

Transferreaktionen zu ungebundenen Kernzuständen

Dissertation
der Fakultät für Physik
der
Ludwig–Maximilians–Universität
München

vorgelegt von
Andreas Ludwig Maximilian Weigel
aus München

München, den 13.12.2000

Gott gibt die Nüsse,
aber er beißt sie nicht auf!

Johann Wolfgang von Goethe

Für Lisa, Henriette und Fritz

1. Gutachter: Prof. Dr. H. H. Wolter
2. Gutachter: Prof. Dr. G. Graw

Tag der mündlichen Prüfung: 13.02.2001

Zusammenfassung

Das Thema der vorliegenden Arbeit sind Einnukleon-Transferreaktionen zwischen Kernen, und zwar insbesondere zu Endzuständen im Kontinuum, d. h. zu Dreikörperendkanälen. Damit beschreibt man inklusive, inelastische Kernreaktionen, wobei der Energieverlust derart ist, daß das transferierte Nukleon frei sein kann. Solche Reaktionen sind von aktuellem Interesse bei der Reaktionstheorie und Struktur von sogenannten exotischen, d.h. sehr schwach gebundenen Kernen nahe der Teilcheninstabilität, bei denen die Einbeziehung des Kontinuums von großer Bedeutung ist. Die Beschreibung dieser Transferreaktionen erfolgt im Rahmen der direkten Reaktionstheorie, die für binäre Reaktionen, d.h. solche mit diskreten Endzuständen, seit ca. 40 Jahren intensiv genutzt wurde, um spektroskopische Informationen über Kerne zu gewinnen. Die Ausdehnung auf 3-Körperendzustände ist nicht trivial und wird hier zusammenfassend referiert. Die Rechnungen dieser Arbeit benutzen die niedrigste Näherung der DWBA, wobei jedoch jetzt die Wellenfunktion des transferierten Teilchens durch eine elastische Streuwelle dargestellt wird. Dies geschieht im einfachsten Fall durch eine Potentialstreuwellen. Ein solcher Ansatz ist aber im allgemeinen nicht ausreichend, da dadurch die Freiheitsgrade des Rumpfes nicht mitberücksichtigt werden. Durch Kopplung der Teilchen an Rumpfanregungen wird die Struktur der Teilchenzustände, genauso wie bei gebundenen Niveaus, auch im Kontinuum wesentlich komplexer, und ist für eine genauere Beschreibung von Bedeutung. Im Rahmen des bereits von Bohr-Mottelson und Soloviev entwickelten Quasiteilchen-Rumpf-Kopplungsmodells (QPC) ist eine derartige Berücksichtigung möglich. Dabei werden die Rumpffononen durch einen QRPA-Ansatz beschrieben und die QPC-Zustände durch dynamische Massenoperatoren. Neu ist hier, daß diese Beschreibung auf das Kontinuum ausgedehnt wird. Das erhaltene Integralgleichungssystem wurde nach einer Sturm-Liouville-Basis entwickelt und geeignet diskretisiert. Man erhält dadurch eine konsistente, mikroskopische, d.h. auf einer effektiven Wechselwirkung beruhende Theorie, die spektroskopische Größen liefert mit denen inelastische Anregungen und Transfer zum Kontinuum beschrieben werden können.

Die Methode wird auf einige charakteristische Fälle von niederenergetischen Kernreaktionen mit leichten Schwerionen ($^{12,13}\text{C}$ Projektilen, ^{12}C und ^{40}Ca Targets) angewandt. Dabei werden die gemessenen Spektren quantitativ beschrieben, und zwar gleichzeitig die resonanten Strukturen und der strukturlose Untergrund im Kontinuum. Die Ergebnisse werden auch auf inklusive ^{12}C -Spektren bei $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ Stößen angewandt, wobei sie einen wichtigen Beitrag zum Gesamtwirkungsquerschnitt liefern.

Die hier entwickelte Methode ist damit geeignet, Reaktionen zu beschreiben, bei denen das Kontinuum eine wichtige Rolle spielt. Insbesondere zur theoretischen Behandlung von aktuellen Streuexperimenten mit radioaktiven Strahlen, sollte sie daher eine wichtige Rolle spielen.

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	1
1	Direkte Reaktionstheorie	6
1.1	N-Stufen-Übergangsamplitude	7
1.2	Hamiltonoperator des Dreikörperproblems und Mehrfachstreuereihe . .	16
1.3	Übergangswahrscheinlichkeiten und Wirkungsquerschnitt	25
2	Einteilchenwellenfunktionen und Formfaktoren im Kontinuum	31
2.1	Einteilchenzustände	31
2.2	Nichtlokale, energieabhängige Potentiale	38
2.3	Diskrete Kontinuumsdarstellung und Wignersche R-Funktion	40
2.4	Analytische Fortsetzung und quasistationäre Zustände	44
2.5	Einteilchenniveaudichte	49
2.6	Formfaktoren, spektroskopische Amplituden und Stärkefunktionen	51
3	Kernstrukturrechnungen	61
3.1	QRPA-Modell für angeregte Zustände gerader Kerne	62
3.1.1	Dichteentwicklungsansatz und Kontinuums-QRPA	67
3.1.2	Normierung der Kontinuums-QRPA-Wellenfunktion	71
3.2	Das Quasiteilchen-Rumpf-Kopplungsmodell	74
3.2.1	Normierung und Asymptotik der QPC-Wellenfunktion	79
3.2.2	Beispiel: Im Kontinuum eingebettete gebundene Zustände . .	82

4	Klassische und semiklassische Beschreibung von Transferreaktionen	90
4.1	Ansätze des semiklassischen Modells	90
4.2	Physikalische Interpretationen und Folgerungen	101
4.3	Ergebnisse und Diskussionen der semiklassischen Näherung	123
5	Ergebnisse der Stripping-Reaktion $^{40}\text{Ca}(^{13}\text{C}, ^{12}\text{B})^{41}\text{Sc}$	129
5.1	Einteilchen-Potentialzustände	130
5.2	Spektroskopische Faktoren und Einteilchenbreiten	131
5.3	QRPA-Amplituden und Stärkefunktionen für ^{40}Ca	132
5.4	QPC-Stärkefunktionen und S-Matrixelemente für ^{41}Sc	144
5.5	Spektren und Wirkungsquerschnitte für $^{40}\text{Ca}(^{13}\text{C}, ^{12}\text{B})^{41}\text{Sc}$	158
6	Transfer und Pickup-Aufbruch-Reaktionen Reaktionen von ^{12}C auf ^{12}C	164
6.1	Proton- und Neutrontransfer in die $^{11}\text{B} + ^{13}\text{N}$ bzw. $^{11}\text{C} + ^{13}\text{C}$ Endkanäle	165
6.2	QRPA und QPC-Anregungszustände für ^{13}C und ^{13}N	176
6.3	Pickup Aufbruchreaktion — Vergleich mit inelastischer Streuung . . .	197
7	Zusammenfassung und Ausblick	200
A	Einheiten, Konstanten, Symbole und Begriffe	204
B	Transformation zwischen Labor-Schwerpunktsystem	207
C	Transformation eines Breakup-Wirkungsquerschnitts auf einen inelastischen Wirkungsquerschnitt	209
D	Zusammenhang Kontinuumsdarstellung - diskrete Darstellung	215
E	Normierung der QRPA- und QPC-Zustände	217
F	Asymptotik der QPC-Wellenfunktion	221

G Darstellung des Einteilchenkontinuums durch ein diskretes Basissystem	224
H Eigenschaften der Überlappmatrixelemente	229

Kapitel 0

Einleitung

Kernreaktionen führten schon früh zu wichtigen Erkenntnissen in der Kernphysik. So war die Entdeckung des Atomkerns durch Rutherford unmittelbare Folge eines Kernreaktionsexperiments. Eine Vielzahl von Eigenschaften nuklearer Systeme konnte seither in verschiedenen Reaktionen, seien es elastische oder inelastische Streuung, seien es Transfer oder Einfangreaktionen, analysiert und verstanden werden. Die Untersuchung von Reaktionen erfolgte auch unter Bedingungen, die zu Kernzuständen mit extremen Eigenschaften, wie schneller Rotation oder hoher Anregungsenergie, führen, so daß heute auch Eigenschaften von Kernmaterie außerhalb des Sättigungspunktes studiert werden können.

Allgemein zeigte sich, daß Kernreaktionen in drei wesentliche Kategorien untergliedert werden können [Aus70]. Zum einen ist dies die Kategorie der direkten Reaktionen, zu denen auch Transferreaktionen zählen und um die es in dieser Arbeit im wesentlichen geht, zum anderen ist dies die Kategorie der Compoundreaktionen. Zwischen diesen beiden "Extremen" ergibt sich der Übergangsbereich der Vergleichgewichtsreaktionen [Len87]. Welcher Reaktionstyp vorliegt, hängt von der inneren Anregungsenergie der Reaktanden bzw. der Zahl der angeregten Freiheitsgrade ab. Generell gilt, je kleiner der Energietransfer bei einer Reaktion ist, desto mehr zeigt sie direkten Charakter; Übergänge zwischen den verschiedenen Typen sind fließend [Sat83]. Um eine ungefähre Vorstellung für diese drei Kategorien zu bekommen, ist in Abbildung 1 ein schematisches Spektrum dargestellt. Dabei beschreibt der Bereich bis etwa 10 MeV Anregungsenergie den Bereich der direkten Reaktionen (blau), gefolgt vom Bereich der Vergleichgewichtsreaktionen (grün) bis etwa 25 MeV. Bei höheren Anregungsenergien handelt es sich dann um Compoundreaktionen (rot). Hauptziel dieser Arbeit ist die Untersuchung von Einnukleon-Transferreaktionen ins Kontinuum, d. h. von Pickup und Stripping-Reaktionen (Aufnehm- und Abstreifreaktionen) mit einem Dreikörper-Endkanal. Mit dem verwendeten theoretischen Modell ist aber auch die Behandlung von Transferreaktionen mit größeren Fragmenten, wie z.B. α -Teilchen möglich [Deu94]. Der Ansatz für die jeweilige Übergangsamplitude erfolgt im Rahmen der direkten Reaktionstheorie und erfaßt auch teilwei-

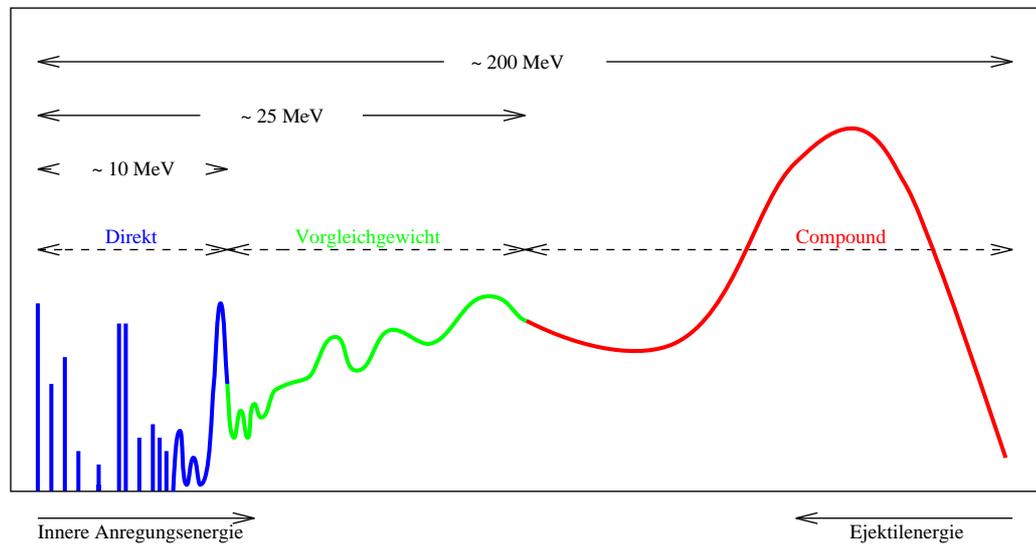


Abbildung 1: Schematische Darstellung des Spektrums einer Nukleon-induzierten Kernreaktion bei 200 MeV Einschubenergie in Abhängigkeit der inneren Anregungsenergie der Reaktanden bzw. Energie des Ejektils. Die Gültigkeitsbereiche der verschiedenen Kategorien von Kernreaktionen sind eingezeichnet. Die Darstellung ist nicht maßstabsgerecht.

se den Vorgleichgewichtsbereich. Anschaulich ist der Mechanismus im Sinne eines "Teilnehmer-Zuschauer-Modells" [Ser47] zu verstehen. Dies bedeutet, daß z.B. im Falle einer Stripping-Reaktion $A+a \rightarrow b+B$ ein Projektil $a = b+x$, welches aus zwei Substrukturen b und x zusammengesetzt ist, einen Targetkern A trifft und dabei lediglich der "Teilnehmer" x mit A in Wechselwirkung tritt, während der "Zuschauer" b relativ unbeteiligt bleibt. Konkret wird in dieser Arbeit ein derartiges Modell in einer semiklassischen Näherung, die von Bonaccorsa et al. [BBM87] entwickelt wurde, untersucht. Diese Vorstellung entspricht im übrigen der Annahme, daß direkte Reaktionen vorrangig an der Oberfläche der Reaktanden ablaufen.

Man kann bei diesen Stripping-Reaktionen zum Kontinuum zwei wesentliche Arten von Prozessen unterscheiden. Einerseits eine elastische Stripping-Reaktion bei der das von b getrennte x an A elastisch gestreut wird und andererseits eine inelastische Stripping-Reaktion bei der es zu einer Anregung von A oder auch zur Ausbildung eines Compoundzustandes von A und x kommen kann. Derartige Anregungszustände können durch Mehrstufenprozesse ausgehend vom elastischen Streu-

zustand, der dann einen "Doorway"-Zustand zu den komplizierteren Anregungen bildet, beschrieben werden. Die so entstehenden komplexen Anregungszustände können Anteile gebundener Zustände im Kontinuum enthalten. ("Bound States Embedded in the Continuum" [MaW69]). In dieser Arbeit beschränkte sich die Behandlung aber nur auf Transfer-Einstufenprozesse unter Berücksichtigung von Rumpfanregungen. Wie groß die Übergangsamplitude in die verschiedenen Kanäle ist, hängt neben Struktureigenschaften im wesentlichen von der Einschußenergie des Projektils, vom Q -Wert der Reaktion, also dem Energieverlust, und den Spins der Reaktanden ab. Einfache Abschätzungen ergeben sich aus semiklassischen Betrachtungen, wie z.B. den Brink'schen Regeln [Bri72]. Genauer wird diese Beschreibung bei der Verwendung von Anregungszuständen des Systems ($A + x$), d. h. im Kontinuum von realistischen Streuwellenfunktionen von x am Restkern A . Die Eigenschaften dieser Kontinuumszustände spiegeln sich im Spektrum des Ejektils b wieder. Es zeigt sich dabei, daß diese Spektren bei bestimmten Energien Strukturen aufweisen, die denen von Reaktionen zu vergleichbaren gebundenen Restkernzuständen sehr ähnlich sind. Für sogenannte Spiegelkerne findet man beispielsweise sich entsprechende spektroskopische Amplituden für Neutronen und Protonen, obwohl die Neutronen als gebundene Zustände vorliegen und die Protonen ungebunden sind. In der Literatur finden sich daher eine Vielzahl von theoretischen und experimentellen Untersuchungen, insbesondere von Leichtenreaktionen, wie (d, p)-Stripping-Reaktionen ([BaT72],[BaT73], [BRT84], [JLM73]) oder (${}^3\text{He}, d$) ([YKK70]), die sich mit diesem Thema auseinandersetzen.

Bei der Betrachtung direkter Prozesse sind Stripping- und Pickup-Reaktionen völlig äquivalent. Meßtechnisch allerdings, ergeben sich Unterschiede, da man für eine Pickup-Reaktion das Ejektil im Kontinuum, also einen ungebundenen Zustand nicht nachweisen kann. In diesem Fall besteht das Target $A = B + x$ aus zwei Substrukturen x und B . x wird dann vom Projektil a aufgenommen und bildet intermediär einen ungebundenen Zustand ($b = a + x$). Dieser "Komplex" zerfällt allerdings wieder, so daß man eine derartige Reaktion oft als Pickup-Breakup-Reaktion (Breakup = Aufbruch) bezeichnet. Bei ausschließlicher Messung des Ejektils a ist dieser Prozeß nicht von einer inelastischen Streuung von a an A zu unterscheiden. Inklusiv Messungen beinhalten also inelastische Anregungen gebundener Endzustände sowie die oben beschriebenen Beiträge des Dreikörper-Endkanals. Durch Umtransformieren des erhaltenen Pickup-Breakup-Wirkungsquerschnitt für einen Dreikörper-Endkanal in einen entsprechenden Zweikörperwirkungsquerschnitt der inelastischen Streuung können diese sogenannten "Side-Feeding"-Anteile mitberücksichtigt werden. Dabei genügt es bei der Berechnung des Formfaktors, die benötigte Streuwellenfunktionen von x an a mit einem einfachen, energieabhängigen optischen Potential als Einteilchenzustände zu beschreiben, da die auftretenden resonanten Strukturen, die sich durch Ankopplung an Rumpfanregungen ergeben, kinematisch "verschmiert" werden.

Im Falle einer Stripping-Reaktion zum Kontinuum, respektive einer Pick-Up-Reaktion zum Kontinuum bei der das transferierte freie Nukleon via Koinzidenzmessung

nachgewiesen wird, genügt ein solcher Ansatz nicht. Hier müssen die Wellenfunktionen des transferierten Teilchens, die in den Formfaktor eingehen, Korrelationen enthalten, da die Verwendung von ungestörten Einteilchenzuständen zur Beschreibung nicht ausreicht. Im Einteilchenbild unberücksichtigte Restwechselwirkungen führen zu einer Fragmentation der Einteilchenzustände. Die Berücksichtigung dieser Restwechselwirkungen geschah im Rahmen des hier entwickelten Kontinuums-Quasiteilchen-Rumpfkopplungsmodell, einer Erweiterung des bekannten Modells für gebundene Zustände, daß von H. Lenske bereits erfolgreich zur Berechnung von spektroskopischen Amplituden eingesetzt wurde [ELG90], [vNe90]. Im Quasiteilchen-Rumpfkopplungsmodell werden Rumpfanregungen des Restkerns A an Einteilchenzustände von x angekoppelt — es werden damit zusätzliche Restwechselwirkungen berücksichtigt. Man erhält dann kompliziertere Wellenfunktionen mit 1- und 3-Quasiteilchenanteilen, die die Fragmentierung der zugrunde liegenden Einteilchenzustände beschreiben. Im Falle von Kontinuumszuständen kann aus den QPC-Wellenfunktionen bzw. aus den zugehörigen S -Matrixelementen, die Asymptotik der Streuwellenfunktion ermittelt werden. Mit diesen Größen können dann realistische Formfaktoren in Abhängigkeit der Anregungsenergie ermittelt werden. Mit Distorted-Wave-Born-Approximations-Rechnungen (Born'sche Streuwelennäherung) sind dann Wirkungsquerschnitte und Spektren zu erhalten. Wie ebenfalls in dieser Arbeit rekapituliert wird, ist die verwendete DWBA die erste Näherung einer Mehrfachstreuereihe, die sich aus den sogenannten AGS-Gleichungen für das Dreikörperproblem ergibt. Die Herleitung der verwendeten Ansätze und die exemplarische Anwendung auf zwei niederenergetische Kernreaktionen mit leichten Schwerionen bildet dabei den Schwerpunkt dieser Arbeit. Die erhaltenen Ergebnisse, die die zugehörigen Experimente quantitativ gut beschreiben, lassen den Schluß zu, daß das vorgestellte Modell für andere aktuelle Anwendungen geeignet sein sollte. Insbesondere die theoretische Beschreibung von den später erwähnten Halokernen, aber auch die Behandlung von "Accelerator Driven Systems" (ADS) gehören dazu. Letztere sind von Bedeutung bei der Teilchenbestrahlung in der Medizin und bei der Aufarbeitung bzw. "Verbrennung" von radioaktivem Abfall ("Nuclear Waste") aus Kernreaktoren.

Nach dieser Einleitung ist die Arbeit wie folgt gegliedert: Im 1. Kapitel wird die Beschreibung von Transferreaktionen im Rahmen der direkten Reaktionstheorie unter besonderer Berücksichtigung von Kontinuumszuständen rekapituliert. Die Darstellung lehnt sich dabei eng an die Bücher von G. R. Satchler [Sat83] und W. Glöckle [Glo83] an. Des weiteren wird der Wirkungsquerschnitt für Pickup-Breakup-Reaktionen diskutiert und auf eine der inelastischen Streuung äquivalente Darstellung transformiert.

Im 2. Kapitel erfolgt eine zusammenfassende Beschreibung von Wellenfunktionen für gebundene und ungebundene Einteilchenzustände, die als Eingangsgrößen für die Kernstrukturrechnungen dienen. Im Rahmen dieser Diskussion wird unter anderem gezeigt, wie für praktische Rechnungen eine Diskretisierung der Kontinuumszustände erfolgen kann und wie bestimmte diskretisierte Zustände mit quasistationären oder Gamowzuständen zusammenhängen. Anschließend erfolgt die Diskussi-

on des Formfaktors und der Stärkefunktion für Transferreaktionen. Die Berechnung von Kontinuumsformfaktoren wird detailliert diskutiert.

Modelle zur Kernstruktur für Kontinuumszustände, einmal für g-g-Kerne und für u-g bzw. g-u-Kerne sind Gegenstand des 3. Kapitels. Die Anregungszustände von Kernen mit gerader Protonen- und Neutronenzahl werden im QRPA-Modell (Quasiparticle Random Phase Approximation) behandelt. Das sogenannte Quasiteilchen-Rumpfkopplungsmodell (Quasiparticle Core Coupling Model, QPC) mit dem ungerade Kernzustände beschrieben werden können und das auf einen Ansatz von A. Bohr und B. R. Mottelson [BoM69] sowie V. G. Soloviev et al [SSV70] zurückgeht, wird diskutiert und zur Beschreibung des Kontinuums erweitert. Man erhält als Ansatz ein gekoppeltes Integralgleichungssystem, daß durch Verwendung diskretisierter Einteilchenwellenfunktion aus Kapitel 2 gelöst wird.

Um ein etwas besseres qualitatives Verständnis für den Kontinuumstransfer zu bekommen, wird dann im folgenden Kapitel 4, ein semiklassisches Modell vorgestellt. Dieses Modell, daß von Brink und Bonaccorsa [BPB85], [BoB88] entwickelt wurde, wird dann auf die beiden Reaktionen, deren mikroskopische Behandlung Gegenstand der nächsten beiden Kapitel 5 und 6 ist, angewandt.

Bei den erwähnten Reaktionen handelt es sich zum einen um die Stripping Reaktion $^{40}\text{Ca}(^{13}\text{C}, ^{12}\text{B})^{41}\text{Sc}$ (Kapitel 5), zum anderen um die Pickup-Breakup-Reaktionen $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, (^{13}\text{C} \rightarrow ^{12}\text{C} + n))^{11}\text{C}$ und $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, (^{13}\text{N} \rightarrow ^{12}\text{C} + p))^{11}\text{B}$, die Konkurrenzreaktionen zur inelastischen Anregung $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, ^{12}\text{C}^*)^{12}\text{C}$ sind (Kapitel 6). Zu beiden Reaktionen gibt es experimentelle Daten, die am Hahn-Meithner-Institut in Berlin respektive an der KFA in Jülich gemessen wurden. Die theoretische Behandlung der Stripping-Reaktion erfolgte unter Verwendung des Kontinuums-QPC-Modells. Die spektroskopischen Eigenschaften des ungebundenen ^{41}Sc -Kerns wurden mit den experimentellen Ergebnissen von F. J. Eckle et al. [ELG90] für den Spiegelkern ^{41}Ca verglichen. Es werden bei den Berechnungen wesentliche Zwischenschritte dokumentiert außerdem erfolgte ein Vergleich der Ergebnisse mit dem Experiment von M. Bräunig et al. [BOB90].

Eine Zusammenfassung der theoretischen Ansätze und Ergebnisse sowie ein Ausblick für weitere interessante Anwendungen ist Gegenstand des letzten Kapitels.

Hier soll die besonders interessante Anwendungsmöglichkeit zur Berechnung der Kernstruktur in den Kernreaktionen exotischer Kerne, sogenannter "Halo"-Kerne erwähnt werden, deren Untersuchung in jüngster Zeit erfolgte [JoR98],[Len98]. So weisen Einneutron- bzw. Einproton-Halokerne, wie zum Beispiel ^{11}Be oder ^{17}F , für das letzte gebundene Nukleon sehr kleine Bindungsenergien auf. Im Schalenmodell ist für derartige Kerne oft überhaupt kein gebundener Zustand zu erwarten. Erst bei Berücksichtigung von zusätzlichen Rumpfanregungen kann ein derartiger Zustand genügend Energie gewinnen und unter die Teilchenaufbruchschwelle "geschoben" werden. Ein derartiges Verhalten kann im QPC-Modell theoretisch beschrieben werden. Mit den erhaltenen QPC-Wellenfunktionen können dann Kernradien und Dichten der "Halo"-Kerne ermittelt werden und für die konsistente Berechnung von Formfaktoren benützt werden.

Kapitel 1

Transferreaktionen im Rahmen der direkten Reaktionstheorie

In dieser Arbeit wird zur theoretischen Beschreibung von Transferreaktionen die "Distorted Wave Born Approximation" (DWBA) verwendet. Eine ausführliche Darstellung dieser Methode und eine Herleitung mit der Methode der gekoppelten Kanäle ist in der Literatur [Aus70], [Sat83] zu finden und soll hier im Hinblick auf Reaktionen, die ins Kontinuum führen, zusammengefaßt werden. Die hier verwendete Nomenklatur und Herleitung lehnt sich im übrigen weitgehend an die zuletzt genannte Referenz von Satchler an.

Üblicherweise werden Transferreaktionen $a + A \rightarrow b + B$ als Reaktionen zu binären Endkanälen formuliert. Im Falle des Transfers ins Kontinuum und auch bei inelastischen Anregungen ins Kontinuum liegt allerdings ein Dreikörper-Endkanal vor. Z.B. bewegen sich bei einer Kontinuums-Stripping-Reaktion $a + A \rightarrow b + A + x$ die drei Fragmente b , A und x bis auf die Coulombwechselwirkung außerhalb der Reaktionszone unabhängig voneinander. Wenn bei Experimenten nur inklusive Reaktionen gemessen werden, wird man im Falle der oben beschriebenen Stripping-Reaktion nur den Wirkungsquerschnitt des auslaufenden Ejektils b bestimmen. Bei einer theoretischen Rechnung werden daher auch nur die direkte Übergangsamplitude zwischen dem Eingangskanal $\alpha = a, A$ und dem Endkanal $\beta = b, B$ benötigt, wobei $B = (A + x)$ ist. Als Koordinaten werden geeignete Jacobikoordinaten, d.h. in diesem Fall die Schwerpunktkoordinaten zwischen A und x und zwischen $B = (A + x)$ und b verwendet (Siehe Abbildung 1.1). In dieser Darstellung ist der inklusive Transfer ins Kontinuum analog dem Transfer in gebundene Zustände.

Anders ist die Situation für eine Pickup-Reaktion $a + A \rightarrow B + a + x$. Hier entsteht ein intermediärer "Komplex" $b = a + x$ der sofort wieder zerfällt (Breakup-Prozeß). Wird wiederum a spektroskopiert, so muß man den Zerfall mitbetrachten.

Solche Prozesse tragen als "Side Feeding"-Prozesse zu inelastischen Streuungen bei ([BRC85], [BOL84]) und bestimmen oft den Wirkungsquerschnitt. Daher wird bei

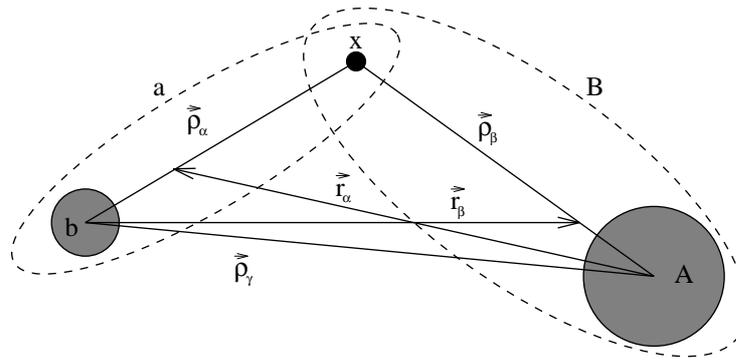


Abbildung 1.1: Darstellung der Koordinaten für die α und β -Partition. Gezeigt ist die Reaktion $A(a,b)B$. In der α -Partition werden die Koordinaten $\vec{\rho}_\alpha, \vec{r}_\alpha$ verwendet. In der β -Partition sind es die Koordinaten $\vec{\rho}_\beta, \vec{r}_\beta$.

theoretischen Rechnungen zunächst der Wirkungsquerschnitt der Pickup-Reaktion bestimmt und anschließend in einem zweiten Schritt der Breakup-Prozeß und damit die Winkelverteilung von a .

1.1 *N*-Stufen-Übergangsamplitude

Einer der am häufigsten verwendeten Ansätze zur Berechnung der Übergangsamplituden, die zur Interpretation experimenteller Daten von direkten Reaktionen herangezogen werden, ist die *N*-Stufen-Born'sche Streuwellen Näherung ("N-Step Distorted Wave Born Approximation", DWBA.) Üblicherweise wird in der Literatur nur die erste Ordnung ($N=1$) als DWBA bezeichnet, hier soll in einem verallgemeinerten Sinn der Begriff DWBA auch für die n -te Ordnung stehen. Die DWBA, kann als Näherung zu einer iterativen Lösung der der Schrödingergleichung entsprechenden Lippmann-Schwinger-Integralgleichung aufgefasst werden. Im Falle von Transferre-

aktionen wird üblicherweise nur die erste Iteration, also die Einstufenübergangsamplitude berücksichtigt. Mehrstufenübergangsamplituden sind dann durch weitere Iterationen zu erhalten. Aus der Übergangsamplitude kann schließlich der Wirkungsquerschnitt erhalten werden. In dieser Arbeit soll zunächst ein allgemeiner Ausdruck für die Übergangsamplitude zwischen Zuständen eines Modellraums angegeben werden, aus dem dann die zugehörige DWBA-Amplitude abgeleitet werden kann. Dabei soll besonderer Wert auf Dreikörper-Endkanäle gelegt werden.

Vorab sollen einige Bemerkungen zur Notation gemacht werden. Zur Beschreibung eines Eingangskanal mit einem Projektilkern a und einem Targetkern A , d.h. einer Zerlegung oder Partition eines N-Nukleonensystems in zwei Fragmente, wählt man für den Hamiltonoperator \hat{H} zur stationären N-Nukleonen-Schrödingergleichung

$$(\hat{H} - E)|\Psi\rangle = 0 \quad (1.1)$$

geeignete Koordinaten, so daß im Schwerpunktsystem der beiden Kerne die Darstellung

$$\hat{H} = \hat{h} + \hat{K}_\alpha + \hat{V}_\alpha \quad (1.2)$$

gültig ist. Die Relativbewegung der beiden Kerne wird dann durch den Operator der kinetischen Energie \hat{K}_α und durch die Wechselwirkung \hat{V}_α beschrieben. Der Hamilton-Operator \hat{h}_α ist die Summe der beiden Kern-Hamilton-Operatoren \hat{h}_a und \hat{h}_A , die zu den beiden Schrödingergleichungen der asymptotisch getrennten, wechselwirkungsfreien Kerne a und A gehören, also

$$(\hat{h}_\alpha - \varepsilon_\alpha)|\alpha\rangle = 0 \quad (1.3)$$

wobei

$$\hat{h}_\alpha = \hat{h}_a + \hat{h}_A \quad |\alpha\rangle = |a\rangle \otimes |A\rangle = |aA\rangle, \quad (1.4)$$

und

$$(\hat{h}_a - \varepsilon_a)|a\rangle = 0 \quad (\hat{h}_A - \varepsilon_A)|A\rangle = 0, \quad (1.5)$$

so daß $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_a + \varepsilon_A$. Im Prinzip kann nun die allgemeine Lösung $|\Psi\rangle$ zu \hat{H} als

Entwicklung nach der vollständigen Basis der inneren Kernzustände $|\alpha\rangle = |aA\rangle$, in einer Partition, gemäß dem Ausdruck

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} |\alpha\rangle \quad (1.6)$$

erhalten werden. Da aber die Summe über α , damit Vollständigkeit gilt, auch alle Kontinuums- bzw. Compoundzustände von a und A enthalten muß, erweist sich diese Darstellung bei praktischen Berechnungen im allgemeinen als ungeeignet. Besonders deutlich wird diese Tatsache bei der Behandlung von Transferreaktionen, bei denen im Ausgangskanal eine andere Partition als im Eingangskanal vorliegt. Bei der im folgenden näher erläuterten Methode der gekoppelten Reaktionskanäle wird daher der volle Hilbertraum von Lösungen $|\Psi\rangle$ zur Schrödingergleichung (1.1) auf einen endlichen, unvollständigen Modellraum mit für die betrachtete Reaktion geeigneten Kanälen, die aber in unterschiedlichen Partitionen liegen können, projiziert. Durch die Projektion auf einen Modellraum ergeben sich effektive Wechselwirkungsoperatoren, die noch in exakter Weise die Kopplungen der Modellzustände an den Komplementärraum enthalten. Diese Operatoren werden dann durch empirische, energiegemittelte Größen — üblicherweise optische Potentiale und effektive Kopplungen — ersetzt. Die Wahl dieser optischen Potentiale hängt wesentlich vom verwendeten Modellraum ab (und muß nicht eindeutig sein). Welcher Modellraum geeignet ist, hängt dann von der jeweils betrachteten Reaktion ab.

Mit der Projektordarstellung nach Feshbach [FES80] kann der gesamte Hilbertraum \mathcal{H} in einen Modellraum $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$, der nur energetisch offene Kanäle enthält, und den dazugehörigen Komplementärraum $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$, der sowohl offene als auch geschlossene Kanäle enthält, zerlegt werden. Für eine beliebige Wellenfunktion $|\Psi\rangle$ ist dann bei Verwendung der Projektionsoperatoren \hat{P} und \hat{Q} auf $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ bzw. $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$, die Darstellung

$$|\Psi\rangle = \hat{P}|\Psi\rangle + \hat{Q}|\Psi\rangle \quad (1.7)$$

möglich. Der Modellzustand $|\Psi^{mod}\rangle$ kann dann wie folgt geschrieben werden

$$|\Psi^{mod}\rangle = \hat{P}|\Psi\rangle. \quad (1.8)$$

Durch Ausnützen der Projekteigenschaften kann nun aus der Schrödingergleichung (1.1) eine effektive Schrödingergleichung

$$(\hat{H}^{eff} - E)|\Psi^{mod}\rangle = 0 \quad (1.9)$$

für $|\Psi^{mod}\rangle$ mit einem effektiven Hamiltonoperator \hat{H}^{eff} erhalten werden, wobei

$$\hat{H}^{eff} = \hat{P}\hat{H}\hat{P} + \hat{P}\hat{H}\hat{Q}\frac{1}{E^{(+)} - \hat{Q}\hat{H}\hat{Q}}\hat{Q}\hat{H}\hat{P}. \quad (1.10)$$

Der zweite Term aus (1.10) ist eine nichthermitesche, energieabhängige Wechselwirkung, ein sogenannter Polarisationsoperator. Der Ausdruck (1.9) stellt allerdings nur eine Umformulierung der Schrödingergleichung (1.1) dar, da die Schwierigkeiten des vollständigen Problems im effektiven Hamiltonoperator (1.10) enthalten sind. Nur wenn für einen bestimmten Reaktionstyp geeignete Modellräume und dazu einfache, geeignete Modelle für den effektiven Hamilton-Operator gefunden werden können, ist die Darstellung (1.9) von Vorteil. Bei praktischen Rechnungen werden für die effektiven Operatoren daher meist optische Potentiale und deren Ableitungen verwendet. Da bis auf weiteres nur effektive Operatoren im Sinne von Gleichung (1.10) diskutiert werden, wird die Indizierung eff unterdrückt und werden alle Operatoren als effektive Operatoren aufgefasst.

Sollen z.B. elastische und inelastische Streuung beschrieben werden, so ist ein geeigneter Modellraum eine endliche Teilmenge aller gebundenen Zustände von a und A , d.h. Kanalzustände $|\alpha\rangle$ der Partition $\alpha = (a + A)$, zu denen auch der Eingangskanal α_o gehört. Sollen außerdem Anregungszustände mitberücksichtigt werden, in denen ein Teilchen im Kontinuum ist, so kann diese endliche Teilmenge z.B. um Einnukleonenstreu Zustände erweitert werden. Der entsprechende Projektionsoperator \hat{P}_α hat dann für eine Teilmenge solcher Zustände die Form

$$\hat{P}_\alpha = \sum_{\alpha_n \in \mathcal{H}_p} |\alpha_n\rangle\langle\alpha_n| + \int_{\alpha \in \mathcal{H}_p} d\epsilon |\alpha(\epsilon)\rangle\langle\alpha(\epsilon)| := \sum_{\alpha \in \mathcal{H}_p} |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (1.11)$$

wobei die symbolische Schreibweise mit dem Integralsummenzeichen ausgewählte Kontinuumszustände einschließt und die Bra- und Ket-Vektoren zu einem bestimmten griechischen Buchstaben im weiteren Kanalzustände in einer Partition beschreiben sollen.

Die allgemeine Modellwellenfunktion mit der Energie E und der Randbedingung einer einlaufenden Welle im Eingangskanal α_o wird mit (1.8) dargestellt als

$$|\Psi_{\alpha_o}^{mod}(E)\rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{H}_p} |\alpha\rangle\langle\alpha|\Psi_{\alpha_o}(E)\rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{H}_p} u_\alpha |\alpha\rangle. \quad (1.12)$$

Die Entwicklungskoeffizienten $u_\alpha = u_\alpha(\vec{r}_\alpha, E_\alpha)$ sind dann Wellenfunktionen der Relativbewegung zwischen dem Target A und dem Ejektil a zur Energie $E_\alpha = E - \varepsilon_\alpha$. Sie genügen der asymptotischen Randbedingung einer einlaufenden Welle im elastischen Kanal α_o und auslaufenden Wellen im jeweiligen Ausgangskanal α . Verwendet

man jetzt für den effektiven Hamilton-Operator, die für die α -Partition geeignete Form, entsprechend (1.2), so ergibt sich nach der Projektion mit einem bestimmten Kanalzustand $(\alpha|$ aus \mathcal{H}_p folgende Gleichung zu jedem Kanalzustand

$$[E_\alpha - \hat{K}_\alpha]u_\alpha(\vec{r}_\alpha, E_\alpha) = (\alpha|\hat{V}_\alpha|\Psi_{\alpha_o}^{mod}(E)). \quad (1.13)$$

Dabei bezieht sich die Indizierung der Operatoren mit griechischen Buchstaben auf eine bestimmte Partitionsdarstellung der Operatoren. Da die Entwicklungskoeffizienten u_α in $\Psi_{\alpha_o}^{mod}(E)$ implizit enthalten sind (Gleichung (1.12)), ergibt sich insgesamt ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem für alle Kanalzustände α . Werden nur endlich viele diskrete Modellzustände berücksichtigt, erhält man die bekannten gekoppelten Kanalgleichungen ("Coupled Channels") [Sat83]. Sollen Zustände im Kontinuum diskutiert werden, z. B. Anregungen bei denen ein Nukleon der Kerne a oder A energetisch oberhalb der jeweiligen Teilchenaufbruchschwelle zu finden ist, so ist die Gleichung (1.13) für kontinuierliche Werte α zu lösen. Es handelt sich dann bei (1.13) um eine Integralgleichung bezüglich der u_α . Für eine formale Lösung von Gleichung (1.13) führt man zunächst eine Gell-Mann-Goldberger-Transformation [GeG53] durch, d. h. man ersetzt die Diagonalelemente $(\alpha|\hat{V}_\alpha|\alpha)$ durch ein partitionsabhängiges Hilfspotential $U_\alpha(\vec{r}_\alpha) = (\alpha|\hat{U}_\alpha|\alpha)$ und schreibt die Gleichung (1.13) um:

$$\begin{aligned} [E_\alpha - \hat{K}_\alpha - U_\alpha(\vec{r}_\alpha)]u_\alpha(\vec{r}_\alpha, E_\alpha) &= (\alpha|\hat{V}_\alpha - \hat{U}_\alpha|\Psi_{\alpha_o}^{mod}(E)) \\ &= \sum_{\alpha' \neq \alpha} (\alpha|\hat{V}_\alpha - \hat{U}_\alpha|\alpha')u_{\alpha'}(\vec{r}_{\alpha'}, E_{\alpha'}). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Für das Hilfspotential \hat{U}_α wird dabei in der Praxis ein optisches Potential eingesetzt. Als homogene Lösungen der linken Seite von Gleichung (1.14) erhält man die Streuwellen $\chi_\alpha^{(\pm)}(\vec{r}_\alpha, E_\alpha)$, die asymptotisch den Randbedingungen

$$\chi_\alpha^{(\pm)}(\vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha) \rightarrow (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \left[e^{i\vec{p}_\alpha \vec{r}_\alpha} + f_\alpha^0(\vec{p}_\alpha, \frac{\vec{r}_\alpha}{r_\alpha}) \frac{e^{\pm i p_\alpha r_\alpha}}{r_\alpha} \right] \quad (1.15)$$

genügen ¹. Zwischen beiden Streuwellen besteht die Beziehung

$$\chi_\alpha^{(-)}(\vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha) = \chi_\alpha^{(+)*}(\vec{r}_\alpha, -\vec{p}_\alpha). \quad (1.16)$$

Mit Hilfe der optischen Greensfunktion mit asymptotisch auslaufenden Kugelwellen

¹Als Impulsvektor wird in diesem Kapitel durchgehend \vec{p} bzw. \vec{q} in Einheiten von \hbar verwendet.

$$\mathcal{G}_\alpha^{opt} = [E_\alpha + i\eta - \hat{K}_\alpha - \hat{U}_\alpha]^{-1}, \quad (1.17)$$

erhält man als formale Lösung die Lippmann-Schwinger-Gleichung

$$\begin{aligned} u_\alpha(\vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha) &= \chi_\alpha^{(+)}(\vec{r}_\alpha, E_\alpha) \delta_{\alpha_o\alpha} \\ &+ \int d\vec{r}'_\alpha \mathcal{G}_\alpha^{opt}(\vec{r}_\alpha, \vec{r}'_\alpha) (\alpha | \hat{V}_\alpha - \hat{U}_\alpha | \Psi_{\alpha_o}^{mod}(E))(\vec{r}'_\alpha). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Mit dieser Darstellung kann nun die Streuwellen-Näherung abgeleitet werden. Unter Ausnützen der Asymptotik der optischen Greensfunktion ergibt sich dabei aus der Gleichung (1.18) die Übergangsamplitude

$$T_{\alpha\alpha_o}(\vec{p}_\alpha, \vec{p}_{\alpha_o}) = T_\alpha^{(0)}(\vec{p}_\alpha, \vec{p}_{\alpha_o}) \delta_{\alpha\alpha_o} + \langle \chi_\alpha^{(-)}(\vec{p}_\alpha), \alpha | \hat{W}_\alpha | \Psi_{\alpha_o}^{mod}(E) \rangle, \quad (1.19)$$

wobei $\hat{W}_\alpha = \hat{V}_\alpha - \hat{U}_\alpha$. Da \hat{W}_α bzw. \hat{V}_α effektive Operatoren sind, ist dieser Ausdruck identisch zur exakten Übergangsamplitude in die entsprechenden Kanäle.

Stellt man jetzt $\Psi_{\alpha_o}^{mod}(E)$ durch eine Born'sche Reihe mit der Kanalgreensfunktion

$$\tilde{\mathcal{G}}_\alpha^{(+)} = [E + i\eta - \hat{h}_\alpha - \hat{K}_\alpha - \hat{U}_\alpha]^{-1} \quad (1.20)$$

dar, also

$$\Psi_{\alpha_o}^{mod}(E) = [1 + \tilde{\mathcal{G}}_\alpha^{(+)} \hat{W}_\alpha + \tilde{\mathcal{G}}_\alpha^{(+)} \hat{W}_\alpha \tilde{\mathcal{G}}_\alpha^{(+)} \hat{W}_\alpha + \dots] \chi_{\alpha_o}^{(+)}(\vec{r}_\alpha, E_\alpha) | \alpha_o \rangle, \quad (1.21)$$

so ergibt sich die n-Stufen-Übergangsamplitude

$$T_{\alpha\alpha_o}(\vec{p}_\alpha, \vec{p}_{\alpha_o}) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \chi_\alpha^{(-)}(\vec{p}_\alpha), \alpha | \hat{W}_\alpha (\tilde{\mathcal{G}}_\alpha^{(+)} \hat{W}_\alpha)^{(n-1)} | \alpha_o, \chi_{\alpha_o}^{(+)}(\vec{p}_{\alpha_o}) \rangle. \quad (1.22)$$

Für n=1 ergibt sich die Übergangsamplitude in DWBA-Näherung. Einen entsprechenden Ausdruck erhält man, wenn man bei Berechnung der Wellenfunktion aus Gleichung (1.18) in der Inhomogenität nur die elastische Lösung berücksichtigt. Gleichung (1.22) ist der Ausgangspunkt für alle weiteren Betrachtungen von inelastischen Reaktionen.

Die Verwendung einer einzigen Partition wäre auch im Falle von Transferreaktionen denkbar, wenn entsprechende Kontinuumszustände mitberücksichtigt werden. Wie in Abbildung 1.1 zu sehen, kann die Beschreibung eines Transfers des Teilchens x aus dem zusammengesetzten System $B = A + x$ in das System $a = b + x$ sowohl bezüglich einer Partition $\alpha = a + A$ als auch einer Partition $\beta = b + B$ erfolgen. Allerdings müssen im betrachteten Modellraum die entsprechenden Kontinuumszustände von x relativ zu den Rümpfen b bzw. A enthalten sein. Der Projektor \hat{P} auf diesen Modellraum hat dann folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}\hat{P} &= \hat{P}_\alpha = \sum_{\alpha \in \mathcal{H}_p} |\alpha\rangle\langle\alpha| \\ &= \hat{P}_\beta = \sum_{\beta \in \mathcal{H}_p} |\beta\rangle\langle\beta|.\end{aligned}\tag{1.23}$$

\hat{P} ist nach wie vor ein Projektionsoperator, der nur bezüglich verschiedener erzeugender Systeme dargestellt ist.

Da man bei praktischen Rechnungen auf einen Modellraum mit endlich vielen Zuständen beschränkt ist, sind bei der Beschreibung von Transferreaktionen Kanalzustände aus mindestens zwei verschiedenen Partitionen, die die Fragmentierungen im Eingangs- und Ausgangskanal beschreiben, zu berücksichtigen. Ein Operator \hat{P} , der als Linearkombination von endlich vielen derartigen Kanalzuständen aus verschiedenen Partitionen dargestellt wird,

$$\hat{P} = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha| + \sum_{\beta} |\beta\rangle\langle\beta|,\tag{1.24}$$

ist aber kein Projektionsoperator mehr, da die Eigenschaft $\hat{P}^2 = \hat{P}$ für Projektoren wegen der Nichtorthogonalität von $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ Zuständen verletzt ist. Es ist zwar möglich auch in diesem Fall durch Verwendung einer geeigneten Linearkombination der Zustände $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ einen Projektionsoperator zu konstruieren [Coz65], doch ergibt sich dadurch auch eine Linearkombination der u_α und u_β mit der die Randbedingungen einer Partition α im einlaufenden Kanal und einer Partition β im auslaufenden Kanal nicht mehr verträglich sind.

In den meisten Anwendungen geht man daher näherungsweise von einer Modellwellenfunktion

$$|\Psi_{\alpha_o}^{mod}(E)\rangle = \sum_{\alpha}^{N_\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha|\Psi\rangle + \sum_{\beta}^{N_\beta} |\beta\rangle\langle\beta|\Psi\rangle\tag{1.25}$$

mit endlich vielen Zuständen aus, und berechnet die Übergangsamplitude indem

man die Schrödingergleichung mit einem Basiszustand $|\alpha\rangle$ oder $|\beta\rangle$ projiziert. In Analogie zu Gleichung (1.13) ergeben sich dann die beiden Gleichungen

$$[E_\alpha - \hat{K}_\alpha]u_\alpha(\vec{r}_\alpha, E_\alpha) = (\alpha|\hat{V}_\alpha|\Psi_{\alpha_o}^{mod}(E)) \quad (1.26)$$

$$[E_\beta - \hat{K}_\beta]u_\beta(\vec{r}_\beta, E_\beta) = (\beta|\hat{V}_\beta|\Psi_{\alpha_o}^{mod}(E)). \quad (1.27)$$

Dabei wurde für die effektiven Hamiltonoperatoren der beiden Partitionen jeweils eine Darstellung entsprechend Gleichung (1.2) benützt. Da es zwei verschiedene Partitionen gibt, sind zwei Darstellungen möglich. Man ersetzt in den Gleichungen (1.26) und (1.27) die beiden Diagonalelemente der Restwechselwirkung wieder durch ein Hilfspotential \hat{U}_α ($U_\alpha(\vec{r}_\alpha) = (\alpha|\hat{V}_\alpha|\alpha)$) bzw. \hat{U}_β ($U_\beta(\vec{r}_\beta) = (\beta|\hat{V}_\beta|\beta)$) und erhält für (1.26) die Gleichung (1.14) und für (1.27) den entsprechenden Ausdruck:

$$[E_\beta - \hat{K}_\beta - U_\beta(\vec{r}_\beta)]u_\beta(\vec{r}_\beta, E_\beta) = (\beta|\hat{V}_\beta - \hat{U}_\beta|\Psi_{\alpha_o}^{mod}(E)) \quad (1.28)$$

Wie von C. M. Vincent am Beispiel einer (d, pn) Aufbruch-Reaktion gezeigt wurde [ViF68], gelten diese Beziehungen auch für Transfers bei denen Kontinuumszustände in einer Partition explizit mitberücksichtigt werden. Lösungen zu den Gleichungen (1.28) und (1.14) können wieder durch Verwendung optischer Greensfunktionen zu den beiden Operatoren $\hat{K}_\alpha + \hat{U}_\alpha$ und $\hat{K}_\beta + \hat{U}_\beta$ erhalten werden. Für die elastische bzw. inelastische Anregung erhält man wieder den Ausdruck aus Gleichung (1.19), für den Transfer ergibt sich die Übergangsamplitude

$$T_{\beta\alpha_o}(\vec{p}_\beta, \vec{p}_{\alpha_o}) = \langle \chi_\beta^{(-)}(\vec{p}_\beta), \beta|\hat{W}_\beta|\Psi_{\alpha_o}^{mod}(E) \rangle \quad (1.29)$$

in "Post"-Darstellung, d. h. die Restwechselwirkung liegt im Endkanal vor. Für praktische Anwendungen wird in Gleichung (1.29) die Modellwellenfunktion wieder mit Hilfe der Kanalgreensfunktion aus Gleichung (1.20) ausgedrückt. Damit kann die Transferübergangsamplitude als Summe von n-Stufen-Amplituden in "Post"-Form in Analogie zu (1.22) dargestellt werden:

$$T_{\beta\alpha_o}^{post}(\vec{p}_\beta, \vec{p}_{\alpha_o}) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \chi_\beta^{(-)}(\vec{p}_\beta), \beta|\hat{W}_\beta (\tilde{\mathcal{G}}_\alpha^{(+)} \hat{W}_\alpha)^{(n-1)} |\alpha_o, \chi_{\alpha_o}^{(+)}(\vec{p}_{\alpha_o}) \rangle. \quad (1.30)$$

Eine andere Darstellung erhält man durch Betrachtung der Umkehrreaktion. Dann liegt die einlaufende Welle in einem bestimmten β -Kanal vor, der Transferzustand

im α_o -Kanal. Führt man jetzt, das oben skizzierte Verfahren zur Berechnung der Übergangsamplitude für die Umkehrreaktion erneut durch und nützt man die Zeitumkehrrelation für die Übergangsamplituden aus, also

$$T_{-\beta-\alpha_o}(-\vec{p}_\beta, -\vec{p}_{\alpha_o}) = T_{\alpha_o\beta}(\vec{p}_{\alpha_o}, \vec{p}_\beta)(-)^{\pi_{\beta\alpha_o}}, \quad (1.31)$$

so ergibt sich unter Verwendung von (1.16) die Transferübergangsamplitude in "Prior"-Darstellung:

$$T_{\beta\alpha_o}^{prior}(\vec{p}_\beta, \vec{p}_{\alpha_o}) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \chi_\beta^{(-)}(\vec{p}_\beta), \beta | (\hat{W}_\beta \tilde{\mathcal{G}}_\beta^{(-)})^{(n-1)} \hat{W}_\alpha | \alpha_o, \chi_{\alpha_o}^{(+)}(\vec{p}_{\alpha_o}) \rangle. \quad (1.32)$$

Für die erste Stufe ($n=1$) ergeben sich die üblichen DWBA-Transferübergangsamplituden in der "Post" und "Prior" Darstellung:

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha_o}^{prior}(\vec{p}_\beta, \vec{p}_{\alpha_o}) &= \langle \chi_\beta^{(-)}(\vec{p}_\beta), \beta | \hat{W}_\alpha | \alpha_o, \chi_{\alpha_o}^{(+)}(\vec{p}_{\alpha_o}) \rangle \\ &= \langle \chi_\beta^{(-)}(\vec{p}_\beta) | I_{\beta\alpha}^{prior} | \chi_{\alpha_o}^{(+)}(\vec{p}_{\alpha_o}) \rangle \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha_o}^{post}(\vec{p}_\beta, \vec{p}_{\alpha_o}) &= \langle \chi_\beta^{(-)}(\vec{p}_\beta), \beta | \hat{W}_\beta | \alpha_o, \chi_{\alpha_o}^{(+)}(\vec{p}_{\alpha_o}) \rangle \\ &= \langle \chi_\beta^{(-)}(\vec{p}_\beta) | I_{\beta\alpha}^{post} | \chi_{\alpha_o}^{(+)}(\vec{p}_{\alpha_o}) \rangle, \end{aligned} \quad (1.34)$$

mit den Wechselwirkungskernen bzw. Kernmatrixelementen $I_{\beta\alpha}^{prior} = (\beta | \hat{W}_\alpha | \alpha_o)$ und $I_{\beta\alpha}^{post} = (\beta | \hat{W}_\beta | \alpha_o)$ in "Prior" bzw. "Post"-Darstellung. Die Restwechselwirkungen \hat{W}_α und \hat{W}_β können dann, ausgedrückt durch optische Potentiale \hat{U} und durch die Wechselwirkungen zwischen den Fragmenten, wie folgt,

$$\hat{W}_\alpha = \hat{V}_{Ax} + (\hat{V}_{bA} - \hat{U}_\alpha) \quad (1.35)$$

$$\hat{W}_\beta = \hat{V}_{bx} + (\hat{V}_{bA} - \hat{U}_\beta), \quad (1.36)$$

angegeben werden [Sat83]. In DW-Näherung werden die beiden Terme $(\hat{V}_{bA} - \hat{U}_\alpha)$ und $(\hat{V}_{bA} - \hat{U}_\beta)$, die sogenannten "indirekten" Wechselwirkungskerne, vernachlässigt. Sie sind in einem vollständigen Dreikörperansatz durch höhere Terme in der Mehrstufenreihe gegeben. Als Endergebnis findet man somit aus beiden Herleitungen die folgenden EFR-DWBA-Übergangsamplituden von einer α - in eine β -Partition in "Post"- und in "Prior"-Darstellung die bei der Diskussion des Formfaktors Verwendung findet:

$$\begin{aligned}
T_{\beta\alpha_o}^{prior}(\vec{p}_\beta, \vec{p}_{\alpha_o}) &= \langle \chi_\beta^{(-)}(\vec{p}_\beta), \beta | \hat{V}_{Ax} | \alpha_o, \chi_{\alpha_o}^{(+)}(\vec{p}_{\alpha_o}) \rangle \\
&= \langle \chi_\beta^{(-)}(\vec{p}_\beta) | I_{\beta\alpha}^{prior} | \chi_{\alpha_o}^{(+)}(\vec{p}_{\alpha_o}) \rangle
\end{aligned} \tag{1.37}$$

$$\begin{aligned}
T_{\beta\alpha_o}^{post}(\vec{p}_\beta, \vec{p}_{\alpha_o}) &= \langle \chi_\beta^{(-)}(\vec{p}_\beta), \beta | \hat{V}_{bx} | \alpha_o, \chi_{\alpha_o}^{(+)}(\vec{p}_{\alpha_o}) \rangle \\
&= \langle \chi_\beta^{(-)}(\vec{p}_\beta) | I_{\beta\alpha}^{post} | \chi_{\alpha_o}^{(+)}(\vec{p}_{\alpha_o}) \rangle.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Die wesentlichen Größen, von der diese Übergangsamplituden abhängen, sind die Hilfspotentiale, die in der Praxis wieder durch optische Potentiale ersetzt werden. Falls $U_\alpha(\vec{r}_\alpha) = \langle \alpha | \hat{V}_\alpha | \alpha \rangle$ bzw. $U_\beta(\vec{r}_\beta) = \langle \beta | \hat{V}_\beta | \beta \rangle$ gewählt wird, so kann gezeigt werden, daß "Prior" und "Post" -Darstellung theoretisch gleich sind [Sat83]. Da die optischen Potentiale U den Diagonalelementen der komplizierten, effektiven Wechselwirkung V aber nur näherungsweise entsprechen, ist die Gleichheit im allgemeinen nicht erfüllt. Üblicherweise werden die optischen Potentiale an Streudaten bei der entsprechenden Energie angepasst. Wenn diese "Fits" gut sind, dann wird die entsprechende "Distorted Wave" mit der wahren asymptotischen Lösung übereinstimmen und auch an der Oberfläche der Reaktionszone nicht allzu sehr abweichen. Es besteht allerdings keine Garantie, daß im Inneren der Reaktionszone die "Distorted Wave" und die wahre Lösung gleich sind. Die Verwendung eines optischen Modells kann daher Fehler verursachen, wenn der innere Bereich der Reaktionszone zur Übergangsamplitude beiträgt.

1.2 Hamiltonoperator des Dreikörperproblems und Mehrfachstreuung

Im letzten Abschnitt wurde die n-Stufen DWBA-Übergangsamplitude bestimmt. Die Herleitung erfolgte rein formal, so daß die Frage, unter welchen mathematischen Voraussetzungen die erhaltenen Ausdrücke gelten, noch offen ist. Bei der folgenden Diskussion, die sich argumentativ weitgehend an das Buch von Glöckle [Glo83] anlehnt, wird sich zeigen, daß für mehr als zwei Teilchen, die an der Reaktion beteiligt sind, eine Lippmann-Schwinger-Gleichung alleine die Randbedingungen nicht eindeutig festlegt, und daß der auftretende Integralkern nicht quadratintegrierbar ist, so daß eine Born'sche respektive "Distorted Wave"-Born'sche Reihe nicht konvergieren muß. Es sollen daher ausgehend von einem Dreikörperhamiltonoperator, wie er in Abschnitt 1.2 formuliert wurde, Übergangsamplituden abgeleitet werden, die die oben beschriebenen, mathematischen Schwierigkeiten berücksichtigen. Ausgangspunkt sei zunächst der effektive Gesamthamiltonoperator \hat{H} in einer "Dreikörperzerlegung" (A, b, x)

$$\hat{H} = \hat{K}_0 + \hat{V}_{Ax} + \hat{V}_{Ab} + \hat{V}_{bx} + \hat{h}_0, \quad (1.39)$$

wobei der intrinsische Hamiltonoperator \hat{h}_0 die Summe der Kernoperatoren \hat{h}_A , \hat{h}_b und \hat{h}_x ist. \hat{K}_0 kann bezüglich verschiedener Impulsoperatoren dargestellt werden. Verwendet man Jacobikoordinaten² (Siehe auch Abbildung 1.1), die z. B. für die α -Partition $(A, (b+x))$ bzw. die β -Partition $((A+x), b)$, wie folgt gegeben sind [New66]

$$\begin{aligned} \vec{\rho}_\alpha &= \vec{r}_b - \vec{r}_x & \vec{r}_\alpha &= \vec{r}_A - \frac{m_b \vec{r}_b + m_x \vec{r}_x}{m_b + m_x} \\ \vec{\rho}_\beta &= \vec{r}_A - \vec{r}_x & \vec{r}_\beta &= \vec{r}_b - \frac{m_A \vec{r}_A + m_x \vec{r}_x}{m_A + m_x}, \end{aligned} \quad (1.40)$$

so ergeben sich die dazugehörigen konjugierten Impulsvektoren zu

$$\begin{aligned} \vec{q}_\alpha &= \frac{m_x}{m_a} \vec{p}_b - \frac{m_b}{m_a} \vec{p}_x & \vec{p}_\alpha &= \frac{m_a}{m_a + m_A} \vec{p}_A - \frac{m_A}{m_a + m_A} (\vec{p}_b + \vec{p}_x) \\ \vec{q}_\beta &= \frac{m_x}{m_B} \vec{p}_A - \frac{m_A}{m_B} \vec{p}_x & \vec{p}_\beta &= \frac{m_B}{m_b + m_B} \vec{p}_b - \frac{m_b}{m_b + m_B} (\vec{p}_A + \vec{p}_x). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Eine entsprechende Aufteilung existiert auch für die dritte mögliche Zweifragmentpartition $(A+b), x$, die als γ -Partition bezeichnet werde, so daß \hat{K}_0 kompakt wie folgt geschrieben werden kann:

$$\hat{K}_0 = \frac{\hat{P}_S^2}{2(m_A + m_b + m_x)} + \frac{\hat{p}_\nu^2}{2\mu_\nu} + \frac{\hat{q}_\nu^2}{2m_\nu} \quad \nu = \alpha, \beta, \gamma. \quad (1.42)$$

Der erste Term beschreibt dabei die Schwerpunktbewegung und die beiden anderen Terme beschreiben Relativbewegungen zwischen verschiedenen Subsystemen. Die Größen μ_ν und m_ν bezeichnen die reduzierten Massen bezüglich dieser Subsysteme, also etwa im Falle der α -Partition:

$$\mu_\alpha = \frac{m_A(m_b + m_x)}{m_A + m_b + m_x} \quad m_\alpha = \frac{m_x m_b}{m_b + m_x}. \quad (1.43)$$

In dieser Darstellung besitzt die kinetische Energie Diagonalgestalt in den Koordinaten der entsprechenden Zerlegung. Für die Operatoren der potentiellen Energie

²Benannt nach Carl Gustav Jacobi (1804-1851)

aus Gleichung (1.39) ist dies nicht der Fall, so daß ein Separationsansatz für die Zustände im allgemeinen nicht möglich ist.

Zunächst wird zum Zwecke einer einfacheren Darstellung die Gesamtimpulserhaltung ausgenützt, also $\vec{P}_S = \vec{p}_A + \vec{p}_b + \vec{p}_x = 0$ gesetzt, d.h. es werden Schwerpunktkoordinaten verwendet. Weiter soll die Wechselwirkung, die in einer Zweifragmentpartition λ auch asymptotisch noch wirkt³, als \hat{V}^λ (hochgestellter Index), also z.B. $\hat{V}^\alpha = \hat{V}_{bx}$ oder $\hat{V}^\gamma = \hat{V}_{Ab}$, bezeichnet werden. Die Dreikörperpartition (A, b, x) wird mit dem Index 0 bezeichnet; für sie ist $\hat{V}^0 = 0$. Für die anderen Wechselwirkungen im Partitions-Hamiltonoperator wird \hat{V}_λ (mit tiefgestelltem Index) geschrieben. Damit erhält man z. B. $\hat{V}_\alpha = \hat{V}_{Ax} + \hat{V}_{Ab}$ und $\hat{V}_0 = \hat{V}_{Ax} + \hat{V}_{Ab} + \hat{V}_{bx}$. In dieser Notation können die Partitions-Hamiltonoperatoren kompakt, wie folgt geschrieben werden:

$$\hat{H}_\lambda = \hat{K}_0 + \hat{h}_0 + \hat{V}^\lambda = \hat{H} - \hat{V}_\lambda \quad \lambda = 0, \alpha, \beta, \gamma. \quad (1.44)$$

Um auch Anregungszustände der Fragmente A , b und x explizit mitberücksichtigen zu können, wird in Erweiterung zu [Glo83] der intrinsische Hamiltonoperator \hat{h}_0 in eine Summe von zwei Hamiltonoperatoren $\hat{h}^{(\lambda)}$ und $\hat{h}_{(\lambda)}$ zerlegt. Dabei ist $\hat{h}^{(\lambda)}$ die Summe der Hamiltonoperatoren zu den Fragmenten zwischen denen die effektive Wechselwirkung \hat{V}^λ wirkt und $\hat{h}_{(\lambda)}$ der Hamiltonoperator zu dem verbleibenden Fragment. Die Eigenzustände zu $\hat{h}^{(\lambda)}$ werden mit $|\iota^\lambda\rangle$, die zu $\hat{h}_{(\lambda)}$ mit $|\iota_\lambda\rangle$ bezeichnet. Für die α -Partition ergibt sich dann z. B. $\hat{h}^{(\alpha)} = \hat{h}_b + \hat{h}_x$ mit den Eigenzuständen $|\iota^\alpha\rangle = |b\rangle|x\rangle$ und $\hat{h}_{(\alpha)} = \hat{h}_A$ mit dem Eigenzuständen $|\iota_\alpha\rangle = |A\rangle$. Diese Kernzustände können aus Kernstrukturrechnungen erhalten werden. Realistische Modelle dafür werden in Kapitel 3 vorgestellt.

Gleichung (1.44) verdeutlicht die Herkunft der beim Transfer benötigten Wechselwirkungen. Die Summe der beiden Operatoren \hat{h}_0 und \hat{V}^λ entspricht im Falle $\lambda = \alpha$ dem Hamiltonoperator \hat{h}_α aus Gleichung (1.4). Der Wechselwirkungsoperator \hat{V}_α ist, wie oben erwähnt, die Summe aus den Operatoren der Wechselwirkung zwischen A und x sowie A und b , also gerade der Term, der in die Restwechselwirkung \hat{W}_α in Prior-Darstellung eingeht. Entsprechendes gilt für die β - bzw. γ -Partition, die dann einer Post-Darstellung entsprechen.

Die Partitions-Hamiltonoperatoren aus Gleichung (1.44) beschreiben Zwei- bzw. Dreifragmentpartitionen. Für die weitere Diskussion werden zum vollen Hamiltonoperator und zu diesen Operatoren Resolventen eingeführt:

$$\mathcal{G}(z) = [z - \hat{H}]^{-1}; \mathcal{G}_\lambda(z) = [z - \hat{H}_\lambda]^{-1} \quad (1.45)$$

Mit Hilfe der Gell-Mann-Goldberger-Relation [GeG53] für stationäre Streuzustände

³Glöckle verwendet an Stelle des Begriffs Partition den Begriff Kanal. Nach Ansicht des Autors beschreibt der Ausdruck Partition geeigneter die Aufteilung in Massenfragmente, mit der man es hier zu tun hat.

$|\Psi_\lambda^{(+)}\rangle$ mit dem einlaufenden Zustand $|\Phi_\lambda\rangle$,

$$|\Psi_\lambda^{(+)}\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i\epsilon \mathcal{G}(E_\lambda + i\epsilon) |\Phi_\lambda\rangle \quad \lambda = \alpha, \beta, \gamma, 0 \quad (1.46)$$

und der Resolventenidentität

$$\mathcal{G}(z) = \mathcal{G}_\lambda(z) + \mathcal{G}_\lambda(z) \hat{V}_\lambda \mathcal{G}(z) \quad (1.47)$$

erhält man für die vier Fragmentierungen vier verschiedene Lippmann-Schwinger-Gleichungen,

$$|\Psi_\lambda^{(+)}\rangle = |\Phi_\lambda\rangle + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{G}_\lambda(E + i\epsilon) \hat{V}_\lambda |\Psi_\lambda^{(+)}\rangle \quad \lambda = 0, \alpha, \beta, \gamma, \quad (1.48)$$

wenn man jeweils die gleiche Partition in (1.46) und (1.47) benutzt. Dabei wurde außerdem die sogenannte Lippmann-Identität [Lip56]

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} i\epsilon \mathcal{G}_\kappa(E_\kappa + i\epsilon) |\Phi_\lambda\rangle = \delta_{\lambda\kappa} |\Phi_\lambda\rangle \quad \kappa \neq 0, \lambda \neq 0, \quad (1.49)$$

ausgenützt. Die so erhaltenen LS-Gleichungen (1.48) sind durch zwei wesentliche Eigenschaften gekennzeichnet: Zum einen haben sie, wie weiter unten diskutiert wird, einen nicht quadratintegrierbaren Kern (nicht- \mathcal{L}^2 integrierbaren Integralkern)⁴ $\mathcal{G}_\lambda(z) \hat{V}_\lambda$, das bedeutet, die Norm

$$\|Tr[\mathcal{G}_\lambda(z) \hat{V}_\lambda (\mathcal{G}_\lambda(z) \hat{V}_\lambda)^\dagger]\| \quad (1.50)$$

ist nicht beschränkt. Zum anderen sind die Lösungen nicht eindeutig.

Das Problem der Quadratintegrierbarkeit sieht man wie folgt ein: Als Ausgangspunkt werde exemplarisch der Integralkern $\mathcal{G}_0 \hat{V}_0$ für eine Aufbruchreaktion betrachtet. Für ein Matricelement dieses Kerns in einem Dreiteilchenimpulsraum (zur Vereinfachung werden keine intrinsischen Kernzustände mitberücksichtigt), ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_A \vec{p}_b \vec{p}_x | \mathcal{G}_0 \hat{V}_0 | \vec{p}'_A \vec{p}'_b \vec{p}'_x \rangle &= \frac{\delta(\vec{p}_A + \vec{p}_b + \vec{p}_x - \vec{p}'_A - \vec{p}'_b - \vec{p}'_x)}{z - \sum_\lambda \frac{p_\lambda^2}{2\mu_\lambda}} \\ &\times [\delta(\vec{p}_\alpha - \vec{p}'_\alpha) \langle \vec{q}_\alpha | \hat{V}^\alpha | \vec{q}'_\alpha \rangle + \delta(\vec{p}_\beta - \vec{p}'_\beta) \langle \vec{q}_\beta | \hat{V}^\beta | \vec{q}'_\beta \rangle \\ &+ \delta(\vec{p}_\gamma - \vec{p}'_\gamma) \langle \vec{q}_\gamma | \hat{V}^\gamma | \vec{q}'_\gamma \rangle] \end{aligned} \quad (1.51)$$

⁴Man sagt auch der Integralkern ist nicht in der Hilbert-Schmidt-Klasse

Die \mathcal{L}^2 -Norm ist dann von folgender Form:

$$\|\mathcal{G}_0 \hat{V}_0\| = \left[\int d\vec{p}_A d\vec{p}_b d\vec{p}_x d\vec{p}'_A d\vec{p}'_b d\vec{p}'_x |\langle \vec{p}_A \vec{p}_b \vec{p}_x | \mathcal{G}_0 \hat{V}_0 | \vec{p}'_A \vec{p}'_b \vec{p}'_x \rangle|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.52)$$

Während das Quadrat der den Gesamtimpuls erhaltenden Deltafunktion durch Übergang ins Schwerpunktsystem eliminiert werden kann, bleiben im Integranden Quadrate der Art $(\delta(\vec{p}_\alpha - \vec{p}'_\alpha))^2$ übrig, so daß die \mathcal{L}^2 -Norm nicht existiert. Eine entsprechende Überlegung gilt natürlich auch für die Integralkerne $\mathcal{G}_\lambda \hat{V}_\lambda$ mit $\lambda \neq 0$. In der Sprechweise der Störungstheorie ist dies gleichbedeutend mit dem Auftreten von nichtzusammenhängenden Diagrammen ("Disconnected Diagrams") [Joa75].

Die fehlende Eindeutigkeit für ein bestimmtes λ sieht man wie folgt ein: Setzt man die Identität (1.47) in (1.46) mit einer von λ verschiedenen Resolvente $\mathcal{G}_\kappa(z)$ ein, so ergibt sich :

$$|\Psi_\lambda^{(+)}\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i\epsilon \mathcal{G}_\kappa(E_\lambda + i\epsilon) |\Phi_\lambda\rangle + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{G}_\kappa(E_\lambda + i\epsilon) \hat{V}_\kappa |\Psi_\lambda^{(+)}\rangle. \quad (1.53)$$

mit der Lippmann-Identität aus Gleichung (1.49), folgt für $|\Psi_\lambda^{(+)}\rangle$ die homogene Gleichung

$$|\Psi_\lambda^{(+)}\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{G}_\kappa(E_\lambda + i\epsilon) \hat{V}_\kappa |\Psi_\lambda^{(+)}\rangle \quad \kappa \neq \lambda \neq 0. \quad (1.54)$$

Das bedeutet, daß Gleichung (1.48) allein für ein gegebenes λ die Wellenfunktion $|\Psi_\lambda^{(+)}\rangle$ nicht eindeutig bestimmt, denn es sind zwei zusätzliche, homogene Gleichungen (1.54) nötig, um die Randbedingungen eindeutig festzulegen. Dies ist mit folgender Überlegung einsichtig: Betrachtet man z. B. eine in Partition α einlaufende Welle $|\Phi_\alpha\rangle$ so gilt zunächst ($\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ weggelassen):

$$|\Psi_\alpha^{(+)}\rangle = |\Phi_\alpha\rangle + \mathcal{G}_\alpha^{(+)} \hat{V}_\alpha |\Psi_\alpha^{(+)}\rangle. \quad (1.55)$$

Diese Gleichung ist aber auch für eine beliebige Beimischung von $|\Psi_\beta^{(+)}\rangle$ und $|\Psi_\gamma^{(+)}\rangle$ erfüllt, da die Gleichung (1.54) gilt. Da aber $|\Psi_\beta^{(+)}\rangle$ und $|\Psi_\gamma^{(+)}\rangle$ ebenfalls eine inhomogene Lippmann-Schwinger-Gleichung vom Typ (1.48) erfüllen, ist nur bei zusätzlicher Vorgabe der homogenen Gleichungen (1.54) das Problem eindeutig. Für eine eindeutige Lösung in einem Zweifragmentkanal müssen also drei Lippmann-Schwinger-Gleichungen, zwei homogene und eine inhomogene erfüllt sein.

Da in dieser Arbeit Partitionen mit drei freien Fragmenten im Vordergrund stehen, sollen nun auch noch die entsprechenden Gleichungen für derartige "ternäre Partitionen" angegeben werden. $|\Psi_0^{(+)}\rangle$ bezeichne einen derartigen Zustand, also eine Wellenfunktion mit drei Teilchen im Anfangszustand. Nach Gleichung (1.46) gilt

$$|\Psi_0^{(+)}\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i\epsilon \mathcal{G}(E_0 + i\epsilon) |\Phi_0\rangle, \quad (1.56)$$

wobei $|\Phi_0\rangle = |\vec{p}_\lambda\rangle \otimes |\vec{q}_\lambda\rangle \otimes |(A, b, x)\rangle := |p_\lambda, q_\lambda, \iota^0\rangle$ als direkte Produktwellenfunktion der Eigenzustände $|\vec{p}_\lambda\rangle$, $|\vec{q}_\lambda\rangle$ und $|\iota^0\rangle$ zu den kinetischen Energieoperatoren $\hat{p}_\lambda^2/2\mu_\lambda$, $\hat{q}_\lambda^2/2m_\lambda$ (λ gleich α , β oder γ) und zum intrinsischen Hamiltonoperator \hat{h} geschrieben werden kann. Die Wahl der Jacobikoordinaten ist beliebig, da ungebundene Zustände beschrieben werden. Führt man jetzt die Resolventenidentität (1.47) für ein $\lambda \neq 0$ in die obige Gleichung ein, so erhält man für den ersten Term folgenden Ausdruck

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} i\epsilon \mathcal{G}_\lambda(E_0 + i\epsilon) |\Phi_0\rangle = |\vec{p}_\lambda\rangle \otimes |\vec{q}_\lambda^{(+), \iota_\lambda}\rangle \otimes |\iota^\lambda\rangle := |p_\lambda, (q_\lambda^{(+), \iota_\lambda}), \iota^\lambda\rangle. \quad (1.57)$$

$|\vec{q}_\lambda^{(+), \iota_\lambda}\rangle$ beschreibt dabei einen Streuzustand zu dem Hamiltonoperator $\hat{q}_\lambda^2/2m_\lambda + \hat{h}_\lambda + \hat{V}^\lambda$, also ein vollständiges Streuproblem für die binäre Teilpartition der Partition λ , die im weiteren als "Unterteilpartition" λ bezeichnet werde. Betrachtet man z. B. einen Nukleontentransfer ($x = n, p$), so ist für $\lambda = \alpha$ die Wellenfunktion $|\vec{q}_\alpha^{(+), \iota_\alpha}\rangle$ eine Protonen- oder Neutronenstreuwellen relativ zum Target A . Daher kann man für das effektive Potential \hat{V}^λ ein optisches Potential einzusetzen, daß die elastische Streuung an A beschreibt. Der Ausdruck (1.57) gilt für alle $\lambda \neq 0$, so daß der Dreifragmentzustand durch folgende Lippmann-Schwinger-Gleichungen dargestellt werden kann:

$$|\Psi_0^{(+)}\rangle = |p_\lambda, (q_\lambda^{(+), \iota_\lambda}), \iota^\lambda\rangle + \mathcal{G}_\lambda^{(+)} \hat{V}_\lambda |\Psi_0^{(+)}\rangle \quad \lambda = \alpha, \beta, \gamma. \quad (1.58)$$

Auch hier werden wieder drei Lippmann-Schwinger-Gleichungen zur eindeutigen Bestimmung des Aufbruchzustandes benötigt. Es könnte nämlich der Fall eintreten, daß zwei Fragmente beim Verlassen der Reaktionszone die gleiche Geschwindigkeit und Richtung haben. Um einen derartigen Zustand von einem Zweifragmentzustand eindeutig zu unterscheiden, bedarf es der beiden anderen Partitionen.

Die nächste Frage, die sich jetzt stellt ist, welchen Einfluß die zusätzlichen Randbedingungen auf die Form der Übergangsamplituden, bzw. die T-Matrizen, haben. Allgemeine Ausdrücke für eine Übergangsamplitude zwischen einem Anfangs- und einem Endzustand sind

$$\begin{aligned} T_{\kappa,\nu}^{(+)} &= \langle \Phi_\kappa | \hat{V}_\kappa | \Psi_\nu^{(+)} \rangle, \\ T_{\kappa,\nu}^{(-)} &= \langle \Psi_\kappa^{(-)} | \hat{V}_\nu | \Phi_\nu \rangle. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Diese Übergangsamplituden können auch mit Hilfe von Übergangsoperatoren $\hat{U}_{\kappa\nu}^+$ bzw. $\hat{U}_{\kappa\nu}^-$ wie folgt dargestellt werden

$$\begin{aligned} T_{\kappa,\nu}^{(+)} &= \langle \Phi_\kappa | \hat{U}_{\kappa\nu}^+ | \Phi_\nu \rangle \\ T_{\kappa,\nu}^{(-)} &= \langle \Phi_\kappa | \hat{U}_{\kappa\nu}^- | \Phi_\nu \rangle. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Die Übergangsoperatoren selbst, ergeben sich aus drei Lippmann-Schwinger- Gleichungen, einer inhomogenen (1.48) und zwei homogenen (1.54). Durch Bilden einer geeigneten Linearkombination findet man zum Beispiel für eine Eingangspartition ν folgendes Gleichungssystem für die zugehörigen Übergangsoperatoren:

$$\begin{aligned} \hat{U}_{\nu\nu}^+ | \Phi_\nu \rangle &= \hat{V}_\nu | \Psi_\nu^{(+)} \rangle = \hat{V}^\lambda \mathcal{G}_\lambda \hat{U}_{\lambda\nu}^+ | \Phi_\nu \rangle + \hat{V}^\kappa \mathcal{G}_\kappa \hat{U}_{\kappa\nu}^+ | \Phi_\nu \rangle \\ \hat{U}_{\lambda\nu}^+ | \Phi_\nu \rangle &= \hat{V}_\lambda | \Psi_\nu^{(+)} \rangle = \hat{V}^\nu | \Phi_\nu \rangle + \hat{V}^\nu \mathcal{G}_\nu \hat{U}_{\nu\nu}^+ | \Phi_\nu \rangle + \hat{V}^\kappa \mathcal{G}_\kappa \hat{U}_{\kappa\nu}^+ | \Phi_\nu \rangle \\ \hat{U}_{\kappa\nu}^+ | \Phi_\nu \rangle &= \hat{V}_\kappa | \Psi_\nu^{(+)} \rangle = \hat{V}^\nu | \Phi_\nu \rangle + \hat{V}^\nu \mathcal{G}_\nu \hat{U}_{\nu\nu}^+ | \Phi_\nu \rangle + \hat{V}^\lambda \mathcal{G}_\lambda \hat{U}_{\lambda\nu}^+ | \Phi_\nu \rangle. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Setzt man außerdem für

$$\hat{V}^\nu | \Phi_\nu \rangle = \mathcal{G}_0^{-1} | \Phi_\nu \rangle \quad (1.62)$$

ein, so ergeben sich in Operatorschreibweise die sogenannten AGS-Gleichungen (Alt, Grassberger und Sandhas [AGS67], [GrS69]):

$$\begin{aligned} \hat{U}_{\kappa\nu}^+ &= \bar{\delta}_{\kappa\nu} \mathcal{G}_0^{-1} + \sum_\lambda \bar{\delta}_{\lambda\nu} \hat{U}_{\kappa\lambda}^+ \mathcal{G}_\lambda \hat{V}^\lambda = \bar{\delta}_{\kappa\nu} \mathcal{G}_0^{-1} + \sum_\lambda \bar{\delta}_{\lambda\nu} \hat{U}_{\kappa\lambda}^+ \mathcal{G}_0 \hat{t}_\lambda \\ \hat{U}_{\kappa\nu}^- &= \bar{\delta}_{\kappa\nu} \mathcal{G}_0^{-1} + \sum_\lambda \bar{\delta}_{\lambda\kappa} \hat{V}^\lambda \mathcal{G}_\lambda \hat{U}_{\lambda\nu}^- = \bar{\delta}_{\kappa\nu} \mathcal{G}_0^{-1} + \sum_\lambda \bar{\delta}_{\lambda\kappa} \hat{t}_\lambda \mathcal{G}_0 \hat{U}_{\lambda\nu}^-, \end{aligned} \quad (1.63)$$

wobei die $\hat{t}_\lambda = \hat{V}^\lambda + \hat{V}^\lambda \mathcal{G}_\lambda \hat{V}^\lambda$ Zweifragmentübergangsoperatoren sind und der Ausdruck $\bar{\delta}_{\lambda\nu}$ für $1 - \delta_{\lambda\nu}$ steht.

Die AGS-Gleichungen gelten auch für Übergangsoperatoren in ternäre Partitionen,

also in eine Breakup-Partition. Wie sich zeigen läßt [Glo83], können diese Übergangoperatoren auch wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\hat{U}_{\nu 0}^+ &= \hat{U}_{\nu \kappa}^+(1 + \mathcal{G}_\kappa \hat{V}^\kappa) & \kappa, \nu \neq 0 \\ \hat{U}_{0\nu}^- &= (1 + \hat{V}^\kappa \mathcal{G}_\kappa) \hat{U}_{\kappa\nu}^- & \end{aligned} \quad (1.64)$$

Das bedeutet, daß z. B. im zweiten Fall die Übergangsamplitude folgenden Gleichungen gehorcht:

$$\langle \Phi_0 | \hat{U}_{0\nu}^- | \Phi_\nu \rangle = \langle \Phi_0 | (1 + \hat{V}^\kappa \mathcal{G}_\kappa) \hat{U}_{\kappa\nu}^- | \Phi_\nu \rangle = \langle \Phi_\kappa^{(-)} | \hat{U}_{\kappa\nu}^- | \Phi_\nu \rangle \quad (1.65)$$

Der Zustand $\langle \Phi_\kappa^{(-)} | = \langle p_\kappa, (q_\kappa^{(-)} \iota_\kappa), \iota_\kappa |$ entspricht dann wieder einem Produktzustand mit einer Streufunktion $\langle q_\kappa^{(-)}, \iota_\kappa |$, wie bereits auf Seite 21 erläutert wurde. Man bezeichnet daher $\langle \Phi_\kappa^{(-)} |$ auch als Kanalstreu Zustand ("Distorted Wave-Channel-State" [Glo83]). Die Aufbruchübergangsamplitude wird dann durch Verwendung einer solchen Streufunktion in der Unterteilung formuliert. Dabei sind alle drei Partitionen gleichberechtigt, d. h. der Break-Up kann explizit mit der Transferübergangsamplitude einer inelastischen Streuung $\langle \Phi_\alpha^{(-)} | \hat{U}_{\alpha\alpha}^- | \Phi_\alpha \rangle = \langle p_\alpha, (q_\alpha^{(-)} \iota_\alpha), \iota_\alpha | \hat{U}_{\alpha\alpha}^- | \Phi_\alpha \rangle$ oder der Transferübergangsamplitude eines Rearrangement-Prozesses $\langle \Phi_\beta^{(-)} | \hat{U}_{\beta\alpha}^- | \Phi_\alpha \rangle = \langle p_\beta, (q_\beta^{(-)} \iota_\beta), \iota_\beta | \hat{U}_{\beta\alpha}^- | \Phi_\alpha \rangle$ beschrieben werden. Im Ortsraum sind die Größen $\langle p_\kappa | \vec{r}_\kappa \rangle$ dann ebene Wellen in Jacobikoordinaten.

Für eine kompaktere Darstellung können die AGS-Gleichungen (1.63) auch als matrixwertige Operatorgleichungen

$$\underline{\hat{U}}^- = \underline{\mathcal{G}}_0^{-1} + \underline{\mathcal{K}} \underline{\hat{U}}^- \quad \text{und} \quad \underline{\hat{U}}^+ = \underline{\mathcal{G}}_0^{-1} + \underline{\hat{U}}^+ \underline{\mathcal{K}}^\dagger \quad (1.66)$$

mit den Matrizen

$$\underline{\hat{U}}^\pm = \begin{bmatrix} \hat{U}_{\alpha\alpha}^\pm & \hat{U}_{\alpha\beta}^\pm & \hat{U}_{\alpha\gamma}^\pm \\ \hat{U}_{\beta\alpha}^\pm & \hat{U}_{\beta\beta}^\pm & \hat{U}_{\beta\gamma}^\pm \\ \hat{U}_{\gamma\alpha}^\pm & \hat{U}_{\gamma\beta}^\pm & \hat{U}_{\gamma\gamma}^\pm \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\mathcal{G}}_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{G}_0^{-1} & \mathcal{G}_0^{-1} \\ \mathcal{G}_0^{-1} & 0 & \mathcal{G}_0^{-1} \\ \mathcal{G}_0^{-1} & \mathcal{G}_0^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.67)$$

sowie den matrixwertigen Integralkernen

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{t}_\beta & \hat{t}_\gamma \\ \hat{t}_\alpha & 0 & \hat{t}_\gamma \\ \hat{t}_\alpha & \hat{t}_\beta & 0 \end{bmatrix} \mathcal{G}_0 \quad \text{und} \quad \mathcal{K}^\dagger = \mathcal{G}_0 \begin{bmatrix} 0 & \hat{t}_\alpha & \hat{t}_\alpha \\ \hat{t}_\beta & 0 & \hat{t}_\beta \\ \hat{t}_\gamma & \hat{t}_\gamma & 0 \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

formuliert werden. An dieser Stelle tritt das bereits auf Seite 19 diskutierte Problem erneut auf: Die Integralkerne \mathcal{K} bzw. \mathcal{K}^\dagger sind nicht quadratintegrierbar (nicht \mathcal{L}^2 -integrierbar).

Durch Einsetzen der AGS-Gleichungen (1.63), bzw. (1.66), in sich selbst

$$\begin{aligned}\underline{\hat{U}}^- &= \underline{\mathcal{G}}_0^{-1} + \underline{\mathcal{K}}\underline{\mathcal{G}}_0^{-1} + \underline{\mathcal{K}}^2\underline{\hat{U}}^- \\ \underline{\hat{U}}^+ &= \underline{\mathcal{G}}_0^{-1} + \underline{\mathcal{G}}_0^{-1}\underline{\mathcal{K}}^\dagger + \underline{\hat{U}}^+(\underline{\mathcal{K}}^\dagger)^2\end{aligned}\quad (1.69)$$

kann man einen quadratintegrierbaren Kern \mathcal{K}^2 bzw. $(\mathcal{K}^\dagger)^2$ erhalten [Joa75]. Die entsprechenden Gleichungen sehen dann ausgeschrieben wie folgt aus:

$$\begin{aligned}\hat{U}_{\kappa\nu}^+ &= \mathcal{G}_0^{-1} + \sum_{\lambda} \bar{\delta}_{\lambda\kappa} \hat{t}_{\lambda} \bar{\delta}_{\lambda\nu} + \sum_{\lambda'} \bar{\delta}_{\lambda\lambda'} \hat{U}_{\kappa\lambda'}^+ \mathcal{G}_0 \hat{t}_{\lambda'} \sum_{\lambda} \mathcal{G}_0 \bar{\delta}_{\lambda\nu} \hat{t}_{\lambda} \\ \hat{U}_{\kappa\nu}^- &= \mathcal{G}_0^{-1} + \sum_{\lambda} \bar{\delta}_{\lambda\kappa} \hat{t}_{\lambda} \bar{\delta}_{\lambda\nu} + \sum_{\lambda} \bar{\delta}_{\lambda\kappa} \hat{t}_{\lambda} \mathcal{G}_0 \sum_{\lambda'} \bar{\delta}_{\lambda\nu} \hat{t}_{\lambda'} \mathcal{G}_0 \hat{U}_{\kappa\lambda'}^-\end{aligned}\quad (1.70)$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich durch iteratives Einsetzen auf der rechten Seite die folgende Mehrfachstreuereihe ([Glo83] , [Joa75]):

$$\begin{aligned}\hat{U}_{\kappa\nu}^+ &= \bar{\delta}_{\kappa\nu} \mathcal{G}_0^{-1} + \sum_{\lambda} \bar{\delta}_{\lambda\kappa} \hat{t}_{\lambda} \bar{\delta}_{\lambda\nu} + \sum_{\lambda} \bar{\delta}_{\lambda\nu} \hat{t}_{\lambda} \mathcal{G}_0 \sum_{\lambda'} \bar{\delta}_{\lambda'\lambda} \hat{t}_{\lambda'} \bar{\delta}_{\lambda'\kappa} + \dots \\ \hat{U}_{\kappa\nu}^- &= \mathcal{G}_0^{-1} \bar{\delta}_{\kappa\nu} + \sum_{\lambda} \bar{\delta}_{\lambda\kappa} \hat{t}_{\lambda} \bar{\delta}_{\lambda\nu} + \sum_{\lambda} \bar{\delta}_{\lambda\kappa} \hat{t}_{\lambda} \mathcal{G}_0 \sum_{\lambda'} \bar{\delta}_{\lambda'\lambda} \hat{t}_{\lambda'} \bar{\delta}_{\lambda'\nu} + \dots\end{aligned}\quad (1.71)$$

Mit dieser Mehrfachstreuereihe ergeben sich jetzt die bekannten Stoßnäherungen:

$$\begin{aligned}\hat{U}_{\kappa\kappa}^+ &= \hat{U}_{\kappa\kappa}^- \approx \hat{t}_{\lambda} + \hat{t}_{\nu} \\ \hat{U}_{\kappa\lambda}^+ &= \hat{U}_{\kappa\lambda}^- \approx \mathcal{G}_0^{-1} + \hat{t}_{\nu}.\end{aligned}\quad (1.72)$$

Verwendet man außerdem für die Zweifragmentübergangsoperatoren die Näherung $\hat{t}_{\lambda} \approx \hat{V}^{\lambda}$, so ergeben sich die ersten Born'schen Näherungen:

$$\begin{aligned}\hat{U}_{\kappa\kappa}^+ &= \hat{U}_{\kappa\kappa}^- \approx \hat{V}^{\lambda} + \hat{V}^{\nu} \\ \hat{U}_{\kappa\lambda}^+ &= \hat{U}_{\kappa\lambda}^- \approx \mathcal{G}_0^{-1} + \hat{V}^{\nu}.\end{aligned}\quad (1.73)$$

Dabei kann mit Gleichung (1.62) für die zweite Gleichung der bekannte Ausdruck

$$\hat{U}_{\kappa\lambda}^+ \approx \hat{V}^{\lambda} + \hat{V}^{\nu}\quad (1.74)$$

für den Transfer in “post”-Darstellung erhalten werden. In der “prior”-Darstellung ergibt sich entsprechend

$$\hat{U}_{\kappa\lambda}^- \approx \hat{V}^\kappa + \hat{V}^\nu. \quad (1.75)$$

Daraus ergeben sich die Übergangsamplituden für einen Transfer von der α - in die β -Partition in PW-Näherung

$$\begin{aligned} \langle \Phi_\beta^{(-)} | \hat{V}^\beta + \hat{V}^\gamma | \Phi_\alpha \rangle &= \langle p_\beta, (q_\beta^{(-)} \iota_\beta), \iota^\beta | \hat{V}^\beta + \hat{V}^\gamma | \Phi_\alpha \rangle \\ \langle \Phi_\beta^{(+)} | \hat{V}^\alpha + \hat{V}^\gamma | \Phi_\alpha \rangle &= \langle p_\beta, (q_\beta^{(+)} \iota_\beta), \iota^\beta | \hat{V}^\alpha + \hat{V}^\gamma | \Phi_\alpha \rangle. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Durch Verwendung der DWBA ist üblicherweise eine Verbesserung dieser 1. Näherung zu erzielen, d. h. die ebenen Wellen $\langle p_\beta |$ und $\langle p_\alpha |$ werden durch Streuwellen (DW) χ_α und χ_β ersetzt. Es zeigt sich, daß Terme höherer Ordnung in der Mehrfachstreuereihe durch Verwendung geeigneter optischer Potentiale mit berücksichtigt werden können. In erster Ordnung erhält man wieder mit den DW-Streuzuständen $\langle \beta | = \langle (q_\beta^{(\pm)} \iota_\beta), \iota^\beta |$ die Darstellungen (1.37) und (1.38), die in dieser Arbeit den Ausgangspunkt zur Beschreibung von Transferreaktionen ins Kontinuum bilden.

Theoretische Ansätze zur Einführung geeigneter optischer Potentiale sind aus der Literatur bekannt (z. B. [AGS67], [GrS69], [Edv70], [Rea74], [Reb74]). Ein mögliches Verfahren ausgehend von einer Dreikörperzerlegung des Hamiltonoperators gemäß Gleichung (1.39) geht auf Grassberger und Sandhas [GrS69] zurück und wurde für eine N-Körperzerlegung von Redish erweitert [Rea74]. Die relativ langwierige Herleitung soll hier aber nicht weiter diskutiert werden.

1.3 Übergangswahrscheinlichkeiten und Wirkungsquerschnitt

In den bisherigen beiden Abschnitten wurden Ausdrücke für Übergangsamplituden angegeben. Hauptgegenstand dieses Abschnitts ist die Formulierung und Festlegung von Übergangswahrscheinlichkeiten und Wirkungsquerschnitten. Dabei wird hier auf eine genaue Herleitung dieser allgemeinen Größen verzichtet, eine solche ist in Textbüchern über Streutheorie (z. B. [WuO62], [New66] oder [Joa75]) zu finden. Um auch Vergleiche mit experimentellen Daten zu ermöglichen, müssen die entsprechenden Ausdrücke oft weiteren Transformationen unterworfen werden. Die dafür nötige Technik sowie die explizite Transformation zwischen Labor- und Schwerpunktsystem und die Berechnung eines inklusiven zweifach differentiellen Wirkungsquerschnitts

aus einem dreifach differentiellen Wirkungsquerschnitt, sollen in diesem Abschnitt beschrieben werden und in den Anhängen B und C weiter ausgeführt werden. Ausgangspunkt ist die Wahrscheinlichkeit W , daß sich ein System nach der Zeit t in einem ungestörten Kanalzustand $|\Phi_\kappa\rangle$ befindet (Es wird wieder die Nomenklatur aus den letzten Abschnitten verwendet). Im Wechselwirkungsbild ergibt sich diese Größe zu

$$W_{\kappa,\nu}(t, t') = |\langle \Phi_\kappa | U_\kappa(t, 0) U_\nu(0, t') | \Psi_\nu(t') \rangle|^2 \quad (1.77)$$

mit den Zeitentwicklungsoperatoren U_κ und U_ν . Mit dieser Größe ist es möglich die "Übergangsrate" [Joa75] zu ermitteln, nämlich

$$w_{\kappa,\nu} = \frac{d}{dt} \lim_{t' \rightarrow -\infty} W_{\kappa,\nu}(t, t') = \frac{d}{dt} |\langle \Phi_\kappa | U_\kappa(t, 0) | \Psi_\nu^{(+)} \rangle|^2. \quad (1.78)$$

Die zweite Gleichung gilt mit den Beziehungen $\lim_{t' \rightarrow -\infty} U_\nu(0, t') | \Psi_\nu(t') \rangle = U_\nu(0, -\infty) | \Phi_\nu \rangle = | \Psi_\nu^{(+)} \rangle$. Durch explizites Differenzieren und Ausnutzen der Tomonaga-Schwinger-Gleichung ([Tom46], [Sch48]) bekommt man damit zunächst

$$w_{\kappa,\nu} = -i \langle \Phi_\kappa | V_\kappa | \Psi_\nu^{(+)} \rangle \langle \Phi_\kappa | \Psi_\nu^{(+)} \rangle^* + c.c., \quad (1.79)$$

und nach Umformen findet man,

$$w_{\kappa,\nu} = 2 \operatorname{Im}(\langle \Phi_\kappa | V_\kappa | \Psi_\nu^{(+)} \rangle \delta_{\kappa,\nu}) - 2\pi \delta(E_\kappa - E_\nu) |\langle \Phi_\kappa | V_\kappa | \Psi_\nu^{(+)} \rangle|^2. \quad (1.80)$$

Der zweite Term kann auch mit der "On Shell" Übergangsamplitude $T_{\kappa,\nu} = \delta(\vec{P}_\kappa - \vec{P}_\nu) \langle \Phi_\kappa | V_\kappa | \Psi_\nu^{(+)} \rangle$ bei Berücksichtigung der Gesamtimpulserhaltung dargestellt werden. Für Ausgangskanäle, die sich vom Eingangskanal unterscheiden erhält man also nur den zweiten Term. Häufig werden Übergänge betrachtet, die z. B. durch die experimentelle Auflösung bedingt in einem Energieintervall Γ um einen Wert E liegen. Man ersetzt dann die δ -Funktion durch eine auf eins normierte Dichtefunktion $\Delta(E)$, z. B. Lorentz- oder Gaussverteilung. Wie in Kapitel 2 gezeigt wird, können mit solchen Dichtefunktionen energiemittelte Stärkefunktionen für ursprünglich diskrete Zustände angegeben werden.

