
Höchstauflösende Abbildung in der Röntgen-Astronomie

Christoph Braig



München 2005

Höchstauflösende Abbildung in der Röntgen-Astronomie

Christoph Braig

Dissertation
an der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Christoph Braig
aus Kösching

Garching, den 24. August 2005

Erstgutachter: Prof. Dr. Joachim Trümper

Zweitgutachter: Prof. Dr. Ralf Bender

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Januar 2006

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	xiii
1 Einführung	1
2 Grundlagen der Röntgenoptik	5
2.1 Strahlungs-Materie-Wechselwirkung	5
2.2 Das paraxiale Beugungsintegral	12
3 Refraktive und diffraktive Linsen	19
3.1 Eigenschaften der refraktiven Röntgenlinse	19
3.2 Die verallgemeinerte Fresnel-Linse	32
3.3 Die Zonenplatte in verschiedenen Ausführungen	41
4 Korrektur der Dispersion	51
4.1 Die achromatische Hybridlinse	51
4.2 Reduktion der refraktiven Profilkomponente	73
4.3 Dialytische Konfigurationen	84
5 Wege zur praktischen Umsetzung	97
5.1 Prinzipien und Konstruktion paralleler Systeme	99
5.1.1 Grundlagen transmissiver Linsenarrays	99
5.1.2 Röntgenobjektive auf Wasserstoff- und Heliumbasis	105
5.1.3 Entwicklung exemplarischer Modellsysteme	111
5.2 Die segmentierte Apertur	113
5.3 Diffraktiv-segmentierte Monoband-Objektive	131
5.4 Hybrid-segmentierte Monoband-Objektive	141
5.5 Entwicklung diverser Multiband-Objektive	152
5.6 Konstruktion dialytischer Teleskope	176
6 Detektion und Formationsflug	183
6.1 Detektoren und Nachweisempfindlichkeit	183
6.2 Bemerkungen zum Formationsflug	197

7 Anwendungen in der Astronomie	203
7.1 Mikro-Gravitationslinsen	207
7.2 Stellare Koronae	211
7.3 Supernovae und SNR	217
7.4 Röntgendifoppelsterne, AGN und GRB	221
8 Erste experimentelle Schritte	227
8.1 Diffraktive und refraktive Miniaturlinsen	228
8.2 Segmentierung im visuellen Spektralbereich	229
8.3 Aspekte der numerischen Simulation	232
8.4 Permeation bei tiefen Temperaturen	232
A Geometrische Aberrationstheorie	235
Danksagung	245

Abbildungsverzeichnis

2.1	Weg- und Winkeltoleranzen reflektiver und transmissiver Optik	6
2.2	Verlauf der kritischen Zonenzahl N_0 mit der Kernladung Z	9
2.3	Reflexion und Brechung von Röntgenstrahlen an einer Grenzfläche	11
2.4	Einfluss der Absorption auf den Brechungswinkel	12
2.5	Reflektivität und Polarisationsdrehung an Materialoberflächen	13
2.6	Beugung an der kreisförmigen Apertur	15
2.7	PSF der Beugung an der abgedeckten Apertur	16
2.8	Leistungsintegral der PSF	17
3.1	Varianten konkaver Linsenprofile	21
3.2	PSF und MTF massiver Linsen	22
3.3	Laterale Auflösung der massiven Linse	23
3.4	Peakeffizienz und axiale Intensitätsverteilung von Röntgenlinsen	27
3.5	Seidel-Aberrationen des parabolischen Linsenprofils	29
3.6	Öffnungsverhältnisse und max. Brennweiten refraktiver Li- und Be-Linsen .	31
3.7	Lichtstärke der refraktiven Linse	32
3.8	Transmission generalisierter Fresnel-Linsen	34
3.9	Energiespektrum der allgemeinen Fresnel-Linse	36
3.10	Übergang vom Gauss'schen zum diffraktiven Fokus	38
3.11	Winkelauflösung der generalisierten FL für $\frac{\Delta E}{E} \sim N^{-1}$	39
3.12	Transmissionsprofile verschiedener diffraktiver Linsen	42
3.13	Effizienz mehrstufiger Zonenplatten	43
3.14	Effizienz verschiedener diffraktiver Linsen	46
3.15	Einsatz von Fresnel-Linsen in höheren Beugungsordnungen	47
3.16	Seidel-Aberrationen der Zonenplatte	49
3.17	Leistungsvermögen der diffraktiven Linse	50
4.1	Fokale Dispersion des Hybrid-Achromaten	53
4.2	Dispersionskorrektur mit diffraktiv-refraktiven Linsenkombinationen . . .	54
4.3	Bandpass des absorptionsfreien Hybrid-Achromaten	56
4.4	Absorptionsbehaftete Peakeffizienz des Hybrid-Achromaten	57
4.5	Transferfunktion des absorbierenden Achromaten	59
4.6	Apodisierung des Transmissionsprofils mittels Graufiltern	60

4.7	Eignung diverser Elemente zur Fertigung refraktiver Korrekturlinsen	61
4.8	Eignung mehrelementiger Stoffe zur Fertigung refraktiver Korrekturlinsen . .	62
4.9	Verstärkungsfaktor von Hybrid-Achromaten	63
4.10	Nutzbarkeit von Feststoff-Hybrid-Achromaten	65
4.11	Fokussierung mittels Fresnel-Achromaten in höheren Ordnungen	66
4.12	Seidel-Aberrationen des parabolischen Hybrid-Profils	68
4.13	Strahlengang im aplanatischen Hybridprofil	70
4.14	Seidel-Aberrationen des aplanatischen Hybridprofils	72
4.15	Lichtstärke von Hybridlinsen	73
4.16	Bandpass reduzierter Hybrid-Achromaten	78
4.17	Lokale Dispersion des reduzierten Hybrid-Profils	79
4.18	Kammstruktur bei ein- und mehrfacher Reduktion	81
4.19	Zunahme der Lichtstärke durch Profilreduktion	82
4.20	Abmessungen eines dialytischen Dubletts	85
4.21	Längenskalen dialytischer Konfigurationen	89
4.22	Fokale Position und -Singularität des Dialyten	90
4.23	PSF-Radius und Dispersion des Dialyten in 2. und 3. Ordnung	91
4.24	Spektrale Bandbreite des Dialyten	93
4.25	Der Fresnel-Dialyt in höheren Beugungsordnungen	94
5.1	Sammelfläche der Röntgenteleskope Chandra und XMM-Newton	98
5.2	Implementierungen rein diffraktiver Teleskopoptik	100
5.3	Akzeptanzwinkel und Sichtfeld der Parallelkonfiguration	101
5.4	Fokale Dispersion des verstimmten Achromaten	103
5.5	Zur Wirkung der Streustrahlung in großflächigen Detektor-Arrays	104
5.6	Achromatischer Verstärkungsfaktor für H ₂ und He	106
5.7	Isothermen von H ₂ und He im (Van der Waals)-Regime	107
5.8	Untere Schranken an das Öffnungsverhältnis H ₂ – und He–basierter Linsen	108
5.9	Dispersionskorrektur mittels durchstimmbarer Gaslinsen	110
5.10	Beispiele kompakter Hybridlinsen fixer Brennweite und Auflösung	112
5.11	Abmessungen der Zonenplatten-Segmente	114
5.12	Beispiel einer A- und N-segmentierten Apertur	116
5.13	Dekohärenz des segmentierten Lineargitters	117
5.14	Dekohärenz einer segmentierten Zonenplatte	119
5.15	Beugungsstruktur eines Segments und dessen Näherung	122
5.16	Konversion zwischen kohärenter und segmentierter Apertur	123
5.17	Punktbildfunktion der segmentierten Apertur	126
5.18	MTF der N-segmentierten Apertur	128
5.19	Axiale Intensitätsverteilung segmentierter Objektive	129
5.20	Einflussgrößen auf die Lichtstärke eines Röntgenobjektivs	130
5.21	Lochmasken-Struktur im „Photonensieb“	131
5.22	Effizienz der Lochmasken-Zonenplatte	133
5.23	Detektorradien diffraktiv-segmentierter Objektive	135

5.24 Beispiele zum Leistungsvermögen diffraktiver Objektive	137
5.25 Breitband-Segmentierung diffraktiver Objektive	140
5.26 Profil des Achromaten in N-segmentierter Bauweise	141
5.27 Detektorradien hybrid-segmentierter Objektive	142
5.28 Einsatz partieller Graufilter im Hybrid-Segment	143
5.29 Spektraler Bandpass des stark absorbierenden Hybrid-Segments	144
5.30 Graufilter-freie Hybridverstärkung	146
5.31 Einfluss der Segment-Absorption auf das Auflösungsvermögen	147
5.32 Absolutes Leistungsmaximum segmentierter Hybrid-Achromaten	153
5.33 Abschirmung des Streulichts bei Multiband-Objektiven	154
5.34 Beispiele diffraktiver Multiband-Objektive	156
5.35 Beispiele dispersionskorrigierter Multiband-Objektive	159
5.36 Streuhalos des Dualband-Achromaten, Beispiel (a)	162
5.37 Streuhalos des Dualband-Achromaten, Beispiel (b)	163
5.38 Streuhalos des Dualband-Achromaten, Beispiel (c)	164
5.39 Spektrale Intensitätsverteilung reduzierter Li-Achromaten	170
5.40 Spektrale Intensitätsverteilung reduzierter Be-Achromaten	171
5.41 Spektrale Intensitätsverteilung reduzierter Achromaten aus Polycarbonat .	172
5.42 Lichtstärke teilreduzierter Dualband-Achromaten	174
5.43 Sichtfelder teilreduzierter Dualband-Achromaten	175
5.44 Spektrale Feinverstimmung des reduzierten Achromaten	176
5.45 Fokalposition und Linsenabstand des durchstimmbaren Dialyten	177
5.46 Lichtstärke des durchstimmbaren Li-Dialyten	179
5.47 Strahlengang im Dialyten 3. Ordnung	180
6.1 Strahlgeometrie am Bragg-Monochromator	184
6.2 Nachfokussierung mittels Kapillaroptik	186
6.3 Spektrale Auflösung CCD-basierter Detektoren	188
6.4 spektrale Auflösung des XEUS-Micro-Kalorimeters	189
6.5 Die diffuse Röntgen-Hintergrundstrahlung	191
6.6 Simulierte Abbildung eines fernen Sterns	196
6.7 Umlaufbahnen extraterrestrischer Teleskope	198
6.8 Raumkoordinaten der Detektoreinheit	199
6.9 Einfluss der lateralen Unschärfe auf die PSF-Qualität	200
6.10 Zulässige Torsionswinkel des Detektormoduls	201
7.1 scheinbare Winkeldistanz	204
7.2 Übersicht zu Röntgenquellen auf kleinen Winkelkalen	205
7.3 Röntgenstreupektren der Fe- K_{α} -Strahlung	206
7.4 Geometrie des Gravitationslinseneffekts	208
7.5 Röntgenhelligkeit von Quasaren	209
7.6 Galaxienverteilungsfunktionen und Mikrolinsen-Statistik	211
7.7 Spektraltyp und Winkelgröße der hellsten Sterne	213

7.8	Beobachtungsrelevante Parameter stellarer Koronae	215
7.9	Strukturen der Röntgenemission von Vor-Hauptreihensternen	216
7.10	zeitliche Evolution von Supernova-Überresten	218
7.11	Beobachteter Röntgenfluss von Supernova-Überresten	219
7.12	Eigenschaften der Supernova 1987A	220
7.13	Vereinheitlichtes Modell aktiver Schwarzer Löcher	222
7.14	Dynamik verschmelzender (super-)massiver Schwarzer Löcher	225
8.1	Abmessungen der PANTER-Testanlage	227
8.2	Konstruktion eines einfachen Multiband-Objektivs	231
8.3	Testaufbau zur Optik und Permeation kühler Gase	234
A.1	Notation zur Berechnung der geometrischen Bildfehler	236
A.2	Auf zu neuen Ufern in der Hochenergie-Astrophysik...	246

Tabellenverzeichnis

2.1	Zum Realteil des Brechungsindex zwischen 1 und 10 keV	8
3.1	Optimierung der Vergrößerung refraktiver Linsen	24
3.2	Dispersionsfaktor der allgemeinen Fresnel-Linse	40
4.1	Winkelauflösung der absorbierenden Hybridlinse	58
4.2	Relative Verstärkung von Hybridlinsen	63
4.3	Maximalverstärkung von Hybridlinsen	64
4.4	Steigungswinkel bikonvexer Hybridlinsen	65
4.5	Zulässiges Öffnungsverhältnis bei parabolischem Hybrid-Profil	69
4.6	Wirkungsgrad der Profilreduktion	83
4.7	Optimierte Profilreduktion von Hybridlinsen	83
4.8	Verhältnis der Bandbreiten 3. und 2. Ordnung	92
4.9	Beispiele kompakter Achromaten	96
5.1	Apertur-Radien der FL-Matrix für $\Delta\epsilon = 0.1$ mas	111
5.2	Zonenzahlen N der FL-Matrix für $F = 15$ km	111
5.3	Anzahl der Segmente im k -ten Ring	115
5.4	Optische Parameter diffraktiver Objektive	136
5.5	Fresnel-Beugungseffizienz erster Ordnung für Si und Ti	138
5.6	Fresnel-Beugungseffizienz erster Ordnung für Be und Polycarbonat	138
5.7	Gesamttransmission des filterfreien Hybrid-Segments	145
5.8	Daten zur absorptionsbedingten Auflösungsminderung	148
5.9	Steigerung des Leistungsvermögens durch filterfreie Dispersionskorrektur	148
5.10	Optimierte Zonenzahlen segmentierter Li-Achromaten	149
5.11	Beispiele leistungsoptimierter Li-Hybrid-Achromaten	150
5.12	Optimierte Zonenzahlen segmentierter Be-Achromaten	150
5.13	Beispiele leistungsoptimierter Be-Hybrid-Achromaten	151
5.14	Optimierte Zonenzahlen segmentierter $B_{10}H_{14}$ -Achromaten	151
5.15	Beispiele leistungsoptimierter $B_{10}H_{14}$ -Hybrid-Achromaten	152
5.16	Leistungsdaten diffraktiver Multiband-Objektive	158
5.17	Leistungsdaten konventioneller Multiband-Achromaten	161
5.18	Mögliche Werte für k und n bei $N_\star = 5 \times 10^3$ Zonen	166

5.19	Absorptionsbedingte Ortsauflösung im reduzierten Hybrid-Segment	167
5.20	Beispiele reduzierter Li-Achromaten	168
5.21	Anzahl der Maxima in der Kammstruktur des reduzierten Achromaten . .	169
5.22	Beispiele reduzierter Be-Achromaten	173
5.23	Beispiele reduzierter Achromaten aus Polycarbonat	174
5.24	Leistungsdaten teilreduzierter Dualband-Achromaten	175
5.25	Theoretische Ortsauflösung des durchstimmbaren Dialyten	180
5.26	Optimierte Zonenzahlen segmentierter Li-Dialyten	181
5.27	Optimierte Zonenzahlen segmentierter Be-Dialyten	181
5.28	Beispiele segmentierter Dialyten in 3. Ordnung	181
5.29	Optimierte Zonenzahlen kohärenter Li-Dialyten	181
5.30	Optimierte Zonenzahlen kohärenter Be-Dialyten	182
5.31	Beispiele kohärenter Li- und Be-Dialyten in 3. Ordnung	182
6.1	Bragg-Kristalle zur spektral selektiven Detektion in versch. Energiebändern	185
6.2	Zählraten des diffusen Röntgenhintergrundes bei diffraktiver Optik	192
6.3	Axialtoleranz in Abhängigkeit vom Öffnungsverhältnis	201
7.1	bekannte Röntgendifpelpelsterne und aktive Galaxienkerne	223
8.1	Transmission von Fresnel-Linsen aus Polycarbonat bei 6 keV	228
8.2	Absorptionslängen von Li und Be zwischen $1 \text{ keV} \leq E \leq 10 \text{ keV}$	234

Zusammenfassung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit war die Entwicklung und Analyse einer neuartigen abbildenden Optik mit dem Ziel, das räumliche Auflösungsvermögen im Röntgenband zwischen $1 \text{ keV} \lesssim E \lesssim 20 \text{ keV}$ auf wenigstens 10^{-3} arcsec zu verbessern. Aufgrund ihrer hohen Toleranz gegenüber Fertigungsfehlern besitzen transmissive Linsen das prinzipielle Potential zur beugungsbegrenzten Abbildung. Je nach Ausführung dürfen Abweichungen von mehreren $10^2 - 10^3 \text{ nm}$ gegenüber der idealen Formgebung auftreten. Im Gegensatz zur absorptionsbehafteten, massiven Version weist die diffraktive, profiloptimierte Fresnel-Linse auch in höheren Ordnungen eine Beugungseffizienz zwischen 40% und 100% auf. Der Kontamination der Bildebene durch Streustrahlung benachbarter Ordnungen ist ggf. durch eine ausreichende Zentrallobstruktur zu begegnen, deren Radius dem doppelten Detektor-Halbmesser entspricht. Strahlenoptische Berechnungen weisen diffraktive Linsen als vergleichsweise tolerant gegenüber Aberrationen sphärischen wie winkelabhängigen Ursprungs aus. Typische Öffnungsverhältnisse $f \sim (10^4 - 10^5)$ erlauben Verkipplungen von $\lesssim 1^\circ$. Die Lichtstärke, definiert als Produkt von effektiver Sammelfläche und Bandpass, skaliert für Fresnel-Linsen ausschließlich linear mit der Brennweite, bleibt allerdings selbst für Fokaldistanzen von $\sim 10^2 \text{ km}$ auf wenige $\text{cm}^2 \cdot \text{keV}$ beschränkt.

Mit der segmentierten Apertur lässt sich jedoch die Lichtstärke erhöhen, ohne das Prinzip der beugungsbegrenzten Abbildung und den klassischen Einzelfokus aufzugeben. Bei einer Ortsauflösung von $\lesssim 10^{-3} \text{ mm}$ erreichen derlei inkohärent operierende Objektive eine Lichtstärke von $\sim 10^3 \text{ cm}^2 \text{ keV}$. Unter Einsatz eines dem diffraktiven Bandpass adäquaten Kristallspektrographen bedarf es dazu tendenziell großer Radien von $\sim 10 \text{ m}$ und typischen Brennweiten im Bereich einiger 10^2 km .

Ferner wurden im Rahmen dieser Arbeit mutmaßlich erstmals Multiband-Objektive zur wissenschaftlich vorteilhaften Simultanfokussierung von bis zu drei Energiebändern implementiert. Bestehend aus Partial-Linsen unterschiedlicher Gitterfrequenz, erweisen sie sich der Monoband-Ausführung als bzgl. Auflösung, Brennweite und Lichtstärke prinzipiell ebenbürtig.

Die Dispersionskorrektur mittels eines additiven refraktiven Linsenprofils erweitert den spektralen Bandpass auf dem Detektor direkt zugängliche 10^2 eV oder mehr. Mit der Absorption geht eine reduzierte Sammelfläche für *kompakte* Hybridlinsen einher. Trotzdem resultiert unter Beibehalt der Winkelauflösung für Materialien wie Li oder Be jenseits weniger keV eine gegenüber dem diffraktiven Analogon verbesserte Lichtstärke. Optimiert bzgl. Material und Energie, steigern derartige Achromaten die Nachweisempfindlichkeit um

das bis zu 40–fache – entsprechend einer Lichtstärke von $\sim 10^2 \text{ cm}^2 \text{ keV}$ bei Brennweiten von $\gtrsim 10^2 \text{ km}$. Wiederum *segmentiert*, wirkt sich die Absorption vergleichsweise geringfügig auf die Winkelauflösung aus, die Sensitivität des dispersionskorrigierten Objektivs steigt gegenüber der diffraktiven Version unter sonst gleichen Bedingungen jetzt um bis zu zwei Größenordnungen. Bei gegebener Ortsauflösung von $0.75 \times 10^{-3} \text{ m}$ ergeben sich für Li oberhalb von 6 keV und Be jenseits von 8 keV optimierte Lichtstärken zwischen 10^3 und $10^4 \text{ cm}^2 \text{ keV}$, vergleichbar jenen der gegenwärtig aktiven Observatorien Chandra und XMM-Newton. Die Winkelschärfe skaliert invers mit der Fokaldistanz, für $\lesssim 10^{-3} \text{ arcsec}$ ergeben sich Brennweiten von $\sim (10^2 - 10^3) \text{ km}$.

Plankonvexe Profile werden den zumeist kleinen Krümmungsradien der refraktiven Komponente hinsichtlich ihrer Aberrationen dritten Grades im allgemeinen nicht gerecht. Hingegen reduziert das *aplanatische*, nahezu bikonvexe Profil sowohl sphärische als auch winkelabhängige Bildfehler auf ihre diffraktiven Beiträge und legt daher im segmentierten Hybrid-Achromaten die Konstruktion symmetrischer, prismen-ähnlicher Bausteine nahe.

Die mit der *kohärenten* Profilverrechnung einher gehende Interferenz erfordert den Einsatz abbildender Spektrographen mit einer Auflösung nahe 1 eV. Vor allem optisch schwache Materialien wie z.B. Polycarbonat ($\text{C}_{16}\text{H}_{14}\text{O}_3$) profitieren von der erhöhten Transparenz bei konstanter Orts- und Winkelauflösung; im Energieintervall $9 \text{ keV} \leq E \leq 12 \text{ keV}$ optimierte Beispielkonfigurationen liefern eine Lichtstärke von wenigstens $\sim 1 \times 10^3 \text{ cm}^2 \text{ keV}$. Modelle aus Li und Be erreichen oberhalb von 4 keV bzw. 7 keV eine ähnliche Leistungsfähigkeit.

Multiband-Hybridsysteme gestatten anders als diffraktiv simultan fokussierende Objektive die Detektion mittels konventioneller CCD. Die aus Li und Be bestehenden Konfigurationen bilden jeweils zwei Energiebänder gleichzeitig ab und erweisen sich bei einer Ortsauflösung im Sub-mm-Bereich sowie Brennweiten von wenigen 10^2 km als eine hinsichtlich ihrer Gesamt-Lichtstärke konkurrenzfähige Alternative zum Monoband-Teleskop: Man erhält im Idealfall $\sim (4 - 7) \times 10^3 \text{ cm}^2 \text{ keV}$.

Dialytische Modell-Teleskope, deren refraktive Komponente von der diffraktiven räumlich separiert ist, bieten zum einen die Option einer über mehrere keV durchstimmbarer, dispersionskorrigierten Optik. Unter Variation des Linsenabstandes ergibt sich ein nutzbares Energieintervall $6 \text{ keV} \leq E \leq 14 \text{ keV}$. Die Lichtstärke nimmt dabei von $\sim 1 \times 10^3 \text{ cm}^2 \text{ keV}$ in zweiter bis auf $\sim 4 \times 10^3 \text{ cm}^2 \text{ keV}$ in dritter Dispersionsordnung zu. Kompakte Dialyten mit Durchmessern von $\sim 1 \text{ m}$ besitzen das Potential zu einer Winkelauflösung von wenigen 10^{-5} arcsec sowie einer Lichtstärke von mehreren $10^3 \text{ cm}^2 \text{ keV}$. Der spektrale Bandpass solcher Modelle beträgt $\gtrsim 1 \text{ keV}$.

Abschätzungen zum Signal-Rausch-Verhältnis zeigen, dass bei ausreichender Abschirmung des Detektors und moderatem Quellfluss mit einer signal- oder photonenlimitierten Beobachtungssituation zu rechnen ist. Dies gilt angesichts des diskreten Röntgen-Hintergrundes weitgehend auch dann, wenn mehrere Teleskope parallel geschaltet werden.

Ergänzende Betrachtungen zu potentiellen astronomischen Beobachtungsobjekten zeigen, dass Koronae benachbarter Sterne, Jets von Röntgen-Doppelsternen und aktiven Galaxienkernen, Supernova-Überreste bzgl. ihrer Ausdehnung einer Auflösung von $\lesssim 10^{-3} \text{ arcsec}$ genügen. Von großem Interesse dürften im Hinblick auf künftige Gravitationswellen-Experimente ferner Betrachtungen verschmelzender, supermassiver Schwarzer Löcher sein.

Kapitel 1

Einführung

Die im Lauf der letzten Jahrzehnte gewonnenen Erkenntnisse über hochenergetische kosmische Strahlungsquellen ließen das Universum relativ zum bekannten visuellen Erscheinungsbild buchstäblich in einem neuen Licht erscheinen. Während die instrumentengestützte Betrachtung des Sternenhimmels bereits mit Galilei im 17. Jahrhundert n.Chr. ihren Anfang nahm, deuteten verschiedene Analysen der Ionosphäre [1, 2] erstmals in den dreißiger Jahren des vergangenen Jahrhunderts auf die Existenz atomarer, extremer UV- und Röntgenstrahlung solaren Ursprungs hin. Nach zunächst vagen Messungen [3] gelang deren unzweifelhafter Nachweis schließlich 1949 mit Hilfe von Geigerzählern [4], die auf einer Rakete montiert, kurzzeitig außerhalb der das Röntgenlicht absorbierenden Erdatmosphäre operieren konnten. Eine optische Abbildung im Sinne einer zweidimensionalen Darstellung der Intensitätsverteilung des Objekts in einer Bildebene gestaltete sich indes schwierig, da die außerordentlich hohe Absorption im Röntgenbereich – der Imaginärteil des komplexen Brechungsindex $n = 1 - \delta - i\beta$ liegt für alle Materialien i.d.R. mehrere Größenordnungen über dem entsprechenden Wert für sichtbares Licht – die Konstruktion konventioneller Reflexions- oder Refraktionsteleskope nicht zulässt. Dennoch gelang es in der Folge mehreren Forschern, die Sonne im besagten Spektralbereich zunächst mit Hilfe einfacher Lochkameras, später unter Verwendung Fresnel'scher Zonenplatten zu fotografieren [5, 6]. Als fokussierende Transmissionsgitter basieren diese erstmals von Soret [7] beschriebenen Linsen auf der Beugung elektromagnetischer Strahlung und umgehen damit das Absorptionsproblem. Allerdings weisen Zonenplatten in ihrer einfachen Form eine mit weniger als 10% eher geringe Fokuseffizienz sowie eine starke chromatische Aberration auf – Umstände, die ab den sechziger Jahren zur Entwicklung diverser Alternativen zur Zonenplatte führten.

Zum einen bot sich in Anlehnung an o.g. Pionierarbeiten [3] an, dem möglichst großflächigen Zählernmodul z.B. wabenartige Kollimatoren vorzuschalten. Spektral breitbandig und unter maximaler Ausnutzung der Sammelfläche ließen sich so Röntgenquellen mit einer Winkelauflösung von bis zu etwa 1° detektieren [8]. In der Tat gestattete die mit derartigen Kollimator-Röhren realisierte Kombination ausreichender Sensitivität und Auflösung in verschiedenen raketen- und ballongestützten Experimenten ab den frühen siebziger Jahren erstmals die genaue Analyse extrasolarer Röntgenquellen, speziell von Cen X-3 und Cyg X-1 durch „UHURU“ [9]. Die Röntgenquellen dieser Doppelsternsysteme erwiesen sich als

Pulsar bzw. stellares Schwarzes Loch. Obgleich das Schema des kollimatorbewehrten Proportionalzählers zur Entdeckung zahlreicher neuer Emittoren führte und in einigen Fällen deren grobe Analyse erlaubte, konnte die Methode vom optischen Standpunkt aus nicht befriedigen. Die Gründe dafür liegen nicht allein in denen durch die Kollimatorabmessungen beschränkter Winkelauflösung, sondern auch in der Tatsache, dass diese mit dem nutzbaren Sichtfeld – im Englischen als “field of view“ (FOV) bezeichnet – zusammenfällt.

Theoretische, auf das Jahr 1952 datierte Arbeiten von H. Wolter schlugen die zweifache externe Totalreflexion an einer koaxialen Anordnung aus einer paraboloiden und hyperboloiden Spiegeloberfläche zur Bündelung einfallender Röntgenstrahlen in der Mikroskopie vor [10]. Zwar war die Möglichkeit der Fokussierung durch einen einfachen Parabolspiegel und auch das Phänomen der wegen $Re(n) \lesssim 1$ externen Totalreflexion schon zuvor bekannt, doch scheiterte die Konstruktion einer derartigen Optik bis dato an den schwerwiegenden Aberrationen im Fall nicht achsparallel einfallender Strahlen. Wie Wolter zeigte, lassen sich die Abbildungsfehler durch eine zweite Reflexion an einer hyperboloiden Spiegelschale drastisch reduzieren. Ein nützlicher Nebeneffekt der von Giacconi und Rossi [11] auf teleskopische Anwendungen übertragenen Konfiguration besteht in der dadurch auf einige Meter verkürzten Brennweite. Mitte der sechziger Jahre waren die mit makroskopischer Formgebung und dem Oberflächen-Finish auf der Skala von 10^{-9} m einhergehenden technischen Schwierigkeiten soweit überwunden, dass zunächst mit Hilfe von Raketen, kurz darauf an Bord von „Skylab“ die ersten fokussierenden Röntgenteleskope in Betrieb genommen werden konnten [9]. Auf diese der Beobachtung der Sonnenkorona gewidmeten Spiegelteleskope folgte 1978 mit „Einstein“ das erste Wolter(I)-Teleskop¹ mit ausreichender Sammelfläche, um extrasolare Ziele untersuchen zu können. Zu nennen sind die Entdeckung der Schockwellenemission von Supernovae oder der thermischen Emission des heißen Gases in Galaxienhaufen nebst mehrerer tausend neuer Punktquellen. Die 1990 gestartete ROSAT-Mission erweiterte den Katalog bekannter Röntgenquellen zahlenmäßig um zwei Größenordnungen. Die Erfolge dieser und weiterer Missionen verhalfen dem Wolter(I)-Spiegel rasch zum Durchbruch gegenüber konkurrierenden Ansätzen, so dass auf dessen Schema bis heute fast alle Röntgensatelliten bis herauf zu etwa 10-15 keV basieren.

Scheidet die fokussierende Totalreflexion bei höheren Energien aus, bietet es sich an, vor dem Detektor lediglich eine zweidimensionale, nach einem bestimmten Muster stellenweise absorbierende Maske anzuordnen. Sie erzeugt von der Röntgenquelle einen geometrischen Schattenwurf; da die resultierende Intensitätsverteilung in der Detektorebene demnach von der Winkelposition der Punktquelle abhängt, ergibt sich für ausgedehnte Objekte durch Superposition der einzelnen Schattenbilder eine eindeutige Zählratenverteilung im Detektor, aus der sich dann das reale Bild rekonstruieren lässt. Dieses sog. „Coded Aperture Imaging“ kommt mangels besserer Alternativen auch heute noch im harten Röntgen- und Gammabereich, d.h. oberhalb von rund 10–20 keV, zum Einsatz. Der kompakten und energieunabhängigen Bauweise steht jedoch neben der geometrisch auf typischerweise rund eine Bogenminute (engl. „arcmin“) begrenzten Winkelauflösung ein schlechtes Signal-Rausch-

¹H. Wolter untersuchte auch Modifikationen dieser sog. (Typ I)–Konfiguration, die z.B. auf SOHO oder in Form von EUV-Kollimatoren vereinzelt Anwendung finden, hier jedoch außen vor bleiben sollen.

Verhältnis (SNR) gegenüber. Diese Eigenschaft jedes indirekten Abbildungsverfahrens basiert auf der Tatsache, dass sich dem auf die gesamte Detektorfläche verteilten Signal einer Punktquelle das Rauschen *aller* detektierten Photonen überlagert und lässt sich durch die Verwendung einer direkten, fokussierenden Optik beseitigen.

Im Jahr 1999 haben mit „XMM-Newton“ und „Chandra“ die beiden bislang leistungsfähigsten Röntgenteleskope ihren Betrieb aufgenommen. Im Hinblick auf ihre schwerpunkt-mäßige wissenschaftliche Zielsetzung sind die von ESA bzw. NASA initiierten Observatorien zueinander komplementär: XMM-Newton wurde bzgl. der Sensitivität, also des geringsten noch nachweisbaren Strahlungsflusses optimiert, um so zeitlich und spektral hochaufgelöste Spektren auch schwacher Röntgenquellen wie z.B. akkretierender Doppelsterne in benachbarten Galaxien zu gewinnen. Zu diesem Zweck besitzt XMM-Newton 3 Wolter-Teleskope, die ihrerseits aus 58 ineinander geschobenen Spiegelschalen bestehen und jenseits von rund 0.5 keV eine gesamte effektive Fläche von bis zu 4500 cm^2 besitzen. Die große wirksame Teleskopapertur geht zu Lasten des Winkelauflösungsvermögens, da die aus Gewichts- und Platzgründen notwendigerweise dünnwandigen Spiegelschalen nicht mit der erforderlichen Präzision konfiguriert werden können. Dies führt zu einer Verbreiterung des Punktbildes (engl. „point spread function“, PSF) entsprechend einem Auflösungselement von etwa 6 Bogensekunden (engl. arcsec). Bei Chandra hingegen wurde das Hauptaugenmerk auf möglichst exakt geformte und justierte Spiegel gelegt. Die Winkelauflösung erreicht auf diese Weise mit 0.5 arcsec den besten jemals mit einem Röntgenteleskop erzielten Wert. Die geringe Zahl und größere Dicke der ineinander geschobenen Spiegel resultieren nun jenseits von ca. 1 keV in einer Sammelfläche von bis zu 800 cm^2 .

Nach mehreren Jahrzehnten kontinuierlicher Verbesserung der optischen Qualität zeigen sich jedoch mittlerweile ernst zu nehmende technische Schwierigkeiten, was eine weitere Optimierung der Spiegelgüte und damit der erreichbaren Winkelauflösung betrifft. Die Probleme liegen dabei sowohl in hoch- als auch niederfrequenten Abweichungen vom idealen parabolisch-hyperbolischen Spiegelprofil im Sinn von Oberflächenrauhigkeiten und Formfehlern. Inzwischen wird ein Wert von rund 0.1 arcsec als faktisches Minimum für teleskopische Anwendungen angesehen. Damit wird jedoch – um hier den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit zu definieren – die theoretisch erreichbare beugungsbegrenzte Abbildungsschärfe um 2 – 3 Größenordnungen verfehlt. Die eklatante Abweichung der realen von der möglichen Bildschärfe muß vom physikalischen Standpunkt aus als umso unbefriedigender angesehen werden, als zahlreiche astronomische Objekte im Röntgenbereich unter den gegenwärtigen beobachtungstechnischen Umständen punktförmig erscheinen und beim „näheren Hinsehen“ bislang unbekannte Strukturen erwarten lassen.

Hinzu kommt die relativ hohe Flächendichte, also das Verhältnis von Masse zu effektiver Sammelfläche, wie sie für Spiegelteleskope bei streifendem Einfall typisch und unumgänglich ist – typisch im Sinn von Werten von kaum weniger als $\sim 10^{-1} \text{ kg cm}^{-2}$ für diesbezüglich optimierte Missionen wie das noch in der Projektphase befindliche XEUS, unumgänglich aber auch angesichts der mit zunehmenden Ansprüchen an die Bildqualität wachsenden Schalendicke. Wie das gerade genannte Beispiel der beiden zueinander komplementären Observatorien XMM-Newton und Chandra zeigt, geht die überragende Winkelauflösung des letzteren zu Lasten einer geringeren Effizienz.

Im folgenden soll nun versucht werden, Grundzüge einer künftigen Röntgenoptik für astronomische Anwendungen zu entwickeln, die eben jene Hindernisse überwindet. Als Grundlage dient die bereits erwähnte Zonenplatte als Paradigma einer transmittierenden Abbildungsoptik auf Beugungsbasis. Kapitel 2 führt dem entsprechend von einem Überblick zu abstrakten Prinzipien der Röntgen- und Beugungsoptik über Eigenschaften allgemeiner Röntgenlinsen zu detaillierten Analysen von massiven refraktiven optischen Elementen, Zonenplatten und deren Derivaten, allgemein also diffraktiven Linsen. Gemäß ihres Aufbaus lassen sich letztere in amplituden- und phasenmodulierte Kreisgitter differenzieren.

Obwohl auf diesem Weg bereits die angestrebte beugungsbegrenzte Auflösung mit Linsen großer Sammelfläche und geringer Masse erreicht werden kann, verbleibt die Korrektur des intrinsischen Farbfehlers als zentrale Herausforderung. Der nach bisherigen Erkenntnissen physikalisch wirkungsvollste Ansatz, dies mittels refraktiver Streulinsen zu erreichen, ist Gegenstand des nächsten Kapitels 4.

Während die Arbeit soweit vorwiegend elementare theoretische Modelle beleuchtet hat, rücken im weiteren Verlauf von Kap. 5 Aspekte ihrer Anwendung in großskaligen Teleskopen in den Vordergrund. Hierzu zählen insbesondere Fragen der Segmentierung großflächiger Objektive, deren mögliche Implementierungen unter Berücksichtigung der zuvor entwickelten Konzepte vorgestellt werden. Dabei wird zwischen primär diffraktiven und dispersionskorrigierten Versionen unterschieden. Ferner sollen in diesem Teil der Arbeit Möglichkeiten angesprochen werden, parallel geschaltete und im weichen Röntgenband H_2 – basierte Optiken einzusetzen.

Unvermeidlich große Brennweiten von $\sim (10^1 - 10^4)$ km machen die räumliche Trennung von Objektiv und Detektor unumgänglich – weshalb einer Analyse des Streulichts, verursacht durch den diffusen Hintergrund, besondere Bedeutung zukommt. Ferner werden Konzepte zur Auslegung des Detektors skizziert. Um die Bildqualität nicht durch zeitliche Schwankungen der Relativposition zu beeinträchtigen, sind die beiden Module gegeneinander axial und lateral mechanisch zu stabilisieren. Im Rahmen einer knappen Darstellung wird daher, ausgehend von Betrachtungen zu möglichen Umlaufbahnen auf verschiedenen Skalen, Kap. 6 auch gravitativen Gradientenkräften und anderen Einflüssen hinsichtlich ihrer Auswirkungen auf die Positionierung der beiden Raumfahrzeuge gewidmet.

Die dem Teleskop zugrunde liegenden Leistungsparameter spezifizieren denn auch seinen astronomischen Einsatzbereich. Das gegenüber bisherigen Missionen extrem kleine Sichtfeld und die wegen der eher bescheidenen Lichtstärke nötigen langen Integrationszeiten lassen das Instrument als ungeeignet für großflächige Himmelsdurchmusterungen erscheinen. Sein hohes räumliches Auflösungsvermögen prädestiniert es jedoch für die Analyse *einzelner* Objekte wie z.B. der schon erwähnten stellaren Koronae, Supernovae oder der Akkretionsscheiben aktiver Galaxienkerne. In Kap. 7 werden daher potentielle Beobachtungsobjekte mit konkreten Beispielen und entsprechenden astrophysikalischen Fragestellungen zusammengestellt.

Das letzte Kap. 8 geht schließlich auf diverse Möglichkeiten ein, die gewonnenen Erkenntnisse experimentell zu überprüfen und technisch weiter zu entwickeln. Besonderes Augenmerk ist in diesem Zusammenhang auf die Skaleninvarianz zu legen, die die Reduktion der geometrischen Abmessungen auf praktisch zugängliche Längen gestattet.

Kapitel 2

Grundlagen der Röntgenoptik

Seit im Zuge der die geplante XEUS-Mission vorbereitenden Studien vor wenigen Jahren die Option ins Auge gefasst wurde, den streifenden Einfall nicht an massiven Spiegelschalen, sondern präzise polierten, passend gefrästen und orientierten Si-Wafern zu vollziehen, besteht Anlass zu der Hoffnung, die bis dato angesichts der gesamten effektiven Fläche von bis zu 30 m^2 (bei 1 keV) immer noch kritische Flächendichte von $8 \times 10^{-2} \text{ kg cm}^{-2}$ um ein Vielfaches reduzieren zu können und damit Transport und Kalibration wesentlich zu erleichtern. Gleichwohl bleibt die Winkelauflösung auf wenige Bogensekunden beschränkt, da es sich bei diesem Konstrukt um einen Doppelkonus als Näherung einer verkürzten Wolter-Optik handelt, stabilisiert in Form zahlreicher übereinander gelagerter Wafer.

Das Beispiel macht deutlich, dass eine Abkehr vom Konzept der massiven Spiegelmodule und eine Hinwendung zu dünnen, linsenähnlichen Geometrien nicht ausreicht, sowohl Sammelfläche *als auch* Auflösungsvermögen signifikant zu verbessern. Erfolg versprechen vielmehr prinzipiell neue Methoden wie Beugung und Brechung, um Röntgenstrahlen zu fokussieren. Gegenüber reflektiven Optiken lassen letztere wesentlich größere Toleranzen hinsichtlich optischer Weglänge (optical path difference, OPD) und Winkelstreuung zu – beides halbquantitative Maßstäbe für die die Auflösung limitierenden Abbildungsfehler. Grobe Abschätzungen der jeweiligen konstruktionsbedingten Fehler sind Abb. 2.1 zu entnehmen. OPD und Winkelstreuung $\delta\phi$ ergeben sich dabei aus kleinen Versetzungen δx und Verkippungen $\delta\theta$ entsprechend den eingefügten Skizzen und folgen im übrigen elementaren Gesetzen der geometrischen Optik.

2.1 Strahlungs-Materie-Wechselwirkung

Nun zeigt jedoch der Brechungsindex $n(E)$ als der die Wechselwirkung (WW) mit Medien beschreibende Ausdruck als Funktion der Energie E im Röntgenbereich oberhalb weniger 100 eV ein grundsätzlich anderes Verhalten als im Visuellen. Wegen der nicht mehr zu vernachlässigenden Absorption i.a. als

$$n = 1 - \delta - i\beta \quad \text{mit } \delta, \beta \in \mathbb{R}^+ \quad (2.1)$$

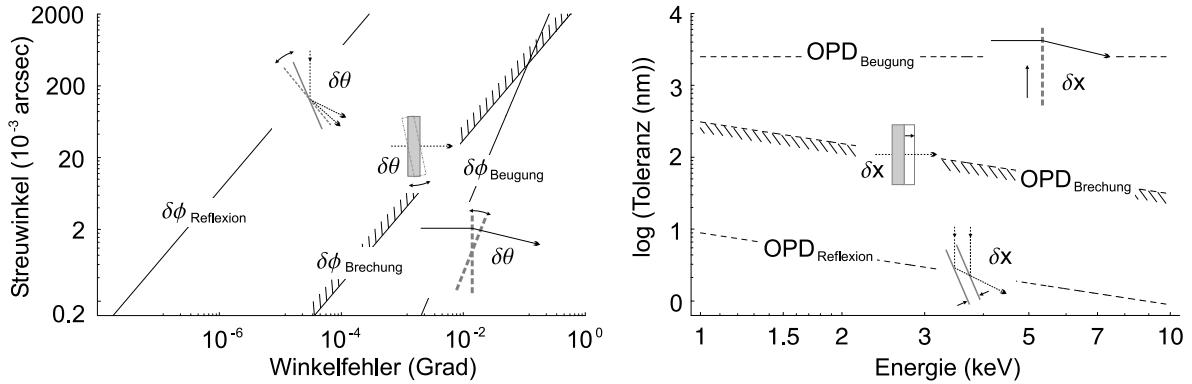


Abbildung 2.1: Weg- und Winkeltoleranzen reflektiver und transmissiver Optik. Abschätzungen für die Streuwinkel (durchgezogene Linien) hängen von der Verkippung gegen die optische Achse ab (links). Typische Fehlertoleranzen der optischen Wegdifferenz (OPD) bzgl. des Rayleigh'schen $\lambda/4$ -Kriteriums sind als Funktion der Energie aufgetragen (rechts). Die Toleranzen der refraktiven Optik mit $\delta = 10^{-3}$ sind als untere Grenzen anzusehen, während die anderen Werte ungefähre Größenordnungen repräsentieren.

ausgedrückt, steht das Inkrement $\delta \ll 1$ für eine sehr geringe Abweichung vom Vakuumwert $n_{vak} \equiv 1$. Die ebenfalls kleine Größe β übertrifft gleichwohl den entsprechenden Wert im sichtbaren Spektralbereich um Größenordnungen und führt je nach Material und Energie zu einer $1/e$ -Schwächung auf Skalen von meist $(10^{-6} - 10^{-2})$ m.

Um ein halbquantitatives Verständnis¹ von der Strahlungs-Materie-Wechselwirkung im Röntgenbereich zu gewinnen, führen wir uns das semiklassische Modell eines Mediums, bestehend aus Atomkernen und mehr oder weniger harmonisch gebundenen e^- vor Augen. Demnach strahlen die vom einfallenden (transversalen) Feld $\vec{E}_{in}(\vec{r}, t)$ beschleunigten e^- ihrerseits Dipolwellen ab. Das nach dem Huygens'schen Prinzip aus der Superposition aller elementaren Beiträge resultierende Feld $\vec{E}_{out}(\vec{r}, t)$ wird im wesentlichen durch die über alle N beteiligten Atome und deren Z_n Elektronen summierte komplexwertige Streuamplitude

$$f = \sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^{Z_n} \hat{f}_{n,s}(\Delta \vec{k}, \omega) \quad (2.2)$$

bestimmt. Sie hängt ihrerseits vom Impulsübertrag $\propto \Delta \vec{k} \equiv \vec{k}_{out} - \vec{k}_{in}$ mit $|\Delta \vec{k}| = 2k_{in} \sin \theta$ und dem Streuwinkel θ ab, der in Form separabler Exponentialfaktoren in die Streuamplitude eingeht und auf die Positionen $\Delta \vec{r}_{n,s}$ der Kerne bzw. ihrer e^- Bezug nimmt:

$$\hat{f}_{n,s}(\Delta \vec{k}, \omega) = Q_{n,s}(\omega) \cdot e^{-i(\Delta \vec{k} \cdot \Delta \vec{r}_{n,s})} \quad (2.3)$$

Der räumlichen Lage der Kerne und auch der e^- kommt nun entscheidende Bedeutung zu:

¹Auf eine streng analytische Behandlung sei hier aus Platzgründen verzichtet, eine ausführlichere Darstellung findet sich z.B. in [12].

- *Festkörper mit periodischer Struktur (Kristall)*. Die in Abständen d regelmäßig angeordneten Atome als Streuzentren ermöglichen feste Phasenbeziehungen zwischen den Teilwellen. Mit Bindungslängen $d \gtrsim \lambda$ resultieren im Röntgenband scharfe *Interferenzmaxima* nach der Bragg-/Laue-Bedingung auch bei großen Streuwinkeln θ . In diese Kategorie fallen insbesondere auch Metalle wie Li und Be.
- *Amorphe Festkörper, Flüssigkeiten und Gase*. Unregelmäßige und z.T. zeitlich variable Anordnung der Kerne und e^- führt i. a. zu statistisch verteilten Phasenfaktoren in Gl. 2.3. Offenbar gilt jedoch für $\theta \ll 1$ $\hat{f}_{n,s}(\Delta \vec{k}, \omega) \cong Q_{n,s}(\omega)$, so dass mit der *Vorwärtsstreuung* in nullter Ordnung quasi der Trivialfall der Interferenz zu beobachten ist.

Auf eine solche bleibt im übrigen auch die Beugung im kristallinen Medium beschränkt, wenn dort $d \ll \lambda$ gilt. Der Grenzfall $e^{-i(\Delta \vec{k} \cdot \Delta \vec{r}_{n,s})} \rightarrow 1$ motiviert schließlich die Notation

$$n(E) = 1 - 2\pi r_e \left(\frac{\hbar c}{E} \right)^2 n_a (f_1^0(E) + i f_2^0(E)), \quad (2.4)$$

wobei n_a für die atomare Anzahldichte, r_e für den „Elektronenradius“ und das Superskript „0“ des gesamten Streufaktors $f_1^0(E) + i f_2^0(E)$ eben für den hier betrachteten Limes $(\Delta \vec{k} \cdot \Delta \vec{r}_{n,s}) \rightarrow 0$ steht.

Eine weitere Differenzierung gilt der Energie bzw. Frequenz ω der Strahlung, insbesondere in Relation zu den Energieniveaus bzw. Eigenfrequenzen des Atoms oder der chemischen Verbindung.

- Starke *Absorption* erleidet grundsätzlich „weiche“ Röntgenstrahlung bis zu wenigen keV, indem sie die Atome durch Herausschlagen innerer e^- ionisiert. Folgerichtig besteht eine starke Energieabhängigkeit, die im Bereich zwischen rund 1 und 20 keV fern von Absorptionskanten zumeist wie $E^{-\gamma}$ verläuft, mit $3 \leq \gamma \leq 4$. Als weniger eindeutig erweist sich der funktionale Zusammenhang mit der Kernladung Z , der von zahlreichen Sprüngen entsprechend der Lage des Elements im Periodensystem geprägt ist.
- *Elastische und kohärente Streuung* tritt vor allem an stark gebundenen e^- auf, die feste Phasendifferenzen zwischen einfallender und reflektierter bzw. gebrochener Welle im Sinn der geometrischen Optik gewährleisten. Im Bild des harmonischen Oszillators folgen die e^- mit Eigenfrequenzen ω_s der Anregung mit der Frequenz $\omega \gg \omega_s$ nur schwach und gegenphasig. Die geringe Brechkraft ($\delta \ll 1$) hat darin ihre Ursache. Als frequenzerhaltende Streuung dominiert sie bei geringer Energie über die
- *Inelastische oder Compton-Streuung*, die erst bei vernachlässigbaren Bindungskräften und $E \gg E_K$ (mit E_K als der Bindungsenergie der e^- in der K -Schale) zum Tragen kommt. Sie erfolgt bei teilweisem Energieübertrag auf nur schwach gebundene e^- und ergo undefinierter Phasenbeziehung. Im Rahmen der in dieser Arbeit wichtigen Vorwärtsstreuung spielt sie jedoch keine Rolle.

Wegen der komplexen WW-Prozesse muß $f^0(E)$ für jedes Medium semi-empirisch ermittelt werden – üblicherweise durch Messung der den Imaginärteil bestimmenden Absorptionslänge mit anschließender Berechnung von $f_1^0(E)$ aus den Kramers-Kronig-Relationen.

Während das sich im Rahmen dieses Verfahrens bestimmte $\beta(\lambda)$ nur grob durch eine Funktion $\propto \lambda^4$ approximiert wird und Fehler von mehreren 10% auftreten können, folgt δ zumindest im betrachteten Energiebereich recht genau einem λ^2 -Verlauf. Es gilt also

$$\delta(\lambda) \cong \delta_c \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 \quad \text{oder} \quad \delta(E) \cong \delta_c \left(\frac{E_c}{E} \right)^2, \quad (2.5)$$

wenn $\delta_c = \delta(\lambda_c)$ und für E analoge Bezeichnungen zugrunde gelegt werden. Tab. 2.1 gibt einen Überblick über die Fitparameter und ihre $\pm 1\sigma$ -Fehlergrenzen im Energieintervall $1 \text{ keV} \leq E \leq 10 \text{ keV}$. Im Kontext der Beugungstheorie wird gewöhnlich nur auf die

Substanz	$\alpha \pm \sigma_\alpha$ in $(\text{keV})^2$	Substanz	$\alpha \pm \sigma_\alpha$ in $(\text{keV})^2$
H_2	$3.70 \times 10^{-8} \pm 1.98 \times 10^{-12}$	He	$3.72 \times 10^{-8} \pm 1.88 \times 10^{-11}$
Li	$9.72 \times 10^{-5} \pm 1.38 \times 10^{-7}$	Be	$3.49 \times 10^{-4} \pm 8.35 \times 10^{-7}$
B	$4.67 \times 10^{-4} \pm 1.44 \times 10^{-6}$	C	$4.78 \times 10^{-4} \pm 1.43 \times 10^{-6}$
N	$2.72 \times 10^{-7} \pm 5.64 \times 10^{-10}$	O	$3.08 \times 10^{-7} \pm 6.34 \times 10^{-10}$

Tabelle 2.1: Zum Realteil des Brechungsindex zwischen 1 und 10 keV. Fern von Absorptionskanten nimmt $\delta = 1 - \text{Re}(n)$ mit der Energie E in guter Näherung gemäß $\delta(E) = \alpha \cdot E^{-2}$ ab. Aufgelistet sind die Steigungsparameter α mit ihren Standardfehlern.

Proportionalität 2.5 Bezug genommen, Absolutwerte des reellen Brechungsindex spielen jedoch insbesondere im Rahmen der Theorie der Bildfehler eine Rolle.

Wir führen nun mit der „kritischen Zonenzahl“ $N_0 \equiv \frac{\delta}{2\pi\beta}$ – nach [16] die Zahl der Phasenumkehrungen pro Absorptionslänge – den für die optische Güte des Mediums charakteristischen Parameter ein. Anders als δ und β selbst zeigt sie bzgl. der Kernladung Z einen verhältnismäßig glatten Verlauf, wie in Abb. 2.2 illustriert. Wie der Grafik zu entnehmen ist, sind Elemente mit niedrigem Z und relativ harte Röntgenstrahlung im Sinne geringer Absorption zu bevorzugen. Wo dies nicht möglich ist, kann eine hinsichtlich der K-Elektronen günstige Materialwahl N_0 um einen Faktor ~ 10 verbessern, z.B. via ^{15}Ph statt ^{13}Al bei 2.0 keV. N_0 verläuft im übrigen zumindest im weichen Röntgenband von wenigen keV etwa proportional zu λ^{-2} und ergibt sich als Quotient der Funktionen von δ und $2\pi\beta$.

Bisher wurden lediglich elementare Stoffe betrachtet. Die optischen Eigenschaften von Verbindungen wie z. B. Hybridkompositionen der Form X_mH_n oder Kunststoffen setzen sich indes additiv aus jenen der Komponenten zusammen:

$$\delta + i\beta = 2\pi r_e \left(\frac{\hbar c}{E} \right)^2 n_{mol} \sum_k (f_{1,k}^0(E) + i f_{2,k}^0(E)) \quad (2.6)$$

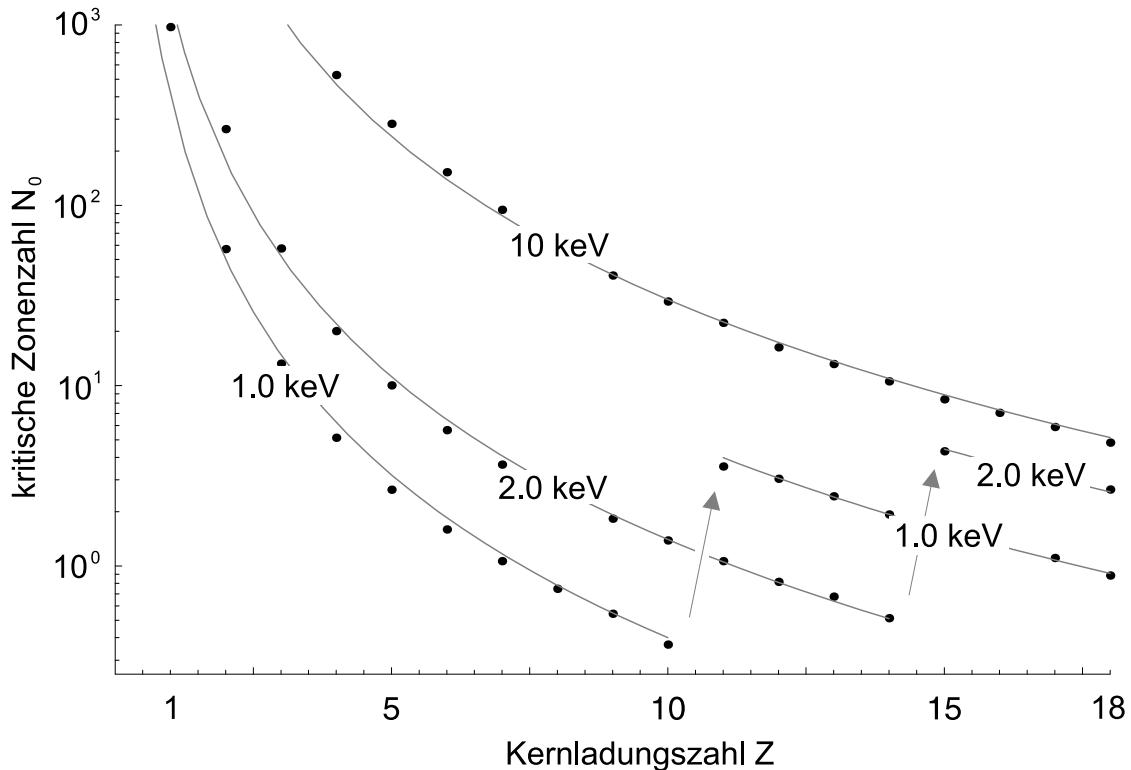


Abbildung 2.2: Verlauf der kritischen Zonenzahl N_0 mit der Kernladung Z . Abseits von Absorptionskanten zeigen die Messdaten (Punkte) für N_0 für $Z \gtrsim 2$ in guter Näherung eine Z^{-3} -Abhängigkeit (durchgezogene Kurven). Die hier durch Pfeile gekennzeichnete Diskontinuität in $N_0(E)$ ist durch die K_{1s} -Bindungsenergie des jeweiligen Elements bedingt.

Summiert wird über alle Atome (Index k) des Moleküls, deren n_{mol} Stück im Einheitsvolumen Platz finden. Von Relevanz bzgl. der Wahl des Materials ist nun zudem der Umstand, dass die molekulare Struktur, also die geometrische Anordnung der Atome, im Fall der Vorwärtsstreuung gemäß obiger Argumentation normalerweise keine Rolle spielt. Eine Ausnahme stellen lediglich die engen spektralen Bänder im Bereich der Absorptionskanten dar, die durch anomale Dispersion gekennzeichnet sind und außer mit den gewöhnlichen *intra-* auch mit den strukturabhängigen *interatomaren* Bindungen korrelieren.

Nach Gl. 2.6 folgt für die kritische Zonenzahl eines mehrelementigen Materials

$$N_0 = \frac{\sum_k f_{1,k}^0(E)}{2\pi \sum_k f_{2,k}^0(E)} = \frac{\sum_j m_j f_{1,j}^0(E)}{2\pi \sum_j m_j f_{2,j}^0(E)}, \quad (2.7)$$

wenn m_j die Zahl der Atome der Sorte j pro Molekül angibt. Diese Relation spielt insbesondere im Zusammenhang mit H_2 -Beimengungen zur Steigerung der optischen Qualität eines Stoffes eine Rolle; andererseits ergibt sich aus ihr die aufgrund der Absorption problematische Wirkung des Kohlenstoffs, beispielsweise im Polycarbonat ($C_{16}H_{14}O_3$).

Die mikroskopischen Eigenheiten von $n(E)$ wirken sich nun auf die makroskopischen physikalischen und formalen Gesetzmäßigkeiten der Röntgenoptik aus. Im weiteren wird

grundsätzlich von einem lediglich auf relativ zur Wellenlänge sehr großen Skalen variierenden Brechungsindex $n(\vec{r}, \omega)$ ausgegangen. Diese Annahme schließt diskontinuierliche Änderungen mit $\vec{\nabla}_{\vec{r}} n(\vec{r}, \omega) \propto \sum_b \pm \delta(\vec{r} - \vec{r}_b)$ an ausreichend dimensionierten Blenden als auch stetige Variationen der Form $\vec{\nabla}_{\vec{r}} n(\vec{r}, \omega) \approx 0$ ein, die somit in der zur Wellengleichung führenden Differentiation der Maxwell-Gleichungen als lokale Konstanten zu betrachten sind (eine analoge Beziehung gilt für $\vec{B}(\vec{r}, t)$):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{c}{n(\vec{r}, \omega)} \right)^2 \Delta \right) \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.8)$$

Demnach besteht die allgemeine Lösung aus einer linearen Superposition von der Form

$$A(\vec{r}, t) \propto \int \tilde{A}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega(k)t)} d^3k, \quad (2.9)$$

wobei $A(\vec{r}, t)$ für eine beliebige Komponente der Felder $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$ steht. Die Forderung der hinreichenden Homogenität des Mediums beschränkt beide auf durch das $|\vec{k}|$ -Spektrum $\tilde{A}(\vec{k})$ definierte Wellenpakete mit $\vec{E} \perp \vec{B}$ und $(\vec{E}, \vec{B}) \perp \vec{k}$. Im einfachsten Fall resultieren ebene Wellen $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$, die nur noch in Gestalt eines separablen Faktors $e^{-i\omega t}$ von der Zeit abhängen. Die vereinfachte stationäre Variante von Gl. 2.8 lautet somit

$$(\Delta + k^2) \vec{E}(\vec{r}) = 0, \quad (2.10)$$

mit einem analogen Ausdruck für $\vec{B}(\vec{r})$. Stetigkeitsbedingungen an die Felder liefern nun die bekannten Gesetze der Reflexion und Brechung (vgl. Abb. 2.3), die wir hier ihrer quantitativen Abweichungen gegenüber dem visuellen Pendant wegen anführen. Wir betrachten dazu die zur Einfallssebene senkrechten und parallelen Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes an der Grenzfläche zweier Medien mit Brechungsindizes n_1 und n_2 . Analog zur visuellen Optik liefern Stetigkeitsforderungen an \vec{E}_p und \vec{H}_p sowie \vec{D}_s und \vec{B}_s zunächst das triviale Reflexionsgesetz $\phi_e = \phi_r$. In ähnlicher Weise lässt sich das Brechungsgesetz ableiten,

$$n_1 \sin \phi_e = n_2 \sin \phi_g \quad \text{mit } n_{1,2} \in \mathbb{C}. \quad (2.11)$$

An dieser Stelle sei die geringe, aber prinzipiell vorhandene Modifikation der aus $\text{Re}(n_{1,2})$ möglicherweise folgenden Ablenkrichtung durch $\text{Im}(n_{1,2})$ erwähnt. Auf den ersten Blick erscheint der Einfluss komplexer Brechungsindizes auf den Brechungswinkel β durchaus unklar. Entsprechend kontrovers wurde diese Problematik von diversen Autoren diskutiert [20]. So kursieren verschiedene Modelle, die gleichwohl bislang einer experimentellen Verifizierung bzw. Falsifizierung harren. Nichtsdestoweniger scheinen zwischen ihnen allenfalls marginale quantitative Unterschiede zu bestehen. Die Graphen in Abb. 2.4 basieren auf der von den Autoren von [20] favorisierten Theorie. Wie insbesondere in Kap. 5 ausgeführt wird, betragen aufgrund der großen Brennweiten die Ablenkinkel allenfalls wenige Bogensekunden (arcsec). Ferner sind nach [20] für $\phi_e \rightarrow 90^\circ$ und maximale Brechungsindex-Parameter $\delta \lesssim 5 \times 10^{-4}$ und $\beta \lesssim 5 \times 10^{-5}$ relative Winkelabweichungen $1 - \frac{\phi_{g, \beta \neq 0}}{\phi_{g, \beta=0}} \lesssim 10^{-4}$ zu erwarten.

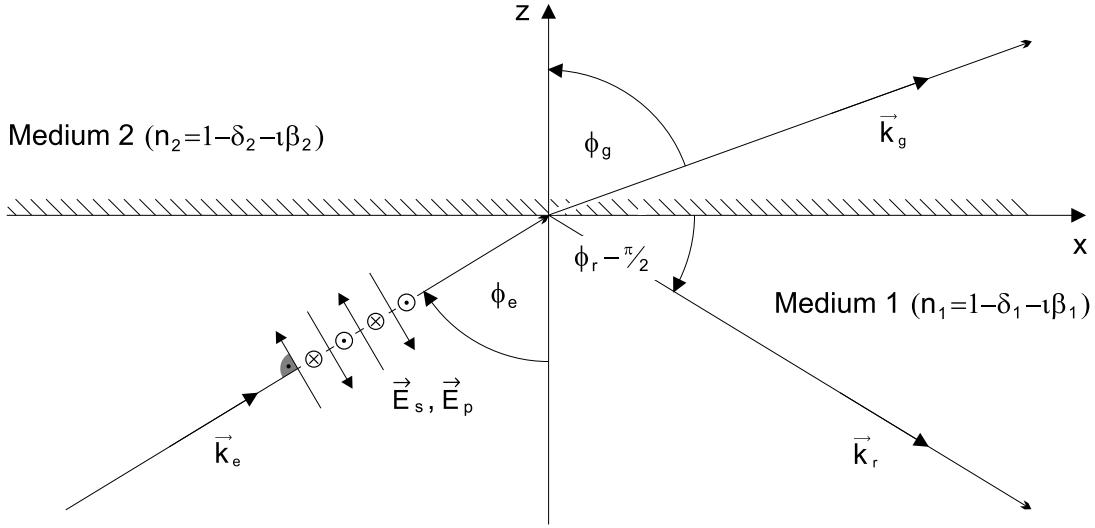


Abbildung 2.3: *Reflexion und Brechung von Röntgenstrahlen an einer Grenzfläche zweier Medien, die als linear, homogen und isotrop vorausgesetzt werden. Einfallende (Index „e“), reflektierte und gebrochene Welle bestehen aus Feldkomponenten \vec{E}_s und \vec{E}_p senkrecht ($\odot\otimes$) und parallel ($\uparrow\downarrow$) zur Einfallsebene.*

Im Extremfall nahezu streifenden Einfalls wäre daher mit einem absoluten Winkelfehler von ~ 1 mas, also in der Größenordnung der angestrebten Auflösung zu rechnen.

Die anzunehmenden Abweichungen vom absorptionsfreien Brechungswinkel erweisen sich demnach im Regelfall als vernachlässigbar gering, solange der Einfallswinkel moderate Werte ϕ_e nicht überschreitet. Ein signifikanter Einfluss auf die Abbildungsqualität der in dieser Arbeit diskutierten optischen Systeme ist ergo im Allgemeinen nicht zu erwarten und findet demnach vorläufig auch keine weitere Berücksichtigung. Mit $\delta, \beta \ll 1$ ergibt sich nach sukzessiver Reihenentwicklung die praktische Formel $\sin \phi_g \approx n_\Delta \sin \phi_e$, mit $n_\Delta \equiv 1 - (\delta_1 - \delta_2) - i(\beta_1 - \beta_2)$. Der vor allem für die Spiegeloptik wichtige Glanzwinkel $\theta_c \equiv \frac{\pi}{2} - \phi_c$ der Totalreflexion folgt unter der Annahme $\beta_i \rightarrow 0$ zu

$$\theta_c \cong \sqrt{2(\delta_2 - \delta_1)}. \quad (2.12)$$

In der Praxis treten daher, wieder unter Annahme von maximalen Brechungsindizes $\delta \lesssim 5 \times 10^{-4}$, Glanzwinkel von maximal $\sim 2^\circ$, meist aber von deutlich weniger als 1° auf.

Wir kommen nun zu den Fresnel-Formeln für die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten, die sich wiederum wie im Visuellen aus Stetigkeitsforderungen an die tangentialen, stationären Komponenten der elektrischen und magnetischen Felder \vec{E} und \vec{H} errechnen:

$$\left(\frac{E_r}{E_e}\right)_s = \frac{\frac{n_1}{n_2} \cos \phi_e - \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \phi_e}}{\frac{n_1}{n_2} \cos \phi_e + \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \phi_e}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{E_g}{E_e}\right)_s = \frac{2 \frac{n_1}{n_2} \cos \phi_e}{\frac{n_1}{n_2} \cos \phi_e + \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \phi_e}}$$

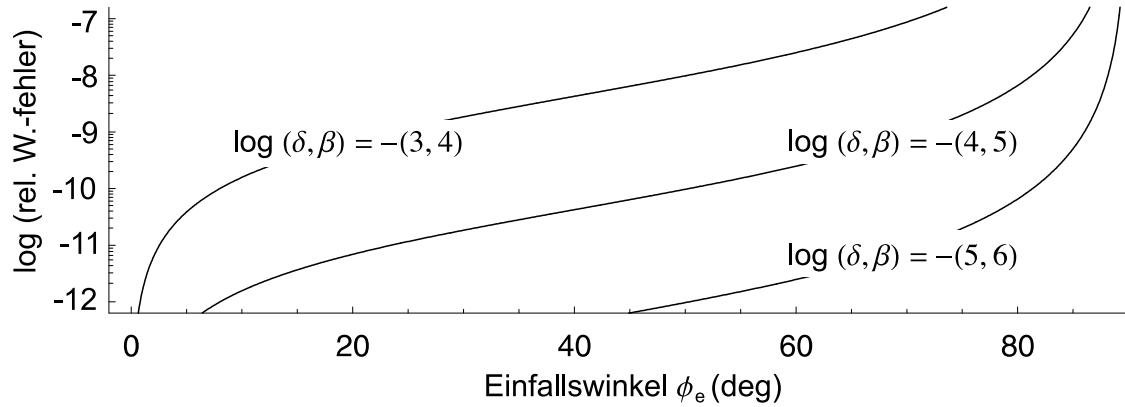


Abbildung 2.4: Einfluss der Absorption auf den Brechungswinkel. In Abhängigkeit vom Einfallswinkel ϕ_e ist die relative Abweichung des Brechungswinkels ϕ_g für diverse (δ, β) angegeben. Die Kurven basieren auf dem in [14] favorisierten Modell.

geben die Amplitudenverhältnisse der zur Einfallsebene senkrechten Komponenten an (s –Polarisation). Entsprechend lauten die Koeffizienten der p –polarisierten Komponente:

$$\left(\frac{E_r}{E_e}\right)_p = \frac{\cos \phi_e - \frac{n_1}{n_2} \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \phi_e}}{\cos \phi_e + \frac{n_1}{n_2} \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \phi_e}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{E_g}{E_e}\right)_p = \frac{2 \frac{n_1}{n_2} \cos \phi_e}{\cos \phi_e + \frac{n_1}{n_2} \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \phi_e}}.$$

Aus der verschwindenden Reflektivität der Parallelkomponente errechnet sich schließlich noch der Brewsterwinkel ϕ_B zu

$$\phi_B \simeq \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (\delta_2 - \delta_1). \quad (2.13)$$

Die sich aus diesen Gleichungen ergebenden Reflexionsverluste, Polarisation und deren Drehung, wie sie im visuellen Spektralbereich stets zu berücksichtigen und bei Bedarf aufwendig zu kompensieren sind, können selbst im Fall großer Einfallswinkel ϕ_e vernachlässigt werden – ein Resultat der außerordentlich schwachen Brechkraft aller Materialien im Röntgenbereich. Abb. 2.5 veranschaulicht diesen Sachverhalt.

2.2 Das paraxiale Beugungsintegral

Im Rahmen der geometrischen Optik ändern die Strahlen somit an Grenzflächen mit sprunghafter Änderung von $n(\vec{r})$ – wie nicht anders zu erwarten – ihre Richtung unstetig, wenn auch nur um einen sehr kleinen Betrag. In diesem Sinn wurde bislang stets von ebenen Wellen ausgegangen, die eine gute Näherung darstellen, solange die laterale Ausdehnung des (Röntgen-)Strahls sehr groß gegen λ ist. Nach Huygens treten jedoch an den

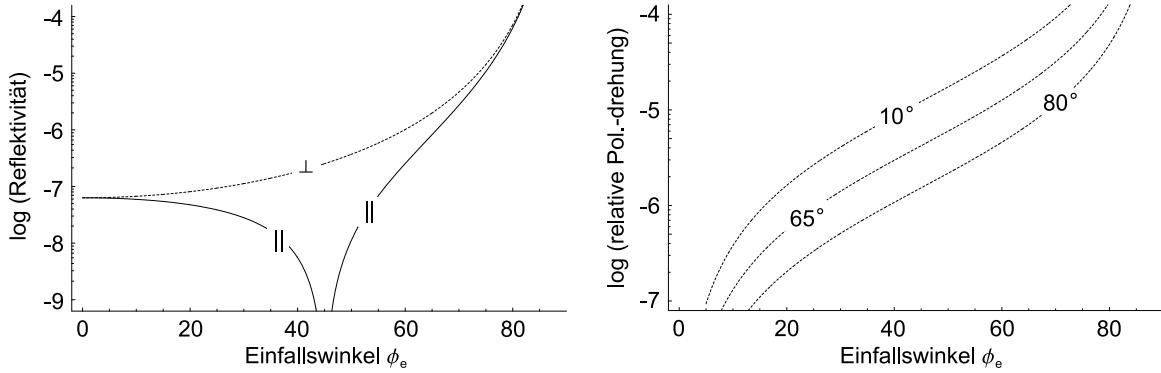


Abbildung 2.5: *Reflektivität und Polarisationsdrehung an Materialoberflächen.* Basierend auf den Fresnel-Formeln sind links die (Intensitäts-)Reflexionskoeffizienten der parallelen (||) und senkrechten (⊥) Komponente des \vec{E} -Feldes als Funktion des Einfalls winkels ϕ_e aufgetragen. Rechts sind die relativen Polarisationsdrehungen für diverse Winkel $\gamma \in \{10^\circ, 65^\circ, 80^\circ\}$ des \vec{E} -Feldes gegen die Einfallsebene angegeben.

z. B. durch Blenden der Dimension D verursachten Begrenzungen Beugungseffekte auf, die ebenso wie Interferenzeffekte die Feldverteilung auf Winkelskalen $\sim \frac{\lambda}{D}$ bestimmen. Wegen $\delta \ll 1$ lässt sich die i.a. etwas komplizierte Beugungstheorie nun allerdings wesentlich vereinfachen. Den Ausgangspunkt bildet erneut Gl. 2.10. Deren allgemeine Lösung besteht wiederum aus einer linearen Superposition ebener Wellen

$$\vec{E}(\vec{r}) \propto \sum_n \vec{A}_n e^{i(\vec{k}\vec{r} + \phi_n)} + cc., \quad (2.14)$$

die aus dem Halbraum $z < z_0$ einfallend, mit Amplituden \vec{A}_n und Phasen, die in kartesischen Koordinaten mit $\vec{r} \equiv (x, y, z)^T$ als

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = xp + yq + z\sqrt{k^2 - p^2 - q^2} \quad (2.15)$$

geschrieben werden können, in $z = z_0$ eine unstetige Ablenkung erfahren. Der Wellenvektor \vec{k} , ausgedrückt durch $(p, q, \sqrt{k^2 - p^2 - q^2})$, soll dann mit der z -Achse $\parallel \vec{e}_z$ einen Winkel $\alpha \equiv \arcsin(k^{-1}\sqrt{p^2 + q^2})$ bilden, der eben wegen $\lambda \ll D$ und $\delta \ll 1$ im folgenden stets als „klein“ vorausgesetzt wird. Man spricht in diesem Fall bei der Beschreibung linsenoptischer Abbildungen von der paraxialen oder Gauß'schen Approximation [14]. $\alpha \ll 1$ rechtfertigt die Entwicklung von Gl. 2.15 nach Potenzen von $\sin \alpha$:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = xp + yq + zk \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{2} - \frac{\sin^4 \alpha}{8} + \dots \right) \quad (2.16)$$

Vernachlässigt man Terme $\geq \mathcal{O}(\sin^4 \alpha)$, faktorisiert die Feldamplitude $\vec{E}(\vec{r})$ gemäß

$$E(\vec{r}) = u(\vec{r}) e^{ikz} \quad \text{mit} \quad u(\vec{r}) \cong \exp \left(i \left(xp + yq - zk \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right) \right). \quad (2.17)$$

Wie erwähnt, setzt eine solche Entwicklung eine genügend kleine Abweichung von \vec{k} gegenüber \vec{e}_z voraus, quantitativ gegeben durch die Forderung

$$zk \frac{\sin^4 \alpha}{8} \ll 1. \quad (2.18)$$

Vergegenwärtigen wir uns nun im Vorgriff auf Kap. 5, dass $\sin \alpha \lesssim R/F \ll 1$ selbst für achsferne Punkte in der Fokalebene einer Optik mit Aperturradius R und Brennweite F gilt, kann die Ungleichung 2.18 in praktisch allen zu behandelnden Fällen der diffraktiven und refraktiven Abbildung mittels Röntgenlinsen als erfüllt angesehen werden.

Dank dieser schwachen Variation von $u(\vec{r})$ mit z gelangen wir zu der vereinfachten, nach Leontovich und Fock benannten parabolischen Wellengleichung für $u(\vec{r})$,

$$\left(\Delta_{x,y} - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) u(\vec{r}) = 0. \quad (2.19)$$

Um Gl. 2.19 zu verifizieren, setze man den Ansatz 2.17 in die allgemeine Wellengleichung 2.8 ein und vernachlässige den ∂_z^2 -Term. Spezielle Lösungen lassen sich nun mit Hilfe des aus der theoretischen Physik wohlbekannten Green-Formalismus aus einer anfänglichen Amplitudenverteilung $u_0(\vec{\sigma})$ finden, die in einer Ebene z_0 gegeben sei:

$$u(\vec{r}) = \int_A u_0(\vec{\sigma}) G(\vec{r} - \vec{\sigma}) d^2\sigma \quad (2.20)$$

Der Vektor $\vec{\sigma}$ repräsentiert dabei die lokalen Koordinaten in der Austrittspupille der Fläche A , während die Green'sche Funktion

$$G(\vec{r} - \vec{\sigma}) \equiv \frac{ik}{2\pi(z - z_0)} e^{-i\frac{k}{2(z - z_0)}(\vec{r} - \vec{\sigma})^2} \quad (2.21)$$

anschaulich gesprochen die einzelnen miteinander interferierenden Beiträge der aus der Apertur austretenden Partialwellen beschreibt. Das allgemeine paraxiale Beugungsintegral

$$E(\vec{r}) = \frac{ik e^{ikz}}{2\pi(z - z_0)} \int_A u_0(\vec{\sigma}) e^{-i\frac{k}{2(z - z_0)}(\vec{r} - \vec{\sigma})^2} d^2\sigma \quad (2.22)$$

wird die Grundlage der Berechnungen zu fokalen Intensitätsverteilungen in Kap. 3 und 4 bilden. $u_0(\vec{\sigma})$ ergibt sich als von der Linsenstruktur modifizierte Signalamplitude.

In ihrer einfachsten Anwendung liefert 2.22 die wohlbekannte Airy-Funktion, als der die Beugung an einer kreisförmigen Apertur beschreibenden Intensitätsverteilung. Um sie abzuleiten, berücksichtigt man für einen lateralen Ortsvektor $\vec{\rho}$ in der Beobachtungsebene $\vec{r} = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$ und wählt $z_0 = 0$. Für $u(\vec{r})$ ergibt sich nun die explizite Form

$$u(\vec{r}) = i \frac{k}{z} e^{-i\frac{k}{2z}\rho^2} \int_0^R \tilde{u}_0(\sigma) e^{-i\frac{k}{2z}\sigma^2} J_0\left(\frac{k}{z}\rho\sigma\right) \sigma d\sigma \quad (2.23)$$

mit $J_0(x)$ als der Besselfunktion nullter Ordnung bzgl. x . Man beachte, dass ρ die laterale Koordinate in der Bildebene beschreibt, \vec{r} jedoch für den Ortsvektor mit Ursprung im

Zentrum der Apertur – oder genauer – der Austrittspupille steht. In der Beobachtungsebene $z = F$ erzeugt eine Eingangsamplitude $\tilde{u}_0(\sigma) = 1$ die Intensitätsverteilung

$$\tilde{I}(\rho) = \left(\frac{2\pi}{\lambda F} \right)^2 \left| \int_0^R e^{-i\frac{\pi}{\lambda F}\sigma^2} J_0 \left(\frac{2\pi}{\lambda F} \rho \sigma \right) \sigma d\sigma \right|^2. \quad (2.24)$$

Zur weiteren Evaluation berücksichtigt man den von $0 \leq \sigma \leq R$ abhängigen optischen Weg einer Elementarwelle von der Apertur zum Beobachtungspunkt. Mittels elementarer geometrischer Betrachtungen findet man

$$R^2 + F^2 = \left(N \frac{\lambda}{2} + F \right)^2 \rightarrow R \approx \sqrt{N\lambda F} \quad \text{für } F \gg N\lambda \quad (2.25)$$

wenn N die Zahl der Halbwellen oder π –Phasen bezeichnet, um die sich die optischen Weglängen des Rand- und Zentralstrahls unterscheiden. In Abb. 2.6 deuten die alternierend grauen und weißen Ringe diese sog. Fresnel-Zonen an. Unter der Annahme $N \ll 1$ – dem

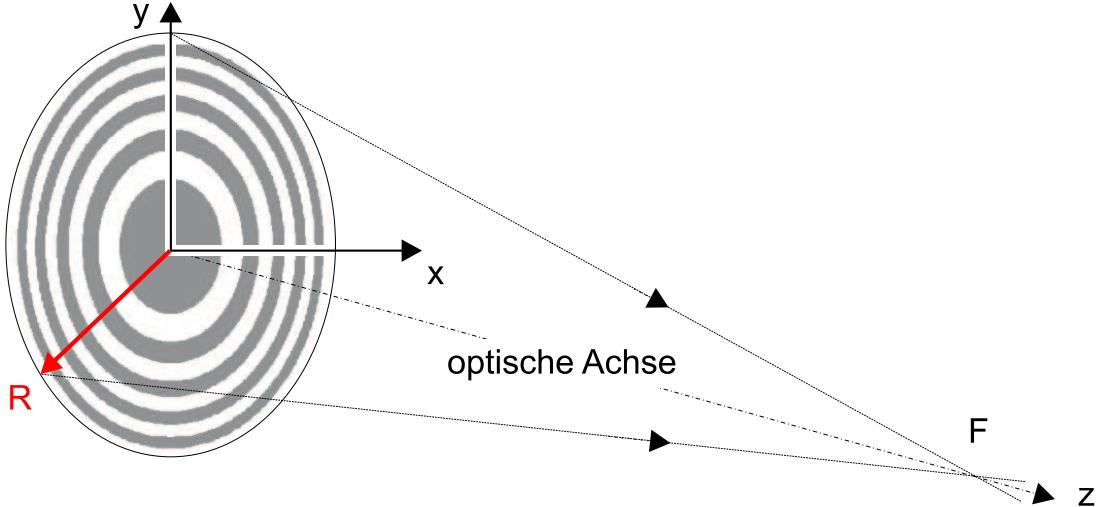


Abbildung 2.6: Beugung an der kreisförmigen Apertur. Vom Brennpunkt F auf der optischen Achse aus betrachtet, erscheint die Öffnung in N Fresnel-Zonen aufgeteilt, hier illustriert am Beispiel $N = 10$. Der Radius R ist rot hervorgehoben.

formalen Kriterium für die Fraunhofer- oder Fernfeldbeugung – verlegt sich der Brennpunkt F virtuell ins Unendliche. Damit folgt schließlich für den reduzierten Radius $v \equiv \frac{N}{R}\rho$ nach der Normierung der Intensitätsverteilung $\tilde{I}(\vec{r}) = |u(\vec{r})|^2$ auf den Wert $I(v=0) = 1$ die auf der Besselfunktion 1. Ordnung J_1 basierende Airy-Funktion

$$I(v) = \frac{1}{(\pi N)^2} |u(\vec{r})|^2 = \left(\frac{2J_1(2\pi v)}{2\pi v} \right)^2. \quad (2.26)$$

Auf ihrer Grundlage lassen sich diverse Kriterien für das Orts- bzw. Winkelauflösungsvermögen einer (Teleskop-)Apertur definieren. Häufig werden Rayleigh-Kriterium, Halbwertsbreite (FWHM) und Energiedurchmesser (HEW, „half energy width“) herangezogen:

Rayleigh-Kriterium. Die Airyfunktion $I(v)$ weist im Anschluss an das zentrale Maximum eine erste Nullstelle bei $v_{Rayleigh}$ auf, die auf jeden Fall die Trennbarkeit zweier benachbarter Beugungsscheibchen gewährleistet. Sie wird daher zumindest in theoretischen Überlegungen die Auflösung $\Delta\epsilon_{Rayleigh} = 2v_{Rayleigh}\frac{\lambda}{R}$ definieren und ist explizit als $\Delta\epsilon_{Rayleigh} = \frac{1}{\pi}\xi_1\frac{\lambda}{2R}$ mit $\xi_1 \approx 3.83$ als erster Nullstelle von J_1 gegeben. Der numerische Wert lautet

$$2v_{Rayleigh} \approx 0.610. \quad (2.27)$$

volle Halbwertsbreite (FWHM). Eine weitere Kenngröße, die sich zur Beschreibung des Auflösungsvermögens heranziehen lässt, ist die HWHM-Halbwertsbreite, bei der $I(v_{HWHM}) = \frac{1}{2}I(0)$ gilt. Die numerische Lösung ergibt sich zu $v_{HWHM} \approx 0.257$. Die Winkelauflösung beträgt demnach

$$2v_{FWHM} \approx 0.514, \quad (2.28)$$

was etwa 84% der Rayleigh-Breite entspricht. Die FWHM-Definition stellt eine besonders enge Definition der Auflösung bereit und eignet sich insbesondere bei scharf begrenzten Gauss-förmigen Punktbildern.

Energiedurchmesser (HEW). Wegen der mitunter vom Profil der ungestörten, monochromatischen PSF abweichenden Beugungsstruktur realer Objektive wird anstelle des Rayleigh-Arguments oder der Halbwertsbreite (FWHM) vor allem in der Astronomie oft die über v integrierte Intensität herangezogen. Sie berücksichtigt weit auslaufende Intensitätsverteilungen, wie sie beispielsweise bei ringförmigen Aperturen auftreten. Abb. 2.7 zeigt die auf den jeweiligen Maximalwert normierten Intensitätsverteilungen solcher Aperturen mit Zentralobstruktion $0 \leq a \leq 1$, wobei $a \cdot R$ den Radius der Abdeckung angibt. Üblicherweise legt man die Halbwertsbreite von 50%

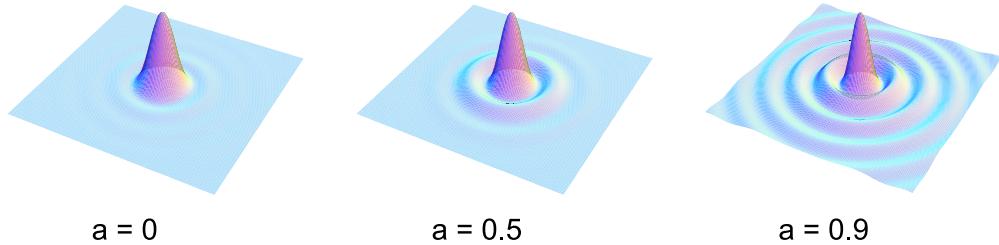


Abbildung 2.7: PSF der Beugung an der abgedeckten Apertur. Normiert auf die jeweilige Peak-Intensität, zeigen die Grafiken mit der relativen Zentralobstruktion zunehmende Nebenmaxima, die Bildqualität und Auflösung beeinflussen.

der in einer Fläche $A = \pi \cdot \chi^2$ eingeschlossenen Energie (encircled energy, „EE“) bzw. Leistung P zugrunde. Die Bestimmungsgleichung für die Auflösung lautet dann

$$P_A(v_{HEW}) = 2\pi \int_0^{v_{HEW}} I(v) v dv = \frac{1}{2\pi} \quad \text{für} \quad 2v_{HEW} \approx 0.535. \quad (2.29)$$

Der Grenzwert π^{-1} auf der rechten Seite steht für den der gewählten Variablen entsprechenden Normierungsfaktor, der $\lim_{\chi \rightarrow \infty} P_A(\chi) = 1$ sicherstellt.

Abb. 2.8 illustriert die Funktion $P_A(v)$ für diverse Obstruktionen $0 \leq a \leq 1$. Zur quanti-

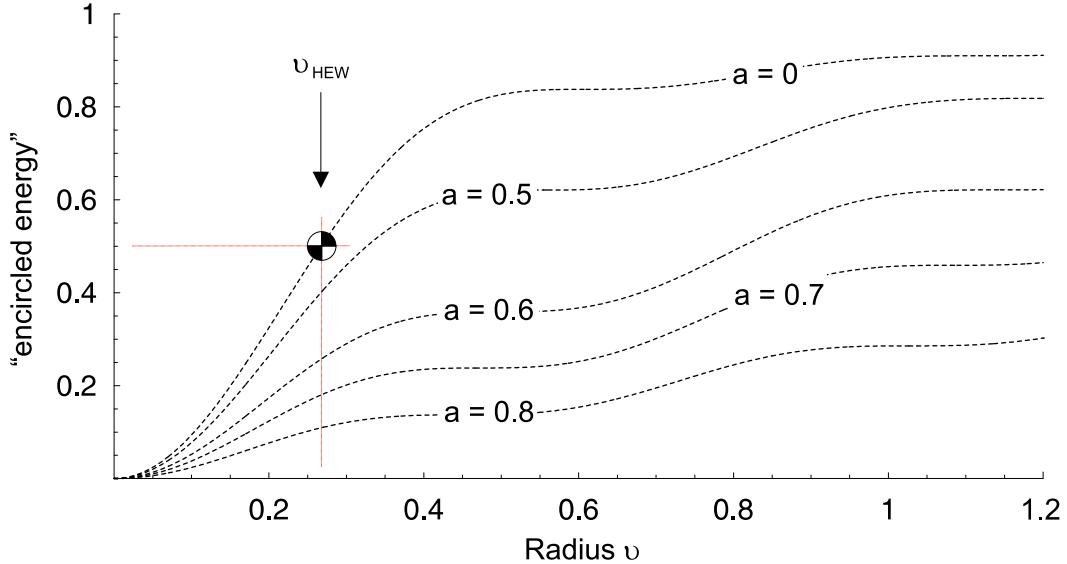


Abbildung 2.8: Leistungsintegral der PSF. Für verschiedene Abdeckungsverhältnisse ist die Funktion $P_A(v_{HEW})$ eingetragen. Die HEW-Auflösung nimmt mit wachsendem a ab.

tativen Beschreibung der Abbildungsqualität eignet sich indes eher die optische Transferfunktion $D(\vec{\omega})$, die mittels einer Fourier-Transformation aus der PSF hervorgeht²:

$$D(\vec{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} I(\vec{v}) e^{-2\pi i(\vec{v} \cdot \vec{\omega})} d^2v, \quad (2.30)$$

mit $\vec{v} = v(\cos \theta, \sin \theta)$. $D(\vec{\omega})$ setzt sich aus der reellen Modulationstransferfunktion (MTF) und einem imaginären Faktor mit der Phasentransferfunktion $P(\vec{\omega}) \in \mathbb{R}$ zusammen,

$$D(\vec{\omega}) = M(\vec{\omega}) e^{iP(\vec{\omega})}, \quad (2.31)$$

wobei $M(\vec{\omega}) \equiv |D(\vec{\omega})|$ gilt. Offensichtlich treten imaginäre Anteile nur für nicht axialsymmetrische Intensitätsverteilungen, also für $I(\vec{v}) \neq I(v)$ auf. Ein solcher Fall ist speziell bei verzerrten Abbildungen achsferner Objekte und asymmetrischen Aperturen gegeben. Im Fall symmetrischer Funktionen $I(v)$ axialer Punktquellen vereinfacht sich $D(\vec{\omega})$ zu

$$M(\omega) = 2\pi \int_0^\infty I(v) J_0(2\pi v \omega) v dv. \quad (2.32)$$

²Detaillierte Ausführungen zur hier knapp beschriebenen optischen Transferfunktion finden sich in [19].

Generell bedarf es zur Bestimmung der Transferfunktion einer numerischen Integration der PSF, lediglich wenige elementare Probleme lassen sich analytisch lösen, so z.B. das der kreisförmigen Blende. Deren auf $M(0) = 1$ normierte MTF errechnet sich also gemäß

$$2\pi^2 \int_0^\infty \left(\frac{2J_1(2\pi v)}{2\pi v} \right)^2 J_0(2\pi v\omega) v dv = \frac{2}{\pi} \left(\arccos\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \frac{\omega}{\omega_0} \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (2.33)$$

mit $\omega_0 = 2$ als der maximal auflösbarer Frequenz, entsprechend einer realen Ortsfrequenz $\nu_0 = 2\frac{N}{R}$ in der Bildebene. Es sei bemerkt, dass dieser Wert den aus dem Rayleigh-Kriterium mit $\nu_{0,R} = (0.61\frac{R}{N})^{-1}$ abgeleiteten um 22% und die aus ν_{HEW} mittels PSF-Integration gewonnene Trennschärfe um $\approx 7\%$ übertrifft und damit als absolute obere Schranke anzusehen ist. Dem Grenzwert ν_0 ist per definitionem $M(\nu_0) = 0$ zugeordnet. Ortsfrequenzen $0 \leq \nu < \nu_0$ werden mit höherem Kontrast wiedergegeben.

Zum Abschluss des Kapitels werden die beiden in dieser Arbeit wesentlichen Größen – geometrische und kritische Zonenzahl – nochmals definiert und kurz erläutert.

geometrische Zonenzahl N . Mit der geometrischen, fortan als „Zonenzahl“ bezeichneten Größe $N > 0$ wird die in Einheiten von π gemessene Phasendifferenz zwischen dem zentral auf der optischen Achse verlaufenden bzw. vom Rand der Apertur einfallenden Strahl bezeichnet. Nach Gl. 2.25 gilt in teleskopischer Anwendung

$$N = \frac{2}{\lambda} F \left(\sqrt{1 + \left(\frac{R}{F}\right)^2} - 1 \right) = \frac{R^2}{\lambda F} + \mathcal{O}\left(\frac{R}{F}\right)^4, \quad (2.34)$$

wenn R den Radius, F Brennweite und λ die Wellenlänge bezeichnet. Im allgemeinen hängt N von λ bzw. der Brennweite ab. Lediglich im Fall der diffraktiven Linse mit linearer Dispersion $F \propto \lambda^{-1}$ bleibt N konstant. Aus praktischen Gründen wird in dieser Arbeit, von wenigen Ausnahmen abgesehen, $N \in \mathbb{N}$ angenommen.

kritische Zonenzahl N_0 . Die in [16] als $N_0 = \frac{\delta}{2\pi\beta}$ eingeführte „kritische Zonenzahl“ lässt sich als effektive, in Einheiten von π gemessene geometrische Zonenzahl einer refraktiven (Sammel-)Linse interpretieren, die im Röntgenbereich konkave Krümmung aufweist. Deren radienabhängige Transmission $T(r)$ ist im Vorgriff auf Kap. 3 durch

$$T(r) = e^{-\frac{4\pi}{\lambda} \beta \frac{r^2}{2\xi}} \quad (2.35)$$

gegeben, wobei ξ für den Krümmungsradius des parabolischen Profils steht. Mit der Brennweite $F \simeq \frac{\xi}{\delta}$ wird ein „kritischer Radius“ zu $R_0 \equiv \sqrt{N_0 \lambda F}$ definiert, so dass

$$T(r) = e^{-\left(\frac{r}{R_0}\right)^2} \rightarrow \frac{1}{e} \quad \text{für} \quad r \rightarrow R_0 \quad (2.36)$$

folgt. Der durch N_0 festgelegte, virtuelle kritische Radius beschreibt somit die bis zu einer Absorptionslänge e^{-1} transparente Apertur. Da N_0 bis auf einen Faktor 2π durch den Quotienten $\frac{\delta}{\beta}$ definiert ist, kann die kritische Zonenzahl auch als Maß für die bei fixer Absorption wirksame Brechkraft angesehen werden.

Kapitel 3

Refraktive und diffraktive Linsen

Im allgemeinen dienen Linsen dazu, eine Wellenfront derart zu modifizieren, dass eine Fokussierung in einen virtuellen oder reellen Brennpunkt erfolgt. Sammellinsen, die den Gegenstand dieses Kapitels bilden, weisen in ihrer elementaren, massiven Ausführung wegen $\text{Re}(n) < 1$ ein konkaves Profil auf, dessen mit zunehmendem Radius rapide anwachsende Absorption Effizienz und Auflösung limitiert. Setzt man nämlich für die Transmission

$$\mathcal{T}(r) = e^{-\frac{4\pi}{\lambda}\beta t(r)}, \quad (3.1)$$

mit der Profildicke $t(r)$, so ergibt sich im einfachsten Fall einer gemäß $t(r) = \frac{r^2}{2\xi}$ parabolischen Linse eine Schwächung $\ln \mathcal{T}(r) \propto -r^2$. Man wird daher versuchen, die Profiltiefe durch Abtragung soweit als möglich zu reduzieren – „soweit als möglich“ deshalb, weil mit der höheren Transparenz modifizierte optische Eigenschaften insbesondere bzgl. der Dispersion einhergehen, die beim Design der Gesamtkonfiguration zu berücksichtigen sind. Wir behandeln zunächst die massive Standardlinse, aus der durch sukzessive Abtragung von Materialschichten zunächst die allgemeine und schließlich die maximal reduzierte Fresnel-Linse hervorgeht, die sich im Extremfall bis zur binären Zonenplatte vereinfachen lässt.

3.1 Eigenschaften der refraktiven Röntgenlinse

Vor der expliziten Diskussion des optischen Verhaltens solcher Elemente bedarf es der Wahl eines geeigneten Profils. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird in der Regel das parabolische Anwendung finden, da es im Rahmen der in Abschn. 2.2 eingeführten Paraxialnäherung analytisch berechenbare und exakte Lösungen liefert¹. In Anlehnung an das Fermat'sche Prinzip erweist sich die parabolische Form als nicht nur die mathematisch einfachste, sondern auch natürlichste Profilfunktion $t(r)$. Fordert man nämlich unter Annahme des Scheitel- oder Fußpunktes der Linse im Koordinatenursprung für die Konstanz des optischen Lichtweges

$$(1 - \delta)t + \sqrt{r^2 + (F - t)^2} = F = \text{const.} \quad (3.2)$$

¹Auf die für die Praxis bedeutsamen Komplikationen und Einschränkungen wird im Zusammenhang mit den diversen Aberrationen eingegangen.

mit der Brennweite F , finden sich die exakten Lösungen der quadratischen Gleichung zu

$$t_{\pm}(r) = \frac{F}{\delta - 2} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \left(1 - \frac{2}{\delta}\right) \left(\frac{r}{F}\right)^2} \right). \quad (3.3)$$

Eine Reihenentwicklung der physikalisch sinnvollen Lösung t_+ nach Potenzen des relativ zu F kleinen Radius r um 0 liefert dann

$$t_+(r) = \frac{1}{2\delta} \frac{r^2}{F} - \frac{\delta - 2}{8\delta^2} \frac{r^4}{F^3} + \mathcal{O}(r^6) \quad (3.4)$$

Unter Verwendung der Definition $\xi \equiv F\delta$ und Vernachlässigung höherer Ordnungen in δ kann die Profilfunktion alternativ als

$$t_+(r) \approx \frac{1}{2} \frac{r^2}{\xi} + \frac{\delta}{4} \frac{r^4}{\xi^3} + \mathcal{O}(r^6) \quad (3.5)$$

geschrieben werden. Das parabolische Profil, das lediglich die niedrigste, quadratische Ordnung in r berücksichtigt, stellt wegen $\delta \ll 1$ für nicht allzu große Linsenradien bereits eine sehr gute Approximation an die nach Fermat exakte Lösung 3.2 dar. Der Konstruktionsparameter ξ wird als „Krümmungsradius“ bezeichnet, aufgrund der formalen Ähnlichkeit mit der Reihendarstellung der *sphärischen* Profilfunktion

$$t_{sph}(r) = \xi - \sqrt{\xi^2 - r^2} = \frac{r^2}{2\xi} + \frac{r^4}{8\xi^3} + \mathcal{O}(r^6). \quad (3.6)$$

In zweiter Ordnung bzgl. r fallen somit parabolische und sphärische Linsenform zusammen, während der vergleichsweise starke Korrekturbeitrag dritter Ordnung in r der sphärischen Version zu signifikanten Abweichungen vom parabolischen Modell bei stark gekrümmten Linsen führt (Abb. 3.1). Allgemein wird eine beliebige axialsymmetrische Linsenform durch

$$t(r) = \frac{r^2}{2\xi} + (1+b) \frac{r^4}{8\xi^3} + \mathcal{O}(r^6) \quad (3.7)$$

mit einem die Abweichung vom sphärischen Typ charakterisierenden Parameter $b \in \mathbb{R}$ beschrieben [13]. Wo weder parabolische noch sphärische Linsen Anwendung finden, kommen bisweilen quasi aberrationsfreie aplanatische Ausführungen zum Einsatz, die im Röntgenbereich nahezu bikonkaver Natur sind und mit $b_{apl} \gtrsim -1$ der parabolischen Form ebenfalls sehr nahe kommen. Abb. 3.1 illustriert die verschiedenen Profile.

Den weiteren Berechnungen liegt die rotationssymmetrische Linsen-Konfiguration zugrunde, die eine wesentliche Vereinfachung des allgemeinen Beugungsintegrals 2.22 ermöglicht. In Anknüpfung an die Ausführungen in Abschn. 2.2 sei Gl. 2.23 als Ausgangspunkt gewählt. Unter Berücksichtigung der paraxialen Näherung kann nun die Feldamplitude unmittelbar hinter der Linse in der Austrittspupille als $\tilde{u}(\sigma) = \tilde{u}_0 e^{-ik(n-1)t(\sigma)}$ geschrieben werden [16]. Setzt man weiter für die Eingangsamplitude o.B.d.A. $\tilde{u}_0 = 1$ und wie üblich $n \equiv 1 - \delta - i\beta$, präsentiert sich die Amplitude $\tilde{u}(\sigma)$ schließlich als

$$\tilde{u}(\sigma) = e^{-i \frac{k}{2q_\lambda} \sigma^2} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{q_\lambda} \equiv -\frac{1}{F_r(\lambda)} \left(1 + \frac{i}{2\pi N_0(\lambda)} \right), \quad (3.8)$$

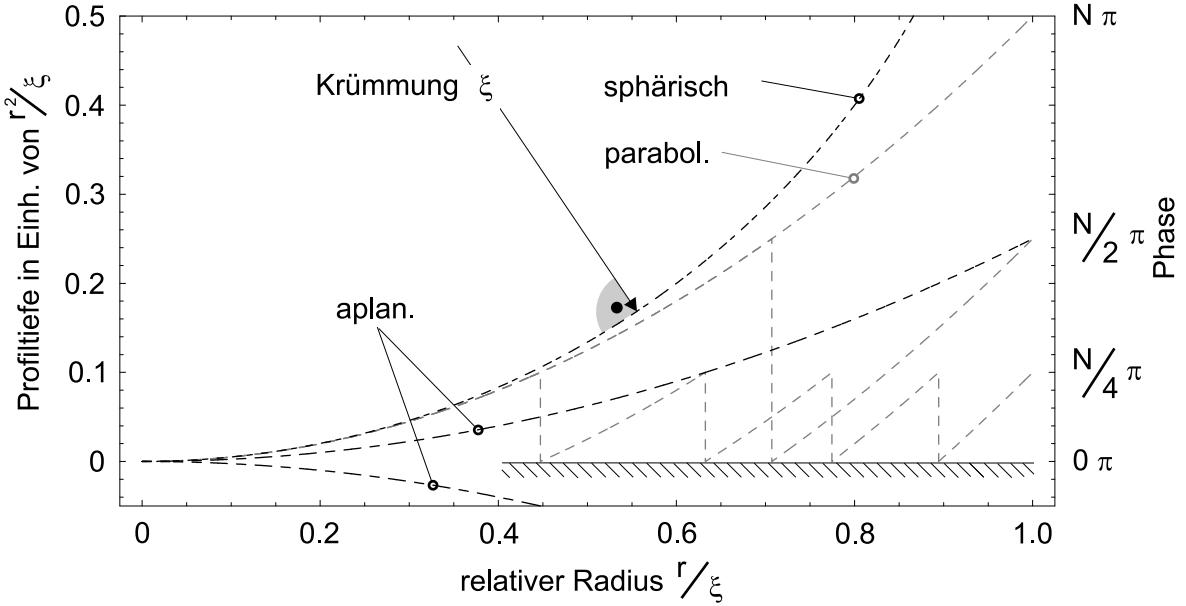


Abbildung 3.1: Varianten konkaver Linsenprofile. Insbesondere die parabolische Oberfläche lässt sich einfach durch sukzessive Materialabtragung in eine Fresnel-Linse verwandeln (grau). Bei Bedarf kann alternativ auf sphärische oder aplanatische Profile zurückgegriffen werden. Letztere weisen im Röntgenband eine nahezu bikonkave Form auf.

wobei mit der Funktion $\frac{1}{q_\lambda}$ eine gängige Abkürzung der Gauss'schen Optik verwandt wurde. Weiterhin steht $F_r(\lambda) = \frac{\xi}{\delta(\lambda)}$ für die *refraktive* Brennweite, die sich im allgemeinen von der diffraktiven Fokaldistanz unterscheidet. Nach Einsetzen in das Beugungsintegral ergibt sich

$$u(\vec{r}) = i \frac{k}{z} e^{-i \frac{k}{2z} \rho^2} \int_0^R e^{-i \frac{k}{2} \left(\frac{1}{q_\lambda} + \frac{1}{z} \right) \sigma^2} J_0 \left(\frac{k}{z} \rho \sigma \right) \sigma d\sigma. \quad (3.9)$$

Nimmt man nun $F_c \equiv F(\lambda_c)$ für eine zentrale Wellenlänge λ_c an, schreibt sich der Krümmungsradius als $\xi = F_c \cdot \delta(\lambda_c)$. Damit folgt für die refraktive Dispersion

$$F_r(\lambda) = F_c \frac{\delta(\lambda_c)}{\delta(\lambda)} \quad \text{oder} \quad F_r(E) \simeq F_c \left(\frac{E}{E_c} \right)^2, \quad (3.10)$$

aufgrund Gl. 2.5. Unter Beachtung dieser Relation, der Konvention $N_0(\lambda) \rightarrow N_0$ und mit Hilfe der Zonenzahl $N = N(\lambda_c)$ resultiert daraus die Beugungsamplitude

$$u(\vec{r}) = 2\pi i \frac{\psi}{\zeta} \frac{N}{R^2} e^{-i\pi \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 N \frac{\psi}{\zeta}} \int_0^R e^{-i\pi \left(\frac{\sigma}{R} \right)^2 N \left(\frac{\psi}{\zeta} - \frac{1}{\psi} \left(1 + \frac{i}{2\pi N_0} \right) \right)} J_0 \left(2\pi v \frac{\psi}{\zeta} \frac{\sigma}{R} \right) \sigma d\sigma. \quad (3.11)$$

Im Sinn einer vereinfachten Darstellung wurden hier für die relative Energie bzw. Fokaldisanz die Bezeichnungen

$$\psi \equiv \frac{E}{E_c} \quad \text{und} \quad \zeta \equiv \frac{z}{F_c} \quad (3.12)$$

eingeführt, die im weiteren Verlauf der Arbeit beibehalten werden. Setzt man nun noch $\tau \equiv \frac{\sigma}{R}$ ein, ergibt sich die nach Gl. 2.26 normierte Intensitätsverteilung $I(\vec{r}) \propto |u(\vec{r})|^2$ zu

$$I(\vec{r}) = \left(2\frac{\psi}{\zeta}\right)^2 \left| \int_0^1 e^{-i\pi\tau^2 N\left(\frac{\psi}{\zeta} - \frac{1}{\psi}\left(1 + \frac{i}{2\pi N_0}\right)\right)} J_0\left(2\pi v \frac{\psi}{\zeta} \tau\right) \tau d\tau \right|^2. \quad (3.13)$$

Eine besonders kompakte, wenn auch nach wie vor numerisch zu lösende Form nimmt die Intensitätsverteilung für $E = E_c$ im Fokus $\vec{r} = (\rho, F)$ an, wobei $F = F_c$ gesetzt wurde,

$$I_s(v) = \left| 2 \int_0^1 e^{-\frac{s}{2}\tau^2} J_0(2\pi v \tau) \tau d\tau \right|^2. \quad (3.14)$$

Die Punktbildfunktion hängt nun nur noch vom Parameter $s \equiv \frac{N}{N_0}$ ab. Ausgehend von der PSF einer idealen Apertur im Grenzfall $s \rightarrow 0$ geht das Beugungsbild erwartungsgemäß für wachsende s allmählich in die Gauss'sche Form über. Die beiden Grenzfälle der PSF sind in Abb. 3.2 illustriert. Aus der lateralen Intensitätsverteilung lässt sich die Orts- oder

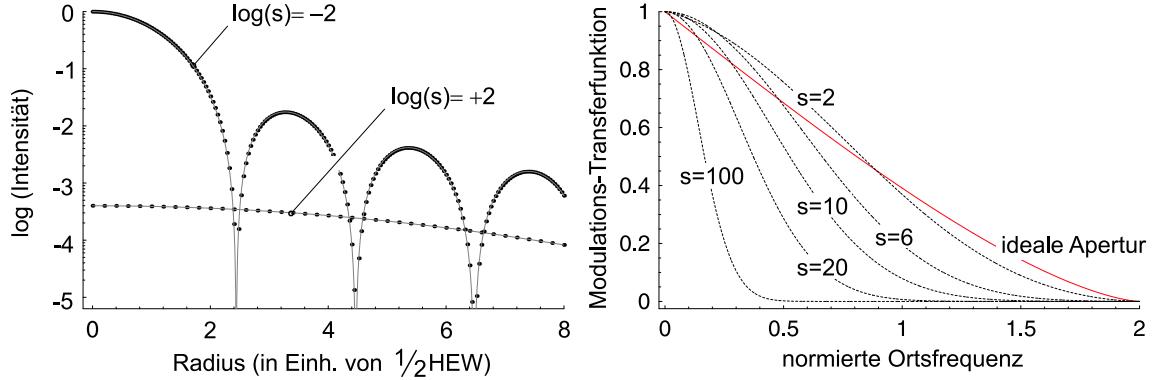


Abbildung 3.2: *PSF und MTF massiver Linsen. Beide Funktionen werden vom Parameter $s \equiv \frac{N}{N_0}$ bestimmt. In den Grenzfällen $s \rightarrow 0$ und $s \rightarrow \infty$ resultieren laterale Intensitätsverteilungen vom Airy- bzw. Gauss-Typ (links). Der MTF ist das moderate Tiefpass-Verhalten stark absorbierender Linsen zu entnehmen (rechts).*

Winkelauflösung ermitteln. Wiederum soll die integrierte und auf $P_s^{(tot)} = 1$ normierte Leistung („encircled energy“) als universelles Kriterium dienen,

$$\frac{1}{\pi} P_s(v_{HEW}) = 2\pi \int_0^{v_{HEW}} I_s(v) v dv = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{s} (1 - e^{-s}) = \frac{1}{2\pi} P_s^{(tot)}. \quad (3.15)$$

Gemäß Abb. 3.3 bleibt die Auflösung $2v_{HEW}$ für $s \lesssim 1$ auf dem ungefähr konstanten Niveau $\chi_{EE} = 0.535$, um für $s \gtrsim 10$ wie \sqrt{s} anzusteigen. Zur analytischen Ableitung dieses Sachverhalts betrachte man erneut das Beugungsintegral 3.14. Für große s liefert der Integrand wegen des Exponentialterms nur im Bereich $\tau \gtrsim 0$ wesentlich von Null verschiedene Beiträge, es gilt daher in guter Näherung

$$I_s(v) \approx \left| 2 \int_0^\infty e^{-\frac{s}{2}\tau^2} J_0(2\pi v \tau) \tau d\tau \right|^2 = [...] = \left(\frac{2}{s} e^{-\frac{2}{s}(\pi v)^2} \right)^2. \quad (3.16)$$

Die Integration dieser Punktbildfunktion Gauss'schen Typs in $[0, v_{HEW}]$ liefert explizit die parametrisch von s abhängige Leistung $P_s(v_{HEW})$,

$$2\pi \int_0^{v_{HEW}} \left(\frac{2}{s} e^{-\frac{2}{s}(\pi v)^2} \right)^2 v \, dv = [...] = \frac{2}{s} \left(1 - e^{-\frac{4}{s}(v_{HEW} \cdot \pi)^2} \right) = \frac{1}{\pi} P_s(v_{HEW}), \quad (3.17)$$

so dass sich schließlich die Halbwertsbreite v_{HEW} aus dem Vergleich mit Gl. 3.15 gemäß

$$P_{s \gg 1}(v_{HEW}) \approx \frac{1}{2s} \curvearrowright v_{HEW}|_{s \gg 1} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{s}{4} \ln 2 \right)^{\frac{1}{2}} \propto \sqrt{s} \quad (3.18)$$

ergibt. Nun sagt die laterale Auflösung noch nichts über die *Güte* aus, mit der die Ob-

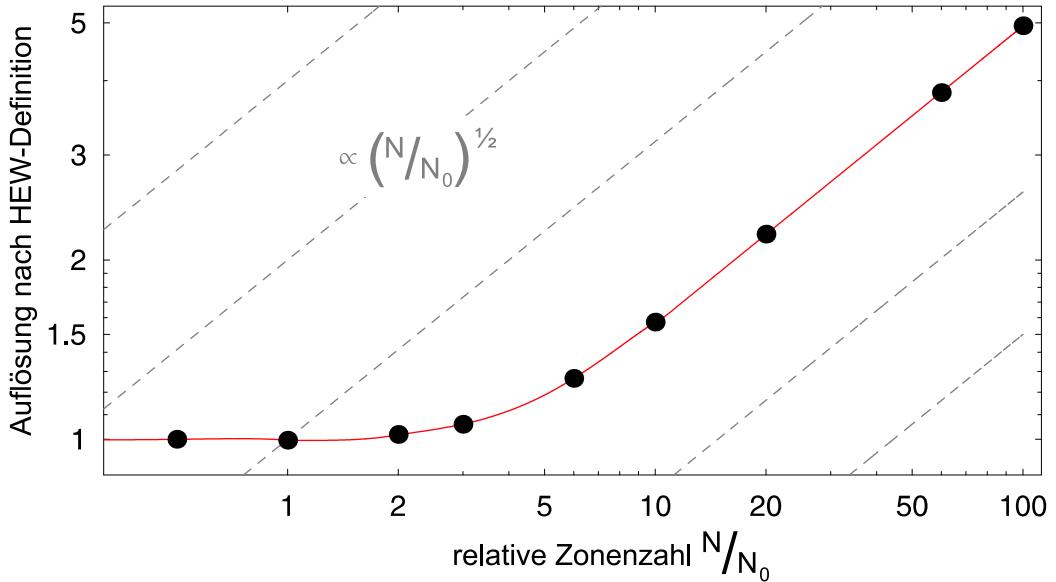


Abbildung 3.3: *Laterale Auflösung der massiven Linse. Nach HEW-Definition gestattet die refraktive Ausführung eine beugungsbegrenzte Abbildung, solange $\frac{N}{N_0} \lesssim 1$. Für $\frac{N}{N_0} = 2$ nimmt der PSF-Durchmesser um $\approx 2\%$ ab, um für $\frac{N}{N_0} \gtrsim 10$ wie $\sqrt{N/N_0}$ anzuwachsen.*

pektstrukturen auf den unterschiedlichen realen Längenskalen $2\rho_{min} \leq 2\rho < \infty$ abgebildet werden, wobei $2\rho_{min}$ der lateralen Auflösungsgrenze $2v_{HEW}$ entspricht.

In Abb. 3.3 sind die Transferfunktionen zu diversen Absorptionsparametern s eingetragen. Während – wie nicht anders zu erwarten – die Übertragungsqualität hoher Raumfrequenzen zu größeren Werten s hin abnimmt, erfahren kleinen Frequenzen eine geringfügige Aufwertung. Die absorptionsbehaftete Röntgenlinse stellt also einen – wenn auch schwach ausgeprägten – Tiefpass dar, als Konsequenz der absorptionsbedingt unterdrückten Beugung an der Aperturberandung.

Die Übergangszone $1 \lesssim \frac{N}{N_0} \lesssim 10$ führt auf ein Optimierungsproblem bzgl. der *absoluten* lateralen Vergrößerung einer massiven Röntgenlinse. Nach Abb. 3.3 folgt der „Radius“ des

Beugungsscheibchens in reduzierten Koordinaten einem funktionalen Verlauf von der Form

$$v_{HEW} = \frac{\Delta\epsilon_{HEW}}{2} \cdot f\left(\frac{N}{N_0}\right) \quad \text{mit } \Delta\epsilon_{HEW} \approx 0.535, \quad (3.19)$$

wobei $f(s)$ die stetige und asymptotisch lineare Funktion in s beschreibt. v_{HEW} geht oberhalb von $\frac{N}{N_0} \sim 1$ herum vom konstanten Optimum in den absorptionsdominierten Bereich über. In *realen* Koordinaten gilt somit für den auf den Radius R bezogenen PSF-Radius ρ_{HEW} unter Verwendung von $N = N(E) = N_c \frac{E_c}{E}$

$$\frac{\rho_{HEW}}{R} = \frac{\Delta\epsilon_{HEW}}{2} \frac{1}{N_c E_c} \frac{E}{E_c} \cdot f\left(\frac{N_c}{N_0(E)} \frac{E_c}{E}\right). \quad (3.20)$$

Leider entzieht sich diese Gleichung wegen des teilweise nicht-analytischen Verlaufs der Funktion f einer einfachen rechnerischen Behandlung. In Tab. 3.1 sind die numerisch ermittelten unteren Schranken an das Auflösungsvermögen diverser Linsenmodelle zusammen mit dem jeweiligen Wirkungsgrad P_N aufgelistet. Wie die Differentiation von Gl. 3.20 unter Anwendung der Kettenregel zeigt, tritt dieses Minimum in $\frac{\rho_{HEW}}{R}$ notwendigerweise gerade im Intervall $1 \lesssim \frac{N}{N_0}(E) \lesssim 10$ auf, also dort, wo nach Abb. 3.3 $f'\left(\frac{N}{N_0}\right) \neq \text{const}$ gilt. Den

E	Be			Li		
	N	$\frac{\rho_{HEW}}{R}$	P_N	N	$\frac{\rho_{HEW}}{R}$	P_N
2 keV	108	3.0×10^{-3}	0.47%	290	1.1×10^{-3}	0.66%
3 keV	245	1.3×10^{-3}	0.54%	700	4.5×10^{-4}	0.73%
4 keV	450	7.1×10^{-4}	0.56%	1380	2.3×10^{-4}	0.65%
5 keV	725	4.4×10^{-4}	0.56%	2345	1.4×10^{-4}	0.50%
6 keV	1080	3.0×10^{-4}	0.52%	3650	9.2×10^{-5}	0.30%

Tabelle 3.1: *Optimierung der Vergrößerung refraktiver Linsen.* Bei gegebener Energie E nimmt die laterale Auflösung, hier in Einheiten des Aperturradius R tabelliert, für eine bestimmte, materialabhängige Zonenzahl N ein Minimum an. Zusätzlich sind die transmissionsbedingten Wirkungsgrade P_N angegeben.

Daten ist eine relative Ortsauflösung bzw. Vergrößerung von $\sim 10^{-4}$ bei fast volliger Absorption ($> 99\%$) und eher kleinen Zonenzahlen $N \sim (10^2 - 10^3)$ zu entnehmen. Trotzdem liefert die Be-Linse für 6 keV und $R = 0.5$ m noch eine Auflösung von 5×10^{-5} arcsec.

Um die axiale Intensitätsverteilung zu bestimmen, geht man wieder von Gl. 3.9 aus; die Integration kann nun wegen $J_0 = 1$ analytisch erfolgen und ergibt mit den oben eingeführten Definitionen für ψ und ζ sowie der obligatorischen Normierung nach Gl. 2.26

$$I(\psi, \zeta) = \left(\frac{1}{\pi N}\right)^2 \frac{1 - 2e^{-\frac{N}{2N_0} \frac{1}{\psi}} \cos\left(\pi N \left(\frac{\psi}{\zeta} - \frac{1}{\psi}\right)\right) + e^{-\frac{N}{N_0} \frac{1}{\psi}}}{\left(1 - \frac{\zeta}{\psi^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\pi N_0} \frac{\zeta}{\psi^2}\right)^2}. \quad (3.21)$$

Nahe des Brennpunkts zur relativen Energie ψ wird die Struktur der Intensitätsverteilung im wesentlichen vom Verhältnis zwischen N und N_0 bestimmt. Die beiden Grenzfälle hoher und vernachlässigbarer Absorption schreiben sich für $\psi = 1$ als

$$\lim_{N \gg N_0} I_{E_c}(\zeta) = \frac{1}{(\pi N)^2 (1 - \zeta)^2 + \left(\frac{N}{2N_0} \zeta\right)^2} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{N \ll N_0} I_{E_c}(\zeta) = \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}N\left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)\right)}{\frac{\pi}{2}N(1 - \zeta)} \right)^2.$$

Den Gleichungen ist die jeweilige Halbwertsbreite (FWHM) der stark bzw. schwach absorbierenden Linse zu entnehmen. Via $\lim_{N \gg N_0} I_{E_c}(\zeta) = \frac{1}{2} \lim_{N \gg N_0} I_{E_c}(0)$ folgt nach kurzer Rechnung

$$\lim_{N \gg N_0} \Delta\left(\frac{z_{\pm}}{F}\right)_{FWHM} = 2\sqrt{2 + (2\pi N_0)^2} (1 + (2\pi N_0)^2)^{-1} \approx \frac{1}{\pi N_0}, \quad (3.22)$$

während im anderen Grenzfall $\lim_{N \ll N_0} I_{E_c}(\zeta) = \frac{1}{2} \lim_{N \ll N_0} I_{E_c}(0)$ zweckmäßig die ersten Nullstellen von $\lim_{N \ll N_0} I_{E_c}(\zeta)$ diesseits und jenseits des fokalen Hauptmaximums herangezogen werden. Minima treten entlang der optischen Achse für $\pi \frac{N}{2} \frac{1}{\zeta} = k_{min}\pi$ auf, mit $k_{min} \in \mathbb{N}$, sofern die Absorption zu vernachlässigen ist. Die dem Fokus nächstgelegenen Nullstellen des \sin -Faktors bei $k_{min} = \frac{N}{2} \pm 1$, entsprechend $z_{\pm 1}^{(min)}$, messen die *vierfache* Fokustiefe (engl.: depth of field, DOF). Mit $\Delta z_{\pm} = F - z_{\pm 1}^{(min)}$ folgt nach kurzer Rechnung

$$\left(\frac{\Delta z_{\pm}}{F}\right)_{min} = \pm \frac{2}{N+2} \approx \pm \frac{2}{N} \quad \text{für } N \gg 1. \quad (3.23)$$

Die optische Feld- oder Schärfentiefe ergibt sich andererseits aus der Forderung, dass der maximale Wellenfrontfehler Δs_{opt} eines um Δz defokussierten Strahls den Wert $\frac{\lambda}{4}$ nicht überschreiten soll, um eine beugungsbegrenzte Abbildung zu erhalten (Rayleigh-Kriterium). Unter Annahme kleiner Beugungswinkel bzw. großer Öffnungsverhältnisse $f \equiv \frac{F}{2R}$ folgt $|\Delta s_{opt}| \approx \frac{1}{8f^2}$ und schließlich mit der numerischen Apertur $NA \cong \frac{R}{F}$

$$(\Delta z_{\pm})_{opt} = \pm \frac{1}{2} \frac{\lambda}{(NA)^2} = \pm \frac{F}{2N}. \quad (3.24)$$

Die gesamte Schärfentiefe beträgt demnach in den beiden absorptionsbedingten Grenzfällen

$$\lim_{N \gg N_0} \left(\frac{\Delta z}{F}\right) = \frac{1}{2\pi N_0} \quad \text{und} \quad \lim_{N \ll N_0} \left(\frac{\Delta z}{F}\right) = \frac{1}{N}. \quad (3.25)$$

Auf ihrer Grundlage lässt sich die spektrale Bandbreite der massiven Röntgenlinse ableiten. Offenbar gilt allgemein für $\Delta E \ll E$ und mit der Dispersion $F(E) \propto \delta^{-1}(E)$

$$F\left(E_c \pm \frac{\Delta E}{2}\right) = F(E_c) \pm \frac{\Delta z_{\pm}}{2} \quad \text{und} \quad \delta\left(E_c \pm \frac{\Delta E}{2}\right) \propto E_c^2 \pm E_c \cdot \Delta E + \left(\frac{\Delta E}{2}\right)^2. \quad (3.26)$$

Daraus errechnet sich die ungefähre spektrale Bandbreite der refraktiven Röntgenlinse zu

$$\lim_{N \gg N_0} \left(\frac{\Delta E}{E} \right) \approx \frac{1}{4\pi N_0} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{N \ll N_0} \left(\frac{\Delta E}{E} \right) = \frac{1}{2N}. \quad (3.27)$$

Da nach Voraussetzung im ersten, absorptionsdominierten Grenzfall die (geometrische) Zonenzahl N die kritische N_0 deutlich übertrifft, beträgt die Fokustiefe des Gauss'schen, stark absorbierenden Typs ein Vielfaches der schwach absorbierenden Version. Im Übergang vom schwach zum stark absorbierenden Typ bestimmt das Verhältnis von N zu N_0 die Ausprägung der Minima längs der optischen Achse. Ausschlaggebend für Lage und Tiefe der Minima ist der Zähler in Gl. 3.21, mit der fokalen Abweichung Δz gegeben durch

$$1 - 2e^{-\frac{N}{2N_0}} \cos \left(\pi N \left(\frac{1}{\zeta} - 1 \right) \right) + e^{-\frac{N}{N_0}} \approx 1 - 2e^{-\frac{N}{2N_0}} \cos \left(\pi N \frac{\Delta z}{F} \right) + e^{-\frac{N}{N_0}}. \quad (3.28)$$

Lage und Intensität der fokalen Minima auf der optischen Achse sind dann mit $n \in \mathbb{Z}$ durch

$$\left(\frac{\Delta z}{F} \right)_n = 2 \frac{n}{N} \quad \text{und} \quad I_n^{(min)} = \left(\frac{1}{\pi N} \right)^2 \frac{1 - 2e^{-\frac{N}{2N_0}} + e^{-\frac{N}{N_0}}}{\left(2 \frac{n}{N} \right)^2 + \left(\frac{1}{2\pi N_0} (1 + 2 \frac{n}{N}) \right)^2} \quad (3.29)$$

gegeben. Abb. 3.4 veranschaulicht die fokusnahe Intensitätsverteilung. Offenbar verschwinden die Minima im Gauss'schen Grenzfall der stark absorbierenden Version mit $N_0 \ll N$.

Bislang wurde stets vom wenigstens unter der Ägide der paraxialen Wellengleichung idealen parabolischen Linsenprofil ausgegangen und – mathematisch exakt – laterales und axiales Beugungsbild eines unendlich fernen Bildpunktes auf der optischen Achse berechnet. Den realen Gegebenheiten insbesondere im Fall großflächiger Aperturen, wie astronomische Anwendungen ihrer mutmaßlich bedürfen, wird dieses vereinfachte Bild im allgemeinen jedoch nicht gerecht. Nicht nur, dass sich bei großen Gesichtsfeldern oder gar Verkippungen des Objektivs der Einfluss von achsfernen Bildfehlern bemerkbar zu machen droht, auch folgt die reale Optik stark gekrümmter Linsen (ein Maß stellt der Quotient $\frac{r}{\xi}$ dar) nicht mehr zwingend der paraxialen Näherung. Im Folgenden seien daher mögliche Aberrationen diskutiert, soweit sie *physikalischen* Ursprungs sind, Konsequenzen *technologischer* Fertigungsfehler werden daher nicht betrachtet.

