

# Konstruktion des Teichmüllerraumes Riemannscher Flächen mittels Integration von Vektorfeldern

Dissertation

an der Fakultät für Mathematik, Informatik und Statistik der  
Ludwig-Maximilians-Universität München

eingereicht von

Martin Härting

im Oktober 2005

Erster Gutachter: Prof. Dr. O. Forster, LMU München  
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. M. Schottenloher, LMU München  
Auswärtiger Gutachter: Prof. Dr. G. Schumacher, Philipps-Universität Mar-  
burg

Tag der mündlichen Prüfung: 21. April 2006

# Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
<b>1 Deformationen von Mannigfaltigkeiten</b>	<b>8</b>
1.1 Deformationen . . . . .	8
1.2 Die Kodaira-Spencer-Abbildung . . . . .	9
<b>2 Konstruktion einer Deformation</b>	<b>15</b>
2.1 Integration von Vektorfeldern . . . . .	15
2.2 Integration eines parametrisierten Vektorfeldes . . . . .	17
2.3 Konstruktion des Totalraumes . . . . .	21
2.4 Nachweis der Eigenschaften einer Deformation . . . . .	28
2.5 Unabhängigkeit der Konstruktion von der Wahl von $V_{01}$ . . . . .	30
2.6 Beispiele für Deformationen . . . . .	32
2.6.1 Deformation eines Torus . . . . .	32
2.6.2 Konstruktion quadratischer Differentiale . . . . .	36
2.6.3 Konstruktion eines abelschen Differentials . . . . .	39
2.6.4 Deformation einer Fläche vom Geschlecht $g = 2$ . . . . .	41
<b>3 Versalität der konstruierten Deformation</b>	<b>45</b>
3.1 Konstruktion der vertikalen Automorphismen . . . . .	45
3.2 Nachweis der Versalität . . . . .	50
<b>4 Offenheit der Versalität</b>	<b>51</b>
4.1 Kodaira-Spencer-Abbildung für benachbarte Fasern . . . . .	51
4.2 Nachweis der Offenheit der Versalität . . . . .	54
<b>5 Deformationen mit Markierungen</b>	<b>58</b>
5.1 Der Teichmüllerraum und verwandte Räume . . . . .	58
5.2 Starrheit . . . . .	61
5.3 Deformationen von markierten Riemannschen Flächen . . . . .	64
<b>6 Eigenschaften des Isom-Funktors</b>	<b>68</b>
6.1 Ein Satz über Folgen mit isomorphen Fasern . . . . .	68
6.2 Der <b>Isom</b> -Funktors . . . . .	74
6.2.1 Der Funktors $\mathbf{Isom}_S(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ . . . . .	74
6.2.2 Der Funktors $\mathbf{Isom}_{S \times S}(\mathfrak{X} \times S, S \times \mathfrak{X})$ . . . . .	75
6.3 Beschreibung von $I$ . . . . .	78

6.3.1	Reduziertheit der Fasern von $I$ . . . . .	78
6.3.2	Sätze über endliche Abbildungen zwischen komplexen Räumen . . . . .	80
6.3.3	Lokale Beschreibung von $I$ . . . . .	84
6.3.4	Zusammenhängende Komponenten von $I$ . . . . .	85
6.3.5	Eigenschaften der Diagonale $\Delta \subset \Gamma$ . . . . .	86
6.4	Die Wirkung von $\text{Aut}(X_0)$ auf $\Gamma$ . . . . .	89
<b>7</b>	<b>Konstruktion eines feinen Modulraums</b>	<b>93</b>
7.1	Feine und grobe Modulräume . . . . .	93
7.2	Hindernisse gegen die Existenz von feinen Modulräumen . . .	95
7.3	Der Teichmüller-Funktor . . . . .	99
7.4	Verschiedenheit der Fasern . . . . .	100
7.5	Konstruktion eines Verklebedatums . . . . .	101
7.6	Hausdorff-Eigenschaft des Teichmüllerraumes . . . . .	106
7.6.1	Hausdorff-Eigenschaft von $\mathcal{T}$ . . . . .	106
7.6.2	Hausdorff-Eigenschaft von $\mathcal{Z}$ . . . . .	106
7.7	Zusammenhang des Teichmüllerraumes . . . . .	107
7.7.1	Beltrami-Differentiale und quasikonforme Abbildungen	107
7.7.2	Zusammenhang von $\mathcal{T}$ . . . . .	110
7.7.3	Zusammenhang von $\mathcal{Z}$ . . . . .	115
7.8	$\mathcal{Z}$ als feiner Modulraum . . . . .	116
7.9	Konstruktion eines groben Modulraumes . . . . .	118
7.10	Lokales Modell für den groben Modulraum . . . . .	119
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>121</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>126</b>

## Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird eine Konstruktion des Teichmüllerraumes Riemannscher Flächen angegeben, die sich sogenannter infinitesimaler Deformationen bedient.

Der Ursprung der Teichmüllertheorie ist in einer Idee von Bernhard Riemann zu sehen, der die Anzahl der Parameter von Isomorphie-Klassen algebraischer Gleichungen in zwei Unbekannten untersuchte, das entspricht Klassen von Riemannschen Flächen modulo biholomorpher Äquivalenz ([Rie]). Er stellte fest, dass diese Isomorphieklassen bei Riemannschen Flächen vom Geschlecht  $g \geq 2$  von  $3g - 3$  komplexen Parametern abhängen.

Erst achtzig Jahre später fand Oswald Teichmüller, dass bei einer geeigneten Modifizierung des Äquivalenzbegriffes die Isomorphieklassen Riemannscher Flächen eine  $(6g - 6)$ -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit bilden. Seine grundlegenden Ideen legte er in dem Artikel „Extremale quasikonforme Abbildungen“ [Te1] und zwei weiteren Artikeln ([Te2], [Te3]) aus den Jahren 1938 bis 1944 dar. Er führte auch die nach ihm benannte Metrik ein.

Ahlfors und Bers bauten die Ideen Teichmüllers aus und begründeten die moderne Teichmüller-Theorie. Auch sie benutzten bei ihren Konstruktionen quasikonforme Abbildungen, konnten aber weitreichendere Resultate zeigen, wie z. B., dass der Teichmüllerraum auch eine komplexe Struktur hat. Den Zugang von Teichmüller/Ahlfors/Bers findet man in vielen modernen Lehrbüchern, wovon hier die Bücher von Imayoshi, Gardiner und Nag ([Im], [Ga1], [Nag]) genannt seien. Eine andere Konstruktion des Teichmüllerraumes fanden Fischer und Tromba mit Hilfe von Riemannschen Metriken konstanter Krümmung ([FiT], [Tro]).

Die Untersuchungen Teichmüllers können als Vorläufer der modernen Theorie der Modulräume gesehen werden, einer Theorie, die sich kurzgefasst mit Familien von Objekten der algebraischen Geometrie über einer Basis und Äquivalenzrelationen auf diesen Familien beschäftigt. Eine zentrale Rolle in dieser Theorie spielen feine und grobe Modulräume. Im Falle von Riemannschen Flächen mit Teichmüller-Markierungen lässt sich beispielsweise ein feiner Modulraum konstruieren, d. h. eine universelle Familie, aus der sich alle anderen Familien (mittels Basiswechsel) gewinnen lassen, während für Riemannsche Flächen ohne Markierung nur ein grober Modulraum existiert. Die Konstruktion des feinen Modulraumes der markierten Riemannschen Flächen gelang zuerst Alexander Grothendieck ([Gro]). Sein Beweis ist sehr tiefgehend, beschränkt sich nicht nur auf Riemannsche Flächen, sondern

behandelt allgemein algebraische Kurven.

Es war nun wünschenswert, für den speziellen Fall von Riemannschen Flächen einen elementareren Beweis zu finden. Ein solcher Beweis wird in der vorliegenden Arbeit gezeigt. Für den Beweis bediente ich mich sogenannter Deformationen. Unter einer Deformation einer Riemannschen Fläche versteht man kurzgefasst eine Äquivalenzklasse von (eentlichen, platten) holomorphen Abbildungen, deren zentrale Faser zur gegebenen Riemannschen Fläche isomorph ist.

Die Deformationstheorie geht auch auf die Idee von Riemann zurück und ist eng mit der Theorie der Modulräume verwandt. Insbesondere brauchte man zur Untersuchung der Modulräume von höherdimensionalen und nichtsingularitätenfreien Mannigfaltigkeiten auch eine entsprechende Theorie über die Deformationen solcher Mannigfaltigkeiten. Die Theorie der Deformationen höherdimensionaler Mannigfaltigkeiten stellte sich als äußerst schwierig heraus. Ein systematisches Studium begann mit den Arbeiten von Kodaira und Spencer ([KS1]). Grothendieck ist schließlich das moderne Konzept von Deformationen zu verdanken. Er betrachtete Deformationen von komplexen Räumen mit beliebigen Singularitäten als Objekte und Basen.

In der vorliegenden Arbeit wird nun zunächst (Kapitel 2) auf elementare Weise eine Deformation einer vorgegebenen Riemannschen Fläche konstruiert: Ist  $g \geq 2$  das Geschlecht der Riemannschen Fläche  $X$ , so hat die Gruppe  $H^1(X, \Theta)$  die Dimension  $m := 3g - 3$ . Nun betrachtet man ein von  $m$  komplexen Variablen abhängiges Vektorfeld auf der Fläche  $X$ . Durch den Fluss zu diesem Vektorfeld erhält man biholomorphe Abbildungen eines zu einem Kreisring biholomorphen Teilgebietes der Riemannschen Fläche auf das Bild des Kreisringes. Klebt man den deformierten Kreisring einschließlich des Inneren mittels der konstruierten biholomorphen Abbildung auf die ursprüngliche Fläche (ohne das Innere des Kreisringes) auf, so erhält man eine Riemannsche Fläche mit gleichem Geschlecht, aber neuer komplexer Struktur, und richtig durchgeführt ergibt sich eine holomorphe Familie Riemannscher Flächen, die eine Deformation der ursprünglichen Fläche darstellt. Zur Veranschaulichung werden dann explizite Rechnungen für Tori und für Riemannsche Flächen vom Geschlecht  $g = 2$  durchgeführt.

In Kapitel 3 wird nachgewiesen, dass es sich sogar um eine verselle Deformation handelt, d. h. eine Deformation, die die Eigenschaft hat, dass es für eine beliebige andere Deformation einen Morphismus der Basis in die ursprüngliche Basis gibt, so dass der Rückzug der ursprünglichen Deformation bezüglich dieses Morphismus zur neuen Deformation isomorph ist. Dabei ist

die Tangentialabbildung des Morphismus eindeutig.

Nun werden Deformationen von sämtlichen Riemannschen Flächen vom gleichen Geschlecht miteinander verklebt. Es wird gezeigt, dass hierbei der feine Modulraum der markierten Riemannschen Flächen entsteht. Dabei sind noch folgende Eigenschaften zu zeigen:

Um die Wohldefiniertheit der Verklebung zu garantieren, muss sichergestellt sein, dass es bei jeder Deformationen eine Umgebung der zentralen Faser gibt, so dass alle Fasern verschieden bezüglich der Teichmüller-Äquivalenz sind. Diese Eigenschaft ist sehr schwierig ohne Rückgriff auf die Teichmüller-Theorie zu zeigen. Das Problem wurde gelöst durch die Betrachtung des **Isom**-Funktors, der durch einen komplexen Raum  $I$  darstellbar ist. Durch eine genaue Untersuchung von  $I$  konnte dann die Verschiedenheit der Fasern nachgewiesen werden. Außerdem sind noch Hausdorff-Eigenschaft und Zusammenhang des Totalraums nachzuweisen.

Somit erhält man insgesamt eine Familie von Riemannschen Flächen, deren Basis den feinen Modulraum der markierten Riemannschen Flächen bildet. Man kann zeigen, dass für Familien von Riemannschen Flächen ohne Markierung kein feiner Modulraum existiert. Ein Gegenbeispiel wird in Kapitel 7.2 vorgeführt. Wohl gibt es aber einen groben Modulraum, der sich leicht aus dem feinen Modulraum für markierte Riemannsche Flächen gewinnen lässt. Dies wird im Kapitel 7.9 zur Abrundung der Arbeit gezeigt.

Die Ideen zu dieser Arbeit stammen im Wesentlichen von Herrn Prof. Dr. Otto Forster. Ich bedanke mich bei ihm dafür und besonders auch für die geduldige Betreuung. Für die Ideen zum sechsten Kapitel bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Georg Schumacher. Herrn Prof. Dr. mult. Rudolf Fritsch danke ich dafür, dass er mir als Mitarbeiter genügend Zeit für die Anfertigung der Arbeit ließ und mich immer wieder mit aufmunternden Worten unterstützt hat.

# 1 Deformationen von kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten

## 1.1 Deformationen

### Definition 1.1.1 (Deformationen)

Es sei  $X$  eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit. (Da es sich im weiteren immer um *kompakte* komplexe Mannigfaltigkeiten handelt, wird im folgenden die Kompaktheit meist vorausgesetzt.)  $S$  sei ein komplexer Raum mit einem ausgezeichneten Punkt  $s_0$ . Unter einer Deformation von  $X$  über  $S$  versteht man eine Abbildung  $\pi$  von einem komplexen Raum  $\mathfrak{X}$  nach  $S$  zusammen mit einem Isomorphismus  $\tau : X \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(s_0)$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $\pi$  ist eine holomorphe Abbildung
2.  $\pi$  ist eigentlich, d. h. kompakte Teilmengen von  $S$  haben kompakte Urbilder.
3. Die Abbildung  $\pi$  ist flach<sup>1</sup>.

**Bemerkung 1.1.2** Da die Fasern  $\pi^{-1}(s), s \in S$  Mannigfaltigkeiten sind, kann man die Eigenschaft, dass die Abbildung  $\pi$  flach ist, auch so formulieren: Zu jedem Punkt  $y \in \mathfrak{X}$  gibt es eine offene Umgebung  $Z \subset \mathfrak{X}$  und einen Isomorphismus  $\psi : (Z \cap X_s) \times V \rightarrow Z$ , wobei  $s := \pi(y)$ ,  $X_s := \pi^{-1}(s)$  und  $V := \pi(Z)$  ist, so dass gilt:

$$\pi \circ \psi = \text{pr}_S.$$

Insbesondere gibt es dann für jeden Punkt  $y \in \pi^{-1}(0)$  eine Umgebung  $Z$  und einen Isomorphismus  $\psi : U \times V \rightarrow Z$ , wobei  $U := \tau^{-1}(Z)$  ist, so dass gilt:  $\psi$  beschränkt auf  $U \times \{0\}$  stimmt mit  $\tau$  überein, und es gilt:  $\pi \circ \psi = \text{pr}_S$ . Dies bedeutet anschaulich gesprochen, dass der Totalraum der Deformation lokal ein Produkt ist.

---

<sup>1</sup>Der Begriff „flach“ ist eine Übersetzung der englischen „flat“. Im Französischen wird dafür die Bezeichnung „plat“ verwendet, so dass viele Autoren die Übersetzung „platt“ wählen. „Platt und „flach“ sind also Synonyme.



**Definition 1.1.3 (Familien)**

Lässt man in der Definition die Bedingung weg, dass die zentrale Faser zu einer gegebenen kompakten komplexen Mannigfaltigkeit isomorph sein soll, so hat man eine *Familie von kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten*

Eine Familie von kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten ist also eine holomorphe, flache, eigentliche Abbildung von einem komplexen Raum  $\mathfrak{X}$  auf einen komplexen Raum  $S$ , so dass alle Fasern kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten sind.

**Definition 1.1.4 (Deformationen über Raumkeimen)**

Es sei nun  $(S, s_0)$  ein komplexer Raumkeim. Unter einer Deformation der komplexen Mannigfaltigkeit  $X$  über  $S$  versteht man eine eigentliche platte holomorphe Abbildung  $\pi : Y \rightarrow S$  zusammen mit einem Isomorphismus  $\tau : X \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(s_0)$ . Dabei ist  $\pi : Y \rightarrow S$  genau genommen eine Äquivalenzklasse von platten eigentlichen holomorphen Abbildungen  $\pi_1 : Y_1 \rightarrow S_1$ , wobei  $Y_1$  ein komplexer Raum und  $S_1$  ein Repräsentant von  $S$  ist. Zwei solche Abbildungen  $\pi_1 : \mathfrak{X}_1 \rightarrow S_1$ ,  $\pi_2 : \mathfrak{X}_2 \rightarrow S_2$  heißen äquivalent, wenn es eine offene Umgebung  $V$  von 0 gibt, so dass gilt:

$$V \subset S_1, \quad V \subset S_2 \quad \text{und} \quad \pi_1|_{\pi_1^{-1}(V)} = \pi_2|_{\pi_2^{-1}(V)}.$$

Die Menge der Deformationen von  $X$  über dem Raumkeim  $(S, s_0)$  wird mit  $\text{Def}(X, S)$  bezeichnet.

**1.2 Die Kodaira-Spencer-Abbildung****Definition 1.2.1 (verselle Deformationen)**

Sei  $\mathfrak{X} \rightarrow R$  eine Deformation einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit  $X$  über einem komplexen Raumkeim  $R$ . Die Deformation heißt *vollständig*, wenn zu jeder weiteren Deformation  $\mathfrak{Y} \rightarrow S$  ein Morphismus  $\alpha : S \rightarrow R$  existiert, so dass die Deformation  $\mathfrak{X} \times_R S \rightarrow S$  zu  $\mathfrak{Y} \rightarrow S$  isomorph ist.

Die Deformation heißt *effektiv*, wenn folgendes gilt: Ist  $\beta : S \rightarrow R$  ein weiterer Morphismus mit  $\mathfrak{X} \times_R S \rightarrow S$  isomorph zu  $\mathfrak{Y} \rightarrow S$ , so ist  $T(\alpha) = T(\beta)$ . Dabei sei  $T(\alpha) : T(R) \rightarrow T(S)$  die Tangentialabbildung von  $\alpha$ .

Eine Deformation heißt *versell*, wenn sie vollständig und effektiv ist. Ist bei einer versellen Deformation der Morphismus  $\alpha$  eindeutig (und nicht nur die Tangentialabbildung  $T(\alpha)$ ), so heißt die Deformation *universell*.

**Definition 1.2.2 (vertikale Automorphismen)**

1. Es sei  $(S, s_0)$  ein komplexer Raumkeim und  $T$  ein Repräsentant von  $S$ . Seien  $X, Y$  komplexe Räume. Unter einer holomorphen Abbildung  $X \times S \rightarrow Y \times S$  versteht man eine Äquivalenzklasse von holomorphen Abbildungen

$$h : W \rightarrow Y \times T \text{ mit } \text{pr}_T \circ h = \text{pr}_T$$

wobei  $W \subset X \times T$  eine offene Umgebung von  $X \times \{s_0\}$  ist.

Dabei ist die Äquivalenz zweier holomorpher Abbildungen

$$h_1 : W_1 \rightarrow Y \times T, \quad h_2 : W_2 \rightarrow Y \times T$$

folgendermaßen definiert:  $h_1 \sim h_2$  genau dann, wenn eine Umgebung  $W$  von  $X \times \{s_0\}$  existiert mit  $W \subset W_1 \cap W_2$  und  $h_1|_W = h_2|_W$ .

2. Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $X$ . Ein vertikaler Automorphismus von  $U \times S$  ist eine holomorphe Abbildung  $g : U \times S \rightarrow U \times S$  mit  $g(u, 0) = (u, 0)$  für alle  $u \in U$ . Es sei  $\mathfrak{G}_S(U)$  die (nicht abelsche) Gruppe der vertikalen Automorphismen von  $U \times S$ . Dann ist durch  $U \mapsto \mathfrak{G}_S(U)$  eine Garbe  $\mathfrak{G}_S$  gegeben.

**Definition 1.2.3 (Die Abbildung  $\text{Def}(X, S) \rightarrow H^1(X, \mathfrak{G})$ )**

Es sei  $X$  eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit,  $S$  ein komplexer Raum,  $\mathfrak{X} \rightarrow S$  eine Deformation von  $X$  über  $S$ . Weiter seien  $\psi_i : U_i \times S \rightarrow Z_i$  Isomorphismen wie in Bemerkung 1.1.2. Da  $X$  kompakt ist, kann man eine endliche Überdeckung  $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$  von  $X$  finden.

Man definiert nun:

$$g_{ij} := \psi_i^{-1} \circ \psi_j : (U_i \cap U_j) \times S \rightarrow (U_i \cap U_j) \times S,$$

wobei die Verkettung repräsentantenweise definiert wird, und die Definitionsmenge von  $\psi_j$  so klein gewählt wird, dass ihr Bild in der Definitionsmenge von  $\psi_i^{-1}$  enthalten ist. Dann sind die  $g_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathfrak{G}_S)$  und  $(g_{ij})$  ist ein Element von  $Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}_S)$ . Dadurch wird ein Element aus  $H^1(X, \mathfrak{G}_S)$  definiert.

**Satz 1.2.4** *Die so definierte Zuordnung liefert eine Bijektion*

$$\text{Def}(X, S) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathfrak{G}_S).$$

*Beweis:* [Dou, S. 11]

*Vereinbarung:* Im weiteren sei jetzt  $m \in \mathbb{N}$  und  $B$  der Keim des  $\mathbb{C}^m$  im Ursprung. Für  $\mathfrak{G}_B$  schreiben wir im folgenden einfach  $\mathfrak{G}$ .

**Definition 1.2.5 (Die Garbe  $\mathfrak{G}^2$ )**

Es sei  $U \subset \mathbb{C}^N$ , und  $g : W \rightarrow U \times T$  mit  $U \times \{0\} \subset W \subset U \times T$  sei Repräsentant eines vertikalen Automorphismus von  $U \times B$ . Dann gibt es eine holomorphe Funktion  $g^* : W \rightarrow U$  mit

$$g(z, t) = (g^*(z, t), t)$$

Da  $g^*(z, t)$  eine holomorphe Funktion ist, lässt sich  $g^*(z, t)$  nach  $t$  entwickeln (zur Vereinfachung sei bei  $g^*$  der Stern weggelassen):

$$g(z, t) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^m} g_\nu t^\nu \text{ mit } g_\nu \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N})^N$$

Da  $g(z, 0) = z$  gilt, hat man genauer:

$$g(z, t) = z + \sum_{|\nu| \geq 1} g_\nu t^\nu$$

Nun definiert man

$$g \in \mathfrak{G}^2 : \iff g_\nu = 0 \text{ für } |\nu| = 1 \iff g(z, t) = z + \sum_{|\nu| \geq 2} g_\nu t^\nu$$

Man rechnet leicht nach, dass  $\mathfrak{G}^2$  ein Normalteiler in  $\mathfrak{G}$  ist.

**Satz 1.2.6** *Mit den obigen Bezeichnungen gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$H^1(X, \mathfrak{G}/\mathfrak{G}^2) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \Theta) \otimes (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2).$$

*Beweis:*

$X$  habe die Dimension  $N$ . Es sei  $(U_i, h_i)$  ein Atlas von  $X$ . Außerdem sei  $\Theta$  die Garbe der holomorphen Schnitte der Tangentialgarbe von  $X$ . Der Tangentialraum von  $\mathbb{C}^N$  im Ursprung wird kanonisch mit  $\mathbb{C}^N$  identifiziert. Daher kann die Tangentialabbildung  $T_{h_i}$  als Abbildung von  $\Theta$  nach  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N}^N$  aufgefasst werden. Dann definiert man einen Garbenepimorphismus  $\mathfrak{G} \rightarrow \Theta \otimes (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$  wie folgt:

Wir definieren  $\alpha_i : \Gamma(h_i(U_i), \mathfrak{G}) \rightarrow \Gamma(h_i(U_i), \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N}^N \otimes (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2))$  durch die Zuordnung

$$g = \text{id} + \sum_{|\nu| \geq 1} g_\nu t^\nu \mapsto \sum_{|\nu|=1} g_\nu \otimes t^\nu$$

Weiter definieren wir  $\alpha$  so, dass folgendes Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U_i, \mathfrak{G}) & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma(U_i, \Theta \otimes (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)) \\ h_i \downarrow & & \downarrow T_{h_i} \otimes 1 \\ \Gamma(h_i(U), \mathfrak{G}) & \xrightarrow{\alpha_i} & \Gamma(h_i(U), \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N}^N \otimes (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)) \end{array}$$

Es lässt sich zeigen, dass  $\alpha$  unabhängig von der gewählten Karte ist (siehe [FoK, S. 280]). Dadurch erhält man den gewünschten Epimorphismus

$$\mathfrak{G} \rightarrow \Theta \otimes (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$$

mit Kern  $\mathfrak{G}^2$ . Dies liefert schließlich einen Isomorphismus

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^2 \xrightarrow{\sim} \Theta \otimes (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2),$$

der einen Isomorphismus

$$H^1(X, \mathfrak{G}/\mathfrak{G}^2) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \Theta \otimes (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2))$$

induziert. □

**Definition 1.2.7 (Kodaira-Spencer-Abbildung )**

Es sei  $\mathfrak{X} \rightarrow B$  eine Deformation über  $B$ . Dann hat man die Abbildungen:

$$\text{Def}(X, B) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathfrak{G}) \rightarrow H^1(X, \mathfrak{G}/\mathfrak{G}^2) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \Theta \otimes (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)),$$

wobei die Abbildung  $H^1(X, \mathfrak{G}) \rightarrow H^1(X, \mathfrak{G}/\mathfrak{G}^2)$  die von der kanonischen Projektion  $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}/\mathfrak{G}^2$  induzierte Abbildung ist. Das heißt, der Deformation  $\mathfrak{X} \rightarrow B$  wird ein Element  $\Xi \in H^1(X, \Theta \otimes (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2))$  zugeordnet. Die Kodaira-Spencer-Abbildung ist dann die Abbildung:

$$\rho : T(B) = (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^* \rightarrow H^1(X, \Theta), \quad v \mapsto \rho(v) := \langle \Xi, v \rangle$$

**Satz 1.2.8 ( Vollständigkeitssatz)**

*Eine Deformation, deren Kodaira-Spencer-Abbildung surjektiv ist, ist vollständig. Ist die Kodaira-Spencer-Abbildung bijektiv, so ist die Deformation sogar versell.*

*Beweis:* Siehe [KS2, S. 284]

Für den Fall von Riemannschen Flächen kann man aus der Vollständigkeit der Kodaira-Spencer-Abbildung sogar schließen, dass die Deformation universell ist. Wir werden nämlich zeigen, dass eine verselle Deformation einer Riemannschen Fläche immer auch universell ist. Dazu brauchen wir zunächst eine Definition:

**Definition 1.2.9** Sei  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow S$  eine Deformation einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit. Ein Unterkeim  $(M, s_0)$  von  $(S, s_0)$  heißt modular, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

Sind  $g : Z \rightarrow M$  und  $h : Z \rightarrow S$  Morphismen komplexer Räume und sind die davon induzierten Deformationen über  $Z$  isomorph, dann stimmen die Keime von  $g$  und  $h$  überein.

Wir zitieren folgenden Satz:

**Satz 1.2.10**<sup>2</sup> Sei  $(S, s_0)$  ein komplexer Raumkeim,  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow S$  eine verselle Deformation einer kompakten Mannigfaltigkeit  $X_0$ . Dann gibt es eine offene Umgebung  $S' \subset S$  von  $s_0$  und einen abgeschlossenen Unterraum  $M \subset S'$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $M$  ist modular und enthält alle modularen Unterräume von  $(S, s_0)$ .
2. Der Träger von  $M$  ist die Menge aller Lösungen der Gleichung

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X_t, \Theta_{X_t}) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X_0, \Theta_{X_0}), \quad t \in S'$$

**Bemerkung 1.2.11** Ist der maximale modulare Unterraum  $M$  einer versellen Deformation offen, dann ist die Deformation universell und umgekehrt.

*Beweis:* Dies ist klar nach der Definition von Modularität.

**Folgerung 1.2.12** Ist  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow S$  eine verselle Deformation einer komplexen Mannigfaltigkeit und gilt für die Fasern  $X_t := \pi^{-1}(t)$ :

$$\dim H^0(X_t, \Theta_{X_t}) = \text{const.},$$

dann ist die Deformation auch universell.

---

<sup>2</sup>[Pa, S. 95]

*Beweis:* Es seien  $M, S'$  wie im Satz 1.2.10. Gilt  $\dim H^0(X_t, \Theta_{X_t}) = \text{const.}$ , dann ist der Träger von  $M$  gleich  $S'$ , also ist die Deformation über  $S'$  modular und, da  $S'$  offen ist, damit universell.

**Folgerung 1.2.13** Eine verselle Deformation einer Riemannschen Fläche  $X_0$  ist auch universell.

Wir zitieren zunächst einen wichtigen Satz:

**Satz 1.2.14** *Ist  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow S$  eine Deformation einer Riemannschen Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g$  und  $S$  eine komplexe Mannigfaltigkeit, dann gibt es eine Überdeckung  $(S_i)_{i \in J}$  von  $S$  und lokale  $C^\infty$ -differenzierbare Trivialisierungen*

$$\Psi_i : S_i \times X \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(S_i)$$

mit  $\pi \circ \Psi_i = \text{pr}_{S_i}$ . Man sagt auch, die Deformation ist lokal  $C^\infty$ -differenzierbar trivial.

*Beweis:* Siehe [Ko, S. 67]

**Folgerung 1.2.15** Ist  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow S$  eine Deformation einer Riemannschen Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g$  und  $S$  ein komplexer Raum, dann ist die Deformation topologisch lokal trivial.

*Beweis:* Siehe [Eng, S. 218]. Die Aussage folgt daraus, dass jede Deformation isomorph zum Rückzug einer Deformation über einer komplexen Mannigfaltigkeit mittels eines geeigneten Morphismus der Basen ist. Die Existenz einer vollständigen Deformation über einer komplexen Mannigfaltigkeit werden wir in Kapitel 2 beweisen.

*Beweis von Folgerung 1.2.13:*

Für eine Riemannsche Fläche  $X$  mit Geschlecht  $g$  gilt <sup>3</sup>:

$$\dim H^0(X, \Theta) = \begin{cases} 3 & \text{für } g = 0 \\ 1 & \text{für } g = 1 \\ 0 & \text{für } g \geq 2 \end{cases}$$

Da jede Deformation Riemannscher Flächen nach Folgerung 1.2.15 lokal topologisch trivial ist, ist insbesondere das Geschlecht der Fasern konstant. Daher ist auch die Dimension von  $H^0(X_t, \Theta_{X_t})$  konstant, und mit Folgerung 1.2.12 folgt die Behauptung.  $\square$

---

<sup>3</sup>Siehe [FK, S. 80]. Dort werden allgemein  $\dim H^0(X, \Omega^{\otimes q})$  für beliebiges  $q \in \mathbb{Z}$  angegeben. Die Aussagen werden mit Hilfe des Satzes von Riemann-Roch bewiesen.

## 2 Konstruktion einer Deformation

Ist  $X$  eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, so weiß man, dass eine universelle Deformation von  $X$  existiert. Der Beweis hierfür ist sehr schwierig (siehe [FoK]). Im Falle von Riemannschen Flächen kann man dagegen mit relativ elementaren Methoden die Existenz einer universellen Deformation zeigen. Eine solche Deformation wird in diesem Kapitel konstruiert. Für die Konstruktion ist ganz wesentlich, dass man eine Riemannsche Fläche mit nur zwei Steinschen Mengen  $U_0, U_1$  überdecken kann, so dass dann  $Z^1((U_0, U_1), \Theta)$  isomorph zu  $\Theta(U_0 \cap U_1)$  ist. Eine solche Überdeckung ist für höherdimensionale Mannigfaltigkeiten nicht mehr möglich.

### 2.1 Integration von Vektorfeldern auf relativ kompakten Teilmengen

**Satz 2.1.1** *Es sei  $D$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Es sei  $z_0 \in D$  beliebig. Dann gibt es eine offene Menge  $W \subset \mathbb{C} \times D$  mit  $(0, z_0) \in W$  und eine Abbildung  $\varphi : W \rightarrow D$ , die Fluss von  $f$  ist, d. h. für die gilt:*

1.  $\varphi : W \rightarrow D$  ist holomorph
2.  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, z) = f(\varphi(t, z))$  für alle  $(t, z) \in W$
3.  $\varphi(0, \cdot) = \text{id}_D$ ,
4.  $\varphi(t, \varphi(s, z)) = \varphi(t+s, z)$  für alle  $(s, z) \in W$  und für alle  $t$  mit  $(t, \varphi(s, z)) \in W$  und  $(s+t, z) \in W$

Für den Beweis verwenden wir folgenden Satz:

**Satz 2.1.2** <sup>4</sup>

*Sei  $g$  holomorph im Gebiet  $D \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$ . Sei  $H$  ein abgeschlossenes Gebiet in  $\mathbb{C}$  und  $\psi : H \rightarrow \mathbb{C}^m$  eine Funktion von  $t$ , die so gewählt ist, dass  $(t, \psi(t)) \in D$  für alle  $t \in H$  ist und außerdem  $\psi(t)$  eine Lösung der Differentialgleichung*

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t) = g(t, \psi(t))$$

---

<sup>4</sup>Siehe [Cod, S. 35]

auf  $H$  ist. Dann gibt es  $\delta > 0$ , so dass für alle  $(\tau, z) \in U$  mit

$$U := \{(t, z) : t \in H, |z - \psi(t)| < \delta\}$$

eine eindeutige Lösung  $\eta = \eta(t, \tau, z)$  der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(t, \tau, z) = g(t, \eta(t, \tau, z))$$

mit

$$\eta(\tau, \tau, z) = z$$

auf  $H$  existiert.

$\eta$  ist dann in dem  $m + 2$ -dimensionalen komplexen Gebiet  $V := H \times U$  holomorph

*Beweis von Satz 2.1.1:*

Setzt man bei Satz 2.1.2  $g(t, z) := f(z)$ , definiert man  $\psi(t)$  als eine Lösung der Differentialgleichung  $\frac{\partial \psi}{\partial t}(t) = f(\psi(t))$  auf einer abgeschlossenen Umgebung  $H$  von 0, wobei als Anfangsbedingung  $\psi(0) = z_0$  gewählt wird, so erhält man eine Lösung  $\eta(t, \tau, z)$  mit den oben genannten Eigenschaften. Definiert man  $\varphi(t, z) := \eta(t, 0, z)$ , so ist  $\varphi(t, z)$  in einer offenen Umgebung von  $(0, z_0)$  definiert, und außerdem ein Fluss von  $f$ , denn die Bedingung

$$\varphi(t, \varphi(s, z)) = \varphi(t + s, z)$$

folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung  $\varphi(t, z)$ . □

**Bezeichnung 2.1.3** Für  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  setzen wir  $B_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon\}$ .

**Lemma 2.1.4** Es sei  $D$  ein Gebiet in  $\mathbb{C}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}^n$  eine holomorphe Funktion. Außerdem sei  $V$  offen mit  $V \Subset D$ .

Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$  und eine Abbildung  $\varphi : B_\varepsilon \times V \rightarrow B_\varepsilon \times D$ ,  $(t, z) \mapsto \varphi(t, z)$ , die Fluss von  $f$  ist.

*Beweis:*

Zu  $z \in V$  gibt es ein  $\varepsilon_z$ , eine offene Umgebung  $U_z$  und eine Abbildung  $\varphi_z : B_{\varepsilon_z} \times U_z \rightarrow D$ , die Fluss des Vektorfeldes  $f$  ist. Wegen  $V \Subset D$  gibt es endlich viele  $U_{z_i}, i = 1, \dots, n$ , die  $V$  überdecken. Außerdem stimmen die Funktionen  $\varphi_i, \varphi_j$  auf  $(B_{\varepsilon_i} \cap B_{\varepsilon_j}) \times (U_{z_i} \cap U_{z_j})$  überein (\*). Setze nun:

$$\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$



und

$$\varphi(t, z) := \varphi_i(t, z)$$

für  $z \in U_{z_i}$ . Wegen (\*) ist  $\varphi(t, z)$  wohldefiniert. Dann ist  $\varphi(t, z)$  der gesuchte Fluss.  $\square$

## 2.2 Integration eines parametrisierten Vektorfeldes

**Bemerkung 2.2.1** Es sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$ .  $\Theta$  sei die Garbe der holomorphen Schnitte des Tangentialbündels. Dann hat die erste Kohomologiegruppe  $H^1(X, \Theta)$  die Dimension

$$h^1(X, \Theta) := \dim H^1(X, \Theta) = \begin{cases} 0 & \text{für } g = 0 \\ 1 & \text{für } g = 1 \\ 3g - 3 & \text{für } g \geq 2 \end{cases}$$

*Beweis:* Siehe [Mir, S. 367]. Die Aussage wird hier auf eine Berechnung der Dimension von  $H^0(X, \Omega^{\otimes 2})$  zurückgeführt. Eine Übersicht über die Dimensionen sämtlicher 0-ter Kohomologiegruppen von holomorphen  $q$ -Differentialen findet sich bei [FK, S. 80].

**Bemerkung 2.2.2** Es sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche. Es sei  $U_0 \subset X$  eine Teilmenge von  $X$ , die zu einer Kreisscheibe  $D$  isomorph ist.  $U_1$  sei  $X$  ohne den Mittelpunkt von  $U_0$ .  $U_{01} := U_0 \cap U_1$  ist isomorph zu  $D^* := D \setminus \{0\}$ .

Es sei  $m = \dim H^1(X, \Theta)$ . Wähle auf  $U_{01}$   $m$  holomorphe Vektorfelder  $\vartheta_\mu, \mu = 1 \dots, m$  (also  $\vartheta_\mu \in \Theta(U_{01})$ ), so dass die Äquivalenzklassen  $[\vartheta_\mu]$  der von  $\vartheta_\mu$  erzeugten Kozyklen eine Basis von  $H^1(\mathfrak{U}, \Theta)$  bilden. Dann bilden die Äquivalenzklassen von  $[\vartheta_\mu]$  in  $H^1(X, \Theta)$  eine Basis von  $H^1(X, \Theta)$ .

Für den Beweis brauchen wir zunächst einige Definitionen und Sätze

### Definition 2.2.3 (Steinsche Räume)

Ein (nicht notwendig) reduzierter komplexer Raum mit abzählbarer Topologie  $X$  heißt *holomorph konvex*, wenn es für jede unendliche, diskrete und abgeschlossene Teilmenge  $M \subset X$  eine holomorphe Funktion  $h$  auf  $X$  gibt, so dass die Menge der Werte von  $|h|$  auf  $M$  unbegrenzt ist.

Ein holomorph konvexer Raum  $X$  heißt *holomorph separabel*, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten  $x_1, x_2 \in X$  eine holomorphe Funktion  $f \in \mathcal{O}(X)$  gibt, mit  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

Ein *Steinscher Raum* ist ein parakompakter, komplexer (nicht notwendig reduzierter), holomorph konvexer und holomorph separabler Raum.

**Definition 2.2.4 (Steinsche Überdeckung)** <sup>5</sup>

Eine offene Überdeckung  $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$  eines komplexen Raumes heißt *Steinsche Überdeckung*, wenn  $\mathfrak{U}$  lokal endlich ist, und alle Teilmengen  $U_i$  Steinsch sind.

**Satz 2.2.5** *Es sei  $X$  ein Steinscher Raum. Dann gilt für jede kohärente analytische Garbe  $\mathcal{S}$  auf  $X$ :*

$$H^q(X, \mathcal{S}) = 0 \quad \text{für alle } q \geq 1.$$

*Beweis:* Siehe [GR1, S. 128]

**Satz 2.2.6** *Jede nichtkompakte Riemannsche Fläche ist Steinsch.*

*Beweis:* siehe [GR1, S. 138]

**Satz 2.2.7** *Es sei  $\mathcal{S}$  eine Garbe abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum  $X$  und  $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $X$ , so dass für alle  $i \in I$  gilt:  $H^1(U_i, \mathcal{S}) = 0$  (eine solche Überdeckung heißt Leraysch). Dann ist*

$$H^1(X, \mathcal{S}) \cong H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{S})$$

*Beweis:* Siehe [Fo, S. 101]

*Beweis von Bemerkung 2.2.2:*

Die Überdeckung  $\mathfrak{U} := (U_0, U_1)$  ist nach Bemerkung 2.2.6 Steinsch und die Garbe  $\Theta$  ist kohärent, denn sie ist lokal isomorph zu  $\mathcal{O}$ . Daher ist  $H^1(U_i, \Theta) = 0$ . Die Überdeckung ist also Leraysch, und nach Satz 2.2.7 gilt dann  $H^1(X, \Theta) \cong H^1(\mathfrak{U}, \Theta)$ .

Wählt man nun Vektorfelder  $\vartheta_\mu \in \Theta(U_{01})$ ,  $\mu = 1, \dots, m$  so dass die zugehörigen Kozyklen (bzw. deren Äquivalenzklassen  $[\vartheta_\mu]$ ) eine Basis von  $H^1(\mathfrak{U}, \Theta)$  bilden, so bilden die Äquivalenzklassen von  $[\vartheta_\mu]$  in  $H^1(X, \Theta)$  wegen  $H^1(\mathfrak{U}, \Theta) \cong H^1(X, \Theta)$  eine Basis von  $H^1(X, \Theta)$ .  $\square$

---

<sup>5</sup>[GR1, S. 132]

**Definition 2.2.8** Es gelten die Voraussetzungen von Bemerkung 2.2.2. Definiere damit ein Vektorfeld  $F$  auf  $\mathbb{C}^m \times U_{01}$  durch

$$F(t_1, \dots, t_m, z) := \left( 0, \dots, 0, \sum_{\mu=1}^m t_\mu \vartheta_\mu(z) \right)$$

Abkürzung: In Zukunft schreiben wir  $t$  für  $(t_1, \dots, t_m)$ .  $t$  soll also immer ein Element von  $\mathbb{C}^m$  sein.

**Definition 2.2.9** Ein Fluss auf einer Riemannschen Fläche wird analog zu einem Fluss auf einem Gebiet in  $\mathbb{C}$  definiert (siehe Definition in Satz 2.1.1.).

**Bezeichnung 2.2.10** Es sei  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ . Dann sei  $B_\varepsilon^k := \{z \in \mathbb{C}^k : \|z\|_p < \varepsilon\}$  mit  $1 \leq p \leq \infty$  beliebig, aber fest gewählt. Falls die Dimension klar ist, schreiben wir auch einfach  $B_\varepsilon$ . Die Art der Norm spielt keine Rolle.

**Lemma 2.2.11** Es gelten die Voraussetzungen von Definition 2.2.8. Es seien  $\vartheta_\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, m$  Vektorfelder wie dort. Wähle außerdem  $\delta \in \mathbb{R}^+$  beliebig und  $V_{01} \Subset U_{01}$  offen.

Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$  und eine Abbildung

$$\Phi : B_\varepsilon^1 \times B_\delta^m \times V_{01} \rightarrow B_\delta^m \times U_{01}, \quad (\tau, t, z) \mapsto \Phi(\tau, t, z)$$

die Fluss des Vektorfeldes  $F$  ist.

*Beweis:* Die Aussage folgt aus Lemma 2.1.4.

**Notiz 2.2.12** Es gelten die Voraussetzungen von oben. Dann gilt:

$$\Phi(\tau, t, x) = (t, \varphi(\tau, t, z))$$

mit einer holomorphen Funktion

$$\varphi(\tau, t, z) : B_\varepsilon^1 \times B_\delta^m \times V_{01} \rightarrow U_{01},$$

die ein Fluss des Vektorfeldes  $f(t, z) := \sum_{\mu=1}^m t_\mu \vartheta_\mu(z)$  ist.

*Beweis:*

Es sei  $\Phi(\tau, t, z) := (g_1(\tau, t, z), \dots, g_m(\tau, t, z), \varphi(\tau, t, z))$ . Dann ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}(\tau, t, z) = \left( \frac{\partial g_1}{\partial \tau}(\tau, t, z), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(\tau, t, z) \right) = (0, \dots, 0, f(\varphi(\tau, t, z))).$$

Daraus folgt:  $g_1$  ist als Funktion von  $\tau$  konstant, und wegen  $g_1(0, t, z) = t_1$  gilt:  $g_1(\tau, t, z) \equiv t_1$ . Außerdem ist  $\varphi(0, t, z) = z$  und  $\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(\tau, t, z) = f(\varphi(\tau, t, z))$ , also ist  $\varphi(\tau, t, z)$  ein Fluss des durch  $f(t, z)$  gegebenen Vektorfeldes auf  $U_{01}$ .  $\square$

**Lemma 2.2.13** Es gelten die Voraussetzung wie in Definition 2.2.8. Dann gibt es ein  $\delta > 0$  und eine Abbildung  $\Psi : B_2^1 \times B_\delta^m \times V_{01} \rightarrow B_\delta^m \times U_{01}$ , die Fluss des Vektorfeldes  $F$  ist.

*Beweis:*

Zunächst sei  $\alpha$  eine beliebige positive reelle Zahl. Wir erinnern uns an die Bezeichnung  $f(t, z) := \sum_{\mu=1}^m t_\mu \vartheta_\mu(z)$  und stellen fest:

$$f(\alpha t, z) = \alpha f(t, z)$$

Es seien  $\varepsilon, \delta, \Phi$  wie in Lemma 2.2.11. Es sei  $\varphi(\tau, t, z) := \text{pr}_z \Phi(\tau, t, z)$ , also  $\Phi(\tau, t, z) = (t, \varphi(\tau, t, z))$ .

Wir setzen  $\varepsilon' := \alpha \varepsilon, \delta' := \frac{\delta}{\alpha}$ , definieren

$$\psi(\tau, t, z) := \varphi\left(\frac{\tau}{\alpha}, \alpha t, z\right)$$

und

$$\Psi : B_{\varepsilon'}^1 \times B_{\delta'}^m \times V_{01} \rightarrow B_{\delta'}^m \times U_{01}, \quad \Psi(\tau, t, z) := (t, \psi(\tau, t, z)).$$

Dann ist  $\Psi$  ein Fluss von  $F$ , denn:

1. Es sind die Anfangsbedingungen erfüllt:

$$\Psi(0, t, z) = (t, \psi(0, t, z)) = (t, \varphi(0, \alpha t, z)) = (t, z).$$

2. Die Differentialgleichung ist erfüllt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(\tau, t, z) &= \left(0, \dots, 0, \frac{\partial}{\partial \tau} \psi(\tau, t, z)\right) = \left(0, \dots, 0, \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi\left(\frac{\tau}{\alpha}, \alpha t, z\right)\right) = \\ &= \left(0, \dots, 0, f\left(\alpha t, \varphi\left(\frac{\tau}{\alpha}, \alpha t, z\right)\right) \cdot \frac{1}{\alpha}\right) = \\ &= \left(0, \dots, 0, f\left(t, \varphi\left(\frac{\tau}{\alpha}, \alpha t, z\right)\right)\right) = (0, \dots, 0, f(t, \psi(\tau, t, z))) = F(\Psi(\tau, t, z)) \end{aligned}$$

Abschließend setzt man noch  $\alpha := \frac{2}{\varepsilon}$ . Damit folgt die Behauptung.  $\square$

### 2.3 Konstruktion des Totalraumes

**Definition 2.3.1** Es seien die Voraussetzungen gegeben wie in 2.2.11. Für die Riemannsche Fläche  $X$  und die Teilmengen  $V_{01} \Subset U_{01} \subset X$  sei  $\Phi(\tau, t, z) : B_2 \times B_\delta \times V_{01} \rightarrow B_\delta \times U_{01}$  ein Fluss des Vektorfeldes  $F$ .

Setze nun:

$$\tilde{\Phi}(t, z) := \Phi(1, t, z), \quad W := \tilde{\Phi}(B_\delta \times V_{01})$$

Dann ist  $\tilde{\Phi} : B_\delta \times V_{01} \rightarrow W \subset B_\delta \times U_{01}$  eine biholomorphe Abbildung.

**Bemerkung 2.3.2** Es ist  $\tilde{\Phi}(0, z) = \Phi(1, 0, z) = (0, z)$ , da  $F(0, z) = 0$  ist.

**Definition 2.3.3** Es gelten die Voraussetzungen von Lemma 2.2.11. Zur Vereinfachung sei  $U_0$  mit  $D$  identifiziert. Definiere  $V_{01} := \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{3} < |z| < \frac{2}{3} \right\}$ . Außerdem sei  $\gamma$  die positiv orientierte Kreislinie mit Mittelpunkt 0 und dem Radius  $\frac{1}{2}$ .

Nun sei  $\tilde{\Phi} : B_\delta \times V_{01} \rightarrow B_\delta \times U_{01}$  wie in Definition 2.3.1. Zur Vereinfachung lassen wir bei  $\tilde{\Phi}$  die Tilde weg und schreiben  $\Phi := \tilde{\Phi}$ . Weiter sei

$$W := \Phi(B_\delta \times V_{01}) \quad \text{und} \quad \varphi_t(z) := \text{pr}_z \Phi(t, z), \quad \text{d. h.} \quad \Phi(t, z) = (t, \varphi_t(z)).$$

Außerdem sei

$$\begin{aligned} \gamma_t &:= \varphi_t(\gamma), \\ R_i &:= \{(t, z) | t \in B_\delta, z \in \text{Int}(\gamma_t)\}, \\ R &:= \{(t, z) | t \in B_\delta, z \in |\gamma_t|\}, \\ R_a &:= \{(t, z) | t \in B_\delta, z \in \text{Ext}(\gamma_t)\}, \end{aligned}$$

wobei  $\text{Int}(\gamma_t)$ ,  $\text{Ext}(\gamma_t)$  das Innere bzw. Äußere der Kurve  $\gamma_t$  bezeichnen.

**Lemma 2.3.4**  $R_i, R_a$  sind relativ offen,  $R_i \cup R, R_a \cup R$  sind relativ abgeschlossen bezüglich  $B_\delta \times U_{01}$ .

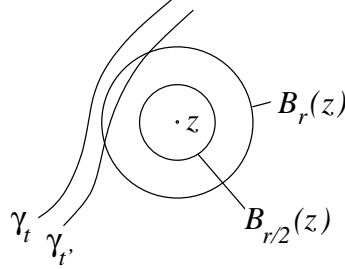
*Beweis:*

1.  $R_i$  ist offen:

Es sei  $(t, z) \in R_i$  beliebig, also  $t \in B_\delta$  und  $z \in \text{Int}(\gamma_t)$ . Da  $\text{Int}(\gamma_t)$  offen ist, gibt es  $r > 0$  mit

$$B_r(z) := \{w : |w - z| < r\} \subset \text{Int}(\gamma_t) \quad (*)$$

*Behauptung:* Es gibt  $\varepsilon > 0$ , so dass für alle  $t' \in B_\varepsilon(t) := \{t' : |t-t'| < \varepsilon\}$  gilt:  $B_{r/2}(z) \subset \text{Int}(\gamma_{t'})$ . Damit ist dann  $B_\varepsilon(t) \times B_{r/2}(z)$  eine offene Umgebung von  $(t, z)$  und  $R_i$  ist offen.



*Beweis der Behauptung:*

Sei  $K(t)$  eine kompakte Umgebung von  $t$ . Dann ist  $\gamma_t(s)$  stetig als Funktion zweier Variablen auf der Menge  $K(t) \times [0, 1]$  und da  $K(t) \times [0, 1]$  kompakt ist, sogar gleichmäßig stetig. Es gibt also ein  $\varepsilon$  mit

$$|\gamma_{t_1}(s_1) - \gamma_{t_2}(s_2)| < \frac{r}{2} \text{ für alle } t_1, t_2 \in K(t), s_1, s_2 \in [0, 1]$$

$$\text{mit } |t_1 - t_2| < \varepsilon \text{ und } |s_1 - s_2| < \varepsilon.$$

Wählt man  $\varepsilon$  so, dass  $B_\varepsilon \subset K(t)$  ist, dann ist

$$|\gamma_t(s) - \gamma_{t'}(s)| < \frac{r}{2} \text{ für alle } t' \in B_\varepsilon(t) \quad (**)$$

Wegen (\*) und (\*\*) ist dann  $B_{r/2}(z) \cap |\gamma_{t'}| = \emptyset$  für  $t' \in B_\varepsilon$ , so dass also entweder  $B_{r/2} \subset \text{Int}(\gamma_{t'})$  oder  $B_{r/2}(z) \subset \text{Ext}(\gamma_{t'})$  gelten muss. Weil die Umlaufzahl von  $\gamma_{t'}$  um  $z$  stetig als Funktion von  $t'$  ist (siehe auch den Beweis von Bemerkung 2.3.7), kommt nur  $B_{r/2} \subset \text{Int}(\gamma_{t'})$  in Frage, also ist

$$B_{r/2}(z) \subset \text{Int}(\gamma_{t'}) \text{ für } t' \in B_\varepsilon.$$

□

2.  $R_a \cup R$  ist abgeschlossen als Komplement von  $R_i$ .

3. Dass  $R_a$  offen und  $R_i \cup R$  abgeschlossen ist, folgt analog.

□

**Definition 2.3.5** Es gelten die Voraussetzungen von Lemma 2.2.11.

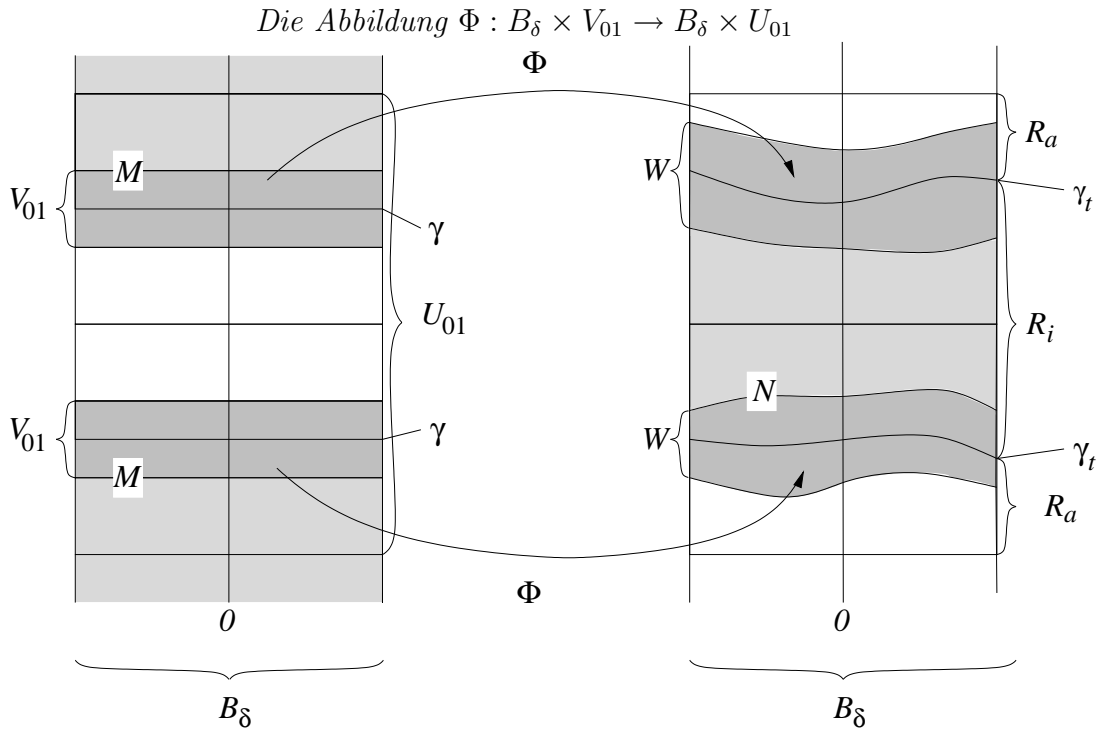
Man definiert

$$M := B_\delta \times (\text{Ext}(\gamma) \cup V_{01}) \quad \text{und} \quad N := W \cup R_i.$$

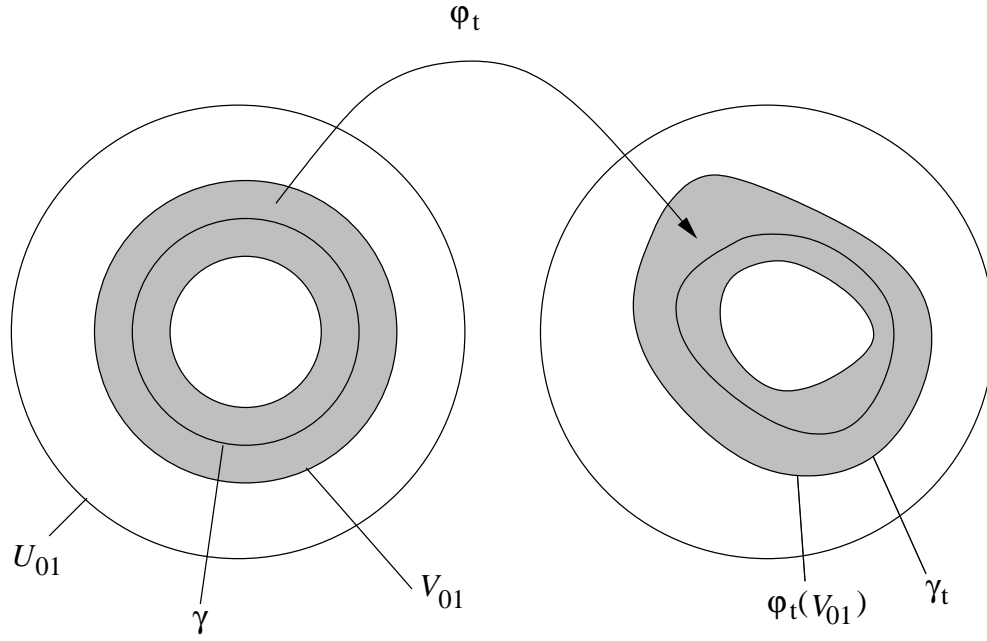
Dann ist  $M$  eine offene Teilmenge von  $B_\delta \times X$  und  $N$  wegen Lemma 2.3.4 eine offene Teilmenge von  $B_\delta \times U_{01}$ . Es ist klar, dass  $M, N$  ebenfalls Mannigfaltigkeiten sind.

Es ist  $B_\delta \times V_{01}$  eine offene Teilmenge von  $M$ , die durch  $\Phi$  biholomorph auf  $W \subset N$  abgebildet wird. Wir definieren nun:

$$\mathfrak{X} := M \cup_\Phi N.$$



*Schnitt in der  $t$ -Ebene*



**Satz 2.3.6** *Mit den obigen Definitionen ist  $\mathfrak{X}$  hausdorffsch und damit wieder eine komplexe Mannigfaltigkeit.*

Für den Beweis brauchen wir zuerst eine Bemerkungen:

**Bemerkung 2.3.7** Sei  $z \in V_{01} \cap \text{Int}(\gamma)$  und  $t \in B_\delta$  beliebig. Dann ist auch  $\varphi_t(z) \in \varphi_t(V_{01}) \cap \text{Int}(\gamma_t)$ . Die analoge Aussage gilt für  $z \in V_{01} \cap \text{Ext}(\gamma)$ .

*Beweis:*

Betrachte die Abbildung  $\chi : t \mapsto \chi(t) := \text{ind}(\gamma_t, \varphi_t(z))$ . Da  $\varphi_t$  bijektiv für alle  $t$  ist, gilt für alle  $t$ :

$$\varphi_t(z) \notin |\gamma_t|$$

Damit ist die Funktion  $\chi$  für alle  $t \in B_\delta$  definiert.  $\chi$  ist auf  $B_\delta$  stetig, denn

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} \frac{d\zeta}{\zeta - \varphi_t(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{1}{\gamma_t(s) - \varphi_t(z)} |\dot{\gamma}_t(s)| ds$$



und der letzte Ausdruck ist stetig in  $t$ . Da  $\chi$  nur ganzzahlige Werte annehmen kann, ist  $\chi \equiv 1$ , also  $\varphi_t(z) \in \text{Int}(\gamma_t)$  für alle  $t$ . Die Aussage für  $z \in V_{01} \cap \text{Ext}(\gamma)$  folgt analog.

**Bemerkung 2.3.8** Es gilt für alle  $t \in B_\delta$ , und beliebige Teilmengen  $A \subset V_{01}$ :

$$\begin{aligned}\varphi_t(A) \cap \text{Int}(\gamma_t) &= \varphi_t(A \cap \text{Int}(\gamma)) \\ \varphi_t(A) \cap \text{Ext}(\gamma_t) &= \varphi_t(A \cap \text{Ext}(\gamma))\end{aligned}$$

*Beweis:* Wir beweisen zuerst die Aussage für  $\text{Int}(\gamma)$ .

1. Sei  $z \in A \cap \text{Int}(\gamma)$  beliebig. Dann ist  $\varphi_t(z) \in \varphi_t(A) \cap \text{Int}(\gamma_t)$  nach Bemerkung 2.3.7, woraus folgt

$$\varphi_t(A \cap \text{Int}(\gamma)) \subset \varphi_t(A) \cap \text{Int}(\gamma_t).$$

2. Sei  $\zeta \in \varphi_t(A) \cap \text{Int}(\gamma_t)$  beliebig. Sei  $z := \varphi_t^{-1}(\zeta)$ . Dann ist  $z \in A$ . Es kann  $z$  nach Bemerkung 2.3.7 nicht in  $\text{Ext}(\gamma)$  liegen. In  $|\gamma|$  kann  $z$  wegen der Bijektivität von  $\varphi_t$  ebenfalls nicht sein, also ist  $z \in \text{Int}(\gamma)$ . Es ist also  $\zeta$  im Bild von  $A \cap \text{Int}(\gamma)$ , woraus insgesamt folgt:

$$\varphi_t(A) \cap \text{Int}(\gamma_t) \subset \varphi_t(A \cap \text{Int}(\gamma)).$$

Der Beweis für  $\text{Ext}(\gamma)$  verläuft analog. □

**Bemerkung 2.3.9** Es gilt:

$$\begin{aligned}\Phi(B_\delta \times (V_{01} \cap \text{Int}(\gamma))) &= W \cap R_i \\ \Phi(B_\delta \times (V_{01} \cap \text{Ext}(\gamma))) &= W \cap R_a\end{aligned}$$

*Beweis:* Wir zeigen, dass für beliebiges  $t \in B_\delta$  die Schnittmengen mit der  $t$ -Ebene übereinstimmen.

Die Menge  $\Phi(B_\delta \times (V_{01} \cap \text{Int}(\gamma)))$  hat mit der  $t$ -Ebene die Schnittmenge  $\varphi_t(V_{01} \cap \text{Int}(\gamma))$ , die Menge  $W \cap R_i$  hat die Schnittmenge  $\varphi_t(V_{01}) \cap \text{Int}(\gamma_t)$  und nach Bemerkung 2.3.8 stimmen beide Mengen überein. Die Aussage für  $\text{Ext}(\gamma)$  folgt analog. □

Für den Beweis von Satz 2.3.6 verwenden wir folgendes Lemma aus [Brö, S. 109]. Die Aussage wird dort nicht bewiesen und ist auch in der Literatur nicht zu finden. Daher wird der Beweis hier angegeben.

**Lemma 2.3.10** Es seien  $X, Y$  Hausdorff-Räume mit 1. Abzählbarkeitsaxiom,  $X_1 \subset X$  offen,  $Y_1 \subset Y$  offen,  $\varphi : X_1 \xrightarrow{\sim} Y_1$ ,  $Z := (X \cup Y)/\varphi$ .

Dann gilt:  $Z$  ist genau dann hausdorffsch, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

Ist  $x \in X \setminus X_1$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $x_n \in X_1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , so existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi(x_n))$  nicht in  $Y$ .

*Beweis:* Es seien  $p : X \rightarrow Z, q : Y \rightarrow Z$  die kanonischen Projektionen.

„ $\Rightarrow$ “: Es sei  $Z$  hausdorffsch. Annahme: Es gibt eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in X_1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X \setminus X_1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = y \in Y$ . Dann ist  $p(x_n)$  eine Folge in  $Z$ , die gegen  $p(x)$  konvergiert.

Außerdem ist  $q(\varphi(x_n)) = p(x_n)$ , d.h. die Folge  $p(x_n)$  konvergiert auch gegen  $q(y)$ .

Es ist  $p(x) \in p(X \setminus X_1), q(y) \in q(Y)$  und daher ist  $p(x) \neq q(y)$ . Die Folge  $p(x_n)$  hätte also zwei verschiedenen Limes im Widerspruch dazu, dass  $Z$  hausdorffsch sein soll, also kann es keine Folge  $x_n$  mit den oben genannten Eigenschaften geben.

„ $\Leftarrow$ “: Es seien zwei beliebige Punkte  $x, y \in Z$  gegeben. Man findet sofort zwei trennende Umgebungen aus  $\{X \setminus \overline{X_1}, X_1, Y \setminus \overline{Y_1}, Y_1\}$ , außer wenn gilt:

$$x \in p(\partial X_1), y \in p(\partial Y_1)$$

Sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $x \in p(\partial X_1), y \in p(\partial Y_1)$ .

Annahme: Man findet keine trennenden Umgebungen, d. h. für alle Umgebungen  $U$  von  $x$  und  $V$  von  $y$  gilt:  $U \cap V \neq \emptyset$ .

$X$  und  $Y$  erfüllen das 1. Abzählbarkeitsaxiom, folglich auch  $Z$ . Daher gibt es eine Umgebungsbasis  $(U_n)$  von  $x$  und eine Umgebungsbasis  $(V_n)$  von  $y$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $U_n \subset p(X), V_n \subset q(Y)$  für alle  $n$ .

Dann sind nach Voraussetzung  $U_n \cap V_n \neq \emptyset$ , wobei  $U_n \cap V_n \subset p(X) \cap q(Y)$  ist.

Wähle  $z_n \in U_n \cap V_n$  beliebig. Dann hat die Folge der  $z_n$  (mindestens) die zwei Limes  $x, y$ .

Setze  $x_n := p^{-1}(z_n), y_n := q^{-1}(z_n)$ . Dann ist  $\varphi(x_n) = y_n, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p^{-1}(x) \in X \setminus X_1, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = q^{-1}(y) \in Y$  im Widerspruch zur Voraussetzung. Also besitzen  $x, y$  doch trennende Umgebungen.

□

*Beweis von Satz 2.3.6*

Wir beweisen, dass es keine Folge  $x_n \in B_\delta \times V_{01}$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in M \setminus (B_\delta \times V_{01}) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n) \in N$$

gibt. Nach dem Lemma 2.3.10 folgt dann, dass  $\mathfrak{X}$  hausdorffsch ist. Wir nehmen also an: Es sei  $x_n \in B_\delta \times V_{01}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in M \setminus (B_\delta \times V_{01})$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n) = y \in N$  und führen diese Annahme in mehreren Schritten zum Widerspruch.

1. Es ist  $x \in B_\delta \times \overline{V_{01}}$ . Andererseits ist  $x \in M \setminus (B_\delta \times V_{01})$ . Daraus folgt  $x \in B_\delta \times \partial V_{01}$ .
2.  $B_\delta \times (U_{01} \cap \text{Ext}(\gamma))$  ist eine Umgebung von  $x$ , daher sind fast alle  $x_n \in B_\delta \times (U_{01} \cap \text{Ext}(\gamma))$ .  
Da alle  $x_n \in B_\delta \times V_{01}$  sind, folgt daher, dass fast alle  $x_n \in V_{01} \cap \text{Ext}(\gamma)$  sind.
3. Damit gilt für fast alle  $x_n$ :  $\Phi(x_n) \in \Phi(B_\delta \times (V_{01} \cap \text{Ext}(\gamma))) = W \cap R_a$  nach Bemerkung 2.3.9.
4. Daraus folgt:  $y \in \overline{W} \cap \overline{R_a} \cap N = \overline{W} \cap \overline{R_a} \cap (W \cup R_i) = W \cap \overline{R_a} = W \setminus R_i$ . Insbesondere ist  $y \in W$  und  $\Phi^{-1}(y) \in B_\delta \times V_{01}$ .
5. Wegen der Stetigkeit von  $\Phi^{-1}$  ist dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \Phi^{-1}(y)$
6. Wegen  $x \in B_\delta \times \partial V_{01}$  und  $\Phi^{-1}(y) \in B_\delta \times V_{01}$  ist  $x \neq \Phi^{-1}(y)$ . Die Folge  $x_n$  hätte also in  $M$  zwei verschiedene Limes, im Widerspruch dazu, dass  $M$  hausdorffsch ist.

□

## 2.4 Nachweis der Eigenschaften einer Deformation

**Bemerkung 2.4.1** Es sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche,  $M, N$  seien wie in Kapitel 2.3 definiert.  $\mathfrak{X} := M \cup_{\Phi} N$ , wobei  $p : M \rightarrow \mathfrak{X}$ ,  $q : N \rightarrow \mathfrak{X}$  die kanonischen Einbettungen seien.  $B_{\delta}$  aus Kapitel 2.3 sei hier mit  $B$  bezeichnet. Dann gilt für alle  $x \in p(M) \cap q(N)$ :

$$\text{pr}_B \circ p^{-1} = \text{pr}_B \circ q^{-1}$$

*Beweis:* Die Abbildung  $\Phi$  ist fasertreu, das heißt  $\text{pr}_B((t, z)) = \text{pr}_B(\Phi(t, z))$  für alle  $(t, z) \in B \times V_{01}$ . Daraus folgt die Behauptung.

**Definition 2.4.2** Man definiert nun eine Abbildung  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  durch:

$$\pi(x) := \begin{cases} \text{pr}_B \circ p^{-1} & \text{auf } p(M) \\ \text{pr}_B \circ q^{-1} & \text{auf } q(N) \end{cases}$$

Nach Bemerkung 2.4.1 ist  $\pi$  dann wohldefiniert.

**Bemerkung 2.4.3**  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  ist eine holomorphe Abbildung.

*Beweis:*  $\pi$  ist auf  $p(M)$  eine Verkettung von holomorphen Abbildungen. Analog ist  $\pi$  auf  $q(N)$  holomorph.  $\square$

**Bemerkung 2.4.4**  $\pi$  ist eine eigentliche Abbildung.

*Beweis:*

Es sei  $K \subset B$  kompakt. Zu zeigen ist, dass dann  $\pi^{-1}(K)$  ebenfalls kompakt ist.

1. Es ist

$$\pi^{-1}(K) = [(K \times X) \cap M] \cup_{\Phi} [(K \times U_{01}) \cap N]$$

Definiere:

$$K_1 := K \times \overline{\text{Ext}(\gamma)}$$

und

$$K_2 := (K \times U_{01}) \cap \overline{R_i}$$

2. Wir zeigen:  $K_1, K_2$  sind kompakt.

Beweis:  $\overline{\text{Ext}(\gamma)}$  ist abgeschlossen und damit kompakt. Damit ist auch  $K_1$  kompakt.

Das Komplement von  $K_2$  ist  $[(B \setminus K) \times U_{01}] \cup R_a$ . Diese Menge ist offen in  $B \times U_{01}$  und damit offen in  $\mathbb{C}^{m+1}$ . Damit ist  $K_2$  abgeschlossen in  $\mathbb{C}^{m+1}$  und als Teilmenge der kompakten Menge  $\overline{B \times U_{01}}$  (Abschluss in  $\mathbb{C}^{m+1}$ ) selbst kompakt.

3. Behauptung:  $p(K_1) \cup q(K_2) = \pi^{-1}(K)$ .

Beweis: Sei  $x \in \pi^{-1}(K)$  beliebig.

Zunächst sei  $x \in p(M)$ , also  $x = p(t, z)$  mit  $(t, z) \in M$ . Dann ist  $t \in K$  und entweder  $z \in \overline{\text{Ext}(\gamma)}$ , so dass  $p(x) \in p(K_1)$  ist, oder aber es ist  $z \in \text{Int}(\gamma) \cap V_{01}$ .

Im zweiten Fall ist dann  $\varphi_t(z) \in \varphi_t(V_{01}) \cap \text{Int}(\gamma_t)$ . Also ist  $\Phi(t, z) \in K_2$  und  $x \in q(K_2)$ .

Der Fall  $x \in p(N)$  geht analog.

4. Da  $p(K_1), p(K_2)$  kompakt sind, ist auch  $K$  kompakt. □

**Satz 2.4.5** *Es gelten die Voraussetzungen von oben. Dann ist  $\mathfrak{X}$  zusammen mit der Abbildung  $\pi$  eine Deformation von  $X$  über  $B$ .*

*Beweis:*

1. Nach Bemerkung 2.4.3 ist  $\pi$  holomorph.
2. Nach Bemerkung 2.4.4 ist  $\pi$  eigentlich.
3.  $\pi^{-1}(0) \cong X$ , denn es ist  $\varphi_0 = \text{id}_{V_{01}}$ .
4. Auf  $p(M)$  gilt  $\pi = \text{pr}_B \circ p^{-1}$ , auf  $q(N)$  gilt  $\pi = \text{pr}_B \circ q^{-1}$ , also ist  $\pi$  flach.

□

## 2.5 Unabhängigkeit der Konstruktion von der Wahl von $V_{01}$

Die Wahl von  $V_{01}$  als Kreisring mit äußerem Radius  $\frac{1}{3}$  und innerem Radius  $\frac{2}{3}$  war willkürlich. Wir hätten auch eine andere relativ kompakte Teilmenge von  $U_{01}$  wählen können. Für die Konstruktion ist nur wichtig, dass  $V_{01}$  homöomorph zu einem Kreisring ist, und es eine einfach geschlossene Kurve  $\gamma \subset V_{01}$  gibt mit  $0 \in \text{Int}(\gamma)$ .

Die Frage ist nun, ob die Deformation von der Wahl von  $V_{01}$  abhängt.

**Satz 2.5.1** *Es seien  $V_{01}, V'_{01}$  zwei Teilmengen von  $U_{01}$  mit der oben beschriebenen Eigenschaft. Konstruiert man gemäß Abschnitt 2.3 zwei Deformationen  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  und  $\pi' : \mathfrak{X}' \rightarrow B'$ , wobei ohne Einschränkung  $B = B'$  gelten soll, dann sind beide Deformationen zueinander isomorph.*

*Beweis:*

1. Zunächst sei  $V_{01} \subset V'_{01}$ . Dann ist auch  $\Phi(B \times V_{01}) \subset \Phi'(B \times V'_{01})$ . Die Mannigfaltigkeiten  $M, M', N, N'$  seien wie in Definition 2.3.5 gegeben, und zwar  $M, N$  für  $\Phi$  und  $M', N'$  für  $\Phi'$ . Man hat also folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M \subset M' & & \\
 & p \swarrow & \cup & \cup & \searrow p' \\
 \mathfrak{X} & & B \times V_{01} & B \times V'_{01} & \mathfrak{X}' \\
 & q \swarrow & \downarrow \Phi & \downarrow \Phi' & \nearrow q' \\
 & & N \subset N' & & 
 \end{array}$$

Dann definieren wir einen Isomorphismus  $\Psi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$  wie folgt:

Für  $\zeta \in \mathfrak{X}$  sei

$$\Psi(\zeta) := p' \circ p^{-1}(\zeta) \quad \text{für } \zeta \in p(M)$$

$$\Psi(\zeta) := q' \circ q^{-1}(\zeta) \quad \text{für } \zeta \in q(N).$$

Wegen  $M \subset M', N \subset N'$  sind zunächst einmal die Verkettungen der Abbildungen definiert.

- (a) Wohldefiniertheit der Abbildung  $\Psi$ : Für  $\zeta \in p(M) \cap q(N)$  ist

$$p' \circ p^{-1}(\zeta) = p' \circ \Phi^{-1} \circ q^{-1}(\zeta) = p' \circ (\Phi')^{-1} \circ q^{-1}(\zeta) = q' \circ q^{-1}(\zeta).$$

(b) Die Abbildung  $\Psi$  ist fasertreu, d. h.  $\pi' \circ \Psi = \pi$ , denn es gilt:

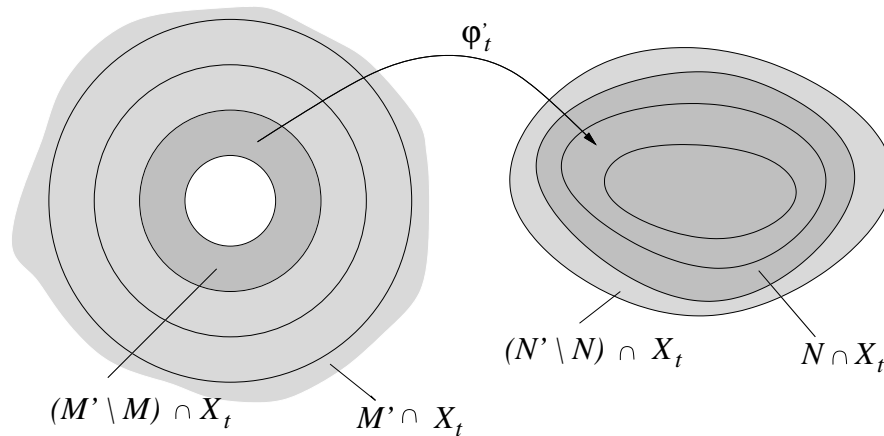
$$\pi' \circ \Psi = \pi' \circ p' \circ p^{-1} = \text{pr}_B \circ p^{-1} = \pi \quad \text{auf } p(M)$$

und analog auf  $q(N)$ .

(c) Wir zeigen, dass  $\Psi$  surjektiv ist: Dazu überlegen wir uns zuerst, dass gilt:

$$\Phi'(M' \setminus M) \subset N, \quad (\Phi')^{-1}(N' \setminus N) \subset M$$

Dies macht man sich am besten mit folgender Abbildung klar:



Daraus folgt

$$p'(M' \setminus M) \subset q'(N), \quad q'(N' \setminus N) \subset p'(M),$$

und damit ist

$$p'(M') \cup q'(N') = p'(M) \cup q'(N) \cup p'(M' \setminus M) \cup q'(N' \setminus N) = p'(M) \cup q'(N).$$

Das Bild von  $\Psi$  ist  $p'(M) \cup q'(N) = p'(M') \cup q'(N') = \mathfrak{X}'$ , also ist  $\Psi$  surjektiv.

(d) Wir zeigen die Injektivität von  $\Psi$ :

$p' \circ p^{-1}, q' \circ q^{-1}$  sind injektiv, zu zeigen ist also nur noch, dass aus  $p' \circ p^{-1}(\zeta) = q' \circ q^{-1}(\zeta')$  die Gleichheit  $\zeta = \zeta'$  folgt. Dies ist erfüllt, da  $p' \circ p^{-1}$  und  $q' \circ q^{-1}$  auf  $p(M) \cap q(N)$  übereinstimmen.

- (e)  $\Psi$  ist holomorph, da sich  $\Psi$  aus holomorphen Abbildungen zusammensetzt.

Damit haben wir insgesamt gezeigt, dass  $(\mathfrak{X}, B, \pi)$  isomorph zu  $(\mathfrak{X}', B, \pi)$  ist.

2. Seien nun  $V_{01}, V'_{01}$  beliebig. Wähle  $V''_{01}$  so, dass  $V_{01}, V'_{01} \subset V''_{01}$ . Seien  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B, \pi' : \mathfrak{X}' \rightarrow B, \pi'' : \mathfrak{X}'' \rightarrow B$  die davon erzeugten Deformationen. Dann ist  $(\mathfrak{X}, B, \pi) \cong (\mathfrak{X}'', B, \pi''), (\mathfrak{X}', B, \pi') \cong (\mathfrak{X}'', B, \pi'')$ , also  $(\mathfrak{X}, B, \pi) \cong (\mathfrak{X}'', B, \pi'')$ .

□

## 2.6 Beispiele für Deformationen

### 2.6.1 Deformation eines Torus

Als erstes Beispiel wird die Konstruktion an einem Torus durchgeführt. Dazu sei  $\Gamma_\tau$  mit  $\tau \in \mathbb{H}$  das Gitter  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ .  $X_\tau$  sei der Torus  $\mathbb{C}/\Gamma_\tau$ . Wir konstruieren nun eine Deformation von  $X_\tau$ .

**Definition 2.6.1** Dazu sei  $U_0$  das Bild von  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$  mit  $r < \min(\frac{1}{2}, \frac{|\tau|}{2})$  unter der kanonischen Projektion  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma_\tau$ .  $U_1 = X_\tau \setminus \{0\}$ ,  $U_{01} := U_0 \cap U_1$ ,  $\mathfrak{U} = \{U_0, U_1\}$  und  $V_{01}$  die Projektion von  $\{z \in \mathbb{C} : \frac{r}{3} < |z| < \frac{2r}{3}\}$ .

Der Vektorraum  $H^1(X, \Theta)$  hat die Dimension 1. Ein Element  $\vartheta \in H^1(X, \Theta)$  bildet also genau dann eine Basis von  $H^1(X, \Theta)$ , wenn  $\vartheta \neq 0$  ist. Mit Hilfe des Residuums und der Serre-Dualität werden wir im folgenden ein Kriterium dafür herleiten, wann  $\vartheta = 0$  ist.

### Definition 2.6.2 (Das Residuum eines Elementes von $H^1(X, \Omega)$ )

Es sei  $X$  eine Riemannsche Fläche,  $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in J}$  eine Überdeckung von  $X$ . Weiter sei  $\xi \in H^1(X, \Omega)$  und  $(\xi_{ij}) \in \Omega(U_{ij})$  ein Repräsentant von  $\xi$ . Dann zerfällt  $(\xi_{ij})$   $C^\infty$ -differenzierbar, d. h. es gibt  $\xi_i \in \mathcal{E}^{1,0}(U_i)$  mit  $\xi_{ij} = \xi_i - \xi_j$  auf  $U_{ij}$ . Da  $\xi_i - \xi_j$  holomorph ist, gilt

$$d\xi_i = d\xi_j$$

auf  $U_{ij}$ . Es gibt also eine globale Volumenform  $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}$  mit  $\omega = d\xi_i$  auf  $U_i$ . Dann definiert man:



$$\text{Res}(\xi) := \frac{1}{2\pi i} \iint_X \omega.$$

**Bemerkung 2.6.3** Die Abbildung  $H^1(X, \Omega) \rightarrow \mathbb{C}, \xi \mapsto \text{Res}(\xi)$  ist wohldefiniert und ein Homomorphismus.

*Beweis:* Siehe [Fo, S.132]

Mit Hilfe des Residuums kann man nun klären, wann  $\vartheta \in H^1(X, \Theta)$  zerfällt. Dazu brauchen wir zunächst den Begriff des quadratischen Differentials.

**Definition 2.6.4** Unter einem holomorphen quadratischen Differential über einer Riemannschen Fläche  $X$  versteht man einen holomorphen Schnitt der Garbe  $\Omega \otimes \Omega$ . Ist  $z$  eine lokale Koordinate, so kann ein holomorphes quadratisches Differential in der Form

$$\varphi^z(z) dz^2$$

geschrieben werden, wobei  $\varphi^z(z)$  eine holomorphe Funktion ist.

Sind  $z, \zeta$  zwei lokale Koordinaten mit sich überschneidenden Koordinatenumgebungen, so gilt die Transformationsformel:

$$\varphi^\zeta(\zeta) = \left( \frac{dz}{d\zeta} \right)^2 \varphi^z(z)$$

Den Vektorraum der quadratischen Differentiale auf  $X$  bezeichnen wir mit  $Q(X)$ .

**Bemerkung 2.6.5** Ist  $\vartheta \in H^1(X, \Theta)$  und  $\varphi$  ein quadratisches Differential, dann ist durch  $\vartheta \cdot \varphi$  ein Element von  $H^1(X, \Omega)$  gegeben.

Nun gilt folgender Satz:

**Satz 2.6.6 (Serre-Dualität für  $\Theta$ )** *Es ist  $H^1(X, \Theta)$  kanonisch isomorph zu  $H^0(X, \Omega \otimes \Omega)^*$ , wobei der Isomorphismus gegeben ist durch*

$$\vartheta \in H^1(X, \Theta) \mapsto \Lambda_\vartheta \quad \text{mit} \quad \Lambda_\vartheta(\varphi) = \text{Res}(\vartheta\varphi)$$

*Beweis:* Siehe [Gu, S.93 ]

**Folgerung 2.6.7** Insbesondere ist  $\vartheta \in H^1(X, \Theta)$  genau dann gleich 0, wenn gilt:

$$\text{Res}(\vartheta\varphi) = 0 \text{ f\u00fcr alle } \varphi \in Q(X)$$

F\u00fcr den Torus kann man dieses Kriterium noch vereinfachen. Bei dem Torus  $X_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$  wird  $Q(X)$  von  $\varphi$  aufgespannt, wobei  $\varphi$  durch  $dz^2$  auf  $\mathbb{C}$  induziert wird.

**Bemerkung 2.6.8** Es sei  $X_\tau$  der Torus  $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ . Das Element  $\xi \in H^1(X, \Omega)$  werde repr\u00e4sentiert durch  $\xi_{01}(z)dz \in \Omega(U_{01})$ . Dann gilt:

$$\text{Res}(\xi) = \text{Res}_0(\xi_{01}),$$

wobei  $\text{Res}_0(\xi_{01})$  das Residuum der Funktion  $\xi_{01}$  im Punkt 0 ist.