Mit den Übergangsraten aus Gleichung (1.80) erhält man den Wirkungsquerschnitt

$$\Delta\sigma_{\kappa\nu} = \frac{w_{\kappa,\nu}}{F_\nu}. \quad (1.81)$$

Die Größe $F_\nu = (2\pi)^{-3}v_\nu$ ist dabei der Fluß des Projektils relativ zum Target bei der Normierung asymptotischer Zustände wie in Gleichung (1.15). Durch Einsetzen von (1.80) findet man für den Wirkungsquerschnitt von einem Eingangskanal ν in bestimmte Ausgangskanäle κ den folgenden expliziten Ausdruck: :

$$\Delta\sigma_{\kappa\nu} = \sum_{\kappa} \delta(\vec{P}_\kappa - \vec{P}_\nu) \delta(E_\kappa - E_\nu) \frac{(2\pi)^4}{v_\nu} |T_{\kappa,\nu}|^2. \quad (1.82)$$

Die Summe κ spezifiziert die möglichen Zustände im Endkanal. Wegen der verwendeten Impulsraumnormierung (genauere Erklärung siehe Kapitel 2) ist die Anzahl der freien Streuzustände für ein Teilchen i im Endkanal, also das Paseräumvolumen, in einem Impulsintervall $(\vec{p}_i, \vec{p}_i + d\vec{p}_i)$ gerade $d\vec{p}_i$. Besteht die Endpartition aus n Fragmenten, so folgt mit Gleichung (1.82),

$$\Delta\sigma_{\kappa\nu} = \sum_{(\kappa)} \int d\vec{p}'_1 d\vec{p}'_2 \cdots d\vec{p}'_n \delta(\vec{P}_\kappa - \vec{P}_\nu) \delta(E_\kappa - E_\nu) \frac{(2\pi)^4}{v_\nu} |T_{\kappa,\nu}|^2. \quad (1.83)$$

Der Integrand von (1.83) ist der n -fache differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma_{\kappa\nu}}{d\vec{p}'_1 d\vec{p}'_2 \cdots d\vec{p}'_n} = \sum_{(\kappa)} \delta(E_\kappa - E_\nu) \frac{(2\pi)^4}{v_\nu} |T_{\kappa,\nu}|^2. \quad (1.84)$$

Durch eine geeignete Transformation der Relativimpulskoordinaten auf die Energie und den Streuwinkel $\Omega = \Omega(\vartheta, \varphi)$ im Schwerpunktsystem, findet man für binäre Partionen den üblichen Ausdruck,

$$\frac{d\sigma_{\kappa\nu}}{d\Omega} = \sum_{(\kappa)} (2\pi)^4 \mu_\nu \mu_\kappa \frac{p_\kappa}{p_\nu} |T_{\kappa,\nu}(E, \Omega)|^2 \quad (1.85)$$

mit den reduzierten Massen μ und den Relativwellenzahlen p_κ und p_ν . Bei Verwendung einer Verteilungsfunktion $\Delta(E_x)$ an Stelle der δ -Distribution in Gleichung (1.83) findet man einen doppelt-differentiellen Wirkungsquerschnitt für gebundene Zustände:

$$\frac{d\sigma_{\kappa\nu}}{d\Omega dE_x} = (2\pi)^4 \mu_\nu \mu_\kappa \sum_{(\kappa)} \Delta(E_x - E_\kappa) \frac{p_\kappa}{p_\nu} |T_{\kappa,\nu}(E_\kappa, \Omega)|^2, \quad (1.86)$$

der zur einheitlichen Beschreibung eines Spektrums von besonderer Bedeutung ist. Der Wirkungsquerschnitt mit einer Dreifragmentpartition als Endkanal ergibt sich aus Gleichung (1.83) zu

$$\frac{d\sigma_{\kappa\nu}}{d\vec{p}_\kappa d\vec{q}_\kappa} = \sum_{(\kappa)} \delta(E_\kappa - E_\nu) (2\pi)^4 |T_{\kappa,\nu}^{(+)}(\vec{p}_\kappa, \vec{q}_\kappa)|^2. \quad (1.87)$$

wobei jetzt die \vec{p}_κ und \vec{q}_κ wieder die, entsprechend Abschnitt 1.2, Seite 17 definierten konjugierten Impulsvektoren zu den Jacobikoordinaten (Gleichungen (1.41) und (1.40)) sein sollen. In diesem Fall sind die **beiden** Streuzustände im Endkanal wieder durch eine Impulsraumnormierung festgelegt.

Auch der Wirkungsquerschnitt (1.87) läßt sich durch eine geeignete Transformation durch zwei Streuwinkel und eine Energie, z. B. die Relativenergie ϵ_{q_κ} der Unterpartition κ (siehe Seite 21), darstellen [New66]:

$$\frac{d\sigma_{\kappa\nu}}{d\Omega_{p_\kappa} d\Omega_{q_\kappa} d\epsilon_{q_\kappa}} = \sum_{(\kappa)} (2\pi)^4 \mu_\nu \mu_\kappa m_\kappa \frac{p_\kappa q_\kappa}{p_\nu} |T_{\kappa,\nu}(E, \epsilon_{q_\kappa}, \Omega_{p_\kappa}, \Omega_{q_\kappa})|^2. \quad (1.88)$$

Dieser Ausdruck ist der dreifach differentielle Wirkungsquerschnitt für eine ternäre Partition. Die experimentelle Bestimmung dieses Ausdrucks ist schwierig, da zwei Fragmente gleichzeitig zu spektroskopieren sind, was Koinzidenzmessungen erforderlich macht. Man bestimmt daher durch Integration über einen der beiden Raumwinkel, meist nur den inklusiven Wirkungsquerschnitt, der wie folgt gegeben ist:

$$\frac{d\sigma_{\kappa\nu}}{d\Omega_{p_\kappa} d\epsilon_{q_\kappa}} = \sum_{(\kappa)} (2\pi)^4 \mu_\nu \mu_\kappa \int_{4\pi} d\Omega_{q_\kappa} \frac{p_\kappa}{p_\nu} N(\epsilon_{q_\kappa}) \sqrt{\frac{\pi}{2}} q_\kappa |T_{\kappa,\nu}(E, \epsilon_{q_\kappa}, \Omega_{p_\kappa}, \Omega_{q_\kappa})|^2 \quad (1.89)$$

mit der Energienormierungskonstanten

$$N(\epsilon_{q_\kappa}) = \left(\frac{2m_\kappa}{\pi^2 \epsilon_{q_\kappa}} \right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2m_\kappa}{\pi q_\kappa}}. \quad (1.90)$$

Gleichung (1.89) entspricht dem von G. Baur et al. in [BRT84] angegebenen Ausdruck ⁵ und ist einem doppelt-differentiellen Wirkungsquerschnitt für binäre Partitionen entsprechend, geschrieben (Gleichung (1.85)). Benützt man für eine Streuwelle in der Unterpartition κ eine Partialwellenentwicklung ohne Drehimpulskopplung

⁵Dort wird allerdings eine andere Normierung für die Streuzustände verwendet und \hbar nicht eingesetzt, so daß sich die Endresultate um den Faktor $(\hbar^6)(2\pi)^9$ unterscheiden.

entsprechend

$$\chi(\vec{q}_\kappa, \vec{p}_\kappa) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{4\pi}{q_\kappa \rho_\kappa} \sum_{\ell, m} i^\ell e^{i\sigma_\ell} u_\ell(\rho_\kappa, q_\kappa) Y_{\ell, m}(\hat{\rho}_\kappa) Y_{\ell, m}^*(\hat{q}_\kappa), \quad (1.91)$$

so ergibt sich, nach Multiplikation der Vorfaktor $\frac{N(\epsilon_{q_\kappa})}{r}$, also damit die in Kapitel 2 beschriebene Energienormierung. Eine Gleichung 1.91 entsprechende Partialwellenentwicklung bis zu einem endlichen ℓ wird in dieser Arbeit als Ausgangspunkt zur Berechnung der inklusiven Wirkungsquerschnitte für niedrige Unterpartitionsenergien ϵ_{q_κ} verwendet.

Der so erhaltene doppelt differentielle inklusive Wirkungsquerschnitt (1.89) kann als eine natürliche Fortsetzung des in Gleichung (1.86) angegebenen energiegemittelten Wirkungsquerschnitts aufgefaßt werden. Durch Faltung (nicht durch alleinige Multiplikation!) mit einer Dichtefunktion ist aus (1.89) ein völlig entsprechender Ausdruck zu erhalten.

Als letzter Teil dieses Abschnitts und in den Anhängen B und C sollen nun Transformationen von Wirkungsquerschnitten in andere Koordinatensysteme behandelt werden. Zunächst soll kurz für binäre Reaktionen die bekannte Transformation zwischen Labor- und Schwerpunktsystem betrachtet werden. Bei praktischen Anwendungen werden binäre Reaktionen $A(a, b)B$ meist in den folgenden zwei Koordinatensystemen dargestellt: Im Laborsystem, in dem das Target A ruht und das Projektil a die kinetische Energie E_{lab} hat, und im Schwerpunktsystem oder baryzentrischen System, in dem der gemeinsame Schwerpunkt von a und A bzw. b und B ruht und indem üblicherweise theoretische Berechnungen durchgeführt werden. Der Schwerpunkt-Wirkungsquerschnitt ist eine Funktion der Anregungsenergie E_x (von Target und Ejektil) und des Raumwinkels $\Omega = (\vartheta, \varphi)$, der gemessene doppelt differentielle Wirkungsquerschnitt ist meist als Funktion des Laborwinkels $\Omega^{lab} = (\theta, \phi)$ und der Laborenergie E_{lab} gegeben. Eine Koordinatentransformation [For83] kann man allgemein folgendermaßen schreiben:

$$\frac{d\sigma}{dE_1 d\Omega^{lab}} = \frac{d\sigma}{dE_2 d\Omega} \left(\frac{\partial(\cos \vartheta, E_2)}{\partial(\cos \theta, E_1)} \right). \quad (1.92)$$

Wobei E_1 bzw. E_2 entweder E_x oder E_{lab} sein kann. Der zweite Faktor auf der linken Seite von Gleichung (1.92) wird als Jacobi- bzw. Funktionaldeterminante bezeichnet. Man erhält sie aus der Funktionalmatrix der bijektiven Abbildung $(\theta, E_1) \rightarrow (\vartheta(E_1, \theta), E_2(E_1, \theta))$. Es ergeben sich im Prinzip vier mögliche Darstellungen für den Wirkungsquerschnitt je nachdem wie die E_i gewählt werden. Die genaue Formulierung der Abbildungen und die Funktionaldeterminante zwischen den verschiedenen Koordinatensystemen, ist im Anhang B gegeben. Zur Auswertung der Ergebnisse werden in dieser Arbeit verschiedene Transformationen benötigt, die ebenfalls in

diesem Anhang zu finden sind.

Bei der experimentellen Bestimmung von Wirkungsquerschnitten mit mehr als zwei Teilchen im Ausgangskanal können oft nicht alle Informationen erfaßt werden, so daß eine bestimmter Reaktionstyp von anderen Reaktionstypen nicht unterschieden werden kann. Betrachtet man z.B. eine Pickup Reaktion $A(a, b)B$ mit anschließendem Zerfall des Ejektils b in a und x , so kann eine derartige Reaktion bei ausschließlichem Nachweis von a nicht von einer inelastischen Streuung $A(a, a)A^*$ unterschieden werden. Prinzipiell handelt es sich bei beiden Reaktionstypen sogar um die gleiche Endpartition, nur in verschiedenen Koordinaten ausgedrückt, wie aus Gleichung (1.65) auf Seite 23 zu sehen ist. Daher wäre jede der Darstellungen bei vollständiger Kenntnis der Übergangsoperatoren möglich und würde das gleiche Endresultat liefern. Werden aber nur Ein- und Zweistufenprozesse berücksichtigt, so kann man zwischen Pickup und inelastischer Anregung ins Kontinuum zumindest von der Rechnung her unterscheiden. Welcher der beiden Ansätze oder ob eventuell beide bei praktischen Rechnungen am geeignetsten sind, hängt von der betrachteten Reaktion ab. Bei der Berechnung des inelastischen Mehrstufen- Wirkungsquerschnitts zeigt sich, daß immer ein inklusiver Pickup-Aufbruch-Anteil als "side-feeding"-Prozeß mitberücksichtigt werden muß. Um aber diesen Anteil entsprechend der inelastischen Streuung ermitteln zu können, muß der dreifach differentielle Wirkungsquerschnitt des Aufbruchkanals $d\sigma/d\Omega_\beta d\Omega_b d\epsilon_\beta$ (entsprechend Gleichung (1.88)) in Impulsen der β -Partition geschrieben, so umgeformt werden, daß ein doppelt differentielles, inklusives Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega_\alpha d\epsilon_\alpha$ (Gleichung (1.89)) in den Impulsen der α -Partition erhalten wird. Die Energie ϵ_α steht dabei für eine Anregungsenergie der beiden Fragmente a und A .

Wie bei der Berechnung derartiger Wirkungsquerschnitte vorgegangen wird ist im Anhang C beschrieben.

Kapitel 2

Einteilchenwellenfunktionen und Transferformfaktoren

Im letzten Kapitel wurde im wesentlichen der Formalismus von Kernreaktionen betrachtet. Als Endergebnis für Einstufenprozesse wurden die Übergangsamplituden aus den Gleichungen (1.37) und (1.38) erhalten. Neben den Streuwellen gehen in diese Größen die Kernmatrixelemente bzw. Wechselwirkungskerne $I_{\beta\alpha}^{prior}$ und $I_{\beta\alpha}^{post}$ ein. Sie enthalten die Kernstruktureigenschaften der Reaktionspartner und sollen in diesem Kapitel näher betrachtet werden. Gegenüber der üblichen Behandlung, ist hier neu, daß die Endzustände im Kontinuum liegen. Es sollen wichtige theoretische Größen wie die spektroskopische Amplitude und die Stärkefunktion für Kontinuumszustände diskutiert werden. Im Hinblick auf spätere Modellrechnungen und als Vorbereitung zur Berechnung des Formfaktors für Transferreaktionen müssen geeignete Einteilchenwellenfunktionen angegeben werden. Dabei steht die Diskussion von Resonanzen und die Darstellung von Kontinuumszuständen durch diskrete Basissysteme im Vordergrund. Auch werden in einem Abschnitt dieses Kapitels Einteilchenniveaudichten besprochen. Den Abschluß des Kapitels bildet die Herleitung von Transferformfaktoren für Kontinuumsreaktionen, die für diese Arbeit von besonderer Bedeutung sind.

2.1 Einteilchenzustände

Wie im Abschnitt 2.6 über den Formfaktor gezeigt wird, werden zur Berechnung von Überlappintegralen und Formfaktoren einer Transferreaktion Einteilchenwellenfunktionen des transferierten Teilchens x relativ zum Target- bzw. Projektilsystem benötigt. Die wesentlichen Eigenschaften derartiger Einteilchenwellenfunktionen für diskrete Zustände und Kontinuumszustände werden hier in kurzer und kompakter Form, ähnlich der Darstellung in [BZP69] und [LaL88], vorgestellt um auch die No-

menklatur festzulegen. Außerdem wird die Diskretisierung des Kontinuums, die in Analogie zur R -Matrix-Theorie ([WiE47], [LaT58]) erfolgt, diskutiert. Diese Diskretisierung ist ein wesentlicher Aspekt dieser Arbeit und wird im Anhang G ausführlich beschrieben.

Die hier verwendeten Einteilchenwellenfunktionen sind Lösungen zu einer Einteilchen-Schrödingergleichung zu einem reellen, optischen Potential, d. h. einem sphärisch-symmetrischen Potential $U(r)$, das die Summe aus einem Zentralpotential V_{cent} , einem Spin-Bahn-Potential V_{ls} und, bei geladenen Teilchen, einem Coulombpotential V_{coul} ist. Auf die Verwendung von effektiven Massen [MaW82] oder von energieabhängigen Potentialen [JoM88], um nichtlokale oder impulsabhängige Anteile im Potential zu berücksichtigen, wird erst später eingegangen. Die Parameter der Potentialtiefen der Potentiale V_{cent} und V_{ls} werden später variiert, um die experimentell ermittelten Einteilchenenergien bzw. Einteilchenresonanzen mit der sogenannten Potentialtiefen-Methode ("Well-Depth-Method") anpassen zu können. Die Eigenlösung $\phi_{\ell j, m_j}(\vec{r}, \epsilon) = \phi_{\ell j, m_j}(r, \Omega, \epsilon)$ mit dem Energieeigenwert ϵ zu einer Schrödingergleichung mit einem wie oben beschriebenen Potential $U(r)$ für Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen läßt sich wie folgt schreiben

$$\phi_{\ell j, m_j}(r, \Omega, \epsilon) = \frac{u_{\ell j}(r, \epsilon)}{r} \mathcal{Y}_{\ell, j}^{m_j}(\Omega). \quad (2.1)$$

Die Funktionen $\mathcal{Y}_{\ell, j}^{m_j}(\Omega)$ sind die Eigenfunktionen zu den Drehimpulsoperatoren $\hat{\ell}^2$, \hat{j}^2 und \hat{j}_z und ergeben sich aus der Kopplung von Kugelflächenfunktionen und Spinoren. Die $u_{\ell j}(r, \epsilon)$ sind die für $r = 0$ regulären Eigenlösungen zur radialen Schrödingergleichung, d.h. zu dem Differentialoperator

$$D_{\ell j} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] + U_{\ell j}(r) \quad (2.2)$$

für festes ℓ und festes j . Man erhält diskrete Eigenzustände $u_{\ell j}(r, \epsilon_n) := u_{n, \ell j}(r)$ zu negativen Eigenenergien ($\epsilon_n < 0$) und Kontinuums- oder Streuzuständen $u_{\ell j}(r, \epsilon)$ zu einem positiven, kontinuierlichen Spektrum ($\epsilon > 0$). Sie können durch eine Linearkombination der Fundamentallösungen $u_{\ell j}^{(-)}(r, \epsilon)$ und $u_{\ell j}^{(+)}(r, \epsilon)$ zu $D_{\ell j}$ dargestellt werden. Diese verhalten sich asymptotisch im Falle gebundener Zustände wie abfallende und ansteigende Exponentialfunktionen¹, im Falle ungebundener Zustände wie einlaufende und auslaufende Wellen. Allgemein kann $u_{\ell j}(r, \epsilon)$, mit einer Normierungskonstanten $N(\epsilon)$ und der S -Matrix oder Streufunktion $S_{\ell j}$, wie folgt angegeben werden

$$u_{\ell j}(r, \epsilon) = \frac{1}{2} i N(\epsilon) \left[u_{\ell j}^{(-)}(r, \epsilon) - S_{\ell j}(\epsilon) u_{\ell j}^{(+)}(r, \epsilon) \right]. \quad (2.3)$$

¹Der zugehörige Koeffizient der Linearkombination wird identisch Null gesetzt

Alternativ kann die Normierung in Abhängigkeit der Wellenzahl κ ($\epsilon = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2\mu}$),

$$u_{\ell j}(r, \kappa) = \frac{1}{2} i N(\kappa) \left[u_{\ell j}^{(-)}(r, \kappa) - S_{\ell j}(\kappa) u_{\ell j}^{(+)}(r, \kappa) \right] \quad (2.4)$$

erfolgen. Die beiden Funktionen unterscheiden sich nur durch die Normierungskonstante.

In der zweiten Darstellung (2.4) kann die Wellenfunktion analytisch zu komplexen Werten von κ fortgesetzt werden. Gebundene Zustände entsprechen dann diskreten, rein imaginären Werten von κ in der oberen komplexen Halbebene, Kontinuumszustände entsprechen allen Werten von κ entlang der positiven reellen Achse. Aus dieser analytischen Fortsetzung ergeben sich zudem weitere interessante Größen und Eigenschaften die im Abschnitt 2.4 diskutiert werden sollen.

Außerhalb der Reichweite R_{int} des Kernpotentials (gilt für alle Zentralpotentiale, die radial stärker als $1/r^2$ abfallen [MoM65]) verhalten sich die Fundamentallösungen $u_{\ell j}^{(\pm)}(r, \kappa)$ (bzw. $u_{\ell j}^{(\pm)}(r, \epsilon)$) wie eine Linearkombination von regulären und irregulären Coulombfunktionen $F_\ell(r, \kappa)$ und $G_\ell(r, \kappa)$, die im Falle von ungeladenen Teilchen in sphärische Bessel- und von-Neumannfunktionen $j_\ell(r, \kappa)$ und $n_\ell(r, \kappa)$ [Sat83] übergehen. Die im Inneren des Potentials numerisch gewonnenen, bei $r = 0$ regulären Lösungen können daher im Außenbereich an die folgenden Ausdrücke angepaßt werden

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} i N(\kappa) \left[I_\ell^{(+)}(r, \kappa) - S_{\ell j}(\kappa) O_\ell^{(+)}(r, \kappa) \right] = \\ N(\kappa) \left[F_\ell(r, \kappa) + \mathcal{C}_{\ell j}(\kappa) O_\ell^{(+)}(r, \kappa) \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Wobei die Partialwellenamplitude $\mathcal{C}_{\ell j}(\kappa) = \frac{1}{2i}(S_{\ell j}(\kappa) - 1)$ ist und die einlaufenden ($I_\ell^{(+)}$) und auslaufenden ($O_\ell^{(+)}$) Wellen Linearkombination der Coulombfunktionen,

$$\begin{aligned} I_\ell^{(+)}(r, \kappa) &= G_\ell(r, \kappa) - i F_\ell(r, \kappa) \\ O_\ell^{(+)}(r, \kappa) &= G_\ell(r, \kappa) + i F_\ell(r, \kappa), \end{aligned} \quad (2.6)$$

sind. Für ungeladene Teilchen reduzieren sich diese auf Besselfunktionen

$$\begin{aligned} I_\ell^{(+)}(r, \kappa) &= -\kappa r [n_\ell(r, \kappa) + i j_\ell(r, \kappa)] = \kappa r h_\ell^{(-)}(\kappa r) \\ O_\ell^{(+)}(r, \kappa) &= -\kappa r [n_\ell(r, \kappa) - i j_\ell(r, \kappa)] = \kappa r h_\ell^{(+)}(\kappa r). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Die hier verwendete Nomenklatur lehnt sich dabei im wesentlichen an die Nomenklatur von Lane und Thomas [LaT58] an. Die Ausdrücke $h_\ell^{(-)}$ und $h_\ell^{(+)}$ sind die sphärischen Hankelfunktionen. Asymptotisch gilt dann für $\kappa r \gg 1$ der Zusammenhang:

$$u_{\ell j}^{as}(r, \kappa) \sim \frac{1}{2} i N(\kappa) \left[f_\ell^{(-)}(r, \kappa) - S_{\ell j}(\kappa) f_\ell^{(+)}(r, \kappa) \right] \quad (2.8)$$

mit

$$f_\ell^{(\pm)}(r, \kappa) = \exp \left[\pm i \left(\kappa r - \eta \log(2\kappa r) - \frac{1}{2} \ell \pi + \sigma_\ell(\kappa) \right) \right]. \quad (2.9)$$

wobei η der Coulomb- oder Sommerfeldparameter und σ_ℓ die Coulombstreuphase ist.

Die Konstanten $N(\kappa)$ und $S_{\ell j}(\kappa)$ respektive $N(\epsilon)$ und $S_{\ell j}(\epsilon)$ müssen so gewählt werden, daß sie die jeweiligen Randbedingungen erfüllen. Im Falle von gebundenen, diskreten Zuständen zur Eigenenergie $\epsilon_n (< 0)$ ist κ_n eine rein imaginäre Größe ($\kappa_n = i|\kappa_n|$). Da $u_{\ell j}(r, \kappa)$ für $r \rightarrow \infty$ exponentiell gegen Null geht, ist dies gleichbedeutend damit, daß der Koeffizient $N(\kappa)$ aus Gleichung (2.4) für $\kappa \rightarrow \kappa_n$ gegen Null geht und die Streufunktion $S_{\ell j}(\kappa)$ einen Pol derselben Ordnung haben muß. Damit bleibt in (2.4) nur noch die zweite Fundamentallösung $u_{n, \ell j}^{(+)}(r)$, die für ganz bestimmte Eigenwerte $i|\kappa_n|$ regulär ist, übrig. Das zugehörige Produkt $N(\kappa_n) S_{\ell j}(\kappa_n)$ ist endlich und wird aus der üblichen Ortsraumnormierung, d.h.

$$\int_0^\infty dr' u_{n, \ell j}(r')^2 = 1 \quad (2.10)$$

ermittelt.

Im Falle von ungebundenen Zuständen sind ϵ und κ reelle, positive Größen. Durch Anpassen der im Inneren des Potentials, i. a. numerisch gewonnenen, regulären Lösung $u_{\ell j}^{in}(r, \kappa)$ an die asymptotischen Ausdrücke aus Gleichung (2.5) für $r = R_{int}$, erhält man die Streufunktion $S_{\ell j}(\kappa)$ bzw. aus $S_{\ell j}(\kappa) = e^{2i\delta_{\ell j}(\kappa)}$ die Streuphase $\delta_{\ell j}(\kappa)$:

$$\delta_{\ell j}(\kappa) = \arctan \left\{ \frac{\partial_r F_\ell(r, \kappa) - L_{\ell j}(\kappa) F_\ell(r, \kappa)}{L_{\ell j}(\kappa) G_\ell(r, \kappa) - \partial_r G_\ell(r, \kappa)} \right\}_{r=R_{int}}, \quad (2.11)$$

wobei

$$L_{\ell j}(\kappa) = \left(\frac{\partial_r u_{\ell j}^{in}(r, \kappa)}{u_{\ell j}^{in}(r, \kappa)} \right)_{r=R_{int}} \quad (2.12)$$

die logarithmische Ableitung ist.

Wenn die Streuphase $\delta_{\ell j}(\kappa)$ einen Wert von $\pi/2$ für $\epsilon = \epsilon_o$ annimmt, ergeben sich Resonanzzustände. Aus der Energieabhängigkeit der Streuphase, bzw. des Sinus der Streuphase, kann zudem bei Annahme einer Lorentzverteilung die Halbwertsbreite Γ von schmalen Resonanzzuständen ermittelt werden. Es gilt der Zusammenhang

$$\Gamma_{\ell j} = \left[(\partial_{\epsilon} \delta_{\ell j}(\epsilon))^{-1} \right]_{\epsilon=\epsilon_o}. \quad (2.13)$$

Wie diese Festlegung erfolgt, wird im Abschnitt 2.4 gezeigt. Beispiele für Resonanzzustände sind in der Abbildung 2.1 zu sehen.

Bei der Normierung der Kontinuums- oder Streuzustände wird üblicherweise eine δ -Distributions-Normierung auf die Energie oder den Impuls verwendet. In diesem Fall ergeben sich für $N(\epsilon)$ aus Gleichung (2.3) bzw. $N(\kappa)$ aus Gleichung (2.4) die Ausdrücke:

$$N(\epsilon) = \left(\frac{2\mu}{\pi^2 \epsilon \hbar^2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{bzw.} \quad N(\kappa) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.14)$$

sodaß jeweils die Orthogonalitätsrelationen

$$\int_0^{\infty} dr' u_{\ell j}^*(r', \epsilon') u_{\ell j}(r', \epsilon) = \delta(\epsilon - \epsilon') \quad (2.15)$$

und

$$\int_0^{\infty} dr' u_{\ell j}^*(r', \kappa') u_{\ell j}(r', \kappa) = \delta(\kappa - \kappa') \quad (2.16)$$

erfüllt sind. Die gebundenen und ungebundenen Wellenfunktionen bilden ein vollständiges Orthonormalystem. Die Vollständigkeitsrelation ergibt sich z.B. für die Radialwellenfunktionen (2.3) zu

$$\sum_n u_{n, \ell j}^*(r') u_{n, \ell j}(r) + \int_0^{\infty} d\epsilon u_{\ell j}^*(r', \epsilon) u_{\ell j}(r, \epsilon) = \delta(r - r'). \quad (2.17)$$

Als Abschluß dieses Abschnitts soll jetzt im Hinblick auf die später zu diskutierende Kontinuumsstärkefunktion als auch auf die diskrete Darstellung des Kontinuums

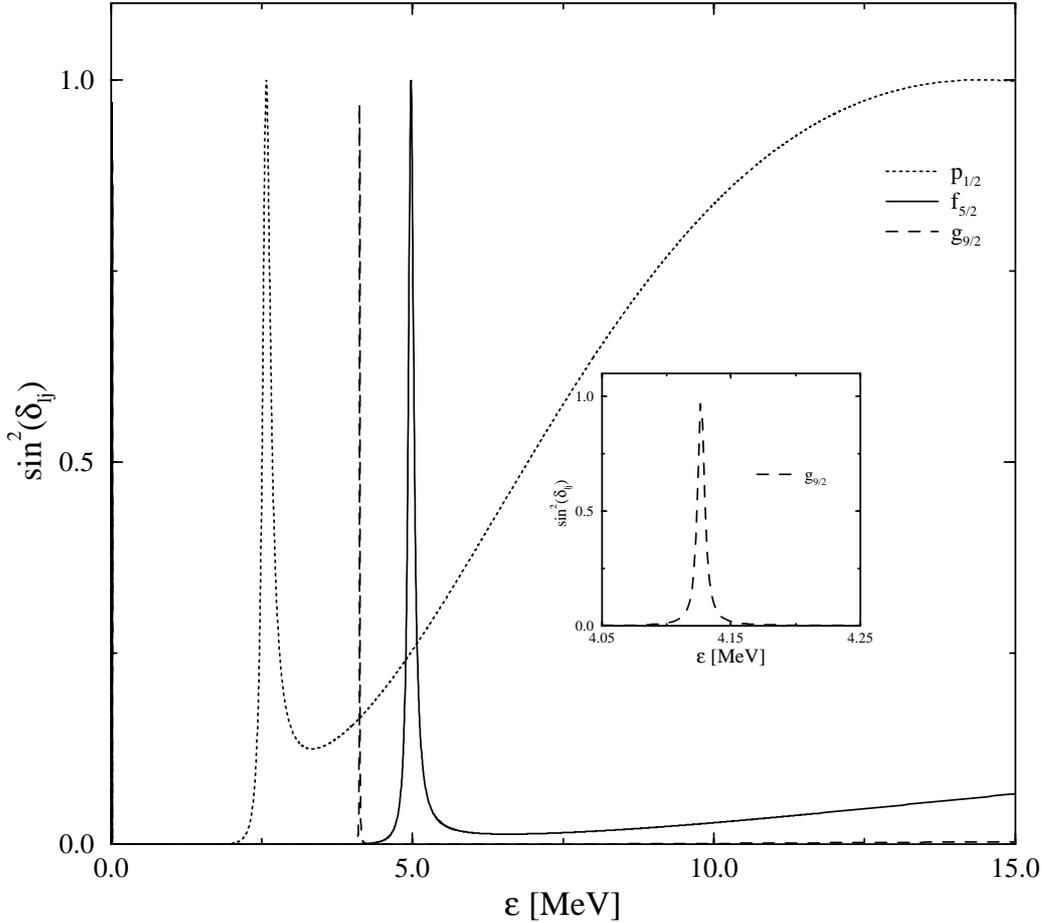


Abbildung 2.1: Verschiedene Protonresonanzzustände zu einem ^{40}Ca -Rumpf. Die Resonanzen wurden zu einem Woods-Saxon-Potential mit geeigneter Tiefe berechnet, um die folgenden Resonanzenergien zu erhalten: $E_{res}(p_{1/2}) = 2.58$ MeV, $E_{res}(f_{5/2}) = 4.98$ MeV und $E_{res}(g_{9/2}) = 4.23$ MeV. Als Einteilchenbreiten ergeben sich dann die Werte $\Gamma(p_{1/2}) = 0.136$ MeV, $\Gamma(f_{5/2}) = 0.10$ MeV und $\Gamma(g_{9/2}) = 5.5$ keV. Der Ausschnitt zeigt die sehr schmale $g_{9/2}$ -Resonanz im Detail.

ein Ausdruck für ein Integral über einen endlichen Bereich über das Betragsquadrat $|u_{\ell j}(r)|^2$ angegeben werden [LaL88]. Die Transferstärke steht ja in engem Zusammenhang mit der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des transferierten Teilchens im Kernbereich. Der hier formulierte Ausdruck hängt interessanterweise für Radien R_0 die größer als die Reichweite des Potentials $U(r)$ sind nur von der Asymptotik der Wellenfunktion ab. Um dies zu zeigen wird zunächst die radiale Schrödingergleichung

$$(D_{\ell j} - \epsilon) u_{\ell j}(r, \epsilon) = 0 \quad (2.18)$$

mit dem Differentialoperator $D_{\ell j}$ ((2.2) nach ϵ differenziert. Multipliziert man jetzt

die zu (2.18) konjugiert komplexe Gleichung mit $\partial_\epsilon u_{\ell j}(r, \epsilon)$ und die nach ϵ differenzierte Gleichung (2.18) mit $u_{\ell j}^*(r, \epsilon)$ und bildet anschließend die Differenz, so ergibt sich nach Umformen zunächst

$$\partial_\epsilon u_{\ell j}(r, \epsilon) \partial_r \partial_r u_{\ell j}^*(r, \epsilon) - u_{\ell j}^*(r, \epsilon) \partial_\epsilon \partial_r \partial_r u_{\ell j}(r, \epsilon) = \frac{2\mu}{\hbar^2} |u_{\ell j}(r, \epsilon)|^2. \quad (2.19)$$

Dieser und der entsprechende konjugiert komplexe Ausdruck werden bis zu einem endlichen Radius R_0 partiell integriert und man erhält

$$\begin{aligned} \int_0^{R_0} d r' |u_{\ell j}(r', \epsilon)|^2 &= \frac{\hbar^2}{4\mu} \left\{ \left[\partial_\epsilon u_{\ell j}(r, \epsilon) \partial_r u_{\ell j}^*(r, \epsilon) - u_{\ell j}^*(r, \epsilon) \partial_\epsilon \partial_r u_{\ell j}(r, \epsilon) \right]_{r=R_0} \right. \\ &\quad \left. + \left[\partial_\epsilon u_{\ell j}^*(r, \epsilon) \partial_r u_{\ell j}(r, \epsilon) - u_{\ell j}(r, \epsilon) \partial_\epsilon \partial_r u_{\ell j}^*(r, \epsilon) \right]_{r=R_0} \right\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Im Falle reeller Wellenfunktionen $u_{\ell j}(r, \epsilon)$ läßt sich dies schreiben als

$$\int_0^{R_0} d r' |u_{\ell j}(r', \epsilon)|^2 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[u_{\ell j}(r, \epsilon)^2 \partial_\epsilon \left(\frac{\partial_r u_{\ell j}(r, \epsilon)}{u_{\ell j}(r, \epsilon)} \right) \right]_{r=R_0}. \quad (2.21)$$

Außerhalb des Potentials $U(r)$ gehen in die rechte Seite von Gleichung (2.20) nur die asymptotischen Ausdrücke für die Wellenfunktion ein, sodaß das Integral mit der Kenntnis der S -Matrix alleine bestimmt werden kann. Diese Beziehung gilt sogar allgemein, wenn es sich bei der Wellenfunktion um die Gesamtwellenfunktion eines beliebigen Systems handelt. Erfolgt die Integration über den Bereich des Kerninneren, so erhält man allgemein ein Wahrscheinlichkeitsintegral für ein Compoundsystem [LaT58]. Integrale über die Betragsquadrate einzelner Kanalwellenfunktionen sind mit Gleichung (2.20) nicht zu ermitteln, falls weitere offene Kanäle vorhanden sind. Es treten dann zusätzliche Terme auf, die den Fluß in diese Kanäle beschreiben.

Die obigen Ansätze sind für lokale und energieunabhängige Potentiale durchgeführt worden. Unter bestimmten Annahmen ist eine Erweiterung, wie in Abschnitt 2.2 gezeigt wird, auch für nichtlokale und energieabhängige Potentiale möglich.

Die aus Gleichung (2.20) gewonnenen Größen können als Grundlage zur Bestimmung von spektroskopischen Faktoren oder Amplituden dienen.

Unter Verwendung von Gleichung (2.8) kann der Ausdruck (2.20) für genügend großes R_0 genähert werden. Damit ergibt sich

$$\int_0^{R_0} d r' |u_{\ell j}(r', \epsilon)|^2 = \frac{1}{\pi} [\partial_\epsilon \delta_{\ell j}(\epsilon) + \partial_\epsilon \sigma_\ell(\epsilon)]$$

$$\begin{aligned}
& + N(\epsilon)^2 \frac{R_0}{2} \left[1 - \frac{\eta}{\kappa R_0} (1 - \eta \log(\kappa R_0)) \right] \left[1 - \frac{\eta}{\kappa R_0} \right] \\
& - \frac{N(\epsilon)^2}{4\kappa} \left[1 + \frac{\eta}{\kappa R_0} \right] \sin(2\Phi_\ell(R_0, \epsilon) + 2\delta_{\ell j}),
\end{aligned} \tag{2.22}$$

wobei

$$\Phi_\ell(R_0, \epsilon) = \kappa R_0 - \eta \log(\kappa R_0) - \frac{1}{2} \ell \pi + \sigma_\ell(\kappa). \tag{2.23}$$

In diesem Ausdruck spiegeln sich bereits wesentliche Eigenschaften des Kontinuums-
transfers wieder. Im ersten Summanden sind die resonanten Anteile der Streuwelle
enthalten. Er ist groß für große Energieänderungen in der Streuphase und ist we-
sentlich für die Form eines Spektrums verantwortlich. Der zweite Summand ist für
einen relativ strukturlosen Untergrund bei Streuprozessen verantwortlich. Der dritte
Summand entspricht einem Interferenzterm der beiden ersten Größen. Auch er zeigt
starke Energieabhängigkeit. Für sehr scharfe Resonanzen und Werte von R_0 von der
Größenordnung des Kernradius wird der erste Term allein dominieren. Da er zudem
nicht vom Radius abhängt, wird er auch als "Normierungskonstante" für Resonanz-
zustände benützt. Genau dies wird im Abschnitt 2.4 über quasistationäre Zustände
diskutiert. Eine völlig entsprechende Diskussion wurde von G. Baur [BaT73] direkt
für den Wirkungsquerschnitt beim Kontinuumstransfer gemacht.

2.2 Nichtlokale, energieabhängige Potentiale

Bei der bisherigen Diskussion wurde angenommen, daß es sich bei dem Einteil-
chenpotential $U(r)$ um eine reelle, im Ortsraum lokale und nicht energieabhängige
Größe handelt. Diese Annahme ist für eine realistische Beschreibung von Einteil-
chenzuständen natürlich nicht gegeben. Bei mikroskopischen Beschreibungen folgt
die örtliche Nichtlokalität bereits aus dem Fock-Term des Potentials. Eine Energie-
abhängigkeit ist durch Korrelationen des Einteilchenzustands mit Rumpfanregungen
bedingt, worauf im Abschnitt 3.2 im Detail eingegangen wird. Dieser Effekt verur-
sacht außerdem eine Dissipation in noch kompliziertere Zustände, was durch einen
Imaginärteil im Potential beschrieben werden kann.

Tatsächlich ist der Ausdruck (2.20) näherungsweise auch für nichtlokale und ener-
gieabhängige reelle Potentiale erfüllt. Schrödingergleichungen mit derartigen Poten-
tialen können durch Einteilchenhamiltonoperatoren

$$\tilde{H}(r) = -\nabla \frac{\hbar^2}{2\mu^*(r)} \nabla + \tilde{U}(r) \quad (2.24)$$

mit einem lokalen Potential $\tilde{U}(r)$ und einer effektiven, radiusabhängigen Masse $\mu^*(r)$ beschrieben werden [MaW82], die üblicherweise als sphärisch symmetrisch angenommen werden. Die effektive Masse wird als Produkt angesetzt

$$\frac{\mu^*(r)}{\mu} = \frac{\mu_E^*(r)}{\mu} \frac{\mu_k^*(r)}{\mu}, \quad (2.25)$$

aus der sogenannten k-Masse $\mu_k^*(r)$, die die räumliche Nichtlokalität, bzw. die Impulsabhängigkeit beschreibt, sowie der sogenannten E-Masse $\mu_E^*(r)$, die aus der Zeitnichtlokalität, d. h. der Energieabhängigkeit, resultiert. Dieser Ansatz ist phänomenologisch, die wesentlichen Eigenschaften eines komplizierten Massenoperators sind jedoch darin enthalten, wie von Ma und Wambach bei der Berechnung von Quasiteilcheneigenschaften von Protonen im ^{208}Pb gezeigt wurde [MaW91].

Macht man für den Radialanteil der Lösung zu Gleichung (2.24) den Ansatz

$$\frac{\tilde{u}_{\ell j}(r)}{r} = \frac{f_{\ell j}(r)}{r} \frac{\sqrt{\mu^*(r)}}{\mu}, \quad (2.26)$$

so erhält man die folgende effektive radiale Schrödinger-Gleichung [MaW91]:

$$\partial_r \partial_r f_{\ell j}(r) + \left\{ \frac{2\mu^*(r)}{\hbar^2} [\epsilon - \tilde{U}(r)] - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right\} f_{\ell j}(r) = 0. \quad (2.27)$$

Mit entsprechenden Umformungen wie im letzten Abschnitt und unter Berücksichtigung von $\mu^*(r) \rightarrow \mu$ für große R_0 erhält man für ein endliches Integral eine der Gleichung (2.21) entsprechende Gleichung:

$$\begin{aligned} \int_0^{R_0} d r' \frac{\mu(r')}{\mu^*} |f_{\ell j}(r', \epsilon)|^2 &= -\frac{\hbar^2}{2} \left[f_{\ell j}(r, \epsilon)^2 \partial_\epsilon \left(\frac{\partial_r f_{\ell j}(r, \epsilon)}{f_{\ell j}(r, \epsilon)} \right) \right]_{r=R_0} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\tilde{u}_{\ell j}(r, \epsilon)^2 \partial_\epsilon \left(\frac{\partial_r \tilde{u}_{\ell j}(r, \epsilon)}{\tilde{u}_{\ell j}(r, \epsilon)} \right) \right]_{r=R_0}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

wobei hier zur Vereinfachung angenommen wurde, daß alle Größen reell sind. Bei diesem Ansatz wird besonders deutlich, wieso die Faktoren $\mu(r')/\mu$, die sogenannten

”Perey”-Faktoren [PeB61], benötigt werden. Die Wellenfunktionen zu einem lokalen nicht energieabhängigen Potential zu einer Energie ϵ , $f_{\ell j}(r, \epsilon)$ haben zwar die richtige Asymptotik, ihr Betragsquadrat ergibt aber ein zu kleines Integral. Durch nachträgliches Einführen eines ”Perey”-Faktors $\mu^*(r)$ kann dieser Fehler korrigiert werden.

2.3 Diskrete Kontinuumsdarstellung und Wigner-sche R-Funktion

Einteilchenkontinuumszustände, wie sie bisher diskutiert worden sind, sind geeignet zur Beschreibung von Potentialstreuung. Zur Berechnung von Korrelationen im Kontinuum, d. h. von Kernstruktureffekten, sind sie jedoch nicht geeignet, da ihre Berücksichtigung in den entsprechenden Gleichungssystemen zu Integralgleichungen führt. Eine alternative Darstellung des Kontinuums erfolgt daher mit diskreten Eigenzuständen $\varphi_{\nu, \ell j, m_j}(\vec{r})$ und den dazugehörigen Radialwellenfunktionen $u_{\nu, \ell j}(r)$ ($\nu \in N$), die ein vollständiges Funktionensystem zu einem Sturm-Liouville-schen Eigenwertproblem bilden (siehe z.B. [Wal76]). Dies sind Lösungen zu (2.2), die zusätzliche homogene Randbedingungen für ein bestimmtes $R_S \gg R_{int}$ (Reichweite der Wechselwirkung!) erfüllen, d. h. daß die logarithmische Ableitung von $u_{\nu, \ell j}(r)$ an der Stelle $r = R_S$ für alle ν einen festen Wert B annimmt:

$$B = \left(\frac{\partial_r u_{\nu, \ell j}(r)}{u_{\nu, \ell j}(r)} \right)_{r=R_S} \quad \forall \nu. \quad (2.29)$$

Mit diesem Ansatz bilden die $u_{\nu, \ell j}(r)$ eine vollständige Eigenbasis zu $D_{\ell j}$ mit Energieeigenwerten ϵ_ν für alle r innerhalb des Intervalls $[0, R_S]$. Auch in diesem Fall kann man zwischen gebundenen Zuständen ($\epsilon_\nu < 0$) und ungebundenen Zuständen ($\epsilon_\nu > 0$) zum Potential $U(r)$ unterscheiden. Die Normierung dieser Zustände erfolgt allerdings immer im Ortsraum (bezüglich des Intervalls $[0, R_S]$) und unterscheidet sich daher grundsätzlich von der Normierung auf Deltadistributionen im Falle der echten Streuzustände. Für das orthonormierte System $u_{\nu, \ell j}$ ist außerdem folgende Vollständigkeitsrelation erfüllt:

$$\sum_\nu u_{\nu, \ell j}^*(r') u_{\nu, \ell j}(r) = \delta(r - r') \quad r, r' \leq R_S. \quad (2.30)$$

Man kann die echten Kontinuumszustände in diesem beschränkten Intervall nach dem vollständigen System der $u_{\nu, \ell j}(r)$ entwickeln. Dies ist in Anhang G im Detail diskutiert. Wird als Randbedingung eine verschwindende Ableitung vorgegeben, also

$$(\partial_r u_{\nu, \ell_j}(r))_{r=R_S} = 0,$$

so ergibt sich im Anhang G, nach Gleichung (G.17) für den Radialanteil des Kontinuumszustands die verallgemeinerte Fourierentwicklung

$$u_{\ell_j}(r, \epsilon) = \sum_{\nu} \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{[u_{\nu, \ell_j}^*(r) \partial_r u_{\ell_j}(r, \epsilon)]_{r=R_S}}{[\epsilon - \epsilon_{\nu}]} u_{\nu, \ell_j}(r). \quad (2.31)$$

Eine derartige Darstellung bildet die Grundlage der R -Matrix-Theorie. Durch Umformen von (2.31) erhält man den aus der Literatur bekannten Ausdruck für die R -Funktion (R -Matrix) [LaT58]:

$$R(\epsilon) = \left(\frac{u_{\ell_j}(r, \epsilon)}{r \partial_r u_{\ell_j}(r, \epsilon)} \right)_{r=R_S} = \sum_{\nu} \frac{\gamma_{\nu, \ell_j}^2}{[\epsilon - \epsilon_{\nu}]} \quad (2.32)$$

mit der sogenannten reduzierten Breite

$$\gamma_{\nu, \ell_j}^2 = \frac{\hbar^2}{2\mu R_S} u_{\nu, \ell_j}^*(R_S) u_{\nu, \ell_j}(R_S). \quad (2.33)$$

Die R -Matrix entspricht also gerade der logarithmischen Ableitung der Einteilchenwellenfunktion. Mit ihr kann also sehr leicht die S -Matrix gewonnen werden. Auf den Zusammenhang zwischen R -Matrix-Theorie und Kontinuumsdarstellung soll hier allerdings nicht weiter eingegangen werden. Ausgangspunkt für weitere Betrachtungen ist die Entwicklung (2.31).

Diese Entwicklung ist immer möglich und sinnvoll, da die Stärke der Kern-Nukleon-Wechselwirkung für $r = R_S$ vernachlässigbar ist. Es ist daher möglich, auch mit diesem Ausdruck ein endliches Ortsraumintegral im Sinne von Gleichung (2.20) zu berechnen. Wertet man diese Gleichung mit der Entwicklung (2.31) für $R_0 = R_S$ aus, so ergibt sich der folgende Ausdruck:

$$\int_0^{R_S} dr' |u_{\ell_j}(r', \epsilon)|^2 = \sum_{\nu} \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{[u_{\nu, \ell_j}^*(r) \partial_r u_{\ell_j}(r, \epsilon)]_{r=R_S}^2}{[\epsilon - \epsilon_{\nu}]^2} \quad (2.34)$$

Diese Größe ist identisch zur später besprochenen Niveaudichte. Ein weiterer Vorteil der Entwicklung (2.31) ist die Diskretisierung und damit mögliche Berechnung von Integralgleichungen, wie sie im Rahmen des in Abschnitt 3.2 vorgestellten

Quasiteilchen-Rumpf-Kopplungs-Modells im Kontinuum erhalten werden.

Um ein Gefühl für die Qualität der Entwicklung (2.31) zu erhalten, ist in Abbildung 2.2, exemplarisch die numerisch berechnete, radiale Wellenfunktion und deren Ableitung für einen $h_{11/2}$ -Zustand im Vergleich zur Lösung aus der Entwicklung dargestellt. Insgesamt wurden fünfzehn Basiszustände mit Einteilchenenergien ϵ_ν zwischen 3.0 und 91.0 MeV für die Entwicklung verwendet. Die Wellenfunktionen und deren Ableitungen wurden exemplarisch für den doppelten Kernradius des ^{40}Ca -Rumpfs ermittelt. Bis zu einer Energie ϵ von etwa 70 MeV ist ein Unterschied zwischen den entsprechenden Graphen mit bloßem Auge kaum zu erkennen.

Allerdings zeigte sich, daß bei der Berechnung der Streuphase aus der entwickelten Wellenfunktion trotzdem signifikante Abweichungen auftreten können. Erst bei Verwendung eines Lanczos-Verfahrens auf das hier nicht eingegangen werden soll, konnte die Konvergenz verbessert und die Abweichungen weitgehend beseitigt werden.

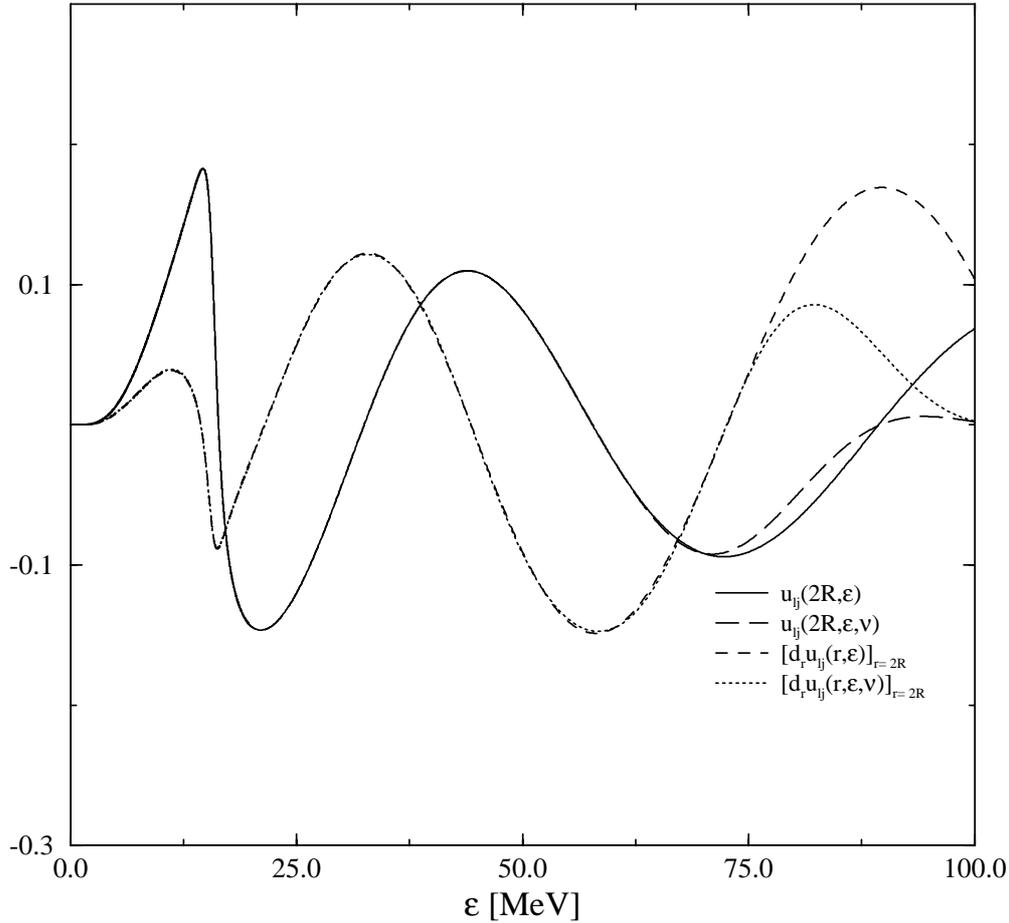


Abbildung 2.2: Radiale Wellenfunktionen und ihre Ableitungen für einen $h_{11/2}$ -Zustand als Funktion der Energie im Kontinuum für festen Radius $r = 2R$ ($R = 4.28 \text{ fm}$ angenommener Kernradius von ^{40}Ca). Als Potential wurde ein Woods-Saxon-Potential mit einem Spin-Bahn-Potential verwendet. Zum einen ist die "exakte" numerische Lösung $u_{lj}(2R, \epsilon)$ bzw. $[\partial_r u_{lj}(r, \epsilon)]_{r=2R}$ zu sehen, zum anderen ist die Entwicklung $u_{lj}(2R, \epsilon, \nu)$ bzw. $[\partial_r u_{lj}(r, \epsilon, \nu)]_{r=2R}$ im Sinne von (2.31) gezeigt.

2.4 Analytische Fortsetzung und quasistationäre Zustände

Die bisherige Formulierung läßt sich auf die Verwendung von komplexen Wellenzahlen κ bzw. Energien ϵ erweitern. Die sich daraus ergebenden Folgerungen sollen jetzt diskutiert werden.

Ausgangspunkt ist die radiale Schrödingergleichung für beliebige komplexe Wellenzahlen κ und den zugehörigen Eigenfunktionen $u_{\ell j}(r, \kappa)$:

$$D_{\ell j} u_{\ell j}(r, \kappa) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \kappa^2 u_{\ell j}(r, \kappa) \quad (2.35)$$

Daraus sind folgende Eigenschaften für die Wellenfunktion und die Streufunktion abzuleiten ([Hei50], [BZP69], [LaL88]):

- a) $u_{\ell j}(r, \kappa) = u_{\ell j}(r, -\kappa) \implies S_{\ell j}(\kappa) = S_{\ell j}^{-1}(-\kappa)$
- b) Für reelle κ ist $u_{\ell j}(r, \kappa) = C u_{\ell j}^*(r, \kappa)$, C konstant und $S_{\ell j}(\kappa) = S_{\ell j}^{-1}(\kappa)^*$. Allgemeiner gilt auch für beliebige komplexe κ : $S_{\ell j}(\kappa) = \left(S_{\ell j}^*(\kappa^*) \right)^{-1}$.
- c) Aus a) und b) ergeben sich die Eigenschaften:
 $S_{\ell j}^{-1}(\kappa^*) = S_{\ell j}^*(\kappa)$, $S_{\ell j}(-\kappa^*) = S_{\ell j}^*(\kappa)$, $S_{\ell j}(-\kappa) = S_{\ell j}^{-1}(\kappa)$
- d) Wenn $S_{\ell j}(\kappa)$ für bestimmte κ_o in der oberen komplexen Halbebene Pole hat, so ergeben sich für den konjugiert komplexen Wert κ_o^* Nullstellen und umgekehrt. Ist der Realteil von $\kappa \neq 0$, dann treten Pole und Nullstellen paarweise auf und zwar für κ_o und $-\kappa_o^*$. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 2.3 zu sehen.
- e) Für Potentiale, die ab einem bestimmten Abschneide-Radius ("cut-off") identisch Null sind, liegen Pole aus der oberen Halbebene nur auf der positiven imaginären Achse. Die Werte $i|\kappa_o|$ entsprechen gebundenen Zuständen. Fällt das verwendete Potential nicht stärker als irgendeine Exponentialfunktion $\exp(-\mu r)$ ab, so können "falsche" oder "überflüssige" Pole auftreten. Diese Pole sind durch Pole der Funktion $u_{\ell j}^{(-)}(r, \kappa)$ bestimmt. Diese Pole sind unphysikalisch, bedingen aber, daß eine Rekonstruktion des Potentials aus den Streuphasen alleine nicht möglich ist. Bargmann [Bar49] gibt dafür Beispiele an. Diese Tatsache ist im übrigen ein Grund dafür, daß verschiedene optische Potentiale dasselbe Streuexperiment erklären können [MoM65].
- f) Mit Ausnahme der $u_{\ell j}(r, \kappa)$, für die $S_{\ell j}(\kappa)$ einen Pol auf der positiven, imaginären Achse hat (gebundene Zustände) oder für die κ reell ist (Streuzustände), gilt $\lim_{r \rightarrow \infty} |u_{\ell j}(r, \kappa)| \rightarrow \infty$.

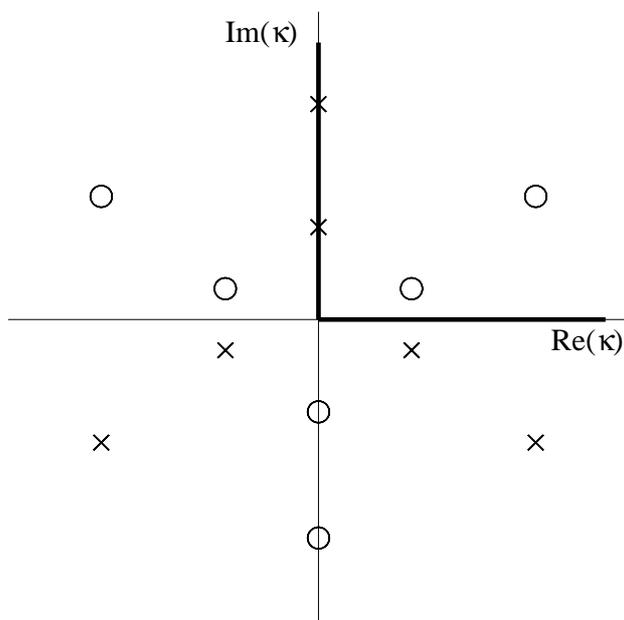


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung der Pole (x) und Nullstellen (o) einer S -Matrix. Die dicken Linien entlang der positiven imaginären und reellen Achse symbolisieren den Bereich physikalischer Zustände, (aus [Hei50]).

Mit diesen Vorbemerkungen ist es möglich, Eigenschaften von Resonanzzuständen, d. h. quasistationären Zuständen, zu beschreiben. Im Falle eines solchen quasistationären Zustands mit der reellen Wellenzahl κ_{ox} hat die S -Funktion einen Pol für die komplexe Wellenzahl $\kappa_o = \kappa_{ox} + i\kappa_{oy}$, also

$$\lim_{\kappa \rightarrow \kappa_o} |S(\kappa)| \rightarrow \infty \quad (2.36)$$

Wegen der Beziehung d) ergibt sich ein weiterer Pol für $-\kappa_o^*$ und Nullstellen für $-\kappa_o$ bzw. κ_o^* . Damit läßt sich $S(\kappa)$ für einen Pol wie folgt schreiben:

$$S_{\ell j}(\kappa) = S_{\ell j}^0(\kappa) \frac{(\kappa - \kappa_o^*)(\kappa + \kappa_o)}{(\kappa + \kappa_o^*)(\kappa - \kappa_o)}. \quad (2.37)$$

Für rein reelle κ ist der Betrag von $S_{\ell j}(\kappa) = 1$ (wegen b)) und da die Funktion $S_{\ell j}^0(\kappa)$ in der Nähe des Pols wie eine Konstante behandelt werden kann, ergibt sich

$$S_{\ell_j}(\kappa) = \exp 2i\delta_{\ell_j}(\kappa) = \exp 2i(\delta_{\ell_j}^{res}(\kappa) + \delta_0), \quad (2.38)$$

wobei der resonante Anteil durch

$$\delta_{\ell_j}^{res}(\kappa) = -\arctan\left(\frac{\kappa_{oy}}{\kappa - \kappa_{ox}}\right) \quad (2.39)$$

gegeben ist. Die Ableitung dieser Größe ist eine Lorentzkurve.

Man berechnet jetzt das Ortsraumintegral des Betragsquadrats der Kontinuumswellenfunktionen im endlichen Intervall von 0 bis R_0 , wie in den Gleichungen (2.20) bis (2.22) beschrieben. Wählt man R_0 klein genug (was bei Berechnung des Formfaktors in "Prior"-Darstellung (Abschnitt 2.6) immer möglich ist), so bleibt näherungsweise nach dem Differenzieren von (2.39) und unter Berücksichtigung von (2.14) nur der Term

$$\frac{1}{2}N(\kappa)^2 \left[\partial_\kappa \delta_{\ell_j}^{res}(\kappa) \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\kappa_{oy}}{(\kappa - \kappa_{ox})^2 + \kappa_{oy}^2} \right] \quad (2.40)$$

übrig. Integriert man diesen Ausdruck, der einer Lorentzkurve entspricht, über κ so ergibt sich der Wert Eins. Da sich außerdem die Radialabhängigkeit der Wellenfunktion für schmale Resonanzen bezüglich κ kaum ändert, gelten näherungsweise die Zusammenhänge (Gleichung (2.22) unter Vernachlässigen der Terme 2 und 3):

$$\int_{Resonanz} d\kappa \int_0^{R_0} dr' |u_{\ell_j, m_j}(r', \kappa)|^2 \approx \frac{\pi}{2} \kappa_{oy} \int_0^{R_0} dr' |u_{\ell_j, m_j}(r', \kappa_{ox})|^2 \approx 1. \quad (2.41)$$

Der Zustand, der durch die Wellenfunktion $u_{\ell_j, m_j}(r', \kappa_{ox})$ beschrieben wird, wird auch als quasistationärer Zustand bezeichnet. Wird der Ausdruck mit $\sqrt{(\kappa_{oy}/N(\kappa_{ox}))}$ multipliziert, so sind diese Zustände wie gebundene Wellenfunktionen normiert.

Eine entsprechende Darstellung ist natürlich auch bezüglich der Energie ϵ möglich, wie man mit Hilfe von Gleichung (2.37) sieht. Die Streufunktion läßt sich wie folgt schreiben:

$$S_{\ell_j}(\epsilon) = S_{\ell_j}^0 \frac{\epsilon - \epsilon_o + \frac{1}{2}i\Gamma}{\epsilon - \epsilon_o - \frac{1}{2}i\Gamma}. \quad (2.42)$$

Die Einteilchenresonanzbreite Γ ist dann näherungsweise $2\hbar^2\mu^{-1}\kappa_{ox}\kappa_{oy}$; ϵ_o ist die Resonanzenergie. Der der Gleichung (2.40) entsprechende Ausdruck ist eine Lorentzkurve bezüglich der Energie

$$\frac{1}{2}N(\epsilon)^2\sqrt{\frac{2\hbar^2\epsilon}{\mu}}[\partial_\epsilon\delta_{\ell j}(\epsilon)] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\Gamma/2}{(\epsilon - \epsilon_o)^2 + (\Gamma/2)^2}\right]. \quad (2.43)$$

Die Wellenfunktion $u_{\ell j, m_j}(r', \epsilon_o)$ kann dann durch Multiplikation mit $\sqrt{(\Gamma\pi/2)}$ wieder einer gebundenen Wellenfunktion entsprechend normiert werden ([BaT73], [BRT84]). Bei praktischen Rechnungen zeigt sich, daß die Größe des Radius R_0 für quasistationäre Zustände mit Energien, die klein gegenüber der Zentrifugal- und Coulombbarriere sind, nicht kritisch ist. (Üblicherweise wird für R_0 der äußere klassische Umkehrpunkt der Zentrifugal- und Coulombbarriere benützt [LaT58].) Für Energien, die größer als die Zentrifugal- und Coulombbarriere sind, ist es andererseits nicht sinnvoll von quasistationären Zuständen oder Einteilchenbreiten zu sprechen. Auch die Ableitung des Streuphasenwinkels $\delta_{\ell j}$ zeigt nicht mehr den typischen Verlauf einer Lorentzkurve aus Gleichung (2.40) bzw. Gleichung (2.43). Als Beispiel für quasistationäre Zustände sind Wellenfunktionen und die Integrale über ihre Betragsquadrate sowie die zugehörigen Gesamtpotentiale und die im Abschnitt 2.6 diskutierten Überlappwellenfunktionen für einen $f_{5/2}$ -Zustand in der Abbildung 2.4 dargestellt. Aus der Abbildung wird deutlich, daß quasistationäre Zustände in einem Übergangsbereich zwischen gebundenen Zuständen und echten Streuzuständen liegen. Sie zeigen daher sowohl Eigenschaften der gebundenen Zustände als auch der Streuzustände. Ihre Breiten κ_{oy} bzw. Γ sind eng mit den spektroskopischen Faktoren gebundener Zustände verknüpft. Im Abschnitt 2.6 wird dies genauer erklärt.

Die Ähnlichkeit zwischen quasistationären Zuständen und gebundenen Einteilchenzuständen wird auch in anderer Hinsicht deutlich. Durch Veränderung der Potentialtiefe geht im Grenzwert $|\kappa| = (|\kappa_{ox} - i\kappa_{oy}|) \rightarrow 0$ der zugehörige quasistationäre Zustand stetig in einen schwachgebundenen Zustand über ([BaT73]). Dies ist wegen der analytischen Eigenschaften der Wellenfunktion nicht verwunderlich. Damit wird auch klar, warum sehr schmale Resonanzzustände bei praktischen Rechnungen oft durch schwach gebundene Zustände ersetzt werden können.

Da die Wellenfunktionen quasistationärer Zustände im Potentialbereich wesentliche Beiträge haben, wie auch in Abbildung 2.4 zu sehen ist, werden sie bei Kernstrukturrechnungen oft neben den gebundenen Zuständen mitberücksichtigt. Dabei kann wie folgt vorgegangen werden: Man erzeugt eine Basis von diskreten Eigenzuständen $u_{\nu, \ell j, m_j}(r)$, wie sie in Abschnitt 2.3 definiert wurden, zu Radien R_S , die individuell zu jedem ℓ, j so bestimmt werden, daß die Streuphase für einen der ungebundenen Eigenzustände gerade $\pi/2$ beträgt und damit ein quasistationärer Zustand generiert wird. Man hat also gebundene Einteilchenzustände, ungebundene Einteilchenresonanzzustände und weitere nichtresonante Einteilchenstreuzustände als Basis. Mit

dieser Basis kann man zwei orthogonale Räume bilden. Einer entspricht dem Raum der gebundenen bzw. Resonanzzustände, der andere dem der offenen Kanäle.

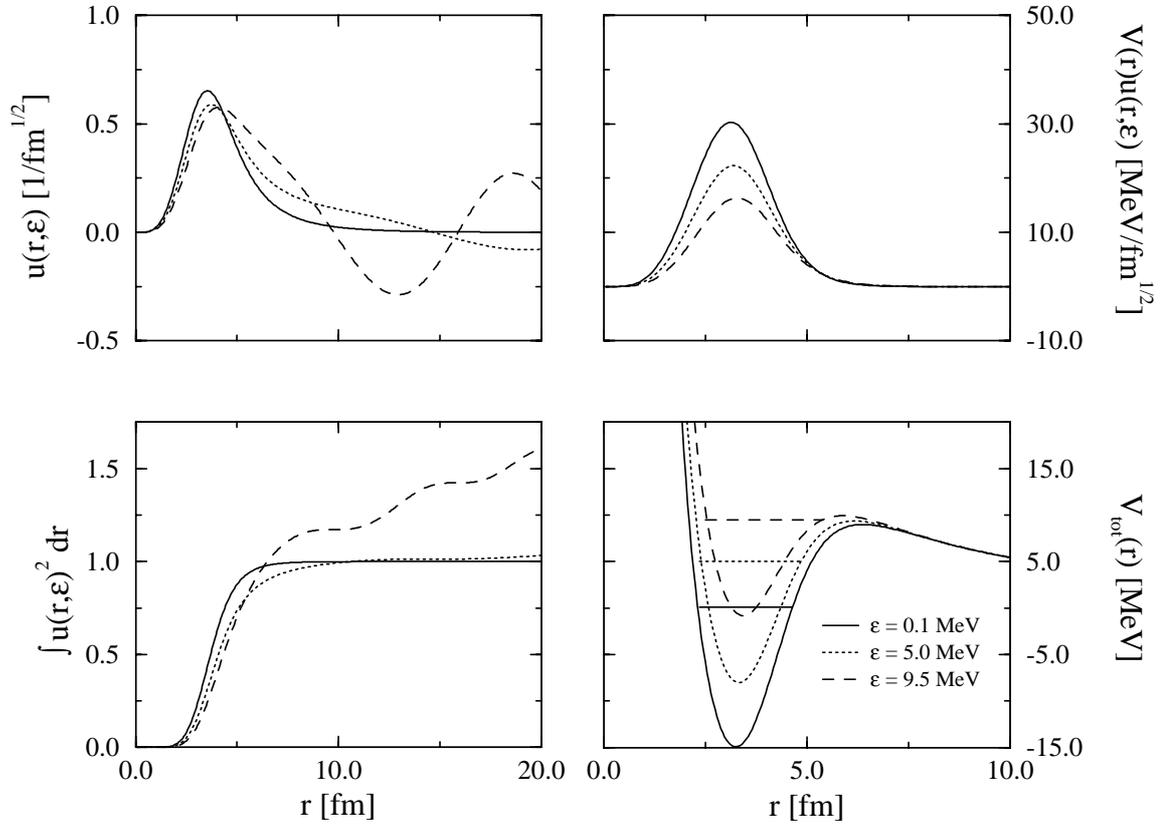


Abbildung 2.4: Radiale Wellenfunktionen und die Integrale über die entsprechenden Betragsquadrate (Figur links oben und Figur links unten) für quasistationäre $f_{5/2}$ -Zustände bei verschiedenen Energien ($\epsilon = 0.1$ MeV, 5.0 MeV, 9.5 MeV). Durch Anpassen der Potentialtiefe ("Well-Depth-Method") wurden quasistationäre Zustände bei den gegebenen Energien ermittelt. In der Figur rechts unten sind die zugehörigen Potentiale $V_{tot}(r)$, in der Figur rechts oben die Wechselwirkungsüberlappwellenfunktion zu sehen.

Für Kernstrukturrechnungen genügt es oft, nur den ersten Teilraum zu berücksichtigen.

Eine ähnliche Zerlegung in zwei orthogonale Teilräume kann auch nach einem Verfahren von Wang und Shakin [WaS70] erfolgen. Quasistationäre Zustände werden hier bis zu einem Abschneide-Radius ("cut-off"; häufig der klassische Umkehrpunkt für das Potential) berechnet und in diesem Intervall im Ortsraum auf Eins nor-

miert. Mit dem Orthonormalisierungsverfahren von E. Schmidt werden dann sowohl die zugehörigen gebundenen Zustände als auch die übrigen Streuzustände ermittelt. In [WaS70] wurde dieses Verfahren exemplarisch für die $1d_{3/2}$ -Resonanz in ^{16}O vorgestellt, M. Müller [Mue95], [MDI95] benutzte es im Rahmen seiner Dissertation, um einen geeigneten Zustandsraum zur Beschreibung der Ankopplung des Kontinuums an gebundene Zustände zu erhalten.

Die obigen Ansätze gelten nur näherungsweise für schmale Resonanzen. Lediglich im Grenzwert $\kappa \rightarrow 0$ ($\text{Im}(\kappa) < 0$) (in der oberen Halbebene von κ existieren Pole nur zu rein imaginären κ) gelten die Aussagen streng. Ursprünglich wurden quasistationäre Zustände von G. Gamow ja auch zur Beschreibung des Zerfalls eines langlebigen α -Zustands im ^{238}U verwendet [Gam28].

In dieser Arbeit werden quasistationäre Zustände als Teil des Kontinuums behandelt. Die obige Diskussion diene daher nur zur besseren Interpretation und zum besseren Verständnis der Eigenschaften von Resonanzzuständen. Auf Grund der engen Verwandtschaft zu gebundenen Zuständen wird klar, daß bei störungstheoretischen Ansätzen vornehmlich die Resonanzen mit gebundenen Zuständen über eine Restwechselwirkung koppeln und daher zu Mischungen führen, die denen in einem System ausschließlich gebundener Zustände entsprechen. Ein physikalisches Beispiel hierfür sind die Spiegelkerne ^{41}Ca und ^{41}Sc oder ^{13}C und ^{13}N . Messungen zeigen, daß die Stärkefunktionen von Neutronenzuständen unterhalb der Teilchenaufbruchschwelle denen der Protonenzustände oberhalb der Teilchenaufbruchschwelle entsprechen (Siehe Kapitel 5 und 6).

2.5 Einteilchenniveaudichte

Im folgenden soll noch der Zusammenhang zwischen Einteilchenniveaudichte und diskreter Kontinuumsdarstellung vorgestellt werden. Ausgangspunkt ist ein Ansatz von S. Shlomo [Shl92] für die Einteilchenniveaudichte $g(\epsilon)$ mit Hilfe der Einteilchen-Greensfunktionen $\mathcal{G}^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}', \epsilon)$:

$$g(\epsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int d\vec{r}' \left[\mathcal{G}^{(+)}(\vec{r}, \vec{r}', \epsilon) - \mathcal{G}^{(-)}(\vec{r}, \vec{r}', \epsilon) \right]_{\vec{r}=\vec{r}'}. \quad (2.44)$$

Diese Greensfunktionen kann man in der Spektraldarstellung bezüglich der gebundenen Zustände und der Kontinuumszustände $\phi_{\ell_j, m_j}(\vec{r}, \epsilon)$ aus Gleichung (2.1) darstellen, also

$$\mathcal{G}^{(\pm)}(\vec{r}, \vec{r}', \epsilon) = \sum_{\ell_j, m_j} \left[\underbrace{\sum_n \frac{\phi_{n, \ell_j, m_j}^*(\vec{r}) \phi_{n, \ell_j, m_j}(\vec{r}')}{\epsilon_n - \epsilon \pm i\eta}}_{\text{gebunden}} + \underbrace{\int d\epsilon' \frac{\phi_{\ell_j, m_j}^*(\vec{r}, \epsilon') \phi_{\ell_j, m_j}(\vec{r}', \epsilon')}{\epsilon' - \epsilon \pm i\eta}}_{\text{Kontinuum}} \right]. \quad (2.45)$$

Die Integration in Gleichung (2.44) erfolgt über den gesamten dreidimensionalen Raum. Berechnet man diesen Ausdruck aber für ein endliches Volumen, z. B. für eine Sphäre Ω vom Radius R_S , so können die Kontinuumszustände nach einer diskreten Basis $\varphi_{\nu, \ell_j, m_j}(\vec{r})$ mit den in Abschnitt 2.3 beschriebenen Eigenschaften entwickelt werden. Für die Einteilchenniveaudichte ergibt sich dann unter Berücksichtigung der Orthogonalität der $\varphi_{\nu, \ell_j, m_j}(\vec{r})$ der Ausdruck (zur Vereinfachung werden die m_j nicht mit ausgeschrieben):

$$g^\Omega(\epsilon) = \sum_{\ell_j} (2j+1) \left\{ \sum_\nu \left[\left(\sum_n |\langle \varphi_{\nu, \ell_j} | \phi_{n, \ell_j} \rangle|^2 \delta(\epsilon_n - \epsilon) \right) + |\langle \varphi_{\nu, \ell_j} | \phi_{\ell_j}(\epsilon) \rangle|^2 \right] \right\} \quad (2.46)$$

mit den in Anhang G bestimmten Matrixelementen $\langle \varphi_{\nu, \ell_j} | \phi_{n, \ell_j} \rangle$ und $\langle \varphi_{\nu, \ell_j} | \phi_{\ell_j}(\epsilon) \rangle$. Diese Einteilchenniveaudichte soll nun auf die Niveaudichte freier Teilchen bezogen werden. Dazu verwendet man eine entsprechende Entwicklung für freie Kontinuumszustände [Pre63]. Man erhält mit

$$g_0^\Omega(\epsilon) = \sum_{\ell_j} (2j+1) \left\{ \sum_\nu \left[|\langle \varphi_{\nu, \ell_j}^0 | \phi_{\ell_j}^0(\epsilon) \rangle|^2 \right] \right\}, \quad (2.47)$$

für große R_S die Größe

$$g^\Omega(\epsilon) - g_0^\Omega(\epsilon) = g_b(\epsilon) + g_c(\epsilon) \approx \sum_{\ell_j} (2j+1) \left[\sum_n \delta(\epsilon_n - \epsilon) + \frac{1}{\pi} \partial_\epsilon \delta_{\ell_j} \right] \quad (2.48)$$

mit einem Anteil g_b für gebundene Zustände und g_c für Resonanzzustände. Dieser Ausdruck entspricht dem üblicherweise verwendeten Ausdruck für die Einteilchenniveaudichte [Shl92].

Die Gleichung (2.48) liefert somit einen allgemeinen Ausdruck für die Einteilchenniveaudichte für ein beliebiges Potential. Auch hier sieht man wieder die enge Verwandtschaft von gebundenen Zuständen und Resonanzzuständen. Setzt man den Ausdruck (2.39) für die Streuphase ein, so werden die Resonanzen bei einer Integration über die Niveaudichte wie gebundene Zustände mitgezählt.

2.6 Formfaktoren, spektroskopische Amplituden und Stärkefunktionen

Bei der Behandlung von Transferreaktionen im Rahmen der EFR-DWBA (Exact Finite Range-DWBA) sind alle wesentlichen Eigenschaften über die Struktur der beteiligten Kerne im Wechselwirkungskern oder Kernmatrixelement enthalten. Für einen Transfer von einer α - in eine β -Partition, also der Reaktion $A(a, b)B$ mit $B = A + x$ und $a = b + x^2$, läßt sich diese Größe wie folgt angeben:

$$I_{\beta\alpha} = \langle bB | \left\{ \begin{array}{c} \hat{V}^\alpha \\ \hat{V}^\beta \end{array} \right\} | aA \rangle = \langle I_b M_b I_B M_B | \left\{ \begin{array}{c} \hat{V}^\alpha \\ \hat{V}^\beta \end{array} \right\} | I_a M_a I_A M_A \rangle. \quad (2.49)$$

Dabei bezeichnen die I und M die Drehimpulsquantenzahlen der beteiligten Kerne und die \hat{V}^α und \hat{V}^β die Restwechselwirkungen in "Post"- oder "Prior"-Darstellung. Diese Restwechselwirkungen aus $I_{\beta\alpha}$ können, wie im Abschnitt 1.2 beschrieben, als effektive Wechselwirkungen eines Dreikörperproblems dargestellt werden, die noch exakt sind, aber praktisch nicht berechnet werden können. Sie werden daher üblicherweise durch Einteilchenpotentiale oder optische Potentiale \hat{U}^α bzw. \hat{U}^β ersetzt. Sie beinhalten auch nichtlokale Anteile des Potentials, die oft als "Perey"-Faktoren [PeB61] bei den Wellenfunktionen mitberücksichtigt werden. In der Ortsraumdarstellung ergibt sich dann folgende Näherung:

$$\begin{aligned} V^\alpha(\vec{\rho}_\alpha, \xi_b, \xi_x) &\approx U^\alpha(\vec{\rho}_\alpha) \\ V^\beta(\vec{\rho}_\beta, \xi_A, \xi_x) &\approx U^\beta(\vec{\rho}_\beta). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Für $I_{\beta\alpha}$ erhält man dann:

$$I_{\beta\alpha} = \begin{cases} \int d\xi_x \langle I_B M_B | I_A M_A \rangle \langle I_b M_b | \hat{U}^\alpha | I_a M_a \rangle & \text{post} \\ \int d\xi_x \langle I_B M_B | \hat{U}^\beta | I_A M_A \rangle \langle I_b M_b | I_a M_a \rangle & \text{prior.} \end{cases} \quad (2.51)$$

Dieser Ausdruck läßt sich im Ortsraum explizit in den inneren Koordinaten $\xi = (\xi_x, \xi_A, \xi_b)$ der drei Fragmente b , A und x und den Jacobikoordinaten $\vec{\rho}_\alpha$ und $\vec{\rho}_\beta$ (Gleichung (1.40) auf Seite 17) zwischen den entsprechenden Fragmenten schreiben (siehe auch Abbildung 1.1):

²Exemplarisch wird eine Stripping-Reaktionen diskutiert.

$$I_{\beta\alpha}(\vec{\rho}_\alpha, \vec{\rho}_\beta) = \int d\xi \Psi_B^*(\vec{\rho}_\beta, \xi_A, \xi_x) \Psi_b^*(\xi_b) \left\{ \begin{array}{l} U^\alpha(\vec{\rho}_\alpha) \\ U^\beta(\vec{\rho}_\beta) \end{array} \right\} \Psi_A(\xi_A) \Psi_a(\vec{\rho}_\alpha, \xi_b, \xi_x). \quad (2.52)$$

Die Matrixelemente ohne Restwechselwirkung, $\langle I_B M_B | I_A M_A \rangle$ und $\langle I_b M_b | I_a M_a \rangle$, werden üblicherweise als Überlappintegrale bezeichnet [Sat83]. Sie beschreiben den herausprojizierten Anteil des transferierten Teilchens x im Kern B , bzw. a , d. h. die Wellenfunktionen von x bezüglich der Rumpfe A , bzw. b . Die beiden anderen Matrixelemente $\langle I_b M_b | \hat{U}^\alpha | I_a M_a \rangle$ und $\langle I_B M_B | \hat{U}^\beta | I_A M_A \rangle$ werden als Wechselwirkungsintegrale bezeichnet.

Zur Auswertung der Überlappintegrale wird nun folgendermaßen vorgegangen: Die Gesamtwellenfunktion für das transferierte Teilchen x und den Rumpf c (hier A oder b)

$$\Psi_{(c+x)}(\vec{r}_{cx}, \xi_c, \xi_x) = N_{cx}^{-\frac{1}{2}} \sum_{c', \ell, j} \Psi_{c'}(\xi_{c'}) \psi_{c', \ell j}(\vec{r}_{cx}, \xi_x) (I_{c'} M_{c'} j m_j | I_{c+x} M_{c+x}) \quad (2.53)$$

wird nach einer vollständigen Basis von Rump fzuständen mit den Clebsch-Gordan-Koeffizienten $(I_{c'} M_{c'} j m_j | I_{c+x} M_{c+x})$ entwickelt. Dabei kann angenommen werden, daß es sich bei diesen Rump fzuständen um exakte Zustände des Rumpfes handelt, und nicht um Modellzustände [Sat83]. Die Summation in Gleichung (2.53) erfolgt über alle Rump fzustände c' und über den Drehimpuls ℓ sowie den Spin j des Teilchens x relativ zum Rumpf. (Der besseren Übersichtlichkeit halber wurde auf die Darstellung unterschiedlicher Isospinzustände verzichtet. N_{cx} ist die Anzahl der Nukleonen des Kerns $c + x$.) Durch Projektion auf einen bestimmten Rump fzustand ergibt sich das Überlappintegral

$$\langle I_c M_c | I_{c+x} M_{c+x} \rangle = N_{cx}^{-\frac{1}{2}} \sum_{\ell j} \psi_{c, \ell j, m_j}(\vec{r}_{cx}, \xi_x) (I_c M_c j m_j | I_{c+x} M_{c+x}) \quad (2.54)$$

mit einer einteilchenartigen Wellenfunktion $\psi_{c, \ell j, m_j}(\vec{r}_{cx})$ des transferierten Teilchens x relativ zum Rumpf c . Die Überlappwellenfunktion ist eine Observable, ihre experimentelle Bestimmung ist aber in der Praxis kaum möglich. Leicht zugänglich ist nur das asymptotische Verhalten der Überlappwellenfunktion, daß durch die Separationsenergie von c und x gegeben ist, sowie die Drehimpulseigenwerte, die charakteristische Winkelverteilungen zeigen. Man vergleicht daher im Falle gebundener Zustände, die zunächst betrachtet werden sollen, auf Eins normierte Einteilchenwellenfunktionen $\phi_{\nu, \ell j, m_j}(\vec{r}_{cx}, \xi_x)$ zu einem Modellpotential zu entsprechendem Spin,

Bahndrehimpuls und Bindungsenergie mit den Überlappwellenfunktionen und setzt die Ausdrücke proportional zueinander, also

$$\psi_{c,\ell j,m_j}(\vec{r}_{cx}, \xi_x) \approx \mathcal{C}_{I_c, I_{c+x}, \nu, (\ell, s), j}^{(+)} \phi_{\nu, \ell j, m_j}(\vec{r}_{cx}, \xi_x). \quad (2.55)$$

Der Proportionalitätsfaktor $\mathcal{C}_{I_c, I_{c+x}, \nu, (\ell, s), j}^{(+)}$ wird dann als spektroskopische Einteilchen-Amplitude des Zustands bezeichnet. Entsprechend kann man auch die spektroskopische Einloch-Amplitude angeben. Bei Verwendung von Erzeuger- und Vernichterooperatoren ergeben sich für den konkreten Fall der hier betrachteten Stripping-Reaktion die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{I_A, I_B, \nu, (\ell, s), j}^{(+)} (I_A M_A j m_j | I_B M_B) &= \langle B | a_{\nu, (\ell, s), j m_j}^+ | A \rangle \\ \mathcal{C}_{I_a, I_b, \nu, (\ell, s), j}^{(-)} (I_b M_b j m_j | I_a M_a) &= \langle b | a_{\nu, (\ell, s), j m_j} | a \rangle. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Dabei ist zu beachten, daß die Größen (2.55) und (2.56) modellabhängig sind: Sie hängen vom verwendeten Einteilchen-Potential zur Bestimmung der ϕ_ν ab. Die Bestimmung der spektroskopischen Amplituden erfolgt daher allgemeiner mit der Bedingung

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\nu, (\ell, s), j}^{(+)} &= \int d\vec{r}_{cx} d\xi_x |\psi_{c, \ell j}(\vec{r}_{cx}, \xi_x)|^2 \\ &= |\mathcal{C}_{I_c, I_{c+x}, \nu, (\ell, s), j}^{(+)}|^2. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Wobei das Betragsquadrat der Überlappwellenfunktion als spektroskopischer Faktor $\mathcal{S}_{\nu, (\ell, s), j}^{(+)}$ für Einteilchenzustände [Cle73] bezeichnet wird. Entsprechend ergibt sich $\mathcal{S}_{\nu, (\ell, s), j}^{(-)}$ für die Lochzustände.

Bei der Berechnung von energiemittelten Wirkungsquerschnitten (siehe Gleichung (1.86) auf Seite 27) werden diese spektroskopischen Faktoren von Übergängen κ zu gleichen sonstigen Quantenzahlen jeweils mit Energien E_κ mit Hilfe einer Mittelungsfunktion $\Delta(E - E_\kappa)$ aufsummiert. Damit gelangt man zu einer energiemittelten Stärkefunktion

$$\langle P \rangle_{c+x}(E) = \sum_{(\kappa)} \Delta(E - E_\kappa) \mathcal{S}_\kappa^{(+)}. \quad (2.58)$$

Solche Stärkefunktionen finden in der statistischen Mehrstufentheorie zur Beschreibung von Vergleichgewichtsreaktionen Verwendung. Die Energieabhängigkeit des

Wirkungsquerschnitts kann dann durch die Stärkefunktionen, die Winkelabhängigkeit durch einen schwach energieabhängigen Einteilchen-Modellwirkungsquerschnitt ausgedrückt werden. Es ist damit eine Faktorisierung des Wirkungsquerschnitts in Strukturanteile und Dynamik gegeben, die solche Prozesse berechenbar machen [Len87].

Die vier Überlappintegrale können mit Basiswellenfunktionen und den spektroskopischen Amplituden z.B. in Priorform näherungsweise wie folgt geschrieben werden [Tam74]:

Post:

$$\begin{aligned}\langle I_B M_B | I_A M_A \rangle &= \sum \mathcal{C}_{I_A, I_B \nu_1, (\ell_1, s) j_1}^{(+)} [\phi_{\ell_1}(\vec{\rho}_\beta) \otimes \chi_s(\xi_x)]_{\nu_1, j_1 m_{j_1}} \\ &\quad \times (I_A M_A j_1 m_{j_1} | I_B M_B) \\ \langle I_b M_b | \hat{U}^\alpha | I_a M_a \rangle &= \sum \mathcal{C}_{I_a, I_b, \nu_2, (\ell_2, s) j_2}^{(-)} [U^\alpha(\vec{\rho}_\alpha) \phi_{\ell_2}(\vec{\rho}_\alpha) \otimes \chi_s(\xi_x)]_{\nu_2, j_2 m_{j_2}} \\ &\quad \times (I_b M_b j_2 m_{j_2} | I_a M_a).\end{aligned}\quad (2.59)$$

Prior:

$$\begin{aligned}\langle I_B M_B | \hat{U}^\beta | I_A M_A \rangle &= \sum \mathcal{C}_{I_A, I_B, \nu_1, (\ell_1, s) j_1}^{(+)} [U^\beta(\vec{\rho}_\beta) \phi_{\ell_1}(\vec{\rho}_\beta) \otimes \chi_s(\xi_x)]_{\nu_1, j_1 m_{j_1}} \\ &\quad \times (I_A M_A j_1 m_{j_1} | I_B M_B) \\ \langle I_b M_b | I_a M_a \rangle &= \sum \mathcal{C}_{I_a, I_b, \nu_2, (\ell_2, s) j_2}^{(-)} [\phi_{\ell_2}(\vec{\rho}_\alpha) \otimes \chi_s(\xi_x)]_{\nu_2, j_2 m_{j_2}} \\ &\quad \times (I_b M_b j_2 m_{j_2} | I_a M_a).\end{aligned}\quad (2.60)$$

Das Tensorprodukt beschreibt dabei die Drehimpulskopplung des Ortsraumanteils mit den Spinwellenfunktionen, also z.B.

$$\phi_{\ell_j, M_j}(\vec{\rho}) = [\phi_\ell(\vec{\rho}) \otimes \chi_s(\xi)]_{j m_j} = \sum_{m_\ell, m_s} (\ell m_\ell s m_s | j m_j) \phi_{\ell m_\ell}(\vec{\rho}) \chi_{s m_s}(\xi). \quad (2.61)$$

Die Summation in (2.59) bzw. (2.60) erfolgt über alle die Quantenzahlen ν_i, ℓ_i, j_i , die zu den festgelegten Anfangs- und Endzuständen von a und A bzw. b und B führen können. Um welche es sich dabei handelt, hängt von der Art der Reaktion und den Endzuständen ab. Die Wellenfunktionen $\phi_{\ell m_\ell}(\vec{\rho}_\beta)$ bzw. $\phi_{\ell m_\ell}(\vec{\rho}_\alpha)$ sind Relativwellenfunktionen zwischen dem Rumpf A bzw. b und dem transferierten Teilchen x . Sie beschreiben gebundene Zustände von $B = (A + x)$ bzw. $a = (b + x)$, die im Ortsraum auf Eins normiert sind. Eine detaillierte Beschreibung dieser Einteilchenwellenfunktionen erfolgte in Abschnitt 2.1.

Die Ausdrücke aus (2.59) und (2.60) können noch weiter vereinfacht werden, indem

man, bei Annahme eines spärlich symmetrischen Potentials, die rein winkelabhängigen Größen mit Drehimpulsalgebra separiert

$$I_{\beta\alpha} = \sum G(\Omega_\alpha, \Omega_\beta) f(\rho_\alpha, \rho_\beta). \quad (2.62)$$

Es bleiben dann ein winkelabhängiger Geometriefaktor G und ein sogenannter Formfaktor f übrig [Tam74]. (Nach Satchler [Sat83] sind die Formfaktoren nur die radialen Anteile des Kernmatrixelements.) Für sie ergeben sich in Post- und Priorform explizit die folgenden Ausdrücke:

$$f_{\nu_1, (\ell_1, s) j_1; \nu_2, (\ell_2, s) j_2}(\rho_\alpha, \rho_\beta) = \mathcal{C}_{I_A, I_B, \nu_1, (\ell_1, s) j_1}^{(+)} \mathcal{C}_{I_a, I_b, \nu_2, (\ell_2, s) j_2}^{(-)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{\nu_1, \ell_1 j_1}(\rho_\beta)}{\rho_\beta} \frac{u_{\nu_2, \ell_2 j_2}(\rho_\alpha)}{\rho_\alpha} \quad \text{post} \\ U^\alpha(\rho_\alpha) \\ U^\beta(\rho_\beta) \quad \text{prior.} \end{array} \right. \quad (2.63)$$

Die Größen $u_{\nu_1, \ell_1 j_1}(\rho_\beta)$ und $u_{\nu_2, \ell_2 j_2}(\rho_\alpha)$ in Gleichung (2.63) sind jetzt die radialen Wellenfunktionen mit den Hauptquantenzahlen ν_1 und ν_2 .

Um die Übergangsamplitude (1.37) bzw. (1.38) mit den Kernmatrixelementen aus (2.59) berechnen zu können, muß jetzt noch eine letzte Umformung erfolgen. Die Relativkoordinaten $\vec{\rho}_\beta$ und $\vec{\rho}_\alpha$ werden durch die Kanalkoordinaten \vec{r}_α und \vec{r}_β dargestellt. Wie bei dieser Drehimpulskopplung vorgegangen wird, ist in der einschlägigen Literatur ([Aus70], [Tam74], [Sat83]) beschrieben.

Es bleibt jetzt noch die Bedeutung der spektroskopischen Amplituden bzw. spektroskopischen Faktoren zu diskutieren. Üblicherweise dienen sie dazu, direkte Vergleiche mit dem Experiment zu machen. Dabei geht man wie folgt vor: Man bestimmt durch Rechnung einen differentiellen Wirkungsquerschnitt mit einer auf Eins normierten Modellwellenfunktion mit geeigneter Energie und geeigneten Drehimpulsquantenzahlen (Aus den Winkelverteilungen kann entnommen werden, welche Drehimpulsquantenzahlen benötigt werden.). Die absolute Größe des Wirkungsquerschnitts wird dann durch Vergleich mit den Daten mit dem spektroskopischen Faktor skaliert. D. h. die spektroskopische Amplitude ist ein Maß für das Auftreten eines Einteilchenzustandes oder der Einteilchenanteile bei dem betreffenden Übergang. Aus einer Kernstrukturtheorie, die über die Einteilchen-Näherung hinausgeht, kann durch Projektion auf einen Einteilchenzustand ebenfalls eine spektroskopische Amplitude abgeleitet werden und genau das soll in dieser Arbeit erfolgen. Diese spektroskopische Amplitude ist dann ein Maß für den Einteilchenanteil der Modellwellenfunktion. Ein Vergleich der experimentellen mit der theoretischen spektroskopischen Amplitude liefert also direkte Hinweise über die Kernstruktur.

Der Ansatz (2.55) ist aber nicht frei von Unsicherheiten, da die Modellwellenfunktionen vom verwendeten Potential abhängen und die einfache Proportionalität nicht für alle \vec{r}_{cx} gelten wird. Möglichst genau sollte Gleichung (2.55) im asymptotischen Bereich erfüllt sein, da im Falle eines direkten Reaktionsmechanismus die Reaktion vorrangig an der Peripherie des Rumpfes c stattfindet. Da im Falle gebundener Zustände

in Abhängigkeit von ihrer Separationsenergie ϵ die Überlappfunktionen exponentiell wie $r_{cx}^{-1} \exp(-\sqrt{2\mu\epsilon/\hbar^2} r_{cx})$ abfallen, müssen die Einteilchenmodellzustände diese Bedingung ebenfalls erfüllen. Zu diesem Zweck werden sie für die jeweilige Separationsenergie ϵ zu einem phänomenologischen Potential (z. B. Woods-Saxon Potential) berechnet, das geeignet angepaßt wird. Dieses Verfahren soll auch in dieser Arbeit für gebundene Zustände angewendet werden, obwohl es nicht unproblematisch ist. Stillschweigend wurde bis jetzt angenommen, daß die Überlappfunktionen im Sinne von Gleichung (2.57) integrierbar sind, d.h. es handelte sich um gebundene Zustände für die Überlappfunktionen, die außerhalb der Reichweite des Kernpotentials exponentiell abfallen. Für Überlappfunktionen aber, die einer Kontinuumswellenfunktionen entsprechen, ist die Definition (2.55) für die spektroskopische Amplitude im allgemeinen nicht sinnvoll, da die Normierung ungebundener Zustände mit einer δ -Distribution erfolgt. Ein der Gleichung (2.55) entsprechender Ausdruck existiert daher für Kontinuumszustände nur mit Einschränkungen. Infolgedessen findet man in der Literatur dafür verschiedene Ansätze. Diese sollen nun diskutiert werden. Zunächst soll ein Ansatz von Vincent und Fortune [ViF73] betrachtet werden. Sie benutzten bei der Berechnung eines Formfaktors, respektive eines spektroskopischen Faktors, nur den auslaufenden Anteil $O_\ell^{(+)}(r, \epsilon)$ der Wellenfunktion (siehe Gleichung (2.5)). Der ungestreute Anteil $F_\ell(r, \epsilon)$ der für kleine Energien ϵ und große ℓ klein gegenüber $O_\ell^{(+)}(r, \epsilon)$ ist, wird also vernachlässigt. Damit erhält man für das asymptotische Verhalten der Überlappwellenfunktion näherungsweise den Ausdruck:

$$u_{c,\ell j}(r, \epsilon) \approx N(\epsilon) \mathcal{C}_{I_c, I_{c+x}, (\ell, s), j}(\epsilon) O_{\ell j}^{(+)}(r, \epsilon). \quad (2.64)$$

Die Größe $\mathcal{C}_{I_c, I_{c+x}, (\ell, s), j}(\epsilon)$ ist jetzt eine Partialwellenamplitude, die nicht zufälligerweise so geschrieben wird wie die spektroskopische Amplitude. Führt man das Integral über das Betragsquadrat dieser Wellenfunktion im Ortsraum aus und integriert anschließend über die entstandene δ -Distribution, so erhält man analog zur Definition des spektroskopischen Faktors aus Gleichung (2.57) die Größe:

$$\sigma_{c,\ell j}^{red}(\epsilon) = |\mathcal{C}_{I_c, I_{c+x}, (\ell, s), j}(\epsilon)|^2, \quad (2.65)$$

die im Weiteren als spektroskopische Faktordichte bezeichnet werden soll. Vom partiellen elastischen Wirkungsquerschnitt unterscheidet sich $\sigma_{c,\ell j}^{red}(\epsilon)$ nur um einen kinematischen Faktor.

Nun werden die Partialwellenamplituden bzw. die spektroskopischen Faktordichten für realistische Modellwellenfunktionen stark fluktuierende Größen sein. Besonders für große ℓ und Energien nahe der Teilchenaufbruchschwelle wird man resonante Strukturen finden. Für isolierte Resonanzen läßt sich daher die spektroskopischen Faktordichte im Bereich der Resonanzenergie ϵ_{res} mit einer Ein-Niveau-Breit-Wigner-Formel darstellen:

$$\sigma_{c,\ell j}^{red}(\epsilon) = \frac{\Gamma_c^2}{(\epsilon - \epsilon_{res})^2 + \Gamma_{tot}^2} = \pi \frac{\Gamma_c^2}{\Gamma_{tot}} \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma_{tot}}{(\epsilon - \epsilon_{res})^2 + \Gamma_{tot}^2}. \quad (2.66)$$

Dabei bezeichnet Γ_c die Teilchenbreite (Partialbreite) und Γ_{tot} die Gesamtbreite. Die rechte Seite von Gleichung (2.66) suggeriert bereits welches Ergebnis bei der Integration über die Resonanz erhalten wird, nämlich:

$$s_{I_c, I_{c+x}, (\ell, s), j}^{(+)}(\epsilon) = \int_{Res} d\epsilon' \sigma_{c,\ell j}^{red}(\epsilon') = \pi \frac{\Gamma_c^2}{\Gamma_{tot}}. \quad (2.67)$$

Dieser "spektroskopische Faktor" $s_{I_c, I_{c+x}, (\ell, s), j}^{(+)}(\epsilon)$ von Vincent und Fortune [ViF73] bezieht sich auf eine Einteilchenwellenfunktion mit der Asymptotik $O_{\ell j}^{(+)}(r, \epsilon_{res})$ und hat daher keinen stetigen Übergang bezüglich der Energie zum spektroskopischen Faktor gebundener Zustände. Doch diese Problematik kann überwunden werden (siehe [BaT73]). Setzt man für die Einteilchenwellenfunktion im Bereich der Energie ϵ_{res} eine Einteilchenresonanz an, so gilt asymptotisch:

$$u_{\ell j}^{sp}(r, \epsilon) = \sin(\delta_{\ell j}(\epsilon, \epsilon_{res})) N(\epsilon) O_{\ell j}^{(+)}(r, \epsilon), \quad (2.68)$$

wobei die Streuphase in der Nähe einer Resonanz durch folgenden Ausdruck (siehe auch Gleichung (2.39) auf Seite 46):

$$\delta_{\ell j}^{res}(\epsilon, \epsilon_{res}) = -\arctan\left(\frac{\Gamma_{sp}}{\epsilon_{res} - \epsilon - \Gamma_{sp}}\right) \quad (2.69)$$

geschrieben wird. Integriert man jetzt das Betragsquadrat der Einteilchenwellenfunktion über r und anschließend über die δ -Distribution, so erhält man wieder eine Ein-Niveau-Breit-Wigner-Formel, mit der Breite $\Gamma_c = \Gamma_{tot} = \Gamma_{sp}$. Integration über ϵ im Bereich der Resonanz ergibt dann den Wert $\pi \Gamma_{sp}$. Allgemein läßt sich ein spektroskopischer Faktor für Resonanzzustände in völliger Analogie zu gebundenen Zuständen schreiben:

$$\mathcal{S}_{I_c, I_{c+x}, res, (\ell, s), j}^{(+)} = \frac{\Gamma_c^2}{\Gamma_{tot} \Gamma_{sp}}. \quad (2.70)$$

Allgemeiner läßt sich auf diese Weise auch die folgende *spektroskopische Stärkefunktion für Resonanzen im Kontinuum* definieren:

$$\mathcal{S}_{I_c, I_{c+x}, (\ell, s), j}^{(+)}(\epsilon) = \frac{|\mathcal{C}_{I_c, I_{c+x}, (\ell, s), j}(\epsilon)|^2}{\Gamma_{sp}(\epsilon)}. \quad (2.71)$$

Um über die Teilchenaufbruchschwelle hinaus eine kontinuierliche Darstellung zu haben, wird die in Gleichung (2.71) angegebene Stärkefunktion mit einer Dichtefunktion Δ

$$\langle \mathcal{S}_{I_c, I_{c+x}, (\ell, s), j}^{(+)}(E) \rangle = \int d\epsilon' \Delta(E - \epsilon') \mathcal{S}_{I_c, I_{c+x}, (\ell, s), j}^{(+)}(\epsilon') \quad (2.72)$$

gefaltet. Diese Größe ist dann eine energiegemittelte Größe und ist die natürliche Fortsetzung des Ausdrucks für gebundene Zustände aus Gleichung (2.58).

