Elemente einer q-Analysis für physikalisch relevante Quantenräume

Doktorarbeit
am Institut für theoretische Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Hartmut Wachter
aus Weißenburg i. Bay.

München, am 4. Februar 2004

1. Gutachter: Dr. Julius Wess
2. Gutachter: Dr. Martin Schottenloher

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Juli 2004

Zusammenfassung

In dieser Arbeit betrachten wir spezielle Quantenräume, die für die Physik eine besondere Bedeutung haben könnten. Zu diesen zählen der q-deformierte Euklidische Raum mit drei bzw. vier Dimensionen sowie der q-deformierte Minkowski Raum. Für jeden dieser Räume konstruieren wir die zur Formulierung physikalischer Theorien wichtigen Elemente einer q-Analysis, die als eine mehrdimensionale Verallgemeinerung des bekannten q-Kalküls für q-Funktionen angesehen werden kann. Diese Elemente ermöglichen in ihrer Gesamtheit ein modulares Konzept, das die Basis zur Reformulierung bekannter physikalischer Theorien bilden kann und gleichzeitig deren numerische Auswertung erlaubt. Zu diesem Zweck werden die nichtkommutativen Quantenräume durch Vereinbarung einer Normalordnung mit kommutativen Räumen identifiziert. Für diese kommutativen Räumen berechnen wir das Sternprodukt zweier kommutativer Funktionen, die Operatordarstellungen für die partiellen Anleitungen des kovarianten Differentialkalküls und ebenso jene für die Generatoren der zugehörigen Quantenalgebren. Des Weiteren führen wir einen Integralbegriff ein, der als Umkehrung der Differentiation aufgefasst werden kann und daher die Formulierung translations- und rotationsinvarianter Integrale gestattet. Um Koordinatenfunktionen, die zu verschiedenen Quantenräume gehören, miteinander multiplizieren bzw. Tensorprodukte von Quantenräumen bilden zu können, berechnen wir außerdem explizite Ausdrücke für das Zopfprodukt. Schließlich betrachten wir die untersuchten Quantenräume in Anlehnung an S. Majid als verzopfte Hopf-Algebren und bestimmen explizite Ausdrücke für das Coprodukt und die Antipode allgemeiner Koordinatenfunktionen. Auf diese Weise gelangen wir zu einem mit der Quantengruppensymmetrie verträglichen Translationsbegriff, der außerdem zu mehrdimensionalen Versionen der q-Taylor-Regeln führt. Als Letztes berechnen wir Verallgemeinerungen von q-Exponentialen, die in einem erweiterten Sinne Eigenfunktionen der Ableitungsoperatoren darstellen und somit als q-deformierte Versionen ebener Wellen aufgefasst werden können.

Danksagung

Ich möchte mich bei all jenen bedanken, die mich bei meiner Promotion in irgendeiner Weise unterstützten. Allen voran möchte ich Herrn Professor Wess dafür danken, dass er mich bereitwillig an seinem Lehrstuhl aufgenommen und mir so die Möglichkeit gegeben hat, in seiner Arbeitsgruppe an diesen hochinteressanten Fragestellungen mitarbeiten zu dürfen. Dies habe ich zu keinem Zeitpunkt als eine Selbstverständlichkeit betrachtet, sondern vielmehr als ein ganz besonderes Geschenk. Sehr geschätzt habe ich immer die menschliche und verständnisvolle wie auch umkomplizierte und sympathische Art von Herrn Professor Wess. Seine Bereitschaft, jungen ambitionierten Menschen ein intellektuelles Umfeld zu schaffen, in dem sie sich mit ihren Ideen verwirklichen können, ist vorbildlich und verdient höchstes Lob.

Diese wissenschaftliche Arbeit hat mich physisch und psychisch aber auch einer starken Belastung ausgesetzt, die ich nur meistern konnte, weil meine Eltern permanent zu mir gestanden sind. Sie waren es, die mir immer wieder sehr viel Trost zugesprochen haben, in schwierigen Zeiten niemals an meinen Fähigkeiten zweifelten und mich stets ermunterten weiterzumachen. Ihrer finanziellen Unterstützung verdanke ich auch, dass ich stets ein Gefühl von Sicherheit und Unabhängigkeit verspürte, was meine Gedanken und meine Motivation sehr beflügelten. Indem sie bestrebt waren, Unannehmlichkeiten von mir fernzuhalten, haben sie mir geholfen, alle Kraft und Energie auf meine wissenschaftliche Arbeit zu konzentrieren. Für dies alles schulde ich ihnen besonders großen Dank.

Aber auch vielen Kollegen gegenüber bin ich zum Dank verpflichtet. So etwa Christian Blohmann, der auf meine fachlichen Fragen immer sehr bereitwillig einging. Ich habe mich gerne von seiner Begeisterung anstecken lassen und dabei von seinem Fachwissen in unterschiedlichster Weise profitiert. Ohne die vielfältige Unterstützung und Hilfe von Fabian Bachmeier und Michael Wohlgenannt hätte ich mich in vielen Situationen gewiss sehr viel schwerer getan. Meinen Dank aussprechen möchte ich auch Claudia Bauer, die mir großes Vertrauen entgegenbrachte, als sie sich bereit erklärte, im Rahmen ihrer Diplomarbeit meine Konzeptionen und Ideen auszuarbeiten. Mit Alexander Schmidt und Dzo Mirkulovic habe ich außerdem zwei Menschen gefunden, die mit mir auf eine sehr loyale Weise zusammenarbeiten, was mich wiederum in besonderem Maße inspiriert und motiviert. Auch ihnen gegenüber bin ich sehr dankbar.

Allen übrigen Angehörigen des Lehrstuhls Wess danke ich für ihre ständige Diskussionsbereitschaft und den freundlichen Umgang, der die Grundlage für das gute Arbeitsklima bildet.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Quantengruppen stellen eine der letzten großen und wichtigen Entwicklungen der Mathematik dar. Betrachtet man die Geschichte der Physik, so erkennt man stets ein starkes Wechselspiel mit der Mathematik. Beispiele dafür finden sich viele. So entstand die Newtonsche Mechanik zeitgleich mit der Differential- und Integralrechnung, die Erkenntnisse der Elektrodynamik begünstigten die Entwicklung der Potentialtheorie, erst mit Hilfe der Riemannschen Geometrie gelang Einstein eine angemessene Formulierung seiner Allgemeinen Relativitätstheorie. Von der Quantentheorie wissen wir schließlich, dass sie eng mit der Funktionalanalysis verbunden ist. Man kann sagen, dass viele bedeutende physikalische Theorien oft mit entscheidenden Neuerungen in der Mathematik einhergingen, wobei nicht immer eindeutig erkennbar ist, ob die Mathematik zu einer neuen Physik oder die Physik zu einer neuen Mathematik geführt hat.

Können nun Quantengruppen eine besondere Bedeutung für die moderne Physik haben, indem sie Ansätze zur Lösung drängender physikalischer Probleme in Aussicht stellen? Es ist viel darüber spekuliert worden, dass Quantengruppen eine korrektere Beschreibung der in der Natur verwirklichten Symmetrien liefern, da sie eine Geometrie induzieren, die zu diskreten Raum-Zeit-Strukturen führt [1], [2], [3], [4]. Und gerade diese Frage nach der richtigen Geometrie des Raumes ist für die Physik von enormer Bedeutung, seitdem wir durch die Erkenntnisse von Gauß, Riemann und Einstein wissen, daß es darauf a priori keine Antwort gibt. So stellte bereits Riemann die These auf, dass es notwendig sein könnte, die bekannten geometrischen Konzepte zu modifizieren, sobald man diese auf unmessbar große oder unmessbar kleine Abstände anzuwenden versucht. Einstein hat mit seiner Gravitationstheorie Riemanns These für die erste Alternative bereits eindrucksvoll bestätigt. Dass es aber auch bei extrem kleinen Abständen zu einer Revision geometrischer Vorstellungen kommt, dafür sprechen eine Vielzahl von Indizien. Als P. A. M. Dirac nämlich 1927 bei der Formulierung der Quantenelektrodynamik erstmals auf divergente Ausdrücke stieß, deutete Bohr in einem Brief an ihn die Existenz einer kleinsten Länge an, indem er schrieb[1] : "*I ... believe firmly the solution of the present troubles (with divergences) will not be reached without a revision of our general physical ideas still deeper than that contemplated in the present quantum mechanics*". Es scheint, als hätte der große alte Mentor der Quantenmechanik mit diesen Gedanken die Entwicklung der modernen Physik geradezu mit einem Bann belegt. Jedenfalls blieb es den Begründern der Quantentheorie trotz aller Bemühungen versagt, eine mit der fundamentalen Länge einhergehende Diskretisierung des Raumes konsistent zu formulieren. Heisenberg beispielsweise griff diese Idee in mehreren Veröffentlichungen [6], [7] immer wieder auf. Selbst in seinem letzten Artikel vor seinem Tode [8] versuchte er noch einmal deutlich zu machen, dass eine Zerlegung des Raumes in immer kleinere Einheiten irgendwann seine Bedeutung verlieren muss. Doch allen philosophischen Bedenken zum Trotz sollte die Entwicklung der Physik in eine andere Richtung gehen.

Mit dem Ende des zweiten Weltkrieges begann nämlich der unaufhaltsame Aufstieg Amerikas zur westlichen Führungsmacht. Der Schwerpunkt der physikalischen Forschung insbesondere im Bereich der theoretischen Physik verlagerte sich zusehends von Europa in die USA. Dies sollte auf die Denkweisen in der Physik einen nachhaltigen Einfluss haben, indem eine neue Generation von Physikern heranwuchs, welche die Quantentheorie als gegeben betrachteten und ihre Grundlagen nicht mehr direkt in Frage stellten. Für sie war die Lösung des Problems mit den Divergenzen vielmehr innerhalb der Theorie selbst zu suchen. Und tatsächlich sollte der Erfolg der von Feynman und Schwinger initiierten Renormierungstheorie allen ernsthaften Bemühungen zu einer Revision der Quantentheorie vorläufig ein Ende setzen. Die pragmatische Denkweise der Jungen hatte sich somit gegen die philosophische, teils mystische Herangehensweise der Alten durchgesetzt. Doch ironischerweise blieb der Ursprung dieses neuen Renormierungskonzeptes weiterhin ein Mysterium. Feynman selbst war Zeit seines Lebens nie vollständig von der Richtigkeit seiner Überlegungen überzeugt und begegnete seinen Zweifeln

[1]Für einen detaillierten Überblick über die historische Entwicklung der Quantentheorie verweisen wir insbesondere auf [5].

stets mit der ihm eigenen humorvollen Art. Der wesentliche Grund für den raschen Siegeszug des Renormierungskonzeptes lag nach Schwingers Aussagen letztlich darin begründet, dass es den Physikern eine Methode an die Hand gab, die Quantenmechanik in ihrer vertrauten Form beizubehalten. Eine Entwicklung alternativer Ansätze, wie etwa der von Snyder vorgeschlagenen 'Quantisierten Raumzeit' [9], erschien damals als zu mühsam und spekulativ. Das Renormierungskonzept hingegen führte zu rasch überprüfbaren Ergebnissen, die vom Experiment auch tatsächlich bestätigt wurden.

