# Magnetische Mikrofallen für Rubidiumatome

Dissertation der Fakultät für Physik
der
Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Wolfgang Hänsel
aus Konstanz

München, den 3. Juli 2000

1. Gutachter: Prof. T. W. Hänsch
2. Gutachter: Prof. J. Feldmann

Tag der Prüfung: 19. Oktober 2000

**Meinen Eltern**

# Zusammenfassung

Seit im Jahr 1995 erstmals die Bose-Einstein-Kondensation eines schwach wechselwirkenden atomaren Gases beobachtet werden konnte, wendet sich die Physik der ultrakalten Atome immer mehr solchen Systemen zu, bei denen eine weitgehende Kontrolle aller quantenmechanischen Freiheitsgrade erreicht werden kann. In diesem Zusammenhang werden magnetische Atomfallen bisher „nur“ als geeigneter „Container“ eingesetzt, während für die *Manipulation* der gefangenen Atome in der Regel zusätzliche Mechanismen, meist die optische Dipolkraft, benutzt werden. Dies hat seinen Grund darin, daß traditionelle Methoden der Magnetfelderzeugung nur begrenzte Möglichkeiten für die Gestaltung der Felder bieten.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde erstmals eine komplexe magnetische Manipulation von Atomen demonstriert, die weit über die Möglichkeiten bisheriger Magnetfallen hinausgeht. Mit Hilfe von lithographisch hergestellten Leiterbahnen erzeugen wir *magnetische Mikrofallen*, in denen Atome in der Nähe zu einer Oberfläche eingefangen, transportiert und auf unterschiedliche Weise manipuliert werden können. Da sich die Atome bei dieser Anordnung im Nahfeld der Ströme befinden, werden neuartige Potentialformen möglich, und die Größenskala der Feldstrukturen ist durch die Abmessungen der Leiterbahnen gegeben. Die im vorgestellten Aufbau verwendeten Leiterbahnen besitzen eine Querschnittsfläche von $50 \times 7\,\mu$m mit charakteristischen Längen von $200\,\mu$m. Die Leiter tragen einen Strom von bis zu 2 A, der in der Nähe der Oberfläche magnetische Felder von etwa 200 G (0,02 Tesla) erzeugt und zu Feldgradienten von $6 \cdot 10^4$ G/cm führt.

In unseren Experimenten fangen wir Rubidiumatome in der *Spiegel-MOT*, einer neu entwickelten Variante der klassischen magneto-optischen Falle, die in direkter Nähe zur Substratoberfläche funktioniert. Auf diese Weise werden einige $10^6$ Atome in die Mikrofallen geladen, wo sie eine – derzeit durch Hintergrundgasdruck begrenzte – Lebensdauer von 4 bis 5 Sekunden besitzen. In 0–1 mm Entfernung von der Oberfläche lassen sich die magnetischen Fallen verschieben und auf komplexe Weise verformen, indem die Ströme in

den Mikrodrähten variiert werden. Von außen werden lediglich homogene Magnetfelder überlagert.

Mit der neuen Mikrofallentechnik wurde erstmals der gleichzeitige Betrieb mehrerer Magnetfallen demonstriert. Es wurde ein magnetisches Förderband für Atome realisiert, bei dem in einer Kette von Potentialminima jeweils etwa $10^5$ Atome mit einer Geschwindigkeit von 1 cm/s transportiert werden. Die Minima bewegen sich in einem Abstand von 0,8 mm, was zu einem mittleren Fluß von etwa $10^6$ Atomen pro Sekunde führt. Am Ende einer 4 mm langen Transportstrecke werden die ankommenden Atome in einer stationären Magnetfalle aufgefangen. Dabei wurde erstmals eine Ioffe-Pritchard-Falle realisiert, die sich adiabatisch in zwei einzelne Ioffe-Pritchard-Fallen aufteilen läßt und die – in Umkehrung der Prozeßrichtung – die Vereinigung zweier Ioffe-Pritchard-Fallen ermöglicht.

Schließlich konnten in den Mikrofallen aufgrund der starken Feldgradienten Ansätze von evaporativem Kühlen beobachtet werden.

Die demonstrierte Leiterbahntechnik verspricht viele neue Einsatzgebiete für Magnetfallen, darunter auch Experimente mit Bose-Einstein-Kondensaten, die gegenüber bisherigen Aufbauten mit geringerem technischen Aufwand auskommen. Darüber hinaus ergeben sich neue Möglichkeiten wie die gezielte Positionierung einzelner Atome im Lichtfeld von Resonatoren, das magnetische Zusammenführen verschiedener Atomsorten, die Untersuchung von Kollisionen oder das kontinuierliche Nachladen magnetischer Fallen. Auch kohärente Prozesse wie das Aufteilen eines einzelnes Quantenzustandes, das zu einem makroskopisch ausgedehnten *Schrödinger-Katzen-Zustand* führt, scheint möglich.

Die einfache Skalierbarkeit der Mikrofallen, die der lithographische Herstellungsprozeß mit sich bringt, wird es erlauben, in Zukunft magnetische Fallen in noch kleinerem Abstand voneinander zu betreiben. Verschiedene kohärente Kopplungsmechanismen zwischen solchen Fallen werden derzeit diskutiert. Gelingt die Implementierung einer solchen Kopplung, so entstehen quantenmechanische Systeme, deren Dynamik sich von außen kontrollieren läßt und die aufgrund der geringen Wechselwirkung von Atomen mit der sonstigen Umgebung lange Dekohärenzzeiten aufweisen.

# Inhaltsverzeichnis

**1 Einleitung** **1**

**2 Beschreibung von Magnetfallen** **5**

2.1 Allgemeines . . . . . 6

2.1.1 Klassische Magnetfallen . . . . . 6

2.2 Struktur von Magnetfallen . . . . . 9

2.2.1 Grundlagen . . . . . 9

2.2.2 Entwicklung in Kugelkoordinaten . . . . . 11

2.2.3 Entwicklung in kartesischen Koordinaten . . . . . 14

2.2.4 Magnetische Minima . . . . . 16

2.2.5 Quadrupolfelder . . . . . 17

2.2.6 Magnetische Minima mit nicht verschwindendem Feld . 22

2.3 Atome in magnetischen Fallen . . . . . 33

2.3.1 Atome im Magnetfeld . . . . . 33

2.3.2 Majorana-Spin-Flips . . . . . 35

2.3.3 Charakteristische Größen in der Ioffe-Pritchard-Falle . 37

2.3.4 Quantenzustände in Magnetfallen . . . . . 42

**3 Magnetische Mikrofallen** **49**

3.1 Überblick . . . . . 49

3.2 Das Biot-Savart'sche Gesetz . . . . . 51

3.3 2D-Quadrupolfelder von Drähten und Leiterbahnen . . . . . 51

3.3.1 Quadrupolfeld am dünnen Draht . . . . . 52
3.3.2 Quadrupolfeld am breiten Draht . . . . . 54
3.4 Feldbeitrag von kreuzenden Drähten . . . . . 56
3.4.1 2D-Quadrupol mit überlagertem ortsabhängigem Feld . 57
3.4.2 Ioffe-Pritchardfalle an einer Drahtkreuzung . . . . . 61
3.4.3 Physikalische Aspekte . . . . . 65
3.5 Experimentell realisierte Magnetfallen . . . . . 68
3.5.1 „U-Quadrupol“ und „Z-Ioffe-Falle“ . . . . . 68
3.5.2 Förderband für Atome . . . . . 73
3.6 Skalierung von magnetischen Fallen . . . . . 76
3.6.1 Skalierung von Magnetfeldern . . . . . 76
3.6.2 Skalierung der Leiterstrukturen . . . . . 77
3.6.3 Diskussion der Modelle . . . . . 85

**4 Experimenteller Aufbau 89**
4.1 Gesamtübersicht . . . . . 90
4.2 Das Mikrofallen-Substrat . . . . . 91
4.3 Spiegel-MOT . . . . . 95
4.3.1 Problemstellung . . . . . 95
4.3.2 Experimentelle Realisierung . . . . . 96
4.4 Vakuumapparatur . . . . . 98
4.5 Lasersystem . . . . . 100
4.6 Detektion . . . . . 104
4.7 Steuerung des Experiments . . . . . 109
4.7.1 Hardware . . . . . 109
4.7.2 Software . . . . . 110

**5 Experimente mit magnetischen Mikrofallen 113**
5.1 Spiegel-MOT . . . . . 113
5.2 Quadrupolfallen und Ioffe-Pritchard-Fallen . . . . . 115

5.2.1 Lade-Mechanismus . . . . . 116
5.2.2 Oszillationen . . . . . 120
5.2.3 Kompression und evaporatives Kühlen . . . . . 121
5.3 Förderband für Atome . . . . . 125
5.3.1 Laden des Förderbandes . . . . . 126
5.3.2 Transport . . . . . 128
5.4 Vereinigung und Trennung von zwei Ioffe-Pritchard-Fallen . . 134

**6 Ausblick** **141**
6.1 Experimente mit thermischen Ensembles . . . . . 141
6.2 Experimente mit definierten Quantenzuständen . . . . . 142
6.3 Detektion und Kopplung einzelner Atome . . . . . 143

**A Schreibweisen** **145**

**B Berechnung und Darstellung von magnetischen Fallenpotentialen** **147**
B.1 Feldberechnungen . . . . . 147
B.2 Darstellung von Fallenpotentialen . . . . . 147

**C Magnetfeld stromdurchflossener Leiter** **151**

**D Daten für Rubidiumatome** **155**

# 1 Einleitung

Seit man in der Lage ist, Atome als verdünntes Gas in einer Vakuumkammer zu beobachten, fördern Experimente mit Atomen immer neue Erkenntnisse zu Tage und eröffnen Möglichkeiten, grundlegende Phänomene in der Physik zu studieren. Das Atom als quantenmechanisches Objekt „par excellence“ war Auslöser für die Entwicklung der Quantenmechanik und gibt immer wieder faszinierende Eigenschaften preis, je länger man in der Lage ist, es ungestört zu betrachten.

Mit einem der ersten zur Verfügung stehenden „Molekularstrahlen“ untersuchten im Jahre 1921 Otto Stern und Walter Gerlach die Ablenkung von Silberatomen in einem inhomogenen Magnetfeld [1]. Die berühmt gewordenen Experimente bestätigten die im Bohr-Sommerfeld'schen Atommodell postulierte Richtungsquantelung des Drehimpulses und lieferten überdies eine quantitative Bestimmung des gyromagnetischen Verhältnisses für den Drehimpuls des Elektrons. Nach der theoretischen Erklärung durch den Elektronenspin [2] ließen sich die Ergebnisse mit dem Zeemann-Effekt in Einklang bringen, der bereits 1896 beobachtet, in seiner „anomalen“ Variante jedoch noch unverstanden war.

In Atomstrahlexperimenten begrenzt die Flugzeit durch die Apparatur die Beobachtungsdauer. Atome längeren Messungen zugänglich zu machen, gelang durch die Entwicklung der Laserkühlung [3, 4, 5]. Mit ihrer Hilfe können Atome auf Geschwindigkeiten von wenigen cm/s abgebremst werden, was es ermöglicht hat, Atome mit geringen Kräften wie den magnetischen in drei Dimensionen einzufangen[1]. Verschiedene Kräfte, die alle ähnlich gering sind, konnten seither genutzt werden, um Atome in Bahnen zu leiten oder in dreidimensionalen Fallen zu speichern: die optische Dipolkraft (*AC-Stark-Effekt*) [6], die elektrostatische Kraft aufgrund der statischen Polarisierbarkeit (*DC-Stark-Effekt*) [7, 8, 9] und nicht zuletzt die magnetische *Stern-Gerlach-Kraft*, auf der die Magnetfallen beruhen.

In den letzten Jahren haben die magnetischen Fallen eine besondere Bedeutung erlangt, nachdem es 1995 in einer solchen Falle erstmals gelang, die *Bose-Einstein-Kondensation* eines schwach wechselwirkenden Gases bosoni-

[1] Lediglich Wasserstoffatome können mit klassischen Methoden genügend vorgekühlt werden, um mit Magnetfeldern eingefangen zu werden, da das Gas bei tiefen Temperaturen nicht kondensiert.

scher Teilchen zu realisieren [10]. Den letzten Schritt auf dem Weg zur Kondensation ermöglichte das Verdampfungskühlen [11], bei dem nach und nach jeweils die heißesten der eingefangenen Atome entfernt werden, so daß sie dabei dem System mehr als die mittlere Energie pro Teilchen entziehen. Die anschließende Energieumverteilung durch Stöße, die erst zur Kühlung, d.h. zum Anwachsen der Phasenraumdichte führt, erfordert hohe Kollisionsraten und damit steile Fallenpotentiale. Typische Experimente zur Bose-Einstein-Kondensation benötigen daher magnetische Feldgradienten von 170 G/cm und mehr [12], was beim Einsatz traditioneller Spulen zu erheblichem technischen Aufwand führt. Dies ist der Ansatzpunkt verschiedener Experimente, die für steile Magnetfallen die hohen Felder und Feldgradienten nutzen, die in der Nähe von magnetischen oder stromdurchflossenen Elementen entstehen [13, 14, 15].

Die genannten Experimente verwenden alle freistehende Strukturen. Bereits vor diesen Experimenten, im Jahre 1995, haben J. D. Weinstein und K. G. Libbrecht vorgeschlagen, supraleitende Drähte auf einem Substrat für die Erzeugung der Magnetfelder zu verwenden [16]. Das Substrat kann eine gute Kühlung der Stromleiter gewährleisten und bietet in Kombination mit lithographischen Techniken die Möglichkeit, die Leiterformen frei zu gestalten. Da die magnetischen Fallen allerdings in weniger als 1 mm Abstand zum Substrat entstehen, birgt das Laden der Fallen einige Schwierigkeiten. Weil der optische Zugang auf einer Seite durch das Substrat blockiert ist, läßt sich die gewöhnliche magneto-optische Falle nicht zum Einfangen und Kühlen der Atome verwenden. So standen zwar bereits Substrate mit den von Weinstein und Libbrecht vorgeschlagenen Leiterstrukturen zur Verfügung [17], es fehlte jedoch an der Möglichkeit, sie zu nutzen. Erste Experimente mit lithographisch erzeugten Mikrostrukturen waren daher *magnetische Spiegel*, mit denen Atome abgelenkt oder reflektiert wurden [18, 19]. Die abstoßende Kraft wird von nebeneinander liegenden Leiterbahnen erzeugt, die in wechselnder Richtung von Strom durchflossen werden[2].

Mit der *Spiegel-MOT*, die im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wurde, konnten die mit dem Ladervorgang verbundenen Schwierigkeiten erstmals überwunden werden. Außerdem hat sich gezeigt, daß anstelle von supraleitenden Drähten gewöhnliche Leiterbahnen aus Gold verwendet werden können (s. a. [17]), so daß etablierte industrielle Fertigungstechnik aus der Mikroelektronik zur Herstellung der Leiterbahnen genutzt werden kann. Diese Technik ermöglicht magnetische Fallen mit Feldgradienten von über $10^5$ G/cm, mit

[2]Eine ähnliche Magnetfeldkonfiguration wird in [20] erreicht, indem das Magnetband einer Video-Kassette periodisch magnetisiert wird.

denen sich das Lamb-Dicke-Regime erreichen läßt.

Im Laufe der Arbeit hat eine weitere Eigenschaft der Mikrofallentechnik an Bedeutung gewonnen: die Freiheit in der Gestaltung der magnetischen Potentiale. Denn unter dem Aspekt, daß Atome – sei es als ultrakaltes Quantengas, sei es als einzelne Teilchen in einem definierten Zustand – Träger von *quantenmechanischer Information* sind, rücken Methoden in den Blickpunkt des Interesses, die eine möglichst genaue Kontrolle aller beteiligten quantenmechanischen Freiheitsgrade erlauben. In diesen Trend fügen sich Experimente mit Ionenfallen, in denen einzelne und mehrere geladene Atome in den Grundzustand gekühlt werden [21, 22, 23], die (bis jetzt) ein- und zweidimensionale Präparation neutraler Atome im Grundzustand eines optischen Gitters [24, 25, 26] sowie verschiedene Experimente zur Wechselwirkung von Atomen mit dem Lichtfeld in einem Resonator hoher Güte. Nachdem die kohärente Dynamik von Atomen und Photonen zuerst bei der Wechselwirkung von Rydbergatomen mit Mikrowellen beobachtet werden konnte [27, 28], ist mittlerweile auch im optischen Bereich das Regime der starken Kopplung erreicht, so daß sich einzelne (Grundzustands-)Atome in einem Resonator nachweisen und sogar mit dem Feld einzelner Photonen einfangen lassen [29, 30].

Daß Magnetfallen in diesem Gebiet bislang keinen Einsatz gefunden haben, liegt nicht daran, daß die Maxwell-Gleichungen geeignete Feldkonfigurationen verböten, nur lassen sich bereits „einfache“ Konfigurationen (wie z. B. mehr als zwei benachbarte Fallen) mit traditionellen Techniken, d.h. mit externen Spulen, nicht erzeugen. Miniaturisierte magnetische Elemente, die sich in direkter Nähe zu den Atomen befinden, ermöglichen dagegen vielfältige magnetische Potentiale, und die lithographisch hergestellten *Mikrofallen*, die in dieser Arbeit demonstriert werden, bieten erstmals Gelegenheit, diesen Formenreichtum voll auszuschöpfen.

Drei bislang unzugängliche Feldkonfigurationen wurden mit den Mikrofallen verwirklicht:

- der gleichzeitige Betrieb mehrerer Magnetfallen,
- der kontinuierliche Transport von Atomen in einer Kette von Potentialminima,
- ein Mechanismus zum Vereinigen und Trennen magnetischer Fallen, der auch für kohärente Manipulation von Atomen geeignet ist.

Die Realisierung eines Quantencomputers mit Atomen ist ein Experiment, das von den komplexen steuerbaren Fallenpotentialen profitieren kann. Da-

neben finden sich viele andere Anwendungen, denen diese Technik neue Möglichkeiten eröffnet. Ein Bose-Kondensat in einer solchen Magnetfalle ließe sich einfach und auf kohärente Weise in zwei Kondensate aufteilen, der Teilungs- und Vereinigungsmechanismus ermöglicht Interferenzexperimente mit Kondensaten sowie mit einzelnen Atomen.

## Gliederung der Arbeit

Angesichts der vielen Möglichkeiten, die die neue Technik mit sich bringt, hat es sich als besonders wichtig erwiesen, die entstehenden Felder geeignet zu analysieren und zu beschreiben. Es wurden Modelle entwickelt, die das Verständnis der Felder erleichtern und die in Konzepte münden, um Leiterstrukturen für neue Magnetfallen zu entwerfen.

Aus diesem Grund beschäftigen sich die beiden folgenden Kapitel ausführlich mit der theoretischen Beschreibung von Magnetfallen. In Kapitel 2 liegt dabei der Schwerpunkt auf der allgemeinen Form von Feldern, die mit den Maxwell-Gleichungen kompatibel sind, während sich Kapitel 3 mit der Thematik befaßt, wie sich spezielle Feldkonfigurationen mit Hilfe von Leiterbahnsubstraten umsetzen lassen. Hier finden sich auch die Feldkonfigurationen der Leiterbahnen, die in den Experimenten realisiert wurden. Kapitel 4 gibt einen Überblick über den experimentellen Aufbau und beschreibt die verwendeten Leiterbahnsubstrate. Kapitel 5 enthält die experimentellen Ergebnisse, die in unserem Aufbau mit zwei verschiedenen Leiterkonfigurationen gewonnen wurden. Kapitel 6 schließlich versucht, einen Ausblick zu geben, wohin Experimente mit der neuen Mikrofallentechnologie führen können.

# 2 Beschreibung von Magnetfallen

Als Werkzeug, um neutrale Atome zu speichern und zu manipulieren, haben sich magnetische Felder einen festen Platz in der Physik erobert: lokale Minima der magnetischen Feldstärke stellen für Atome, die sich in einem geeigneten Quantenzustand befinden, ein attraktives Potential dar, so daß die Teilchen darin festgehalten werden können. Um die einschließenden Felder zu erzeugen, werden in „traditionellen“ Magnetfallen Spulen und Drähte verwendet, deren Abmessungen wesentlich größer sind als die Ausdehnung der eigentlichen Falle. Das hat zur Folge, daß die entstehenden Felder eine relativ einfache Struktur besitzen. Mit der Entwicklung von Mikrofallen schrumpfen die magnetfelderzeugenden Elemente auf eine Größe, die im Bereich der Magnetfallengröße liegt. Dadurch wachsen nicht nur die erreichbaren Feldstärken, vor allem gewinnen die erzeugten Felder an Formenreichtum. Sowohl magnetische Führung und Einschluß mit Permantentmagneten [20, 13], als auch eine zunehmende Anzahl an Experimenten mit dünnen stromdurchflossenen Drähten im Vakuum [14, 15, 31] profitieren von den hohen Feldern und Feldgradienten in der Nähe der magnetfelderzeugenden Elemente. Insbesondere aber eröffnen lithographische Techniken bei der Herstellung der Leiterstrukturen neue Möglichkeiten, komplexe magnetische Fallenpotentiale zu erzeugen [17, 19, 32, 33].

Der Entwurf von magnetischen Feldstrukturen wird damit zu einem wichtigen Aspekt der Arbeit mit magnetischen Mikrofallen. Das schließt insbesondere mathematische „Werkzeuge“ ein, mit deren Hilfe sich die erzeugten Magnetfelder beschreiben und charakterisieren und letztendlich auch optimieren lassen. Die Ideen für neue Feldstrukturen lassen sich leiten von den Gesetzen, denen die Felder unterliegen. Dieses Kapitel beschäftigt sich daher, unabhängig von der speziellen Realisierung, mit der allgemeinen Beschreibung von Magnetfallen, mit den Möglichkeiten, die die Maxwell-Gleichungen dem Designer von magnetischen Feldern bieten und auch den Dingen, die sie verbieten. Wie die dabei erhaltenen Ergebnisse im speziellen Fall der Mikrofallen Anwendung finden, ist Inhalt eines eigenen Kapitels.

## 2.1 Allgemeines

Magnetfallen für ungeladene Teilchen stammen ursprünglich aus dem Bereich der Teilchenphysik. Sie wurden in den siebziger Jahren entwickelt, um ultrakalte Neutronen einfangen und speichern zu können [34, 35]. Da sich Neutronen als ladungsneutrale Teilchen der Wechselwirkung mit elektrischen Feldern entziehen, mußte man auf die viel geringere magnetische Wechselwirkung zurückgreifen, um die Teilchen zu manipulieren. Die magnetischen Kräfte sind allerdings so klein, daß die Neutronen äußerst geringe Bewegungsenergie besitzen müssen, um sich mit Hilfe von Magnetfeldern einfangen zu lassen. Die Magnetfallen eröffneten damals neue Möglichkeiten zur präzisen Lebensdauermessung an Neutronen. Inzwischen haben diese Fallen Einzug gehalten in das Gebiet der Atomphysik und sind als Werkzeug für maßgeschneiderte, dissipationsfreie Potentiale für Atome nicht mehr wegzudenken. Ihr großer Erfolg ist verknüpft mit der Entwicklung der Laserkühlung, die es möglich gemacht hat, Atome auf Temperaturen von weniger als 1 mK abzukühlen. Insbesondere ermöglichten die Magnetfallen 1995 zum ersten Mal die Demonstration der Bose-Einstein-Kondensation eines wechselwirkungsarmen Gases bosonischer Atome [10]. Darüber hinaus ist es mittlerweile gelungen, magnetisch gefangene Fermionen so weit zu kühlen, daß die Quanteneigenschaften des Fermigases spürbar werden [36].

### 2.1.1 Klassische Magnetfallen

Das Prinzip von Magnetfallen beruht auf der Wechselwirkung des magnetischen Moments $\boldsymbol{\mu}$ eines Teilchens mit dem äußeren Magnetfeld $\mathbf{B}$. Die Energie, die das magnetische Moment in einem äußeren Feld spürt, ist durch

$$E = -\boldsymbol{\mu}\,\mathbf{B} \tag{2.1}$$

gegeben, was sich für ein klassisches magnetisches Moment als

$$E = -\mu\,B\cos\theta \tag{2.2}$$

schreiben läßt (Abb. 2.1).

„Normalerweise“ erfahren wir, daß ein magnetisiertes Objekt, das sich in einem Magnetfeld befindet, seine Magnetachse parallel zu diesem Feld ausrichtet und anschließend zum Ort des stärksten Feldes hingezogen wird. Darum gelingt es beispielsweise nie, einen Stabmagneten ruhig in einem statischen Magnetfeld in der Schwebe zu halten. Der Magnet, der bestrebt ist, einen

Zustand mit möglichst geringer Energie anzunehmen, tut dies zunächst, indem er einen „lokalen Freiheitsgrad“, nämlich seine Ausrichtung im äußeren Feld, verändert. Ist sein magnetisches Moment parallel zu dem Feld eingestellt, spürt es eine Kraft hin zu stärkeren Magnetfeldern, da seine Energie dadurch weiter abnimmt. Das Spiel mit den Stabmagneten endet für gewöhnlich damit, daß ein Stabmagnet zum Pol des anderen hingezogen wird. Erst wenn es gelingt, die Ausrichtung der Magnetachse zum Feld, also den Winkel $\theta$, konstant zu halten, kann das magnetische Objekt im freien Raum in der Schwebe gehalten werden. Diese Stabilisierung gelingt durch eine Rotation: ein Magnetkreisel, der sich schnell genug um seine magnetische Achse dreht, ändert seine Ausrichtung zum Magnetfeld nicht.

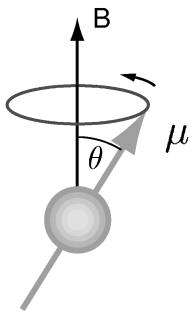



Abb. 2.1: *Ist das magnetische Moment eines Teilchens an einen Drehimpuls gekoppelt, so präzidiert im Magnetfeld dieses Moment um die Feldachse.*

Stattdessen führt das Drehmoment

$$\mathbf{M} = -\frac{\partial E}{\partial \theta}\left(\mathbf{e_B} \times \mathbf{e}_{\boldsymbol{\mu}}\right) = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}\,, \tag{2.3}$$

welches das äußere Feld auf ihn ausübt, dazu, daß die Kreiselachse mit der Präzessionsfrequenz $\omega_L$ um die Achse des Feldes rotiert. Die Präzessionsfrequenz hängt von dem „gyromagnetischen Verhältnis“ $\gamma$, dem Verhältnis von magnetischem Moment und Drehimpuls $F$ des Kreisels ab:

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma\,\mathbf{F}\,. \tag{2.4}$$

Unabhängig von dem Winkel, den die Kreiselachse mit dem Magnetfeld einschließt, berechnet sich daraus die Präzessionsfrequenz der Kreiselachse als

$$\boldsymbol{\omega}_L = \gamma\,\mathbf{B}. \tag{2.5}$$

Bei einem makroskopischen Magnetkreisel läßt sich das gyromagnetische Verhältnis, und damit die Präzessionsfrequenz im Magnetfeld, durch die Rotationsgeschwindigkeit einstellen. Dagegen ist bei quantenmechanischen Teilchen

(Elektronen, Atomen, Molekülen) das gyromagnetische Verhältnis eine Konstante, die vom Quantenzustand des betrachteten Teilchens abhängt (siehe Abschnitt 2.3.1 und [37]). Hinzu kommt außerdem, daß sich der Drehimpuls quantenmechanischer Teilchen nicht kontinuierlich, sondern nur in gequantelten Winkeln zum Magnetfeld ausrichten kann [1, 38]. In den Formeln für die magnetische Wechselwirkung geht dann der Kosinus des Winkels in

$$\cos\theta = \frac{m_F}{F} \tag{2.6}$$

über.

Nachdem nun die Ausrichtung des magnetischen Moments konstant ist und nur von den Anfangsbedingungen abhängt, spürt das Teilchen im Magnetfeld das effektive Potential

$$E = -\mu\, B(\mathbf{r})\, \cos\theta_{\mathrm{i}}\,. \tag{2.7}$$

Die daraus resultierende *Stern-Gerlach-Kraft*

$$\mathbf{F} = \mu\, \nabla B\, \cos\theta_{\mathrm{i}} \tag{2.8}$$

vermag nun das Teilchen entweder zu starken Feldern hinzuziehen, wenn der Ausrichtungswinkel $\theta$ kleiner als 90° ist, oder sie zieht es in Bereiche eines schwachen magnetischen Feldes, wenn $\theta$ größer ist als 90°. Je nachdem, wie das Teilchen ausgerichtet ist, bezeichnet man daher seinen Zustand als „Starkfeldsucher“ bzw. „High-field-seeker“, wenn es zu starken Feldern hingezogen wird, oder als „Schwachfeldsucher“ bzw. „Low-field-seeker“ im umgekehrten Fall.

Nach diesen Überlegungen wird klar, daß man mit statischen Magnetfeldern im Prinzip zwei Typen von Fallen konstruieren kann: Als High-field-seeker präparierte Teilchen würden in einem lokalen Maximum des Magnetfeldes eingefangen bleiben, Low-field-seeker entsprechend in einem lokalen Minimum des Feldes. Nun erlauben es die Maxwell'schen Gleichungen leider nicht, ein lokales Magnetfeldmaximum im freien Raum zu erzeugen [39] (deswegen mißlingt auch immer das Spiel mit den Stabmagneten). Dem Designer von Magnetfallen bleibt schließlich „nur“ die Wahl, ortsabhängige Magnetfelder zu nutzen, die ein lokales Minimum aufweisen. Glücklicherweise hält diese letzte Möglichkeit, wie wir sehen werden, erstaunlich viele Varianten bereit.

## 2.2 Struktur von Magnetfallen

### 2.2.1 Grundlagen

Die Wirkung des Magnetfeldes auf ein magnetisches Teilchen läßt sich in guter Näherung durch das eben erwähnte effektive Potential (2.7) beschreiben, das proportional zur magnetischen Feldstärke ist.

Die Beschreibung von Magnetfallen beschäftigt sich daher im wesentlichen mit dem Vektorbetrag $B = \sqrt{\mathbf{B}\mathbf{B}}$. Die verschiedenen Formen, die das Magnetfeld prinzipiell annehmen kann, werden durch die zeitunabhängigen Maxwell-Gleichungen bestimmt (z. B. [40]):

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \tag{2.9}$$

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \ . \tag{2.10}$$

Quelle des magnetischen Feldes ist die Stromdichte $\mathbf{j}$, und an Orten, an denen kein Strom fließt, ist das Magnetfeld rotationsfrei.

Alternativ zum Magnetfeld $\mathbf{B}$ läßt sich eine Gleichung für das magnetische Vektorpotential $\mathbf{A}$ mit

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \tag{2.11}$$

angeben. In der Coulomb-Eichung

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \tag{2.12}$$

wird 2.10 zu

$$\triangle \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \ , \tag{2.13}$$

während 2.9 wegen $\operatorname{div}(\mathbf{rot}\, \mathbf{A}) = 0$ für beliebige Felder $\mathbf{A}$ automatisch erfüllt ist.

Aus den beiden Gleichungen 2.9 und 2.10 läßt sich außerdem die inhomogene Gleichung

$$\triangle \mathbf{B} = -\mu_0\ \mathbf{rot}\, \mathbf{j} \tag{2.14}$$

ableiten.

### Laplace-Gleichungen und Wing'sches Theorem

Im stromfreien Raum erfüllen damit sowohl das Magnetfeld als auch das magnetische Vektorpotential die Laplace-Gleichung:

$$\triangle \mathbf{B} = 0 \tag{2.15}$$

$$\triangle \mathbf{A} = 0 \tag{2.16}$$

Für Magnetfallen haben diese Gleichungen eine weitreichende Konsequenz, die das Wing'sche Theorem [39] aufzeigt: Der Betrag einer (dreidimensionalen) vektorwertigen Funktion, welche die Laplace-Gleichung erfüllt, kann kein lokales Maximum besitzen. Das bedeutet, daß im stromfreien Raum kein Maximum der magnetischen Feldstärke existieren kann (Analoges gilt für das elektrische Feld in Abwesenheit von Ladungen). Magnetische Fallen ohne stromführende Elemente im Zentrum beschränken sich daher auf Konfigurationen, in denen das Zentrum ein lokales Feldminimum ist. In solchen Fallen lassen sich nur „Low-field-seeker" einfangen, d.h. Teilchen, deren magnetisches Moment so ausgerichtet ist, daß ihre potentielle Energie mit steigendem Magnetfeld zunimmt[1].

Die Laplace-Gleichungen sind hilfreich bei der Beschreibung von Magnetfeldern, es ist jedoch Vorsicht geboten: Beide Gleichungen sind zwar Folgerungen aus den Maxwell-Gleichungen 2.9 bis 2.13, sie implizieren diese jedoch nicht. Das bedeutet, daß sich ein Magnetfeld im quellenfreien Raum stets aus Lösungen der homogenen Laplace-Gleichung zusammensetzt. Umgekehrt führt die Überlagerung von Lösungen der Laplace-Gleichungen jedoch nicht notwendigerweise zu einem „gültigen" Magnetfeld.

### Das skalare magnetische Potential

In Analogie zum elektrischen Feld gibt es im quellenfreien Raum eine elegante Möglichkeit, anstelle des Vektorpotentials $\mathbf{A}$ ein skalares Potential $\Phi_B$ zu verwenden. Wenn nämlich die Rotation des Magnetfeldes verschwindet, läßt sich das Magnetfeld allgemeingültig als Gradientenfeld eines geeigneten

[1] Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß sich auch Fallen für „High-field-seeker" konstruieren lassen, wenn das magnetische Fallenzentrum durch einen weiteren Mechanismus für die Atome „unzugänglich" gemacht wird. Beispielsweise können Atome als "High-field-seeker" im Magnetfeld eines stromführenden Drahtes geleitet werden, wenn ihr Drehimpuls entlang der Drahtachse die Annäherung an das Zentrum verhindert [15].

Potentials darstellen[2]:

$$\mathbf{B} = \nabla \Phi_B \tag{2.17}$$

In diesem Fall ist es die Divergenzgleichung 2.9, die auf die Bestimmungsgleichung für das Potential führt:

$$\triangle \Phi_B = 0 \tag{2.18}$$

Es handelt sich wiederum um eine homogene Laplace-Gleichung, es sind hier allerdings alle überflüssigen Freiheitsgrade beseitigt, die beim Vektorpotential erst durch die Coulomb-Eichung (2.12) eingeschränkt werden müssen. Im allgemeinen ist dies der effizienteste Zugang, in zwei Dimensionen bietet allerdings das Vektorpotential, welches dann zu einem Skalar wird, eigene Vorteile (s. S. 13).

Für die Beschreibung des Feldes bietet es sich an, entweder das skalare Potential $\Phi_B$ oder die einzelnen (kartesischen) Komponenten des Magnetfeldes oder des Vektorpotentials um das natürliche Zentrum, das magnetische Minimum, zu entwickeln. Dabei erscheinen zwei Wege günstig, die unterschiedliche Vorteile mit sich bringen. Der erste bedient sich der Darstellung in Kugelkoordinaten, weil diese das Zentrum betont und weil außerdem die Laplace-Gleichung einfach separiert. Die übliche Einteilung der Feldtypen nach Multipolen geht auf diesen Ansatz zurück. Da jedoch zusätzlich zur Laplace-Gleichung weitere Gleichungen zu erfüllen sind, deren Lösung in Kugelkoordinaten nicht besonders einfach gelingt, bietet sich auch das kartesische Koordinatensystem für die Darstellung an. Sie zeigt ihre Vorzüge gerade dann, wenn es darum geht, Feldkonfigurationen zu entwerfen.

### 2.2.2 Entwicklung in Kugelkoordinaten

Sowohl das Magnetfeld als auch das Vektorpotential (in der Coulomb-Eichung) und das skalare Potential erfüllen die homogene Laplace-Gleichung (2.15 bzw. 2.16), deren allgemeine Lösung sich in Kugelkoordinaten als

$$\mathrm{A}_i = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left( p_{lm} r^l + q_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{2.19}$$

schreibt. $Y_{lm}$ sind die normierten Kugelflächenfunktionen (siehe z. B. [40]), und die zweiten Koeffizienten $q_{lm}$ sind nur dann verschieden von null, wenn

[2]Das skalare Potential $\Phi_B$ ist nicht identisch mit dem Potential $-\boldsymbol{\mu}\mathbf{B}$, welches ein Teilchen im Magnetfeld spürt.

sich im Zentrum des Koordinatensystems Quellterme befinden. Im stromfreien Raum hat man es also ausschließlich mit den Koeffizienten $p_{lm}$ zu tun.

Die übliche Einteilung der Magnetfelder in Multipole rührt von der Ordnung des zugehörigen Vektorpotentials. In der Tabelle 2.1 wird anschaulich gezeigt, daß ein Vektorpotential der Ordnung $l$ (ebenso wie ein skalares Potential derselben Ordnung) zu einem Magnetfeld mit $2l$ Polen führt. Das zugehörige Magnetfeld bezeichnet man daher als $2l$-Pol, also als Quadrupolfeld ($l = 2$), Hexapolfeld ($l = 3$), Oktupolfeld ($l = 4$) usw.[3]

An der Entwicklung nach Kugelfunktionen wird deutlich, was die Erzeugung komplexer Felder mit großen Spulen schwierig macht: die für formenreiche Felder verantwortlichen Terme mit großem $l$ wachsen proportional zu $r^l$. Je weiter sich die Felder über den notwendigen Bereich hinaus erstrecken, desto schneller wächst mit zunehmendem Wert von $l$ die zu erzeugende Feldstärke.

### Kugelfunktionen und kartesische Koordinaten

Die Lösungen der Laplace-Gleichung zu einem festen Separationsparameter $l$ lassen sich in kartesischen Koordinaten als homogene Polynome vom Grad $l$ schreiben:

$$r^l Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{a+b+c=l} k_{abc}\, x^a y^b z^c \ . \tag{2.20}$$

Auf diese Weise läßt sich die Multipolarität eines Feldes direkt der kartesischen Darstellung ansehen. Insbesondere folgt daraus, daß die (kartesischen) Komponenten des Magnetfeldes wegen $\mathbf{B} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{B} = \nabla\Phi_B$ Polynome vom Grad $l_B = l_A - 1$ bzw. $l_B = l_{\Phi_B} - 1$ sind, d.h. um eins geringer als das zugehörige Potential. So besitzt ein Quadrupolfeld ($l_A = 2$, $l_B = 1$) nur Terme, die linear in den Koordinaten sind, das Dipolfeld besitzt wegen $l_B = 0$ gar keine Abhängigkeit von den Koordinaten und ist schlicht konstant.

[3] Diese Namensgebung ist nicht eindeutig, in anderen physikalischen Zusammenhängen begegnet man häufig der Benennung nach $2^l$-Polen. Außerdem sagt die Multipolarität im Grunde nichts über den Radialteil des Feldes aus (das ist ja der Vorteil der Variablenseparation in Kugelkoordinaten). So bezeichnet man als magnetisches Dipolfeld üblicherweise das Feld eines (auf infinitesimale Größe zusammmengezogenen) Ringstromes, das in der Entwicklung des Vektorpotentials 2.19 dem Koeffizienten $q_{1,0}$ entspricht. Das „Dipolfeld“ (l=1) im quellenfreien Raum dagegen ist schlicht das konstante Feld (s. Tabelle 2.1)

### Zweidimensionale Magnetfelder

Einige zweidimensionale Multipolfelder illustrieren beispielhaft den Charakter der Multipolarität. Magnetfelder, deren Komponenten ausschließlich in einer Ebene liegen, haben die hilfreiche Eigenschaft, daß sie sich durch ein (pseudo-) skalares Potential darstellen lassen, nämlich durch die Komponente des dreidimensionalen Vektorpotentials, die senkrecht auf der Feldebene steht. Weil das resultierende Feld (hier in der x-y-Ebene gewählt)

$$\begin{pmatrix} \mathrm{B}_x \\ \mathrm{B}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} \\ -\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

senkrecht auf dem Gradienten des Potentials steht, sind die Linien konstanten Potentials A gleichzeitig die Feldlinien des Magnetfeldes **B**:

$$\mathbf{B} \cdot \nabla A = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_x \\ \mathrm{B}_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} \end{pmatrix} = 0 \ . \tag{2.22}$$

Diese Eigenschaft ist nicht auf Felder im stromfreien Raum beschränkt; und sie eröffnet eine gute Möglichkeit, die Feldlinien von zweidimensionalen Magnetfeldern zu zeichnen: die Höhenlinien des Potentials A entsprechen den Feldlinien und die Feldliniendichte ist automatisch proportional zum Betrag des Magnetfeldes.

Für die Entwicklung von A nach Kugelfunktionen kommen nur die Terme mit $|m| = l$ in Frage, da sie als einzige unabhängig von $z$ sind. Eine der beiden Möglichkeiten, daraus ein reelles Feld zusammenzusetzen, ist

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &\propto r^l (Y_{l,l} + (-1)^l Y_{l,-l}) \\ &\propto (x^2 + y^2)^{l/2} \cos(l\varphi) \ . \end{aligned} \tag{2.23}$$

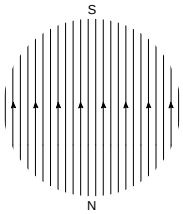
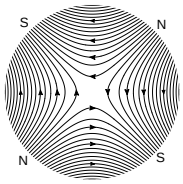
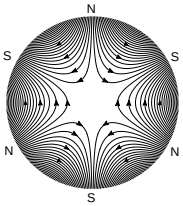
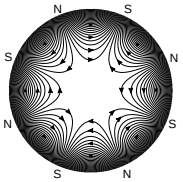
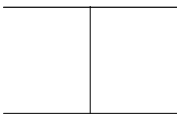
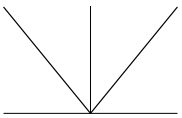
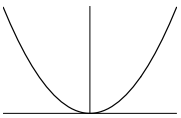
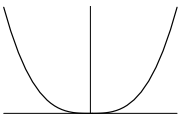
In diesem speziellen Fall ist außerdem

$$\begin{aligned} \Phi_B &\propto r^l \frac{1}{i} (Y_{l,l} - (-1)^l Y_{l,-l}) \\ &\propto (x^2 + y^2)^{l/2} \sin(l\varphi) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Es zeigt sich, daß das Magnetfeld zu diesem Vektorpotential genau $2l$ Pole ausbildet. Sie befinden sich dort, wo die Feldlinien (bei konstantem Abstand vom Zentrum) am dichtesten liegen, also an den Stellen, an denen das Vektorpotential die stärkste Winkelabhängigkeit aufweist: das sind genau die

Nullstellen der Kosinus-Funktion, von denen es $2l$ gibt. Abhängig vom Vorzeichenwechsel handelt es sich um einen magnetischen Nord- beziehungsweise Südpol. Die Tabelle 2.1 gibt eine Übersicht über die Potentiale und Felder der genannten zweidimensionalen Felder, wobei die Kugelfunktionen aus 2.23 und 2.24 in kartesischen Koordinaten ausgedrückt sind.

Tabelle 2.1: **Zweidimensionale Multipolfelder**

| Bezeichnung | konstantes Feld $l=1$ | Quadrupol $l=2$ | Hexapol $l=3$ | Oktupol $l=4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{A}=\mathrm{A}_z$ | $B_0 x$ | $\frac{B_0}{2r_0}(x^2-y^2)$ | $\frac{B_0}{3r_0^2}(x^3-3xy^2)$ | $\frac{B_0}{4r_0^3}(x^4-6x^2y^2+y^4)$ |
| $\Phi_B$ | $B_0 y$ | $-\frac{B_0}{r_0}xy$ | $\frac{B_0}{3r_0^2}(y^3-3x^2y)$ | $\frac{B_0}{r_0^3}(y^3x-x^3y)$ |
| $\mathbf{B}$ | $\begin{pmatrix}0\\B_0\end{pmatrix}$ | $\frac{B_0}{r_0}\begin{pmatrix}-y\\-x\end{pmatrix}$ | $\frac{B_0}{r_0^2}\begin{pmatrix}-2xy\\y^2-x^2\end{pmatrix}$ | $\frac{B_0}{r_0^3}\begin{pmatrix}y^3-3x^2y\\3y^2x-x^3\end{pmatrix}$ |
| Feldlinien |  |  |  |  |
| Radialer Verlauf von $B$ |  |  |  |  |

### 2.2.3 Entwicklung in kartesischen Koordinaten

Bereits bei der Multipolentwicklung haben wir von den kartesischen Koordinaten Gebrauch gemacht. Der Grund dafür liegt in der bereits erwähnten Eigenschaft, daß sich die Lösungen der Laplace-Gleichung, sofern keine Quellterme im Zentrum vorhanden sind, als homogene Polynome der kartesischen Koordinaten schreiben lassen. Eine Entwicklung des Feldes nach Multipolen, die alle Terme bis zum Hexapolfeld einschließt (l=3), entspricht daher einer Entwicklung des Magnetfeldes in eine Taylorreihe einschließlich

der Ordnung zwei. Unter Verwendung der Tensorschreibweise bleibt dieser Ansatz recht übersichtlich und bringt zusätzlich den Vorteil, daß die beiden Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik (2.9 und 2.10) eine einfache Gestalt bekommen.

### Die Maxwell-Gleichungen in Tensorschreibweise

Die Tensorschreibweise ist ein Hilfsmittel, das unter anderem die Verwendung von mehrfachen Differentialoperatoren entscheidend vereinfacht. In dieser Notation führen die Maxwell-Gleichungen schnell zu einigen wichtigen Aussagen über die allgemeine Struktur von Magnetfeldern. Die in dieser Arbeit verwendeten Symbole der Tensornotation sind im Anhang A erläutert.

Zunächst ist die Divergenzgleichung 2.9

$$\mathrm{B}_{i|i} = \mathrm{Spur}\, B_{i|j} = 0 \tag{2.25}$$

eine einfache Bedingung an die Spur der $3 \times 3$-Matrix $B_{i|j}$, während der magnetische Quellterm 2.10 zu

$$\epsilon_{ijk}\, \mathrm{B}_{j|k} = \mu_0\, \mathrm{j}_i \tag{2.26}$$

wird.

### Symmetrie der Gradientenmatrix

Eine sehr nützliche Folge dieser letzten Gleichung ist, daß die $3 \times 3$-Matrix $\mathrm{B}_{i|j}$ im stromfreien Raum stets symmetrisch ist. Man sieht dies, wenn man sie in ihren symmetrischen und antisymmetrischen Anteil zerlegt:

$$\mathrm{B}_{i|j} = \mathrm{B}^s_{i|j} + \mathrm{B}^a_{j|i} \tag{2.27}$$

$$\mathrm{B}^s_{i|j} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{B}_{i|j} + \mathrm{B}_{j|i}\right) \tag{2.28}$$

$$\mathrm{B}^a_{i|j} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{B}_{i|j} - \mathrm{B}_{j|i}\right)\ . \tag{2.29}$$

Während die Diagonalelemente des antisymmetrischen Anteils $B^a_{i|j}$ notwendigerweise verschwinden, enthalten die Außerdiagonalelemente gerade die Rotation von $\mathbf{B}$:

$$(\mathbf{rot}\,\mathbf{B})_k = \epsilon_{kij}\, \mathrm{B}_{j|i} = 2 \cdot \epsilon_{k\underline{m}\,\underline{n}} \mathrm{B}^a_{\underline{m}|\underline{n}} \tag{2.30}$$

(man wähle dazu $m \neq k \neq n$). Die Bedingung, daß die Matrix $B_{i|j}$ symmetrisch ist, ist also äquivalent dazu, daß das Magnetfeld $\mathbf{B}$ rotationsfrei ist. Nach Gleichung 2.26 ist aber die Rotation von $\mathbf{B}$ gerade der Quellterm des Magnetfeldes und im stromfreien Raum null.

### 2.2.4 Magnetische Minima

Wie bereits besprochen, spüren Teilchen, die im Magnetfeld als „Low-field-seeker" präpariert worden sind, ein Potential, das proportional zur Feldstärke $B$ ist. In einem lokalen Minimum der Feldstärke lassen sich daher solche Teilchen einfangen. Bei den folgenden Überlegungen geht es also darum, ein Minimum des Vektorbetrages

$$B = \sqrt{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}} \tag{2.31}$$

zu beschreiben.

Die Wurzelfunktion in 2.31 kann nun prinzipiell auf zwei verschiedene Weisen zu einem Minimum gelangen. Im ersten Fall ist ihr Argument null. Wenn die Funktion nicht konstant gleich null ist, so hat die Funktion hier offensichtlich ein Minimum. Da die Ableitung der Wurzelfunktion im Ursprung divergiert, ist die Ableitung des Feldbetrages im Zentrum nur in speziellen Fällen definiert. Die zweite Möglichkeit für ein magnetisches Minimum besteht darin, daß das Argument $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$ ein Minimum besitzt, jedoch von null verschieden ist. In diesem Fall existieren alle Ableitung des Feldbetrages.

Nach diesen beiden Feldtypen, Minima mit bzw. ohne Nullstelle im Zentrum, lassen sich Magnetfallen charakterisieren. Die beiden wichtigsten Vertreter dieser Typen sind die Quadrupolfalle mit verschwindendem Feld im Zentrum sowie die „Ioffe-Pritchard-Falle", deren Feld im Zentrum eine Polarisierungsachse vorgibt:

- Quadrupolfallen haben im Zentrum das Feld null, der Feldbetrag wächst linear mit dem Abstand vom Zentrum.
- Bei Feldkonfigurationen vom Typ der Ioffe-Pritchard-Falle ist das Feld im Minimum von null verschieden und sein Betrag steigt mit dem Abstand vom Zentrum quadratisch an.

Magnetfallen mit nicht verschwindendem Feld spielen bei der Speicherung von Atomen eine besondere Rolle. Nur solange die Larmorfrequenz, d.h. die Präzessionsfrequenz des magnetischen Moments um die Magnetfeldachse,

größer ist als die typische Oszillationsfrequenz in der Falle, bleibt die Ausrichtung des magnetischen Moments erhalten. Andernfalls kann das Teilchen einen sogenannten Majorana-Umklapp-Prozeß erleiden, bei dem es von einem gefangenen Zustand in einen nicht gefangenen Zustand wechselt (s. Abschnitt 2.3.2). In einer Falle mit nicht verschwindendem Feld läßt sich dieser Verlustkanal schließen, da die Larmorfrequenz nie kleiner wird als $\omega_{L,\,\mathrm{min}} = \mu\, B_{\mathrm{min}}/\hbar$.

Beide Feldtypen können jeweils in einer zweidimensionalen sowie in einer dreidimensionalen Variante auftreten. Die zweidimensionalen Konfigurationen lassen sich verwenden, um Atome entlang einer Richtung zu leiten, während die dreidimensionalen Konfigurationen als Atomfallen dienen.

Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß auch andere Feldkonfigurationen interessante Anwendungen besitzen: Das zweidimensionale Hexapolfeld (s. Tabelle Seite 14) ist beispielsweise geeignet, um Atomstrahlen zu fokussieren, und es ist dasjenige Feld, mit dem zum ersten Mal die magnetische Manipulation von Atomen demonstriert wurde [41].

### 2.2.5 Quadrupolfelder

Nach der oben erläuterten Namensgebung bezeichnet man Magnetfelder, deren Komponenten linear mit dem Abstand vom Zentrum anwachsen, als Quadrupolfelder. Sie lassen sich in zwei Klassen einteilen, die dreidimensionalen Quadrupolfelder und die zweidimensionalen. Zur Charakterisierung der Feldstruktur genügt die Taylor-Entwicklung des Feldes $\mathrm{B}_i$ in erster Ordnung, die auf

$$\mathrm{B}_i = \mathrm{B}_{i|j}\,\mathrm{x}_j \tag{2.32}$$

führt.

Nun ist, wie in Abschnitt 2.2.3 erläutert, die Matrix $\mathrm{B}_{i|j}$ im stromfreien Raum symmetrisch. Das bedeutet, daß sich zueinander orthogonale Eigenvektoren mit reellen Eigenwerten für die Matrix $\mathrm{B}_{i|j}$ finden lassen. Folglich läßt sich das resultierende Feld im geeigneten Koordinatensystem als

$$\mathbf{B} = b_1 x_1\,\mathbf{e}_1 + b_2 x_2\,\mathbf{e}_2 + b_3 x_3\,\mathbf{e}_3 \tag{2.33}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0 \tag{2.34}$$

schreiben. Die Achsen des neuen Koordinatensystems werden aus den (rechtshändig gewählten) Eigenvektoren von $\mathrm{B}_{i|j}$ gebildet, zu denen die $b_i$ die Eigenwerte sind. Die Bedingung 2.34 entspringt direkt aus der Maxwellgleichung 2.25, und führt zu zwei wichtigen Eigenschaften:

- Es gibt keine eindimensionalen Quadrupolfelder. Ist beispielsweise der Gradient $b_3$ von null verschieden, so ist mindestens einer der Gradienten $b_1$ oder $b_2$ ebenfalls ungleich null.
- Die Achsen eines dreidimensionalen Quadrupolfeldes können nicht alle äquivalent sein.

### Das dreidimensionale Quadrupolfeld

Das dreidimensionale Quadrupolfeld ist die einfachste Magnetfeldkonfiguration, die ein lokales Minimum des Feldbetrages im stromfreien Raum aufweist. Mathematisch wird es durch Gleichung 2.33 beschrieben, wobei alle $b_i$ verschieden von null sind. Wegen der Divergenzgleichung 2.34 bleiben nur zwei freie Parameter, die (im geeignet rotierten Koordinatensystem) die Quadrupolfalle vollständig beschreiben. Wählt man als dritte Achse diejenige entlang des stärksten Gradienten, so müssen die Gradienten in den beiden ersten Achsen das entgegengesetzte Vorzeichen des ersten Gradienten besitzen. Das Feld kann so auch durch den Gradienten $b = b_3$ und das Gradientenverhältnis $\alpha = \frac{|b_1|}{|b_3|}$ beschrieben werden:

Ideales dreidimensionales Quadrupolfeld

$$\mathbf{B} = b \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -(1-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad 0 < \alpha < 1 \ . \tag{2.35}$$

Charakteristisches Vorzeichen von dreidimensionalen Quadrupolfallen

Das Vorzeichen von $b$ charakterisiert jedes dreidimensionale Quadrupolfeld. Es ist unabhängig davon, in welche der beiden möglichen Richtungen die Achse $\mathbf{e}_3$ orientiert ist, denn bei einer Richtungsumkehr ändern sowohl die Koordinaten als auch die Komponenten des Feldes ihr Vorzeichen[4]. Bei einer stetigen Umformung des Quadrupols bleibt das Vorzeichen von $b$ eine charakteristische Größe, solange das Feld nicht in ein zweidimensionales Quadrupolfeld übergeht.

Aus der Darstellung 2.35 läßt sich die allgemeine Form von quadrupolartigen Fallenpotentialen ableiten: Die Magnetfalle, das heißt der Feldbetrag, kann nie Kugelsymmetrie besitzen, denn die drei Gradienten können selbst vom Betrag her nicht alle identisch sein. Veranschaulichen läßt sich die Form der Falle durch ein Ellipsoid, dessen Oberfläche eine Fläche konstanten Magnetfeldes darstellt. Am Längenverhältnis $\beta_{ij}$ der Hauptachsen $a_1$, $a_2$, $a_3$ läßt sich ablesen, wie sich mögliche Quadrupolformen von einer langgestreckten,

[4] Mathematisch äquvivalent läßt sich das charakteristische Vorzeichen über das Vorzeichen der Determinante $\operatorname{sgn}\left(\det \mathrm{B}_{i|j}\right)$ definieren.

zigarrenförmigen Falle über eine linsenförmige Gestalt wieder in eine langgestreckte Form wandeln:

$$\beta_{13} = \frac{a_1}{a_3} = \frac{1}{\alpha} \tag{2.36a}$$

$$\beta_{23} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{1}{1-\alpha} \ . \tag{2.36b}$$

Eine besondere Symmetrie liegt vor, wenn $\alpha = \frac{1}{2}$ ist und also $b_1$ und $b_2$ identisch sind:

$$b_1 = b_2 = -\frac{b}{2} \ . \tag{2.37}$$

Das resultierende Feld besitzt Rotationssymmetrie bezüglich der Achse $\mathbf{e}_3$ und ergibt sich beispielsweise im Zentrum zweier gegenläufig stromdurchflossener Ringspulen. Abbildung 2.2 zeigt den Feldlinienverlauf des achsensymmetrischen Quadrupolfeldes sowie ein Ellipsoid, dessen Oberfläche eine Fläche konstanter Magnetfeldstärke beschreibt. Im Schnitt entlang der $\mathbf{e}_1$-$\mathbf{e}_3$-Ebene werden die vier Pole sichtbar, während der Schnitt in der $\mathbf{e}_1$-$\mathbf{e}_2$-Ebene die Achsensymmetrie offenbart.

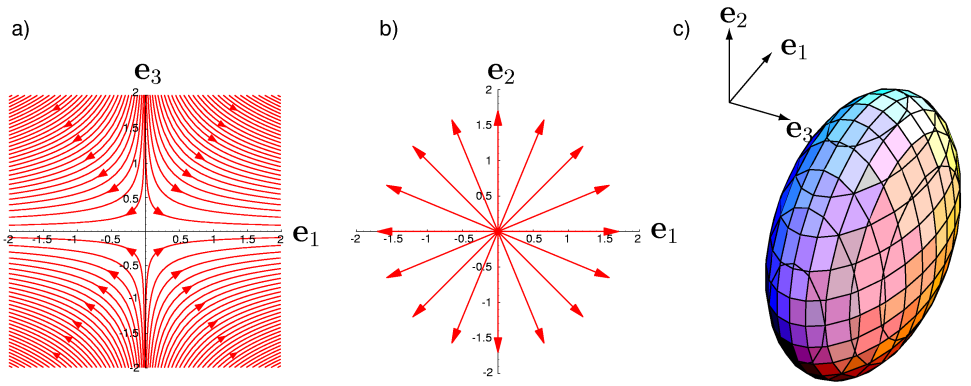



Abb. 2.2: *a), b) Feldlinien des rotationssymmetrischen dreidimensionalen Quadrupols ($\alpha = \frac{1}{2}$). c) Die Flächen gleicher Magnetfeldstärke sind linsenförmige Ellipsoide um das Quadrupolzentrum (c).*

Es ist eine sehr wichtige Eigenschaft von dreidimensionalen Quadrupolfeldern, daß der Nullpunkt nicht verschwindet, wenn man ein homogenes Feld überlagert, sondern daß er sich nur verschiebt. Formal gesehen folgt dies aus der Tatsache, daß die Matrix $\mathrm{B}_{i|j}$ mit $\det\left(\mathrm{B}_{i|j}\right) = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \neq 0$ umkehrbar ist. Für allgemeine Magnetfelder hat diese Eigenschaft eine wichtige Konsequenz:

Ein quadrupolartiger Nullpunkt eines magnetischen Feldes läßt sich nur beseitigen, indem man

- ihn „ins Unendliche schiebt“,
- ihn in eine 2D-Quadrupolfalle transformiert,
- zwei quadrupolartige Nullstellen mit entgegengesetztem Vorzeichen vereinigt.