Die als Folge des Einflusses von Termen $\propto \phi^3$ in $\sin(\phi) = \phi - \frac{1}{3!}\phi^3 + \mathcal{O}(\phi^5)$ bzgl. der (Brechungs-)winkel auftretenden klassischen Bildfehler sind auch als Aberrationen dritter Ordnung oder Seidel-Aberrationen bekannt. Die mathematisch relativ einfache, wenn auch etwas mühsame Herleitung des strahlenoptischen Aberrationsfunktionalen mit den dazugehörigen Koeffizienten erfolgt im Röntgen- analog zum visuellen Spektralbereich und zählt zum Standard der theoretischen Optik. Anhang A bietet einen kurzen Abriss der z.B. in [13] ausführlich beschriebenen Theorie. Hier sollen zunächst die Ergebnisse aufgeführt werden, wie sie auf eine *dünne* Linse *beliebigen* Profils Anwendung finden. Der Begriff der „dünnen“ Linse bezieht sich dabei nicht auf die absolute oder zum Radius relative Dicke, sondern auf deren Verhältnis zur – in teleskopischer Anwendung – Fokaldistanz.

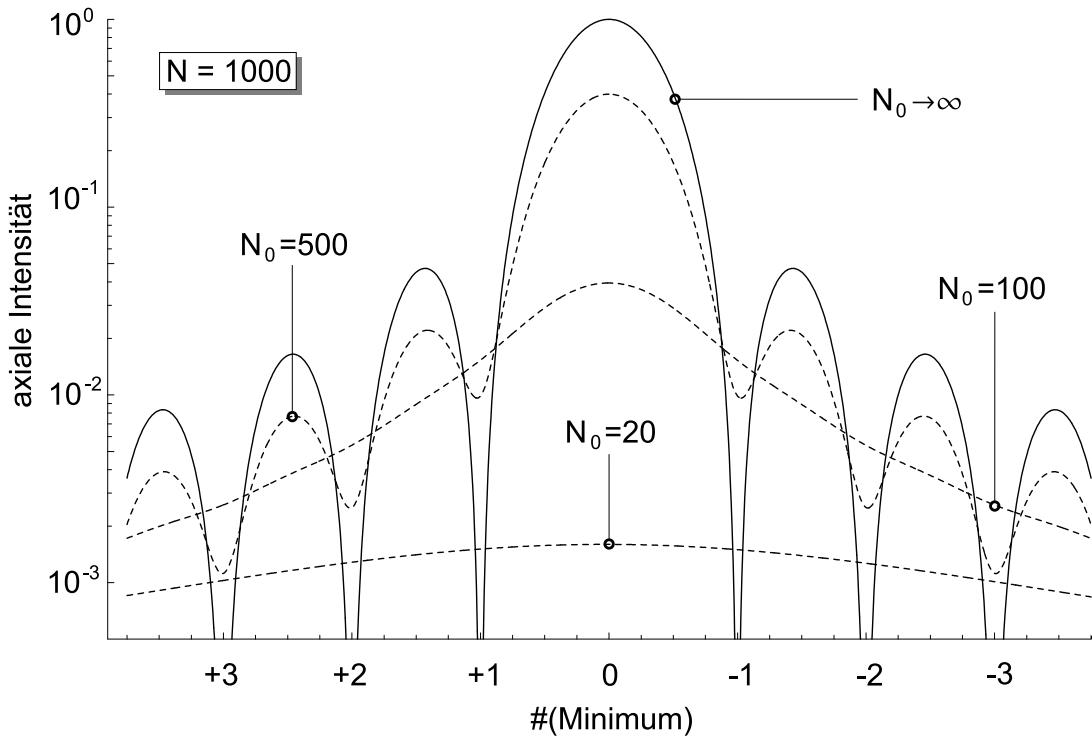


Abbildung 3.4: *Peakeffizienz und axiale Intensität der refraktiven Linse in Abhängigkeit von N_0 . Die maximale Intensität, normiert auf den absorptionsfreien Fall (schwarz) ist für verschiedene $20 \leq N_0 \leq 500$ aufgetragen (strichliert). Für reale $N_0 < \infty$ werden die Minima mit fallendem N_0 zunehmend gedämpft und die Schärfentiefe nimmt zu.*

Unter Verwendung der in Anhang A eingeführten Notation lauten also die kartesischen Komponenten der Seidel-Aberrationen

$$\Delta\epsilon_x = B\sigma^3 \cos\theta - F\phi\sigma^2 (1 + 2\cos^2\theta) + (2C + D)\phi^2\sigma \cos\theta - E\phi^3 \quad (3.30)$$

$$\Delta\epsilon_y = B\sigma^3 \sin\theta - 2F\phi\sigma^2 \sin\theta \cos\theta + D\phi^2\sigma \sin\theta, \quad (3.31)$$

wobei B den Koeffizienten des sphärischen und C den des astigmatischen Bildfehlers bezeichnet, während D die Bildfeldwölbung, E die Verzeichnung und F die Koma beschreibt. Sofern nun die Eintrittspupille mit der Linse zusammenfällt – also insbesondere keine Blende zur Anwendung kommt – gilt für den sphärischen Fehlerfaktor B der dünnen Linse

$$B = \frac{1}{2}\beta + \frac{n^2}{8(n-1)^2}\mathcal{P}^3 - \frac{n}{2(n+2)}\mathcal{K}^2\mathcal{P} + \frac{1}{2n(n+2)}\mathcal{P} \left(\frac{n+2}{2(n-1)}\sigma + 2(n+1)\mathcal{K} \right)^2, \quad (3.32)$$

wobei nun wegen Abb. 2.4 der Brechungsindex n auf seinen Realteil $1 - \delta$ reduziert wird und $\beta \equiv (n-1) \left(\frac{b_1}{\xi_1^3} - \frac{b_2}{\xi_2^3} \right) \in \mathbb{R}$ ein Maß für die Abweichung des Linsenprofils (mit Krümmungsradien ξ_1 und ξ_2) vom sphärischen Standard darstellt. Als weitere Abkürzung findet der

gewissermaßen als Summe der Brechkräfte der beiden Oberflächen zu interpretierende Parameter $\sigma \equiv (n-1) \left(\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} \right)$ Verwendung². Hingegen steht $\mathcal{P} \equiv (n-1) \left(\frac{1}{\xi_1} - \frac{1}{\xi_2} \right)$ einfach für die Brennweite, die sich über die Differenz der beiden Brechkräfte definiert. Schließlich ergibt sich im teleskopischen Fall mit unendlicher Gegenstandsweite $\mathcal{K} \equiv -\frac{1}{2}\mathcal{P}$ als die Abbé-sche Invariante der Linse.

Die Terme C bis F erweisen sich demgegenüber beim Verzicht auf Aperturblenden als kompakt oder verschwinden gar vollständig,

$$C = \frac{1}{2}\mathcal{P} \quad \text{und} \quad D = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \mathcal{P} \quad \text{und} \quad E = 0. \quad (3.33)$$

Besondere praktische Bedeutung kommt noch wegen ihrer asymmetrischen Natur der durch

$$F = \frac{1}{2n} \mathcal{P} \left(\frac{n+1}{2(n-1)} \sigma + (2n+1) \mathcal{K} \right) \quad (3.34)$$

gegebenen Koma zu, die vor allem bei der Abbildung mittels parabolischer Profile nur außerordentlich kleine Gesichtsfelder zulässt. Zumindest im *visuellen* Spektralbereich finden solche Linsen daher und wegen des geringen sphärischen Fehlers gewöhnlich als Kondensoren z. B. in Scheinwerfern Verwendung, nicht aber in abbildenden Systemen. Da sie im Rahmen dieser Arbeit jedoch gewissermaßen als Paradigma firmiert, erscheint eine Analyse der parabolischen *Röntgenlinse* im Hinblick auf ihre Aberrationen sinnvoll. In ihrer plankonkaven Ausführung, definiert via $\xi_1 = \infty$, $\xi_2 \equiv \xi$ und $b_2 = -1$ nehmen die Aberrationskoeffizienten folgende elementare Gestalt an,

$$B = \frac{(\delta-2)\delta^2}{2\xi^3} \quad \text{und} \quad C = \frac{\delta}{2\xi} \quad \text{und} \quad D = \frac{(2-\delta)\delta}{2(1-\delta)\xi} \quad \text{und} \quad F = \frac{(1-\delta)\delta}{2\xi^2}. \quad (3.35)$$

Unter Beachtung von $q \equiv \frac{r}{\xi}$ und mit ϕ als Einfallswinkel resultieren schließlich die expliziten Ausdrücke für die Winkelfehler $\Delta\epsilon_x$ und $\Delta\epsilon_y$,

$$\Delta\epsilon_x = \delta^2 \frac{\delta-2}{2} q^3 \cos \theta + \frac{\delta}{2} (\delta-1) \phi q^2 (1+2\cos^2 \theta) + \frac{\delta}{2} \frac{4-3\delta}{1-\delta} \phi^2 q \cos \theta, \quad (3.36)$$

$$\Delta\epsilon_y = \delta^2 \frac{\delta-2}{2} q^3 \sin \theta + \delta (\delta-1) \phi q^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{\delta}{2} \frac{2-\delta}{1-\delta} \phi^2 q \sin \theta. \quad (3.37)$$

In Abb. 3.5 sind diese Gleichungen für verschiedene Werte von ϕ und jeweils ein Spektrum relativer Linsenradien $0 \leq q \leq 1$ graphisch aufbereitet. Zunächst fällt der keineswegs vernachlässigbare Beitrag des sphärischen Terms auf, der – dargestellt durch konzentrische Kreise – in etwa $\propto \delta^2$ an Bedeutung gewinnt und im axialen Fall mit $\phi = 0$ das Beugungsbild dominiert. Aus dem ersten der fünf Bilder liest man den Grenzwert δ_{max} ab, der auch stärker gekrümmten Linsen mit $q \rightarrow 0.8$ noch eine Winkelauflösung $\Delta\epsilon \approx 1$ mas zubilligt.

²Angesichts der Komplexität der Fragestellung wird hier und im folgenden verschiedentlich von lokalen Variablen wie z.B. β und σ Gebrauch gemacht, deren spezifische Definition im jeweiligen Kontext gilt.

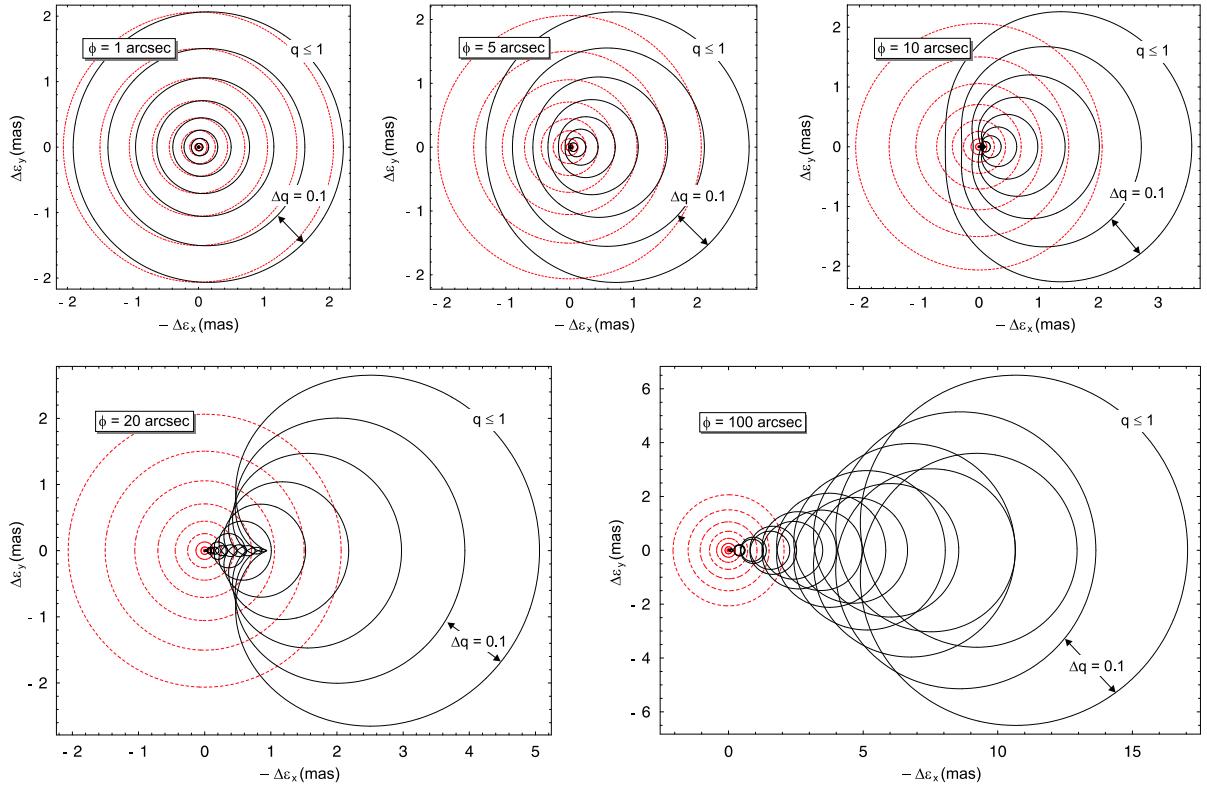


Abbildung 3.5: Seidel-Aberrationen des parabolischen Linsenprofils für verschiedene typische Werte von ϕ und $\delta = 10^{-4}$. Der vom Winkel ϕ unabhängige sphärische Fehler ist zum besseren Vergleich separat rot dargestellt. Die Koma zeichnet im wesentlichen für die bei $\phi \neq 0$ zusätzlich auftretende Verzerrung verantwortlich.

Ferner braucht offensichtlich der Koma bis zu Winkeln, die etwa das $(10^2 - 10^3)$ -fache der angestrebten Auflösung von 10^{-3} arcsec betragen, keine Beachtung geschenkt zu werden. Um deren Effekt zu visualisieren, wurde eine Sequenz mit drei Werten $\phi \in \{1, 10, 100\}$ arcsec und einem typischen, konstanten Brechungsindex $\delta = 10^{-4}$ gewählt. Verkippungen der Linse um ~ 10 arcsec und mehr beeinflussen die durch den sphärischen Fehler ohnehin schon beeinträchtigte Bildqualität offenbar signifikant negativ. Derlei Abschätzungen an die Toleranzgrenzen eines konkreten parabolischen Linsendesigns lassen sich generell besonders einfach aus einer geeigneten Näherung von Gl. 3.36f ablesen. Der bzgl. $0 \leq \theta < \pi$ gemittelte Bildfehler sei unter dem Gesichtspunkt einer einfachen Berechnung als

$$\langle \Delta\epsilon \rangle_\theta = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta\epsilon^2(q, \delta, \theta, \phi) d\theta \right)^{1/2} \approx \frac{\delta}{2} q^3 \sqrt{4\delta^2 + 5 \left(\frac{\phi}{q} \right)^2} \quad \text{für } q \gg \phi \quad (3.38)$$

definiert, da die Integration des *quadratischen* Fehlerbetrages $\Delta\epsilon^2 \equiv (\Delta\epsilon_x)^2 + (\Delta\epsilon_y)^2$ über θ stets analytisch zu bewerkstelligen ist. Im Radikanden wurden einerseits die einzelnen Summanden auf die führende Ordnung in δ reduziert, andererseits Terme $\propto \left(\frac{\phi}{q} \right)^4$ ver-

nachlässtigt. Die mittlere Winkelaberration $\langle \Delta\epsilon \rangle_\theta$ wurde also unter der praktisch zumeist gut erfüllten Annahme $q \gg \phi$ oder, äquivalent, $\delta\phi f \ll \frac{1}{2}$ abgeleitet, wobei f wie immer das Öffnungsverhältnis bezeichnet.

Als vorläufiges Fazit bleibt somit die bzgl. *Winkelfehlern* bedingte Eignung des parabolischen Profils im teleskopischen Einsatz mit Gesichtsfeldern von bis zu etwa 1 arc-sec festzuhalten, allerdings unter der Voraussetzung exakter Ausrichtung des Objektivs. Grundsätzliche Schwierigkeiten bereitet freilich die wegen $\langle \Delta\epsilon \rangle_\theta(\phi=0) \propto q^3$ für nicht zu kleine q beträchtliche sphärische Aberration. Dieser Umstand erscheint auf den ersten Blick als um so erstaunlicher, als *Spiegeloberflächen* mit einem zu r^2 proportionalen Profil jenen Fehler gerade eliminieren. Der Nachweis lässt sich bekanntlich leicht mit Hilfe des Fermat'schen Prinzips des konstanten Lichtweges s_{opt} führen. Die gleiche Forderung an die transmittierende Linse (mit dem Scheitelpunkt im Koordinaten-Ursprung) gestellt, offenbart freilich die bislang übergangene Näherung,

$$s_{opt} = (1 - \delta)z(r) + \sqrt{r^2 + (F - z(r))^2} = F. \quad (3.39)$$

Mit der stets zugrunde gelegten Profilfunktion $z(r) = \frac{r^2}{2\xi}$ ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$F(r) = \frac{\xi}{\delta} + \frac{r^2}{2\xi} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) = F_0 \left(1 + \frac{1}{2}\delta q^2\right), \quad (3.40)$$

wobei $F_0 \equiv \frac{\xi}{\delta}$ die „kanonische“ Brennweite bezeichnet. Wegen $\delta \ll 1$ tritt zwar nur eine geringe, aber für $q \lesssim 1$ doch nicht vernachlässigbare Radienabhängigkeit der Fokallänge $F(r)$ auf. Mittels simpler geometrischer Betrachtungen unter Anwendung des Brechungsgesetzes lässt sich diese Brennweitendispersion auch explizit berechnen. Wir geben an dieser Stelle nur das Resultat an, wie es sich nach einer Reihe von Umformungen ergibt,

$$F(r) = r \left(\frac{1 + \left(\frac{r}{\xi}\right)^2 \frac{1-\delta}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{\xi}\right)^2(1-(1-\delta)^2)}}}{\frac{r}{\xi} \left(1 - \frac{1-\delta}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{\xi}\right)^2(1-(1-\delta)^2)}}\right)} + \frac{r}{2\xi} \right). \quad (3.41)$$

Die reale Brennweite $F(q)$ schreibt sich relativ zur idealen (F_0) nach einer Reihenentwicklung nach Potenzen von δ mit $q = \frac{r}{\xi}$ als

$$F(q) = F_0 \left(1 + \delta q^2 - \mathcal{O}(\delta^2)\right). \quad (3.42)$$

Dass diese longitudinale Aberration tatsächlich mit der lateralen sphärischen Aberration korrespondiert, folgt unmittelbar aus dem Strahlensatz:

$$\frac{r}{F_0 + \Delta z} = \frac{\Delta x}{\Delta z} \rightarrow \Delta x = \frac{r}{\frac{F_0}{\Delta z} + 1} = [...] \approx \delta \xi q^3 \rightarrow \Delta\epsilon \simeq \frac{\Delta x}{F_0} = \delta^2 q^3, \quad (3.43)$$

wobei hier Δx den lateralen, aberrationsbehafteten PSF-Radius in der Fokalebene in strahlenoptischer Näherung bezeichnet und $\Delta\epsilon \equiv \sqrt{(\Delta\epsilon_x)^2 + (\Delta\epsilon_y)^2}$ den Bildfehler nach Gl. 3.36 im Spezialfall $\phi = 0$ beschreibt.

Aus der aberrationsbedingten Radienabhängigkeit der Brennweite geht nun eine obere Schranke an die nominelle Brennweite F_0 hervor. Zu deren Ableitung betrachte man die Fokustiefe $\Delta z_{\pm} \equiv \pm \frac{1}{2} \frac{\lambda}{(NA)^2} = \pm \frac{F_0}{2N}$. Offenkundig spielt sie die Rolle eines Toleranzintervalls, innerhalb dessen auch die fehlerbehaftete reale Brennweite $F(r)$ variieren darf, um eine näherungsweise beugungsbegrenzte Abbildung zu gewährleisten. Es gilt daher

$$F_0 (1 + \delta q^2) \leq F_0 + \frac{F_0}{2N} \quad (3.44)$$

Mit den Definitionen für F_0 und $N \propto \frac{R^2}{2\xi}$ gelangt man schließlich zu der gesuchten Relation,

$$F_0 \leq \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\delta^3} \left(\frac{1}{q} \right)^4. \quad (3.45)$$

Abb. 3.6 illustriert die starke Abhängigkeit von q für die beiden Materialien Li und Be. Zum Vergleich sei noch das Öffnungsverhältnis $f \equiv \frac{F_0}{2R}$ angegeben. Wie wenige Umformungen zeigen, gilt für letzteres nämlich

$$f = \frac{1}{2} \frac{1}{\delta} \frac{1}{q}. \quad (3.46)$$

Auch diese Größe wurde in Abb. 3.6 für verschiedene Energiewerte gegen q aufgetragen. Die Resultate machen deutlich, dass die plankonkav parabolische, massive Röntgenlinse in

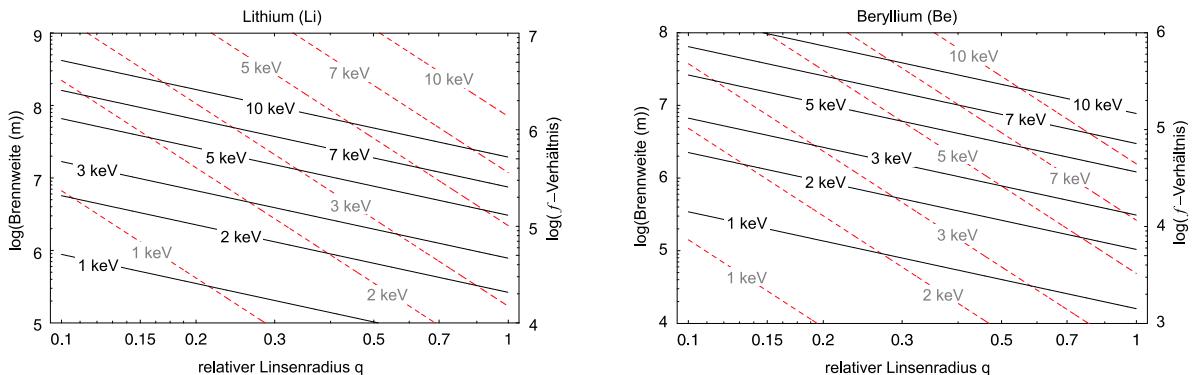


Abbildung 3.6: Öffnungsverhältnisse und maximale Brennweiten refraktiver Li- und Be-Linsen. Die rot strichlierte obere Schranke an die Fokallänge hängt mit $F_0^{(max)} \propto q^{-4}$ empfindlich vom relativen Linsenradius ab, während f nur wie q^{-1} abfällt (schwarz).

dieser Form definitiv nicht zur beugungsbegrenzten Abbildung in astronomischer Anwendung geeignet ist. Darüber hinaus existiert eine fixe, nur von der Brennweite F abhängige obere Schranke an die als Produkt von effektiver Fläche A_{eff} und Bandpass ΔE gemessene

Leistungsfähigkeit eines derartigen Instruments. Diese Größe, im weiteren Verlauf und nur im Kontext dieser Arbeit als „Lichtstärke“ des Objektivs bezeichnet, berechnet sich zu

$$A_{eff} \times \Delta E = T(s) \pi R^2 \cdot \Delta E, \quad (3.47)$$

wobei $s = \frac{N}{N_0}$ und $\Delta E = \frac{E}{2N}$ im transparenten bzw. $\Delta E = \frac{E}{4\pi N_0}$ im absorptionsdominierten Grenzfall nach Gl. 3.27 gilt. Während die Transmission durch $T(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-s})$ gegeben ist, bemisst sich der Radius zu $R^2 = N\lambda F$, so dass letztlich

$$\lim_{N \gg N_0} A_{eff} \times \Delta E = F \frac{hc}{4} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{N \ll N_0} A_{eff} \times \Delta E = \pi F \frac{hc}{2} \quad (3.48)$$

folgt. Abb. 3.7 illustriert die beiden Fälle. Es wird deutlich, dass die erweiterte Tiefenschärfe (DOF) der absorbierenden Linse die transmissiven Einbußen nur teilweise kompensiert.

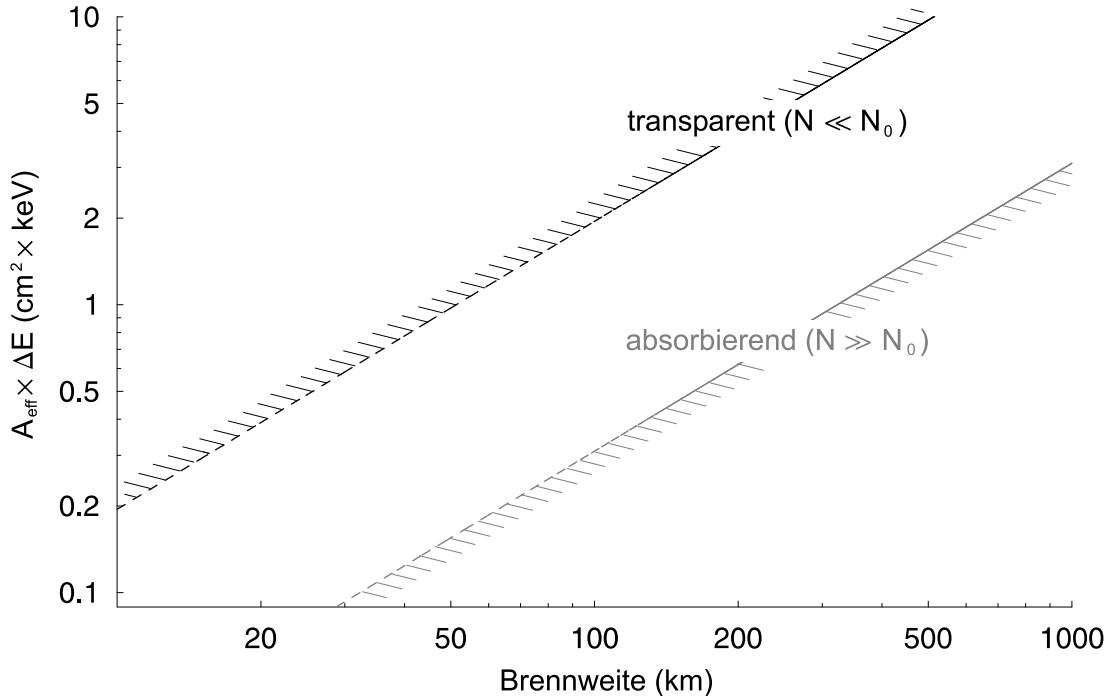


Abbildung 3.7: *Lichtstärke der refraktiven Linse. Das zur Brennweite F proportionale Leistungsvermögen erreicht sein Maximum im fiktiven Fall der 100%-igen Transparenz. Stark absorbierende Modelle erreichen nur $\sim 20\%$ dieses Optimums.*

3.2 Die verallgemeinerte Fresnel-Linse

Offensichtlich beeinträchtigt das spezielle Transmissionsprofil der absorbierenden Röntgenlinse nicht nur die Winkelauflösung, sondern reduziert nach Abb. 3.7 auch das Leistungsvermögen. Wir wenden uns daher nun der in Abb. 3.1 angedeuteten sukzessiven Abtragung

ringförmiger Schichten zu, die eine partiell diffraktive oder interferometrische Struktur bedingt. Speziell im Fall der parabolischen Funktion spricht man dann vom „verallgemeinerten“ Fresnel-Profil³, das mittels eines Stufenparameters $m \in \mathbb{N}$ beschrieben wird. Eine reguläre Fresnel-Struktur weist nun nach der Reduktion inklusive des zentralen Linsensegments $1 \leq \frac{N}{2m} \leq \frac{N}{2}$ Ringe auf, wobei die Forderung $\frac{N}{2m} \in \mathbb{N}$ eine über die gesamte Apertur konstante Ringperiode mit fester Zonenzahl gewährleistet. $m \in \mathbb{N}$ bezeichnet also die Zahl der 2π -Phasen innerhalb eines Rings bei der Blaze-Wellenlänge λ_c , $\Delta\phi = 2\pi m$. Einfachen geometrischen Überlegungen folgend, ergibt sich das Profil der plankonkaven verallgemeinerten Fresnel-Linse zu

$$t_{m,p}(\sigma) = m \frac{\lambda_c}{\delta(\lambda_c)} \left(1 - p + \frac{N_0(\lambda_c)}{2m} \left(\frac{\sigma}{R_0(\lambda_c)} \right)^2 \right), \quad (3.49)$$

wobei die „Blaze“-Wellenlänge λ_c mit dem zugrunde liegenden Krümmungsradius $\xi = \delta F$ assoziiert ist. Ferner zählt $p \in \mathbb{N}$ die Fresnel-Ringe, beginnend mit dem zentralen Segment und $p = 1$. Die Eingangsamplitude lautet unter diesen Voraussetzungen

$$\tilde{u}_{m,p}(\sigma) = e^{\frac{m}{N_0}(p-1)-i\frac{k}{2q_\lambda}\sigma^2} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{q_\lambda} = -\frac{1}{F_r(\lambda)} \left(1 + \frac{i}{2\pi N_0(\lambda)} \right). \quad (3.50)$$

Offenbar ist das Integral in Gl. 2.23 nun durch eine partielle Summe über die $\frac{N}{2m}$ Fresnel-Ringe mit entsprechenden Radien gemäß

$$\int_0^R d\sigma \rightarrow \sum_{p=1}^{\frac{N}{2m}} \int_{\sqrt{\frac{2m}{N}(p-1)}R}^{\sqrt{\frac{2m}{N}p}R} d\sigma \quad (3.51)$$

zu ersetzen. Vor der expliziten Berechnung der räumlichen Intensitätsverteilungen soll unter Verwendung von Gl. 3.8 die Transmission in Abhängigkeit von N_0 und m ermittelt werden. Bezogen auf die absorptionsfreie Leistung $P_0 \propto \pi R^2$ ergibt sich für $\lambda = \lambda_c$

$$\frac{P_{N_0,m}}{P_0} = \frac{2}{R^2} \sum_{p=1}^{\frac{N}{2m}} \int_{\sqrt{\frac{2m}{N}(p-1)}R}^{\sqrt{\frac{2m}{N}p}R} |\tilde{u}_{m,p}(\sigma)|^2 \sigma d\sigma = [...] = \frac{N_0}{2m} \left(1 - e^{-\frac{2m}{N_0}} \right). \quad (3.52)$$

Abb. 3.8 illustriert diese Funktion graphisch in Abhängigkeit vom Verhältnis $\frac{2m}{N_0}$. Man erkennt den mit $N_0 \lesssim 20$ m beginnenden raschen Abfall der Transmission refraktiver Röntgenoptik. Genau genommen erscheint es problematisch, die so berechnete Transparenz ohne Vorbehalt als „Wirkungsgrad“ der Linse zu interpretieren, wirkt doch die generalisierte Fresnel-Linse je nach Grad der Reduktion mehr oder minder als kreisförmiges Interferenzgitter, dessen Beugungsmaxima durch die in r^2 periodische Transmissionsfunktion bestimmt werden, die ihrerseits einer Beeinflussung durch die meist nicht zu vernachlässigende Absorption unterliegt. Wie weiter unten erläutert wird, beschränken die

³Die Bezeichnung wurde in Anlehnung an die von Jean Auguste Fresnel erfundene Optik gewählt [15].

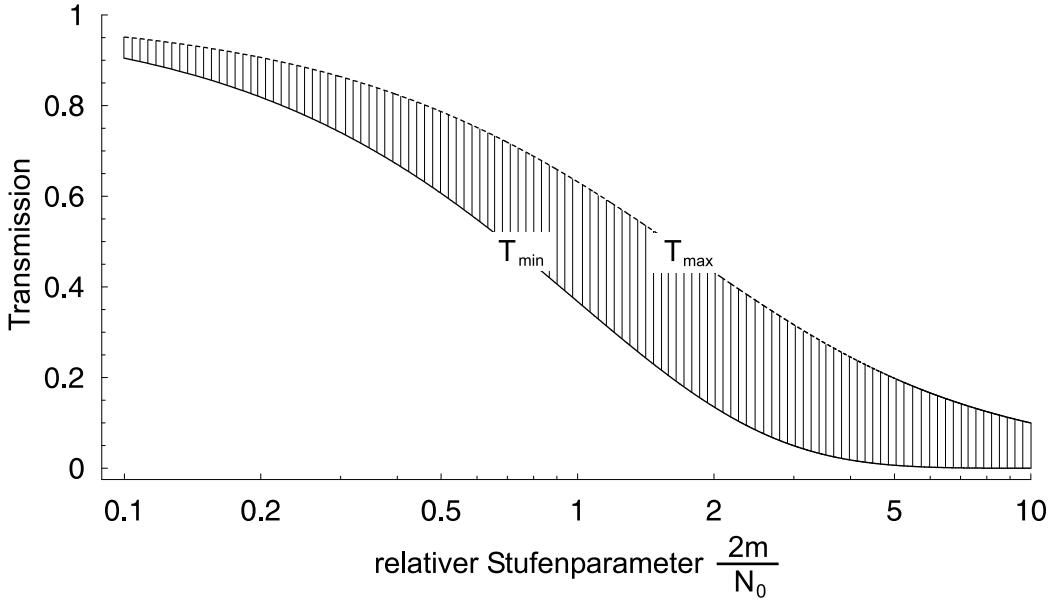


Abbildung 3.8: *Transmission generalisierter Fresnel-Linsen als Funktion des relativen Stufenparameters $\frac{2m}{N_0}$, der „optischen Profildicke“. Die unter Verzicht auf ein die Transparenz apodisierendes Graufilter erzielte Maximaltransmission T_{\max} übertrifft die Mindesttransmission T_{\min} am Ort der größten Profiltiefe um teils mehrere 10%.*

absorptionsbedingten axialen Nebenmaxima als Folge der ungleichmäßigen Transmission die maximal erreichbare Winkelauflösung der Linse. Versieht man aber die Linse beispielsweise auf der ebenen Seite mit einem der ursprünglichen Transmission komplementären Graufilter, gewährleistet die jetzt über σ uniforme Transparenz $T_{\min} = e^{-\frac{2m}{N_0}}$ konstante Bildqualität. Zum Vergleich zeigt Abb. 3.8 diese Kurve ebenfalls.

Das eigentliche Beugungsintegral der allgemeinen Fresnel-Linse lautet wegen Gl. 2.23

$$u(\vec{r}) = i \frac{k}{z} e^{-i \frac{k}{2z} \rho^2} \sum_{p=1}^{\frac{N}{2m}} e^{i \frac{km}{Nq\lambda} R^2(p-1)} \int_{\sqrt{\frac{2m}{N}(p-1)}R}^{\sqrt{\frac{2m}{N}p}R} e^{-i \frac{k}{2} \sigma^2 \left(\frac{1}{q\lambda} + \frac{1}{z} \right)} J_0 \left(\frac{k}{z} \rho \sigma \right) \sigma d\sigma. \quad (3.53)$$

In dessen praktischer Auswertung sollen wie schon in Abschn. 3.1 zwei Fälle unterschieden werden: Zum einen liefert die axiale Intensitätsverteilung mit $\rho = 0$ Erkenntnisse über grundsätzliche Funktionsweise, Fokustiefe und Beugungsordnungen, zum anderen geben Punktbild- und Transferfunktionen in der Fokalebene $z = F$ Aufschluss über die Bildqualität im Sinn von Auflösungsvermögen und Kontrast.

Auf der optischen Achse, um vorläufig den ersten Aspekt zu behandeln, gilt $J_0(0) = 1$, ein Umstand, der wieder die analytische Integration von Gl. 3.53 erlaubt. Nach einer

längerer Rechnung gelangt man unter Beachtung von $I(\vec{r}) \propto |u(\vec{r})|^2$ zu

$$\tilde{I}_m(\lambda, z) = \frac{1 - 2e^{-\frac{m}{N} \left(\frac{R}{R_0(\lambda)}\right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda z} \frac{m}{N} R^2 \left(1 - \frac{z}{F_r(\lambda)}\right)\right) + e^{-2\frac{m}{N} \left(\frac{R}{R_0(\lambda)}\right)^2} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} \frac{1}{2} R^2\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} \frac{m}{N} R^2\right)}\right)^2}{\left(1 - \frac{z}{F_r(\lambda)}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\pi N_0(\lambda)} \frac{z}{F_r(\lambda)}\right)^2}.$$

Aus dieser Darstellung wird ersichtlich, dass der Stufenparameter m explizit nur via $\frac{m}{N}$ eingeht und somit auch als Reduktionsfaktor bzgl. der Zonenzahl angesehen werden kann. Zur numerischen bzw. graphischen Auswertung wird erneut angenommen, dass die Funktion $F_r(\lambda)$ der in Kap. 2 erläuterten quadratischen Abhängigkeit in λ gehorcht. Setzt man also $\psi \equiv \frac{E}{E_c}$ und $\zeta \equiv \frac{z}{F_c}$, so lässt sich die axiale Intensitätsverteilung als

$$\tilde{I}_m(\psi, \zeta) = \frac{1 - 2e^{-\frac{m}{N_0} \frac{1}{\psi}} \cos\left(2\pi m \left(\frac{\psi}{\zeta} - \frac{1}{\psi}\right)\right) + e^{-2\frac{m}{N_0} \frac{1}{\psi}} \left(\frac{\sin\left(\pi \frac{N}{2} \frac{\psi}{\zeta}\right)}{\sin\left(\pi m \frac{\psi}{\zeta}\right)}\right)^2}{\left(1 - \frac{\zeta}{\psi^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\pi N_0} \frac{\zeta}{\psi^2}\right)^2} \quad (3.54)$$

schreiben. Der zweite, die \sin -Terme enthaltende Faktor repräsentiert die Interferenzen zwischen den Amplitudenbeiträgen der einzelnen Fresnel-Ringe, während der Nenner des ersten Faktors den refraktiven Fokus beschreibt. Im Hauptfokus, mit $\psi = 1 = \zeta$ gilt

$$\lim_{N_0 \rightarrow \infty} \tilde{I}_m(\psi, \zeta) = (\pi N)^2, \quad (3.55)$$

unabhängig von m . Wie bisher wird $\tilde{I}_m(\psi, \zeta)$ fortan auf diesen Wert normiert, so dass sich

$$I_m(\psi, \zeta) = \frac{1 - 2e^{-\frac{m}{N_0} \frac{1}{\psi}} \cos\left(2\pi m \left(\frac{\psi}{\zeta} - \frac{1}{\psi}\right)\right) + e^{-2\frac{m}{N_0} \frac{1}{\psi}} \left(\frac{\sin\left(\pi \frac{N}{2} \frac{\psi}{\zeta}\right)}{\sin\left(\pi m \frac{\psi}{\zeta}\right)}\right)^2}{(\pi N)^2 \left(1 - \frac{\zeta}{\psi^2}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{N}{N_0} \frac{\zeta}{\psi^2}\right)^2} \quad (3.56)$$

ergibt. Aufgrund der Struktur des Interferenzfaktors stellt $j \equiv m \frac{\psi}{\zeta} \in \mathbb{N}$ offenbar eine notwendige Bedingung für Maxima dar. Ferner sei $\omega \equiv \frac{m}{\psi}$ definiert. Außerdem erweist es sich vorübergehend als zweckmäßig, den Einfluss der Absorption zu vernachlässigen,

$$I_{j,m}(\omega) = \left(\frac{\sin(\pi(j - \omega))}{\pi(j - \omega)}\right)^2 \left(\frac{j}{m}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{j}{m}\right)^2 \quad \text{für } \omega \rightarrow j \in \mathbb{N}. \quad (3.57)$$

Die eigentlichen Hauptmaxima („Foki“) unterliegen der zusätzlichen Bedingung $\omega = j$ oder $\zeta = \psi^2$. Offenbar gestatten somit große Werte m zahlreiche Energiewerte $E_j > E_c$, für die die Linse eingesetzt werden kann,

$$E_j = E_c \frac{m}{j} \quad \text{mit } j \in \mathbb{N} \quad \text{und } m < \frac{N}{2}. \quad (3.58)$$

Die Interferenzbedingung und damit die diskrete Verteilung der Maxima verlieren natürlich im Sonderfall der rein refraktiven Linse mit $m = \frac{N}{2}$ ihre Grundlage. Weitgehend reduzierte

Fresnel-Linsen mit $m \gtrsim 1$ bleiben in ihrer Anwendung hingegen mehr oder minder auf $E_j \leq E_c$ beschränkt. Vergegenwärtigt man sich, dass $F_j = F_c \left(\frac{m}{j} \right)^2$, so erweist sich die Gesamtleistung im zur Energie E_j gehörigen Fokus unter Vernachlässigung der Absorption als unabhängig von j , da die laterale Ausdehnung der PSF linear mit der Brennweite skaliert. Abb. 3.9 vermittelt einen graphischen Eindruck der „Spektralformel“ 3.58. Gl. 3.56 liefert

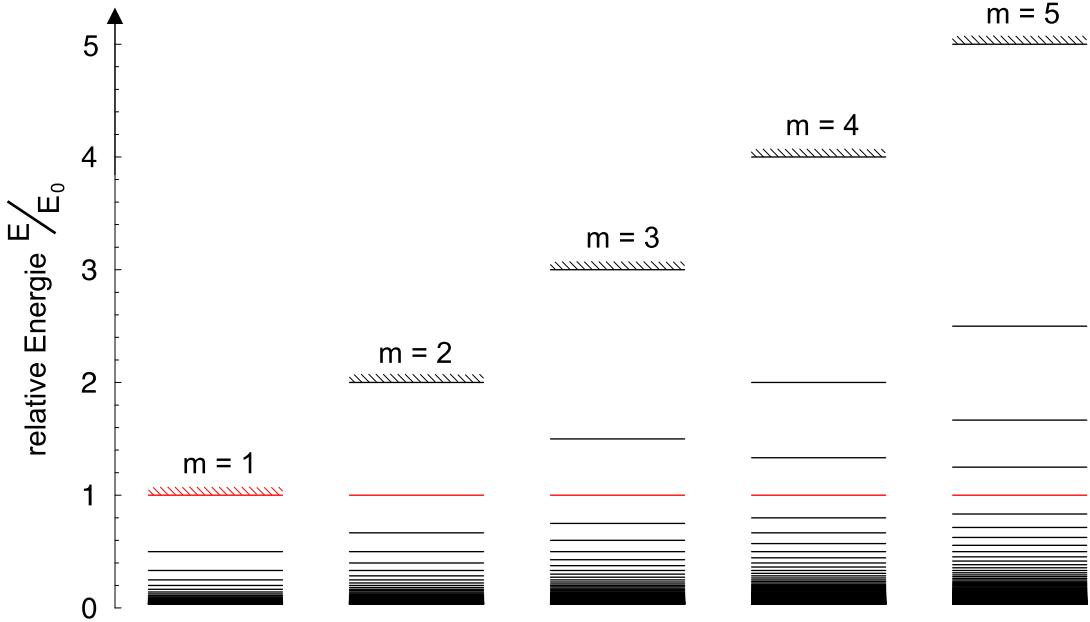


Abbildung 3.9: *Energiespektrum der allgemeinen Fresnel-Linse. In Abhängigkeit vom Stufenparameter m fokussiert das Fresnel-Profil relative Energiewerte bis herauf zu $E_{max} = m \cdot E_c$. Unterhalb von E_c (rot) verdichtet sich das Spektrum zum Quasi-Kontinuum.*

für $\psi = 1 = \zeta$ die fokale Peakintensität, die wegen der Normierung auf $\lim_{N_0 \rightarrow \infty} I_m(0) = 1$ äquivalent zum Verhältnis zwischen effektiver und PSF-Fläche ist. Unter Annahme einer auf E_c optimierten Fresnel-Linse der Stufenzahl m folgt

$$I_m(0) = \left(\frac{N_0}{m} \right)^2 \left(1 - e^{-\frac{m}{N_0}} \right)^2. \quad (3.59)$$

Während $I_m(0)$ als Funktion von $\frac{2m}{N_0}$ ähnlich wie die Transmission (Gl. 3.52) für $\frac{2m}{N_0} \gtrsim 1$ stark abfällt, weist die Peakintensität, gemessen in Abhängigkeit von der absoluten Energie E je nach Verlauf der Funktion $N_0(E)$ ein Maximum auf. Die Differentiation nach E liefert zwei mögliche Extremal-Gleichungen gemäß

$$\frac{d}{dE} I_m(0) = 0 \quad \rightarrow \quad e^{\frac{m}{N_0}} - 1 = \frac{m}{N_0} \quad \vee \quad \frac{d}{dE} N_0(E) = 0. \quad (3.60)$$

Da die erste Bedingung nur die triviale Lösung $\frac{m}{N_0} = 0$ besitzt, bestimmt das Maximum von N_0 die optimale Peakeffizienz. Nur die leichtesten Elemente mit $Z \leq 4$ weisen diesseits

von 20 keV ein Maximum in N_0 auf. Die maximalen N_0 -Werte von Lithium (Li) und Beryllium (Be) liegen bei $\sim 10^3$, so dass für moderate Stufenparameter m in der Umgebung des schwach ausgeprägten Maximums näherungsweise $I_m(0) \lesssim 1$ gilt.

Nicht nur zugunsten hoher Transmission und Peakintensität, auch im Sinn optimaler Auflösung sollte $2m \ll N_0$ angestrebt werden. Die dem periodischen Absorptionsprofil entstehenden und auch im Hauptfokus für $E = E_c$ auftretenden Interferenzmaxima wirken sich negativ auf die Punktildfunktion aus. Abb. 3.10 illustriert den zunehmenden Einfluss der Interferenz am Beispiel $N_0 = 10$ und $N = 10^3$. Während die refraktiven und diffraktiven Halbwertsbreiten bzw. Fokustiefen durch Gl. 3.22 gegeben sind bzw. $\propto N^{-1}$ skalieren, weisen die Interferenzmaxima einen Abstand $|\Delta\zeta| = \frac{1}{m+1}$ auf. Ihre Position liefert Gl. 3.56 für $\psi = 1$ via $\sin\left(\pi m \frac{1}{\zeta}\right) = 0$ zu

$$\zeta_{m,\pm k} = \frac{m}{m \pm k} \quad \text{mit } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \text{und } k_- < m. \quad (3.61)$$

Der zentrale Fokus definiert sich über $k = 0$. Die Beschränkung $k_- < m$ symbolisiert die obere Schranke $E_{max} = m \cdot E_c$ an die Energie E , die mit einer Linse vom Typ m ($< \frac{N}{2}$) fokussiert werden kann. Dieses Resultat schließt offensichtlich auch den Grenzfall der exklusiv diffraktiv wirkenden Fresnel-Linse mit $m = 1$ ein – in diesem Fall befinden sich die Interferenzmaxima bei $\zeta_{m=1,k} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$, den gewöhnlichen Beugungsordnungen.

Die Punktildfunktion der m -stufigen Fresnel-Linse ergibt sich allgemein aus interferometrischen und absorptionsbedingten Charakteristika. Gl. 3.53 bildet den Ausgangspunkt, um nun eine von dimensionsbehafteten Größen unabhängige Formel abzuleiten. Setzt man nämlich $z = F$, gelangt man zunächst zu

$$\tilde{I}_m(r) = \left| \frac{2\pi}{R^2} N \frac{\lambda_c}{\lambda} \sum_{p=1}^{\frac{N}{2m}} \left(e^{-2\pi i m \frac{\lambda}{\lambda_c} \left(1 + \frac{i}{2\pi N_0}\right) (p-1)} \mathcal{J}_{p,m}(r) \right) \right|^2, \quad (3.62)$$

wobei das im allgemeinen numerisch auszuwertende Integral $\mathcal{J}_{p,m}(r)$ durch den Ausdruck

$$\mathcal{J}_{p,m}(r) = \int_{\sqrt{\frac{2m}{N}(p-1)}R}^{\sqrt{\frac{2m}{N}p}R} e^{-i\pi N \frac{\lambda_c}{\lambda} \left(\frac{\sigma}{R}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2 \left(1 + \frac{i}{2\pi N_0}\right)\right)} J_0 \left(2\pi \frac{N}{R^2} \frac{\lambda_c}{\lambda} r \sigma\right) \sigma d\sigma \quad (3.63)$$

gegeben ist. Man beachte, dass auch N_0 von λ abhängt. Vorläufig sollen die Effekte der endlichen spektralen Bandbreite und der Absorption unabhängig voneinander betrachtet werden. Im Grenzfall $N_0 \rightarrow \infty$ ergibt sich dann für die reduzierte Ortskoordinate $v \equiv N \frac{r}{R}$

$$\tilde{I}_{N,m}(v, \varepsilon) = \left| 2\pi N(1+\varepsilon) \sum_{p=1}^{\frac{N}{2m}} e^{-2\pi i m \frac{p-1}{1+\varepsilon}} \int_{\sqrt{\frac{2m}{N}(p-1)}}^{\sqrt{\frac{2m}{N}p}} e^{-\pi i N \tau^2 \left(1 + \varepsilon - \frac{1}{1+\varepsilon}\right)} J_0(2\pi(1+\varepsilon)v\tau) \tau d\tau \right|^2,$$

wobei die Apertur- oder Pupillenkoordinate $\tau \equiv \frac{\sigma}{R}$ und die relative Energieabweichung $\varepsilon \equiv \frac{E}{E_c} - 1$ eingeführt wurden. Unter Beschränkung auf kleine Verstimmungen $|\varepsilon| \ll 1$

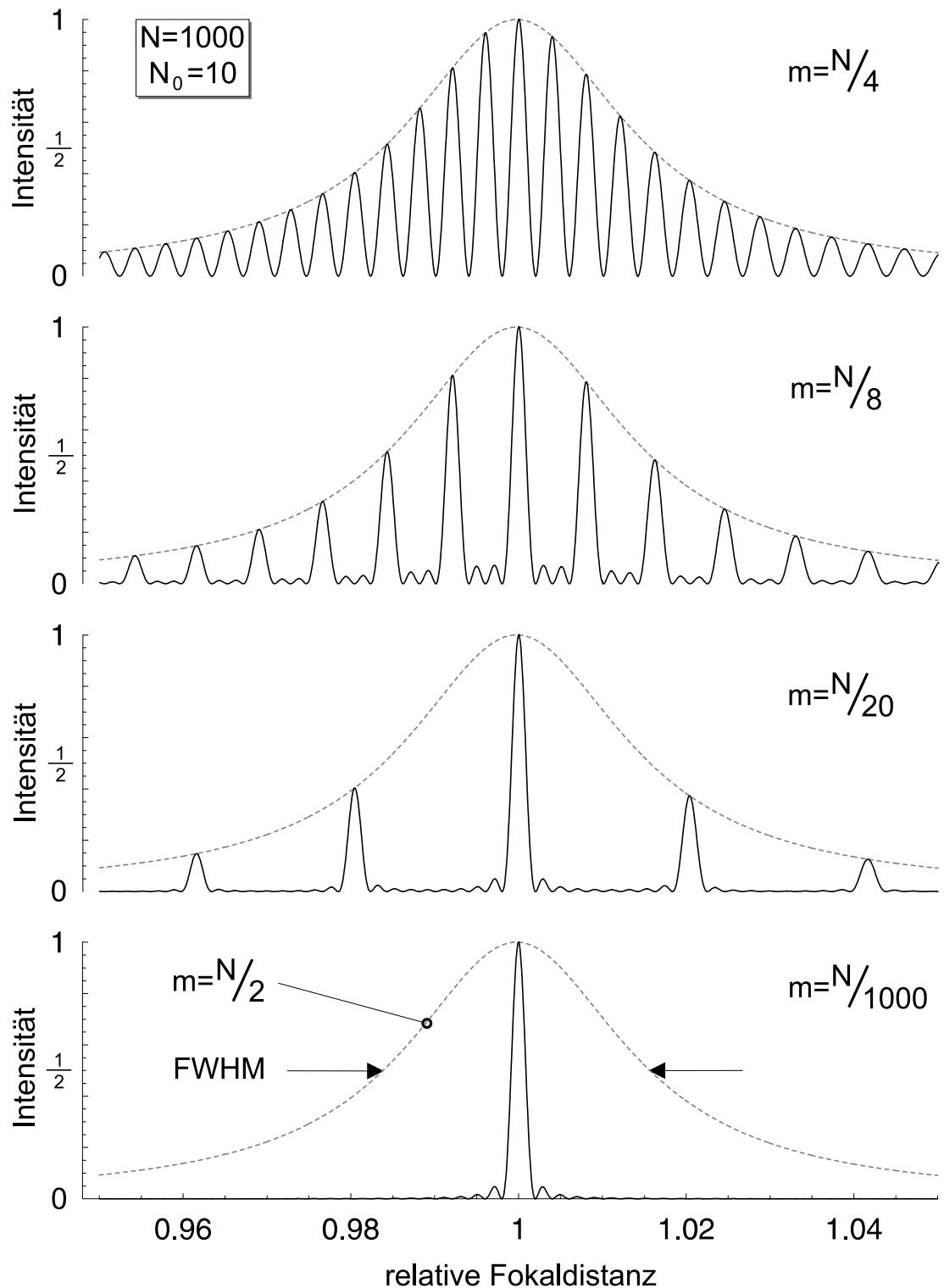


Abbildung 3.10: Übergang vom Gauss'schen zum diffraktiven Fokus am Beispiel $N = 1000$ und $N_0 = 10$. Die Gauss'sche Intensitätsverteilung mit $N \gg N_0$ bildet die Einhüllende der Interferenzmaxima, die bei sukzessiver Reduktion für $m < \frac{N}{2}$ auftreten.

und nach der obligatorischen Normierung mittels Division durch $(\pi N)^2$ lautet das die monochromatische PSF beschreibende Beugungsintegral schließlich in guter Näherung

$$I_{N,m}^{(mono)}(v, \varepsilon) \approx \left| 2 \sum_{p=1}^{\frac{N}{2m}} e^{2\pi i m p \varepsilon} \int_{\sqrt{\frac{2m}{N}(p-1)}}^{\sqrt{\frac{2m}{N}p}} e^{-2\pi i N \tau^2 \varepsilon} J_0(2\pi v \tau) \tau d\tau \right|^2. \quad (3.64)$$

Terme der Form $(1 + \varepsilon)$ im Vorfaktor und im Argument von J_0 sind zu vernachlässigen, da sie nur eine Korrektur der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ bewirken. Dagegen erfährt die spektrale Verstimmung in den Exponentialfunktionen eine Multiplikation mit Faktoren $\propto \mathcal{O}(N)$.

Auf der Basis dieser Gleichung 3.64 wird nun der spektrale Bandpass einer durch die Parameter $\{N, m\}$ definierten Fresnel-Linse ermittelt. Bei näherer Betrachtung von 3.64 zeigt sich, dass $I_{N,m}^{(mono)}(v, \varepsilon)$ letztlich nur vom Verhältnis $q \equiv \frac{N}{2m}$ und dem Produkt $\Lambda = N \cdot \varepsilon$ bestimmt wird. Die polychromatische PSF ergibt sich dann als Integral über das jeweilige spektrale Band, das der Einfachheit halber Rechteckform aufweisen soll – alle Energiewerte tragen also gleichermaßen zum Beugungsbild bei.

Um $I_{N,m}^{(poly)}(v, \Delta\varepsilon)$ numerisch zu berechnen, ist in der Praxis die Integration durch eine Summation über diskrete Verstimmungen ε_i zu ersetzen, $\int d\varepsilon \rightarrow \sum_{\varepsilon_i}$. Die folgende Auswertung basiert auf Schrittweiten $\delta\Lambda = 10^{-1}$ in einem Intervall $-\frac{\Delta\Lambda}{2} \leq \Lambda \leq \frac{\Delta\Lambda}{2}$ mit $\Delta\Lambda \leq 4$. Abb. 3.11 zeigt die mit zunehmender Bandbreite degradierende Winkelauflösung in parametrischer Abhängigkeit von q . Nahe des monochromatischen Idealfalls verläuft die Aufweitung der PSF nach Potenzen von $\frac{\Delta E}{E}$ bzw. N^{-1} . Ein elementarer funktionaler Zusammenhang ist jedoch nicht festzustellen, zur Anpassung der Fitkurven bedarf es in der Regel einer Reihe vom Typ $\sum_{n=1}^4 c_n \left(\frac{\Delta E}{E}\right)^n$. Aus der Grafik geht weiter die

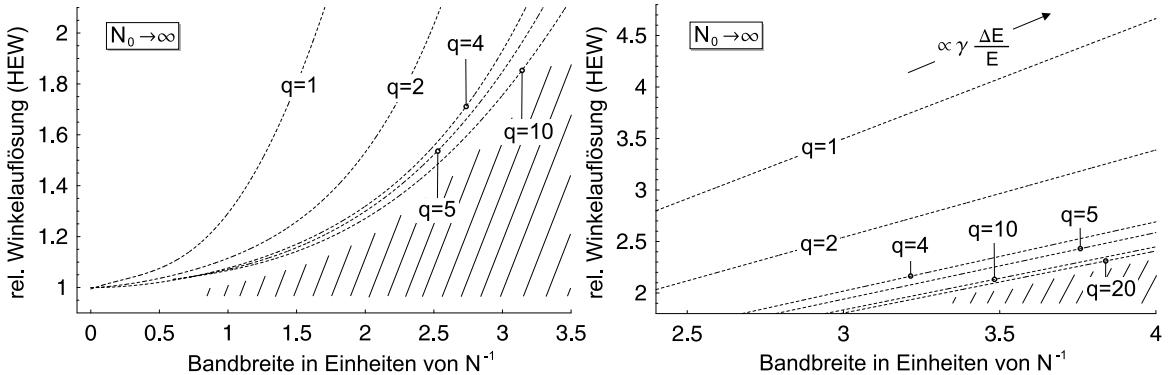


Abbildung 3.11: Winkelauflösung der generalisierten FL für $\frac{\Delta E}{E} \sim N^{-1}$. Gemessen in Einheiten der Energie-Halbwertsbreite der ungestörten PSF, degradiert die Bildqualität mit abnehmendem q und zunehmender Bandbreite $\frac{\Delta E}{E}$ der eingestrahlten Energie immer schneller (links). Ringzahlen $q > 10$ erbringen keine wesentliche Verbesserung der Bildqualität gegenüber der elementaren 2π -Version mehr, solange die Absorption zu vernachlässigen ist. Größere Verstimmungen liefern eine in N^{-1} lineare Aufweitung der PSF in geometrischer Näherung. Die Steigung ist ein Maß für die relative Dispersion γ (rechts).

mit zunehmend diffraktiv dominierter Linsenstruktur immer größere Toleranz gegenüber „breitbandigen“ Strahlungsquellen hervor – ein Resultat der sich ändernden Dispersion. Fresnel-Versionen ab $q \gtrsim 10$ verhalten sich bereits weitgehend wie ideal interferometrische ($m = 1$). Die entsprechenden Kurven sind daher nicht mehr eingezeichnet. Die Fitkurven ermöglichen die unter Rückgriff auf die DOF-Analyse direkte numerische Bestimmung des Bandpasses $\frac{\Delta E}{E}$, der die monochromatische Winkelauflösung annähernd erhält. Der axialen Feldtiefe (DOF) folgend, wird die spektrale Toleranzbreite der ($m = 1$)-Variante zumeist mit $\frac{1}{N}$ angegeben, während die mit $m = \frac{N}{2}$ massive Version auch bei verschwindender Absorption nur den halben Bandpass $\frac{1}{2N}$ aufweisen kann. Dennoch degradiert die Winkelauflösung $\Delta\epsilon$ nach Gl. 2.29 bereits signifikant,

$$\frac{\Delta\epsilon_{m=1} \left(\frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{N} \right)}{\Delta\epsilon_{m=1} \left(\frac{\Delta E}{E} \rightarrow 0 \right)} \approx 1.06 \quad \text{und} \quad \frac{\Delta\epsilon_{m=\frac{N}{2}} \left(\frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{2N} \right)}{\Delta\epsilon_{m=\frac{N}{2}} \left(\frac{\Delta E}{E} \rightarrow 0 \right)} \approx 1.08. \quad (3.65)$$

Soweit wurden nur geringe Bandbreiten $\frac{\Delta E}{E} \sim \frac{1}{N}$ betrachtet, mit entsprechend nichtlinearem Verlauf der Winkelauflösung. Gemäß den Gesetzen der geometrischen Optik erweitert sich die PSF jedoch für größere Werte $\frac{\Delta E}{E}$ linear, wie Abb. 3.11 rechts demonstriert. Analytisch stellt sich eine allgemeine fokale Dispersionsrelation in der Form

$$z(E) = F_c \left(\frac{E}{E_c} \right)^\gamma \quad \text{mit } 1 \leq \gamma \leq 2 \quad (3.66)$$

dar. Mithilfe des Strahlensatzes folgt weiter für den geometrischen „Radius“ ρ_{PSF} der PSF

$$\rho_{PSF} = \left| \frac{F}{z} - 1 \right| R \quad \text{bzw. in red. Koordinaten} \quad v_{PSF} = \left| \frac{F}{z} - 1 \right| N. \quad (3.67)$$

Durch Einsetzen von Gl. 3.66 ergibt sich direkt die gesuchte Linearität im Bandpass $\Delta\epsilon$,

$$v_{PSF}(\Delta\epsilon) = \left| \left(1 + \frac{\Delta\epsilon}{2} \right)^{-\gamma} - 1 \right| N = N \gamma \frac{\Delta\epsilon}{2} + \mathcal{O}(\Delta\epsilon^2). \quad (3.68)$$

Aus Gl. 3.68 geht ferner hervor, dass die in $\Delta\epsilon$ *lineare* Aufweitung der PSF nur für immer noch „kleine“ Werte $\Delta\epsilon$ gilt; solange $\Delta\epsilon \lesssim 10^{-2}$, beschränkt sich der relative Fehler δv_{PSF} auf $\lesssim 1\%$. Tab. 3.2 gibt einen Überblick zur Dispersion kombiniert refraktiv-diffraktiver Linsen. Jenseits von $\frac{N}{2m} \approx 10$ verhält sich das Fresnel-Profil bereits weitgehend diffraktiv.

$\#(\text{Ringe}) \frac{N}{2m}$	1	2	4	5	10	20	50
Dispersion γ	2.00	1.45	1.15	1.11	1.05	1.03	1.03

Tabelle 3.2: *Dispersionsfaktor der allgemeinen Fresnel-Linse. Für diverse Ringzahlen $\frac{N}{2m}$ zwischen 1 und 50 ist der Dispersionsexponent γ nach Gl. 3.66 eingetragen, wie er anhand der numerisch berechneten Winkelauflösung nach Abb. 3.11 errechnet wurde.*

3.3 Die Zonenplatte in verschiedenen Ausführungen

Aufgrund ihrer starken intrinsischen Absorption eignet sich die massive Bauweise nur bedingt zur Abbildung zumeist ausgesprochen schwacher astronomischer Strahlungsquellen. In Abschn. 3.2 wurde die bzgl. ihrer Transmission deutliche Überlegenheit reduzierter Fresnel-Linsen (FL) gezeigt. Zudem unterscheidet sich deren Dispersion $F(E)$ umso mehr von derjenigen einer refraktiven Linse, je weiter die Reduktion fortgeschritten ist. Ausgangspunkt der Ausführungen dieses Abschnitts soll daher die maximal reduzierte FL sein, deren einzelne Stufen jeweils einer Phasendifferenz $\Delta\phi = 2\pi$ bei der „Blaze-“ Energie entsprechen. Wird das parabolische, die kontinuierliche Phasendifferenz $0 \leq \Delta\phi \leq 2\pi$ innerhalb einer Stufe gewährleistende Profil beibehalten, handelt es sich dem landläufigen Sprachgebrauch folgend um eine sog. kinoforme Linse. Im Sinn einer vereinfachten Herstellung wird jene jedoch häufig noch innerhalb der einzelnen Stufen diskretisiert – im Extremfall bis zur binären Zonenplatte (ZP)⁴, die nur noch aus alternierenden offenen und opaken Zonen besteht, die optisch jeweils einer Phasendifferenz $\Delta\phi = \pi$ entsprechen.

Im Sinn einer konsistenten Darstellung gehen wir im folgenden vom sog. Multi-Stufenprofil aus, das in seinen Grenzfällen sowohl die ideale kinoforme als auch die binäre Zonenplatte enthält. Um eine Vorstellung vom Transmissions- und Phasenprofil einer solchen Multi-Stufen-ZP und ihren speziellen Varianten zu vermitteln, sei auf Abb. 3.12 verwiesen. Im skizzierten Beispiel (e) ist die durch die Radien r_n und r_{n+2} begrenzte Fresnel-Stufe einer Linse mit Brennweite F bei λ_c in $L = 7$ Niveaus unterteilt. Ganz allgemein beschreibt

$$r_{p,L} = \sqrt{\lambda_c F \left(2 \frac{l}{L} + p - 2 \right)} \quad \text{mit} \quad 1 \leq l \leq L \quad \text{und} \quad p = 2n, n \in \mathbb{N} \quad (3.69)$$

die äußeren Radien der einzelnen Niveaus, die mit Phasendifferenzen $\Delta\phi_l = 2\pi \frac{l-1}{L}$ verknüpft sind [18]. Die Amplitude u_m der in die m -te Ordnung gebeugten Strahlung errechnet sich unter Verwendung von Gl. 2.22 bis auf eine beliebige Konstante als

$$u_m = \frac{1 - e^{-2\pi i \frac{m}{L}}}{2\pi m} \sum_{l=1}^L e^{-\left(2\pi i(m - \frac{1}{\psi}) + \frac{1}{\psi} \frac{1}{N_0}\right) \frac{l-1}{L}} \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (3.70)$$

aus der sich via $P_m = |u_m|^2$ die Effizienz der Multi-Stufen-ZP bei der i.a. von λ_c abweichenden Wellenlänge λ ergibt. Zu deren Berechnung erweist es sich als zweckmäßig, in Gl. 3.70 zuerst die als komplexe geometrische Reihe zu interpretierende Summe zu evaluieren,

$$\sum_{l=1}^L e^{-\left(2\pi i(m - \frac{1}{\psi}) + \frac{1}{\psi} \frac{1}{N_0}\right) \frac{l-1}{L}} = \frac{1 - e^{-\frac{1}{\psi} \frac{1}{N_0}}}{1 - e^{\frac{1}{L} \left(2\pi i(m - \frac{1}{\psi}) - \frac{1}{\psi} \frac{1}{N_0}\right)}}. \quad (3.71)$$

Schließlich ergibt sich nach einigen Umformungen der explizite Ausdruck für die Effizienz,

⁴Zur Unterscheidung zwischen Fresnel-Linsen und Zonenplatten sollen letztere künftig nur noch alle diskreten, nicht kinoformen Profile bezeichnen, während die FL das kinoforme Profil besitzt.

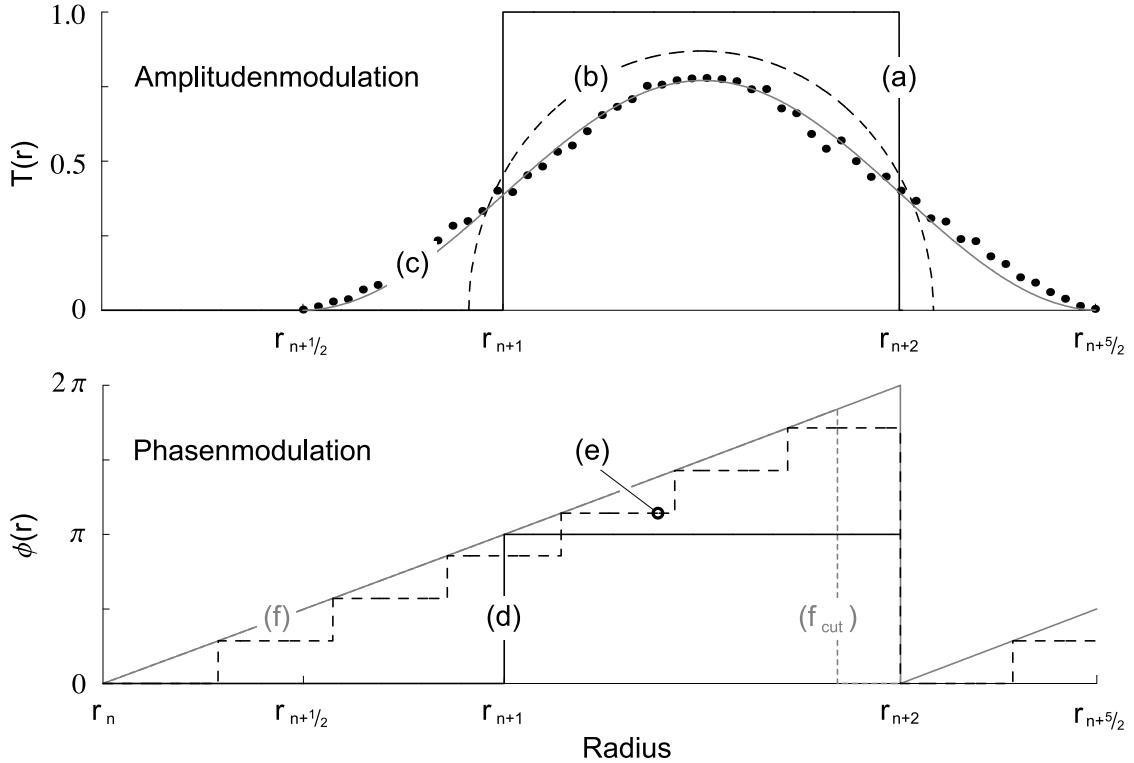


Abbildung 3.12: *Transmissionsprofile verschiedener diffraktiver Linsen. Die obere Grafik zeigt die Amplituden- oder Intensitätstransmission $T(r)$ von einfachen binären Zonenplatten (a), regulären (b) und durch Zufallsstreuung geglätteten (c) „Photonensieben“. Eine Modulation der Phase $\phi(r)$ bewirken binäre (d) und mehrstufige (e) Phasen-Zonenplatten. Letztere approximieren im Grenzfall unendlich vieler Stufen die Fresnellinse (f), die bei erheblicher Absorption zur Steigerung der Effizienz offene Zonen erhalten kann (f_{cut}).*

$$P_m = \frac{1 - 2e^{-\frac{1}{\psi} \frac{1}{N_0}} \cos \left(2\pi \left(m - \frac{1}{\psi} \right) \right) + e^{-\frac{2}{\psi} \frac{1}{N_0}} \left(\frac{\sin \left(\pi \frac{m}{L} \right)}{m\pi} \right)^2}{1 - 2e^{-\frac{1}{\psi} \frac{1}{LN_0}} \cos \left(2\pi \frac{1}{L} \left(m - \frac{1}{\psi} \right) \right) + e^{-\frac{2}{\psi} \frac{1}{LN_0}} \left(\frac{\sin \left(\pi \frac{1}{L} \right)}{\pi} \right)^2}. \quad (3.72)$$

Ausgehend von der weiter unten diskutierten Tatsache, dass eine geeignete Zentrallobstruktur alle außer der gewünschten, zumeist ersten Beugungsordnung abzuschirmen vermag, sei zunächst nur deren Wirkungsgrad $P_1(N_0)$ als Funktion von N_0 betrachtet. Abb. 3.13 illustriert den Verlauf mit ψ für $m = 1$. Gl. 3.72 vereinfacht sich speziell für $\psi = 1$ zu

$$P_1 = \left(\frac{1 - e^{-\frac{1}{N_0}}}{1 - e^{-\frac{1}{LN_0}}} \right)^2 \left(\frac{\sin \left(\pi \frac{1}{L} \right)}{\pi} \right)^2 \rightarrow \left(\frac{\sin \left(\pi \frac{1}{L} \right)}{\pi \frac{1}{L}} \right)^2 \quad \text{für} \quad N_0 \rightarrow \infty. \quad (3.73)$$

In Abb. 3.13 sind die Wirkungsgrade in der Umgebung von E_c speziell für kleine Parameterwerte N_0 und niedrige Stufenzahlen L aufgetragen. Man erkennt, dass mit $N_0 \gtrsim 10$ die

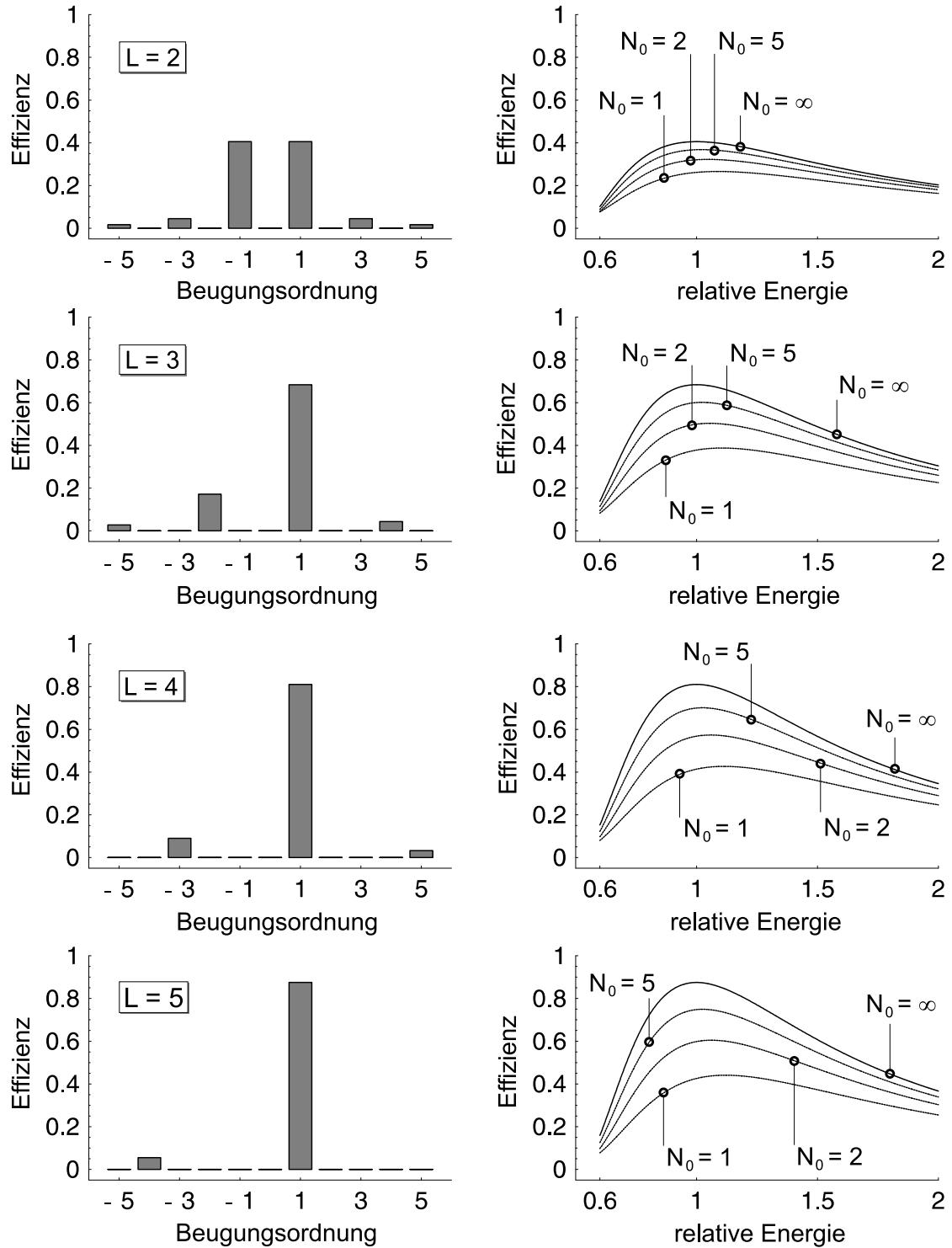


Abbildung 3.13: Effizienz mehrstufiger Zonenplatten. Als maximal reduzierte und diskretisierte Fresnel-Linsen weisen Multilevel-ZP's eine mit der Stufenzahl L und N_0 rasch anwachsende Effizienz auf, die im Fall $N_0 \sim 10$ und $L = 5$ bereits rund 80% beträgt. Im allg. verteilt sich die Gesamteffizienz auf zahlreiche Beugungsordnungen, deren Anteile unter der Annahme vernachlässigbarer Absorption als Balkendiagramme dargestellt sind.

Maximaleffizienz für $N_0 \rightarrow \infty$ weitgehend erreicht wird. Wie nämlich eine Reihenentwicklung von Gl. 3.73 bzgl. $\frac{1}{N_0}$ zeigt, gilt in erster Ordnung

$$P_1(N_0) = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{L}\right) \frac{1}{N_0}\right) \lim_{N_0 \rightarrow \infty} P_1(N_0) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N_0}\right)^2, \quad (3.74)$$

so dass speziell $\liminf_{L \rightarrow \infty} P_1(N_0) = \left(1 - \frac{1}{N_0}\right) \lim_{N_0 \rightarrow \infty} P_1(N_0)$ gilt. In der Praxis wird der Einfluss der Absorption daher meist zu vernachlässigen sein. Die ungenutzt in höhere und negative Ordnungen gebeugten Anteile der Gesamteffizienz werden dann nur noch von L bestimmt. Beispiele sind in Abb. 3.13 eingetragen. Sie ergeben sich rechnerisch aus dem Grenzübergang $N_0 \rightarrow \infty$ in Gl. 3.72 zu

$$\lim_{N_0 \rightarrow \infty} P_m = \left(\frac{\sin\left(\pi\left(m - \frac{1}{\psi}\right)\right)}{\sin\left(\pi\frac{1}{L}\left(m - \frac{1}{\psi}\right)\right)} \right)^2 \left(\frac{\sin\left(\pi\frac{m}{L}\right)}{\pi m} \right)^2, \quad (3.75)$$

speziell aus den Nullstellen des Nenners $\sin\left(\pi\frac{1}{L}(m-1)\right)$, wenn $\psi = 1$. Offenbar unterliegen sie der Bedingung $m_k = kL + 1$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Wegen dieser speziellen Auswahlregel entfällt auf einzelne Ordnungen entweder gar keine wie für $m = 0$ oder nur die Streustrahlung bestimmter Stufenzahlen L (wie z. B. $m = -1$ für $L = 2$). Diese simple Zuordnung entfällt freilich bei signifikanter Absorption, die Strahlung streut dann – wenn auch nur in sehr geringem Ausmaß – in die nullte und andere Ordnungen. Dies gilt auch im Grenzfall $L \rightarrow \infty$, der die ideale kinoforme FL repräsentiert. Gl. 3.72 vereinfacht sich dann zu

$$\lim_{L \rightarrow \infty} P_m = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1 - 2e^{-\frac{1}{\psi}\frac{1}{N_0}} \cos\left(2\pi\left(m - \frac{1}{\psi}\right)\right) + e^{-\frac{2}{\psi}\frac{1}{N_0}}}{\left(m - \frac{1}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\pi N_0}\frac{1}{\psi}\right)^2} \quad (3.76)$$

Der Gleichung ist die starke Disposition zur ersten Ordnung zu entnehmen, während die übrigen unter der Annahme realistischer Absorption mit $N_0 > 1$ unwesentliche Beiträge liefern. Gl. 3.76 leitet sich alternativ aus der in Abschn. 3.2 präsentierten Formel 3.54 ab,

$$I(\psi, \zeta) = \left(\frac{1}{N\pi}\right)^2 \frac{1 - 2e^{-\frac{1}{N_0}\frac{1}{\psi}} \cos\left(2\pi\left(\frac{\psi}{\zeta} - \frac{1}{\psi}\right)\right) + e^{-\frac{2}{N_0}\frac{1}{\psi}}}{\left(1 - \frac{\zeta}{\psi^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\pi N_0}\frac{\zeta}{\psi^2}\right)^2} \left(\frac{\sin\left(\pi\frac{N}{2}\frac{\psi}{\zeta}\right)}{\sin\left(\pi\frac{\psi}{\zeta}\right)} \right)^2, \quad (3.77)$$

mit der Auswahlregel $\zeta = \frac{1}{m}\psi$ für die Ordnungen und dem Stufenparameter $m = 1$. Sinnvollerweise korrespondieren daher die „Ordnungen“ einer FL mit der für $E = E_c$ maximal reduzierten Linse⁵. Der Übersichtlichkeit halber sei der Absorption vorläufig keine Beachtung geschenkt, Gl. 3.77 geht somit in

$$\lim_{N_0 \rightarrow \infty} I(\psi, \zeta) = \left(\frac{2}{N\pi}\right)^2 \left(\frac{\sin\left(\pi\left(\frac{\psi}{\zeta} - \frac{1}{\psi}\right)\right)}{1 - \frac{\zeta}{\psi^2}} \right)^2 \left(\frac{\sin\left(\pi\frac{N}{2}\frac{\psi}{\zeta}\right)}{\sin\left(\pi\frac{\psi}{\zeta}\right)} \right)^2 \quad (3.78)$$

⁵Der Stufenparameter aus Abschn. 3.2 und die Beugungsordnung in diesem Abschn. 3.3 werden trotz ihrer physikalischen Verschiedenheit mit dem gleichen Index bezeichnet.

über. Wiederum unter Beachtung der Dispersionsbedingung $\zeta = \frac{1}{m}\psi$ resultiert die theoretische Leistungsfähigkeit der idealen kinoformen ZP zu

$$P_m(E) = \left(\frac{\sin(\pi(m - \frac{E_c}{E}))}{\pi(m - \frac{E_c}{E})} \right)^2 \quad \text{am Ort} \quad z = \frac{1}{m} \frac{E}{E_c} F_c. \quad (3.79)$$

In diesem letzten Schritt wurde dem die brennweitenabhängige PSF-Größe berücksichtigenden Projektionseffekt Rechnung getragen, $P_m(\psi, \zeta) \propto \frac{1}{m^2} I_m(\psi, \zeta)$. Um einen Vergleich mit der sog. Phasen-Zonenplatte zu ermöglichen, deren konstruktives Charakteristikum gemäß Gl. 3.72 in einer Stufenzahl $L = 2$ besteht und die demzufolge eine theoretische Effizienz von $P_1^{(2)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2$ erzielt, sind die Energieparameter ψ_m zu bestimmen, für die der Wirkungsgrad $P_m^{(\infty)}(E)$ auf $P_1^{(2)}(E_c)$ abgefallen ist:

$$P_m^{(\infty)}(E) = \left(\frac{\sin(\pi(m - \frac{E_c}{E}))}{\pi(m - \frac{E_c}{E})} \right)^2 = \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 = P_1^{(2)}(E_c) \quad (3.80)$$

Aufgrund des transzendenten Charakters der Gleichung $\sin\left(\pi\left(m - \frac{1}{\psi_m}\right)\right) = 2\left(m - \frac{1}{\psi_m}\right)$ steht eine analytische Lösung auf den ersten Blick nicht zur Diskussion. Es stellt sich jedoch heraus, dass die gesuchten Lösungen ψ_m mit jenen übereinstimmen, die sich aus

$$\left(\frac{\sin\left(\pi\left(m - \frac{1}{\psi_m}\right)\right)}{\pi\left(m - \frac{1}{\psi_m}\right)} \right)^2 = \left(\frac{\sin\left(\pi\left(m + 1 - \frac{1}{\psi_m}\right)\right)}{\pi\left(m + 1 - \frac{1}{\psi_m}\right)} \right)^2 \quad (3.81)$$

ableiten, die gerade die Schnittpunkte ψ_m zu den Leistungskurven m -ter und $(m+1)$ -ter Ordnung beschreiben. Letztere errechnen sich zu $\psi_m = (m + \frac{1}{2})^{-1}$. Im übrigen gilt diese Lösung auch für $m = 0$. ψ_0 bildet somit die obere Schranke für den Energiebereich, innerhalb dessen die FL sinnvollerweise einzusetzen ist, für $E > 2E_c$ dominiert zunehmend die unfokussierte Streustrahlung nullter Ordnung. Man gelangt so zu dem Ergebnis, dass die mittels kinoformer Fresnel-Linsen erzielbare Effizienz für $E \leq 2E_c$ nie unter $\approx 40\%$ abfällt:

$$\forall 0 < E \leq 2E_c : P_m^{(\infty)}(E) \geq P_1^{(2)} = \left(\frac{2}{\pi} \right)^2. \quad (3.82)$$

Abb. 3.14 illustriert diese besondere Eigenschaft kinoformer Profile. Es sei bemerkt, dass Multilevel-Linsen in ihrem optischen Verhalten diesem Ideal umso näher kommen, je höher die Zahl der Stufen gewählt wird. Im allgemeinen sollte $L \gtrsim 8$ eine ausreichende Approximation darstellen.

Theoretisch lässt sich mit Hilfe solcher in höheren Ordnungen eingesetzten Fresnel-Linsen der gesamte in Frage kommende Energiebereich zwischen 1 und 10 keV und mehr abdecken. Praktisch stehen diesem Anspruch gleichwohl Hindernisse entgegen, deren erstes die Absorption darstellt. Während wie schon erwähnt die durch sie bedingte Streustrahlung

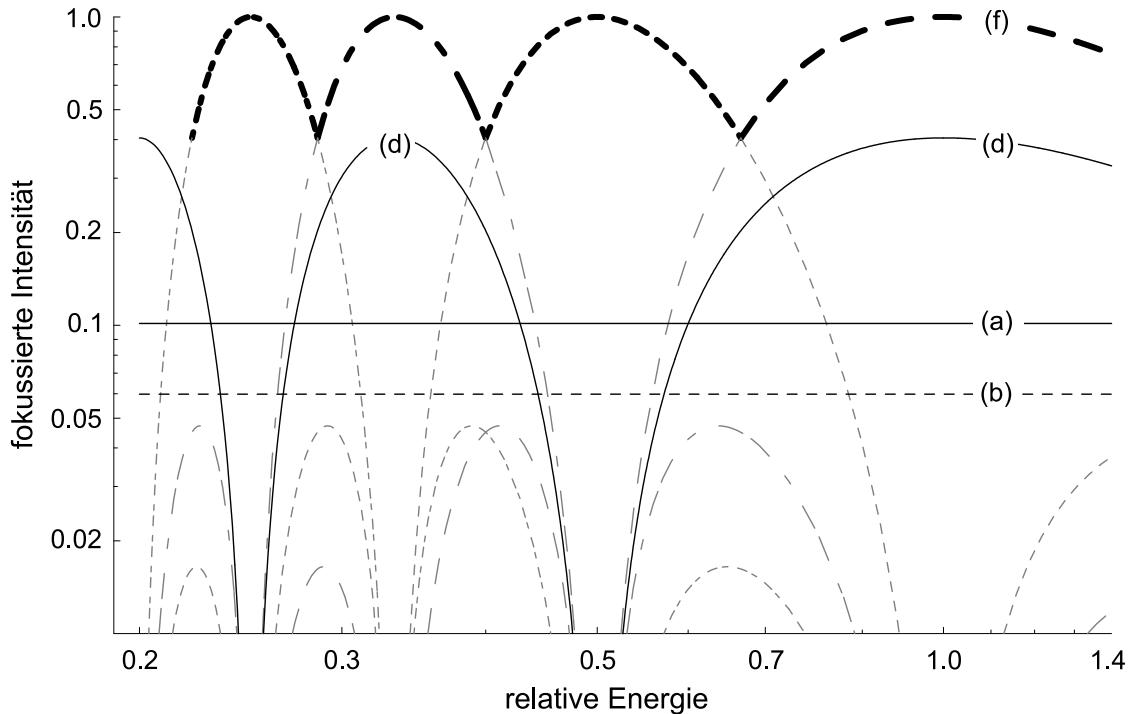


Abbildung 3.14: *Fokuseffizienz einiger Transmissionsprofile aus Abb. 3.12. Die Effizienzkurven sind unter Vernachlässigung der Absorption in Abhängigkeit von der normierten Energie $\frac{E}{E_c}$ skizziert, wobei E_c die Blaze-Energie bezeichnet. Die dick gezeichneten Segmente des Graphen (f) beschreiben die Fokussierung durch Fresnel-Linsen in höheren Ordnungen.*

in der Regel vernachlässigt werden kann, nimmt die Transmission mit der Energie gemäß

$$T(E) = \frac{N_0(E)}{2} \frac{E}{E_c} \left(1 - e^{-\frac{2}{N_0(E)} \frac{E_c}{E}} \right) \quad (3.83)$$

ab, die durch $T(E)$ beschriebene Funktion stellt die Einhüllende der in Abb. 3.14 fett dargestellten Kurven bei nicht vernachlässigbarer Absorption dar. Während bei $E_c = 10$ keV die meisten Materialien eine nahezu 100%ige Transparenz erzielen, belaufen sich die Verluste einer auf E_c optimierten Be-Linse nahe 1 keV bereits auf rund 80%. Hinzu kommt, dass ein solches maximal reduziertes Profil nicht freistehend zu konstruieren ist; eine Stützstruktur im Sinn einer Schicht konstanter Dicke, der das Linsenprofil aufgeprägt wird, ist unumgänglich.

Als hinderlich erweist sich ferner die bereits angesprochene Eigenschaft derartiger diffraktiver Linsen, i. a. zahlreiche Beugungsordnungen mit Streustrahlung unterschiedlicher Intensität zu belegen. Je höher die Stufenzahl L , desto ausgeprägter tritt diese Tendenz zu Tage und führt im Grenzfall $L \rightarrow \infty$ theoretisch zu Beiträgen in unendlich vielen Beugungsordnungen, die nur für $E = \frac{1}{m} E_c$ in eine einzige kumulieren. Abb. 3.15 zeigt eine Methode, sich der Streustrahlung zu entledigen. Gegeben sei eine FL mit Aperturradius R , Obstruktionsradius $r_{obs} < R$ und Brennweite F_m in m -ter Ordnung. Weiterhin bezeichne $r_{FOV}^{(m)}$ den

dem gewünschten Gesichtsfeld zugeordneten Radius in m -ter Ordnung. Dann folgt unter Berücksichtigung der aus zu F proportionalen lateralen Auflösung resultierenden Relation $r_{FOV}^{(m+1)} = \frac{m}{m+1} r_{FOV}^{(m)}$ sowie $F_{m+1} = \frac{m}{m+1} F_m$,

$$\frac{r_{FOV}^{(m)} + r_{obs}}{F_m} = \frac{r_{obs} - r_{FOV}^{(m+1)}}{F_{m+1}} \rightarrow [...] \rightarrow \frac{r_{FOV}^{(m)}}{r_{obs}} = \frac{1}{2m}. \quad (3.84)$$

Eine solchermaßen modifizierte FL gestattet einen störungsfreien Gebrauch in allen Ordnungen $m \geq 1$, der sich nun nach Gl. 3.79 richtet. Man beachte, dass sich die wie m^2 wachsende (Peak-)Intensität als Resultat einer „effektiven“ Zonenzahl $m \cdot N$ interpretieren lässt. Abb. 3.15 illustriert diese Merkmale der sich mit m verändernden Punktbildfunktion. Als problematisch erweist sich zuletzt noch die mit $\frac{1}{m}$ skalierende Bandbreite, die daher die Leistungsfähigkeit der FL um diesen Faktor herabsetzt. Gleichwohl kann eine Abbildung relativ weicher Röntgenstrahlung in entsprechend höheren Beugungsordnungen zumindest unter Vernachlässigung der Absorptionsverluste das Signal-Rausch-Verhältnis begünstigen. Dies deshalb, weil dem sich in $A_{eff} \times \Delta E$ messenden Signal S wegen der eben genannten Bandpass-Relation eine $(\frac{1}{m})$ -Proportionalität zugrunde liegt, während sich der zur Detektorfläche proportionale Hintergrund wie $(\frac{1}{m})^2$ reduziert.

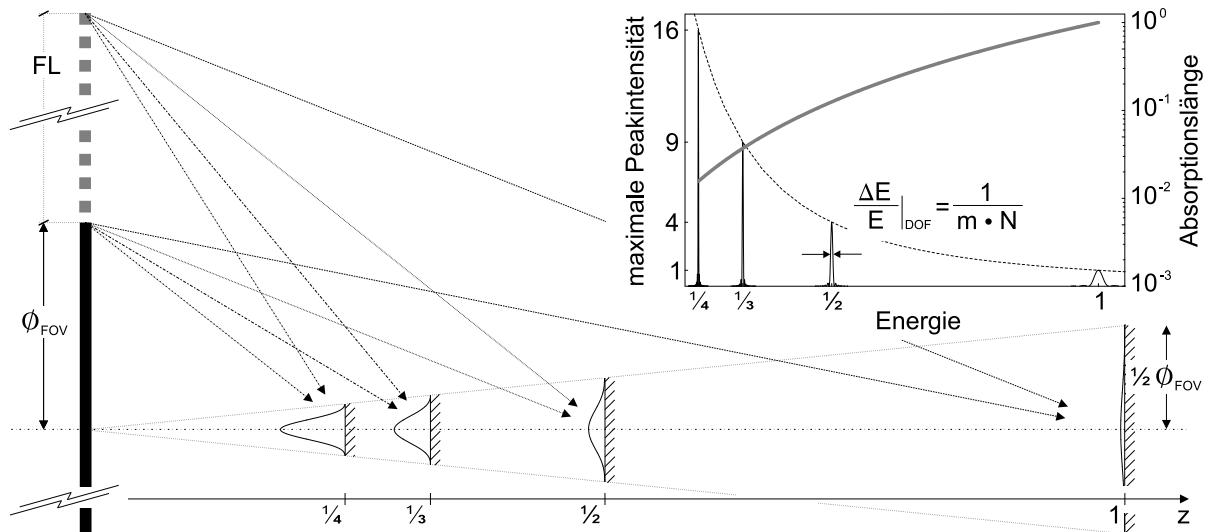


Abbildung 3.15: Einsatz von Fresnel-Linsen in höheren Beugungsordnungen. Unter der Voraussetzung geeigneter Zentralobstruktion gelangt in eine gegebene Ordnung m keine Streustrahlung anderer Ordnungen. Die Form der PSF hängt von Energie E und Ordnung m ab; nichtsdestoweniger bleibt die gesamte fokussierte Leistung davon unberührt – zumindest unter Vernachlässigung der Absorption. Der rechte obere Einsatz zeigt u.a. die Energieabhängigkeit der normierten Absorptionslänge (dicke graue Kurve). Fern atomarer Übergänge folgt diese i.d.R. einer E^3 -Abhängigkeit und limitiert in der Praxis den Einsatz der Fresnel-Linsen zu hohen Ordnungen hin.

In Abb. 3.14 sind neben den beschriebenen Effizienzkurven kinoformer und zweistufiger

Phasen-Zonenplatten noch die Wirkungsgrade binärer ZP's und des noch zu besprechenden „Photonensiebes“ eingezeichnet. Im Sinn des zu Beginn des Abschnitts eingeführten Konzepts der Multistufen-ZP entspricht die binäre dem Parameter-Paar ($L = 2, N_0 \rightarrow 0$). Nach Einsetzen bzw. Durchführung des Grenzübergangs liefert Gl. 3.72

$$\lim_{N_0 \rightarrow 0} P_m^{(2)} = \left(\frac{\sin(\pi \frac{m}{2})}{\pi m} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{4} \quad \text{für } m \rightarrow 0. \quad (3.85)$$

Die einfachste aller Multistufen-ZP's erzielt in erster Ordnung also einen energieunabhängigen Wirkungsgrad von $(\frac{1}{\pi})^2 \approx 10\%$. Angesichts offenkundig besserer Alternativen sowohl unter dem Aspekt der optischen Güte als auch in fertigungstechnischer Hinsicht (→ „Photonensieb“) soll ihr hier diesbezüglich keine weitere Beachtung zuteil werden. Stattdessen soll an dieser Stelle knapp auf die Aberrationen der Zonenplatte eingegangen werden, deren Zonenradien r_n konform mit den eingangs gemachten Voraussetzungen in ihrer parabolischen Näherung dem Bildungsgesetz $r_n = \sqrt{n\lambda F}$ unterliegen. Entsprechende Untersuchungen wurden bereits von diversen Autoren durchgeführt, so z. B. von [22]. Ihnen zufolge ergibt sich die Wellenfrontaberration $\Psi^{(4)}$ nach der obligatorischen Entwicklung bzgl. des Einfallswinkels ϕ bis zur dritten Ordnung zu

$$\Psi^{(4)} = \frac{r_n^2}{2F} - \Delta s_{opt} = -\frac{r_n^4}{8F^3} - \phi \frac{r_n^3}{2F^2} \cos \theta - \phi^2 \frac{r_n^2}{2F} \cos^2 \theta - \phi^2 \frac{r_n^2}{4F}, \quad (3.86)$$

mit der optischen Wegdifferenz (OPD) Δs_{opt} zwischen den ggf. unter einem Winkel ϕ einfallenden axialen und marginalen Strahlen. Die Terme beschreiben nacheinander sphärische Aberration, Koma, Astigmatismus und Bildfeldwölbung. Als blendenfreie dünne Linse weist auch die ZP keine Verzeichnung auf. Die Winkelfehler ergeben sich nun nach den Ausführungen in Anhang A als partielle Differentiale der Wellenfrontaberration bzgl. der lateralen Aperturkoordinaten,

$$\Delta \epsilon_x = -\frac{\partial \Psi^{(4)}}{\partial \sigma_x} \quad \text{und} \quad \Delta \epsilon_y = -\frac{\partial \Psi^{(4)}}{\partial \sigma_y} \quad \text{mit} \quad \sigma_x = r_n \cos \theta \quad \text{und} \quad \sigma_y = r_n \sin \theta. \quad (3.87)$$

Drückt man schließlich das Resultat durch das hier den Part des relativen Aperturradius $q = \frac{r}{\xi}$ refraktiver Linsen übernehmende Öffnungsverhältnis $f = \frac{F}{2r_n}$ aus, ergibt sich

$$\Delta \epsilon_x = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{f} \right)^3 \cos \theta + \frac{1}{8} \phi \left(\frac{1}{f} \right)^2 (1 + 2 \cos^2 \theta) + \frac{3}{4} \phi^2 \left(\frac{1}{f} \right) \cos \theta, \quad (3.88)$$

$$\Delta \epsilon_y = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{f} \right)^3 \sin \theta + \frac{1}{4} \phi \left(\frac{1}{f} \right)^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{4} \phi^2 \left(\frac{1}{f} \right) \sin \theta. \quad (3.89)$$

Abb. 3.16 veranschaulicht diese Gleichungen für diverse Parameterpaare (f, ϕ) . Wie bisher sind der ausschließlich sphärische Term und der Gesamtfehler getrennt dargestellt. Den Grafiken ist die verhältnismäßig große Toleranz gegenüber sphärischen und winkelabhängigen Fehlern zu entnehmen. So macht sich der zu ϕ proportionale Beitrag der Koma selbst

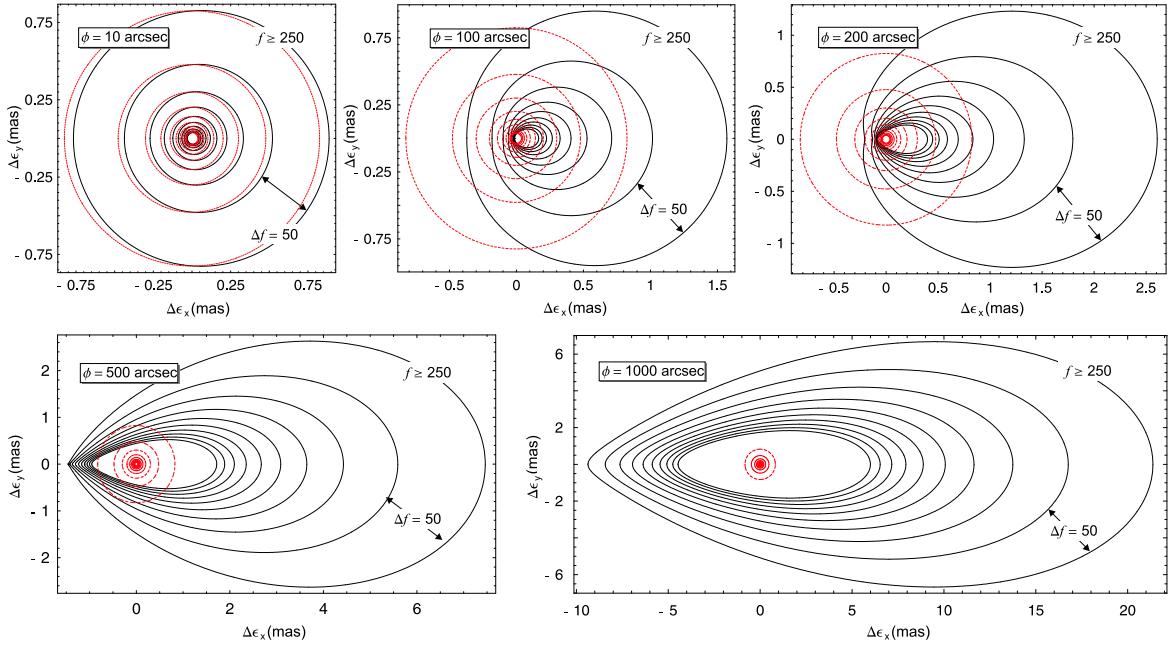


Abbildung 3.16: Seidel-Aberrationen der Zonenplatte. Jede Grafik enthält sphärisch bedingte (rot) und winkelabhängige Aberrationskurven für verschiedene Öffnungsverhältnisse $f \leq 700$. Die darauf bezogene beugungsbegrenzte Toleranzgrenze liegt bei $f \gtrsim 300$.

für Öffnungsverhältnisse $f \lesssim 10^3$ erst bei $\phi \gtrsim 10$ arcsec bemerkbar. Realistische Werte für $f \sim (10^4 - 10^5)$ gestatten ohne weiteres $\phi \sim 10^3$ arcsec. Wegen der zumeist großen Öffnungsverhältnisse empfiehlt es sich diesmal, den mittleren Bildfehler exakt anzugeben,

$$\langle \Delta\epsilon \rangle_\theta = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta\epsilon^2(f, \theta, \phi) d\theta \right)^{1/2} = \frac{1}{16f^3} \sqrt{1 + 36(f\phi)^2 + 80(f\phi)^4}. \quad (3.90)$$

Eine Linse vom Radius R korrespondiert bei einer Wellenlänge λ_c mit der Brennweite F gemäß $R \cong \sqrt{N\lambda_c F}$, analog zur offenen Apertur in Abschn. 2.2. Diese Näherung erweist sich insofern als gerechtfertigt, als realistische Zonenzahlen $N \lesssim 10^5$ bei Objektivradien von maximal einigen Metern und Wellenlängen zwischen 10^{-10} und 10^{-9} nm Brennweiten von mehreren ($10^2 - 10^3$) Kilometern bedingen. Der optische Weglängen-Unterschied der Randstrahlen zwischen approximierter und exakter Formel nach Gl. 2.25 beträgt

$$s_{opt}^{(approx.)} - s_{opt}^{(exakt)} = \sqrt{N\lambda F + F^2} - \left(F + \frac{N\lambda}{2} \right) = -\frac{1}{8} \frac{R^4}{F^3} + R \cdot \mathcal{O} \left(\frac{R}{F} \right)^5 \ll \frac{\lambda}{4}, \quad (3.91)$$

so dass das Rayleigh-Viertelwellen-Kriterium für eine näherungsweise aberrationsfreie Abbildung in der Praxis immer erfüllt sein wird. Die angegebenen Aberrationen gelten im wesentlichen für alle Versionen einer Zonenplatte bzw. Fresnel-Linse, zumindest unter der Annahme kleiner Einfallsinkel $\phi \sim 1^\circ$, wie sie im teleskopischen Einsatz auftreten. Mit der diffraktiven Reduktion konnte also eine gegenüber der parabolisch massiven Linse erheblich erweiterte Toleranz gegenüber Bildfehlern aller Art erzielt werden.

Neben der Fehlertoleranz nimmt auch – wenn auch nur geringfügig – das Leistungsvermögen zu: Analog zum massiven Linsenprofil folgt auch das Leistungsvermögen der reduzierten, diffraktiven Linse einer einfachen Linearität in der Fokaldistanz F . Vernachlässigt man die Absorption, berechnet sich diese maximale Effizienz zu

$$A_{eff} \times \Delta E = P \cdot \pi R^2 \cdot \Delta E, \quad (3.92)$$

wobei $0\% \leq P \leq 100\%$ die optimale, vom Profil bzw. der Stufenzahl L abhängige Beugungseffizienz beschreibt. Während sich der Radius zu $R^2 = N\lambda F$ bemisst, legt $\frac{E}{N}$ die Bandbreite fest. Man findet also mit Planck-Quantum h und Lichtgeschwindigkeit c

$$A_{eff} \times \Delta E = P \cdot \pi \cdot F \cdot hc. \quad (3.93)$$

Abb. 3.17 illustriert die Relation für kinoforme ($P = 1.0$), phasenmodulierte ($P \approx 0.4$) und binäre ($P \approx 0.1$) Profile. Offenbar verbessert die ideale kinoforme Linse das Leistungsvermögen des transparenten refraktiven Optimums um etwa einen Faktor 2.

Aus dieser eher moderaten Steigerung wird aber auch deutlich, dass binäre wie phasenschiebende Zonenplatten geringer Stufenzahl $L \sim 2$ allenfalls unter fertigungstechnischen Gesichtspunkten eine halbwegs attraktive Alternative zu hochwertigen Multistufen-Versionen darzustellen vermögen.

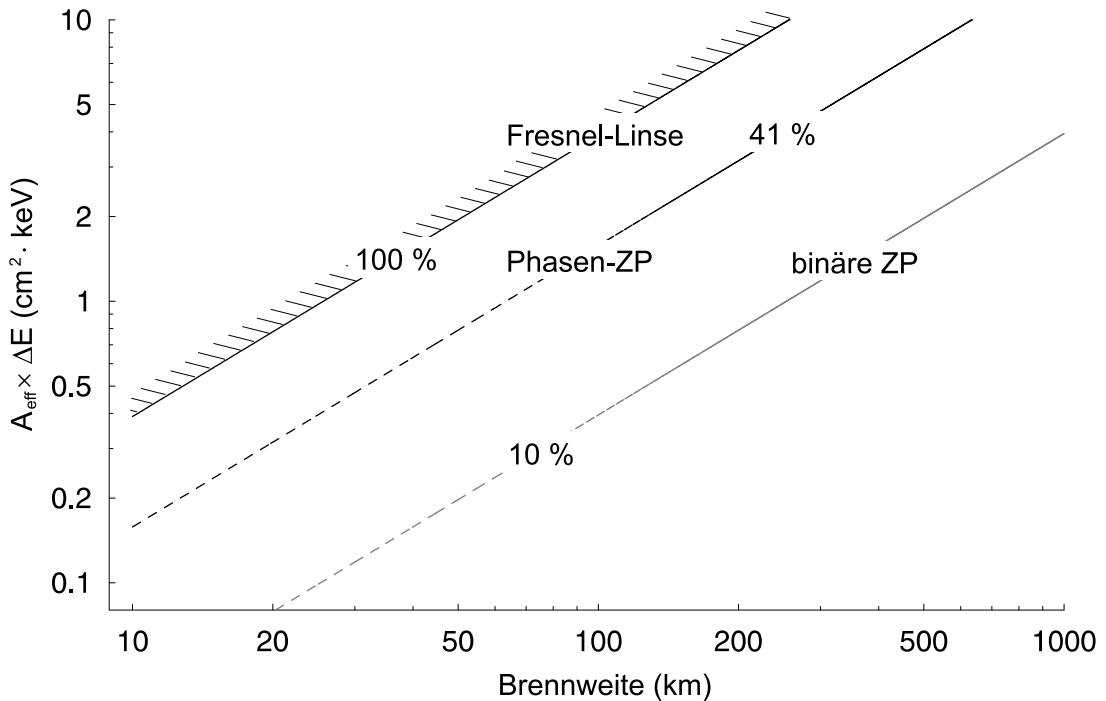


Abbildung 3.17: Leistungsvermögen der diffraktiven Linse. Die zur Brennweite proportionale Effizienz $A_{eff} \times \Delta E$ der kohärenten, kinoformen Fresnellinse übertrifft diejenige der binären Zonenplatte um einen Faktor 10 und hängt nicht explizit vom Linsenradius ab.

Kapitel 4

Korrektur der Dispersion

Mit den in Abb. 3.7 und 3.17 illustrierten Richtwerten für die mit einfachen refraktiven oder diffraktiven Linsenprofilen erzielbare Leistungsfähigkeit offenbart sich deren weitgehende Insuffizienz im Bezug auf die der astronomischen Forschung dienliche Nachweis-Sensitivität. Man wird daher versuchen, die wiederum in Einheiten von $A_{eff} \times \Delta E$ gemessene Lichtstärke durch Erweiterung von Sammelfläche und / oder Bandpass zu verbessern. Letztgenannter Aspekt soll Gegenstand des folgenden Kapitels sein, das im wesentlichen der Dispersionskorrektur diffraktiver Linsenversionen gewidmet sein wird.

4.1 Die achromatische Hybridlinse

Das Problem der Dispersionskorrektur stellte sich ursprünglich in der visuellen Optik, deren massive Linsen aufgrund der Wellenlängenabhängigkeit des Brechungsindex $n(\lambda)$ zu Verwaschungen im Sinn sphärischer Aberration Anlass gibt. Die materialspezifische Funktion $n(\lambda)$ bewirkt somit eine fokale Dispersion $F(\lambda)$, die sich jedoch mittels Kombination von zwei oder mehr Linsen verschiedener Glassorten teilweise eliminieren lässt; es gilt dann $F(\lambda) \approx \text{const.}$ innerhalb eines gewissen Farbspektrums $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$. Allgemein berechnet sich die Brennweite F eines aus zwei Komponenten bestehenden optischen Systems zu

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} - \frac{d}{F_1 F_2}, \quad (4.1)$$

wobei d den Abstand der beiden Linsen und F_1 bzw. F_2 die jeweilige Fokaldistanz bezeichnet [13]. Im strengen Sinn steht d für die Distanz der beiden sich nächstgelegenen Hauptebenen. Unter Beschränkung auf dünne Linsen – und ausschließlich solche spielen im Kontext dieser Arbeit eine Rolle – fallen jene jedoch zusammen. Vorläufig werden nur kompakte Konfigurationen betrachtet, in Gl. 4.1 ist der Linsenabstand daher zu vernachlässigen, $d \rightarrow 0$. Offensichtlich löst die Kombination zweier oder beliebig vieler diffraktiver Linsen unter dieser Voraussetzung das Dispersionsproblem nicht. Wegen der nach Tab. 2.1 im Röntgenbereich nahezu materialunabhängigen Dispersion refraktiver Linsen bleiben andererseits auch deren exklusive Konfigurationen wirkungslos. Vielmehr bedarf es eines aus

Linsen unterschiedlicher Dispersion bestehenden Systems, $\frac{d}{d\lambda}F_1(\lambda) \neq \frac{d}{d\lambda}F_2(\lambda)$. Speziell im Fall einer diffraktiv-refraktiven „Hybridlinse“ geht Gl. 4.1 dann über in

$$\frac{1}{F(E)} = \frac{1}{F_Z(E)} + \frac{1}{F_L(E)} \quad \text{mit} \quad F_Z(E) \propto E \quad \text{und} \quad F_L(E) \propto \delta^{-1}(E). \quad (4.2)$$

Die Indizes „Z“ und „L“ stehen für die diffraktive bzw. refraktive Komponente. Um den Farbfehler in erster Ordnung bzgl. kleiner Variationen in der Energie E zu eliminieren, ist

$$\frac{d}{dE} \left(\frac{1}{F(E)} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad [...] \quad \rightarrow \quad E_c \frac{\delta'(E_c)}{\delta(E_c)} = \text{sig}(F_L) \frac{N_Z}{N_L} \quad (4.3)$$

zu fordern. Mit $\delta'(E_c)$ wurde das nach E differenzierte Brechungsindex-Inkrement für die gewünschte Energie E_c beschrieben. $\text{sig}(F_L)$ symbolisiert das zunächst unbekannte Vorzeichen der refraktiven Brennweite. N_Z und N_L bezeichnen diffraktive bzw. refraktive Zonenzahl¹. Die rechte der Gl. 4.3 lässt sich als notwendige Bedingung für die achromatische Dispersionskorrektur in ihrer allgemeinsten Form interpretieren. Der integrierten Version

$$\int_{\delta_c}^{\delta} \frac{d\delta}{\delta} = \text{sig}(F_L) \frac{N_Z}{N_L} \int_{E_c}^E \frac{dE}{E} \quad \rightarrow \quad \delta(E) = \delta(E_c) \left(\frac{E}{E_c} \right)^{\text{sig}(F_L) \frac{N_Z}{N_L}} \quad (4.4)$$

ist zu entnehmen, dass die refraktive Materialdispersion $\delta(E)$ einem Potenzgesetz bzgl. der Energie folgen muß, um eine Korrektur in erster Ordnung zu erzielen. Eingesetzt in 4.2, liefert die durch Gl. 4.4 beschriebene Funktion $\delta(E)$ schließlich die energieabhängige Gesamtbrennweite

$$F(E) = F_Z^{(c)} \left(\frac{E_c}{E} + \text{sig}(F_L) \frac{N_L}{N_Z} \left(\frac{E}{E_c} \right)^{\text{sig}(F_L) \frac{N_Z}{N_L}} \right)^{-1}, \quad (4.5)$$

wobei $F_Z^{(c)}$ die Fokaldistanz der diffraktiven Komponente für $E = E_c$ angibt. Setzt man weiterhin $\psi = \frac{E}{E_c}$ und $\gamma = \frac{N_Z}{N_L}$, resultiert mit einer Entwicklung nach Potenzen von $(\psi - 1)$

$$\frac{F}{F_Z^{(c)}} = \left(\frac{1}{\psi} + \text{sig}(F_L) \frac{1}{\gamma} \cdot (\psi)^{\text{sig}(F_L)\gamma} \right)^{-1} = \frac{\gamma}{\gamma \pm 1} \mp \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\gamma \pm 1} (\psi - 1)^2 + \mathcal{O}(\psi - 1)^3. \quad (4.6)$$

Nach Tab. 2.1 folgt nun $\delta(E)$ in sehr guter Näherung einer quadratischen Abhängigkeit in $\frac{1}{E}$, so dass wegen Gl. 4.4 erstens $\text{sig}(F_L) = (-)$ und zweitens $\gamma = \frac{N_Z}{N_L} = 2$ gilt. Dieser Normalfall beschreibt den Standard-Hybrid-Achromaten im Röntgenspektrum. Lediglich in unmittelbarer Nähe der Absorptionskanten bewirkt die anomale Dispersion sowohl eine Vorzeichenumkehr gemäß $\text{sig}(F_L) \rightarrow (+)$ als auch eine quantitative Änderung des γ -Faktors. In [24] werden die im weichen Röntgenband angesiedelten L-Kanten von Si ($E_L \approx 0.1$ keV) und Cu ($E_L \approx 0.9$ keV) herangezogen, um trotz der hohen Absorption mit

¹Sofern nicht anders angegeben, wird im weiteren Verlauf der Arbeit für N_Z einfach N gesetzt.

$N_L \ll N_Z$ den Bandpass der einfachen diffraktiven Komponente um einen Faktor $10^1 - 10^2$ zu erweitern. Kanten jenseits von 1 keV – beginnend mit der Ordnungszahl $Z = 11$ für Na – weisen einen zunehmend flachen Verlauf der Materialdispersion auf. Abgesehen von den Vorzügen einer einfacheren weil breitbandigen Detektion rechtfertigt die geringe Effizienz den Rückgriff auf die anomale Dispersion daher nicht. Bezugnehmend auf Tab. 2.1 variiert die Brennweite des Standard-Achromaten also gemäß

$$F(E) = 2F_Z \left(1 + \left(\frac{\Delta E}{2E} \right)^2 + \mathcal{O} \left(\frac{\Delta E}{2E} \right)^3 \right), \quad (4.7)$$

wobei $\frac{\Delta E}{E}$ wieder den gesamten nutzbaren Bandpass angibt. Abb. 4.1 veranschaulicht die Wirkung der in erster Ordnung bzgl. $\frac{\Delta E}{E}$ eliminierten Dispersion, verglichen mit jener des diffraktiven Analogons. Die Kombination der diffraktiv konvergenten Zonenplatte bzw. FL

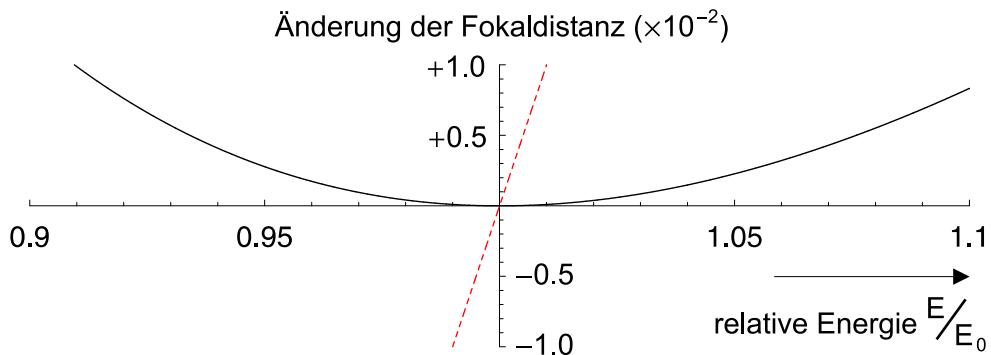


Abbildung 4.1: *Fokale Dispersion des Hybrid-Achromaten (schwarz), verglichen mit jener der diffraktiven Linse (rot strichliert). Aufgetragen ist die zum jeweiligen Nennwert F (E_c) bzw. F_Z relative Änderung der Fokaldistanz in Abhängigkeit von der Verstimmung in E .*

mit der refraktiv *divergenten* Streulinse verlängert die Gesamtbrennweite somit um einen Faktor 2. Im übrigen stellt diese Zuordnung der Linsenfunktion – prinzipiell lässt sich auch eine diffraktive Streu- mit einer refraktiven Sammellinse zu einer dispersionskorrigierten Einheit kombinieren – die physikalisch allein sinnvolle Wahl dar. Aus Gl. 4.2 geht nämlich hervor, dass andernfalls die massive und absorptionsbelastete Komponente einer unnötig großen Zonenzahl bedarf, um $F > 0$ zu gewährleisten. Die der gewählten Konfiguration entsprechende maximale (refraktive) Phasenverschiebung tritt demnach am Ort der größten Dicke der Korrekturlinse auf und beträgt $\Delta\phi = N\frac{\pi}{2}$. Abb. 4.2 illustriert die Bestandteile des Achromaten, speziell gilt vorläufig $d = 0$.

Nach Abb. 4.1 durchläuft die energieabhängige Brennweite $F(E)$ in E_c ein Minimum; der spektrale Bandpass ergibt sich daher aus der Erwartung an $F(E)$, innerhalb der halben fokalen Feldtiefe eine weitgehend beugungsbegrenzte Abbildung sicherzustellen.

$$2F_Z \left(1 + \left(\frac{\Delta E}{2E} \right)^2 \right) = 2F_Z + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{(NA)^2} \quad (4.8)$$

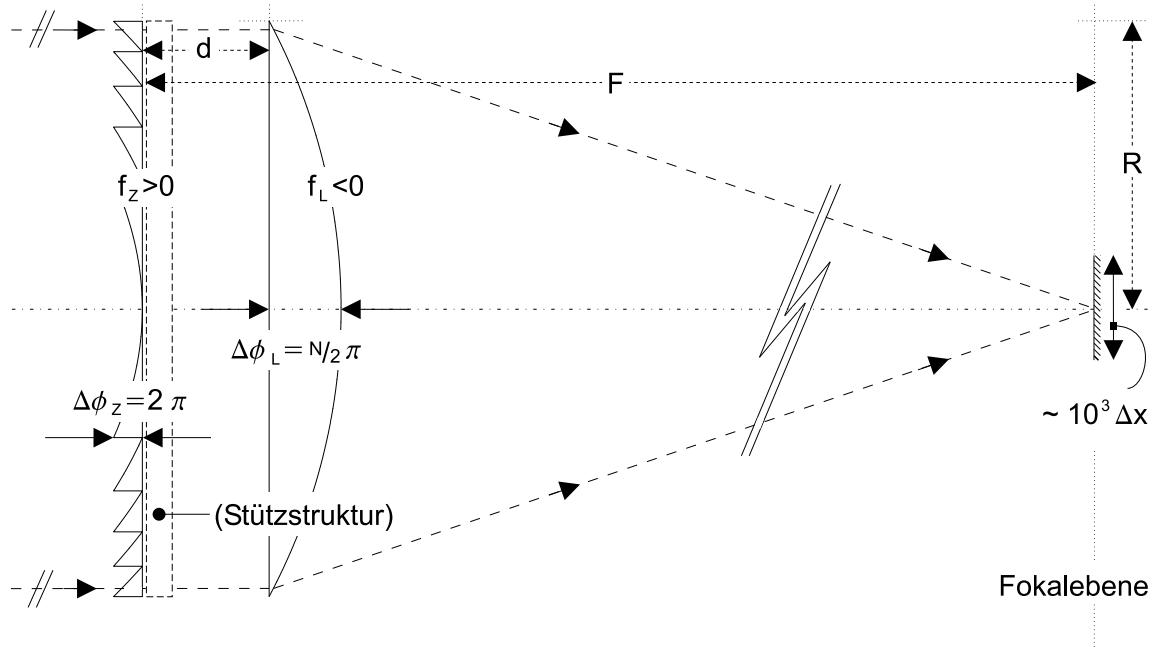


Abbildung 4.2: Dispersionskorrektur mittels diffraktiv-refraktiver Linsenkombinationen in nicht maßstabsgetreuer Darstellung. Die beiden Komponenten sind hier exemplarisch als Fresnel- bzw. plankonvexes Profil skizziert. Letztere weist bei kompakter, nicht segmentierter Ausführung einen maximalen Phasenschub $\Delta\phi \simeq N\frac{\pi}{2}$ auf. Die Fokalebene umfasst typischerweise $10^3 \times 10^3$ Pixel der Größe Δx .

führt nach wenigen Umformungen unter Beachtung der Tatsache, dass die Feldtiefe ein *Vierfaches* des diffraktiven Analogons erreicht, auf die bekannte Formel für den Bandpass,

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2}{\sqrt{N}}. \quad (4.9)$$

Die praktische Bedeutung dieser Gleichung liegt nicht nur in ihrem Einfluss auf die Lichtstärke, sondern auch in der vereinfachten Detektion, die selbst für $N \sim 10^4$ eine spektrale Selektion mittels Monochromatoren überflüssig macht und statt dessen den Einsatz eines konventionellen CCD oder vergleichbaren Instruments ermöglicht. Details werden in Kap. 6 beschrieben.