In der Folgezeit erwies sich Dirac unbeeindruckt von diesen Erfolgen als einer der größten Kritiker des Renormierungskonzeptes. Für ihn war es ein 'häßliches' Konzept, das trotz seiner experimentellen Bestätigung nicht der physikalischen Wirklichkeit entsprechen konnte: " *Just because the results (of conventional renormalization theory) happen to be in agreement with observation does not prove that one's theory is correct. After all, the Bohr theory was correct in simple cases. It gave very good answers, but still the Bohr theory had the wrong concepts. Correspondingly, the renormalization kind of quantum theory which physicists are working nowadays is not justifiable by agreement with experiments.*" Wenn man die Historie betrachtet, so kann man Diracs Kassandrarufe sehr wohl verstehen. Denn die Geschichte der Naturwissenschaften ist voll von vermeintlich richtigen Theorien, man denke nur an die Epizyklentheorie des Ptolemäos. Die Tragik Diracs und vieler seiner Mitstreiter lag jedoch darin, dass ihnen ein schlüssiges Alternativkonzept fehlte. Ihm selbst fehlte wahrscheinlich die Kraft und die richtige Mathematik als Sprache zur Formulierung seiner Ideen. So beschwor er 1939 in Anbetracht seiner eigenen Hilflosigkeit die Gemeinde der theoretischen und mathematischen Physiker mit dem folgenden Rat: "*The research worker, in his efforts to express the fundamental laws of Nature in mathematical form, should strive mainly for mathematical beauty. He should still take simplicity into consideration in subordinate way to beauty. ... It often happens that the requirements of simplicity and beauty are the same, but where they clash the latter must take precedence. ... (B)egin by choosing that branch of mathematics which one thinks will form the basis of the new theory. ... Having decided on the branch of mathematics, one should proceed to develop it along suitable lines, at the same time looking for that way in which it appears to lend itself naturally to physical interpretation.*" Diese Suche nach Schönheit wurde Dirac oft als ein wirklichkeitsfremder Ästhetizismus ausgelegt. Doch wer die Äußerungen Diracs genauer liest und zu verstehen versucht, der erkennt, dass Dirac, der usprünglich ja Elektrotechnik studiert hatte, wahrscheinlich einen weit größeren Bezug zur Wirklichkeit hatte als die meisten seiner Kollegen. Womöglich war sich Dirac eines fundamentalen Problems der modernen Physik bewusst. Wie soll es nämlich gelingen, eine Theorie zu gewinnen, wenn diese auf einem Bereich fundiert ist, der sich nicht nur unserer sinnlichen, sondern womöglich auch jeder experimentellen Untersuchung entzieht. Für die Begründer der Quantentheorie schien es klar zu sein, dass sie mit ihren Untersuchungen erstmals zu den Grenzen menschlicher Erkenntnis vorgestoßen waren, in einen Bereich also, in dem vielleicht die vertrauten Prinzipien zur Gewinnung physikalischer Gesetzmäßigkeiten nicht mehr ausreichen, weil erst die theoretische Beschreibung überhaupt erkennen läßt, welche konkreten Fragen an die Natur in Form eines Experimentes zu stellen sind. Um dabei der Gefahr zu entgehen, falsche Konzeptionen zu entwickeln, war Dirac der Ansicht, auf ein metaphysisches Prinzip zurückgreifen zu müssen, eben das von Schönheit und Einfachheit, wobei Schönheit für ihn von übergeordneter Bedeutung ist. Zwar erklärt Dirac nicht, was Schönheit letztlich bedeuten soll. Doch können wir davon ausgehen, dass er hierin eine wesentliche Eigenschaft der Natur sieht, die sich in ihrer mathematischen Beschreibung widerspiegelt und grundsätzlich für jeden Menschen bei geeignetem Bemühen erkennbar ist als ein Zustand, gekennzeichnet durch Angemessenheit, Entsprechung und Wohlbegründetheit. Letztlich steht dahinter nichts anderes als die einfache Erkenntnis, dass eine fundamentale Theorie zur Beschreibung der Natur eben natürlich sein muss.

Wenn wir nun zurückblicken, so erkennen wir, dass die zweite Hälfte des 20. Jahrhunderts zwar die Methoden und Techniken der Quantenfeldtheorie enorm erweitert hat, aber verglichen mit der ersten Hälfte sind nur wenige neue physikalische Konzeptionen entstanden. Selbst von der derzeit vielbeachteten String-Theorie kann nach Einschätzung von Michio Kaku keine einheitliche Beschreibung der physikalischen Phänomene erwartet werden, solange sich ihre Prinzipien nicht selbst auf einer einheitlichen Grundlage aufbauen lassen. Entsprechend groß ist heute die Verzweiflung in der Physik. Vielleicht müssen wir aber erst so verzweifelt sein wie Dirac, um anzuerkennen, daß die gängigen Konzepte nicht weiterführen können und Wolfgang Pauli mit seiner Einschätzung recht hatte, dass die Quantentheorie eine unerledigt gebliebene Aufgabe ist, die man noch zuende bringen muß. Die Schöpfer der Quantentheorie jedenfalls, insbesondere Werner Heisenberg und Pascual Jordan waren davon überzeugt, dass die bekannte Formulierung der Quantenmechanik nur vorläufigen Charakter haben kann, und die endgültige Theorie ohne die klassische 'Krücken', wie sie es nannten, aus-kommen muß. Es bleibt eines der großen Rätsel, warum dies bis heute nicht gelungen ist. Ich möchte daher unseren gegenwärtigen Zustand vor diesem Hintergrund mit einigen provokanten Thesen hinterfragen. Hat vielleicht die einseitige Fixierung auf das Renormierungskonzept dazu geführt, dass wir das Potential der Quantentheorie vorläufig aufgebraucht haben? Sind wir vielleicht, geblendet durch die großen Erfolge der gängigen Konzepte, am Ende in eine konzeptionelle Sackgasse geraten. Ist diese Krise der Physik also womöglich selbst gemacht? Ist das Ausbleiben durchschlagender Erfolge vielleicht darauf zurückzuführen, dass die gegenwärtigen Umstände die Entfaltung jener innovativen Kräfte verhindern, die eine neue kopernikanische Wende herbeiführen könnten? Sind wir durch die in der Physik vorherrschende Denkweise des Instrumentalismus, nach der physikalische Theorien nur Prognosemodelle sein sollen, einer Ignoranz anheimgefallen, die uns die notwendige Sensibilität zum Aufspüren physikalischer Realitäten abhanden kommen lässt? Krisen sind stets Bewusstseinskrisen, zu deren Bewältigung es notwendig ist, dass das Aussprechen unangenehmer Wahrheiten als eine geringere Zumutung empfunden wird als das verweifelte Festhalten an erfolglosen Konzepten.

Immer wieder hört man, dass die theoretische Physik eine ausgereifte Disziplin sei, die an ihr Ende gelangt sei. Solche Aussagen sind so alt wie die Menschheit selbst. Selten haben sie etwas mit der Realität zu tun, sind sie doch oft nur das Ergebnis persönlicher Resignation und des Irrtums, subjektives Empfinden mit der allgemeinen Realität gleichzusetzen. Wenn Pauli sagt, dass die Quantentheorie noch nicht vollendet ist, dann stehen wir wahrscheinlich erst am Anfang einer neuen stürmischen Periode. Dirac hat uns bereits darauf hingewiesen, wie wir vorzugehen haben. Entsprechend seinem Rat sollen wir zuerst jenen Teil der Mathematik auswählen, von dem wir glauben, dass er die Basis der neuen physikalischen Theorie bildet. Im Rahmen des Prinzips von Einfachheit und Schönheit muss eine solche Mathematik in irgendeiner Form alle für die Physik wesentlichen Strukturelemente beinhalten und diese in geeigneter Weise verallgemeinern. Durch die neue Formulierung sollte die alte physikalische Theorie nicht grundsätzlich in Frage gestellt werden, vielmehr sollte sie als ein Spezialfall der neuen detaillierteren Theorie erscheinen. Die Verwendung von Quantengruppen erlaubt es nun, bekannte mathematische Strukturen konsistent und systematisch zu deformieren. Die Untersuchungen der letzten zehn Jahre haben hierzu eine Fülle bemerkenswerter Erkenntnisse gebracht. Diese Deformationen sind dabei von solch einer Art, dass die ursprünglich kommutative Struktur in einer planvollen Weise nichtkommutativ wird. Dass dieses Konzept vernünftig ist, zeigt sich darin, dass die Nichtkommutativität eine Diskretisierung der bekannten Geometrien bewirkt und damit in natürlicher Weise zur Einführung einer kleinsten Länge führen kann. Angesichts dieser Umstände bin ich der Überzeugung, dass Quantengruppen die Mathematik darstellen, auf der sich eine neue physikalische Theorie aufbauen lässt. Unabhängig davon, wie man zu dieser Aussage steht, solange wir einen solchen Versuch nicht unternehmen, können wir auch nicht sagen, ob dieses Vorhaben sinnvoll ist oder nicht. Jedenfalls sprechen die Indizien sehr dafür, dass die Probleme mit den Divergenzen der Quantenfeldtheorie letztlich das Ergebnis einer 'Überstrapazierung' bekannter mathematischer Kalküle sind, zumal das Auftischen immer neuer wundersamer Mechanismen bis heute nicht zu einer Lösung geführt hat. Quantengruppen könnten helfen, die bekannten Probleme durch Einführung einer robusteren mathematischen Sprache zu beseitigen.