*Beweis:*

Es sei  $\eta_0, \eta_1$  eine  $C^\infty$ -differenzierbare Zerlegung der Eins f\u00fcr  $X$ , d. h.

$$\text{Supp}(\eta_0) \subset U_0, \text{Supp}(\eta_1) \subset U_1, \eta_0 + \eta_1 = 1$$

Dann ist  $f_0 = -\eta_0\xi_{01}, f_1 = \eta_1\xi_{01}$  eine  $C^\infty$ -differenzierbare Zerlegung von  $\xi_{01}$ . Wir erweitern  $\eta_1\xi_{01}$  differenzierbar auf  $U_0$  und  $\eta_0\xi_{01}$  auf  $U_1$ , indem wir diese Funktionen au\u00dferhalb von  $U_{01}$  gleich 0 setzen. Dann gilt auf  $U_{01}$

$$d(\eta_0\xi_{01} + \eta_1\xi_{01}) = 0$$

also ist

$$d(\eta_1\xi_{01}) = -d(\eta_0\xi_{01})$$

W\u00e4hle

$$\omega = \begin{cases} d(\eta_1\xi_{01}) & \text{auf } U_0 \\ -d(\eta_0\xi_{01}) & \text{auf } U_1 \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} 2\pi i \cdot \text{Res}(\xi) &= \iint_X \omega = \iint_{U_0} d(\eta_1\xi_{01}) - \iint_{X \setminus U_0} d(\eta_0\xi_{01}) \stackrel{\text{Stokes}}{=} \\ &= \int_{\partial U_0} \eta_1\xi_{01} - \int_{\partial(X \setminus U_0)} \eta_0\xi_{01} = \int_{\partial U_0} (\eta_1 + \eta_0)\xi_{01} = 2\pi i \cdot \text{Res}_0(\xi_{01}) \end{aligned}$$

□

**Folgerung 2.6.9** Wird  $\vartheta \in H^1(X, \Theta)$  repräsentiert durch  $\vartheta_{01}(z) \frac{\partial}{\partial z} \in \Theta(U_{01})$ , dann wird  $\vartheta\varphi$  (wobei  $\varphi$  wie oben das von  $dz^2$  induzierte quadratische Differential ist) repräsentiert durch  $\vartheta_{01}(z)dz \in \Omega(U_{01})$  und  $\vartheta$  zerfällt genau dann, wenn gilt:  $\text{Res}_0(\vartheta_{01}) = 0$ .

**Definition 2.6.10** Auf  $U_{01}$  definieren wir das Vektorfeld

$$\vartheta = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Da  $\text{Res}_0(\frac{1}{z}) = 1$  ist, ist nach Folgerung 2.6.9 die von  $\vartheta$  erzeugte Äquivalenzklasse eine Basis von  $H^1(X, \Theta)$ .

Wir werden nun explizit die Deformation  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  von  $X$  konstruieren. Dazu berechnen wir zuerst  $\varphi(t, z)$ .

**Bemerkung 2.6.11** Es gilt:

$$\varphi(t, z) = z \sqrt{1 + \frac{2t}{z^2}}$$

Wobei  $\sqrt{\zeta}$  definiert wird als  $e^{\log(\zeta)/2}$ , und  $\log$  der Hauptzweig des Logarithmus ist. Dabei ist  $\varphi(t, z)$  definiert für  $|\frac{2t}{z^2}| < 1$ , und da gilt:

$$|z| > \min\left(\frac{|\tau|}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

also für

$$|t| < \min\left(\frac{|\tau|^2}{72}, \frac{1}{72}\right)$$

*Beweis:* Wir müssen folgende Eigenschaften nachweisen:

1.  $\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, z) = \frac{1}{\varphi(t, z)}$

*Beweis:*

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( z \sqrt{1 + \frac{2t}{z^2}} \right) = z \left( 2 \sqrt{1 + \frac{2t}{z^2}} \right)^{-1} \cdot \frac{2}{z^2} = \left( z \sqrt{1 + \frac{2t}{z^2}} \right)^{-1}$$

2.  $\varphi(0, z) = z$ .

Dies ist erfüllt, denn  $\varphi(0, z) = z\sqrt{1} = z$ .

□

Die Lösung ergibt sich rechnerisch durch Separation der Variablen und Integration.

Es ist interessant, die Fasern  $X_t$  dieser Deformation in der Form

$$T_{\sigma(t)} = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \sigma(t)\mathbb{Z})$$

mit  $\sigma(t) \in \mathbb{H}$  auszudrücken. Dies ist dann möglich, wenn man abelsche Differentiale auf den deformierten Tori kennt. Im folgenden werden tatsächlich solche Differentiale konstruiert und damit berechnet, zu welchem  $\mathbb{C}/\Gamma_{\sigma(t)}$  die deformierten Tori äquivalent sind.

### 2.6.2 Konstruktion quadratischer Differentiale auf den deformierten Tori

**Definition 2.6.12** Wir übernehmen die Voraussetzungen von Definition 2.6.1. Es sei  $X_\tau := \mathbb{C}/\Gamma_\tau$  ein Torus und  $U_0, U_1, U_{01}, V_{01}$  wie dort. Wir kürzen in diesem Abschnitt  $\Gamma_\tau$  mit  $\Gamma$  ab.

Es sei  $t \in B$  beliebig aber fest gewählt und  $X_t := \pi^{-1}(t)$ . Weiter sei  $\gamma$  die positiv durchlaufene Kreislinie mit Mittelpunkt 0 und Radius  $\frac{t}{2}$ . Es sei  $\varphi_t := \varphi(t, \cdot)$  und  $\gamma_t = \varphi_t(\gamma)$ . Wir definieren:

$$V'_{01} := \varphi_t(V_{01})$$

$$V_0 := V'_{01} \cup \text{Int}(\gamma_t)$$

$$V_1 := \text{Ext}(\gamma) \cup V_{01}$$

Wir konstruieren nun ein quadratisches Differential auf  $X_t$ . Dafür brauchen wir zunächst eine Bemerkung:

**Bemerkung 2.6.13** Es sei  $\varphi$  ein quadratisches Differential auf  $X_t$ . Weiter sei  $\varphi = f_1(z)dz^2$  auf  $V_1$  und  $\varphi = f_0(\zeta)d\zeta^2$  auf  $V_0$ . Dann gilt:

$$f_0(\zeta) = \left( \frac{d\varphi_t^{-1}(\zeta)}{d\zeta} \right)^2 \cdot f_1(\varphi_t^{-1}(\zeta)) = \frac{\zeta^2}{\zeta^2 - 2t} \cdot f \left( \zeta \sqrt{1 - \frac{2t}{\zeta^2}} \right)$$

*Beweis:* Es ist  $\frac{dz}{d\zeta} = \frac{d\varphi_t^{-1}(\zeta)}{d\zeta}$  und  $\varphi_t^{-1}(\zeta) = \zeta \sqrt{1 - \frac{2t}{\zeta^2}}$ . Man rechnet leicht nach, dass  $\left( \frac{d\varphi_t^{-1}(\zeta)}{d\zeta} \right)^2 = \frac{\zeta^2}{\zeta^2 - 2t}$  ist. □

Wir geben nun ein quadratisches Differential direkt an. Da der Vektorraum der quadratischen Differentiale auf  $X_t$  die Dimension 1 hat, kennen wir damit alle quadratischen Differentiale.

**Satz 2.6.14** *Es sei  $\wp$  die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion. Also*

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Gamma \setminus 0} \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

Definiere dann

$$f_1(z) = \frac{1}{2t (\wp(z) - \wp(\sqrt{-2t}))} \quad \text{auf } V_1$$

Dann lässt sich  $f_1(z)dz^2$  zu einem quadratischen Differential auf  $X_t$  fortsetzen.

*Beweis:* Das Differential ist wohldefiniert, da  $f_1$  periodisch bezüglich  $\Gamma$  ist. Wir bemerken, dass  $f_1(z)$  auf  $U_0$  zwei Pole hat, nämlich  $\pm\sqrt{-2t}$ . Außerdem hat  $f_1$  die doppelte Nullstelle  $z = 0$ . Daher kann  $f_1$  auf  $V_1$  keine Pole mehr haben und ist holomorph auf  $V_1$ . Wir definieren  $f_0$  wie in Bemerkung 2.6.13. Zu zeigen ist nur noch, dass sich  $f_0$  innerhalb von  $V'_{01}$  holomorph fortsetzen lässt. Dazu formen wir  $\wp(z)$  erst einmal um. Dabei sei  $\Gamma' := \Gamma \setminus \{0\}$ .

Es gilt:

$$\sum_{\omega \in \Gamma'} \frac{1}{(z - \omega)^2} = \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Gamma'} \frac{1}{(z - \omega)^2} + \frac{1}{(z + \omega)^2} = \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Gamma'} \frac{2z^2 + 2\omega^2}{(z^2 - \omega^2)^2} = \sum_{\omega \in \Gamma'} \frac{z^2 + \omega^2}{(z^2 - \omega^2)^2}$$

Also:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Gamma'} \left( \frac{z^2 + \omega^2}{(z^2 - \omega^2)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

Damit folgt

$$f_1(z) = \left( \frac{2t}{z^2} + 1 + 2t \sum_{\omega \in \Gamma'} \left[ \frac{z^2 + \omega^2}{(z^2 - \omega^2)^2} + \frac{-2t + \omega^2}{(-2t - \omega^2)^2} \right] \right)^{-1}$$

Nun definieren wir

$$g_1(z) := \left( \frac{2t}{z} + 1 + 2t \sum_{\omega \in \Gamma'} \left[ \frac{z + \omega^2}{(z - \omega^2)^2} + \frac{-2t + \omega^2}{(-2t - \omega^2)^2} \right] \right)^{-1}$$

Es gilt  $f_1(z) = g_1(z^2)$ . Da  $f_1$  auf  $U_0$  die zwei Pole  $z = \pm\sqrt{-2t}$  und die doppelte Nullstelle  $z = 0$  hat, hat  $g_1(z)$  auf  $U_0^* := \{z^2 \in \mathbb{C} \mid z \in U_0\}$  den Pol  $z = -2t$  und die einfache Nullstelle  $z = 0$ .

Wir definieren

$$g_0(z) = \frac{z}{z-2t} g_1(z-2t)$$

und außerdem die Mengen  $U_0^+ := \{z^2 + 2t \mid z \in U_0\}$ ,  $V_0^* := \{z^2 \mid z \in V_0\}$ . Dann ist  $g_0$  auf  $U_0^+$  definiert.

Wir zeigen nun, dass  $V_0^*$  eine Teilmenge von  $U_0^+$  ist. Dazu sei  $\zeta \in V_0^*$ . Dann gibt es  $z \in V_0$  mit  $z^2 = \zeta$ . Außerdem gibt es  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ,  $\alpha \geq 1$  mit  $\alpha z \in V'_{01}$ , denn es ist entweder  $z \in V'_{01}$  oder  $z \in \text{Int}(\gamma_t)$ .

Dann ist

$$\varphi_t^{-1}(\alpha z) = \alpha z \sqrt{1 - \frac{2t}{(\alpha z)^2}} \in V_{01} \subset U_0.$$

Also ist

$$(\alpha z)^2 \left(1 - \frac{2t}{(\alpha z)^2}\right) + 2t = (\alpha z)^2 \in U_0^+,$$

und da  $0 \in U_0^+$  und  $U_0^+$  konvex ist, ist dann auch  $z^2 \in U_0^+$ , also  $\zeta \in U_0^+$ .  $\square$   
Da  $g_1(z-2t)$  auf  $U_0^+$  den einfachen Pol  $z = 0$  und die einfache Nullstelle  $z = 2t$  hat, ist  $g_0$  auf  $U_0^+$  holomorph fortsetzbar.

Es gilt auf  $V'_{01}$ :

$$f_0(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2t} f_1\left(z \sqrt{1 - \frac{2t}{z^2}}\right).$$

Wegen  $f_1(z) = g_1(z^2)$  gilt weiter

$$f_1\left(z \sqrt{1 - \frac{2t}{z^2}}\right) = g_1(z^2 - 2t) \text{ auf } V'_{01}.$$

Also ist

$$g_0(z^2) = \frac{z^2}{z^2 - 2t} g_1(z^2 - 2t) = \frac{z^2}{z^2 - 2t} f_1\left(z \sqrt{1 - \frac{2t}{z^2}}\right) = f_0(z) \text{ auf } V'_{01}.$$

Da  $g_0$  auf  $U_0^+$  und damit auf  $V_0^*$  holomorph fortsetzbar, ist auch  $f_0$  auf  $V_0$  holomorph fortsetzbar (denn  $z \in V_0 \Rightarrow z^2 \in V_0^*$ ).  $\square$

Man kann  $f_0(z)$  noch genauer angeben:

$$f_0(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2t} \cdot \left( \frac{2t}{z^2 - 2t} + 1 + 2t \sum_{\omega \in \Gamma'} \frac{z^2 - 2t + \omega^2}{(z^2 - 2t - \omega^2)^2} + \frac{2t - \omega^2}{(2t + \omega^2)^2} \right)^{-1}$$

Damit folgt also:

$$f_0(z) = \left( 1 + 2t \sum_{\omega \in \Gamma'} \frac{(z^2 - 2t)(4t^2 - 4t\omega^2 - 3\omega^4 - 2z^2t + z^2\omega^2)}{(z^2 - 2t - \omega^2)(2t + \omega^2)^2} \right)^{-1}$$

### 2.6.3 Konstruktion eines abelschen Differentials

Nun können wir auch ein abelsches Differential auf dem deformierten Torus definieren und berechnen, zu welchem Torus  $\mathbb{C}/\Gamma_{\sigma(t)}$  der deformierte Torus  $X_t$  isomorph ist.

**Bemerkung 2.6.15** Die Funktion  $f_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{C}$  hat eine holomorphe Wurzel  $g_1$ .

*Beweis:*

Dafür genügt es, zu zeigen, dass  $f_1(V_1)$  in einem einfach zusammenhängenden Gebiet aus  $\mathbb{C}$  liegt, das den Nullpunkt nicht enthält.

1. Die beiden Nullstellen  $\pm\sqrt{-2t}$  liegen nicht in  $V_1$ . Also gibt es eine Kreisscheibe  $D_1$  mit Mittelpunkt 0 mit  $f_1(V_1) \cap D_1 = \emptyset$
2. Die doppelte Polstelle 0 liegt nicht in  $V_1$ . Also gibt es eine Kreisscheibe  $D_2$  um 0 mit  $f_1(V_1) \subset D_2$ .
3. Die Verbindungsstrecke  $I := [0, \sqrt{-2t}]$  liegt nicht in  $V_1$ , ebenso die Strecke  $[0, -\sqrt{-2t}]$ . Da  $\wp$  jeden Wert höchstens zweimal annimmt, ist  $f_1(V_1) \cap f_1(I) = \emptyset$ .
4. Insgesamt liegt  $f_1(V_1)$  in  $(D_2 \setminus \overline{D_1}) \setminus f_1(I)$ , und dies ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet ohne 0.

□

**Bemerkung 2.6.16** Die Funktion  $f_2 : V_0 \rightarrow \mathbb{C}$  hat eine holomorphe Wurzel  $g_2$ .

*Beweis:*

$f_2$  ist auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet  $V_0$  nullstellenfrei, also existiert eine holomorphe Wurzel.  $\square$

**Definition 2.6.17** Die Funktion  $\wp(z)$  hat die Entwicklung  $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + O(z^2)$  (siehe [HC, S. 153]).

Damit gilt:

$$-2t\wp(\sqrt{-2t}) = -2t \frac{1}{-2t} + 2tO(t) = 1 + O(t^2)$$

Betrachten wir nun  $t$  als variabel, dann ist  $f_1$  eine Funktion von  $t$  und  $z$ . Die Entwicklung von  $f_1$  nach  $t$  ist dann:

$$f_1(t, z) = 1 - 2t\wp(z) + O(t^2)$$

Die beiden Zweige der Wurzel von  $f_1$  haben also die Entwicklung:

$$\pm 1 \mp t\wp(z) + O(t^2)$$

Sei nun  $h_1(t, z)$  der Zweig mit der Entwicklung  $1 - t\wp(z) + O(t^2)$ . Da  $f_0$  die Entwicklung  $f_0(t) = 1 + O(t)$  hat, haben die beiden Zweige der Wurzel von  $f_0$  die Entwicklungen  $\pm 1 + O(t)$ .  $h_0$  sei der Zweig mit der Entwicklung  $h_0(t, z) = 1 + O(t)$

**Bemerkung 2.6.18** Sei nun wieder  $t$  fest gewählt und  $h_1(z) := h_1(t, z)$ ,  $h_0(z) := h_0(t, z)$ . Dann ist durch  $h_1(z)dz$  auf  $V_1$  und  $h_0(z)dz$  auf  $V_0$  ein holomorphes Differential  $\xi$  auf dem Torus  $X_t$  definiert.

*Beweis:*

Ist  $\eta$  ein abelsches Differential auf  $X_t$  mit der Darstellung  $k_1(z)dz$  bezüglich Karte  $U_1$  und  $k_0(z)dz$  bezüglich Karte  $U_0$ , dann gilt die Transformationsformel:

$$k_0(z) = \frac{d\varphi_t^{-1}(z)}{dz} \cdot k_1(\varphi_t^{-1}(z)) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2t}{z^2}}} \cdot k_1\left(z\sqrt{1 - \frac{2t}{z^2}}\right)$$

Es sei

$$h_0^*(z) := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2t}{z^2}}} h_1\left(z\sqrt{1 - \frac{2t}{z^2}}\right).$$



Dann ist zu zeigen:  $h_0^*(z) = h_0(z)$  auf  $V'_{01}$ .

Es gilt:

$$f_0(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2t} f_1 \left( z \sqrt{1 - \frac{2t}{z^2}} \right) \text{ auf } V'_{01}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (h_0^*(z))^2 &= \frac{1}{1 - \frac{2t}{z^2}} \left( h_1 \left( z \sqrt{1 - \frac{2t}{z^2}} \right) \right)^2 = \\ &= \frac{z^2}{z^2 - 2t} f_1 \left( z \sqrt{1 - \frac{2t}{z^2}} \right) = f_0(z) = (h_0(z))^2 \end{aligned}$$

Daher sind  $h_0^*$  und  $h_0$  beides holomorphe Wurzeln von  $f_0(z)$ . Also gilt entweder  $h_0^* = -h_0$  oder  $h_0^* = h_0$ .

Wegen  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2t}{z^2}}} = 1 + O(t)$  und  $h_1(t, z) = 1 + O(t)$  gilt  $h_0^*(t, z) = 1 + O(t)$ .

Daher gilt die Gleichheit:  $h_0^* = h_0$ .  $\square$

**Definition 2.6.19** Wähle auf  $X_t$  die Homotopie-Basis  $(a, b)$  mit

$$a : [0, 1] \rightarrow X_0, s \mapsto a(s) := \frac{i}{2} + s\tau$$

$$b : [0, 1] \rightarrow X_0, s \mapsto b(s) := \frac{1}{2}\tau + is$$

Sei  $\alpha := \int_a \xi$ ,  $\beta := \int_b \xi$ .  $\alpha$  und  $\beta$  sind abhängig von der gewählten Faser  $X_t$  und können daher als Funktionen  $\alpha(t), \beta(t)$  von  $t$  aufgefasst werden.

Damit haben wir herausgefunden, zu welchen Tori  $\mathbb{C}/\Gamma_{\sigma(t)}$  die Fasern  $X_t$  isomorph sind:

**Satz 2.6.20**  $X_t$  ist biholomorph äquivalent zu  $\mathbb{C}/\Gamma_{\sigma(t)}$  mit  $\sigma(t) = \frac{\alpha(t)}{\beta(t)}$

*Beweis:* Die Aussage folgt aus dem Satz von Abel, siehe [FK, S. 95].  $\square$

## 2.6.4 Deformation einer Riemannschen Fläche vom Geschlecht $g = 2$

**Bemerkung 2.6.21** Es sei  $X$  eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g = 2$ . Dann lässt sich  $X$  realisieren als Riemannsche Fläche der Gleichung

$$y^2 = F_5(x)$$

wobei  $F_5$  ein Polynom 5. Grades mit paarweise verschiedenen Nullstellen  $a_1, \dots, a_5$  ist. Es gibt dann eine verzweigte 2-blättrige Überlagerung

$$f : X \rightarrow \mathbb{P}_1$$

mit den Verzweigungspunkten  $a_1, \dots, a_5, \infty$ .

*Beweis:* Alle Riemannschen Flächen sind nach [FK, S. 100] hyperelliptisch, d. h. sie lassen eine zweiblättrige Überlagerung von  $\mathbb{P}_1$  mit  $2g + 2$  Verzweigungspunkten zu. Nach [Mir, S. 92] lässt sich dann  $X$  als Riemannsche Fläche von  $\sqrt{F_5(x)}$  schreiben. Es besteht übrigens auch die Darstellung mit einem Polynom 6. Grades.  $\square$

**Bemerkung 2.6.22** Auf  $X$  ist dann durch

$$\omega_1 = \frac{df}{\sqrt{F_5(f(z))}}, \quad \omega_2 = \frac{f(z)df}{\sqrt{F_5(f(z))}}$$

eine Basis der holomorphen Differentiale definiert.

*Beweis:*

Es handelt sich auf jeden Fall um meromorphe Differentiale. Man sieht durch Betrachten von lokalen Karten in den Verzweigungspunkten, dass die Differentiale auch holomorph sind. Da sie linear unabhängig sind und die Dimension von  $H^0(X, \Omega)$  gleich 2 ist, bilden sie eine Basis von  $H^0(X, \Omega)$ .  $\square$

**Folgerung 2.6.23** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei 0 keine Nullstelle von  $F_5$ . Dann gibt es eine Karte von  $X$ , so dass  $f$  bezüglich dieser Karte die Identität ist.

Man hat dann folgende Basis der abelschen Differentiale auf  $X$ :

$$\omega_1 = \frac{dz}{\sqrt{F_5(z)}}, \quad \omega_2 = \frac{zdz}{\sqrt{F_5(z)}}$$

Definiert man außerdem die quadratischen Differentiale  $\omega_1^2, \omega_1\omega_2, \omega_2^2$ , die folgende Form haben:

$$\varphi_1 := \omega_1^2 = \frac{dz^2}{F_5(z)}, \quad \varphi_2 := \omega_1\omega_2 = \frac{zdz^2}{F_5(z)}, \quad \varphi_3 := \omega_2^2 = \frac{z^2dz^2}{F_5(z)},$$

dann sind  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  trivialerweise linear unabhängig und bilden daher eine Basis von  $Q(X)$ , dem Vektorraum der quadratischen Differentiale auf  $X$ .

**Definition 2.6.24** Wir definieren nun die Mengen  $U_0, U_1$ , wie sie für die Konstruktion der Deformation von  $X$  benötigt werden. Wähle dazu eine Teilmenge  $U_0$  von  $X$ , die isomorph zur Einheitskreisscheibe ist. Außerdem sei die Abbildung  $f : X \rightarrow \mathbb{P}_1$  bezüglich der Karte  $U_0$  die Identität. Es sei  $U_1 := X \setminus \{0\}$ .  $U_{01} := U_0 \cap U_1$  und  $\mathfrak{U} := (U_0, U_1)$ .

**Satz 2.6.25** Betrachte die Schnitte  $\vartheta_i \in \Theta(U_{01})$ , die gegeben sind durch:

$$\vartheta_1 = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \vartheta_2 = \frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \vartheta_3 = \frac{1}{z^3} \frac{\partial}{\partial z}$$

Dann bilden die Äquivalenzklassen von  $\vartheta_i$  in  $H^1(X, \Theta)$  eine Basis von  $H^1(X, \Theta)$ .

*Beweis:*

Es sei  $[\vartheta_i]$  die Äquivalenzklasse von  $\vartheta_i$  in  $H^1(X, \Theta)$ . Dann ist  $[\vartheta_i] \cdot \varphi_j$  ein Element von  $H^1(X, \Omega)$ . Betrachte das Residuum  $\text{Res}([\vartheta_i] \cdot \varphi_j)$ , das unabhängig von sämtlichen getroffenen Festlegungen ist.

Es ist

$$H^1(X, \Theta) \cong Q(X)^*.$$

Also bilden die  $[\vartheta_i]$  genau dann eine Basis von  $H^1(X, \Theta)$ , wenn folgende Determinante ungleich 0 ist:

$$D := \det(\text{Res}([\vartheta_i] \cdot \varphi_j)_{1 \leq i, j \leq 3})$$

Ist  $\vartheta = f(z) \frac{\partial}{\partial z} \in \Theta(U_{01})$  und  $\varphi = g(z) dz^2 \in Q(X)$  dann ist nach Lemma 2.6.8

$$\text{Res}([\vartheta] \cdot \varphi) = \text{Res}_0(f(z) \cdot g(z))$$

Damit ist

$$\text{Res}([\vartheta_i] \cdot \varphi_j) = \text{Res}_0 \left( \frac{1}{z^i} \cdot \frac{z^{j-1}}{F_5(z)} \right)$$

Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\frac{1}{F_5(z)} = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

die Entwicklung von  $\frac{1}{F_5(z)}$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z} \cdot 1 \cdot \frac{1}{F_5(z)}\right) &= 1 & \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z} \cdot z \cdot \frac{1}{F_5(z)}\right) &= 0 & \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z} \cdot z^2 \cdot \frac{1}{F_5(z)}\right) &= 0 \\
\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{F_5(z)}\right) &= a_1 & \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} \cdot z \cdot \frac{1}{F_5(z)}\right) &= 1 & \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} \cdot z^2 \cdot \frac{1}{F_5(z)}\right) &= 0 \\
\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{F_5(z)}\right) &= a_2 & \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3} \cdot z \cdot \frac{1}{F_5(z)}\right) &= a_1 & \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3} \cdot z^2 \cdot \frac{1}{F_5(z)}\right) &= 1
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$D = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Damit bilden die  $([\vartheta_i])_{1 \leq i \leq 3}$  eine Basis von  $H^1(X, \Theta)$ . □

Leider lässt sich in diesem Fall  $\varphi(\tau, t, z)$  nicht mehr geschlossen darstellen.

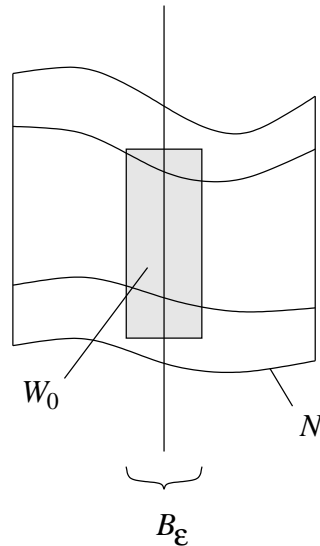
### 3 Versalität der konstruierten Deformation

In diesem Kapitel soll der Nachweis geführt werden, dass die in Kapitel 2 konstruierte Konstruktion auch versell ist. Dabei werden die in Definition 1.2 definierten vertikalen Automorphismen und die Kodaira-Spencer-Abbildung benutzt.

#### 3.1 Konstruktion der vertikalen Automorphismen

Zunächst werden die in Definition 1.2.3 beschriebenen vertikalen Automorphismen explizit für die konstruierte Deformation berechnet. Dazu sei  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  die in Kapitel 2 konstruierte Deformation einer kompakten Riemannschen Fläche  $X$ . Die Flächen  $U_{01}, V_{01}$ , die Mannigfaltigkeiten  $M, N, W, R_i, R_a$ , die Kurven  $\gamma, \gamma_t$  und die Abbildungen  $\Phi, \varphi_t, p, q$  seien wie in Kapitel 2 definiert.

**Bemerkung 3.1.1** Es gibt  $W_0 \subset V_{01} \cup \text{Int}(\gamma)$  und  $B_\varepsilon \subset B$  mit  $B_\varepsilon \times W_0 \subset N$  und  $W_0 \cap V_{01} \neq \emptyset$ .



*Beweis:*

Wähle  $W_0 \Subset V_{01} \cup \text{Int}(\gamma)$  mit  $W_0 \cap V_{01} \neq \emptyset$  beliebig, beispielsweise  $W_0 := \text{Int}(\gamma)$ . Dann ist  $\overline{W_0}$  kompakt und Teilmenge von  $V_{01} \cup \text{Int}(\gamma)$ . Für alle  $z \in \overline{W_0}$

wähle eine Umgebung  $B_z \times U_z \subset N$  von  $(0, z)$ . Wähle dann endlich viele  $U_{z_i}$ , die  $\overline{W_0}$  überdecken und  $B_\varepsilon := \bigcap B_{z_i}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} B_\varepsilon \times U_{z_i} &\subset B_{z_i} \times U_{z_i} \subset N \\ &\Rightarrow B_\varepsilon \times W_0 \subset N. \end{aligned}$$

**Definition 3.1.2** Definiere  $W_1 := \text{Ext}(\gamma) \cup V_{01}$ , d. h.  $M = B \times W_1$ . Setze  $\psi_1 := p$ . Dann ist

$$\psi_1 : B \times W_1 \rightarrow p(M)$$

für  $z \in W_1$  eine lokale holomorphe Trivialisierung gemäß Bemerkung 1.1.2, denn es ist

$$p(M) \cap X_t \cong W_1$$

und

$$\pi \circ \psi = \text{pr}_B.$$

Wähle weiter  $N_0 := B_\varepsilon \times W_0 \subset N$  und setze  $\psi_0 := q|_{N_0}$ .  $\psi_0$  ist für  $z \in W_0$  ebenfalls eine holomorphe Trivialisierung gemäß Bemerkung 1.1.2. Außerdem gilt:  $X = W_0 \cup W_1$ , so dass man in der Lage ist, mit  $\psi_1, \psi_0$  die vertikalen Automorphismen gemäß Definition 1.2.3 zu konstruieren.

Setze nun  $W_{01} := W_0 \cap W_1 = V_{01} \cap W_0$ .  $W_{01} \neq \emptyset$ , da  $V_{01} \cap W_0 \neq \emptyset$ . Wähle weiter:  $Z_{01} := \psi_1^{-1}(\psi_0(B_\varepsilon \times W_{01})) \cap B_\varepsilon \times W_{01}$ . Dann gilt:

$$0 \times W_{01} \subset Z_{01} \subset B_\varepsilon \times W_{01},$$

denn

$$\psi^{-1} \circ \psi_0 = \text{id}_{0 \times W_{01}}.$$

Definiere nun

$$\begin{aligned} g_{01} : Z_{01} &\rightarrow B_\varepsilon \times W_{01} \\ g_{01} &:= \psi_0^{-1} \circ \psi_1 \end{aligned}$$

Dann ist  $g_{01}$  Repräsentant eines vertikalen Automorphismus im Sinne von Definition 1.2.2 auf  $B \times W_{01}$ , wobei  $B$  der Keim des  $\mathbb{C}^m$  im Ursprung sein soll und  $B_\varepsilon$  ein Repräsentant von  $B$  ist. Aus technischen Gründen schreiben wir in diesem Kapitel den Raumkeim zuerst. Die Garbe der vertikalen Automorphismen auf  $B \times W_{01}$  wird wie in Definition 1.2.2 mit  $\mathfrak{G}$  bezeichnet.

**Bemerkung 3.1.3** Es gilt:

$$g_{01}(t, z) = \Phi(t, z)$$

für  $(t, z) \in Z_{01}$

*Beweis:*

$$\psi_0^{-1} \circ \psi_1(t, z) = q^{-1} \circ p(t, z) = \Phi(t, z)$$

□

**Satz 3.1.4 (Der Homomorphismus  $\alpha : \Gamma(W_{01}, \mathfrak{G}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(W_{01}, \Theta \otimes \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ )**

Es sei  $g(t, z) = \left(t, z + \sum_{|\nu| \geq 1} g_\nu(z) t^\nu\right)$  der oben konstruierte vertikale Automorphismus über  $B \times W_{01}$ . Dann kann man  $g_\nu$  als einen holomorphen Schnitt des Tangentialbündels über  $W_{01}$  vermöge der Zuordnung:  $g_\nu \mapsto g_\nu \frac{\partial}{\partial z}$  betrachten.

Nun sei  $\alpha : \Gamma(W_{01}, \mathfrak{G}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(W_{01}, \Theta \otimes \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$  der in Satz 1.2.6 definierte Homomorphismus. Man definiert  $g_{(\mu)} := g_{(0, \dots, 1, \dots, 0)}$  für  $1 \leq \mu \leq m$ , wobei die 1 an der  $\mu$ -ten Stelle auftritt. Dies ist dann ein Element von  $\Gamma(W_{01}, \Theta \otimes \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ . Außerdem hat man auf  $W_{01}$  die holomorphen Vektorfelder  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$ . Dann gilt:

$$g_{(\mu)} = \vartheta_\mu,$$

und damit ist

$$\alpha(g) = \sum_{\mu=1}^m g_{(\mu)} \otimes t_\mu = \sum_{\mu=1}^m \vartheta_\mu \otimes t_\mu$$

Für den Beweis des Satzes benötigen wir folgendes Lemma:

**Lemma 3.1.5** Es gilt:

$$\sum_{\mu=1}^m t_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t_\mu}(t, z) = \sum_{\mu=1}^m t_\mu \vartheta_\mu(\varphi(t, z)) =: f(\varphi(t, z))$$

*Beweis:*

Wir unterscheiden im Beweis wieder zwischen  $\varphi(\tau, t, z)$  und  $\tilde{\varphi}(t, z) := \varphi(1, t, z)$ . Aus dem Beweis von Lemma 2.2.13 folgt zunächst, dass für alle  $\alpha \in \mathbb{C}$  gilt:

$$\varphi(\tau, t, z) = \varphi\left(\frac{\tau}{\alpha}, \alpha t, z\right)$$

Mit

$$\tilde{\varphi}(t, z) := \varphi(1, t, z)$$

folgt damit:

$$\tilde{\varphi}(\tau t, z) = \varphi(1, \tau t, z) = \varphi(\tau, t, z)$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^m t_{\mu} \frac{\partial}{\partial t_{\mu}} \tilde{\varphi}(\tau t, z) &= \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\varphi}(\tau t, z) = \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, t, z) = \\ &= \sum_{\mu=1}^m t_{\mu} \vartheta_{\mu}(\tilde{\varphi}(\tau t, z)) = f(\tilde{\varphi}(\tau t, z)) \end{aligned}$$

mit  $\tau := 1$  folgt dann die Behauptung. □

**Folgerung 3.1.6** Insbesondere gilt dann für alle  $1 \leq \mu \leq m$ :

$$\left. \frac{\partial}{\partial t_{\mu}} \varphi(t, z) \right|_{t=0} = \vartheta_{\mu}(\varphi(0, z))$$

*Beweis:*

Setzt man für beliebiges  $\mu \in \{1, \dots, m\}$  in Lemma 3.1.5  $t_{\mu} \neq 0$  und  $t_{\lambda} = 0$  für  $\mu \neq \lambda$ , so ergibt sich:

$$t_{\mu} \frac{\partial}{\partial t_{\mu}} \varphi(0, \dots, t_{\mu}, \dots, 0, z) = t_{\mu} \vartheta_{\mu}(\varphi(0, \dots, t_{\mu}, \dots, 0, z))$$

Da  $t_{\mu} \neq 0$  ist, folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t_{\mu}} \varphi(0, \dots, t_{\mu}, \dots, 0, z) = \vartheta_{\mu}(\varphi(0, \dots, t_{\mu}, \dots, 0, z))$$

Da  $\varphi(t, z)$  holomorph ist, folgt dann die Behauptung mit  $t_{\mu} \rightarrow 0$ . □



*Beweis von Satz 3.1.4:*

1. Ich zeige zuerst für  $\mu \in \{1, \dots, m\}$  beliebig:

$$g_{(\mu)}(z) = \left. \frac{\partial}{\partial t_\mu} \varphi(t, z) \right|_{t=0} \quad (*)$$

*Beweis von (\*):*

$$\begin{aligned} \varphi(t, z) &= z + \sum_{\lambda=1}^m g_{(\lambda)}(z) t_\lambda + \sum_{|\nu| \geq 2} g_\nu(z) t^\nu = \\ &= z + t_\mu g_{(\mu)}(z) + \sum_{\lambda \neq \mu} g_{(\lambda)}(z) t_\lambda + t_\mu \sum_{|\nu| \geq 2, \nu_\mu \geq 1} g_\nu(z) \frac{t^\nu}{t_\mu} + \sum_{|\nu| \geq 2, \nu_\mu = 0} g_\nu(z) t^\nu. \end{aligned}$$

Dabei soll  $\nu_\mu$  die  $\mu$ -te Stelle des  $m$ -Tupels  $\nu$  bedeuten.

Damit folgt:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t_\mu} \varphi(t, z) \right|_{t_\mu=0} = g_{(\mu)}(z) + \sum_{|\nu| \geq 2, \nu_\mu \geq 1} g_\nu(z) \frac{t^\nu}{t_\mu}$$

und damit:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t_\mu} \varphi(t, z) \right|_{t=0} = g_{(\mu)}(z)$$

2. Nun gilt nach Folgerung 3.1.6

$$\left. \frac{\partial}{\partial t_\mu} \varphi(t, z) \right|_{t=0} = \vartheta_\mu(\varphi(0, z)) = \vartheta_\mu(z)$$

Damit ist

$$g_{(\mu)}(z) = \vartheta_\mu(z)$$

und es folgt

$$\alpha(g) = \sum_{\mu=1}^m g_{(\mu)} \otimes t_\mu = \sum_{\mu=1}^m \vartheta_\mu \otimes t_\mu$$

□

### 3.2 Konstruktion der Kodaira-Spencer Abbildung und Nachweis der Versalität der Deformation

**Bemerkung 3.2.1** Wir haben die holomorphen Schnitte des Tangentialbündels  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m \in \Gamma(U_{01}, \Theta)$  so gewählt, dass die Äquivalenzklassen der entsprechenden Kozyklen eine Basis von  $H^1(\mathfrak{U}, \Theta)$  bilden. Weiter sei  $\mathfrak{W}$  die Verfeinerung  $(W_0, W_1)$  von  $\mathfrak{U}$ . Dann bilden die Kozyklen, die durch die Einschränkungen  $\vartheta_\mu|_{W_{01}}$  erzeugt werden, eine Basis von  $H^1(\mathfrak{W}, \Theta)$ .

*Beweis:*

Die Überdeckung  $\mathfrak{U}$  ist Leraysch, daher ist die Verfeinerungsabbildung

$$t_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}} : H^1(\mathfrak{U}, \Theta) \rightarrow H^1(\mathfrak{W}, \Theta)$$

ein Isomorphismus. Der Kozyklus von  $\vartheta_\mu$  geht bei der Verfeinerungsabbildung  $t_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}}$  genau in den Kozyklus von  $\vartheta_\mu|_{W_{01}}$  über. Da ein Isomorphismus Basen in Basen überführt folgt die Behauptung

**Bemerkung 3.2.2** Es sei  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  die konstruierte Deformation.  $\Xi \in H^1(X, \Theta) \otimes (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$  sei die Äquivalenzklasse des von

$$\sum_{\mu=1}^m \vartheta_\mu \otimes t_\mu \in \Theta(W_{01}) \otimes (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$$

erzeugten Kozyklus aus  $Z^1(\mathfrak{W}, \Theta) \otimes (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ . Dann ist die Kodaira-Spencer-Abbildung durch:

$$\rho : T(B) = (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^* \rightarrow H^1(X, \Theta), \quad \rho(v) = \langle \Xi, v \rangle$$

gegeben.

*Beweis:* Nach Satz 3.1.4 gilt:

$$\alpha(g_{01}) = \sum_{\mu=1}^m \vartheta_\mu \otimes t_\mu$$

Damit folgt die Behauptung. □

**Satz 3.2.3** Die Kodaira-Spencer-Abbildung der konstruierten Deformation ist bijektiv.

*Beweis:*

Es ist  $(\frac{\partial}{\partial t_\nu})_{\nu=1,\dots,m}$  eine Basis von  $T(B)$ . Wir zeigen, dass die  $\rho(\frac{\partial}{\partial t_\nu})_{\nu=1,\dots,m}$  eine Basis von  $H^1(X, \Theta)$  bilden, damit ist die Aussage bewiesen. Das Produkt  $\langle \Xi, \frac{\partial}{\partial t_\nu} \rangle$  berechnen wir auf folgende Weise:

Es ist

$$\left\langle \sum_{\mu=1}^m \vartheta_\mu \otimes t_\mu, \frac{\partial}{\partial t_\nu} \right\rangle = \sum_{\mu=1}^m \vartheta_\mu \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial t_\nu}, t_\mu \right\rangle = \vartheta_\nu$$

Damit ist  $\rho(\frac{\partial}{\partial t_\nu})$  gleich der Äquivalenzklasse (bezüglich  $H^1(X, \Theta)$ ) des von  $\vartheta_\nu$  erzeugten Kozyklus aus  $Z^1(\mathfrak{W}, \Theta)$ .

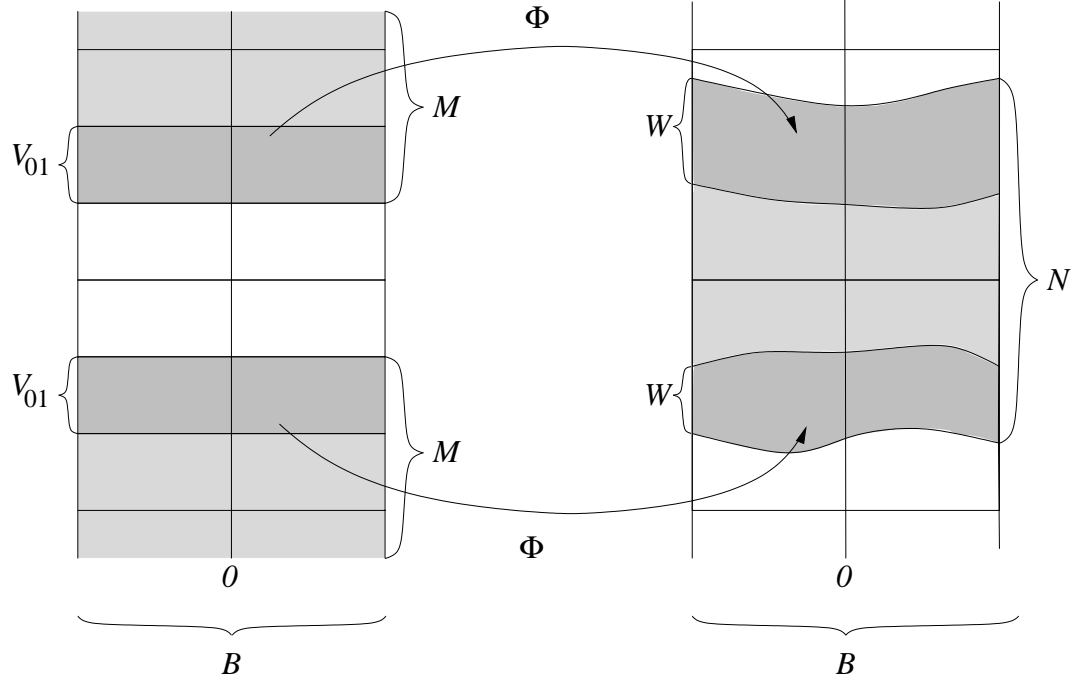
Die Äquivalenzklassen (bezüglich  $H^1(\mathfrak{W}, \Theta)$ ) der von den  $\vartheta_\nu$  erzeugten Kozyklen bilden eine Basis von  $H^1(\mathfrak{W}, \Theta)$ . Die kanonische Abbildung  $H^1(\mathfrak{W}, \Theta) \rightarrow H^1(X, \Theta)$  ist ein Isomorphismus, bildet als insbesondere Basen in Basen ab, daher bilden die  $\rho(\frac{\partial}{\partial t_\nu})$  eine Basis von  $H^1(X, \Theta)$  wie zu zeigen war.  $\square$

## 4 Offenheit der Versalität

Das Ziel dieses Kapitels ist es, zu beweisen, dass die konstruierte Deformation  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  in einer geeigneten Umgebung  $V \subset B$  von 0 auch als Deformation der Fasern  $X_t, t \in V$  versell ist. Diese Eigenschaft bezeichnet man als „Offenheit der Versalität“. Die Tatsache, dass die Versalität bei Deformationen von kompakten komplexen Räumen offen ist, ist lange bekannt (siehe [Fle, S. 462]), der Beweis hierfür ist allerdings schwierig. In diesem Kapitel wird ein elementarerer Beweis für den speziellen Fall von Riemannschen Flächen angegeben. Dafür werden wir in Abschnitt 4.1 die Kodaira-Spencer-Abbildung für die Deformation einer beliebigen Faser  $X_t$  berechnen. Wir erhalten dadurch Vektorfelder  $\vartheta_\mu^t$  auf  $X_t$ . In Abschnitt 4.2 wird dann mit Hilfe eines Satzes aus der algebraischen Geometrie gezeigt, dass auch diese Vektorfelder eine Basis von  $H^1(X_t, \Theta_{X_t})$  bilden, so dass die Versalität der Deformation folgt.