Den bisher aufgeführten Resultaten liegen geometrische Betrachtungen zugrunde, die Beugungseffekte keine Rechnung tragen. Deren Einfluss berücksichtigt die paraxiale Approximation nach Gl. 2.22. Wiederum werden nur rotationssymmetrische, im Koordinatenursprung mit $z_0 = 0$ angesiedelte Hybridlinsen betrachtet. Als diffraktives Element soll im Sinn einer einfachen analytischen Kalkulation die maximal reduzierte, kinoforme Fresnel-Linse zum Einsatz kommen, während das parabolisch-plankonvexe Profil der refraktiven Komponente als komplementäres Gegenstück zum in Abschn. 3.1 vorgestellten Kondensor firmiert. Die Profilfunktion der Hybridlinse schreibt sich dann einfach als Summe der beiden in Kap. 3 in allgemeiner Form angegebenen Einzelerme mit Index p zu

$$t_p^{(Z)}(\sigma) + t^{(L)}(\sigma) = \frac{\lambda_c}{\delta(\lambda_c)} \left(1 - p + \frac{N}{2} \left(\frac{\sigma}{R} \right)^2 \right) + \frac{\lambda_c}{\delta(\lambda_c)} \frac{N}{4} \left(1 - \left(\frac{\sigma}{R} \right)^2 \right). \quad (4.10)$$

Sie liefert schließlich die auf $\tilde{u}_0 = 1$ normierte, in Gl. 2.23 einzusetzende Eingangsamplitude

$$\tilde{u}(\sigma) = e^{ik\delta \left(1 + \frac{i}{2\pi N_0(\lambda)} \right) t(\sigma)} \quad \text{mit} \quad t(\sigma) = \frac{\lambda_c}{\delta(\lambda_c)} \left(1 - p + \frac{N}{4} \left(1 + \left(\frac{\sigma}{R} \right)^2 \right) \right). \quad (4.11)$$

Des weiteren ist noch die der Fresnel-Struktur Rechnung tragende Substitution 3.51 im Spezialfall $m = 1$ zu berücksichtigen. Damit ergibt sich unter Verwendung der üblichen Abkürzungen $\psi = \frac{E}{E_c}$ und $\zeta = \frac{z}{F}$ sowie des relativen Aperturradius $\tau = \frac{\sigma}{R}$ als Ausdruck für die zu $|u(\vec{r})|^2$ proportionale Intensitätsverteilung nach der Normierung gemäß Gl. 2.26

$$I(v, \zeta) = \left(\frac{\psi}{\zeta} \right)^2 e^{-\frac{1}{N_0} \frac{1}{\psi} \left(2 + \frac{N}{2} \right)} \left| \sum_{p=1}^{\frac{N}{2}} e^{\left(\frac{1}{N_0} - 2\pi i \right) \frac{1}{\psi} p} \mathcal{J}_p(v, \zeta) \right|^2, \quad (4.12)$$

wobei N_0 implizit von der Energie abhängt und das Integral $\mathcal{J}_p(v, \zeta)$ durch die Formel

$$\mathcal{J}_p(v, \zeta) = \int_{\sqrt{\frac{2}{N}(p-1)}}^{\sqrt{\frac{2}{N}p}} e^{i\frac{\pi}{2} \left(\left(1 + \frac{i}{2\pi N_0} \right) \frac{1}{\psi} - \frac{\psi}{\zeta} \right) N \tau^2} J_0 \left(\pi \frac{\psi}{\zeta} v \tau \right) \tau d\tau \quad (4.13)$$

gegeben ist. Während wie im Fall der einfachen Linse nach Kap. 3 die laterale Verteilung in v nur numerisch ermitteln ist, resultiert aus Gl. 4.12 eine analytisch darstellbare Intensitätsverteilung längs der optischen Achse. Setzt man $v = 0$, faktorisiert Gl. 4.12 gemäß

$$I(v = 0, \zeta) = \left(\frac{1}{N\pi} \right)^2 g(\zeta) \cdot h(\zeta). \quad (4.14)$$

Die erste Funktion $g(v, \zeta)$ ähnelt ihrer Struktur nach den aus Kap. 3 bekannten Beugungsfaktoren, speziell im Bezug auf den „refraktiven Nenner“. Explizit lautet sie

$$g(\zeta) = \frac{1 - 2e^{-\frac{1}{2N_0} \frac{1}{\psi}} \cos \left(\pi \left(\frac{\psi}{\zeta} - \frac{1}{\psi} \right) \right) + e^{-\frac{1}{N_0} \frac{1}{\psi}}}{\left(1 - \frac{\zeta}{\psi^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2\pi N_0} \frac{\zeta}{\psi^2} \right)^2}. \quad (4.15)$$

Dagegen repräsentiert das positive Vorzeichen im cos-Term der Funktion $h(v, \zeta)$ die Dispersionskorrektur in erster Ordnung bzgl. ψ ,

$$h(\zeta) = \frac{1 - 2e^{-\frac{N}{4N_0} \frac{1}{\psi}} \cos \left(\frac{N}{2} \pi \left(\frac{\psi}{\zeta} + \frac{1}{\psi} \right) \right) + e^{-\frac{N}{2N_0} \frac{1}{\psi}}}{1 - 2e^{\frac{1}{2N_0} \frac{1}{\psi}} \cos \left(\pi \left(\frac{\psi}{\zeta} + \frac{1}{\psi} \right) \right) + e^{\frac{1}{N_0} \frac{1}{\psi}}}. \quad (4.16)$$

Formal unterdrückt die spezielle Struktur des cos-Arguments in einem durch N festgelegten Intervall die Oszillation der trigonometrischen Funktion. Um ihre Wirkungsweise zu

analysieren, wird vorübergehend die Absorption vernachlässigt, so dass sich Gl. 4.14 zu

$$\lim_{N_0 \rightarrow \infty} I(v=0, \zeta) = \left(\frac{2}{N\pi} \right)^2 \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{\psi}{\zeta} - \frac{1}{\psi} \right) \right)}{1 - \frac{\zeta}{\psi^2}} \right)^2 \left(\frac{\sin \left(\frac{N\pi}{2} \left(\frac{\psi}{\zeta} + \frac{1}{\psi} \right) \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{\psi}{\zeta} + \frac{1}{\psi} \right) \right)} \right)^2 \quad (4.17)$$

vereinfacht. Die Dispersionskorrektur zeigt sich in der Reihenentwicklung bzgl. ψ für $\zeta = 1$,

$$\sin \left(\frac{N\pi}{2} \left(\psi + \frac{1}{\psi} \right) \right) = \sin \left(N \frac{\pi}{2} \right) + N \frac{\pi}{4} \cos \left(N \frac{\pi}{2} \right) (\psi - 1)^2 + \mathcal{O}(\psi - 1)^3. \quad (4.18)$$

Die übrigen Terme, speziell der (sin)-Nenner, müssen nicht berücksichtigt werden, da sie für genügend große N relativ langsam oszillieren. Abb. 4.3 illustriert den aus Gl. 4.17 resultierenden Verlauf der absorptionsfreien Peakintensität im Fokus als Funktion von ψ . Unter dem Einfluss nicht allzu starker Absorption erweist sich deshalb auch der nutzbare

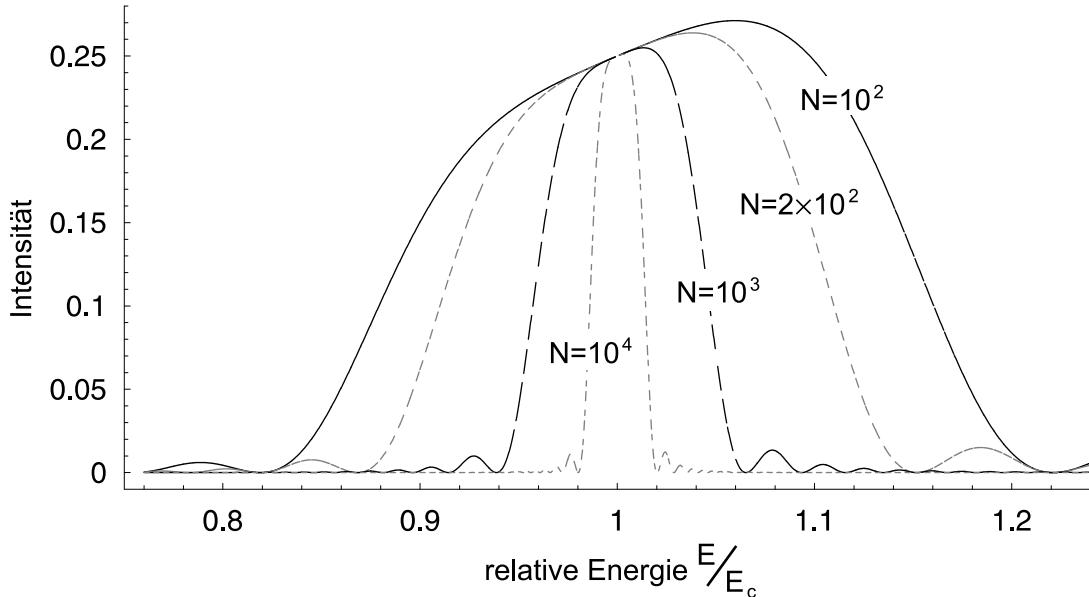


Abbildung 4.3: *Bandpass des absorptionsfreien Hybrid-Achromaten. Die spektrale Breite, für die $I(\psi) \approx \text{const.}$ gilt, skaliert mit $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Im spektralen Schwerpunkt mit $\psi = 1$ beträgt die Intensität wegen $F = 2F_Z$ nur 25% der im Fokus des diffraktiven Analogons auftreffenden.*

Bandpass bis herauf zu $N_0 \lesssim N$ als weitgehend konstant. Dagegen nimmt die Peakeffizienz mit N_0 rapide ab. Formal gelangt man unter Rückgriff auf Gl. 4.14 zu

$$I(N_0) = \left(2 \frac{N_0}{N} \right)^2 \left(\frac{1 - e^{-\frac{N}{4N_0}}}{1 - e^{\frac{1}{2N_0}}} \right)^2 \left(1 - e^{-\frac{1}{2N_0}} \right)^2. \quad (4.19)$$

Offenbar wird $I(N_0)$ hauptsächlich vom Quotienten $\frac{N}{N_0}$ bestimmt, die durch den Absolutwert von N_0 auftretenden Beiträge tragen für $N_0 \gg 1$ nur unwesentlich bei. Abb. 4.4

verdeutlicht, dass Achromaten realistischer Zonenzahl ($N \gtrsim 10^3$) mit kritischen Werten N_0 unterhalb von wenigen 10^2 kaum noch effizient zu betreiben sind. Dies gilt umso mehr,

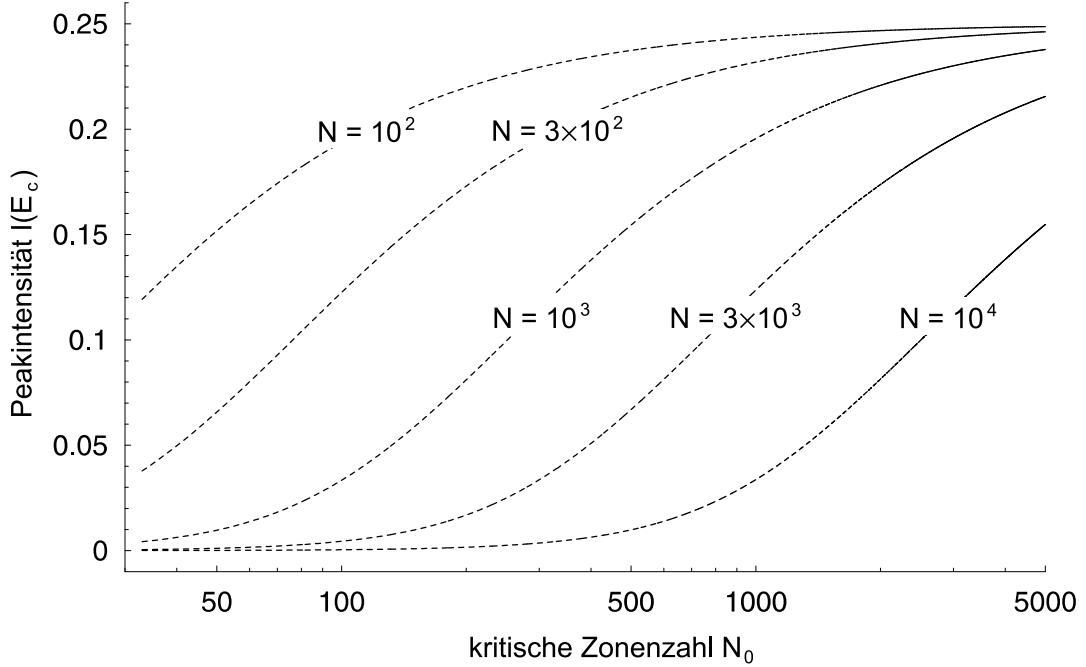


Abbildung 4.4: *Absorptionsbehaftete Peakeffizienz des Hybrid-Achromaten. Für diverse Zonenzahlen $10^2 \leq N \leq 10^4$ ist die normierte Maximalintensität im Fokus als Funktion der via N_0 gemessenen Absorption aufgetragen.*

als die Bildqualität im Sinn von Winkelauflösung und Kontrast ebenfalls leidet. Zu deren Analyse bedarf es der numerischen Berechnung der Modulations-Transferfunktion (MTF) aus dem Beugungssintegral nach Gl. 4.12 unter der fokalen Bedingung $\zeta = 1$, die erst auf

$$I(v) = \psi^2 e^{-\frac{1}{N_0} \frac{1}{\psi} (2 + \frac{N}{2})} \left| \sum_{p=1}^{\frac{N}{2}} e^{\left(\frac{1}{N_0} - 2\pi i\right) \frac{1}{\psi} p} \int_{\sqrt{\frac{2}{N}(p-1)}}^{\sqrt{\frac{2}{N}p}} e^{i\frac{\pi}{2} \left(\left(1 + \frac{2\pi i}{2\pi N_0}\right) \frac{1}{\psi} - \psi\right) N \tau^2} J_0(\pi\psi v \tau) \tau d\tau \right|^2$$

und dann unter der weitergehenden Reduktion auf den monochromatischen Fall mit $\psi = 1$

$$I_s(v) = e^{-s \left(\frac{2}{N} + \frac{1}{2}\right)} \left(\sum_{p=1}^{\frac{N}{2}} e^{\frac{s}{N} p} \int_{\sqrt{\frac{2}{N}(p-1)}}^{\sqrt{\frac{2}{N}p}} e^{-\frac{s}{4} \tau^2} J_0(\pi v \tau) \tau d\tau \right)^2 \quad (4.20)$$

führt, wobei zuletzt noch das Zonenverhältnis $s = \frac{N}{N_0}$ Verwendung fand. Der letztlich parametrisch nur von s bestimmten Punktbildfunktion ist zunächst die HEW-Winkelauflösung zu entnehmen, dazu setze man analog zu Gl. 3.15

$$\frac{1}{\pi} P_s(v_{HEW}) = 2\pi \int_0^{v_{HEW}} I_s(v) v dv = \frac{1}{\pi s} e^{-\frac{s}{N}} \left(1 - e^{-\frac{s}{2}}\right) = \frac{1}{2\pi} P_s^{(tot)}. \quad (4.21)$$

Tab. 4.1 listet für diverse Zonenverhältnisse $\frac{N}{N_0}$ die prozentuale Abweichung der Lateral- und damit Winkelauflösung vom Idealwert der mit $s \rightarrow 0$ transparenten Hybridlinse auf. Es wird deutlich, dass sich der Fehler in der i.a. noch tolerierbaren Größenordnung von

N/N_0	0.1	0.4	0.8	1	2	3	4	5	6	7	8
$\delta(\Delta\epsilon) (\%)$	0.11	0.51	1.16	1.54	4.06	7.73	12.9	20.1	31.2	55.5	145

Tabelle 4.1: *Winkelauflösung der absorbierenden Hybridlinse. Mit zunehmendem Zonenverhältnis $\frac{N}{N_0}$ verschlechtert sich die HEW-Auflösung überproportional. Solange $N \lesssim N_0$, erreicht sie noch nahezu das Optimum.*

$\sim 1\%$ bewegt, solange $N \lesssim N_0$ gilt. Während sowohl der einfachen refraktiven Sammell- als auch der Hybridkomposition eine mit steigendem s abnehmende Auflösung eignet, fun- giert letztere im Fall starker Absorption als quasi ringförmige Apertur nach Abschn. 2.2. Mit der absorptionsbedingten „Zentrallobstruktur“ geht zwar eine geringfügig verbesserte Rayleigh- und FWHM-Auflösung einher, die jedoch nur im Fall punktförmiger Quellen wie beispielsweise eines fernen Doppelsternsystems praktischen Nutzen verspricht. Der weitaus häufigeren Beobachtungssituation auf mas-Skalen ausgedehnter Emissionsgebiete stehen die intensiven Beugungsringe entgegen (vgl. Abb. 2.7). Quantitativ kommt dieser Sachver- halt in der Modulations-Transferfunktion (MTF) zum Ausdruck, die sich nach Gl. 2.32 zu

$$M(\omega) \propto 2\pi \int_0^\infty I_s(v) J_0(2\pi v \omega) v \, dv \quad (4.22)$$

berechnet. Die Proportionalität berücksichtigt die übliche Normierung auf $M(0) = 1$ mit- tels der aus Gl. 4.21 übertragenen Beziehung $2\pi \int_0^\infty I_s(v) v \, dv = \frac{1}{\pi} P_s^{(tot)}$. In graphischer Form sind die Kontrastfunktionen in Abb. 4.5 aufgetragen. Offensichtlich bewirkt die kon- vexe Korrekturlinse nun ein relatives Hochpass-Verhalten, im Gegensatz zur Tiefpass- Funktion der konkaven Sammellinse nach Abb. 3.2. Auch dieser Darstellung ist die Toleranz gegenüber *moderater* Absorption zu entnehmen – bis herauf zu $\frac{N}{N_0} \sim 1$ treten nur geringfügige Abweichungen vom Idealfall der transparenten Apertur auf.

Angesichts der im folgenden Kapitel 5 eingehend diskutierten Tatsache, dass aus prakti- schen Erfordernissen heraus die vage Toleranzgrenze von $N \sim N_0$ vielfach nicht eingehalten werden kann, stellt sich die Frage nach einer die Auflösung erhaltenden Modifikation des Hybridsystems. Offenkundig bedarf es einer hinreichend „flachen“ Transmissionsfunktion $\mathcal{T}(\tau)$, um das Gros der fokalen Leistung im zentralen Maximum zu konzentrieren. Man wird daher versuchen, die Hybridlinse mittels eines zusätzlichen Graufilters zu apodisie- ren. Zu diesem Zweck ist mit der refraktiven Linsentransmission $\mathcal{T}_L(\tau)$ – der Beitrag der über τ periodisch konstanten Transmission der Fresnel-Linse sei hier vernachlässigt – und dem Filterprofil $\mathcal{T}_{grau}(\tau)$

$$\mathcal{T}_L(\tau) \times \mathcal{T}_{grau}(\tau) = \mathcal{T}_L(0) \quad \forall \quad 0 \leq \sigma \leq 1 \quad (4.23)$$

zu fordern. Die gesuchte Filterfunktion ergibt sich dann wegen $\mathcal{T}_L(\tau) = e^{-\frac{s}{2}(1-\tau^2)}$ gemäß

$$\mathcal{T}_{grau}(\tau) = \mathcal{T}_L(0) \times \mathcal{T}_L^{-1}(\tau) = e^{-\frac{s}{2}\tau^2}, \quad (4.24)$$

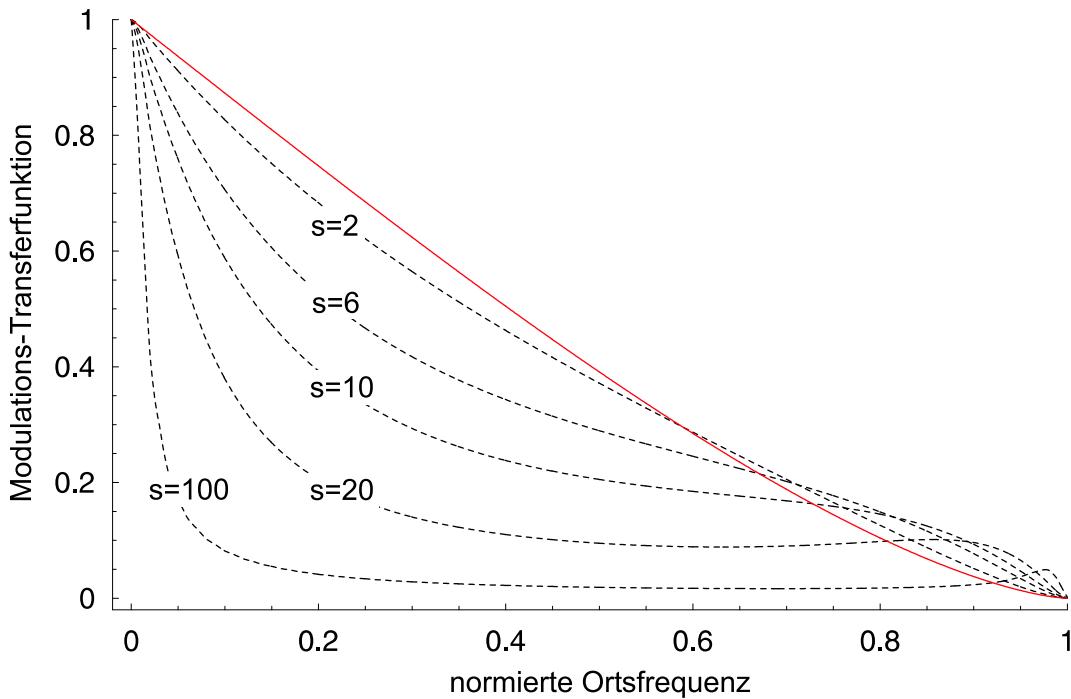


Abbildung 4.5: Transferfunktion des absorbierenden Achromaten. Jenseits einer Grenze $s \gtrsim 1$ wirkt das Hybridelement zunehmend wie eine Linse mit Zentrallochstruktur, deren moderates Hochpassverhalten in der MTF zum Ausdruck kommt. Zum Vergleich ist die MTF der idealen Apertur eingezeichnet (rot).

wobei für den normierten Aperturradius wieder $\tau = \frac{\sigma}{R}$ gilt. Ausgestattet mit einem derartigen Filter, weist die Hybridlinse eine über die gesamte Apertur konstante Transmission auf, die dem geringsten, am Ort der größten Dicke auftretenden Wert entspricht. Der Realisierung eines solchen Filters steht zunächst die stets gekoppelt mit der Absorption auftretende Brechung im Sinn von $n = 1 - \delta - i\beta$ entgegen, mit ggf. negativen Auswirkungen auf die achromatische Phasenbedingung. Alternativ besteht die Möglichkeit, eine Lochmaske zu verwenden, bestehend aus zahlreichen zufällig angeordneten Mikro-Öffnungen, die im großräumigen Mittel die durch Gl. 4.24 vorgegebene Filterfunktion approximieren. Abb. 4.6 zeigt die Wirkung des Graufilters anhand verschiedener Werte für $1 \leq s \leq 3$. Obwohl hinsichtlich Winkelauflösung und Bildqualität gemäß Tab. 4.1 eine *vollständige* Apodisierung nach Gl. 4.23 nicht erforderlich ist², stellt sie quasi die mathematisch reine Lösung des Beugungsproblems dar und soll daher vorläufig allen weiteren Rechnungen zugrunde gelegt werden. Die Gesamt-Effizienz der Hybridlinse ist dann durch

$$\mathcal{T}_s = \mathcal{T}_Z(s) \times \mathcal{T}_L(s) = \frac{N}{2s} \left(1 - e^{-\frac{2s}{N}}\right) \times e^{-\frac{s}{2}} \quad \text{mit} \quad s = \frac{N}{N_0} \quad (4.25)$$

gegeben, da die Transmissionsfunktion $\mathcal{T}(s)$ nun wegen $\mathcal{T}_L(s) = \text{const.}$ in einen diffraktiven

²Ein entsprechend leistungssteigerndes partielles Filter für Linsensegmente wird in Kap. 5 eingeführt.

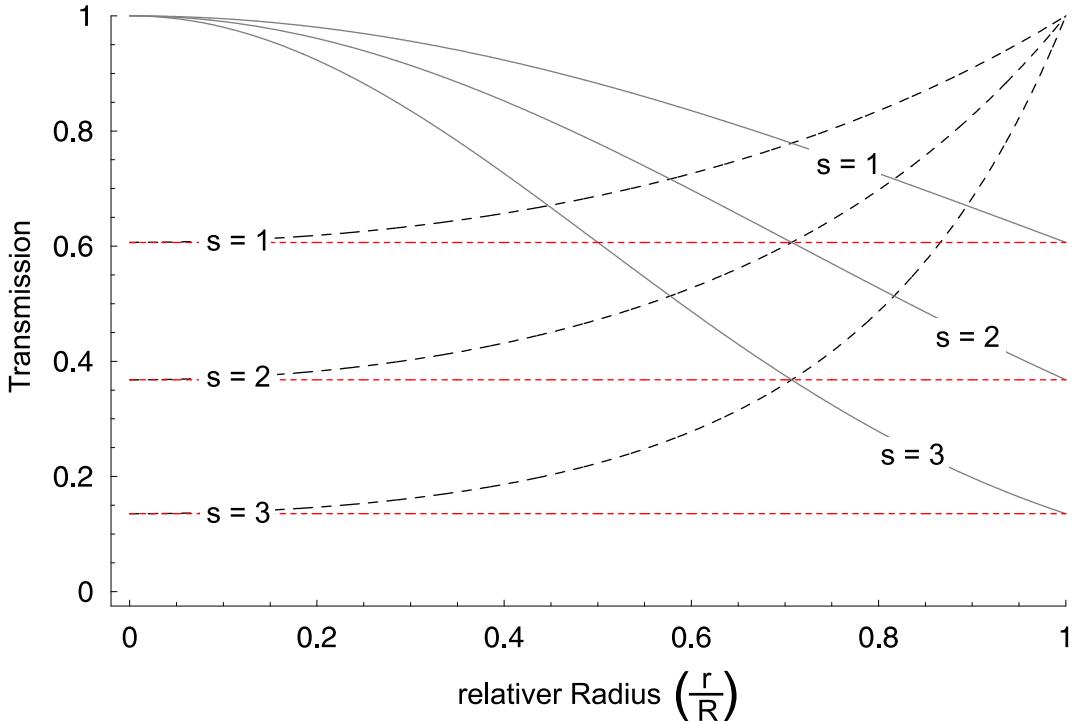


Abbildung 4.6: Apodisierung des Transmissionsprofils mittels Graufiltern für $1 \leq s \leq 3$. Um Winkelauflösung und Kontrast der idealen absorptionsfreien Hybridlinse zu erhalten, bedarf es eines komplementären Graufilters (grau, durchgezogen). Das ursprüngliche Transmissionsprofil (schwarz, strichliert) nimmt dann einen von $\frac{r}{R}$ unabhängigen Wert an (rot).

(Index „Z“) und einen refraktiven (Index „L“) Anteil faktorisiert. Mit ihrer Hilfe lässt sich analog zu Kap. 3 die Lichtstärke $A_{eff} \times \Delta E$ des Hybridelements abschätzen, es ergibt sich

$$A_{eff} \times \Delta E = \frac{\pi}{2} \sqrt{N} \cdot \frac{N}{2s} \left(1 - e^{-\frac{2s}{N}}\right) e^{-\frac{s}{2}} \cdot F \cdot hc, \quad (4.26)$$

mit den Naturkonstanten h und c . Abgesehen von der schon bekannten Linearität in der Brennweite F tritt insbesondere die funktionale Abhängigkeit vom relativen Zonenparameter s hervor, die für hinreichend große N_0 im wesentlichen in Form des refraktiven Faktors $\mathcal{T}_L(s) = e^{-\frac{s}{2}}$ eingeht. Da ferner die Zonenzahl N – wenn auch nur linear in \sqrt{N} – eingeht, ist bei der Konstruktion eines Achromaten einer möglichst großen kritischen Zonenzahl N_0 vorrangige Aufmerksamkeit zu widmen. Abb. 4.7 stellt N_0 für die leichtesten Elemente mit $1 \leq Z \leq 6$ graphisch dar. Augenscheinlich erreichen unterhalb von rund (2–3) keV nur H_2 und He mit $N_0 \gtrsim 10^2$ hinreichend große Werte, um Hybridlinsen realistischer Zonenzahl zu fertigen. Während einer einfachen Verwendung dieser Stoffe a priori ihre unter Normbedingungen gasförmige Konsistenz entgegensteht, erreicht die optische Güte technisch gut zu verarbeitender Feststoffe lediglich im harten Röntgenbereich jenseits von 10 keV eine annähernd vergleichbare Größenordnung. Anstatt elementare Stoffe zur Dispersionskorrektur zu verwenden, bietet sich alternativ der Einsatz chemischer Verbindungen an, wie sie

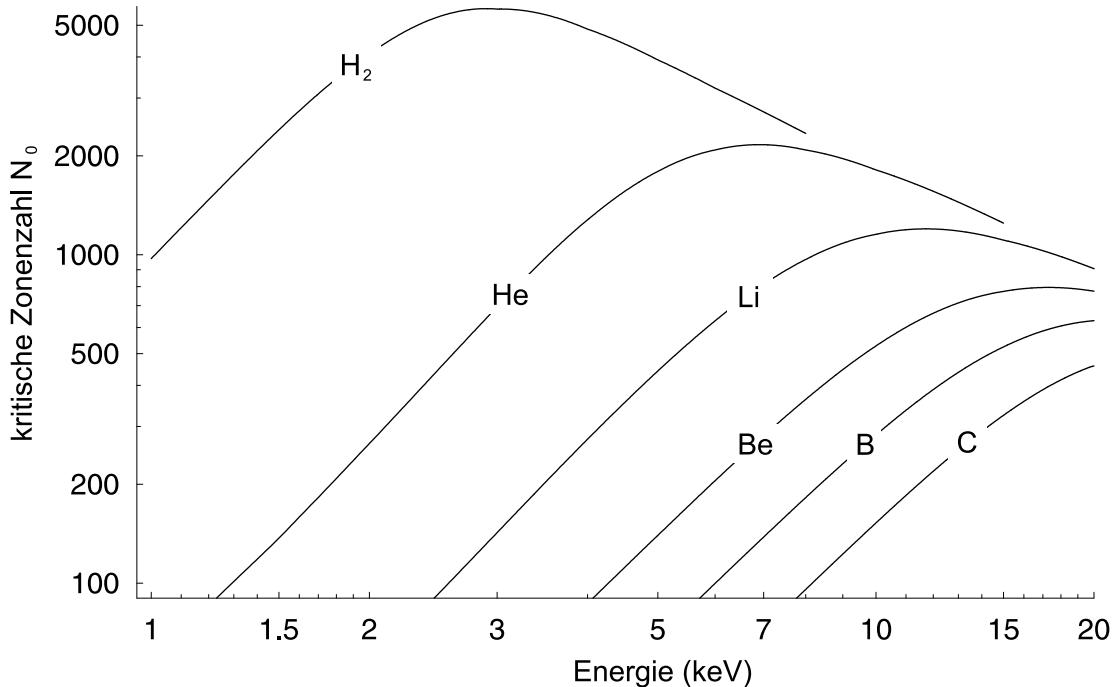


Abbildung 4.7: *Eignung diverser Elemente zur Fertigung refraktiver Korrekturlinsen. Eingetragen ist die kritische Zonenzahl N_0 für die leichtesten Elemente H_2 bis C im Energieintervall $1 \text{ keV} \leq E \leq 20 \text{ keV}$. Der optimale Einsatzbereich verschiebt sich mit wachsendem Z ins harte Röntgenspektrum.*

beispielsweise das bekannte Polycarbonat ($C_{16}H_{14}O_3$) darstellt. Abb. 4.8 illustriert dessen „kritische“ Kurve zusammen mit jenen diverser anderer Verbindungen. Erwartungsgemäß weisen die Hydride X_mH_n der leichten Elemente die besten Werte auf, gemäß Gl. 2.7. So weit bekannt, bilden von Li und Be lediglich LiH bzw. BeH_2 stabile Kristalle [25]. Dagegen existieren zahlreiche Bor-Hydride („Borane“), unter denen jedoch nur die höherwertigen mit $m \geq 10$ bei 300 K kristallisieren. Exemplarisch ist die optische Güte von *Decaboran* ($B_{10}H_{14}$) aufgeführt. Eine noch größere Vielfalt weisen die Kohlenwasserstoffe auf, unter denen bei 300 K ebenfalls nur die höherwertigen in fester Phase bestehen. Relativ ungünstig stellt sich die Situation dagegen für Kunststoffe wie Polycarbonat ($C_{16}H_{14}O_3$) oder Polyamid ($C_{22}H_{10}N_2O_5$) dar.

Den bisherigen Ausführungen zufolge treten also bzgl. des als Lichtstärke bezeichneten Leistungsvermögens $A_{eff} \times \Delta E$ zwei gegenläufige Effekte in Konkurrenz – während jene mit der Zonenzahl \sqrt{N} skaliert, schwächt andererseits die zunehmende Absorption die nutzbare Fläche. Ausgehend von dieser Überlegung erlaubt der Vergleich zwischen den Lichtstärken einer Hybridlinse und deren diffraktivem Analogon die Definition eines universellen, quantitativen Kriteriums, das die Wirksamkeit der Dispersionskorrektur misst. Bezeichnet man vorübergehend die Lichtstärken mit Q_Z bzw. Q_A , so gilt mit Gl. 4.25

$$Q_Z = \pi R^2 \cdot \mathcal{T}_Z(s) \times \frac{1}{N} E \quad \text{und} \quad Q_A = \pi R^2 \cdot \mathcal{T}_Z(s) \cdot \mathcal{T}_L(s) \times \frac{2}{\sqrt{N}} E, \quad (4.27)$$

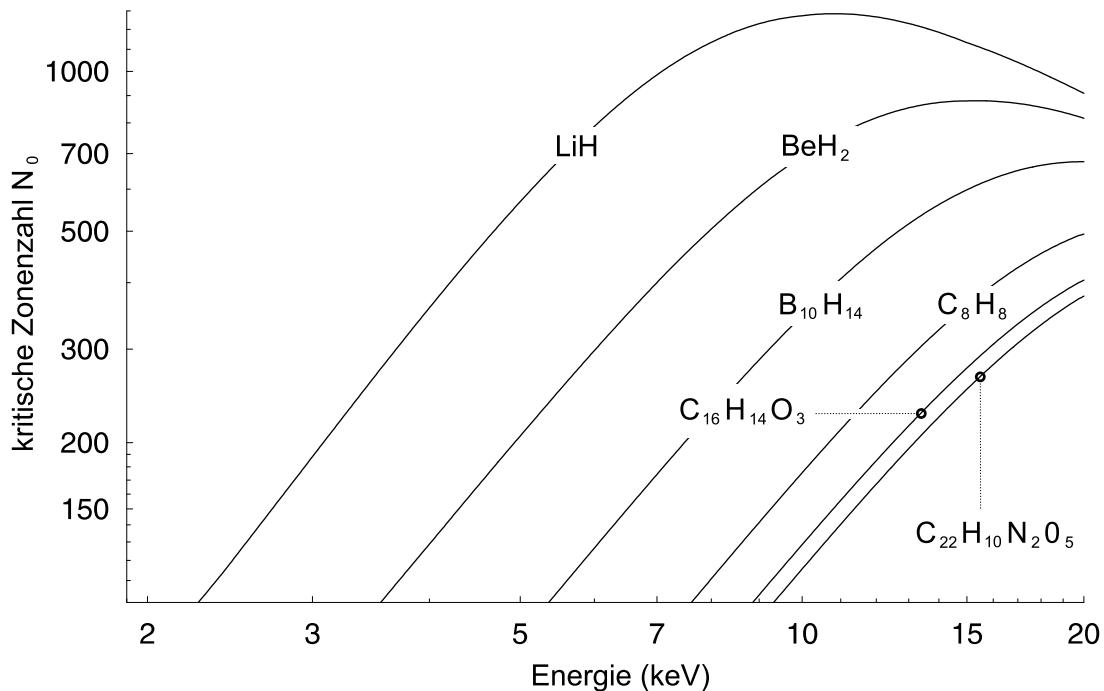


Abbildung 4.8: *Eignung chemischer Verbindungen zur Fertigung refraktiver Korrekturlinsen. Unter den Verbindungen leichter Elemente eignen sich besonders die Hydride der Form $X_m H_n$, während Kunststoffe wie Polycarbonat ($C_{16} H_{14} O_3$) oder Polyamid ($C_{22} H_{10} N_2 O_5$) relativ schlechte Werte aufweisen.*

wenn die diffraktive Komponente in beiden Fällen identisch ist und der Unterschied nur in der additiven Korrekturlinse besteht. Der Quotient beider Lichtstärken ergibt sich nun zu

$$V \equiv \frac{Q_A}{Q_Z} = 2\sqrt{N} e^{-\frac{N}{2N_0}} \quad (4.28)$$

und kann als Verstärkungsfaktor V interpretiert werden, den die Dispersionskorrektur bewirkt. Die Größe V hängt ausschließlich von geometrischer und kritischer Zonenzahl ab und liefert bei optimaler Wahl von N relativ zum Materialparameter N_0 ein Optimum,

$$\frac{d}{dN} \left(\frac{Q_A}{Q_Z} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad N_{opt} = N_0. \quad (4.29)$$

Den größten Nutzen verspricht die Dispersionskorrektur gerade dann, wenn geometrische und kritische Zonenzahl zusammenfallen. Die maximale Verstärkung beträgt in diesem Fall

$$V_{max} = 2e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{N} \approx 1.2\sqrt{N}. \quad (4.30)$$

Dagegen tendiert die Funktion $V(N)$ für kleine und große Zonenzahlen jeweils gegen Null,

$$\lim_{N \rightarrow 0} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} = 0, \quad \text{wenn} \quad N_0 < \infty. \quad (4.31)$$

Im übrigen wirken sich bzgl. N_0 „zu große“ Zonenzahlen N auf die Verstärkung weitaus negativer aus als „zu kleine“. Tab. 4.2 listet einige Werte auf.

N/N_0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.8	1.0	2.0	3.0	4.0	6.0	8.0	10
V/V_{max}	0.50	0.67	0.78	0.91	0.99	1.00	0.86	0.64	0.45	0.20	0.09	0.04

Tabelle 4.2: *Relative Verstärkung von Hybridlinsen. Für diverse Zonenverhältnisse $\frac{N}{N_0}$ ist die auf V_{max} normierte Verstärkung aufgelistet, welche bei $N = N_0$ auftritt.*

Abb. 4.9 illustriert den Verlauf nach Gl. 4.28 graphisch. Als letztlich etwas willkürliche untere Schranke an den physikalisch-technisch sinnvollen Verstärkungsfaktor wird $V_{min} = 4$ angesehen. Zum einen, weil durch die verlängerte Brennweite ohnehin eine um den Faktor 2 verbesserte Lichtstärke erreicht wird; zum anderen geht die Dispersionskorrektur in gleichem Maße zu Lasten der Ortsauflösung. Man liest unter anderem aus Abb. 4.9 ab

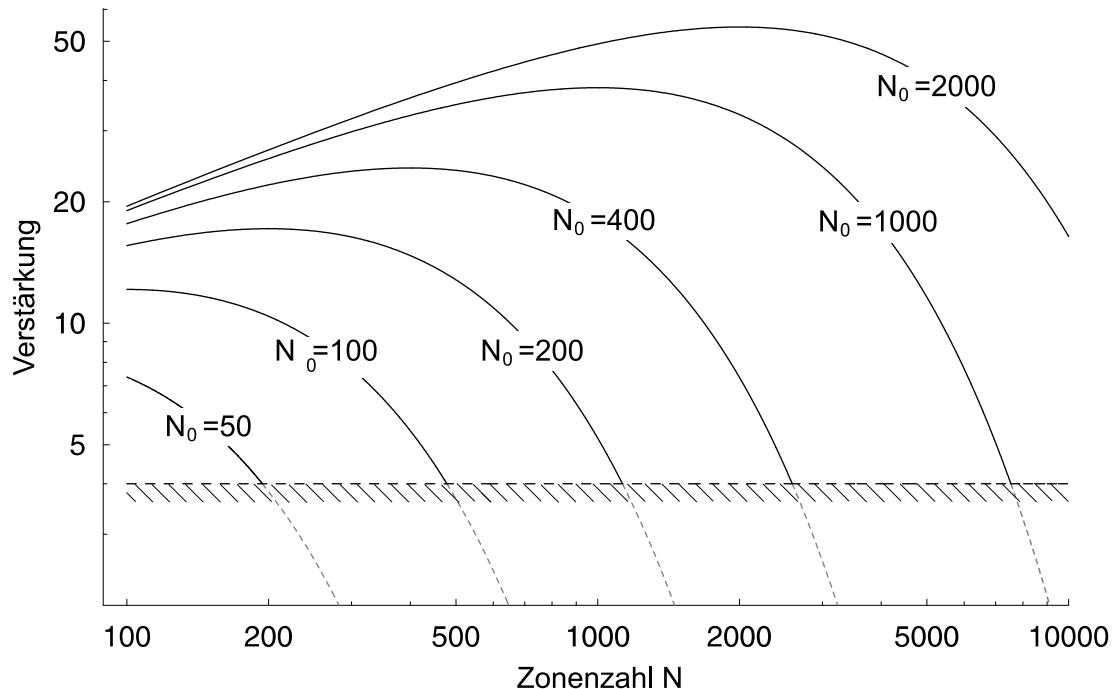


Abbildung 4.9: *Verstärkungsfaktor von Hybrid-Achromaten. Für kritische Zonenzahlen $50 \leq N_0 \leq 2000$ ist der Gewinn an Lichtstärke gegenüber dem diffraktiven Analogon aufgetragen. Unterhalb von $V_{min} = 4$ erscheint eine Dispersionskorrektur nicht mehr sinnvoll.*

bzw. berechnet mittels Gl. 4.28, dass $V \approx 4$ für $N_0 = 1000$ bei $N_{max} \approx 7500$ auftritt. Li erreicht jenseits von 10 keV einen maximalen N_0 -Wert von etwa 1200, entsprechend $N_{max} \approx 9300$. Physikalisch sinnvolle Feststoff-Achromaten sind somit in ihrer geometrischen Zonenzahl auf allenfalls einige 10^3 beschränkt. Entsprechend markiert $V \approx 40$ die größtmögliche Verstärkung kompakter Hybridlinsen. Tab. 4.3 gibt einen Überblick zu den

N_0	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300
V_{max}	17	21	24	27	30	32	34	36	38	40	42	44

Tabelle 4.3: *Maximalverstärkung von Hybridlinsen.* Für diverse kritische Zonenzahlen N_0 ist die größtmögliche Verstärkung angegeben, die bei $N = N_0$ erreicht wird.

maximalen Verstärkungsfaktoren. Dabei ist jedoch zu bedenken, dass Hybridlinsen relativ geringer Zonenzahl $N \sim 10^2$ wegen des zu $\frac{1}{N}$ proportionalen Quotienten $\frac{\rho_{PSF}}{R}$ praktisch kaum von Bedeutung sind. Dieser Aspekt wird in Kap. 5 eingehend diskutiert. Ferner sollten die in Tab. 4.3 angegebenen Daten nicht darüber hinweg täuschen, dass alle unter Normbedingungen festen Materialien einschließlich Li und dessen Hydrid ihr Maximum in N_0 im harten Röntgenband jenseits von 10 keV erreichen, dem u.a. aufgrund nachlassender Detektorsensitivität im Bezug auf die Lichtstärke zumindest in dieser Arbeit nachrangige Aufmerksamkeit gilt.

Im praktischen Gebrauch stellt sich vielmehr eher die Frage, innerhalb welcher parametrischen (unteren) Grenzen ein bestimmtes Material die Konstruktion eines dispersionskorrigierten Objektivs ausreichender Leistungsfähigkeit gestattet. Offenkundig liefert Gl. 4.28 bereits einen Teil der Antwort. Dazu betrachte man das Öffnungsverhältnis

$$f = \frac{F}{2R} = [...] \approx 0.535 \frac{1}{\Delta\epsilon} \frac{1}{N}, \quad \text{wenn } \Delta\epsilon \approx 1.07 \frac{\lambda}{2R} \quad (4.32)$$

die HEW-Winkelauflösung definiert. Betrachtet man sie als fixen Parameter, gibt das über den Mindest-Verstärkungsfaktor $V_{min} = 4$ ermittelte Supremum N_{max} an die Zonenzahl eine untere Schranke an das Öffnungsverhältnis, $f \geq f(N_{max})$ für $N \leq N_{max}$. Naturgemäß nimmt f_{min} für ein gegebenes Material mit der Energie E zu. In Abb. 4.10 sind diese Schranken für diverse Stoffe aufgetragen. Man erkennt anhand der linken Grafik, dass sich bei festem f das Einsatzspektrum eines chemischen Elements umso weiter ins weiche Röntgenband erstreckt, je kleiner dessen Ordnungszahl Z ist. Analoges gilt für Verbindungen (rechte Seite), unter denen allein LiH auch im Bereich weniger keV eingesetzt werden kann.

Die Forderung der Minimalverstärkung von $V = 4$ limitiert somit zu weichen Röntgenstrahlen hin, während der mit E generell zunehmenden Linsenkrümmung die Rolle der „harten“ Schranke zukommt. Um das zu sehen, ist diesmal für das Öffnungsverhältnis

$$f = \frac{F}{2R} = [...] = \frac{1}{2\delta} \frac{1}{q} \quad \text{mit } q \equiv \frac{R}{\xi} \quad (4.33)$$

zu setzen. ξ steht wie bisher für den Krümmungsradius der *plankonvexen* Version, $\xi = F \cdot \delta$. Unter Annahme eines plankonvexen parabolischen Profils resultiert für $q = 1$ am Rand der Apertur ein Steigungswinkel von 45° . Legt man dagegen ein gegenüber Bildfehlern tolerantes bikonvexes Profil zugrunde, definiert $q = 2$ ein grobes Maß für die technisch mögliche Linsenkrümmung. Diese Festlegung ist als „flexible“ Grenze zu interpretieren. Im Einzelfall können auch dickere Linsen mit $q > 2$ gewählt werden. Tab. 4.4 listet für $1 \leq q \leq 10$ gemäß $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{q}{2}$ die halben Steigungswinkel $\frac{\alpha}{2}$ auf. Bezugnehmend auf den

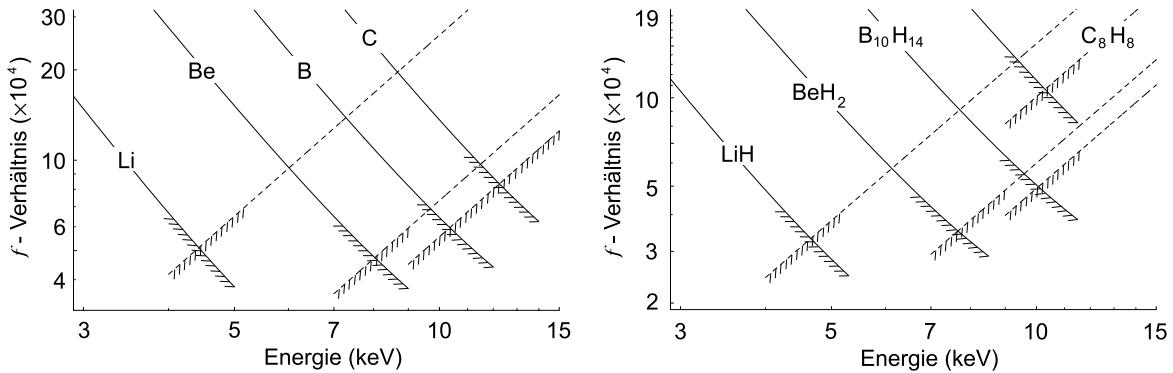


Abbildung 4.10: Nutzbarkeit kompakter Feststoff-Hybrid-Achromaten in verschiedenen Energiebereichen. Eingezeichnet sind untere Grenzen an das energieabhängige f -Verhältnis. Die durchgezogenen Linien beziehen sich auf eine minimale Verstärkung von 4 gegenüber dem diffraktiven Analogon. Im Gegensatz beschränken die refraktiven Krümmungsradien den Einsatzbereich auf mehr oder weniger weiche Röntgenstrahlen (strichliert).

R/ξ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\alpha/2$	26.6°	45.0°	56.3°	63.4°	68.2°	71.6°	74.1°	76.0°	77.5°	78.7°

Tabelle 4.4: Steigungswinkel bikonvexer Hybridlinsen. Die auf ganze Zahlen gerundeten Werte sind in Abhängigkeit vom Radienverhältnis $\frac{R}{\xi}$ eingetragen.

Richtwert $q = 2$ sind die nach 4.33 in Abb. 4.10 strichliert eingetragen. Da die Brechkraft δ mit der Energie abnimmt, nimmt die Schranke an f mit selbiger zu, es handelt sich also um ein Limit zum harten Röntgenband hin.

Bislang wurde stets die erste Beugungsordnung der diffraktiven Hybrid-Komponente herangezogen, um den Farbfehler bei der Blaze-Wellenlänge λ_c bzw. Zentral-Energie E_c zu korrigieren. Nun gestatten die speziellen Abbildungseigenschaften der kinoformen³ Fresnel-Linse in Verbindung mit den jeweiligen diffraktiven bzw. refraktiven Dispersionsrelationen den Einsatz eines gegebenen Hybrid-Achromaten in höheren Beugungsordnungen. Aufgrund $F_Z(E) \propto E$ und $F_L(E) \propto E^2$ ergibt sich nämlich explizit

$$\frac{2}{m} F_Z^{(0)} = -F_L^{(0)} \frac{E}{E_c} \quad \text{mit } m \in \mathbb{N} \quad (4.34)$$

als Bedingung für die Dispersionskorrektur in erster Ordnung bzgl. E . Die Superscript-Indizes (0) verdeutlichen, dass die jeweiligen Brennweiten bei $E = E_c$ einzusetzen sind. Die Hybridlinse korrigiert somit ein Energiespektrum der Form $E_m = \frac{1}{m} E_c$. Ausgehend von Gl.

³Multilevel-Approximationen hinreichend großer Stufenzahl L an das ideal kinoforme Profil erfüllen die Anforderungen in der Praxis ebenfalls.

4.17 lautet die Intensitätsverteilung $I(v = 0, \zeta)$ unter Vernachlässigung der Absorption

$$\lim_{N_0 \rightarrow \infty} I_m(\psi) = \left(\frac{2m}{N} \right)^2 \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} \psi \left(\frac{1}{\psi^2} - m^2 \right) \right)}{\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\psi^2} - m^2 \right)} \right)^2 \left(\frac{\sin \left(\frac{N}{2} \frac{\pi}{2} \psi \left(\frac{1}{\psi^2} + m^2 \right) \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} \psi \left(\frac{1}{\psi^2} + m^2 \right) \right)} \right)^2, \quad (4.35)$$

wenn $I(v = 0, \zeta)$ an der fixen axialen Position $\zeta = \left(\frac{1}{m} \right)^2$ betrachtet wird, die die Lage der diffraktiven Maxima m -ter Ordnung zur Energie $E = \frac{1}{m} E_c$ markiert. Abb. 4.11 illustriert das Prinzip der Dispersionskorrektur in höheren Ordnungen anhand des Beispiels $N = 100$. In der Praxis unterliegt der mehrfach korrigierende Achromat der Einschränkung, dass der

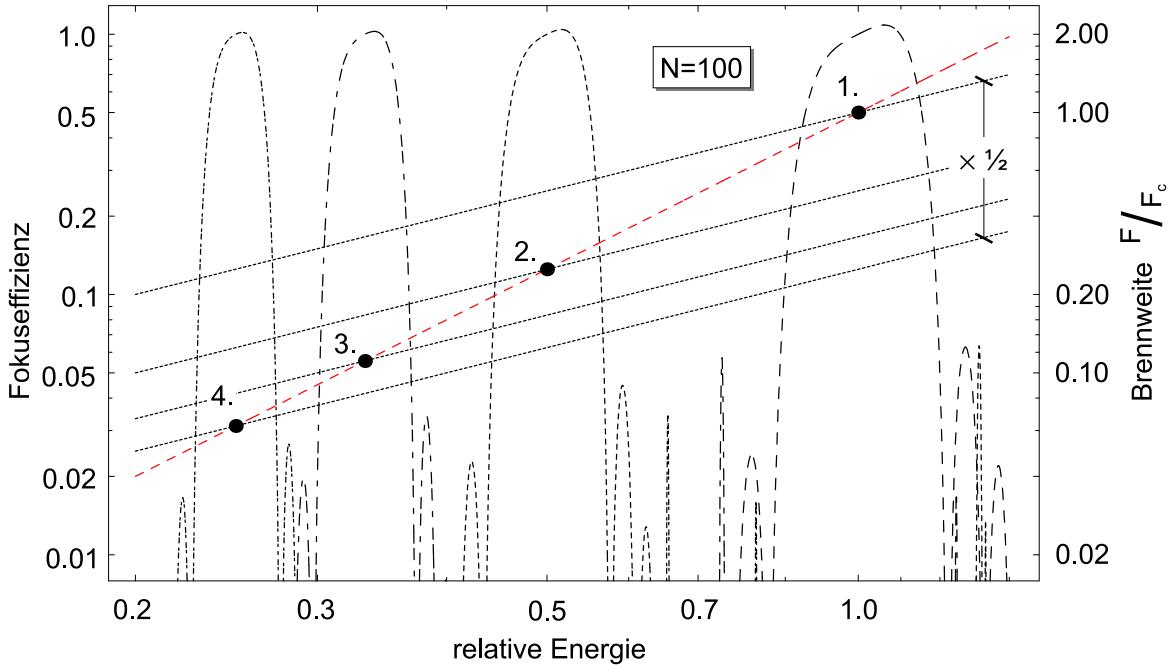


Abbildung 4.11: *Fokussierung mittels Fresnel-Achromaten in höheren Ordnungen. Eine Dispersionskorrektur in erster Ordnung erfolgt für $E_m = \frac{E_0}{m}$ und normierte Fokusdistanzen $F_m = \frac{F_0}{m^2}$, bei denen der Absolutbetrag der refraktiven (dicke strichlierte Linie) mit der doppelten diffraktiven Brennweite der m -ten Ordnung zusammenfällt. Um der Übersichtlichkeit willen wurden in dieser Grafik die relativ kleinen Zonenanzahl $N = 100$ unter Vernachlässigung der Absorption und eine logarithmische Skalierung gewählt.*

Bandpass wie $\frac{1}{\sqrt{m}}$ abnimmt – entsprechend $m \cdot N$ virtuellen Zonen der Fresnel-Linse,

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2}{\sqrt{mN}} \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N}. \quad (4.36)$$

Zudem lassen sich wegen der zu weichen Röntgen-Energien stark zunehmenden Absorption de facto nur wenige Ordnungen m effektiv nutzen. Eine mögliche Wahl könnte z.B. auf

$E_c = 20$ keV fallen, so dass bei $E_{m=4} = 5$ keV mit einer aus Li bestehenden Korrekturlinse noch eine moderate Lichtstärke zu erzielen wäre.

Wie bereits in Kap. 3 demonstriert, erweist sich das parabolische Profil der refraktiven Sammellinse als ausgesprochen anfällig gegen Verkippungen. Da sich deren konkave von der (plan-)konvexen Version nur durch das Vorzeichen des Krümmungsradius ξ unterscheidet, gilt Ähnliches auch für die refraktive Komponente einer Hybridlinse. Wie z.B. in [13] bewiesen wird, *addieren* sich die Aberrationskoeffizienten eines aus mehreren Linsen zusammengesetzten optischen Systems. Die Aberrationskoeffizienten aus den Gln. 3.32 und 3.34 erfahren dabei eine Modifikation in dem Sinn, als die in der Abbé-schen Invariante vertretene jeweilige Gegenstandsweite p_i der i -ten Komponente im allgemeinen endlicher Natur ist,

$$\mathcal{K}_i \equiv -\frac{1}{g_i} - \frac{1}{2}\mathcal{P}_i, \quad \text{mit} \quad \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = \mathcal{P}_i. \quad (4.37)$$

Sie wird für die Konjugierten p_i und q_i sukzessive aus dem Startwert $p_1 = \infty$ ermittelt. Astigmatismus, Bildfeldwölbung und Verzeichnung bleiben unter Annahme eines vernachlässigbaren Linsenabstandes hingegen unbeeinflusst – die Eintrittspupille liegt dann nach wie vor in der annähernd gemeinsamen Linsenebene. Das auf endliche Gegenstands- und Bildweiten erweiterte Aberrationsfunktional $\Psi^{(4)}$ der diffraktiven Linse lautet nach [22]

$$\Psi^{(4)} = -\frac{r_n^4}{8F_Z^3}\mathcal{U}(q) - \phi\frac{r_n^3}{2F_Z^2}\mathcal{V}(q)\cos\theta - \phi^2\frac{r_n^2}{2F_Z}\cos^2\theta - \phi^2\frac{r_n^2}{4F_Z}. \quad (4.38)$$

Die endliche Gegenstands- und damit von F_Z verschiedene Bildweite kommt in den Termen

$$\mathcal{U}(q) = 1 - 3\left(\frac{F_Z}{q} - \left(\frac{F_Z}{q}\right)^2\right) \quad \text{und} \quad \mathcal{V}(q) = 2\frac{F_Z}{q} - 1 \quad (4.39)$$

zum Ausdruck. Dem kanonischen Formalismus folgend, resultieren die Koeffizienten des diffraktiven Elements zu

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{F_Z}\right)^3\mathcal{U}(q) \quad \text{und} \quad F = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2}\right) \quad \text{und} \quad C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{F_Z}\right) = D. \quad (4.40)$$

In ihrer günstigsten, weil den sphärischen Fehler minimierenden Konfiguration ist die refraktive Komponente mit ihrer gekrümmten Seite der einfallenden Strahlung zugewandt, gefolgt vom Fresnel-Element. Die summierten Aberrationskoeffizienten lauten dann unter Berücksichtigung von $q = F = 2F_Z$ in führender Ordnung bzgl. δ

$$B \approx -\frac{1}{\delta F^3} \quad \text{und} \quad C \approx \frac{1}{2F} \quad \text{und} \quad D \approx -\frac{\delta}{2F} \quad \text{und} \quad F \approx -\frac{1}{2\delta F^2}. \quad (4.41)$$

Die Koeffizienten wurden hier sogleich durch die nominelle Brennweite $F = \frac{\xi}{\delta}$ anstelle des Krümmungsradius ξ dargestellt. Eingesetzt in die Ausdrücke 3.30 für die Seidel-

Koeffizienten findet man unter Verwendung des Öffnungsverhältnisses f

$$\begin{aligned}\Delta\epsilon_x &= -\frac{1}{8\delta} \left(\frac{1}{f}\right)^3 \cos\theta + \frac{1}{8\delta} \phi \left(\frac{1}{f}\right)^2 (1 + 2\cos^2\theta) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \phi^2 \left(\frac{1}{f}\right) \cos\theta, \\ \Delta\epsilon_y &= -\frac{1}{8\delta} \left(\frac{1}{f}\right)^3 \sin\theta + \frac{1}{4\delta} \phi \left(\frac{1}{f}\right)^2 \sin\theta \cos\theta - \frac{\delta}{4} \phi^2 \left(\frac{1}{f}\right) \sin\theta.\end{aligned}$$

Der Gesamtfehler lässt sich wie schon im Fall der refraktiven Sammellinse nach Abschn.

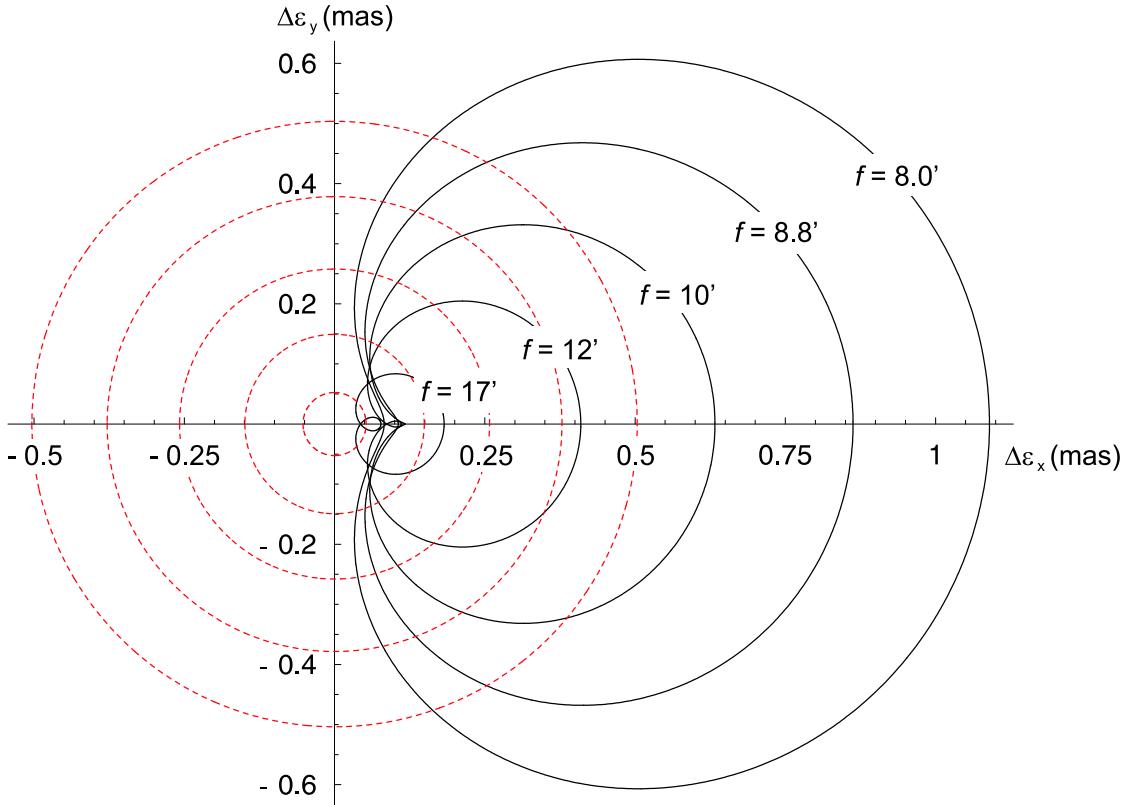


Abbildung 4.12: Seidel-Aberrationen des parabolischen Hybrid-Profil. Der Winkelfehler dominiert bereits für wenige arcsec (hier für 10 arcsec) über den sphärischen. Allen für diverse Öffnungsverhältnisse f ($\times 10^3$) gezeichneten Graphen liegt die Brechkraft $\delta = 1 \times 10^{-4}$ zugrunde. Die absolute Dimension der Verzerrungen wächst mit der Linsenkrümmung. Der sphärische Partialfehler mit $\phi = 0$ ist separat in rot dargestellt.

3.1 zweckmäßig aus einer quadratischen Mittelung bzgl. $0 \leq \theta < 2\pi$ abschätzen,

$$\langle \Delta\epsilon \rangle_\theta = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta\epsilon^2(f, \delta, \theta, \phi) d\theta \right)^{1/2} \approx \frac{1}{8\delta} \left(\frac{1}{f}\right)^3 \sqrt{1 + 5(\phi f)^2 + 8(f^2\phi^2\delta)^2}. \quad (4.42)$$

Da der dritte, zu $\phi^4\delta^2$ proportionale Summand des Radikanden gegenüber den beiden anderen bei nicht zu großen Winkeln ϕ zu vernachlässigen ist, skalieren sowohl die sphärischen als auch verkippungskorrelierten Verzerrungen in etwa linear mit $(\frac{1}{\delta})$. Speziell im

Sonderfall $\phi = 0$ zeigt sich die starke Abhängigkeit vom Öffnungsverhältnis f ,

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \sqrt{(\Delta\epsilon_x)^2 + (\Delta\epsilon_y)^2} = \frac{1}{8\delta} \left(\frac{1}{f}\right)^3. \quad (4.43)$$

Tab. 4.5 listet Öffnungsverhältnisse f auf, die sich aus Gl. 4.43 unter der Forderung einer beugungsbegrenzten Abbildung mit 1 mas ergeben. Die aufgeführten Brechkräfte δ decken das gesamte real auftretende Spektrum einschließlich des Wasserstoffs H₂ ab. Hinsichtlich

δ	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}
f_{min}	3.7×10^5	1.7×10^5	8.0×10^4	3.7×10^4	1.7×10^4	8.0×10^3	3.7×10^3

Tabelle 4.5: *Zulassisches Öffnungsverhältnis bei parabolischem Hybrid-Profil. Abhängig von der Brechkraft δ sind untere Schranken an das Öffnungsverhältnis $f = \frac{F}{2R}$ angegeben, die eine beugungslimitierte Abbildung mit einer Auflösung von 1 mas gewährleisten.*

des *sphärischen* Fehlers würde die plankonvex parabolische Hybridlinse den Anforderungen der Praxis annähernd genügen, eine aus technischer Sicht vorteilhafte Feststellung.

Anders verhält es sich mit den dem parabolischen Profil eigenen Winkelfehlern, insbesondere der Koma. Das in Abschn. 3.1 eingeführte sphärische Profil erweist sich indes als untauglich, wie eine Berechnung der Seidel-Koeffizienten zeigt. Mit dem Profilparameter $b = 0$ in der das plankonvexe Modell beschreibenden Gl. 3.7 unterscheidet sich nur der sphärische Beitrag

$$B \approx -\frac{1}{2\delta^2} \left(\frac{1}{F}\right)^3 \quad (4.44)$$

vom parabolischen Ansatz, alle übrigen Koeffizienten und somit auch die Winkelabhängigkeit der Bildfehler ändern sich nicht. Die um einen Faktor $\frac{1}{2\delta}$ und damit wenigstens drei Größenordnungen höhere sphärische Aberration lässt dieses Profil jedoch als definitiv ungeeignet erscheinen, Hybridlinsen moderater Öffnungsverhältnisse zu konstruieren.

Die bisher gewonnenen Erkenntnisse bestätigen die aus der visuellen Optik wohlbekannte Tatsache, dass sich *plankonvexe* bzw. *plankonkave* Profile im allgemeinen nicht eignen, die Aberrationen auf ein akzeptables Maß zu reduzieren. Anschaulich gesprochen, beruht dieser Sachverhalt auf der optisch ungünstigen Brechung an nur einer bzw. im Fall des Achromaten an zwei gekrümmten Flächen. In der Tat bestätigt eine mathematische Analyse die vorteilhafte oder gar notwendige Aufteilung der Strahlablenkung auf mehrere Linsenoberflächen [13]. Wie sich herausstellt, weist eine solche, Koma und sphärische Aberration eliminierende sog. aplanatische Linse im Röntgenbereich ein de facto bikonkav bzw. bikonvex symmetrisches Profil auf. Die in Abb. 4.13 dargestellte Sandwich-Bauweise berücksichtigt bereits die fertigungstechnische Randbedingung, nach der das diffraktive Fresnel-Element zweckmig zwischen den plankonvexen Komponenten anzutreiben ist. Die sphärischen und Koma-Koeffizienten der ersten, dem einfallenden Strahl zugewandten refraktiven Komponente lauten

$$B_1 = \frac{\delta(1 + \delta + (1 - \delta)(b_1 + \delta^2))}{2\xi_1^3(\delta - 1)} \quad \text{und} \quad F_1 = \frac{\delta + \delta^2 - \delta^3}{2\xi_1^2(\delta - 1)}, \quad (4.45)$$

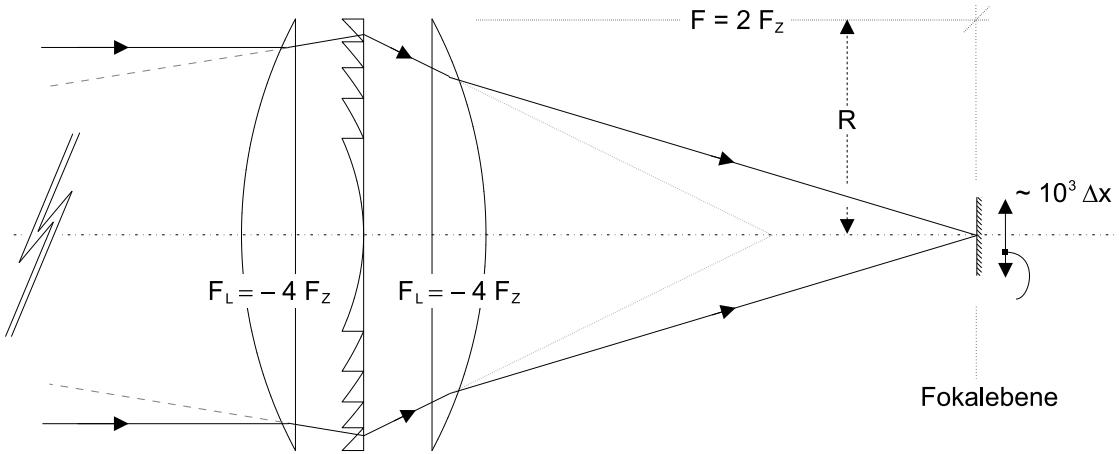


Abbildung 4.13: *Strahlengang im aplanatischen Hybridprofil. Die bikonvexe Bauweise der refraktiven Komponente eliminiert den sphärischen Fehler als auch die Koma des Gesamtsystems für beliebige Öffnungsverhältnisse. Die drei Elementarlinsen sind zugunsten einer übersichtlichen Darstellung voneinander separiert gezeichnet.*

während Astigmatismus, Bildfeldwölbung und die verschwindende Verzeichnung durch

$$C_1 = -\frac{\delta}{2\xi_1} \quad \text{und} \quad D_1 = \frac{\delta(2-\delta)}{2\xi_1(\delta-1)} \quad \text{und} \quad E_1 = 0 \quad (4.46)$$

gegeben sind. Unter Beachtung der endlichen Gegenstandsweite stellt sich der sphärische Koeffizient der zweiten refraktiven Halblinse wie folgt dar,

$$B_2 = \frac{\delta (q^2 (b_2 + (1-\delta)^2) (\delta-1) + \xi_2^2 (3\delta-5) - q\xi_2 ((7-3\delta)\delta-4))}{2q^2\xi_2^3(\delta-1)}. \quad (4.47)$$

wobei q bekanntlich die konjugierte Bildweite der Fresnel-Komponente bezeichnet. Für den Anteil der Koma ergibt sich

$$F_2 = \frac{\delta (\xi_2 (3-2\delta) - q(1-\delta)^2)}{2q\xi_2^2(\delta-1)}. \quad (4.48)$$

Astigmatismus, Bildfeldwölbung und Verzeichnung werden schließlich durch die Beiträge

$$C_2 = \frac{\delta}{2\xi_2} \quad \text{und} \quad D_2 = \frac{\delta(2-\delta)}{2\xi_2(1-\delta)} \quad \text{und} \quad E_2 = 0 \quad (4.49)$$

quantifiziert. Die Summation der Aberrationskoeffizienten erfolgt unter Hinzunahme der Terme 4.40 sowie der Rand- bzw. Anschlussbedingungen

$$\xi_2 = \frac{F\delta\xi_1}{F\delta - \xi_1} \quad \text{und} \quad p = \frac{\xi_1}{\delta} \quad \text{und} \quad q = -\frac{F\xi_1}{F\delta - 2\xi_1}. \quad (4.50)$$

Zur expliziten Bestimmung des Profils fordert man zunächst via $F_1 + F_{ZP} + F_2 = 0$ Komafreiheit und erhält die beiden Krümmungsradien zu

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \mathcal{G}_\delta(F) \begin{pmatrix} (1 + \delta^2)^{-1} \\ (\delta^2 - \delta - 1)^{-1} \end{pmatrix}, \quad (4.51)$$

wobei die vorübergehend eingeführte Funktion $\mathcal{G}_\delta(F)$ definiert ist durch den Ausdruck

$$\mathcal{G}_\delta(F) \equiv 2F\delta + F\delta^2. \quad (4.52)$$

Offenkundig sind die höheren Potenzen von δ in sehr guter Näherung zu vernachlässigen, tatsächlich gilt

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} F\delta + F\delta^2 + \mathcal{O}(\delta^3). \quad (4.53)$$

Um die sphärische Aberration zu eliminieren, stehen die Profilparameter b_1 und b_2 zur Verfügung. Man verlangt wieder $B_1 + B_{ZP} + B_2 = 0$. Ohne Einschränkung kann $b_1 = b_2$ gewählt und so die asphärische Korrektur zu gleichen Teilen den beiden Oberflächen zugewiesen werden. Die Rechnung ergibt als theoretische Werte

$$b_{1,2} = -1 - 6\delta + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (4.54)$$

und bestätigt die Erwartung einer bikonvexen und nahezu parabolischen Oberfläche. Die von $b_{1,2}$ unabhängigen Beiträge zum Astigmatismus und zur Bildfeldwölbung entziehen sich allerdings einer potentiellen Optimierung, das schlussendliche Ergebnis lautet

$$B = 0 \quad \text{und} \quad C = \frac{1}{2F} \quad \text{und} \quad D = \frac{\delta}{2F(\delta - 1)} \quad \text{und} \quad E = 0 \quad \text{und} \quad F = 0. \quad (4.55)$$

Der durch den Koeffizienten C beschriebene Astigmatismus verbleibt somit als einzige nennenswerte Aberration und wird quantitativ allein durch das Öffnungsverhältnis f und den Kippwinkel ϕ bestimmt,

$$\Delta\epsilon_x = \frac{1}{2f} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \phi^2 \cos \theta \quad \text{und} \quad \Delta\epsilon_y = -\frac{1}{4f} \delta \phi^2 \sin \theta. \quad (4.56)$$

Abb. 4.14 visualisiert diese Gleichungen für diverse Parametersätze (f, ϕ) – mit typischen Öffnungsverhältnissen zwischen 3×10^4 und 5×10^5 . Die Verzerrung beschreibt offenbar die gestörte PSF in der Sagittalebene, in der Meridionalebene dreht die Figur um 90° . Ermittelt man schließlich noch den quadratisch über $0 \leq \theta \leq 2\pi$ gemittelten Fehler, so lautet die Gl. 4.42 entsprechende Formel

$$\langle \Delta\epsilon \rangle_\theta = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta\epsilon^2(f, \delta, \theta, \phi) d\theta \right)^{1/2} \approx \frac{1}{2\sqrt{2}f} \phi^2. \quad (4.57)$$

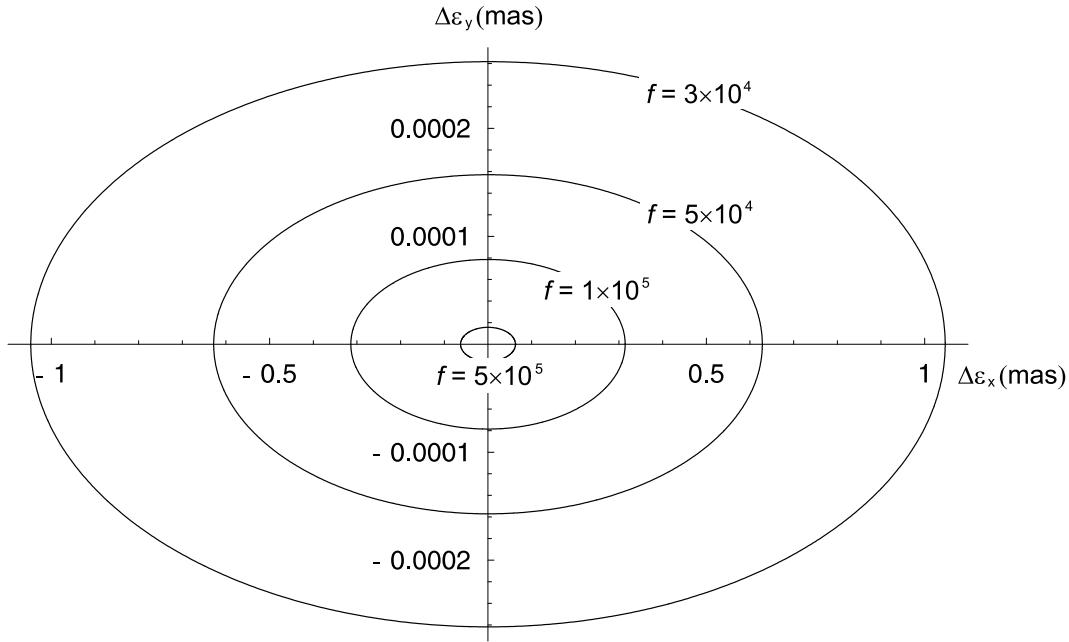


Abbildung 4.14: Seidel-Aberrationen des aplanatischen Hybrid-Profils. Die nahezu bikonvexe Hybridlinse toleriert Winkelabweichungen von $\sim 1^\circ$, je nach Öffnungsverhältnis f . Den gezeichneten Graphen liegt die Brechkraft $\delta = 1 \times 10^{-4}$ zugrunde, die jedoch einen relativ zum von δ unabhängigen Astigmatismus sehr geringen Anteil zum Gesamtfehler beiträgt.

Bis auf einen Faktor $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ stimmt dieser Wert mit der Länge der quasi eindimensional verzerrten PSF überein. Um die beugungsbegrenzte Abbildung zu erhalten, sollte eine Verkippung die Größenordnung

$$\phi \lesssim \sqrt{\Delta\epsilon \cdot f} \sim 10^{-4} \sqrt{f} \quad \text{für} \quad \Delta\epsilon = 10^{-3} \text{arcsec} \quad (4.58)$$

nicht überschreiten. Übertragen auf reale Öffnungsverhältnisse, folgt die Abschätzung

$$10^4 \lesssim f \lesssim 10^5 \quad \rightarrow \quad -1^\circ \lesssim \phi \lesssim +1^\circ. \quad (4.59)$$

Sie gilt selbstverständlich nur im Idealfall einer auf die übrigen Bildfehler optimal korrigierten Linse und bedarf aufgrund meist unvermeidlicher Fertigungstoleranzen in der Praxis einer nochmaligen Überprüfung.

Der Vorteil aplanatischer Linsen liegt somit in der nahezu fehlerfreien Abbildung, selbst unter dem Einfluss signifikanter Verkippungen. Mit den überragenden optischen Eigenschaften gehen freilich hohe technische Anforderungen an die Fertigung des bikonvexen Profils einher, die in der Kombination mit der diffraktiven Linse noch an Bedeutung gewinnen.

Zum Abschluss sei wieder das Leistungsvermögen von Hybridlinsen abgeschätzt. Anders als im diffraktiven Fall tritt die Zonenzahl N nun als expliziter Parameter auf. Man findet unter Verwendung zuvor abgeleiteter Formeln

$$A_{eff} \times \Delta E \approx \pi hc\sqrt{N} e^{-\frac{N}{2N_0}} F = \pi \frac{hc}{2} V F, \quad (4.60)$$

wenn die Absorption der diffraktiven Komponente vernachlässigt wird und V wie bisher die Verstärkung beschreibt. Abb. 4.15 illustriert den Verlauf der Lichtstärke für diverse Werte V . Im Vergleich zur diffraktiven Version erzielt die Hybridlinse bei gleicher Fokallänge F ei-

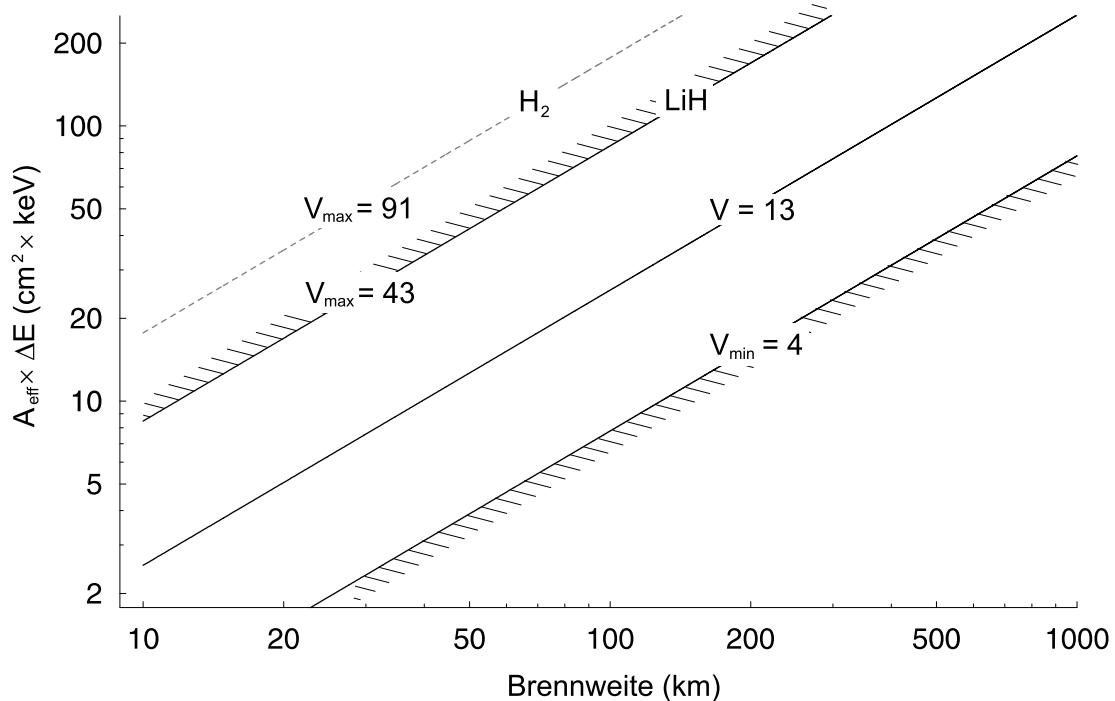


Abbildung 4.15: *Lichtstärke von Hybridlinsen.* Das in Einheiten von $A_{\text{eff}} \times \Delta E$ gemessene Leistungsvermögen wächst linear mit der Brennweite F und der Verstärkung V , deren Maximum unter Feststoffen LiH-Kristalle mit $V_{\text{max}} \approx 43$ erreichen. Als physikalisch-technisches Minimum wird $V_{\text{min}} = 4$ angesehen.

ne um den Faktor $\frac{V}{2}$ verbesserte Leistung, im Optimum Li- oder LiH-basierter Modelle also rund das 20-fache. Auf die spezielle Problematik des H_2 wird in Abschn. 5.1 eingegangen, der in Abb. 4.15 eingetragene Graph dient lediglich als theoretischer Vergleichswert.

4.2 Reduktion der refraktiven Profilkomponente

Angesichts der mit dem Zonenverhältnis $\frac{N}{N_0}$ zunehmenden Absorption und der daraus erwachsenden Auflösungs-/Graufilterproblematik stellt sich die Frage nach einer zweckmäßigen Methode, die Lichtstärke ohne wesentliche Einbußen in der Winkelauflösung zu verbessern. Analog zur in Kap. 3 durchgeführten Reduktion des diffraktiven Profils bietet sich dieses Verfahren prinzipiell auch im Fall der refraktiven Profilkomponente der Hybridlinse an. Auf den ersten Blick sind jedoch der sukzessiven Abtragung enge Grenzen gesetzt, da nach 3.2 bereits $\frac{N_L}{2m_L} \approx 10$ Fresnelringe der refraktiven Profilkomponente weitgehend diffraktiven Charakter verleihen und so das Prinzip der Dispersionskorrektur ad absurdum

führen würden. Gleichwohl erweist sich eine zunächst formal allgemein gehaltene Ableitung der Abbildungseigenschaften als sinnvoll. Als Grundlage dient eine erweiterte Variante des Hybridprofils nach Gl. 4.10, die sich als

$$t_{m,n}(\sigma) = t_{p,m}^{(Z)}(\sigma) + t_{q,n}^{(L)}(\sigma) \quad (4.61)$$

schreiben lässt. Sie setzt sich aus diffraktivem (Z) und refraktivem (L) Anteil zusammen,

$$t_{p,m}^{(Z)}(\sigma) = m \frac{\lambda_c}{\delta(\lambda_c)} \left(1 - p + \frac{N_0}{2m} \left(\frac{\sigma}{R_{0,Z}} \right)^2 \right), \quad (4.62)$$

und beschreibt mit den bereits bekannten Indizes p und m sowie dem kritischen diffraktiven Radius $R_{0,Z}$ das kinoforme Profil einer FL mit N_Z Zonen. Analog definiert

$$t_{q,n}^{(L)}(\sigma) = n \frac{\lambda_c}{\delta(\lambda_c)} \left(q - \frac{N_L}{2n} + \frac{N_0}{2n} \left(\left(\frac{R}{R_{0,L}} \right)^2 - \left(\frac{\sigma}{R_{0,L}} \right)^2 \right) \right) \quad (4.63)$$

die refraktive Korrekturkomponente der zunächst beliebigen Zonenzahl N_L mit Laufindex q und Stufenparameter $n \in \mathbb{N}^4$. Unter Berücksichtigung der üblichen Definitionen für R und $R_{0,Z}$ sowie $R_{0,L}$ ergibt sich daraus die Amplitude

$$\tilde{u}(\sigma) = \tilde{u}_0 e^{2\pi i \frac{1}{\psi} \left(1 + \frac{i}{2\pi N_0} \right) \mathcal{F}_{m,n}(\sigma)}, \quad (4.64)$$

wobei wie üblich $\tilde{u}_0 = 1$, der Energieparameter $\psi = \frac{E}{E_c}$ und die reelle Funktion $\mathcal{F}_{m,n}(\sigma)$ durch den Ausdruck

$$\mathcal{F}_{m,n}(\sigma) = m(1 - p) + nq + \frac{1}{2} (N_Z - N_L) \left(\frac{\sigma}{R} \right)^2 \quad (4.65)$$

gegeben ist. Erneut spaltet das Integral über σ in eine Summe über die einzelnen Fresnel-Ringe auf, allerdings bedarf es nun einer sukzessiven Addition der ausschließlich diffraktiven und zusätzlich refraktiven Beiträge. Jedenfalls muß die Integration formal der Struktur

$$\int_0^R d\sigma \rightarrow \sum_{q=q_{min}}^{q_{max}} \sum_{p=p_{min}}^{p_{max}} \int_{\sqrt{\frac{2m}{N}(p-1)}R}^{\sqrt{\frac{2m}{N}p}R} d\sigma \quad (4.66)$$

folgen, wobei die Integrationsgrenzen nach wie vor durch die Fresnel-Ringe der diffraktiven Komponente festgelegt sind. Die Summationsgrenzen über die Laufindizes p und q erhält man mittels folgender Überlegung: Bezeichnet

$$\#(T_Z) = \frac{N_Z}{2m} \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \#(T_L) = \frac{N_L}{2n} \in \mathbb{N} \quad (4.67)$$

⁴Diese Größenbezeichnungen gelten nur im lokalen Kontext und sind nicht mit den sonst üblichen Definitionen im Rahmen dieser Arbeit zu verwechseln.

die Anzahl der diffraktiven bzw. refraktiven Fresnelringe, so ist auch für deren Verhältnis

$$\#(T_Z) \cdot \#(T_L)^{-1} = \frac{N_Z}{N_L} \left(\frac{n}{m} \right) \epsilon \mathbb{N} \quad (4.68)$$

zu fordern. Dieser Quotient beschreibt gerade die Zahl der auf einen refraktiven Ring entfallenden diffraktiven Fresnel-Ringe, wobei natürlich $n > m$ oder gar $n \gg m$ angenommen wird. Die Summen in 4.66 über p und q stellen sich nun als

$$p_{min} = (q-1) \frac{N_Z}{N_L} \frac{n}{m} + 1 \quad \text{und} \quad p_{max} = q \frac{N_Z}{N_L} \frac{n}{m} \quad \text{und} \quad q_{min} = 1 \quad \text{und} \quad q_{max} = \frac{N_L}{2n} \quad (4.69)$$

dar. Einsetzen der Amplitude nach 4.64 in das Beugungsintegral 2.23 und Rückgriff auf die Summation nach 4.66 mit obigen Grenzen liefert schließlich nach einigen Umformungen

$$\tilde{I}_{m,n}(\vec{v}) = \left| 2 \frac{\psi}{\zeta} \left(1 - \frac{N_L}{N_Z} \right) e^{-\frac{m}{N_0} \frac{1}{\psi}} \sum_{q=1}^{\frac{N_L}{2n}} e^{\frac{1}{\psi} \left(2\pi i - \frac{1}{N_0} \right) nq} \mathcal{S}_q(\vec{v}) \right|^2, \quad (4.70)$$

wobei wieder $\zeta = \frac{z}{F}$ gesetzt wurde. Die Gesamtbrennweite F hängt grundsätzlich vom Zonenverhältnis $\frac{N_L}{N_Z}$ ab. Bezugnehmend auf Gl. 4.2 folgt nämlich für $E = E_c$ unmittelbar

$$F = F_Z \left(1 - \frac{N_L}{N_Z} \right)^{-1}. \quad (4.71)$$

Der Summand $\mathcal{S}_q(\vec{v})$ zählt die diffraktiven Fresnel-Ringe innerhalb eines refraktiven Rings,

$$\mathcal{S}_q(\vec{v}) = \sum_{p=(q-1)\frac{N_Z}{N_L} \frac{n}{m} + 1}^{q \frac{N_Z}{N_L} \frac{n}{m}} e^{-\frac{1}{\psi} \left(2\pi i - \frac{1}{N_0} \right) mp} \mathcal{J}_p(\vec{v}). \quad (4.72)$$

Zuletzt verbleibt das eigentliche Beugungsintegral über den einzelnen diffraktiven Ring zu

$$\mathcal{J}_p(\vec{v}) = \int_{\sqrt{2 \frac{m}{N_Z} (p-1)}}^{\sqrt{2 \frac{m}{N_Z} p}} e^{i\pi N_Z \tau^2 \left(1 - \frac{N_L}{N_Z} \right) \left(\frac{1}{\psi} \left(1 + \frac{i}{2\pi N_0} \right) - \frac{\psi}{\zeta} \right)} J_0 \left(2\pi v \frac{\psi}{\zeta} \left(1 - \frac{N_L}{N_Z} \right) \tau \right) \tau d\tau, \quad (4.73)$$

mit dem relativen Aperturradius $\tau = \frac{\sigma}{R}$, das den Amplitudenbeitrag des p -ten diffraktiven Rings zur Gesamtverteilung am Ort $\vec{v} = (v, \zeta)$ liefert. Der Argumentation im Kontext von Gl. 4.6 folgend, wird nun $N_L = \frac{1}{2} N_Z$ gesetzt, in der Annahme, dass $\delta(E) \propto E^{-2}$. Gleichwohl bildet Gl. 4.70 die Basis beliebiger Dispersionskorrekturen, insbesondere des Bandkanten-Achromaten nach [24]. Mit $N_L = \frac{1}{2} N_Z$ lautet Gl. 4.70 also

$$\tilde{I}_{m,n}(\vec{v}) = \left(\frac{\psi}{\zeta} \right)^2 e^{-2 \frac{m}{N_0} \frac{1}{\psi}} \left| \sum_{q=1}^{\frac{N}{4n}} e^{\frac{1}{\psi} \left(2\pi i - \frac{1}{N_0} \right) nq} \sum_{p=2(q-1)\frac{n}{m} + 1}^{2q\frac{n}{m}} e^{-\frac{1}{\psi} \left(2\pi i - \frac{1}{N_0} \right) mp} \mathcal{J}_p(\vec{v}) \right|^2,$$

wobei $N_Z \rightarrow N$ substituiert wurde und sich das Integral $\mathcal{J}_p(\vec{v})$ über den Fresnel-Ring auf

$$\mathcal{J}_p(\vec{v}) = \int_{\sqrt{2\frac{m}{N}(p-1)}}^{\sqrt{2\frac{m}{N}p}} e^{i\frac{\pi}{2}N\tau^2\left(\frac{1}{\psi}\left(1+\frac{i}{2\pi N_0}\right)-\frac{\psi}{\zeta}\right)} J_0\left(\pi v\frac{\psi}{\zeta}\tau\right) \tau d\tau \quad (4.74)$$

reduziert. Um die axiale Verteilung und speziell den spektralen Bandpass, also das in $n \in \mathbb{N}$ verallgemeinerte Analogon zu Gl. 4.17 zu finden, wird zunächst $v = 0$ gesetzt. Man erhält

$$\tilde{I}_{m,n}(\psi, \zeta) = \left(\frac{\psi}{\zeta} \right)^2 e^{-2\frac{m}{N_0}\frac{1}{\psi}} \left| \sum_{q=1}^{\frac{N}{4n}} e^{\frac{1}{\psi}\left(2\pi i - \frac{1}{N_0}\right)nq} \sum_{p=2(q-1)\frac{n}{m}+1}^{2q\frac{n}{m}} e^{-\frac{1}{\psi}\left(2\pi i - \frac{1}{N_0}\right)mp} \mathcal{J}_p(\psi, \zeta) \right|^2.$$

Die längs $v = 0$ analytische Integration von $\mathcal{J}_p(\psi, \zeta)$ komplettiert die Summanden in p via

$$\mathcal{J}_p(\psi, \zeta) = \frac{1}{N\pi i} \frac{1 - e^{-m\pi i\left(\frac{1}{\psi}\left(1+\frac{i}{2\pi N_0}\right)-\frac{\psi}{\zeta}\right)}}{\frac{1}{\psi}\left(1 + \frac{i}{2\pi N_0}\right) - \frac{\psi}{\zeta}} e^{m\pi i p\left(\frac{1}{\psi}\left(1+\frac{i}{2\pi N_0}\right)-\frac{\psi}{\zeta}\right)}, \quad (4.75)$$

so dass die fokale Intensitätsverteilung $\tilde{I}_n(\psi)$ folgende Gestalt eines Produktes annimmt,

$$\tilde{I}_{m,n}(\psi, \zeta) = \left(\frac{1}{N\pi} \right)^2 \mathcal{F}_m(\psi, \zeta) \cdot \mathcal{G}_n(\psi, \zeta) \left(\frac{\psi}{\zeta} \right)^2. \quad (4.76)$$

Zunächst nimmt der Term $\mathcal{F}_m(\psi, \zeta)$ ausschließlich auf die diffraktive Komponente Bezug,

$$\mathcal{F}_m(\psi, \zeta) \equiv \frac{1 - 2e^{-\frac{m}{2N_0}\frac{1}{\psi}} \cos\left(\pi m\left(\frac{1}{\psi} - \frac{\psi}{\zeta}\right)\right) + e^{-\frac{m}{N_0}\frac{1}{\psi}}}{1 - 2e^{\frac{m}{2N_0}\frac{1}{\psi}} \cos\left(\pi m\left(\frac{1}{\psi} + \frac{\psi}{\zeta}\right)\right) + e^{\frac{m}{N_0}\frac{1}{\psi}}}. \quad (4.77)$$

Schließlich wirken sich Variationen in $n \in \mathbb{N}$ lediglich auf den zweiten Faktor $\mathcal{G}_n(\psi, \zeta)$ aus,

$$\mathcal{G}_n(\psi, \zeta) \equiv \frac{1 - 2e^{-\frac{n}{N_0}\frac{1}{\psi}} \cos\left(2n\pi\left(\frac{1}{\psi} + \frac{\psi}{\zeta}\right)\right) + e^{-2\frac{n}{N_0}\frac{1}{\psi}}}{\frac{1}{\psi^2} \left(1 + \left(\frac{1}{2\pi N_0}\right)^2\right) + \left(\frac{\psi}{\zeta}\right)^2 - \frac{2}{\zeta}} \left(\frac{\sin\left(\frac{N}{4}\pi\frac{\psi}{\zeta}\right)}{\sin\left(n\pi\frac{\psi}{\zeta}\right)} \right)^2. \quad (4.78)$$

Während der erste, die \cos -Funktion enthaltende Term die refraktive Dispersionskorrektur gewährleistet, führen die Nullstellen des zweiten zur nachfolgend zu besprechenden Kammstruktur in der fokalen Intensitätsverteilung. Um in einem ersten Schritt den Bandpass zu ermitteln, erweist es sich wieder als zweckmäßig, in Gl. 4.76 die Absorption zu vernachlässigen. Ferner wird im Fokus $\zeta = 1$ und für maximal diffraktive Wirkung $m = 1$ gesetzt. Wie im Fall des massiven Achromaten nach Abschn. 4.1 bestimmt nun eine trigonometrische Funktion bzw. deren Argument den funktionalen Verlauf,

$$I_n(\psi) = \left(\frac{2}{N} \right)^2 \left(\frac{\sin\left(\pi n\left(\psi + \frac{1}{\psi}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\psi + \frac{1}{\psi}\right)\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{N}{4}\pi\psi\right)}{\sin(n\pi\psi)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\psi - \frac{1}{\psi}\right)\right)}{\pi\frac{1}{\psi}\left(\psi - \frac{1}{\psi}\right)} \right)^2. \quad (4.79)$$

Aus der bereits auf $I_n(\psi = 1)$ normierten Gl. 4.79 liest man ab, dass der mittlere der drei Quotienten im Fall des massiven Standard-Achromaten nach Abschn. 4.1 mit $n = \frac{N}{4}$ den konstanten Wert 1 annimmt. Wählt man dagegen in einem ersten Reduktionsschritt $n = \frac{N}{8}$, so resultiert je nach Zonenzahl N eine Verteilung nach der oberen Grafik in Abb. 4.16. Abgesehen von den charakteristischen Oszillationen tritt zunächst der gegenüber dem massiven Standard mit $n = \frac{N}{4}$ erweiterte Bandpass hervor. Er errechnet sich aus der Einhüllenden $\hat{I}_n(\psi)$ der Intensitätsverteilung, gegebenen durch

$$\hat{I}_n(\psi) = \left(\frac{1}{2n} \right)^2 \left(\frac{\sin \left(\pi n \left(\psi + \frac{1}{\psi} \right) \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} \left(\psi + \frac{1}{\psi} \right) \right)} \right)^2 \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} \left(\psi - \frac{1}{\psi} \right) \right)}{\pi \frac{1}{\psi} \left(\psi - \frac{1}{\psi} \right)} \right)^2, \quad (4.80)$$

und speziell aus den Nullstellen des ersten Faktors, die sich mit $n \gg 1$ aus der Bedingung

$$\sin \left(n\pi \left(\psi + \frac{1}{\psi} \right) \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \psi + \frac{1}{\psi} = z \frac{1}{n} \quad \text{mit} \quad z \in \mathbb{N} \quad (4.81)$$

ergeben. Die quasi triviale Lösung mit $z_0 = 2n$ repräsentiert die durch den Nenner des selben Faktors kompensierte und daher nicht sichtbare „Nullstelle“ bei $\psi = 1$. Um die benachbarten Lösungen ψ_{\pm} zu ermitteln, entwickle man den Term 4.81 gemäß

$$2 + (\psi - 1)^2 \approx \frac{z_0 + 1}{n} \quad \rightarrow \quad \psi_{\pm} \approx 1 \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (4.82)$$

bis zur zweiten Ordnung in ψ . Für $n = \frac{N}{4}$ liegen die ersten Minima bei $\psi_{\pm} \approx 1 \pm \frac{2}{\sqrt{N}}$ und markieren damit den doppelten Bandpass nach Gl. 4.9. Es erscheint daher gerechtfertigt, die nutzbare spektrale Breite der Kammstruktur reduzierter Achromaten mit

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.83)$$

anzugeben. Sie beträgt demnach für einfach reduzierte Versionen mit $n = \frac{N}{8}$ etwa das 1.4-fache und im Fall des zweifach reduzierten mit $n = \frac{N}{16}$ immerhin bereits das Doppelte der ursprünglichen Bandbreite.

Die hochfrequente Oszillation selbst hat ihre Ursache in den zusätzlichen Interferenzen, die durch die nun partiell diffraktive Ausführung der refraktiven Komponente entstehen. Die Kammstruktur ist dahingehend zu interpretieren, dass Maxima in lateraler Dimension einer „ordnungsgemäßen“, beugungsbegrenzten PSF entsprechen, während Minima mit einer lokal defokussierten Abbildung korrespondieren. Um die Periode der Oszillationen zu ermitteln, ist nach Gl. 4.79 für den Nenner des mittleren Faktors

$$\sin(n\pi\psi) = 0 \quad \rightarrow \quad \psi = z \frac{1}{n} \quad \text{mit} \quad z \in \mathbb{N} \quad (4.84)$$

zu fordern. Setzt man zunächst $\psi = 1$, ergibt sich $z_0 = n$. Die Differenz zweier Energiewerte ψ und $\psi \pm \Delta$ beträgt dann allgemein und unabhängig von ψ selbst

$$\Delta = \frac{1}{n} \equiv \left(\frac{\Delta E}{E} \right)_{\text{comb}} > 0 \quad \forall \quad n, \quad (4.85)$$

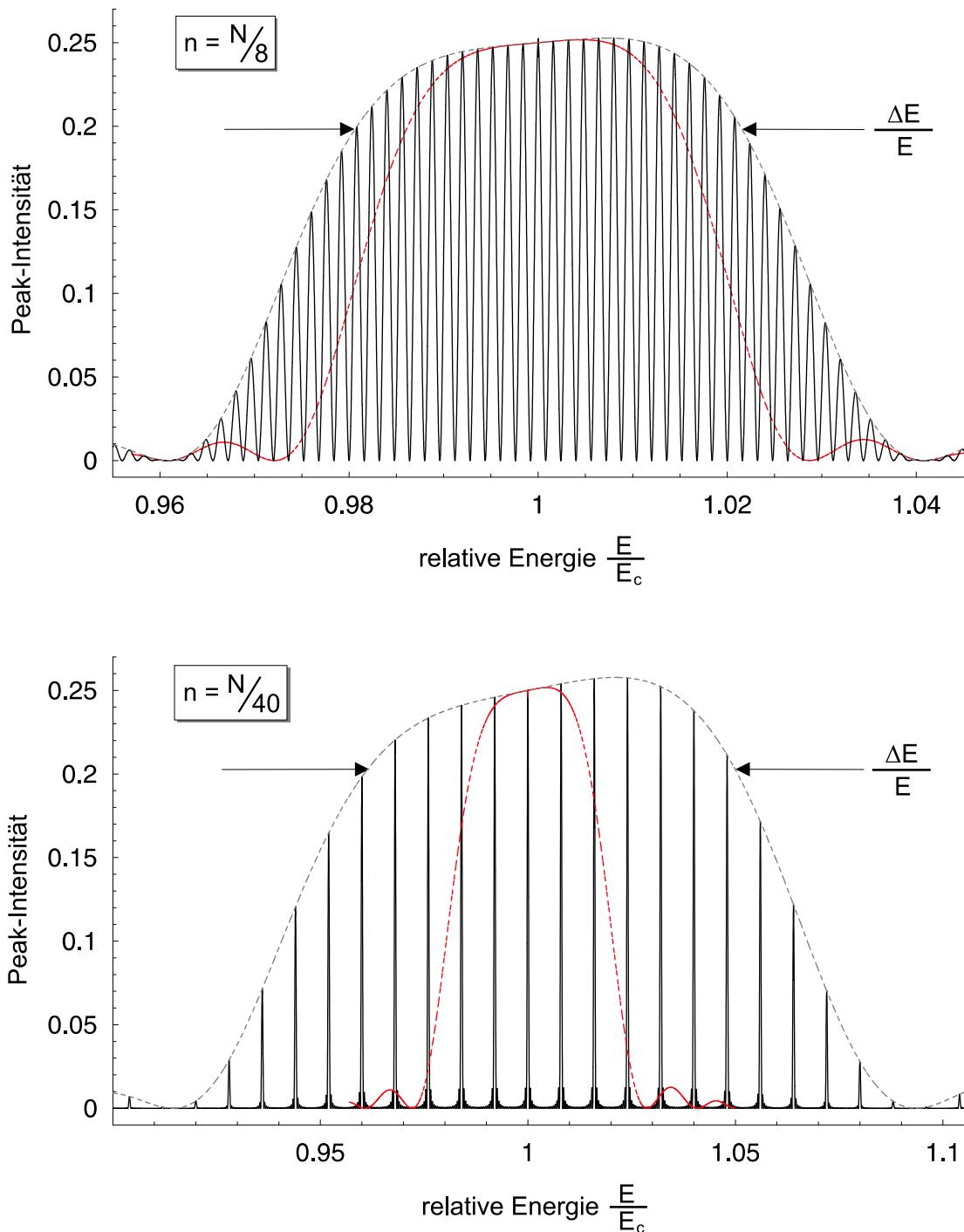


Abbildung 4.16: Bandpass reduzierter Hybrid-Achromaten. Im Gegensatz zur kontinuierlichen Effizienzkurve der Standard-Hybridlinse mit $N = 5000$ (rot strichliert) oszilliert die fokale Peakintensität und damit auch die PSF-Qualität bzw. Winkelauflösung mit der Periode $(\frac{\Delta E}{E})_{\text{comb}} = \frac{1}{n}$. Die „globale“ spektrale Bandbreite, gegeben durch die Einhüllende der Oszillationen, nimmt bei der einfachen Reduktion mit $n = \frac{N}{8}$ gegenüber der massiven Version um ca. 40% zu, im Fall hochgradiger Abtragung um $\frac{1}{2}\sqrt{N/n}$.

wobei die beiden Bezeichnungen im Rahmen dieses Unterkapitels simultan verwendet werden. Speziell ergibt sich $\Delta = \frac{8}{N}$ im Fall der einstufigen Reduktion nach Abb. 4.16 (oben). Offenbar „zählt“ der Nenner nur die *Maxima*, denn der Zähler des mittleren Faktors in Gl. 4.79 oszilliert im Trivialfall $n = \frac{N}{4}$ zumindest mit gleicher, ansonsten mit der zwei- oder allgemein $(\frac{N}{4n})$ -fachen Frequenz und berücksichtigt auch die *Minima*. Angesichts der hohen Zonenzahlen N , denen die Motivation eines reduzierten Hybrid-Profiles üblicherweise zugrunde liegt, stellt sich sofort die Frage nach der spektralen Trennschärfe des Detektors. Um die Winkelauflösung der gesamten, trotz Profilreduktion kohärenten Apertur zu erhalten, bedarf es einer Spektralauflösung von der Bandbreite eines „Zackens“. Diese bestimmt sich wiederum aus dem für die Kammstruktur verantwortlichen Faktor in Gl. 4.76. Zählt q die Maxima in der Relativ-Energie ψ , ergeben sich diese aus dem Nenner zu

$$\psi_q(\zeta) = \frac{n \pm q}{n} \zeta \quad \text{mit} \quad q \in \mathbb{N}_0. \quad (4.86)$$

Gl. 4.86 liefert unmittelbar die bzgl. eines „Zackens“ lokale Dispersionsrelation in $\psi_q(\zeta)$,

$$\frac{d}{d\zeta} \psi_q(\zeta) = 1 \pm \frac{q}{n}, \quad \text{während} \quad \Delta z_{DOF} = \pm \frac{F}{N} \quad (4.87)$$

bekanntlich die Fokustiefe beschreibt. In linearer Näherung ergeben sich die Bandbreiten

$$\left(\frac{\Delta E}{E}\right)_+ = \left(1 \pm \frac{q}{n}\right) \frac{2}{N} \approx \frac{2}{N}. \quad (4.88)$$

Die durch den Korrekturterm $\pm \frac{q}{n}$ bedingten Abweichungen der Bandbreite eines Peaks machen sich angesichts der üblicherweise „großen“ Werte für $n \gg 1$ erst fernab des zentralen Maximums in $\psi = 1$ bemerkbar und sind in aller Regel über das den globalen Bandpass nach Gl. 4.83 beschreibende Energieintervall zu vernachlässigen. Abb. 4.17 illustriert die lokale Dispersion des reduzierten Achromaten schematisch. Die lokale Bandpass-Formel Gl.

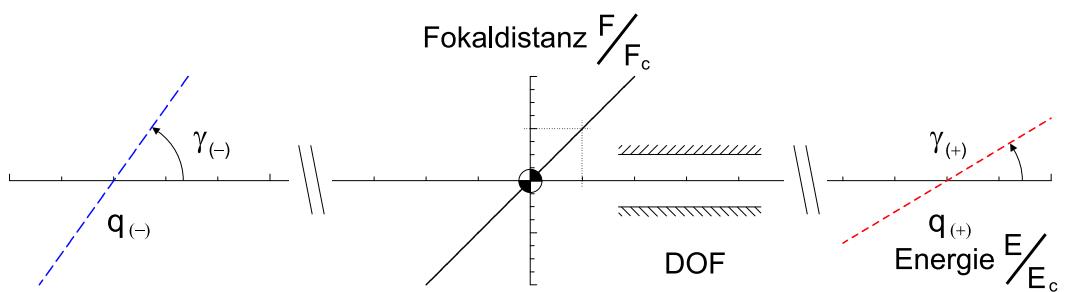


Abbildung 4.17: Lokale Dispersion des reduzierten Hybrid-Profil. Der Bandpass des zentralen Maximums mit $\psi = 1$ beträgt exakt $\frac{2}{N}$. Spektral weit entfernte Peaks mit $q_{\pm} \gg 1$ weisen eine größere (blau) oder kleinere (rot) Dispersion auf, gegeben durch $\tan \gamma_{\pm} \gtrless 1$.

4.88 lässt eine Korrespondenz zur klassischen diffraktiven Linse vermuten. In der Tat entspricht das disperse Verhalten der hochreduzierten Hybridlinse in guter Näherung dem

des rein diffraktiven Analogons *halbierter* Zonenzahl N . Um dies zu sehen, betrachte man erneut Gl. 4.76 mit den entsprechenden Abkürzungen, setze darin $m = 1$ und vollziehe den Grenzübergang $N_0 \rightarrow \infty$. Man findet

$$I_n(\psi, \zeta) = \left(\frac{1}{N\pi} \right)^2 \mathcal{F}_{m=1}(\psi, \zeta) \cdot \mathcal{G}_n(\psi, \zeta) \left(\frac{\psi}{\zeta} \right)^2, \quad (4.89)$$

wobei nun unter der Annahme kleiner spektraler Abweichungen mit $\psi \approx 1$ und ebensolcher Fokusnähe gemäß $\zeta \approx 1$ in den Argumenten der trigonometrischen Funktionen durch

$$\frac{1}{\psi} + \frac{\psi}{\zeta} \approx 2 \quad (4.90)$$

genähert werden kann. Diverse Vereinfachungen und Umformungen verkürzen Gl. 4.89 auf

$$I_n(\psi, \zeta) \approx \left(\frac{4n}{N\pi} \right)^2 \left(\frac{\sin \left(\frac{1}{2}\pi \left(\frac{1}{\psi} - \frac{\psi}{\zeta} \right) \right)}{1 - \frac{\zeta}{\psi^2}} \right)^2 \left(\frac{\sin \left(\frac{N}{4}\pi \frac{\psi}{\zeta} \right)}{\sin \left(\pi n \frac{\psi}{\zeta} \right)} \right)^2. \quad (4.91)$$

Dem das die *Differenz* zwischen $\frac{1}{\psi}$ und $\frac{\psi}{\zeta}$ enthaltende Argument bleibt eine ähnliche Vereinfachung versagt, da beide Terme $\sim \mathcal{O}(1)$ und der sin-Zähler kritisch mit dem zugehörigen „refraktiven“ Nenner reagiert. Nun stimmt Gl. 4.91 im Grenzfall $N \gg n \rightarrow 1$ bis auf einen hier unbedeutenden Faktor $\frac{1}{2}$ im sin-Argument mit der fokalen Intensität einer diffraktiven Linse *halbierter* Zonenzahl auf der optischen Achse nach Gl. 3.78 überein.

Die lokale Bandbreite der Kammstruktur wird im weiteren Verlauf allen Abschätzungen zugrunde gelegt, es gilt also

$$\left(\frac{\Delta E}{E} \right)_{loc} = \frac{2}{N} \quad \rightarrow \quad f_n = 2 \frac{n}{N} \leq \frac{1}{4}, \quad (4.92)$$

wenn f_n den Bruchteil der nicht reduzierten Bandbreite nach Gl. 4.83 benennt, der vom Detektor tatsächlich erfasst wird. Dessen spektrales Auflösungsvermögen sollte im Interesse der Bildqualität zumindest der lokalen Breite der Kammstruktur entsprechen,

$$\left(\frac{\Delta E}{E} \right)_{det} \leq \frac{2}{N}. \quad (4.93)$$

Die Profilreduktion bewirkt somit zweierlei: Einerseits nimmt die Transmission zu, andererseits vermindert sie den Bandpass mit dem Grad der Reduktion. Angesichts dieser Tatsache erscheint es sinnvoll, weitere, zuerst zwei- dann mehrstufige Reduktionen in Betracht zu ziehen. Erwartungsgemäß modifiziert dieses Unterfangen abermals die spektrale Effizienz $I_n(\psi)$ im Sinn einer veränderten Kammstruktur. Abb. 4.16 zeigt unten das Beispiel eines auf $n = \frac{N}{40}$ hochreduzierten Typs, während Abb. 4.18 Ausschnitte besagter Oszillationen für $n = \frac{N}{8}$ und $n = \frac{N}{40}$ nach Gl. 4.79 illustriert. Die beiden Kurven unterscheiden sich lediglich in den verschwindenden Maxima, während andere, im gegenseitigen Abstand der Kammperiode $\left(\frac{\Delta E}{E} \right)_{comb}$ angesiedelte unverändert erhalten bleiben.

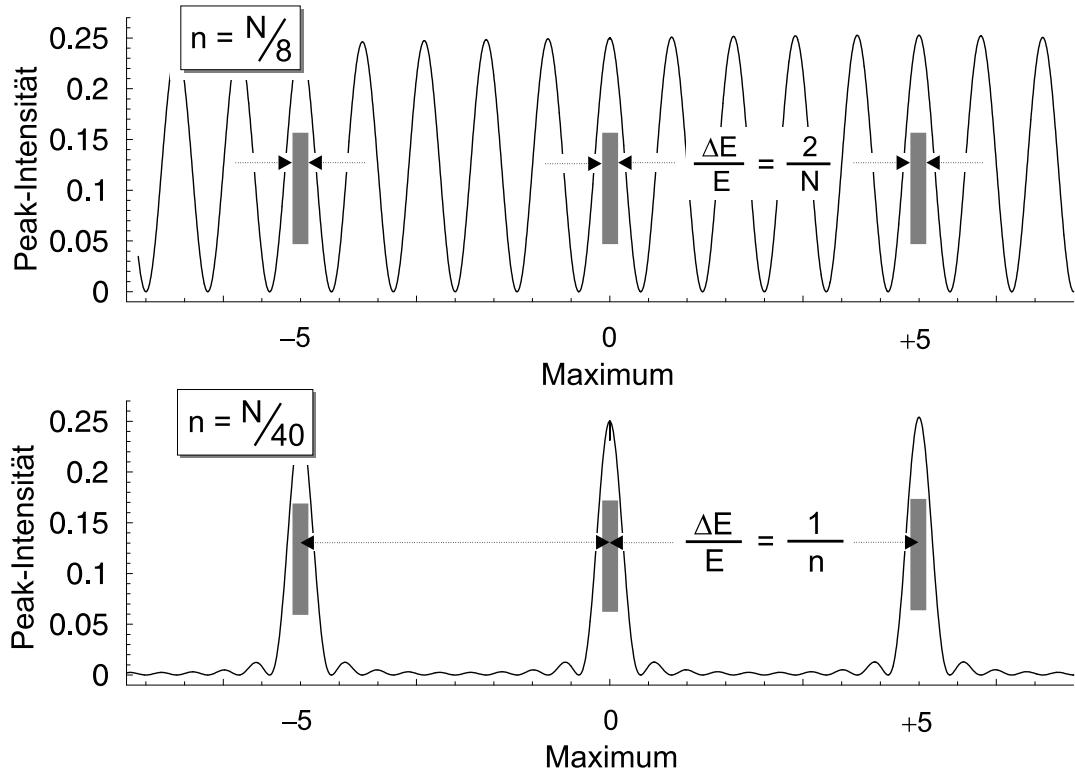


Abbildung 4.18: Kammstruktur bei ein- und mehrfacher Reduktion. Die Kammperiode des reduzierten Achromaten 1. Stufe beträgt $\frac{\Delta E}{E} = \frac{8}{N}$, entsprechend der doppelten FWHM-Breite eines „Zinkens“. Die Reduktion zehnter Stufe erhält jedes fünfte Maximum (unten).

Eben jenes Ziel, die Lichtstärke $A_{eff} \times \Delta E$ bei konstanter Aperturgröße zu verbessern, entbehrt daher nicht einer grundsätzlichen Ambivalenz: Der gesteigerten Transmission steht nun eine relativ zum massiven Hybrid-Standard verminderte Spektraleffizienz aufgrund der Kammstruktur entgegen. Bezeichnet n wie bisher den Stufenparameter der refraktiven Komponente, so stellen sich absolute und relative Lichtstärke allgemein als

$$A_{eff} \times \Delta E = f_n \pi R^2 \frac{E}{\sqrt{n}} \cdot e^{-\frac{2n}{N_0}} \quad \rightarrow \quad \mathcal{Q}(n_1, n_2) = \frac{f_{n_2}}{f_{n_1}} \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} e^{\frac{2}{N_0}(n_1 - n_2)} \quad (4.94)$$

dar. Hier wurde der Quotient $\mathcal{Q}(n_1, n_2) \equiv (A_{eff} \times \Delta E)_{n_2} \cdot (A_{eff} \times \Delta E)_{n_1}^{-1}$ als Maß für den Nutzen der refraktiven Profilreduktion eingeführt, wobei n_1 den Stufenparameter *vor* und n_2 denjenigen *nach* der Reduktion beschreibt. Üblicherweise gilt $n_1 = \frac{N}{4}$ und speziell im Fall der einstufigen Korrektur $n_2 = \frac{N}{8}$. Ferner steht $0 \leq f_n \leq \frac{1}{4}$ für den Bruchteil des gesamten Bandpass-Spektrums, der vom Detektor tatsächlich erfasst wird. Definiert

$$k \equiv \frac{M}{4n} \in \mathbb{N}, \quad \text{dann beschreibt} \quad f_n(k) = \frac{1}{2k} \quad (4.95)$$

die spektrale Nutzung in Abhängigkeit vom Reduktionsparameter k . Im Fall des Standard-Achromaten mit $n_1 = \frac{N}{4}$ gilt ausnahmsweise $f_{n_1} = 1$ und $k = 1$. Eingesetzt in Gl. 4.94,

ergeben sich für die genannten Werte n_1 und n_2 Funktionen nach Abb. 4.19. Es werden die beiden niedrigsten Reduktionsstufen $k = 2$ und $k = 3$ angenommen. Der schraffierte Sektor

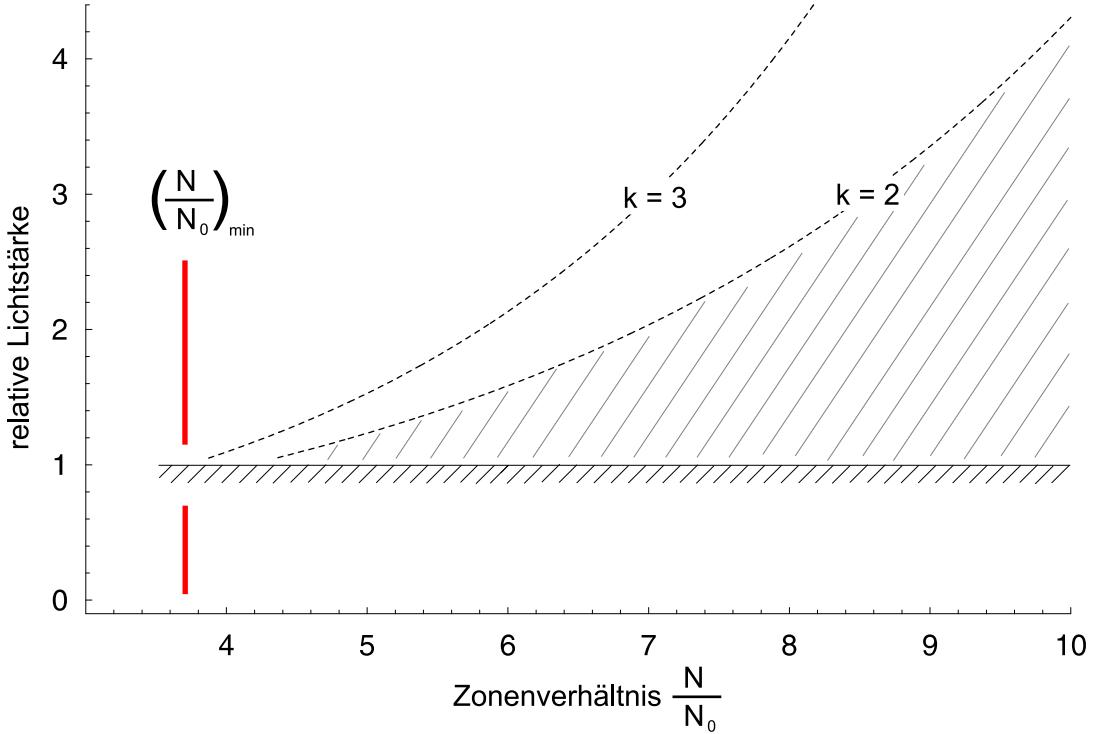


Abbildung 4.19: *Zunahme der Lichtstärke durch Profilreduktion. Sie erweist sich als umso effektiver, je größer $\frac{N}{N_0}$ ausfällt. Für alle k verspricht sie gegenüber dem massiven, auf 1 normierten Profil nur dann eine quantitative Verbesserung, wenn $s \geq s_{min} \approx 3.7$.*

wird offensichtlich nicht berührt. Ansonsten ist insbesondere der Umstand hervorzuheben, dass je nach der Wahl von k der Profilreduktion erst für $N \gtrsim 4N_0$ das Attribut einer physikalisch sinnvollen Maßnahme zugestanden werden kann. Dies gilt im übrigen auch für alle höheren Reduktionsgrade – ein Minimum wird mit

$$\left(\frac{N}{N_0}\right)_{min} \approx 3.7 \quad \text{für } k = 4 \quad (4.96)$$

durchschritten. Generell verspricht die Reduktion bei gegebenem k eine umso größere Wirksamkeit, je höher das Verhältnis $\frac{N}{N_0}$ der Zonenzahlen ausfällt. Allgemein findet man bei beliebiger Reduktion der refraktiven Komponente unter Rückgriff auf Gl. 4.94

$$A_{eff} \times \Delta E = \frac{\pi}{2} hc \sqrt{\frac{N}{k}} e^{-\frac{N}{2kN_0} F} \quad \text{mit} \quad n = \frac{N}{4k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.97)$$

Mit den Naturkonstanten h und c lässt sich Gl. 4.97 ins Verhältnis zur Lichtstärke des massiven, nicht reduzierten Achromaten mit $n = \frac{N}{4}$ setzen und als Funktion zweier Variablen

bzw. Parameter ausdrücken,

$$\mathcal{Q}_k(s) = \frac{1}{2\sqrt{k}} e^{\frac{s}{2}(1-\frac{1}{k})} \quad \text{mit} \quad s = \frac{N}{N_0}. \quad (4.98)$$

Tab. 4.6 listet einige Werte nach Gl. 4.98 auf. Obgleich in der Praxis $k \in \mathbb{N}$ gewählt wird,

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathcal{Q}_2(s)$	0.45	0.58	0.75	0.96	1.23	1.58	2.03	2.61	3.35	4.31	5.53	7.10
$\mathcal{Q}_3(s)$	0.40	0.56	0.78	1.10	1.53	2.13	2.98	4.15	5.80	8.09	11.3	15.8
$\mathcal{Q}_5(s)$	0.33	0.50	0.74	1.11	1.65	2.46	3.68	5.49	8.18	12.2	18.2	27.2
$\mathcal{Q}_{10}(s)$	0.25	0.39	0.61	0.96	1.50	2.35	3.69	5.79	9.08	14.2	22.3	35.0

Tabelle 4.6: *Wirkungsgrad der Profilreduktion. In Abhängigkeit vom Zonenverhältnis $s = \frac{N}{N_0}$ ist $\mathcal{Q}_k(s)$ für diverse Reduktionsparameter k angegeben.*

hängt $\mathcal{Q}_k(s)$ auf \mathbb{R}^+ stetig vom Reduktionsparameter k ab, so dass für ein Extremum in k

$$\frac{d}{dk} \mathcal{Q}_k(s) = \frac{1}{4} e^{\frac{s}{2}(1-\frac{1}{k})} \frac{1}{\sqrt{k^3}} \left(\frac{s}{k} - 1 \right) \rightarrow 0 \quad (4.99)$$

zu fordern ist. Auf den über die Bedingung $\frac{d^2}{dk^2} \mathcal{Q}_k(s) < 0$ zu erbringenden Beweis, dass bei $k = \frac{N}{N_0}$ tatsächlich ein *Maximum* vorliegt, sei an dieser Stelle verzichtet. Bezeichnet $[x]$ die ganzzahlig gerundete Näherung der Zahl $x \in \mathbb{R}$, so ist, übersetzt in reelle Zonenzahlen, die optimale Profilreduktion also durch

$$k_{opt} = [s] \Leftrightarrow n_{opt} = \frac{1}{4} [N_0] \quad \text{und} \quad \mathcal{Q}_{opt}(s) = \frac{1}{2\sqrt{s}} e^{\frac{1}{2}(s-1)} \quad (4.100)$$

gegeben. Tab. 4.7 listet einige Werte s mitsamt ihrer optimalen Verstärkung $\mathcal{Q}_{opt}(s)$ auf. Der praktischen Konstruktion und Anwendung eines derart optimierten Hybrid-Profiles

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathcal{Q}_{opt}(s)$	0.50	0.58	0.78	1.12	1.65	2.49	3.80	5.85	9.10	14.2	22.4	35.3

Tabelle 4.7: *Optimierte Profilreduktion von Hybridlinsen. Normiert auf die Lichtstärke der nicht-reduzierten Version, nimmt $A_{eff} \times \Delta E$ für den refraktiven Stufenparameter $n_{opt} = \frac{N_0}{4}$ den größtmöglichen Wert nach Gl. 4.100 an.*

steht unter Umständen die hohe spektrale Trennschärfe entgegen, die der Detektor zum annähernden Erhalt der Winkelauflösung bekanntlich zu leisten hat und vorteilhaft wenigstens $(\frac{\Delta E}{E})_{det} = \frac{2}{N}$ betragen sollte.

Mittel- bis langfristig könnten (magnetische) Mikro-Kalorimeter (siehe Kap. 6) mit bestenfalls $\Delta E \sim 1$ eV bei einigen keV Praxisreife erlangen. Unter günstigen Bedingungen –

dazu zählt insbesondere eine weitgehende Unterdrückung bislang unverstandener Rauschfaktoren – darf mit einer Trennschärfe von $\gtrsim 3 \times 10^{-4}$ gerechnet werden. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit, speziell im Vorgriff auf Abschn. 5.5 wird eine Auflösung von

$$\left(\frac{\Delta E}{E} \right)_{det} = 4 \times 10^{-4}, \quad \text{entsprechend} \quad N = 5 \times 10^3 \quad (4.101)$$

angenommen. Die Zonenzahl jedweder profilreduzierten Linse ist demnach de facto auf $N < 10^4$ beschränkt. Gleichwohl wird anhand von Tab. 4.7 erneut deutlich, dass optisch „schwache“ Materialien mit niedrigem N_0 am meisten von der Profilreduktion profitieren und durchaus mit $s > 10$ betrieben werden können, während Li bzw. LiH als die hinsichtlich ihrer maximalen kritischen Zonenzahl $N_0 \approx 10^3$ leistungsfähigsten Feststoffe mit $s \sim 5$ an ihre praktische Grenze stoßen.