Die Definitionen (2.70) und (2.71) machen aber nur Sinn für schmale Resonanzen und wenn die berechnete Einteilchenbreite Γ_{sp} bei der Energie des gemessenen Zustandes ermittelt werden kann. Sie ist außerdem mit Unsicherheiten behaftet, wie G. Baur in [BaT73] anmerkt. Bei der Berechnung der Einteilchenwellenfunktion werden nur die "gestreuten" Anteile $O_\ell^{(+)}$ der Wellenfunktion (siehe Gleichung (2.5)) berücksichtigt. Der ungestreute Anteil F_ℓ bleibt unberücksichtigt. Zudem ist die künstliche Veränderung der Potentialtiefe zur Anpassung der Resonanz, als Referenzgröße für hohe Anregungsenergien mit Sicherheit unrealistisch. Verwendet man die vollständige Streulösung so erhält man einen "ungestreuten" Anteil der Wellenfunktion. Dieser "ungestreute" Anteil kann aber für höhere Energien und niedrige ℓ -Werte durchaus vergleichbar mit dem "gestreuten" Anteil sein — damit haben die obigen Definitionen keine Gültigkeit mehr. Hier soll daher ein alternativer Ansatz vorgestellt werden, der die Verwendung einer Wellenfunktion mit korrekter Asymptotik im Formfaktor erlaubt. Dazu wird wieder von der asymptotischen Darstellung des Radialteils der Wellenfunktion (Gleichung (2.5)) ausgegangen, wobei die Partialwellenamplitude wieder durch die S-Matrix ausgedrückt wird. Diese Wellenfunktion wird mit der ortsunabhängigen Größe $e^{-i\delta_{\ell j}}$ multipliziert und dann als Summe von Real- und Imaginärteil dargestellt ([MoM65]):

$$\begin{aligned} N(\epsilon) e^{-i\delta_{\ell j}(\epsilon)} \left[F_\ell(r, \epsilon) + \frac{1}{2i} (|S_{\ell j}| e^{2i\delta_{\ell j}(\epsilon)} - 1) O_\ell^{(+)}(r, \epsilon) \right] = \\ N(\epsilon) \frac{1 + |S_{\ell j}|}{2} [\sin(\delta_{\ell j}(\epsilon)) G_\ell(r, \epsilon) + \cos(\delta_{\ell j}(\epsilon)) F_\ell(r, \epsilon)] + \\ iN(\epsilon) \frac{1 - |S_{\ell j}|}{2} [\cos(\delta_{\ell j}(\epsilon)) G_\ell(r, \epsilon) - \sin(\delta_{\ell j}(\epsilon)) F_\ell(r, \epsilon)] \end{aligned} \quad (2.73)$$

Man sieht sofort, daß für $|S_{\ell j}| = 1$ der Imaginärteil den Wert 0 annimmt, was ja gleichbedeutend damit ist, daß keine inelastischen Beiträge vorhanden sind. Mit den Abkürzungen $v_{\ell j}(r, \epsilon)$ und $w_{\ell j}(r, \epsilon)$ für den Real- und Imaginärteil läßt sich ein gekoppeltes Gleichungssystem für eine Schrödingergleichung mit dem komplexem Potential $U_{\ell j}(r) + iW_{\ell j}(r)$ und dem Differentialoperator $D_{\ell j}$ aus Gleichung (2.2)

aufstellen:

$$\begin{aligned} [D_{\ell j} - \epsilon] v_{\ell j}(r, \epsilon) &= -W_{\ell j}(r)w_{\ell j}(r, \epsilon) \\ [D_{\ell j} - \epsilon] w_{\ell j}(r, \epsilon) &= W_{\ell j}(r)v_{\ell j}(r, \epsilon). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Bei bekannter S -Matrix kann dann durch Anpassen des komplexen Potentials eine komplexe Wellenfunktion ermittelt werden, die der Asymptotik aus Gleichung (2.73) gehorcht. Mit diesem Ansatz wird eine natürliche Erweiterung der "Well-Depth"-Methode für gebundene Zustände erhalten. Physikalisch ist dieser Ansatz leicht einzusehen, wenn man den Transfer ins Kontinuum als ein "doppeltes Streuproblem" auffasst: Zum einen als Streuung des Ejektils am Target, zum anderen als Streuung des transferierten Teilchens am Target oder Projektil. Für beide Streuungen wird ein optisches Potential verwendet. Dieses Verfahren setzt allerdings voraus, daß die S -Matrix für die elastische Streuung aus Experimenten oder theoretischen Modellen bekannt sein muß. Ein geeignetes Modell dafür ist das Kontinuums-QPC-Modell, das im nächsten Abschnitt vorgestellt wird.

Über Einteilchenstärkefunktionen bzw. spektroskopische Faktoren zur Beschreibung von Kontinuumszustände kann zusammenfassend folgendes festgestellt werden: Sinnvolle Definitionen für diese Größen sind nur für quasistationäre Zustände, oder noch allgemeiner Zustände deren Energie kleiner als die Zentrifugal- und Coulombbarriere ist, möglich. Nur in diesem Energiebereich ist die Definition eines Abschneideradius R_0 , z. B. dem klassischen Umkehrpunkt des Potentials, bzw. die Definition einer Einteilchenbreite sinnvoll. Für Einteilchenenergien, die größer als die äußere Potentialbarriere sind, erfolgt der Vergleich zwischen Experiment und theoretischen Ansätzen besser über die S -Matrix des Streuzustands des transferierten Teilchens relativ zum Rumpf des Targets (Stripping) oder Ejektils (Pickup). Transfer ins Kontinuum kann, wie ausführlich in Kapitel 1, Abschnitt 1.2 beschrieben, als ein "doppeltes Streuproblem" aufgefasst werden, zwischen zwei Teilchen in einer Unterpartition und zwischen dem dritten Teilchen und dem Schwerpunkt der Unterpartition. Will man also, z. B. Protonen- bzw. Neutronenstransfer ins Kontinuum beschreiben, so ist ein möglicher geeigneter Ansatz bei der Berechnung der Überlappwellenfunktionen, bzw. des Formfaktors, die Verwendung eines geeigneten optischen Potentials für die elastische Nukleonstreuung. Ein derartiges Potential kann aus der Kenntnis der S -Matrix zum Beispiel aus mikroskopischen Modellen, wie sie im nächsten Kapitel beschrieben werden, erhalten werden.

Bevor mit der Behandlung dieser Modelle begonnen wird, muß noch ein numerisches Problem diskutiert werden. Es besteht darin, ein geeignetes Berechnungsverfahren für die Übergangsamplituden (1.33) und (1.34) in Kontinuumszustände zu finden. Im Falle von Kontinuumsüberlappwellenfunktionen der Art (2.54) wird das entsprechende Integral nur langsam, respektive überhaupt nicht konvergieren. Eine mögliche Lösung für dieses Problems besteht darin, die Integration in der komplexen r -Ebene durchzuführen. (Verfahren von Vincent und Fortune [ViF70]). Eine

andere Möglichkeit besteht darin, eine geeignete Post- bzw. Prior-Darstellung zu verwenden. Verwendet man im Falle einer Stripping-Reaktion die Prior-Darstellung (2.60), so wird die Streuwelle im Wechselwirkungsintegral zusätzlich mit dem Potential $U^\beta(\rho_\beta)$ multipliziert. Mit einem im Ortsraum hinreichend stark abfallenden Potential erhält man dann einen Konvergenzfaktor [Wei89]. Umgekehrt muß man für eine Pickup-Reaktion die Post-Darstellung (2.59) verwenden. Um die Konvergenz zu gewährleisten, darf in diesem Fall keine Coulombkorrektur des Wechselwirkungspotentials berücksichtigt werden. Dies ist zumindest näherungsweise erlaubt.

Kapitel 3

Kernstrukturrechnungen

Im letzten Kapitel wurde gezeigt, daß zur Berechnung der Formfaktoren für eine Kernreaktion Überlappintegrale und Wechselwirkungsintegrale benötigt werden. Es ist ein wesentliches Anliegen dieser Arbeit, diese Integrale mit Hilfe möglichst realistischer Wellenfunktionen zu berechnen, um die beteiligte Kernstruktur in den Reaktionen testen zu können. Ein Ansatz für realistische Modellwellenfunktionen der wichtigsten niederenergetischen Zustände gerader Kerne sind Phononanregungszustände. Ihre einfachsten Komponenten ("Doorway"-Zustände) sind 1-Teilchen-1-Loch-Anregungen. Um Grundzustandskorrelationen miteinzuschließen, müssen neben Teilchen-Loch-Anregungen auch Teilchen-Teilchen- und Loch-Loch-Anregungen berücksichtigt werden. Eine solche Beschreibung ist im Quasiteilchen-Formalismus möglich. Für Systeme mit gerader Nukleonenzahl ist dieser Ansatz, der im ersten Abschnitt dieses Kapitels beschrieben wird, auch als Quasiteilchen-Random-Phase-Näherung (Quasiparticle-Random-Phase-Approximation (QRPA)) bekannt [Ris80]. Für Atomkerne mit ungerader Nukleonenzahl sind die einfachsten "Doorway"-Zustände 2-Teilchen-1-Loch-Zustände bzw. 1-Teilchen-2-Loch-Zustände. Auch in diesem Fall können zusätzlich Grundzustandskorrelationen mitberücksichtigt werden. Man gelangt dann, zum Quasiteilchen-Rumpf-Kopplungsmodell, das in seinem Grundkonzept bereits von Bohr und Mottelson [BoM69] beschrieben wurde. Die Behandlung dieses Modells erfolgt im zweiten Abschnitt. Beide Modelle sollen unter besonderer Berücksichtigung des Kontinuums diskutiert werden.

3.1 QRPA-Modell für angeregte Zustände gerader Kerne

Zur Beschreibung von realistischen Wellenfunktionen, respektive realistischen Stärkefunktionen, für Kerne mit gerader Nukleonenzahl, wird in dieser Arbeit die Quasiparticle-Random-Phase-Approximation (QRPA) in der Form der Dichte-Entwicklungsmethode (Density Expansion Method (DEM)) von H. Lenske [Len87] verwendet. Sie basiert auf der wohlbekanntem QRPA, die zum Beispiel in [RiS80] beschrieben wird. Beim üblichen QRPA-Ansatz müssen die QRPA-Gleichungen in Form eines Eigenwertproblems hoher Dimensionalität gelöst werden. In dem hier verwendet Ansatz wird das QRPA-Problem als ein Selbstkonsistenzproblem für die QRPA-Energieeigenwerte und die QRPA-Übergangsdichten, die nach kollektiven Übergangsfeldern entwickelt werden, dargestellt. Die folgende Herleitung schließt sich an [Siu93] und [Len87] an. Im besonderen werden in dieser Arbeit erstmalig im Rahmen des QRPA-DEM-Ansatzes Kontinuums-QRPA-Gleichungen aufgestellt. Dieser Ansatz ist die Verknüpfung des von Krewald et al. aufgestellten Kontinuums-RPA-Ansatzes mit der Dichte-Entwicklungs-Methode von H. Lenske [Len87]. Ausgangspunkt ist ein Modell-Hamilton-Operator in der Darstellung der zweiten Quantisierung

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{V}^{res} = \hat{H}_0^{SM} - \lambda \hat{N} + \hat{V}^{pair} + \hat{V}^{res} = \\ &\sum_k (\epsilon_k - \lambda) (a_k^+ a_k + \tilde{a}_k^+ \tilde{a}_k) - G \sum_{kk' > 0} a_k^+ \tilde{a}_k^+ \tilde{a}_{k'} a_{k'} \quad k = \{\nu, j, m_j\} \\ &+ \sum_{mj in} v_{mij} a_m^+ a_n^+ a_i a_j \end{aligned} \quad (3.1)$$

mit einem Einteilchen-Operator \hat{H}_0 und einer Restwechselwirkung \hat{V}^{res} . \hat{H}_0 ist hier die Summe aus einem Schalenmodell-Hamilton-Operator \hat{H}_0^{SM} und einem mit der Fermienergie λ multiplizierten Teilchenzahloperator \hat{N} sowie einer Paarwechselwirkung \hat{V}^{pair} mit konstanter Paarkraft. Die Restwechselwirkung \hat{V}^{res} ist eine realistische Quasi-Teilchen-Loch-Wechselwirkung. Die Grundzustands-Wellenfunktion zu \hat{H}_0 ist der BCS-Zustand

$$|BCS\rangle = \Pi_{k>0} (u_k + v_k a_k^+ \tilde{a}_k^+) |-\rangle \quad (3.2)$$

mit den Teilchen- und Lochbesetzungswahrscheinlichkeitsamplituden v_k und u_k , für die $v_k^2 + u_k^2 = 1$

$$v_k^2 + u_k^2 = 1 \quad (3.3)$$

gelten muß. Unter dieser Nebenbedingung und der Nebenbedingung gegebener Teilchenzahl N ergeben sich durch Variation von $\langle BCS | \hat{H}_0 | BCS \rangle$ nach u_k oder v_k die sogenannten BCS-Gleichungen. Für konstante Paarkraft G wie in Gleichung (3.1) lauten diese

$$2(\tilde{\epsilon}_k - \lambda)u_k v_k = \Delta(u_k^2 - v_k^2), \quad (3.4)$$

mit dem Gap-Parameter

$$\Delta = \sum_k G u_k v_k \quad (3.5)$$

und den Quasiteilchenenergien $\tilde{\epsilon}_k = \epsilon_k - G v_k^2$ ergeben sich die Besetzungswahrscheinlichkeitsamplituden iterativ zu

$$\tilde{\epsilon}_k = \epsilon_k - G v_k^2 \cdot \left\{ \begin{array}{c} u_k \\ v_k \end{array} \right\} = 1 \pm \frac{\tilde{\epsilon}_k}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_k^2 + \Delta^2}}. \quad (3.6)$$

Mit den auf diese Art berechneten Besetzungswahrscheinlichkeitsamplituden lassen sich die sogenannten Quasiteilchen-Operatoren (QT-Operatoren) über die Bogolyubov-Valatin-Transformation mit den normalen Teilchen- bzw. Loch-Operatoren darstellen:

$$\begin{aligned} \alpha_k^+ &= u_k a_k^+ - v_k \tilde{a}_k \\ \alpha_{\bar{k}} &= u_k \tilde{a}_k + v_k a_k^+, \end{aligned} \quad (3.7)$$

wobei $\tilde{a}_{j_k, m_k} = (-)^{j_k + m_k} a_{j_k, -m_k}^+$ gilt. Für eine 2-QT-Anregung werden zwei 1-QT-Operatoren zu gutem Gesamtdrehimpuls J, M gekoppelt. Explizit ergibt sich:

$$\begin{aligned} Q_{\nu, JM}^+ &= [\alpha_{\nu_1, j_1}^+ \otimes \alpha_{\nu_2, j_2}^+]_{\nu, JM} \\ &= (1 + \delta_{12})^{-\frac{1}{2}} \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle \alpha_{\nu_1, j_1 m_1}^+ \alpha_{\nu_2, j_2 m_2}^+ \end{aligned} \quad (3.8)$$

und

$$\tilde{Q}_{\nu, JM} = (-)^{J+M} Q_{\nu, J, -M} = (-)^{J+M} [\alpha_{\nu_1, j_1} \otimes \alpha_{\nu_2, j_2}]_{\nu, J, -M} \quad (3.9)$$

Der Multiindex ν ist durch die ν_i 's festgelegt, die das Spektrum der Einteilchenenergien und weiterer Quantenzahlen, wie z.B. die Parität, des jeweiligen Einteilchenzustands spezifizieren. Die Näherung der QRPA besteht darin, daß diese 2-QT-Operatoren näherungsweise die Quasiboson-Kommutatorregel im Sinne von Erwartungswerten

$$\left[Q_{\nu, JM}, Q_{\nu', J'M'}^+ \right] \approx \langle BCS | \left[Q_{\nu, JM}, Q_{\nu', J'M'}^+ \right] | BCS \rangle = \delta_{\nu\nu'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (3.10)$$

erfüllen, sowie die exakten Kommutatorregeln

$$\left[Q_{\nu, JM}^+, Q_{\nu', J'M'}^+ \right] = \left[Q_{\nu, JM}, Q_{\nu', J'M'} \right] = 0 \quad (3.11)$$

gehorden. Man macht nun mit diese 2-QT-Operatoren den folgenden Ansatz für angeregte Kernzustände, sogenannte Phononzustände, mit Drehimpulsquantenzahlen J und M sowie der Parität Π :

$$\begin{aligned} |c\rangle = |c\rangle_{JM} = \Omega_{c, JM}^+ |0\rangle &= \left(\sum_{\nu} [x_{\nu}^c Q_{\nu, JM}^+ - y_{\nu}^c \tilde{Q}_{\nu, JM}] \right. \\ &+ \left. \int_{\nu(\epsilon)} d\epsilon [\xi_{\nu(\epsilon)}^c Q_{\nu(\epsilon), JM}^+ - \eta_{\nu(\epsilon)}^c \tilde{Q}_{\nu(\epsilon), JM}] \right) |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Die Koeffizienten x_{ν}^c , y_{ν}^c , $\xi_{\nu(\epsilon)}^c$ und $\eta_{\nu(\epsilon)}^c$ sind dann die Lösungen der QRPA-Eigenwertgleichungen, bzw. ergeben sich aus der im nächsten Abschnitt beschriebenen Methode. In Gleichung (3.12) erfolgt bereits die Einbeziehung des Kontinuums über die Summe diskreter und die Integration kontinuierlicher Quasiteilchenzustände. Diese 2-QT-Phononoperatoren erlauben die übliche Formulierung der QRPA-Gleichungen [KKS76]:

$$\begin{aligned} \langle BCS | \left[Q_{\nu, JM}, \left[\hat{H}, \Omega_{c, JM}^+ \right] \right] | BCS \rangle &= E_c \langle BCS | \left[Q_{\nu, JM}, \Omega_{c, JM}^+ \right] | BCS \rangle \\ \langle BCS | \left[\tilde{Q}_{\nu, JM}^+, \left[\hat{H}, \Omega_{c, JM}^+ \right] \right] | BCS \rangle &= E_c \langle BCS | \left[\tilde{Q}_{\nu, JM}^+, \Omega_{c, JM}^+ \right] | BCS \rangle. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Explizit erhält man dann folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} (E_{\nu} - E_c) x_{\nu}^c + \sum_{\nu'} (A_{\nu\nu'} x_{\nu'}^c + B_{\nu\nu'} y_{\nu'}^c) \\ + \int_{\nu'(\epsilon')} d\epsilon' [A_{\nu\nu'(\epsilon')} \xi_{\nu'(\epsilon')}^c + B_{\nu\nu'(\epsilon')} \eta_{\nu'(\epsilon')}^c] = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$(E_\nu + E_c)y_\nu^c + \sum_{\nu'} (A_{\nu\nu'}y_{\nu'}^c + B_{\nu\nu'}x_{\nu'}^c) + \int_{\nu'(\epsilon')} d\epsilon' [A_{\nu\nu'(\epsilon')} \eta_{\nu'(\epsilon')}^c + B_{\nu\nu'(\epsilon')} \xi_{\nu'(\epsilon')}^c] = 0 \quad (3.15)$$

$$(E_{\nu(\epsilon)} - E_c)\xi_{\nu(\epsilon)}^c + \sum_{\nu'} (A_{\nu(\epsilon)\nu'}x_{\nu'}^c + B_{\nu(\epsilon)\nu'}y_{\nu'}^c) + \int_{\nu'(\epsilon')} d\epsilon' [A_{\nu(\epsilon)\nu'(\epsilon')} \xi_{\nu'(\epsilon')}^c + B_{\nu(\epsilon)\nu'(\epsilon')} \eta_{\nu'(\epsilon')}^c] = 0 \quad (3.16)$$

$$(E_{\nu(\epsilon)} + E_c)\eta_{\nu(\epsilon)}^c + \sum_{\nu'} (A_{\nu(\epsilon)\nu'}y_{\nu'}^c + B_{\nu(\epsilon)\nu'}x_{\nu'}^c) + \int_{\nu'(\epsilon')} d\epsilon' [A_{\nu(\epsilon)\nu'(\epsilon')} \eta_{\nu'(\epsilon')}^c + B_{\nu(\epsilon)\nu'(\epsilon')} \xi_{\nu'(\epsilon')}^c] = 0. \quad (3.17)$$

Dabei bezeichnet ν wiederum eine 2-Quasiteilchenanregung mit der Energie E_ν und c den jeweiligen QRPA-Zustand mit der Eigenenergie E_c . Die Größen $A_{\nu\nu'}$, $A_{\nu\nu'(\epsilon')}$, $A_{\nu(\epsilon)\nu'}$ und $A_{\nu(\epsilon)\nu'(\epsilon')}$ bzw. $B_{\nu\nu'}$, $B_{\nu\nu'(\epsilon')}$, $B_{\nu(\epsilon)\nu'}$ und $B_{\nu(\epsilon)\nu'(\epsilon')}$ sind 2-Quasiteilchen-Matrixelemente der Teilchen-Loch Restwechselwirkung \hat{V}^{res} [RiS80]. Ein Index $\nu(\epsilon)$ symbolisiert dabei, daß das Matrixelement mit einem Kontinuumsteilchenzustand der Energie ϵ gebildet wird.

Im Gegensatz zum bekannten QRPA-Eigenwert-Problem für diskrete gebundene Zustände handelt es sich bei dem obigen Gleichungssystem im mathematischen Sinne um ein Integralgleichungssystem. Dieses ist äquivalent zu dem bereits von Bloch [Blo66] sowie von Mahaux und Weidenmüller [MaW69] beschriebenen Integralgleichungssystem für das Kontinuumschalenmodell. Der verwendete Konfigurationsraum ist hier auf 2-Quasiteilchen-Zustände eingeschränkt. Auf der linken Seite der Gleichungen (3.16) und (3.17) sind die Energien $E_{\nu(\epsilon)}$ kontinuierlich. Es ergeben sich dann für $E_c = \pm E_{\nu(\epsilon)}$ Nullstellen. Damit die Gleichungen Lösungen haben, müssen also die Kontinuums-QRPA-Amplituden $\xi_{\nu(\epsilon)}^c$ $\eta_{\nu(\epsilon)}^c$ Pole erster Ordnung in der Energie haben. Um diese Singularitäten bzw. Pole zu berücksichtigen, macht man für die Kontinuums-QRPA-Amplituden den folgenden Ansatz, der von Dirac [Dir27] begründet wurde:

$$\xi_{\nu(\epsilon)}^c = a_{\nu(\epsilon)}^c \delta(E_{\nu(\epsilon)} - E_c) + \mathcal{P} \frac{b_{\nu(\epsilon)}^c}{E_{\nu(\epsilon)} - E_c} \quad (3.18)$$

$$\eta_{\nu(\epsilon)}^c = f_{\nu(\epsilon)}^c \delta(E_{\nu(\epsilon)} + E_c) + \mathcal{P} \frac{g_{\nu(\epsilon)}^c}{E_{\nu(\epsilon)} + E_c}. \quad (3.19)$$

Die Amplituden $a_{\nu(\epsilon)}^c$ und $f_{\nu(\epsilon)}^c$ vor den Deltafunktionen sind dabei Koeffizienten, die zur Festlegung der Randbedingungen verwendet werden. Setzt man die Ausdrücke aus (3.18) und (3.19) in (3.14) bis (3.17) ein, so erhält man die folgenden Gleichungen für die QRPA-Amplituden mit Kontinuumszuständen:

$$b_{\nu(\epsilon)}^c + \sum_{\nu'} (A_{\nu(\epsilon)\nu'} x_{\nu'}^c + B_{\nu(\epsilon)\nu'} y_{\nu'}^c) \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\nu'(\epsilon')} d\epsilon' [A_{\nu(\epsilon)\nu'(\epsilon')} \frac{b_{\nu'(\epsilon')}^c}{(E_{\nu'(\epsilon')} - E_c)} + B_{\nu(\epsilon)\nu'(\epsilon')} \frac{g_{\nu'(\epsilon')}^c}{(E_{\nu'(\epsilon')} + E_c)}] \\
& = \sum_{\nu'(\epsilon_0)} (A_{\nu(\epsilon)\nu'(\epsilon_0)} a_{\nu'(\epsilon_0)}^c + B_{\nu(\epsilon)\nu'(\epsilon_0)} f_{\nu'(\epsilon_0)}^c) \\
g_{\nu(\epsilon)}^c & + \sum_{\nu'} (A_{\nu(\epsilon)\nu'} x_{\nu'}^c + B_{\nu(\epsilon)\nu'} y_{\nu'}^c) \quad (3.21) \\
& + \int_{\nu'(\epsilon')} d\epsilon' [A_{\nu(\epsilon)\nu'(\epsilon')} \frac{g_{\nu'(\epsilon')}^c}{(E_{\nu'(\epsilon')} + E_c)} + B_{\nu(\epsilon)\nu'(\epsilon')} \frac{b_{\nu'(\epsilon')}^c}{(E_{\nu'(\epsilon')} - E_c)}] \\
& = \sum_{\nu'(\epsilon_0)} (A_{\nu(\epsilon)\nu'(\epsilon_0)} f_{\nu'(\epsilon_0)}^c + B_{\nu(\epsilon)\nu'(\epsilon_0)} a_{\nu'(\epsilon_0)}^c).
\end{aligned}$$

Entsprechende Gleichungen ergeben sich auch für die Koeffizienten zu gebundenen Zuständen mit den Gleichungen (3.14) und (3.15). Das Symbol \int steht dabei für eine Hauptwertintegration über die Energie und eine Summation über verschiedene Kanäle und ϵ_0 steht für $E_{\nu(\epsilon)} = \pm E_c$. Die Größen $a_{\nu'(\epsilon_0)}^c$ und $f_{\nu'(\epsilon_0)}^c$ werden durch die Randbedingungen festgelegt. Wie diese aussehen, hängt vom jeweils betrachteten physikalischen Problem ab. Um z. B. die Protonen- oder Neutronenstreuung an einem u-g bzw g-u-Kern zu beschreiben, wird als Randbedingung ein Anfangszustand vorliegen, der durch die Kopplung verschiedener Einteilchenzustände mit dem Grundzustand des u-g bzw. g-u Kerns beschrieben werden kann. In diesem Fall sind also verschiedene Eingangskanäle mit den zugehörigen Koeffizienten $a_{\nu'(\epsilon_0)}^c$ und $f_{\nu'(\epsilon_0)}^c$ zu berücksichtigen. Das Gleichungssystem (3.20) bis (3.21) ist dann ein inhomogenes Integralgleichungssystem. Es hat kontinuierliche Lösungen in der QRPA-Energie E_c . Analytische Lösungen sind für realistische Wechselwirkungen natürlich nicht zu erhalten. Typischerweise werden Integralgleichungen der Art (3.14) bis (3.17) durch Diskretisierung gelöst [RMS67]. Da die verwendeten realistischen Teilchen-Loch-Wechselwirkungen kurzreichweitig sind, können die Wellenfunktionen mit denen die Matrixelemente gebildet werden, aber auch bezüglich einer geeigneten Basis (z.B. Oszillatoreigenbasis oder Kavitäts-eigenbasis (siehe Anhang H) in einem beschränkten Intervall entwickelt werden [KKS76]. Bei diesem Verfahren ist der Zusammenhang mit den diskreten QRPA-Gleichungen leicht zu erkennen. Die Normierung von Kavitäts-eigenfunktionen beinhaltet gerade eine Art Niveaudichte (siehe Seite 49) relativ zu den echten, ungebundenen Zuständen. In jedem Fall, gleichgültig ob die Lösung über Diskretisierung oder durch Entwicklung nach einer Eigenbasis in einem beschränkten Intervall erfolgt, ist allerdings ein Gleichungssystem hoher Dimensionalität zu lösen. Dieses numerische Problem kann bei Verwendung der im nächsten Abschnitt beschriebenen Dichteentwicklungsmethode näherungsweise umgangen werden.

Noch eine Bemerkung zu der hier verwendeten effektiven Restwechselwirkung \hat{V}^{res} : Sie enthält spin- und isospinabhängige Terme. Im Ortsraum ist für sie die folgende Formulierung möglich:

$$\hat{V}^{res}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{\gamma} V_{\gamma}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{\gamma} v_{\gamma}(\xi_i, \xi_j) (\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j)_{\gamma}^S (\vec{\tau}_i \vec{\tau}_j)_{\gamma}^T. \quad (3.22)$$

Dabei sind die $\vec{\sigma}$ und $\vec{\tau}$ Spin- und Isospin-Paulimatrizen. Die Summation über den Index γ ist durch den Gesamtdrehimpuls J , den Isospin T den Gesamtspin S und den Drehimpuls λ festgelegt. Die ξ_i bzw. ξ_j beschreiben die inneren Koordinaten der Teilchen- und Lochzustände. Die in den QRPA-Gleichungen (z.B. (3.14) bis (3.17)) angegebenen Matrixelemente $A_{\nu\nu'}$ und $B_{\nu\nu'}$ lassen sich dann als Summe der jeweiligen Spin-Isospin-Anteile darstellen:

$$\begin{aligned} A_{\nu\nu'} &= \sum_{\gamma} A_{\nu\nu'}^{(\gamma)} = \sum_{\gamma} \langle \nu | V_{\gamma} | \nu' \rangle \\ B_{\nu\nu'} &= \sum_{\gamma} B_{\nu\nu'}^{(\gamma)} = \sum_{\gamma} \langle \tilde{\nu} | V_{\gamma} | \nu' \rangle \end{aligned} \quad (3.23)$$

Diese Darstellung soll im weiteren auch Verwendung finden.

3.1.1 Dichteentwicklungsansatz und Kontinuums-QRPA

H. Lenske [Len87] entwickelte einen Dichteentwicklungsansatz, in dem die weiter unten definierten QRPA-Übergangsdichten ρ_{γ}^c näherungsweise in Zustands- und Radialabhängigkeit separiert werden. Ausgangspunkt sind die QT-Übergangsoperatoren $\hat{\rho}_{\gamma}$ in einem geeigneten Kopplungsschema γ (entspricht Gesamtdrehimpuls J_{γ} , Spin S_{γ} und Isospin T_{γ}),

$$\hat{\rho}(\xi)_{\gamma} = \sum_{\nu} \left[\rho_{\gamma,\nu}(\xi) Q_{\gamma,\nu}^{+} + \tilde{\rho}_{\gamma,\nu}(\xi) \tilde{Q}_{\gamma,\nu} \right], \quad (3.24)$$

mit den Matrixelementen, d. h. QT-Übergangsdichten

$$\begin{aligned} \langle \nu | \hat{\rho}_{\gamma}(\xi) | 0 \rangle = \rho_{\gamma,\nu}(\xi) &= u_{\nu_1,j_1} u_{\nu_2,j_2} [\psi_{\nu_1,j_1}(\xi) \otimes \psi_{\nu_2,j_2}(\xi)]_{\gamma,\nu} \\ &- u_{\nu_1,j_1} v_{\nu_2,j_2} [\psi_{\nu_1,j_1}(\xi) \otimes \tilde{\psi}_{\nu_2,j_2}(\xi)]_{\gamma,\nu} \\ &- u_{\nu_2,j_2} v_{\nu_1,j_1} [\tilde{\psi}_{\nu_1,j_1}(\xi) \otimes \psi_{\nu_2,j_2}(\xi)]_{\gamma,\nu} \\ &+ v_{\nu_1,j_1} v_{\nu_2,j_2} [\tilde{\psi}_{\nu_1,j_1}(\xi) \otimes \tilde{\psi}_{\nu_2,j_2}(\xi)]_{\gamma,\nu}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Bei den $\psi_{\nu,j}(\xi)$ und $\tilde{\psi}_{\nu,j}(\xi)$ handelt es sich hier um 1-Teilchen bzw. 1-Lochzustände. Damit enthalten die QT-Übergangsdichten, neben Teilchen-Loch- bzw. Loch-Teilchen-Übergangsdichten auch Loch-Loch- und Teilchen-Teilchen-Übergangsdichten. Die QRPA-Übergangsdichte ergeben sich dann, unter Mitberücksichtigung von Kontinuumsanteilen, zu

$$\begin{aligned} \rho_\gamma^c(\xi) = \langle c | \hat{\rho}_\gamma(\xi) | 0 \rangle &= \sum_\nu [x_\nu^c \rho_{\gamma,\nu}(\xi) + y_\nu^c \tilde{\rho}_{\gamma,\nu}(\xi)] \\ &+ \sum_{\nu(\epsilon')} d\epsilon' \left[[\xi_{\nu(\epsilon')}^c \rho_{\gamma,\nu(\epsilon')}(\xi) + \eta_{\nu(\epsilon')}^c \tilde{\rho}_{\gamma,\nu(\epsilon')}(\xi)] \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Mit der Darstellung der Kontinuumsamplituden aus Gleichung (3.18) und (3.19), ergibt sich für die Dichte:

$$\begin{aligned} \rho_\gamma^c(\xi) &= \sum_\nu [x_\nu^c \rho_{\gamma,\nu}(\xi) + y_\nu^c \tilde{\rho}_{\gamma,\nu}(\xi)] \\ &+ \sum_{\nu(\epsilon')} d\epsilon' \left[\frac{b_{\nu(\epsilon')}^c \rho_{\gamma,\nu(\epsilon')}(\xi)}{E_{\nu(\epsilon')} - E_c} + \frac{g_{\nu(\epsilon')}^c \tilde{\rho}_{\gamma,\nu(\epsilon')}(\xi)}{E_{\nu(\epsilon')} + E_c} \right] \\ &+ \sum_{\nu(\epsilon_0)} \left[a_{\nu(\epsilon_0)}^c \rho_{\gamma,\nu(\epsilon_0)}(\xi) + f_{\nu(\epsilon_0)}^c \tilde{\rho}_{\gamma,\nu(\epsilon_0)}(\xi) \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Dieser Ausdruck wird näherungsweise durch einen Separationsansatz aus einem Produkt einer zustandsabhängigen Amplitude N_γ^c und einer gemittelten, zustandsunabhängigen Dichte $\bar{\rho}_\gamma$ erhalten:

$$\rho_\gamma^c(\xi) = N_\gamma^c \bar{\rho}_\gamma(\xi). \quad (3.28)$$

Die Rechtfertigung für diesen Ansatz ist die Erfahrung aus Kernstrukturrechnungen, daß für Phononzustände die Form der Übergangsdichte für Zustände ähnlicher Anregungsenergien E_c bei festem γ nicht signifikant unterschiedlich ist. Durch Einsetzen von (3.28) in (3.14) bis (3.17) ergeben sich die QRPA-Gleichungen in der folgenden entkoppelten Darstellung:

$$\begin{aligned} x_\nu^c &= - \sum_\gamma \frac{N_\gamma^c \bar{U}_\gamma(\nu)}{E_\nu - E_c} \\ y_\nu^c &= - \sum_\gamma \frac{N_\gamma^c \bar{U}_\gamma^*(\nu)}{E_\nu + E_c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_\nu^c &= - \sum_\gamma N_\gamma^c \bar{U}_\gamma(\nu(\epsilon)) \\
g_\nu^c &= - \sum_\gamma N_\gamma^c \tilde{U}_\gamma^*(\nu(\epsilon)).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Dabei sind die Größen $\bar{U}_\gamma(\nu)$ bzw. $\tilde{U}_\gamma^*(\nu)$ die folgenden Übergangsstärken:

$$\begin{aligned}
\bar{U}_\gamma(\nu) &= \int d\xi_i \rho_{\gamma,\nu}^*(\xi_i) \bar{U}_\gamma(\xi_i) \\
\tilde{U}_\gamma^*(\nu) &= \int d\xi_i \tilde{\rho}_{\gamma,\nu}^*(\xi_i) \bar{U}_\gamma(\xi_i).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Die in (3.30) eingeführten gemittelten Einteilchenfelder $\bar{U}_\gamma(\xi_i)$ ergeben sich schließlich durch Faltung der gemittelten Dichte $\bar{\rho}_\gamma(\xi_j)$ mit den verschiedenen Anteilen der realistischen Teilchen-Loch-Restwechselwirkung \hat{V}^{res} :

$$\bar{U}_\gamma(\xi_i) = \int d\xi_j \bar{\rho}_\gamma(\xi_j) V_\gamma(\xi_i, \xi_j). \tag{3.31}$$

Schließlich sind noch die Zustandsamplituden N_γ^c zu ermitteln. Man macht jetzt für die Restwechselwirkung \hat{V}^{res} die folgende separable Darstellung (dies ist für lokale Wechselwirkungen immer möglich) und nimmt man weiter an, daß $V = V^+$ gilt, dann folgt:

$$\hat{V}^{res}(\xi_i, \xi_j) = \sum_\gamma V_\gamma(\xi_i, \xi_j) = \sum_\gamma \left[\kappa_\gamma \bar{U}_\gamma^+(\xi_i) \bar{U}_\gamma(\xi_j) + \kappa_\gamma \bar{U}_\gamma^+(\xi_j) \bar{U}_\gamma(\xi_i) \right], \tag{3.32}$$

wobei die $\bar{U}_\gamma(\xi_i)$, wie in (3.31) gegeben sind. Die Kopplungsstärkekonstante κ_γ erhält man aus (3.31) durch umformen

$$\frac{1}{\kappa_\gamma} = \int d\xi_i \bar{\rho}_\gamma^*(\xi_i) \bar{U}_\gamma(\xi_i). \tag{3.33}$$

Multipliziert man die Gleichung (3.33) mit den Zustandsamplituden N_γ^{c*} , so ergibt sich mit (3.28)

$$\frac{N_\gamma^{c*}}{\kappa_\gamma} = \int d\xi_i N_\gamma^{c*} \bar{\rho}_\gamma^*(\xi_i) \bar{U}_\gamma(\xi_i) = \int d\xi_i (\rho_\gamma^c)^*(\xi_i) \bar{U}_\gamma(\xi_i). \tag{3.34}$$

Wird für die Übergangsdichte jetzt wieder die ursprüngliche Definition verwendet,

so ergibt sich mit (3.26) bzw. (3.27)

$$\begin{aligned}
\frac{N_\gamma^{c*}}{\kappa_\gamma} &= \sum_\nu \left[x_\nu^{c*} \bar{U}_\gamma(\nu) + y_\nu^{c*} \tilde{U}_\gamma^*(\nu) \right] \\
&+ \sum_{\nu(\epsilon')} d\epsilon' \left[\frac{b_{\nu(\epsilon')}^{c*} \bar{U}_\gamma(\nu(\epsilon'))}{E_{\nu(\epsilon')} - E_c} + \frac{g_{\nu(\epsilon')}^{c*} \tilde{U}_\gamma^*(\nu(\epsilon'))}{E_{\nu(\epsilon')} + E_c} \right] \\
&+ \sum_{\nu(\epsilon_0)} \left[a_{\nu(\epsilon_0)}^{c*} \bar{U}_\gamma(\nu(\epsilon_0)) + f_{\nu(\epsilon_0)}^{c*} \tilde{U}_\gamma^*(\nu(\epsilon_0)) \right]. \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Setzt man für die Koeffizienten x_ν^{c*} , y_ν^{c*} , b_ν^{c*} und g_ν^{c*} die QRPA-Gleichungen (3.29) ein, dann erhält man eine inhomogene, matrixwertige Dispersiongleichung der Dimensionalität γ ,

$$\sum_{\gamma'} \left(\delta_{\gamma\gamma'} \frac{1}{\kappa_\gamma} + \Pi_{\gamma\gamma'}^c \right) N_{\gamma'}^{c*} = \delta_{\gamma\gamma'} I_\gamma^c \tag{3.36}$$

mit dem Polarisationsoperator

$$\begin{aligned}
\Pi_{\gamma\gamma'}^c &= \sum_\nu \left[\frac{\bar{U}_\gamma(\nu) \bar{U}_{\gamma'}^*(\nu)}{E_\nu - E_c} + \frac{\tilde{U}_\gamma(\nu) \tilde{U}_{\gamma'}^*(\nu)}{E_\nu + E_c} \right] \\
&+ \sum_{\nu(\epsilon')} d\epsilon' \left[\frac{\bar{U}_\gamma(\nu(\epsilon')) \bar{U}_{\gamma'}^*(\nu(\epsilon'))}{E_{\nu(\epsilon')} - E_c} + \frac{\tilde{U}_\gamma(\nu(\epsilon')) \tilde{U}_{\gamma'}^*(\nu(\epsilon'))}{E_{\nu(\epsilon')} + E_c} \right] \tag{3.37}
\end{aligned}$$

und der Inhomogenität

$$\sum_{\gamma', \nu(\epsilon_0)} \delta_{\gamma\gamma'} \left[a_{\nu(\epsilon_0)}^{c*} \bar{U}_\gamma(\nu(\epsilon_0)) + f_{\nu(\epsilon_0)}^{c*} \tilde{U}_\gamma^*(\nu(\epsilon_0)) \right]. \tag{3.38}$$

Aus der Gleichung (3.36) kann nun die jeweilige Zustandsamplitude N_γ^c durch Invertieren der Matrix aus (3.36) erhalten werden:

$$N_\gamma^{c*} = \sum_{\gamma'} \left(\frac{1}{\kappa_\gamma} + \Pi^c \right)_{\gamma\gamma'}^{-1} I_{\gamma'}^c \tag{3.39}$$

Soweit sind sämtliche Größen mit Ausnahme der Konstanten $a_{\nu(\epsilon_0)}^c$ und $f_{\nu(\epsilon_0)}^c$ in der Inhomogenität I_γ^c festgelegt. Diese Größen werden wieder durch die jeweiligen

Randbedingungen bestimmt ([KKS76], siehe z. B. Seite 66). Bei einer Anzahl von ν QT-Konfigurationen können ν Lösungen angegeben werden, die jeweils dadurch erhalten werden, daß bis auf ein $a_{\nu(\epsilon_0)}^c + i \pi b_{\nu(\epsilon_0)}^c$ alle übrigen, derartigen Größen identisch 0 gesetzt werden [RMS67]. Die $f_{\nu(\epsilon_0)}^c$ werden, da $E_{\nu(\epsilon_0)}$ immer $\neq -E_c$ gilt, von vornherein gleich 0 sein. Sie wurden nur eingeführt um eine symmetrische Darstellung zu ermöglichen. Die gesuchte QRPA-Lösung ist dann eine Linearkombination dieser Lösungen mit der Normierung $\langle c|c' \rangle = \delta(E_c - E_{c'})$. Wie diese Normierung genau zu erhalten ist, ist Gegenstand des nächsten Abschnitts.

Der hier beschriebene QRPA-Dichteentwicklungsnäherung hat gegenüber dem üblichen QRPA-Ansatz den Vorteil, daß sehr große 2-QT-Konfigurationsräume berücksichtigt werden können, ohne daß Gleichungssysteme von großer Dimensionalität berechnet werden müssen. Die Dimension der verallgemeinerten Dispersionsgleichung (3.37) ist gleich der Anzahl γ der Spin-Isospin Austausch-Kanäle der Restwechselwirkung \hat{V}^{res} . γ nimmt daher für natürliche und unnatürliche Paritätszustände mit dem Gesamtspin $J^c = 0$ den Wert 2, für $J^c > 0$ den Wert 4 an.

3.1.2 Normierung der Kontinuums-QRPA-Wellenfunktion

Das Skalarprodukt zweier QRPA-Zustände $|c'\rangle$ und $|c\rangle$ ergibt sich mit Hilfe der Quasiboson-Kommutatorregel (3.10) und mit dem Ausdruck (3.12) zu

$$\langle c|c' \rangle = \sum_{\nu} [x_{\nu}^{c*} x_{\nu}^{c'} - y_{\nu}^{c*} y_{\nu}^{c'}] + \int_{\nu(\epsilon')} d\epsilon' [\xi_{\nu(\epsilon')}^{c*} \xi_{\nu(\epsilon')}^{c'} - \eta_{\nu(\epsilon')}^{c*} \eta_{\nu(\epsilon')}^{c'}] \quad (3.40)$$

Die QRPA-Zustände müssen orthogonal zueinander sein (siehe auch [Tho61]) und können daher durch geeignete Wahl der Koeffizienten wie folgt normiert werden:

$$\langle c|c' \rangle = \begin{cases} \delta_{cc'} & E_c \leq E_s \\ \delta(E_c - E_{c'}) & E_c \geq E_s \end{cases} . \quad (3.41)$$

Unterhalb der Schwellenenergie E_s für den Teilchenaufbruch ist also die übliche Orthonormierungsbedingung zu erfüllen, oberhalb der Schwellenenergie E_s muß die Normierung auf eine Deltadistribution erfolgen. Für die Koeffizienten ξ und η gelten die Ansätze (3.18) und (3.19), so daß, wie in Anhang E gezeigt, unter Berücksichtigung der individuellen Schwellenenergien E_s^{ν} zu jeder 2-QT-Streuzustandsklasse ν , die Gleichung

$$\sum_{\nu} [x_{\nu}^{c2} - y_{\nu}^{c2}] + \int_{\nu(\epsilon')} d\epsilon' \left[\frac{b_{\nu(\epsilon')}^{c2}}{(E_{\nu(\epsilon')} - E_c)^2} - \frac{g_{\nu(\epsilon')}^{c2}}{(E_{\nu(\epsilon')} + E_c)^2} \right] = 1 \quad E_s \leq \text{Min}(E_s^{\nu}),$$

(3.42)

für gebundene Zustände und für $E_s \geq \text{Min}(E_s^\nu)$ die Gleichungen

$$\sum_{\nu} [x_{\nu}^{c2} - y_{\nu}^{c2}] + \int_{\nu(\epsilon')} d\epsilon' \left[\frac{b_{\nu(\epsilon')}^{c2}}{(E_{\nu(\epsilon')} - E_c)^2} - \frac{g_{\nu(\epsilon')}^{c2}}{(E_{\nu(\epsilon')} + E_c)^2} \right] + \lim_{E_{c'} \rightarrow E_c} \sum_{\nu, E_c \geq E_s^\nu} \frac{a_{\nu(\epsilon_o)}^{c*} b_{\nu(\epsilon_o)}^{c'} - b_{\nu(\epsilon_o)}^{c*} a_{\nu(\epsilon_o)}^{c'}}{E_{c'} - E_c} = 0, \quad (3.43)$$

$$\sum_{\nu, E_c \geq E_s^\nu} (a_{\nu(\epsilon_o)}^{c2} + \pi^2 b_{\nu(\epsilon_o)}^{c2}) = 1 \quad (3.44)$$

für ungebundene Zustände erfüllt sein müssen. Gleichung (3.42) für gebundene QRPA-Zustände enthält also auch Anteile von 1-Quasi-Phonon-Kontinuumszuständen. Diese Beimischung ist typisch bei der Darstellung der Eigenfunktion eines komplizierten Operators mit einem diskreten und kontinuierlichen Spektrum durch ein anderes Basissystem. Der Term in $g_{\nu(\epsilon')}^{c2}$ ist der Anteil von 1-Quasi-Phonon-Vernichtern im Kontinuum. Da für den Grundzustand meist keine Kontinuumsanteile mitberücksichtigt wurden, kann dieser Term bei praktischen Rechnungen Null gesetzt werden. Die Lösungen zu gebundenen Zuständen mit fester Energie E_c sind im übrigen bis auf zufällige Entartung eindeutig. Diese Eigenschaft gilt nicht für ungebundene Zustände. Hier tritt Entartung auf. Zu jedem 1-Quasiphonon-Zustand mit den Quantenzahlen ν gibt es für alle Energien E_c , die größer als die individuelle Schwellenenergie E_s^ν der Zustandsklasse, die gleich der entsprechenden negativen Lochenergie $-\epsilon_i$ ist, immer eine Lösung. Ab dieser Energie liegt der Teilchenzustand als Kontinuumszustand vor, d.h. dieser Zustand beschreibt einen Streuzustand oder offenen Kanal. Mit steigender QRPA-Energie E_c nimmt die Zahl dieser "offenen" Kanäle zu. Gibt man als Randbedingung einen einlaufenden Zustand in einem bestimmten Kanal ν_o vor, dann müssen die Koeffizienten aus (3.44) die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$a_{\nu(\epsilon_o)}^c - i \pi b_{\nu(\epsilon_o)}^c = \begin{cases} 1 & \nu = \nu_o \\ 0 & \nu \neq \nu_o \end{cases} \quad (3.45)$$

Mit Gleichung (3.45) können die Koeffizienten $a_{\nu(\epsilon_o)}^c$ aus den QRPA-Gleichungen eliminiert werden. Man erhält dann ein inhomogenes Gleichungssystem mit den Koeffizienten x_{ν}^c , y_{ν}^c und $b_{\nu(\epsilon)}^c$, dessen Lösung im allgemeinen eindeutig ist. Zufälligerweise können allerdings für bestimmte Energien homogene Lösungen erhalten werden. Diese beschreiben ins Kontinuum eingebettete, diskrete Zustände, die in dieser

Beschreibung nicht ans Kontinuum ankoppeln. Bei Berücksichtigung zusätzlicher, komplizierterer Konfigurationen, also z.B. 2-Quasiphononzuständen, in der Wellenfunktion erhalten diese Lösungen aber ebenfalls eine Breite.

Setzt man in die Ausdrücke (3.42), (3.43) und (3.44) die QRPA-Gleichungen (3.29) ein, also die Ergebnisse aus dem Dichte-Entwicklungsansatz, dann ergeben sich die Normierungsbedingungen

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu} \left[\left(\sum_{\gamma} \frac{N_{\gamma}^c \bar{U}_{\gamma}(\nu)}{E_{\nu} - E_c} \right) \left(\sum_{\gamma'} \frac{N_{\gamma'}^{c*} \bar{U}_{\gamma'}^*(\nu)}{E_{\nu} - E_c} \right) + \right. \\ & \left. \left(\sum_{\gamma} \frac{N_{\gamma}^c \tilde{U}_{\gamma}(\nu)}{E_{\nu} + E_c} \right) \left(\sum_{\gamma'} \frac{N_{\gamma'}^{c*} \tilde{U}_{\gamma'}^*(\nu)}{E_{\nu} + E_c} \right) \right] + \\ & \int_{\nu(\epsilon')} d\epsilon' \left\{ \left(\sum_{\gamma} \frac{N_{\gamma}^c \bar{U}_{\gamma}(\nu(\epsilon'))}{E_{\nu(\epsilon')} - E_c} \right) \left(\sum_{\gamma'} \frac{N_{\gamma'}^{c*} \bar{U}_{\gamma'}^*(\nu(\epsilon'))}{E_{\nu(\epsilon')} - E_c} \right) + \right. \\ & \left. \left(\sum_{\gamma} \frac{N_{\gamma}^c \tilde{U}_{\gamma}(\nu(\epsilon'))}{E_{\nu(\epsilon')} + E_c} \right) \left(\sum_{\gamma'} \frac{N_{\gamma'}^{c*} \tilde{U}_{\gamma'}^*(\nu(\epsilon'))}{E_{\nu(\epsilon')} + E_c} \right) \right\} = 1 \end{aligned} \quad (3.46)$$

und

$$\sum_{\nu, E_{\nu} \geq E_c} \left[a_{\nu(\epsilon_0)}^{c2} + \pi^2 \left(\sum_{\gamma} N_{\gamma}^c \bar{U}_{\gamma}(\nu(\epsilon_0)) \right) \left(\sum_{\gamma'} N_{\gamma'}^{c*} \bar{U}_{\gamma'}^*(\nu(\epsilon_0)) \right) \right] = 1. \quad (3.47)$$

Die Beiträge des ersten Terms in (3.43) haben sich gerade aufgehoben. Mit Gleichung (3.45) können die Koeffizienten wieder so festgelegt werden, daß die Zustandsamplitude N_{γ}^c gemäß Gleichung (3.39) ermittelt werden kann.

3.2 Das Quasiteilchen-Rumpf-Kopplungsmodell

Wie im Abschnitt 3.1 diskutiert, ist die Beschreibung angeregter Kernzustände von Kernen mit gerader Nukleonenzahl im Rahmen des QRPA-Modells möglich. Aspekte der Kernstruktur von Systemen mit ungerader Nukleonenzahl können im Rahmen des Quasiteilchen-Rumpf-Kopplungsmodells oder QPC-Modells (Quasi-Particle-Core-Coupling-Model) unterhalb der Teilchenaufbruchschwelle gut beschrieben werden ([SSV70], [SSV80]). Dies wurde bei der Analyse von verschiedenen Transferreaktionen gezeigt ([ELG90], [vNe90]). Diese Methoden sind jedoch nicht immer anwendbar bei der Beschreibung von Kontinuumszuständen, also bei der Berechnung von Transferwirkungsquerschnitten zu Zuständen oberhalb der Teilchenaufbruchschwelle in einen Dreikörper-Endkanal. Hier wird ein Ansatz vorgestellt, der eine Erweiterung des bisher verwendeten QPC-Modells darstellt, in dem die aufgetretenen Probleme, zumindest weitgehend, gelöst werden können.

Die theoretischen Konzepte für diese Erweiterung gehen auf das sogenannte Hintergrundkopplungsmodell von Bohr und Mottelson [BoM69] und auf eine Arbeit von Fano [Fan61] zurück. Levin et al. wendeten das Verfahren von Fano auf Kernreaktionen an ([Lev68a], [Lev68b]), Weidenmüller und Mahaux [MaW69] verwendeten einen ähnlichen Ansatz, der auch als Kontinuumsschalenmodell bezeichnet wird. Bei allen Ansätzen erfolgt eine Ankopplung von Streuzuständen an diskrete, im Kontinuum eingebettete, gebundene Zustände (bound states embedded in the continuum (BSEC)). Diese Zustände zeichnen sich dadurch aus, daß ihre Gesamtenergie relativ zum Grundzustand größer als die Energie bis zur Teilchenaufbruchschwelle ist. Die scharfen Resonanzen im Wirkungsquerschnitt, die experimentell beobachtbar sind, können mit den Ankopplungen an den "Hintergrund" erklärt werden.

In dem Ansatz dieser Arbeit dient als Ausgangspunkt ein schematischer Hamiltonoperator \hat{H} mit folgenden Eigenschaften:

- Der Gesamthamiltonoperator bestehe aus drei Summanden:

$$\hat{H} = \hat{H}_{1-QT} + \hat{H}_{3-QT} + \hat{V}_{13}$$

- \hat{H}_{1-QT} beschreibt gebundene und ungebundene (kontinuierliche) 1-Quasiteilchenzustände $|n\ell jm_j\rangle = \alpha_{n\ell jm_j}^+ |0\rangle$ bzw. $|\epsilon\ell jm_j\rangle = \alpha_{\epsilon\ell jm_j}^+ |0\rangle$ mit den Energieeigenwerten E_n bzw. ϵ und Quantenzahlen n, ℓ, j, m_j mit der üblichen Bedeutung.
- \hat{H}_{3-QT} beschreibt 3-QT-Eigenzustände $|\nu(j'J')jm_j\rangle = [\alpha_{j'}^+ \otimes \Omega_{cJ'}^+]_{\nu,j,m_j} |0\rangle$ bzw. $|\epsilon_\nu(j'J')jm_j\rangle = [\alpha_{\epsilon_\nu j'}^+ \otimes \Omega_{cJ'}^+]_{\nu,j,m_j} |0\rangle$ mit den Energieeigenwerten E_ν bzw. ϵ_ν , die aus der Kopplung eines 1-QT-Zustand j' und eines QRPA-Rumpf-Anregungszustand J' resultieren. Die Parität dieses Zustands ergibt sich zu $\Pi_j = \Pi_{j'} \Pi_{J'}$.
- Die Restwechselwirkung \hat{V}_{13} verknüpft nur 1- und 3-QT-Zustände.

Die obigen Annahmen werden auch im bereits bekannten diskreten QPC-Modell verwendet [Len87]. Allerdings wurden in diesem Fall keine echten 1- bzw. 3-QT-Kontinuumszustände, sondern nur diskrete Eigenzustände bezüglich eines eingeschränkten Operators verwendet.

Für die Gesamtwellenfunktion $|\lambda\rangle$ zu \hat{H} mit festen Drehimpulsquantenzahlen ℓ , j und m_j wird nun der folgende Ansatz gemacht (wobei nicht alle Quantenzahlen ausgeschrieben werden):

$$\begin{aligned} |\lambda\rangle &= \sum_n z_n^\lambda |n\ell jm_j\rangle + \int d\epsilon' \zeta^\lambda(\epsilon') |\epsilon' \ell jm_j\rangle \\ &+ \sum_\nu z_\nu^\lambda |\nu(j' J') jm_j\rangle + \int d\epsilon'_\nu \zeta_\nu^\lambda(\epsilon'_\nu) |\epsilon'_\nu(j' J') jm_j\rangle \end{aligned} \quad (3.48)$$

mit der Normierung

$$\langle \lambda' | \lambda \rangle = \delta(E_\lambda - E_{\lambda'}) \quad (3.49)$$

für Energien E_λ oberhalb der Teilchenaufbruchschwelle E_s und

$$\langle \lambda' | \lambda \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (3.50)$$

für Energien unterhalb der Teilchenaufbruchschwelle E_s . Diese wird üblicherweise gleich Null gesetzt, so daß für die Energie $E_\lambda \leq 0$ ein gebundener, für die Energie $E_\lambda \geq 0$ ein ungebundener Zustand vorliegt. Diese Zustände sind durch ihre Asymptotik ausgezeichnet. Interessanterweise enthalten ungebundene Zustände $|\lambda\rangle$ auch Komponenten der gebundenen 1-QT bzw. 3-QT Zustände und umgekehrt, d. h. der Ansatz schließt Korrelationseffekte ein. Die Energie E_ν eines gebundenen 3-QT-Zustands kann oberhalb der Teilchenaufbruchschwelle liegen, der Zustand ist dann "im Kontinuum eingebettet", wie bereits auf Seite 74 erwähnt wurde.

Die Normierung im Kontinuum unterscheidet sich, nach (3.49) von der Normierung im diskreten Fall ((3.50)). Wie man später sehen wird, sind beide Normierungen kompatibel. Der Ansatz für die Wellenfunktion $|\lambda\rangle$ gilt somit global für alle E_λ . Unterhalb der Teilchenaufbruchschwelle findet man tatsächlich auch nur für ganz bestimmte, diskrete Energien E_λ Eigenzustände $|\lambda\rangle$.

Setzt man den Ansatz (3.48) für die Wellenfunktion in die Schrödingergleichung ein und projiziert man die 1-QT- bzw. 3-QT-Zustände auf $(\hat{H} - E_\lambda)|\lambda\rangle$, so erhält man, in Analogie zum QRPA-Modell im Kontinuum, Gleichung (3.14) bis (3.17), das folgende gekoppelte Integralgleichungssystem:

$$(E_n - E_\lambda)z_n^\lambda + \sum_\nu V_{n\nu}z_\nu^\lambda + \sum'_\nu d\epsilon'_\nu V_n(\epsilon'_\nu)\zeta_\nu^\lambda(\epsilon'_\nu) = 0 \quad (3.51)$$

$$(\epsilon - E_\lambda)\zeta^\lambda(\epsilon) + \sum_\nu V_\nu(\epsilon)z_\nu^\lambda + \sum'_\nu d\epsilon'_\nu V(\epsilon, \epsilon'_\nu)\zeta_\nu^\lambda(\epsilon'_\nu) = 0 \quad (3.52)$$

$$(E_\nu - E_\lambda)z_\nu^\lambda + \sum_{n'} V_{n'\nu}^* z_{n'}^\lambda + \int d\epsilon' V_\nu^*(\epsilon')\zeta^\lambda(\epsilon') = 0 \quad (3.53)$$

$$(\epsilon_\nu - E_\lambda)\zeta_\nu^\lambda(\epsilon_\nu) + \sum_{n'} V_{n'}^*(\epsilon_\nu)z_{n'}^\lambda + \int d\epsilon' V^*(\epsilon_\nu, \epsilon')\zeta^\lambda(\epsilon') = 0. \quad (3.54)$$

Die Größen V sind dabei Matrixelemente der 1-QT-3-QT-Restwechselwirkung. Explizit stehen die oben verwendeten Abkürzungen für die folgenden Matrixelemente:

$$\begin{aligned} \langle n\ell jm_j | \hat{V}_{13} | \nu(j'J')jm_j \rangle &= V_{n\nu} & \langle n\ell jm_j | \hat{V}_{13} | \epsilon_\nu(j'J')jm_j \rangle &= V_n(\epsilon_\nu) \\ \langle \epsilon\ell jm_j | \hat{V}_{13} | \nu(j'J')jm_j \rangle &= V_\nu(\epsilon) & \langle \epsilon\ell jm_j | \hat{V}_{13} | \epsilon'_\nu(j'J')jm_j \rangle &= V(\epsilon, \epsilon'_\nu) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Diese Matrixelemente unterscheiden sich in ihren Einheiten. Wird ein Matrixelement mit den Wellenfunktionen diskreter Zustände gebildet, dann ist die Einheit $[E]$, im Falle eines diskreten und eines Kontinuumszustands ergibt sich die Einheit $[E]^{\frac{1}{2}}$, für zwei Kontinuumszustände erhält man die Einheit $[E]^0$. Der Grund für diese unterschiedlichen Einheiten ist die unterschiedliche Normierung der diskreten und kontinuierlichen 1-QT- bzw. 3-QT-Wellenfunktionen, nämlich Normierungen entsprechend den Gleichungen (3.50) und (3.49).

Wie im Falle der Kontinuums-QRPA erhält man bei Division der Gleichung (3.54) mit $(\epsilon_\nu - E_\lambda)$ für die Koeffizienten $\zeta_\nu^\lambda(\epsilon)$ Pole erster Ordnung. Man macht daher wieder einen Ansatz der Form (3.18) :

$$\zeta_\nu^\lambda(\epsilon_\nu) = a_\nu^\lambda(\epsilon_\nu)\delta(\epsilon_\nu - E_\lambda) + \mathcal{P}\frac{b_\nu^\lambda(\epsilon_\nu)}{\epsilon_\nu - E_\lambda}. \quad (3.56)$$

Mit diesem Ansatz kann man für $E_\lambda \neq E_\nu, \epsilon_\nu$ die Gleichungen (3.53) und (3.54) nach den 3-QT-Amplituden auflösen:

$$z_\nu^\lambda = \frac{\sum_{n'} V_{n'\nu}^* z_{n'}^\lambda + \int d\epsilon' V_\nu^*(\epsilon')\zeta^\lambda(\epsilon')}{E_\lambda - E_\nu} \quad (3.57)$$

$$b_\nu^\lambda(\epsilon_\nu) = -\sum_{n'} V_{n'}^*(\epsilon_\nu)z_{n'}^\lambda - \int d\epsilon' V^*(\epsilon', \epsilon_\nu)\zeta^\lambda(\epsilon'). \quad (3.58)$$

Diese 3-QT- Amplituden werden in die Gleichungen (3.51) und (3.52) eingesetzt. Damit erhält man als Umformulierung die Gleichungen

$$\begin{aligned} (E_n - E_\lambda)z_n^\lambda &+ \sum_{n'} M_{nn'}(E_\lambda)z_{n'}^\lambda + \int d\epsilon' M_n(\epsilon', E_\lambda)\zeta^\lambda(\epsilon') \\ &= \sum_\nu I_{n\nu}(E_\lambda) \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} (\epsilon - E_\lambda)\zeta^\lambda(\epsilon) &+ \sum_{n'} M_{n'}^*(\epsilon, E_\lambda)z_{n'}^\lambda + \int d\epsilon' M(\epsilon, \epsilon', E_\lambda)\zeta^\lambda(\epsilon') \\ &= \sum_\nu I_\nu(\epsilon, E_\lambda) \end{aligned} \quad (3.60)$$

in den 1-QT-Amplituden z_n^λ und $\zeta^\lambda(\epsilon)$. Dabei sind die sogenannten Massen- oder Selbstenergieoperatoren wie folgt definiert:

$$M_{nn'}(E_\lambda) = \sum_\nu \frac{V_{n\nu}V_{n'\nu}^*}{E_\lambda - E_\nu} + \oint_\nu d\epsilon'' \frac{V_n(\epsilon''_v)V_{n'}^*(\epsilon''_v)}{E_\lambda - \epsilon''_v} \quad (3.61)$$

$$M_n(\epsilon', E_\lambda) = \sum_\nu \frac{V_{n\nu}V_\nu^*(\epsilon')}{E_\lambda - E_\nu} + \oint_\nu d\epsilon'' \frac{V_n(\epsilon''_v)V^*(\epsilon', \epsilon''_v)}{E_\lambda - \epsilon''_v} \quad (3.62)$$

$$M(\epsilon, \epsilon', E_\lambda) = \sum_\nu \frac{V_\nu(\epsilon)V_\nu^*(\epsilon')}{E_\lambda - E_\nu} + \oint_\nu d\epsilon'' \frac{V(\epsilon, \epsilon''_v)V^*(\epsilon', \epsilon''_v)}{E_\lambda - \epsilon''_v} \quad (3.63)$$

Für die 1-QT-Zustände sind diese Größen das Kernstrukturäquivalent zum nichtthermischen Polarisationsoperator im optischen Potential [Len87] (siehe auch Kapitel 1). Wie später gezeigt wird, handelt es sich bei den 1-QT-Zuständen im Kontinuum um den elastischen Anteil eines Einteilchenstrezustands. Über den Massenoperator erfolgt die Ankopplung an die 3-QT-Zustände, also an die nächst komplizierteren Kanäle.

Auch die Massenoperatoren weisen, wie die Matrixelemente der Restwechselwirkung \hat{V}_{13} , unterschiedliche Einheiten in der Energie auf (siehe oben). Die Polstellen sind durch die Verwendung des Hauptwertintegrals explizit ausgeklammert. Die Massenoperatoren sind daher stetige, wenn auch stark fluktuierende Funktionen in E_λ .

Die Inhomogenitäten $I_{n\nu}(E_\lambda)$ bzw. $I_\nu(\epsilon, E_\lambda)$ berücksichtigen die Polstellen in Gleichung (3.54). Explizit ergeben sich die Ausdrücke:

$$I_{n\nu}(E_\lambda) = I_{n\nu}(\epsilon_\nu = E_\lambda) = -V_n(\epsilon_\nu = E_\lambda)a_\nu^\lambda(\epsilon_\nu = E_\lambda) \quad (3.64)$$

$$I_\nu(\epsilon, E_\lambda) = I_\nu(\epsilon, \epsilon_\nu = E_\lambda) = -V(\epsilon, \epsilon_\nu = E_\lambda)a_\nu^\lambda(\epsilon_\nu = E_\lambda) \quad (3.65)$$

Dabei werden die Matrixelemente V an der Stelle $\epsilon_\nu = E_\lambda$ genommen. Die Inhomogenitäten sind, wie im Falle der Kontinuums-QRPA, durch Randbedingungen

bestimmt, die im Abschnitt 3.2.1 festgelegt werden.

Der letzte Schritt besteht nun in der Umformung von Gleichung (3.60), da sich für den Fall $\epsilon = E_\lambda$ wieder Singularitäten ergeben. Man verwendet daher für $\zeta^\lambda(\epsilon)$ ebenfalls einen Ansatz der Art (3.56):

$$\zeta^\lambda(\epsilon) = a^\lambda(\epsilon)\delta(\epsilon - E_\lambda) + \mathcal{P}\frac{b^\lambda(\epsilon)}{\epsilon - E_\lambda} \quad (3.66)$$

und erhält die verallgemeinerten QPC-Gleichungen in folgender Darstellung:

$$\begin{aligned} (E_n - E_\lambda)z_n^\lambda + \sum_{n'} M_{nn'}(E_\lambda)z_{n'}^\lambda + \int d\epsilon' \frac{M_n(\epsilon', E_\lambda)b^\lambda(\epsilon')}{\epsilon' - E_\lambda} \\ = I_n(E_\lambda) + \sum_\nu I_{n\nu}(E_\lambda) \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} b^\lambda(\epsilon) + \sum_{n'} M_{n'}^*(\epsilon, E_\lambda)z_{n'}^\lambda + \int d\epsilon' \frac{M(\epsilon, \epsilon', E_\lambda)b^\lambda(\epsilon')}{\epsilon' - E_\lambda} \\ = I(\epsilon, E_\lambda) + \sum_\nu I_\nu(\epsilon, E_\lambda). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Die beiden zusätzlichen Inhomogenitätsterme in den Gleichungen (3.67) und (3.68) ergeben sich aus den Singularitäten des Integrals über den Massenoperator. Explizit ergibt sich:

$$I_n(E_\lambda) = I_n(\epsilon = E_\lambda) = -M_n(\epsilon = E_\lambda, E_\lambda)a^\lambda(\epsilon = E_\lambda) \quad (3.69)$$

$$I(\epsilon, E_\lambda) = I(\epsilon, \epsilon' = E_\lambda) = -M(\epsilon, \epsilon' = E_\lambda, E_\lambda)a^\lambda(\epsilon' = E_\lambda). \quad (3.70)$$

Die Normierung der Wellenfunktion, die Bedeutung der Inhomogenitäten und die Lösung dieses Gleichungssystems ist Gegenstand der nächsten Abschnitte. Im Anhang D ist zudem der Zusammenhang zwischen der Kontinuumsdarstellung und der ursprünglichen diskreten Darstellung beschrieben.

Da es sich bei der Wellenfunktion $|\lambda\rangle$ im Falle von Eigenenergien E_λ , die größer als die Teilchenauflösungsenergie sind, um Streuzustände handelt, kann außerdem eine Streufunktion $S(E_\lambda)$ ermittelt werden, die mit den oben erwähnten Inhomogenitäten in engem Zusammenhang steht. Um die doch ziemlich formale Darstellung etwas zu erläutern, wird schließlich im Abschnitt 3.2.2 als analytisches Beispiel ein schematisches Modell behandelt, bei dem gebundene 3-QT-Zustände ins Kontinuum eingebettet werden und die zugehörige S -Matrix des Einteilchenstreu Zustands berechnet wird.

3.2.1 Normierung und Asymptotik der QPC-Wellenfunktion

In den Gleichungen (3.49) und (3.50) wurde die Normierungsbedingung für die Wellenfunktion $|\lambda\rangle$ bereits angegeben. Hier sollen nun diese Normierungsbedingungen etwas genauer im Zusammenhang mit den physikalischen Randbedingungen diskutiert werden. Die hier verwendete Darstellung beschreibt in allgemeiner Form sowohl diskrete Zustände als auch das Kontinuum. Für normierte 1- und 3-QT-Zustände erhält man für die QPC-Zustände die Beziehung:

$$\begin{aligned}
\langle \lambda' | \lambda \rangle &= \sum_n z_n^{\lambda'^*} z_n^\lambda + \int d\epsilon' \zeta^{\lambda'}(\epsilon')^* \zeta^\lambda(\epsilon') \\
&+ \sum_\nu z_\nu^{\lambda'^*} z_\nu^\lambda + \int d\epsilon'_\nu \zeta_\nu^{\lambda'}(\epsilon'_\nu)^* \zeta_\nu^\lambda(\epsilon'_\nu) \\
&= \begin{cases} \delta_{\lambda\lambda'} & E_\lambda \leq E_s \\ \delta(E_\lambda - E_{\lambda'}) & E_\lambda \geq E_s \end{cases}. \quad (3.71)
\end{aligned}$$

Hier ist E_s wieder die Energie der Teilchenaufbruchschwelle. Für die Koeffizienten ζ können die Ausdrücke aus (3.56) und (3.66) eingesetzt werden. Damit erhält man unterhalb der Teilchenaufbruchschwelle E_s , entsprechend zu Gleichung (3.42), den Ausdruck:

$$\sum_n z_n^{\lambda^2} + \sum_\nu z_\nu^{\lambda^2} + \int d\epsilon' \frac{b^{\lambda^2}(\epsilon')}{(E_\lambda - \epsilon')^2} + \int d\epsilon'_\nu \frac{b_\nu^{\lambda^2}(\epsilon'_\nu)}{(E_\lambda - \epsilon'_\nu)^2} = 1 \quad E_\lambda \leq E_s. \quad (3.72)$$

Die Energie E_s der Teilchenaufbruchschwelle bezieht sich hier auf den Einteilchenstreu Zustand relativ zum Grundzustand des zugehörigen Kernrumpfes. Auch hier sieht man wieder, dass die Kontinuumsanteile der 1- und 3-QT-Zustände zu den gebundenen Zuständen beitragen. Sie haben bei geeigneter Überlagerung, wie später gezeigt wird, die richtige, also exponentiell abfallende Asymptotik. Oberhalb der Teilchenaufbruchschwelle E_s erfolgt die Normierung wieder auf eine Deltafunktion und hängt daher nur von der Asymptotik der QPC-Wellenfunktion ab. Damit ergibt sich wieder eine Beziehung entsprechend (3.44):

$$a^{\lambda^2}(E_\lambda) + \pi^2 b^{\lambda^2}(E_\lambda) + \sum_{\nu, E_\lambda \geq E_s} \left[a_\nu^{\lambda^2}(E_\lambda) + \pi^2 b_\nu^{\lambda^2}(E_\lambda) \right] = 1. \quad (3.73)$$

Hiermit sind verschiedene Situationen bezüglich der Randbedingungen beschreibbar. Mit zunehmender Anregungsenergie E_λ öffnen sich weitere "Dreiteilchenkanäle"¹.

¹Damit sind hier Streuzustände gemeint, die sich durch Ankopplung eines Teilchenstreu Zustands an einen 2-QT-Phononoperator ergeben

Soll z. B. ein Nukleonstreu Zustand relativ zu einem geraden Kern in einem BCS-Grundzustand beschrieben werden, so liegt im Eingangskanal ein Einteilchenstreu Zustand vor und damit muß die folgende Randbedingungen

$$\begin{aligned} a^\lambda(E_\lambda) - i\pi b^\lambda(E_\lambda) &= 1 \\ a_\nu^\lambda(E_\lambda) - i\pi b_\nu^\lambda(E_\lambda) &= 0 \quad \forall \nu \end{aligned} \quad (3.74)$$

gültig sein. Die zweite Bedingung ergibt sich aus der Forderung, daß keine 3-QT-Zustände als einlaufende Wellen vorliegen. Selbstverständlich sind auch andere Randbedingungen möglich. Im Falle einer Nukleonstreuung an einem angeregten Kern, wird $a_\nu^\lambda(E_\lambda) - i\pi b_\nu^\lambda(E_\lambda) = 1$ gesetzt, d. h. die einlaufende Welle liegt in einem 3-QT-Kanal vor. Mit (3.74) ist der Streuzustand eindeutig festgelegt und die asymptotische Streuwellenfunktion kann bestimmt werden. Man erhält für den Radialanteil:

$$\begin{aligned} u_\lambda(r, E_\lambda) &\sim a^\lambda(E_\lambda) e^{-i\delta_{\ell j}(E_\lambda)} u_{\ell j}^{as}(r, E_\lambda) \Theta(E_\lambda - E_s) \\ &+ \sum_\nu a_\nu^\lambda(E_\lambda) e^{-i\delta_{\nu, \ell j}(E_\lambda)} u_{\nu, \ell j}^{as}(r, E_\lambda) \Theta(E_\lambda - E_s^\nu) \\ &+ \int d\epsilon' \frac{b^\lambda(\epsilon')}{\epsilon' - E_\lambda} e^{-i\delta_{\ell j}(\epsilon')} u_{\ell j}^{as}(r, \epsilon') \\ &+ \sum_\nu \int d\epsilon'_\nu \frac{b_\nu^\lambda(\epsilon'_\nu)}{\epsilon'_\nu - E_\lambda} e^{-i\delta_{\nu, \ell j}(\epsilon'_\nu)} u_{\nu, \ell j}^{as}(r, \epsilon'_\nu). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Die $u_{\ell j}^{as}(r, \epsilon)$ bzw. $u_{\nu, \ell j}^{as}(r, \epsilon_\nu)$ haben dabei den in (2.8) angegebenen asymptotischen Verlauf. Mit den zusätzlichen Phasen ergeben sich rein reelle Wellenfunktionen. Wie durch die Θ -Funktion angegeben, sind die $a^\lambda(E_\lambda)$ und $a_\nu^\lambda(E_\lambda)$ erst für Energien E_λ , die größer als die jeweilige Aufbruchenergie E_s bzw. E_s^ν sind, von Null verschieden. Die physikalische Bedeutung ist, daß der jeweilige Kanal erst ab dieser Energie offen ist, so daß dann eine einlaufende Welle vorhanden ist. Die beiden Hauptwertintegrale werden, wie in Anhang F berechnet:

$$\begin{aligned} \int d\epsilon' \frac{b^\lambda(\epsilon')}{\epsilon' - E_\lambda} e^{-i\delta_{\ell j}(\epsilon')} u_{\ell j}^{as}(r, \epsilon') = \\ \pi b^\lambda(E_\lambda) \cos(\Phi_\ell(r, E_\lambda) + \delta_{\ell j}(E_\lambda)) \Theta(E_\lambda - E_s) \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \sum_\nu \int d\epsilon'_\nu \frac{b_\nu^\lambda(\epsilon'_\nu)}{\epsilon'_\nu - E_\lambda} e^{-i\delta_{\nu, \ell j}(\epsilon'_\nu)} u_{\nu, \ell j}^{as}(r, \epsilon'_\nu) = \\ \sum_\nu \pi b_\nu^\lambda(E_\lambda) \cos(\Phi_{\nu, \ell}(r, E_\lambda^\nu) + \delta_{\nu, \ell j}(E_\lambda^\nu)) \Theta(E_\lambda - E_s^\nu). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Insgesamt erhält man, wenn die Ausdrücke (3.76) und (3.77) in Gleichung (3.75)

eingesetzt werden, im asymptotischen Bereich die radiale Wellenfunktion

$$\begin{aligned}
u_\lambda(r, E_\lambda) &\sim \frac{1}{2}iN(E_\lambda)e^{-i\delta_{\ell j}(E_\lambda)} \left[I_\ell^{(+)}(r, E_\lambda) - S_{\ell j}(E_\lambda)O_\ell^{(+)}(r, E_\lambda) \right] \\
&- \frac{1}{2}iN(E_\lambda^\nu) \sum_\nu e^{-i\delta_{\ell j}(E_\lambda)} S_{\ell j}^\nu(E_\lambda^\nu) O_\ell^{(+)}(r, E_\lambda^\nu)
\end{aligned} \tag{3.78}$$

mit den S -Matrix-Komponenten

$$\begin{aligned}
S_{\ell j}(E_\lambda) &= \left(a^\lambda(E_\lambda) + i\pi b^\lambda(E_\lambda) \right) e^{2i\delta_{\ell j}(E_\lambda)} \\
S_{\ell j}^\nu(E_\lambda^\nu) &= e^{i\delta_{\ell j}(E_\lambda)} \left(a_\nu^\lambda(E_\lambda) + i\pi b_\nu^\lambda(E_\lambda) \right) e^{i\delta_{\nu, \ell j}(E_\lambda^\nu)}.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Die Komponenten $S_{\ell j}(E_\lambda)$ und $S_{\ell j}^\nu(E_\lambda^\nu)$ beschreiben dabei die Streuung in den auslaufenden elastischen Kanal und in die inelastischen 3-QT-Kanäle. Dies ist völlig analog zu den in der Literatur angegebenen Ausdrücken im Rahmen von anderen Kernstrukturmodellen (siehe [Blo66], [RMS67] und [MaW69]). Die S -Matrix kann also aus den Koeffizienten $a^\lambda(E_\lambda)$, $b^\lambda(E_\lambda)$, $a_\nu^\lambda(E_\lambda)$ und $b_\nu^\lambda(E_\lambda)$ gewonnen werden. Eine Aufgabe dieser Arbeit ist die Bestimmung dieser Koeffizienten im QPC-Modell für verschiedene Kernzustände. (Siehe Kapitel 5 und 6).

3.2.2 Beispiel: Im Kontinuum eingebettete gebundene Zustände

Die relativ komplexe und formale Darstellung der bisherigen Abschnitte soll nun durch ein einfaches, weitgehend analytisches Beispiel transparenter gemacht werden. Es werde der Fall betrachtet, in dem die Kopplungen zwischen den 1-QT-Zuständen und den 3-QT Kontinuumszuständen abgeschaltet werden - d.h. die Wechselwirkungen $V(\epsilon, \epsilon_\nu)$ und $V_n(\epsilon_\nu)$ werden gleich 0 gesetzt und es wird nur ein offener Kanal, nämlich der Einteilchenkanal berücksichtigt. Damit reduzieren sich die Gleichungen (3.51) bis (3.54) auf das folgende Gleichungssystem:

$$(E_n - E_\lambda)z_n^\lambda + \sum_\nu V_{n\nu}z_\nu^\lambda = 0 \quad (3.80)$$

$$(\epsilon - E_\lambda)\zeta^\lambda(\epsilon) + \sum_\nu V_\nu(\epsilon)z_\nu^\lambda = 0 \quad (3.81)$$

$$(E_\nu - E_\lambda)z_\nu^\lambda + \sum_{n'} V_{n'\nu}^* z_{n'}^\lambda + \int d\epsilon' V_\nu^*(\epsilon')\zeta^\lambda(\epsilon') = 0. \quad (3.82)$$

Durch Einsetzen von (3.80) und (3.81) in (3.82) und unter Berücksichtigung von (3.66) erhält man Gleichungen für die z_ν^λ :

$$(E_\nu - E_\lambda)z_\nu^\lambda + \sum_{\nu'} \left[\sum_{n'} \frac{V_{n'\nu}^* V_{n'\nu'}}{E_\lambda - E_{n'}} + \int d\epsilon' \frac{V_\nu^*(\epsilon') V_{\nu'}(\epsilon')}{E_\lambda - \epsilon'} \right] z_{\nu'}^\lambda = -V_\nu^*(\epsilon = E_\lambda) a^\lambda(E_\lambda) \Theta(E_s - E_\lambda). \quad (3.83)$$

Die noch unbestimmte Größe $a^\lambda(E_\lambda)$ wird für Zustände oberhalb der Teilchenauflbruchschwelle E_s durch die Randbedingung (3.74) festgelegt. Dann ergibt sich für die z_ν^λ das folgende Gleichungssystem:

$$\underline{\underline{F}}(E_\lambda) \underline{\underline{z}}^\lambda = \left[\frac{i}{2} \underline{\underline{\Gamma}}(E_\lambda) \underline{\underline{z}}^\lambda - V^*(E_\lambda) \right] \Theta(E_s - E_\lambda). \quad (3.84)$$

Die hier verwendeten quadratischen und hermiteschen Matrizen $\underline{\underline{F}}(E_\lambda)$ und $\underline{\underline{\Gamma}}(E_\lambda)$ haben die Komponenten

$$F_{\nu\nu'}(E_\lambda) = (E_\nu - E_\lambda)\delta_{\nu\nu'} + \sum_{n'} \frac{V_{n'\nu}^* V_{n'\nu'}}{E_\lambda - E_{n'}} + \int d\epsilon' \frac{V_\nu^*(\epsilon') V_{\nu'}(\epsilon')}{E_\lambda - \epsilon'} \quad (3.85)$$

und

$$\Gamma_{\nu\nu'}(E_\lambda) = 2\pi V_\nu^*(E_\lambda) V_{\nu'}(E_\lambda). \quad (3.86)$$

Die Komponenten der Vektoren \underline{z}^λ und $\underline{V}^*(E_\lambda)$ sind durch z_ν^λ und $V_\nu^*(E_\lambda)$ gegeben. Wie aus Gleichung (3.84) zu sehen, können in Abhängigkeit der Energie E_λ sowohl gebundene, als auch ungebundene Zustände beschrieben werden. Für eine vollständige Diskussion ist daher eine Fallunterscheidung nötig. Zunächst soll der Fall $E_\lambda \leq E_s$ untersucht werden. Es gilt also das aus dem Gleichungssystem (3.84) erhaltene homogene Gleichungssystem

$$\underline{F}(E_\lambda)\underline{z}^\lambda = 0 \quad (3.87)$$

zu lösen. Die in den Matrixelementen $F_{\nu\nu'}(E_\lambda)$ enthaltenen Hauptwertintegrale werden dabei zu Integralen im üblichen Sinne, da ϵ immer $\neq E_\lambda$ ist und die Integranden daher keine Singularitäten aufweisen. Man erhält für die z_ν^λ ein homogenes Gleichungssystem mit ganz bestimmten Energieeigenwerten E_λ . Unter Berücksichtigung der Normierungsbedingung (3.72) (Keine 3-QT-Kontinuumskanäle !) findet man im Falle einfacher Nullstellen E_λ für die Koeffizienten z_ν^λ den Ausdruck ([Len90])

$$\frac{1}{|z_\nu^\lambda|^2} = -\partial_E \left(\frac{\det(\underline{F}(E))}{\text{Adj}(F_{\nu\nu}(E))} \right)_{E=E_\lambda}, \quad (3.88)$$

d. h. die $|z_\nu^\lambda|^2$ können aus den Residuen der Funktion $\text{Adj}(F_{\nu\nu}(E))/\det(\underline{F}(E))$, also dem Quotienten aus der Adjunkten zum Matrixelement $F_{\nu\nu}(E)$ und der Determinante der Koeffizientenmatrix, berechnet werden.

Diese Eigenschaft kann nun ausgenutzt werden, um eine energiegemittelte Stärkefunktion,

$$P_\nu(E) = \sum_\lambda |z_\nu^\lambda|^2 \Delta(E - E_\lambda) \quad (3.89)$$

mit einer Mittelungsfunktion $\Delta(E - E_\lambda)$ durch ein Kontourintegral in der komplexen Ebene zu berechnen. Verwendet man als Mittelungsfunktion eine Breit-Wigner-Funktion mit der Mittelungsbreite Δ_m , so ergibt sich der Ausdruck

$$P_\nu(E) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[\frac{\text{Adj}(F_{\nu\nu}(E + i\Delta_m/2))}{\det(\underline{F}(E + i\Delta_m/2))} \right]. \quad (3.90)$$

Der Ansatz, der zu diesem Ausdruck für eine 3-QT-Stärkefunktion führt, ist eine Erweiterung des von Bohr und Mottelson gemachten Ansatzes zur Berechnung der energiegemittelten Einteilchenstärkefunktion.

Als nächstes soll der Fall $E_\lambda \geq E_s$ untersucht werden. Man findet jetzt sowohl einlaufende als auch auslaufende Komponenten in der Wellenfunktion $|\lambda\rangle$. Geht man von der Randbedingung aus, daß der Eingangskanal ein Einteilchenkanal ist, so kann das Gleichungssystem (3.84) nach dem Koeffizientenvektor \underline{z}^λ aufgelöst werden:

$$\underline{z}^\lambda = - \left(\underline{F}(E_\lambda) - \frac{i}{2} \underline{\Gamma}(E_\lambda) \right)^{-1} \underline{V}^*(E_\lambda). \quad (3.91)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (3.80) und (3.81) können jetzt auch die Koeffizienten für die 1-QT-Zustände (diskrete als auch kontinuierliche)

$$z_n^\lambda = \sum_{\nu, \nu'} \frac{V_{n\nu} \left(\left(\underline{F}(E_\lambda) - \frac{i}{2} \underline{\Gamma}(E_\lambda) \right)^{-1} \right)_{\nu\nu'} V_{\nu'}^*(E_\lambda)}{(E_n - E_\lambda)} \quad (3.92)$$

und

$$b^\lambda(\epsilon) = \sum_{\nu, \nu'} V_\nu(\epsilon) \left(\left(\underline{F}(E_\lambda) - \frac{i}{2} \underline{\Gamma}(E_\lambda) \right)^{-1} \right)_{\nu\nu'} V_{\nu'}^*(E_\lambda) \quad (3.93)$$

erhalten werden. Ermittelt man den Wert von $b^\lambda(\epsilon)$ für $\epsilon = E_\lambda$ und nützt man die Beziehung (3.79) aus, so ergibt sich schließlich die Streufunktion

$$\begin{aligned} S(E_\lambda) &= \exp(2i\delta_\lambda) \left[a^\lambda(E_\lambda) + i\pi b^\lambda(E_\lambda) \right] \\ &= \exp(2i\delta_\lambda) \left[1 + 2i\pi \sum_{\nu, \nu'} V_\nu(\epsilon) \left(\left(\underline{F}(E_\lambda) - \frac{i}{2} \underline{\Gamma}(E_\lambda) \right)^{-1} \right)_{\nu\nu'} V_{\nu'}^*(E_\lambda) \right] \end{aligned} \quad (3.94)$$

für den Einteilchenkanal. Diese Streufunktion ist unitär für reelle Energien und hat in der komplexen Ebene in der Nähe der ungestörten 3-QT-Energien Pole. Sie bedingen das Auftreten von Resonanzen im Wirkungsquerschnitt. Die genaue Lage und die Breiten dieser Resonanzen hängen nur von den Matrixelementen der Restwechselwirkung ab und von den ungestörten Energien der im Kontinuum eingebetteten 3-QT-Zustände.

Die so erhaltenen Ergebnisse entsprechen formal, sowohl den Resultaten von U. Fano [Fan61], als auch denen von Mahaux und Weidenmüller [MaW69]. Die Restwechselwirkung ist allerdings in dem hier gemachten Ansatz explizit durch eine 1-QT-3-QT-Wechselwirkungen gegeben. Daher ist es möglich die so erhaltenen Ergebnisse noch weiter zu diskutieren und weitere Näherungen zu betrachten. Die auftretenden Größen $\underline{F}(E_\lambda)$ und $\underline{\Gamma}$ sind Funktionen der Restwechselwirkung. Die $\Gamma_{\nu\nu'}$ werden im

Mittel eine ähnliche Energieabhängigkeit zeigen, wie der Wirkungsquerschnitt für eine Einteilchenstreuung. Für Einteilchenresonanzen ist ein starkes Anwachsen zu erwarten, da in $\underline{\Gamma}$ Matrixelemente der Form $\langle \epsilon = E_\lambda | \hat{V}_{13} | \nu \rangle \langle \nu' | \hat{V}_{13} | \epsilon = E_\lambda \rangle$ eingehen. Daher wird für diese Modellbreite die Annahme gemacht, daß im Bereich einer Resonanz die folgende Proportionalität für $\Gamma_{\nu\nu'}$ gilt:

$$\Gamma_{\nu\nu'} \sim \frac{|\sin(\delta(E_\lambda))|^2}{\sqrt{E_\lambda}} v_{13}^{(\nu)} v_{13}^{(\nu')}. \quad (3.95)$$

Dabei ist $\delta(E_\lambda)$ die Streuphase des Einteilchenkanals. Entsprechend nimmt man für das Hauptwertintegral aus Gleichung (3.85) folgendes Verhalten an

$$\int d\epsilon' \frac{V_\nu^*(\epsilon') V_{\nu'}(\epsilon')}{E_\lambda - \epsilon'} \sim \int d\epsilon' \frac{|\sin(\delta(\epsilon'))|^2}{\sqrt{\epsilon'(E_\lambda - \epsilon')}} v_{13}^{(\nu)} v_{13}^{(\nu')}. \quad (3.96)$$

Da jetzt die dominierende Energieabhängigkeit separiert ist, kann man für die reduzierten 1-QT-3-QT-Wechselwirkungen $v_{13}^{(\nu)}$ dann näherungsweise einen konstanten Wert annehmen.

Es wird im folgenden ein numerisches Beispiel diskutiert, daß den Verhältnissen für den $f_{5/2}$ -Streuzustand im ^{41}Sc , der in Kapitel 5 im vollständigen QPC-Modell beschrieben wird, prinzipiell beschreibt. Hier wird speziell die Ankopplung von zwei im Kontinuum eingebetteten 3-QT-Zuständen an das $f_{5/2}$ -Einteilchenkontinuum diskutiert. Die beiden ungestörten 3-QT-Zustände liegen bei Eigenenergien von 4.167 und 5.521 MeV relativ zur Einteilchenaufbruchschwelle E_s . Der $f_{5/2}$ -Einteilchenstreu-zustand hat eine Resonanz bei ca. 5 MeV . Durch die Ankopplung kommt es zu einer Fragmentation der verschiedenen Zustände, die von der Größe der reduzierten 1-QT-3-QT-Restwechselwirkungen $v_{13}^{(1)}$ und $v_{13}^{(2)}$ abhängt. In den folgenden drei Abbildungen werden der elastische Einteilchenwirkungsquerschnitt und die Stärkefunktionen der 3-QT-Zustände als Funktion der Restwechselwirkungen gezeigt.

- Abbildung 3.1: Hier ist der elastische Wirkungsquerschnitt, berechnet aus der Streumatrix (3.94) dargestellt. Man sieht die Verschiebung und Veränderung der Linienform der Einteilchenresonanz bei ca. 5 MeV in Abhängigkeit der Restwechselwirkungen. Des weiteren sind scharfe Resonanzen in der Nähe der ungestörten 3-QT-Zustände, also insgesamt eine Fragmentation der ungestörten Einteilchenresonanz, zu erkennen.
- Abbildung 3.2: Die drei Einzelbilder auf der linken Seite zeigen die Stärke des tiefliegenden 3-QT-Zustands bei 4.167 MeV in halblogarithmischer Darstellung für verschiedene Stärken der Restwechselwirkung. Maxima sind im Bereich der ungestörten 3-QT-Energien und in der Nähe der Einteilchenresonanz

zu sehen. Deutlich sind ebenfalls die endliche Breite und die Verschiebung des 3-QT-Zustand durch die Ankopplung zu erkennen. Die drei Einzelbilder auf der rechten Seite zeigen die über die Anregungsenergie E_λ aufintegrierte Stärke $(\Sigma|z_\nu|^2)$. Erwartungsgemäß ergibt sich für den Gesamtwert der aufintegrierten Stärke der Wert Eins.

- Abbildung 3.3: In dieser Abbildung sind die den in Abbildung 3.2 gezeigten, entsprechenden Größen für den hochliegenden 3-QT-Zustand bei 5.521 MeV zu sehen.

Die hier gemachte empirische Rechnung kann mit der realistischen Rechnung aus Kapitel 5 verglichen werden. Es zeigen sich prinzipielle Gemeinsamkeiten (Auftreten von schmalen Resonanzen in der Nähe der ungestörten 3-QT-Energien) Allerdings koppeln in der realistischen Rechnung wesentlich mehr 3-QT-Zustände ans Kontinuum an — man erhält daher insgesamt sieben Resonanzen im elastischen Wirkungsquerschnitt. Das diskutierte Modell soll daher nur einen ersten Eindruck für die zu erwartenden Ergebnisse geben.

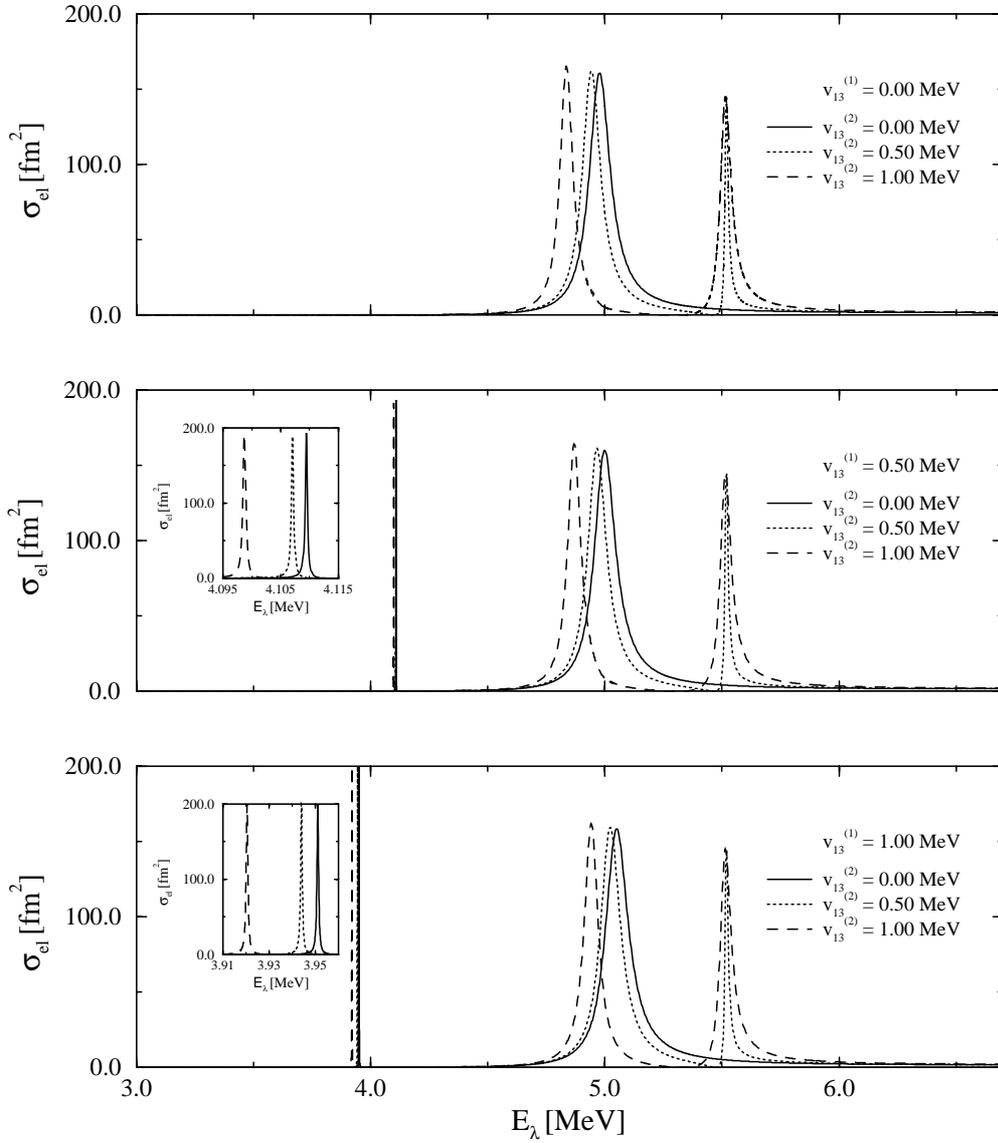


Abbildung 3.1: Elastischer Wirkungsquerschnitt eines $f_{5/2}$ -Protonenzustands an einem ^{40}Ca -Kern unter Berücksichtigung von zwei im Kontinuum eingebetteten gebundenen Zuständen mit Energien $E_{bs}^1 = 4.167 \text{ MeV}$ und $E_{bs}^2 = 5.521 \text{ MeV}$ für verschiedene Werte der Restwechselwirkung $v_{13}^{(1)}$ und $v_{13}^{(2)}$. Deutlich ist die Verschiebung und die Veränderung der Linienform der Einteilchenresonanz zu erkennen sowie die durch die Ankopplung verursachten Resonanzen.

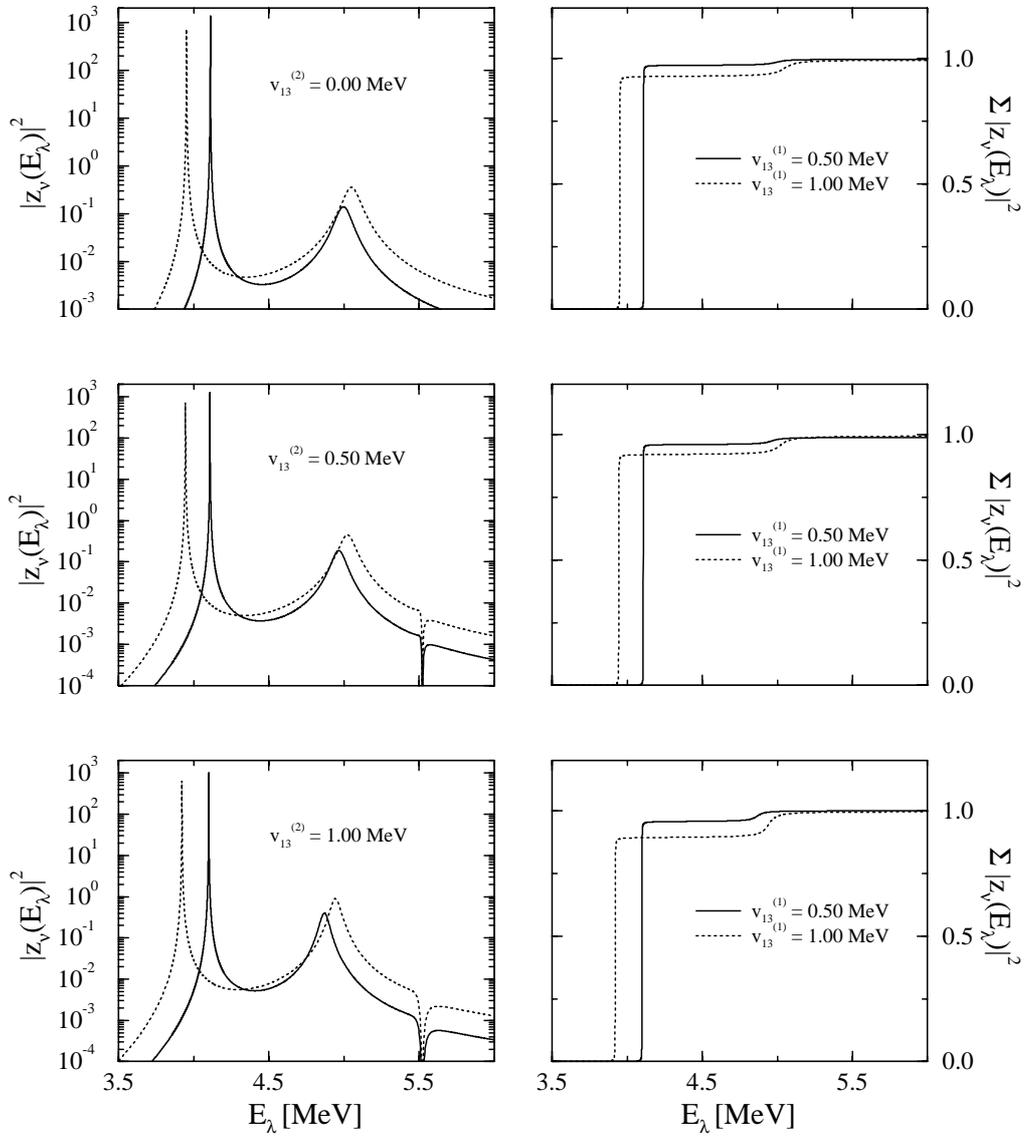


Abbildung 3.2: Stärkefunktion und aufsummierte Stärke eines 3-Quasiteilchenzustands mit Gesamtspin $5/2^-$ und einer Eigenenergie E_{bs}^1 von 4.167 MeV für verschiedene Werte der Restwechselwirkung $v_{13}^{(1)}$ und $v_{13}^{(2)}$.

