(N_{\text{sig}}^\psi(R\Sigma)) = \mathbb{E}^\psi(N_{\text{det}}^\psi(R\Sigma))$. Im Allgemeinen ist $\mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ nicht positiv, doch die Aussage (2.6) des FAST (Theorem 2) garantiert, dass der Fluss asymptotisch nach außen zeigt, d.h. asymptotisch ist $\mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ positiv, und dass die Fluss-Integrale für ausreichend großes R endlich sind. Damit werden wir die asymptotische Gleichheit von $\mathbb{E}^\psi(N_{\text{sig}}^\psi(R\Sigma))$ und $\mathbb{E}^\psi(N_{\text{det}}^\psi(R\Sigma))$ im nächsten Kapitel etablieren können.

3.2 Die Austrittsstatistik für ein Teilchen: das Flux-Across-Surfaces Theorem

Gilt das FAST (2.6) erhält man mit (3.11) die entscheidende asymptotische Gleichheit zwischen $\mathbb{E}^\psi(N_{\text{det}}^\psi(R, \Sigma))$ und $\mathbb{E}^\psi(N_{\text{sig}}^\psi(R\Sigma))$ und damit die mathematisch präzise Aussage von (2.8):

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{E}^\psi(N_{\text{det}}^\psi(R, \Sigma)) = \int_{C_\Sigma} |\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})|^2 d^3k. \quad (3.12)$$

Bevor wir das FAST beweisen und (3.12) als Korollar formulieren, gehen wir auf die Literatur über das FAST ein.

Das FAST wurde von Combes, Newton und Shtokhammer 1975, [11], als wichtiges mathematisch-physikalisches Problem erkannt und vorgestellt. Im Jahre 1996 wurde das FAST von Daumer et al. in [13] für den freien Schrödinger-Fall bewiesen. Kurz darauf bewiesen Amrein, Pearson und Zuleta das FAST für kurz- und langreichweitige Potentiale unter der Voraussetzung eines Energie-Cutoffs an die auslaufende Asymptote (also $\text{supp } \widehat{\psi}_{\text{out}}$ ist kompakt), siehe [4, 5]. Wie schon am Ende von Kapitel 2 angedeutet, hindert einen diese, auf den ersten Blick recht harmlose Voraussetzung, daran, das FAST als physikalisch relevantere Aussage mit Bedingungen nur an den Streuzustand zu formulieren. Teufel, Dürr und Berndl konnten dann 1999 einen Beweis finden, der zwar ohne Energie-Cutoffs auskam, aber weiterhin mit Bedingungen an ψ_{out} formuliert war, sowie für Potentiale, die für große x etwas schneller als x^{-4} abfallen, siehe [57, 58]. Panati und Teta, [47], bewiesen das FAST für den Spezialfall einer Punktwechselwirkung und mit Bedingungen nur an den Streuzustand mit ähnlichen Methoden wie in [58]. Im Jahre 2003 konnte Nagao, [45], eine schwächere Version des FAST beweisen, eine, in der die erste Gleichung in (2.6) fehlt. Dieser Beweis funktioniert für kurzreichweitige Potentiale, die schneller als die Dimension des Raumes ($= 3$) abfallen und mit Bedingungen nur an den Streuzustand. Ohne die erste Gleichung in (2.6) kann man nicht die Verbindung zu experimentellen Daten von einem typischen Streuexperiment herstellen, da dann nicht klar ist, ob der Fluss asymptotisch radial nach außen zeigt, also ob die rechte Seite von (3.11) für große R gegen Null geht. Das ist aber entscheidend für die Ableitung der Austrittsstatistik, vgl. Kapitel 2 und 3.1. Im selben Jahr konnten Dürr und Pickl, [25], das FAST mit Hilfe von generalisierten Eigenfunktionen für ein Dirac-Teilchen nur unter Bedingungen an den Streuzustand beweisen. In diesem Kapitel werden wir das FAST für den Schrödinger-Fall durch Kombination der Methoden von [25, 58] beweisen, nun nur unter Bedingungen an den Streuzustand.

Wir sind schon am Ende von Kapitel 2 auf die Rahmenbedingungen eingegangen, unter denen das FAST bewiesen werden muss. In diesem Sinne formulieren wir nun eine Klasse

von Asymptoten, \mathcal{G}^+ , für die wir das FAST beweisen können und welche ähnlich schlechte Eigenschaften wie die generalisierten Eigenfunktionen hat, so dass diese Eigenschaften auf Bedingungen an ψ übertragen werden können. Die Klasse \mathcal{G}^+ von geeigneten Asymptoten ist wie folgt definiert (man denke in der folgenden Definition an die Fourier-Transformierte von $\psi_{\text{out}} = \Omega_+^{-1}\psi$. Daher die Bezeichnung \mathcal{G}^+):

Definition 2. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ist in \mathcal{G}^+ , wenn es eine Konstante $C \in \mathbb{R}_+$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{k})| &\leq C\langle k \rangle^{-15}, \\ |\partial_{\mathbf{k}}^\alpha f(\mathbf{k})| &\leq C\langle k \rangle^{-6}, \quad |\alpha| = 1, \\ |\kappa \partial_{\mathbf{k}}^\alpha f(\mathbf{k})| &\leq C\langle k \rangle^{-5}, \quad |\alpha| = 2, \quad \kappa = \frac{k}{\langle k \rangle}, \\ \left| \frac{\partial^2}{\partial k^2} f(\mathbf{k}) \right| &\leq C\langle k \rangle^{-3}. \end{aligned}$$

Mit dieser Klasse von Wellenfunktionen können wir ein FAST zunächst mit Bedingungen an $\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})$ formulieren und beweisen:

Theorem 2. Sei das Potential V in $(V)_4$ und so, dass Null weder ein Eigenwert noch eine Resonanz von H ist. Sei $\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \in \mathcal{G}^+$. Dann ist $\psi_t(\mathbf{x}) = e^{-iHt}\Omega_+\psi_{\text{out}}(\mathbf{x})$ stetig differenzierbar außer an den Singularitäten von V und für jedes $\Sigma \subset S^2$ und jedes $T \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_T^\infty \int_{R\Sigma} \mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_T^\infty \int_{R\Sigma} |\mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}| dt = \int_{C_\Sigma} |\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})|^2 d^3k. \quad (3.13)$$

Die entscheidende Bedingung in Theorem 2 gegenüber dem Theorem 2.1 in [58] ist $\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \in \mathcal{G}^+$, da für diese Klasse eine Menge \mathcal{G} von Streuzuständen definiert werden kann, für die die entsprechenden Asymptoten in \mathcal{G}^+ sind.

Definition 3. f ist in \mathcal{G}^0 , wenn¹

$$\begin{aligned} f &\in \mathcal{H}_{a.c.}(H) \cap C^8(H), \\ \langle x \rangle^2 H^n f &\in L^2(\mathbb{R}^3), \quad n \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}, \\ \langle x \rangle^4 H^n f &\in L^2(\mathbb{R}^3), \quad n \in \{0, 1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Dann ist $\mathcal{G} := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} e^{-iHt}\mathcal{G}^0$.

¹Angelehnt an die Bedeutung von $C^\infty(H)$ bezeichnet $C^8(H)$ die Menge $\bigcap_{n=1}^8 D(H^n)$.

Also ist \mathcal{G} eine Teilmenge von $\mathcal{H}_{\text{a.c.}}(H)$ und invariant unter endlichen Zeittranslationen, d.h. wenn $f \in \mathcal{G}$, dann ist auch $e^{-iHt}f \in \mathcal{G}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Weiterhin ist \mathcal{G} dicht in $\mathcal{H}_{\text{a.c.}}(H)$, was z.B. aus den Resultaten verwendet in [5], S. 5368, folgt: Sei $\mathcal{D}_4 := \{g(H)\langle x \rangle^{-4}\psi | g \in C_0^\infty(]0, \infty[), \psi \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$. Da unsere Potentiale keine positiven Eigenwerte haben (vgl. Kapitel 1.2), gilt: $\mathcal{D}_4 \subseteq \mathcal{H}_{\text{a.c.}}(H)$. Es ist leicht nachzuprüfen, dass \mathcal{D}_4 dicht in $\mathcal{H}_{\text{a.c.}}(H)$ ist. Zusätzlich ist $\mathcal{D}_4 \subseteq D(H) \cap D(\langle x \rangle^4)$. Ebenso gilt $H\mathcal{D}_4 \subseteq \mathcal{D}_4$, was zur Folge hat, dass $\mathcal{D}_4 \subseteq \mathcal{G}$ ist. Dann ist aber \mathcal{G} dicht in $\mathcal{H}_{\text{a.c.}}(H)$. Die Bedingung $\psi \in \mathcal{G}$ kann auch expliziter formuliert werden, vgl. Bemerkung 7.

Mit Definition 3 können wir nun das entscheidende “Mapping”-Lemma formulieren:

Lemma 1. *Sei das Potential V in $(V)_4$ und so, dass Null weder ein Eigenwert noch eine Resonanz von H ist. Dann gilt*

$$\psi(\mathbf{x}) \in \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F}(\Omega_+^{-1}\psi)(\mathbf{k}) = \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \in \mathcal{G}^+.$$

Die Beweis geht auf [25] zurück, und ist im Anhang. Das Lemma gilt auch, wenn man Ω_+^{-1} durch Ω_-^{-1} und ψ_{out} durch ψ_{in} ersetzt.²

Bemerkung 6. Es gibt weitere Abbildungseigenschaften der Wellenoperatoren, die aber in unserem Fall nicht anwendbar sind, siehe z.B. [65].

Theorem 2 und Lemma 1 ergeben nun das folgende Korollar, das FAST unter Bedingungen an den Streuzustand:

Korollar 2. *Sei das Potential V in $(V)_4$ und so, dass Null weder ein Eigenwert noch eine Resonanz von H ist. Sei $\psi \in \mathcal{G}$. Dann gilt für jedes $\Sigma \subset S^2$ und jedes $T \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_T^\infty \int_{R\Sigma} \mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_T^\infty \int_{R\Sigma} |\mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}| dt = \int_{C_\Sigma} |\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})|^2 d^3k.$$

Bemerkung 7. Anstatt $\psi \in \mathcal{G}$ kann man die Bedingungen an ψ und V expliziter angeben. Im Folgenden geben wir zwei Beispiele für ψ und V , so dass $\psi \in \mathcal{G}^0$. Die Menge der Wellenfunktionen \mathcal{G} , für die das FAST gilt ist dann—gemäß Definition 3—gegeben durch die Menge

$$\mathcal{G} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} e^{-iHt} \mathcal{G}^0.$$

²Mit Hilfe von (2.10) kann man sicher auch Abbildungseigenschaften von Ω_\pm angeben. Es gilt aber nicht $\psi \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \widehat{\psi}_{\text{out}} \in \mathcal{G}^+$.

Sei $H^{m,s}$ der gewichtete Sobolev-Raum

$$H^{m,s} := \{f \in L^2(\mathbb{R}^3) \mid (1+x^2)^{\frac{s}{2}}(1-\Delta)^{\frac{m}{2}}f \in L^2(\mathbb{R}^3)\}.$$

Dann kann man z.B. folgende Bedingungen angeben, für die $\psi \in \mathcal{G}^0$ ist:

- (i) $V \in (V)_2$, $V \in C^{14}(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{E})$, wobei \mathcal{E} die Menge der Singularitäten von V bezeichnet, sowie $\psi \in \mathcal{H}_{\text{a.c.}}(H) \cap C_0^{16}(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{E})$.
- (ii) $V \in (V)_2$, $V \in H^{14,2} \cap H^{4,4}$ und $\psi \in \mathcal{H}_{\text{a.c.}}(H) \cap H^{16,2} \cap H^{6,4}$.

Beide Mengen für ψ sind offensichtlich dicht in $\mathcal{H}_{\text{a.c.}}(H)$.

Bevor wir Theorem 2 beweisen, geben wir nun die entscheidende Aussage über die Austrittsstatistik. Korollar 2 zusammen mit (3.11) ergibt das

Korollar 3. *Sei das Potential V in $(V)_4$ und so, dass Null weder ein Eigenwert noch eine Resonanz von H ist. Sei $\psi \in \mathcal{G}$. Zusätzlich sei A2 und A1 erfüllt. Dann gilt für jedes $\Sigma \subset S^2$*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{E}^\psi \left(N_{\det}^\psi(R, \Sigma) \right) = \int_{C_\Sigma} \left| \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \right|^2 d^3k. \quad (3.14)$$

Beweis von Theorem 2. Wir werden das FAST (3.13) für ein $T > 0$ beweisen. Zunächst zeigen wir, dass das ausreichend ist. Sei also das FAST bewiesen für ein $T > 0$. Die entsprechende Aussage für ein $\tilde{T} \leq 0$ ist

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\tilde{T}}^{\infty} \int_{R\Sigma} \mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_T^{\infty} \int_{R\Sigma} \mathbf{j}^{\tilde{\psi}_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} dt, \quad (3.15)$$

mit $\tilde{\psi}_t = \psi_{t+\tilde{T}-T}$. Bezeichnet man mit χ_{out} die Asymptote von $\tilde{\psi}$, reicht es aus zu zeigen, dass

$$|\widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k})|^2 = |\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})|^2 \quad (3.16)$$

und

$$\widehat{\psi}_{\text{out}} \in \mathcal{G}^+ \implies \widehat{\chi}_{\text{out}} \in \mathcal{G}^+. \quad (3.17)$$

Mit der “intertwining property” (1.14) ist $\widehat{\chi}_{\text{out}} = e^{-ik^2(\tilde{T}-T)} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})$. Damit folgt unmittelbar (3.16) und durch Überprüfen der Eigenschaften von \mathcal{G}^+ auch (3.17). Natürlich kann man dieses Argument auch für die Integration über $|\mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}|$ anwenden.

Sei also $T > 0$ gegeben. Mit Proposition 1, (ii)-(iv), und (1.20) erhalten wir

$$\begin{aligned}\psi_t(\mathbf{x}) &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int e^{-i\frac{k^2 t}{2}} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \varphi_+(\mathbf{x}, \mathbf{k}) d^3 k \\ &=: (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int e^{-i\frac{k^2 t}{2}} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3 k + (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int e^{-i\frac{k^2 t}{2}} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \eta(\mathbf{x}, \mathbf{k}) d^3 k \\ &=: \alpha(\mathbf{x}, t) + \beta(\mathbf{x}, t),\end{aligned}\tag{3.18}$$

wobei man das l. i. m. aus Proposition 1 weglassen kann, da $\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \in \mathcal{G}^+ \subset L^1(\mathbb{R}^3)$, und die generalisierten Eigenfunktionen beschränkt sind (Proposition 2, (ii)). Der Fluss der Wellenfunktion (3.18) ist

$$\mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) = \text{Im}(\alpha^* \nabla \alpha + \alpha^* \nabla \beta + \beta^* \nabla \alpha + \beta^* \nabla \beta),\tag{3.19}$$

wobei α offensichtlich stetig differenzierbar ist. Für die entsprechenden Eigenschaften von β siehe [58], (20) und (28)-(30). In [13] und [58] wird die Funktion $\alpha(\mathbf{x}, t)$ durch die Formel

$$\alpha(\mathbf{x}, t) = (2\pi i t)^{-\frac{3}{2}} \int e^{i\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{2t}} \psi_{\text{out}}(\mathbf{y}) d^3 y\tag{3.20}$$

mit Bedingungen an $\psi_{\text{out}}(\mathbf{x})$ abgeschätzt. Gemäß Lemma 1 können wir $\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})$, aber nicht $\psi_{\text{out}}(\mathbf{x})$ kontrollieren. Daher schätzen wir $\alpha(\mathbf{x}, t)$ direkt mit Hilfe von $\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})$ ab. Dafür werden wir die Methode der stationären Phase verwenden. Zunächst werten wir $\mathbf{j}_0^{\psi_t} = \text{Im}(\alpha^* \nabla \alpha)$ mit Hilfe von Lemma 2 aus und zeigen, dass die Integration über $\mathbf{j}_0^{\psi_t}$ bereits das richtige Resultat, d.h. die rechte Seite von (3.13), liefert. Lemma 2 ist für eine ähnliche Klasse wie \mathcal{G}^+ formuliert, die aber etwas größer ist.

Definition 4. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ist in \mathcal{K}^+ , wenn es eine Konstante $C \in \mathbb{R}_+$ gibt, so dass

$$\begin{aligned}|f(\mathbf{k})| &\leq C \langle k \rangle^{-4}, \\ |\partial_{\mathbf{k}}^\alpha f(\mathbf{k})| &\leq C, \quad |\alpha| = 1, \quad |\kappa \partial_{\mathbf{k}}^\alpha f(\mathbf{k})| \leq C \langle k \rangle^{-1}, \quad |\alpha| = 2, \\ \left| \frac{\partial}{\partial k} f(\mathbf{k}) \right| &\leq C \langle k \rangle^{-1}, \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial k^2} f(\mathbf{k}) \right| \leq C \langle k \rangle^{-2}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Klasse formulieren wir folgendes

Lemma 2. Sei $\chi(\mathbf{k})$ in \mathcal{K}^+ . Dann existiert eine Konstante $L \in \mathbb{R}_+$, so dass für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ und $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$,

$$\left| \int e^{-i\frac{k^2 t}{2} + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \chi(\mathbf{k}) d^3 k - \left(\frac{2\pi}{it} \right)^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{\mathbf{x}^2}{2t}} \chi(\mathbf{k}_s) \right| < \frac{L}{t^2}.\tag{3.21}$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{k}_s = \frac{\mathbf{x}}{t}$ den stationären Punkt.

Der Beweis findet sich im Anhang.

Wendet man diese Lemma auf $\alpha(\mathbf{x}, t)$ in (3.18) an, erhalten wir mit einer geeigneten Konstante

$$\left| \alpha(\mathbf{x}, t) - \left(\frac{1}{it} \right)^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{\mathbf{x}^2}{2t}} \widehat{\psi}_{\text{out}} \left(\frac{\mathbf{x}}{t} \right) \right| < \frac{L}{t^2} \quad (3.22)$$

und analog

$$\left| \nabla \alpha(\mathbf{x}, t) - i \left(\frac{1}{it} \right)^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{\mathbf{x}^2}{2t}} \left(\frac{\mathbf{x}}{t} \right) \widehat{\psi}_{\text{out}} \left(\frac{\mathbf{x}}{t} \right) \right| < \frac{L}{t^2}. \quad (3.23)$$

Das bedeutet für den Fluss $\mathbf{j}_0^{\psi_t} = \text{Im}(\alpha^* \nabla \alpha)$

$$\left| \mathbf{j}_0^{\psi_t}(\mathbf{x}) - \left(\frac{1}{t} \right)^3 \left(\frac{\mathbf{x}}{t} \right) \left| \widehat{\psi}_{\text{out}} \left(\frac{\mathbf{x}}{t} \right) \right|^2 \right| < \frac{L}{t^{\frac{7}{2}}}. \quad (3.24)$$

Wir beginnen mit dem ersten Term \mathbf{j}_0^{ψ} in (3.19) für Zeiten $t > R^{\frac{5}{6}}$ (wir wählen R groß genug, so dass $R^{\frac{5}{6}} > T$):

$$\int_{R^{\frac{5}{6}}}^{\infty} \int_{\Sigma} \mathbf{j}_0^{\psi_t}(R\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} R^2 d\Omega dt. \quad (3.25)$$

Setzt man den asymptotischen Ausdruck (3.24) für den Fluss \mathbf{j}_0^{ψ} ein, erhält man anstatt (3.25)

$$\int_{R^{\frac{5}{6}}}^{\infty} \int_{\Sigma} \left| \widehat{\psi}_{\text{out}} \left(\frac{R\mathbf{n}}{t} \right) \right|^2 \frac{R^3}{t^4} d\Omega dt = \int_0^{R^{\frac{1}{6}}} \int_{\Sigma} \left| \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \right|^2 k^2 d\Omega dk, \quad (3.26)$$

wobei wir $\mathbf{k} := \frac{R\mathbf{n}}{t}$ substituiert haben. Gleichung (3.26) führt im Limes $R \rightarrow \infty$ bereits auf das richtige Resultat, d.h. auf

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{R^{\frac{1}{6}}} \int_{\Sigma} \left| \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \right|^2 k^2 d\Omega dk = \int_{C_{\Sigma}} \left| \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \right|^2 d^3 k. \quad (3.27)$$

Mit (3.24)-(3.26) ist es klar, dass auch der Betrag von \mathbf{j}_0^{ψ} auf das richtige Resultat führt. Um Theorem 2 zu beweisen, muss man also zeigen, dass der Fehler durch die Verwendung des asymptotischen Ausdrucks von \mathbf{j}_0^{ψ} für große R klein wird, dass das Integral (3.25) für Zeiten kleiner $R^{\frac{5}{6}}$ (und große R) vernachlässigbar ist und dass die drei anderen Terme in (3.19) für große R vernachlässigbar sind.

Mit (3.24) ist der Fehler zwischen (3.25) und (3.26) gegeben durch

$$L \int_{R^{\frac{5}{6}}}^{\infty} \int_{\Sigma} R^2 t^{-\frac{7}{2}} d\Omega dt = \frac{8\pi L}{5} R^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.28)$$

Der Fehler zwischen (3.25) und (3.26) geht also für große R gegen Null.

Wir berechnen nun

$$\int_T^{R^{\frac{5}{6}}} \int_{\Sigma} \mathbf{j}_0^{\psi_t}(\mathbf{n}R) \cdot \mathbf{n}R^2 d\Omega dt, \quad (3.29)$$

also das Fluss-Integral für Zeiten kleiner als $R^{\frac{5}{6}}$. Substituieren wir $t \rightarrow Rt$, erhält man

$$\left| \int_{\frac{T}{R}}^{R^{-\frac{1}{6}}} \int_{\Sigma} \mathbf{j}_0^{\psi_{tR}}(R\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}R^3 d\Omega dt \right| \leq \int_{\frac{T}{R}}^{R^{-\frac{1}{6}}} \int_{\Sigma} |\alpha(R\mathbf{n}, tR)| |\nabla_{\mathbf{x}} \alpha(\mathbf{x}, tR)|_{\mathbf{x}=R\mathbf{n}} R^3 d\Omega dt. \quad (3.30)$$

Wir schätzen α und $\nabla\alpha$ separat ab. Wir starten mit

$$\alpha(R\mathbf{n}, tR) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int e^{-it(\frac{k^2}{2}R - \mathbf{k}\frac{R\mathbf{n}}{t})} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) d^3k. \quad (3.31)$$

Der Exponent von der e -Funktion hat einen stationären Punkt bei $k_{\text{stat}} = \frac{1}{t}$. Da $t \in [\frac{T}{R}, R^{-\frac{1}{6}}]$, gilt $k_{\text{stat}} \in [R^{\frac{1}{6}}, \frac{R}{T}]$. Große Impulse sollten aber vernachlässigbar sein. Daher teilen wir die Integration über \mathbf{k} in die beiden Gebiete $k < R^{\frac{1}{6}}$ und $k \geq R^{\frac{1}{6}}$ auf. Dafür führen wir folgende Funktionen ein:

$$f_1(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1 & \text{für } k < \frac{1}{2}R^{\frac{1}{6}}, \\ \cos^2\left(\left(k - \frac{1}{2}R^{\frac{1}{6}}\right)\frac{\pi}{2}\right) & \text{für } \frac{1}{2}R^{\frac{1}{6}} \leq k \leq \frac{1}{2}R^{\frac{1}{6}} + 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.32)$$

$$f_2(\mathbf{k}) = \begin{cases} 0 & \text{für } k < \frac{1}{2}R^{\frac{1}{6}}, \\ \sin^2\left(\left(k - \frac{1}{2}R^{\frac{1}{6}}\right)\frac{\pi}{2}\right) & \text{für } \frac{1}{2}R^{\frac{1}{6}} \leq k \leq \frac{1}{2}R^{\frac{1}{6}} + 1, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.33)$$

Es ist $f_1(\mathbf{k}) + f_2(\mathbf{k}) \equiv 1$. Also erhalten wir für (3.31)

$$\begin{aligned} \alpha(R\mathbf{n}, tR) &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int e^{-it(\frac{k^2}{2}R - \mathbf{k}\frac{R\mathbf{n}}{t})} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) f_1(\mathbf{k}) d^3k \\ &\quad + (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int e^{-it(\frac{k^2}{2}R - \mathbf{k}\frac{R\mathbf{n}}{t})} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) f_2(\mathbf{k}) d^3k =: I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Wir wählen nun R so groß, dass $\frac{1}{2}R^{\frac{1}{6}} > 1$. Das bedeutet, dass das erste Integral in (3.34)

keinen stationären Punkt mehr hat. Mit zwei partiellen Integrationen nach \mathbf{k} erhalten wir

$$\begin{aligned}
I_1 &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int e^{-it(\frac{k^2}{2}R - \mathbf{k} \frac{R\mathbf{n}}{t})} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) f_1(\mathbf{k}) d^3k \\
&= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \left(\nabla_{\mathbf{k}} e^{-it(\frac{k^2}{2}R - \mathbf{k} \frac{R\mathbf{n}}{t})} \right) \cdot \frac{-i(Rt\mathbf{k} - R\mathbf{n})}{|Rt\mathbf{k} - R\mathbf{n}|^2} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) f_1(\mathbf{k}) d^3k \\
&= -(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int e^{-it(\frac{k^2}{2}R - \mathbf{k} \frac{R\mathbf{n}}{t})} \left(\nabla_{\mathbf{k}} \cdot \left(\frac{-i(Rt\mathbf{k} - R\mathbf{n})}{|Rt\mathbf{k} - R\mathbf{n}|^2} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) f_1(\mathbf{k}) \right) \right) d^3k \\
&=: (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int e^{-it(\frac{k^2}{2}R - \mathbf{k} \frac{R\mathbf{n}}{t})} (\nabla_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{k})) d^3k \\
&= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int e^{-it(\frac{k^2}{2}R - \mathbf{k} \frac{R\mathbf{n}}{t})} \left(\nabla_{\mathbf{k}} \cdot \left(\frac{-i(Rt\mathbf{k} - R\mathbf{n})}{|Rt\mathbf{k} - R\mathbf{n}|^2} (\nabla_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{k})) \right) \right) d^3k. \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Der Ausdruck in den Klammern ist

$$\nabla_{\mathbf{k}} \cdot \left(\frac{-i(Rt\mathbf{k} - R\mathbf{n})}{|Rt\mathbf{k} - R\mathbf{n}|^2} (\nabla_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{k})) \right) = \sum_{i,j=1}^3 \partial_{k_j} \left(\frac{-i(Rt\mathbf{k}_j - R\mathbf{n}_j)}{|Rt\mathbf{k} - R\mathbf{n}|^2} (\partial_{k_i} \mathbf{g}_i(\mathbf{k})) \right). \quad (3.36)$$

Durch Ausrechnen sieht man, dass die rechte Seite von (3.36) gegeben ist durch (wir betrachten nur ein Summand)

$$\begin{aligned}
\left| \partial_{k_j} \left(\frac{-i(Rt\mathbf{k}_j - R\mathbf{n}_j)}{|Rt\mathbf{k} - R\mathbf{n}|^2} (\partial_{k_i} \mathbf{g}_i(\mathbf{k})) \right) \right| &\leq C_1 \frac{R^2 t^2 |\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| |f_1(\mathbf{k})|}{|Rt\mathbf{k} - R\mathbf{n}|^4} \\
&+ C_2 \frac{Rt |\partial_{k_i} (\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) f_1(\mathbf{k}))|}{|Rt\mathbf{k} - R\mathbf{n}|^3} \\
&+ C_3 \frac{Rt |\partial_{k_j} (\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) f_1(\mathbf{k}))|}{|Rt\mathbf{k} - R\mathbf{n}|^3} \\
&+ C_4 \frac{|\partial_{k_i} \partial_{k_j} (\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) f_1(\mathbf{k}))|}{|Rt\mathbf{k} - R\mathbf{n}|^2}, \quad (3.37)
\end{aligned}$$

mit Konstanten $C_k > 0$, $k = 1, 2, 3, 4$. Da $0 \leq k < \frac{1}{2}R^{\frac{1}{6}} + 1$ und $0 < t \leq R^{-\frac{1}{6}}$, erhält man

$$|Rt\mathbf{k} - R\mathbf{n}| \geq \frac{1}{2}R - R^{\frac{5}{6}} \geq \frac{1}{3}R, \quad (3.38)$$

falls R groß genug. Mit (3.38) und der Definition von $f_1(\mathbf{k})$ ergibt sich damit (mit einer

geeigneten Konstanten $M > 0$)

$$\begin{aligned}
& \left| \partial_{k_j} \left(\frac{-i(Rt\mathbf{k}_j - R\mathbf{n}_j)}{|Rt\mathbf{k} - R\mathbf{n}|^2} (\partial_{k_i} \mathbf{g}_i(\mathbf{k})) \right) \right| \\
& \leq \frac{Mt^2}{R^2} |\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| \\
& \quad + \frac{Mt}{R^2} \left(|\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| + |\partial_{k_i} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| + |\partial_{k_j} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| \right) \\
& \quad + \frac{M}{R^2} \left(|\partial_{k_j} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| + |\partial_{k_i} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| + |\partial_{k_i} \partial_{k_j} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| \right) \\
& \quad + \frac{M}{R^2} \left(|\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| |\partial_{k_i} \partial_{k_j} f_1(\mathbf{k})| \right). \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Da $|\partial_{\mathbf{k}}^\alpha \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| \leq C \langle k \rangle^{-4}$, $|\alpha| \leq 1$, führt (3.35) und (3.39) mit einer geeigneten Konstante $M' > 0$ zu

$$\begin{aligned}
|I_1| & \leq \frac{M'(t+1)^2}{R^2} + \frac{M(t+1)^2}{R^2} \int |\partial_{k_i} \partial_{k_j} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| k^2 dk d\Omega \\
& \quad + \frac{MC(t+1)^2}{R^2} \int \langle k \rangle^{-4} |\partial_{k_i} \partial_{k_j} f_1(\mathbf{k})| k^2 dk d\Omega. \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Um die zweiten Ableitungen zu integrieren, verwenden wir, dass $|\kappa \partial_{\mathbf{k}}^\alpha \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| \leq C \langle k \rangle^{-4}$, $|\alpha| = 2$ und $k |\partial_{k_i} \partial_{k_j} f_1(\mathbf{k})| \leq C \langle k \rangle$. Mit einer geeigneten Konstante C' erhält man also

$$|I_1| \leq \frac{C'(t+1)^2}{R^2}. \tag{3.41}$$

Wir schätzen nun I_2 ab. Da $\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \in \mathcal{G}^+$ gilt

$$|I_2| \leq (2\pi)^{-\frac{3}{2}} C \int_{k > \frac{1}{2} R^{\frac{1}{6}}} \langle k \rangle^{-15} d^3 k \leq C'' R^{-2}, \tag{3.42}$$

wobei $C'' > 0$ eine geeignete Konstante ist. Also ergibt sich

$$|\alpha(R\mathbf{n}, tR)| = |I_1 + I_2| \leq (C' + C'')(1+t)^2 R^{-2} =: C'(1+t)^2 R^{-2}. \tag{3.43}$$

In ähnlicher Weise kann $\nabla \alpha$ abgeschätzt werden. Man erhält

$$|\nabla_{\mathbf{x}} \alpha(\mathbf{x}, tR)|_{\mathbf{x}=R\mathbf{n}} \leq C'(1+t) R^{-1}. \tag{3.44}$$

Für diese Abschätzung teilen wir wieder das zu (3.31) analoge Integral in kleine und große Impulse. Der Teil mit den kleinen Impulsen kann man mit einer partiellen Integration und den Ungleichungen $|\partial_{\mathbf{k}}^\alpha \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| \leq C \langle k \rangle^{-5}$, $|\alpha| \leq 1$, und $|\kappa \partial_{\mathbf{k}}^\alpha \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| \leq C \langle k \rangle^{-5}$, $|\alpha| = 2$, abschätzen. Für den Teil mit den großen Impulsen (welcher ähnlich zu (3.42) ist)

verwenden wir, dass $|\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| \leq C\langle k \rangle^{-10}$. Setzt man (3.43) und (3.44) in (3.30) ein, erhält man

$$\int_{\frac{T}{R}}^{R^{-\frac{1}{6}}} \int_{\Sigma} |\alpha(R\mathbf{n}, tR)| |\nabla_{\mathbf{x}} \alpha(\mathbf{x}, tR)|_{\mathbf{x}=R\mathbf{n}} R^3 d\Omega dt \leq 4\pi C'^2 \int_0^{R^{-\frac{1}{6}}} (1+t)^3 dt. \quad (3.45)$$

Damit geht (3.45) für $R \rightarrow \infty$ gegen Null.