Ein Beispiel für die Vereinigung entgegengesetzter Quadrupole findet sich bei der Besprechung allgemeiner Prinzipien von Mikrofallen in Abschnitt 2.2.6.

### Das zweidimensionale Quadrupolfeld

Das zweidimensionale Quadrupolfeld ist das Bindeglied zwischen den dreidimensionalen Quadrupolfeldern mit positivem und negativem Vorzeichen. Es bildet die Basis für die Ioffe-Pritchard-Fallen sowie für die übrigen magnetischen Mikrofallen, die in dieser Arbeit realisiert wurden. Formal wird seine Bedeutung weiter unten im Abschnitt über magnetische Minima mit nicht verschwindendem Feld begründet (Abschnitt 2.2.6).

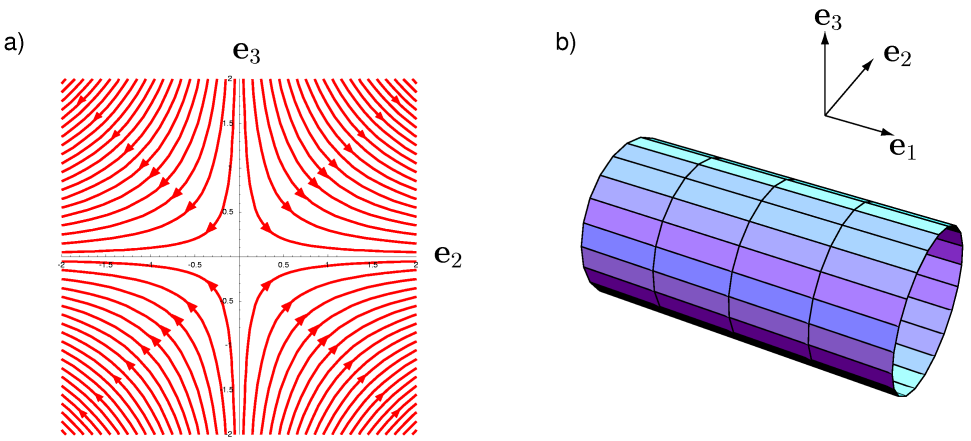



Abb. 2.3: *a) Feldlinienbild eines zweidimensionalen Quadrupols. Aufgrund der Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik sind die Gradienten bis auf das Vorzeichen identisch. b) Die Flächen gleicher Magnetfeldstärke liegen röhrenförmig um die Achse der Translationsinvarianz (hier* $\mathbf{e}_1$*).*

Das zweidimensionale Quadrupolfeld entsteht aus dem dreidimensionalen Feld, wenn zwei der Gradienten gegengleich werden, z. B. $b_2 = -b_3$ und somit nach Gl. 2.34 der dritte Gradient verschwindet. Die Feldvektoren liegen

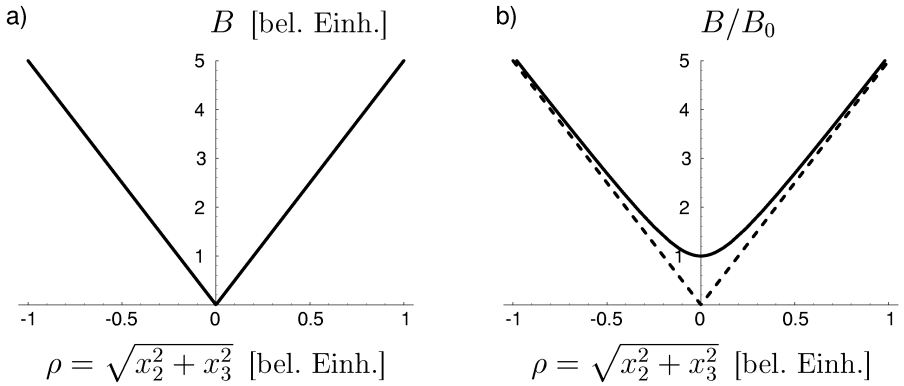



Abb. 2.4: *Das transversale Profil der 2D-Quadrupolfalle (a) kann durch die Überlagerung mit einem konstanten Feld $B_0\,\mathbf{e}_1$ entlang der Symmetrieachse zu einem Feld transformiert werden, welches im Minimum nicht zu null wird (b).*

dann ausschließlich in einer Ebene (hier in der $\mathbf{e}_2$-$\mathbf{e}_3$-Ebene). Da die beiden von null verschiedenen Gradienten sich nur im Vorzeichen unterscheiden, liegen die Linien konstanter Magnetfeldstärke notwendigerweise kreisförmig um das Zentrum.

Die gewählte Herleitung des 2D-Quadrupols als Grenzfall des dreidimensionalen Feldes führt dazu, daß die ausgezeichnete Achse des Feldes wechselt. Beim stetigen Übergang eines positiven (dreidimensionalen) Quadrupols in einen negativen Quadrupol stehen die Polachsen der beiden Felder senkrecht aufeinander, und die Symmetrieachse des sich dazwischen ergebenden zweidimensionalen Quadrupols ist senkrecht zu diesen beiden Achsen. Aus diesem Grund ist in der Abbildung 2.3 die Symmetrieachse als $\mathbf{e}_1$-Achse bezeichnet. In den nächsten Abschnitten wird dagegen die Symmetrieachse als $\mathbf{e}_3$ bzw. $\mathbf{e}_z$ bezeichnet.

Im allgemeinen Fall ist die Nullinie, die in Abb. 2.3 entlang $\mathbf{e}_1$ verläuft, nicht notwendigerweise eine Gerade. So läßt sich beispielsweise ein Quadrupolring erzeugen, bei dem die Nullinie kreisförmig oder elliptisch verläuft. Das Flaschenfeld in Abschnitt 2.2.6 sowie zwei senkrecht zueinander verlaufende Ströme mit geeignetem homogenen Feld (Abschnitt 3.4.2) sind Beispiele dafür.

Anders als das 3D-Quadrupolfeld verhält sich das 2D-Quadrupolfeld bei der Überlagerung von zusätzlichen Feldern. Während sich der Nullpunkt eines dreidimensionalen Quadrupols nur verschieben, nicht jedoch beseitigen läßt, ist es beim zweidimensionalen Quadrupolfeld möglich, die magnetische

Nullinie zu eliminieren (s. Abb. 2.4 b). Überlagert man einem 2D-Quadrupol, dessen Feldkomponenten in der $\mathbf{e}_2$-$\mathbf{e}_3$-Ebene liegen, ein homogenes Feld entlang $\mathbf{e}_1$, so entsteht ein quadratisches Feldminimum anstelle der Nullinie. Dieser Überlagerungsmechanismus führt direkt zu magnetischen Minima mit nicht verschwindendem Feld.

### 2.2.6 Magnetische Minima mit nicht verschwindendem Feld

Magnetische Minima, in deren Zentrum das Magnetfeld nicht verschwindet, haben eine besondere Bedeutung als atomare Wellenleiter bzw. Atomfallen. Ihre Wichtigkeit rührt von der Tatsache her, daß das Feld im Minimum Majorana-Umklapp-Prozesse des magnetischen Moments verhindert (s. Abschnitt 2.3.2).

Wie eben dargestellt, führt die Überlagerung von einem konstanten Feld und einem 2D-Quadrupolfeld zu einer zweidimensionalen Falle mit nicht verschwindendem Feld im Minimum. Um das Minimum auf drei Dimensionen auszuweiten, muß dem konstanten und dem Quadrupolfeld noch ein Hexapolfeld überlagert werden. Das Ergebnis ist stets eine verallgemeinerte Form der Ioffe-Pritchard-Falle. Der einzige Unterschied zu der üblichen Ioffe-Pritchard-Falle [42, 43] besteht darin, daß die Achse des Hexapolfeldes nicht notwendigerweise mit der Feldrichtung im Minimum zusammenfallen muß. Dies hat zur Konsequenz, daß die Feldrichtung im Zentrum auch nicht notwendig parallel zu einer Eigenschwingungsachse in der Magnetfalle ist. Der folgende Abschnitt stellt diese Aussage auf ein mathematisches Fundament:

#### Allgemeine Form dreidimensionaler Minima

Ein geeigneter Ansatz, um Fallen mit nicht verschwindendem Magnetfeld im Zentrum zu beschreiben, ist die Abspaltung eines konstanten Feldes, welches dem Feld im Fallenzentrum entspricht (z. B. [44]). Man legt den Ursprung an den Ort der minimalen Feldstärke und wählt ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Polachse $\mathbf{e}_z$ entlang der Feldrichtung im Nullpunkt

$\mathbf{B}(\mathbf{r}=0) = B_0\,\mathbf{e}_z$ mit $B_0 > 0$:

$$\mathbf{B} = B_0\,\mathbf{e}_z + \delta\mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{2.38}$$

$$B = \sqrt{B_0^2 + 2B_0\,\delta\mathrm{B}_z(\mathbf{r}) + \delta\mathbf{B}(\mathbf{r})^2} \tag{2.39}$$

$$\approx B_0 + \delta\mathrm{B}_z(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\,\frac{\delta\mathbf{B}(\mathbf{r})^2}{B_0}\ . \tag{2.40}$$

Das Feld $\delta\mathbf{B}(r)$ enthält den gesamten variablen Anteil des Magnetfeldes, aber keinen konstanten Term. Wir können nun davon Gebrauch machen, daß die kartesischen Komponenten von $\delta\mathbf{B}$, also auch $\delta\mathrm{B}_z$, die Laplace-Gleichung erfüllen und sich nach Kugelfunktionen entwickeln lassen. Das Mittel über den Raumwinkel bei Kugelfunktionen

$$\int Y_{lm}\,d\Omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,\delta_{l,0}\,\delta_{m,0} \tag{2.41}$$

ist nur für die konstante Funktion $Y_{00}$ verschieden von null. Weil aber das Feld $\delta\mathrm{B}_z$ keinen konstanten Anteil enthält, erlaubt dies den Schluß, daß

$$\int \delta\mathrm{B}_z\,d\Omega = 0 \tag{2.42}$$

ist und also $\delta\mathrm{B}_z$ sowohl positive als auch negative Werte für geeignete Winkelkoordinaten $\theta$ und $\varphi$ besitzt. Mit diesem Term alleine läßt sich also kein Extremum erzeugen, seine niedrigste nicht verschwindende Ordnung darf daher nicht kleiner sein als die des zweiten Terms $\delta\mathbf{B}^2$. Wenn überhaupt, so läßt sich nur in Kombination mit diesem zweiten Term ein Extremum erzeugen. Hieraus folgt im übrigen unmittelbar das Wing'sche Theorem, daß ein Vektorfeld, welches die Laplace-Gleichung erfüllt, kein lokales Maximum besitzen kann [39, 44, 45]. Wenn nämlich der (positive) Term $\delta\mathbf{B}^2$ notwendigerweise einen Beitrag zum Extremum leistet, kann es sich nicht um ein Maximum handeln. Daß sich Minima konstruieren lassen, zeigen die Beispiele.

Sucht man nun ein magnetisches Minimum, in dessen Zentrum der Feldbetrag quadratisch anwächst, führen die eben gemachten Herleitungen auf das Feld der bereits erwähnten „Ioffe-Pritchard-Falle“ in zwei oder drei Dimensionen[5]. In jedem Fall ist ein zweidimensionales Quadrupolfeld beteiligt, denn wenn $\delta\mathbf{B}^2$ quadratisch mit dem Abstand skalieren soll, muß $\delta\mathbf{B}$ notwendigerweise lineare Terme in den Koordinaten, also einen Quadrupolanteil

[5]Ich verwende hier den Begriff der Ioffe-Pritchard-Falle etwas allgemeiner, nämlich auch dann, wenn die Achse des Magnetfeldes im Zentrum nicht mit einer Fallenachse zusammenfällt.

enthalten. Entlang der $z$-Achse kann dieser jedoch nicht liegen, so daß nur die Möglichkeit eines 2D-Quadrupols in der $x$-$y$-Ebene bleibt.

Damit sind wir im Grunde wieder bei dem oben besprochenen Beispiel angekommen, dem zweidimensionalen Quadrupolfeld, das durch eine Feldkomponente längs der Quadrupolachse ergänzt wird. Neu ist jedoch die Erkenntnis, daß der Beitrag des 2D-Quadrupolfeldes notwendige Voraussetzung für jede magnetische Falle ist, deren Feldbetrag quadratisch mit dem Abstand vom Zentrum wächst und der im Zentrum selbst nicht verschwindet. Außerdem wird hier die longitudinale Komponente (hier $\mathrm{B}_z$) ortsabhängig und ermöglicht so den dreidimensionalen Einschluß. In der Entwicklung um das Zentrum ist die Ortsabhängigkeit auf quadratische und höhere Terme in den Koordinaten beschränkt, was Beiträgen eines Hexapolfeldes bzw. von Multipolen höherer Ordnung entspricht.

### Die zweidimensionale „Ioffe-Pritchard-Falle“

Auf das Feld der zweidimensionalen Ioffe-Pritchard-Falle waren wir bereits im vorigen Abschnitt gestoßen[6]. In dem eben besprochenen Formalismus entspricht diese Feldkonfiguration dem variablen Feld $\delta\mathbf{B} = \left(\begin{smallmatrix} b\,x \\ -b\,y \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$:

Feld der zweidimensionalen Ioffe-Pritchard-Falle

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b\,x \\ -b\,y \\ B_0 \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

$$B = B_0 \sqrt{1 + \left(\frac{b}{B_0}\right)^2 \left(x^2 + y^2\right)} \tag{2.44}$$

$$\approx B_0 + \frac{1}{2}\frac{b^2}{B_0}\left(x^2 + y^2\right) \quad \text{für } x, y \ll \frac{B_0}{b}\,. \tag{2.45}$$

Atome, die in einem solchen Magnetfeld geführt werden, spüren nahe am Zentrum ein harmonisches Potential. Der Abstand, bis zu dem die parabolische Näherung 2.45 hält, hängt nun sowohl von $B_0$ als auch vom Gradienten ab. Unabhängig vom Gradienten läßt sich aber berechnen, bis zu welchem Gesamtfeld diese Näherung gut ist, und gerade dies ist für die spätere Interpretation von Bedeutung. Um die Abweichung quantitativ zu erfassen, sucht man diejenige Stelle $\rho_{\max}$, an der die Abweichung $\Delta B = |B(\rho_{\max}) - B_{\mathrm{approx}}(\rho_{\max})|$

[6] Dort war allerdings wegen der Herleitung aus dem 3D-Quadrupol die Symmetrieachse entlang $\mathbf{e}_1$ gewählt.

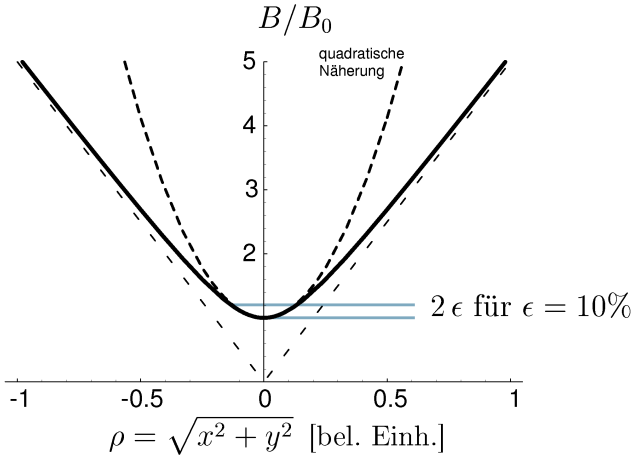



Abb. 2.5: *Im Zentrum einer zweidimensionalen Ioffe-Pritchard-Falle läßt sich die Feldstärke quadratisch nähern. Für eine relative Abweichung von weniger als $\epsilon$ muß das wirkliche Feld kleiner als $B_0 + 2B_0\epsilon$ sein. Der Gültigkeitsbereich der Näherung für $\epsilon = 10\,\%$ ist eingezeichnet.*

das $\epsilon$-fache des Wertes $|B(\rho_{\max}) - B_0|$ erreicht:

$$\Delta B \equiv |B(\rho_{\max}) - B_{\text{approx}}(\rho_{\max})| = \epsilon\,(B(\rho_{\max}) - B_0)\ . \tag{2.46}$$

Weil die Stärke des homogenen Feldes nicht direkt relevant für das Potential ist, werden hier nur der exakte und der genäherte Feldverlauf oberhalb von $B_0$ ins Verhältnis gesetzt. Es läßt sich zeigen, daß das ungenäherte Feld an diesem Punkt

$$B(\rho_{\max}) = B_0 + 2B_0\,\epsilon \tag{2.47}$$

beträgt. Die quadratische Näherung beschreibt also das Feld der zweidimensionalen Ioffe-Pritchard-Falle über einen Bereich von $2B_0\epsilon$ gut, d.h. mit einer Abweichung um nicht mehr als den Faktor $\epsilon$. So ist beispielsweise im Bereich $B_0 \leq B < 1,2\,B_0$ die relative Abweichung kleiner als $10\,\%$ (siehe Abb. 2.5). Die Kenntnis des Gradienten ist für dieses Ergebnis nicht erforderlich.

### Die dreidimensionale „Ioffe-Pritchard-Falle“

Der letzte Schritt auf dem Weg zur dreidimensionalen Ioffe-Pritchard-Falle ist, formal gesehen, die Überlagerung eines Hexapolfeldes. Die zweidimensionale Ioffe-Pritchard-Falle bestand ja bereits aus dem „Dipolterm“ (dem konstanten Feld) und dem 2D-Quadrupol. Nun muß zuletzt ein Feld hinzugefügt werden, welches dafür sorgt, daß $\delta \mathrm{B}_z$ in 2.39 einen Beitrag für den

magnetischen Einschluß leistet. Eine achsensymmetrische Lösung zu erhalten, läßt sich einfach durch das zum Potential

$$\Phi_B = \frac{B_0}{{r_0}^2} r^3 Y_{30}(\theta, \varphi) \tag{2.48}$$

zugehörige Feld bewerkstelligen. Anschaulicher mag aber die Herleitung in kartesischen Koordinaten sein, die hier folgt. Wenn auch das Ergebnis Gl. 2.53 bekannt ist, illustriert dieses Vorgehen ein Prinzip, nach welchem sich Fallenstrukturen entwerfen lassen und das bei der Konzeption von Mikrofallen in Kapitel 3 Anwendung finden wird.

### Entwicklung des Flaschenfeldes

Gesucht ist hier ein Feld, welches das Feldminimum $B_0$ der zweidimensionalen Ioffe-Pritchard-Falle von der $z$-Koordinate abhängig macht, und zwar so, daß entlang $\mathbf{e}_z$ ein quadratisches Minimum entsteht. Daher wählt man den Ansatz

$$\mathrm{B}_z(z, 0, 0) = B_0 + \frac{\kappa}{2} z^2 \tag{2.49}$$

Natürlich entspricht dieses Feld noch nicht den Maxwell-Gleichungen 2.9 und 2.10, wenn es nicht auch von den Koordinaten $x$ und $y$ abhängt. Das Feld läßt sich jedoch einfach so ergänzen, daß diese Bedingungen erfüllt werden. Das Ergebnis ist ein dreidimensionales Magnetfeld, dessen Feldlinien sich im Zentrum flaschenartig aufwölben (siehe Abb. 2.6).

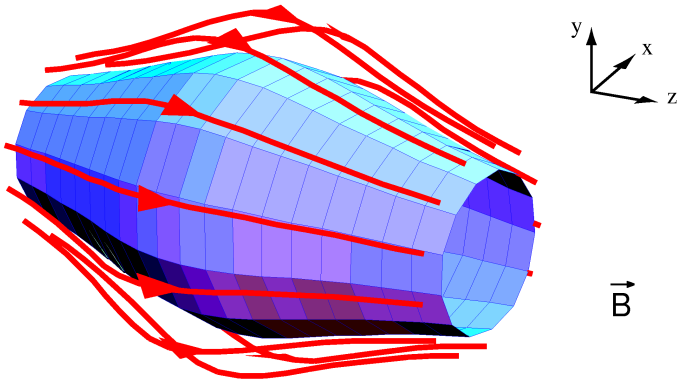



Abb. 2.6: *Feldlinien des Flaschenfeldes oder „Bottle-fields“: In der Nähe des Zentrums wölben sich die Feldlinien nach außen. Die dargestellte Fläche dient dazu, das Auge zu führen.*

Erster Anhaltspunkt ist die Laplace-Gleichung $\triangle \mathbf{B} = 0$, die, auch wenn sie noch keine der beiden Maxwell-Gleichungen impliziert, hier hilfreich ist. Um sie zu erfüllen, ergänzt man $\mathrm{B}_z$ zu

$$\mathrm{B}_z^{\mathrm{Flasche}}(x,y,z) = B_0 + \frac{\kappa}{2}\left(z^2 - \alpha x^2 - (1-\alpha)y^2\right) . \tag{2.50}$$

Desweiteren muß nun $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ sein, was sich durch eine gleichartige Ergänzung der beiden transversalen Feldkomponenten erreichen läßt:

$$\mathrm{B}_x^{\mathrm{Flasche}} = -\beta\,\kappa\,x\,z \tag{2.51a}$$

$$\mathrm{B}_y^{\mathrm{Flasche}} = -(1-\beta)\,\kappa\,y\,z\ . \tag{2.51b}$$

Zuletzt muß die Rotationsfreiheit überprüft werden, was sofort auf die Bedingung $\alpha = \beta$ führt. Damit läßt sich das ideale Flaschenfeld allgemein als

$$\mathbf{B}_{\mathrm{Flasche}} = \begin{pmatrix} -\alpha\,\kappa\,x\,z \\ -(1-\alpha)\,\kappa\,y\,z \\ B_0 + \frac{\kappa}{2}\,(z^2 - \alpha x^2 - (1-\alpha)y^2) \end{pmatrix} \tag{2.52}$$

Ideales Flaschenfeld

schreiben. Ähnlich wie beim dreidimensionalen Quadrupolfeld beschreibt der Parameter $\alpha$ hier die Gewichtung der Felder in den beiden transversalen Achsen $x$ ud $y$.

Das Flaschenfeld besitzt bereits allein einige interessante Eigenschaften, die aufzuzeigen sich lohnt. Vor ihrer Diskussion auf S. 29 soll jedoch die Anwendung des Feldes für die Ioffe-Pritchard-Falle im Vordergrund stehen.

Wir beschränken uns hier der Einfachheit halber auf den Fall, in dem das Flaschenfeld dem zweidimensionalen Quadrupol ohne Verkippung oder Verdrehung überlagert wird. Aus den obigen Rechnungen ergibt sich dann das Gesamtfeld mit:

$$\mathbf{B}_{\mathrm{Ioffe}} = \mathbf{B}_{\mathrm{Ioffe2D}} + \mathbf{B}_{\mathrm{Flasche}} = \begin{pmatrix} (+b - \alpha\,\kappa\,z)\,x \\ (-b - (1-\alpha)\,\kappa\,z)\,y \\ B_0 + \frac{\kappa}{2}\,(z^2 - \alpha x^2 - (1-\alpha)y^2) \end{pmatrix} . \tag{2.53}$$

Feld der idealen Ioffe-Pritchard-Falle

Die wichtigen Eigenschaften dieser Konfiguration lassen sich erkennen, wenn man die Magnetfeldstärke in eine Taylor-Reihe um das Zentrum entwickelt. Unter Berücksichtigung der ersten nicht konstanten Terme erhält man:

$$B_{\mathrm{Ioffe}} = B_0 + \frac{\kappa}{2}z^2 + \left(\frac{b^2}{2B_0} - \alpha\frac{\kappa}{2}\right)x^2 + \left(\frac{b^2}{2B_0} - (1-\alpha)\frac{\kappa}{2}\right)y^2 \tag{2.54}$$

$$= B_0 + \frac{\kappa_x}{2}x^2 + \frac{\kappa_y}{2}y^2 + \frac{\kappa_z}{2}z^2 \tag{2.55}$$

Feldbetrag der idealen Ioffe-Pritchard-Falle

mit

$$\kappa_x = \frac{b^2}{B_0} - \alpha\,\kappa \tag{2.56a}$$

$$\kappa_y = \frac{b^2}{B_0} - (1-\alpha)\,\kappa \tag{2.56b}$$

$$\kappa_z = \kappa\ . \tag{2.56c}$$

Die Magnetfeldstärke wächst entlang aller Richtungen quadratisch an. Dabei erlauben die vier unabhängigen Parameter

| | |
|---|---|
| $B_0$: | homogenes Feld entlang der Hauptachse $\mathbf{e}_z$ |
| $b$: | Feldgradient des 2D-Quadrupols in der $x$-$y$-Ebene |
| $\kappa$: | Feldkrümmung der $\mathbf{B}_x$-Komponente entlang $\mathbf{e}_z$ |
| $\alpha$: | Symmetrieparameter des Flaschenfeldes (s.o.) , |

die resultierenden Krümmungen $\kappa_x$, $\kappa_y$ und $\kappa_z$ unabhängig voneinander einzustellen und gleichzeitig die Feldstärke $B_0$ im Zentrum frei zu wählen. Damit lassen sich für die Ioffe-Pritchard-Falle folgende wichtige Eigenschaften zusammenfassen.

- Das Feld im Zentrum der Ioffe-Pritchard-Falle ist von Null verschieden. Für gefangene Atome bedeutet dies, daß sie beim Durchqueren des Fallenzentrums nicht die Spinorientierung durch Majorana-Spin-Flips verlieren. Ein Ensemble von gefangenen Atomen ist aufgrund der vorgegebenen Feldrichtung im Zentrum polarisiert.
- Die Feldstärke steigt vom Zentrum aus quadratisch an, so daß das für Atome resultierende Potential harmonisch ist.
- Das Aspektverhältnis der Ioffe-Pritchard-Falle, welches durch das Verhältnis der Feldkrümmungen gegeben ist, läßt sich in allen Achsen unabhängig einstellen, insbesondere läßt sich ein isotropes, das heißt kugelsymmetrisches Potential verwirklichen.

In der hier beschriebenen Feldkonfiguration fällt die Richtung des Magnetfeldes im Minimum mit einer Hauptachse der Krümmungsmatrix zusammen. Im allgemeinen ist dies jedoch nicht der Fall. Es lassen sich auch quadratische Minima konstruieren, in denen die Hauptachsen der Krümmung von denen der zugrundeliegenden Quadrupolstruktur abweichen. Mathematisch betrachtet geschieht dies, wenn die Achse des überlagerten Hexapolfeldes gegen die Quadrupolachse verkippt ist. Die Polarisierungsachse fällt dann nicht zusammen mit der longitudinalen Eigenschwingungsachse. In der Ioffe-Pritchard-Falle am z-förmigen Draht (Abschnitt 3.5.1) findet sich eine solche Situation.

### Flaschenfeld, Hexapol und Quadrupolring

Werfen wir zum Abschluß noch einen Blick auf das Flaschenfeld, das für den longitudinalen Einschluß bei der Ioffe-Pritchard-Falle sorgt (Gl. 2.52) und das, formal betrachtet, aus der Überlagerung eines Hexapolfeldes mit einem homogenen Feld hervorgeht.

Entlang der Hauptachse $\mathbf{e}_z$ besitzt das Flaschenfeld wie gewünscht ein Minimum, während sich die Feldstärke mit zunehmendem radialen Abstand verringert. In der Symmetrieebene $z = 0$ führt die Abnahme bis zu einer Nullstelle des Feldes, und im rotationssymmetrischen Fall ($\alpha = \frac{1}{2}$) verläuft diese „magnetische Null“ als Kreislinie im Abstand

$$\rho = \sqrt{\frac{B_0}{\kappa}} \tag{2.57}$$

um das Zentrum.

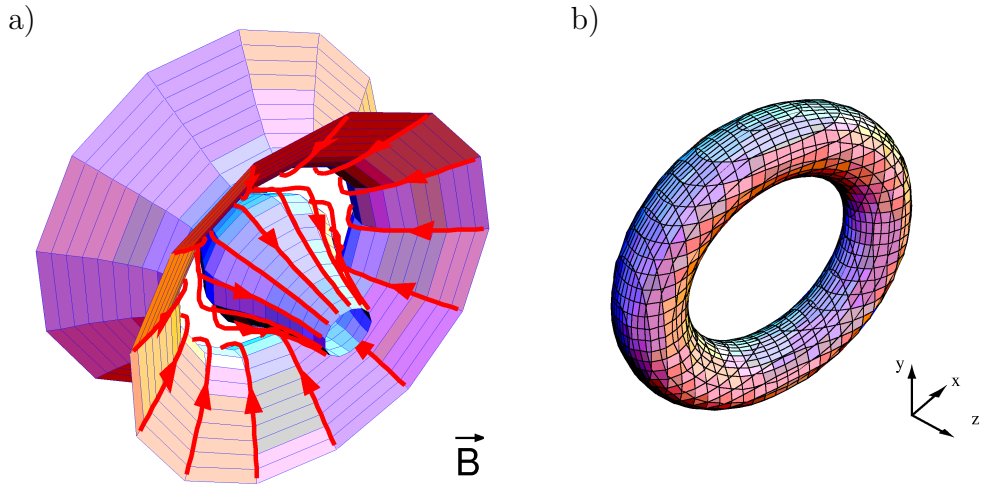



Abb. 2.7: *Das (rotationssymmetrische) Flaschenfeld besitzt im Abstand* $r = \sqrt{B_0/\kappa}$ *vom Zentrum eine ringförmige Nullinie, an der die Feldlinien wie bei einem 2D-Quadrupol verlaufen (a). Die Flächen konstanter Magnetfeldstärke liegen torusförmig um diese Linie (b).*

Bei dieser Nullinie handelt es sich um das Zentrum eines zweidimensionalen Quadrupols, dessen Feldlinienverlauf Abb. 2.7 a veranschaulicht. Im Zentrum erkennt man die flaschenförmige Aufwölbung des Feldes, während in großem Abstand vom Zentrum, wo sich das homogene Feld nicht mehr stark auswirkt, die Feldlinien in den sechs Polen des Hexapolfeldes auslaufen[7]. Flä-

[7] sichtbar im Schnitt entlang der $x$-$z$- oder $y$-$z$-Ebene

chen konstanten Magnetfeldes liegen auf einem Torus, der sich um den Ring des Nullfeldes spannt (Abb. 2.7 b).

Eine solche Feldanordnung ist im Prinzip als ringförmige Quadrupolfalle für Atome geeignet. Wegen der Majorana-Verlustprozesse, die in einer solchen Falle auftreten, ist es jedoch wünschenswert, daß sich der Quadrupolring wie der lineare 2D-Quadrupol in eine ringförmige Ioffe-Pritchard-Falle transformieren läßt. Dies ist allerdings nur möglich, wenn ein Strom $I_{\text{in}} = \frac{2\pi}{\mu_0} R\, B_0$ durch die vom Ring eingeschlossene Fläche führt. Dies folgt aus der Maxwell-Gleichung 2.10, denn das Ringintegral

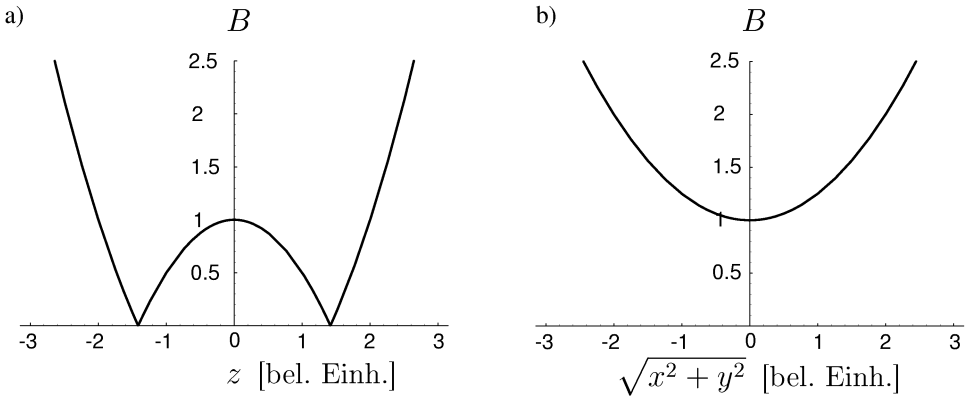
$$\int_{\text{Ring}} \mathbf{B}(\mathbf{r})\, ds = 2\pi R\, B_0 \tag{2.58}$$

läßt sich über den Stokes'schen Satz in das Oberflächenintegral

$$\oint_{\text{Innenfläche}} \mathbf{rot}\, \mathbf{B}\, d\mathbf{A} = \oint_{\text{Innenfläche}} \mu_0\, \mathbf{j}\, d\mathbf{A} = \mu_0\, I_{\text{in}} \tag{2.59}$$

transformieren. $B_0$ bezeichnet hierin das Feld, das im Minimum des „Ioffe-Pritchard-Ringes“ entsteht.

Wie aus Gleichung 2.57 hervorgeht, zieht sich der Quadrupolring auf Radius $\rho = 0$ zusammen, wenn man das homogene Feld auf $B_0 = 0$ absenkt, das




c)

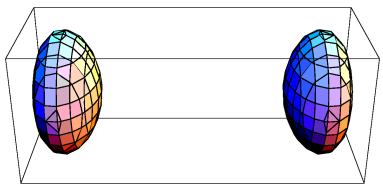


Abb. 2.8: *Wird beim Flaschenfeld das homogene Feld umgekehrt, enstehen auf der longitudinalen Achse zwei Quadrupolfallen mit entgegengesetzen Vorzeichen (a, c). In transversaler Richtung (b) bleibt das Feld größer null.*

Feld also auf einen reinen Hexapol reduziert. Weiteres Absenken von $B_0$ zu negativen Werten trennt den entstandenen Feldnullpunkt in zwei zueinander symmetrische Nullpunkte auf der Hauptachse:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2B_0}{\kappa}} \; . \tag{2.60}$$

Es handelt sich um zwei dreidimensionale Quadrupole mit entgegengesetztem Vorzeichen. Die Abbildung 2.8 zeigt den Verlauf der Feldstärke entlang der longitudinalen (a) und der transversalen (b) Achse. Von den Parametern für die Ringfalle in Abb. 2.7 ist hier nur der Parameter $B_0$ im Vorzeichen umgekehrt, die Werte sind $B_0 = -1,\ \kappa = 1,\ \alpha = \beta = \frac{1}{2}$. In der gemeinsamen Ansicht 2.9 wird deutlich, daß sich bei dieser Transformation das Volumen der Magnetfalle verringert. Dargestellt ist jeweils die Fläche $B = 0{,}25$ .

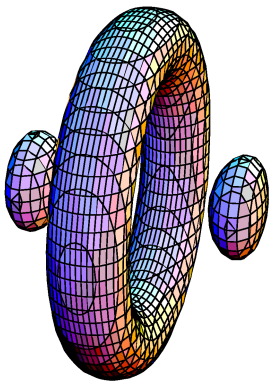


Abb. 2.9: *Relative Position von Ringfalle und Doppelquadrupol. Die Ringfalle ensteht bei positivem $B_0$, die beiden Quadrupolfallen, wenn $B_0$ negativ ist.*

### Das Hexapolfeld

Im Übergangspunkt zwischen diesen Feldtypen besteht die Magnetfalle aus einem reinen Hexapolfeld. Es liefert ebenso wie die Ringfalle und der doppelte Quadrupol einen dreidimensionalen Einschluß, weist aber im Zentrum eine mathematische Besonderheit auf:

- Der Feldbetrag eines dreidimensionalen Hexapolfeldes läßt sich im Zentrum nicht in eine Taylorreihe entwicklen, da bereits in der zweiten Ordnung die partiellen Ableitungen nicht vertauschen.

Ursache hierfür ist, wie auch beim Quadrupolfeld, die Wurzelfunktion, die im Ursprung nicht differenzierbar ist. Ob dennoch Grenzwerte für die partiellen Ableitungen existieren, hängt i. A. vom Argument der Wurzel ab, und im Falle des dreidimensionalen Hexapolfeldes existiert keine einheitliche Darstellung. Lediglich im Spezialfall des 2D-Hexapolfeldes läßt sich der Feldbetrag als

$$B_{\text{2D-Hexapol}} = B_0 \frac{x^2 + y^2}{r_0} \tag{2.61}$$

angeben.

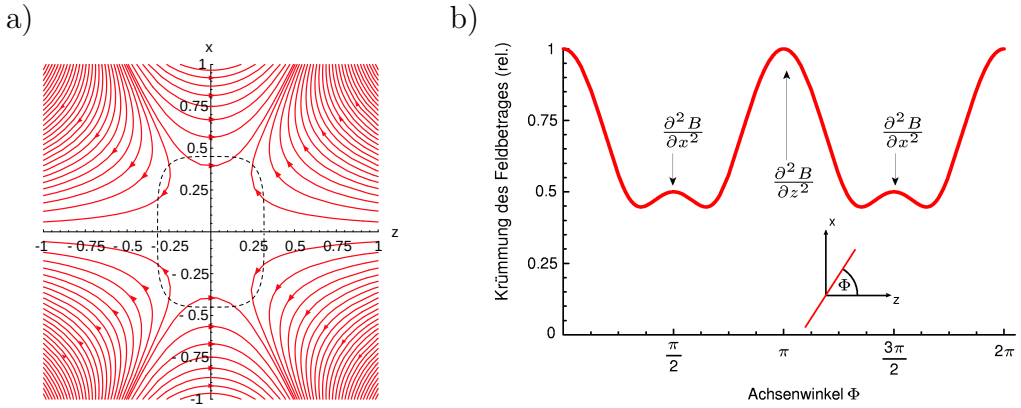



Abb. 2.10: *Das achsensymmetrische Hexapolfeld ( $\alpha = \frac{1}{2}$) ähnelt im Schnitt der x-z-Ebene dem bekannten 2D-Hexapolfeld (a). Die gestrichelte Linie markiert einen Ring konstanter Feldstärke. Der Feldbetrag im Zentrum läßt sich jedoch nicht einheitlich als Taylorentwicklung darstellen, während die zweiten Richtungsableitungen für alle Winkel* $\Phi$ *existieren (b). Als Magnetfalle führt ein solches Feld daher nicht zu einem dreidimensionalen harmonischen Potential.*

Es ist interessant zu bemerken, daß im Gegensatz zum Quadrupolfeld die erste sowie die zweite Richtungsableitung existiert. Man kann also eine Krümmung für jeden Durchquerungswinkel $\Phi$ angeben (siehe Abb. 2.10), insbesondere kehrt das Feld seine Richtung entlang einer Zentrumsgeraden nicht um.

Die Feldlinienkonfiguration in einem Schnitt durch die $x$-$z$-Ebene verdeutlicht die Situation (Abb. 2.10 a). Entlang einer Geraden durch das Zentrum ändert sich die Feldrichtung nicht. Entlang einer Linie konstanten Potentials jedoch (gestrichelte Linie) beschreibt der Feldvektor bei einem Umlauf zwei Vollkreise. Für magnetisch gefangene Atome, deren Bahn nahe am Zentrum

in geringem Magnetfeld verläuft, können daher wie in einer Quadrupolfalle Majorana-Übergänge auftreten, die das Atom in einen nicht gefangenen Zustand überführen.

## 2.3 Atome in magnetischen Fallen

In den vorangegangenen Kapiteln wurde die Struktur von Magnetfallen beschrieben, ohne auf die Konsequenzen für magnetisch gefangene Teilchen näher einzugehen. Dieser Abschnitt befaßt sich mit den physikalischen Aspekten von Magnetfallen. Da Mikrofallen eine wesentlich komplexere Gestalt annehmen können als herkömmliche Magnetfallen und insbesondere das Fallenvolumen deutlich geringer sein kann, ist es nötig, geeignete Kriterien für die Beurteilung solcher neuartiger Fallen an der Hand zu haben.

### 2.3.1 Atome im Magnetfeld

Der Hamilton-Operator, der die Wechselwirkung eines Atoms mit dem Magnetfeld beschreibt, ist in guter Näherung durch die Kopplung der Elektronen an das magnetische Feld gegeben, denn die Beiträge aus dem Kernspin sind etwa um das Massenverhältnis von Proton zu Elektron, also um den Faktor 2000, geringer:

$$\hat{H} = \frac{\mu_B}{\hbar} \left( g_S \hat{\mathbf{S}} + \hat{\mathbf{L}} \right) \cdot \mathbf{B} \, . \tag{2.62}$$

Die Operatoren $\hat{\mathbf{L}}$ und $\hat{\mathbf{S}}$ stehen für den Spin bzw. den Bahndrehimpuls sämtlicher Valenzelektronen mit den zugehörigen Quantenzahlen $l$ und $s$. Der Landé-Faktor $g_S$ ist ungefähr 2 (genauer 2,0023), und $\mu_B$ bedeutet das Bohr'sche Magneton[8] mit

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9{,}274 \cdot 10^{-24} \, \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{T}} = 1{,}400 \, \frac{\mathrm{MHz}}{\mathrm{G}} \cdot h \, . \tag{2.63}$$

Da im Atom der Spin und der Bahndrehimpuls der Elektronen aneinander koppeln (der atomare Hamilton enthält den Feinstrukturterm $\propto \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}$), eignet sich als neuer Drehimpulsoperator der Operator des gesamten (elektronischen) Drehimpulses

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}} \tag{2.64}$$

[8] Die Größe $\mu_B$ ist trotz der negativen Ladung des Elektrons hier positiv gewählt, was zum positiven Vorzeichen im Hamiltonoperator führt.

mit den zugehörigen Quantenzahlen $|L-S| \leq J \leq |L+S|$. Solange die Kopplung an das Magnetfeld viel geringer ist als die Spin-Bahn-Wechselwirkung, kann man die Unterräume zu den Quantenzahlen $L$, $S$ und $J$ getrennt betrachten. Das Wigner-Eckart-Theorem erlaubt es, für jeden dieser Unterräume einen Kopplungskoeffizienten

$g$-Faktor für den Zeeman-Effekt der Feinstruktur

$$g_J = \frac{(\hat{\mathbf{L}} + 2\,\hat{\mathbf{S}})\,\hat{\mathbf{J}}}{\hat{\mathbf{J}}^2} = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \tag{2.65}$$

einzuführen, der Gleichung 2.62 in die einfache Form

$$\hat{H} = \frac{\mu_B}{\hbar}\, g_j\, \hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{B}\,. \tag{2.66}$$

bringt (siehe z. B. [46, Band 2]).

Sind die angelegten Magnetfelder so schwach, daß die magnetische Wechselwirkung auch klein ist gegen die Wechselwirkungsenergie der Hyperfeinstruktur, so läßt sich in einem weiteren Schritt der Kopplungskoeffizient $g_F$ berechnen, der in den Unterräumen mit Quantenzahlen $L$, $S$, $J$, $I$ und $F$ gültig ist. $I$ bedeutet dabei die Quantenzahl des Kernspins und $F$ mit $|J - I| \leq F \leq |J + I|$ die Quantenzahlen zum Operator des Gesamtdrehimpulses

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{J}} + \hat{\mathbf{I}}\,. \tag{2.67}$$

Das Wigner-Eckart-Theorem führt hier auf:

$g$-Faktor für den Zeeman-Effekt der Hyperfeinstruktur

$$g_F = g_J \frac{\hat{\mathbf{J}}\hat{\mathbf{F}}}{\hat{\mathbf{J}}^2} = g_J \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{J(J+1) - I(I+1)}{2F(F+1)}\right) \tag{2.68}$$

$$\hat{H} = \frac{\mu_B}{\hbar}\, g_F\, \hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{B}\,. \tag{2.69}$$

Wird die magnetische Wechselwirkungsenergie vergleichbar mit der Energie der Hyperfeinstrukturaufspaltung, kommt man nicht umhin, den Hamilton-Operator der Hyperfeinstruktur gemeinsam mit dem magnetischen Wechselwirkungsterm zu diagonalisieren. Für $F = I \pm \frac{1}{2}$, d.h. für einen Drehimpuls $J = \frac{1}{2}$, ist dies noch in geschlossener Form möglich [38]: Die *Breit-Rabi-Formel* beschreibt die magnetische Kopplung beim Übergang von der schwachen zur starken Kopplung.

Die Eigenwerte des Hamiltonoperators in (2.69) sind

$$E_{F,m_F} = \mu_B\, g_F\, m_F\, |\mathbf{B}|\ , \tag{2.70}$$

wobei die Quantisierungsachse parallel zum magnetischen Feldvektor gewählt ist.

### 2.3.2 Majorana-Spin-Flips

Die Gleichung 2.70 läßt sich als effektives Potential für ein Teilchen im Zustand $|F, m_F\rangle$ interpretieren, wenn das Feld $|\mathbf{B}| = B(\mathbf{r}, t)$ orts- und zeitabhängig wird. Die Beschreibung der Teilchenbewegung durch dieses effektive Potential ist gültig, solange der Drehimpuls des Teilchens adiabatisch der Magnetfeldrichtung folgen kann[9]. Andernfalls kommt es zu *Majorana-Spin-Flips* [47], d. h. zum Umklappen des Drehimpulsvektors relativ zur Magnetfeldachse. In Magnetfallen führt ein Umklapp-Prozess, bei dem sich das Vorzeichen von $m_F$ ändert oder bei dem $m_F = 0$ wird, zum Verlust des gefangenen Teilchens.

In einem semi-klassischen Modell, das den Freiheitsgrad des Drehimpulses quantenmechanisch, die Bahnbewegung des Teilchens dagegen klassisch behandelt, läßt sich eine Bedingung für die Adiabatizität der Drehimpulsbewegung formulieren: Die Richtungsänderung des Magnetfeldes, die das Atom auf seiner Bahn wahrnimmt, muß langsam geschehen gegen die die Larmorfrequenz $\omega_L$, mit welcher das magnetische Moment um die Magnetachse präzediert:

$$\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\right)\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} \ll \omega_L = \frac{\mu_B\, g_F}{\hbar}\,|\mathbf{B}| \ . \tag{2.71}$$

Semi-klassische Bedingung für die Adiabatizität der Spinbewegung

In Magnetfallen vom Ioffe-Pritchard-Typ läßt sich die Änderung der Feldrichtung, die das Atom spürt, durch die transversale Oszillationsfrequenz $\omega_\perp = 2\pi\nu_\perp$ abschätzen, denn bei einer longitudinalen Schwingung ergibt sich keine Richtungsänderung des Feldes. Gleichzeitig ist die Larmorfrequenz überall größer als im Zentrum der Falle, so daß sich die Adiabatizität der Schwingungsbewegung durch den Koeffizienten

$$\boxed{\alpha_{\text{adiab}} = \frac{\omega_{L,\min}}{\omega_\perp} = \frac{\mu_B\, g_F\, B_{\min}}{\omega_\perp}}\ , \tag{2.72}$$

Adiabatizitätskoeffizient in einer Ioffe-Pritchard-Falle

charakterisieren läßt. Wenn $\alpha_{\text{adiab}} \gg 1$ ist, wird die Bewegung durch das effektive Potential (2.70) gut beschrieben.

Zu den Verlustraten durch Majorana-Spin-Flips in einer Ioffe-Pritchard-Falle gibt es mittlerweile vollständig quantenmechanische Berechnungen [48, 49]. Die Autoren in [48] betrachten ein Teilchen mit dem Spin $S = \frac{1}{2}$ bzw. $S = 1$ in einer zweidimensionalen Ioffe-Pritchard Falle. Die Umklapp-Rate ist für

[9] Mit der Interpretation als effektives Potential hat man implizit eine orts- und zeitabhängige Quantisierungsachse für die Beschreibung des inneren Zustands gewählt.

den Grundzustand am größten und wird mit

$$\gamma_{(S=1/2)} = \pi^2 \, \nu_\perp \, e^{-\frac{\pi}{2}\alpha_{\text{adiab}}} \qquad \text{für ein Teilchen mit Spin } \tfrac{1}{2} \tag{2.73}$$

$$\gamma_{(S=1)} \; = 4\pi^2 \, \nu_\perp \, e^{-2\,\alpha_{\text{adiab}}} \qquad \text{für ein Teilchen mit Spin 1} \tag{2.74}$$

angegeben[10].

S. Gov, S. Shtrikman und H. Thomas präsentieren in [49] eine weitergehende Rechnung für ein Teilchen mit Spin 1, das sich in einer dreidimensionalen Falle befindet. Das Ergebnis wird für unterschiedliche Verhältnisse von longitudinaler und transversaler Schwingung genähert, und es führt im hier betrachteten Fall einer langgestreckten Falle ($\nu_\perp \gg \nu_\parallel$) auf

Majorana-Verlustrate im Grundzustand einer Ioffe-Pritchard-Falle

$$\boxed{\gamma_{(S=1)} = 8\pi^2 \, \nu_\perp \, e^{-2\,\alpha_{\text{adiab}}}} \qquad \text{für ein Teilchen mit Spin 1}\,. \tag{2.75}$$

Beide Rechnungen gelangen zu dem Ergebnis, daß die Verlustrate exponentiell mit dem Koeffizienten $\alpha_{\text{adiab}}$ abnimmt, lediglich im absoluten Wert unterscheiden sie sich um den Faktor 2. In späteren Abschnitten werde ich mich stets auf das Ergebnis von Gov *et al.* [49] beziehen, also auf Gl. 2.75, weil es die höhere Verlustrate voraussagt.

Zwei Zahlenbeispiele illustrieren, wie groß der Wert für $\alpha_{\text{adiab}}$ mindestens gewählt werden sollte, damit Spin-Flips nicht den dominierenden Verlustmechanismus bilden:
Wählt man in einer Ioffe-Pritchard-Falle die Parameter so, daß sich eine Schwingungsfrequenz $\nu_\perp = 100\,\text{Hz}$ ergibt und der Koeffizient $\alpha_{\text{adiab}} = 5.64$ ist, so besitzt ein Teilchen im Grundzustand die Lebensdauer $\tau = \frac{1}{\gamma} = 10\,\text{s}$. Für ein Teilchen, das in einer Falle mit $\nu_\perp = 100\,\text{kHz}$ eine Lebensdauer von 100 s besitzen soll, ist $\alpha_{\text{adiab}} = 10.2$ zu wählen. Das Teilchen oszilliert dann durchschnittlich $10^7$ mal in der Falle, bevor es durch einen Umklapp-Prozeß verloren geht. Für die meisten Experimente ist dies ausreichend, so daß

$$\boxed{\alpha_{\text{adiab}} \gtrsim 10} \tag{2.76}$$

zu einer geeigneten Wahl der Fallenparamater führt.

### Rubidiumatome

In unseren Experimenten arbeiten wir mit den beiden Rubidium-Isotopen $^{85}$Rb und $^{87}$Rb. Als Atome der ersten Hauptgruppe besitzen sie im Grund-

[10] In Ref. [48] fehlt bei der Verlustrate für das Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen der Faktor $\pi$ im Exponenten (Gl. (34) ). Der Fehler läßt sich aus dem Text erschließen (vorsichtig lesen, die Referenz enthält weitere Druckfehler oder Ungenauigkeiten).

zustand die Quantenzahlen

$$L = 0,\ S = \frac{1}{2},\ J = \frac{1}{2}\ , \tag{2.77}$$

der Kernspin beträgt $I = \frac{5}{2}$ für $^{85}$Rb und $I = \frac{3}{2}$ für $^{87}$Rb. Daraus berechnen sich die Kopplungsfaktoren $g_F$:

Tabelle 2.2: **Kopplungsfaktoren für Rubidium**

| | $^{85}$Rb | $^{87}$Rb |
|---|---|---|
| Grundzustand $5\,^2S_{\frac{1}{2}}$ | $g_{F=3} = \frac{1}{3}$<br>$g_{F=2} = -\frac{1}{3}$ | $g_{F=2} = \frac{1}{2}$<br>$g_{F=1} = -\frac{1}{2}$ |
| anger. Zustand $5\,^2P_{\frac{3}{2}}$ | $g_{F'=4} = \frac{1}{2}$<br>$g_{F'=3} = \frac{7}{18}$<br>$g_{F'=2} = \frac{1}{9}$<br>$g_{F'=1} = -1$ | $g_{F'=3} = \frac{2}{3}$<br>$g_{F'=2} = \frac{2}{3}$<br>$g_{F'=1} = \frac{2}{3}$<br>$g_{F'=0} = -$ |

Die Larmorfrequenzen des oberen Grundzustandes ($F = 3$ für $^{85}$Rb, $F = 2$ für $^{87}$Rb) sind somit

$$\omega_L = \frac{\mu_B}{\hbar} g_F\, B = \begin{cases} 2\pi \cdot 467\,\mathrm{kHz}\cdot B/\mathrm{G} & \text{für } ^{85}\mathrm{Rb} \\ 2\pi \cdot 700\,\mathrm{kHz}\cdot B/\mathrm{G} & \text{für } ^{87}\mathrm{Rb}\ , \end{cases} \tag{2.78}$$

und sie unterscheiden sich von den Larmorfrequenzen des unteren Grundzustandes lediglich im Vorzeichen.

Die Breit-Rabi-Formel (s. Abb. 2.11) für die beiden Rubidiumisotope zeigt, daß die Abweichung vom linearen Verhalten erst für Magnetfeldstärken oberhalb von 200 Gauss wichtig wird. Die Feldstärken in unseren magnetischen Mikrofallen liegen deutlich unter diesem Wert, so daß hier ohne Einschränkungen mit der linearen Abhängigkeit gerechnet werden kann. Es gibt allerdings Vorschläge, Atome magnetisch einzufangen, indem man die Potentialmulde ausnutzt, welche die geeigneten Quantenzustände[11] aufweisen [50].

### 2.3.3 Charakteristische Größen in der Ioffe-Pritchard-Falle

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit zentralen Eigenschaften von Magnetfallen und bringt sie in Verbindung mit der Forderung an die Adiabatizität

[11] bei $^{85}$Rb $|F = 3,\ m_F = -2\rangle$,$|F = 3,\ m_F = -1\rangle$, bei $^{87}$Rb $|F = 2,\ m_F = -1\rangle$

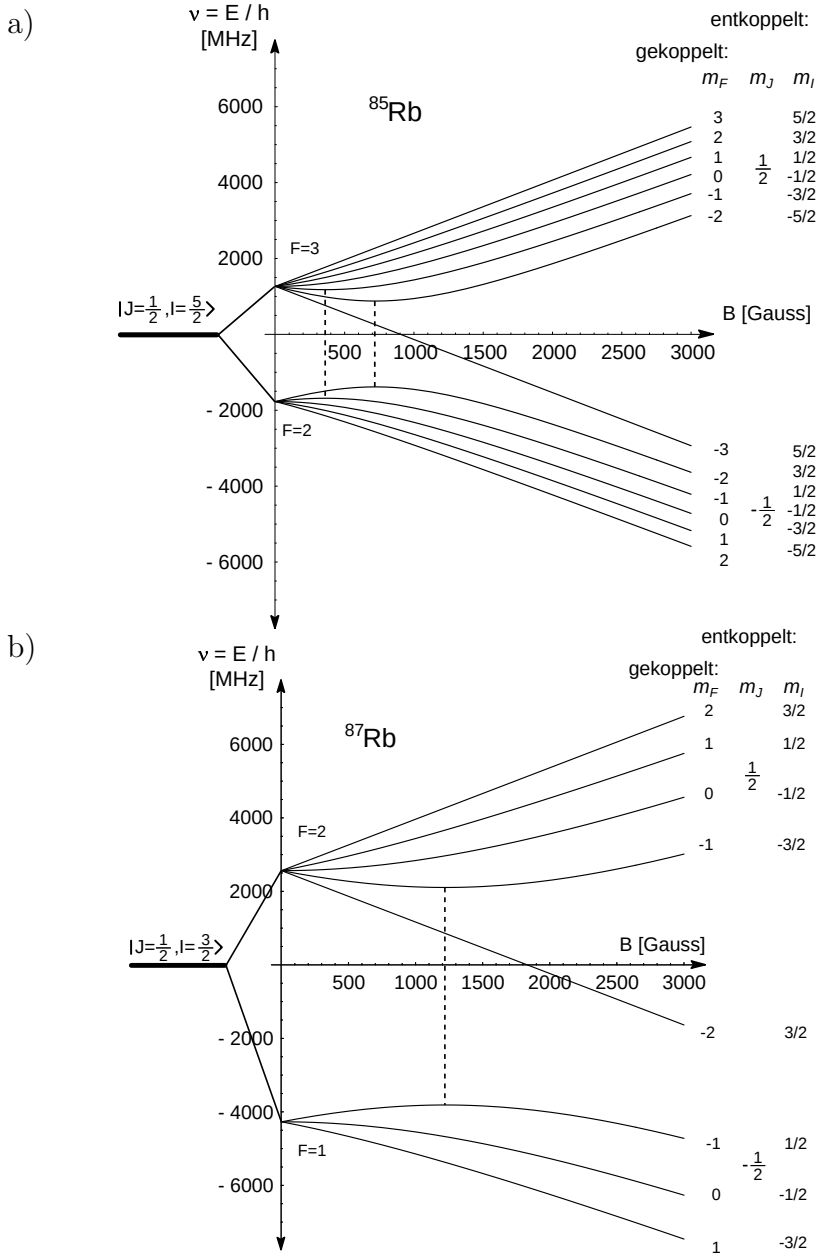



Abb. 2.11: *Die Kopplung an das Magnetfeld führt zum Zeemaneffekt der Hyperfeinstruktur. Wenn die Energieaufspaltung durch das Magnetfeld vergleichbar mit der Energie der Hyperfeinstrukturaufspaltung wird, so wird die Kopplung vom Kernspin an den Drehimpuls J aufgehoben. Die Breit-Rabi-Formel beschreibt den Verlauf der Energieeigenwerte im Übergangsbereich.*

der Drehimpulsbewegung. Im Blickpunkt steht dabei eine Falle vom Ioffe-Pritchard-Typ, die durch die Parameter

| | |
|---|---|
| $B_{\min}$ | Feldstärke im Zentrum |
| $b$ | Feldgradient des zugrundeliegenden 2D-Quadrupols |
| $\kappa$ | Feldkrümmung entlang der Quadrupolachse |

charakterisiert wird.

Damit eine Magnetfalle funktionieren kann, muß der Feldgradient entlang der vertikalen Achse groß genug sein, um die Gravitationskraft zu kompensieren:

$$\frac{\partial B}{\partial x_{\text{vert}}} > \frac{m}{\mu}\, g_{\text{grav}} \qquad \approx 15\,\text{G/cm für Rubidium}\,. \tag{2.79}$$

In traditionellen Magnetfallen ist dieser Gradient über einen großen Raumbereich konstant, in miniaturisierten Fallen, die sich nahe an den erzeugenden Strömen befinden, variiert er dagegen stark ($b \propto \frac{1}{r^2}$) mit dem Abstand zum Stromleiter. Beispielsweise erzeugt der Strom $I = 2\,\text{A}$ im Abstand $r = 1\,\text{mm}$ ein Feld von 4 Gauss und einen Feldgradienten $b = 40\,\text{G/cm}$. Für Rubidium-Atome ist dies gerade noch ausreichend, um die Gravitation zu kompensieren und gleichzeitig ein genügend tiefes Fallenpotential zu erzeugen. Der Strom von 2 A entspricht typischen Werten, die wir in unseren Mikrofallen verwenden. Damit können wir die Atome bis maximal in 1 mm Entfernung von den Drähten bringen.