Hat man sich zu dieser Überzeugung durchgerungen, so muss die ausgewählte mathematische Theorie nach Diracs Ansicht entlang jener Zweige entwickelt werden, die durch die physikalische Anwendung vorgezeichnet sind. Da die bekannte Physik in großem Umfang auf die Hilfsmittel der Analysis zurückgreift, ist es meine Absicht, in dieser Arbeit die wesentlichen Elemente einer auf Quantengruppen basierenden Analysis bereitzustellen. Eine derartige q-Analysis ist in ihrer eindimensionalen Form bereits seit langem bekannt und steht in enger Verbindung zu den Erkenntnissen über spezielle q-Funktionen [10]. Aber erst die Entwicklung der Quantengruppen hat einen Weg aufzeigt, wie sich die Elemente eines eindimensionalen q-Kalküls auf mehrere Dimensionen erweitern lassen. Die Untersuchungen von S. Majid [11] haben insbesondere deutlich gemacht, dass sich der bekannte q-Kalkül für eine Dimension als eine Analysis über der sogenannten 'braided-line' auffassen läßt. Indem man deren einfaches Braiding

$$xy = qyx \tag{1.1}$$

durch das der R-Matrix einer bekannten Quantengruppe ersetzt,

$$x^i y^j = \hat{R}^{ij}_{kl} y^k x^l, \tag{1.2}$$

gelangt man auf natürliche und systematische Weise zu mehrdimensionalen Verallgemeinerungen der Jackson-Ableitung [12]

$$D_q f(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{x - qx}, \tag{1.3}$$

des Jackson-Integrals [13]

$$\int_0^x f(x) d_q x = (1-q) \sum_{j=1}^{\infty} x q^{-j} f(q^{-j} x), \qquad q < 1 \tag{1.4}$$

und des q-Exponentials [14]

$$e_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(q;q)_n}, \tag{1.5}$$

wobei

$$\begin{aligned} (a;q)_n &= (1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{n-1}), \\ (a;q)_0 &= 1. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Es sei ausdrücklich betont, dass durch Majids Betrachtungen eine Vielzahl bekannter Ergebnisse [15], [16] in einen einheitlichen Begriffsrahmen gefasst werden, der sich für die Entwicklung einer mehrdimensionalen q-Analysis als ausgesprochen hilfreich erweist. Die von ihm geleistete kategorientheoretische Fundierung liefert hierbei einen sehr nützlichen Leitfaden [17], [18] und legt darüberhinaus die zugrundeliegenden Strukturen mit verblüffender Klarheit offen. Es ist dieser Axiomatisierung zu verdanken, dass die Ergebnisse dieser Arbeit trotz ihrer ungewohnten Komplexität letztlich dem Grundsatz von Einfachheit und Schönheit genügen. Insbesondere zeigt sich, dass die gesamte Theorie mit Hilfe einer begrenzten Anzahl elementarer mathematischer Objekte formuliert werden kann. Daher genügt es zu wissen, wie diese Objekte realisiert sind, und nach welchen Regeln sie miteinander kombiniert werden können. Die Lösung der ersten Aufgabe, also die Konstruktion der benötigten Elemente soll der Inhalt dieser Arbeit sein.

Wie wir zur Erreichung dieses Ziels vorgehen, wollen wir nun kurz skizzieren. Die Mehrzahl der Untersuchungen über Quantengruppen innerhalb des letzten Jahrzehntes waren vorwiegend algebraischer Natur, da vor allem strukturelle Überlegungen im Vordergrund standen. Diese Periode hat, wie bereits erwähnt, eine Vielzahl bedeutender Erkenntnisse gebracht. Die weitere Entwicklung wird meiner Ansicht nach dahin gehen, dass man ein analytisches Modell zu konstruieren versucht, das eine Realisierung der bekannten algebraischen Ideen darstellt. Zu zeigen, dass ein solches Vorhaben möglich ist, soll eines der Ziele dieser Arbeit sein. Der große Vorteil des Übergangs von einer algebraischen zu einer analytischen Behandlung besteht vor allem darin, dass man jetzt Ausdrücke erhält, die sich grundsätzlich numerisch auswerten lassen, unter Umständen durch Zuhilfenahme von Rechenmaschinen. Zu diesem Zweck stellen wir durch Vereinbarung einer Normalordnung eine Verbindung her zwischen der nichtkommutativen Struktur und einer vergleichbaren kommutativen, so dass wir am Ende wieder mit kommutativen Ausdrücken rechnen können. Dieses Vorgehen entspricht teilweise dem des Sternproduktformalismus [19], [20]. Auf diese Weise gelangt man zu einer Reihe neuer Operationen für kommutative Funktionen. Diese stellen nichtkommutative Versionen solcher arithmetischer und analytischer Operationen dar, die bereits aus der normalen Analysis bekannt sind und im klassischen Grenzfall in diese übergehen. Zu den neuen Operationen gehören insbesondere das Sternprodukt, die q-Ableitungen sowie das q-Integrale und die q-Exponentiale. Darüber hinaus benötigen wir neben dem Sternprodukt noch ein weiteres Produkt, welches durch das Braiding induziert wird und daher von uns als Zopfprodukt bezeichnet wird. Dieses steht in einem engen Zusammenhang mit den q-Translationen bzw. q-Taylor-Regeln, deren explizite Form wir aus den Hopfstrukturen der von uns betrachteten Quantenräume ableiten werden.

So entsteht schließlich ein modulares Konzept, mit dem es gelingt, den enormen Strukturreichtum der Theorie unter Kontrolle zu halten. Hat man nämlich die nichtkommutativen Operationen in ihrer expliziten Form bestimmt, kann die weitere Theorie unter Verwendung derselben in Analogie zur klassischen Situation formuliert werden. In diesem Zusammenhang ist es sinnvoll, vor allem solche Quantenräume zu behandeln, denen eine physikalische Bedeutung zukommen könnte, wie dies etwa für die q-deformierten Euklidischen Räume mit drei bzw. vier Dimensionen sowie den q-deformierten Minkowski-Raum der Fall ist. Es scheint so, als ob die bisher bekannten physikalischen Ideen auf diese Weise über einen weiten Bereich reformuliert werden können, ohne dass ihr eigentlicher Wesensgehalt verloren geht. Lapidar formuliert dürfen wir sagen, dass nicht die Physik, sondern nur die Sprache zu ihrer Formulierung einer Revision unterzogen wird. Viele physikalische Gleichungen sollten dabei auf wohldefinierte Weise durch Korrekturterme erweitert werden, wobei sich die neuen Terme problemlos in den bekannten Begriffsrahmen einfügen. Diese Ergänzungen können helfen, dass Verständnis der Raum-Zeit zu verbessern, indem sie eine detailliertere Beschreibung der darin auftretenden Vorgänge ermöglichen.

Dies setzt jedoch voraus, dass wir die betreffenden Phänomene mit Hilfe der abgeleiteten Formeln numerisch behandeln können. Viele dieser Ausdrücke werden aber nur für eine Basis aus normalgeordneten Monomen explizit berechnet, weshalb auch nur im Fall der Polynome sichergestellt ist, dass unsere Formeln endliche Werte liefern. Daraus muss aber kein grundsätzliches Problem erwachsen, da Funktionen bei ihrer Darstellung auf Rechenmaschinen ebenfalls durch Polynome angenähert werden. Numerische Berechnungen sollten somit grundsätzlich zu endlichen Ergebnissen führen (eventuell ergänzt durch eine Abschätzung des durch die Approximation bedingten Fehlers). Vom mathematischen Standpunkt aus beschränken wir unsere Betrachtungen also auf Funktionen, deren Reihenentwicklungen genauso behandelt werden können wie Polynome, d.h. wir setzen die absolute Konvergenz als den in der Physik üblichen Konvergenzbegriff voraus.

Kapitel 2

Sternprodukte

Der Ausgangspunkt unserer Betrachtungen sind spezielle nichtkommutative Koordinatenräume, also Algebren, die von nichtkommutierenden Koordinaten aufgespannt werden. Damit diese Räume als nichtkommutative Analoga klassischer[1] Koordinatenräume interpretiert werden können, müssen sie wieder eine den klassischen Symmetrien entsprechende Struktur aufweisen. Quantengruppen, die entweder durch Deformationen von Funktionenalgebren über Lie-Gruppen [21] , [22], [23] oder durch Deformation der Einhüllenden von Lie-Algebren [24], [25] entstehen, erweisen sich in vieler Hinsicht als eine ideale Verallgemeinerung klassischer Symmetriestrukturen. Die sogenannten Comodule dieser Quantengruppen, die auch als Quantenräume bezeichnet werden, stellen im Folgenden die von uns betrachteten nichtkommutativen Koordinatenalgebren dar. Für eine ausführliche Darstellung der grundlegenden Zusammenhänge sei auf [26], [27] sowie [28] verwiesen.

Für die Behandlung nichtkommutativer Algebren ist es für unsere Zwecke von Vorteil, diese mittels eines Sternproduktes auf einer kommutativen Algebra darzustellen [29], [30], [31]. Hierbei ist zunächst zu berücksichtigen, dass unsere nichtkommutativen Koordinatenalgebren $\mathcal{A}_q$ von den Koordinaten $X^1, X^2, \ldots, X^n$ generiert werden als

$$\mathcal{A}_q = \frac{\mathbb{C}\langle X^1, X^2, \ldots, X^n \rangle}{\mathcal{R}}, \tag{2.1}$$

wobei $\mathcal{R}$ das von den Koordinatenrelationen bestimmte Ideal bezeichnet. Von entscheidender Bedeutung ist nun, dass unsere nichtkommutativen Koordina-

[1]Wir bezeichnen als 'klassisch' all jene Begriffsbildungen, welche die experimentell verifizierte Physik benutzt.

tenalgebren $\mathcal{A}_q$ die sogenannte Poincaré-Birkhoff-Witt Eigenschaft besitzen. Diese liegt vor, wenn die Unterräume, die von Monomen eines vorgegebenen Grades erzeugt werden, für die nichtkommutative Koordinatenalgebra $\mathcal{A}_q$ die gleiche Dimension haben wie für die Algebra $\mathcal{A}$, die von den entsprechenden kommutativen Koordinaten $x^1, x^2, \ldots, x^n$ aufgespannt wird. Dies garantiert nämlich die Existenz eines Vektorraum-Isomorphismuses zwischen den Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_q$, da die Menge aller Monome mit einer vorgegebenen Normalordnung eine Basis von $\mathcal{A}_q$ bilden und somit folgende lineare Abbildung definiert ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_q, \\ \mathcal{W}\left((x^1)^{i_1}(x^2)^{i_2}\ldots(x^n)^{i_n}\right) &= (X^1)^{i1}(X^2)^{i_2}\ldots(X^n)^{i_n}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dieser Vektorraum-Isomorphismus kann jedoch auch zu einem Algebra-Isomorphismus erweitert werden, indem man auf der kommutativen Algebra $\mathcal{A}$ ein neues Produkt, das sogenannte Sternprodukt [32] einführt. Dieses ist definiert durch die Beziehung

$$\mathcal{W}(f \star g) = \mathcal{W}(f) \cdot \mathcal{W}(f), \tag{2.3}$$

wobei f und g formale Potenzreihen in $\mathcal{A}$ bezeichnen. Im Folgenden soll dieses Produkt für den q-deformierten Euklidischen Raum in drei bzw. vier Dimensionen sowie den q-deformierten Minkowski-Raum berechnet werden [33], wobei in allen Fällen eine spezielle Normalordnung vorgegeben ist. Die dabei erhaltenen Ausdrücke können schließlich dazu verwendet werden, inverse Elemente auf der nichtkommutativen Koordinatenalgebra $\mathcal{A}_q$ einzuführen bzw. deren Vertauschungsrelationen zu bestimmen.