4.3 Dialytische Konfigurationen

Zu Beginn des Kapitels wurde Gl. 4.1 via $d \rightarrow 0$ dahingehend eingeschränkt, dass lediglich kompakte Hybrid-Achromaten mit fixer Blaze-Energie E_c zur Diskussion standen. Gemäß Gl. 4.1 sollte die Eröffnung des zusätzlichen Freiheitsgrades $d \geq 0$ die Dispersionskorrektur jedoch auch bei räumlich separierten Komponenten gestatten. Im Sinn einer übersichtlichen mathematischen Behandlung des Problems erweist sich eine Abkehr von der bisher benutzten, auf der paraxialen Wellengleichung basierenden Beugungstheorie als zweckmäßig. An ihre Stelle tritt nun der Matrizenformalismus der geometrischen Optik, wie er z.B. in [26] ausführlich beschrieben wird. Die Linsen befinden sich der im Rahmen dieses Abschnitts gewählten Notation zufolge an den axialen Positionen z_1 und z_2 , wobei die Forderung $z_2 = z_1 + d$ der refraktiven Korrekturlinse den *nachgeordneten* Rang einräumt. Das Bild eines bei $z_0 < z_1$ lokalisierten Objektpunktes befindet sich dann bei $z_F \equiv z_3 > z_2$. Die geometrischen Verhältnisse sind in Abb. 4.20 veranschaulicht. Die Annahme $z_F > z_2$ impliziert insbesondere ein *reelles* Bild – eine im übrigen keineswegs selbstverständliche Eigenschaft solcher „dialytischen“ Systeme, die beispielsweise von rein diffraktiven Dubletts verletzt werden kann. Wenn gleich der Linsenseparation im folgenden durch den Rückgriff auf Methoden der geometrischen Optik Rechnung getragen wird, so geschieht dies doch weiterhin in paraxialer Näherung. Die auftretenden Winkel der propagierenden Lichtstrahlen können daher näherungsweise linearisiert werden, so dass eine allgemeine optische Operation als

$$\vec{w} = \mathcal{M} \cdot \vec{v} \quad \text{oder} \quad w_k = \mathcal{M}_{kl} v_l \quad (4.102)$$

geschrieben werden kann. Die Vektoren \vec{v} bzw. \vec{w} beschreiben in axialsymmetrischen Problemstellungen Winkel α und radialen Abstand r von der optischen Achse. Entsprechend wirken die als Operatoren fungierenden Matrizen \mathcal{M} je nach Art des durch sie vertretenen optischen Elements auf diese beiden Koordinaten. Translation \mathcal{T}_{ij} von z_i nach z_j und Beugung \mathcal{B}_i am i -ten optischen Element drücken sich demnach als

$$\mathcal{T}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_j - z_i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{B}_i = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{F_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.103)$$

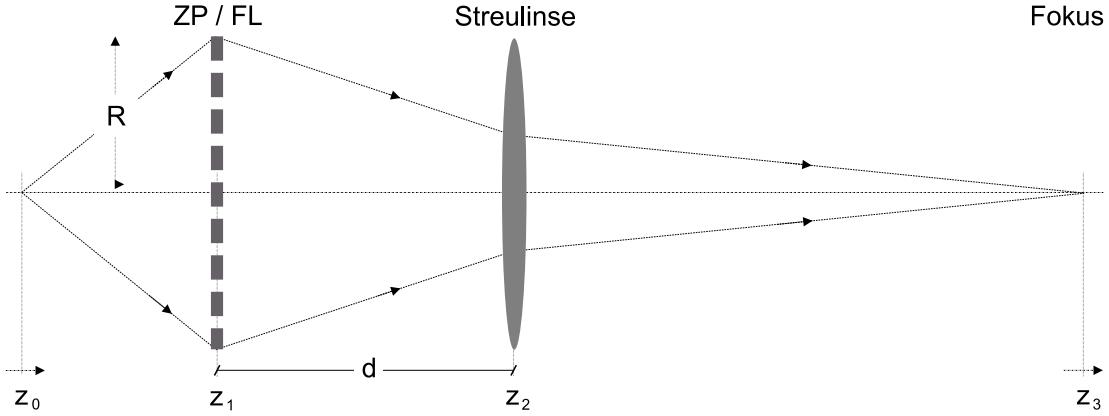


Abbildung 4.20: Abmessungen eines dialytischen Dubletts. Die Konfiguration besteht aus einer diffraktiven Sammel- und einer refraktiven Streulinse, die beide den Radius R besitzen und an den axialen Positionen z_1 bzw. z_2 lokalisiert sind. Das System fokussiert nach $z_3 = z_F$. Das Objekt bei z_0 wird im Verlauf der Rechnung formal nach $-\infty$ verlegt.

aus, wobei F_i die Brennweite besagter Komponente bezeichnet. Nach einschlägigen algebraischen Regeln berechnet sich nun die Abbildung durch das dialytische Linsensystem zu

$$\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ r_3 \end{pmatrix} = T_{23} \cdot \mathcal{B}_2 \cdot T_{12} \cdot \mathcal{B}_1 \cdot T_{01} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ r_0 \end{pmatrix} \quad (4.104)$$

mit den entsprechenden Indizes nach Abb. 4.20. Auf die explizite, aufwändige Darstellung der Matrizenmultiplikation sei verzichtet. Um die Koordinaten des Bildes, sprich Einfallsinkel α_3 und Fokalposition z_F zu ermitteln, empfiehlt sich die Wahl

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R}{z_1 - z_0} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.105)$$

Der Einfallsinkel des Strahls einer axialen Punktquelle in den Fokus ergibt sich nun zu

$$\alpha_3 = -\frac{R}{z_0} \left(\left(1 - \frac{z_2 - z_1}{F_2} \right) \left(1 - \frac{z_1 - z_0}{F_1} \right) - \frac{z_1 - z_0}{F_2} \right), \quad (4.106)$$

während sich die laterale Position r_3 des Bildpunktes folgendermaßen darstellen lässt:

$$r_3 = -\frac{R}{z_0} \cdot \mathcal{F}(z_i) - R \cdot \mathcal{G}(z_i) \quad (4.107)$$

wobei vorübergehend Funktionen $\mathcal{F}(z_i)$ und $\mathcal{G}(z_i)$ eingeführt wurden, die mit

$$\mathcal{F}(z_i) = \left(z_F - z_2 + \left(1 - \frac{z_F - z_2}{F_2} \right) (z_2 - z_1) \right) \left(1 - \frac{z_1 - z_0}{F_1} \right) \quad (4.108)$$

$$\mathcal{G}(z_i) = \left(1 + \frac{z_F - z_2}{F_2} \right) \left(\frac{z_1}{z_0} - 1 \right) \quad (4.109)$$

ebenfalls von den Axialkoordinaten z_i abhängen. Da im Gegensatz zur kompakten Hybridoptik aus Abschn. 4.1 mit $d = 0$ der Hauptebenenabstand nicht mehr vernachlässigt werden kann, misst die Brennweite F des Gesamtsystems nun die Differenz $z_F - z_{H_2}$, wobei z_{H_2} die bildseitige Hauptebene lokalisiert. Analog steht z_{H_1} für die objektseitige Hauptebene. Definitionsgemäß ergeben sich diese fiktiven Flächen aus elementaren Gleichungen, die den effektiven Strahlverlauf zwischen Objekt- und Bildebene beschreiben [27]. Im Sinn einer übersichtlichen Darstellung erweist es sich als sinnvoll, in den Gln. 4.106 und 4.107 $z_1 = 0$ und folgerichtig $z_2 = d$ zu setzen. Damit verlagert sich die auf der optischen Achse angesiedelte Punktquelle nach $z_0 < 0$. Man findet

$$z_{H_1} = \frac{F_1 d}{F_1 + F_2 - d} \quad \text{und} \quad z_{H_2} = \frac{F_1 d - d^2}{F_1 + F_2 - d}. \quad (4.110)$$

Den Gegebenheiten der Praxis folgend, wurde hier in einem letzten Schritt der Grenzübergang $z_0 \rightarrow -\infty$ ausgeführt. Die Koordinaten des Bildpunktes lauten schließlich

$$\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ r_3 \end{pmatrix} = -\frac{R}{F_1 F_2} \begin{pmatrix} F_1 + F_2 - d \\ F_1 (z_F - d - F_2) + F_2 z_F - d z_F + d^2 \end{pmatrix}. \quad (4.111)$$

Um das angestrebte Ziel der Dispersionskorrektur zu realisieren, bietet Gl. 4.111 bezugnehmend auf lateralen und longitudinalen Fehler zwei prinzipiell verschiedene Möglichkeiten:

Die Forderung $\frac{d}{dE} \alpha_3(E) = 0$ erweist sich als Ausdruck der Bedingung, dass die Variation der Gesamtbrennweite $F = z_F - z_{H_2}$ in erster Ordnung bzgl. der Energie E bei E_c verschwindet, denn offenbar gilt für den Einfallswinkel im Fokus

$$\alpha_3(E) = -R \left(\frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_1} - \frac{d}{F_1 F_2} \right) = -\frac{R}{F}. \quad (4.112)$$

Unter vorläufigem Verzicht auf die spezifischen Dispersionsrelationen diffraktiver und refraktiver Linsen führt die Extremalbedingung auf den Linsenabstand

$$d = \frac{1}{c_1 + c_2} (c_2 F_1 + c_1 F_2) \quad \text{mit} \quad F_i = c_i E^{\gamma_i} \quad \text{und} \quad i = 1, 2. \quad (4.113)$$

Mit c_i und $1 \leq \gamma_i \leq 2$ sind reelle Koeffizienten bzw. Exponenten bezeichnet. Gemeinhin firmiert die durch den fokalen Einfallswinkel α_3 bedingte Aberration in der optischen Literatur unter dem Begriff des „lateralen Farbfehlers“. Er gestattet im korrigierten Energieintervall ΔE eine zumindest formal konstante Vergrößerung, die freilich praktisch kaum genutzt werden kann, da der Brennpunkt $z_F(E)$ bzgl. E nach wie vor streut und somit bei fester Detektorposition eine verwaschene Abbildung hervorruft.

Um also vielmehr diesen „longitudinalen Fehler“ so weit als möglich zu eliminieren, ist in Gl. 4.111 die Fokalposition z_F der Forderung

$$\frac{d}{dE} z_F(E) = 0 \quad \text{mit} \quad z_F(E) = \frac{F_1 d + F_1 F_2 - d^2}{F_1 + F_2 - d} \quad (4.114)$$

zu unterwerfen. Der Ausdruck für $z_F(E)$ wurde dabei bezugnehmend auf die axiale Position der Punktquelle mittels $r_3 = 0$ vereinfacht. Da $F_1 + F_2 \neq d$ angenommen werden kann, findet man nun die Lösungen in d wieder mit $F_i = c_i E^{\gamma_i}$ zu

$$d_{\pm} = F_1 \left(1 \pm i \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{F_2}{F_1}} \right), \quad (4.115)$$

die offenbar genau dann reellwertig sind, wenn $(\gamma_1 F_2)(\gamma_2 F_1)^{-1} \leq 0$ gilt. Der triviale und physikalisch sinnlose Fall des verschwindenden Radikanden soll hier nicht betrachtet werden. Da nach Voraussetzung $\gamma_i \in \mathbb{R}^+$, bedarf es zur longitudinalen Dispersionskorrektur in dialytischer Konfiguration zwingend einer Kombination aus Sammel- und Streulinse mit Brennweiten F_i entgegengesetzten Vorzeichens. Es lässt sich unter Verwendung vorstehender Gleichungen zeigen, dass mittels konventioneller diffraktiver Linsen keine Dispersionskorrektur in *Transmission* möglich ist. Lediglich in Reflexion liefert die zweite Komponente reelle Lösungen, so dass $0 < z_F < d$. In Ermangelung geeigneter Normal-Spiegel kommt dieser Option jedoch keine praktische Bedeutung zu. Alternativ gestatten Konfigurationen von Fresnel-Linsen durch geschickte Kombination verschiedener Beugungsordnungen, zumindest zwei Energiewerte simultan abzubilden – eine angesichts des technischen Aufwandes fragwürdige Variante, da sich der Bandpass nur geringfügig erweitert. Nach gegenwärtigem Kenntnisstand bedarf es zu einer rein diffraktiv-transmissiven Dispersionskorrektur spezieller Linsen, die sich durch spezifische Funktionen $r = r(n)$ auszeichnen, wobei r für den Radius in Abhängigkeit von der Zonenzahl n steht [28]. Leider vermag erst ein derartiges *Triplett* näherungsweise aberrationsfrei abbildend auch auf achsfremde Punktquellen zu wirken. Zudem bleibt der spektrale Bandpass auch solcher Konfigurationen stets hinter dem der diffraktiv-refraktiven zurück [28]. Mit der Spezifikation auf ein eben solches System mit $F_1 \rightarrow F_Z \propto E$ und $F_2 \rightarrow F_L \propto E^2$ vereinfacht sich Gl. 4.114 zu

$$F_L = -\frac{2}{F_Z} (F_Z - d)^2 \quad \text{oder} \quad d = F_Z \pm \sqrt{-\frac{1}{2} F_Z F_L}. \quad (4.116)$$

In dieser Form beschreibt die linke der Gln. 4.116 die bei fixem Linsenabstand d zur Dispersionskorrektur nötige refraktive Fokallänge F_L , so dass die rechte der Gln. 4.116

$$d(E_c) = F_Z(E_0) \frac{E_c}{E_0} - \sqrt{-\frac{1}{2} F_Z(E_0) F_L(E_0) \left(\frac{E_c}{E_0} \right)^3} \quad (4.117)$$

ergibt, wobei angenommen wurde, dass insbesondere der *unveränderliche* Krümmungsradius der refraktiven Linse bei einer bestimmten Energie E_0 durch $\xi = F_L(E_0) \delta(E_0)$ gegeben ist. E_c steht dieser Notation zufolge nun für den *variablen* Zentralwert des dispersionskorrigierten Energieintervalls. Die physikalische Annahme einer positiven Distanz $d \geq 0$ geht gemäß Gl. 4.117 mit der oberen Schranke

$$\frac{E_c}{E_0} \leq -2 \frac{F_Z(E_0)}{F_L(E_0)} \quad \text{mit} \quad F_L(E_0) < 0 \quad (4.118)$$

an das mögliche Spektrum der Energiewerte E_c einher. Da die Distanz d bei E_0 durch

$$d(E_0) = F_Z(E_0) - \sqrt{-\frac{1}{2}F_Z(E_0)F_L(E_0)} \quad \text{und} \quad F_L(E_0) = -2F_Z(E_0) \quad \text{für} \quad d(E_0) = 0$$

gegeben ist, erweist es sich als zweckmäßig, $F_Z(E_0)$ und $F_L(E_0)$ nach eben dieser Definition zu wählen. Im Grenzfall $d(E_0) \rightarrow 0$ nimmt der Dialyt dann gerade wieder Gestalt und Funktion der in Abschn. 4.1 besprochenen Hybridlinse an. Eingesetzt in Gl. 4.117, liefert die Relation $F_L(E_0) = -2F_Z(E_0)$ den Ausdruck

$$d(E_c) = F_Z(E_0) \frac{E_c}{E_0} \left(1 - \sqrt{\frac{E_c}{E_0}} \right). \quad (4.119)$$

Die Fokalposition z_F aus Gl. 4.114 lautet nun mit Gl. 4.119 und wegen $F_L(E_0) = -2F_Z(E_0)$

$$z_F(E_c) = F_Z(E_0) \frac{E_c}{E_0} \left(1 - 3\sqrt{\frac{E_c}{E_0}} \right) \left(1 - 2\sqrt{\frac{E_c}{E_0}} \right)^{-1}. \quad (4.120)$$

In Einheiten der diffraktiven Fokaldistanz $F_Z(E_c)$ ist diese Funktion, bezeichnet mit dem Begriff der „Brennweite“ zusammen mit dem ebenso normierten Linsenabstand $d(E_c)$ in Abb. 4.21 aufgetragen. Ausgehend von der bekannten Erweiterung um den Faktor 2 bei E_0 erstreckt sich die Fokalposition demnach mit fallender Energie zu immer größeren Werten, um für $E_c \rightarrow \frac{1}{4}E_0$ zu divergieren. Die zunehmende Fokaldistanz bleibt nicht ohne Auswirkungen auf die Fokustiefe (DOF), zu deren Berechnung nun allerdings der spezifische Strahlengang im zweikomponentigen System nach Abb. 4.20 berücksichtigt werden muß. Nach allgemeiner Definition ist sie durch

$$\Delta z_F = \pm \frac{1}{2} \frac{\lambda}{(NA)_L^2} \quad \text{mit} \quad (NA)_L = \frac{r_L}{z_F - d} \quad \text{und} \quad r_L = R \left(1 - \frac{d}{F_Z} \right) \quad (4.121)$$

gegeben, wobei der vom Strahlenbündel erfasste Radius nach Abb. 4.20 mit r_L bezeichnet wurde. Wiederum evaluiert für $E = E_c$, ergibt sich

$$\Delta z_F = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{F_Z(E_c)}{N} \right) 4 \frac{E_c}{E_0} \left(2\sqrt{\frac{E_c}{E_0}} - 1 \right)^{-2}, \quad (4.122)$$

mit der diffraktiven Zonenzahl N . Abb. 4.21 zeigt den Verlauf der auf den diffraktiven Wert normierten Schärfentiefe. Ein qualitativ ähnliches Verhalten zeigt die laterale Ausdehnung der PSF, d.h. die Ortsauflösung Δx_F . Normiert auf den Standard Δx_Z der einfachen diffraktiven Komponente, errechnet sie sich gemäß

$$\frac{\Delta x_F}{\Delta x_Z} = \frac{1}{F_Z} (z_F - z_{H_2}) = 2\sqrt{\frac{E_c}{E_0}} \left(2\sqrt{\frac{E_c}{E_0}} - 1 \right)^{-1}, \quad (4.123)$$

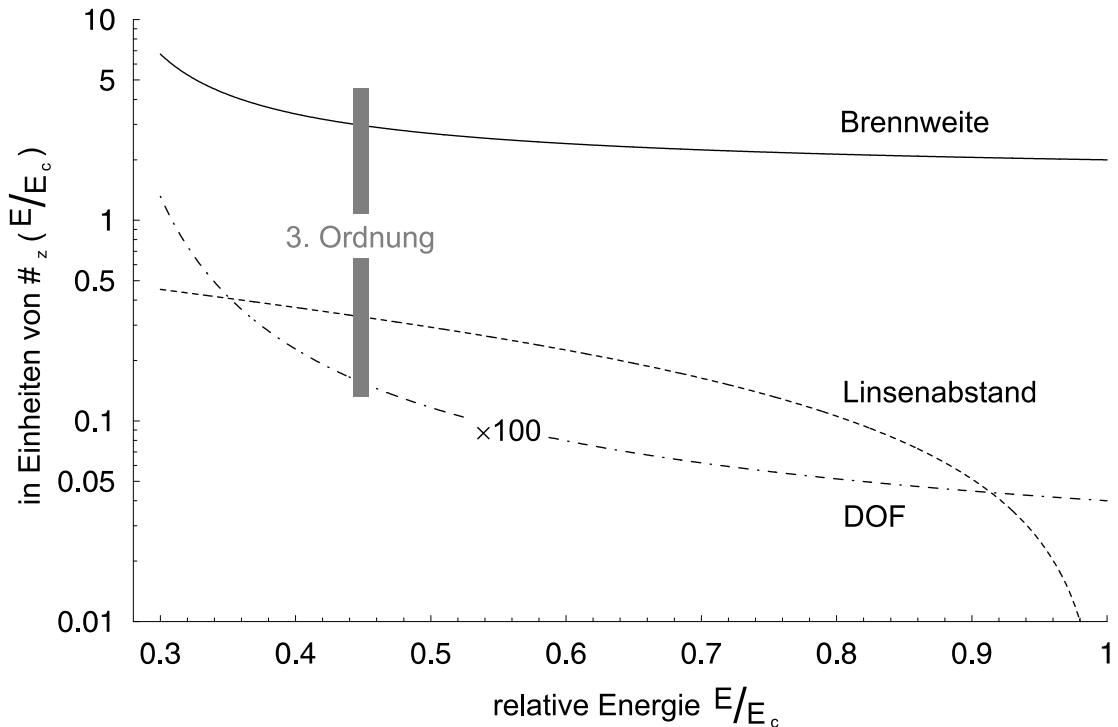


Abbildung 4.21: Längenskalen dialytischer Konfigurationen. Linsenabstand d , Fokustiefe (depth of field, DOF) und die vom Ort der ersten Linse aus gemessene Brennweite F sind auf die jeweiligen Werte des einfachen diffraktiven Analogons bezogen. Man beachte die zur besseren Darstellung um den Faktor 10^2 reduzierte Fokustiefe.

da die Winkelauflösung lediglich von der Apertur der ersten, diffraktiven Komponente bestimmt wird. Ebenso wie die Schärfentiefe divergiert Δx_F im Grenzfall $E_c \rightarrow \frac{1}{4}E_0$, ein Umstand, der die grundlegende, wenn auch nur theoretische Bedeutung der für diese Energie auftretenden Singularität unterstreicht. Abb. 4.22 veranschaulicht in der rechten Teilgrafik den Verlauf der in Einheiten von $F_Z(E)$ gemessenen Fokalposition $z_F(E)$. Man liest ab, dass mit zunehmender, in Prozent der Abweichung $\frac{E_c}{E_\infty} - 1$ gemessener Annäherung der Energie E_c an die Singularität bei $E_\infty = \frac{1}{4}E_0$ der Fokus immer empfindlicher auf kleine Variationen von E um E_c reagiert. Die linke der beiden Grafiken illustriert anhand des Verlaufs von z_F nach Gl. 4.120, dass in E_∞ nicht nur eine bzgl. $F_Z \frac{E_c}{E_0}$ relative, sondern *absolute* Singularität vorliegt.

Als praktisch bedeutsamer erweist sich das Minimum nahe $E_c \sim \frac{1}{2}E_0$. Seine Position errechnet sich aus der Extremalbedingung an $z_F(E_c)$ aus Gl. 4.120 bzgl. E_c ,

$$\frac{d}{dE_c} z_F(E_c) = 0 \quad \rightarrow \quad [...] \quad \rightarrow \quad E_{min} = \frac{4}{9}E_0 \quad \text{und} \quad z_F(E_{min}) = \frac{4}{3}F_Z(E_0). \quad (4.124)$$

Die zweite Lösung der Extremalforderung an $z_F(E_c)$, gegeben durch $E_c = \frac{1}{16}E_0$, wurde wegen $E_\infty = \frac{1}{4}E_0$ untergeschlagen. Während somit die Verstimmung hin zum relativ weichen Röntgenband die Fokaldistanz und damit die Gesamtlänge des aus den beiden Linsen

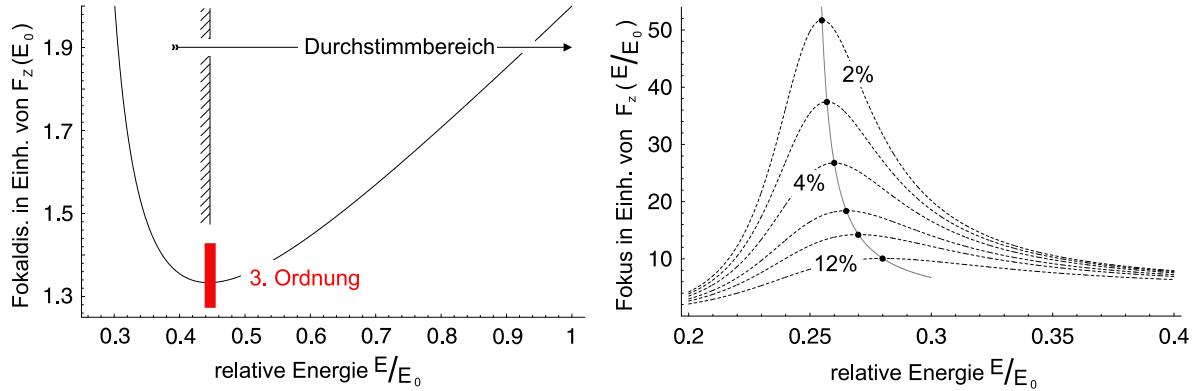


Abbildung 4.22: *Fokale Position und -Singulärheit des Dialyten.* Links ist die in Einheiten von $F_Z(E_0)$ gemessene absolute Fokallänge als Funktion der relativen Energie $\frac{E_c}{E_0}$ aufgetragen. Die rechte Grafik zeigt den Verlauf der Gesamtbrennweite nahe der Singularität.

und dem Detektor bestehenden optischen Systems gegenüber $z_F(E_0)$ reduziert, bedarf es andererseits nach Gl. 4.119 einer zunehmenden Separation der Komponenten, die etwa bei

$$d(E_{min}) = \frac{4}{27} F_Z(E_0), \quad \text{aber spätestens in} \quad d(E_\infty) = \frac{1}{8} F_Z(E_0) \quad (4.125)$$

ihr faktisches Ende findet. Eine wesentliche Verstimmung über E_{min} hinaus zu kleineren Energiewerten erscheint nämlich infolge des kritischen Verhaltens des Dialyten nahe E_∞ nicht ratsam.

Die bisher abgeleiteten Formeln nahmen keinerlei Bezug auf die um E_c variierende Energie E . Lediglich in Abb. 4.22 wurde diese lokale Verstimmung vorab berücksichtigt. Um den Verlauf der Dispersion $z_F(E)$ und insbesondere den Bandpass $(\frac{\Delta E}{E})$ zu ermitteln, wird im folgenden zugunsten übersichtlicher Darstellung die relative Energie gemäß

$$\frac{E}{E_0} \rightarrow \psi_0 (1 + \epsilon) \quad \text{mit} \quad \psi_0 \equiv \frac{E_c}{E_0} \quad \text{und} \quad \epsilon \equiv \frac{\Delta E}{E_c} \quad (4.126)$$

substituiert. Die verallgemeinerten Brennweiten schreiben sich in kompakter Form als

$$F_Z(E) = F_Z(E_0) \psi_0 (1 + \epsilon) \quad \text{und} \quad F_L(E) = -2F_Z(E_0) \psi_0^2 (1 + \epsilon)^2. \quad (4.127)$$

Hingegen bleibt der Linsenabstand d gegenüber kleinen Variationen in E um E_c invariant,

$$d(E_c) = F_Z(E_0) \psi_0 \left(1 - \sqrt{\psi_0}\right). \quad (4.128)$$

Eingesetzt in den Ausdruck für die Fokalposition z_F nach Gl. 4.114 findet man schließlich

$$\frac{z_F(E)}{F_Z(E_0) \psi_0} = 1 - \sqrt{\psi_0} - 2\psi_0(1 + \epsilon)^2 - \frac{4\psi_0^2(1 + \epsilon)^4}{\sqrt{\psi_0} + \epsilon - 2\psi_0(1 + \epsilon)^2} \quad (4.129)$$

für kleine Variationen ϵ um 0 bzw. E um E_c . Eine Reihenentwicklung um $\epsilon = 0$ liefert

$$\frac{z_F(E)}{F_Z(E_0) \psi_0} = \frac{3\sqrt{\psi_0} - 1}{2\sqrt{\psi_0} - 1} + 2 \frac{3\psi_0 - 2\sqrt{\psi_0}}{(2\sqrt{\psi_0} - 1)^2} \epsilon^2 + 4 \frac{1 - 2\psi_0}{(2\sqrt{\psi_0} - 1)^2} \epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (4.130)$$

Mit der unabhängig von ψ_0 verschwindenden 1. Ordnung in ϵ wirkt der Dialyt bei korrekter Wahl des Linsenabstandes nach Gl. 4.119 stets als Achromat. Darauf hinaus eliminiert

$$3\psi_0 - 2\sqrt{\psi_0} = 0 \quad \text{mit} \quad \psi_0 = \frac{4}{9} \quad (4.131)$$

nach Gl. 4.130 in Übereinstimmung mit Gl. 4.120 auch die 2. Ordnung in ϵ . Mathematisch drückt sich dieser Umstand in Form einer doppelten Nullstelle in $\frac{d}{dE}z_F$ als Sattelpunkt aus, mit der 3. als niedrigster, nicht-konstanter Ordnung in ϵ , gemäß der Reihe von Gl. 4.129,

$$\frac{z_F(E)}{F_Z(E_0)\psi_0} = 3 + 4\epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^6). \quad (4.132)$$

Abb. 4.23 illustriert u.a. diesen Sattelpunkt bei $E_c = \frac{4}{9}E_0$, in dem sich die Dispersion grundsätzlich von derjenigen 2. Ordnung unterscheidet. Die von $\frac{E_c}{E_0}$ abhängige spektrale

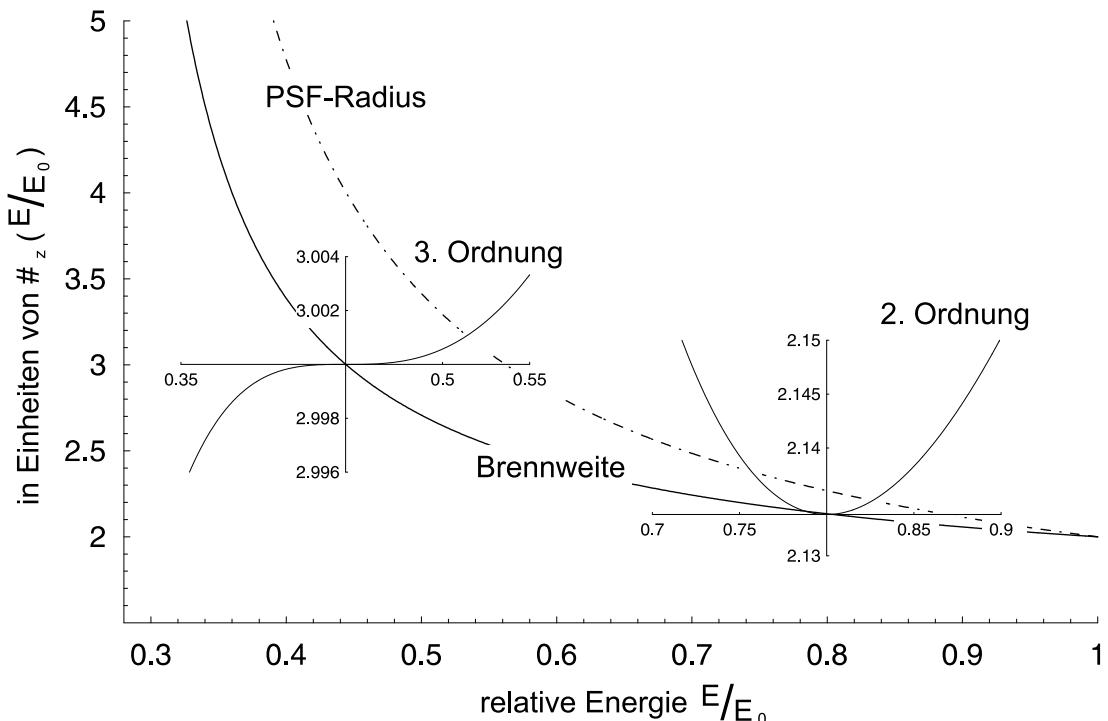


Abbildung 4.23: *PSF-Radius und Dispersion des Dialyten in 2. und 3. Ordnung.* Aufgetragen sind die jeweiligen Größen in Einheiten derjenigen des einfachen diffraktiven Analogons als Funktion der normierten Energie $\frac{E}{E_c}$. Die Dispersion wird im Bereich $\frac{4}{9} < \frac{E}{E_c} \leq 1$ durch die 2. Ordnung in $\frac{\Delta E}{E}$ dominiert, um für $E = \frac{4}{9}E_c$ den maximalen Bandpass in 3. Ordnung zur Verfügung zu stellen.

Toleranz bemisst sich aus der jeweiligen Tiefenschärfe, die der Forderung

$$z_F(E_c) \pm \frac{1}{2}\Delta z_F = z_F(E) \quad (4.133)$$

unterliegt. Unter Verwendung von Gl. 4.130 lautet Gl. 4.133 mit der Zonenzahl N explizit

$$2 \frac{3\psi_0 - 2\sqrt{\psi_0}}{(2\sqrt{\psi_0} - 1)^2} \epsilon^2 + 4 \frac{1 - 2\psi_0}{(2\sqrt{\psi_0} - 1)^2} \epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4) = \pm \frac{2}{N} \frac{\psi_0}{(2\sqrt{\psi_0} - 1)^2}. \quad (4.134)$$

Lediglich die beiden in Abb. 4.23 eingezeichneten Spezialfälle gestatten analytische bzw. semianalytische Lösungen. Die Wahl des Vorzeichens auf der rechten Seite richtet sich dabei nach dem spezifischen Verlauf der Funktion $z_F(E)$ in der Umgebung der jeweiligen Energie E_c . So ist beispielsweise nahe E_0 nur das positive relevant, während für $E_c \approx \frac{4}{9}E_0$ die Feldtiefe den Bandpass sowohl zum harten als auch weichen Band hin begrenzt. Für $E_c = E_0$ geht Gl. 4.134 in den bekannten Ausdruck

$$\epsilon^2 - 2\epsilon^3 = \frac{1}{N} \quad \rightarrow \quad \epsilon \approx \pm \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad \text{also} \quad \frac{\Delta E}{E} = \frac{2}{\sqrt{N}} \quad (4.135)$$

über, wenn für hinreichend große N die 3. Ordnung in ϵ vernachlässigt wird. Hingegen liefert Gl. 4.134 im Sattelpunkt bei $E_c = \frac{4}{9}E_0$

$$\epsilon^3 = \frac{2}{N} \quad \rightarrow \quad \epsilon = \pm \sqrt[3]{\frac{2}{N}}, \quad \text{also} \quad \frac{\Delta E}{E} = 2 \sqrt[3]{\frac{2}{N}}. \quad (4.136)$$

Der Quotient aus den spektralen Bandbreiten 3. und 2. Ordnung skaliert demnach wie $\sqrt[6]{N}$. Realistische Zonenzahlen N liefern einen typischen Faktor 5, um den der Bandpass bei $E_c = \frac{4}{9}E_0$ den bei $E_c = E_0$ übertrifft, wie Tab. 4.8 zeigt. Die übrigen Lösungen in ϵ sind i.a. auf

$N (\times 10^3)$	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Δ_3/Δ_2	3.55	3.98	4.74	4.78	5.02	5.21	5.37	5.51	5.63	5.75	5.85

Tabelle 4.8: Verhältnis der Bandbreiten 3. und 2. Ordnung, symbolisiert durch Δ_3/Δ_2 . Mit zunehmender Zonenzahl N wächst die Bedeutung der 3. Ordnung bzgl. E wie $\sqrt[6]{N}$.

numerischem Weg zu ermitteln, da nicht nur die 3. Ordnung mit abnehmender Energie an Einfluss gewinnt, sondern vor allem nahe des Sattelpunktes die Dispersion „kritisch“ von ψ_0 abhängt. Abb. 4.24 zeigt das Resultat entsprechender manuell-numerischer Rechnungen für diverse Zonenzahlen N . Demzufolge nimmt die spektrale Bandbreite mit fallender Energie E_c kontinuierlich zu, um gegen $E_c = \frac{4}{9}E_0$ auf ein Mehrfaches des Standardwertes $\frac{\Delta E}{E} = \frac{2}{\sqrt{N}}$ anzuwachsen. Insbesondere erweist sich das Toleranzintervall bzgl. E_c , innerhalb dessen die Dispersion in 2. Ordnung verschwindet, als von der regulären Bandbreite vereinnahmt,

$$\left(\frac{\Delta E_c}{E_c} \right)_{E_c=\frac{4}{9}E_0} \approx \frac{1}{2\sqrt[3]{N}} < 2\sqrt[3]{\frac{2}{N}} = \left(\frac{\Delta E}{E} \right)_{E_c=\frac{4}{9}E_0} \quad (4.137)$$

In Abb. 4.24 sind die ungefähren numerischen Werte dieses Toleranzintervalls $\frac{\Delta E_c}{E_c}$ eingetragen. Einer strengen Auswertung mit Hilfe der fokalen Tiefenschärfe folgend, verläuft die

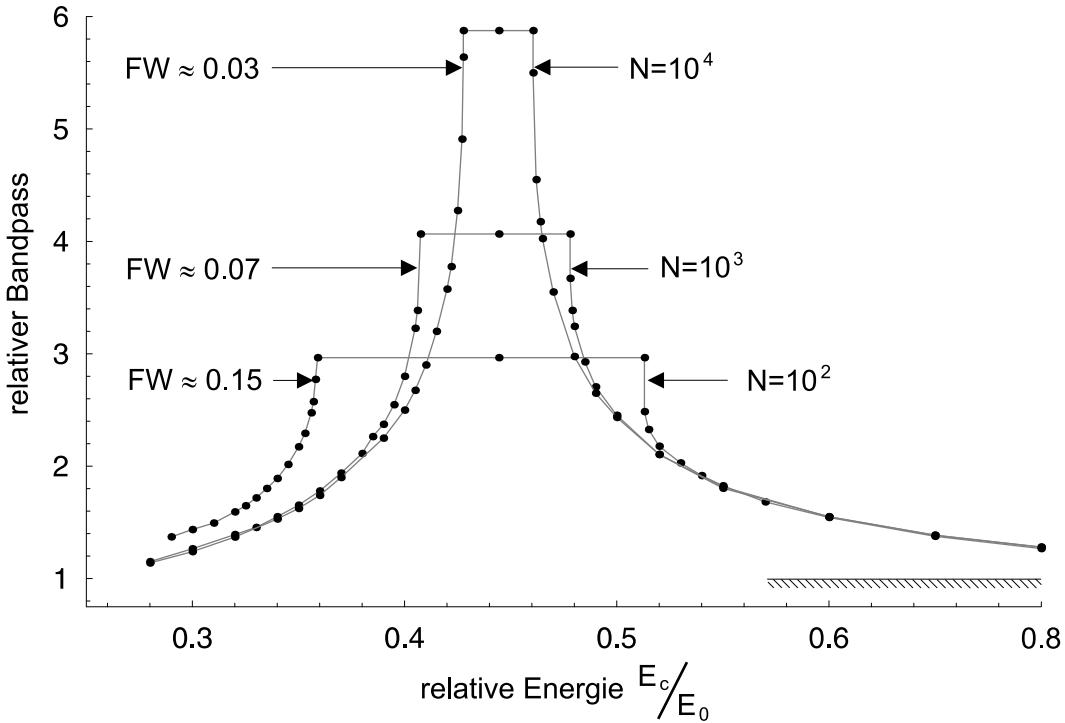


Abbildung 4.24: Spektrale Bandbreite des Dialyten. Der nutzbare Bandpass der separierten Doppellinsen-Konfiguration nimmt in der Umgebung der 3. Ordnung bei $E_c = \frac{4}{9}E_0$ ein absolutes Maximum an, dessen Höhe und Breite von der Zonenzahl N abhängen.

Bandbreite innerhalb dieses Intervalls nicht konstant, sondern konvex – mit $\frac{\Delta E}{E} = 2\sqrt[3]{\frac{2}{N}}$ als Minimum. Auf deren explizite Darstellung wurde im Sinn einer konservativen Auswertung verzichtet. Eine Verstimmung des Systems hin zu Energiewerten $E_c < \frac{4}{9}E_0$ reduziert den Bandpass wieder annähernd symmetrisch bzgl. $\frac{4}{9}E_0$ fast bis auf das Ausgangsniveau $\frac{\Delta E}{E} = \frac{2}{\sqrt{N}}$, um gegen die Singularität in $E_\infty = \frac{1}{4}E_0$ zu divergieren.

Die beschriebene Konfiguration erlaubt also eine Verstimmung im Intervall $\frac{1}{3}E_0 \lesssim E_c \leq E_0$. Unter Rückgriff auf die spezifischen Eigenschaften der Fresnel-Linse eröffnet sich jedoch die prinzipielle Möglichkeit, das Band beträchtlich zu erweitern. Bezeichnet E_0 nun die Blaze-Energie der Fresnel-Linse, so beträgt die Beugungseffizienz 1. Ordnung für $E_c = 2E_0$ nach Abschn. 3.3 noch ca. 40%. Der refraktiven und in m -ter Beugungsordnung diffraktiven Fokaldispersion tragen unter Verwendung von $\psi_0 = \frac{E_c}{E_0}$ die Transformationen

$$F_L(E_c) \rightarrow -F_Z(E_0) \psi_0^2 \quad \text{und} \quad F_Z(E_c) \rightarrow \frac{1}{m} F_Z(E_0) \psi_0 \quad (4.138)$$

Rechnung. Die Feinabstimmung der Energie spielt im Kontext keine Rolle und wird ignoriert ($\epsilon = 0$). Eingesetzt in die ursprüngliche Gl. 4.117 für den Linsenabstand, findet man

$$d_m(E_c) = F_Z(E_0) \psi_0 \left(\frac{1}{m} - \sqrt{\frac{1}{2m} \psi_0} \right) \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N}. \quad (4.139)$$

Mit Hilfe dieser Formel nimmt die die Fokalposition beschreibende Gl. 4.114 die Form

$$z_F(E_c) = F_Z(E_0) \psi_0 \left(\frac{1}{m} - \sqrt{\frac{1}{2m} \psi_0 - \psi_0} - \frac{\psi_0^2}{\sqrt{\frac{1}{2m} \psi_0 - \psi_0}} \right) \quad (4.140)$$

an. Man entnimmt Gl. 4.140 insbesondere die verallgemeinerte singuläre Polstelle zu

$$\psi_\infty = \frac{1}{2m} \psi_0 \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N}, \quad (4.141)$$

die sich jedoch bei geeigneter Wahl der Durchstimmintervalle, angepasst an die Beugungscharakteristik der Fresnel-Linse, umgehen lässt. Abb. 4.25 vermittelt einen Eindruck von der Funktionsweise. In der Praxis kommt der ersten Beugungsordnung zweifellos hervor-

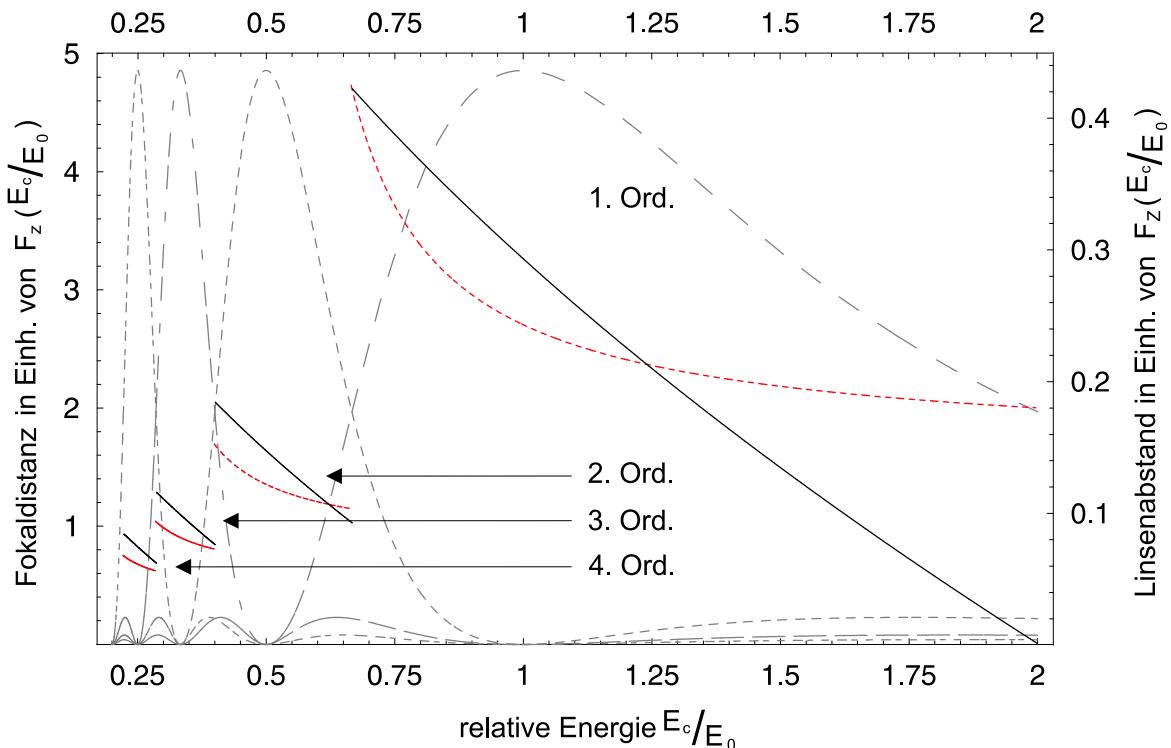


Abbildung 4.25: *Der Fresnel-Dialyt in höheren Beugungsordnungen. Die Eigenschaft des Fresnel-Profil, über einen weiten Energiebereich auch in höheren Beugungsordnungen zu fokussieren, gestattet die Konstruktion eines durchstimmmbaren Breitband-Achromaten. Fokalposition z_F (rot strichliert) und Linsenabstand d (schwarz) sind gegen die normierte Energie aufgetragen. Ohne Skala ist die Effizienz der FL grau strichliert angedeutet.*

gehobene Bedeutung zu, da sie nach den Ausführungen zum Multiband-Achromaten in Abschn. 4.1 die maximale spektrale Bandbreite und damit volle Lichtstärke bereitstellt. Nichtsdestoweniger erweitern zweite und höhere Ordnungen die nutzbare Bandbreite zumindest theoretisch auf $0.2E_0 \lesssim E_c \leq 2E_0$ und damit das bis zu zweieinhalb fache gegenüber der einfachen dialytischen Konfiguration.

Der zum relativ weichen Röntgenband nach Abb. 4.24 hin zunehmende Bandpass gleicht den absorptionsbedingten Effizienzverlust der refraktiven Komponente zum mindest teilweise aus. In 3. Ordnung erfolgt unter Umständen eine Überkompensation, wie ganz allgemein diese Konfiguration vor allem dort von wissenschaftlichem Interesse sein wird, wo ein besonders breites Spektralband mit $\Delta E \sim \text{keV}$ untersucht werden soll. Die nach Abb. 4.25 geschickt gewählte Blaze-Energie der FL gestattet im übrigen die Konstruktion eines über mehrere keV konstant effizienten Dialyten, mit überkompensierter Lichtstärke in 3. Ordnung. Ein entsprechendes Modell wird in Abschn. 5.6 diskutiert.

Überleitend zum nächsten Kapitel sollen an dieser Stelle kompakte, optisch kohärente Objektive auf ihre praktische Tauglichkeit hin untersucht werden. Fresnel-Linsen weisen zwar eine maximale Beugungseffizienz auf, gleichwohl vermögen sie in kohärenter Bauweise die astronomischen Anforderungen an ein leistungsfähiges Instrument theoretisch durchaus, die technischen an ein handhabbares praktisch jedoch kaum zu erfüllen. Eine einfache Abschätzung macht dies deutlich: Mit der Formel für die laterale Auflösung

$$\varnothing_{PSF} = \Delta\epsilon \cdot F \quad \text{folgt} \quad R = \frac{\varnothing_{PSF}}{\alpha} N \quad \text{mit} \quad \alpha = 0.535. \quad (4.142)$$

Damit ergibt sich die Lichtstärke des beugungsbegrenzt operierenden Objektivs mit der Zonenzahl N zu

$$A_{eff} \times \Delta E = \pi \left(\frac{\varnothing_{PSF}}{\alpha} \right)^2 N \cdot E, \quad (4.143)$$

skaliert also wie $(\varnothing_{PSF})^2 N$. Beide Größen sind aus praktischen Gründen nach oben hin begrenzt. Während die Punktildfunktion zugunsten eines ausreichenden Sichtfeldes bei technisch realisierbaren Detektor-Flächen die Größenordnung von $\sim 10^{-3} \text{ m}$ nicht überschreiten sollte, lassen Kristall-Spektrometer oder Micro-Kalorimeter eine spektrale Auflösung $\frac{\Delta E}{E}$ von beispielsweise 5×10^{-4} erwarten. Für Lichtstärke und Winkelauflösung ergeben sich in diesem Fall bei einer typischen Blaze-Energie $E = 6.4 \text{ keV}$

$$A_{eff} \times \Delta E \approx 1.4 \times 10^3 \text{ cm}^2 \cdot \text{keV} \quad \text{und} \quad \Delta\epsilon = 5.7 \times 10^{-6} \text{ arcsec.} \quad (4.144)$$

Als problematisch erweisen sich hingegen die konstruktiv-geometrischen Parameter,

$$R = 3.74 \text{ m} \quad \text{und} \quad F = 3.6 \times 10^4 \text{ km.} \quad (4.145)$$

Die großen Abmessungen dürften bei Transport und Betrieb erhebliche Probleme verursachen. Den Gleichungen 4.142 und 4.143 ist andererseits die gemeinsame Abhängigkeit von der Zonenzahl im Bezug auf die optischen und konstruktiven Daten zu entnehmen, so dass eine „kompakte“ Bauweise mit drastischen Einbußen in der Lichtstärke einhergehen würde.

Dieses Dilemma lässt sich unter Verwendung dispersionskorrigierter Objektive weitgehend beseitigen. Entsprechende Modelle wurden zuletzt vorwiegend für den Einsatz im harten Röntgen- und Gammaspektrum von [30] diskutiert. Die Lichtstärke setzt sich nun

aus geometrischer Fläche, Bandpass und der von Eins signifikant verschiedenen Transmission zusammen. Letztere beträgt unter Verzicht auf jegliche Apodisierung

$$\mathcal{T}_s = \frac{2}{s} (1 - e^{-\frac{s}{2}}) \quad \text{mit} \quad s \equiv \frac{N}{N_0}, \quad (4.146)$$

wie sich durch einfache Integration über den Linsenradius zeigen lässt. In [30] wird als Standard $\mathcal{T}_2 \approx 63\%$ gewählt – mit dem Verweis auf eine dann nur unwesentlich beeinträchtigte Punktbildfunktion. Legt man als Qualitätskriterium derselben jedoch die HEW zugrunde, nutzt die Bauweise mit $s = 2$ das optische Leistungsvermögen des betreffenden Materials nicht voll aus.

Um die Lichtstärke für eine vorgegebene Ortsauflösung \mathcal{O}_{PSF} zu berechnen, bedarf es eines Korrekturfaktors Q_s . Er beschreibt die relative Winkelaufösung als Funktion des Zonenverhältnisses und wurde in Tab. 4.1 für diskrete s aufgelistet. Die zu Gl. 4.142 analoge Gleichung lautet nun

$$\mathcal{O}_{PSF} = \Delta\epsilon \cdot F \quad \rightarrow \quad R = \frac{\mathcal{O}_{PSF}}{2\alpha Q_s} N \quad \text{mit} \quad \alpha = 0.535. \quad (4.147)$$

Die Lichtstärke ergibt sich mit Gl. 4.146 als Funktion von \mathcal{O}_{PSF} , Zonenzahl N und Energie,

$$A_{eff} \times \Delta E = \pi \left(\frac{\mathcal{O}_{PSF}}{\alpha Q_s} \right)^2 \sqrt{N} N_0 \left(1 - e^{-\frac{N}{2N_0}} \right) E. \quad (4.148)$$

Zonenzahl und Energie treten gekoppelt auf. Wegen des für hohe Werte von N negativen Einflusses von Q_s durchläuft $A_{eff} \times \Delta E$ für eine vorgegebene Energie E als Funktion der Zonenzahl ein ausgeprägtes Maximum, typischerweise für $s \sim 5$. Derlei Teleskope erreichen eine beträchtliche Leistungsfähigkeit, wie Tab. 4.9 verdeutlicht. Demnach genügen

Material	Li	Be	$C_{16}H_{14}O_3$
Energie E	6 keV	8 keV	10 keV
Radius R	1.84 m	1.06 m	0.38 m
Brennweite F	10386 km	7980 km	3533 km
Auflösung $\Delta\epsilon$	0.015 mas	0.019 mas	0.044 mas
$A_{eff} \times \Delta E$	8318 cm^2 keV	4852 cm^2 keV	1278 cm^2 keV

Tabelle 4.9: Beispiele kompakter Achromaten. Die leistungsoptimierten Parameter beruhen auf Gl. 4.148. Auf eine Zentralobstruktion wurde verzichtet, die Ortsauflösung beträgt durchgängig $\mathcal{O}_{PSF} = 0.75$ mm.

merklich kleinere Radien und Brennweiten, um obiger diffraktiver Version vergleichbare Leistungswerte zu erzielen. Dennoch schränken die Fokallängen von einigen 10^3 km die Manövriertfähigkeit der Gesamtkonfiguration ein. Zudem dürften zumindest Modelle mit Radien von deutlich mehr als einem Meter nicht mehr ohne weiteres kohärent herzustellen sein – zum einen aufgrund mechanischer Toleranzen in den Zonenradien r_n , zum anderen wegen möglicher Inhomogenitäten im Material [30], wovon speziell aus Li und Be gefertigte Linsen betroffen sein könnten.

Kapitel 5

Wege zur praktischen Umsetzung

Die bisherigen, in den Kap. 3 und 4 erarbeiteten Erkenntnisse legen den Schluss nahe, dass kohärente, diffraktive Linsensysteme gleich welcher Art den wissenschaftlichen oder aber technologischen Anforderungen nur ungenügend gerecht werden. So verbessert eine dispersionskorrigierte Hybridkonfiguration die Lichtstärke $A_{eff} \times \Delta E$ je nach Material und Energie um den Preis sehr langer Brennweiten um mehrere 10^3 % gegenüber dem diffraktiven Analogon auf dann $> 10^3 \text{ cm}^2 \text{ keV}$, einer Größenordnung, die dem Leistungsvermögen des gegenwärtig operierenden Instrumentariums bereits recht nahe kommt, wie Abb. 5.1 illustriert. Die Grafik zeigt den Verlauf der nutzbaren Spiegelfläche als Funktion der Energie oberhalb von ca. 1 keV. Einschließlich des weichen Röntgenbandes zwischen rund 0.1 und 1 keV erreichen Chandra und XMM-Newton eine integrierte Lichtstärke von

$$A_{eff} \times \Delta E = 3.6 \times 10^3 \text{ cm}^2 \text{ keV} \quad \text{bzw.} \quad A_{eff} \times \Delta E = 3.0 \times 10^4 \text{ cm}^2 \text{ keV.} \quad (5.1)$$

Deren Leistungsfähigkeit verleiht nun das intrinsische Vermögen reflektiver Spiegeloptik zur dispersionsfreien Abbildung zumindest hinsichtlich spektral breitbandiger Aufnahmen zusätzliches Gewicht – lediglich selektiven Messungen dominanter Spektrallinien wie beispielsweise der K_α -Emission von Fe bei 6.4 keV dürften optimierte Hybridsysteme ebenbürtig, evtl. gar überlegen dienen. Offenbar errechnet sich die auf ein enges Energieintervall ΔE beschränkte Lichtstärke gemäß

$$A_{eff} \times \Delta E = \int_{E_c - \frac{\Delta E}{2}}^{E_c + \frac{\Delta E}{2}} A_{eff}(E) dE \approx A_{eff}(E_c) \Delta E. \quad (5.2)$$

Jenseits von 1 keV erreichen Chandra und XMM-Newton nach dieser Definition eine Netto-Sammelfläche von bis zu $7.9 \times 10^2 \text{ cm}^2$ bzw. $4.4 \times 10^3 \text{ cm}^2$ – abzüglich diverser Verluste bei der Detektion. Es wird sich herausstellen, dass Transmissionsobjektive ausreichender Größe ein Vielfaches dieser Sammelfläche zu liefern vermögen.

Das vorliegende Kapitel steht daher im Zeichen der Entwicklung optischer Konzepte, die unter wissenschaftlichem wie technischem Aspekt die Konstruktion praxistauglicher Instrumente gestatten. Den abstrakten Strukturen werden nun erstmals konkrete Zahlenbeispiele anheimgestellt, die vorbehaltlich mathematisch idealisierter Kalkulation das zu erwartende Leistungsvermögen der jeweiligen Konfigurationen abschätzen.

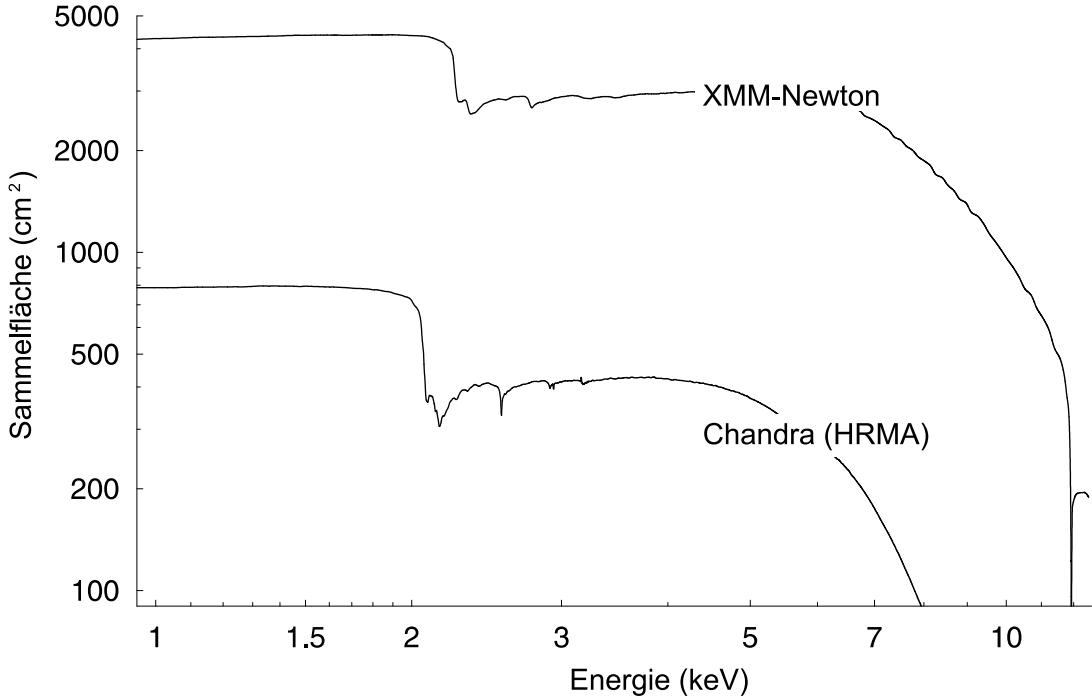


Abbildung 5.1: *Sammelfläche der Röntgenteleskope Chandra und XMM-Newton. Eingetragen sind für $E \gtrsim 1$ keV die reinen Nutzflächen der Spiegelschalen, bei XMM-Newton die Summe aller drei Einzelteleskope. Detektor- und andere Verluste sind nicht berücksichtigt.*

Ausgehend von der Überlegung, dass – von dialytischen Konfigurationen einmal abgesehen – jedem bislang diskutierten Linsentyp eine simple Proportionalität der Lichtstärke in der Brennweite F innewohnt und dieser Umstand den Satz der zur Leistungssteigerung verfügbaren Variablen auch dispersionskorrigierter, absorbierender Hybridlinsen bereits weitgehend erschöpft, eröffnen sich zwei grundlegend verschiedene Optionen, die effektive Sammelfläche zu erweitern.

Zum einen erscheint es denkbar, zahlreiche der kompakten, in ihrem Aperturdurchmesser die gewünschte Winkelauflösung repräsentierenden Objektive in Form eines noch näher zu spezifizierenden Arrays anzuordnen und den Photonenfluss mittels einer entsprechenden Detektormatrix zu registrieren. Zum anderen wird die Aufteilung einer großflächigen Apertur in kleine, ebenfalls mit dem Auflösungsvermögen korrespondierende Segmente ebenfalls die Lichtstärke verbessern, wenn deren Beiträge zur fokalen Intensität im gemeinsamen Brennpunkt eine inkohärente Superposition erfahren.

In der nachstehenden Übersicht sind vorab die wesentlichen Eigenheiten dieser beiden Ansätze zusammengestellt. Beide Konzepte stellen hinsichtlich ihres optischen Potentials, aber auch im Bezug auf die ihnen eigenen physikalischen Fehlerquellen ein Novum jedenfalls im Bereich der Röntgenastronomie dar. Abb. 5.2 vergleicht zudem ihre typischen Konstruktionsmerkmale und Abmessungen anschaulich.

Paralleloptik	Segmentierung
Parallele, matrixähnliche Anordnung zahlreicher kleiner, kompakter Linsen mit zugehörigen Detektoren.	Aufteilung der großflächigen Apertur in Parzellen, die Detektion erfolgt in einem gemeinsamen Fokus.
<ul style="list-style-type: none"> + hohes Maß modularer Flexibilität und Redundanz + kurze Brennweite von wenigen km - mäßiges Signal-Rausch-Verhältnis? - „cross-talk“ zwischen benachbarten Elementarteleskopen. 	<ul style="list-style-type: none"> + optimale Nachweisempfindlichkeit + gemeinsamer Fokus gestattet eindeutige Signal-Zuordnung - fixes Leistungsvermögen aufgrund komplexer Gesamtkonfiguration - Fokaldistanzen von $10^2 - 10^3$ km.
Den einzelnen Elementarlinsen sind fixe Energiewerte zugeordnet, deren bedarfsgerechte Verteilung das gewünschte spektrale Band in Form einer diskreten Kammstruktur abdeckt.	Je nach Design ermöglicht die segmentierte Apertur die simultane Fokussierung eines oder mehrerer diskreter Energiewerte oder die kontinuierliche Verstimmung über ein weites Spektralband.

5.1 Prinzipien und Konstruktion paralleler Systeme

Verglichen mit Aufbau und Funktion konventioneller (Röntgen-)Teleskope basiert die Anordnung unabhängiger Elementarteleskope zu großflächigen Arrays auf gänzlich anderen Grundsätzen. Beginnend mit eben diesen physikalischen Grundlagen und Rahmenbedingungen spannt der folgende Abschnitt den Bogen zu möglichen Implementierungen H₂- und He-basierter Linsen, deren theoretisches Potential am ehesten in Form kleiner, kompakter Objektive zum Tragen kommen dürfte. Schließlich vermitteln konkrete Modellkonfigurationen einen Eindruck vom ungefähren Leistungsvermögen solcher Systeme.

5.1.1 Grundlagen transmissiver Linsenarrays

Mit der grundsätzlich über alle beteiligten Elementarteleskope konstanten Brennweite F legen die in den Abb. 3.17 und 4.15 visualisierten Gln. 3.93 bzw. 4.60 unter Vorgabe von Profiltyp bzw. Verstärkung V bereits die Lichtstärke eines solchen einzelnen Objektivs fest, unabhängig insbesondere von weiteren geometrischen Parametern wie Aperturradius und Lateral-Auflösung. Generell stehen daher via

$$A_{eff} \times \Delta E \propto n_T \cdot F \quad (5.3)$$

mit der Zahl n_T parallel geschalteter Optiken zwei Freiheitsgrade zur Verfügung, das Leistungsvermögen der Gesamtkonfiguration zu beeinflussen. Während der Fokaldistanz jedoch nach oben durch die PSF- wie unten durch die Pixelgröße gewisse Grenzen gesetzt

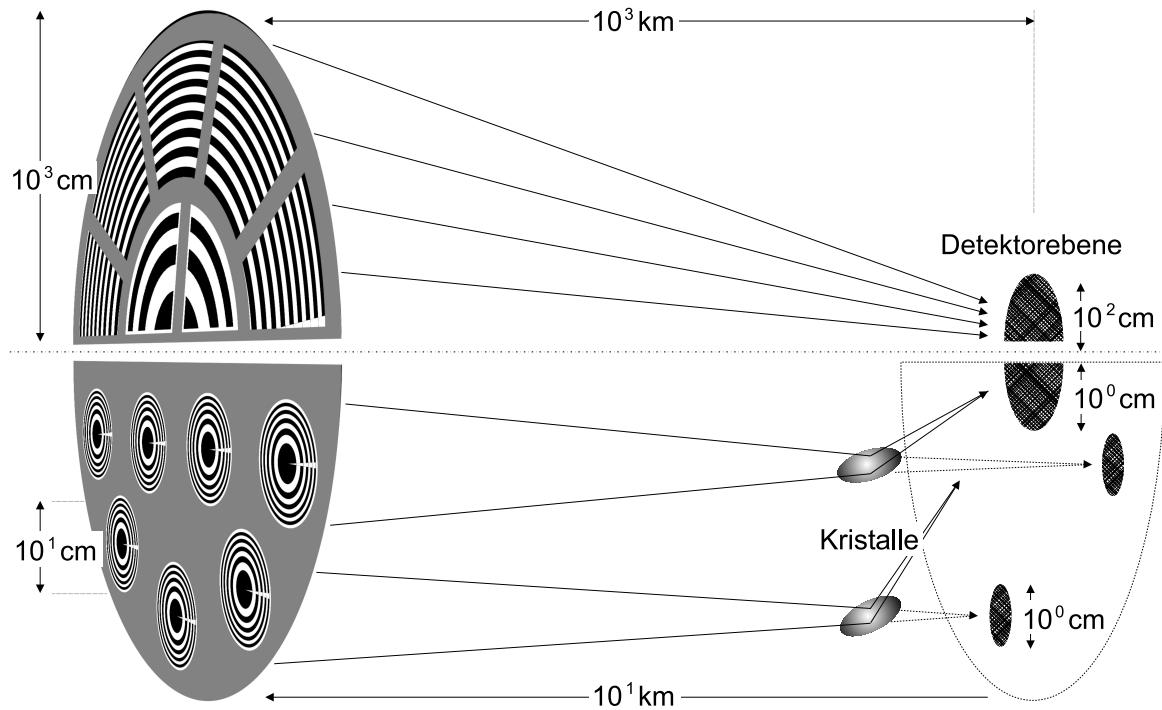


Abbildung 5.2: Mögliche Implementierungen großflächiger Teleskopoptik auf rein diffraktiver Basis. Die Segmentierung (obere Hälfte der Grafik) erlaubt die Abbildung in einen zentralen Fokus, allerdings auf Kosten großer und energieabhängiger Brennweiten. Alternativ erfordert eine matrixähnliche Anordnung zahlreicher kleiner Linsen entweder die Bündelung mittels Kristallen nahe der Fokalebene oder unabhängige Detektoren (untere Hälfte). Die damit erreichbaren kurzen Brennweiten gehen freilich mit potentieller Kontamination durch Hintergrund-Ereignisse und eventuellen crosstalk-Ereignissen einher. Die Längenskalen geben nur die ungefähre Größenordnung der Abmessungen wieder.

sind, unterliegt die Gesamtzahl der Elementarobjektive zunächst keiner Beschränkung. Einer ersten naiven Näherung folgend, seien sie als optisch entkoppelt, also unabhängig angenommen. Das Signal-Rausch-Verhältnis errechnet sich dann im einfachsten Fall gleichartiger Teleskope gemäß

$$SNR_{ges} = \frac{S}{\sqrt{S+B}} = \frac{n_T s_i}{\sqrt{n_T s_i + n_T b_i}} = \sqrt{n_T} SNR_i, \quad (5.4)$$

als linear in $\sqrt{n_T}$. Eine solchermaßen ideale Konfiguration sollte sich theoretisch einem *einzelnen* Teleskop äquivalent erweisen, dessen Apertur und Detektorfläche mit n_T skalieren. De facto nicht zu verwirklichen – dazu wäre eine angesichts in km messenden Brennweiten unrealistische räumliche Abschirmung analog zur Bauweise von XMM-Newton erforderlich – wird hingegen stets mit mehr oder minder ausgeprägter Kopplung, dem bereits erwähnten „cross-talk“, zu rechnen sein. Seines Ursprungs nach sind prinzipiell zwei Möglichkeiten

zu unterscheiden, von denen die erste in Abb. 5.3 veranschaulicht ist. Unter vorläufigem

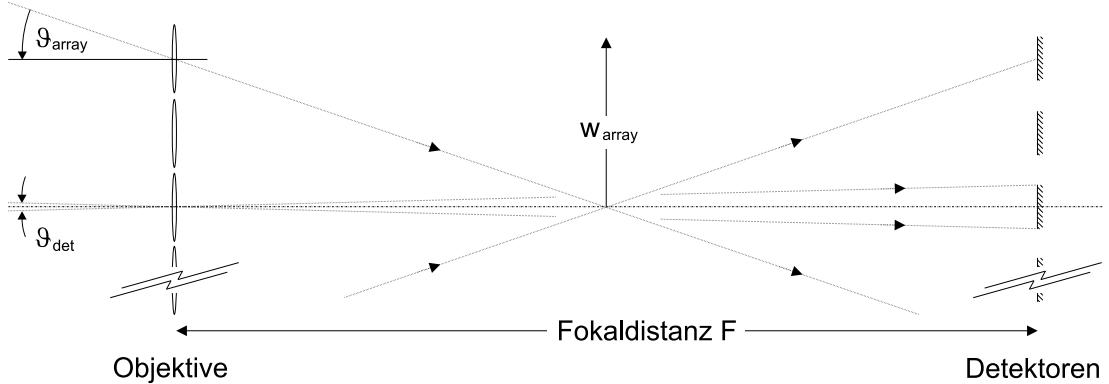


Abbildung 5.3: Akzeptanzwinkel und Sichtfeld der Parallelkonfiguration. Das effektive Sichtfeld bestimmt sich aus dem durch $2w_{array}$ und F festgelegten Öffnungswinkel. „Fremddetektoren“ registrieren bei ausreichender Feldtiefe und passender Energie auch außerhalb des regulären Blickwinkels $2\vartheta_{det}$ ein scharfes Bild.

Verzicht auf Kollimatoren etc. empfängt jeder Elementar-Detektor grundsätzlich die fokussierte oder diffus gestreute Strahlung aller Objektive. Erstreckt sich die hier mit quadratischem Grundriss angenommene Anordnung in lateraler Richtung auf $2w_{array}$, ergibt sich der Raumwinkel zu

$$\Omega_{array} = (\vartheta_{array})^2 \approx 4 \left(\frac{w_{array}}{F} \right)^2 \gg 4 \left(\frac{r_{FOV}}{F} \right)^2 = (\vartheta_{det})^2 = \Omega_{FOV}, \quad (5.5)$$

wenn Ω_{FOV} den – relativ kleinen – Raumwinkel der Elementaroptik angibt, definiert über die Detektorfläche $(2r_{FOV})^2$. Je nach fokaler Schärfentiefe (DOF) und Blaze-Energie der beteiligten Elementarteleskope wird sich die Kopplung nun in regulären, wenn auch unerwünschten Bildern oder aber diffuser Kontamination durch defokussierte Streustrahlung äußern. Vorausgesetzt, jedem Detektor eignet im Rahmen der durch das Objektiv vorgegebenen spektralen Bandbreite eine spezifische Energie $E_c^{(i)}$, lässt sich die zu erwartende Zahl n_{ext} der externen, „falschen“ Bilder abschätzen, die von der Teilmenge aller auf $E_c^{(i)}$ abgestellten Detektoren registriert werden.

$$n_{ext} \approx Q_B \Omega_{FOV} \left(n_T^{(i)} - 1 \right) n_T^{(i)} \approx Q_B \Omega_{FOV} \left(n_T^{(i)} \right)^2 \quad \text{für} \quad n_T^{(i)} \gg 1 \quad (5.6)$$

hängt somit linear von der Quellendichte Q_B des bei hinreichender Winkelauflösung in diskrete Objekte kondensierenden Röntgenhintergrundes ab, deren Zahl nach Abb. 6.5 je nach Energieband auf $(6 - 12) \times 10^3 \text{ deg}^{-2}$ beziffert werden kann. Mit typischen, *regulären* Sichtfeldern von maximal $\sim 1 \text{ arcsec}$ pro Elementarobjektiv ergeben sich

$$n_{ext} \lesssim (5 - 10) \times 10^{-4} \left(n_T^{(i)} \right)^2 \quad (5.7)$$

Faksimiles. Nun entscheidet jedoch weniger die *absolute* Zahl dieser optischen Täuschungen über die Bildqualität als vielmehr deren Relation zur Anzahl n_{int} echter interner Bilder innerhalb des FOV der einzelnen Elementarteleskope. Mit Gl. 5.6 findet man unmittelbar

$$\frac{n_{ext}}{n_{int}} \approx Q_B \Omega_{FOV} n_T^{(i)} \rightarrow SNR_{ext} \lesssim (Q_B \Omega_{FOV})^{1/2} \sqrt{n_T^{(i)}} SNR_{int}. \quad (5.8)$$

Die zuletzt angeführte Abschätzung zum Signal-Rausch-Verhältnis erfolgte unter der Annahme, dass der im jeweiligen spektralen Band gemessene Fluss der extern detektierten Hintergrundquellen im Mittel denjenigen des im FOV regulär beobachteten Objekts zumindest nicht überschreitet. Um das SNR der externen und bei hinreichender Schärfentiefe von den regulären nicht zu unterscheidenden Störquellen um wenigstens eine Größenordnung zu unterdrücken, dürfen somit bei $\Omega_{FOV} \approx 1 \text{ arcsec}^2$ je nach Hintergrund maximal 10 – 20 Elementarteleskope zur jeweiligen Blaze-Energie parallel geschaltet werden.

Die aufgeführten Relationen genügen im übrigen einer sehr weit gefassten statistischen Interpretation, so wurde bis dato keine Aussage zur räumlichen Anordnung der Elementar-Optiken getroffen. Diese wirkt sich nämlich aufgrund der quasi zufälligen Verteilung der Hintergrundquellen mit lediglich großräumig konstanter Dichte Q_B a priori nicht auf die Abbildung des Beobachtungsobjekts im regulären FOV aus. Wieder stehen zwei grundsätzlich verschiedene Varianten zur Auswahl:

Zufallsverteilung

Die Elementar-Teleskope werden bzgl. ihrer Blaze-Energie gleichberechtigt nach dem Zufallsprinzip in der Objektiv- bzw. Detektorebene angeordnet. Teleskope gleicher Blaze-Energie können jeden beliebigen (Winkel-)Abstand aufweisen, insbesondere benachbart sein.

Der Mindestabstand gleichartiger Elementar-Optiken in regelmäßiger Anordnung dürfte sich vor allem bei der Beobachtung ausgedehnter Objektstrukturen als vorteilhaft erweisen, deren Winkeldimension das reguläre FOV übertrifft. Ferner bedingt die Gitterstruktur ein endliches Spektrum *diskreter* Distanzen zwischen gleichartigen Detektoren – ein Umstand, der bei fixer Beobachtungsrichtung die Chance erhöht, keinerlei Kopplung zu erleiden. Umgekehrt wirkt sich diese natürlich um so verheerender aus, wenn eine Hintergrundquelle zufällig eine der Auswahlregeln an die Winkelabstände erfüllt.

Mit der diffusen Streustrahlung soll nun die andere Form der optischen Kopplung innerhalb des Linsenarrays zur Sprache kommen. Sie verknüpft Elementar-Teleskope *verschiedener* Blaze-Energie, indem der durch ein Objektiv der Energie $E_c^{(i)}$ hindurchtretende Photonenfluss der Energie $E_c^{(j)}$ des *regulären* Beobachtungsobjekts von einem auf $E_c^{(j)}$ ansprechenden Fremd-Detektor registriert wird, wobei nach Voraussetzung $i \neq j$ gelten soll. Mit der Einschränkung auf dem FOV entstammende Streustrahlung werden zugleich diffuse

Matrixkonfiguration

Die Elementar-Teleskope einer spezifischen Blaze-Energie besetzen ordentliche „Gitterplätze“ auf einem zweidimensionalen Raster. Die Gesamtanordnung ähnelt dann einer 2D-Kristallstruktur. Teleskope gleicher Blaze-Energie weisen einen festen Mindestabstand auf.

Beiträge der zuvor diskutierten externen Quellen dem gewöhnlichen Hintergrund zugerechnet, der unter Verzicht auf hochselektive Kollimatoren aus einem Raumwinkel $\Omega_B \gg \Omega_{array}$ auf die Detektorflächen einfallen dürfte.

Die Ausdehnung des Streuhalos ergibt sich letztlich aus der fokalen Dispersion des spektral verstimmten Objektivs. Abb. 5.4 vermittelt einen anschaulichen Eindruck. Formal

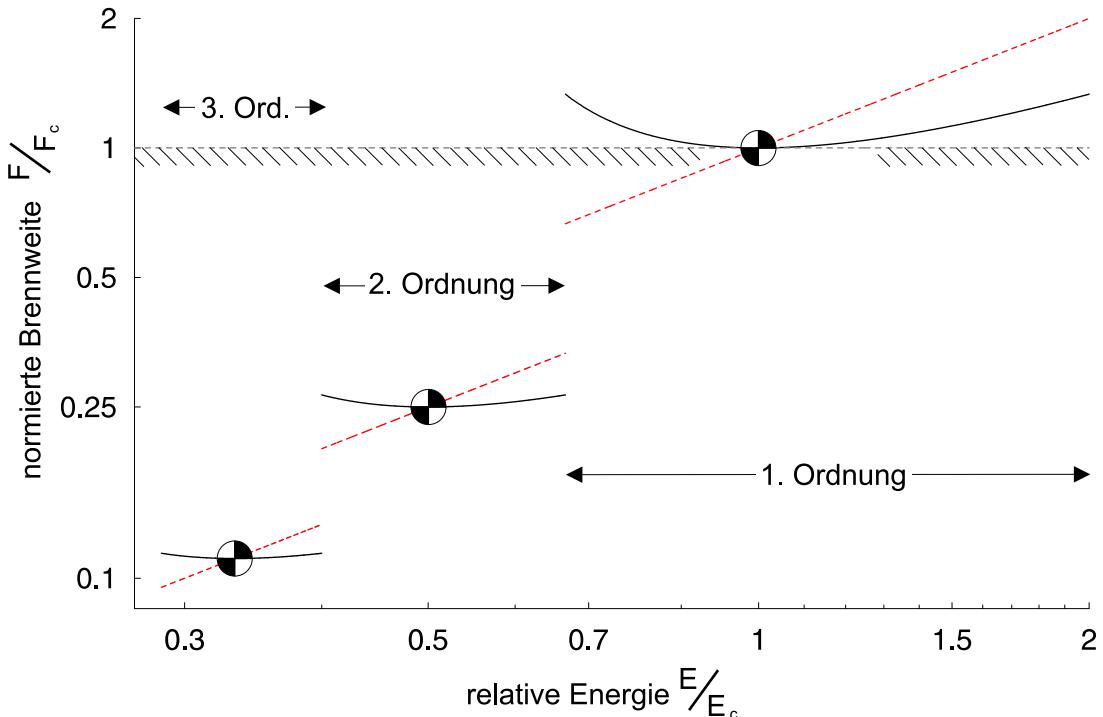


Abbildung 5.4: *Fokale Dispersion des verstimmten Achromaten. Aufgetragen in Einheiten der Norm-Brennweite bei $E = E_c$, sind nur die im jeweiligen Energieintervall dominanten Beugungsordnungen der Fresnel-Linse eingezeichnet. Kritische Streustrahlung verursachen primär die Beiträge mit $F < F_c$. Zum Vergleich ist die fokale Dispersion des diffraktiven Objektivs rot strichliert.*

schreiben sich die dargestellten diffraktiven und hybridmodifizierten Dispersionen als

$$F_Z(\psi) = \frac{1}{m} F_Z(E_c) \psi \quad \text{bzw.} \quad F_{hyb}(\psi) = F_Z(E_c) \left(\frac{m}{\psi} - \frac{1}{2\psi^2} \right)^{-1}, \quad (5.9)$$

wobei mit $m \in \mathbb{N}$ wie üblich die Beugungsordnung bezeichnet wird und $\psi = \frac{E}{E_c}$ die relative Energie des jeweiligen Elementarobjektivs symbolisiert. Dient als diffraktive Komponente ein (annähernd) kinoformes Fresnel-Profil, so dominieren nach Abschnitt 3.3 in den verschiedenen spektralen Bändern jeweils andere Ordnungen. Unter Beschränkung auf reguläre, innerhalb des FOV angesiedelte Objekte kontaminieren offenbar nur negativ oder divergent verstimmte Objektive, deren Fokaldistanz also der Bedingung $F_Z(\psi) < F_Z(1)$ bzw. $F_{hyb}(\psi) < F_{hyb}(1)$ unterliegt. Achromaten, deren Verstimmung lediglich wenige 10%

beträgt, verursachen somit nach Abb. 5.4 keine signifikante Streustrahlung. Es sei angemerkt, dass mit $\psi > 2$ stark blau-verstimmte Hybridlinsen schwach divergent streuen, also eine Fokalldistanz $F(\psi) \ll 0$ aufweisen. Bei hinreichend großen Abständen zwischen den Detektoren sollten sich diesbezügliche Beiträge jedoch kaum negativ bemerkbar machen.

Abb. 5.5 illustriert schematisch vereinfacht die Wirkung des Streuhalos exemplarisch anhand einer auf drei spektrale Bänder sensitiven Zufallskonfiguration von Detektoren. Angenommen, das System sei auf $k \in \mathbb{N}$ verschiedene Energiewerte $E_c^{(i)}$ oder „Farben“ glei-

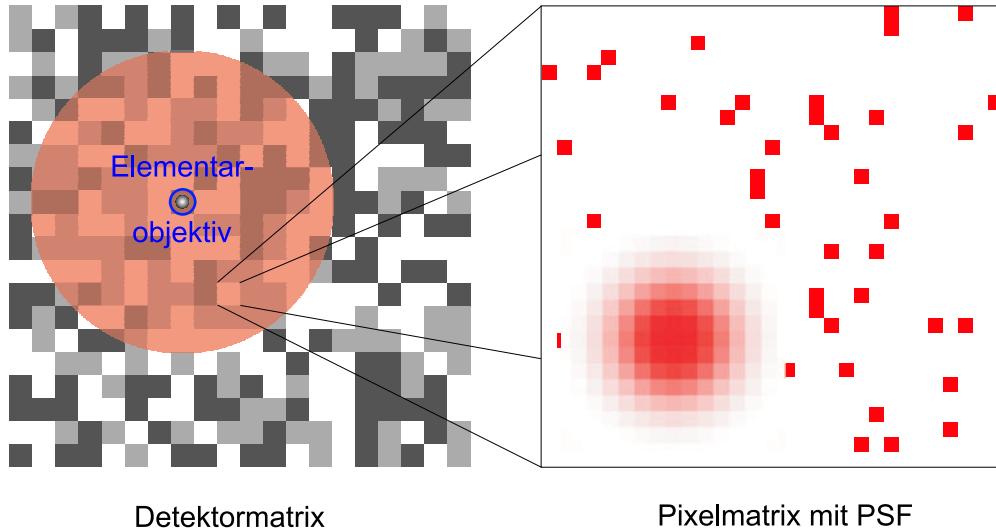


Abbildung 5.5: *Zur Wirkung der Streustrahlung in großflächigen Detektor-Arrays. Unter Annahme einer zufälligen Verteilung der links in 3 verschiedenen Graustufen angedeuteten „Detektor-Farben“ hängt die Gesamtkontamination durch den rot verstimmten Streuhalo nicht von dessen Radius ab. Rechts ist die Pixelmatrix eines Elementardetektors mit der regulären PSF sowie vereinzelter Streu-Kontamination dargestellt.*

cher Lichtstärke sensitiv. Es werde eine Punktquelle betrachtet, deren über alle k spektralen Bänder summierte Gesamtfluss durch das Signal S gegeben sei. Ferner bedecke jeder Elementardetektor wie in Abb. 5.5 die maximale ihm zur Verfügung stehende Fläche – eine formale Vereinfachung, die sich letztlich nicht auf das Resultat auswirkt. Ausgehend von der Feststellung, dass im statistischen Mittel die Kontamination eines spektralen Bandes nicht vom Radius der Streuhalos abhängt, ergibt sich das Signal-Rausch-Verhältnis zu

$$SNR_j = \frac{S}{k} \left(\frac{S}{k} + \frac{1}{k} \left(S \frac{j}{k} + B_{ext} \right) \frac{A_{PSF}}{A_{det}} \right)^{-1/2}, \quad (5.10)$$

wenn $0 \leq j \leq k - 1$ mit der Rangordnung der jeweiligen Farbe $E_c^{(i)}$ in der spektralen Hierarchie korrespondiert, gegeben durch die Zahl der Farben höherer Energie, deren rotverstimmte Streuhalos die Gesamtheit der Detektoren zur Energie $E_c^{(i)}$ kontaminieren. Ferner steht B_{ext} für den gesamten externen Hintergrund, der aus Regionen außerhalb des FOV einfällt. Damit entscheidet im wesentlichen der von den Punktbildern in Anspruch

genommene Anteil an der gesamten Fläche über den quantitativen Beitrag der Hintergrundstrahlung zum SNR. In grober Näherung entspricht die einem Elementardetektor zur Verfügung stehende Fläche A_{det} der Apertur des zugehörigen Objektivs. Simple Umformungen liefern

$$\frac{A_{PSF}}{A_{det}} \sim \frac{I}{I_0} = \gamma \left(\frac{1}{N} \right)^2, \quad (5.11)$$

da das Verhältnis von einfallender zu fokussierter Intensität in jedem Fall quadratisch von N abhängt. Der Proportionalitätsfaktor γ beträgt etwa 0.07 im Fall der diffraktiven Linse und 0.14 beim Hybridprofil. Überlegungen zum Design praxistauglicher Systeme sollten im Sinn einer wirksamen Rauschunterdrückung diesem Sachverhalt Rechnung tragen und Linsen hinreichend großer Zonenzahl N einsetzen. Speziell folgt mit

$$B_{ext} \sim Q_B \Omega_B \quad \rightarrow \quad N \gtrsim 10^2 \quad \text{für} \quad \Omega_B \sim 1 \text{ deg}^2, \quad (5.12)$$

einem für moderate Kollimation realistisch bis konservativ abgeschätzten Akzeptanzwinkel Ω_B der Hintergrundstrahlung. Diese sollte dem Signal im Radikanden des SNR nach Gl. 5.10 dann wenigstens um eine Größenordnung unterliegen. Damit wird aber gleichzeitig deutlich, dass die Halo-Kontamination durch die dem *Beobachtungsobjekt* entspringende Streustrahlung in ihrer Bedeutung für den Gesamtuntergrund zurücktritt, zumindest so lange deren Helligkeit den mittleren Fluss der umgebenden Hintergrundquellen nicht signifikant überschreitet.

5.1.2 Röntgenobjektive auf Wasserstoff- und Heliumbasis

Flüchtige Stoffe wie H_2 und He in der Röntgenoptik einzusetzen, erscheint zumindest vorläufig noch unrealistisch. So kondensieren H_2 wie He erst nahe des absoluten Nullpunktes; festes He bleibt gar ausgesuchten Laborbedingungen vorbehalten. Dennoch motivieren die überragenden optischen Eigenschaften der beiden leichtesten Elemente speziell im weichen Röntgenband eine zumindest theoretische Betrachtung ihrer möglichen Verwendung in der abbildenden Optik im Bereich weniger keV. Dort nämlich durchläuft die kritische Zonenzahl N_0 von H_2 gemäß Abb. 4.7 ihr Maximum, während He seine optimale Wirkung bei rund 7 keV entfaltet. Unterhalb von etwa 3 keV zählen beide im Bezug auf ihr N_0 ein Vielfaches ihrer kristallinen Nachbarn im Periodensystem und eröffnen damit die Option, das Prinzip der klassischen, nicht reduzierten Dispersionskorrektur auf Energien von $\gtrsim 1$ keV auszudehnen. Ihrer optischen Güte entsprechend, erreichen H_2 und He auch die höchste Verstärkung V , für diverse Zonenzahlen N aufgetragen in Abb. 5.6. Der Maximalwert $V_{max}(E) = 2\sqrt{\frac{1}{e}N_0(E)}$ beschreibt die Einhüllende. Nahe 3 keV beträgt V_{max} für H_2 beinahe 10^2 , bei Zonenzahlen von $\approx 5 \times 10^3$. Im weichen Röntgenband, unterhalb von rund 2 keV, scheidet für praktisch meist notwendige Zonenzahlen von $> 10^3$ selbst He aus, während H_2 dort eine signifikant höhere Lichtstärke verspricht.

Nun hängt N_0 und damit die Hybrid-Verstärkung V nicht von der Dichte ϱ und damit dem Aggregatzustand der fraglichen Substanz ab, da sowohl δ als auch β linear mit ϱ

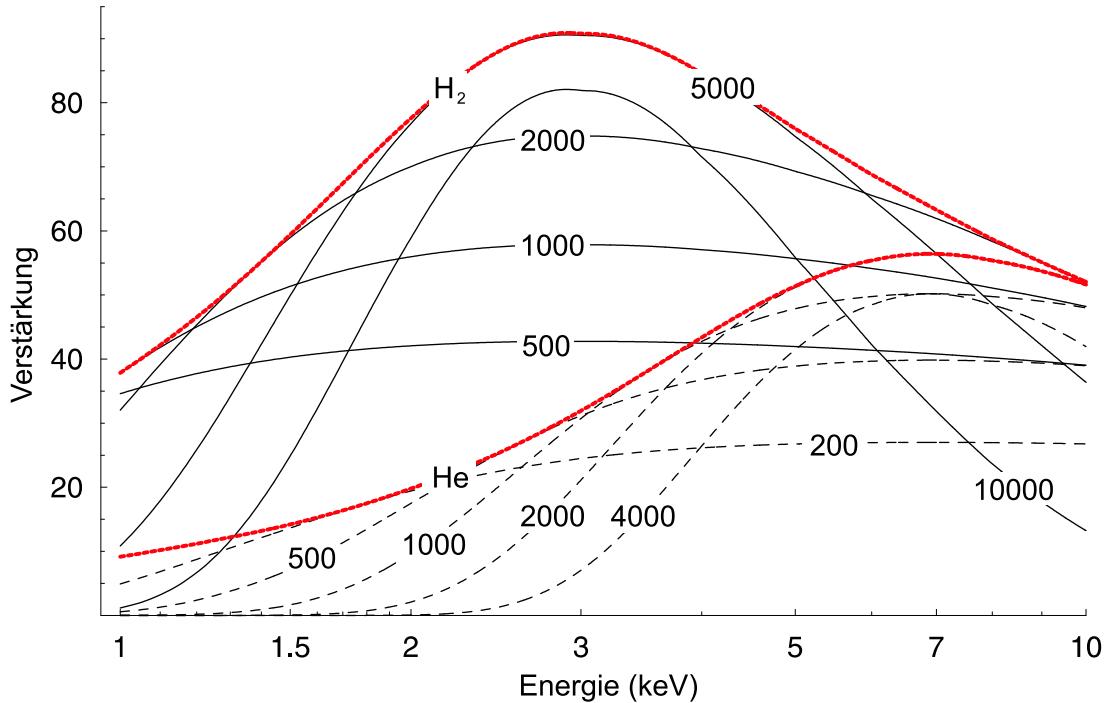


Abbildung 5.6: Achromatischer Verstärkungsfaktor für H_2 und He . Eingetragen ist der Lichtstärkenquotient V reiner H_2 – (durchgezogene Linien) bzw. He -Linsen (strichliert) für diverse Zonenzahlen N . Das jeweilige theoretische Maximum ist rot hervorgehoben.

skalieren. Andererseits wird im Interesse möglichst starker Brechkräfte und damit kleiner Öffnungsverhältnisse eine hohe Verdichtung der unter Normbedingungen gasförmigen Stoffe H_2 und He anzustreben sein. Bei einer Temperatur T und dem Druck p

$$T = 273.15 \text{ K} \quad \text{und} \quad p = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} \quad (5.13)$$

beträgt die Volumen-Dichte einschlägigen Literaturangaben [29] zufolge lediglich

$$\varrho(H_2) = 8.99 \times 10^{-5} \text{ g cm}^{-3} \quad \text{bzw.} \quad \varrho(He) = 1.79 \times 10^{-4} \text{ g cm}^{-3}, \quad (5.14)$$

zu wenig, um einkomponentige Linsen hinreichend kurzer Brennweite zu fertigen. Als Richtwert einer konstruktiv noch vertretbaren Linsenkrümmung soll wieder deren Äquivalenz mit der geometrischen Ausdehnung der Apertur dienen. Dem bikonvexen Profil setzt somit

$$f \gtrsim \frac{1}{4\delta} \quad \rightarrow \quad f_{min}(H_2) \approx 6.7 \times 10^6 \approx f_{min}(He), \quad \text{jeweils für} \quad E = 1 \text{ keV} \quad (5.15)$$

eine ungefähre untere Schranke an die möglichen Öffnungsverhältnisse. Mit mehreren, im Sinn sog. „compound refractive lenses“ hintereinander angeordneten refraktiven Komponenten – deren zur inversen Fokallänge proportionalen Brechkräfte addieren sich dann

einfach – lässt sich das Problem zwar prinzipiell umgehen, gleichwohl dürfte eine solche Option angesichts der zusätzlichen Absorption durch die das Fluidum beherbergende(n) Linsenschale(n) praktisch ausscheiden.

Eine Kompression bzw. Verflüssigung tut daher Not. Mit den (Van-der-Waals)-Parametern a und b , dem Volumen V und der molaren Gaskonstante $R_m \approx 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ lautet die reale Gasgleichung

$$\left(p + a \frac{1}{V^2} \right) \cdot (V - b) = n \cdot R_m \cdot T, \quad (5.16)$$

wobei mit der Einschränkung auf die Molzahl $n = 1$ die Größe V die Bedeutung des Molvolumens erlangt. Die empirischen (Van-der-Waals)-Parameter lauten für H_2 und He

$$\text{H}_2 : a = 2.5 \times 10^{-2} \text{ N m}^4 \text{ mol}^{-2} \quad \text{und} \quad b = 2.7 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}, \quad (5.17)$$

$$\text{He} : a = 3.5 \times 10^{-3} \text{ N m}^4 \text{ mol}^{-2} \quad \text{und} \quad b = 2.4 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}, \quad (5.18)$$

laut [29]. Abb. 5.7 illustriert die Isothermen der beiden Elemente nahe ihrer kritischen Temperaturen, die sich aus den Parametern nach 5.17 zu

$$T_c(\text{H}_2) = 33.2 \text{ K} \quad \text{und} \quad T_c(\text{He}) = 5.24 \text{ K} \quad (5.19)$$

errechnen [29]. Der Vergleich beider $p(V)$ -Kurven zeigt, dass für eine Verflüssigung vorran-

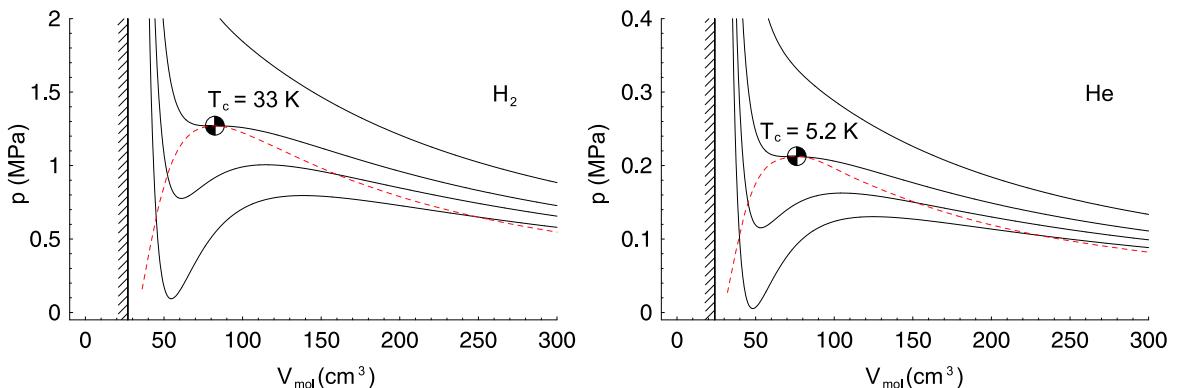


Abbildung 5.7: Isothermen von H_2 und He im Van-der-Waals-Regime mit einer kritischen Temperatur von 33.2 K bzw. rund 5 K und einem kritischen Druck $p_c = 1.29 \text{ MPa}$ bzw. 0.23 MPa . Die den rot strichlierten Kurven unterliegenden Flächen beschreiben die jeweiligen Gebiete der Phasenkoexistenz von gasförmigem und flüssigem Aggregatzustand.

gig H_2 in Frage kommt, trotz des dazu nötigen relativ hohen Druckes von $\sim 10^6 \text{ Pa}$ bei rund 20 K . He wird sich hingegen primär einer Kompression zugänglich erweisen, die trotz der geringen interatomaren Wechselwirkungen des Edelgases im Bereich von $\gtrsim 10 \text{ K}$ den Gesetzen des realen Gases folgt. Mit einer Dichte von $1.25 \times 10^{-1} \text{ g cm}^{-3}$ bei 4.15 K und Normaldruck beläuft sich dessen maximal mögliche Kompression auf das rund 700-fache

des Volumens unter Normalbedingungen. Da nach Gl. 5.15 die Brechkräfte $\delta(E)$ von H_2 und He anders als ihre Absorptionskoeffizienten bei 1 keV und darüber hinaus im gesamten Intervall zwischen 1 und 10 keV nahezu übereinstimmen, skalieren die Öffnungsverhältnisse gleichermaßen mit der auf die Normdichte ρ_0 bezogenen Dichte. Abb. 5.8 skizziert die unteren Schranken an f der beiden Stoffe, im Fall des He für diverse Dichten. Der Ge-

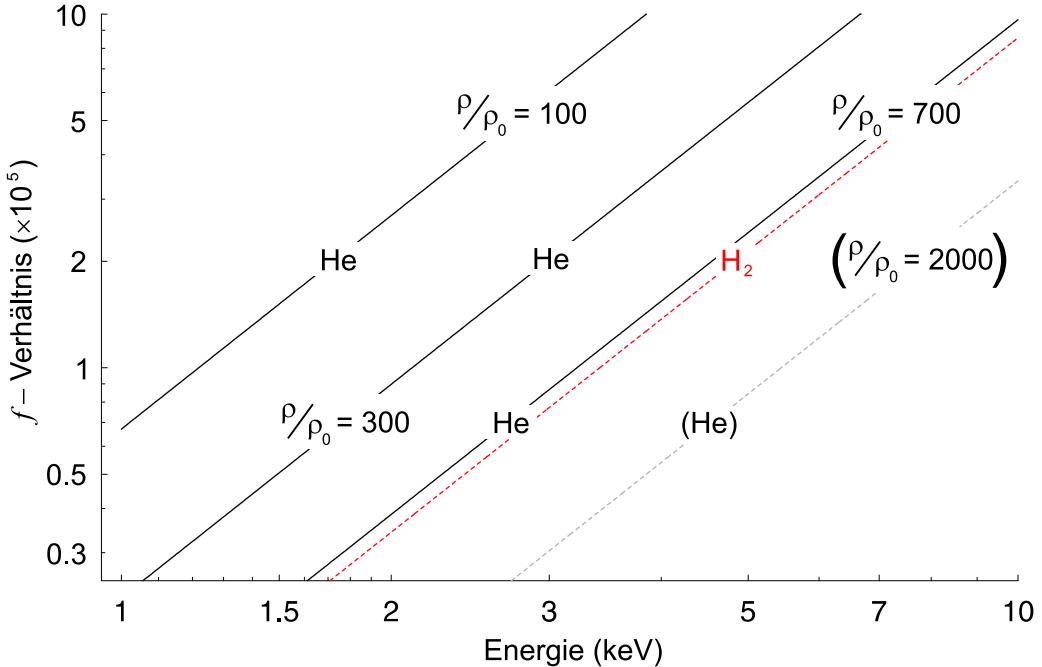


Abbildung 5.8: Untere Schranken an das Öffnungsverhältnis H_2 - und He-basierter Linsen. Alle Geraden stehen für ein Radienverhältnis $\frac{R}{\xi} = 2$. Für H_2 wurde die flüssige Phase angenommen, während im Fall der He-Füllung Kurven für diverse Dichten ρ , relativ zur Normdichte ρ_0 , eingetragen sind.

raden zu $\frac{\rho}{\rho_0} = 2 \times 10^3$ kommt lediglich die fiktive Bedeutung eines Vergleichsmaßstabs zu. Unter praktischen Gesichtspunkten dürfte sich die Kompression gasförmigen Heliums freilich als ausgesprochen problematisch erweisen. So erfordert die Verdichtung bei einer Temperatur von 20 K auf $\rho = 1 \times 10^2 \rho_0$ immerhin den 7.5-fachen Normdruck, während für $\rho = 3 \times 10^2 \rho_0$ bereits dessen Steigerung um einen Faktor 26 erforderlich ist. Die Frage nach der technischen Umsetzung refraktiver Optik auf der Basis gasförmigen oder evtl. doch extrem gekühlten flüssigen Heliums bleibt in dieser Arbeit außen vor.

Vorläufig rein theoretische Relevanz kommt somit auch dem nun knapp zu erörternden Modell einer spektral kontinuierlich durchstimmmbaren Hybridlinse zu, deren refraktive Komponente aus H_2 und He-Anteilen bestehe. Die Gesamtbrennweite errechnet sich via

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_Z} + \frac{1}{F_{L_1}} + \frac{1}{F_{L_2}}, \quad (5.20)$$

wenn $L_{1,2}$ die beiden refraktiven Komponenten beschreibt. Relation Gl. 5.20 führt unter

Verwendung der hinlänglich bekannten Formeln $F_Z = \frac{R^2}{\lambda N_Z(\lambda)}$ und $F_{L_{1,2}} = -\frac{R^2}{\lambda N_{L_{1,2}}(\lambda)}$ sofort auf die verallgemeinerte Beziehung

$$\frac{1}{2}N_Z(\lambda) = N_{L_1}(\lambda) + N_{L_2}(\lambda) \quad \forall \quad \lambda \quad (5.21)$$

zwischen den Zonenzahlen. Nach den Ausführungen in Kap. 3 skalieren N_Z und $N_{L_{1,2}}$ wie

$$N_Z(E) = m N_Z(E_c) \quad \text{und} \quad N_{L_{1,2}}(E) = N_{L_{1,2}}(E_c) \frac{E_c}{E}, \quad (5.22)$$

wenn $m \in \mathbb{N}$ die Beugungsordnung der Fresnel-Linse bezeichnet. Im Kontext gasgefüllter Profile variabler Dichte ϱ hängt schließlich auch $N_{L_2}(E_c)$ wegen der Linearität der Brechkraft δ in ϱ von selbiger ab, so dass

$$N_{L_2}(E_c) = N_{L_2}(E_0) \frac{\varrho_c}{\varrho_0}, \quad (5.23)$$

wenn der Index „2“ mit der He-Komponente korrespondiert. Somit schreiben sich die Zonenzahlen als

$$N_Z(E_c) = m \cdot N_Z^{(0)} \quad \text{und} \quad N_{L_1}(E_c) = N_{L_1}^{(0)} \frac{E_0}{E_c} \quad \text{bzw.} \quad N_{L_2}(E_c) = N_{L_2}^{(0)} \frac{\varrho_c}{\varrho_0} \frac{E_0}{E_c}, \quad (5.24)$$

wobei die Werte von N_Z bzw. $N_{L_{1,2}}$ an der Stelle E_0 durch das Superskript (0) abgekürzt wurden. Der dem Dialyten variablen *Linsendistanz* aus Abschn. 4.3 entsprechenden Notation liegt somit eine formale wie physikalische Analogie zum Hybridsystem variabler *Brechkraft* zugrunde. E_0 steht also für die Blaze-Energie der diffraktiven Fresnel-Komponente, während E_c die Zentralenergie des dispersionskorrigierten Spektralbandes bezeichnet. Eingesetzt in Gl. 5.21, folgt mit den Relationen 5.24

$$\frac{\varrho_c}{\varrho_0} = \frac{N_{L_1}^{(0)}}{N_{L_2}^{(0)}} \left(\frac{m}{2} \frac{N_Z^{(0)}}{N_{L_1}^{(0)}} \frac{E_c}{E_0} - 1 \right). \quad (5.25)$$

Die zur Dispersionskorrektur bei der Energie E_c erforderliche Dichte ϱ_c skaliert somit positiv mit E_c , was sich insofern als vorteilhaft herausstellt, als der Absorptionsparameter β linear von ϱ abhängt. Unter einer freilich kaum realistischen Vernachlässigung der die H₂- und He-Füllungen aufnehmenden Linsenschalen errechnet sich die Transmission der refraktiven Komponenten allgemein zu

$$T_{1,2}(E_c) = \exp \left(-\frac{E_0}{E_c} \left(\frac{N_{L_1}^{(0)}}{N_{0,1}(E_c)} + \frac{N_{L_2}^{(0)}}{N_{0,2}(E_c)} \frac{\varrho_c}{\varrho_0} \right) \right). \quad (5.26)$$

Bis dato wurden den Zonenzahlen $N_{L_{1,2}}^{(0)}$ keine expliziten Werte zugewiesen, sie unterlagen lediglich der Bedingung 5.21. Als günstig erweist sich z.B. folgende Wahl:

$$N_{L_1}^{(0)} = \frac{1}{4} N_Z^{(0)} = N_{L_2}^{(0)} \quad (5.27)$$

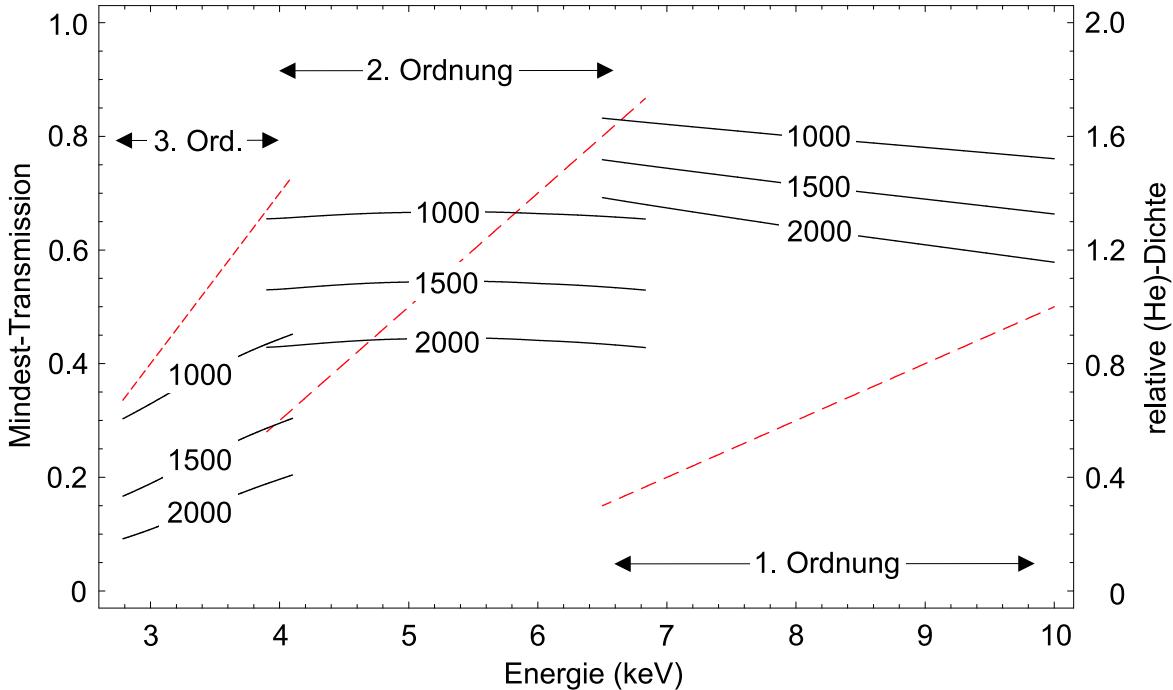


Abbildung 5.9: *Dispersionskorrektur mittels durchstimmbaren Gaslinsen. Die refraktive Linse besteht je zur Hälfte aus flüssigem H_2 und gasförmigem He , dessen auf ihren Wert bei $E_0 = 10$ keV normierte Dichte $\varrho_c(E)$ in Abhängigkeit von der Ordnung m variiert wird (rechte Ordinate, strichlierte Linien). Linksseitig ist die Mindest-Transmission des $[H_2 - He]$ -Systems für einige Zonenzahlen N aufgetragen (durchgezogene Kurven).*

ordnet somit bei E_0 den H_2 - und He -Komponenten jeweils die Hälften der optisch refraktiven Gesamtwirkung zu. Übertragen auf die funktionale Änderung der Dichte ϱ_c mit E_c ergibt sich unter Einbeziehung der höheren Beugungsordnungen der in Abb. 5.9 dargestellte Verlauf. Mit dieser speziellen Zuordnung durchläuft ϱ_c also in den Maxima der diffraktiven Beugungseffizienz, nämlich für $\frac{E_c}{E_0} = \frac{1}{m}$, linear den Referenzwert ϱ_0 . Die Gln. 5.25 und 5.26 vereinfachen sich somit zu

$$\varrho_c = (2m\psi_0 - 1) \varrho_0 \quad \text{und} \quad T_{1\circ 2}(E_c) = \exp \left(-\frac{1}{\psi_0} \frac{N}{4} \left(\frac{1}{N_{0,1}(E_c)} + \frac{1}{N_{0,2}(E_c)} \frac{\varrho_c}{\varrho_0} \right) \right),$$

wobei wieder der aus Abschn. 4.3 bekannte Energieparameter ψ_0 verwandt wurde. Das Beispiel in Abb. 5.9 verdeutlicht die prinzipielle Möglichkeit eines de facto über den gesamten interessierenden Spektralbereich durchstimmbaren, *kompakten* Achromaten. Ein Urteil über die faktische Realisierbarkeit ist aufgrund der oben angedeuteten Probleme hiermit noch nicht gefällt.

5.1.3 Entwicklung exemplarischer Modellsysteme

Ausgehend von einer Winkelauflösung $\Delta\epsilon$ von wenigstens 1 mas, skaliert die nötige Apertur eines Elementarteleskops je nach Energie in Größenordnungen von $\sim (10^0 - 10^1)$ cm. Ein laterales Sichtfeld von rund 10^3 Auflösungselementen beibehaltend, vermindert jedoch eine möglichst große Apertur bei fixer Brennweite nach den Ausführungen in Abschn. 5.1.1 nicht nur die Kopplung zwischen den Elementarteleskopen infolge des reduzierten Raumwinkels Ω_{FOV} , sondern auch den mutmaßlich dominanten Beitrag der von außerhalb des FOV einfallenden, diffusen und zur Detektorfläche proportionalen Hintergrund-Zählrate. Da zudem die Lichtstärke diffraktiver Linsen ausschließlich von deren Brennweite F abhängt, spricht vieles dafür, mit Radien $R(E)$ und Zonenzahlen $N(E)$ laterale wie spektrale Trennschärfe der Detektoren zu nutzen. Mit

$$F = 15 \times 10^3 \text{ m} \quad \text{und} \quad \Delta\epsilon = 1 \times 10^{-4} \text{ arcsec} \quad \rightarrow \quad 2\rho_{PSF} = 7.3 \times 10^{-6} \text{ m} \quad (5.28)$$

nehmen Radien $R(E)$ und Zonenzahlen $N(E)$ zum harten Röntgenband hin ab, wie die beiden Tab. 5.1 und 5.2 quantifizieren. Die Aufgabe der Detektion würden in diesem Beispiel

E (keV)	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10
R (cm)	27.4	24.9	22.8	21.0	19.5	18.2	17.1	16.1	15.2	14.4	13.7

Tabelle 5.1: Apertur-Radien der FL-Matrix für $\Delta\epsilon = 0.1$ mas. Die Angaben beziehen sich auf die HEW-Definition und verstehen sich ohne Zentralobstruktion, Stützstreben etc.

E (keV)	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10
$N (\times 10^3)$	20.1	18.3	16.8	15.5	14.4	13.4	12.6	11.8	11.2	10.6	10.1

Tabelle 5.2: Zonenzahlen N der FL-Matrix für $F = 15$ km. Die gewählten Werte korrespondieren näherungsweise mit dem Trennvermögen eines guten LiF(200)-Kristalls.

hochauflösende LiF(200)-Kristalle in Verbindung mit fein gerasterten CCD's übernehmen. Vernachlässigt man deren Verluste im Energieintervall zwischen 5 und 10 keV, so errechnet sich die Lichtstärke der gesamten, aus n_T Elementaroptiken zusammengesetzten Konfiguration unabhängig von der energetischen Verteilung zu

$$A_{eff} \times \Delta E = 0.58 \text{ cm}^2 \text{ keV} \cdot n_T, \quad (5.29)$$

so dass sich die Leistung einer aus beispielsweise (50×50) Objektiven bestehenden Matrix zu $A_{eff} \times \Delta E \approx 1.45 \times 10^3 \text{ cm}^2 \text{ keV}$ summiert. Um das Band zwischen 5 und 10 keV in Form eines spektralen „Kamms“ gleichmäßig zu erfassen, bietet sich eine Besetzung im festen Abstand von jeweils 2 eV an.

Etwas anderen Randbedingungen unterliegt die aus Hybridelementen zusammengesetzte Paralleloptik. Da neben der Brennweite F die Verstärkung V und mit ihr die Zonenzahl

N über die Lichtstärke entscheidet, kommen ähnlich extreme Größenordnungen wie im eben dargestellten Beispiel nicht in Betracht. Wählt man statt dessen

$$F = 25 \times 10^3 \text{ m} \quad \text{und} \quad \Delta\epsilon \leq 6 \times 10^{-4} \text{ arcsec} \quad \rightarrow \quad 2\rho_{PSF} \leq 70 \times 10^{-6} \text{ m}, \quad (5.30)$$

so erreicht Li, der nach LiH leistungsfähigste Feststoff, bei 6 keV noch eine Verstärkung $V = 30.4$ gegenüber dem diffraktiven Analogon. Nahe 12 keV durchläuft $N_0(E)$ ein globales Maximum, weshalb Li dort auch mit $V = 42.0$ seinen höchsten Wirkungsgrad erreicht¹. Diesseits von rund 5 keV fällt V jedoch unter den physikalisch-technisch sinnvollen Minimalwert $V_{min} = 4$ ab, so dass alternativ H₂ bei 4 keV zur Dispersionskorrektur herangezogen wird, mit einer theoretischen Verstärkung $V \leq 84.6$. Bezugnehmend auf Gl. 4.60, ergeben sich zusammen mit den aus 5.30 folgenden Radien $R(E)$ und Zonenzahlen $N(E)$ die in Abb. 5.10 eingetragenen Lichtstärken. Gesteht man – konservativ abgeschätzt – der

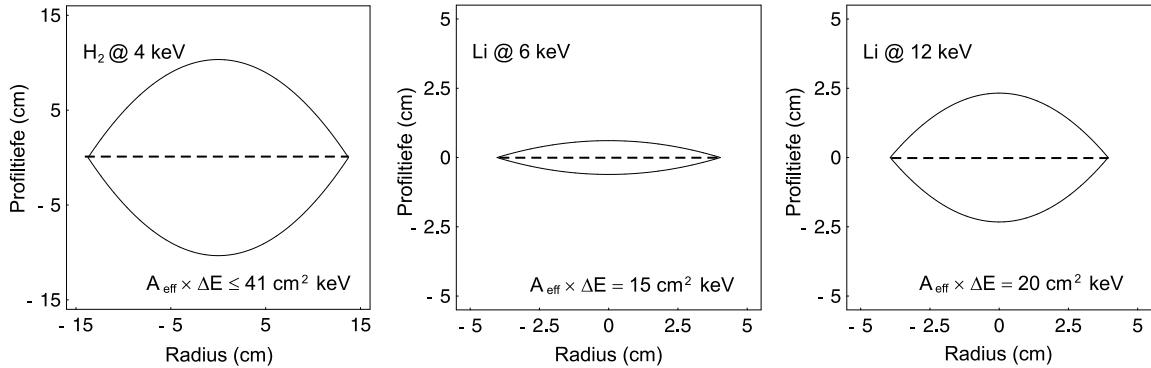


Abbildung 5.10: Beispiele kompakter Hybridlinsen fixer Brennweite und Auflösung. Mit bikonvexen, refraktiven Komponenten aus H₂ bzw. Li erreichen alle 3 Versionen die Fokal-
distanz $F = 25 \text{ km}$ und eine Winkelauflösung $\Delta\epsilon \leq 0.6 \text{ mas}$.

die H₂–Füllung beherbergenden Schale (engl. „cladding“) bezugnehmend auf Tab. 8.2 eine Transmission von $T_{clad} \sim e^{-2}$ entsprechend zweier Absorptionslängen zu, so reduziert sich die Lichtstärke der H₂–Version auf $\approx 5.6 \text{ cm}^{-2} \text{ keV}$ und beträgt damit immer noch das bis zu 10^2 –fache einer bei 4 keV operierenden Li-Linse. Um unter Verwendung dieser Elementarlinsen eine dem diffraktiven Array vergleichbare Lichtstärke zu erzielen, genügt bereits eine Matrix aus (10×10) Objektiven, z.B. bestehend aus 30 H₂–Linsen, 40 auf 6 keV und 30 auf 12 keV sensitiven Li-Elementen.

Überleitend zum folgenden Abschnitt sei nun noch ein Aspekt angesprochen, der sich wesentlich auf die optischen Eigenschaften der Gesamtkonfiguration auswirkt. Mit den in vorstehenden Beispielen angenommenen Werten für die Radien R betragen die typischen Abstände benachbarter Elementarteleskope $\gtrsim 10^{-1} \text{ m}$. Entsprechend einer Winkelauflösung von $\gtrsim 10^{-4} \text{ arcsec}$ bestünde folglich die Gefahr von Interferenzen zwischen den einzelnen Objektiven, würden diese nicht hinreichend unregelmäßig, sondern gleich einem kohärenten, zweidimensionalen Gitter mit exakt konstanten Abständen angeordnet.

¹Dieser Sachverhalt wird in einem der folgenden Unterkapitel genauer diskutiert.

5.2 Die segmentierte Apertur

Mit der Aufteilung der bislang als kompakt angenommenen Apertur in verhältnismäßig kleine Segmente wird nun ein Weg beschritten, der sich aller Voraussicht nach auch im visuellen Spektralbereich, nämlich beim Bau großflächiger Spiegelteleskope, als zielführend erweisen wird [31]. Zunächst liegt auch ergebnisbundenen segmentierten Objektiven die Erkenntnis der annähernden Unmöglichkeit zugrunde, die zur Vermeidung fertigungstechnisch bedingter Aberrationen notwendige Phasenohärenz über Durchmesser von 10 und mehr Metern zu erhalten. Im Fall sehr großer Radien ($R \gtrsim 2$ m) vermag die in Parzellen zerlegte Fläche einer transmissiven Röntgenlinse bei geschickter Konstruktion zugleich das Transportproblem zu lösen. Vor allem jedoch kommt ihr bei der Aufgabe, die effektive Sammelfläche und mit ihr die Lichtstärke bei moderater Brennweite zu erhalten oder zu verbessern, entscheidende Bedeutung zu – eine Tatsache, die sich als wesentliches positives Resultat in die nachfolgenden Ausführungen zu den optischen Eigenschaften der segmentierten Apertur eingliedert.

Den Segmenten wie im Visuellen operierenden Spiegeln eine hexagonale Form [31] zu geben, erscheint angesichts des zu erwartenden konstruktiven Aufwandes zumindest fragwürdig. Radial und azimuthal geschnittene Parzellen dürften mit den der Fresnel- oder Hybridoptik einbeschriebenen Symmetrieeigenschaften indes viel mehr harmonieren. Mit der Segmentierung nach „konstanter Fläche“ und nach „konstanter Zonenzahl“ bieten sich zwei prinzipiell verschiedene Konzepte an:

Segmente konstanter Fläche (A)

Die Apertur besteht aus $T_A \in \mathbb{N}$ Ringen gleicher Dicke. Jeder dieser Ringe wird azimuthal in Parzellen zerlegt, so dass diese im Grenzfall $T_A \rightarrow \infty$ quadratische Form und konstante Fläche aufweisen. Die Zonenzahl N_{seg} pro Segment nimmt mit der Ringnummer $1 \leq k \leq T_A$ zu.

Sieht man von Stützstreben und anderen Spezifika der realen Konstruktion ab, sind die radialen und azimuthalen Begrenzungen des Segments fixer Fläche durch

$$r_k = k \cdot r_0 \quad \text{und} \quad \theta_{k,j} = \text{rand}_k + 2\pi \frac{j - 1}{[(2k - 1)\pi]} \quad \text{mit} \quad k, j \in \mathbb{N} \quad (5.31)$$

definiert. Mit dem Zentralradius r_0 des Objektivs ist zugleich der Radius des innersten, durch $k = 1$ beschriebenen Rings festgelegt. Die Winkelkoordinaten $\theta_{k,j}$ der Segmentränder zählen, beginnend mit einem Zufallswert $0 \leq \text{rand}_k \leq 2\pi$, in konstanten Abständen via $1 \leq j \leq [(2k - 1)\pi] + 1$ den gesamten Ring mit $0 \leq \theta \leq 2\pi$ durch, wobei $[x] \in \mathbb{Z}$ die der Zahl $x \in \mathbb{R}$ nächstgelegene ganze Zahl symbolisiert. Aus 5.31 folgen unmittelbar die

Segmente fixer Zonenzahl (N)

Die Apertur besteht aus $T_N \in \mathbb{N}$ Ringen gleicher Zonenzahl N_{seg} . Jeder dieser Ringe wird azimuthal in Parzellen zerlegt, so dass diese im Grenzfall $T_N \rightarrow \infty$ quadratische Form annehmen. Die Fläche der einzelnen Segmente nimmt mit der Ringnummer $1 \leq k \leq T_N$ ab.

radialen und winkeligen Abmessungen,

$$\Delta r_k = r_0 \quad \text{und} \quad \Delta \theta_k \approx \frac{2}{2k-1}, \quad (5.32)$$

wenn die Rundung $x \rightarrow [x]$ vernachlässigt wird. Die Segmente nehmen daher im Grenzfall großer Ringzahlen k annähernd quadratische Form an, wobei ihre Fläche

$$A_{seg} = \Delta r_k \times \langle r_{k-1,k} \rangle \Delta \theta_k = r_0 \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \frac{2}{2k-1} = (r_0)^2 \quad (5.33)$$

mit dem mittleren Radius $\langle r_{k-1,k} \rangle$ des k -ten Rings konstant bleibt. Abb. 5.11 veranschaulicht im unteren Sektor die Koordinaten der nach konstanter Parzellenfläche zerlegten, „A-segmentierten“ Version. Alternativ können Radien und Winkel so gewählt werden, dass

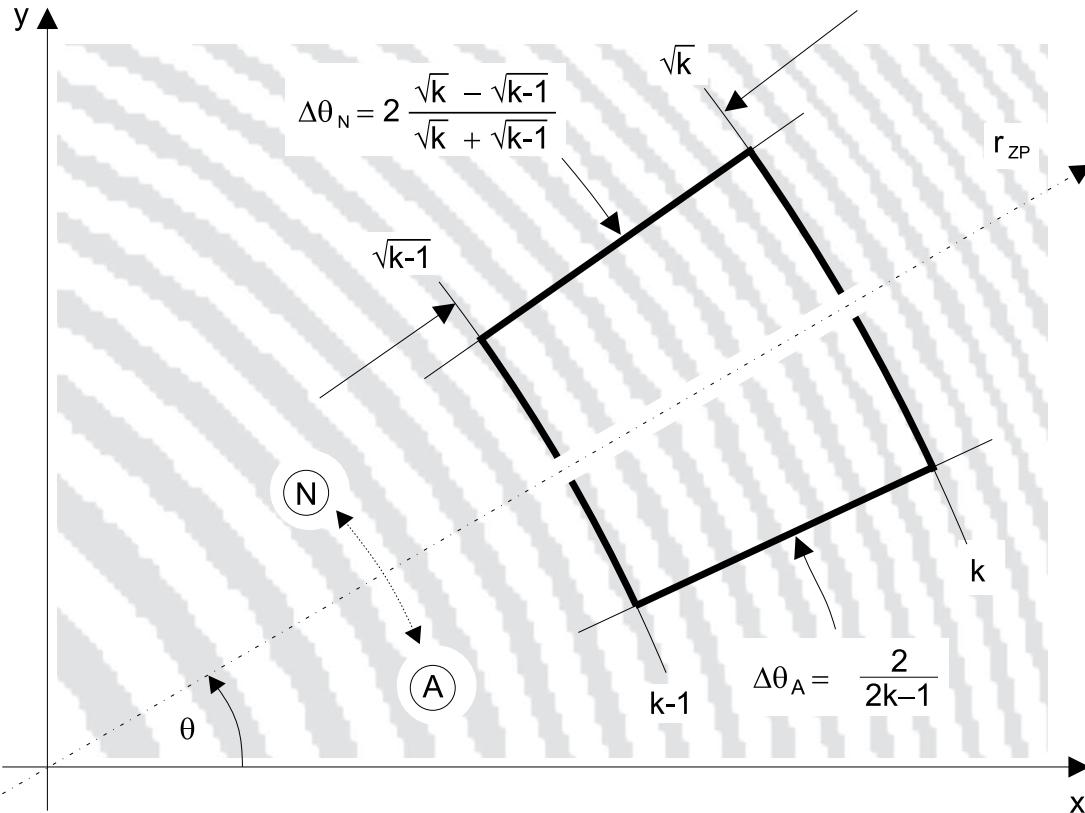


Abbildung 5.11: Segmentierung großflächiger Linsen. Radiale und winkelige Grenzen sind für beide Schemata, die Segmentierung nach konstanter Fläche (A) als auch nach konstanter Zonenzahl (N) in Abhängigkeit von der Ringnummer $1 \leq k \leq T$ angegeben. Im Grenzfall $k \gg 1$ nehmen die Segmente näherungsweise quadratische Form an.

anstelle der Segmentfläche deren Zonenzahl N_{seg} erhalten bleibt, dazu definiert man

$$r_k = \sqrt{k} r_0 \quad \text{und} \quad \theta_{k,j} = \text{rand}_k + 2\pi \frac{j-1}{[\pi \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}}]} \quad \text{mit} \quad k, j \in \mathbb{N}. \quad (5.34)$$

Die Maße der sich daraus ergebenden Parzellen errechnen sich wieder unter Verzicht auf die nur unter praktischen Gesichtspunkten notwendige Rundung $x \rightarrow [x]$ zu

$$\Delta r_k = \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1} \right) r_0 \quad \text{und} \quad \Delta \theta_k = 2 \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}, \quad (5.35)$$

so dass die Parzellenfläche dieser „N-segmentierten“ Version einer zu Gl. 5.33 analogen Kalkulation folgend

$$A_{seg} = \Delta r_k \times \langle r_{k-1,k} \rangle \Delta \theta_k = [...] = (r_0)^2 \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1} \right)^2 \quad (5.36)$$

beträgt. Im Grenzfall großer Ringzahlen nehmen auch diese Segmente nahezu die Form eines Quadrats der Kantenlänge $r_0 \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1} \right)$ an, ihre Fläche skaliert gemäß

$$A_{seg} \rightarrow \frac{1}{4k} (r_0)^2 \quad \text{für } k \gg 1, \quad (5.37)$$

asymptotisch invers proportional zu k . Abb. 5.11 illustriert auch diesen Fall. Die Anzahl an Segmenten im k -ten Ring ergibt sich für A- und N-segmentierte Ausführung zu

$$\#(\text{Seg.})_{k,A} = [(2k-1)\pi] \quad \text{bzw.} \quad \#(\text{Seg.})_{k,N} = \left[\pi \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}} \right]. \quad (5.38)$$

Tab. 5.3 listet die Zahl der Parzellen für die ersten 50 Ringe auf. Eine wiederum die

Ringnummer k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50
$\#(\text{Seg.})_{k,A}$	3	9	16	22	28	35	41	47	53	60	123	185	248	311
$\#(\text{Seg.})_{k,N}$	3	18	31	44	56	69	82	94	107	119	245	371	496	622

Tabelle 5.3: Anzahl der Segmente im k -ten Ring. Eingetragen sind die Werte für A- und N-segmentierte Version.

ganzzahlige Rundung ignorierende Reihenentwicklung von $\#(\text{Seg.})_{k,N}$ bestätigt die aus Tab. 5.3 abzulesende Tatsache, dass die N-segmentierte Version pro Ring rund doppelt so viele Parzellen wie die A-segmentierte erfordert,

$$\lim_{k \gg 1} \#(\text{Seg.})_{k,N} = 2\pi(2k-1) + \mathcal{O}(k^{-1}) \approx 2\#(\text{Seg.})_{k,A}. \quad (5.39)$$

Die drei mit $k = 1$ innersten Segmente füllen als Sektoren die dem Elementarradius r_0 entsprechende Fläche aus – eine aus formalen Gründen eingeführte Konvention, um den Flächengesetzen nach den Gl. 5.33 und 5.36 auch für $k = 1$ annähernd Rechnung zu tragen.

Bezeichnet nun T_A bzw. T_N die Ringzahl im A- bzw. N-segmentierten Fall, so gilt

$$R = r_{0,A} T_A \quad \text{bzw.} \quad R = r_{0,N} \sqrt{T_N} \quad \text{mit} \quad T_{A,N} \in \mathbb{N}, \quad (5.40)$$

wobei R wie immer für den Aperturradius steht und die nicht notwendig identischen Zentralradien der beiden Varianten mit den entsprechenden Indizes bezeichnet werden. Unter Verwendung obiger Definitionen aus 5.31 und 5.34 für die Segmentradien r_k ergeben sich die Zonenzahlen N_{seg} pro Segment zu

$$N_{seg,A} = \frac{1}{T_A^2} (2k - 1)N \quad \text{bzw.} \quad N_{seg,N} = \frac{1}{T_N} N, \quad (5.41)$$

die in A-segmentierter Version demnach etwa $\propto k$ zunehmen und in N-segmentierter Ausführung per definitionem konstant sind. N steht wie üblich für die (Gesamt-)Zonenzahl.

Mit den beiden eingeführten Versionen stehen somit zwei grundsätzlich gleichwertige Schemata zur Verfügung, zwischen denen beim Design einer realen Optik in Abwägung ihrer jeweiligen technischen wie optischen Vor- und Nachteile zu entscheiden ist. Abb. 5.12 stellt die beiden Varianten anhand eines willkürlich gewählten Beispiels gegenüber. Wie

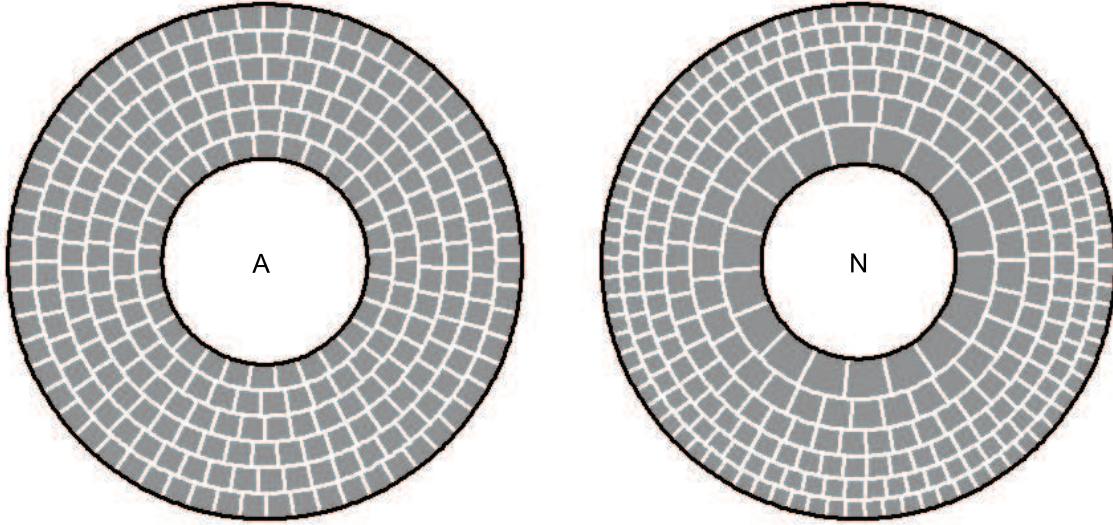


Abbildung 5.12: Beispiel einer A- und N-segmentierten Apertur. Beide Modelle erreichen die gleiche Winkelauflösung. Im Fall gleicher Flächen beträgt $T_A = 10$, die 4 zentralen Ringe sind abgedeckt. Unter Annahme konstanter Zonenzahl mit $T_N = 7$ Ringen wurde lediglich auf den innersten Ring verzichtet.

weiter unten erläutert wird, kann durch passende Wahl der Parameter $\{r_{0,A}, T_A\}$ bzw. $\{r_{0,N}, T_N\}$ dieselbe Winkelauflösung eingestellt werden.