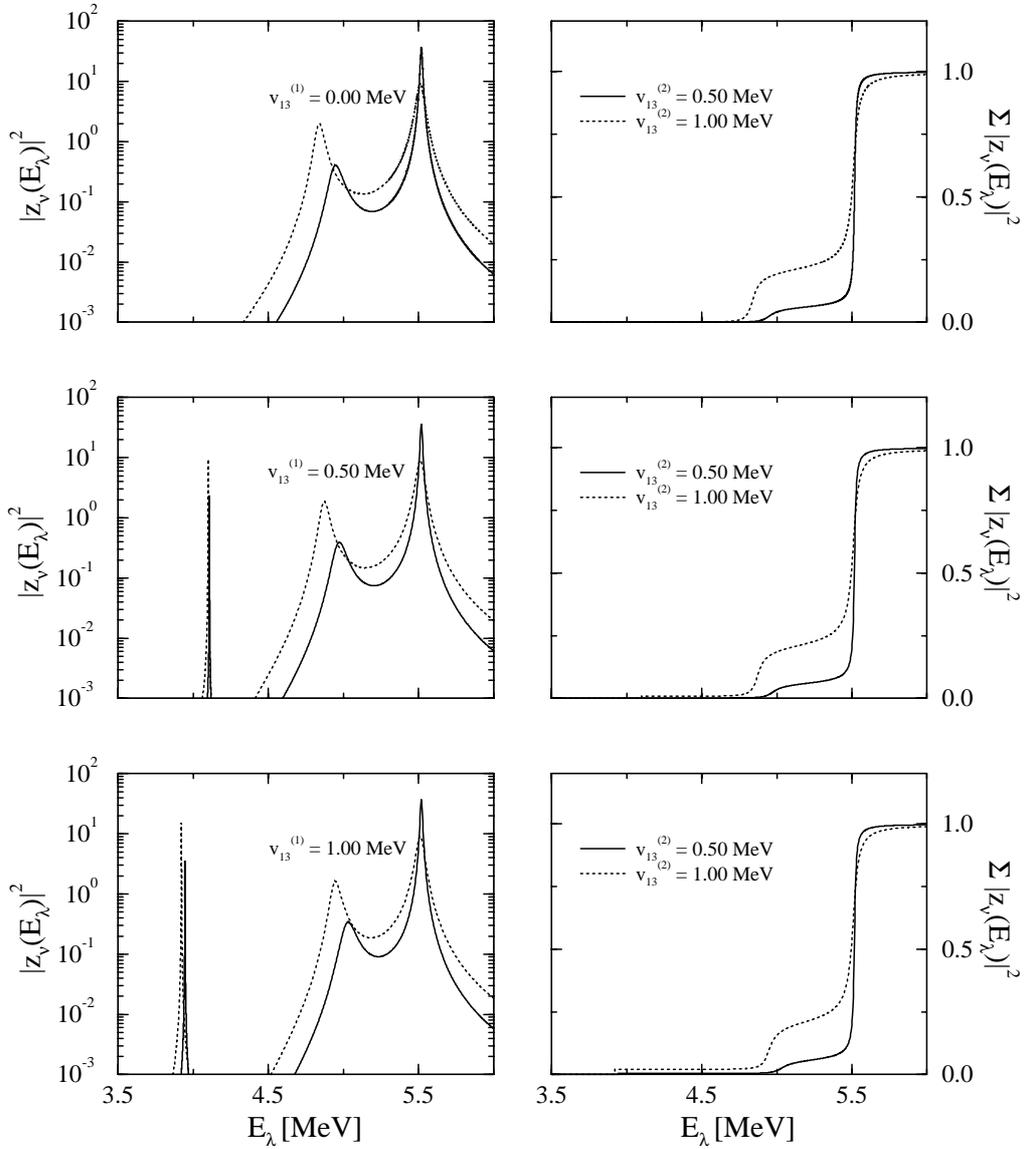


Abbildung 3.3: Wie Abbildung 3.2 Stärkefunktion und aufsummierte Stärke eines 3-Quasiteilchenzustands mit Gesamtspin $5/2^-$ und einer Eigenenergie $E_{b_s}^2$ von 5.521 MeV für verschiedene Werte der Restwechselwirkung $v_{13}^{(1)}$ und $v_{13}^{(2)}$.

Kapitel 4

Klassische und semiklassische Beschreibung von Transferreaktionen

In diesem Kapitel werden klassische und semiklassische Ansätze zur Beschreibung von Transferreaktionen vorgestellt. Die aus diesen Ansätzen gewonnenen Ergebnisse dienen zum besseren Verständnis der Physik von Transferreaktionen und sollen die allgemeineren Ansätze der letzten Kapitel transparenter machen. Die vorgestellten Rechnungen dienen außerdem als Vergleich zu den exakten Rechnungen in den folgenden Kapiteln. Die theoretischen Grundlagen dieser Ansätze gehen auf Brink und Bonaccorso [Bri72], [BBM87] und [BoB88] zurück.

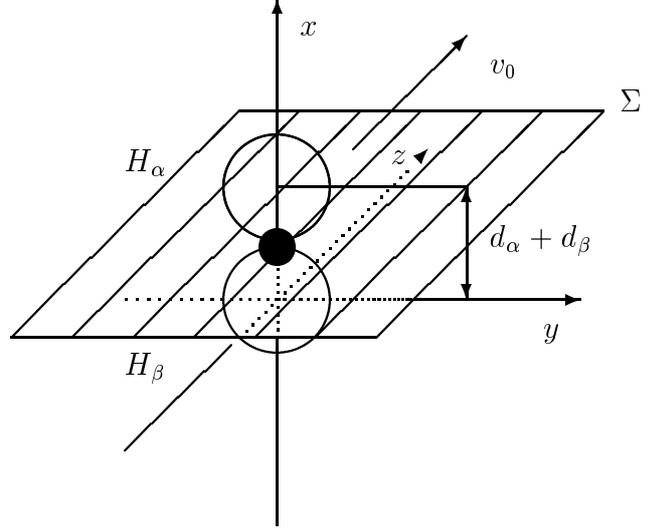
4.1 Ansätze des semiklassischen Modells

Für quasielastische Schwerionentransferreaktionen bei Energien oberhalb der Coulombaufruchtschwelle beobachtet man experimentell und auch in theoretischen Rechnungen vergleichsweise große Wirkungsquerschnitte, wenn die Impulse und Drehimpulse des transferierten Teilchens im Eingangskanal α sowie im Ausgangskanal β im folgenden Sinne gut angepaßt sind: Im Falle der in Abbildung A dargestellten Stripping-Reaktion heißt dies, daß das Teilchen x bei dem in der Reaktionsebene Σ stattfindenden Transfer vom Projektilrumpf b zum Target A keine Impuls- und Drehimpulsänderung erfährt. Dieses Verhalten von Transferreaktionen kann man klassisch verstehen, da die Trajektorien des transferierten Teilchens im Eingangs- und Ausgangskanal dann kompatibel sind. Unter den beiden Annahmen, daß es sich bei den betrachteten Transferreaktion um periphere Reaktionen handelt, und, daß das Teilchen x im Berührungspunkt, also in der Reaktionsebene, transferiert wird, erge-

ben sich kinematische Bedingungen für Impuls und Drehimpuls, die erstmalig von D. Brink [Bri72] aufgestellt worden sind.

Wegen der Unschärferelation müssen diese kinematischen Bedingungen bei der quantenmechanischen Behandlung von Transferreaktionen nur näherungsweise erfüllt sein — große Beiträge im Reaktionswirkungsquerschnitt sind allerdings nur für kleine Abweichungen von der klassischen Impuls- und Drehimpulserhaltung zu erwarten. Die kinematischen Anschlußbedingungen der für das Teilchen x in der Abbildung A schematisch dargestellten Stripping-Reaktion sind dann allgemein im Schwerpunktsystem bei Verwendung der Nomenklatur aus Kapitel 1 durch die Gleichungen

Figur A: Kinematische Verhältnisse



$$\begin{aligned}
 \Delta \vec{p}_x &= \left(\frac{m_x}{m_b + m_x} \vec{p}_\alpha - \vec{q}_\alpha \right) - \left(-\frac{m_x}{m_A + m_x} \vec{p}_\beta + \vec{q}_\beta \right) \\
 &= m_x \left(\frac{m_A}{M} \vec{v}_0 + \frac{m_b}{M} \vec{v}' \right) - \vec{q}_\alpha - \vec{q}_\beta \\
 &\approx 0
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

und

$$\begin{aligned}
 \Delta \vec{L} &= \vec{L}_\alpha - \vec{L}_\beta \\
 &= \left[\vec{\lambda}_\alpha + m_\alpha \left(\frac{m_b}{m_b + m_x} \vec{d}_\alpha - \vec{d}_\beta \right) \times \vec{v}_0 \right] \\
 &\quad - \left[\vec{\lambda}_\beta + m_\beta \left(\vec{d}_\alpha - \frac{m_A}{m_A + m_x} \vec{d}_\beta \right) \times \vec{v}' \right] \approx 0
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

gegeben. Die Geschwindigkeitsvektoren \vec{v}_0 und \vec{v}' sind dabei Relativgeschwindigkeiten zwischen Target und Projektilsystem vor und nach dem Transfer. Die Impulsvektoren $(\vec{p}_\alpha, \vec{q}_\alpha)$ und $(\vec{p}_\beta, \vec{q}_\beta)$ sind die zu den jeweiligen Jacobikoordinaten gehörenden konjugierten Impulse (siehe Abschnitt 1.2). Die intrinsischen Bahndrehimpulse $\vec{\lambda}$

sind klassisch durch

$$\vec{\lambda}_\alpha = \vec{d}_\alpha \times \vec{q}_\alpha \quad \text{und} \quad \vec{\lambda}_\beta = \vec{d}_\beta \times \vec{q}_\beta \quad (4.3)$$

gegeben. Mit den Abstandsvektoren \vec{d}_α und \vec{d}_β werden die Abstände zwischen dem transferierten Teilchen x und dem entsprechenden Rumpf, also z. B. im Falle von \vec{d}_α der Abstand zwischen x und b beschrieben (Diese Größen sind vergleichbar mit den Kernradien). Nimmt man weiter an, daß die Bahndrehimpulse bezüglich des in Abbildung A verwendeten Koordinatensystems in y -Richtung zeigen ¹, so erhält man unter Berücksichtigung der Energieerhaltung im Schwerpunktsystem,

$$\frac{p_\alpha^2}{2\mu_\alpha} + \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha} = \frac{p_\alpha^2}{2\mu_\alpha} + \epsilon_\alpha = \frac{p_\beta^2}{2\mu_\beta} + \frac{q_\beta^2}{2m_\beta} = \frac{p_\beta^2}{2\mu_\beta} + \epsilon_\beta, \quad (4.4)$$

Gleichungen, die den Brink'schen Gleichungen entsprechen [Bri72]. Im Gegensatz zu diesen werden in den Gleichungen (4.1) und (4.2) allerdings Rückstoßeffekte mitberücksichtigt. Es werden daher zusätzliche Glieder in der Masse m_x^2 erhalten. Die Differenz der Bindungsenergien ϵ_α und ϵ_β bestimmt den Q -Wert ($Q = \epsilon_\alpha - \epsilon_\beta$) der Reaktion. Im Rahmen der weiteren Diskussion wird nun ein Koordinatensystem verwendet, in dem die z -Achse als Einschußrichtung und Quantisierungsachse gegeben ist. Aus den Gleichungen (4.1) erhält man dann für die z -Komponente des Impulses von x relativ zu den Rümpfen b und A näherungsweise (jetzt ohne Rückstoßeffekte) die folgenden Ausdrücke [LoB85]:

$$\hbar k_\alpha = -(Q + \frac{1}{2}m_x v_0^2)/v_0 \quad \text{und} \quad \hbar k_\beta = -(Q - \frac{1}{2}m_x v_0^2)/v_0. \quad (4.5)$$

Der Transfer von x erfolgt durch eine Potentialbarriere, die die beiden Rümpfe b und A trennt. Damit ist die, zur z -Komponente senkrechte Impulskomponente k_\perp des transferierten Teilchens x relativ zu den Rümpfen, eine rein imaginäre Größe. Sie ergibt sich zu

$$\hbar k_\perp = i\hbar\eta = i\hbar\sqrt{k_\alpha^2 + \gamma_\alpha^2} = i\hbar\sqrt{k_\beta^2 + \gamma_\beta^2}, \quad (4.6)$$

¹Bei der Beschreibung kinematischer Effekte ([Bri72] und [Sat80]) wird häufig ein Koordinatensystem verwendet, in dem die Quantisierungsachse senkrecht zur Reaktionsebene angeordnet ist (sogenannte Anti-Basel-Konvention). Damit ergeben sich natürlich etwas andere Ausdrücke für die Impuls- und Energieerhaltung. Diese Darstellung wird im übrigen gerne bei der Behandlung von Polarisierungseffekten verwendet (Siehe z.B. [Bon80]).

wobei die Größen

$$\gamma_\alpha^2 = -2m_x \epsilon_\alpha / \hbar^2 \quad \text{und} \quad \gamma_\beta^2 = -2m_x \epsilon_\beta / \hbar^2 \quad (4.7)$$

durch die Einteilchenenergien festgelegt sind. Durch Verwendung von komplexen (!) Winkeln, θ_α und θ_β , können dann die komplexen Impulsvektoren

$$\vec{p}_\alpha = i\gamma_\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta_\alpha \\ \cos \theta_\alpha \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

und

$$\vec{p}_\beta = i\gamma_\beta \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta_\beta \\ \cos \theta_\beta \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

festgelegt werden. Die trigonometrischen Funktionen sind durch $\cos \theta_\nu = -ik_\nu / \gamma_\nu$ sowie $\sin \theta_\nu = \eta / \gamma_\nu$ ($\nu = \{\alpha, \beta\}$) gegeben². Die beiden Bedingungen (4.1) und (4.2) ergeben sich auch aus einem semiklassischen Modell für die Transferamplitude $T_{\beta\alpha}$ bzw. Transferwahrscheinlichkeit $P_{\beta\alpha}$, die bereits von Broglia und Winther [BrW81] aufgestellt wurden.

In zeitabhängiger Störungstheorie kann die Transferamplitude $T_{\beta\alpha}$ zwischen dem Anfangszustand α und dem Endzustand β [BBM87] wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha} &= \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \psi_\beta(t) | \hat{V}^\alpha(t) | \psi_\alpha(t) \rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \psi_\beta(t) | \hat{V}^{\beta\alpha}(t) | \psi_\alpha(t) \rangle, \end{aligned} \quad (4.10)$$

wobei die Matrixelemente zerlegt werden können und in den beiden Halbräumen H_α und H_β (Siehe Figur A) ausgewertet werden können:

$$\begin{aligned} \langle \psi_\beta(t) | \hat{V}^\alpha(t) | \psi_\alpha(t) \rangle &= \int_{H_\alpha} d^3 r' \psi_\beta^*(\vec{r}', t) V^\alpha(\vec{r}', t) \psi_\alpha(\vec{r}', t) \\ &+ \int_{H_\beta} d^3 r' \psi_\beta^*(\vec{r}', t) V^\alpha(\vec{r}', t) \psi_\alpha(\vec{r}', t). \end{aligned} \quad (4.11)$$

²Durch Verwendung des Realteils $\frac{\pi}{2}$ für θ_ν ergeben sich für den Cosinus rein imaginäre Werte und für den Sinus rein reelle Werte. Diese Definition wurde verwendet, um diese Größen später bei der Darstellung von Kugelflächenfunktionen verwenden zu können.

Dabei sind die V^α bzw. V^β die Einteilchenpotentiale der Einteilchenzustände ψ_α und ψ_β relativ zu Target- oder Projektilrumpf (Siehe Abschnitte 1.2 und 2.6).

Mit Hilfe einer bereits von Oppenheimer [Opp28] 1928 verwendeten Methode, deren Ziel es ist im ersten Term \hat{V}^α durch \hat{V}^β zu ersetzen, zeigten Lo Monaco und Brink [LoB85], daß der obige Ausdruck für periphere Kollisionen (und um solche handelt es sich im Falle von direkten Reaktionen) in ein Oberflächenintegral bezüglich der Reaktionsebene Σ zwischen Projektil und Target umgeformt werden kann (Siehe Figur A). Zu diesem Zweck wird der erste Ausdruck auf der rechten Seite von Gleichung (4.11) unter Verwendung der zeitabhängigen Schrödingergleichung für ψ_β mit dem folgenden Ausdruck

$$\int_{H_\alpha} d^3r' \left(-i\hbar \frac{\partial \psi_\beta(\vec{r}', t)}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m_x} \Delta \psi_\beta(\vec{r}', t) + V^\beta(\vec{r}', t) \psi_\beta(\vec{r}', t) \right)^* \psi_\alpha(\vec{r}', t) \quad (4.12)$$

der natürlich identisch 0 ist, erweitert. Nach Anwendung des Green'schen Satzes und auf Grund der Tatsache, daß ψ_α und ψ_β für $t \rightarrow \pm\infty$ keinen Überlapp haben, kann dann der Ausdruck

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha} = & \frac{\hbar}{2im_x} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\Sigma} d\vec{S}' (\psi_\beta^* \nabla \psi_\alpha - \psi_\alpha \nabla \psi_\beta^*) \\ & + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\int_{H_\alpha} d^3r' \psi_\beta^*(\vec{r}', t) V^\beta(\vec{r}', t) \psi_\alpha(\vec{r}', t) \right. \\ & \left. + \int_{H_\beta} d^3r' \psi_\beta^*(\vec{r}', t) V^\alpha(\vec{r}', t) \psi_\alpha(\vec{r}', t) \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

gewonnen werden. Die Integrationsvariable \vec{r}' ist dabei der Abstandsvektor zum Koordinatenursprung. Dieser Ursprung ist hier der Schwerpunkt von A und x . Im Falle einer peripheren Kollision kann die Reaktionsebene Σ so gewählt werden, daß näherungsweise sowohl $V^\beta(\vec{r}', t) \approx 0$ für alle \vec{r}' innerhalb H_α , als auch $V^\alpha(\vec{r}', t) \approx 0$ für alle \vec{r}' innerhalb H_β gilt. Als Endergebnis erhält man dann den von Lo Monaco und Brink [LoB85] angegebenen Ausdruck:

$$T_{\beta\alpha} = \frac{\hbar}{2im_x} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\Sigma} d\vec{S}' (\psi_\beta^* \nabla \psi_\alpha - \psi_\alpha \nabla \psi_\beta^*) \quad (4.14)$$

Interessanterweise sind sowohl die Ausdrücke (4.13) als auch (4.14) völlig symmetrisch bezüglich des verwendeten Potentials, d. h. äquivalent bezüglich post-prior-Darstellung. Das Oberflächenintegral wurde in [LoB85] näherungsweise ausgewertet:

Die klassische Bahn des Projektils des in Figur A gegebenen Koordinatensystems ist für kleine Streuwinkel und unter der Annahme, daß der Transfer nahe dem Punkt der nächsten Annäherung erfolgt, durch eine klassische Bahn

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} d_\alpha + d_\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 t \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

gegeben. Damit erhält man durch eine Galilei-Transformation der Schrödingergleichung für α , Einteilchenwellenfunktionen mit den Einteilchenenergien ϵ_α bzw. ϵ_β und dem Target im Ursprung:

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(\vec{r}, t) &= \Phi_\alpha(\vec{r} - \vec{s}(t)) \exp\left(-\frac{im_x v_0 r}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(\epsilon_\alpha + \frac{m_x}{2} v_0^2) t\right) \\ \psi_\beta(\vec{r}, t) &= \Phi_\beta(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i\epsilon_\beta t}{\hbar}\right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Die Wellenfunktionen Φ_α und Φ_β sind dann Lösungen zu statischen Potentialen V^α und V^β . Die Zeitvariable t wird durch $z_1 = z - v_0 t$ substituiert und nach Integration erhält man:

$$T_{\beta\alpha} = \frac{i\hbar}{2m_x v_0} \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[\tilde{\Phi}_\beta^*(d_\beta, y, k_\beta) \frac{\partial}{\partial d_\alpha} \tilde{\Phi}_\alpha(d_\alpha, y, k_\alpha) - \tilde{\Phi}_\alpha(d_\alpha, y, k_\alpha) \frac{\partial}{\partial d_\beta} \tilde{\Phi}_\beta^*(d_\beta, y, k_\beta) \right]. \quad (4.17)$$

Dabei sind die $\tilde{\Phi}$ die Fouriertransformierten der Wellenfunktionen ψ bezüglich z bzw. z_1 . Eine alternative Darstellung für (4.17) wurde von [BoB88] angegeben. Sie lautet:

$$T_{\beta\alpha} = \frac{i\hbar}{2m_x v_0} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \sqrt{\eta^2 + k_y^2} \bar{\Phi}_\beta^*(d_\beta, k_y, k_\beta) \bar{\Phi}_\alpha(d_\alpha, k_y, k_\alpha). \quad (4.18)$$

Die Größen $\bar{\Phi}$ sind jetzt die doppelten Fouriertransformierten bezüglich y und z der Einteilchenwellenfunktionen. Diese sind Gegenstand der letzten Näherung, die jetzt noch vorgenommen wird. Es wird angenommen, daß die Potentiale V^α und V^β in der Reaktionsebene Σ ausschließlich durch ihren Zentrifugal- bzw. Coulombanteil (falls vorhanden) bestimmt sind. Dann können die Teilchen- bzw. Lochwellenfunktionen Φ_β und Φ_α im Ortsraum durch ihre asymptotischen Ausdrücke ersetzt werden. Exemplarisch erhält man für die Teilchenzustände relativ zum Rumpf A unter

Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung und einer spektroskopischen Amplitude $\mathcal{C}_\beta^{(+)} = \mathcal{C}_{\ell_j}^{(+)\dagger}$ dann den in Kapitel 2 (Gleichungen (2.1) und (2.6) bzw. (2.55) und (2.68)), hergeleiteten Ausdruck:

$$\begin{aligned} \Phi_{A,\ell_j m_j}(\vec{r}, \kappa) &\simeq \mathcal{C}_{\ell_j}^{(+)} \phi_{\ell_j, m_j}(\vec{r}, \kappa) \\ &\sim \frac{1}{2} i N(\kappa) \left[\frac{I_\ell^{(+)}(r, \kappa)}{r} - S_{\ell_j}(\kappa) \frac{O_\ell^{(+)}(r, \kappa)}{r} \right] \mathcal{Y}_{\ell, j}^{m_j}(\Omega) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Die Einteilchenenergie wurde dabei wieder durch die Wellenzahl κ ersetzt. Wie ebenfalls in Kapitel 2 beschrieben, können mit dem allgemeinen Ansatz aus Gleichung (4.19) gebundene und ungebundene Zustände beschrieben werden. Eine analytische Lösung für die Transferamplitude (4.17) bzw. (4.18) kann allerdings nur für den Fall ungeladener Teilchen erhalten werden [LoB85], da nur für Hankelfunktionen und nicht für Coulombfunktionen die jeweilige Fouriertransformierte analytisch bestimmt werden kann. Für den Transfer eines ungeladenen Teilchens in einen gebundenen Zustand mit der Energie $\epsilon = -\hbar^2 \gamma^2 / 2m_x$ ergibt sich, da $N(i\gamma) = 0$ und $\frac{1}{2} N(i\gamma) S_{\ell_j}(i\gamma) = \mathcal{C}_{\ell_j}^{(+)} c_{\ell_j}$ §:

$$\mathcal{C}_{\ell_j}^{(+)} \phi_{\ell_j m_j}(r, \Omega, i\gamma) \simeq \mathcal{C}_{\ell_j}^{(+)} c_{\ell_j} h_\ell^{(+)}(i\gamma r) \mathcal{Y}_{\ell, j}^{m_j}(\Omega), \quad (4.20)$$

wobei die Einteilchenwellenfunktion $\phi_{\ell_j m_j}(r, \Omega, i\gamma)$ im Ortsraum auf Eins normiert ist und damit die Größe c_{ℓ_j} explizit durch die Anschlußbedingung

$$c_{\ell_j} = \frac{u_{\ell_j}(R_0)}{i\gamma R_0 h_\ell^{(+)}(i\gamma R_0)} \quad (4.21)$$

der radialen Wellenfunktionen $u_{\ell_j}(R_0)$ für einen Radius R_0 außerhalb der Reichweite des Potentials erhalten werden kann. Nimmt man an, daß die Potentiale bereits in der Reaktionsebene Σ vernachlässigbare Werte angenommen haben, so können für R_0 die Werte d_α bzw. d_β eingesetzt werden. Ähnlich einer exakten Rechnung erfolgt im übrigen auch in diesem semiklassischen Ansatz eine Trennung zwischen Dynamik und Kernstruktur. Kernstruktureigenschaften sind wieder in der spektroskopischen Amplitude $\mathcal{C}_{\ell_j}^{(+)}$ enthalten.

Für die ungebundenen Teilchenzustände mit der Einteilchenenergie $\epsilon = \hbar^2 k_f^2 / 2m_x$ erhält man wieder den gesamten Ausdruck (4.19) und speziell für ungeladene Teilchen x [BoB88] (siehe auch die Gleichungen (2.5), (2.6) und (2.7):

†Die Indizierung mit β wird zur Vereinfachung auf dieser und der folgenden Seite unterdrückt
 §Entspricht einem Pol in der S-Matrix S_{ℓ_j} für $\kappa = i\gamma$ (Siehe auch Kapitel 2 und [BZP69])

$$\phi_{\ell j m_j}(r, \Omega, k_f) \simeq \frac{1}{2} N(k_f) (i k_f) \left[h_{\ell}^{(-)}(k_f r) + S_{\ell j} h_{\ell}^{(+)}(k_f r) \right] \mathcal{Y}_{\ell, j}^{m_j}(\Omega). \quad (4.22)$$

Die Ausdrücke (4.21) und (4.22) für die asymptotische Wellenfunktion lassen sich analytisch bezüglich der Koordinaten y und z ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) fouriertransformieren [LoB85], [BPB85]. Da die doppelten Fouriertransformationen von $h^{(+)}(\kappa r)/r$ und $h^{(-)}(\kappa r)/r$ bis auf ein Vorzeichen identisch sind, können die jeweiligen Vorfaktoren der Wellenfunktionen des ungebundenen Zustands zusammengefaßt werden [BoB88]. Damit erhält man dann für ungebundene Zustände eine wie folgt festgelegte "spektroskopische Amplitude":

$$\mathcal{C}_{\ell j}^{(+)}(k_f) = \frac{(1 - S_{\ell j}(k_f))}{2} \quad (4.23)$$

Eine derartige Größe ist bereits in Kapitel 2, Absatz 2.6 diskutiert worden. Es ist die spektroskopische Amplitude, die bei ausschließlicher Berücksichtigung der "gestreuten" Anteile der Wellenfunktion erhalten werden. Anscheinend werden die "ungestreuten" Anteile bzw. die Interferenzterme bei diesem Ansatz herausgemittelt. Setzt man die doppelten Fouriertransformierten in (4.18) ein, so erhält man explizit und unter Verwendung von Clebsch-Gordan-Koeffizienten den allgemeinen Ausdruck ($T_{\beta\alpha} = T(j_{\beta} m_{\beta}, j_{\alpha} m_{\alpha})$):

$$\begin{aligned} T(j_{\beta} m_{\beta}, j_{\alpha} m_{\alpha}) = & -4\pi \frac{\hbar}{m_x v_0} \mathcal{C}_{\alpha}^{(-)} c_{\alpha} \mathcal{C}_{\beta}^{(+)} c_{\beta} \\ & \sum_{\lambda_{\alpha}, \lambda_{\beta}} [\langle j_{\beta} m_{\beta} | \ell_{\beta} \lambda_{\beta} s m_s \rangle \langle j_{\alpha} m_{\alpha} | \ell_{\alpha} \lambda_{\alpha} s m_s \rangle \\ & K_{\lambda_{\alpha} - \lambda_{\beta}}(\eta(d_{\alpha} + d_{\beta})) Y_{\ell_{\alpha} \lambda_{\alpha}}(\theta_{\alpha}, 0) Y_{\ell_{\beta} \lambda_{\beta}}^*(\theta_{\beta}, 0)]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

$K_{\nu}(\eta R)$ bezeichnet hier eine modifizierte Besselfunktion [AbS70]³, die asymptotisch exponentiell abfällt:

$$K_{\nu}(\eta R) = \sqrt{\frac{\pi}{2\eta R}} \exp(-\eta R) \quad (4.25)$$

Im Ausdruck (4.24) für die Transferamplitude sind die wesentlichen Größen einer Transferreaktion enthalten: Die Einteilchenenergien relativ zum jeweiligen Rumpf

³Zur Abkürzung wurde hier $\nu = \lambda_{\alpha} - \lambda_{\beta}$ und $R = d_{\alpha} + d_{\beta}$ gesetzt.

(implizit über die Größen η , θ_α und θ_β), die Laborenergie (via v_0), die Spins bzw Bahndrehimpulse und die Größe der beteiligten Kerne. Der obige Ausdruck ist analytisch zudem wesentlich transparenter als etwa die Transferamplitude aus einer DWBA-Rechnung. Aus $T_{\beta\alpha}$ kann nun sofort die Einteilchentransferwahrscheinlichkeit pro Energie für ungebundene Zustände formuliert werden. Mittelt man über m_α und summiert man über m_β , so ergibt sich:

$$\frac{dP(j_\beta, j_\alpha)}{d\epsilon_\beta} = \frac{1}{2j_\alpha + 1} \sum_{m_\alpha, m_\beta} |T(j_\beta m_\beta, j_\alpha m_\alpha)|^2. \quad (4.26)$$

Der Ausdruck (4.26) gilt für den Fall, daß die Rumpfstände b und A 0^+ -Zustände sind. Koppelt man die Amplitude $T(j_\beta m_\beta, j_\alpha m_\alpha)$ an die Gesamtspins I_a und I_B der Zustände $a = b + x$ und $B = A + x$ und erfolgt eine Summation über die z-Projektion der Endzustände sowie eine Mittelung über die Anfangszustände, so ergibt sich als Endresultat [BBM87]:

$$\frac{dP(I_a, I_A \rightarrow I_b, I_B)}{d\epsilon_\beta} = \frac{dP_{\beta\alpha}}{d\epsilon_\beta} = \frac{(2I_B + 1)}{(2I_A + 1)(2j_\beta + 1)} \frac{dP(j_\beta, j_\alpha)}{d\epsilon_\beta}. \quad (4.27)$$

Aus der Transferwahrscheinlichkeit läßt sich dann in einem semiklassischen Ansatz der doppelt differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d^2\sigma_{\beta\alpha}}{d\epsilon_\beta d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{class} \frac{dP_{\beta\alpha}}{d\epsilon_\beta} P_{el} \quad (4.28)$$

gewinnen [BBM87]. Die elastische Streuwahrscheinlichkeit P_{el} kann in Abhängigkeit des Stoßparameters b über die Partialwellenstreuamplitude S_L angegeben werden ($P_{el} = |S_L(b)|^2$). Dabei hängen der Stoßparameter b und der Gesamtdrehimpuls L über die semiklassische Formel $kb = L + \frac{1}{2}$ zusammen. Insgesamt erhält man in Abhängigkeit von b den Ausdruck:

$$\frac{d^2\sigma_{\beta\alpha}}{d\epsilon_\beta d\Omega} = \frac{b}{\sin(\vartheta)} \left| \frac{db}{d\vartheta} \right| \frac{dP_{\beta\alpha}}{d\epsilon_\beta} |S_L(b)|^2. \quad (4.29)$$

Durch Integration über ϑ und b ergibt sich der Gesamtwirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma_{\beta\alpha}}{d\epsilon_\beta}$ in Abhängigkeit von ϵ_β zu:

$$\frac{d\sigma_{\beta\alpha}}{d\epsilon_\beta} = 2\pi \int_0^\infty db b \frac{dP_{\beta\alpha}(b)}{d\epsilon_\beta} |S_L(b)|^2. \quad (4.30)$$

Dieses Integral kann auch als Integral über die nächste Annäherung (“distance of closest approach“) R geschrieben werden. Mit $b^2 = R^2 - 2Ra_c$ (Dabei ist a_c der Coulomb Parameter [Boc79]) läßt sich der Wirkungsquerschnitt wie folgt schreiben:

$$\frac{d\sigma_{\beta\alpha}}{d\epsilon_\beta} = 2\pi \int_0^\infty dR (R - a_c) \frac{dP_{\beta\alpha}(R)}{d\epsilon_\beta} |S_L(R)|^2. \quad (4.31)$$

Die Ausdrücke (4.28) bis (4.31) sind bei bekanntem S_L problemlos zu berechnen. Wenn man nur an Abschätzungen interessiert ist, führen weitere Näherungen schon zu einem aussagekräftigen Ergebnis. Dafür erweist sich insbesondere Gleichung (4.31) als geeigneter Ausgangspunkt. Ab einem bestimmten Abstand R_s zwischen den Reaktanden dominieren Compoundprozesse und der Beitrag zu einem direkten Reaktionsmechanismus wird stark unterdrückt. Es genügt daher, das Integral ab diesem Absorptionsradius R_s zu berechnen. Stellt man außerdem die modifizierte Besselfunktion $K_\nu(\eta R)$ durch ihre asymptotische Form dar, so kann das Integral (4.31) mit der sogenannten ”Sharp-cut-off“-Näherung, d.h. $P_{el}(R) = 1$ für $R > R_s$ und $P_{el}(R) = 0$ für $R < R_s$), direkt ausgewertet werden. In bestimmter Ordnung ist das Integral durch den Ausdruck

$$\frac{d\sigma_{\beta\alpha}}{d\epsilon_\beta} = \left(\frac{\pi}{\eta}\right) (R_s - a_c) \frac{dP_{\beta\alpha}(R_s)}{d\epsilon_\beta} \quad (4.32)$$

gegeben. Es zeigt sich, daß dieser Ausdruck für Abschätzungen meist ausreichend ist. Bei genauerer Rechnung sollte berücksichtigt werden, daß P_{el} nicht konstant ist. Es zeigt sich die bekannte L bzw. R -Abhängigkeit [Sat80]. Die ”Sharp-cut-off“-Näherung kann durch die Wahl einer realistischeren R -Abhängigkeit von $P_{el}(R)$ verbessert werden. Eine sinnvolle Parametrisierung ist dabei

$$P_{el}(R) = \exp \{ -\ln(2) \exp[(R_s - R)/a] \}. \quad (4.33)$$

Hier ist a ein Diffusivitätsparameter und R_s der Absorptionsradius für den $P_{el}(R_s) = 1/2$ ist. Wird der Ausdruck (4.33) in das Integral (4.31) eingesetzt und ist $\exp(R_s/a) \gg 1$ so kann das Integral dann durch den Ausdruck

$$\Gamma(2\eta a + 1) (\ln 2)^{-2\eta a} \quad (4.34)$$

mit einer Gammafunktion angegeben werden. Um die Größen (4.29) bis (4.32) mit

dem Experiment vergleichen zu können, müssen sie mit einer Faltungsfunktion, üblicherweise einer Lorentzfunktion, gefaltet werden. Bei Verwendung der experimentellen Auflösung als Breite erhält man dann einen energiemittelten Wirkungsquerschnitt.

Wie bereits erwähnt wurde, wird obige analytische Lösung nur im Falle ungeladener Transferteilchen erhalten. Durch die Verwendung von effektiven Bindungsenergien $\bar{\epsilon}_\alpha$ oder $\bar{\epsilon}_\beta$ und effektiven Q -Werten Q_{eff} können die obigen Formeln allerdings auch für den Transfer geladener Teilchen verwendet werden [BoB88]. Diese effektiven Größen $\bar{\epsilon}_\alpha$ und Q_{eff} sind wie folgt definiert:

$$\bar{\epsilon}_\alpha = \epsilon_\alpha - \frac{Z_b Z_x e^2}{d_\alpha} \quad \text{und} \quad Q_{eff} = \bar{\epsilon}_\alpha - \bar{\epsilon}_\beta \quad (4.35)$$

Die Z_b und Z_x bezeichnen dabei die Ladungszahlen des Rumpfes und des transferierten Teilchens.

Bei diesem Ansatz werden ungebundene Protonenzustände im Bereich der Teilchenaufbruchschwelle allerdings durch gebundene Neutronenzustände beschrieben. Es ist daher wichtig, daß stetiger Übergang vom Regime der gebundenen Zustände in das der ungebundenen Zustände besteht. Dieser ist dann gegeben, wenn die ungebundenen Neutronenzustände bzw. die zugehörigen Übergangsamplituden $T_{\beta\alpha}$ mit der Wurzel der Einteilchenbreite und dem Faktor $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ multipliziert werden. Wie im Kapitel 2 gezeigt, entspricht dies einer Ortsraumnormierung auf 1. Um den numerischen Rechenaufwand gering zu halten, wurden in dieser Arbeit die Normierungskonstanten c_α für die gebundenen Zustände (entsprechend c_β) durch den Ausdruck

$$c_\alpha = \frac{2}{d_\alpha} \sqrt{\frac{1}{\gamma_\alpha \pi}} \frac{1}{\sqrt{\left(\partial_{(\gamma_\alpha d_\alpha)} K_{\ell_\alpha+1/2}(\gamma_\alpha d_\alpha)\right)^2 - \frac{(\ell_\alpha+1/2)^2}{\gamma_\alpha^2 d_\alpha^2} K_{\ell_\alpha+1/2}(\gamma_\alpha d_\alpha)^2}} \quad (4.36)$$

mit den Witterakerfunktionen $K_\nu(\gamma, d)$ festgelegt. Er ergibt sich wie in [LaL88] beschrieben, für schwach gebundene Zustände eines Rechteckpotentials in der Nähe der Teilchenaufbruchschwelle. Für die Einteilchenbreiten der ungebundenen Zustände kann näherungsweise eine Einteilchenbreite $\Gamma_{\nu;\ell_\beta}^0$ für ein Potential mit konstanter Potentialtiefe (Rechteckpotential) für Neutronen

$$\Gamma_{\nu;\ell_\beta}^0 \approx \frac{2\hbar^2}{m_x d_\beta} k_f \frac{1}{I_{\ell_\beta}^{(+)}(d_\beta, k_f) O_{\ell_\beta}^{(+)}(d_\beta, k_f)} \frac{2\ell_\beta - 1}{2\ell_\beta + 1} \quad (4.37)$$

aus [BoM69] verwendet werden. Die beiden Darstellungen (4.36) und (4.37) haben den Vorteil, daß außer den Größen d_α bzw. d_β und den zugehörigen Bahndrehimpulsen ℓ_α und ℓ_β keine weiteren Parameter eingehen. Nachteilig ist allerdings, daß

beide Größen für ein Rechteckpotential bestimmt werden und daher nur die selbe Größenordnung wie die entsprechenden realistischen Größen zu einem Woods-Saxon-Potential haben. Dafür kann, wie später (Abbildungen 4.7 und 4.8) gezeigt wird, die Stetigkeit der Übergang für $\epsilon^\pm \rightarrow 0$ für alle $\ell \neq 0$ mit diesem Ansatz nachgewiesen werden. S-Neutronenzustände zeigen an der Schwelle allerdings eine Unstetigkeit. Dies wurde bereits 1985 von Huby erwähnt [Hub85], bei Bonaccorso et al. bleibt diese Tatsache allerdings unerwähnt. Für Streuzustände, deren Energie größer ist als die Zentrifugal- und Coulombbarriere, ist die Angabe einer Einteilchenbreite nur dann sinnvoll wenn zu dem zugehörigen Potential auch ein gebundener Zustand existiert. Nur dann ist im Streuquerschnitt auch für höhere Einteilchenenergien eine typische Resonanzstruktur aus der eine Einteilchenbreite bestimmt werden kann, zu sehen. Beispiele hierfür sind die Protonenstreuzustände an ^{12}C und ^{40}Ca (spätere Abbildungen 4.4, 4.5 sowie 4.6.) Für diese Streuzustände können sinnvolle Einteilchenbreiten angegeben werden, da der Streuphasenwinkel $\delta_{\ell_\beta j_\beta}$ den Wert $\pi/2$ durchläuft und für höhere Energien gegen π geht. Dieses Verhalten ist mit dem sogenannten Levinson-Theorem zu erklären [LaL88].

4.2 Physikalische Interpretationen und Folgerungen

Bisher beschränkte sich die Beschreibung des semiklassischen Modells auf die Herleitung der Transferamplitude (4.24) bzw. der Transferwahrscheinlichkeit (4.26) und des Wirkungsquerschnitts (4.32). In diesem Abschnitt sollen einige physikalische Interpretationen und Folgerungen diskutiert werden (Siehe auch [LoB85]).

Man betrachte dazu einen Summanden der Transferamplitude $T_{\beta\alpha}$ (4.24) bzw. dessen Umformung:

$$\begin{aligned}
t_{\beta\alpha}(\lambda_\alpha, \lambda_\beta) &= -\pi \frac{\hbar}{m_x v_0} 2\mathcal{C}_\alpha^{(-)} c_\alpha \mathcal{C}_\beta^{(+)} c_\beta [\langle j_\beta m_\beta | \ell_\beta \lambda_\beta s m_s \rangle \langle j_\alpha m_\alpha | \ell_\alpha \lambda_\alpha s m_s \rangle \\
&\quad K_{\lambda_\alpha - \lambda_\beta}(\eta(d_\alpha + d_\beta)) Y_{\ell_\alpha \lambda_\alpha}(\theta_\alpha, 0) Y_{\ell_\beta \lambda_\beta}^*(\theta_\beta, 0)] \\
&= -\left[\pi \frac{\hbar}{m_x v_0} \right] F(\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \eta(d_\alpha + d_\beta)) * \\
&\quad \left[2\mathcal{C}_\alpha^{(-)} c_\alpha \langle j_\alpha m_\alpha | \ell_\alpha \lambda_\alpha s m_s \rangle K_{\lambda_\alpha}(\eta d_\alpha) Y_{\ell_\alpha \lambda_\alpha}(\theta_\alpha, 0) \right] * \\
&\quad \left[2\mathcal{C}_\beta^{(+)} c_\beta \langle j_\beta m_\beta | \ell_\beta \lambda_\beta s m_s \rangle K_{\lambda_\beta}(\eta d_\beta) Y_{\ell_\beta \lambda_\beta}^*(\theta_\beta, 0) \right]. \tag{4.38}
\end{aligned}$$

Die Umformung besteht im wesentlichen aus drei Faktoren. Der erste Faktor ist ein Gewichtungsfaktor

$$F(\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \eta(d_\alpha + d_\beta)) = \left[\frac{K_{\lambda_\alpha - \lambda_\beta}(\eta(d_\alpha + d_\beta))}{K_{\lambda_\alpha}(\eta d_\alpha) K_{\lambda_\beta}(\eta d_\beta)} \right] \quad (4.39)$$

für den Übergang eines Zustandes mit magnetischer Quantenzahl λ_α in einen Zustand mit magnetischer Quantenzahl λ_β . Der zweite Faktor ist im wesentlichen die Komponente der Fouriertransformierten der Wellenfunktion $\tilde{\Phi}(d_\alpha, 0, k_\alpha)$ mit der magnetischen Quantenzahl λ_α und der dritte Faktor ist die Komponente der konjugiert komplexen Fouriertransformation $\tilde{\Phi}^*(d_\beta, 0, k_\beta)$ mit der magnetischen Quantenzahl λ_β . Das Quadrat dieser Faktoren beschreibt die Wahrscheinlichkeitsdichte des Anfangs- und Endzustands in der Reaktionsebene Σ mit den Impulsen $\hbar k_\alpha$ bzw. $\hbar k_\beta$ in z-Richtung. Aus dem Gewichtsfaktor $F(\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \eta(d_\alpha + d_\beta))$ kann die Anschlußbedingung für den Drehimpuls abgeleitet werden. Für große Argumente der Besselfunktion $K_\nu(w)$ (mit kleinem ν) gilt näherungsweise der Ausdruck (eine Ordnung höher als in (4.25)):

$$K_\nu(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2w}} \exp(-w + \frac{1}{2}\nu^2/w) \quad (4.40)$$

Man erhält dann für $F(\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \eta(d_\alpha + d_\beta))$ den Ausdruck:

$$\begin{aligned} F(\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \eta(d_\alpha + d_\beta)) &\approx \left[\frac{2\eta d_\alpha d_\beta}{\pi(d_\alpha + d_\beta)} \right]^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)^2}{2\eta(d_\alpha + d_\beta)} - \frac{\lambda_\alpha^2}{2\eta d_\alpha} - \frac{\lambda_\beta^2}{2\eta d_\beta} \right) \\ &= \left[\frac{2\eta d_\alpha d_\beta}{\pi(d_\alpha + d_\beta)} \right]^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{d_\alpha d_\beta}{2\eta(d_\alpha + d_\beta)} \left(\frac{\lambda_\alpha}{d_\alpha} + \frac{\lambda_\beta}{d_\beta} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Damit ist der Gewichtsfaktor genau dann groß wenn

$$\frac{\lambda_\alpha}{d_\alpha} \approx -\frac{\lambda_\beta}{d_\beta} \quad (4.42)$$

gilt. Da außerdem gilt

$$\lambda_\alpha \approx k_{\alpha y} d_\alpha \quad \text{und} \quad \lambda_\beta \approx -k_{\beta y} d_\beta, \quad (4.43)$$

sind für kleine Laborenergien die klassischen Anschlußbedingungen bestätigt.

Eine weitere interessante Folgerung erhält man aus der Beziehung zwischen der Größe η und den Bindungsenergien (siehe Gleichung (4.6)). Schreibt man η^2 als Funktion der variablen Bindungsenergie ϵ_β bei fester Bindungsenergie ϵ_α und fester Laborenergie $\epsilon_{lab} = \frac{m_x v_0^2}{2}$ des transferierten Teilchens, also

$$\eta^2(\epsilon_\beta) = -\left(\frac{m_x}{\hbar^2}\right) \left[(\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta) - \frac{1}{2} \left[\frac{(\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta)^2}{\epsilon_{lab}} + \epsilon_{lab} \right] \right], \quad (4.44)$$

so erhält man ein Maximum in der Transferamplitude auf Grund des exponentiellen Abfalls von $K_\nu(\eta R)$ näherungsweise für ein Minimum von η bzw. η^2 . Differenzieren von Gleichung (4.44) ergibt dann den Wert $\epsilon_\beta = \epsilon_{lab} + \epsilon_\alpha$ für minimales η . Dieses ϵ_{lab} wird im Falle von Transferreaktionen geladener Teilchen mit einem Coulombkorrekturterm versehen (Siehe Gleichung (4.35)). Damit ergibt sich der bekannte Ausdruck für den optimalen Q -Wert:

$$|Q_{opt}| = |\epsilon_\beta - \epsilon_\alpha| = \frac{1}{2} m_x v_0^2 - V_{coul} = \epsilon_{lab} - V_{coul} \quad (4.45)$$

Die daraus resultierende Eigenschaft, daß bei großen Einschußenergien ein Transfer bevorzugt in schwachgebundene bzw. ungebundene Zustände erfolgt, wurde bereits von v. Oerzen [Oer85] besonders schön beschrieben. V. Oerzen illustrierte diese Eigenschaft damit, daß es unmöglich ist von einem schnell fahrenden TGV (train à grande vitesse) auf einen entgegenkommenden Zug zu springen, ohne daß man davor oder danach in die entgegengesetzte Richtung läuft. Für die Transferamplitude $T_{\beta\alpha}$ muß aber dieser optimale Q -Wert nicht unbedingt ein Maximum liefern, denn $T_{\beta\alpha}$ hängt auch wesentlich von den spektroskopischen Amplituden $\mathcal{C}_\alpha^{(-)}$ und $\mathcal{C}_\beta^{(+)}$ ab. In diesen Größen sind mikroskopische Eigenschaften der Reaktion enthalten. Ist z. B. beim optimalen Q -Wert ein Einteilchenzustand bzw. eine wesentliche Komponente davon zu finden, so wird für diesen Zustand eine große Transferamplitude zu erwarten sein. Wie bereits im letzten Abschnitt beschrieben, enthält die spektroskopische Amplitude im Falle ungebundener Einteilchenzustände den Sinus des Streuphasenwinkels δ_{ℓ_j} für elastische Streuung am Kernpotential. Diese Größe kann für bestimmte Spins und Energien, die kleiner als die Coulomb- bzw. Zentrifugalbarriere sind, resonante Strukturen zeigen (Siehe hierzu die Abbildungen 4.4, 4.5 und 4.6). Bei Verwendung eines realistischen Einteilchenpotentials (z.B. energieabhängige Einteilchenpotentiale), bzw. bei Berücksichtigung von Rumpfanregungen wie im letzten Kapitel beschrieben, werden also die Resonanzen signifikant zum Transfer beitragen deren Einteilchenenergien ϵ_β die Gleichung (4.45) möglichst gut erfüllen.

Ein weiterer wichtiger Aspekt bei der Untersuchung von Transferreaktionen ist auch die Selektivität von bestimmten Spin- bzw. Drehimpulsübergängen in Abhängigkeit der Einschußenergie bzw. des Q -Werts. Wie bereits auch von v. Oerzen gezeigt wurde [Oer85], sind für große Laborenergien die Übergänge mit gleichem Spin-Bahn-Kopplungsschema $j_\alpha = \ell_\alpha \pm \frac{1}{2} \rightarrow j_\beta = \ell_\beta \pm \frac{1}{2}$ bevorzugt, während für kleine

Laborenergien die Übergänge mit dem jeweils entgegengesetzten Kopplungsschema $j_\alpha = l_\alpha \pm \frac{1}{2} \rightarrow j_\beta = l_\beta \mp \frac{1}{2}$ wichtiger sind. Diese Aussage ist so nur bedingt richtig. Eigentlich hängt die Bevorzugung eines Übergangs von der Größe des Q -Wertes ab. Für Q -Werte $< Q_{opt}$ ist das Übergangsschema $j_\alpha = l_\alpha \pm \frac{1}{2} \rightarrow j_\beta = l_\beta \pm \frac{1}{2}$ bevorzugt, während für Q -Werte $> Q_{opt}$ das Übergangsschema $j_\alpha = l_\alpha \pm \frac{1}{2} \rightarrow j_\beta = l_\beta \mp \frac{1}{2}$ wichtiger ist. Tatsächlich kann diese Behauptung mit Hilfe des Ausdrucks für die Transferwahrscheinlichkeit bestätigt werden. Mit Hilfe von Drehimpulsalgebra [BBM87], läßt sich die Transferwahrscheinlichkeit $\frac{dP(j_\beta, j_\alpha)}{d\epsilon_\beta}$ wie folgt schreiben:

$$\frac{dP(j_\beta, j_\alpha)}{d\epsilon_\beta} = (2j_\beta + 1)(-)^{(j_\alpha + j_\beta + 2s)} \sum_J (-)^J \left\{ \begin{matrix} s & s & J \\ l_\alpha & l_\alpha & j_\alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} s & s & J \\ l_\beta & l_\beta & j_\beta \end{matrix} \right\} F_J, \quad (4.46)$$

wobei

$$F_J = (2J + 1) \sum_{\ell=|l_\alpha - l_\beta|}^{l_\alpha + l_\beta} (-1)^\ell \left\{ \begin{matrix} l_\alpha & l_\beta & \ell \\ l_\beta & l_\alpha & J \end{matrix} \right\} [T(l_\alpha, l_\beta; \ell, \lambda)]^2 \quad (4.47)$$

und

$$T(l_\alpha, l_\beta; \ell, \lambda) = -4\pi \frac{\hbar}{m_x v_0} c_\alpha^{(-)} c_\alpha c_\beta^{(+)} c_\beta^* \sum_{\lambda_\alpha, \lambda_\beta} (-)^{\ell_\alpha - \lambda_\alpha} \langle l_\beta \lambda_\beta l_\alpha - \lambda_\alpha | \ell \lambda \rangle [K_{\lambda_\alpha - \lambda_\beta}(\eta(d_\alpha + d_\beta)) Y_{l_\alpha \lambda_\alpha}(\theta_\alpha, 0) Y_{l_\beta \lambda_\beta}^*(\theta_\beta, 0)]. \quad (4.48)$$

Auf Grund der Auswahlregeln für die 6-j-Symbole erfolgt die Summation für Nukleonttransfer ($s = \frac{1}{2}$) in Gleichung (4.46) nur über $J = 0$ und $J = 1$. Faßt man diese beiden Summanden zu einem Faktor zusammen, so kann die Gleichung (4.46) auch als Produkt einer Bahndrehimpulsübergangswahrscheinlichkeit

$$\frac{dP(l_\beta, l_\alpha)}{d\epsilon_\beta} = \frac{1}{2l_\alpha + 1} \sum_{\ell, \lambda} |T(l_\alpha, l_\beta; \ell, \lambda)|^2 \quad (4.49)$$

und einem energieabhängigen Faktor $F(\ell \rightarrow j)$, der im wesentlichen von der Geometrie abhängt, ausgedrückt werden. Der Vorteil ist, daß $\frac{dP(l_\beta, l_\alpha)}{d\epsilon_\beta}$, abgesehen von den spektroskopischen Amplituden, nicht von der Spin-Bahnkopplung des jeweiligen

Zustandes abhängt. Diese Abhängigkeit ist vorrangig im Faktor $F(\ell \rightarrow j)$ enthalten. Explizit ergibt sich:

$$\frac{dP(j_\beta, j_\alpha)}{d\epsilon_\beta} = F(\ell \rightarrow j) \frac{dP(\ell_\beta, \ell_\alpha)}{d\epsilon_\beta} \quad (4.50)$$

mit dem Faktor

$$F(\ell \rightarrow j) = \frac{1}{2} \frac{2j_\beta + 1}{2\ell_\beta + 1} \left[1 - D_{j_\alpha} D_{j_\beta} R(E_{lab}, \epsilon_\alpha, \epsilon_\beta) \right]. \quad (4.51)$$

$F(\ell \rightarrow j)$ enthält die geometrischen Größen D_{j_i} , die die Quotienten der beiden 6-j Symbole $\left\{ \begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \ell_i & \ell_i & j_i \end{smallmatrix} \right\}$ und $\left\{ \begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \ell_i & \ell_i & j_i \end{smallmatrix} \right\}$ sind [Edm57]. Sie ergeben sich zu:

$$D_{j_i} = \frac{\left\{ \begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \ell_i & \ell_i & j_i \end{smallmatrix} \right\}}{\left\{ \begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \ell_i & \ell_i & j_i \end{smallmatrix} \right\}} = (-)^{\ell_i + j_i - \frac{1}{2}} \left[\frac{2\ell_i + \frac{1}{2} - j_i}{3(j_i + \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.52)$$

Der zweite Faktor $R(E_{lab}, \epsilon_\alpha, \epsilon_\beta)$ hängt von den Einteilchenenergien $\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta$ des transferierten Teilchens bzw. von der Laborenergie ab und bestimmt daher für welche Werte welche Übergänge bevorzugt sind. Ausgeschrieben ist $R(E_{lab}, \epsilon_\alpha, \epsilon_\beta)$ von der Form:

$$R(E_{lab}, \epsilon_\alpha, \epsilon_\beta) = \frac{3}{2} [\ell_\alpha(\ell_\alpha + 1)\ell_\beta(\ell_\beta + 1)]^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sum_\ell \ell(\ell + 1) [\sum_\lambda |T(\ell_\alpha, \ell_\beta; \ell, \lambda)|^2]}{\sum_\ell [\sum_\lambda |T(\ell_\alpha, \ell_\beta; \ell, \lambda)|^2]} - \ell_\alpha(\ell_\alpha + 1) - \ell_\beta(\ell_\beta + 1) \right). \quad (4.53)$$

Die besprochenen Größen werden im folgenden für die Protonen- und Neutronentransfers $^{40}\text{Ca}(^{13}\text{C}, ^{12}\text{B})^{41}\text{Sc}^*$, $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, ^{11}\text{B})^{13}\text{N}^*$ sowie $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, ^{11}\text{C})^{13}\text{C}^*$, die in den Kapiteln 5 und 6 im Vergleich mit dem Experiment diskutiert werden, illustriert. In den Abbildungen 4.1, 4.2 und 4.3 werden die Geometriefaktoren $[1 - D_{j_\alpha} D_{j_\beta} R(E = (E_{lab}, \epsilon_\alpha, \epsilon_\beta))]$, also die Größen aus Gleichung (4.51) ohne den Vorfaktor, in Abhängigkeit der Einteilchenenergie ϵ_β des ungebundenen Zustands exemplarisch für die Protonentransferreaktionen $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, ^{11}\text{B})^{13}\text{N}^*$ bei einer Laborenergie von $E_{lab} = 344.5$ MeV sowie $^{40}\text{Ca}(^{13}\text{C}, ^{12}\text{B})^{41}\text{Sc}^*$ bei $E_{lab} = 650$ MeV gezeigt.

Die auf Seite 103 beschriebene Selektivität von bestimmten Spin- bzw. Drehimpulsübergängen wird hier deutlich. Die verschiedenen Kurven haben außerdem für $\epsilon_\beta = \epsilon_{lab} + \epsilon_\alpha$, also in der Nähe des optimalen Q-Werts Q_{opt} , näherungsweise den Wert Eins. (Da die ϵ_α für die $p_{1/2}$ und $p_{3/2}$ -Lochzustände im ^{12}C unterschiedlich sind, ist dieser "Schnittpunkt" um die Differenz der Bindungsenergien verschoben.) Unterhalb bzw. oberhalb dieses Schnittpunkts sind bestimmte Spin-Bahn-Kopplungsschemata bevorzugt. In der Nähe des Schnittpunkts sind die Übergänge gleichbedeutend. Über den gesamten, betrachteten Energiebereich zeigen die Geometriefaktoren ein streng monotonen Steigungsverhalten, d. h. zunehmende oder abnehmende Bedeutung des jeweiligen Transfers.

Als nächstes sollen die Bahndrehimpulsübergangswahrscheinlichkeiten $\frac{dP(\ell_\beta, \ell_\alpha)}{d\epsilon_\beta}$ aus Gleichung (4.49) näher untersucht werden. Um den Einfluß der Kernstruktureigenschaften zunächst zu eliminieren, wird diese Größe durch den spektroskopischen Faktor $\mathcal{C}_{\ell_\beta j_\beta}^{(+)}(\epsilon_\beta)^2$ dividiert. Außerdem wird der Kontinuumsanteil mit der zugehörigen Einteilchenbreite $\Gamma_{\nu; \ell_\beta}^0$ aus Gleichung (4.37) multipliziert, um einen stetigen Übergang (für $\ell_\beta \neq 0$) zwischen dem Regime der gebundenen und ungebundenen Zustände zu erlauben. Da die hier betrachteten Protonentransfers bei einer Einteilchenenergie ϵ_β wie in Abschnitt 4.1 auf Seite 100 beschrieben, mit Hilfe von einem Neutronentransfer bei der effektiven Energie $\bar{\epsilon}_\beta$ dargestellt werden (siehe Gleichung (4.35)), ergeben sich bei niedrigen positiven Protonenenergien negative, effektive Neutronenenergien. Man erhält auf diese Weise eine normierte Bahndrehimpulsübergangswahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} p(\ell_\alpha, \ell_\beta)(\bar{\epsilon}_\beta) &= \frac{1}{\mathcal{C}_{\ell_\beta j_\beta}^{(+)}(\bar{\epsilon}_\beta)^2} \frac{dP(\ell_\beta, \ell_\alpha)}{d\bar{\epsilon}_\beta} & \bar{\epsilon}_\beta \leq 0 \\ &= \frac{\Gamma_{\nu; \ell_\beta}^0}{\mathcal{C}_{\ell_\beta j_\beta}^{(+)}(\bar{\epsilon}_\beta)^2} \frac{dP(\ell_\beta, \ell_\alpha)}{d\bar{\epsilon}_\beta} & \bar{\epsilon}_\beta > 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

die in den jeweils oberen Figuren der Abbildungen 4.7 und 4.8, jetzt in Abhängigkeit von ϵ_β , gezeigt ist. Dort sieht man, daß die normierten Übergangswahrscheinlichkeiten tatsächlich stetig vom Bereich negativer effektiver Energien in den Bereich positiver effektiver Energien übergehen. Nur die Übergänge in s-Zustände ($\ell_\beta = 0$) sind, wie bereits erwähnt und beschrieben [Hub85], unstetig. Für effektive Neutronenenergien, die größer als die Zentrifugalbarriere sind, ist die Verwendung der Einteilchenbreiten aus Gleichung (4.37) eigentlich nicht korrekt. Die Ergebnisse aus den ersten Teilbildern dienen daher für Energien oberhalb der jeweiligen Zentrifugalbarriere nur zur Illustration.

Im jeweils zweiten Teilbild der Abbildungen 4.7 und 4.8 sieht man für die Protonenübergänge den Quotienten $\frac{dp(\ell_\beta, \ell_\alpha)}{d\epsilon_\beta}$ aus der normierten Übergangswahrscheinlichkeit $p(\ell_\beta, \ell_\alpha)$ und der Protonen-Einteilchenbreite. Letztere ergibt sich wieder (siehe [BoM69]) für ein Potential mit konstanter Potentialtiefe V_0 und der Reichweite d_β zu

$$\Gamma_{\pi, \ell\beta}^0 \approx \frac{2\hbar^2}{m_x d_\beta} \frac{V_0}{V_0 + V_{\text{coul}}(d_\beta)} \frac{k_f}{I_{\ell\beta}^{(+)}(d_\beta, k_f) O_{\ell\beta}^{(+)}(d_\beta, k_f)} * [1 - ((\ell + \frac{1}{2})^2 + 2k_f d_\beta \eta)^{-1/2}]. \quad (4.55)$$

Die betrachtete Größe $\frac{dp(\ell_\beta, \ell_\alpha)}{d\epsilon_\beta}$ wird also aus der ursprünglichen Größe $\frac{dP(\ell_\beta, \ell_\alpha)}{d\epsilon_\beta}$ durch Dividieren mit dem spektroskopischen Faktor und anschließender Multiplikation mit dem Quotienten aus der Neutronen- und Protonenbreite erhalten, falls die effektive Neutronenenergie größer 0 ist. Da dieser Quotient für größere Einteilchenenergien ϵ_β ungefähr 1 ist, ist die erhaltene Größe $\frac{dp(\ell_\beta, \ell_\alpha)}{d\epsilon_\beta}$ im ganzen Energiebereich sinnvoll. Es zeigt sich, daß die Übergänge in Endzustände mit großem Bahndrehimpuls und kleinen, positiven Energien bevorzugt sind. Auch dies ist eine wohlbekannte Tatsache.

Bildet man jetzt das Produkt aus den drei Größen Geometriefaktor, Transferwahrscheinlichkeit und Sinusquadrat des Streuphasenwinkels, also dem spektroskopischen Faktor für elastischen Transfer ins Kontinuum, so ergeben sich die physikalischen Größen $\frac{dP(j_\beta, j_\alpha)}{d\epsilon_\beta}$ (Gleichung (4.26)) aus den Abbildungen 4.9 bis 4.11. Die Summe über alle Spins liefert die gesamte Transferwahrscheinlichkeit, sowie bei Verwendung von Gleichung (4.32) den differentiellen Wirkungsquerschnitt. Diese Größen sind für die verschiedenen Reaktionen den Abbildungen 4.12 und 4.13 zu entnehmen. Hier sind auch die unterhalb der Teilchenaufbruchschwelle liegenden gebundenen Zustände berücksichtigt.

Der Vorteil einer wie oben durchgeführten Analyse liegt auf der Hand: Prominente Übergänge, die bei Transferreaktionen zu beobachten sind, können zunächst nach folgenden Kriterien aussortiert werden:

- Größe des Bahndrehimpuls des transferierten Teilchens x im Endkanal β .
- Bevorzugtes Kopplungsschema in Abhängigkeit der Bindungsenergien und der Laborenergie.
- Größe der spektroskopischen Amplituden. Näherungsweise auch Lage der Einteilchenzustände.
Insbesondere werden für hohe Einteilchenenergien ϵ_β Zustände mit $j_{\beta>} = \ell_\beta + 1/2$ bevorzugt, da ihre Streuphasen allgemein größer sind als die entsprechenden $j_{\beta<} = \ell_\beta - 1/2$ -Zustände.

Anschließend wird eine mikroskopische Untersuchung durchgeführt. Man erhält also gerade bei Schwerionenreaktionen mit vielen möglichen Übergängen Kriterien dafür, welche Übergänge berücksichtigt bzw. vernachlässigt werden können.

Die Bedeutung von bestimmten Übergängen bei gegebener Energie kann charakterisiert werden nach der Größe der Transferwahrscheinlichkeiten der Bahndrehimpulsübergänge ℓ , die als Differenz zwischen den totalen Spins des Anfangszustands j_α und des Endzustands j_β definiert sind (es gelten für ℓ die Ausdrücke $|j_\alpha - j_\beta| \leq \ell \leq |j_\alpha + j_\beta|$ und $|\ell_\alpha - \ell_\beta| \leq \ell \leq |\ell_\alpha + \ell_\beta|$). Wie bei der Berechnung des DWBA-Wirkungsquerschnitts, werden zunächst die partiellen Transferwahrscheinlichkeiten zu jedem ℓ ermittelt. Durch Umkoppeln erhält man dann für $\frac{dP(j_\beta, j_\alpha)}{d\epsilon_\beta}$ den Ausdruck:

$$\begin{aligned} \frac{dP(j_\beta, j_\alpha)}{d\epsilon_\beta} &= (2j_\beta + 1) \sum_{\ell} \left\{ \begin{matrix} j_\beta & j_\alpha & \ell \\ \ell_\alpha & \ell_\beta & s \end{matrix} \right\}^2 \sum_{\lambda_\ell} |T(\ell_\alpha, \ell_\beta; \ell \lambda_\ell)|^2 \\ &\equiv \sum_{\ell} f_\ell(j_\alpha, j_\beta) \sum_{\lambda_\ell} |T(\ell_\alpha, \ell_\beta; \ell \lambda_\ell)|^2. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Dabei ist der in Gleichung (4.56) auftretende Faktor $f_\ell(j_\alpha, j_\beta)$ ein Geometriefaktor, der eine Gewichtung für den jeweiligen Übergang angibt. Es ergibt sich für ihn je nach Kopplung der folgende Ausdruck:

$$f_\ell(j_\alpha, j_\beta) = \frac{2}{(2\ell_\alpha + 1)(2\ell_\beta + 1)(2j_\alpha + 1)} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\ell_i = \max(|\ell_\alpha - \ell_\beta|, |j_\alpha - j_\beta|)}^{\ell} \ell_i \\ j_\alpha = \ell_\alpha \pm \frac{1}{2} \rightarrow j_\beta = \ell_\beta \pm \frac{1}{2} \\ \sum_{\ell_i = \ell}^{\max(|\ell_\alpha + \ell_\beta|, |j_\alpha + j_\beta|)} \ell_i \\ j_\alpha = \ell_\alpha \pm \frac{1}{2} \rightarrow j_\beta = \ell_\beta \mp \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad (4.57)$$

Der zweite Faktor $\sum_{\lambda_\ell} |T(\ell_\alpha, \ell_\beta; \ell \lambda_\ell)|^2$ aus der Summe in (4.56) beschreibt einen Transfer mit dem relativen Bahndrehimpuls ℓ .

Als Beispiele für diesen analytischen Ausdruck sind in der Tabelle 4.1, die Gewichtungsfaktoren aus (4.57) für die $p_{\frac{1}{2}}$ und $p_{\frac{3}{2}}$ Anfangszustände gegeben. Aufgeführt sind alle Übergänge bis zu den $g_{\frac{3}{2}}$ Endzuständen. Vergleicht man Übergänge von $j_\alpha = \ell_\alpha \pm \frac{1}{2}$ nach $j_\beta = \ell_\beta \pm \frac{1}{2}$, so sieht man, daß die Gewichtungsfaktoren mit zunehmendem ℓ größer werden. Für entsprechende Übergänge von $j_\alpha = \ell_\alpha \pm \frac{1}{2}$ nach $j_\beta = \ell_\beta \mp \frac{1}{2}$ dagegen, werden die Gewichtungsfaktoren mit zunehmendem ℓ kleiner.

Die verschiedenen ℓ -Transfers zeigen ebenfalls eine deutliche Energieabhängigkeit. Insbesondere sieht man, daß relativ zur Laborenergie ϵ_{lab} für große Q -Werte ℓ -Übergänge mit großem ℓ bevorzugt sind, deren Absolutwert mit zunehmendem Q -Wert aber kleiner wird. Entspricht der Q -Wert ungefähr der Laborenergie ϵ_{lab} , so sind die verschiedenen ℓ -Übergänge nahezu gleich berechtigt. Im Falle von etwa gleichgroßen Argumenten θ_i in den Kugelflächenfunktionen in (4.24) sind im Vergleich, natürliche Paritäten bevorzugt, d. h. es muß die folgende Beziehung gelten:

$$(-)^{\ell_\alpha + \ell_\beta} = (-)^\ell \quad (4.58)$$

Man kann zeigen [BBM87], daß durch Verwendung der Additionstheoreme für Kugel­flächenfunktionen und des asymptotischen Ausdrucks (4.25) die Transferamplitude (4.18) proportional zu dem Clebsch-Gordan Koeffizient $\langle \ell_1 0 \ell_\beta 0 | \ell 0 \rangle$ ist. Dieser verschwindet nur dann nicht, wenn die obige Bedingung erfüllt ist, d. h. für Übergänge mit natürlicher Parität.

Tabelle 4.1: Geometriefaktoren für verschiedene Übergangswahrscheinlichkeiten. Für die beiden $p_{\frac{1}{2}}$ und $p_{\frac{3}{2}}$ Lochzustände sind alle Übergänge von $s_{\frac{1}{2}}$ bis $g_{\frac{9}{2}}$ angegeben.

$j_\alpha \rightarrow j_\beta$	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = 5$
$p_{\frac{1}{2}} \rightarrow s_{\frac{1}{2}}$	0	1/3	0	0	0	0
$p_{\frac{1}{2}} \rightarrow p_{\frac{1}{2}}$	3/9	2/9	0	0	0	0
$p_{\frac{1}{2}} \rightarrow p_{\frac{3}{2}}$	0	1/9	3/9	0	0	0
$p_{\frac{1}{2}} \rightarrow d_{\frac{3}{2}}$	0	5/15	3/15	0	0	0
$p_{\frac{1}{2}} \rightarrow d_{\frac{5}{2}}$	0	0	2/15	5/15	0	0
$p_{\frac{1}{2}} \rightarrow f_{\frac{5}{2}}$	0	0	7/21	4/21	0	0
$p_{\frac{1}{2}} \rightarrow f_{\frac{7}{2}}$	0	0	0	3/21	7/21	0
$p_{\frac{1}{2}} \rightarrow g_{\frac{7}{2}}$	0	0	0	9/27	5/27	0
$p_{\frac{1}{2}} \rightarrow g_{\frac{9}{2}}$	0	0	0	0	4/27	9/27
$p_{\frac{3}{2}} \rightarrow s_{\frac{1}{2}}$	0	1/3	0	0	0	0
$p_{\frac{3}{2}} \rightarrow p_{\frac{1}{2}}$	0	1/18	3/18	0	0	0
$p_{\frac{3}{2}} \rightarrow p_{\frac{3}{2}}$	6/18	5/18	3/18	0	0	0
$p_{\frac{3}{2}} \rightarrow d_{\frac{3}{2}}$	0	1/30	3/30	6/30	0	0
$p_{\frac{3}{2}} \rightarrow d_{\frac{5}{2}}$	0	9/30	7/30	4/30	0	0
$p_{\frac{3}{2}} \rightarrow f_{\frac{5}{2}}$	0	0	2/42	5/42	9/42	0
$p_{\frac{3}{2}} \rightarrow f_{\frac{7}{2}}$	0	0	12/42	9/42	5/42	0
$p_{\frac{3}{2}} \rightarrow g_{\frac{7}{2}}$	0	0	0	3/54	7/54	12/54
$p_{\frac{3}{2}} \rightarrow g_{\frac{9}{2}}$	0	0	0	15/54	11/54	6/54

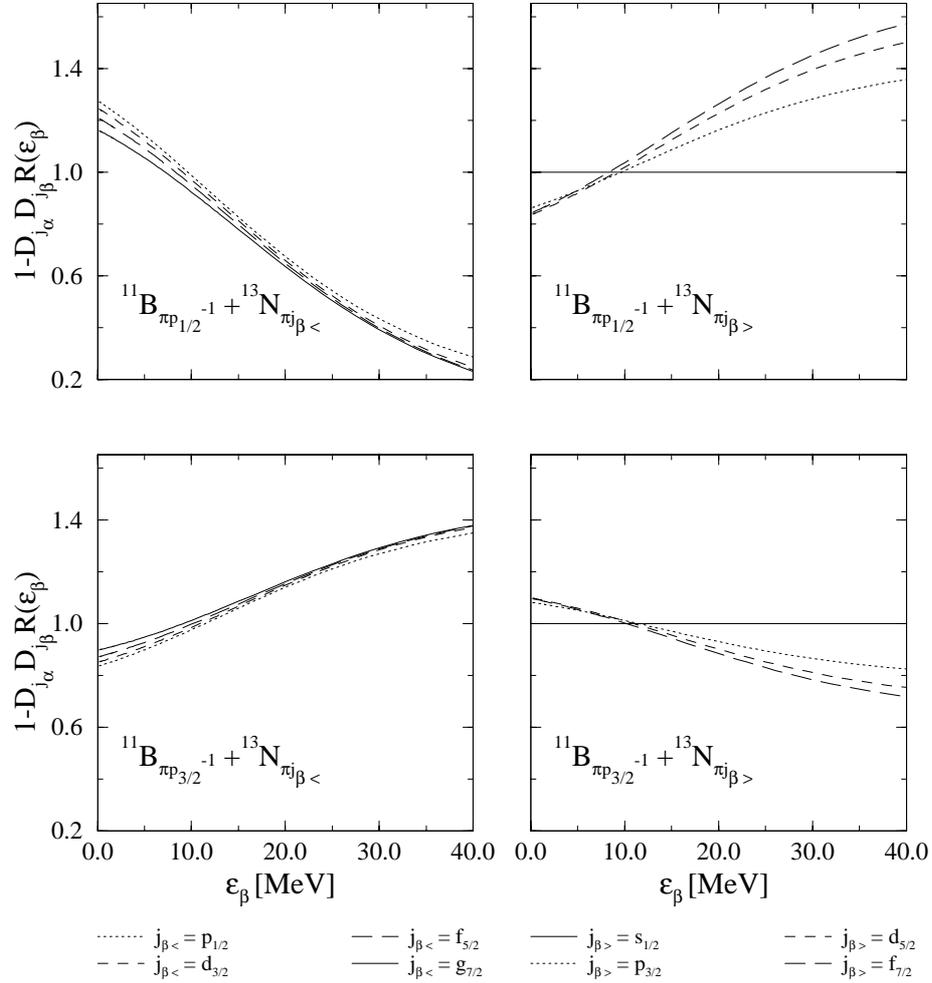


Abbildung 4.1: Geometriefaktoren aus Gleichung (4.51) für den Protonentransfer von den $p_{1/2}$ (oben) und $p_{3/2}$ (unten) Lochzuständen im ^{12}C in verschiedene ungebundene Teilchenendzustände von ^{13}N .

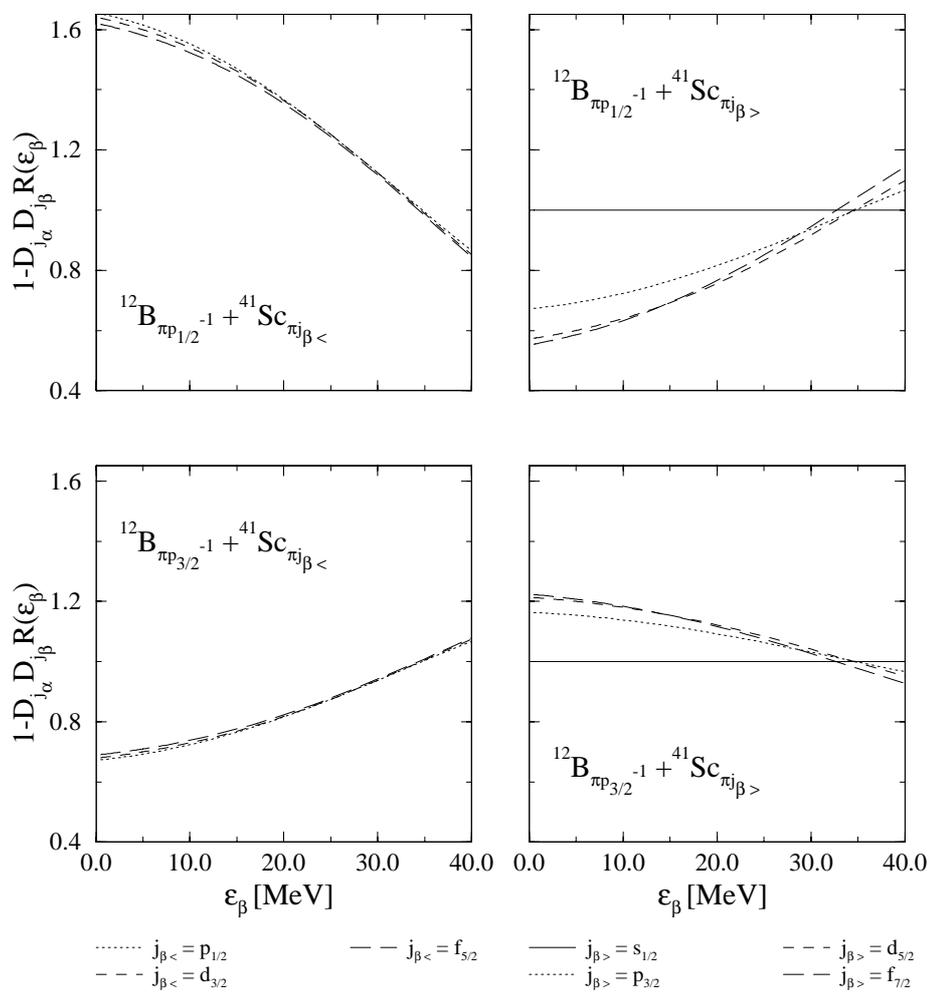


Abbildung 4.2: Geometriefaktoren aus Gleichung (4.51) für den Protonentransfer von den $p_{1/2}$ (oben) und $p_{3/2}$ (unten) Lochzuständen im ^{13}C in verschiedene ungebundene Teilchenendzustände von ^{41}Sc .

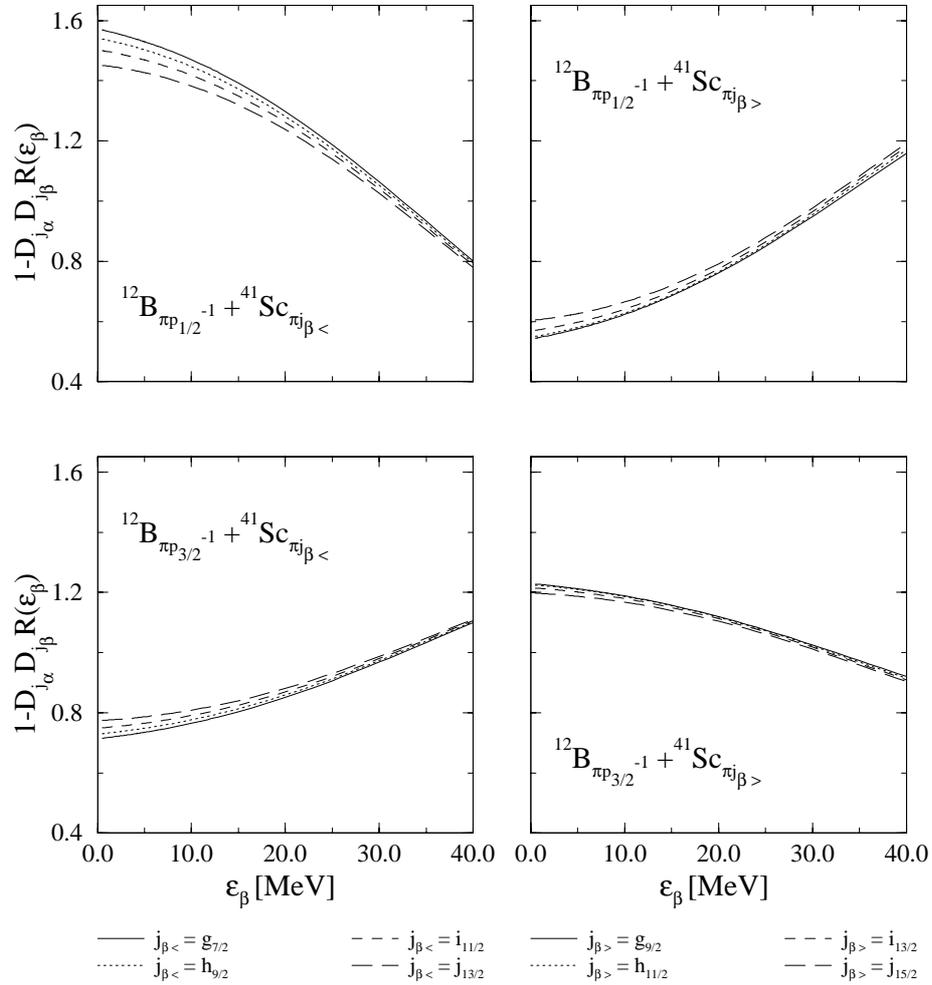


Abbildung 4.3: Geometriefaktoren aus Gleichung (4.51) für den Protonentransfer von den $p_{1/2}$ (oben) und $p_{3/2}$ (unten) Lochzuständen im ^{13}C in verschiedene ungebundene Teilchenendzustände von ^{41}Sc .

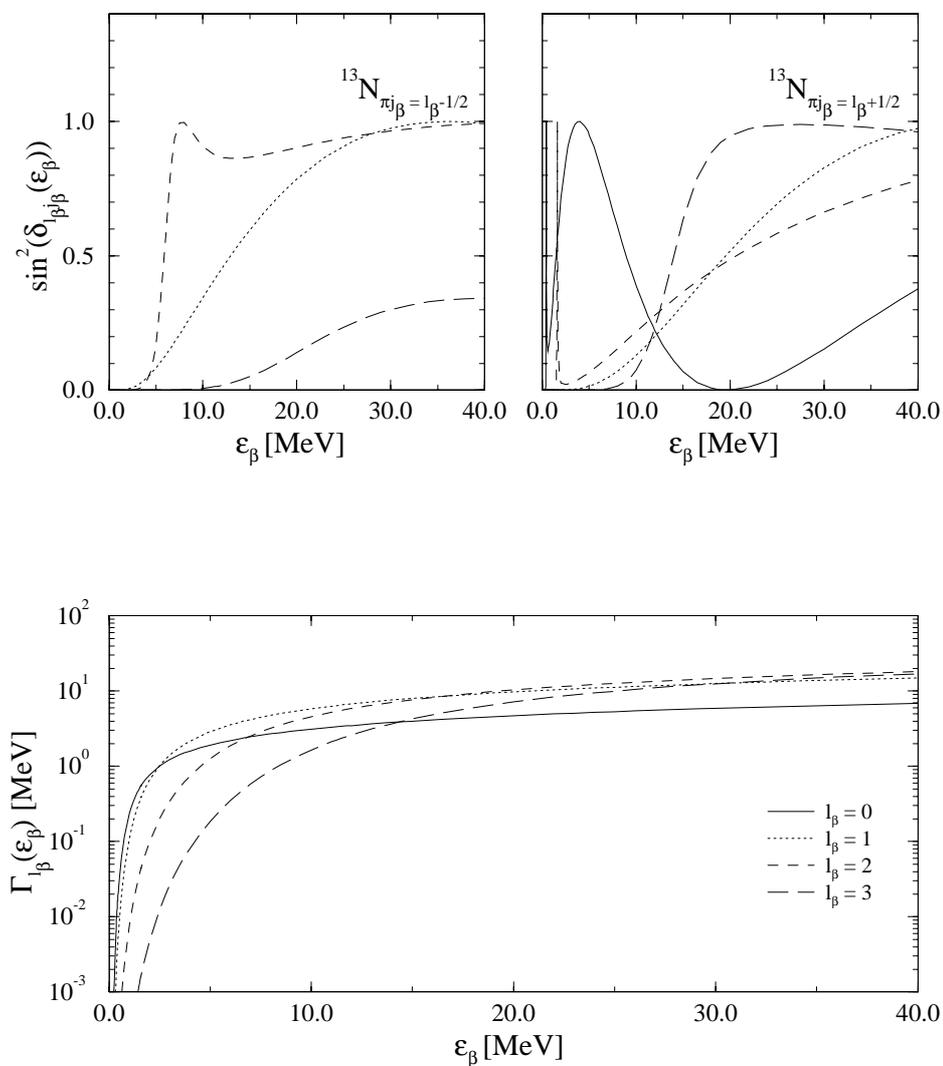


Abbildung 4.4: Sinusquadrat des Streuphasenwinkels für verschiedene ungebundene Teilchenendzustände von ^{13}N , sowie Protonen-Einteilchenbreiten.

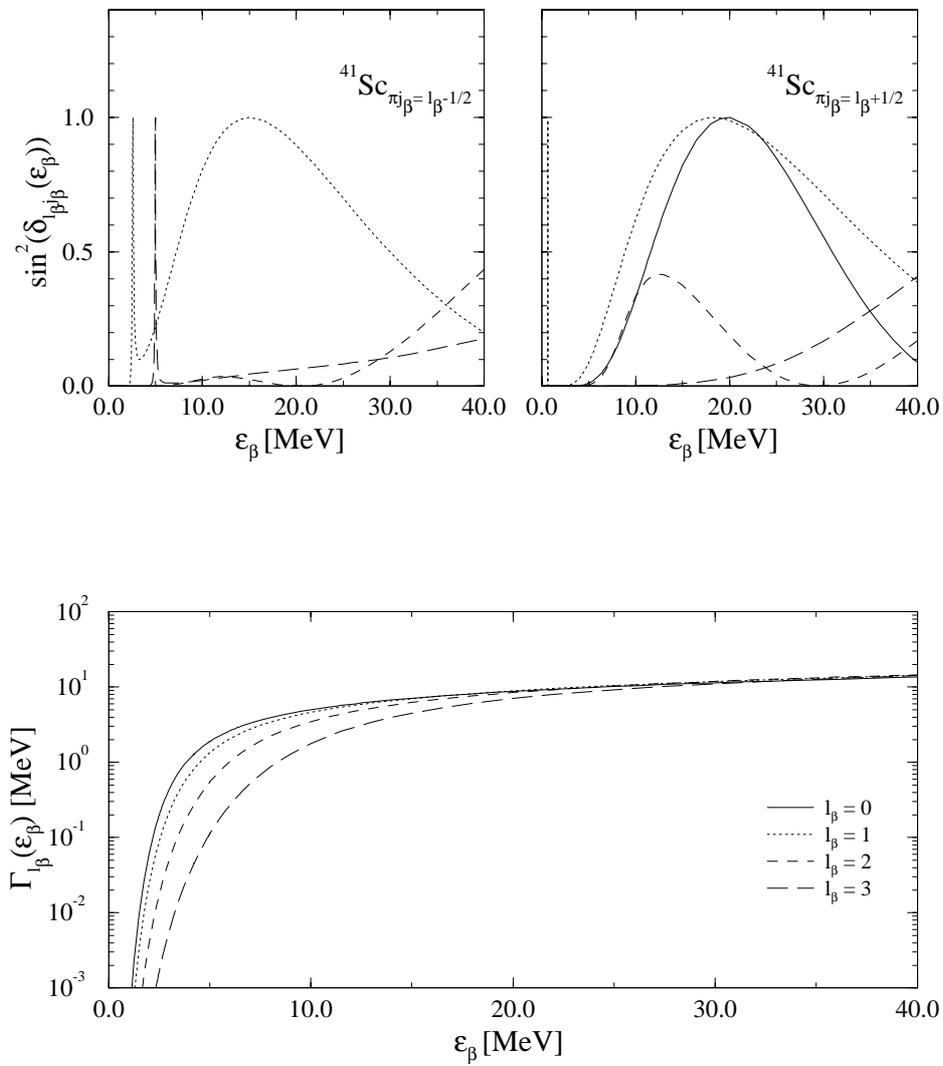


Abbildung 4.5: Sinusquadrat des Streuphasenwinkels für verschiedene ungebundene Teilchenendzustände von ^{41}Sc , sowie Protonen-Einteilchenbreiten.

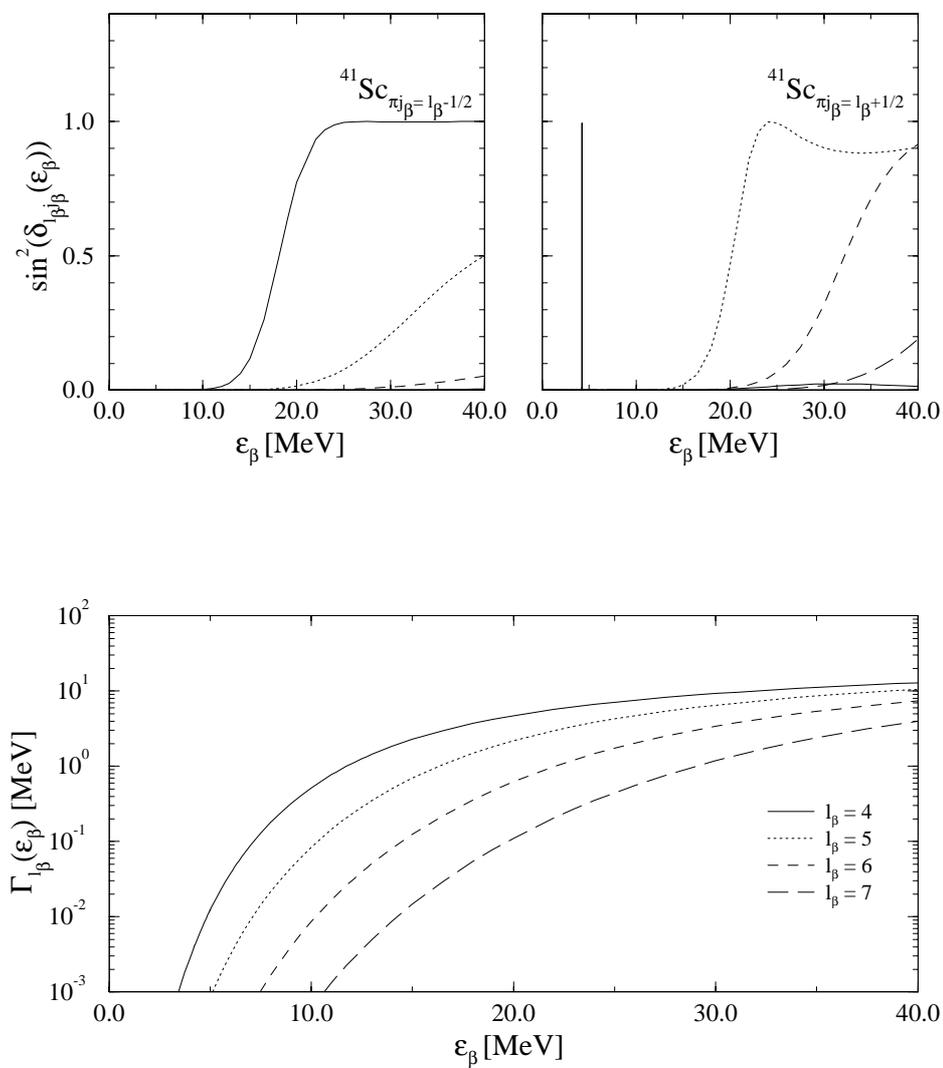


Abbildung 4.6: Sinusquadrat des Streuphasenwinkels für verschiedene ungebundene Teilchenendzustände von ^{41}Sc , sowie Protonen-Einteilchenbreiten.

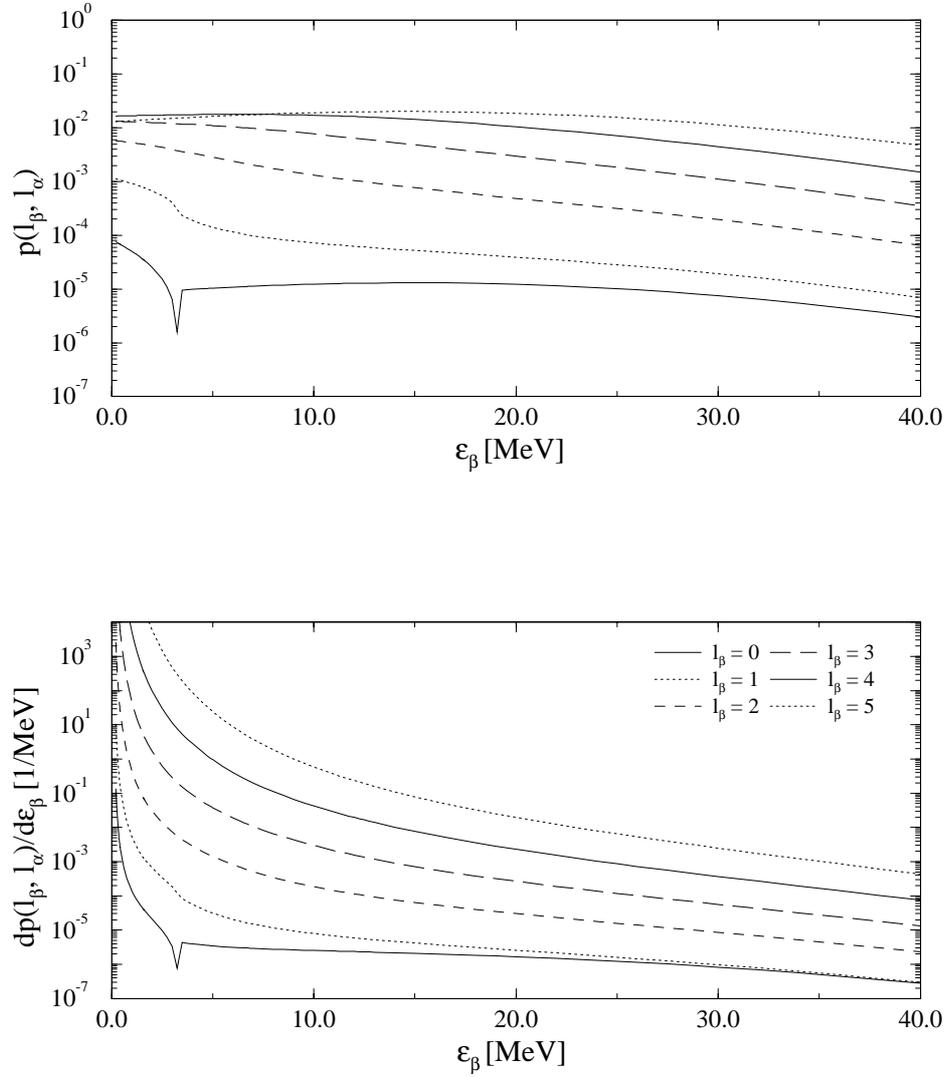


Abbildung 4.7: Bahndrehimpulsübergangswahrscheinlichkeiten pro Energie wie in Gleichung (4.54) (oben) für den Protonentransfer von einem $p_{3/2}$ Lochzustand im ^{12}C in verschiedene ungebundene l -Zustände von ^{13}N . Im unteren Teilbild ist die durch die Protonen-Einteilchenbreite dividierte Größe zu sehen.

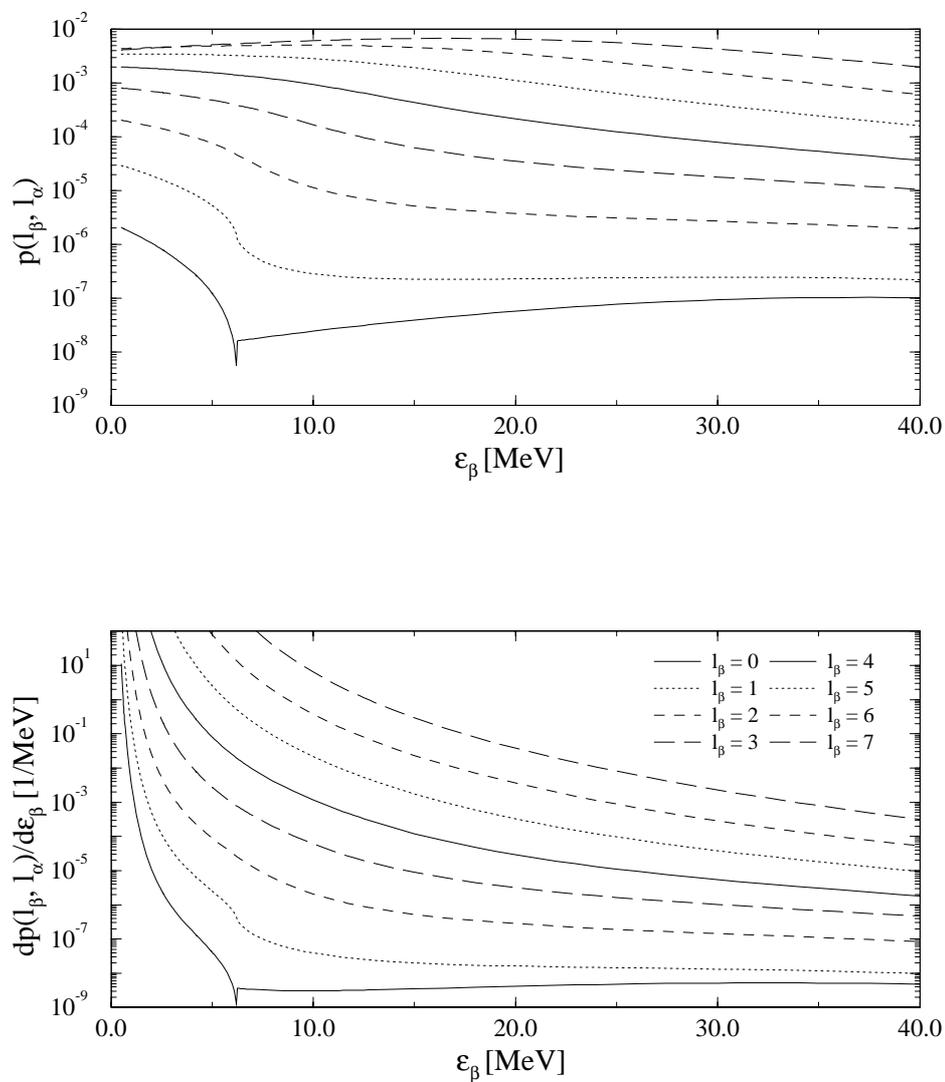


Abbildung 4.8: Bahndrehimpulsübergangswahrscheinlichkeiten pro Energie wie in Gleichung (4.54) (oben) für den Protonentransfer von einem $p_{\frac{3}{2}}$ Lochzustand im ^{13}C in verschiedene ungebundene ℓ -Zustände von ^{41}Sc . Im unteren Teilbild ist die durch die Protonen-Einteilchenbreite dividierte Größe zu sehen.