Es bleibt zu zeigen, dass die drei letzten Terme in (3.19) für große R vernachlässigbar sind. In [58] (Gleichungen (15) und (16)) sind folgende Ungleichungen für die Funktion $\beta(\mathbf{x}, t)$ gezeigt worden (für genügend großes $R_0 > 0$):

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Sigma_R} |\beta(\mathbf{x}, t)| \leq c \frac{1}{R(t+R)}, \quad \forall R > 0, \quad (3.46)$$

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Sigma_R} |\nabla \beta(\mathbf{x}, t)| \leq c \frac{1}{R(t+R)}, \quad \forall R > R_0, \quad (3.47)$$

für $t \geq T$. Die Konstante c hängt von T , $\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})$ und $\frac{\partial}{\partial k} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})$ ab und ist endlich, wenn $\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \in \mathcal{G}^+$ ist (vgl. (20)-(28) in [58]). Es wurde ebenso gezeigt, dass der letzte Term in (3.19) für große R vernachlässigbar ist (vgl. S. 10 in [58]). Wir starten also mit dem zweiten Term in (3.19), d.h. mit

$$\left| \int_T^{\infty} \int_{\Sigma} \text{Im}(\alpha^* \nabla \beta) R^2 \mathbf{n} d\Omega dt \right| \leq \int_T^{\infty} \int_{\Sigma} |\alpha| |\nabla \beta| R^2 d\Omega dt \leq \int_0^{\infty} \int_{\Sigma} |\alpha| \frac{c}{R(t+R)} R^2 d\Omega dt. \quad (3.48)$$

Wir teilen wieder die Zeitintegration in zwei Teile und erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_{\Sigma} |\alpha| \frac{c}{R(t+R)} R^2 d\Omega dt &= \int_0^{R^{\frac{5}{6}}} \int_{\Sigma} |\alpha| \frac{c}{R(t+R)} R^2 d\Omega dt \\ &+ \int_{R^{\frac{5}{6}}}^{\infty} \int_{\Sigma} |\alpha| \frac{c}{R(t+R)} R^2 d\Omega dt. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Mit (3.43) gilt für den ersten Teil, dass

$$\begin{aligned} \int_0^{R^{\frac{5}{6}}} \int_{\Sigma} |\alpha(R\mathbf{n}, t)| \frac{c}{R(t+R)} R^2 d\Omega dt &= \int_0^{R^{-\frac{1}{6}}} \int_{\Sigma} |\alpha(R\mathbf{n}, tR)| \frac{c}{R^2(1+t)} R^3 d\Omega dt \\ &\leq \int_0^{R^{-\frac{1}{6}}} \int_{\Sigma} \frac{C'c(1+t)}{R} d\Omega dt. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Also geht dieser Term gegen Null für $R \rightarrow \infty$.

Es bleibt der zweite Term in (3.49). Wenden wir den asymptotischen Ausdruck (3.22) für α an, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{R^{\frac{5}{6}}}^{\infty} \int_{\Sigma} |\alpha(R\mathbf{n}, t)| \frac{cR^2}{R(t+R)} d\Omega dt &\leq \int_{R^{\frac{5}{6}}}^{\infty} \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{2}} \left| \widehat{\psi}_{\text{out}} \left(\frac{R\mathbf{n}}{t} \right) \right| \frac{cR^2}{R(t+R)} d\Omega dt \\ &+ \int_{R^{\frac{5}{6}}}^{\infty} \int_{\Sigma} \frac{L}{t^2} \frac{cR^2}{R(t+R)} d\Omega dt \\ &\leq \frac{4\pi c}{\sqrt{R}} \int_0^{R^{\frac{1}{6}}} \left| \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \right| \frac{1}{\sqrt{k}} dk + 4\pi cLR^{-\frac{5}{6}}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Dabei haben wir $\mathbf{k} := \frac{R\mathbf{n}}{t}$ substituiert. Da $\widehat{\psi}_{\text{out}} \in \mathcal{G}^+$, ist das Integral des letzten Terms in (3.51) endlich und geht ebenfalls gegen Null für $R \rightarrow \infty$. Der dritte Term in (3.19) kann analog zu (3.48)-(3.51) behandelt werden. ■

3.3 Zur Austrittsstatistik für N Teilchen: das asymptotische Verhalten der Bohmschen Bahnen

Vom Standpunkt der asymptotischen Vollständigkeit ist die Streutheorie von N Teilchen mittlerweile gut ausgearbeitet. Die in diesem Zusammenhang zitierten Arbeiten sind [31, 54], zusammenfassende Artikel sind z.B. [35, 36]. Eine rigorose Ableitung der Austrittsstatistik ähnlich zu dem Ergebnis von Korollar 3 ist uns bisher nicht bekannt.

Während im 1-Teilchenfall der Zusammenhang zwischen dem integrierten Fluss und dem Erwartungswert der signierten Durchkreuzungen zusammen mit dem FAST die Möglichkeit bietet, die Durchkreuzungswahrscheinlichkeit durch eine weit entfernte Oberfläche rigoros abzuleiten, zeigt sich, dass im Mehrteilchenfall dieses Vorgehen nicht angewendet werden kann: Es wurde in [27] deutlich gemacht, warum weder der Fluss (1.8) noch die Verallgemeinerung auf einen Mehrzeitenfluss³ relevant sind, um die Austrittsstatistik als Limes wie in Korollar 3 abzuleiten. Auch das in [11] vorgestellte Ergebnis zur Austrittsstatistik von N Teilchen verwendet nur den Fluss (1.8) und kann damit Korrelationen

³Versucht man die Austrittsstatistik mit Hilfe des Flusses für mehrere Teilchen mit verschränkter Wellenfunktion abzuleiten, muss man ein Mehrzeitenformalismus einführen, also eine Wellenfunktion mit einem Zeitparameter für jedes Teilchen. Der davon gebildete Fluss ist der angesprochene Mehrzeitenfluss.

zwischen den verschiedenen Teilchen auf Grund von einer verschränkten Wellenfunktion nicht berücksichtigen. Es ist daher eine alternative Methode notwendig, welche im Folgenden entwickelt wird. Die Idee ist einfach und vom Standpunkt der Bohmschen Mechanik die direkteste: Man erwartet, dass die Teilchen, die durch einen Streuzustand geführt werden, eine asymptotische Geschwindigkeit besitzen, also dass sie asymptotisch (für große Zeiten) approximativ geradlinig und radial nach außen laufen. Wenn man die Differenz zwischen tatsächlicher und asymptotischer Geschwindigkeit gut kontrollieren kann, sollte die Austrittsstatistik für weit entfernte Oberflächen allein durch die asymptotische Geschwindigkeit bestimmbar sein. Die Frage nach der Austrittsstatistik wird damit zur Frage nach der Verteilung der asymptotischen Geschwindigkeit. Um ein analoges Ergebnis zu Korollar 3 zu erreichen, muss man also zeigen, dass die asymptotische Geschwindigkeit existiert, eine ausreichend gute Approximation der tatsächlichen Geschwindigkeit ist und gemäß $|\widehat{\psi}_{\text{out}}|^2$ verteilt ist. Bis auf die Kontrolle des Fehlers kann man diese Eigenschaften schön an der asymptotischen Form der Wellenfunktion sehen, die im Konfigurationsraum für N Teilchen, ähnlich wie im Spezialfall (2.7) für ein Teilchen, durch

$$\psi_t(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{(it)^{\frac{3N}{2}}} e^{i\frac{\mathbf{x}^2}{2t}} \widehat{\psi}_{\text{out}}\left(\frac{\mathbf{x}}{t}\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N}, \quad (3.52)$$

gegeben ist. Bildet man davon das Bohmsche Geschwindigkeitsfeld, erhält man eine asymptotische Geschwindigkeit, die erwartungsgemäß verteilt ist.

An (3.52) lässt sich eine weitere wichtige Eigenschaft des N -Teilchensystems für große Zeiten ablesen: Analog zum 1-Teilchenfall ist es in diesem Kapitel das Ziel, die ungemessene Austrittsstatistik abzuleiten. Für eine Übereinstimmung der ungemessenen und gemessenen Statistik im 1-Teilchenfall ist es nur wichtig, dass die Detektion die Bahn des Teilchens nicht zu sehr beeinflusst. In dem vorliegenden Fall einer Detektion im Streuregime (große Abstände, große Zeiten) ist das eine sehr milde Voraussetzung, da es sich ja nur um Detektionen auf einer makroskopischen Skala handelt. Im N -Teilchenfall hingegen muss darüber hinaus gewährleistet sein, dass die Detektion eines Teilchens keinen Einfluss auf die Bahnen der anderen Teilchen hat. Für eine verschränkte Wellenfunktion ist das im Allgemeinen nicht der Fall. Asymptotisch aber, also für große Zeiten bzw. Orte, ist ψ_t durch (3.52) gegeben, eine Wellenfunktion, die lokal die Struktur einer ebenen Welle hat. Liegt eine solche lokal ebene Welle vor, kann man sich mit Hilfe von (1.1) überzeugen, dass z.B. im 2-Teilchenfall der Kollaps⁴ der Wellenfunktion durch die Detektion eines Teilchens nicht das Geschwindigkeitsfeld des anderen Teilchens beeinflusst. Somit stimmt

⁴In der Sprache der üblichen Quantenmechanik erzeugt eine Messung bzw. Detektion einen Kollaps der Wellenfunktion, d.h. einen nicht durch die Schrödinger-Gleichung beschriebenen Prozess. In der Bohmschen Mechanik gibt es natürlich keinen Kollaps der Wellenfunktion, da die Dynamik vollständig durch die Schrödinger-Gleichung und (1.1) gegeben ist. Man kann vielmehr zeigen, dass der Kollaps der Wellenfunktion eine effektive Beschreibung des Systems darstellt, die eine Folge der zugrunde liegenden

in dieser speziellen Situation die ungemessene mit der gemessenen Statistik überein, vgl. dazu auch [24, 27].

Wir werden nun das asymptotische Verhalten der Bohmschen Bahnen für den Spezialfall keiner Wechselwirkung zwischen den Teilchen, sondern nur einer Wechselwirkung jedes einzelnen Teilchens mit einem externen Potential, studieren. Man könnte zunächst meinen, dass die Austrittsstatistik von N -Teilchen, die nicht miteinander wechselwirken, direkt von der 1-Teilchenstatistik ableitbar ist. Das ist aber nur dann der Fall, wenn die Wellenfunktion eine Produktwellenfunktion ist. Das schließt verschränkte Wellenfunktionen, wie sie in EPR-artigen Experimenten vorkommen, aus (siehe dazu auch [24, 27]).

Zunächst wollen wir kurz auf den allgemeinen mathematischen Rahmen in diesem speziellen Fall der Mehrteilchenstreuung eingehen. Wir betrachten also ein System im Konfigurationsraum \mathbb{R}^{3N} mit dem Hamilton-Operator (wir setzen ähnlich wie im 1-Teilchenfall $m_l = \hbar = 1$, $l = 1, \dots, N$)

$$H := \sum_{l=1}^N H_l = \sum_{l=1}^N (-\Delta_l + V_l(\mathbf{x}_l)), \quad (3.53)$$

wobei $V_l(\mathbf{x}_l) \in (V)_n$ sein soll (siehe Definition 1). Das Potential

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^N V_l(\mathbf{x}_l)$$

ist H_0 -beschränkt und damit gelten alle in Kapitel 1.1 gemachten Aussagen über Domäne von H und die durch H induzierte Zeitentwicklung für die Wellenfunktion $\psi_t(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$. Die Bohmsche Dynamik ist für geeignete Wellenfunktionen ebenso wohldefiniert, wenn man voraussetzt, dass die einzelnen Potentiale V_l bis auf endlich viele Singularitäten glatt sind (vgl. Theorem 1). Die Frage nach der asymptotischen Vollständigkeit, also die Frage nach der Existenz der Wellenoperatoren und deren Bilder, reduziert sich auf das 1-Teilchen Problem, da die H_l miteinander kommutieren, und die relevanten Aussagen über ψ durch Zerlegung in eine Basis von $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \dots \otimes L^2(\mathbb{R}^3)$ mit Koeffizienten in l^2 aus den entsprechenden Aussagen der 1-Teilchen Streutheorie abgeleitet werden können.

Wir formulieren nun das asymptotische Verhalten der Bohmschen Bahnen. Das folgende Ergebnis ist eine unmittelbare Erweiterung des Resultats für ein Teilchen aus [52], und der Beweis verwendet sehr ähnliche Methoden wie der des FAST, insbesondere basiert er direkt auf den Abschätzungen (3.46), (3.47) und dem Lemma 2. Wir führen deshalb eine ganz ähnliche Menge wie \mathcal{G} ein, für die man das Resultat über das asymptotische Verhalten der Bohmschen Bahnen zeigen kann.

Bohmschen Dynamik ist. Man sollte daher genauer von einem “effektiven Kollaps” sprechen. Siehe dazu auch [18, 30].

Definition 5. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{C}$ ist in \mathcal{C} , wenn

$$\begin{aligned} f &\in \mathcal{H}_{a.c.}(H) \cap C^\infty(H), \\ \langle x \rangle^{2N} H^n f(\mathbf{x}) &\in L^2(\mathbb{R}^{3N}), \quad n \in \{0, 1, 2, \dots, 3N\}, \\ \langle x \rangle^{4N} H^n f(\mathbf{x}) &\in L^2(\mathbb{R}^{3N}), \quad n \in \{0, 1, 2, \dots, 3N\}. \end{aligned}$$

Damit erhält man folgende

Proposition 4. Sei $V_l \in (V)_4$, $l = 1, \dots, N$, und es gelte A2 für jedes V_l . Zusätzlich sei Null weder ein Eigenwert noch eine Resonanz von H . Sei $\psi \in \mathcal{C}$ mit $\|\psi\| = 1$. Dann gilt:

- (i) Die Bohmschen Bahnen $\mathbf{X}_t^\psi(\mathbf{x})$ existieren global in der Zeit für \mathbb{P}^ψ -fast alle anfänglichen Konfigurationen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N}$.
- (ii) $\mathbf{v}_\infty^\psi(\mathbf{x}) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{X}_t^\psi(\mathbf{x})}{t}$ existiert für \mathbb{P}^ψ -fast alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N}$ und für \mathbb{P}^ψ -fast alle Bohmsche Trajektorien ist die asymptotische Geschwindigkeit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^{\psi_t}(\mathbf{X}_t^\psi(\mathbf{x})) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{X}}_t^\psi(\mathbf{x})$$

durch \mathbf{v}_∞^ψ gegeben, d.h. für alle $\epsilon > 0$ existieren $T, C \in \mathbb{R}^+$, so dass

$$\mathbb{P}^\psi \left(\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid \left| \mathbf{v}^{\psi_t}(\mathbf{X}_t^\psi(\mathbf{x})) - \mathbf{v}_\infty^\psi(\mathbf{x}) \right| < Ct^{-\frac{1}{2}} \quad \forall t \geq T \right\} \right) > 1 - \epsilon. \quad (3.54)$$

- (iii) \mathbf{v}_∞^ψ ist zufällig verteilt mit der Dichte $|\widehat{\psi}_{out}(\cdot)|^2$, d.h. für jede messbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^{3N}$ gilt

$$\mathbb{P}^\psi(\mathbf{v}_\infty^\psi \in A) = \int_A |\widehat{\psi}_{out}(\mathbf{k})|^2 d^{3N}k. \quad (3.55)$$

Die Aussage der Proposition ist für $N = 1$ identisch mit der von Theorem 1 in [52]. Der Beweis für allgemeines $N \in \mathbb{N}$ ist in [24] und verwendet ganz ähnliche Methoden wie der in [52]. Im Anhang skizzieren wir den Beweis.

Die Bohmschen Bahnen besitzen also die asymptotische Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_\infty^\psi(\mathbf{x}) = (\mathbf{v}_{1,\infty}^\psi(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{v}_{N,\infty}^\psi(\mathbf{x}))$$

mit einer Verteilung gegeben durch $|\widehat{\psi}_{out}(\mathbf{k})|^2$. Die Differenz zwischen der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{X}}_t^\psi$ und der asymptotischen Geschwindigkeit ist von der Ordnung $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$. Um nun eine Aussage über die Austrittsstatistik wie in Korollar 3 formulieren zu können, definieren wir für jedes Teilchen eine Zufallsgröße wie im 1-Teilchenfall (siehe Kapitel 3.1), d.h. für

jedes Teilchen l die Zufallsgröße $N_{l,\det}^\psi(R, \Sigma_l)$, die eins ist, wenn das Teilchen l den Rand RS_l^2 zum ersten Mal nach außen in $R\Sigma_l$ durchkreuzt und Null sonst:⁵

$$N_{l,\det}^\psi(R, \Sigma_l) : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \{0, 1\},$$

$$N_{l,\det}^\psi(R, \Sigma_l)(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x_l \leq R, \tilde{t} := t_{l,\text{exit}}^{RS_l^2} < \infty \text{ und } (\mathbf{X}_l)_{\tilde{t}}^\psi(\mathbf{x}) \in R\Sigma_l, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.56)$$

wobei $t_{l,\text{exit}}^{RS_l^2}$ analog zu (3.2) mit der Trajektorie $(\mathbf{X}_l)_t^\psi(\mathbf{x})$ definiert ist. Wir sind an dem Ereignis interessiert, bei dem die Trajektorie $\mathbf{X}_t^\psi = ((\mathbf{X}_1)_t^\psi, \dots, (\mathbf{X}_N)_t^\psi)$ so verläuft, dass $N_{l,\det}^\psi(R, \Sigma_l) = 1$ für alle $l = 1, \dots, N$. Wir definieren also

$$N_{\det}^\psi(R, \Sigma_1, \dots, \Sigma_N) : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \{0, 1\},$$

$$N_{\det}^\psi(R, \Sigma_1, \dots, \Sigma_N)(\mathbf{x}) := \prod_{l=1}^N N_{l,\det}^\psi(R, \Sigma_l)(\mathbf{x}). \quad (3.57)$$

Das Ergebnis ist nun das folgende

Theorem 3. *Seien die Aussagen (i), (ii) und (iii) von Proposition 4 gültig. Dann gilt*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{E}^\psi \left(N_{\det}^\psi(R, \Sigma_1, \dots, \Sigma_N) \right) = \int_{C_{\Sigma_1}} \cdots \int_{C_{\Sigma_N}} \left| \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \right|^2 d^3 k_1 \cdots d^3 k_N. \quad (3.58)$$

Beweis von Theorem 3. Mit Proposition 4, (iii), folgt das Theorem aus

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{E}^\psi \left(N_{\det}^\psi(R, \Sigma_1, \dots, R\Sigma_N) \right) = \mathbb{P}^\psi \left(\mathbf{v}_{1,\infty}^\psi \in C_{\Sigma_1}, \dots, \mathbf{v}_{N,\infty}^\psi \in C_{\Sigma_N} \right). \quad (3.59)$$

Um die Notation zu vereinfachen definieren wir

$$p_\infty := \mathbb{P}^\psi \left(\mathbf{v}_{1,\infty}^\psi \in C_{\Sigma_1}, \dots, \mathbf{v}_{N,\infty}^\psi \in C_{\Sigma_N} \right).$$

Man muss nun (3.59) zeigen, also dass jede einzelne Trajektorie $(\mathbf{X}_l)_t^\psi$ genau dann $R\Sigma_l$ im Sinne der Definition (3.56) durchkreuzt, wenn die asymptotische Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{l,\infty}^\psi$ in C_{Σ_l} liegt. Dazu ist es notwendig, dass die Trajektorie \mathbf{X}_t^ψ nicht zu stark von der "idealen" Trajektorie $t\mathbf{v}_\infty^\psi$ abweicht. Durch Integration von (3.54) kann man den Abstand

⁵Analog zum 1-Teilchenfall bezeichnet RS_l^2 den Rand der Kugel $\{\mathbf{x}_l \in \mathbb{R}^3 | x_l \leq R\}$.

der Trajektorie zu $t\mathbf{v}_\infty^\psi$ für $t \geq T$ abschätzen. Für kleine Zeiten aber liefert uns die fast sichere globale Existenz der Bohmschen Dynamik, dass für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $T < \infty$ ein $C < \infty$ existiert mit

$$\mathbb{P}^\psi \left(\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid \left| \mathbf{X}_t^\psi(\mathbf{x}) \right| < C, \forall 0 \leq t \leq T \right\} \right) > 1 - \epsilon. \quad (3.60)$$

Die Integration von (3.54) über die Zeit zusammen mit (3.60) ergibt also, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $C < \infty$ existiert mit

$$\mathbb{P}^\psi \left(\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid \left| \mathbf{X}_t^\psi(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_\infty^\psi(\mathbf{x}) \cdot t \right| < C\sqrt{t} + C, \forall t \geq 0 \right\} \right) > 1 - \epsilon. \quad (3.61)$$

Die Beweisidee ist nun recht einfach: Liegt \mathbf{v}_∞^ψ in $C_{\Sigma_1} \times \dots \times C_{\Sigma_N}$ durchkreuzt die “ideale” Trajektorie $t\mathbf{v}_{l,\infty}^\psi$ für das Teilchen l die Oberfläche $R\Sigma_l$, $l = 1, \dots, N$, zur Zeit $\frac{R}{v_{l,\infty}^\psi}$. Der Zeitpunkt der Durchkreuzung wächst also linear mit R . Ebenso verhält es sich mit dem Abstand des Durchkreuzungspunkts vom Rand der Oberfläche $R\Sigma_l$. Da der Abstand der Trajektorie zur “idealen” Trajektorie nur sublinear mit dem Zeitpunkt der Durchkreuzung wächst, wächst er auch sublinear mit dem Abstand R der Oberfläche $R\Sigma_l$. Ist R groß genug, ist der Abstand des Durchkreuzungspunkts der “idealen” Trajektorie vom Rand der Oberfläche $R\Sigma_l$ größer als der Abstand der Trajektorie $(\mathbf{X}_l)_t^\psi$ von $t\mathbf{v}_{l,\infty}^\psi$. Da die Trajektorie stetig ist, liegt also der erste Austritt von $(\mathbf{X}_l)_t^\psi$ in $R\Sigma_l$, wenn R groß genug ist und $\mathbf{v}_{l,\infty}^\psi$ in C_{Σ_l} liegt.

Um das eben Gesagte mathematisch zu präzisieren, führen wir zwei Mengen M_C und M'_C ein, die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} M_C &:= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid 0 < v_{l,\infty}^\psi(\mathbf{x}) < \infty \text{ und } \mathbf{v}_{l,\infty}^\psi(\mathbf{x}) \in C_{\Sigma_l}, \forall l = 1, \dots, N, \right\} \\ &\quad \cap \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid \left| \mathbf{X}_t^\psi(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_\infty^\psi(\mathbf{x}) \cdot t \right| < C\sqrt{t} + C, \forall t \geq 0 \right\}, \\ M'_C &:= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid \exists l \in \{1, \dots, N\} : 0 < v_{l,\infty}^\psi(\mathbf{x}) < \infty \text{ und } \mathbf{v}_{l,\infty}^\psi(\mathbf{x}) \notin \overline{C_{\Sigma_l}} \right\} \\ &\quad \cap \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid \left| \mathbf{X}_t^\psi(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_\infty^\psi(\mathbf{x}) \cdot t \right| < C\sqrt{t} + C, \forall t \geq 0 \right\}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

wobei $\overline{C_{\Sigma_l}}$ den Abschluss des offenen Kegels C_{Σ_l} bezeichnet. Nun werden wir zeigen, dass M_C bzw. M'_C genau diejenigen Mengen sind, für die $N_{\text{det}}^\psi(R, \Sigma_1, \dots, \Sigma_N) = 1$ bzw. $N_{\text{det}}^\psi(R, \Sigma_1, \dots, \Sigma_N) = 0$ gilt. Zusätzlich zeigen wir, dass die Mengen genau die richtigen Maße haben, d.h. wir zeigen, dass gilt:

- (i) Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $C < \infty$, so dass

$$\mathbb{P}^\psi(M_C) \geq p_\infty - \epsilon.$$

- (ii) Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $C < \infty$, so dass

$$\mathbb{P}^\psi(M'_C) \geq (1 - p_\infty) - \epsilon.$$

(iii) Für jedes $\mathbf{x} \in M_C$ und jedes $C < \infty$ existiert ein R' , so dass

$$N_{\det}^{\psi}(R, \Sigma_1, \dots, \Sigma_N)(\mathbf{x}) = 1, \quad \forall R > R'.$$

(iv) Für jedes $\mathbf{x} \in M'_C$ und jedes $C < \infty$ existiert ein R'' , so dass

$$N_{\det}^{\psi}(R, \Sigma_1, \dots, \Sigma_N)(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall R > R''.$$

Aus (i) und (iii) folgt also

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{\psi}(N_{\det}^{\psi}(R, \Sigma_1, \dots, \Sigma_N)) = \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{P}^{\psi}(N_{\det}^{\psi}(R, \Sigma_1, \dots, \Sigma_N) = 1) \geq \mathbb{P}^{\psi}(M_C) \geq p_{\infty} - \epsilon, \quad (3.63)$$

während aus (ii) und (iv)

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{\psi}(N_{\det}^{\psi}(R, \Sigma_1, \dots, \Sigma_N)) &= 1 - \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{P}^{\psi}(N_{\det}^{\psi}(R, \Sigma_1, \dots, \Sigma_N) = 0) \leq 1 - \mathbb{P}^{\psi}(M'_C) \\ &\leq p_{\infty} + \epsilon \end{aligned} \quad (3.64)$$

folgt. Mit (3.63) und (3.64) folgt aber (3.59) und damit das Theorem, wenn man (i)-(iv) zeigen kann.

Mit Hilfe von Proposition 4, (ii), (iii) und (3.61) ist es leicht nachzuprüfen, dass für C groß genug (i) und (ii) von obiger Auflistung erfüllt sind. Es bleibt also (iii) und (iv). Wir werden nur (iii) zeigen, der Beweis von (iv) ist fast identisch. Sei also $\mathbf{x} \in M_C$ und $C < \infty$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass ein R' existiert, so dass für jedes $l \in \{1, \dots, N\}$ gilt: $N_{l, \det}^{\psi}(R, \Sigma_l)(\mathbf{x}) = 1$ für alle $R > R'$. Da $\mathbf{v}_{l, \infty}^{\psi} \in C_{\Sigma_l}$ und C_{Σ_l} offen ist, existiert ein Kegel $C_{l, \delta}$ um die Achse $\mathbf{v}_{l, \infty}^{\psi}$ mit Kegelspitze im Ursprung und Öffnungswinkel $0 < \delta < \pi$, so dass $C_{l, \delta} \subset C_{\Sigma_l}$. Wegen (3.62) befindet sich die Trajektorie $(\mathbf{X}_l)_t^{\psi}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in M_C$, in einem Ball mit Radius $C\sqrt{t} + C$ um den Punkt $t\mathbf{v}_{l, \infty}^{\psi}$. Dieser Ball passt vollständig in den Kegel $C_{l, \delta}$, wenn $v_{l, \infty}^{\psi}(\mathbf{x})t \sin \delta > C\sqrt{t} + C$. Das ist der Fall für alle $t > t_s$, mit $0 < t_s < \infty$ abhängig von $\mathbf{v}_{l, \infty}^{\psi}$, C und δ . Ist nun $R' = v_{l, \infty}^{\psi}(\mathbf{x})t_s + C\sqrt{t_s} + C$, durchkreuzt die in der Zeit stetige Trajektorie $(\mathbf{X}_l)_t^{\psi}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in M_C$, ebenso wie die "ideale" Trajektorie $t\mathbf{v}_{l, \infty}^{\psi}$ die Oberfläche $R\Sigma_l$ für alle $R > R'$. Die Durchkreuzung findet zu einer endlichen Zeit statt, ist positiv, d.h. die Trajektorie $(\mathbf{X}_l)_t^{\psi}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in M_C$, durchkreuzt die Oberfläche $R\Sigma_l$ nach außen und ist die erste Durchkreuzung von RS_l^2 durch $(\mathbf{X}_l)_t^{\psi}$. Also ist $N_{l, \det}^{\psi}(R, \Sigma_l)(\mathbf{x}) = 1$, $\forall R > R'$. Wendet man dieses Argument auf jedes Teilchen an, erhält man N verschiedene R' . Definiert man das Maximum davon wieder als R' gilt: $N_{\det}^{\psi}(R, \Sigma_1, \dots, R\Sigma_N)(\mathbf{x}) = 1$, $\forall R > R'$ und damit (iii). ■

Mit Theorem 3 haben wir die Austrittsstatistik für mehrere Teilchen abgeleitet, aber nur für den Spezialfall, dass die einzelnen Teilchen lediglich mit einem externen Potential und nicht untereinander wechselwirken. Will man die eben genannten Methoden auf

den wechselwirkenden Fall übertragen, wäre eine Eigenfunktionsentwicklung auch für solche Wechselwirkungspotentiale notwendig. Die zugrunde liegende Proposition 4 verwendet nämlich die Ergebnisse (3.46), (3.47) und Lemma 2, welche auf den generalisierten Eigenfunktionen aufbauen. Es existieren zwar Eigenfunktionsentwicklungen in höheren Dimensionen, siehe z.B. [1, 53, 60], aber nur für Potentiale die im Unendlichen abfallen. Die Potentiale hingegen, die im wechselwirkenden Mehrteilchenfall auftreten, fallen in bestimmten Richtungen im Unendlichen nicht ab. Für zwei Teilchen z.B. ist ein solches Potential $V(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$. Dann kann $x = \sqrt{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2}$ groß sein, aber die einzelnen Komponenten $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ müssen trotzdem nicht stark voneinander abweichen. Auf den “Diagonalen” also fällt das Potential nicht ab. Zumindest für abstoßende Potentiale sollte man aber zeigen können, dass diese “Diagonalen”, also diejenigen $\mathbf{x} \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$, für die $\mathbf{x}_i \approx \mathbf{x}_j$, asymptotisch, d.h. für große Abstände, in einem geeigneten Sinne vernachlässigbar sein sollten. Denn wenn das Potential abstoßend ist, werden sich die Teilchen immer weiter voneinander entfernen und sich nicht in dem Bereich aufhalten, in dem $\mathbf{x}_i \approx \mathbf{x}_j$. Man sollte daher die reale Situation durch ein Potential approximieren können, welches auf den “Diagonalen” geeignet modifiziert ist (d.h. dass das Potential auch für große x mit $\mathbf{x}_i \approx \mathbf{x}_j$ abfällt), so dass die Resultate über Eigenfunktionsentwicklungen in höheren Dimensionen anwendbar sind.

Kapitel 4

Die Definition des Streuquerschnitts

4.1 Eine typische Streusituation

In einem typischen Streuexperiment, wie in Abbildung 4.1 skizziert, passiert Folgendes: Eine Quelle emittiert Teilchen, die an einem Target gestreut und von einem Detektor aufgefangen werden. Der Detektor deckt den Raumwinkel Σ ab und das Target der Dicke d besteht aus einer Vielzahl von einzelnen Streuern (z.B. Atomen) mit Dichte n . Die Streuer erzeugen ein Potential mit der (mikroskopischen) Reichweite l .¹ Die Quelle und der Detektor sind auf einer mikroskopischen Skala jeweils weit entfernt von dem Target. Üblicherweise besteht der Strahl aus Teilchen mit scharf definiertem Impuls \mathbf{k}_0 , d.h. sowohl Richtung als auch Energie der Teilchen variieren wenig. Der von den einzelnen Wellenpaketen im Strahl überdeckte Teil des Targets besteht ebenfalls aus einer Vielzahl von Streuern, d.h. die Breite der einzelnen Wellenpakete sowie die Breite des Strahls sind mikroskopisch groß. Der experimentell gemessene Streuquerschnitt $\sigma(\Sigma)$ für den Raumwinkel Σ ist in diesem Fall durch den Quotient von detektierten Teilchen pro Zeiteinheit² \dot{N}^\star und dem Produkt aus einfallenden Teilchen pro Zeiteinheit \dot{N}_{Strahl} und der Flächendichte der Streuer $d \cdot n$ gegeben, d.h. durch

$$\frac{\dot{N}^\star}{\dot{N}_{\text{Strahl}} \cdot d \cdot n}. \quad (4.1)$$

In einer solchen Situation treten im Allgemeinen viele Effekte auf: Wechselwirkung der Teilchen im Strahl miteinander, Streuung der Teilchen im Strahl mit u.U. mehreren Streuern und kohärente Überlagerung von Streueffekten an mehreren Streuern. Die Gesamtheit dieser Effekte ist theoretisch schwer behandelbar. In praktischen Situationen aber

¹Ein Maß für die Reichweite eines Potentials ist der totale Streuquerschnitt.

²Die Anzahl der detektierten Teilchen trägt den hochgestellten Index \star . Diese Notation ist in dem stochastischen Modell für den Teilchenstrahl begründet, welches später verwendet wird.