Charakteristisch für eine Ioffe-Pritchard-Falle ist der quadratische Potentialverlauf in der Nähe des Zentrums. Atome, die sich in diesem energetischen Bereich befinden, führen harmonische Eigenschwingungen mit den Frequenzen $\nu_{\text{osc},\,i}$ aus:

Schwingungsfrequenz in einer harmonischen Magnetfalle

$$\boxed{\nu_{\text{osc},\,i} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_B\, g_F\, m_F}{m}}\,\sqrt{\frac{\partial^2 B}{\partial x_i^2}}} \tag{2.80}$$

$$= \begin{cases} 1{,}291\,\sqrt{\frac{\partial^2 B}{\partial x_i^2}}\,\frac{\text{cm}}{\sqrt{\text{G}}}\,\sqrt{g_F\, m_F}\,\text{Hz} & \text{für } {}^{85}\text{Rb} \\ 1{,}276\,\sqrt{\frac{\partial^2 B}{\partial x_i^2}}\,\frac{\text{cm}}{\sqrt{\text{G}}}\,\sqrt{g_F\, m_F}\,\text{Hz} & \text{für } {}^{87}\text{Rb}\ . \end{cases}$$

Verknüpft mit der Schwingungsfrequenz ist die Ausdehnung der quantenme-

chanischen Zustände, die im Modell des harmonischen Oszillators

Ausdehnung der Fallenzustände

$$\overline{x}_n = \sqrt{\langle n|\, \tilde{x}^2\, |n\rangle} = x_0 \sqrt{n + \frac{1}{2}} \tag{2.81}$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\,\omega_{\mathrm{osc},\,i}}} \tag{2.82}$$

$$= \begin{cases} 30{,}19 \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x_i^2}\right)^{-1/4} \frac{\sqrt[4]{\mathrm{G}}}{\sqrt{\mathrm{cm}}} \sqrt{g_F\, m_F}\ \mu\mathrm{m} & \text{für } {}^{85}\mathrm{Rb} \\ 30{,}55 \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x_i^2}\right)^{-1/4} \frac{\sqrt[4]{\mathrm{G}}}{\sqrt{\mathrm{cm}}} \sqrt{g_F\, m_F}\ \mu\mathrm{m} & \text{für } {}^{87}\mathrm{Rb} \end{cases} \tag{2.83}$$

beträgt ($\omega_{\mathrm{osc},\,i}$ steht für $2\pi\,\nu_{\mathrm{osc},\,i}$ mit $(i = x, y, z)$).

In einer Ioffe-Pritchard-Falle mit hohem Aspektverhältnis ergibt sich unter Verwendung von Gl. 2.56 die transversale Schwingungsfrequenz als

Transversale Schwingungsfrequenz in einer Ioffe-Pritchard-Falle

$$\nu_\perp = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_B}{m}}\, \frac{b}{\sqrt{B_{\min}}}\, \sqrt{g_F\, m_F}\ . \tag{2.84}$$

### Parameter bei konstantem Adiabatizitätskoeffizienten $\alpha_{\mathrm{adiab}}$

Eine zentrale Eigenschaft der miniaturisierten Magnetfallen ist, daß sich die Fallenparameter, insbesondere der Feldgradient $b$, über einen weiten Bereich variieren lassen. Während sich in traditionellen Magnetfallen typischerweise Gradienten zwischen 30 und 300 G/cm erzeugen lassen, erlauben die Mikrofallen Gradienten von über $10^5$ G/cm. Der Gradient ist ein besonders charakteristischer Parameter, denn er bestimmt gemeinsam mit $B_{\min}$ die transversale Oszillationsfrequenz (2.84) und die Adiabatizität der Drehimpulsbewegung. $B_{\min}$ läßt sich leicht durch ein externes Feld variieren und kann daher so angepaßt werden, daß die Drehimpulsbewegung adiabatisch ist. Um Falleneigenschaften wie Schwingungsfrequenz und Ausdehnung der quantenmechanischen Wellenfunktionen abzuschätzen, kann man daher alleine von dem Gradienten $b$ ausgehen. In Abschnitt 2.3.2 war dargelegt, daß geeignete Werte für den Adiabatizitätskoeffizienten $\alpha_{\mathrm{adiab}}$ zwischen 10 und 20 liegen. Hält man bei der Veränderung des Gradienten $b$ den Koeffizienten $\alpha_{\mathrm{adiab}}$ auf dem gleichen Wert, so bleibt die Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb einer transversalen Schwingungsperiode ein Verlustprozeß auftritt, konstant.

Mit der Beziehung (2.72)

$$\omega_{L,\,\min} = \alpha_{\mathrm{adiab}}\, \omega_\perp \tag{2.85}$$

wird die transversale Fallenfrequenz (2.84) zu

$$\omega_\perp = \left(\frac{{\mu_B}^2}{m\,\hbar}\right)^{1/3} \frac{b^{2/3}}{\alpha_{\text{adiab}}^{1/3}}\, {g_F}^{2/3}\, {m_F}^{1/3} \tag{2.86}$$

$$= 2\pi \cdot \begin{cases} 132,3\,\text{Hz}\,\left(\frac{b}{\text{G/cm}}\right)^{2/3}\, {g_F}^{2/3}\, {m_F}^{1/3}\, {\alpha_{\text{adiab}}}^{-1/3} & \text{für } {}^{85}\text{Rb} \\ 131,3\,\text{Hz}\,\left(\frac{b}{\text{G/cm}}\right)^{2/3}\, {g_F}^{2/3}\, {m_F}^{1/3}\, {\alpha_{\text{adiab}}}^{-1/3} & \text{für } {}^{87}\text{Rb}\ . \end{cases}$$

Transversale Schwingungsfrequenz bei gegebenem Koeffizienten $\alpha_{\text{adiab}}$

Ebenso läßt sich in den obigen Gleichungen die Oszillationsfrequenz eliminieren, was auf die Beziehung

$$B_{\min} = \left(\frac{\hbar^2}{\mu\, m}\right)^{1/3} b^{2/3}\, \alpha_{\text{adiab}}^{2/3} \tag{2.87}$$

$$= \begin{cases} 9,474\,\text{G}\,\left(\frac{b}{\text{G/cm}}\right)^{2/3}\, \left(\frac{m_F}{g_F}\right)^{1/3}\, \alpha_{\text{adiab}}^{2/3} & \text{für } {}^{85}\text{Rb} \\ 9,401\,\text{G}\,\left(\frac{b}{\text{G/cm}}\right)^{2/3}\, \left(\frac{m_F}{g_F}\right)^{1/3}\, \alpha_{\text{adiab}}^{2/3} & \text{für } {}^{87}\text{Rb} \end{cases}$$

führt.

Aus Gleichung 2.86 kann die maximale Frequenz abgeleitet werden, die sich mit einem Gradienten $b$ bei gegebenem Adiabatizitätskoeffizienten erreichen läßt.

Skalierungsverhalten der Schwingungsfrequenz

$$\boxed{\omega_{\text{osc},\,(\alpha_{\text{adiab}}\,=\,\text{const})} \propto b^{2/3}\ .} \tag{2.88}$$

### Diskussion der Fallenparameter

Mit den miniaturisierten Magnetfallen, die in dieser Arbeit entwickelt wurden, lassen sich Gradienten erzeugen, die einige hundert mal größer sind als Gradienten in traditionellen Magnetfallen. Die Tabelle 2.3 zeigt Fallenparameter, die sich mit unserem derzeitigen experimentellen Aufbau realisieren lassen. Die Beispiele sind für Leiterbahnen der Breite 50 $\mu$m und mit einem Strom von 2 A berechnet; im Abstand von 50, 200 bzw. 250 $\mu$m entstehen bei dieser Anordnung Gradienten zwischen $10^3$ und $1{,}3{\cdot}10^4$ G/cm. In den beiden ersten Spalten ist $B_{\min}$ so gewählt, daß der Koeffizient $\alpha_{\text{adiab}} = 10$ wird (berechnet für Rubidium-Atome im Zustand $|F = 2, m_F = 2\rangle$), die letzte Spalte zeigt Werte, wie wir sie bei den Experimenten zum *magnetischen Förderband* gewählt haben.

Tabelle 2.3: **Eigenschaften einer Miniaturfalle bei $I$=2 A**

| | $z_0 = 50\mu$m | $z_0 = 200\mu$m | $z_0 = 250\mu$m |
|---|---|---|---|
| $b$ | $1{,}28{\cdot}10^4$ G/cm | 985 G/cm | 634 G/cm |
| $B_{\min}$ | 0,38 G | 0,069 G | 4 G |
| $\alpha_{\text{adiab}}$ | 10 | 10 | 6900 |
| $\nu_\perp$ | 26,5 kHz | 4,80 kHz | 404 Hz |
| $x_0 = \overline{x}_0\sqrt{2}$ | 66,2 nm | 156 nm | 536 nm |
| $\tau$ | 232 s | 1280 s | $\sim 10^{6000}\,s$ |

*Eigenschaften einer 2D-Ioffe-Pritchard-Falle, die in der Entfernung $z_0$ von einer 50 $\mu$m breiten Leiterbahn entsteht. In Spalte 1 und 2 ist $B_{min}$ so gewählt, daß sich $\alpha_{adiab} = 10$ ergibt.*

Bereits mit Strukturen dieser Größe lassen sich also Fallen erzeugen, mit denen das Lamb-Dicke-Regime [51] erreicht wird. Für Rubidiumatome liegt der Übergang zum Lamb-Dicke-Bereich bei:

$$\nu_{\text{osc}} = \frac{E_{\text{rec}}}{h} = \frac{h}{2m\lambda^2} \tag{2.89}$$

$$= \begin{cases} 3{,}825\,\text{kHz} & \text{für } {}^{85}\text{Rb} \\ 3{,}737\,\text{kHz} & \text{für } {}^{87}\text{Rb} \end{cases}, \tag{2.90}$$

was gleichbedeutend ist mit der Eigenschaft, daß die Ausdehnung des Grundzustandes

$$\overline{x}_{n=0} = \frac{\lambda}{2\pi} \tag{2.91}$$

ist.

### 2.3.4 Quantenzustände in Magnetfallen

Magnetische Fallen, die von kleinen Strukturen erzeugt werden, besitzen ein wesentlich geringeres Volumen als herkömmliche Magnetfallen. Die Konsequenz ist, daß in einer Mikrofalle weniger Quantenzustände Platz finden. Solange man sich nur für die untersten Energieniveaus interessiert, spielt das Fallenvolumen keine Rolle. Will man jedoch ein thermisches Ensemble von Atomen in einer Mikrofalle einfangen oder leiten, ist die Größe der

Falle von Bedeutung. In unseren Experimenten werden die Mikrofallen aus einer magneto-optischen Falle geladen, deren Phasenraumdichte typischerweise $n\,\Lambda^3 \approx 10^{-6}$ beträgt, mit

$$n \qquad \text{atomare Dichte} \tag{2.92}$$

$$\Lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi\, m\, k_B T}} \qquad \text{thermische de-Broglie-Wellenlänge.} \tag{2.93}$$

In einer Falle, die eine Tiefe $E_{\max}$ besitzt und $N_Q(E_{\max})$ Zustände faßt, können daher von den ursprünglich vorhandenen Atomen maximal

$$N_{\text{capt}} \leq n\,\Lambda^3 \cdot N_Q(E_{\max}) \tag{2.94}$$

gefangen werden.

Diese Gleichung ermöglicht eine grobe (und etwas zu optimistische) Abschätzung der Atomzahl, die sich (bei gegebener Phasenraumdichte) in dem betrachteten Fallenpotential speichern läßt. Für genauere Betrachtungen müssen Potentialform und die thermische Verteilung der Atome darin mit einbezogen werden.

### Zustandsdichte und Zahl der Zustände

Um einen Eindruck von der Zahl der Quantenzustände zu bekommen, die unterhalb einer bestimmten Energie $E_{\max}$ in einem Potential Platz finden, ist es nicht nötig, die vollständige Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung zu suchen. Im Rahmen der statistischen Mechanik läßt sich die Anzahl der Quantenzustände abschätzen, indem man das zur Verfügung stehende Phasenraumvolumen berechnet und mit dem Volumen der quantenmechanischen Einheitszelle $h^3$ ins Verhältnis setzt [52]:

$$N_Q = \frac{1}{h^3} \iint\limits_{E_{tot}<E_{\max}} d^3p\; d^3r\ . \tag{2.95}$$

Spaltet man die Energie $E_{tot}$ in potentiellen und kinetischen Anteil auf

$$E_{tot} = U(\mathbf{r}) + \frac{p^2}{2m}\ , \tag{2.96}$$

so läßt sich das Integral über die Impulskoordinaten berechnen und führt (im dreidimensionalen Fall) auf

$$N_Q = \frac{4\pi}{3}\Big(\frac{\sqrt{2m}}{h}\Big)^3 \int\limits_{U(\mathbf{r})<E_{\max}} \Big(E_{\max} - U(\mathbf{r})\Big)^{\frac{3}{2}}\, d^3r \tag{2.97}$$

$$= \frac{4\pi}{3}\Big(\frac{\sqrt{2m}}{h}\Big)^3 \int\limits_{U(\mathbf{r})<E_{\max}} D_r(U)\, \Big(E_{\max} - U(\mathbf{r})\Big)^{\frac{3}{2}}\, dE\ . \tag{2.98}$$

Mit Hilfe der Zustandsdichte $D_r(U)$ in Gleichung 2.98 läßt sich das ursprünglich dreidimensionale Ortsintegral in ein eindimensionales Integral im Energieraum überführen, das sowohl für theoretische als auch für numerische Berechnungen hilfreich ist:

$$D_r(U)\, dU \equiv d^3r\ . \tag{2.99}$$

Anzahl der Quantenzustände mit Energie $E < E_{\max}$

In analoger Weise läßt sich die Anzahl der Quantenzustände berechnen, wenn die Geometrie eine niedrigere Dimensionalität $d$ vorgibt. Wird die Zustandsdichte $D_r(U)$ entsprechend angepaßt, findet man:

$$N_Q = g_d \Big(\frac{\sqrt{2m}}{h}\Big)^d \int\limits_{U(\mathbf{r})<E_{\max}} D_r(U)\, \Big(E_{\max} - U(\mathbf{r})\Big)^{\frac{d}{2}}\, dU \tag{2.100}$$

$$g_d = \frac{2\,\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} = \begin{cases} 2 & d=1 \\ 2\pi & d=2 \\ 4\pi & d=3 \end{cases}\ , \tag{2.101}$$

worin $\Gamma(x)$ die Euler'sche Gamma-Funktion bedeutet.

Dieses Integral schließlich läßt sich analytisch lösen, wenn der Verlauf des Potentials $U(\mathbf{r})$ einem Potenzgesetz folgt. Man erhält aus $U(\mathbf{r}) = U(r)$ zunächst die energetische Zustandsdichte entsprechend der Dimension d,

$$U(r) = U_0\Big(\frac{r}{r_0}\Big)^{\alpha} \tag{2.102}$$

$$D_r(U) = g_d\, \frac{{r_0}^d}{\alpha\, U_0}\, \Big(\frac{U}{U_0}\Big)^{\frac{d}{\alpha}-1}\ , \tag{2.103}$$

womit sich die Zahl der Zustände nach Gleichung 2.100 zu

$$\boxed{N_Q = f_{d,\alpha}\, \Big(\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\Big)^d\, \Big(\frac{r_0}{{U_0}^{1/\alpha}}\Big)^d\, \big(E_{\max}\big)^{\frac{d}{2}+\frac{d}{\alpha}}} \tag{2.104}$$

mit

$$f_{d,\alpha} = \frac{d}{\alpha}\, 2^{1-d}\, \frac{\Gamma(\frac{d}{\alpha})}{\Gamma(\frac{d}{2})\,\Gamma(\frac{d}{2}+\frac{d}{\alpha}+1)} \tag{2.105}$$

ergibt.

Der „geometrische“ Faktor $f_{d,\alpha}$ hängt ausschließlich von der Dimension $d$ und dem Exponenten $\alpha$ des Potentials ab, so daß sich die Zunahme der Quantenzustände $N_Q$ mit der Energie $E_{\max}$ direkt aus der Gleichung 2.104 ablesen läßt. Für ein gegebenes Potential nimmt die Zahl der Zustände mit $E < E_{\max}$ um so stärker mit $E_{\max}$ zu, je schwächer der Einschluß, also je geringer der Exponent $\alpha$ ist:

$$\boxed{N_Q \propto {E_{\max}}^{\frac{d}{2}+\frac{d}{\alpha}}}\,. \tag{2.106}$$

Besonders charakteristische Potentialformen sind das lineare Potential ($\alpha = 1$), wie es in einer Quadrupolfalle auftritt, das Potential des harmonischen Oszillators ($\alpha = 2$), sowie das kastenförmige Potential ($\alpha \to \infty$). Alle drei Varianten tauchen – in unterschiedlicher Dimensionalität – in magnetischen Mikrofallen auf. Die beiden Tabellen 2.4 und 2.5 geben eine Übersicht über das Skalierungsverhalten von $N_Q$ sowie über die Werte von $f_{d,\alpha}$.

Tabelle 2.4: **Skalierungsverhalten der gebundenen Zustände**

| | linear $\alpha = 1$ | harmonisch $\alpha = 2$ | „Box“ $\alpha = \infty$ |
|---|---|---|---|
| $d = 1$ | $\frac{3}{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ |
| $d = 2$ | 3 | 2 | 1 |
| $d = 3$ | $\frac{9}{2}$ | 3 | $\frac{3}{2}$ |

*Die Zahl der Zustände mit $E < E_{max}$ skaliert gemäß $N_Q \propto \left(E_{max}\right)^{\frac{d}{2}+\frac{d}{\alpha}}$. In der Tabelle sind die Werte des Exponenten $\frac{d}{2}+\frac{d}{\alpha}$ für ein lineares, quadratisches bzw. kastenförmiges Potential angegeben.*

Für den eindimensionalen harmonischen Oszillator ($d = 1$, $\alpha = 2$) ergibt sich der bekannte lineare Anstieg der Zustandszahl mit der Energie. Setzt man zu der Gleichung $U = \left(\frac{U_0}{{r_0}^2}\right) r^2$ die entsprechenden Parameter in 2.104 ein,

Tabelle 2.5: **Geometrischer Faktor $f_{d,\alpha}$**

| | linear $\alpha = 1$ | harmonisch $\alpha = 2$ | „Box“ $\alpha = \infty$ |
|---|---|---|---|
| $d = 1$ | $\frac{4}{3\,\pi}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{\pi}$ |
| $d = 2$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $d = 3$ | $\frac{32}{315\,\pi}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{2}{3\,\pi}$ |

läßt sich aus

$$N_Q = \frac{E_{\max}/\hbar}{\sqrt{\frac{2U_0/{r_0}^2}{m}}} \tag{2.107}$$

die Energie des n-ten Zustandes gewinnen:

$$E_n = n \cdot \hbar \sqrt{\frac{2U_0/{r_0}^2}{m}} \; . \tag{2.108}$$

Der so gewonnene Niveauabstand stimmt mit der quantenmechanischen Rechnung überein. Daß die Energie des Grundzustandes $E_{N=0} = 0$ ist, ist die Signatur des semi-klassischen Ansatzes in (2.95).

In vielen Situationen läßt sich das Fallenpotential nicht als reine Potenzfunktion schreiben. Die Falleneigenschaften lassen sich dann je nach der Temperatur der eingeschlossenen Atomwolke berechnen, indem das Verhalten der Zustandsdichte bei der Energie $E = k_B T$ verwendet wird. Dazu kann in den Gleichungen 2.103 – 2.106 jeweils der Ausdruck $\frac{d}{\alpha}$ durch $\xi$ ersetzt werden mit [53, 54]

$$\frac{d}{\alpha} \longrightarrow \xi \tag{2.109}$$

$$\xi = \frac{\partial V_e}{\partial T} \frac{T}{V_e} \tag{2.110}$$

$$V_e \equiv \frac{N}{n} \, , \tag{2.111}$$

und der Term $\frac{d}{2}$ wird zu $\frac{3}{2}$. $V_e$ bezeichnet hierin das effektive Volumen einer thermischen Atomwolke, $n$ die Anzahldichte der Atome. Die Parameter, die sich in den Mikrofallen typischerweise ergeben, reichen von $\xi = 1$ im Zentrum einer zweidimensionalen Ioffe-Pritchardfalle bis $\xi = 3$ in einer dreidimensionalen Quadrupolfalle. Eine wichtige Rolle spielt der Parameter $\xi \approx 2$ bei

der Kompression einer zweidimensionalen Ioffe-Pritchard-Falle. Die magnetisch gefangene Atomwolke hat eine so hohe Temperatur, daß die Atome im wesentlichen den linearen Anstieg des 2D-Quadrupol-Anteils spüren.

Schließlich lassen sich mit magnetischen Mikrofallen auch Potentialformen verwirklichen, die durch ein einfaches Potenzgesetz nicht zu beschreiben sind. Dazu gehört insbesondere die Realisierung von mehreren nebeneinanderliegenden magnetischen Fallen. In diesen Fällen lassen sich die Fallenparameter mit Hilfe von Gleichung 2.104 numerisch berechnen (s. a. Abschnitt 3.4.3).

# 3 Magnetische Mikrofallen

Im vorangegangenen Kapitel haben wir gesehen, welche Feldstrukturen magnetischen Fallen zugrunde liegen. Außer Betracht blieb dabei die Realisierung der Felder, die traditionellerweise mit makroskopischen Spulen und Drähten geschieht. Die Idee, Magnetfallen mit einer Anordnung von „Spulen“ zu erzeugen, deren Geometrie auf eine Ebene zusammengedrückt ist und die als Leiterbahnen auf einem Substrat realisiert sind, wurde zum ersten Mal 1995 von Weinstein und Libbrecht formuliert [16]. War der Ansatz für die miniaturisierten Fallen damals, die hohen Felder und Feldgradienten in der Nähe der magnetfelderzeugenden Strukturen zu nutzen, so ist im Verlauf dieser Arbeit ein zweiter Aspekt in den Vordergrund gerückt, daß nämlich mit solchen Mikrofallen neuartige magnetische Strukturen und Fallenformen verwirklicht werden können, die sich der Erzeugung durch klassische Spulen entziehen.

In diesem Kapitel werden daher nicht nur die Leiterstrukturen für die im Experiment verwirklichten Magnetfallen besprochen, vielmehr liegt der Schwerpunkt auf dem Prinzip, nach dem sich diese Mikrofallen entwerfen lassen. Die Ausnutzung des Nahfeldes bringt es mit sich, daß die Symmetrie der entstehenden Magnetfallen nicht so hoch ist wie bei konventionellen Magnetfallen. Ein Abschnitt dieses Kapitels wendet sich daher dem Problem zu, die komplexen Feldstrukturen von Mikrofallen geeignet darzustellen und physikalisch zu bewerten.

Ein letzter Teil widmet sich den Skalierungsgesetzen von magnetischen Mikrofallen: Es wird untersucht, an welche Grenzen man stößt, wenn die Abmessungen der magnetfelderzeugenden Strukturen immer weiter reduziert werden.

## 3.1 Überblick

Ein zentrales Ergebnis aus den Überlegungen des vorangegangenen Kapitels ist die Erkenntnis, daß jeder Magnetfalle, die im Zentrum ein parabolisches Potential besitzt, ein zweidimensionales Quadrupolfeld zugrunde liegt. Fügt man hinzu, daß sich auch jedes dreidimensionale Quadrupolfeld als Überlagerung von zweidimensionalen Quadrupolfeldern beschreiben läßt, wird die

Bedeutung klar, die das 2D-Quadrupolfeld als Baustein für Magnetfallen besitzt. In der Realisierung der miniaturisierten Ioffe-Pritchard-Falle, die in [16] vorgeschlagen ist (Abb. 3.1), liegt diese Achse des Quadrupols senkrecht zur Oberfläche.

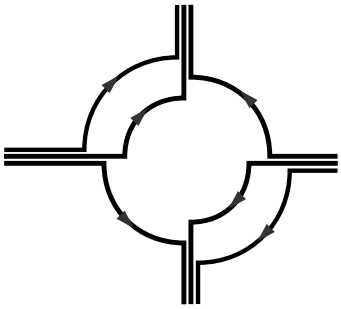


Abb. 3.1: *Leiterkonfiguration für eine miniaturisierte Ioffe-Pritchard-Falle nach Weinstein und Libbrecht [16].*

Eine wesentlich größere Flexibilität in der Fallengestaltung erreicht man jedoch, wenn man die Quadrupolachse parallel zur Oberfläche legt: sowohl in longitudinaler als auch in transversaler Richtung läßt sich dann die resultierende Magnetfalle durch zusätzliche Leiterbahnen variieren. Das 2D-Quadrupolfeld läßt sich in dieser Anordnung besonders leicht realisieren, indem das Tangentialfeld eines einzelnen stromdurchflossenen Leiters mit einem homogenen Feld senkrecht zur Leiterachse überlagert wird:

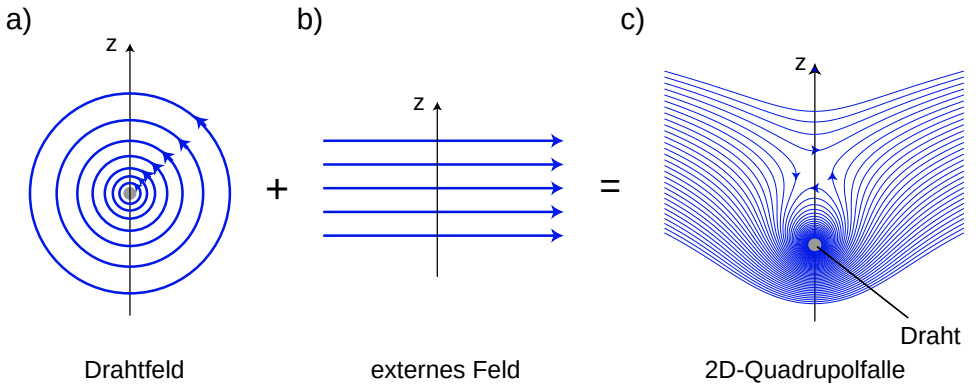



Abb. 3.2: *Prinzip der Drahtfallen: Das Tangentialfeld eines stromdurchflossenen Leiters (a) und ein homogenes Feld (b) überlagern sich zu einem zweidimensionalen Quadrupolfeld (c) mit Zentrum oberhalb des Drahtes.*

Die folgenden Abschnitte beschreiben im Detail, nach welchem Übersetzungsprinzip sich bekannte Magnetfeldkonfigurationen als Mikrofalle realisieren

lassen und wie neuartige Varianten entwickelt werden können. Da wir hierbei die $\mathbf{e}_z$-Achse für die Richtung senkrecht zur Substratfläche reservieren, verwenden wir $\mathbf{e}_x$ für die Achse des zweidimensionalen Quadrupols.

## 3.2 Das Biot-Savart'sche Gesetz

Ausgangspunkt aller Magnetfeldberechnungen ist das Biot-Savart'sche Gesetz (z. B. [40])

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \, d^3r' \; . \tag{3.1}$$

Es ist die Integralgleichung zu den Maxwellgleichungen 2.9 und 2.10 und bildet gemeinsam mit der Kontinuitätsgleichung für zeitunabhängige Ströme

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \tag{3.2}$$

die allgemeine Lösung der Magnetostatik. Für unendlich dünne Leiter wird das Biot-Savart'sche Gesetz gewöhnlich in der Form

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = I \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \, . \tag{3.3}$$

geschrieben. Alternativ dazu läßt sich die Gleichung für das magnetische Vektorpotential angeben, das in der Coulomb-Eichung die Gestalt

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, d^3r' \tag{3.4}$$

annimmt.

Betrachtet man die Felder in einiger Entfernung von den erzeugenden Stromleitern, so beschreibt Gleichung 3.3 ihren Verlauf angemessen. Die allgemeinere Form 3.1 erlaubt zusätzlich, den Feldverlauf nahe an der Leiteroberfläche zu berechnen. Die Felder der hier betrachteten Mikrofallen bewegen sich häufig in einem Grenzbereich, welcher die allgemeine Form erfordert. Für die meisten Berechnungen kann ein Modell verwendet werden, welches einen homogenen Stromfluß in zwei Dimensionen annimmt.

## 3.3 2D-Quadrupolfelder von Drähten und Leiterbahnen

Aus den allgemeinen Überlegungen zu Magnetfeldern in Kapitel 2.2.6 war hervorgegangen, daß ein zweidimensionales Quadrupolfeld die wesentliche

„Zutat“ für harmonische magnetische Fallen ist. Ein solches Quadrupolfeld entsteht z. B. in der Nähe von stromdurchflossenen Drähten, sobald ein homogenes Feld überlagert wird. Auf diese Weise ist es möglich, mit wenigen Drähten und homogenen Feldern magnetische Fallen zu konstruieren. Während das Quadrupolfeld, welches in der Nähe eines unendlich dünnen Drahtes entsteht, stark von der idealen Form eines Quadrupols abweicht, lassen sich mit Hilfe von flachen Leitern Felder erzeugen, die weniger verzerrt sind.

### 3.3.1 Quadrupolfeld am dünnen Draht

Ein gerader Draht mit einem kreisförmigen Leiterquerschnitt erzeugt stets ein Magnetfeld, das in konzentrischen Kreisen um die Drahtachse verläuft. Dies gilt auch, wenn man lediglich das Feld eines Leiterabschnitts betrachtet, der sich nicht unendlich lang ausdehnt. Befindet man sich nahe genug am Leiter, daß der Einfluß von Anfang und Ende vernachlässigbar ist, so wirkt dieser wie ein unendlich dünner Draht mit unendlich langer Ausdehnung.

Überlagert man dem Magnetfeld des Drahtes

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}\, \mathbf{e}_I \times \mathbf{e}_r \tag{3.5}$$

$$\nabla B = -\mathbf{e}_r \cdot \frac{\mu_0}{2\pi}\, \frac{I}{r^2} \tag{3.6}$$

ein konstantes Feld $\mathbf{B}_0$ senkrecht zur Drahtachse (hier $B_0 = B_{0,y}\, \mathbf{e}_y$), so heben sich am Ort

Entfernung des 2D-Quadrupols vom Draht

$$\boxed{z_0 = \frac{\mu_0}{2\pi}\, \frac{I}{B_{0,y}}} \tag{3.7}$$

das externe Feld und das Drahtfeld gerade gegeneinander auf (s. Abb. 3.4). An dieser Stelle befindet sich das Zentrum eines zweidimensionalen Quadrupolfeldes (vgl. Tabelle 2.1 auf Seite 14), das durch den Feldgradienten

Gradient im Zentrum des Quadrupols

$$\boxed{b = \frac{2\pi}{\mu_0}\, \frac{B_{0,y}^2}{I}}\,, \tag{3.8}$$

charakterisiert wird, und dessen Polachsen um 45° gegen das externe Feld geneigt sind. Da der Gradient hier nicht konstant ist sondern $\propto \frac{1}{z^2}$ mit dem Abstand skaliert, weicht der Feldverlauf von dem des idealen Quadrupolfeldes ab.

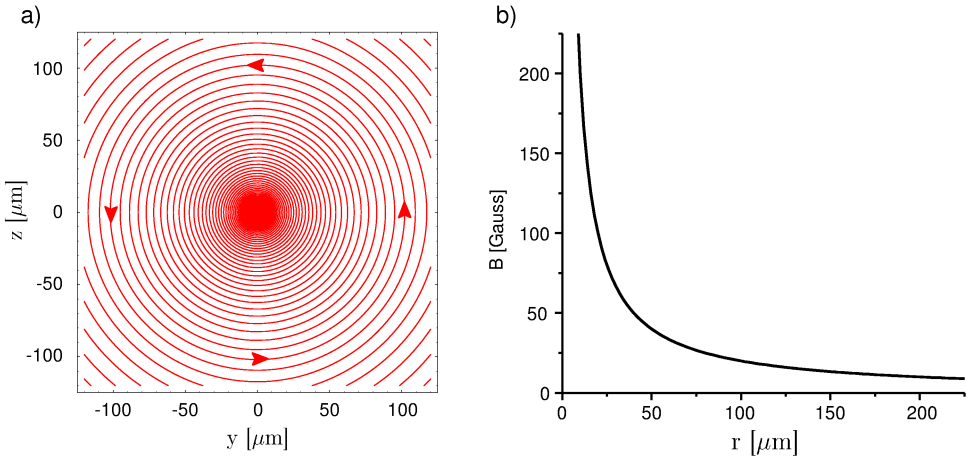



Abb. 3.3: *a) Magnetfeldlinien in der Umgebung eines unendlich langen Drahtes längs* $\mathbf{e}_x$*, b) radialer Verlauf der Feldstärke für einen Strom von 1 A*

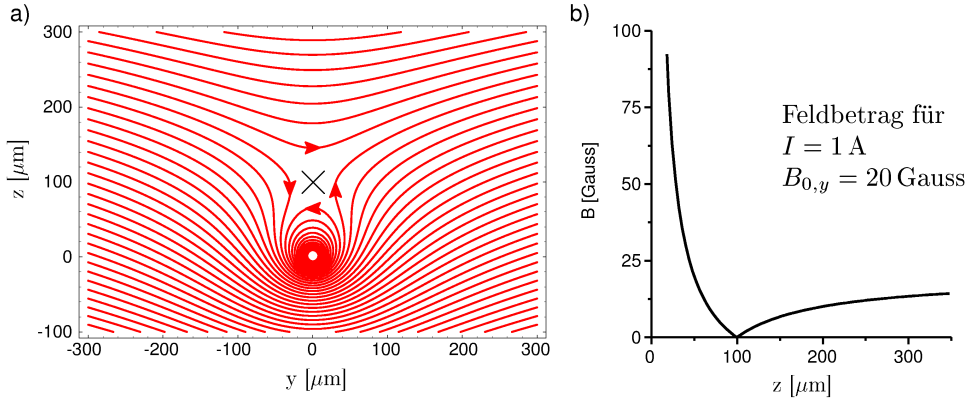



Abb. 3.4: *Aus dem Magnetfeld des Drahtes* ($I = 1\,A$) *entsteht bei der Überlagerung mit dem konstanten Feld* $B_{0,y} = 20\,G$ *ein zweidimensionales Quadrupolfeld mit Zentrum über dem Draht (a). Entlang der z-Achse besitzt der Feldbetrag eine Nullstelle mit unstetiger Ableitung (b).*

Interessanterweise wächst der Feldgradient, wenn bei konstantem Feld $B_{0,y}$ der Strom verringert wird, denn mit dem abnehmenden Strom reduziert sich nicht nur das Feld des Drahtes, außerdem rückt der Ort der Falle $r_0$ näher an die Oberfläche. Einen Überblick über die verschiedenen Abhängigkeiten der Fallenparameter gibt Tabelle 3.1.

Die angegebenen Beziehungen gelten für einen unendlich dünnen und unendlich langen Draht. Sie sind außerdem gültig für einen runden Draht, solange

sich das Zentrum des Quadrupols außerhalb des Leiters befindet.

Tabelle 3.1: **Fallenparameter am dünnen Draht**

| | $(B_0,\, b)$ | $(B_0,\, I)$ | $(B_0,\, r_0)$ | $(b,\, I)$ | $(b,\, r_0)$ | $(I,\, r_0)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $B_0$ | | | | $\sqrt{\frac{\mu_0}{2\pi}\, I\, b}$ | $b\, r_0$ | $\frac{\mu_0}{2\pi}\, \frac{I}{r_0}$ |
| $b$ | | $\frac{2\pi}{\mu_0}\, \frac{{B_0}^2}{I}$ | $\frac{B_0}{r_0}$ | | | $\frac{\mu_0}{2\pi}\, \frac{I}{{r_0}^2}$ |
| $I$ | $\frac{2\pi}{\mu_0}\, \frac{{B_0}^2}{b}$ | | $\frac{2\pi}{\mu_0}\, B_0\, r_0$ | | $\frac{2\pi}{\mu_0}\, b\, {r_0}^2$ | |
| $r_0$ | $\frac{B_0}{b}$ | $\frac{\mu_0}{2\pi}\, \frac{I}{B_0}$ | | $\sqrt{\frac{\mu_0}{2\pi}\, \frac{I}{b}}$ | | |

*Die Vorgabe von zwei der vier Fallenparameter $B_0$, $b$, $I$, $r_0$bestimmt jeweils die beiden übrigen Parameter. Daher läßt sich jeder Parameter als Funktion von zwei beliebigen anderen ausdrücken. $B_0$ steht hier für $B_{0,y}$.*

### 3.3.2 Quadrupolfeld am breiten Draht

In den hier vorgestellten Experimenten bestehen die stromführenden Strukturen nicht aus runden Drähten sondern aus Leiterbahnen, die auf einem Substrat aufgebracht sind. Sie sind etwa $7\mu$m hoch und haben eine Breite von 50 und $300\,\mu$m. Im Nahbereich, d. h. für Abstände kleiner als die Leiterbahnbreite, weicht das Magnetfeld stark von dem Feld eines dünnen Drahtes ab: In direkter Nähe zur Leiterbahnoberfläche verläuft das Magnetfeld linear mit dem Abstand, der Feldgradient ist konstant. Bei dem gegebenen Verhältnis von Höhe zu Breite eignet sich für die Feldberechnung ein Modell, das einen zweidimensionalen Stromfluß annimmt[1]. Auf der flachen Seite des Leiters ist die Divergenz des Feldbetrages, die sich beim dünnen Draht ergibt, aufgehoben, lediglich an den Eckpunkten tritt in der Komponente senkrecht zur Leiterfläche eine logarithmische Divergenz auf. Im Diagramm der Abbildung 3.5 wird ersichtlich, daß der Feldbetrag in Oberflächennähe gleichmäßig anwächst und gegen einen definierten Wert strebt. Für einen

[1] Im folgenden bezeichne ich solche Stromleiter als „unendlich flach“ oder als breit, um sie von den eindimensionalen „unendlich dünnen“ Leitern abzugrenzen.

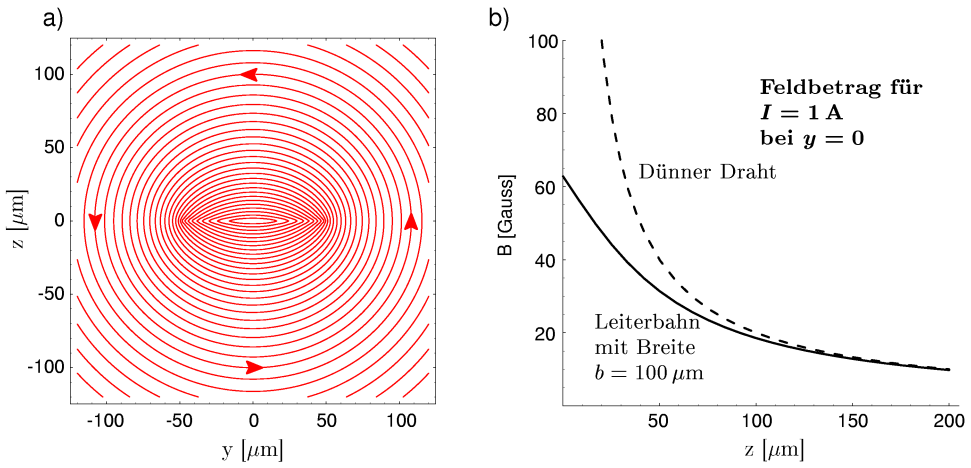



Abb. 3.5: *a) Magnetfeldlinien einer 100 µm breiten Leiterbahn, deren Höhe als unendlich gering angenommen ist, b) Feldstärke über dem Leiter bei einem Strom von 1 A: Die Abweichung vom Feld des unendlich dünnen Leiters wird deutlich, sobald der Abstand zum Leiter geringer wird als dessen Breite, der Feldbetrag an der Oberfläche beträgt etwa 62 G.*

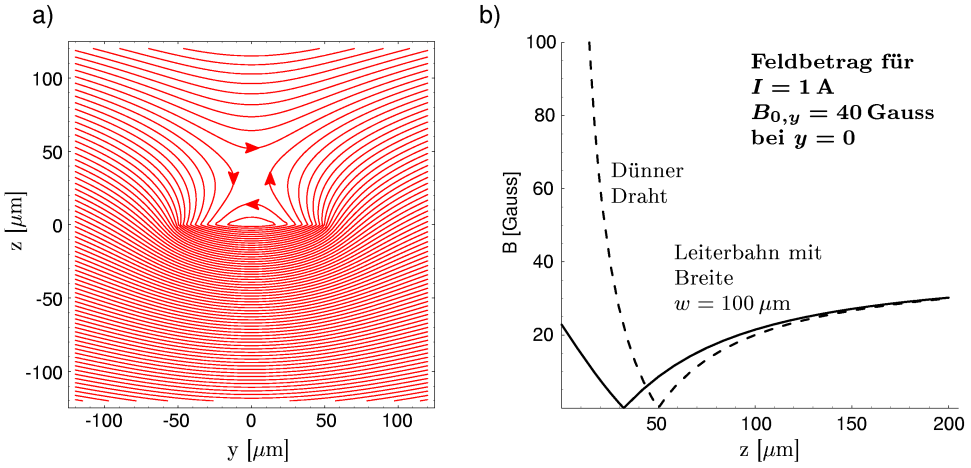



Abb. 3.6: *a) Quadrupolfalle über einer 100 µm breiten Leiterbahn. Entsteht die Falle in einer Entfernung von weniger als 100 µm, so weicht der Verlauf der Feldlinien weniger vom Verlauf des idealen Quadrupols ab, als dies bei der Falle am unendlich dünnen Draht (Abb. 3.4) der Fall ist.*

Leiter der Breite $w$, der entlang der $\mathbf{e}_x$-Achse den Strom $I$ führt, findet man

die Abstandsabhängigkeit (s. a. Anhang C)

$$\mathbf{B}(x=0,y=0,z) = \mathbf{e}_y \cdot \frac{\mu_0}{\pi}\frac{I}{w}\,\operatorname{arccot}\frac{2z}{w} \tag{3.9a}$$

$$= \begin{cases} \mathbf{e}_y \cdot \left(\frac{\mu_0}{2}\frac{I}{w} - \frac{2\mu_0}{\pi}\frac{I}{w^2}\,z\right) & z << w \\ \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{z} & z >> w \end{cases} \tag{3.9b}$$

Im Gegensatz zum 2D-Quadrupol am dünnen Draht wird hier der Feldgradient konstant, wenn sich das Fallenzentrum der Oberfläche nähert:

Feldgradient über einem breiten Leiter

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{2\mu_0}{\pi}\frac{I}{w^2+4z^2} \underset{z\to 0}{\longrightarrow} \frac{2\mu_0}{\pi}\frac{I}{w^2} \tag{3.10}$$

Erzeugt man durch Überlagerung eines externen Feldes ein Quadrupolfeld in der Nähe des Drahtes, wird die Auswirkung der Leiterbreite sichtbar: Das entstehende Feld (Abb. 3.6) weicht wesentlich weniger vom Verlauf eines idealen Quadrupolfeldes ab als das entsprechende Feld am dünnen Draht (Abb. 3.4).

Das Fallenzentrum berührt die Oberfläche, sobald das konstante Feld den kritischen Wert

Feldbetrag an der Oberfläche eines breiten Leiters

$$\boxed{\mathrm{B}_{\max} = \frac{\mu_0}{2}\frac{I}{w}} \tag{3.11}$$

überschreitet. Dagegen besteht, wenn das externe Feld klein und der Abstand zum Draht entsprechend groß ist, kein Unterschied zur Falle am dünnen Draht.

## 3.4 Feldbeitrag von kreuzenden Drähten

Drähte, die auf dem Substrat senkrecht zur Achse des zweidimensionalen Quadrupols verlaufen, bieten eine einfache Möglichkeit, die Feldstärke entlang der Achse zu variieren. Dabei haben die beiden Komponenten ihrer Felder unterschiedliche Auswirkungen: Der Feldanteil senkrecht zur Quadrupolachse verschiebt das Zentrum der Falle, während der parallele Anteil die Feldstärke im Minimum erhöht oder erniedrigt.

### 3.4.1 2D-Quadrupol mit überlagertem ortsabhängigem Feld

Ausgangspunkt ist hier ein zweidimensionales Quadrupolfeld, das von einem Draht entlang der $\mathbf{e}_x$-Achse und einem konstanten Feld $\mathbf{B}_0 = \mathbf{e}_y \cdot B_{0,y}$ erzeugt wird. Das Feld in der Nähe des Fallenzentrums ist gegeben durch

$$\mathbf{B} = b \begin{pmatrix} 0 \\ z - z_0 \\ y \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

$$b = \frac{2\pi}{\mu_0} \frac{{B_{0,y}}^2}{I} \ . \tag{3.13}$$

Ein weiteres homogenes Feld $\tilde{\mathbf{B}}$ hat nun zur Konsequenz, daß das Fallenzentrum von seinem ursprünglichen Ort verschoben wird und daß gleichzeitig das Feldminimum durch die $x$-Komponente des neuen Feldes bestimmt wird. In der linearen Näherung bedeutet dies:

$$r_{\min} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{\tilde{\mathrm{B}}_z}{b} \\ z_0 - \frac{\tilde{\mathrm{B}}_y}{b} \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

$$B_{\min} = \left|\tilde{\mathrm{B}}_x\right| \ . \tag{3.15}$$

Das Ergebnis ist also eine zweidimensionale Ioffe-Pritchard-Falle, deren Zentrum vom Nullpunkt des zugrundeliegenden Quadrupols verschoben ist.

Der dreidimensionale Einschluß kommt zustande, wenn das zusätzliche Feld $\tilde{\mathbf{B}}$ ortsabhängig wird. In Analogie zu den Gleichungen 3.14 und 3.15 erhält man dann in linearer Näherung:

$$r_{\min}(x) = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{\tilde{\mathrm{B}}_z}{b} \\ z_0 - \frac{\tilde{\mathrm{B}}_y}{b} \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

$$B_{\min}(x) = \left| \tilde{\mathrm{B}}_x(x) + \Big( \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\tilde{\mathrm{B}}_z}{b} \\ -\frac{\tilde{\mathrm{B}}_y}{b} \end{pmatrix} \cdot \nabla \Big) \tilde{\mathrm{B}}_x \right| \ , \tag{3.17}$$

wobei $\tilde{\mathrm{B}}_i = \tilde{\mathrm{B}}_i(x, y = 0, z = z_0)$ das zusätzliche Feld auf der Achse des 2D-Quadrupols ist.

In den meisten Fällen ist der Gradient $b$ des zweidimensionalen Quadrupols viel größer als der Gradient des überlagerten Feldes $\tilde{\mathbf{B}}$, d.h. der transversale Einschluß ist viel stärker als der Einschluß entlang der Quadrupolachse. Zusätzlich ist man bemüht, die nicht notwendigen Felder $\tilde{\mathrm{B}}_y$ und $\tilde{\mathrm{B}}_z$ klein zu halten. Aus diesem Grund genügt für die Beschreibung des Minimums meistens die nullte Ordnung von Gleichung 3.17:

$$\boxed{B_{\min}(x) \approx \left|\tilde{\mathrm{B}}_x(x, y=0, z=z_0)\right| .} \tag{3.18}$$

Diese Gleichung besagt, daß die Feldstärke, die sich bei festem Wert $x$ im Minimum der Feldkonfiguration ergibt, (im Rahmen der Näherung) durch den Betrag der $x$-Komponente gegeben ist, welche das überlagerte Feld $\tilde{\mathbf{B}}$ am Ort $\mathbf{r} = (x, y = 0, z = z_0)$ besitzt.

### Feld eines kreuzenden Drahtes

Dieses Ergebnis läßt sich verwenden, um den Einfluß eines Drahtes zu beschreiben, der senkrecht zur Achse des Quadrupols verläuft (s. Abb. 3.7). Der erste Draht führt einen Strom $I_1$ in $\mathbf{e}_x$-Richtung und bildet mit dem externen Feld $B_{0,y}$ einen zweidimensionalen Quadrupol in der Höhe

$$z_0 = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{I}{B_{0,y}} . \tag{3.19}$$

Die Feldstärke im (transversalen) Minimum der Magnetfalle wird nun bestimmt durch die $x$-Komponente des Feldes, welche der kreuzende Strom $I_2$ am Ort der Quadrupollinie erzeugt. Damit diese Näherung gültig ist, muß der Strom $I_2$ kleiner als der Strom $I_1$ im Hauptdraht sein.

Tabelle 3.2: **Feld des kreuzenden Stromes $I_2$ in der Höhe $z = z_0$**

| | exakt | $x \ll z_0$ | $x \gg z_0$ |
|---|---|---|---|
| $\tilde{B}$ | $\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\sqrt{z_0^2+x^2}}$ | $\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{z_0}(1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{z_0^2})$ | $\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}$ |
| $\tilde{\mathrm{B}}_x$ | $\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I\,z_0}{z_0^2+x^2}$ | $\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{z_0}(1-\frac{x^2}{z_0^2})$ | $\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I\,z_0}{x^2}$ |
| $\tilde{\mathrm{B}}_z$ | $-\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I\,x}{z_0^2+x^2}$ | $-\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I\,x}{z_0^2}(1-\frac{x^2}{z_0^2})$ | $-\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}$ |

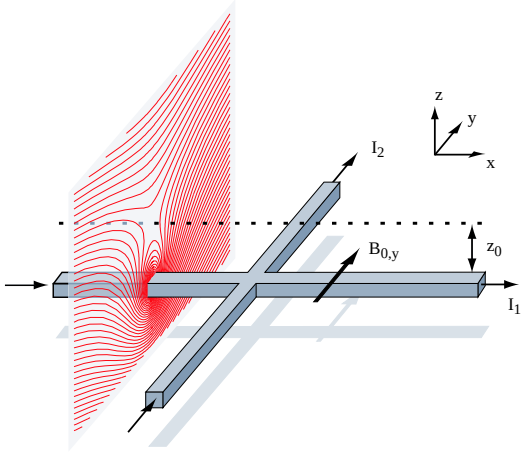



Abb. 3.7: *Geometrie des Drahtkreuzes. Ist der Strom $I_1$ größer als $I_2$, so läßt sich die entstehende Magnetfalle als Überlagerung des 2D-Quadrupols über Draht 1 mit dem Feld des senkrechten Drahtes interpretieren.*

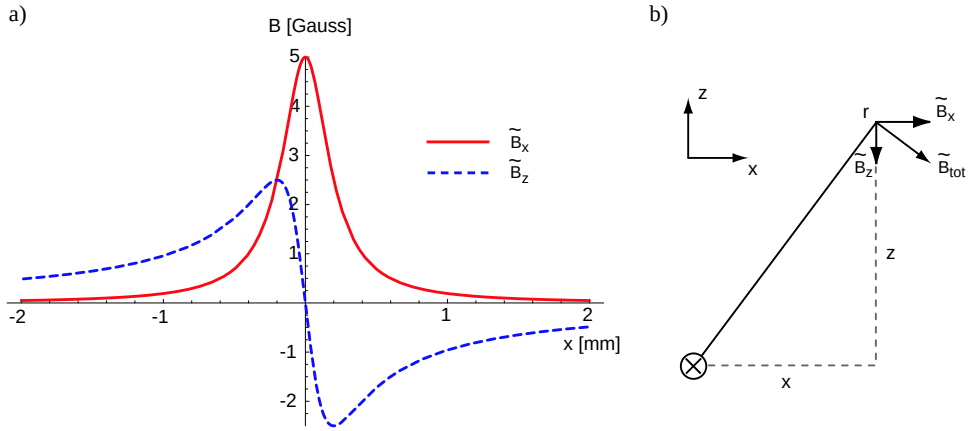



Abb. 3.8: *Feldkomponenten eines dünnen Drahtes in der Höhe $z_0 = 0{,}2\,mm$, der Strom entlang $\mathbf{e}_y$ beträgt $I_2 = 0{,}5\,A$. Für die Überlagerung mit dem 2D-Quadrupol ist im wesentlichen die x-Komponente von Bedeutung (durchgezogene Kurve).*

Wie die Abbildung 3.8 und die zugehörigen Formeln in Tabelle 3.2 zeigen, wechselt das Vorzeichen von $\tilde{B}_z$ entlang der $\mathbf{e}_x$-Achse, während das von $\tilde{B}_x$ gleich bleibt. Für das Feld im Minimum des 2D-Quadrupols ist die Komponente $|B_x|$ des kreuzenden Drahtes verantwortlich. In der Höhe $z_0$ beschreibt $\tilde{B}_x$ eine Lorentzkurve mit der Halbwertsbreite $2z_0$, deren Wirkung um so stärker ausfällt, je geringer die Höhe $z_0$ ist. Damit besitzt $|B_x|$, wenn kein weiteres Feld überlagert ist, ein Maximum entlang der $\mathbf{e}_x$-Achse. Ein ein-

zelner kreuzender Draht erzeugt also ein abstoßendes Potential längs der Quadrupolachse. Weiter unten werden wir sehen, daß sich diese Wirkung durch Überlagerung eines externen Feldes gerade umkehren läßt.

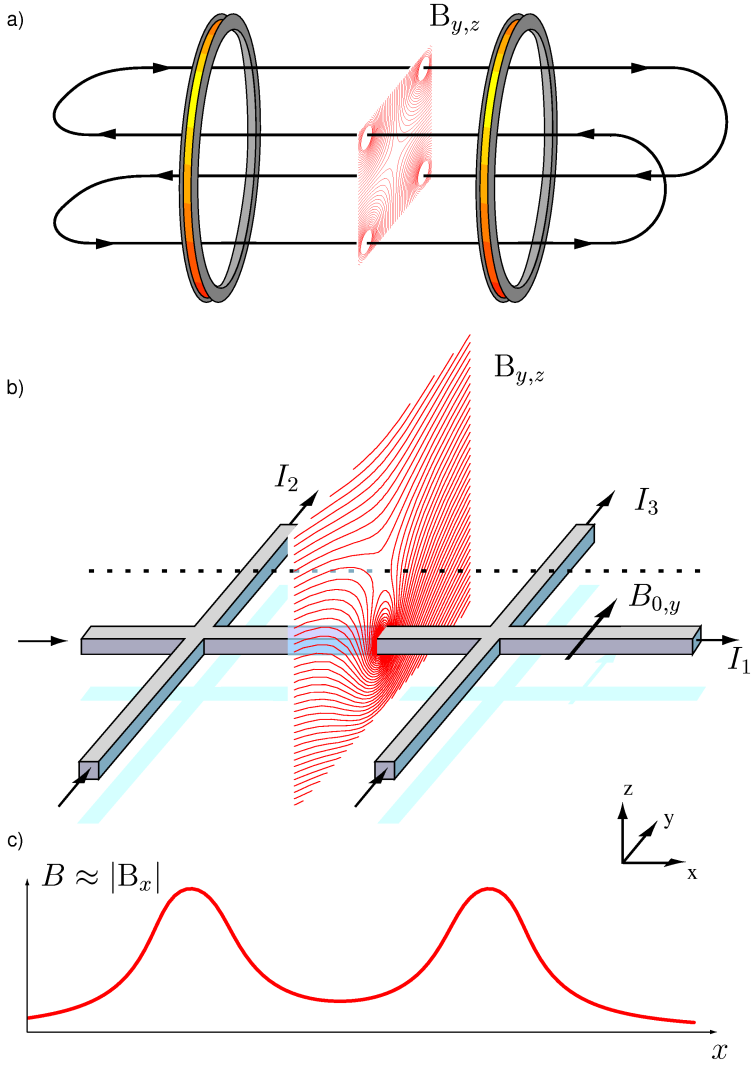



Abb. 3.9: *a) Klassische Ioffe-Pritchard-Falle, b) Realisierung der Ioffe-Pritchard-Falle als Mikrofalle, c) Feldbetrag entlang der Quadrupolachse.*

Mit dem abstoßenden Potential von zwei kreuzenden Drähten läßt sich nun leicht ein magnetischer Einschluß erzeugen: wenn der Abstand der Drähte groß genug ist, entsteht zwischen ihnen eine Potentialmulde, in der die Atome längs der Quadrupolachse eingeschlossen werden. Auf den zweiten Blick entdeckt man bei dieser Konfiguration die Analogie zu der klassischen Ioffe-Pritchard-Falle [42, 43], deren Aufbau in Abb. 3.9 a skizziert ist. Das 2D-

Quadrupolfeld, welches in der makroskopischen Falle von den langen „Ioffe-Bars“ erzeugt wird, ist in der Mikrofalle durch das Quadrupolfeld eines Drahtes mit externem Feld ersetzt (Abb. 3.9 b). Die Spulen, die das Flaschenfeld für den longitudinalen Einschluß in a) erzeugen, werden zu einfachen Drähten, die quer zur Quadrupolachse verlaufen. Wie das hier gezeigte Schema weiter vereinfacht werden kann, findet sich in Abschnitt 3.5. Zuvor soll noch eine alternative Möglichkeit betrachtet werden, um eine Ioffe-Pritchard-Falle als Mikrofalle zu realisieren.

### 3.4.2 Ioffe-Pritchardfalle an einer Drahtkreuzung

Ohne die Überlagerung mit einem externen Feld zeigt der Betrag der Feldkomponente $|\mathrm{B}_x|$ den in Abb. 3.8 dargestellten Verlauf von $\mathrm{B}_x$. Überlagert man jedoch ein zusätzliches Feld, das dem Feld des Drahtes entgegengerichtet ist, so weist die Summe der beiden Felder in der $x$-Komponente Nulldurchgänge mit unterschiedlichem Vorzeichen auf. An diesen Orten besitzt das Gesamtfeld zwei dreidimensionale Quadrupolfallen mit unterschiedlichem charakteristischen Vorzeichen[2] (siehe Abb. 3.10 a). Weiteres Erhöhen des Feldes $\mathrm{B}_{0,x}$ führt schließlich dazu, daß sich die beiden Quadrupolfallen vereinigen und in eine Ioffe-Pritchard-Falle übergehen, die im Minimum ein nicht verschwindendes Feld besitzt (Abb. 3.10 b).

An dieser Konfiguration läßt sich untersuchen, bis wohin die hier verwendete Näherung 3.18 eine gute Darstellung liefert. Solange der Strom des kreuzenden Drahtes viel kleiner ist als der Strom im Hauptdraht, erwartet man eine nur geringe Abweichung. Mit zunehmendem Strom $I_2$ wird die Näherung ungenauer, bis sie schließlich völlig zusammenbricht, wenn die Ströme $I_1$ und $I_2$ gleich groß werden. Die Fallenachse hat sich bis dahin um 45° gedreht, und wenn der Strom im kreuzenden Draht weiter zunimmt, wird in Umkehrung der Sichtweise der kreuzende Draht zum Hauptdraht.