Bislang wurde das Segmentierungsproblem lediglich unter geometrischen Gesichtspunkten betrachtet. Um die eingangs erwähnte inkohärente Superposition der den einzelnen Segmenten entstammenden Amplitudenbeiträge in der Fokalebene zu erreichen, bedarf es jedoch einer beschränkt zufälligen, radialen Versetzung der Segmente gegenüber ihrer ursprünglichen Position.

Die theoretischen Prinzipien der Dekohärenz seien zunächst unter der letztlich unwesentlichen Beschränkung auf ein eindimensional-lineares, segmentiertes „Objektiv“ demonstriert, das eine einfache, analytisch exakte Lösung ermöglicht. Das Instrument bestehe nach Abb. 5.13 aus M aneinander gereihten Spalten der konstanten Breite b , im ungestörten Abstand $\Delta > b$. Zugunsten einfacher Analysis wird das Fraunhofer'sche Beugungsbild im Fernfeld ($F \rightarrow \infty$) betrachtet – ob Gitter, Prisma oder eine dem Achromaten entsprechende Hybrid-Kombination der beiden zum Einsatz kommt, spielt also keine Rolle. Besitzen

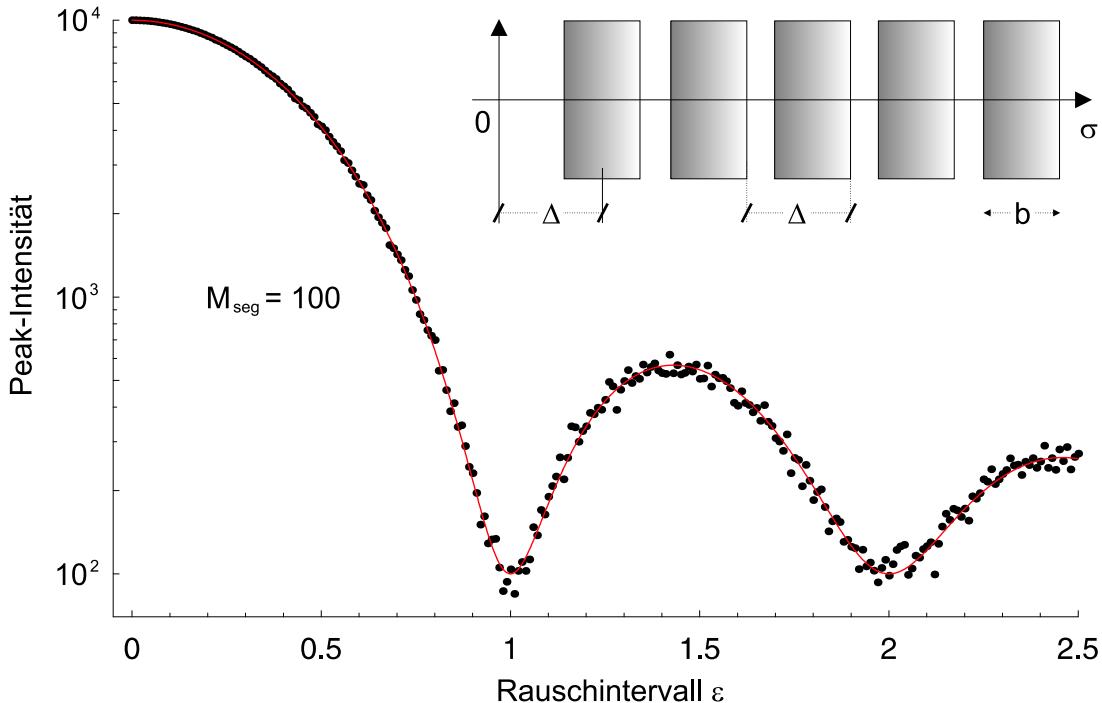


Abbildung 5.13: Dekohärenz des segmentierten Lineargitters. Eine zufällige, mittlere Versetzung der einzelnen Segmente um $\langle \varepsilon_m \rangle = \frac{1}{2}$ zerstört die Interferenz, so dass die Peakintensität von $M^2 I_0$ auf $M I_0$ abfällt. Die allgemeine funktionale Abhängigkeit von ε wurde für $M = 100$ Segmente simuliert und über ebenso viele Versuche gemittelt.

diese Spalten die Transmission $T(x)$, so lautet deren Fourier-Transformierte

$$\mathcal{F}(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=1}^M \int_{(m+\varepsilon_m)\Delta - \frac{b}{2}}^{(m+\varepsilon_m)\Delta + \frac{b}{2}} T(\sigma) e^{-i\kappa\sigma} d\sigma, \quad (5.42)$$

wobei mit $0 \leq \varepsilon_m \leq \varepsilon$ eine kleine Zufallsverschiebung eingeführt wurde, deren Eigenschaften folgendermaßen definiert seien:

- Die Maximalverschiebung ε kann Werte zwischen 0 und wenigen Wellenlängen annehmen, dimensionslos entsprechend $0 \leq \varepsilon \sim 1$.
- Die Zufallswerte ε_m sind in $0 \leq \varepsilon_m \leq \varepsilon$ gleichverteilt, so dass in diesem Intervall alle ε_m mit derselben Wahrscheinlichkeit auftreten.

Da zudem $\Delta - b \gg \lambda$ vorausgesetzt wird, sind Überschneidungen der einzelnen Segmente ausgeschlossen. Etwaige Absorption vernachlässigend, gilt ferner $T(\sigma) = 1$. Mit der in einer Dimension skalaren Wellenzahl $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \phi$ und dem Ablenkinkel ϕ ergibt sich nach kurzer Rechnung für das zur Intensitätsverteilung proportionale Amplitudenquadrat

$$|\mathcal{F}(\kappa)|^2 = \frac{b^2}{2\pi} \left(\frac{\sin(\kappa \frac{b}{2})}{\kappa \frac{b}{2}} \right)^2 \left| \sum_{m=1}^M e^{-i\kappa\Delta(m+\varepsilon_m)} \right|^2. \quad (5.43)$$

Während der Integralsinus die Beugung am einzelnen Segment repräsentiert, entscheidet die nachfolgend als Dekohärenzfunktion bezeichnete Größe

$$\mathcal{D}_M(\varepsilon) = \left| \sum_{m=1}^M e^{-i\kappa\Delta(m+\varepsilon_m)} \right|^2 = \left| \sum_{m=1}^M e^{-2\pi i \varepsilon_m} \right|^2 \quad (5.44)$$

über das quantitative Ausmaß der Inkohärenz zwischen den einzelnen Segment-Amplituden und damit über die Peak-Intensität des in erster Ordnung gemäß $\Delta \sin \phi = \lambda$ beobachteten Beugungsbildes. Um $\mathcal{D}_M(\varepsilon)$ für große M zu berechnen, beachte man zunächst

$$\mathcal{D}_M(\varepsilon) = \left\langle \sum_{m,n} e^{-2\pi i (\varepsilon_m - \varepsilon_n)} \right\rangle = M + \left\langle \sum_{m \neq n} e^{-2\pi i (\varepsilon_m - \varepsilon_n)} \right\rangle, \quad (5.45)$$

wobei die zweifache Summation jeweils bis M läuft. Mit der Mittelung werden zahlreiche, grenzwertig unendlich viele Versuche mit jeweils anderen Sätzen an Zufallsverschiebungen $\Omega(\varepsilon) \equiv \{\varepsilon_m : 0 \leq \varepsilon_m \leq \varepsilon\}$ und $|\Omega(\varepsilon)| = M$ erfasst. Da die Doppelsumme in Gl. 5.45 nach Extraktion des ideal inkohärenten Anteils mit $m = n$ gewissermaßen entkoppelt, gilt für deren Erwartungswert

$$\left\langle \sum_{m \neq n} e^{-2\pi i (\varepsilon_m - \varepsilon_n)} \right\rangle = \sum_{m=1}^M \left(\sum_{n \neq m}^M \langle e^{+2\pi i \varepsilon_n} \rangle \right) \langle e^{-2\pi i \varepsilon_m} \rangle. \quad (5.46)$$

Im Grenzfall $M \rightarrow \infty$ liegen die Zufallswerte ε_m dicht, so dass von der Summe zum Integral,

$$\langle e^{-2\pi i \varepsilon_k} \rangle \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{+\frac{\varepsilon}{2}} e^{-2\pi i \mu} d\mu = \frac{\sin(\pi \varepsilon)}{\pi \varepsilon}, \quad (5.47)$$

übergegangen werden kann. Der Index k repräsentiert die Indizes m und n . Unter Beachtung der Ausschlussbedingung $n \neq m$ in Gl. 5.46 ergibt sich die Dekohärenzfunktion schließlich zu

$$\mathcal{D}_M(\varepsilon) = M(M-1) \left(\frac{\sin(\pi \varepsilon)}{\pi \varepsilon} \right)^2 + M. \quad (5.48)$$

Abb. 5.13 illustriert diesen Verlauf am Beispiel $M = 100$. Man erkennt, dass insbesondere die beiden wichtigsten Spezialfälle für $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 1$ den ideal kohärenten bzw. völlig inkohärenten Zustand wiedergeben. Die zwischen den Nullstellen ansatzweise wiederauflebende Kohärenz liegt in der Periodizität der komplexen Exponentialfunktion begründet.

Die am elementaren Beispiel des Lineargitters dargelegten Grundsätze der Dekohärenz finden im segmentierten, kreisförmigen Objektiv ihre *qualitative* Entsprechung, einer *quantitativen* Korrespondenz bzw. Übertragung steht das Problem entgegen, dass die Dekohärenzterme von den regulären Amplitudenbeiträgen der einzelnen Segmente nicht entkoppeln und somit von den mittleren Koordinaten $(\langle r_{seg} \rangle, \langle \theta_{seg} \rangle)$ der Parzellen abhängig bleiben. Auf mögliche Näherungen im Grenzfall weit außen liegender und damit obiges Lineargitter approximierender Segmente sei hier verzichtet. Es zeigt sich nämlich anhand von Simulationen, dass die Dekohärenzfunktion segmentierter, fokussierender Kreisgitter mit der des linearen weitgehend übereinstimmt. Abb. 5.14 zeigt exemplarisch das gemittelte Resultat einer vierfach wiederholten Simulation für ein N -segmentiertes Objektiv mit $T_N = 5$ Ringen, also insgesamt 56 Segmenten. Im ersten Minimum bei $\approx 2 \langle \Delta r_n \rangle$ streuen

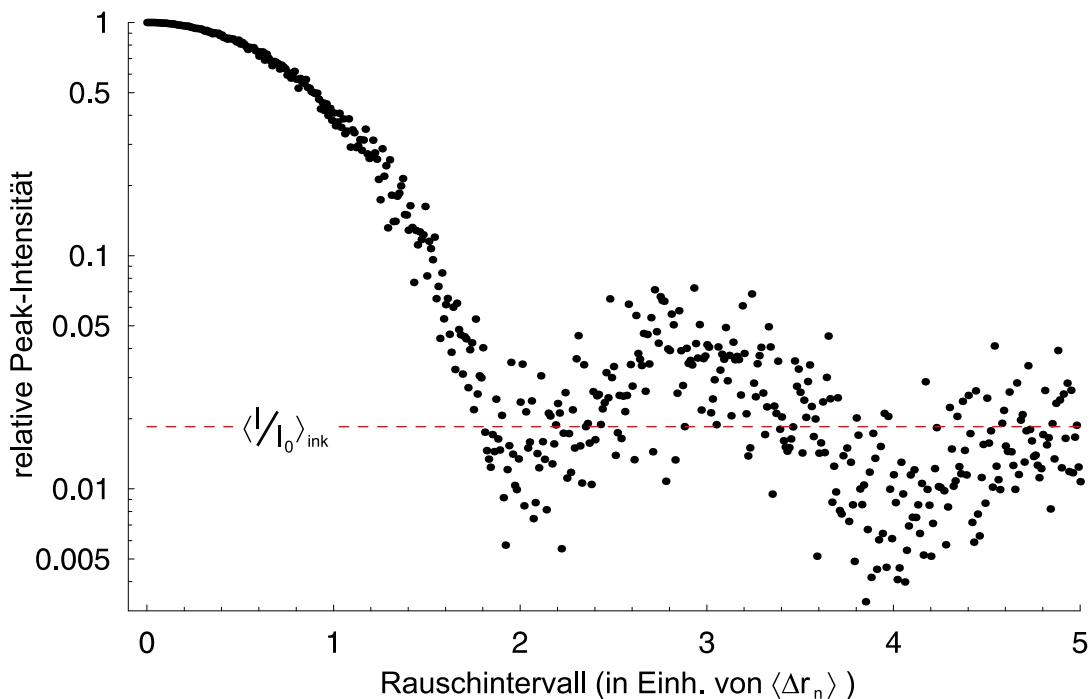


Abbildung 5.14: Dekohärenz einer segmentierten Zonenplatte. Abhängig vom radialen Fehler der Segmentposition nimmt die Peakintensität einen Wert zwischen dem Spitzenwert $I/I_0 = 1$ bei perfekter Ausrichtung der Segmente und dem Minimum $I_{min} = \langle I/I_0 \rangle_{ink}$ an, der durch maximale Inkohärenz in erster Ordnung bzgl. $\langle \Delta r_n \rangle$ gekennzeichnet ist. Die Zonenzahl der N -segmentierten Linse beträgt $N = 100$, die Ringzahl $T_N = 5$.

die numerischen Daten um den inkohärenten Erwartungswert der betrachteten Apertur $\langle I/I_0 \rangle_{ink} = 1.8 \times 10^{-2}$, während für $\approx 4 \langle \Delta r_n \rangle$ das zweite Minimum auftritt².

Praktische Bedeutung kommt speziell dem Rauschintervall, also der maximalen radialen Segmentversetzung zu. Bezogen auf den intrinsischen Zonenindex $1 \leq n \leq N_{seg}$ bedarf es

²Die inkohärente Peakintensität eines allgemeinen segmentierten Objektivs wird weiter unten abgeleitet.

ganz allgemein einer Zufallsvariation von wenigstens $2 \langle \Delta r_n(k) \rangle$, wobei $\langle \Delta r_n(k) \rangle$ die mittlere Breite einer Zone des k -ten Segments bezeichnet. Der radialen Symmetrie des Objektivs folgend, bietet sich eine Definition der gemittelten Zonenbreite über die Zonenzahl an, die sich für eine A-segmentierte Apertur zu

$$\langle N_{seg}(k) \rangle_A = (2k-1) \frac{N}{T_A^2} \quad \rightarrow \quad \langle \Delta r_n(k) \rangle_A = \frac{R}{2N} \frac{2T_A}{2k-1} \quad (5.49)$$

ergibt. Hingegen findet man für die mittlere Zonenbreite eines N-segmentierten Objektivs

$$\langle N_{seg}(k) \rangle_N = \frac{1}{2}(2k-1) \frac{N}{T_N} \quad \rightarrow \quad \langle \Delta r_n(k) \rangle_N = \frac{R}{2N} \sqrt{\frac{2T_N}{2k-1}}. \quad (5.50)$$

Hinreichend große Ringzahlen k vorausgesetzt, stimmen die so berechneten Mittelwerte mit den arithmetischen überein,

$$\langle \Delta r_n(k) \rangle_A \approx \frac{R}{2N} \frac{T_A}{k} \quad \text{und} \quad \langle \Delta r_n(k) \rangle_N \approx \frac{R}{2N} \sqrt{\frac{T_N}{k}} \quad \text{für } k \gg 1. \quad (5.51)$$

Die erforderlichen Rauschintervalle erweisen sich somit als invers proportional zu k bzw. \sqrt{k} . Ihre minimalen Werte nehmen sie am Rand der Apertur ein, so dass mit

$$2 \langle \Delta r_n(k) \rangle_{A,min} \approx \frac{R}{N} \approx 2 \langle \Delta r_n(k) \rangle_{N,min} \quad (5.52)$$

die Mindest-Rauschtoleranz erwartungsgemäß durch das Verhältnis von Radius zu Gesamt-Zonenzahl gegeben ist. Mit typischen Radien $R \sim (10^0 - 10^1)$ m und Zonenzahlen $N \sim (10^4 - 10^6)$ müssen die Mindest-Toleranzen $\sim (10^{-6} - 10^{-4})$ m betragen. Wie nachfolgende Abschnitte aufzeigen, misst sich die laterale Auflösung in der Fokalebene aufgrund der segmentierten Bauweise in der Größenordnung von 10^{-3} m. Versetzungen von $\lesssim 10\%$ der Ortsauflösung sollten sich daher nicht signifikant auf die Bildqualität auswirken.

Um diese in Form der Punktbildfunktion zu analysieren, genügt es wiederum, anstelle des vom Linsentyp und -profil abhängigen Beugungsintegrals nach Gl. 2.22 lediglich dessen grenzwertigen Ausdruck für $F \rightarrow \infty$, nämlich die Fouriertransformierte der segmentierten Apertur zu betrachten, deren Gesamtzonenzahl dann formal gegen Null strebt, $N \ll 1$. Unter der Annahme einer vollständig inkohärent operierenden Apertur berechnet sich die Beugungsstruktur zu

$$\tilde{I}_A(\vec{v}) = \sum_{k=1}^{T_A} \sum_{j=1}^{s_{k,A}} \tilde{I}_{k,j}^{(seg)}(\vec{v}) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{I}_N(\vec{v}) = \sum_{k=1}^{T_N} \sum_{j=1}^{s_{k,N}} \tilde{I}_{k,j}^{(seg)}(\vec{v}) \quad (5.53)$$

wobei die Anzahl der Segmente pro Ring durch $\#(\text{Seg.})_{k,A} = s_{k,A}$ bzw. $\#(\text{Seg.})_{k,N} = s_{k,N}$ abgekürzt sei. Die Intensitätsverteilung eines einzelnen Segments schreibt sich als Betragsquadrat seiner zweidimensionalen Fouriertransformierten,

$$\tilde{I}_{k,j}^{(seg)}(\vec{v}) = |\mathcal{F}_{k,j}(\vec{v})|^2, \quad (5.54)$$

welche bei einer allgemein von den Aperturkoordinaten $\vec{\sigma} = \sigma(\cos \theta, \sin \theta)$ abhängigen Transmission $T_{k,j}(\vec{\sigma})$ und der Segmentfläche A_{seg} die Form

$$\mathcal{F}_{k,j}(\vec{v}) = \frac{1}{2\pi} \int_{A_{seg}} T_{k,j}(\vec{\sigma}) e^{-i\vec{v}\vec{\sigma}} d^2\sigma \quad (5.55)$$

annimmt. Unter Vernachlässigung jeglicher Absorption ergibt sich für $\vec{\kappa} = \kappa(\cos \varphi, \sin \varphi)$

$$\mathcal{F}_{k,j}(\vec{\kappa}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_{k,j-1}}^{\theta_{k,j}} \int_{r_{k-1}}^{r_k} e^{-i\kappa \sigma \cos(\varphi - \theta)} \sigma d\sigma d\theta, \quad (5.56)$$

mit den vorstehend angegebenen Definitionen der Segmentgrenzen im A-bzw. N-Modell. Die Integration über θ ist nur im hier nicht relevanten Spezialfall $0 \leq \theta \leq 2\pi$ analytisch auszuführen. Um die zeitaufwändige numerische Integration zu umgehen, erscheint es vielmehr naheliegend, den annähernd quadratischen Grundriss der optisch unabhängigen Segmente zu nutzen. Deren Intensitätsverteilung errechnet sich zu

$$|\mathcal{F}_{k,j}(\vec{\kappa})|^2 = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}\kappa_{\hat{x}})}{\frac{1}{2}\kappa_{\hat{x}}} \right)^2 \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}\kappa_{\hat{y}})}{\frac{1}{2}\kappa_{\hat{y}}} \right)^2, \quad (5.57)$$

wenn die Kantenlänge Δr_k im k -ten Ring nach Gl. 5.32 bzw. 5.35 vorübergehend gleich 1 gesetzt wird. Die Koordinaten $\vec{\kappa} \equiv (\kappa_{\hat{x}}, \kappa_{\hat{y}})$ stehen für die Wellenvektor-Komponente in der Fokalebene und gehen im allgemeinen Fall aus einer Drehung hervor, $\vec{\kappa} = \mathcal{R}(\langle \theta_{k,j} \rangle) \vec{\kappa}_0$, wobei $\langle \theta_{k,j} \rangle$ den mittleren Winkel des durch die Indizes k, j identifizierten Segments beschreibt. Die inkohärent überlagerten Beugungsbilder eines Rings durch eine kreisförmigen Apertur zu ersetzen, reduziert den Fehler wesentlich, wenn dessen Radius das $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ -fache der Kantenlänge im k -ten Ring beträgt. Man erwartet für die Intensität

$$|\mathcal{F}_k(\vec{\kappa})|^2 = \#(\text{Seg.})_k \langle |\mathcal{F}_{k,j}(\vec{\kappa})|^2 \rangle_{\langle \theta_{k,j} \rangle} \approx \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \#(\text{Seg.})_k \left(\frac{2J_1\left(\kappa \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)}{\kappa \frac{1}{\sqrt{\pi}}} \right)^2 \quad (5.58)$$

Abb. 5.15 vergleicht das zumindest in $k \gg 1$ asymptotisch exakte Beugungsbild eines Segments mit der des $\sqrt{\pi}$ -Modells. Wie eine rechnerische Überprüfung zeigt, weicht die im HEW-Maß definierte Winkelauflösung der Näherung nach Gl. 5.58 sowohl des A- als auch N-segmentierten Modells von der exakten, durch direkte numerische Fouriertransformation ermittelten selbst für die innersten Ringe mit $1 \leq k \leq 3$ maximal um $\pm 2\%$ ab.

Um die Punktbildfunktion der gesamten Apertur zu bestimmen, sind die Beiträge der einzelnen Segmente mit ihrer Größe und damit ihrem Anteil an der Gesamtleistung zu gewichten. Der A-segmentierten Version wird unmittelbar Gl. 5.58 gerecht. Ungeachtet der von der Zahl der Segmente bestimmten Normierung liefert sie im Fokus eine Intensitätsverteilung der Form

$$I_A(\kappa) \approx \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{2J_1\left(\kappa \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)}{\kappa \frac{1}{\sqrt{\pi}}} \right)^2, \quad \text{während} \quad I_{koh,A}(\kappa) \propto \frac{T_A^2}{4\pi} \left(\frac{2J_1(T_A \kappa)}{T_A \kappa} \right)^2 \quad (5.59)$$

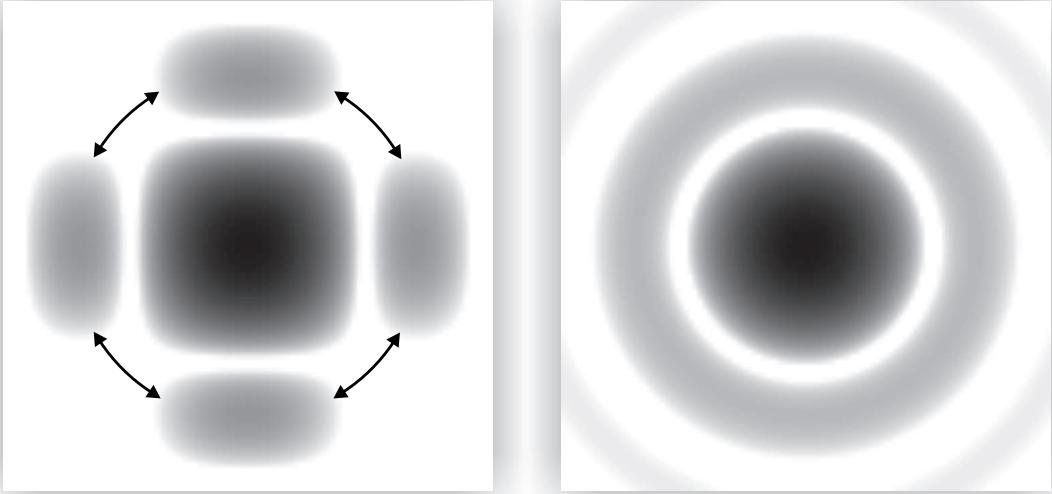


Abbildung 5.15: Beugungsstruktur eines Segments und dessen Näherung. Die Segmente eines Rings (links) ergeben in der Superposition näherungsweise das Beugungsbild einer kreisförmigen Apertur (rechts), deren Radius das $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ -fache der Kantenlänge des asymptotisch quadratischen Segments misst.

andererseits die Beugungsstruktur einer bei derselben Energie operierenden *kohärenten* Apertur gleicher Größe und Brennweite beschreibt, deren Zentrallobstruktur verschwindet. Es erweist sich als sinnvoll, die aus Gl. 5.59 via numerischer Integration bestimmte HEW-Winkelauflösung auf den entsprechenden Referenzwert $\Delta\kappa_{koh}$ des kohärenten Analogons zu beziehen. Man findet für die inkohärente Auflösung $\Delta\kappa_A$ als Funktion der kohärenten

$$\Delta\kappa_A = \sqrt{\pi} T_A \Delta\kappa_{koh}, \quad (5.60)$$

unabhängig von einer etwaigen zentralen Abdeckung des segmentierten Objektivs. Im Fall der N-Segmentierung gilt diese Invarianz nicht mehr, statt dessen sind die Parzellen ihrer Größe nach zu gewichten, so dass

$$I_N(\kappa) = \frac{1}{4\pi (T_N - [a^2 T_N])} \sum_{k=[a^2 T_N]+1}^{T_N} \left(\frac{2J_1\left(\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{\pi}}\kappa\right)}{\kappa} \right)^2 \quad (5.61)$$

die auf $2\pi \int_0^\infty I_N(\kappa) \kappa d\kappa = 1$ normierte PSF angibt. Mit der Rundung auf ganzzahlige Laufindizes wird bei allgemeiner Wahl von $0 \leq a \leq 1$ ein Fehler zu verzeichnen sein, den die Einschränkung

$$a = \sqrt{\frac{k_{obs}}{T_N}} \quad \text{mit} \quad k_{obs} \in \mathbb{N}_0 \quad (5.62)$$

auch analytisch exakt vermeidet, wenn k_{obs} Ringe abgedeckt werden. Die numerische Auswertung der Gl. 5.61 nimmt vorteilhaft wieder auf das kohärente Analogon Bezug. Dessen

Punktbild folgt wiederum normiert auf $I_{koh,N}(0) = 1$ einer Airy-Funktion der Form

$$I_{koh,N}(\kappa) = \frac{T_N}{4\pi} \left(\frac{2J_1(\sqrt{T_N}\kappa)}{\sqrt{T_N}\kappa} \right)^2. \quad (5.63)$$

Das Resultat entzieht sich einer streng analytischen Darstellung, vielmehr folgt die inkohärente Winkelauflösung $\Delta\kappa_N$ für nicht zu kleine $T_N \sim 1$ der Funktion

$$\Delta\kappa_N = \eta_N(a) T_N \Delta\kappa_{koh,N} \quad \text{mit} \quad \eta_N(a) = \sum_n c_n a^n \quad \text{und} \quad n \geq 0. \quad (5.64)$$

Die empirisch anzupassenden und $\eta_N(a)$ ausreichend approximierenden Koeffizienten c_n ergeben sich zu

$$c_0 = 2.27, \quad c_1 = 0.12, \quad c_2 = 0.98, \quad c_3 = 2.61, \quad c_4 = 4.17, \quad c_5 = 1.74. \quad (5.65)$$

Nichtsdestoweniger gehorcht $\Delta\kappa_N$ nach wie vor einer exakten Linearität in der Ringzahl T_N . Abb. 5.16 vermittelt einen graphischen Eindruck des Konversionsparameters $\eta_N(a)$. Demnach dürfte $\eta_N(a) \sim 3$ als universeller und im Regelfall hinreichend genauer Richtwert

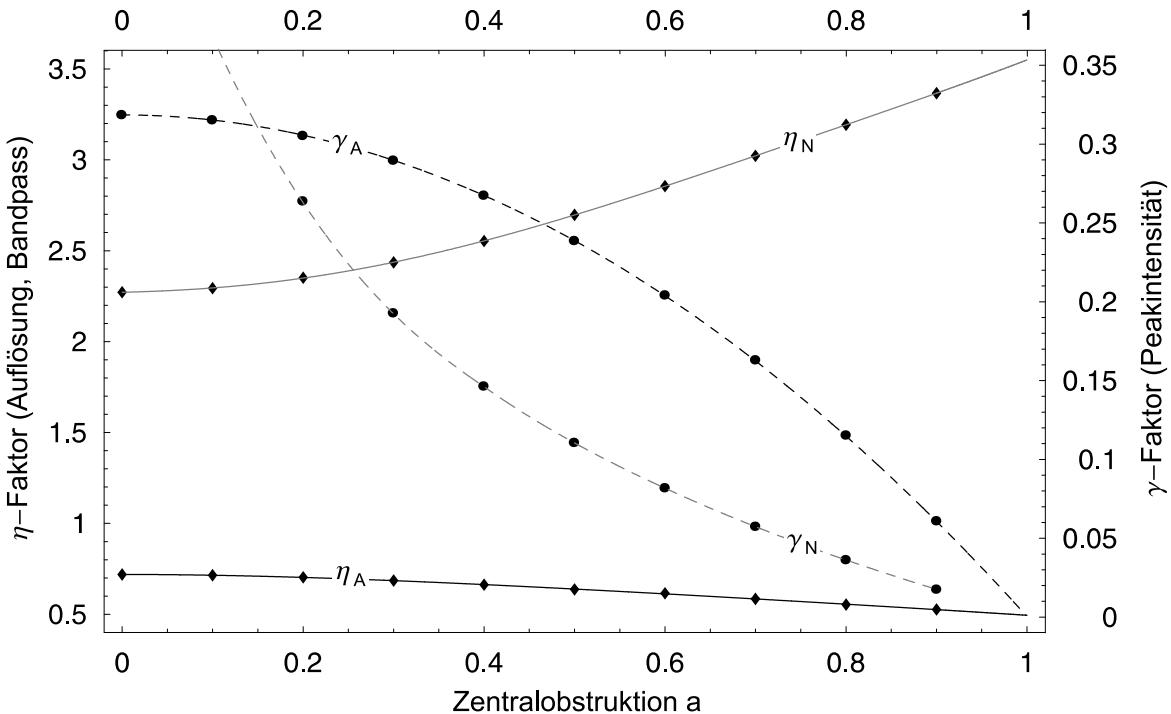


Abbildung 5.16: Konversion zwischen kohärenter und segmentierter Apertur. Spektrale und Winkelauflösung segmentierter Objektive lassen sich ebenso wie die Peakintensität mit Hilfe der von a abhängigen, numerisch ermittelten Konversionsparameter aus den entsprechenden Werten des kohärenten Analogons berechnen.

anzusehen sein. Während also Gl. 5.60 die einfache Berechnung der Winkelauflösung eines beliebigen N-segmentierten Objektivs erlaubt, genügt dessen spektraler Bandpass der nahezu trivialen Relation

$$\left(\frac{\Delta E}{E} \right)_{ink,N} = T_N \left(\frac{\Delta E}{E} \right)_{koh,N}. \quad (5.66)$$

Offenbar wird die bislang benutzte Fouriertransformation der axialen Intensitätsverteilung nicht mehr gerecht, vielmehr ist wieder das allgemeine Beugungsintegral 2.22 oder ein spezielles Derivat in Verbindung mit der inkohärenten Superposition nach Gl. 5.53 heranzuziehen. Es gilt also im A- wie N-segmentierten Fall

$$\tilde{I}(\zeta) = \sum_{k=1}^T \sum_{j=1}^{s_k} \tilde{I}_{k,j}^{(seg)}(\zeta), \quad (5.67)$$

wobei $\tilde{I}_{k,j}^{(seg)}(\zeta)$ nun die aus Gl. 2.22 abgeleiteten *axialen* Intensitätsbeiträge der einzelnen Segmente im Fokus beschreibt. Wie sich zeigt, gilt nämlich $\tilde{I}_{k,j}^{(seg)}(\zeta) = f(N_{seg}) \forall k, j$ ein und derselben Apertur. Mit $\vec{r} = z\vec{e}_z$ reduziert sich Gl. 2.22 auf

$$u_{k,j} = (\vec{r}) = i \frac{|\vec{k}|}{2\pi z} e^{i|\vec{k}|z} \int_{\theta_{k,j-1}}^{\theta_{k,j}} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \tilde{u}_0(\sigma) e^{-i\frac{|\vec{k}|}{2z}\sigma^2} \sigma d\sigma d\theta, \quad (5.68)$$

wenn zur Unterscheidung vom Ringindex k der Betrag $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ des Wellenvektors benutzt wird. Die entsprechenden Amplituden $\tilde{u}_0(\sigma)$ der diffraktiven bzw. Hybridlinse eingesetzt, erweist sich unter Vernachlässigung der Absorption die axiale Verteilung

$$\tilde{I}_{k,j}^{(seg)}(\zeta) \propto \left(\frac{\Delta\theta_k}{2\zeta} \right)^2 (\gamma N_{seg}(k))^2 \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} \gamma N_{seg}(k) \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) \right)}{\frac{\pi}{2} \gamma N_{seg}(k) \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right)} \right)^2 \quad \text{mit} \quad \gamma \in \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\} \quad (5.69)$$

als von der effektiven Zonenzahl $N_{seg}(k)$ pro Segment determiniert. Der Vorfaktor γ beträgt im Fall der Fresnel-Linse 1 und $\frac{1}{2}$ beim Achromaten. Die axiale Wirkung eines einzelnen Segments entspricht somit der einer kohärent operierenden Linse mit N_{seg} Zonen etwa nach Gl. 3.22. Die sich in $\tilde{I}_{k,j}^{(seg)}(\zeta)$ widerspiegelnde fokale Schärfentiefe liefert denn auch mit

$$\left(\frac{\Delta E}{E} \right)_{ink,N}^{(diff.r.)} = \frac{1}{N_{seg}} \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\Delta E}{E} \right)_{ink,N}^{(achro.)} = \frac{2}{\sqrt{N_{seg}}} \quad (5.70)$$

den Bandpass im N-segmentierten Fall und damit direkt Gl. 5.66.

Etwas komplexer gestaltet sich die Bestimmung der axialen Intensitätsverteilung im Fokus der A-segmentierten Variante. Analog zur Auflösung des N-segmentierten Modells

führt der Weg über die Addition der gewichteten Verteilungen. Bezeichnet Δn_0 die Zonenzahl der Segmente des innersten Rings mit $k = 1$, so lautet die Gesamtintensität

$$\tilde{I}_A(\zeta) = \frac{\sum_{k=[aT_A]+1}^{T_A} \frac{(1+\zeta)^2}{[(2k-1)\pi]} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\zeta} (2k-1)\Delta n_0\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\zeta}\right)} \right)^2}{\sum_{k=[aT_A]+1}^{T_A} \frac{(2k-1)^2}{[(2k-1)\pi]}}. \quad (5.71)$$

Erneut vereinfacht die spezielle Wahl der Obstruktion a die Formel 5.71, so dass sich mit

$$a = \sqrt{\frac{k_{obs}}{T_A}} \quad \text{mit} \quad k_{obs} \in \mathbb{N}_0 \quad (5.72)$$

als normierte Intensitätsverteilung der noch von der Zonenzahl Δn_0 abhängige Ausdruck

$$\tilde{I}_A(\zeta) = \frac{1}{(1-a^2) T_A^2 \Delta n_0^2} \sum_{k=aT_A+1}^{T_A} \frac{(1+\zeta)^2}{2k-1} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\zeta} (2k-1)\Delta n_0\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\zeta}\right)} \right)^2. \quad (5.73)$$

ergibt. Der spektrale Bandpass ist numerisch und quasi manuell zu ermitteln. Als Kriterium dient die durch einen Intensitätsabfall auf ca. 80% des Maximums charakterisierte Schärfentiefe des kohärenten Objektivs. Eine solche, in den optisch-geometrischen Kenndaten wiederum analoge Apertur bildet denn auch die Referenz,

$$I_{koh,A}(\zeta) = \left(\frac{1}{\Delta n_0 T_A^2} \right)^2 \left((1+\zeta) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\zeta} \Delta n_0 T_A^2\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\zeta}\right)} \right)^2, \quad (5.74)$$

deren Intensitätsverteilung für sich genommen ebenfalls von Δn_0 abhängt, im *Verhältnis* zur inkohärenten nach Gl. 5.73 jedoch erwartungsgemäß irrelevant wird, da beide Varianten aus $N = \Delta n_0 T_A^2$ Zonen bestehen. Das Ergebnis der numerischen Auswertung approximiert wie schon in Gl. 5.64 eine Potenzreihe

$$\left(\frac{\Delta E}{E} \right)_{ink,A} = \eta_A(a) T_A \left(\frac{\Delta E}{E} \right)_{koh,A} \quad \text{mit} \quad \eta_A(a) = \sum_n s_n a^n \quad \text{und} \quad n \geq 0. \quad (5.75)$$

Während demnach auch der Bandpass des A-segmentierten Modells proportional mit T_A zunimmt, ergeben sich die empirisch anzupassenden Koeffizienten s_n zu

$$s_0 = 2.27, \quad s_1 = 0.12, \quad s_2 = 0.98, \quad s_3 = 2.61, \quad s_4 = 4.17. \quad (5.76)$$

Abb. 5.16 stellt diesen Konversionsparameter $\eta_A(a)$ graphisch dar – als grober, von a unabhängiger Richtwert mag somit $\langle \eta_A \rangle_a \sim \frac{2}{3}$ gelten.

In Abb. 5.12 wurden zwei Exemplare segmentierter Objektive gegenüber gestellt, die dieselbe Winkelauflösung erreichen. Bei gleichen geometrisch-optischen Parametern bedarf es dazu einer speziellen Relation zwischen den Ringzahlen T_A und T_N . Offenbar ergibt sich

diese direkt aus den Gln. 5.64 und 5.60. Stimmen sowohl inkohärente als auch kohärente Auflösung überein, folgt

$$\sqrt{\pi} T_A = \eta_N(a) T_N \rightarrow T_A = \frac{\eta_N(a)}{\sqrt{\pi}} T_N. \quad (5.77)$$

In Abb. 5.17 wurde Gl. 5.77 benutzt, um die Punktbildfunktion der beiden Modelle jeweils für geringe und hohe Obstruktion aufzutragen. Die Normierung der Funktionen unterliegt

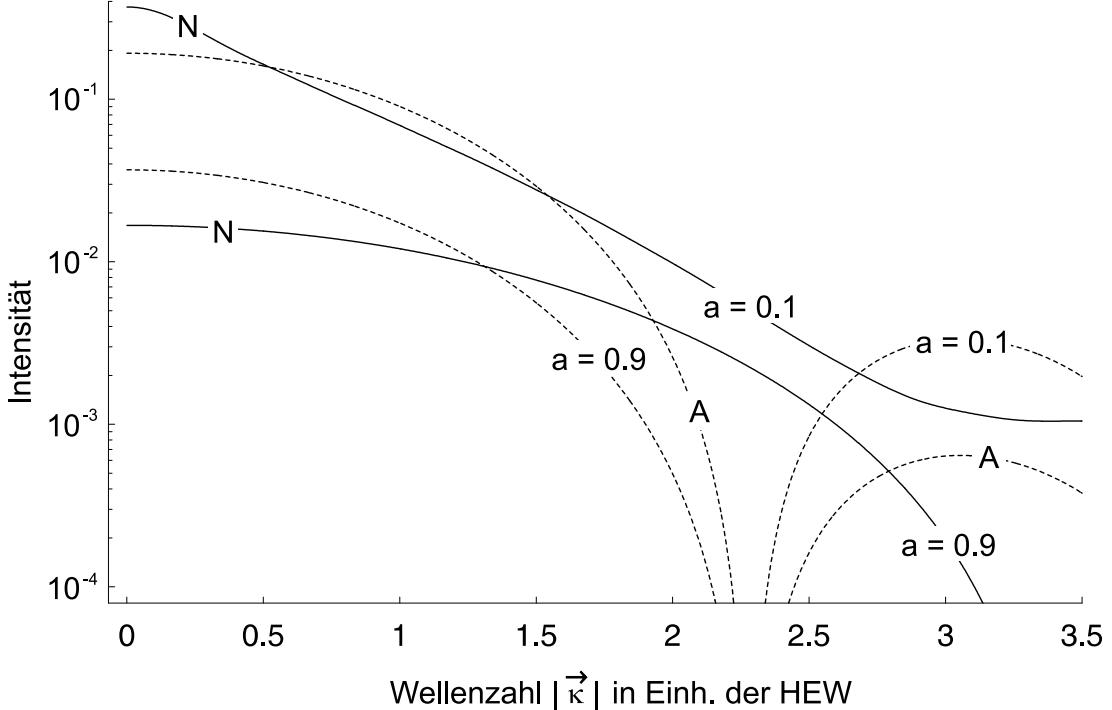


Abbildung 5.17: Modell-PSF der segmentierten Apertur. Der HEW-Radius nimmt nur im Fall der N-Segmentierung mit der Zentralobstruktion a zu (durchgezogene Graphen), während die Winkelauflösung des A-segmentierten Objektivs nicht vom Abdeckungsverhältnis abhängt (strichliert). Allen Graphen liegt das gleiche Objektiv fester Brennweite und Größe zugrunde. Für $a \rightarrow 0$ weisen beide Varianten die gleiche Winkelauflösung auf.

der Forderung, dass die Gesamtleistung in der Fokalebene 1 beträgt – einer Forderung, der die korrekte Wahl der Proportionalitätsfaktoren Rechnung trägt. Die auf den Idealwert $I_{0,koh} = \pi \Delta n_0 T_A^2$ normierte Peakintensität lautet

$$\tilde{I}_{0,A} = \left(\frac{1}{T_A} \right)^2 \sum_{k=[aT_A]+1}^{T_A} \frac{(2k-1)^2}{[(2k-1)\pi]} \approx \frac{1}{\pi} (1-a^2) \left(\frac{1}{T_A} \right)^2 \quad (5.78)$$

bei A-segmentierter Bauweise, wie sich unter Berücksichtigung der Segmentzahl $\#(\text{Seg.})_{k,A}$ pro Ring verifizieren lässt. Der Gl. 5.78 entspricht die Konversionsrelation

$$\tilde{I}_{0,A} = \gamma_A(a) \left(\frac{1}{T_A} \right)^2 \tilde{I}_{0,koh} \quad \text{mit} \quad \gamma_A(a) \approx \frac{1}{\pi} (1-a^2) \quad (5.79)$$

die ebenfalls in Abb. 5.16 dargestellt ist. Gl. 5.78 steht im Fall der N-segmentierten Version

$$\tilde{I}_{0,N} = \left(\frac{1}{T_N} \right)^2 \sum_{k=[a^2 T_N] + 1}^{T_N} \left[\pi \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}} \right]^{-1} \quad (5.80)$$

entgegen. Auf eine Näherung wird verzichtet, da eine solche erst für $k \gg 1$ akzeptable Resultate liefert. Mit $\gamma_N(a)$ als Konversionsfaktor zwischen inkohärenter und kohärenter Peakintensität gilt nun

$$\tilde{I}_{0,N} = \gamma_N(a) \left(\frac{1}{T_N} \right)^2 \tilde{I}_{0,koh} \quad \text{mit} \quad \gamma_N(a) \approx \sum_n w_n a^n \quad \text{und} \quad n \geq -1. \quad (5.81)$$

Die Peakintensität des N-segmentierten Modells fällt somit ebenfalls invers proportional mit T_N^2 , wobei sich die empirisch anzupassenden Koeffizienten w_n annähernd zu

$$w_{-1} = 1.35 \times 10^{-2}, \quad w_0 = 2.85 \times 10^{-1}, \quad w_1 = 5.15 \times 10^{-1}, \quad w_2 = 2.25 \times 10^{-1}. \quad (5.82)$$

ergeben. Abb. 5.16 stellt diesen Konversionsparameter $\gamma_N(a)$ graphisch dar – er variiert somit etwa im Intervall $1 \lesssim \gamma_N(a) \lesssim 3$.

Die abgeleiteten Relationen gestatten die Berechnung der PSF eines segmentierten Objektivs, speziell genügen die in Abb. 5.17 eingetragenen Beugungsbilder der A-Variante

$$\tilde{I}_A(\kappa) = \frac{\gamma_A(a)}{\eta_N^2(a)} \pi \left(\frac{2J_1\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\kappa\right)}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\kappa} \right)^2. \quad (5.83)$$

Erwartungsgemäß beeinflusst der Obstruktionsparameter a lediglich die Normierung, nicht jedoch die Auflösung. Anders die PSF der N-segmentierten Version:

$$\tilde{I}_N(\kappa) = \frac{\gamma_N(a)}{\sum_{k=[a^2 T_N] + 1}^{T_N} \mathcal{F}_k} \sum_{k=[a^2 T_N] + 1}^{T_N} \mathcal{F}_k \left(\frac{2J_1(\mathcal{G}_k(\kappa))}{\mathcal{G}_k(\kappa)} \right)^2 \quad (5.84)$$

weist für $a \rightarrow 0$ die gleiche Winkelauflösung wie das Punktbild 5.83 des A-Modells auf, wobei zur Abkürzung der Term

$$\mathcal{F}_k \equiv \left[\pi \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}} \right] \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1} \right)^4 \approx \pi \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1} \right)^2 \quad (5.85)$$

eingeführt wurde. Die Funktion $\mathcal{G}_k(\kappa)$ erfüllt besagte Forderung an die Auflösung, wenn

$$\mathcal{G}_k(\kappa) \equiv \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}}{\sqrt{\pi}} \eta_N(0) \sqrt{\frac{T_N}{\pi}} \kappa. \quad (5.86)$$

Offenbar bewirkt das Konstruktionsschema des N-Modells eine gegenüber der A-Version erhöhte Peak-Intensität, solange $a \ll 1$. Ringaperturen mit $a \lesssim 1$ fallen hingegen im

Zentrum der PSF hinter das Analogon der A-segmentierten Variante zurück. Den Punktbildern ist bekanntlich durch einfache Fourier-Transformation die MTF zu entnehmen, als quantitatives Maß des Kontrastes. Mit

$$M(\omega) = 2\pi \int_0^\infty \tilde{I}_N(\kappa) J_0(2\pi\omega\kappa) \kappa \, dk \quad (5.87)$$

ergeben sich unmittelbar die in Abb. 5.18 dargestellten Funktionen. Man entnimmt den

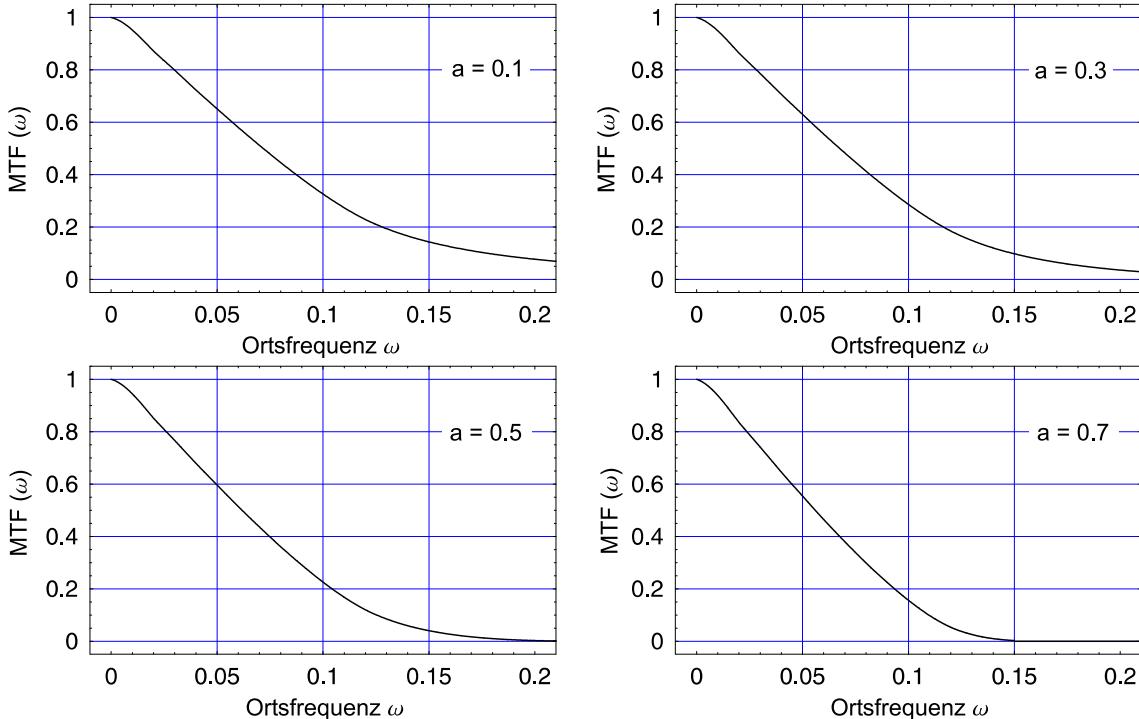


Abbildung 5.18: *MTF der N-segmentierten Apertur. Der normierte Kontrast im Fall konstanter Zonenzahl N_{seg} hängt vom Obstruktionsverhältnis a ab. Mit zunehmender Abdeckung werden hohe Ortsfrequenzen immer schlechter übertragen.*

Graphen die mit wachsender Obstruktion abnehmende Grenzfrequenz, bei der $M(\omega) \approx 0$ die kleinsten noch auflösbaren Strukturen markiert.

Während der elementaren PSF der A-segmentierten Version also eine verhältnismäßig komplexe Beugungsstruktur der N-Variante gegenübersteht, verhalten sich die beiden Modelle hinsichtlich ihrer axialen Intensitätsverteilung im Fokus quasi komplementär. Alternativ zur übereinstimmenden Winkelauflösung gelingt es, beiden Varianten die gleiche Schärfentiefe und damit Bandbreite zuzuweisen.

$$\tilde{I}_{0,A}(\zeta) = \gamma_A(a) (\eta_A(0))^2 \frac{\sum_{k=\lceil a \frac{T_N}{\eta_A(0)} \rceil + 1}^{\lceil \frac{T_N}{\eta_A(0)} \rceil} \mathcal{F}_k \left((1 + \zeta) \frac{\sin(\frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\zeta} (2k-1)\mathcal{G})}{\cos(\frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\zeta})} \right)^2}{\sum_{k=\lceil a \frac{T_N}{\eta_A(0)} \rceil + 1}^{\lceil \frac{T_N}{\eta_A(0)} \rceil} \mathcal{F}_k (2k-1)^2 \mathcal{G}^2} \quad (5.88)$$

beschreibt die fokale Intensität des A-Modells auf der optischen Achse, wobei diesmal

$$\mathcal{F}_k \equiv \frac{1}{[(2k-1)\pi]} \quad \text{und} \quad \mathcal{G} \equiv [\Delta n_0 (\eta_A(0))^2] \frac{1}{T_N}. \quad (5.89)$$

Für diverse $0 \leq a \leq 1$ ist Gl. 5.88 in Abb. 5.19 dargestellt. Erwartungsgemäß treten die

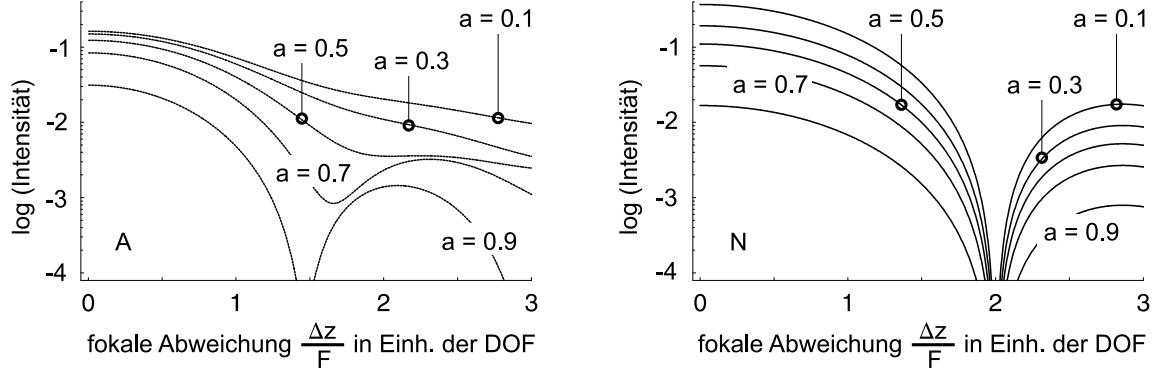


Abbildung 5.19: Axiale Intensitätsverteilung segmentierter Objektive, links im Fall der A-segmentierten Apertur (A), rechts unter Annahme konstanter Segment-Zonenanzahl (N). Beide Varianten liegen die gleiche Apertur fixer Brennweite und Größe zugrunde. Für $a \rightarrow 0$ weisen beide Versionen die gleiche Feldtiefe (DOF) auf.

typischen Beugungsminima erst bei ausgeprägter Zentralabdeckung $a \lesssim 1$ hervor. Die spezielle Wahl der Faktoren \mathcal{F}_k und \mathcal{G} gewährleistet, dass die auf $\approx 80\%$ der Maximalintensität bezogene Schärfentiefe für $a \rightarrow 0$ mit jener der N-segmentierten Apertur übereinstimmt,

$$\tilde{I}_{0,N}(\zeta) = \frac{\gamma_N(a)}{(\Delta n_0)^2} \left((1 + \zeta) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\zeta} \Delta n_0\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\zeta}\right)} \right)^2. \quad (5.90)$$

Es sei bemerkt, dass sich Winkelauflösung und Bandpass der beiden Varianten streng genommen jeweils nur exklusiv in Übereinstimmung bringen lassen; nach Gl. 5.66 und Gl. 5.75 ist für äquivalenten Bandpass nämlich

$$\left(\frac{T_A}{T_N}\right)_{\frac{\Delta E}{E}} = \frac{1}{\eta_A(a)} \neq \frac{\eta_N(a)}{\sqrt{\pi}} = \left(\frac{T_A}{T_N}\right)_{\Delta \kappa} \quad (5.91)$$

zu fordern. Die quantitativen Differenzen stellen sich jedoch als gering heraus, wie sich auch aus Abb. 5.16 ablesen lässt. Als wesentlich bedeutsamer erweist sich freilich der eingangs erwähnte zusätzliche Freiheitsgrad in der Lichtstärke, den die Aufteilung in inkohärente Parzellen mit sich bringt. Mit vorstehend abgeleiteten Relationen ergibt sich für die Lichtstärke eines *diffraktiven* Objektivs

$$A_{eff} \times \Delta E = \pi \eta_A(a) T_A hc F \quad \text{bzw.} \quad A_{eff} \times \Delta E = \pi T_N hc F, \quad (5.92)$$

wiederum mit den Naturkonstanten h und c . Das Hybrid-Profil führt bekanntlich die Verstärkung V als weiteren Parameter ein,

$$A_{eff} \times \Delta E = \pi \frac{V}{2} \eta_A(a) T_A hc F \quad \text{bzw.} \quad A_{eff} \times \Delta E = \pi \frac{V}{2} T_N hc F. \quad (5.93)$$

Somit stehen maximal drei prinzipiell voneinander unabhängige Dimensionen zur Verfügung, um die Lichtstärke zu optimieren. Abb. 5.20 stellt diesen Sachverhalt schematisch dar. Mit der Entscheidung für eine stückweise zusammengesetzte Apertur geht die Not-

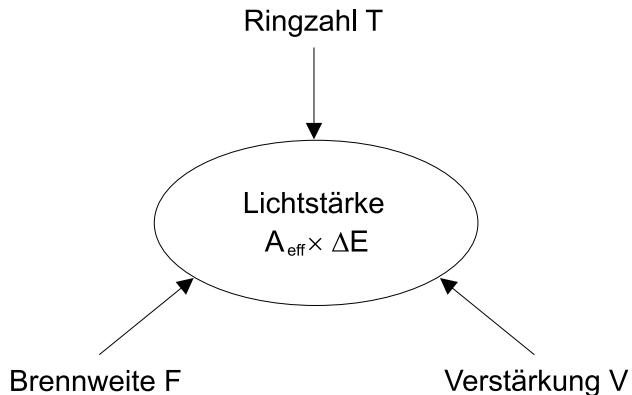


Abbildung 5.20: Einflussgrößen auf die Lichtstärke eines Röntgenobjektivs. Mit zunehmender Komplexität der Optik steigt die Zahl der die Lichtstärke beeinflussenden Freiheitsgrade auf maximal 3 unabhängige, multiplikativ in $A_{eff} \times \Delta E$ eingehende Parameter.

wendigkeit geeigneter Stützstreben und -ringe einher, die sowohl Sammelfläche und Winkelauflösung, als auch Zonenzahl und Bandpass negativ beeinflussen. Bedeckt das mechanische Stützgitter einen realistisch wohl zwischen $\sim (10 - 20)\%$ anzusiedelnden Anteil Ω_S an der Gesamtfläche, so degradiert die Winkelauflösung offenbar um einen Faktor

$$\frac{\Delta \epsilon(\Omega_S)}{\Delta \epsilon_{opt}} \approx (1 - \Omega_S)^{-1}, \quad \text{während} \quad \frac{I_0(\Omega_S)}{I_{0,opt}} \approx (1 - \Omega_S)^2 \quad (5.94)$$

die verminderte Peakintensität beschreibt.

Den Weg der Aufteilung nach gleichen Flächen oder konstanter Zonenzahl zu wählen, bleibt sich letztendlich gleich – aus physikalischer Sicht, vermögen doch beide hinsichtlich Winkelauflösung, Bandpass und Lichtstärke nahezu dieselben Resultate zu liefern. Der einen Version die andere vorzuziehen, mag daher vornehmlich praktischen Gründen erwachsen: Der A-segmentierten Apertur wird in erster Linie die vergleichsweise moderate Zahl an Parzellen anzurechnen sein, während für die N-segmentierte die bei Hybrid-Linsen günstige Konstanz der Profildicke zu Buche steht. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird denn auch stets letztere Bauweise zugrunde gelegt – freilich weniger technisch, sondern vielmehr mathematisch motiviert, da sich Segmente konstanter Zonenzahl N_{seg} analytisch besonders einfach handhaben lassen. Auch wird weiterhin von jedweder technischen Komplikation in Form von Stützstreben etc. abgesehen, um dem Ideal des mathematisch abstrahierten Modells so weit als möglich gerecht zu werden.

5.3 Diffraktiv-segmentierte Monoband-Objektive

Aufgrund diverser, physikalischer wie technischer Argumente kann die Entscheidung für ein elementar diffraktives Objektiv fallen. Zum einen unterliegen Zonenplatten, Fresnel-Linsen und deren Modifikationen anders als Hybridprofile keiner Einschränkung auf ein diskretes Energiespektrum; um ein solches im Kontinuum des beobachteten Strahlungsflusses zu registrieren, genügt die Verstimmung der Fokallänge gemäß $F \propto E$. Zum anderen stellen zuvorderst binäre, aber auch mehrstufig das kinoforme Ideal approximierende Interferenzgitter eine konstruktiv besonders einfache Form transmissiver Röntgenoptik dar. Stehen nur beschränkte technologische wie finanzielle Mittel zur Verfügung, bietet sich mit dem „Photonensieb“ (PS) eine denkbare Alternative zur hoch effizienten Fresnel-Apertur. Ursprünglich von [21] zur hochauflösenden Mikroskopie im Synchrotron-Strahl entwickelt, sind die offenen und z.T. auch die opaken Zonen einer binären ZP durch eine Vielzahl winziger kreisrunder Löcher ersetzt, die das radiale Transmissionsprofil der ZP approximieren. Die linke Teilgrafik der Abb. 5.21 zeigt einen von [21] vorgestellten Prototypen. Wenngleich in

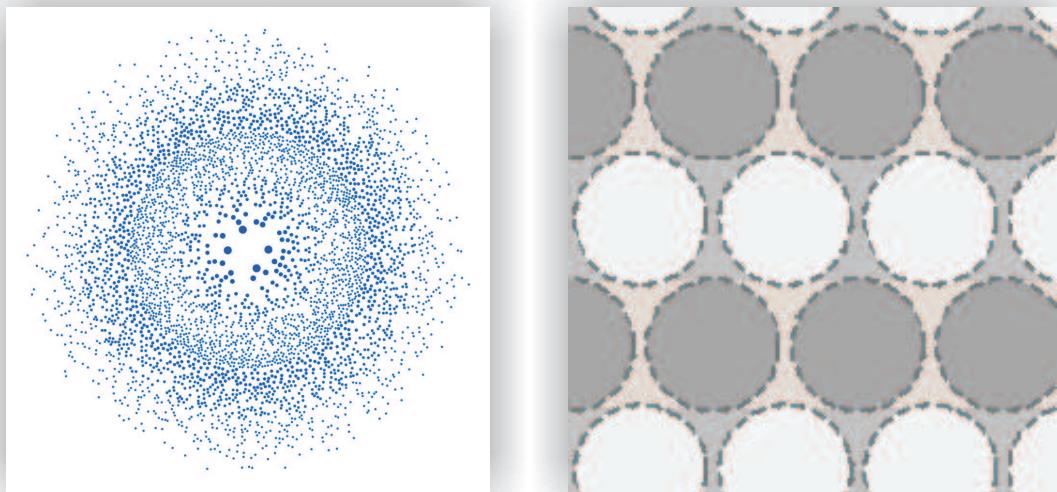


Abbildung 5.21: *Lochmasken-Struktur im „Photonensieb“.* Das Original nach [21] approximiert die Zonen einer binären ZP durch Löcher, wobei deren günstig gewählte Größe und Verteilung die Bildqualität verbessern (links). Der rechts dargestellte Ausschnitt einer effizienzoptimierten Variante besteht aus offenen und phasenversetzenden Löchern.

[21] der optimierten Lateral-Auflösung und Bildqualität durch geschickte Dimensionierung und Positionierung der Löcher zugearbeitet wird, erscheint im Rahmen der hier diskutierten Aufgabenstellung das Konzept des „Photonensiebes“ primär als Möglichkeit, großflächige Zonenplatten ohne besonderen Aufwand mit der erforderlichen Präzision herzustellen. Wir leiten nun die allgemeine Amplitudenfunktion dieser Lochmaske als Grundlage weiterer Kalkulationen zu PSF, DOF etc. her. Die Koordinaten des m -ten Lochmittelpunktes bzgl. des im Zentrum der ZP bzw. des PS liegenden *globalen* Koordinaten-Ursprungs seien

vektoriell mit \vec{b}_m bezeichnet, die *lokalen* Koordinaten innerhalb des Loches mit $\vec{\tau}_m$. Der gesamte Ortsvektor $\vec{\sigma}_m \equiv \vec{b}_m - \vec{\tau}_m$ beschreibt dann die Lage eines Punktes innerhalb des m -ten Loches mit Radius a_m . Die Transmission ergibt sich formal zu

$$T(\vec{\sigma}) = \sum_{m=1}^M \Pi \left(\frac{1}{a_m} |\vec{\sigma} - \vec{b}_m| \right) \quad \text{mit} \quad \Pi(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x > 1 \end{cases}. \quad (5.95)$$

Um auf deren Grundlage die Intensität im Punkt $\vec{r} = (\vec{\rho}, z)$ zu ermitteln, bedient man sich zweckmäßig des paraxialen Beugungsintegrals gemäß Gl. 2.22, setzt darin wieder $z_0 = 0$, schreibt die Eingangsamplitude als $u_0(\vec{\sigma}) = \tilde{u}_0 T(\vec{\sigma})$ und gelangt so zur Amplitude

$$E(\vec{r}) = \frac{ik}{2\pi z} e^{ik(z - \frac{1}{2z} |\vec{\rho}|^2)} \int_A \tilde{u}_0 T(\vec{\sigma}) e^{-i\frac{k}{z} (\frac{1}{2} |\vec{\sigma}|^2 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\rho})} d^2\sigma, \quad (5.96)$$

wobei sich die Integration über die gesamte Apertur der Fläche A , d.h. alle Löcher erstreckt. Im Verlauf der durch eine Re-Substitution $\vec{\sigma}_m \rightarrow \vec{b}_m - \vec{\tau}_m$ zu bewerkstelligenden Berechnung ist zu berücksichtigen, dass in guter Näherung $e^{-i\frac{k}{2z} |\vec{\tau}_m|^2} \approx 1$ gilt – zumindest solange ein Loch in erster Beugungsordnung nur eine Zone überdeckt. Das vom Photonensieb im Bildraum erzeugte Interferenzmuster entsteht dann als kohärente Superposition der in Fraunhofer'scher *Fernfeldnäherung* zu beschreibenden Amplitudenbeiträge der insgesamt M Löcher. Schlussendlich schreibt sich die Intensität $I_{PS}(\vec{r})$ mit $\tilde{u}_0 = 1$ als

$$I_{PS}(\vec{r}) = \left(\frac{k}{z} \right)^2 \left| \sum_{m=1}^M e^{-i\frac{k}{z} (\frac{1}{2} |\vec{b}_m|^2 - \vec{b}_m \cdot \vec{\rho})} a_m^2 \frac{J_1 \left(\frac{k}{z} |\vec{b}_m - \vec{\rho}| a_m \right)}{\frac{k}{z} |\vec{b}_m - \vec{\rho}| a_m} \right|^2. \quad (5.97)$$

Insbesondere zur Berechnung der (Peak-)Effizienz in den diversen Beugungsordnungen lässt sich Gl. 5.97 weiter vereinfachen. Welche Anteile in die jeweiligen Ordnungen entfallen, wird offenbar von Lage \vec{b}_m und Größe a_m der Bohrungen bestimmt. Um deren Einfluss auf den Wirkungsgrad zu ermitteln, sei exemplarisch der Beitrag der n -ten Zone mit M_n Löchern betrachtet. Im Fokus $\vec{r} = (0, 0, F)$ vereinfacht sich deren partielle Intensität zu

$$I_{PS}^{(n)}(z = F) = \left(M_n \frac{a_n}{b_n} J_1 \left(\frac{k}{F} a_n b_n \right) \right)^2 = \left(\frac{M_n}{4n} \zeta_n J_1 \left(\frac{\pi}{2} \zeta_n \right) \right)^2, \quad (5.98)$$

wobei a_n für den konstanten Lochradius in der n -ten Zone steht und b_n deren mittleren Radius bezeichnet, $b_n = \frac{r_n + r_{n-1}}{2}$. In der letzten Gleichung wurde unter Verwendung der Zonenbreite $\Delta r_n = \frac{r_n - r_{n-1}}{2} \approx \frac{r_n}{2n}$ die zu ihr relative Lochgröße $\zeta_n \equiv \left(\frac{d}{w} \right)_n = 2 \frac{a_n}{\Delta r_n}$ im Einklang mit der in [21] verwendeten Notation eingeführt. Nachfolgend werden nun zwei Möglichkeiten unterschieden, um $I_{PS}^{(n)}(z = F)$ zu optimieren:

- Feste Lochzahl M_n , unabhängig von deren Größe. Diese Situation liegt in [21] vor, ζ_n soll den Amplitudenbeitrag eines *einzelnen Loches* maximieren. Der gesuchte Wert $\zeta_n^{(opt)}$ folgt als Lösung der Relation

$$\frac{4}{\pi \zeta_n} J_1 \left(\frac{\pi}{2} \zeta_n \right) = J_2 \left(\frac{\pi}{2} \zeta_n \right) - J_0 \left(\frac{\pi}{2} \zeta_n \right), \quad (5.99)$$

die ihrerseits aus einer Differentiation von Gl. 5.98 bzgl. ζ_n hervorgeht, in erster Beugungsordnung zu $\zeta_n^{(opt)} \approx 1.53$.

- Variable Lochzahl M_n , die unter Annahme einer zu d_n relativen „Stegbreite“ $\gamma > 0$ zwischen den Löchern einer Zone³ zusammen mit d_n so zu wählen ist, dass der Beitrag der *gesamten Zone* $I_{PS}^{(n)}(z = F)$ maximal wird. Die Lösung ergibt sich nun gemäß

$$\frac{d}{d\zeta_n} \left(\frac{\pi}{1+\gamma} J_1 \left(\frac{\pi}{2} \zeta_n \right) \right) = 0 \rightarrow J_0 \left(\frac{\pi}{2} \zeta_n \right) = J_2 \left(\frac{\pi}{2} \zeta_n \right) \quad (5.100)$$

mit $\zeta_n^{(opt)} \approx 1.17$ als von γ unabhängigem Resultat in erster Beugungsordnung.

Abb. 5.22 illustriert den Verlauf von $I_{PS}^{(n)}(z = F)$ mit ζ_n für mehrere γ -Werte in erster und dritter Ordnung. Gegenüber dem klassischen Ansatz in [21] ist in erster Ordnung für

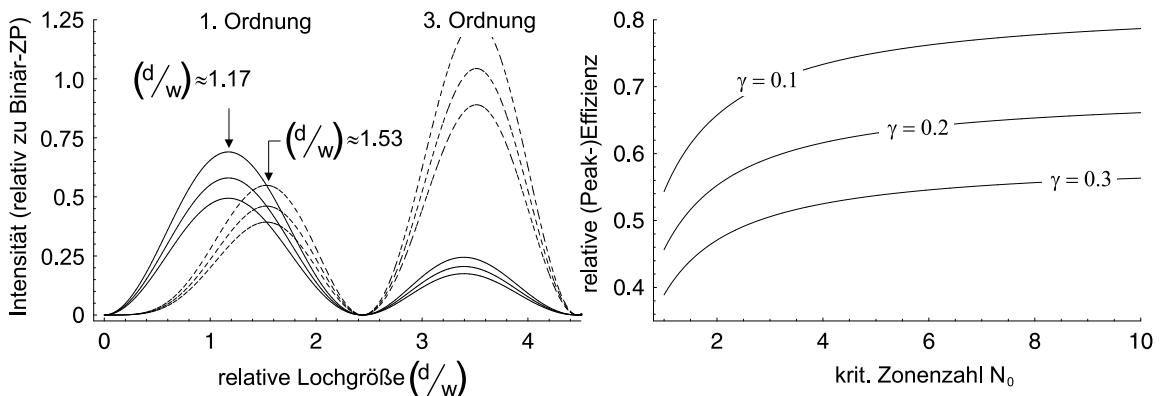


Abbildung 5.22: *Effizienz der Lochmasken-Zonenplatte*. Links ist der optimierte Wirkungsgrad eines binären „Photonensiebes“ eingetragen, rechts der Bruchteil der maximalen Intensität, die ein durch phasenversetzende Löcher verbessertes Modell zu leisten vermag, wenn ein stark absorbierendes Material zur Belegung der π -Zonen verwendet wird. Die Stegbreite γ beträgt typischerweise $\gtrsim 10^{-1}$ und reduziert die Effizienz z.T. beträchtlich.

$\zeta_n^{(opt)} \approx 1.17$ eine Effizienzsteigerung um rund 25% zu erwarten. Werden auch die bislang opaken Zonen mit Löchern belegt, entsteht ein „Phasensieb“ ($PS_{\Delta\phi}$). Abb. 5.21 zeigt rechts ein Beispiel eines solchen dicht mit Bohrungen belegten Modells. Den Ausgangspunkt soll eine Lochmasken-ZP mit $\zeta_n^{(opt)} \approx 1.17$ bilden, wobei die die opaken Zonen approximierenden Bohrungen durch Einsatz eines geeigneten Materials die notwendige Phasendifferenz $\Delta\phi_{PS} \lesssim \pi$ bewirken. Der Beitrag zweier benachbarter Zonen beläuft sich auf

$$I_{PS}(\Delta\phi, \zeta) = \left(\frac{\pi}{1+\gamma} \right)^2 \left| J_1 \left(\frac{\pi}{2} \zeta \right) - e^{-\left(i + \frac{1}{2\pi N_0} \right) \Delta\phi} J_1 \left(\frac{\pi}{2} (2 - \zeta) \right) \right|^2. \quad (5.101)$$

Die die Effizienz optimierende „Phasendicke“ $\Delta\phi_{PS}$ und die *offenen* Lochweiten ζ_{PS} des Phasensiebes bestimmt man sukzessiv durch partielle Differentiation. Es erweist sich, dass

³Realistische Werte für γ , die ausreichende Stabilität gewährleisten, dürften zwischen 0.1 und 0.3 liegen.

der absorptionsabhängige Wert $\Delta\phi_{PS}$ für $N_0 < \infty$ stets etwas kleiner als π ist und ζ_{PS} mit zunehmender Absorption den im Fall $N_0 \rightarrow \infty$ idealen Wert 1 immer deutlicher überschreitet⁴. In der rechten Grafik der Abb. 5.22 wurden die Ergebnisse dieser hier nicht explizit beschriebenen Rechnung benutzt, um die Effizienz eines Phasensiebes bei hoher Absorption zu optimieren. Freilich belaufen sich die Abweichungen in der Lochweite ζ_{PS} selbst für $N_0 \gtrsim 1$ nur auf wenige Prozent und sind somit primär theoretisch relevant. Von Bedeutung sind hingegen die vom Stegparameter γ abhängigen Beugungseffizienzen P_γ erster Ordnung, für ein *binäres* Modell optimierter Leistung gegeben durch

$$P_{0.1} = 7.0\% \quad \text{und} \quad P_{0.2} = 5.9\% \quad \text{und} \quad P_{0.3} = 5.0\%. \quad (5.102)$$

Diese eher moderate Effizienz erfährt durch Hinzunahme phasenmodulierender Bohrungen nach Abb. 5.21 eine deutliche Steigerung,

$$P_{0.1} \leq 27\% \quad \text{und} \quad P_{0.2} \leq 22\% \quad \text{und} \quad P_{0.3} \leq 17\%, \quad (5.103)$$

je nach Güte des verwendeten Materials. Freilich erreichen auch derlei Systeme nicht annähernd den Wirkungsgrad einer Fresnel-Linse, deren theoretisches Optimum von 100% allen folgenden Berechnungen zugrunde gelegt wird. Im Einzelfall sind die angegebenen Werte für Sammelfläche, Lichtstärke etc. mit der entsprechend reduzierten Effizienz des diffraktiven Elements zu multiplizieren.

Neben der Effizienz, Sammelfläche oder allgemein der Lichtstärke eines Objektivs entscheidet die laterale Auflösung in der Fokalebene wesentlich über die Güte einer abbildenden Optik – aus praktischer Sicht wegen ihres Zusammenhangs mit dem unter Annahme einer beschränkten Detektorfläche erzielbaren Gesichtsfeld, unter physikalischem Aspekt hingegen aufgrund ihrer Auswirkungen auf das Signal-Rausch-Verhältnis. Mit

$$2\rho_{PSF} = \Delta\epsilon_{ink} F \quad \text{und} \quad \Delta\epsilon_{ink} = T_N \eta_N(a) \Delta\epsilon_{koh} \quad (5.104)$$

sind laterale und inkohärente Winkelauflösung nach Gl. 5.64 gegeben, wenn von der Wellenzahl κ wieder zur üblichen Notation für die Winkelschärfe übergegangen wird. Nach einigen Umformungen und mit $N_* \equiv N_{seg}$ liefern die Gln. 5.104 die Relation

$$\rho_{PSF} = \frac{\alpha}{2} \eta_N(a) \left(\frac{1}{N_*} \right) R \quad \text{mit} \quad \alpha \equiv 0.535, \quad (5.105)$$

die aus Zentralobstruktion $0 \leq a \leq 1$ und dem Apertur-Radius R denjenigen der Punkt-
bildfunktion ermittelt. Als praktisch bedeutsam erweist sich jedoch vor allem die inverse Proportionalität in der Zonenzahl N_* , als erstem Hinweis auf die überragende Bedeutung dieses möglichst groß zu wählenden Parameters. Abb. 5.23 trägt den Quotienten $\frac{R}{r_{FOV}}$ gegen diese Segment-Zonenzahl N_* auf, wobei mit $r_{FOV} = n_{FOV} \cdot \rho_{PSF}$ und der gewünschten Zahl an Auflösungselementen n_{FOV} der Radius des als kreisförmig angenommenen Detektors bezeichnet ist. Exemplarisch wurden Sichtfelder von 500 und 1000 Auflösungselementen

⁴Ausführliche Erläuterungen zu diesem Optimierungsproblem der Phasen-ZP finden sich z.B. in [23].

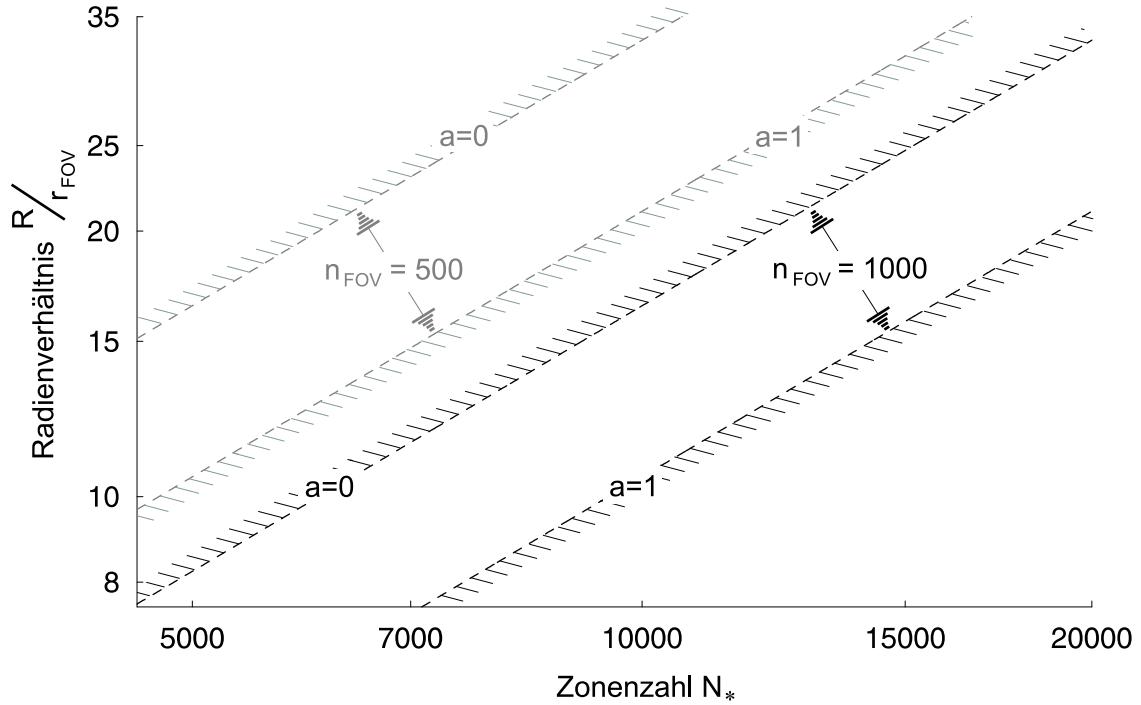


Abbildung 5.23: *Detektorradien diffraktiv-segmentierter Objektive. Das Verhältnis von Apertur- zu Detektor Durchmesser hängt linear von der Zonenzahl N_* ab. Je nach Obstruktion und FOV ergeben sich Quotienten innerhalb der angegebenen Schranken.*

angenommen. Zudem beeinflusst die Obstruktion das laterale Auflösungsvermögen – die mit $a \gtrsim 0$ nahezu volle Apertur ist der ringförmigen nach Möglichkeit vorzuziehen. Eine Einschränkung widerfährt diesem Bestreben, wenn Strahlung in andere Ordnungen als die beobachtete, meist erste Beugungsordnung entfällt. Als kritisch erweisen sich besonders die bei verstimmteten Fresnel-Linsen auftretenden benachbarten Ordnungen, im Regelfall also die nullte und zweite. Um sie abzuschirmen, ist unter Rückgriff auf Gl. 3.84

$$a = 2 \frac{r_{FOV}}{R} \quad \rightarrow \quad a_{min} = \alpha \frac{n_{FOV}}{N_*} \eta_N (a_{min}) \quad (5.106)$$

zu fordern. Die nötige Zentralobstruktion ergibt sich somit aus dem Quotienten $\frac{n_{FOV}}{N_*}$. Umgekehrt ordnet Gl. 5.106 der segmentierten Fresnel-Linse unter Vorgabe von a und N_* ein maximales Gesichtsfeld zu. N -segmentierten Aperturen eine Zentralobstruktion

$$a = \sqrt{\frac{k_{obs}}{T_N}} \quad \text{mit} \quad k_{obs} \in \mathbb{N} \quad (5.107)$$

zu verordnen, erweist sich als natürlich, zweckmäßig und mit $k_{obs} = 1$ zumeist auch als ausreichend. Mit der Ringzahl T_N und insbesondere der Ortsauflösung $\varnothing_{PSF} = 2\rho_{PSF}$ werden zwei weitere Parameter vorgegeben. Der Radius des Objektivs errechnet sich zu

$$R = \frac{2}{\alpha} \rho_{PSF} N_* \eta_N^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{T_N}} \right) \quad \text{mit} \quad k_{obs} = 1. \quad (5.108)$$

Aus den Formeln folgen unmittelbar die Ausdrücke für Detektorradius und Gesichtsfeld zu

$$r_{FOV} = \frac{R}{2\sqrt{T_N}} \quad \text{bzw.} \quad n_{FOV} = \frac{1}{2\sqrt{T_N}} \frac{R}{\rho_{PSF}}. \quad (5.109)$$

Winkelauflösung $\Delta\epsilon$ und Brennweite F skalieren hingegen mit der Energie entsprechend

$$\Delta\epsilon(E) = \alpha \frac{hc}{E} \eta_N \left(\frac{1}{\sqrt{T_N}} \right) \frac{T_N}{R} \quad \text{bzw.} \quad F(E) = \frac{E}{hc} \frac{R^2}{N_\star T_N}. \quad (5.110)$$

Vorrangig fertigungstechnische Interessen dürften beispielsweise Parameter wie minimale Fresnel-Stufenbreite Δr_{min} und gesamte Segmentzahl $\#(\text{Seg.})_N$ bedienen. Mit

$$\Delta r_{min} = \frac{R}{N_\star T_N} \quad \text{bzw.} \quad \#(\text{Seg.})_N = \sum_{k=2}^{T_N} \left[\pi \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}} \right] \quad (5.111)$$

sind schließlich die wesentlichen Kenngrößen des diffraktiven Teleskops aus wenigen Eingangsparametern abgeleitet worden. In Tab. 5.4 werden vorstehende Relationen benutzt, um exemplarisch vier Modelle zu entwickeln, die hinsichtlich ihrer Ortsauflösung, Brennweite und der geforderten Winkelauflösung von $\lesssim 1$ mas bei der Blaze-Energie E_c den Anforderungen an praxistaugliche Systeme genügen sollten. Mit Zonenzahlen N_\star von bis

Ortsauflösung \varnothing_{PSF}	0.5 mm	0.5 mm	1.0 mm	1.0 mm
Brennweite $F(E_c)$	132 km	134 km	267 km	270 km
Winkelauflösung $\Delta\epsilon(E_c)$	0.78 mas	0.77 mas	0.77 mas	0.76 mas
max. Sichtfeld n_{FOV}	1.1×10^3	1.6×10^3	0.8×10^3	1.2×10^3
Zonenzahl N_\star	1×10^4	2×10^4	1×10^4	2×10^4
$\#(\text{Segmentringe}) T_N$	50	100	100	200
Radius R	4.04 m	8.14 m	8.14 m	16.36 m
min. Gitterperiode Δr_{min}	8.08 μm	4.07 μm	8.14 μm	4.09 μm

Tabelle 5.4: Optische Parameter diffraktiver Objektive. Die Datensätze korrespondieren mit den in Abb. 5.24 eingetragenen Leistungskurven und tragen lediglich exemplarischen Charakter. Die Zonenzahlen N_\star wurden unter der Annahme ausreichend trennscharfer Kristallspektrometer gewählt. Die Blaze-Energie E_c beträgt 5 keV.

zu 2×10^4 wird das Leistungsvermögen hochwertiger LiF(200)-Kristalle ausgenutzt, die bis zu ≈ 3 keV herab zu verwenden sind. Zwar nimmt die Trennschärfe von LiF(200) jenseits von ~ 6 keV allmählich auf rund 1.5×10^4 ab, die Einbußen im Winkelauflösungsvermögen werden jedoch via $\Delta\epsilon \propto E^{-1}$ kompensiert. Neben den großen Aperturdurchmessern fallen in Tab. 5.4 besonders die Ringzahlen $T_N \sim 10^2$ auf, die mit Gl. 5.111 zwischen 1.6×10^4 und 2.5×10^5 Segmente hervorbringen. Abgesehen von derlei technologischen Herausforderungen wird als Blaze-Energie $E_c = 5$ keV gewählt, um im Bereich der astrophysikalisch

bedeutenden K_{α} -Linie von Fe bei 6.4 keV ein Maximum an Lichtstärke zu erzielen. Unter Vernachlässigung jedweder Absorption und anderer Verluste durch

$$A_{\text{eff}} \times \Delta E = \left(\frac{\sin \left(\pi \left(1 - \frac{E_c}{E} \right) \right)}{\pi \left(1 - \frac{E_c}{E} \right)} \right)^2 \pi \left(1 - \frac{1}{T_N} \right) R^2 \frac{E}{N_{\star}} \quad (5.112)$$

gegeben, resultieren unter Vorgabe der Daten aus Tab. 5.4 die Kurven nach Abb. 5.24. Wie

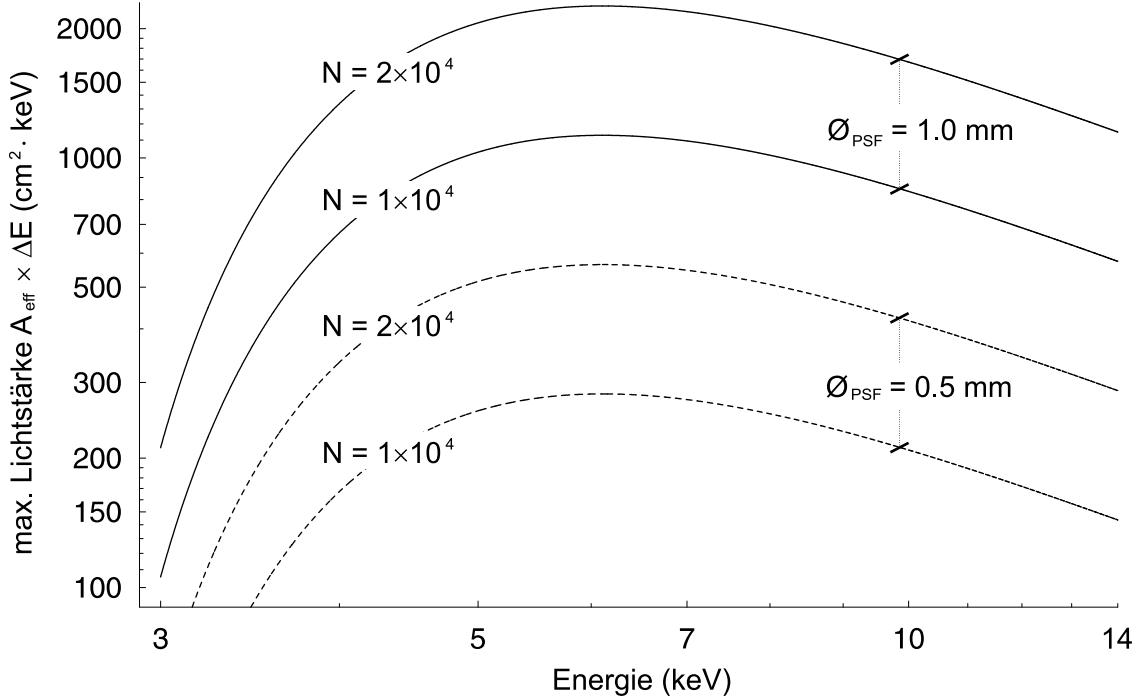


Abbildung 5.24: Beispiele zum Leistungsvermögen diffraktiver Objektive. Alle Modelle erreichen bei $E_c = 5$ keV eine Winkelauflösung von $\lesssim 1$ mas und Brennweiten um $\sim 10^2$ km. Absorptions- und andere Verluste sind nicht berücksichtigt.

bereits erwähnt, liegt den Graphen die Annahme eines perfekten (und perfekt ausgerichteten) Kristalls mit entsprechendem Auflösungsvermögen zugrunde. Vom Ideal der nahezu 100%-igen Peakreflektivität abweichende Exemplare sowie die Zonenzahl N_{\star} unterschreitende Trennschärfe beeinflussen $A_{\text{eff}} \times \Delta E$ negativ wie positiv. Auch idealisiert treten die Konfigurationen nach 5.1 und Abb. 5.1 nicht zum Leistungsvermögen von Chandra oder gar jenem des XMM-Newton in Konkurrenz. Ihre Stärke spielen diffraktive Objektive jedoch aus, sobald der selektiven Beobachtung in scharfen Spektrallinien der Vorzug gegenüber breitbandiger Detektion über mehrere keV gegeben wird. Bezogen auf eine Bandbreite von $\frac{\Delta E}{E} \sim 10^{-4}$, beträgt die verlustfreie Lichtstärke von Chandra und XMM-Newton

$$A_{\text{eff}} \times \Delta E = 0.15 \text{ cm}^2 \text{ keV} \quad \text{bzw.} \quad A_{\text{eff}} \times \Delta E = 1.76 \text{ cm}^2 \text{ keV.} \quad (5.113)$$

Ein realistischer Vergleich wird freilich die Schärfe der Spektrallinie einzubeziehen haben, also das Verhältnis von Äquivalenz- zu FWHM-Breite berücksichtigen.

Neben den vom Detektormodul verursachten Verlusten reduzieren optisch minderwertige, jedoch leicht zu verarbeitende Linsensubstrate die Transmission. Erweisen sich die Anforderungen bei der Produktion filigraner Fresnel-Linsen aus Li oder Be als zu hoch, kann ein Rückgriff auf harte Substanzen wie Si, Ti oder Polycarbonat notwendig werden. Tab. 5.5 gibt einen Überblick zur Beugungseffizienz kinoformer Profile aus Si und Ti im Bereich weniger keV. Mit den nahe 2 bzw. 5 keV auftretenden Absorptionskanten sprechen

$E(\text{keV})$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5
$P_{\text{Si}}(\%)$	60.9	76.3	19.5	33.7	44.7	53.6	60.8	66.7	71.4	75.2	78.4	81.0
$P_{\text{Ti}}(\%)$	19.4	39.1	54.3	64.9	72.3	77.5	81.3	83.9	22.9	37.9	43.7	48.5

Tabelle 5.5: *Fresnel-Beugungseffizienz erster Ordnung für Si und Ti. Die Einbrüche bei $\approx 2 \text{ keV}$ bzw. $\approx 5 \text{ keV}$ beruhen auf dortigen Absorptionskanten. Stützstrukturen, Trägerschichten etc. sind nicht berücksichtigt.*

allerdings zahlreichen Elementen höherer Kernladungszahl eigene Charakteristika gegen ihre vorbehaltlose Verwendung. Elemente wie Al, Ag, Au oder Pt versprechen keine signifikanten Vorteile. Das nach Li hochwertigste Metall sowie der Kunststoff Polycarbonat ($\text{C}_{16}\text{H}_{14}\text{O}_3$) weisen aber im Intervall zwischen 1 und 20 keV, und nach Tab. 5.6 speziell im weichen Röntgenband keinerlei Kanten auf.

$E(\text{keV})$	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5	2.75	3.0	3.25	3.5	3.75
$P_{\text{Be}}(\%)$	82.6	88.2	91.6	93.7	95.2	96.2	96.9	97.5	97.9	98.2	98.5	98.7
$P_{\text{PC}}(\%)$	52.1	63.8	72.0	77.9	82.2	85.4	87.9	89.8	91.3	92.5	93.5	94.3

Tabelle 5.6: *Fresnel-Beugungseffizienz erster Ordnung für Be und Polycarbonat. Jenseits von 4 keV beträgt der Wirkungsgrad nahezu 100%, auf eine Darstellung wurde daher verzichtet. Stützstrukturen, Trägerschichten etc. sind nicht berücksichtigt.*

Bislang wurde stets von einer uniformen Belegung der Parzellen mit auf identische Blaze-Energie E_c ausgelegten Segmenten ausgegangen. Obgleich diese Zuordnung den astronomischen Erfordernissen zumeist genügen dürfte, kann in Einzelfällen eine modifizierte Effizienz $P(E)$ wünschenswert sein. Das diskrete Spektrum der Energiewerte

$$\mathcal{E}_c \equiv \{E_c(n) \mid 1 \leq n \leq Q\} \quad \text{mit} \quad Q \in \mathbb{N} \quad (5.114)$$

beschreibe die Q unterschiedlichen Blaze-Energien der diversen Segmente. Steht q_n für deren Gewichtung, also den Anteil der auf $E_c(n)$ optimierten Segmente an der Gesamtfläche der Apertur, so liefert deren arithmetisches Mittel

$$P_{\text{tot}}(E) = \sum_{n=1}^Q q_n P_n(E) \quad \text{mit} \quad \sum_{n=1}^Q q_n = 1 \quad (5.115)$$

die Beugungseffizienz $P_{tot}(E)$ als gewichtete Summe der Einzelbeiträge $P_n(E)$. Von Einflüssen der Absorption und des i.a. energieabhängigen Bandpasses abgesehen, ist die Effizienz eines auf E_c optimierten Segments zu

$$P_n(E) = \frac{4}{\pi^2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{E_c(n)}{E} \right) \quad \text{bzw.} \quad P_n(E) = \left(\frac{\sin \left(\pi \left(1 - \frac{E_c(n)}{E} \right) \right)}{\pi \left(1 - \frac{E_c(n)}{E} \right)} \right)^2 \quad (5.116)$$

beschrieben, im ersten Term für die Phasen-Zonenplatte mit dem Stufenparameter $L = 2$ nach Gl. 3.72, im zweiten für die hinlänglich bekannte kinoforme Fresnel-Linse. Nun erscheint angesichts der nach vorstehendem Beispiel 5.4 zu erwartenden Ring- und Segmentzahlen ein Übergang von der diskreten Summe zum Integral über eine quasi kontinuierliche Verteilung der Blaze-Energie E_c sinnvoll. Mit einer nun reellen Gewichtsfunktion $f(x)$ und $x \in \mathbb{R}_0^+$ wird der Anteil der auf $E_c(x) = xE_0$ optimierten Segmente bemessen. Analog zu Gl. 5.115 erhält man die Gesamtleistung bei der Energie E zu

$$P_{tot}(E) = \int_{\mathcal{X}} f(x) P_x(E) dx \quad \text{mit} \quad \int_{\mathcal{X}} f(x) dx = 1, \quad (5.117)$$

wenn \mathcal{X} das Integrationsintervall der relativen Energie zwischen $\frac{E_{min}}{E_0}$ und $\frac{E_{max}}{E_0}$ angibt,

$$\mathcal{X} \equiv \{x \mid E_c(x) = xE_0, E_{min} \leq E_c(x) \leq E_{max}\}. \quad (5.118)$$

Der Beugungseffizienz aus den Gln. 5.116 entspricht im Quasi-Kontinuum mit $\psi = \frac{E}{E_0}$

$$P_x(E) = \frac{4}{\pi^2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} x \frac{1}{\psi} \right) \quad \text{bzw.} \quad P_x(E) = \left(\frac{\sin \left(\pi \left(1 - x \frac{1}{\psi} \right) \right)}{\pi \left(1 - x \frac{1}{\psi} \right)} \right)^2. \quad (5.119)$$

In Abb. 5.25 sind die aus einem solchen Quasi-Kontinuum resultierenden Effizienzkurven für ein Intervall $\frac{1}{10}E_0 \leq E_c \leq E_0$ eingetragen. Ihnen liegen Gewichtsfunktionen

$$f(x) \propto \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad f(x) \propto \frac{1}{x} \quad \text{bzw.} \quad f(x) \equiv \delta(x - \hat{x}) \quad (5.120)$$

zugrunde, wobei $f(x)$ alternativ für die in Abb. 5.25 zur Unterscheidung zwischen der die Phasen-ZP bezeichnenden Gewichtung $h(x)$ und der der Fresnel-Linse zugeordneten Funktion $g(x)$ steht. Geeignete Proportionalitätsfaktoren stellen die Normierung nach Gl. 5.117 sicher. Die Blaze-Energie im Fall der δ -Funktionen beträgt mehr oder weniger willkürlich $E_c = \frac{6}{10}E_0$, so dass $\hat{x} = \frac{6}{10}$. Man liest unter anderem ab, dass zugunsten annähernd konstanter und insbesondere signifikanter Effizienz im kritischen Band mit $E \lesssim \frac{1}{3}E_0$ das Fresnel-Profil vorteilhaft mit $g(x) \propto \frac{1}{x}$ zu gewichten ist.

Zum Schluss dieses Abschnitts sei noch auf den Einfluss der Segmentierung auf die Aberrationen der diffraktiven Linse nach Abschn. 3.3 eingegangen. Der mittlere, vom Öffnungsverhältnis f und dem Kippwinkel ϕ abhängige Winkelfehler ergab sich zu

$$\langle \Delta\epsilon \rangle_\theta = \frac{1}{16f^3} \sqrt{1 + 36(f\phi)^2 + 80(f\phi)^4}. \quad (5.121)$$

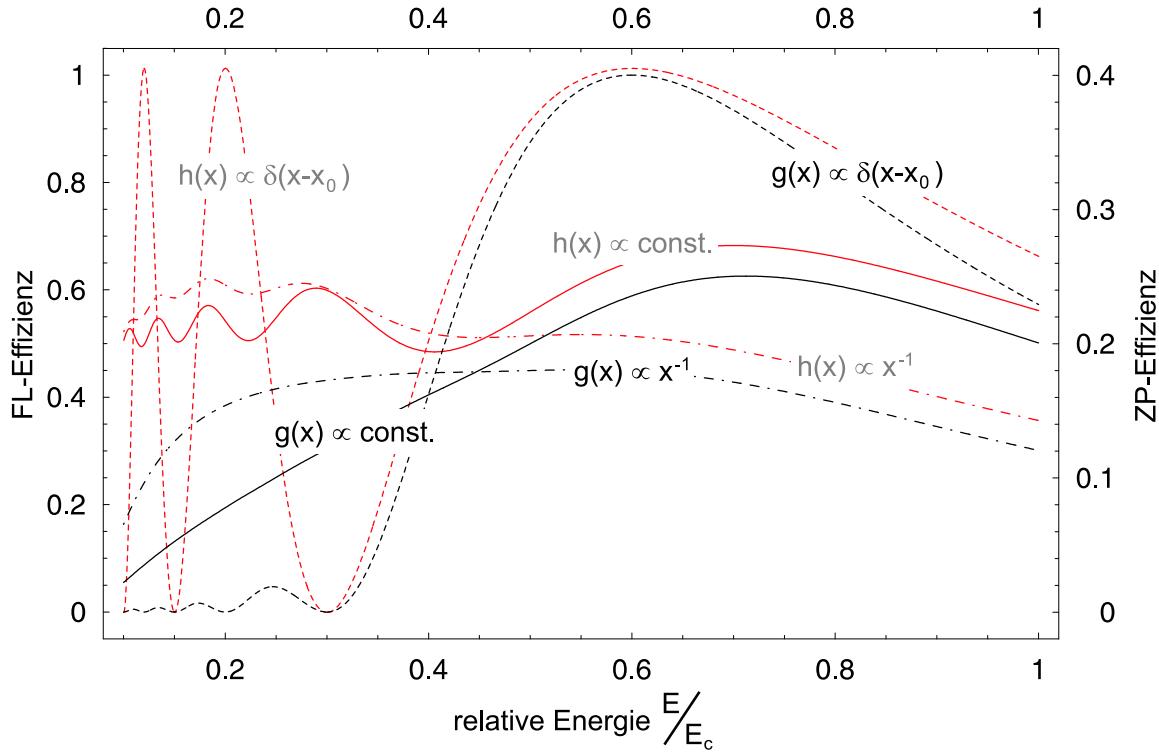


Abbildung 5.25: Breitband-Segmentierung diffraktiver Objektive. Bestehend aus Segmenten unterschiedlicher Blaze-Energie, lässt sich die spektrale Effizienzverteilung den Erfordernissen anpassen und insbesondere ausgleichen. Aus Parzellen der Phasen-ZP zusammengesetzte Modelle sind rot, solche auf (kinoformer) Fresnel-Basis schwarz dargestellt.

Nach den in Anh. A skizzierten Grundlagen der Aberrationstheorie entscheidet die (differentielle) Variation der optischen Wegdifferenz zwischen realer und idealer Wellenfront mit den Aperturkoordinaten über das Ausmaß der zu erwartenden Bildfehler. Da die Segmentierung die Wirkung der diffraktiven Linse auf die Wellenfront durch die Zufallsversetzungen nur lokal, *im Mittel* über zahlreiche Parzellen jedoch nicht ändert, kann $\langle \Delta\epsilon \rangle_\theta$ auch der großflächigen Apertur zugrunde gelegt werden. Damit die Aberrationen in ihrer mittleren Ausdehnung die inkohärente Winkelauflösung $\Delta\epsilon_{ink}$ nicht überschreiten, ist

$$\langle \Delta\epsilon \rangle_\theta \lesssim \eta_N(a) T_N \Delta\epsilon_{koh} = \Delta\epsilon_{ink} \quad \text{mit} \quad \Delta\epsilon_{koh} = \alpha \frac{\lambda}{R} \quad \text{und} \quad \alpha = 0.535 \quad (5.122)$$

zu fordern. Nach wenigen Umformungen führt Gl. 5.122 auf die Abschätzung für N_*

$$N_* \lesssim 8 \eta_N(a) \alpha \frac{f^2}{\sqrt{1 + 36(f\phi)^2 + 80(f\phi)^4}}, \quad (5.123)$$

die offenbar im Fall der sphärischen Aberration mit $\phi = 0$ problemlos erfüllt wird und nach Abschn. 3.3 auch Verkippungen des Objektivs unkritisch toleriert, wobei N_* nun großenordnungsmäßig an die Stelle der Zonenzahl N des kohärenten Analogons tritt.

5.4 Hybrid-segmentierte Monoband-Objektive

Die in Tab. 5.4 präsentierten Modelle reizen das theoretische Potential diffraktiver Objektive unter Vorgabe der Ortsauflösung \mathcal{O}_{PSF} offenbar bereits weitgehend aus. Der Weg zu Systemen signifikant verbesserter Lichtstärke führt indes über Hybrid-Aperturen, basierend auf den Ausführungen in Abschn. 4.1. Deren kohärente, kompakte Bauweise in großflächige, segmentierte Objektive zu überführen, geht nun nicht mehr nur mit einer einfachen Zerlegung der Fresnel-Linse in entsprechende Parzellen einher, sondern wirkt sich grundsätzlich auf die radienabhängige Transmission aus. Nach Abtragung des optisch überflüssigen Materials ergibt sich im Fall des N-segmentierten Hybridprofils mit Gl. 4.63

$$\left(\frac{1}{t_{2\pi}}\right) t_k^{(L)}(\sigma) \approx \frac{N}{4} \left(\frac{k}{T_N} - \left(\frac{\sigma}{R}\right)^2 \right) \quad \text{mit} \quad t_{2\pi} \equiv \frac{\lambda_c}{\delta(\lambda_c)}, \quad (5.124)$$

wenn der Laufindex q nun mit der Ringzahl $1 \leq k \leq T_N$ identifiziert wird. Die Zufallsverstreuungen der inkohärent segmentierten Apertur kommen in der approximativen Gleichheit zum Ausdruck. Abb. 5.26 illustriert das segmentierte Hybridprofil schematisch am Beispiel $T_N = 3$. Das Aspektverhältnis $\mathcal{A}_{max}^{(seg)}$ des äußersten Rings errechnet sich zu

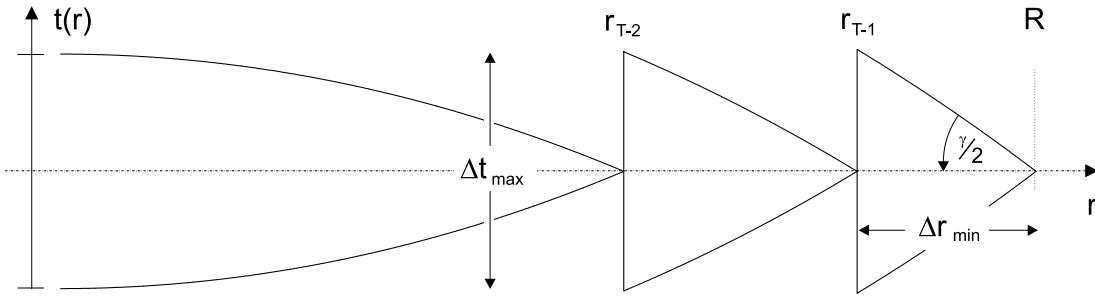


Abbildung 5.26: *Profil des Achromaten in N-segmentierter Bauweise. Die refraktive Komponente ist als aplanatische Version ausgeführt. Dicke Δt_{max} und radiale Dimension Δr_{min} des äußersten der T_N Segment-Ringe legen das maximal auftretende Aspektverhältnis fest. Der Übersichtlichkeit wegen sind nur 3 Ringe dargestellt.*

$$\mathcal{A}_{max}^{(seg)} = \frac{\Delta t_{max}}{\Delta r_{min}} = 2 \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = [...] = \frac{R}{F\delta(\lambda_c)} \quad (5.125)$$

und sollte im Sinn einer problemlosen Fertigung ein moderates Vielfaches von 1 nicht überschreiten. Im übrigen liegt den Modellbeispielen dieses Abschnitts konform mit Abb. 5.26 die Annahme eines nach Abschn. 4.1 aberrationstoleranten bikonvexen Profils zugrunde. Mit Gl. 4.57 galt für dessen quadratisch gemittelten Fehler

$$\langle \Delta\epsilon \rangle_\theta \approx \frac{1}{2\sqrt{2}f} \phi^2 \quad (5.126)$$

der analog zu Gl. 5.122 die Auflösung der segmentierten Apertur nicht überschreiten sollte,

$$\langle \Delta\epsilon \rangle_\theta \lesssim \eta_N(a) T_N \Delta\epsilon_{koh} = \Delta\epsilon_{ink} \quad \text{mit} \quad \Delta\epsilon_{koh} = \alpha \frac{\lambda}{R} \quad \text{und} \quad \alpha = 0.535. \quad (5.127)$$

Die unter diesem Aspekt maximal zulässige Zonenzahl N_* lässt sich damit diesmal zu

$$N_* \lesssim 2\sqrt{2}\eta_N(a)\alpha\phi^{-2} \quad (5.128)$$

abschätzen – eine angesichts der großen Öffnungsverhältnisse erwartungsgemäß problemlos zu erfüllende Bedingung. Als vergleichsweise kritisch erweist sich hingegen die Relation zwischen Apertur- und Detektorradius, wiederum analog zu Abb. 5.23 diesmal für den Achromaten dargestellt in Abb. 5.27. Demnach würden 10^3 Auflösungselemente einen De-

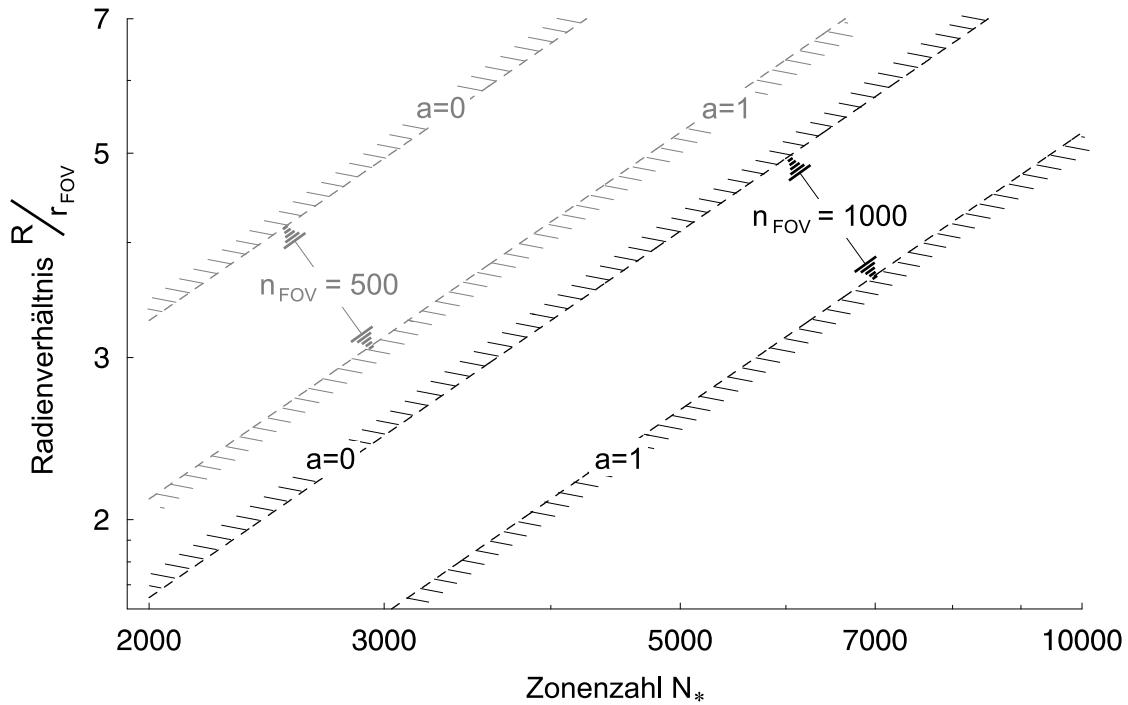


Abbildung 5.27: *Detektorradien hybrid-segmentierter Objektive. Das Verhältnis von Apertur- zu Detektorradius hängt linear von der Zonenzahl N_* ab. Je nach Obstruktion und FOV ergeben sich Quotienten innerhalb der angegebenen Schranken.*

tektor erfordern, der je nach Zonenzahl kaum weniger als ein Fünftel der Apertur misst. Im Regelfall beträgt die Ortsauflösung $\varnothing_{PSF} \lesssim 10^{-3}$ m, so dass vermutlich unrealistische Bildflächen in der Größenordnung von m^2 resultieren. Im Unterschied zu den diffraktiven Objektiven nach Abschn. 5.3 korrespondiert die Ortsauflösung mit dem Apertur-Radius nun gemäß

$$\rho_{PSF} = \alpha \eta_N(a) \frac{1}{N_*} R \quad \text{mit} \quad \alpha \equiv 0.535, \quad (5.129)$$

infolge der bei konstanter Zonenzahl um den Faktor 2 erweiterten Fokaldistanz. Nun moduliert das refraktive Korrekturprofil zudem die radiale Transmission und wird das laterale Auflösungsvermögen weiter reduzieren, wenn nicht der Transparenz der einzelnen Segmente durch geeignete Graufilter eine Apodisierung widerfährt. Um die Abbildungsqualität

vollständig zu erhalten, sollte demnach die Transmission auf den konstanten Wert $e^{-\frac{N_*}{2N_0}}$ zu reduzieren sein. Nach Gl. 5.93 skaliert die Lichtstärke unter Vernachlässigung diffraktiver Verluste linear mit der in Abschn. 4.1 definierten Verstärkung V ,

$$A_{eff} \times \Delta E = \pi \frac{hc}{2} V (T_N - k_{obs}) F \quad \text{und} \quad V = 2\sqrt{N_*} e^{-\frac{N_*}{2N_0}}. \quad (5.130)$$

Umgerechnet auf die laterale Auflösung \mathcal{O}_{PSF} als vorzugebendem Parameter, findet man

$$A_{eff} \times \Delta E = \pi V \left(\frac{\mathcal{O}_{PSF}}{2\alpha} \right)^2 \frac{1-a^2}{\eta_N^2(a)} N_* E, \quad \text{also} \quad A_{eff} \times \Delta E \propto (\mathcal{O}_{PSF})^2. \quad (5.131)$$

Über N_0 verknüpft V die Segment-Zonenanzahl N_* mit der Blaze-Energie E , so dass

$$\frac{d}{dN_*} (A_{eff} \times \Delta E) = 0 \quad \rightarrow \quad N_{opt} = 3N_0 \quad (5.132)$$

die Zonenanzahl N_{opt} liefert, die unter Vorgabe von \mathcal{O}_{PSF} die Effizienz optimiert. Auf den expliziten Nachweis des Maximums sei wieder verzichtet – er ergibt sich qualitativ aus dem Verlauf der Funktion $N_0(E)$ nach Abschn. 4.1. Sofern $\mathcal{O}_{PSF} \gtrsim 1$ mm, erbringen derart konstruierte Modelle aus Li oder Be im mittleren bis harten Röntgenband oberhalb einiger keV eine den diffraktiven Modellen aus Abschn. 5.3 vergleichbare oder höhere Leistung. Deren Steigerung um mehrere 10% verspricht im übrigen der Einsatz *partieller* Graufilter nach Abb. 5.28. Zählt $\nu \equiv \frac{n}{N_*}$ mit $1 \leq n \leq N_*$ und $n \in \mathbb{N}$ die jeweils n Zonen eines einzelnen

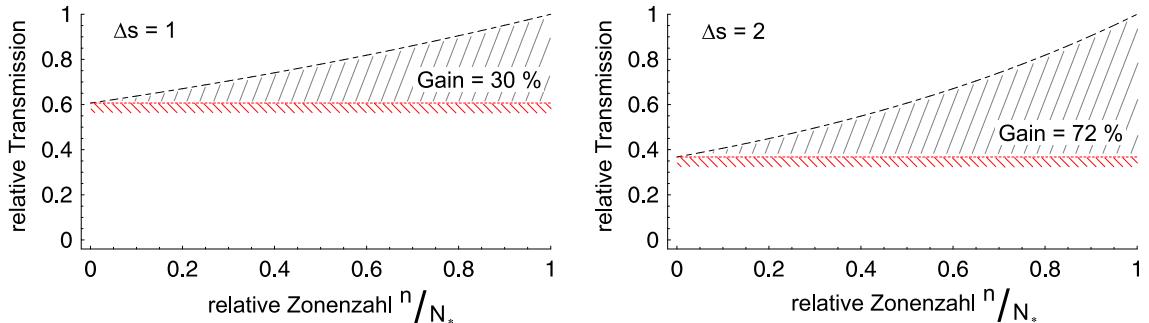


Abbildung 5.28: *Einsatz partieller Graufilter im Hybrid-Segment.* Gleichet das Filter die Transmission nicht vollständig (rot), sondern nur teilweise (schwarz) aus, nimmt die Transmission unter nahezu erhaltener Winkelauflösung um 30% für $\Delta s = 1$ oder gar 72% für $\Delta s = 2$ zu (schraffierte Flächen).

Segments, und parametrisiert Δs die Transparenz der apodisierten Optik, so gilt für diese

$$\mathcal{T}_{seg}(\nu) \times \mathcal{T}_{grau}(\nu) = \mathcal{T}_{apo}(\nu) = e^{\frac{\Delta s}{2}\nu - \frac{s}{2}}, \quad (5.133)$$

mit dem Parameter $s = \frac{N_*}{N_0}$. Integriert über die Zonen eines Segments und ins Verhältnis zur vollständig apodisierten Transparenz gesetzt, ergibt sich für den Gewinn („Gain“) ΔV in der Lichtstärke

$$\Delta V = \frac{2}{\Delta s} \left(e^{\frac{\Delta s}{2}} - 1 \right). \quad (5.134)$$

Hier wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass der spektrale Bandpass ΔE unverändert erhalten bleibt. In der Tat beeinträchtigen selbst ausnehmend große Werte s die Wirkung der Dispersionskorrektur nicht. Abb. 5.29 vergleicht die fokale, spektrale Intensitätsverteilung eines mit $s = 20$ stark absorbierenden Segments mit derjenigen des ideal transparenten Analogons. Nach Gl. 4.14 – die auf der optischen Achse unbesehen einer geänderten Nor-

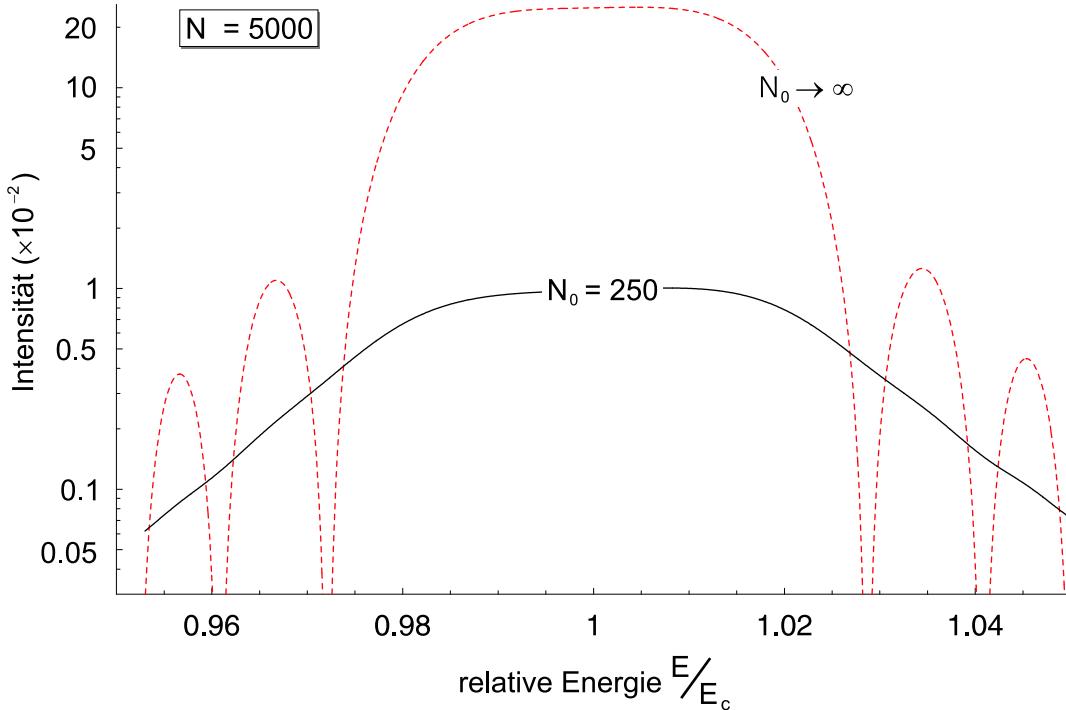


Abbildung 5.29: Spektraler Bandpass des stark absorbierenden Hybrid-Segments. Am Beispiel eines Segments mit $N_\star = 5000$ sind absorptionsfreie (rot strichliert) und mit $\frac{N_\star}{N_0} = 20$ hoch absorptive (schwarz) Intensität im Fokus gegenübergestellt. Der Bandpass bleibt trotz geschwächter Transmission erhalten.

mierung ebenso für segmentierte Objektive gilt – übernimmt der \cos – Term im Zähler des zweiten Faktors $h(\zeta)$ die Aufgabe der Dispersionskorrektur. Bzgl. ψ lautet er

$$\mathcal{Z}_{h(\psi)} \approx 1 - 2e^{-\frac{s}{4}\frac{1}{\psi}} \cos\left(\frac{N_\star}{2}\pi(\psi - 1)^2\right) + e^{-\frac{s}{2}\frac{1}{\psi}}, \quad (5.135)$$

Die egalisierende Wirkung der \cos – Variation mit $(\psi - 1)^2$ unterbleibt erst, wenn für

$$\psi \approx 1 \quad \curvearrowright \quad 1 \gg 2e^{-\frac{s}{4}} \quad \rightarrow \quad s \gg 4 \ln 2 \approx 2.8, \quad (5.136)$$

in qualitativer Übereinstimmung mit dem Beispiel aus Abb. 5.29. Angesichts dieser bemerkenswerten Toleranz liegt ein Verzicht auf jegliche Apodisierung nahe. Was zugunsten einer unverändert optimalen Bildqualität im Fall des kompakten Hybrid-Achromaten theoretische Ansprüche bediente, wird nun im Interesse maximaler Effizienz fallen gelassen. Unter

erneuter Vernachlässigung der diffraktiven Absorption ist die Gesamt-Transmission des Hybrid-Segments durch

$$\mathcal{T}_{seg}(s) = \int_0^1 e^{-\frac{s}{2}(1-\nu)} d\nu = \frac{2}{s} \left(1 - e^{-\frac{s}{2}}\right) \rightarrow 2 \frac{N_0}{N_*} \quad \text{für } s \gg 1. \quad (5.137)$$

gegeben, wenn $\nu = \frac{n}{N_*}$ wieder für die relative Segment-Zonenzahl steht. Tab. 5.7 stellt diese integrierte Transparenz für einige Zonenverhältnisse zusammen. Sie führt aufgrund

N_*/N_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mathcal{T}_{seg}(\%)$	100	78.7	63.2	51.8	43.2	36.7	31.7	27.7	24.5	22.0	19.9	18.1

Tabelle 5.7: *Gesamttransmission des filterfreien Hybrid-Segments*. Auch unter Verzicht auf ein Graufilter hängt \mathcal{T}_{seg} nur vom Zonenverhältnis N_*/N_0 ab und übertrifft die Mindesttransmission am Ort der größten Dicke mit zunehmendem N_*/N_0 um ein Vielfaches.

des unveränderten Bandpasses unmittelbar auf die zum diffraktiven Analogon relative Lichtstärke, also die nun mit V_{pur} bezeichnete Maximalverstärkung

$$V_{pur} = 2\sqrt{N_*} \frac{2}{s} \left(1 - e^{-\frac{s}{2}}\right) = \frac{2}{s} \left(e^{\frac{s}{2}} - 1\right) V. \quad (5.138)$$

Der Unterschied zur bislang benutzten, idealisierten Referenz V wirkt sich bei hohen Zonenquotienten s besonders drastisch aus und erlaubt den effizienten Einsatz der Dispersionskorrektur auch noch bei Segment-Zonenzahlen N_* , die die kritische um ein Mehrfaches übertreffen. Analog zur Standard-Verstärkung V existiert ein optimales Verhältnis zwischen geometrischer und kritischer Zonenzahl, das V_{pur} maximiert.

$$\frac{d}{dN_*} V_{pur} = 0 \quad \rightarrow \quad [...] \quad \rightarrow \quad e^{\frac{s}{2}} = 1 + s \quad \curvearrowright \quad N_{opt} \approx 2.5N_0, \quad (5.139)$$

als Lösung der transzendenten Gleichung in s . Für diverse N_0 ist diese filterfreie Verstärkung in Abb. 5.30 gegen N_* aufgetragen. Demnach kann ein Feststoff wie Li mit $N_0 \lesssim 1200$ der Lichtstärke ein ähnliches Plus verleihen, wie es unter Annahme des Graufilters bislang nur H₂ und He vermochten.