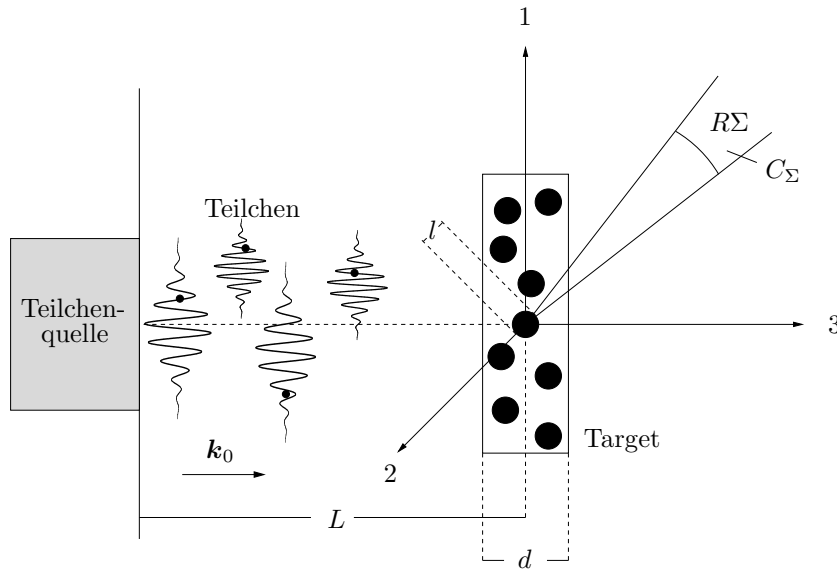


Abbildung 4.1: Eine typische Streusituation.

können die Wechselwirkung der Teilchen im Strahl untereinander, die Mehrfachstreuung und kohärente Effekte häufig vernachlässigt werden.³ Dafür ist z.B. notwendig, dass das Target hinreichend dünn und die Wellenlänge der Teilchen klein gegenüber der Separation der einzelnen Streuer ist, siehe [46], S. 214 und [50], S. 355 f. für mehr Details.⁴ Sind diese Bedingungen erfüllt, kann die Streusituation durch folgende idealisiert werden: Man betrachtet die Streuung von einem Ensemble von Teilchen an einem einzelnen Streuer, wobei das Ensemble von Teilchen durch ein Ensemble von Wellenpaketen mit verschiedenen Stoßparametern (engl.: impact parameter) beschrieben wird. Der Stoßparameter bestimmt den Abstand des Zentrums des Wellenpakets zur Strahlachse und ist zufällig und gleichmäßig über das Strahlprofil A —ein Kreis mit Durchmesser D —verteilt, siehe Abbildung 4.2.⁵ Diese Modell der Streusituation ist das am meisten in der Literatur diskutierte Modell, vgl. [3, 10, 17, 32, 40, 44, 46, 56, 64].⁶ Eine weitere Idealisierung

³In manchen Experimenten sind Interferenzeffekte explizit gewünscht, z.B. bei der Bragg-Streuung.

⁴Es wird aber ebenso in [55] darauf hingewiesen, dass es bisher keine umfassende Abhandlung darüber gibt.

⁵Auch ohne Mehrfachstreuung und ohne kohärente Effekte unterscheidet sich die Streusituation in Abbildung 4.1 von der in Abbildung 4.2 durch eine Feinheit: In der Idealisierung aus Abbildung 4.2 bilden die Stoßparameter eine mit der Zeit immer feiner werdende Verteilung über das Strahlprofil. Das Gegenstück zum Stoßparameter in der realen Streusituation ist die Position des Streuers im Target. Die Verteilung der Streuer im Target aber ist vorgegeben und wird mit der Zeit nicht feiner. Das könnte prinzipiell zu einer Abweichung führen.

⁶Es gibt auch Autoren, die eine Mittlung über den Stoßparameter und über die Positionen der einzelnen Streuer vornehmen, siehe z.B. [49].

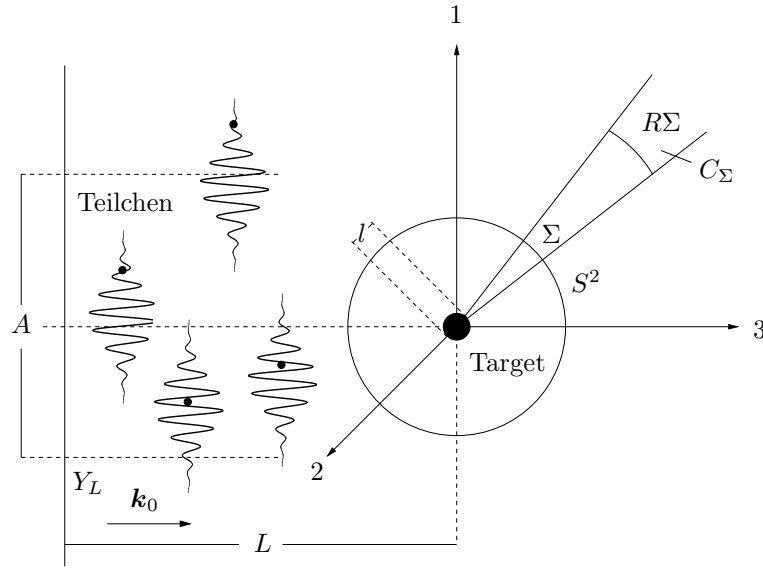


Abbildung 4.2: Ein idealisiertes Modell der realen Streusituation.

gegenüber der realen Streusituation in Abbildung 4.1 kennzeichnet dieses Modell: Wir nehmen an, dass bis auf verschiedene Stoßparameter die Teilchenquelle immer identische Wellenfunktionen emittiert. Wie wir später noch sehen werden, ist der Streuquerschnitt unter typischen Bedingungen unabhängig von der speziellen Form der Wellenpakete. Deshalb ist schon dieses Modell mit identischen Wellenpaketen eine passende Idealisierung der realen Situation (siehe dazu auch [64]). Der Streuquerschnitt ist anstatt (4.1) nun gegeben durch

$$\frac{\dot{N}^*}{j_{\text{Strahl}}}, \quad (4.2)$$

wobei j_{Strahl} die Dichte des einfallenden Strahls ist, d.h. wenn man sich die Zentren der emittierten Wellenpakete als Punkte in A vorstellt, die Anzahl der Punkte pro Zeit- und Flächeneinheit.

Im Sinne der Bemerkungen aus Einleitung und Kapitel 2 muss der Streuquerschnitt für eine “endliche” Situation definiert werden. Die Parameter, die eine solche Situation charakterisieren, sind gemäß Abbildung 4.2 folgende: Die Wellenpakete sind gegeben durch eine passende Wellenfunktion ψ , verschoben durch den Stoßparameter \mathbf{y} , der zufällig und gleichmäßig mit Dichte 1 über das Strahlprofil A verteilt ist. Der Detektor bedeckt den Raumwinkel $\Sigma \in S^2$, hat die Oberfläche $R\Sigma$ (vgl. S. 23) und den Abstand R zum Target. Die Teilchenquelle soll für die Zeit τ angeschaltet sein, hat den Abstand L zum Target und emittiert so viele Teilchen pro Zeiteinheit, so dass $j_{\text{Strahl}} = 1$ (es werden $|A|$ Teilchen pro Zeiteinheit emittiert). Im Folgenden vernachlässigen wir den von j_{Strahl} kommenden Dimensionsfaktor $[\frac{\text{Zeit}}{\text{Fläche}}]$. Die Anzahl der detektierten Teilchen \dot{N}^* pro Zeiteinheit wird

also jetzt durch die Anzahl der detektierten Teilchen N^* für eine Emissionsdauer τ geteilt durch τ ersetzt, wobei der Detektor immer angeschaltet sein soll. Mit (4.2) ist der empirische Streuquerschnitt aus (2.9) also gegeben durch

$$\sigma_{\text{emp}}(\Sigma) = \frac{N^*(\psi, L, A, R, \tau, \Sigma)}{\tau}. \quad (4.3)$$

Der empirische Streuquerschnitt ist eine Zufallsgröße (genaue Definition im Kapitel 4.3), die für große Zeiten durch ihren Erwartungswert approximiert werden sollte. Dieser Erwartungswert ist ein komplizierter Ausdruck, der natürlich von der Detektionsrichtung Σ , dem Potential V und dem Impuls \mathbf{k}_0 der Teilchen in dem Strahl abhängt, aber auch von den anderen Details des experimentellen Aufbaus wie ψ , L , A und R . Durch Anwenden einer passenden Skalierung, die die Parameter in das Streuregime bringt, wird gezeigt, dass der Erwartungswert unabhängig von diesen Details ist und damit zur theoretischen Voraussage

$$\sigma(\Sigma) = 16\pi^4 \int_{\Sigma} |T(k_0\boldsymbol{\omega}, \mathbf{k}_0)|^2 d\Omega \quad (4.4)$$

für den empirischen Streuquerschnitt $\sigma_{\text{emp}}(\Sigma)$, vgl. (2.9), wird. Stellt man sich die Größenordnungen in einem typischen Experiment vor (makroskopische Größen wie z.B. R , L gegenüber Mikroskopischen wie z.B. l), ist es einsichtig, dass $\sigma_{\text{emp}}(\Sigma)$ extrem gut durch $\sigma(\Sigma)$ approximiert wird. Wir werden auf die Güte der Approximation in einer typischen Situation in dieser Arbeit nicht weiter eingehen.

Bevor wir zur Skalierung der Parameter kommen, wird (4.3) zunächst durch die zugrunde liegende Dynamik und mit einem stochastischen Modell für den Teilchenstrahl definiert.

4.2 Ein stochastisches Modell für den Teilchenstrahl

Die Teilchen werden in der Ebene Y_L emittiert, welche senkrecht auf der x_3 -Achse steht:

$$Y_L := \{-Le_3 + \mathbf{a} \mid \mathbf{a} \perp e_3\}, \quad L > 0.$$

Die Teilchen haben eine anfängliche Wellenfunktion $\psi \in \mathcal{H}_{\text{a.c.}}$, welche in die Ebene Y_L verschoben wird. Wenn man mit $\psi_{\mathbf{y}}$ die Verschiebung von ψ um \mathbf{y} bezeichnet, d.h. $\psi_{\mathbf{y}} = \psi(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, liegen die "Zentren" der verschobenen Wellenfunktionen bei

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 - L\mathbf{e}_3 \in Y_L$$

und sind gleichmäßig mit Dichte 1 über die kreisförmige Fläche $A \subset Y_L$ mit Durchmesser D und Flächeninhalt $|A|$ verteilt, d.h.

$$A = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = -L \text{ und } \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \frac{D}{2} \right\}.$$

Die Impulsverteilung der Wellenfunktionen ist konzentriert um den Impuls $\mathbf{k}_0 \parallel \mathbf{e}_3$.

Die verschobene Wellenfunktion $\psi_{\mathbf{y}}$ wird im Allgemeinen nicht mehr in $\mathcal{H}_{\text{a.c.}}$ sein, sondern kann Anteile im gebundenen Anteil $\mathcal{H}_{\text{p.p.}}$ des Spektrums haben. Dies ist problematisch für die Anwendung vom FAST (Theorem 2, Korollar 2). Um diese Schwierigkeit zu umgehen, nehmen wir an, dass folgende Bedingung gilt:

A3. Der Hamilton-Operator $H = -\frac{1}{2}\Delta + V$ hat keine gebundenen Zustände, d.h. $\mathcal{H}_{\text{p.p.}} = \{0\}$.

Dann ist $\psi_{\mathbf{y}} \in \mathcal{H}_{\text{a.c.}}, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$.

Wir präzisieren nun das Modell für den Teilchenstrahl, welches schon in [21] angedeutet wurde. Die Teilchen mit Wellenfunktion ψ werden zu zufälligen Zeiten $t \in \mathbb{R}_+$ emittiert, wobei die Wellenfunktion mit dem zufällig und gleichmäßig mit Dichte 1 in A verteilten Stoßparameter \mathbf{y} verschoben wird. In Bohrscher Mechanik bestimmt die anfängliche Position $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ des Teilchens die Trajektorie, wobei die anfängliche Position $|\psi_{\mathbf{y}}|^2$ -verteilt ist. Wir werden nicht viele stochastische Details des Strahls benötigen. Man kann z.B. an einen Poissonschen Punktprozess denken, mit Punkten in

$$\Lambda = \mathbb{R}^+ \times A \times \mathbb{R}^3.$$

Ein Punkt $\lambda = (t, \mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \Lambda$ repräsentiert ein Teilchen mit Wellenfunktion $\psi_{\mathbf{y}}, \mathbf{y} \in A$, emittiert zur Zeit $t \in \mathbb{R}^+$ und mit anfänglicher Position $\mathbf{X}_{t=0}^{\psi}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Wir betrachten einen allgemeinen Punktprozess $(\Lambda^*, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ aufgebaut auf $(\Lambda, \mathfrak{B}(\Lambda), \mu)$, wobei $\lambda^* \in \Lambda^*$ eine Konfiguration von abzählbar vielen Punkten in Λ repräsentiert, d.h.

$$\lambda^* = \{\lambda\}, \lambda \in \Lambda, \lambda^* \text{ abzählbar.}$$

Die Anzahl der Punkte in einer Menge $B \in \mathfrak{B}(\Lambda)$ ist

$$\chi_B^*(\lambda^*) \equiv \sum_{\lambda \in \lambda^*} \chi_B(\lambda),$$

wobei χ_B die charakteristische Funktion der Menge B bezeichnet. Der Erwartungswert ist dann gegeben durch

$$\mathbb{E}(\chi_B^*) = \mu(B), \quad (4.5)$$

wobei das Intensitätsmaß μ auf $\mathfrak{B}(\Lambda)$ durch

$$d\mu = |\psi(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^2 \chi_A(\mathbf{y}) dt d^2 y d^3 x \quad (4.6)$$

definiert ist.

Bemerkung 8. Im Falle eines Poisson-Prozesses gilt, zusätzlich zu (4.5), dass

$$\mathbb{P}(\chi_B^* = k) = \exp(-\mu(B)) \frac{\mu(B)^k}{k!}. \quad (4.7)$$

Darüber hinaus sind χ_A^* und χ_B^* unabhängig, wenn $A \cap B = \emptyset$, $A, B \in \mathfrak{B}(\Lambda)$.

Wir nehmen an, dass der Punktprozess ergodisch in folgendem Sinne ist: Für jedes $B \in \mathfrak{B}(\Lambda)$ sei

$$B(\tau) := \{(t, \mathbf{y}, \mathbf{x}) \in B \mid t \in [0, \tau)\}. \quad (4.8)$$

Dann gilt für jedes $\epsilon > 0$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{\chi_{B(\tau)}^*}{\tau} - \mathbb{E} \left(\frac{\chi_{B(\tau)}^*}{\tau} \right) \right| \geq \epsilon \right) = 0, \quad (4.9)$$

wobei $\mathbb{E} \left(\frac{\chi_{B(\tau)}^*}{\tau} \right)$ durch (4.5) gegeben ist.

Bemerkung 9. Wegen der Unabhängigkeitseigenschaft (vgl. Bemerkung 8), gilt (4.9) für einen Poisson-Prozess.

Bemerkung 10. Der Punktprozess hat Dichte 1 in folgendem Sinne: Seien $C \subset A$, $\tau > 0$ und $B := [0, \tau) \times C \times \mathbb{R}^3$ gegeben. Dann gilt mit (4.9) für jedes $\epsilon > 0$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{\chi_B^*}{|C|\tau} - \mathbb{E} \left(\frac{\chi_B^*}{|C|\tau} \right) \right| \geq \epsilon \right) = 0, \quad (4.10)$$

und

$$\mathbb{E} \left(\frac{\chi_{B(\tau)}^*}{|C|\tau} \right) = \frac{1}{|C|\tau} \mu(B) = 1. \quad (4.11)$$

4.3 Die Definition des empirischen Streuquerschnitts

Mit dem Modell für den Teilchenstrahl, kann man nun $N^*(\psi, L, A, R, \tau, \Sigma)$, die Anzahl der detektierten Teilchen definieren. Um die Notation einfach zu halten, werden wir später die Abhängigkeit der Anzahl N^* von den Größen $\psi, L, A, R, \tau, \Sigma$ nicht immer explizit ausschreiben. Wir definieren zunächst $N_{\text{det}}(\psi, L, A, R, \tau, \Sigma)$ für ein einzelnes Teilchen mit $\lambda = (t, \mathbf{y}, \mathbf{x})$ durch

$$N_{\text{det}}(\psi, L, A, R, \tau, \Sigma) : \Lambda \rightarrow \{0, 1\},$$

$$N_{\text{det}}(\psi, L, A, R, \tau, \Sigma)(\lambda) := \chi_{[0, \tau)}(t) N_{\text{det}}^{\psi, \mathbf{y}}(R, \Sigma)(\mathbf{x}), \quad (4.12)$$

wobei $N_{\text{det}}^{\psi_{\mathbf{y}}}(R, \Sigma)(\mathbf{x})$ durch (3.8) gegeben ist. Die charakteristische Funktion stellt sicher, dass kein Teilchen mehr mitgezählt wird, welches nach der Zeit τ emittiert wurde. Es sei bemerkt, dass $\psi_{\mathbf{y}}$ die Bedingung A1 (S. 29) erfüllen muss, damit $N_{\text{det}}^{\psi_{\mathbf{y}}}(R, \Sigma)(\mathbf{x})$ wohldefiniert ist. Die gesamte Anzahl $N^*(\psi, L, A, R, \tau, \Sigma)$ der detektierten Teilchen ist dann

$$N^*(\psi, L, A, R, \tau, \Sigma) : \Lambda^* \rightarrow \mathbb{N}_0,$$

$$N^*(\psi, L, A, R, \tau, \Sigma)(\lambda^*) = \sum_{\lambda \in \lambda^*} N_{\text{det}}(\psi, L, A, R, \tau, \Sigma)(\lambda). \quad (4.13)$$

Mit dieser Definition von N^* ist der empirische Streuquerschnitt (4.3) folgendermaßen definiert:

Definition 6. Sei $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ so, dass $\psi_{\mathbf{y}}$ die Bedingung A1 für alle $\mathbf{y} \in A$ erfüllt. Zusätzlich gelte A2. Dann ist der empirische Streuquerschnitt gegeben durch

$$\sigma_{\text{emp}}(\psi, L, A, R, \tau, \Sigma) := \frac{N^*(\psi, L, A, R, \tau, \Sigma)}{\tau}. \quad (4.14)$$

Wir haben damit die genaue Definition von (4.3) nachgeliefert. Wir kommen nun zu der dort angesprochenen Skalierung der Größen ψ, L, A, R, τ , so dass der empirische Streuquerschnitt unabhängig von diesen Größen wird und durch den asymptotischen Streuquerschnitt (4.4) gegeben ist.

Kapitel 5

Das Streuregime

In diesem Kapitel wollen wir die Frage klären, was das Streuregime genau ist, d.h. wir bestimmen die notwendige Skalierung der Parameter ψ, L, A, R, τ , so dass der empirische Streuquerschnitt (4.14) die Gleichung (2.9) erfüllt. Die zweite Gleichung in (2.9), d.h. die Formel für den asymptotischen Streuquerschnitt,

$$\sigma(\Sigma) = 16\pi^4 \int_{\Sigma} |T(k_0\boldsymbol{\omega}, \mathbf{k}_0)|^2 d\Omega,$$

der durch den empirischen im Streuregime approximiert werden soll, ist erstmals von Born in [9] innerhalb eines stationären Bildes abgeleitet worden. Es fand auch Eingang in die Lehrbücher der Quantenmechanik. Die Frage nach dem Streuregime ist also die Frage, warum und wann Borns Formel richtig ist, d.h. man muss verstehen, warum und wann das stationäre Bild eine passende Idealisierung der wahren zeitabhängigen Situation ist. Man erwartet natürlich, dass dafür L, A, R, τ in einem gewissen Sinne groß und die Wellenfunktion ψ “nah” an $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ sein müssen. Wir werden also die zeitabhängige Beschreibung in einer Situation analysieren, die durch ein Limes der Form

$$\tau \rightarrow \infty, R \rightarrow \infty, A \rightarrow \infty, L \rightarrow \infty, |\widehat{\psi}(\mathbf{k})|^2 \rightarrow \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$$

charakterisiert ist. Unmittelbare Fragen sind: Kann man die Limiten alle nacheinander ausführen? Wenn ja, gibt es eine ausgezeichnete Reihenfolge? Muss man die Limiten vielleicht kombinieren? Alle diese Fragen werden wir in diesem Kapitel klären. Es wird sich vielleicht etwas überraschend zeigen, dass man die Limiten kombinieren muss, wenn man nicht sehr spezielle Wellenfunktionen voraussetzt. Für ein Gaußsches Wellenpaket z.B., welches man immer schmaler werden lässt, um den Limes $|\widehat{\psi}(\mathbf{k})|^2 \rightarrow \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ zu realisieren, gibt es keine Reihenfolge der Limiten, in der die zeitabhängige Situation die stationäre approximiert.

5.1 Das stationäre Bild aus Sicht der zeitabhängigen Streutheorie

Zunächst beginnen wir mit einem kurzen Blick auf die stationäre Ableitung des Streuquerschnitts von Born. Diese startet mit dem Ansatz

$$e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}} + f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega}) \frac{e^{ik_0 x}}{x}, \quad (5.1)$$

wobei $\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{x}}{x}$ ist. Man berechnet damit den einfallenden Fluss j_{tar} der ebenen Welle $e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}}$ pro Zeiteinheit und Flächeneinheit sowie den Fluss j_{det} der auslaufenden Kugelwelle $f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega}) \frac{e^{ik_0 x}}{x}$ pro Zeiteinheit durch die Detektoroberfläche $R\Sigma$. Den ersten Fluss interpretiert man als den Fluss eines einfallenden Strahls von Teilchen mit Impuls \mathbf{k}_0 und den zweiten als den Fluss der gestreuten Teilchen durch die Detektoroberfläche. Mit der Identifikation

$$\sigma(\Sigma) = \frac{j_{\text{det}}}{j_{\text{tar}}} \quad (5.2)$$

erhält man für den Streuquerschnitt

$$\sigma(\Sigma) = \int_{\Sigma} |f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega})|^2 d\Omega. \quad (5.3)$$

Der differentielle Streuquerschnitt für die Richtung $\boldsymbol{\omega}$ wird dann zu

$$\sigma^{\text{diff}}(\boldsymbol{\omega}) = |f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega})|^2. \quad (5.4)$$

Um die sog. Streuamplitude $f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega})$ auszurechnen, vergleicht man den Ansatz (5.1) mit derjenigen stationären Lösung der Schrödinger-Gleichung, die das gleiche asymptotische Verhalten wie (5.1) hat. Von den beiden stationären Lösungen φ_{\pm} (1.20) ist das φ_- , da das Pluszeichen in der Greenschen Funktion $\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$ für eine auslaufende Kugelwelle sorgt. Mit Hilfe dieses Vergleichs findet man

$$\sigma^{\text{diff}}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{4\pi^2} \left| \int e^{-ik_0 \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}} V(\mathbf{x}) \varphi_-(\mathbf{x}, \mathbf{k}_0) d^3x \right|^2. \quad (5.5)$$

Mit Hilfe der T -Matrixelemente (1.18) kann man (5.5) auch schreiben als

$$\sigma^{\text{diff}}(\boldsymbol{\omega}) = 16\pi^4 |T(k_0 \boldsymbol{\omega}, \mathbf{k}_0)|^2. \quad (5.6)$$

Es besteht also folgender Zusammenhang zwischen der Streuamplitude $f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega})$ und den T -Matrixelementen:

$$T(k_0 \boldsymbol{\omega}, \mathbf{k}_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-ik_0 \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}} V(\mathbf{x}) \varphi_-(\mathbf{x}, \mathbf{k}_0) d^3x = -\frac{1}{(2\pi)^2} f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega}). \quad (5.7)$$

Nun kommen wir zur zeitabhängigen Beschreibung. Wir starten zunächst mit der einfachsten Situation eines einzelnen Wellenpakets, welches auf ein einzelnes Target trifft. Die Implementierung der wahren Situation, d.h. die Streuung an mehreren Streuern bzw. die Streuung eines Ensembles von Wellenfunktionen an einem Streuer (vgl. Kapitel 4.1), ist dann eine unmittelbare Erweiterung der einfachen Situation. Die grundlegende Rechnung geht auf F. Low, E. P. Wigner und L. Eisenbud zurück, siehe [29], S. 110 für weitere Details zur Literatur. Darstellungen in Lehrbüchern finden sich z.B. in Merzbacher [43] und Messiah [44], an die wir uns zunächst anlehnen werden.

Wir betrachten ein Wellenpaket, welches zum Zeitpunkt $t = 0$ der Präparation gegeben ist durch

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \widehat{\psi}(\mathbf{k}) d^3k. \quad (5.8)$$

Die Fourier-Transformierte $\widehat{\psi}(\mathbf{k})$ ist eine um \mathbf{k}_0 scharf lokalisierte Funktion und so, dass der “Träger” von ψ bei großen negativen z -Werten liegt. Nun kann man zeigen, dass die ebenen Wellen $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ in (5.8) durch die generalisierten Eigenfunktionen $\varphi_-(\mathbf{x}, \mathbf{k})$, die asymptotisch die Form

$$\varphi_-(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \stackrel{x \text{ large}}{\approx} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + f_{\mathbf{k}}(\omega) \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{x} \quad (5.9)$$

haben, ersetzt werden können, d.h. man erhält

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \varphi_-(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \widehat{\psi}(\mathbf{k}) d^3k. \quad (5.10)$$

Da die generalisierten Eigenfunktionen H (eingeschränkt auf dem Raum der Streuzustände $\mathcal{H}_{\text{a.c.}}(H)$) diagonalisieren (vgl. dazu auch Proposition 1), erhalten wir für das Wellenpaket zur Zeit t

$$\psi_t(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-i\frac{k^2}{2}t} \varphi_-(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \widehat{\psi}(\mathbf{k}) d^3k. \quad (5.11)$$

Wir wollen nun (5.11) für große t und x analysieren. Mit der asymptotischen Form (5.9) der $\varphi_-(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ erhalten wir anstatt (5.11)

$$\begin{aligned} \psi_t(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-i\frac{k^2}{2}t} \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + f_{\mathbf{k}}(\omega) \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{x} \right) \widehat{\psi}(\mathbf{k}) d^3k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-i\frac{k^2}{2}t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \widehat{\psi}(\mathbf{k}) d^3k + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-i\frac{k^2}{2}t} f_{\mathbf{k}}(\omega) \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{x} \widehat{\psi}(\mathbf{k}) d^3k. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Die letzte Zeile in (5.12) enthält zwei Terme: Der erste hat einen stationären Punkt bei $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{x}}{t}$. Da wir annehmen, dass das anfängliche Wellenpaket gut um \mathbf{k}_0 lokalisiert ist,

vernachlässigen wir diesen Term für die uns interessierenden Richtungen $\boldsymbol{\omega}$ verschieden von \mathbf{k}_0 (wir betrachten keine Vorwärtsstreuung). Also gilt für $\boldsymbol{\omega} \neq \frac{\mathbf{k}_0}{k_0}$ approximativ

$$\psi_t(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-i\frac{k^2}{2}t} f_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega}) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{x} \widehat{\psi}(\mathbf{k}) d^3k. \quad (5.13)$$

Unter der Annahme, dass die Streuamplitude $f_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega})$ ausreichend wenig im Vergleich zu $\widehat{\psi}(\mathbf{k})$ variiert, können wir $f_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega})$ ausgewertet an der Stelle \mathbf{k}_0 aus dem Integral herausziehen und erhalten

$$\psi_t(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega}) \frac{1}{x} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-i\frac{k^2}{2}t} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \widehat{\psi}(\mathbf{k}) d^3k. \quad (5.14)$$

Die üblichen Darstellungen verwenden nun die sog. “no-spreading” Bedingung, die eine technisch sehr einfache Auswertung von (5.14) ermöglicht. Es wird vorausgesetzt, dass für die uns interessierenden Zeiten die Breite $\Delta\widehat{\psi}$ des Wellenpakets im Impulsraum,

$$\left(\Delta\widehat{\psi}\right)^2 = \int (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 |\widehat{\psi}(\mathbf{k})|^2 d^3k, \quad (5.15)$$

die Bedingung

$$\left(\Delta\widehat{\psi}\right)^2 t \ll 1 \quad (5.16)$$

erfüllt. Das hat zur Folge, dass die Zeitentwicklung des Pakets nur zu einer Verschiebung um den Wert $\mathbf{k}_0 t$ führt, aber keinerlei Veränderung der Form des Wellenpakets bewirkt. Diese Bedingung führt zu einer oberen Schranke für die Zeit der Detektion oder, im Ortsraum ausgedrückt, zu einer oberen Schranke für den Abstand des Detektors zum Target. Es wird dann üblicherweise argumentiert, dass diese Bedingung in der Praxis gut erfüllt sei.¹ Zusätzlich wird deutlich gemacht, dass (5.16) verträglich mit der Bedingung ist, dass der Detektor weit genug vom Target entfernt sein muss. Schließlich gilt die asymptotische Form (5.9) der Eigenfunktion φ_- nur für große x , also große Abstände R . Unabhängig davon, ob die “no-spreading” Bedingung erfüllt sein mag oder nicht, liegt es auf der Hand, dass sie eine physikalisch nicht gerechtfertigte Bedingung ist: Die Entfernung des Detektors vom Target spielt keine Rolle, solange er soweit weg ist, dass das Wellenpaket sich zum Zeitpunkt der Detektion schon ausreichend frei entwickelt. Vergrößert sich der Abstand des Detektors dann noch weiter, zerfließt das Wellenpaket zwar, aber der Fluss durch die Detektoroberfläche $R\Sigma$, die mit wachsendem R auch größer wird, bleibt konstant. Da wir keine Hinweise in der Literatur auf eine Rechnung ohne diese “no-spreading” Bedingung finden konnten, stellen wir hier eine Erweiterung der üblichen Rechnung vor, die ohne die “no-spreading” Bedingung auskommt.

¹Es wird argumentiert, dass ein “minimales” Gaußsches Wellenpaket (d.h. ein Wellenpaket mit $\Delta\psi\Delta\widehat{\psi} \approx 1$) mit makroskopischer Ausdehnung im Ortsraum (5.16) erfüllt. Es bleibt aber unklar, warum ein Strahl aus “minimalen” Paketen mit makroskopischer Ausdehnung im Ortsraum bestehen soll.

Wir müssen also mit (5.14) den Fluss durch den Detektor ausrechnen. Der Fluss ist gegeben durch $\text{Im}(\psi^* \nabla \psi)$. Der Gradient in Kugelkoordinaten ist $\mathbf{e}_x \partial_x + \frac{1}{x \cos \vartheta} \mathbf{e}_\varphi \partial_\varphi + \frac{1}{x} \mathbf{e}_\vartheta \partial_\vartheta$, weshalb für große x der radiale Anteil $\mathbf{e}_x \partial_x$ dominant ist. Man findet damit für den Gradient $\nabla \psi$

$$\nabla \psi_t(\mathbf{x}) = \left(i f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega}) \frac{1}{x} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-i\frac{k^2}{2}t} e^{ikx} \widehat{\psi}(\mathbf{k}) k d^3 k \right) \mathbf{e}_x. \quad (5.17)$$

Mit (5.14) und (5.17) ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} |f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega})|^2 \frac{1}{x^2} \left(\int e^{i\frac{k^2}{2}t} e^{-ikx} \widehat{\psi}^*(\mathbf{k}) d^3 k \right) \\ &\quad \times \left(\int e^{-i\frac{k'^2}{2}t} e^{ik'x} \widehat{\psi}(\mathbf{k}') k' d^3 k' \right) \mathbf{e}_x. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Das bedeutet für den Fluss

$$j_{\text{det}} = \int_0^\infty \int_{R\Sigma} \mathbf{j}^{\psi_t}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} dt$$

durch den Detektor:

$$\begin{aligned} j_{\text{det}} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_\Sigma \int_0^\infty |f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega})|^2 \left(\int e^{i\frac{k^2}{2}t} e^{-ikx} \widehat{\psi}^*(\mathbf{k}) d^3 k \right) \\ &\quad \times \left(\int e^{-i\frac{k'^2}{2}t} e^{ik'x} \widehat{\psi}(\mathbf{k}') k' d^3 k' \right) dt d\Omega. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Die Integranden in den Klammern haben jeweils einen stationären Punkt bei $k = \frac{x}{t}$. Da $x = R$ und $\widehat{\psi}$ um \mathbf{k}_0 konzentriert angenommen wurde, ist der Fluss erwartungsgemäß nur für große positive Zeiten wesentlich von Null verschieden. Wir können daher die Zeitintegration in (5.19) auf ganz \mathbb{R} ausdehnen. Die Zeitintegration liefert dann

$$2\pi \delta(k^2 - k'^2) = 2\pi \delta\left(\frac{k^2}{2} - \frac{k'^2}{2}\right) = \frac{1}{k'} \delta(k - k'), \quad (5.20)$$

womit sich (5.19) vereinfacht zu

$$j_{\text{det}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_\Sigma |f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega})|^2 d\Omega \int_0^\infty \left(\int_{S^1} \widehat{\psi}^*(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}} k) d\Omega(\mathbf{k}) \right) \left(\int_{S^1} \widehat{\psi}(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}'} k) d\Omega(\mathbf{k}') \right) k^4 dk. \quad (5.21)$$

Wir zeigen nun, dass der Term

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \left(\int_{S^1} \widehat{\psi}^*(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}} k) d\Omega(\mathbf{k}) \right) \left(\int_{S^1} \widehat{\psi}(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}'} k) d\Omega(\mathbf{k}') \right) k^4 dk \quad (5.22)$$

in (5.21) genau der einfallende Fluss pro Flächeneinheit ist, d.h. wir zeigen, dass (5.22) die Wahrscheinlichkeitsstromdichte eines frei zum Target entwickelten Wellenpakets integriert über die Zeit und eine passende Fläche sowie normiert mit der Größe der Fläche ist. Wir betrachten dazu eine zu \mathbf{k}_0 senkrechte Fläche im Streuzentrum von der Größenordnung der Reichweite l des Potentials. Da das Wellenpaket gut um \mathbf{k}_0 lokalisiert ist, ist der Fluss des Wellenpakets parallel zu \mathbf{k}_0 und von der Größe

$$k_0 |\psi_t(\mathbf{x})|^2. \quad (5.23)$$

Variiert die Dichte $|\psi|^2$ wenig über die Reichweite des Potentials, d.h. falls

$$|\psi_t(0)|^2 \approx |\psi_t(x_1, x_2, 0)|^2, \text{ für } x_1, x_2 \leq l, \quad (5.24)$$

berechnet sich der einfallende Fluss pro Flächeneinheit j_{tar} durch²

$$\begin{aligned} j_{\text{tar}} &= k_0 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_t(0)|^2 dt \\ &= k_0 \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int e^{i\frac{k^2}{2}t} \widehat{\psi}^*(\mathbf{k}) d^3k \right) \left(\int e^{-i\frac{k'^2}{2}t} \widehat{\psi}(\mathbf{k}') d^3k' \right) dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \widehat{\psi}^*(\mathbf{k}) \widehat{\psi}(\mathbf{k}') \delta(k' - k) \frac{k_0}{k} d^3k' d^3k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \left(\int_{S^1} \widehat{\psi}^*(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}} k) d\Omega(\mathbf{k}) \right) \left(\int_{S^1} \widehat{\psi}(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}'} k) d\Omega(\mathbf{k}') \right) k^4 dk. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Im vorletzten Schritt haben wir $\frac{k_0}{k} \approx 1$ und (5.20) verwendet.