Abb. 3.11 stellt die mit der obigen Näherung berechneten Felder sowie den Ort des Fallenminimums für zwei Stromverhältnisse dar. Der Strom im Hauptdraht ist mit $I_1 = 1\,\mathrm{A}$ in beiden Fällen gleich, während für $I_2$ die Werte 0,2 A bzw. 0,5 A gewählt sind. Die Höhe des 2D-Quadrupols $z_0 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{B_{0,y}}$ ist durch $B_{0,y} = 10\,\mathrm{Gauss}$ auf $z_0 = 200\,\mu\mathrm{m}$ eingestellt und zuletzt wird $B_{0,x}$ so gewählt, daß sich im Minimum der Falle ein Feld von 1 Gauss ergibt. Die durchgezogenen Linien beschreiben $B$ in nullter bzw. $y_{\min}$ in erster Ordnung (Gl. 3.16 und 3.18). Zum Vergleich markieren Punkte diejenigen Werte, die sich aus der numerischen Bestimmung des tatsächlichen Minimums ergeben.

[2] zum charakteristischen Vorzeichen s. a. S. 18

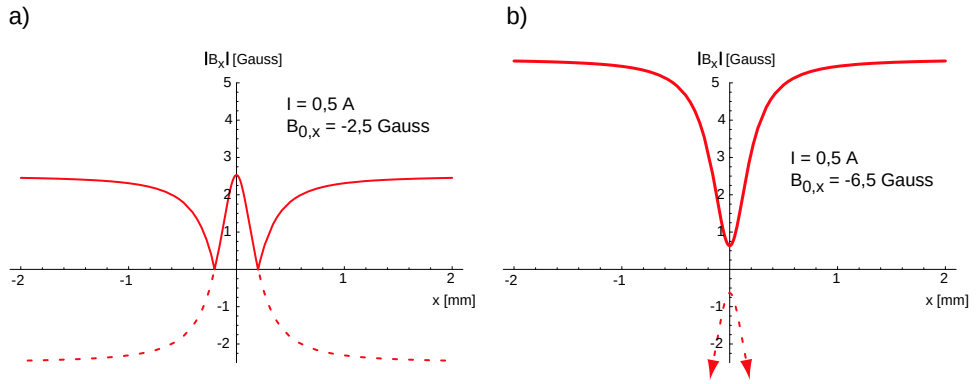



Abb. 3.10: *Die Überlagerung des Drahtfeldes aus Abb. 3.8 mit einem homogenen Feld in* $\mathbf{e}_x$*-Richtung führt dazu, daß entlang der* $\mathbf{e}_x$*-Achse zwei Nullstellen auftreten (a) oder sich ein lokales Minimum bildet (b). An diesen Stellen führt die Überlagerung mit dem zweidimensionalen Quadrupol des ersten Drahtes zu zwei dreidimensionalen Quadrupolfallen bzw. zu einer Ioffe-Pritchard-Falle.*

Selbst bei dem Stromverhältnis $\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{2}$ zeigen sich nur kleine Abweichungen, das anschauliche Modell erweist sich also als sehr tragfähig.

Die Näherung, daß das Feld des kreuzenden Drahtes nur eine kleine Veränderung zu dem bestehenden 2D-Quadrupolfeld ist, das vom Strom $I_1$ und dem externen Feld $B_{0,y}$ erzeugt wird, bricht offensichtlich zusammen, wenn die Ströme in beiden Drähten gleich groß werden. In dieser Situation hat sich die Fallenachse um 45° gegen die Achse des ursprünglichen Quadrupols gedreht, und bei einer genaueren Untersuchung der Felder zeigt sich, daß keine Ioffe-Pritchard-Falle mehr besteht.

Je stärker der Strom im kreuzenden Draht wird, desto deutlicher formt sich die Falle zu einem Ring. Gleichzeitig wird die Falle im Zentrum flacher, wenn der kreuzende Strom etwa die Hälfte des Hauptstromes erreicht. In der Tat läßt sich mit gleichen Strömen in den Drähten keine Falle realisieren, die ein Minimum mit endlichem Feld besitzt. Dieser Sachverhalt wird klar, wenn das konstante Feld genau um 45° zu den Drähten geneigt ist, d.h. $B_{0,x} = -B_{0,y}$ ist. Über jedem der beiden Drähte entsteht nun, in genügender Entfernung des Zentrums, eine zweidimensionale Ioffe-Pritchard-Falle. Im Zentrum vereinigen sie sich und münden in einen Quadrupolring, dessen Verlauf sich bereits in Abb. 3.12 c ankündigt. In dieser Version läßt er sich allerdings nicht für Fallenexperimente nutzen, da seine Nullinie durch das Zentrum der Leiterkreuzung führt.

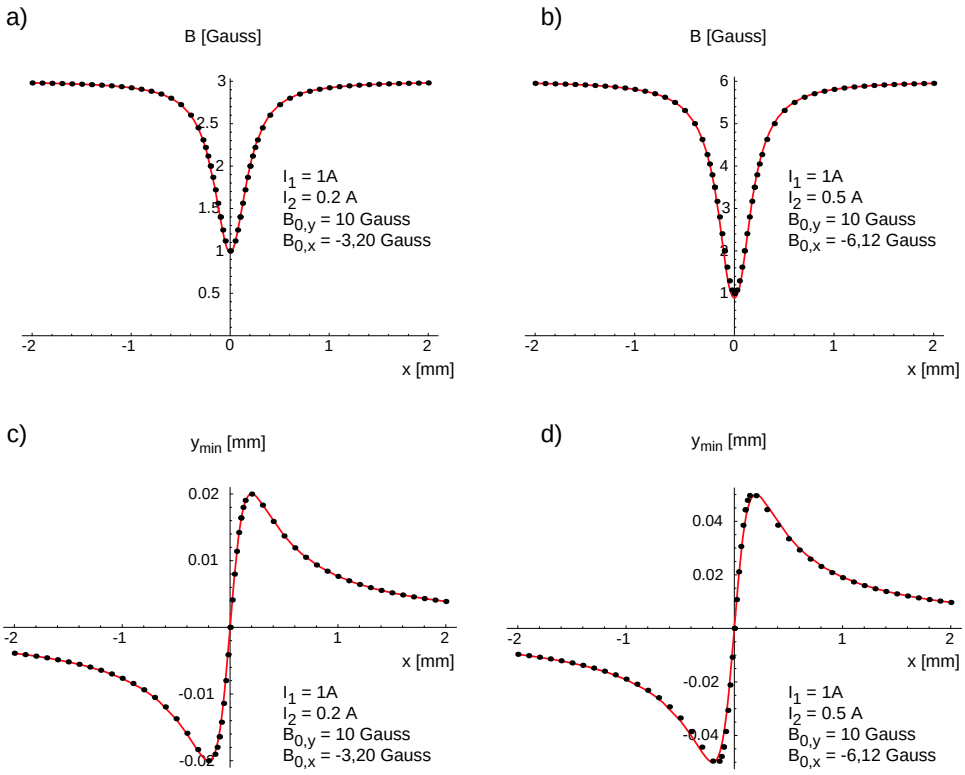



Abb. 3.11: *Näherung und numerische Berechnung der Ioffe-Pritchard-Falle am Drahtkreuz. Gezeigt sind die Feldstärke entlang des transversalen Minimums (a, b) sowie die y-Position des Minimums (c, d). Die durchgezogene Linie entspricht der Näherung gemäß Gl. (3.18), die Punkte markieren Werte, die sich aus der numerischen Bestimmung des Minimums ergeben. Für die Graphen der linken Spalte ist ein Stromverhältnis von* $\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{5}$ *gewählt, für die der rechten Spalte* $\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{2}$.

### Miniatur-Quadrupolring

Die Erkenntnis, daß es sich bei dieser Konfiguration um einen Quadrupolring handelt, ist dennoch von Nutzen, denn es ist klar, daß die Nullinie eines Quadrupolrings durch ein homogenes Feld nicht an allen Orten aufgehoben werden kann, es kann somit in dieser Situation keine Ioffe-Pritchard-Falle existieren. Allerdings läßt sich durch einen Trick die Nullinie über die Leiterebene heben, so daß eine Quadrupolringfalle entsteht: da in beiden Drähten der gleiche Strom fließt, lassen sie sich auch als zwei aneinander grenzende abgewinkelte Drähte auffassen. Wenn man diese im 45°-Winkel auseinanderzieht (s. Abb. 3.13), reicht der Quadrupolring nicht mehr bis in die Leitere-

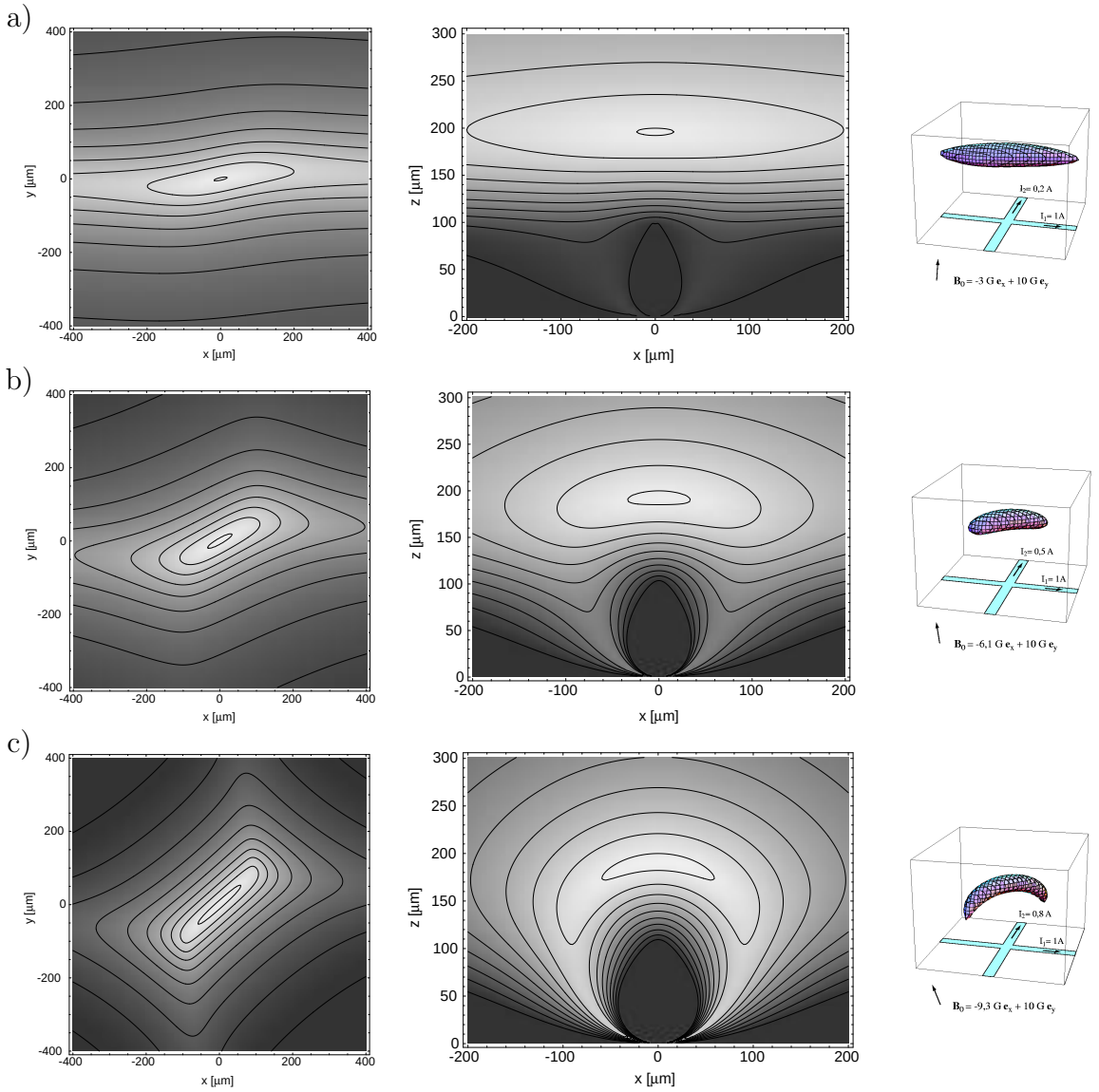



Abb. 3.12: *Feldstärke bei einer Ioffe-Pritchard-Falle am Drahtkreuz. An jedem Punkt ist der Wert des Feldes in seinem lokalen Minimum entlang der nicht sichtbaren Dimension aufgetragen. Der Hauptdraht trägt den Strom $I_1 = 1\,A$, während der kreuzende Strom $I_2$ von Abb. a) bis c) zunimmt (0,2 A, 0,5 A und 0,8 A). Das homogene Feld $B_{0,y}$ beträgt 10 G und $B_{0,x}$ ist mit -3,02 G, -6,12 G und -9,28 G so angepaßt, daß im Minimum ein Feld von 1 Gauss herrscht. Die Höhenlinien markieren Abstände von 1 G, die Konturfläche in der rechten Spalte liegt bei einer Feldstärke von 2 G.*
*Je ähnlicher sich die Ströme $I_1$ und $I_2$ werden, desto geringer wird die Energiebarriere, welche das Fallenzentrum von der Oberfläche trennt.*

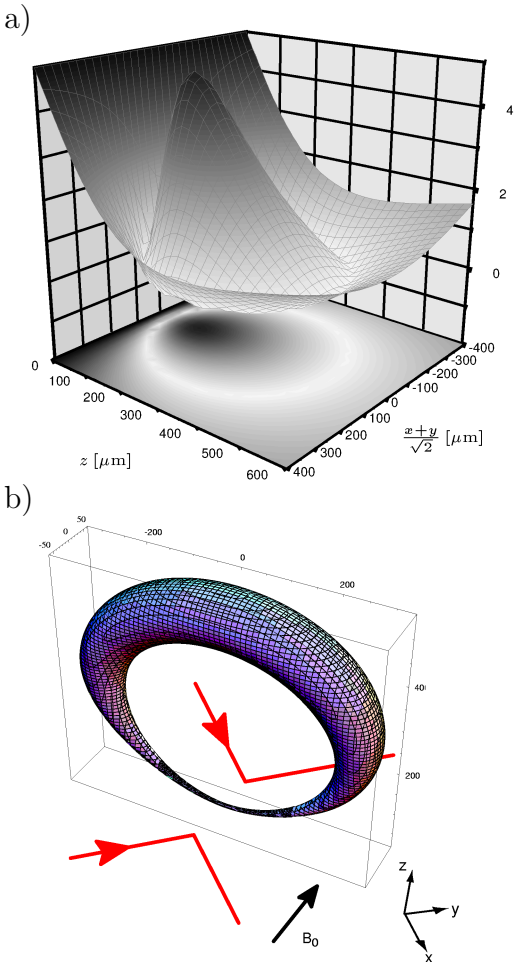



Abb. 3.13: *An einer „auseinandergezogenen Drahtkreuzung“ läßt sich ein Quadrupolring erzeugen, indem man ein um 45° gedrehtes homogenes Feld überlagert. Mit der Stärke des Feldes läßt sich nicht nur die Größe des Ringes variieren sondern gleichzeitig die Asymmetrie, die der Ring aufgrund des stark höhenabhängigen Gradienten aufweist. Abbildung a) zeigt einen Schnitt entlang der $\mathbf{e}_z$-$\mathbf{e}_{x,y}$-Ebene, der Ring in b) beschreibt eine Fläche konstanter Feldstärke.*

bene hinein. Die Größe des Rings läßt sich durch die Stärke des homogenen Feldes variieren, bis sich der Ring auf einen Punkt zusammengezogen hat.

### 3.4.3 Physikalische Aspekte

#### Fallentiefe und Zustandszahl

Während der Experimente mit dem magnetischen Förderband hat sich gezeigt, daß die Kenntnis der Fallentiefe allein nicht ausreicht, um geeignete Parameter für den magnetischen Transport zu finden. Wenn sich das lokale Potentialminimum stark verformt, so ist für verlustfreien Transport ausschlaggebend, daß keines der besetzten Energieniveaus in einen ungebundenen Zustand übergeht. Dies läßt sich untersuchen, indem man die Anzahl der gebundenen Quantenzustände im magnetischen Potential $\boldsymbol{\mu}\mathbf{B}$ berechnet.

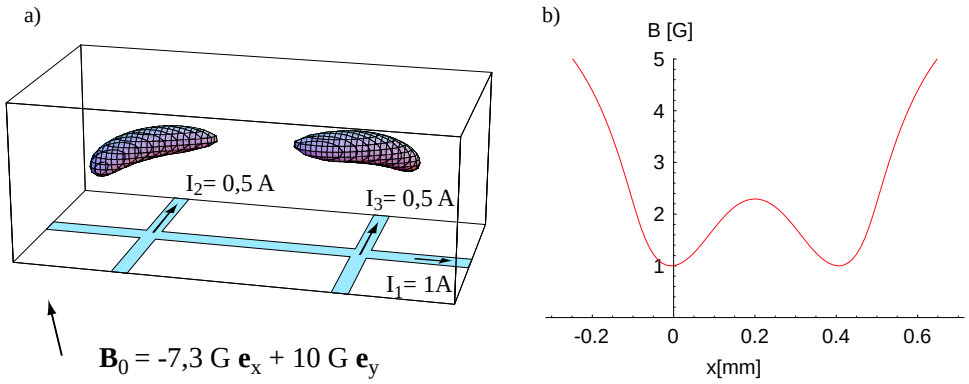



Abb. 3.14: *Mit einem Hauptdraht und zwei kreuzenden Drähten läßt sich ein magnetisches Feld erzeugen, welches zwei Minima besitzt. a) Fläche konstanter Magnetfeldstärke $B = 2\,G$, b) Axialer Verlauf der Feldstärke nach der Minimum-Methode. Die beiden Fallen berühren sich bei einer Feldstärke von 2,3 G.*

Bei magnetischen Mikrofallen ist diese Aufgabe etwas komplizierter als bei den herkömmlichen Magnetfallen, da man das Ortsintegral nicht einfach mit einem Raster innerhalb eines Quaders berechnen kann. Schlüssel zu allen weiteren Berechnungen ist die energetische Zustandsdichte, zu der nur diejenigen Punkte beitragen dürfen, die innerhalb eines ausgewählten Potentialtopfes liegen. Die „richtigen“ Punkte lassen sich finden, indem man vom tiefsten Punkt des ausgewählten Topfes ausgeht und gemäß einem Raster immer weiter außen liegende Punkte hinzunimmt, bis das Potential bei irgendeinem Schritt abwärts führt. An dieser Stelle läuft die Falle gewissermaßen über. Wählt man ein geeignetes Raster im Energieraum, so läßt sich beim schrittweise Hinzufügen der Punkte die energetische Zustandsdichtefunktion $D(E)$ gewinnen, die bei $E_{\max} = \mu\, B_{\max}$ abbricht. Mit Hilfe dieser Zustandsdichte läßt sich das Integral 2.100 ohne großen Aufwand berechnen, und man erhält für jede Energie $E \leq E_{\max}$ die zugehörige Zahl von Quantenzuständen.

### Doppelte Drahtkreuzung

Am Beispiel der doppelten Drahtkreuzung läßt sich das eben besprochene Verfahren demonstrieren. Wie bei der Ioffe-Pritchard-Falle an der einfachen Drahtkreuzung erzeugen hier zwei kreuzende Ströme jeweils eine Ioffe-Pritchard-Falle. Bei den gewählten Parametern (s. Abb. 3.14) werden die beiden Minima durch eine Barriere von etwa 1,3 G getrennt.

Mit dem beschriebenen Algorithmus erhält man zunächst die Zustandsdichte,

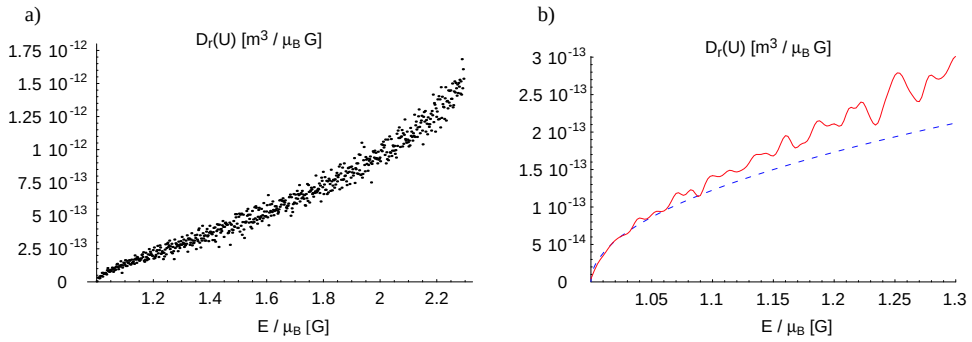



Abb. 3.15: *Zustandsdichte $D_r(U)$ im linken Potentialtopf, die durchgezogene Linie in b) zeigt die numerisch berechneten Werte aus a) nach einer Glättung. Nahe am Minimum folgt die Zustandsdichte dem wurzelförmigen Verlauf, den man für ein dreidimensionales harmonisches Potential erwartet (gestrichelte Linie).*

mit deren Hilfe das Ortsintegral ersetzt wird (s. Abb. 3.15). Die Tatsache, daß die Werte für die Zustandsdichte streuen, liegt an dem Rasterverfahren, das der Algorithmus verwendet. Berechnet man daraus gemäß Gl. 2.98 die Zahl der Zustände $N_Q(E)$ unterhalb der Energie $E$, so ergibt sich dennoch eine glatte Funktion (s. Abb. 3.16)[3].

In der Nähe des Minimums stimmt der Verlauf der Zustandsdichte mit dem wurzelförmigen Verlauf überein, den man für ein dreidimensionales harmonisches Potential mit der gegebenen Krümmung erwartet (Gl. 2.102 und 2.103). Im mittleren Bereich wächst sie etwa proportional zu $E^{1..1,5}$, was den Übergang zum linearen Potentialverlauf in transversaler Richtung widerspiegelt. Der Anstieg am Ende markiert das Abflachen des Potentials in longitudinaler Richtung, wodurch die Energieniveaus noch dichter zusammenrücken.

Die Zustandsdichte anhand des magnetischen Potentials zu berechnen, ist relativ zeitaufwendig. Ist sie allerdings einmal bekannt, so lassen sich viele weitere Eigenschaften schnell berechnen. Dazu gehört unter anderem die Zahl der Quantenzustände, die unterhalb einer Energie $E$ liegen. Anhand dieser Berechnungen läßt sich abschätzen, wie viele Quantenzustände bei gegebener Phasenraumdichte in einer Falle Platz finden. Diese Information ist aus der reinen Darstellung der Felder nicht zu gewinnen. Daher hat sich diese Methode als sehr wichtig erwiesen um zu verstehen, wie viele Atome mit einer Falle bewegt und transportiert werden können. In dem hier gezeigten Beispiel ergibt die Rechnung, daß in der linken Falle $1,73 \cdot 10^{10}$ Quantenzu-

[3]Das liegt daran, daß die funktionale Abhängigkeit von der Energie $E_{\max}$ bereits unter dem Integral 2.98 steht, welches hier durch eine Summe ersetzt wird.

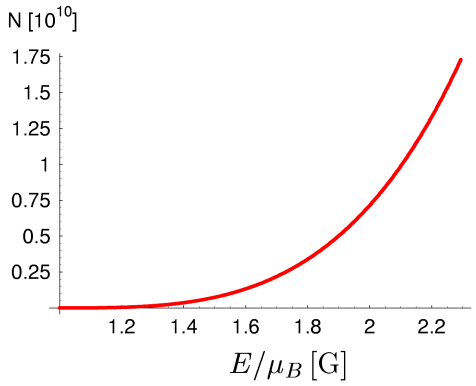



Abb. 3.16: *Anzahl der Quantenzustände im linken Potentialtopf. Das lokale Minimum faßt* $1,73 \cdot 10^{10}$ *Quantenzustände für* $^{87}Rb$ *im* $|F = 2, m_F = 2\rangle$*-Grundzustand, bis die Falle bei* $B = 2,3\,G$ *überläuft.*

stände zur Verfügung stehen, gerechnet für $^{87}$Rb-Atome im Grundzustand $|F = 2, m_F = 2\rangle$.

## 3.5 Experimentell realisierte Magnetfallen

Zu Beginn des Kapitels hatten wir gesehen, daß Drähte, die senkrecht zum zweidimensionalen Quadrupol verlaufen, eine abstoßende Wirkung haben, wenn kein weiteres Feld entlang der Quadrupolachse überlagert ist. Diese Situation liegt vor bei der Quadrupolfalle am „u-förmigen“ Draht bzw. der Ioffe-Pritchard-Falle am „z-förmigen“ Draht. Weiter unten werden wir für das atomare Förderband die umgekehrte Situation finden, daß nämlich die kreuzenden Drähte in Überlagerung mit einem zusätzlichen Feld die Potentialmulden hervorrufen.

### 3.5.1 „U-Quadrupol“ und „Z-Ioffe-Falle“

Sowohl die Quadrupolfalle am „u-förmigen“ Draht als auch die Ioffe-Pritchard-Falle am „z-förmigen“ Draht lassen sich als verkürzte Version einer Falle verstehen, die aus einem zentralen Draht und zwei zusätzlich kreuzenden Drähten besteht. Das Feld des Stromes $I_1$ addiert sich mit dem homogenen Feld $B_{0,y}$ zu dem zweidimensionalen Quadrupolfeld, das die Basis für die Falle bildet (s. Abb. 3.17 a) bis d)). Die zusätzliche Variation des Potentials wird, wie bereits beschrieben (Gl. 3.18), durch den Betrag der Feldkomponente hervorgerufen, die längs der Quadrupolachse zeigt, also $|\mathrm{B}_x|$. Befindet man

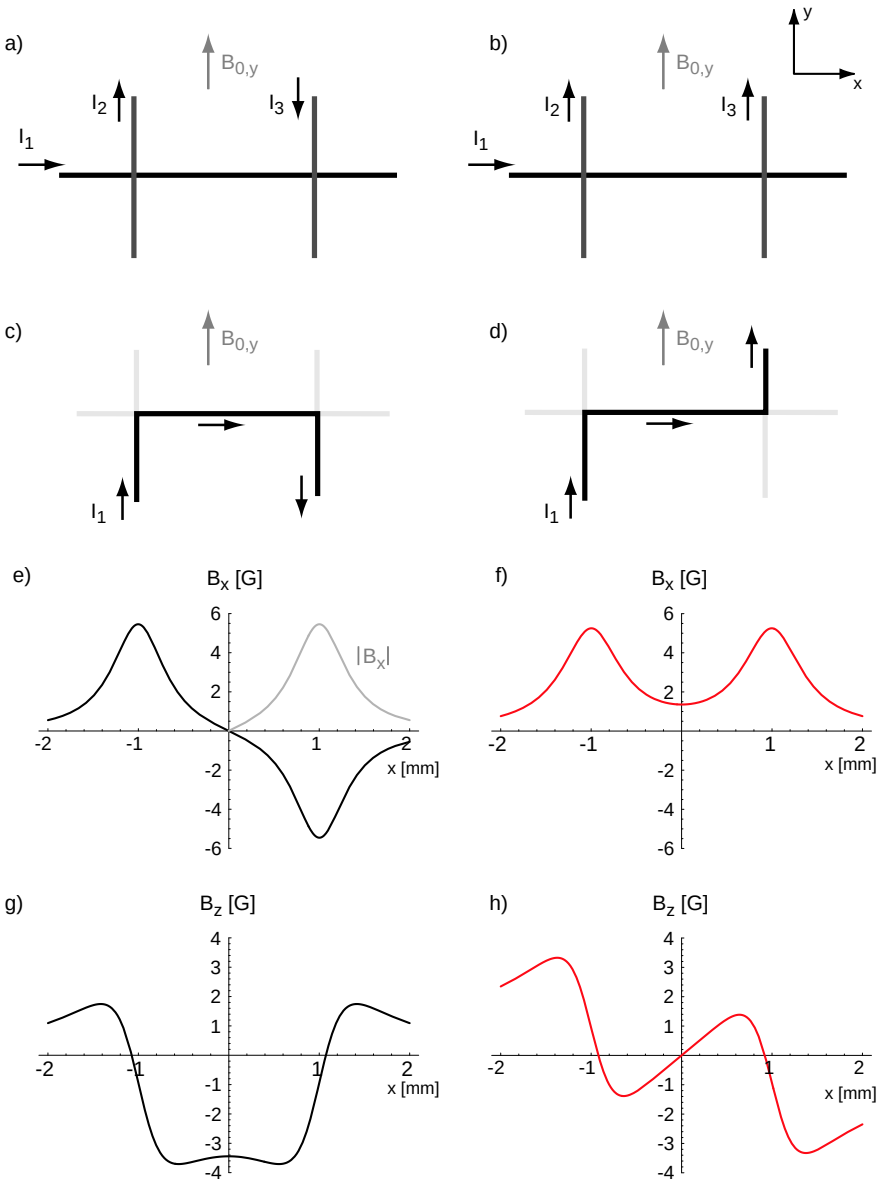



Abb. 3.17: *Prinzip der Quadrupolfalle und der Ioffe-Pritchard-Falle am „u-förmigen“ bzw. „z-förmigen“ Draht. Der Mitteldraht erzeugt gemeinsam mit dem homogenen Feld $B_{0,y}$ den zweidimensionalen Quadrupol, der durch die Felder der kreuzenden Drähte ergänzt wird. Bei der Quadrupolfalle (links) heben sich die longitudinalen Feldkomponenten im Zentrum auf, so daß die Feldstärke verschwindet. In der „Z-Konfiguration“ addieren sich die entsprechenden Beiträge und führen zu dem Feld der Ioffe-Pritchard-Falle.*
*Die Werte sind berechnet für $I = 2\,A$, $B_{0,y} = 10\,G$, eine Leiterbreite von $w{=}50\,\mu m$ und einen Abstand der Zuleitungen $l = 2\,mm$.*

sich in der $\mathbf{e}_x$-$\mathbf{e}_z$-Ebene, so ist der Beitrag von einem kreuzenden Draht genau doppelt so groß wie der eines Drahtes, der von einer Seite bis zur Mitte ($y = 0$) reicht. Nach diesem Prinzip übersetzen sich die Leiterkonfiguration in Abb. 3.17 c) und d) in die Konfigurationen a) und b) mit den Strömen $I_2 = I_3 = \frac{I_1}{2}$.

Die Graphen e) bis h) zeigen die Beiträge der zu- und wegführenden Drähte entlang der Nullinie des Quadrupols. Berechnet sind sie für einen Strom von $I_1 = 2\,\mathrm{A}$ mit einem Feld $B_{0,y} = 10\,\mathrm{Gauss}$ und für einen Abstand der kreuzenden Drähte $l = 2\,\mathrm{mm}$. Aus der Symmetrie der Feldkomponenten $\mathrm{B}_x$ und $B_z$ folgt der Charakter des Magnetfeldes: Im Falle des u-förmigen Drahtes ist $\mathrm{B}_x$ eine antisymmetrische Funktion in $x$, so daß für $x = 0$ diese Feldkomponente verschwindet. Die symmetrische Funktion $\mathrm{B}_z$ verschwindet im Zentrum nicht und verschiebt damit die Nullinie des zweidimensionalen Quadrupols in Richtung $\mathbf{e}_y$ (s. Gl. 3.16).

Gerade umgekehrt verhalten sich in der $\mathbf{e}_x$-$\mathbf{e}_z$-Ebene die Feldkomponenten am stufenförmigen Draht. Die $z$-Komponente ist antisymmetrisch und hat einen Nulldurchgang im Zentrum. Damit befindet sich das Minimum der Falle unverschoben über dem Mitteldraht. Stattdessen addieren sich die $x$-Komponenten des hinführenden und des wegführenden Leiters, so daß eine Falle vom Ioffe-Pritchard-Typ entsteht. Aufgrund der Symmetrie ist klar, daß das Feld im Minimum genau entlang der Quadrupolachse $\mathbf{e}_x$ zeigt. Dennoch ist diese Achse keine Eigenschwingungsachse für ein Teilchen in dem resultierenden Potential. Der Verlauf von $\mathrm{B}_z$ sorgt dafür, daß sich das Zentrum des 2D-Quadrupols als Funktion der Koordinate $x$ verschiebt. Die tatsächliche Lage der Falle geht aus dem Höhenlinienbild in Abb. 3.18 b hervor.

Die Abbildungen 3.19 und 3.18 veranschaulichen die Form der Quadrupol- bzw. Ioffe-Pritchard-Falle, die an einer $300\,\mu\mathrm{m}$ breiten Leiterbahn entsteht. Die Zuleitungen, durch die der Strom $I = 2\,\mathrm{A}$ fließt, haben voneinander einen Abstand von 1,5 mm. In der Höhenliniendarstellung, die für ein externes Feld von 10 Gauss berechnet ist, wird die unterschiedliche Symmetrie der Potentiale sichtbar: die Quadrupolfalle, d. h. der Betrag des entsprechenden Magnetfeldes, zeigt eine Spiegelsymmetrie zur $\mathbf{e}_y$-$\mathbf{e}_z$-Ebene. Das Zentrum der Falle befindet sich auf der Gegenseite der Zuleitungen, diese Verschiebung wird jedoch immer kleiner, je größer das überlagerte externe Feld wird (s. Abb. 3.19 c). Auch bei der Ioffe-Pritchard-Falle drücken die Zuleitungen das Fallenzentrum jeweils auf die Gegenseite, wegen der „z-förmigen“ Anordnung der Leiter führt dies allerdings zu einer Verdrehung der longitudinalen Fallenachse, die das Zentrum unverschoben läßt (3.19 d). In beiden Fällen liegt das Fallenzentrum in einer Höhe von $z \approx 300\,\mu\mathrm{m}$.

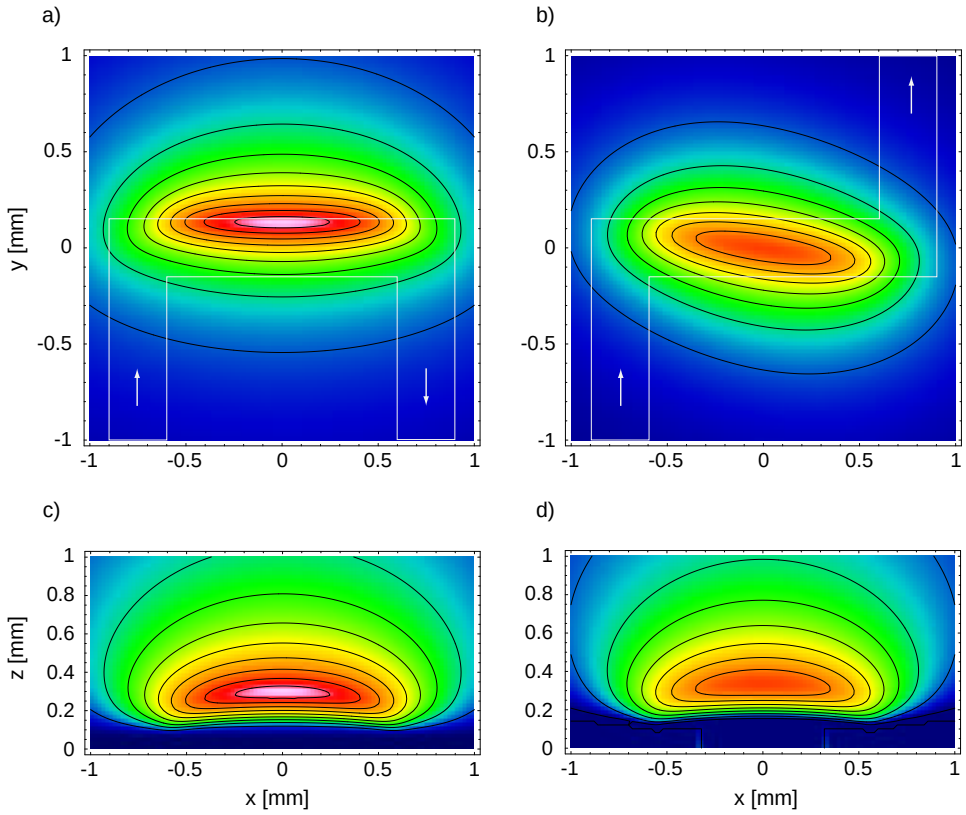



Abb. 3.18: *Lage der Quadrupol- und Ioffe-Pritchard-Fallen am „u-förmigen“ und „z-förmigen“ Draht für $I = 2\,A$, $B_{0,y} = 10\,G$, Leiterbreite $w = 300\,\mu m$ und Abstand der Zuleitungen $l = 1{,}5\,mm$. Die Höhenlinien markieren Feldstärken im Abstand von 1 G. Aufgetragen ist in jedem Punkt die minimale Feldstärke entlang der nicht sichtbaren Dimension (s. a. Anhang B.2).*

Entlang ausgewählter Schnittlinien ist die Feldstärke in den Graphen 3.19 aufgetragen. Längs der Fallenachse (Teilbild a) und b) ) ist sie jeweils im transversalen Minimum (s. Kap. B.2) gezeigt, d. h. die Koordinaten $y$ und $z$ sind geeignet angepaßt. In den übrigen Graphen sind die Schnittlinien parallel zu den Koordinatenachsen gewählt und verlaufen durch das Fallenzentrum. Sowohl bei der Quadrupolfalle als auch bei der Ioffe-Pritchard-Falle ist der ideale Feldverlauf nur dann annähernd erreicht, wenn das externe Feld gering ist. Je größer es wird, desto mehr nähert sich die longitudinale Form der Falle einem Kastenpotential. Für die Ioffe-Pritchard-Falle bedeutet dies außerdem eine geringere Feldstärke im Minimum, wodurch sich der parabolische Bereich des transversalen Potentials immer stärker verkleinert. Durch ein äußeres Feld $\mathbf{B}_{0,x}$ entlang der $\mathbf{e}_x$-Achse läßt sich dieser Einfluß kompen-

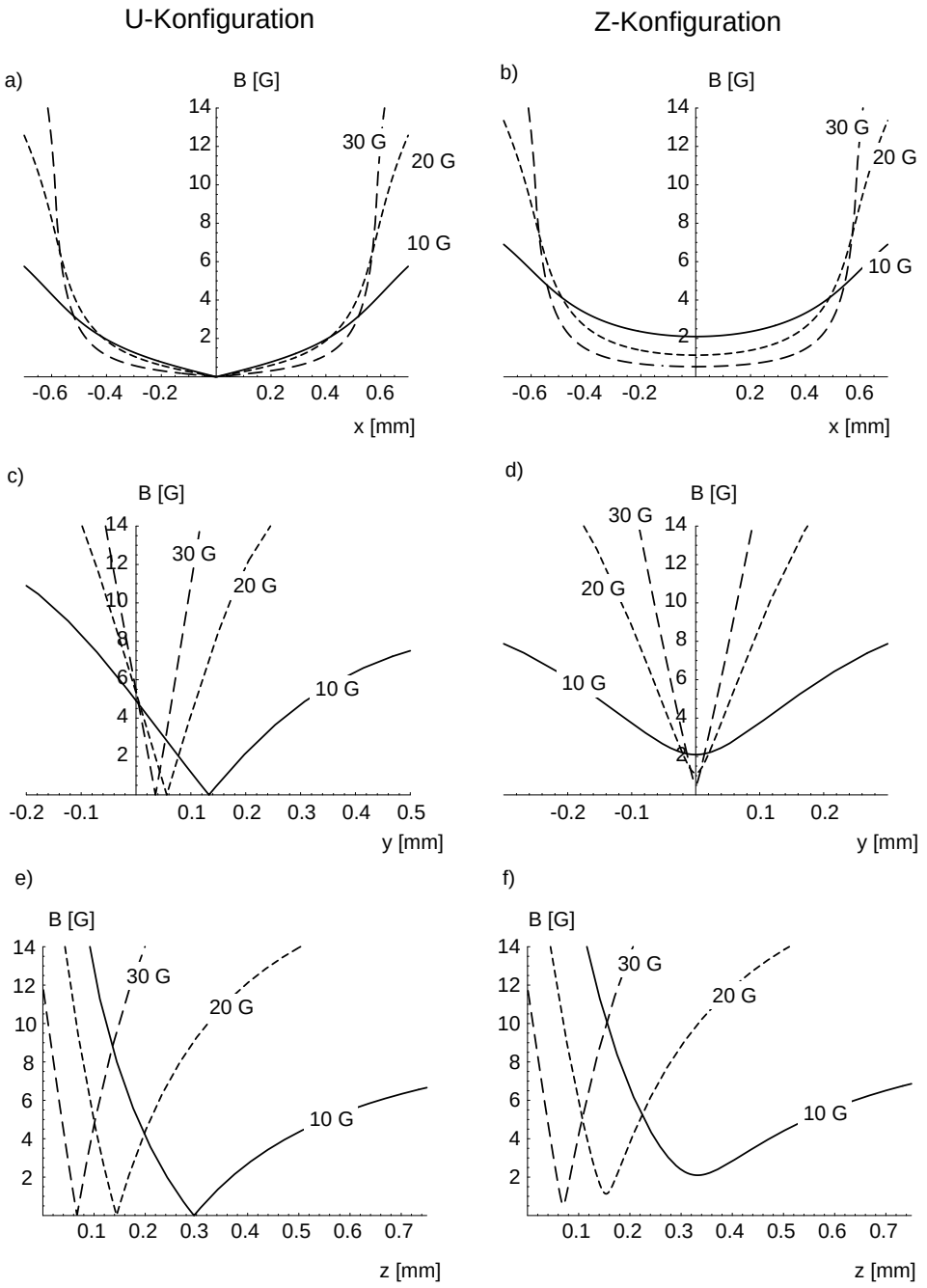



Abb. 3.19: *Potentiale der Quadrupol- und Ioffe-Pritchard-Fallen für $I = 2\,A$ mit verschiedenen externen Feldern (10 G, 20 G, 30 G). Die Quadrupolfalle ist um so stärker seitlich verschoben, je schwächer das überlagerte Feld $B_{0,y}$ ist.*

sieren, die Kastenform des Potentials bleibt jedoch bestehen.

### 3.5.2 Förderband für Atome

Im Rahmen dieser Arbeit konnten wir erstmals den gleichzeitigen Betrieb mehrerer magnetischer Fallen vom Ioffe-Pritchard-Typ demonstrieren. Die Fallen entstehen in einer Reihe über einem Mikrodraht und lassen sich kontrolliert verschieben und positionieren. In Analogie zu mechanischen Förderbändern bezeichnen wir diese Anordnung von Fallen als *magnetische Förderbänder*, und es ist nicht auszuschließen, daß sie das effiziente Arbeiten und Manipulieren von Atomen in ähnlicher Weise revolutionieren werden wie einst ihre Vorgänger die makroskopische Welt.

Die Feldkonfiguration unseres magnetischen Förderbandes läßt sich als Aneinanderreihung mehrerer Ioffe-Pritchard-Fallen begreifen, die jeweils über einer Drahtkreuzung entstehen (s. Abschnitt 3.4.2). Das Feld eines Drahtes, der entlang der Transportrichtung (hier $\mathbf{e}_x$) führt, erzeugt in Überlagerung mit dem externen Feld $B_{0,y}$ das 2D-Quadrupolfeld, das alle Fallen gemeinsam nutzen (Abb. 3.20 a). Nur jeder vierte der quer verlaufenden Drähte wird zu einem gegebenen Zeitpunkt verwendet, um eine Ioffe-Pritchardfalle zu erzeugen. Indem die Ströme geeignet umgeschaltet werden, lassen sich die Fallen kontinuierlich verschieben.

Bei der Richtung des externen Feldes $B_{0,x}$, die in Abbildung 3.20 gewählt ist, entstehen die Fallenzentren über denjenigen Drähten, in denen der Strom gegen die Richtung von $\mathbf{e}_y$ fließt, also von oben nach unten. Ist neben dem Strom $I_0$ nur der Strom $I_1 > 0$ eingeschaltet, befinden sich die Fallenminima an den Positionen $x_1$, $x_5$ usw. An Kreuzungspunkten, an denen der Strom $I_1$ den Mitteldraht von unten nach oben kreuzt, erhöht er zusätzlich die Barriere zwischen den Minima. Wird nun der Strom $I_1$ abgesenkt und gleichzeitig $I_2$ erhöht, so bewegen sich die Fallenzentren nach $x_2$, $x_6$, .... Derselbe Mechanismus wird von hier aus wiederholt: Während $I_2$ verringert wird, wird $I_1$ jetzt negativ und verschiebt die Minima nach $x_3$ und $x_7$. Für die Steuerung der Ströme $I_1$ und $I_2$ eignet sich ein kosinus- bzw. sinusförmiger Verlauf, der die Fallen gleichmäßig weitertransportiert.

Die eben besprochene Leiterkonfiguration 3.20 a läßt sich mit einem einlagigen Leiterbahnsubstrat nicht realisieren, da sonst der Mitteldraht die Drahtschleifen kurzschließt. Nimmt man jedoch in Kauf, daß der Strom in den Schleifen abschnittweise neben dem Mitteldraht fließt, läßt sich eine Konfiguration mit ähnlichen Eigenschaften verwirklichen (3.20 b). Die Wirkung der senkrecht zum Mitteldraht verlaufenden Drahtabschnitte entspricht der-

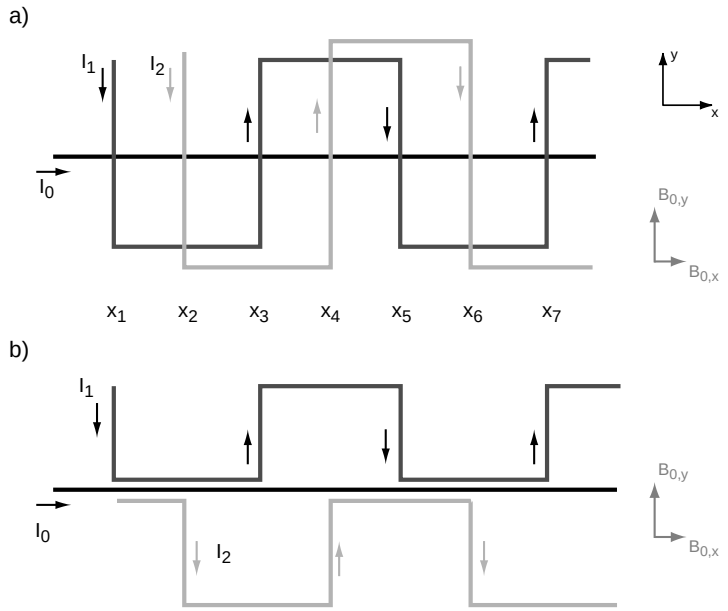



Abb. 3.20: *Beim magnetischen Förderband entstehen die Fallenminima – anders als bei der „u-förmigen“ oder „z-förmigen Falle – über den stromführenden kreuzenden Drähten. Sehr günstig ließe sich ein Förderband realisieren, wenn sich verschiedene Leiterbahnen überkreuzen können (a). Für den Einsatz eines einlagigen Leiterbahnsubstrats müssen die quer verlaufenden Drähte die Kreuzung meiden (b), so daß die Schleifen aus a) jeweils auf eine Seite beschränkt sind.*

jenigen der kreuzenden Drähte in a). An den Stellen, an denen die Modulationsdrähte parallel zum zentralen Draht liegen, führen sie zu einem effektiven Strom im Mitteldraht, der je nach Phasenlage der Ströme zu einem veränderten effektiven Strom entlang $\mathbf{e}_x$ führt. Trotz dieses Einflusses funktioniert das Förderband mit dieser Konfiguration. Der störende Einfluß der Modulationsdrähte läßt sich reduzieren, indem der Strom im Mitteldraht geeignet angepaßt wird (s. Kapitel 5.3.2).

Mit der Methode des transversalen Minimums, die im Anhang B.2 vorgestellt ist, lassen sich die Fallenpotentiale des Förderbandes hilfreich darstellen. Der Graph in Abbildung 3.21 a zeigt den longitudinalen Verlauf der Feldstärke unter Verwendung dieser Methode. Dadurch sind alle Minima und jeweils die niedrigsten Verbindungen zwischen ihnen in dem Graphen enthalten. Nach diesem auf zwei Dimensionen erweiterterten Prinzip ist auch das Höhenlinienbild in b) berechnet, und es verdeutlicht, an welchen Stellen über den Leiterbahnen die Fallen entstehen. Die Felder sind für die typische Startpo-

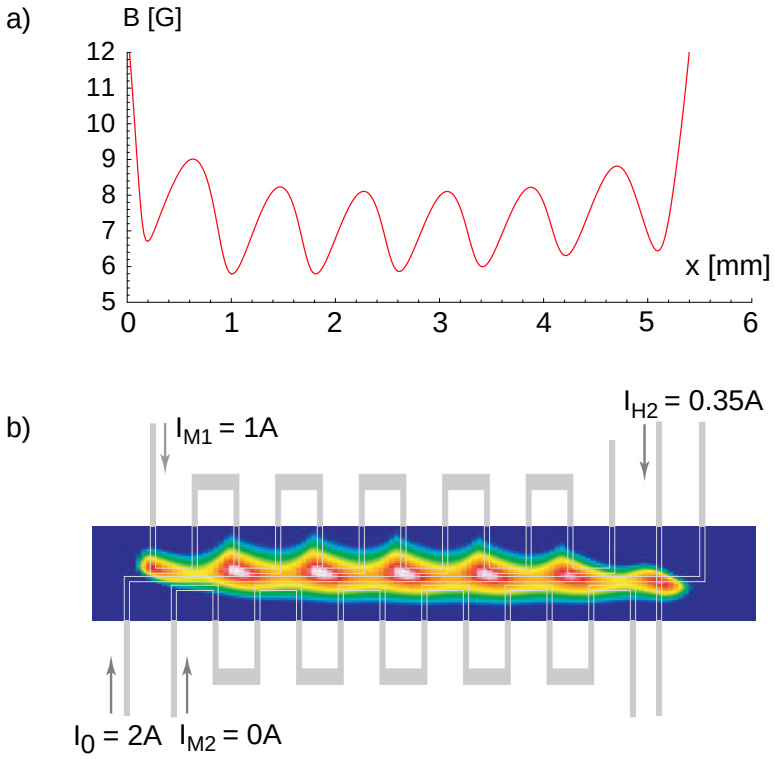



Abb. 3.21: *Position der Minima beim atomaren Förderband. Die Felder sind berechnet für* $\mathbf{B} = 7\,G\mathbf{e}_x + 16\,G\mathbf{e}_y$.

sition des Förderbands aufgenommen, nämlich

$$I_0 = 2\,\mathrm{A} \tag{3.20}$$
$$I_{\mathrm{M1}} = 1\,\mathrm{A} \tag{3.21}$$
$$I_{\mathrm{M2}} = 0\,\mathrm{A} \tag{3.22}$$

mit dem zusätzlichen Strom

$$I_{\mathrm{H2}} = 0,35\,\mathrm{A} \tag{3.23}$$

im zweiten Hilfsdraht.

Die Barrieren zwischen benachbarten Minima sind etwa 2 G hoch, was für $^{87}$Rb-Atome im $|F = 2, m_F = 2\rangle$-Grundzustand einer Temperatur von ca. 140 $\mu$K entspricht. In einem solchen Minimum läßt sich eine Atomwolke mit einer Temperatur von 30 bis 70 $\mu$K ohne thermische Verluste speichern.

Die Barrieren sind damit hoch genug, um Atome aus einer magneto-optischen Falle in einzelne Potentialmulden zu laden. Wenn die Atome transportiert

werden, ist aber anstelle der Barrierenhöhe ein anderer Wert von größerer Bedeutung: die Zahl der quantenmechanischen Zustände in einem einzelnen Minimum. Wenn die Falle ihre Größe und Tiefe ändert, so kann sich aufgrund von Kompression oder Expansion die Temperatur ändern, die Phasenraumdichte aber bleibt erhalten, solange die Verformung adiabatisch vorgenommen wird[4]. Wenn das Produkt aus Atomzahl und Phasenraumdichte die Zahl der zur Verfügung stehenden Quantenzustände überschreitet, gehen notwendigerweise Atome verloren[5]. In der mittleren Potentialmulde der hier dargestellten Feldkonfiguration finden etwa $8{,}5{\cdot}10^{11}$ Zustände Platz. Bei einer Zustandsdichte von $\rho_{ph} = 10^{-6}$ könnten nach dieser (zu) optimistischen Abschätzung nicht mehr als $8{,}5{\cdot}10^{5}$ Atome gespeichert werden.

## 3.6 Skalierung von magnetischen Fallen

Der Schritt von klassischen Magnetfallen zu magnetischen Mikrofallen war unter anderem von der Idee getrieben, die hohen Felder und Feldgradienten, die in der Nähe von stromführenden Strukturen auftreten, auszunutzen. Mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen und mit einigen Annahmen über die strombegrenzenden Mechanismen in magnetischen Mikrofallen läßt sich abschätzen, wie weit Gradienten und Krümmungen anwachsen, wenn die Leiterstrukturen immer weiter miniaturisiert werden.

### 3.6.1 Skalierung von Magnetfeldern

Aus der Maxwell-Gleichung der Magnetostatik (Gl. 2.10)

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0\,\mathbf{j} \tag{3.24}$$

läßt sich ableiten, wie sich das magnetische Feld verhält, wenn die Abmessungen einer Leiterstruktur zu größeren oder kleineren Werten skaliert werden. Offensichtlich wächst das Magnetfeld linear mit dem Strom. Skaliert man dagegen bei konstantem Strom alle Koordinaten

$$r \longrightarrow r' = \epsilon\, r \tag{3.25}$$

mit dem Faktor $\epsilon$, so bleiben die Maxwellgleichungen gültig, wenn $\mathbf{B}(r)$ nach

$$\mathbf{B}(r) \longrightarrow \mathbf{B}'(r') = \frac{1}{\epsilon}\mathbf{B}(\frac{r'}{\epsilon}) \tag{3.26}$$

[4]vorausgesetzt, die charakteristische Form der Falle bleibt erhalten [53].

[5]Diese grobe Abschätzung berücksichtigt nicht, daß höher gelegene Quantenzustände thermisch weniger besetzt sind.

übergeht. Hieraus folgt das allgemeine Skalierungsverhalten von Magnetfeldern und deren Ableitungen:

$$\mathbf{B}'(r') = \mathbf{B}(r)\,\frac{I'}{I}\,\left(\frac{r'}{r}\right)^{-1} \tag{3.27a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i'}\,\mathbf{B}'(r') = \frac{\partial}{\partial x_i}\,\mathbf{B}(r)\,\frac{I'}{I}\,\left(\frac{r'}{r}\right)^{-2} \tag{3.27b}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i'^2}\,\mathbf{B}'(r') = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\,\mathbf{B}(r)\,\frac{I'}{I}\,\left(\frac{r'}{r}\right)^{-3} \tag{3.27c}$$

Als die wichtigste Eigenschaft bei der Skalierung von Magnetfallen entpuppt sich das Verhalten des Gradienten 3.27b, welches sich in einprägsamer Form als

Skalierung des Feldgradienten

$$\boxed{b \propto \frac{I}{r^2} \propto j} \tag{3.28}$$

fassen läßt.

In Abschnitt 2.3.3 wurde gezeigt, daß die Oszillationsfrequenz in einer harmonischen Magnetfalle proportional zu $b^{2/3}$ skaliert

$$\omega_{\mathrm{osc}} \propto b^{2/3} \propto j^{2/3}\ , \tag{3.29}$$

vorausgesetzt, daß das homogene Feld $B_{\mathrm{min}}$ im Zentrum der Falle geeignet angepaßt wird, um den Adiabatizitätskoeffizienten $\alpha_{\mathrm{adiab}}$ konstant zu halten. Technisch gesehen ist dies leicht zu bewerkstelligen, da das notwendige Feld in der Größenordnung von maximal einigen Gauss liegt und durch externe Spulen erzeugt werden kann.

### 3.6.2 Skalierung der Leiterstrukturen

Mit dem Schritt von der „traditionellen“ Magnetfalle zur ersten Mikrofalle ist bereits ein Sprung in den erreichbaren Gradienten getan. Nicht zuletzt die Technik wird wesentlich vereinfacht beim Übergang von externen Spulen zu dünnen Drähten innerhalb der Vakuumapparatur. In traditionellen Magnetfallen können Feldgradienten bis etwa 300 G/cm erzeugt werden. Dazu sind allerdings Ströme bis zu 600 A erforderlich, die zu einer Leistungsaufnahme von mehr als 1 kW führen [55]. Um mit Mikrofallen ähnlich hohe und höhere Gradienten zu erzeugen, sind dagegen Ströme von nur wenigen Ampère

nötig. In dem magnetischen Förderband, das im Rahmen dieser Arbeit realisiert wurde, betragen die Gradienten etwa 600 G/cm, dabei führen Ströme von maximal 2 A zu einer mittleren Leistungsaufnahme von ungefähr 5 W.

Die große Steigerung der Feldgradienten, die der Wechsel von traditionellen Magnetfallen zu magnetischen Mikrofallen mit sich bringt, kommt zunächst durch den Übergang vom Fernfeld in das Nahfeld der magnetfelderzeugenden Strukturen. Im Nahbereich eines Stromleiters hängt nun die Stärke des Magnetfeldgradienten ausschließlich von der Stromdichte ab (Gl. 3.28 bzw. 3.11). Eine weitere Steigerung der Fallensteilheit gelingt also nur durch Erhöhen der Stromdichte. Diese kann für dünne Leiter deshalb höhere Werte annehmen, weil die erzeugte Wärmeleistung besser an die Umgebung abgeführt werden kann. Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Fragestellung, wie hohe Feldgradienten und, damit verknüpft, wie große Fallenfrequenzen sich bei weiterer Miniaturisierung der Leiterstrukturen erzeugen lassen.

In den zunächst folgenden Überlegungen wird davon ausgegangen, daß der beschränkende Faktor die Wärme ist, die der Strom in den Ohm'schen Leiterstrukturen verursacht. Entweder wird die entstehende Wärme so groß, daß die lokale Hitze die Leiterstrukturen zerstört, oder die Gesamtleistung übersteigt die Kühlkapazitäten des Systems, so daß sich kein Wärmegleichgewicht einstellen kann. Wir nehmen hier an, daß die stromführenden Strukturen als Leiterbahnen auf einem Substrat aufgebracht sind, welches die dissipierte Wärme abführen kann. Bei der Skalierung der Strukturen ändert sich zum einen die in den Leitungen erzeugte Wärmeleistung, zum anderen das Vermögen, die entstehende Wärme an die Umgebung weiterzuleiten. Aus der Untersuchung der Skalierungseigenschaften läßt sich schließen, wie der Strom in den Leitungen angepaßt werden muß, um beispielsweise eine konstante Temperaturdifferenz zwischen einem Wärme- (bzw. Kälte-)Reservoir und den wärmeerzeugenden Leitungen zu erreichen. Es gibt andere Modelle, die beispielsweise Supraleiter vom Typ I und II als Stromleiter diskutieren [16]. In solchen Fällen sind Parameter wie die kritische Stromstärke oder das kritische Magnetfeld die relevanten Faktoren.