Angesichts dieses unbestreitbaren Vorteils stellt sich die Frage nach den negativen Auswirkungen auf die Winkelauflösung, mit denen im Fall der hier betrachteten prisma-ähnlichen Segmente ebenso wie beim kompakten Hybrid-Achromaten zu rechnen sein wird. Ihre quantitative Analyse erfordert die Berechnung der über alle Segmente gemittelten PSF unter dem Einfluss der Absorption. Um den numerischen Aufwand in Grenzen zu halten, seien die approximativ quadratischen Segmente zudem als *Prismen* angenähert, auf den Einfluss der radialen Profil-Krümmung und das diffraktive Element sei daher verzichtet. Der Argumentation in Abschn. 5.2 folgend, errechnet sich das Punktbild einer Parzelle aus der Fourier-Transformierten der Amplitude $\tilde{u}(\vec{\nu})$,

$$\mathcal{F}_s(\vec{\kappa}) = \frac{1}{2\pi} \int_{A_{seg}} \tilde{u}(\vec{\nu}) e^{-i\vec{\kappa}\vec{\nu}} d^2\nu \quad (5.140)$$

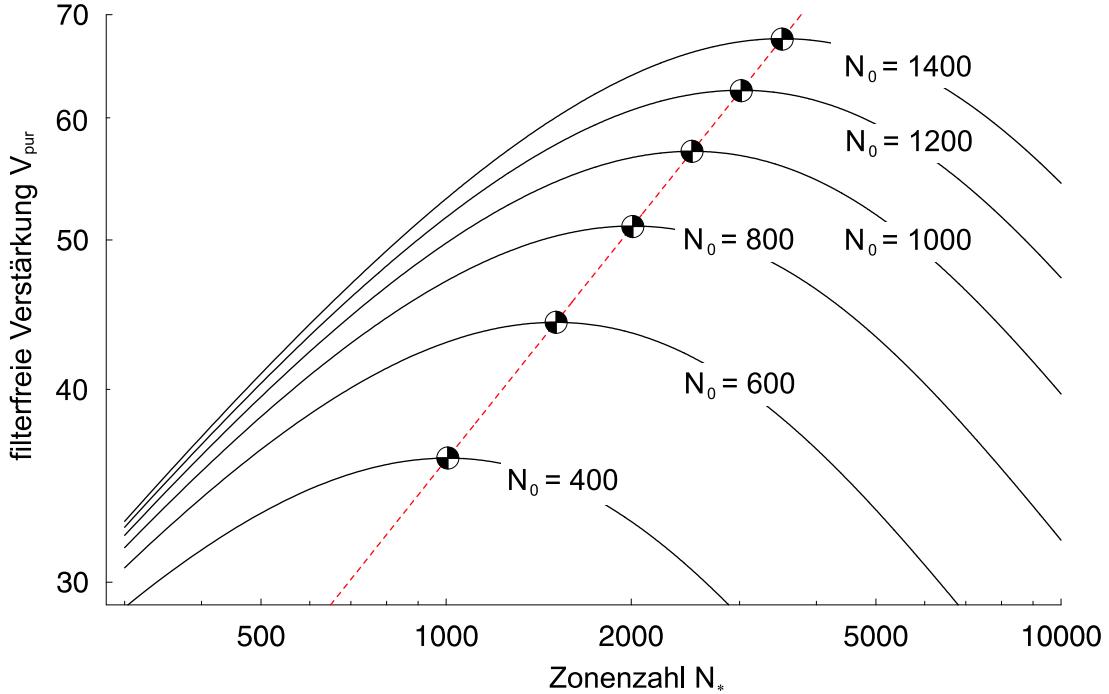


Abbildung 5.30: Graufilter-freie Hybridverstärkung. Das nicht apodisierte Segment erweist sich gegenüber dem diffraktiven Analogon als besonders effizient, wenn die kritische Zonenzahl N_0 etwa das 2.5-fache der geometrischen Segment-Zonenzahl N_* beträgt (rot strichliert). Eingetragen ist V_{pur} für ein Spektrum $400 \leq N_0 \leq 1400$.

wenn $\vec{\nu} \equiv (\nu_x, \nu_y)$ die dimensionslosen, kartesischen und normierten Ortskoordinaten im lokalen Koordinatensystem eines Segments bezeichnet, $-\frac{1}{2} \leq \nu_x \leq +\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2} \leq \nu_y \leq +\frac{1}{2}$. Wie in Abschn. 5.2 steht $\vec{\kappa}$ für den lateralen Wellenvektor in der Beobachtungsebene. Die Eingangsamplitude ist durch

$$\tilde{u}(\vec{\nu}) = e^{-\frac{s}{4}(1-\nu_x)} \quad (5.141)$$

gegeben, mit insbesondere konstanter Transparenz in Richtung von ν_y . Nach elementarer Rechnung findet man den zur PSF des Standard-Segments proportionalen Ausdruck,

$$|\mathcal{F}_s(\vec{\kappa})|^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\kappa_y\right)}{\frac{1}{2}\kappa_y}\right)^2 \frac{1 - 2e^{-\frac{s}{4}} \cos(\kappa_x) + e^{-\frac{s}{2}}}{\left(\frac{s}{4}\right)^2 + (\kappa_x)^2}. \quad (5.142)$$

Die absoluten Dimensionen des Segments spielen im übrigen keine Rolle, da lediglich die zum ideal transparenten ($s \rightarrow 0$) Segment relative Änderung des Auflösungsvermögens interessiert. Um eben diese für einen aus Parzellen gleicher Größe bestehenden Ring der Gesamtapertur zu errechnen, sind die Beugungsfiguren entsprechend ihrer azimutalen Orientierung arithmetisch zu mitteln,

$$\langle |\mathcal{F}_s(\vec{\kappa})|^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}_s(\vec{\kappa})|^2 d^2\kappa, \quad (5.143)$$

wobei sich nun eine Transformation $\vec{\kappa} \rightarrow \kappa (\cos \varphi, \sin \varphi)$ empfiehlt und die Integration bei konstantem $\kappa = |\vec{\kappa}|$ folglich über $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ zu vollziehen ist. Es genügt, aus Gl. 5.143 die HEW-Winkelauflösung κ_{HEW} nach entsprechender Normierung und dem in vorigen Kapiteln erläuterten Verfahren für einen einzelnen, beliebigen Ring zu bestimmen. Sei nämlich die Partial-PSF des k -ten Rings entsprechend indiziert, so gilt aufgrund der Linearität

$$\int_0^\chi \left(\sum_k \langle |\mathcal{F}_{s,k}(\vec{\kappa})|^2 \rangle \right) \kappa d\kappa = \sum_k \left(\int_0^\chi \langle |\mathcal{F}_{s,k}(\vec{\kappa})|^2 \rangle \kappa d\kappa \right), \quad \text{mit } \chi \rightarrow \kappa_{HEW}. \quad (5.144)$$

Im strengen Sinn liefert die Verallgemeinerung vom einzelnen Ring auf die Gesamtapertur nur dann ein exaktes Ergebnis, wenn die *Form* der Partial-PSF $\langle |\mathcal{F}_{s,k}(\vec{\kappa})|^2 \rangle$ von s unabhängig ist und die Absorption nur im Sinn von Skalenparametern eingeht. Nachfolgend wird die Separation des absorptiven Anteils als ausreichende Näherung akzeptiert. Abb. 5.31 stellt das Resultat dieser Integration dar, nach entsprechender Normierung auf den absorptionsfreien Fall. Zusätzlich sind in Tab. 5.8 einige Werte bis $s = 10$ zusammengen-

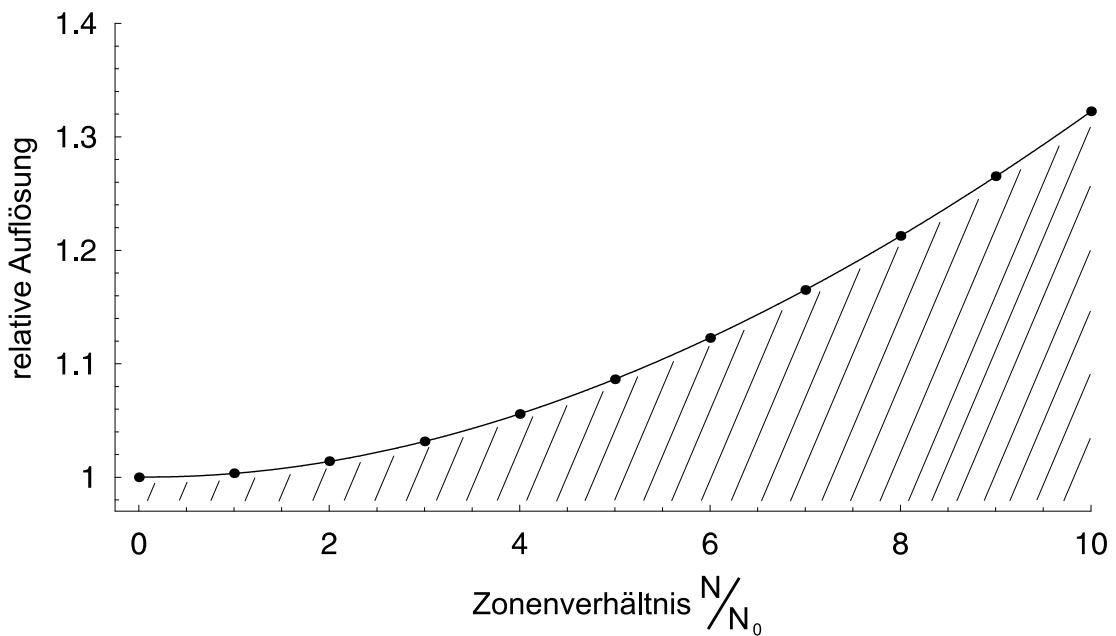


Abbildung 5.31: Einfluss der Segment-Absorption auf das Auflösungsvermögen. Im N -segmentierten Achromaten wirken die Segmente als Graukeile, deren gemittelte PSF die Winkelauflösung als Funktion von $\frac{N_*}{N_0}$ vermindert.

fasst. Demnach verschmiert die PSF selbst für $s \rightarrow 10$ nur um wenige 10%, im Vergleich zu kompakten Hybridlinsen nach Tab. 4.1 besteht also eine gegenüber absorptiven Einflüssen weitaus höhere Toleranz. Gleichwohl ist die im folgenden mit $Q(s)$ bezeichnete Abhängigkeit des Winkelauflösungsvermögens vom Zonenverhältnis $s = \frac{N_*}{N_0}$ in die Kalkulation des Leistungsvermögens segmentierter Hybrid-Objektive einzubeziehen. So ist Gl. 5.129 um

$s = N_\star/N_0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Delta Q(s)(\%)$	0.02	0.33	1.39	3.15	5.59	8.65	12.3	16.5	21.3	26.5	32.2

Tabelle 5.8: *Daten zur absorptionsbedingten Auflösungsminderung. Die numerischen Werte entsprechen der in Abb. 5.31 dargestellten Kurve und dienen als mathematische Referenz.*

eben diesen Faktor zu erweitern,

$$\rho_{PSF} = \alpha \eta_N(a) \frac{1}{N_\star} R Q(s) \quad \text{mit} \quad \alpha = 0.535. \quad (5.145)$$

Die Modifikation geht nun auch in Gl. 5.131 ein und quantifiziert die Lichtstärke gemäß

$$A_{eff} \times \Delta E = \pi V_{pur} \left(\frac{\varnothing_{PSF}}{2\alpha Q(s)} \right)^2 \frac{1-a^2}{\eta_N^2(a)} N_\star E. \quad (5.146)$$

Gegenüber dem graufilterbewehrten Hybrid-Segment kompensiert der Faktor $Q(s)$ somit teilweise den auf V_{pur} basierenden Gewinn in $A_{eff} \times \Delta E$. Bildet man das Verhältnis \mathcal{Q}_s zwischen der Lichtstärke nach Gl. 5.146 und der filterbehafteten nach Gl. 5.131, so resultiert bei gleichem N_\star und fixer Energie als Maß für den Nutzen der filterfreien Bauweise

$$\mathcal{Q}_s = \frac{2}{s} \left(e^{\frac{s}{2}} - 1 \right) \left(\frac{1}{Q(s)} \right)^2, \quad (5.147)$$

dominiert durch den positiven Exponentialfaktor. Tab. 5.9 stellt einige Werte zusammen. Der Verzicht auf ein Graufilter verspricht somit stets ein Plus an Leistung, das um so höher

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
\mathcal{Q}_s	1.00	1.29	1.67	2.18	2.87	3.79	5.04	6.76	9.11	12.36	16.86	23.13

Tabelle 5.9: *Steigerung des Leistungsvermögens durch filterfreie Dispersionskorrektur. Relativ zur Lichtstärke des graufilterbewehrten Analogons erweist sich das filterfrei segmentierte Objektiv mit steigendem s als zunehmend effizient.*

ausfällt, je deutlicher N_\star die kritische Zonenzahl N_0 übertrifft. Basierend auf den bisher gewonnenen Erkenntnissen sollen nun diverse Modell-Objektive aus geeigneten Materialien entwickelt werden. Naheliegend, weil abgesehen vom technologisch bedingt geeigneten LiH optisch besonders hochwertig, ergeben sich für Li die in Tab. 5.10 angegebenen optimalen Segment-Zonenzahlen, ermittelt aus der Extremalbedingung an Gl. 5.146,

$$\frac{d}{dN_\star} (A_{eff} \times \Delta E) = 0 \quad \rightarrow \quad N_\star = N_{opt}(E). \quad (5.148)$$

Unter Vorgabe dieser numerisch ermittelten Werte, der Ringzahl T_N , des Obstruktions-

$E(\text{keV})$	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
N_{opt}	4684	6046	7200	8064	8586	8866	8914	8790	8550	8244	7958

Tabelle 5.10: *Optimierte Zonenzahlen segmentierter Li-Achromaten. Angegeben sind die geradzahlig gerundeten und die filterfreie Lichtstärke maximierenden Zonenzahlen N_{\star} .*

onsverhältnisses a sowie des die absorptive Aufweitung bereits berücksichtigenden PSF-Durchmessers \mathcal{O}_{PSF} lassen sich für ein gegebenes Material und die gewünschte Energie E die übrigen optischen wie konstruktiven Kenndaten ermitteln. Obschon eine Zentrallobstruktur anders als im Fall der diffraktiven Fresnel-Objektive aus optischer Sicht nicht erforderlich ist, wird praxisnah diversen Hilfsinstrumenten via

$$a = \frac{1}{\sqrt{T_N}} \quad \text{im Apertur-Radius} \quad R = \frac{1}{2\alpha} N_{\star} \frac{\mathcal{O}_{PSF}}{Q(s)} \eta_N^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{T_N}} \right) \quad (5.149)$$

Raum gegeben. Ferner ergibt sich mittels Gl. 5.149 die inkohärente Winkelauflösung zu

$$\Delta\epsilon = \alpha \frac{\lambda}{R} \eta_N \left(\frac{1}{\sqrt{T_N}} \right) T_N Q(s). \quad (5.150)$$

Die Brennweite F errechnet sich damit als Quotient aus Lateral- und Winkelauflösung,

$$F = \frac{\mathcal{O}_{PSF}}{\Delta\epsilon} \quad \text{während} \quad A_{eff} = 2 \frac{N_0}{N_{\star}} \left(1 - e^{-\frac{N_{\star}}{2N_0}} \right) \pi \left(1 - \frac{1}{T_N} \right) R^2 \quad (5.151)$$

die effektive Sammelfläche liefert. Mit der üblichen Gl. 4.9 für den spektralen Bandpass des Hybrid-Segments, den gleichfalls bekannten Formeln für die Breite Δr_{min} der äußersten, feinsten Fresnel-Ringe und des Aspektverhältnisses $\mathcal{A}_{max}^{(seg)}$ bietet Tab. 5.11 einen Überblick zu den Parametern Li-basierter Achromaten. Im Interesse einer realistischen Einschätzung der Daten sei nochmals darauf hingewiesen, dass weder Stützstreben noch Detektor- oder gar eventuelle Absorptionsverluste im hier als ideal angenommenen *diffraktiven* Fresnel-Profil berücksichtigt sind. Den Daten sind insbesondere die mit $\mathcal{A}_{max}^{(seg)} \sim 2.5$ bereits relativ großen Aspektverhältnisse zu entnehmen, die sich angesichts der ohnehin schon geringen Zahl $T_N \sim 10$ an Ringen auch kaum noch vermindern lassen – letztlich eine Folge der verhältnismäßig geringen Brechkraft von Li. Noch geringer fällt diese im übrigen für LiH aus, dem mutmaßlich unter Normbedingungen optisch besten Feststoff. Allerdings kristallisiert LiH in der NaCl-Struktur, weist eine dementsprechend spröde Konsistenz auf und dürfte schwerlich in kompakten, zur Fertigung der refraktiven Komponente notwendigen Blöcken bzw. Prismen zu erzeugen sein.

Beryllium hingegen, das nach Li leichteste Element, weist bei allerdings auch überproportional stärkerer Absorption höhere Brechkräfte auf, so dass die Konfigurationen in Tab. 5.13 tendenziell unkritische Aspektverhältnisse gestatten – bei zudem höheren Ringzahlen. Den Daten liegen nun die optimierten Zonenzahlen nach Tab. 5.12 zugrunde, die offenbar signifikant unter den für Li ermittelten liegen. Gleichwohl deuten die Daten um 17 keV

Parameter	Li ($A_{eff} \times \Delta E$) $\rightarrow max.$								
E (keV)	6	7	8	9	10	11	12	13	14
R (m)	1.16	1.49	1.76	1.94	2.05	2.12	2.11	2.06	2.00
$\Delta\epsilon$ (mas)	0.89	0.52	0.34	0.23	0.18	0.15	0.13	0.11	0.10
$A_{eff} \times \Delta E$	1820	3044	4387	5610	6661	7690	8167	8287	8563
F (km)	174	295	460	680	880	999	1210	1442	1511
Δr_{min} (μm)	15.5	17.6	20.3	24.1	26.6	26.6	29.6	33.4	33.4
$\mathcal{A}_{max}^{(seg)}$	2.50	2.58	2.55	2.41	2.43	2.68	2.62	2.52	2.71
T_N	16	14	12	10	9	9	8	7	7

Tabelle 5.11: Beispiele leistungsoptimierter Li-Hybrid-Achromaten. Die Zonenzahlen N_* entsprechen jenen aus Tab. 5.10. Die Zentrallobstrukturion beträgt $a = \frac{1}{\sqrt{T_N}}$, die Ortsauflösung $\varnothing_{PSF} = 0.75$ mm. Die Lichtstärke ist in Einheiten von $(cm^2 \cdot keV)$ angegeben.

E (keV)	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
N_*	2700	3324	3924	4472	4938	5310	5580	5754	5868	5914	5904

Tabelle 5.12: Optimierte Zonenzahlen segmentierter Be-Achromaten. Angegeben sind die Zonenzahlen N_* , die unter Verzicht auf ein Graufilter die Lichtstärke der Be-Hybridlinse bei fixer Ortsauflösung maximieren. Alle Daten sind auf geradzahlige Werte gerundet.

herum erneut ein Maximum an, das hinsichtlich eines absoluten Leistungsoptimums des betreffenden Materials Bedeutung erlangt. In dem ausgewählten Energiebereich zwischen 8 und 16 keV gegenüber dem Intervall $6 \text{ keV} \leq E \leq 14 \text{ keV}$ für Li kommt zugleich die Disposition dieses Materials zum harten Röntgenband zum Ausdruck. Um sich nicht mit den toxischen und teils karzinogenen Eigenschaften des Be auseinandersetzen zu müssen, sollte evtl. BeH_2 in Erwägung gezogen werden, eine nach [25] unter Normalbedingungen feste Substanz polymerer Konsistenz. Die optische Güte übertrifft jene des elementaren Be nach Abb. 4.7 bzw. 4.8 freilich nur um wenige Prozent.

Alternativ bieten sich Bor-Verbindungen wie das Boran $\text{B}_{10}\text{H}_{14}$ an. Hinsichtlich dessen und ähnlicher Kristalle Konsistenz und Eignung sei auf die chemische-technische Fachliteratur verwiesen. Unter optischen Gesichtspunkten jedenfalls fällt $\text{B}_{10}\text{H}_{14}$ trotz des hohen H_2 -Anteils hinter Be zurück. Tab. 5.14 stellt wieder die optimalen Zonenzahlen zusammen, gegeben für das Intervall $10 \text{ keV} \leq E \leq 20 \text{ keV}$. Deren Optimum liegt offensichtlich bereits jenseits von 20 keV. Tab. 5.15 stellt einige Daten zusammen, wie sie unter Beachtung einer Winkelaufösung $\Delta\epsilon \lesssim 10^{-3}$ arcsec und eines moderaten Aspektverhältnisses $\mathcal{A}_{max}^{(seg)}$ berechnet wurden. Während die Lichtstärke $A_{eff} \times \Delta E$ vergleichsweise bescheiden ausfällt, ist die durchweg kurze Fokaldistanz von wenigen 10^2 km positiv hervorzuheben. Mit Bor bzw. dessen Verbindungen dürfte die Palette der optisch hinreichend hochwertigen Stoffe weitgehend erschöpft sein, die kritische Zonenzahl N_0 etwa von Polycarbonat ($\text{C}_{16}\text{H}_{14}\text{O}_3$)

Parameter	Be ($A_{eff} \times \Delta E$) $\rightarrow max.$								
E (keV)	8	9	10	11	12	13	14	15	16
R (m)	0.65	0.82	0.97	1.11	1.23	1.33	1.39	1.44	1.47
$\Delta\epsilon$ (mas)	0.83	0.74	0.64	0.57	0.52	0.47	0.39	0.36	0.33
$A_{eff} \times \Delta E$	988	1596	2326	3169	4066	4941	5699	6394	7024
F (km)	186	208	242	273	298	332	393	434	472
Δr_{min} (μm)	22.0	17.6	15.5	13.8	12.5	11.9	12.5	12.5	12.5
$\mathcal{A}_{max}^{(seg)}$	0.66	0.93	1.18	1.45	1.75	1.99	2.04	2.19	2.33
T_N	11	14	16	18	20	21	20	20	20

Tabelle 5.13: Beispiele leistungsoptimierter Be-Hybrid-Achromaten. Die Zonenzahlen N_* entsprechen jenen aus Tab. 5.12. Die Zentralobstruktion beträgt $a = \frac{1}{\sqrt{T_N}}$, die Ortsauflösung $\mathcal{O}_{PSF} = 0.75$ mm. Die Lichtstärke ist in Einheiten von $(\text{cm}^2 \cdot \text{keV})$ angegeben.

E (keV)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N_*	2580	3028	3454	3842	4178	4452	4676	4842	4952	5012	5032

Tabelle 5.14: Optimierte Zonenzahlen segmentierter $B_{10}H_{14}$ -Achromaten. Angegeben sind die geradzahlig gerundeten Zonenzahlen N_* , die unter Verzicht auf ein Graufilter die Lichtstärke der Hybridlinse bei fixer Ortsauflösung maximieren.

nimmt sich derart bescheiden aus, dass allenfalls nahe 20 keV mit ausreichender Leistung zu rechnen ist. So ergeben sich etwa für $E = 18$ keV folgende Kenndaten:

$$\begin{aligned}
 R &= 0.65 \quad \text{m} \\
 \Delta\epsilon &= 0.40 \quad \text{mas} \\
 A_{eff} \times \Delta E &= 2248 \quad \text{cm}^2 \cdot \text{keV} \\
 F &= 386 \quad \text{km}
 \end{aligned} \tag{5.152}$$

Mit $T_N = 12$ Ringen findet sich zudem eine minimale Breite der äußeren Fresnel-Ringe von $20.3 \mu\text{m}$ sowie ein Aspektverhältnis $\mathcal{A}_{max}^{(seg)} = 2.09$. Obschon aufgrund seiner unproblematischen Materialeigenschaften als Werkstoff attraktiv, besitzt dieser Kunststoff im betrachteten Energieintervall ein zu geringes Potential, um mit Li, Be und evtl. Bor sowie deren Hydriden konkurrieren zu können. Abb. 5.32 macht diesen Sachverhalt deutlich. Die Grafik zeigt den Verlauf der nach obigem Verfahren optimierten Lichtstärke, und zwar unter Verzicht auf jegliche Zentralobstruktion ($a = 0$). Den Kurven liegt ferner, konform mit den tabellierten Beispielkonfigurationen, ein PSF-Durchmesser von $\mathcal{O}_{PSF} = 0.75$ mm zu grunde. Die Umrechnung auf andere Ortsauflösungen erfolgt mittels $A_{eff} \times \Delta E \propto (\mathcal{O}_{PSF})^2$. Ferner weist Abb. 5.32 einzig und allein für das offenbar generell überlegen operierende Li ein *absolutes* Maximum diesseits von 20 keV aus, nämlich bei 16.7 keV.

Parameter	$B_{10}H_{14} (A_{eff} \times \Delta E) \rightarrow max.$								
E (keV)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
R (m)	0.63	0.75	0.86	0.97	1.06	1.13	1.18	1.22	1.25
$\Delta\epsilon$ (mas)	0.75	0.75	0.74	0.79	0.77	0.76	0.64	0.55	0.47
$A_{eff} \times \Delta E$	1177	1735	2380	3114	3852	4586	5241	5835	6351
F (km)	206	206	209	197	201	204	242	283	327
Δr_{min} (μm)	20.3	15.5	12.5	9.69	8.43	7.46	7.92	8.43	9.02
$\mathcal{A}_{max}^{(seg)}$	0.60	0.86	1.17	1.63	2.02	2.45	2.46	2.46	2.43
T_N	12	16	20	26	30	34	32	30	28

Tabelle 5.15: Beispiele leistungsoptimierter $B_{10}H_{14}$ -Hybrid-Achromaten. Die Zonenzahlen N_* entsprechen jenen aus Tab. 5.14. Die Zentralabstruktion beträgt $a = \frac{1}{\sqrt{T_N}}$, die Ortsauflösung $\mathcal{A}_{PSF} = 0.75$ mm. Die Lichtstärke ist in Einheiten von $(cm^2 \cdot keV)$ angegeben.

5.5 Entwicklung diverser Multiband-Objektive

Den bislang diskutierten diffraktiven wie dispersionskorrigierten Objektiven die Fähigkeit zur simultanen Fokussierung in mehreren spektralen Bändern zu verleihen, erscheint aus wissenschaftlicher Sicht außerordentlich wünschenswert. So ergeben sich beispielsweise in aktiven Galaxienkernen aus dem Verhältnis zwischen harter und weicher Röntgenstrahlung („hardness ratio“) wertvolle Hinweise auf den Emissionsprozess. Beginnend mit allen Kombinationsaperturen zugrunde liegenden Prinzipien sollen daher im folgenden einfache Versionen solcher Multiband-Objektive entwickelt werden.

Die Simultan-Abbildung erfordert unter der Annahme N-segmentierter Bauweise die Aufteilung der Apertur in Regionen *unterschiedlicher* Segment-Zonenanzahl N_* für die jeweiligen Energien E_c , die ohne Einschränkung als Vielfache einer Basisenergie E_0 gewählt werden. Eine beliebige Anordnung der den diversen Spektralbändern zugeordneten Segmente oder auch die Aufteilung in Form von Sektoren erweist sich als nicht zielführend. Vielmehr bedarf es einer Konfiguration, die dem Streuverhalten der rot- bzw. blauverstimmten Partial-Linsen Rechnung trägt. Abb. 5.33 veranschaulicht das Prinzip der Streulicht-Abschirmung. Betrachtet wird eine zunächst beliebige Fresnel-Linse mit Radius R , deren Zentralabdeckung a sich im absoluten Maßstab zu

$$r_{min} = aR \quad \text{bemisst, so dass} \quad r_{min} \rightarrow r_{\pm} = z_{\pm} \tan \vartheta_{\pm} \quad (5.153)$$

die zunächst identischen inneren Radien $r_- = r_+$ angibt, deren Schattenwurf im rot verstimmten Brennpunkt z_- unter dem Winkel ϑ_- und im blau verstimmten Fokus z_+ unter ϑ_+ einfällt. Angesichts der großen Öffnungsverhältnisse linearisiert die $\tan -$ Funktion, so dass sich aus 5.153 mittels einfacher geometrischer Überlegungen – geringfügige Beugungseffekte an den Segmenträndern beschränken sich auf die Größenordnung des lateralen

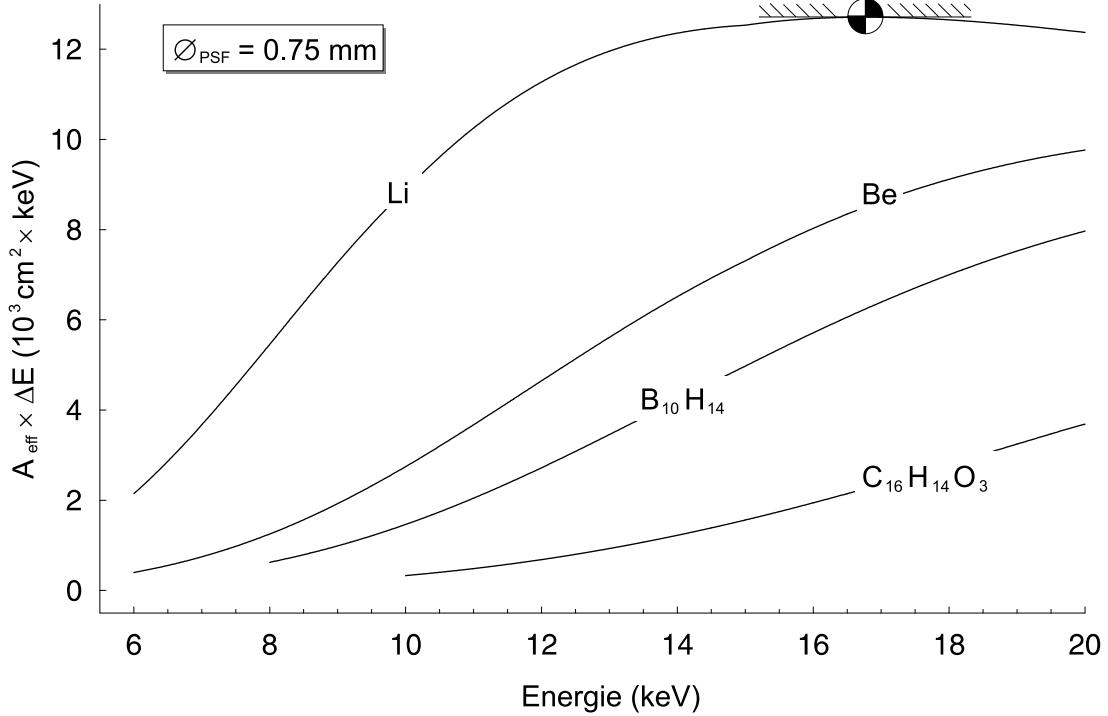


Abbildung 5.32: *Absolutes Leistungsmaximum segmentierter Hybrid-Achromaten. Angegeben sind obstruktionsfreie ($a = 0$) Lichtstärken für Li, Be, $B_{10}H_{14}$ und $C_{16}H_{14}O_3$. Für Li durchläuft die Effizienz bei gegebener Ortsauflösung ein absolutes Maximum.*

Auflösungsvermögens und werden vernachlässigt – die zur Abschirmung jedweder Streustrahlung notwendigen Mindestradien der Partial-Linse r_- und r_+ zu

$$r_- = 2r_{FOV} \left(\frac{1}{\zeta_-} - 1 \right)^{-1} \quad \text{und} \quad r_+ = 2r_{FOV} \left(1 - \frac{1}{\zeta_+} \right)^{-1}, \quad (5.154)$$

wobei $\zeta_- < 1$ und $\zeta_+ > 1$ angenommen wird. Da sich die Gln. 5.154 nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden, motiviert die Schreibweise

$$\mathcal{S}(\zeta_\pm) \equiv \frac{r_\pm}{r_{FOV}} = \pm 2 \left(1 - \frac{1}{\zeta_\pm} \right)^{-1} \quad (5.155)$$

die Definition einer „Schattenfunktion“ $\mathcal{S}(\zeta_\pm)$, die in Einheiten des Detektor-Radius r_{FOV} die notwendige Zentralabdeckung beschreibt. Mit Gl. 5.153 ist demnach

$$aR \geq \mathcal{S}(\zeta_\pm) r_{FOV} \quad \text{mit} \quad r_{FOV} = \frac{n_{FOV}}{2} \mathcal{O}_{PSF} \quad (5.156)$$

zu fordern. Unter Beachtung von $\mathcal{O}_{PSF} = F \cdot \Delta\epsilon_{ink}$ und der Gl. 5.64 für die inkohärente Winkelauflösung folgt daraus für den Radius

$$R^2 \geq \frac{\alpha}{2} \mathcal{S}(\zeta_\pm) n_{FOV} \frac{\eta_N(a)}{a} T_N F \lambda \quad \text{mit} \quad \alpha = 0.535. \quad (5.157)$$

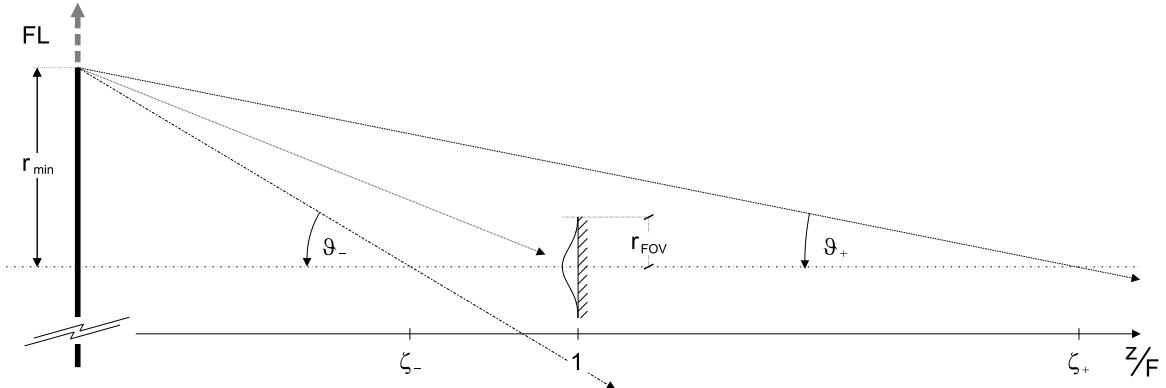


Abbildung 5.33: Abschirmung des Streulichts bei Multiband-Objektiven. Die der jeweiligen Blaze-Energie zugeordneten Mindestradien r_{min} ergeben sich aus dem Detektordurchmesser $2r_{FOV}$ und den verstimmteten Foki ζ_{\pm} . Weitere Erläuterungen siehe Text.

Bezugnehmend auf die Standard-Relation für den Zusammenhang zwischen Radius und Zonenzahl einer kohärenten Linse folgt schließlich

$$N_{\star} \geq \frac{\alpha}{2} \gamma \mathcal{S}(\zeta_{\pm}) n_{FOV} \frac{\eta_N(a)}{a}, \quad (5.158)$$

wobei $\gamma = 1$ für die diffraktive und $\gamma = 2$ im Fall der dispersionskorrigierten Optik gilt. Der Segment-Zonenzahl N_{\star} ist somit eine untere Schranke auferlegt, die unter anderem linear von n_{FOV} abhängt. In der nachfolgenden Konfiguration dispersionskorrigierter Modell-Teleskope wird dieser Sachverhalt verhältnismäßig kleine Sichtfelder erzwingen, die im Durchmesser nur wenige 10^2 Auflösungselemente gestatten. Obschon die Anordnung der eine bestimmte Energie E_c repräsentierenden Segmente abseits der aus $\mathcal{S}(\zeta_{\pm})$ hervorgehenden Mindestradien keiner sonstigen Bedingung unterliegt, erweist sich eine Belegung der Segment-Ringe mit Parzellen einheitlicher Energie als sinnvoll. Für ein gegebenes Spektrum

$$\mathcal{E}_n = \{E_c \mid E_c = n \cdot E_0\} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{R}_+ \geq 1 \quad (5.159)$$

besteht die erste Aufgabe also darin, $\mathcal{S}(\zeta_{\pm})$ für jede, einem dieser Energiewerte zugeordnete Partial-Apertur unter Rückgriff auf die fokale Dispersionsrelation der jeweiligen Optik zu ermitteln.

Beginnend mit dem vergleichsweise einfachen Streuverhalten der diffraktiven Fresnel-Linse sei dieses Verfahren nun explizit erläutert. Mit

$$z_m(E) = \frac{1}{m} \frac{E_c}{E_0} F(E_0) \quad \rightarrow \quad \zeta = \frac{1}{m} \psi_0 \quad (5.160)$$

lautet die Schattenfunktion, jetzt in Abhängigkeit von der relativen Energie $\psi_0 = \frac{E_c}{E_0}$,

$$\mathcal{S}_m(\psi_0) = \pm 2 \left(1 - \frac{m}{\psi_0} \right)^{-1} \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{Z} \quad (5.161)$$

als der m -ten Beugungsordnung. Um $\mathcal{S}_m(\psi_0)$ für ein die Energie E_j abbildendes Energieband E_i zu finden, ist deren Maximum bzgl. aller Ordnungen $m \in \mathbb{Z}$ zu ermitteln.

$$\mathcal{S}_m(\psi_0) = \pm 2 \left(1 - m \frac{E_i}{E_j} \right)^{-1} \quad (5.162)$$

führt unter Annahme von $E_i = iE_0$ und $E_j = jE_0$ mit $i, j \in \mathbb{R}_+$ sowie einer Ausschlussbedingung $i \neq j$ auf

$$\mathcal{S}_m(E_i) = \pm 2 \left(1 - m \frac{i}{j} \right)^{-1} \rightarrow \max. \quad (5.163)$$

Eine Differentiation zur Bestimmung des Maximums kommt angesichts der Singularität in $mE_i = E_j$ nicht in Betracht. Deren physikalische Interpretation bedient sich der spezifischen Eigenschaft diffraktiver Linsen, ganzzahlige Vielfache $E_j = m \cdot E_i$ einer gegebenen Energie E_i in m -ter Ordnung in den gemeinsamen Brennpunkt $F(E_i)$ zu fokussieren. Die Abschirmung dieser Streukomponente erweist sich offenkundig als unmöglich und auch nicht notwendig. Vielmehr trägt sie im positiven Sinn, wenn auch quantitativ maßvoll zur Lichtstärke im Band E_j bei. Nach Gl. 3.79 beträgt die Beugungseffizienz für $E_j = m \cdot E_i$

$$P_m = \left(\frac{\sin(\pi(m - \frac{1}{m}))}{\pi(m - \frac{1}{m})} \right)^2 \rightarrow P_2 = \left(\frac{2}{3\pi} \right)^2 \approx 4.5\%. \quad (5.164)$$

Höhere Vielfache und damit Ordnungen weisen nur mehr eine Effizienz von 1% oder weniger auf und sind daher zu vernachlässigen. Hinzu kommt, dass der durch die Segment-Zonenzahl N_* zur Energie E_i gegebene spektrale Bandpass in m -ter Beugungsordnung auf $(mN_*)^{-1}$ reduziert wird, so dass mit

$$(A_{eff} \times \Delta E)_2 \approx 0.045 (A_{eff} \times \Delta E)_1 \quad (5.165)$$

die durch den Index 2 gekennzeichnete Lichtstärke zur Energie $E_j = 2E_i$ daher nur noch einen geringen Bruchteil derjenigen zu E_i erreicht.

Bei der Bestimmung des Maximums von $\mathcal{S}_m(E_i)$ sind demnach nicht die Singularitäten an sich, sondern die ihnen benachbarten Ordnungen heranzuziehen. Im übrigen würde eine Differentiation den ganzzahligen Ordnungen und dem diskreten Energiespektrum auch gar nicht Rechnung tragen. Statt dessen ist unter den hinsichtlich m, j und des Vorzeichens möglichen Werten von $\mathcal{S}_m(E_i)$ der größte zu entnehmen. Gewöhnlich genügt es, lediglich die niedrigsten positiven Ordnungen $m \geq 1$ zu betrachten.

Nach dem geschilderten Verfahren kann $\mathcal{S}_m(E_i)$ für das gesamte Spektrum \mathcal{E}_i ermittelt werden. Schließlich sollte

$$\mathcal{S}_m(E_i) \rightarrow \text{Max}[\mathcal{S}_m(E_i), 2] \quad (5.166)$$

dem Problem der „Selbstkontamination“ nach 3.15 entgegen wirken, sollte die Partiallinse zu E_i und mit ihr die übrigen einmal nicht exakt auf ihrer Blaze-Energie operieren.

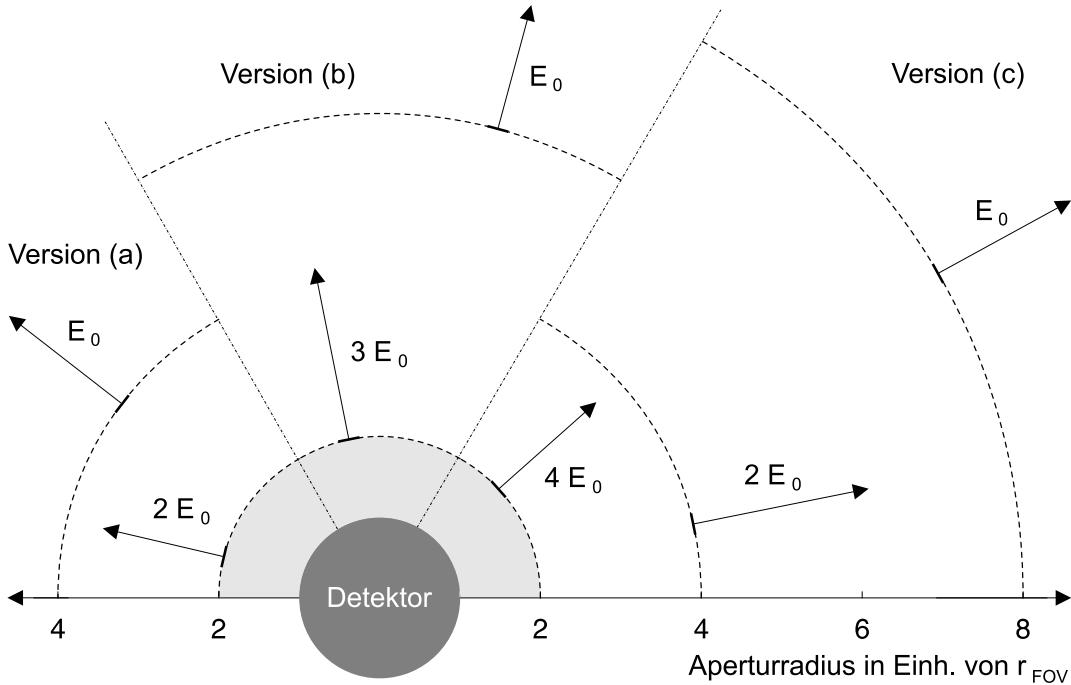


Abbildung 5.34: Beispiele diffraktiver Multiband-Objektive. Den eingetragenen Mindestradien (strichliert) liegt die Annahme kinoformer Fresnel-Profile bzw. deren Streuverhalten zugrunde. Die beiden Versionen (a) und (b) fokussieren jeweils zwei Energiewerte simultan, während in Beispiel (c) E_0 , $2E_0$ und $4E_0$ abgebildet werden.

Solchermaßen ausgestattet, sind für diverse Energiespektren \mathcal{E}_n die entsprechenden Mindestradien einfach zu berechnen. Abb. 5.34 zeigt drei Beispiele. Mehr als drei Energiewerte simultan zu fokussieren, erweist sich als praktisch unmöglich, und zwar aufgrund der sehr großen Radien $\mathcal{S}_m(E_i)$, die sich dann für einzelne Bänder, darunter meist die Basisenergie E_0 , ergeben. Doch auch unter der Einschränkung auf allenfalls dreifach simultane Abbildung sind die einzelnen Energiewerte sorgfältig zu wählen; generell besteht für eng benachbarte Energien ($E_i \approx E_j$) oder aber große Differenzen ($E_i \gg E_0$) eine Tendenz zu großen Mindestradien $\mathcal{S}_m(E_i)$ und damit Zonenzahlen. Die für Abb. 5.34 ausgewählten Beispiele repräsentieren diesbezüglich besonders günstige Konfigurationen.

Im Zuge der Kenndaten-Berechnung nehmen die Obstruktionsverhältnisse a_i eine wichtige Rolle ein. Unter Beachtung der durch $\mathcal{S}_m(E_i)$ vorgegebenen Randbedingungen sind sie den instrumentellen Gegebenheiten und der gewünschten Lichtstärke entsprechend zu wählen. Eine mögliche Zuordnung ergibt sich für die Fälle (a), (b) und (c) aus

$$\begin{aligned}
 (a) \quad a_1 &= 0.50 & a_2 &= 0.08 \\
 (b) \quad a_1 &= 0.45 & a_3 &= 0.10 \\
 (c) \quad a_1 &= 0.80 & a_2 &= 0.50 & a_4 &= 0.14
 \end{aligned} \tag{5.167}$$

Begnügt man sich weiterhin mit $n_{FOV} = 500$ Auflösungselementen, so folgen mit Gl. 5.158

unmittelbar die mit der Trennschärfe von LiF(200) korrespondierenden Zonenzahlen N_* ,

$$\begin{aligned} (a) \quad N_1 &= 18034 & N_2 &= 7652 \\ (b) \quad N_1 &= 15592 & N_3 &= 6140 \\ (c) \quad N_1 &= 15252 & N_2 &= 10306 & N_4 &= 4420 \end{aligned} \quad (5.168)$$

Ferner liefern die Obstruktionsverhältnisse a_i in sukzessiver Anwendung ihrer Definition die inneren wie äußeren Radien der Partial-Objektive im Beispiel (a) zu

$$(a) \quad 4.69 \text{ m} \leq r_1 \leq 9.38 \text{ m} \quad \text{und} \quad 0.38 \text{ m} \leq r_2 \leq 4.69 \text{ m}, \quad (5.169)$$

wenn sich r_{FOV} unter Annahme einer – für alle Energiewerte identischen – Ortsauflösung $\varnothing_{PSF} = 0.75 \text{ mm}$ ergibt. Für Modell (b) fallen die Abmessungen kaum moderater aus,

$$(b) \quad 3.75 \text{ m} \leq r_1 \leq 8.33 \text{ m} \quad \text{und} \quad 0.38 \text{ m} \leq r_3 \leq 3.75 \text{ m}. \quad (5.170)$$

Hingegen begnügt sich Objektiv (c) mit knapp sieben Metern Gesamtradius, die sich gemäß

$$(c) \quad 5.36 \text{ m} \leq r_1 \leq 6.70 \text{ m} \quad \text{und} \quad 2.68 \text{ m} \leq r_2 \leq 5.36 \text{ m} \quad \text{und} \quad 0.38 \text{ m} \leq r_4 \leq 2.68 \text{ m}$$

auf die drei Energiebänder aufteilen. Deren explizite Werte gehen somit offenbar nur über das Blaze-Profil der Partial-Linsen in die Konstruktion ein. Im vorliegenden Fall dürfte

$$\begin{aligned} (a) \quad E_1 &= 6 \text{ keV} & E_2 &= 12 \text{ keV} \\ (b) \quad E_1 &= 4 \text{ keV} & E_3 &= 12 \text{ keV} \\ (c) \quad E_1 &= 4 \text{ keV} & E_2 &= 8 \text{ keV} & E_4 &= 16 \text{ keV} \end{aligned} \quad (5.171)$$

sowohl technischen als auch astronomischen Bedürfnissen entgegen kommen. Die partiellen, jeweils in Einheiten von $(\text{cm}^2 \cdot \text{keV})$ gemessenen Lichtstärken Q_i ergeben sich daraus zu

$$\begin{aligned} (a) \quad Q_1 &= 689.0 & Q_2 &= 1107 \\ (b) \quad Q_1 &= 446.3 & Q_3 &= 854.7 \\ (c) \quad Q_1 &= 133.0 & Q_2 &= 530.9 & Q_4 &= 823.6 \end{aligned} \quad (5.172)$$

Schließlich regelt die frei wählbare Ringzahl $T_{N,i}$ einer Partiallinse die für E_i erzielbare Winkelauflösung $\Delta\epsilon_i$. Fordert man zweckmäßig $\Delta\epsilon_j = \Delta\epsilon_i \forall j$, ergeben sich die übrigen Ringzahlen $T_{N,j}$ zu

$$\begin{aligned} (a) \quad T_1 &= 51 & T_2 &= 60 \\ (b) \quad T_1 &= 39 & T_3 &= 60 \\ (c) \quad T_1 &= 27 & T_2 &= 51 & T_4 &= 60 \end{aligned} \quad (5.173)$$

Andererseits bedingen fixer PSF-Durchmesser \varnothing_{PSF} und konstantes $\Delta\epsilon_i$ gleichbleibende Brennweite F . Tab. 5.16 stellt die wichtigsten Parameter zusammen. Den bei moderaten

Version	(a)	(b)	(c)
Auflösung $\Delta\epsilon$	0.33 mas	0.42 mas	0.44 mas
Brennweite F	463 km	369 km	349 km
$A_{eff} \times \Delta E$	1796 cm ² ·keV	1301 cm ² ·keV	1488 cm ² ·keV

Tabelle 5.16: *Leistungsdaten diffraktiver Multiband-Objektive. Angegeben sind Winkelauflösung, Fokaldistanz und gesamte Lichtstärke. Alle auf Abb.5.34 basierenden Modelle weisen $n_{FOV} = 500$ Auflösungselemente und $\varnothing_{PSF} = 0.75$ mm auf.*

Brennweiten von wenigen 10^2 km akzeptablen Lichtstärken von $\gtrsim 10^3$ cm²·keV ist zu entnehmen, dass derartige Multiband-Objektive hinsichtlich ihres Leistungsvermögens durchaus mit Monoband-Modellen aus Abschn. 5.3 konkurrieren können. Gleichwohl erwächst den hier diskutierten diffraktiven Multiband-Objektiven eine Komplikation: Unter Verwendung eines konventionellen Kristalls erscheint die simultane Detektion nicht ohne weiteres möglich. Welche technischen Optionen abseits des gewiss minder originellen mechanischen Wechsels zwischen den passenden Bragg-Winkeln oder gar diversen Kristallen bestehen, soll an dieser Stelle offen bleiben.

Fest steht, dass dispersionskorrigierte Multiband-Teleskope freilich um den Preis erhöhter Komplexität derlei Probleme umgehen. Ihnen sei daher besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Ihre Segment-Zonenzahlen sind nun nicht mehr wie im diffraktiven Fall durch die Trennschärfe des Detektors, sondern absorptionsbedingt auf einige 10^3 beschränkt. Übertragen auf die Verhältnisse des Hybrid-Segments, lautet Gl. 5.158 explizit

$$N_\star \geq \alpha \mathcal{S}(E_i) n_{FOV} \frac{\eta_N(a)}{a} Q\left(\frac{N_\star}{N_0}\right). \quad (5.174)$$

Für gegebenes $\mathcal{S}(E_i)$, n_{FOV} und a_i bei der Energie E_i ergibt sich N_\star numerisch aus der impliziten Gl. 5.174, die wiederum vom Parameter $Q(s)$ mitbestimmt wird. Es erweist sich, dass Gl. 5.174 nur für geeignet gewählte Parameter $\mathcal{S}(E_i)$, n_{FOV} und a_i eine praktisch sinnvolle Lösung in N_\star besitzt. Wieder führt der Weg über die Schattenfunktion, deren Lösungen sich nun aus Gl. 4.17, genauer gesagt dessen sin – Nenner ergeben. Maxima unterliegen demnach der Bedingung

$$\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\psi} + \frac{\psi}{\zeta} \right) = m\pi \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{Z} \quad \rightarrow \quad \zeta_m = \frac{\psi}{2m - \frac{1}{\psi}}, \quad (5.175)$$

wobei dem Parameter m nun eine der Beugungsordnung analoge Bedeutung zukommt. Mit dem für das Hauptmaximum in $\zeta = \psi$ zu $m_0 = 1$ festgelegten Referenzwert m_0 durchläuft m erneut eine genügend große Anzahl benachbarter Streumaxima $m \gtrless m_0$. Eingesetzt in die Definition der Schattenfunktion ergibt sich

$$\mathcal{S}_m(\psi_0) = \pm \frac{2}{1 - \frac{1}{\psi_0} \left(2m - \frac{1}{\psi_0} \right)} \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (5.176)$$

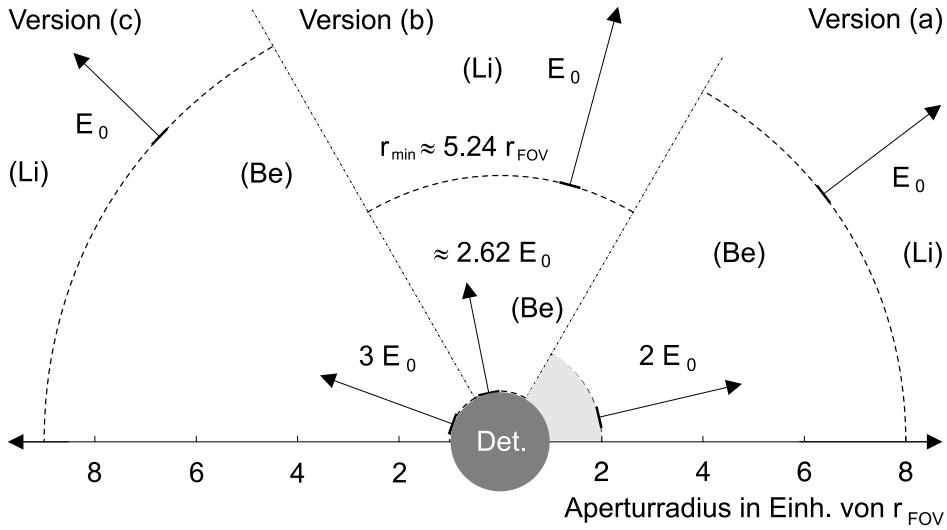


Abbildung 5.35: Beispiele dispersionskorrigierter Multiband-Objektive. Die eingetragenen Mindestradien (strichliert) berücksichtigen das Streuverhalten von Hybridlinsen. Die beiden Versionen (a) und (c) fokussieren ganzzahlige Vielfache von E_0 , während Beispiel (b) hinsichtlich r_{min} (E_0) optimiert ist.

Drei aus Gl. 5.176 hervorgehende Beispiele sind in Abb. 5.35 dargestellt. Den Modellen (a) und (c) ist die im Vergleich zum diffraktiven Analogon große Distanz in $\mathcal{S}_m(\psi_0)$ für Energiewerte $E_{i,j}$ zu entnehmen. Dieses „kritische“ Verhalten der dispersionskorrigierten Schattenfunktion erlaubt nach bisherigen Erkenntnissen die Abbildung lediglich zweier Energiebänder. Angesichts der bereits grenzwertigen Mindestradien von $8r_{FOV}$ für $E_c = E_0$ im Beispiel (a) bzw. $9r_{FOV}$ für $E_c = E_0$ in Modell (c) stellt sich die Frage nach einer bzgl. r_{FOV} optimierten, d.h. minimierten Funktion $\mathcal{S}_m(\psi_0)$. Diese existiert in der Tat, und zwar als reelle und damit physikalisch sinnvolle Lösung der Gleichung

$$\pm \frac{2}{1 - \frac{1}{\psi_0} \left(2m_{\pm} - \frac{1}{\psi_0} \right)} = 2\psi_0 \quad \rightarrow \quad \psi_0 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2.62 \quad \text{für} \quad \begin{bmatrix} m_+ & = & 1 \\ m_- & = & 2 \end{bmatrix}. \quad (5.177)$$

Der Mindestradius zu E_0 nimmt in diesem Fall den absolut kleinstmöglichen Wert an,

$$\mathcal{S}_m(E_0) = 2\psi_0 = 3 + \sqrt{5} \approx 5.24, \quad \text{also} \quad r_{min} \approx 5.24 r_{FOV}. \quad (5.178)$$

Die für $E_{\odot} = 2.62E_0$ erforderliche Abschattung liegt theoretisch innerhalb des r_{FOV} , gleichwohl wird dieser als faktischer Innenradius gewählt. Der nach Gl. 5.174 implizit auftretenden Zonenzahl wegen empfiehlt es sich, die Energiewerte E_i und damit deren N_0 a priori festzulegen. In 5.179 sind mögliche Daten zusammengestellt.

$$\begin{array}{llll} (a) & E_1 & = & 6 \text{ keV} & E_2 & = & 12 \text{ keV} \\ (b) & E_1 & = & 6 \text{ keV} & E_{\odot} & \approx & 16 \text{ keV} \\ (c) & E_1 & = & 6 \text{ keV} & E_3 & = & 18 \text{ keV} \end{array} \quad (5.179)$$

Die Obstruktionsverhältnisse der inneren Partial-Objektive zu $2E_0$, E_\odot und $3E_0$ in den Beispielen (a), (b) und (c) ergeben sich unter Berücksichtigung der Minestradien, die Abdeckung der äußereren Partial-Linsen wird zusammen mit den Sichtfeldern einer realistischen Lösung in N_\star zugunsten bestimmt. Konkret eignen sich folgende Werte:

$$\begin{aligned} (a) \quad a_1 &= 0.72 & a_2 &= 0.25 \\ (b) \quad a_1 &= 0.57 & a_\odot &= 0.19 \\ (c) \quad a_1 &= 0.62 & a_3 &= 0.11 \end{aligned} \quad (5.180)$$

Zusammen mit den unten aufgeführten Sichtfeldern n_{FOV} findet man die Zonenzahlen zu

$$\begin{aligned} (a) \quad N_1 &= 10550 & N_2 &= 3604 \\ (b) \quad N_1 &= 8890 & N_\odot &= 2752 \\ (c) \quad N_1 &= 9204 & N_3 &= 2898 \end{aligned} \quad (5.181)$$

Die Radien skalieren linear mit der Ortsauflösung $\varnothing_{PSF} = 0.75$ mm, so dass im Fall (a)

$$(a) \quad 0.96 \text{ m} \leq r_1 \leq 1.33 \text{ m} \quad \text{und} \quad 0.24 \text{ m} \leq r_2 \leq 0.96 \text{ m}; \quad (5.182)$$

verglichen mit den diffraktiven Konfigurationen bescheidenen Abmessungen, jedoch überkompensiert durch den erweiterten Bandpass. Modell (b) weist mit dem optimierten Minestradius der Basisenergie E_0 eine größere Fläche zu,

$$(b) \quad 0.79 \text{ m} \leq r_1 \leq 1.39 \text{ m} \quad \text{und} \quad 0.15 \text{ m} \leq r_\odot \leq 0.79 \text{ m}. \quad (5.183)$$

Das mit $R = 1.36$ m nahezu gleich große Objektiv (c) erfährt eine radiale Aufteilung gemäß

$$(c) \quad 0.84 \text{ m} \leq r_1 \leq 1.36 \text{ m} \quad \text{und} \quad 0.09 \text{ m} \leq r_3 \leq 0.84 \text{ m}. \quad (5.184)$$

Unter Verwendung der üblichen Formeln für Sammelfläche – die Absorption der diffraktiven Hybrid-Komponente wird wie immer vernachlässigt – und spektralen Bandpass ergeben sich schließlich die partiellen Lichtstärken Q_i ,

$$\begin{aligned} (a) \quad Q_1 &= 374.8 & Q_2 &= 3731 \\ (b) \quad Q_2 &= 732.5 & Q_\odot &= 5331 \\ (c) \quad Q_1 &= 612.3 & Q_3 &= 6787. \end{aligned} \quad (5.185)$$

Die wie immer in Einheiten von $(\text{cm}^2 \cdot \text{keV})$ gemessenen Anteile zu E_0 betragen somit lediglich $\sim 10\%$ der partiellen Lichtstärken zu E_2 , E_\odot bzw. E_3 – ein für derartige Multiband-Achromaten typisches Missverhältnis. Die über beide Energiebänder konstante Winkeleauflösung motiviert wie im Fall der diffraktiven Multiband-Modelle die Ringzahlen

$$\begin{aligned} (a) \quad T_1 &= 14 & T_2 &= 24 \\ (b) \quad T_1 &= 12 & T_\odot &= 20 \\ (c) \quad T_1 &= 9 & T_3 &= 20, \end{aligned} \quad (5.186)$$

so dass sich die in Tab. 5.17 zusammengefassten Leistungsdaten ergeben. Wie bereits an-

Version	(a)	(b)	(c)
Auflösung $\Delta\epsilon$	0.75 mas	0.54 mas	0.43 mas
Sichtfeld \mathcal{O}_{FOV}	$320 \Delta\epsilon$	$400 \Delta\epsilon$	$250 \Delta\epsilon$
Brennweite F	206 km	287 km	357 km
$A_{eff} \times \Delta E$	$4106 \text{ cm}^2 \cdot \text{keV}$	$6063 \text{ cm}^2 \cdot \text{keV}$	$7399 \text{ cm}^2 \cdot \text{keV}$

Tabelle 5.17: Leistungsdaten konventioneller Multiband-Achromaten. Angegeben sind Winkelauflösung, Sichtfeld, Fokaldistanz und gesamte Lichtstärke. Alle auf Abb. 5.35 basierenden Modelle weisen eine Ortsauflösung $\mathcal{O}_{PSF} = 0.75 \text{ mm}$ auf.

gedeutet, dürften sich im praktischen Einsatz vor allem die eingeschränkten Sichtfelder negativ bemerkbar machen. Alle übrigen Parameter weisen die diskutierten Multiband-Modelle nichtsdestoweniger als konkurrenzfähige Teleskope aus. Dies gilt zuletzt auch für die Aspektverhältnisse, auf deren technische Akzeptanz angesichts der relativ großen Zonenzahlen besonders zu achten ist,

$$\begin{aligned} (a) \quad \mathcal{A}_1 &= 2.43 & \mathcal{A}_2 &= 1.97 \\ (b) \quad \mathcal{A}_1 &= 1.81 & \mathcal{A}_\odot &= 1.99 \\ (c) \quad \mathcal{A}_1 &= 1.43 & \mathcal{A}_3 &= 2.25. \end{aligned} \quad (5.187)$$

Im übrigen stellen derlei Systeme bei voller Nutzung des ohnehin beschränkten FOV extrem hohe Anforderungen an die laterale Stabilisierung des Detektors relativ zur optischen Achse. Anders als gewöhnliche Monoband-Objektive bedürfen sie einer absoluten Fixierung – die bloße *Unkenntnis* (vgl. Kap. 6) von Bruchteilen der \mathcal{O}_{PSF} genügt i.a. nicht mehr. Wie kritisch die Lateralposition des Detektors im Einzelfall zu bewerten ist, soll zum Abschluss eine grobe Streulichtanalyse zeigen. Mit Gl. 5.175 führen die rot- bzw. blauverstimmten Foki in der Bild- oder Detektorebene zu ringförmigen Streuhilos. Deren Innen- und Außenradien $r_{scat}^{(i)}$ bzw. $r_{scat}^{(a)}$ sind elementargeometrisch durch

$$r_{scat}^{(i)} = \left| 1 - \frac{1}{\zeta_\pm} \right| r_n^{(i)} \quad \text{und} \quad r_{scat}^{(a)} = \left| 1 - \frac{1}{\zeta_\pm} \right| r_n^{(a)} \quad (5.188)$$

gegeben, wobei die Radien $r_n^{(i)}$ und $r_n^{(a)}$ die n -te partielle Hybridlinse des Objektivs begrenzen, $n \in \{1, 2\}$. Im Beispiel (a) streut die Strahlung der Energie $E_1 = 6 \text{ keV}$ in zweiter Beugungsordnung nach $\zeta_- = 0.25$, da die Beugungseffizienz der Fresnel-Linse in 1. Ordnung verschwindet. Gleichwohl wurde die diesbezügliche Abschirmung $\mathcal{S}_1(E_1)$ gewählt, um unter geringfügigen Einbußen an der Lichtstärke zu E_2 ein großes Sichtfeld in E_0 zu erhalten. Man findet $0.72 \text{ m} \leq r_{scat}(E_1) \leq 2.88 \text{ m}$. Abb. 5.36 zeigt links die rotverstimmte Detektor-Umgebung, die demnach immerhin $\sim 10^3$ Auflösungselemente im Durchmesser zulässt. Enge Grenzen zieht die blauverstimmte Streustrahlung der entsprechenden Detektorposition. Deren relative Brennweite ergibt sich in erster Beugungsordnung zu $\zeta_+ = \frac{4}{3}$. Projiziert in die Beobachtungsebene erhält man $0.24 \text{ m} \leq r_{scat}(E_2) \leq 0.33 \text{ m}$. Die rechte Grafik der Abb. 5.36 illustriert die Abmessungen relativ zur Detektorfläche. Um die absolute und zur fokussierten relative Lichtstärke der Streuhilos zu bestimmen, bedarf es

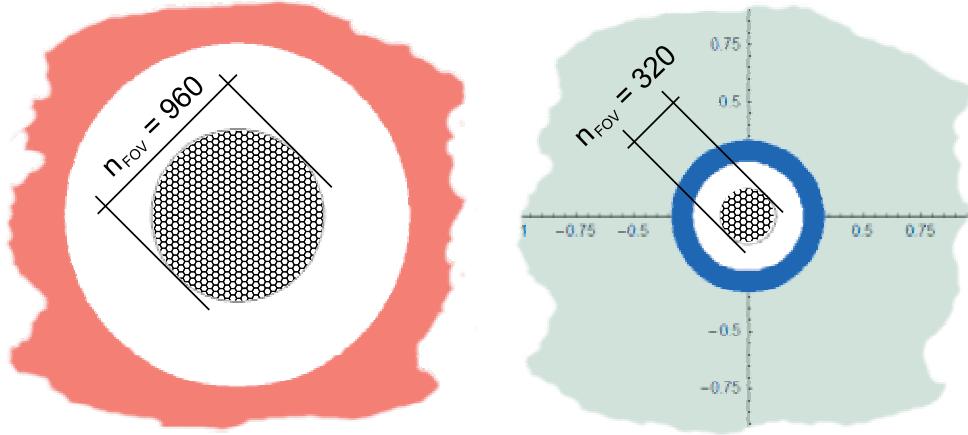


Abbildung 5.36: *Streuhalos des Dualband-Achromaten, Beispiel (a).* Links ist die Detektor-Umgebung im rotverstimmten Fall mit dem Sichtfeld (Wabenmuster) von $n_{FOV} = 960$ Auflösungselementen dargestellt, rechts im gleichen Maßstab die blauverstimmte Komponente mit $n_{FOV} = 320$. Das Koordinatensystem misst die Dimensionen in Metern.

zunächst einer Berechnung der Beugungseffizienz. Beschreibt $P_m(\psi)$ diese für eine idealisierte Fresnel-Linse, liefert

$$P_{scat}(E_i) = P_m \left(\frac{E_i}{E_j} \right) \times T_{N_j}(E_i) \quad (5.189)$$

die absorptionskorrigierte Streueffizienz zur Ordnung m , der Energie E_i sowie der Zonenzahl N_j mit $i \neq j$. Die Transmission ergibt sich aus

$$T_{N_j}(E_i) = 2 \frac{N_0(E_i)}{N_j} \frac{E_i}{E_j} \left(1 - e^{-\frac{N_j}{2N_0(E_i)} \frac{E_j}{E_i}} \right). \quad (5.190)$$

Unter Anwendung obiger Formeln resultieren im bislang betrachteten Beispiel (a)

$$P_{scat}(E_1) = 5.69\% \quad \text{und} \quad P_{scat}(E_2) = 16.3\%, \quad (5.191)$$

wobei im zweiten Fall der relativ hohe „Wirkungsgrad“ $P_{scat}(E_2)$ durch die geringe Absorption in den auf E_1 abgestellten Segmenten begünstigt wird. Mit der Streulichtstärke

$$(A_{eff} \times \Delta E)_{scat}(E_i) = \left(\left(r_j^{(a)} \right)^2 - \left(r_j^{(i)} \right)^2 \right) \pi P_{scat}(E_i) \frac{2}{\sqrt{N_i}} E_i \quad (5.192)$$

wird dem Umstand Rechnung getragen, dass die spektrale Bandbreite der fokussierten Strahlung auch im Streuhalo detektiert werden würde, wenn dessen Intensitätsverteilung im Fall ausgedehnter Quellen das Signal kontaminiert. Konkret beläuft sich die Streuleistung zu E_1 im Beispiel (a) auf

$$(A_{eff} \times \Delta E)_{scat}(E_1) = 180.1 \text{ cm}^2 \text{ keV}, \quad (5.193)$$

was 48% der fokussierten, nutzbaren Lichtstärke entspricht. Ungefähr im gleichen Verhältnis (47%) streut die Strahlung zu E_2 ,

$$(A_{eff} \times \Delta E)_{scat}(E_2) = 1755 \text{ cm}^2 \text{ keV}. \quad (5.194)$$

Eine Erweiterung des Streuhalos für $N_j > N_i$ nimmt sich i.d.R. geringfügig aus und wird in geometrischen Darstellungen wie Abb. 5.36 vernachlässigt. In erster Näherung verteilt sich die defokussierte Strahlung also gleichmäßig auf die Ringfläche, die sich aus 5.188 zu

$$A_i^{(scat)} = \pi \left(1 - \frac{1}{\zeta_{\pm}}\right)^2 \left(\left(r_j^{(a)}\right)^2 - \left(r_j^{(i)}\right)^2 \right) \quad (5.195)$$

errechnet, wobei wieder E_i die durch die auf E_j abgestellten Segmente gestreute Energie bezeichnet.

Im Beispiel (b) liegen die Verhältnisse etwas anders. Nach obigen Ausführungen ist dessen Schattenfunktion auf eine kompakte Bauweise hin optimiert. Die mit E_{\odot} assoziierten Streuhalos erster und zweiter Beugungsordnung fallen in der Detektorebene zusammen. Man erhält für $\zeta_- \approx 0.72$ und $\zeta_+ \approx 1.62$ jeweils $0.30 \text{ m} \leq r_{scat}(E_{\odot}) \leq 0.53 \text{ m}$. Abb. 5.37 veranschaulicht rechts die Dimensionen relativ zum Sichtfeld mit $n_{FOV} = 400$ Auflösungselementen. Das der Beobachtungsebene nächstgelegene Streumaximum zu E_1 erlaubt ein

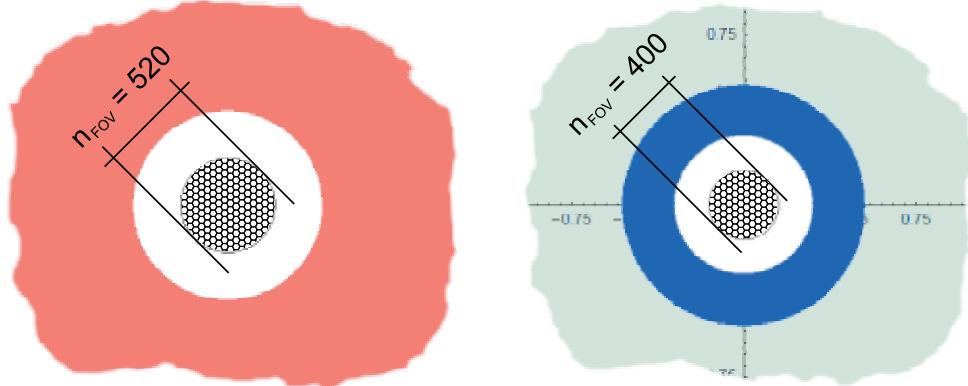


Abbildung 5.37: Streuhalos des Dualband-Achromaten, Beispiel (b). Links ist die Detektor-Umgebung im rotverstimmten Fall mit dem Sichtfeld (Wabenmuster) von $n_{FOV} = 520$ Auflösungselementen dargestellt, rechts im gleichen Maßstab die blauverstimmte Komponente mit $n_{FOV} = 400$. Das Koordinatensystem misst die Dimensionen in Metern.

etwas größeres Sichtfeld, in zweiter Ordnung kumuliert die defokussierte Strahlung bei $\zeta_- \approx 0.28$, was einem ringförmigen Halo der Abmessungen $0.39 \text{ m} \leq r_{scat}(E_1) \leq 2.07 \text{ m}$ entspricht. Die graphische Aufbereitung ist ausschnittsweise in Abb. 5.37 links dargestellt. Aufgrund der Koinzidenz der „blauen“ Streuhalos zu E_{\odot} sind deren partielle Streueffizienzen ebenso wie die Lichtstärken zu addieren, so dass

$$P_{scat}(E_{\odot}) = \mathcal{T}_{N_1}(E_{\odot}) \sum_{m=1}^2 P_m(\psi_{\odot}) = 13.3\%, \quad (5.196)$$

wobei der Beitrag der zweiten Ordnung mit 1.69% vergleichsweise gering ausfällt. Die gesamte Streulichtstärke errechnet sich zu

$$(A_{eff} \times \Delta E)_{scat}(E_{\odot}) = 3240 \text{ cm}^2 \text{ keV}; \quad (5.197)$$

somit bleiben in der Relation zum fokussierten Anteil 60.8% der gesamten transmittierten Lichtstärke ungenutzt. Zumindest relativ günstiger stellt sich die Situation im rotverstimmten Fall dar, wenn nur die zweite Ordnung berücksichtigt wird. Dem Energieband zu E_1 widerfährt in den auf E_{\odot} optimierten Segmenten ein Streuverlust von

$$P_{scat}(E_1) = 1.31\% \rightarrow (A_{eff} \times \Delta E)_{scat}(E_1) = 31.5 \text{ cm}^2 \text{ keV}; \quad (5.198)$$

lediglich 4.3% der Nutzleistung entfallen also in diesen Streubeitrag.

Eine beträchtliche Diskrepanz zwischen Streubeiträgen einzelner Ordnungen eröffnet im Beispiel (c) die Möglichkeit, um den Preis einer geringfügigen Hintergrundkontamination das Sichtfeld deutlich zu erweitern. So streut die Komponente E_3 in zweiter Ordnung nach $\zeta_- \approx 0.82$, entsprechend einer ringförmigen Halo-Verteilung gemäß $0.19 \text{ m} \leq r_{scat}(E_3) \leq 0.30 \text{ m}$. In Abb. 5.38 beschränkt diesmal der in der linken Grafik blau eingetragene Halo das Sichtfeld auf $n_{FOV} = 250$ Auflösungseinheiten. Streueffizienz und zugehörige Lichtstärke

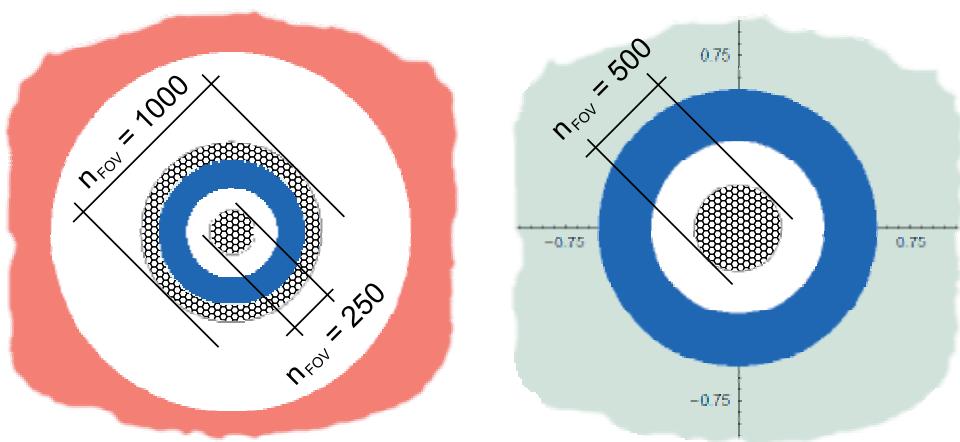


Abbildung 5.38: *Streuhalo des Dualband-Achromaten, Beispiel (c).* Links ist die Detektor-Umgebung im rotverstimmten Fall mit dem Sichtfeld von $n_{FOV} = 1000$ Auflösungselementen nebst dem restriktiven blauen Halo mit 250 Auflösungseinheiten dargestellt, rechts die blauverstimmte Komponente in erster Beugungsordnung mit $n_{FOV} = 500$.

ergeben sich nach bekannter Methode zu

$$P_{scat}(E_3) = 1.39\% \rightarrow (A_{eff} \times \Delta E)_{scat}(E_3) = 332 \text{ cm}^2 \text{ keV}. \quad (5.199)$$

Angesichts der hohen nutzbaren Lichtstärke von nahezu $7 \times 10^3 \text{ cm}^2 \text{ keV}$ mag ein mäßiges Rausch-Niveau zu akzeptieren sein – als das Sichtfeld limitierende Beugungsordnung

fungiert dann die erste, deren virtueller Fokus sich bei $\zeta_+ = 1.8$ befindet. Projiziert in die Beobachtungsebene, entspricht dies einem durch $0.38 \text{ m} \leq r_{scat}(E_3) \leq 0.60 \text{ m}$ begrenzten Halo. Auf ihn entfällt eine Beugungseffizienz bzw. Streulichtstärke von

$$P_{scat}(E_3) = 8.66\% \quad \rightarrow \quad (A_{eff} \times \Delta E)_{scat}(E_3) = 2075 \text{ cm}^2 \text{ keV}. \quad (5.200)$$

Nach Abb. 5.38 erweitert diese tolerante Abschirmung das Sichtfeld auf $n_{FOV} = 500$ Auflösungselemente. Während nichtsdestoweniger die in das Band E_3 gestreute Strahlung das kritische Moment beim Design eines solchen Dualband-Achromaten darstellt, erweist sich die Streukomponente zu E_1 als völlig unproblematisch. Mit der in dritter Ordnung auf $\zeta_- = \frac{1}{9}$ verkürzten virtuellen Fokalposition resultiert ein ausgedehnter Halo, gegeben durch $0.75 \text{ m} \leq r_{scat}(E_1) \leq 6.75 \text{ m}$. Damit belaufen sich Streueffizienz und -lichtstärke auf

$$P_{scat}(E_1) = 4.72\% \quad \rightarrow \quad (A_{eff} \times \Delta E)_{scat}(E_1) = 130.2 \text{ cm}^2 \text{ keV}, \quad (5.201)$$

bei einer allerdings auf rund $6 \times 10^2 \text{ cm}^2 \text{ keV}$ beschränkten Nutzleistung. Das Sichtfeld umfasst nach Abb. 5.38 nun $n_{FOV} = 1000$ Auflösungseinheiten.

Im Zuge einer Weiterentwicklung der hier vorgestellten Dualband-Modelle dürfte einer verbesserten Lichtstärke der „roten“ oder weichen Spektralkomponente entscheidende Bedeutung zukommen. Dies könnte sowohl durch geschickte Ausnutzung des Streuverhaltens der diffraktiven Komponente, evtl. den Einsatz von Kantenfiltern oder aber durch die im folgenden diskutierten reduzierten Achromaten geschehen.

Zunächst auf uniform operierende Aperturen ausgelegt, besteht deren wesentliches Merkmal nach Abschn. 4.2 in einer mehr oder minder ausgeprägten, stufenweisen Abtragung der refraktiven Profilkomponente. Als Dreh- und Angelpunkt der konstruktiven Überlegungen erweist sich der Reduktionsparameter $k \in \mathbb{N}$, der sowohl Transmission als auch Kammstruktur bestimmt. Hinsichtlich der Transmission sollte vielmehr ähnlich wie im Fall des massiven Hybrid-Segments von einem absorptiven Profil gesprochen werden, das je nach Zonenverhältnis $\frac{N_\star}{N_0}$ und nun auch in Abhängigkeit vom Reduktionsparameter k die Winkelauflösung in der Fokalebene beeinflusst. Erneut wird die Approximation der Segmente durch quadratische Parzellen und die von ihnen erzeugte fokale Intensitätsverteilung als Konsequenz der Fourier-Transformierten eine brauchbare Näherung des Problems darstellen. In Erweiterung von Gl. 5.140 gegeben als

$$\mathcal{F}_{s,k}(\vec{\kappa}) = \frac{1}{2\pi} \int_{A_{seg}} \tilde{u}_k(\vec{\nu}) e^{-i\vec{\kappa}\vec{\nu}} d^2\nu, \quad (5.202)$$

beschreibt sie die Amplitudenverteilung eines Segments, wobei $\vec{\nu} \equiv (\nu_x, \nu_y)$ wieder die dimensionslosen, kartesischen und normierten Ortskoordinaten im lokalen Koordinatensystem eines Segments bezeichnet, $-\frac{1}{2} \leq \nu_x \leq +\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2} \leq \nu_y \leq +\frac{1}{2}$. $\vec{\kappa}$ steht bekanntlich für den lateralen Wellenvektor in der Beobachtungsebene. Die Eingangsamplitude ist diesmal aus Gl. 4.63 abzuleiten, man findet nach einfacher Rechnung

$$\tilde{u}_k(\vec{\nu}) = e^{-\frac{s}{4}\frac{1}{\psi}(\frac{q}{k}-1+\psi(1-\nu_x))} \quad \rightarrow \quad \tilde{u}_k(\vec{\nu}) = e^{-\frac{s}{4}(\frac{q}{k}-\nu_x)} \quad \text{für } \psi = 1, \quad (5.203)$$

wenn in Fernfeldnäherung formal der Grenzübergang $N_\star \rightarrow 0$ vollzogen und der entsprechende Fresnel-Term in der Amplitude $\tilde{u}(\vec{\nu})$ ignoriert wird. Der Einschränkung auf den monochromatischen Fall mit $\psi = 1$ liegt die Annahme einer trotz Dispersionskorrektur hinreichend engen Bandbreite zugrunde, so dass das laterale Auflösungsvermögen als von ψ unabhängig erachtet bzw. dessen Mittelwert herangezogen wird. Mit Gl. 5.203 und dem Laufparameter $1 \leq q \leq k$ schreibt sich die Fourier-Amplitude schließlich als

$$\mathcal{F}_{s,k}(\vec{\kappa}) = \hat{\mathcal{F}}_{s,k}(\kappa_y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{q=1}^k \int_{\frac{q-1}{k}}^{\frac{q}{k}} \hat{u}_k(\nu_x) e^{-i\kappa_x \nu_x} d\nu_x, \quad (5.204)$$

sie separiert also in die eindimensionalen Komponenten bzgl. x und y , angedeutet durch $\hat{\mathcal{F}}_{s,k}(\kappa_y)$ und $\hat{u}_k(\nu_x)$. Eine elementare Rechnung liefert die gesuchte Intensitätsverteilung,

$$|\mathcal{F}_{s,k}(\vec{\kappa})|^2 = \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\kappa_y\right)}{\frac{1}{2}\kappa_y} \right)^2 \frac{1 - 2e^{-\frac{s}{4k}} \cos\left(\frac{\kappa_x}{k}\right) + e^{-\frac{s}{2k}}}{\left(\frac{s}{4}\right)^2 + (\kappa_x)^2} \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\kappa_x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\frac{\kappa_x}{k}\right)} \right)^2. \quad (5.205)$$

Wie in Abschn. 5.4 errechnet sich die relative Winkelauflösung aus einer Mittelung über die Punktbilder der auf $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ orientierten Segmente,

$$\langle |\mathcal{F}_{s,k}(\vec{\kappa})|^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}_{s,k}(\vec{\kappa})|^2 d^2\kappa. \quad (5.206)$$

Die so bestimmten Punktbildfunktionen führen der üblichen HEW-Integration folgend wieder auf das absorptionsfrei normierte Auflösungsvermögen

$$Q_k(s) \equiv \frac{\Delta\kappa_k(s)}{\Delta\kappa_k(0)} \quad \text{mit} \quad Q_{k=1}(s) \leftrightarrow Q(s). \quad (5.207)$$

Die parametrische Zuordnung des Reduktionsfaktors k erweist sich als zweckmäßig, da dieser nur wenige diskrete Werte, das Zonenverhältnis $s = \frac{N_\star}{N_0}$ aber das positive reelle Kontinuum bedient. Wie bereits in Abschn. 4.2 angekündigt, wird allen nachfolgend diskutierten Konfigurationen eine konstante Zonenzahl zugrunde gelegt,

$$N_\star = 5 \times 10^3 \quad \text{und} \quad n = \frac{N_\star}{4k} \in \mathbb{N}. \quad (5.208)$$

Die an den refraktiven Stufenparameter n gerichtete Auswahlregel stellt nur eine verhältnismäßig geringe Zahl möglicher k -Werte bereit, die in Tab. 5.18 aufgelistet sind. Für sie

k	1	2	5	10	25	50	125	250
n	1250	625	250	125	50	25	10	5

Tabelle 5.18: Mögliche Werte für k und n bei $N_\star = 5 \times 10^3$ Zonen. Die Angaben folgen Gl. 5.208 und unterteilen das Segment in Partialgitter konstanter Periode.

s	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Q_2	1.02	1.10	1.23	1.44	2.56	3.31	3.69	3.98	4.23	4.45
Q_5	1.00	1.02	1.04	1.06	1.10	1.15	1.21	1.28	1.36	1.48
Q_{10}	1.00	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.07	1.08	1.10
Q_{25}	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01	1.02

Tabelle 5.19: *Absorptionsbedingte Ortsauflösung im reduzierten Hybrid-Segment. In Abhängigkeit vom Zonenverhältnis $s = N_*/N_0$ ist die absorptionsfrei normierte Auflösung $Q_k(s)$ für diverse Reduktionsparameter k angegeben.*

fasst Tab. 5.19 den Einfluss der Absorption auf die Winkelauflösung zusammen. Im Rahmen der hier betrachteten Modelle treten merkliche Beeinträchtigungen des Auflösungsvermögens von mehreren 10% demnach nur für die beiden geringsten Reduktionsstufen $k = 2$ und $k = 5$ auf.

Nach derlei vorbereitenden Betrachtungen steht der Konfiguration konkreter Modell-Teleskope nichts mehr im Wege. Die Berechnung erfolgt auf ähnlichem Wege wie im Fall der massiven, segmentierten Achromaten nach Abschn. 5.4 – allerdings mit dem Unterschied, dass nun unter Vorgabe der Zonenzahl N_* der die Lichtstärke $A_{eff} \times \Delta E$ optimierende Reduktionsparameter k zu suchen ist. Jene ist allgemein gegeben als

$$A_{eff} \times \Delta E = \mathcal{T}_k(s) \pi R^2 (1 - a^2) \cdot \frac{1}{2k} \frac{E}{\sqrt{n}} \quad \text{mit} \quad \mathcal{T}_k(s) = 2 \frac{k}{s} \left(1 - e^{-\frac{s}{2k}}\right) \quad (5.209)$$

als der wiederum filterfreien Transmission, wie sich mit Hilfe von Gl. 5.203 leicht verifizieren lässt. Unter Verwendung der üblichen Definitionen für R und n findet man

$$A_{eff} \times \Delta E = \pi h c N_0 \left(1 - e^{-\frac{N_*}{2kN_0}}\right) \sqrt{\frac{k}{N_*}} (1 - a^2) F T_N, \quad (5.210)$$

mit der Brennweite F und den bekannten Naturkonstanten h und c . Im Hinblick auf eine an der Ortsauflösung \mathcal{O}_{PSF} orientierte Formel für $A_{eff} \times \Delta E$ leistet indes die Darstellung

$$A_{eff} \times \Delta E = 2\pi \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 \frac{1 - a^2}{\eta_N^2(a)} \left(\frac{\mathcal{O}_{PSF}}{Q_k(s)}\right)^2 \sqrt{kN_*} N_0 \left(1 - e^{-\frac{N_*}{2kN_0}}\right) E$$

bessere Dienste. Dabei wurde die ihrer Struktur nach aus Abschn. 5.4 bekannte Relation

$$\mathcal{O}_{PSF} = 2\alpha \eta_N(a) \frac{R}{N_*} Q_k(s) \quad \text{mit} \quad \alpha = 0.535 \quad (5.211)$$

benutzt. Zentrallobstruktur a und Ortsauflösung \mathcal{O}_{PSF} werden nachfolgend universell zu

$$a = \frac{1}{\sqrt{T_N}} \quad \text{und} \quad \mathcal{O}_{PSF} = 0.75 \text{ mm} \quad (5.212)$$

angenommen. Einer gegebenen Energie $E = E_c$ mitsamt einer passend zu wählenden Ringzahl T_N ist demnach vorzugsweise durch explizite Evaluation obiger Gleichung für $A_{eff} \times \Delta E$ der optimale Reduktionsparameter k_{opt} zuzuordnen. Nach deren Festlegung bestimmt sich die Winkelauflösung

$$\Delta\epsilon = \alpha \frac{\lambda_c}{R} \eta_N \left(\frac{1}{\sqrt{T_N}} \right) T_N Q_k \left(\frac{N_\star}{N_0} \right). \quad (5.213)$$

Nach Gl. 5.213 wird den unten aufgeführten Beispielen T_N zugunsten einer Auflösung $\Delta\epsilon \lesssim 0.8$ mas eingestellt. Schließlich seien noch die Formeln für Fokaldistanz F und maximales Aspektverhältnis $\mathcal{A}_{max}^{(seg)}$ angegeben,

$$F = \frac{\mathcal{O}_{PSF}}{\Delta\epsilon} \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_{max}^{(seg)} = \frac{R}{F\delta(E_c)}. \quad (5.214)$$

Tab. 5.20 stellt exemplarisch einige Datensätze für Li zusammen. Erwartungsgemäß be-

Parameter	Li ($A_{eff} \times \Delta E$) → max.			
Energie E	4 keV	5 keV	6 keV	7 keV
Radius R	1.44 m	1.44 m	1.44 m	1.39 m
Auflösung $\Delta\epsilon$	0.81 mas	0.78 mas	0.54 mas	0.42 mas
$A_{eff} \times \Delta E$	708 cm ² keV	1164 cm ² keV	1590 cm ² keV	1997 cm ² keV
Brennweite F	191 km	197 km	288 km	365 km
Reduktion k_{opt}	10	5	5	2
$\mathcal{A}_{max}^{(seg)}$	1.26	1.91	1.88	1.95
Ringzahl T_N	14	17	14	12

Tabelle 5.20: Beispiele reduzierter Li-Achromaten. Die optimalen Reduktionsparameter k_{opt} maximieren die Lichtstärke. Als Zentrallobstruktur wurde $a = \frac{1}{\sqrt{T_N}}$, für die Ortsauflösung $\mathcal{O}_{PSF} = 0.75$ mm gewählt. Allen Beispielen liegt $N_\star = 5 \times 10^3$ zugrunde.

dingt „weiche“ Röntgenstrahlung eine höhere Reduktion, um der Absorption entgegen zu wirken. Um mit der spektralen Kammstruktur das eigentliche Charakteristikum reduzierter Achromaten zu ermitteln, ist die fokale Intensitätsverteilung unter Berücksichtigung der Absorption zu berechnen. Die Grundlage liefert Gl. 4.76. Setzt man darin $m = 1$, substituiert den Stufenparameter $n = \frac{N_\star}{4k}$ und betrachtet ausschließlich die Fokalebene mit $\zeta = 1$, ergibt sich

$$\tilde{I}_k(\psi) = \mathcal{J}_{0,N} \cdot \psi^2 \cdot \mathcal{F}(\psi) \cdot \mathcal{G}_k(\psi), \quad (5.215)$$

relativ zur Intensität der einfallenden Strahlung. Der Term $\mathcal{F}(\psi)$ nimmt unter den genannten Vereinfachungen die Form

$$\mathcal{F}(\psi) \equiv \frac{1 - 2e^{-\frac{1}{2N_0}\frac{1}{\psi}} \cos\left(\pi\left(\frac{1}{\psi} - \psi\right)\right) + e^{-\frac{1}{N_0}\frac{1}{\psi}}}{1 - 2e^{\frac{1}{2N_0}\frac{1}{\psi}} \cos\left(\pi\left(\frac{1}{\psi} + \psi\right)\right) + e^{\frac{1}{N_0}\frac{1}{\psi}}} \quad (5.216)$$

an, während $\mathcal{G}_k(\psi)$ den „refraktiven Nenner“ ebenso wie den von N_0 unabhängigen Interferenzfaktor enthält,

$$\mathcal{G}_k(\psi) \equiv \frac{1 - 2e^{-\frac{N_\star}{4kN_0}\frac{1}{\psi}} \cos\left(\frac{N_\star}{2k}\pi\left(\frac{1}{\psi} + \psi\right)\right) + e^{-\frac{N_\star}{2kN_0}\frac{1}{\psi}} \left(\frac{\sin\left(\frac{N_\star}{4}\pi\psi\right)}{\sin\left(\frac{N_\star}{4k}\pi\psi\right)}\right)^2}{\left(\frac{1}{2\pi N_0}\frac{1}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{1}{\psi} - \psi\right)^2}. \quad (5.217)$$

Den Einfluss der Segmentierung auf die Peakintensität quantifiziert Gl. 5.80, die spezialisiert auf die im Kontext gewählte Obstruktion und deren Normierung an Gl. 5.215 angepasst – Ring- und Reduktionsparameter werden zufällig gleichermaßen mit k notiert –

$$\mathcal{J}_{0,N} = \sum_{k=2}^{T_N} \left[\pi \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}} \right]^{-1} \quad (5.218)$$

lautet. In der numerischen Auswertung von Gl. 5.215 steht einer energieabhängigen und damit möglichst genauen Beschreibung der Absorption via $N_0 = N_0(E_c) \rightarrow N_0(E)$ nichts entgegen. Für die Li-basierten Beispiele aus Tab. 5.20 ergeben sich etwa die in Abb. 5.39 präsentierten Peaks. Die globale Bandbreite umfasst somit typischerweise wenige 10^2 eV. Die Zahl der erfassten spektralen Peaks richtet sich nach der Wahl von k , so dass

$$\frac{\Delta E}{E} = 2\sqrt{\frac{k}{N_\star}} \frac{1}{2k} \approx \#(\text{Peaks}) \times \frac{2}{N_\star} \quad \rightarrow \quad \#(\text{Peaks}) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{N_\star}{k}} \quad (5.219)$$

gilt. Die approximative Natur der Zählung liegt in der Verteilung der Peaks innerhalb des globalen Bandes $\frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ und speziell der randständigen Maxima begründet. Alternativ

k	1	2	5	10	25	50	125	250
$\#(\text{Peaks})$	∞	25	15	11	7	5	3	3

Tabelle 5.21: Anzahl der Maxima in der Kammstruktur des reduzierten Achromaten. Nach Gl. 5.219 nimmt sie etwa wie $\frac{1}{\sqrt{k}}$ ab. Eingetragen sind die Werte für $N_\star = 5 \times 10^3$.

zu Li steht abermals Beryllium (Be) zur Diskussion, ein Werkstoff, der in seiner Verwendung als refraktives Linsenmaterial massiven Hybrid-Achromaten ein verglichen mit Li moderates Leistungsvermögen verlieh und zudem dem harten Röntgenband vorbehalten blieb. Dieser Trend besteht auch im Fall reduzierter Profile fort – wenn auch etwas abgeschwächt. Auf $7 \text{ keV} \leq E \leq 10 \text{ keV}$ ausgerichtete Teleskope erreichen nach Tab. 5.22 Lichtstärken zwischen rund $1 \times 10^3 \text{ cm}^2 \text{ keV}$ und $3 \times 10^3 \text{ cm}^2 \text{ keV}$. Hinsichtlich der übrigen Parameter, auch bzgl. des optimalen Reduktionsparameters k_{opt} , besteht eine größenumordnungsmäßige Übereinstimmung mit den Li-Konfigurationen. Abb. 5.40 zeigt wieder die spektrale Intensitätsverteilung im Fokus. Sie weist ebenfalls keine wesentlichen Unterschiede zu den Li-Beispielen auf. Relativ hoch reduzierte Profile bedingt dagegen Polycarbonat ($\text{C}_{16}\text{H}_{14}\text{O}_3$). Um unter sonst ähnlichen Bedingungen im Energie-Intervall $9 \text{ keV} \leq E \leq 12 \text{ keV}$ Lichtstärken von rund $1 \times 10^3 \text{ cm}^2 \text{ keV}$ bis $2 \times 10^3 \text{ cm}^2 \text{ keV}$ zu

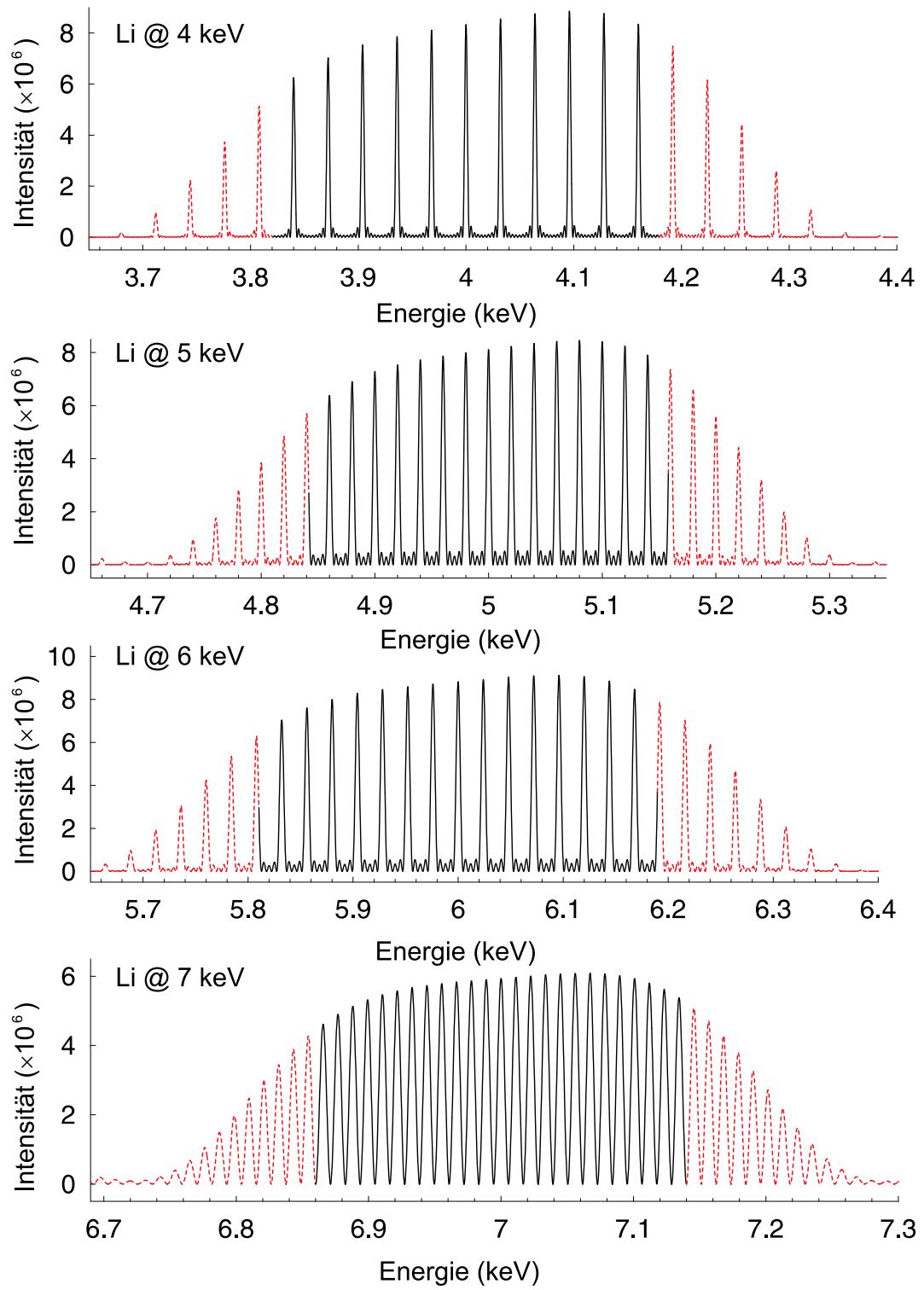


Abbildung 5.39: Spektrale Intensitätsverteilung reduzierter Li-Achromaten. Den Graphen liegen die Parameter aus Tab. 5.20 zugrunde. Die Angaben zur Peak-Intensität sind relativ zur einfallenden Intensität zu interpretieren. Der nutzbare Bandpass ist schwarz gezeichnet.

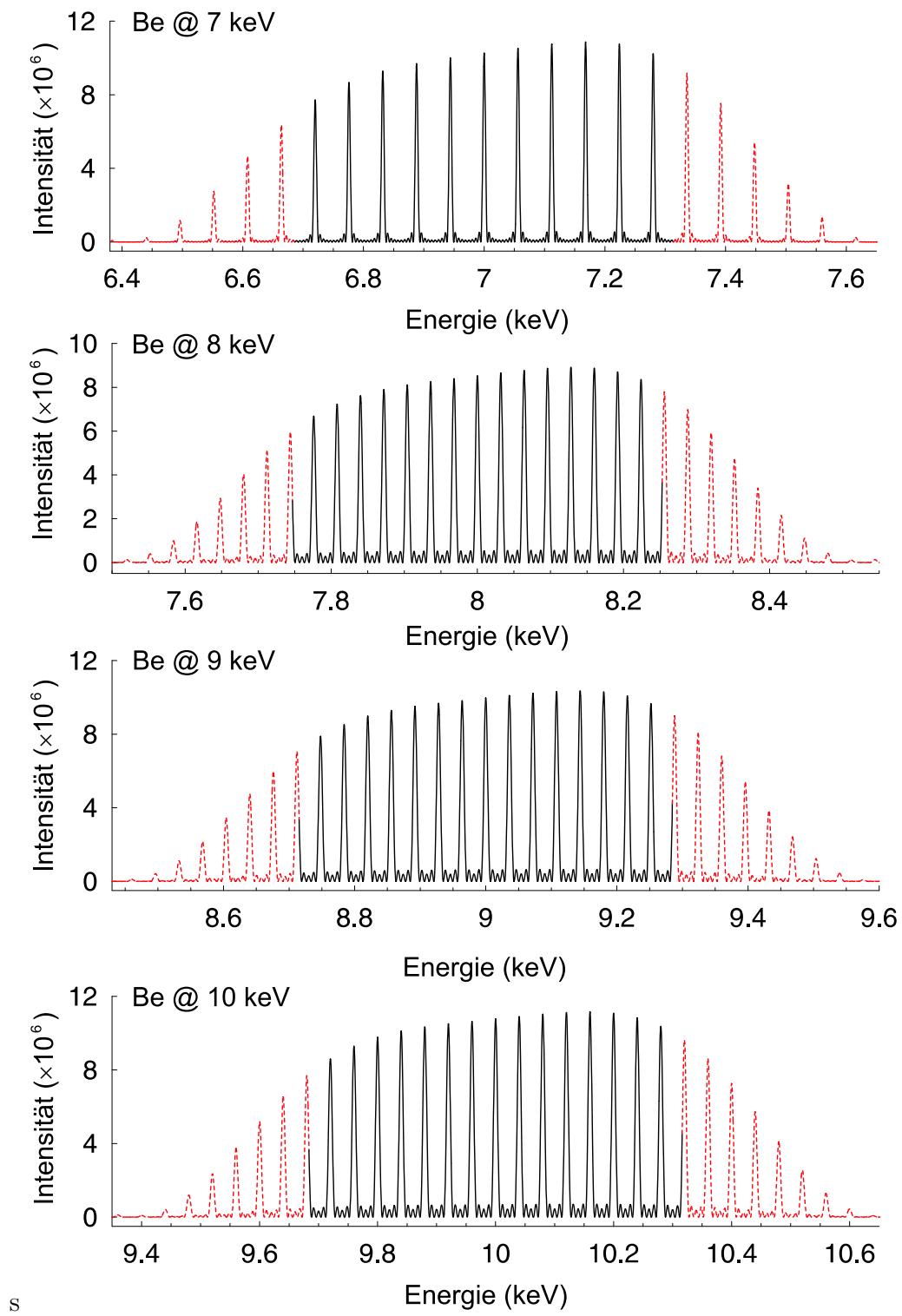


Abbildung 5.40: Spektrale Intensitätsverteilung reduzierter Be-Achromaten. Den Graphen liegen die Parameter aus Tab. 5.22 zugrunde. Die Angaben zur Peak-Intensität sind relativ zur einfallenden Intensität zu interpretieren. Der nutzbare Bandpass ist schwarz gezeichnet.

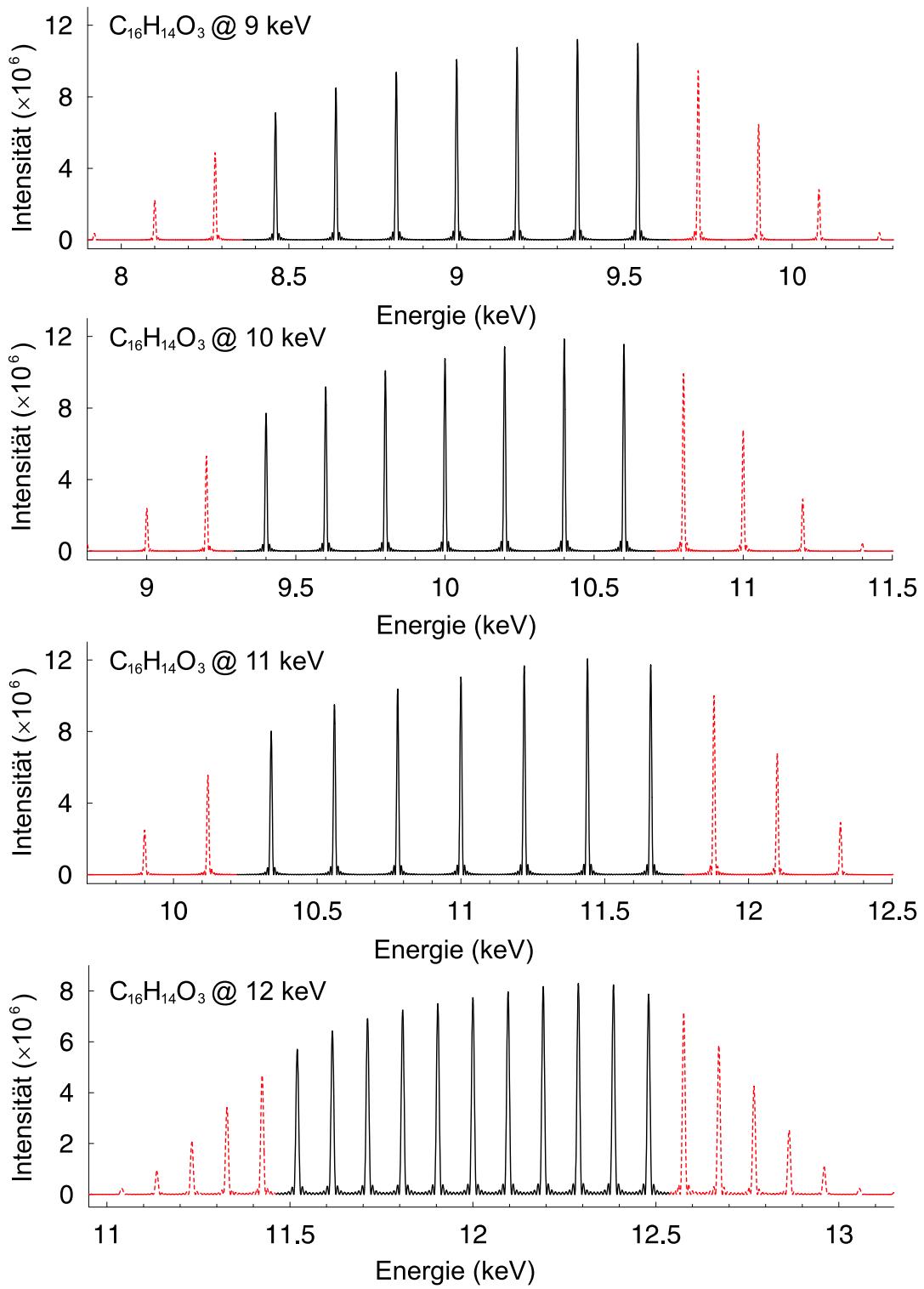


Abbildung 5.41: Spektrale Intensitätsverteilung reduzierter Achromaten aus Polycarbonat. Den Graphen liegen die Parameter aus Tab. 5.23 zugrunde. Der nutzbare Bandpass ist wieder schwarz, die Flügel sind rot gezeichnet.

Parameter	Be ($A_{eff} \times \Delta E$) \rightarrow max.			
Energie E	7 keV	8 keV	9 keV	10 keV
Radius R	1.47 m	1.45 m	1.47 m	1.48 m
Auflösung $\Delta\epsilon$	0.79 mas	0.80 mas	0.79 mas	0.70 mas
$A_{eff} \times \Delta E$	1356 cm ² keV	1754 cm ² keV	2258 cm ² keV	2725 cm ² keV
Brennweite F	196 km	194 km	197 km	221 km
Reduktion k_{opt}	10	5	5	5
$\mathcal{A}_{max}^{(seg)}$	1.08	1.41	1.78	1.97
Ringzahl T_N	25	28	32	32

Tabelle 5.22: Beispiele reduzierter Be-Achromaten. Die optimalen Reduktionsparameter k_{opt} maximieren die Lichtstärke. Als Zentralobstruktion wurde $a = \frac{1}{\sqrt{T_N}}$, für die Ortsauflösung $\varnothing_{PSF} = 0.75$ mm gewählt. Allen Beispielen liegt $N_\star = 5 \times 10^3$ zugrunde.

erzielen, bedarf es in der Regel einer Reduktion auf $k_{opt} = 25$. In Tab. 5.23 und Abb. 5.41 sind einige Beispiele zusammengestellt.

Der mit der Profilreduktion im allgemeinen einhergehende Leistungszuwachs legt einen Einsatz solcher Stufen-Hybridlinsen in den zuvor diskutierten Dualband-Achromaten nahe. Als hierfür prädestiniert erweist sich speziell die niederenergetische, mit E_1 assoziierte Komponente, deren hohe Zonenzahlen für die geringe Lichtstärke von wenigen 10² cm² keV waren. Eine Reduktion der für E_2 bzw. E_3 vorgesehenen Be-Komponente erweist sich hingegen als bzgl. $A_{eff} \times \Delta E$ nachteilig. Im folgenden werden denn auch alle oben angegebenen Parameter unverändert übernommen, mit Ausnahme der Zonenzahlen N_1 sowie deren Reduktionsparameter $k_1 \geq 2$. Die gemäß Abb. 5.36, 5.37 und 5.38 recht großen Sichtfelder für E_1 lassen ferner Spielraum für Variationen der entsprechenden Orts- und Winkelauflösung, die rückwirkend über kleinere Segmente und damit Zonenzahlen abermals die Transmission erhöht. Im einzelnen ergeben sich als annähernd optimale Zonenzahlen

$$\begin{aligned}
 (a) \quad N_1 &= 3000 & N_2 &= 3600 \\
 (b) \quad N_1 &= 4480 & N_\odot &= 2750 \\
 (c) \quad N_1 &= 4544 & N_3 &= 2900,
 \end{aligned} \tag{5.220}$$

wobei die zu den harten Spektralbändern gehörigen Zonenzahlen gerundet beibehalten wurden, während die Werte N_1 im Vergleich zum massiven Fall um wenigstens 50% geringer ausfallen. Die auf E_1 abgestellten Segmente erfahren eine moderate Profilreduktion via

$$k_1(a) = 2 \quad \text{und} \quad k_1(b) = 4 \quad \text{und} \quad k_1(c) = 4. \tag{5.221}$$

Unterstützend wirken sich die neu angepassten Ringzahlen T_1 auf die Lichtstärke aus,

$$\begin{aligned}
 (a) \quad T_1 &= 29 & T_2 &= 24 \\
 (b) \quad T_1 &= 15 & T_\odot &= 20 \\
 (c) \quad T_1 &= 11 & T_3 &= 20,
 \end{aligned} \tag{5.222}$$

Parameter	$C_{16}H_{14}O_3 (A_{eff} \times \Delta E) \rightarrow max.$			
Energie E	9 keV	10 keV	11 keV	12 keV
Radius R	1.47 m	1.48 m	1.48 m	1.44 m
Auflösung $\Delta\epsilon$	0.66 mas	0.55 mas	0.44 mas	0.39 mas
$A_{eff} \times \Delta E$	1070 cm^2 keV	1293 cm^2 keV	1500 cm^2 keV	1816 cm^2 keV
Brennweite F	233 km	282 km	351 km	400 km
Reduktion k_{opt}	25	25	25	10
$\mathcal{A}_{max}^{(seg)}$	1.94	1.99	1.93	1.97
Ringzahl T_N	27	25	22	20

Tabelle 5.23: Beispiele reduzierter Achromaten aus Polycarbonat. Die optimalen Reduktionsparameter k_{opt} maximieren die Lichtstärke. Als Zentrallobstruktur wurde $a = \frac{1}{\sqrt{T_N}}$, für die Ortsauflösung $\mathcal{O}_{PSF} = 0.75$ mm gewählt. Allen Beispielen liegt $N_\star = 5 \times 10^3$ zugrunde.

die allerdings auch zu einer modifizierten Ortsauflösung $\mathcal{O}_{PSF,1}$ Anlass geben,

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \mathcal{O}_{PSF,1} = 1.50 \text{ mm} \quad \mathcal{O}_{PSF,2} = 0.75 \text{ mm} \\
 (b) \quad & \mathcal{O}_{PSF,1} = 0.94 \text{ mm} \quad \mathcal{O}_{PSF,\odot} = 0.75 \text{ mm} \\
 (c) \quad & \mathcal{O}_{PSF,1} = 0.94 \text{ mm} \quad \mathcal{O}_{PSF,3} = 0.75 \text{ mm}
 \end{aligned} \tag{5.223}$$

Abb. 5.42 fasst schließlich die partiellen Lichtstärken der diversen Modelle zusammen. Die

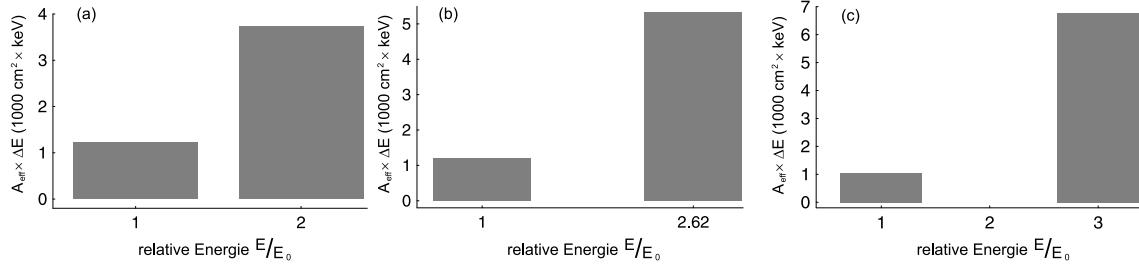


Abbildung 5.42: Lichtstärke teilreduzierter Dualband-Achromaten. Aufgetragen sind die partiellen Beiträge in Einheiten von $10^3 \text{ cm}^2 \text{ keV}$. Die Diskrepanz zwischen den Anteilen zu E_1 und E_2 bzw. E_3 wächst mit der Energiedifferenz.

niederenergetische Komponente liefert nun durchgehend $> 10^3 \text{ cm}^2 \text{ keV}$, während sich an der Leistung im harten Röntgenband nichts ändert. Um die maximale Abbildungsqualität zu erhalten, erfordert die Kammstruktur des weichen Bandes je nach Version die Detektion mit einer spektralen Auflösung von

$$4.4 \times 10^{-4} \leq \left(\frac{\Delta E}{E} \right)_{\text{det},1} \leq 6.7 \times 10^{-4}. \tag{5.224}$$

Wenngleich in der Entwicklung befindliche Micro-Kalorimeter diesen Anforderungen eines Tages für moderate Photonenergien $E_1 \sim 6$ keV entsprechen dürften, stehen hinter der Tauglichkeit derartiger Detektoren für E_2 , E_\odot und E_3 vorläufig noch Fragezeichen. Die

Version	(a)	(b)	(c)
Auflösung $\Delta\epsilon$	1.50 / 0.75 mas	0.67 / 0.54 mas	0.54 / 0.43 mas
Det.-größe \varnothing_{FOV}	72 / 24 cm	39 / 30 cm	75 / 19 cm
Brennweite F	206 km	287 km	357 km
$A_{eff} \times \Delta E$	4954 cm ² ·keV	6543 cm ² ·keV	7831 cm ² ·keV

Tabelle 5.24: Leistungsdaten teilreduzierter Dualband-Achromaten. Angegeben sind Winkelauflösung, Detektordurchmesser, Fokaldistanz und gesamte Lichtstärke. Alle Modelle basieren auf den Mindestradien nach Abb. 5.35.

gesamte Lichtstärke nimmt somit um durchschnittlich rund 10% zu, während die partielle Leistungsfähigkeit in E_1 nun jeweils ein Mehrfaches des ursprünglichen Wertes beträgt. Abb. 5.43 illustriert schließlich wieder die Sichtfelder im weichen und harten Röntgenband.

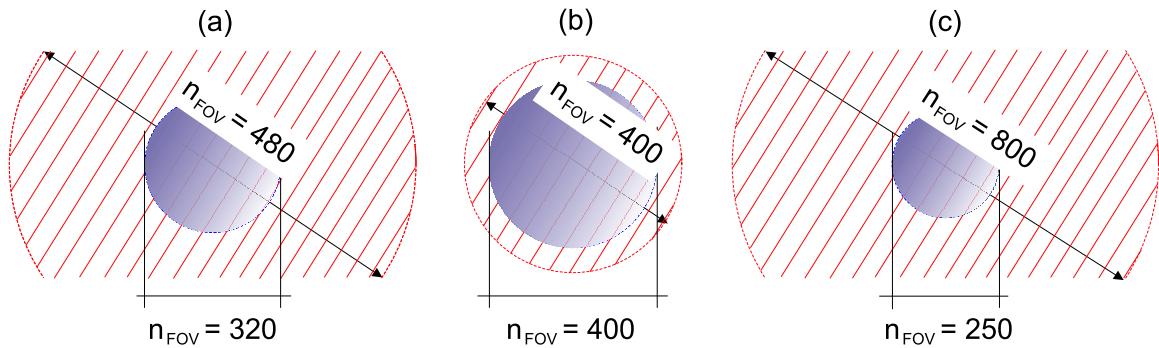


Abbildung 5.43: Sichtfelder teilreduzierter Dualband-Achromaten. Die maßstabsgetreuen Abmessungen berücksichtigen die unterschiedliche Ortsauflösung für E_1 (rot) und E_2 , E_\odot bzw. E_3 (blau) und beschreiben die gegen alle Streustrahlung abgeschirmte Nettofläche.

Zum Ausklang dieses Abschnitts sei noch auf eine der fokalen Kammstruktur eigene Option zur spektralen, wenn auch quantitativ beschränkten Variation der Intensitätsmaxima hingewiesen. Nach Gl. 4.86 verläuft die lokale Dispersion eines Peaks linear in der Energie, es gilt in Fokusnähe

$$\psi(\zeta) = \zeta \quad \text{oder} \quad E(z) = \frac{z}{F_c} E_c \quad \text{für} \quad \psi \sim 1 \sim \zeta. \quad (5.225)$$

Es bietet sich an, diesen Sachverhalt in Verbindung mit dem spektral hochauflösenden Detektor zu nutzen, um beispielsweise eine Spektrallinie außerhalb des regulären Bandpasses $\frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ zu vermessen. Nach Abb. 5.44 bedarf es dazu einer fokalen Versetzung

$$\zeta = 1 + \Delta\zeta, \quad \text{so dass} \quad \Delta\zeta = \Delta\psi. \quad (5.226)$$

Dabei schwindet die Einhüllende im durch $\psi = 1$ definierten spektralen Schwerpunkt mit

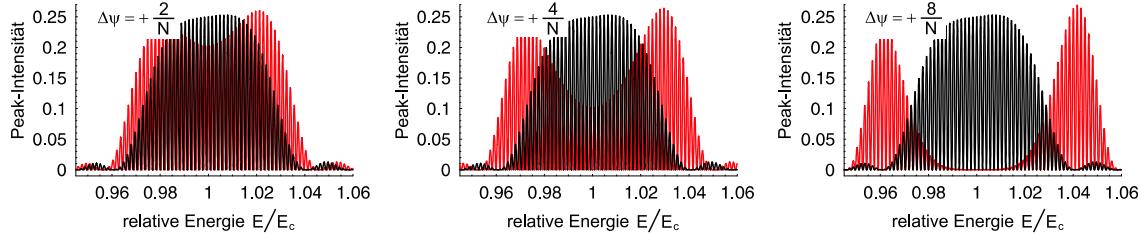


Abbildung 5.44: *Spektrale Feinverstimmung des reduzierten Achromaten. Versetzt man den Detektor an die Position $\zeta = 1 + \Delta\zeta$, so resultieren die rot gezeichneten Verteilungen.*

wachsender Verstimmung, während die Flügelverteilung z.T. sogar an Intensität gewinnt.

5.6 Konstruktion dialytischer Teleskope

Zweifellos erweitern die in Abschn. 5.5 beschriebenen Multiband-Objektive aufgrund ihres Potentials zur simultanen Abbildung in mehreren Spektralbändern das wissenschaftliche Einsatzgebiet gegenüber Monoband-Aperaturen. Kammband-Achromaten erweitern das Prinzip der segmentierten Dispersionskorrektur auf Energiebänder von wenigen keV und können ggf. der spektroskopischen Abbildung dienen, wenngleich ihre Lichtstärke z.T. hinter der des aus *massiven* Profilsegmenten bestehenden, optimierten Profils zurückbleibt.

Abgesehen von diffraktiven Linsen bleiben all diese Systeme jedoch auf das ihnen konstruktiv zugewiesene Energieband von bestenfalls einigen 10^2 eV beschränkt. Mit der in Abschn. 4.3 eröffneten Separation der optischen Komponenten wurde jedoch ein Weg aufgezeigt, die abbildende Optik im Prinzip über mehrere keV durchzustimmen. Geschieht dies durch eine der Energie angepasste Separation $d(E_c)$, so gilt nach

$$d(E_c) = \frac{1}{2} F(E_0) \frac{E_c}{E_0} \left(1 - \sqrt{\frac{E_c}{E_0}} \right), \quad (5.227)$$

also insbesondere $d(E_0) = 0$. Es erscheint daher naheliegend, nicht zuletzt aus Gründen einer gewissen Vergleichbarkeit, eine den in Abschn. 5.4 vorgeschlagenen Konfigurationen ähnliche Optik zum Ausgangspunkt zu wählen. Günstige Resultate liefert beispielsweise ein im harten Röntgenband optimiertes Hybrid-Teleskop aus Lithium, dessen konstruktive Kenndaten E_0 , N_\star und \mathcal{O}_{PSF} hier explizit aufgeführt seien,

$$E_0 = 14 \text{ keV} \quad \text{und} \quad N_\star = 8550 \quad \text{und} \quad \mathcal{O}_{PSF} = 0.375 \text{ mm}. \quad (5.228)$$

Zentrallobstruktur a , Ringzahl T_N und Radius R werden wie folgt gewählt bzw. berechnet,

$$a = 0 \quad \text{und} \quad T_N = 6 \quad \text{und} \quad R = 1.11 \text{ m}, \quad (5.229)$$

wobei in die Kalkulation des Radius nach Gl. 5.149 wieder die absorptionsbedingte Aufweitung der PSF eingeht. Der geschlossenen Apertur mit $a = 0$ kommt nun offenbar die besondere Bedeutung der optischen Notwendigkeit zu, zumindest im Fall der refraktiven Komponente. Winkelauflösung $\Delta\epsilon$ und Brennweite F ergeben sich zu

$$\Delta\epsilon = 0.14 \text{ mas} \quad \text{und} \quad F = 545 \text{ km} \quad @ \quad E_0 = 14 \text{ keV.} \quad (5.230)$$

Die Variation der dispersionskorrigierten Energie E_c erfolgt nun gemäß Gl. 5.227. Im Fokus 3. Ordnung beträgt der – gleichzeitig maximale – Abstand zwischen diffraktiver und refraktiver Komponente

$$E_3 = \frac{4}{9}E_0 \approx 6.22 \text{ keV} \quad \rightarrow \quad d(E_3) \approx 40.4 \text{ km.} \quad (5.231)$$

Abb. 5.45 zeigt links den Verlauf des Linsenabstandes mit der Energie im Intervall $4 \text{ keV} \leq E \leq 14 \text{ keV}$. Die Fokalposition, also der Abstand der Brennebene von der diffraktiven

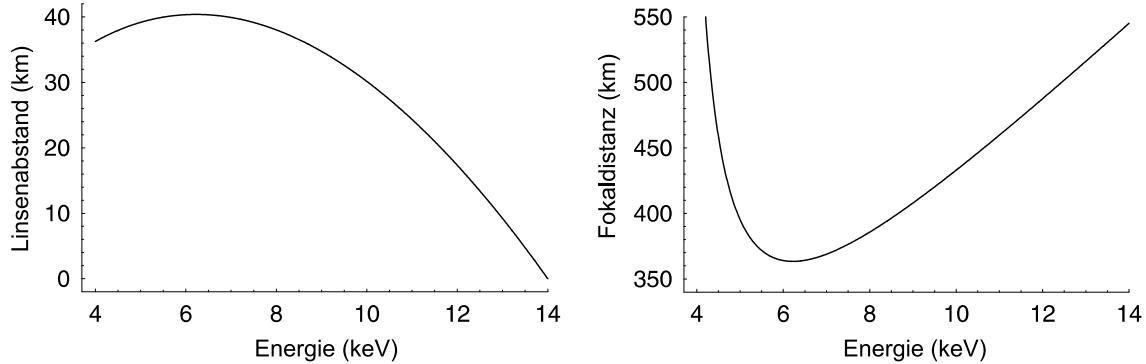


Abbildung 5.45: *Fokalposition und Linsenabstand des durchstimmbaren Dialyten. Beide Kenngrößen durchlaufen im Fokus 3. Ordnung bei $E_3 = \frac{4}{9}E_0$ ein Extremum. Die Separation d beträgt gleichwohl nur wenige % der Fokalposition.*

Komponente, nimmt hingegen, ausgehend von $F(E_0) = 545 \text{ km}$, zunächst kontinuierlich ab. Quantitativ gilt

$$z_F(E_c) = \frac{1}{2}F(E_0) \frac{1 - 3\sqrt{\frac{E_c}{E_0}}}{1 - 2\sqrt{\frac{E_c}{E_0}}} \left(\frac{E_c}{E_0} \right), \quad (5.232)$$

so dass speziell im Fokus 3. Ordnung ein absolutes Minimum in z_F zu verzeichnen ist.

$$z_F \left(\frac{4}{9}E_0 \right) = \frac{2}{3}F(E_0) \approx 363 \text{ km.} \quad (5.233)$$

Um nach diesen geometrischen Parametern die wesentliche Kenngröße des Modells, die Lichtstärke $A_{eff} \times \Delta E$ zu bestimmen, bedarf es einer Vorüberlegung. Durchdringt die von der Quelle stammende Eingangsamplitude die refraktive Linsenkomponente für $d = 0$, so

erscheint sie vom Bildpunkt $z_F(E_0)$ aus betrachtet unter der Zonenzahl $N_L = \frac{1}{2}N$, wobei für die segmentierte Zonenzahl N_* eine analoge Beziehung gilt. Mit der Separation $d \geq 0$ errechnet sich die für N_L wichtige refraktive Brennweite F_L aus der diffraktiven F_Z zu

$$F_L(E_c) = -2F_Z(E_c) \left(\frac{E_c}{E_0} \right)^2 \quad (5.234)$$

Mit der Definitionsgleichung der Zonenzahl resultiert die Energieabhängigkeit derselben,

$$N_L = -\frac{R^2}{\lambda F_L} \rightarrow N_L(E_c) = \frac{1}{2}N_Z(E_0) \frac{E_0}{E_c}, \quad (5.235)$$

wobei selbstverständlich $N_Z(E_0) \equiv N$ gilt. Mit Gl. 5.235 ergibt sich die wiederum filterfreie Transmission der refraktiven, segmentierten Komponente zu

$$\mathcal{T}(E_c) = 2 \frac{N_0}{N} \frac{E_c}{E_0} \left(1 - e^{-\frac{N}{2N_0} \frac{E_0}{E_c}} \right), \quad (5.236)$$

und mit ihr die effektive Sammelfläche A_{eff} , die außerdem noch von der ebenfalls energie-abhängigen Beugungseffizienz der diffraktiven Fresnel-Komponente beeinflusst wird,

$$A_{eff}(E_c) = \mathcal{T}(E_c) \times P_1(E_c) \quad \text{mit} \quad P_1(E_c) = \left(\frac{\sin \left(\pi \left(1 - \frac{E_\odot}{E_c} \right) \right)}{\pi \left(1 - \frac{E_\odot}{E_c} \right)} \right)^2. \quad (5.237)$$

Der Bandpass ist letztendlich manuell-numerisch zu bestimmen, für die Zonenzahl $N_* = 8550$ ergibt sich ein Verlauf entsprechend Abb. 4.24. Offenkundig eröffnet die bislang unbestimmte Blaze-Energie E_\odot einen zusätzlichen Freiheitsgrad, über den sich die Lichtstärke den wissenschaftlichen Anforderungen anpassen lässt. Die konventionelle Zuordnung $E_\odot = E_0$ erweist sich als ungünstig, da sie einen der zum weichen Röntgenband hin zunehmenden Absorption gleichgerichteten Verlauf der Beugungseffizienz bedingt. Im vorliegenden Beispiel wurde

$$E_\odot = \frac{1}{2}E_0 = 7 \text{ keV} \quad (5.238)$$

gewählt. Abb. 5.46 zeigt, dass mit dieser Gewichtung eine der Lichtstärke im weichen Röntgenband zuträgliche Auswahl getroffen wurde. Offensichtlich weist das hier betrachtete Modell nahe der astrophysikalisch wichtigen K_α -Linie von Fe bei 6.4 keV eine besonders hohe Lichtstärke auf, eben als Folge der entsprechend gewählten Blaze-Energie, speziell aber auch aufgrund der hocheffizienten Dispersionskorrektur in 3. Ordnung.