### 4.1 Kodaira-Spencer-Abbildung für benachbarte Fasern

*Wiederholung:* Zur Bequemlichkeit des Lesers zeigen wir noch einmal die Konstruktion von  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  anhand einer Skizze:



Da der Isomorphismus  $\Phi : B \times V_{01} \xrightarrow{\sim} W$  fasertreu ist, konnten wir schreiben  $\Phi(t, z) = (t, \varphi(t, z))$  mit  $\varphi : B \times V_{01} \rightarrow U_{01}$ .  $\varphi_t$  war der Isomorphismus  $V_{01} \xrightarrow{\sim} \varphi_t(V_{01}) \subset U_{01}$ , der durch  $\varphi_t(z) := \varphi(t, z)$  definiert war.

**Bemerkung 4.1.1** Es sei  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  die konstruierte Deformation. Wir betrachten ein beliebiges  $s = (s_1, \dots, s_m) \in B$ . Dann ist  $\pi$  auch eine Deformation der Faser  $X_s$ . Die Kodaira-Spencer-Abbildung der Deformation  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  von  $X_s$  ist dann durch  $\frac{\partial}{\partial t_\mu} \mapsto \vartheta_\mu^s$  mit  $\vartheta_\mu^s(z) = \left. \frac{\partial}{\partial s'_\mu} \varphi(s', \varphi_s^{-1}(z)) \right|_{s'=s}$  gegeben.

*Beweis:*

Da die Kodaira-Spencer-Abbildung für Keime im Ursprung definiert ist, ist es günstiger, die Deformation so zu verschieben, dass  $s$  auf den Ursprung zu liegen kommt.

Wir definieren zunächst also  $\tau : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ ,  $t \mapsto \tau(t) := t - s$  und  $\hat{\tau} : \mathbb{C}^m \times X \rightarrow \mathbb{C}^m \times X$ ,  $(t, z) \mapsto \hat{\tau}(t, z) := (t - s, z)$ .

Weiter definieren wir

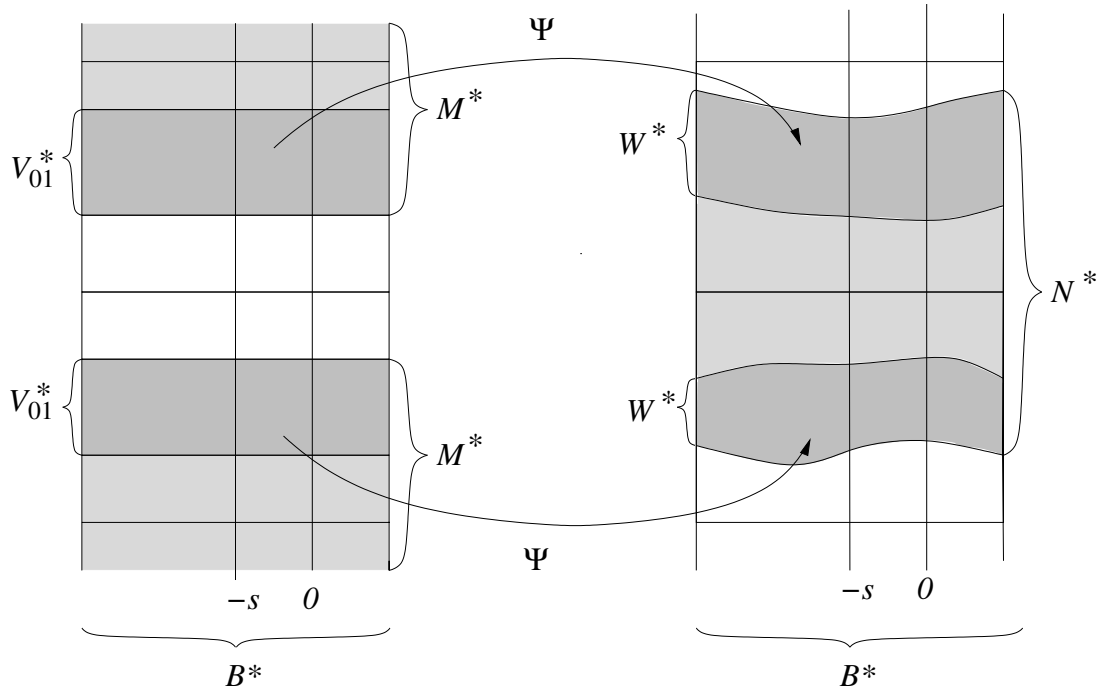
$$B^* = \tau(B), \quad \gamma_s = \varphi_s(\gamma), \quad V_{01}^* := \varphi_s(V_{01})$$

$$M^* = B^* \times (\text{Ext}(\gamma_s) \cup V_{01}^*)$$

$$N^* := \hat{\tau}(N), \quad W^* := \hat{\tau}(W)$$

$$\Psi(t, z) := (t, \psi(t, z)) := (t, \varphi(t + s, \varphi_s^{-1}(z))).$$

Dann ist  $\Psi$  ein Isomorphismus von  $B^* \times V_{01}^*$  nach  $W^*$ , und der Totalraum der Deformation von  $X_s$  entsteht durch Verkleben von  $M^*$  mit  $N^*$  mittels der Abbildung  $\Psi$  (siehe folgende Skizze:)



Es gilt

$$\Psi(0, z) = (0, \varphi(s, \varphi_s^{-1}(z))) = (0, z),$$

also ist

$$\Psi|_{\{0\} \times V_{01}^*} = \text{id}_{\{0\} \times V_{01}^*}.$$

$\Psi$  kann daher als vertikaler Automorphismus von  $B \times V_{01}^*$  interpretiert werden, wobei  $B$  der Keim des  $\mathbb{C}^m$  im Ursprung ist. Die zusätzliche Verkleinerung

von  $V_{01}^*$ , wie sie in Kapitel 3 eingeführt wurde, um  $\mathfrak{X}$  lokal als Produkt darzustellen hat keinen Einfluss auf das Ergebnis der Kodaira-Spencer-Abbildung und wird deshalb an dieser Stelle weggelassen.

Nach Kapitel 3 ist die Kodaira-Spencer-Abbildung der Deformation  $\pi$  von  $X_s$  dann durch

$$\rho : T(B) \rightarrow H^1(X, \Theta), \quad \frac{\partial}{\partial t'_\mu} \mapsto \rho \left( \frac{\partial}{\partial t'_\mu} \right) := \frac{\partial}{\partial t_\mu} \psi(t, z) \Big|_{t=0}$$

gegeben, wobei  $\frac{\partial}{\partial t_\mu} \psi(t, z) \Big|_{t=0}$  zunächst als Vektorfeld auf  $V_{01}^*$  vermöge der kanonischen Abbildung  $\mathcal{O}(V_{01}^*) \xrightarrow{\sim} \Theta(V_{01}^*)$  betrachtet wird und dann noch die Äquivalenzklasse in  $H^1(X, \Theta)$  genommen wird.

Also haben wir

$$\vartheta_\mu^s \cong \frac{\partial}{\partial t_\mu} \psi(t, z) \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t_\mu} \varphi(t + s, \varphi_s^{-1}(z)) \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial s'_\mu} \varphi(s', \varphi_s^{-1}(z)) \Big|_{s'=s}.$$

Dies war die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 4.1.2** Betrachten wir  $\vartheta_\mu^s$  als holomorphe Funktion auf  $\varphi_s(V_{01})$ , dann ist durch die Zuordnung  $(s, z) \mapsto \vartheta_\mu^s(z)$  eine in  $s$  und  $z$  holomorphe Funktion auf  $W$  gegeben.

*Beweis:* Dies folgt daraus, dass  $\varphi(s, z)$  holomorph in  $s$  und  $z$  ist.  $\square$

## 4.2 Nachweis der Offenheit der Versalität

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, zu zeigen, dass es eine Umgebung  $V \subset B$  von 0 gibt, so dass die Vektorfelder  $\vartheta_\mu^s$  für  $s \in V$  eine Basis von  $H^1(X_s, \Theta_{X_s})$  bilden. Damit ist dann auch gezeigt, dass die Deformation  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  für  $X_s$  versell ist. Dies wird am Schluss dieses Abschnittes noch einmal als Satz formuliert.

### Definition 4.2.1 (Die Garbe $\Theta_{\mathfrak{X}/B}$ )

Wir betrachten eine Familie von Riemannschen Flächen  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B$ . Es seien  $\Theta_{\mathfrak{X}}$ ,  $\Theta_B$  die Tangentialbündel auf  $\mathfrak{X}$  und  $B$ . Dann können wir  $\Theta_B$  auf  $\mathfrak{X}$  zurückziehen und erhalten eine Abbildung

$$h : \Theta_{\mathfrak{X}} \rightarrow \pi^* \Theta_B$$

die folgendermaßen definiert ist: Ist  $D$  eine Derivation auf  $\mathfrak{X}$  und  $f$  eine Funktion auf  $B$ , dann ist  $hD$  durch

$$(hD)(f) := D(\pi^* f)$$

definiert, wobei gilt:

$$\pi^* f(z) := f(\pi(z)).$$

Die Abbildung  $h$  ist surjektiv, wie man sofort durch Betrachtung von lokalen Koordinaten sieht. Nun definiert man

$$\Theta_{\mathfrak{X}/B} := \ker(h)$$

Dann ist  $\Theta_{\mathfrak{X}/B}$  wegen  $\dim \mathfrak{X} = m+1$  ein Geradenbündel (siehe [Schl, S. 120]).

**Bemerkung 4.2.2** Man hat also folgende exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow \Theta_{\mathfrak{X}/B} \rightarrow \Theta_{\mathfrak{X}} \rightarrow \pi^* \Theta_B \rightarrow 0$$

**Definition 4.2.3 (Die direkten Bildgarben)**

Sei  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  eine holomorphe Abbildung und sei  $\mathfrak{U} = \{U_i : i \in J\}$  eine Steinsche Überdeckung von  $\mathfrak{X}$ . Dann ist für jeden offenen Steinschen Raum  $V \subset B$  das System  $\mathfrak{U}_V := \{U_i \cap \pi^{-1}(V) : i \in J\}$  eine Steinsche Überdeckung von  $\pi^{-1}(V)$ . Daher sind für jede kohärente  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -Garbe  $\mathcal{S}$  die  $\mathcal{O}(V)$ -Moduln  $R^q \pi_*(\mathcal{S})(V) := H^q(\pi^{-1}(V), \mathcal{S}) = H^q(\mathfrak{U}_V, \mathcal{S})$  wohldefiniert.  $R^q \pi_*(\mathcal{S})$  bildet eine analytische Prägarbe auf  $\mathfrak{X}$ , die auf allen offenen Steinschen Unterräumen definiert ist. Die zugehörige assoziierte analytische Garbe heißt dann  $q$ -te direkte Bildgarbe von  $\mathcal{S}$  und wird mit  $R^q \pi_*(\mathcal{S})$  bezeichnet. Es ist klar, dass gilt:  $R^0 \pi_*(\mathcal{S}) = \pi_*(\mathcal{S})$  (siehe [GR2, S. 36]).

**Bemerkung 4.2.4** Die Garben  $R^q \pi_*$  können nur für kohärente  $\mathcal{S}$  definiert werden, woraus noch nicht folgt, dass auch die Garben  $R^q \pi_*(\mathcal{S})$  kohärent sind. Es gilt aber tatsächlich nach dem Satz über höherdimensionale direkte Bildgarben ([GR2, S. 207]), dass auch die Garben  $R^q \pi_*(\mathcal{S})$  kohärent sind.

**Satz 4.2.5** *Es gelten die Voraussetzungen wie in Kapitel 4.1. Betrachte die Abbildung  $\sigma_\mu : W \rightarrow \Theta_{X_t}$ ,  $(t, z) \mapsto \sigma_\mu(t, z) := \vartheta_\mu^t(z)$ . Dann ist  $\sigma_\mu$  ein holomorpher Schnitt der Garbe  $\Theta_{\mathfrak{X}/B}$  und definiert für jede Steinsche Menge  $V \subset B$  ein Element von  $R^1 \pi_*(\Theta_{X/B})(V)$  und damit einen Schnitt der Garbe  $R^1 \pi_*(\Theta_{X/B})$ .*

*Beweis:*

1. Die Abbildung  $\sigma_\mu : (t, z) \mapsto \sigma(t, z) := \vartheta_\mu^t(z)$  ist ein holomorpher Schnitt in  $\Theta_{\mathfrak{X}/B}$ , denn  $\sigma_\mu$  ist holomorph sowohl in  $t$  als auch in  $z$ .
2. Es ist  $(M, N)$  eine Steinsche Überdeckung von  $\mathfrak{X}$  (siehe Abbildung auf Seite 52). Für eine Steinsche Menge  $V \subset B$  ist daher die Überdeckung

$$\mathfrak{U}_V := (M \cap \pi^{-1}(V), N \cap \pi^{-1}(V))$$

geeignet zur Definition von  $R^1\pi_*(\Theta_{\mathfrak{X}/B})(V)$ . Durch den holomorphen Schnitt  $\sigma_\mu$  ist ein Element von  $\Theta_{X/B}(W \cap \pi^{-1}(V))$  gegeben. Dadurch hat man einen Kozyklus in  $Z^1(\mathfrak{U}_V, \Theta_{X/B})$  und die zugehörige Äquivalenzklasse in  $H^1(\mathfrak{U}_V, \Theta_{X/B})$  und damit ein Element von  $R^1\pi_*(\Theta_{X/B})(V)$  gegeben. Da  $V \subset B$  beliebig war hat man damit für jede Steinsche Menge  $V \subset B$  einen Schnitt der Garbe  $R^1\pi_*(\Theta_{X/B})$  definiert.

□

**Definition 4.2.6 (Die Garbe  $\mathcal{S}_t$ )**

Es sei  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  holomorph,  $S$  sei ein Vektorbündel auf  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathcal{S}$  sei die Garbe der holomorphen Schnitte von  $S$ . Dann ist für  $t \in B$  das Vektorraumbündel  $S_t$  auf  $X_t$  definiert durch  $S_t := S|_{X_t}$  mit  $X_t := \pi^{-1}(t)$ . Man bezeichnet dann mit  $\mathcal{S}_t$  die Garbe der holomorphen Schnitte von  $S_t$ .

**Definition 4.2.7 (Die Abbildungen  $\pi_{t,q}$ )**

Es sei  $\sigma \in R^q\pi_*(\mathcal{S})$ . Dann wird  $\sigma$  lokal durch eine Kohomologieklassse von  $H^q(\pi^{-1}(V), \mathcal{S})$  mit  $V \subset B$  repräsentiert. Diese Klasse lässt sich einschränken auf  $H^q(X_t, \mathcal{S}_t)$ . Dadurch wird eine Abbildung

$$\pi_{t,q} : R^q\pi_*(\mathcal{S})/\mathfrak{m}_t R^q\pi_*(\mathcal{S}) \rightarrow H^q(X_t, \mathcal{S}_t)$$

gegeben. Diese Abbildung ist wohldefiniert und eine lineare Abbildung zwischen komplexen Vektorräumen (siehe [GR2, S. 209]).

**Bemerkung 4.2.8** Für  $t \in B$  und eine Umgebung  $V \subset B$  von  $t$  sei  $[\sigma_\mu]$  der von  $\sigma_\mu \in \Theta(\mathfrak{X}/B)(W \cap \pi^{-1}(V))$  erzeugte Schnitt von  $R^1\pi_*(\Theta_{\mathfrak{X}/B})$ . Dann ist  $\pi_{t,1}([\sigma_\mu])$  die Äquivalenzklasse des von  $\vartheta_\mu^t$  erzeugten Kozyklus in  $H^1(X_t, \Theta_{X_t})$ . Insbesondere bilden die  $\pi_{0,1}([\sigma_\mu])$  eine Basis von  $H^1(X_0, \Theta_{X_0})$ .



*Beweis:* Die erste Aussage ist klar nach der Definition der Abbildung  $\pi_{t,1}$ . Die zweite Aussage folgt aus der Voraussetzung über die Vektorfelder  $\vartheta_\mu$ .

**Satz 4.2.9** *Es seien  $\sigma_\mu, \mu = 1, \dots, m$ , die holomorphen Schnitte der Garbe  $\Theta_{\mathfrak{X}/B}$ , wie oben definiert. Dann gibt es eine Umgebung  $V \subset B$  von 0, so dass für alle  $t \in V$  gilt: Die  $\pi_{t,1}([\sigma_\mu])$  bilden eine Basis von  $H^1(X_t, \Theta_{X_t})$ .*

Der Beweis dieses Satzes folgt weiter unten. Wir zitieren dazu einen Satz aus der algebraischen Geometrie (siehe [GR2, S. 211]):

**Satz 4.2.10** *Es gelten die Voraussetzungen von oben. Wenn  $\dim_{\mathbb{C}} H^q(X_t, \mathcal{S}_t)$  unabhängig von  $t \in B$  ist, dann sind alle Garben  $R^q\pi_*(\mathcal{S})$  lokal frei und alle Abbildungen*

$$\pi_{t,q} : R^q\pi_*(\mathcal{S})/\mathfrak{m}_t R^q\pi_*(\mathcal{S}) \rightarrow H^q(X_t, \mathcal{S}_t)$$

*sind Isomorphismen.*

*Beweis von Satz 4.2.9:*

In unserem Fall ist nun  $\mathcal{S} = \Theta_{\mathfrak{X}/B}$  und  $\mathcal{S}_t = \Theta_{X_t}$ . Betrachte die Schnitte  $[\sigma_\mu]$  der Garbe  $R^1\pi_*(\Theta_{\mathfrak{X}/B})$ . Es gilt:

$$\pi_{0,1}([\sigma_\mu]) \in H^1(X_0, \Theta_{X_0}),$$

wobei die  $\pi_{0,1}([\sigma_\mu]), \mu = 1, \dots, m$  die Äquivalenzklassen der von den  $\vartheta_\mu \in \Theta(U_{01})$  erzeugten Kozyklen sind, die nach Voraussetzung eine Basis von  $H^1(X_0, \Theta_{X_0})$  bilden. Die Garbe  $R^1\pi_*(\Theta_{\mathfrak{X}/B})$  ist nach Satz 4.2.10 lokal frei und daher bilden die  $[\sigma_\mu]$  ein freies Erzeugendensystem von  $R^1\pi_*(\Theta_{\mathfrak{X}/B})(V)$ , wobei  $V \subset B$  eine geeignete Umgebung von 0 ist.

Deshalb bilden für  $t \in V$  die Elemente

$$\pi_{t,1}([\sigma_\mu]) \in H^1(X_t, \Theta_{X_t})$$

ebenfalls eine Basis von  $H^1(X_t, \Theta_{X_t})$ , wie zu beweisen war.  $\square$

Damit haben wir insgesamt folgenden Satz bewiesen:

**Satz 4.2.11** *Es sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche und  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  die nach Kapitel 2 konstruierte Deformation. Dann gibt es eine Umgebung  $V \subset B$  von 0 mit folgender Eigenschaft:*

*Ist  $s \in V$  und  $X_s = \pi^{-1}(s)$ , dann ist die Deformation  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  von  $X_s$  über  $V$  versell (und damit universell).*

## 5 Deformationen mit Markierungen

Bei der Deformation  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  sind die Fasern  $X_t := \pi^{-1}(B)$  wieder Riemannsche Flächen. Die Fasern  $X_t$  sind zwar alle diffeomorph zueinander, denn die Deformation ist lokal topologisch trivial, im allgemeinen haben aber die Fasern verschiedene komplexe Strukturen. Es kann nun sein, dass in jeder Umgebung der zentralen Faser Riemannsche Flächen auftreten, die zueinander isomorph sind. Für spätere Konstruktionen wollen wir aber erreichen, dass alle Fasern verschieden voneinander sind. Um die isomorphen Riemannschen Flächen, die in der Umgebung der zentralen Faser auftreten, unterscheiden zu können, werden wir in diesem Kapitel sogenannte *festgelegte* oder *markierte* Riemannschen Fläche betrachten. Anschließend werden wir dann Deformationen von markierten Riemannschen Flächen definieren.

### 5.1 Der Teichmüllerraum und verwandte Räume

#### Definition 5.1.1 (Teichmüllerraum $\mathcal{T}_{\text{Tei}}(X_*)$ )

Es sei  $X_*$  eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$ . Eine festgelegte Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$  ist dann eine Äquivalenzklasse in der Menge aller Paare  $(f, X)$ , wobei  $f : X_* \rightarrow X$  ein orientierungstreuer Diffeomorphismus ist, bezüglich folgender Äquivalenzrelation:

$(f, X) \stackrel{\text{Tei}}{\sim} (f', X')$  genau dann, wenn es eine biholomorphe Abbildung  $c : X \rightarrow X'$  gibt, so dass  $c$  zu  $f' \circ f^{-1}$  homotop ist. Die Menge aller festgelegten Riemannschen Flächen bildet den Teichmüllerraum  $\mathcal{T}_{\text{Tei}}(X_*)$ . Wenn die Bezugsfläche  $X_*$  klar ist, schreibt man auch einfach  $\mathcal{T}_{\text{Tei}}$ .

#### Definition 5.1.2 (Teichmüllermarkierung)

Für eine Riemannsche Fläche  $X$  vom gleichen Geschlecht wie  $X_*$  kann man eine Teichmüllermarkierung wie folgt angeben:

Wir betrachten die Menge der quasikonformen orientierungstreuen Homöomorphismen  $f : X_* \rightarrow X$ . Dann heißen  $f : X_* \rightarrow X$  und  $g : X_* \rightarrow X$  äquivalent, wenn gilt:  $f \circ g^{-1}$  ist homotop zu  $\text{id}_X$ . Eine Äquivalenzklasse solcher orientierungstreuer Homöomorphismen ist eine *Teichmüllermarkierung* auf  $X$ .

**Definition 5.1.3 (Alternativ-Definition)**

Der Teichmüllerraum lässt sich auch so definieren: Es sei  $X$  eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$  und  $\Sigma_p = \{[a_j], [b_j]\}_{j=1}^g$  ein System von Erzeugern der Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, p)$ . Zwei Markierungen  $\Sigma_p = \{[a_j], [b_j]\}_{j=1}^g$ ,  $\Sigma_{p'} = \{[a'_j], [b'_j]\}_{j=1}^g$  heißen äquivalent, wenn es eine stetige Kurve  $\gamma_0$  (mit Anfangspunkt  $p'$  und Endpunkt  $p$ ) auf  $X$  gibt, so dass gilt:

$$[a'_j] = [\gamma_0^{-1} \cdot a_j \cdot \gamma_0] \quad \text{und} \quad [b'_j] = [\gamma_0^{-1} \cdot b_j \cdot \gamma_0] \quad \text{für } j = 1, \dots, g.$$

Zwei Paare  $(X, \Sigma_p)$  und  $(X', \Sigma_{p'})$  heißen äquivalent, wenn es eine biholomorphe Abbildung  $c : X \rightarrow X'$  gibt, so dass  $c_*(\Sigma_p)$  äquivalent zu  $\Sigma_{p'}$  ist.

**Satz 5.1.4** *Beide Definitionen sind äquivalent, wobei genauer gilt: Legt man auf  $X_*$  eine Markierung  $\Sigma = \{[a_j], [b_j]\}_{j=1}^g$  fest, bezeichnet man mit  $\mathcal{T}_{\text{Tei}}(X_*)$  die Menge der markierten Riemannschen Flächen entsprechend Definition 5.1.1 und mit  $\mathcal{T}_{\text{Tei},g}$  die Menge der äquivalenten Riemannschen Flächen entsprechend Definition 5.1.3, dann ist die Abbildung:*

$$\Phi_\Sigma : \mathcal{T}_{\text{Tei}}(X_*) \rightarrow \mathcal{T}_{\text{Tei},g}, \quad (f, X) \mapsto (X, f_*(\Sigma))$$

*bijektiv.*

*Beweis:* Siehe [Im, S. 14]

**Definition 5.1.5 (Der Torelli-Raum  $\mathcal{T}_{\text{Tor}}(X_*)$ )**

Es sei  $X_*$  eine Riemannsche Fläche. Eine Torelli-Fläche ist eine Äquivalenzklasse in der Menge aller Paare  $(f, X)$ , wobei  $X$  eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$  ist, und  $f : X_* \rightarrow X$  ein orientierungstreuer Homöomorphismus ist, bezüglich folgender Äquivalenzrelation:

$(f, X) \sim (f', X')$  genau dann, wenn es eine biholomorphe Abbildung  $c : X \rightarrow X'$  gibt, so dass  $c$  zu  $f' \circ f^{-1}$  homolog ist, oder genauer:

$$H_1(c) = H_1(f' \circ f^{-1}), \quad (*)$$

was so zu verstehen ist:  $c$  vermittelt eine Abbildung der Homologiegruppe von  $X$  auf sich selbst, indem jedes  $a \in H_1(X, \mathbb{Z})$  auf  $c_*(a)$  abgebildet wird. Diese Abbildung wird mit  $H_1(c)$  bezeichnet.  $c$  und  $f' \circ f^{-1}$  vermitteln also dieselbe Abbildung der Homologiegruppe.

Die Menge aller Äquivalenzklassen wird Torelliraum genannt und mit  $\mathcal{T}_{\text{Tor}}(X_*)$  bezeichnet.

**Bemerkung 5.1.6** Manchmal wird in der Literatur statt (\*) verlangt, dass gilt:

$$H^1(c) = H^1(f' \circ f^{-1}).$$

Beide Definitionen sind äquivalent.

*Beweisskizze:*

Wir betrachten  $H^1(X, \mathbb{Z})$  als die Gruppe der Homomorphismen  $H_1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Dann definiert man den Poincaré-Isomorphismus  $\alpha_0 : H_1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z})$  mit  $\alpha_0(a) := (a, \cdot)$ , wobei  $(a, b)$  die Schnittzahl der Kurven  $a, b$  ist (siehe [Jo, S. 210]). Aus der Definition wird sofort klar, dass gilt:

$$\alpha_0 H_1(f) = H^1(f^{-1}) \alpha_0$$

Damit folgt leicht, dass gilt:

$$H^1(f) = 1_{H^1(X, \mathbb{Z})} \iff H_1(f) = 1_{H_1(X, \mathbb{Z})}$$

und damit folgt die Behauptung. □

**Definition 5.1.7 (Alternativ-Definition)**

Eine Torelli-Fläche ist eine Äquivalenzklasse in der Menge aller Paare  $(X, \{[a_j], [b_j]\}_{j=1}^g)$ , wobei  $\{[a_j], [b_j]\}_{j=1}^g$  eine Basis von  $H_1(X, \mathbb{Z})$  ist, bezüglich folgender Äquivalenzrelation:

$(X, \{[a_j], [b_j]\}) \sim (X', \{[a'_j], [b'_j]\})$  genau dann, wenn es eine biholomorphe Abbildung  $c : X \rightarrow X'$  gibt mit  $H_1(c)(\{[a_j], [b_j]\}) = \{[a'_j], [b'_j]\}$ .

Die Menge aller Äquivalenzklassen wird mit  $\mathcal{T}_{\text{Tor}, g}$  bezeichnet.

**Bemerkung 5.1.8** Beide Definitionen sind äquivalent, genauer gilt:

Ist  $\Sigma$  eine Basis von  $H_1(X_*, \mathbb{Z})$ , dann ist die Abbildung

$$\mathcal{T}_{\text{Tor}}(X_*) \rightarrow \mathcal{T}_{\text{Tor}, g}, \quad (f, X) \mapsto (X, f_*(\Sigma))$$

bijektiv.

*Beweis:* Injektivität und Wohldefiniertheit der Abbildung folgen aus der Definition. Die Surjektivität folgt analog zu [Im, S. 15].

**Definition 5.1.9** ( *$n$ -Jacobi-Fläche*)

Es sei  $n \geq 2$  und  $X_*$  eine Riemannsche Fläche. Eine  $n$ -Jacobi-Fläche ist dann eine Äquivalenzklasse in der Menge aller Paare  $(f, X)$ , wobei  $f : X_* \rightarrow X$  ein orientierungstreuer Homöomorphismus ist, bezüglich folgender Äquivalenzrelation:  $(f, X) \sim (f', X')$  genau dann, wenn es eine biholomorphe Abbildung  $c : X \rightarrow X'$  gibt, so dass gilt:

$$H_1(c^{-1}f'f^{-1}) = 1_{H_1(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} \quad (*).$$

Dies bedeutet genauer, dass  $c^{-1}f'f^{-1}$  auf der Gruppe  $H_1(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  trivial operiert. Die Menge aller Äquivalenzklassen wird dann als  $n$ -Jacobi-Raum  $\mathcal{T}_{n-J}$  bezeichnet.

**Bemerkung 5.1.10** Es gibt eine surjektive Abbildung  $\pi : \mathcal{T}_{\text{Tei}} \rightarrow \mathcal{T}_{\text{Tor}}$ .

*Beweis:*

Es sei  $X$  eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$ . Wir geben eine surjektive Abbildung  $\mathcal{T}_{\text{Tei}}(X) \rightarrow \mathcal{T}_{\text{Tor}}(X)$  an. Die Abbildung  $\mathcal{T}_{\text{Tei}}(X) \rightarrow \mathcal{T}_{\text{Tor}}(X)$  wird so definiert:  $(f, X)$  sei ein Repräsentant eines Elementes von  $\mathcal{T}_{\text{Tei}}(X)$ . Dann wird  $(f, X)$  auf die Äquivalenzklasse  $[(f, X)]$  in  $\mathcal{T}_{\text{Tor}}(X)$  abgebildet. Da zwei festgelegte Riemannsche Flächen, die Teichmüller-äquivalent sind, auch Torelli-äquivalent sind, ist die Abbildung wohldefiniert. Es ist klar, dass die Abbildung surjektiv ist. □

**Bemerkung 5.1.11** Es gibt eine surjektive Abbildung  $\pi_n : \mathcal{T}_{\text{Tor}} \rightarrow \mathcal{T}_{n-J}$ .

*Beweis:* analog zum Beweis von Bemerkung 5.1.10.

## 5.2 Starrheit

Der besondere Vorteil der hier besprochenen drei Markierungen (Teichmüller, Torelli,  $n$ -Jacobi) liegt darin, dass markierungstreue Isomorphismen zwischen Riemannschen Flächen eindeutig sind. Man spricht von der „Starrheit der Teichmüller- bzw. Torelli- bzw.  $n$ -Jacobi-Struktur“. Diese Starrheit wird in diesem Abschnitt genau definiert und erläutert. Zunächst einmal gilt folgender Satz.

**Satz 5.2.1** *Es sei  $X$  eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g \geq 2$  oder ein Torus mit einem ausgezeichneten Punkt (hier auch als „punktierter Torus“ bezeichnet), auf dem eine Basis der Gruppe  $H_1(X, \mathbb{Z})$  gegeben ist.  $c : X \rightarrow X$  sei eine biholomorphe Abbildung mit*

$$H_1(c) = 1_{H_1(X, \mathbb{Z})}.$$

*Für Tori wird noch zusätzlich gefordert, dass  $c$  den ausgezeichneten Punkt festhält. Dann ist  $c$  die Identität.*

*Beweis:*

1. Für Riemannsche Flächen mit Geschlecht  $g \geq 2$  siehe [FK, S. 293].
2. Für punktierte Tori folgt dies aus elementaren Rechnungen, deren Grundlage sich in [Nag, S. 110] findet:

Es sei  $X_\sigma$  der Torus  $\mathbb{C}/\Gamma_\sigma$ . Ist  $\varphi$  ein Automorphismus auf  $X_\sigma$ , der den Punkt 0 festhält, dann kann man  $\varphi$  zu einem Automorphismus  $\tilde{\varphi}$  von  $\mathbb{C}$  liften. Also ist  $\tilde{\varphi}(z) = \alpha z$  mit  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ . Soll nun das Bild von  $X_\sigma$  wieder der Torus  $X_\sigma$  selbst sein, dann muss für  $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\tilde{\varphi}(z + m + n\sigma) = \tilde{\varphi}(z) \text{ mod } \Gamma_\sigma$$

sein. Setzt man  $m = 0, n = 1$  bzw.  $m = 1, n = 0$ , so folgt, dass es  $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2 \in \mathbb{Z}$  gibt mit

$$\alpha\sigma = \mu_1\sigma + \nu_1, \quad \alpha = \mu_2\sigma + \nu_2$$

Da  $\varphi$  ein orientierungstreuer Automorphismus ist, kann man schließen, dass  $M = \begin{pmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  sein muss (siehe genauer bei [Nag]). Fixiert man auf  $X_\sigma$  die Homotopie-Basis  $a, b$ , die durch die Projektion der Strecken  $[0, 1]$  und  $[0, \sigma]$  gegeben ist, dann kann man ausrechnen (siehe [Nag]), dass die Homologie-Operation  $H_1(\varphi)$  durch die lineare Abbildung

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

gegeben wird. Aus  $H_1(\varphi) = 1_{H_1(X_\sigma, \mathbb{Z})}$  folgt dann sofort  $\mu_1 = 1 = \nu_2$ ,  $\mu_2 = \nu_1 = 0$ , also  $\varphi = \text{id}_{X_\sigma}$ .  $\square$

Aus diesem Satz kann man zwei Folgerungen ableiten:

**Folgerung 5.2.2**

Es sei  $X$  eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g \geq 2$  oder ein punktierter Torus.  $c : X \rightarrow X$  sei eine biholomorphe Abbildung, die homotop zur Identität ist. Dann ist  $c$  die Identität.

*Beweis:* Wenn  $c$  zur Identität homotop ist, operiert  $H_1(c)$  auf  $H_1(X, \mathbb{Z})$  trivial.  $\square$

**Folgerung 5.2.3** Es sei  $X$  eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g \geq 2$  oder ein punktierter Torus, auf dem eine Basis der Gruppe  $H_1(X, \mathbb{Z})$  gegeben ist. Weiter sei  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$  und  $c : X \rightarrow X$  eine biholomorphe Abbildung mit

$$H_1(c, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 1_{H_1(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}$$

Dann ist  $c$  die Identität.

Für den Beweis zitieren wir ein Lemma von Serre<sup>6</sup>:

**Lemma 5.2.4** Sei  $A \in \mathrm{SL}_k(\mathbb{Z})$  mit endlicher Ordnung  $m > 1$ . Wenn  $A \equiv I \pmod{n}$  ist, dann ist  $n = m = 2$ .

*Beweis von Folgerung 5.2.3:* Die Aussage folgt aus dem Lemma von Serre und der Tatsache, dass eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g \geq 2$  bzw. ein punktierter Torus nur endlich viele Automorphismen haben.  $\square$

**Satz 5.2.5** *Es seien  $(f_1, X_1), (f_2, X_2)$  zwei markierte Riemannsche Flächen vom Geschlecht  $g \geq 2$  oder zwei punktierte Tori, die  $n$ -Jacobi-äquivalent sind (mit Bezugsfläche  $X_*$ ). Dann gibt es eine eindeutige biholomorphe Abbildung  $c : X_1 \rightarrow X_2$  mit*

$$H_1(c^{-1} \circ f_2 \circ f_1^{-1}) = 1_{H_1(X_1, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}$$

*Beweis:*

Es sei  $f_1 : X_* \rightarrow X_1, f_2 : X_* \rightarrow X_2$ . Die Existenz einer Abbildung  $c$  mit der gesuchten Eigenschaft folgt aus der Definition der  $n$ -Jacobi-Äquivalenz. Wir nehmen an, es sei  $c' : X_1 \rightarrow X_2$  eine zweite Abbildung mit der gesuchten Eigenschaft. Dann gilt:

---

<sup>6</sup>[FK, S. 292]

$$\begin{aligned} H_1((c')^{-1} \circ c) &= H_1((c')^{-1} \circ f_2 \circ f_1^{-1} \circ (c^{-1} \circ f_2 \circ f_1^{-1})^{-1}) = \\ &= 1_{H_1(X_1, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} \cdot 1_{H_1(X_1, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} = 1_{H_1(X_1, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} \end{aligned}$$

Daraus folgt  $c = c'$ . □

**Folgerung 5.2.6** Es seien  $X_1, X_2$  zwei Riemannsche Flächen vom Geschlecht  $g$ , die Teichmüller-äquivalent sind. Dann gibt es eine eindeutige biholomorphe Abbildung  $c : X_1 \rightarrow X_2$ .

Die gleiche Aussage gilt für Torelli-Äquivalenz.

*Beweis:*

Sind  $X_1, X_2$  Teichmüller-äquivalent, dann sind sie auch  $n$ -Jacobi-äquivalent. Die Existenz einer biholomorphen Abbildung folgt aus der Definition der Teichmüller-Äquivalenz. Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 5.2.5. Für Torelli-Äquivalenz geht der Beweis analog. □

### 5.3 Deformationen von markierten Riemannschen Flächen

**Definition 5.3.1** Es sei  $X_*$  eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$ . Unter einer *Familie von markierten Riemannschen Flächen* versteht man eine Familie von Riemannschen Flächen zusammen mit einer Markierung der Fasern  $f_s : X_* \rightarrow X_s$  (wobei hier mit  $f_s$  die Äquivalenzklasse aller zu  $f_s$  homotopen Abbildungen gemeint ist), so dass gilt:

Hat man eine lokale topologische Trivialisierung  $\Psi_1 : S_1 \times X_* \rightarrow \pi^{-1}(S_1)$  gegeben (wobei  $S_1$  zusammenhängend sein muss), betrachtet man den Homöomorphismus

$$\gamma_s : X_* \xrightarrow{\sim} \{s\} \times X_* \xrightarrow{\Psi_i} X_s,$$

und ist für ein  $s_0$  die Abbildung  $\gamma_{s_0}$  homotop zu  $f_{s_0}$ , dann ist  $\gamma_s$  homotop zu  $f_s$  für alle  $s \in S_1$ .

**Bemerkung 5.3.2** Es genügt, die Verträglichkeit der Markierung mit topologischen Trivialisierungen für eine Überdeckung  $(S_i)_{i \in J}$  von  $S$  nachzuweisen, denn hat man die Verträglichkeit für *eine* Überdeckung nachgewiesen, so gilt sie auch für alle anderen Überdeckungen und Trivialisierungen.



*Beweis:* Es seien  $S_i, i \in J, S'_i, i \in J'$  zwei Überdeckungen mit lokalen topologischen Trivialisierungen  $\Psi_i, \Psi'_i$ . Die  $S_i, S'_i$  seien alle zusammenhängend. Die Markierungen seien mit den Trivialisierungen  $\Psi_i$  verträglich. Wir zeigen, dass die Markierungen dann auch mit  $\Psi'_i$  verträglich sind.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei zunächst  $J = J'$  und  $S_i = S'_i$  für alle  $i \in J$ . Ist dies nicht der Fall, dann wählt man einfach eine gemeinsame Verfeinerung der beiden Überdeckungen, die aus zusammenhängenden Mengen besteht, und die entsprechenden lokalen Trivialisierungen.

Wir wählen  $S_i$  beliebig und definieren

$$\gamma_s : X_* \xrightarrow{\sim} \{s\} \times X_* \xrightarrow{\Psi_i} X_s \quad \text{und}$$

$$\gamma'_s : X_* \xrightarrow{\sim} \{s\} \times X_* \xrightarrow{\Psi'_i} X_s.$$

Zu zeigen ist, dass  $f_s$  homotop zu  $\gamma'_s$  ist, oder alternativ:  $\gamma_s$  ist homotop zu  $\gamma'_s$ .

Es ist  $f_{s_0}$  nach Voraussetzung homotop zu  $\gamma'_{s_0}$ , also ist  $\gamma_{s_0}$  homotop zu  $\gamma'_{s_0}$ . Weiter ist  $(\gamma'_s)^{-1} \circ \gamma_s$  homotop zu  $(\gamma'_{s_0})^{-1} \circ \gamma_{s_0}$  auf  $X_*$  (da  $S_i$  zusammenhängend ist). Also ist  $(\gamma'_s)^{-1} \circ \gamma_s$  homotop zur Identität bzw.  $\gamma_s$  homotop zu  $\gamma'_s$  auf  $X_s$ .

□

### Definition 5.3.3 (Isomorphie von Familien)

Es seien zwei markierte Familien  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow S, \pi' : \mathfrak{X}' \rightarrow S'$  gegeben. Dann heißen die Familien äquivalent, wenn es einen Isomorphismus  $\varphi : S \rightarrow S'$  und einen fasertreuen Isomorphismus  $\Phi : X \rightarrow X'$  gibt, der mit den Markierungen  $f_s, f'_s$  verträglich ist, d. h. für beliebiges  $s \in S$  ist  $\Phi_s : X_s \rightarrow X_{\varphi(s)}$  homotop zu  $f'_s \circ f_s^{-1}$ .

### Definition 5.3.4 (Deformationen markierter Riemannscher Flächen)

Gegeben sei eine markierte Riemannsche Fläche  $(f, X)$  (mit Geschlecht  $g$ ) und ein komplexer Raum  $S$  mit einem ausgezeichneten Punkt  $s_0$ . Unter einer Deformation von  $(f, X)$  über  $S$  versteht man dann eine Familie  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow S$  von markierten Riemannschen Flächen vom Geschlecht  $g$  (mit Markierungen  $f_s, s \in S$ ), so dass  $(f_{s_0}, X_{s_0}) \stackrel{\text{Tei}}{\sim} (f, X)$  ist. Zwei Deformationen heißen isomorph, wenn sie als Familien isomorph sind, und die zentralen Fasern (Teichmüller-) äquivalent sind.