Ein Modell, welches den beschränkenden Faktor der Wärmeleistung zu beschreiben sucht, beinhaltet als zentralen Parameter die Dimensionalität $d$ der Leiterstruktur, welche zwischen 0 und 2 liegen kann (s. Abb. 3.22). Sie bestimmt, wie sich die wärmeerzeugende Fläche bei der Skalierung verhält. Indirekt hat sie Einfluß auf den Mechanismus der Wärmeleitung, der in der Anordnung zum Tragen kommt. Das klassische Grundlagenexperiment einer einzelnen Magnetfalle entspricht dabei der Dimension $d = 0$. Man kann annehmen, daß die Zuleitungen zum Experiment als breite Leiterbahnen gelegt

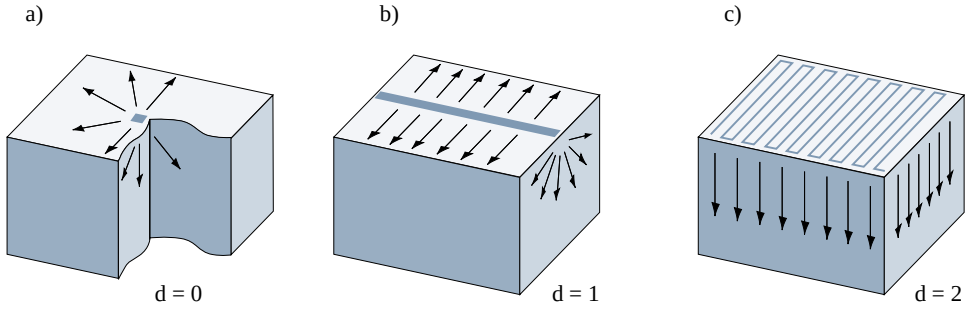



Abb. 3.22: *Die Dimensionalität der Leiterstruktur ist ein zentraler Parameter bei der Skalierung von Mikrofallen. „0-dimensionale“ Strukturen verringern ihre wärmeerzeugende Fläche bei der Skalierung und ermöglichen eine dreidimensionale Wärmeableitung in das Substrat (a). Bei eindimensionalen Strukturen wie in b) ist die Wärmeleitung auf zwei Dimensionen reduziert, zweidimensionale Strukturen wie Atomspiegel oder parallel betriebene Magnetfallen (c) ermöglichen lediglich eindimensionalen Wärmetransport.*

werden und die relevante Wärme nur am eigentlichen Ort des Geschehens, der Magnetfalle, auftritt. Skaliert man hier die Strukturgröße um den Faktor $\epsilon$, so verringert sich die wärmeerzeugende Fläche um den Faktor $\epsilon^2$. Ein Beispiel für eine eindimensionale Leiterstruktur wäre ein Förderband für Atome, das als Basis einen langgestreckten Draht verwendet. Hier führt eine Verringerung der Strukturgröße um $\epsilon$ nur auf eine Wärmeflächenabnahme um den Faktor $\epsilon$. Der Zukunftstraum von einem atomaren Rechner, in dem viele Magnetfallen gleichzeitig als Register für einen Quantencomputer betrieben werden, mag als Beispiel für eine zweidimensionale Struktur dienen. Näher an der Realität liegen Raster von alternierend stromdurchflossenen Drähten, mit denen magnetische Spiegel für Atome konstruiert werden [17, 19]. In diesem Fall bleibt bei einer Skalierung der Strukturgröße die wärmeerzeugende Fläche konstant.

### Skalierung der Wärmeleiteigenschaften

Das hier verwendete Modell geht von einer kontinuierlichen Wärmeleistung aus, welche in den Leitungen erzeugt wird und im Gleichgewicht durch den sich bildenden Temperaturgradienten an den Trägerblock abgeleitet wird[6].

[6]Die Wärmeabgabe über Schwarzkörperstrahlung wird hier vernachlässigt, da die Temperaturen der Drähte wegen thermischer Kopplung an die Atome nicht zu hohe Werte erreichen sollen.

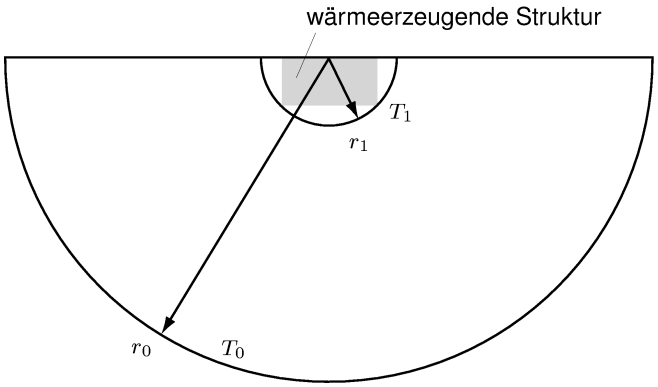



Abb. 3.23: *Im stationären Zustand hat sich die leitende Struktur auf die Temperatur $T_1$ aufgeheizt, während im Abstand $r_0$ die Temperatur $T_0$ herrscht.*

Zugrundegelegt wird die Wärmeleitungsgleichung

$$\mathbf{j}_Q = -\lambda \nabla T \tag{3.30}$$

gemeinsam mit der Kontinuitätsgleichung für die Wärmeenergie

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_Q = p_Q \,, \tag{3.31}$$

worin $\lambda$ der Wärmeleitkoeffizient ist, $\mathbf{j}_Q$ der Wärmestrom und $p_Q$ die Wärmeleistung pro Volumen. Hieraus erhält man die Gleichung für die Temperaturverteilung:

$$\triangle T = -\frac{p_Q}{\lambda} \,, \tag{3.32}$$

welche im folgenden für die verschieden-dimensionalen Wärmequellen gelöst wird. Dazu werden vereinfachend Randbedingungen angenommen, die der Symmetrie der Quellen entsprechen, nämlich kugelförmig für $d = 0$, zylindrisch für $d = 1$ und linear für $d = 2$. Im Abstand $r = r_0$ soll jeweils die konstante Temperatur $T_0$ herrschen, während bei $r = r_1$ die Temperatur $T_1$ sei. Die Größe $r_1$ soll charakteristisch für die Struktur sein, so daß innerhalb dieses Radius' gerade alle Wärmequellen eingeschlossen sind. In diesem Fall beschreibt $T_1$ die Temperatur, auf welche sich die Leitungen im konstanten Betrieb erhitzen.

Außerhalb des Radius $r_1$ ist das System frei von Wärmequellen, und die Temperaturgleichung 3.32 geht in eine homogene Laplace-Gleichung über. Unter den gegebenen Randbedingungen sind die Lösungen entsprechend der

Symmetrien:

$$T = T_0 + \Delta T \, \frac{r_1}{r} \qquad \text{für } d = 0 \tag{3.33a}$$

$$T = T_0 + \Delta T \cdot \frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)} \qquad \text{für } d = 1 \tag{3.33b}$$

$$T = T_0 + \Delta T (1 - \frac{r}{r_0}) \qquad \text{für } d = 2 \; . \tag{3.33c}$$

Im Falle der dreidimensionalen Wärmeleitung ($d = 0$) wurde hier bereits der Grenzübergang $r_0 \to \infty$ vollzogen, was der Annahme $r_0 \gg r_1$ entspricht.

Mit Hilfe der Wärmeleitungsgleichung 3.30 läßt sich der Wärmestrom im Gleichgewicht und somit die abgeführte Gesamtleistung ($d = 0$), die Leistung pro Strecke ($d = 1$) bzw. die Leistung pro Fläche ($d = 2$) berechnen. Dabei muß berücksichtigt werden, daß die Wärme nur in einen Halbraum fließt. Man erhält auf diese Weise eine Beziehung zwischen der charakteristischen Größe der Struktur und ihrem Vermögen, die in ihr erzeugte Wärme bei gegebener Temperaturdifferenz $\Delta T$ an die Umgebung abzuleiten:

$$\mathbf{j}_Q = \lambda \, \Delta T \, \frac{r_1}{r^2} \, \mathbf{e}_r \qquad \dot{Q} = 2\pi \, \lambda \, r_1 \, \Delta T \qquad \text{für } d = 0 \tag{3.34a}$$

$$\mathbf{j}_Q = \lambda \, \Delta T \frac{1}{r \ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right)} \, \mathbf{e}_\rho \qquad \frac{\dot{Q}}{L} = \pi \, \lambda \, \frac{\Delta T}{\ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right)} \qquad \text{für } d = 1 \tag{3.34b}$$

$$\mathbf{j}_Q = \lambda \, \frac{\Delta T}{r_0} \mathbf{e}_z \qquad \frac{\dot{Q}}{A} = \lambda \, \frac{\Delta T}{r_0} \qquad \text{für } d = 2 \tag{3.34c}$$

Aus den Gleichungen für die pro Zeit abgeführte Wärmemenge $\dot{Q}$ läßt sich folgendes Skalierungsverhalten ableiten:

$$\frac{\dot{Q}'}{\dot{Q}} = \frac{r_1'}{r_1} \qquad \text{für } d = 0 \tag{3.35a}$$

$$\frac{\dot{Q}'}{\dot{Q}} = \frac{\ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right)}{\ln\left(\frac{r_0}{r_1'}\right)} \qquad \text{für } d = 1 \tag{3.35b}$$

$$\frac{\dot{Q}'}{\dot{Q}} = \left(\frac{r_1'}{r_1}\right)^0 = 1 \qquad \text{für } d = 2 \tag{3.35c}$$

Diese Gleichungen geben einen Anhaltspunkt, wie bei der Größenskalierung von magnetischen Mikrofallen die elektrisch zugeführte Leistung eingestellt werden sollte.

### Skalierung der Wärmeleistung

Wie sich die elektrische Wärmeleistung bei der Skalierung verhält, hängt neben der Dimension der Leiterstruktur $d$ von der Art der Skalierung ab. Von theoretischer Seite betrachtet, ist die dreidimensionale Skalierung, bei welcher Breite, Höhe und Länge der Leiterstrukturen gleichermaßen verändert werden, die wichtigste. Man geht davon aus, daß die Breite der Leiterstruktur bereits optimal auf die Höhe abgestimmt ist (in der Regel ist das der Fall, wenn die Breite in etwa der Höhe entspricht), und interessiert sich dafür, wie sich die Magnetfelder bei gleichzeitiger Skalierung aller Dimensionen verändern. Aus technischer Sicht ist eine zweite Skalierung von Bedeutung, welche die Höhe der Leiterstruktur konstant läßt und sich nur auf Breite und Länge auswirkt. Sie kommt zum Tragen, wenn die Leiterstrukturen eine viel größere Breite als Höhe besitzen, wenn beispielsweise die Höhe der Leiterbahnen durch den Herstellungsprozeß festgelegt ist, ihre Breite und Form aber frei gestaltet werden kann. Im folgenden wird der dreidimensionalen Skalierung der Parameter $D = 3$ zugeordnet, der zweidimensionalen Skalierung mit konstanter Höhe der Parameter $D = 2$.

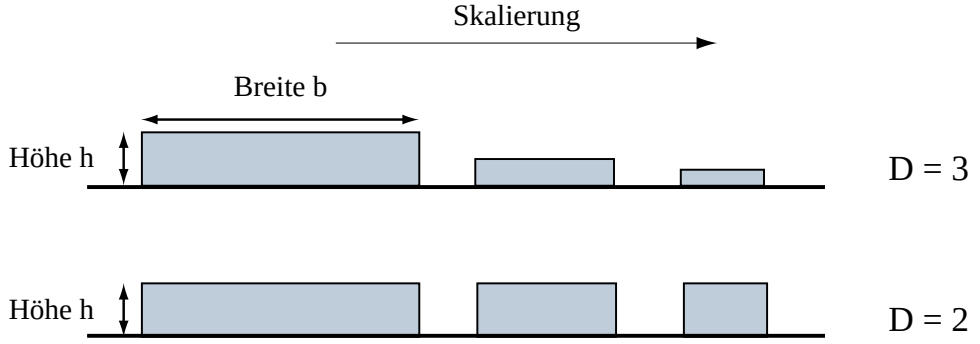



Abb. 3.24: *Skalierung der Leitungsquerschnitte: Der dreidimensionalen Skalierung wird der Parameter $D = 3$ zugeordnet. Vor allem technische Bedeutung hat die zweidimensionale Skalierung $D = 2$, bei welcher die Höhe der Struktur konstant gelassen wird.*

Die elektrische Leistung, welche ein Strom $I$ in einem Leiter der Länge $L$ und der Breite $b$ und Höhe $h$ hervorruft, ist

$$P_{\mathrm{el}} = \rho_{\mathrm{spez}}\, \mathbf{j}^2\, L\, b\, h = \rho_{\mathrm{spez}}\, L\, \frac{I^2}{b\, h}\ . \tag{3.36}$$

Damit skaliert die Wärmeleistung, die eine einzelne Leiterbahn abgibt, nur

mit der Höhe $h$, denn $\frac{L}{b} = \frac{L'}{b'}$ :

$$\left(\frac{P'}{P}\right)_{\text{Einzelstruktur}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^{-1} \left(\frac{I'}{I}\right)^2 = \left(\frac{r_1'}{r_1}\right)^{2-D} \left(\frac{I'}{I}\right)^2 . \tag{3.37}$$

Die Gesamtleistung ist zusätzlich abhängig von der Dimensionalität $d$ der Leiterstruktur, was letztlich auf die Skalierung

$$P_{\text{el}}' = P_{\text{el}} \left(\frac{r'}{r}\right)^{2-D-d} \left(\frac{I'}{I}\right)^2 \tag{3.38}$$

führt.

### Skalierung des Stromes

Aus den vorangegangenen Ergebnissen lassen sich verschiedene Modelle ableiten, gemäß derer der Strom skaliert werden kann. Betrachten wir eine Verringerung der Abmessungen, so ist das Beibehalten einer konstanten Stromdichte eine sichere Wahl. Die Skalierung führt dazu, daß die Ausdehnung der Wärmequellen gleich bleibt (für $D = 2$, $d = 2$) oder abnimmt, während die volumenspezifische Wärmeleistung konstant ist. Jedes andere Modell für die Abwärtsskalierung sollte also diese oder höhere Ströme zulassen:

$$\left(\frac{I'}{I}\right)_{j=\text{const.}} = \left(\frac{r'}{r}\right)^{D-1} = \begin{cases} \frac{r'}{r} & \text{2D-Skalierung} \\ \left(\frac{r'}{r}\right)^2 & \text{3D-Skalierung} \end{cases} \tag{3.39}$$

### Konstante Wärmeleistung

Zwei weitere Skalierungsmodelle für den Strom sollen diskutiert werden:

- konstante Wärmeleistung
- konstante Temperaturdifferenz .

Das Modell der konstanten Wärmeleistung gründet sich auf der Annahme, daß die maximale Wärme, welche dem Trägerblock zugeführt werden kann, durch die Gesamtkühlleistung des Systems beschränkt ist. Maßgebend dafür kann beispielsweise der Wärmekontakt des Trägerblocks an das äußere System sein oder die Kühlleistung eines Peltier-Elementes. Die Temperatur der Leiterstrukturen spielt dann keine Rolle, weil sie in jedem Fall unter der Temperatur liegt, bei welcher die Leiterbahnen zerstört würden. Dieses Modell ist effektiv mit dem Modell einer eindimensionalen Wärmeleitung identisch, denn wie aus der entsprechenden Gleichung 3.34c ersichtlich ist, hängt genau in dem Fall die abgeführte Wärmemenge nicht von der charakteristischen Strukturgröße ab. Das Verhalten der elektrischen Wärmeleistung ist bereits mit Gleichung 3.38 beschrieben, so daß hieraus direkt die Skalierung des Stromes

$$\left(\frac{I'}{I}\right)_{P_{\mathrm{tot}}=\mathrm{const.}} = \left(\frac{r'}{r}\right)^{\frac{d+D}{2}-1} \tag{3.40}$$

folgt.

### Konstante Temperaturdifferenz

Ist die Gesamtkühlleistung des Systems nicht der beschränkende Faktor, so können sich die Leiterstrukturen selbst so aufheizen, daß sie eine kritische Temperatur erreichen, oberhalb derer ihre Funktion nicht möglich ist. Eine Schranke für die maximale Temperatur können ebenso die Experimente darstellen, für welche die Magnetfallen konzipiert werden, beispielsweise wegen der Wechselwirkung von Atomen mit der Oberfläche oder wegen eines schlechteren Vakuums bei erhöhter Temperatur. In einer solchen Sitution ist es sinnvoll, die Skalierung des Stromes so zu wählen, daß die Temperaturdifferenz zwischen den leitenden Strukturen und dem Wärmereservoir konstant bleibt.

Damit sich ein thermisches Gleichgewicht mit der gewünschten Temperaturdifferenz $\Delta T$ einstellt, muß die elektrisch erzeugte Leistung gleich der

Wärmeleistung sein, welche die Struktur bei dem entsprechenden Temperaturgradienten an den Trägerblock abzuleiten vermag:

$$\dot{Q} = P_{\text{elektr.}} \tag{3.41}$$

Um aus dieser Bedingung das Skalierungsverhalten für den Strom zu gewinnen, kann die Skalierung der elektrischen Leistung 3.38 in

$$\frac{I'}{I} = \left(\frac{P'_{\text{elekt.}}}{P_{\text{elektr.}}}\right)^{1/2} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\frac{D+d}{2}-1} \tag{3.42}$$

umgeschrieben und für das Verhältnis der elektrischen Leistungen das Verhältnis der abfließenden Wärmemengen gemäß 3.35 eingesetzt werden.

Das Ergebnis dieser Rechnung ist gemeinsam mit den anderen Modellen der Stromskalierung in den beiden Tabellen 3.3 und 3.4 zusammengefaßt. Dabei steht der Parameter $r$ für die charakteristische Größe der Leiterstruktur und $r_0$ für einen als konstant angenommen Abstand, in welchem die Reservoirtemperatur $T_0$ herrschen soll. Dies ist die Temperatur, bezüglich der im zuletzt besprochenen Modell die Temperaturdifferenz konstant gehalten wird.

### 3.6.3 Diskussion der Modelle

Betrachten wir kurz, welche Auswirkungen dieses Skalierungsverhalten auf die Eigenschaften der Magnetfalle hat. Wie zu Beginn des Kapitels erläutert, nimmt die Oszillationsfrequenz von gefangenen Teilchen gemäß

$$\omega \propto b^{2/3} \propto j^{2/3} \tag{3.43}$$

zu. Das Modell der konstanten Stromdichte führt also nicht zu einer Änderung der Falleneigenschaften. Sowohl das Modell der konstanten Temperatudifferenz als auch das der eindimensionalen Wärmeleitung erlauben dagegen eine Erhöhung der Stromdichte bei einer Verkleinerung der Strukturen. Die Stromdichte wächst dabei gemäß

$$j \propto \left(\frac{r}{r'}\right)^{\zeta} \tag{3.44}$$

mit $\frac{1}{2} \leq \zeta \leq \frac{3}{2}$, so daß die Fallenfrequenz bei der Miniaturisierung entsprechend

$$\omega \propto \left(\frac{r'}{r}\right)^{1/3} \ldots \left(\frac{r'}{r}\right) \tag{3.45}$$

Tabelle 3.3: **Zweidimensionale Skalierung** ($D = 2$)

$$\frac{I'}{I} \propto$$

| Modell | „Falle“ $d = 0$ | „Förderband“ $d = 1$ | „Spiegel“ $d = 2$ |
|---|---|---|---|
| konstante Stromdichte | $\left(\frac{r'}{r}\right)$ | $\left(\frac{r'}{r}\right)$ | $\left(\frac{r'}{r}\right)$ |
| konstante Temperatur-differenz | $\left(\frac{r'}{r}\right)^{1/2}$ | $\left(\frac{r'}{r}\right)^{1/2} \left(\frac{\ln \frac{r}{r_0}}{\ln \frac{r'}{r_0}}\right)^{1/2}$ | $\left(\frac{r'}{r}\right)$ |
| konstante Wärmeleistung | $\left(\frac{r'}{r}\right)^{0}$ | $\left(\frac{r'}{r}\right)^{1/2}$ | $\left(\frac{r'}{r}\right)$ |

Tabelle 3.4: **Dreidimensionale Skalierung** ($D = 3$)

$$\frac{I'}{I} \propto$$

| Modell | „Falle“ $d = 0$ | „Förderband“ $d = 1$ | „Spiegel“ $d = 2$ |
|---|---|---|---|
| konstante Stromdichte | $\left(\frac{r'}{r}\right)^{2}$ | $\left(\frac{r'}{r}\right)^{2}$ | $\left(\frac{r'}{r}\right)^{2}$ |
| konstante Temperatur-differenz | $\left(\frac{r'}{r}\right)^{1}$ | $\left(\frac{r'}{r}\right)^{1} \left(\frac{\ln \frac{r}{r_0}}{\ln \frac{r'}{r_0}}\right)^{1/2}$ | $\left(\frac{r'}{r}\right)^{3/2}$ |
| konstante Wärmeleistung | $\left(\frac{r'}{r}\right)^{1/2}$ | $\left(\frac{r'}{r}\right)^{1}$ | $\left(\frac{r'}{r}\right)^{3/2}$ |

zunimmt.

Die Dünnschicht-Hybrid-Technik, mit der unsere Leiterbahnen gefertigt sind, erlaubt es, Strukturen von etwa $10\,\mu$m Breite herzustellen. Wir haben eine solche Leiterbahn (w=$10\,\mu$m, h=$7\,\mu$m) getestet und bei einer Stromdichte von etwa $2{\cdot}10^6$ A keine Schädigung feststellen können. Bei diesen Parametern ergeben sich Magnetfelder und Gradienten von

$$B \approx 200\,\text{Gauss} \tag{3.46}$$

$$b \approx 1,6 \cdot 10^4\,\text{G/cm}\,. \tag{3.47}$$

In einer sehr optimistischen Abschätzung lassen sich magnetische Fallen bis zu einer Entfernung von 100 nm realisieren, was einer Skalierung der gesam-

ten Strukturen um den Faktor 100 entspricht. Eine dreidimensionale Skalierung der Leiterstrukturen führt unter Verwendung des günstigsten Modells (D=3,d=0) auf eine Zunahme des Gradienten um einen Faktor $100^{3/2} = 1000$. In diesem Fall wäre also ein Gradient von $b \approx 1{,}5 \cdot 10^7\,\mathrm{G/cm}$ erreichbar. Für $^{87}$Rubidiumatome im Zustand $|F = 2, m_F = 2\rangle$ entspricht dies nach Gl. 2.86 und $\alpha_{\mathrm{adiab}} = 10$ einer Fallenfrequenz von 3 MHz. Es ist jedoch unwahrscheinlich, daß man Atome so nahe an Oberflächen über längere Zeiten speichern kann. C. Henkel und M. Wilkens schätzen in ihrer Veröffentlichung [56] ab, daß der Grundzustand von Atomen, die sich in etwa $1\,\mu$m Abstand zu einer Metalloberfläche befinden, eine mittlere Lebensdauer von wenigen Sekunden besitzen. Es ist nicht auszuschließen, daß hier bereits die Grenze für weitere Miniaturisierung von Magnetfallen liegt.

Allerdings gelten die Rechnungen in [56] für Raumtemperatur. Durch eine Kühlung der Apparatur ließe sich die Verlustrate stark reduzieren, außerdem nimmt bei niedrigeren Temperaturen die Leitfähigkeit der Metalle zu, so daß sich in den Leiterbahnen höhere Stromdichten realisieren lassen [17].

Mit Rubidiumatomen in einen Bereich vorzudringen, in welchem direktes Seitenbandkühlen realisiert werden kann, scheint dennoch schwierig. Dagegen ist es bereits mit den realisierten Strukturen möglich, das Lamb-Dicke-Regime zu erreichen.

# 4 Experimenteller Aufbau

Ziel des beschriebenen Experimentes ist es, Rubidiumatome in der Nähe einer Oberfläche magnetisch zu speichern und zu manipulieren. Die notwendigen magnetischen Felder werden dabei von Leiterbahnen erzeugt, die lithographisch auf einem Trägersubstrat aufgebracht sind. Auf diese Weise lassen sich die hohen Feldgradienten in der Nähe der stromführenden Strukturen nutzen und es können sehr steile und sehr komplexe Fallen erzeugt werden. Für das Laden der Atome und ihre Detektion finden im wesentlichen die Methoden Anwendung, die sich bei ähnlichen Experimenten mit „herkömmlichen“ Magnetfallen etabliert haben:

- Laden der Atome aus dem Hintergrundgas (MOT)
- Polarisationsgradientenkühlung und optisches Pumpen
- Detektion der Atome mit Hilfe der Absorptionsabbildung

Da jedoch in diesem Experiment die Atome sehr nahe ($< 1$mm) an die Oberfläche herangeführt werden müssen, läßt sich das Standardverfahren nicht ohne Modifikationen anwenden. Ein wichtiger Schritt auf dem Weg zu magnetischen Mikrofallen ist ein Schema zum effizienten Laden der Mikrofallen. Wir haben dazu die „Spiegel-MOT“ entwickelt, eine Variante der Standard-MOT, bei welcher zwei der sechs Strahlen durch reflektierte Strahlen ersetzt werden.

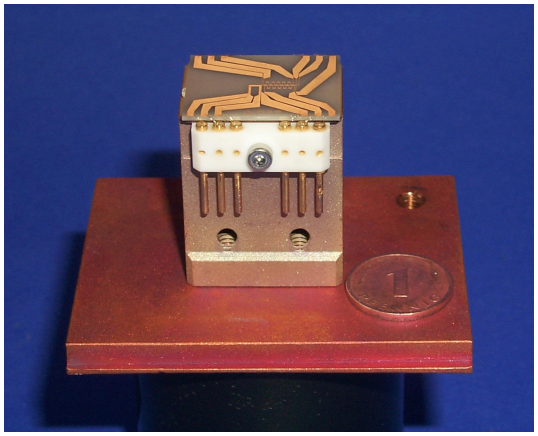


Abb. 4.1: *Keramiksubstrat mit den Goldleiterbahnen für die magnetischen Mikrofallen.*
*Diese Leiterstruktur wird für das atomare Förderband verwendet. Das Photo zeigt das Substrat, bevor die Oberfläche verspiegelt wird.*

## 4.1 Gesamtübersicht

Herzstück der Apparatur ist das Leiterbahnsubstrat, mit welchem die magnetischen Mikrofallen erzeugt werden. Es wird lithographisch hergestellt und bietet auf einer Oberfläche von knapp $2 \times 2$ cm Platz für verschiedene Leiterstrukturen (s. Abb. 4.1). Um eine gute Wärmeableitung zu gewährleisten, wird das Substrat auf der Unterseite eines Kupferblockes montiert, der von oben in eine 12 cm lange Glaszelle hineinragt. Die magnetischen Mikrofallen entstehen unterhalb der Leiterbahnen, so daß die gespeicherten Atome nach dem Abschalten der Magnetfelder frei fallen können. Auf diese Weise läßt sich unter anderem die Expansion der Atomwolke beobachten und daraus die Temperatur erschließen.

Eine Spiegelschicht auf dem Substrat dient dazu, trotz der Nähe der Oberfläche ein Lichtfeld zu erzeugen, mit welchem die Atome eingefangen werden können.

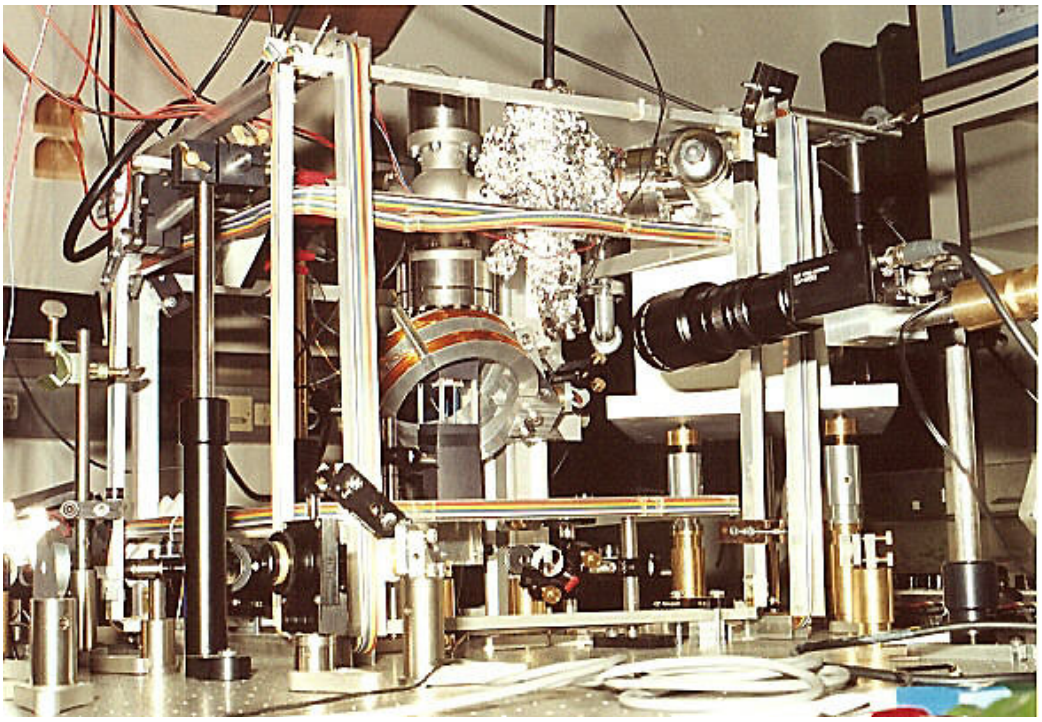


Abb. 4.2: *Das Leiterbahnsubstrat hängt an einem Kupferträger von oben in eine Glaszelle. Das um 45° geneigte Spulenpaar erzeugt das Quadrupolfeld für die magneto-optische Falle, die Atome werden mit der CCD-Kamera (rechts) über Absoprtionsabbildung detektiert.*

Um die Experimente flexibel gestalten zu können, wird der zeitliche Ablauf der Messungen über einen Computer gesteuert: Mit drei synchronisierten Ein-/Ausgabekarten werden u. a. Laserleistung, Laserfrequenzen und verschiedene Ströme für die Magnetfelder kontrolliert. Für die Detektion der Atome schließlich steht ein zweiter Computer zur Verfügung, der das mit einer CCD-Kamera aufgenommene Absorptionsbild der Atome einliest und auswertet.

## 4.2 Das Mikrofallen-Substrat

Bei der Wahl der Technik, mit der das Mikrofallensubstrat hergestellt wird, müssen drei wichtige Punkte berücksichtigt werden:

- Die elektrische Leistung, die durch die Mikrodrähte zugeführt wird, soll möglichst klein sein im Verhältnis zur Fallentiefe und zur Fallensteilheit, die mit den Strömen erreicht werden. Die deponierte Wärmeenergie soll möglichst schnell abgeleitet werden.

- Um das Potential der Mikrofallen auszuschöpfen zu können, sollen sich komplexe Leiterstrukturen verwirklichen lassen.

- Die verwendeten Materialien müssen sich im Ultrahochvakuum einsetzen lassen.

Das beste Verhältnis von elektrischer Leitfähigkeit zur erzeugten Feldstärke erreicht man, wenn die Strukturen etwa gleiche Höhe und Breite haben. Die Höhe der Leiterstrukturen sollte also nicht viel geringer sein als die kleinste Breite, die sich mit der gewählten Technik realisieren läßt. Ein Trägersubstrat mit guter Wärmeleitfähigkeit hilft, die Überhitzung der Leiterbahnen zu vermeiden. Schließlich ist für die Herstellung größerer Substrate eine lithographische Technik von Vorteil, die ein paralleles Schreiben der Strukturen ermöglicht.

Während die Leiterstrukturen bei üblichen Lithographie-Techniken sehr flach ($<$100 nm) sind, bietet die Dünnschicht-Hybrid-Technik die Möglichkeit, die Leiterbahnen nach dem ersten Lithographieschritt galvanisch zu verstärken. Wir haben im Laufe der bisherigen Experimente zwei verschiedene Substrate benutzt, die beide mit dieser Technik gefertigt wurden.

### Dünnschicht-Hybrid-Technik

Ausgangspunkt ist ein Trägersubstrat, auf welches eine ca. 100 nm dünne Goldschicht aufgebracht ist. Ein darauf aufgeschleuderter Photolack wird durch eine Maske belichtet, und im anschließenden Ätzprozeß werden diejenigen Stellen freigelegt, an denen Strukturen entstehen sollen. In einem Galvanikbad wird die untere Goldschicht verstärkt und wächst in den Kanälen des Photolackes einige Mikrometer hoch. In einem letzten Schritt wird der restliche Photolack entfernt und die gesamte freiliegende Goldschicht so weit herabgeätzt, daß die Strukturen frei stehen.

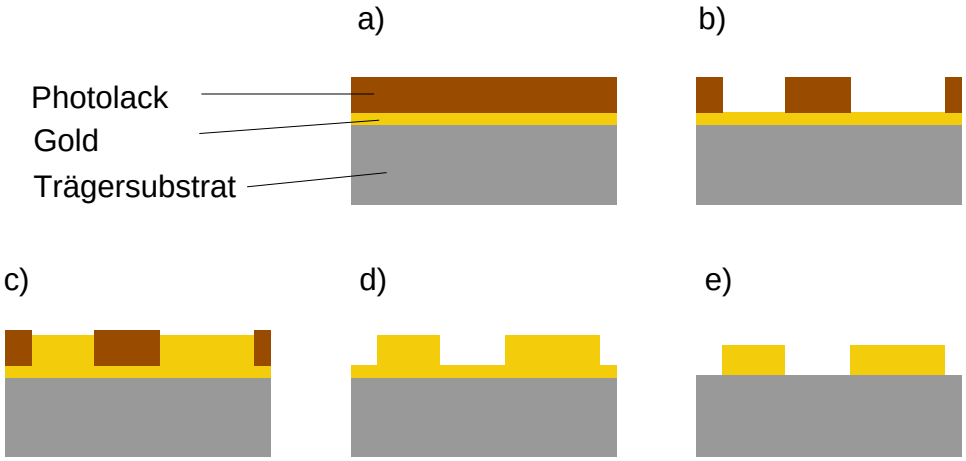



Abb. 4.3: *Dünnschicht-Hybrid-Technik: Eine etwa 100 nm dünne Goldschicht wird an den durch Belichtung definierten Stellen galvanisch verstärkt (a–c). Anschließend wird auf der gesamten Fläche soviel Gold weggeätzt, daß die einzelnen Strukturen getrennt zurückbleiben (e).*

Die ersten Substrate wurden für uns am Lehrstuhl von Prof. Russer an der Technischen Universität München hergestellt. Die Leiterbahnen mit einer Höhe von etwa 3 $\mu$m sind auf einem Träger aus Aluminiumoxid aufgebracht und besitzen eine minimale Breite von 20 $\mu$m (s. Abb. 4.5). Mit einem solchen Substrat wurde die erste Quadrupol-Magnetfalle realisiert. Die Substrate für das atomare Förderband konnten wir am Fraunhofer-Institut für Mikroelektronische Schaltungen und Systeme (IMS) in München fertigen lassen. Die dort verwendete Trägerkeramik Aluminiumnitrid besitzt eine bessere Leitfähigkeit (170 $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K\,m}}$) als das zuvor verwendete Aluminiumoxid (25 $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K\,m}}$) und die Leiterbahnen sind mit 7 $\mu$m Höhe und 10 $\mu$m minimaler Breite noch besser für die Mikrofallen geeignet.

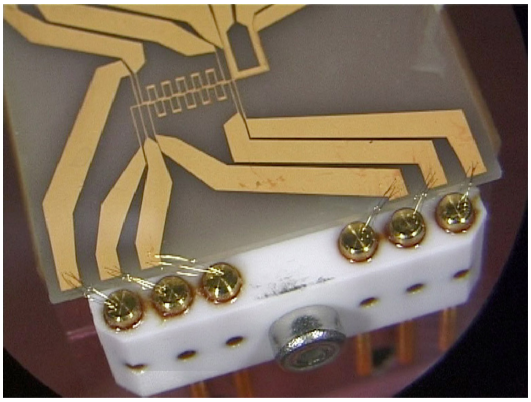


Abb. 4.4: *Leiterbahnsubstrat der „zweiten Generation“ mit der Drahtstruktur für das magnetische Förderband. Die Endpunkte der Leiterbahnen sind jeweils mit mehreren Bond-Drähten kontaktiert.*

### Belastbarkeit der Leiterbahnen

An den Substraten, die vom Fraunhofer-Intitut hergestellt wurden, haben wir Messungen zur Belastbarkeit der Leiterbahnen vorgenommen. Das Testsubstrat wurde dazu auf eine Kupferplatte von $1 \times 2 \times 3\,\mathrm{cm}$ aufgeklebt, um das Wärmereservoir des Trägers in der Apparatur zu simulieren.

Durch eine $10\,\mu\mathrm{m}$ breite und $7\,\mu\mathrm{m}$ hohe Leiterbahn wurde während 90 s ein Strom von 1,5 A geleitet, was einer Stromdichte von $2{,}1{\cdot}10^6\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}^2}$ entspricht. Dabei heizte sich das Substrat auf eine Temperatur von 60°C auf, ohne daß die Leiterbahn Schaden nahm. Der beschränkende Faktor war hier die Gesamtleistung der Wärme, die bei dem gegebenen Aufbau nur durch die Konvektion abgeführt werden konnte, die lokale Überhitzung spielte noch keine Rolle. Von den in Kapitel 3.6 vorgestellten Modellen zur Wärmedissipation entspricht diese Situation dem Modell der eindimensionalen Wärmeleitung, welches die günstigsten Eigenschaften bei Skalierung zu kleineren Strukturen vorhersagt. Bei diesem Strom entstehen im Abstand von $10\,\mu\mathrm{m}$ Magnetfelder und Feldgradienten von etwa

$$B \approx 200\,\mathrm{G} \tag{4.1}$$

$$b \approx 1,6 \cdot 10^4\,\mathrm{G/cm}\,. \tag{4.2}$$

### Spiegelbeschichtung für die MOT

Um die Substrate zu verspiegeln, haben wir zwei verschiedene Methoden angewendet. Bei den ersten Substraten wurden die Leiterbahnen elektrisch

durch eine dünne Schicht Photolack (Microposit S1813) isoliert, der mit dem Ultrahochvakuum in der Kammer verträglich ist. Der Lack wurde in mehreren Schichten aufgeschleudert und jeweils auf einer Heizplatte ausgehärtet. Die Oberfläche ist anschließend glatt genug, daß eine aufgesputterte Silberschicht eine gut reflektierende Spiegelschicht ergibt. Allerdings wird die Struktur der Leiterbahnen durch die Photolackschicht nicht vollständig ausgeglichen, so daß die Oberfläche uneben bleibt[1] (s. Abb. 4.5 a).

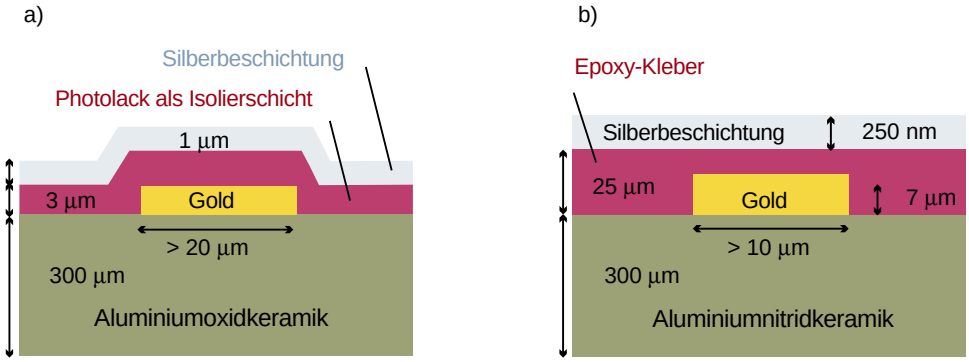



Abb. 4.5: *a) Die ersten Mikrofallensubstrate spiegeln in ihrer Oberflächenstruktur die Struktur der Leiterbahnen wider. b) Die Substrate der „zweiten Generation“ werden mit der Technik der Replika-Optik verspiegelt, so daß die Oberfläche eben wird.*

Bei den Experimenten hat sich gezeigt, daß die magneto-optische Falle robust genug ist, um mit diesen Unebenheiten des Spiegels zu funktionieren. Dennoch haben wir für das zweite eingebaute Substrat die Technik der Replika-Optik benutzt, um die Unebenheiten vollständig auszugleichen. Die Spiegelschicht wird zunächst auf einen Zwischenträger aufgesputtert und mit einem UHV-verträglichen Epoxy-Kleber auf das Leiterbahnsubstrat geklebt. Die Spiegelschicht haftet nun besser am Epoxy-Kleber als an der Oberfläche des Zwischenträgers, so daß man diesen abheben kann. Um Kurzschlüsse zwischen den Leiterbahnen zu vermeiden, wurde der Abstand zwischen Silberschicht und Substratoberfläche mit 25 $\mu$m dünnen Golddrähten fixiert. Die technische Schwierigkeit besteht darin, die Menge des Klebers so zu wählen, daß er alle Zwischenräume zwischen den Leiterbahnen ausfüllt, ohne am Rand der aufgeklebten Schicht auszutreten.

[1] Dafür helfen die Unebenheiten beim ersten Auffinden der magnetischen Falle

Das Mikrofallensubstrat ist auf einem Kupferträger aufgeklebt[2], der mit vier ebenfalls aus Kupfer gefertigten Stangen an der Vakuumapparatur befestigt ist.
Seitlich am Kupferblock nehmen zwei Fassungen aus Macor je 6 Goldstifte auf, von deren Endfläche aus das Substrat mit fünf bis sechs Bond-Drähten kontaktiert wird (s. a. Abb. 4.1). Jeder der 25 $\mu$m dünnen Bond-Drähte kann, nach Auskunft des Fraunhofer-Instituts, etwa 1 A Strom tragen. Wir haben die Bond-Drähte im Vakuum über einige Sekunden bei einem Strom von 0,7 A pro Draht betrieben, ohne daß sie Schaden genommen haben. Darüber hinaus haben wir versehentlich verifiziert, daß ein Strom von 1,4 A pro Bond-Draht[3] zum Verdampfen der Drähte führt. Bei den derzeitigen Experimenten trägt jeder Draht einen Strom von maximal 0,4 A.
Von den Goldstiften führen kaptonisolierte Kupferdrähte zu der Vakuumdurchführung. Ebensolche Kabel versorgen auch den Rubidium-Dispenser mit Strom, den wir als Atomquelle benutzen (s. Abschnitt 4.4).

Abb. 4.6: *Mikrofallensubstrat mit Halterung und elektrischen Kontakten*

## 4.3 Spiegel-MOT

### 4.3.1 Problemstellung

Der Vorschlag, magnetische Mikrofallen durch Leiterbahnen auf einem Substrat zu realisieren, stammt bereits aus dem Jahr 1995 [16]. Daß die experimentelle Umsetzung dennoch drei Jahre hat auf sich warten lassen, liegt nicht allein an den im Vorschlag favorisierten supraleitenden Mikrodrähten und der erforderlichen Kühltechnik. Eine wesentliche Schwierigkeit besteht im Laden

[2] Wärmeleitfähiger Epoxy-Kleber Epo-Tek H77
[3] Die Drähte haben eine Länge von ca. 5 mm

der Mikrofallen, da sich die magnetischen Minima in weniger als 1 mm Entfernung von der Substratoberfläche befinden. An dieser Stelle blockiert das Substrat den optischen Zugang, so daß die klassische magneto-optische Falle mit sechs Strahlen nicht zum Einsatz kommen kann. Die Laserkühlung ist jedoch unverzichtbare Voraussetzung für das Laden der Falle.

In dieser Situation bieten sich zwei Möglichkeiten an, um die Atome in die oberflächennahen Fallen zu laden. Wenn die magneto-optische Falle (MOT) in größerer Entfernung vom Fallensubstrat betrieben wird, müssen die Atome anschließend zur Oberfläche transportiert werden. Dies ließe sich beispielsweise mit einem verschiebbaren magnetischen Quadrupolfeld bewerkstelligen, wie es kürzlich in [57] vorgestellt wurde, um Atome über eine differentielle Pumpstrecke in eine Ultrahochvakuumkammer zu transferieren. Die zweite Möglichkeit besteht darin, durch die Verspiegelung der Substratfläche eine magneto-optische Falle in direkter Nähe zur Oberfläche zu betreiben. Dies ist die Variante, die wir mit der „Spiegel-MOT“ gewählt haben. Dadurch, daß das Quadrupolfeld für die magneto-optische Falle sowohl mit externen Spulen als auch mit Leiterbahnen auf dem Substrat erzeugt werden kann, wird die sonst schwierige Überlagerung von einem externem Feld und dem Feld der Mikrofallen wesentlich erleichert.

Bereits in zwei anderen Arbeitsgruppen sind Atome mit einer speziellen Variante der magneto-optischen Falle in Oberflächennähe geladen worden. In der Heidelberger Gruppe von Prof. Grimm besteht die Oberfläche aus einem Prisma, durch das die für die MOT notwendigen Strahlen auch von der Rückseite gelangen können [58]. Ein näher verwandtes Problem wurde an der Universität Konstanz in der Arbeitsgruppe von Prof. Mlynek gelöst. Dort werden Argon-Atome in den oberflächennähesten Bauch einer optischen Stehwelle transferiert [59]. Als Quelle für die kalten Atome dient die MOST (**M**agneto **O**ptic **S**urface **T**rap), die von vier an der Oberfläche reflektierten Laserstrahlen gebildet wird [60]. Als Spiegel dient ein dünn goldbeschichtetes Prisma, an dessen Oberfläche eine evaneszente Welle die Atome vor Kollisionen mit dem Prisma schützt.

### 4.3.2 Experimentelle Realisierung

In unserem Experiment haben wir eine magneto-optische Falle mit vier unabhängigen Laserstrahlen realisiert. Zwei der üblicherweise sechs Strahlen werden durch einen an der Substratoberfläche reflektierten Strahl ersetzt.

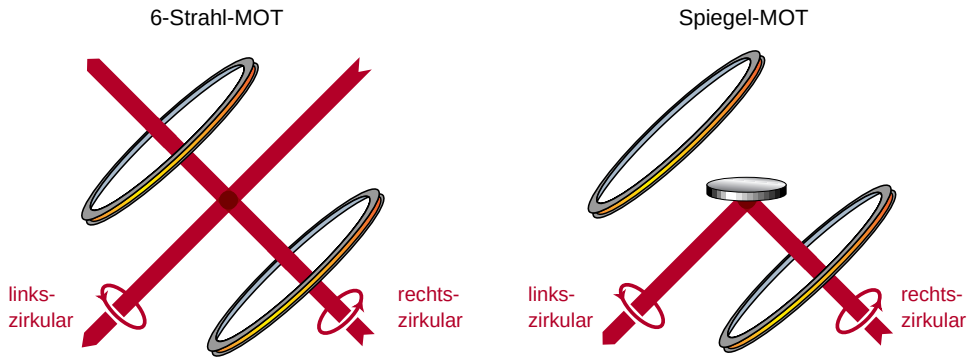



Abb. 4.7: *Bei der Spiegel-MOT sind zwei der üblichen sechs Strahlen der magneto-optischen Falle durch reflektierte Strahlen ersetzt. Der Spiegel ist so angebracht, daß der rechts-zirkular polarisierte Strahl nach der Reflexion den links-zirkular polarisierten Strahl ersetzt, und umgekehrt.*

Da sich bei der Reflexion die Polarisationsrichtung umkehrt[4], ist der Spiegel so montiert, daß er entgegengesetzt polarisierte Strahlen ineinander reflektiert (s. Abb. 4.7). Aus diesem Grund ist die Hauptachse des Quadrupols um 45° geneigt gegen die Spiegeloberfläche. Das zweite Strahlenpaar passiert den Spiegel unter streifendem Einfall. Der Aufbau läßt sich auch als reduzierte Version der Pyramiden-MOT verstehen [61], bei der drei der vier Pyramidenseiten fehlen.

Die Spulen, die das Quadrupolfeld für die magneto-optischen Falle erzeugen, besitzen einen Durchmesser von Ø 14 cm und enthalten je 200 Windungen. Wegen der Position der Glaszelle sind sie nicht in Anti-Helmholtz-Konfiguration, sondern mit einem geringeren Abstand von 3,7 cm angebracht. Wir betreiben die Spulen typischerweise mit einem Strom von 4 A, was im Zentrum zu einem Gradienten von 13,7 G/cm führt. Zusätzlich zu den gegenläufigen Windungen sind auf dem Spulenkörper 30 gleichsinnige Wicklungen aufgebracht, die es ermöglichen, das Zentrum des Quadrupolfeldes entlang der Spulenachse zu verschieben.

Unsere Experimente mit der Spiegel-MOT haben gezeigt, daß sie für ausreichend lange Zeiten in weniger als 0,5 mm Abstand vom Spiegel betrieben werden kann, ohne daß es nötig ist, die Atome durch eine evaneszente Welle vor Kollisionen mit der Oberfläche zu schützen (s. Abschnitt 5.1).

[4]Dies gilt, wenn man jeweils die Ausbreitungsrichtung als Quantisierungsrichtung wählt.

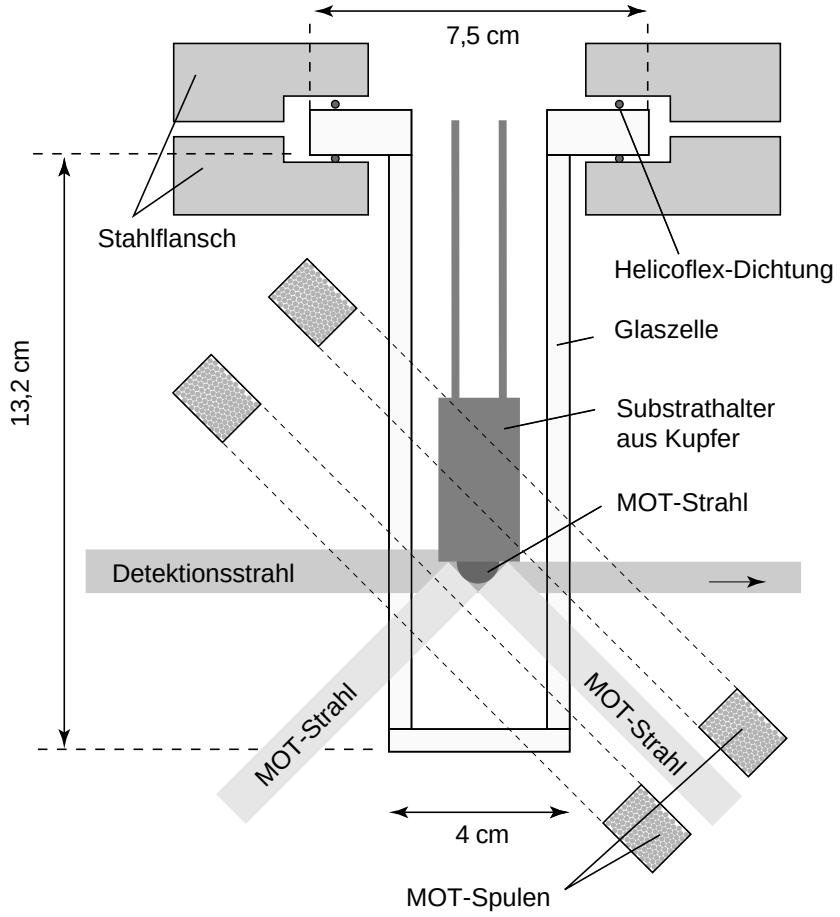



Abb. 4.8: *Montage der Glaszelle und der Quadrupolspulen für die Spiegel-MOT.*

## 4.4 Vakuumapparatur

Die Vakuumapparatur für die Mikrofallenexperimente ist als Ein-Kammer-System aufgebaut, d.h. die einzufangenden Rubidiumatome werden in direkter Nähe zu den Oberflächenfallen aus dem Hintergrundgas geladen. Der Substrathalter mit den Mikrofallenstrukturen ragt von oben in eine längliche Glaszelle, die mit zwei Helicoflex-Dichtungen zwischen zwei speziell gefertigten Flanschstücken aus Stahl angeschraubt ist (siehe Abb. 4.8 und 4.9). Die Glaszelle wurde von der Firma Hellma[5] angefertigt und besteht aus fünf optisch kontaktierten Quarzplatten mit je 5 mm Wandstärke. Für die Befestigung zwischen den Flanschen sitzt der Zellenkörper an einem Glasring,

[5]Hellma, Müllheim

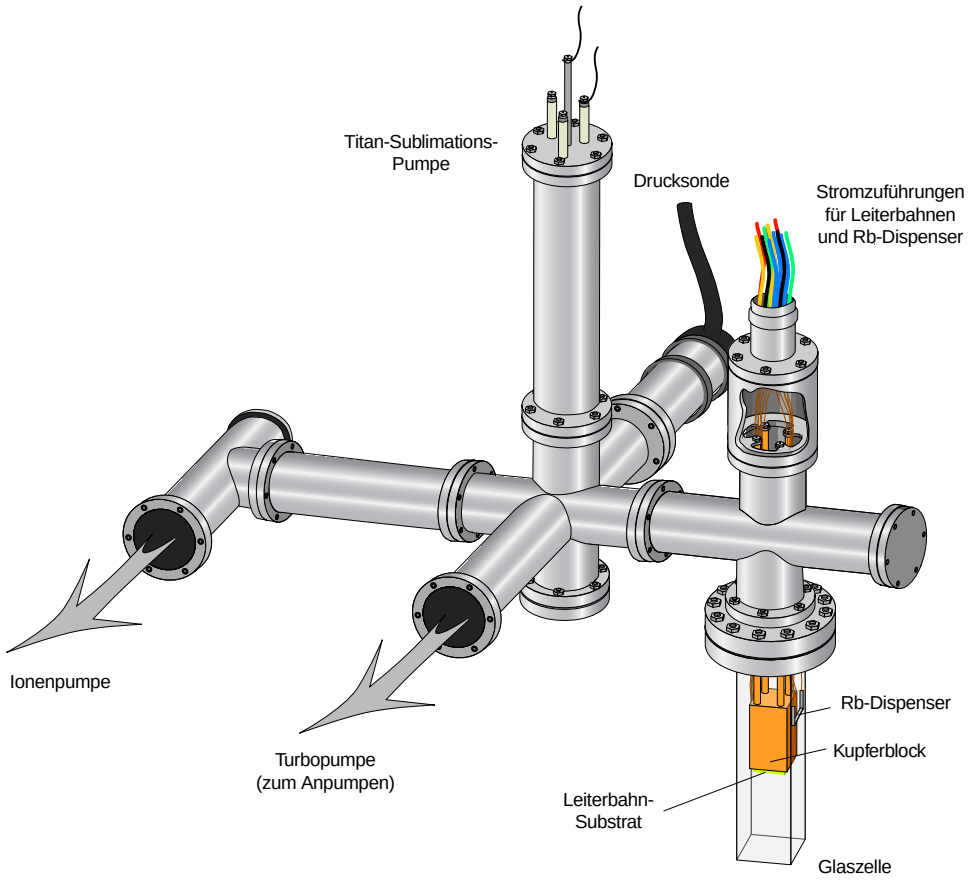



Abb. 4.9: *Aufbau der Vakuumapparatur:*
*Die Glaszelle bietet einen guten optischen Zugang zum Substrat mit den Mikrofallen. Als Atomquelle dient ein „Rubidium-Dispenser“, der zwischen dem Substrathalter und der Glaswand angebracht ist. Da die Atome unterhalb des Substrates gefangen werden, lassen sich Flugzeitmessungen nutzen, um die Temperatur der gespeicherten Atome zu bestimmen.*
*Die Spulen für die homogenen Felder sowie die Quadrupolspulen für die „Spiegel-MOT“ sind hier nicht eingezeichnet.*

der einen Einlaß von Ø 3 cm bietet. Die Grundfläche der Glaszelle mißt im Inneren $3 \times 3$ cm und schließt damit genau an die Öffnung des ringförmigen Ansatzstückes. Die Zelle hat eine innere Höhe von 12,3 cm, alle Außenwände besitzen eine Antireflexbeschichtung für die Rubidiumwellenlänge 780 nm.

An das Vakuumsystem angeschlossen ist eine Ionenpumpe (Meca2000) mit einer Pumpleistung von 25 l/s (s. Abb. 4.9), eine Ummantelung aus Weicheisen und $\mu$-Metall schirmt ihre Streumagnetfelder vom restlichen Teil des

Experiments ab. In den ersten Experimenten, in denen ausschließlich diese Pumpe verwendet wurde, erreichten wir einen Hintergrundgasdruck von etwa $3 \cdot 10^{-9}$ mbar (nach einigen Tagen Ausheizen bei 150°C). Anschließend wurde der Partialdruck von Rubidium über ein Ventil eingestellt, das die Hauptkammer mit einem Rubidiumreservoir verband. In den Experimenten der „zweiten Generation" haben wir diese Rubidiumquelle durch einen Rb-Dispenser (s. [62]) ersetzt, der zwischen dem Substrathalter und einer Glaswand montiert ist (s. Abb. 4.9). Gleichzeitig wurde die Titan-Sublimationspumpe in Betrieb genommen, mit deren Hilfe der Hintergrundgasdruck auf $3 \cdot 10^{-10}$ mbar gesenkt werden konnte. Die relativ kurze Ausheizphase von 3 Tagen bei 150°C ermöglicht den Wechsel des Mikrofallensubstrats ohne zu hohen Zeitaufwand.

Der Hintergrundgasdruck von $3 \cdot 10^{-10}$ mbar ist, wie aus der Abbildung 4.9 hervorgeht, in der Nähe der Titan-Sublimationspumpe gemessen. Insbesondere während des Betriebs des Rb-Dispensers lassen sich die Druckverhältnisse am Ort der Mikrofallen besser durch eine Lebensdauermessung der magnetisch gespeicherten Atome abschätzen. Derzeit betreiben wir den Dispenser bei einem Strom von typischerweise 3.8 A, was zu einer Lebensdauer von ca. 5 s in der Magnetfalle führt.

## 4.5 Lasersystem

Um die Rubidiumatome in den magnetischen Mikrofallen einzufangen, werden sie zunächst mit einer magneto-optischen Falle (MOT) aus dem Hintergrundgas geladen, in einer fernverstimmten Molasse weiter abgekühlt und anschließend optisch in den gewünschten magnetischen Unterzustand gepumpt. Der Nachweis der Atome findet über Absorptionsabbildung statt. Wir verwenden dazu drei verschiedene Laserfrequenzen der $D_2$-Linie $5s^{1/2} \rightarrow 5p^{3/2}$:

| | $^{85}$Rb | $^{87}$Rb |
|---|---|---|
| MOT-Übergang und Detektion | $F = 3 \rightarrow F' = 4$ | $F = 2 \rightarrow F' = 3$ |
| Rückpumper | $F = 2 \rightarrow F' = 3$ | $F = 1 \rightarrow F' = 2$ |
| optisches Pumpen | $F = 3 \rightarrow F' = 3$ | $F = 2 \rightarrow F' = 2$ |

Das Lasersystem ist so ausgelegt, daß sich beide Rubidium-Isotope $^{85}$Rb und $^{87}$Rb fangen, kühlen und optisch pumpen lassen.