Die explizite Berechnung der Sternprodukte zeigt außerdem, dass deren allgemeine Form gegeben ist durch

$$f \star g = f \cdot g + \sum_{i>0} \lambda^i B_i(f,g). \tag{2.4}$$

Das Sternprodukt modifiziert also das kommutative Produkt zweier Funktionen durch entsprechende Korrekturen [19], [20], die wegen $B_i(f,g) \neq B_i(g,f)$ für die Nichtkommutativität verantwortlich sind. Außerdem bewirken diese Korrekturterme, dass das Sternprodukt an einem bestimmten Punkt des Raumes nicht alleine durch den Wert der beiden Funktionen an eben diesem Raumpunkt bestimmt wird, sondern mehr oder weniger auch von einer Vielzahl weiterer Raumpunkte abhängt. Nichtkommutativität führt also zu Nichtlokalität und einer Einschränkung der Kausalität. Es ist daher grundsätzlich zu erwarten, dass es ab einer bestimmten Skala physikalisch gesehen nur noch sinnvoll ist, von Raumbereichen und Zeitintervallen zu sprechen.

2.1 Euklidischer Raum in drei Dimensionen

Die Algebra des q-deformierten Euklidischen Raumes wird generiert von den Koordinaten X^3, X^+ und X^-, die den folgenden Relationen genügen [34]:

$$\begin{aligned} X^3 X^+ &= q^2 X^+ X^3, \\ X^- X^3 &= q^2 X^3 X^-, \\ X^- X^+ &= X^+ X^- + \lambda X^3 X^3, \end{aligned} \tag{2.5}$$

wobei $\lambda = q - q^{-1}$ und $q > 1$. Als Basis dieses Quantenraumes verwenden wir die normalgeordneten Monome der Form $(X^+)^{n_+}(X^3)^{n_3}(X^-)^{n_-}$. Der Isomorphismus $\mathcal{W}$ ordnet dann jedem Monom in kommutativen Koordinaten das entsprechende Monom mit der obigen Normalordnung zu, also

$$\mathcal{W}\left((x^+)^{n_+}(x^3)^{n_3}(x^-)^{n_-}\right) = (X^+)^{n_+}(X^3)^{n_3}(X^-)^{n_-}. \tag{2.6}$$

Das Sternprodukt ist jetzt festgelegt durch die Bedingung

$$\begin{aligned} & \mathcal{W}\left(\left[(x^+)^{n_+}(x^3)^{n_3}(x^-)^{n_-}\right] \star \left[(x^+)^{m_+}(x^3)^{m_3}(x^-)^{m_-}\right]\right) \\ = \; & \mathcal{W}\left((x^+)^{n_+}(x^3)^{n_3}(x^-)^{n_-}\right) \cdot \mathcal{W}\left((x^+)^{m_+}(x^3)^{m_3}(x^-)^{m_-}\right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Zu seiner expliziten Berechnung müssen wir lediglich den Ausdruck auf der rechten Seite in Normalordnung überführen, um auf diese Weise sein kommutatives Urbild bezüglich $\mathcal{W}$ ablesen zu können.

Zu diesem Zweck schreiben wir unter Verwendung der Relationen (2.5) die Monome $(X^-)^{n_+}(X^3)^{m_3}$, $(X^3)^{n_3}(X^+)^{m_+}$ und $(X^-)^{n_-}(X^+)^{m_+}$ in Normalordnung um und erhalten

$$\begin{aligned} (X^-)^{n_-}(X^3)^{m_3} &= q^{2n_- m_3}(X^3)^{m_3}(X^-)^{n_-}, \\ (X^3)^{n_3}(X^+)^{m_+} &= q^{2n_3 m_+}(X^+)^{m_+}(X^3)^{n_3}, \\ (X^-)^{n_-}(X^+)^{m_+} &= \sum_{i=0}^{\min(n_-,m_+)} \lambda^i (B_{q^2})_i^{n_-,m_+} (X^+)^{m_+ - i}(X^3)^{2i}(X^-)^{n_- - i}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

wobei die Koeffizienten $(B_q)_i^{n_-,m_+}$ folgenden Rekursionsrelationen genügen[2]:

$$\begin{aligned} (B_q)_0^{n_-,m_+} &= 1, && (2.9)\\ (B_q)_i^{n_-,m_+} &= (B_q)_i^{n_-,m_+-1} + q^{2(m_+-i-1)}[[n_- - (i-1)]]_{q^2}(B_q)_{i-1}^{n_-,m_+-1}. \end{aligned}$$

Wie man durch Einsetzen bestätigen kann, werden diese von den folgenden Ausdrücke erfüllt:

$$(B_q)_i^{n,m} = \frac{1}{[[i]]_{q^2}!}\frac{[[n]]_{q^2}![[m]]_{q^2}!}{[[n-i]]_{q^2}![[m-i]]_{q^2}!}. \tag{2.10}$$

Unter Verwendung dieser Ergebnisse lässt sich das Produkt zweier normalgeordneter Monome wieder in Normalordnung umschreiben,

$$\begin{aligned} &\left[(X^+)^{n_+}(X^3)^{n_3}(X^-)^{n_-}\right]\cdot\left[(X^+)^{m_+}(X^3)^{m_3}(X^-)^{m_-}\right] && (2.11)\\ =& \sum_{i=0}^{\min(n_-,m_+)} \lambda^i (C_{q^2})_i^{\underline{n},\underline{m}}\,(X^+)^{n_++m_+-i}(X^3)^{n_3+m_3+2i}(X^-)^{n_-+m_--i}, \end{aligned}$$

wobei

$$(C_q)_i^{\underline{n},\underline{m}} = q^{n_3(m_+-i)+m_3(n_--i)}\,(B_q)_i^{n_-,m_+}. \tag{2.12}$$

Daraus kann nun mit den Definitionen (2.6) und (2.7) die explizite Form des Sternproduktes zweier kommutativer Monome abgelesen werden, nämlich

$$\begin{aligned} &\left[(x^+)^{n_+}(x^3)^{n_3}(x^-)^{n_-}\right]\star\left[(x^+)^{m_+}(x^3)^{m_3}(x^-)^{m_-}\right] && (2.13)\\ =& \sum_{i=0}^{\min(n_-,m_+)} \lambda^i (C_{q^2})_i^{\underline{n},\underline{m}}\,(x^+)^{n_++m_+-i}(x^3)^{n_3+m_3+2i}(x^-)^{n_-+m_--i}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Jackson-Ableitungen sowie durch Einführung der Operatoren

$$q^{\hat{n}_A} \quad \text{mit} \quad \hat{n}_A = \frac{\partial}{\partial x^A}, \quad A \in \{+,3,-\}, \tag{2.14}$$

können wir dieses Ergebnis leicht auf Funktionen erweitern, sofern diese als Potenzreihen darstellbar sind,

$$\begin{aligned} &f\star g && (2.15)\\ =& \sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\frac{(x^3)^{2i}}{[[i]]_{q^4}!}q^{2(\hat{n}_3\hat{n}'_+ + \hat{n}_-\hat{n}'_3)}\,(D_{q^4}^-)^i f(\underline{x})\cdot(D_{q^4}^+)^i g(\underline{x}')\Big|_{x'\to x}. \end{aligned}$$

[2]Die Bedeutung der verwendeten Symbole ist in Anhang A erklärt.

An diesem Ausdruck lässt sich nun leicht erkennen, dass das Sternprodukt das punktweise Produkte zweier kommutierender Funktionen durch eine unendliche Summe von Korrekturtermen modifiziert, wobei die Höhe ihres Beitrags insbesondere durch die Potenzen λ^i bestimmt wird. Fraglich ist jedoch, für welche Funktionen der obige Ausdruck überhaupt konvergiert. Zur Beantwortung dieser Frage kann man sich zunächst überlegen, dass die Jackson-Ableitungen ein Maß dafür sind, wie stark sich eine Funktion beim Übergang vom Punkt x zum Punkt qx verändert. Etwas formaler können wir daher schreiben

$$(D_q)^i f \sim \left(\frac{1}{\lambda'}\right)^i f, \tag{2.16}$$

wobei λ' als eine Art charakteristische Wellenlänge den Bereich angibt, in dem f eine nennenswerte Veränderung erfährt. Falls wir Funktionen betrachten, die sich hinreichend langsam verändern, so dass $\lambda \ll \lambda'$ gilt, kann erwartet werden, dass die Formel (2.15) konvergiert. Interpretieren wir λ als eine fundamentale Länge für die gitterartige Struktur unseres nichtkommutativen Raumes und beschreiben f und g Störungen in diesem Raum, so ist deren Wechselwirkung in Form ihres Sternproduktes berechenbar, falls die charakteristischen Wellenlängen von f und g weit größer als λ sind. Dies sollte aber stets der Fall sein, da auf einem Gitter normalerweise keine Wellenlängen kleiner als der Gitterabstand auftreten können.