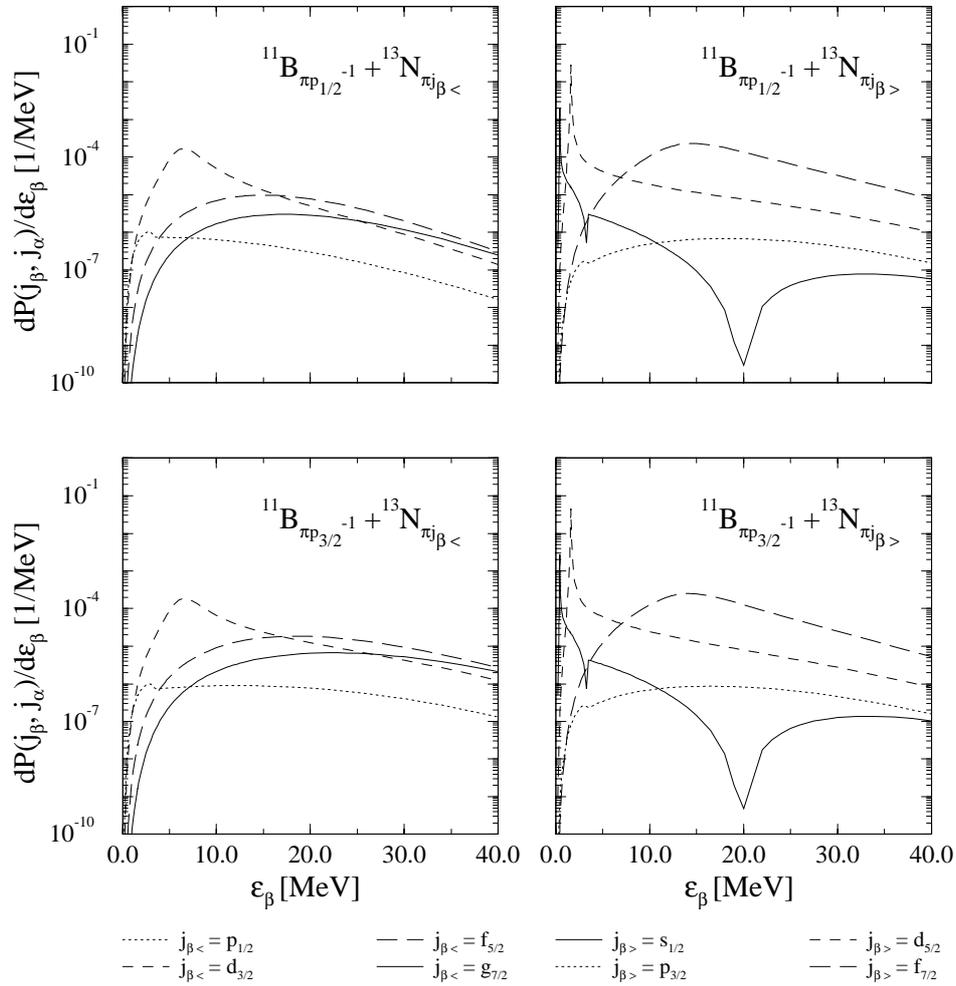


Abbildung 4.9: Übergangswahrscheinlichkeiten pro Energie aus Gleichung (4.46) für den Protonentransfer von $p_{\frac{1}{2}}$ und $p_{\frac{3}{2}}$ Lochzuständen im ^{12}C in verschiedene ungebundene j_β -Zustände von ^{13}N .

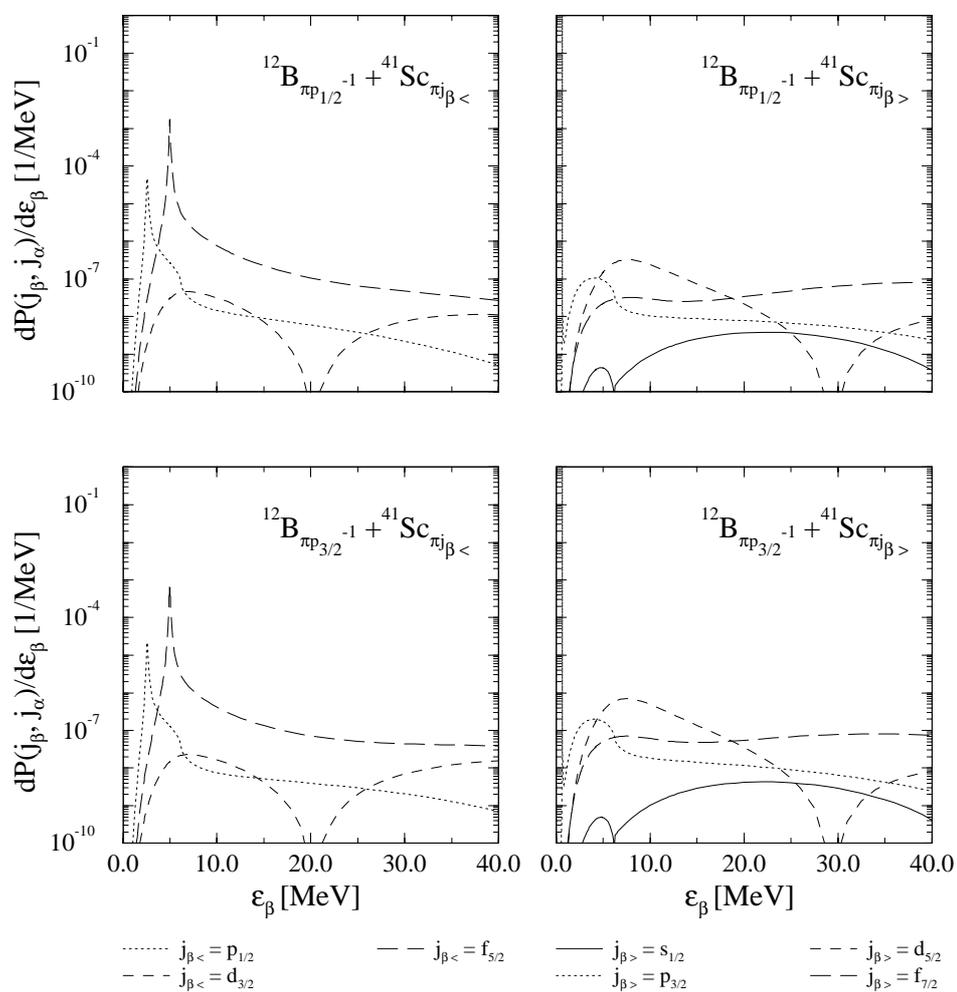


Abbildung 4.10: Übergangswahrscheinlichkeiten pro Energie aus Gleichung (4.46) für den Protonentransfer von $p_{\frac{1}{2}}$ und $p_{\frac{3}{2}}$ Lochzuständen im ^{13}C in verschiedene ungebundene j_{β} -Zustände von ^{41}Sc .

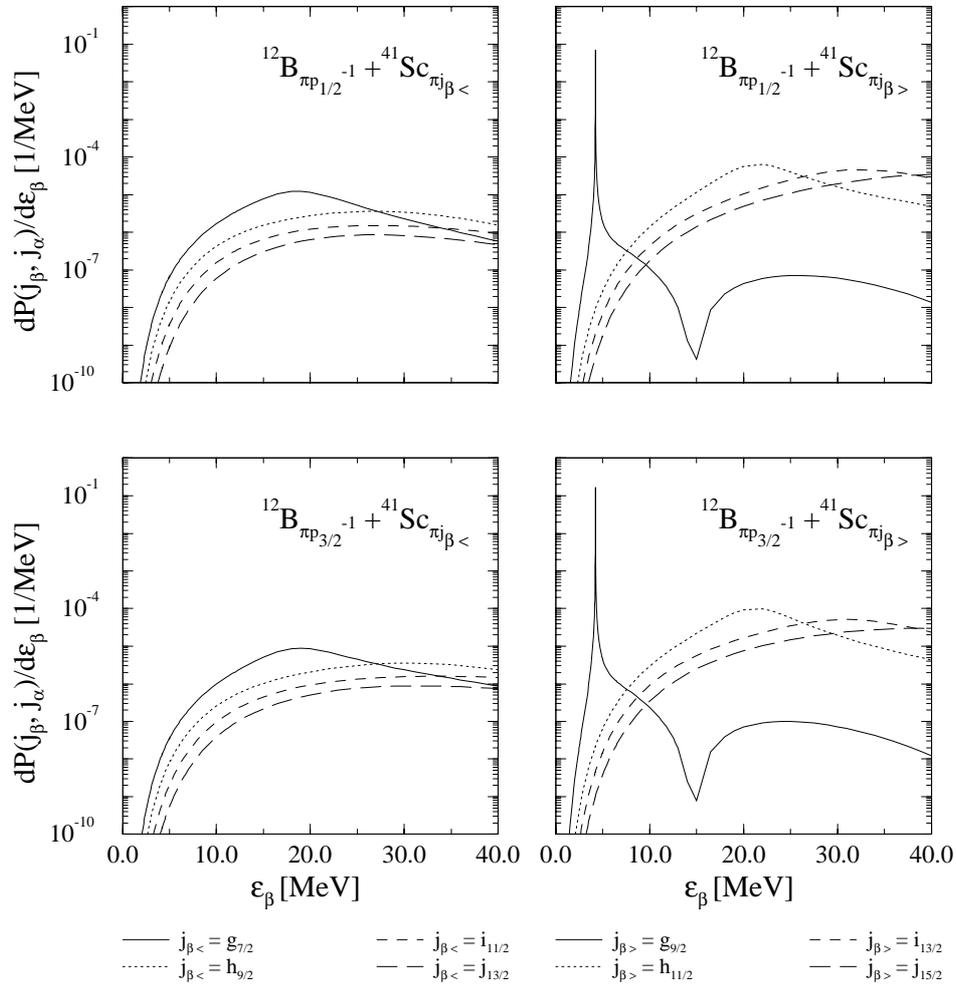


Abbildung 4.11: Übergangswahrscheinlichkeiten pro Energie aus Gleichung (4.46) für den Protonentransfer von $p_{\frac{1}{2}}$ und $p_{\frac{3}{2}}$ Lochzuständen im ^{13}C in verschiedene ungebundene j_{β} -Zustände von ^{41}Sc .

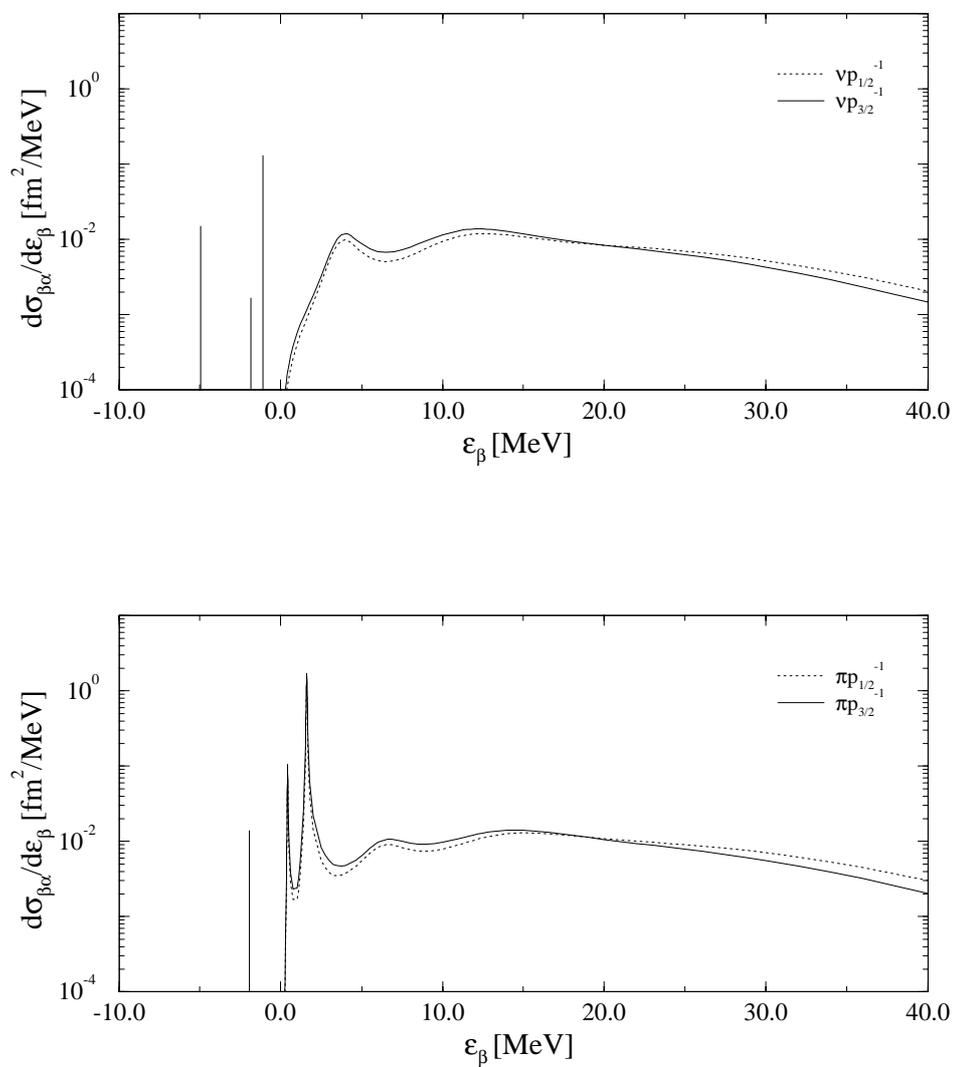


Abbildung 4.12: Wirkungsquerschnitt pro Energie aus Gleichung (4.31) für den Neutronen und Protonentransfer von $p_{\frac{1}{2}}$ und $p_{\frac{3}{2}}$ Lochzuständen im ^{12}C in alle Teilchenzustände, einschließlich $h_{\frac{1}{2}}$, von ^{13}C und ^{13}N . Für $\epsilon_{\beta} < 0$ ergeben sich Transfers in gebundene Zustände.

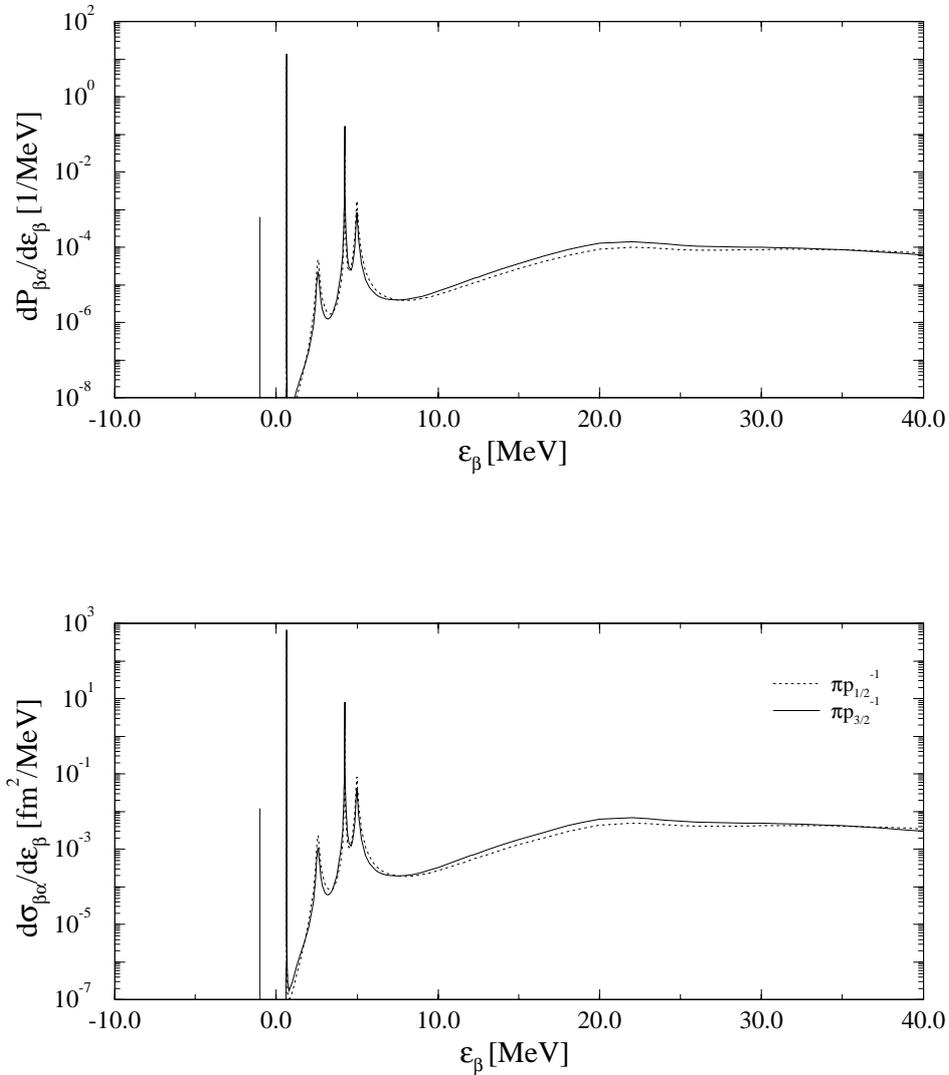


Abbildung 4.13: Übergangswahrscheinlichkeit und Gesamtwirkungsquerschnitt pro Energie aus Gleichung (4.31) für den Protonentransfer von $p_{\frac{1}{2}}$ und $p_{\frac{3}{2}}$ Lochzuständen im ^{13}C in alle Teilchenzustände, einschließlich $j_{\frac{1}{2}}$, von ^{41}Sc . Für $\epsilon_{\beta} < 0$ ist der Transfer in den gebundenen $f_{\frac{1}{2}}$ -Grundzustand angegeben.

4.3 Ergebnisse und Diskussionen der semiklassischen Näherung

Die Reaktionen $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, ^{11}\text{C})^{13}\text{C}^*$, $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, ^{11}\text{B})^{13}\text{N}^*$ und $^{40}\text{Ca}(^{13}\text{C}, ^{12}\text{B})^{41}\text{Sc}^*$ wurden für Laborenergien von $E_{lab} = 344.5$ MeV bzw. $E_{lab} = 650.0$ MeV untersucht. Semiklassische Rechnungen zu gebundenen und ungebundenen Endzuständen des Targets wurden durchgeführt. Die dabei verwendeten Parameter für die Lochzustände sind in den Tabellen 4.2 und 4.3 zu finden. Die Lochenergien sind [Siu93] bzw. den Referenzen dort entnommen; die Normierungskonstanten ergeben sich aus dem Wert der Radialanteile der zugehörigen Einteilchenwellenfunktionen für die Radien d_α (daraus ergibt sich c_α ; siehe auch (4.21)). Wie in Kapitel 2 beschrieben, werden diese Einteilchenwellenfunktionen zu einem Woods-Saxon-Potential mit fester Geometrie und an die Lochenergie angepaßter Tiefe berechnet. Die spektroskopischen Amplituden ergeben sich aus der BCS-Besetzungswahrscheinlichkeit v_α^2 und dem jeweiligen Spin j_α , bzw. sind Cohen und Kurath [CoK67] entnommen. Die ungebundenen Teilchenendzustände des Targetendzustands $^{13}\text{C}^*$ bzw. $^{13}\text{N}^*$ wurden für Anregungsenergien zwischen 0 MeV und 40 MeV oberhalb der Teilchenaufbruchschwelle berechnet. Im Bereich von Resonanzen wurde eine ausreichende Anzahl von Stützpunkten berücksichtigt um die Form der Resonanzen zu beschreiben. Bei den Rechnungen wurde ein "Smooth-Cut-Off-Faktor" (4.34) berücksichtigt, der Wirkungsquerschnitt wurde nach (4.31) unter Berücksichtigung von (4.34) berechnet. Es wurde keine Näherung von $K_\nu(\eta(d_\alpha + d_\beta))$ im Sinne von (4.25) gemacht.

Lochzustände (Projektil)	SP-Energie [MeV]	d_α [fm]	Normierung [fm] $^{-\frac{1}{2}}$	$d_\alpha + d_\beta$ [fm]	Spek. Fak.(CoK) $C^2 S_{j_\alpha}$
$^{11}\text{C}_{\nu p_{3/2}^{-1}}$	-18.72	3.67	0.1275	7.45	2.849
$^{11}\text{C}_{\nu p_{1/2}^{-1}}$	-20.43	3.67	0.1178	7.45	0.753
$^{11}\text{B}_{\pi p_{3/2}^{-1}}$	-15.97	3.67	0.1301	7.45	2.849
$^{11}\text{B}_{\pi p_{1/2}^{-1}}$	-17.68	3.67	0.1236	7.45	0.753
$^{12}\text{B}_{\pi p_{3/2}^{1+}}$	-20.03	3.78	0.1260	9.42	1.20
$^{12}\text{B}_{\pi p_{3/2}^{2+}}$	-21.64	3.78	0.1231	9.42	2.02
$^{12}\text{B}_{\pi p_{1/2}^{1+}}$	-24.46	3.78	0.1117	9.42	0.29

Tabelle 4.2: Parameter für die Projektillochzustände der Transferreaktionen $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, ^{11}\text{C})^{13}\text{C}^*$, $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, ^{11}\text{B})^{13}\text{N}^*$ und $^{40}\text{Ca}(^{13}\text{C}, ^{12}\text{B})^{41}\text{Sc}^*$ ins Kontinuum. Die Energien und spektroskopischen Faktoren sind Cohen und Kurath [CoK67] entnommen.

Lochzustände (Projektil)	SP-Energie [MeV]	d_α [fm]	Normierung [fm] $^{-\frac{1}{2}}$	$d_\alpha + d_\beta$ [fm]	Spek. Fak. $C^2 S_{j_\alpha}$
$^{11}C_{\nu p_{3/2}^{-1}}$	-18.71	3.67	0.1275	7.45	3.479
$^{11}C_{\nu p_{1/2}^{-1}}$	-20.62	3.67	0.1178	7.45	0.545
$^{11}B_{\pi p_{3/2}^{-1}}$	-15.96	3.67	0.1301	7.45	3.566
$^{11}B_{\pi p_{1/2}^{-1}}$	-18.03	3.67	0.1236	7.45	0.455
$^{12}B_{\pi p_{3/2}^{-1}}^{1+}$	-17.533	3.78	0.1306	9.42	1.09
$^{12}B_{\pi p_{3/2}^{-1}}^{2+}$	-18.486	3.78	0.1288	9.42	2.17

Tabelle 4.3: Parameter für die Projektillochzustände der Transferreaktionen $^{12}C(^{12}C, ^{11}C)^{13}C^*$, $^{12}C(^{12}C, ^{11}B)^{13}N^*$ und $^{40}Ca(^{13}C, ^{12}B)^{41}Sc^*$ ins Kontinuum. Die Größen für die Lochenergien bzw. spektroskopischen Faktoren für das ^{12}C -Projektil wurden aus BCS-Rechnungen entnommen [Siu93]. Für das ^{13}C -Projektil wurden experimentelle Größen aus [BOB90] verwendet

Die erhaltenen Gesamtspektren ergeben sich als Summe der Teilspektren zu den verschiedenen teilchenstabilen Ejektilzuständen. Die experimentelle Energieauflösung wurde berücksichtigt, in dem die Rechnungen mit einer Lorenzkurve, deren Breite der experimentellen Breite entspricht, gefaltet wurden. Nicht berücksichtigt wurde die Dopplerverbreiterung angeregter Ejektilzustände durch γ -Zerfall im Flug, die in den nächsten Kapiteln diskutiert wird (siehe Abschnitt 5.5) und bei der Berechnung der Spektren eingeht. Die Resultate für die ^{12}C -Targetkerne sind in den Abbildungen 4.14, 4.15 gezeigt. Es ergeben sich keine großen Unterschiede zwischen Neutronen- und Protonentransfer, obwohl im Falle des Neutronentransfers gebundene, im Falle des Protonentransfers ungebundene $s_{\frac{1}{2}}$ und $d_{\frac{5}{2}}$ -Einteilchenzustände zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts herangezogen wurden. Das beschriebene Verfahren ist offensichtlich im Bereich der Teilchenaufbruchschwelle geeignet und kann die Spektren qualitativ gut beschreiben. Wie später in Kapitel 6 gezeigt wird, gilt dies auch für ein Einteilchenmodell in DWBA-Näherung. Dort werden ebenfalls Transferwirkungsquerschnitte für gebundene und ungebundene Zustände berechnet. Die aus diesen genaueren DWBA-Rechnungen erhaltenen Spektren unterscheiden sich nur um einen globalen Faktor von etwa 3 bzw 4 von den semiklassischen Resultaten, zeigen aber sonst sehr gute Übereinstimmung. (Man vergleiche dazu die Abbildungen 4.14, 4.15 für den energieabhängigen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma_{\beta\alpha}}{d\epsilon_\beta}$ mit den entsprechenden Größen aus den Abbildungen 6.3 und 6.4). Da die semiklassischen Ergebnisse sehr empfindlich auf die Größe der Abstände d_α bzw. d_β reagieren ist dieser Größenunterschied nicht überraschend [BBM87].

Auch die Strippingreaktion $^{40}Ca(^{13}C, ^{12}B)^{41}Sc^*$ wird qualitativ gut beschrieben (Siehe Abbildung 4.16). Wie auch später in Kapitel 5 zu sehen ist, ist das Spektrum

durch die Doppelstruktur zweier, prominenter Ejektilzustände gekennzeichnet. Allerdings wird die $g_{\frac{9}{2}}$ -Resonanz im hier verwendeten reinen Einteilchenbild stark überschätzt. Es bedarf also der Berücksichtigung von komplizierteren Anregungszuständen, die zur Fragmentation der Resonanzen führen, wie dies im QPC-Modell geschieht. Außerdem haben die gefalteten Peaks die gleiche Breite sind aber unterschiedlich hoch. Der Grund dafür ist die Vernachlässigung der Dopplerverbreiterung durch γ -Zerfall.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Wirkungsquerschnitte, von zwei wesentlichen Faktoren abhängen. Zum einen von spezifischen mikroskopischen Größen (bei ungebundenen Zuständen von den Streuphasen) und zum anderen von dynamischen Größen, wie der Drehimpuls- und Energieerhaltung. Das oben vorgestellte Modell erweist sich für eine erste Abschätzung als ausgesprochen nützlich, um den Aufwand für eine quantitativere Rechnung (z. B. DWBA) zu verringern. Ein Vergleich der Ergebnisse mit denen aus Kapitel 5 und 6 zeigt, daß die Reihenfolge in der Bedeutung der Übergänge in beiden Modellen übereinstimmend beschrieben wird, daß die absolute Größe allerdings durchaus verschieden sein kann.

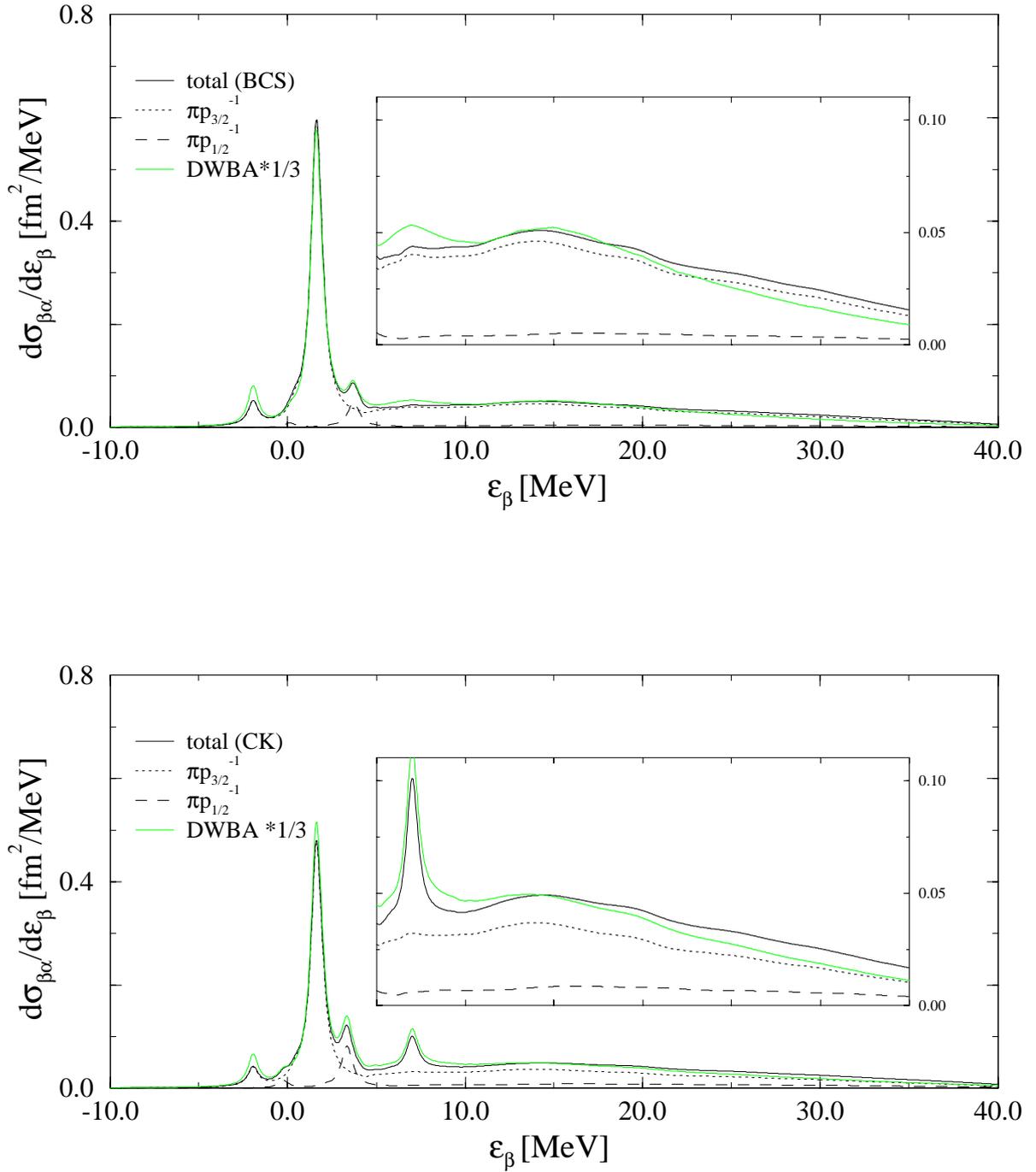


Abbildung 4.14: Energiegemittelter Transferwirkungsquerschnitt (Faltungsbreite $\Delta = 0.7$ MeV) für den Protonentransfer $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, ^{11}\text{B})^{13}\text{N}^*$ bei $E_{lab} = 344$ MeV. Im oberen Bild wurden spektroskopische Faktoren aus BCS-Rechnungen für die Lochzustände verwendet, im unteren Bild wurden Ergebnisse von Cohen und Kurath verwendet [CoK67]. Zum Vergleich ist außerdem der Wirkungsquerschnitt aus einer DWBA-Rechnung aus Kapitel 6 gezeigt.

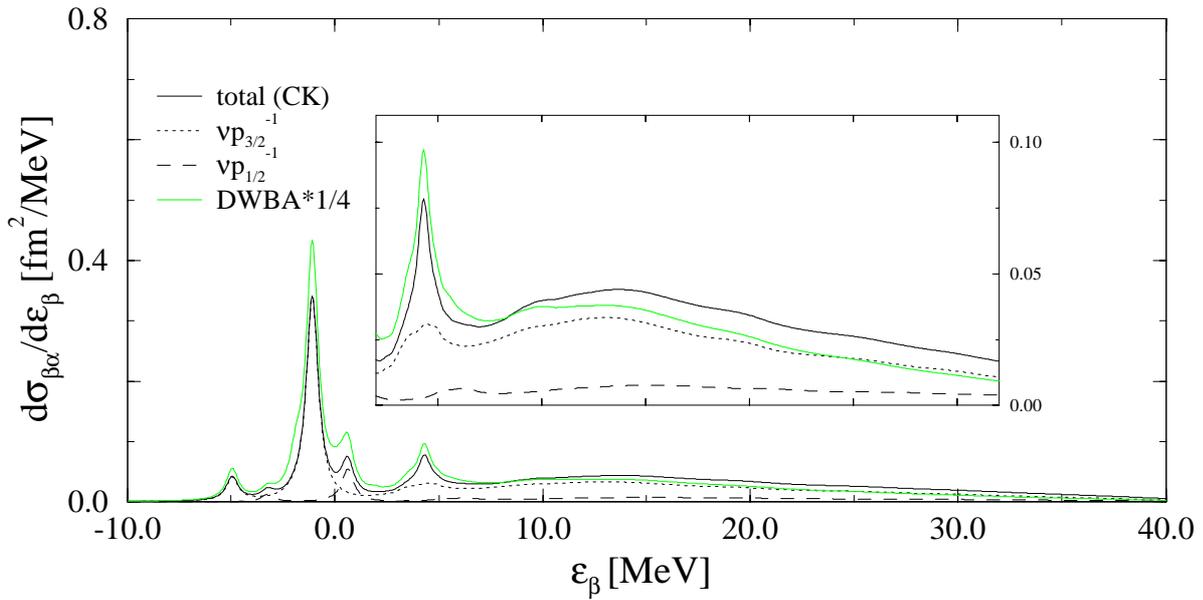
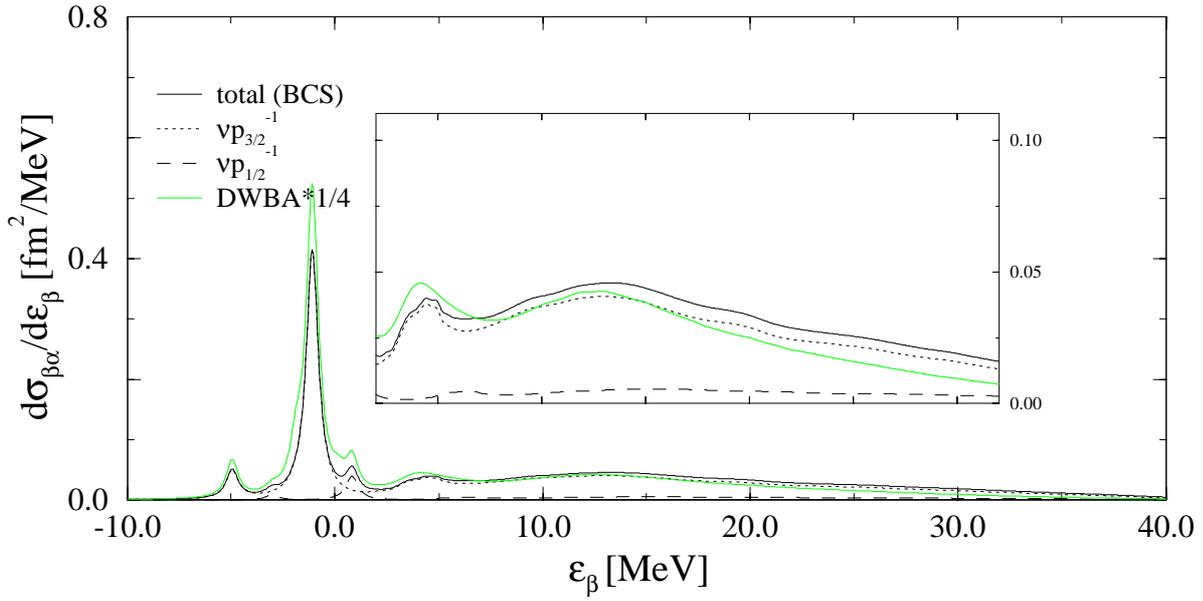


Abbildung 4.15: Energiegemittelter Transferwirkungsquerschnitt (Faltungsbreite $\Delta = 0.7$ MeV) für den Neutronentransfer $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, ^{11}\text{C})^{13}\text{C}^*$ bei $E_{lab} = 344$ MeV. Im oberen Bild wurden spektroskopische Faktoren aus BCS-Rechnungen für die Lochzustände verwendet, im unteren Bild wurden Ergebnisse von Cohen und Kurath verwendet [CoK67]. Zum Vergleich ist außerdem der Wirkungsquerschnitt aus einer DWBA-Rechnung aus Kapitel 6 gezeigt.

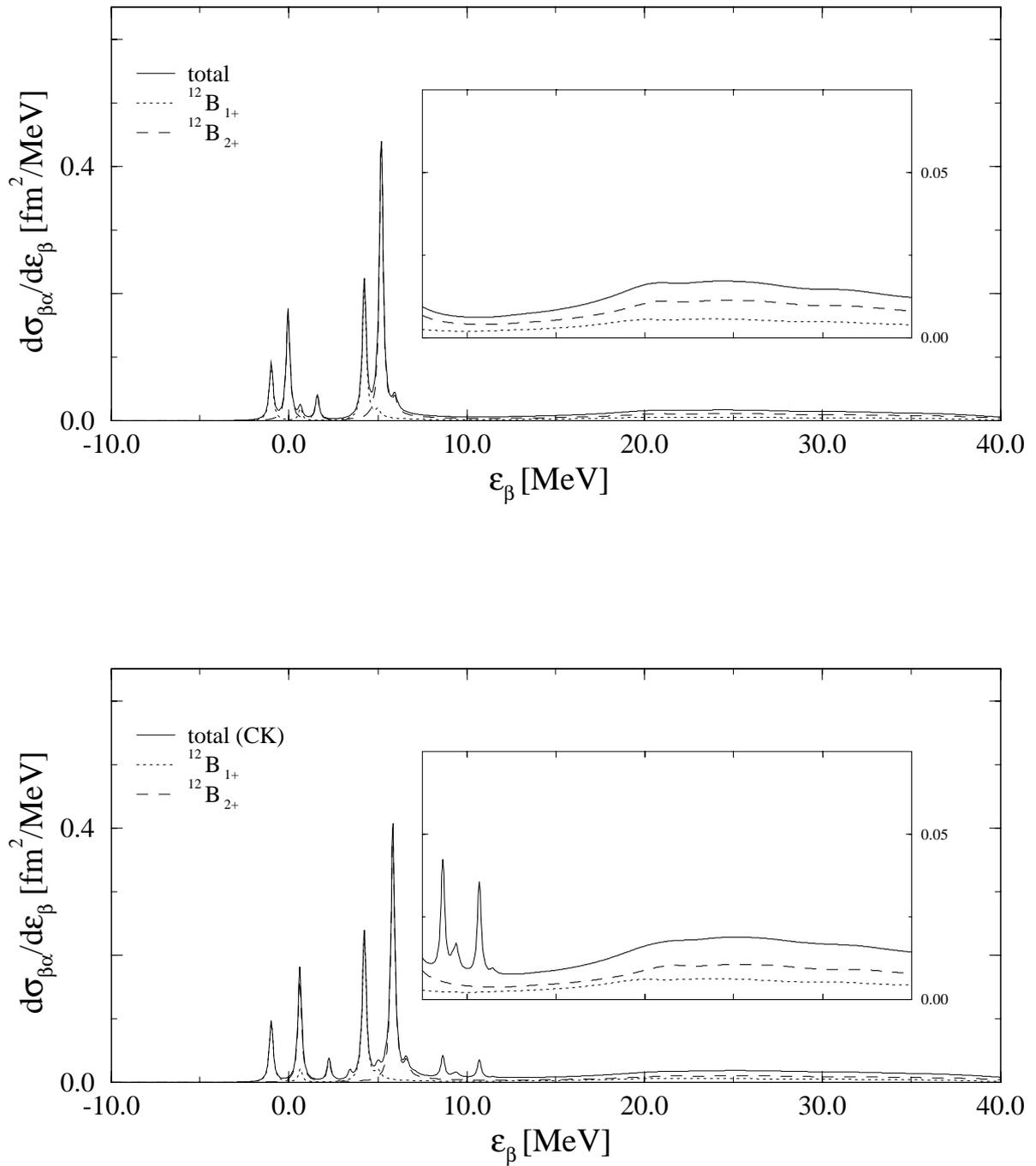
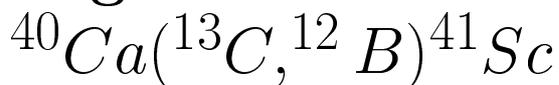


Abbildung 4.16: Energiegemittelter Transferwirkungsquerschnitt (Faltungsbreite $\Delta = 0.25$ MeV) für den Protonentransfer $^{40}\text{Ca}(^{13}\text{C}, ^{12}\text{B})^{41}\text{Sc}^*$ bei $E_{lab} = 650$ MeV. Im oberen Bild wurden spektroskopische Faktoren aus einer Arbeit von Braeunig et al. [BOB90] für die Lochzustände verwendet, im unteren Bild wurden Ergebnisse von Cohen und Kurath verwendet [CoK67].

Kapitel 5

Ergebnisse der Stripping-Reaktion



Gegenstand dieses Kapitels ist die Diskussion der Protonentransferreaktion ${}^{40}\text{Ca}({}^{13}\text{C}, {}^{12}\text{B}){}^{41}\text{Sc}$ bei einer Einschußenergie von 50 MeV/Nukleon im Laborsystem. Diese Reaktion wurde experimentell von Braeunig et al. [BOB90] durchgeführt. Es wurden Spektren von ${}^{12}\text{B}$ und Winkelverteilungen signifikanter Peaks gemessen und mit DWBA-Rechnungen verglichen. Aus dieser und früheren Untersuchungen können bereits folgende Aussagen gemacht werden:

- Zur Transferstärke tragen im Energiebereich bis etwa 15 MeV bevorzugt der $f_{7/2}$ -Grundzustand und die $f_{5/2}$, $f_{7/2}$ und $g_{3/2}$ -Anregungszustände des ${}^{41}\text{Sc}$ bei. Bei höheren Anregungsenergien sind außerdem andere, höhere $j + \frac{1}{2}$ -Zustände von Bedeutung.
- Das Ejektil ${}^{12}\text{B}$ liegt vorrangig im 1^+ Grundzustand sowie im ersten 2^+ -Anregungszustand vor. Beide Zustände können aus ${}^{13}\text{C}$ durch Pickup eines $p_{3/2}$ -Lochzustands gebildet werden. Weitere Boranregungszustände mit $p_{1/2}$ -Lochstärke sind bekannt [MaW75]. Sowohl der 1^+ als auch der 2^+ -Zustand verfügen über signifikante Stärke. Der Transfer des $p_{3/2}$ -Protons aus ${}^{13}\text{C}$ in ${}^{41}\text{Sc}$ liefert für beide Zustände ein ähnliches, jedoch energieverschobenes Spektrum.
- Der 2^+ -Zustand des Bors zerfällt im Fluge unter γ -Emission. Es kommt daher zu einer Dopplerverbreiterung der Peaks. Die maximale Energieverbreiterung bei einer Laborenergie von 650 MeV für das Ejektil und einer γ -Energie von 1 MeV beträgt $\Delta E \approx \pm 0.33$ MeV

Um diese Daten beschreiben zu können, werden daher Einteilchenstärken, sowie partielle und totale Wirkungsquerschnitte für den Transfer zwischen den verschiedenen

Lochkomponenten des ^{13}C und den Teilchenzustände des ^{41}Sc berechnet.¹ Zur Berechnung dieser theoretischen Wirkungsquerschnitte wird hier wie folgt vorgegangen: Einteilchenzustände werden im Schalenmodell ermittelt und als Eingangsgrößen für QPC- und QRPA-Rechnungen verwendet (siehe Abschnitt 3.1). Letztere liefern ein Spektrum der Rumpf-Anregungen für das QPC-Modell. Aus diesem werden für das ^{41}Sc realistische spektroskopische Faktoren für gebundene und Partialwellenamplituden für ungebundene Zustände zu gegebenen Quantenzahlen (n, j, ℓ) bzw. (ϵ, j, ℓ) gewonnen. Die Partialwellenamplituden dienen wiederum als Eingabe für die Bestimmung der Formfaktoren für die DWBA-Rechnungen im Kontinuum. Schließlich werden die aus der DWBA erhaltenen differentiellen und energieabhängigen Wirkungsquerschnitte mit einer Breite, die sich aus der experimentellen Auflösung und der Dopplerverbreiterung ergibt, gefaltet, und anschließend zum Gesamtwirkungsquerschnitt aufsummiert.

5.1 Einteilchen-Potentialzustände

Als Eingangsgrößen für die QRPA respektive QPC-Rechnungen werden Einteilchenwellenfunktionen relativ zu einem ^{40}Ca -Rumpf benötigt, die einer definierten Randbedingung genügen sollen. Diese Wellenfunktionen sind die Lösungen zu einer Einteilchenschrödingergleichung mit einem phänomenologischen Schalenmodellpotential. Diese Schrödingergleichung und ihre Eigenfunktionen sind im Kapitel 2 beschrieben. Die niedrigliegenden Energieeigenwerte der gebundenen Zustände sowie die Einteilchenresonanzen und die Potentialtiefen sind in Tabelle 5.1 zu finden. Als Geometrieparameter wurden für die Potentiale die Standardwerte von Bohr und Mottelson [BoM69] verwendet. Für den reduzierten Radius r_0 wurde ein Wert von 1.25 fm und für die Diffusivität a_0 ein Wert von 0.65 fm angenommen. Bei den verwendeten Potentialtiefen wurden mit Ausnahme der $g_{\frac{7}{2}}$ - und $g_{\frac{9}{2}}$ -Zustände identische Werte verwendet. Wegen der Asymmetrieenergie sind die Potentiale aber isospinabhängig. Die erhaltenen Einteilchenzustände und ihre Energien sind nicht direkt mit experimentellen Werten vergleichbar. Vergleichbare Größen ergeben sich erst aus dem QPC-Ansatz.

Die Lösungen der Schrödingergleichung sind dadurch festgelegt, daß ihre logarithmischen Ableitungen für einen Kavitätsradius $R_s = 20$ fm den Wert 0 annehmen, also ein Sturm-Liouville-Randwertproblem erfüllen. Die so erhaltenen Wellenfunktionen, genauer Kavitäts-Einteilchenwellenfunktionen, sind eine endliche Teilmenge einer vollständigen Orthogonalbasis und werden später als Entwicklungsfunktionen für realistische QRPA- bzw. QPC-Wellenfunktionen verwendet. Auch gebundene QPC-Zustände, also Zustände mit exponentiellem Abfall, können innerhalb der Kavität durch eine solche Entwicklung dargestellt werden. Entsprechendes

¹Für die Darstellung dieser Wirkungsquerschnitte sei der Leser auf Seite 27 ff und die Gleichungen (1.85) bis (1.89) verwiesen.

gilt für Streuzustände mit der in Abschnitt 2.1 beschriebenen Asymptotik (weitere Details siehe Anhang G). Die Qualität der Entwicklung hängt von der Anzahl der Entwicklungsfunktionen ab. Hier wurden insgesamt jeweils 15 derartige Kavitäts-Einteilchenwellenfunktionen mit einer maximalen Einteilchenenergie von etwa 120 MeV oberhalb der Teilchenaufbruchschwelle zu jedem (j, ℓ) berechnet. Eine typische Entwicklung wurde in Kapitel 2 in Abbildung 2.2 für die $h_{\frac{11}{2}}$ -Wellenfunktion von ^{41}Sc gezeigt.

Niveau	Protonen			Neutronen			
	E_{sp} [MeV]	V_o	V_{so}	Niveau	E_{sp} [MeV]	V_o	V_{so}
$1s_{\frac{1}{2}}$	-29.96	51.0	33.7	$1s_{\frac{1}{2}}$	-39.39	52.0	33.7
$1p_{\frac{3}{2}}$	-20.84	51.0	33.7	$1p_{\frac{3}{2}}$	-29.62	52.0	33.7
$1p_{\frac{1}{2}}$	-18.24	51.0	33.7	$1p_{\frac{1}{2}}$	-27.10	52.0	33.7
$1d_{\frac{5}{2}}$	-11.04	51.0	33.7	$1d_{\frac{5}{2}}$	-19.17	52.0	33.7
$2s_{\frac{1}{2}}$	-7.12	51.0	33.7	$2s_{\frac{1}{2}}$	-15.23	52.0	33.7
$1d_{\frac{3}{2}}$	-5.83	51.0	33.7	$1d_{\frac{3}{2}}$	-14.03	52.0	33.7
$1f_{\frac{7}{2}}$	-0.92	51.0	33.7	$1f_{\frac{7}{2}}$	-8.35	52.0	33.7
$2p_{\frac{3}{2}}$	1.82 ^{res}	51.0	33.7	$2p_{\frac{3}{2}}$	-4.87	52.0	33.7
$2p_{\frac{1}{2}}$	3.52 ^{res}	51.0	33.7	$2p_{\frac{1}{2}}$	-2.70	52.0	33.7
$1f_{\frac{5}{2}}$	6.35 ^{res}	51.0	33.7	$1f_{\frac{5}{2}}$	-0.69	52.0	33.7
$1g_{\frac{9}{2}}$	10.09 ^{res}	50.0	26.5	$1g_{\frac{9}{2}}$	2.0 ^{res}	50.0	26.5

Tabelle 5.1: Energien und dazugehörige Potentialparameter für Einteilchenzustände relativ zum ^{40}Ca -Rumpf. Niveaus mit positiver Energie sind Resonanzzustände und werden mit ^{res} bezeichnet.

5.2 Spektroskopische Faktoren und Einteilchenbreiten

Um für Resonanzzustände den gebundenen Zuständen entsprechende spektroskopische Faktoren berechnen zu können, werden energieabhängige Einteilchenbreiten $\Gamma(E)_{sp}^{res}$ benötigt. Die spektroskopische Stärke $S_{\ell j}(E)$ eines Kontinuumszustands mit der Energie E kann mit dem Ausdruck (2.71) (siehe Kapitel 2)

$$S_{\ell j}(E) = \frac{|C_{\ell j}(E)|^2}{\Gamma(E)_{sp}^{res}} \quad (5.1)$$

bestimmt werden. Das bedeutet, daß zur Berechnung der spektroskopischen Stärke bei der Energie E nicht nur die gemessenen oder berechneten Partialwellenamplituden $C_{\ell j}(E)$, die ja die elastischen Streuquerschnitte bestimmen, sondern auch die Breite einer Einteilchenresonanz bei dieser Energie bekannt sein müssen. Mit der Methode der Potentialtiefenanpassung ("Well-Depth"-Methode) ist die Ermittlung einer derartigen Breite bis zu einer Energie, die der Coulomb-Zentrifugalbarriere entspricht, möglich, erweist sich aber als zeitaufwendig. Näherungsweise wurde hier die energieabhängige Einteilchenbreite $\Gamma_{sp}(E)$ zunächst in der Näherung für ein Kastenpotential [BoM69]

$$\Gamma_{sp}^0(E) = \frac{2\hbar^2}{mR^2} \frac{V_0}{V_0 + V_{coul}(R)} \frac{kR}{I_{\ell}^{(+)}(R, k) O_{\ell}^{(+)}(R, k)} [1 - ((\ell + \frac{1}{2})^2 + 2kR\eta)^{-1/2}] \quad (5.2)$$

ermittelt und anschließend, soweit möglich auf den Wert der für das gegebene Potential berechneten Breiten der Protonenresonanzen bei der Energie $E = E_{res}$ gemäß der Gleichung

$$\Gamma_{sp}(E) = \Gamma_{sp}^0(E) \frac{\Gamma_{sp}(E_{res})}{\Gamma_{sp}^0(E_{res})} \quad (5.3)$$

normiert. Auf diese Weise wurde die starke Energieabhängigkeit der Einteilchenbreite mitberücksichtigt. Falls im betrachteten Kanal keine scharfe Resonanz vorliegt, wurde die Näherung (5.2) direkt benutzt, um näherungsweise einen spektroskopischen Faktor berechnen zu können.

5.3 QRPA-Amplituden und Stärkefunktionen für ^{40}Ca

Als nächstes werden die Quasiphononzustände des ^{40}Ca -Rumpfes benötigt. Sie ergeben sich aus dem QRPA-Dichteentwicklungsansatz aus Abschnitt 3.1. Auf eine Verwendung des neu-formulierten Kontinuums-Dichteentwicklungsansatzes für die QRPA aus Abschnitt 3.1.1 wurde hier verzichtet, da nur tiefliegende Anregungszustände des ^{40}Ca in den QPC-Rechnungen benutzt werden. Als zustandsunabhängige gemittelte Dichte $\bar{\rho}_{\gamma}$ zur Berechnung der Felder U_{γ} wurde statt dessen eine phänomenologische Dichte, die von Tassie angegeben wurde, und die sich bei der Beschreibung von Riesenresonanzzuständen bewährt hat, verwendet [RiS80]. Wie sich in Untersuchungen von R. Siudak [Siu93] zeigte, gibt diese in guter Näherung die r-Abhängigkeit der QRPA-Dichten wieder. Lediglich die Maxima werden geringfügig in die Richtung kleinerer Radien verschoben. Die hier verwendete effektive Teilchen-Loch-Wechselwirkung, die sogenannte M3Y-Wechselwirkung, wurde durch Anpassen von G-Matrixelementen des Paris NN-Potentials ([ANA82] und [BER77]) an eine Summe von Yukawatermen abgeleitet. Durch Verwendung von Normierungskonstanten für die skalare-isoskalare Wechselwirkung erfolgte eine Anpassung der

tiefliegenden Anregungszustände, d. h. der 0_2^+ , 2_1^+ , 3_1^- , 4_1^+ und 5_1^- -Zustände, an die experimentellen Werte von H. Ejiri et al. [EJI81]. Die Eliminierung der spuriosen Schwerpunktsanregung des 1^- -Zustands erfolgte in bekannter Weise (siehe z. B. [Siu93]) — der Zustand wird mit einer geeigneten Normierung der Stärke in die komplexe Energieebene geschoben. Für die übrigen Übergänge ($S=0, T=1$; $S=1, T=0$; $S=1, T=1$) wurden die Normierungskonstanten so gewählt, daß die bekannten Landau-Migdal-Parameter reproduziert werden konnten [DIC82]. Die berechneten und experimentellen Werte für die Energien und Stärken sowie die zugehörigen Normierungskonstanten der ($S=0, T=0$)-Wechselwirkung sind in Tabelle 5.4 aufgeführt. In der QRPA wird als Grundzustand von ^{40}Ca ein BCS-Grundzustand mit konstanter Paarkraft gemäß dem Ansatz aus Abschnitt 3.1 berechnet. Die Stärke dieser Paarkraft wurde so gewählt, daß sich die experimentell bekannten Werte der Gap-Parameter Δ für Protonen und Neutronen ergaben. Die Ergebnisse dieser Rechnung wie Gap-Parameter, chemisches Potential, Besetzungszahlen und die BCS-Energien für die verschiedenen Quasiteilchenzustände sind den Tabellen 5.2 und 5.3 zu entnehmen. Bei der Berechnung der Paarkorrelationen wurden nur die Einteilchenzustände berücksichtigt, deren Energien unterhalb der Teilchenaufbruchschwelle liegen - d.h. Kontinuumszustände wurden bei der Berechnung explizit ausgeschlossen. Auch wenn im Weiteren allgemein von Quasiteilchenzuständen gesprochen wird, so sind die Kontinuumszustände als reine Teilchenzustände mit $v = 0$ aufzufassen.

	Protonen	Neutronen
G [MeV]	30.0	26.5
Δ [MeV]	1.63	2.02
λ [MeV]	-3.98	-12.00

Tabelle 5.2: Paarkraft G , Gap-Parameter Δ und chemisches Potential λ für Protonen und Neutronen im ^{40}Ca .

Für das Ausschließen von Kontinuumszuständen in den BCS-Rechnungen gibt es zwei Gründe: Einmal ist der Effekt von Paarkräften auf den Bereich um die Fermikante konzentriert. Nur in diesem Bereich sind zustandsabhängige Gap-Parameter, die man exakterweise verwenden sollte, signifikant von Null verschieden. Bei Verwendung einer konstanten Paarkraft sollten daher nur Einteilchenzustände in der Nähe der Fermikante berücksichtigt werden und für die übrigen Einteilchenzustände sollte die Paarkraft generell Null gesetzt werden (siehe auch [Ris80]). Es stellt sich aber die Frage, für den Fall das die Bindungsenergie sehr gering ist, ab welcher Einteilchenenergie im Kontinuum durch die Kontinuumszustände festgelegt sind, die Paarkraft "abgeschaltet" werden soll, d. h. bis zu welcher Energie Kontinuumszustände bei einer BCS-Rechnung mitberücksichtigt werden müssen. Für scharfe Resonanzen wäre eine derartige "Abschaltenergie" relativ gut festzulegen. Für breite Resonanzen, re-

Protonen			Neutronen		
Niveau	E_i [MeV]	v_i^2	Niveau	E_i [MeV]	v_i^2
$1s_{\frac{1}{2}}$	-33.06	0.999	$1s_{\frac{1}{2}}$	-42.42	0.999
$1p_{\frac{3}{2}}$	-23.97	0.998	$1p_{\frac{3}{2}}$	-32.69	0.997
$1p_{\frac{1}{2}}$	-21.38	0.997	$1p_{\frac{1}{2}}$	-30.19	0.996
$1d_{\frac{5}{2}}$	-14.25	0.989	$1d_{\frac{5}{2}}$	-22.38	0.984
$2s_{\frac{1}{2}}$	-10.46	0.960	$2s_{\frac{1}{2}}$	-18.64	0.942
$1d_{\frac{3}{2}}$	-9.27	0.919	$1d_{\frac{3}{2}}$	-17.60	0.895
$1f_{\frac{7}{2}}$	-0.55	0.060	$1f_{\frac{7}{2}}$	-7.86	0.064
			$2p_{\frac{3}{2}}$	-4.60	0.019
			$2p_{\frac{1}{2}}$	-2.49	0.011
			$1f_{\frac{5}{2}}$	-0.52	0.008

Tabelle 5.3: BCS-Teilchen- und Lochenergien sowie Besetzungszahlen v_i^2 für Protonen und Neutronen im ^{40}Ca . Die Berechnung erfolgte mit den in Tabelle 5.2 aufgeführten Parametern.

spektive strukturlose Kontinuumsanteile wäre eine derartige Festlegung jedoch völlig willkürlich und führte damit auch zu nicht eindeutigen Resultaten.

Durch das Festlegen einer "Abschaltenergie" wäre außerdem zu erwarten, daß bei der Überlagerung von Kontinuumskomponenten keine "gebundene" Lochkomponente, also kein Zustand mit exponentiellem r-Abfall im Ortsraum, entsteht, da dafür auch höherenergetische Kontinuumswellenfunktionen in der Entwicklung benötigt würden. Daher wäre z. B. bei der Berechnung der Grundzustandsdichte eine Divergenz im Ortsraum zu erwarten. Dies ist der zweite Grund für die ausschließliche Verwendung von gebundenen Zuständen. Für zukünftige Betrachtungen sollte ein geeigneter BCS-Ansatz mit Kontinuumswellenfunktion und ortsabhängiger Paarkraft entwickelt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde darauf allerdings verzichtet.

Für die Berechnung der ^{41}Sc -Anregungszustände sind die energetisch tief liegenden Rumpf-Anregungszustände von ^{40}Ca von besonderer Bedeutung. Sie weisen im allgemeinen große Stärke auf und liefern daher auch große Beiträge zu den QPC-Massenoperatoren. Sie sind als diskrete Zustände im ^{40}Ca -Spektrum zu finden. Daher sollen die hier berechneten Zustände mit experimentellen Ergebnissen verglichen werden, wobei allerdings einige Einschränkungen gemacht werden müssen, wie im folgenden diskutiert wird. Ähnlich wie bei R. Siudak [Siu93] werden aus den zustandsabhängigen QRPA-Amplituden $N_{\lambda c}$ gemäß dem Ausdruck

$$\beta_{\lambda}^c = \sqrt{2\lambda + 1} N_{\lambda c} \quad (5.4)$$

Deformationsparameter β_λ^c für verschiedene QRPA-Zustände c mit der Multipolarität λ bestimmt.

Die Rechtfertigung für diese Darstellung ist, daß im Dichteentwicklungsansatz die Übergangsdichte als Produkt aus einer zustandabhängigen Amplitude $N_{\lambda c}$ und einer schematischen Übergangsdichte, hier einer Tassiedichte, geschrieben wird (siehe Gleichung (3.28)) und daher vergleichbar ist mit der Darstellung der kollektiven Übergangsdichte für Vibrationsanregungen. Die kollektiven Übergangsdichten können als Änderung der Grundzustandsdichte um die Gleichgewichtslage beschrieben werden [BoM69]. Im kollektiven Modell werden diese Übergangsdichten ebenfalls mit einem zustandsabhängigen Deformationsparameter β_λ^{exp} skaliert. Diese Dichten gehen dann in den Formfaktor zur Beschreibung von inelastischen Streuprozessen ein [BSD62]. Die Bestimmung der Deformationsparameter β_λ^{exp} erfolgt im allgemeinen aus einem direkten Vergleich der unskalierten, berechneten mit den experimentell bestimmten Wirkungsquerschnitten für inelastische Streuungen. Allerdings ist beim direkten Vergleich von β_λ^c und β_λ^{exp} Vorsicht geboten: Zum einen sind die verwendeten schematischen Übergangsdichten der beiden Ansätze oft unterschiedlich (hier Vibrationsmodell via Tassiemodell), zum anderen sind bei den experimentellen Übergängen auch kompliziertere Mehrphononanregungen enthalten. Abweichungen von bis zu einer Größenordnung sind daher möglich. Die Energien der Anregungszustände und ihre Anzahl sollten allerdings vergleichbar sein.

In dieser Arbeit wurden die berechneten Ergebnisse mit den Resultaten von Gruhn et al. [GKM72] verglichen. Gruhn et al. erhielten Deformationsparameter nach dem oben beschriebenen Verfahren aus inelastischer Protonenstreuung auf ^{40}Ca bei verschiedenen Einschußenergien. Konsistenterweise zeigte sich, daß die Deformationsparameter im Rahmen der experimentellen Genauigkeit unabhängig von der Einschußenergie sind, da es sich ja um Kerneigenschaften handelt. Für den Vergleich mit den QRPA-Ergebnissen werden die Werte für 35 MeV Einschußenergie verwendet. Sie liegen bis 10 MeV Anregungsenergie vor.

Die berechneten Deformationsparameter β_λ^c der niedrigliegenden Anregungszustände, die ja an die experimentellen Energien angepasst wurden, zeigen qualitativ das richtige Verhalten (Tabelle 5.4). Dies gilt im besonderen für die 3_1^- - und 5_1^- -Anregungen. Beide Zustände zeigen kollektive Vibrationsstruktur und sollten daher gut mit QRPA-Methoden beschrieben werden. Die Zustände positiver Parität, also der 0_2^+ -, 2_1^+ - und 4_1^+ -Zustand, hingegen, bilden eine sogenannte Quasi-Beta-Bande mit eher rotativem Charakter (Siehe N. Olsson et al. [ORT90] und Referenzen dort). Es ist bekannt, daß für die Beschreibung dieser Zustände Mehr-Phonon-Anregungen eine wesentliche Rolle spielen. Gerace und Green [GeG67] beschrieben diese tiefliegenden Zustände vorrangig als 4-Teilchen-4-Loch-Anregungen aus dem Grundzustand. Die nächsthöheren Zustände 2_2^+ und 4_2^+ , konnten als 2-Teilchen-2-Loch-Anregungen dargestellt werden (Tabelle 5.4). Die im QRPA-Modell berechneten Deformationsparameter sind daher für diese Anregungen gegenüber dem Experiment überschätzt. Ähnliche Abweichungen wurden in anderen 1-Phonon-RPA-Rechnungen gefunden [BMS77].

Niveau	0_2^+	1^-	2_1^+	3_1^-	4_1^+	5_1^-
E_{exp} [MeV]	3.353	0.0	3.904	3.736	5.279	4.492
β_λ^{exp}	0.106	0.341	0.035	0.210
E_{QRPA} [MeV]	3.389	0.0	3.908	3.786	5.277	4.479
β_λ^c	0.249	...	0.320	0.374	0.260	0.153
Normierung	0.570	0.725	0.856	0.940	1.860	2.100

Tabelle 5.4: Tiefliegende Anregungszustände im ^{40}Ca . Experimentelle Anregungsenergien [EJI81] und mit den Normierungsparametern angepasste QRPA-Energien sowie Deformationsparameter. Bei dem spuriosen 1^- -Zustand entfällt ein Deformationsparameter. Für den 0_2^+ -Zustand sind keine experimentellen Ergebnisse bekannt.

Niveau	2_2^+	4_1^-	2_1^-	3_2^-	4_2^+	3_3^-
E_{exp} [MeV]	5.249	5.617	6.026	6.285	6.505	6.581
β_λ^{exp}	0.030	0.083	0.045	0.103	0.045	0.083
E_{QRPA} [MeV]	5.946	6.200	6.595	6.491	7.567	7.714
β_λ^c	0.060	0.053	0.095	0.061	0.130	0.015

Tabelle 5.5: Höhere Anregungszustände im ^{40}Ca . Experimentelle Anregungsenergien [EJI81] und QRPA-Energien, sowie Deformationsparameter.

Auch die Deformationsparameter β_λ^c der höheren Anregungszustände haben im Vergleich zu den Resultaten von Gruhn et al. fast alle dieselbe Größenordnung (siehe Tabelle 5.5). Die Energien stimmen ebenfalls relativ gut überein. Die Ergebnisse und der Vergleich mit dem Experiment sind graphisch in Abbildung 5.1 dargestellt. Hier werden die Deformationsparameter und die Anregungsenergien für alle Zustände negativer Parität bis 10 MeV Anregungsenergie gezeigt. Insgesamt zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie.

Als weitere wichtige Vergleichsgröße mit dem Experiment wurde die Lage der Riesenresonanzen ermittelt. Wie bekannt, können Riesenresonanzen theoretisch ebenfalls als kollektive Quasiphonon-Anregungen verstanden werden. Wesentliche Anteile dieser Quasiphononen sind Teilchenkomponenten des Kontinuums, insbesondere die Einteilchenresonanzen. Testrechnungen haben gezeigt, daß die Lage der Riesenresonanzen von der Lage der Einteilchenresonanzzustände stark abhängig ist. Eine künstliche Verschiebung der $g_{9/2}$ -Protonresonanz z. B. führte zu einer Energieverschiebung sowohl der Quadrupol- als auch der hochliegenden Oktopolresonanz.

Um einen besseren Überblick über die Rumpfanregungen zu bekommen, sind energiemittelte Stärkefunktionen für 0^\pm bis 5^\pm -Anregungen in den Abbildungen 5.2 bis

5.5 gezeigt. Diese Größen erhält man durch Falten der QRPA-Amplitudenquadrate $N_{\lambda c}^2$ mit einer energieabhängigen Faltungsbreite Γ_F , die die Diskretisierung in der QRPA-Rechnung berücksichtigt. Es handelt sich bei dieser Größe gerade um den Ausdruck $1/|\langle \varphi_{\nu, \ell j}^0 | \phi_{\ell j}^0(\epsilon_\nu) \rangle|^2$, also um den reziproken Summanden aus der Niveaudichte freier Teilchen (siehe Gleichung (2.47)). Wie im Anhang H gezeigt, ist diese Größe näherungsweise gleich dem Quadrat von $N_{\ell j}^\nu / N(\epsilon_\nu)$ also dem Quotienten der Normierungskonstanten der Kavitätseigenfunktionen und der echten Kontinuumsfunktionen. Es ergibt sich dann für Γ_F zu Energien E oberhalb der Teilchenaufbruchschwelle E_s , der folgende Ausdruck:

$$\Gamma_F = \frac{2\pi}{R_S} \sqrt{\frac{\hbar^2}{2\mu}} \sqrt{E - E_s}. \quad (5.5)$$

Dabei sollte der Kavitätsradius R_S eigentlich so gewählt werden, daß Γ_F deutlich kleiner als die experimentellen Breiten der wichtigsten Riesenresonanzen ist. Nur so ist ein direkter Vergleich einer berechneten Zerfallsbreite mit dem experimentellen Wert möglich. Der hier verwendete Wert von 20 fm für R_S , der aus numerischen Gründen gewählt wurde, liefert etwas zu große Breiten. In den Abbildungen 5.2 und 5.3 sind die Riesenresonanzen für natürliche Paritäten als breite Strukturen in der Nähe der Pfeile, die das Maximum der experimentellen Werte kennzeichnen, zu erkennen. Die experimentellen Werte für die Energien und die Breiten der Riesenresonanzen sind in Tabelle 5.6 angegeben. Die berechneten Energien liegen meist ein wenig zu tief.

Niveau	GMR	IVGDR	GQR	IVGQR	HGOR
E_{exp} [MeV]	20.0 ^a	19.9 ^b	17.8 ± 0.3 ^c	38.0 ^b	31.6 ^b
Δ_{exp} [MeV]	3.5 ^a	4.0 ^b	2.5 ± 0.5 ^c	10.0 ^b	10.0 ^b

Tabelle 5.6: Die Energien und Breiten der wichtigsten Riesenresonanzen aus ^a [BLA76], ^b [BER79] und ^c [BER81] (berechnet).

Abschließend kann festgestellt werden: Die für die QPC-Rechnung benötigten tief liegenden Anregungszustände konnten in einer befriedigenden Weise durch die QRPA-Rechnung ermittelt werden. Die Deformationsparameter liegen in der selben Größenordnung wie experimentell bestimmte Werte. Auch die daraus vorausgesagten Energien von höher liegenden Anregungszuständen können im QRPA-Ansatz relativ gut reproduziert werden. Die zugehörigen Übergangsstärken sind sicher nicht für al-

le Zustände realistisch, da im verwendeten QRPA-Modell nur Ein-Quasiphonon-Anregungen berücksichtigt werden.

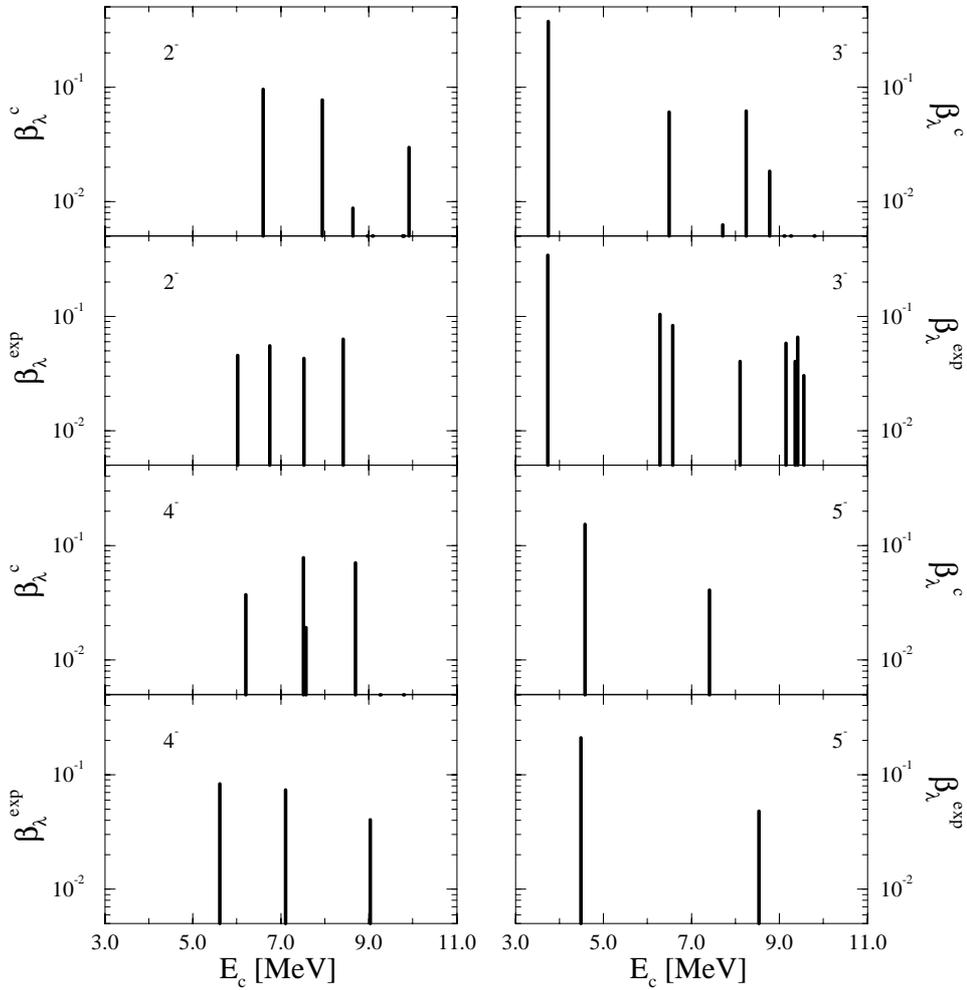


Abbildung 5.1: Deformationsparameter β_λ für negative Paritätszustände von ^{40}Ca bis 10 MeV Anregungsenergie. Die Größen $\beta_\lambda^{\text{exp}}$ sind Ergebnisse aus einer experimentellen Analyse von Gruhn et al. [GKM72]. Die Werte β_λ^c wurden aus dem QRPA-Ansatz erhalten.

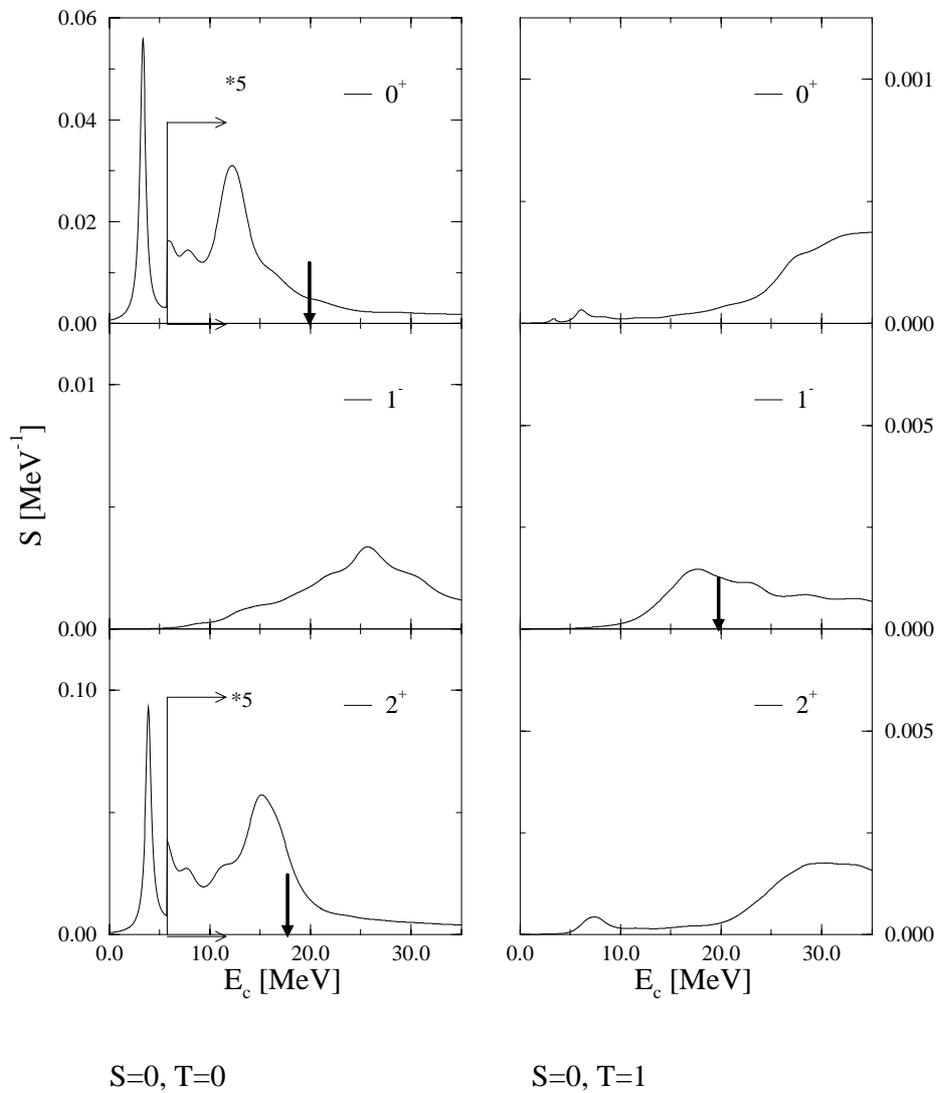


Abbildung 5.2: Übergangsstärken für die natürlichen Paritäten 0^+ bis 2^+ für skalare, isoskalare Wechselwirkung ($S=0, T=0$), sowie skalare, isovektorielle Wechselwirkung ($S=0, T=1$). Die Pfeile geben die Lage der experimentell bestimmten Riesenresonanzen (GMR, IVGDR, GQR) an (siehe Tabelle 5.6).

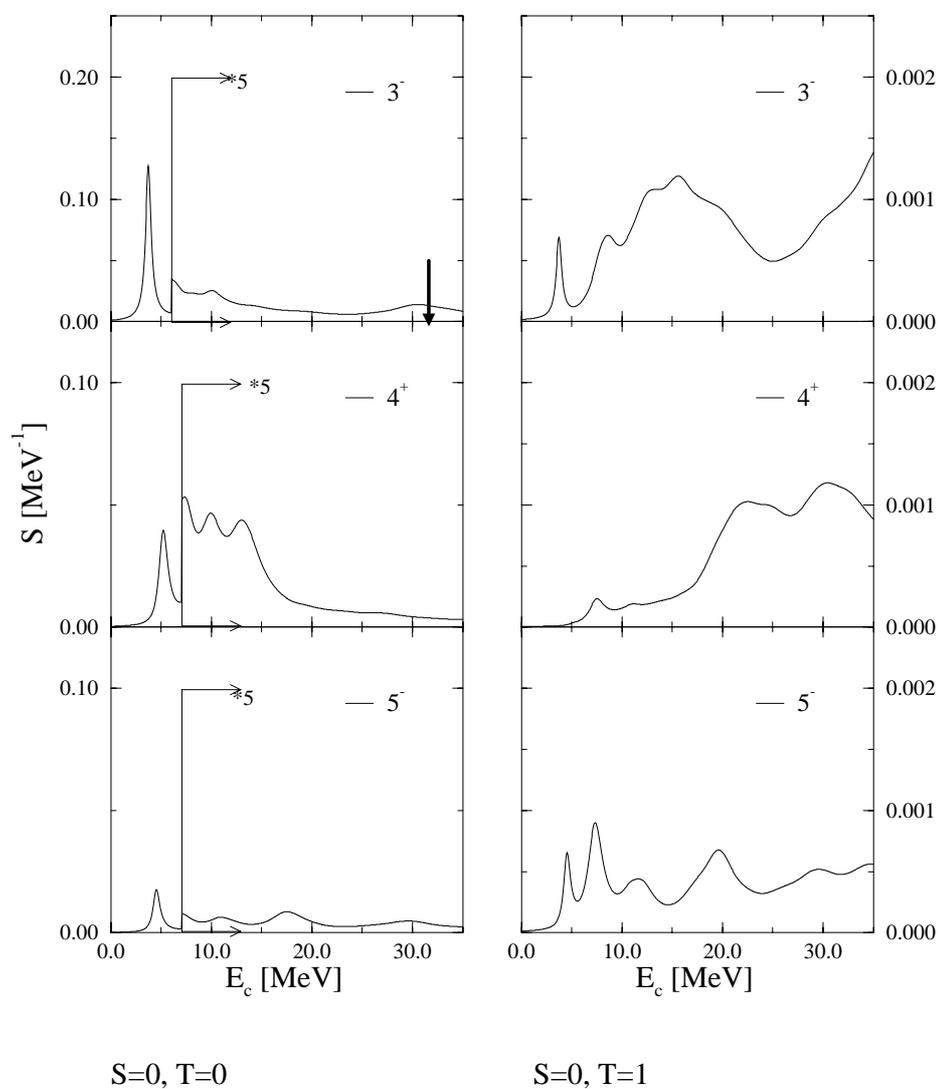


Abbildung 5.3: Übergangsstärken für die natürlichen Paritäten 3^- bis 5^- für skalare, isoskalare Wechselwirkung ($S=0, T=0$), sowie skalare, isovektorielle Wechselwirkung ($S=0, T=1$). Der Pfeil zeigt die Lage der hochliegenden Oktopolresonanz (HGOR) an.

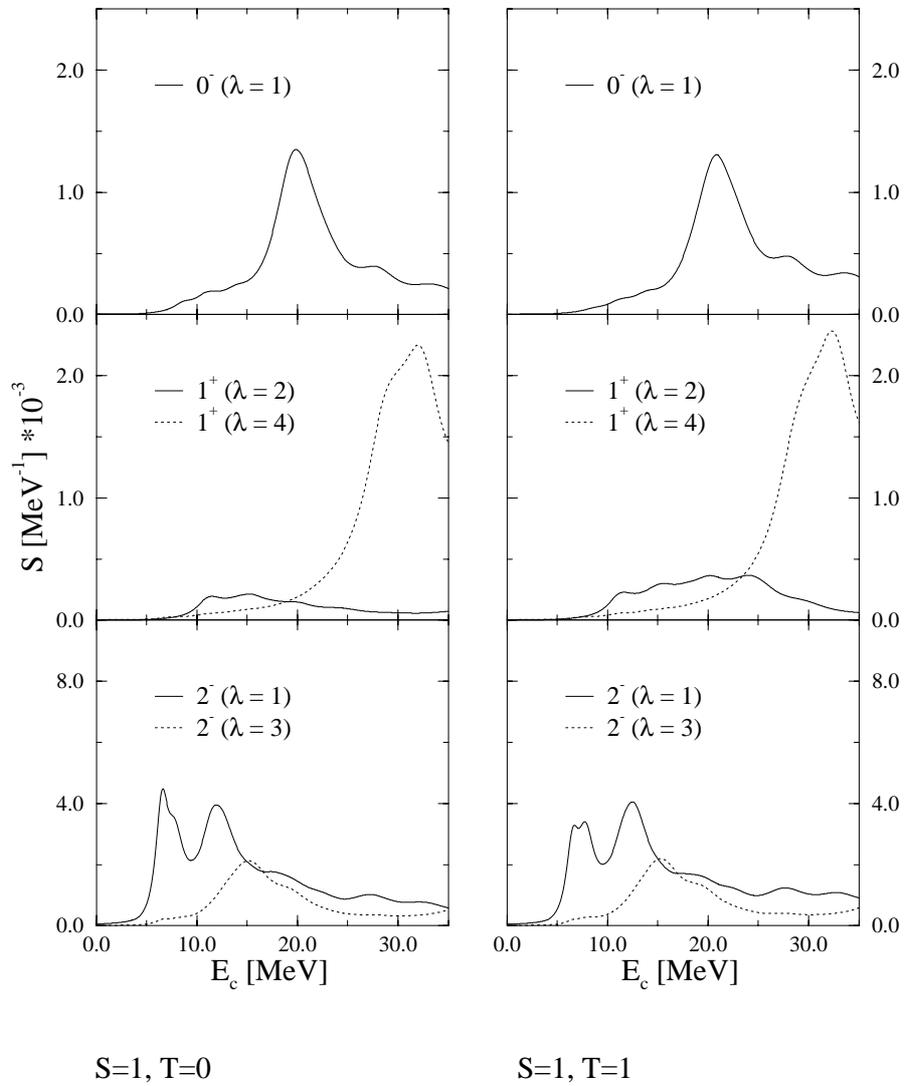


Abbildung 5.4: Übergangsstärken für die unnatürlichen Paritäten 0^- bis 2^- für vektorielle, isoskalare Wechselwirkung ($S=1, T=0$), sowie vektorielle, isovektorielle Wechselwirkung ($S=1, T=1$). Gezeigt sind verschiedene Multipolaritäten λ .

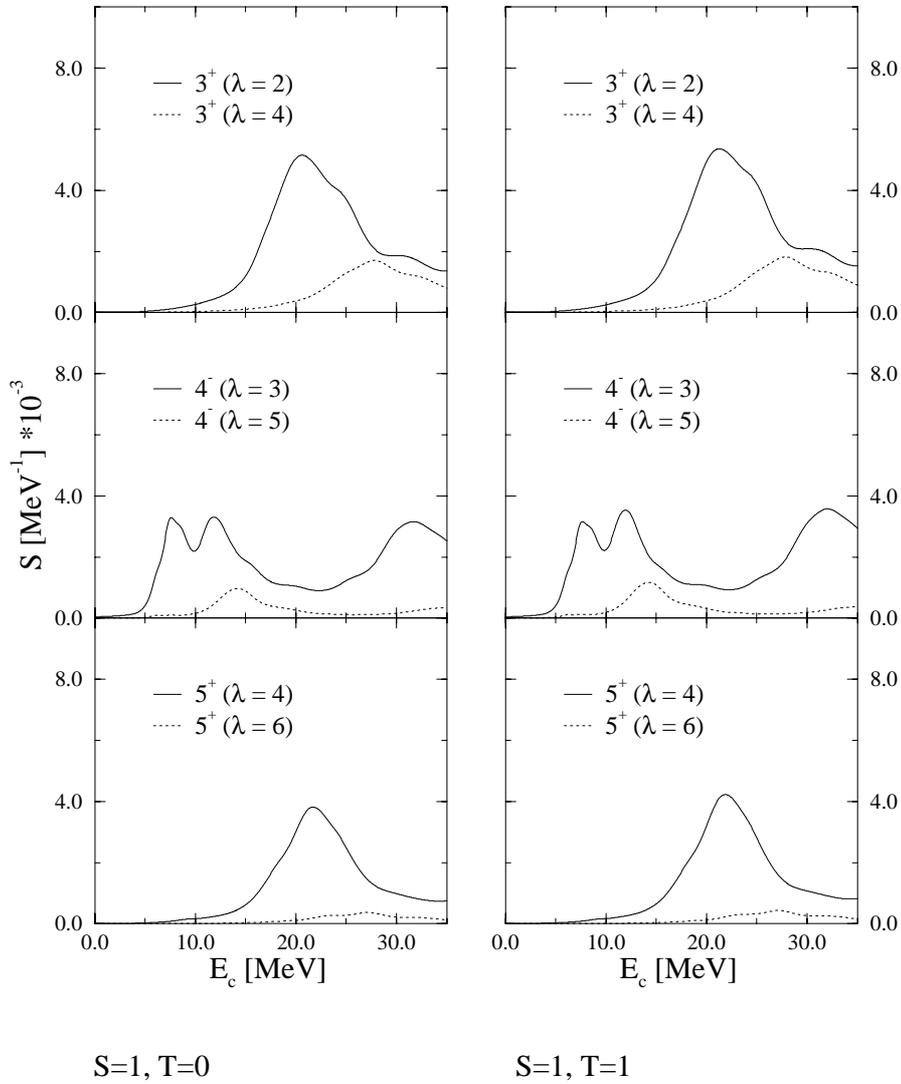


Abbildung 5.5: Übergangsstärken für die unnatürlichen Paritäten 3^+ bis 5^+ für vektorielle, isoskalare Wechselwirkung ($S=1, T=0$), sowie vektorielle, isovekterielle Wechselwirkung ($S=1, T=1$). Gezeigt sind verschiedene Multipolaritäten λ .

5.4 QPC-Stärkefunktionen und S-Matrixelemente für ^{41}Sc

In diesem Abschnitt wird die QPC-Methode aus Kapitel 3 praktisch umgesetzt. Dazu werden die QPC-Gleichungen (3.67) und (3.68) auf die im Anhang G beschriebene, diskrete Basis umgeschrieben. Auf diese Weise erhält man aus dem Integralgleichungssystem ein diskretes, von der Anregungsenergie E_λ abhängiges Gleichungssystem mit unbekanntem Koeffizienten z_ν^λ zur diskreten Basis. Auch die Inhomogenitäten und die Hauptwertintegrale über die Massenoperatoren können auf diese Weise als Summe² dargestellt werden. Im Falle der Hauptwertintegrale sind die Summanden dann Produkte aus den Matrixelementen der 1-3-QT-Restwechselwirkung bezüglich der diskreten Basis und den Hauptwertintegralen von je zwei Amplituden der Basistransformation, gemäß Gleichung (G.17) aus Anhang G.

Mit einer bestimmten Schrittweite für E_λ , hier 10 keV, wird das diskrete Gleichungssystem gelöst. Um die Koeffizienten z_ν^λ als Lösungen zu erhalten, bedarf es eines erheblichen numerischen Aufwands, da zum einen das Gleichungssystem abhängig von der Zahl der Basiszustände eine hohe Dimension hat, zum anderen zu jeder Energie E_λ sowohl die Amplituden der Basistransformation als auch die Hauptwertintegrale von je zwei Amplituden der Basistransformation ermittelt werden müssen. Die eigentlich interessierenden Größen z_n^λ und $b^\lambda(E_\lambda)$ können dann wieder als Linearkombination dieser Koeffizienten z_ν^λ aus Gleichung (G.10) erhalten werden. Schließlich können Einteilchen-S-Matrixelemente bzw. zugehörige Partialwellenamplituden $C_{\ell j}$ zu festgelegtem Spin j und Bahndrehimpuls ℓ aus den Koeffizienten $b^\lambda(E_\lambda)$ und den ungestörten Einteilchenstreuphasen $\delta_{\ell j}(E_\lambda)$ (siehe Gleichung (3.79)) bestimmt werden. Die zuletzt genannten Größen legen dann eindeutig den asymptotischen Verlauf der zugehörigen ungebundenen Einteilchenwellenfunktion fest. Wellenfunktionen mit dieser Asymptotik, werden dann wie im nächsten Abschnitt beschrieben, zur Berechnung des DWBA-Formfaktors einer Schwerionenreaktion verwendet.

Die für die QPC verwendete Restwechselwirkung, basiert im übrigen wieder auf der effektiven M3Y-Wechselwirkung, die bereits bei der QRPA Verwendung fand. Im Gegensatz zur QRPA, bei der verschiedene Normierungskonstanten zur Anpassung an tiefliegende Zustände benutzt wurden, erfolgte hier nur eine globale Normierung mit einem Faktor von 0.6 zur Skalierung der Restwechselwirkung. Mit diesem Wert konnten die Energien und die Breiten wichtiger resonanter Zustände befriedigend beschrieben werden. Da insbesondere die Energien der Resonanzen große Abhängigkeit von den ungestörten 1- und 3-QT-Energien zeigen, ist die Bestimmung einer geeigneten Normierungskonstanten mit Unsicherheiten behaftet. Eine Optimierung dieses Werts als auch der Einteilchenenergien wäre sehr aufwendig und erfolgte daher nicht. Außerdem zeigt erst die Verwendung von einem einheitlichen Einteilchenpotential und einer Normierungskonstante die hohe Stringenz des zu Grunde liegenden

²In Wirklichkeit handelt es sich natürlich um eine Reihe, da es sich um unendlich viele Basiszustände handelt. In der Praxis werden aber nur endlich viele Zustände berücksichtigt.

Modells, auch wenn dadurch größere Unterschiede zwischen Theorie und Experiment erhalten werden. Dieser Vergleich ist Gegenstand des zweiten Teils dieses Abschnitts, doch zunächst sollen einige qualitative Ergebnisse an Hand der Abbildungen 5.6 bis 5.8 diskutiert werden. In diesen Abbildungen sind die Quadrate der Partialwellenamplituden für die verschiedenen Protonenzustände dargestellt, und zwar die reine Einteilchengröße (ET) und die entsprechende QPC-Größe (QPC), die durch Ankopplung der Rumpfanregungen fragmentiert ist. Folgende Resultate sind zu sehen: Tiefliegende Einteilchenzustände, gebundene als auch Resonanzzustände, werden durch die Ankopplung der 3-QT-Zustände energetisch zu tieferen Energien verschoben. Die Energieverschiebung beträgt ca. 0.5–2.0 MeV. Außerdem erfolgt eine Fragmentation des ungestörten Zustands, sodaß die Stärken der tiefliegenden Zustände kleiner Eins werden, wie man später sehen wird. Der Grund für eine derartige Energieverschiebung ist, daß die ungestörten 3-QT-Zustände energetisch höher liegen als die Einteilchenzustände und damit die Beiträge zu den Massenoperatoren (siehe Gleichungen (3.61), (3.62), (3.63)) für eine Energie E_λ im Bereich der ungestörten Einteilchenenergie E_n immer negatives Vorzeichen haben. Man erhält daher für Energien E_λ , die kleiner als die der 3-QT-Energien E_ν sind, signifikante 1-QT-Amplituden z_n^λ bzw. $\zeta^\lambda(\epsilon)$, aus denen der verschobene Einteilchenzustand gebildet wird. Mit dem im Abschnitt 3.2.2 beschriebenen Modell konnte ein derartiges Verhalten qualitativ für den $p_{\frac{1}{2}}$ -Streuzustand nachgewiesen werden. Ein realistisches Resultat aus den QPC-Rechnungen für die p -Zustände ist in Abbildung 5.6 zu sehen. Bei den $p_{\frac{1}{2}}$ -Zuständen (Abb. 5.6) sind deutlich zwei Peaks um die ungestörte $p_{\frac{1}{2}}$ -Resonanz zu erkennen. Ein Peak ist um etwa 2 MeV nach unten, der andere um 1.5 MeV nach oben verschoben. Völlig entsprechend verhält sich der energetisch tieferliegende $p_{\frac{3}{2}}$ -Zustand. Allerdings ist hier die tiefliegende Resonanz bereits unter die Teilchenauflbruchschwelle geschoben worden – es hat sich also ein gebundener Zustand gebildet. Einteilchenzustände mit mittlerer Anregungsenergie (für ^{41}Sc bereits Resonanzen) fragmentieren in eine Vielzahl von Zuständen, die noch gut unterscheidbar sind. Dies gilt insbesondere für den $f_{\frac{5}{2}}$ -Zustand. Die QPC-Rechnung liefert insgesamt sieben signifikante Peaks mit unterschiedlichen Breiten für das Quadrat der Partialwellenamplitude, wie in Abbildung 5.7 gezeigt. Der Grund für diese Fragmentierung ist das Vorhandensein von ungestörten 3-QT-Zuständen mit Energien nahe der ungestörten Einteilchenenergie. Damit kommt es in diesem Energiebereich zu starken Fluktuationen in den Massenoperatoren, was wiederum die Bildung signifikanter 1-QT-Amplituden zur Folge hat. Auch dieser Aspekt wurde bereits im Abschnitt 3.2.2 beschrieben und in Abbildung 3.1 gezeigt.

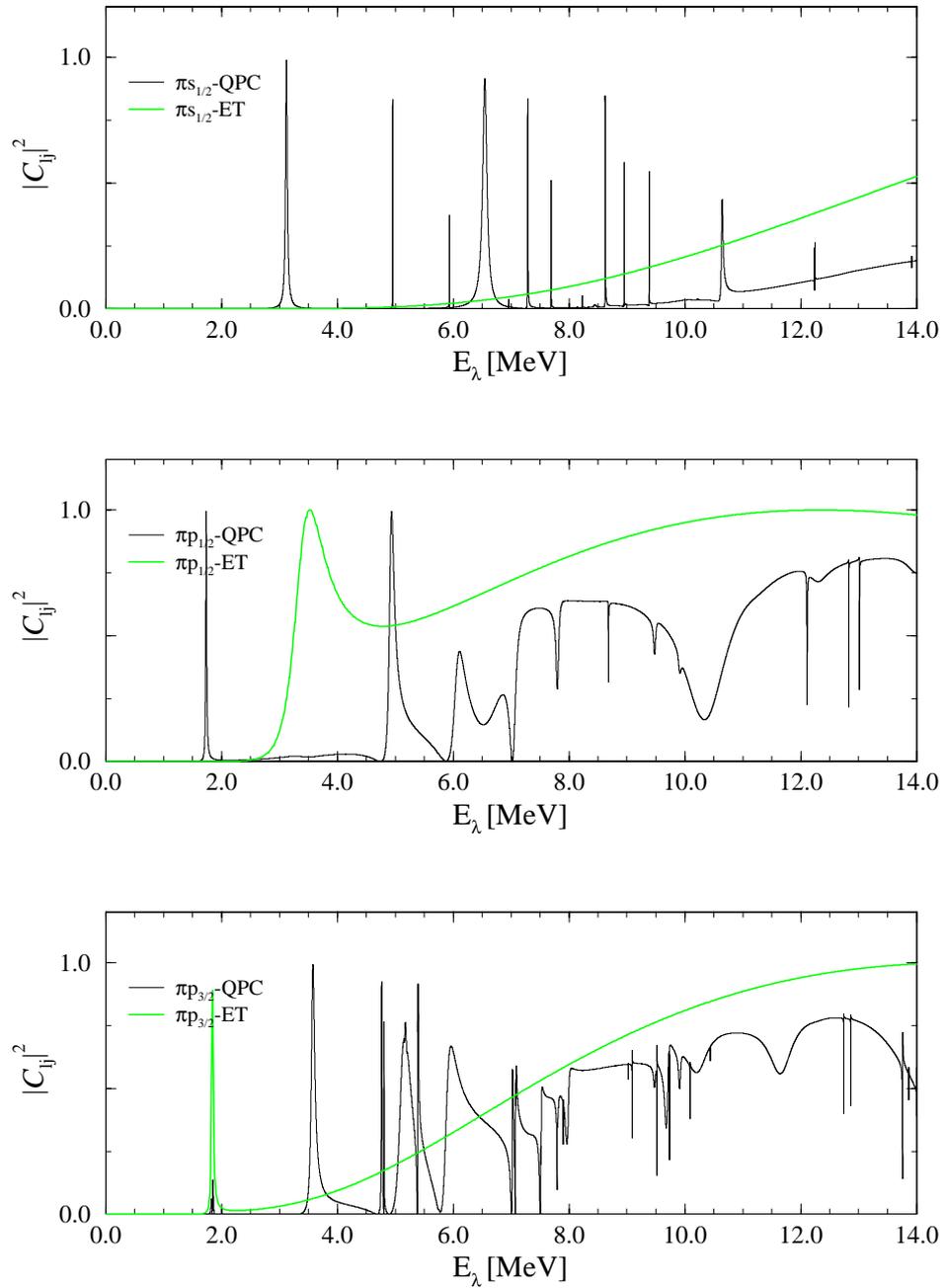


Abbildung 5.6: Quadrat der QPC- (schwarz) und der Einteilchenpartialwellenamplitude (grün) für die $s_{\frac{1}{2}}$, $p_{\frac{1}{2}}$ und $p_{\frac{3}{2}}$ -Streuzustände.

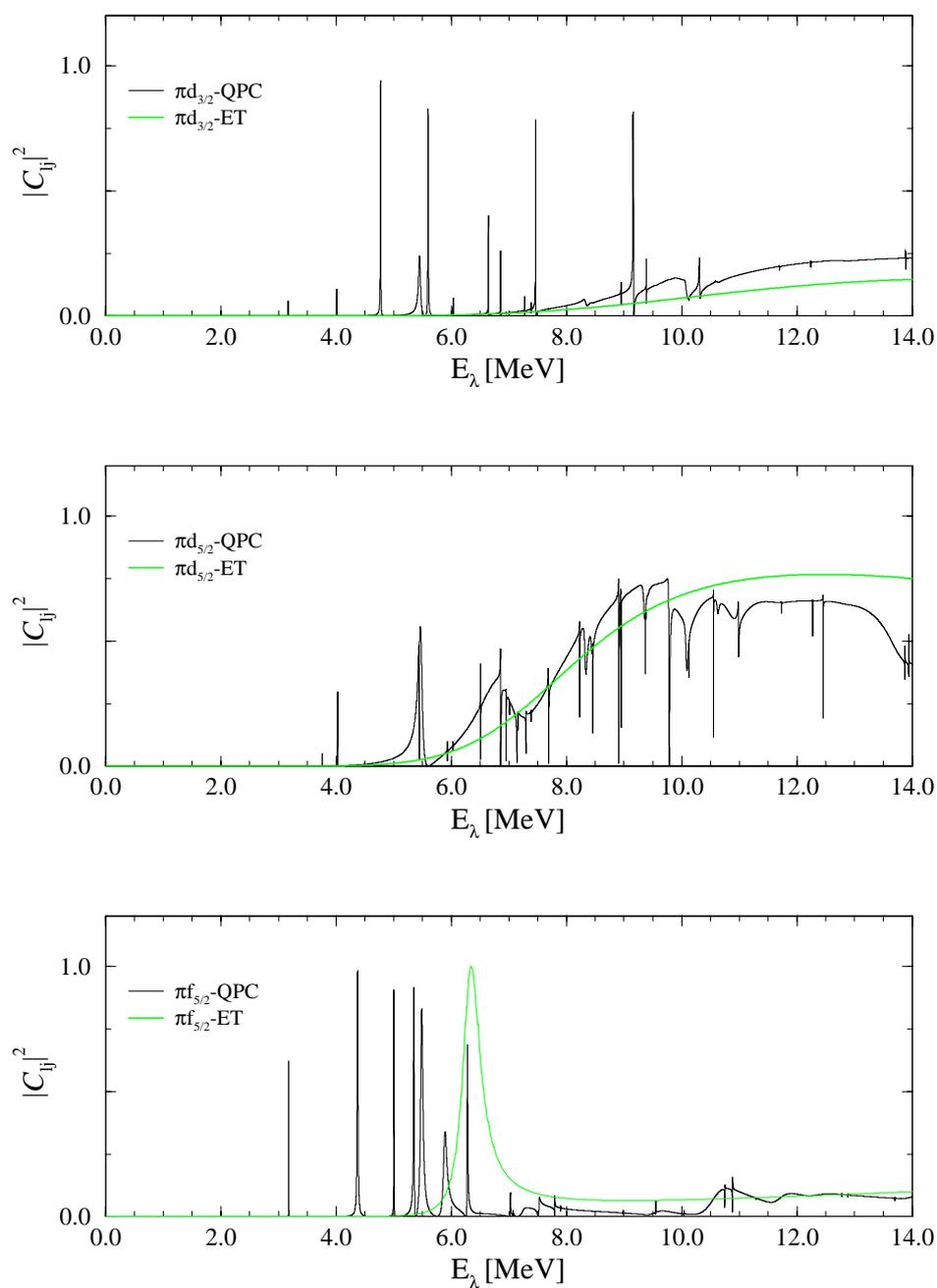


Abbildung 5.7: Quadrat der QPC- (schwarz) und der Einteilchenpartialwellenamplitude (grün) für die $d_{3/2}$, $d_{5/2}$ und $f_{5/2}$ -Streuzustände.