Als Lichtquellen für das Experiment stehen insgesamt vier Diodenlaser zur Verfügung. Je ein Diodenlaser erzeugt das Licht für den Rückpumpstrahl und für das optische Pumpen, zwei weitere sorgen für die Strahlen der MOT und der Detektion. Alle vier Laser verwenden eine Hitachi-Diode vom Typ

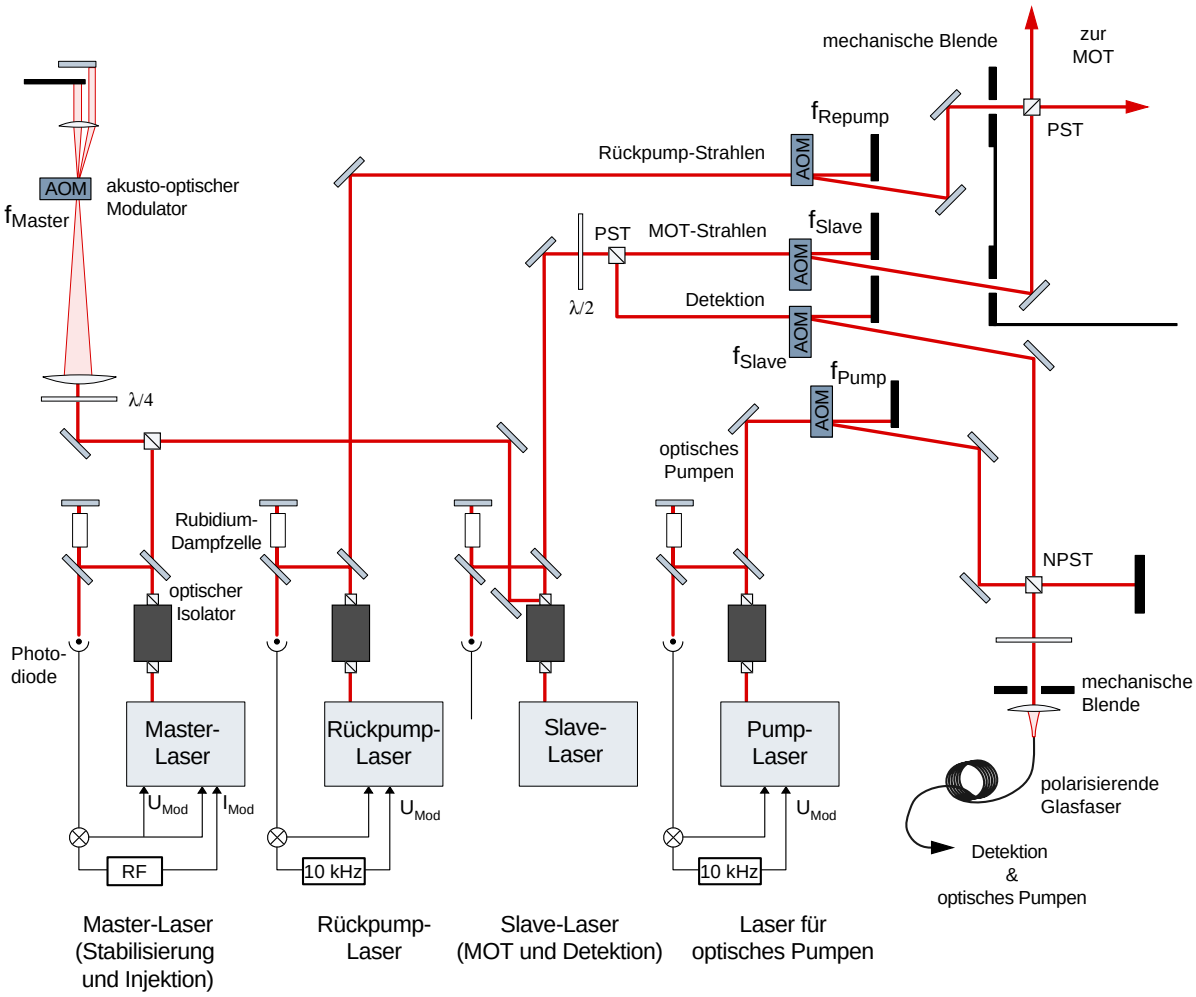



Abb. 4.10: *Lasersystem:*
*Für die Hauptstrahlen der magneto-optischen Falle werden zwei Diodenlaser in „Master-Slave-Anordnung“ verwendet. Der Strahl des gitterstabilisierten Master-Lasers durchläuft zweifach einen AOM, so daß die Frequenz, welche dem Slave-Laser aufgeprägt wird, mit Hilfe der AOM-Frequenz durchgestimmt werden kann.*
*Für das „Zurückpumpen“ der Atome während der MOT sowie für die Phase des optischen Pumpens steht jeweils ein eigener gitterstabilisierter Diodenlaser zur Verfügung. Der Strahl für die Absorptionsabbildung wird vom Slave-Laser abgezweigt und gemeinsam mit dem „Pumpstrahl“ durch eine polarisationserhaltende Glasfaser zum Experiment geführt.*

HL78516, die eine nominelle Ausgangsleistung von 50 mW besitzt. Drei der Laserdioden sind in Littrow-Anordnung über ein Strichgitter stabilisiert, so daß nach dem Gitter etwa 8 mW zur Verfügung stehen. Um für die Strahlen der magneto-optischen Falle mehr Lichtleistung zur Verfügung zu haben, wird der letzte der vier Laser über Injektion stabilisiert. Der Referenzstrahl stammt aus dem gitterstabilisierten „Master-Laser“ und durchläuft vor der Injektion zweifach einen akusto-optischen Modulator (AOM). Der Doppelweg ist so aufgebaut, daß der Strahl unabhängig vom Ablenkwinkel des AOM in sich selbst zurückreflektiert wird (s. Abb. 4.10). So läßt sich über die AOM-Frequenz die Frequenz des Referenzstrahles variieren, und der injizierte „Slave-Laser“ wird durchgestimmt, ohne daß es zu einem Strahlversatz kommt. Das Laserlicht für die Absorptionsabbildung wird aus dem Strahl des „Slave-Lasers“ abgezweigt. Da der Detektionstrahl und die MOT-Strahlen nicht gleichzeitig verwendet werden, kann die Frequenz über den AOM im „Master-Strahl“ je nach Funktion eingestellt werden (s. a. Ladesequenz in Kap. 5.2.1).

Wir betreiben die Laserdioden bei einem Strom von 100 bis 120 mA. Nach dem AOM des „Slave-Lasers“ stehen uns damit etwa 14 mW Lichtleistung für die magneto-optische Falle zur Verfügung, 3 bis 6 mW Leistung verwenden wir in den Rückpumpstrahlen, die den MOT-Strahlen an einem polarisierenden Strahlteiler überlagert werden.

## Regelkreise

Der „Rückpump-Laser“ und der „Pump-Laser“ sind jeweils über eine Rb-Sättigungsspektroskopie stabilisiert. Der Regelkreis verwendet einen im Hause gebauten Lock-In-Verstärker, der die Laserfrequenz über den Piezo-Kristall mit 10 kHz moduliert. Das im Verstärker erzeugte Fehlersignal wird der Piezo-Spannung hinzuaddiert. Mit dieser Technik erreicht man eine Linienbreite von etwa 1 MHz[6]. Für den Master-Laser verwenden wir eine aufwendigere Stabilisierung, da sich seine Schwankungen auf die Qualität der Absorptionsabbildung auswirken. Das Fehlersignal wird hier über eine RF-Modulation des Laserstroms erzeugt. Der langsame Teil des Fehlersignals wird über einen Integrator der Piezo-Spannung zugeführt, während der hochfrequente Anteil direkt auf den Diodenstrom zurückgekoppelt wird.

[6] ermittelt aus dem Schwebungssignal von zwei unabhängigen Dioden bei einer Mittelungszeit von 20 ms.

## Laserfrequenzen

Die Laserintensität der Strahlen, die zum Experiment führen, wird mit Hilfe von akusto-optischen Modulatoren geregelt. Zusätzlich sorgen elektromagnetisch gesteuerte Blenden dafür, daß während der magnetischen Speicherung der Atome kein resonantes Restlicht zur Apparatur dringt. Je nach Rubidium-Isotop müssen die Frequenzen $f_i$ für die akusto-optischen Modulatoren eingestellt und die Stabilisierungspunkte der Laser geeignet gewählt werden. Unter Berücksichtigung der Beugungsordnung (s. auch Abb. 4.10) werden die Laserfrequenzen um

$$\begin{aligned} \Delta\nu_{\text{Master}} &= 2\, f_{\text{Master}} \\ \Delta\nu_{\text{Slave}} &= -\, f_{\text{Slave}} \\ \Delta\nu_{\text{Repump}} &= \quad f_{\text{Repump}} \\ \Delta\nu_{\text{Pump}} &= -\, f_{\text{Pump}} \end{aligned}$$

verschoben. Folgende Stabilisierungspunkte und AOM-Frequenzen haben wir bei diesem Aufbau gewählt:

Tabelle 4.1: $^{85}$**Rb**

| | Lock-Punkt | AOM-Frequenz |
|---|---|---|
| Master | CO $\begin{cases} F = 3 \to F' = 2 \\ F = 3 \to F' = 4 \end{cases}$ | $91{,}0\,\text{MHz} + \dfrac{\delta\nu_{\text{res}}}{2}$ |
| Slave (MOT u. Detektion) | — | 90 MHz |
| Rückpumper | CO $\begin{cases} F = 2 \to F' = 1 \\ F = 2 \to F' = 2 \end{cases}$ | 77,5 MHz |
| Pumper | CO $\begin{cases} F = 3 \to F' = 3 \\ F = 3 \to F' = 4 \end{cases}$ | 60,5 MHz |

Die Bezeichnung CO steht für die „Cross-Over"-Resonanz im Sättigungsspektrum, die in der Mitte der beiden beteiligten Übergänge liegt, $\delta\nu_{\text{res}}$ ist die Resonanzverstimmung der MOT-Strahlen bzw. des Detektionsstrahls nach dem letzten AOM.

Die Radiofrequenzen für die akusto-optischen Modulatoren werden über spannungsgesteuerte Oszillatoren (VCOs) erzeugt. Die Spannung für den VCO

Tabelle 4.2: $^{87}$**Rb**

| | Lock-Punkt | AOM-Frequenz |
|---|---|---|
| Master | CO $\begin{cases} F = 2 \to F' = 2 \\ F = 2 \to F' = 3 \end{cases}$ | $111{,}75\,\text{MHz} + \dfrac{\delta\nu_{\text{res}}}{2}$ |
| Slave (MOT u. Detektion) | — | 90,0 MHz |
| Rückpumper | CO $\begin{cases} F = 1 \to F' = 1 \\ F = 1 \to F' = 2 \end{cases}$ | 78,5 MHz |
| Pumper | CO $\begin{cases} F = 2 \to F' = 1 \\ F = 2 \to F' = 3 \end{cases}$ | 55,0 MHz |

des „Master-AOM“ wird vom Computer zur Laufzeit des Experimentes eingestellt (Abschnitt 4.7), während die übrigen AOM mit festen Frequenzen betrieben werden. Der Wirkungsgrad des Master-AOM ist in einem Bereich von 70 Mhz bis 120 MHz groß genug, um die Injektion des Slave-Lasers zu gewährleisten. Damit läßt sich die Frequenz der MOT-Strahlen (d.h. nach dem Slave-AOM) von

$$\nu_{\text{min}} = \begin{cases} \nu_{\text{res}} - 42\,\text{MHz} & \text{für } ^{85}\text{Rb} \\ \nu_{\text{res}} - 83\,\text{MHz} & \text{für } ^{87}\text{Rb} \end{cases} \tag{4.3}$$

bis

$$\nu_{\text{max}} = \begin{cases} \nu_{\text{res}} + 28\,\text{MHz} & \text{für } ^{85}\text{Rb} \\ \nu_{\text{res}} + 16\,\text{MHz} & \text{für } ^{87}\text{Rb} \end{cases} \tag{4.4}$$

durchstimmen.

## 4.6 Detektion

Für den Nachweis der gespeicherten Atome verwenden wir eine Absorptionsabbildung. Ein Sondenstrahl, der resonant den zyklischen MOT-Übergang[7] anregt, durchquert parallel zur Substratoberfläche die Fallenregion. Den Schatten, den die Atome im Sondenstrahl hinterlassen, bilden wir über ein Zoom-Objektiv auf eine CCD-Kamera ab (s. Abb. 4.11). Der Sondenstrahl

[7] $\left|5s^{1/2}, F = 3\right\rangle \to \left|5p^{3/2}, F = 4\right\rangle$ für $^{85}$Rb,
$\left|5s^{1/2}, F = 2\right\rangle \to \left|5p^{3/2}, F = 3\right\rangle$ für $^{87}$Rb

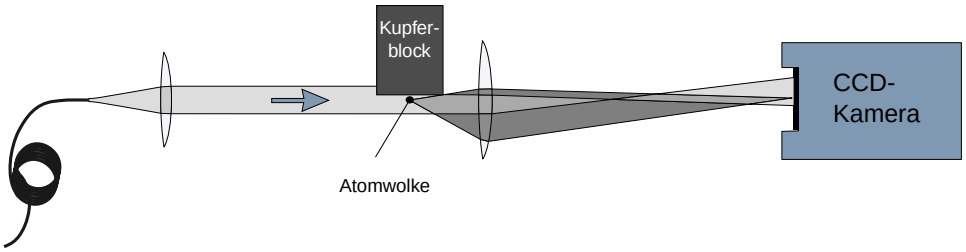



Abb. 4.11: *Absorptionsabbildung in der Nähe der Substratoberfläche. Der Detektionsstrahl beleuchtet unter streifendem Einfall die Atome in der Mikrofalle. Der Schatten der Atome wird über ein Zoom-Objektiv (hier schematisch durch eine Linse angedeutet) auf eine CCD-Kamera abgebildet.*

besitzt eine Intensität von $I \approx 0,32\,\frac{\mathrm{mW}}{\mathrm{cm}^2}$, was bei der verwendeten zirkularen Polarisation zu einem Sättigungsparameter von $s \approx 0,2$ führt:

$$s = \frac{I}{I_{sat}} \approx 0,2 \tag{4.5}$$

mit

$$I_{sat} = \frac{\pi\, h\, c}{3\,\lambda^3}\,\Gamma \tag{4.6}$$
$$\approx 1.66\,\frac{\mathrm{mW}}{\mathrm{cm}^2} \qquad \text{für Rubidium und maximale Kopplung der Polarisation.}$$

$\Gamma$ bedeutet hierin die natürliche Linienbreite, die für die $D_2$-Linie von Rubidium $\Gamma = 2\pi\,6{,}01\,\mathrm{MHz}$ beträgt.

Um zu verhindern, daß Streumagnetfelder die magnetischen Unterzustände während der Detektion mischen und damit den effektiven Streuquerschnitt reduzieren, fixieren wir die Quantisierungsachse durch ein homogenes Feld von 5 Gauss. Der damit verbundene Zeeman-Effekt wird durch eine Frequenzverstimmung des Detektionslasers ausgeglichen.

### Auflösung

Die Abbildung kleiner magnetischer Fallen wird sowohl durch die Auflösung des optischen Systems als auch durch die Expansion der Atome während der Belichtung beschränkt. Bei der verwendeten Abbildungsoptik ist die Auflösung im wesentlichen durch die Pixelgröße der Kamera gegeben. In den ersten Experimenten verwendeten wir eine CCIR-Kamera (CV-M50 von JAI, Pixelauflösung $10\times13\,\mu$m), die im getriggerten Modus ein Halbbild ausgibt.

Unter Einberechnung des Abbildungsmaßstabs und nach dem Einlesen des CCIR-Signals mit einer Frame-Grabber-Karte wurde damit eine Auflösung von

$$\Delta x = 9,0\mu\text{m} \tag{4.7}$$
$$\Delta y = 18,1\,\mu\text{m} \tag{4.8}$$

erreicht. Derzeit arbeiten wir mit einer Slow-Scan-Kamera der Firma Theta-Systems[8], die mit der Pixelgröße $23\times23\,\mu$m und dem verwendeten Zoom-Objektiv eine Auflösung von

$$\Delta x = 20,4\,\mu\text{m} \tag{4.9}$$
$$\Delta y = 20,4\,\mu\text{m} \tag{4.10}$$

besitzt. Die Auflösungsbegrenzung durch das optische System ist dagegen zu vernachlässigen.

Eine weitere Vergrößerung des Bildes war aufgrund der Dimension der abzubildenden Fläche nicht möglich: Die $384\times286$ Bildpunkte entsprechen einer Fläche von $7,8\times5,8\,mm$ in der Bildebene, was gerade ausreicht, um das atomare Förderband einschließlich der Laderegion abzubilden.

Bei der Absorptionsabbildung begrenzen neben der Pixelgröße zwei weitere Faktoren die Auflösung: Da die Abbildung der Atome nicht in der Falle stattfindet, breiten sich die Atome zwischen dem Abschalten der Falle und dem Ende der Belichtungszeit mit ihrer mittleren thermischen Geschwindigkeit aus. Desweiteren führt die spontane Emission der Atome während der Belichtung zu einem Aufheizprozeß mit diffusiver Bewegung.

### Diffusion

Die Photonen, die die Atome während der Belichtungszeit streuen, führen einerseits zu einer gerichteten Beschleunigung der Atomwolke aufgrund der Absorption, andererseits zu einer diffusiven Ausbreitung aufgrund der ungerichteten spontanen Emission. Die Bewegung entlang der Abbildungsachse beeinflußt die Wolkengröße wenig, während die diffusive Ausbreitung einen meßbaren Beitrag liefert. Die Bewegung aufgrund der spontanten Emission läßt sich mit dem Modell eines „Random-Walk“ im Geschwindigkeitsraum beschreiben, bei dem jeder Schritt die Länge der Rückstoßgeschwindigkeit

[8] Theta-Systems, MÜNCHEN
Der verwendete CCD-Chip (TH7863 von Phillips) hat bei 780 nm eine Quanteneffizienz von etwa 40 % und wird mit einer Genauigkeit von 12 Bit ausgelesen.

$v_{\mathrm{rec}} = \frac{\hbar k}{m}$ hat. Aus dem zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeiten ergibt sich die Verbreiterung im Ortsraum

$$\sqrt{\langle \mathbf{r} \rangle^2} = \frac{v_{rec}}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{t^3}{\tau}} \,, \tag{4.11}$$

was in jeder Dimension zu

$$\overline{\Delta x} = \frac{v_{rec}}{3\sqrt{3}} \sqrt{\frac{t^3}{\tau}} \tag{4.12}$$

führt. Hierin beschreibt $t$ die Dauer der Belichtung und $\tau = \frac{2}{\Gamma}\left(1 + \frac{1}{s}\right)$ die mittlere Zeit zwischen zwei Streuprozessen durch den Detektionsstrahl. Für Rubidiumatome führt die Belichtung während $150\,\mu$s zu einer Ausdehnung um

$$\overline{\Delta x} = 13\,\mu\mathrm{m} \sqrt{\frac{s}{s+1}} \approx 5,3\,\mu\mathrm{m} \qquad \text{für s=0,2}\,. \tag{4.13}$$

**Ballistische Expansion**

Einen weiteren Beitrag zur Verbreiterung liefert die Ausbreitung der Atome aufgrund ihrer thermischen Geschwindigkeit. Nimmt man für die Atomwolke beispielhaft eine Temperatur von $100\,\mu$K an, entspricht dies (in jeder Raumrichtung) einer mittleren Geschwindigkeit von

$$\begin{aligned} \overline{v}_i \equiv \sqrt{\langle {v_i}^2 \rangle} &= \sqrt{\frac{k_B\,T}{m}} \\ &\approx 100\,\frac{\mu\mathrm{m}}{ms} \quad (\mathrm{Rb},\, T{=}100\,\mu\mathrm{K})\,. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Während der Belichtungszeit von $150\,\mu$s führt dies zu einer Ausdehnung um etwa $\Delta x = 15\,\mu$m. Hinzu kommt die Zeit zwischen dem Abschalten der magnetischen Falle und dem Beginn der Detektion, die wir üblicherweise 100 bis $150\,\mu$s wählen.

Bei ähnlichen Parametern kann die Summe dieser beiden Verbreiterungseffekte mit etwa $20\,\mu$m abgeschätzt werden:

$$\overline{x}_{real} = \sqrt{\overline{x}^2_{Messung} - \Delta x^2} \tag{4.15}$$

$$\Delta x \approx 20\,\mu\mathrm{m}\,. \tag{4.16}$$

## Bildberechnung

Die quantitative Auswertung der Bilddaten erfolgt über die Berechnung der optischen Dichte. Zusätzlich zum Schattenbild der Atome wird ein Referenzbild verwendet, das 40 bis 250 ms nach dem Bild mit den Atomen aufgenommen wird. Die Zeit zwischen den beiden Bildern wird von der Auslesegeschwindigkeit der verwendeten CCD-Kamera vorgegeben, denn bereits nach 40 ms sind die Atome um 8 mm gefallen und damit aus dem Abbildungsbereich verschwunden.

Aus dem Bild mit Atomen $A$ und dem Referenzbild $R$ wird die optische Dichte gemäß

$$D = -\ln \frac{A - B}{R - B} \tag{4.17}$$

berechnet. Dabei korrigiert das Hintergrundbild $B$, das ohne Beleuchtung durch den Sondenstrahl aufgenommen wird, Dunkelstromeffekte in der Kamera sowie zusätzliche Beleuchtung durch Umgebungslicht. Weil das Mikrofallensubstrat einen Schatten im Detektionstrahl wirft, werden zur Auswertung nur diejenigen Bildpunkte herangezogen, deren Ausleuchtung im Referenzbild einen Schwellenwert übersteigt. Die Unterscheidung von schwach ausgeleuchteten Bildpunkten und solchen, die eine atomare Dichte von null anzeigen, ist vor allem bei der Abbildung expandierter Atomwolken (Flugzeitmessungen) wichtig.

Mit Hilfe der optischen Dichte berechnet sich die Anzahl der Atome aus der Summe aller Bildpunkte

$$N = \sum_{Pixel(i,j)} D_{ij} \cdot \frac{\tilde{A}_{Pixel}}{\sigma} \ , \tag{4.18}$$

worin

$$\sigma = \frac{3}{2\pi}\lambda^2 \tag{4.19}$$

der Streuquerschnitt der Atome ist[9] und $\tilde{A}_{Pixel}$ diejenige Fläche, die von der Abbildungsoptik auf einen Kamerapixel abgebildet wird.

[9] gültig für kleinen Sättigungsparameter $s$ und maximale Kopplung an das Lichtfeld, z. B. [63]

## 4.7 Steuerung des Experiments

Das gesamte Experiment erfordert die genaue zeitliche Kontrolle von über zwanzig Parametern. Allein für den Betrieb der Mikrofallen sind bis zu sechs Ströme in den Leiterbahnen und zwei homogene Felder zu regeln. Hinzu kommt die Steuerung des Lasersystems für die magneto-optische Falle einschließlich der zugehörigen Magnetfelder, und nicht zuletzt ist die Bildaufnahme der CCD-Kamera mit dem Ablauf des Experimentes zu synchronisieren. Diese Vielzahl an Aufgaben zu bewältigen, wird erst durch eine Computersteuerung möglich. Zwei Personal-Computer teilen sich die Aufgaben der Parameterkontrolle einerseits und der synchronisierten Datenaufnahme und Auswertung andererseits.

### 4.7.1 Hardware

Die Steuerung der insgesamt zweiundzwanzig Parameter geschieht über drei analoge und digitale Ein-/Ausgabe-Karten und über einen digitalen Funktionsgenerator. Mit den Interfacekarten (AT-AO-10, PCI-DIO-32HS, PCI-6713 von National Instruments) lassen sich auf insgesamt 20 analogen und 32 digitalen Kanälen frei einstellbare Pulsformen mit einer Taktzeit von 50 $\mu$s ausgeben. Die Pulsformen werden zuvor im Hauptspeicher abgelegt und später über DMA-Transfer ausgelesen, so daß die Pulsausgabe unabhängig von der Auslastung des Hauptprozessors funktioniert. Die Synchronisation der verschiedenen Karten erfolgt über einen eigenen Datenbus (RTSI). Die analogen Steuersignale werden als Spannungssignal mit einer Genauigkeit von 12 Bit (1/4096) ausgegeben, einstellbar zwischen unipolar 0-10 V oder bipolar -10 bis 10 V.

Wir nutzen drei analoge Ausgänge, um die Frequenz des Slave-Lasers durchzustimmen und die Laserleistung von MOT- und Rückpumper-Strahlen zu steuern. Weitere zehn anloge Kanäle werden für die Kontrolle der verschiedenen Ströme im Mikrofallensubstrat eingesetzt sowie für die Steuerung der externen Felder. Ein letztes analoges Signal übernimmt die Amplitudenmodulation des Funktionsgenerators, der eine Hochfrequenz für die RF-Kühlung bzw. RF-Manipulation erzeugt. Die Kontrolle der übrigen Schaltaufgaben übernehmen digitale Ausgänge, die mit den analogen Kanälen synchronisiert sind.

Für die Steuerung der Mikrofallenströme verwenden wir im Hause entwickelte Stromregelungen, die eine Eingangsspannung von -10 bis 10 V in einen Strom von -5 bis 5 A umsetzen bzw. 0-10 V in 0-2 A. Da die Stromnetzteile mit den

Leiterbahnen keine induktiven Lasten zu treiben haben, weisen sie typische Schaltzeiten von $< 100\,\mu$s auf.

### 4.7.2 Software

#### Steuerungsprogramm

Das Programm, welches die Steuerung des Experimentes übernimmt, wurde von meinem Betreuer Jakob Reichel entwickelt und mit dem Gang der Experimente immer wieder optimiert und den neuen Anforderungen angepaßt. Da von Beginn an feststand, daß die Zahl der zu kontrollierenden Parameter ständig zunehmen und ihre Verwendung sich ändern würde, ist die Definition der zeitlichen Sequenz über eine Skriptsprache realisiert. Diese Programmstruktur ermöglicht, daß die jeweils verwendete Steuerungssequenz als Ascii-Text definiert und zur Dokumentation abgespeichert wird. Außerdem wird vermieden, daß für jeden hinzukommenden Ausgabekanal der Quelltext des Steuerungsprogramms geändert werden muß.

In einem Definitionsteil können zunächst den einzelnen Ausgabekanälen Namen zugewiesen werden, außerdem lassen sich hier Umrechnungsfaktoren und andere Hilfsvariablen definieren. Im Hauptteil des Programms werden die Ausgabewerte entweder als konstante Werte definiert, die sich jeweils an bestimmten Zeitpunkten der Sequenz ändern, oder auch als zeitabhängige Funktion, die zwischen zwei gegebenen Zeitpunkten ausgewertet wird. Der Hauptteil ist umschlossen von einer Schleifenstruktur, die es ermöglicht, Messungen mit kontinuierlich veränderten Parametern zu realisieren, beispielsweise mit jeweils zunehmender Speicherzeit zur Bestimmung der Lebensdauer in der Falle. Die Kontrollschleife des Hauptprogramms rechnet für jeden Durchgang die zeitliche Abfolge aller Kanäle aus, schreibt sie in den Hauptspeicher und veranlaßt anschließend die Ausgabe durch die Interfacekarten.

#### Auswertungsprogramm

Die Auswertung des Experimentes geschieht auschließlich aus den Bildern, die von der CCD-Kamera aufgenommen werden. Um mit dieser Technik direkt Kenntnis von wichtigen Parametern wie Atomzahl und Dichte zu bekommen, übernimmt ein eigenes Computerprogramm die Auswertung der Bilder. Es ist modular aufgebaut, so daß es mit nur wenigen Anpassungen verschiedene Kameratypen unterstützt.

Hauptaufgabe des Programms ist die Archivierung der ankommenden Bil-

der bzw. der daraus berechneten Daten. Die Automation dieser Vorgänge trägt entscheidend dazu bei, daß zusammenhängende Experimente innerhalb einer kurzen Zeitspanne gemacht und Abweichungen durch eventuelle Langzeitdrifts vermieden werden können. Fallenbild und Referenzbild werden in einem speziellen Datenformat in einer gemeinsamen Datei gespeichert, die unter anderem Informationen über den aktuellen Abbildungsmaßstab enthält.

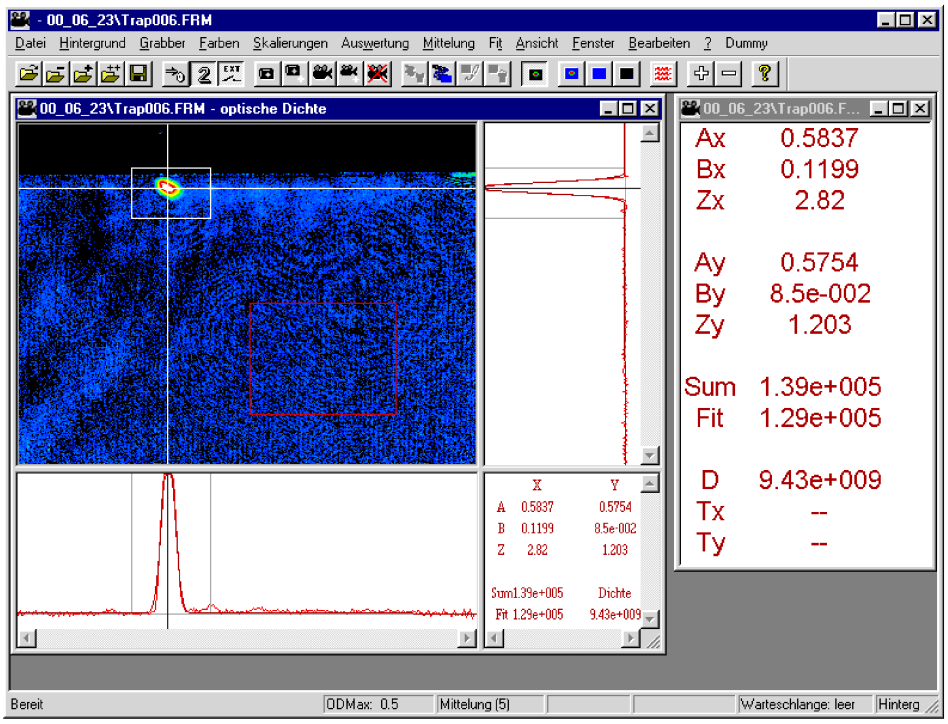



Abb. 4.12: *Ansicht des Auswertungsprogramms. Das Bild zeigt die ungemittelte Aufnahme einer Atomwolke mit etwa 1,3·10$^5$ Atomen bei einer optischen Dichte von 0,5. Im Datenfenster rechts werden die Parameter der angepaßten Gaußfunktionen sowie die daraus abgeleitete Atomzahl und Atomzahldichte angezeigt.*

Neben der Datenarchivierung übernimmt das Programm direkt einige Auswertungen, die sich im Laufe der Experimente als nützlich herausgestellt haben. Alle Auswertungen finden an dem nach Gleichung 4.17 berechneten Bild der optischen Dichte statt, wobei schlecht ausgeleuchtete Bildpunkte von der Bewertung ausgeschlossen werden. Die Sofort-Auswertung umfaßt die Atomzahl in einem wählbaren Bildausschnitt, das Anpassen einer Gaussfunktion an die Atomwolke entlang wählbarer Achsen und die Schwerpunktsberechnung. Unter der Annahme, daß die Tiefe der atomaren Wolke

ihrer vertikalen Ausdehnung entspricht, wird außerdem die dreidimensionale Dichte abgeschätzt. Die berechneten Daten können automatisch in eine Datei geschrieben werden.

Um geringe Atomzahlen oder Atomdichten zu detektieren, können Fallenbilder und Referenzbilder getrennt gemittelt werden. Die Archivierung erfolgt dann wahlweise nur bei den gemittelten Bildern.

# 5 Experimente mit magnetischen Mikrofallen

Der grundlegende Schritt auf dem Weg zu den magnetischen Mikrofallen war die Entwicklung eines Verfahrens, mit dem Atome in die oberflächennahen Potentialmulden geladen werden können. Nachdem mit der Spiegel-MOT ein geeigneter Weg dazu gefunden ist, können die neuen Möglichkeiten der miniaturisierten Leiterstrukturen ausgenutzt werden. Experimente mit dem magnetischen Förderband zeigen, daß Atome auf komplexe Weise mit magnetischen Feldern manipuliert werden können, und sie weisen damit den Weg zu neuen Anwendungen.

## 5.1 Spiegel-MOT

In unserem experimentellen Aufbau haben wir uns dafür entschieden, die Rubidium-Atome aus der magneto-optischen Falle direkt in die magnetischen Mikrofallen zu laden. Die für die Ladephase und den Transfer entwickelte Spiegel-MOT besitzt im wesentlichen das gleiche Lichtfeld wie die klassische Sechs-Strahl-MOT (s. Abschnitt 4.3). In ersten Experimenten mit einem Goldspiegel von Ø 2,5 cm Durchmesser haben wir bestätigt gefunden, daß diese Variante der magneto-optischen Falle in der Nähe der Oberfläche ausreichend stabil läuft, um Atome in die Magnetfallen zu transferieren.

Das Zentrum des Quadrupolfeldes, in welchem die magneto-optische Falle entsteht, läßt sich im 45°-Winkel der Oberfläche annähern, indem ein homogenes Feld überlagert wird (s. auch Abb. 4.8 und 5.3). Zu diesem Zweck sind auf dem Spulenkörper der Quadrupolspulen einige gleichsinnige Wicklungen aufgebracht. Je näher am Spiegel die Falle entsteht, desto empfindlicher hängen Form und Stabilität der Falle von der Justage der horizontalen Strahlen ab. Bei einer Fehljustage ist das MOT-Zentrum stets zu dem Lichtstrahl hin verschoben, der ungenau eingestellt ist. Denn der Lichtdruck der streifenden Strahlen verringert sich sowohl, wenn er vom Spiegelsubstrat abgeschattet wird, als auch, wenn ein Teil des Strahles die Spiegelfläche trifft und nach der Reflektion die falsche Polarisation für die MOT besitzt. Wie bei der magneto-optischen Falle mit sechs Strahlen funktioniert auch diese Falle stabiler, wenn entgegenlaufende Strahlen mit einem kleinen Winkel zueinander

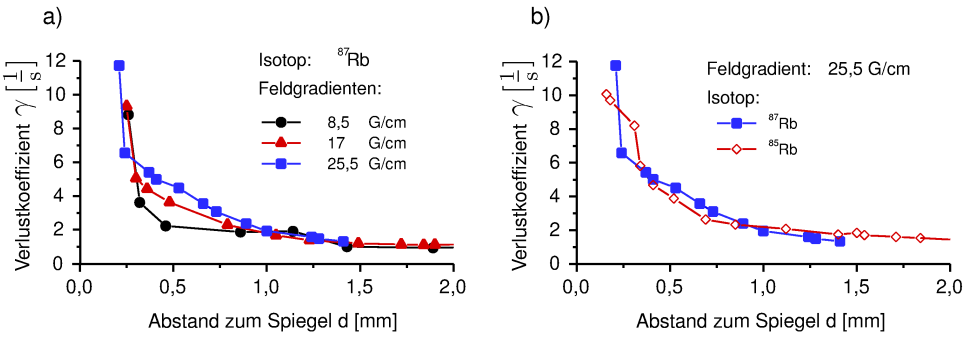



Abb. 5.1: *Verlustrate in der Spiegel-MOT als Funktion des Abstands zum Spiegel: a) für verschiedene Gradienten, b) für die verschiedenen Isotope.*

überlagert werden, weil so Interferenzen mit großer räumlicher Ausdehnung vermieden werden.

Das Einfangvolumen der MOT wächst mit dem Abstand zur Oberfläche und ist schließlich durch die Größe der Laserstrahlen begrenzt, die bei uns 1 cm beträgt. Mit der derzeitigen Laserleistung von 20 mW, die sich auf die vier Strahlen verteilt, können wir etwa $5 \cdot 10^6$ $^{87}$Rb-Atome aus dem Hintergrundgas laden. Dies entspricht etwa der Atomzahl, die man bei einer „klassischen“ MOT mit vergleichbarem Einfangbereich erwartet. Da in der Nähe des Spiegels weniger Atome eingefangen werden können, laden wir die Falle typischerweise in 2 - 3 mm Entfernung und schieben sie dann mit Hilfe des homogenen Feldes an die Oberfläche.

Beim Zuschalten des homogenen Feldes rückt die Atomwolke näher an die Spiegelfläche, wo sich die Zahl der gefangenen Atome mit der Zeitkonstanten $\tau$ auf einen neuen Gleichgewichtswert einstellt. Die Verlustrate $\gamma = \frac{1}{\tau}$ hängt neben dem Abstand $d$ auch vom Gradienten des Quadrupolfeldes ab. Interessanterweise ist die oberflächeninduzierte Verlustrate bei einem höheren Gradienten stärker, obwohl die Fallengröße mit steigendem Gradienten abnimmt. Wir vermuten, daß die mit dem Gradienten zunehmende Temperatur dafür verantwortlich ist, weil sie den Austausch der Atome innerhalb der Atomwolke beschleunigt. Einen Einfluß durch Stöße, die den Zustand der Hyperfeinstruktur ändern und die dabei frei werdende Energie in kinetische Energie umsetzen, konnten wir nicht beobachten: die unterschiedliche Aufspaltung von 3 GHz ($^{85}$Rb) bzw. 6 GHz ($^{87}$Rb) in der Hyperfeinstruktur der beiden Isotope schlägt sich nicht in der Verlustrate nieder (s. Abb. 5.1). Auf eine weitergehende Untersuchung der Verlustprozesse haben wir verzichtet, da die gemessenen Verlustraten selbst in einem Abstand von 250 $\mu$m so gering sind, daß sie den Umladeprozeß in die Magnetfalle nicht behindern.

Die Experimente mit den ersten beschichteten Mikrofallensubstraten haben gezeigt, daß selbst mit einer unebenen Spiegelfläche die magneto-optische Falle noch funktioniert. Die Justage der Laserstrahlen wird jedoch aufwendiger und Streulicht behindert eventuelle Fluoreszensmessungen. Mit der „zweiten Generation“ von Substraten (s. Abschnitt 4.2) stehen inzwischen Mikrofallen mit ebener Spiegelfläche zur Verfügung.

## 5.2 Quadrupolfallen und Ioffe-Pritchard-Fallen

Das erste Mikrofallensubstrat wurde konzipiert, um verschiedene Quadrupol- und Ioffe-Pritchard-Fallen zu realisieren. Der 300 $\mu$m breite u-förmige Draht (in Abb. 5.2 a dunkel schattiert) erzeugt zusammen mit einem homogenen externen Feld das Quadrupolfeld für die Magnetfalle in der Ladeposition. Leider war durch einen Herstellungsfehler die dünne Leiterbahn zwischen den beiden „U-Drähten“ unterbrochen, so daß die übrigen Leiterbahnen nicht genutzt werden konnten. Die erste Falle vom Ioffe-Pritchard-Typ konnte daher erst mit dem zweiten Substrat realisiert werden, dessen Struktur für das atomare Förderband entworfen wurde (Abb. 5.2 b).

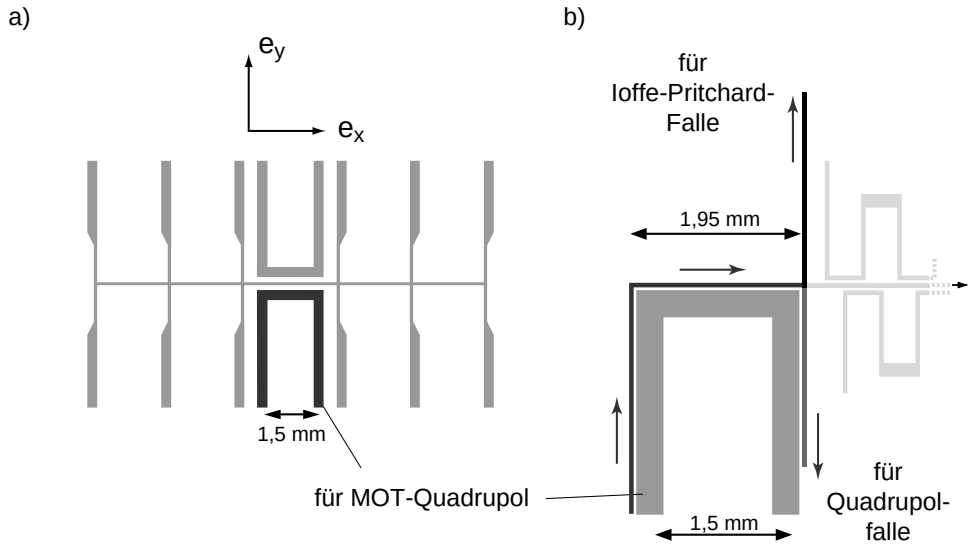



Abb. 5.2: *a) Leiterstruktur des ersten Mikrofallensubstrats für verschiedene Quadrupol- und Ioffe-Pritchard-Fallen, b) große Quadrupol- und Ioffe-Pritchard-Falle beim Substrat für das magnetische Förderband.*

### 5.2.1 Lade-Mechanismus

Um die Atome effizient von der magneto-optischen Falle in die magnetische Mikrofalle umzuladen, müssen die beiden Fallen genau überlagert werden. In unserem Aufbau wird dieser Schritt dadurch erleichtert, daß sich das Quadrupolfeld für die MOT auch mit Hilfe der Leiterbahnen auf dem Substrat erzeugen läßt.

Die Atome werden zunächst in 2 – 3 mm Entfernung von der Spiegelfläche in die magneto-optischen Falle geladen. Wie bei der Untersuchung der Spiegel-MOT werden sie anschließend mit Hilfe eines homogenen Feldes an die Oberfläche geschoben. In 300 bis 500 $\mu$m Entfernung wird das Quadrupolfeld der externen MOT-Spulen durch das Quadrupolfeld ersetzt, das die u-förmige Leiterbahn zusammen mit einem waagrechten externen Magnetfeld erzeugt. Damit die Orientierung dieses Quadrupolfeldes zum Lichtfeld der MOT paßt, muß das Substrat richtig orientiert sein. Die Zuleitungen für den „U-Draht“ liegen auf der Seite, auf welcher die höhere der beiden Quadrupolspulen angebracht ist. In den Schemata von Abbildung 5.3 ist dies links.

Das Verhältnis von Drahtstrom zu externem Magnetfeld wird so eingestellt, daß die Zentren von externem Quadrupol und „DrahtQuadrupol“ sich möglichst gut überlappen. Da während dieser Phase die MOT-Laser eingeschaltet bleiben und die Rückstellkräfte der MOT die Atome zum neuen Feldnullpunkt hintreiben, ist diese Überlagerung leicht zu bewerkstelligen. Bei der in Abb. 5.3 gezeigten Lade-Sequenz ist das Zentrum dieser MOT auch die Position, an der die Magnetfalle geladen wird. Eine bessere Ladeeffizienz läßt sich jedoch erzielen, wenn man bereits in größerer Entfernung auf die Draht-MOT umschaltet und diese anschließend weiter an die Oberfläche verschiebt. Wir laden die Draht-MOT typischerweise bei einem Strom von $I$=400 mA und einem externen Feld $B_{0,y}$=0,8 G. Von dieser Position schieben wir sie mit $I$=300 mA und $B_{0,y}$=1,5 G bis auf 250 $\mu$m an die Oberfläche.

Genau an der Position dieser Draht-MOT entsteht die Magnetfalle, wenn der Drahtstrom und das externe Feld in gleichem Maß erhöht werden. Zuvor wird die Atomwolke weiter abgekühlt und optisch in den gewünschten magnetischen Unterzustand gepumpt ($F = 3$, $m = 3$ für $^{85}$Rb, $F = 2$, $m = 2$ für $^{87}$Rb). Wir erreichen eine Temperatur von etwa 30 $\mu$K, indem wir während 3 ms die Verstimmung der MOT-Strahlen von 12 MHz auf 56 MHz erhöhen und gleichzeitig die Leistung in den Rückpumpstrahlen auf 0,2 mW reduzieren. Während der 100 $\mu$s langen Phase des optischen Pumpens liegt ein homogenes Feld von 1,3 Gauss an, und je nach eingefangenem Isotop verwenden wir einen zirkular polarisierten Pumpstrahl auf dem $F = 3 \rightarrow F' = 3$-

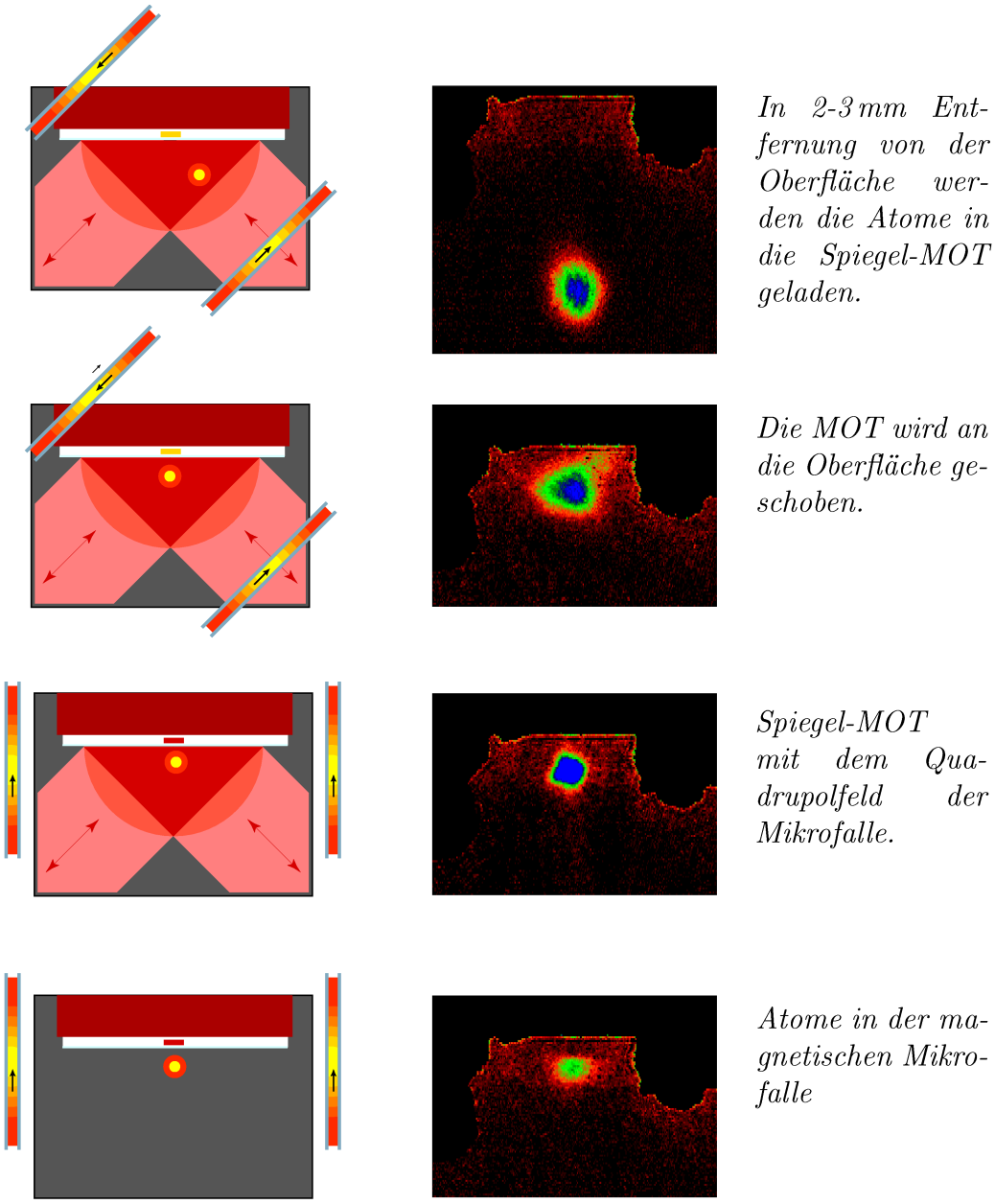



Abb. 5.3: *Der Ladevorgang ist illustriert mit den ersten Bildern unserer magnetischen Mikrofalle. Die schematischen Ansichten (links) und die Absorptionsbilder (Mitte) zeigen die Position der Atomwolke aus zueinander senkrechten Richtungen. In den Skizzen verläuft der Sondenstrahl von links nach rechts.*

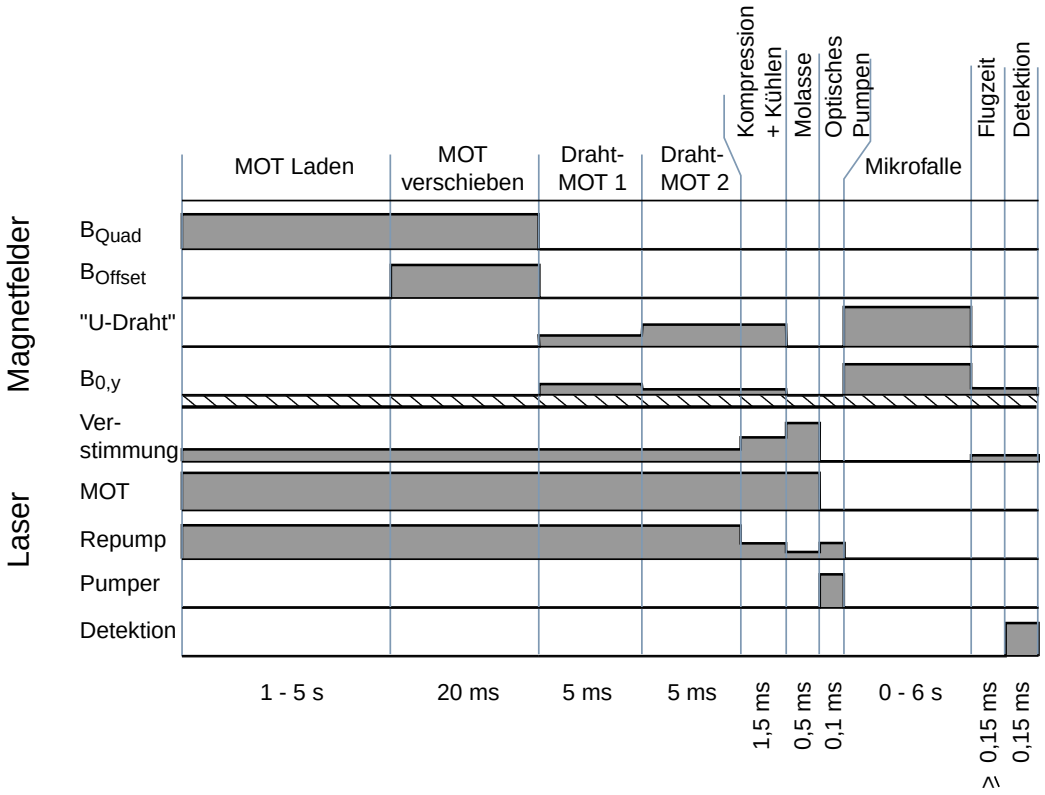



Abb. 5.4: *Zeitliche Abfolge der Parameter zum Laden der miniaturisierten Quadrupolfalle.*

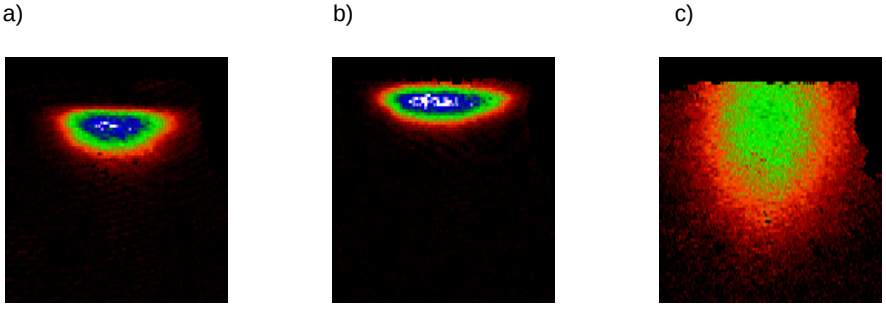



Abb. 5.5: *Bilder der Quadrupol-Magnetfalle mit* $2 \cdot 10^6$ *Atomen: a) direkt nach dem Laden, b) nach Kompression näher an der Oberfläche, c) nach Kompression und einer Flugzeit von 5 ms.*

Übergang ($^{85}$Rb) oder dem $F = 2 \rightarrow F' = 2$-Übergang ($^{87}$Rb).

Nach der Pumpphase wird das homogene Feld in etwa 200 $\mu$s in das Feld für die Magnetfalle transformiert ($I = 2\,\mathrm{A}$, $B_{0,y} = 9\,\mathrm{G}$), so daß der Spin der Ato-

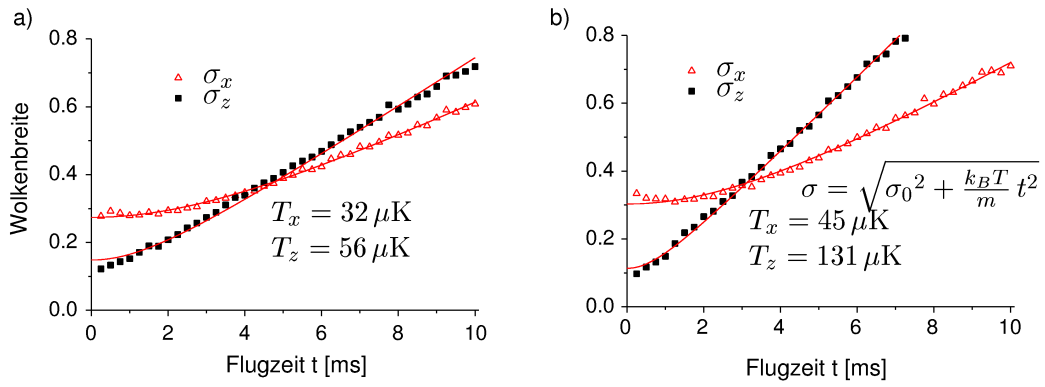



Abb. 5.6: *Temperaturbestimmung anhand der Flugzeitverbreiterung: a) direkt nach dem Laden der Magnetfalle, b) nach Kompression der Falle. Durch die Kompression werden im wesentlichen die transversalen Freiheitsgrade aufgeheizt.*

me der Magnetfeldrichtung folgen kann, während die Schwerpunktsbewegung unbeeinträchtigt bleibt. Auf diese Weise werden von den Atomen, die in der Draht-MOT gefangen sind, etwa 50% in die Magnetfalle geladen. Abbildung 5.3 illustriert das Ladeschema anhand von Bildern, die mit dem ersten Mikrofallensubstrat aufgenommen wurden. Die schwarzen Schatten neben der Atomwolke rühren von den Lötkontakten der Stromzuleitungen her, die in der Realität etwa 1 cm von der Fallenregion entfernt sind. In dieser ersten Falle wurden etwa $3 \cdot 10^5$ $^{85}$Rb-Atome magnetisch gefangen und mit einer Lebensdauer von etwa 800 ms gespeichert. In den derzeitigen Experimenten mit $^{87}$Rb laden wir bis zu $5 \cdot 10^6$ Atome in die magneto-optische Falle und transferieren davon $2 \cdot 10^6$ Atome in die Magnetfalle.

Eine Übersicht über die zeitliche Abfolge der experimentellen Parameter gibt Abb. 5.4. Die Speicherzeit in der Mikrofalle kann variiert werden, um die Lebensdauer in der Falle zu bestimmen, außerdem lassen sich die Fallenparameter während dieser Zeit verändern (s. Abb. 5.5 a, b). Durch eine definierte Flugzeit zwischen dem Abschalten der Magnetfalle und der Detektion läßt sich die mittlere Geschwindigkeit der gefangenen Atome und darüber die Temperatur bestimmen (Abb. 5.5 c und 5.6).

Die Lebensdauer der Atome in der Falle wird durch den Hintergrundgasdruck beschränkt. In dem verbesserten Vakuum[1] erreichen wir Lebensdauern zwischen 4 und 5 s, wenn wir den Rubidium-Gasdruck gering genug einstellen (Abb. 5.7).

[1] an der Drucksonde (s. S. 99) werden $4 \cdot 10^{-10}$ mbar angezeigt

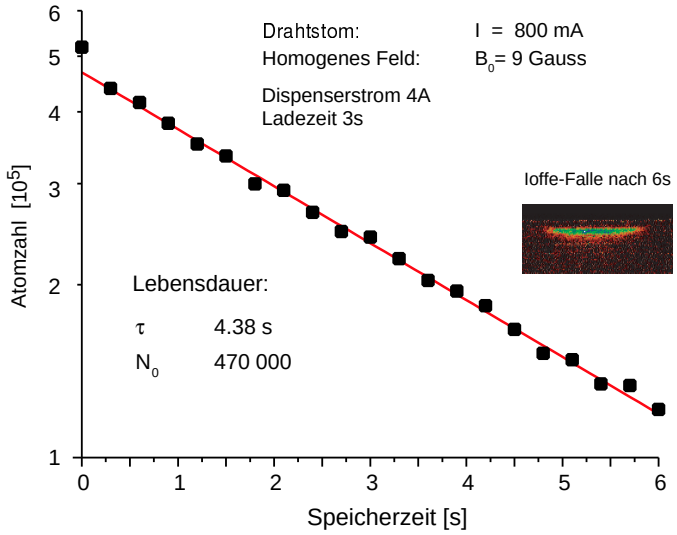



Abb. 5.7: *Lebensdauer in der Ioffe-Pritchard-Falle.*

### 5.2.2 Oszillationen

Verschiebt man beim Ladeprozeß die magneto-optische Falle gegen die Magnetfalle, so lassen sich in der Folge Schwingungen der Schwerpunktsbewegung beobachten. Wir haben solche Schwingungen in einer Quadrupolfalle angeregt, die von dem 300 $\mu$m breiten „U-Draht“ und einem externen Feld erzeugt wird. Solange das Potential, welches die Atome in einer Quadrupolfalle sehen, linear verläuft, hängt die Schwingungsdauer von der Amplitude gemäß

$$T = 4\sqrt{\frac{2m}{\mu}\,\frac{A}{b}} \tag{5.1}$$
$$= 2.24\sqrt{\frac{A/\mathrm{mm}}{b/\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{cm}}}}$$

ab.