Als Nächstes soll eine erste Anwendung unserer Formel (2.15) betrachtet werden, die nämlich die konsistente Einführung inverser Elemente in die nichtkommutative Koordinatenalgebra gestattet. Diese Formel ist, wie man leicht erkennt, auch für Polynome mit negativen Koeffizienten anwendbar. Setzen wir z.B. in (2.15) die inversen Koordinaten $(x^+)^{-1}$ und $(x^3)^{-1}$ ein, so erhalten wir

$$(x^3)^{-1} \star (x^+)^{-1} = q^2 (x^+)^{-1} (x^3)^{-1}. \tag{2.17}$$

Führen wir jetzt auf der nichtkommutativen Koordinatenalgebra neue Elemente mittels

$$\mathcal{W}\left((x^A)^{-1}\right) = (X^A)^{-1}, \quad A \in \{+, 3, -\}, \tag{2.18}$$

ein, so erhalten wir für $(X^+)^{-1}$ und $(X^3)^{-1}$ in einfacher Weise die neue Relation

$$(X^3)^{-1} (X^+)^{-1} = q^2 (X^+)^{-1} (X^3)^{-1}. \tag{2.19}$$

Durch wiederholte Anwendung des skizzierten Verfahrens können in systematischer Weise alle zusätzlichen Relationen gefunden werden, die durch die

Einführung der inversen Generatoren $(X^A)^{-1}$, $A \in \{+,3,-\}$, zu berücksichtigen sind. Entsprechend finden wir zunächst die offensichtlichen Identitäten

$$\begin{aligned} X^+(X^+)^{-1} &= (X^+)^{-1}X^+ = 1, \\ X^3(X^3)^{-1} &= (X^3)^{-1}X^3 = 1, \\ X^-(X^-)^{-1} &= (X^-)^{-1}X^- = 1. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Die verbleibenden Vertauschungsrelationen zwischen den Koordinaten und ihren Inversen lauten dann

$$\begin{aligned} (X^3)^{-1}X^\pm &= q^{\mp 2}X^\pm(X^3)^{-1}, \\ (X^\pm)^{-1}X^3 &= q^{\pm 2}X^3(X^\pm)^{-1}, \\ (X^-)^{-1}X^+ &= X^+(X^-)^{-1} - q^{-4}\lambda(X^3)^2(X^-)^{-2}, \\ X^-(X^+)^{-1} &= (X^+)^{-1}X^- - q^{-4}\lambda(X^+)^{-2}(X^3)^2. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Schließlich fehlen noch die Relationen, welche die inversen Koordinaten untereinander zu erfüllen haben, nämlich

$$\begin{aligned} (X^3)^{-1}(X^\pm)^{-1} &= q^{\pm 2}(X^\pm)^{-1}(X^3)^{-1}, \\ (X^-)^{-1}(X^+)^{-1} &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \, [[i]]_{q^4}! \left(\begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix}_{q^4} \right)^2 (X^+)^{-(i+1)}(X^3)^{2i}(X^-)^{-(i+1)}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Interessanterweise lässt sich die mit der Quantengruppensymmetrie verträgliche Konjugation [34], [35] der nichtkommutativen Koordinaten problemlos auf die inversen Elemente übertragen. Dazu braucht man lediglich nachprüfen, dass die Vertauschungsrelationen (2.20)-(2.22) unter der Konjugation

$$\overline{(X^A)^{-1}} = (\overline{X^A})^{-1} \tag{2.23}$$

in sich übergehen, wobei für die Konjugation der nichtkommutativen Koordinaten die folgenden Identitäten gelten:

$$\overline{X^+} = -qX^-, \quad \overline{X^3} = X^3, \quad \overline{X^-} = -q^{-1}X^+. \tag{2.24}$$

In expliziter Form können wir also schreiben

$$\begin{aligned} \overline{(X^+)^{-1}} &= -q^{-1}(X^-)^{-1}, \\ \overline{(X^3)^{-1}} &= (X^3)^{-1}, \\ \overline{(X^-)^{-1}} &= -q(X^+)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Schließlich sei erwähnt, dass diese Betrachtungen in der Weise verallgemeinert werden können, dass man mittels

$$(X^A)^\gamma = \mathcal{W}\left((x^A)^\gamma\right), \quad \gamma \in \mathbb{C}, \tag{2.26}$$

auch beliebige Potenzen der nichtkommutativen Koordinaten einführen kann. Damit wird erneut deutlich, dass die Einführung eines Sternproduktes einen sehr flexiblen Rahmen schafft, der für analytische Betrachtungen von großem Vorteil ist. Die Ausführungen in den folgenden Kapiteln werden dies immer wieder vor Augen führen.

Bei unseren Berechungen des Sternproduktes wurde eine spezielle Normalordnung verwendet, wie sie in (2.6) angegeben ist. Benutzt man bei der Definition des Algebra-Isomorphismus $\mathcal{W}$ hingegen eine andere Normalordnung,

$$\widetilde{\mathcal{W}}\left((x^+)^{n_+}(x^3)^{n_3}(x^-)^{n_-}\right) = (X^-)^{n_-}(X^3)^{n_3}(X^+)^{n_+}, \tag{2.27}$$

so erhält man mit den gleichen Überlegungen für das Sternprodukt nun den Ausdruck

$$\begin{aligned} & f \mathbin{\tilde{\star}} g \\ = \; & \sum_{i=0}^{\infty} (-\lambda)^i \, \frac{(x^3)^{2i}}{[[i]]_{q^{-4}}!} q^{-2(\hat{n}_3\hat{n}'_+ + \hat{n}_-\hat{n}'_3)} \, (D^+_{q^{-4}})^i f(\underline{x}) \cdot (D^-_{q^{-4}})^i g(\underline{x}')\Big|_{x' \to x} . \end{aligned} \tag{2.28}$$

Vergleicht man dies mit der Formel (2.15), so stellt man fest, dass zwischen beiden Ausdrücken eine einfache Symmetrie besteht, welche die Angabe folgender Transformationsformel gestattet:

$$f \star g \;\; \overset{\pm \,\leftrightarrow\, \mp}{\scriptstyle q \,\leftrightarrow\, 1/q} \;\; \longleftrightarrow \; f \tilde{\star} g. \tag{2.29}$$

Dies soll symbolisieren, dass der explizite Ausdruck für den linken Operator in jenen für den rechten dadurch übergeht, dass im ersten folgende Ersetzungen vorgenommen werden:

$$D^{\pm}_{q^a} \to D^{\mp}_{q^{-a}}, \quad \hat{n}_\pm \to -\hat{n}_\mp, \quad q^{\pm 1} \to q^{\mp 1}. \tag{2.30}$$

Mit Hilfe der beiden Sternproduktformeln (2.15) und (2.28) lassen sich außerdem ohne große Schwierigkeiten Ausdrücke ablesen, die angeben, wie ein Monom der einen Normalordnung in Monome der anderen Normalordnung umgeschrieben werden kann. Entsprechend erhält man:

$$
\begin{aligned}
&(X^-)^{n_-}(X^3)^{n_3}(X^+)^{n_+} \qquad (2.31)\\
= &\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i q^{2n_3(n_+ + n_- - i)}\,(B_{q^2})_i^{n_-,n_+}\,(X^+)^{n_+ - i}(X^3)^{n_3+2i}(X^-)^{n_- - i},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(X^+)^{n_+}(X^3)^{n_3}(X^-)^{n_-} \qquad (2.32)\\
= &\sum_{i=0}^{\infty} (-\lambda)^i\, q^{-2n_3(n_+ + n_- - i)}\,(B_{q^{-2}})_i^{n_-,n_+}\,(X^-)^{n_- - i}(X^3)^{n_3+2i}(X^+)^{n_+ - i}.
\end{aligned}
$$

Daraus lassen sich sofort Operatoren gewinnen, mit denen sich Ausdrücke der einen Normalordnung in die andere umwandeln lassen. Diese lauten

$$
\begin{aligned}
&\hat{U}^{-1}\tilde{f}(\underline{x}) \qquad (2.33)\\
= &\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \frac{(x^3)^{2i}}{[[i]]_{q^4}!} q^{2\hat{n}_3(\hat{n}_+ + \hat{n}_- + i)}(D^+_{q^4}D^-_{q^4})^i \tilde{f}(\underline{x}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\hat{U} f(\underline{x}) \qquad (2.34)\\
= &\sum_{i=0}^{\infty} (-\lambda)^i \frac{(x^3)^{2i}}{[[i]]_{q^{-4}}!} q^{-2\hat{n}_3(\hat{n}_+ + \hat{n}_- + i)}(D^+_{q^{-4}}D^-_{q^{-4}})^i f(\underline{x}),
\end{aligned}
$$

wobei $\widetilde{f}$ eine Funktion bezeichnet, die zum Algebra-Isomorphismus $\widetilde{\mathcal{W}}$ korrespondiert, während$f$ sich auf die zu $\mathcal{W}$ gehörende Nomalordnung bezieht. Die Umrechnung der beiden Sternprodukte gelingt mit diesen Operatoren im Rahmen der Identitäten

$$
\begin{aligned}
\hat{U}(f \star g) &= \hat{U}(f) \,\tilde{\star}\, \hat{U}(g), \qquad (2.35)\\
\hat{U}^{-1}(f \,\tilde{\star}\, g) &= \hat{U}^{-1}(f) \star \hat{U}^{-1}(g).
\end{aligned}
$$

Ein oft auftretendes Problem ist die sogenannte implizite Sternmultiplikation. Darunter verstehen wir, dass die Sternmultiplikation innerhalb ein und derselben Funktion auszuführen ist. Die zugehörigen Operatoren, die dies für die beiden Normalordnungen leisten, können leicht angegeben werden als

$$m_{x,x'}(f(\underline{x}, \underline{x}') \qquad (2.36)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \frac{(x^3)^{2i}}{[[i]]_{q^4}!} q^{2(\hat{n}_3\hat{n}'_+ + \hat{n}'_3\hat{n}_-)} (D^-_{q^4} D'^+_{q^4})^i f(\underline{x}, \underline{x}'),$$

$$\begin{aligned} & \tilde{m}_{x,x'}(f(\underline{x}, \underline{x}')) \\ = & \sum_{i=0}^{\infty} (-\lambda)^i \frac{(x^3)^{2i}}{[[i]]_{q^{-4}}!} q^{-(2\hat{n}_3\hat{n}'_- + \hat{n}'_3\hat{n}_+)} (D^+_{q^{-4}} D'^-_{q^{-4}})^i \tilde{f}(\underline{x}, \underline{x}'). \end{aligned} \tag{2.37}$$

In unseren Überlegungen haben wir uns bisher auf die Algebra der kontravarianten Koordinaten X^A beschränkt. Genauso gut hätten wir auch die Algebra der kovarianten Koordinaten X_A betrachten können, die mit den kontravarianten Koordinaten über die Beziehungen [34]

$$X_+ = -qX^-, \quad X_3 = X^3, \quad X_- = -q^{-1}X^+ \tag{2.38}$$

in Verbindung stehen. Ihre Algebra lautet jetzt

$$\begin{aligned} X_+X_3 &= q^2X_3X_+, \\ X_3X_- &= q^2X_-X_3, \\ X_+X_- &= X_-X_+ + \lambda X_3X_3. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Vergleichen wir diese Relationen mit jenen aus (2.5), so erkennen wir leicht, dass die für die kovarianten Koordinaten gültigen Relationen ganz einfach aus denen der kontravarianten erhalten werden können. Wir brauchen nämlich in den Identitäten für die kontravarianten Koordinaten nur die Ersetzungen

$$\begin{aligned} X^{\pm} &\rightarrow X_{\mp}, \quad X^3 \rightarrow X_3, \\ x^{\pm} &\rightarrow x_{\mp}, \quad x^3 \rightarrow x_3, \end{aligned} \tag{2.40}$$

durchzuführen und erhalten sofort die entsprechenden Identitäten für die kovarianten Koordinaten.