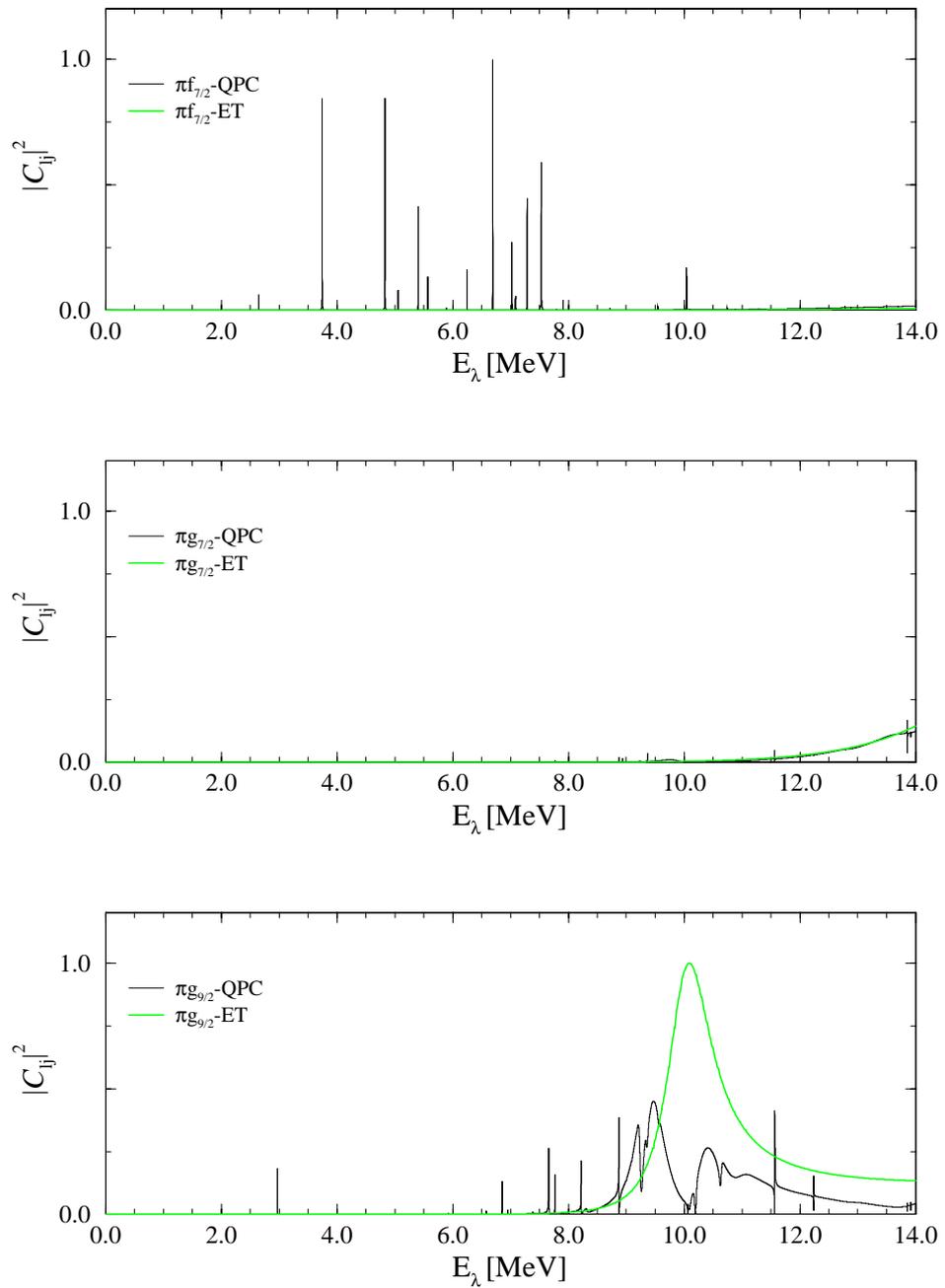
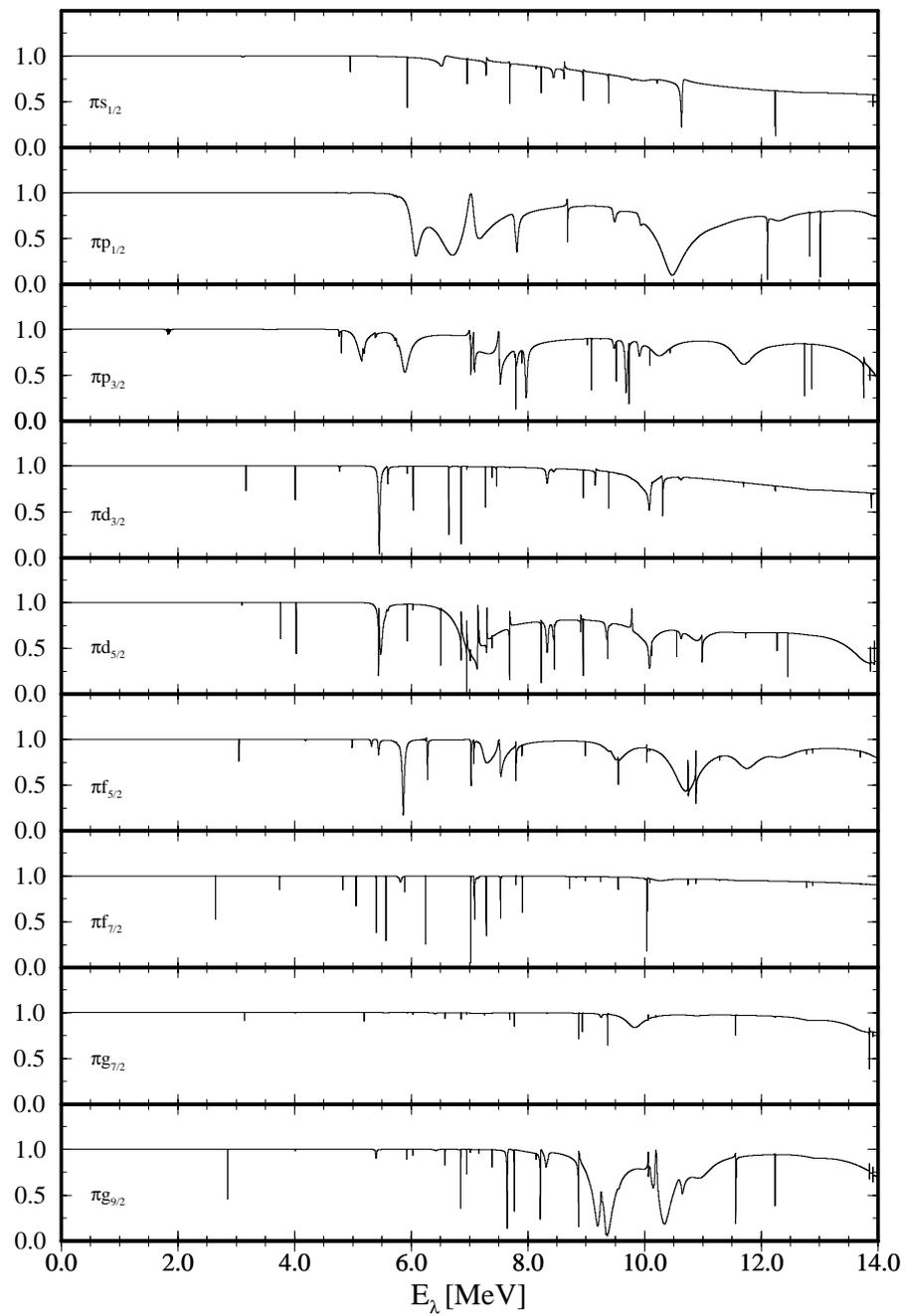


Abbildung 5.8: Quadrat der QPC- (schwarz) und der Einteilchenpartialwellenamplitude (grün) für die $f_{7/2}$, $g_{7/2}$ und $g_{9/2}$ -Streuzustände.

Abbildung 5.9: Betrag der QPC- S -Matrixelemente $|S|$.

Energetisch hochliegende Einteilchenresonanzen koppeln an eine Vielzahl von 3-QT-Zuständen an. Die ungestörte Einteilchenresonanzstruktur wird daher regelrecht aufgelöst. Die Stärke findet sich in einer Vielzahl von Zuständen wieder. Im Falle des ^{41}Sc sieht man dies für die $g_{\frac{9}{2}}$ -Resonanz in Abbildung 5.8, aber auch für die nichtresonanten Anteile der $s_{\frac{1}{2}}$, $p_{\frac{1}{2}}$, $p_{\frac{3}{2}}$, $d_{\frac{3}{2}}$ - und $d_{\frac{5}{2}}$ -Streuzustände (Abbildungen 5.6 und 5.7). Der $g_{\frac{9}{2}}$ -Zustand zeigt außerdem einen weiteren interessanten Aspekt: Bei etwa 3 MeV Anregungsenergie oberhalb der Teilchenaufbruchschwelle ist durch die Ankopplung des $[3_1^- \otimes f_{\frac{7}{2}}]_{\frac{9}{2}}$ -3-QT-Zustands eine schmale Resonanz entstanden. Derartige Resonanzen weisen wegen der sehr kleinen Einteilchenbreite (großes ℓ !) bei dieser Energie große Stärke auf. Tatsächlich ist dieser, vermeintlich kleine Peak, für die beiden dominanten tiefliegenden Resonanzen in der Transferreaktion $^{40}\text{Ca}(^{13}\text{C}, ^{12}\text{B})^{41}\text{Sc}$ verantwortlich. Interessanterweise liegt dieser Zustand energetisch unter den $f_{\frac{5}{2}}$ -Fragmenten. Zustände, die solche Abweichungen von der klassischen Schalenstruktur zeigen, werden oft als Intruder-Zustände bezeichnet.

In Abbildung 5.9 sind die Beträge der zugehörigen S -Matrixelemente dargestellt. Ihr Wert ist für niedrige Anregungsenergien ungefähr Eins. Mit steigender Anregungsenergie findet man resonanzartige Minima im Betrag. Diese Minima kommen durch die Ankopplung von 3-QT-Zuständen zustande, ihre Anzahl steigt auf Grund der zunehmenden Niveaudichte der 3-QT-Zustände stark an. Im Mittel nimmt daher der Betrag der S -Matrixelemente ab. In einem phänomenologischen Bild bedeutet dies gerade die Vergrößerung des Imaginärteils des optischen Potentials.

Nach diesen allgemeineren Aspekten sollen die Stärken für die einzelnen berechneten Zustände diskutiert und mit dem Experiment verglichen werden. Da für ^{41}Sc nur fragmentarisch experimentelle Daten vorliegen (Siehe [YKK70], [MCC74], [KMV75], [BOB90] und [GLW91]) werden zunächst die aufsummierten QPC-Stärkefunktionen, soweit möglich, mit den experimentellen Daten der genauen Analyse von F. J. Eckle et al. ([ELG90]) für den Spiegelkern ^{41}Ca verglichen. Es ist zu erwarten, daß diese Stärken in Abhängigkeit der Anregungsenergie relativ zum Grundzustand entsprechende Strukturen zeigen.

Dieser Vergleich ist in den Figures 5.11 bis 5.12 zu sehen. Hier werden die Stärkefunktionen selbst und die aufsummierte Stärke in Abhängigkeit der Anregungsenergie dargestellt. Allerdings erstreckte sich das Experiment nur über ein Energieintervall bis 8.6 MeV, sodaß für höhere Energie des berechneten Spektrums keine Vergleichsdaten vorliegen. Im wesentlichen zeigt sich, daß die aufsummierten QPC-Stärkefunktionen für das ^{41}Sc einen entsprechenden Verlauf zeigen wie die experimentellen Daten von ^{41}Ca . Dies gilt im besonderen für die Stärkefunktionen von ungefüllten Schalen, also von Teilchenzuständen wie $p_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}$, $f_{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}}$ und $g_{\frac{7}{2}, \frac{9}{2}}$. Größere Abweichungen sind bei höheren Anregungsenergien für die gefüllten Schalen $s_{\frac{1}{2}}$, $d_{\frac{3}{2}}$, $d_{\frac{5}{2}}$ in Abbildung 5.10 zu sehen. Ein Grund dafür ist vermutlich die Verwendung der Kastenpotential-Näherung für die Einteilchenbreite bei der Berechnung der Stärke. Für diese Schalen existieren keine Resonanzzustände aus denen eine Einteilchenbreite gewonnen werden kann. Wie diskutiert, wurden daher in Gleichung (5.1) für die Einteilchenbreiten nur die Näherung aus Gleichung (5.2) eingesetzt, die zwar recht

gut die Energieabhängigkeit nicht aber die absolute Größe der Breite beschreiben. Außerdem sieht man bei allen Zuständen, daß die theoretische Stärke eine geringere Fragmentation als die experimentellen Daten aufweist. Dies ist zum einen auf das Fehlen komplexerer Konfigurationen, wie zum Beispiel 5-QT-Zuständen beim QPC-Ansatz, zurückzuführen, zum anderen handelt es sich beim ^{41}Sc im betrachteten Energieintervall bereits um Proton-Streuzustände, die vermutlich anderes fragmentieren als die gebundenen ^{41}Ca -Neutron-Zustände.

Die Berücksichtigung von 5-QT-Zustände würde zu einer Verschiebung und Fragmentierung der 3-QT-Zustände führen und damit die Matrixelemente in den QPC-Massenoperatoren verändern [ELG90]. Tatsächlich ist ein derartiges Verhalten durchaus realistisch. Um dies zu zeigen sind in Abbildung 5.13 die Quadrate der Partialwellenamplituden für die $f_{\frac{5}{2}}$ - und $f_{\frac{7}{2}}$ -Zustände im Detail mit den experimentellen spektroskopischen Amplituden verglichen. Man sieht dort isolierte $f_{\frac{5}{2}}$ - und $f_{\frac{7}{2}}$ -Resonanzen, die aus den QPC-Rechnungen erhalten werden. Um diese gruppieren sich verschiedene gemessene $f_{\frac{5}{2}}$ - und $f_{\frac{7}{2}}$ -Zustände des ^{41}Ca . Eine genaue Zuordnung der einzelnen Peaks ist aber schwierig. Dies gilt auch für die experimentellen Ergebnisse. So ist die Zuordnung zum Bahndrehimpuls ℓ meist gesichert, um welche j -Quantenzahl es sich handelt, bleibt aber unsicher. Zum Beispiel wird für die $f_{\frac{5}{2}}$ -Zustände bei einer Anregungsenergie von ca. 5.8 MeV aus der QPC-Rechnung nur eine $f_{\frac{5}{2}}$ -Resonanz bei 6.28 MeV und eine $f_{\frac{7}{2}}$ -Resonanz bei 5.65 MeV erhalten. Eckle et al. hatten für die entsprechenden ^{41}Ca -Zustände keine eindeutige j -Zuordnung. Mittig et al. [MCC74] und Koltay et al. [KMV75] hingegen, nahmen für die entsprechenden ^{41}Sc -Zustände allgemein $j = \frac{5}{2}$ an. Dabei erscheint die Argumentation fragwürdig [MCC74], daß auf Grund der vollständigen $f_{\frac{7}{2}}$ -Stärke im Grundzustand keine weitere $f_{\frac{7}{2}}$ -Stärke vorliegen kann. Auch das $f_{\frac{7}{2}}$ -Kontinuum trägt zur Stärke bei, sodaß die aufsummierte Stärke größer Eins werden kann.

Trotz einiger Unsicherheiten konnte ein direkter Vergleich der QPC-Resultate für die spektroskopischen Faktoren, sowie für die Anregungsenergien und die Protonenbreiten mit den experimentellen Daten für einige prominente Zustände gemacht werden (Siehe Tabelle 5.7). In der Tabelle werden experimentelle Daten für elastische Protonenstreuung [MCC74], [KMV75], sowie die Ergebnisse aus Transferreaktionen [YKK70], [BOB90] aufgeführt. Es zeigen sich mit wenigen Ausnahmen quantitativ gute Übereinstimmungen. Dies gilt allerdings nur für die prominenten Zustände. Viele kleinere Peaks können in der QPC-Rechnung nicht erhalten werden, bzw. tragen kaum zur Stärke bei und auch die berechneten Energien weichen oft um einige hundert keV ab. Dies liegt wie bereits beschrieben zum einen am verwendeten Ansatz, der keine Fragmentation der 3-QT-Zustände berücksichtigt, zum anderen aber auch an der Unsicherheit der Einteilchenenergien als Eingangsgrößen. Die hier verwendeten Einteilchenenergien entspringen einem sehr einfachen empirischen Ansatz. Wie wichtig die Lage der Einteilchenenergien ist, wurde bereits auf Seite 136 für die Lage der Riesenresonanzen erwähnt, und wird hier nochmals für den $g_{\frac{9}{2}}$ -Zustand diskutiert. Untersuchungen haben gezeigt, daß der größte Teil der Stärke in einem Anregungsenergiebereich von 2.0-12.4 MeV zu finden ist [GLW91].

J^π	E_{exp} [MeV]	S_{el}/S_{tra}	Γ_{exp} [keV]	E_{qpc} [MeV]	S_{qpc}	Γ_{qpc} [keV]	J_{qpc}^π
$f_{\frac{7}{2}}^-$/0.000/0.96 ^c		0.000	0.78		$f_{\frac{7}{2}}^-$
$p_{\frac{3}{2}}^-$	1.714 ^a /1.714 ^c	0.83 ^a /0.86 ^c		1.734	0.59		$p_{\frac{3}{2}}^-$
$d_{\frac{3}{2}}^-$/2.100 ^d/0.07 ^d		1.792	0.05		$d_{\frac{3}{2}}^-$
$p_{\frac{1}{2}}^-$	3.478 ^a /3.467 ^c	0.90 ^a /0.75 ^c	80±20 ^a	3.642	0.86	17	$p_{\frac{1}{2}}^-$
$f_{\frac{5}{2}}^-$	4.947 ^a /4.812 ^d	0.10 ^a /0.02 ^d	2±0.4 ^a	5.086	0.10	1	$f_{\frac{5}{2}}^-$
$g_{\frac{9}{2}}^-$	5.036 ^a /5.036 ^c	0.12 ^a /0.12 ^c	0.4±0.1 ^a	4.874	0.14	0.4	$g_{\frac{9}{2}}^-$
$d_{\frac{5}{2}}^-$	5.417 ^a /5.416 ^d	0.05 ^a /0.03 ^d	18±5 ^a	5.932	0.005	0.4	$d_{\frac{5}{2}}^-$
$f_{\frac{5}{2}}^-$	5.647 ^a /.....	0.06 ^a /.....	3±1 ^a	5.651	0.17	3	$f_{\frac{7}{2}}^-$
$f_{\frac{5}{2}}^-$	5.706 ^a /5.703 ^c	0.23 ^a /0.31 ^c	12±4 ^a	6.279	0.30	15	$f_{\frac{5}{2}}^-$
$f_{\frac{5}{2}}^-$	5.860 ^b /5.872 ^d	0.16 ^b /0.06 ^d		

Tabelle 5.7: Anregungsenergien, spektroskopische Faktoren und Protonenbreiten für tiefliegende Anregungszustände des ^{41}Sc . Die Daten sind den Referenzen ^a [KMV75], ^b [MCC74], ^c [GLW91] und ^d [YKK70] entnommen. S_{el} bezeichnet spektroskopische Faktoren für elastische Protonenstreuung, S_{tra} sind die aus der Transferreaktion $^{40}\text{Ca}(^3\text{He}, d)^{41}\text{Sc}$ gewonnenen Größen. Die experimentellen Breiten Γ_{exp} sind Protonzerfallsbreiten aus der elastischen Streuung.

Insgesamt ist die experimentelle Stärke also über einen Bereich von etwa 10 MeV verteilt und ihr Energieschwerpunkt liegt bei 8.8 MeV relativ zum Grundzustand. Diese Fragmentierung wurde auch von R. Majumdar [Maj93] bestätigt, der in einem vereinfachten Teilchen-Vibrationskopplungsmodell die Fragmentation eines $1g_{\frac{9}{2}}^-$ -Zustands berechnet hat. In seinem Ansatz berücksichtigte er die 2_1^+ , 2_2^+ , 2_3^+ , 3_1^- , 3_2^- und 5_1^- -Rumpfanregungen von ^{40}Ca und koppelte sie an die $1f_{\frac{7}{2}}^-$, $2p_{\frac{3}{2}}^-$, $2p_{\frac{1}{2}}^-$, $1g_{\frac{9}{2}}^-$, $1f_{\frac{5}{2}}^-$, $1d_{\frac{5}{2}}^-$ und $1d_{\frac{3}{2}}^-$ -Einteilchenzustände von ^{41}Sc . Insgesamt erhielt er für den $1g_{\frac{9}{2}}^-$ -Zustand 11 Fragmente in einem Anregungsenergiebereich von 20 MeV. Um die bestmögliche Fragmentation zu erhalten, optimierte er die Energie des $1g_{\frac{9}{2}}^-$ -Zustands. Er erhielt einen Wert von 8.2 MeV als Einteilchenenergie und für das Energieintervall von 0.0 bis 13.9 MeV einen Energieschwerpunkt von 7.2 MeV (relativ zum Grundzustand). Dieser Wert ist deutlich kleiner als das Ergebnis aus dem Experiment. Es ist daher anzunehmen, daß die ungestörte $g_{\frac{9}{2}}^-$ -Einteilchenresonanz bei einer noch höheren Energie liegen. Eine Berechnung von Tornow et al. [TCD90] zu einem realistischen optischen Potential gibt eine Anregungsenergie von 10.75 MeV für die $g_{\frac{9}{2}}^-$ -Resonanz an. Aus der hier durchgeführten QPC-Rechnung erhält man für die Schwerpunktsenergie einen Wert von 9.8 MeV (bis 12 MeV Anregungsenergie) und als Einteilchenenergie einen Wert von 11.9 MeV. An Hand dieses Beispiels wird deutlich wie schwierig eine eindeutige Festlegung der Einteilchenenergie für stark fragmentierte Zustände sein kann.

Für die Berechnung der Transferwirkungsquerschnitte im nächsten Abschnitt werden die Stärkefunktionen und die Partialwellenamplituden benötigt. Erstere werden für die Berechnung des Formfaktors gebundener Zustände im Spektrum verwendet, zweitere für den Kontinuumsanteil. Dabei wurde folgende Näherung gemacht: Das gekoppelte Gleichungssystem (2.74) aus Kapitel 2 wurde unter Vernachlässigung der Kopplungsterme auf der rechten Seite unter Berücksichtigung der Asymptotik für den Realteil und Imaginärteil der Wellenfunktion (2.73) gelöst. Um die korrekte Asymptotik zu erhalten, wurde die Tiefe des Zentralpotentials entsprechend variiert. Außerdem blieb der Imaginärteil bei der Berechnung des Formfaktors unberücksichtigt, da Testrechnungen gezeigt haben, daß der Beitrag zum Wirkungsquerschnitt klein gegen den Anteil des Realteils ist (wenige Prozent). Dies ist auf den Betrag der zugehörigen S -Matrix zurückzuführen, der im allgemeinen nur wenig von 1 abweicht. Auf eine vollständige Lösung des Gleichungssystem (2.74), in dem nur die Asymptotik der QPC-Wellenfunktion eingeht, wurde daher verzichtet, obwohl dieser Ansatz, insbesondere für höhere Anregungsenergien, nicht ganz gerechtfertigt sein könnte. Die in diesem Fall nötige Anpassung an geeignete optische Potentiale ist von erheblichem numerischen Aufwand und nicht frei von Unsicherheiten. Wie bereits im Kapitel 2, Abschnitt 2.2 beschrieben, verursachen nichtlokale energieabhängige Potentiale zusätzliche r -Abhängigkeiten in den Wellenfunktionen (effektive Massen, "Perey"-Faktoren). Die Potentiale auf denen das QPC-Modell basiert, sind aber gerade energieabhängig und nichtlokal. Dieser Aspekt bleibt bei ausschließlicher Berücksichtigung der Asymptotik unberücksichtigt. Natürlich wäre die Verwendung der aus dem QPC-Modell direkt erhaltenen Wellenfunktionen zur Berechnung des Formfaktors wesentlich konsistenter. Außerdem wäre es sicherlich interessant, einen derartigen mikroskopischen Ansatz mit den empirischen Ansätzen aus Abschnitt 2.2 zu vergleichen.

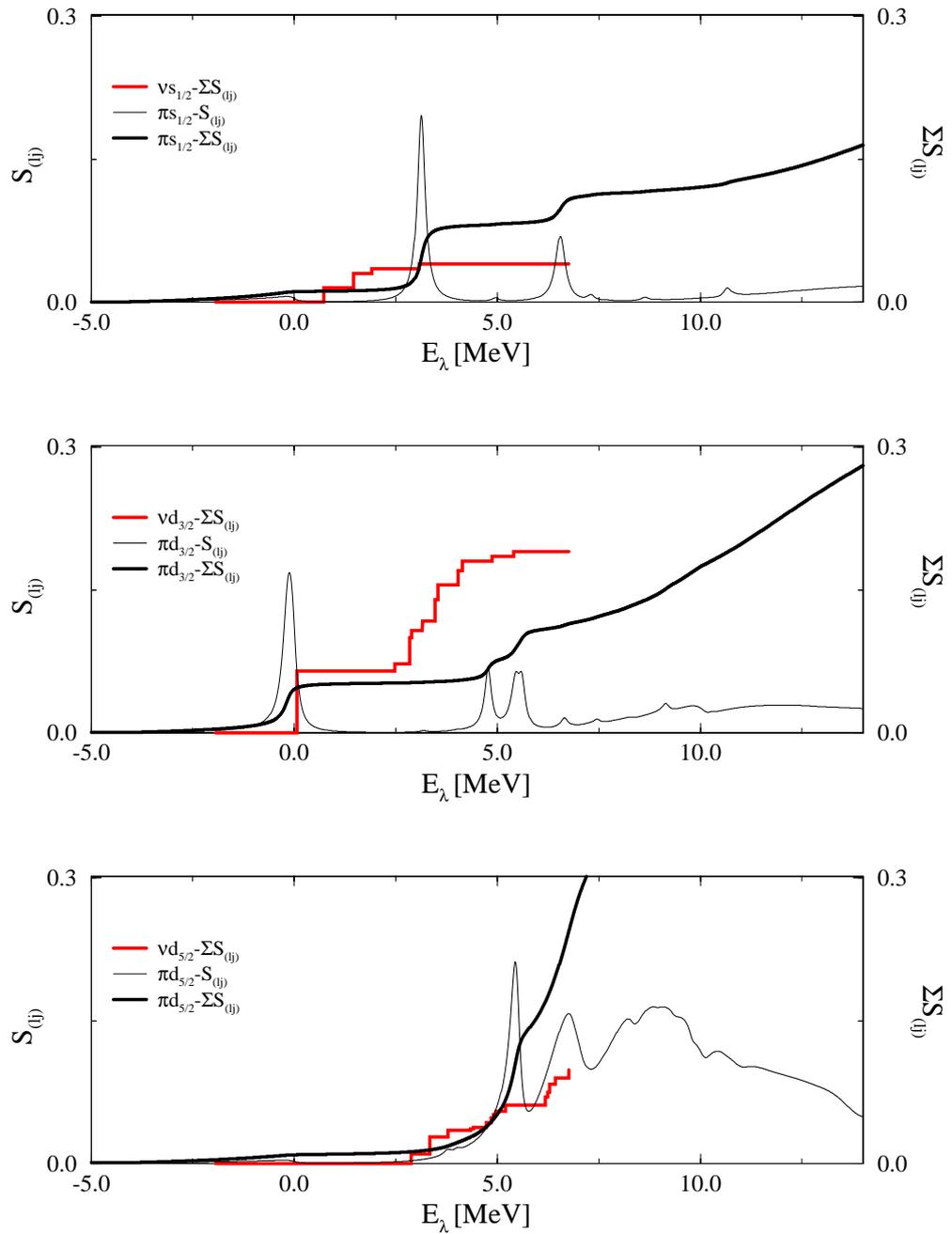


Abbildung 5.10: Stärkefunktion (dünn, schwarz) und aufsummierte Stärke der $s_{1/2}$ -, $d_{3/2}$ - und $d_{5/2}$ -QPC-Zustände (schwarz). Außerdem aufsummierte experimentelle Neutronenstärke für die entsprechenden ^{41}Ca -Zustände (rot).

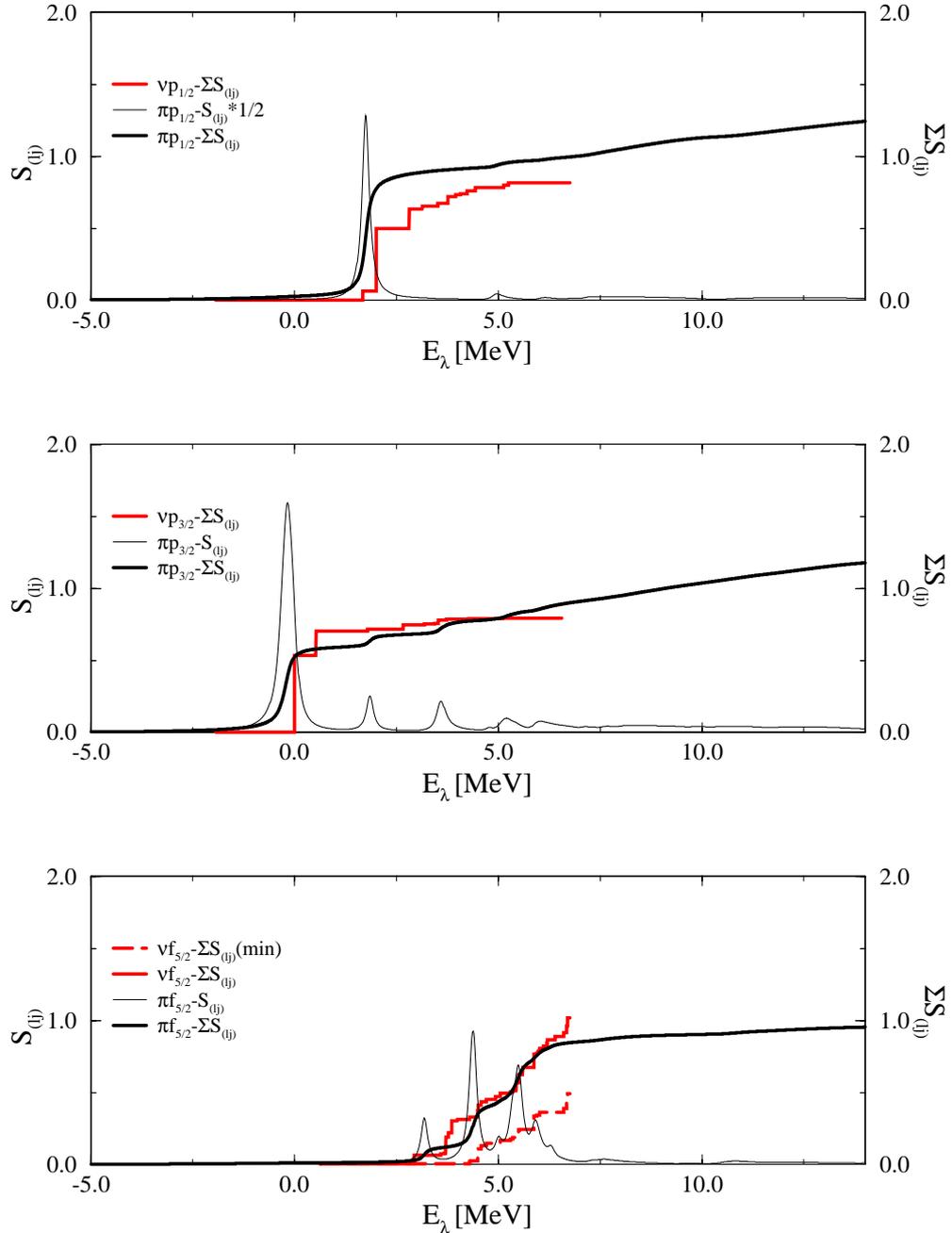


Abbildung 5.11: Stärkefunktion und aufsummierte Stärke der $p_{1/2}$ -, $p_{3/2}$ - und $f_{5/2}$ -QPC-Zustände (schwarz). Außerdem aufsummierte experimentelle Neutronenstärke für die entsprechenden ^{41}Ca -Zustände. Für die ^{41}Ca $f_{5/2}$ -Zustände war die Gesamtdrehimpulszuordnung nicht immer sicher bestimmt. Daher wurden hier zwei experimentelle Kurven eingezeichnet, wobei die untere die sichere j -Zuordnung beschreibt (min), die obere zusätzlich auch unsichere j -Beiträge (rot).

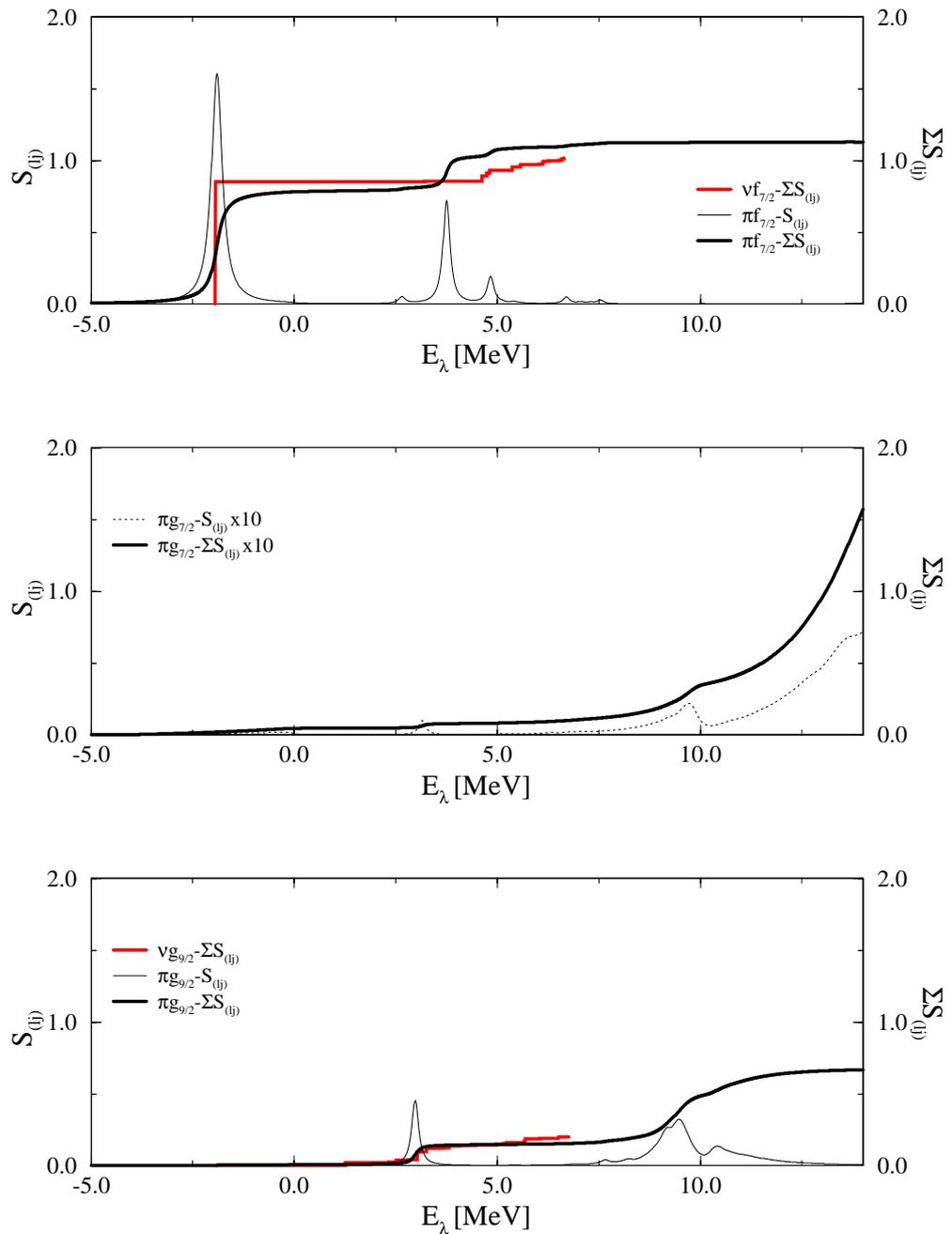


Abbildung 5.12: Stärkefunktion (dünn, schwarz) und aufsummierte Stärke der $f_{7/2}$ -, $g_{7/2}$ - und $g_{9/2}$ -QPC-Zustände (dick, schwarz). Außerdem aufsummierte experimentelle Neutronenstärke für die entsprechenden ^{41}Ca -Zustände (rot). Man beachte die große $g_{9/2}$ -Stärke bei etwa 3 MeV.

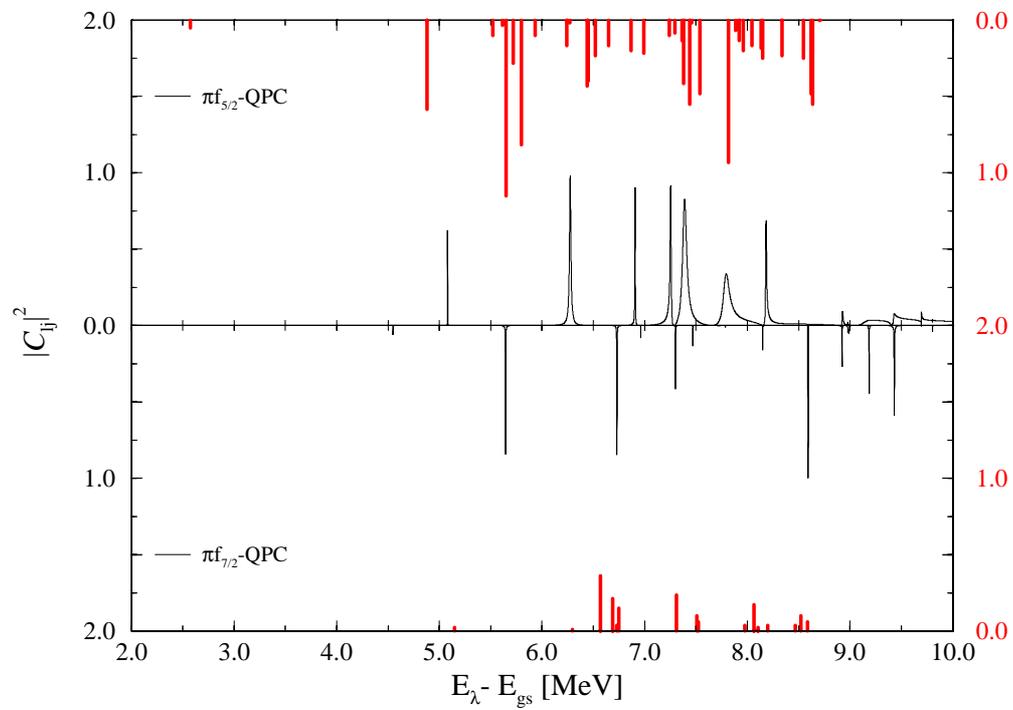


Abbildung 5.13: Vergleich der experimentellen spektroskopischen Faktoren von ^{41}Ca (dick,rot) mit den QPC-Partialwellenamplituden der $f_{5/2}$ - (nach oben) und $f_{7/2}$ - Streuzustände (nach unten) von ^{41}Sc .

5.5 Spektren und Wirkungsquerschnitte für $^{40}\text{Ca}(^{13}\text{C}, ^{12}\text{B})^{41}\text{Sc}$

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels sollen die Spektren und Wirkungsquerschnitte der Reaktion dargestellt werden. Als Eingangsgrößen für die elastische Streuung von ^{13}C auf ^{40}Ca werden die optischen Modellparameter aus Tabelle 5.8 verwendet, die von Braeunig et al. [BOB90] auch bei den DWBA-Rechnungen der Transferwirkungsquerschnitte eingesetzt wurden. Aus dieser Referenz war bereits bekannt, daß die mit diesen Parametern berechneten Wirkungsquerschnitte gegenüber dem Experiment um den Faktor 15 zu groß sind. Da keine geeigneteren Modellparameter zur Verfügung standen, wurden sie trotzdem auch hier verwendet und zum Vergleich mit den experimentellen Daten die damit erhaltenen Wirkungsquerschnitte entsprechend skaliert. Wichtig für einen Vergleich mit der Theorie war der Verlauf des Energiespektrums und die Winkelverteilungen und nicht die absolute Größe.

Reaktion	V_0 [MeV]	r_0 [fm]	a_0 [fm]	W_i [MeV]	r_i [fm]	a_i [fm]	Referenz
$^{13}\text{C} + ^{40}\text{Ca}$	35.0	1.00	0.90	35.0	1.00	0.90	[Oer85]

Tabelle 5.8: Modellparameter für das verwendete optische Potential

Das gesamte Spektrum ist die Summe aus verschiedenen Teilspektren. Zu jedem Ejektilzustand erhält man ein Teilspektrum für die verschiedenen ^{41}Sc -Restkernzustände. Diese Teilspektren sind in den Abbildungen 5.14 und 5.15 zu sehen. Für einen bestmöglichen Vergleich mit dem Experiment wurden dabei, die in Tabelle 5.9 aufgeführten experimentell bestimmten Borzustände aus der Reaktion $^{13}\text{C}(d, \tau)^{12}\text{B}$, die von Mairle und Wagner [MaW75] gemessen wurde, mit den dort aufgeführten spektroskopischen Faktoren und Anregungsenergien verwendet (C^2 ist das Quadrat des Isospin-Clebsch-Gordan-Koeffizienten). Die Zuordnung der Lochzustände erfolgte mit den Ergebnissen einer Schalenmodellrechnung von Cohen und Kurath [CoK67]. Auch deren spektroskopische Faktoren, die im übrigen exzellente Übereinstimmung mit den experimentellen Werten zeigen, sind in der Tabelle aufgeführt. Es zeigt sich, daß tatsächlich, wie bereits auf Seite 103 ausgeführt, Übergänge mit gleichem Spin-Bahn-Kopplungsschema $j_\alpha = \ell_\alpha \pm \frac{1}{2} \rightarrow j_\beta = \ell_\beta \pm \frac{1}{2}$ bei großen Laborenergien bevorzugt werden. Während der Übergang bei Bildung von $p_{\frac{3}{2}}$ -Lochzuständen (Abbildung 5.14) bevorzugt in $f_{\frac{7}{2}}$ - und $g_{\frac{9}{2}}$ -Teilchenzustände erfolgt, ist für $p_{\frac{1}{2}}$ -Lochzustände (Abbildung 5.15) der Transfer in $f_{\frac{5}{2}}$ -Zustände wichtiger.

In der Abbildung 5.16 ist das Gesamtspektrum der Stripping-Reaktion im Vergleich mit dem Experiment gezeigt. Man sieht deutlich die beiden $f_{\frac{7}{2}}$ -Grundzustandspeaks des ^{41}Sc , die zu den beiden 1_1^+ und 2_1^+ -Borzuständen gehören, sowie ein entsprechendes Paar bei etwa 5 MeV Anregungsenergie ($E_{lab} = 627$ MeV) für die $g_{\frac{9}{2}}$ -Resonanz

J^π	E_{exp} [MeV]	C^2S_{exp}	E_x [MeV]	$C^2S(1p_{\frac{1}{2}}^{-1})$	$C^2S(1p_{\frac{3}{2}}^{-1})$
1_1^+	0.00	1.09	0.00	0.00	1.20
2_1^+	0.95	2.17	1.61	0.00	2.02
0_1^+	2.72	0.14	4.51	0.17	0.00
1_2^+	5.00	0.22	4.42	0.29	0.04

Tabelle 5.9: Anregungsenergien (relativ zum Grundzustand) und spektroskopische Faktoren für Zustände von ^{12}B mit positiver Parität. Die mit $_{exp}$ indizierten Werte sind experimentelle Ergebnisse [MaW75].

im ^{41}Sc . Außerdem sind zwei breite Resonanzen bei etwa 11 MeV Anregungsenergie (relativ zum Grundzustand, $E_{lab} = 621$ MeV) zu sehen, die ebenfalls der fragmentierten $g_{\frac{9}{2}}$ -Resonanz zuzuschreiben sind. Einige kleinere Peaks sind $f_{\frac{5}{2}}$ - und weitere $f_{\frac{7}{2}}$ -Resonanzen, wie dies aus den Abbildungen 5.14 zu sehen ist. Eine genauere Analyse zeigt, daß diese drei Zustände des ^{41}Sc in einem Energiebereich bis 15 MeV Anregungsenergie das Teilspektrum zu einem bestimmten Ejektilzustand des Bors bereits fast vollständig beschreiben. Diese starke Selektivität und die Dominanz großer ℓ -Transfers wurde bereits von Braeunig et al. erwähnt [BOB90]. Das Gesamtspektrum ergibt sich als Summe der Teilspektren zu den verschiedenen Bor-Zuständen. Da das Bor als Ejektil vorrangig im 1_1^+ -Grundzustand sowie im ersten 2_1^+ -Anregungszustand vorliegt, ergibt sich für das Spektrum eine in Abbildung 5.16 gut sichtbare Doppelstruktur. Für die Theorie wurden insgesamt die vier Borzustände positiver Parität aus der Tabelle 5.9 berücksichtigt. Neben den bereits genannten, ein 0_1^+ und ein weiterer 1_2^+ -Zustand. Da die Anregungszustände, also die 2_1^+ - 0_1^+ - und 1_2^+ -Zustände, unter γ -Emission im Flug zerfallen, wurde in allen drei Fällen eine Dopplerverbreiterung Γ_d , gemäß der folgenden Gleichung

$$\Gamma_d = \sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{2E_{lab}}{m_b}} E_\gamma \quad (5.6)$$

berücksichtigt.

Dabei wurde näherungsweise angenommen, daß der γ -Zerfall isotrop erfolgt und sich damit in Vorwärtsrichtung bzw. Rückwärtsrichtung des Ejektils mit der Masse m_b , durch Integration über alle Raumrichtungen eine mittlere Energiezunahme bzw. Abnahme von einem Drittel der Wurzel der Gesamtenergie ergibt. Diese Größe wurde als zusätzliche Breite berücksichtigt. Als γ -Energie wurden die Zerfallsenergien zum Grundzustand eingesetzt. Die Wahrscheinlichkeit für eine derartige Abregung wird mit 96.8 (2_1^+) und > 85 (0_1^+) Prozent angegeben [Ajz85]. Daß diese Annahme realistisch ist, zeigt sich auch dadurch, daß durch Anfitten einer Lorentzkurve an die experimentellen Peaks für die beiden $f_{\frac{7}{2}}$ -Zustände tatsächlich eine zusätzliche Breite

für den zweiten Peak erhalten werden konnte, die der so berechneten Dopplerbreite Γ_d entspricht.

Insgesamt kann man sehen, daß das Spektrum bis zu einer Anregungsenergie von etwa 15 MeV sehr gut beschrieben wird. Auch wenn einige Strukturen des Spektrums nur teilweise erfasst werden, so wird der globale Verlauf richtig wiedergegeben. Für höhere Energien werden höhere j -Zustände und weitere inelastische Streukanäle des ^{41}Sc an Bedeutung gewinnen. Außerdem werden sich neben dem Dreikörperendkanal auch Vier- und Fünfkörperkanäle öffnen. Diese sind in dem hier benutzten Ansatz nicht zu beschreiben und können daher auch nicht berücksichtigt werden. Schließlich wurden auch einige Ejektilanregungszustände, nämlich sämtliche Borzustände mit negativer Parität nicht mitberücksichtigt.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß mit dem Kontinuums-QPC-Modell realistische Partialwellenamplituden für Kontinuumswellenfunktionen erhalten werden können und damit deren Asymptotik festlegen. Verwendet man dann die so festgelegten Einteilchenwellenfunktionen bei der Berechnung eines DWBA-Formfaktors, so werden auf diese Weise komplizierte Anregungseffekte mitberücksichtigt. Die Partialwellenamplituden beschreiben bereits automatisch die richtige Lage und Größe von resonanten Strukturen gleichgültig welche spezielle Reaktion betrachtet werden soll. Dies ist der entscheidende Vorteil dieses hier vorgestellten Ansatzes. Dabei ist bemerkenswert, daß bis auf die niedrigliegenden Rumpfanregungsenergien des ^{40}Ca explizit keine experimentellen Größen verwendet wurden um das Spektrum zu beschreiben. Die Lage und auch die Breiten der Resonanzen des Restkerns ^{41}Sc ergaben sich allein aus dem mikroskopischen Modell.

Die Bedeutung des hier verwendeten mikroskopischen Ansatzes zeigt sich auch beim Vergleich mit der entsprechenden semiklassischen Rechnung aus Abschnitt 4.3. Dort wurden nur unkorrelierte Einteilchenwellenfunktionen zur Berechnung des Spektrums herangezogen. Obwohl die Energien dieser Einteilchenzustände an die experimentellen Werte angepasst wurden, konnte der Verlauf des Spektrums nur unbefriedigend reproduziert werden. Dies zeigt ein Vergleich der Abbildungen 5.16 und 4.16. Insbesondere die tiefliegende $g_{\frac{3}{2}}$ -Resonanz wird dramatisch überschätzt (spektroskopischer Faktor von 1 (!) im Einteilchenbild). Viele der kleineren Resonanzen, deren spektroskopische Faktoren nicht so dramatisch vom Wert 1 abweichen, werden allerdings auch in der semiklassischen Näherung gut wiedergegeben. Offensichtlich kann die Dynamik der Transferreaktionen auch in der semiklassischen Näherung gut beschrieben werden. Für eine gute Beschreibung der Kernstruktureigenschaften allerdings, scheint die Verwendung realistischer Stärkefunktionen, wie sie aus QPC-Partialwellenamplituden erhalten werden können, unbedingt nötig. Die Verwendung von QPC-Stärkefunktionen in der semiklassischen Näherung könnte daher eine interessante Alternative zu der hier benutzten, numerisch sehr aufwendigen, DWBA sein.

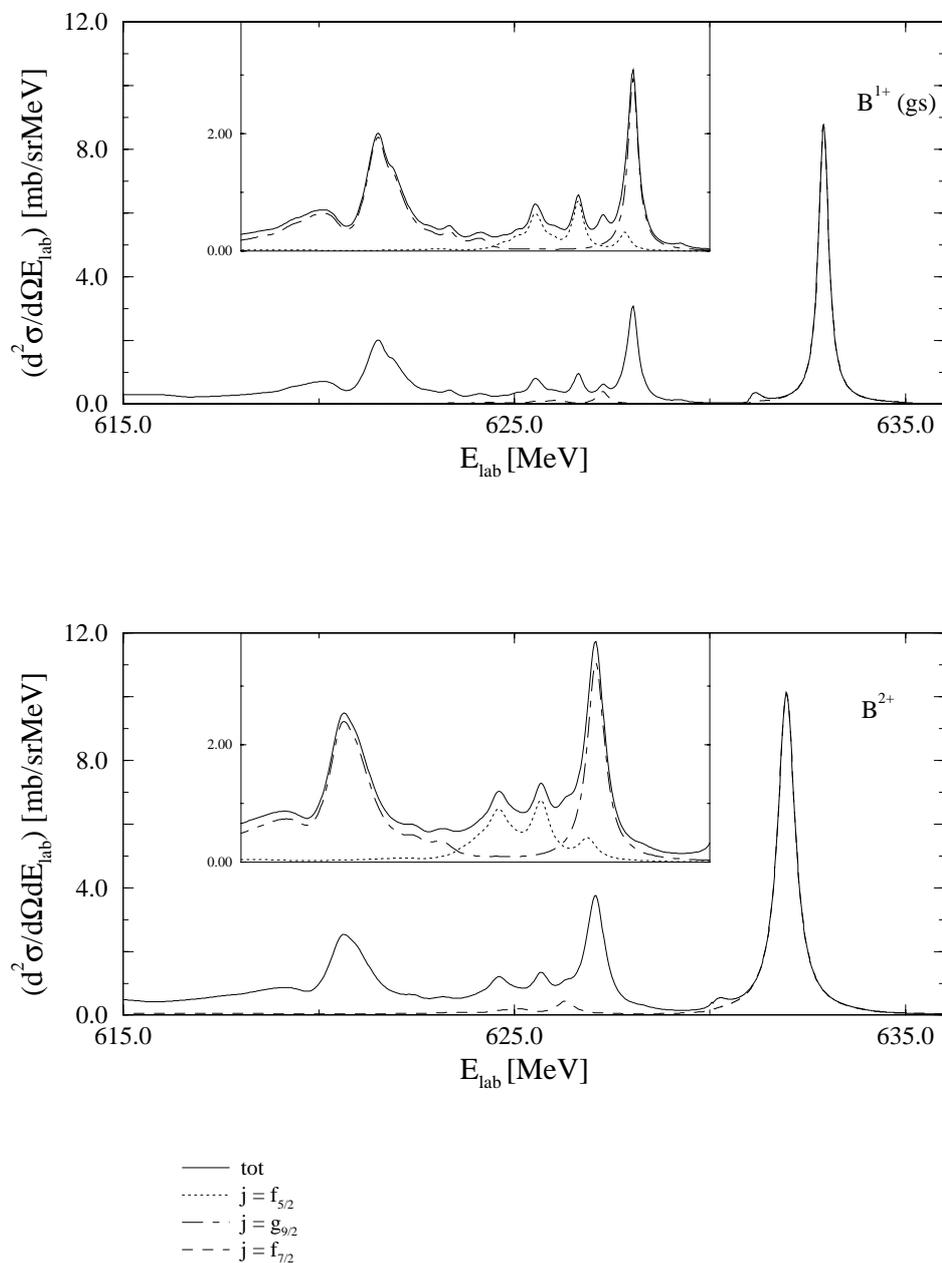


Abbildung 5.14: Doppelt differentieller Wirkungsquerschnitt für verschiedene Ejektil- Restkernzustände. Das Ejektil ist durch Bildung eines $p_{3/2}$ -Lochzustandes aus ^{13}C entstanden. Die Teilbilder zeigen die Aufschlüsselung in die Targetrestkernzustände. Diese Teilspektren werden vom Übergang in den stark fragmentierten $g_{9/2}$ -Zustand des ^{41}Sc dominiert. Wichtige Beiträge liefern außerdem die $f_{5/2}$ - und $f_{7/2}$ -Zustände des Restkerns.

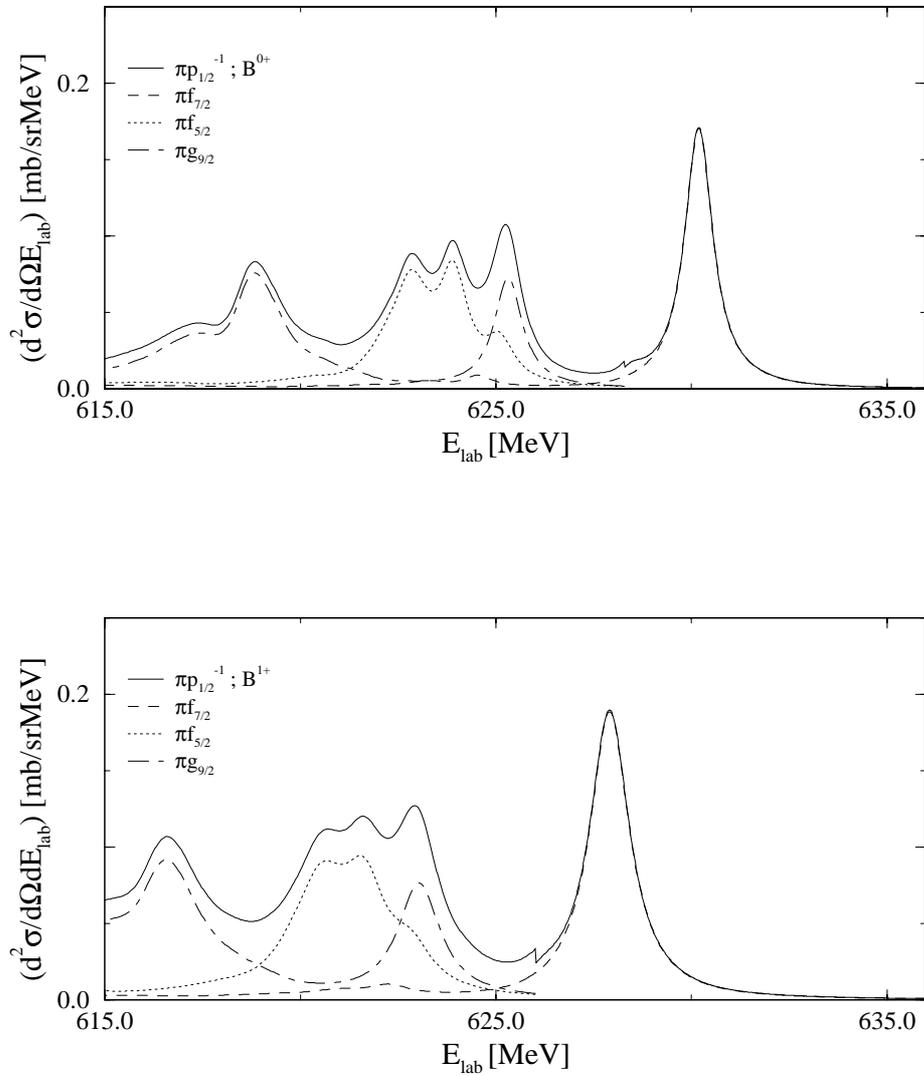


Abbildung 5.15: Doppelt differentieller Wirkungsquerschnitt für verschiedene Ejektil- Restkernzustände. Das Ejektil ist durch Bildung eines $p_{1/2}$ -Lochzustandes aus ^{13}C entstanden. Die Teilbilder zeigen die Aufschlüsselung in die Targetrestkernzustände. Diese Teilspektren werden von $f_{5/2}$ - und $g_{9/2}$ -Zuständen des ^{41}Sc dominiert. Wichtige Beiträge liefert außerdem der $f_{7/2}$ -Zustand des Restkerns.

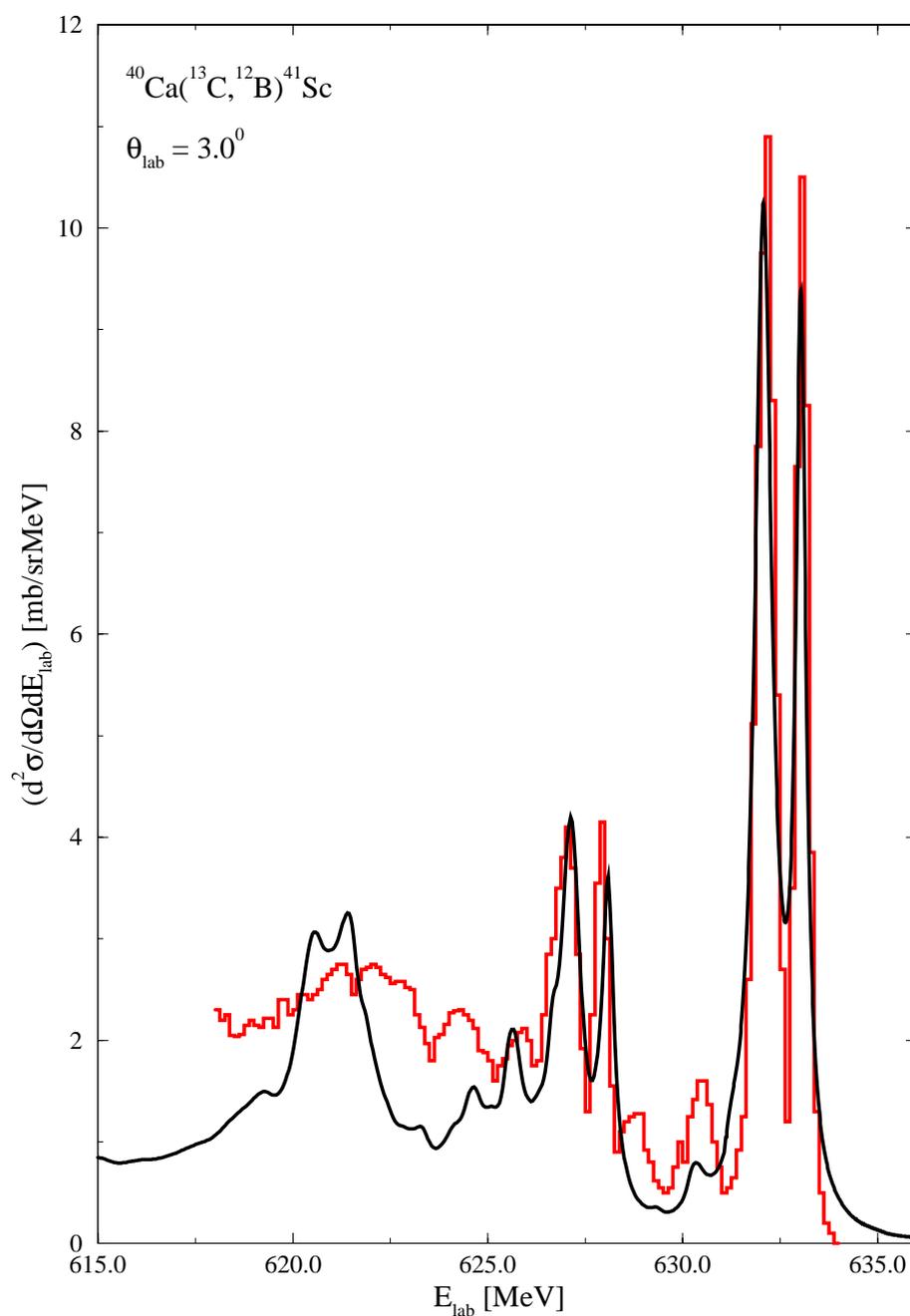


Abbildung 5.16: Doppelt differenzieller Wirkungsquerschnitt der Reaktion $^{40}\text{Ca}(^{13}\text{C}, ^{12}\text{B})^{41}\text{Sc}$ bei einer Einschussenergie $E_{\text{lab}} = 650 \text{ MeV}$ (Histogramm experimentelle Daten).

Kapitel 6

Transfer und Pickup-Aufbruch-Reaktionen von ^{12}C auf ^{12}C

In diesem Kapitel werden die Kontinuumsendkanäle der Reaktion ^{12}C auf ^{12}C bei 344.5 MeV betrachtet. Diese Reaktion wurde von L. Jarczyk et al. [JKM92] gemessen und bereits zum Teil von R. Siudak [Siu93] theoretisch untersucht. Diese Untersuchung erstreckte sich auf die inelastische Streuung von ^{12}C auf ^{12}C und erfolgte im Rahmen der statistischen Mehrstufen-Direkten-Reaktionstheorie (MSDR).

Es zeigte sich, daß der gemessene Wirkungsquerschnitt oberhalb der Teilchenaufbruchschwelle im oben erwähnten Modell unterschätzt wurde. Dort wurde schon vermutet, daß 2-Stufen-Prozesse über Kontinuumstransferkanäle von wesentlicher Bedeutung sind. Man erhält diese Beiträge durch Neutronen- und Protonen-Pickup-Prozesse in die $^{11}\text{C} + ^{13}\text{C}^*$ und $^{11}\text{B} + ^{13}\text{N}^*$ -Partitionen. Bei den Ejektilen $^{13}\text{C}^*$ und $^{13}\text{N}^*$ handelt es sich hier um ungebundene Zustände die nach dem Transfer wieder in das entsprechende Nukleon und ^{12}C zerfallen. Bei alleinigem, d.h. inklusivem Nachweis von ^{12}C ist daher ein derartiger Prozeß von der inelastischen Streuung nicht zu unterscheiden. Im ersten Abschnitt werden zunächst Ergebnisse zu den beiden Transfers im reinen Einteilchenmodell, d.h. ohne Korrelationen berechnet und mit dem entsprechenden Experiment von Jarczyk et al. verglichen. Im zweiten Abschnitt werden QRPA-Anregungszustände von ^{12}C sowie QPC-Zustände von $^{13}\text{C}^*$ und $^{13}\text{N}^*$ betrachtet und deren Einfluß auf den Transfer untersucht. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels ist dem Aufbruch und dem Beitrag zur inelastischen Streuung vorbehalten.

6.1 Proton- und Neutrontransfer in die $^{11}\text{B} + ^{13}\text{N}$ bzw. $^{11}\text{C} + ^{13}\text{C}$ Endkanäle

Zur Berechnung der Transferwirkungsquerschnitte wird in erster Näherung eine Exact-Finite-Range Distorted Wave Born Approximation (EFR-DWBA) verwendet. Die optischen Potentialparameter entstammen einer optischen Modellanalyse von Jarczyk et al. [JKM90] für die elastische Streuung von ^{12}C auf ^{12}C (siehe Tabelle 6.1 aus Referenz [JKM92]). Die verwendeten Potentiale wurden unter dem Aspekt ausgewählt, daß sie hohe Transparenz zeigen. J. G. Satchler [Sat89] hat in einer Untersuchung gezeigt, daß Transferwirkungsquerschnitte sensitiv auf die verwendeten Modellparameter reagieren und daß Potentiale mit hoher Transparenz zur Berechnung von Transferwirkungsquerschnitten am besten geeignet sind. Im Gegensatz zu der im letzten Kapitel besprochenen Stripping-Reaktion, wurde daher aus Grund der Güte des optischen Potentials näherungsweise ein globaler Skalierungsfaktor vom Wert 1 angenommen. Jarczyk et al. paßten in ihrer Analyse ausgewählter Übergänge, die Produkte der spektroskopischen Faktoren an das Experiment an. Die Bestimmung der spektroskopischen Faktoren für die Teilchenzustände erfolgte dann aus diesen Produkten mit den theoretischen spektroskopischen Faktoren der Lochzustände von Cohen und Kurath. Damit sind natürlich die möglichen Unsicherheiten des optischen Potentials implizit in den spektroskopischen Faktoren enthalten. Berechnet man in DWBA, wie hier beschrieben, auch den strukturlosen Kontinuumsuntergrund respektive das gesamte Kontinuum, dann erhält man eine bessere Referenzgröße zum Experiment. Mit ihr ist die Bestimmung einer geeigneten, gemittelten Normierungskonstante möglich. Diese kann dann bei der Bestimmung der spektroskopischen Faktoren für signifikante Übergänge berücksichtigt werden. Wie eine derartige Normierung erfolgen sollte, wird hier beim Anpassen der Zählraten, also einer Relativgröße, auf die theoretischen Rechnungen demonstriert. Da außer wenigen ausgewählten Übergängen keine Absolutdaten vorlagen, war die Bestimmung eines realistischen Skalierungsfaktors zwischen Messung und Rechnung allerdings nicht möglich. Es wurde daher auch der Wert 1 angenommen.

Reaktion	V_0 [MeV]	r_0 [fm]	a_0 [fm]	W_i [MeV]	r_i [fm]	a_i [fm]	Referenz
$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$	175.0	0.6913	0.90	25.0	1.13	0.5837	[JKM92]

Tabelle 6.1: Modellparameter für das verwendete optische Potential.

Der hier betriebene numerische Aufwand zur Bestimmung des Kontinuums, ist natürlich ziemlich groß, da man bei der Berechnung des Formfaktors, wie bereits im Abschnitt 2.1 beschrieben, Einteilchenwellenfunktionen für verschiedene (ℓ, j) zu kontinuierlicher Energie ermitteln muß. Um einen direkten Vergleich mit dem Ex-

periment zu ermöglichen, sind mit der "Well-Depth"-Methode die Energien prominenter gebundener sowie resonanter Zustände, an experimentell bekannte Energien anzupassen (siehe Tabelle 6.2). Mit dem auf diese Weise bestimmten Potential wurden dann auch die anderen nichtresonanten Zustände zum selben (ℓ, j) bestimmt. Für die Bestimmung der übrigen nichtresonanten Streuzustände fand ein von Bohr und Mottelson [BoM69] angegebenes Potential mit einer energieabhängigen Potentialtiefe von $V_0 = 52 \text{ MeV} - 0.3 E$ (Anregungsenergie oberhalb der Teilchenaufbruchschwelle) Verwendung.

Protonen			Neutronen		
Niveau	E_{sp} [MeV]	V_0	Niveau	E_{sp} [MeV]	V_0
$1p_{\frac{1}{2}}$	-1.945	45.37	$1p_{\frac{1}{2}}$	-4.946	45.41
$2s_{\frac{1}{2}}$	0.421 <i>res</i>	57.16	$2s_{\frac{1}{2}}$	-1.857	57.97
$1d_{\frac{5}{2}}$	1.604 <i>res</i>	55.27	$1d_{\frac{5}{2}}$	-1.09	55.63

Tabelle 6.2: Einteilchenenergien prominenter Zustände und dazugehörige Potentialparameter zu einem ^{12}C -Rumpf ([Ajz86]). Niveaus mit positiver Energie sind Resonanzzustände und werden mit *res* abgekürzt.

Um das Kontinuum gut abtasten zu können, wurden im Bereich der Resonanzen auf einem engen Raster von Einteilchenenergien DWBA-Rechnungen durchgeführt. Berücksichtigt wurden alle Einteilchenzustände mit den Spins $s_{\frac{1}{2}}$ bis $h_{\frac{11}{2}}$ mit einer maximalen Einteilchenenergie von 40 MeV oberhalb der Teilchenaufbruchschwelle. Der doppelt-differentielle Gesamtwirkungsquerschnitt im Kontinuum wurde durch Summation über diese Einteilchenwirkungsquerschnitte erhalten. Um ein möglichst vollständiges Spektrum zu erhalten, wurden zudem verschiedene Lochzustände im Target berücksichtigt. Deren spektroskopische Faktoren als auch Energien sind den Tabellen 4.2 und 4.3 im Abschnitt 4.3 (Seite 123) zu entnehmen. Zuletzt wurden die erhaltenen Spektren mit einer Lorentzkurve (Faltungsbreite $\Delta = 0.7 \text{ MeV}$) gefaltet. In der Abbildung 6.1 sind für verschiedene Schwerpunktwinkel die doppelt differentiellen Wirkungsquerschnitte, sowie die Beiträge der drei wichtigsten Lochzustände mit spektroskopischen Faktoren von Cohen und Kurath [CoK67] (siehe Tabelle 4.3), gezeigt. Da es sich ausschließlich um p -Zustände handelt sind signifikante Unterschiede nicht zu erkennen. Die resonanten Strukturen im Spektrum sind durch die prominenten $1p_{\frac{1}{2}}$ und $1d_{\frac{5}{2}}$ Teilchenzustände des Ejektils ^{13}N aus Tabelle 6.2 bestimmt. Die sehr schmale $2s_{\frac{1}{2}}$ -Resonanz liefert kaum Beitrag. Dies ist im Detail in Abbildung 6.2 zu sehen. Hier sind die einzelnen Lochzustände in ^{11}B für $\theta_{cm} = 15^\circ$ (mittleres Bild in Abbildung 6.1) aufgeschlüsselt in Beiträge der Teilchenzustände zu sehen. Man sieht einerseits die Resonanzen der einzelnen Teilchenzustände, andererseits die Energieabhängigkeit der Teilchenbeiträge oberhalb der Resonanzregion. Die durchaus vorhandene Energieabhängigkeit summiert sich jedoch insgesamt zu

einem sehr glatten Verlauf in den Abbildungen 6.1 und 6.2. Über die Bedeutung der einzelnen Teilchenzustände kann man folgendes sagen: Mit zunehmender Energie oberhalb der Teilchenaufbruchschwelle nimmt die Bedeutung von Einteilchenstreu-
zuständen mit großem Spin zu. Im allgemeinen erhält man für die verschiedenen
partiellen Wirkungsquerschnitte bei einer bestimmten Teilchenenergie ein Maximum
(siehe Abbildung 6.2). Auch zeigt sich hier, daß die in Abschnitt 4.2 auf Seite 103 be-
schriebenen Übergangsschemata zu beobachten sind. So ist zum Beispiel der Transfer
des Spin-Bahn-Kopplungsschema $p_{\frac{1}{2}} \rightarrow d_{\frac{3}{2}}$ gegenüber der Kombination $p_{\frac{3}{2}} \rightarrow d_{\frac{3}{2}}$ für
hohe Anregungsenergien unterdrückt, während das Schema $p_{\frac{1}{2}} \rightarrow d_{\frac{5}{2}}$ im Vergleich zu
 $p_{\frac{3}{2}} \rightarrow d_{\frac{5}{2}}$ bevorzugt ist. Ferner sieht man, daß Übergänge in Zustände mit $j_{\beta} = \ell_{\beta} + \frac{1}{2}$
für hohe Energien bevorzugt sind. Besonders wichtig sind im betrachteten Energie-
bereich die $d_{\frac{5}{2}}$, $f_{\frac{7}{2}}$ und $g_{\frac{9}{2}}$ -Zustände.

Die Spektren aus den Abbildungen 6.1 und 6.2 sind Protonentransfers. Tatsächlich
sehen die Neutronenspektren nahezu identisch aus (Spiegelkerne!), obwohl die pro-
minenten Neutronenteilchenzustände gebundene Zustände sind. In den beiden Ab-
bildungen 6.3 und 6.4 sind daher die Proton- und Neutron-Transferspektren (in
linearer Darstellung) zu sehen. (Die oberen Bilder zeigen die Wirkungsquerschnitte
für BCS-Lochzustände, die unteren für Lochzustände nach Cohen und Kurath.)
Hier sind, wie bereits in den Abbildungen 6.1 und 6.2, die Beiträge der ^{11}B - bzw.
 ^{11}C -Grundzustände und der ersten Anregungszustände als Teilspektren zu sehen.
Im wesentlichen wird die globale Struktur des Spektrums durch diese Überlagerung
von Teilspektren beschrieben. In Abbildung 6.5 werden schließlich die experimen-
tellen Daten (Histogramm) mit den berechneten Ergebnissen für die doppelt diffe-
rentiellen Wirkungsquerschnitte im Laborsystem verglichen. (Transformation siehe
Anhang B). Die Daten lagen als Zählraten vor und mussten daher skaliert wer-
den, wobei hier als Skalierungsfaktor das Verhältnis der aufintegrierten Spektren
verwendet wurde. Ein absoluter Vergleich der Rechnungen mit dem Experiment
konnte nur für ausgewählte Übergänge erfolgen. Dies geschah z. B. für die diffe-
rentiellen Wirkungsquerschnitte der Übergänge bei 316 MeV Laborenergie (Proton-
und Neutron-Sripping), die quantitativ ohne Einführung weiterer Skalierungsgrößen
erhalten werden konnten. Bis auf die Resonanzen bei 318 MeV Laborenergie die
deutlich unterschätzt wurden, liegen die anderen tiefliegende Strukturen relativ gut
auf den skalierten Zählraten.

Unten in den Bildern der Abbildung 6.5, sieht man die doppelt differentiellen Wir-
kungsquerschnitte der entsprechenden Pickup-Reaktionen. Beim Pickup zerfällt ober-
halb der Teilchenaufbruchschwelle das Ejektil noch im Flug, sodaß nur gebundene
 ^{13}N bzw. ^{13}C -Zustände im Detektor nachweisbar sind und daher bei einer theoretischen
Berechnung berücksichtigt werden dürfen. Dies bedeutet, daß für das ^{13}N -
Ejektil, daß ausschließlich im Grundzustand gebunden vorliegt, die ersten ^{11}B -
Anregungszustände deutlich zu erkennen sind. Tatsächlich zeigen das theoretische
und experimentelle Spektrum genau diese Signatur, nämlich drei Anregungszustände
(siehe das Teilbild links unten in der Figur 6.5). Im Falle des ^{13}C -Ejektiles liegen meh-
rere gebundene Zustände des Ejektiles vor, im wesentlichen der Grundzustand und

der $d_{\frac{5}{2}}$ -Anregungszustand. Letzterer ist aber extrem kurzlebig (12.4 psec [Ajz86]) und wird daher bereits auf dem Weg zum Detektor zerfallen und eine große Dopplerbreite durch den γ -Zerfall zeigen. Auch dieser Sachverhalt ist dem Experiment zu entnehmen. Die berechneten Wirkungsquerschnitte für Stripping und Pick-Up wurden wegen der Zeitumkehrinvarianz aus demselben Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem ermittelt. Für den Pick-Up wurden dann aber nur gebundene Zustände berücksichtigt. Die Übereinstimmung zwischen theoretischen und berechneten Spektren ist dabei nicht nur qualitativ sondern auch quantitativ gut.

Dies gilt auch für die Winkelverteilungen für verschiedene Endzustände, die in Abbildung 6.6 gezeigt sind. Dabei kann generell festgestellt werden, daß diese Winkelverteilungen relativ wenig Struktur zeigen, was auch ein Hinweis für die Überlagerung verschiedener Übergänge im selben Energieintervall ist. Explizit wurden Vergleiche mit starken experimentellen Übergängen, die gefunden wurden, gemacht. Im einzelnen wurden die Resonanzen bei den Anregungsenergien relativ zum Grundzustand von 7.37 MeV und 9.16 MeV für den Protontransfer und bei 7.70 MeV und 9.79 MeV für den Neutrontransfer, untersucht.

Um eine bessere Diskussion des hier verwendeten Ansatzes zu ermöglichen, wurden außerdem entsprechend dem Vorgehen von L. Jarczyk et al. [JKM92], Übergänge in bestimmte Einteilchenresonanzzustände bei den angegebenen Energien in DWBA ermittelt. Bei der Berechnung des Formfaktors wurde dabei wie folgt vorgegangen: Durch Anpassen der Potentialtiefe wurden Streuwellen mit einem Phasenwinkel von $\pi/2$ ermittelt. Die Normierung der Wellenfunktionen dieser resonanten, ungebundenen Zustände erfolgte dabei im Ortsraum bis zum ersten externen Knoten der Radialwellenfunktion (Ortsraumnormierung auf 1 !). Die so erhaltenen DWBA-Wirkungsquerschnitte wurden mit den in [JKM92] angegebenen spektroskopischen Faktoren multipliziert. Bei diesem Ansatz ergaben sich zu den Streuwellen bei der Anpassung teilweise unrealistisch tiefe Potentiale von über 100 MeV. Diese Tatsache und auch der Umstand, daß die spektroskopischen Faktoren, die R. J. Peterson [PeH80] für die Reaktion $^{12}\text{C}(^3\text{He}, d)^{11}\text{B}$ angibt, wesentlich kleiner sind, läßt vermuten, daß es sich bei den oben genannten resonanten Strukturen nicht um Übergänge zu bestimmten Teilchenzuständen handelt. Im Besonderen gilt dies für die Resonanz bei 9.16 bzw. 9.79 MeV. Jarczyk et al. nahmen bei ihren DWBA-Rechnungen an, daß es sich dabei um eine reine $g_{\frac{9}{2}}$ -Resonanz handelt. Hier durchgeführte Rechnungen konnten diese experimentelle Winkelverteilung durch Summation der verschiedenen Teilchen- und Lochkomponenten beschreiben. Von besonderer Bedeutung erwies sich dabei der Übergang in den angeregten $p_{\frac{3}{2}}$ -Lochzustand des ^{11}B bzw. ^{11}C und den $d_{\frac{5}{2}}$ -Teilchenzustand des ^{13}N bzw. ^{13}C . Wie im nächsten Abschnitt 6.2 diskutiert wird, ist in diesem Peak allerdings auch resonante $g_{\frac{9}{2}}$ -Stärke enthalten. Die tiefliegende Resonanz bei 7.36 respektive 7.70 MeV konnte in dem hier gemachten Ansatz nicht gefunden werden. Dieser Peak ist erst im QPC-Modell zu erhalten. Allerdings liefert der Untergrundanteil alleine bereits die Hälfte der experimentellen Stärke und eine ähnliche Winkelverteilung. Diese Tatsache zeigt den enormen Einfluß des strukturarmen Untergrunds. Wie später gezeigt wird, handelt es sich bei diesem Peak um

einen komplizierteren Anregungszustand. Hinweise dafür finden sich auch in den Referenzen von [Ajz86].

Der hier vorgestellte vereinfachte Ansatz ohne QPC-Korrelationen erhebt nicht den Anspruch das entsprechende Experiment im Detail beschreiben zu können. Insbesondere in einem Energieintervall von 0.0 bis 10.0 MeV oberhalb der Teilchenaufbruchschwelle können mit diesem Ansatz nicht alle experimentell gefundenen Resonanzen, wie oben erwähnt, erhalten werden. Dies ist erst im Rahmen des QPC-Modells möglich. Für noch höhere Anregungsenergien, allerdings ist die Zustandsdichte in den auslaufenden Kanälen so hoch, daß resonante Strukturen gegenüber dem strukturlosen Kontinuum kaum mehr aufzulösen sind. Daher ist die globale Beschreibung des Spektrums in diesem Bereich auch quantitativ gut mit dem Experiment vergleichbar.

Die in diesem Ansatz gefundenen Resultate können daher, auf Grund ihrer guten Übereinstimmung mit dem Experiment, als Eingangsgrößen für den globalen Pickup-Breakup-Prozeß zur inelastischen Streuung, der in Abschnitt 6.3 beschrieben wird, verwendet werden. Da beim Aufbruch resonante Strukturen durch die Kinematik stark verschmiert werden, wäre eine Verwendung der im nächsten Abschnitt vorgestellten QPC-Wirkungsquerschnitte für den Aufbruch unnötig aufwendig.

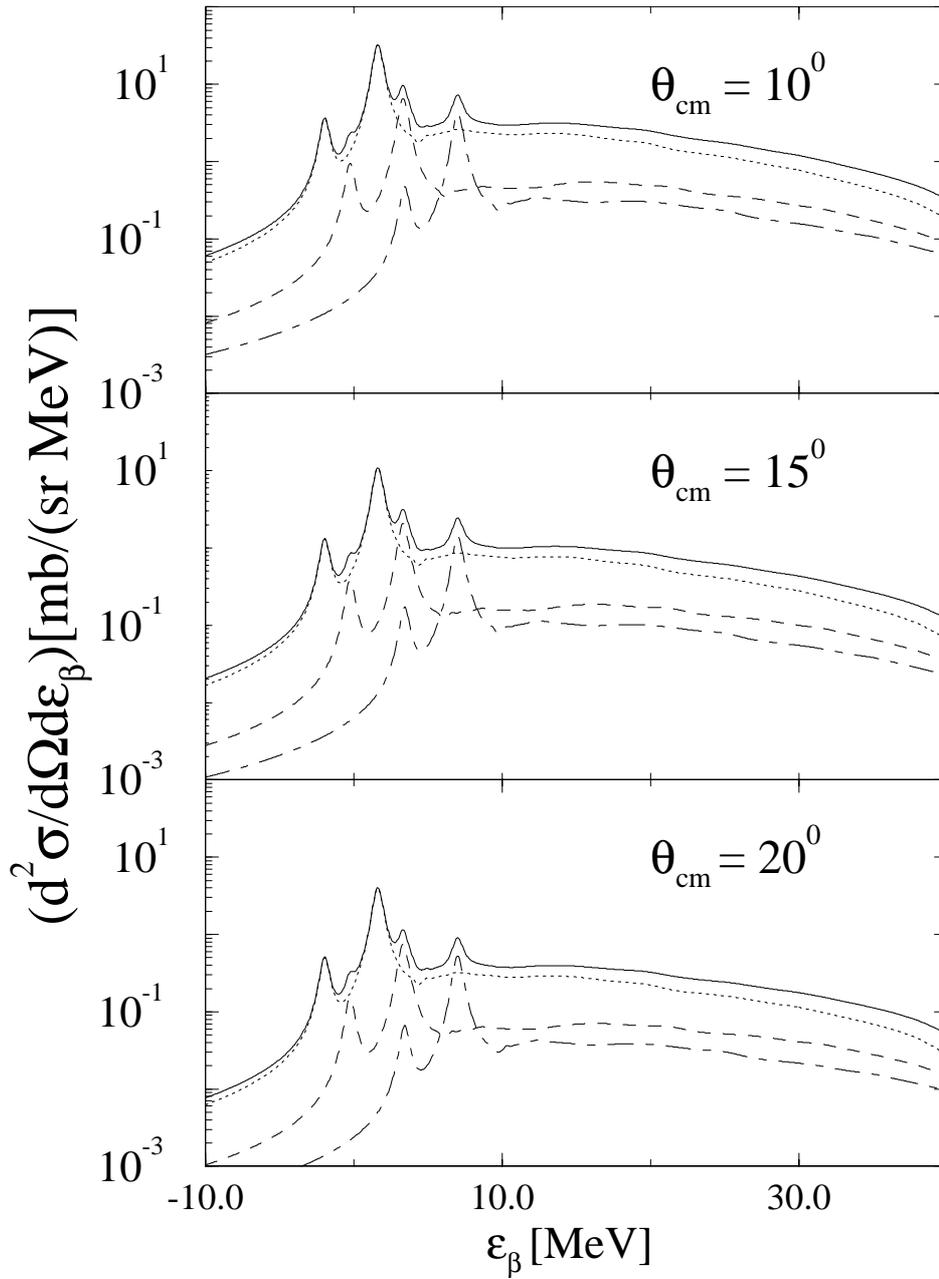


Abbildung 6.1: Energiegemittelter, inklusiver doppelt differentieller Transferwirkungsquerschnitt (Faltungsbreite $\Delta = 0.7$ MeV) aus einer DWBA-Rechnung mit unkorrelierten Einteilchenzuständen für den Protonentransfer $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, ^{11}\text{B})^{13}\text{N}^*$ bei $E_{lab} = 344.5$ MeV zu verschiedenen Schwerpunktwinkeln. Es sind die Beiträge der Lochzustände $\pi p_{\frac{3}{2}}^{-1}$ (gs) (gepunktet), $\pi p_{\frac{1}{2}}^{-1}$ (1.7 MeV) (gestrichelt) und $\pi p_{\frac{3}{2}}^{-1}$ (5.39 MeV) (strich-punktiert) gezeigt.

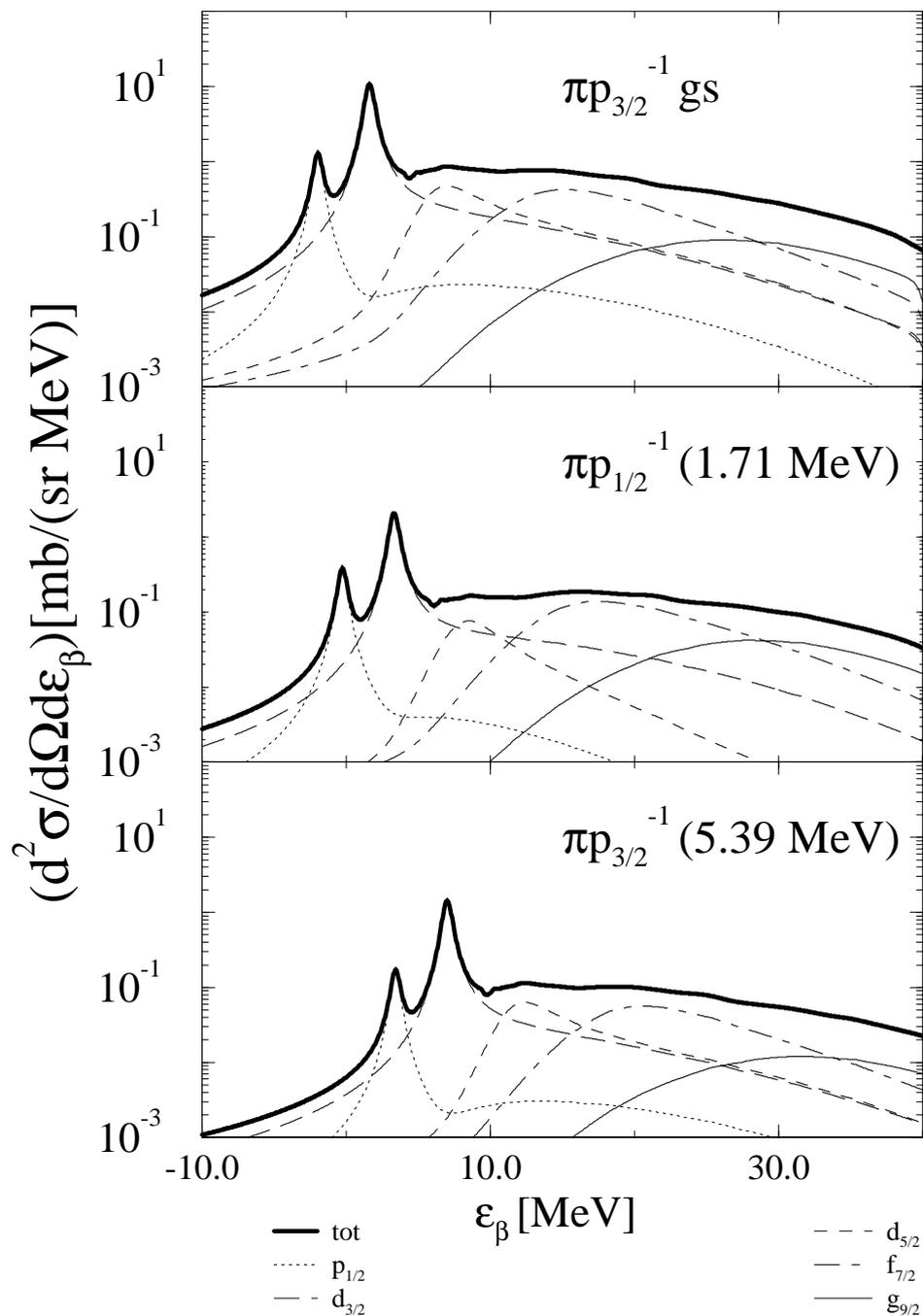


Abbildung 6.2: Energiegemittelter, doppelt differentieller Transferwirkungsquerschnitt wie in Abbildung 6.1 bei einem Schwerpunktwinkel von $\theta_{cm} = 15^\circ$. Es sind die Beiträge verschiedener Teilchenzustände für verschiedene Lochzustände in ^{11}B zu sehen.

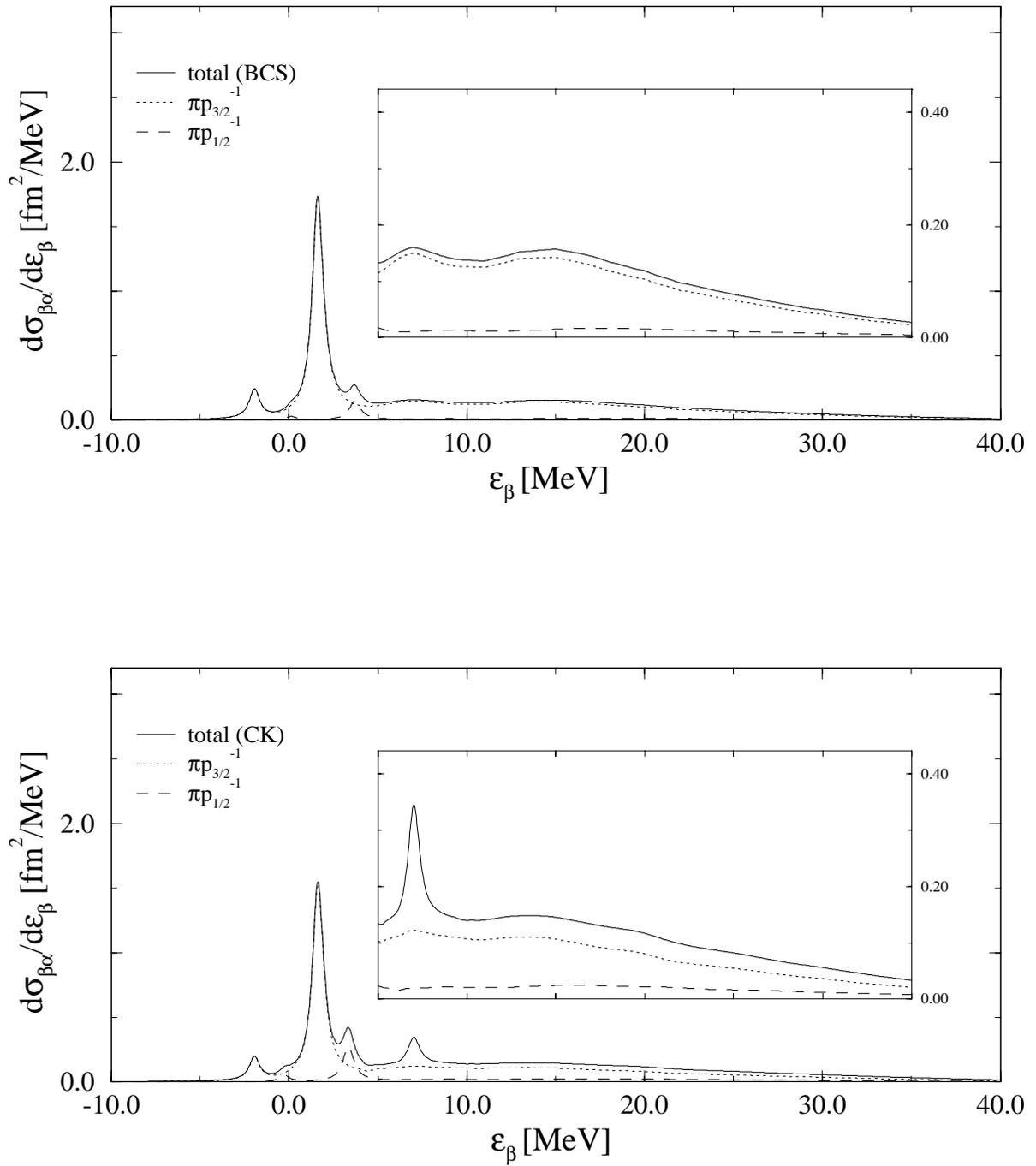


Abbildung 6.3: Energiegemittelter, inklusiver Transferwirkungsquerschnitt für Protonen wie in Abbildung 6.1, in linearer Darstellung. Für die Lochzustände wurden im oberen Bild spektroskopische Faktoren aus BCS-Rechnungen, im unteren Bild Ergebnisse von Cohen und Kurath verwendet [CoK67].

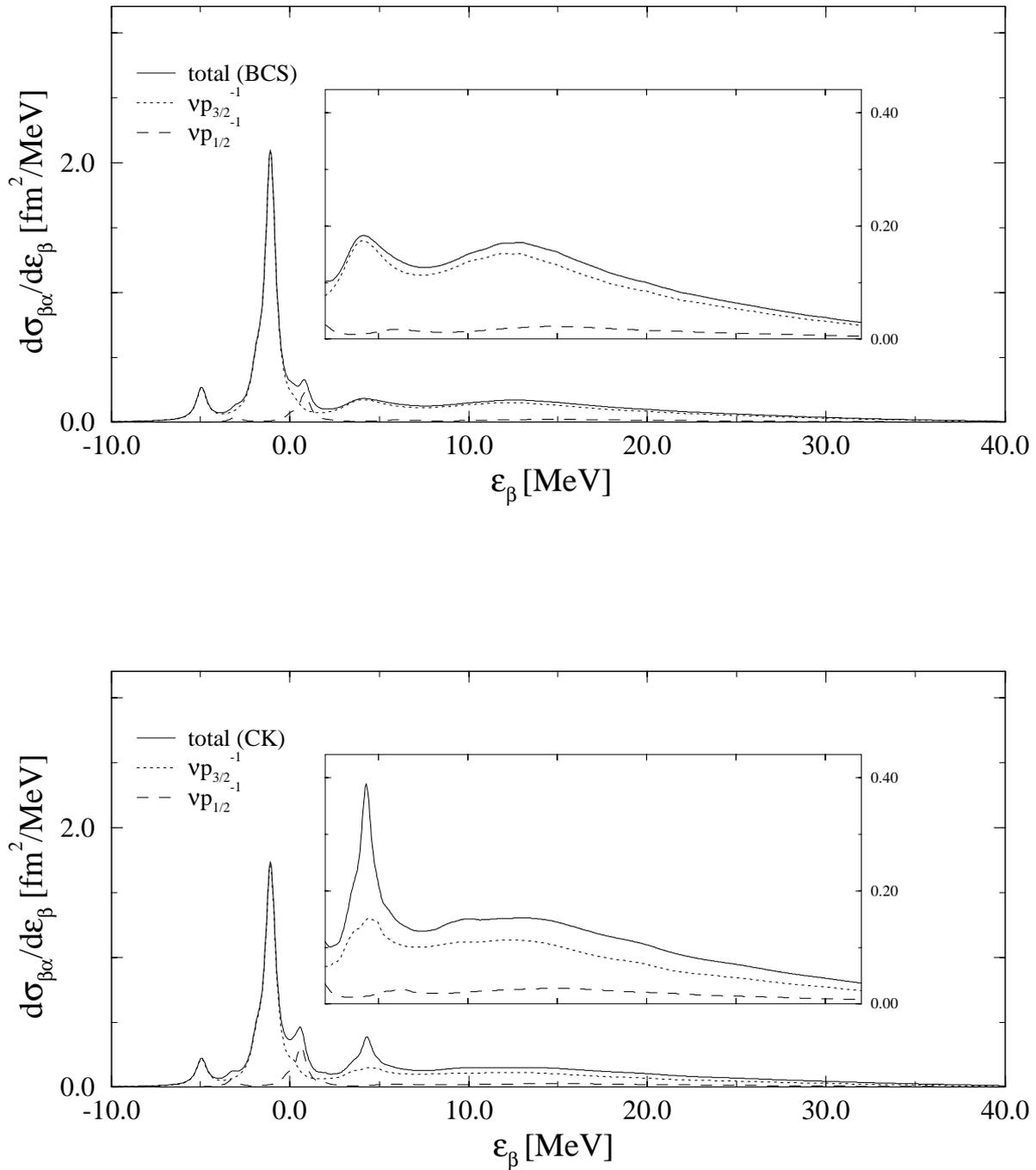


Abbildung 6.4: Energiegemittelter, inklusiver Transferwirkungsquerschnitt wie in Abbildung 6.3, jedoch für den Neutronentfer $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, ^{11}\text{C})^{13}\text{C}^*$. Für die Lochzustände wurden im oberen Bild spektroskopische Faktoren aus BCS-Rechnungen, im unteren Bild Ergebnisse von Cohen und Kurath verwendet [CoK67].

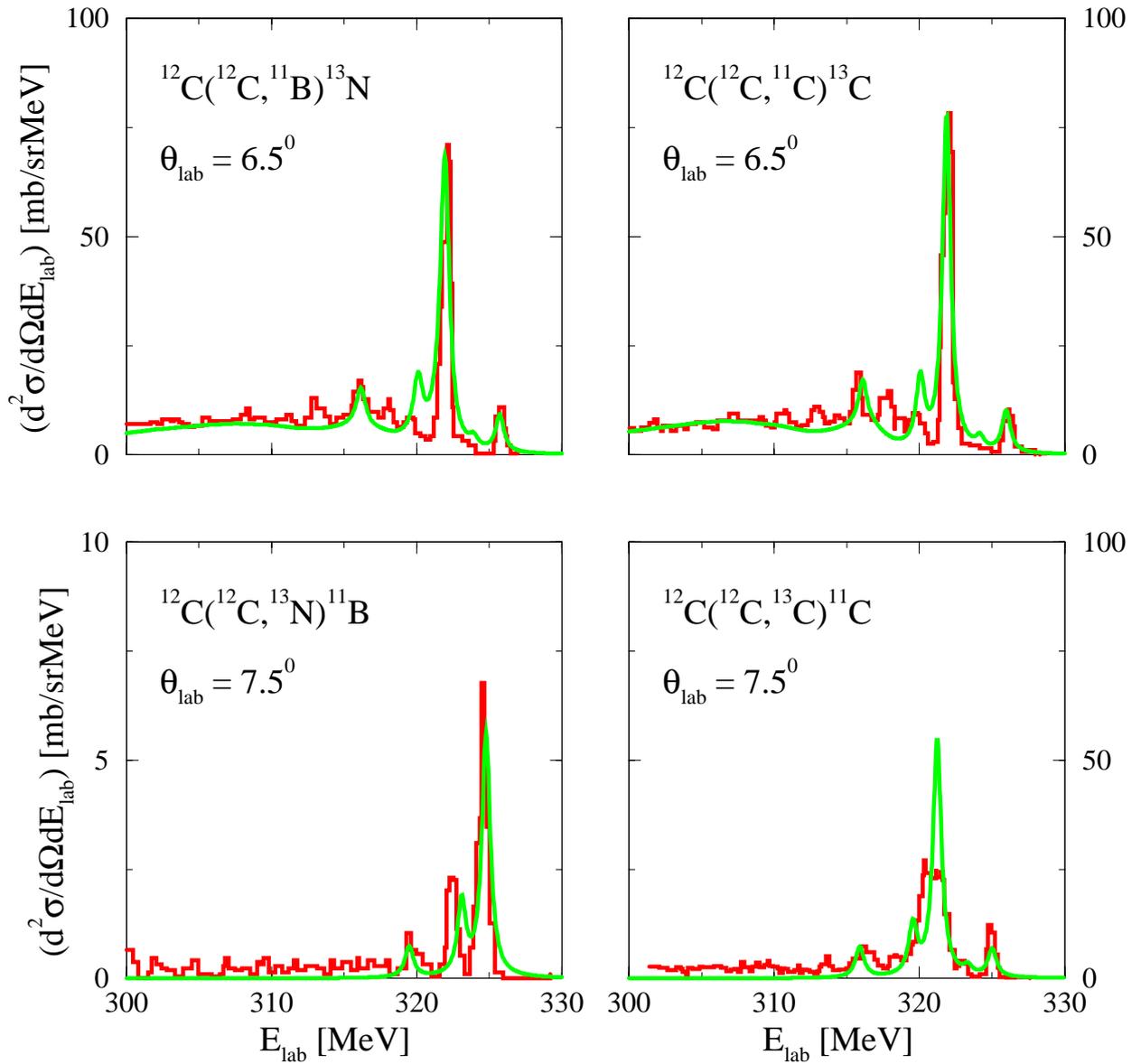


Abbildung 6.5: Energiegemitteltes, inklusives Spektrum aus DWBA-Rechnungen mit unkorrelierten Einteilchenzuständen, dargestellt im Laborsystem bei den Laborwinkeln 6.5° und 7.5° . Die experimentellen Werte von L. Jarczyk et al. [JKM92] sind als Histogramm dargestellt. In den oberen beiden Bildern sind Stripping-Reaktionen dargestellt, in den unteren Bildern Pickup-Reaktionen.