Mit (5.21), (5.25) und der Vorschrift (5.2) erhält man also

$$\sigma(\Sigma) = \int_{\Sigma} |f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega})|^2 d\Omega. \quad (5.26)$$

Wir können nun die notwendigen Voraussetzungen, die zu (5.26) geführt haben, zusammenfassen:

- (i) Präparation und Detektion sind weit entfernt vom Streuzentrum. Das ist notwendig, um von (5.8) auf (5.10) bzw. von (5.11) auf (5.12) zu kommen.

²Auch hier kann man die Zeitintegration auf ganz \mathbb{R} ausdehnen, da zur Zeit $t = 0$ das Wellenpaket weit entfernt vom Streuzentrum ist, und der Fluss aufgrund des Impulses \mathbf{k}_0 nur für große positive Zeiten ($\approx \frac{l}{k_0}$) wesentlich von Null verschieden ist.

- (ii) Der ungestreute Anteil des Wellenpakets (1. Term in (5.12)) darf nicht zum Fluss durch den Detektor beitragen.
- (iii) Das transversale (also senkrecht zu \mathbf{k}_0) Profil von $|\psi|^2$ variiert nicht auf der Reichweite des Potentials (vgl. (5.24)).
- (iv) Die Streuamplitude $f_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega})$ variiert ausreichend langsam im Vergleich zu $\widehat{\psi}(\mathbf{k})$ (notwendig um von (5.13) auf (5.14) zu kommen). Weiterhin muss $\Delta\widehat{\psi} \ll k_0$ sein.

Bemerkung 11. Unter gewissen Umständen impliziert die erste Voraussetzung von (iv) (iii): Die Streuamplitude $f_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega})$ (5.7) ist in erster Näherung,³ also wenn man für die generalisierte Eigenfunktion in (5.7) eine ebene Welle einsetzt, die Fourier-Transformierte des Potentials, d.h. man hat

$$f_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega}) = \widehat{V}(\mathbf{k} - k\boldsymbol{\omega}). \quad (5.27)$$

Damit ist die Breite der Streuamplitude gegeben durch die Breite der Fourier-Transformierten des Potentials, also durch die inverse Breite des Potentials selbst. Die Breite des Potentials ist aber ein Maß für die Reichweite des Potentials l . Ist nun die Breite (5.15) von $\widehat{\psi}$ viel kleiner als die der Streuamplitude, hat man $\frac{1}{\Delta\widehat{\psi}} \gg l$ und damit mit der Heisenbergschen Unschärferelation

$$\Delta\psi \gg l,$$

also insbesondere die Bedingung an das transversale Profil (5.24).

Bevor wir zur Implementierung der realen Situation, wie sie in Abbildung 4.2 skizziert ist, kommen, wollen wir nochmal auf den Ausdruck für den Fluss durch den Detektor (5.21) eingehen. Verwendet man wie in der Literatur üblich die “no-spreading” Bedingung (5.16) mit $t = \frac{L+R}{k_0}$, wird dieser Ausdruck zu

$$j_{\text{det}} = \int_{\Sigma} |f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega})|^2 d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\mathbf{e}_3 z)|^2 dz. \quad (5.28)$$

Das sieht man entweder durch Verwenden der “no-spreading” Bedingung in (5.21)⁴ oder wie in der Literatur durch Auswerten von (5.14) mit dieser Bedingung. Nun ist aber

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\mathbf{e}_3 z)|^2 dz$$

³Das ist die Bornsche Näherung.

⁴In diese Rechnung gehen im Wesentlichen zwei Dinge ein: Erstens, dass $\widehat{\psi}$ einen Phasenfaktor abhängig von der Entfernung L der Präparation vom Target enthält, der mit (5.16) gut kontrolliert werden kann und zweitens, dass die Volumenintegration $d\Omega(\mathbf{k})$ für die vorliegenden Wellenpakete mit scharf definiertem Impuls \mathbf{k}_0 näherungsweise $\frac{1}{k^2} dk_1 dk_2$ ist. Die Integration über $dk_1 dk_2$, $dk'_1 dk'_2$ und $dk \approx dk_3$ führt dann zu (5.28).

sofort als Fluss durch das Target zu erkennen, denn in dem “no-spreading” Fall ist $\psi_t(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x} - \mathbf{k}_0 t)$ und daher wird der Fluss (5.25) durch das Target zu

$$j_{\text{tar}} = k_0 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_t(0)|^2 dt = k_0 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(-\mathbf{k}_0 t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\mathbf{e}_3 z)|^2 dz. \quad (5.29)$$

Das ist ein sehr anschauliches Ergebnis: Verändert sich die Form der Wellenfunktion mit gut definiertem Impuls \mathbf{k}_0 nicht mit der Zeit, ist der Fluss in einem Punkt durch die Dichte des Wellenpakets integriert entlang eines Strahls mit Richtung \mathbf{k}_0 gegeben.

Wie wir wissen ist es unphysikalisch, die “no-spreading” Bedingung (5.16) für Zeiten, die makroskopischen Distanzen entsprechen, vorauszusetzen. Man kann aber ausnützen, dass das Wellenpaket kaum auseinander fließt während es durch das Target geht, also in dem Zeitintervall, in dem der Fluss durch das Target wesentlich von Null verschieden ist (siehe dazu Bemerkung 12 weiter unten). Drückt man also den Fluss durch das Target durch diejenige Wellenfunktion $\tilde{\psi}$ aus, welche beim Durchgang durch das Target vorliegt, erhält man anstatt (5.29)

$$j_{\text{tar}} = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}(\mathbf{e}_3 z)|^2 dz, \quad (5.30)$$

wobei die Wellenfunktion $\tilde{\psi}$ approximativ gegeben ist durch die anfängliche Wellenfunktion, frei entwickelt mit der Zeit $\frac{L}{k_0}$ von der Präparation bis zur Streuung, d.h. durch

$$\tilde{\psi} = e^{-iH_0 \frac{L}{k_0}} \psi. \quad (5.31)$$

Damit wird (5.21) und (5.25) zu

$$j_{\text{det}} = j_{\text{tar}} \int_{\Sigma} |f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega})|^2 d\Omega, \quad j_{\text{tar}} = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}(\mathbf{e}_3 z)|^2 dz. \quad (5.32)$$

Bemerkung 12. Das Zeitintervall ΔT , das das Wellenpaket benötigt, um den Wechselwirkungsbereich der Größe l zu durchqueren, ist approximativ

$$\Delta T \approx \frac{l + \Delta\tilde{\psi}}{k_0}.$$

Die “no-spreading” Bedingung wird also zu

$$\left(\Delta\hat{\psi}\right)^2 \frac{l + \Delta\tilde{\psi}}{k_0} = \left(\Delta\hat{\psi}\right)^2 \frac{l}{k_0} + \left(\Delta\hat{\psi}\right)^2 \frac{\Delta\tilde{\psi}}{k_0} \ll 1. \quad (5.33)$$

Betrachtet man die Situation aus Bemerkung 11 ist $l\Delta\widehat{\psi} \ll 1$. Zusätzlich ist $\frac{\Delta\widehat{\psi}}{k_0} \ll 1$, und damit ist auch der erste Summand in (5.33) viel kleiner als 1. Die Breite $\Delta\tilde{\psi}$ der Wellenfunktion vor dem Target ist approximativ die Summe aus der anfänglichen Breite $\Delta\psi$ und dem Produkt aus der Breite $\Delta\widehat{\psi}$ des Pakets im Impulsraum und der Zeit $\frac{L}{k_0}$ von Präparation bis zur Streuung. Also ist $\Delta\tilde{\psi} = \Delta\psi + \Delta\widehat{\psi}\frac{L}{k_0}$. Der zweite Summand ist deshalb viel kleiner als 1, wenn $\Delta\psi\Delta\widehat{\psi} \approx 1$, $(\Delta\widehat{\psi})^2\frac{L}{k_0} \approx 1$ und wie oben $\frac{\Delta\widehat{\psi}}{k_0} \ll 1$ gilt. Anstatt der sonst üblichen “no-spreading” Bedingung $(\Delta\widehat{\psi})^2\frac{L+R}{k_0} \ll 1$ hat man hier also eine viel mildere Bedingung.

Mit (5.32) kann man sehr einfach die Mittelung über einen in A (Kreis mit Durchmesser D) zufällig verteilten Stoßparameter implementieren. Ist der Stoßparameter mit der Dichte 1 über A verteilt, wird der Streuquerschnitt gemäß (4.3) durch die Anzahl der detektierten Teilchen pro Zeiteinheit gegeben. Um diese Anzahl mit Hilfe des Flusses auszudrücken, integrieren wir den Fluss j_{det} aus (5.32) über das Ensemble $e^{-iH_0\frac{L}{k_0}}\psi_{\mathbf{y}}$, $\mathbf{y} \in A$. Da der Operator der freien Zeitentwicklung mit dem Translationsoperator vertauscht, ist $e^{-iH_0\frac{L}{k_0}}\psi_{\mathbf{y}} = \tilde{\psi}_{\mathbf{y}}$ und der Streuquerschnitt nun gegeben durch

$$\begin{aligned} \sigma(\Sigma) &= \left(\int_{\Sigma} |f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega})|^2 d\Omega \right) \left(\int_A \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}_{\mathbf{y}}(\mathbf{e}_3 z)|^2 dz d^2 y \right) \\ &= \left(\int_{\Sigma} |f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega})|^2 d\Omega \right) \left(\int_A \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}(y_1, y_2, z)|^2 dz d^2 y \right). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Variiert der Stoßparameter auf einer viel größeren Skala als die der transversalen (also senkrecht zu $\mathbf{k}_0 \parallel \mathbf{e}_3$) Dimensionen von $\tilde{\psi}$, d.h. ist⁵

$$\Delta\tilde{\psi}_{\perp} \ll D, \quad (5.35)$$

kann man die Integration über A auf ganz \mathbb{R}^2 ausdehnen und erhält

$$\sigma(\Sigma) = \left(\int_{\Sigma} |f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega})|^2 d\Omega \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}(y_1, y_2, z)|^2 dz d^2 y \right) = \int_{\Sigma} |f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega})|^2 d\Omega, \quad (5.36)$$

wenn die Wellenfunktion ψ bzw. $\tilde{\psi}$ auf 1 normiert ist.

⁵Die transversale $\Delta\psi_{\perp}$ Breite einer Wellenfunktion ist folgendermaßen definiert: $(\Delta\psi_{\perp})^2 = \int (\mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{x}_{0,\perp})^2 |\psi(\mathbf{x})|^2 d^3 x$, $(\mathbf{x}_0)^2 = \int \mathbf{x}^2 |\psi(\mathbf{x})|^2 d^3 x$.

Die Mittelung über den Stoßparameter erzeugt unter den angenommenen Voraussetzungen, d.h. mit (i)-(iv) von Seite 64 und mit (5.35),⁶ also direkt einen Fluss durch den Detektor von der Größe

$$\int_{\Sigma} |f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega})|^2 d\Omega$$

ohne Normierung mit einer von der Wellenfunktion abhängigen Größe. Insbesondere ist keine Messung bzw. Normierung von j_{det} mit der von der Wellenfunktion abhängigen Größe $j_{\text{tar}} = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}(\mathbf{e}_3 z)|^2 dz$ wie in der Situation ohne Mittelung notwendig.

Es ist aber wichtig festzuhalten, dass der zufällige Stoßparameter gemäß obiger Analyse nicht notwendig ist, um aus zeitabhängiger Sicht zu begründen, warum der Streuquerschnitt durch die Bornsche Formel gegeben ist: Schon die einfachste Situation von einem einzelnen Wellenpaket, welches auf ein einzelnen Streuer trifft, liefert mit der Identifikation $\sigma(\Sigma) = j_{\text{det}}/j_{\text{tar}}$ die Bornsche Formel. Die Dominanz der Stoßparameter-Analyse in der Literatur (vgl. Literaturhinweise in Kapitel 4.1) könnte den Eindruck vermitteln, dass die Einbeziehung des Stoßparameters notwendig ist, um überhaupt eine zeitabhängige Ableitung der Bornschen Formel geben zu können, siehe z.B. auch [21]. Neben der gerade präsentierten Heuristik zeigt auch ein rigoroses Resultat (Theorem 2.25. in [57]) zu dieser einfachsten Situation (eines einzelnen Wellenpakets und Targets), dass dem nicht so ist. Die Mittelung über den Stoßparameter führt zu einem angenehmen Normierungseffekt, indem sie—unabhängig von der speziellen Form von ψ —zu einer Einheitsdichte vor dem Target führt. Die Notwendigkeit, den Stoßparameter einzubeziehen, entsteht aus der vorhandenen experimentellen Situation, wie sie in Abbildung 4.1 dargestellt und durch das Modell aus Abbildung 4.2 idealisiert wird.

Nun kann man fragen, ob die Mittelung einen weiteren Effekt hat. Man könnte z.B. daran interessiert sein, durch welche Formel der Streuquerschnitt in der Situation mit Mittelung gegeben ist, wenn das transversale Profil des einfallenden Wellenpakets auf der Reichweite des Potentials variiert (in diesem Fall ist (iii) auf Seite 64 nicht erfüllt).⁷ Legt man die Situation aus Bemerkung 11 zugrunde, sieht man, dass die Breite der Streuamplitude dann klein gegenüber der von der Wellenfunktion im Impulsraum ist. Eine wichtige Frage in diesem Zusammenhang lautet also durch welche Formel der Streuquerschnitt gegeben ist, wenn die Streuamplitude auf der Breite $\Delta\hat{\psi}$ variiert. Hier spielt die Mittelung über den Stoßparameter eine entscheidende Rolle. Wir wollen die Rechnung nicht im Einzelnen vorführen, da sie—wenn auch in einer etwas anderen Form—in der Lite-

⁶Streng genommen haben wir noch vorausgesetzt, dass die Wellenfunktion beim Durchgang durch das Target nicht auseinander fließt, vgl. Bemerkung 12. Wir werden im nächsten Abschnitt die Situation mit Mittelung noch einmal unter allgemeineren Bedingungen untersuchen. Dort wird dann auch diese mildere “no-spreading” Bedingung keine Rolle mehr spielen.

⁷Für Hinweise zu einer experimentellen Realisierung dieser Situation siehe [28].

ratur und später im Beweis des Theorems über den Streuquerschnitt vorkommt (siehe Lemma 4, Literaturhinweise dort und z.B. [56], S. 50), sondern nur die essentielle Schritte verdeutlichen. Startet man mit einer anfänglichen Wellenfunktion $\psi_{\mathbf{y}}$ und zieht man die Streuamplitude in (5.13) nicht wie in (5.14) geschehen aus dem Integral, wird der Fluss (5.19) durch den Detektor und damit der Streuquerschnitt $\sigma(\Sigma)$ mit der (zunächst angenommenen) Idealisierung $A = \mathbb{R}^2$ zu

$$\begin{aligned} \sigma(\Sigma) = & \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\Sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int f_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega}) e^{i\frac{k^2}{2}t} e^{-ikx} \widehat{\psi}_{\mathbf{y}}^*(\mathbf{k}) d^3k \right) \\ & \times \left(\int f_{\mathbf{k}'}^*(\boldsymbol{\omega}) e^{-i\frac{k'^2}{2}t} e^{ik'x} \widehat{\psi}_{\mathbf{y}}(\mathbf{k}') k' d^3k' \right) dt d\Omega d^2y. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Die Zeitintegration über t liefert wieder ein $\delta(k - k')$ während die Integration über den Stoßparameter ein $\delta(k_1 - k'_1)\delta(k_2 - k'_2)$ ergibt, da $\widehat{\psi}_{\mathbf{y}} = e^{-ik_1y_1 - ik_2y_2 + ik_3L} \widehat{\psi}$. Die Deltafunktion $\delta(k_1 - k'_1)\delta(k_2 - k'_2)\delta(k - k')$ wirkt effektiv wie ein $\delta(k_1 - k'_1)\delta(k_2 - k'_2)\delta(k_3 - k'_3)$, womit man von (5.37) auf

$$\sigma(\Sigma) = \int_{\Sigma} \int_{\mathbb{R}^3} |f_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega})|^2 |\widehat{\psi}(\mathbf{k})|^2 \frac{k}{k_3} d^3k d\Omega \quad (5.38)$$

schließen kann. Diese Formel ist unabhängig von der genauen Struktur des Pakets im Ortsraum, gilt also insbesondere auch für Wellenpakete, deren transversale Dichte auf der Skala des Potentials variiert. Um nun wieder zur Bornschen Formel (5.26) zu kommen, müssen—im Sinne von (5.38)—die Breite der Wellenfunktion im Impulsraum klein gegenüber der Breite der Streuamplitude und $\frac{\Delta\widehat{\psi}}{k_0}$ so klein sein, dass $\frac{k}{k_3} \approx 1$ für die “ $|\widehat{\psi}|^2$ -meisten” vorkommenden Impulse gilt. Weiterhin notwendige Bedingungen sind natürlich (i) von S. 64 und eine experimentelle Situation, in der man die Anzahl der ungestreuten aber dennoch detektierten Teilchen vernachlässigen kann. Um (5.38) abzuleiten, haben wir zunächst $A = \mathbb{R}^2$ gesetzt. In obiger Rechnung ist es nicht besonders offensichtlich, wie groß A sein muss, um eine gute Approximation von \mathbb{R}^2 zu sein. Weiter oben haben wir aber schon die Bedingung (5.35) als entscheidend für eine effektive Mittelung erkannt, d.h. eine Mittelung, die zu einer Einheitsdichte vor dem Target führt. Es ist weiterhin notwendig, dass der Durchmesser D des Strahlprofils viel größer als die mikroskopische Reichweite l des Potentials ist. Andernfalls würde der Streuquerschnitt von D abhängen. Im nächsten Kapitel werden wir die Bedingungen dieses Abschnitts, also jene Bedingungen, die im Fall einer Mittelung über einen Stoßparameter zur Bornschen Formel für den Streuquerschnitt führen, mit Hilfe der vorhandenen Parameter genauer fassen. Wir werden dabei auch den Parameter τ miteinbeziehen, der bisher noch nicht zur Sprache kam.

Formel (5.38) ist auf den ersten Blick recht anschaulich: Man mittelt über die in der anfänglichen Wellenfunktion vorkommenden Impulse, wobei jeder Impuls zum Streuquerschnitt mit dem Quadrat der Streuamplitude beiträgt. Der Faktor $\frac{k}{k_3}$ trägt dem Umstand Rechnung, dass ein schräg (also nicht parallel zu \mathbf{k}_0) einfallendes Teilchen eine geringere Dichte vor dem Target erzeugt (durch eine Fläche senkrecht zu \mathbf{k}_0). Es erscheint so, als ob ein Ensemble vorliegt, in dem jedes Ensemblemitglied den genau definierten Impuls \mathbf{k} und das Gewicht $|\widehat{\psi}(\mathbf{k})|^2$ trägt. Bemerkenswert ist aber, dass diese Formel nur zustande kommt, wenn man über einen Stoßparameter mittelt. Für ein einzelnes Wellenpaket, welches auf ein einzelnes Target trifft, gilt (5.38) im Allgemeinen nicht. In [20] wird dieser Punkt noch einmal aufgegriffen und deutlich gemacht, wie die Mittelung zu (5.38) führt. Es wird gezeigt, dass das Ensemble $\psi_{\mathbf{y}}$, $\mathbf{y} \in A$, in der Tat äquivalent zu einem Ensemble von approximativ ebenen Wellen ist, deren Impulse gemäß $|\widehat{\psi}(\mathbf{k})|^2$ verteilt sind. Je größer A ist, desto "besser" approximiert ein Ensemblemitglied eine ebene Welle, bleibt aber für endliches A normierbar. Für jedes dieser Ensemblemitglieder ist der Streuquerschnitt aber durch die Bornsche Formel (5.26) gegeben (bis auf die Korrektur $\frac{k}{k_3}$ für die einfallende Dichte), da es sich ja um eine approximativ ebene Wellen handelt, für die (i) bis (iv) von Seite 64 gilt. Die Mittelung über die Dichte $|\widehat{\psi}(\mathbf{k})|^2$ liefert dann (5.38).

5.2 Detaillierte Klassifikation des Streuregimes

Wir fassen nun gemäß dem Abschnitt nach (5.38) die Bedingungen für die Gültigkeit von (5.26) im Falle der Mittelung über einen Stoßparameter zusammen. Die Bedingungen werden folgende Größen verwenden:

l	Reichweite des Potential,
L, R	Abstand der Teilchenquelle bzw. des Detektors vom Target, vgl. Abbildung 4.2,
D	Durchmesser des kreisförmigen Strahlprofils A , vgl. Abbildung 4.2,
τ	Zeitintervall, in dem die Teilchenquelle emittiert,
j_{Strahl}	Dichte des einfallenden Strahls, siehe Definition in Kapitel 4.1,
$T_{\text{sc}}, T_{\text{det}}$	Zeitpunkt der Streuung bzw. der Detektion eines Wellenpakets, welches zur Zeit $t = 0$ emittiert wurde,
$\Delta\psi, \Delta\widehat{\psi}$	Breite des Wellenpakets im Orts- bzw. Impulsraum, vgl. (5.15) für die Definition von $\Delta\widehat{\psi}$, Definition der Breite im Ortsraum analog,
$\Delta\psi_{\perp}, \Delta\widehat{\psi}_{\perp}$	Breite des Wellenpakets im Orts- bzw. Impulsraum senkrecht zu \mathbf{k}_0 ,
$\Delta\psi_{\parallel}, \Delta\widehat{\psi}_{\parallel}$	Breite des Wellenpakets im Orts- bzw. Impulsraum parallel zu \mathbf{k}_0 ,
$\Delta\psi_{T_{\text{sc}}, \perp}$	Breite des Wellenpakets im Ortsraum zum Zeitpunkt der Streuung senkrecht zu \mathbf{k}_0 ,
$\vartheta(\mathbf{k})$	Winkel zwischen \mathbf{k} und \mathbf{k}_0 , $\mathbf{k}_0 \parallel \mathbf{e}_3$.

Für Wellenpakete, welche eine kleine Ausdehnung im Ortsraum haben, ist T_{sc} bzw. T_{det} durch $\frac{L}{k_0}$ bzw. $\frac{L+R}{k_0}$ gegeben. Im Allgemeinen definieren wir T_{sc} als die Zeit, wenn das Wellenpaket den Wechselwirkungsbereich fast vollständig durchquert hat, und T_{det} als die Zeit, wenn das gestreute Wellenpaket den Bereich des Detektors erreicht. Es wird also im Allgemeinen $T_{\text{sc}} > \frac{L}{k_0}$ bzw. $T_{\text{det}} < \frac{L+R}{k_0}$ sein.

Mit (5.35) hat man gesehen, dass für eine effektive Mittelung der Durchmesser D des Strahlprofils A viel größer als die transversale Breite des Wellenpakets vor dem Target sein muss. Weiterhin ist es notwendig, dass $D \gg l$, d.h. es muss gelten

$$D \gg l \text{ und } \Delta\psi_{T_{\text{sc}},\perp} \ll D. \quad (5.39)$$

Bemerkung 13. (5.39) folgt auch, wenn man die Bedingungen, die eine typische Situation wie in Abbildung 4.1 charakterisiert, auf die entsprechenden Relationen des idealisierten Modells überträgt. Eine typische Streusituation ist eine, in der die Breite b des Targets viel größer als die transversale Breite $\Delta\psi_{T_{\text{sc}},\perp}$ des Wellenpakets ist. Zusätzlich ist b viel größer als der Abstand a zwischen zwei Streuern, welche wiederum viel größer als die Reichweite l des Potentials ist. Man hat also $b \gg \Delta\psi_{T_{\text{sc}},\perp}$ und $b \gg a \gg l$. Die Breite b von dem Target entspricht in der idealisierten Situation dem Durchmesser D , was auf (5.39) führt.

Man kann (5.39) auch expliziter formulieren: Asymptotisch ist die Breite eines Wellenpakets bestimmt durch die Summe von anfänglicher Breite und dem Produkt aus Breite im Impulsraum und Zeit t . Eine obere Schranke für die transversale Breite $\Delta\psi_{T_{\text{sc}},\perp}$ ist also $\Delta\psi_{\perp} + \Delta\widehat{\psi}_{\perp}T_{\text{sc}}$. Damit wird (5.39) zu

$$\mathbf{S1.} \quad \frac{\Delta\psi_{\perp}}{D} + \frac{\Delta\widehat{\psi}_{\perp}T_{\text{sc}}}{D} \ll 1$$

und

$$\mathbf{S2.} \quad \frac{l}{D} \ll 1.$$

Wir kommen nun zu (5.38). Um (5.26) von (5.38) ableiten zu können, darf weder $\frac{k}{k_3}$ viel von eins abweichen noch das Quadrat der Streuamplitude wesentlich auf dem ‘‘Träger’’ von ψ variieren. Da im Allgemeinen keine kompakten Wellenfunktion im Impulsraum vorliegt, führen wir den Bereich K ein, auf dem $\widehat{\psi}$ konzentriert ist:

$$K := \left\{ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \leq \left(\Delta\widehat{\psi}_{\perp} \right)^2, \lambda_3^2 \leq \left(\Delta\widehat{\psi}_{\parallel} \right)^2 \right\}. \quad (5.40)$$

Damit erhält man

S3. $\theta(\mathbf{k}) \ll 1, \forall \mathbf{k} \in K$

als notwendige Bedingung, dass $\frac{k}{k_3}$ nahe bei eins für die “ $|\widehat{\psi}|^2$ -meisten” Impulse ist. Es ist zusätzlich entscheidend, dass Impulse, bei denen $\frac{k}{k_3}$ sehr groß wird, vernachlässigbar sind. Das sind diejenigen Impulse, die (fast) senkrecht auf \mathbf{k}_0 stehen, d.h. für die $\theta(\mathbf{k}) \approx \frac{\pi}{2}$. Um diesen Effekt abzuschätzen, vergleichen wir die Gesamtzahl der Teilchen, die in Σ gestreut werden mit der Gesamtzahl der Teilchen, deren Impulse $\theta(\mathbf{k}) \approx \frac{\pi}{2}$ erfüllen. Dafür teilen wir den Impulsraum in zwei Teile. Sei $P_{e_3}^\alpha := \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_3 > k \cos \alpha\}$ für ein α mit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Es gilt also $\theta(\mathbf{k}) < \frac{\pi}{2} - \alpha$ für alle $\mathbf{k} \in P_{e_3}^\alpha$. Sei \bar{p}_α die Wahrscheinlichkeit, dass der Impuls in dem Komplement $\overline{P_{e_3}^\alpha}$ von $P_{e_3}^\alpha$ liegt, d.h.

$$\bar{p}_\alpha = \frac{\int_{\overline{P_{e_3}^\alpha}} |\widehat{\psi}(\mathbf{k})|^2 d^3k}{\int_{P_{e_3}^\alpha} |\widehat{\psi}(\mathbf{k})|^2 d^3k}.$$

Dann ist die Gesamtzahl von Teilchen mit Impuls in $\overline{P_{e_3}^\alpha}$ gegeben durch $j_{\text{Strahl}} \cdot \tau \cdot D^2 \cdot \bar{p}_\alpha$, da $j_{\text{Strahl}} \cdot \tau \cdot D^2$ die Gesamtzahl an emittierten Teilchen ist. Die totale Anzahl von Streuereignissen ist $j_{\text{Strahl}} \cdot l^2 \cdot \tau$, da l^2 die effektive Fläche des Potentials darstellt. Davon wird ein Bruchteil κ , $0 < \kappa < 1$, in Σ gestreut, d.h. die Anzahl von Streuereignissen in Σ ist $j_{\text{Strahl}} \cdot l^2 \cdot \tau \cdot \kappa$. Es ist also notwendig, dass $j_{\text{Strahl}} \cdot \tau \cdot D^2 \cdot \bar{p}_\alpha \ll j_{\text{Strahl}} \cdot l^2 \cdot \tau \cdot \kappa$, d.h.

S4. $\frac{D^2 \cdot \bar{p}_\alpha}{\kappa \cdot l^2} \ll 1$.

Um diese Bedingung zu erfüllen, muss man die Breite von $\widehat{\psi}$ entsprechend verkleinern, wenn man das Strahlprofil vergrößert.

Neben S3 und S4 muss auch erfüllt sein, dass das Quadrat der Streuamplitude $|f_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega})|^2$ wenig auf K variiert:

S5. $\left| \frac{|f_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega})|^2 - |f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega})|^2}{|f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega})|^2} \right| \ll 1, \forall \mathbf{k} \in K$.

Wir kommen nun zu τ . Die Anzahl der detektierten Teilchen im Raumwinkel Σ ist eine Zufallsgröße, welche für große Zeiten durch ihren Erwartungswert approximiert wird. Im Folgenden wird die Varianz abgeschätzt, um ein Maß für diese Abweichung zu erhalten. Die totale Anzahl von Streuereignissen ist wie oben $j_{\text{Strahl}} \cdot l^2 \cdot \tau$. Die Anzahl $N(\Sigma)$ der detektierten Teilchen kann man also schreiben als

$$N(\Sigma) = \sum_{i=1}^{j_{\text{Strahl}} \cdot l^2 \cdot \tau} N_i(\Sigma),$$

wobei $N_i(\Sigma)$ eins ist, wenn das Teilchen in Σ gestreut wird, und Null sonst. Also,

$$\mathbb{E}(N(\Sigma)) = j_{\text{Strahl}} \cdot l^2 \cdot \tau \cdot \mathbb{E}(N_i(\Sigma)) =: j_{\text{Strahl}} \cdot l^2 \cdot \tau \cdot \kappa, \quad 0 < \kappa < 1.$$

Ganz ähnlich erhält man

$$\mathbb{V}(N(\Sigma)) = j_{\text{Strahl}} \cdot l^2 \cdot \tau \cdot \mathbb{V}(N_i(\Sigma)) \leq j_{\text{Strahl}} \cdot l'^2 \cdot \tau.$$

Für eine gute Approximation von $N(\Sigma)$ durch den Erwartungswert benötigt man

$$\sqrt{\mathbb{V}(N)} \ll \mathbb{E}(N),$$

also

$$\mathbf{S6.} \quad \kappa \cdot l \cdot \sqrt{j_{\text{Strahl}} \cdot \tau} \gg 1.$$

In einem typischen Streuexperiment sind die Teilchen zur Zeit der Präparation außerhalb der Reichweite des Potentials. Das ist der Fall, wenn der makroskopische Abstand L viel größer als die longitudinale Breite $\Delta\psi_{\parallel}$ der Wellenpakete und viel größer als die Reichweite des Potentials ist. Diese asymptotische Situation ist charakterisiert durch

$$\mathbf{S7.} \quad \frac{l}{L} \ll 1 \quad \text{und} \quad \frac{\Delta\psi_{\parallel}}{L} \ll 1.$$

Ganz ähnlich detektiert man Teilchen, wenn sie den Einflussbereich des Potentials verlassen haben. Dafür ist sicherlich notwendig, dass $l \ll R$. Das ist aber nicht ausreichend, denn die Breite der Wellenfunktion könnte—durch ein sehr großes L —so groß geworden sein, dass das Wellenpaket den Bereich des Detektors *und* des Targets überdeckt. Dann wäre das Wellenpaket zur Zeit T_{det} noch nicht frei. Diese Situation kann man vermeiden, wenn

$$\mathbf{S8.} \quad \frac{l}{R} \ll 1, \quad T_{\text{sc}} \ll T_{\text{det}}.$$

Diese Bedingung ist nicht sehr explizit. Man beachte, dass T_{sc} von ψ und linear von L abhängt, während T_{det} von ψ und linear von L und R abhängt. Wir werden später eine spezielle Skalierung der Parameter angeben, bei der der Limes $R \rightarrow \infty$ vor einer Skalierung von ψ und L ausgeführt wird. Dann ist S8 natürlich erfüllt.

Wie kommen nun zu dem letzten Punkt, die Anzahl der ungestreuten, aber dennoch detektierten Teilchen. Es ist wichtig, dass der Detektor nur gestreute Teilchen zählt und keine ungestreuten, die den Detektor direkt erreichen können, weil z.B. der Detektor zu nah am Strahl platziert ist oder die anfänglichen Impulse nicht gut genug kollimiert sind. Wenn man z.B. D erhöht, ohne R zu vergrößern, wird der Detektor irgendwann direkt im Strahl stehen. Den gleichen Effekt hätte ein Vergrößern von L , ohne R entsprechend zu skalieren.