**Definition 5.3.5 (Basiswechsel)**

Es sei  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow S$  eine Deformation einer markierten Riemannschen Fläche  $(f, X)$ . Weiter sei  $h : T \rightarrow S$  ein Morphismus komplexer Räume. Dann wird durch  $\mathfrak{X} \times_S T \rightarrow T$  eine Deformation definiert, die wir den Rückzug von  $\mathfrak{X}$  mittels  $h$  nennen. Die Markierungen werden dann in naheliegender Weise auf  $\mathfrak{X} \times_S T$  übertragen: ist  $X_t$  eine Faser von  $\mathfrak{X} \times_S T$ , so ordnet man  $X_t$  die Markierung  $f_{h(t)}$  der Faser  $X_{h(t)}$  zu.

**Satz 5.3.6** *Es sei  $X_*$  eine Riemannsche Fläche.  $f : X_* \rightarrow X, f' : X_* \rightarrow X'$  seien markierte Riemannsche Flächen. Es seien  $B, B'$  zusammenhängende komplexe Räume,  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  sei eine Deformation von  $(f, X)$  und  $\pi' : \mathfrak{X}' \rightarrow B'$  eine Deformation von  $(f', X')$ . Die Familien  $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}'$  seien topologisch trivial. Es seien  $X$  und  $X'$  Teichmüller-äquivalent. Außerdem seien die Deformationen (als Deformationen nicht markierter Riemannscher Flächen) isomorph vermöge der Isomorphismen  $\Phi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}', \varphi : B \rightarrow B'$ .*

*Dann sind  $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}'$  auch isomorph als Deformationen markierter Riemannscher Flächen, insbesondere gilt: Sind  $t \in B, t' \in B'$  mit  $\psi(t) = t'$  und  $X_t, X_{t'}$  die Fasern von  $t, t'$ , dann sind  $X_t$  und  $X_{t'}$  Teichmüller-äquivalent.*

*Beweis:*

Zunächst sei ohne Einschränkung 0 der ausgezeichnete Punkt von  $B$  und  $B'$ . Da  $X$  und  $X'$  Teichmüller-äquivalent sind, gibt es eine biholomorphe Abbildung  $c : X \rightarrow X'$ , die zu  $f' \circ f^{-1}$  homotop ist. Dies ist äquivalent dazu, dass  $(f')^{-1} \circ c \circ f$  zur Identität (auf  $X_*$ ) homotop ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei  $\Phi|_{X_0} = c$ .

Die Deformationen sind topologisch trivial, d. h. es gibt topologische Abbildungen

$$\Psi : B \times X_* \rightarrow \mathfrak{X}, \quad \Psi' : B' \times X_* \rightarrow \mathfrak{X}'$$

mit

$$\pi \circ \Psi = \text{pr}_B, \quad \pi' \circ \Psi' = \text{pr}_{B'}.$$

Wir definieren die topologischen Abbildungen  $\gamma_t : X_* \rightarrow X_t$  durch:

$$\gamma_t : X_* \xrightarrow{\sim} \{t\} \times X_* \xrightarrow{\Psi} X_t$$

Analog definiert man  $\gamma'_{t'}$ . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei  $\gamma_0 = f, \gamma'_0 = f'$ . Sei nun weiter  $c_t$  die Einschränkung von  $\Phi$  auf  $X_t$ . Dann ist  $c_t$  eine biholomorphe Abbildung von  $X_t$  nach  $X'_{t'}$ , und wir müssen nur noch

zeigen, dass  $c_t \circ f_t$  homotop zu  $f'_t$  ist, was äquivalent dazu ist, dass  $c_t \circ \gamma_t$  homotop zu  $\gamma'_t$ , oder dass  $(\gamma'_t)^{-1} \circ c_t \circ \gamma_t$  homotop zur Identität auf  $X_*$  ist. Da  $B$  und  $B'$  zusammenhängend sind, ist  $(\gamma'_t)^{-1} \circ c_t \circ \gamma_t$  homotop zu  $(\gamma'_0)^{-1} \circ c \circ \gamma_0 = (f')^{-1} \circ c \circ f$ , und dies ist nach Voraussetzung homotop zu  $\text{id}_{X_*}$ .

□

**Bemerkung 5.3.7** Alle Definitionen in diesem Kapitel lassen sich auch auf Torelli-Flächen und  $n$ -Jacobi-Flächen übertragen. Man ersetzt nur jeweils „homotop“ durch „homolog“. Satz 5.3.6 gilt dann analog auch für Torelli-Markierungen und  $n$ -Jacobi-Markierungen.

## 6 Eigenschaften des Isom-Funktors

### 6.1 Ein Satz über Folgen mit isomorphen Fasern

Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis des folgenden Satzes:

**Satz 6.1.1** *Es seien  $\pi_1 : \mathfrak{X} \rightarrow B_1, \pi_2 : \mathfrak{Y} \rightarrow B_2$  Familien Riemannscher Flächen.  $B_1, B_2$  seien beides komplexe Mannigfaltigkeiten mit ausgezeichnetem Punkt 0. Weiter seien  $s_n \in B_1, t_n \in B_2, n \in \mathbb{N}$  Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  Isomorphismen  $\varphi_n : X_{s_n} \xrightarrow{\sim} Y_{t_n}$  existieren. Auf beiden Familien existiere eine  $C^\infty$ -Trivialisierung:*

$$\Psi_1 : B \times X_0 \rightarrow \mathfrak{X}, \quad \Psi_2 : B \times Y_0 \rightarrow \mathfrak{Y},$$

so dass man die Diffeomorphismen:

$$\beta_{s_n} : X_0 \xrightarrow{\sim} \{s_n\} \times X_0 \xrightarrow{\Psi_1} X_{s_n} \quad \text{und analog} \quad \gamma_{t_n} : Y_0 \rightarrow Y_{t_n}$$

hat. Es sei  $f_n := \gamma_{t_n}^{-1} \circ \varphi_n \circ \beta_{s_n}$ . Dann konvergieren die  $f_n$  gleichmäßig gegen einen Isomorphismus  $\varphi : X_0 \rightarrow Y_0$ .

Diesen Satz werden wir mit Hilfe des Satzes von Arzela-Ascoli beweisen. Zunächst formulieren wir einige Feststellungen über Metriken und Krümmungen auf Riemannschen Flächen.

**Lemma 6.1.2** *Es seien  $X, Y$  kompakte Riemannsche Flächen mit hyperbolischen Metriken  $\lambda(z)dz^2$  und  $\rho(w)dw^2$ . Dabei gelte für die Krümmungen:*

$$A_2 < K_1(z) < A_1 < 0 \quad \text{und} \quad B_2 < K_2(w) < B_1 < 0$$

für alle  $z \in X, w \in Y$  mit Konstanten  $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}^-$ . Es sei  $f : X \rightarrow Y$  konform. Dann gilt:

$$\frac{A_1}{B_2} \lambda^2(z) \leq \rho^2(f(z)) \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \leq \frac{A_2}{B_1} \lambda^2(z)$$

Das heißt, die Längenverzerrung durch  $f$  liegt zwischen den Grenzen  $A_1/B_2$  und  $A_2/B_1$ .

Für den Beweis zitieren wir folgenden Satz:

**Satz 6.1.3** <sup>7</sup> Es sei  $D$  ein Gebiet in  $\mathbb{C}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  sei subharmonisch, d. h.  $f$  ist  $C^2$ -differenzierbar und

$$\Delta f \geq 0 \quad \text{für alle } z \in D,$$

wobei  $\Delta := 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2$  ist. Außerdem sei  $z \in D$  mit  $f(z) = \sup_D f$ . Dann ist  $f$  auf  $D$  konstant.

**Folgerung 6.1.4** Es sei  $D$  ein Gebiet in  $\mathbb{C}$ .  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine  $C^\infty$ -differenzierbare Funktion und nehme in  $z_1$  ihr Maximum an. Dann gilt:  $\Delta f(z_1) \leq 0$ .

*Beweis:* Wäre  $\Delta f(z_1) > 0$ , dann wäre  $f$  in einer Umgebung von  $z_1$  subharmonisch, und daher nach Satz 6.1.3 konstant. Dann wäre aber  $\Delta f(z_1) = 0$  im Widerspruch zur Annahme. Als muss  $\Delta f(z_1) \leq 0$  sein.  $\square$

*Beweis von Lemma 6.1.2:* Der Beweis verläuft völlig analog zu [Jo, S. 194]. Wir definieren

$$L(z) := \frac{\rho^2(f(z))}{\lambda^2(z)} f_z \bar{f}_{\bar{z}}.$$

Dann gilt (siehe [Jo, S. 151 ]):

$$\Delta \log L(z) = 2K_1(z) - 2K_2(z) \cdot L(z) \quad \text{für alle } z \in X$$

Sei  $z_1$  ein Punkt, bei dem  $L$  sein Maximum annimmt (und damit auch  $\log L$ ). Dann ist nach Satz 6.1.3

$$\begin{aligned} \Delta \log L(z_1) &\leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2K_1(z_1) - 2K_2(z_1)L(z_1) &\leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow L(z_1) &\leq \frac{K_1(z_1)}{K_2(z_1)} \leq \frac{A_2}{B_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow L(z) &\leq \frac{A_2}{B_1} \quad \text{für alle } z \in X \end{aligned}$$

Analog folgt:

$$L(z) \geq \frac{A_1}{B_2} \quad \text{für alle } z \in X$$

Insgesamt folgt damit die Behauptung.  $\square$

---

<sup>7</sup>Siehe [Jo, S. 106]

**Satz 6.1.5** *Es seien  $X, Y$  Riemannsche Flächen. Auf  $X, Y$  seien Poincaré-Metriken gegeben (d. h. Riemannsche Metriken mit konstanter Krümmung  $-1$ ). Dann ist eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  genau dann biholomorph, wenn  $f$  eine orientierungstreue Isometrie bezüglich der Poincaré-Metriken ist.*

*Beweis:*

1. Ist  $f$  eine Isometrie, dann ist  $f$  konform.
2. Ist andererseits  $f : X \rightarrow Y$  biholomorph, dann ist  $f$  winkeltreu. Zu zeigen ist nur noch, dass  $f$  auch längentreu ist. Dies folgt aus Lemma 6.1.2 für den Spezialfall  $K_1(z) \equiv K_2(z) \equiv -1$ .

□

**Bemerkung 6.1.6** Es gelten die Voraussetzungen von Satz 6.1.1. Betrachte auf  $X_0$  die Poincaré-Metrik  $d(x, y)$  und auf  $Y_0$  die Poincaré-Metrik  $d'(x, y)$ . Man hat für  $s \in B_1$  auf der Faser  $X_s$  eine Metrik, die durch

$$d_s(x, y) := d(\beta_s^{-1}(x), \beta_s^{-1}(y))$$

gegeben ist. Analog hat man auf  $X_t$ ,  $t \in B_2$  eine Metrik  $d'_t$ . Dann gibt es eine Umgebung  $V \subset S$  von 0, so dass für die Krümmungen  $K_s(z)$  der Metriken  $d_s$  für  $s \in V$  gilt:

$$-2 \leq K_s(z) \leq -\frac{1}{2} \quad \text{für alle } z \in X$$

Die gleiche Aussage gilt analog für die Krümmungen  $K'_t(w)$  der Metriken  $d'_t$ .

*Beweis:*

Dies folgt daher, dass die Krümmungen sich aus den Koeffizienten der Metrik  $d_s$  errechnen, und diese  $\mathbb{C}^\infty$ -differenzierbar von  $s$  abhängen. □

**Bemerkung 6.1.7** Es gelten wieder die Voraussetzungen von Satz 6.1.1. Außerdem seien auf den Fasern  $X_s$ ,  $s \in B_1$ ,  $X_t$ ,  $t \in B_2$  die Metriken  $d_s$ ,  $d'_t$  wie oben gewählt, und es seien  $B_1, B_2$  so klein gewählt, dass die Krümmungen der Metriken zwischen  $-2$  und  $-\frac{1}{2}$  liegen.

Definiert man  $f_n : X_0 \rightarrow Y_0$ ,  $f_n := \gamma_{t_n}^{-1} \circ \varphi_n \circ \beta_{s_n}$  wie in Satz 6.1.1, dann gilt:

$$d'(f_n(x), f_n(y)) \leq 4d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X_0$$

*Beweis:*

Definiert man  $x' := \beta_{s_n}(x)$ ,  $y' := \gamma_{t_n}(y)$  für beliebiges  $x, y \in X_0$ , dann ist

$$d'(f_n(x), f_n(y)) \leq 4d(x, y) \iff d'_{t_n}(\varphi_n(x'), \varphi_n(y')) \leq 4d_{s_n}(x', y')$$

Mit Lemma 6.1.2 ergibt sich:

$$\frac{1}{4}d_{s_n}(x', y') \leq d'_{t_n}(\varphi_n(x'), \varphi_n(y')) \leq 4d_{s_n}(x', y') \quad \text{für alle } x', y' \in X_{s_n}$$

Daraus folgt dann die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 6.1.8** Betrachte nun auf  $X_0$  die Folgen der Abbildungen  $f_n$ . Dann sind die  $f_n$  gleichgradig stetig.

*Beweis:* Die Funktionen sind alle Lipschitz-stetig mit der Konstanten 4, also insbesondere gleichgradig-stetig.  $\square$

**Satz 6.1.9 (Satz von Arzela und Ascoli)** <sup>8</sup>

Sei  $X$  ein kompakter metrischer Raum und  $Y$  ein vollständig normierter Raum.  $\mathcal{C}_b(X, Y)$  sei der Banachraum der beschränkten stetigen Funktionen von  $X$  nach  $Y$ . Dann und nur dann ist eine Teilmenge  $H$  von  $\mathcal{C}_b(X, Y)$  relativ kompakt, wenn  $H$  gleichgradig stetig ist und für alle  $x \in X$  die Menge  $H(x) = \{f(x) : f \in H\}$  relativ kompakt in  $Y$  ist.

**Folgerung 6.1.10** Die Folge  $f_n$  hat eine konvergente Teilfolge, die gegen  $f : X_0 \rightarrow Y_0$  konvergiert.

Wir beweisen die Folgerung, indem wir  $Y_0$  isometrisch in den  $\mathbb{R}^4$  einbetten. Dazu brauchen wir den Satz von Nash:

**Satz 6.1.11 (Nash)** <sup>9</sup> Es sei  $M$  eine kompakte  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit positiv definitem stetigen metrischen Tensor. Dann gibt es eine isometrische  $C^1$ -differenzierbare Einbettung von  $M$  in den  $\mathbb{R}^{2n}$ .

*Zusatz:* Dieser Satz gilt auch in höher differenzierbarer Form: Ist  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit  $C^k$ -differenzierbarer/analytischer Metrik ( $3 \leq k \leq \infty$ ), so existiert eine isometrische  $C^k$ -differenzierbare/analytische Einbettung in

---

<sup>8</sup>Siehe [Kan]

<sup>9</sup>Siehe [Nas]

einen euklidischen Raum. Dieser Satz ist aber wesentlich schwieriger zu beweisen.

*Beweis von Folgerung 6.1.10:*

Wir betten  $Y_0$  isometrisch und  $C^1$ -differenzierbar in den  $\mathbb{R}^4$  mittels der Abbildung  $g : Y_0 \rightarrow \mathbb{R}^4$  ein. Weiter definieren wir die Abbildungen  $f'_n : X_0 \rightarrow \mathbb{R}^4$  durch  $f'_n = g^* f_n$ . Dann sind die  $f'_n$  gleichgradig stetig, und die Menge  $\{f'_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$  ist relativ kompakt in  $\mathbb{R}^4$ , denn  $g(Y_0)$  ist selbst kompakt. Also ist die Menge  $\{f'_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}_b(X_0, \mathbb{R}^m)$  relativ kompakt und enthält somit eine konvergente Teilfolge  $f'_{n_i}$ . Die Grenzfunktion sei mit  $f'$  bezeichnet. Aus Stetigkeitsgründen ist  $f'(X_0) = g(Y_0)$ , also ist  $f'$  eine stetige bijektive Abbildung von  $X_0$  nach  $g(Y_0)$ . Es sei  $f := g^{-1} \circ f'$ , also  $f' = g^* f$ . Dann konvergiert die Folge  $f_{n_i}$  gleichmäßig gegen  $f$ , und  $f : X_0 \rightarrow Y_0$  ist eine stetige, bijektive Abbildung. □

**Bemerkung 6.1.12** Es sei  $f : X_0 \rightarrow Y_0$  ein Limes der Folge  $f_n$ . Dann ist  $f$  eine Isometrie bezüglich der Poincaré-Metriken auf  $X_0$  und  $Y_0$ .

*Beweis:* Es genügt zu zeigen, dass  $f$  längentreu ist. Dann ist  $f$  auch winkeltreu.

Es sei  $A_{1,s}$  die maximale Krümmung von  $d_s$ ,  $A_{2,s}$  die minimale Krümmung von  $d_s$ , analog seien  $B_{1,t}, B_{2,t}$  die extremalen Krümmungen von  $d'_t$ . Dann gilt:

$$\lim_{s \rightarrow 0} A_{1,s} = \lim_{s \rightarrow 0} A_{2,s} = \lim_{t \rightarrow 0} B_{1,t} = \lim_{t \rightarrow 0} B_{2,t} = -1.$$

Außerdem gilt für beliebige  $x, y \in X_0$ :

$$\frac{A_{1,s_n}}{B_{2,s_n}} d(x, y) \leq d(f_n(x), f_n(y)) \leq \frac{A_{2,s_n}}{B_{1,s_n}} d(x, y).$$

Weiter gilt für beliebige  $x, y \in X_0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= f(x), & \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) &= f(y) \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n(x), f_n(y)) &= d(f(x), f(y)), \end{aligned}$$

und im Limes  $n \rightarrow \infty$  folgt dann:

$$d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$$



$$\Rightarrow d(x, y) = d(f(x), f(y))$$

Also ist  $f$  eine Isometrie auf  $X$ . □

**Bemerkung 6.1.13**  $f : X_0 \rightarrow Y_0$  ist biholomorph

*Beweis:*

Jede positiv orientierte Isometrie bezüglich Poincaré-Metriken ist biholomorph (siehe Satz 6.1.5). □

Insgesamt haben wir damit den Satz 6.1.1 bewiesen. Für die weiteren Überlegungen ist noch folgende Folgerung aus Satz 6.1.1 wichtig:

**Folgerung 6.1.14** Es seien  $\pi_1 : \mathfrak{X} \rightarrow B_1, \pi_2 : \mathfrak{Y} \rightarrow B_2$  Familien von Riemannschen Flächen,  $s_n \in B_1, t_n \in B_2$  Folgen mit Grenzwert 0, so dass Isomorphismen  $\varphi_n : X_{s_n} \xrightarrow{\sim} Y_{t_n}$  existieren. Zusätzlich seien die Familien als Deformationen von  $X_0$  und  $Y_0$  universell.  $B_1, B_2$  sind dann komplexe Mannigfaltigkeiten und die Familien sind lokal differenzierbar trivial.

Dann gibt es Umgebungen  $V \subset B_1, W \subset B_2$  von 0, einen Isomorphismus  $\psi : V \xrightarrow{\sim} W$  und einen fasertreuen Isomorphismus

$$\Psi : \mathfrak{X} \times_{B_1} V \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Y} \times_{B_2} W,$$

so dass für  $s_n \in V$  gilt:  $\Psi|_{X_{s_n}}$  stimmt mit  $\varphi_n$  überein.

*Beweis:* Es seien zunächst  $\beta_s : X_0 \rightarrow X_s, \gamma_t : Y_0 \rightarrow Y_t$  wie oben definiert (ohne Einschränkung seien die Familien auf ganz  $B_i$  differenzierbar trivial). Außerdem sei  $\varphi : X_0 \rightarrow Y_0$  die Grenzfunktion der Funktionen  $\gamma_{t_n}^{-1} \circ \varphi_n \circ \beta_{s_n}$ . Da nach Voraussetzung beide Deformationen universell sind, gibt es Umgebungen  $V, W$ , einen Isomorphismus  $\psi : V \xrightarrow{\sim} W$  und einen fasertreuen Isomorphismus  $\Psi : \mathfrak{X} \times_{B_1} V \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Y} \times_{B_2} W$ . Ohne Einschränkung sei  $\Phi|_{X_0} = \varphi$ . Es sei  $\Psi_{s_n} := \Psi|_{X_{s_n}}$ . Sowohl  $\Psi_{s_n}$  also auch  $\varphi_n$  sind Isomorphismen von  $X_{s_n}$  auf  $Y_{t_n}$ . Wir haben also folgende drei Diffeomorphismen von  $X_0$  nach  $X_{t_n}$ :

$$\gamma_{t_n} \circ \varphi, \quad \Psi_{s_n} \circ \beta_{s_n} \quad \text{und} \quad \varphi_n \circ \beta_{s_n}$$

Wir zeigen nun, dass alle drei Diffeomorphismen homotop sind.

1. Dass  $\Psi_{s_n} \circ \beta_{s_n}$  homotop zu  $\gamma_{t_n} \circ \varphi$  ist, folgt analog zum Beweis von Satz 5.3.6:

Es ist  $\gamma_t^{-1} \circ \Psi_s \circ \beta_s : X_0 \rightarrow Y_0$  homotop zu  $\varphi$ , und damit ist  $\Psi_s \circ \beta_s$  homotop zu  $\gamma_t \circ \varphi$  für alle  $s \in B_1, t \in B_2$  mit  $\psi(s) = t$ .

2. Zu zeigen ist noch, dass  $\varphi_n \circ \beta_{s_n}$  homotop zu  $\gamma_{t_n} \circ \varphi$  ist.

Die Tatsache, dass  $\varphi_n$  gegen  $\varphi$  konvergiert, bedeutet genauer, dass die Abbildung  $\gamma_{t_n}^{-1} \circ \varphi_n \circ \beta_{s_n}$  gleichmäßig gegen  $\varphi$  konvergiert. Dann muss aber ab einem genügend großen Index  $\gamma_{t_n}^{-1} \circ \varphi_n \circ \beta_{s_n}$  homotop zu  $\varphi$  sein. Daraus folgt, dass  $\gamma_{t_n} \circ \varphi$  homotop zu  $\varphi_n \circ \beta_{s_n}$  ist.  $\square$

Es ist also  $\Psi_{s_n} \circ \beta_{s_n}$  homotop zu  $\varphi_n \circ \beta_{s_n}$ . Damit ist  $\varphi_n^{-1} \circ \Psi_{s_n}$  eine biholomorphe Abbildung auf  $X_{s_n}$ , die homotop zur Identität ist. Nach Satz 5.2.1 bzw. der Folgerung dazu ist dann  $\varphi_n^{-1} \circ \Psi_{s_n} = \text{id}_{X_{s_n}}$ , und damit  $\varphi_n = \Psi_{s_n}$  wie behauptet war.  $\square$

## 6.2 Der Isom-Funktor

### 6.2.1 Der Funktor $\text{Isom}_S(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$

#### Definition 6.2.1 (Familien komplexer Räume)

Eine *Familie von komplexen Räumen über einem komplexen Raum  $S$*  ist ein komplexer Raum  $\mathfrak{X}$  zusammen mit einer holomorphen, flachen, eigentlichen Abbildung  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow S$ . Man sagt auch, dass „ $\mathfrak{X}$  über  $S$  liegt“. Jede Familie Riemannscher Flächen ist auch eine Familie komplexer Räume.

#### Definition 6.2.2 (Der Funktor $\text{Isom}_S(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ )

Es seien  $\pi_1 : \mathfrak{X} \rightarrow S, \pi_2 : \mathfrak{Y} \rightarrow S$  Familien von komplexen Räumen  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$  über einem komplexen Raum  $S$ . Dann definiert man den Funktor  $\text{Isom}_S(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  wie folgt: Jedem komplexen Raum  $T$  über  $S$  wird die Menge der Isomorphismen

$$\text{Isom}_T(\mathfrak{X} \times_S T, \mathfrak{Y} \times_S T)$$

zugeordnet. Insbesondere wird jedem  $s \in S$  die Menge der Isomorphismen  $X_s \rightarrow Y_s$  zugeordnet, und jedem  $S' \subset S$  wird die Menge der  $S'$ -Isomorphismen  $\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{Y}'$  zugeordnet, wobei  $\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}'$  die Einschränkungen von  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$  auf  $S'$  sind.

Sind  $U, T$  Räume über  $S$ , und hat man einen  $S$ -Morphismus  $h : U \rightarrow T$ , so wird diesem die Abbildung

$$\eta : \text{Isom}_T(\mathfrak{X} \times_S T, \mathfrak{Y} \times_S T) \rightarrow \text{Isom}_U(\mathfrak{X} \times_S U, \mathfrak{Y} \times_S U)$$

zugeordnet, der in der naheliegenden Weise definiert wird:

Man hat zunächst die von  $h$  induzierten Abbildungen

$$\eta_X \in \text{Hom}_S(\mathfrak{X} \times_S U, \mathfrak{X} \times_S T), \quad \eta_Y \in \text{Hom}_S(\mathfrak{Y} \times_S U, \mathfrak{Y} \times_S T)$$

und definiert dann für  $\alpha \in \text{Isom}_T(\mathfrak{X} \times_S T, \mathfrak{Y} \times_S T)$  den Isomorphismus  $\eta(\alpha)$  so, dass gilt:

$$\alpha \circ \eta_X = \eta_Y \circ \eta(\alpha)$$

Für Familien von komplexen Räumen gilt folgender tiefliegender Satz, den wir für den Spezialfall von Familien von Riemannschen Flächen verwenden werden:

**Satz 6.2.3** *Der Funktor  $\mathbf{Isom}_S(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  ist darstellbar durch einen komplexen Raum  $I$  über  $S$ .*

*Dies bedeutet, dass es einen komplexen Raum  $I$  über  $S$  und einen funktoriellen Isomorphismus*

$$\Omega : \mathbf{Isom}_S(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \rightarrow \mathbf{Hom}_S(\cdot, I)$$

*gibt.*

*Man hat also dann für jeden Raum  $T$  über  $S$  eine bijektive Abbildung:*

$$\Omega(T) : \text{Isom}_T(\mathfrak{X} \times_S T, \mathfrak{Y} \times_S T) \rightarrow \text{Hom}_S(T, I)$$

*Beweis:* Siehe [SV]

### 6.2.2 Der Funktor $\mathbf{Isom}_{S \times S}(\mathfrak{X} \times S, S \times \mathfrak{X})$

**Definition 6.2.4** Es sei  $\mathfrak{X} \rightarrow S$  eine Familie von Riemannschen Flächen vom Geschlecht  $g \geq 2$  oder eine Familie von punktierten Tori über einem komplexen Raum  $S$ . Dann sind  $\mathfrak{X} \times S$  und  $S \times \mathfrak{X}$  Familien von Riemannschen Flächen über  $S \times S$ . Wir betrachten den Funktor

$$\mathbf{Isom}_{S \times S}(\mathfrak{X} \times S, S \times \mathfrak{X})$$

Das heißt, dass jedem  $T \subset S \times S$  die Menge der Isomorphismen

$$\text{Isom}_T((\mathfrak{X} \times S) \times_{S \times S} T, (S \times \mathfrak{X}) \times_{S \times S} T)$$

zugeordnet wird.

Insbesondere wird jedem  $(s, t) \in S \times S$  die Menge der Isomorphismen

$$\text{Isom}(X_s \times t, s \times X_t) \cong \text{Isom}(X_s, X_t)$$

zugeordnet.

**Definition 6.2.5** Der Funktor  $\mathbf{Isom}_{S \times S}(\mathfrak{X} \times S, S \times \mathfrak{X})$  ist nach Satz 6.2.3 darstellbar durch einen komplexen Raum  $I$  über  $S \times S$ . Die kanonische Abbildung von  $I$  nach  $S \times S$  sei dabei mit  $p$  bezeichnet.

*Vereinbarung:*

Im folgenden (d. h. im gesamten Kapitel 6) sei nun stets  $S$  eine komplexe Mannigfaltigkeit und die Familie  $\mathfrak{X} \rightarrow S$  sei so gewählt, dass für eine beliebige Faser  $X_s$  die Familie  $\mathfrak{X} \rightarrow S$ , gesehen als Deformation von  $X_s$ , universell ist.

**Satz 6.2.6** *Unter obiger Voraussetzung ist die Abbildung  $p : I \rightarrow S \times S$  eigentlich.*

*Beweis:*

Es sei  $K \subset S \times S$  kompakt. Wir müssen zeigen, dass  $p^{-1}(K)$  kompakt ist. Dazu sei  $x_n$  eine Folge in  $p^{-1}(K)$ . Dann ist  $(s_n, t_n) := p(x_n)$  eine Folge in  $K$ , die ohne Einschränkung der Allgemeinheit gegen ein  $(s, t) \in K$  konvergiert. Es sei  $\varphi_n := \Omega((s_n, t_n))^{-1}(x_n) \in \mathbf{Isom}(X_{s_n}, X_{t_n})$ . Dann gibt es nach Satz 6.1.1 eine konvergente Teilfolge  $\varphi_{n_i}$ , die gegen  $\varphi \in \mathbf{Isom}(X_s, X_t)$  konvergiert. Genauer definiert man  $f_n$  als Rückzug von  $\varphi_n$  auf die Faser  $X_s$  mittels einer geeigneten differenzierbaren Trivialisierung von  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow S$ . Dann konvergieren die  $f_{n_i}$  gegen einen Isomorphismus  $\varphi : X_s \rightarrow X_t$ . Weiter gibt es nach Folgerung 6.1.14 Umgebungen  $V \ni s, W \ni t$  und Isomorphismen  $\Psi : \mathfrak{X} \times_S V \rightarrow \mathfrak{X} \times_S W, \psi : V \xrightarrow{\sim} W$ , so dass  $\Psi$  fasertreu ist und folgendes gilt:  $\psi(s_{n_i}) = t_{n_i}, \psi(s) = t$  und  $\Psi|_{X_{s_{n_i}}}$  stimmt mit  $\varphi_{n_i}$  überein. Definiert man dem komplexen Raum  $U := V \times_W W = \{(s, \psi(s)) | s \in V\}$ , dann erhält man dadurch einen Isomorphismus

$$\Psi : (\mathfrak{X} \times S)_{S \times S} U \xrightarrow{\sim} (S \times \mathfrak{X}) \times_{S \times S} U,$$

so dass gilt:

$$\Psi|_{X_{s_{n_i}} \times t_{n_i}} : X_{s_{n_i}} \times t_{n_i} \xrightarrow{\sim} s_{n_i} \times X_{t_{n_i}}$$

oder einfacher

$$\Psi|_{X_{s_{n_i}}} : X_{s_{n_i}} \xrightarrow{\sim} X_{t_{n_i}}$$

stimmt mit  $\varphi_{n_i}$  überein. Dann ist  $h := \Omega(\Psi) \in \mathbf{Hom}(U, I)$  und  $h(s_{n_i}, t_{n_i}) = x_{n_i}$  bzw.  $h(s, t) = x$ . Wegen der Stetigkeit von  $h$  gilt dann  $\lim_{i \rightarrow \infty} (x_{n_i}) = x$ , also hat  $x_n$  eine in  $p^{-1}(K)$  konvergente Teilfolge, und damit ist  $p^{-1}(K)$  kompakt.  $\square$

*Anmerkung:* Satz 6.2.6 gilt auch für den Fall, dass  $\mathfrak{X} \rightarrow S$  eine beliebige Familie Riemannscher Flächen über einem beliebigen komplexen Raum ist. Alle Aussagen von Kapitel 6 gelten damit auch allgemein. Ein Beweis der Eigentlichkeit in allgemeinerer Form findet sich bei [Gro] in *X. Construction de l'espace de Teichmüller*, S. 10. Für diese Arbeit genügt aber die Gültigkeit des obigen Satzes und aller anderen Sätze des Kapitels 6 für den betrachteten Spezialfall. Daher war es wünschenswert, für den Spezialfall einen elementarerem Beweis zu haben.

**Definition 6.2.7 (endliche Abbildungen)**

Es seien  $X, Y$  topologische Räume. Eine stetige und abgeschlossene Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt *endlich*, wenn jede Faser  $f^{-1}(y), y \in f(X)$  aus endlich vielen Punkten besteht.

Wir wollen nun zeigen, dass die Abbildung  $p : I \rightarrow S \times S$  endlich ist. Dafür brauchen wir zunächst eine kleine Bemerkung

**Bemerkung 6.2.8** Es seien  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$  Familien von Riemannschen Flächen vom Geschlecht  $g \geq 2$  über einem komplexen Raum  $S$ . Die Flächen  $X_s, Y_s$  seien die Fasern zu  $s \in S$ . Dann ist die Menge  $\text{Isom}(X_s, Y_s)$  entweder leer, oder es gibt eine Bijektion zwischen  $\text{Aut}(X_s)$  und  $\text{Isom}(X_s, Y_s)$ . Insbesondere ist die Menge  $\text{Isom}(X_s, Y_s)$  endlich.

*Beweis:* Die Menge  $\text{Isom}(X_s, Y_s)$  sei nicht leer. Legt man einen Isomorphismus  $\varphi_0 : X_s \rightarrow Y_s$  fest, dann ist die Abbildung  $\text{Aut}(X_s) \rightarrow \text{Isom}(X_s, Y_s), \text{Aut}(X_s) \ni \psi \mapsto \varphi_0 \circ \psi$  die gesuchte Bijektion. Die Menge  $\text{Aut}(X_s)$  ist endlich, da  $X_s$  eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g \geq 2$  ist, also ist auch  $\text{Isom}(X_s, Y_s)$  endlich.  $\square$

**Bemerkung 6.2.9** Die Abbildung  $p : I \rightarrow S \times S$  endlich.

*Beweis:*  $p$  ist eine eigentliche Abbildung zwischen lokal-kompakten Räumen, also auch abgeschlossen. Die Fasern von  $p$  sind entweder leer oder nach Bemerkung 6.2.8 endlich.  $\square$

**Folgerung 6.2.10** Es sei  $\Gamma := \{(s, t) \in S \times S \mid X_s \cong X_t\}$ . Dann ist  $\Gamma$  eine analytische Menge.

*Beweis:*  $\Gamma = p(I)$  und  $p$  ist eigentlich.

### 6.3 Beschreibung von $I$

Wir wollen nun das Aussehen von  $I$  genauer beschreiben. Dazu werden wir zunächst zeigen, dass die Fasern von  $I$  reduziert sind.

#### 6.3.1 Reduziertheit der Fasern von $I$

**Satz 6.3.1** Die Fasern  $p^{-1}(s, t)$ ,  $(s, t) \in S \times S$  sind entweder leer oder reduzierte komplexe Räume.

Bevor wir diese Aussage beweisen, zunächst einige Bemerkungen:

**Bemerkung 6.3.2** Es gelten die Voraussetzungen von oben. Außerdem sei  $T$  ein komplexer Raum über  $S \times S$  und  $I' := I \times_{S \times S} T$ . Dann ist  $I'$  ein darstellendes Objekt von  $\mathbf{Isom}_T((\mathfrak{X} \times S) \times_{S \times S} T, (S \times \mathfrak{X}) \times_{S \times S} T)$ .

*Beweis:* Siehe [SV, (0.2.4)]

**Folgerung 6.3.3** Es sei  $(s, t) \in S \times S$ . Dann ist die Faser  $I_{s,t}$  ein darstellendes Objekt für den Funktor  $\mathbf{Isom}_{s,t}(X_s \times t, s \times X_t)$ .

**Bezeichnung 6.3.4** Wir kürzen den Funktor  $\mathbf{Isom}_{s,t}(X_s \times t, s \times X_t)$  mit  $\mathbf{Isom}(X_s, X_t)$  ab.

**Bemerkung 6.3.5** Die Menge  $\mathbf{Isom}(X_s, X_t)$  sei nicht leer. Es sei  $\text{Aut}(X_s)$  die Automorphismengruppe von  $X_s$ . Da  $X_s$  eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g \geq 2$  ist, ist  $\text{Aut}(X_s)$  diskret und kann mit einer diskreten komplexen Struktur versehen werden, so dass die Punkte von  $\text{Aut}(X_s)$  einfache Punkte sind. Dadurch wird  $\text{Aut}(X_s)$  zu einem komplexen Raum  $A$ . Dann ist  $A$  ein darstellendes Objekt von  $\mathbf{Isom}(X_s, X_t)$ .

*Beweis:*

Es sei  $\alpha : \mathbf{Isom}(X_s, X_t) \xrightarrow{\sim} A$  die Umkehrung der in Bemerkung 6.2.8 angegebenen Bijektion.

1. *Behauptung:* Es sei  $V$  ein zusammenhängender komplexer Raum über  $(s, t)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{Isom}(X_s, X_t)(V) &= \mathbf{Isom}_V((X_s \times t) \times V, (s \times X_t) \times V) = \\ &= \mathbf{Isom}_V(X_s \times V, X_t \times V) = \mathbf{Isom}(X_s, X_t) \times \{\text{id}_V\} \end{aligned}$$

*Beweis:*

Es sei  $\Phi \in \text{Isom}_V(X_s \times V, X_t \times V)$ . Für  $v \in V$  sei  $\Phi_v : X_s \times v \rightarrow X_t \times v$  die Einschränkung von  $\Phi$  auf die Faser  $X_s \times v$ .

Da die Menge der Isomorphismen  $X_s \rightarrow X_t$  diskret ist und  $V$  zusammenhängend ist, gibt es einen Isomorphismus  $\varphi : X_s \rightarrow X_t$ , so dass für alle  $v \in V$  gilt:  $\Phi_v = \varphi \times \text{id}_v$ . Dann ist  $\Phi = \varphi \times \text{id}_V$ .  $\square$

2. Wir definieren die Abbildung

$$\Omega(V) : \mathbf{Isom}(X_s, X_t)(V) \rightarrow \text{Hom}(V, A), \quad \varphi \times \text{id}_V \mapsto (V \rightarrow \alpha(\varphi))$$

Dabei ist der Homomorphismus  $V \rightarrow \alpha(\varphi)$  eindeutig, da  $\alpha(\varphi)$  ein einfacher Punkt ist.

3.  $\Omega$  ist ein funktorieller Homomorphismus, denn für einen Morphismus  $h : V' \rightarrow V$  ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Isom}(X_s, X_t)(V) & \xrightarrow{\Omega(V)} & \text{Hom}(V, A) \\ \mathbf{Isom}(X_s, X_t)(h) \downarrow & & \downarrow \mathbf{Hom}(h) \\ \mathbf{Isom}(X_s, X_t)(V') & \xrightarrow{\Omega(V')} & \text{Hom}(V', A) \end{array}$$

trivialerweise kommutativ.

4. Konstruktion der Umkehrabbildung:

Hat man einen Morphismus  $V \rightarrow A$ , und ist  $V$  zusammenhängend, dann wird  $V$  auf genau einen Punkt  $x$  von  $A$  abgebildet. Dann ist  $\alpha^{-1}(x) \in \text{Isom}(X_s, X_t)$  und  $\alpha^{-1}(x) \times \text{id}_V \in \text{Isom}_V(X_s \times V, X_t \times V)$ . Wähle also  $\Omega^{-1}(V) := \alpha^{-1}(x) \times \text{id}_V$ .  $\square$

*Beweis von Satz 6.3.1:* Es sei  $\text{Isom}(X_s, X_t) \neq \emptyset$  und  $A$  wie oben das darstellende Objekt von  $\mathbf{Isom}(X_s, X_t)$ . Wegen der Eindeutigkeit des darstellenden Objektes ist dann die Faser  $I_{(s,t)}$  isomorph zu  $A$ , also insbesondere reduziert.  $\square$

### 6.3.2 Sätze über endliche Abbildungen zwischen komplexen Räumen

Um weitere Eigenschaften des komplexen Raumes  $I$  zeigen zu können, zeigen wir in diesem Abschnitt wichtige Sätze über endliche holomorphe Abbildungen.

Zunächst definieren wir Fasern von holomorphen Abbildungen:

**Definition 6.3.6** Es seien  $X, Y$  komplexe Räume und  $\pi : X \rightarrow Y$  eine surjektive, eigentliche, holomorphe Abbildung.  $y \in Y$  sei ein beliebiger Punkt.  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(y)$  sei die Untergarbe der Funktionskeime aus  $\mathcal{O}_Y$ , deren Wert in  $y$  gleich Null ist.  $\hat{\mathfrak{m}} = \hat{\mathfrak{m}}(y)$  sei diejenige analytische Untergarbe von  $\mathcal{O}_X$ , die von den Funktionskeimen

$$(f \circ \pi)_x \quad \text{mit} \quad f \in \mathfrak{m}_y, \quad \pi(x) = y$$

erzeugt wird. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten, denn stimmen  $f, g \in \mathcal{O}_Y(V)$  auf einer kleinen Umgebung von  $y$  überein, dann stimmen auch  $f \circ \pi$  und  $g \circ \pi$  auf einer Umgebung von  $x$  überein. Sowohl  $\mathfrak{m}$  als auch  $\hat{\mathfrak{m}}$  sind kohärente analytische Garben, denn sowohl  $\mathfrak{m}$  als auch  $\hat{\mathfrak{m}}$  sind endlich erzeugte Untergarben von kohärenten Garben.

**Definition 6.3.7** Es sei  $\pi : X \rightarrow Y$  wie oben. Für  $y \in Y$  definiert man die Faser  $X_y$  als komplexen Raum, der die Menge  $f^{-1}(y)$  als Träger und die Garbe

$$\mathcal{O}_{X_y} := \mathcal{O}_X / \hat{\mathfrak{m}}$$

als Strukturgarbe hat.

Nun kommen wichtige Sätze über die Bildgarbe  $\pi_* \mathcal{O}_X$ :

**Bemerkung 6.3.8** Die Garbe  $\pi_* \mathcal{O}_X$  ist eine kohärente  $\mathcal{O}_Y$ -Modulgarbe.

*Beweis:* Siehe [GR2, S. 64]. Die Multiplikation wird dabei folgendermaßen definiert: Für  $V \subset Y$  sei  $f \in \mathcal{O}_Y(V)$  und  $g \in \pi_* \mathcal{O}_X(V)$ . Dann ist  $f \circ \pi \in \pi_* \mathcal{O}_X(V)$  und das Produkt von  $f$  mit  $g$  wird definiert als

$$f \cdot g := (f \circ \pi) \cdot g \in \pi_* \mathcal{O}_X(V)$$

Dabei handelt es sich links um die Moduloperation und rechts um das Produkt zweier Funktionen.