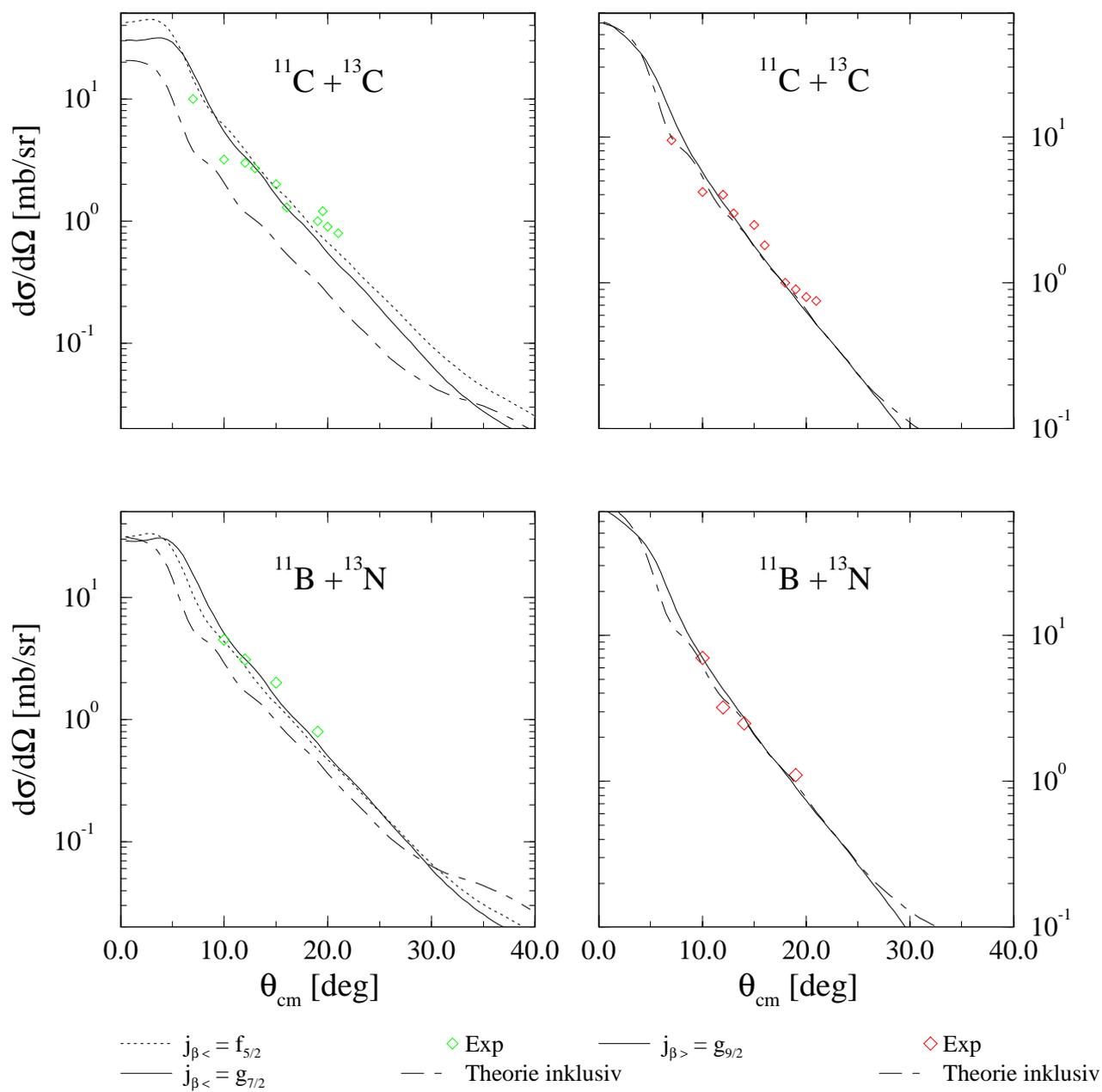


Abbildung 6.6: Winkelverteilungen im Schwerpunktsystem für Anregungsenergien von 7.37 MeV (links oben), 7.70 MeV (links unten), 9.16 MeV (rechts oben) und 9.79 MeV (rechts unten). Gezeigt werden experimentelle Ergebnisse von [JKM92], DWBA-Rechnungen für Einteilchenresonanzen von [JKM92] und eigene Rechnungen ohne Korrelationen (Theorie inklusiv).

6.2 QRPA und QPC-Anregungszustände für ^{13}C und ^{13}N

Im letzten Abschnitt wurden die Neutron- und Proton-Transferreaktionen $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, ^{11}\text{C})^{13}\text{C}^*$ und $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, ^{11}\text{B})^{13}\text{N}^*$ berechnet, wobei die gebundenen und ungebundenen Teilchenzustände in $^{13}\text{C}^*$ und $^{13}\text{N}^*$ in einem reinen Einteilchen-Potentialmodell beschrieben wurden. Diese Beschreibung ergab bereits eine befriedigende Übereinstimmung mit den experimentellen Spektren in Abbildung 6.5. Allerdings konnten einige kleinere Strukturen nicht erklärt werden. Die Behandlung erfolgte ja auch nicht auf dem gleichen Niveau wie die in Abschnitt 5.4 vorgestellte Beschreibung der Transferreaktion zu ^{41}Sc , wo die Einteilchenstärke durch QPC-Zustände beschrieben wurde.

Der Vollständigkeit halber soll deshalb in diesem Abschnitt die Beschreibung der $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ -Transferreaktion ebenfalls innerhalb der QPC-Theorie erfolgen. Es wird interessant sein, ob sich die Beschreibung noch verbessern läßt. Es ist allerdings schon a priori zu erwarten, daß ^{13}C und ^{13}N keine idealen Kandidaten für eine QPC-Beschreibung sind, da der zu Grunde liegende Rumpf ^{12}C klein ist und die separate Behandlung von Rumpfanregungen und Teilchenzuständen sicher schlechter gerechtfertigt ist. Hinzu kommt, daß ^{12}C intrinsisch stark deformiert ist, und daher die Rumpfanregungen besser in einem deformierten Rotations-Vibrationsmodell zu beschreiben sind. Wie bereits erwähnt, war die Behandlung der $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ -Transferreaktion dadurch motiviert die Aufbruch-Reaktionen, die im nächsten Abschnitt behandelt werden, zu beschreiben. Wegen der zusätzlichen Verschmierung aller Strukturen beim Aufbruch ist die Verwendung der QPC-Theorie an sich nicht nötig. Es wird daher auch nur eine der vier im letzten Abschnitt diskutierten Transferreaktionen exemplarisch behandelt. Die Ergebnisse werden auch nicht zur Beschreibung der Aufbruchreaktion eingesetzt.

Das Vorgehen in diesem Abschnitt ist analog zu dem in Kapitel 5. Es werden zunächst Quasiteilchenzustände in der BCS-Theorie erzeugt, dann werden Rumpfanregungen in der QRPA-Theorie diskutiert, und schließlich die Stärkefunktionen bzw. Partialwellenamplituden im QPC-Modell ermittelt. Mit diesen Größen wird dann exemplarisch die Transferreaktion $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, ^{11}\text{B})^{13}\text{N}^*$ berechnet.

Ausgangspunkt der Berechnung der ^{12}C -Zustände ist eine BCS-Rechnung mit konstanter Paarkraft. Die Stärke dieser Paarkraft G wurde so gewählt, daß sich die aus Massendifferenzen abgeleiteten experimentellen Werte der GAP-Parameter Δ ergaben [NeA62]. Die Werte von G ergeben sich dabei als wesentlich höher als die üblichen Standardwerte. Dies ist allerdings nicht überraschend, da bei der Berechnung nur Proton-Proton und Neutron-Neutron-Paarung berücksichtigt wurde. Da die Unterschiede zwischen Protonen- und Neutroneneinteilchenenergien beim ^{12}C nur gering sind, sollte eigentlich auch Proton-Neutron-Paarung berücksichtigt werden. Außerdem handelt es sich bei ^{12}C im Grundzustand um einen Kern mit oblater Form. Dies bedingt eine Ausschmierung der Besetzungswahrscheinlichkeit der

entsprechenden spärlichen Einteilchenzustände. Die genannten Vernachlässigungen werden durch die Verwendung einer großen Neutron-Neutron- bzw Proton-Proton-Paarkraft zumindest teilweise berücksichtigt. Die Parameter für die BCS-Rechnung sind in der Tabelle 6.3 zu finden. Die Teilchen- bzw. Lochenergien sowie die Besetzungszahlen sind in Tabelle 6.4 aufgeführt.

	Protonen	Neutronen
G [MeV]	47.0	47.0
Δ [MeV]	5.07	5.04
λ [MeV]	-6.73	-9.74

Tabelle 6.3: Paarkraft G, Gap-Parameter Δ und chemisches Potential λ für Protonen und Neutronen im ^{12}C .

Protonen			Neutronen		
Niveau	E_i [MeV]	v_i^2	Niveau	E_i [MeV]	v_i^2
$1s_{\frac{1}{2}}$	-29.56	0.985	$1s_{\frac{1}{2}}$	-33.43	0.986
$1p_{\frac{3}{2}}$	-15.87	0.852	$1p_{\frac{3}{2}}$	-18.85	0.853
$1p_{\frac{1}{2}}$	-1.25	0.311	$1p_{\frac{1}{2}}$	-4.29	0.308

Tabelle 6.4: BCS-Teilchen- und Lochenergien sowie Besetzungszahlen v_i^2 für Protonen und Neutronen im ^{12}C . Die Berechnung erfolgte mit den in Tabelle 6.3 aufgeführten Parametern.

Mit diesen Quasiteilchenzuständen wurden dann QRPA-Anregungszustände entsprechend Abschnitt 3.1 berechnet. Durch Verwendung eines Normierungsparameters für die QRPA-Restwechselwirkungen wurden die tiefliegenden Zustände, die später bei der Berechnung des QPC-Massenoperators von besonderer Bedeutung sind, an die Energien experimentell bekannter Zustände von ^{12}C angepasst. Unterhalb von 10 MeV Anregungsenergie sind dabei drei Anregungszustände des ^{12}C zu finden: bei 4.44 MeV ein 2_1^+ -Zustand, bei 7.65 MeV ein 0_2^+ -Zustand und bei 9.64 MeV ein 3_1^- -Zustand (siehe [Ajz85] und Tabelle 6.5). Die Berechnung dieser Zustände erfolgte analog den Ausführungen aus Abschnitt 5.4.

Wie ebenfalls dort beschrieben, können aus den Zustandsamplituden Deformationsparameter β_λ^c ermittelt werden (Gleichung (5.4)). Die berechneten Energien und Deformationsparameter sind in Tabelle 6.5 mit den experimentellen Größen verglichen, wobei auch die Normierungsparameter angegeben sind. Es zeigt sich, daß die Deformationsparameter für die 2_1^+ und 3_1^- -Zustände um den Faktor 1.5 bis 2

größer sind als die entsprechenden experimentell gewonnenen Größen β_λ^{exp} für ein kollektives Rotations-Vibrations-Modell. Besonders für den 2^+ -Zustand ist diese Überschätzung typisch, da man weiß, daß dieser Zustand auch wesentlich 2p-2h- bzw. Mehrphonon-Beiträge enthält. Dieses Resultat wurde bereits von R. Siudak bestätigt [Siu93] und ist auch aus anderen Rechnungen bekannt, bei denen einfache Teilchen-Loch-Anregungen angenommen wurden. So ermittelten P. D. Greaves et al. [GHL71] im Experiment Wirkungsquerschnitte und Analysierstärken für inelastische Protonenstreuung an ^{12}C bei 30.4 MeV Einschubenergie. Sie verglichen ihre experimentellen Resultate mit Coupled-Channel-Rechnungen mit mikroskopischen Formfaktoren, in denen die ersten drei angeregten Zustände durch einfache Teilchen-Loch-Anregungszustände beschrieben wurden, die näherungsweise den dominanten Komponenten der hier berechneten QRPA-Zuständen entsprechen. Die Übereinstimmung mit dem Experiment war für die 2_1^+ - und 0_2^+ -Zustände relativ schlecht, was darauf hinweist, daß eine kollektive Beschreibung notwendig ist. Nur der 3_1^- -Zustand konnte mit einer dominanten ($1p_{\frac{3}{2}}^{-1}1d_{\frac{5}{2}}$)-Konfiguration gut beschrieben werden. Die von P. D. Greaves et al. ebenfalls angegebenen Rechnungen für ein kollektives Modell reproduzieren die experimentellen Daten insgesamt besser.

Dieser Sachverhalt wurde auch von G. R. Satchler [Sat67] erwähnt. Satchler ermittelte die Deformationsparameter β_λ^{exp} des kollektiven Modells für die inelastische Protonenstreuung auf ^{12}C bei 46 MeV Einschubenergie. Zu verschiedenen optischen Potentialen wurden Werte von 0.61 bis 0.90 für β_2^{exp} und 0.41 bis 0.64 für β_3^{exp} gefunden. Für die Beschreibung der 0_2^+ -Anregung erwies sich allerdings auch das kollektive Modell als unzureichend. Satchler untersuchte sowohl Diffusivitäts (a)- als auch Radius (R)-Vibrationen zu verschiedenen optischen Potentialen für die Monopol-Mode. Beide Ansätze konnten die experimentellen Wirkungsquerschnitte nur qualitativ beschreiben. Für den Deformationsparameter β_0^{exp} ergaben sich Werte zwischen 0.40 und 0.60. Im Rahmen dieser Untersuchung zeigte Satchler, daß der 0_2^+ -Zustand möglicherweise durch Mehrstufenanregungen, z. B. über den 2_1^+ -Zustand, bevölkert wird. Bei Berücksichtigung von direkter und mehrstufiger Anregung stimmen die so erhaltenen Winkelverteilung der Wirkungsquerschnitte gut mit dem Experiment überein.

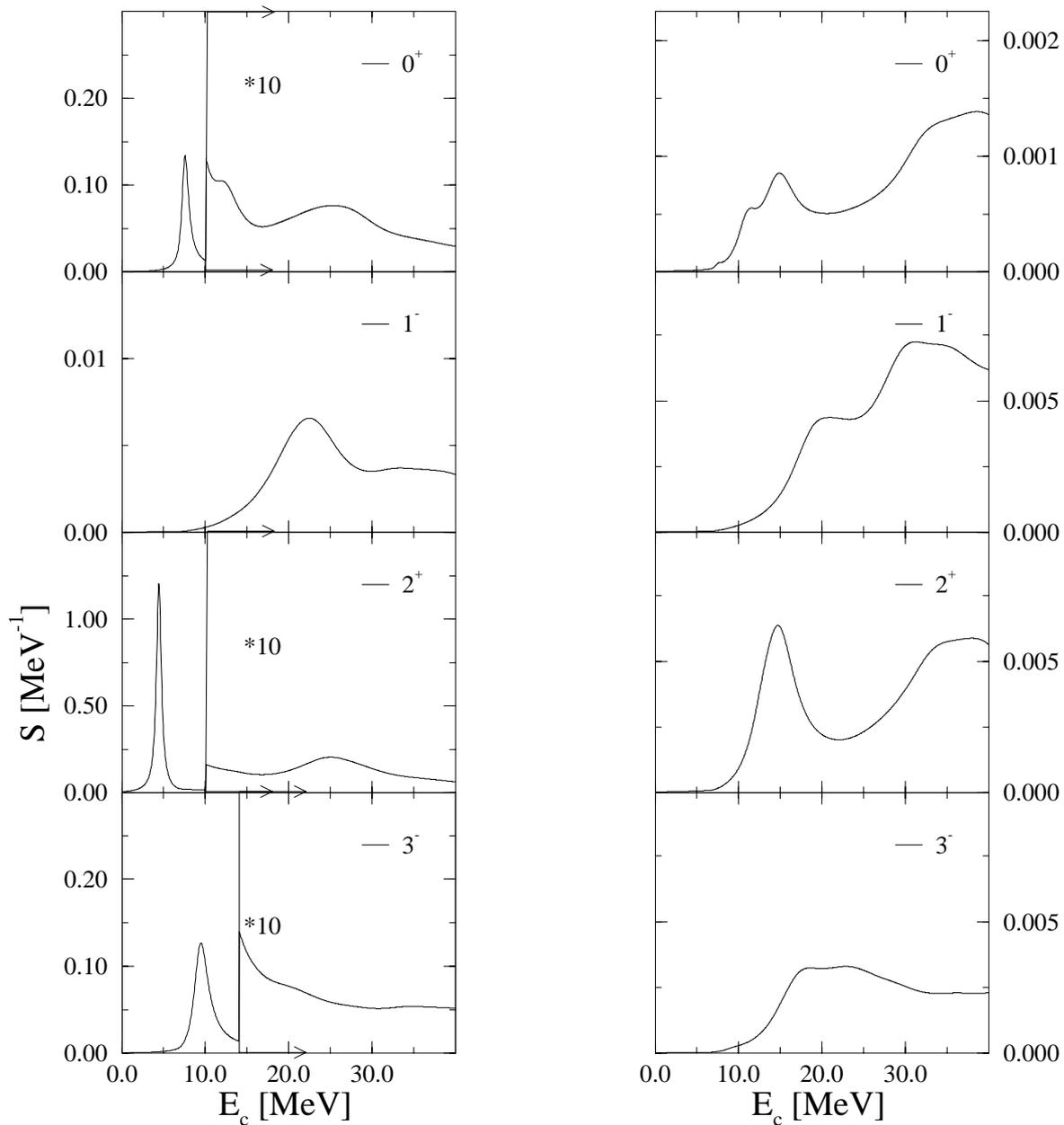
Auch neuere Resultate für die Deformationsparameter, die aus inelastischer Neutronenstreuung an ^{12}C bei Einschubenergien zwischen 16.5 und 22.0 MeV (Olsson et al. [OTR89]) bzw. zwischen 20.8 und 26.0 MeV (Meigooni et al [MFP85]) erhalten wurden, bestätigen die Ergebnisse für die Deformationsparameter von Satchler zumindest für die 2^+ und 3^- -Anregung. Olsson et al. fanden z. B. einen Wert von 0.65 bzw. 0.55 für β_2^{exp} bzw. β_3^{exp} . Signifikante Unterschiede ergaben sich aber wieder bei der Behandlung 0_2^+ -Anregung im kollektiven Modell. In einem kürzlich erschienenen Artikel von Chiba et al. [CIY97] wird die Gültigkeit eines symmetrischen Rotations-Vibrations-Modells für die Berechnung von ^{12}C -Anregungen daher auch in Frage gestellt. Chiba et al. können die differentiellen Wirkungsquerschnitte für die verschiedenen Anregungen in einer Coupled-Channel-Analyse unter Verwendung eines "weichen" Rotationsmodells gut beschreiben. Dies gilt auch für den 0_2^+ -Zustand. Al-

lerdings erhalten sie aus ihrem Modell eine prolate Quadrupoldeformation für den Grundzustand, was im Widerspruch zur üblichen Annahme einer oblaten Deformation steht. Andererseits würde die prolate Deformation in guter Übereinstimmung mit dem Konzept einer "linearen Kettenstruktur" von drei α -Teilchen für die Anregungszustände von ^{12}C stehen, ein Ansatz der ebenfalls in der Literatur zu finden ist.

Die obige Diskussion zeigt, daß die Beschreibung der ^{12}C -Anregungszustände im sphärischen QRPA-Modell nur sehr näherungsweise möglich ist. Insofern ist die Beschreibung mit angepassten Parametern nur als effektive Beschreibung zu betrachten, in der komplizierte Struktureffekte verborgen sind. Insgesamt ist aber die Korrespondenz zu den experimentellen Werten in Tabelle 6.5 genügend gut, sodaß diese Zustände zur Beschreibung der Rumpfdynamik verwendet werden können. Die theoretisch ermittelten Werte für die Deformationsparameter sind größer als die experimentellen Werte. Dies muß bei der mikroskopischen Berechnung der QPC-Restwechselwirkung durch Verwendung einer geeigneten Normierungskonstante berücksichtigt werden. Bei den hier durchgeführten QPC-Rechnungen wurde ein globaler Wert von 0.5 als Normierung verwendet.

Niveau	0_2^+	1^-	2_1^+	3_1^-
E_{exp} [MeV]	7.654	0.0	4.439	9.641
β_λ^{exp}	0.40..0.60	...	0.61..0.90	0.41..0.64
E_{QRPA} [MeV]	7.65	0.0	4.442	9.645
β_λ^c	0.47	...	1.15	0.659
Normierung	0.523	1.090	1.207	2.255

Tabelle 6.5: Tiefliegende Anregungszustände im ^{12}C . Experimentelle Anregungsenergien aus [Ajz85], Deformationsparameter aus [Sat67] und mit den Normierungsparametern angepasste QRPA-Energien und Deformationsparameter. Bei dem 1^- -Zustand handelt es sich um den spuriosen Schwerpunktszustand für den kein Deformationsparameter zu ermitteln ist.



$S=0, T=0$

$S=0, T=1$

Abbildung 6.7: Übergangsstärken für die natürlichen Paritäten 0^+ bis 3^- für skalare, isoskalare Wechselwirkung ($S=0, T=0$), sowie skalare, isovektorielle Wechselwirkung ($S=0, T=1$).

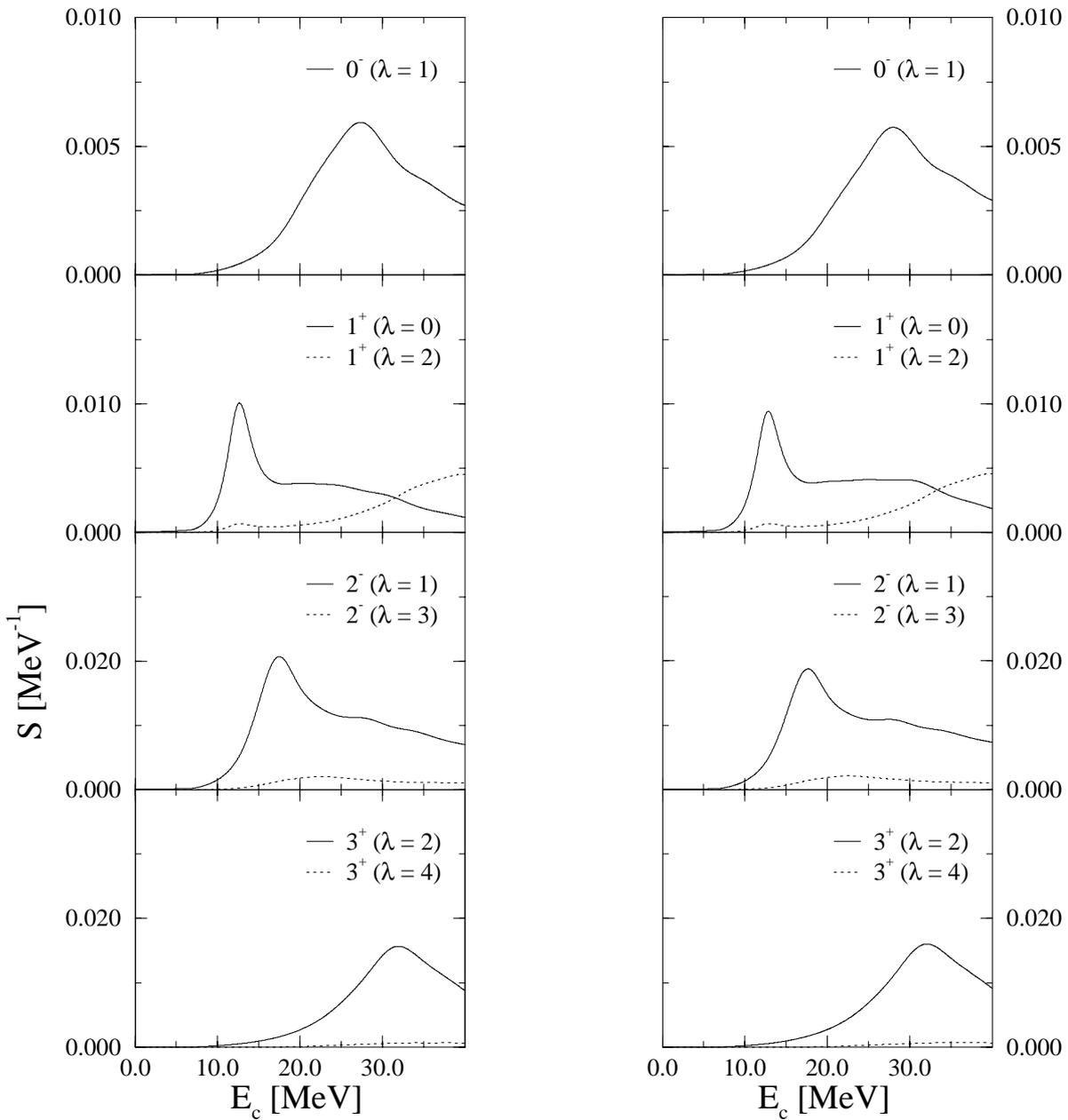


Abbildung 6.8: Übergangsstärken für die unnatürlichen Paritäten 0^- bis 3^+ für vektorielle, isoskalare Wechselwirkung ($S=1$, $T=0$), sowie vektorielle, isovektorielle Wechselwirkung ($S=1$, $T=1$).

Um einen besseren Überblick zu gewinnen, wurden zu den QRPA-Zuständen energiegemittelte Stärkefunktionen berechnet. Diese energiegemittelten QRPA-Stärkefunktionen sind für Gesamtspins $J = 0 - 3$ für $S = 0$ -Übergänge in Abbildung 6.7 und für Spinflip-Übergänge $S = 1$ in Abbildung 6.8 jeweils für $T = 0$ und 1 gezeigt. Wie oben ausführlich diskutiert, werden unterhalb von 10 MeV Anregungsenergie drei prominente Zustände mit großer Stärke erhalten. Sie sind in den linken Teilbildern der Abbildung 6.7 zu sehen. Als eine signifikante Struktur ist auch die isovektorielle Dipolstärke (1^- , $T = 1$), der Dipolriesenresonanz zu erkennen, die einen charakteristischen Doppelpeak zeigt und aus experimentellen und theoretischen Untersuchungen wohlbekannt ist. Außerdem findet man bei etwa 13 MeV die beiden isoskalaren und isovektoriellen 1^+ -Zustände, sowie bei 16 MeV Beiträge der isovektoriellen 2^- -Anregung (Abb. 6.8). Im Experiment werden diese Zustände bei 12.7, 15.11 und 16.11 MeV beobachtet [Ajz85]. Im Gegensatz zu Kernen mit größerer Massenzahl sind weitere Riesenresonanzen nur andeutungsweise zu erkennen. So die Quadrupolriesenresonanz (2^+) bei etwa 27 MeV und eine Oktopolresonanz (3^-) bei 22 MeV. Kontinuierliche Stärke ist ab Energien > 15 MeV zu sehen. Dies entspricht ungefähr der Separationsenergie des Protons aus dem ^{12}C -Rumpf.

Im nächsten Schritt werden jetzt durch Ankopplung von Quasiteilchenzuständen an die QRPA-Zustände, realistische 3-QT-Zustände berechnet. Die Bestimmung der Einteilchenzustände erfolgt im übrigen wieder zu einem konstanten Schalenmodellpotential. Mit Ausnahme der s- und p-Zustände wurden dabei für alle Zustände die selben Geometrieparameter und Potentialtiefen verwendet. Aus einer QPC-Rechnung wie in Abschnitt 3.2 beschrieben und analog zu Abschnitt 5.4, lassen sich dann realistische Partialwellenamplituden ermitteln. Exemplarisch sind die Quadrate dieser elastischen Protonen- und Neutronenpartialwellenamplituden für die p-, d- und f-Streuzustände in den Abbildungen 6.9 bis 6.11 gezeigt. Die zugehörigen Einteilchenstärkefunktionen und die kumulierten Stärken sind in den Abbildungen 6.12 und 6.13 zu sehen. Außerdem sind tiefliegende Anregungszustände und experimentelle Ergebnisse in den beiden Tabellen 6.6 und 6.7 aufgeführt. Zunächst fällt die große Ähnlichkeit zwischen Neutronen- und Protonenzuständen auf. Es finden sich relativ zum Grundzustand für das Spiegelkernsystem ^{13}C und ^{13}N nahezu identische Anregungen. Diese haben allerdings wegen der verschiedenen Lage relativ zur Schwelle, erwartungsgemäß, unterschiedliche Breiten. Auch sind einige Neutronenzustände bereits gebunden, während die entsprechenden Protonenzustände als Resonanzen vorliegen. Besonders interessant ist hier der $d_{5/2}$ -Zustand (siehe Abbildung 6.13). Ohne die Ankopplung der komplizierten Dreiquasiteilchenzustände ergeben sich sowohl für die Protonen als auch für die Neutronen resonante Streuzustände. Während die Protonenresonanz nur verschoben wird, entwickelt sich aus der Neutronenresonanz, die wesentlich dichter an der Teilchenaufbruchschwelle liegt, ein gebundener Zustand (siehe auch Abbildung 6.13). Durch die Ankopplung wird der Zustand "unter die Schwelle geschoben".

J^π	E_{exp} [MeV]	Γ_{exp} [keV]	E_{cal} [MeV]	Γ_{cal} [keV]
$\frac{1}{2}^-$	-4.946		-5.069	
$\frac{1}{2}^+$	-1.857		-1.420	
$\frac{3}{2}^-$	-1.261		-1.688	
$\frac{5}{2}^+$	-1.092		-0.972	
$\frac{5}{2}^+$	1.918	6	0.650	...
$\frac{5}{2}^-$	2.601	1.2 ± 0.3	-0.16	
$\frac{3}{2}^+$	2.795	70 ± 5	2.829	650
$\frac{3}{2}^+$	3.25	1000 ± 300	4.261	270
$\frac{1}{2}^-$	3.140	360
$\frac{1}{2}^-$	3.914	150 ± 30	3.850	110
$\frac{5}{2}^+$	3.967	90
$\frac{3}{2}^-$	4.951	26 ± 3	4.366	14
$\frac{7}{2}^-$	5.807	55 ± 2	3.692	4
$\frac{1}{2}^+$	6.050	37 ± 4	7.018	190
$\frac{1}{2}^-$	6.134	<4	7.000	<1
$\frac{3}{2}^-$	6.802	110 ± 15	7.178	150

Tabelle 6.6: Tiefliegende Anregungszustände des ^{13}C relativ zur Teilchenaufbruchschwelle. Experimentelle Anregungsenergien aus [Ajz85] und berechnete QPC-Energien, sowie zugehörige Breiten. (... keine Breite zu ermitteln)

Auch für die $p_{1/2}$ und $p_{3/2}$ -Zustände (Abbildungen 6.9 und 6.12) und die $d_{3/2}$ (Abbildungen 6.10 und 6.13) sieht man eine große Ähnlichkeit zwischen den Proton- und Neutronzuständen. Die Partialwellenamplitudenquadrate sind jeweils um 3 MeV verschoben. Dies entspricht der Differenz der Grundzustandsenergien. Das hier verwendete QPC-Modell erlaubt also in konsistenter Form die Beschreibung von gebundenen und ungebundenen Zuständen. Tatsächlich ergibt sich der unter die Schwelle geschobene, gebundene $d_{5/2}$ -Neutronenzustand aus einer Linearkombination von ungebundenen Einteilchenzuständen.

Im Detail wurden für beide Spiegelkerne folgende prominente Zustände erhalten (Tabellen 6.6 und 6.7): Der $p_{1/2}$ -Grundzustand, die drei tiefliegenden $s_{1/2}$, $p_{3/2}$ und $d_{5/2}$ -Zustände, die in ^{13}C gebunden sind, in ^{13}N jedoch im Kontinuum liegen, sowie mehrere $p_{1/2}$, $p_{3/2}$, $d_{3/2}$ und $d_{5/2}$ -Anregungszustände im Kontinuum. Auch ein weiterer $s_{1/2}$ -Kontinuumszustand bei ca. 6.0 bzw. 8.3 MeV ist zu finden. Die Energien der tiefliegenden Zustände decken sich mit den experimentellen Werten. Auch die Anzahl der ersten Kontinuumsanregungszustände findet sich in den experimentellen Daten wieder, ihre Energien und Breiten stimmen allerdings nur teilweise überein. Für die p -Zustände ist außerdem besonders deutlich die Einbettung von gebundenen

J^π	E_{exp} [MeV]	Γ_{exp} [keV]	E_{cal} [MeV]	Γ_{cal} [keV]
$\frac{1}{2}^-$	-1.945		-2.026	
$\frac{1}{2}^+$	0.415	32	0.268	17
$\frac{3}{2}^-$	1.565	62	1.338	1
$\frac{5}{2}^+$	1.605	47	1.256	40
$\frac{5}{2}^+$	4.415	11	2.5	...
$\frac{3}{2}^+$	4.935	115	4.737	550
$\frac{5}{2}^-$	5.431	75 ± 5	3.013	2
$\frac{3}{2}^+$	5.955	1500	6.162	860
$\frac{1}{2}^-$	6.253	420
$\frac{1}{2}^-$	6.975	230	6.921	130
$\frac{3}{2}^-$	7.535	30	7.405	27
$\frac{1}{2}^+$	8.305	280	8.320	410
$\frac{7}{2}^-$	8.415	76	6.719	20
$\frac{1}{2}^-$	8.888		7.000	<1
$\frac{3}{2}^-$	9.795	530 ± 80	10.21	150

Tabelle 6.7: Tiefliegende Anregungszustände des ^{13}N relativ zur Teilchenaufbruchschwelle. Experimentelle Anregungsenergien aus [Ajz85] und berechnete QPC-Energien, sowie zugehörige Breiten. (... keine Breite zu ermitteln)

Zuständen im Kontinuum zu sehen (siehe Abbildung 6.9). Dabei zeigt das Quadrat der Partialwellenamplitude durch die Ankopplung eine Nullstelle in der Nähe der Energie des im Kontinuum eingebetteten Dreiquasiteilchenzustands. Bei den eingebetteten Zuständen handelt es sich im Falle der $p_{1/2}$ -Einteilchenstreu Zustände um die beiden tiefliegenden $[0^+ \otimes 1/2^-]_{1/2^-}$ und $[2^+ \otimes 3/2^-]_{1/2^-}$ -Zustände. Tatsächlich kann der Einfluß dieser Zustände selektiv berechnet werden, indem man sie jeweils alleine berücksichtigt. Experimentell ist allerdings nur ein $1/2^-$ -Zustand in diesem Energiebereich zu finden (siehe Tabelle 6.6 und 6.7). Vermutlich wird die Teilchenamplitude des $p_{3/2}$ -Quasiteilchenzustands in der BCS-Rechnung überschätzt, sodaß der Einfluß des $[2^+ \otimes 3/2^-]_{1/2^-}$ -Zustands in Wirklichkeit kleiner ist. Bei den $d_{3/2}$ -Streuphasen wird der Unterschied bei der Ankopplung gebundener und ungebundener Dreiquasiteilchenzustände deutlich (siehe Abbildung 6.10). Der tiefliegende $[2^+ \otimes 1/2^+]_{3/2^+}$ -Zustand ist im Falle von ^{13}C ein gebundener Zustand, im Falle von ^{13}N aber ein Streuzustand. Man erhält daher für ^{13}C eine Nullstelle im Quadrat der Partialwellenamplitude und für ^{13}N nur ein lokales Minimum. Ein völlig entsprechendes Verhalten zeigen die f-Zustände.

Diese QPC-Streuphasen können nun als realistische Streuphasen bei der Berechnung doppelt differentieller Wirkungsquerschnitte verwendet werden.

Im letzten Teil dieses Abschnitts wird dies exemplarisch für die Proton-Stripping-Reaktion $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, ^{11}\text{B})^{13}\text{N}$ durchgeführt. Als optische Modellparameter für die DWBA werden dabei wieder die Größen aus Tabelle 6.1 verwendet. Das inklusive Gesamtspektrum mit ^{11}B als Ejektil ist, wie in Abschnitt 6.1 beschrieben, wieder eine Summe aus Teilspektren zu verschiedenen teilchenstabilen Ejektilzuständen, in diesem Falle zu den in Tabelle 6.8 aufgeführten Zuständen des ^{11}B . Es wurden die p-Lochkomponenten für den $\frac{3}{2}^-$ -Grundzustand, sowie für den ersten $\frac{1}{2}^-$ - und den ersten $\frac{3}{2}^-$ -Anregungszustand berücksichtigt. Die spektroskopischen Faktoren, sowie die Anregungsenergien relativ zum Grundzustand wurden Cohen und Kurath entnommen [CoK67]. Auch wurde gemäß Gleichung (5.6) für die Anregungszustände eine zusätzliche Dopplerbreite (siehe Tabelle 6.8) bei der Faltung mit der experimentellen Breite von 0.7 MeV berücksichtigt. Für die γ -Zerfälle wurden Übergänge in den Grundzustand angenommen, was durch die Verzweigungsraten von 100% für den $\frac{1}{2}^-$ - und 85% für den $\frac{3}{2}^-$ -Anregungszustand gerechtfertigt ist [Ajz85].

Unberücksichtigt blieb der tiefste $\frac{5}{2}^-$ -Anregungszustand, sowie die höherliegenden Anregungszustände mit positiver Parität des ^{11}B , da es sich bei diesen Lochzuständen vermutlich vorrangig um Kopplungen an Rumpfanregungen handelt.

J^π	E_{exp} [MeV]	E_x [MeV]	$C^2S(1p_{\frac{1}{2}}^{-1})$	$C^2S(1p_{\frac{3}{2}}^{-1})$	Γ_d
$\frac{3}{2}^-$	0.00	0.00	0.000	2.850	0.00
$\frac{1}{2}^-$	2.12	1.71	0.753	0.000	0.25
$\frac{3}{2}^-$	5.02	5.39	0.000	0.378	0.78

Tabelle 6.8: Anregungsenergien (relativ zum Grundzustand) und spektroskopische Faktoren für Zustände von ^{11}B mit negativer Parität aus [CoK67]. Die mit *exp* indizierten Werte sind experimentelle Ergebnisse [Ajz85].

Mit den QPC-Amplituden wird jetzt die $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, ^{11}\text{B})^{13}\text{N}$ Reaktion exemplarisch berechnet, die im vorherigen Abschnitt mit reinen Einteilchenzuständen für das ^{13}N bereits gezeigt wurde. Das Ergebnis war in Abbildung 6.5 dargestellt. Es soll jetzt der Unterschied durch die QPC-Behandlung untersucht werden. In Abbildung 6.15 sind verschiedene Teilspektren dargestellt: für den $^{11}\text{B}(g.s.)$ die Beiträge verschiedener Teilchenzustände (oben) und die Teilspektren für die drei ^{11}B -Endzustände summiert über alle Teilchenzustände (unten). Diese Abbildungen sind mit den Abbildungen 6.2 (oben) und den Abbildungen 6.3 (unten) für unkorrelierte Teilchenzustände zu vergleichen. Man erkennt deutlich die stärkere Strukturierung auf Grund der Ankopplung der Rumpfanregungen.

In Abbildung 6.16 ist schließlich das inklusive Gesamtspektrum bei $\theta_{lab} = 6.5^\circ$ dargestellt, wobei die unkorrelierte Rechnung aus Abschnitt 6.1 (hellgrün) und die QPC-Rechnung aus diesem Abschnitt (schwarz) mit dem Experiment (rotes Histo-

gramm) verglichen werden. Dabei wurde wieder das experimentelle Spektrum, da nur Zählraten bekannt waren, derart skaliert, daß der Wert des Integrals über das beobachtete Energieintervall dem Wert des Integrals des unkorrelierten Einteilchenspektrums entsprach. Damit wird eine sehr gute Übereinstimmung mit dem strukturlosen Kontinuum (ab etwa 15 MeV Anregungsenergie) erhalten. Diese Skalierung hat den Vorteil, daß die bekannten Unsicherheiten im optischen Potential verringert werden. Mit diesem Ansatz ergibt sich wie bereits in Abschnitt 6.1 erwähnt, auch eine gute Übereinstimmung mit vielen signifikanten Peaks der Reaktion mit unkorrelierten Zuständen. Auch werden mit dem QPC-Modell, in dem spektroskopische Faktoren enthalten sind, die meisten resonanten Strukturen richtig erfaßt. Im experimentellen Spektrum sind dabei folgende Peaks, der Reihe nach, zu beobachten: Der g.s.-Peak, ein großer Peak bei 3.59 MeV Anregungsenergie, sowie drei Peaks bei Anregungsenergien von 5.83, 7.37 und 9.16 MeV. Außerdem sind noch zwei weitere breite Peaks bei etwa 12 und 14 MeV Anregungsenergie zu sehen. Die tiefliegenden Peaks können bestimmten Übergängen eindeutig zugeordnet werden. Bei den höherliegenden Peaks (ab 7.37 MeV) ist die Zuordnung unsicher und auch auf Grund der schlechten experimentellen Auflösung nicht eindeutig. Die Peaks sollen jetzt der Reihe nach diskutiert werden und mit den hier erhaltenen Ergebnissen verglichen werden.

g.s.-Peak: Bei diesem Peak handelt es sich um den Übergang in die Ejektil- und Restkerngrundzustände, also in einen $p_{\frac{3}{2}}$ -Lochzustand ($^{11}\text{B}(g.s.)$) und einen $p_{\frac{1}{2}}$ -Teilchenzustand (^{13}N). Dieser Übergang wird durch eine Vielzahl von Experimenten bestätigt ([JKM92] und Referenzen dort). Allerdings zeigen die spektroskopischen Faktoren, die aus den verschiedenen Experimenten erhalten wurden, relativ große Unterschiede. In den hier durchgeführten Rechnungen wurde für das Ejektil der spektroskopische Faktor von 2.85 von Cohen und Kurath angenommen. Für den Restkern wurde in der unkorrelierten Rechnung ein Wert von 1.0 angenommen, aus der QPC-Rechnung ergab sich ein Wert von 0.64. Der zuletzt genannte Wert scheint aber zu klein, obwohl er dem Wert von Jarczyk et al. [JKM92] (0.64) entspricht.

Peak bei 3.59 MeV: Dieser Peak ist vorrangig dem Übergang in den $p_{\frac{3}{2}}$ -Lochzustand ($^{11}\text{B}(g.s.)$) und den $d_{\frac{5}{2}}$ -Teilchenzustand (^{13}N) zuzuordnen. Kleinere Beiträge sind außerdem vom Übergang in den $p_{\frac{3}{2}}$ -Teilchenzustand (^{13}N) zu erwarten. Auch hier finden sich bei den experimentellen Ergebnissen für die spektroskopischen Faktoren des Restkernsystems durchaus signifikante Unterschiede (siehe wieder [JKM92]). Sowohl Einteilchenmodell- als auch QPC-Rechnungen reproduzieren diesen Übergang quantitativ. Der von Jarczyk et al. angegebene spektroskopische Faktor von 0.48 ist um die Hälfte kleiner als die hier errechneten Größen (1.0 Einteilchenmodell, 1.13 QPC-Modell).

Peak bei 5.83 MeV: In der Literatur ([ACF74] und [JKM92]) wird dieser Peak, als Übergang in den $p_{\frac{1}{2}}$ -Lochzustand (^{11}B) und den $d_{\frac{5}{2}}$ -Teilchenzustand (^{13}N) beschrieben. In den hier durchgeführten Rechnungen liegt dieser Peak energetisch um etwa 0.5 MeV zu tief. Dies ist im wesentlichen auf die Verwendung der Ejektilanregungs-

energie von 1.71 MeV der Rechnung von Cohen und Kurath zurückzuführen (statt des experimentellen Wertes von 2.11 MeV). Im Falle des QPC-Ansatzes findet man außerdem Beiträge des Übergangs in den ^{11}B -Grundzustand ($p_{\frac{3}{2}}$ -Lochzustand) und den $f_{\frac{5}{2}}$ -Teilchenzustand des ^{13}N (siehe Abbildung 6.15 oberes Teilbild). Der zuletzt genannte Teilchenzustand liegt energetisch um fast 2.5 MeV tiefer als der entsprechende experimentelle Zustand (Siehe Tabelle 6.7).

Peak bei 7.37 MeV: Von Jarczyk et al. wird dieser Peak als Übergang in den ^{11}B -Grundzustand und das nicht aufgelöste Dublett der $7/2^+$ und $5/2^-$ -Zustände des ^{13}N bei 7.16 bzw. 7.38 MeV interpretiert. Die hier durchgeführten QPC-Rechnungen zeigen aber auch einen signifikanten Beitrag des $d_{\frac{3}{2}}$ -Teilchenzustands. Insgesamt wird der Peak in der QPC-Rechnung unterschätzt, da der $f_{\frac{5}{2}}$ -Teilchenzustand, wie oben bereits erwähnt energetisch zu tief liegt. Der spektroskopische Faktor des $f_{\frac{5}{2}}$ -Teilchenzustand beträgt 0.1, was mit dem Wert 0.096 von Jarczyk et al. übereinstimmt. Allerdings ist davon auszugehen, daß dieser Peak auch Mehrstufenübergänge enthält [PeH80]. Der hier angegebene spektroskopische Faktor für $f_{\frac{5}{2}}$ ist zudem mit dem Wert 0.024 wesentlich kleiner.

Peak bei 9.16 MeV: Dieser Peak enthält vermutlich wieder mehrere Übergänge. Zum einen den Übergang in den angeregten $p_{\frac{3}{2}}$ -Lochzustand des ^{11}B und den $d_{\frac{5}{2}}$ -Teilchenzustand des ^{13}N , wie man ihn aus der Einteilchenmodellrechnung enthält, zum anderen aber auch den Übergang in den ^{11}B -Grundzustand sowie den $f_{\frac{7}{2}}$ -Teilchenzustand des ^{13}N (Siehe Abbildung 6.15 oberes Teilbild). Jarczyk et al. nehmen für diesen Peak einen Übergang in den ^{11}B -Grundzustand und den $9/2^+$ -Anregungszustand des ^{13}N an. In Anbetracht des großen spektroskopischen Faktors von 0.054, der um den Faktor 10 größer ist als bei anderen Experimenten [PeH80], scheint diese Zuordnung alleine allerdings fragwürdig. $g_{\frac{7}{2}}$ -Beiträge könnten auch bei QPC-Rechnungen gefunden werden. Der erhaltene spektroskopische Faktor von ca. 0.006 erwies sich allerdings ebenfalls als wesentlich kleiner als der von Jarczyk et al. angegebene und lag in der Größenordnung der anderen Experimente.

Peaks bei 12 und 14 MeV: Experimentelle Zuordnungen zu diesen Peaks sind nicht bekannt. Hier konnten diese Strukturen im wesentlichen durch den Übergang in den ^{11}B -Grundzustand und in $f_{\frac{7}{2}}$ -Anregungszustände des ^{13}N beschrieben werden. Weitere Beiträge sind allerdings anzunehmen, da insbesondere der Peak bei 12 MeV deutlich unterschätzt wird.

Zusammenfassend kann festgestellt werden: Die globale Struktur des Spektrums wird sowohl im Einteilchenmodell als auch im QPC-Modell qualitativ korrekt beschrieben. Einige Übergänge werden allerdings unter- bzw. überschätzt, was zum Teil auf die Lage der Anregungsenergien, zum Teil auf die berechneten Amplituden zurückzuführen ist. Für hohe Anregungsenergien werden die experimentellen Daten vom QPC-Modell gegenüber dem Einteilchenmodell unterschätzt. Hier sollten jedoch Mehrstufenanregungen zunehmende Bedeutung gewinnen. Außerdem wurden im QPC-Modell für die Restkernzustände keine Zustände mit $\ell \geq 4$ berücksichtigt, die gerade für höhere Anregungsenergien > 15 MeV an Bedeutung gewinnen.

Bei der Auswertung von Jarczyk et al. [JKM92] ergeben sich für die meisten signifikanten Peaks, spektroskopische Faktoren, die im Vergleich zu den Ergebnissen aus anderen Experimenten und den hier gefundenen Resultaten, zu klein erscheinen.

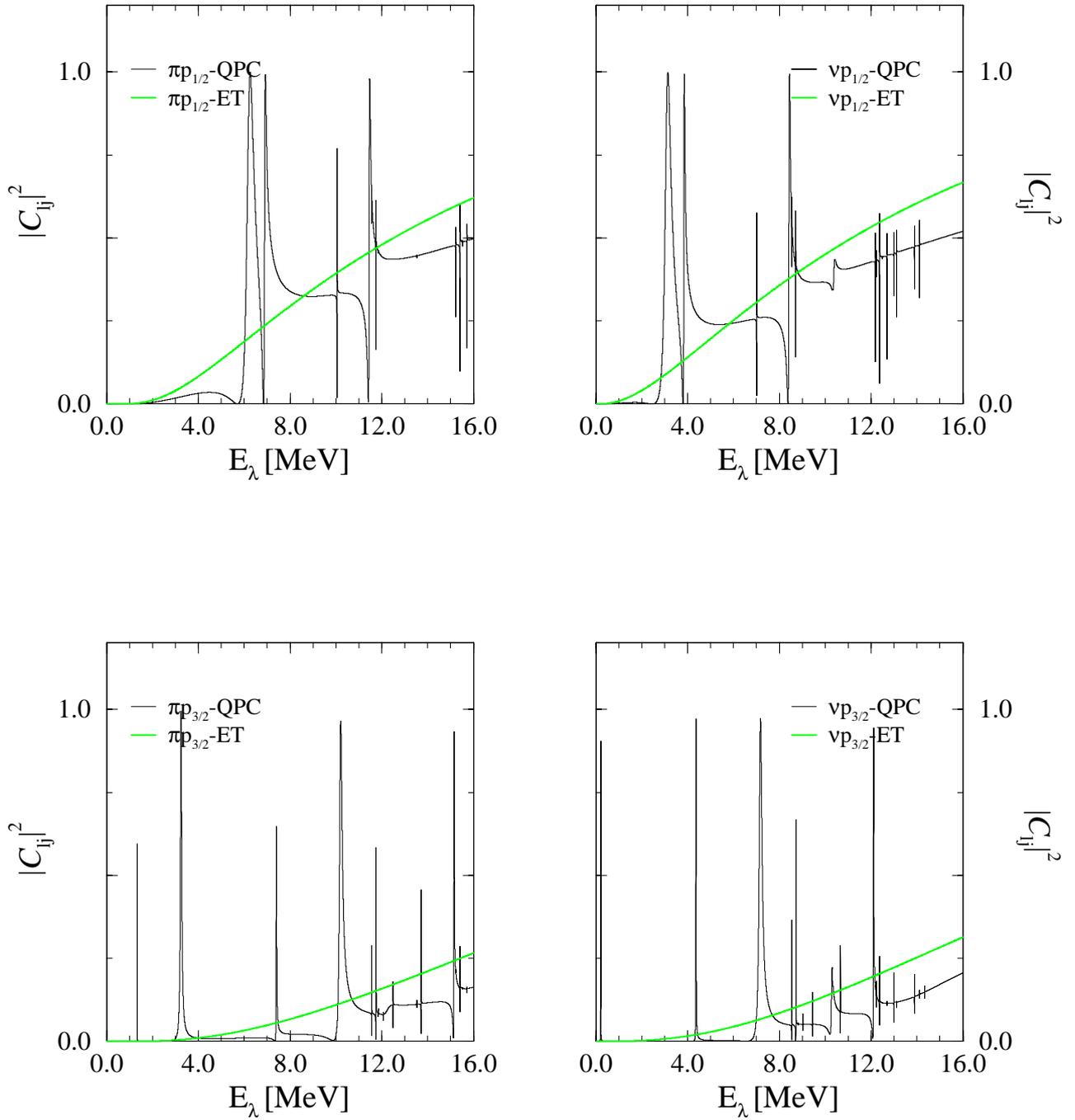


Abbildung 6.9: Quadrate der Partialwellenamplitude für ungestörte Quasiteilchen (grün) und aus den QPC-Rechnungen (schwarz) für die $p_{1/2}$ und $p_{3/2}$ -Protonen- (links) und Neutronen-Streuzustände (rechts).

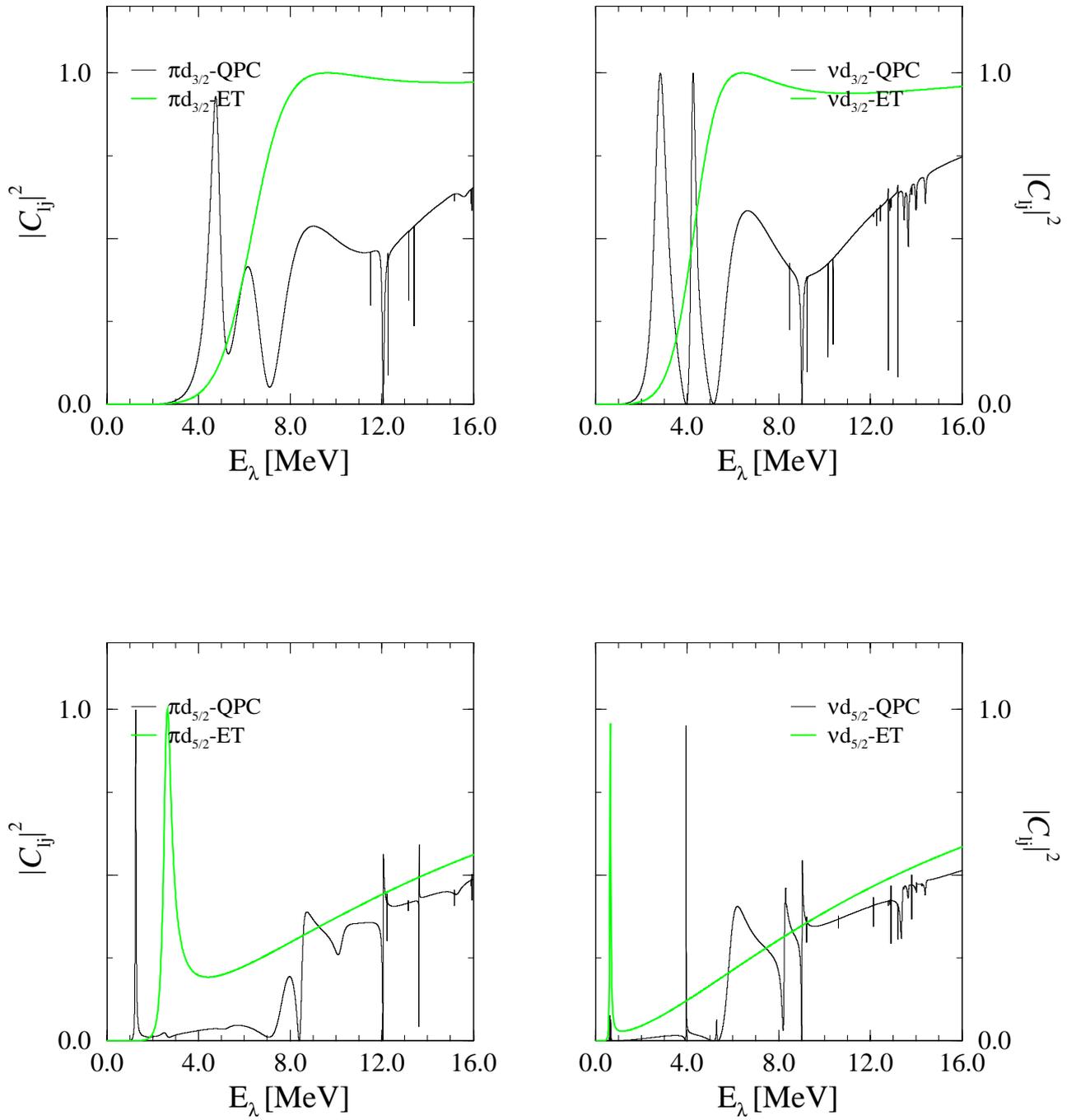


Abbildung 6.10: Quadrate der Partialwellenamplitude, wie in Abbildung 6.9, für die $d_{3/2}$ und $d_{5/2}$ -Protonen- (links) und Neutronen-Streuzustände (rechts).

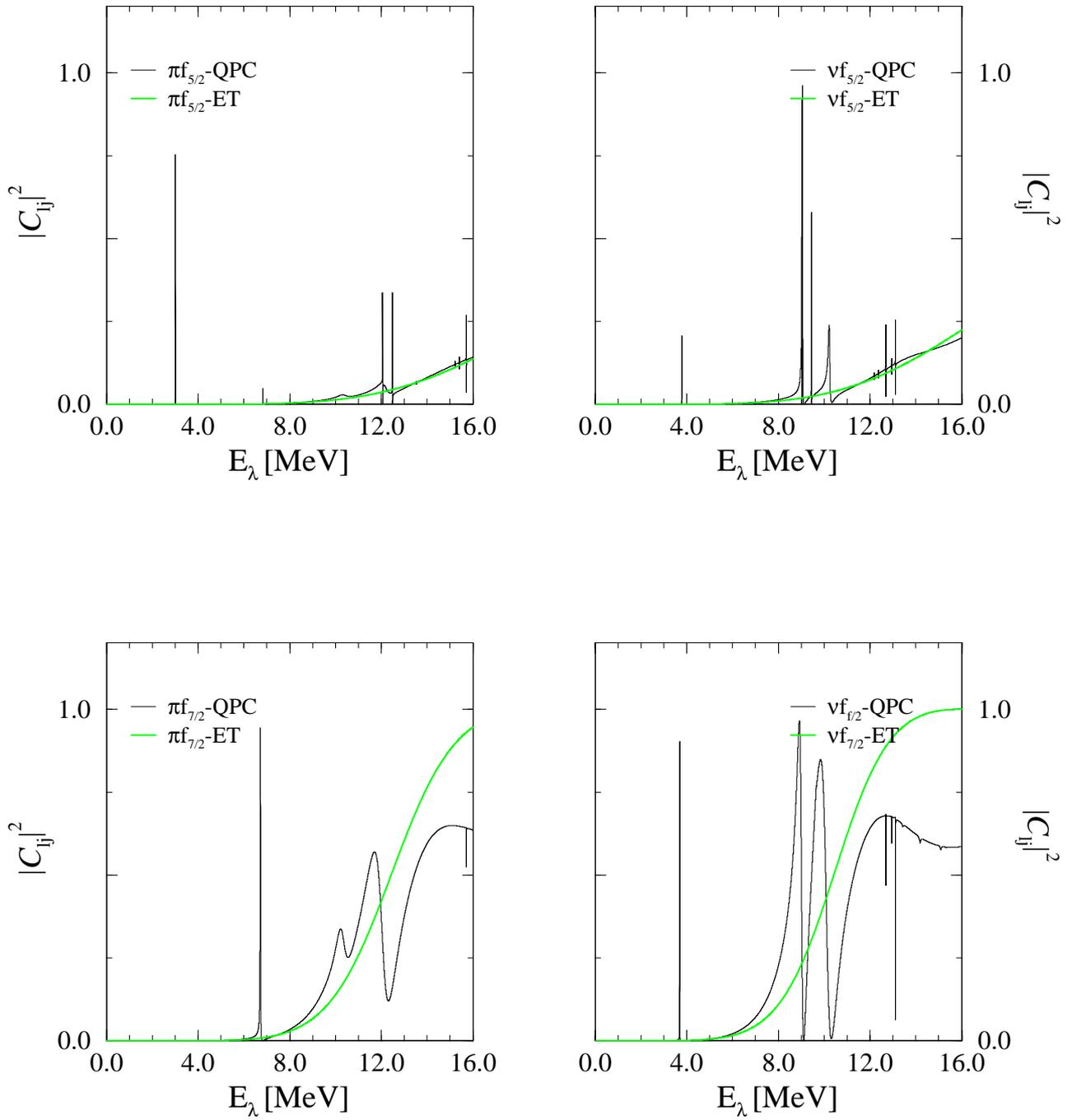


Abbildung 6.11: Quadrate der Partialwellenamplitude, wie in Abbildung 6.9, für die $f_{5/2}$ und $f_{7/2}$ -Protonen- (links) und Neutronen-Streuzustände (rechts).

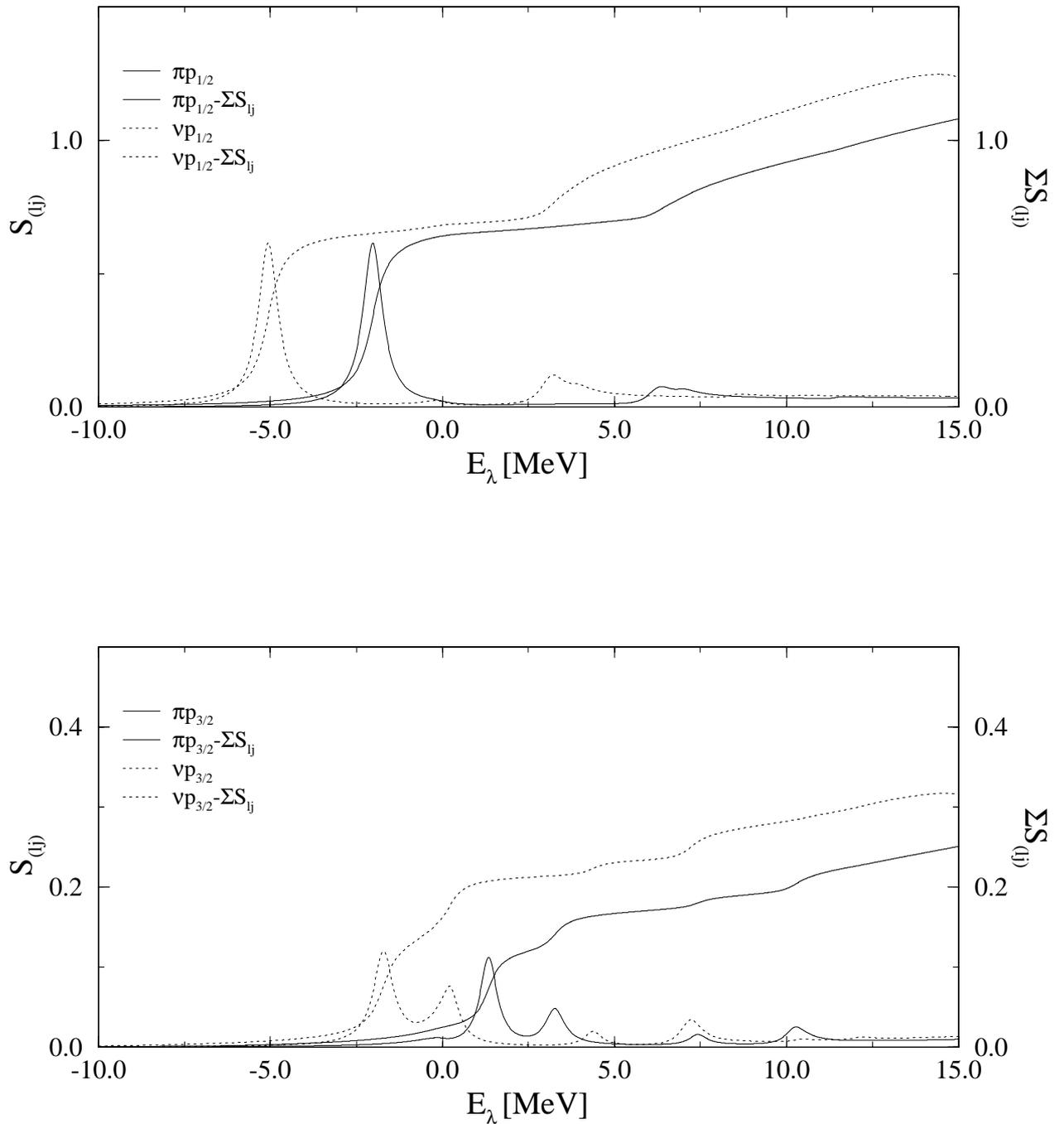


Abbildung 6.12: Einteilchenstärkefunktionen für die $p_{\frac{1}{2}}$ und $p_{\frac{3}{2}}$ -Protonen- (durchgezogen) und Neutronenzustände (gestrichelt) aus der QPC-Rechnung. Es ist jeweils die Stärkefunktion und die bis zur Energie E_λ aufintegrierte, kumulierte Stärke gezeigt.

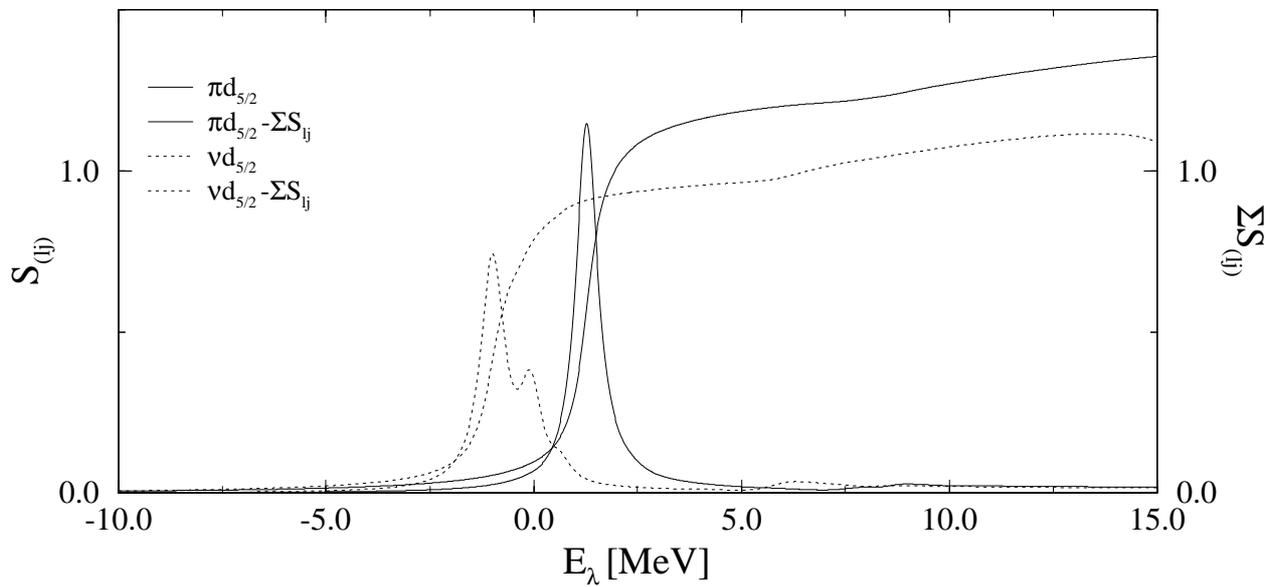
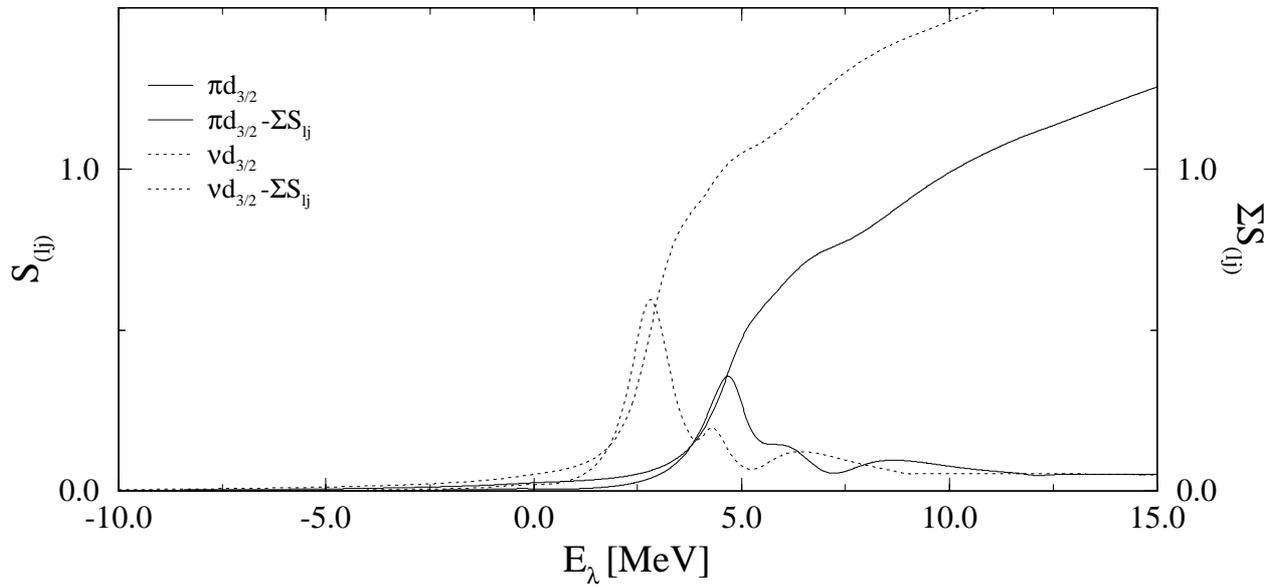


Abbildung 6.13: Stärkefunktionen, wie in Abbildung 6.12, für den $d_{3/2}$ und $d_{5/2}$ -Protonen- (durchgezogen) und Neutronenzustände (gestrichelt).

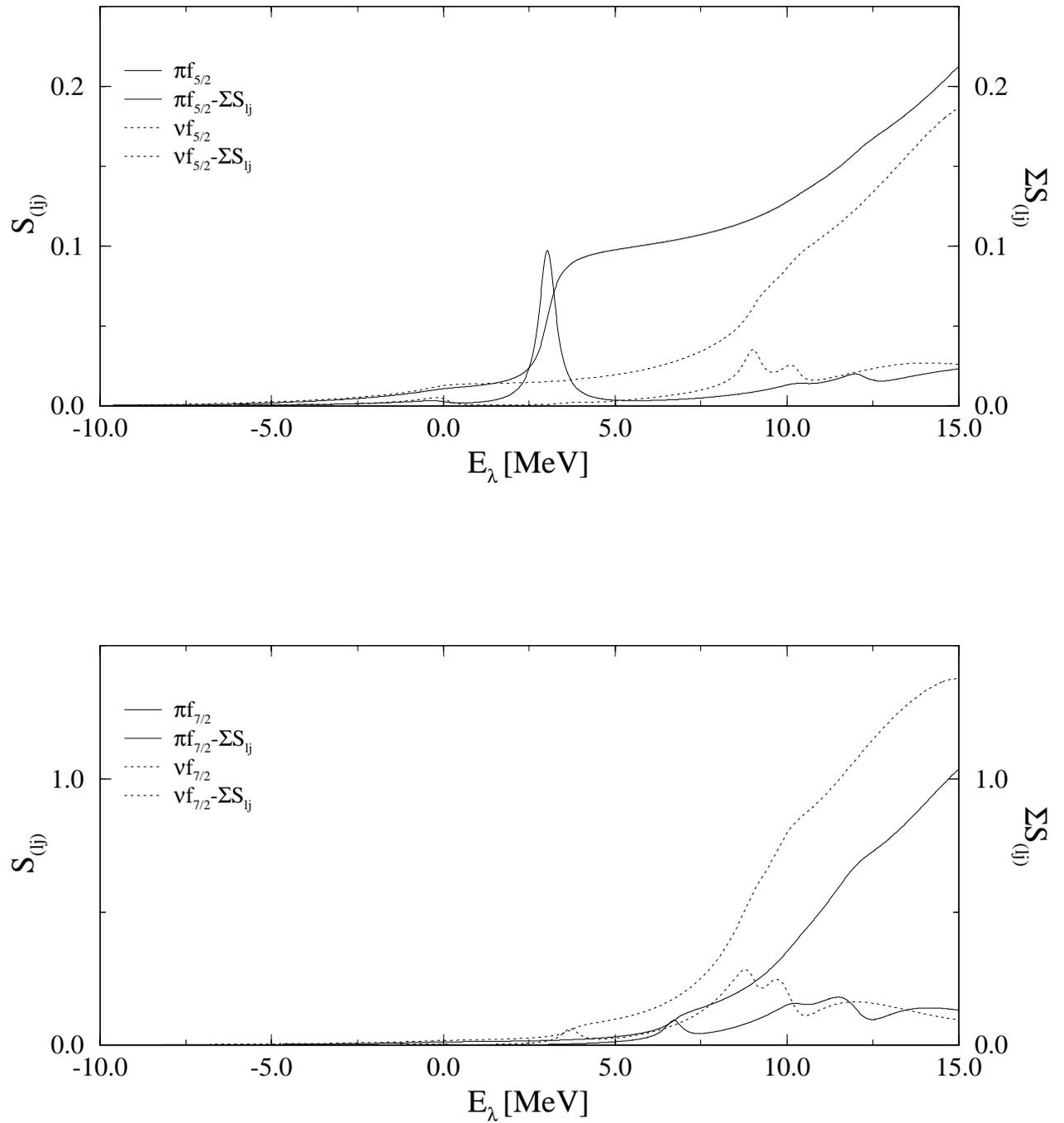


Abbildung 6.14: Stärkefunktionen, wie in Abbildung 6.12, für den $f_{5/2}$ und $f_{7/2}$ -Protonen- (durchgezogen) und Neutronenzustände (gestrichelt).

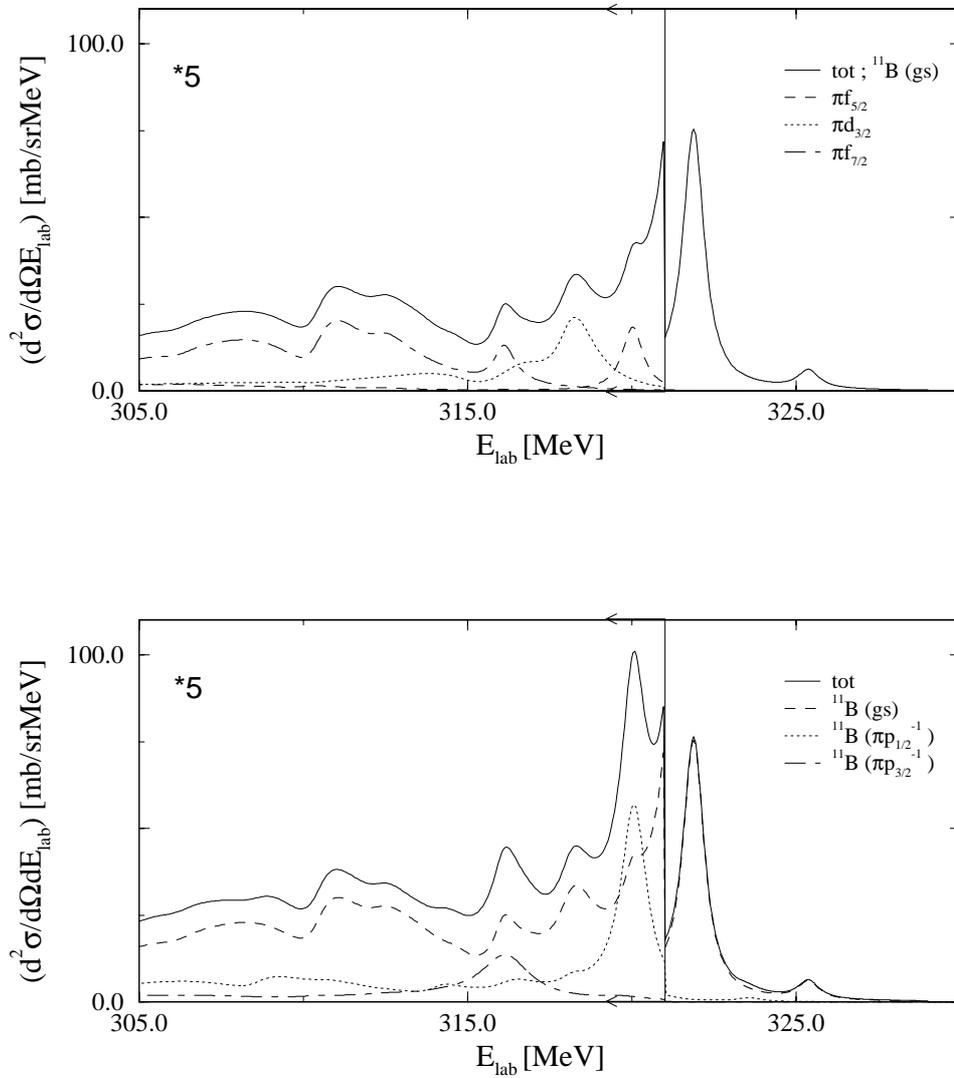


Abbildung 6.15: Doppelt differenzielle Partialwirkungsquerschnitte der Reaktion $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, ^{11}\text{B})^{13}\text{N}$. Im oberen Teilbild sind Übergänge in den ^{11}B -Grundzustand und verschiedene Einteilchenkomponenten von ^{13}N zu sehen. Im unteren sind Teilspektren für die verschiedenen ^{11}B -Endzustände, summiert über alle Einteilchenkomponenten von ^{13}N , gezeigt.

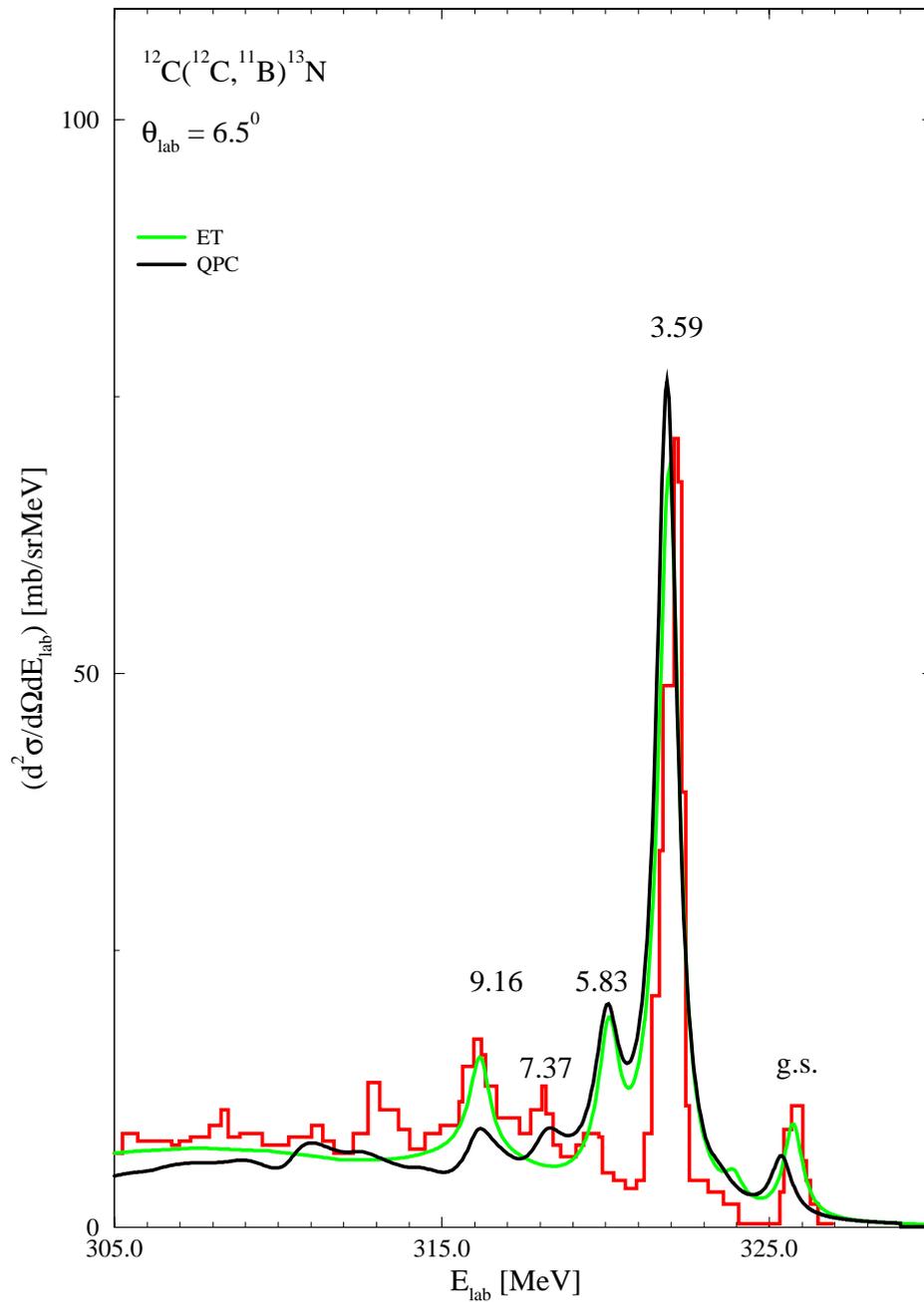


Abbildung 6.16: Doppelt differenzieller ^{11}B -inklusive Wirkungsquerschnitt der Reaktion $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, ^{11}\text{B})^{13}\text{N}$ im Laborsystem. Gezeigt sind die Ergebnisse der Rechnung mit unkorrelierten Teilchenzuständen (grün) und mit QPC-Zuständen (schwarz), sowie als Histogramm (rot) die experimentellen Daten.

6.3 Pickup-Aufbruch-Reaktion — Vergleich mit inelastischer Streuung

Der letzte Abschnitt dieses Kapitels ist der Pickup-Aufbruch-Reaktion zum inklusiven ^{12}C Spektrum gewidmet. Als Eingangsgrößen fungieren die in Abschnitt 6.1 beschriebenen Proton- und Neutron-Pickup-Reaktionen in unkorrelierte Kontinuumszustände. Wie im Anhang C beschrieben sollen die dabei entstehenden angeregten Ejektile $^{13}\text{C}^*$ und $^{13}\text{N}^*$ noch auf ihrem Weg zum Detektor zerfallen. Der Zerfall wird dabei als isotroper Zerfall angenommen. Insgesamt wurden sämtliche Proton- und Neutron-Kontinuumszustände von $s_{\frac{1}{2}}$ bis $h_{\frac{11}{2}}$ berücksichtigt, die nach dem Zerfall des ungebundenen Ejektils als "side feed"-Prozeß zur inelastischen Streuung auftreten. In der Abbildung 6.17 sind diese aufsummierten doppelt-differentiellen Wirkungsquerschnitte des Pickup-Aufbruchs für die Protonen und für die Neutronen, sowie deren Summe linear dargestellt. Da die Separationsenergie für Protonen im ^{12}C niedriger ist als für Neutronen (15.96 MeV gegenüber 18.72 MeV) findet man zunächst nur einen Anteil der aus dem Zerfall von $^{13}\text{N}^*$ resultiert. Der Protonenwirkungsquerschnitt zeigt außerdem über einen Anregungsenergiebereich von etwa 20 MeV ein Plateau, daß von der zerfallenden $d_{\frac{5}{2}}$ -Resonanz herrührt. Der Anteil aus dem Zerfall von $^{13}\text{C}^*$ zeigt diese charakteristische Struktur nicht, da der entsprechende Zustand gebunden ist. Außerhalb des Plateaus sind die Protonen- und Neutronenanteile etwa gleich groß. Es zeigt sich außerdem, daß bei Vorwärtswinkeln die Theorie das Experiment überschätzt, während bei größeren Winkeln, die theoretischen Ergebnisse zu klein sind. Dies ist vermutlich durch die Annahme eines isotropen Zerfalls bedingt. Insgesamt stimmt der Gesamtwirkungsquerschnitt gut mit dem Experiment überein. Für niedrige Anregungsenergien sind natürlich die direkten inelastischen Anteile zu berücksichtigen, die von R. Siudak [Siu93] ermittelt wurden. Sie wurden im Rahmen des MS DR-Modells bestimmt. Dazu wurden Stärkefunktionen für 1- und 2-stufige inelastische Anregungen des Targets und des Ejektils berechnet und damit die Wirkungsquerschnitte der inelastischen Streuung ermittelt. Die Summe aller diese Anteile liefert dann den gesamten theoretischen Wirkungsquerschnitt. In der Abbildung 6.18 werden diese inelastischen Anteile und die Pickup-Breakup-Anteile dargestellt und mit dem Experiment verglichen. Sowohl die Struktur als auch die absolute Größe werden recht gut beschrieben.

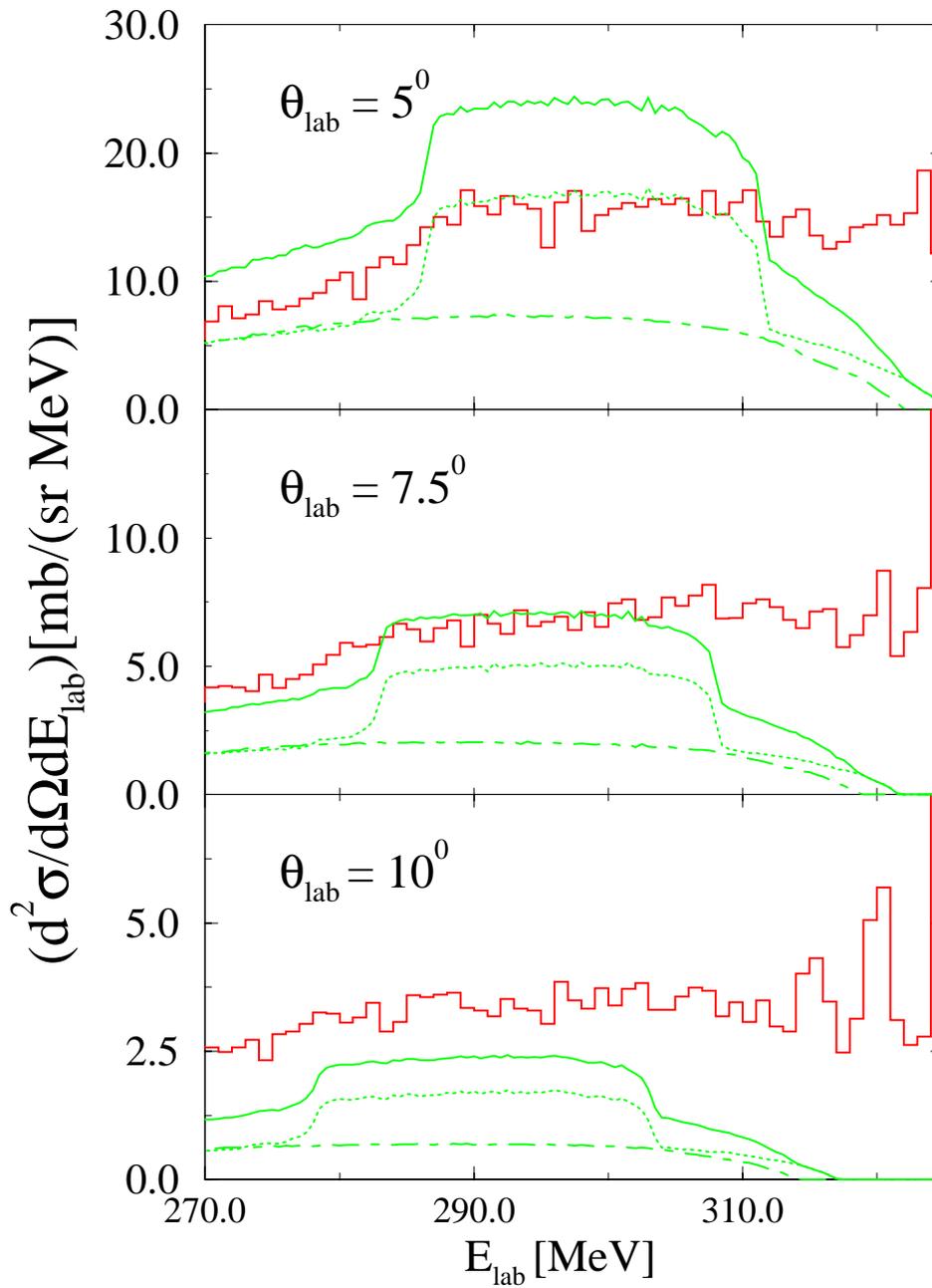


Abbildung 6.17: Doppelt-differentieller Wirkungsquerschnitt (linearer Maßstab):
 — Summe Pickup-Aufbruch (grün) ; - · - · - Protonen (grün) ;
 - - - Neutronen (grün); Histogramm (experimentelle Daten; rot)

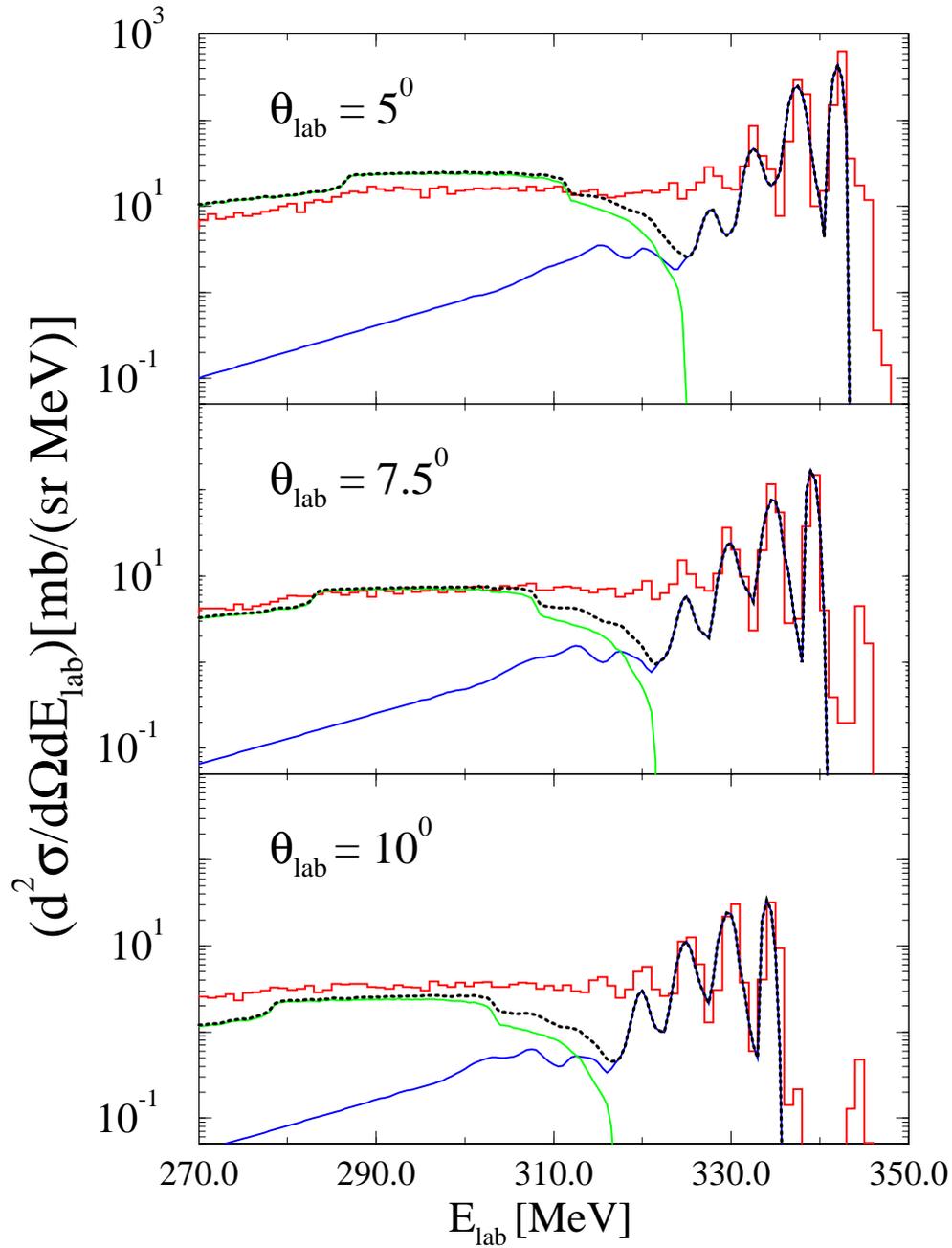


Abbildung 6.18: Doppelt-differentieller Wirkungsquerschnitt (logarithmischer Maßstab): Pickup-Aufbruch (grün); Inelastische Streuung (blau); Pickup-Aufbruch + inelastische Streuung (schwarz); Experimentelle Werte: Histogramm (rot)

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Das Hauptziel dieser Arbeit war die Behandlung von Transferreaktionen in Dreikörperendkanäle. Ausgehend von einem sehr allgemeinen Dreikörperansatz, wurden die bekannten Einstufenübergangsamplituden in Distorted-Wave-Näherung hergeleitet. Dabei wurde die besondere Problematik die durch Dreikörperkanäle bedingt ist, ausführlich diskutiert. Insbesondere der Formfaktor für Kontinuumstransfer enthält eine nicht konvergente Streuwellenfunktion des transferierten Teilchens und ist daher in einer für die jeweilige Reaktion geeigneten Darstellung zu berechnen, um konvergente Übergangsamplituden zu erhalten [Wei89]. Für eine realistische Beschreibung von experimentellen Daten ist es außerdem nötig, die Streuwellenfunktion des transferierten Teilchens mit einem Modell zu bestimmen, das die Freiheitsgrade des Rumpfes berücksichtigt. Abhängig von der Nukleonenzahl des ungebundenen Kernendzustands wurden zwei Modelle ausführlich diskutiert. Als Ansatz für realistische Wellenfunktionen von Systemen mit gerader Nukleonenzahl wurde ein Kontinuums-QRPA-Modell mit mikroskopischen Restwechselwirkungen vorgestellt. Die erhaltenen Modellzustände sind Linearkombinationen von 2-Quasiteilchenanregungen. Die Bestimmung der Koeffizienten dieser Linearkombination, der QRPA-Amplituden, erfolgte dabei mit dem Dichtentwicklungsansatz von H. Lenske [Len87]. In diesem Ansatz ergibt sich eine verallgemeinerte Dispersionsgleichung mit einer zusätzlichen Inhomogenität, bedingt durch die Berücksichtigung von ungebundenen Teilchenzuständen in den Phononanregungen. Man erhält daher auch Zustandsamplituden zu den gemittelten Einteilchenfeldern die kontinuierlich von der Energie abhängen. Dies erweitert das ursprüngliche Modell von H. Lenske [Len87] in dem nur diskrete Zustandsamplituden und damit auch nur diskrete Anregungszustände auch für Anregungsenergien oberhalb der Teilchenaufbruchschwelle erhalten werden. Dieses neue Modell wurde allerdings hier noch nicht konkret angewandt.

Für die Behandlung von Systemen mit ungerader Nukleonenzahl wurde ein Quasiteilchen-Rumpf-Kopplungsmodell (QPC-Modell) im Kontinuum formuliert. Dieses Modell ist ebenfalls eine Erweiterung eines Ansatzes von H. Lenske [Len87] für gebundene Anregungszustände. Im Kontinuums-QPC-Modell werden die Anregungs-

zustände als Linearkombination von 1- und 3-Quasiteilchenzuständen, die über eine Restwechselwirkung verknüpft sind, beschrieben. Dabei wurden explizit Streuzustände mitberücksichtigt. Man erhält dann ein kompliziertes Integralgleichungssystem, ähnlich wie auch im Kontinuumsschalenmodell von C. Mahaux und H. Weidenmüller [MaW69]. Als Lösung ergeben sich anregungsenergieabhängige Zustandsamplituden. Im Kontinuum beschreibt der 1-Quasiteilchenanteil dabei nichts anderes als den elastischen Anteil eines Einteilchenstreuzustands zu einem realistischen Potential. Die Asymptotik dieses Streuzustandes legt dann eine realistische Partialwellenamplitude bzw. S -Matrix fest. Für Streuzustände mit Anregungsenergien, die kleiner als die Zentrifugal- Coulombbarriere sind, kann aus diesen Größen eine spektroskopische Stärkefunktion bestimmt werden, die direkt mit entsprechenden experimentellen Größen verglichen werden kann. Außerdem dient die Asymptotik zur Bestimmung einer geeigneten Streuwellenfunktion im Formfaktor für Einstufen-transferreaktionen.

Schließlich sind die aus dem Kontinuums-QPC-Modell erhaltenen Partialwellenamplituden geeignet ein realistisches optisches Potential für Protonen- und Neutronenstreuung zu ermitteln. Mit einem solchen Potential wären dann gemittelte Transferwirkungsquerschnitte leicht zu bestimmen.

Für zwei Reaktionen wurde das Kontinuums-QPC-Modell explizit angewendet. Für die erste Reaktion, die Stripping-Reaktion $^{40}\text{Ca}(^{13}\text{C}, ^{12}\text{B})^{41}\text{Sc}$ bei 50 MeV pro Nukleon Einschußenergie, ergab sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Dies ließ der Vergleich zwischen der berechneten Stärkefunktion von ^{41}Sc mit den experimentellen Resultaten für ^{41}Ca [ELG90] bereits vermuten. Die Ergebnisse zeigten ähnlichen Verlauf für das Spiegelkernsystem. Auch die berechneten Anregungszustände und zugehörigen elastischen Breiten prominenter Zustände konnten den experimentellen Daten zugeordnet werden. Beispielhaft dafür war das Verhalten des $g_{\frac{3}{2}}$ -Streuzustands des ^{41}Sc . Diese Resonanz bei ca. 5 MeV liegt energetisch tiefer als der fragmentierte $f_{\frac{5}{2}}$ -Streuzustand, d. h. dieser Zustand bildet eine Art Intruder-Zustand. Er trägt aber nur zu knapp zwanzig Prozent zur Einteilchenstärke bei. Die übrige Stärke ist bei höheren Energien zu finden, was experimentelle Untersuchungen sowie die hier gemachten theoretischen Rechnungen bestätigen. Prinzipiell zeigte sich bei allen Rechnungen, daß die in einem einfachen phänomenologischen Schalenmodell berechneten Einteilchenzustände durch die Ankopplung an kompliziertere Anregungszustände so fragmentieren bzw. energetisch verschoben werden, daß sich eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Zuständen ergab. Damit ergibt sich eine weitere interessante Anwendung — die Behandlung der oben erwähnten Intruder-Zustände im QPC-Modell. Es gilt daher nach Einteilchenzustände zu suchen die stark von der zu erwartenden Einteilchenenergie abweichen und eine spektroskopische Stärke aufweisen die signifikant vom Wert Eins abweicht.

Genau das selbe Verhalten ergab sich für die zweite Reaktion $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ bei 344.5 MeV Einschußenergie. Hier wurden sowohl für ^{13}C als auch den zugehörigen Spiegelkern ^{13}N QPC-Rechnungen durchgeführt. Die prominentesten Anregungszustände

zeigen gute Übereinstimmung mit dem experimentellen Daten. Besonders interessant ist hier das Verhalten des $d_{\frac{5}{2}}$ -Zustands. Im Schalenmodell liegen Protonen- und Neutronenzustände als Resonanzen vor. Während der Protonzustand durch die Ankopplung nur energetisch verschoben wird, also ein Resonanzzustand bleibt, wird der Neutronzustand unter die Teilchenaufbruchschwelle "geschoben", die Resonanz mutiert also zu einem gebundenen Zustand.