Neben diesem durchaus erfreulichen Sachverhalt geht mit der spektralen Verstimmung allerdings noch ein weiteres, dialytischen Teleskopen eigenes Charakteristikum einher. Be- trachtet man nämlich gemäß

$$\mathcal{Q}_{PSF}(E_c) = \Delta\epsilon(E_c) \times F(E_c) \quad \text{mit} \quad F(E_c) = F(E_0) \left(\frac{E_c}{E_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left(2\sqrt{\frac{E_c}{E_0}} - 1 \right)^{-1} \quad (5.239)$$

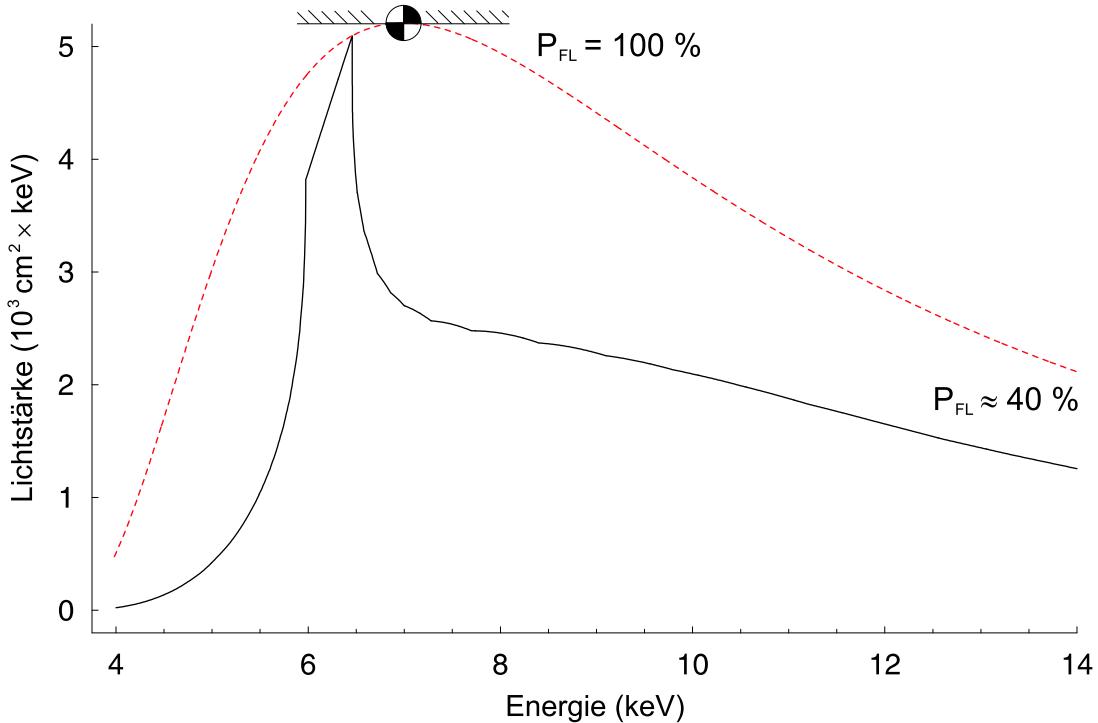


Abbildung 5.46: *Lichtstärke des durchstimmbaren Li-Dialyten. Die Schwerpunktsetzung der diffraktiven Beugungseffizienz (rot strichliert) auf $E_\odot = 7$ keV reduziert zwar die Lichtstärke bei E_0 um 60%, verleiht jedoch dem relativ weichen Röntgenband und speziell der 3. Dispersions-Ordnung bei $E_c \gtrsim 6$ keV ein hohes Leistungsvermögen (schwarz).*

die mit der dialytischen Gesamt-Brennweite $F(E_c)$ variierende Ortsauflösung \mathcal{O}_{PSF} , so erweist sich diese als signifikant von E_c abhängig,

$$\mathcal{O}_{PSF}(E_c) \propto \sqrt{\frac{E_c}{E_0}} \left(2\sqrt{\frac{E_c}{E_0}} - 1 \right)^{-1} \rightarrow \mathcal{O}_{PSF} \left(\frac{4}{9} E_0 \right) = 2 \mathcal{O}_{PSF}(E_0). \quad (5.240)$$

Hinzu kommt noch die absorptionsbedingte Aufweitung der Punktbildfunktion, die sich im Verhältnis der jeweiligen Faktoren $Q(s)$ quantifiziert, so dass

$$\frac{\mathcal{O}_{PSF}(E_c)}{\mathcal{O}_{PSF}(E_0)} = \sqrt{\frac{E_c}{E_0}} \left(2\sqrt{\frac{E_c}{E_0}} - 1 \right)^{-1} Q \left(\frac{N}{N_0} \right)^{-1} \cdot Q \left(\frac{N}{N_0} \frac{E_0}{E_c} \right) \quad (5.241)$$

den mit $E_c \rightarrow \frac{4}{9} E_0$ zunehmenden PSF-Durchmesser beschreibt. Tab. 5.25 stellt einige Werte zusammen. Allerdings berücksichtigt Gl. 5.241 noch nicht den negativen Einfluss der Segmentierung bei separierten Komponenten. Die mittleren kohärent ausgeleuchteten Flächen, im Fall des Hybrid-Achromaten gegeben durch die Segmente, werden bei im allgemeinen nicht deckungsgleicher Transmission der von der diffraktiven Linse ausgesandten und die refraktiven Segmente durchdringenden Strahlenbündel grundsätzlich kleiner als die

$E(\text{keV})$	6	6.5	7	7.5	8	9	10	11	12	13	14
\varnothing_{PSF}	5.72	4.16	3.17	2.54	2.13	1.65	1.39	1.23	1.13	1.05	1.00

Tabelle 5.25: *Theoretische Ortsauflösung des durchstimmbaren Dialyten. Mit abnehmender Energie erweitern sowohl geometrische als auch absorptionsbedingte Effekte \varnothing_{PSF} allmählich auf das rund fünffache in 3. Ordnung. Der Einfluss der refraktiven Segmentierung ist nicht berücksichtigt.*

ursprünglichen Segmentflächen ausfallen und damit die Auflösung weiter reduzieren. Auf eine quantitative Analyse sei an dieser Stelle verzichtet.

Statt dessen soll nun noch dem vor allem wegen seiner überragenden Bandbreite interessanten Spezialfall der 3. Ordnung Beachtung zuteil werden. Abb. 5.47 illustriert die geometrischen Längenskalen und Strahlengänge. Es erweist sich, dass auch solche separier-

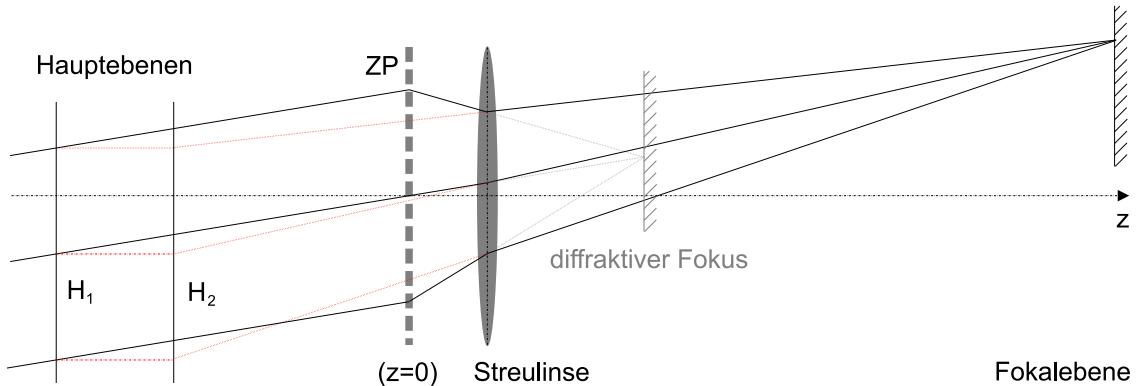


Abbildung 5.47: *Strahlengang im Dialyten 3. Ordnung. Das diffraktive Element befindet sich im Koordinatenursprung bei $z = 0$. Hauptebenen $H_{1,2}$, diffraktive und dispersionskorrigierte Fokalposition sowie die Lage der refraktiven Linse sind bzgl. z maßstabsgetreu eingezeichnet. Der reale Strahlengang ist schwarz, der fiktive, mit Hilfe der Hauptebenen konstruierte rot strichliert dargestellt.*

ten Achromaten in Abhängigkeit von der diffraktiven Zonenzahl N bzw. N_* bzgl. ihrer Lichtstärke ein Optimum durchlaufen. Für den segmentierten Fall ergibt sich dieses zu

$$A_{eff} \times \Delta E = 2\pi \left(\frac{1}{2\alpha} \right)^2 E \sqrt[3]{\frac{2}{N_*}} \eta_N^{-2}(0) \left(\frac{\varnothing_{PSF}}{Q \left(\frac{9 N_*}{4 N_0} \right)} \right)^2 \frac{8}{9} N_0 N_* \left(1 - e^{-\frac{9 N_*}{8 N_0}} \right). \quad (5.242)$$

Tab. 5.26 und Tab. 5.27 stellt die optimierten Zonenzahlen im mittleren und harten Röntgenband für Li und Be zusammen. In ähnlicher Weise wie im Fall der hybrid-segmentierten Monoband-Objektive nach Abschn. 5.4 errechnen sich unter Vorgabe weniger Daten wie der Energie E_c , der Auflösung \varnothing_{PSF} oder der zugunsten eines noch vertretbaren Aspektverhältnisses im übrigen sehr kleinen Ringzahl T_N die Parameter der in Tab. 5.28 zusammengefassten Beispiele. Angesichts der geringen Radien und des negativen Einflusses der

E (keV)	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$N_\star = N_Z$	2392	3088	3676	4118	4384	4528	4552	4488	4366	4210	4064

Tabelle 5.26: *Optimierte Zonenzahlen segmentierter Li-Dialyten. Die Daten beziehen sich auf die graufilter-freie Korrektur in 3. Ordnung und sind angesichts der wenigen Ringe $T_N \gtrsim 1$ lediglich als Richtwert zu interpretieren.*

E (keV)	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$N_\star = N_Z$	1378	1698	2004	2284	2522	2712	2850	2938	2996	3020	3016

Tabelle 5.27: *Optimierte Zonenzahlen segmentierter Be-Dialyten. Die Daten beziehen sich auf die graufilter-freie Korrektur in 3. Ordnung und sind angesichts der wenigen Ringe $T_N \gtrsim 1$ lediglich als Richtwert zu interpretieren.*

Parameter	Lithium					Beryllium			
	6	7	8	9	10	10	11	12	13
E (keV)	6	7	8	9	10	10	11	12	13
R (m)	0.30	0.38	0.46	0.51	0.55	0.25	0.28	0.31	0.34
$\Delta\epsilon$ (mas)	1.08	0.57	0.42	0.25	0.21	0.62	0.49	0.51	0.44
$A_{eff} \times \Delta E$	724	1293	1978	2687	3315	899	1230	1582	1934
z_F (km)	107	202	275	462	547	187	235	226	264
d (km)	11.9	22.5	30.6	51.3	60.7	20.8	26.1	25.2	29.3
T_N	5	4	4	3	3	4	4	5	5
$\mathcal{A}_{max}^{(seg)}$	3.51	3.28	3.74	3.16	3.51	1.32	1.45	1.98	2.14

Tabelle 5.28: *Beispiele segmentierter Dialyten in 3. Ordnung. Die Zonenzahlen entsprechen jenen aus Tab. 5.26 und 5.27. Allen Modellen liegt eine nominelle Ortsauflösung $\varnothing_{PSF} = 0.75$ mm zugrunde, die aber zusätzlichen negativen Einflüssen durch die Segmentation unterliegt. Wegen der kleinen Ringzahlen T_N hängen diese stark von der relativen Orientierung der Komponenten ab.*

E (keV)	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$N = N_Z$	1204	1434	1606	1710	1766	1774	1750	1702	1642	1584	1524

Tabelle 5.29: *Optimierte Zonenzahlen kohärenter Li-Dialyten. Die Daten beziehen sich wie immer auf das diffraktive Element. Die refraktive Komponente ist in konservativer Konvention mit dem Standard-Graufilter für konstante Transmission unterlegt.*

$E(\text{keV})$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$N = N_Z$	782	890	982	1056	1110	1146	1168	1178	1176	1164	1146

Tabelle 5.30: *Optimierte Zonenzahlen kohärenter Be-Dialyten. Die Daten beziehen sich wie immer auf das diffraktive Element. Die refraktive Komponente ist in konservativer Konvention mit dem Standard-Graufilter für konstante Transmission unterlegt.*

Segmentierung als auch Absorption auf die Orts- und damit Winkelauflösung erscheint alternativ eine kohärente Bauweise der diffraktiven und refraktiven Linse überlegenswert. Wiederum verläuft die Berechnung der Parameter auf grundsätzlich analoge Weise wie in den zuvor diskutierten Fällen, lediglich Lateral-Auflösung \varnothing_{PSF} und Transmission $\mathcal{T}(E_c)$ schreiben sich nun als

$$\varnothing_{PSF} = 4\alpha \frac{R}{N} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{T}(E_c) = e^{-\frac{9}{8} \frac{N}{N_0}} \quad (5.243)$$

Die Lichtstärke $A_{eff} \times \Delta E$ eines derartigen kohärenten Dialyten ist damit einfach als

$$A_{eff} \times \Delta E = 2\pi \left(\frac{N}{4\alpha} \varnothing_{PSF} \right)^2 e^{-\frac{9}{8} \frac{N}{N_0}} E \sqrt[3]{\frac{2}{N}} \quad (5.244)$$

gegeben und genügt abermals einem Optimierungsproblem bzgl. der Zonenzahl N . Entsprechende Werte sind für Li in Tab. 5.29 und für Be in Tab. 5.30 zusammengefasst. Den Daten ist neben der trotz sehr kleiner Apertur-Durchmesser überraschend hohen Lichtstärke die überragende Winkelauflösung von wenigen 10^{-5} arcsec zu entnehmen. Dagegen sind die großen Brennweiten von $\gtrsim 10^3$ km zweifellos negativ zu bewerten.

Parameter	Lithium (3. Ord.)					Beryllium (3. Ord.)			
E (keV)	8	9	10	11	12	10	11	12	13
R (m)	0.50	0.56	0.59	0.62	0.62	0.27	0.31	0.34	0.37
$\Delta\epsilon$ (mas)	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.05	0.04	0.03	0.03
$A_{eff} \times \Delta E$	2677	3637	4487	5208	5731	1217	1665	2141	2618
z_F (km)	3408	4294	5080	5770	6328	2322	2911	3506	4083
d (km)	379	477	564	641	703	258	323	390	454
α_0	9.43°	10.6°	11.7°	12.9°	14.0°	3.34°	3.68°	4.01°	4.34°
ΔE_3 (keV)	1.79	1.94	2.11	2.29	2.50	2.74	2.88	3.04	3.22

Tabelle 5.31: *Beispiele kohärenter Li- und Be-Dialyten in 3. Ordnung. Die Zonenzahlen N entsprechen jenen aus Tab. 5.29 und Tab. 5.30. Auf eine Zentrallobstruktur wurde verzichtet, die Ortsauflösung beträgt $\varnothing_{PSF} = 0.75$ mm. Die Lichtstärke ist in Einheiten von $(\text{cm}^2 \cdot \text{keV})$ angegeben. Der Winkel α_0 beschreibt die Steigung am refraktiven Linsenrand.*

Kapitel 6

Detektion und Formationsflug

Wie bereits den Ausführungen in Kap. 5 zu entnehmen war, gehen mit den relativ geringen spektralen Bandbreiten und großen Fokaldistanzen gegenüber bisher gebräuchlichen kompakten Spiegelteleskopen qualitativ neue Anforderungen an die nun räumlich separierte Detektoreinheit und deren stabilisierte Ausrichtung im Formationsflug einher. Im folgenden werden zunächst verschiedene Möglichkeiten zur spektral selektiven Detektion der fokussierten Strahlung und – damit zusammenhängend – das Problem der Sensitivität unter Berücksichtigung des „diffusen“ Hintergrundes diskutiert, bevor ein knapper Abriss zu den mechanischen Aspekten des Formationsfluges das Kapitel beschließt.

6.1 Detektoren und Nachweisempfindlichkeit

Offenbar hängen die Anforderungen an die spektrale Trennschärfe des Detektorsystems von der effektiven Zonenzahl N_{eff} und dem Grad der von ihr bewirkten Dispersionskorrektur ab. Ausschließlich diffraktiv ausgelegte Objektive bedürfen, um das vorgesehene Winkelauflösungsvermögen zu erhalten, in der Regel eines trennscharfen Kristall-Spektrographen, ähnlich dem beispielsweise im SODART-Experiment auf dem russischen SPECTRUM-X-GAMMA-Satelliten [32] verwendeten. Prinzipiell genügt ein einziger, unter dem passenden Bragg-Winkel θ in den fokussierten Strahl gestellter Kristall, um die geforderte spektrale Selektion $\frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{N_{eff}}$ zu gewährleisten. Allerdings verlangt die relativ geringe Winkelakzeptanz $\Delta\theta$, innerhalb der die Strahlung der Bandbreite $\frac{\Delta E}{E}$ detektiert wird, nach exakter Ausrichtung der Detektoreinheit zur optischen Achse. Quantitativ kommt dieser Sachverhalt in der Winkeldispersion der in erster Ordnung reflektierten Strahlung zum Ausdruck,

$$2d \sin \theta = \lambda \quad \rightarrow \quad 2d \delta\theta \cos \theta = \delta\lambda \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta\theta}{\tan \theta} \quad \text{für} \quad \Delta\theta \ll 1. \quad (6.1)$$

Mit üblichen Bragg-Winkeln $\tan \theta \sim 1$ sind Akzeptanzwinkel $\Delta\theta \sim (10^{-4} - 10^{-3})$, also $\sim (20 - 200)$ arcsec zu erwarten, je nach zugrunde gelegtem N_{eff} . Bei einer Verkipfung der Detektoreinheit und damit des Kristalls um $\frac{1}{2}\Delta\theta$ wäre demnach der Detektor selbst, also z.B. ein CCD, um den Winkel $\Delta\theta$ nachzusteuern, um bei der Energie $E + \frac{\Delta E}{2}$ kon-

gruent abzubilden. Hingegen unterscheiden sich die lateralen Toleranzen nicht von den in direkter, kristallfreier Abbildung geforderten. Kristall und Detektor bedürfen bei dieser Konstruktion einer festen mechanischen Kopplung. Alternativ besteht die Möglichkeit einer nicht-dispersiven Doppelkristall-Konfiguration, wie sie in Abb. 6.1 dargestellt ist. Hinreichend parallele Anordnung der beiden Kristallflächen vorausgesetzt, wirken diese of-

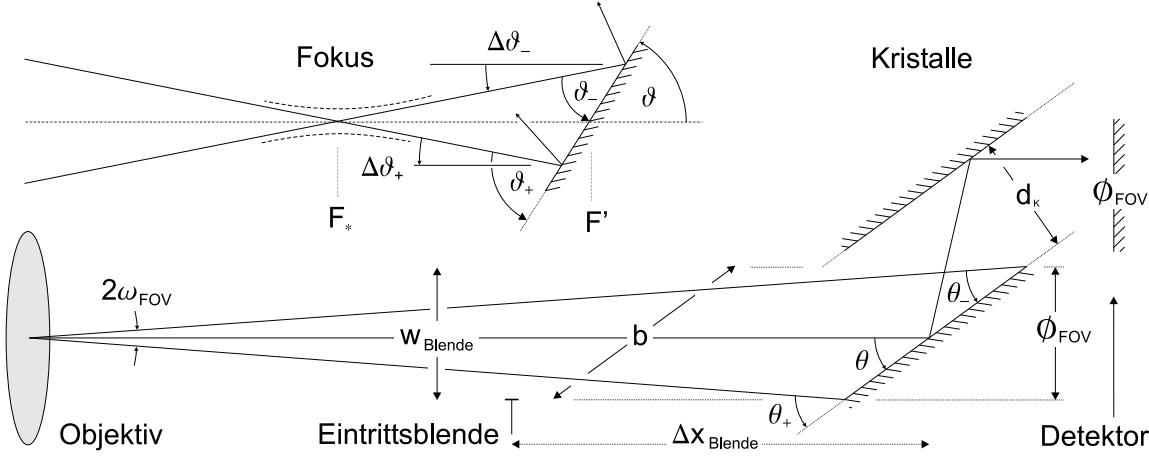


Abbildung 6.1: *Strahlgeometrie am Bragg-Monochromator. Die Randstrahlen des durch den Winkel ω_{FOV} beschriebenen Gesichtsfeldes treffen unter θ_{\pm} auf den Kristall, wobei θ für den Bragg-Winkel steht. Durch die Verwendung eines zweiten parallelen Kristalls erzielt man eine hohe Toleranz gegenüber Versetzungen, ohne die spektrale Auflösung zu beeinflussen. Die Abschirmung gegen kontaminierende Hintergrund-Streustrahlung erfolgt mittels einer vorgelagerten Blende in Form eines Kollimators. Der linke obere Einsatz illustriert die Verhältnisse bei negativ defokussiertem Strahl.*

fenkundig als den einfallenden Strahl lediglich versetzendes Periskop, und zwar unabhängig vom aktuellen und evtl. störungsbehafteten Bragg-Winkel θ . Mit dem Kristallabstand d_K beläuft sich diese Versetzung \mathcal{V} auf

$$\mathcal{V} = 2d_K \cos \theta. \quad (6.2)$$

Innerhalb der dem Gesichtsfeld ϕ_{FOV} entsprechenden Kristallfläche $b = \frac{\phi_{FOV}}{\sin \theta}$ spielen laterale (und axiale) Positionsfehler anders als beim Mono-Kristall keine Rolle, sofern das Kristallmodul vom Detektor mechanisch *entkoppelt* und die stabile Ausrichtung des letzten zur optischen Achse gewährleistet ist. Die Anpassung an verschiedene Energiewerte E könnte dann durch simultane Kippung in den Braggwinkel $\theta(E)$ und Variation des Kristallabstandes $d_K(\theta)$ erfolgen, so dass $\mathcal{V}(E) = \text{const.}$ Während die Doppelkristall-Konfiguration das spektrale Trennvermögen des einzelnen Kristalls weitgehend erhält – die Strahlung trifft auf beide Oberflächen unter demselben Winkel θ auf – vermindert sie doch die reflektierte Intensität¹, so dass sie im Regelfall dem harten Röntgenband unter Einsatz entsprechend hochwertiger Kristalle (vgl. dazu auch Tab. 6.1) vorbehalten sein dürfte.

¹Eine ausführliche, quantitative Darstellung der Bragg-Kristall-Spektroskopie findet sich z.B. in [33].

Zwischen den beiden Anordnungen sollte daher den technischen Gegebenheiten gemäß gewählt werden; davon unabhängig hängt die optimale Funktion des Spektrometers von der durch die fokale Strahlgeometrie bestimmten Winkeldivergenz $|\theta_+ - \theta_-|$ bzw. $|\vartheta_+ - \vartheta_-|$ ab (vgl. Abb. 6.1). Im Regelfall wird die Fokustiefe $(\Delta z)_{DOF} = \frac{F}{N_{eff}}$ eine Größenordnung von Metern erreichen, innerhalb der dann sowohl Kristall als auch Detektor liegen. Die Winkeldivergenz $\Delta\theta_{FOV}$ des zwischen $F - (\frac{\Delta z}{2})_{DOF} \leq z \leq F + (\frac{\Delta z}{2})_{DOF}$ ungefähr parallelen (Gauss'schen) Strahls limitiert die dem Sichtfeld entsprechende Detektorfläche \mathcal{O}_{FOV} zu

$$\Delta\theta_{FOV} \equiv \Delta\theta_+ + \Delta\theta_- = -(\theta - \theta_+) + (\theta - \theta_-) = 2\omega_{FOV} \approx \frac{\mathcal{O}_{FOV}}{F} \equiv \frac{1}{f_{FOV}}. \quad (6.3)$$

Mit typischen „Detektor-Öffnungsverhältnissen“ f_{FOV} von meist mehr als 10^5 liegt die Winkeldivergenz damit nach Gl. 6.1 sicher innerhalb des Akzeptanzintervalls des Bragg-Kristalls, $\Delta\theta_{FOV} < \Delta\theta$. Ähnlich verhält es sich mit der Divergenz bzw. Konvergenz des *defokussierten* Strahls, wie im Einsatz der Abb. 6.1 illustriert. Analog gilt nun

$$\Delta\vartheta_{FOV} \equiv \Delta\vartheta_+ + \Delta\vartheta_- = -(\vartheta - \vartheta_+) + (\vartheta - \vartheta_-) \approx \frac{D}{F(E)} = \frac{1}{f_c} \frac{E_c}{E}, \quad (6.4)$$

mit dem Aperturdurchmesser D und dem Öffnungsverhältnis f_c bei $E = E_c$. Die spektrale Selektion mittels Bragg-Kristallen erweist sich somit als außerordentlich tolerant gegenüber *axialen* Positionsfehlern der Detektoreinheit, die selbst außerhalb der Fokustiefe außer einer entsprechend degradierenden Winkelauflösung mit $f \gtrsim 10^4$ kaum Leistungseinbußen erwarten lässt. Tab. 6.1 listet einige Kristalle auf, die wegen ihrer Eigenschaften (u.a. Verfügbarkeit, Beständigkeit und Vakuumtauglichkeit) für einen Einsatz in der Astronomie in Frage kommen. Die den ersten drei Vertretern RAP(001), Mica(006) und Be-

Kristall	(<i>hkl</i>)	2 <i>d</i> (nm)	ΔE (keV)	R_{peak}	$E/\delta E$	Eignung
RAP	(001)	2.6121	0.7 – 1.8	$\sim 25\%$ ⁽¹⁾	1.5×10^3 @ 1.0 keV	○
Mica	(006)	1.984	0.8 – 2.4	$\geq 25\%$ ⁽¹⁾	1.3×10^3 @ 1.7 keV	+
Beryll	(100)	1.5954	0.8 – 3.0	$\sim 10\%$ ⁽¹⁾	1.0×10^3 @ 2.5 keV	–
Ge	(111)	0.6532	2.0 – 7.4	$> 40\%$ ⁽²⁾	3.4×10^3 @ 5.0 keV	+
Si	(111)	0.6271	2.0 – 7.7	$> 40\%$ ⁽²⁾	7.8×10^3 @ 6.0 keV	++
LiF	(200)	0.4027	3.2 – 12	$> 50\%$ ⁽²⁾	1.6×10^4 @ 8.0 keV	+

Tabelle 6.1: Eine Auswahl geeigneter Bragg-Kristalle für verschiedene Energie-Bänder ΔE zur Verwendung in rein diffraktiver Optik bzw. hochauflösender Spektroskopie. Die Angaben zu Reflektivität R_{peak} und spektraler Trennschärfe $E/\delta E$ basieren auf einer typischen mosaischen Unvollkommenheit von $\approx 1'$ im weichen ⁽¹⁾ und perfekten Gitterstrukturen im harten ⁽²⁾ Röntgenbereich. Im letzteren Fall erreichen die reflektierten Intensitäten 90% und mehr oberhalb von ~ 5 keV.

ryll(100) eigene Mosaizität² reduziert einerseits die Peak-Reflektivität R_{peak} und erweitert

²Polykristalline Struktur, deren Kristallite gegen den Mittelwert statistisch geringfügig verkippt sind.

andererseits die Bandbreite $\Delta\theta$ bzw. ΔE . Des weiteren treten bei diesen Niederenergie-Kristallen häufig scharfe, die Kalibration erschwerende Absorptionskanten auf, so z.B. im Fall des Beryll(100) nahe 1.8 keV. Ausgeprägt monokristalline Gitterstrukturen wie Ge(111), Si(111) und LiF(200) zeichnen sich hingegen durch eine hohe, mit der Energie E zunehmende optische Qualität aus. Allen Kristallen gemeinsam ist die Polarisations-abhängigkeit der Rocking-Kurve, also der Funktion $R(\theta)$ bei einer gegebenen Energie E . Generell gilt $R_{\perp}(\theta) > R_{\parallel}(\theta)$, wobei sich die Beiträge der beiden Komponenten mit wachsender Energie immer mehr angleichen³.

Neben der spektralen Selektion kommt der lateralen Ortsauflösung oder „Ausdehnung“ der PSF besondere Bedeutung zu. Mit $\varnothing_{PSF} = \Delta\epsilon \cdot F$ und $\Delta\epsilon \approx 5 \times 10^{-9}$ erstreckt sich die dem Gesichtsfeld \varnothing_{FOV} mit $(500 - 1000)^2$ Auflösungselementen zugeordnete Detektorfläche bis in die Größenordnung von $\sim 1 \text{ m}^2$. Den mit der Anfertigung derart großflächiger und dann notwendigerweise zu stückelnden Detektoren verknüpften technischen Schwierigkeiten sollte prinzipiell mit einer Nachfokussierung des Strahls in der Brennebene zu begegnen sein. Abb. 6.2 illustriert eine naheliegende Methode. In der Ausführung als

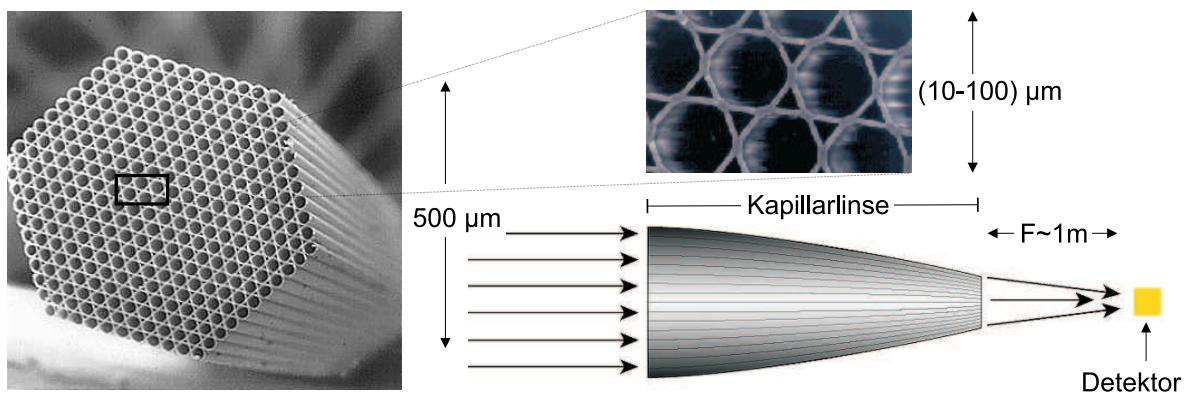


Abbildung 6.2: *Nachfokussierung mittels Kapillaroptik. Durch externe Totalreflexion der Röntgenstrahlen an den Innenwänden der gekrümmten Kapillaren lassen sich PSF- bzw. Detektorfläche um einen Faktor $\sim (10^2 - 10^4)$ reduzieren, je nach Konstruktion der Kapillarlinsen; aus [35, 36].*

Strahlverenger erlaubt diese von [37] erfundene Röntgenoptik, den Fokus auf $\sim (10 - 100) \mu\text{m}$ zu reduzieren und damit den Pixelgrößen gängiger Detektoren anzupassen. Die Reflexionsverluste belaufen sich je nach Material, Bauweise und Energie auf bis zu $\sim 50\%$. Dieser Schwächung der Effizienz steht jedoch ein verbessertes Signal-Rausch-Verhältnis entgegen. Der Akzeptanzwinkel für die aus der Beobachtungsrichtung empfangene Strahlung beträgt typischerweise ein Grad oder mehr, so dass der diffuse Röntgen-Hintergrund durch zusätzliche Maßnahmen wie z.B. eine Blende abzuschirmen ist.

Die Anforderungen an den geeigneten Detektor ergeben sich vor allem aus Bandpass und PSF-Durchmesser. Sofern mittels eines Bragg-Kristalls spektral vorselektiert wird oder

³Zur quantitativen Analyse bedarf es der numerischen Simulation der Bragg-Beugung, ein hierfür geeignetes Programm steht beispielsweise unter [34] zur Verfügung.

eine achromatische Optik zum Einsatz kommt, dürfte sich ein konventionelles Halbleiterinstrument auf Si-Basis am besten eignen. Neben den bekannten CCD's zählen hierzu auch neuere Entwicklungen wie Driftdetektoren und aktive Pixelsensoren [38]. Deren spektrales Auflösungsvermögen berechnet sich nach [38] zu

$$\Delta E_{FWHM} = 2.355 \omega \sqrt{ENC^2 + \frac{FE}{\omega}}, \quad (6.5)$$

wobei $\omega = 3.65$ eV die zur Erzeugung eines (e^- -Loch)-Paars notwendige Energie angibt und F den Fano-Faktor beschreibt, der hier zu 0.115 angenommen wird. Derzeit realistische Werte für das elektronische Rauschen („equivalent noise charge“, ENC) liegen bei etwa $(1 - 5)$ e^- und hängen insbesondere von der Detektor-Temperatur ab. Das theoretische Optimum mit $ENC = 0$ („Fano-Limit“) wird in der Praxis dagegen kaum erreicht. Abb. 6.3 illustriert das Trennvermögen des Si-Halbleiterdetektors im Vergleich zum Bandpass von Achromaten mit effektiven Zonenzahlen $5 \times 10^2 \leq N \leq 2 \times 10^4$ im Intervall $1 \text{ keV} \leq E \leq 10 \text{ keV}$. Das Auflösungsvermögen des CCD-Detektors von $\sim 10^2$ eV wird demnach i.d.R. ausreichen, um die PSF des dispersionskorrigierten Teleskops beugungsbeschränkt zu registrieren. Sehr große Zonenzahlen $N > 2 \times 10^4$ werden erst jenseits von rund 10 keV aufgelöst; sie kommen jedoch nach Abb. 4.7 wegen des im harten Röntgenbereich ungünstigen Verlaufs der kritischen Zonenzahl N_0 für keines der bekannten hochwertigen Materialien in Betracht.

Außerdem nimmt die Quanteneffizienz des Halbleiterdetektors, bedingt durch die stark energieabhängige Absorptionslänge von Si, oberhalb von rund 10 keV kontinuierlich ab. Gleichwohl liefern moderne Ausführungen mit einer wirksamen Dicke von 500 μm bei 20 keV einen Wirkungsgrad von immerhin noch bis zu 45% [38].

Die sinnvolle Pixelgröße ergibt sich bei direkter Abbildung ohne vorgeschaltete Kapillaroptik aus dem intrinsischen lateralen Auflösungsvermögen, d.h. der durch $\varnothing_{PSF} = \Delta\epsilon \times F$ bestimmten Größe der Punktbildfunktion. In Anbetracht der angestrebten Winkelauflösung von $\Delta\epsilon = 1$ mas und typischen Brennweiten von $10^2 - 10^3$ km resultieren PSF-Durchmesser in der Größenordnung von ~ 1 mm. Kantenlängen

$$\Delta x_{pix} \sim (10^2 - 10^3) \mu\text{m} \quad (6.6)$$

gewährleisten dann ein angemessenes Oversampling⁴ und übertreffen die sonst üblichen Abmessungen von $\sim (10^1 - 10^2) \mu\text{m}$ um einen Faktor 10. Gleichermaßen gilt für die gesamte Detektorfläche, die selbst bei einem auf $\sim (500 \times 500)$ Auflösungselemente beschränkten Gesichtsfeld $\sim 10^3 \text{ cm}^2$ betragen müsste. Obwohl technisch im Bereich des Machbaren, nimmt die Zeitauflösung und Nachweiskapazität im Sinn der pro Integrationsintervall detektierbaren Photonen wegen der längeren Auslesedauer ab. Nach [38] beträgt die Driftgeschwindigkeit in einem pn-CCD typischerweise 20 m s^{-1} oder 1 cm pro 500 μs .

Nichtsdestoweniger erlauben CCD-ähnliche Detektoren als großskalige Pixel-Arrays hoher Packungsdichte den nach heutigem Kenntnisstand effizientesten Nachweis der Strahlung, ein Vorteil, der bis dato für spektral hochauflösende Micro-Kalorimeter nicht besteht.

⁴Auf die Bedeutung der Sampling-Frequenz wird weiter unten im Zusammenhang mit dem Signal-Rausch-Verhältnis eingegangen.

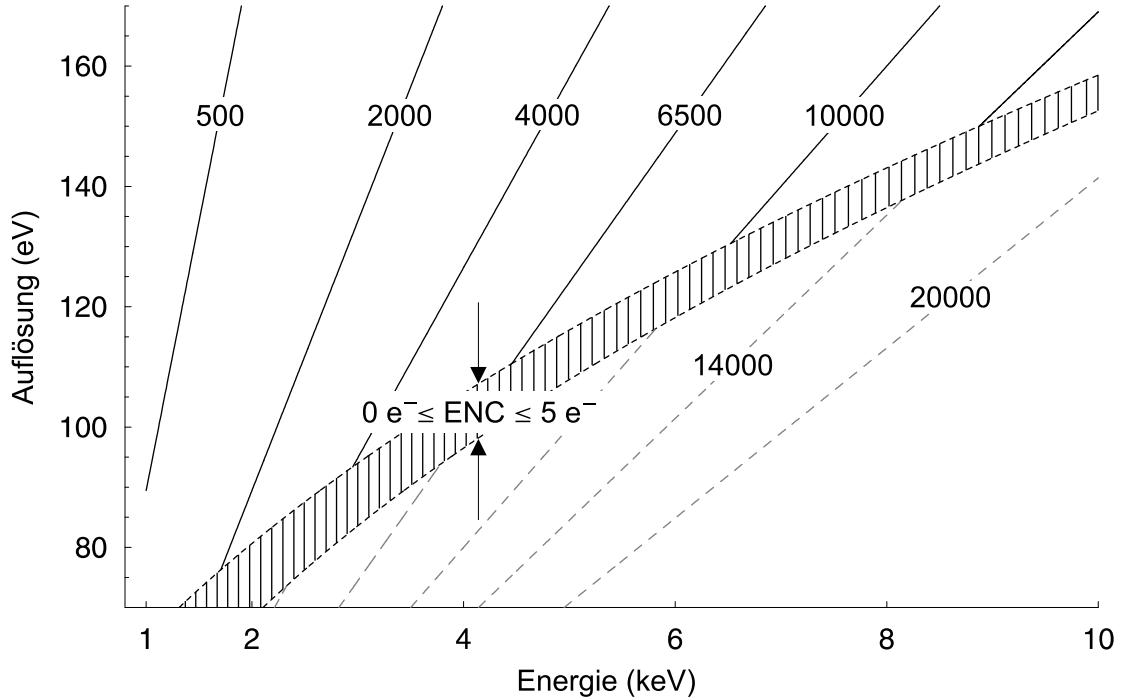


Abbildung 6.3: Spektrale Auflösung CCD-basierter Detektoren. Maximal korrigierte Achromaten lassen sich nur oberhalb einer durch das spektrale Trennvermögen des CCD-basierten Detektors (für $0 e^- \leq ENC \leq 5 e^-$ schraffiert dargestellt) bestimmten Energie beugungsbeschränkt einsetzen (schwarze Halbgeraden). Andernfalls beeinträchtigt die Restdispersion der Hybridlinse das Winkelauflösungsvermögen (grau strichliert). Beispiele sind für diverse diffraktive Zonenzahlen $5 \times 10^2 \leq N \leq 2 \times 10^4$ gegeben.

Letztere basieren auf der Messung des Wärmeäquivalents der Energie des registrierten Röntgen-Photons. Üblicherweise im Temperaturbereich weniger ($10^{-2} - 10^{-1}$) K betrieben, gestatten Micro-Kalorimeter eine theoretische Energie-Auflösung

$$\Delta E_{MK} = 2.355\eta\sqrt{k_B T^2 C}, \quad (6.7)$$

mit der Boltzmann-Konstante k_B und der Wärmekapazität C des Absorbers [39]. Mit dem Parameter $\eta \sim 2$ werden spezifische Konstruktionsmerkmale des jeweiligen Detektors erfasst. Das für die XEUS-Mission in der Entwicklung befindliche Instrument sollte somit eine a priori *energieunabhängige* Auflösung von ~ 1 eV ermöglichen, verbunden mit einer Quanteneffizienz nahe 100% bis zu einer Energie von rund 7 keV [39]. In der Praxis werden derart hohe Werte für ΔE_{MK} bislang nicht erreicht, dennoch unterbieten die experimentell gewonnenen Daten mit $\frac{\Delta E}{E} \sim 10^{-3}$ das diesbezügliche Leistungsvermögen konventioneller Detektoren auf CCD-Basis um ein Vielfaches. Abb. 6.4 setzt das ungefähre, aus Messungen und angestrebten Eckdaten abgeschätzte Trennvermögen des künftigen XEUS-Instruments

mit dem Bandpass eines Objektivs effektiver Zonenzahlen $500 \leq N \leq 1500$ in Beziehung.

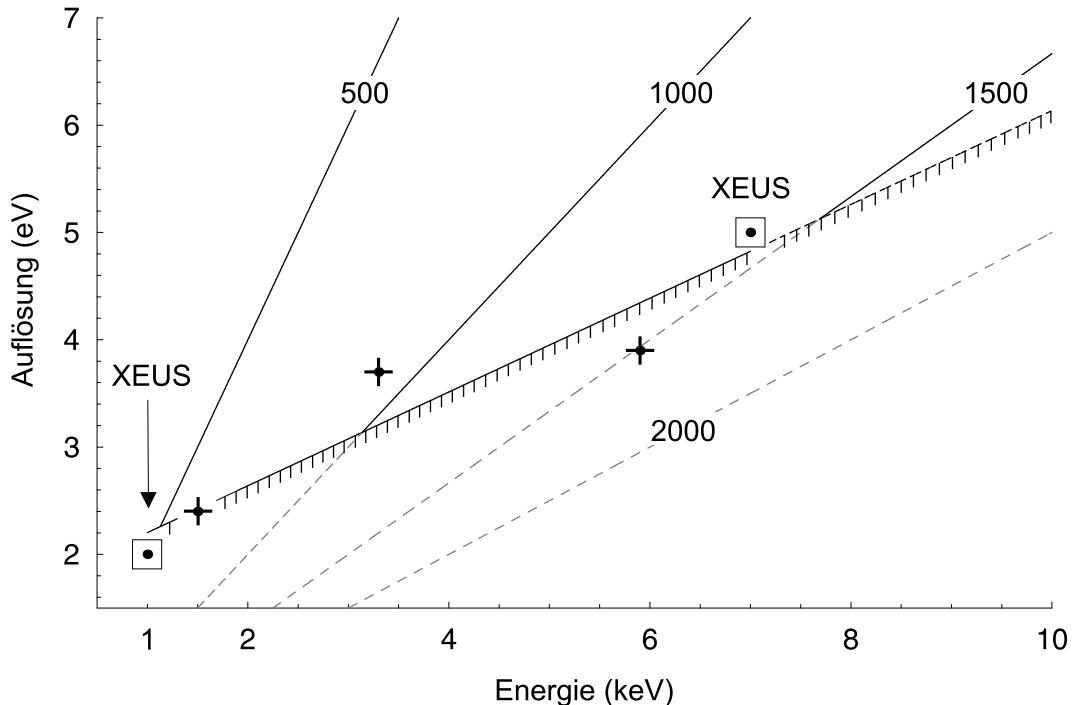


Abbildung 6.4: *Spektrale Auflösung des XEUS-Micro-Kalorimeters. Anhand der bisher gemessenen (Kreuze) und angestrebten (Quadrate) Leistungsdaten wurde das zu erwartende Trennvermögen des künftig in XEUS einzusetzenden Micro-Kalorimeters abgeschätzt (schraffierte Linie). Die mit Zonenzahlen $500 \leq N \leq 1500$ versehenen Geraden beschreiben den Bandpass diffraktiver Objektive der jeweiligen effektiven Zonenzahl.*

Während die Entwicklung in den vergangenen Jahren die Trennschärfe vor allem auf der Grundlage supraleitender Materialien unter Ausnutzung des steilen Widerstandsgradienten im Bereich der Sprungtemperatur („transition edge sensor“, TES) zu optimieren suchte, wurde mit dem magnetischen Micro-Kalorimeter („metallic magnetic calorimeter“, MMC) kürzlich ein alternatives Konzept vorgestellt, das auf die temperaturabhängige Magnetisierung des auf Temperaturen nahe des absoluten Nullpunktes gekühlten Sensors zurückgreift [40]. Ersten Messungen an einem einzelnen Pixel zufolge wurde bei 5.9 keV eine Auflösung von 3.4 eV erreicht, wobei vom Autor der Studie eine Verbesserung bis herab zu ≈ 1 eV für die Zukunft nicht ausgeschlossen wird.

Unabhängig von der physikalischen Konzeption des einzelnen Pixels gestaltet sich das Design großflächiger Arrays wesentlich schwieriger als im Fall der CCD-ähnlichen Halbleiterdetektoren. Dies deshalb, weil deren auf Ladungstransfer-Prozessen basierender Auslesemodus auf Kalorimeter-Matrizen nicht anwendbar ist und statt dessen jedes Pixel einzeln verdrahtet werden muss. Zudem bedarf es einer gegenseitigen thermischen Abschirmung benachbarter Pixel, woraus ein optisch nutzbarer Flächenanteil („Packungsdichte“) von kaum mehr als (70 – 80) % resultiert. Entsprechend markiert das für XEUS angestrebte

Matrizenformat von 32×32 Pixeln in etwa die Grenze des derzeit technisch Machbaren.

Hinsichtlich der Kantenlänge eines Pixels entsprechen die gegenwärtig typischen Werte von $\sim 10^2 \mu\text{m}$ (für XEUS werden $240 \mu\text{m}$ anvisiert) entwicklungsbedingt noch eher als die moderner CCD's den Anforderungen der direkten, auf kapillaroptische Methoden etc. verzichtenden höchstauflösenden Abbildung. Gleichwohl geht der hohe Anspruch an die spektrale Trennschärfe nun mit dem Bestreben einher, möglichst kleine Pixel zu produzieren, um nach Gl. 6.7 die Wärmekapazität gering zu halten.

Im Gegensatz zum Gitterspektrographen zeichnet sich das Micro-Kalorimeter-Array also durch seine prinzipielle Fähigkeit zur spektral hochauflösenden, abbildenden Spektroskopie aus. Vor allem in Verbindung mit *reduzierten* Achromaten eröffnet sich hier die interessante Perspektive, hocheffizient und zugleich beugungsbegrenzt abzubilden.

Neben CCD-artigen Kameras und Micro-Kalorimetern existiert mit den supraleitenden Tunnel-Detektoren („superconducting tunnel junctions“, STJ's) noch eine weitere Instrumentenklasse, die hier kurz angesprochen werden soll. Deren Funktionsprinzip besteht analog zum CCD in der Erzeugung einer der Energie E des absorbierten Photons entsprechenden Zahl $n(E)$ von Quasiteilchen, die durch das Aufbrechen von Cooper-Paaren im Supraleiter entstehen und im Tunnelübergang innerhalb des Detektorelements nachgewiesen werden. Mit $n(E) \approx \frac{E}{1.7\Delta}$ bilden sich nun aber wegen der typischerweise im meV-Bereich angesiedelten Bandlücke Δ rund 10^3 mehr „Zähleinheiten“ als im Fall des CCD, resultierend in einer dem Micro-Kalorimeter vergleichbaren oder gar überlegenen spektralen Auflösung. Die für XEUS diskutierte Ausführung aus Tantal (Ta) konnte in ersten Tests die theoretisch mögliche Trennschärfe von 2.8 eV bei 1 keV bis auf einen Faktor 2 [39] erreichen. Noch bessere Werte errechnen sich mit 1.3 eV für Molybdän (Mo) bzw. 0.5 eV für Hafnium (Hf), jeweils bei 1 keV . Idealerweise, d.h. unter Vernachlässigung fertigungstechnisch bedingter Rauschfaktoren, sollte die Energieauflösung einem einfachen Potenzgesetz folgen,

$$\Delta E_{STJ} \propto \sqrt{E}. \quad (6.8)$$

Diese angesichts des Verlaufs des optischen Bandpasses (siehe z.B. Abb. 6.4) an sich günstige Relation findet ihre Relativierung jedoch in der für $E \gtrsim 3 \text{ keV}$ rapide abnehmende Quanteneffizienz der STJ's. Während bei 3 keV je nach Material noch ca. $(60 - 80) \%$ der Photonen nachgewiesen werden, absorbiert der STJ-Detektor bei 7 keV nur noch $(10 - 20) \%$ [39]. Seine Anwendung beschränkt sich daher üblicherweise auf den *weichen* Röntgenbereich, der wiederum absorptionsbedingt für die Optik selbst nur ineffizient abzubilden ist.

Als Fazit bleibt somit festzuhalten, dass CCD's und deren „Verwandte“ ihr bevorzugtes Einsatzgebiet einerseits in der rein diffraktiven Optik in Verbindung mit einem vorselektierenden Bragg-Kristall besitzen, andererseits offenkundig gut mit typischen Bandbreiten voll korrigierter Achromaten harmonieren. Künftigen großflächigen Micro-Kalorimeter-Matrizen sollte dagegen eine Adaption an die Kammstruktur teilkorrigierter, reduzierter Hybridlinsen angedacht werden.

Während der Detektor eines konventionellen, kompakten Teleskops ausschließlich Strahlung aus dem Gesichtsfeld registriert, kommt einer Abschätzung der Hintergrundstrahlung bei räumlich getrennten Objektiv- und Nachweismodulen besondere Bedeutung zu.

Wie sich in den vergangenen Jahren anhand von Beobachtungen heraus kristallisierte, setzt sich der „diffuse“ Röntgenhintergrund hauptsächlich aus der Strahlung entfernter AGN und zu einem geringen Teil aus der Emission heißen Gases in Galaxienhaufen zusammen [41]. Wie Messungen mit ROSAT, ASCA, dem „Rossi X-ray Timing Explorer“ (RXTE) und anderen Experimenten ergaben, folgt die spektrale Verteilung zwischen rund 1 und 20 keV nach [42] in guter Näherung einem Potenzgesetz der Form

$$n_b(E) = n_0 \cdot E^{-\Gamma}, \quad (6.9)$$

ausgedrückt durch die Photonendichte n_b in Einheiten von $\text{s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ keV}^{-1} \text{ sr}^{-1}$. Die Fitparameter ergeben sich zu $n_0 = (9.8 \pm 0.3) \text{ s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ keV}^{-1} \text{ sr}^{-1}$ und $\Gamma = 1.42 \pm 0.02$. Abb. 6.5 stellt diesen Verlauf graphisch dar, wobei das Raumwinkelmaß von sr nach deg^2 konvertiert wurde. Da es sich um diskrete Quellen handelt, beschreibt Gl. 6.9 lediglich den

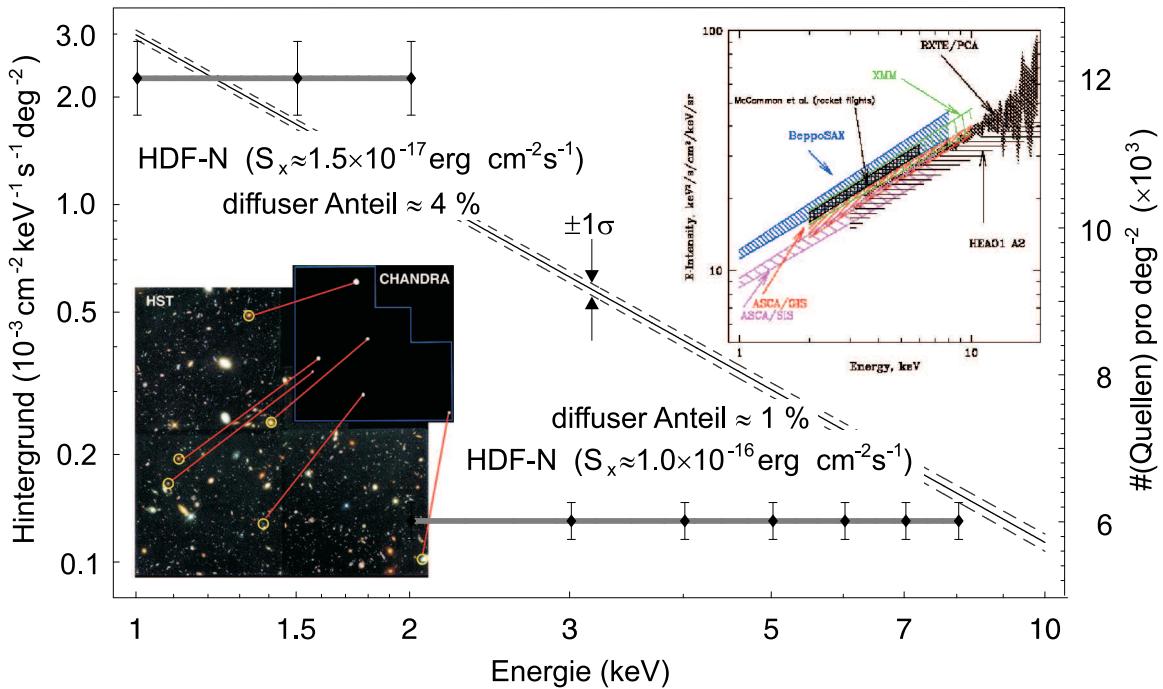


Abbildung 6.5: Die diffuse Röntgen-Hintergrundstrahlung, wie sie u.a. von Chandra und RXTE gemessen wurde. Dessen Beobachtungen, neben anderen im rechten oberen Einsatz dargestellt, lassen auf einen Verlauf gemäß $n_{\text{phot}} \propto E^{-\gamma}$ mit $\gamma \approx 1.4$ schließen (durchgezogene Gerade). Quellendichten des vorwiegend aus ferinen AGN bestehenden Hintergrunds ermittelte Chandra im nördlichen „Hubble Deep Field“ (HDF-N) sowohl im weichen ($E \leq 2 \text{ keV}$) als auch im harten ($2 \text{ keV} \leq E \leq 8 \text{ keV}$) Röntgenbereich.

über einen hinreichend großen Raumwinkel gemittelten Hintergrund. Im Zuge eines tiefen Chandra-Screenings wurde die Quellendichte im nördlichen HDF („Hubble Deep Field“) abgeschätzt [43]. Die entsprechenden Resultate sind ebenfalls in Abb. 6.5 eingetragen.

Die besonders im weichen Röntgenbereich relativ hohen Zählraten machen deutlich, dass es neben einer kleinen Detektorfläche einer möglichst guten Abschirmung (engl. „baffling“) bedarf, um auch schwache Objekte mit ausreichendem Signal-Rausch-Verhältnis zu detektieren. Als naheliegende Lösung bietet sich ein dem Detektor vorangesetzter Kollimator an, wobei offenbar der vom Detektor registrierte Raumwinkel $\Omega \leq 2\pi$ durch das Verhältnis γ von Öffnungsweite zu Röhrenlänge bestimmt wird. In Abb. 6.1 sind diese Größen durch Weite w_{Blende} und Abstand Δx_{Blende} einer Blende angedeutet. Man findet unmittelbar

$$\Omega = 2\pi \left(1 - (1 + \gamma^2)^{-1/2}\right) = \pi\gamma^2 + \mathcal{O}(\gamma^4). \quad (6.10)$$

In der Praxis dürfte angesichts der zu erwartenden PSF-Durchmesser von $\sim 10^{-3}$ m eine Feinselektion mit $\gamma \lesssim 10^{-2}$ das Maximum darstellen. Die gesamte, zeitlich gemittelte Hintergrundzählrate $\langle n_b \rangle$ pro Pixel errechnet sich daher zu

$$\langle n_{b,pix} \rangle = (\Delta x_{pix})^2 2\pi \left(1 - (1 + \gamma^2)^{-1/2}\right) \int_{E_c - \frac{\Delta E}{2}}^{E_c + \frac{\Delta E}{2}} n_b(E) dE, \quad (6.11)$$

wobei $\frac{\Delta E}{E_c}$ die spektrale Bandbreite des Signals bezeichnet. Im Fall einer rein diffraktiven Optik beeinträchtigt dieser Röntgenhintergrund das Signal auch bei moderater Kollimation mit $\gamma = \frac{1}{10}$ kaum, wie Tab. 6.2 zeigt.

Zonenzahl	2 keV	4 keV	6 keV	8 keV	10 keV	12 keV
1.0×10^3	1×10^{-6}	4×10^{-7}	2×10^{-7}	1×10^{-7}	1×10^{-7}	9×10^{-8}
5.0×10^3	2×10^{-7}	9×10^{-8}	5×10^{-8}	3×10^{-8}	2×10^{-8}	2×10^{-8}
1.0×10^4	1×10^{-7}	4×10^{-8}	2×10^{-8}	1×10^{-8}	1×10^{-8}	9×10^{-9}
1.5×10^4	8×10^{-8}	3×10^{-8}	2×10^{-8}	1×10^{-8}	8×10^{-9}	6×10^{-9}

Tabelle 6.2: *Pixel-Zählraten des diffusen Röntgenhintergrundes bei diffraktiver Optik. Den Daten liegt die Annahme einer Pixelgröße von 1 mm und eine Kollimation mit einem Öffnungsverhältnis $\gamma = \frac{1}{10}$ zugrunde. Der Beitrag zum Gesamtrauschen liegt auch bei einer Beobachtungszeit von 10^6 s bei weniger als einem Photon.*

Hintergrundbeiträge der *achromatischen* Abbildung sind im Rahmen des Simulationsbeispiels, Abb. 6.6, graphisch dargestellt. Der erweiterte Bandpass ist hier soweit möglich durch besonders sorgfältige Abschirmung und Kollimation zu kompensieren.

Als weitere natürliche Hintergrundquelle tritt die kosmische Teilchenstrahlung hinzu, die überwiegend aus hochrelativistischen Protonen besteht und aus dem gesamten Raumwinkel $\Omega = 4\pi$ auf das Nachweismodul trifft. Soweit keine Diskrimination im Antikoinzidenzverfahren (AK) erfolgt, liefern Brems- und Fluoreszenzstrahlung aus dem den Detektor umgebenden Material Störbeiträge. Nicht nur wegen dieser Abhängigkeit von konstruktiven Spezifika lässt sich dieser Beitrag kaum allgemeingültig abschätzen. Hinzu kommen räumliche Inhomogenitäten in der großräumigen Verteilung der Partikelstrahlung. Für den

Chandra-Orbit wurden AK-unbereinigt 250 cnts s^{-1} angegeben⁵, ein Wert, der sich durch aufwändige AK auf $\sim 2 \text{ cnts s}^{-1}$ reduzieren ließ [44].

Zuletzt ist noch der intrinsische Detektor-Hintergrund zu nennen, der sich im Fall eines CCD-Instruments in der „equivalent noise charge“ (ENC) misst und die wie oben erwähnt typischerweise wenige e^- pro Auslesezyklus beträgt.

Die statistische Sicherheit, mit der sich ein gegebenes Signal vom Hintergrund- und Detektorrauschen abhebt, misst sich im Signal-Rausch-Verhältnis. Mit der Anzahl der Signalereignisse S pro Integrationsintervall ist es für eine Punktquelle durch

$$SNR \equiv \frac{S}{\sqrt{S+B}} \approx \frac{S}{\sqrt{S + \langle n_{b,pix} \rangle \cdot t \cdot n_{pix}}} \quad (6.12)$$

definiert [45], wenn zugunsten $B \propto t$ für eine erste Abschätzung außer des diffusen Röntgen-Hintergrunds alle übrigen Störfaktoren, insbesondere der intrinsische, zeitunabhängige Beitrag des ENC vernachlässigt werden und n_{pix} die effektive, von der PSF überdeckte Pixelzahl bezeichnet. Sowohl Signal- als auch Hintergrund-Zählrate folgen einer Poisson-Statistik. Als Richtlinie des „sicheren“ Nachweises eines Signals gilt die 3σ -Detektion, wonach $\frac{S}{\sqrt{S+B}} \geq 3$ zu fordern ist. Ob der Idealfall einer signallimitierten Messung mit $B \rightarrow 0$ oder $S \gg B$ oder angesichts der oben abgeschätzten Hintergrundzählraten die „worst-case“-Situation einer Hintergrund-dominierten Detektion vorliegt, soll im folgenden diskutiert werden. Neben $B \propto t$ gilt auch $S = \langle n_s \rangle \cdot t$, mit $\langle n_s \rangle$ als der mittleren Signal-Zählrate während der Integrationszeit t . Die mittleren Zählraten lassen sich als

$$\langle n_s \rangle = \bar{n}_s \times A_{eff} \times \Delta E \quad \text{und} \quad \langle n_{b,pix} \rangle \approx \bar{n}_b(E_c) \times A_{pix} \times \Delta E \times \Omega \quad (6.13)$$

schreiben, wobei \bar{n}_s den Photonenfluss des Beobachtungsobjekts in Einheiten von $\text{cm}^{-2} \text{ keV}^{-1} \text{ s}^{-1}$ angibt. $\bar{n}_b(E_c)$ approximiert wegen der stets relativ geringen Bandbreite ΔE den Hintergrundfluss n_b aus Gl. 6.9 bei der Energie E_c , so dass $\bar{n}_b(E_c) \cdot \Delta E = \int_{E_c - \frac{\Delta E}{2}}^{E_c + \frac{\Delta E}{2}} n_b(E) dE$ gilt. Zuletzt wurde noch $A_{pix} \equiv (\Delta x_{pix})^2$ gesetzt. Unter Verwendung dieser Vereinfachungen gelangt man mit der PSF-Fläche $A_{PSF} \approx \pi \cdot \rho_{PSF}^2$ zur funktionalen Abhängigkeit des Signal-Rausch-Verhältnisses von den wichtigsten Beobachtungsparametern,

$$SNR = \frac{S}{\sqrt{S+B}} = \sqrt{A_{eff} \times \Delta E} (\bar{n}_s)^{1/2} \left(1 + \frac{\bar{n}_b}{\bar{n}_s} \frac{A_{PSF}}{A_{eff}} \Omega \right)^{-1/2} \sqrt{t}. \quad (6.14)$$

Hinsichtlich der relativen Bedeutung von Signal und Hintergrund lassen sich nun anhand des Abbildungsverhältnisses $\frac{A_{PSF}}{A_{eff}}$ zwei Grenzfälle unterscheiden, die die Detektion als signal- oder hintergrundlimitiert ausweisen:

Dominantes Signal. Sofern es gelingt, den Hintergrund gegenüber dem als noch hinreichend stark angenommenen Signalfluss um wenigstens eine Größenordnung zu unterdrücken, reduziert sich Gl. 6.14 wegen

$$\bar{n}_s \gg \frac{A_{PSF}}{A_{eff}} (\bar{n}_b \times \Omega) \quad (6.15)$$

⁵Die Bezeichnung „cnts“(counts) steht hier für das Äquivalent eines Röntgen-Photons.

auf eine Linearität des Signal-Rausch-Quotienten in der Quadratwurzel der Effizienz,

$$SNR \rightarrow \sqrt{A_{eff} \times \Delta E} (\bar{n}_s)^{1/2} \sqrt{t} \quad \text{für } S \gg B. \quad (6.16)$$

Offenbar kommt diese funktionale Abhängigkeit *dispersionskorrigierten* Konfigurationen entgegen, die mittels eines stark erweiterten Bandpasses die Effizienz trotz der absorptionsbedingt reduzierten Sammelfläche optimieren. Im Hinblick auf eine objektive Beurteilung ist jedoch zu berücksichtigen, dass die achromatische Korrektur über PSF und effektive Fläche gemäß Gl. 6.15 selbst Einfluss auf den relativen Hintergrundanteil nimmt.

Dominanter Hintergrund. Leuchtschwache Objekte, ein unzureichendes Abbildungsverhältnis oder mangelhafte Abschirmung drücken sich entsprechend in

$$\bar{n}_s \ll \frac{A_{PSF}}{A_{eff}} (\bar{n}_b \times \Omega) \quad (6.17)$$

aus. Im Gegensatz zum signallimitierten Grenzfall hängt das SNR nun linear von der effektiven Sammelfläche A_{eff} sowie invers von der Ortsauflösung \varnothing_{PSF} ab,

$$SNR \rightarrow \sqrt{t} \left(\frac{\Delta E}{\Omega \cdot A_{PSF}} \right)^{1/2} \frac{\bar{n}_s}{\sqrt{\bar{n}_b}} A_{eff} \quad \text{für } B \gg S. \quad (6.18)$$

Diese Relation korrespondiert nun wiederum in natürlicher Weise mit den Abbildungseigenschaften rein *diffaktiver* Objektive. Über die effektive Sammelfläche A_{eff} lässt sich nach Gl. 6.14 das hintergrundlimitierte SNR am wirksamsten beeinflussen, wohingegen die Bandbreite ΔE nur durch ihre Wurzel beiträgt. Der effektiven Fläche ist bei signifikanter Hintergrund-Kontamination also zusammen und in enger Verbindung mit der fokalen Ortsauflösung beim Design einer Optik die vorrangige Aufmerksamkeit zu widmen.

Da sich der Fluss $\bar{n}_b \times \Omega$ des diffusen Röntgenhintergrundes für eine gegebene Energie E nur in beschränktem Umfang über den Raumwinkel Ω abschirmen lässt, bestimmt die Vergrößerung $\left(\frac{\rho_{PSF}}{R}\right)^{-1} \propto \left(\frac{A_{PSF}}{A_{eff}}\right)^{-1/2}$ gemäß Gl. 6.15 bzw. 6.17 maßgeblich die Nachweischarakteristik im Sinn der Signal- oder Hintergrund-Dominanz. Mit $\varnothing_{PSF} = \Delta\epsilon \cdot F$ und $\Delta\epsilon \approx \frac{\lambda}{2R}$ ergibt sich elementar

$$\frac{\rho_{PSF}}{R} \approx \alpha \cdot \frac{1}{N} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{4} \lesssim \alpha \lesssim 1, \quad (6.19)$$

wobei der Parameter α je nach Ausführung des Objektivs als kohärentes oder segmentiertes, diffrekatives oder dispersionskorrigiertes Instrument variiert und N wie immer für die Zonenzahl steht. Der Quotient $\frac{A_{PSF}}{A_{eff}}$ erweist sich somit als proportional zu N^{-2} , so dass sich unter der Annahme realistischer Zonenzahlen die Abschätzung

$$\frac{A_{PSF}}{A_{eff}} \sim (10^{-7} - 10^{-8}) \frac{1}{P} \quad \text{für } N \sim (10^3 - 10^4) \quad (6.20)$$

mit der Beugungseffizienz P des Objektivs ergibt. Letztere beläuft sich für diffraktive Optiken auf $\sim (10 - 100)\%$, je nach Ausführung, Beugungsordnung und Energie. Dispersionskorrigierte Versionen liefern hingegen $P \approx e^{-\frac{N}{2N_0}}$ oder $P \approx 2\frac{N_0}{N}$, je nach Filtereinsatz. Abhängig vom Verhältnis $\frac{N}{N_0}$ reduziert sich die Transmission und damit die Beugungseffizienz im Extremfall auf wenige %. In der Praxis wird daher mit realistischen Werten

$$\frac{A_{PSF}}{A_{eff}} \lesssim 10^{-5} \quad \text{und} \quad \bar{n}_b \times \Omega \sim (10^{-2} - 10^{-1}) \quad (6.21)$$

bei moderater Abschirmung unter Annahme von $\gamma \sim 10^{-1}$ zu rechnen sein. Nach wie vor unter Vernachlässigung aller sonstigen Störbeiträge lässt sich die effektive Kontamination durch den diffusen Röntgenhintergrund somit zu

$$\frac{A_{PSF}}{A_{eff}} (\bar{n}_b \times \Omega) \lesssim 10^{-6} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ keV}^{-1} \quad (6.22)$$

abschätzen. Dem Gesagten zufolge ist dieser Wert als unter technologischen und physikalischen Gesichtspunkten mutmaßlich realistische obere Schranke für die diskutierten optischen Modelle zu betrachten. Im Vergleich zu gemessenen Flüssen diverser kosmischer Röntgenquellen, die sich beispielsweise etwa zwischen 10^{-5} und $10^{-2} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ keV}^{-1}$ ansiedeln, würde sich aus jener Abschätzung in guter Näherung eine signallimitierte Beobachtungssituation ergeben. Gleichwohl sei nochmals auf den schwer kalkulierbaren Einfluss der kosmischen Strahlung und anderer Störquellen hingewiesen.

Bislang wurde die Sampling-Frequenz außer acht gelassen, mit der das Pixelraster die originäre PSF „abtastet“. Um sie optimal zu reproduzieren, sollte die Wahl a priori auf möglichst *kleine* Pixel fallen. Freilich verursacht eine zu hohe Sampling-Frequenz unnötiges Ausleserauschen. Als günstig erweist sich zumeist ein moderates Oversampling von wenigen Pixeln pro Auflösungselement. Als quantitatives Maß gilt die „Schärfe“ (sharpness) der digitalisierten PSF [45], für Pixelindizes (i, j) und deren Partialintensitäten $P_{i,j}$ definiert durch

$$\Psi \equiv \left(\sum_{i,j} P_{i,j} \right)^{-2} \sum_{i,j} P_{i,j}^2 \quad \rightarrow \quad 1 \quad \text{für} \quad (i, j) = 1. \quad (6.23)$$

Während die PSF im Fall signallimitierter Detektion hinsichtlich des SNR nicht explizit in Erscheinung tritt, erweist sich Ψ insbesondere im Zusammenhang mit Hintergrunddominierter Nachweischarakteristik als nützliche und das SNR mitbestimmende Kenngröße. Ausgehend vom entsprechenden Limes in Gl. 6.12 gilt nämlich

$$SNR \rightarrow \frac{S}{\sqrt{B}} = \frac{S}{\sqrt{\langle n_{b,pix} \rangle \cdot t \cdot n_{pix}}} = \frac{S}{\sqrt{\langle n_{b,pix} \rangle \cdot t}} \Psi^{1/2} \quad \text{für} \quad B \gg S, \quad (6.24)$$

wie sich unter Beachtung der Normierungsbedingung $S = \sum_{i,j} P_{i,j}$ umgehend verifizieren lässt. Die inverse PSF-Schärfe Ψ^{-1} kann somit als effektive, von der PSF in Beschlag genommene Pixelzahl interpretiert werden.

Abb. 6.6 illustriert die Wirkung der Digitalisierung anhand einer PSF, deren zentrales Pixelquartett die Ortsauflösung (zweifache HEW) repräsentiert. Die Schärfe $\Psi \simeq \frac{2}{3}$ reduziert nun das maximal mögliche SNR einer Punktquelle auf $(2/3)^{1/2} \approx 82\%$ des ursprünglichen Wertes.

Als Simulationsbeispiel wurde eine hochaufgelöste Röntgenaufnahme der Sonne herangezogen, die nach der Reduktion auf (32×32) Pixel pro Detektorelement 49 ± 23 Signal-Photonen aufweist. Das mittlere rms-Dynamikintervall zwischen maximaler und minimaler Signal-Zählrate beträgt somit $I_D \sim 3$. Unter willkürlicher Annahme eines Hintergrundes von ≈ 120 counts pro Pixel resultiert formal ein Signal-Rausch-Verhältnis $SNR \sim 3$, getreu der nach [45] üblichen Forderung, wonach das mittlere SNR ausgedehnter Objekte dem gewünschten Dynamikintervall entsprechen sollte.

Das Beispiel vermittelt zugleich einen optischen Eindruck vom zu erwartenden „Erscheinungsbild“ eines fernen Sterns (vgl. Kap. 7), in diesem Fall anhand der bekannten Capella (α Aur) mit einem Winkeldurchmesser von rund 7 mas.

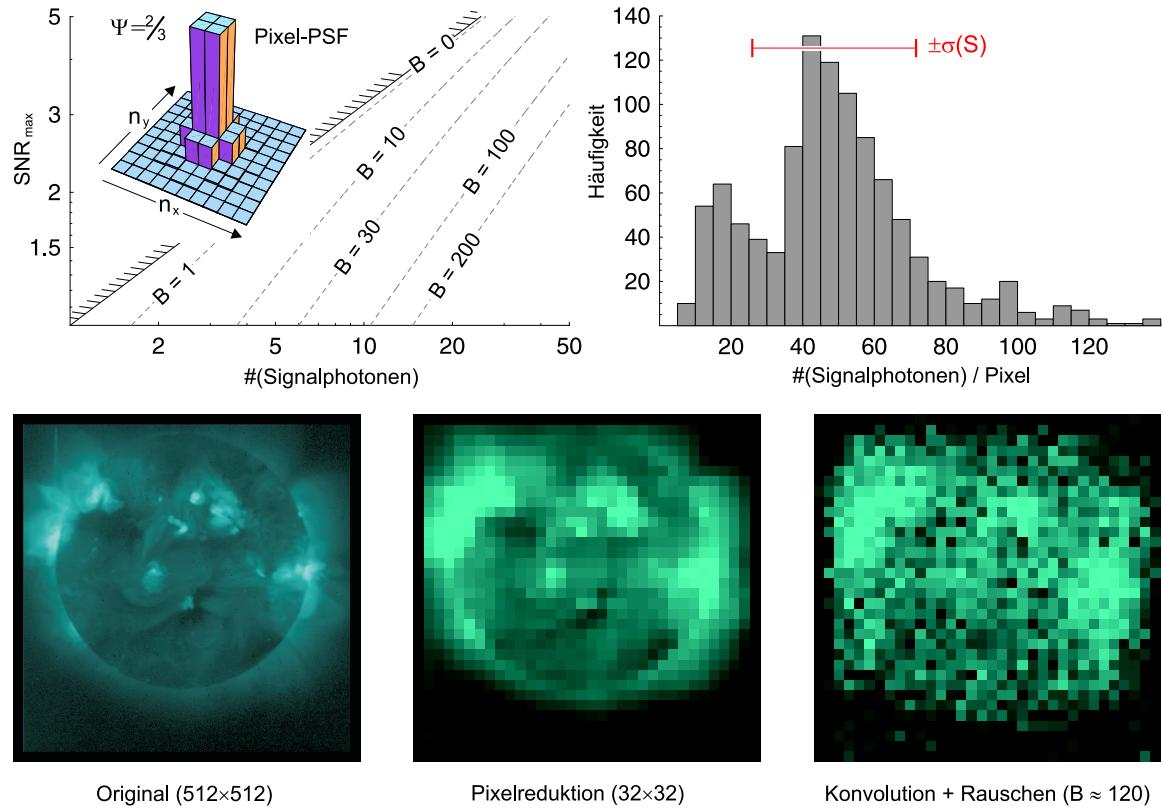


Abbildung 6.6: Simulierte Abbildung eines Sterns. Links oben die verwendete diskretisierte PSF mit einer Pixelschärfe $\Psi = \frac{2}{3}$ nebst Graphen zum SNR bei verschiedenen Hintergrund-Anteilen (B). Rechts oben ist die Häufigkeitsverteilung der Signalphotonen nach der Pixelreduktion angegeben. Darunter die Simulation am Beispiel der Sonne mit einem mittleren Signal $S \approx 50$ gegenüber einem (subtrahierten) Hintergrund $B = 120$, jeweils pro Pixel. Die Darstellung entspricht etwa dem Stern α Aur bei einer Winkelauflösung von 0.5 mas.

6.2 Bemerkungen zum Formationsflug

Der präzise Formationsflug von zwei oder mehr Komponenten wirft eine Reihe spezieller Probleme auf, die im Bezug auf zahlreiche geplante Missionen wie XEUS, Con-X, LISA u.a. eingehend studiert wurden und werden. In diesem Abschnitt sollen daher nur die wichtigsten Aspekte angesprochen werden.

Mit zunehmender (Fokal-)Distanz zwischen den Komponenten kommt der Frage nach dem geeigneten Orbit aufgrund der ortsabhängigen Gradientenkräfte wachsende Bedeutung zu. Allgemein ist das stationäre Potential $V(\vec{r})$ des in guter Näherung aus Sonne und Erde bestehenden Zweikörperproblems im mitrotierenden Schwerpunktsystem durch

$$-\frac{1}{G}V(\vec{r}) = \frac{M_\odot}{\sqrt{\left(x + \frac{M_E}{M_\odot + M_E}R_0\right)^2 + y^2}} + \frac{M_E}{\sqrt{\left(x - \frac{M_\odot}{M_\odot + M_E}R_0\right)^2 + y^2}} + \frac{M_\odot + M_E}{2R_0^3}(x^2 + y^2)$$

gegeben, wobei $\vec{r} = (x, y)$ die kartesischen Koordinaten mit Ursprung im Schwerpunkt bezeichnet. Die Sonne übertrifft mit ihrer Masse M_\odot die mit M_E bezeichnete Masse der Erde um das (3×10^5) -fache. R_0 steht schließlich für die Astronomische Einheit und G für die Gravitationskonstante. Die Lagrangepunkte L_1 und L_2 repräsentieren semistabile Sattelpunkte des Potentials $V(\vec{r})$ mit den Koordinaten

$$\vec{r}_{L_{1,2}} = \left(R_0 \left(1 \mp \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \left(\frac{M_E}{M_\odot + M_E} \right)^{1/3} \right), 0 \right). \quad (6.25)$$

Sie liegen in einer Entfernung von jeweils ca. 1.5×10^6 km auf der der Sonne zu- (L_1) bzw. abgewandten Seite (L_2). Neben diesen im raumfahrttechnischen Sinn wichtigsten Lösungen ergeben sich weitere lokale Sattelpunkte (L_3) bzw. dynamisch stabile Maxima ($L_{4,5}$), die ebenfalls in Abb. 6.7 eingetragen sind. Wie eine hier nicht näher auszuführende Stabilitätsanalyse ergibt, lässt das in x -Richtung labile Sattelpotential in ihm geparkte Raumfahrzeuge ohne entsprechende Gegensteuerung auf einer Zeitskala von $\tau \approx 2 \times 10^6$ s einem Exponentialgesetz folgend „wegdriften“ [47]. Wie in Abb. 6.7 rechts oben angedeutet, bieten sich jedoch bestimmte Umlaufbahnen um L_1 bzw. L_2 in der zur Verbindungsachse zwischen Sonne und Erde senkrechten Ebene an, die eine weitgehende Stabilität gewährleisten. Während L_1 besonders unter dem Einfluss der Sonnenstrahlung und des zugehörigen Strahlungsdruckes $p_{rad} \approx 0.3 \text{ N cm}^{-2}$ leidet, liegt L_2 im Schatten der Erde und verspricht daher besonders günstige Bedingungen im Sinn fast völlig verschwindender äußerer Kräfte. Den aktuellen Planungen zufolge sollen u.a. XEUS, Con-X und das James-Webb-Instrument (JWST) im L_2 stationiert werden.

Relativ schwache, aber nicht verschwindende Gradientenkräfte treten entlang der Erdumlaufbahn um die Sonne mit Ausnahme der Lagrange-Punkte L_4 und L_5 auf. Wegen $M_E \ll M_\odot$ ergibt sich die radiale stationäre Kraftkomponente in unmittelbarer Umgebung des Orbits näherungsweise gemäß

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}_r V(\vec{r}) = [...] = G \frac{M_\odot}{R_0^2} \left(\frac{r}{R_0} - \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 \right) \vec{e}_r, \quad (6.26)$$

wobei $r \equiv (x^2 + y^2)^{1/2}$ und ausreichende Distanz zu den Lagrange-Punkten vorausgesetzt wird. Entsprechende Werte sind in Abb. 6.7 links unten graphisch in Einheiten der Erdbeschleunigung g skizziert. Eine Satellitenkonfiguration, die sich im Rahmen eines mehrjährigen

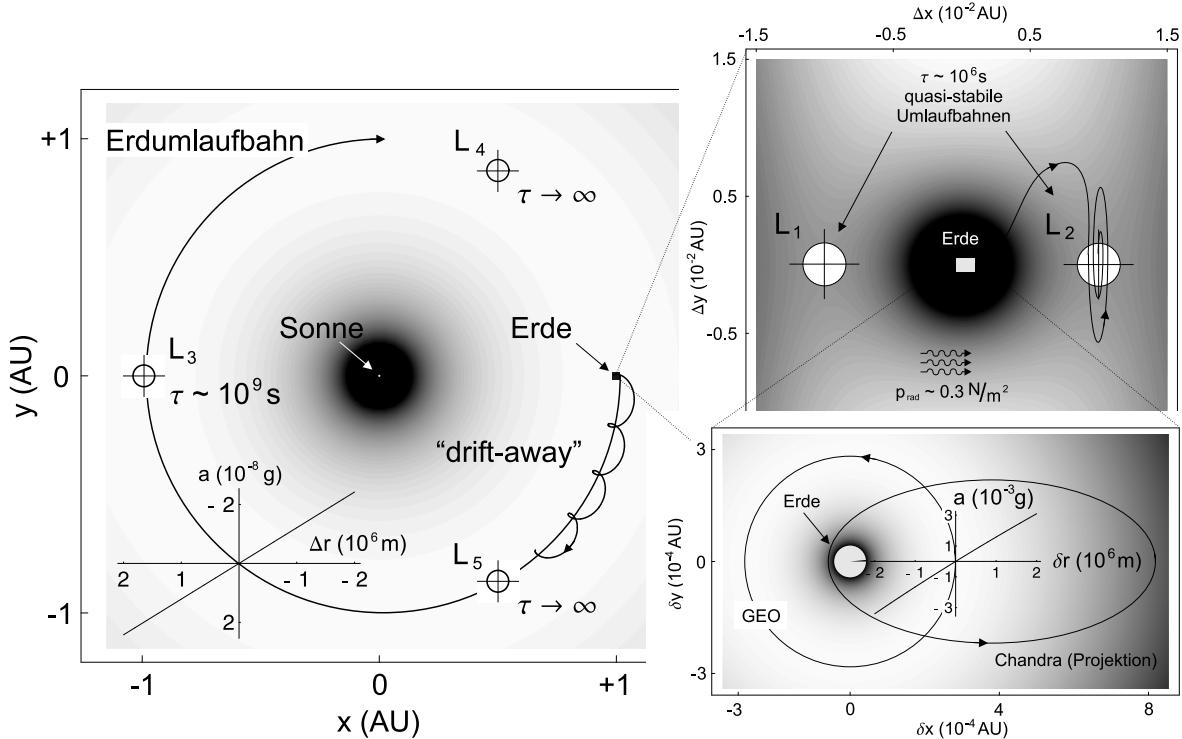


Abbildung 6.7: Umlaufbahnen extraterrestrischer Teleskope auf 3 verschiedenen Skalen. In Erdnähe (unten rechts) treten beim Formationsflug naturgemäß relativ starke Gradientenkräfte auf. Abschätzungen der Radialbeschleunigung sind für den geosynchronen Spezialfall (GEO) in Einheiten von g eingetragen. Analoge Verhältnisse gelten im Gravitationsfeld der Sonne (große Grafik, links), jedoch mit nahezu vernachlässigbaren Gradientenkräften. Als ambitioniertes Projekt erreicht ein „drift-away“ hier nach mehreren Jahren eine Distanz von $\sim 1 \text{ AU}$. Zahlreiche geplante Missionen visieren statt dessen den L_2 an, der quasi-stabile Umlaufbahnen ermöglicht (rechts oben).

gen „drift-away“ in Richtung der idealen Position L_4 bzw. L_5 bewegen würde, wäre demnach ebenfalls nur geringfügigen Kräften und damit Treibstoff-Verlusten ausgesetzt.

Anders liegen die Verhältnisse im Fall erdnaher Orbits, wie sie für Chandra und zahlreiche geostationäre Satelliten ausgewählt wurden. Aufgrund der dominierenden terrestrischen Gravitation betragen die radialen Gradientenkräfte nun das 10^5 -fache der solaren, auf Skalen von $\delta r \sim 10^3 \text{ km}$. Angesichts der zu erwartenden Fokallängen ähnlicher Größenordnung dürfte eine erdnaher Umlaufbahn kaum in Frage kommen.

Die Überschlagsrechnungen zeigen, dass die Gradientenkräfte und damit der Treibstoffbedarf zur Gegensteuerung mit der Fokal-distanz zunehmen. Doch nicht nur im Bezug auf die Stabilisierung erscheinen kurze Brennweiten wünschenswert. Auch der Zeit- und Ener-

giebedarf zur Neuorientierung in Richtung auf ein anvisiertes Beobachtungsobjekt reduziert sich gemäß

$$|\Delta\vec{r}| = 2F \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right), \quad (6.27)$$

wobei $|\Delta\vec{r}|$ die gesamte zurückzulegende Wegstrecke eines oder beider Satelliten beschreibt, um die Ausrichtung um den Winkel $\Delta\varphi$ zu ändern. Aufzuwendende Energie W und damit Treibstoffbedarf steigen wie $|\Delta\vec{r}|^2 \tau^{-2}$ an, wenn die Neuausrichtung eine Zeit τ benötigt. Mit diesen groben Abschätzungen ergibt sich schließlich eine nicht-proportionale Abhängigkeit des Energiebedarfs von der Brennweite,

$$W \propto F^2. \quad (6.28)$$

Zum Abschluss dieses Kapitels wenden wir uns den Toleranzen zu, denen der Detektor bzgl. seiner relativen Ausrichtung zum Objektiv unterliegen darf, um die beugungsbegrenzte Abbildungsqualität zu erhalten. In der Praxis wird nämlich ein geschlossener Regelkreis zu implementieren sein, der das Nachweismodul innerhalb definierter Grenzen dynamisch stabilisiert⁶. Die Abweichungen vom Sollzustand können sowohl lateral in (x, y) -Richtung und axial in z -Richtung auftreten als auch den Rollwinkel um eben diese sowie die pitch/yaw-Verkippung betreffen. Abb. 6.8 illustriert die diversen Raumkoordinaten. Nachfolgend wer-

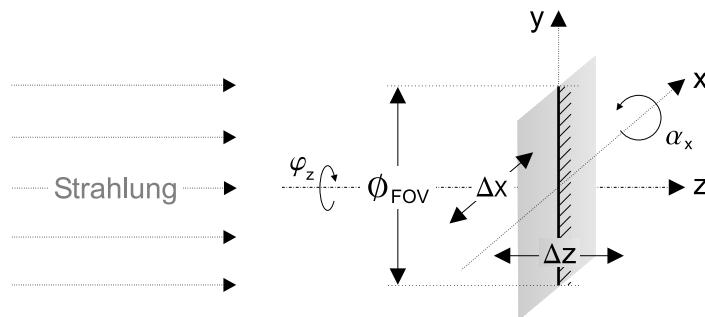


Abbildung 6.8: Dreidimensionale Raumkoordinaten der Detektoreinheit. Die Richtung der positiven z -Achse soll mit der Einfallrichtung der Strahlung zusammen treffen. Der Koordinatenursprung des kartesischen (x, y, z) -Systems liege auf der Detektorfläche in deren Mittelpunkt. Im ungestörten Zustand sei der Detektor senkrecht zur optischen Achse orientiert ($\alpha_x = 0$). Der Übersichtlichkeit wegen sind der pitch α_y und die Translation Δy nicht eingezeichnet.

den die einzelnen potentiellen Fehlerbeiträge in der Reihenfolge ihrer Relevanz diskutiert.

Lateraltranslation $\Delta x, \Delta y$. Ihrer Kontrolle bzw. Überwachung ist die größte Aufmerksamkeit zu widmen, da bereits Verschiebungen von der Größenordnung des lateralen Auflösungsvermögens die Bildqualität entsprechend reduzieren. Abb. 6.9 zeigt die sich mit zunehmender Ortsunschärfe Δx verschlechternde PSF-Qualität. Die Daten wur-

⁶Die Stabilisierung betrifft in der Praxis selbstverständlich gleichermaßen das optische Modul, zur Vereinfachung sei es in dieser Betrachtung jedoch im Raum fixiert.

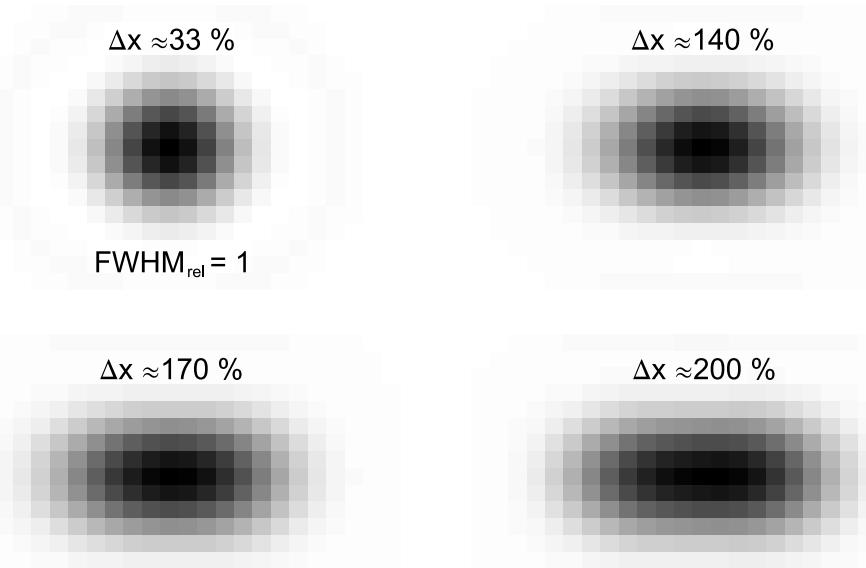


Abbildung 6.9: Einfluss der lateralen Unschärfe auf die PSF-Qualität, dargestellt in einer Dimension. Die Unbestimmtheit Δx , gemessen in Einheiten der PSF-Größe (FWHM) wirkt sich erst oberhalb eines Schwellwerts von $\approx 33\%$ negativ auf die PSF aus.

den durch Addition von je 500 beugungsbegrenzten (Airy-)Punktbildern erzeugt, die längs der x -Achse innerhalb eines Intervalls Δx einer gleichverteilten Zufallstranslation unterlagen. Man erkennt, dass die ungestörte PSF bis zu einer in Einheiten des FWHM gemessenen relativen Unschärfe $\Delta x \approx 33\%$ erhalten bleibt. In absoluten Längenskalen bedeutet dies bei maximalen PSF-Durchmessern von wenigen 10^{-3} m, dass die Lateraltoleranz allenfalls $\lesssim 10^{-3}$ m betragen darf. Mit wachsender Unbestimmtheit nimmt das Auflösungsvermögen näherungsweise linear mit Δx ab, um für $\Delta x \approx 200\%$ die doppelte Halbwertsbreite (FWHM) der ungestörten PSF zu messen.

Der Begriff der „Toleranz“ ist hier im Sinn der *Unkenntnis* über die aktuelle Detektorposition zu verstehen, solange die der Zeitauflösung entsprechende Ausleserate die charakteristische Frequenz, mit der die laterale Detektorposition variiert, übertrifft. Die physikalische Unschärfe darf dann die Unkenntnis im Prinzip beträchtlich überschreiten und wird nur durch das Gesichtsfeld beschränkt.

Die Stabilisierung zweier Satelliten auf eine gemeinsame optische Achse bedeutet eine nicht-triviale technische Herausforderung. Als mögliche Lösung bietet sich der Einsatz eines dritten Hilfssatelliten an, der analog zur LISA-Konfiguration zusammen mit den beiden anderen ein sich selbst justierendes optisches Dreieck aufspannen würde.

Rollwinkel φ . Torsionen um die optische Achse beeinträchtigen wie Lateraltranslationen die Winkelauflösung und Bildqualität um so mehr, je weiter die Abbildung von der optischen Achse entfernt liegt („off-axis“). Abb. 6.10 illustriert die zulässigen Dreh-

winkel. In der Praxis sollte sich die Stabilisierung längs der optischen Achse einfach gestalten, da mit dem Gyroskop ein mechanisches Trägheits-Instrument und mit einem Sternsensor ein hochwertiges optisches Kontrollgerät zur Verfügung steht.

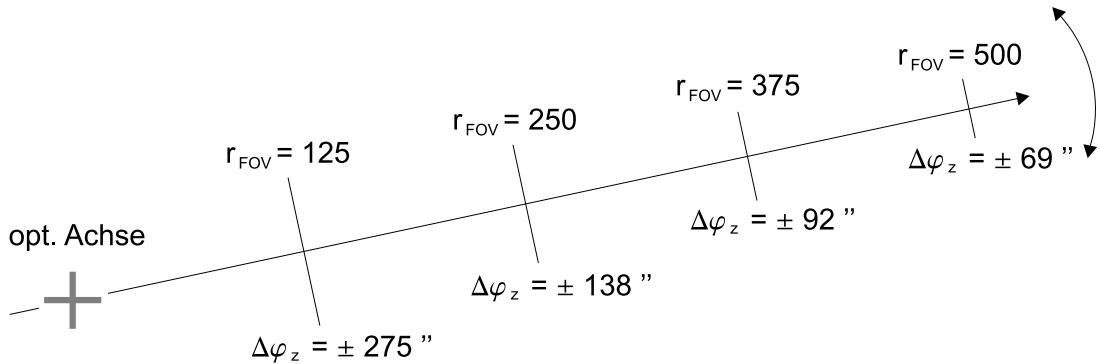


Abbildung 6.10: Zulässige Torsionswinkel des Detektormoduls. Auf der Grundlage der Lateraltoleranzen (Abb. 6.9) ist die maximale Unschärfe $\Delta\varphi_z$ bzgl. Verdrehungen um die optische Achse als Funktion des in Einheiten der PSF-Größe angegebenen r_{FOV} eingetragen.

Axialtranslation Δz . In axialer Richtung beschränkt die optische Feldtiefe die zulässige Unbestimmtheit. Mit der numerischen Apertur $NA = \frac{R}{F}$ und

$$\Delta z_{DOF} \geq \pm \frac{1}{2} \frac{\lambda}{(NA)^2} = [...] \geq \pm \frac{1}{2} \frac{F}{N_{ges}} \quad (6.29)$$

beläuft sie sich praktisch wegen der großen Brennweiten auf meist mehrere Meter. Die totale Zonenanzahl N_{ges} bezeichnet hier im Unterschied zur „effektiven“ Zonenanzahl (z.B. eines Segments) die Zahl der π -Phasenstufen über die gesamte Apertur. Tab. 6.3 gibt einen Überblick zu den Axialtoleranzen diverser Öffnungsverhältnisse f . Die

f -Zahl	2 keV	4 keV	6 keV	8 keV	10 keV	12 keV
5×10^6	3.1×10^4	1.5×10^4	1.0×10^4	7.7×10^3	6.2×10^3	5.2×10^3
1×10^6	1.2×10^3	6.2×10^2	4.1×10^2	3.1×10^2	2.5×10^2	2.1×10^2
5×10^5	3.1×10^2	1.5×10^2	1.0×10^2	77	62	52
1×10^5	12	6.2	4.1	3.1	2.5	2.1
5×10^4	3.1	1.5	1.0	7.7×10^{-1}	6.2×10^{-1}	5.2×10^{-1}

Tabelle 6.3: Axialtoleranz in Metern in Abhängigkeit vom Öffnungsverhältnis. Die für Energien zwischen 2 und 12 keV angegebenen Daten sind nach Gl. 6.29 als (\pm) -Werte zu lesen.

offenbar moderaten Anforderungen an die longitudinale Positionsgenauigkeit lassen sich problemlos mittels interferometrischer Methoden geeigneter Wellenlänge erfüllen.

Pitch/Yaw-Winkel α_x, α_y . Inwieweit diese Freiheitsgrade als „kritisch“ einzustufen sind, hängt von der gewählten Nachweismethode ab. Als unproblematisch erweist sich die direkte Detektion ohne Bragg-Spektrometer, Kollimator etc. In diesem Fall resultiert aus einer Verkippung um den Winkel $\alpha_{x,y}$ eine projizierte Ortsauflösung, die um einen Faktor

$$\delta\mathcal{O}_{PSF} = 1 - \cos(\alpha_{x,y}) \quad (6.30)$$

von der idealen, beugungsbegrenzten abweicht. Die daraus resultierenden Toleranzen liegen im Bereich mehrerer (Winkel-)Grad; so geht eine Verkippung um ca. 18° mit einer Beeinträchtigung des Auflösungsvermögens um 5% einher.

Wesentlich restriktiver gestalten sich die Anforderungen an die Stabilisierung, wenn dem eigentlichen Detektor ein Kollimator zur Unterdrückung des Hintergrundes vorgeschaltet wird. Eine bereits geringfügige Unschärfe bzgl. $\alpha_{x,y}$ wirkt sich weniger auf die PSF-Qualität als vielmehr auf die nutzbare Sammel- und Detektorfläche aus. Die Abschattung $w_{\alpha \neq 0}$ beläuft sich auf

$$\frac{w_{\alpha \neq 0}}{w_{\alpha=0}} \approx \frac{1}{\gamma} \tan(\alpha_{x,y}) = \frac{\alpha_{x,y}}{\gamma} + \mathcal{O}(\alpha_{x,y}^3), \quad (6.31)$$

wenn wie oben eingeführt γ das Blendenverhältnis beschreibt. Eine ($\gamma = \frac{1}{10}$) – Abschirmung beschränkt demnach die zulässige Toleranz auf $\approx 0.6^\circ$, damit die Flächenverluste ca. 10% nicht überschreiten.

Eine spezielle Situation liegt vor, wenn ein Bragg-Spektrometer zum Einsatz kommt. Während die zulässige Unbestimmtheit der parallel zur Einfallsebene orientierten Winkeldimension α_x einfach durch die Breite $\Delta\theta \propto \frac{\Delta E}{E}$ der Rocking-Kurve vorgegeben wird, besteht senkrecht zur Einfallsebene eine größere Toleranz. Für kleine Abweichungen $\Delta\alpha_y$ von der Soll-Orientierung ergibt sich

$$2d \sin \theta \cos \alpha_y = \lambda \quad \rightarrow \quad [...] \quad \rightarrow \quad \Delta\alpha_y \sim \sqrt{\frac{\Delta E}{E}}. \quad (6.32)$$

Demnach sollten Schwankungen von der Größenordnung der Quadratwurzel der spektralen Trennschärfe noch keinen nennenswerten Einfluss auf die Funktion des Spektrometers bewirken.

Größere Variationen von mehreren (Winkel-)Grad erfordern eine Nachführung des Detektors, um die Anpassung an den veränderten Reflexionswinkel zu gewährleisten. Abhängig vom Ausmaß der Verstimmung wird mit einer entsprechenden Verschlechterung der Winkelauflösung zu rechnen sein, die sich signifikant bemerkbar macht, sobald die selektierte Energie aus der optischen Feldtiefe heraustritt.

Im übrigen erfordern Axialposition und Pitch/Yaw-Verkippungen im Gegensatz zu lateralen Versetzungen und Variationen bzgl. des Rollwinkels eine *absolute* Stabilisierung, da sich diesbezügliche Abweichungen unmittelbar auf Abbildungsqualität und Winkelauflösung auswirken, also nicht durch *Kenntnis* der aktuellen (x, y) – Position bzw. Torsion φ bei hinreichender Zeitauflösung des Detektors auszugleichen sind.

Kapitel 7

Anwendungen in der Astronomie

Mit der angestrebten Verbesserung der Bildschärfe um bis zu drei Größenordnungen wird nicht nur in technologischer, sondern auch in wissenschaftlicher Hinsicht Neuland betreten. Dass besonders im Röntgenbereich Bedarf an hohem Trennvermögen besteht, zeigen die Aufnahmen heutiger Instrumente: Abgesehen von den Fällen weitläufiger Emissionsgebiete heißen Gases in Galaxienhaufen, später Supernova-Überreste (engl.: supernova remnants, SNR) und ausgedehnter Jets erscheinen die meisten Röntgenquellen gemäß ihres physikalischen Ursprungs in energiereichen Zentralgebieten selbst für Chandra punktförmig. Bisherige Erkenntnisse empirischer und theoretischer Natur sollen nun im Folgenden die Grundlage neuer Forschungsansätze in der Hochenergie-Astronomie bilden.

Wir bestimmen zunächst in allgemeiner Form die nur im „nahen“ Universum lineare Abhängigkeit des Auflösungsvermögens von der Rotverschiebung z eines Objekts der physikalischen Ausdehnung D . Die im Fall kleiner Winkel $\Delta\epsilon$ durch $D \equiv \Delta\epsilon d_A$ definierte scheinbare Winkeldistanz d_A lässt sich nach allgemein-relativistischen Umformungen als

$$\frac{H_0}{c} \sqrt{\Omega - 1} d_A(z) = \sqrt{k} \frac{r_{em}}{1 + z} \quad (7.1)$$

ausdrücken, wobei $k \in \{-1, 0, +1\}$ für die Raumkrümmung, c für die Lichtgeschwindigkeit und $H_0 = 71 \pm 4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ für die Hubble-Konstante steht¹. Unter der Annahme einer das homogene und isotrope Universum beschreibenden Robertson-Walker-Metrik errechnet sich der Ort r_{em} der Quelle seinerseits aus

$$\arcsin \left(\sqrt{k} r_{em} \right) = \frac{H_0}{c} \sqrt{\Omega - 1} \int_0^z d_H(z') dz'. \quad (7.2)$$

Der Dichteparameter Ω setzt sich additiv aus der Strahlungsenergiedichte Ω_R , der Materiedichte Ω_M und der Größe Ω_V zusammen, die nach heutiger Auffassung die Vakuumenergiedichte beschreibt. Während Ω_R heute vernachlässigt werden kann, bestimmen $\Omega_M > 0$ und $\Omega_V \geq 0$ den Verlauf des Hubble-Radius $d_H(z)$ als Funktion der Rotverschiebung z ,

$$d_h(z) = c H_0^{-1} \left(\Omega_R (1 + z)^4 + \Omega_M (1 + z)^3 + (1 - \Omega) (1 + z)^2 + \Omega_V \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (7.3)$$

¹Die nachfolgend angenommenen kosmologischen Parameter folgen den WMAP-Resultaten [48].

Nach i.a. numerischer Integration² erhalten wir schließlich die dimensionslose und von H_0 unabhängige Größe $\frac{H_0}{c} d_A(z)$, die für alle Parametersätze mit Ausnahme des leeren Universums ($\Omega_M = 0$) ein Maximum im Bereich $1 \lesssim z \lesssim 2$ aufweist, grafisch dargestellt in Abb. 7.1. Übertragen auf die reale Observable $\Delta\epsilon$ ergeben sich bei einer angenommenen

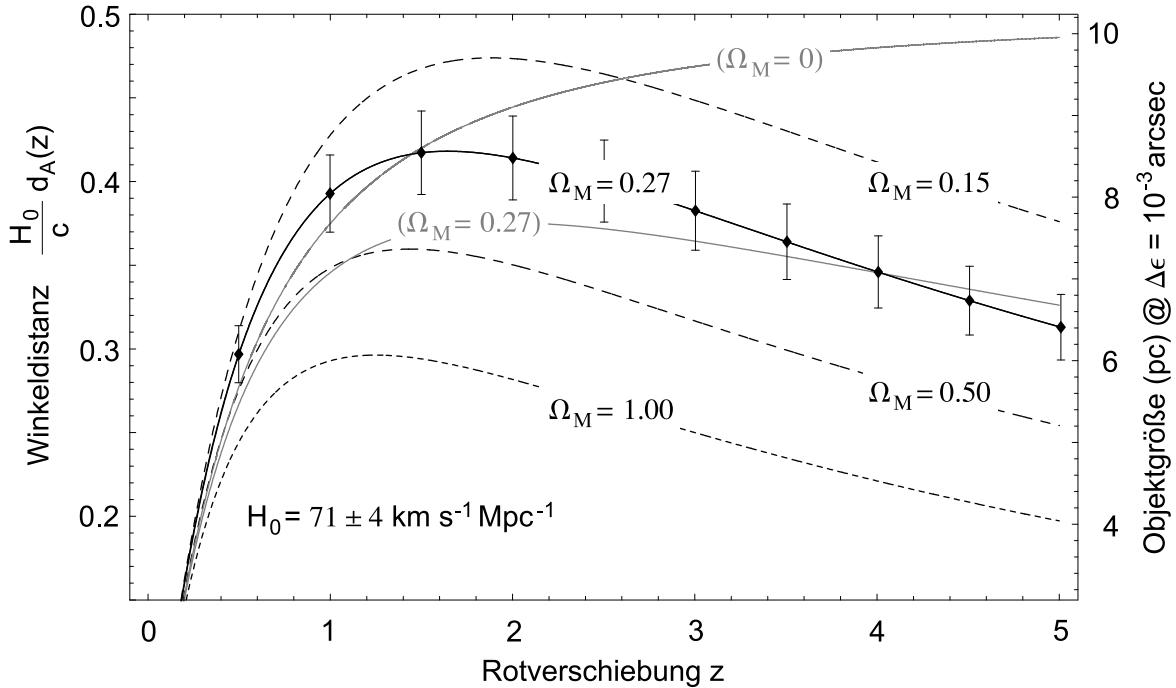


Abbildung 7.1: Einfluss der kosmologischen Rotverschiebung auf die scheinbare Winkelgröße. Normierte Winkeldistanz $\frac{H_0}{c} d_A(z)$ und beobachtete Objektausdehnung im Fall einer Auflösung von 10^{-3} arcsec sind für verschiedene Weltmodelle angegeben. Unter den favorisierten flachen Systemen mit $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$ (schwarz) deutet vieles auf einen Materieanteil $\Omega_M \approx 0.27$ hin. Die Fehlerbalken resultieren aus der Unsicherheit bzgl. H_0 und beziehen sich daher nur auf gemessene Daten (rechte Ordinate). Zum Vergleich sind zwei Beispiele hyperbolisch offener Krümmungen eingetragen (grau, Parameter in Klammern).

Winkelauflösung von 10^{-3} arcsec noch trennbare Objektstrukturen $D < 10$ pc, je nach Wert von Ω_M und Ω_V . Wir werden diesen Sachverhalt weiter unten zu nutzen versuchen, um das hoch rotverschobene Universum zu „vermessen“ – ausreichenden (Photonen-)Fluss natürlich vorausgesetzt. Bezeichnen wir letzteren mit S , so gilt generell für eine Quelle der intrinsischen Luminosität L die geometrische Beziehung

$$L = 4\pi S d_L^2(z), \quad (7.4)$$

wobei $d_L(z) = (1 + z)^2 d_A(z)$ als sog. Leuchtkraft-Entfernung weitaus schneller mit z

²Für eine ausführliche Abhandlung der physikalischen und mathematischen Details sei der Leser auf die einschlägige Literatur, z.B. [49], verwiesen.

anwächst als d_A und daher bei der Beobachtung früher Phasen des Universums eine hohe instrumentelle Sensitivität erfordert.

Eine Möglichkeit, die geringe Helligkeit ferner Objekte zumindest ansatzweise zu kompensieren, mag der im Visuellen bei Quasaren bereits vielfach nachgewiesene Gravitationslinseneffekt bieten. Die teils mehr als 10-fache Verstärkung [50] beruht hier auf einer durch ein Schwerefeld verursachten Änderung des Raumwinkels, in den die Quelle abgebildet wird. Unter einem anderen Aspekt wird dieses Phänomen der Relativitätstheorie Gegenstand des Abschnitts 7.1 sein. In weiteren Abschnitten kommen danach einige der noch ungelösten Fragen der Astrophysik zur Sprache, soweit sie mit den hier in Rede stehenden Mitteln zu lösen sind – in bezug auf aktive Sterne, Supernovae und aktive Galaxien in ihren vielfältigen Erscheinungsformen. Deren typische Entfernung und Abmessungen stellt Abb. 7.2 anhand bestehender Datensätze zusammen. Aus der Grafik wird ersicht-

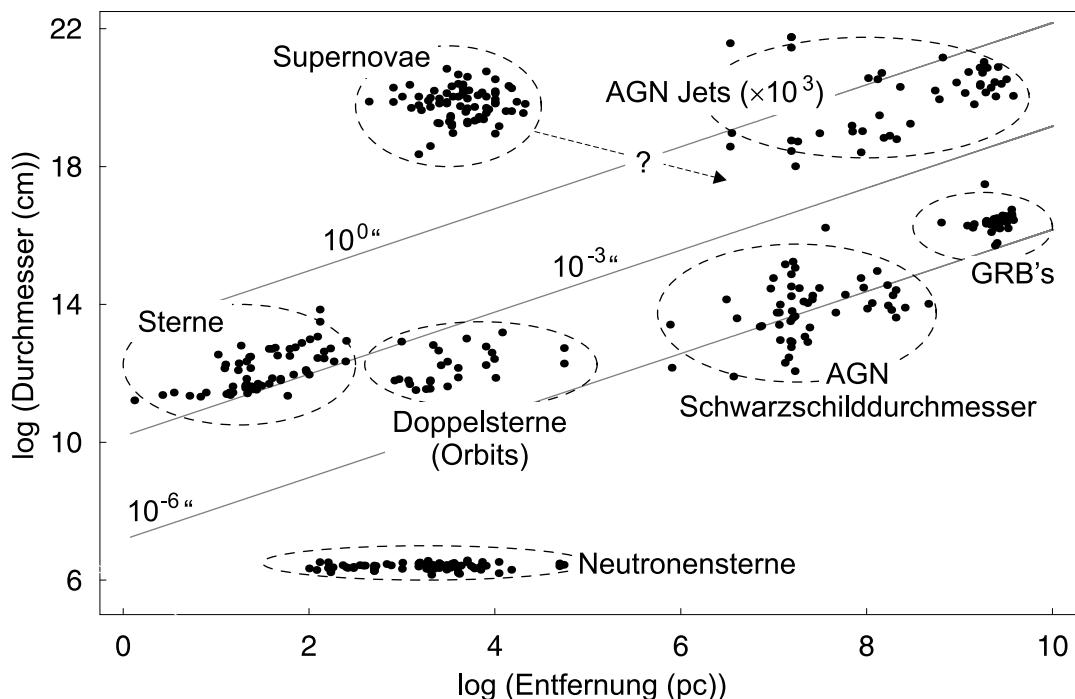


Abbildung 7.2: Röntgenquellen auf verschiedenen Winkelskalen. Beispiele gemessener Daten sind für Durchmesser einzelner Sterne [51], Umlaufbahnen von Doppelsternsystemen [52] und Ausdehnungen galaktischer Supernova-Überreste (SNR) [53, 54] gegeben. Letztere sind aufgrund ihrer Leuchtkraft auch in fernen Galaxien zu registrieren. Ferner sind Durchmesser von Akkretionsscheiben [52] aktiver Galaxienkerne und die inneren 0.1% ihrer Jetlängen [55] eingetragen. Größen von Neutronensternen ([56]) und GRB-Afterglows [57] wurden durch Streuung um die ungefähr bekannten Mittelwerte simuliert.

lich, dass qualitativ neue Erkenntnisse einer wenigstens um den Faktor 10^3 verbesserten Winkelauflösung bedürfen. Darüber hinaus erweist sich meist eine sorgfältige Spektralanalyse der untersuchten Strahlungsquellen als essentiell, um Rückschlüsse auf chemische

Zusammensetzung und physikalische Prozesse zu ziehen. Obgleich entsprechende Instrumente aktueller und geplanter Missionen immerhin ein Trennvermögen $R \equiv \frac{E}{\Delta E} \sim 10^3$ erzielen, diskutieren diverse theoretische Arbeiten inzwischen Linienspektren mit Strukturunterschieden von weniger als 1 eV. Entsprechend den Ausführungen aus Kap. 2 und 5 illustrieren wir daher den Einsatz in der abbildenden Spektroskopie anhand eines von R. Sunyaev und Mitarbeitern gegebenen Beispiels [58].

Sie schlagen vor, den Helium-Anteil in Gaswolken anhand gestreuter Röntgenstrahlung zu messen. Grundsätzlich kann die Streuung in diesem Energiebereich untergliedert werden in Rayleigh-, Raman- und Comptonprozesse. Erstere liefern als elastische Streuvorgänge beispielsweise für Helium (He) einen größeren Beitrag als Wasserstoff (H). Dagegen tritt die inelastische Ramanstreuung bei Übergängen zwischen diskreten und damit gebundenen Energieniveaus im Atom auf, die Energie der gestreuten Photonen ist daher charakteristisch für das jeweilige Streumedium. Im Fall der Compton-Streuung erfolgt schließlich eine Ionisation, die Form des Spektrums gibt Auskunft über die Bindungsenergie des Streuatoms.

Die prinzipielle Idee zur Messung des He-Anteils in Wolken besteht nun darin, mittels hochauflösender Spektroskopie diesen Bruchteil aufgrund der spezifischen Unterschiede zur Streuung an H-Atomen abzuschätzen. Bezüglich des quantitativen Vergleichs der Stärke der kohärenten Rayleigh-Komponente sind dem Beobachter jedoch zunächst Beschränkungen auferlegt, da hierzu eine räumliche Trennung der H- und He-Regionen notwendig wäre, die selten gegeben sein dürfte. Dafür steht mit der Raman-Energielücke („Gap“) ein umso klareres Kriterium zum Nachweis von He-Beimengungen zur Verfügung. Diese Lücke ist nämlich für He mit 20 eV doppelt so groß wie für H und müsste demnach eindeutig zu unterscheiden sein (Abb. 7.3).

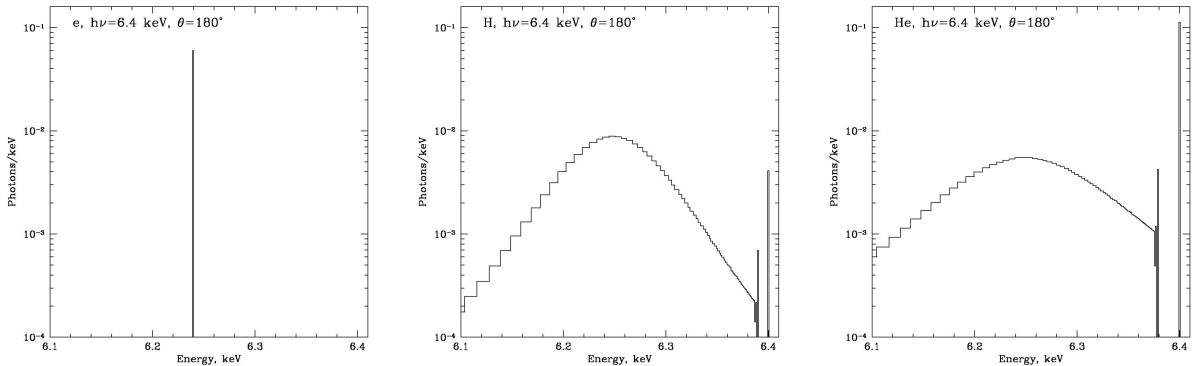


Abbildung 7.3: 180° -Rückwärtsstreuung der $Fe-K_\alpha$ -Photonen mit einer Energie von 6.4 keV am Elektron; links für den rein elastischen Fall des freien ruhenden e^- , in der Mitte – nun mit zusätzlichen Compton- und Raman- Komponenten – für atomaren Wasserstoff und rechts für Helium; aus [58].

Üblicherweise wird für derartige Untersuchungen die K_α -Fluoreszenz von Fe herangezogen, die ihrerseits von höherenergetischer Röntgenstrahlung (über 7.2 keV) angeregt wird. Die diskrete Rayleigh-Linie bei 6.4 keV erlaubt dann die Identifikation der spektralen Be-

standteile. Eine explizite Abschätzung des H/He-Verhältnisses kann weiter aus der genauen Vermessung der Compton-Schulter bezogen werden. Dabei berücksichtigt man, dass dieser Schwanz für He wegen der größeren Bindungsenergie und der daraus resultierenden weniger engen Impulsverteilung der e^- im Grundzustand breiter ausfällt als für H. Der Anteil der Röntgenphotonen im Compton-„Gebirge“ ist jetzt im Fall optisch dünner Wolken ein Maß für die Thomson-Tiefe und ergibt so die He-Häufigkeit in der Wolke.

Zusätzlich zu den eben genannten elementaren Analysen sind verschiedene Erweiterungen und Modifikationen denkbar. So besteht die Fe- K_α -Linie bei 6.4 keV aus zwei Dublett-Partnern im Abstand von ca. 13 eV. Verschiebungen dieser Bestandteile im Sub-eV-Bereich hängen davon ab, ob das streuende He-Atom frei im All „schwebt“ oder chemische Bindungen innerhalb eines Staubkorns eingeht. Damit kann die genauere Zusammensetzung der Wolke ermittelt werden. Generell stellt die gleiche Größenordnung der Dublett-Aufspaltung und der Energielücke insbesondere im Fall von Fe bei 6.4 keV ein messtechnisches Problem dar. Einen Lösungsansatz bietet der Übergang von Fe zu leichteren Elementen, bei denen sowohl Dublett-Aufspaltung als auch Breite der Komponenten geringer sind, während die Lücke von 20 eV unverändert erhalten bleibt. Diesem Vorteil stehen jedoch eine geringere Fluoreszenz-Quantenausbeute, eine schwächere Reflektivität des Streumediums sowie ein erhöhter kohärenter (elastischer) Anteil gegenüber.

Eine weitere Anwendungsmöglichkeit besteht schließlich in der Beobachtung inhomogen verteilter Gasansammlungen in der Sonnenumgebung, die von der Röntgenemission solarer Flares beleuchtet werden. Bei genügender Winkelauflösung können beleuchtende und streuende Region getrennt und so die Kontamination des Raman-/Compton-Streuspektrums mit der verursachenden Strahlung vermieden werden.

Aus dem genannten astrophysikalischen Anwendungsprofil ergeben sich die Anforderungen an das Teleskop. Benötigt wird eine große effektive Sammelfläche von mind. 6000 cm^2 , wie sie von Con-X und XEUS bereitgestellt wird. Ferner wird ein feines spektrales Auflösungsvermögen im Sub-eV-Bereich bei 6.4 keV entsprechend $R \gtrsim 10^4$ ebenso wie eine gute räumliche Trennschärfe von wenigstens 0.5 arcsec, besser jedoch einigen 10^{-2} arcsec zu implementieren sein.

7.1 Anwendungen des Gravitationslinseneffekts

Wir setzen uns nun mit der zweiten Eigenschaft des Gravitationslinsen-Phänomens auseinander, Lichtstrahlen abzulenken und Mehrfachbilder weit entfernter Quellen zu erzeugen. Bekanntlich beträgt der Einstein-Radius R_0 einer im Abstand D_L (vom Beobachter) befindlichen Linsenmasse M , die eine dahinter liegende Quelle in der Entfernung D_S mit Relativabstand $D_{LS} \equiv D_S - D_L$ abbildet

$$R_0 = 2 \left(G \frac{M}{c^2} \frac{D_L}{D_S} D_{LS} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.5)$$

Der letztlich beobachtete Winkelradius errechnet sich daraus via $\theta_0 = \frac{R_0}{D_L}$. Er stellt das charakteristische Maß für die gravitative Lichtstrahlenkrümmung dar und soll den An-

sprüchen der folgenden Abschätzung genügen, obwohl natürlich Versetzungen gegenüber der optischen Achse, endliche Ausdehnung der Quelle und inhomogene Massenverteilung in realen Gravitationslinsen-Abbildungen zu berücksichtigen sind.

θ_0 erweist sich somit als proportional zu \sqrt{M} , ein Umstand mit bemerkenswerten Konsequenzen: Typische Linsenereignisse mit Galaxien oder Galaxienhaufen als gravitativen Zentren zeigen nämlich Ablenkungen in der Größenordnung von $\sim (1-10)''$, Winkel, die der Leistungsfähigkeit von Teleskopen wie Hubble oder auch Chandra entgegen kommen. Wie sich zeigt, erfordert deren auf $\sim 0.5''$ beschränkte Trennschärfe extragalaktische Massen von wenigstens $10^{10} M_\odot$. Anders verhält es sich im Fall galaktischer Linsen: Sterne rufen aufgrund ihrer geringen Masse lediglich Ablenkungen von $\sim 10^{-3}$ arcsec hervor. Linsen innerhalb der Milchstraße müssten demnach $10^6 M_\odot$ aufweisen [59].

Hier liegt nun das Potential der zu wesentlich schärferer Abbildung fähigen Röntgenastronomie. Geht man von einer Verbesserung des Auflösungsvermögens um einen Faktor 500-1000 aus, so bedeutet dies, dass zur Messung der Ablenkungswinkel bereits 10^5 bis 10^6 -fach geringere Massen genügen. Damit wird aber der Weg frei für die Verwendung von einzelnen Sternen (innerhalb der Milchstraße), Sternhaufen und evtl. gar mittelschwerer schwarzer Löcher in Nachbargalaxien als abbildenden Systemen. Zwar finden stellare Massen bereits seit langem im Mikrogravitationslinseneffekt Verwendung, um dunkle Materie aufzuspüren. Hierbei wird der zeitliche Verlauf der Verstärkung $\mu = \mu_1 + \mu_2$ gemessen, die die Gesamtheit der – i.d.R. zwei – Bilder der Quelle beim Durchlauf der Linsenmasse erfährt. Sie erweist sich als Funktion des Winkelabstandes β zwischen Linse und Quelle in Einheiten von θ_0 (vgl. Abb. 7.4): $\mu_{1,2} = \mu_{1,2} \left(\frac{\beta}{\theta_0} \right)$. Zum einen spielt sich nun der klassische

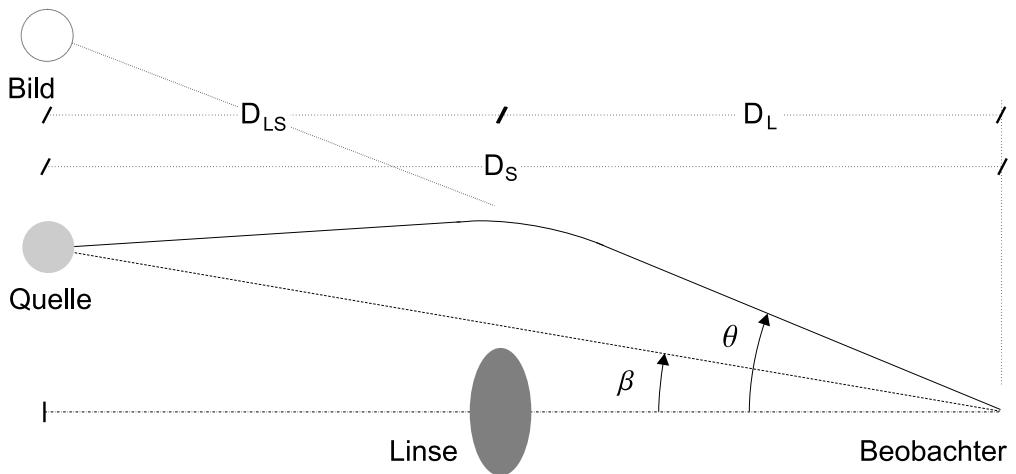


Abbildung 7.4: Geometrie des Gravitationslinseneffekts. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist nur eines der i.a. zwei Bilder gezeichnet. Das schwächere liegt dabei innerhalb des Einstein-Ringes mit Winkelradius θ_0 , das hellere außerhalb.

Mikrolinsen-Effekt bei Quasaren auf Zeitskalen von Wochen bis Monaten ab; zum anderen liegt es auf der Hand, dass durch die – mangels ausreichender Winkelauflösung – alleinige Messung der Gesamtverstärkung μ wertvolle Information über das Linsensystem verloren

geht oder zumindest verschleiert wird. So bereitet die Unterscheidung zwischen intrinsischer und linsenbedingter Variabilität etwa bei Quasaren in der Praxis oft Schwierigkeiten. Der zusätzliche Nachweis von Mehrfachbildern kann nun nicht nur den gravitativen Einfluss belegen, sondern über die aus der Winkeldistanz $\Delta\theta$ zu berechnende Linsenposition β den linsenbedingten Beitrag zur beobachteten Lichtkurve vorhersagen.

Überhaupt ließen jüngste Beobachtungen hoch rotverschobener Quasare (siehe dazu auch Abb. 7.5) im Rahmen des Sloan Digital Sky Survey den Verdacht aufkommen, die Strahlung eines signifikanten Anteils von bis zu 30% sei durch den starken Gravitationslinseneffekt künstlich verstärkt [50]. Nach Aussage der Autoren kommen hierfür neben „gewöhnlichen“ auch Mikrolinsen-Ereignisse, hervorgerufen durch nahe Sterne, in Betracht. Bis dato stützt sich die Hypothese auf wenige Daten und stochastische Abschätzungen. Eine direkte Überprüfung dieser Vermutung, die theoretisch wie empirisch das frühe Universum buchstäblich in einem ganz anderen Licht erscheinen ließe, erfordert je nach statistischer Massenverteilung der Vordergrundobjekte eine Winkelauflösung von $\lesssim 10^{-1}$ arcsec.

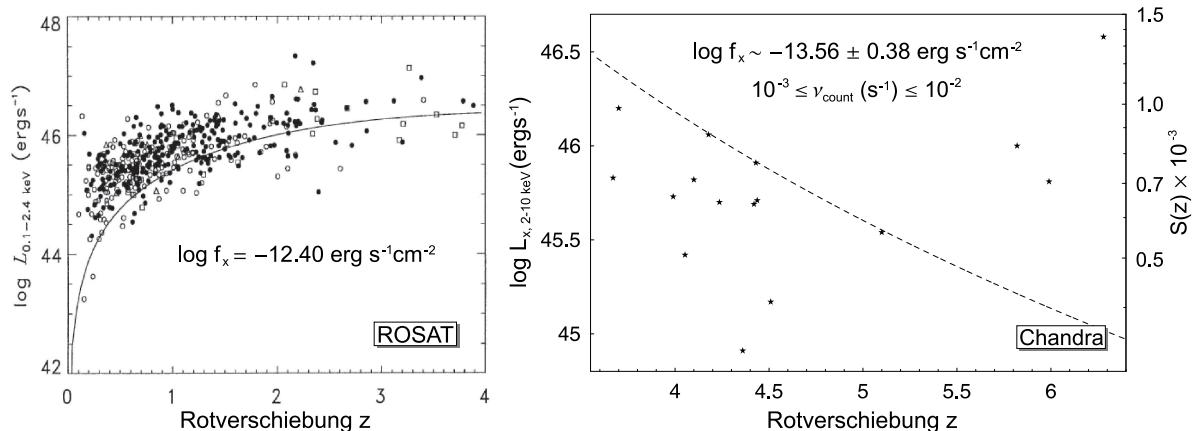


Abbildung 7.5: Röntgen-Leuchtkräfte von Quasaren, gemessen von ROSAT (links) und Chandra (rechts). Die ROSAT-Daten beziehen sich auf die weiche Röntgenemission zwischen 0.1 und rund 2 keV und entsprechen in grober Näherung einem Fluss $f_x \gtrsim 4 \times 10^{-13}$ $\text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$ (durchgezogene Linie). Chandra detektierte im Bereich von 2 bis 10 keV bei typischen Zählraten zwischen 10^{-3} und 10^{-2} s^{-1} . Zusätzlich ist auf der rechten Ordinate der zu $S(0)$ relative Fluss $S(z)$ gemäß Gl. 7.4 aufgetragen.

Das kosmische Linsenphänomen stellt auch eine Methode zur Messung der Hubble-Konstante H_0 bereit. Sie beruht auf der Bestimmung der Laufzeitdifferenz τ zwischen den i.a. unterschiedlich langen Lichtwegen in Mehrfachabbildungen variabler Quasare. Mit den Winkeln θ_1 und θ_2 zwischen den Bildern und der *punktförmigen* Linsenmasse gilt [60]

$$\tau = \frac{1}{2c} D_L (\theta_1^2 - \theta_2^2) \left(1 + \frac{D_L}{D_{LS}} \right). \quad (7.6)$$

Um daraus H_0 zu errechnen, werden beide Distanzen D via $c \cdot z_{L,S} = H_0 \cdot D_{L,S}$ mit den jeweiligen Rotverschiebungen verknüpft. Das zentrale Problem dieses Verfahrens besteht

zunächst in seiner Mehrdeutigkeit aufgrund *ausgedehnter* Massenverteilungen $M(r)$, das eine unabhängige, detaillierte Analyse der Linsengalaxie bzw. des Haufens erfordert. Die Messung von τ erlaubt schließlich gemäß

$$H_0 = \xi(M(r)) \frac{\theta_i^2 - \theta_j^2}{\tau} \frac{z_L \cdot z_S}{z_L - z_S} \quad (7.7)$$

H_0 für diverse Bilder (i, j) zu errechnen. $\xi(M(r))$ steht für die spezifische Massenverteilungsfunktion. Aus unserer Sicht ist besonders die Frage nach der erreichbaren Messgenauigkeit dieses kosmologischen „Zollstocks“ von Interesse. Betrachten wir nun den Fehler bzgl. H_0 und vernachlässigen dabei die Unsicherheit in τ , z_L sowie z_S ,

$$\frac{\delta H_0}{H_0} \simeq 2 \delta \theta_{i,j} f(\theta_i, \theta_j), \quad (7.8)$$

wobei $f(\theta_i, \theta_j)$ eine von $\theta_{i,j}$ abhängige Funktion darstellt, so bemisst sich die relative Unbestimmtheit der Hubble-Konstante linear nach deren Positionsgenauigkeit.