**Lemma 6.3.9** Es seien  $X, Y$  komplexe Räume.  $\pi : X \rightarrow Y$  sei eine surjektive endliche holomorphe Abbildung. Dann gilt:

$$(\pi_* \mathcal{O}_X)_y / (\mathfrak{m}_y \cdot (\pi_* \mathcal{O}_X)_y) \cong \Gamma(X_y, \mathcal{O}_{X_y})$$

Für den Beweis brauchen wir eine Bemerkung über die lokale Beschreibung endlicher Abbildungen:

**Bemerkung 6.3.10**

Es seien  $X, Y$  lokal-kompakt und  $f : X \rightarrow Y$  eine endliche Abbildung.  $x_1, \dots, x_n$  seien die verschiedenen Punkte der Faser  $f^{-1}(y)$ ,  $y \in Y$  und  $U'_1, \dots, U'_n$  seien paarweise disjunkte offene Umgebungen von  $x_1, \dots, x_n$ . Dann enthält jede Umgebung  $V'$  von  $y$  eine Umgebung  $V$ , so dass gilt:

1.  $U_1 := f^{-1}(V) \cap U'_1, \dots, U_n := f^{-1}(V) \cap U'_n$  sind paarweise offene Umgebungen von  $x_1, \dots, x_n$  in  $X$ .
2.  $f^{-1}(V) = \bigcup_{j=1}^n U_j$ , insbesondere  $f(U_j) \subset V$  für alle  $j$ .
3. Alle induzierten Abbildungen  $f_{U_j, V} : U_j \rightarrow V$  sind endlich.

*Beweis:* Siehe [GR2, S. 48]

*Beweis von Lemma 6.3.9:* Es sei  $y \in Y$  und  $n$  die Zahl der Punkte von  $X_y$ . Da  $\pi$  endlich ist, gibt es nach Bemerkung 6.3.10 eine offene Umgebung  $V$  von  $y$  und offene, disjunkte Mengen  $U_j, j = 1, \dots, n$ , so dass gilt:

1.  $\pi^{-1}(V) = \bigcup_{j=1}^n U_j$ .
2. Die  $U_j$  sind disjunkte offene Umgebungen der Punkte von  $\pi^{-1}(y)$ .

Dann ist

$$\Gamma(\pi_* \mathcal{O}_X(V)) = \bigoplus_{j=1}^n \Gamma(\mathcal{O}_X(U_j)) \quad \text{und} \quad (\pi_* \mathcal{O}_X)_y = \bigoplus_{x \in X_y} \mathcal{O}_{X,x}.$$

Außerdem gilt:

$$\mathfrak{m}_y \cdot \bigoplus_{x \in X_y} \mathcal{O}_{X,x} = \bigoplus_{x \in X_y} \hat{\mathfrak{m}}_x,$$

denn die Elemente

$$\{(0, \dots, 0, (f \circ \pi) \cdot g_j, 0, \dots, 0) \mid f \in \mathfrak{m}_y, g_j \in \mathcal{O}_{X, x_j}\}$$

spannen den Vektorraum  $\hat{\mathfrak{m}}_{x_j}$  auf, also spannen die Elemente

$$\{((f \circ \pi) \cdot g_1, \dots, (f \circ \pi) \cdot g_m) \mid f \in \mathfrak{m}_y, g_j \in \mathcal{O}_{X, x_j}\}$$

den Vektorraum  $\bigoplus_{x \in X_y} \hat{\mathfrak{m}}_x$  auf. Daher gilt:

$$\begin{aligned} (\pi_* \mathcal{O}_X)_y / (\mathfrak{m}_y \cdot \pi_* \mathcal{O}_X)_y &= \bigoplus_{x \in X_y} \mathcal{O}_{X, x} \Big/ \mathfrak{m}_y \cdot \bigoplus_{x \in X_y} \mathcal{O}_{X, x} = \\ &= \bigoplus_{x \in X_y} \mathcal{O}_{X, x} \Big/ \bigoplus_{x \in X_y} \hat{\mathfrak{m}}_x = \bigoplus_{x \in X_y} (\mathcal{O}_{X, x} / \hat{\mathfrak{m}}_x) = \bigoplus_{x \in X_y} \mathcal{O}_{X_y, x} \cong \Gamma(X_y, \mathcal{O}_{X_y}). \end{aligned}$$

□

**Satz 6.3.11** *Es sei  $A$  ein lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und  $k := A/\mathfrak{m}$ . Weiter sei  $M$  ein endlich erzeugter  $A$ -Modul. Dann erzeugen die Elemente  $s_1, \dots, s_p \in M$  den  $A$ -Modul  $M$  genau dann, wenn  $s_1/\mathfrak{m}, \dots, s_p/\mathfrak{m}$  den  $k$ -Vektorraum  $M/\mathfrak{m}M$  erzeugen.*

*Beweis:* Siehe [GR3, S. 213]. Der Satz wird dort mit dem Lemma von Nakayama bewiesen.

**Bemerkung 6.3.12** Es sei  $X$  ein komplexer Raum und  $\mathcal{F}$  eine kohärente  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe. Dann ist  $\dim(\mathcal{F}_x/\mathfrak{m}_x \cdot \mathcal{F}_x)$  eine von oben halbstetige Funktion von  $x$ , d. h. für jedes  $x_0 \in X$  gibt es eine offene Umgebung  $V \ni x_0$  mit:

$$\dim(\mathcal{F}_x/\mathfrak{m}_x \cdot \mathcal{F}_x) \leq \dim(\mathcal{F}_{x_0}/\mathfrak{m}_{x_0} \cdot \mathcal{F}_{x_0}) \quad \text{für alle } x \in V$$

*Beweis :*  $\dim(\mathcal{F}_x/\mathfrak{m}_x \mathcal{F}_x)$  ist die minimale Anzahl von Erzeugenden von  $\mathcal{F}_x$  über  $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_{X, x}$ . Es sei  $x_0 \in X$  und  $s_1, \dots, s_n$  ein System, so dass  $(s_{j, x_0}/\mathfrak{m}_{x_0})_{j=1, \dots, n}$  ein minimales Erzeugendensystem von  $\mathcal{F}_{x_0}/\mathfrak{m}_{x_0} \mathcal{F}_{x_0}$  bilden. Dann ist nach Satz 6.3.11  $(s_j)_{j=1, \dots, n}$  ein Erzeugendensystem von  $\mathcal{F}_{x_0}$  und nach [GR2, S.233]  $(s_j)_{j=1, \dots, n}$  ein Erzeugendensystem von  $\mathcal{F}(V)$  in einer geeigneten Umgebung  $V$  von  $x_0$ .

Dann bilden aber für  $x \in V$  die Keime  $s_{j, x}/\mathfrak{m}_x$  ein Erzeugendensystem von  $\mathcal{F}_x/\mathfrak{m}_x \mathcal{F}_x$ , also ist  $\dim(\mathcal{F}_x/\mathfrak{m}_x \mathcal{F}_x) \leq \dim(\mathcal{F}_{x_0}/\mathfrak{m}_{x_0} \mathcal{F}_{x_0})$ .

□

**Folgerung 6.3.13** Es sei  $\pi : X \rightarrow Y$  endlich. Dann ist

$$\dim[(\pi_*\mathcal{O}_X)_y/\mathfrak{m}_y \cdot (\pi_*\mathcal{O}_X)_y]$$

eine von oben halbstetige Funktion von  $y$ .

*Beweis:*

Dies folgt aus Bemerkung 6.3.12, denn die Garbe  $\pi_*\mathcal{O}_X$  ist kohärent.  $\square$

**Folgerung 6.3.14** Damit ist auch  $\dim \Gamma(X_y, \mathcal{O}_{X_y})$  eine von oben halbstetige Funktion von  $y$ .

*Beweis:* Dies ist klar wegen Lemma 6.3.9  $\square$

**Lemma 6.3.15** Es sei  $\pi : X \rightarrow Y$  eine surjektive, endliche (und eigentliche) Abbildung zwischen komplexen Räumen.  $\pi$  sei ein lokaler Homöomorphismus. Außerdem gelte:

$$\dim \Gamma(X_y, \mathcal{O}_{X_y}) = \text{const.} = 1 \text{ für } y \in Y.$$

Dann ist  $\pi$  biholomorph.

*Beweis:*

$\pi$  ist injektiv, damit bijektiv und daher ein Homöomorphismus. Zu zeigen ist, dass  $\pi$  auch biholomorph ist. Zunächst ist  $\pi_*\mathcal{O}_X$  eine kohärente Garbe, und damit ein endlich erzeugter  $\mathcal{O}_Y$ -Modul. Sei  $1 \in \pi_*\mathcal{O}_X$  der Einsschnitt. Für beliebiges  $y \in Y$  ist dann  $1_y \notin \mathfrak{m}_y \cdot \pi_*\mathcal{O}_X$ .

Wir zeigen, dass  $1$  die Garbe  $\pi_*\mathcal{O}_X$  erzeugt: Wegen Lemma 6.3.9 hat man die Isomorphie:

$$(\pi_*\mathcal{O}_X)_y/\mathfrak{m}_y \cdot (\pi_*\mathcal{O}_X)_y \cong \Gamma(X_y, \mathcal{O}_{X_y})$$

Also gilt auch:

$$\dim(\pi_*\mathcal{O}_X)_y/\mathfrak{m}_y(\pi_*\mathcal{O}_X)_y = 1 \text{ für } y \in Y$$

Wählt man  $y \in Y$  beliebig, dann erzeugt  $1_y$  wegen  $1_y \notin \mathfrak{m}_y \cdot (\pi_*\mathcal{O}_X)_y$  den  $(\mathcal{O}_Y)_y$ -Modul  $(\pi_*\mathcal{O}_X)_y$ . Damit erzeugt  $1$  den  $\mathcal{O}_Y$ -Modul  $\pi_*\mathcal{O}_X$ .  $\square$

Daher ist  $\pi_*\mathcal{O}_X$  eine freie  $\mathcal{O}_Y$ -Modulgarbe vom Rang 1. Auch  $\mathcal{O}_Y$  ist natürlich eine freie  $\mathcal{O}_Y$ -Modulgarbe vom Rang 1.  $\mathcal{O}_Y$  und  $\pi_*\mathcal{O}_X$  sind also isomorph als  $\mathcal{O}_Y$ -Modulgarben. Ein Isomorphismus wird z. B. durch  $\mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \pi_*\mathcal{O}_X(V)$ ,

$f \mapsto (f \cdot 1) = f \circ \pi$  gegeben. Aber  $\mathcal{O}_Y$  und  $\pi_*\mathcal{O}_X$  sind auch isomorph als  $\mathbb{C}$ -Algebren, denn der Isomorphismus ist mit den Multiplikationen auf  $\mathcal{O}_Y(V)$  und  $\pi_*\mathcal{O}_X(V)$  verträglich.

Sei nun  $\tilde{\pi} : \mathcal{O}_Y \rightarrow \pi_*\mathcal{O}_X$  der zu  $\pi$  gehörige  $\mathbb{C}$ -Algebra-Homomorphismus. Dann bildet  $\tilde{\pi}$  den Eins-Schnitt von  $\mathcal{O}_Y$  auf den Eins-Schnitt von  $\pi_*\mathcal{O}_X$  ab, und ist daher identisch mit dem oben angegebenen Isomorphismus. Also ist die Abbildung  $(\pi, \tilde{\pi})$  ein Isomorphismus komplexer Räume. □

### 6.3.3 Lokale Beschreibung von $I$

**Proposition 6.3.16** Es seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  sei endlich.  $V$  sei eine beliebige Teilmenge von  $Y$ . Dann ist die induzierte Abbildung  $f_{f^{-1}(V), V} : f^{-1}(V) \rightarrow V$  ebenfalls endlich.

*Beweis:* Siehe [GR2, S. 47]

**Folgerung 6.3.17 (zu Bemerkung 6.3.10)** Es seien  $X, Y$  lokal-kompakt,  $f : X \rightarrow Y$  eine endliche Abbildung.  $x \in f^{-1}(y)$ , mit  $y \in Y$ . Dann gibt es eine Umgebung  $W$  von  $x$ , so dass  $W \cap f^{-1}(y) = \{x\}$  ist und  $p_{W, p(W)} : W \rightarrow p(W)$  ebenfalls endlich ist.

*Beweis:*  $f^{-1}$  besteht aus einer endlichen Menge von Punkten, also gibt es Umgebungen  $U'_1, \dots, U'_n$ , die die Voraussetzungen von Bemerkung 6.3.10 erfüllen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $x \in U'_n$ . Wähle dann  $W = U'_n$ , wobei  $U'_n$  wie in 6.3.10 definiert wird. □

**Satz 6.3.18** Es gelten die Voraussetzungen von oben, d. h.  $\mathfrak{X} \rightarrow S$  sei eine Familie Riemannscher Flächen, die als Deformation jede ihrer Fasern universell ist, und  $p : I \rightarrow S \times S$  sei das darstellende Objekt des Funktors  $\text{Isom}_{S \times S}(\mathfrak{X} \times S, S \times \mathfrak{X})$ .

Es sei  $x_0 \in I$  beliebig,  $p(x_0) := (s_0, t_0)$ . Es sei  $W \subset I$  eine Umgebung von  $x_0$ , so dass  $W \cap \pi^{-1}(s_0, t_0) = \{x_0\}$  ist (d. h.  $W$  hat mit der Faser, in der  $x_0$  liegt keine weiteren Schnittpunkte), und außerdem  $p_{W, p(W)}$  eigentlich ist.  $p(W)$  ist eine analytische Teilmenge von  $\Gamma$ .

Dann gibt es eine Umgebung  $W'$  von  $x_0$ , so dass die Abbildung  $p_{W', p(W')} : W' \rightarrow p(W')$  biholomorph ist.

*Beweis:*

Wir zeigen, dass es eine Umgebung  $W'$  von  $x_0$  gibt, so dass die Einschränkung von  $p$  auf  $W'$  die Bedingung von Lemma 6.3.15 erfüllt, d. h. dass  $p_{W',p(W')}$  lokal homöomorph ist und außerdem gilt:

$$\dim \Gamma(W'_{(s,t)}, \mathcal{O}_{W'_{(s,t)}}) = 1 \text{ für alle } (s, t) \in p(W').$$

Beweis der Behauptung: Es ist  $p^{-1}(s_0, t_0)$  reduziert. Also ist

$$\dim \Gamma(W_{(s_0,t_0)}, \mathcal{O}_{W_{(s_0,t_0)}}) = 1.$$

Die Funktion  $(s, t) \mapsto \dim \Gamma(W_{(s,t)}, \mathcal{O}_{W_{(s,t)}})$  ist nach Folgerung 6.3.13 von oben halbstetig, also gibt es eine Umgebung  $V$  von  $(s, t)$ , so dass gilt:

$$\dim \Gamma(W_{(s,t)}, \mathcal{O}_{W_{(s,t)}}) \leq 1 \text{ für alle } (s, t) \in V$$

Sei  $W' := p^{-1}(V) \cap W$ . Dann ist die Abbildung  $p_{W',p(W')}$  bijektiv. Sie ist auch endlich nach Proposition 6.3.16 und daher offen. Also ist  $W'$  eine Umgebung von  $x_0$ , die die geforderte Bedingung erfüllt, und die Abbildung  $p' := p_{W',p(W')} : W' \rightarrow p(W')$  ist biholomorph. □

### 6.3.4 Zusammenhängende Komponenten von $I$

Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis des folgenden Satzes:

**Satz 6.3.19** *Es sei  $\mathfrak{X} \rightarrow S$  eine Familie von Riemannschen Flächen über einer komplexen Mannigfaltigkeit  $S$  mit  $0 \in S$ .  $\mathfrak{X} \rightarrow S$  sei als Deformation von jeder Faser universell.  $p : I \rightarrow S \times S$  sei das darstellende Objekt von  $\mathbf{Isom}_{S \times S}(\mathfrak{X} \times S, S \times \mathfrak{X})$ .*

*Es sei  $T \subset S \times S$  eine Umgebung von  $(0, 0)$ . Dann gibt es Umgebungen  $T_1 \subset T_0 \subset T$  von  $(0, 0)$ , so dass gilt:*

*Ist  $x \in p^{-1}(T_1)$  beliebig, dann gibt es eine Zusammenhangskomponente von  $p^{-1}(T_0)$ , die durch  $x$  und  $p^{-1}(0, 0)$  geht.*

*Beweis:*

Es sei  $V \subset S \times S$  eine Umgebung von  $(0, 0)$ , so dass das sich  $p^{-1}(V)$  in offene disjunkte Teilmengen  $W_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  zerlegen lässt, die mit der zentralen Faser jeweils nur einen Punkt gemeinsam haben und mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass  $p_{W_i,p(W_i)} : W_i \rightarrow p(W_i)$  biholomorph ist.

Es sei  $x_i$  der Schnittpunkt von  $W_i$  mit der zentralen Faser. Da komplexe Räume lokal zusammenhängend sind (siehe [GR2, S. 178]), gibt es Umgebungen  $W'_i \subset W_i$  von  $x_i$ , so dass  $W'_i$  zusammenhängend ist.

Da nach Voraussetzung die Abbildungen  $p_{W_i, p(W_i)} : W_i \rightarrow p(W_i)$  biholomorph sind, ist  $p(W'_i)$  offen in  $p(W_i)$ , also gibt es (nach Definition der Topologie von  $p(W_i)$ ) eine offene Menge  $V_i$  mit  $p(W'_i) = p(W_i) \cap V_i$ . Ohne Einschränkung kann man  $V_i \subset V$  wählen, da ja  $p(W_i)$  in  $V$  enthalten ist. Setze nun  $T_1 := \bigcap_{i=1}^n V_i$ ,  $T_0 := V$ . Dann sind  $T_0, T_1$  offene Umgebungen von  $(0, 0)$ .

Es sei nun  $x \in p^{-1}(T_1)$  beliebig. Wir zeigen, dass es ein  $i$  gibt mit  $x \in W'_i$ :

1. Es gibt ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  mit  $x \in W_i$ , denn  $T_1 \subset V$ .
2.  $p(x) \in V_i$
3. Aus 1. und 2. folgt  $p(x) \in p(W_i) \cap V_i = p(W'_i)$ , und da  $p_{W_i, p(W_i)} : W_i \rightarrow p(W_i)$  bijektiv ist, gilt dann auch  $x \in W'_i$ .

Es ist  $W'_i \subset p^{-1}(V)$  und  $W'_i$  geht nach Voraussetzung durch die zentrale Faser.

□

### 6.3.5 Eigenschaften der Diagonale $\Delta \subset \Gamma$

Für den ganzen Abschnitt gelten die Voraussetzungen von oben:  $S$  sei eine komplexe Mannigfaltigkeit,  $\mathfrak{X} \rightarrow S$  eine Deformation einer Riemannschen Fläche  $X_0$ , die für alle Fasern universell ist.  $p : I \rightarrow S \times S$  sei das darstellende Objekt von  $\mathbf{Isom}_{S \times S}(\mathfrak{X} \times S, S \times \mathfrak{X})$ .

**Definition 6.3.20** Es sei  $\alpha_0 : X_0 \times \{0\} \xrightarrow{\sim} \{0\} \times X_0$  mit  $\alpha_0(z, 0) = (0, z)$  für  $z \in X_0$ . In Zukunft werden wir für  $\alpha_0$  ohne Verwechslungsgefahr auch einfach  $\text{id}_{X_0}$  schreiben.

Weiter sei  $x_0 \in I_{(0,0)}$  der Punkt der zentralen Faser, der der Identität auf  $X_0$  zugeordnet ist, d. h.  $\Omega((0, 0))(\alpha_0) = ((0, 0) \rightarrow x_0)$ .

**Definition 6.3.21** Wir definieren  $\Delta := \{(s, s) | s \in S\}$ . Es ist  $\Delta \subset \Gamma$ .

**Definition 6.3.22** Wir haben den Isomorphismus

$$\Phi_\Delta : (\mathfrak{X} \times S) \times_{S \times S} \Delta \xrightarrow{\sim} (S \times \mathfrak{X}) \times_{S \times S} \Delta$$

der für  $z \in X_s$  durch  $\Phi_\Delta(z, s) = (s, z)$  gegeben ist. Es sei  $h_\Delta := \Omega(\Delta)(\Phi_\Delta) \in \text{Hom}(\Delta, I)$ .

Die Einschränkung von  $\Phi_\Delta$  auf  $(0, 0)$  ist genau der Isomorphismus  $\alpha_0$ . Da  $\Omega$  ein funktorieller Isomorphismus ist, gilt dann

$$\Omega((0, 0))(\alpha_0) = h_\Delta|_{(0, 0)},$$

also ist  $h_\Delta(0, 0) = x_0$ . Damit ist  $h_\Delta(\Delta)$  ein komplexer Unterraum von  $I$ , dessen Schnitt mit  $I_{(0,0)}$  gleich  $\{x_0\}$  ist. Wir bezeichnen  $h_\Delta(\Delta)$  mit  $I_\Delta$ .

**Satz 6.3.23** *Es sei  $I_0$  eine zusammenhängende Umgebung von  $x_0$ , die mit der Faser  $I_{(0,0)}$  keinen weiteren Durchschnitt hat. Außerdem sei  $I_0$  isomorph zu  $\Gamma_0 := p(I_0)$ . Die Existenz eines solchen  $I_0$  ist nach Satz 6.3.18 gesichert. Dann ist  $I_0 \subset I_\Delta$ .*

*Beweis:*

Es sei  $h : \Gamma_0 \xrightarrow{\sim} I_0 \rightarrow I$  der kanonische Einbettungsmorphismus und  $\Phi := \Omega(I_0)^{-1}(h)$ . Wir definieren  $\mathfrak{X}_1 := (\mathfrak{X} \times S)_{S \times S} \Gamma_0$  und  $\mathfrak{X}_2 := (S \times \mathfrak{X})_{S \times S} \Gamma_0$ . Dann sind  $\mathfrak{X}_1 \rightarrow \Gamma_0$ ,  $\mathfrak{X}_2 \rightarrow \Gamma_0$  Deformationen von  $X_0$ . (Die Abbildung von  $X_0$  auf die zentrale Faser sei jeweils die Identität.)

Es ist  $\Phi : (\mathfrak{X} \times S)_{S \times S} \Gamma_0 \xrightarrow{\sim} (S \times \mathfrak{X})_{S \times S} \Gamma_0$ . Außerdem ist die Einschränkung von  $\Phi$  auf  $X_0$  gleich  $\Omega((0, 0))^{-1}(h|_{x_0}) = \text{id}_{X_0}$ , daher sind die Deformationen  $\mathfrak{X}_1 \rightarrow \Gamma_0$ ,  $\mathfrak{X}_2 \rightarrow \Gamma_0$  isomorph.

Es sei  $\text{pr}_i : \Gamma_0 \rightarrow S$  für  $i = 1, 2$  die Projektion auf die  $i$ -te Komponente und  $\text{pr}_i^+ \mathfrak{X} := \mathfrak{X} \times_S \Gamma_0$ , wobei  $\Gamma_0$  als komplexer Raum über  $S$  vermöge der Abbildung  $\text{pr}_i$  aufgefasst wird.

*Behauptung:* Es gilt:

$$(\mathfrak{X} \times S)_{S \times S} \Gamma_0 \cong (\text{pr}_1^+ \mathfrak{X}), \quad (S \times \mathfrak{X})_{S \times S} \Gamma_0 \cong (\text{pr}_2^+ \mathfrak{X})$$

*Beweis:* Man hat das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} \times S & \longrightarrow & S \times S \\ \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\ \mathfrak{X} & \longrightarrow & S \end{array}$$

Daher ist  $\mathfrak{X} \times S \cong \mathfrak{X} \times_S (S \times S)$ , wobei  $S \times S$  vermöge  $\text{pr}_1$  als komplexer Raum über  $S$  aufgefasst wird.

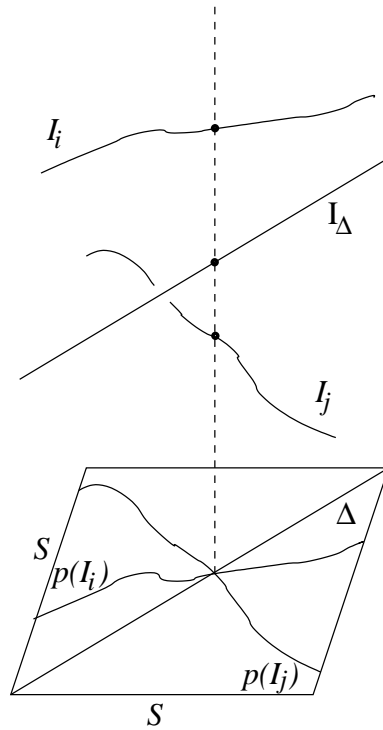
Wegen der Transitivität des Faserproduktes ist dann:

$$(\mathfrak{X} \times S) \times_{S \times S} \Gamma_0 = (\mathfrak{X} \times_S (S \times S)) \times_{S \times S} \Gamma_0 = \mathfrak{X} \times_S \Gamma_0$$

und analog für  $\text{pr}_2^+ \mathfrak{X}$ .  $\square$

Es ist also  $\mathfrak{X}_i \rightarrow S$  isomorph zum Rückzug von  $\mathfrak{X} \rightarrow S$  mittels  $\text{pr}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Wegen der Isomorphie der Deformationen  $\mathfrak{X}_1 \rightarrow S$ ,  $\mathfrak{X}_2 \rightarrow S$ , der Universalität der Deformation und dem Zusammenhang von  $\Gamma_0$  gilt dann  $\text{pr}_1 = \text{pr}_2$ . Daraus folgt  $s = t$  für alle  $(s, t) \in \Gamma_0$ , also ist  $\Gamma_0 \subset \Delta$ .  $\square$

Die folgende Skizze veranschaulicht noch einmal unsere bisherige Vorstellung von  $I$ . Wir haben  $S$  so klein gewählt, dass  $I$  in offene disjunkte Teilmengen  $I_i$  zerfällt, die mit der zentralen Faser nur jeweils einen Schnittpunkt haben, und für die die Abbildungen  $p_{I_i, p(I_i)}$  biholomorph sind:



**Folgerung 6.3.24** Es seien  $T_1 \subset T_0 \subset S \times S$  Umgebungen von  $(0, 0)$ , so dass das  $p^{-1}(T_0)$  in offene, paarweise disjunkte Teilmengen  $I_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  zerfällt, die mit der zentralen Faser jeweils nur einen Punkt gemeinsam haben, und für die die Abbildungen  $p_{I_i, p(I_i)}$  biholomorph sind, und außerdem für



alle  $x \in p^{-1}(T_1)$  eine Zusammenhangskomponente in  $p^{-1}(T_0)$  existiert, die  $x$  mit  $p^{-1}(0, 0)$  verbindet. Die Existenz solcher Mengen  $T_0, T_1$  ist nach Satz 6.3.18 und Satz 6.3.19 garantiert. Wir bezeichnen mit  $I_0$  die Menge, deren Schnitt mit der zentralen Faser der zu  $\text{id}_{X_0}$  gehörige Punkt  $x_0$  ist. Damit ist insbesondere  $I_0 \subset I_\Delta$ . Weiter sei  $x \in p^{-1}(T_0)$ , so dass  $p(x)$  nicht auf der Diagonalen liegt, d. h. mit  $p(x) =: (s, t)$  gilt:  $s \neq t$ . Es liege  $x$  in der Komponente  $I_i$ . Der Schnittpunkt von  $I_i$  mit der Faser  $I_{(0,0)}$  sei  $x_i$ , und  $\alpha_i : X_0 \rightarrow X_0$  sei der zu  $x_i$  gehörige Automorphismus von  $X_0$ . Dann ist  $\alpha_i \neq \text{id}_{X_0}$ .

*Beweis:*

Da  $s \neq t$  ist  $x \notin I_\Delta$ . Also liegt  $x$  in einer anderen Teilmenge  $I_i$ ,  $i \neq 0$  des Urbildes, die dann mit  $I_{(0,0)}$  einen von  $x_0$  verschiedenen Schnitt hat.  $\square$

## 6.4 Die Wirkung von $\text{Aut}(X_0)$ auf $\Gamma$

Es sei wieder  $S$  eine komplexe Mannigfaltigkeit und  $\mathfrak{X} \rightarrow S$  eine Deformation einer Riemannschen Fläche  $X_0$  vom Geschlecht  $g \geq 2$  (oder eines punktierten Torus), die in allen Fasern universell ist, wie oben. Der komplexe Raum  $I$  über  $S \times S$  und  $\Gamma \subset S \times S$  seien wie oben definiert.

**Definition 6.4.1** Der Einfachheit wegen nehmen wir an, dass die Abbildung von  $X_0$  auf die zentrale Faser die Identität ist. Es sei  $\alpha \in \text{Aut}(X_0)$  ein beliebiger Automorphismus der zentralen Faser. Dann definiert man einen Automorphismus  $\Phi$  von  $\mathfrak{X}$  wie folgt:

Man hat zwei Deformationen  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow S$ , wobei der Isomorphismus von  $X_0$  auf die zentrale Faser bei der ersten Deformation durch die Identität, bei der zweiten Deformation durch  $\alpha : X_0 \rightarrow X_0$  gegeben ist. Diese Deformationen werden wir mit  $(\pi, \mathfrak{X}, S, \text{id})$  und  $(\pi, \mathfrak{X}, S, \alpha)$  bezeichnen.

Da beide Deformationen universell sind, gibt es dann Umgebungen  $S', S''$  von 0 und Isomorphismen  $\Phi : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}'', \varphi : S' \rightarrow S''$  mit folgendem kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}' & \xrightarrow{\sim \Phi} & \mathfrak{X}'' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ S' & \xrightarrow{\sim \varphi} & S'' \end{array}$$

so dass außerdem gilt:  $\Phi|_{X_0} = \alpha$ .

Sind nun  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$  die Automorphismen von  $X_0$ , dann bekommt man damit eine Menge von Abbildungen  $G = \{\varphi_i : S'_i \rightarrow S''_i, i = 1, \dots, n\}$ .

**Bemerkung 6.4.2** Es seien  $\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k$  die zu  $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$  gehörigen Isomorphismen, wobei gelte:  $\alpha_i \circ \alpha_j = \alpha_k$ . Es sei  $S'$  eine zusammenhängende Menge, auf der  $\varphi_i \circ \varphi_j$  und  $\varphi_k$  definiert sind. Dann gilt:  $\varphi_i \circ \varphi_j = \varphi_k$  auf  $S'$ .

*Beweis:* Es seien  $\Phi_i, \Phi_j, \Phi_k$  die zu  $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$  gehörigen Isomorphismen. Dann hat man folgende kommutative Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}' & \xrightarrow{\Phi_i \circ \Phi_j} & \mathfrak{X}'' & & \mathfrak{X}' & \xrightarrow{\Phi_k} & \mathfrak{X}''' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi & & \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ S' & \xrightarrow{\varphi_i \circ \varphi_j} & S'' & & S' & \xrightarrow{\varphi_k} & S''' \end{array}$$

Außerdem sind die Einschränkungen von  $\Phi_i \circ \Phi_j$  und  $\Phi_k$  auf die zentrale Faser gleich. Damit erhält man durch den Rückzug von  $(\pi, \mathfrak{X}, S, \alpha_k)$  mittels  $\varphi_i \circ \varphi_j$  bzw.  $\varphi_k$  jedesmal die Deformation  $(\pi, \mathfrak{X}, S, \text{id})$ , und wegen der Universalität der Deformation  $\mathfrak{X}$  sind dann die Keime von  $\varphi_i \circ \varphi_j$  und  $\varphi_k$  gleich. Da  $S'$  zusammenhängend ist, gilt dann auch die Gleichheit der Abbildungen auf  $S'$ .  $\square$

**Bemerkung 6.4.3** Es gibt eine Teilraum von  $S$ , der invariant unter allen Elementen von  $G$  ist.

*Beweis:*

Es sei  $S_0$  so gewählt, dass  $S_0$  zusammenhängend ist und in der Definitionsmenge aller Abbildungen  $\varphi_i \circ \varphi_j$  liegt.

Dann ist  $S^* := \bigcap_{i=1}^n \varphi_i(S_0)$  invariant unter allen Gruppenelementen, denn  $\varphi_j(S^*) = \bigcap_{i=1}^n \varphi_j \circ \varphi_i(S_0) = \bigcap_{k=1}^n \varphi_k(S_0)$  nach Bemerkung 6.4.2. Außerdem ist  $S^*$  nicht leer, denn es enthält mindestens  $s_0$  und  $S^*$  ist offen. Daher ist  $S^*$  eine Umgebung von  $s_0$ .  $\square$

**Definition 6.4.4 (Operation von  $\text{Aut}(X_0)$  auf  $\Gamma$ )**

Nun sei  $S$  selbst invariant gegenüber allen Gruppenelementen. Hat man einen Isomorphismus  $\varphi : S \xrightarrow{\sim} S$  gegeben, so erhält man einen Isomorphismus von  $\Gamma$ , der durch

$$(s, t) \mapsto (\varphi(s), t).$$

definiert ist. Wir müssen noch zeigen, dass diese Abbildung wohldefiniert ist: Ist  $X_s \cong X_t$ , dann ist auch  $X_{\varphi(s)} \cong X_t$ , denn  $X_{\varphi(s)} \cong X_s$ . Also ist  $(\varphi(s), t) \in \Gamma$ .

**Satz 6.4.5** *Es sei  $S$  so klein gewählt, dass  $I$  in Teilmengen  $I_j$  mit der folgenden Eigenschaft zerfällt:  $I_j$  sind offene disjunkte Mengen, die mit der zentralen Faser jeweils genau einen Schnittpunkt haben, und die Abbildung  $p_{I_j, p(I_j)} : I_j \rightarrow p(I_j)$  ist biholomorph. Eine solche Wahl von  $S$  ist nach Satz 6.3.18 möglich. Es sei  $G$  wie oben die Menge der Isomorphismen von  $S$ , die von den Automorphismen der zentralen Faser erzeugt werden, und  $S$  sei invariant unter allen Elementen von  $G$ . Außerdem sei  $S^* \subset S$  eine Umgebung von  $(0, 0)$ , die so gewählt ist, dass für alle  $x \in p^{-1}(S^* \times S^*)$  eine Zusammenhangskomponente in  $p^{-1}(S \times S)$  existiert, die  $x$  mit der zentralen Faser verbindet. Eine solche Wahl von  $S^*$  ist nach Satz 6.3.19 möglich. Wir definieren  $p^{-1}(S^* \times S^*) =: I^*$ . Es sei  $x \in I^*$  ein beliebiger Punkt und  $(s, t) = p(x)$ . Weiter sei  $I_j$  die Zusammenhangskomponente von  $I$ , die durch  $x$  und die zentrale Faser geht, und  $x_j := I_j \cap p^{-1}((0, 0))$ . Es sei  $\alpha_j := \Omega((0, 0))^{-1}(x_j) \in \text{Aut}(X_0)$ , und dem Automorphismus  $\alpha_j$  sei der Isomorphismus  $\varphi_j : S \rightarrow S$  wie in Definition 6.4.1 zugeordnet.*

Dann ist  $\varphi_j(s) = t$ .

*Beweis:*

Der Beweis geht ähnlich wie der Beweis von Satz 6.3.23. Zunächst einmal sei  $\Gamma_j := p(I_j)$ . Dann haben wir einen Isomorphismus

$$\Psi := \Omega(\Gamma_j)^{-1}(\Gamma_j \xrightarrow{\sim} I_j) : (\mathfrak{X} \times S) \times_{S \times S} \Gamma_j \xrightarrow{\sim} (S \times \mathfrak{X}) \times_{S \times S} \Gamma_j,$$

wobei die Einschränkung von  $\Psi$  auf  $X_0$  gleich dem Isomorphismus  $\alpha_j$  ist. Betrachten wir wieder  $\text{pr}_1 : \Gamma_j \rightarrow S$ ,  $\text{pr}_2 : \Gamma_j \rightarrow S$ , so gilt

$$(\mathfrak{X} \times S) \times_{S \times S} \Gamma_j \cong \text{pr}_1^+ \mathfrak{X}, \quad (S \times \mathfrak{X}) \times_{S \times S} \Gamma_j \cong \text{pr}_2^+ \mathfrak{X}$$

und wir erhalten einen Isomorphismus

$$\text{pr}_1^+ \mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \text{pr}_2^+ \mathfrak{X},$$

dessen Einschränkung auf die zentrale Faser  $X_0$  mit  $\alpha_j$  übereinstimmt. Wir betrachten die Deformation  $(\text{pr}_1^+ \mathfrak{X}, \Gamma_j, \text{id})$ , die besteht aus der Familie  $\text{pr}_1^+ \mathfrak{X} \rightarrow \Gamma_j$  und der Identität als Abbildung von  $X_0$  auf die zentrale Faser. Analog sei

$(\text{pr}_2^+ \mathfrak{X}, \Gamma_j, \alpha_j)$  definiert. Die Deformationen  $(\text{pr}_1^+ \mathfrak{X}, \Gamma_j, \text{id})$  und  $(\text{pr}_2^+ \mathfrak{X}, \Gamma_j, \alpha_j)$  sind also isomorph (\*).

Außerdem haben wir den Homomorphismus  $\varphi_j \circ \text{pr}_1 : \Gamma_j \rightarrow S$  und haben damit die Familie  $(\varphi_j \circ \text{pr}_1)^+ \mathfrak{X}$  über  $S$  (siehe folgendes Diagramm):

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathfrak{X} & \xrightarrow{\Phi} & \mathfrak{X} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_j & \xrightarrow{\text{pr}_1} & S & \xrightarrow{\varphi_j} & S \end{array}$$

Der Rückzug der Deformation  $(\mathfrak{X}, S, \alpha_j)$  mittels  $\varphi_j \circ \text{pr}_1$  ist isomorph zu  $(\text{pr}_1^+ \mathfrak{X}, S, \text{id})$ . Der Rückzug der Deformation  $(\mathfrak{X}, S, \alpha_j)$  mittels  $\text{pr}_2$  ist isomorph zu  $(\text{pr}_2^+ \mathfrak{X}, S, \alpha_j)$ . Nach (\*) sind beide Deformationen isomorph. Wegen der Universalität der Deformation  $\mathfrak{X} \rightarrow S$  und dem Zusammenhang von  $\Gamma_j$  muss dann  $\varphi_j \circ \text{pr}_1 = \text{pr}_2$  sein, also  $\varphi_j(s) = t$  wie behauptet war.

□

## 7 Konstruktion eines feinen Modulraums

### 7.1 Feine und grobe Modulräume

In der algebraischen Geometrie spielen feine und grobe Modulräume algebraischer Kurven eine wichtige Rolle. Wir definieren hier einen feinen Modulraum von markierten Riemannschen Flächen.

**Definition 7.1.1** Es sei  $\mathfrak{C}$  die Kategorie der endlichdimensionalen komplexen Räume und  $\mathfrak{Ens}$  die Kategorie der Mengen. Sei  $\mathbf{F} : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{Ens}$  ein kontravarianter Funktor.  $\mathbf{F}$  heißt *darstellbar*, falls ein  $S \in \mathfrak{C}$  und ein Isomorphismus von Funktoren

$$\Omega : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{Hom}(\cdot, S)$$

existiert. (Eine Verwechslung von  $\Omega$  mit der Garbe der holomorphen 1-Formen ist in diesem Kapitel ausgeschlossen.) Das Urbild in  $\mathbf{F}(S)$  von  $\text{id}_S \in \text{Hom}(S, S)$  heißt universelles Objekt und wird mit  $\mathcal{U}$  bezeichnet.

#### Bemerkung 7.1.2

1. Ist  $\mathbf{F} : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{Ens}$  ein darstellbarer Funktor, und sind  $\Omega, S, \mathcal{U}$  wie oben, dann existiert zu jedem komplexen Raum  $T$  und jedem  $\mathcal{C} \in \mathbf{F}(T)$  ein eindeutig bestimmter Morphismus  $h : T \rightarrow S$ , so dass gilt:

$$\mathcal{C} = \mathbf{F}(h)(\mathcal{U}) \quad (*)$$

2. Seien umgekehrt  $S$  ein komplexer Raum und  $\mathcal{U} \in \mathbf{F}(S)$  mit der Eigenschaft (\*). Dann ist  $\mathbf{F}$  darstellbar.

*Beweisskizze:*

1. Wähle  $h := \Omega(T)(\mathcal{C})$ . Dann folgt die Behauptung aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}(S) & \xrightarrow{\Omega(S)} & \text{Hom}(S, S) \\ \mathbf{F}(h) \downarrow & & \downarrow \mathbf{Hom}(h) \\ \mathbf{F}(T) & \xrightarrow{\Omega(T)} & \text{Hom}(T, S) \end{array}$$

2. Ist  $\mathcal{C} \in \mathbf{F}(T)$  und  $h : T \rightarrow S$  der eindeutige Morphismus von  $(*)$ , dann wird eine Darstellung gegeben durch:

$$\Omega(T) : \mathbf{F}(T) \rightarrow \text{Hom}(T, S), \quad \mathcal{C} \mapsto \Omega(T)(\mathcal{C}) := h$$

Man zeigt leicht, dass  $\Omega$  ein funktorieller Isomorphismus ist.

□

### Definition 7.1.3 (Modulproblem)

Unter einem Modulproblem versteht man folgendes: Man hat über jedem komplexen Raum  $S$  eine Menge  $C(S)$  von Familien von Objekten (Riemannsche Flächen, markierte Riemannsche Flächen, komplexe Räume, komplexe Mannigfaltigkeiten) gegeben. Dann kann man einen kontravarianten Funktor  $\mathbf{F} : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{Ens}$  definieren, indem man jedem  $S$  die Menge  $C(S)$  und jedem Morphismus von komplexen Räumen  $h : T \rightarrow S$  den Basiswechsel mittels  $h$  zuordnet.

Ist dann  $\mathbf{F}$  darstellbar durch einen komplexen Raum  $S$ , dann heißt  $S$  ein *feiner Modulraum* für den Funktor  $\mathbf{F}$ .

### Definition 7.1.4 (Der Funktor der Riemannschen Flächen)

Wir definieren einen Funktor  $\mathbf{R} : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{Ens}$ , der jedem komplexen Raum  $S$  die Menge der Isomorphieklassen von Familien von Riemannschen Flächen vom Geschlecht  $g$  über  $S$  und jedem Morphismus komplexer Räume  $h : T \rightarrow S$  den Basiswechsel mit  $h$  zuordnet.

Wir werden im nächsten Kapitel zeigen, dass dieser Funktor nicht darstellbar ist. Gibt es zu einem Modulproblem keinen *feinen* Modulraum, so kann man unter Umständen einen *groben* Modulraum finden:

**Definition 7.1.5** Sei  $\mathbf{F}$  ein kontravarianter Funktor von  $\mathfrak{C}$  nach  $\mathfrak{Ens}$ . Ein komplexer Raum  $S$  heißt *grober Modulraum* zu  $\mathbf{F}$ , falls ein Morphismus von Funktoren

$$\Omega : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{Hom}(\cdot, S)$$

existiert, der folgenden Eigenschaften genügt:

1. Ist  $p$  ein einfacher Punkt, so ist  $\Omega(p) : \mathbf{F}(p) \rightarrow \text{Hom}(p, S) \cong S$  eine Bijektion.