Um eine Schranke für die ungestreuten aber detektierten Teilchen zu finden, stellen wir uns die Situation von Abbildung 4.2 ohne Target vor. Zusätzlich führen wir die

Wahrscheinlichkeit $p_{\mathbf{y}}$ ein, dass ein Teilchen mit anfänglichen Wellenpaket $\psi_{\mathbf{y}}$ die Detektoroberfläche $R\Sigma$ kreuzt. Mit p bezeichnen wir das Maximum von $p_{\mathbf{y}}$ für $\mathbf{y} \in A$. Diese Wahrscheinlichkeit p ist ein komplizierter Ausdruck abhängig von L, D, R und ψ . Die Anzahl der ungestreuten aber detektierten Teilchen ist dann beschränkt durch das Produkt von der Gesamtzahl $j_{\text{Strahl}} \cdot D^2 \cdot \tau$ von emittierten Teilchen und p , also $j_{\text{Strahl}} \cdot D^2 \cdot \tau \cdot p$. Die Anzahl von Streueignisse in Σ ist wie oben $l^2 \cdot j_{\text{Strahl}} \cdot \tau \cdot \kappa$. Also ist das Streuregime eine Situation, in der

$$\mathbf{S9.} \quad \frac{D^2 \cdot p}{\kappa \cdot l^2} \ll 1.$$

Auch diese Bedingung ist nicht sehr explizit, aber für spezielle Situationen ist sie leicht auswertbar. Wenn man z.B. den Limes $R \rightarrow \infty$ ausführt, bevor man D, L erhöht und bevor man die Wellenfunktion skaliert, ist p einfach die Wahrscheinlichkeit, dass die anfänglichen Impulse in dem durch den Detektor gegebenen Kegel liegen. Genau in diesem Rahmen wird S9 im nächsten Kapitel verwendet.

Wir kommen nun zu der in den einleitenden Bemerkungen zu Kapitel 5 angesprochenen Problematik einer passenden Skalierung der Parameter ψ, L, A, R, τ . Wenn man für ein Moment S4 und S9 ignoriert und die Limiten nacheinander ausführt, erfüllt nur⁸ die Reihenfolge

$$\lim_{|\widehat{\psi}(\mathbf{k})|^2 \rightarrow \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)} \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{A \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\tau \rightarrow \infty}$$

alle anderen Bedingungen des Streuregimes. S9 ist aber verletzt, weil es für jedes $\psi_{\mathbf{y}}, \mathbf{y} \in A$ eine nichtverschwindende Wahrscheinlichkeit gibt, dass das zugehörige Teilchen aufgrund von Impulskomponenten, die direkt zu dem Detektor zeigen, detektiert wird. Wegen dem “großen” R (der Limes $R \rightarrow \infty$ ist ja schon ausgeführt) ist diese Wahrscheinlichkeit unabhängig von \mathbf{y} und gegeben durch die Wahrscheinlichkeit das der anfängliche Impuls in dem Detektorkegel C_{Σ} liegt. Vergrößerung von A führt dann zu einer immer größer werden Anzahl von ungestreuten aber detektierten Teilchen. S4 ist ebenso verletzt. Also auch wenn der Anteil der Impulse im Detektorkegel oder in $\overline{P_{\mathbf{e}_3}^{\alpha}}$ beliebig klein ist, führt das schrittweise Ausführen der Limiten nicht zur Bornschen Formel. Man könnte natürlich fordern, dass $\text{supp } \widehat{\psi} \cap C_{\Sigma} = \{0\}$ und $\text{supp } \widehat{\psi} \cap \overline{P_{\mathbf{e}_3}^{\alpha}} = \{0\}$. Dann wäre auch bei dem oben genannten schrittweisen Ausführen der Limiten S4 und S9 erfüllt. Diese Bedingungen sind unphysikalisch und bei einer passenden Skalierung natürlich auch nicht notwendig. Im nächsten Kapitel wird eine spezielle Skalierung angegeben, bei der ψ, L, A gemeinsam skaliert wird, um S4 und S9 erfüllen zu können.

⁸Den Limes $\lim_{\tau \rightarrow \infty}$ könnte man auch an einer anderen Stelle ausführen.

Kapitel 6

Die Anwendung der Austrittsstatistik: der Streuquerschnitt als Theorem

6.1 Formulierung des Theorems: eine spezielle Skalierung der Parameter

Um ein Theorem über den Streuquerschnitt formulieren zu können, muss man eine passende Skalierung der Parameter angeben, d.h. eine, welche das Streuregime respektiert und damit die Bedingungen des letzten Kapitels erfüllt. Das allgemeinste Resultat wäre ein Theorem, in dem jede Folge $\psi_n, L_n, A_n, R_n, \tau_n$, die für $n \rightarrow \infty$ die Bedingungen des Streuregimes erfüllt, eingesetzt in die Definition des Streuquerschnitts (4.14) zu $|f_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\omega})|^2$ (d.h. zu (4.4) bzw. (5.26)) führt. Unsere mathematischen Ergebnisse sind dafür nicht stark genug, weshalb wir eine etwas speziellere Skalierung angeben: Als ersten Limes wenden wir $\tau \rightarrow \infty$ an, der für die Stabilisierung des empirischen Streuquerschnitts durch ein Gesetz der großen Zahlen sorgt. Dann werden wir den Limes $R \rightarrow \infty$ ausführen. Die Größen ψ, L und A skalieren wir gleichzeitig mit einem Parameter ϵ . Dafür führen wir L^ϵ, A^ϵ und ψ^ϵ ein, deren genaue Abhängigkeit von ϵ weiter unten gegeben wird, und betrachten den zu (4.14) entsprechenden Streuquerschnitt, abhängig von ϵ, R, τ :

$$\sigma_{\text{emp}}^\epsilon(\Sigma) = \frac{N^*(\tau, R, A^\epsilon, L^\epsilon, \psi^\epsilon, \Sigma)}{\tau}. \quad (6.1)$$

Der Streuquerschnitt im Streuregime ist dann gegeben durch

$$\sigma(\Sigma) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sigma_{\text{emp}}^\epsilon(\Sigma). \quad (6.2)$$

Nun kommen wir zur genauen Definition von L^ϵ , A^ϵ und ψ^ϵ . Sei

$$\psi^\epsilon(\mathbf{x}) = \epsilon^{\frac{3}{2}} e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}} \psi(\epsilon \mathbf{x}), \quad (6.3)$$

mit der Fourier-Transformierten

$$\widehat{\psi^\epsilon}(\mathbf{k}) = \epsilon^{-\frac{3}{2}} \widehat{\psi}\left(\frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}_0}{\epsilon}\right). \quad (6.4)$$

Die Teilchenquelle ist in der Ebene Y_{L^ϵ} platziert, mit

$$L^\epsilon = \frac{L}{\epsilon^l}, \quad l > 2. \quad (6.5)$$

Das Strahlprofil $A^\epsilon \subset Y_{L^\epsilon}$ ist

$$A^\epsilon = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \frac{D^\epsilon}{2} \text{ und } x_3 = -L^\epsilon \right\} \quad (6.6)$$

mit dem Durchmesser D^ϵ gegeben durch

$$D^\epsilon = \frac{D}{\epsilon^d}, \quad d > 2l - 3. \quad (6.7)$$

Wenn $\psi \in \mathcal{S}$ ist, kann man sich leicht überzeugen, dass alle Bedingungen S1-S9 für das Streuregime erfüllt sind.

Gemäß den Bedingungen des Streuregimes ist es nicht notwendig, dass L viel größer als D ist. In einem typischen Streuexperiment wird aber $D \ll L$ sein. Unsere spezielle Skalierung lässt auch dieses Szenario zu: Wenn $2 < l < 3$, ist $d < l$ konsistent mit (6.7).

Wir formulieren nun das Theorem über den Streuquerschnitt. Unsere Grundlegenden Annahmen sind: $V \in (V)_5$ (Definition 1), A2 (S. 29, notwendig für die Existenz der Bohmschen Dynamik) und A3 (keine gebundenen Zustände, S. 55). Wir müssen auch fordern, dass $\psi_{\mathbf{y}}^\epsilon$, für alle ϵ klein genug, A1 (S. 29, notwendig für die Existenz der Bohmschen Dynamik) sowie die Bedingungen für das FAST (S. 33) erfüllt. Zusätzlich nehmen wir an, dass Null weder ein Eigenwert noch eine Resonanz von H ist. Anstatt der impliziten Bedingung, dass $\psi_{\mathbf{y}}^\epsilon$ A1 erfüllt, werden wir stärkere aber explizitere Bedingungen für ψ fordern: Entweder $\psi \in \mathcal{S}$ (Theorem 4) oder $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ (Theorem 5), mit entsprechenden Bedingungen an das Potential (Definitionen 7 und 8).

Definition 7. V ist in \mathcal{V} , wenn gilt:

- (i) Der Hamilton-Operator $H = -\frac{1}{2}\Delta + V$ hat keine gebundenen Zustände, d.h. $\mathcal{H}_{p.p.} = \{0\}$.
- (ii) Null ist keine Resonanz von H .
- (iii) V ist eine C^∞ -Funktion auf \mathbb{R}^3 .
- (iv) V und deren Ableitungen besitzen folgende Schranke: Für jeden Multiindex α gibt es eine Konstante $M_\alpha < \infty$, so dass $|\partial_{\mathbf{x}}^\alpha V(\mathbf{x})| < M_\alpha$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.
- (v) Es existieren positive Konstanten δ und C , so dass

$$|V(\mathbf{x})| \leq C \langle x \rangle^{-5-\delta} \text{ für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Theorem 4. Sei ψ eine normalisierte Wellenfunktion aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, und man nehme an, dass V in \mathcal{V} ist. Zusätzlich nehme man an, dass der Punktprozess $(\Lambda^*, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ die Gleichungen (4.5), (4.6) und (4.9) erfüllt. Sei $\mathbf{k}_0 \parallel \mathbf{e}_3$ mit $k_0 > 0$ und $\mathbf{k}_0 \notin C_\Sigma$. Dann ist σ_{emp}^ϵ wohldefiniert und es gilt

$$\sigma_{emp}^\epsilon(\Sigma) = \frac{N^*(\tau, R, A^\epsilon, L^\epsilon, \psi^\epsilon, \Sigma)}{\tau} \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty, \tau \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \sigma(\Sigma) = \int_{\Sigma} \sigma^{diff}(\boldsymbol{\omega}) d\Omega, \quad (6.8)$$

wobei $\sigma^{diff}(\boldsymbol{\omega}) = 16\pi^4 |T(k_0 \boldsymbol{\omega}, \mathbf{k}_0)|^2$ und $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit bezeichnet.

Definition 8. V ist in \mathcal{V}' , wenn gilt:

- (i) Der Hamilton-Operator $H = -\frac{1}{2}\Delta + V$ hat keine gebundenen Zustände, d.h. $\mathcal{H}_{p.p.} = \{0\}$.
- (ii) Null ist keine Resonanz von H .
- (iii) V ist in $(V)_5$.
- (iv) V ist eine C^∞ -Funktion auf \mathbb{R}^3 außer an endlich vielen Singularitäten.

Mit dieser Definition erhalten wir

Theorem 5. Sei ψ eine normalisierte Wellenfunktion aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, und man nehme an, dass V in \mathcal{V}' ist. Zusätzlich nehme man an, dass der Punktprozess $(\Lambda^*, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ die Gleichungen (4.5), (4.6) und (4.9) erfüllt. Sei $\mathbf{k}_0 \parallel \mathbf{e}_3$ mit $k_0 > 0$ und $\mathbf{k}_0 \notin C_\Sigma$. Dann ist σ_{emp}^ϵ wohldefiniert und (6.8) von Theorem 4 gilt.

6.2 Beweis des Theorems über den Streuquerschnitt

Zur Notation: $0 < c < \infty$ bezeichnet eine Konstante, deren Wert sich während einer Rechnung oder Abschätzung ändern kann. Diese Notation wird auch im Anhang verwendet.

Wenn $V \in \mathcal{V}$ und $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ oder $V \in \mathcal{V}'$ und $\psi \in C_0^\infty$ sind, erfüllt die normierte Wellenfunktion $\psi_{\mathbf{y}}^\epsilon$ die Bedingung A1 für alle $\mathbf{y} \in A^\epsilon$ und alle ϵ klein genug: Für den Fall $V \in \mathcal{V}$ und $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ folgt das aus einer einfachen Rechnung, während es für $V \in \mathcal{V}'$ und $\psi \in C_0^\infty$ ausreicht zu bemerken, dass die Wellenfunktion $\psi_{\mathbf{y}}^\epsilon$ für alle $\mathbf{y} \in A^\epsilon$ kein Überlapp mit den Singularitäten des Potentials hat, falls ϵ klein genug gewählt wurde. Die Größe N^* ist daher durch (4.13) wohldefiniert und wir führen den ersten Limes in (6.8) mit Hilfe der folgenden Proposition aus:

Proposition 5. *Man nehme an, dass $\psi_{\mathbf{y}}^\epsilon$ die Bedingung A1 für alle $\mathbf{y} \in A^\epsilon$ erfüllt, und dass das Potential der Bedingung A2 genügt. Zusätzlich nehme man an, dass der Punktprozess $(\Lambda^*, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ die Gleichungen (4.5), (4.6) und (4.9) erfüllt. Dann gilt für die Anzahl $N^*(\tau)$ der detektierten Teilchen ein Gesetz der großen Zahlen, d.h. für alle $\delta > 0$ gilt*

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{N^*(\tau, \Sigma)}{\tau} - \gamma \right| \geq \delta \right) = 0, \quad (6.9)$$

mit

$$\gamma = \int_{A^\epsilon} \mathbb{E}^{\psi_{\mathbf{y}}^\epsilon} \left(N_{\det}^{\psi_{\mathbf{y}}^\epsilon}(\Sigma) \right) d^2 y. \quad (6.10)$$

Bemerkung 14. $\gamma = \gamma(\Sigma) = \gamma(\psi^\epsilon, L^\epsilon, A^\epsilon, R, \Sigma)$ ist der Streuquerschnitt, den man in einem Experiment für hinreichend große τ messen würde. Theorem 4 bzw. 5 besagt, dass die restlichen Limiten in (6.8) angewendet auf γ dann auf den asymptotischen Streuquerschnitt $\sigma(\Sigma)$ führen. Wenn der zugrunde liegende Punktprozess ein Poisson-Prozess mit $[0, \tau) = \mathbb{R}^+$ ist, bilden die Zeiten der Detektion in $R\Sigma$ einen Poisson-Prozess mit Dichte γ . Darüber hinaus bilden die Detektionsereignisse (also Zeit und Richtung) im Streuregime einen Poisson-Prozess auf $\mathbb{R}^+ \times S^2$ mit Dichte $\sigma^{\text{diff}}(\boldsymbol{\omega})$.

Beweis von Proposition 5. Mit der Definition (4.13) von N^* gilt

$$N^*(\tau)(\lambda^*) = \chi_{B(\tau)}^*(\lambda^*) = \sum_{\lambda \in \lambda^*} \chi_{B(\tau)}(\lambda), \quad (6.11)$$

wobei $B(\tau)$ gegeben ist durch

$$B(\tau) = \{(t, \mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \Lambda \mid N_{\det}(\tau, \Sigma)(t, \mathbf{y}, \mathbf{x}) = 1\}. \quad (6.12)$$

Es folgt daher mit (4.5) und (4.6), dass

$$\mathbb{E}(N^*(\tau)) = \mu(B(\tau)) = \int \chi_{[0,\tau)}(t) N_{\det}^{\psi_{\mathbf{y}}^\epsilon}(\Sigma)(\mathbf{x}) d\mu = \tau \int_{A^\epsilon} \mathbb{E}^{\psi_{\mathbf{y}}^\epsilon} \left(N_{\det}^{\psi_{\mathbf{y}}^\epsilon}(\Sigma) \right) d^2 y = \tau \gamma. \quad (6.13)$$

Die Proposition folgt daher durch die Ergodizitätsannahme (4.9). ■

Um nun γ für große R auszuwerten, müssen wir Korollar 3 anwenden. Um zu zeigen, dass dafür alle Voraussetzungen erfüllt sind, muss man noch überprüfen, ob $\psi_{\mathbf{y}}^\epsilon$ für $\mathbf{y} \in A^\epsilon$ und ϵ klein genug in \mathcal{G} ist. Wenn $\psi \in \mathcal{S}$ und $V \in \mathcal{V}$ oder $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ und $V \in \mathcal{V}'$ sind, ist $\psi_{\mathbf{y}}^\epsilon \in C^\infty(H)$ für alle $\mathbf{y} \in A^\epsilon$ und ϵ klein genug (siehe weiter oben). Mit (i) der Definition von \mathcal{V} bzw. \mathcal{V}' (Definition 7 bzw. 8) folgt, dass es keine gebundenen Zustände gibt. Also ist $\psi_{\mathbf{y}}^\epsilon \in \mathcal{H}_{\text{a.c.}}(H) \cap C^8(H)$, für alle $\mathbf{y} \in A^\epsilon$ und ϵ klein genug. Wegen $\psi_{\mathbf{y}}^\epsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ bzw. $\psi_{\mathbf{y}}^\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ folgt dann, dass $\psi_{\mathbf{y}}^\epsilon \in \mathcal{G}$ für alle $\mathbf{y} \in A^\epsilon$ und ϵ klein genug.

Mit Proposition 5 und Korollar 3 ist der Limes $\sigma(\Sigma)$ in Theorem 4 gegeben durch

$$\begin{aligned} \sigma(\Sigma) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{A^\epsilon} \mathbb{E}^{\psi_{\mathbf{y}}^\epsilon} \left(N_{\det}^{\psi_{\mathbf{y}}^\epsilon}(R, \Sigma) \right) d^2 y \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{A^\epsilon} \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{\psi_{\mathbf{y}}^\epsilon} \left(N_{\det}^{\psi_{\mathbf{y}}^\epsilon}(R, \Sigma) \right) d^2 y \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\Sigma} \int_{A^\epsilon} |\widehat{\Omega_+^{-1} \psi_{\mathbf{y}}^\epsilon}(\mathbf{k})|^2 d^2 y d^3 k, \end{aligned} \quad (6.14)$$

wobei die Vertauschung von Limes und Integration durch die dominierte Konvergenz gerechtfertigt ist. Setzt man die S -Matrix ein, erhält man

$$\sigma(\Sigma) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\Sigma} \int_{A^\epsilon} |S \widehat{\Omega_+^{-1} \psi_{\mathbf{y}}^\epsilon}(\mathbf{k})|^2 d^2 y d^3 k. \quad (6.15)$$

Die Formel für $S = T + I$ ist gegeben durch (1.17) und (1.18). Um diese Formel anzuwenden, schreiben wir anstatt (6.15)

$$\sigma(\Sigma) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\Sigma} \int_{A^\epsilon} |\mathcal{F}(S(\Omega_-^{-1} \psi_{\mathbf{y}}^\epsilon - \psi_{\mathbf{y}}^\epsilon) + T \psi_{\mathbf{y}}^\epsilon + \psi_{\mathbf{y}}^\epsilon)(\mathbf{k})|^2 d^2 y d^3 k. \quad (6.16)$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhält man

$$\sigma(\Sigma) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\Sigma} \int_{A^\epsilon} |\mathcal{F}(T \psi_{\mathbf{y}}^\epsilon)(\mathbf{k})|^2 d^2 y d^3 k, \quad (6.17)$$

vorausgesetzt, dass

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{A^\epsilon} \|\Omega_-^{-1} \psi_{\mathbf{y}}^\epsilon - \psi_{\mathbf{y}}^\epsilon\|^2 d^2 y = 0 \quad (6.18)$$

und

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\Sigma} \int_{A^\epsilon} |\widehat{\psi}_y^\epsilon(\mathbf{k})|^2 d^2 y d^3 k = 0. \quad (6.19)$$

Bemerkung 15. In [21] ist eine falsche Bedingung formuliert worden, um von (6.15) zu (6.17) zu gelangen.

Wir werden nun (6.18) und (6.19) zeigen. Mit (6.4) erhält man für (6.19)

$$\int_{C_\Sigma} \int_{A^\epsilon} |\widehat{\psi}_y^\epsilon(\mathbf{k})|^2 d^2 y d^3 k = \epsilon^{-3} \int_{C_\Sigma} \int_{A^\epsilon} \left| \widehat{\psi} \left(\frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}_0}{\epsilon} \right) \right|^2 d^2 y d^3 k = \int_{\frac{1}{\epsilon}(C_\Sigma - \mathbf{k}_0)} \int_{A^\epsilon} |\widehat{\psi}(\mathbf{k})|^2 d^2 y d^3 k. \quad (6.20)$$

Da $\mathbf{k}_0 \notin C_\Sigma$, existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| > \delta \text{ für alle } \mathbf{k} \in C_\Sigma. \quad (6.21)$$

Nun kann man ausnützen, dass $\widehat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ (wir werden ausnützen, dass $|\widehat{\psi}| \leq ck^{-(d+2)}$). Dann ist das letzte Integral in (6.20) beschränkt durch

$$\int_{\frac{1}{\epsilon}(C_\Sigma - \mathbf{k}_0)} \int_{A^\epsilon} |\widehat{\psi}(\mathbf{k})|^2 d^2 y d^3 k \leq \int_{k > \frac{\delta}{\epsilon}} \int_{A^\epsilon} |\widehat{\psi}(\mathbf{k})|^2 d^2 y d^3 k \leq \frac{c}{\epsilon^{2d}} \int_{k > \frac{\delta}{\epsilon}} \frac{1}{k^{2d+4}} d^3 k \leq c\epsilon. \quad (6.22)$$

Mit (6.22) folgt (6.19).

Da Ω_- eine partielle Isometrie ist, ist (6.18) äquivalent zu

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{A^\epsilon} \|\Omega_- \psi_y^\epsilon - \psi_y^\epsilon\|^2 d^2 y = 0. \quad (6.23)$$

Gleichung (6.23) ist der Inhalt des folgenden

Lemma 3. *Sei $V \in (V)_5$ und so, dass Null weder ein Eigenwert noch eine Resonanz von H ist. Sei $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ und $\mathbf{k}_0 \parallel \mathbf{e}_3$ mit $k_0 > 0$. Dann gilt*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{A^\epsilon} \|\Omega_- \psi_y^\epsilon - \psi_y^\epsilon\|^2 d^2 y = 0. \quad (6.24)$$

Bemerkung 16. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass $\text{supp } \widehat{\psi} \subset P_{\mathbf{e}_3}^\alpha$ für ein $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, wobei $P_{\mathbf{e}_3}^\alpha := \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_3 > k \cos \alpha\}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ist, kann man—sehr ähnlich wie im Lemma 3—beweisen, dass

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{Y_L} \|\Omega_- \psi_y - \psi_y\|^2 d^2 y = 0. \quad (6.25)$$

Dass der Integrand in (6.25) gegen Null geht, wenn y groß wird, war schon bekannt (siehe z.B. [3], Korollar 8.17, [50], Theorem XI.33, und [57], Theorem 2.20).

Beweis von Lemma 3. Es ist

$$\|\Omega_- \psi_y^\epsilon - \psi_y^\epsilon\|^2 = 1 - (\psi_y^\epsilon, \Omega_- \psi_y^\epsilon) + \text{c.c.}, \quad (6.26)$$

wobei c.c. das komplex Konjugierte bezeichnet. Da $\Omega_- \psi = \mathcal{F}_-^{-1} \widehat{\psi}(\mathbf{k})$ für jedes $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ (Proposition 1, (iii)), erhält man für die rechte Seite von (6.26)

$$1 - \int (\psi_y^\epsilon)^*(\mathbf{x}) (2\pi)^{-3/2} \int \widehat{\psi}_y^\epsilon(\mathbf{k}) \varphi_-(\mathbf{x}, \mathbf{k}) d^3 k d^3 x + \text{c.c.} \quad (6.27)$$

Mit

$$\varphi_-(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \eta_-(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \quad (6.28)$$

und $\|\psi_y^\epsilon\|^2 = 1$ gilt

$$\|\Omega_- \psi_y^\epsilon - \psi_y^\epsilon\|^2 = \int (\psi_y^\epsilon)^*(\mathbf{x}) (2\pi)^{-3/2} \int \widehat{\psi}_y^\epsilon(\mathbf{k}) \eta_-(\mathbf{x}, \mathbf{k}) d^3 k d^3 x + \text{c.c.} \quad (6.29)$$

Wir teilen mit den glatten (C^∞) "Mollifiern" $0 \leq f_1(\mathbf{k}) \leq 1$ und $0 \leq f_2(\mathbf{k}) \leq 1$ die \mathbf{k} -Integration in zwei Teile. Die "Mollifier" haben folgende Eigenschaften:

$$f_1(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1, & \text{für } |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| < \frac{k_0}{3}, \\ 0, & \text{für } |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| \geq \frac{k_0}{2}, \end{cases}$$

$$f_2(\mathbf{k}) := 1 - f_1(\mathbf{k}). \quad (6.30)$$

Mit (6.30) erhält man für (6.29)

$$\begin{aligned} \|\Omega_- \psi_y^\epsilon - \psi_y^\epsilon\|^2 &= \int (\psi_y^\epsilon)^*(\mathbf{x}) (2\pi)^{-3/2} \int \widehat{\psi}_y^\epsilon(\mathbf{k}) (f_1 + f_2)(\mathbf{k}) \eta_-(\mathbf{x}, \mathbf{k}) d^3 k d^3 x + \text{c.c.} \\ &= \int (\psi_y^\epsilon)^*(\mathbf{x}) (2\pi)^{-3/2} \int \widehat{\psi}_y^\epsilon(\mathbf{k}) f_1(\mathbf{k}) \eta_-(\mathbf{x}, \mathbf{k}) d^3 k d^3 x \\ &\quad + \int (\psi_y^\epsilon)^*(\mathbf{x}) (2\pi)^{-3/2} \int \widehat{\psi}_y^\epsilon(\mathbf{k}) f_2(\mathbf{k}) \eta_-(\mathbf{x}, \mathbf{k}) d^3 k d^3 x + \text{c.c.} \\ &=: I_1 + I_2 + \text{c.c.} \leq 2|I_1| + 2|I_2|. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Da $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, ist für jedes $n > 0$ $|\widehat{\psi}(\mathbf{k})| \leq \frac{c}{k^n}$. Mit Proposition 2, (ii), gilt $|\eta_-(\mathbf{x}, \mathbf{k})| \leq 1 + |\varphi_-(\mathbf{x}, \mathbf{k})| \leq c$. Das ergibt mit (6.3), (6.4) und (6.30)

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{c}{\epsilon^3} \int |\psi(\mathbf{x} - \mathbf{y})| (2\pi)^{-3/2} \int_{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| \geq \frac{k_0}{3}} \left| \widehat{\psi} \left(\frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}_0}{\epsilon} \right) \right| d^3 k d^3 x \\ &\leq \frac{c}{\epsilon^3} \int_{|\mathbf{k}| \geq \frac{k_0}{3}} \left| \widehat{\psi} \left(\frac{\mathbf{k}}{\epsilon} \right) \right| d^3 k \leq c \epsilon^{n-3} \int_{|\mathbf{k}| \geq \frac{k_0}{3}} \frac{1}{k^n} d^3 k = c \epsilon^{n-3}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Um die Aussage von Lemma 3 zu erhalten, muss man I_1 und I_2 über A^ϵ integrieren. Mit (6.32) erhalten wir

$$\int_{A^\epsilon} |I_2| d^2 y \leq c\epsilon^{n-3-2d}, \quad (6.33)$$

was gegen Null geht, wenn wir n groß genug wählen. Es bleibt also zu zeigen, dass

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{A^\epsilon} |I_1| d^2 y = 0. \quad (6.34)$$

(6.34) folgt aus

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{Y_{L^\epsilon}} |I_1| d^2 y = 0. \quad (6.35)$$

Setzt man die Lippmann-Schwinger-Gleichung (1.20), d.h.

$$\eta_-(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} V(\mathbf{x}') \varphi_-(\mathbf{x}', \mathbf{k}),$$

in (6.31) ein, erhält man

$$I_1 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \int (\psi_{\mathbf{y}}^\epsilon)^*(\mathbf{x}) \int \widehat{\psi}_{\mathbf{y}}^\epsilon(\mathbf{k}) f_1(\mathbf{k}) \int \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} V(\mathbf{x}') \varphi_-(\mathbf{x}', \mathbf{k}) d^3 x' d^3 k d^3 x. \quad (6.36)$$

Da der Integrand in (6.36) absolut über $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{k}$ integrierbar ist (da $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $V \in (V)_5$ und wegen Lemma 2, (ii)), können wir die Integrationsreihenfolge vertauschen und vor allem Variablentransformationen ausführen. Mit $(\psi_{\mathbf{y}}^\epsilon)^*(\mathbf{x}) = (\psi^\epsilon)^*(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, $\widehat{\psi}_{\mathbf{y}}^\epsilon(\mathbf{k}) = \widehat{\psi}^\epsilon(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}}$ erhalten wir

$$I_1 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} (\psi^\epsilon)^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\psi}^\epsilon(\mathbf{k}) f_1(\mathbf{k}) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} V(\mathbf{x}') \varphi_-(\mathbf{x}', \mathbf{k}) d^3 x' d^3 k d^3 x. \quad (6.37)$$

Substituiert man $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{y}$ und setzt man $\mathbf{y} = (y_1, y_2, -L^\epsilon)$ ein, wird (6.37) zu

$$I_1 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} (\psi^\epsilon)^*(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\psi}^\epsilon(\mathbf{k}) f_1(\mathbf{k}) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik|\mathbf{y}+\mathbf{x}-\mathbf{x}'| - ik_1 y_1 - ik_2 y_2 + ik_3 L^\epsilon}}{|\mathbf{y} + \mathbf{x} - \mathbf{x}'|} V(\mathbf{x}') \\ \times \varphi_-(\mathbf{x}', \mathbf{k}) d^3 x' d^3 k d^3 x. \quad (6.38)$$

Wir führen als eine abkürzende Schreibweise (keine Variablensubstitution) $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, $\mathbf{a} := \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ und $b_3 := -L^\epsilon + a_3$ ein. Bezeichnet man mit (r, θ) die Polarkoordinaten von

$(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$, wobei \mathbf{e}_r der entsprechende radiale ($\perp \mathbf{e}_3$) Einheitsvektor ist, wird obige Gleichung zu

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} (\psi^\epsilon)^*(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\psi^\epsilon}(\mathbf{k}) f_1(\mathbf{k}) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik\sqrt{\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2 + (-L^\epsilon + a_3)^2} - ik_1\tilde{y}_1 - ik_2\tilde{y}_2 + ik_3L^\epsilon}}{|\tilde{\mathbf{y}}|} \\
&\quad \times e^{ik_1a_1 + ik_2a_2} V(\mathbf{x}') \varphi_-(\mathbf{x}', \mathbf{k}) d^3x' d^3k d^3x \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} (\psi^\epsilon)^*(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\psi^\epsilon}(\mathbf{k}) f_1(\mathbf{k}) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik\sqrt{r^2 + b_3^2} - ik \sin \vartheta r \cos \beta + ik \cos \vartheta L^\epsilon}}{\sqrt{r^2 + b_3^2}} e^{ik_1a_1 + ik_2a_2} \\
&\quad \times V(\mathbf{x}') \varphi_-(\mathbf{x}', \mathbf{k}) d^3x' d^3k d^3x, \tag{6.39}
\end{aligned}$$

mit $k \sin \vartheta = |\mathbf{k}_p| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ und $k_3 = k \cos \vartheta$, wobei ϑ ($0 \leq \vartheta \leq \pi$) der Winkel zwischen \mathbf{k} und \mathbf{e}_3 ist. β bezeichnet den Winkel zwischen $\mathbf{k}_p = (k_1, k_2, 0)$ und \mathbf{e}_r . Nützt man die Eigenschaften des Trägers von $f_1(\mathbf{k})$ aus (vgl. (6.30)), erkennt man, dass es einen Winkel $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ gibt, so dass

$$\vartheta \leq \alpha, \text{ i.e. } \cos \alpha \leq \cos \vartheta \leq 1, 0 \leq \sin \vartheta \leq \sin \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \tag{6.40}$$

für alle \mathbf{k} in dem Träger von f_1 gilt.