2.2 Euklidischer Raum in vier Dimensionen

Die Überlegungen des vorhergehenden Abschnitts lassen sich ohne große Probleme auf den q-deformierten Euklidischen Raum in vier Dimensionen übertragen. Die Vorgehensweise ähnelt also sehr derjenigen in drei Dimensionen, so dass wir uns mehr oder weniger auf die Ergebnisse dieser Betrachtung beschränken können. Die Quantenraumalgebra wird jetzt von den vier Koordinaten X^1, X^2, X^3 und X^4 aufgespannt, die folgenden Relationen genügen [37], [26]:

$$\begin{aligned} X^1X^2 &= qX^2X^1, \\ X^1X^3 &= qX^3X^1 \\ X^3X^4 &= qX^4X^3, \\ X^2X^4 &= qX^4X^2, \\ X^2X^3 &= X^3X^2, \\ X^4X^1 &= X^1X^4 + \lambda X^2X^3. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Für den Algebra-Isomorphismus vereinbaren wir

$$\mathcal{W}\left((x^1)^{n_1}(x^2)^{n_2}(x^3)^{n_3}(x^4)^{n_4}\right) = (X^1)^{n_1}(X^2)^{n_2}(X^3)^{n_3}(X^4)^{n_4}. \tag{2.42}$$

Durch Anwendung der Vertauschungsrelationen (2.41) erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} (X^2)^{n_2}(X^1)^{m_1} &= q^{-n_2m_1}(X^1)^{m_1}(X^2)^{n_2}, \\ (X^3)^{n_3}(X^1)^{m_1} &= q^{-n_3m_1}(X^1)^{m_1}(X^3)^{n_3}, \\ (X^4)^{n_4}(X^3)^{m_3} &= q^{-n_4m_3}(X^3)^{m_3}(X^4)^{n_4}, \\ (X^3)^{n_3}(X^2)^{m_2} &= (X^2)^{m_2}(X^3)^{n_3}, \\ (X^4)^{n_4}(X^1)^{m_1} &= \sum_{i=0}^{\min(m_1,n_4)} \lambda^i (B_{q^{-1}})_i^{n_4,m_1} \\ &\quad \cdot (X^1)^{m_1-i}(X^2)^i(X^3)^i(X^4)^{n_4-i}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Mit diesen Identitäten läßt sich wieder das Produkt zweier nichtkommutativer Monome normalordnen mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} &\left[(X^1)^{n_1}(X^2)^{n_2}(X^3)^{n_3}(X^4)^{n_4}\right] \cdot \left[(X^1)^{m_1}(X^2)^{m_2}(X^3)^{m_3}(X^4)^{m_4}\right] \\ = &\sum_{i=0}^{\min(n_4,m_1)} \lambda^i (D_{q^{-1}})_i^{\underline{n},\underline{m}}\, (X^1)^{n_1+m_1-i}(X^2)^{n_2+m_2+i}(X^3)^{n_3+m_3+i}(X^4)^{n_4+m_4-i}, \end{aligned} \tag{2.44}$$

wobei

$$(D_q)_i^{\underline{n},\underline{m}} = q^{(n_2+n_3)(m_1-i)+(m_2+m_3)(n_4-i)}\, (B_q)_i^{n_4,m_1}. \tag{2.45}$$

Daraus folgt für das Sternprodukt zweier Monome sofort der Ausdruck

$$\begin{aligned} &\left[(x^1)^{n_1}(x^2)^{n_2}(x^3)^{n_3}(x^4)^{n_4}\right] \star \left[(x^1)^{m_1}(x^2)^{m_2}(x^3)^{m_3}(x^4)^{m_4}\right] \\ = &\sum_{i=0}^{\min(n_4,m_1)} \lambda^i (D_{q^{-1}})_i^{\underline{n},\underline{m}}\, (x^1)^{n_1+m_1-i}(x^2)^{n_2+m_2+i}(x^3)^{n_3+m_3+i}(x^4)^{n_4+m_4-i}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Für die allgemeine Form des Sternproduktes findet man schließlich

$$
\begin{aligned}
& f \star g && (2.47)\\
= & \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \frac{(x^2 x^3)^i}{[[i]]_{q^{-2}}!} q^{-(\hat{n}_2+\hat{n}_3)\hat{n}'_1-(\hat{n}'_2+\hat{n}'_3)\hat{n}_4} \, (D^4_{q^{-2}})^i f(\underline{x}) \cdot (D^1_{q^{-2}})^i g(\underline{x}')\big|_{x'\to x} .
\end{aligned}
$$

Wie bereits im vorgehenden Abschnitt dargestellt wollen wir diese Formel wieder dazu benutzen, inverse Koordinaten einzuführen, indem wir zunächst den Algebra-Isomorphismus in bekannter Weise erweitern durch

$$\mathcal{W}\left((x^i)^{-1}\right) = (X^i)^{-1}, \quad i \in \{1, \ldots, 4\}. \tag{2.48}$$

Es gelten dann die Relationen

$$
\begin{aligned}
X^1(X^1)^{-1} &= (X^1)^{-1}X^1 = 1,\\
X^2(X^2)^{-1} &= (X^2)^{-1}X^2 = 1,\\
X^3(X^3)^{-1} &= (X^3)^{-1}X^3 = 1,\\
X^4(X^4)^{-1} &= (X^4)^{-1}X^4 = 1.
\end{aligned} \tag{2.49}
$$

Die übrigen Vertauschungsrelationen zwischen den Koordinaten und ihren Inversen lauten nun

$$
\begin{aligned}
(X^2)^{-1}X^1 &= qX^1(X^2)^{-1},\\
(X^3)^{-1}X^1 &= qX^1(X^3)^{-1},\\
(X^4)^{-1}X^2 &= qX^2(X^4)^{-1},\\
(X^4)^{-1}X^3 &= qX^3(X^4)^{-1},\\
(X^3)^{-1}X^2 &= X^2(X^3)^{-1},\\
(X^4)^{-1}X^1 &= X^1(X^4)^{-1} - q^2\lambda X^2X^3(X^4)^{-2},
\end{aligned} \tag{2.50}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
X^2(X^1)^{-1} &= q(X^1)^{-1}X^2,\\
X^3(X^1)^{-1} &= q(X^1)^{-1}X^3,\\
X^4(X^2)^{-1} &= q(X^4)^{-1}X^3,\\
X^4(X^3)^{-1} &= q(X^3)^{-1}X^4,\\
X^2(X^3)^{-1} &= (X^3)^{-1}X^2,\\
X^4(X^1)^{-1} &= (X^1)^{-1}X^4 - q^2\lambda(X^1)^{-2}X^2X^3.
\end{aligned} \tag{2.51}
$$

Für die Relationen, welche die inversen Koordinaten untereinander erfüllen, findet man schließlich

$$
\begin{aligned}
(X^2)^{-1}(X^1)^{-1} &= q^{-1}(X^1)^{-1}(X^2)^{-1}, \\
(X^3)^{-1}(X^1)^{-1} &= q^{-1}(X^1)^{-1}(X^3)^{-1}, \\
(X^4)^{-1}(X^2)^{-1} &= q^{-1}(X^2)^{-1}(X^4)^{-1}, \\
(X^4)^{-1}(X^3)^{-1} &= q^{-1}(X^3)^{-1}(X^4)^{-1}, \\
(X^3)^{-1}(X^2)^{-1} &= (X^2)^{-1}(X^3)^{-1}, \\
(X^4)^{-1}(X^1)^{-1} &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i [[i]]_{q^{-2}}! \left(\begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix}_{q^{-2}} \right)^2 \\
&\quad \cdot (X^1)^{-(i+1)}(X^2)^i(X^3)^i(X^4)^{-(i+1)}.
\end{aligned} \tag{2.52}
$$

Für die inversen Koordinaten läßt sich wieder eine Konjugation angeben. Diese lautet [37], [26]

$$
\overline{X^1} = q^{-1}X^4, \quad \overline{X^2} = X^3, \quad \overline{X^3} = X^2, \quad \overline{X^4} = qX^1. \tag{2.53}
$$

Diese Konjugation ist wieder mit der Inversenbildung verträglich, d.h. es gilt

$$
\overline{(X^i)^{-1}} = (\overline{X^i})^{-1}, \tag{2.54}
$$

bzw. in expliziter Form

$$
\begin{aligned}
\overline{(X^1)^{-1}} &= q(X^4)^{-1}, \\
\overline{(X^2)^{-1}} &= (X^3)^{-1}, \\
\overline{(X^3)^{-1}} &= (X^2)^{-1}, \\
\overline{(X^4)^{-1}} &= q^{-1}(X^1)^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.55}
$$

Wie im dreidimensionalen Fall können wir das Sternprodukt natürlich auch für eine andere Normalordnung berechnen und deshalb den Algebra-Isomorphismus durch

$$
\widetilde{\mathcal{W}}\left((x^1)^{n_1}(x^2)^{n_2}(x^3)^{n_3}(x^4)^{n_4}\right) = (X^4)^{n_4}(X^3)^{n_3}(X^2)^{n_2}(X^1)^{n_1} \tag{2.56}
$$

festlegen. In dieser Normalordnung ergibt sich der allgemeine Ausdruck für das Sternprodukt zu

$$
\begin{aligned}
& f \tilde{\star} g \\
= & \sum_{i=0}^{\infty} (-\lambda)^i \frac{(x^2x^3)^i}{[[i]]_{q^2}!} q^{(\hat{n}_2+\hat{n}_3)\hat{n}'_4+(\hat{n}'_2+\hat{n}'_3)\hat{n}_1} \; (D^1_{q^2})^i f(\underline{x}) \cdot (D^4_{q^2})^i g(\underline{x}')\big|_{x'\to x}.
\end{aligned} \tag{2.57}
$$

Vergleicht man dies mit der Formel (2.47), so erkennt man leicht die Gültigkeit der Transformationsregel

$$f \star g \overset{\substack{i \to i' \\ q \to 1/q}}{\longleftrightarrow} f \,\tilde{\star}\, g, \tag{2.58}$$

was wieder symbolisieren soll, dass der linke Ausdruck in den rechten durch die Anwendung der Ersetzungen

$$D^i_{q^a} \to D^{i'}_{q^{-a}}, \quad \hat{n}_i \to -\hat{n}_{i'}, \quad q^{\pm 1} \to q^{\mp 1} \tag{2.59}$$

übergeht, wobei $i = 1, \ldots, 4$ und $i' = 5 - i$.