2. Für jeden komplexen Raum  $T$  und jeden Morphismus  $\Psi : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{Hom}(., T)$  gibt es einen eindeutigen Morphismus  $\pi : T \rightarrow S$ , so dass gilt  $\Psi = \mathbf{Hom}(\pi) \circ \Omega$ .

**Bemerkung 7.1.6** Existiert für einen Funktor ein grober Modulraum, so ist er bis auf Isomorphie eindeutig.

*Beweis:* Siehe [New, S. 24]

## 7.2 Hindernisse gegen die Existenz von feinen Modulräumen

**Bemerkung 7.2.1**  $\mathbf{R}$  ist nicht darstellbar.

Zunächst konstruieren wir eine nichttriviale Familie von Riemannschen Flächen, deren Fasern alle isomorph zueinander sind:

**Bemerkung 7.2.2** Es sei  $X$  eine Riemannsche Fläche mit Geschlecht  $g \geq 2$  oder ein punktierter Torus. Dann gibt es eine nichttriviale Familie von Riemannschen Flächen, deren Fasern alle isomorph zu  $X$  sind.

*Beweis:*

1. Es sei  $X$  eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g \geq 2$  mit nichttrivialer Automorphismengruppe oder ein Torus mit einem ausgezeichneten Punkt. Zum Beispiel kann man im Fall von  $g \geq 2$  eine hyperelliptische Fläche wählen. Auf hyperelliptischen Flächen gibt es dann immer mindestens einen nichttrivialen Automorphismus, die Jacobi-Inversion (siehe [FK, S. 97]).

Auf dem Torus  $X_\tau = \mathbb{C}/\Gamma_\tau$  gibt es immer einen nichttrivialen Automorphismus, der den Nullpunkt festlässt, nämlich den von der Abbildung  $z \mapsto -z$  induzierten.

Da die Gruppe der Automorphismen von  $X$  nach dem Satz von Hurwitz<sup>10</sup> endlich und nach der obigen Überlegung nicht trivial ist, enthält sie eine endliche zyklische Untergruppe  $G \cong \mathbb{Z}_n$  mit  $n \geq 2$ .

Für einen Torus  $X_\tau := \mathbb{C}/\Gamma_\tau, \tau \in \mathbb{H}$  mit festgelegtem Punkt 0 gilt genauer:

---

<sup>10</sup>Siehe [FK, S. 258]

$$\begin{aligned} \text{Aut}(X_\tau, 0) &\cong \mathbb{Z}_4 && \text{für } \tau = i \\ \text{Aut}(X_\tau, 0) &\cong \mathbb{Z}_6 && \text{für } \tau = \pm\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{Aut}(X_\tau, 0) &\cong \mathbb{Z}_2 && \text{sonst} \end{aligned}$$

Dabei ist  $\text{Aut}(X_\tau, 0)$  die Gruppe der Automorphismen von  $X_\tau$ , die den Nullpunkt festlassen.

2. Sei nun  $\varphi \in \text{Aut}(X)$ ,  $\varphi \neq \text{id}$  und  $G$  die von  $\varphi$  erzeugte Untergruppe von  $\text{Aut}(X)$ . Sei  $n$  die Ordnung von  $G$ .

Dann hat man die Abbildung

$$\hat{\varphi} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto \hat{\varphi}(z) := e^{2\pi i/n} \cdot z.$$

Sei  $\hat{G}$  die von  $\hat{\varphi}$  erzeugte Untergruppe von  $\text{Aut}(\mathbb{C}^*)$ . Dann definieren wir  $B := \mathbb{C}^*/\hat{G}$ . Zu  $t \in \mathbb{C}^*$  sei  $[t]$  die Äquivalenzklasse in  $B$ . Es ist  $B \cong \mathbb{C}^*$ , wobei die Isomorphie durch  $[t] \mapsto t^n$  gegeben ist.

Wir betrachten die Mannigfaltigkeit  $\mathbb{C}^* \times X$ , die Abbildung

$$\varphi^* : \mathbb{C}^* \times X \rightarrow \mathbb{C}^* \times X, \quad (t, z) \mapsto (\hat{\varphi}(t), \varphi(z)),$$

und die von  $\varphi^*$  erzeugte Gruppe  $G^*$ . Da  $G^*$  endlich ist, operiert  $G^*$  auf  $\mathbb{C}^* \times X$  eigentlich diskontinuierlich. Daher ist  $C := (\mathbb{C}^* \times X)/G^*$  ein komplexer Raum.

3. Sei nun  $[t, z]$  die von  $(t, z) \in \mathbb{C}^* \times X$  erzeugte Äquivalenzklasse in  $C$  und (wie oben)  $[t]$  die von  $t \in \mathbb{C}^*$  erzeugte Äquivalenzklasse in  $B$ .

Betrachte die Abbildung  $\omega : C \rightarrow B$ , die durch

$$\omega([t, z]) := [t]$$

gegeben ist.

$\omega$  ist wohldefiniert, denn aus  $[t_1, z_1] = [t_2, z_2]$  folgt  $(\varphi^*)^k(t_1, z_1) = (t_2, z_2)$  für ein geeignetes  $k \in \mathbb{Z}$ , daraus folgt  $(\hat{\varphi})^k(t_1) = t_2$ , also  $[t_1] = [t_2]$ .

$\omega : C \rightarrow B$  ist holomorph, denn  $\omega$  ist bezüglich geeigneter lokaler Koordinaten eine Projektion.

Außerdem ist für  $t \in \mathbb{C}^*$  die Faser  $\omega^{-1}([t]) = \{[t, z] \mid z \in X\} \cong X$ . Also sind alle Fasern zueinander isomorph.



4. Wir zeigen nun, dass  $\omega : C \rightarrow B$  nicht die triviale Familie ist.

*Beweis:*

(a) Wir nehmen an,  $\omega : C \rightarrow B$  sei die triviale Familie. Wir wählen  $t_1 \in \mathbb{C}^*$  beliebig und betrachten die Kurve

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*, \gamma(s) = t_1 e^{2\pi i s/n}$$

und die Projektion dieser Kurve auf  $B$ :

$$\gamma^* := [\gamma]$$

Identifiziert man  $B$  mit  $\mathbb{C}^*$  mittels des oben angegebenen Isomorphismus, dann ist

$$\gamma^* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*, \gamma(s) = t_1 e^{2\pi i s}.$$

Sei  $t_2 := \gamma(1) = t_1 e^{2\pi i/n} = \hat{\varphi}(t_1)$ .

Es gilt dann:

$$[(t_1, z)] = [(\hat{\varphi}(t_1), \varphi(z_1))] = [(t_2, \varphi(z_1))]$$

Definiert man  $\Gamma := \omega^{-1}(|\gamma^*|)$ , dann wäre  $\omega : \Gamma \rightarrow |\gamma^*|$  ebenfalls trivial.

Also gibt es eine holomorphe Funktion  $\Psi : |\gamma^*| \times X \xrightarrow{\sim} \Gamma \subset C$  so dass

$$\begin{array}{ccc} |\gamma^*| \times X & \xrightarrow{\Psi} & \Gamma \\ \text{pr}_B \searrow & & \swarrow \omega \\ & & B \end{array}$$

kommutiert.

(b) Dann können wir  $\Psi$  liften zur einer holomorphen Abbildung  $\hat{\Psi} : |\gamma| \times X \rightarrow \mathbb{C}^* \times X$  so dass

$$\begin{array}{ccc} |\gamma| \times X & \xrightarrow{\hat{\Psi}} & \mathbb{C}^* \times X \\ \downarrow & & \downarrow \\ |\gamma^*| \times X & \xrightarrow{\Psi} & C \end{array}$$

kommutiert. Als Anfangspunkt wählen wir  $\hat{\Psi}(t_1, z) = (t_1, z)$ .  
Aus der Kommutativität des Diagrammes

$$\begin{array}{ccc} |\gamma| \times X & \xrightarrow{\hat{\Psi}} & \mathbb{C}^* \times X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^* & & \mathbb{C}^* \\ & \searrow & \swarrow \\ & B & \end{array}$$

und  $\hat{\Psi}(t_1, z) = (t_1, z)$  folgt die Kommutativität des Diagrammes

$$\begin{array}{ccc} |\gamma| \times X & \xrightarrow{\hat{\Psi}} & \mathbb{C}^* \times X \\ \text{pr}_{\mathbb{C}^*} \searrow & & \swarrow \text{pr}_{\mathbb{C}^*} \\ & \mathbb{C}^* & \end{array}$$

(c) Wir zeigen, dass dann gilt:

$$\hat{\Psi}(t, z) = (t, z) \quad \text{für alle } t \in |\gamma|, z \in X.$$

*Beweis:*

Zunächst ist die Abbildung

$$X \xrightarrow{\sim} \{t\} \times X \xrightarrow{\hat{\Psi}} \{t\} \times X \xrightarrow{\sim} X$$

ein Isomorphismus, also gilt für festes  $t \in |\gamma|$ :

$$\Psi(t, z) = (t, \varphi^k(z))$$

mit einem geeigneten  $k \in \mathbb{Z}$ .

Da die Gruppe der Automorphismen auf  $X$  diskret ist, muss dann aber gelten:

$$\Psi(t, z) = (t, \varphi^k(z)) \quad \text{für alle } t \in |\gamma|, z \in X$$

mit einem geeigneten  $k \in \mathbb{Z}$  und wegen unserer Wahl  $\Psi(t_1, z) = (t_1, z)$  folgt dann die Behauptung.  $\square$

(d) Durch Projektion folgt:

$$\Psi([t_1], z) = [(t_1, z)], \quad \Psi([t_2], z) = [(t_2, z)]$$

und wegen  $[t_1] = [t_2]$  müsste dann  $[(t_1, z)] = [(t_2, z)]$  sein. Aber wenn  $z$  kein Fixpunkt von  $\varphi$  ist, dann ist

$$[(t_1, z)] = [(t_2, \varphi(z))] \neq [(t_2, z)].$$

Daher kann es keine solche Abbildung  $\Psi$  geben.  $\omega : C \rightarrow B$  ist also nicht die triviale Familie.

□

*Beweis von Bemerkung 7.2.1:*

Es sei  $\mathbf{R}$  der Funktor der Riemannschen Flächen vom Geschlecht  $g$  mit  $g \geq 2$ . Wir haben eine nichttriviale Familie  $\pi : C \rightarrow B$  konstruiert, so dass alle Fasern zueinander isomorph sind. Wäre  $\mathbf{R}$  darstellbar und  $\omega : \mathcal{U} \rightarrow S$  die universelle Familie, dann würde es einen Morphismus  $h : B \rightarrow S$  geben, so dass  $\pi : C \rightarrow B$  isomorph zum Rückzug von  $\omega : \mathcal{U} \rightarrow S$  via  $h$  ist.

Andererseits müsste  $h$  einen Punkt  $t \in B$  auf den Punkt von  $S$  abbilden, der die Äquivalenzklasse von  $\pi^{-1}(t)$  repräsentiert. Also würde  $h$  alle  $t$  auf denselben Punkt  $s$  in  $S$  abbilden. Dann ist aber der Rückzug von  $\mathcal{U} \rightarrow S$  mittels  $h$  die triviale Familie, und diese ist nicht isomorph zu  $\pi : C \rightarrow B$ . □

### 7.3 Der Teichmüller-Funktor

#### Definition 7.3.1 (Der Teichmüller-Funktor $\mathbf{T}_{\text{Tei}}$ )

Wir definieren den Teichmüller-Funktor  $\mathbf{T}_{\text{Tei}} : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{Ens}$ , der jedem komplexen Raum  $S$  die Menge der Isomorphieklassen von Familien von festgelegten Riemannschen Flächen vom Geschlecht  $g$  über  $S$  und jedem Morphismus komplexer Räume  $h : T \rightarrow S$  den Basiswechsel mit  $h$  zuordnet.

Der Torelli-Funktor  $\mathbf{T}_{\text{Tor}}$  und der  $n$ -Jacobi-Funktor  $\mathbf{T}_{n\text{-J}}$  werden entsprechend definiert.

**Bemerkung 7.3.2** Der Funktor  $\mathbf{T}_{\text{Tei}}$  ist also genau dann darstellbar, wenn es eine Familie  $\omega : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{T}$  markierter Riemannscher Flächen vom Geschlecht  $g$  gibt, so dass es für jede andere Familie  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow S$  einen eindeutigen Morphismus  $h : S \rightarrow \mathcal{T}$  gibt, so dass  $\pi$  zum Rückzug von  $\omega$  mittels  $h$  isomorph ist.

## 7.4 Verschiedenheit der Fasern

Wir werden nun einen feinen Modulraum für den Teichmüller-Funktor konstruieren, indem wir lokale Deformationen miteinander verkleben. Um die Wohldefiniertheit der Verklebungen sicherzustellen, müssen wir erst zeigen, dass bei universellen Deformationen die Fasern in einer geeigneten Umgebung der zentralen Faser alle verschieden voneinander sind. Ziel dieses Abschnittes ist also der Beweis des folgenden Satzes:

**Satz 7.4.1** *Es sei  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow S$  eine universelle Deformation einer Riemannschen Fläche  $X_0$  über einer komplexen Mannigfaltigkeit  $S$ . Außerdem sei eine Teichmüllermarkierung der Fasern mittels einer Referenzfläche  $X_*$  und eine differenzierbare Trivialisierung  $\Psi : X_* \times S \rightarrow \mathfrak{X}$  gegeben.*

*Dann gibt es eine Umgebung  $S' \subset S$  von  $0$ , so dass alle Fasern  $X_s$ ,  $s \in S'$  verschieden in Bezug auf Teichmüller-Äquivalenz bzw. eine der anderen Äquivalenzen sind.*

*Beweis:* Wir führen den Beweis für Teichmüller-Äquivalenz durch. Für die anderen Äquivalenzen verläuft er analog.

1. Wir definieren den Diffeomorphismus

$$\beta_s : X_0 \rightarrow \{s\} \times X_0 \xrightarrow{\Psi} X_s$$

Dann sei die Markierung von  $X_s$  ohne Einschränkung der Allgemeinheit homotop zu  $\beta_s : X_* \rightarrow X_s$ .

2. Wir betrachten das darstellende Objekt  $p : I \rightarrow S \times S$  des Funktors  $\mathbf{Isom}_{S \times S}(\mathfrak{X} \times S, S \times \mathfrak{X})$ . Es sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $S$  so klein, dass  $I$  in offene disjunkte Teilmengen  $I_j$  zerfällt, die mit der zentralen Faser jeweils nur einen Punkt gemeinsam haben und biholomorph zu ihrem Bild sind (dies ist möglich nach Satz 6.3.18). Außerdem wählen wir eine Umgebung  $S' \subset S$ , so dass für alle  $x \in p^{-1}(S' \times S')$  eine Zusammenhangskomponente in  $I$  existiert, die  $x$  mit der zentralen Faser verbindet. Ein solches  $S'$  existiert nach Folgerung 6.3.24.
3. Wir nehmen an, dass es zwei äquivalente Fasern  $X_s, X_t$  mit  $s \neq t$  gibt. Das heißt, dass es einen Isomorphismus  $\varphi : X_s \rightarrow X_t$  gibt, so dass  $\beta_t^{-1} \circ \varphi \circ \beta_s$  homotop zu  $\text{id}_{X_*}$  ist. Dann entspricht  $\varphi$  einem Punkt  $x \in I$ . Wir betrachten die Komponente  $I_j \subset I$  mit  $x \in I_j$ . Es sei  $\alpha$  der

Automorphismus von  $X_0$ , der dem Schnittpunkt  $\{x_j\} = I_j \cap p^{-1}((0, 0))$  zugeordnet ist. Nach Folgerung 6.3.24 ist  $\alpha \neq \text{id}_{X_0}$ .

4. Wir zeigen nun, dass  $\alpha$  homotop zu  $\text{id}_{X_0}$  ist: Wir haben den Isomorphismus

$$(\mathfrak{X} \times S)_{S \times S} I_j \xrightarrow{\sim} (S \times \mathfrak{X})_{S \times S} I_j$$

Betrachten wir die Projektionen  $\text{pr}_1 : I_j \rightarrow S$ ,  $\text{pr}_2 : I_j \rightarrow S$  und definieren  $\text{pr}_1^+ \mathfrak{X} := \mathfrak{X} \times_S I_j$ , wobei  $I_j$  vermöge  $\text{pr}_1 : I_j \rightarrow S$  als komplexer Raum über  $S$  aufgefasst wird und analog  $\text{pr}_2^+ \mathfrak{X}$ . Dann ist  $\text{pr}_1^+ \mathfrak{X} \cong (\mathfrak{X} \times S)_{S \times S} I_j$  und  $\text{pr}_2^+ \mathfrak{X} \cong (S \times \mathfrak{X})_{S \times S} I_j$ , also auch  $\text{pr}_1^+ \mathfrak{X} \cong \text{pr}_2^+ \mathfrak{X}$ . Den Isomorphismus  $\text{pr}_1^+ \mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \text{pr}_2^+ \mathfrak{X}$  bezeichnen wir mit  $\Phi$ .

Da  $I_j$  zusammenhängend ist, gibt es eine Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow I$  die  $x$  mit  $x_j$  verbindet, d. h.  $\gamma(0) = x_j$  und  $\gamma(1) = x$ . Weiter sei

$$s(\tau) := \text{pr}_1 \circ p \circ \gamma(\tau), \quad t(\tau) := \text{pr}_2 \circ p \circ \gamma(\tau), \quad \tau \in [0, 1]$$

und  $\varphi_\tau$  der zu  $\gamma(\tau)$  gehörige Isomorphismus von  $X_{s(\tau)}$  nach  $X_{t(\tau)}$ .  $\varphi_\tau$  stimmt mit der Einschränkung von  $\Phi$  auf  $X_{s(\tau)}$  überein. Insbesondere ist also  $\varphi_\tau$  in  $\tau$  stetig.

Dann ist  $\beta_0^{-1} \circ \alpha \circ \beta_0$  homotop zu  $\beta_t^{-1} \circ \varphi \circ \beta_s$ , denn eine Homotopie ist:

$$F : [0, 1] \times X_0 \rightarrow X_0, \quad (\tau, z) \mapsto F(\tau, z) := \beta_{t(\tau)}^{-1} \circ \varphi_\tau \circ \beta_{s(\tau)}(z)$$

Nach Voraussetzung ist  $\beta_t^{-1} \circ \varphi \circ \beta_s$  homotop zu  $\text{id}_{X_*}$ , also ist  $\beta_0^{-1} \circ \alpha \circ \beta_0$  homotop zu  $\text{id}_{X_*}$ , und damit ist  $\alpha$  homotop zu  $\text{id}_{X_0}$ .

5. Nach Satz 5.2.1 bzw. der Folgerung dazu ist aber dann  $\alpha = \text{id}_{X_0}$  im Widerspruch zu oben. Also kann es keine zwei äquivalenten Fasern geben.

□

## 7.5 Konstruktion eines Verklebedatums

In diesem Abschnitt konstruieren wir Totalraum und Basis einer universellen Familie für den Teichmüller-/Torelli-/ $n$ -Jacobi-Funktor. Dazu wählen wir für den ganzen Abschnitt einen Äquivalenztyp fest.

**Definition 7.5.1** Es sei  $X_0$  eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g \geq 2$  oder ein punktierter Torus (d. h. ein Torus mit ausgezeichnetem Punkt).  $(f_1, X_1), (f_2, X_2)$  seien festgelegte Riemannsche Flächen. Betrachte universelle Deformationen  $\pi_1 : \mathfrak{X}_1 \rightarrow B_1, \pi_2 : \mathfrak{X}_2 \rightarrow B_2$  von  $X_1$  bzw.  $X_2$ . Auf  $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$  seien Markierungen eingeführt.

Dabei seien die Basisräume  $B_1, B_2$  nach Satz 4.2.9 so gewählt, dass für jeden Punkt  $s$  des Basisraums und jede Faser  $X_s$  über diesem Punkt die Deformation  $\pi_i : \mathfrak{X}_i \rightarrow B_i$ , gesehen als Deformation von  $X_s$ , wieder versell ist. Die Basisräume seien außerdem nach Satz 7.4.1 so gewählt, dass alle Fasern verschieden in Bezug auf die gewählte Äquivalenz (Teichmüller, Torelli,  $n$ -Jacobi) sind.

Wir definieren

$$V_1 := \{s_1 \in B_1 \mid \exists s_2 \in B_2 : X_{s_1} \sim X_{s_2}\}$$

$$V_2 := \{s_2 \in B_2 \mid \exists s_1 \in B_1 : X_{s_1} \sim X_{s_2}\}$$

wobei  $\sim$  die hier gewählte Äquivalenz ist.

**Bemerkung 7.5.2**  $V_1, V_2$  sind offene Mengen.

*Beweis:* Sei  $s_1 \in V_1$  und  $s_2 \in V_2$  mit  $X_{s_1} \sim X_{s_2}$ . Ich zeige, dass  $V_1$  eine Umgebung von  $s_1$  ist.

Da die Deformationen  $\pi_1, \pi_2$  als Deformationen von  $X_{s_1}$  und  $X_{s_2}$  versell sind, gibt es Umgebungen  $B'_i \subset B_i$  von  $s_i$  und Isomorphismen  $\Psi : \mathfrak{X}'_1 \rightarrow \mathfrak{X}'_2$  mit  $\mathfrak{X}'_i := \pi_i^{-1}(B'_i)$  und  $\psi : B'_1 \rightarrow B'_2$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}'_1 & \xrightarrow{\Psi} & \mathfrak{X}'_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ B'_1 & \xrightarrow{\psi} & B'_2 \end{array}$$

kommutativ ist und  $\Psi$  die Faser  $X_{s_1}$  markierungstreu auf die Faser  $X_{s_2}$  abbildet (siehe [Gin, S. 134]).

Nach Satz 5.3.6 sind dann für  $t \in B'_1$  die Fasern  $X_t$  und  $X_{\psi(t)}$  äquivalent. Insbesondere ist  $B'_1 \subset V_1$ , und damit ist  $V_1$  eine Umgebung von  $s_1$ . Der Beweis für die Offenheit von  $V_2$  folgt analog, indem man einen Isomorphismus  $\mathfrak{X}'_2 \rightarrow \mathfrak{X}'_1$  definiert.  $\square$

**Bemerkung 7.5.3** Es seien  $X_{s_1}, X_{s_2}$  bzw.  $X_{\tilde{s}_1}, X_{\tilde{s}_2}$  äquivalente Fasern,  $B'_i, \tilde{B}'_i$  seien Umgebungen von  $s_i$  bzw.  $\tilde{s}_i$ , weiter seien  $\mathfrak{X}'_i := \pi_i^{-1}(B'_i), \tilde{\mathfrak{X}}'_i :=$

$\pi_i^{-1}(\tilde{B}'_i)$ , und

$$\psi : B'_1 \rightarrow B'_2, \quad \tilde{\psi} : \tilde{B}'_1 \rightarrow \tilde{B}'_2, \quad \Psi : \mathfrak{X}'_1 \rightarrow \mathfrak{X}'_2, \quad \tilde{\Psi} : \tilde{\mathfrak{X}}'_1 \rightarrow \tilde{\mathfrak{X}}'_2$$

seien Isomorphismen wie im Beweis von Bemerkung 7.5.2. Ist außerdem  $t_1 \in B'_1 \cap \tilde{B}'_1$ , dann gilt:

$$\psi(t_1) = \tilde{\psi}(t_1) =: t_2 \quad \text{und} \quad \Psi|_{X_{t_1}} = \tilde{\Psi}|_{X_{t_1}}$$

*Beweis:* Nach Satz 5.3.6 ist  $X_{t_1} \sim X_{\psi(t_1)}$  und  $X_{t_1} \sim X_{\tilde{\psi}(t_1)}$ . Damit ist  $X_{\psi(t_1)} \sim X_{\tilde{\psi}(t_1)}$  und da verschiedene Fasern in  $B_2$  nicht äquivalent sind, gilt damit:

$$\psi(t_1) = \tilde{\psi}(t_1) =: t_2$$

$\Psi|_{X_{t_1}}$  und  $\tilde{\Psi}|_{X_{t_1}}$  sind beides markierungstreue Isomorphismen von  $X_{t_1}$  nach  $X_{t_2}$  und stimmen nach Satz 5.2.1 überein. □

#### Definition 7.5.4 (Verklebung von $V_1$ mit $V_2$ )

Sei  $s \in V_1$ . Dann definieren wir für eine geeignete Umgebung  $V'_1$  von  $s$  die Isomorphismen

$$\psi_s : V'_1 \rightarrow V'_2, \quad \Psi_s : \pi^{-1}(V'_1) \rightarrow \pi^{-1}(V'_2)$$

wie im Beweis von Bemerkung 7.5.2. Man kann für jedes  $s \in V_1$  solche Isomorphismen definieren und erhält dann wegen der vorhergehenden Bemerkung globale Isomorphismen

$$\psi : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2, \quad \Psi : \pi^{-1}(V_1) \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(V_2).$$

Wir definieren weiter:

$$V_1^2 := V_1, \quad V_2^1 = V_2, \quad \mathfrak{X}_1^2 := \pi^{-1}(V_1), \quad \mathfrak{X}_2^1 := \pi^{-1}(V_2)$$

$$\psi_1^2 := \psi, \quad \psi_2^1 := \psi^{-1}, \quad \Psi_1^2 := \Psi, \quad \Psi_2^1 := \Psi^{-1}$$

Damit gilt:

$$\psi_i^j : V_i^j \xrightarrow{\sim} V_j^i, \quad \Psi_i^j : \mathfrak{X}_i^j \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}_j^i$$

**Bemerkung 7.5.5** Es seien  $\pi_i : \mathfrak{X}_i \rightarrow B_i$ ,  $\pi_j : \mathfrak{X}_j \rightarrow B_j$ ,  $\pi_k : \mathfrak{X}_k \rightarrow B_k$  Deformationen markierter Riemannscher Flächen.  $V_i^j$ ,  $\psi_i^j$ ,  $\mathfrak{X}_i^j$ ,  $\Psi_i^j$ ,  $V_i^k$  usw. seien wie in Definition 7.5.4 gegeben.

$$V_i^{jk} := V_i^j \cap V_i^k, \quad \mathfrak{X}_i^{jk} := \mathfrak{X}_i^j \cap \mathfrak{X}_i^k.$$

Dann sind  $\psi_j^k \circ \psi_i^j$  auf  $V_i^{jk}$  und  $\Psi_j^k \circ \Psi_i^j$  auf  $\mathfrak{X}_i^{jk}$  definiert, und es gilt:

$$\psi_i^k = \psi_j^k \circ \psi_i^j \quad \text{auf } V_i^{jk}$$

und

$$\Psi_i^k = \Psi_j^k \circ \Psi_i^j \quad \text{auf } \mathfrak{X}_i^{jk}$$

Damit sind  $(V_i^j, \psi_i^j)$  und  $(\mathfrak{X}_i^j, \Psi_i^j)$  Klebedaten.

*Beweis:*

1. Sei  $s_i \in V_i^{jk}$  beliebig,  $s_j := \psi_i^j(s_i)$ ,  $s_k := \psi_i^k(s_i)$ . Außerdem sei  $X_{s_i} := \pi_i^{-1}(s_i)$  und analog seien  $X_{s_j}$  und  $X_{s_k}$  definiert. Dann ist  $X_{s_i} \sim X_{s_k}$ ,  $X_{s_i} \sim X_{s_j}$ , woraus  $X_{s_j} \sim X_{s_k}$  und  $s_j \in V_j^k$  folgt. Damit ist  $\psi_j^k \circ \psi_i^j$  auf  $V_i^{jk}$  definiert. Es sei  $s'_k := \psi_j^k \circ \psi_i^j(s_i)$ . Dann ist  $X_{s_j} \sim X_{s'_k}$ , also auch  $X_{s_k} \sim X_{s'_k}$ , und da die Fasern in  $B_k$  alle verschieden (in Bezug auf die gewählte Äquivalenz) sind, muss  $s_k = s'_k$  sein.
2. Weiter ist  $\Psi_j^k \circ \Psi_i^j$  auf  $X_{s_i}$  definiert, denn  $\Psi_i^j(X_{s_i}) = X_{s_j}$ , und  $\Psi_j^k$  ist wegen  $s_j \in V_j^k$  auf  $X_{s_j}$  definiert.
3.  $\Psi_j^k \circ \Psi_i^j$  bildet  $X_{s_i}$  isomorph und markierungstreu auf  $X_{s_k}$  ab, das gleiche gilt für  $\Psi_i^k$ . Weil es nur einen markierungstreuen Isomorphismus  $X_{s_i} \xrightarrow{\sim} X_{s_k}$  gibt, stimmt  $\Psi_j^k \circ \Psi_i^j|_{X_{s_i}}$  mit  $\Psi_i^k|_{X_{s_i}}$  überein.

□

### Definition 7.5.6 (Konstruktion der topologischen Räume $\mathcal{T}$ und $\mathcal{Z}$ )

Wir werden nun für jeden Äquivalenztyp eine Familie von komplexen Räumen  $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{T}$  konstruieren. Es wird sich herausstellen, dass je nach Äquivalenz  $\mathcal{T}$  genau der Teichmüllerraum  $\mathcal{T}_{\text{Tei}}$  bzw. der Torelliraum  $\mathcal{T}_{\text{Tor}}$  bzw. der  $n$ -Jacobiraum  $\mathcal{T}_{n\text{-J}}$  ist. Dementsprechend werden wir die zugehörigen Totalräume mit  $\mathcal{Z}_{\text{Tei}}$ ,  $\mathcal{Z}_{\text{Tor}}$ ,  $\mathcal{Z}_{n\text{-J}}$  bezeichnen. Gilt eine Aussage für jede der drei



Äquivalenzen, dann lassen wir die zusätzliche Indizierung weg und schreiben einfach  $\mathcal{Z}, \mathcal{T}$ . Die folgende Konstruktion gilt für alle drei Äquivalenzen.

Wir betrachten zunächst die Menge „aller“ markierten Riemannschen Flächen  $\{(f_j, X_j), j \in J\}$  (d. h. wir betrachten je Äquivalenzklasse einen Repräsentanten), und dazugehörige universelle Deformationen  $\pi_j : \mathfrak{X}_j \rightarrow B_j$ . Außerdem stellen wir Klebedaten  $(V_i^j, \psi_i^j), (\mathfrak{X}_i^j, \Psi_i^j), i, j \in J$  wie oben her. Wir betrachten die disjunkte Summe  $\dot{\bigcup}_{j \in J} V_j$ . Auf dieser Menge betrachten wir eine Äquivalenzrelation, die von folgenden Relationen erzeugt wird:

$$t_i \in V_i \sim t_j \in V_j : \iff t_i \in V_i^j \wedge \psi_i^j(t_i) = t_j$$

$\mathcal{T}$  ist dann der Quotientenraum modulo dieser Äquivalenzrelation:

$$\mathcal{T} := \left( \dot{\bigcup} V_j \right) / \sim$$

Es ist klar, dass  $\mathcal{T}$  als Menge mit dem Teichmüller-/Torelli-/ $n$ -Jacobi-Raum übereinstimmt. Analog definieren wir eine Äquivalenzrelation auf  $\dot{\bigcup} \mathfrak{X}_j$  und setzen

$$\mathcal{Z} := \left( \dot{\bigcup} \mathfrak{X}_j \right) / \sim$$

$\mathcal{T}$  und  $\mathcal{Z}$  sind topologische Räume. Wenn wir folgendes nachweisen können, sind  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{Z}$  komplexe Mannigfaltigkeiten (siehe [tDi, S. 8] oder [GR2, S. 130]):

1.  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{Z}$  sind hausdorffsch.
2.  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{Z}$  sind zusammenhängend.

Dies wird in den beiden folgenden Abschnitten gezeigt.

**Definition 7.5.7** Es lässt sich eine eigentliche Abbildung  $\omega : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{T}$  wie folgt definieren:

Es sei  $X$  eine markierte Riemannsche Fläche und  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  die universelle Deformation. Dann ist  $\mathfrak{X}$  kanonisch eingebettet in  $\mathcal{Z}$  und  $B$  kanonisch in  $\mathcal{T}$ . Ist  $Z'$  das Bild von  $\mathfrak{X}$  und  $T'$  das Bild von  $B$  bei dieser Einbettung, dann definieren wir  $\omega|_{Z'}$  so, dass folgendes Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xrightarrow{\sim} & Z' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \omega|_{Z'} \\ B & \xrightarrow{\sim} & T' \end{array}$$

Betrachtet man alle möglichen Deformationen von Riemannschen Flächen vom Geschlecht  $g$ , so erhält man insgesamt eine Abbildung  $\omega : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{T}$ .

Dass  $\omega$  wohldefiniert ist, folgt daraus, dass die Verklebungsabbildungen der Basen und der Totalräume mit den Projektionen verträglich sind.  $\square$

## 7.6 Hausdorff-Eigenschaft des Teichmüllerraumes

### 7.6.1 Hausdorff-Eigenschaft von $\mathcal{T}$

**Satz 7.6.1** *Der topologische Raum  $\mathcal{T}$  ist hausdorffsch.*

*Beweis:*

Gegeben seien zwei Punkte  $s \neq t \in \mathcal{T}$ . Dann gibt es universelle Deformationen  $\pi_i : \mathfrak{X}_i \rightarrow B_i$ ,  $\pi_j : \mathfrak{X}_j \rightarrow B_j$  mit  $s \in B_i$  und  $t \in B_j$ , wobei  $B_i, B_j$  kanonisch als Teilmengen von  $\mathcal{T}$  aufgefasst werden. Die Deformationen seien für alle Fasern von  $B_i, B_j$  universell. Weiter sei ohne Einschränkung  $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ , denn sonst sind ja  $B_i, B_j$  trennende Umgebungen.

$V_i, V_j$  und  $\psi : V_i \xrightarrow{\sim} V_j$  seien wie in Definition 7.5.1 definiert. Wir zeigen zuerst, dass  $B_i \cup_\psi B_j$  hausdorffsch ist:

Es sei eine Folge  $s_i \in V_i$  gegeben, die gegen  $s_0 \in \partial V_i$  konvergiert. Außerdem sei  $t_i = \psi(s_i)$ . Also gilt:  $X_{s_i} \sim Y_{t_i}$  (dabei bezeichnet  $\sim$  den gewählten Äquivalenztyp). Dann kann aber  $t_i$  nicht gegen ein  $t_0$  in  $B_j$  konvergieren, denn sonst wäre nach Satz 6.1.1  $X_{s_0} \sim Y_{t_0}$  und dann wäre  $s_0 \in V_1$ .

Daher sind die Bedingungen von Lemma 2.3.10 erfüllt, und  $B_i \cup_\psi B_j$  ist hausdorffsch. Dann gibt es aber trennenden Umgebungen um  $s$  und  $t$ , was zu zeigen war.  $\square$

### 7.6.2 Hausdorff-Eigenschaft von $\mathcal{Z}$

**Satz 7.6.2** *Der topologische Raum  $\mathcal{Z}$  ist hausdorffsch und damit eine komplexe Mannigfaltigkeit.*

*Beweis:*

Es seien  $x_1, x_2 \in \mathcal{Z}$ . Wir zeigen, dass es trennende Umgebungen von  $x_1, x_2$  gibt.

Fallunterscheidung:

1.  $\omega(x_1) = \omega(x_2) := t$ .

$\omega^{-1}(t)$  ist isomorph zu einer Riemannsche Fläche  $X$ . Wähle eine universelle Deformation  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  von  $X$ . Dann kann man  $\mathfrak{X}$  kanonisch als Teilmenge von  $\mathcal{Z}$  betrachten. Weiter sei  $\tau : X \xrightarrow{\sim} \omega^{-1}(t)$ .

Sei  $z_i = \tau^{-1}(x_i)$ , also  $z_i \in X$ . Da  $X$  hausdorffsch ist, gibt es trennende Umgebungen  $U_1 \ni z_1, U_2 \ni z_2$  mit  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

Es gibt (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) einen faserstreuen Homöomorphismus:  $\Psi : B \times X \rightarrow \mathfrak{X}$ , d. h. folgendes Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} B \times X & \xrightarrow{\Psi} & \mathfrak{X} \\ \text{pr}_B \searrow & & \swarrow \pi \\ & B & \end{array}$$

Dann sind  $\Psi(B \times U_1)$ ,  $\Psi(B \times U_2)$  trennende Umgebungen für  $x_1, x_2$ .

2. Es gilt  $\omega(x_1) = t_1 \neq t_2 = \omega(x_2)$ . Da  $\mathcal{T}$  hausdorffsch ist, gibt es trennende Umgebungen  $V_1, V_2$  von  $t_1, t_2$ , und dann sind  $\omega^{-1}(V_i)$  trennende Umgebungen von  $x_i$ .

□

## 7.7 Zusammenhang des Teichmüllerraumes

### 7.7.1 Beltrami-Differentiale und quasikonforme Abbildungen

#### Definition 7.7.1 (Beltrami-Differentiale)

Unter einem *Beltrami-Differential* über einer Riemannschen Fläche  $X$  versteht man einen messbaren Schnitt des Bündels  $K^* \otimes \overline{K}$  ( $K$  sei dabei das kanonische Bündel). Sind  $z, \zeta$  zwei Karten auf  $X$  und  $\mu^z(z), \mu^\zeta(\zeta)$  die Darstellungen von  $\mu$  bezüglich dieser Karten, dann gilt die Transformationsformel:

$$\mu^\zeta(\zeta) = \mu^z(z) \frac{d\zeta}{dz} \frac{d\bar{z}}{d\bar{\zeta}}$$

Mit  $M(X)$  bezeichnen wir dann den Banach-Raum der Beltrami-Differentiale auf  $X$ .

**Definition 7.7.2 (Quasikonforme Abbildungen)**

Ein Jordan-Gebiet auf einer Riemannschen Fläche  $X$  ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Rand eine in  $X$  enthaltene einfach geschlossene Kurve ist. Ein verallgemeinertes Vierseit  $Q$  ist ein Jordangebiet auf  $X$  mit zwei disjunkten abgeschlossenen Kurven  $\beta_1, \beta_2$  auf dem Rand von  $Q$ .  $Q$  lässt sich nach dem Riemannschen Abbildungssatz konform auf ein Rechteck abbilden, so dass  $\beta_1, \beta_2$  in die vertikalen Seiten des Rechtecks überführt werden (siehe genauer bei [Leh, S. 15]). Wenn das Rechteck Breite  $a$  und Höhe  $b$  hat, dann bezeichnet man  $a/b$  als den Modul  $m(Q)$  von  $Q$ . Da die konformen Abbildungen zwischen Rechtecken genau die Ähnlichkeitsabbildungen sind, ist  $m(Q)$  wohldefiniert.

Ist  $f$  ein orientierungstreuer Homöomorphismus, dann heißt  $f$   $K$ -quasikonform, wenn es  $K \in \mathbb{R}^+$  gibt, so dass  $m(f(Q)) \leq Km(Q)$  für alle verallgemeinerten Vierseite  $Q$  gilt. Das kleinste  $K$ , für das die Ungleichung für alle  $Q$  erfüllt ist, heißt *Dilatation* von  $f$ .

**Bemerkung 7.7.3** Ein orientierungstreuer Diffeomorphismus zwischen Riemannschen Flächen ist immer quasikonform.

*Beweisskizze:* Siehe genauer bei [Im, S. 18]. Es sei  $f : X \rightarrow X'$  ein Diffeomorphismus. Man rechnet nach, dass die Dilatation von  $f$  durch

$$K_f = \sup_{z \in X} \frac{1 + |\mu_f(z)|}{1 - |\mu_f(z)|}$$

mit

$$\mu_f(z) = \frac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)}$$

gegeben ist. Da  $f$  orientierungstreu ist, gilt  $\mu_f(z) < 1$ . Da  $X$  kompakt ist, ist  $\sup_{z \in X} |\mu_f(z)| < 1$ , und damit ist  $K_f$  beschränkt. □

**Bemerkung 7.7.4** Für einen Punkt  $p \in X$  ist  $|\mu^\zeta(p)|$  unabhängig von der Wahl der Karte  $\zeta$  und sei mit  $|\mu(p)|$  bezeichnet.

*Beweis:*

$$|\mu^\zeta(\zeta)| = \left| \mu^z(z) \frac{d\zeta}{dz} \frac{d\bar{z}}{d\bar{\zeta}} \right| = |\mu^z(z)|$$

□

**Definition 7.7.5** Es sei  $\mu$  das oben definierte Beltrami-Differential. Dann definiert man

$$\|\mu\|_\infty := \text{ess.sup}_{p \in X} |\mu(p)|.$$

Dabei ist  $\text{ess.sup}_{p \in X} |\mu(p)|$  das essentielle Supremum, das heißt die kleinste Zahl  $a \in \mathbb{R}$ , so dass  $a$  von  $|\mu(p)|$  nur noch auf einer Nullmenge übertroffen wird.

Mit  $M_1(X)$  bezeichnen wir den Raum der Beltrami-Differentiale, deren Norm kleiner als 1 ist.

**Satz 7.7.6** *Es sei  $\mu$  ein Beltrami-Differential auf  $\mathbb{C}$  mit  $\|\mu\|_\infty < 1$ . Dann gibt es einen quasikonformen Homöomorphismus  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , der  $0, 1, \infty$  festlässt und*

$$f_{\bar{z}}(z) = f_z(z)\mu(z) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

erfüllt. Wir nennen diesen Homöomorphismus  $f_\mu$ .

*Beweis:* Siehe [Nag, S. 34]

**Folgerung 7.7.7** Es sei  $\mu$  ein Beltrami-Differential auf  $\mathbb{H}$  mit  $\|\mu\|_\infty < 1$ . Dann gibt es einen quasikonformen Homöomorphismus  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ , dessen (stetige) Erweiterung auf  $\hat{\mathbb{R}}$  die Punkte  $0, 1, \infty$  festlässt und

$$f_{\bar{z}}(z) = f_z(z)\mu(z) \quad \text{für } z \in \mathbb{H}$$

erfüllt.

*Beweis:* Siehe [Nag, S. 43]. Der Beweis beruht darauf, dass man  $\mu$  auf  $\mathbb{C}$  durch

$$\mu^*(z) := \begin{cases} \mu(z) & \text{für } z \in \mathbb{H} \\ \overline{\mu(\bar{z})} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{H} \end{cases}$$

erweitert.