Dieses Modell für Transferreaktionen ins Kontinuum erhält eine besondere Aktua-

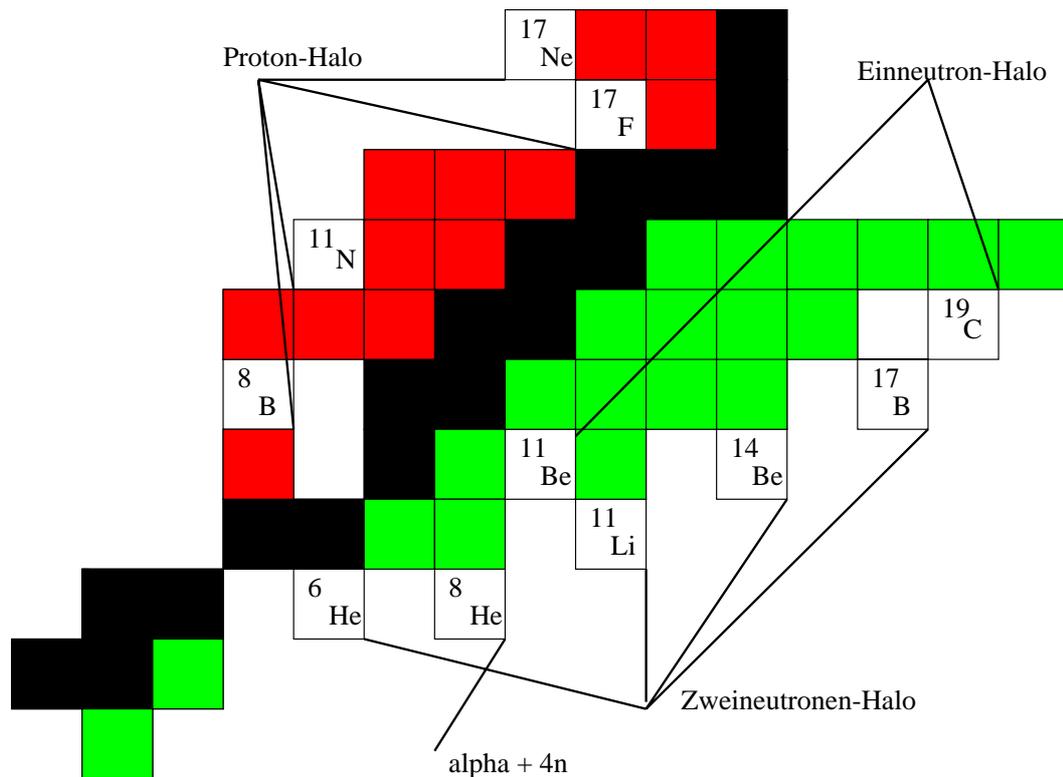


Abbildung 7.1: Übersicht aus zur Zeit bekannten und experimentell untersuchten Halokerne (aus [JoR98]).

lität [JoR98] durch die Möglichkeit sehr schwach gebundene leichte Kerne, sogenannte Halo-Kerne experimentell mit radioaktiven Strahlen zu untersuchen. Diese Kerne liegen außerhalb des Stabilitätstals, sind also β -instabil, an der Grenze des teilchenstabilen Bereiches, der sogenannten Abbruchkanten oder Driplines (siehe Abbildung 7.1). So wären die Einneutron-Halokerne ^{11}Be und ^{19}C , sowie die Proton-Halokerne ^{11}N , ^{17}F und ^{17}Ne geeignete Kandidaten für eine derartige Untersuchung. Wegen der sehr geringen Bindungsenergie von einigen 100 keV treten Neutronen- bzw. in geringem Maße Protonenhäute (skins) oder Auras (Halos) auf. Bei der spektrosko-

pischen Untersuchung solcher Kerne, sowohl durch inelastische wie durch Transfer, sind Aufbruchkanäle, d. h. Dreikörperkanäle, stets stark an den Eingangskanal gekoppelt. Zur reaktionstheoretischen Beschreibung solcher Reaktionen können die hier entwickelten Methoden einen wichtigen Beitrag leisten [Len98]. So kann erwartet werden, daß bei diesen Kernen ein einzelnes Nukleon sich außerhalb eines Rumpfes bewegt, der selbst wenig Stabilität zeigt. Die rücktreibenden Kräfte sind durch isovektorielle Abstoßung reduziert, sodaß die Systeme leicht polarisierbar sind. Ein Indiz dafür ist ein tiefliegender 2^+ -Anregungszustand wie zum Beispiel in ^{10}Be und besonders in $^{16,18}\text{C}$. Durch Rumpfanregung kann das zusätzliche Nukleon Energie gewinnen. Genau dieses Verhalten sollte mit QPC-Modell zu beschreiben sein.

Anhang A

Einheiten, Konstanten, Symbole und Begriffe ¹

In dieser Arbeit werden folgende Einheiten, Konstanten, Symbole und allgemein gültige Begriffe verwendet:²

- Einheiten:

– Längeneinheiten:	1 Fermi	$= 1 \text{ fm}$	$= 10^{-15} \text{ m}$
– Flächeneinheiten:	1 Barn	$= 1 \text{ b}$	$= 10^{-28} \text{ m}^2$
– Atomare Masseneinheit:	$1 u$	$= 1.6600540(2) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	
– Energieeinheit:	1 MeV	$= 1.60218 \cdot 10^{-13} \text{ J}$	

- Konstanten:

– Masse Neutron:	$m_n = 1.008664904(14)u$	$= 939.56563(28) \text{ MeV}/c^2$	
– Masse Proton:	$m_p = 1.007276470(12)u$	$= 938.27231(28) \text{ MeV}/c^2$	
– Masse Pion:	m_π^{+-}	$= 139.5675(4) \text{ MeV}/c^2$	
– Masse Elektron:	$m_e = 5.4858 \cdot 10^{-4}u$	$= 510.99906(15) \text{ keV}/c^2$	
– Elementarladung:		$e = 1.60217733(49) \cdot 10^{-19} \text{ C}$	
– Lichtgeschwindigkeit:		$c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
– Quadrat der Lichtgeschwindigkeit:		$c^2 = 931.49 \text{ MeV}/u$	
– Wirkungsquantum:		$\hbar = 0.6581220(20) \cdot 10^{-22} \text{ MeV s}$	
		$= 197.327053(59) \text{ MeV fm}/c$	

¹Empfohlen durch die Kommission für Symbole, Einheiten und Nomenklatur der International Union of Pure and Applied Physics

²Zu finden unter anderem in [May92] S.334 ff oder [Sat80] S.303 ff

- Symbole:

– Massenzahl:	A
– Neutronenzahl:	N
– Ladungszahl:	Z
– Reduzierte Massen:	$\mu, \mu_\alpha, \mu_\beta, m_\alpha, m_\beta$
– Hauptquantenzahl:	n, ν
– Kernspin:	J, j
– Bahndrehimpuls:	L, ℓ
– Nukleon- oder Clusterspin:	S, s
– Magnetische Quantenzahlen:	M, m
– Hamiltonoperatoren:	$\hat{H}, \hat{H}_\alpha, \hat{H}_\beta, \hat{h}_\alpha, \hat{h}_\beta$
– Übergangsamplituden:	$T_{\alpha\alpha_0}, T_{\beta\alpha_0}$
– Wechselwirkungskern:	$I_{\beta\alpha}$
– Realistische Kernpotentiale:	$\hat{V}_\alpha, \hat{V}_\beta, \hat{V}^\alpha, \hat{V}^\beta$
– Optische Kernpotentiale:	$\hat{U}_\alpha, \hat{U}_\beta$
– Potentialtiefe (Einteilchenpotential):	V_0
– Potentialtiefe (Imaginärteil):	W_0
– Spinbahnpotential:	V_{so}
– Reduzierter Radius:	r_0
– Kernradius:	$R = r_0 A^{1/3}$
– Diffusivität:	a_0
– Kavitätsradius:	R_s
– Normierungskonstanten:	$N(\kappa), N(\epsilon)$
– Sphär. Bessel-, Neumann-, Hankelfunktionen:	$j_\ell(r, \kappa), n_\ell(r, \kappa), h_\ell(r, \kappa)$
– Reg. und irreg. Coulombfunktionen:	$F_\ell(r, \kappa), G_\ell(r, \kappa)$
– Spektroskopischer Faktor:	$S_{\ell j}$
– Partialwellenamplitude:	$\mathcal{C}_{\ell j}^\pm$
– Streuphasenwinkel:	$\delta_{\ell j}$
– Deformationsparameter:	β_λ^c
– Einteilchenbreite:	Γ_{sp}
– Elastische Breite:	Γ_{el}
– Totale Breite:	Γ_{tot}

– Dopplerbreite:		Γ_d
– Faltungsbreite:		Γ_f
– Wirkungsquerschnitt:		σ
– Streuwinkel:	Laborsystem:	Ω, Θ, Φ
	Schwerpunktsystem:	$\omega, \vartheta, \varphi$

• Begriffe:

- Kernreaktionen (allgemein): $a + A \rightarrow B + b_1 + b_2$ ³
- Elastische Streuung:⁴ $A(a, a)A$ oder $a + A \rightarrow a + A$
- Inelastische Streuung: $A(a, a^*)A^*$ oder $A + a \rightarrow A^* + a^*$;
Target und/oder Ejektil sind im Ausgangskanal in einem angeregten Zustand
- Transferreaktion: $A(a, b)B$ oder $A + a \rightarrow B + b$;
Pickup: $a = b + x$; Stripping: $b = a + x$
- Aufbruch, Fragmentation: $A(a, (b + x))A$ oder $A + a \rightarrow B + b + x$;
Im Ausgangskanal liegt ein Dreikörperkontinuum vor.
- Elastischer Aufbruch: $A(a, (b + x))A$ oder $A + a \rightarrow B + b + x$;
Target B im Ausgangskanal liegt im Grundzustand vor.
- Inelastischer Aufbruch: $a(A, A)(b + x)$ oder $A + a \rightarrow B + b + x$;
Weitere Reaktionen zwischen $B + x$ finden statt.
- Sequentieller Aufbruch auch Resonanzaufbruch: $A(a, (b + x))A$ oder $A + a \rightarrow (a_r = (b + x)) + B$;
Das Ejektil liegt in einem Resonanzzustand vor der dann zerfällt.
- Differentieller Wirkungsquerschnitt: $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ bzw. $\frac{d\sigma}{d\omega}$
- Doppelt-differentieller Wirkungsquerschnitt: $\frac{d^2\sigma}{dE_x d\Omega}$;
Spektrale Winkelverteilung des Ejektils.
- Dreifach-differentieller Wirkungsquerschnitt: $\frac{d^3\sigma}{dE_b^* d\Omega_b d\Omega_x}$;
Korrelierte, spektrale Winkelverteilung von x und b bei einer Aufbruchreaktion.
- Q-Wert der Reaktion: Bei der Kernreaktion verbrauchte bzw. aufgenommene Energie.
- Separationsenergie: S_{bx} bzw. S_{Bx} ;
Energie, die nötig ist um a in b und x bzw. A in B und x aufzubrechen (S_{bx} und S_{Bx} werden auch als Teilchenaufbruchenergien bezeichnet).

³Großbuchstaben stehen für Targetsystem; Kleine Buchstaben für Projektil/Ejektilesystem. Transferierte Teilchen werden im Allgemeinen mit x bezeichnet.

⁴die hier verwendeten Begriffe finden sich bei [BRT84]

Anhang B

Transformation zwischen Labor-Schwerpunktsystem

Für die im Unterabschnitt 1.3 angegebenen Koordinatentransformationen eines Wirkungsquerschnitts einer binären Transferreaktion $A(a, b)B$ sollen jetzt explizite Ausdrücke hergeleitet werden.

Ausgangspunkt ist die Galileitransformation der Geschwindigkeit \vec{v}_{lab} eines Projektils a im Laborsystem

$$\vec{v}_{lab} = \vec{v}_r + \vec{v}_s \quad (\text{B.1})$$

auf die Schwerpunktgeschwindigkeit \vec{v}_r im Schwerpunktsystem zwischen dem Projektil a und dem Target A . Mit \vec{v}_s werde die Geschwindigkeit des Schwerpunkts von a und A bezeichnet. Die Richtung der Geschwindigkeiten soll jetzt so festgelegt werden, daß die Einschußrichtung nur eine z-Komponente aufweist und daß nach der Reaktion keine y-Komponente gegeben ist. Damit erhält man die bekannte Darstellung [Joa75] für die x- und z-Komponente der Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} v_{lab} \sin \theta &= v_r \sin \vartheta \\ v_{lab} \cos \theta &= v_r \cos \vartheta + v_s \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Beide Gleichungen können nach $\cos \theta$ und $E_{lab} = \frac{m_b}{2} v_{lab}^2$ des Ejektils im Ausgangskanal aufgelöst werden:

$$\cos \theta = \frac{\cos \vartheta + \frac{v_s}{v_r}}{\sqrt{1 + 2\frac{v_s}{v_r} \cos \vartheta + \frac{v_s^2}{v_r^2}}} \quad (\text{B.3})$$

und

$$E_{lab} = \frac{m_B}{(m_b + m_B)} E_r + \frac{m_b m_a}{(m_a + m_A)^2} E_{lab}^0 + 2\sqrt{\frac{m_a m_b m_B}{(m_a + m_A)^2 (m_b + m_B)}} E_r E_{lab}^0 \cos(\vartheta), \quad (\text{B.4})$$

wobei E_{lab}^0 die anfängliche Laborenergie des Projektils a bezeichnet und $v_s = \frac{\sqrt{2m_a E_{lab}^0}}{(m_a + m_A)}$ die zugehörige Geschwindigkeit des Schwerpunkts. $v_r = \sqrt{\frac{2m_B E_r}{m_b(m_b + m_B)}}$ beschreibt die Relativgeschwindigkeit im Schwerpunktsystem nach der Reaktion. Sie ändert sich mit dem Q -Wert der Reaktion. Durch Umformen von (B.3) und (B.4) werden die für die jeweilige Transformation benötigten Abbildungen erhalten. Dabei ist auf Umkehrbarkeit zu achten. Diese ist gegeben, wenn der Laborwinkel $\leq 180^\circ$ und die Energien ≥ 0 sind. Durch Differenzieren erhält man die jeweiligen Funktionalmatrizen und daraus die Funktionaldeterminanten.

Anhang C

Transformation eines Breakup-Wirkungsquerschnitts auf einen inelastischen Wirkungsquerschnitt

Bei der experimentellen Bestimmung von Wirkungsquerschnitten können oft nicht alle Informationen erfaßt werden. Betrachtet man z.B eine Pickup Reaktion $A(a, b)B$ mit anschließendem isotropen Zerfall des Ejektils b in a und x , so kann eine derartige Reaktion bei ausschließlichem Nachweis von a nicht von einer inelastischen Streuung $A(a, a^*)A^*$ unterschieden werden. Prinzipiell handelt es sich bei beiden Reaktionstypen auch um die gleiche Endpartition, nur in verschiedenen Koordinaten ausgedrückt, wie aus Gleichung (1.65) auf Seite 23 zu sehen ist. Daher wäre jede der Darstellungen bei vollständiger Kenntnis der Übergangsoperatoren möglich und würde das gleiche Endresultat liefern. Meist werden aber nur Ein- und Zweistufenprozesse berücksichtigt, so daß man zwischen Pickup und inelastischer Anregung ins Kontinuum zumindest bedingt unterscheiden kann. Während bei einem Pickup-Aufbruch, wie oben bereits erwähnt, das entstehende intermediäre Projektilsystem $b = a + x$ in a und x zerfällt, werden bei einer inelastischen Anregung intermediäre Targetzustände A^* , wie Mehrphononenanregungen z. B. Riesenresonanzzustände, angenommen, die sich unter Emission von x stabilisieren. Zumindest auf der Zeitskala kann daher zwischen beiden Prozessen ein gewisser Unterschied gegeben sein. Bei der Berechnung des inelastischen Wirkungsquerschnitts wird man also auch den inklusiven Anteil des Pickup-Aufbruch als "Side-Feeding"-Prozeß mitberücksichtigen. Um aber diesen Anteil entsprechend der inelastischen Streuung ermitteln zu können, muß der dreifach differentielle Wirkungsquerschnitt des Aufbruchkanals

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_\beta d\Omega_{a,x} d\epsilon_\beta} \quad (\text{C.1})$$

(entsprechend Gleichung (1.88)) in Impulsen der β -Partition geschrieben, so umgeformt werden, daß ein doppelt differentieller, inklusiver Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_\alpha d\epsilon_\alpha} \quad (\text{C.2})$$

(Gleichung (1.89)) in den Impulsen der α -Partition erhalten wird. Die Energie ϵ_α steht dabei für eine Anregungsenergie der beiden Fragmente a und A .

Bei dieser Umformung sind Koordinatentransformationen durchzuführen. Je nachdem ob man den Wirkungsquerschnitt im Laborsystem oder Schwerpunktsystem angeben möchte, können sogar mehrere Transformationen nacheinander nötig sein. Die Beziehungen zwischen den verwendeten Impulskordinaten ergeben sich aus der Kinematik. Da im betrachteten Energiebereich relativistische Korrekturen vernachlässigbar sind, wird auch hier wieder eine nichtrelativistische Rechnung durchgeführt. Zunächst wird der Ausdruck (C.1) für den dreifach differentielle Wirkungsquerschnitt durch Verwendung einer Korrelationsfunktion $W(\Omega_\beta, \Omega_x)$ zwischen den Raumwinkeln Ω_β und Ω_x in einen zweifach differentiellen Wirkungsquerschnitt umgeschrieben werden, der bei Annahme eines isotropen Zerfalls von b in a und x dem zweiten Teil der folgenden Gleichung (C.3)

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon_\beta d\Omega_\beta d\Omega_x} = \frac{d\sigma}{d\epsilon_\beta d\Omega_\beta} W(\Omega_\beta, \Omega_x) = \frac{d\sigma}{d\epsilon_\beta d\Omega_\beta} \frac{1}{4\pi} \quad (\text{C.3})$$

gehört. Wegen der Energieerhaltung gilt außerdem

$$\epsilon_\beta = \epsilon_a + \epsilon_x + S_{ax} \quad (\text{C.4})$$

oder für die Energie von x alleine

$$\epsilon_x = \frac{m_a}{m_b} [\epsilon_\beta - \epsilon_a^* - S_{ax}] \quad (\text{C.5})$$

Dabei ist ϵ_a^* nur die Anregungsenergie von a relativ zum Grundzustand nach dem

Zerfall und S_{ax} die Separationsenergie von x und b ¹. Wegen der Impulserhaltung gilt für den Impuls von a :

$$\vec{p}_a = \frac{m_a}{m_b} \vec{p}_b - \vec{p}_x \quad (\text{C.6})$$

Dieser Ausdruck läßt sich bezüglich der Winkel ϑ_b , φ_b , ϑ_x , φ_x und der Energie ϵ_β darstellen,

$$\vec{p}_a = \frac{m_a}{m_b} \vec{p}_b(\vartheta_b, \varphi_b) + \mathcal{O}_z(\varphi_b) \mathcal{O}_y(\vartheta_b) \vec{p}_x \quad (\text{C.7})$$

wobei mit \mathcal{O} Drehmatrizen bezeichnet werden, die \vec{p}_x in das raumfeste Koordinatensystem überführen. Diese Gleichung beschreibt natürlich für feste Winkel ϑ_x und φ_x eine stetig differenzierbare Abbildung. Diese ist aber auf der gesamten interessierenden Teilmenge nicht bijektiv, d. h. es gibt zu einem bestimmten Wert von \vec{p}_a verschiedene ϑ_b , φ_b und ϵ_β . Bei der Berechnung der Funktionaldeterminante muß diese Tatsache berücksichtigt werden. Prinzipiell ist eine Transformation auf neue Koordinaten nur über eine \mathcal{C}^1 invertierbare, d.h. einmal stetig differenzierbare Abbildung eindeutig definiert. Durch die Einschränkung auf Teilintervalle ist dies aber auch für die obige Transformation gewährleistet [For83]. Man erhält für die Funktionaldeterminante den Ausdruck:

$$\left(\frac{\partial(\vec{p}_a)}{\partial(\vartheta_b, \varphi_b, \epsilon_\beta)} \right) = \left(\frac{\partial(p_a^z)}{\partial(\vartheta_b)} \right) \left(\frac{\partial(p_a^2)}{\partial(\epsilon_\beta)} \right) \quad (\text{C.8})$$

Explizit ergeben sich die Faktoren zu:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(p_a^z)}{\partial(\vartheta_b)} \right) &= \cos(\vartheta_b) \sin(\vartheta_x) \cos(\varphi_x) \sqrt{2 \frac{m_x m_a \epsilon_\beta}{m_b}} + \\ &\sin(\vartheta_b) \left[\cos(\vartheta_x) \sqrt{2 \frac{m_x m_a \epsilon_\beta}{m_b}} + \frac{m_a}{m_b} \sqrt{2 \frac{m_b m_B}{m_b + m_B}} * \right. \\ &\quad \left. \sqrt{\left(\frac{m_a}{m_a + m_A} \right) E_{lab} - Q_0 - \epsilon_\beta} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$\left(\frac{\partial(p_a^2)}{\partial(\epsilon_\beta)} \right) = \frac{m_x m_a}{m_b} - \left(\frac{m_a}{m_b} \right)^2 \left(\frac{m_b m_B}{m_b + m_B} \right) - \left(\frac{m_a}{m_b} \right) \sqrt{\frac{m_a m_B m_x}{m_b + m_B}} *$$

¹Im weiteren sei angenommen, daß a im Grundzustand vorliege. Auch Anregungszustände von x sollen in diesem Fall nicht berücksichtigt werden. Bei x soll es sich um ein Nukleon oder Cluster handeln.

$$\cos(\vartheta_x) \frac{\left(\frac{m_a}{m_a + m_A}\right) E_{lab} - Q_0 - 2\epsilon_\beta}{\sqrt{\left[\left(\frac{m_a}{m_a + m_A}\right) E_{lab} - Q_0 - \epsilon_\beta\right] \epsilon_\beta}} \quad (C.10)$$

Da der Impulsvektor \vec{p}_a nach wie vor in kartesischen Koordinaten gegeben ist, ist eine weitere Transformation auf Winkelkoordinaten erforderlich. Dazu erhält man als Funktionaldeterminante den Ausdruck:

$$\left(\frac{\partial(\vec{p}_a)}{\partial(\vartheta_a, \varphi_a, \epsilon_a)}\right) = \frac{\sin(\vartheta_a)}{2} \left(\sqrt{\frac{2m_a m_A}{M_a + m_A}}\right)^3 \sqrt{\frac{m_a}{m_a + m_A} E_{lab} - \epsilon_a} \quad (C.11)$$

Damit erhält man für den Wirkungsquerschnitt in den Winkeln Ω_a, Ω_x und der Anregungsenergie ϵ_a den Gesamtausdruck:

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon_a d\Omega_a d\Omega_x} d\epsilon_a d\Omega_a d\Omega_x = \frac{d\sigma}{d\epsilon_\beta d\Omega_b} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial(\Omega_b, \epsilon_\beta)}{\partial(\Omega_a, \epsilon_a)}\right) d\epsilon_a d\Omega_a d\Omega_x \quad (C.12)$$

mit der Funktionaldeterminante:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(\Omega_b, \epsilon_\beta)}{\partial(\Omega_a, \epsilon_a)}\right) &= \frac{\sin(\vartheta_b)}{\sin(\vartheta_a)} \left(\frac{\partial(\vartheta_b, \varphi_b, \epsilon_\beta)}{\partial(\vartheta_a, \varphi_a, \epsilon_a)}\right) \\ &= \frac{\sin(\vartheta_b)}{\sin(\vartheta_a)} \left(\frac{\partial(\vec{p}_a)}{\partial(\vartheta_b, \varphi_b, \epsilon_\beta)}\right)^{-1} \left(\frac{\partial(\vec{p}_a)}{\partial(\vartheta_a, \varphi_a, \epsilon_a)}\right) \end{aligned} \quad (C.13)$$

Auf der linken Seite von (C.12) stehen Ausdrücke in $\vartheta_b, \varphi_b, \epsilon_\beta$ und Ω_x , die für feste Werte von ϵ_a und Ω_a zu ermitteln sind. Dabei ist auf Mehrdeutigkeiten zu achten. Die Bestimmungsgleichungen für Ω_b respektive ϑ_b, φ_b und ϵ_β erhält man aus (C.6). Der Winkel φ_b kann dabei unberücksichtigt bleiben, da $\frac{d\sigma}{d\epsilon_\beta d\Omega_b}$ keine Azimuthwinkelabhängigkeit hat. Für ϑ_b und ϵ_β ergeben sich implizit die Ausdrücke:

$$p \cos(\vartheta_a) = \frac{m_a}{m_b} p_b \cos(\vartheta_b) + p_x \cos(\vartheta_b) \cos(\vartheta_x) - p_x \sin(\vartheta_b) \sin(\vartheta_x) \cos(\varphi_x) \quad (C.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_a^2}{2m_a} &= \frac{m_a}{m_b} \frac{p_b^2}{2m_b} + \frac{m_x}{m_b} \epsilon_\beta \\ &\quad - 2 \cos(\vartheta_x) \sqrt{\frac{m_a m_x}{m_b^2} \epsilon_\beta} \frac{p_b^2}{2m_b} \end{aligned} \quad (C.15)$$

mit $p_a = \sqrt{2m_a E_S(a)}$ und $p_b = \sqrt{2m_b [E_S^0 - \frac{m_B}{m_b + m_B}]}$. Beide Gleichungen lassen sich nach ϑ_b bzw. ϵ_β auflösen. Man erhält dabei quadratische Gleichungen (Mehrdeutigkeit der Lösung!). Da die erste Gleichung implizit ϵ_β enthält ist die zweite Gleichung zuerst zu lösen.

Hier seien noch einige Bemerkungen zu den bisher gemachten Veröffentlichungen von H. G. Bohlen et al. [BOL84], E. Adamides [ABO87] und Y. Blumenfeld [BRC85] gemacht. Bohlen berechnet den Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\epsilon_a d\Omega_a}$ nach folgendem Verfahren: Das Integral

$$\int_0^{\epsilon_\beta} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{d\epsilon_\beta d\Omega_b}(\Theta_b, \epsilon_\beta) W_x(\Omega_b, \Omega_x) \sin(\vartheta_x) d\vartheta_x d\varphi_x d\epsilon_\beta \quad (\text{C.16})$$

wird in einer Riemannschen Obersumme mit äquidistanten Stützstellen dargestellt. Jeder Summand dieser Riemannsumme wird für einen bestimmten Winkel ϑ_a ermittelt (daraus resultiert nach Gleichung (C.14) ϑ_b). Alle Summanden zu einem festen ϵ_a werden dann aufsummiert. An dieser Stelle fehlt in dem Verfahren in [BOL84] die Funktionaldeterminante $\left(\frac{\partial(\Omega_b)}{\partial(\Omega_a)}\right)$. Diese Funktionaldeterminante ist durch den Ausdruck

$$\left(\frac{\partial(\Omega_b)}{\partial(\Omega_a)}\right) = \frac{\sin(\vartheta_a)}{\sin(\vartheta_b)} \left(\frac{\partial(p_z)}{\partial(\vartheta_b)}\right)^{(-1)} \left(\frac{\partial(\vec{p}_a)}{\partial(\vartheta_a, \varphi_a, \epsilon_a)}\right) \quad (\text{C.17})$$

gegeben. Darauf ist bereits von Blumenfeld et al. [BRC85] aufmerksam gemacht worden. Die dort angegebene zweite Funktionaldeterminante $\left(\frac{\partial(\epsilon_\beta)}{\partial(\epsilon_a)}\right)$ muß allerdings nur für den nicht über ϵ_β integrierten Ausdruck berücksichtigt werden. Das vermutlich einfachste Verfahren zur Berechnung von $\frac{d\sigma}{d\epsilon_a d\Omega_a}$ ist eine Erweiterung des Verfahrens von H. G. Bohlen. Diese Verfahren wurde im Rahmen dieser Arbeit entwickelt und angewendet. Es werde zum Abschluß kurz skizziert. Ausgangspunkt ist die Tatsache, daß der gesamte Wirkungsquerschnitt σ eine invariante Größe gegenüber Koordinatentransformationen ist. Es gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{d\sigma}{d\epsilon_a d\Omega_a} d\Omega_a d\epsilon_a \\ &= \int \frac{d\sigma}{d\epsilon_\beta d\Omega_b} W_x(\Omega_b, \Omega_x) d\Omega_b d\epsilon_\beta d\Omega_x \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Berechnet man wieder die Riemannschen Obersummanden des zweiten Ausdrucks von (C.18) und sortiert diese zu entsprechenden Werten ϑ_a und $\frac{p_a^2}{2m_a}$ um (Gleichungen (C.14) und (C.15)), so erhält man den gesamten doppelt differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\epsilon_a d\Omega_a}$ ohne Berechnung der relativ komplizierten Funktionaldeterminante. Auch die numerisch aufwendige Umformung von (C.14) und (C.15) kann

vermieden werden. Für eine große Anzahl von Winkeln ist dieses Verfahren sogar schneller.

Anhang D

Zusammenhang Kontinuumsdarstellung - diskrete Darstellung

Um den Zusammenhang zwischen dem hier verwendeten Kontinuums-QPC-Modell und dem bisher verwendeten diskreten QPC-Modell zu verdeutlichen, soll in diesem Unterabschnitt das diskrete QPC-Modell als Grenzfall aus der Kontinuums-QPC hergeleitet werden. Ausgangspunkt ist das System der diskretisierten QPC-Gleichungen:

$$\begin{aligned} (E_n - E_\lambda)z_n^\lambda + \sum_{n'} M_{nn'}(E_\lambda)z_{n'}^\lambda + \sum_{n',n''} M_{nn'}(E_\lambda)b_{n''}^\lambda \int d\epsilon' \frac{\langle n'|\epsilon'\rangle\langle n''|\epsilon'\rangle}{\epsilon' - E_\lambda} \\ = \sum_{n'} M_{nn'}(E_\lambda)\langle n'|\epsilon = E_\lambda\rangle a_{n'}^\lambda \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{aligned} \sum_n \langle \epsilon|n\rangle b_n^\lambda + \sum_{n,n'} M_{nn'}(E_\lambda)z_{n'}^\lambda + \sum_{n,n',n''} M_{nn'}(E_\lambda)b_{n''}^\lambda \int d\epsilon' \frac{\langle n'|\epsilon'\rangle\langle n''|\epsilon'\rangle}{\epsilon' - E_\lambda} \\ = \sum_{n,n'} M_{nn'}(E_\lambda)\langle n'|\epsilon = E_\lambda\rangle a_{n'}^\lambda. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Im Falle der zweiten Gleichung (D.2) muß die Gleichheit natürlich für die Einzelsummanden gelten, so daß man ein Gleichungssystem für alle n erhält:

$$b_n^\lambda + \sum_{n'} M_{nn'}(E_\lambda)z_{n'}^\lambda + \sum_{n',n''} M_{nn'}(E_\lambda)b_{n''}^\lambda \int d\epsilon' \frac{\langle n'|\epsilon'\rangle\langle n''|\epsilon'\rangle}{\epsilon' - E_\lambda} \quad (\text{D.3})$$

$$= \sum_{n'} M_{nn'}(E_\lambda)\langle n'|\epsilon = E_\lambda\rangle a_{n'}^\lambda. \quad (\text{D.4})$$

Näherungsweise kann nun das Hauptwertintegral, z. B. in Form einer Riemann'schen Summe an Stützstellen ϵ_k ausgewertet werden:

$$\int d\epsilon' \frac{\langle n'|\epsilon'\rangle\langle n''|\epsilon'\rangle}{\epsilon' - E_\lambda} \approx \sum_k \frac{\langle n'|\epsilon_k\rangle\langle n''|\epsilon_k\rangle}{\epsilon_k - E_\lambda} (\epsilon_{k+1} - \epsilon_k) \quad (\text{D.5})$$

Verwendet man als Stützstellen ϵ_k gerade die Kavitatseigenenergien, so folgt wegen $\langle n'|\epsilon_k\rangle = \delta_{kn'}\langle n'|\epsilon_k\rangle$ und $|\langle k|\epsilon_k\rangle|^2(\epsilon_{k+1} - \epsilon_k) \approx 1$:

$$\begin{aligned} \int d\epsilon' \frac{\langle n'|\epsilon'\rangle\langle n''|\epsilon'\rangle}{\epsilon' - E_\lambda} &\approx \sum_k \frac{|\langle k|\epsilon_k\rangle|^2}{\epsilon_k - E_\lambda} (\epsilon_{k+1} - \epsilon_k) \\ &\approx \sum_k \frac{1}{\epsilon_k - E_\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Mit Hilfe dieses Ausdrucks ergeben sich die diskretisierten QPC-Gleichungen dann zu:

$$\begin{aligned} (E_n - E_\lambda)z_n^\lambda + \sum_{n'} M_{nn'}(E_\lambda)z_{n'}^\lambda + \sum_{n'} M_{nn'}(E_\lambda)b_{n'}^\lambda \frac{1}{\epsilon_{n'} - E_\lambda} \\ = \sum_{n'} M_{nn'}(E_\lambda)\langle n'|\epsilon = E_\lambda\rangle a_{n'}^\lambda \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{aligned} b_n^\lambda + \sum_{n'} M_{nn'}(E_\lambda)z_{n'}^\lambda + \sum_{n'} M_{nn'}(E_\lambda)b_{n'}^\lambda \frac{1}{\epsilon_{n'} - E_\lambda} \\ = \sum_{n'} M_{nn'}(E_\lambda)\langle n'|\epsilon = E_\lambda\rangle a_{n'}^\lambda. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Diese Gleichungen sind ohne Inhomogenitatsterm vollständig äquivalent zu den bekannten diskreten QPC-Gleichungen [Len87]. Ist die Eigenenergie E_λ des QPC-Eigenzustandes kleiner als die Teilchenaufbruchenergie, dann ist das Matrixelement $\langle n'|\epsilon = E_\lambda\rangle = 0$ (!) und damit sind beide Beschreibungen völlig identisch.

Anhang E

Normierung der QRPA- und QPC-Zustände

Dieser Anhang behandelt detaillierter die Herleitung der Normierungsbedingung für die QRPA- und QPC-Zustände. Ausgangspunkt für die Normierung ist eine Gleichung (3.40) für die QRPA-Zustände bzw. (3.71) für die QPC-Zustände, also allgemein eine Gleichung der Form

$$\langle \lambda' | \lambda \rangle = \sum_{\nu} z_{\nu}^{\lambda'*} z_{\nu}^{\lambda} + \sum_{\nu} \int_{E_{\nu}^s}^{\infty} d\epsilon'_{\nu} \zeta_{\nu}^{\lambda'}(\epsilon'_{\nu})^* \zeta_{\nu}^{\lambda}(\epsilon'_{\nu}) \quad (\text{E.1})$$

mit den Eigenzuständen $|\lambda\rangle$ bzw. $|\lambda'\rangle$ zu einem Hamiltonoperator $\hat{H}_0 + \hat{V}^{res}$. Die Koeffizienten gehören zu Eigenzuständen von \hat{H}_0 . Die Integration erfolgt von der Schwellenenergie E_{ν}^s als unterer Grenze bis ∞ als oberer Grenze. Macht man für die Koeffizienten in den Integranden dieses Ausdrucks wieder den Ansatz

$$\zeta_{\nu}^{\lambda}(\epsilon_{\nu}) = a_{\nu}^{\lambda}(\epsilon_{\nu})\delta(\epsilon_{\nu} - E_{\lambda}) + \mathcal{P} \frac{b_{\nu}^{\lambda}(\epsilon_{\nu})}{\epsilon_{\nu} - E_{\lambda}}, \quad (\text{E.2})$$

so erhält man, unter Beachtung der Identität

$$\begin{aligned} \frac{1}{(E_{\lambda'} - \epsilon_{\nu}') (E_{\lambda} - \epsilon_{\nu}')} &= \mathcal{P} \frac{1}{E_{\lambda'} - E_{\lambda}} \left(\frac{1}{E_{\lambda} - \epsilon_{\nu}'} - \frac{1}{E_{\lambda'} - \epsilon_{\nu}'} \right) \\ &+ \pi^2 \delta(E_{\lambda'} - E_{\lambda}) \delta(\epsilon_{\nu}' - \frac{1}{2}(E_{\lambda'} + E_{\lambda})) \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

für die Partialbruchdarstellung, den Ausdruck

$$\langle \lambda' | \lambda \rangle = F_1(E_{\lambda'}, E_{\lambda}) + F_2(E_{\lambda'}, E_{\lambda}) \delta(E_{\lambda'} - E_{\lambda}), \quad (\text{E.4})$$

wobei

$$\begin{aligned}
F_1(E_{\lambda'}, E_{\lambda}) &= \sum_{\nu} z_{\nu}^{\lambda} z_{\nu}^{\lambda'*} \\
&+ \int_{\nu} d\epsilon'_{\nu} \frac{1}{E_{\lambda'} - E_{\lambda}} \left(\frac{1}{E_{\lambda} - \epsilon'_{\nu}} - \frac{1}{E_{\lambda'} - \epsilon'_{\nu}} \right) b_{\nu}^{\lambda}(\epsilon'_{\nu}) b_{\nu}^{\lambda'}(\epsilon'_{\nu})^* \\
&+ \sum_{\nu, E_{\lambda} \geq E_{\nu}^S} a_{\nu}^{\lambda}(E_{\lambda}) \frac{b_{\nu}^{\lambda'}(E_{\lambda'})^*}{E_{\lambda} - E_{\lambda'}} + \sum_{\nu, E'_{\lambda} \geq E_{\nu}^S} \frac{b_{\nu}^{\lambda}(E_{\lambda})}{E_{\lambda'} - E_{\lambda}} a_{\nu}^{\lambda'}(E_{\lambda'})^*
\end{aligned} \tag{E.5}$$

und

$$F_2(E_{\lambda'}, E_{\lambda}) = \sum_{\nu, E_{\lambda} \geq E_{\nu}^S} \left[a_{\nu}(E_{\lambda}) a_{\nu}^{\lambda'}(E_{\lambda'})^* + \pi^2 b_{\nu}^{\lambda}(E_{\lambda}) b_{\nu}^{\lambda'}(E_{\lambda'})^* \right]. \tag{E.6}$$

Für Energien E_{λ} , die kleiner sind als das Minimum aller Teilchenaufbruchschwellen E_{ν}^S , tragen nur die ersten beiden Summanden des ersten Terms F_1 aus Gleichung (E.4) zur Normierung bei. Für $E_{\lambda} \geq \text{Min}(E_{\nu}^S)$ trägt nur der zweite Term F_2 bei. Die Summation erfolgt in diesem Fall über Streuzustände oder "Kanäle", die bereits offen sind, d.h. deren Schwellenenergie E_{ν}^S kleiner ist als E_{λ} , denn nur für diese Zustände erhält man bei der Integration über die Deltafunktionen von Null verschiedene Beiträge. Die Tatsache, daß sich bei bestimmten Schwellenenergien neue "Kanäle" öffnen, bedingt oft signifikante Änderungen im Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Neutronen. Dieses Phänomen wird in der Literatur auch als "Wigner Cusp" bekannt [LaL88].

Für Energien, die kleiner sind als $\text{Min}(E_{\nu}^S)$ erhält man damit die Normierungsbedingung für Zustände unterhalb der Teilchenaufbruchschwelle:

$$1 = \sum_{\nu} z_{\nu}^{\lambda^2} + \int_{\nu} d\epsilon'_{\nu} \frac{b_{\nu}^{\lambda}(\epsilon'_{\nu})^2}{(E_{\lambda} - \epsilon'_{\nu})^2}. \tag{E.7}$$

Die Orthogonalität zweier Zustände mit Energieeigenwerten $E_{\lambda} \neq E_{\lambda'}$, ergibt sich mit Hilfe der Schrödingergleichung zu dem entsprechenden Modell, also dem QRPA-Modell bzw. QPC-Modell.

Exemplarisch soll nun die Orthogonalität für das QPC-Modell gezeigt werden. Dazu werden die den Größen $F_1(E_{\lambda'}, E_{\lambda})$ und $F_2(E_{\lambda'}, E_{\lambda})$ aus den Gleichungen (E.5) und

(E.6) entsprechenden Ausdrücke für das QPC-Modell formuliert:

$$\begin{aligned}
F_1^{QPC}(E_{\lambda'}, E_{\lambda}) &= \sum_n z_n^{\lambda'*} z_n^{\lambda} + \sum_{\nu} z_{\nu}^{\lambda'*} z_{\nu}^{\lambda} \\
&+ \int d\epsilon' \frac{1}{E_{\lambda'} - E_{\lambda}} \left(\frac{1}{E_{\lambda} - \epsilon'} - \frac{1}{E_{\lambda'} - \epsilon'} \right) b^{\lambda'}(\epsilon')^* b^{\lambda}(\epsilon') \\
&+ \int d\epsilon'_{\nu} \frac{1}{E_{\lambda'} - E_{\lambda}} \left(\frac{1}{E_{\lambda} - \epsilon'_{\nu}} - \frac{1}{E_{\lambda'} - \epsilon'_{\nu}} \right) b_{\nu}^{\lambda'}(\epsilon'_{\nu})^* b_{\nu}^{\lambda}(\epsilon'_{\nu}) \\
&+ \frac{1}{E_{\lambda'} - E_{\lambda}} \left[a^{\lambda'}(E_{\lambda'})^* b^{\lambda}(E_{\lambda}) - a^{\lambda}(E_{\lambda}) b^{\lambda'}(E_{\lambda'})^* \right] \Theta(E_s) \\
&+ \sum_{\nu, E_{\lambda} \geq E_{\nu}^S} a_{\nu}^{\lambda}(E_{\lambda}) \frac{b_{\nu}^{\lambda'}(E_{\lambda'})^*}{E_{\lambda} - E_{\lambda'}} + \sum_{\nu, E_{\lambda'} \geq E_{\nu}^S} \frac{b_{\nu}^{\lambda}(E_{\lambda})}{E_{\lambda'} - E_{\lambda}} a_{\nu}^{\lambda'}(E_{\lambda'})^*
\end{aligned} \tag{E.8}$$

und ¹

$$\begin{aligned}
F_2^{QPC}(E_{\lambda'}, E_{\lambda}) &= a^{\lambda'}(E_{\lambda'})^* a^{\lambda}(E_{\lambda}) + \sum_{\nu} a_{\nu}^{\lambda'}(E_{\lambda'})^* a_{\nu}^{\lambda}(E_{\lambda}) \\
&+ \pi^2 b^{\lambda'}(E_{\lambda'})^* b^{\lambda}(E_{\lambda}) + \pi^2 \sum_{\nu} b_{\nu}^{\lambda'}(E_{\lambda'})^* b_{\nu}^{\lambda}(E_{\lambda}).
\end{aligned} \tag{E.9}$$

$F_2^{QPC}(E_{\lambda'}, E_{\lambda})$ tritt mit dem Faktor $\delta(E_{\lambda} - E_{\lambda'})$ auf und ist natürlich immer gleich 0 falls $E_{\lambda} \neq E_{\lambda'}$. Der Ausdruck $F_1(E_{\lambda'}, E_{\lambda})$ aus Gleichung (E.8) nimmt ebenfalls den Wert 0 für $E_{\lambda} \neq E_{\lambda'}$ an. Diese Behauptung sieht man wie folgt ein: Zunächst multipliziert man die ersten beiden Summanden von $F_1^{QPC}(E_{\lambda'}, E_{\lambda})$ (Siehe Gleichung (E.8)) mit der Einheit in der Form $[(E_n - E_{\lambda}) - (E_n - E_{\lambda'})]/(E_{\lambda'} - E_{\lambda})$ bzw. $[(E_{\nu} - E_{\lambda}) - (E_{\nu} - E_{\lambda'})]/(E_{\lambda'} - E_{\lambda})$. Nach Umsortieren ergibt sich:

$$F_1^{QPC}(E_{\lambda'}, E_{\lambda}) = \frac{1}{(E_{\lambda'} - E_{\lambda})} \left[F_3^{QPC}(E_{\lambda}) - F_3^{QPC}(E_{\lambda'})^* \right] \tag{E.10}$$

mit

$$\begin{aligned}
F_3^{QPC}(E_{\lambda}) &= \sum_n (E_n - E_{\lambda}) z_n^{\lambda'*} z_n^{\lambda} + \int d\epsilon' \frac{b^{\lambda'}(\epsilon')^* b^{\lambda}(\epsilon')}{\epsilon' - E_{\lambda}} + a^{\lambda'}(E_{\lambda'})^* b^{\lambda}(E_{\lambda}) \\
&- \sum_{\nu} (E_{\nu} - E_{\lambda'}) z_{\nu}^{\lambda'*} z_{\nu}^{\lambda} - \int d\epsilon'_{\nu} \frac{b_{\nu}^{\lambda'}(\epsilon'_{\nu})^* b_{\nu}^{\lambda}(\epsilon'_{\nu})}{E_{\lambda'} - \epsilon'_{\nu}} \\
&- \sum_{\nu, E_{\lambda} \geq E_{\nu}^S} a_{\nu}^{\lambda}(E_{\lambda}) b_{\nu}^{\lambda'}(E_{\lambda'})^*
\end{aligned} \tag{E.11}$$

¹ E_s ist die Schwellenenergien des Einteilchenkanals und Θ die Heavyside-Funktion

Benützt man für die $z_\nu^{\lambda'*}$ und die $b_\nu^\lambda(\epsilon_\nu)^*$ die Ausdrücke aus (3.57) und (3.58) aus Kapitel 3, Abschnitt 3.2, Seite 74 ff, so kann $F_3^{QPC}(E_\lambda)$ (und entsprechend $F_3^{QPC}(E_{\lambda'})^*$), nach Umsortieren, wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
F_3^{QPC}(E_\lambda) = & \sum_n z_n^{\lambda'*} \left[(E_n - E_\lambda) z_n^\lambda + \sum_\nu V_{\nu n} z_\nu^\lambda \right. \\
& + \left. \sum_\nu d\epsilon'_\nu V_n(\epsilon'_\nu) \frac{b_\nu^\lambda(\epsilon'_\nu)}{\epsilon'_\nu - E_\lambda} + \sum_\nu V_n(\epsilon_\nu = E_\lambda) a_\nu^\lambda(\epsilon_\nu = E_\lambda) \right] \\
& + \int d\epsilon' \zeta^{\lambda'}(\epsilon')^* \left[b^\lambda(\epsilon') + \sum_\nu V_\nu(\epsilon') z_\nu^\lambda + \sum_\nu d\epsilon''_\nu V(\epsilon', \epsilon''_\nu) \frac{b_\nu^\lambda(\epsilon''_\nu)}{\epsilon''_\nu - E_\lambda} \right. \\
& \left. + \sum_\nu V(\epsilon', \epsilon_\nu = E_\lambda) a_\nu^\lambda(\epsilon_\nu = E_\lambda) \right] \quad (E.12)
\end{aligned}$$

Die Ausdrücke in den Klammern entsprechen jetzt genau den QPC-Gleichungen (3.51) und (3.52), wenn man die $\zeta^{\lambda'}$ entsprechend einsetzt. Damit ist die Orthogonalität für $E_\lambda \neq E_{\lambda'}$ gezeigt.

Unterhalb der Teilchenaufbruchsschwelle E_S findet man wieder einen Ausdruck der Form (E.7). Sollte Entartung auftreten, können durch geeignete Wahl der Koeffizienten (Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren) orthogonale Zustände ermittelt werden. Bei Kontinuumszuständen liegt bei mehr als einem offenen Kanal immer Entartung vor. Auch in diesem Fall können orthogonale Kanäle ermittelt werden. Orthogonale Kanäle erhält man für einen reinen Zustand ν im Eingangskanal.

Völlig entsprechend zum obigen Ansatz, kann die Orthogonalität für die QRPA-Zustände gezeigt werden. Durch Verwendung einer Beziehung, entsprechend (E.10) können durch Einsetzen die QRPA-Gleichungen erhalten werden.

Das die F_1^{QPC} und F_2^{QPC} wie oben festgelegt werden können, sieht man mit Hilfe des asymptotischen Ausdrucks von $|\lambda\rangle$ im Ortsraum. In diesem sind die physikalischen Randbedingungen enthalten. Dieser Zusammenhang wird genauer im folgenden Anhang F beschrieben.

Anhang F

Asymptotik der QPC-Wellenfunktion

An dieser Stelle soll nun etwas genauer auf die Asymptotik der QPC-Wellenfunktion im Ortsraum eingegangen werden, d.h. es sollen im wesentlichen der Ausdruck (3.76) aus Abschnitt 3.2.1 bewiesen werden. Es genügt die Behandlung für 1-QT-Zustände durchzuführen, da die Behandlung für 3-QT-Zustände entsprechend ist. Ausgangspunkt ist der radiale Kontinuumsanteil der 1-QT-Zustände aus Abschnitt 3.2 für festes ℓ und j bezüglich der Einteilchenenergie ϵ' bzw. bezüglich der Wellenzahl κ' als Integrationsvariablen:

$$\int_0^\infty d\epsilon' \frac{b^\lambda(\epsilon')}{\epsilon' - E_\lambda} u_{\ell j}(r, \epsilon') = \int_0^\infty d\kappa' \frac{2\kappa' b^\lambda(\kappa')}{\kappa'^2 - \kappa_\lambda^2} u_{\ell j}(r, \kappa'). \quad (\text{F.1})$$

Außerhalb der Reichweite des Kernpotentials läßt sich die Wellenfunktion $u_{\ell j}(r, \kappa)$ mit Gleichung (2.4) wie in Abschnitt 2.1 angegeben schreiben. Asymptotisch ergibt sich für Gleichung (2.4) nach Multiplikation mit der Phase $e^{-i\delta_{\ell j}(\kappa)}$ der Ausdruck (Definition von Φ_ℓ siehe Gleichung (2.23)):

$$u_{\ell j}(r, \kappa) \sim N(\kappa) \sin(\Phi_\ell(r, \kappa) + \delta_{\ell j}(\kappa)). \quad (\text{F.2})$$

Mit dieser Gleichung, kann der Ausdruck (F.1) folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^\infty d\kappa' \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{\mu}{|\kappa'| \hbar^2}} \frac{2\kappa' b^\lambda(\kappa')}{\kappa'^2 - \kappa_\lambda^2} e^{i(\Phi_\ell(r, \kappa') + \delta_{\ell j}(\kappa'))} \quad (\text{F.3})$$

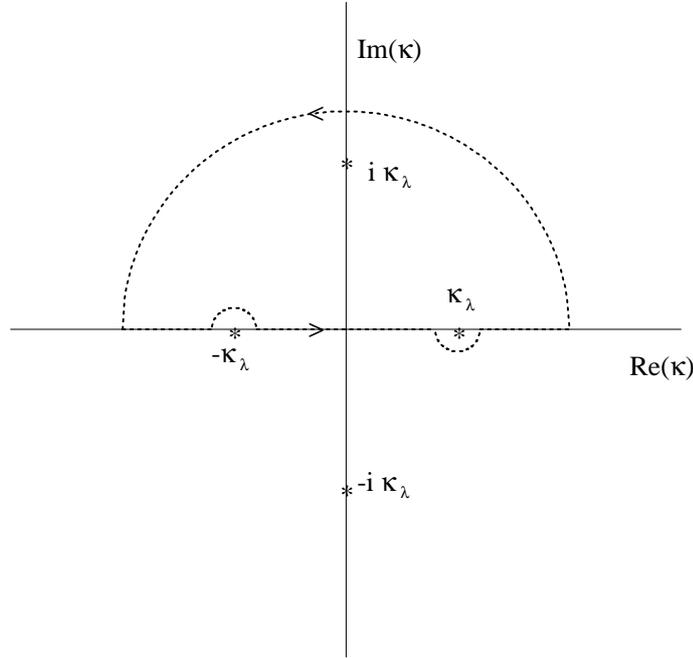


Abbildung F.1: Integrationsweg Γ zur Berechnung des Kontourintegrals (F.4). Die Pole für $E_\lambda < 0$ ($i|\kappa_\lambda|$) und $E_\lambda \geq 0$ ($\pm|\kappa_\lambda| + i\eta$) sind eingezeichnet. Den Radius des Halbkreisbogens muß man sich ins Unendliche fortgesetzt denken.

Dabei wurde die in Abschnitt 2.4 beschriebene Eigenschaft c) auf Seite 44, also das punktsymmetrischen Verhalten der Funktion Φ_ℓ und der Streuphase bezüglich κ , ausgenutzt. Durch Fortsetzen in die komplexe Ebene kann dieses Hauptwertintegral aus Gleichung (F.3) mit Hilfe des Residuensatzes berechnet werden. Als Integrationsweg Γ verwendet man den in Abbildung F.1 gezeigten Halbkreis in der oberen komplexen κ -Ebene und umläuft die Polstellen in der gezeigten Weise bzw. verschiebt die Polstellen um eine infinitissimale, komplexe Größe in die obere bzw. untere Halbebene. Entlang des Halbkreisbogens geht das Wegintegral für $|\kappa| \gg 0$ gegen 0, so daß nur das Wegintegral von $\kappa \rightarrow -\infty$ bis $\kappa \rightarrow \infty$ Beiträge liefert. Für das komplexe Integral ergibt sich nun:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{2i} \oint_{\Gamma} dz \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{\mu}{|z| \hbar^2}} \frac{2zb^\lambda(z)}{z^2 - (\kappa_\lambda + i\eta)^2} = \pi \sqrt{\frac{2\mu}{\pi \hbar^2 |\kappa_\lambda|}} b^\lambda(k_\lambda^2) e^{i(\Phi_\ell(r, \kappa_\lambda) + \delta_{\ell j}(\kappa_\lambda))} \quad (\text{F.4})$$

Für das Hauptwertintegral bezüglich der Energie erhält man dann mit

$$\mathcal{P} \frac{1}{\epsilon - E_\lambda} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon - E_\lambda \pm i\eta} \pm i\pi \delta(\epsilon - E_\lambda) \quad (\text{F.5})$$

denn Ausdruck

$$\oint d\epsilon' \frac{b^\lambda(\epsilon')}{\epsilon' - E_\lambda} u_{\ell j}(r, \epsilon') = \pi N(E_\lambda) b^\lambda(E_\lambda) \cos(\Phi_\ell(r, E_\lambda) + \delta_{\ell j}(E_\lambda)). \quad (\text{F.6})$$

Damit ergibt sich unter Berücksichtigung eines einlaufenden Einteilchenzustandes insgesamt:

$$N(E_\lambda) \left\{ \left[a^\lambda(E_\lambda) - i\pi b^\lambda(E_\lambda) \right] \exp[-i\Phi_\ell(r, E_\lambda)] - \left[a^\lambda(E_\lambda) + i\pi b^\lambda(E_\lambda) \right] S_{\ell j}(E_\lambda) \exp[i\Phi_\ell(r, E_\lambda)] \right\}. \quad (\text{F.7})$$

Dieser Ausdruck beschreibt einlaufende und auslaufende Kugelwellen. Setzt man den Ausdruck $a^\lambda(E_\lambda) - i\pi b^\lambda(E_\lambda) = 1$ (siehe Gleichung (3.74)), dann liegt im einlaufenden Kanal ein reiner 1-QT-Zustand vor.

Diese Beziehung gilt auch für $E_\lambda = -\hbar^2 \kappa_\lambda^2 / 2\mu < 0$, also für gebundene Zustände. Da in diesem Fall keine einlaufende Welle vorliegt ist $a^\lambda(i|\kappa_\lambda|) - i\pi b^\lambda(i|\kappa_\lambda|) = 0$ und da das Argument dann eine rein imaginäre Größe ist, hat die sich ergebende Exponentialfunktion einen negativen Exponenten, der den asymptotischen Verlauf völlig korrekt wiedergibt. Der Koeffizient $b^\lambda(i|\kappa|)$ ergibt sich dann aus der stetigen Fortsetzung der Koeffizientenfunktion $b^\lambda(z)$ mit komplexem Argument. Dieses Verhalten ergibt sich aus den QPC-Gleichungen, die in diesem Fall ein homogenes Integralgleichungssystem bilden. Eine Lösung zu diesem homogenen Gleichungssystem gibt es nur für eine verschwindende Resolvente bei ganz diskreten Energieeigenwerten. Einige dieser Energieeigenwerte liegen in der Nähe der ungestörten Einteilchenenergien, andere sind durch die Energien der kollektiven 1 und 3-QT-Zustände bestimmt. Die so erhaltenen Lösungen zeigen auch die korrekte Asymptotik, da sich die Koeffizienten $b^\lambda(\kappa)$ im Hauptwertintegral (F.1) gerade so überlagern, daß nur eine exponentiell abfallende Lösung $O_\ell^{(-)} \sim \exp(-|\kappa_\lambda|r - \alpha \kappa_\lambda^{-1} \ln(2\kappa_\lambda r))$ übrigbleibt. Es zeigt sich damit, wie in natürlicher Weise die Erweiterung zum Kontinuumsansatz den diskreten Fall mit einschließt.

Diese auf den ersten Blick recht überraschend wirkende Tatsache ist aus der Theorie der Fouriertransformationen bekannt. So erhält man z.B für die Sinusfouriertransformierte von $\kappa(\kappa^2 + \kappa_\lambda^2)^{-1}$ den Wert $\frac{1}{2}\pi \exp(-\kappa_\lambda r)$ [EMO54].

Anhang G

Darstellung des Einteilchenkontinuums durch ein diskretes Basissystem

Ausgangspunkt der weiteren Diskussion sind die beiden folgenden Einteilchenhamiltonoperatoren \hat{H}_0^S und \hat{H}_0 im Ortsraum. Sie induzieren im mathematischen Sinne die folgenden linearen Abbildungen zwischen dem Raum \mathcal{C}^2 der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen:

$$\begin{aligned}\hat{H}_0^S : \mathcal{C}^2(\bar{U}) &\rightarrow \mathcal{C}^2(\bar{U}) & ; & \quad \bar{U} \subset S_3 \quad ; \quad S_3 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq R_S\} \\ \hat{H}_0 : \mathcal{C}^2(U) &\rightarrow \mathcal{C}^2(U) & ; & \quad U \subset \mathbb{R}^3\end{aligned}\tag{G.1}$$

S_3 bezeichnet dabei die dreidimensionale Sphäre mit Radius R_S ; beide Operatoren sollen für Funktionen innerhalb S_3 identisch sein. Die Lösungen zum Operator \hat{H}_0^S sollen allerdings durch weitere, homogene Randbedingungen auf der Sphäre so festgelegt werden, daß sich ein Sturm-Liouville'sches Eigenwertproblem ergibt. Dies ist gleichbedeutend damit, daß es ein Spektrum von diskreten Energieeigenwerten ϵ_ν mit dazugehörigen Eigenfunktionen $\varphi_{\nu, \ell j m_j}(\vec{r})$ gibt, deren logarithmische Ableitungen auf der Sphäre einen bestimmten, festen Wert annehmen. Damit ist gewährleistet, daß jede Funktion im Inneren der Sphäre nach diesen Eigenfunktionen entwickelt werden kann. (Für eine genauere Darstellung siehe z.B. [Wal76]) \hat{H}_0 ist im gesamten Ortsraum definiert und hat daher ein diskretes und ein kontinuierliches Spektrum von Energieeigenwerten ϵ_n und ϵ mit dazugehörigen Eigenfunktionen $\phi_{n, \ell j m_j}(\vec{r})$ bzw. $\phi_{\ell j m_j}(\vec{r}, \epsilon)$. Mit diesen Eigenfunktionen lassen sich die bekannten Vollständigkeitsrelationen in der üblichen Form schreiben (siehe auch die Gleichungen (2.17) und (2.30) auf den Seiten 35 und 40):

$$\sum_{\nu, \ell j m_j} \varphi_{\nu, \ell j m_j}(\vec{r}') \varphi_{\nu, \ell j m_j}(\vec{r}) = \delta(\vec{r}' - \vec{r}), \quad |\vec{r}|, |\vec{r}'| \leq R_S. \quad (\text{G.2})$$

$$\begin{aligned} \sum_{n, \ell j m_j} \phi_{n, \ell j m_j}(\vec{r}') \phi_{n, \ell j m_j}(\vec{r}) + \sum_{\ell j m_j} \int d\epsilon' \phi_{\ell j m_j}(\vec{r}', \epsilon') \phi_{j(\ell, s)}(\vec{r}, \epsilon') \\ = \delta(\vec{r}' - \vec{r}). \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

Im weiteren werde nun eine beliebige Wellenfunktion $\psi_{\ell j m_j} = \psi_{\ell j}$ (zur Vereinfachung werden die Drehimpulsquantenzahl m_j nicht mehr ausgeschrieben), in der Basis von \hat{H}_0 dargestellt:

$$\psi_{\ell j}^\lambda(\vec{r}) = \sum_n z_n^\lambda \phi_{n, \ell j}(\vec{r}) + \int_0^\infty d\epsilon' \zeta^\lambda(\epsilon') \phi_{\ell j}(\vec{r}, \epsilon'). \quad (\text{G.4})$$

Diese Wellenfunktion kann innerhalb der Sphäre mit Radius R_S , bezüglich der diskreten Basis von Eigenfunktionen, durch Verwendung der Vollständigkeitsrelation (G.2), wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \psi_{\ell j}^\lambda(\vec{r}) &= \sum_n z_n^\lambda \sum_\nu \langle \varphi_{\nu, \ell j} | \phi_{n, \ell j} \rangle \varphi_{\nu, \ell j}(\vec{r}) \\ &+ \int_0^\infty d\epsilon' \zeta^\lambda(\epsilon') \sum_\nu \langle \varphi_{\nu, \ell j} | \phi_{\ell j}(\epsilon') \rangle \varphi_{\nu, \ell j}(\vec{r}). \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

Vertauscht man die Summation über n bzw. die Integration über ϵ' mit der Summation über ν , so erhält man die Entwicklungskoeffizienten z_ν^λ , die man als verallgemeinerte Fourierkoeffizienten bezeichnen kann, bezüglich der diskreten Basis:

$$\begin{aligned} z_\nu^\lambda &= \sum_n z_n^\lambda \langle \varphi_{\nu, \ell j} | \phi_{n, \ell j} \rangle \\ &+ \int_0^\infty d\epsilon' \zeta^\lambda(\epsilon') \langle \varphi_{\nu, \ell j} | \phi_{\ell j}(\epsilon) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

Die Überlappmatrixelemente zwischen diskreten und Kontinuumszuständen, die in der R-Matrix-Theorie eine zentrale Rolle spielen, entsprechen den Ortsraumintegralen:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{\nu, \ell j} | \phi_{n, \ell j} \rangle &= \int_{S_3} d^3 r' \varphi_{\nu, \ell j}^*(\vec{r}') \phi_{n, \ell j}(\vec{r}') \\ \langle \varphi_{\nu, \ell j} | \phi_{\ell j}(\epsilon) \rangle &= \int_{S_3} d^3 r' \varphi_{\nu, \ell j}^*(\vec{r}') \phi_{\ell j}(\vec{r}', \epsilon). \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

In völlig analoger Weise kann eine beliebige Wellenfunktion, die innerhalb der Sphäre in der Basis der diskreten Eigenfunktionen angegeben ist, durch die Kontinuumsfunktionen dargestellt werden. Sei

$$\psi_{\ell_j}^\lambda(\vec{r}) = \sum_\nu z_\nu^\lambda \varphi_{\nu, \ell_j}(\vec{r}) \quad (\text{G.8})$$

eine derartige Funktion. Durch Verwendung der Vollständigkeitsrelation (G.3) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \psi_{\ell_j}^\lambda(\vec{r}) &= \sum_\nu z_\nu^\lambda \left\{ \sum_n \langle \phi_{n, \ell_j} | \varphi_{\nu, \ell_j} \rangle \phi_{n, \ell_j}(\vec{r}) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty d\epsilon' \langle \phi_{\ell_j}(\epsilon') | \varphi_{\nu, \ell_j} \rangle \phi_{\ell_j}(\vec{r}, \epsilon') \right\} \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

als umgekehrte Darstellung. Die Fourierkoeffizienten z_n^λ bzw. $\zeta^\lambda(\epsilon)$ zu den Kontinuumszuständen sind dann von folgender Form:

$$\begin{aligned} z_n^\lambda &= \sum_\nu z_\nu^\lambda \langle \phi_{n, \ell_j} | \varphi_{\nu, \ell_j} \rangle \\ \zeta^\lambda(\epsilon) &= \sum_\nu z_\nu^\lambda \langle \phi_{\ell_j}(\epsilon) | \varphi_{\nu, \ell_j} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

Aus den beiden Schrödingergleichungen

$$\hat{H}_0^S |\varphi_{\nu, \ell_j}\rangle = \epsilon_\nu |\varphi_{\nu, \ell_j}\rangle \quad (\text{G.11})$$

$$\hat{H}_0 |\phi_{\ell_j}(\epsilon)\rangle = \epsilon |\phi_{\ell_j}(\epsilon)\rangle \quad (\text{G.12})$$

können die Überlappmatrixelemente beim Darstellungswechsel von kontinuierlichen zu diskreten Zuständen durch Projizieren mit $\langle \phi_{\ell_j}(\epsilon) |$ bzw. $\langle \varphi_{\nu, \ell_j} |$ und anschließendes komplexes Konjugieren der ersten Gleichung (G.11) erhalten werden. (Zur weiteren Vereinfachung wurde ϵ allgemein für diskrete ϵ_n und kontinuierliche ϵ gesetzt.) Es ergibt sich nun:

$$\langle \varphi_{\nu, \ell_j} | \phi_{\ell_j}(\epsilon) \rangle = \frac{\langle \varphi_{\nu, \ell_j} | \hat{H}_0 | \phi_{\ell_j}(\epsilon) \rangle - \langle \phi_{\ell_j}(\epsilon) | \hat{H}_0^S | \varphi_{\nu, \ell_j} \rangle^*}{(\epsilon - \epsilon_\nu)}. \quad (\text{G.13})$$

Im Falle reeller Einteilchenpotentiale sind nur die Matrixelemente mit dem Operator der kinetischen Energie für die beiden Hamiltonoperatoren innerhalb der Sphäre unterschiedlich, da \hat{T}^S nicht hermitsch ist. Die rechte Seite von Gleichung (G.13) läßt sich daher, wie folgt, vereinfachen:

$$\langle \varphi_{\nu, \ell j} | \phi_{\ell j}(\epsilon) \rangle = \frac{\langle \varphi_{\nu, \ell j} | \hat{T} | \phi_{\ell j}(\epsilon) \rangle - \langle \phi_{\ell j}(\epsilon) | \hat{T}^S | \varphi_{\nu, \ell j} \rangle^*}{(\epsilon - \epsilon_\nu)}, \quad (\text{G.14})$$

wobei \hat{T} bzw. \hat{T}^S die Operatoren der kinetischen Energie sind. Im Ortsraum läßt sich dieser Ausdruck mit Hilfe der zweiten Greenschen Formel¹ und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die logarithmischen Ableitungen der diskreten Eigenfunktionen $\varphi_{\nu, \ell j}(\vec{r})$ auf der Oberfläche der Sphäre einen bestimmten Wert annehmen, wie folgt auswerten:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{\nu, \ell j} | \phi_{\ell j}(\epsilon) \rangle &= \quad (\text{G.15}) \\ \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{[\epsilon - \epsilon_\nu]} &\int_{S_3} d^3 r' [\phi_{\ell j}(\vec{r}', \epsilon) \Delta \varphi_{\nu, \ell j}^*(\vec{r}') - \varphi_{\nu, \ell j}^*(\vec{r}') \Delta \phi_{\ell j}(\vec{r}', \epsilon)] = \\ \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{[\epsilon - \epsilon_\nu]} &\oint_{\partial S_3} dA' \left[\phi_{\ell j}(\vec{r}', \epsilon) \frac{\partial}{\partial n'_A} \varphi_{\nu, \ell j}^*(\vec{r}') - \varphi_{\nu, \ell j}^*(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'_A} \phi_{\ell j}(\vec{r}', \epsilon) \right] \end{aligned}$$

für $\epsilon \neq \epsilon_\nu$. Für $\epsilon = \epsilon_\nu$ muß der Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_\nu} \langle \varphi_{\nu, \ell j} | \phi_{\ell j}(\epsilon) \rangle &= \quad (\text{G.16}) \\ \lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_\nu} \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{[\epsilon - \epsilon_\nu]} &\oint_{\partial S_3} dA' \left[\phi_{\ell j}(\vec{r}', \epsilon) \frac{\partial}{\partial n'_A} \varphi_{\nu, \ell j}^*(\vec{r}') - \varphi_{\nu, \ell j}^*(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'_A} \phi_{\ell j}(\vec{r}', \epsilon) \right] \end{aligned}$$

berechnet werden. Die Auswertung des Oberflächenintegrals entspricht der Raumwinkelintegration. Werden die Einteilchenwellenfunktion in spärtschen Polarkoordinaten angegeben, wird also die Darstellung aus Kapitel 2.6, Abschnitt 2.1 verwendet, so sind nur Integrationen über Kugelflächenfunktionen (bzw. Summationen über Spinfunktionen) durchzuführen. Man erhält dann:

$$\langle \varphi_{\nu, \ell j} | \phi_{\ell j}(\epsilon) \rangle = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{[u_{\ell j}(r, \epsilon) \partial_r u_{\nu, \ell j}^*(r) - u_{\nu, \ell j}(r) \partial_r u_{\ell j}^*(r, \epsilon)]_{r=R_S}}{[\epsilon_\nu - \epsilon]} \quad (\text{G.17})$$

¹In der Literatur wird die folgende Beziehung auch als Green'sches Theorem der Kernreaktionen bezeichnet [LaT58].

bzw. für den Grenzwert $\epsilon = \epsilon_\nu$ durch Anwenden der Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_\nu} [\dots] = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\partial_\epsilon u_{\ell j}(r, \epsilon) \partial_r u_{\nu, \ell j}^*(r) - \partial_\epsilon \partial_r u_{\ell j}(r, \epsilon) u_{\nu, \ell j}^*(r) \right]_{r=R_S, \epsilon=\epsilon_\nu}. \quad (\text{G.18})$$

Wobei die $u_{\ell j}(r, \epsilon)$ bzw. $u_{\nu, \ell j}(r)$ die Radialanteile der Einteilchenwellenfunktionen des echten Kontinuums und der diskreten Basis sind. Diese Größen sind proportional zu denen aus der R-Matrix-Theorie bekannten reduzierten Breiten von Schalenmodellzuständen γ [MaW69]. Genauer ergeben sich

$$\begin{aligned} \gamma_{\ell j}(\epsilon) &= \left(\frac{\hbar^2}{2mR_S} \right)^{\frac{1}{2}} u_{\ell j}(R_S, \epsilon) \\ \gamma_{\nu, \ell j} &= \left(\frac{\hbar^2}{2mR_S} \right)^{\frac{1}{2}} u_{\nu, \ell j}(R_S). \end{aligned} \quad (\text{G.19})$$

Die Ausdrücke (G.17) und (G.18) werden üblicherweise numerisch ermittelt. Wichtige Eigenschaften, insbesondere der Zusammenhang mit Distributionen sind Gegenstand des folgenden Anhangs.

Anhang H

Eigenschaften der Überlappmatrixelemente

Zum besseren Verständniss sollen an dieser Stelle die folgenden analytische Eigenschaften der Überlappmatrixelemente formuliert und bewiesen werden. Vom mathematischen Standpunkt aus sind diese Eigenschaften trivial, da man aber physikalisch relevante Folgerungen erhält, scheint die folgende Diskussion sinnvoll.

- i. Die Überlappmatrixelemente für $\nu \neq \nu'$ bilden bezüglich ϵ ein "Orthogonalsystem" d.h.

$$\int_0^\infty d\epsilon' \langle \varphi_{\nu, \ell_j} | \phi_{\ell_j}(\epsilon') \rangle \langle \phi_{\ell_j}(\epsilon') | \varphi_{\nu', \ell_j} \rangle = \delta_{\nu\nu'}$$

und insbesondere bilden sie für $\nu = \nu'$ bezüglich der Energie auf eins normierte Gewichtsfunktionen:

$$\int_0^\infty d\epsilon' |\langle \varphi_{\nu, \ell_j} | \phi_{\ell_j}(\epsilon') \rangle|^2 = 1.$$

- ii. Die Ortsraumintegrale über die endliche Sphäre bilden eine Niveaudichtefunktion mit der Eigenschaft:

$$\int_{S_3} d\vec{r} \langle \phi_{\ell_j}(\epsilon) | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \phi_{\ell_j}(\epsilon) \rangle = \sum_{\nu} |\langle \varphi_{\nu, \ell_j} | \phi_{\ell_j}(\epsilon) \rangle|^2$$

- iii. Falls $\epsilon = \epsilon_{\nu'}$ gilt, d.h. falls die Kontinuumsenergie mit der Eigenenergie eines diskreten Zustands übereinstimmt gilt

$$\langle \varphi_{\nu, \ell j} | \phi_{\ell j}(\epsilon_{\nu'}) \rangle = C \delta_{\nu \nu'}$$

wobei im Falle $\nu = \nu'$

$$C = \lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_{\nu}} \left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\partial_{\epsilon} u_{\ell j}(r, \epsilon) \partial_r u_{\nu, \ell j}^*(r) - \partial_{\epsilon} \partial_r u_{\ell j}(r, \epsilon) u_{\nu, \ell j}^*(r) \right]_{r=R_S} \right].$$

(Die $u_{\ell j}(r, \epsilon)$ und $u_{\nu, \ell j}(r)$ entsprechen den Radialanteilen der Einteilchenwellenfunktionen)

- iv. Für $R_S \rightarrow \infty$ erhält man

$$\langle \varphi_{\nu, \ell j} | \phi_{\ell j}(\epsilon) \rangle = \frac{1}{2} N(\kappa) N_{\ell j} e^{i[\delta(\kappa) - \delta(\kappa_{\nu})]} \left[f^{(-)}(\kappa, \kappa_{\nu}) - f^{(+)}(\kappa, \kappa_{\nu}) \right]$$

mit

$$f^{(\pm)}(\kappa, \kappa_{\nu}) = \frac{\sin [(\kappa \pm \kappa_{\nu}) R_S + \delta(\kappa) \pm \delta(\kappa_{\nu})]}{\kappa \pm \kappa_{\nu}}$$

Die Behauptung i. ist durch Verwendung der Vollständigkeitsrelation für die Kontinuumszustände und die Orthonormiertheit der diskreten Zustände sofort zu beweisen.

Die Behauptung ii. ergibt sich durch zweimaliges Ausnutzen der Vollständigkeitsrelation für diskrete Zustände und anschließende Berücksichtigung der Orthogonalität.

$$\begin{aligned} \int_{S_3} d\vec{r} \langle \phi_{\ell j}(\epsilon) | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \phi_{\ell j}(\epsilon) \rangle &= \sum_{\nu, \nu'} \int_{S_3} d\vec{r} \langle \phi_{\ell j}(\epsilon) | \varphi_{\nu, \ell j} \rangle \langle \varphi_{\nu, \ell j} | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \varphi_{\nu', \ell j} \rangle \langle \varphi_{\nu', \ell j} | \phi_{\ell j}(\epsilon) \rangle = \\ &= \sum_{\nu, \nu'} \delta_{\nu, \nu'} \langle \phi_{\ell j}(\epsilon) | \varphi_{\nu, \ell j} \rangle \langle \varphi_{\nu, \ell j} | \phi_{\ell j}(\epsilon) \rangle = \sum_{\nu} |\langle \varphi_{\nu, \ell j} | \phi_{\ell j}(\epsilon) \rangle|^2 \end{aligned}$$

Der erste Teil der Behauptung iii. ist klar. Der zweite Teil ist aus Gleichung (G.18) zu erhalten.

Um iv. zu erhalten nützt man aus, daß die beiden Radialwellenfunktionen asymptotisch durch eine Linearkombination von einlaufenden und auslaufenden Coulombfunktionen $I_{\ell}^{(+)}$ und $O_{\ell}^{(+)}$ bzw. im Falle gebundener Zustände durch eine Whittakerfunktion $O_{\ell}^{(-)}$ dargestellt werden (Siehe Gleichungen (2.5) und (2.3) Kapitel 2.6

Seite 33). Für Radien r , die größer als die Reichweite des Kernpotentials sind, ergeben sich dann in Abhängigkeit von $\kappa = \sqrt{(2\mu\epsilon/\hbar^2)}$ und r , die Wellenfunktionen zu :

$$\begin{aligned} u_{\ell j}(r, \epsilon) &\sim \frac{1}{2} i N(\kappa) \left[I_{\ell}^{(+)}(r, \kappa) - S_{\ell j}(\kappa) O_{\ell}^{(+)}(r, \kappa) \right] \\ u_{\nu, \ell j}(r) &\sim \frac{1}{2} i N_{\ell j}^{\nu} \left[I_{\ell}^{(+)}(r, \kappa_{\nu}) - S_{\ell j}(\kappa_{\nu}) O_{\ell}^{(+)}(r, \kappa_{\nu}) \right], \end{aligned} \quad (\text{H.1})$$

mit der Streufunktionen $S_{\ell j}$ und den Normierungskonstanten $N(\kappa)$, $N_{\ell j}^{\nu}$. Die Streufunktion ist üblicherweise von der Form $S_{\ell j} = \exp 2i\delta_{\ell j}$. Mit dieser Darstellung ist es nun möglich den Grenzwert aus (G.18) explizit anzugeben. Es ist leicht einzusehen, daß sich dafür gerade der Quotient der Normierungskonstanten $N_c(\kappa)$ und $N_{\ell j}^{\nu}$ ergeben muß. Multipliziert man nämlich die Gleichung (G.16) mit $N_{\ell j}^{\nu}/N_c(\kappa_{\nu})$, so erhält man auf der linken Seite gerade den Wert 1, wenn die übliche Ortsraumnormierung für die diskreten Eigenfunktionen verwendet wird. Doch nun zur eigentlichen Berechnung von (G.18). Zunächst setzt man die Ausdrücke aus den Gleichungen (H.1) in (G.18) ein und nützt die Wronskideterminante für Coulombfunktionen [AbS70]

$$W(G_{\ell}, F_{\ell}) = G_{\ell}(r, \kappa) \partial_r F_{\ell}(r, \kappa) - F_{\ell}(r, \kappa) \partial_r G_{\ell}(r, \kappa) = \kappa, \quad (\text{H.2})$$

aus. Damit ergibt sich explizit mit den Differentialquotienten ausgedrückt in κ :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_{\nu}} [\dots] &= \frac{1}{8} \left\{ N_c(\kappa) N_{\ell j}^{\nu*} \left\{ \left[\partial_{\kappa} H_{\ell}^{(-)}(r, \kappa) - S_{\ell j}(\kappa) \partial_{\kappa} H_{\ell}^{(+)}(r, \kappa) \right] \right. \right. \\ &\times \kappa^{-1} \left[\partial_r H_{\ell}^{(+)}(r, \kappa) - S_{\ell j}^*(\kappa) \partial_r H_{\ell}^{(-)}(r, \kappa) \right] \\ &- \left[\partial_{\kappa} \partial_r H_{\ell}^{(-)}(r, \kappa) - S_{\ell j}(\kappa) \partial_{\kappa} \partial_r H_{\ell}^{(+)}(r, \kappa) \right] \\ &\times \kappa^{-1} \left[H_{\ell}^{(+)}(r, \kappa) - S_{\ell j}^*(\kappa) H_{\ell}^{(-)}(r, \kappa) \right]_{r=R_S, \kappa=\kappa_{\nu}} \left. \right\} \\ &+ 4 \partial_{\kappa} \delta_{\ell j}(\kappa) \left. \right\}_{r=R_S, \kappa=\kappa_{\nu}}. \end{aligned} \quad (\text{H.3})$$

Mit der asymptotischen Darstellung für $H^{(\pm)}$ aus Gleichung (2.8) im Abschnitt 2.1 ist eine weitere Vereinfachung möglich. Die Differentiation der auftretenden Coulombstreuphase kann analog zur Behandlung der Potentialstreuphase $\delta_{\ell j}$ mit Hilfe der Wronskideterminante (H.2) erfolgen. Insgesamt ergibt sich näherungsweise:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_{\nu}} [\dots] = \frac{1}{2} N_c(\kappa_{\nu}) N_{\ell j}^{\nu*}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ R_S \left[1 - \frac{\eta_\nu}{\kappa_\nu R_S} (1 - \eta_\nu \log(\kappa_\nu R_S)) \right] \left[1 - \frac{\eta_\nu}{\kappa_\nu R_S} \right] \right. \\
& + [\partial_\kappa \sigma_\ell(\kappa)]_{\kappa=\kappa_\nu} + [\partial_\kappa \delta_{\ell j}(\kappa)]_{\kappa=\kappa_\nu} \\
& \left. \frac{1}{\kappa_\nu} \left[1 + \frac{\eta_\nu}{\kappa_\nu R_S} \right] \sin(\Phi + \delta_{\ell j}) \cos(\Phi + \delta_{\ell j}) \right\}, \tag{H.4}
\end{aligned}$$

wobei

$$\Phi = \kappa_\nu R_S - \eta_\nu \log(\kappa_\nu R_S) - \frac{1}{2} \ell \pi + \sigma_{\ell j}(\kappa_{nu})$$

wobei $\eta_\nu = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\kappa_\nu}$ der Sommerfeld bzw. Coulombparameter zur Energie ϵ_ν ist und dem Argument Φ Für große $\kappa_\nu R_S$ können schließlich die Terme in $\frac{1}{\kappa_\nu R_S}$ vernachlässigt werden. Mit den Gleichungen hat man näherungsweise den inversen Ausdruck für $|N_{\ell j}^\nu|^2$ gewonnen, wenn die diskreten Basisfunktionen im Ortsraum auf 1 normiert sein sollen. Dieser Ausdruck steht in engem Zusammenhang mit der sogenannten Einteilchenniveaudichte. Letztere ist als Funktion von κ wie folgt definiert (siehe z.B. [Shl92] und Referenzen dort):

$$\begin{aligned}
g(\kappa) &= g_f(\kappa) + g_c(\kappa) \\
&= \frac{1}{2} A_{\ell j}(\kappa)^2 \sum_{\ell j} (2j+1) R_S + \frac{1}{2} A_{\ell j}(\kappa)^2 \sum_{\ell j} (2j+1) \partial_\kappa \delta_{\ell j}(\kappa) \tag{H.5}
\end{aligned}$$

Dabei ist der erste Term der Anteil für ein freies Gas, daß in einer Sphäre eingeschlossen ist. Der zweite Term beschreibt den Kontinuumsanteil der Einteilchendichte.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. H. H. Wolter für die interessante Themenstellung, die vielseitigen Anregungen und Ratschläge während der Erstellung dieser Arbeit sowie das Ermöglichen der Teilnahme an zahlreichen Konferenzen.

Auch möchte ich Herrn Prof. Dr. rer. nat. H. Lenske aus Giessen, der in zahlreichen Diskussionen und Gesprächen zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat, an dieser Stelle besonders danken. Dies gilt auch für die Mitarbeiter der Arbeitsgruppe theoretische Hadronen- und Kernphysik, namentlich Herrn Dr. C. Fuchs, Herrn Dr. S. Typel, Herrn Dipl. Phys. T. v. Chossy und Herrn Dipl. Phys. T. Gaitanos sowie unserer Sekretärin Frau Figge. Besonders in der sehr langen Endphase dieser Arbeit, die durch private Probleme, bedingt durch die Geburt meiner Tochter Lisa bedingt waren, fand ich große fachliche und vor allem moralische Unterstützung.

Mein größter Dank jedoch gilt meiner lieben Frau Henriette. Sie musste in einer Phase der Doppelbelastung von beruflicher Tätigkeit und Promotion auf manches verzichten. Nur ihrem Verständnis ist die endgültige Fertigstellung dieser Arbeit zu verdanken.

Lebenslauf

24. Juli 1961	geboren als Sohn von Prof. Dr. rer. nat. Fritz Weigel und Anne Weigel, geb. Heyn, in München
1967-1969	Besuch der Grundschule Südliche Auffahrtsalle in München
1969-1971	Besuch der Gebeleschule in München
1971-1980	Besuch des Luitpold-Gymnasiums in München
September 1977 - Dezember 1977	Besuch des Lycee Pothier in Orleans
Mai 1980	Abitur
Juli 1980 - September 1981	Grundwehrdienst
WS 1981 - SS 1982	Studium der Chemie an der Ludwig-Maximilians Universität in München
August 1982 - September 1982	Werkstudent am Consortium für Elektrochemische Industrie
WS 1982 - WS1989	Studium der Physik an der Ludwig-Maximilians Universität in München
November 1989	Diplom Thema der Diplomarbeit: Transferreaktionen ins Kontinuum. Betreuer: Prof. H.H. Wolter
Mai 1990 - April 1996	Wissenschaftlicher Angestellter an der Ludwig-Maximilians Universität in München
ab Mai 1996	Angestellter der Firma Dr. Barthel Sensorsysteme in München
Juni 1996	Heirat mit Henriette Weigel geb. Mysliwetz
Januar 1997	Geburt der Tochter Lisa Weigel

Literaturverzeichnis

- [ABO87] E. Adamides, H. G. Bohlen, W. von Oertzen, *Nuc. Phys.* **A475** (1987) 598
- [AbS70] M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, (New York: Dover, 1970)
- [ACF74] N. Anyas-Weiss, J. C. Cornell, P. S. Fisher, P. N. Hudson, A. Menchaca-Rocha, D. J. Millener, A. D. Panagiotou, D. K. Scott, D. Strottman, D. M. Brink, B. Buck, P. J. Ellis, T. Engeland, *Phys. Rep.* **12**(1974) 201
- [AGS67] E. O. Alt, P. Grassberger, W. Sandhas, *Nuc. Phys.* **B2** (1967) 167
- [Ajz85] F. Ajzenberg-Selove *Nuc. Phys.* **A433** (1985) 1
- [Ajz86] F. Ajzenberg-Selove *Nuc. Phys.* **A449** (1986) 1
- [ANA82] N. Anataraman, H. Toki, G. F. Bertsch, *Nuc. Phys.* **A398** (1982) 269
- [Aus70] N. Austern, Direct Nuclear Reaction Theories, (Wiley-Interscience, New York, 1970)
- [Bar49] V. Bargmann, *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 488
- [BaT72] G. Baur, D. Trautmann, *Phys. Lett.* **42B** (1972) 31
- [BaT73] G. Baur, D. Trautmann, *Z. f. Physik* **267** (1973) 103
- [BBM87] A. Bonaccorso, D. M. Brink, L. Lo Monaco, *J. Phys. G: Nucl. Phys.* **13** (1987) 1407
- [BER77] G. F. Bertsch, J. Borysowicz, H. Mc Manus, W. G. Love *Nuc. Phys.* **A284** (1977) 377
- [BER79] F. E. Bertrand, G. R. Satchler, D. J. Hoven, A. van der Woude, *Phys. Lett.* **80B** N⁰ 3 (1979) 198
- [BER81] F. E. Bertrand, *Nuc. Phys.* **A354** (1981) 129C

- [BLA76] J. P. Blaizot, D. Gogny, B. Grammaticos, *Nuc. Phys.* **A265** (1976) 315
- [Blo66] C. Bloch, Proc. 36th Int. School of Physics, Enrico Fermi Course (Academic Press, New York, 1966)
- [BMS77] M. Buenerd, P. Martin, P. de Saintignon, J. M. Loiseaux *Nuc. Phys.* **A286** (1977) 377
- [BoB88] A. Bonaccorso, D. M. Brink, *Phys. Rev. C* **38** (1988) 1776
- [BOB90] M. Braeunig, W. v. Oertzen, H. G. Bohlen, A. Miczaika, E. Stiliaris *Nuc. Phys.* **A519** (1990) 631
- [Boc79] R. Bock, Heavy Ion collisions, (North Holland Publishing Company) (1979)
- [BOL84] H. G. Bohlen, H. Ossenbrink, H. Lettau, W. von Oertzen, *Z. Phys.* **A 320** (1984) 237
- [BoM69] A. Bohr, B. R. Mottelson, Nuclear Structure, Vol. I-III (W. A. Benjamin, Inc., New York, Amsterdam, 1969)
- [Bon80] P. D. Bond, *Phys. Rev. C* **22** (1980) 1539
- [BPB85] A. Bonaccorso, G. Piccolo, D. M. Brink, *Nuc. Phys. C* **A441** (1985) 555
- [BRC85] Y. Blumenfeld, J. C. Roynette, Ph. Chomaz, N. Frascaria, J. P. Garron, J. C. Jacmart, *Nuc. Phys.* **A445** (1985) 151
- [Bri72] D. M. Brink, *Phys. Lett.* **40B** (1972) 37
- [BrW81] R. A. Broglia, A. Winther, Heavy Ion Reactions, (Oxford: Oxford University Press)
- [BRT84] G. Baur, F. Rösler, D. Trautmann, R. Shyam, *Physics Reports* **111, No.5** (1984) 335
- [BSD62] R. H. Bassel, G. R. Satchler, R. M. Drisko, E. Rost *Phys. Rev* **128** (1962) 2693
- [BZP69] A. I. Baz, Ya. B. Zel'dovich, A. M. Perelomov, Scattering, Reactions and Decay in Nonrelativistic Quantum Mechanics, (Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1969)
- [CIY97] S. Chiba, O. Iwamoto, Y. Yamanouti et al. *Nuc. Phys.* **A624** (1997) 305
- [Cle73] C. F. Clement, *Nuc. Phys.* **A213** (1973) 469
- [CoK67] S. Cohen, D. Kurath, *Nuc. Phys.* **A101** (1967) 1

- [Coz65] M. Coz, *Ann. Phys.* **35** (1965) 53
- [Deu94] C. Deubach, Zulassungsarbeit, Universität München
- [DIC82] W. H. Dickhoff, H. Faessler, H. Müther, S. S. Wu, *Nuc. Phys.* **A405** (1982) 534
- [Dir27] P. A. M. Dirac, *Z. f. Physik* **44** (1927) 585
- [ELG90] F. J. Eckle, H. Lenske, G. Graw, R. Hertenberger, H. Kader, H. J. Maier, F. Merz, H. Nann, P. Schiemenz, H. H. Wolter, *Nuc. Phys.* **A506** (1990) 159
- [Edm57] A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey) (1957)
- [Edv70] C. A. Edvi-Illes, *Nuc. Phys.* **A164** (1970)
- [EJI81] H. Ejiri, M. Sasao, T. Shibata, H. Ohsumi, *Phys. Rev. C* **24**(1981) 2001
- [EMO54] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Tables of Integral Transforms*, (McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC., 1954)
- [End90] P. M. Endt, *Nuc. Phys.* **A521** (1990) 1
- [Fad65] L. D. Faddeev, *Mathematical Aspects of the Three Body Problem in Quantum Scattering Theory* (Davey, New York, 1965)
- [Fan61] U. Fano, *Phys. Rev.* **124**, *N*⁰ **6** (1961) 1866
- [Fes92] H. Feshbach, *Theoretical Nuclear Physics*, (John Wiley & Sons, Inc., 1992)
- [FES80] H. Feshbach, A. Kerman, S. Koonin, , *Ann. Phys.* **125**(1980) 429
- [For83] O. Forster, *Analysis 3*, (Vieweg Studium, 1983)
- [For85] O. Forster, *Fourierreihen und andere Othogonalentwicklungen*, (Vorlesungsskript LMU, 1985)
- [Fre60] J. B. French, in *Nuclear Spectroscopy*, Teil B, herausgegeben von F. Ajzenberg-Selove (Academic Press, New York, 1960)
- [Fuc95] C. Fuchs, Dissertation, Ludwig Maximilians Universität München (1995)
- [Gam28] G. A. Gamow, *Z. f. Physik* **51** (1928) 204 *Z. f. Physik* **52** (1928) 510
- [GeG53] M. Gell-Mann, M. L. Goldberger, *Phys. Rev.* **91** (1953) 381
- [GeG67] W. J. Gerace, A. M. Green , *Nuc. Phys.* **A93** (1967) 110

- [GiV64] E. Gillet, N. Vinh Mau, *Nuc. Phys.* **54** (1964) 321
- [GKM72] C. R. Gruhn, T. Y. T. Kuo, C. J. Maggiore, H. McManus, F. Petrovich, B. M. Preedom *Phys. Rev. C* **6** (1972) 915
- [Glo83] W. Glöckle, *The Quantum Mechanical Few-Body-Problem*, (Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1983)
- [GLW91] J. Guillot, H. Langevin-Joliot, J. van de Wiele, E. Gerlic, J. J. Floreut, A. Willis, G. Duhamel, E. Honranni, *Phys. Lett.* **B 258** (1991) 271
- [GRA65] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, (Academic Press New York and London, 1965) S.757
- [GrS69] P. Grassberger, W. Sandhas *Z. f. Physik* **220** (1969) 29
- [GHL71] P. D. Greaves, V. Hnizdo, J. Lowe, O. Karban, *Nuc. Phys.* **A179** (1972) 1
- [Hei50] W. Heisenberg, *Theorie des Atomkerns*, (Vorlesungsskript, 1950)
- [Hub85] R. Huby, *J. Phys. G: Nucl. Phys.* **11** (1985) 921
- [JKM90] L. Jarczyk, B. Kamys, A. Magiera et al., *Nuc. Phys.* **A518** (1990) 583
- [JKM92] L. Jarczyk, B. Kamys, A. Magiera et al. *Zeitschrift f. Physik A* **342** (1992) 169
- [JLM73] L. Jarczyk, J. Lang, R. Müller, D. Balzer, P. Viatte, P. Marnier, *Phys. Rev.* **C8** (1973) 68;
- [Joa75] C. J. Joachain, *Quantum Collision Theory*, Volume 1, (North -Holland, 1975) S.13 ff
- [JoM88] C. H. Johnson, C. Mahaux, *Phys. Rev. C* **38** (1988) 2589
- [JoR98] B. Johnson, A. Richter, *Physikalische Blätter*, 54. Jahrgang, Heft 12, Dezember 1998 1121
- [KKS76] S. Krewald, V. Klemt, J. Speth, A. Faessler, *Nuc. Phys.* **A281** (1977) 166
- [KMV75] E. Koltay, L. Mesko, L. Vegh, *Nuc. Phys.* **A249** (1975) 173
- [LaL88] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik Band 3 Quantenmechanik*, (Akademie-Verlag-Berlin, 1988)
- [LaT58] A. M. Lane, R. G. Thomas, *Rev. of Mod. Phys.* **30** (1958) 257
- [Len87] H. Lenske, *Habilitationsschrift*, Ludwig Maximilians Universität München (1987)

- [Len90] H. Lenske, Private Mitteilungen
- [Len98] H. Lenske, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **24** (1998) 1429
- [Lev68a] F. S. Levin, *Ann. Phys.* **46** (1968) 41
- [Lev68b] F. S. Levin, *Nuc. Phys.* **A115** (1968) 449
- [Lev73] F. S. Levin, H. Feshbach, *Reaction Dynamics*, (Gordon and Breach Science Publishers, New York, London, Paris, 1973)
- [Lip56] B. A. Lippmann, *Phys. Rev.* **102** (1956) 264
- [LIU91] K.-F. Liu, Z. Ma, Q. Shen, *Nuc. Phys.* **A354** (1982) 269
- [LoB85] L. Lo Monaco, D. M. Brink, *J. Phys. G:Nucl. Phys.* **11** (1985) 935
- [Lov64] C. Lovelace, *Phys. Rev.* **135**, **5b** (1964) B1225
- [MAD95] B. Mader, Diplomarbeit, Ludwig Maximilians Universität München (1995)
- [Maj93] R. Majumar, *Zeitschrift f. Physik A* **345** (1993) 293
- [MaW69] C. Mahaux, H. A. Weidenmüller, *Shell-Model Approach to Nuclear Reactions*, (North-Holland Publishing Company-Amsterdam,London, 1969)
- [MaW75] G. Mairle, G. J. Wagner, *Nuc. Phys.* **A253** (1975) 253
- [MaW82] Z. Ma, W. Wambach, *Nuc. Phys.* **A 402** (1983) 275
- [MaW91] Z. Ma, W. Wambach, *Phys. Lett.* **B 256** (1991) 1
- [May92] T. Mayer-Kuckuck, *Kernphysik*, (Teubner Studienbücher, 1992)
- [MCC74] W. Mittig, Y. Cassagnou, N. Cindro, L. Papineau, K. K. Seth, *Nuc. Phys.* **A231** (1974) 316
- [MDI95] M. Müller, F.-M. Dittes, W. Iskra, I. Rotter *Phys. Rev. E* **52**, **6** (1995) 5961
- [MFP85] A. S. Meigooni, R. W. Finlay, J. S. Petler, *Nuc. Phys.* **A445** (1985) 304
- [MIL73] D. J. Millener, P. E. Hodgson, *Nuc. Phys.* **A209** (1973) 53
- [MoM65] N. F. Mott, H. S. W. Massey, *The Theory of Atomic Collisions*, Volume I & II, (Oxford Science Publications, Oxford University Press, 1965)
- [Mue95] M. Müller, Dissertation, Forschungszentrum Rossendorf e.V. (1995)

- [NeA62] P. E. Nemirowsky, Yu. V. Adamchuk, *Nuc. Phys.* **A39** (1962) 551
- [New66] R. G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*, (McGraw-Hill Book Company, 1966)
- [Oer85] W. von Oerzen, *Phys. Lett.* **151B** (1985) 95
- [Opp28] J. R. Oppenheimer *Phys. Rev.* **31** 66
- [ORT90] N. Olsson, E. Ramström, B. Trostell, *Nuc. Phys.* **A513** (1990) 205
- [OTR89] N. Olsson, B. Trostell, E. Ramström, *Nuc. Phys.* **A496** (1989) 505
- [PeB61] F. Perey, B. Buck, *Nuc. Phys.* **A32** (1962) 353
- [PeH80] R. J. Peterson, J. J. Hamill, *Phys. Rev. C* **22** (1980) 2282
- [Pre63] M. A. Preston, *Physics of the Nucleus*, (Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1963)
- [RMS67] J. Raynal, M. A. Melkanoff, T. Sawada, *Nuc. Phys.* **A101** (1967) 369
- [Rea74] E. F. Redish *Nuc. Phys.* **A225** (1974) 16
- [Reb74] E. F. Redish *Nuc. Phys.* **A235** (1974) 82
- [RiS80] P. Ring, P. Schuck, *The Nuclear Many-Body-Problem*, (Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1980)
- [Sat67] G. R. Satchler, *Nuc. Phys.* **A100** (1967) 497
- [Sat80] G. R. Satchler, *Introduction to Nuclear Reactions*, (The Macmillan Press Ltd, 1980)
- [Sat83] G. R. Satchler, *Direct Nuclear Reactions*, (Oxford University Press, 1983)
- [Sat89] G. R. Satchler, *Nuc. Phys.* **A509** (1989) 103
- [Sch62] J. P. Schiffer, *Nuc. Phys.* **A46** (1962) 246
- [Sch48] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **74** (1948) 1439
- [Ser47] R. Serber, *Phys. Rev.* **72** (1947) 1008
- [Shl92] S. Shlomo, *Nuc. Phys.* **A539** (1992) 17
- [Siu93] R. Siudak, *Doktorarbeit, Jagellonian University, Cracow*, (1993)
- [SSV70] V. G. Soloviev, Ch. Stoyanov, A. I. Vdovin, *Nuc. Phys.* **A288** (1970) 376
- [SSV80] V. G. Soloviev, Ch. Stoyanov, A. I. Vdovin, *Nuc. Phys.* **A342** (1980) 261

- [Tam74] T. Tamura, *Phys. Rev. C* **14** (1974) 59
- [TAR68] W. J. Thompson, J. L. Adams, D. Robson, *Phys. Rev.* **173** (1968) 975
- [TCD90] W. Tornow, Z. P. Chen, J.P. Delarouche *Phys. Rev. C* **42** (1990) 693
- [Tho61] D. J. Thouless, *Nuc. Phys.* **22** (1961) 78
- [Tom46] S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys. (Kyoto)* **1** (1946) 27
- [TUL82] T. Tamura, T. Udagawa, H. Lenske, *Phys. Rev. C* **26** (1982) 379
- [vNe90] P. von Neumann-Cosel, A. Richter, H.-J. Schmidt-Bruecken, G. Schrieder, H. Lenske, H. H. Wolter, J. Carter, R. Jahn, B. Kohlmeyer, D. Schuell, *Nuc. Phys.* **A516** (1990) 385
- [VAU72] D. Vautherin, D. M. Brink *Phys. Rev. C* **5** (1972) 626
- [ViF68] C. M. Vincent, H. T. Fortune *Phys. Rev.* **175** (1968) 1309
- [ViF70] C. M. Vincent, H. T. Fortune *Phys. Rev. C* **2** (1970) 782
- [ViF73] C. M. Vincent, H. T. Fortune *Phys. Rev. C* **8** (1973) 1084
- [Wal76] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1976)
- [WaS70] W. L. Wang, C. M. Shakin, *Phys. Lett B* **32** (1970) 421
- [Wei89] A. Weigel, Diplomarbeit, Ludwig Maximilians Universität München (1989)
- [Wei63] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **131** (1963) 440
- [WiE47] E. P. Wigner, L. Eisenbud, *Phys. Rev.* **72** (1947) 29
- [WuO62] T. Wu, T. Ohmura, *Quantum Theory of Scattering*, (Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962)
- [YKK70] D. H. Youngblood, R. L. Kozup, R. A. Kenefick, J. C. Hiebert, *Phys. Rev. C* **2** (1970) 477