Wir führen nun sphärische Koordinaten $(k, \boldsymbol{\omega})$ für \mathbf{k} als Integrationsvariablen ein und integrieren zunächst über k (man beachte, dass β nicht k -abhängig ist). Da $\widehat{\psi^\epsilon} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, f_1 glatt und $\frac{\partial}{\partial k} \varphi_-(\mathbf{x}', \mathbf{k})$ uniform in k beschränkt sind (Proposition 2, (iv)), können wir zwei partielle Integrationen nach k ausführen und erhalten

$$\begin{aligned}
I_1 &= - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} (\psi^\epsilon)^*(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^3} V(\mathbf{x}') \int_{S^2} \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial k^2} \left(\widehat{\psi^\epsilon}(\mathbf{k}) f_1(\mathbf{k}) \varphi_-(\mathbf{x}', \mathbf{k}) e^{ik_1a_1 + ik_2a_2} k^2 \right) \\
&\quad \times \frac{e^{ik\lambda}}{\sqrt{r^2 + b_3^2} \lambda^2} dk d\Omega d^3x' d^3x, \tag{6.41}
\end{aligned}$$

wobei

$$\lambda := r \left(\sqrt{1 + \frac{b_3^2}{r^2}} - \sin \vartheta \cos \beta \right) + L^\epsilon \cos \vartheta. \tag{6.42}$$

Um die Ableitungen von den Funktionen $f_1(\mathbf{k}) \varphi_-(\mathbf{x}', \mathbf{k})$ abzuschätzen, verwenden wir Proposition 2, (iv), und die Glattheit von $f_1(\mathbf{k})$. Mit der üblichen Multiindex-Schreibweise

$$i := (i_1, i_2, i_3, i_4), i_m \in \mathbb{N}_0, |i| := i_1 + i_2 + i_3 + i_4, j := (j_1, j_2, j_3) \text{ analog,}$$

und mit $k_l = \kappa_l k$, $\kappa_l \in [-1, 1]$, $l = 1, 2$, gilt

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial^2}{\partial k^2} (f_1(\mathbf{k}) \varphi_-(\mathbf{x}', \mathbf{k}) \widehat{\psi}^\epsilon(\mathbf{k}) k^2 e^{ik_1 a_1 + ik_2 a_2}) \right| \\
& \leq 2 \sum_{|i|=2} \left| \frac{\partial^{i_1}}{\partial k^{i_1}} (f_1(\mathbf{k}) \varphi_-(\mathbf{x}', \mathbf{k})) \right| \left| \frac{\partial^{i_2}}{\partial k^{i_2}} (\widehat{\psi}^\epsilon(\mathbf{k}) k^2) \right| \left| \frac{\partial^{i_3}}{\partial k^{i_3}} (e^{i\kappa_1 k a_1}) \right| \left| \frac{\partial^{i_4}}{\partial k^{i_4}} (e^{i\kappa_2 k a_2}) \right| \\
& \leq c \sum_{|i|=2} (1 + x')^{i_1} \left| \frac{\partial^{i_2}}{\partial k^{i_2}} (\widehat{\psi}^\epsilon(\mathbf{k}) k^2) \right| |\kappa_1 a_1|^{i_3} |\kappa_2 a_2|^{i_4} \\
& \leq c \sum_{|i|=2} (1 + x')^{i_1} \left| \frac{\partial^{i_2}}{\partial k^{i_2}} (\widehat{\psi}^\epsilon(\mathbf{k}) k^2) \right| a^{i_3} a^{i_4} \\
& \leq c \sum_{|i|=2} (1 + x')^{i_1} \left| \frac{\partial^{i_2}}{\partial k^{i_2}} (\widehat{\psi}^\epsilon(\mathbf{k}) k^2) \right| |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{i_3 + i_4} \\
& \leq c \sum_{|j|=2} (1 + x')^{j_1} \left| \frac{\partial^{j_2}}{\partial k^{j_2}} (\widehat{\psi}^\epsilon(\mathbf{k}) k^2) \right| |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{j_3}. \tag{6.43}
\end{aligned}$$

Mit (6.40) sieht man, dass

$$\lambda \geq r(1 - \sin \alpha) + L^\epsilon \cos \alpha \geq \lambda_{\min} := \eta(r + L^\epsilon), \tag{6.44}$$

wobei $\eta := \min((1 - \sin \alpha), \cos \alpha) > 0$. λ in (6.42) ist also von unten beschränkt. Setzt man (6.44) und (6.43) in (6.41) ein, erhält man

$$\begin{aligned}
M & := \int_{Y_{L^\epsilon}} |I_1| d^2 y \leq c \sum_{|j|=2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^3} |\psi^\epsilon(\mathbf{x})| \int_{\mathbb{R}^3} |V(\mathbf{x}')| \int_{S^2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{r^2 + b_3^2 \lambda_{\min}^2}} \\
& \quad \times \left| \frac{\partial^{j_2}}{\partial k^{j_2}} (\widehat{\psi}^\epsilon(\mathbf{k}) k^2) \right| |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{j_3} (1 + x')^{j_1} dk d\Omega d^3 x' d^3 x d^2 y. \tag{6.45}
\end{aligned}$$

Da der Integrand von der rechten Seite von (6.45) positiv ist, können wir die Variablentransformation $(y_1, y_2) \rightarrow (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \rightarrow (r, \theta)$ anwenden, sowie die Reihenfolge der Integra-

tionen vertauschen. Mit (6.44) erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
M &\leq c \sum_{|j|=2} \int_{\mathbb{R}^3} |\psi^\epsilon(\mathbf{x})| \int_{\mathbb{R}^3} |V(\mathbf{x}')| \int_{S^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + b_3^2 \lambda_{\min}^2}} \left| \partial_k^{j_2} \left(\widehat{\psi^\epsilon}(\mathbf{k}) k^2 \right) \right| \\
&\quad \times |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{j_3} (1 + x')^{j_1} r d\theta dr dk d\Omega d^3 x' d^3 x \\
&\leq c \sum_{|j|=2} \int_{\mathbb{R}^3} |\psi^\epsilon(\mathbf{x})| \int_{\mathbb{R}^3} |V(\mathbf{x}')| \int_{S^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\eta^2 (r + L^\epsilon)^2} \left| \partial_k^{j_2} \left(\widehat{\psi^\epsilon}(\mathbf{k}) k^2 \right) \right| \\
&\quad \times |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{j_3} (1 + x')^{j_1} dr dk d\Omega d^3 x' d^3 x \\
&= \frac{c}{\eta^2 L^\epsilon} \sum_{|j|=2} \int_{\mathbb{R}^3} |\psi^\epsilon(\mathbf{x})| \int_{\mathbb{R}^3} |V(\mathbf{x}')| \int_{S^2} \int_0^\infty \left| \partial_k^{j_2} \left(\widehat{\psi^\epsilon}(\mathbf{k}) k^2 \right) \right| \\
&\quad \times |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{j_3} (1 + x')^{j_1} dk d\Omega d^3 x' d^3 x.
\end{aligned} \tag{6.46}$$

Da $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{j_3} \leq 2(x^{j_3} + x'^{j_3})$ für $j_3 = 1, 2$, kann man (6.46) vereinfachen zu

$$\begin{aligned}
M &\leq \frac{c}{L^\epsilon} \sum_{|j|=2} \int_{\mathbb{R}^3} |\psi^\epsilon(\mathbf{x})| (1 + x)^{j_3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \partial_k^{j_2} \left(\widehat{\psi^\epsilon}(\mathbf{k}) k^2 \right) \right| \int_{\mathbb{R}^3} |V(\mathbf{x}')| \\
&\quad \times (1 + x')^{j_1 + j_3} d^3 x' dk d\Omega d^3 x.
\end{aligned} \tag{6.47}$$

Es ist $V \in (V)_5$ (also ist $V \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und $|V(\mathbf{x})| \leq Cx^{-5-\delta}$, $\delta > 0$, für $x > R_0$) und $j_1 + j_3 \leq 2$. Daher ist die \mathbf{x}' -Integration endlich und wir erhalten (durch Teilen des Integrationsgebiets von \mathbf{x}' in zwei Teile, $x' > R_0$ und $x' \leq R_0$)

$$M \leq \frac{c}{L^\epsilon} \sum_{j_2 + j_3 \leq 2} \int_{\mathbb{R}^3} |\psi^\epsilon(\mathbf{x})| (1 + x)^{j_3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \partial_k^{j_2} \left(\widehat{\psi^\epsilon}(\mathbf{k}) k^2 \right) \right| dk d\Omega d^3 x. \tag{6.48}$$

Verwendet man (6.3), (6.4) und $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, findet man durch eine einfache Rechnung

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi^\epsilon(\mathbf{x})| x^{j_3} d^3 x \leq \frac{c}{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\epsilon^{j_3}} \tag{6.49}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| \partial_k^{j_2} \left(\widehat{\psi^\epsilon}(\mathbf{k}) k^2 \right) \right| dk d\Omega \leq c \epsilon^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\epsilon^{j_2}}. \tag{6.50}$$

Da $j_2 + j_3 \leq 2$, folgt mit (6.49), (6.50) und (6.5) dass für M in (6.48) und für kleine ϵ die obere Schranke

$$M \leq \frac{c}{L^\epsilon \epsilon^2} = c \epsilon^{l-2} \tag{6.51}$$

existiert. Wegen $l > 2$ geht M für $\epsilon \rightarrow 0$ gegen Null. Das vervollständigt den Beweis von (6.24). ■

Wir können nun mit dem Ausrechnen von (6.17) fortfahren. Mit (1.17) erhalten wir für (6.17)

$$\begin{aligned}
\sigma(\Sigma) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\Sigma} \int_{A^\epsilon} |\widehat{T\psi}_{\mathbf{y}}^\epsilon(\mathbf{k})|^2 d^2 y d^3 k \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi^2 \int_{C_\Sigma} \int_{A^\epsilon} \left| \int_{k'=k} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{y}} T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \widehat{\psi}^\epsilon(\mathbf{k}') k' d\Omega(\mathbf{k}') \right|^2 d^2 y d^3 k \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi^2 \int_{C_\Sigma} \int_{y_p < \frac{D^\epsilon}{2}} \left| \int_{k'=k} e^{-i(k'_1 y_1 + k'_2 y_2 - k'_3 L^\epsilon)} T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \widehat{\psi}^\epsilon(\mathbf{k}') k' d\Omega(\mathbf{k}') \right|^2 dy_1 dy_2 d^3 k,
\end{aligned} \tag{6.52}$$

wobei $\mathbf{y}_p := (y_1, y_2)$. Wir setzen noch einmal die Identität $f_1 + f_2 \equiv 1$ ein, womit $\sigma(\Sigma)$ nun gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi^2 \int_{C_\Sigma} \int_{y_p < \frac{D^\epsilon}{2}} \left| \int_{k'=k} e^{-i(k'_1 y_1 + k'_2 y_2 - k'_3 L^\epsilon)} T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \widehat{\psi}^\epsilon(\mathbf{k}') (f_1(\mathbf{k}') + f_2(\mathbf{k}')) k' d\Omega(\mathbf{k}') \right|^2 \\
&\quad \times dy_1 dy_2 d^3 k.
\end{aligned} \tag{6.53}$$

Das Quadrieren führt zu vier Termen. Der Hauptterm ist

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi^2 \int_{C_\Sigma} \int_{y_p < \frac{D^\epsilon}{2}} \left| \int_{k'=k} e^{-i(k'_1 y_1 + k'_2 y_2 - k'_3 L^\epsilon)} T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \widehat{\psi}^\epsilon(\mathbf{k}') f_1(\mathbf{k}') k' d\Omega(\mathbf{k}') \right|^2 dy_1 dy_2 d^3 k. \tag{6.54}$$

Bevor wir (6.54) ausrechnen, zeigen wir, dass die anderen drei Terme vernachlässigbar sind. Wenn man beachtet, dass $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ beschränkt (Korollar 1) und ψ aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ sind, erhält man

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{k'=k} e^{-i(k'_1 y_1 + k'_2 y_2 - k'_3 L^\epsilon)} T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \widehat{\psi}^\epsilon(\mathbf{k}') f_i(\mathbf{k}') k' d\Omega(\mathbf{k}') \right| \leq \frac{C}{\epsilon^2} k, \quad i = 1, 2, \\
&\left| \int_{k'=k} e^{-i(k'_1 y_1 + k'_2 y_2 - k'_3 L^\epsilon)} T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \widehat{\psi}^\epsilon(\mathbf{k}') f_2(\mathbf{k}') k' d\Omega(\mathbf{k}') \right| \leq \frac{C}{\epsilon^2} k \int_{k'=k} \left| \widehat{\psi} \left(\frac{\mathbf{k}' - \mathbf{k}_0}{\epsilon} \right) \right| \\
&\quad \times f_2(\mathbf{k}') d\Omega(\mathbf{k}').
\end{aligned} \tag{6.55}$$

Mit (6.55) kann man sehen, dass die Differenz zwischen (6.54) und (6.53) beschränkt ist durch

$$\begin{aligned}
& \frac{c}{\epsilon^3} \int_{C_\Sigma} \int_{y_p < \frac{D\epsilon}{2}} \int_{k'=k} \left| \widehat{\psi} \left(\frac{\mathbf{k}' - \mathbf{k}_0}{\epsilon} \right) \right| f_2(\mathbf{k}') k'^2 d\Omega(\mathbf{k}') d^2 y d^3 k \\
& \leq \frac{c}{\epsilon^{3+2d}} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \widehat{\psi} \left(\frac{\mathbf{k}' - \mathbf{k}_0}{\epsilon} \right) \right| f_2(\mathbf{k}') k'^2 d^3 k' \\
& \leq \frac{c}{\epsilon^{3+2d}} \int_{|\mathbf{k}' - \mathbf{k}_0| \geq \frac{k_0}{3}} \left| \widehat{\psi} \left(\frac{\mathbf{k}' - \mathbf{k}_0}{\epsilon} \right) \right| k'^2 d^3 k'. \tag{6.56}
\end{aligned}$$

Für jedes $6 \leq n \in \mathbb{N}$ gilt $|\widehat{\psi}(\mathbf{k})| \leq \frac{c}{k^n}$. Damit ist die rechte Seite von (6.56) durch $c\epsilon^{n-3-2d}$ beschränkt, geht also gegen Null für $\epsilon \rightarrow 0$, falls n groß genug gewählt wird (in Abhängigkeit von d). Damit sind die drei Terme, die durch Ausmultiplizieren von (6.53) neben (6.54) entstehen, vernachlässigbar klein.

Da wir zeigen werden, dass

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi^2 \int_{C_\Sigma} \int_{y_p \geq \frac{D\epsilon}{2}} \left| \int_{k'=k} e^{-i(k'_1 y_1 + k'_2 y_2 - k'_3 L^\epsilon)} T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \widehat{\psi}^\epsilon(\mathbf{k}') f_1(\mathbf{k}') k' d\Omega(\mathbf{k}') \right|^2 dy_1 dy_2 d^3 k = 0, \tag{6.57}$$

können wir die \mathbf{y} -Integration in (6.54) auf ganz \mathbb{R}^2 ausdehnen, so dass der Streuquerschnitt nun gegeben ist durch

$$\sigma(\Sigma) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi^2 \int_{C_\Sigma} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{k'=k} e^{-i(k'_1 y_1 + k'_2 y_2 - k'_3 L^\epsilon)} T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \widehat{\psi}^\epsilon(\mathbf{k}') f_1(\mathbf{k}') k' d\Omega(\mathbf{k}') \right|^2 dy_1 dy_2 d^3 k. \tag{6.58}$$

Bevor wir (6.57) zeigen werden, rechnen wir (6.58) mit Hilfe des folgenden Lemmas aus:

Lemma 4. Sei $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ und $\delta > 0$ gegeben. Man nehme an, dass $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit Träger in dem Sektor $P_{\mathbf{e}_3}^\alpha := \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_3 > k \cos \alpha\}$ und mit $\int_{k=\delta} |\phi(\mathbf{k})|^2 d\Omega(\mathbf{k}) < \infty$ ist. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{k=\delta} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \phi(\mathbf{k}) d\Omega(\mathbf{k}) \right|^2 d^2 y = \int_{k=\delta} |\phi(\mathbf{k})|^2 \frac{1}{kk_3} d\Omega(\mathbf{k}). \tag{6.59}$$

Der Beweis findet sich in [3] (Lemma 7.17).

Wegen Korollar 1 ist $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ beschränkt und stetig auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Zusätzlich ist $\widehat{\psi^\epsilon}(\mathbf{k}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ und $\widehat{\psi^\epsilon}(\mathbf{k})f_1(\mathbf{k})$ hat einen Träger in dem Sektor $P_{\mathbf{e}_3}^{\vartheta_2}$ mit $0 < \vartheta_2 < \frac{\pi}{2}$. Also folgt mit Lemma 4:

$$\begin{aligned} \sigma(\Sigma) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 16\pi^4 \int_{C_\Sigma} \int_{k'=k} |T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 \left| \widehat{\psi^\epsilon}(\mathbf{k}') \right|^2 |f_1(\mathbf{k}')|^2 \frac{1}{\cos \vartheta'} d\Omega(\mathbf{k}') d^3 k \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 16\pi^4 \int_{\Sigma} \int_{\mathbb{R}^3} |T(k'\boldsymbol{\omega}, \mathbf{k}')|^2 \left| \widehat{\psi^\epsilon}(\mathbf{k}') \right|^2 |f_1(\mathbf{k}')|^2 \frac{1}{\cos \vartheta'} d^3 k' d\Omega, \end{aligned} \quad (6.60)$$

wobei $k'_3 = k \cos \vartheta'$. Da $\text{supp } f_1(\mathbf{k}) \subset P_{\mathbf{e}_3}^{\vartheta_2}$ mit $0 < \vartheta_2 < \frac{\pi}{2}$, existiert ein $\delta > 0$, so dass $\delta < \cos \vartheta'$. Dann ist das Integral in (6.60) endlich (es ist $\leq c\|\psi\|^2$). Da $|\widehat{\psi^\epsilon}(\mathbf{k})|^2 \rightarrow \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ im Sinne von $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int |\widehat{\psi^\epsilon}(\mathbf{k})|^2 g(\mathbf{k}) d^3 k = g(\mathbf{k}_0)$ für jede beschränkte und stetige Funktion g , und weil $T(k'\boldsymbol{\omega}, \mathbf{k}')$, $f_1(\mathbf{k}')$ und $\frac{1}{\cos \vartheta'}$ beschränkte und stetige Funktionen von \mathbf{k} sind, können wir

$$\sigma(\Sigma) = 16\pi^4 \int_{\Sigma} |T(k_0\boldsymbol{\omega}, \mathbf{k}_0)|^2 d\Omega \quad (6.61)$$

folgern.

Der Beweis von Theorem 4 und Theorem 5 ist also vollständig, wenn man (6.57) zeigen kann. Durch Variablentransformation folgt (6.57) aus

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{y_p \geq \frac{D}{2}} \frac{1}{\epsilon^{2d}} \left| \int_{k'=k} e^{-i(k'_1 \frac{y_1}{\epsilon^d} + k'_2 \frac{y_2}{\epsilon^d} - k'_3 L^\epsilon)} T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \widehat{\psi^\epsilon}(\mathbf{k}') f_1(\mathbf{k}') k' d\Omega(\mathbf{k}') \right|^2 dy_1 dy_2 d^3 k = 0. \quad (6.62)$$

Gleichung (6.62) ist der Inhalt von

Lemma 5. Sei $V \in (V)_5$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ und $k_0 > 0$. Weiterhin nehme man an, dass $l > 2$ und $d > 2l - 3$ gilt. Zusätzlich sei Null weder ein Eigenwert noch eine Resonanz von H . Sei M gegeben durch (für eine einfachere Notation haben wir \mathbf{k} und \mathbf{k}' vertauscht)

$$M = M(y_1, y_2, \mathbf{k}', \epsilon) := \int_{k=k'} e^{-i(k_1 \frac{y_1}{\epsilon^d} + k_2 \frac{y_2}{\epsilon^d} - k_3 L^\epsilon)} T(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \widehat{\psi^\epsilon}(\mathbf{k}) f_1(\mathbf{k}) k d\Omega(\mathbf{k}). \quad (6.63)$$

Dann gilt für jedes $D > 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{y_p \geq D} \frac{1}{\epsilon^{2d}} |M|^2 dy_1 dy_2 d^3 k' = 0. \quad (6.64)$$

Beweis von Lemma 5. Wir werden folgende Ungleichung zeigen: Es existiert ein $c < \infty$, so dass

$$|M|^2 \leq c \chi_{\left(\frac{k_0}{2}, \frac{3}{2}k_0\right)}(k') \frac{\epsilon^{4d+5-4l}}{y_p^4} \frac{1}{\left(1 + \frac{|k'-k_0|}{\epsilon}\right)^2}. \quad (6.65)$$

Gegeben (6.65) zeigt man nun, dass (6.64) folgt. Mit (6.65) ist das Integral in (6.64) dominiert durch

$$\begin{aligned} \int_{\frac{k_0}{2} < k' < \frac{3}{2}k_0} \int_{y_p \geq D} c \frac{\epsilon^{2d+5-4l}}{y_p^4} \frac{1}{\left(1 + \frac{|k'-k_0|}{\epsilon}\right)^2} d^2 y d^3 k' &\leq c \epsilon^{2d+5-4l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{\left(1 + \frac{|k'-k_0|}{\epsilon}\right)^2} \\ &= c \epsilon^{2d+6-4l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{(1 + |k'|)^2} \\ &= c \epsilon^{2d+6-4l}. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Da $d > 2l - 3$, existiert ein $\delta > 0$, so dass $d = 2l - 3 + \delta$. Dann ist (6.66) von der Ordnung $\epsilon^{2\delta}$ und (6.64) folgt.

Nun zur Ungleichung (6.65). Durch Variablensubstitution in (6.63) von $\boldsymbol{\omega}$ zu k_1, k_2 ($k = k'$ bleibt fixiert) mit der Jacobi-Determinante $k'k_3$, $k_3 = k_3(k_1, k_2) = \sqrt{k'^2 - k_1^2 - k_2^2}$, und der Bezeichnung $\mathbf{k}_+ = (k_1, k_2, k_3(k_1, k_2))$ erhält man

$$\begin{aligned} M &= \int \int_{k_1^2 + k_2^2 \leq k'^2} e^{-i(k_1 \frac{y_1}{\epsilon^d} + k_2 \frac{y_2}{\epsilon^d} - k_3 L^\epsilon)} T(\mathbf{k}', \mathbf{k}_+) \widehat{\psi}^\epsilon(\mathbf{k}_+) f_1(\mathbf{k}_+) k' \frac{1}{k'k_3} dk_1 dk_2 \\ &= \frac{1}{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \int \int_{k_1^2 + k_2^2 \leq k'^2} e^{-i(k_1 \frac{y_1}{\epsilon^d} + k_2 \frac{y_2}{\epsilon^d})} \left(T(\mathbf{k}', \mathbf{k}_+) \widehat{\psi}^\epsilon \left(\frac{\mathbf{k}_+ - \mathbf{k}_0}{\epsilon} \right) e^{ik_3 L^\epsilon} \frac{f_1(\mathbf{k}_+)}{k_3} \right) dk_1 dk_2 \\ &=: \frac{1}{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \int \int_{k_1^2 + k_2^2 \leq k'^2} e^{-i(k_1 \frac{y_1}{\epsilon^d} + k_2 \frac{y_2}{\epsilon^d})} g(k_1, k_2, \mathbf{k}', \epsilon) dk_1 dk_2. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Macht man zwei partielle Integrationen nach $\mathbf{k}_p := (k_1, k_2)$, ergibt sich (dabei benützt man, dass $f_1(\mathbf{k}_+)$ und die Ableitungen davon auf dem Rand des Integrationsgebiets ver-

schwinden)

$$\begin{aligned}
|M| &= \frac{1}{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \epsilon^d \left| \int \int_{k_p \leq k'} \left(\nabla_{\mathbf{k}_p} e^{-i(k_1 \frac{y_1}{\epsilon^d} + k_2 \frac{y_2}{\epsilon^d})} \right) \cdot \frac{\mathbf{y}_p}{y_p^2} f_1(\mathbf{k}_+) g(k_1, k_2, \mathbf{k}', \epsilon) dk_1 dk_2 \right| \\
&= \frac{1}{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \epsilon^d \left| \int \int_{k_p \leq k'} e^{-i(k_1 \frac{y_1}{\epsilon^d} + k_2 \frac{y_2}{\epsilon^d})} \frac{\mathbf{y}_p}{y_p^2} \cdot \nabla_{\mathbf{k}_p} g(k_1, k_2, \mathbf{k}', \epsilon) dk_1 dk_2 \right| \\
&= \frac{1}{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \epsilon^{2d} \left| \int \int_{k_p \leq k'} \left(\nabla_{\mathbf{k}_p} e^{-i(k_1 \frac{y_1}{\epsilon^d} + k_2 \frac{y_2}{\epsilon^d})} \right) \cdot \frac{\mathbf{y}_p}{y_p^2} \frac{\mathbf{y}_p}{y_p^2} \cdot \nabla_{\mathbf{k}_p} g(k_1, k_2, \mathbf{k}', \epsilon) dk_1 dk_2 \right| \\
&= \frac{1}{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \epsilon^{2d} \left| \int \int_{k_p \leq k'} e^{-i(k_1 \frac{y_1}{\epsilon^d} + k_2 \frac{y_2}{\epsilon^d})} \frac{\mathbf{y}_p}{y_p^2} \cdot \nabla_{\mathbf{k}_p} \frac{\mathbf{y}_p}{y_p^2} \cdot \nabla_{\mathbf{k}_p} g(k_1, k_2, \mathbf{k}', \epsilon) dk_1 dk_2 \right| \\
&\leq \frac{1}{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \frac{\epsilon^{2d}}{y_p^2} \int \int_{k_p \leq k'} \sum_{i,j=1}^2 |\partial_{k_i} \partial_{k_j} g(k_1, k_2, \mathbf{k}', \epsilon)| dk_1 dk_2. \tag{6.68}
\end{aligned}$$

Wir schätzen nun die Ableitungen von g auf dem Träger von f_1 ab. Auf dem Träger $\text{supp } f_1$ ist $k_3 > k_0/2$. Mit Korollar 1 erhält man dann für $i, j = 1, 2$

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathbf{k}' \in \mathbb{R}^3, \mathbf{k}_+ \in \text{supp } f_1} |T(\mathbf{k}', \mathbf{k}_+)| &\leq c, \quad \sup_{\mathbf{k}' \in \mathbb{R}^3, \mathbf{k}_+ \in \text{supp } f_1} |\partial_{k_i} T(\mathbf{k}', \mathbf{k}_+)| \leq c, \tag{6.69} \\
\sup_{\mathbf{k}' \in \mathbb{R}^3, \mathbf{k}_+ \in \text{supp } f_1} |\partial_{k_i} \partial_{k_j} T(\mathbf{k}', \mathbf{k}_+)| &\leq c.
\end{aligned}$$

Um die Wellenfunktion $\widehat{\psi}\left(\frac{\mathbf{k}_+ - \mathbf{k}_0}{\epsilon}\right)$ und ihre Ableitungen abzuschätzen, führen wir folgende Notation ein:

$$P_{\mathbf{k}} := \frac{1}{1 + \frac{|k - k_0|}{\epsilon}}, \quad P_{\mathbf{k}} := \frac{1}{1 + \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|}{\epsilon}}. \tag{6.70}$$

Offensichtlich gilt

$$P_{\mathbf{k}} \leq P_{\mathbf{k}}. \tag{6.71}$$

Da $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, fallen $\widehat{\psi}$ und dessen Ableitungen schneller als jede reziproke Potenz von k ab. Also können wir für $\mathbf{k}_+ \in \text{supp } f_1$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ passende Konstanten finden, so dass

$$\left| \widehat{\psi}\left(\frac{\mathbf{k}_+ - \mathbf{k}_0}{\epsilon}\right) \right| \leq c P_{\mathbf{k}_+}^n, \quad \left| \partial_{k_i} \widehat{\psi}\left(\frac{\mathbf{k}_+ - \mathbf{k}_0}{\epsilon}\right) \right| \leq \frac{c}{\epsilon} P_{\mathbf{k}_+}^n, \quad \left| \partial_{k_i} \partial_{k_j} \widehat{\psi}\left(\frac{\mathbf{k}_+ - \mathbf{k}_0}{\epsilon}\right) \right| \leq \frac{c}{\epsilon^2} P_{\mathbf{k}_+}^n. \tag{6.72}$$

Die Ableitungen von dem dritten Faktor $e^{-ik_3 L^\epsilon}$ von g können auf $\text{supp } f_1$ folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$|e^{-ik_3 L^\epsilon}| \leq 1, \quad |\partial_{k_i} e^{-ik_3 L^\epsilon}| \leq L^\epsilon \frac{|k_i|}{|k_3|} \leq L^\epsilon |k_i|. \quad (6.73)$$

Da $|k_i| P_{\mathbf{k}_+} \leq \epsilon$, erhalten wir mit (6.72) ($n = j + 1$) und (6.5)

$$\left| (\partial_{k_i} e^{-ik_3 L^\epsilon}) \widehat{\psi} \left(\frac{\mathbf{k}_+ - \mathbf{k}_0}{\epsilon} \right) \right| \leq c L^\epsilon |k_i| P_{\mathbf{k}_+} P_{\mathbf{k}_+}^j \leq c L^\epsilon \epsilon P_{\mathbf{k}_+}^j = \frac{c}{\epsilon^{l-1}} P_{\mathbf{k}_+}^j, \quad j \text{ beliebig.} \quad (6.74)$$

Mit einer ähnlichen Rechnung kann man zeigen, dass

$$\left| (\partial_{k_i} \partial_{k_j} e^{-ik_3 L^\epsilon}) \widehat{\psi} \left(\frac{\mathbf{k}_+ - \mathbf{k}_0}{\epsilon} \right) \right| \leq \frac{c}{\epsilon^{2l-2}} P_{\mathbf{k}_+}^j, \quad j \text{ beliebig,} \quad (6.75)$$

und analoge Abschätzungen auch für die Terme gelten, die Ableitungen von $\widehat{\psi} \left(\frac{\mathbf{k}_+ - \mathbf{k}_0}{\epsilon} \right)$ enthalten. Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{k}_+ \in \text{supp } f_1} \left| \frac{f_1(\mathbf{k}_+)}{k_3} \right| &\leq c, \quad \sup_{\mathbf{k}_+ \in \text{supp } f_1} \left| \partial_{k_i} \frac{f_1(\mathbf{k}_+)}{k_3} \right| \leq c, \\ \sup_{\mathbf{k}_+ \in \text{supp } f_1} \left| \partial_{k_i} \partial_{k_j} \frac{f_1(\mathbf{k}_+)}{k_3} \right| &\leq c, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (6.76)$$

Kombiniert man (6.69), (6.72)-(6.76) und verwendet man, dass $2l - 2 > 2$ (da $l > 2$), erhält man für alle $\mathbf{k}' \in \mathbb{R}^3$ und jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|\partial_{k_i} \partial_{k_j} g(k_1, k_2, \mathbf{k}', \epsilon)| \leq \frac{c}{\epsilon^{2l-2}} P_{\mathbf{k}_+}^n, \quad (6.77)$$

für alle (k_1, k_2) , so dass $\mathbf{k}_+ \in \text{supp } f_1$.

Führt man die ursprüngliche Integrationsvariable $\boldsymbol{\omega}$ ein, ist M nun gegeben durch

$$\begin{aligned} |M| &\leq \frac{c}{y_p^2} \epsilon^{2d-2l+\frac{1}{2}} \int_{k=k'} \chi_{\{f_1>0\}} P_{\mathbf{k}}^n k' k_3 d\Omega(\mathbf{k}) \\ &\leq \frac{c}{y_p^2} \epsilon^{2d-2l+\frac{1}{2}} \chi_{\left(\frac{k_0}{2}, \frac{3}{2}k_0\right)}(k') \int_{k=k', |\mathbf{k}-\mathbf{k}_0| < \frac{k_0}{2}} P_{\mathbf{k}}^n d\Omega(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (6.78)$$

Wir wählen $n = 4$ in (6.78) und teilen $P_{\mathbf{k}}^4$ in

$$P_{\mathbf{k}}^4 = P_{\mathbf{k}}^1 P_{\mathbf{k}}^3 \leq P_{\mathbf{k}}^1 P_{\mathbf{k}}^3. \quad (6.79)$$

Damit erhält man

$$|M| \leq \frac{c}{y_p^2} \epsilon^{2d+\frac{1}{2}-2l} \chi_{\left(\frac{k_0}{2}, \frac{3}{2}k_0\right)}(k') P_{k'}^1 \int_{k=k', |\mathbf{k}-\mathbf{k}_0| < \frac{k_0}{2}} P_{\mathbf{k}}^3 d\Omega(\mathbf{k}). \quad (6.80)$$

Außerdem gilt

$$\int_{k=k', |\mathbf{k}-\mathbf{k}_0| < \frac{k_0}{2}} P_{\mathbf{k}}^3 d\Omega(\mathbf{k}) \leq c \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{k_p}{\epsilon}\right)^3} dk_1 dk_2 \leq c\epsilon^2. \quad (6.81)$$

Also ist

$$|M| \leq \frac{c}{y_p^2} \epsilon^{2d+\frac{5}{2}-2l} \chi_{\left(\frac{k_0}{2}, \frac{3}{2}k_0\right)}(k') P_{k'}^1, \quad (6.82)$$

und (6.65) folgt. Das vervollständigt den Beweis von Lemma 5. ■

Anhang

A.1 Zum Beweis von Proposition 2

Proposition 2 ist—den Ideen von Ikebe in [37] folgend—in [58], Theorem 3.1, bewiesen worden. Der Beweis von (iii) enthielt aber einen Fehler. Es wurde die Notwendigkeit des Faktors $\kappa = \frac{k}{1+k}$ übersehen, welcher die höheren Ableitungen der generalisierten Eigenfunktionen in den “richtigen” Banachraum bringt. Die Notwendigkeit dieses Faktors entsteht durch die Ableitungen von k , dem Betrag von \mathbf{k} , welcher in der Greenschen Funktion der Lippmann-Schwinger-Gleichung (1.20) auftritt. Die Ableitungen von k nach den Koordinaten divergieren für kleine k , falls die Ordnung der Ableitung größer als eins ist. Der Faktor κ hebt diese Singularität auf. Beachtet man dies, kann man den Beweis von [58] wörtlich übertragen. Die Aussage (iv) folgt ebenso durch den Beweis in [58], indem man Ableitungen nach den einzelnen Koordinaten durch die Ableitung nach dem Betrag k ersetzt. In diesem Fall besteht keine Notwendigkeit für einen Faktor κ .