**Satz 7.7.8** *Hat man eine Familie  $\mu_t$  von Beltrami-Differentialen, die holomorph von einer komplexen Variablen  $t$  abhängen, d. h. kann man  $\mu_t$  schreiben als*

$$\mu_t(z) = \mu(z) + t\nu(z) + t\varepsilon_t(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

mit  $\mu \in M_1(\mathbb{C}), \nu \in M(\mathbb{C}), \varepsilon_t \in M(\mathbb{C})$ , so dass  $\|\varepsilon_t\|_\infty \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow 0$ , dann ist auch  $f_{\mu_t}$  holomorph in  $t$ , d. h. es gilt:

$$f_{\mu_t}(z) = f_\mu(z) + tf_1(z) + o(|t|), \quad z \in \mathbb{C}$$

mit einer quasikonformen Abbildung  $f_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

*Beweis:* Siehe [Nag, S. 38] oder [Im, S. 110].

### 7.7.2 Zusammenhang von $\mathcal{T}$

Ziel dieses Abschnittes ist es, zu beweisen, dass die Räume  $\mathcal{T}_{\text{Tei}}$ ,  $\mathcal{T}_{\text{Tor}}$  und  $\mathcal{T}_{n\text{-J}}$  zusammenhängend sind.

#### Definition 7.7.9 (eigentlich diskontinuierliche Gruppen)

Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $G$  eine Gruppe von Homöomorphismen von  $X$  auf sich selbst. Dann operiert  $G$  bei  $x \in X$  *eigentlich diskontinuierlich*, wenn es eine Umgebung  $U_x$  von  $x$  gibt, die höchstens endlich viele Translate von  $U_x$  trifft, d. h. die Menge

$$\{g \in G \mid U_x \cap g(U_x) \neq \emptyset\}$$

ist endlich.  $G$  operiert eigentlich diskontinuierlich auf  $X$ , wenn  $G$  für alle  $x \in X$  eigentlich diskontinuierlich ist.

**Hilfssatz 7.7.10** Es sei  $G$  eine Gruppe von Homöomorphismen, die eigentlich diskontinuierlich und fixpunktfrei auf einem Hausdorff-Raum  $X$  operieren. Dann gibt es für jeden Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U_x$ , so dass die Translate von  $U_x$  alle paarweise disjunkt sind.

*Beweis:* Man wählt  $U_x$  zunächst so, dass  $U_x$  nur von endlich vielen Translaten getroffen wird. Man kann unter Ausnutzung der Hausdorff-Eigenschaft  $U_x$  schrittweise so verkleinern, dass schließlich alle Translate zu  $U_x$  disjunkt sind. Dann sind auch alle Translate untereinander disjunkt.  $\square$

**Satz 7.7.11** *Es sei  $X$  eine endlich-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und  $G$  eine Gruppe von Automorphismen auf  $X$ , die eigentlich diskontinuierlich und fixpunktfrei operiert. Dann ist der Quotientenraum  $X/G$  eine Mannigfaltigkeit mit derselben Dimension wie  $X$  und die Quotientenabbildung  $q : X \rightarrow X/G$  ist eine normale Überlagerung. Ist  $X$  eine komplexe Mannigfaltigkeit und besteht  $G$  aus biholomorphen Automorphismen, dann hat  $X/G$  eine eindeutig bestimmte komplexe Struktur, so dass  $q$  ein holomorpher Überlagerungsraum ist.*

*Beweis:*

Siehe [Nag, S 160]. Der Beweis ist trivial, denn wenn man eine Menge  $U \subset X$  wählt, so dass die Translate von  $U$  zu  $U$  disjunkt sind, so hat man eine Karte von  $X/G$ .  $\square$

Aber auch wenn  $G$  nicht fixpunktfrei operiert, hat der Quotientenraum immerhin noch die Struktur eines komplexen Raumes:

**Satz 7.7.12 (Cartan)** <sup>11</sup>

*Es sei  $S$  eine komplexe Mannigfaltigkeit und  $G$  eine Gruppe, die eigentlich diskontinuierlich auf  $S$  operiert. Dann ist  $S/G$  ein normaler komplexer Raum.*

**Definition 7.7.13 (Fuchssche Gruppen)**

Eine Untergruppe von  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  heißt *Fuchssche Gruppe*, wenn sie eigentlich diskontinuierlich ist.

**Bemerkung 7.7.14** Alle kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht  $g \geq 2$  lassen sich darstellen als  $X \cong \mathbb{H}/\Gamma$ , wobei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe ist.

*Beweis:* Siehe [Nag, S. 14]

**Bemerkung 7.7.15** Gegeben sei eine Riemannsche Fläche  $X_*$  vom Geschlecht  $g \geq 2$  als Bezugsfläche und zwei markierte Riemannsche Flächen  $(f_0, X_0)$ ,  $(f_1, X_1)$ . Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe, so dass  $X_*$  isomorph zu  $\mathbb{H}/\Gamma$  ist.

Dann gibt es eine Überlagerung  $\mathbb{H} \rightarrow X_i$  mit der Eigenschaft, dass Liftungen  $\tilde{f}_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  von  $f_i : X_* \rightarrow X_i$  existieren, deren (stetige) Fortsetzungen auf  $\mathbb{R}$  die Punkte  $z \in \{0, 1, \infty\}$  festhalten. Definiert man  $\Gamma_i := \{\tilde{f}_i \gamma (\tilde{f}_i)^{-1} :$

---

<sup>11</sup>Siehe [Car]

$\gamma \in \Gamma\}$ , dann ist  $\Gamma_i$  eine Fuchssche Gruppe,  $X_i \cong \mathbb{H}/\Gamma_i$ , und die gegebene Überlagerung stimmt mit der Projektion  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma_i$  überein.

*Beweis:* Wähle zunächst beliebige universellen Überlagerungen  $g_i : \mathbb{H} \rightarrow X_i$ . Betrachte beliebige Liftungen  $\hat{f}_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  von  $f_i : X_* \rightarrow X_i$ , und den Beltramikoeffizienten

$$\mu_{\hat{f}_i} = \frac{\left(\hat{f}_i\right)_{\bar{z}}}{\left(\hat{f}_i\right)_z}.$$

Nun gibt es eine Lösung  $\tilde{f}_i$  der Beltramigleichung

$$\left(\tilde{f}_i\right)_{\bar{z}} = \left(\tilde{f}_i\right)_z \cdot \mu_{\hat{f}_i}$$

auf  $\mathbb{H}$ , deren stetige Erweiterung auf  $\hat{\mathbb{R}}$  die Punkte  $0, 1, \infty$  festhält. Dann unterscheiden sich  $\hat{f}_i$  und  $\tilde{f}_i$  nur durch eine holomorphe Funktion  $c_i$ , d. h. es gilt:

$$\hat{f}_i = \tilde{f}_i \circ c_i$$

mit  $c_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ , und dann ist

$$\mathbb{H} \xrightarrow{c_i} \mathbb{H} \xrightarrow{g_i} X_i$$

ebenfalls eine universelle Überlagerung, mit der Eigenschaft, dass  $\tilde{f}_i$  eine Liftung von  $f_i : X_* \rightarrow X_i$  ist:

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{f}_i & \mathbb{H} \\ & \nearrow & \downarrow c_i \\ \mathbb{H} & \xrightarrow{\hat{f}_i} & \mathbb{H} \\ \downarrow & & \downarrow g_i \\ X_* & \xrightarrow{f_i} & X_i \end{array}$$

Sei nun  $\Gamma_i := \{\tilde{f}_i \circ \gamma \circ (\tilde{f}_i)^{-1} : \gamma \in \Gamma\}$ . Es ist klar, dass  $\Gamma_i$  eine Fuchssche Gruppe ist. Wir zeigen noch, dass außerdem  $X_i = \mathbb{H}/\Gamma_i$  ist. Zu zeigen ist, dass bei der Projektion  $g_i \circ c_i : \mathbb{H} \rightarrow X_i$  genau die Punkte  $z, z'$ , für die es ein  $\gamma_i \in \Gamma_i$  mit  $\gamma_i(z) = z'$  gibt, identifiziert werden, und dies folgt aber aus obigem Diagramm.  $\square$



**Definition 7.7.16** Es sei  $\mu$  ein Beltrami-Differential auf  $\mathbb{H}$  mit  $\|\mu\|_\infty < 1$ . Dann ist durch

$$\tilde{\mu}(z) = \begin{cases} \mu(z) & \text{für } z \in \mathbb{H} \\ 0 & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{H} \end{cases}$$

ein Beltrami-Differential auf  $\mathbb{C}$  gegeben. Es sei  $f_\mu$  die (eindeutige) Lösung der Beltrami-Gleichung  $f_{\bar{z}} = \tilde{\mu} \cdot f_z$ , die die Punkte  $0, 1, \infty$  festlässt.

Ist  $\Gamma$  eine Gruppe, die eigentlich diskontinuierlich und fixpunktfrei auf  $\mathbb{H}$  operiert, und setzen wir  $\gamma_\mu := f_\mu \circ \gamma \circ f_\mu^{-1}$  für  $\gamma \in \Gamma$ , dann ist  $\gamma_\mu$  eine Möbius-Transformation, d. h. ein Element von  $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$  (jeder Automorphismus  $\gamma$  von  $\mathbb{H}$  kann auch als Automorphismus von  $\mathbb{C}$  betrachtet werden). Dadurch erhalten wir eine Untergruppe  $\Gamma_\mu := \{\gamma_\mu | \gamma \in \Gamma\}$  von  $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ , die eigentlich diskontinuierlich und fixpunktfrei auf  $\mathbb{H}_\mu := f_\mu(\mathbb{H})$  operiert (siehe [Im, S. 147]). Hängt  $\mu$  holomorph von einem Parameter  $t$  ab, dann auch  $\tilde{\mu}$  und damit nach Satz 7.7.8 auch  $f_\mu$  und  $\gamma_\mu$ .

**Bemerkung 7.7.17** Es sei  $\mu$  ein Beltrami-Differential auf  $\mathbb{H}$  mit  $\|\mu\|_\infty < 1$  und  $f_\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  wie in der vorhergehenden Definition. Ist  $\mu$   $C^\infty$ -differenzierbar, dann auch  $f_\mu|_{\mathbb{H}}$ .

*Beweis:* In [Nag, S. 37] wird bewiesen: Ist  $D$  ein Gebiet in  $\mathbb{C}$ ,  $g : D \rightarrow g(D)$  ein quasikonformer Homöomorphismus und  $\mu_g := g_{\bar{z}}/g_z$   $C^\infty$ -differenzierbar, dann ist auch  $g$   $C^\infty$ -differenzierbar. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Definition 7.7.18** Es seien  $(f_i, X_i)$ ,  $i = 1, 2$  zwei markierte Riemannsche Flächen und  $\tilde{f}_i$  wie oben. Seien  $\mu_i$  die Beltrami-Koeffizienten von  $\tilde{f}_i$ . Dann sind die  $\mu_i \in M_1(X)$ .

Nun kann man eine Familie von Beltrami-Koeffizienten über dem Einheitsintervall konstruieren. Man wählt dazu

$$\mu_t := t\mu_0 + (1-t)\mu_1 \quad \text{für } t \in [0, 1]$$

Da  $M_1(\Gamma)$  konvex ist, sind dann alle  $\mu_t \in M_1(\Gamma)$ . Außerdem ist  $M_1(\Gamma)$  offen, also gibt es eine Umgebung  $W$  um  $[0, 1]$ , so dass  $\mu_t \in M_1(\Gamma)$  für  $t \in W$  ist.

Es seien  $\tilde{f}_t : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}_t$  mit  $\mathbb{H}_t := \tilde{f}_t(\mathbb{H})$  die Lösungen der Beltrami-Gleichung zu  $\mu_t$  gemäß Definition 7.7.16.

Betrachte die Fuchsschen Gruppen  $\Gamma_t = \{\tilde{f}_t \circ \gamma \circ (\tilde{f}_t)^{-1} : \gamma \in \Gamma\}$  und definiere  $X_t := \mathbb{H}_t/\Gamma_t$ . Dann gibt es einen Diffeomorphismus  $f_t : X_* \rightarrow X_t$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{H} & \xrightarrow{\tilde{f}_t} & \mathbb{H} \\
\downarrow & & \downarrow \\
X_* & \xrightarrow{f_t} & X_t
\end{array}$$

kommutiert. Sowohl  $f_t$  als auch  $\Gamma_t$  hängen nach Satz 7.7.8 holomorph von  $t$  ab.

**Bemerkung 7.7.19** Die Familie  $X_t := \mathbb{H}_t/\Gamma_t$ ,  $t \in W$  kann mit einer komplexen Struktur versehen werden und wird so zu einer komplexen Mannigfaltigkeit, die wir mit  $\mathfrak{X}$  bezeichnen. Damit ist  $\mathfrak{X}$  eine Familie von Riemannschen Flächen über  $W$

*Beweis:*

Die Familie  $\mathbb{H}_t$ ,  $t \in W$  lässt sich mit einer komplexen Struktur versehen. Diese ist das Bild der Struktur von  $\mathbb{H} \times W$  unter der Abbildung  $F : (z, t) \mapsto F(z, t) := (f_t(z), t)$ . Damit erhält man eine komplexe Mannigfaltigkeit  $\mathcal{H}$  über  $W$ .

Auf  $\mathcal{H}$  wirkt nun die Gruppe  $\Gamma^*$ , die durch die Abbildungen  $\gamma^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $(z, t) \mapsto \gamma^*(z, t) := (\tilde{f}_t \circ \gamma \circ \tilde{f}_t^{-1}(z), t)$ , mit  $\gamma \in \Gamma$  beliebig, gegeben ist.

Wir zeigen, dass  $\Gamma^*$  eigentlich diskontinuierlich und fixpunktfrei ist:

1. Da die nichttrivialen  $\gamma_t$  keine Fixpunkte haben, haben auch die nichttrivialen  $\bar{\gamma}$  keine Fixpunkte.
2. Es sei  $z \in \mathbb{H}$  beliebig und  $U \subset \mathbb{H}$  eine Umgebung von  $z$ , die nur von endlich vielen Translaten von  $\Gamma$  getroffen wird. Es sei  $U^*$  das Bild von  $U \times W$  unter der Abbildung  $F : \mathbb{H} \times W \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$ . Dann wird auch  $U^*$  nur von endlich vielen Translaten von  $\Gamma^*$  getroffen.

Daher ist  $\mathfrak{X} := \mathcal{H}/\Gamma^*$  nach Satz 7.7.11 eine komplexe Mannigfaltigkeit. Es ist klar, dass die Fasern  $X_t$  von  $\mathfrak{X}$  isomorph zu  $\mathbb{H}_t/\Gamma_t$  sind. □

Im folgenden sei  $\mathcal{T}$  je nach gewähltem Äquivalenztyp einer der Räume  $\mathcal{T}_{\text{Tei}}$ ,  $\mathcal{T}_{\text{Tor}}$  oder  $\mathcal{T}_{n\text{-J}}$ .

**Satz 7.7.20** Die Familie  $\mathfrak{X} \rightarrow W$  ist eine Familie von markierten Riemannschen Flächen. Die Markierungen sind durch  $f_t : X_* \rightarrow X_t$  gegeben. Betrachte nun die Abbildung  $\alpha : W \rightarrow \mathcal{T}$ , bei dem jedem  $t$  der Punkt in  $\mathcal{T}$  zugeordnet wird, der  $X_t$  entspricht.

Dann ist diese Abbildung holomorph.

*Beweis:* Es reicht die Aussage lokal zu beweisen. Sei also  $t_0 \in W$  beliebig und  $\pi : \mathfrak{Y} \rightarrow S$  eine universelle Deformation von  $X_{t_0}$ . Betrachte  $S$  kanonisch als Teilmenge von  $\mathcal{T}$ . Dann gibt es, da  $\pi$  universell und damit vollständig ist, eine Umgebung  $B$  um  $t_0$  und eine holomorphe Abbildung  $h : B \rightarrow S$ , so dass die Familie  $\mathfrak{X} \times_W B$  der Rückzug von  $\pi$  mittels  $h$  ist, insbesondere ist jedes  $X_t, t \in B$  äquivalent zu  $Y_{h(t)}$ . Daher ist aber  $\alpha$  mit  $h$  identisch, also ist  $\alpha$  in einer Umgebung von  $t_0$  und damit insgesamt holomorph.

**Satz 7.7.21**  $\mathcal{T}$  ist zusammenhängend.

*Beweis:*

Seien  $t_0, t_1$  zwei Punkte in  $\mathcal{T}$ , dann entsprechen  $t_j$  zwei markierten Riemannschen Flächen  $(f_j, X_j)$ . Konstruiert man eine holomorphe Familie wie oben, dann hat man eine holomorphe Abbildung  $\alpha : W \rightarrow \mathcal{T}$  mit  $\alpha(j) = t_j, j \in \{0, 1\}$ . Insbesondere ist  $\alpha([0, 1])$  ein Weg von  $t_0$  nach  $t_1$ . Also ist  $\mathcal{T}$  zusammenhängend.

**Bemerkung 7.7.22** Da punktierte Tori isomorph zu  $\mathbb{C}/\Gamma$  sind, wobei  $\Gamma$  ein Gitter ist, kann man für punktierte Tori den Zusammenhang des Teichmüllerraumes analog zeigen.

### 7.7.3 Zusammenhang von $\mathcal{Z}$

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass  $\mathcal{Z}$  ein zusammenhängender topologischer Raum ist. Damit ist  $\mathcal{Z}$  eine komplexe Mannigfaltigkeit.

**Lemma 7.7.23** Es seien  $X, Y$  topologische Räume.  $f : Y \rightarrow X$  sei stetig und surjektiv.  $X$  sei zusammenhängend. Außerdem gebe es für jedes  $x \in X$  eine Umgebung  $U_x$ , so dass  $f^{-1}(U_x)$  zusammenhängend ist. Dann ist auch  $Y$  zusammenhängend.

*Beweis:*

Wir nehmen an,  $Y$  sei nicht zusammenhängend. Dann gibt es offene und abgeschlossene Mengen  $A, B$  mit  $Y = A \dot{\cup} B$ .

1. Für  $x \in X$  sei  $U_x$  eine Umgebung, so dass  $f^{-1}(U_x)$  zusammenhängend ist. Dann gilt:  $f^{-1}(U_x) = (f^{-1}(U_x) \cap A) \dot{\cup} (f^{-1}(U_x) \cap B)$ . Da sowohl  $f^{-1}(U_x) \cap A$  als auch  $f^{-1}(U_x) \cap B$  offen und abgeschlossen bezüglich der Relativtopologie von  $f^{-1}(U_x)$  sind, und  $f^{-1}(U_x)$  zusammenhängend ist, ist entweder  $f^{-1}(U_x) \cap A = \emptyset$  oder  $f^{-1}(U_x) \cap B = \emptyset$ . Im ersten Fall gilt  $U_x \cap f(A) = \emptyset$ , also  $U_x \subset f(B)$ , im zweiten Fall folgt  $U_x \subset f(A)$ .

Daraus folgt, dass  $f(A), f(B)$  offen sind, denn für  $x \in f(A)$  kann man eine Umgebung  $U_x$  wie oben wählen. Dann ist  $U_x \cap f(A) \neq \emptyset$ , also ist  $U_x \subset f(A)$ , und damit ist  $U_x$  eine geeignete Umgebung, analog für  $x \in f(B)$ .

2. Es ist  $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ , denn sei  $x \in f(A)$ , und wählt man  $U_x$  wie oben, dann ist  $U_x \cap f(B) = \emptyset$ , also insbesondere  $x \notin f(B)$ . Also ist  $X = f(A) \dot{\cup} f(B)$ .
3.  $f(A), f(B)$  sind als Komplemente offener Mengen auch abgeschlossen. Insgesamt hat man also eine nichttriviale Zerlegung von  $X$  in zwei offene und abgeschlossene Mengen im Widerspruch dazu, dass  $X$  zusammenhängend ist.

Also muss  $Y$  auch zusammenhängend sein. □

Nun können wir den Hauptsatz dieses Abschnittes formulieren und beweisen:

**Satz 7.7.24** *Die konstruierte komplexe Mannigfaltigkeit  $\mathcal{Z}$  ist zusammenhängend.*

*Beweis:* Die Abbildung  $\omega : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{T}$  erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 7.7.23, denn  $\mathcal{T}$  ist zusammenhängend,  $\omega$  ist stetig und surjektiv. Die einzelnen Fasern  $\{X_t := \omega^{-1}(t), t \in \mathcal{T}\}$  sind zusammenhängend, und für jedes  $t \in \mathcal{T}$  gibt es eine Umgebung  $V \ni t$ , so dass  $\omega^{-1}(V)$  homöomorph zu  $V \times X_t$  und damit insbesondere zusammenhängend ist. □

## 7.8 $\mathcal{Z}$ als feiner Modulraum

**Satz 7.8.1** *Die komplexe Mannigfaltigkeit  $\mathcal{Z}$  zusammen mit der holomorphen Abbildung  $\omega : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{T}$  ist ein feiner Modulraum für den Funktor der*

markierten Riemannschen Flächen vom Geschlecht  $g \geq 2$  bzw. der markierten Tori mit ausgezeichnetem Punkt.

*Beweis:* Es sei  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow S$  eine Familie von markierten Riemannschen Flächen vom Geschlecht  $g \geq 2$  (bzw. von markierten punktierten Tori). Wir müssen zeigen, dass es einen eindeutigen Morphismus  $h : S \rightarrow \mathcal{T}$  gibt, so dass  $\mathfrak{X} \rightarrow S$  isomorph zum Rückzug von  $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{T}$  mittels  $h$  ist.

1. *Konstruktion von  $h$ :*

Wir konstruieren zunächst einen lokalen Morphismus von  $S$  nach  $\mathcal{T}$ . Dazu sei  $s_0 \in S$  beliebig. Sei  $X := \omega^{-1}\{s_0\}$ , dann ist  $X$  eine Riemannsche Fläche mit Markierung, und  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow S$  ist eine Deformation von  $X$ . Außerdem sei  $t_0$  der Punkt in  $\mathcal{T}$ , dessen Faser äquivalent zu  $X$  ist. Da  $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{T}$  durch Verklebung von universellen Deformationen entstanden ist, gibt es eine Umgebung  $T'$  von  $t$ , so dass die Deformation  $\omega$  über  $T'$  universell ist. Dann gibt es eine Umgebung  $S'$  von  $s$  und einen (eindeutigen) Morphismus  $h : S' \rightarrow T'$ , so dass  $\pi$  zum Rückzug von  $\omega$  mittels  $h$  isomorph ist.

Nach Satz 5.3.6 sind die Fasern von  $s \in S'$  und  $h(s) \in T'$  äquivalent. Konstruiert man zu zwei verschiedenen Punkten  $s_i, i = 1, 2$  Morphismen  $h_i : S_i \rightarrow T_i, i = 1, 2$ , dann stimmen diese auf dem Durchschnitt  $S_1 \cap S_2$  überein, denn die Fasern in  $\mathcal{T}$  sind alle verschieden bezüglich der gewählten Äquivalenz.

Mann kann also auf  $S$  global einen Morphismus  $h : S \rightarrow \mathcal{T}$  mit der Eigenschaft  $h(s) := \{t \in \mathcal{T} | \mathfrak{X}_s \sim \mathcal{Z}_t\}$  definieren.

2. *Behauptung:* Dann ist  $\mathfrak{X}$  isomorph zu  $\mathcal{Z} \times_{\mathcal{T}} S$ .

*Beweis:* Wählt man  $s_i \in S$  beliebig, dann gibt es eine Umgebung  $S_i$ , so dass  $\pi^{-1}(S_i)$  isomorph zum Rückzug von  $\omega : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{T}$  mittels  $h$  ist. Für verschiedene  $S_i, S_j$  stimmen dann die Isomorphismen auf dem Durchschnitt  $\pi^{-1}(S_i) \cap \pi^{-1}(S_j)$  überein, so dass man insgesamt einen globalen Isomorphismus von  $\mathfrak{X}$  nach  $\mathcal{Z} \times_{\mathcal{T}} S$  erhält.  $\square$

3. Die Eindeutigkeit von  $h$  ist klar, denn jeder Morphismus mit der gesuchten Eigenschaft muss die Punkte aus  $S$  auf die Punkte aus  $\mathcal{T}$  abbilden, deren Fasern zu den Fasern der Bildpunkte äquivalent sind. Daher ist  $h$  der einzig mögliche Morphismus.

$\square$

## 7.9 Konstruktion eines groben Modulraumes für den Funktor der Riemannschen Flächen

**Definition 7.9.1** Es sei  $X_*$  eine Riemannsche Fläche und  $\mathcal{T}_{\text{Tei}}$  der Teichmüllerraum der (Teichmüller-)markierten Riemannschen Flächen mit Bezugsfläche  $X_*$ .

Dann hat man auf  $X_*$  die Gruppe  $\text{Mod}(X_*)$  der Diffeomorphismen modulo Homotopie. Diese Gruppe operiert auf  $\mathcal{T}_{\text{Tei}}$  folgendermaßen:

Sei ein Punkt in  $\mathcal{T}_{\text{Tei}}$  gegeben, der durch die markierte Fläche  $(f, X)$  repräsentiert wird, und  $g \in \text{Mod}(X_*)$  beliebig. Dann wird  $(f, X) \in \mathcal{T}_{\text{Tei}}$  auf  $(f \circ g, X) \in \mathcal{T}_{\text{Tei}}$  abgebildet.

**Bemerkung 7.9.2** Die Gruppe  $\text{Mod}(X_*)$  operiert auf  $\mathcal{T}_{\text{Tei}}$  eigentlich diskontinuierlich.

*Beweis:* Siehe [Nag, S. 154]

**Bemerkung 7.9.3** Nach Satz 7.7.12 (Satz von Cartan) ist dann  $\mathcal{M} := \mathcal{T}_{\text{Tei}}/\text{Mod}(X_*)$  ein normaler komplexer Raum.  $\mathcal{M}$  ist der grobe Modulraum für den Funktor  $\mathbf{R}$  der Riemannschen Flächen.

*Beweisskizze:*

Ein vollständiger Beweis findet sich bei [May, S. 236]. Zur Bequemlichkeit des Lesers sei der Beweis hier kurz skizziert.

### 1. Konstruktion der natürlichen Transformation:

Hat man eine Familie  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow S$  gegeben, und wählt man  $s_0 \in S$  beliebig, so gibt es eine Umgebung  $S'$  um  $s_0$ , so dass man auf  $\mathfrak{X} \times_S S'$  eine Markierung anbringen kann. Dann hat man einen Homomorphismus  $\hat{h} : S' \rightarrow \mathcal{T}_{\text{Tei}}$ , der jedes  $s$  auf den Punkt in  $\mathcal{T}_{\text{Tei}}$  abbildet, der die Äquivalenzklasse von  $X_s$  repräsentiert, und erhält durch Projektion auf  $\mathcal{M}$  eine Abbildung  $h^* : S' \rightarrow \mathcal{M}$ , so dass jedes  $s \in S'$  auf den Punkt in  $\mathcal{M}$  abgebildet wird, der die Isomorphieklasse von  $X_s$  repräsentiert. Durch Zusammenkleben der Homomorphismen erhält man dann einen Homomorphismus  $h : S \rightarrow \mathcal{M}$ . Insgesamt erhält man also eine natürliche Transformation  $\Omega : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Hom}(\cdot, \mathcal{M})$ .

Es folgt leicht, dass für einen einpunktigen komplexen Raum  $p$  die Abbildung  $\mathbf{R}(p) \rightarrow \text{Hom}(p, \mathcal{M})$  bijektiv ist.

2. Es gibt keinen feineren Modulraum:

Es sei  $\mathcal{N}$  ein komplexer Raum und  $\Omega' : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Hom}(\cdot, \mathcal{N})$  ebenfalls ein funktorieller Homomorphismus. Wir konstruieren einen Morphismus  $\omega : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  wie folgt:

Wir fassen  $\mathcal{Z}_{\text{Tei}} \rightarrow \mathcal{T}_{\text{Tei}}$  als Familie von Riemannschen Flächen auf. Dann hat man  $\varphi := \Omega'(\mathcal{T}_{\text{Tei}})(\mathcal{Z}_{\text{Tei}} \rightarrow \mathcal{T}_{\text{Tei}})$ . Es ist  $\varphi \in \text{Hom}(\mathcal{T}_{\text{Tei}}, \mathcal{N})$ , und es ist nur noch zu zeigen, dass  $\varphi$  über  $\mathcal{M}$  faktorisiert, dann erhält man einen Morphismus  $\omega : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ . Zu zeigen ist noch, dass gilt  $\Omega' = \mathbf{Hom}(\omega) \circ \Omega$  (siehe [May]).  $\square$

Die Konstruktion geht analog mit  $\mathcal{T}_{\text{Tor}}$  und  $\mathcal{T}_{n\text{-J}}$ . Bei  $\mathcal{T}_{n\text{-J}}$  hat man den Vorteil, dass die Gruppe der Diffeomorphismen modulo Homologie endlich und damit automatisch eigentlich diskontinuierlich ist.

## 7.10 Lokales Modell für den groben Modulraum

Hat man eine universelle Deformation  $\mathfrak{X} \rightarrow S$  einer Riemannschen Fläche  $X_0$  gegeben, dann lässt sich auch direkt ein lokales Modell für den groben Modulraum konstruieren:

Zunächst wählen wir  $S$  so klein, dass der darstellende Raum  $I$  des Funktors  $\mathbf{Isom}_{S \times S}(\mathfrak{X} \times S, S \times \mathfrak{X})$  in offene Teilmengen  $I_j$  zerlegt werden kann, die mit der zentralen Faser jeweils einen Punkt gemeinsam haben und biholomorph zu den Bildern  $p(I_j)$  sind (die kanonische Abbildung  $I \rightarrow S \times S$  sei wieder mit  $p$  bezeichnet). Ist  $\alpha$  ein Automorphismus der zentralen Faser, dann erhält man gemäß Definition 6.4.1 einen Isomorphismus  $\varphi$  von  $S' \subset S$  auf einen anderen Teilraum  $S'' \subset S$ . Sind  $\alpha_j, j = 1, \dots, n$  alle Automorphismen von  $X_0$ , dann bekommt man eine Menge von Abbildungen  $G = \{\varphi_i : S'_i \rightarrow S''_i, i = 1, \dots, n\}$ , und nach Bemerkung 6.4.3 kann man ohne Einschränkung annehmen, dass  $S$  invariant unter allen Elementen von  $G$  ist.

Weiter wählen wir  $S^*$  so, dass für alle  $x \in p^{-1}(S^* \times S^*)$  eine Zusammenhangskomponente in  $I$  existiert, die  $x$  mit der zentralen Faser verbindet. Auch  $S^*$  sei invariant unter den Abbildungen von  $G$ .

**Bemerkung 7.10.1** Für alle  $(s, t) \in S^* \times S^*$  mit  $X_s \cong X_t$  gibt es ein Gruppenelement  $\varphi_j$  mit  $\varphi_j(s) = t$ .

*Beweis:* Die Aussage folgt aus Satz 6.4.5: Hat man  $\beta : X_s \xrightarrow{\sim} X_t$ , und ist  $x \in I$  der zu  $\beta$  gehörige Punkt, d. h.  $p(x) = (s, t)$ , und  $x_j$  der Punkt der

zentralen Faser, der in derselben Komponente von  $I$  liegt wie  $x$ , und ist weiter  $\varphi_j$  der von  $x_j$  erzeugte Isomorphismus auf  $S^*$ , dann ist  $\varphi_j(s) = t$ .  $\square$

**Folgerung 7.10.2** Somit sind in  $S^*/G$  keine Fasern isomorph zueinander.  $S^*/G$  ist nach dem Satz von Cartan ein komplexer Raum und damit ein lokales Modell für den groben Modulraum.



## Literatur

- [Akh] Dimitri N. Akhiezer. Lie Group Actions in Complex Analysis. Aspects of Mathematics **E 27**. Vieweg-Verlag. Braunschweig Wiesbaden 1995
- [Am] Herbert Amann. Gewöhnliche Differentialgleichungen. Walter de Gruyter & Co. Berlin 1983
- [Brö] Theodor Bröcker, Klaus Jänich. Einführung in die Differentialtopologie. Springer-Verlag. Berlin 1990
- [Car] Henri Cartan. Quotient d'un espace analytique par un group d'automorphismes. Algebraic geometry and algebraic topology, 90–102. Princeton University Press. Princeton New Jersey 1957
- [Cod] Earl A. Coddington. Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill Book Company. New York Toronto London 1955
- [Dou] A. Douady. Obstruction primaire à la déformation. Séminaire H. Cartan 13e année 1960/61. Familles d'espace complexe et fondements de la géométrie analytique. Fascicule 1, 2e édition. Exposé 4. Paris: Secretariat mathématique 1962
- [Du] Andrei Duma. Der Teichmüller-Raum der Riemannschen Flächen vom Geschlecht  $g \geq 2$ . Dissertation an der Fakultät für Mathematik der Ludwig-Maximilians-Universität. München 1971
- [Ear] C. J. Earle. The Teichmüller distance is differentiable. Duke Math. J. **44** (1977), 389–397
- [Eng] Michael Engber. Teichmüller Spaces and Representability of Functors. Trans. AMS **201** (1975), 213–226
- [FK] H. Farkas und I. Kra. Riemann Surfaces. Springer-Verlag. Berlin New York 1980
- [FiT] A. E. Fischer, A. J. Tromba. A new proof that Teichmüller space is a cell. Trans. Amer. Math. Soc. **303** (1987), no. 1, 257–262
- [Fle] Hubert Flenner. Ein Kriterium für die Offenheit der Versalität. Mathematische Zeitschrift **178** (1981), 449–473

- [Fo] Otto Forster. Lectures on Riemann Surfaces. Springer-Verlag. New York 1981
- [FoK] Otto Forster, Knut Knorr. Ein neuer Beweis des Satzes von Kodaira-Nirenberg-Spencer. *Mathematische Zeitschrift* **139** (1974), 257–291
- [Ga1] Frederick P. Gardiner. Teichmüller Theory and Quadratic Differentials. John Wiley & Sons. New York 1987
- [Ga2] Frederick. P. Gardiner. On the variation of Teichmüller's metric. *Proc. R. Soc. Edinburgh* **A 85** (1980), 143–152
- [Gin] S. G. Gindikin, G. M. Khenkin (Hsg.). Several Complex Variables IV. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences Volume 10*. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg 1990
- [Gu] Robert C. Gunning. Vorlesungen über Riemannsche Flächen. B. I.-Wissenschaftsverlag. Mannheim 1972  
Originalausgabe: Lectures on Riemann Surfaces. Princeton University Press 1966
- [GR1] H. Grauert, R. Remmert. Theorie der Steinschen Räume. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* **227**. Springer-Verlag. Berlin 1977
- [GR2] H. Grauert, R. Remmert. Coherent Analytic Sheaves. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* **265**. Springer-Verlag. Berlin 1984
- [GR3] H. Grauert, R. Remmert. Analytische Stellenalgebren. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* **176**. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York 1971
- [Gr] Phillip Griffiths. Joseph Harris. Principles of Algebraic Geometry. John Wiley & Sons. New York 1978
- [Gro] Alexandre Grothendieck. Technique de construction en géométrie analytique. *Sem. Cartan* **7–17** (1960/61)
- [Har] Joe Harris. Algebraic Geometry. A First Course. Springer-Verlag. New York 1992

- [HaM] Joe Harris, Ian Morrison. *Moduli of Curves*. Springer-Verlag. New York 1998
- [Hat] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag. New York 1977
- [HC] A. Hurwitz, R. Courant. *Funktionentheorie. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* **3**. Springer-Verlag. Berlin 1922
- [Im] Y. Iwayoshi, M. Taniguchi. *An Introduction to Teichmüller Spaces*. Springer-Verlag. Tokyo 1992
- [Jo] Jürgen Jost. *Compact Riemann Surfaces*. Springer-Verlag. Heidelberg Berlin 1997
- [Kan] L. W. Kantorowitsch, G. P. Akilow. *Funktionalanalysis in normierten Räumen*. Akademie-Verlag. Berlin 1964
- [Ko] Kunihiko Kodaira. *Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures*. Springer-Verlag. New York 1986
- [KS1] K. Kodaira, L. Nirenberg, D. Spencer. On the existence of deformations of complex analytic structures. *Ann. of Math. II. Ser.* **68** (1958), 450–459
- [KS2] K. Kodaira, D. C. Spencer. A theorem of completeness for complex analytic fibre spaces. *Acta Math.* **100** (1958), 281–294
- [Kru] S. Krushkal. Extremal quasiconformal mappings. *Sib. Math. J.* **10** (1969), 411–418
- [Leh] O. Lehto, K. I. Virtanen. *Quasiconformal mappings in the plane*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **126**. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York 1973
- [May] Jan Mayer. Morphisms between the moduli spaces of curves with generalized Teichmüller structure. *Manuscripta Mathematica* **107** (2002), no. 2, 229–249. Springer-Verlag. Berlin
- [Mir] Rick Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. Graduate Studies in Mathematics. Volume **5**. American Mathematical Society. Rhode Island 1995

- [Nag] Subashi Nag. The Complex Analytic Theory of Teichmüller Spaces. John Wiley & Sons. New York 1988
- [Nas] John Nash.  $C^1$ -isometric imbeddings. *Annals of Mathematics* **60** (1954), 383–396
- [New] P. E. Newstead. Lectures on Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces. Tata Institute of Fundamental Research. Bombay 1978
- [No] Max Noether. Anzahl der Modulen einer Classe algebraischer Flächen, Sitz. Königlich. Preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin, erster Halbband, **188**
- [Pa] V. P. Palamodov. Moduli in Versal Deformations for Complex Spaces. Variétés analytiques Compactes. Colloque, Nice, 19-23 Septembre 1977. LNM **683**, 74–115. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York 1978
- [Rie] Bernhard Riemann. Theorie der Abel'schen Functionen. Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik **54** (1857)
- [Schl] Martin Schlichenmaier. An Introduction to Riemann Surfaces, Algebraic Curves and Moduli Spaces. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg 1989
- [Schu] H. W. Schuster. Zur Theorie der Deformationen kompakter komplexer Räume. *Inventiones Mathematicae* **9**, 284–294. Springer-Verlag. Berlin 1969/1970
- [SV] H.-W. Schuster, A. Vogt. The Moduli of Quotients of a Compact Space. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **364** (1986), 51 – 59
- [Te1] Oswald Teichmüller. Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale. *Preuß. Akad. math. Wiss., nat. Kl.* **22** (1939), 1–197
- [Te2] Oswald Teichmüller. Bestimmung der extremalen quasikonformen Abbildungen bei geschlossenen Riemannschen Flächen. *Preuß. Akad. math. Wiss., nat. Kl.* **4** (1942), 1–42

- [Te3] Oswald Teichmüller. Veränderliche Riemannsche Flächen. *Deutsche Math.* **7** (1944), 344– 359
- [tDi] Tammo tom Dieck. *Topologie*. Walter de Gruyter. Berlin New York 1991
- [Tro] Anthony J. Tromba. *Teichmüller theory in Riemannian geometry. Lectures in Mathematics ETH Zürich*. Birkhäuser Verlag. Basel 1992

## Symbolverzeichnis

$\hat{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$
$\hat{\mathbb{C}}$	Riemannsche Zahlenkugel
$\mathbb{H}$	obere Halbebene
$f_z$	$\partial f / \partial z$
$f_{\bar{z}}$	$\partial f / \partial \bar{z}$
$X \Subset Y$	$X$ ist relativ kompakt in $Y$
$\pi_*(\mathcal{S})$	direkte Bildgarbe einer Garbe $\mathcal{S}$ unter der Abbildung $\pi$
$\pi^*(\mathcal{S})$	Urbildgarbe von $\mathcal{S}$ unter der Abbildung $\pi$
$\pi^*f$	induzierte Abbildung, $f \circ \pi$
$R^q\pi_*(\mathcal{S})$	$q$ -te direkte Bildgarbe der Garbe $\mathcal{S}$ unter der Abbildung $\pi$
$\text{Ext}(\gamma)$	das Äußere einer Jordankurve $\gamma$
$\text{Int}(\gamma)$	das Innere einer Jordankurve $\gamma$
$\bar{\partial}$	Dolbeault-Ableitung
$\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$	$\mathfrak{V}$ ist eine Verfeinerung von $\mathfrak{U}$
$\Omega$	die Garbe der holomorphen 1-Formen
$K$	das kanonische Bündel
$\Theta$	die Garbe der holomorphen Schnitte des Tangentialbündels
$\overset{\text{Tei}}{\sim}$	Teichmüller-Äquivalenz
$\overset{\text{Tor}}{\sim}$	Torelli-Äquivalenz
$\overset{n\text{-J}}{\sim}$	$n$ -Jacobi-Äquivalenz
$\mathcal{T}_{\text{Tei}}(X_*)$	Teichmüllerraum mit Referenzfläche $X_*$
$\mathcal{T}_{\text{Tor}}(X_*)$	Torelliraum
$\mathcal{T}_{n\text{-J}}(X_*)$	$n$ -Jacobi-Raum ( $n \geq 3$ )
$\mathcal{Z}_{\text{Tei}}$	Totalraum über dem Teichmüllerraum
$\mathcal{Z}_{\text{Tor}}$	Totalraum über dem Torelli-Raum
$\mathcal{Z}_{n\text{-J}}$	Totalraum über dem $n$ -Jacobi-Raum
$Q(X)$	Vektorraum der holomorphen quadratischen Differentiale auf der Riemannschen Fläche $X$
$M(X)$	Banachraum der Beltramidifferentiale auf $X$
$M_1(X)$	Raum der Beltramidifferentiale mit Norm $< 1$

## **Lebenslauf**

### **Persönliche Daten**

Martin Härting, geboren am 27. Juli 1971 in Fürstenfeldbruck

### **Schulbildung**

**1977 – 1981** Grundschule Kaufering

**1981 – 1990** Dominikus-Zimmermann-Gymnasium Landsberg a. Lech, Abschluss mit allgemeiner Hochschulreife

### **Zivildienst**

**Juli 1990 – Juli 1991** in der Erzabtei St. Ottilien

### **Hochschulbildung**

**WS 1991** Studium der Mathematik an der TU München

**SS 1992 – WS 1997** Studium der Mathematik an der LMU München, Abschluss mit dem 1. Staatsexamen in Mathematik/Physik für das Lehramt an Gymnasien (Herbst 1996) und dem Diplom in Mathematik (November 1997)

### **Referendariat**

**Februar 1998 bis Februar 2000** Referendariat am Hardenberg-Gymnasium Fürth, Abschluss mit dem 2. Staatsexamen in Mathematik/Physik für das Lehramt an Gymnasien (Februar 2000)

### **Berufstätigkeit**

**2000 - 2002** Studienrat z. A. am Pestalozzi-Gymnasium, München

**2002 - 2005** wissenschaftlicher Mitarbeiter von Prof. Dr. Dr. R. Fritsch am Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik, LMU München

**ab 2005** Studienrat am Pestalozzi-Gymnasium, München