Aus den beiden Sternproduktformeln (2.47) und (2.57) lassen sich erneut Operatoren ableiten, die den Übergang von einer Normalordnung in die andere ermöglichen. Im vorliegenden Fall lauten diese

$$\begin{aligned} &\hat{U}^{-1}\tilde{f}(\underline{x}) \\ = &\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \frac{(x^2x^3)^i}{[[i]]_{q^{-2}}!} q^{-(\hat{n}_2+\hat{n}_3)(\hat{n}_1+\hat{n}_4+i)} (D^4_{q^{-2}} D^1_{q^{-2}})^i \tilde{f}(\underline{x}), \end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned} &\hat{U} f(\underline{x}) \\ = &\sum_{i=0}^{\infty} (-\lambda)^i \frac{(x^2x^3)^i}{[[i]]_{q^2}!} q^{(\hat{n}_2+\hat{n}_3)(\hat{n}_1+\hat{n}_4+i)} (D^1_{q^2} D^4_{q^2})^i f(\underline{x}), \end{aligned} \tag{2.61}$$

wobei $\widetilde{f}$ wieder eine Funktion bezeichnet, die zum Algebra-Isomorphismus $\widetilde{\mathcal{W}}$ korrespondiert, während$f$ sich entsprechend auf die zu $\mathcal{W}$ gehörende Nomalordnung bezieht. Die Operatoren zur impliziten Sternmultiplikation lauten nun

$$\begin{aligned} &m_{x,x'}(f(\underline{x}, \underline{x}') \\ = &\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \frac{(x^2x^3)^i}{[[i]]_{q^{-2}}!} q^{-(\hat{n}_2+\hat{n}_3)\hat{n}'_1 - (\hat{n}'_2+\hat{n}'_3)\hat{n}_4} (D^4_{q^{-2}} D'^1_{q^{-2}})^i f(\underline{x}, \underline{x}'), \end{aligned} \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{m}_{x,x'}(f(\underline{x}, \underline{x}') \\ = &\sum_{i=0}^{\infty} (-\lambda)^i \frac{(x^2x^3)^i}{[[i]]_{q^{=2}}!} q^{(\hat{n}_2+\hat{n}_3)\hat{n}'_4 + (\hat{n}'_2+\hat{n}'_3)\hat{n}_1} (D^1_{q^2} D'^4_{q^2})^i \tilde{f}(\underline{x}, \underline{x}'). \end{aligned} \tag{2.63}$$

Abschließend soll noch das Sternprodukt für die kovarianten Koordinaten X_i angegeben werden, die aus den kontravarianten Koordinaten X^i durch die Identitäten

$$X_1 = q^{-1}X^4, \quad X_2 = X^3, \quad X_3 = X^2, \quad X_4 = qX^1 \tag{2.64}$$

hervorgehen. Ihre Algebra wird bestimmt durch die Relationen

$$\begin{aligned} X_2X_1 &= qX_1X_2, \\ X_3X_1 &= qX_1X_3, \\ X_4X_3 &= qX_3X_4, \\ X_4X_2 &= qX_2X_4, \\ X_2X_3 &= X_3X_2, \\ X_1X_4 &= X_4X_1 + \lambda X_2X_3. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Durch Vergleich mit (2.41) lässt sich wieder feststellen, dass sämtliche Relationen für die kovarianten Koordinaten aus jenen der kontravarianten Koordinaten durch eine einfache Ersetzung hervorgehen, nämlich

$$X^i \rightarrow X_{i'} \quad \text{bzw.} \quad x^i \rightarrow x_{i'}, \tag{2.66}$$

wobei natürlich $i = 1, \ldots, 4$ und $i' = 5 - i$.

2.3 Minkowski-Raum

Nach der Behandlung der q-deformierten Euklidischen Räume in drei und vier Dimensionen wollen wir uns dem q-deformierten Minkowski-Raum [38], [39], [40][3] zuwenden, der aus physikalischer Sicht besonders interessant ist. Dieser wird von den vier Koordinaten X^0, X^+, X^3 und X^-aufgespannt, die den folgenden Relationen genügen [42], [34]:

$$\begin{aligned} X^\mu X^0 &= X^0 X^\mu, \quad \mu = \{0, +, -, 3\}, \\ X^-X^3 - q^2X^3X^- &= -q\lambda X^0X^-, \\ X^3X^+ - q^2X^+X^3 &= -q\lambda X^0X^+, \\ X^-X^+ - X^+X^- &= \lambda(X^3X^3 - X^0X^3). \end{aligned} \tag{2.67}$$

[3]Eine etwas andere Version des q-deformierten Minkowski-Raumes findet sich in [41].

Dabei lässt sich das in der Algebra zentrale Element X^0 als Zeitkoordinate interpretieren. Bei vielen Rechnungen erweist es sich als zweckmäßig, anstelle der drei Raumkoordinaten X^+, X^3 und X^- eine reine Lichtkegelbasis zu verwenden, indem man die Koordinate X^3 durch

$$X^{3/0} = X^3 - X^0 \tag{2.68}$$

ersetzt und statt dessen von den Relationen

$$\begin{aligned} X^\mu X^0 &= X^0 X^\mu, \quad \mu = \{0, +, -, 3/0\}, \\ X^\pm X^{3/0} &= q^{\mp 2} X^{3/0} X^\pm, \\ X^- X^+ - X^+ X^- &= \lambda (X^{3/0} X^{3/0} + X^0 X^{3/0}) \end{aligned} \tag{2.69}$$

ausgeht.

Der Algebra-Isomorphismus $\mathcal{W}$ zwischen der kommutativen Koordinatenalgebra und dem q-deformierten Minkowski-Raum ist eindeutig festgelegt durch die Vereinbarung

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}\left((x^0)^{n_0}(x^+)^{n_+}(x^{3/0})^{n_{3/0}}(x^-)^{n_-}\right) \\ &= (X^0)^{n_0}(X^+)^{n_+}(X^{3/0})^{n_{3/0}}(X^-)^{n_-}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Für die Berechung des Sternproduktes ist es wieder sinnvoll, zuerst die Ausdrücke der Form $(X^{3/0})^{n_{3/0}}(X^+)^{m_+}$, $(X^-)^{n_-}(X^{3/0})^{m_{3/0}}$ und $(X^-)^{n_-}(X^+)^{m_+}$ in Normalordnung umzuschreiben. In den ersten beiden Fällen erhält man ohne Probleme einfache Ergebnisse, nämlich

$$\begin{aligned} (X^{3/0})^{n_{3/0}}(X^+)^{m_+} &= q^{2n_{3/0}m_+}(X^+)^{m_+}(X^{3/0})^{n_{3/0}}, \\ (X^-)^{n_-}(X^{3/0})^{m_{3/0}} &= q^{2m_{3/0}n_-}(X^{3/0})^{m_{3/0}}(X^-)^{n_-}. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Um das Monom $(X^-)^{n_-}(X^+)^{m_+}$ in die durch (2.70) festgelegte Normalordnung zu bringen, kann man analog zu den vorangehenden Abschnitten einen Ansatz versuchen, der dann für die unbekannten Koeffizienten auf eine Rekursionsrelation führt. Dieser Weg erweist sich aber als nicht besonders geeignet, um das Sternprodukt in Operatorform auszudrücken [33], weshalb wir an dieser Stelle ein anderes Vorgehen bevorzugen.

Die Normalordnung des Monoms $(X^-)^{n_-}(X^+)^{m_+}$ gelingt nämlich verhältnismäßig leicht, wenn man die Algebra des q-Minkowski-Raumes mit der Algebra $\mathcal{U}_q(sl_2)$ [43], [44] in Verbindung bringt. Letztere wird von den vier

Generatoren E, F, K, K^{-1} aufgespannt, welche ihrerseits den Relationen

$$\begin{aligned} KK^{-1} &= K^{-1}K, \\ KE &= q^2 EK, \\ KF &= q^{-2} FK, \\ EF - FE &= \lambda^{-1}(K - K^{-1}) \end{aligned} \tag{2.72}$$

genügen. Definieren wir weiterhin die Operatoren

$$\begin{aligned} L^+ &= q^{-3}[2]^{-1/2} E, \\ L^- &= -q^{-2}[2]^{-1/2} KF, \\ L^3 &= q^{-3}[2]^{-1}(qFE - q^{-1}EF), \\ W &= K + q^3 \lambda L^3, \end{aligned} \tag{2.73}$$

so findet man, dass diese eine echte Unteralgebra von $\mathcal{U}_q(sl_2)$ bilden und dabei den folgenden Relationen genügen [28]:

$$\begin{aligned} L^A W &= L^A W, \quad A \in \{+, 3, -\}, \\ L^3 L^+ - q^2 L^+ L^3 &= -q^{-2} W L^+, \\ L^- L^3 - q^2 L^3 L^- &= -q^{-2} W L^-, \\ L^- L^+ - L^+ L^- &= -q^{-3} W L^3 + \lambda L^3 L^3. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Allerdings ist zu berücksichtigen, dass die Generatoren W, L^+, L^- und L^3 nicht unabhängig voneinander sind, da sie zusätzlich zu den Relationen (2.74) noch die Identität [45]

$$W^2 - q^6 \lambda^2 (L^3 L^3 - q L^+ L^- - q^{-1} L^- L^+) = 1 \tag{2.75}$$

erfüllen. Durch Anwendung der Ersetzungen

$$\begin{aligned} L^A &\to X^A, \quad A \in \{+, -, 3\}, \\ W &\to q^3 \lambda X^0, \\ 1 &\to q^6 \lambda^2 \hat{r}^2, \end{aligned} \tag{2.76}$$

erhalten wir aus den Vertauschungsrelationen (2.74) wieder die Relationen (2.67) des q-deformierten Minkowski-Raumes zurück. Außerdem geht die Identität (2.75) in den Ausdruck für die Viererlänge über, nämlich

$$\hat{r}^2 = X^0 X^0 - X^3 X^3 + q X^+ X^- + q^{-1} X^- X^+. \tag{2.77}$$

Mit diesen Identifikationen lassen sich nun Identitäten, die in der Algebra $\mathcal{U}_q(sl_2)$ gelten, in solche des q-deformierten Minkowski-Raumes überführen. So gilt nach [26] für beliebige Potenzen von F und E die Vertauschungsrelation

$$\begin{aligned} F^n E^m &= E^m F^n \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\min\{n,m\}} (-\lambda)^i \frac{[n]![m]!}{[i]![n-i]![m-i]!} \\ &\qquad \cdot \hat{P}_i^{n,m}(K, K^{-1})\, E^{m-i} F^{n-i}, \end{aligned} \tag{2.78}$$

wobei

$$\hat{P}_i^{n,m}(A,B) = \prod_{j=0}^{i-1} \left(q^{n-m+j} A - q^{-n+m-j} B \right). \tag{2.79}$$