Für die eingestellten Parameter ($I$=2 A, $B_{0,y}$=7,8 G) berechnet man Gradienten von $b_x = 29\,\mathrm{G/cm}$ und $\mathrm{B}_z = 240\,\mathrm{G/cm}$. Gemeinsam mit den gemessenen Schwingungsamplituden von $A_x = 0,46\,\mathrm{mm}$ und $A_z = 0,11\,\mathrm{mm}$ ergeben sich nach Gleichung 5.1 Schwingungsfrequenzen von $f_x = 35,4\,\mathrm{Hz}$ und $f_z = 213\,\mathrm{Hz}$. Die gemessene horizontale Schwingungsfrequenz stimmt gut mit diesem Wert überein, während sich bei der vertikalen Bewegung die starke Abweichung vom Quadrupolpotential in der niedrigeren Oszillationsfrequenz

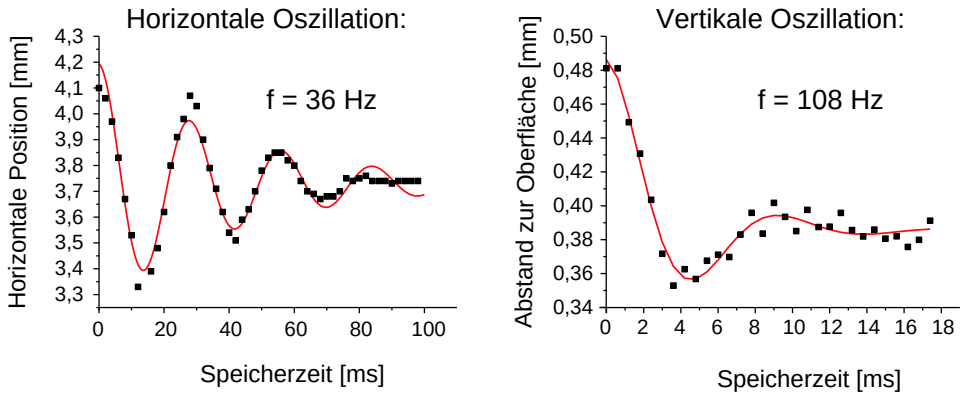



Abb. 5.8: *Oszillationen in der Quadrupolfalle bei einem Strom von $I = 2\,A$ und einem externen Feld von $B_{0,y} = 7,8\,G$. Aufgetragen ist jeweils der Schwerpunkt der Atomwolke gegen die Zeit.*

von 108 Hz niederschlägt. Die starke Anharmonizität des Potentials führt zu einem schnellen Abklingen der Schwerpunktsoszillationen. An der horizontalen Schwingung erkennt man jedoch, daß die Schwingungsfrequenz erhalten bleibt, also die einzelnen Atome mit unveränderter Amplitude weiterschwingen. Die Anharmonizität des Potentials bewirkt, daß die Schwingungen der einzelnen Atome außer Phase geraten und dadurch die Schwerpunktsbewegung gedämpft wird. Kollisionen zwischen den Atomen, die die Schwingungsamplituden verringern und damit die Schwingungsfrequenz erhöhen würden, finden erst auf einer Zeitskala von einigen hundert Millisekunden statt, so daß sie hier nicht beobachtet werden können.

### 5.2.3 Kompression und evaporatives Kühlen

Genauere Rückschlüsse auf die tatsächlichen magnetischen Felder lassen sich aus der Verschiebung der Fallenposition ziehen, wenn ein bekanntes homogenes Feld überlagert wird. Mit zunehmendem externen Feld rückt das Fallenzentrum näher an die Oberfläche (s. Abb. 5.9). Bei einer Leiterbahnbreite $w$ berührt das Fallenzentrum die Oberfläche, wenn das externe Feld den kritischen Wert

$$B_{\max} = \frac{\mu_0}{2}\frac{I}{w} \tag{5.2}$$

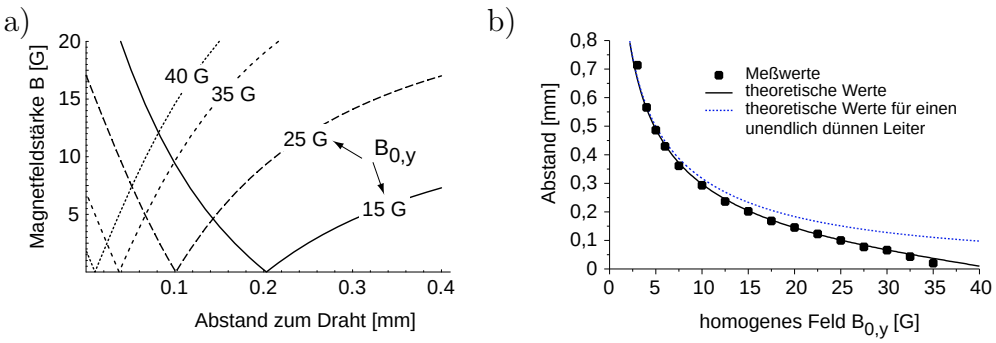



Abb. 5.9: *Magnetfelder und Fallenzentrum bei einem Strom von 2 A in einem 300 µm breiten Draht. Die Quadrate sind Meßdaten, die mit dem ersten Mikrofallensubstrat aufgenommen sind.*

erreicht (s. Abb. 5.9 a und auch Kapitel 3.3.2). An der Drahtfläche herrscht das Feld

$$B_{\mathrm{esc}} = B_{\mathrm{max}} - B_{0,y} \ , \tag{5.3}$$

so daß Atome, die eine Gesamtenergie von mehr als $\mu\, B_{\mathrm{esc}}$ besitzen, diese erreichen können. Abbildung 5.9 b zeigt die theoretische sowie die im Experiment gemessene Position des Fallenzentrums für verschieden starke externe Felder. Die Quadrupolfalle wurde mit der 300 µm breiten u-förmigen Leiterbahn realisiert, die bei bei einem Strom von $I$=2 A zu einem kritischen Feld von $B_{\mathrm{max}}$=42 Gauss führt. In der gezeigten Messung wurde nach dem Laden der Magnetfalle das externe Feld linear auf seinen Zielwert erhöht, während der Strom im „U-Draht“ konstant auf 2 A gehalten wurde (s. Abb. 5.10).

Verschiebt man die Atomwolke nahe an das Substrat, so gelangen die heißen Atome, die eine große Schwingungsamplitude besitzen, an die Oberfläche und werden dort entweder adsorbiert oder sie verlassen nach dem Kontakt mit der 300 K heißen Oberfläche die Falle. Dieser Mechanismus führt, ähnlich wie das Radiofrequenz-Kühlen, zum Absenken der Temperatur, da er selektiv die heißen Atome aus der Falle entfernt. In direkter Nähe zur Oberfläche läßt sich dieser Effekt nur schwer messen, denn mit der Verschiebung an die Oberfläche wird die Atomwolke gleichzeitig komprimiert und dadurch adiabatisch geheizt. Bei der Flugzeitmessung verschwindet dann die Hälfte der Atome in die Oberfläche, was zu Ungenauigkeiten bei der Temperaturbestimmung führt. Stattdessen lassen sich Dichte und Temperatur gut bestimmen, indem die Atomwolke nach dem Abschneideprozeß an eine feste Position zurückgeschoben wird (s. Abb. 5.10).

Während der Evaporation bestimmen der Strom und die Leiterbahnbreite

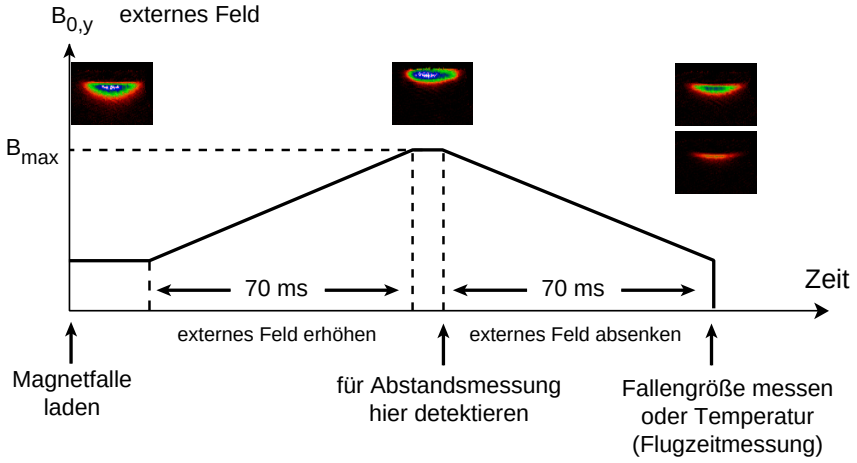



Abb. 5.10: *Sequenz für die Positionsbestimmung und für evaporatives Kühlen.*

den Feldgradienten an der Oberfläche. Mit einem Strom von $I$=1,2 A legen wir den Feldgradienten an der Oberfläche

$$\frac{\partial B}{\partial z} = (-)\frac{2\mu}{\pi}\,\frac{I}{w^2} \tag{5.4}$$

auf etwa 1000 G/cm fest. Die Atomwolke wird während 70 ms zur Oberfläche geschoben und nach 2 ms Wechselwirkungszeit in weiteren 70 ms in die Meßposition ($I$=2 A, $B_{0,y}$=9 G) gebracht. An dieser Stelle wird in mehreren Messungen die Temperatur sowie die zweidimensionale Dichte der Atome bestimmt. Die Symmetrie des Fallenpotentials legt nahe, daß die Atomwolke in der nicht sichtbaren Dimension (d.h. entlang $\mathbf{e}_y$) dieselbe Breite und Temperatur aufweist wie entlang der vertikalen Achse. Unter dieser Annahme läßt sich aus den gemessenen Werten die Dichte im Ortsraum sowie die Phasenraumdichte ermitteln.

Die Ergebnisse in Abb. 5.11 zeigen zunächst, daß die Temperatur sinkt, je mehr Atome durch Kontakt mit der Oberfläche entfernt werden. Durch die Detektionsmethode, die wir gewählt haben, werden verschiedene Temperaturen in vertikaler und horizontaler Richtung gemessen. Ursache hierfür ist die zweidimensionale Kompression bzw. Expansion beim Verschieben der Fallenposition. Auf der Strecke zum Substrat werden die beiden transversalen Freiheitsgrade adiabatisch geheizt und übertragen einen Teil der aufgenommenen Energie in den longitudinalen Freiheitsgrad. Bei der anschließenden adiabatischen Expansion wird die transversale Bewegung gekühlt, während der longitudinale Freiheitsgrad aufgrund der abnehmenden Kollisionsrate die aufgenommene Energie nicht vollständig an die transversalen Freiheitsgrade

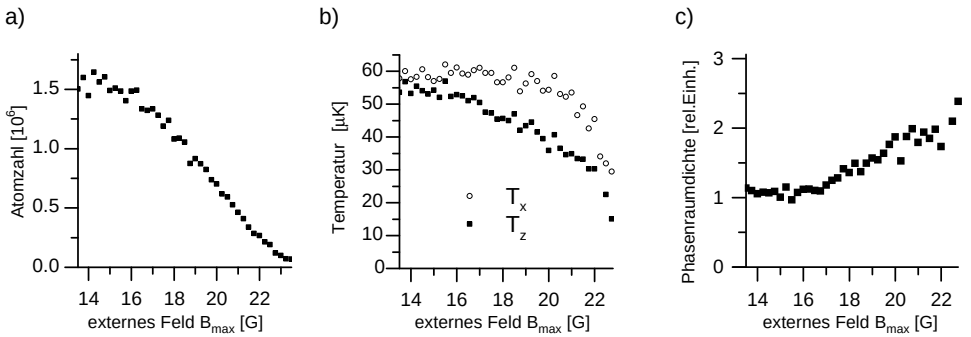



Abb. 5.11: *Evaporatives Kühlen an der Oberfläche: Je näher die Atomwolke an das Substrat herangeführt wird, desto mehr heiße Atome werden durch den Kontakt mit der Oberfläche aus der Falle getrieben (a). Durch anschließende Thermalisation nimmt die Temperatur ab (b) und die Phasenraumdichte wächst (c).*

zurück übertragen kann.

Da die Detektion immer unter den gleichen Bedingungen stattfindet, läßt sich der Kühlprozeß trotz der beschriebenen Schwierigkeiten nachvollziehen. Unter Verwendung von transversaler und longitudinaler Temperatur errechnet sich ein, wenn auch zunächst bescheidener, Anstieg der Phasenraumdichte (Abb. 5.11 c).

Aus technischen Gründen wurde bei diesen Messungen die Magnetfeldstärke nur linear in der Zeit variiert. Insbesondere wurde die Abschneide- und Thermalisierungszeit entscheidend durch die damals kurze Lebensdauer von $\tau \approx 1{,}2\,\mathrm{s}$ begrenzt. Hinzu kommt, daß wir die Kühlung nicht in einer Ioffe-Pritchard-Falle vornehmen konnten, da das erste Substrat, mit dem wir diese Untersuchungen gemacht haben, einen Leiterbahndefekt aufwies. In der verwendeten Quadrupolfalle haben gerade die gekühlten Atome wegen der Majorana-Umklapp-Prozesse eine kürze Lebensdauer. Trotz dieser Schwierigkeiten haben die Messungen gezeigt, daß die hohen Gradienten, die in der Mikrofalle realisiert sind, zu großen Kollisionsraten führen: selbst in der kurzen Zeit von etwa $100\mu$s war ein Anstieg von Phasenraumdichte zu beobachten.

Wir gehen davon aus, daß der Evaporationsmechanismus an der Oberfläche bei längeren Wechselwirkungszeiten, zumal in einer Ioffe-Pritchard-Falle, eine deutlich größere Kühlwirkung zeigt. Gerade im Zuge der Miniaturisierung, die den gleichzeitigen Betrieb mehrerer Magnetfallen ermöglicht, ist ein Kühlmechanismus, der sich für jede Falle getrennt steuern läßt von großem Interesse. Statt für die Evaporation das homogene externe Feld zu erhöhen,

kann beispielsweise der Drahtstrom der betreffenden Falle erniedrigt werden.

Allerdings schneidet der demonstrierte Mechanismus nur in einer Dimension heiße Atome aus der thermischen Verteilung, so daß sich nicht der vorteilhafte Bereich des „Run-away-Kühlens“ erreichen läßt [64]. Aus diesem Grund wird auch in Mikrofallen das „klassische“ Verdampfungskühlen mit einer Radiofrequenz ein wichtiges Werkzeug sein, und es soll in kommenden Experimenten untersucht werden.

## 5.3 Förderband für Atome

In Kapitel 3.5.2 haben wir bereits die Möglichkeit diskutiert, mit Hilfe von Mikrofallen eine Kette von verschiebbaren Fallen zu erzeugen. Das Substrat, das wir verwenden, enthält neben den bekannten Strukturen zum Laden der Magnetfalle einen 6 mm langen und 50 $\mu$m breiten Draht, über dem das zwei-

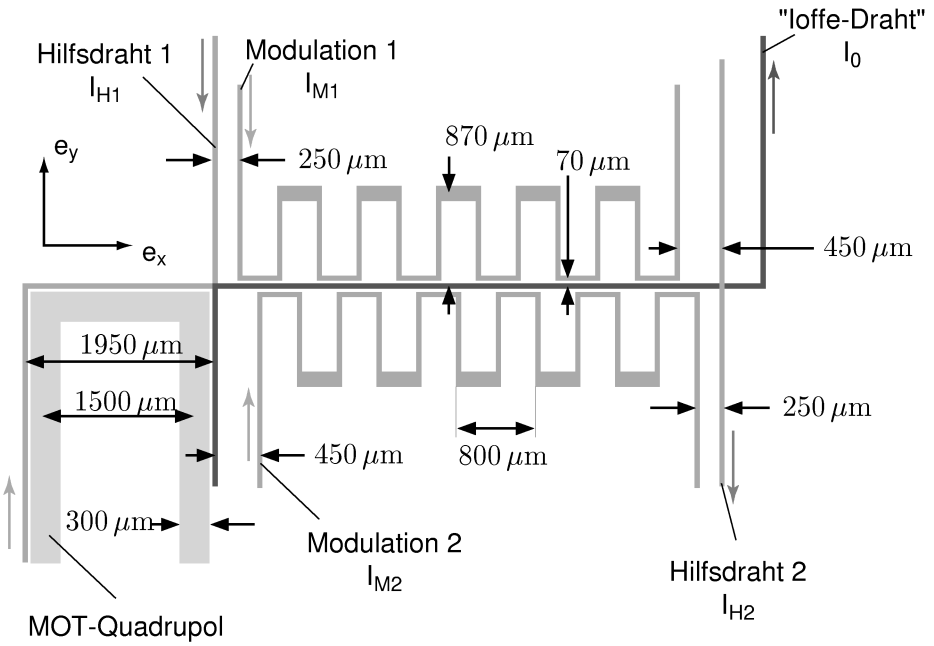



Abb. 5.12: *Mikrofallensubstrat für das magnetische Förderband. Mit Ausnahme des u-förmigen Drahtes für die letzte Spiegel-MOT-Phase besitzen alle Leiterbahnen eine Breite von 50 $\mu$m, die markierten Abstände zwischen verschiedenen Leiterbahnen verstehen sich von Zentrum zu Zentrum.*
*Die Flußrichtung, auf die sich Stromangaben im Text beziehen, ist durch schattierte Pfeile gekennzeichnet.*

dimensionale Quadrupolfeld für das Förderband entsteht (Abb. 5.12). Mit zwei ebenfalls 50 $\mu$m breiten Drähten, die in rechteckigen Schleifen auf beiden Seiten des Mitteldrahtes verlaufen, kann dieses Magnetfeld so moduliert werden, daß Potentialminima entstehen, die sich kontinuierlich verschieben lassen. Zwei zusätzliche Hilfsdrähte erlauben es uns, am Anfang und Ende dieses Förderbandes getrennte Magnetfallen zu betreiben.

Bei typischen Parametern liegt die Feldkrümmung in den Minima zwischen $5 \cdot 10^3$ und $4 \cdot 10^5\,\mathrm{G/cm^2}$. Für Rubidium-Atome im $|F = 2, m_F = 2\rangle$-Grundzustand bedeutet dies Fallenfrequenzen zwischen 100 und 800 Hz.

### 5.3.1 Laden des Förderbandes

Die Leiterstruktur des Förderbandes (Abb. 5.12) ist ursprünglich dafür konzipiert, daß Atome zunächst in der Quadrupolfalle des breiten „U-Drahtes“ gefangen werden. Anschließend können sie in die angrenzende Ioffe-Pritchard-Falle umgeladen werden, die sich stetig in das erste Minimum des Förderbandes transformieren läßt. In den hier vorgestellten Experimenten haben wir allerdings den Weg gewählt, die Atome direkt aus der Spiegel-MOT in die Minima des Förderbandes zu laden.

In dieser Anordnung verwenden wir vier verschiedene Ströme $I_0$, $I_{\mathrm{M1}}$, $I_{\mathrm{M2}}$ und $I_{\mathrm{H2}}$ im zentralen Draht, den beiden Modulationsdrähten und im zweiten Hilfsdraht. Als Zuleitung für den zentralen Draht nutzen wir den unteren Teil des zweiten Hilfsdrahtes (H2), der sich zwischen dem „U-Draht“ und dem zweiten Modulationsdraht befindet.

An die Stelle des Stromes im u-förmigen Draht tritt die Kombination aus positivem Strom $I_0$ und (nach der Konvention in Abb. 5.12) negativem Strom im zweiten Modulationsdraht. Wie die Zeichnung 5.13 a verdeutlicht, entstehen so mehrere effektiv u-förmig verlaufende Ströme, die in Kombination mit dem externen Feld $B_{0,y}$ jeweils ein Quadrupolfeld ergeben (5.13 b). Die im ersten Quadrupol entstehende Spiegel-MOT wird direkt überlagert mit dem ersten Minimum des Förderbandes, indem die Ströme und das externe Magnetfeld gemäß folgender Tabelle

| | $I_0$ | $I_{\mathrm{M1}}$ | $I_{\mathrm{M2}}$ | $B_{0,x}$ | $B_{0,y}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Spiegel-MOT | 0.3 A | – | −0.3 A | – | 1.5 G |
| Magnetfalle | 2 A | 1 A | – | 7 G | 16 G |

umgeschaltet werden. Aus Abb. 5.14 wird ersichtlich, daß die Minima nach dem Umschalten Fallen vom Ioffe-Pritchard-Typ sind. Da diese Fallen sehr klein sind, werden nur knapp 10 % der Atome von der Spiegel-MOT, typi-

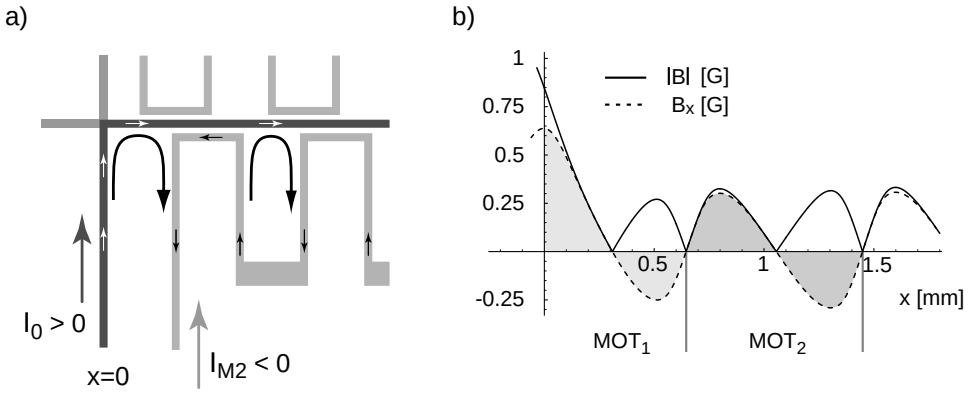



Abb. 5.13: *Für die letzte Phase der Spiegel-MOT wird statt eines u-förmigen Drahtes der zentrale Draht gemeinsam mit dem zweiten Modulationsdraht genutzt. Es entstehen mehrere Quadrupole, in denen magneto-optische Fallen funktionieren können.*

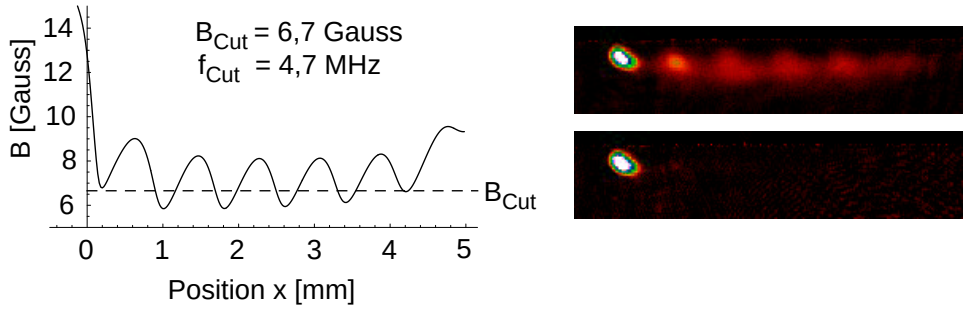



Abb. 5.14: *In der Startposition des Förderbandes entstehen die Minima genau an den Stellen, an denen sich im vorangehenden Schritt die Quadrupolfelder für die Spiegel-MOT befinden. Atome in anderen Minima als dem ersten lassen sich entfernen, indem eine geeignete Radiofrequenz eingestrahlt wird. Damit erhält man einen definierten Ausgangszustand für quantitative Messungen.*

scherweise $1.5\,10^5$, in das Minimum geladen.

Da in der Phase der Draht-MOT mehrere Stellen existieren, an denen sich die Feldkonfiguration für eine MOT eignet (s. Abb. 5.13), gelangen je nach Überlagerung der vorangehenden MOT-Phase einige Atome in die seitlichen Minima des Förderbandes. Für Messungen, in denen diese Atome stören würden, können sie durch Einstrahlen einer elektromagnetischen Welle im Radiofrequenzbereich entfernt werden. Die Radiofrequenz verursacht Übergänge in die nicht gefangenen magnetischen Unterzustände, wenn die Zeeman-

Aufspaltung zweier benachbarter Zustände der Radiofrequenz entspricht [64]. Bei der Magnetfeldkonfiguration des Förderbandes liegt das erste Minimum höher als die übrigen. Daher kann die Radiofrequenz so eingestellt werden, daß in allen Minima außer dem ersten Übergänge in nicht gefangene Zustände getrieben werden (s. Abb. 5.14).

### 5.3.2 Transport

Nachdem die Atome in die Potentialminima geladen sind, lassen sie sich wie auf einem Förderband verschieben. In der einfachsten Variante werden die Ströme in den Modulationsdrähten sinusförmig und kosinusförmig moduliert, während der Strom im Mitteldraht und das externe Feld konstant bleiben:

$$I_0 = 2\,\mathrm{A} \tag{5.5a}$$

$$I_{\mathrm{M1}} = 1\,\mathrm{A}\,\cos\omega t \tag{5.5b}$$

$$I_{\mathrm{M2}} = -1\,\mathrm{A}\,\sin\omega t \tag{5.5c}$$

$$\mathbf{B}_0 = 7\,\mathrm{G}\,\mathbf{e}_x + 16\,\mathrm{G}\,\mathbf{e}_y\,. \tag{5.5d}$$

Der periodische Stromverlauf wird dabei umgesetzt in eine lineare Bewegung der magnetischen Minima. Die Bildfolge in Abbildung 5.15 illustriert, wie die Atome in einer der Potentialmulden gefangen bleiben, während sich diese kontinuierlich nach rechts bewegt. Da die Absorptionsabbildung der Atome destruktiv ist, wird für jedes Bild jeweils eine neue Atomwolke in das Förderband geladen, während der Zeit $t$ transportiert und an der erreichten Position abgebildet. In der linken Spalte ist der Verlauf der Magnetfeldstärke gezeigt, wie er sich zum Zeitpunkt der Bildaufnahme berechnet. Zu jeder Position $x$ ist jeweils das Minimum der Feldstärke in der Ebene $\mathbf{e}_y$-$\mathbf{e}_z$ aufgetragen, so daß die Kurve alle Minima und jeweils die niedrigste Verbindungsstelle zwischen ihnen zeigt (s. a. Anhang B.2).

Die Variation der magnetischen Potentiale führt dazu, daß sich die Atomwolke bei einem zu schnellen Transport aufheizt. Ein Teil der Heizrate geht auf die sich ändernde Krümmung und Form der Minima zurück. Eine weitere Ursache ist, daß der Verlauf der Fallenzentren von der idealen linearen Bewegung abweicht. Die Form der Fallen läßt sich nur begrenzt ändern, denn bei gegebener Leiterstruktur ist ein gleichmäßigerer Verlauf nur in größerer Entfernung zur Oberfläche möglich. Dort werden jedoch die Potentiale flacher. Die Position der Minima hingegen läßt sich durch die Variation von Strömen und externen Feldern korrigieren.

Bei dem in Abbildung 5.15 gezeigten Förderband ändert sich die Höhe, d.h. der Abstand zum Substrat während eines Schiebezyklus um 150 $\mu$m. Grund

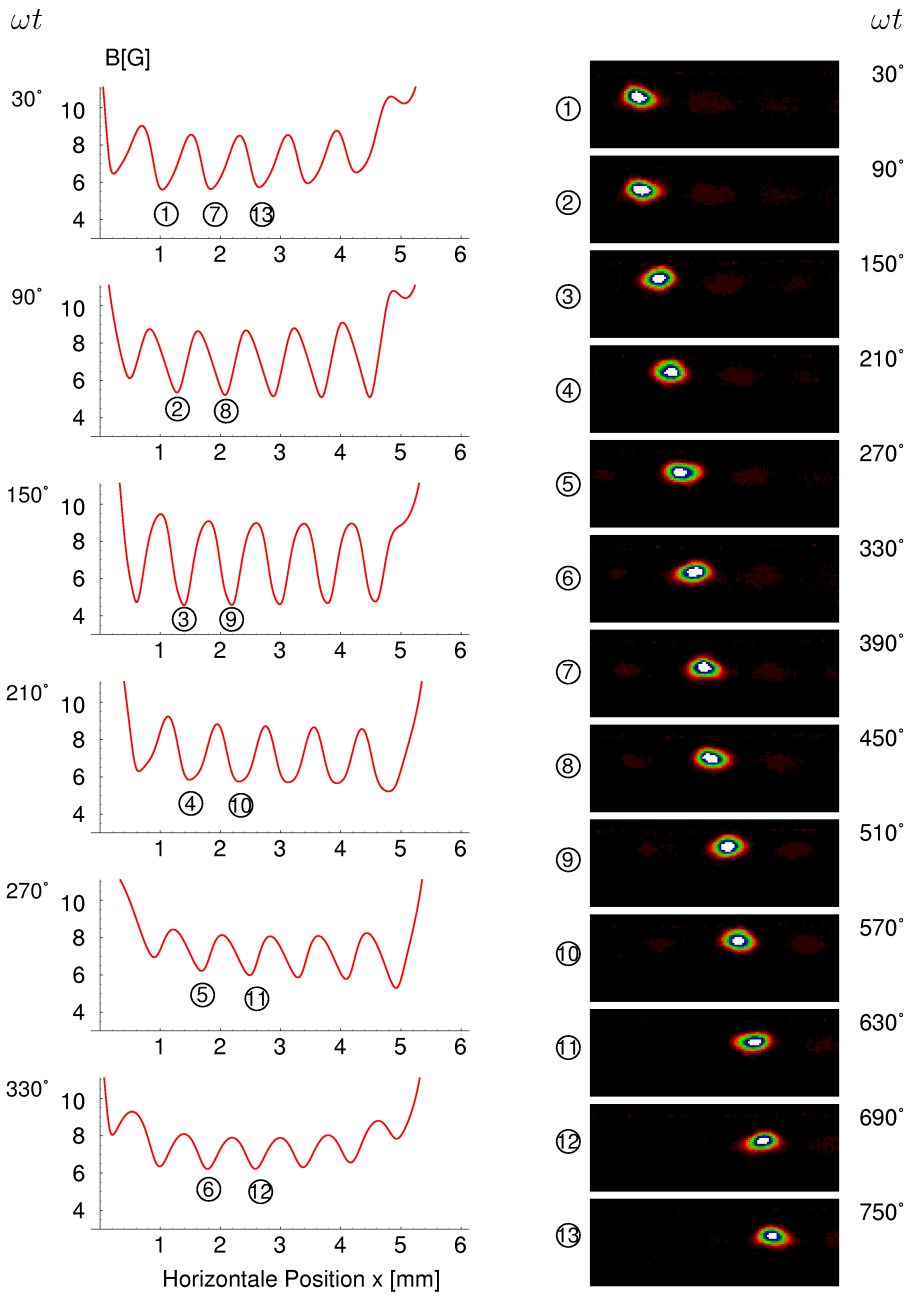



Abb. 5.15: *Eine Kette von Ioffe-Pritchard-Fallen transportiert in einem ihrer Minima eine Atomwolke 4 mm weit. Die Absorptionsbilder in der rechten Spalte zeigen zwei der insgesamt fünf Schiebezyklen. Links sind die zugehörigen Feldstärken aufgetragen, wie sie sich jeweils im Minimum senkrecht zur Transportrichtung ergeben.*

dafür sind die unerwünschten Beiträge der Modulationsströme zu dem Strom entlang der $\mathbf{e}_x$-Achse. Die Variation des effektiven Stroms $I_x$ ändert die vertikale Position der Falle und damit gleichzeitig die Tiefe der Potentialtöpfe, wie aus den Berechnungen in Abb. 5.15 deutlich wird. Beispielsweise ergeben sich im Potential Nr. 7 Fallenfrequenzen von 120, 340 und 370 Hz, während im steileren Minimum Nr. 9 die Frequenzen 180, 690 und 770 Hz betragen. Durch eine geeignete Wahl des Stromes im Mitteldraht läßt sich der störende Einfluß der Seitendrähte reduzieren. Der Stromverlauf

Stromverlauf beim höhenoptimierten Förderband

$$I_0 = a_0 + \sum_{k=1}^{5} a_k \sin(k\,\omega t + \varphi_k) \tag{5.6}$$

$$a_0 = 1.379\,\mathrm{A} \tag{5.7}$$

$$a_1 = 0.466\,\mathrm{A} \qquad \varphi_1 = 5.524 \tag{5.8}$$

$$a_2 = 0.149\,\mathrm{A} \qquad \varphi_2 = 3.082 \tag{5.9}$$

$$a_3 = 0.073\,\mathrm{A} \qquad \varphi_3 = 0.750 \tag{5.10}$$

$$a_4 = 0.012\,\mathrm{A} \qquad \varphi_4 = 1.313 \tag{5.11}$$

$$a_5 = 0.028\,\mathrm{A} \qquad \varphi_2 = 5.376 \tag{5.12}$$

ist Ergebnis einer Optimierung, die die Abweichung der Fallenposition vom Sollwert $z_0 = 150\,\mu$m minimiert. Abbildung 5.16 zeigt den Verlauf der Höhenposition, der für die beiden Varianten des Förderbandes experimentell bestimmt wurde. Die Symbole kennzeichnen jeweils den Schwerpunkt der Atomwolke, der aus dem Absorptionsbild ermittelt wurde. Die durchgezogenen Linien kennzeichnen den Verlauf des erwarteten Schwerpunkts, der sich aus den berechneten Magnetfeldern bei einer Temperatur von $30\,\mu$K (mit konstantem Strom $I_0$) bzw. $60\,\mu$K (mit optimiertem Strom) ergibt. Die verschiedenen Temperaturen tragen dem Umstand Rechnung, daß das nicht optimierte Förderband im Mittel weiter entfernt vom Substrat verläuft und in den dort weniger steilen Fallen eine geringere Temperatur herrscht. Bei der Überlagerung der Meßdaten mit den theoretischen Werten ist nur die absolute Position als freier Parameter angepaßt. Außerdem wurde mit einbezogen, daß die Substratebene um 0,5° gegen die Pixelreihen der Kamera verkippt ist.

Für die in Abbildung 5.15 gezeigte Bildfolge wurde eine Zykluszeit von 150 ms gewählt, was bei der geometrischen Periodenlänge von $800\,\mu$m einer mittleren Schiebegeschwindigkeit von 0,53 cm/s entspricht. Für diese Parameter sind die Änderungen im Potential langsam gegen die typischen Fallenfrequenzen von $> 100$ Hz, so daß die Heizrate beim Schieben gering ist. Bei größeren Schiebegeschwindigkeiten wird das Aufheizen sichtbar.

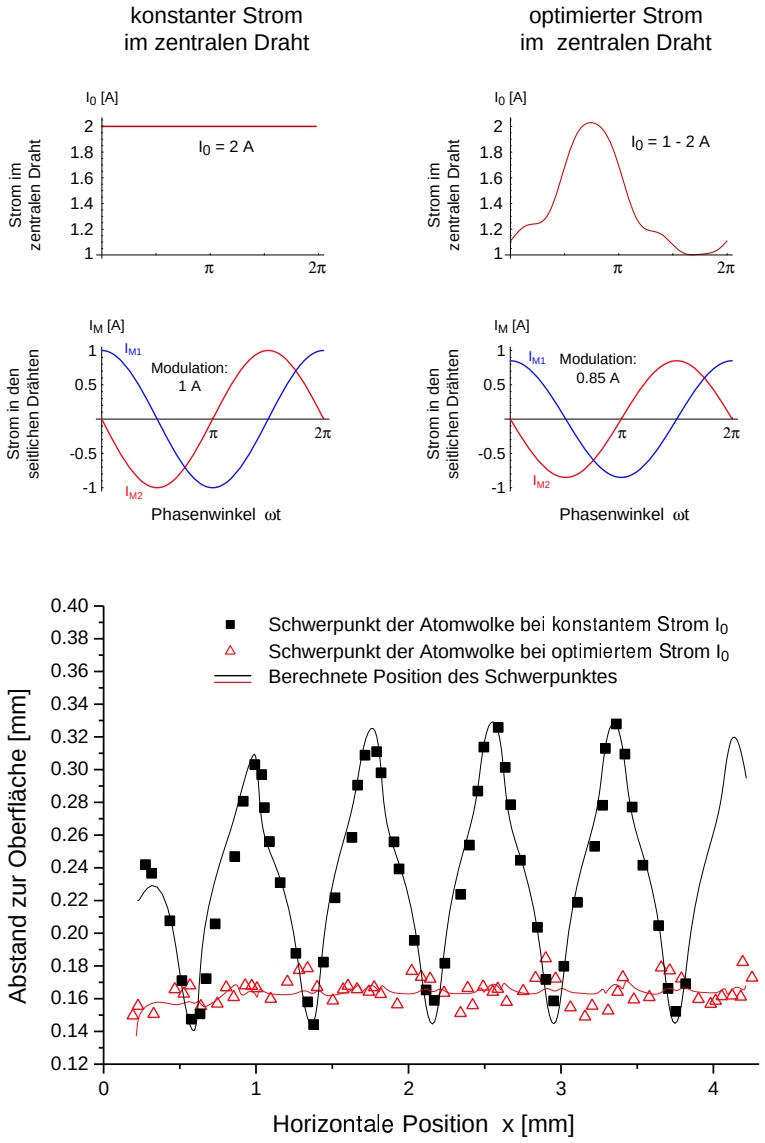



Abb. 5.16: *Verlauf des Fallenzentrums beim atomaren Förderband. Durch die Variation des Stromes im zentralen Draht läßt sich erreichen, daß die Atomwolke in konstantem Abstand zur Oberfläche verschoben wird.*

Bei der Messung der Heizraten, die der Transport verursacht, überlagern sich zwei Effekte: zum einen das Aufheizen bei der Beschleunigung und beim Abbremsen und zum anderen die periodische Änderung des magnetischen Potentials während des „gleichförmigen“ Transports. Da die Gesamtstrecke nur wenige Perioden lang ist, lassen sich die beiden Beiträge nicht völlig trennen. Für die Messungen, die in Abbildung 5.17 gezeigt sind, wurden die Atome

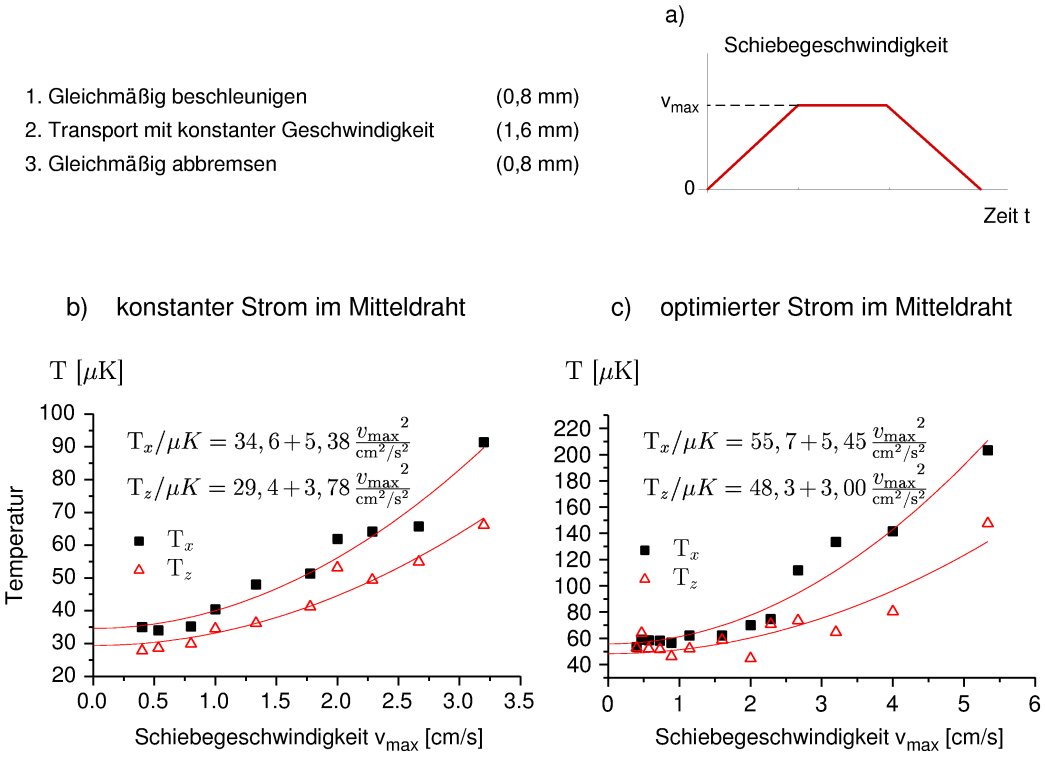



Abb. 5.17: *a) Verlauf der Geschwindigkeit beim Transport über 4 Förderbandperioden, b) und c) Heizrate durch den Transport.*

jeweils über eine Periode, d.h. 800 $\mu$m gleichmäßig beschleunigt, mit der erreichten Geschwindigkeit $v_{\max}$ zwei Perioden weit gleichmäßig transportiert und zuletzt in einer Periode wieder abgebremst. Am Ende des Transports wird die Temperatur aus einer Flugzeitmessung wie in Abbildung 5.6 bestimmt.

Der Vergleich der beiden Transportmethoden zeigt zunächst, daß die absoluten Heizraten in beiden Fällen ähnlich sind. Die Temperaturzunahme entlang der $\mathbf{e}_x$-Richtung ist mit $5{,}4 \pm 0{,}35 \, \frac{v_{\max}^2}{\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}^2}$ $\mu$K im Rahmen der Meßgenauigkeit gleich. In der transversalen Richtung $\mathbf{e}_z$ deutet sich für den höhenoptimierten Transport mit $3{,}0 \pm 0{,}35 \, \frac{v_{\max}{}^2}{\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}^2}$ $\mu$K eine etwas geringere Zunahme an als für den nicht optimierten Transport mit $3{,}8 \pm 0{,}4 \, \frac{v_{\max}{}^2}{\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}^2}$ $\mu$K .

Die Messung dieser Heizratenmessungen ist noch sehr jungen Datums und die Untersuchungen dazu sind noch nicht vollständig abgeschlossen. Die letztendlich für den Transport bedeutsame Größe ist jedenfalls die relative Heizrate, die beim höhenoptimierten Förderband um den Faktor 0,6 geringer zu sein scheint. Auf jeden Fall zeigt sich, daß die Atome über eine Distanz von

4 mm ohne meßbares Aufheizen verschoben werden können, wenn die mittlere Schiebegeschwindigkeit unter 1 cm/s gewählt wird.

Neben der Einstellung der konstanten Höhe sind weitere Verbesserungen möglich, deren Realisierung aus technischen Gründen noch aussteht. Den Berechnungen zufolge bewegt sich das Fallenzentrum entlang der in den Absorptionsabbildungen nicht sichtbaren Achse mit einer Amplitude von etwa 50 $\mu$m (Abb. 5.18, gestrichelte Linie). Diese Bewegung ließe sich kompensieren, indem ein zeitlich variierendes homogenes Magnetfeld entlang $\mathbf{e}_z$ überlagert wird (durchgezogene Linie). Nicht weniger zu vernachlässigen ist die Unregelmäßigkeit in der Bewegung entlang der Transportachse: im gleichmäßig mit $v_{\max}$ bewegten Bezugssystem führt der Schwerpunkt der Atomwolke ebenfalls eine Oszillation aus, deren Amplitude etwa 60 $\mu$m beträgt (Abb. 5.19 b). Ein geeigneter Verlauf der Zeitphase würde hier zu einer gleichmäßigen Bewegung führen.

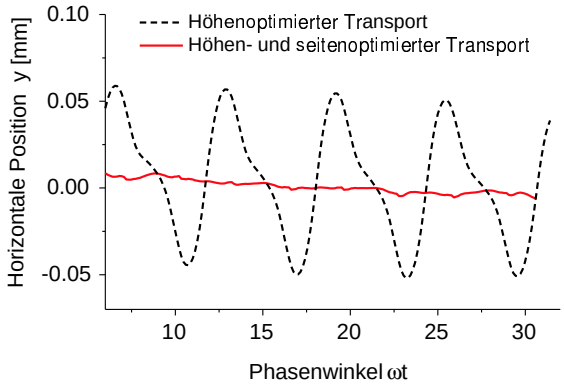



Abb. 5.18: *Zeitlicher Verlauf des Schwerpunkts entlang der* $\mathbf{e}_y$*-Achse. Die beim höhenoptimierten Förderband vorhandene Schwerpunktsbewegung (getrichelt) läßt sich durch ein zusätzliches Magnetfeld entlang* $\mathbf{e}_z$ *reduzieren (b).*

Nach Abschluß dieser Optimierungen begrenzt letztendlich die verwendete Leiterstruktur die maximale Transportgeschwindigkeit. Wenn man anstelle der bisherigen Substrate solche mit mehreren Lagen von Leiterbahnen verwenden kann, lassen sich andere Leiterstrukturen entwerfen, die einen gleichmäßigeren Transport ermöglichen. Zum einen fallen die störenden Beiträge der Modulationsdrähte weg, weil diese den Mitteldraht kreuzen können statt in seiner Nähe abzuknicken. Zum anderen lassen sich mehr als zwei Modulationsdrähte nutzen, wenn Durchkontaktierungen zwischen den Leiterschichten möglich sind. Dieser Schritt entspräche in etwa der Entwicklung

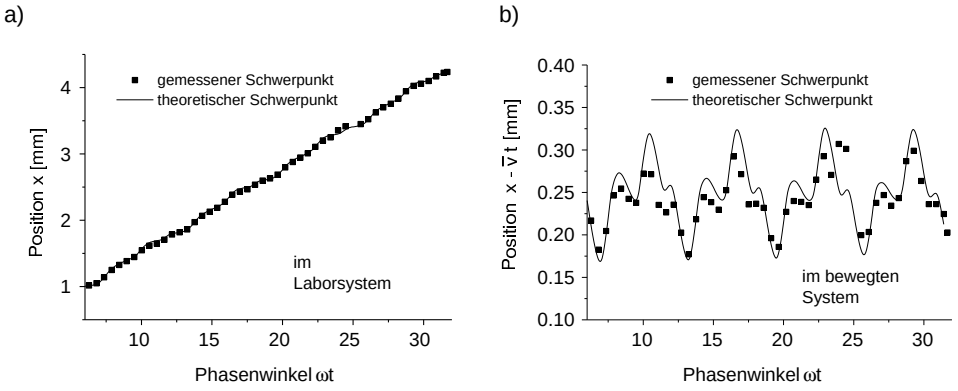



Abb. 5.19: *Zeitlicher Verlauf des Schwerpunkts beim höhenoptimierten Förderband. a) x-Position im Laborsystem, b) x-Position im gleichförmig bewegten Bezugssystem.*

vom „Zwei-Takter“ zum „Vier-Takter“ oder, etwas näher an der Materie, vom Doppelanker-Motor zum Viel-Anker-Motor.

## 5.4 Vereinigung und Trennung von zwei Ioffe-Pritchard-Fallen

Bei einem Förderband stellt sich natürlicherweise die Frage, wohin es führt und wie es endet. Für das in Abbildung 5.15 abgebildete Förderband für Atome ist die Antwort unbefriedigend, denn es verstreut die „mühsam“ transportierten Atome mit einem Schlag über die gesamte Förderstrecke. Im Potentialverlauf wird deutlich, daß zwischen Phase $\omega t = 330°$ und $\omega t = 390°$ das letzte (rechte) Minimum angehoben wird und sich anschließend in das links daneben liegende Minimum „entleert“. Atome, die sich in dem äußersten Minimum befinden, erhalten dabei so viel potentielle Energie, daß sie im Anschluß daran von den übrigen Minima nicht mehr gefangen werden. Mit dem zweiten Hilfsdraht (s. Abb. 5.12) läßt sich jedoch eine ortsfeste Ioffe-Pritchard-Falle am Ende der Transportstrecke erzeugen, die als Auffangreservoir für ankommende Atome fungiert (Abb. 5.22). Dabei vereint sich jeweils die ankommende Falle mit der bestehenden, so daß sich Atome in der letzten Falle ansammeln. In umgekehrter Laufrichtung kommt es zu einer Teilung, bei der sich aus der letzten Falle ein Minimum abspaltet.

Die Art und Weise, wie sich zwei Fallen am geschicktesten, d.h. adiabatisch vereinigen lassen, hängt von der Atomzahl ab, die jeweils in den Fallen

gespeichert ist. Bei zwei gleichartigen Fallen, in denen jeweils die gleiche Zahl von Atomen mit der gleichen Temperatur gespeichert ist, läßt sich die adiabatische Vereinigung erreichen, indem die Barriere zwischen den Fallen gleichmäßig erniedrigt wird. Komprimiert man im Anschluß die Falle, so führt dies in jedem Fall zu einer Temperaturerhöhung, aufgrund der höheren Atomzahl bleibt jedoch im Idealfall die Phasenraumdichte konstant. Dieser Vorgang entspricht in einem einfachen Modell zwei aneinander grenzenden Gasbehältern, zwischen denen eine Wand entfernt wird. Komprimiert man anschließend das vergrößerte Volumen auf die Ausgangsgröße eines Behälters, so herrscht nun bei gleicher Phasenraumdichte eine höhere Temperatur. Mit etwas größerer „Anstrengung“ (d. h. rechnerischem Aufwand) lassen sich auch ungleich große Fallen adiabatisch zusammenführen. Der Ansatz ist, daß die Phasenraumdichte in den Teilen der Falle, die jeweils zusammengeführt werden, gleich groß sein muß. Dies ist im Modell der Gasbehälter nicht direkt nachzuvollziehen, da die Phasenraumdichte über das gesamte Volumen konstant ist[2]. Bei magnetischen Fallen ist dies jedoch möglich, da die Phasenraumdichte mit der Energie gemäß $\rho_{\mathrm{ph}} = \rho_{\mathrm{ph},0}\, e^{-\frac{E}{k_B T}}$ skaliert. Mit dem energetischen Abstand der Fallenminima und mit der Fallenform können die Parameter so gewählt werden, daß sich stets Zustände mit gleicher Besetzungswahrscheinlichkeit vereinen.

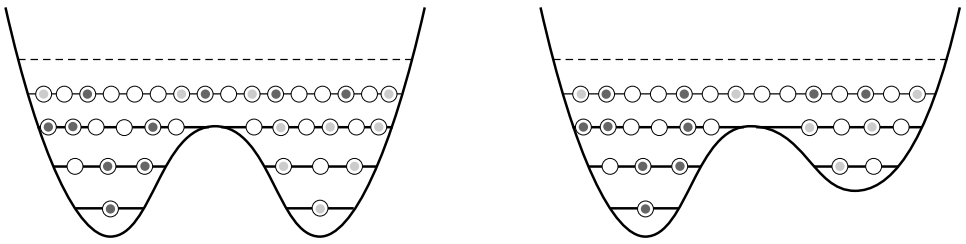


Abb. 5.20: *Eine optimale Vereinigung findet statt, wenn die Besetzungswahrscheinlichkeit der Zustände an der Vereinigungskante in beiden Potentialen gleich groß ist.*

Wir haben am Ende des Förderbandes einen Vereinigungsprozeß realisiert, der für das Zusammenführen von gleich besetzten Fallen optimiert ist. Die Tiefe der Zielfalle läßt sich durch die Stärke des Stromes im zweiten Hilfsdraht regulieren. Kriterium für die Optimierung des Stromes war, daß in der ankommenden Falle während der Vereinigung die gleiche Zahl an Quantenzuständen Platz findet wie in der Zielfalle. Die Anzahl der Zustände wurde

[2]Das Modell ist zu retten, wenn die Gasbehälter hoch genug bzw. die Temperaturen niedrig genug sind, so daß die Dichte höhenabhängig wird.

jeweils aus der Zustandsdichte des vollständigen magnetischen Potentials berechnet (s. Abschnitt 2.3.4). Der Strom wurde für die Viertelperiode, die die Vereinigung in Anspruch nimmt, optimiert und durch eine Fourier-Reihe zweiter Ordnung genähert:

Strom im Hilfsdraht für optimierte Vereinigung

$$I_{\mathrm{H2}} = 0.462 + 0.255\,\sin(\varphi + 0.493) - 0.088\,\sin(2\,\varphi - 1.482)\ . \qquad (5.13)$$

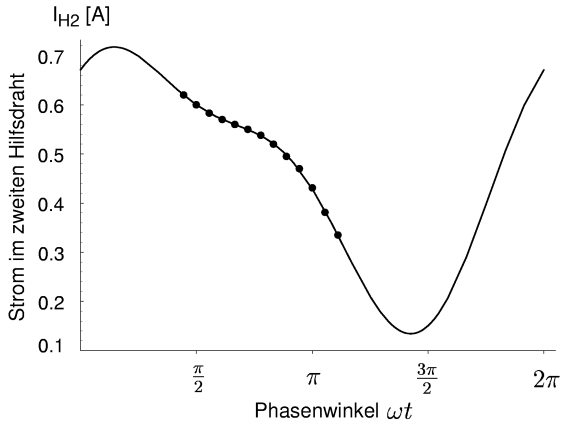



Abb. 5.21: *Strom im zweiten Hilfsdraht für die gleichmäßige Vereinigung. Die Punkte kennzeichnen die Ergebnisse der Optimierungsrechnung, die durchgezogene Linie beschreibt die Näherung durch eine Fourier-Reihe zweiter Ordnung.*

Die Werte in Gleichung 5.13 sind für das Förderband mit konstantem Strom $I_0$=2 A gerechnet, da für diese Parameter die Vereinigung in größerem Abstand zur Oberfläche stattfindet und dadurch gleichmäßiger verläuft. Die Graphen in Abbildung 5.22 zeigen den Verlauf des Magnetfeldes während der Vereinigungsphase. Die Minima der beiden Fallen bleiben in etwa auf gleicher Höhe, obwohl dies nicht das Kriterium für die Optimierung ist. Diese Tatsache besagt allerdings, daß sich die beiden Fallen in der dreidimensionalen Form ähnlich sind und daß sie ähnliche Zustandsdichten besitzen.

Der Prozeß der Zusammenführung läßt sich charakterisieren, indem man eine einzelne Atomwolke mehrfach den Vereinigungsprozeß durchlaufen läßt. Wenn beide Fallen gleich groß sind, erwartet man nach jeder Vereinigung eine Abnahme der Phasenraumdichte um den Faktor zwei, da sich von den beiden Fallen jeweils die gleiche Anzahl an Quantenzuständen zusammenfügt. Nur die eine Hälfte davon ist mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit bevölkert, so daß nach der Vereinigung die gleiche Zahl an Atomen für die

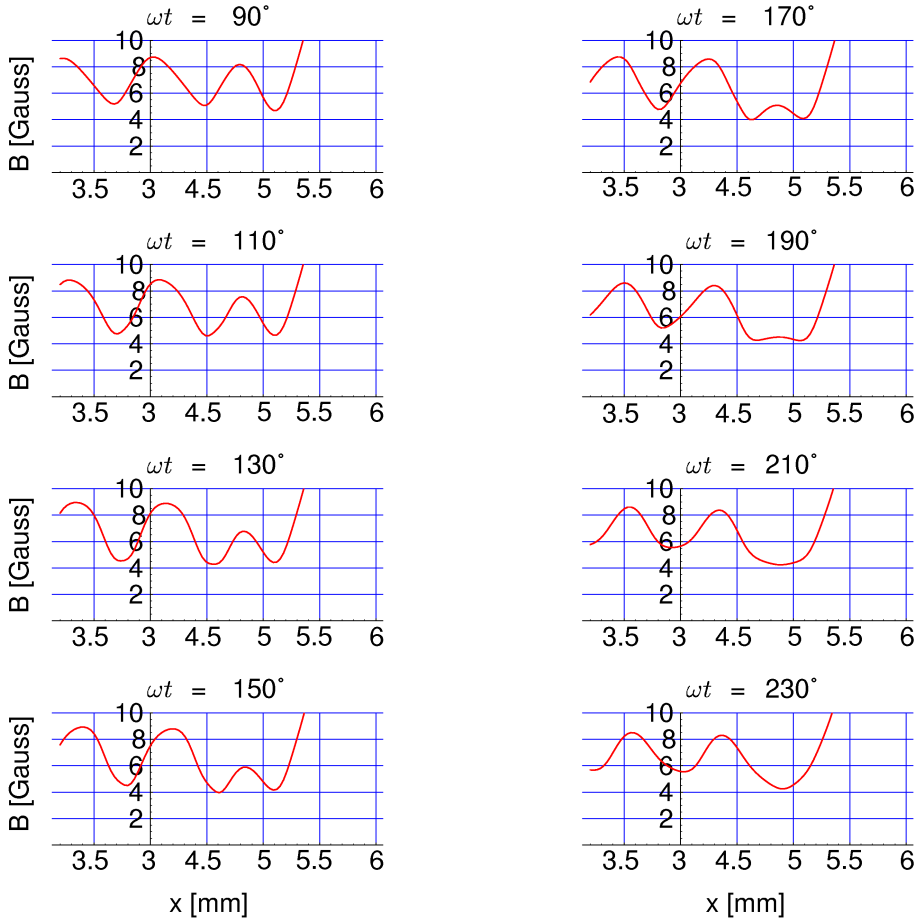



Abb. 5.22: *Vereinigung der Potentialtöpfe am Ende des Förderbandes*

doppelte Zahl an Quantenzuständen zur Verfügung steht. Wenn die Vereinigung zu schnell abläuft, erwartet man wegen zusätzlicher Heizeffekte eine noch größere Abnahme der Phasenraumdichte.

Wir haben die Vereinigung experimentell untersucht, indem wir zunächst die Atome von der Laderegion in die Zielfalle transportiert haben. Regelt man den Strom im Hilfsdraht spät genug dazu, läßt sich die äußerste Falle füllen, ohne daß es dabei zu einer Vereinigung und dem damit verbundenen Verlust der Phasenraumdichte kommt. An dieser Position wird direkt sowie nach ein, zwei oder drei Vereinigungen die Atomzahl und die Temperatur gemessen, wobei jede Vereinigungsperiode sich über einen Zeitraum von 400 ms erstreckt.

Die Messung der Temperatur führt auf unterschiedliche Werte entlang der verschiedenen Achsen, da die Atomwolke zum Zeitpunkt der Messung nicht

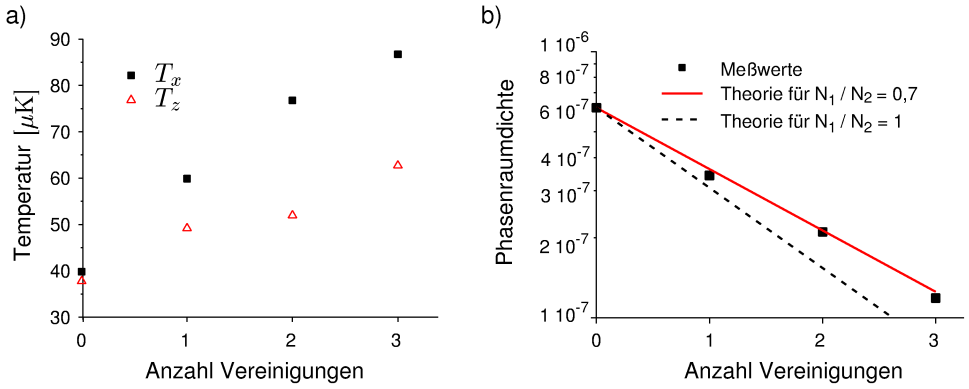



Abb. 5.23: *a) Bei der Vereinigung einer gefüllten und einer leeren Ioffe-Pritchard-Falle steigt die Temperatur, gleichzeitig nimmt die Phasenraumdichte ab (b).*

vollständig thermalisiert ist. Abb. 5.23 zeigt, daß aufgrund der Vereinigung die Temperatur in longitudinaler Richtung stärker anwächst als in der Richtung senkrecht dazu. Für die Berechnung der Phasenraumdichte verwenden wir daher, wie bereits bei der Messung zum evaporativen Kühlen, die effektive Temperatur

$$T_{\text{eff}} = \sqrt[3]{T_x \, T_z^{\,2}} \, . \tag{5.14}$$

Bei der ersten Vereinigung gelingt es, alle 110 000 Atome gefangen zu halten, während sich nach zwei bzw. drei Vereinigungen nur noch etwa 95 000 bzw. 80 000 Atome in dem äußersten Minimum befinden. Ein interessantes Verhalten zeigt die Phasenraumdichte, die bei jeder Vereinigung weniger als die Hälfte abnimmt. Dieses zunächst unerwartete Ergebnis läßt sich durch die Tatsache erklären, daß die Falle, die sich von links mit der stationären Falle vereinigt, ein etwas geringeres Volumen besitzt als die stationäre Falle.