A.2 Beweis von Lemma 1

Sei $\psi \in \mathcal{G}$. Dann existiert ein $\chi \in \mathcal{G}^0$ und ein $t \in \mathbb{R}$, so dass

$$\psi = e^{-iHt}\chi.$$

Verwendet man die “intertwining property” (1.15) erhalten wir

$$\psi_{\text{out}} = \Omega_+^{-1}\psi = \Omega_+^{-1}e^{-iHt}\chi = e^{-iH_0t}\Omega_+^{-1}\chi = e^{-iH_0t}\chi_{\text{out}}. \quad (\text{A.1})$$

Da \mathcal{G}^+ invariant unter Zeittranslationen ist, reicht es aus zu zeigen, dass $\widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k})$ in \mathcal{G}^+ ist. Es ist $\langle x \rangle^2 H^n \chi(\mathbf{x}) \in L_2(\mathbb{R}^3)$, $0 \leq n \leq 8$, und $\langle x \rangle^4 H^n \chi(\mathbf{x}) \in L_2(\mathbb{R}^3)$, $0 \leq n \leq 3$. Daher gilt auch

$$\begin{aligned} H^n \chi(\mathbf{x}) &\in L_1(\mathbb{R}^3) \cap L_2(\mathbb{R}^3), \quad 0 \leq n \leq 8, \\ \langle x \rangle^j H^n \chi(\mathbf{x}) &\in L_1(\mathbb{R}^3) \cap L_2(\mathbb{R}^3), \quad 0 \leq n \leq 3, \quad j = \{1, 2\}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Mit Proposition 1, (ii) und (iii), gilt für $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$

$$\mathcal{F}_+\Omega_+f = \mathcal{F}f, \quad (\text{A.3})$$

und daher

$$\widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}_+\chi(k) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \varphi_+^*(\mathbf{x}, \mathbf{k})\chi(\mathbf{x})d^3x. \quad (\text{A.4})$$

Mit (1.15) erhält man

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{2}\widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) &= \widehat{H_0\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}(H_0\Omega_+^{-1}\chi)(\mathbf{k}) = \mathcal{F}(\Omega_+^{-1}H\chi)(\mathbf{k}) = \mathcal{F}_+(H\chi)(\mathbf{k}) \\ &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \varphi_+^*(\mathbf{x}, \mathbf{k})(H\chi)(\mathbf{x})d^3x. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Indem man H_0^n auf $\widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k})$ ($0 \leq n \leq 8$) anwendet, erhält man in ähnlicher Weise, dass

$$\frac{k^{2n}}{2^n}\widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \varphi_+^*(\mathbf{x}, \mathbf{k})(H^n\chi)(\mathbf{x})d^3x. \quad (\text{A.6})$$

Da die generalisierten Eigenfunktionen beschränkt sind (Proposition 2, (ii)), und $H^n\chi \in L_1(\mathbb{R}^3)$, $0 \leq n \leq 8$, gilt

$$|\widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| \leq c(1+k)^{-16} \leq c(1+k)^{-15}. \quad (\text{A.7})$$

Wegen Proposition 2, (iii), und (A.2) können wir (A.4) nach k_i differenzieren und erhalten

$$|\partial_{k_i}\widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| = \left| (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int (\partial_{k_i}\varphi_+^*(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\chi(\mathbf{x})d^3x \right| \leq c, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \quad (\text{A.8})$$

Differenziert man (A.6) mit $n = 3$ nach k_i , findet man

$$k^6\partial_{k_i}\widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) = 8(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int (\partial_{k_i}\varphi_+^*(\mathbf{x}, \mathbf{k})) (H^3\chi)(\mathbf{x})d^3x - 6k^5\widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k})\frac{k_i}{k}. \quad (\text{A.9})$$

Wieder ist die rechte Seite wegen Proposition 2, (iii), (A.2) und (A.7) beschränkt. Also bekommt man mit (A.8)

$$|\partial_{k_i}\widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| \leq c(1+k)^{-6}, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \quad (\text{A.10})$$

Mit Proposition 2, (iii), und (A.4) können wir das Produkt aus κ und einer zweiten Ableitung von $\widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k})$ kontrollieren:

$$|\kappa\partial_{k_j}\partial_{k_i}\widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| = \left| (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int (\kappa\partial_{k_j}\partial_{k_i}\varphi_+^*(\mathbf{x}, \mathbf{k}))\chi(\mathbf{x})d^3x \right| \leq c, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \quad (\text{A.11})$$

Für die letzte Ungleichung haben wir (A.2) mit $j = 2$ und $n = 0$ verwendet. Mit (A.9) erhält man ebenso

$$\begin{aligned} k^6 \kappa \partial_{k_j} \partial_{k_i} \widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) &= 8(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int (\kappa \partial_{k_j} \partial_{k_i} \varphi_+(\mathbf{x}, \mathbf{k})) (H^3 \chi)(\mathbf{x}) d^3 x \\ &\quad - 30k^4 \frac{k_j}{k} \frac{k_i}{k} \kappa \widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) - 6k^5 \frac{k_i}{k} \kappa \partial_{k_j} \widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \\ &\quad - 6k^5 \widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \kappa \frac{k \delta_{ij} k - k_i k_j}{k^3} - 6k^5 \frac{k_j}{k} \kappa \partial_{k_i} \widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

wobei die rechte Seite wegen Proposition 2, (iii), (A.2), (A.7) und (A.10) beschränkt ist. Daher folgt mit (A.11)

$$|\kappa \partial_{\mathbf{k}}^\alpha \widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| \leq c(1+k)^{-6} \leq c(1+k)^{-5}, \quad |\alpha| = 2, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \quad (\text{A.13})$$

Gleichung (A.10) impliziert auch

$$|\partial_k \widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| \leq c(1+k)^{-6}, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \quad (\text{A.14})$$

Ebenso erhält man, wenn man (A.4) zweimal nach k differenziert, dass

$$|\partial_k^2 \widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| \leq c, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \quad (\text{A.15})$$

Differenziert man zweimal (A.6) für $n = 2$ nach k , ergibt sich

$$|\partial_k^2 \widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| \leq c(1+k)^{-4} \leq c(1+k)^{-3}, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \quad (\text{A.16})$$

Dabei wurde Proposition 2, (iv), (A.2), (A.7), (A.14) und (A.15) verwendet.

Mit (A.7), (A.10), (A.13) und (A.16) folgt, dass $\widehat{\chi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \in \mathcal{G}^+$ ist.

A.3 Beweis von Lemma 2

Auf den ersten Blick könnte man meinen, dass Lemma 2 ein Standardresultat über stationäre Phasen wie z.B. Theorem 7.7.5 in [33] ist. In unserem Fall aber sind die Voraussetzungen an $\chi(\mathbf{k})$ sehr schwach. Man beachte, dass diese schwachen Voraussetzungen eine Notwendigkeit sind, da wir das Lemma mit $\chi(\mathbf{k}) = \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})$ verwenden. $\widehat{\psi}_{\text{out}}$ hat aber gemäß Lemma 1 und Proposition 2 diese schwachen Eigenschaften. Besonders die zweite Ableitung von $\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})$ nach den Koordinaten ist unbeschränkt für kleine k . Zusätzlich ist unsere Situation komplizierter als das der üblichen Ergebnisse über stationäre Phasen, da der stationäre Punkt bei $\frac{\mathbf{x}}{t}$ liegt, und wir ein uniformes Resultat in \mathbf{x} und $t > 0$ benötigen.

Unser Beweis setzt $\mathbf{x} \neq 0$ voraus. Der Fall $\mathbf{x} = 0$ muss separat behandelt werden. Da er aber wesentlich leichter als der allgemeine Fall ist, werden wir ihn nicht explizit

ausführen, sondern bemerken nur, dass der Fall $\mathbf{x} = 0$ mit zwei partielle Integrationen nach k und den Methoden, die wir für den Bereich A_3 (Definition weiter unten) entwickeln werden, behandelt werden kann.

Wir skizzieren zunächst den Beweis. Das Integral in (3.21) hat einen stationären Punkt bei $\mathbf{k}_s = \frac{\mathbf{x}}{t}$. Wir ziehen den führenden Term aus dem Integral, indem wir schreiben:

$$\begin{aligned} \int e^{-i\frac{k^2}{2}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\chi(\mathbf{k})d^3k &= \int e^{-i\frac{k^2}{2}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}(\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s) + \chi(\mathbf{k}_s))d^3k \\ &= \int e^{-i\frac{k^2}{2}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\chi(\mathbf{k}_s)d^3k + \int e^{-i\frac{k^2}{2}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}(\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s))d^3k. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Der erste Term der letzten Zeile von (A.17) gibt bereits das richtige Resultat, d.h.

$$\int e^{-i\frac{k^2}{2}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\chi(\mathbf{k}_s)d^3k = \left(\frac{2\pi}{it}\right)^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{\mathbf{x}^2}{2t}}\chi(\mathbf{k}_s). \quad (\text{A.18})$$

Das Lemma folgt also, wenn man zeigen kann, dass der zweite Term von der Ordnung t^{-2} ist, d.h. kleiner oder gleich $\frac{C}{t^2}$, mit einer Konstante uniform in $\mathbf{x} \neq 0$ und $t > 0$, oder—was gleichbedeutend ist—uniform in $\mathbf{k}_s \neq 0$. Dafür werden wir zweimal partiell integrieren. Verschiebt man den Koordinatenursprung durch die Substitution $\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_s$ zu \mathbf{k}_s erhält man

$$\left| \int e^{-i\frac{k^2}{2}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}(\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s))d^3k \right| \sim \frac{1}{t^2} \int \left| \frac{\chi''(\tilde{\mathbf{k}} + \mathbf{k}_s)}{\tilde{k}^2} \right| d^3\tilde{k}, \quad (\text{A.19})$$

wobei χ'' die zweite Ableitung nach den Koordinaten bezeichnet. Diese Ableitung ist singularär bei $\tilde{\mathbf{k}} + \mathbf{k}_s = \mathbf{k} = 0$ (vgl. Proposition 2, (iii)): Mit $|\chi''| \leq \frac{C}{k}$ sieht man, dass (A.19) beschränkt ist durch

$$\frac{1}{t^2} \int \left| \frac{C}{\tilde{k}^2 k} \right| d^3\tilde{k}. \quad (\text{A.20})$$

Die zweite Ableitung führt also zu einem zusätzlichen Faktor $\frac{1}{k}$, weshalb (A.20) zunächst nicht integrierbar ist. Wenn man sich aber zunächst auf einen Ball um \mathbf{k}_s mit Radius $\frac{k_s}{2}$ beschränkt, sind $k > \frac{k_s}{2}$ und das Integral für diesen Bereich uniform beschränkt. Geht man zu der ursprünglichen Variable \mathbf{k} zurück, erhält man ebenso eine uniforme Konstante, wenn man über eine Kugel um $\mathbf{k} = 0$ mit Radius $\sim k_s$ integriert, die nicht die Kugel um den stationären Punkt enthält. Wir werden eine Kugel um $\mathbf{k} = 0$ mit Radius $2k_s$ wählen. Es bleibt die Region $k > 2k_s$. Die größte Schwierigkeit ist, dass man (A.20) im Bereich $k = 2k_s$ integriert, was zu einer $1/k_s$ -Singularität führt. Da $k_s = \frac{x}{t}$ wird das wichtig für die uns interessierenden großen Zeiten. Um diese Problem zu lösen, werden wir in diesem Bereich nicht zwei partielle Integrationen nach den Koordinaten, sondern nach k durchführen und verwenden, dass $|\partial_k^2 \chi(\mathbf{k})| \leq C(1+k)^{-2}$. Damit umgeht man das singularäre Verhalten von der zweiten Ableitung nach den Koordinaten.

Wir werden also folgendermaßen vorgehen: Wir teilen den Integrationsbereich in die drei Teile

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 : \tilde{k} = |\mathbf{k} - \mathbf{k}_s| < \frac{k_s}{2}\}, \\ A_2 &:= \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 : k < 2k_s \wedge |\mathbf{k} - \mathbf{k}_s| \geq \frac{k_s}{2}\}, \\ A_3 &:= \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 : k \geq \frac{3}{2}k_s\}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

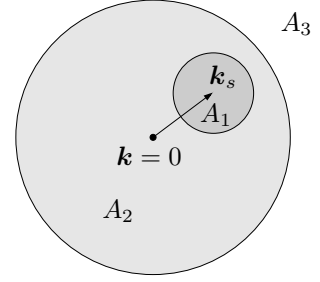


Abbildung A.1: Skizze der drei Integrationsgebiete im \mathbf{k} -Raum.

Die Gebiete A_2 und A_3 haben einen kleinen Überlapp, der durch die Verwendung von passenden “Mollifiern” entsteht (Definition weiter unten). In A_1 und A_2 werden wir zwei partielle Integrationen nach \mathbf{k} und in A_3 zwei partielle Integrationen nach k durchführen.

Wir folgen nun den einzelnen Schritten. Wie in (A.17) ziehen wir den führenden Term aus dem Integral (3.21). Der führende Term kann einfach berechnet werden und ist durch (A.18) gegeben. Wir werden nun den Fehler zwischen der linken Seite von (A.17) und dem führenden Term (A.18) abschätzen. Der Fehler ist

$$\int e^{-i\frac{k^2}{2}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s)) d^3k. \quad (\text{A.22})$$

Wie bereits vorweggenommen, teilen wir das Integrationsgebiet mit Hilfe eines “Mollifiers” auf: Zunächst in $A_1 \cup A_2$ und A_3 mit Hilfe von

$$\rho(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1, & \text{für } k < \frac{3}{2}k_s, \\ e \exp\left(-\frac{1}{1 - \frac{(k - \frac{3}{2}k_s)^2}{(\frac{k_s}{2})^2}}\right), & \text{für } \frac{3}{2}k_s \leq k < 2k_s, \\ 0, & \text{für } k \geq 2k_s. \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

Der “Mollifier” hat die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \text{supp } \rho &= A_1 \cup A_2, \\ |\rho(\mathbf{k})| &\leq 1, \quad |1 - \rho(\mathbf{k})| \leq 1, \\ \text{es gibt ein } M > 0, & \text{ so dass: } |\partial_k \rho(\mathbf{k})|, |\partial_{\mathbf{k}}^\alpha \rho(\mathbf{k})| \leq \frac{M}{k_s}, \quad |\alpha| = 1, \\ \text{und } |\partial_k^2 \rho(\mathbf{k})|, & |\partial_{\mathbf{k}}^\alpha \rho(\mathbf{k})| \leq \frac{M}{k_s^2}, \quad |\alpha| = 2. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Mit ρ erhält man für (A.22)

$$\begin{aligned} \int e^{-i\frac{k^2}{2}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s)) d^3k &= \int e^{-i\frac{k^2}{2}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \rho(\mathbf{k}) (\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s)) d^3k \\ &\quad + \int e^{-i\frac{k^2}{2}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (1 - \rho(\mathbf{k})) (\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s)) d^3k \\ &=: I_{12} + I_3. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Wir starten mit I_{12} . Dafür definieren wir

$$f(\mathbf{k}) := \rho(\mathbf{k}) (\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s)), \quad \tilde{\mathbf{k}} := \mathbf{k} - \mathbf{k}_s, \quad (\text{A.26})$$

und erhalten mit zwei partiellen Integrationen nach \mathbf{k}

$$\begin{aligned} |I_{12}| &= \left| \int e^{-it\left(\frac{k^2}{2} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_s\right)} f(\mathbf{k}) d^3k \right| \\ &= \frac{1}{t} \left| \int \left(\nabla_{\mathbf{k}} e^{-i\frac{k^2}{2}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) \cdot \frac{\tilde{\mathbf{k}}}{\tilde{k}^2} f(\mathbf{k}) d^3k \right| \\ &= \frac{1}{t} \left| \int e^{-i\frac{k^2}{2}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left(\frac{\tilde{\mathbf{k}} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}) - f(\mathbf{k})}{\tilde{k}^2} \right) d^3k \right| \\ &= \frac{1}{t^2} \left| \int \left(\nabla_{\mathbf{k}} e^{-i\frac{k^2}{2}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) \cdot \frac{\tilde{\mathbf{k}}}{\tilde{k}^2} \left(\frac{\tilde{\mathbf{k}} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}) - f(\mathbf{k})}{\tilde{k}^2} \right) d^3k \right| \\ &= \frac{1}{t^2} \left| \int e^{-i\frac{k^2}{2}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left(\frac{f(\mathbf{k}) - \tilde{\mathbf{k}} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k})}{\tilde{k}^4} + \frac{1}{\tilde{k}^4} \sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|=2} \tilde{\mathbf{k}}^{\alpha_1} \tilde{\mathbf{k}}^{\alpha_2} \partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_1} \partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_2} f(\mathbf{k}) \right) d^3k \right| \\ &\leq \frac{1}{t^2} \int \left| \frac{f(\mathbf{k}) - \tilde{\mathbf{k}} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k})}{\tilde{k}^4} \right| d^3k + \frac{1}{t^2} \int \left| \frac{1}{\tilde{k}^4} \sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|=2} \tilde{\mathbf{k}}^{\alpha_1} \tilde{\mathbf{k}}^{\alpha_2} \partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_1} \partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_2} f(\mathbf{k}) \right| d^3k. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Wegen der Definition von ρ , ist der Integrationsbereich in (A.27) gleich $A_1 \cup A_2$ (vgl. (A.21) und (A.23)). Wir teilen nun weiter in A_1 und A_2 auf. Also kann man I_{12} folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} |I_{12}| &\leq \frac{1}{t^2} \int_{A_1} \left| \frac{f(\mathbf{k}) - \tilde{\mathbf{k}} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k})}{\tilde{k}^4} \right| d^3k + \frac{1}{t^2} \int_{A_1} \left| \frac{1}{\tilde{k}^4} \sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|=2} \tilde{\mathbf{k}}^{\alpha_1} \tilde{\mathbf{k}}^{\alpha_2} \partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_1} \partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_2} f(\mathbf{k}) \right| d^3k \\ &\quad + \frac{1}{t^2} \int_{A_2} \left| \frac{f(\mathbf{k}) - \tilde{\mathbf{k}} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k})}{\tilde{k}^4} \right| d^3k + \frac{1}{t^2} \int_{A_2} \left| \frac{1}{\tilde{k}^4} \sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|=2} \tilde{\mathbf{k}}^{\alpha_1} \tilde{\mathbf{k}}^{\alpha_2} \partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_1} \partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_2} f(\mathbf{k}) \right| d^3k \\ &=: I_1^1 + I_1^2 + I_2^1 + I_2^2 := I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Wir kommen zunächst zu I_1 . Mit (A.21) und (A.23) sieht man, dass für $\mathbf{k} \in A_1$ $\rho(\mathbf{k}) \equiv 1$ ist und daher erhalten wir für (A.26) $f(\mathbf{k}) = \chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s)$. Benützt man Taylors Formel und substituiert anschließend \mathbf{k} durch $\tilde{\mathbf{k}}$ (vgl. (A.26)) erhält man für den ersten Term I_1^1 von I_1

$$\begin{aligned}
I_1^1 &= \frac{1}{t^2} \int_{A_1} \left| \frac{f(\mathbf{k}) - \tilde{\mathbf{k}} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k})}{\tilde{k}^4} \right| d^3 k \\
&= \frac{1}{t^2} \int_{A_1} \left| \frac{\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s) - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_s) \cdot \nabla_{\mathbf{k}} \chi(\mathbf{k})}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_s)^4} \right| d^3 k \\
&= \frac{1}{t^2} \int_{A_1} \left| \frac{\sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|=2} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_s)^{\alpha_1} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_s)^{\alpha_2} \partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_1} \partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_2} \chi(\boldsymbol{\xi})}{2(\mathbf{k} - \mathbf{k}_s)^4} \right| d^3 k \\
&= \frac{1}{t^2} \int_{A_1} \left| \frac{\sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|=2} \tilde{\mathbf{k}}^{\alpha_1} \tilde{\mathbf{k}}^{\alpha_2} \partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_1} \partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_2} \chi(\boldsymbol{\xi})}{2\tilde{k}^4} \right| d^3 \tilde{k}, \tag{A.29}
\end{aligned}$$

wobei $\boldsymbol{\xi}$ ein Vektor zwischen \mathbf{k}_s und \mathbf{k} ist, d.h. $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{k}_s + \lambda(\mathbf{k} - \mathbf{k}_s)$, $\lambda \in [0, 1]$. Also ist $\xi > \frac{k_s}{2}$. Verwendet man Definition 4, d.h. $\partial_{k_i} \partial_{k_j} \chi(\mathbf{k}) \leq Ck^{-1}$, erhält man für (A.29)

$$I_1^1 \leq \frac{9C}{2t^2} \int_{A_1} \frac{1}{\tilde{k}^2 \xi} d^3 \tilde{k} < \frac{36\pi C}{k_s t^2} \int_{A_1} d\tilde{k} = \frac{18\pi C}{t^2}. \tag{A.30}$$

Den zweiten Term I_1^2 von I_1 kann man in ähnlicher Weise abschätzen: Anstatt $\boldsymbol{\xi}$ hat man $\mathbf{k} = \tilde{\mathbf{k}} + \mathbf{k}_s$ mit $k > \frac{k_s}{2}$. Also ist I_1 von der Ordnung t^{-2} uniform in \mathbf{k}_s .

Auch die Abschätzung von I_2 ist ähnlich, nur muss man beachten, dass $\rho(\mathbf{k}) \neq 1$ auf A_2 ist. Beachtet man zusätzlich, dass $d^3 k$ den Volumenfaktor k^2 hat, und A_2 von der Größe k_s ist, reicht es aus zu zeigen, dass die beiden Integranden der Terme von I_2 beschränkt durch $\frac{c}{k_s^3}$ bzw. $\frac{c}{k_s^2 k}$ sind, mit einer Konstante $c > 0$ uniform in \mathbf{k}_s . Dann nämlich ist $I_2 \leq \frac{c}{t^2}$. Der Integrand des ersten Terms von I_2 ist

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(\mathbf{k}) - \tilde{\mathbf{k}} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k})}{\tilde{k}^4} \right| &\leq \left| \frac{\rho(\mathbf{k})(\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s))}{\tilde{k}^4} \right| + \left| \frac{|\nabla_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k})|}{\tilde{k}^3} \right| \\
&\leq \left| \frac{\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s)}{\tilde{k}^4} \right| + \sum_{i=1}^3 \left| \frac{|\partial_{k_i} \chi(\mathbf{k})|}{\tilde{k}^3} \right| \\
&\quad + \sum_{i=1}^3 \left| \frac{|\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s)| \partial_{k_i} \rho(\mathbf{k})}{\tilde{k}^3} \right|. \tag{A.31}
\end{aligned}$$

Taylor's Formel liefert ein $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{k}_s + \lambda(\mathbf{k} - \mathbf{k}_s)$, $\lambda \in [0, 1]$, mit

$$|\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s)| = |\nabla_{\mathbf{k}}\chi(\boldsymbol{\xi})| |\mathbf{k} - \mathbf{k}_s|.$$

Da $\chi(\mathbf{k}) \in \mathcal{K}^+$, folgt

$$|\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s)| = |\nabla_{\mathbf{k}}\chi(\boldsymbol{\xi})| |\mathbf{k} - \mathbf{k}_s| \leq Ck + Ck_s. \quad (\text{A.32})$$

Mit (A.32), (A.24), $\mathbf{k} \in A_2$ (d.h. $k < 2k_s$, $\tilde{k} \geq \frac{k_s}{2}$) und mit $|\partial_{k_i}\chi(\mathbf{k})| \leq C$, $i = \{1, 2, 3\}$, erhalten wir

$$\left| \frac{f(\mathbf{k}) - \tilde{\mathbf{k}} \cdot \nabla_{\mathbf{k}}f(\mathbf{k})}{\tilde{k}^4} \right| \leq \frac{32C}{k_s^3} + \frac{16C}{k_s^3} + \frac{24C}{k_s^3} + \frac{48CM}{k_s^3} + \frac{24CM}{k_s^3}. \quad (\text{A.33})$$

Damit ist, wie gewünscht $I_2^1 \leq \frac{c}{t^2}$. Ähnlich kann man I_2^2 abschätzen. Beispielhaft nehmen wir ein Summand des Integranden von I_2^2 heraus ($|\alpha_1| + |\alpha_2| = 2$):

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\tilde{k}^4} \tilde{\mathbf{k}}^{\alpha_1} \tilde{\mathbf{k}}^{\alpha_2} \partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_1} \partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_2} f(\mathbf{k}) \right| &\leq \left| \frac{1}{\tilde{k}^2} \partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_1} \partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_2} f(\mathbf{k}) \right| \\ &\leq \frac{4|\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s)| |\partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_1} \partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_2} \rho(\mathbf{k})|}{k_s^2} + \frac{4|\partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_1} \rho(\mathbf{k})| |\partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_2} \chi(\mathbf{k})|}{k_s^2} \\ &\quad + \frac{4|\partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_2} \rho(\mathbf{k})| |\partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_1} \chi(\mathbf{k})|}{k_s^2} + \frac{4|\partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_1} \partial_{\mathbf{k}}^{\alpha_2} \chi(\mathbf{k})|}{k_s^2} \\ &\leq \frac{8CM}{k_s^3} + \frac{4CM}{k_s^3} + \frac{8CM}{k_s^3} + \frac{4C}{k_s^2 k}. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Dieser ist also von der Form $\leq \frac{c}{k_s^3} + \frac{c}{k_s^2 k}$. Integration von (A.34) über A_2 liefert wie bei I_2^1 , dass $I_2^2 \leq \frac{c}{t^2}$ und damit ist

$$I_2 \leq \frac{c}{t^2},$$

uniform in \mathbf{k}_s .

Nun kommen wir zum letzten Term I_3 (A.25). Wir führen den Konvergenzfaktor

$$\rho_\epsilon(\mathbf{k}) = e^{-\epsilon k^2} \quad (\text{A.35})$$

mit $0 < \epsilon < 1$ ein. Durch Ausrechnen sieht man, dass I_3 in (A.25) nun gegeben ist durch

$$\begin{aligned} I_3 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int e^{-i\frac{k^2}{2}t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} (1 - \rho(\mathbf{k})) \rho_\epsilon(\mathbf{k}) (\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s)) d^3k \\ &=: \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int e^{-it\left(\frac{k^2}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_s\right)} f_\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k}_s) k^2 dk d\Omega. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Mit zwei partiellen Integrationen nach k erhält man

$$\begin{aligned}
|I_3| &= \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int e^{-it\left(\frac{k^2}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_s\right)} \partial_k \left(\frac{k^2 f_\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k}_s)}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right) dk d\Omega \right| \\
&= \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \int e^{-it\left(\frac{k^2}{2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_s\right)} \partial_k \left(\frac{1}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \partial_k \left(\frac{k^2 f_\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k}_s)}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right) \right) dk d\Omega \right| \\
&\leq \frac{1}{t^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \left| \partial_k \left(\frac{1}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \partial_k \left(\frac{k^2 f_\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k}_s)}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right) \right) \right| dk d\Omega \\
&=: \frac{1}{t^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{k \geq \frac{3}{2}k_s} |D_\epsilon| dk d\Omega \\
&\leq \frac{1}{t^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\frac{3}{2}k_s \leq k < 2k_s} |D_\epsilon| dk d\Omega + \frac{1}{t^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{2k_s \leq k} |D_\epsilon| dk d\Omega \\
&=: I_3^1 + I_3^2. \tag{A.37}
\end{aligned}$$

Wir starten mit der Abschätzung von I_3^1 . Für ein festes \mathbf{k}_s ist D_ϵ auf dem Integrationsbereich uniform in \mathbf{k} und $0 < \epsilon < 1$ beschränkt. Man kann deshalb den Limes $\epsilon \rightarrow 0$ unter das Integral ziehen und erhält

$$I_3^1 = \frac{1}{t^2} \int_{\frac{3}{2}k_s \leq k < 2k_s} |D| dk d\Omega, \tag{A.38}$$

mit

$$D := \partial_k \left(\frac{1}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \partial_k \left(\frac{k^2 f(\mathbf{k}, \mathbf{k}_s)}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right) \right), \tag{A.39}$$

und (wie schon weiter oben)

$$f(\mathbf{k}) = (1 - \rho(\mathbf{k})) (\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s)). \tag{A.40}$$

Man findet dann die folgende Abschätzung ($(\cdot)'$ bezeichnet die Ableitung nach k):

$$\begin{aligned}
|D| &\leq \left| \frac{k^2}{(k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s)^2} \right| \left| ((1 - \rho(\mathbf{k}))(\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s)))'' \right| \\
&+ \left| \left(\frac{k^2}{(k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s)^2} \right)' + \frac{1}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \left(\frac{k^2}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)' \right| \left| ((1 - \rho(\mathbf{k}))(\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s)))' \right| \\
&+ \left| \left(\frac{k^2}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)'' \frac{1}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} + \left(\frac{1}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)' \left(\frac{k^2}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)' \right| \\
&\quad \times |(1 - \rho(\mathbf{k}))(\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s))|. \tag{A.41}
\end{aligned}$$

Wegen der Größe des Integrationsgebiet in (A.38), reicht es aus zu zeigen, dass $|D|$ durch $\frac{c}{k_s}$ bzw. $\frac{c}{1+k_s}$ beschränkt ist, denn dann ist I_3^1 von der Ordnung $\mathcal{O}\left(\frac{1}{l^2}\right)$ uniform in \mathbf{k}_s . Dafür benötigen wir (später auch manchmal in einer leicht abgewandelten Form)

$$\frac{k^2}{(k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s)^2} \leq \frac{k^2}{(k - k_s)^2} = \frac{(k - k_s + k_s)^2}{(k - k_s)^2} \leq 9, \text{ für } k \geq \frac{3}{2}k_s. \quad (\text{A.42})$$

Mit (A.42) erhält man anstatt (A.41)

$$\begin{aligned} |D| \leq & 9 \left| ((1 - \rho(\mathbf{k}))(\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s)))'' \right| + \frac{39}{k - k_s} \left| ((1 - \rho(\mathbf{k}))(\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s)))' \right| \\ & + \frac{47}{(k - k_s)^2} |(1 - \rho(\mathbf{k}))(\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s))|. \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Da $\chi(\mathbf{k}) \in \mathcal{K}^+$ ist, gilt (man beachte bei der zweiten Ungleichung, dass $k > k_s$)

$$\begin{aligned} |(\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s))'| & \leq C\langle k \rangle^{-1} \leq C, \\ |(\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s))''| & \leq C\langle k \rangle^{-2} \leq C\langle k \rangle^{-1} \leq C(1 + k_s)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Dann folgt mit (A.24), (A.32) und (A.44)

$$|D| \leq \frac{818CM}{k_s} + \frac{9C}{1 + k_s}. \quad (\text{A.45})$$

Also ist I_3^1 von der Ordnung t^{-2} uniform in \mathbf{k}_s .

Wir kommen nun zu I_3^2 , d.h. wenn $k \geq 2k_s$. Auf diesem Integrationsgebiet ist zwar $1 - \rho = 1$, man muss aber noch den Faktor ρ_ϵ beachten. D_ϵ ist dann abgeschätzt durch

$$\begin{aligned} |D_\epsilon| \leq & \left| \frac{k^2}{(k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s)^2} \right| |(\rho_\epsilon(\mathbf{k})(\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s)))''| \\ & + \left| \left(\frac{k^2}{(k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s)^2} \right)' + \frac{1}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \left(\frac{k^2}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)' \right| |(\rho_\epsilon(\mathbf{k})(\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s)))'| \\ & + \left| \left(\frac{k^2}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)'' \frac{1}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} + \left(\frac{1}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)' \left(\frac{k^2}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)' \right| \\ & \times |\rho_\epsilon(\mathbf{k})(\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s))|. \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Verwendet man die Eigenschaften von ρ_ϵ und χ ($|\chi'(\mathbf{k})| \leq C\langle k \rangle^{-1}$ und $|\chi''(\mathbf{k})| \leq C\langle k \rangle^{-2}$), erhält man mit (A.42) (und analogen Abschätzungen) folgende—in $0 < \epsilon < 1$ uniforme—Ungleichung:

$$|D_\epsilon| \leq \frac{c}{\langle k \rangle^2} + \frac{c}{(k - k_s)\langle k \rangle} + \frac{c}{(k - k_s)^2}. \quad (\text{A.47})$$

Wir betrachten zunächst den Fall $2k_s \geq 1$. Dann kann man $|D_\epsilon|$ aus (A.47) über das Gebiet $k \geq 2k_s$ integrieren, wobei der Wert des Integrals eine obere Schranke uniform in

$0 < \epsilon < 1$ und uniform in $2k_s \geq 1$ hat. Also ist I_3^2 von der Ordnung t^{-2} uniform in \mathbf{k}_s , mit der Einschränkung $2k_s \geq 1$.

Nun sei $2k_s < 1$. Wir teilen das Integrationsgebiet $k \geq 2k_s$ von I_3^2 in $2k_s \leq k < 1$ und $k \geq 1$ auf und erhalten

$$I_3^2 \leq \frac{1}{t^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{2k_s \leq k < 1} |D_\epsilon| dk d\Omega + \frac{1}{t^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{1 \leq k} |D_\epsilon| dk d\Omega. \quad (\text{A.48})$$

Der zweite Term (A.48) wird mit (A.47) zu

$$\frac{1}{t^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{1 \leq k} |D_\epsilon| dk d\Omega \leq \frac{c}{t^2}, \quad (\text{A.49})$$

uniform in $2k_s < 1$. Also ist auch dieser Term von der Ordnung t^{-2} uniform in \mathbf{k}_s .