Gewissermaßen als Kontrast zu diesem sehr vereinfacht beschriebenen Konzept soll nun eine Methode zum Test von Galaxienverteilungsfunktionen mit Hilfe statistischer Mikrolinsen-Ereignisse vorgestellt werden. Das Verfahren folgt einer im Jahr 2002 publizierten Überlegung [61] und beruht auf der starken Abhängigkeit der statistischen Winkelverteilung der Linsenereignisse von radialem Massenprofil und differentiellem Verlauf der Galaxienverteilungsfunktionen im Sub-Bogensekunden-Bereich.

Zur Beschreibung der Galaxienpopulation im Universum hinsichtlich ihrer Luminosität dient meist die sog. Schechter-Funktion, die alternativ durch eine physikalisch wie formal ähnliche Distribution

$$\psi(v_c) dv_c = \psi_* \left(\frac{v_c}{v_*} \right)^\beta e^{-\left(\frac{v_c}{v_*} \right)^n} d \left(\frac{v_c}{v_*} \right), \quad (7.9)$$

der Rotationsgeschwindigkeiten v_c ersetzt werden kann und abgesehen von empirisch zu bestimmenden Werten für v_* und $n = 2.5$ durch den Parameter $\beta < 0$ charakterisiert wird. Mit ihr ist im allgemeinen ein spezifisches, unter der Bezeichnung „singular isothermal sphere“ (SIS) bekanntes Dichteprofil

$$\rho(r) = \frac{v_c^2}{8\pi G r^2} \quad (7.10)$$

verknüpft, dem wiederum ein bestimmter, von v_c abhängiger Einstein-Radius θ_0 zugeordnet ist. Man erwartet daher eine mit der Leuchtkraft- bzw. Geschwindigkeitsverteilung korrelierte Wahrscheinlichkeit P , einen Winkelabstand θ zu messen. Es erweist sich nach dieser Theorie, dass der gemessene Winkelabstand zu geringen Separationen und damit niedrigen Leuchtkräften hin einer nur von β abhängigen Funktion

$$\frac{dP}{d\theta} \propto \theta^{\frac{1}{2}(\beta+3)} \quad (7.11)$$

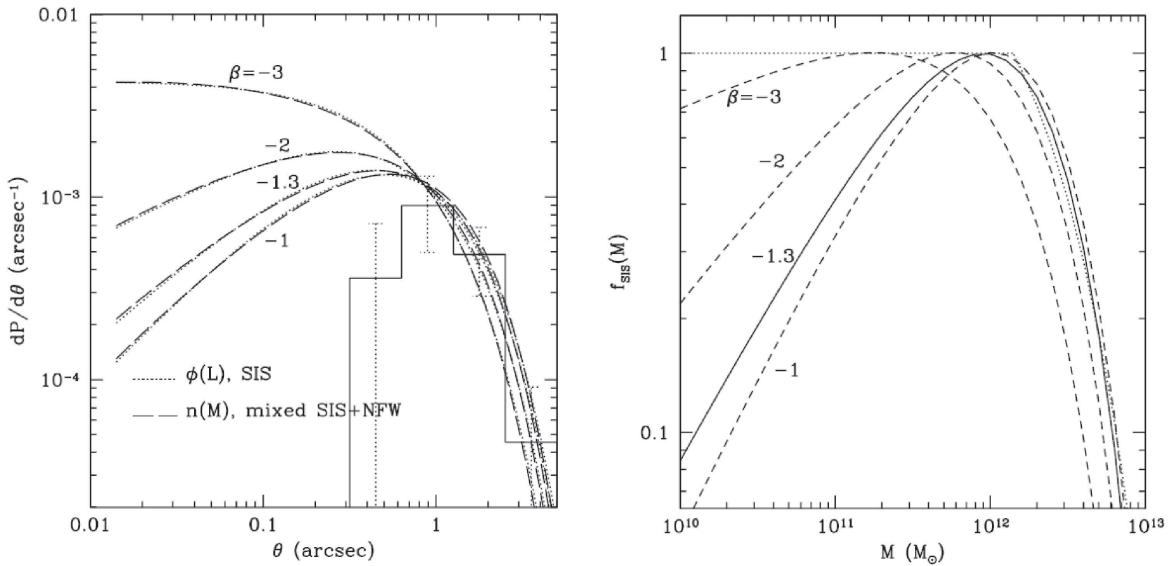


Abbildung 7.6: Überprüfung von Galaxienleuchtkraft- und Massen-Verteilungsfunktionen mittels statistischer Mikrolinsenmessungen. Die differentielle Häufigkeit $\frac{dP}{d\theta}$ ist in der linken Grafik als Funktion des Winkelabstandes der Linsenabbildungen aufgetragen. Je nach Wert des Parameters β liefern Leuchtkraft- und Massenverteilung nur für einen bestimmten Anteil f_{SIS} leuchtender Halo-Profile konsistente Resultate. Dieser ist in Abhängigkeit von der Masse M in der rechten Skizze gezeichnet, aus [61].

folgen sollte, in Abb. 7.6 links aufgetragen. Andererseits erscheint es natürlich, $\frac{dP}{d\theta}$ mit der Galaxien-Massenfunktion nach Press und Schechter in Beziehung zu setzen. Um die daraus folgende Winkelverteilung jedoch mit Gl. 7.11 in Einklang zu bringen, sind bestimmte Bedingungen an das Verhältnis von leuchtenden zu dunklen („dark matter“) Halos und deren jeweilige Dichteprofile $\rho(r)$ zu stellen. Demnach müssten massearme Galaxien unterhalb weniger $10^{11} M_\odot$ ebenso wie massive Haufen oberhalb von $10^{12} M_\odot$ durch dunkle Materie dominiert werden, während Galaxien von typischerweise $\sim 10^{12} M_\odot$ überwiegend leuchtende Materie enthalten.

Wie Abb. 7.6 illustriert, lassen sich diese Hypothesen durch eine Serie von Linsenbeobachtungen auf Winkelskalen bis herab zu 10^{-2} arcsec überprüfen und zugleich quantifizieren. Mit heute verfügbaren Instrumenten wurden die in der linken Grafik mit ihren Fehlerbalken eingetragenen Daten gewonnen, die sich als offenkundig untauglich erweisen.

7.2 Einzelne Sterne und ihre Koronae

Im Bestreben, die Oberflächen von Sternen räumlich aufzulösen und mit der wohlbekannten Struktur unserer Sonne zu vergleichen, liegt seit jeher eine der Triebfedern für die Entwicklung eines beugungsbegrenzten Röntgenteleskops. Schließlich warf der Nachweis (thermischer) Röntgenemission von der Sonne (siehe Kap. 1) im vergangenen Jhd. sofort

die Frage auf, wie diese zu erklären sei – reicht doch die photosphärische Oberflächentemperatur von $\lesssim 6000$ K keinesfalls aus, im Sinn des Planck'schen Strahlungsgesetzes den beobachteten Fluss auch nur annähernd vorherzusagen. Anfängliche theoretische Modelle zogen die Schock-Dissipation akustischer Wellen zur Deutung der offenbar erforderlichen hohen Temperaturen heran. Allerdings widersprach dieser Ansatz zahlreichen späteren Beobachtungen anderer Sterne, wonach zwischen Röntgenfluss und Spektraltyp nicht der erwartete Zusammenhang bestand. Heute wissen wir, dass die Temperatur von ca. 2×10^4 in der Chromosphäre in einer dünnen Übergangsschicht von wenigen 10^4 km Dicke bis auf $\sim (1 - 5) \times 10^6$ K in der Korona ansteigt [62]. Die Röntgenstrahlung wird nun nicht etwa isotrop und homogen emittiert, sondern entspringt fast ausschließlich koronalen Bögen („loops“), die auf detaillierten Aufnahmen zum Vorschein kommen (vgl. Abb. 7.8). Neben diesen geschlossenen und mit heißem Plasma angefüllten magnetischen Flussröhren treten auch radiale, offene Feldlinien zu Tage. Damit ist klar, dass zumindest die solare Korona von Magnetfeldern beherrscht wird, deren Energiedichte die thermische übertrifft.

Rätselhaft bleibt bis heute, wie die Umsetzung von magnetischer Feld- in thermische Strahlungsenergie genau vonstatten geht und wie die koronale Aktivität mit intrinsischen stellaren Parametern wie Spektraltyp, Masse, Rotationsfrequenz, Alter etc. zusammenhängt. Aufschluss können darüber letztendlich nur detaillierte, spektrale wie abbildende Untersuchungen fremder Sterne geben. Röntgenfrequenzen erweisen sich als geradezu prädestiniert, die diesbezüglichen Informationen bereit zu stellen, da zu ihnen anders als zur (E)UV-Emission selbst bei heißen OB-Sternen die Photosphäre praktisch keine Beiträge liefert. Obgleich stellare Röntgenbeobachtungen in einer langen, bis auf das „Einstein“-Observatorium zurückreichenden Tradition stehen und mittlerweile Tausende derartiger Quellen detektiert wurden, gestaltete sich die zweifelsfreie Identifikation lange Zeit schwierig. Dies deshalb, weil ein Großteil in Doppelsternsystemen gebunden ist und andere in bisweilen dichten Haufen lokalisiert sind. Zudem wirkte sich die Kontamination durch den diffusen Hintergrund störend aus. Einen signifikanten Fortschritt in beiderlei Hinsicht brachte erst „Chandra“ [63]. Freilich ist auch dieses Instrument bei weitem nicht in der Lage, nahe Sterne räumlich aufzulösen.

Abb. 7.7 zeigt Winkeldurchmesser naher und visuell heller Sterne, wie sie aus ihren ungefähr bekannten Entfernungen und abgeschätzten Radien berechnet wurden. Demnach erscheint eine Trennschärfe von $10^{-3}(10^{-4})$ Bogensekunden angemessen, um die koronale Aktivität weniger (zahlreicher) Sterne der Umgebung zu kartieren.

Auf jeden Fall sollten jedoch $\gtrsim 10^{-3}$ arcsec ausreichen, um in allen potentiellen Binärsystemen die Röntgenemission zweifelsfrei zuordnen zu können. Weshalb wird nun bereits diesem recht bescheidenen wissenschaftlichen Anspruch Aufmerksamkeit geschenkt? Der aktuellen Theorie zufolge sollten Sterne bestimmter Spektral- und Leuchtkraftklassen keine oder nur sehr geringe koronale Röntgenemission zeigen [64, 65]. Dazu gehören – aus diversen Gründen – Vertreter der Hauptreihe vom Spektraltyp A ebenso wie späte Riesen. Obwohl bisherige Beobachtungen diese These weitgehend stützen, werden gegenteilige und zweifelhafte Messungen kontrovers diskutiert; fragend, ob die detektierten Photonen nicht doch einem Begleitstern zuzuschreiben seien. Sollten sich die Vermutungen jedoch auf breiter Front bestätigen, so wäre dies als Hinweis auf differenzierter oder zusätzlich wirkende

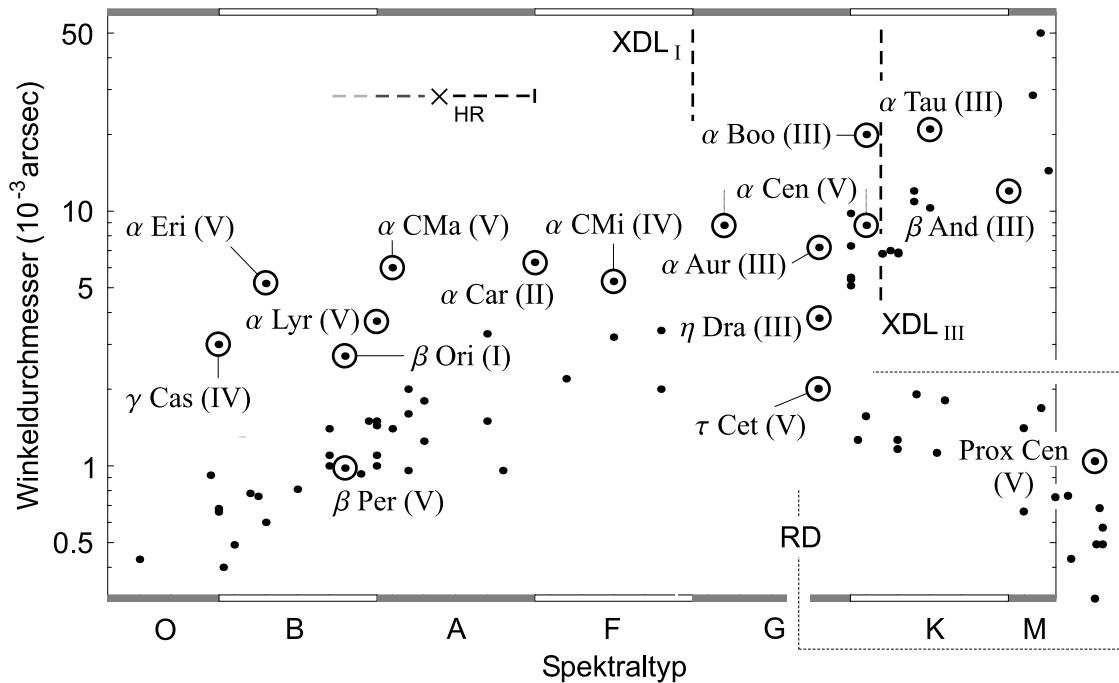


Abbildung 7.7: Spektraltyp und Winkeldurchmesser heller Sterne mit einer scheinbaren visuellen Helligkeit ≤ 3 mag sowie diverser sonnenähnlicher bzw. roter Zwerge (engl.: red dwarfs, RD) der näheren Umgebung (unten rechts) [51, 88, 89]. Für eine Auswahl sind Bezeichnung und Leuchtkraftklasse angegeben. Hauptreihensterne der durch „ \times_{HR} “ gekennzeichneten Spektraltypen weisen der gängigen Theorie zufolge keine koronale Röntgenemission auf. Gleiches gilt für rote (Über-)Riesen jenseits der jeweiligen Konvektions-/Windgrenzen (X-ray dividing line, XRD).

Mechanismen anzusehen, um die die gängige Dynamo-Theorie zu erweitern wäre.

Bevor wir uns mit deren Implikationen eingehender befassen, seien Erfahrungswerte zu typischen Leuchtkräften und nötiger Nachweisempfindlichkeit gegeben. Einen guten Anhaltspunkt stellen die Daten der ROSAT-Durchmusterung (ROSAT all-sky survey, RASS) dar, die rund 1300 und damit $\approx 41\%$ aller Sterne im Umkreis von 25 pc erfassen [66]. Innerhalb von etwa 14 pc werden gar $\approx 94\%$ der F/G-Sterne als Röntgenquellen erkannt. Möglich wurde dies mit einer Sensitivität von 2×10^{-13} erg cm $^{-2}$ s. Anschaulich gesprochen, entspricht dies dem solaren Fluss in einer Entfernung von 10 pc. Offenbar weisen also zahlreiche Sterne eine deutlich größere Röntgenleuchtkraft als die Sonne auf, die in der Tat mit $L_x \approx 2 \times 10^{27}$ erg s $^{-1}$ zu den schwächeren Emittoren zählt und von einigen besonders aktiven Sternen um Größenordnungen übertroffen wird. So belaufen sich nach [66] die Leuchtkräfte L_x kühler Sterne im Umkreis von 15 pc auf 10^{25} bis 10^{30} erg s $^{-1}$, während sie im Sichtbaren noch nicht einmal 3 mag absoluter Helligkeit erreichen. Augenfällig wird die Nicht-Korrelation zwischen L_x und M_V bei Vertretern des Spektraltyps M mit $M_V \gtrsim 8.5$, die aber oft $L_x \gtrsim 10^{28}$ erg s $^{-1}$ liefern können. In seltenen Fällen wurden bei Riesen vom Spektraltyp G und M Röntgen-Luminositäten von $\sim 10^{30}$ erg s $^{-1}$ gemessen [66].

Doch nicht alle Sterne zeigen koronale Aktivität, geschweige denn von eben genanntem Ausmaß. So erkannte das RASS-Programm nur (10 – 20)% aller B- und A-Sterne, deren vermeintliche Röntgenleuchtkraft überdies aus oben angesprochenen Gründen angezweifelt wird. Von einzelnen Exemplaren wie z.B. Arcturus ließ sich überhaupt kein meßbarer Fluss detektieren, der somit weniger als 3×10^{25} erg s⁻¹ betragen muß.

Um diese großen Unterschiede zumindest qualitativ verstehen zu können, bedarf es eines nach Möglichkeit universalen Modells, das den internen physikalischen Zustand eines Sterns berücksichtigt. Ein solches stellt die bereits erwähnte Dynamo-Theorie [67] bereit, gewissermaßen eine Konzession an die sich mit wachsender empirischer Erkenntnis durchsetzende Überzeugung, dass die koronale Aktivität *das* Phänomen eines primär magnetohydrodynamischen Prozesses darstellt. Demnach entsteht unter der (differentiellen) Rotation der viskosen Sternmaterie in Verbindung mit der turbulenten Konvektion ein stark inhomogenes Magnetfeld, dessen Flussschläuche bisweilen durch Druckstörungen nach außen dringen können. Zahlreiche Beobachtungen deuten darauf hin, dass die Wirksamkeit dieses Generators mit der Rotationsfrequenz des Sterns und der Dicke seiner Konvektionszone zunimmt. Die Existenz einer – äußereren – konvektiven Schale stellt offenbar eine notwendige Bedingung dar, wie das weitgehende Fehlen koronaler Röntgenstrahlung von A-Sternen und deren schlagartiges Einsetzen bei F-Sternen zu belegen scheint³. Umgekehrt liefern die schnell rotierenden, variablen RS CVn Doppelsterne mit „weichen“ Röntgenleuchtkräften von $(10^{30} – 10^{31})$ erg s⁻¹ ein starkes Indiz für die Bedeutung der Rotation.

Als quantitatives Maß für die mutmaßliche Effizienz des Dynamo-Prozesses wurde die z.B. in [68] diskutierte sog. Rossby-Zahl

$$N_R = \frac{P_{rot}}{\tau_c} \quad (7.12)$$

als Rotationsperiode P_{rot} , ausgedrückt in Einheiten der charakteristischen Konvektions-Zeitskala τ_c für die Durchmischung, eingeführt. Letztere bezieht sich hier auf den hinsichtlich der Dynamo-Wirkung als besonders bedeutsam angesehenen Übergang zwischen radiativem Kern und konvektiver Hülle. Man nimmt nun an, dass die „Dynamo-Zahl“, definiert als N_R^{-2} , proportional zur Stärke der magnetischen Aktivität ist. Wenn auch bisherige Messungen einen qualitativen Zusammenhang zwischen N_R und der koronalen Emission nahe legen, bleiben wichtige Fragen offen. So erklärt das Bild des Dynamos letztlich nicht dessen Funktionsweise, ebensowenig wie die Heizung des koronalen Plasmas mittels magnetischer Feldenergie. Zur Vorsicht mahnt auch der Umstand, dass vollkonvektive Sterne am Hayashi-Limit keinen erkennbaren Einbruch in der Konversionseffizienz $\frac{L_x}{L_{bol}}$ (mit der bolometrischen Luminosität L_{bol}) erleiden [66]. Eigentlich sollten diese roten Zwerge mit Massen $M < 0.3 M_\odot$ in Ermangelung einer radiativ-konvektiven Grenze wenn überhaupt, dann zumindest signifikant verschiedene Röntgenemission aufweisen.

Herausforderungen ganz anderer Art halten die Riesen der Leuchtkraftklassen I bis III bereit, in Abb. 7.7 im Umfeld der jeweiligen Trennlinien (X-ray dividing lines, XDL) angesiedelt. Einerseits treten relativ „gelbe“ Vertreter oftmals als ausgesprochen intensive

³Im Bereich dieses Spektraltyps vollzieht sich der Übergang von der radiativen zur konvektiven Hülle.

Röntgenquellen in Erscheinung, andererseits sind so gut wie keine diesbezüglichen Beispiele roter (Über-)Riesen bekannt. Mit Betelgeuze und Arcturus seien nur zwei klassische Vertreter dieser Gattung genannt, die nichtsdestoweniger im Visuellen zu den hellsten überhaupt zählen. An der wissenschaftlichen Relevanz dieser Exemplare ändert dies wenig, da neueren Erkenntnissen zufolge die Korona hier mitsamt ihrer residualen Röntgenemission einem Schmelzbrand gleich *unter* der Chromosphäre verborgen sein und evtl. punktuell auf der Sternoberfläche hervortreten könnte [69]. Die Energie- und Massendissipation erfolgt hier vielmehr durch kühle, schwache Winde, die nach vagen Vermutungen mit *offenen* Feldlinien assoziiert sind. Im Gegensatz sollte die Beobachtung der sog. Hybrid-Sterne an den XDL relativ mühelos gelingen. Sie zeichnen sich durch ein gleichzeitiges Vorhandensein radialer Winde als auch geschlossener Magnetfelder aus [67]. Es sei noch erwähnt, dass auch frühe (O-B)-Sterne Massenverlust durch starke Winde erleiden, die auch zu teils beträchtlicher Röntgenhelligkeit von bis zu 10^{34} erg s⁻¹ Anlass geben [67]. Obgleich auch diese seltenen Objekte interessante Erkenntnisse liefern dürften, wollen wir uns im folgenden mit den beobachtungsspezifischen Fragen befassen, die sich auf *koronale* Emission beziehen. Abb. 7.8 skizziert einige dieser Aspekte. Einer freilich spekulativen Extrapolation

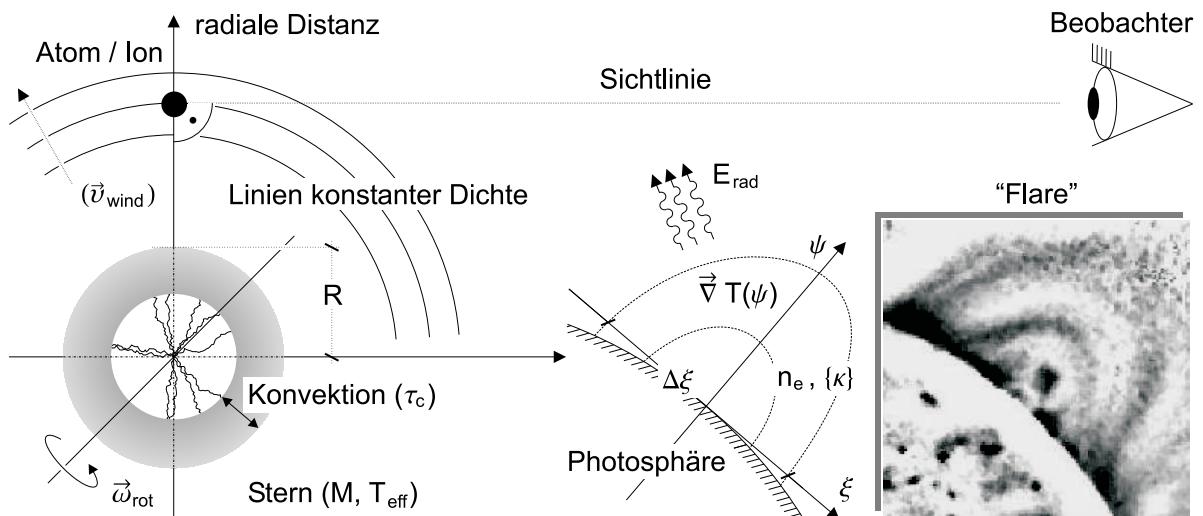


Abbildung 7.8: *Strukturelemente und Observable stellare Koronae.* Aufgrund des steilen radialen Gradienten der Plasmadichte registriert ein Beobachter vor allem Strahlung aus Regionen senkrecht zur Sichtlinie [70]. Bei konvektiven Sternen emittieren gemäß dem Dynamo-Modell hauptsächlich Flares auf verschiedenen Skalen die in ihrer Intensität von diversen Sternparametern abhängige Röntgenstrahlung. Weitere Erläuterungen siehe Text.

solarer Dimensionen gehorchend, dürfte sich die Korona generell bis zu mehreren Sternradien erstrecken. Dies gestattet – ausreichende räumliche Auflösung vorausgesetzt – nach dem in Abb. 7.8 genannten Argument u.U. ein radiales Profil des Röntgenfluxes zu erstellen und daraus Rückschlüsse auf Temperatur- und Dichte Verlauf zu ziehen. Im Idealfall wäre eine solche Messung für eine isolierte Magnetfeldschleife vorzunehmen – mit dann direktem Zugang zum Heizmechanismus. In Anbetracht der Ausdehnung solcher „loops“ bis

herauf zur Größenordnung eines Sternradius mag diese Perspektive für ausgewählte Sterne durchaus realistisch erscheinen. Davon abgesehen, kommt einer Analyse der räumlichen wie zeitlichen Skalen, auf denen die koronale Emission eines bestimmten Sterns variiert, elementare Bedeutung zu, verknüpft sie doch unmittelbar Ursache (Magnetfeld) und Wirkung (Röntgenstrahlung). Insbesondere darf vermutet werden, dass zwischen dem Grad der Homogenität/Strukturiertheit der Ausstrahlung auf der Oberfläche und typischen Zustandsgrößen des Sterns ein quantitativer Zusammenhang besteht.

Zum Ende dieses Abschnitts wollen wir noch die Klasse der Vor-Hauptreihensterne zur Sprache bringen. Sie zeichnen sich durch besonders intensive, durch starke Magnetfelder und Winde verursachte Röntgenemission aus, die im Extremfall der in diesen Systemen besonders ausgeprägten Flares bis zu $\sim 10^{35} \text{ erg s}^{-1}$ betragen und räumliche Ausdehnungen von mehreren $10 R_\odot$ erreichen kann [71, 72]. Über die Struktur der stellaren „Kinderstuben“ ist aufgrund der im Optischen nahezu opaken Staubgürtel und eben mangelnder Auflösung wenig bekannt. Eine der nächstgelegenen Sternentstehungsregionen, ρ Ophi, gestattet in einer Entfernung von rund 150 pc jedoch immerhin eine detaillierte Erfassung der Akkretionsscheiben von Protosternen (vgl. Abb. 7.9) mit charakteristischen Winkeldurchmessern von $\sim 10^2$ bis $\sim 10^3$ mas [71]. Auch protostellare Objekte im klassischen, $\gtrsim 1500$

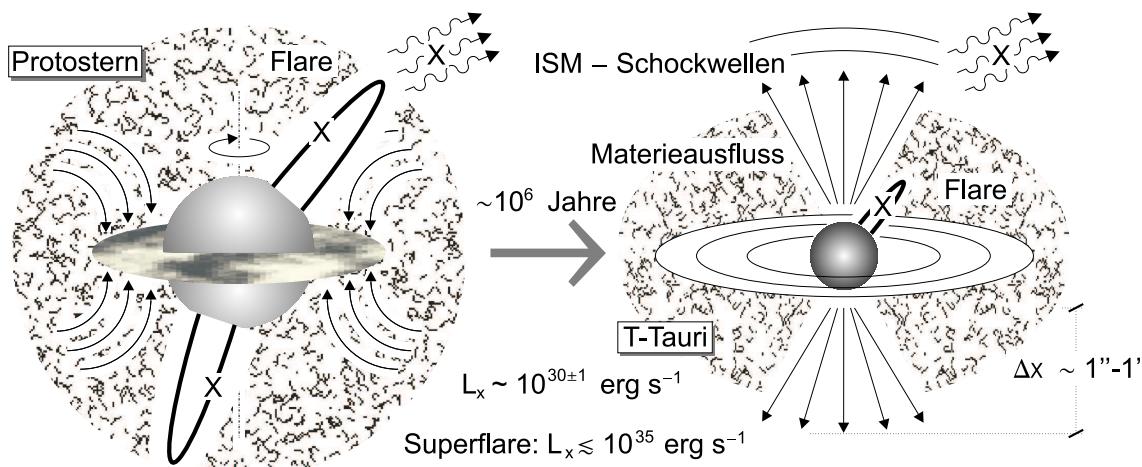


Abbildung 7.9: Sowohl Protsterne als massenakkretierende stellare Vorläufer als auch Vertreter der (T-Tauri)-Klasse sind als starke Röntgenquellen bekannt. Typische Leuchtkräfte L_x liegen mindestens um einen Faktor $10^2 - 10^3$ über der entsprechenden Luminosität der Sonne. Neben der Emission ausgedehnter Flares wurde inzwischen auch in den kollimierten Ausflüssen von (T-Tauri)-Sternen entspringende Röntgenstrahlung nachgewiesen.

pc entfernten Orion-Nebel lassen sich noch gut untersuchen. Eine eingehende Diskussion lohnt in diesem Kontext die Möglichkeit, die Akkretionsscheibe durch evtl. gestreute K_α -Fluoreszenz zu vermessen. Als Pumpquellen könnten wiederum die zahlreichen Flares dienen, die sich mit typischen Winkelausdehnungen von $\sim 10^{-3} \text{ arcsec}$ eindeutig dem zentralen Stern zuordnen lassen sollten.

Auf die in ihrer Entwicklung weiter fortgeschrittenen T-Tauri-Sterne lassen sich ähnliche Überlegungen anwenden, jedoch mit der zusätzlichen Option, die in diesem Stadium besonders häufigen Materieausflüsse bzw. ihre Wechselwirkung mit der interstellaren Materie ebenfalls auf Röntgenemission hin zu prüfen. In einem Fall gelang dies bereits mit Hilfe von Chandra [73], auf Winkelskalen von wenigen Bogensekunden. Obwohl es sich dabei nicht um ein klassisches T-Tauri-Objekt, sondern um den Vertreter einer verwandten Klasse von Vor-Hauptreihensternen handelte, ist diese Entdeckung als vielversprechender Ansatz anzusehen.

7.3 Supernovae und Supernova-Überreste

Im Schnitt widerfährt pro Galaxie alle 100 Jahre einem Stern eine Supernova-Explosion. Aufgrund ihrer enormen (visuellen) Helligkeit von rund -20 mag sind jedoch insbesondere solche vom Typ I(a) noch in Entferungen von mehreren Gpc nachzuweisen und dienen als Standardkerzen zur Bestimmung kosmologischer Parameter. Supernovae vom Typ II zeichnen sich hingegen ihrer Natur nach durch eine große Vielfalt hinsichtlich ihrer diversen Charakteristika aus und eignen sich entsprechend besonders gut zum Studium der bis heute nicht völlig verstandenen Explosionsdynamik.

Die beträchtliche Komplexität der physikalischen Abläufe beim Kollaps geht mit einem eindrucksvollen Spektrum elektromagnetischer und partikulärer Strahlung einher, die vom Radio- über das sichtbare bis zum Röntgen- und Gammaband reicht und auch die wichtige Neutrino-Emission einschließt. All diese Beiträge stehen für bestimmte Phasen und Komponenten einer sich – in Form ihres Überrestes (supernova remnant, SNR) – oft über viele 10^5 Jahre entwickelnden Supernova. Wir legen das Augenmerk auf die Röntgenstrahlung, die gemäß Abb. 7.10 in den ersten beiden Phasen bis zu einem Alter von $\sim 10^4$ Jahren zur Lichtkurve beiträgt. Eine durchschnittliche Supernova-Explosion setzt beim Gravitationskollaps des Weißen Zwerges 10^{53} erg frei, die freilich zu 99% in Form von Neutrinos abgestrahlt werden. Die Beiträge der bolometrischen Lichtkurve und der kinetischen Expansionsenergie der Hülle summieren sich zu den restlichen 10^{51} erg [60].

Nach der Kontraktion zum Neutronenstern dehnt sich die Schockfront und mit ihr die Materie der äußeren stellaren Schalen mit einer Geschwindigkeit von 5×10^3 bis 2×10^4 km s^{-1} aus. Im Einzelfall hängt v_{rad} von der tatsächlich emittierten Energie (abzüglich des Neutrino-Anteils) und der Masse des kollabierten Sterns ab [74]:

$$v_{rad} \approx 10^4 \frac{\text{km}}{\text{s}} \left(\frac{E}{10^{51} \text{erg s}^{-1}} \right)^{1/2} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/2} \quad (7.13)$$

Da diese Geschwindigkeit in der ersten, rund 10^2 Jahre dauernden Phase nahezu konstant bleibt, expandiert die Druckwelle mit Radius r , wie bei einer Explosion nicht anders zu erwarten, anfangs linear in der Zeit, $r \propto t$. In einer 10^7 pc entfernten Galaxie entspricht damit der für dieses Anfangsstadium charakteristische physikalische Radius von 1 pc im Winkelmaß problemlos aufzulösenden 20×10^{-3} arcsec. Die Suche nach SNR dieser frühen Entwicklungsstufe erscheint wegen des besonders hohen Röntgenfluxes zudem besonders

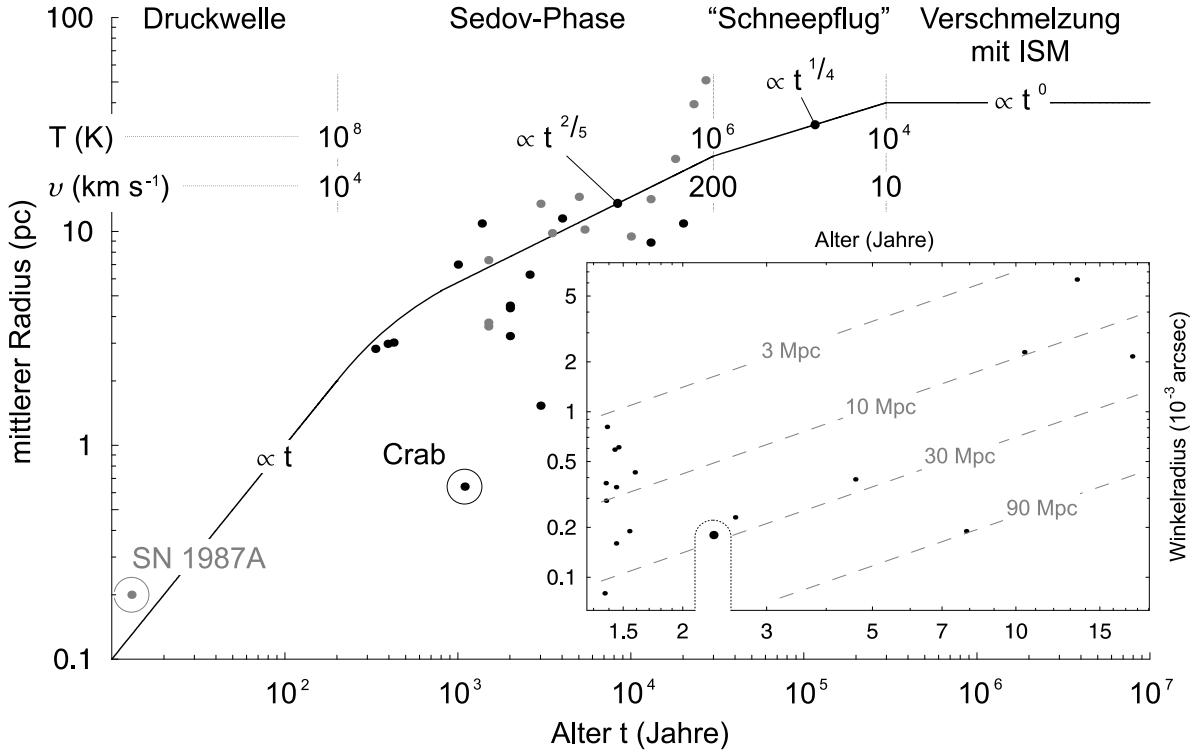


Abbildung 7.10: Zeitliche Evolution von Supernova-Überresten. Die Hauptgrafik illustriert die verschiedenen Phasen der Expansion mit Zeitabhängigkeit t , gemessen in Jahren, sowie typischen Temperaturen T in K und Geschwindigkeiten v in km s^{-1} . Chandra-Beobachtungen sind für die Galaxis (schwarze Punkte) und die Magellanschen Wolken (graue Punkte) eingetragen. Der Einsatz zeigt Röntgendifferenzdaten von jungen SNR aus fernen Galaxien. Ihre hypothetische Zeitentwicklung nach dem Druckwellenmodell der ersten Phase führt nach einigen Jahren teils zu Winkelradien von mehreren 10^{-3} arcsec, nach [74].

erstrebenswert. Von erheblicher theoretischer wie praktischer Bedeutung ist nun der Umstand, dass diese hochenergetische Strahlung dem bis zu 10^8 K und während der Druckwellenphase konstant heißen Plasma im *Inneren* des SNR entspringt, während die in Form einer Schockfront mit dem interstellaren Medium (ISM) wechselwirkende Schale vorwiegend im optischen und/oder Radiobereich leuchtet [75]. Zwar sind die eben angegebenen Winkelskalen somit eher als obere Grenze anzusehen; nichtsdestoweniger kann gerade diese unmittelbar mit der Detonation assoziierte Region anhand ihrer Intensitätsverteilung und begünstigt durch die geringe Dichte von nur 10^{-3} bis 10^0 cm^{-3} wertvolle Informationen über den Explosionsvorgang liefern.

Wenige Monate nach dem Kollaps zeigt zudem ein von dieser Bremsstrahlung unabhängiger Subprozess Wirkung, der unter Umständen messbar zur Röntgenlichtkurve beitragen kann [74]. Gemeint sind Heizprozesse durch radioaktiven Zerfall, namentlich $^{56}\text{Ni} \rightarrow ^{56}\text{Co}$ und $^{56}\text{Co} \rightarrow ^{56}\text{Fe}$. Als Nebenprodukt des ersten entstehen γ -Quanten, die durch Streuprozesse mit freien e^- allmählich thermalisieren und so teils zu Röntgen-, UV-

und optischen Frequenzen abgeschwächt werden. Obwohl die Zerfallsprozesse quasi instantan einsetzen, verzögern die großen freien Weglängen die Konversion zu niedrigeren Energien. Unter Berücksichtigung der Expansionsgeschwindigkeit resultiert ein zeitlicher Versatz von rund 10^2 Tagen bis zur Sichtbarkeit. Vermutlich steht die bei der SN 1987A nach 130 Tagen einsetzende Röntgenemission mit diesem Phänomen in Zusammenhang (vgl. hierzu auch Abb. 7.12).

Nach etwa 200 Jahren verlangsamt sich die Ausbreitung der Staubhülle. Ihre Entwicklung tritt dann in die sog. Sedov-Phase ein, deren Charakteristikum in der konstanten Gesamtenergie E des Systems besteht [74]. Unter der Annahme einer adiabatischen Expansion bei konstanter Dichte ρ des nicht komprimierten Mediums folgt aus der zu $(r^3 v^2 \rho)$ proportionalen Energie

$$r \propto \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/5} t^{2/5}. \quad (7.14)$$

Hinsichtlich des Temperaturverlaufs sagt das Modell einen Abfall gemäß $T \propto t^{-6/5}$ voraus. Innerhalb von ca. 10^4 Jahren kühlt der Supernova-Überrest so auf schließlich $\sim 10^6$ K, simultan zur abnehmenden Röntgenleuchtkraft.

Chandra beobachtete diverse SNR in der Galaxis und solche in den Magellan'schen Wolken, die sich nach Abb. 7.10 mit Ausnahme der SN 1987A allesamt in der Sedov-Phase befinden. Die in der Regel über den gesamten Spektralbereich von 0.3 bis 10 keV gemessenen Luminositäten L_x liegen typischerweise bei $10^{36 \pm 1}$ erg s $^{-1}$, selten weniger oder mehr [53]. Ferne und mit kaum mehr als ein paar Jahren sehr junge Supernovae erreichen dagegen gut und gerne 10^{37} bis 10^{40} erg s $^{-1}$, obwohl es sich auch bei ihnen überwiegend um solche vom generell häufigeren Typ II handelt [76]. Wie Abb. 7.11 illustriert, liegt deren scheinbare Röntgenhelligkeit entsprechend ebenfalls über den extrapolierten Werten der nahen SNR.

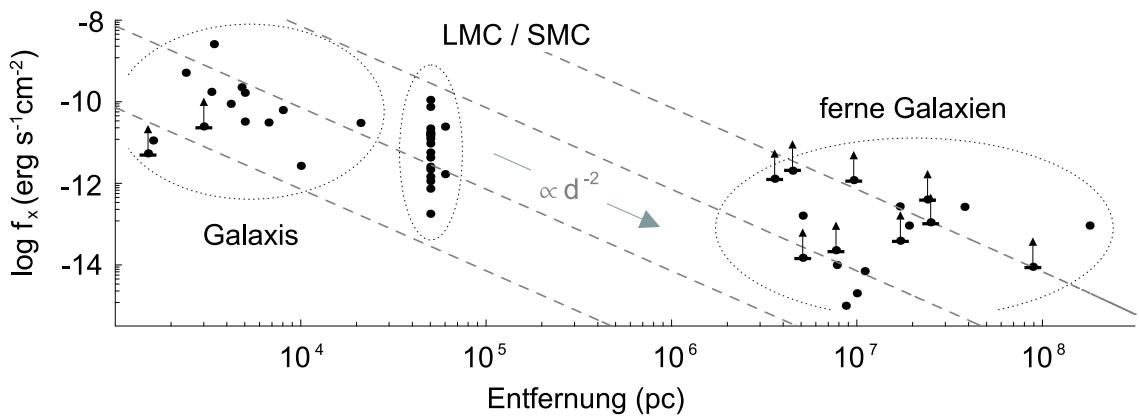


Abbildung 7.11: Beobachteter Röntgenfluss f_x von Supernova-Überresten auf verschiedenen Distanzen d . Die sehr jungen fernen SNR weisen eine vergleichsweise große Helligkeit auf, relativ zur Extrapolation der nahen, alten SNR (graue, strichlierte Geraden). Für einige Werte f_x sind meßtechnisch bedingte untere Grenzen angegeben.

Die große Streuung der (absoluten) Helligkeiten und auch der Radien nach Abb. 7.10 zu einer festen Zeit t machen deutlich, dass in der skizzierten Theorie der SNR-Evolution allenfalls eine vereinfachte Modellvorstellung zu sehen ist. Umso dringlicher erscheint daher die Aufgabe, durch präzise Messungen v.a. im Rahmen der abbildenden Spektroskopie die Details des Explosionsvorgangs verstehen zu lernen. Einmal abgesehen vom kontinuierlichen Bremspektrum, aus dem auf die Temperatur des Plasmas geschlossen werden kann, geben räumliche und spektrale Position, Stärke und Profil der Emissionslinien Auskunft über die chemische Zusammensetzung und Verteilung der expandierenden Sternmaterie. Je besser dabei die räumliche Auflösung, desto differenzierter wird die Kartierung des oft asymmetrischen SNR gelingen. Über den gesamten Nebel integrierte Spektren liefern zwangsläufig breite, u.a. durch den Dopplereffekt verwaschene Linien, wie Abb. 7.12 am Beispiel der SN 1987A illustriert. Im übrigen vermögen heutige Instrumente wie Chandra

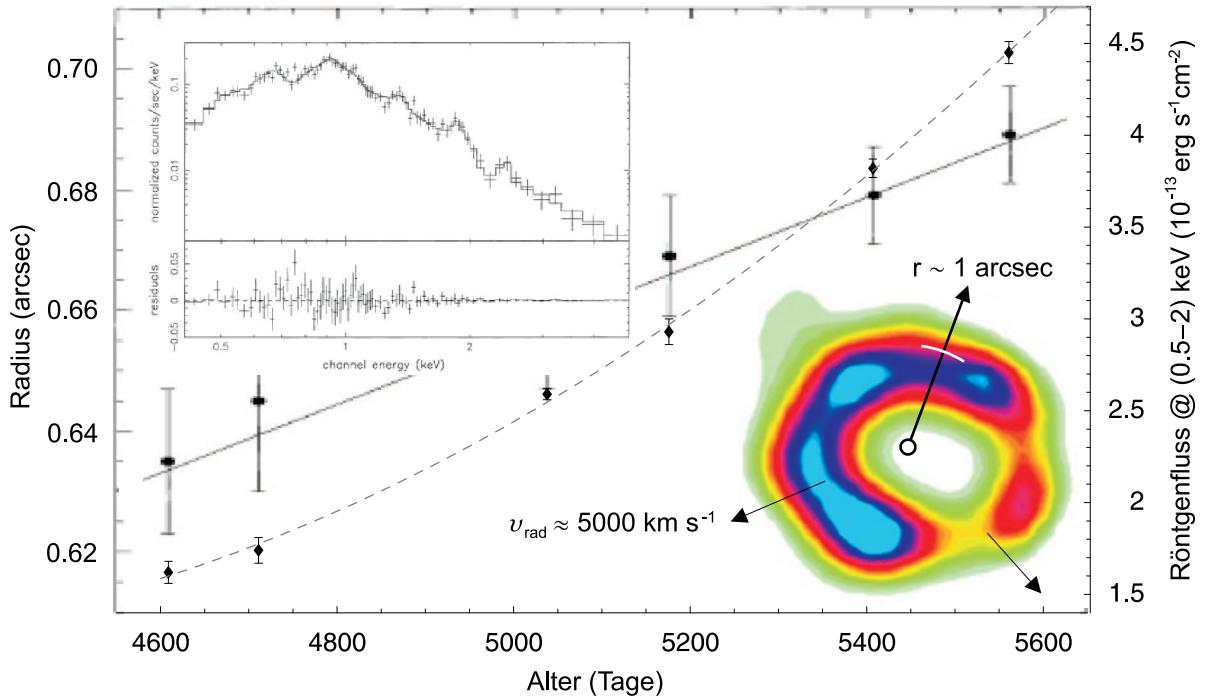


Abbildung 7.12: Eigenschaften der Supernova 1987A in der LMC. Auf der linken Ordinate ist der aus Chandra-Messungen abgeleitete SNR-Radius aufgetragen (durchgezogene Linie, große Fehlerbalken), während die rechte Ordinate den immer noch ansteigenden Röntgenfluss beschreibt (strichliert, kleine Fehlerbalken). Im linken oberen Einsatz ist ein Spektrum vom Mai 2002 mit O-, Ne-, Mg-, Si- und S-Linien zwischen ≈ 0.5 und ≈ 4 keV zu sehen, rechts unten eine Chandra-Aufnahme aus dem Jahr 2003.

und XMM-Newton Geschwindigkeitsdifferenzen Δv_{rad} von typischerweise ~ 100 km s^{-1} aufzulösen. Von ähnlicher Dimension ist mit $\frac{E}{\Delta E} \sim 3 \times 10^3$ die zu \sqrt{T} proportionale thermische Dopplerbreite bei $T \sim 10^6$ K. Dem thermischen Dopplerprofil der Linien überlagert sich i.a. noch eine Lorentzkomponente, bedingt durch den Stark-Effekt oder auch einfache

kinematische Stöße zwischen den ionisierten Atomen. Es steht außer Frage, dass angesichts dieser Größenverhältnisse eine spektrale Trennschärfe von 10^3 selbst die Bestimmung der Äquivalenzbreiten zum Problem werden lassen dürfte. Andererseits herrscht bis dato weitgehende Unklarheit darüber, welche Längenskalen im Röntgenbereich innerhalb eines SNR von physikalischer Relevanz sind, d.h. insbesondere welcher Grad an Inhomogenität in der Materie- und Strahlungsverteilung vorliegt. Immerhin zeigen Hubble-Aufnahmen der SN 1987A weitaus mehr Details als die korrespondierenden Beobachtungen Chandras (vgl. Abb. 7.12). Zudem dürften sich reale Beobachtungen junger SNR im Vergleich mit heutigen [77] und künftigen Simulationen als besonders wertvoll erweisen, um die theoretisch nach wie vor ungelöste Frage nach dem Explosionsmechanismus zu lösen.

Will man also die durch eine hohe Winkelauflösung sich bietende Chance zum Studium der ortsabhängigen SNR-Dynamik nutzen, so empfiehlt sich, um wieder auf den ursprünglichen Punkt zurückzukommen, eine spektrale Auflösung $\frac{E}{\Delta E} \sim 10^4$.

7.4 Röntgendoppelsterne, AGN und γ -Blitze

Kaum eine andere Objektklasse übt – im doppelten Sinn – eine ähnliche Anziehungskraft aus wie die der Schwarzen Löcher. So widmet ihnen die NASA in Gestalt der „MAXIM“-Mission ein eigenes Projekt, das vermöge einer Abbildung des Schwarzschild-Radius R_S den direkten Nachweis ihrer Existenz erbringen soll. Wir beschränken uns auf die Analyse der bis heute weitgehend unverstandenen Prozesse der Energieumwandlung in ihrer näheren Umgebung. Für die intuitive Vermutung, die in Röntgendoppelsternen wirksamen Mechanismen der Akkretion und des kollimierten Materieausstoßes stellten in vielerlei Hinsicht nur eine miniaturisierte Version der Aktiven Galaxienkerne dar, existieren mittlerweile gesicherte Belege [85]. Wir behandeln daher die beiden Phänomene weitgehend simultan. Gammablitze, soweit sie auf Hypernova-Ereignissen beruhen, sollen vorläufig außen vor bleiben, da sie sich trotz ähnlicher Funktionsweise in ihren zeitlichen und räumlichen Skalen wesentlich von den beiden erst genannten unterscheiden. Sie werden an geeigneter Stelle in einem anderen Kontext Erwähnung finden.

Abb. 7.13 illustriert also nun die relevanten Abmessungen der „kosmischen Staubsauger“, wie sie von den Autoren von [85] tituliert wurden. Entsprechend den Erwartungen aus der Skaleninvarianz-Hypothese folgen tatsächlich alle wesentlichen Dimensionen zumindest näherungsweise einfachen Funktionen von R_S . Angesichts dieser Universalität mag man daher darauf spekulieren, durch kombinierte Beobachtungen der wegen dieser Analogie auch als Mikro-Quasare bezeichneten Röntgendoppelsterne und aktiver Galaxienkerne (AGN) die Funktionsweise der „Quasar-Maschine“ zu entschlüsseln. Generell gilt die Faustregel, wonach Mikro-Quasare zum Studium zeitabhängiger Phänomene wie der Kopplung zwischen Akkretion und Materieausstrom in Form von Jets oder deren dynamischer Entwicklung prädestiniert sind; Quasare gewähren dagegen besseren Zugang zur Umgebung der Akkretionsscheiben und den Regionen, in denen sich die Jets formieren [78, 79]. Die Ursachen für diese unterschiedliche Prioritätensetzung liegen zum einen in der charakteristischen Variabilitäts-Zeitskala $\tau \propto \frac{R_S}{c}$ und zum anderen im ebenfalls zu R_S proportionalen Radius

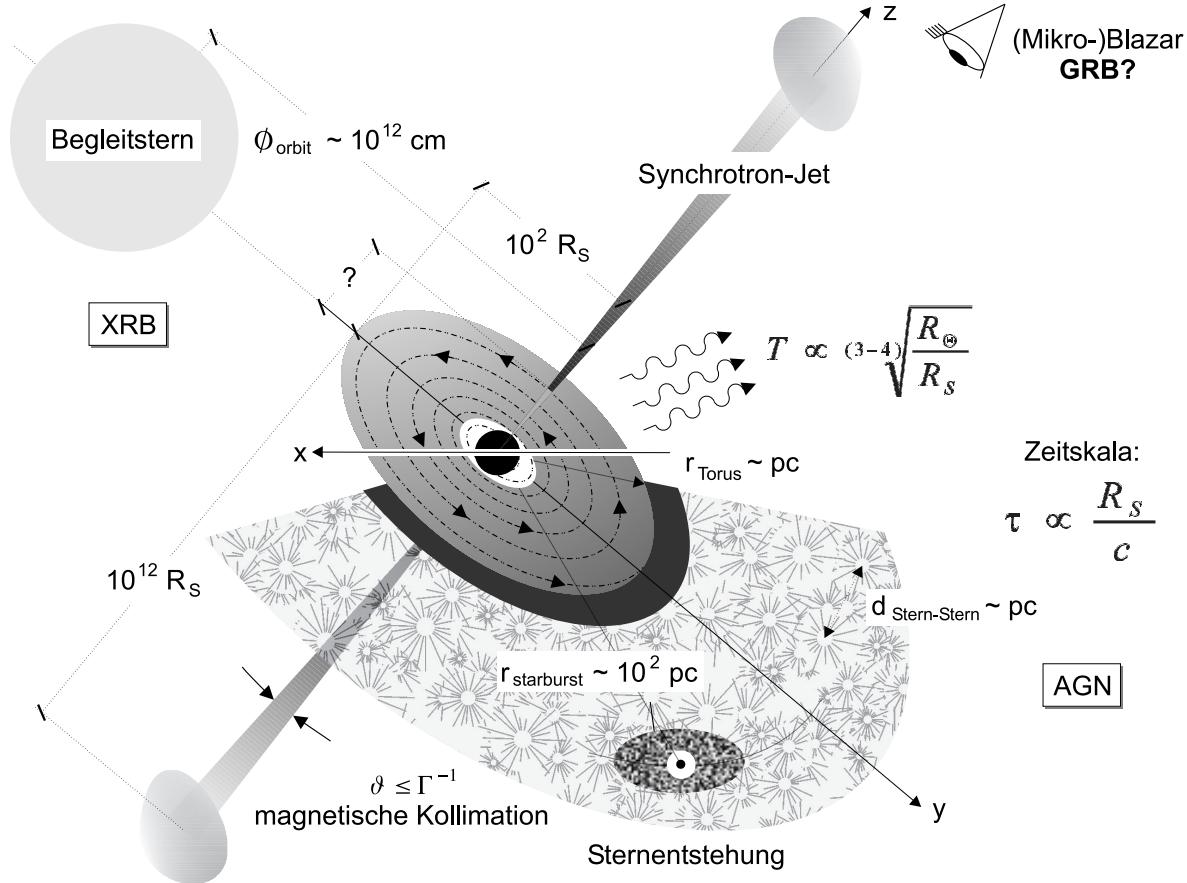


Abbildung 7.13: Vereinheitlichtes Modell aktiver Schwarzer Löcher, bestehend aus Akkretionsscheibe und – senkrecht dazu – kollimierten relativistischen Materie- und Strahlungsausflüssen. Abgesehen von peripheren, vom Begleitstern bei Röntgendifoppelsternen bzw. der Muttergalaxie im Fall aktiver Galaxienkerne abhängigen Eigenschaften unterliegen die physikalischen Abläufe einer Skaleninvarianz bzgl. des Schwarzschildradius R_S .

der Akkretionsscheibe, der gemeinhin zu $\sim 10^2$ bis maximal $10^3 R_S$ angenommen wird. Nun unterscheiden sich die Massen der jeweiligen Schwarzen Löcher um einen typischen Faktor $10^5 - 10^7$. In stellaren Systemen laufen daher Prozesse innerhalb von Sekunden bis Stunden ab, die sich in galaktischen über Jahre erstrecken können [79]. Vergegenwärtigt man sich hingegen die für die scheinbaren Abmessungen wesentliche Größe $\frac{R_S}{d}$ mit der Entfernung d , so liegen nach Abb. 7.2 die Winkeldurchmesser der Akkretionsscheiben von AGN unter Annahme eines hundertfachen Schwarzschildradius bei $(0.1 \pm 0.25) \times 10^{-3}$ arcsec und damit immerhin um 4 Größenordnungen über den entsprechenden Dimensionen stellarer Systeme in der Galaxis. An dieser Stelle lohnt ein Blick auf die (Mikro-)Quasaren eigene Variabilität. Über die Bedingung der kausalen Verknüpfung emittierender Gebiete außerhalb des Ereignishorizonts findet man

$$\tau \gtrsim 2\pi \frac{R_S}{c} \quad (7.15)$$

als untere Grenze für die möglichen Zeitskalen. Ein supermassives Schwarzes Loch von $10^7 M_\odot$ lässt demzufolge Schwankungen der Leuchtkraft seiner Akkretionsscheibe bis zu Frequenzen von $2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ erwarten. Nun wurden mitunter (z.B. in den Galaxien MCG-30-15 und NGC 4051) verschiedene Variabilitäts-Zeitskalen im weichen und harten Röntgenband gemessen, ein Umstand, der mit der mutmaßlich radienabhängigen Temperaturverteilung in der Akkretionsscheibe zusammenhängt und die höchsten Frequenzen nahe R_S vermuten lässt [80].

Hinterlassen diese Fluktuationen Spuren in den Jets, und wenn ja, in welcher Weise? Messungen am Röntgendifoppelstern GRS 1915+105 und dem Quasar 3C 120 [79] legen den Schluss nahe, dass Materiezustrom und -abfluss nicht etwa kontinuierlich, sondern in periodischen Schüben von $\sim 20 \text{ min}$ bzw. Jahren erfolgen. Eine gleichzeitige Analyse der Jets tut also Not, die umso aufschlussreicher sein sollte, je näher diese am Ursprung der Ausflüsse stattfindet. Beziiglich dessen herrscht noch weitgehende Unklarheit, in [79] werden $(30 - 100)R_S$ angegeben. Fest steht jedenfalls, dass die Kollimation wesentlich auf magnetischem Weg erfolgt und das Strahlungsspektrum – neben möglichen baryonischen, thermischen Beiträgen – einem Synchrotron-Kontinuum der Form $F_\nu \propto \nu^{-\alpha}$ folgt. Die hohe Beschleunigung bedingt enge Öffnungswinkel $\theta_{jet} \sim \Gamma^{-1}$ [81]. In den stationären Ausflüssen der (Mikro-)Quasare treten Lorentzfaktoren $\Gamma \lesssim 10$ auf, während die ultrarelativistischen Jets der γ -Bursts bis zu $\Gamma \sim 100$ erreichen können. Aus Abb. 7.13 sind die typischen Längen solcher Jets zu entnehmen. Wiederum eine Winkelschärfe von 10^{-3} arcsec angenommen, ergibt eine kurze Überschlagsrechnung für die Auflösungsgrenze in Einheiten der jeweiligen Schwarzschildradien $\log\left(\frac{r}{R_S}\right) \sim 8 \pm 1$ im Fall stellarer und $\log\left(\frac{r}{R_S}\right) \sim 5 \pm 2.5$ bei galaktischen Schwarzen Löchern. Die Längenskalen, auf denen die Jets auch in ihrer lateralen Ausdehnung, also ihre Durchmesser aufgelöst werden können, liegen dem entsprechend bis zu einer Größenordnung darüber. Es sei noch angemerkt, dass wegen der Synchrotron-Charakteristik eine Kombination mit VLBI-Beobachtungen lohnend erscheint. Tab. 7.1 gibt einen Überblick zu einigen besonders interessanten Objekten.

Name	Typ	d (kpc)	$m (M_\odot)$	$\log L_x (\frac{\text{erg}}{\text{s}})$	P (d) / i	Bemerkungen
Cyg X-1	XRB _{BH}	2.5	≥ 10	37.3	5.6	ms-Variab.
SS 433	XRB _{BH}	5	16 ± 4	35.5	14	präzed. Jets
Cir X-1	XRB _{NS}	6.1	$\simeq 1.4$	37	17	period. Akkret.
Cen A	AGN _{E0}	$3.4 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^8$	39.3	70°	nächster AGN
M 87	AGN _{E1}	$18 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^9$	43.5	35°	bestes R_s/d
NGC 4261	AGN _{E2}	$31 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^9$	41	64°	großer Torus

Tabelle 7.1: Bekannte Röntgendifoppelsterne und AGN mit Materieausstrom, die besonders für räumlich hochauflösende Beobachtungen geeignet sind. Die Entfernungswerte d beruhen auf $H_0 = 71 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, m beschreibt die Masse des kompakten Objektes, während P die Orbitalperiode in Tagen und i die Inklination angibt.

Die angegebenen Leuchtkräfte liegen übrigens mit Ausnahme von Cen A innerhalb der für die beiden Klassen typischen Grenzen von $10^{33} \text{ erg s}^{-1} \leq L_{x, \text{bin}} \leq 10^{38} \text{ erg s}^{-1}$ bzw. $L_{x, \text{gal}} \geq 10^{41} \text{ erg s}^{-1}$ [82]. Seit rund 15 Jahren sind auch Objekte mit Röntgenleuchtkräften zwischen 10^{39} und $10^{41} \text{ erg s}^{-1}$ bekannt, die gemeinhin engl. als „ultraluminous X-ray sources“ (ULX) bezeichnet werden. Seitdem wird über die Natur, d.h. Masse des diese Luminosität erzeugenden Schwarzen Lochs gerätselt. Zur Diskussion stehen evtl. annähernd isotrop emittierende Schwarze Löcher von $(10^2 - 10^3) M_{\odot}$ und kollimierte (Blazar-ähnliche) Emission gewöhnlicher Röntgen-Doppelsterne. Chandras Leistungsvermögen reicht lediglich aus, in einer 10 Mpc entfernten Galaxie eine physikalische Länge von 20 pc aufzulösen und damit in den meisten Fällen die ULX vom zentralen Schwarzen Loch zu unterscheiden. Eventuelle Jets, geschweige denn ihre Struktur lassen sich hingegen nicht mehr erkennen. Von einer Verbesserung um 3 Größenordnungen sind diesbezüglich neue Erkenntnisse zu erwarten, die dem oben Gesagten zufolge Aufschluss über die Natur ihres Erzeugers geben können. Ferner dürften die Massen der ULX mit der Art ihrer Umgebung korreliert sein. So treten die in ihrer Entstehung ohnehin schwer zu erklärenden mittelschweren Schwarzen Löcher häufig in jungen wie alten (Kugel-)Sternhaufen auf [83]. Hier könnten sich interessante statistische Fragestellungen ergeben, finden sich in den alten Kugelsternhaufen doch auch zahlreiche Röntgendoppelsterne niedriger Masse (low mass X-ray binaries, LMXB). ULX werden aber auch in Sternentstehungsregionen gefunden, die wiederum bevorzugte Geburtsstätten von Doppelsternen relativ hoher Masse (high mass X-ray binaries, HMXB) mit $M_{BH} \geq 10 M_{\odot}$ sind.

Im Rahmen der höchstaflösenden Röntgenastronomie sollte es somit möglich werden, die einzelnen Röntgenquellen auch in fernen Galaxien nachzuweisen und voneinander zu trennen. Schließlich sind die Leuchtkräfte wenigstens der helleren Röntgendoppelsterne und der ULX denen der oben besprochenen jungen SNR vergleichbar und auf einer Längenskala von wegen ihres relativ zur normalen Sternpopulation seltenen Auftretens meist vielen pc voneinander separiert.

Eine Korrelation in der Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens mit der stellaren Umgebung wird inzwischen auch im Fall der γ -Bursts vermutet, zumindest solange diese einer Hypernova entstammen. An dieser Stelle erinnere man sich an die relativistische Winkeldistanz (Abb. 7.1), die – ausreichenden Fluss vorausgesetzt – eine Mindestauflösung von $< 10 \text{ pc}$ gewährleistet. Es liegt daher im Bereich des Möglichen, γ -Bursts in ihr Umfeld einzurordnen, das nach dem Kollapsar-Modell massereicher Sterne wiederum mit Sternentstehungs-Regionen assoziiert sein dürfte. Betreffend den Röntgen-Lichtkurven der Afterglows ist zu sagen, dass diese gemäß einem Potenzgesetz $f_x(t) \propto t^{-\alpha}$ abfallen [84]. Von BeppoSAX registrierte Afterglows variierten in ihrer Helligkeit zwischen $5 \times 10^4 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ unmittelbar nach dem γ -Blitz und $5 \times 10^{-2} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ nach rund $5 \times 10^5 \text{ s}$ [84]. Die Daten lassen im Mittel auf $\alpha \approx 1.3$ schließen. Leider geben die physikalischen Größen der Afterglows keinen Anlass zur Hoffnung, diese aufzulösen. Indirekte Messungen mit Hilfe der Radio-Szintillation weisen auf Durchmesser von ca. 10^{16} cm oder $3 \times 10^{-3} \text{ pc}$ nach einem Tag hin. Gleichwohl erscheint es reizvoll, die enorme Leuchtkraft im Maximum auszunutzen, evtl. hoch rotverschobene γ -Bursts mit $z > 10$ dann statt im Gamma- im Röntgenband zu detektieren und ihre Muttergalaxien mit unerreichter Präzision zu identifizieren.

Zum Abschluss soll aus aktuellem Anlass auf das Problem der verschmelzenden supermassiven Schwarzen Löcher eingegangen werden. Im Jahr 2002 wurden erstmals zwei dieser Objekte im Abstand von nur 10^3 pc im Zentralbereich der Galaxie NGC 6240 nachgewiesen [86]. Nach etlichen 10^8 Jahren wird es zur Verschmelzung (engl. merging) kommen, unter Aussendung von Gravitationswellen. Nach eben diesen wird aber in naher Zukunft durch Instrumente wie LISA intensiv gefahndet werden.

Nun ist es keineswegs sicher, wie viele dieser Ereignisse innerhalb einer Betriebsdauer von vielleicht 10 – 20 Jahren überhaupt zu detektieren sind. Vage Schätzungen gehen von ein paar Ereignissen pro Jahr aus. Überraschenderweise wurden bereits vor 25 Jahren quantitative Überlegungen aufgestellt [87], deren Resultate in Abb. 7.14 grafisch aufbereitet sind. Eingeläutet wird der Prozess demnach von einem durch Reibung im „stellaren

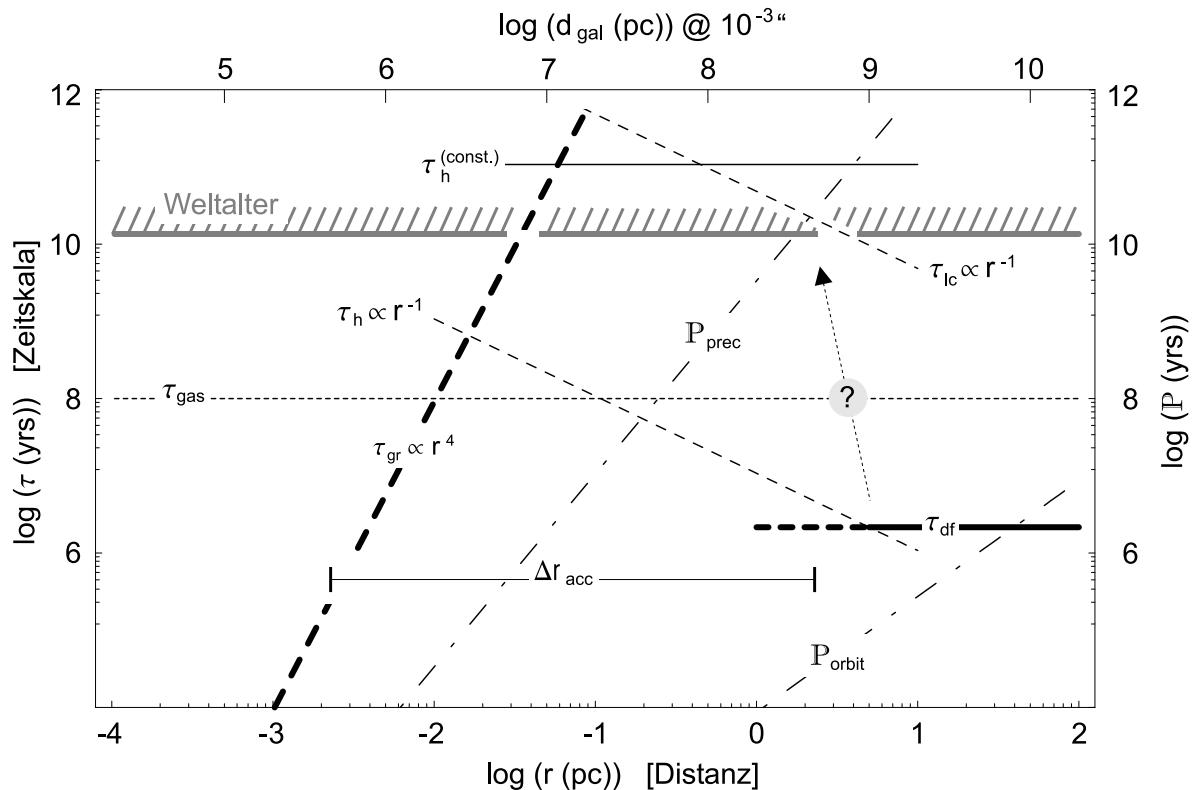


Abbildung 7.14: *Dynamik verschmelzender (super-)massiver schwarzer Löcher am Beispiel einer typischen elliptischen Galaxie mit Massen von 10^8 und $3 \times 10^7 M_\odot$. Als Funktion des auf der unteren Abszisse aufgetragenen Kernabstandes r sind charakteristische Zeitskalen τ_i für die verschiedenen Phasen der Verschmelzung dargestellt (linke Ordinate). Aufgrund des Verlaufs von $\tau(r)$ ist eine Häufung von Doppelkernen etwa im Intervall Δ_{acc} mit Relativabständen zwischen 10^{16} und 10^{19} cm zu erwarten. Je nach Entfernung können solche Binärsysteme bei einer Auflösung von 10^{-3} arcsec identifiziert werden (obere Abszisse). Zusätzlich enthält die Grafik zwei indirekt mittels kollimierter Materieausflüsse (Jets) messbare Perioden \mathbb{P}_{prec} und \mathbb{P}_{orbit} (rechte Ordinate). Weitere Erläuterungen siehe Text.*

Gas“ dominierten Relaxationsvorgang („dynamical friction“) auf einer Zeitskala τ_{df} , der die beiden zunächst ungebundenen Schwarzen Löcher einander bis auf wenige pc „näher bringt“, bis sie sich gravitativ umkreisen und durch weitere, in ihren Details und den entsprechenden Zeitskalen sehr spekulative Wechselwirkung mit den umgebenden Sternen in immer engeren Kontakt gelangen. Zusätzlich zu diesen stellaren Einflüssen kann es zum Ausstoß oder wie im Fall von NGC 6240 zur Akkretion von Gas kommen, einhergehend mit Massenverlust oder -zunahme. Die zugehörige Zeitskala τ_{gas} liegt bei ca. 10^8 Jahren. Erst bei Abständen $r \lesssim 10^{-1}$ pc beginnt das binäre Schwarze Loch Gravitationswellen abzustrahlen, unter relativ rascher Annäherung auf Skalen τ_{grav} . Es sei noch einmal betont, dass die hier grob skizzierten Modellvorstellungen nur einige der möglichen Szenarien beschreiben und letztlich durch Beobachtungen zu verifizieren oder falsifizieren sein werden.

Offensichtlich stellen diese Zeitskalen $\tau(r)$ ein Maß für die Wahrscheinlichkeit dar, binäre schwarze Löcher in einem gegebenen Zustand r anzutreffen. Um definitive Aussagen über den tatsächlichen Ablauf des merging-Vorgangs treffen zu können, bedarf es also einer statistisch signifikanten Zahl vermessener Doppelkerne. Im Rahmen unserer Standard-Auflösung von 10^{-3} arcsec führt dies zu noch trennbaren Abständen der Punktquellen von $r \sim 10^{-1}$ pc in Entferungen von 10 Mpc. Näher gelegene Galaxien lassen theoretisch gar Messungen bis in den Wirkungsbereich der Gravitationswellen-Dynamik zu. Freilich werden solche engen Systeme angesichts der aus Abb. 7.14 hervorgehenden geringen Wahrscheinlichkeit und der relativen Seltenheit naher Galaxien nicht häufig anzutreffen sein. Fest steht jedoch allemal, dass anders als mit Chandra erstmals Galaxien im großen Umfang auf künftige Verschmelzungsprozesse hin durchmustert werden können, und dies für Distanzen r , auf denen wie gesagt die Natur der Wechselwirkung und Kontraktion noch nicht bekannt ist.

Doch damit nicht genug: Die Eigenart vieler supermassiver Schwarzer Löcher, längs ihrer Spin-Achse relativistische Jets auszusenden, eröffnet eine weitere Möglichkeit, sich umkreisende Massezentren zu analysieren. Geschieht dies nämlich mit einer Periode

$$P_{\text{orb}} \propto r^{3/2} M^{-1/2}, \quad (7.16)$$

so wird der Jet (i.d.R. derjenige des massiveren schwarzen Lochs) nahe seines Ursprungs ebenfalls Verkrümmungen aufweisen. Im Idealfall lassen sich zusammen mit der gemessenen Expansionsgeschwindigkeit des Jets und dem Abstand r Rückschlüsse auf die Umlaufperiode und die beteiligten Massen ziehen. Einen besseren Zugang zu diesen wichtigen Kenngrößen wird jedoch die häufig anzutreffende Präzession der Jets bieten. Nach

$$P_{\text{prec}} \propto r^{5/2} \frac{M}{m} M^{-3/2} \quad (7.17)$$

hängt die diesbezügliche Periode des massereicheren Partners vom Verhältnis der Komponenten ab. Andererseits lässt sie sich aus den geometrischen Kenngrößen der deformierten Jets mit typischen Winkelskalen im Sub-Bogensekunden-Bereich ermitteln. Entsprechende Graphen sind ebenfalls in Abb. 7.14 eingetragen.

Untersuchungen dieser Art können somit die Vorhersage von Gravitationswellen-Ereignissen nicht nur in ihrer statistischen Häufigkeit, sondern über die Untersuchung der dynamischen Entwicklung künftiger „mergers“ auch in ihrer Struktur unterstützen.

Kapitel 8

Erste experimentelle Schritte

Ersten praktischen Tests der im Verlauf dieser Arbeit entwickelten Konfigurationen stehen a priori die großen Abmessungen, insbesondere der Brennweite, entgegen. Zudem bedarf es aufgrund der Absorption durch Luft einer hoch evakuierten Versuchsumgebung. Mit der „PANTER“-Anlage verfügt die Max-Planck-Gesellschaft jedoch über eine vergleichsweise große Röntgen-Testeinrichtung, die bislang vorwiegend zur Kalibration diverser Spiegelteleskope und Detektoreinheiten verwandt wird. Es liegt daher nahe, teleskopische Modelle auf Skalen zu transformieren, die der Nutzlänge der Testanlage entsprechen. Abb. 8.1 skizziert ihre wesentlichen Dimensionen. Im konventionellen Betrieb dient das 125 m lange

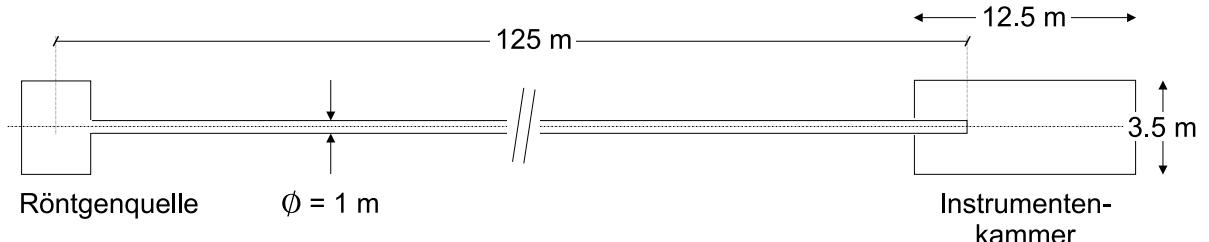


Abbildung 8.1: Abmessungen der PANTER-Testanlage. Zur experimentellen Erprobung langbrennweiter Röntgenoptik gestattet die Einrichtung unter Verwendung des Strahlrohres eine Nutzlänge von maximal ≈ 130 m.

Strahlrohr dazu, die künstliche Röntgenquelle aus Sicht des zu testenden, kurzbrennweiten Spiegelteleskops in der Instrumentenkammer näherungsweise punktförmig erscheinen zu lassen und so beispielsweise einen fernen Stern zu simulieren. Um die Gesamtlänge von bis zu 130 m zur Erprobung transmissiver Röntgenoptik nutzen zu können, muß die relativ kleine Quellenkammer evtl. derart modifiziert werden, dass sie zusätzlich das zu untersuchende Teleskopmodell aufnehmen kann. Die Instrumentenkammer übernimmt dann lediglich die die fokale Intensitätsverteilung analysierende Messeinrichtung.

Als Röntgenquellen stehen diverse Anoden zur Verfügung, die nach gegenwärtiger Be- stückung im Energiebereich $0.3 \text{ keV} \leq E \leq 8.1 \text{ keV}$ zahlreiche Fluoreszenzlinien erzeugen [90]. Ihre äußerst geringe, natürliche Linienbreite lässt sie vor allem in Verbindung mit

diffraktiver Optik als geeignete Teststrahlung erscheinen – unter der Voraussetzung ausreichender Unterdrückung des benachbarten Brems-Kontinuums. Letzteres dürfte indes den Abbildungseigenschaften dispersionskorrigierter Versionen entgegen kommen.

8.1 Diffraktive und refraktive Miniaturlinsen

Ausgehend von den Abmessungen der PANTER-Anlage orientiert sich das Design eines Versuchsaufbaus notwendigerweise an der beschränkten Fokaldistanz, die im folgenden zu

$$F = 120 \text{ m} \quad (8.1)$$

angenommen wird. Die konstruktiven Eckdaten eines ausschließlich diffraktiven Objektivs ergeben sich im wesentlichen aus der Basisgleichung 2.25. Bzgl. der Wahl des Radius R und der Zonenzahl N besteht im Rahmen des fertigungstechnisch Machbaren weitgehende Freiheit, da der kollimierte Kathodenstrahl der Röntgenquelle im Regelfall nur einen Teil der Apertur ausleuchten dürfte. Als Beispiel seien angegeben:

$$E_c = 6 \text{ keV} \quad \text{sowie} \quad N = 5 \times 10^2 \quad \rightarrow \quad R \approx 3.5 \text{ mm.} \quad (8.2)$$

Ausgelegt als maximal reduzierte Fresnel-Linse, misst der äußere Ring noch $\approx 7 \mu\text{m}$, entsprechend einer lateralen Auflösung von rund $4 \mu\text{m}$. Konform mit den die praktische Realisierung eines großflächigen Fresnel-Teleskops beschränkenden technologischen Möglichkeiten erscheint es naheliegend, das kinoforme Profil durch 4 oder mehr Stufen zu approximieren. Die Strukturen bis herab zu Skalen von $\sim 1 \mu\text{m}$ sind modernen Herstellungsmethoden wie der Elektronenstrahllithographie oder dem Ätzverfahren zugänglich, wobei deren Wahl sich nach dem verwendeten Material richtet. Speziell bietet Polycarbonat ($\text{C}_{16}\text{H}_{14}\text{O}_3$) die Möglichkeit, Fresnel-Profil und Substrat homogen zu fertigen. Mit der 2π -Dicke

$$t_{2\pi} = \frac{\lambda_c}{\delta(\lambda_c)} = 28.2 \mu\text{m} \quad (8.3)$$

errechnen sich bei $E_c = 6 \text{ keV}$ je nach Substratdicke Transmissionswerte nach Tab. 8.1. Offenbar gestatten selbst Foliendicken von $\sim 10^2 \mu\text{m}$ noch eine Effizienz von einigen 10%.

$t_{sub} / t_{2\pi}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathcal{T} (\%)$	93.5	89.3	85.4	81.6	78.0	74.6	71.3	68.1	65.1	62.2

Tabelle 8.1: *Transmission von Fresnel-Linsen aus Polycarbonat bei 6 keV. Die Dicke t_{sub} der Stützschicht ist in Einheiten der 2π -Dicke angegeben, die Transmission \mathcal{T} in %.*

Während also diffraktive Linsen den experimentellen Bedürfnissen entsprechend relativ frei zu gestalten sind, erlegen Absorption und Krümmungsradius den Parametern eines Hybridsystems enge Grenzen auf. Bezeichnet nämlich zunächst $\mathcal{A} \equiv \frac{t_{max}}{2R}$ das Aspektverhältnis aus maximaler refraktiver Linsendicke und dem Durchmesser $2R$, so ergibt sich

$$R = 4\delta(E_c) F \mathcal{A}. \quad (8.4)$$

Aufgrund der geringen Brechkräfte $\delta(E)$ im Röntgenspektrum gestattet Gl. 8.4 somit nur Durchmesser von allenfalls wenigen mm, zumal unter Verzicht auf serielle Linsensysteme („compound refractive lenses“, CRL) ein Aspektquotient $\mathcal{A} \sim 1$ bereits als grenzwertig zu betrachten ist. Das Beispiel einer bikonvexen und damit aberrationsfreien Li-Linse soll den Sachverhalt verdeutlichen,

$$E_c = 5 \text{ keV} \quad \text{sowie} \quad R \approx 1.8 \text{ mm} \quad \rightarrow \quad N = 228. \quad (8.5)$$

Im Übergang zu niedrigeren Werten von E_c ergeben sich größere Radien $R \propto E^{-2}$ und Zonenzahlen N , um den Preis verminderter Transmission, die bei $E_c = 5 \text{ keV}$ mindestens 77% beträgt. In Anbetracht der zusätzlichen Absorption durch die diffraktive Komponente – deren Konstruktionsparameter nun den refraktiven Vorgaben anzupassen sind – wurde jedoch $E_c = 5 \text{ keV}$ zugrunde gelegt.

Alternativ bietet sich eine aus Beryllium (Be) gefertigte Korrekturlinse an. Die physikalisch sinnvollen und möglichen Parametersätze unterscheiden sich aufgrund der relativ schlechten Werte für N_0 quantitativ von jenen der Li-Version. Ein Sprung ins harte Röntgenband erweist sich als sinnvoll, um Bildqualität und Transmission zu erhalten. Mit

$$E_c = 12 \text{ keV} \quad \text{sowie} \quad R \approx 1.1 \text{ mm} \quad \rightarrow \quad N = 208 \quad (8.6)$$

sind exemplarische Werte einer mit $\mathcal{T}(E_c) = 85\%$ hochtransmissiven Linse angegeben, die sich mit einer aufgeprägten, ebenfalls aus Be bestehenden diffraktiven Komplementärkomponente als Achromat einsetzen lässt. Separat gefertigte Komponenten erlauben hingegen den Test einer durchstimmmbaren, dialytischen Optik. Zumindest die refraktive Korrekturlinse des eben genannten Beispiels weist in dritter Ordnung bzgl. E , also bei $\frac{4}{9}E_c$ noch immer eine Mindesttransmission von 23% auf, so dass diese spezielle Eigenschaft der separierten Konfiguration ebenfalls experimentell zugänglich sein sollte.

Ungeachtet der prinzipiellen Möglichkeit, derlei optische Modelle zu realisieren, werfen die geringen Linsendurchmesser doch Fragen hinsichtlich der praktischen Handhabbarkeit im Laborbetrieb auf. Sorgfältiger Fassung in justierbaren Rahmen bedarf es daher nicht nur bzgl. der korrekten axialen Ausrichtung der Komponenten, sondern auch in Anbetracht ihrer mechanischen Fragilität.

8.2 Segmentierung im visuellen Spektralbereich

Um das Problem der Subminiatur-Optik beim Test einiger der in dieser Arbeit entwickelten Konzepte zu umgehen, erscheint eine Skalentransformation ins visuelle Frequenzspektrum naheliegend. Ausgehend von der Basisgleichung diffraktiver Linsen ergibt nämlich eine Abschätzung unmittelbar

$$R = \sqrt{N\lambda F} \quad \rightarrow F(\lambda_{vis}) \sim 10^{-3}F(\lambda_x), \quad (8.7)$$

wenn $F(\lambda_{vis})$ die typische Brennweite im Visuellen und $F(\lambda_x)$ das Analogon im Röntgenband weniger keV unter sonst gleichen Bedingungen wie Aperturradius R und Zonenzahl N

misst. In anderer Weise transformiert sich das refraktive Verhalten im Material. So erweist sich die 2π -Phasendicke

$$t_{2\pi} = \left| \frac{\lambda}{n-1} \right| \rightarrow t_{2\pi}(\lambda_{vis}) \sim t_{2\pi}(\lambda_x) \quad (8.8)$$

in grober Näherung als invariant, wenn dem Brechungsindex im Visuellen ein Wert von $n_{vis} \approx 1.5$ zugestanden und im Röntgenband exemplarisch $\delta \sim 10^{-4}$ zugrunde gelegt wird. Als Profil- und Substratmaterial der im folgenden zu entwickelnden Fresnel-Linse soll daher und wegen seiner vorteilhaften optischen und mechanischen Eigenschaften erneut Polycarbonat Anwendung finden. Im Visuellen weist der Kunststoff einen mittleren, nur schwach dispersiven Brechungsindex von 1.586 bei vernachlässigbarer Absorption auf, so dass die sich typischerweise in μm messenden Profilstrukturen auf einer ausreichend stabilen, freitragenden Trägerschicht aufgebracht werden können.

Anhand eines einfachen Modells soll das Prinzip des Multiband-Objektivs, wie es in Kap. 5 entwickelt wurde, demonstriert und getestet werden. Angesichts des spektral vergleichsweise schmalen visuellen Fensters mit Wellenlängen zwischen 400 und 750 nm bleiben auch die simultan zu fokussierenden Energiewerte auf das Intervall $E_0 \lesssim E \lesssim 1.9 E_0$ beschränkt. Mit abnehmendem (relativem) Abstand der beiden Frequenzbänder bedarf es nach Kap. 5 jedoch i.a. einer entsprechend erweiterten Zentrallobstruktur, um die Streustrahlung in der Fokalebene abzuschirmen. Als Kompromiss werden im hier beschriebenen Beispiel die beiden Werte E_0 und $\frac{3}{2}E_0$ gewählt, die sich mittels eines durchstimmbaren Farbstoff-Lasers o.ä. einstellen lassen. Den beiden Frequenzen entsprechen

$$r_{min}(E_0) = 6 r_{FOV} \quad \text{und} \quad r_{min}\left(\frac{3}{2}E_0\right) = 4 r_{FOV} \quad (8.9)$$

als untere Schranken an die jeweiligen, in Einheiten des Detektor-Radius r_{FOV} gemessenen Obstruktionsradien. In möglichst „vorbildähnlicher“ Ausführung wird das Objektiv in Segmente unterteilt, die, in T_N Ringen hinreichend zufällig angeordnet, eine inkohärente PSF in der Fokalebene gewährleisten. Es bietet sich an, die gesamte Apertur demselben Schema zu unterwerfen und konstante Zonenzahl N_* innerhalb eines spektralen Bandes zu fordern. Ferner stimmt dann die Sammelfläche der beiden ringförmigen Aperturkomponenten für E_0 und $\frac{3}{2}E_0$ im Fall identischer Ringzahlen überein. Mit

$$k_{r_{min}(\frac{3}{2}E_0)} = 4 \quad \text{und} \quad k_{r_{min}(E_0)} = 9 \quad \text{sowie} \quad T_N = k_R = 14 \quad (8.10)$$

ergeben sich die geforderten ganzzahligen Werte für die Ringnummern $1 \leq k \leq T_N$. Dem Radius der 3 zentralen Segmente ist demnach das Doppelte des als Bezugsgröße fungierenden Detektor-Radius zuzuschreiben,

$$r_0 = \sqrt{N_* \left(\frac{3}{2}E_0 \right) \cdot \lambda \left(\frac{3}{2}E_0 \right) \cdot F} = 2 r_{FOV}. \quad (8.11)$$

Schließlich errechnet sich der Radius R der gesamten Apertur unter vorstehenden Annahmen zu $R = 2\sqrt{14} r_{FOV}$. Abb. 8.2 illustriert die diversen Radien und ihre Bedeutung.

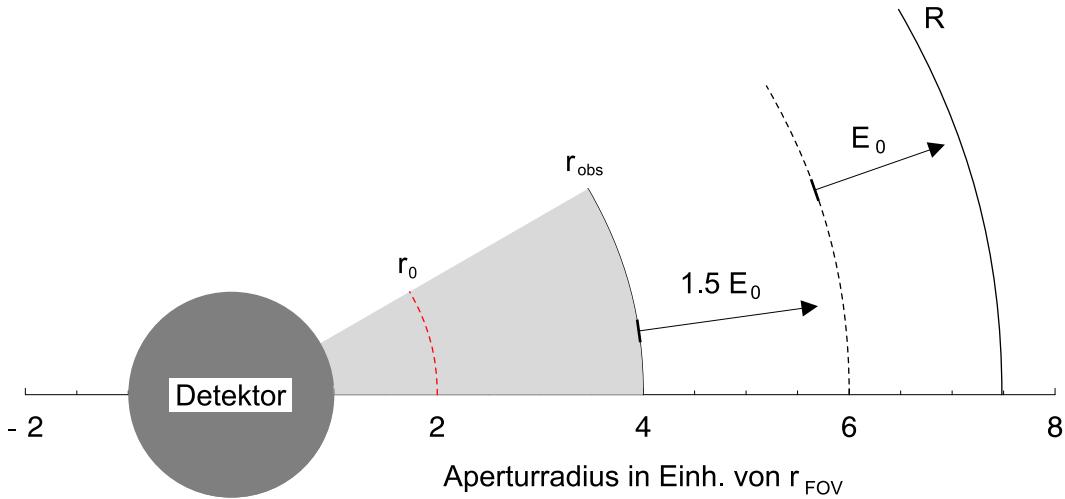


Abbildung 8.2: Konstruktion eines einfachen Multiband-Objektivs. Basierend auf den Ergebnissen aus Kap. 5, fokussiert dieses Modell simultan die Energiewerte E_0 und $\frac{3}{2}E_0$. Die in Einheiten des Detektorradius r_{FOV} gemessenen Mindestradien sind schwarz punktiert, ihre Basis r_0 wurde dagegen rot strichliert. Die Zentrallobstruktur ist hellgrau unterlegt.

Um die Zonenzahlen N_* für die beiden spektralen Bänder zu bestimmen, sind die Obstruktionsverhältnisse $a\left(\frac{3}{2}E_0\right)$ und $a(E_0)$ zu ermitteln. Man findet nach kurzer Rechnung

$$a(E_0) = \frac{3}{\sqrt{14}} \quad \text{und} \quad a\left(\frac{3}{2}E_0\right) = \frac{2}{3}. \quad (8.12)$$

Die gesuchten Zonenzahlen ergeben sich nun unter der Annahme von jeweils $n_{FOV} = 5 \times 10^2$ Auflösungselementen in der Fokalebene zu

$$N_*(E_0) \approx 2224 \quad \text{und} \quad N_*\left(\frac{3}{2}E_0\right) \approx 2990, \quad (8.13)$$

gerundet auf gerade Werte $\epsilon \mathbb{N}$. Da $N_* \propto n_{FOV}$, lassen sich die entsprechenden Zonenzahlen leicht an das gewünschte Gesichtsfeld anpassen. Zu guter Letzt seien zugunsten der Anschaulichkeit numerische Daten des optischen Systems angegeben. Wählt man willkürlich

$$\lambda(E_0) = 600 \text{ nm} \quad \text{und} \quad \lambda\left(\frac{3}{2}E_0\right) = 400 \text{ nm}, \quad (8.14)$$

so ergeben sich mit einer labortauglichen Brennweite $F = 5 \text{ m}$ für Apertur-Radius R , Detektorfläche $A_{FOV} = \pi r_{FOV}^2$ und laterales Auflösungselement \mathcal{O}_{PSF} zu

$$R = 0.25 \text{ m} \quad \text{und} \quad A_{FOV} = 34.9 \text{ cm}^2 \quad \text{sowie} \quad \mathcal{O}_{PSF} = 1.33 \times 10^{-4} \text{ m}. \quad (8.15)$$

Derlei Abmessungen sollten den Möglichkeiten des gängigen Labor-Instrumentariums nicht zuwider laufen; allenfalls sind fertigungstechnische Komplikationen bei der Anfertigung der

Fresnel-Linsen (für E_0 und $\frac{3}{2}E_0$) und ihrer Stückelung in Segmente zu erwarten. Da eine exakte Formgebung zum Erhalt der theoretisch möglichen Orts- und Winkelauflösung jedoch erforderlich ist, lässt sich anhand dieses Modells zugleich der Einfluss von Fertigungstoleranzen auf die Bildqualität diffraktiver Linsen untersuchen.

8.3 Aspekte der numerischen Simulation

Den Abschätzungen zu den Aberrationen 3. Ordnung der diversen diffraktiven und refraktiven optischen Komponenten lagen die Näherungen der geometrischen Optik zugrunde, angewandt auf homogene, axialsymmetrische Linsen. Die wesentliche analytische Erkenntnis nach der Notwendigkeit aplanatischer, technisch anspruchsvoller bikonvexer Profilfunktionen refraktiver Korrekturlinsen lässt sich indes nicht ohne weiteres auf segmentierte und / oder reduzierte Hybridkonfigurationen übertragen. Dies deshalb, weil im einen Fall die inkohärente Superposition der von fragmentarischen Parzellen der ursprünglich homogenen Apertur ausgehenden Amplitudenverteilungen ebenso eine generell erweiterte optische Fehlertoleranz erwarten lässt wie im anderen Fall das reduzierte Hybridprofil je nach Grad seiner Ausprägung den schrittweisen Übergang zur generell unkritischen diffraktiven Optik beschreibt.

Mithilfe geeigneter mathematisch-numerischer Methoden sollte daher die praktisch relevante Frage geklärt werden, welche Bedeutung der expliziten Profilfunktion solcher Linsen im Hinblick auf die Abbildungsqualität zukommt. Nachdem übliches „ray-tracing“ der Kopplung diffraktiver und refraktiver Beugungsstrukturen vermutlich kaum Rechnung tragen und damit allenfalls die Simulation der segmentierten Apertur gestatten dürfte, bedarf es zur Berechnung der Bildfehler semi-refraktiver, reduzierter, aber dennoch kohärenter Optik ggf. beugungstheoretischer Betrachtungen. Deren Grundidee, das Aberrationsfunktional Ψ nach Anh. A via eines Faktors $e^{-ik\Psi}$ in das Beugungsintegral Gl. 2.22 einzufügen, ist mitsamt seiner analytisch-numerischen Umsetzung z.B. in [13] beschrieben. Explizite Definition des Funktionalen Ψ und mathematische Auswertung der Winkelfehler gestalten sich vergleichsweise anspruchsvoll, zumal aufgrund der mehr oder weniger komplizierten Profilfunktionen reduzierter Hybridlinsen.

8.4 Permeation bei tiefen Temperaturen

Neben der selbst oder gerade unter Weltraumbedingungen schwierigen Kühlung des Wasserstoffs unter den – druckabhängigen – Siedepunkt von rund 20 K erweitert vor allem die Flüchtigkeit des leichtesten Elements den Satz der „unbekannten“ Variablen. Doch nicht nur im Kontext H₂-basierter Linsen ist der Permeation, wie die Diffusion von Partikeln durch Membranen hindurch genannt wird, besondere Aufmerksamkeit zu widmen; auch He-Atome unterliegen ihr – wenngleich in geringerem Maße. Im Fall hoher Temperaturen von mehreren 10² K empirisch vielfach untersucht, stehen für das Permeationsproblem im Bereich von wenigen 10 K nach Kenntnis des Verfassers keinerlei Daten zur Verfügung.

Theoretische Arbeiten [91, 92] decken zwar naturgemäß ein breites Temperaturspektrum ab, lassen jedoch ebenfalls keine verbindlichen Aussagen zum Durchtritt von H₂-Molekülen oder He-Atomen durch dünne Li-, Be- oder andere Fenster im Tieftemperatursektor zu. Grundsätzlich entspricht der Teilchenstrom durch die Membran der Konzentrationsänderung auf Seiten des „Reservoirs“, ein Umstand, dem im stationären Fall mit

$$\vec{j} = -D \vec{\nabla} \varrho_N \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial}{\partial t} (\varrho_N) + \nabla \vec{j} = 0 \quad (8.16)$$

das Fick'sche Gesetz (linke Gleichung) bzw. die Kontinuitätsgleichung (rechts) Rechnung tragen. Dabei steht \vec{j} für den Teilchenstrom, ϱ_N für die Teilchendichte auf Seiten des Reservoirs und D für die Diffusionskonstante. Im allgemeinen hängt D sowohl von thermodynamischen Parametern wie Temperatur und Druck als auch von der Teilchenkonzentration und natürlich den spezifischen Materialeigenschaften der Membran und deren Wechselwirkung mit dem diffundierenden Stoff ab. In der Bestimmung dieser komplexen funktionalen Abhängigkeit liegt die eigentliche experimentelle Aufgabe. Insbesondere dürfte die Frage von Interesse sein, inwieweit sich das Permeationsverhalten speziell des Wasserstoffs beim Übergang von der gasförmigen zur flüssigen Phase ändert.

Gewöhnlich geht die Permeation der Moleküle speziell durch metallische Fenster wie Li oder Be nämlich mit einer chemischen Reaktion zwischen H₂ und der Membran einher. So reagiert H₂ mit Li gemäß



wobei die Vorwärtsrichtung (\rightarrow) einen Energieaufwand von ≈ 2 eV erfordert, während der Zerfall des LiH-Salzes exotherm erfolgt [93]. Da bei 20 K die mittlere kinetische Energie der H₂-Moleküle nur $\frac{5}{2}k_B T \approx 4$ meV beträgt [93], sollte dieser naiven Betrachtung zufolge Reaktion 8.17 nicht auftreten. Andere Autoren [92] beschäftigen sich mit dem H₂-Transport in Be-Membranen, allerdings im Bereich von mehreren 10² K – dies auch und besonders vor dem Hintergrund der Bindungsenergie des H₂-Moleküls von 4.75 eV. Während ihr zufolge heiße Gase statistisch bereits zu einem beträchtlichen Teil atomar dissoziert und evtl. auch ionisiert sind, sollte der Wasserstoff im Bereich weniger 10 K fast ausschließlich molekular auftreten. Legt man den Boltzmann-Faktor als Maß für den Anteil n_{dis} der bei der Temperatur T dissozierten Moleküle mit der Bindungsenergie $E_B > 0$ zugrunde, gilt

$$n_{dis} \sim e^{-\frac{E_B}{k_B T}} \quad \rightarrow \quad 0 \quad \text{für} \quad \text{H}_2 \quad \text{bei} \quad T \sim 20 \text{ K.} \quad (8.18)$$

Die Permeation des einatomigen Edelgases He vollzieht sich hingegen unter gänzlich anderen Voraussetzungen. Da es keine Bindungen untereinander und mit dem Material der Membran eingeht, sollten Druck- und Temperaturabhängigkeit vergleichsweise einfachen Gesetzen folgen. Ferner wird die Permeationsrate durch atomare Radien und die Kristallstruktur des Metalls beeinflusst werden.

Angesichts des äußerst vagen Kenntnisstandes erscheint also eine empirische Analyse unumgänglich. Abb. 8.3 zeigt einen möglichen Versuchsaufbau. Als wesentliche Parameter gehen Gas- bzw. Flüssigkeitsvolumen V , dessen Temperatur T , Druck p und – sich

daraus ableitend – die Teilchenkonzentration ϱ_N ein. Die Fenster sind selbstverständlich hermetisch abzudichten, ihre Dicke Δx misst sich zwangsläufig in Einheiten weniger Absorptionslängen des jeweiligen Materials. Die Tab. 8.2 listet einige Werte auf. Man liest ab,

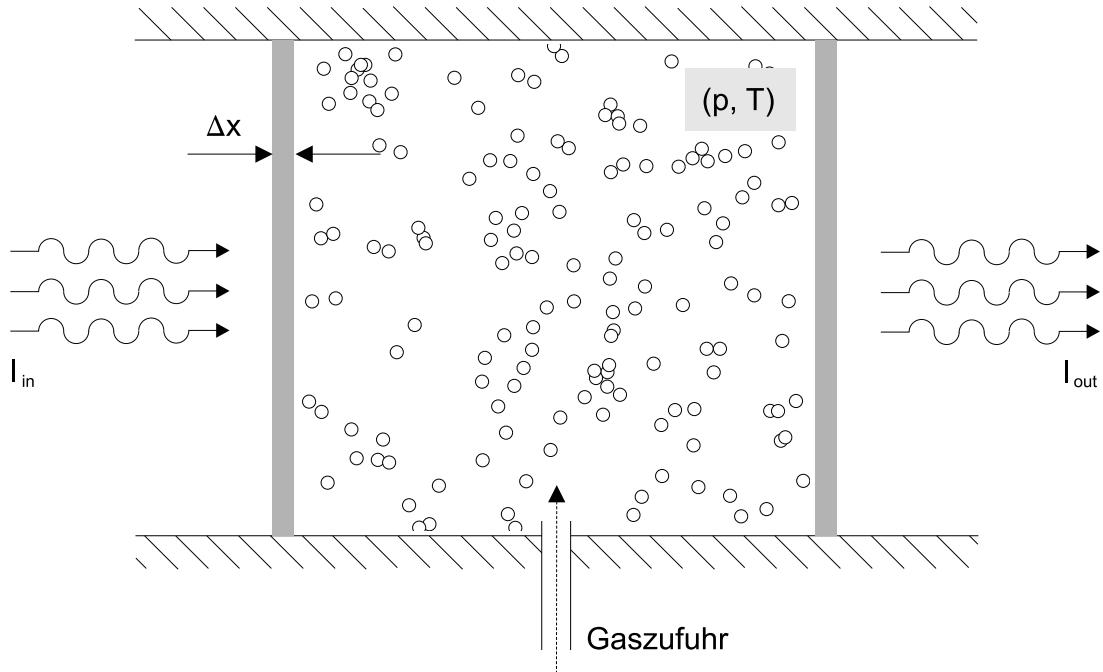


Abbildung 8.3: *Testaufbau zur Optik und Permeation kühler Gase. Die Fenster der Dicke Δx dichten die gas- bzw. flüssigkeitsgefüllte Kammer (Druck p und Temperatur T) ab. Zusätzlich zu den Permeationstests kann die Röntgen-Absorption gemessen werden.*

dass insbesondere die Dicke von aus Li gefertigten Fenstern ohne weiteres ~ 1 mm betragen darf. Doch auch die zumindest bei Raumtemperatur mechanisch wesentlich stabileren

E (keV)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ_{Li} (10^{-1} mm)	0.84	7.44	27.6	70.9	143	244	368	500	631	746
μ_{Be} (10^{-1} mm)	0.09	0.73	2.55	6.29	12.7	22.4	35.7	52.8	73.1	95.9

Tabelle 8.2: *Absorptionslängen von Li und Be zwischen $1 \text{ keV} \leq E \leq 10 \text{ keV}$. Die Daten sind in Einheiten vom 10^{-1} mm angegeben und beschreiben die Absorption via $I = I_0 e^{-\frac{\Delta x}{\mu}}$.*

Be-Fenster gestatten bei wenigen keV Schichtdicken von $\sim 100 \mu\text{m}$. Inwieweit sich letztere gegenüber H_2 -Penetration resistant erweisen, sollte ebenfalls anhand von Messungen ermittelt werden; die Reaktion zu BeH_2 gelingt zumindest in der experimentellen anorganischen Chemie bislang nur auf Umwegen [25].

Parallel zu chemisch-thermischen Experimenten mag die empirische Überprüfung des Brechungsindex $n = 1 - \delta - i\beta$ der H_2 - oder He-Phase nach [17] über Absorption und nachfolgende Berechnung von $Re(n)$ mittels Kramers-Kronig sinnvoll erscheinen.

Anhang A

Geometrische Aberrationstheorie

Die folgenden Ausführungen zur Herleitung des Aberrationsfunktionalen stellen eine adaptierte Zusammenfassung der in [13] allgemein diskutierten Theorie dar.

In vollem Umfang erstmals von L. Seidel im 19. Jhd. publiziert [95], stellt die nach ihm benannte Theorie heute den kanonischen Formalismus zur Berechnung der Bildfehler in dritter Ordnung und geometrischer Näherung bereit. Ihr Grundgedanke besteht darin, die Änderung der optischen Weglängendifferenz Δs_{opt} zwischen realer und idealer Wellenfront mit den Aperturkoordinaten in der Austrittspupille – die bei einer blendenfreien dünnen Linse mit selbiger zusammenfällt – als *Winkelfehler* zwischen gestörtem und aberrationsfreiem Bildpunkt zu interpretieren.

Diversen Symmetrieverlegungen folgend, hängt Δs_{opt} nur von den Winkelkoordinaten $\vec{\phi}$ des punktförmigen Objekts bzgl. der optischen Achse sowie den lateralen Aperturkoordinaten $\vec{\sigma}$ ab¹. Sie gehen lediglich in quadratischer Form, nämlich als

$$\phi^2 = \phi_x^2 + \phi_y^2, \quad \sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2, \quad \kappa^2 = \phi_x \sigma_x + \phi_y \sigma_y \quad (\text{A.1})$$

in das nun zu definierende Aberrationsfunktional Ψ ein. Abb. A.1 illustriert die Bedeutung der Variablen. Offenbar bringt eine Reihenentwicklung bzgl. dieser Koordinaten nur Terme gerader Ordnung hervor, d.h.

$$\Psi = \Psi^{(0)} + \Psi^{(2)} + \Psi^{(4)} + \mathcal{O}(\Psi^{(6)}). \quad (\text{A.2})$$

Zunächst verschwindet der Beitrag nullter Ordnung, der schlicht die fehlerfreie Abbildung auf der optischen Achse repräsentiert. Ferner würden die Bildfehler linear mit den Koordinaten skalieren, bestünde Ψ auch aus Termen zweiter Ordnung. Damit bleibt schließlich $\Psi^{(4)}$ als niedrigste nicht-triviale Störungsordnung bestehen, deren Struktur demnach

$$\Psi^{(4)} = c_1 \sigma^4 + c_2 \kappa^4 + c_3 \phi^2 \sigma^2 + c_4 \phi^2 \kappa^2 + c_5 \sigma^2 \kappa^2 \quad (\text{A.3})$$

lauten muß. Die Koeffizienten $c_n \in \mathbb{R}$ nehmen auf das spezifische optische System Bezug. Auf den Summanden $\propto \phi^4$ ist ohne Einschränkung zu verzichten, da die Aberrationen

¹Im Interesse einer möglichst suggestiven und konsistenten Notation weichen die in der vorliegenden Arbeit gewählten Bezeichnungen von den in [13] benutzten ab.

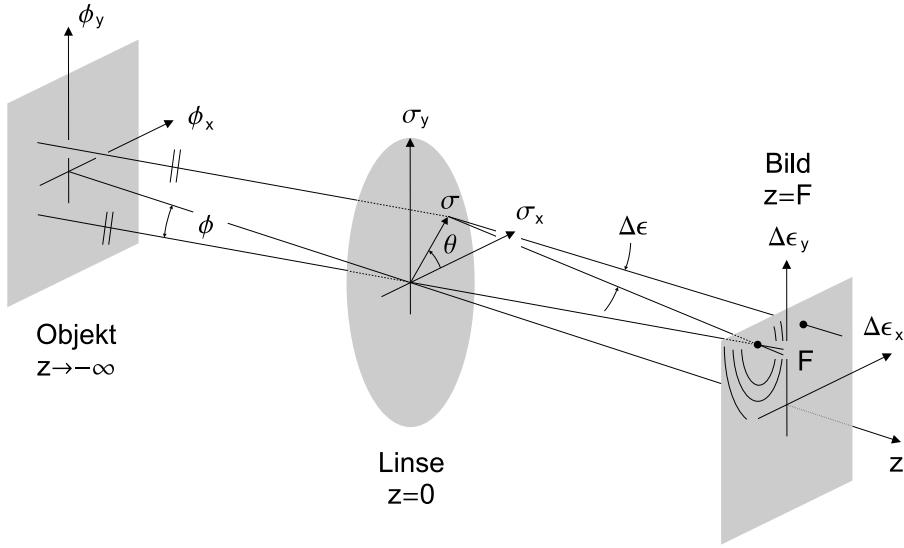


Abbildung A.1: Notation zur Berechnung der geometrischen Bildfehler, wie sie in dieser Arbeit verwendet wird. Aus Gründen der Übersichtlichkeit und Konsistenz weichen die Bezeichnungen von den in [13] benutzten ab.

nicht ausschließlich von der Winkelposition des Objektes abhängen können. Weiterhin kann wegen der zugrunde gelegten Rotationssymmetrie o.B.d.A. $\phi_y = 0$ gesetzt werden, das punktförmige Objekt sei damit horizontal angesiedelt. Schließlich erweist es sich als zweckmäßig, der axialsymmetrischen Form der betrachteten Linsen durch die Einführung von Polarkoordinaten

$$\sigma_x = \sigma \cos \theta \quad \text{und} \quad \sigma_y = \sigma \sin \theta \quad (\text{A.4})$$

Rechnung zu tragen, so dass die Wellenfrontaberration $\Psi^{(4)}$ letztendlich als

$$\Psi^{(4)} = -\frac{1}{4}B\sigma^4 - C\phi^2\sigma^2 \cos^2 \theta - \frac{1}{2}D\phi^2\sigma^2 + E\phi^3\sigma \cos \theta + F\phi\sigma^3 \cos \theta \quad (\text{A.5})$$

geschrieben werden kann. Die Proportionalitätskonstanten wurden dabei den üblichen Konventionen gemäß gewählt und gewährleisten in Verbindung mit den reellen Koeffizienten B bis F konsistente Resultate. Dem eingangs erwähnten Grundgedanken folgend, ergeben sich die Winkelfehler nun zu

$$\Delta\epsilon_x = -\frac{\partial\Psi}{\partial\sigma_x} \quad \text{und} \quad \Delta\epsilon_y = -\frac{\partial\Psi}{\partial\sigma_y}. \quad (\text{A.6})$$

Die Seidel-Theorie wird reale Punktbilder i.a. befriedigend approximieren, solange $\Psi^{(6)} \ll \Psi^{(4)}$ gilt, die Winkelfehler $\Delta\epsilon_x$ und $\Delta\epsilon_y$ also klein gegen 1 bleiben. Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit präsentierten Beispiele erfüllen diese Forderung offenbar mit sehr guter Genauigkeit – nicht zuletzt deshalb, weil die in [13] berechneten Aberrationskoeffizienten refraktiver Linsen wegen ihrer Linearität in δ bzw. δ^2 ohnehin nur geringe Beiträge liefern und diejenigen diffraktiver wegen $f \gtrsim 10^3$ praktisch nicht ins Gewicht fallen.

Literaturverzeichnis

Literaturverzeichnis

- [1] O.E. Hulbert, „Photoelectric ionization in the ionosphere,“ *Phys. Rev.* **53**, 344 (1938).
- [2] L. Vegard, „The auroral spectrum and the condition of the auroral region“, *Naturwiss.* **26**, 639 (1938).
- [3] T.R. Burnight, „Soft X-Radiation in the Upper Atmosphere“, *Phys. Rev.* **76**, 165(A) (1949).
- [4] H. Friedman, „Astrophysical measurements from rockets“, *Trans. IAU* **707-8** (1958).
- [5] H. Bräuninger et al., „EUV and soft X-ray images of the sun on March 11th, 1971“, *Solar Phys.* **20**, 81 (1971).
- [6] M. Burger und J.H. Dijkstra, „Photographs of the sun in the XUV region“, *Solar Phys.* **24**, 395 (1972).
- [7] J. L. Soret, „Ueber die durch Kreisgitter erzeugten Diffraktionsphänomene [...]\", *Ann. Phys.* **156**, 99 (1875).
- [8] C. Reppin et al., *Proc. Non-Thermal and Very High Temperature Phenomena in X-Ray Astronomy* (1985).
- [9] W. Tucker und R. Giacconi, *The X-ray Universe*, Harvard University Press; Cambridge, Massachusetts and London (1985).
- [10] H. Wolter, „Spiegelsysteme streifenden Einfalls als abbildende Optiken für Röntgenstrahlen“, *Ann. Physik* **10**, 94 (1952).
- [11] R. Giacconi und B. Rossi, „A Telescope for Soft X-Ray Astronomy“, *Journ. Geophys. Research* **65**, 773 (1960).
- [12] D. Attwood, *Soft X-rays and extreme ultraviolet radiation: principles and applications*, Cambridge University Press; Cambridge (1999).
- [13] M. Born und E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (1999), 7th edition.

- [14] Y. Kopylov et al., „Application of the parabolic wave equation to X-ray diffraction optics“, *Opt. Comm.* **118**, 619 (1995).
- [15] J.A. Fresnel, „Mémoire sur un nouveau système d'éclairage des phares“, *Académie des Sciences* (1822).
- [16] B.X. Yang, „Fresnel and refractive lenses for X-rays“, *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A* **328**, 578 (1993).
- [17] B.L. Henke et al., „X-ray interactions: photoabsorption, scattering, transmission and reflection at E=50-30000 eV, Z=1-92“, *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **54**, 181 (1993).
- [18] E. Di Fabrizio et al., „High-efficiency multilevel zone plates for keV X-rays“, *Nature* **401**, 895 (1999).
- [19] H.H. Fink, „Untersuchungen zum Punktbild und zur Modulationsübertragungsfunktion Fresnel'scher Zonenplatten im optischen Spektralbereich“, Dissertation, Tübingen (1975).
- [20] S.A. Kovalenko, „Descartes-Snell law of refraction with absorption“, *Semicond. Phys. Quant. Electron. & Optoelectronics*, **4**, 214 (2001).
- [21] L. Kipp et al., „Sharper images by focusing soft X-rays with photon sieves“, *Nature* **414**, 184 (2001).
- [22] M. Young, „Zone plates and their aberrations“, *Journal Opt. Soc. America* **68**(8), 972 (1972).
- [23] A.G. Michette, *Optical systems for soft x-rays*, Plenum Press, New York und London (1986).
- [24] Y. Wang et al., „Achromatic Fresnel optics for wideband extreme-ultraviolet and X-ray imaging“, *Nature* **424**, 50 (2003).
- [25] A.F. Holleman und E. Wiberg, *Lehrbuch der Anorganischen Chemie*, Walter de Gruyter (1985).
- [26] A. Gerrard, *Introduction to Matrix Methods in Optics*, Dover Publications, New York (1975).
- [27] W. Demtroeder, *Experimentalphysik 2, Elektrizität und Optik*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1995).
- [28] M.W. Farn und J.W. Goodman, „Diffractive doublets corrected at two wavelengths“, *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 860 (1991).

- [29] H. Stöcker, *Taschenbuch der Physik*, Verlag Harri Deutsch, Thun – Frankfurt am Main (1998).
- [30] G.K. Skinner, „Design and imaging performance of achromatic diffractive-refractive x-ray and gamma-ray Fresnel lenses“, *Appl. Optics* **43**, 4845 (2004).
- [31] S.E. Storm et al., „Giant Segmented Mirror Telescope: A point design based on science drivers“, *Proc. SPIE* **4840**, 116 (2003).
- [32] H.-J. Wiebicke et al., „SODART-OXS experiment simulation“, *Proc. of SPIE* **4140**, 549 (2000).
- [33] B.E. Warren, *X-ray diffraction*, Dover Publications, Inc., New York (1990).
- [34] <http://www.esrf.fr/computing/scientific/xop>
- [35] http://science.msfc.nasa.gov/newhome/headlines/ast14jan99_1.htm
- [36] <http://www.xrayoptics.com>
- [37] M.A. Kumakhov, *Nucl. Instr. Meth.* **B48**, 283 (1990).
- [38] L. Strüder, „High-resolution imaging X-ray spectrometers“, *Nucl. Instr. Meth. Phys. Research A* **454**, 73 (2000).
- [39] A. Wilson (Ed.), „The XEUS instruments“, *ESA Publications Division, Netherlands* (2003).
- [40] S. Bandler, „Development of Magnetic Microcalorimeters for X-ray Astronomy“, *Proc. SPIE* **5501**, 346 (2004).
- [41] A.M. Soltan, „The diffuse X-ray background“, *Astron. & Astrophys.* **408**, 39 (2003).
- [42] M. Revnivtsev et al., „The spectrum of the cosmic X-ray background observed by RXTE/PCA“, *Astron. & Astrophys.* **411**, 329 (2003).
- [43] D.M. Alexander et al., „Resolving the source populations that contribute to the X-ray background: The 2 Ms Chandra Deep Field-North Survey“, *Astron. Nachr.* **324**, 8 (2003).
- [44] Chandra X-ray Center, „The Chandra Proposers’ Observatory Guide“, Version 7.0 (2004).
- [45] P.Y. Bely (Edt.), *The Design and Construction of Large Optical Telescopes*, Springer (2003).
- [46] R. Angel, „Sensitivity of optical interferometers with coherent image combination“, *Proc. SPIE* **4838**, 126 (2002).

- [47] N.J. Cornish und J. Goodman, „The Lagrange Points“, *MAP Public Outreach Program*, <http://www.physics.montana.edu/faculty/cornish/lagrange.html> (1999).
- [48] D.N. Spergel et al., „First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters“, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003).
- [49] T. Padmanabhan, *Theoretical Astrophysics III: Galaxies and Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- [50] J.S.B. Wyithe und A. Loeb, „Magnification of light from many distant quasars by gravitational lenses“, *Nature* **417**, 923 (2002).
- [51] http://www.maa.mhn.de/StarDate/bright_stars.html
- [52] <http://www.johnstonsarchive.net/relativity/bhctable.html>
- [53] <http://snrcat.cfa.harvard.edu//snrcat-gal.html>
- [54] <http://www.mrao.cam.ac.uk/surveys/snrs/snrs.data.html>
- [55] <http://hea-www.harvard.edu/XJET/index.cgi>
- [56] http://www.astroscu.unam.mx/neutrones/NS-Data/data_good.dat
- [57] M.H. van Putten und T. Regimbau, „Observational Evidence for a Correlation between Peak Luminosities and Beaming in Gamma-ray Bursts“, *Astrophys. Journ.* **593**, L15 (2003).
- [58] L. Vainshtein et al., „Scattering of X-ray emission lines by atomic helium“, *Astron. Lett.* **24**, 271 (1998).
- [59] J. Wambsganss, „Nützliche Illusionen: Astrophysik mit Gravitationslinsen“, *Physik in unserer Zeit* **3**, 100 (2000).
- [60] R.-P. Kudritzki, „Einführung in die Astronomie und Astrophysik“, *Vorlesung an der Univ. München*, SS 1999/WS 2000 (1999).
- [61] Chung-Pei Ma, „Schechter vs. Schechter: sub-arcsec gravitational lensing and inner halo profiles“, *astro-ph/0211464* (2003).
- [62] A. Unsöld und B. Baschek, *Der neue Kosmos*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 6. Aufl. (1999).
- [63] J.L. Linsky, „X-ray Coronae of Stars: Recent Results from Chandra“, *Advances in Space Research* **32**, 917 (2003).
- [64] M. Güdel, „X-ray astronomy of stellar coronae“, *Astron. Astrophys. Review*, im Druck (2004).

- [65] P. Ulmschneider, „Heating of chromospheres and coronae“, *Highlights of Astronomy* **11 B**, 831 (1998).
- [66] J.H. Schmitt, „X-ray emission from single stars“, *Stars as Suns: Activity, Evolution, and Planets* **219** (2004).
- [67] R. Pallavicini, „High-energy radiation from outer stellar atmospheres“ in *The Century of Space Science*, 875, Kluwer Academic Publishers (2001).
- [68] Yong-Cheol Kim und Pierre Demarque, „The theoretical calculation of the Rossby number and the „non-local“ convective overturn time for pre-main sequence and early post-main sequence stars“, *Astrophys. Journal* **457**, 340 (1996).
- [69] T.R. Ayres et al., „Buried Alive in the Coronal Graveyard“, *Activity in Cool Stars*, Posterausstellung im Rahmen des AAS 201st Meeting (2003).
- [70] <http://www.kis.uni-freiburg.de/~peter/teach/sonnenfinsternisse/script/node7.html>
- [71] N. Grosso et al., „An x-ray superflare from an infrared protostar“, *Nature* **387**, 56 (1997).
- [72] T. Preibisch und R. Neuhäuser, „Properties of X-ray flares on young stars“ in *Flares and Flashes*, IAU Coll. **151**, 212, Springer-Verlag (1995).
- [73] S.H. Pravdo et al., „Discovery of X-rays from the protostellar outflow object HH 2“, *Nature* **413**, 708 (2001).
- [74] T. Padmanabhan, *Theoretical Astrophysics II: Stars and Stellar Systems*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- [75] <http://www.members.tripod.com/debnken/supernova.html>
- [76] S. Immler und W.H.G. Lewin, „X-ray Supernovae“, *Springer Lecture Note in Physics* **598**, 91 (2003).
- [77] R. Buras et al., „Improved Models of Stellar Core Collapse and Still no Explosions: What is Missing?“, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 241101 (2003).
- [78] M. Ribó, „Microquasars“, *astro-ph/0402134* (2004).
- [79] I.F. Mirabel, „Jets in supermassive and stellar-mass black holes“, *astro-ph/0302195* (2003).
- [80] P.A. Charles und F.D. Seward, *Exploring the X-ray Universe*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
- [81] S. Klose et al., „Gamma-Ray Bursts“, *Phys. Blätter* **57**, 47 (2001).

- [82] Ji-Feng Liu et al., „The optical counterpart of an ultraluminous x-ray object in M81“, *Astrophys. Journal Lett.* **580**, L31 (2002).
- [83] E.J.M. Colbert und M.C. Miller, „Observational evidence for intermediate-mass black holes in ultra-luminous x-ray sources“, *astro-ph/0402677* (2004).
- [84] L. Piro, „Gamma-ray bursts and afterglows“, *Europhys. News* **32**, No. 6 (2001).
- [85] A. Merloni, S. Heinz and T.D. Matteo, „A fundamental plane of black hole activity“, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **417**, 923 (2003).
- [86] S. Komossa und G. Hasinger, „Chandra Discovery of Binary AGN in NGC 6240“, *Astrophys. Journal Lett.* **582**, 15 (2003).
- [87] M.C. Begelman et al., „Massive black hole binaries in active galactic nuclei“, *Nature* **287**, 307 (1980).
- [88] <http://www.astro.uiuc.edu/~kaler/sow/sowlist.html>
- [89] <http://www.solstation.com/stars.htm>
- [90] H. Bräuninger et al., „Calibration of hard X-ray (15-50 keV) optics at the MPE test facility PANTER“, *Proc. SPIE* **5168**, 283 (2004).
- [91] Z. Benjelloun-Dabaghi und A. Benali, „Mathematical Modelling of the Permeation of Gases in Polymers“, *Oil & Gas Science and Techn. – Rev. IFP*, **56**, 295 (2001).
- [92] V.V. Kirsanov und V.V. Grigor'eva, „Modeling of diffusion and absorption processes of tritium in beryllium membranes“, *Technical Phys.* **44**, 771 (1999).
- [93] Kyoung Hoon Kim et al., „Dynamics calculations for the $\text{LiH} + \text{H} \rightleftharpoons \text{Li} + \text{H}_2$ reactions using interpolations of accurate ab initio potential energy surfaces“, *Journ. Chem. Phys.* **119**, 4689 (2003).
- [94] http://www pci.tu-bs.de/aggericke/PC4/Kap_III/Linienbreite.htm
- [95] L. Seidel, „Zur Dioptrik“, *Astr. Nachr.* **43**, 289/305/321 (1856).

Danksagung

Am Ende eines langen und bisweilen durchaus steinigen Weges danke ich allen, die mir denselben gewiesen, mich ein Stückchen darauf begleitet oder mir wieder auf die Beine geholfen haben, wenn Not am Mann war.

An erster Stelle meinem Betreuer, Herrn Dr. Peter Predehl, für die thematische Einführung, viele wertvolle Hinweise und den nötigen Optimismus, auch angesichts scheinbar unüberwindlicher Hürden die ersten Schritte zu versuchen.

Ein besonderer Dank gilt auch Herrn Prof. Joachim Trümper, dessen vor bereits 30 Jahren angestellte Überlegungen zum Einsatz großflächiger Fresnel'scher Zonenplatten in der kosmischen Röntgenastronomie als Anstoß und Basis der vorliegenden Arbeit gelten können.

Des weiteren Herrn Prof. Günther Hasinger, dessen wohlwollende Unterstützung finanzieller wie ideeller Art viel zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen bzw. sie erst ermöglicht hat.

Darüber hinaus natürlich Prof. Ralf Bender, der sich freundlicherweise bereit erklärte, sich als Zweitgutachter dieser Dissertation zur Verfügung zu stellen.

Nicht zu vergessen die zahlreichen Mitarbeiter am Institut, deren umfangreiches astronomisches und technisches Wissen in diese Arbeit an vielerlei Stellen einfloss. Namentlich nennen möchte ich Dr. Michael Freyberg, Dr. Elmar Pfeffermann, Dr. Peter Friedrich, Dr. Stefanie Komossa und speziell Dr. Vadim Burwitz, der mir quasi in letzter Minute half, ein verwickeltes LaTeX-Problem zu lösen.

Ferner den Doktoranden und Diplomanden, zu denen ich im Lauf der Zeit Kontakt hatte und mit denen sich manch nette Unterhaltung ergab.

Dass Hard- und Software stets reibungslos funktionierten, dafür sorgten in vorbildlicher Weise die „Admins“ Harald Baumgartner, Joachim Paul und Christa Post.

Und selbst ausgefallene Literaturwünsche erfüllten mit beständiger Geduld und Freundlichkeit die Bediensteten der Bibliothek um Frau Chmielewski.

Auf institutioneller Ebene richtet sich ein herzlicher Dank an die in Traunreut beheimatete Heidenhain-Stiftung, deren finanzielle Zuwendungen dem dieser Arbeit zugrunde liegenden Forschungsprojekt zugute kamen.

Zu guter Letzt meinen Eltern, die mir vielfach unter die Arme griffen und mich in jeder erdenklichen Hinsicht zu unterstützen bereit waren.



Abbildung A.2: *Auf zu neuen Ufern in der Hochenergie-Astrophysik... Auch auf diesem Wege sei nochmals allen gedankt, die ihre Spuren in dieser Arbeit hinterlassen haben und mich in der Hoffnung bestärken, gemeinsam dem Ziel der höchstauflösenden Röntgen-Astronomie einen kleinen Schritt näher gekommen zu sein.*

Lebenslauf

- 10. Sept. 1975 geboren in Kösching (Bayern)
- 1982 – 1986 Grundschule an der Münchener Straße, Ingolstadt
- 1986 – 1995 Apian-Gymnasium, Ingolstadt
- Juni 1995 Abitur
Leistungskursfächer: Mathematik und Physik
- 1995 – 1996 Wehrdienst
- Oktober 1996 Beginn des Studiums der Physik an der LMU München
- Oktober 1998 Diplom-Vorprüfung
Nebenfach: Chemie
- Nov. 2000 Diplom-Hauptprüfung
Schwerpunktfächer: Biophysik und Astronomie
- 2000 – 2001 Diplomarbeit in experimenteller Quantenoptik
- Dez. 2001 Abschluß als Dipl.-Phys. Univ. an der LMU München
- Januar 2002 Beginn der Promotion am MPI für Extraterrestrische Physik
- August 2005 Einreichung der Dissertation an der LMU München
- Januar 2006 Mündliche Prüfung