Die Größe dieser Falle läßt sich bestimmen, indem man statt der Vereinigung von zwei Fallen den umgekehrten Vorgang der Teilung betrachtet: Wenn sich die Atomwolke auftrennt, zeigt sich am Verhältnis der wegbewegten und der zurückbehalten Teilchen, wie groß die beiden entstehenden Fallen sind (Abb. 5.24). Verwenden wir den zeitlich umgekehrten Verlauf des Stromes, den wir für das Zusammenführen gleich großer Fallen optimiert haben, so beobachten wir, daß sich etwa 41% der Atome von der Wolke im äußeren Potential abtrennen (Abb. 5.24). Den Grund für die Abweichung von der idealen Teilung (50:50) vermuten wir in Magnetfeldbeiträgen der Stromzuleitungen, die in unserer Berechnung nicht erfaßt waren. Das gemessene Teilungsverhältnis von $\frac{N_1}{N_2} = 0,7 \pm 0,01$ bedeutet, daß die abgetrennte Falle

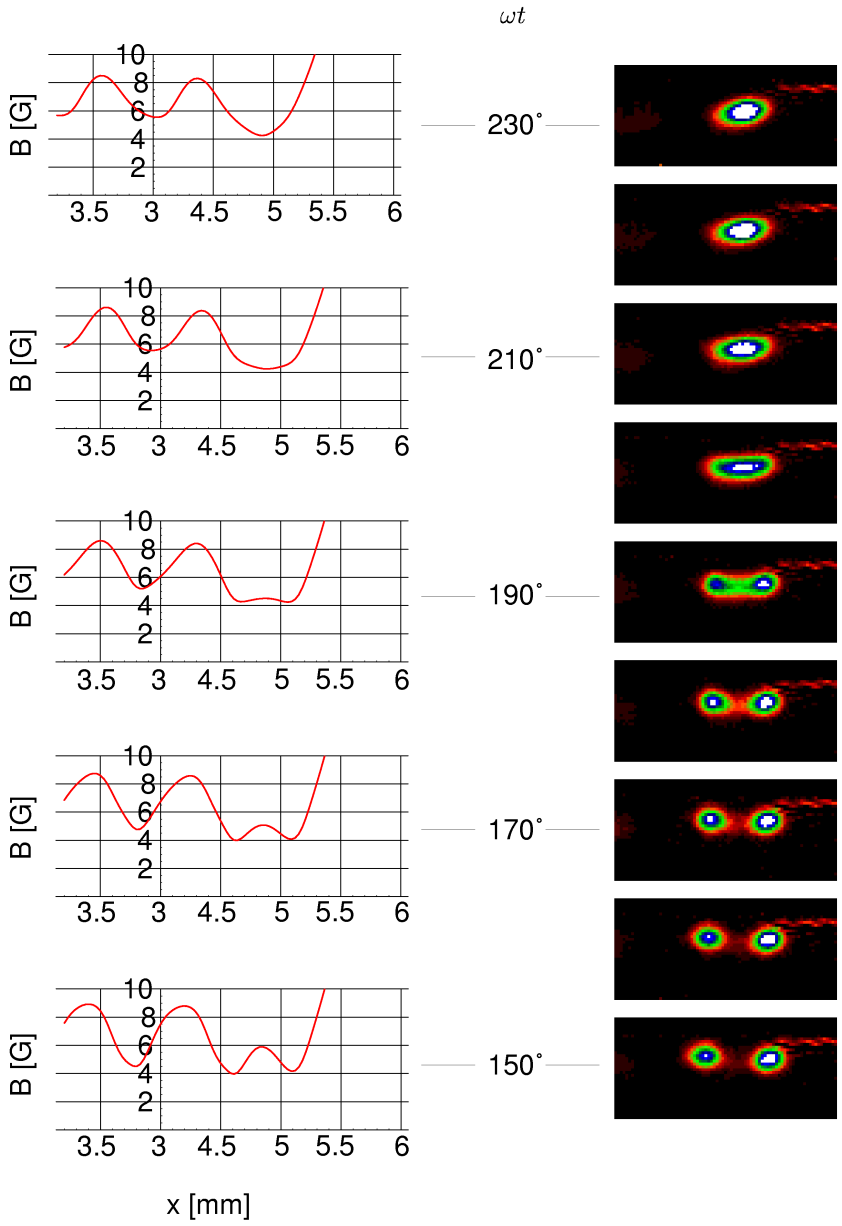
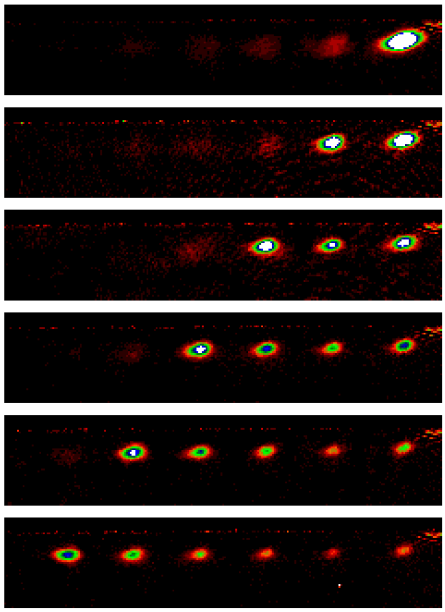



Abb. 5.24: *Aufteilen der Ioffe-Pritchard-Falle*

kleiner ist. Bei dem umgekehrten Prozeß der Vereinigung wird daher das Volumen der Falle nicht verdoppelt, sondern nimmt nur um den Faktor 1,7 zu. Entprechend erwartet man für eine adiabatische Vereinigung nur eine Abnahme der Phasenraumdichte um $\frac{1}{1,7} = 0,59$. Die durchgezogene Linie in Abb. 5.23 stellt gerade diesen Verlauf dar.

An das Ende dieser Arbeit möchte ich einige Bilder stellen, die wir bei uns im Labor die „Entenfamilie“ getauft haben:

Die Atome sind hier zu Beginn von der linken Seite bis in die äußerste rechte Mikrofalle verschoben worden. Dort teilen sie sich in immer kleinere Gruppen und wandern, die größten voran, langsam zurück an den Ort, von dem sie gekommen sind. Hier schließt sich der Kreis.



# 6 Ausblick

In der Arbeit wurde zunächst gezeigt, daß sich miniaturisierte Magnetfallen in der Nähe einer Substratoberfläche mit Hilfe der *Spiegel-MOT* effizient laden lassen. Dadurch konnten erstmals die komplexen magnetischen Potentiale ausgenutzt werden, die sich mit Hilfe von lithographisch hergestellten Leiterbahnen realisieren lassen. In den Experimenten konnten mehrere Magnetfallen in unmittelbarer Nähe zueinander betrieben werden. In einem *magnetischem Förderband* wurden mehrere Atomwolken gleichzeitig transportiert und es konnte ein Mechanismus demonstriert werden, mit dem sich magnetische Fallen adiabatisch zusammenführen lassen. Da sich bei der Vereinigung keine Nullstelle des magnetischen Feldes ergibt, ist dieser Prozeß auch für die kohärente Manipulation von Atomen einsetzbar.

Die neue Mikrofallentechnik eröffnet eine Vielzahl an Möglichkeiten für zukünftige Experimente. Eine wichtige Rolle wird dabei die weitere Miniaturisierung spielen, die Feldstrukturen mit charakteristischen Abmessungen von etwa 1 $\mu$m verspricht. Die Nutzung mehrschichtiger Leiterbahnsubstrate wird eine noch freiere Gestaltung der Felder ermöglichen und dadurch insbesondere die Erzeugung von magnetischen Fallen begünstigen, die ohne externe Felder auskommen. Darüber hinaus wird der Einsatz von elektrostatischen Feldern oder Dipolkräften die Palette der Manipulationswerkzeuge erweitern.

## 6.1 Experimente mit thermischen Ensembles

Bereits für die Manipulation thermischer Atomwolken zeichnen sich viele interessante Experimente ab. Der demonstrierte Vereinigungsmechanismus läßt sich nutzen, um verschiedene Atomsorten oder Isotope in einer magnetischen Falle zusammenzuführen. Die unterschiedlichen Atome könnten gleichzeitig in getrennten magneto-optischen Fallen geladen und anschließend in einem magnetischen Förderband zueinander transportiert werden. Bei der Durchmischung der Atomwolken ließen sich kontrolliert Kollisionen beobachten. Die Zusammenführung ermöglicht darüber hinaus, eine der beiden Atomsorten sympathetisch zu kühlen.

## 6.2 Experimente mit definierten Quantenzuständen

Da sich die kontrollierbaren Magnetfelder als Werkzeug für die kohärente Manipulation eignen, ergeben sich viele interessante Experimente, wenn es gelingt, definierte Schwingungszustände in den Mikrofallen zu präparieren. Dazu eignen sich sowohl Bose-Einstein-Kondensate als auch einzelne Atome. Die hohen Feldgradienten sollten es ermöglichen, ein Kondensat direkt in einer Mikrofalle zu erzeugen, dabei weist der demonstrierte Mechanismus zum Nachladen magnetischer Fallen einen möglichen Weg zu einem kontinuierlich nachfüllbaren Bose-Einstein-Kondensat. Single-Mode-Wellenleiter für Atome [65] könnten die Aufgabe übernehmen, einen kohärent ausgekoppelten Materiewellenstrahl [66] zu leiten und von einer thermischen Restwolke abzutrennen.

Neue Aspekte eröffnen sich, wenn es gelingt, einzelne Atome in definierten Quantenzuständen zu präparieren. Zukünftige Experimente müssen zeigen, ob dazu ein Bose-Einstein-Kondensat erforderlich ist, das anschließend ausgedünnt wird, oder ob es gelingt, wenige gefangene Atome mit anderen Methoden (beispielsweise mit stochastischem Kühlen) in den Grundzustand zu bringen.

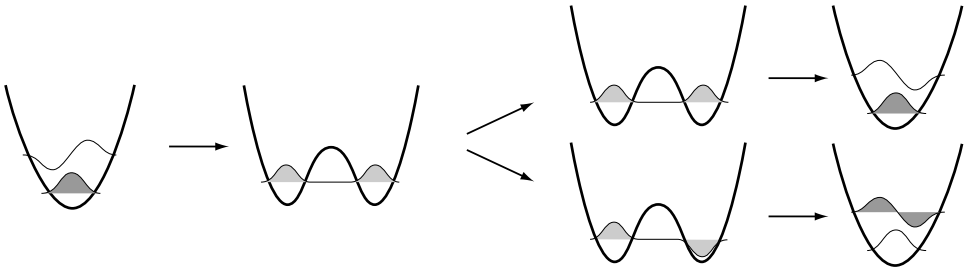


Abb. 6.1: *Vorschlag für ein Interferometer mit magnetisch gefangenen Atomen.*

Das zeitliche Interferometer mit einzelnen Atomen ist Beispiel für ein neuartiges Experiment, das durch die Mikrofallentechnik möglich wird: Wenn eine Ioffe-Pritchard-Falle adiabatisch in zwei Fallen aufgeteilt wird, entwickelt sich der quantenmechanische Grundzustand in einen delokalisierten Zustand, der einen makroskopischen *Schrödinger-Katzen-Zustand* repräsentiert. Bei der Zusammenführung der Potentiale geht er je nach Phasenverschiebung zwischen den beiden Teilwellenfunktionen in den Grundzustand oder den ersten angeregten Zustand der Zielfalle über.

## 6.3 Detektion und Kopplung einzelner Atome

Um Experimente mit einzelnen Atomen realisieren zu können, sind Detektionsmethoden erforderlich, die einzelne Atome nicht-destruktiv nachweisen. Eine Möglichkeit dazu bietet die kohärente Wechselwirkung mit dem Lichtfeld in einem Resonator hoher Güte [29, 30]. Da die unterschiedlichen quantenmechanischen Bewegungszustände verschieden stark an das Lichtfeld koppeln, sollte die gemessene Kopplungsstärke Rückschlüsse auf den besetzten Quantenzustand zulassen.

Mikrofallen erlauben aufgrund der hohen Feldgradienten, die Ausdehnung des Grundzustandes auf unter 100 nm zu reduzieren. Damit läßt sich anstelle der Stehwelle in einem traditionellen Resonator (Abb. 6.2 a) auch das evaneszente Feld von *Whispering-Gallery-Moden* nutzen, die in Mikrosphären aus Quarzglas angeregt werden können (Abb. 6.2 b). Die Ein-Photonen-Rabi-Frequenz $\Omega_{\mathrm{Rabi}}$, welche die Kopplungsstärke vom Lichtfeld an das Atom charakterisiert, kann an der Oberfläche der Mikrosphäre Werte um $\Omega_{\mathrm{Rabi}} = 50\,\mathrm{MHz}$ erreichen (bei einem Radius $R \approx 40\,\mu\mathrm{m}$) und fällt exponentiell mit einer charakteristischen Länge von $\sim$125 nm ab. Mit diesen Parametern läßt sich voraussichtlich das Regime der starken Kopplung erreichen.

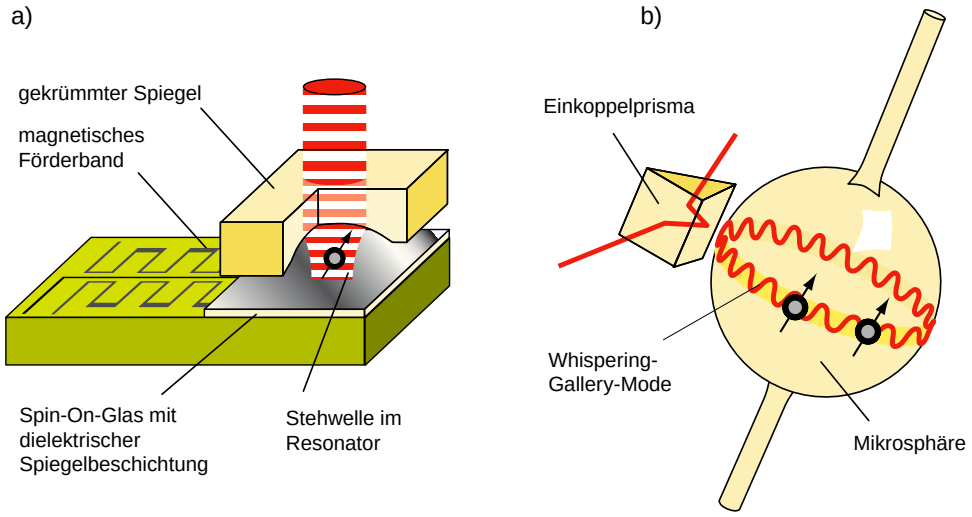



Abb. 6.2: *a) Ein magnetisch gefangenes Atom koppelt in einem klassischen Resonator an das Lichtfeld, b) Zwei Atome werden in der Nähe einer Mikrosphäre durch das evaneszente Feld einer „Whispering-Gallery-Mode“ gekoppelt.*

Die Kopplung an einen Resonator kann nicht nur zum Nachweis einzelner Atome genutzt werden, sondern auch dazu, die Wechselwirkung zwischen zwei (oder mehr) Atomen zu kontrollieren. Mit Rydberg-Atomen in Mikrowellenresonatoren wurde bereits die Verschränkung zweier atomarer Zustände demonstriert [67, 68]. Für magnetisch gespeicherte Grundzustandsatome kommt ein Kopplungsschema mit induzierten Ramanübergängen in Frage, das die Autoren in [69] für die Kopplung von *Quantum-Dots* entwickelt haben.

Schließlich gibt es einen Vorschlag, Atome nicht mit Lichtfeldern, sondern über ihre Kontaktwechselwirkung zu koppeln [70]. Die kontrollierte Kollision von zwei Atomen in einer länglichen Falle führt zu einer Phasenverschiebung der Gesamtwellenfunktion, deren Größe von der Stärke des transversalen Einschlusses abhängt. Für Rubidiumatome lassen sich mit einer geeigneten Kombination aus elektrostatischen und magnetischen Feldern Potentiale erzeugen, die in Abhängigkeit des inneren Zustandes zu einer Kollision führen oder diese vermeiden. Auf diese Weise ließe sich ein *Phasengatter* realisieren, d.h. eine Verschiebung der globalen Phase nur für den Fall, daß sich beide beteiligten Atome in dem gleichen inneren Zustand befinden.

Die Liste der möglichen Anwendungen für die Mikrofallen ist damit sicher nicht erschöpft. Die genannten Beispiele zeigen jedoch bereits, daß auf dem Gebiet noch viele neue Experimente zu erwarten sind.

# A Schreibweisen

Vektoren werden stets mit geraden, d.h. nicht kursiven Buchstaben, bezeichnet. Sie erscheinen entweder im Fettdruck in klassischer Schreibweise (wie z. B. das Magnetfeld $\mathbf{B}$) oder in tensorieller Notation

$$\mathrm{B}_i \text{ für die i-te Komponente des Vektors } \mathbf{B}. \tag{A.1}$$

In klassischer Schreibweise stehen die Vektoren $\mathbf{e}_i$ für die Einheitsvektoren, also ist

$$\mathrm{B}_i = \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_i \,. \tag{A.2}$$

Für den Betrag eines Vektors steht stets das entsprechende kursive Symbol, so zum Beispiel

$$B = \sqrt{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}} \,. \tag{A.3}$$

Für die partielle Ableitung nach dem Ort wird die verkürzte Schreibweise

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{A.4}$$

beziehungsweise in Tensor-Notation

$$B_{|i} = \frac{\partial}{\partial x_i} B \tag{A.5}$$

$$\mathrm{B}_{i|j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \mathrm{B}_i \tag{A.6}$$

gebraucht.

Schließlich wird in der Tensorschreibweise das Levi-Civita-Symbol $\epsilon_{ijk}$ verwendet, um den Rotationsoperator auszudrücken:

$$\epsilon_{ijk}\, \mathrm{B}_{j|k} = (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{e}_k \,. \tag{A.7}$$

Dabei wird die Konvention angewandt, über Terme mit gleichen Indizes zu summieren, also beispielsweise

$$\mathrm{B}_{i|i} = \sum_i \mathrm{B}_{\underline{i}|\underline{i}} \tag{A.8}$$

für die Spur der Matrix $\mathrm{B}_{i|j}$.

Um die Summierung aufzuheben, werden die Indizes unterstrichen.
$\mathrm{B}_{\underline{i}|\underline{i}}$ referenziert also ein einzelnes Element der Matrix und nicht ihre Spur.

# B Berechnung und Darstellung von magnetischen Fallenpotentialen

## B.1 Feldberechnungen

Mit Hilfe des Biot-Savart'schen Gesetzes 3.1 lassen sich die Magnetfelder berechnen, die eine gegebene Stromkonfiguration erzeugt. Dabei wurden im Rahmen dieser Arbeit speziell die Lösungen für gerade Leiter verwendet, die entweder unendlich dünn sind oder „unendlich flach" mit ausgedehnter Breite. Für diese Geometrien läßt sich das Integral im Biot-Savart'schen Gesetz analytisch lösen (siehe Anhang C). Die Felder werden mit Hilfe eines C$^{++}$-Programms berechnet, das über „MathLink" mit „Mathematica 4.0"[1] zusammenarbeitet. Die Leiterbahnkonfigurationen werden in Mathematica programmiert und können mit den zur Verfügung stehenden Graphik-Routinen leicht auf Fehleingaben überprüft werden. Die vollständige Konfiguration wird einmalig an das C$^{++}$-Programm übergeben, nachfolgende Aufrufe zur Berechnung der Feldstärke müssen lediglich die Ortskoordinaten enthalten. Auch komplexere Funktionen wie Minimierungsroutinen und die Berechnung dreidimensionaler Oberflächen läuft aus Zeitgründen in dem schnelleren C-Code. Für die Darstellung der Ergebnisse wird wieder auf Mathematica-Routinen zurückgegriffen.

## B.2 Darstellung von Fallenpotentialen

Die magnetischen Fallenpotentiale, die sich mit Hilfe von Mikrofallen realisieren lassen, besitzen im allgemeinen eine komplexere Struktur als traditionelle Magnetfallen. Aus diesem Grund vermittelt der Potentialverlauf entlang gerader Schnittlinien oder -ebenen ein falsches Bild von den Fallen. Stattdessen bietet es sich an, das Potential in einer Projektion darzustellen, die die physikalischen Eigenschaften der Falle möglichst gut widergibt.

[1] Mathematica 4.0 von Wolfram Research

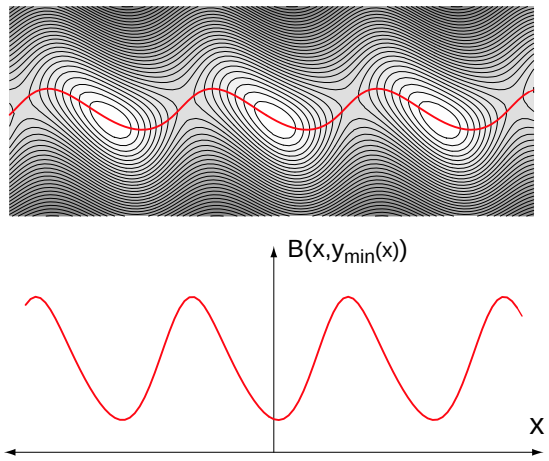



Abb. B.1: *Die Methode der transversalen Minimumssuche führt zu niedrigsten Stellen im „Potentialgebirge“ und sie findet zwischen zwei Potentialmulden den Weg über das Joch, d.h. die niedrigste Verbindung zwischen ihnen. Hier ist die Methode an einem zweidimensionalen Beispiel illustriert: Zu jedem $x$-Wert ist derjenige Wert des Potentials aufgetragen, an dem sich in $y$-Richtung das Feldminimum befindet.*

In einer Magnetfalle ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit einer thermischen Atomwolke an den Orten am größten, an denen das Potential gering ist. Wählt man nun eine Achse für die Darstellung, beispielsweie $\mathbf{e}_x$, so wird das Potential entlang der nicht sichtbaren Richtungen $\mathbf{e}_y$ und $\mathbf{e}_z$ am besten durch seinen niedrigsten Wert repräsentiert. Die Methode des transversalen Minimums stellt daher jeweils den minimalen Wert des Potentials dar, der sich zu einem festen Wert $x$ auf der Parametrisierungsachse finden läßt. Abbildung B.1) illustriert diese Methode an einem zweidimensionalen Beispiel. Zu jedem $x$-Wert verläuft der parametrisierte Pfad durch das Potentialminimum, das sich entlang der $y$-Achse ergibt, daher schneidet der Pfad die Höhenlinien genau an den Punkten, an denen sie parallel zu $\mathbf{e}_y$ verlaufen. Die Vorteile dieser Methode werden deutlich, wenn ein Potential zwei oder mehr lokale Minima besitzt. Die Methode des transversalen Minimums findet denjenigen Pfad, der durch die lokalen Minima führt und auf dem sich außerdem die niedrigste Barriere zwischen diesen Minima befindet.

### Erweiterung auf zwei Dimensionen

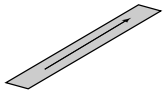
Das Verfahren läßt sich analog für die Darstellung der Feldstärke in zwei Dimensionen verwenden. Man wählt dann eine Parametrisierungsebene und

trägt jeweils das Minimum entlang der letzten verbleibenden Dimension auf. Das Verfahren erweist gute Dienste bei der Darstellung der Ioffe-Pritchard-Falle, die sich an einem einzelnen Drahtkreuz ergibt (s. S. 64).

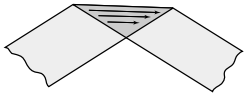
# C Magnetfeld stromdurchflossener Leiter

Für die Magnetfeldberechnungen in dieser Arbeit werden drei verschiedene Formen von Leitern zugrundegelegt, die je nach Position und Entfernung der relevanten Region verwendet werden:

Dünner Draht



Breiter Draht



Dreiecksförmiges Verbindungsstück zwischen breiten Drähten

**Dünner Draht**

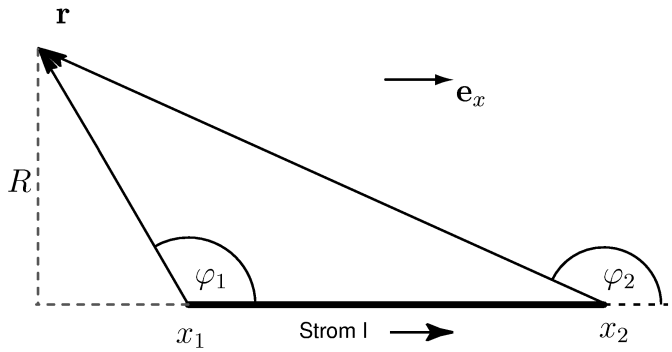



Abb. C.1: *Dünner Draht*

Für einen endlich langen Abschnitt eines unendlich dünnen Drahtes erhält man im Abstand $R$ ein Feld der Stärke

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I}{R}\big(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\big)\ , \tag{C.1}$$

Dünner Draht, kurz

welches in die Richtung $(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times (\mathbf{r} - \mathbf{x}_1)$ zeigt. Die beiden Winkel $\varphi_1$ und $\varphi_2$ (s. Abb. C.1) gehen gegen null für einen unendlich dünnen Draht und führen auf

Dünner Draht, lang

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \; . \tag{C.2}$$

### Breiter Draht

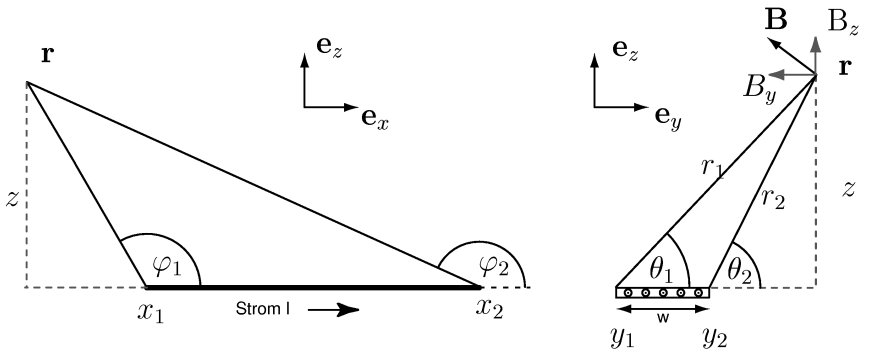



Abb. C.2: *Breiter Draht*

Ein unendlich flacher Draht, der entlang der $\mathbf{e}_x$-Achse verläuft und sich in der $\mathbf{e}_y$-$\mathbf{e}_z$-Ebene von $y_1$ bis $y_2$ ausdehnt, erzeugt ein Feld in den beiden Komponenten $\mathrm{B}_y$ und $\mathrm{B}_z$:

Breiter Draht, unendlich flach, kurz

$$\mathrm{B}_x = 0 \tag{C.3a}$$

$$\mathrm{B}_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{w} \sum_{i,j} (-1)^{i+j+1} \operatorname{sgn}(z) \arcsin \left( \frac{\tilde{x}_i \, \tilde{y}_j}{\sqrt{\left(\tilde{x}_i^2 + z^2\right)\left(\tilde{y}_j^2 + z^2\right)}} \right) \tag{C.3b}$$

$$\mathrm{B}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{w} \sum_{i,j} (-1)^{i+j+1} \operatorname{sgn}(\tilde{x}_i) \ln \frac{\sqrt{\tilde{x}_i^2} + \sqrt{\tilde{x}_i^2 + \tilde{y}_j^2 + z^2}}{\sqrt{\tilde{y}_j^2 + z^2}} \; , \tag{C.3c}$$

wobei die relativen Koordinaten $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ und die Breite $w$ als

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i &= x - x_i \\ \tilde{y}_j &= y - y_j \\ w &= |y_2 - y_1| \end{aligned}$$

definiert sind.

Für den Fall eines unendlich langen, flachen Drahtes der Breite $w$ ergeben sich die Grenzwerte:

Breiter Draht, unendlich flach, unendlich lang

$$\mathrm{B}_x = 0 \tag{C.4a}$$

$$\mathrm{B}_y = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{I}{w}\,(\theta_1 - \theta_2) \tag{C.4b}$$

$$\mathrm{B}_z = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{I}{w}\,\ln\frac{r_1}{r_2}\;. \tag{C.4c}$$

Entlang der $\mathbf{e}_z$-Achse besitzt das Feld nur eine Komponente parallel zur Drahtfläche, die sich gemäß

Feldbetrag über dem Zentrum eines breiten Drahtes

$$B = |\mathrm{B}_y| = \frac{\mu_0}{\pi}\,\frac{I}{w}\;\operatorname{arccot}\frac{2z}{w} \tag{C.5}$$

berechnet.

## Dreiecksfläche

Bei den obigen Rechnungen wurde eine homogene Stromdichte in den Leitern angenommen. An Eckpunkten von Leiterbahnen ist diese Näherung jedoch nicht erfüllt. Für eine exakte Berechnung der Felder müßte zunächst die Gleichung

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} \tag{C.6}$$

mit der Leitfähigkeit $\sigma$ der Leiterbahn unter den gegebenen Randbedingungen gelöst werden. Dies bedeutet, daß auch der Strom in den geraden Leiterstücken in der Nähe einer Ecke nicht als konstant angesehen werden kann. Die Näherung eines dreiecksförmigen Leiterstückes, welches von einem homogenen Strom durchflossen wird, stellt einen Kompromiß dar, der einen gleichförmigen Stromfluß in den langen Leitern zuläßt, ohne daß an den Ecken die Divergenzbedingung $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ aufgegeben werden muß. Die Stromdichte im Dreiecksstück ist dafür um den Faktor $\sqrt{2}$ größer als in den geraden Abschnitten.

Die folgenden Rechnungen beziehen sich auf ein dreiecksförmiges Leiterstück der Höhe $h$, dessen Spitze im Ursprung liegt, und das entlang $\mathbf{e}_x$ von einem Gesamtstrom $I$ durchflossen wird (s. Abb. C.3). Der Strom $I$ bezieht sich auf die Stelle des größten Querschnitts, d.h. bei $x = 0$. Das Feld besitzt

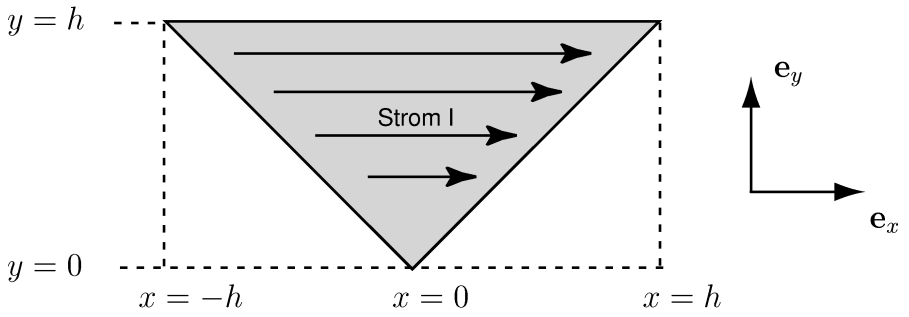



Abb. C.3: *Dreiecksförmiges Verbindungsstück*

wiederum die beiden Komponenten $\mathrm{B}_y$ und $\mathrm{B}_z$:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} \;=\; & -\tilde{\mathbf{B}}(x,y,z) - \tilde{\mathbf{B}}(-x,y,z) \\ & + \tilde{\mathbf{B}}(x-h,y-h,z) + \tilde{\mathbf{B}}(-(x+h),y-h,z) \\ & + \mathbf{e}_z \cdot \ln \frac{\sqrt{(x-h)^2+(y-h)^2+z^2}-(x-h)}{\sqrt{(x+h)^2+(y-h)^2+z^2}-(x+h)}\end{aligned} \tag{C.7}$$

mit

$$\tilde{\mathrm{B}}_x = 0 \tag{C.8a}$$

$$\tilde{\mathrm{B}}_y = \arctan \frac{z^2+y(y-x)}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{C.8b}$$

$$\tilde{\mathrm{B}}_z = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left( \sqrt{x^2+y^2+z^2} - \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) \tag{C.8c}$$

# D Daten für Rubidiumatome

In der folgenden Tabelle sind einige relevante Daten der beiden Rubidium-Isotope $^{85}$Rb und $^{87}$Rb zusammengestellt.

| | | $^{85}$**Rb** | $^{87}$**Rb** |
|---|---|---|---|
| Natürliche Isotopenhäufigkeit | | 27,83% | 72,17% |
| Kernspin | $I$ | 5/2 | 3/2 |
| Masse | $m$ | $1{,}410 \cdot 10^{-25}$ kg | $1{,}443 \cdot 10^{-25}$ kg |
| Vakuum-Wellenlänge $D_1$-Übergang | $\lambda_{D1}$ | 794,979 nm | |
| Vakuum-Wellenlänge $D_2$-Übergang | $\lambda_{D2}$ | 780,241 nm | |
| Linienbreite $D_1$-Übergang | $\Gamma_{D1}$ | $2\pi \times 5,58$ MHz | |
| Linienbreite $D_2$-Übergang | $\Gamma_{D2}$ | $2\pi \times 6,01$ MHz | |

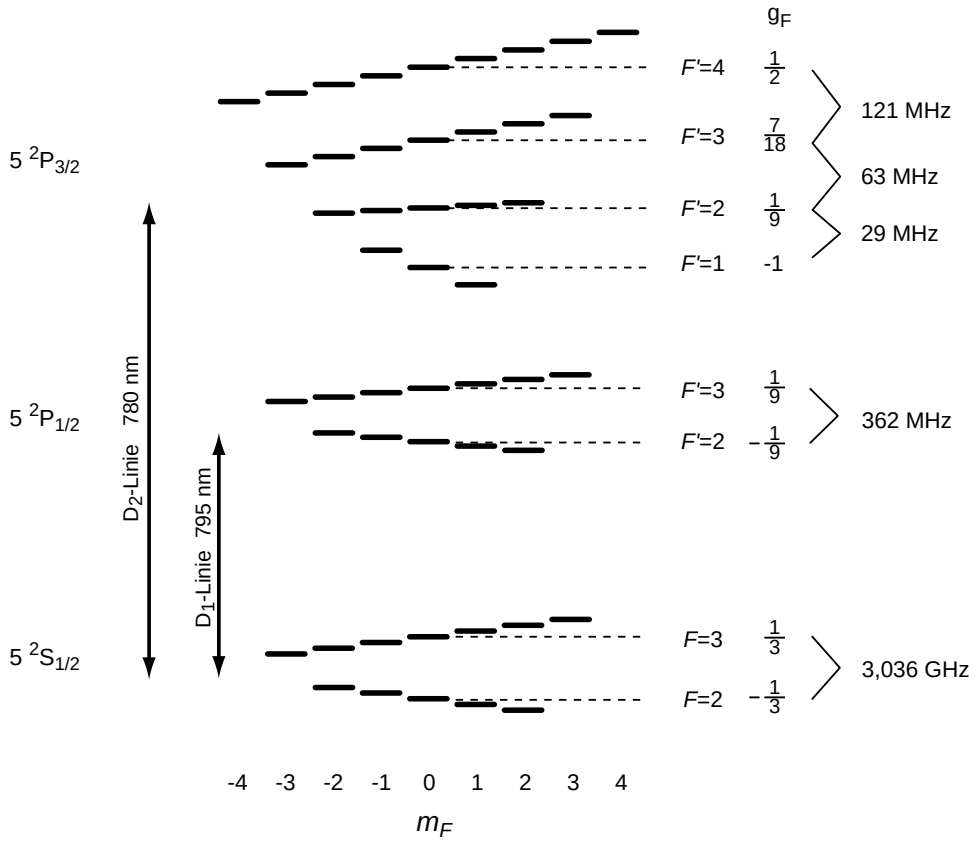



Abb. D.1: *Termschema für $^{85}Rb$ (Kernspin $I = 5/2$).*
*Die Aufspaltung der Unterzustände im Magnetfeld ist schematisch eingezeichnet.*

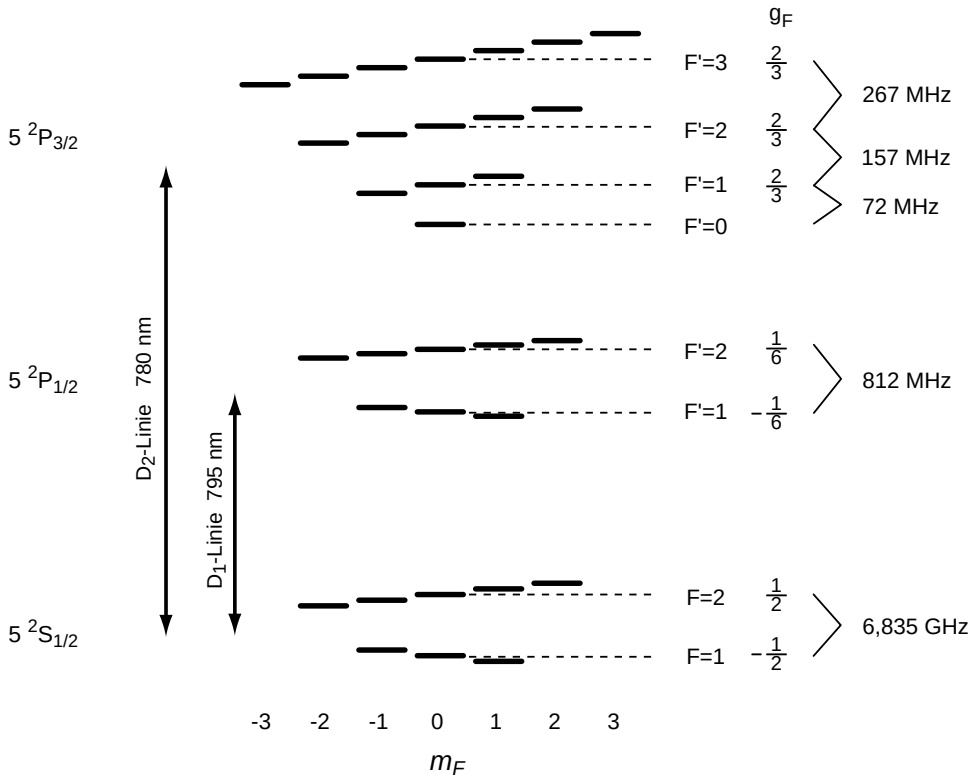



Abb. D.2: *Termschema für $^{87}Rb$ (Kernspin $I = 3/2$).*
*Die Aufspaltung der Unterzustände im Magnetfeld ist schematisch eingezeichnet.*

# Literaturverzeichnis

[1] W. Gerlach and O. Stern, *Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung*, Zeitschrift für Physik 1922a **9**, 349 (1922).

[2] G. E. Uhlenbeck and S. Goudsmit, *Ersetzung der Hypothese von unmechanischem Zwang durch eine Forderung bezüglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Elektrons*, Naturwiss. **13**, 953 (1925).

[3] T. W. Hänsch and A. L. Schawlow, *Cooling of Gases by Laser Radiation*, Opt. Comm. **13**, 68 (1975).

[4] D. Wineland and H. Dehmelt, Bull. Am. Phys. Soc. **20**, 637 (1975).

[5] C. Cohen-Tannoudji and W. D. Phillips, *New Mechanisms for Laser Cooling*, Physics Today **Oktober 1990**, 33 (1990).

[6] S. Chu, J. E. Bjorkhom, A. Ashkin, and A. Cable, *Experimental Observation of Optically Trapped Atoms*, Phys. Rev. Lett. **57**, 314 (1986).

[7] L. Hau, M. Burns, and J. Golovchenko, *Bound States of Guided Matter Waves: An Atom and a Charged Wire*, Phys. Rev. A **45**, 6468 (1992).

[8] P. Lemonde, O. Morice, E. Peik, J. Reichel, H. Perrin, W. Hänsel, and C. Salomon, *An Opto-Electric Trap for Cold Atoms*, Europhys. Lett. **37**, 555 (1995).

[9] J. Schmiedmayer, *Guiding and Trapping a Neutral Atom on a Wire*, Phys. Rev. A **52**, R13 (1995).

[10] H. A. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapour*, Science **269**, 198 (1995).

[11] H. F. Hess, *Evaporative Cooling of Magnetically Trapped and Compressed Spin-Polarized Hydrogen*, Phys. Rev. B **34**, 3476 (1986).

[12] M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend, and W. Ketterle, *Collective Excitations of a Bose-Einstein Condensate in a Magnetic Trap*, Phys. Rev. Lett. **77**, 988 (1996).

[13] V. Vuletic, T. Fischer, M. Präger, T. W. Hänsch, and C. Zimmermann, *Microscopic Magnetic Quadrupole Trap for Neutral Atoms with Extreme Adiabatic Compression*, Phys. Rev. Lett. **80**, 1634 (1998).

[14] J. Fortagh, A. Grossmann, C. Zimmermann, and T. W. Hänsch, *Miniaturized Wire Trap for Neutral Atoms*, Phys. Rev. Lett. **81**, 5310 (1998).

[15] J. Denschlag, D. Cassettari, and J. Schmiedmayer, *Guiding Neutral Atoms with a Wire*, Phys. Rev. Lett. **82**, 2014 (1999).

[16] J. D. Weinstein and K. G. Libbrecht, *Microscopic Magnetic Traps for Neutral Atoms*, Phys. Rev. A **52**, 4004 (1995).

[17] M. Drndič, K. S. Johnson, J. H. Thywissen, M. Prentiss, and R. M. Westervelt, *Micro-Electromagnets for Atom Manipulation*, Appl. Phys. Lett. **72**, 2906 (1998).

[18] K. S. Johnson, M. Drndič, J. H. Thywissen, G. Zabow, R. M. Westervelt, and M. Prentiss, *Atomic Deflection Using an Adaptive Microelectromagnet Mirror*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1137 (1998).

[19] D. C. Lau, A. I. Sidorov, G. I. Opat, R. J. McLean, W. J. Rowlands, and P. Hannaford, *Reflection of cold atoms from an array of current-carrying wires*, Eur. Phys. J. D **5**, 193 (1999).

[20] I. G. Hughes, P. A. Barton, T. M. Roach, and E. A. Hinds, *Atom Optics with Magnetic Surfaces: II. Microscopic Analysis of the 'Floppy Disk' Mirror*, J. Phys. B **30**, 2119 (1997).

[21] B. E. King, C. S. Wood, and D. Wineland, *Cooling the Collective Motion of Trapped Ions to Initialize a Quantum Register*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1525 (1998).

[22] C. Roos, T. Zeiger, H. Rohde, H. C. Nägerl, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler, and R. Blatt, *Quantum State Engineering on an Optical Transition and Decoherence in a Paul Trap*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4713 (1999).

[23] E. Peik, J. Abel, T. Becker, J. von Zanthier, and H. Walther, *Sideband Cooling of Ions in Radio-Frequency Traps*, Phys. Rev. A **60**, 439 (1999).

[24] S. E. Hamann, D. L. Haycock, G. Klose, P. H. Pax, and P. S. Jessen, *Resolved-Sideband Raman Cooling to the Ground State of an Optical Lattice*, Phys. Rev. Lett. **80**, 4149 (1998).

[25] V. Vuletic, C. Chin, A. J. Kerman, and S. Chu, *Degenerate Raman Sideband Cooling of Trapped Cesium Atoms at Very High Atomic Densities*, Phys. Rev. Lett. **81**, 5768 (1998).

[26] M. Morinaga, I. Bouchoule, J.-C. Karam, and C. Salomon, *Manipulation of Motional Quantum States of Neutral Atoms*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4037 (1999).

[27] D. Meschede and H. Walther, *One-Atom Maser*, Phys. Rev. Lett. **54**, 551 (1985).

[28] M. Brune, F. Schmidt-Kahler, A. Maali, J. Dreher, E. Hagley, J.-M. Raimond, and S. Haroche, *Quantum Rabi Oscillation: A Direct Test of Field Quantization in a Cavity*, Phys. Rev. Lett. **76**, 1800 (1996).

[29] J. Ye, D. W. Vernoy, and H. J. Kimble, *Trapping of Single Atoms in Cavity QED*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4987 (1999).

[30] P. W. H. Pinkse, T. Fischer, P. Maunz, and G. Rempe, *Trapping an Atom with Single Photons*, Nature **404**, 365 (2000).

[31] M. Key, I. G. Hughes, W. Rooijakkers, B. E. Sauer, and E. A. Hinds, *Propagation of Cold Atoms along a Miniature Magnetic Guide*, Phys. Rev. Lett. **84**, 1371 (2000).

[32] J. Reichel, W. Hänsel, and T. W. Hänsch, *Atomic Micromanipulation with Magnetic Surface Traps*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3398 (1999).

[33] N. H. Dekker, C. S. Lee, V. Lorent, J. H. Thywissen, S. P. Smith, M. Drndič, R. M. Westervelt, and M. Prentiss, *Guiding Neutral Atoms on a Chip*, Phys. Rev. Lett. **84**, 1124 (2000).

[34] V. V. Vladimirskiĭ, *Magnetic Mirrors, Channels and Bottles for Cold Neutrons*, Soviet Physics JETP **12**, 740 (1961), [Журнал Э́кспериментальной и Теоретической Физики **39**, 1062 (1960)].

[35] K. J. Kügler, W. Paul, and U. Trinks, Phys. Lett. B **72**, 422 (1978).

[36] B. DeMarco and D. S. Jin, *Onset of Fermi Degeneracy in a Trapped Atomic Gas*, Science **285**, 170 (1999).

[37] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison Wesley Publishing Company, Hearing, Ma., 1993).

[38] H. Haken and H. C. Wolf, *Atom- und Quantenphysik* (Springer-Verlag, Berlin, 1996-1997).

[39] W. H. Wing, Natl. Bur. Stand. (U.S.) Spec. Publ. **653**, 74 (1983).

[40] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2 ed. (John Wiley & Sons, New York, 1975).

[41] H. Friedburg and W. Paul, *Optische Abbildung mit neutralen Atomen*, Naturwiss. **38**, 159 (1951).

[42] Y. V. Gott, M. S. Ioffe, and Tel´kovskii, Nucl.F̃usion **Pt.3**, 1045 (1962 Suppl.).

[43] D. E. Pritchard, *Cooling Neutral Atoms in a Magnetic Trap for Precision Spectroscopy*, Phys. Rev. Lett. **51**, 1336 (1983).

[44] C. Cohen-Tannoudji, *Cours de Physique Atomique et Moléculaire* (Vorlesung am Collège de France, Paris, 1996-1997).

[45] W. Ketterle, Appl. Phys. B **54**, 403 (1992).

[46] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Méchanique Quantique* (Hermann, Paris, 1977).

[47] E. Majorana, *Atomi Orientati in Campo Magnetico Variabile*, Nuovo Cimento **9**, 43 (1933).

[48] C. V. Sukumar and D. M. Brink, *Spin-Flip Transitions in a Magnetic Trap*, Phys. Rev. A **56**, 2451 (1997).

[49] S. Gov, S. Shtrikman, and H. Thomas, *Magnetic Trapping of Neutral Particles: Classical and Quantum-Mechanical Study of a Ioffe-Pritchard Type Trap*, J. Appl. Phys. D **87**, 3989 (2000).

[50] I. G. Hughes, P. A. Barton, T. M. Roach, M. G. Boshier, and E. A. Hinds, *Atom Optics with Magnetic Surfaces: I. Storage of Cold Atoms in a Curved 'Floppy Disk'*, J. Phys. B **30**, 647 (1997).

[51] R. H. Dicke, Phys. Rev. **89**, 472 (1953).

[52] Kerson Huang, *Statistical Mechanics* (John Wiley & Sons, New York, 1987).

[53] P. W. Pinkse, A. Mosk, M. Weidemüller, M. W. Reynolds, T. W. Hijmans, and J. T. M. Walraven, *Adiabatically Changing the Phase-Space Density of a Trapped Bose Gas*, Phys. Rev. Lett. **78**, 990 (1997).

[54] K. B. Davis, M.-O. Mewes, and W. Ketterle, *An Analytical Model for Evaporative Cooling of Atoms*, Appl. Phys. B **60**, 155 (1995).

[55] A. Marte U. Ernst, F. Schreck, J. Schuster, and G. Rempe, *Bose-Einstein-Condensation in a Pure Ioffe-Pritchard Field Configuration*, Europhys. Lett. **41**, 1 (1998).

[56] C. Henkel, S. Potting, and M. Wilkens, *Loss and Heating of Particles in Small and Noisy Traps*, Appl. Phys. B **69**, 379 (1999).

[57] M. Greiner, *Magnetischer Transfer von Atomen, ein Weg zur einfachen Bose-Einstein-Kondensation*, Diplomarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München, 2000.

[58] Yu. B. Ovchinikov, I. Manek, and R. Grimm, *Surface Trap for Cs atoms based on Evanescent-Wave Cooling*, Phys. Rev. Lett. **79**, 2225 (1997).

[59] H. Gauck, M. Hartl, D. Schneble, H. Schnitzler, T. Pfau, and J. Mlynek, *Quasi-2D Gas of Laser Cooled Atoms in a Planar Matter Waveguide*, Phys. Rev. Lett. **81**, 5298 (1998).

[60] D. Schneble, H. Gauck, M. Hartl, T. Pfau, and J. Mlynek, in *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi",* Course CXL, edited by M. Inguscio, S. Stringari, and C. E. Wieman (IOS Press, Amsterdam, 1999), pp. 469–490.

[61] K. I. Lee, J. A. Kim, H. R. Noh, and W. Jhe, *Single-beam Atom Trap in a Pyramidal and Conical Hollow Mirror*, Opt. Lett. **21**, 1177 (1996).

[62] J. Fortagh, A. Grossmann, T. W. Hänsch, and C. Zimmermann, *Fast Loading of a Magneto-optical Trap from a Pulsed Thermal Source*, J. Appl. Phys. **84**, 6499 (1998).

[63] C. Cohen-Tannoudji, Jacques Dupont-Roc, and Gilbert Grynberg, *Atom-Photon-Interactions* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998).

[64] W. Ketterle, *Evaporative Cooling of Trapped Atoms*, Advances of Atomic, Molecular, and Optical Physics, ed. B. Benderson and H. Walter (1996).

[65] J. H. Thywissen, M. Olshanii, G. Zabow, M. Drndič, K. S. Johnson, R. M. Westervelt, and M. Prentiss, *Microfabricated Magnetic Waveguides for Neutral Atoms*, Eur. Phys. J. D **7**, 361 (1999).

[66] I. Bloch, T. W. Hänsch, and T. Esslinger, *Atom Laser with a cw Output Coupler*, Phys. Rev. Lett. **82**, 3008 (1999).

[67] A. Rauschenbeutel, G. Nogues, S. Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, J.-M. Raimond, and S. Haroche, *Coherent Operation of a Tunable Quantum Phase Gate in Cavity QED*, Phys. Rev. Lett. **83**, 5166 (1999).

[68] M. Škarja, N. M. Borštnik, M. Löffler, and H. Walther, *Quantum Interference and Atom-Atom Entanglement in a Two-Mode, Two-Cavity Micromaser*, Phys. Rev. A **60**, 3229 (1999).

[69] A. Imamoğlu, D. D. Awschalom, G. Burkard, D. P. DiVincenzo, D. Loss, M. Sherwin, and A. Small, *Quantum Information Processing Using Quantum Dot Spins and Cavity QED*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4204 (1999).

[70] T. Calarco, E. A. Hinds, D. Jaksch, J. Schmiedmayer, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Quantum Gates with Neutral Atoms: Controlling Collisional Interactions in Time-Dependent Traps*, Phys. Rev. A **61**, 022304 (1999).

# Danksagung

An dieser Stelle bedanke ich mich bei allen, die diese Doktorarbeit ermöglicht haben und die auf die eine oder andere Weise einen Teil dazu beitragen haben, daß die Arbeit in ihrer jetzigen Form entstehen konnte.

Mein besonderer Dank gilt Prof. T. W. Hänsch, der das Mikrofallenprojekt mit viel Engagement und Begeisterung geleitet hat. Er hat es verstanden, das Experiment immer wieder durch neue Anregungen voranzubringen und gleichzeitig ein hohes Maß an Freiheit für eigene Konzepte und Ideen zu gewähren.

In den vergangenen zweieinhalb Jahren hatte ich die Freude, in Jakob Reichel einen experimentell sehr erfahrenen und stets diskussionsfreudigen Betreuer zu finden. Die Arbeit mit ihm hat mir großen Spaß gemacht, und sein Engagement hat viel dazu beigetragen, daß sich das Experiment in der kurzen Zeit so weit entwickeln konnte.

Besonders erwähnen möchte ich weiter

- Peter Hommelhoff, der vor einem halben Jahr in unsere Gruppe kam und mit seiner großen Begeisterungsfähigkeit schnell zu einer weiteren treibenden Kraft für das Experiment wurde,
- alle Mitglieder der Arbeitsgruppe, die eine angenehme und inspirierende Arbeitsatmosphäre geschaffen haben. Besonders mit Josef Fortagh und Markus Greiner konnte ich viele angeregte Diskussionen über Magnetfeldkonfigurationen führen, Tilman Esslinger und Immanuel Bloch danke ich für hilfreichen Rat beim Einstieg in das Gebiet der Magnetfallen. Chiara Chiffi ist als Diplomandin neu zu uns gestoßen und bereichert während der Vorbereitungen zu einem neuen Experiment unser Labor mit ihrem italienischen Lebensstil. Sabine Stock mit ihrer lebhaften und einsatzfreudigen Art, außerdem Thilo Ittner und Tilo Steinmetz, haben während ihrer Zeit als WerkstudentInnen an dem Experiment tatkräftig mitgearbeitet.
- die Mitglieder der Arbeitsgruppe von Harald Weinfurter, die im vergangenen Jahr neues Leben in unsere Flure gebracht haben, insbesondere Christian Kurtsiefer, der sich unsereres Computernetzwerkes angenommen hat und der auch bei anderen Problemen immer hilfsbereit zur Verfügung stand.

Einen großen Anteil am Gelingen des Experiments haben die Techniker, die uns beim Aufbau des Experimentes zur Seite standen. Toni Scheich wußte uns bei Fragen zur Elektronik immer zu helfen, und er hat etliche Laserstabilisierungen und Stromnetzteile für uns konstruiert. Die Werkstatt des Max-Planck-Instituts

hat u. a. die aufwendige Kupferhalterung für die Leiterbahnsubstrate gefertigt, bei vielen kleinen Teilen hat die Werkstatt der LMU uns geholfen.

Der Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik an der Technischen Universität München unter Leitung von Prof. Russer hat für uns die ersten Dünnschicht-Hybrid-Substrate gefertigt. Besonders bedanke ich mich bei Martin Kaleja, der die Herstellung übernommen und mich mit den Geräten zum Aufschleudern der Photolacke vertraut gemacht hat.

Ich danke allen, die Teile dieser Arbeit korrekturgelesen haben, ganz besonders meinem Bruder Helmut Hänsel, der auch vor längeren Formeln nicht zurückschreckte und mir viele wichtige Anregungen gegeben hat, ebenso Jakob Reichel und Peter Hommelhoff, außerdem meinem Vater Karl-Günther Hänsel und nicht zuletzt Elif Kirmizioglu.

Besonders intensive und motivierende Diskussionen zur Physik sowie viele Unternehmungen neben dem Studium verdanke ich meinem Freund Hauke Hansen und meinem Bruder Helmut.

Viele Bekannte und Freunde außerhalb der Arbeit haben dazu beigetragen, daß die Zeit der Doktorarbeit für mich eine sehr schöne und ausgefüllte Zeit war. Ihnen allen danke ich für schöne Stunden auf Schlittschuhen, auf Rollschuhen, bei vielen Orchesterproben und Konzerten, ... Die Leidenschaft für die Musik, die mich mit meinem Betreuer Jakob Reichel auch außerhalb der Arbeit verbindet, fand seine Entfaltung im Abaco-Orchester, das uns auf angenehme Weise davor bewahrt hat, am Mittwoch abend zu lange im Labor zu bleiben.

Schließlich danke ich meinen Eltern, die mich im Studium und während der Doktorarbeit unterstützt und ermutigt haben, meinem Vater, der in mir das Interesse für die Physik geweckt hat, und besonders meiner Mutter, die in unserer Familie für den Gegenpol zum analysierenden Denken sorgte.

# Lebenslauf

## Persönliche Angaben

| | |
|---|---|
| Name: | Wolfgang Hänsel |
| Geburtsdatum | 17.9.1969 |
| Geburtsort: | Konstanz |
| Vater: | Karl-Günther Hänsel |
| Mutter: | Inge Hänsel |

## Ausbildung

| | |
|---|---|
| 1976 – 1980 | Grundschule in Konstanz |
| 1980 – 1989 | Heinrich-Suso-Gymnasium in Konstanz,<br>**Abitur** |
| 1990 – 1992 | Grundstudium der Physik an der Universität Konstanz,<br>**Vordiplom** |
| 1992 – 1993 | Hauptstudium an der Universität Konstanz |
| 1993 – 1994 | Auslandsstudium an der Université Pierre-et-Marie-Curie (PARIS VI),<br>Praktikum am Laboratoire Kastler-Brossel (ENS) |
| 1994 – 1995 | Hauptstudium und Diplomprüfung an der Universität Konstanz |
| 1995 – 1996 | Externe **Diplomarbeit** an der Ecole Normale Supérieure de Paris (ENS)<br>am Laboratoire Kastler-Brossel, Leitung:<br>Prof. Mlynek (Konstanz) und Dr. Christophe Salomon (Paris) |
| 1996 – 1997 | Promotionsstudium an der Ludwig-Maximilians-Universität München<br>in der Arbeitsgruppe von Prof. Hänsch,<br>Mitarbeit an einem Projekt zur Atomstrahl-Lithographie mit Rubidium |
| seit Jan. 1998 | Mitarbeit am Projekt der magnetischen Mikrofallen,<br>Arbeitsgruppe von Prof. Hänsch |

## Unterstützung:

Daimler-Chrysler-Studienförderung
(früher Studienförderung der Mercedes-Benz-AG)