Damit muss man nur noch das Integral

$$\frac{1}{t^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{2k_s \leq k < 1} |D_\epsilon| dk d\Omega \quad (\text{A.50})$$

abschätzen. Für ein festes \mathbf{k}_s ist $|D_\epsilon|$ uniform beschränkt für $2k_s \leq k < 1$ und $0 < \epsilon < 1$. Man kann also wieder (wie bei I_3^1) den Limes und die Integration vertauschen und erhält als letzten abzuschätzenden Term

$$\frac{1}{t^2} \int_{2k_s \leq k < 1} |D| dk d\Omega. \quad (\text{A.51})$$

Mit (A.39), $1 - \rho \equiv 1$, für $k \geq 2k_s$, und (A.42) ist der Integrand beschränkt durch

$$\begin{aligned} |D| &\leq \left| \frac{k^2}{(k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s)^2} \right| |\chi''(\mathbf{k})| + \left| \left(\frac{k^2}{(k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s)^2} \right)' \right| |\chi'(\mathbf{k})| \\ &\quad + \left| \left(\left(\frac{k^2}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)' \frac{1}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} (\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s)) \right)' \right| \\ &\leq 4C + \left| \left(\frac{k^2}{(k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s)^2} \right)' \right| C + \left| \left(\left(\frac{k^2}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)' \frac{1}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} (\chi(\mathbf{k}) - \chi(\mathbf{k}_s)) \right)' \right| \\ &=: 4C + |D_1| + |D_2|. \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Wir müssen $|D|$ über ein beschränktes Intervall integrieren. Um zu zeigen, dass (A.51) kleiner gleich $\frac{c}{t^2}$ ist, muss man $|D_1|$ bzw. $|D_2|$ über das beschränkte Gebiet $2k_s \leq k < 1$ integrieren und zeigen, dass für den Wert der Integrale eine obere Schranke uniform in \mathbf{k}_s existiert.

Die Ableitung in D_1 hat höchstens zwei Nullstellen in A_3 . Also können wir das Integrationsgebiet in drei Teile aufteilen, in denen $\partial_k \left(\frac{k^2}{(k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s)^2} \right)$ das Vorzeichen nicht ändert. Benützt man nun den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, ist es leicht zu sehen, dass die Integration von D_1 eine uniforme Konstante liefert (dazu muss man wieder (A.42) verwenden).

D_2 kann man schreiben als¹

$$\begin{aligned}
|D_2| &= \left| \left(\left(\frac{k^2}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)' \frac{1}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} (\chi(\mathbf{k}) - \chi(0) - k\chi'(0) + \chi(0) - \chi(\mathbf{k}_s) + k\chi'(0)) \right)' \right| \\
&= \left| \left(\left(\frac{k^2}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)' \frac{1}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} (\chi(\mathbf{k}) - \chi(0) - k\chi'(0) + k_s g(\mathbf{k}_s) + k\chi'(0)) \right)' \right| \\
&\leq \left| \left(\left(\frac{k^2}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)' \frac{1}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} (\chi(\mathbf{k}) - \chi(0) - k\chi'(0)) \right)' \right| \\
&\quad + \left| \left(\left(\frac{k^2}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)' \frac{1}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} (k_s g(\mathbf{k}_s) + k\chi'(0)) \right)' \right| \\
&=: |D_2^1| + |D_2^2|, \tag{A.53}
\end{aligned}$$

mit einem geeigneten, beschränkten $g(\mathbf{k}_s)$: Mit Taylors Formel und da $|\nabla_{\mathbf{k}} \chi(\mathbf{k})| \leq C$ erhalten wir

$$|g(\mathbf{k}_s)| \leq C. \tag{A.54}$$

D_2^2 in (A.53) kann man genauso wie D_1 behandeln, da die Ableitung höchstens 5 Nullstellen hat, und

$$\left| \left(\frac{k^2}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)' \frac{1}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} (k_s g(\mathbf{k}_s) + k\chi'(0)) \right| \leq 40C. \tag{A.55}$$

Um (A.55) zu erhalten, muss man wieder Abschätzungen von der Form (A.42) mit $k \geq 2k_s$ verwenden.

Wir kommen nun zu D_2^1 in (A.53). Da das Integrationsgebiet beschränkt ist, reicht es aus zu zeigen, dass D_2^1 uniform beschränkt ist. Es ist

$$\begin{aligned}
|D_2^1| &\leq \left| \left(\frac{k^2}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)'' \frac{1}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} (\chi(\mathbf{k}) - \chi(0) - k\chi'(0)) \right| \\
&\quad + \left| \left(\frac{k^2}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)' \left(\frac{1}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)' (\chi(\mathbf{k}) - \chi(0) - k\chi'(0)) \right| \\
&\quad + \left| \left(\frac{k^2}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)' \frac{1}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} (\chi'(\mathbf{k}) - \chi'(0)) \right|. \tag{A.56}
\end{aligned}$$

¹ $\chi(0)$ und $\chi'(0)$ sind die stetigen Fortsetzungen von χ und χ' .

Mit Taylors Formel kann man die Differenzen der χ -Terme schrittweise linearisieren und erhält mit $0 < \xi, \zeta < 1$

$$|D_2^1| \leq \left| \left(\frac{k^2}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)'' \frac{1}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} k^2 \chi''(\xi \mathbf{k}) \right| + \left| \left(\frac{k^2}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)' \left(\frac{1}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)' k^2 \chi''(\xi \mathbf{k}) \right| + \left| \left(\frac{k^2}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} \right)' \frac{1}{k - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{k}_s} k \chi''(\zeta \mathbf{k}) \right|. \quad (\text{A.57})$$

Mit $|\chi''(\mathbf{k})| \leq C$ und (A.42) (oder in ähnlichen Formen mit $k \geq 2k_s$) erhält man

$$|D_2^1| \leq 120C. \quad (\text{A.58})$$

Also ist auch I_3 von der Ordnung t^{-2} uniform in \mathbf{k}_s . Es folgt Lemma 2.

A.4 Zum Beweis von Proposition 4

Der Kern des Beweises ist praktisch identisch zu dem Beweis der entsprechenden Aussage im 1-Teilchenfall in [52] (Theorem 1). Die Grundlage für den Beweis im 1-Teilchenfall sind die punktweise Abschätzungen an die Wellenfunktion (3.46), (3.47) und Lemma 2. Die Schwierigkeit besteht also darin, diese Abschätzungen auf den N -Teilchenfall zu übertragen.

Beweis von (i):

Aussage (i) ist eine direkte Konsequenz aus Theorem 1, siehe auch Referenzen dort.

Zum Beweis von (ii):

Der Beweis findet sich in [24]. Wir geben hier die wichtigsten Schritte wieder.

Wir führen ähnlich wie in [52] die Menge $B_{\delta ab}$ ein: Sei $\delta > 0$ und $0 < a < b < \infty$. Dann ist

$$B_{\delta ab} := \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{3N} \mid |\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})| > \delta \text{ und } a < k_l < b, l \in \{1, \dots, N\}\}. \quad (\text{A.59})$$

Gemäß dem Beweis in [52] folgt dann unabhängig von der Dimension des zugrunde liegenden Konfigurationsraums die Aussage (ii) aus

Es existiert ein $C < \infty$ (abh. von $B_{\delta ab}$), so dass für alle $t \geq T$, T groß genug, gilt:

$$\frac{\mathbf{x}}{t} \in B_{\delta ab} \text{ impliziert } \left| \mathbf{v}_t^\psi(\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{x}}{t} \right| < Ct^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.60})$$

Man muss also (A.60) zeigen. Zunächst erklären wir, wie man zu (A.60) im 1-Teilchenfall gelangt. Ganz ähnlich wie beim Beweis des FAST gehen zwei Abschätzungen an die Wellenfunktion ein: Es existiert ein $C < \infty$, so dass

$$\left| \psi_t(\mathbf{x}) - \left(\frac{1}{it} \right)^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{\mathbf{x}^2}{2t}} \widehat{\psi}_{\text{out}} \left(\frac{\mathbf{x}}{t} \right) \right| \leq \frac{C}{t^2}, \quad \forall t > T, \quad T \text{ groß genug, und } \forall \frac{\mathbf{x}}{t} \in B_{\delta ab} \quad (\text{A.61})$$

und

$$\left| \nabla \psi_t(\mathbf{x}) - i \frac{\mathbf{x}}{t} \left(\frac{1}{it} \right)^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{\mathbf{x}^2}{2t}} \widehat{\psi}_{\text{out}} \left(\frac{\mathbf{x}}{t} \right) \right| \leq \frac{C}{t^2}, \quad \forall t > T, \quad T \text{ groß genug, und } \forall \frac{\mathbf{x}}{t} \in B_{\delta ab} \quad (\text{A.62})$$

gilt. Das entscheidende um von (A.61) und (A.62) zu (A.60) zu kommen, ist, dass der Fehler um eine halbe Potenz in t schneller gegen Null geht als der führende Term. Die Abschätzungen (A.61) und (A.62) hingegen folgen aus der Zerlegung von ψ nach generalisierten Eigenfunktionen,

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int e^{-i\frac{\mathbf{k}^2 t}{2}} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \varphi_+(\mathbf{x}, \mathbf{k}) d^3 k \\ &=: (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int e^{-i\frac{\mathbf{k}^2 t}{2}} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3 k + (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int e^{-i\frac{\mathbf{k}^2 t}{2}} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \eta(\mathbf{x}, \mathbf{k}) d^3 k \\ &=: \alpha(\mathbf{x}, t) + \beta(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

und dem Abschätzen von α und β mit Lemma 2 sowie (3.46) und (3.47) (vgl. auch (3.22) und (3.23)) für $\frac{\mathbf{x}}{t} \in B_{\delta ab}$. Die Anwendung von Lemma 2 sowie (3.46) und (3.47) erfordert ähnliche Bedingungen an $\widehat{\psi}_{\text{out}}$ (siehe Definition 4 sowie (20)-(28) in [58]). Die minimalen Bedingungen sind, dass $\widehat{\psi}_{\text{out}}$ in folgender Menge ist:²

Definition 9. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ist in \mathcal{C}^+ , wenn es eine Konstante $C \in \mathbb{R}_+$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{k})| &\leq C \langle k \rangle^{-5}, \\ |\partial_{\mathbf{k}}^\alpha f(\mathbf{k})| &\leq C, \quad |\alpha| = 1, \\ |\kappa \partial_{\mathbf{k}}^\alpha f(\mathbf{k})| &\leq C \langle k \rangle^{-1}, \quad |\alpha| = 2, \quad \kappa = \frac{k}{\langle k \rangle}, \\ \left| \frac{\partial}{\partial k} f(\mathbf{k}) \right| &\leq C \langle k \rangle^{-5} \text{ und } \left| \frac{\partial^2}{\partial k^2} f(\mathbf{k}) \right| \leq C \langle k \rangle^{-2}. \end{aligned}$$

²Das ist eine Teilmenge von der Menge \mathcal{G}^+ . Für \mathcal{G}^+ wurde das FAST gezeigt, ebenfalls unter Verwendung von Lemma 2, (3.46) und (3.47), siehe Theorem 2.

Nun kann man, wie in Lemma 1, folgendes zeigen:

$$\psi \in \mathcal{C} \text{ für } N = 1 \Rightarrow \widehat{\psi}_{\text{out}} \in \mathcal{C}^+. \quad (\text{A.64})$$

Wir skizzieren nun, wie man die Abschätzungen (A.61) und (A.62) auf den Mehrteilchenfall übertragen kann. Entscheidend für die punktweisen Abschätzungen an die Wellenfunktion im 1-Teilchenfall ist die Zerlegung (A.63) von ψ in verallgemeinerte Eigenfunktionen, also die beiden grundlegenden Formeln (siehe Proposition 1, (ii) und (iii))

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \text{l. i. m.} \int \varphi_+(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) d^3k \quad (\text{A.65})$$

und

$$\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \text{l. i. m.} \int \varphi_+(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \psi(\mathbf{x}) d^3x. \quad (\text{A.66})$$

In der vorliegenden speziellen Situation eines Systems von N Teilchen, die nur mit einem externen Potential wechselwirken, bleiben die Formeln (A.65) und (A.66) aber weiterhin gültig, wenn man für die generalisierten Eigenfunktionen nun das Produkt der generalisierten Eigenfunktionen der einzelnen Teilchen einsetzt: Zunächst sieht man, dass

$$H\varphi_{\pm} := H \left(\prod_{l=1}^N (\varphi_l)_{\pm} \right) = \frac{k^2}{2} \varphi_{\pm}, \quad (\text{A.67})$$

mit den einzelnen generalisierten Eigenfunktionen $(\varphi_l)_{\pm}$

$$H_l(\varphi_l)_{\pm} = \frac{k_l^2}{2} (\varphi_l)_{\pm}, \quad (\text{A.68})$$

bestimmt durch Proposition 1. Das Produkt der einzelnen generalisierten Eigenfunktionen zu H_l ist also eine generalisierte Eigenfunktion zu H . Durch Zerlegung von ψ in eine Basis von Produktzuständen, also in eine Basis von $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \dots \otimes L^2(\mathbb{R}^3)$, sieht man, dass (A.65) und (A.66) auch für diesen speziellen Mehrteilchenfall gelten. D.h. es gilt, nun für $\mathbf{x}, \mathbf{k} \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$,

$$\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3N}{2}}} \text{l. i. m.} \int \left(\prod_{l=1}^N (\varphi_l)_{\pm}(\mathbf{x}_l, \mathbf{k}_l) \right) \psi(\mathbf{x}) d^{3N}x, \quad (\text{A.69})$$

und

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3N}{2}}} \text{l. i. m.} \int \left(\prod_{l=1}^N (\varphi_l)_{\pm}(\mathbf{x}_l, \mathbf{k}_l) \right) \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) d^{3N}k. \quad (\text{A.70})$$

Mit

$$(\varphi_l)_+(\mathbf{x}_l, \mathbf{k}_l) = e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{x}_l} + (\eta_l)_+(\mathbf{x}_l, \mathbf{k}_l)$$

kann man diese Formeln nun ganz ähnlich wie im 1-Teilchenfall anwenden. Der führende Term der asymptotischen Entwicklung von $\psi_t(\mathbf{x})$ ist nun

$$\left(\frac{1}{it}\right)^{\frac{3N}{2}} e^{i\frac{\mathbf{x}^2}{2t}} \widehat{\psi}_{\text{out}}\left(\frac{\mathbf{x}}{t}\right). \quad (\text{A.71})$$

Damit wird der Fehler zwischen ψ_t und (A.71) zu

$$\left| \psi_t(\mathbf{x}) - \left(\frac{1}{it}\right)^{\frac{3N}{2}} e^{i\frac{\mathbf{x}^2}{2t}} \widehat{\psi}_{\text{out}}\left(\frac{\mathbf{x}}{t}\right) \right| \leq \left| \alpha^{(N)}(\mathbf{x}, t) - \left(\frac{1}{it}\right)^{\frac{3N}{2}} e^{i\frac{\mathbf{x}^2}{2t}} \widehat{\psi}_{\text{out}}\left(\frac{\mathbf{x}}{t}\right) \right| + |\beta^{(N)}(\mathbf{x}, t)|, \quad (\text{A.72})$$

mit

$$\alpha^{(N)}(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-\frac{3N}{2}} \int e^{-i\frac{\mathbf{k}^2 t}{2}} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^{3N} k \quad (\text{A.73})$$

und

$$\beta^{(N)}(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-\frac{3N}{2}} \int e^{-i\frac{\mathbf{k}^2 t}{2}} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \eta_+^{(N)}(\mathbf{x}, t) d^{3N} k, \quad (\text{A.74})$$

wobei

$$\begin{aligned} \eta_+^{(N)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) &= (\eta_1)_+(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}_1) e^{i\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{k}_2} \dots e^{i\mathbf{x}_N \cdot \mathbf{k}_N} + e^{i\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{k}_1} (\eta_2)_+(\mathbf{x}_2, \mathbf{k}_2) e^{i\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{k}_3} \dots e^{i\mathbf{x}_N \cdot \mathbf{k}_N} + \dots \\ &+ (\eta_1)_+(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}_1) (\eta_2)_+(\mathbf{x}_2, \mathbf{k}_2) \dots (\eta_N)_+(\mathbf{x}_N, \mathbf{k}_N). \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

Der Fehler zwischen $\nabla \psi_t$ und

$$\frac{\mathbf{x}}{t} \left(\frac{1}{it}\right)^{\frac{3N}{2}} e^{i\frac{\mathbf{x}^2}{2t}} \widehat{\psi}_{\text{out}}\left(\frac{\mathbf{x}}{t}\right)$$

wir dann zu

$$\left| \nabla \psi_t(\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{x}}{t} \left(\frac{1}{it}\right)^{\frac{3N}{2}} e^{i\frac{\mathbf{x}^2}{2t}} \widehat{\psi}_{\text{out}}\left(\frac{\mathbf{x}}{t}\right) \right| \leq \left| \nabla \alpha^{(N)}(\mathbf{x}, t) - \frac{\mathbf{x}}{t} \left(\frac{1}{it}\right)^{\frac{3N}{2}} e^{i\frac{\mathbf{x}^2}{2t}} \widehat{\psi}_{\text{out}}\left(\frac{\mathbf{x}}{t}\right) \right| + |\nabla \beta^{(N)}(\mathbf{x}, t)|. \quad (\text{A.76})$$

Wir erklären nun, wie man die Abschätzung von $\beta^{(N)}(\mathbf{x}, t)$ zunächst für $N = 2$ auf die vorhandenen Ergebnisse (3.46) und Lemma 2 zurückführen kann. Für $N = 2$ ist $\beta^{(N)}(\mathbf{x}, t)$ durch

$$\begin{aligned} \beta^{(2)}(\mathbf{x}, t) &= (2\pi)^{-3} \int e^{-i\frac{\mathbf{k}^2 t}{2}} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) (\eta_1)_+(\mathbf{k}_1, \mathbf{x}_1) e^{i\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{k}_2} d^3 k_1 d^3 k_2 \\ &+ (2\pi)^{-3} \int e^{-i\frac{\mathbf{k}^2 t}{2}} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{k}_1} (\eta_2)_+(\mathbf{x}_2, \mathbf{k}_2) d^3 k_1 d^3 k_2 \\ &+ (2\pi)^{-3} \int e^{-i\frac{\mathbf{k}^2 t}{2}} \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) (\eta_1)_+(\mathbf{k}_1, \mathbf{x}_1) (\eta_2)_+(\mathbf{x}_2, \mathbf{k}_2) d^3 k_1 d^3 k_2 \\ &=: I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

gegeben. Den ersten Term I_1 schreiben wir als

$$I_1 = (2\pi)^{-3} \int e^{-i\frac{k_2^2 t}{2}} e^{i\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{k}_2} \left(\int e^{-i\frac{k_1^2 t}{2}} (\eta_1)_+(\mathbf{k}_1, \mathbf{x}_1) \widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k}) d^3 k_1 \right) d^3 k_2. \quad (\text{A.78})$$

Wir nehmen nun an, dass $\widehat{\psi}_{\text{out}}(\mathbf{k})$ bezüglich \mathbf{k}_1 und \mathbf{k}_2 die Eigenschaften von Definition 9 hat. Also z.B.

$$\left| \frac{\partial}{\partial k_1} \frac{\partial}{\partial k_2} f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \right| \leq C \langle k_1 \rangle^{-5} \langle k_2 \rangle^{-5} \quad (\text{A.79})$$

oder

$$\left| \frac{\partial^2}{(\partial k_1)^2} \frac{\partial}{\partial k_2} f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \right| \leq C \langle k_1 \rangle^{-2} \langle k_2 \rangle^{-5}. \quad (\text{A.80})$$

Dann kann man die schon bekannte Abschätzung (3.46) verwenden und erhält

$$I_1 = (2\pi)^{-3} \int e^{-i\frac{k_2^2 t}{2}} e^{i\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{k}_2} f(\mathbf{k}_2, \mathbf{x}_1, t) d^3 k_2, \quad (\text{A.81})$$

mit einer geeigneten Funktion $f(\mathbf{k}_2, \mathbf{x}_1, t)$, von der man weiß, dass

$$|f(\mathbf{k}_2, \mathbf{x}_1, t)| \leq \frac{C}{x_1(t+x_1)} g(\mathbf{k}_2), \quad (\text{A.82})$$

wobei $g(\mathbf{k}_2) \in \mathcal{C}^+$. Nun kann man Lemma 2 auf (A.81) anwenden und findet

$$|I_1| \leq \frac{C}{x_1(t+x_1)t^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{A.83})$$

Also für $\frac{\mathbf{x}}{t} \in B_{\delta ab}$ wird (A.83) zu

$$|I_1| \leq \frac{C}{t^{\frac{7}{2}}}. \quad (\text{A.84})$$

Analoges Vorgehen mit I_2, I_3 liefert

$$|\beta^{(2)}(\mathbf{x}, t)| \leq \frac{C}{t^{\frac{7}{2}}}, \text{ für } \frac{\mathbf{x}}{t} \in B_{\delta ab}. \quad (\text{A.85})$$

Damit ist der Fehler $|\beta^{(2)}(\mathbf{x}, t)|$ genau eine halbe Ordnung in t kleiner als der führende Term (A.71) für $N = 2$. Durch identisches Vorgehen erhält man für allgemeines N

$$|\beta^{(N)}(\mathbf{x}, t)| \leq \frac{C}{t^{\frac{3N}{2} + \frac{1}{2}}}, \text{ für } \frac{\mathbf{x}}{t} \in B_{\delta ab}. \quad (\text{A.86})$$

Wendet man diese schrittweise Reduktion auch auf die anderen Fehlerterme in (A.72) und (A.76) an, findet man dieselbe Ordnung der Fehler in t und kann damit wieder wie schon im 1-Teilchenfall auf (A.60) schließen, aus der dann (ii) folgt.

Um die Beweisskizze abzuschließen, weisen wir darauf hin, dass die geforderten Regularitätseigenschaften von $\widehat{\psi}_{\text{out}}$ im Mehrteilchenfall in ähnlicher Weise auf ψ übertragen werden können, wie schon im 1-Teilchenfall mit Hilfe von Lemma 1: Will man z.B. (A.79) ableiten, folgt das aus $\langle x_1 \rangle^3 \langle x_2 \rangle^3 (H_0)_1^3 (H_0)_2^3 \psi \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$, was wiederum aus $\langle x \rangle^6 H^6 \psi \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ folgt. Die Tatsache, dass man die entsprechenden Regularitätseigenschaften von $\widehat{\psi}_{\text{out}}$ für jede Komponente benötigt, erhöht also die notwendigen Regularitätseigenschaften von ψ um den Faktor N , wie in Definition 5 umgesetzt.

Beweis von (iii):

Analog zu Beweis von Theorem 1, (ii), in [52].

Literaturverzeichnis

- [1] Agmon, S.: *Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **2** (1975), no. 2, 151–218.
- [2] Albeverio, S., Gesztesy, F., Høegh-Krohn, R. und Holden, H.: *Solvable Models in Quantum Mechanics*, Springer, New York, 1988.
- [3] Amrein, W. O., Jauch, J. M. und Sinha, K. B.: *Scattering Theory in Quantum Mechanics*, W. A. Benjamin, Inc., London, 1977.
- [4] Amrein, W. O. und Pearson, D. B.: *Flux and scattering into cones for long range and singular potentials*, J. Phys. A **30** (1997), no. 15, 5361–5379.
- [5] Amrein, W. O. und Zuleta, J. L.: *Flux and scattering into cones in potential scattering*, Helv. Phys. Acta **70** (1997), no. 1-2, 1–15, Papers honouring the 60th birthday of Klaus Hepp and of Walter Hunziker, Part II (Zürich, 1995).
- [6] Berndt, K.: *Zur Existenz der Dynamik in Bohmschen Systemen*, Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München, 1994.
- [7] Berndt, K., Dürr, D., Goldstein, S., Peruzzi, G. und Zanghì, N.: *On the global existence of Bohmian mechanics*, Commun. Math. Phys. **173** (1995), no. 3, 647–673.
- [8] Bohm, D.: *A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables I, II*, Phys. Rev. **85** (1952), 166–179, 180–193.
- [9] Born, M.: *Quantenmechanik der Stoßvorgänge*, Z. Phys. **38** (1926), 803–827.
- [10] Campesino-Romeo, E. und Taylor, J. R.: *Cross sections in quantum mechanics*, J. Math. Phys. **16** (1975), no. 6, 1227–1230.
- [11] Combes, J.-M., Newton, R. G. und Shtokhamer, R.: *Scattering into cones and flux across surfaces*, Phys. Rev. D **11** (1975), no. 2, 366–372.

-
- [12] Daumer, M.: *Streutheorie aus der Sicht Bohmscher Mechanik*, Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München, 1994.
- [13] Daumer, M., Dürr, D., Goldstein, S. und Zanghì, N.: *On the flux-across-surfaces theorem*, Lett. Math. Phys. **38** (1996), no. 1, 103–116.
- [14] Daumer, M., Dürr, D., Goldstein, S. und Zanghì, N.: *On the quantum probability flux through surfaces*, J. Stat. Phys. **88** (1997), no. 3-4, 967–977.
- [15] Dollard, J. D.: *Scattering into Cones I: Potential Scattering*, Commun. Math. Phys. **12** (1969), 193–203.
- [16] Dollard, J. D.: *Scattering into Cones. II. n-body problems*, J. Math. Phys. **14** (1973), no. 6, 708–718.
- [17] Dollard, J. D. und Friedman, C. N.: *Scattering of a beam of particles by a potential*, J. Math. Phys. **20** (1979), no. 8, 1727–1730.
- [18] Dürr, D.: *Bohmsche Mechanik als Grundlage der Quantenmechanik*, Springer, Berlin, 2001.
- [19] Dürr, D., Goldstein, S., Moser, T. und Zanghì, N.: *A microscopic derivation of the quantum mechanical formal scattering cross section*, Commun. Math. Phys. **266** (2006), no. 3, 665–697.
- [20] Dürr, D., Goldstein, S., Moser, T. und Zanghì, N.: *On Born's formula for the scattering cross section*, in Vorbereitung.
- [21] Dürr, D., Goldstein, S., Teufel, S. und Zanghì, N.: *Scattering theory from microscopic first principles*, Physica A **279** (2000), 416–431.
- [22] Dürr, D., Goldstein, S. und Zanghì, N.: *Quantum Equilibrium and the Origin of Absolute Uncertainty*, J. Stat. Phys. **67** (1992), 843–907.
- [23] Dürr, D., Moser, T. und Pickl, P.: *The Flux-Across-Surfaces Theorem under conditions on the scattering state*, J. Phys. A **39** (2006), no. 1, 163–183.
- [24] Dürr, D., Moser, T. und Römer, S.: *On the crossing probability in N-body quantum mechanics*, in Vorbereitung.
- [25] Dürr, D. und Pickl, P.: *Flux-across-surfaces theorem for a Dirac particle*, J. Math. Phys. **44** (2003), no. 2, 423–465.

-
- [26] Dürr, D. und Teufel, S.: *On the role of the flux in scattering theory*, Stochastic Processes, Physics and Geometry: New Interplays, I (Leipzig, 1999), CMS Conf. Proc., vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 123–137.
- [27] Dürr, D. und Teufel, S.: *On the exit statistics theorem of many particle quantum scattering*, Multiscale Methods in Quantum Mechanics: Theory and experiment (Blanchard, P. und Dell’Antonio, G. F., eds.), Birkhäuser, Boston, 2003.
- [28] Efremov, M. A. und Fedorov, M. V.: *Potential scattering of electron wave packets by large-size targets*, Phys. Rev. A **65** (2002), no. 5, 052725, 1–11.
- [29] Goldberger, M. L. und Watson, K. M.: *COLLISION THEORY*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.
- [30] Goldstein, S.: *Bohmian mechanics*, <http://plato.stanford.edu/entries/qm-bohm>, 2001.
- [31] Graf, G. M.: *Asymptotic Completeness for N -Body Short-Range Quantum Systems: A New Proof*, Commun. Math. Phys. **132** (1990), no. 1, 73–101.
- [32] Green, T. A. und Lanford, O. E., III.: *Rigorous derivation of the phase shift formula for the Hilbert space scattering operator of a single particle*, J. Math. Phys. **1** (1960), 139–148.
- [33] Hörmander, L.: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis*, Springer, Berlin, 1983.
- [34] Holland, P. R.: *The quantum theory of motion*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [35] Hunziker, W. und Sigal, I. M.: *The quantum N -body problem*, J. Math. Phys. **41** (2000), no. 6, 3448–3510.
- [36] Hunziker, W. und Sigal, I. M.: *Time-dependent scattering theory of N -body quantum systems*, Rev. Math. Phys. **12** (2000), no. 8, 1033–1084.
- [37] Ikebe, T.: *Eigenfunction expansion associated with the Schrödinger operators and their applications to scattering theory*, Arch. Rat. Mech. Anal. **5** (1960), 1–34.
- [38] Ikebe, T.: *On the Phase-shift formula for the scattering operator*, Pacific J. Math. **15** (1965), 511–523.
- [39] Ikebe, T.: *Remarks on the orthogonality of eigenfunctions for the Schrödinger operator in R^n* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **17** (1970), 355–361.

-
- [40] Jauch, J. M.: *Theory of the scattering operator*, Helv. Phys. Acta **31** (1958), 127–158.
- [41] Jensen, A. und Kato, T.: *Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions*, Duke Math. J. **46** (1979), no. 3, 583–611.
- [42] Kato, T.: *Fundamental Properties Of Hamiltonian Operators Of Schrödinger Type*, Trans. Amer. Math. Soc. **70** (1951), no. 1, 195–211.
- [43] Merzbacher, E.: *Quantum Mechanics*, 3 ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.
- [44] Messiah, A.: *Quantum Mechanics*, de Gruyter, New York, 1976.
- [45] Nagao, T.: *On the flux-across-surfaces theorem for short-range potentials*, Ann. Henri Poincaré **5** (2004), no. 1, 119–133.
- [46] Newton, R. G.: *Scattering Theory of Waves and Particles*, 2. ed., Springer, New York, 1982.
- [47] Panati, G. und Teta, A.: *The flux-across-surfaces theorem for a point interaction Hamiltonian*, Stochastic processes, physics and geometry: new interplays, II (Leipzig, 1999), CMS Conf. Proc., vol. 29, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 547–557.
- [48] Pearson, D. B.: *Quantum Scattering and Spectral Theory*, Academic Press, San Diego, 1988.
- [49] Prugovecki, E.: *Quantum Mechanics in Hilbert Space*, 2. ed., Academic Press, New York, 1981.
- [50] Reed, M. und Simon, B.: *Methods Of Modern Mathematical Physics III: Scattering Theory*, Academic Press, San Diego, 1979.
- [51] Reed, M. und Simon, B.: *Methods Of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, revised and enlarged ed., Academic Press, San Diego, 1980.
- [52] Römer, S., Dürr, D. und Moser, T.: *Asymptotic Behavior of Bohmian Trajectories in Scattering Situations*, J. Phys. A **38** (2005), 8421–8443.
- [53] Schechter, M.: *Eigenfunction expansions for the Schrödinger operator*, Ark. Mat. **14** (1976), no. 2, 277–287.
- [54] Sigal, I. M. und Soffer, A.: *The N -particle scattering problem: asymptotic completeness for short-range systems*, Ann. of Math. (2) **126** (1987), no. 1, 35–108.

-
- [55] Simon, B.: *Quantum Mechanics for Hamiltonians Defined as Quadratic Forms*, Princeton University Press, Princeton, 1971.
- [56] Taylor, J. R.: *Scattering Theory: The Quantum Theory on Nonrelativistic Collisions*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1972.
- [57] Teufel, S.: *The flux-across-surfaces theorem and its implications for scattering theory*, Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München, 1999.
- [58] Teufel, S., Dürr, D. und Münch-Berndl, K.: *The flux-across-surfaces theorem for short range potentials and wave functions without energy cutoffs*, J. Math. Phys. **40** (1999), no. 4, 1901–1922.
- [59] Teufel, S. und Tumulka, R.: *A Simple Proof for Global Existence of Bohmian Trajectories*, Commun. Math. Phys. **258** (2005), no. 2, 349–365.
- [60] Thoe, D. W.: *Eigenfunction expansions associated with Schroedinger operators in $R_n, n \geq 4$* , Arch. Rat. Mech. Anal. **26** (1967), 335–356.
- [61] Tumulka, R.: *Closed 3-Forms and Random Worldlines*, Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München, 2001.
- [62] Tumulka, R. und Zanghì, N.: *Smoothness of wave functions in thermal equilibrium*, J. Math. Phys. **46** (2005), no. 11, 112104, 1–12.
- [63] Weinberg, S.: *Quantum Theory of Fields. Volume I: Foundations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [64] Wichmann, E. H.: *Scattering of Wave Packets*, Am. J. Phys. **33** (1965), no. 3, 20–31.
- [65] Yajima, K.: *The $W^{k,p}$ -continuity of wave operators for Schrödinger operators*, J. Math. Soc. Japan **47** (1995), no. 3, 551–581.