Diese Formel kann unter Verwendung der in (2.73) definierten Generatoren sowie des durch (2.76) beschriebenen Algebra-Isomorphismuses umgeschrieben werden in die Identität

$$\begin{aligned} (X^-)^n (X^+)^m &= q^{2nm} (X^+)^m (X^-)^n \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\min\{n,m\}} \left(-\frac{\lambda}{\lambda_+} \right)^i \frac{[n]![m]!}{[i]![n-i]![m-i]!}\, q^{2m(n-i)+i^2} \\ &\qquad \cdot \hat{P}_i^{n,m}(X^{3/0}, \hat{r}^2)\, (X^+)^{m-i} (X^-)^{n-i}, \end{aligned} \tag{2.80}$$

wobei $\lambda_+ = q + q^{-1}$. Um diesen Ausdruck in die vorgegebene Normalordnung überführen zu können, müssen wir weiterhin das Produkt $P_i^{n,m}$ ausmultiplizieren. Da die Argumente von $P_i^{n,m}$ vertauschen, gelingt dies relativ einfach unter Verwendung der q-deformierten Version des Binomialtheorems [46]. Wir erhalten dann als Ergebnis

$$P_i^{n,m}(A,B) = \sum_{k=0}^{i} q^{(1/2i-k)(i-1)-(n-m)(2k-i)} \frac{[i]!}{[k]![i-k]!} (A)^{i-k} (-B)^k \tag{2.81}$$

und können somit schreiben

$$\begin{aligned} & P_i^{n,m}(X^{3/0}, \hat{r}^2)\, (X^+)^{m-i} (X^-)^{n-i} \\ = & \sum_{k=0}^{i} (-1)^k q^{(1/2i-k)(i-1)+2i(m-i)} \frac{[i]!}{[k]![i-k]!} \\ & \cdot (q^{i-2k} X^+)^{m-i} (X^{3/0})^{2(i-k)}\, \hat{r}^{2k} (q^{i-2k} X^-)^{n-i}. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Die vollständige Normalordnung dieses Terms beschränkt sich damit auf $(X^{3/0})^j \hat{r}^{2k}$. Man kann sich aber leicht überlegen, dass für diesen Ausdruck gilt

$$\begin{aligned} & \mathcal{W}^{-1}((X^{3/0})^j \hat{r}^{2k})) \\ =\ & \mathcal{W}^{-1}((X^{3/0})^j)\mathcal{W}^{-1}(\hat{r}^{2k}) \\ =\ & (x^{3/0}q^{2\hat{n}_+})^j \mathcal{W}^{-1}(\hat{r}^{2k}) \end{aligned} \tag{2.83}$$

mit

$$\begin{aligned} & \mathcal{W}^{-1}(\hat{r}^{2k}) \\ =\ & \sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{1} \left([a_{q^{-1}}(x^{3/0}q^{2\hat{n}_+})]^{j_1} b^{1-j_1}\right) \ldots \left([a_{q^{-1}}(x^{3/0}q^{2\hat{n}_+})]^{j_k} b^{1-j_k}\right), \end{aligned} \tag{2.84}$$

wobei wir als Abkürzungen verwendet haben

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{-1}(\hat{r}^2) &= a_{q^{-1}}(x^{3/0}) + b, \\ a_q(x^{3/0}) &= -q^2(x^{3/0})^2 - (1+q^2)x^0 x^{3/0}, \\ b &= x^+ x^-. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Einfache kombinatorische Überlegungen führen dann zu den Umformungen

$$\begin{aligned} & \mathcal{W}^{-1}(\hat{r}^{2k}) \\ =\ & \sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{1} (\lambda_+ b)^{\sum_{v=1}^{k}(1-j_v)} \prod_{l=1}^{k} \left(a_{q^{-1}}^{j_l}\left(x^{3/0}q^{2\sum_{v=l}^{k}(1-j_v)}\right)\right)^{j_l} \\ =\ & \sum_{v=0}^{k} b^v (S_q)_{k,v}(x^0, x^{3/0}) \end{aligned} \tag{2.86}$$

mit

$$\begin{aligned} & (S_q)_{k,v}(x^0, x^{3/0}) \\ =\ & \begin{cases} 1, & \text{falls } v = k \\ \sum_{j_1=0}^{v}\sum_{j_2=0}^{j_1}\ldots\sum_{j_{k-v}=0}^{j_{k-v-1}}\prod_{l=1}^{k-v} a_{q^{-1}}(q^{2j_l}x^{3/0}), & \text{falls } 0 \leq v < k. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.87}$$

Fügen wir nun die Ergebnisse von (2.83) bis (2.87) zusammen, so erhalten wir den Ausdruck

$$\begin{aligned} & \mathcal{W}^{-1}((X^{3/0})^j \hat{r}^{2k})) \\ =\ & (x^{3/0})^{2j} \sum_{v=0}^{k} (q^{4j}\lambda_+ x^+ x^-)^v (S_q)_{k,v}(x^0, x^{3/0}). \end{aligned} \tag{2.88}$$

Aus den Formeln (2.71), (2.80), (2.82) und (2.88) können wir jetzt für das Sternprodukt den Operatorausdruck

$$
\begin{aligned}
& f \star g && (2.89) \\
= & \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda_+} \right)^i \sum_{k+j=i} \frac{(R_q)_{k,j}(\underline{x})}{[[k]]_{q^2}![[j]]_{q^2}!} \, q^{(2\hat{n}_3 - \hat{n}_- + i)\hat{n}'_+ + (2\hat{n}'_3 - \hat{n}'_+ + i)\hat{n}_-} \\
& \cdot \left((D^-_{q^2})^i f \right) \left(x^0, x^+, x^{3/0}, q^{j-k} x^- \right) \\
& \cdot \left((D^+_{q^2})^i g \right) \left((x^0)', q^{j-k}(x^+)', (x^{3/0})', (x^-)' \right) \Big|_{x' \to x}
\end{aligned}
$$

ableiten, wobei

$$
\begin{aligned}
& (R_q)_{k,j}(\underline{x}) && (2.90) \\
= & \mathcal{W}^{-1}(q^{j^2+k}(X^{3/0})^{2j}(-\hat{r}^2)^k) \\
= & (-1)^k q^{j^2+k} (x^{3/0})^{2j} \sum_{p=0}^{k} \lambda_+^p (q^{4j} x^+ x^-)^p \, (S_q)_{k,p}(x^0, x^{3/0}).
\end{aligned}
$$

Wie in den beiden vorangegangenen Kapiteln lassen sich mit dieser Formel wieder leicht die Relationen finden, welche bei der Einführung inverser Elemente zusätzlich zu berücksichtigen sind. In bekannter Weise definieren wir

$$
\mathcal{W}\left((x^\mu)^{-1} \right) = (X^\mu)^{-1}, \quad \mu \in \{0, +, -, 3/0\}. \tag{2.91}
$$

Damit gilt natürlich

$$
X^\mu (X^\mu)^{-1} = (X^\mu)^{-1} X^\mu = 1, \quad \mu \in \{0, +, -, 3/0\}. \tag{2.92}
$$

Die verbleibenden Vertauschungsrelationen zwischen Koordinaten und inversen Elementen lauten nun

$$
\begin{aligned}
X^0 (X^\mu)^{-1} &= (X^\mu)^{-1} X^0, \quad \mu \in \{0, +, -, 3/0\}, && (2.93) \\
(X^{3/0})^{-1} X^\pm &= q^{\mp 2} X^\pm (X^{3/0})^{-1}, \\
(X^\pm)^{-1} X^{3/0} &= q^{\pm 2} X^{3/0} (X^\pm)^{-1}, \\
X^- (X^+)^{-1} &= (X^+)^{-1} X^- - q^{-2} \lambda (X^+)^{-2} (q^{-2} X^{3/0} + X^0) X^{3/0}, \\
(X^-)^{-1} X^+ &= X^+ (X^-)^{-1} - q^{-2} \lambda X^{3/0} (q^{-2} X^{3/0} + X^0)(X^-)^{-2}.
\end{aligned}
$$

Für die Relationen, welche die inversen Elemente untereinander erfüllen, findet man schließlich

$$\begin{aligned}
(X^0)^{-1}(X^\mu)^{-1} &= (X^\mu)^{-1}(X^0)^{-1}, \quad \mu \in \{0,+,-,3/0\}, \\
(X^{3/0})^{-1}(X^\pm)^{-1} &= q^{\pm 2}(X^\pm)^{-1}(X^{3/0})^{-1}, \\
(X^-)^{-1}(X^+)^{-1} &= q^2 \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda\lambda_+^{-1})^i \, [[i]]_{q^2}! \left(\begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix}_{q^{-2}} \right)^2 \\
&\quad \cdot \sum_{j+k=i} (-q^6)^k q^{i(i+2k)} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \sum_{p=0}^{k} (q^{4j}\lambda_+)^p \\
&\quad \cdot (X^+)^{p-(i+1)} (X^{3/0})^{2j} \, (S_q)_{k,p}(X^0, X^{3/0})(X^-)^{p-(i+1)}.
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Aus der Konjugation der Koordinaten des Minkowski-Raumes, die gegeben ist durch [34]

$$\overline{X^0} = X^0, \quad \overline{X^{3/0}} = X^{3/0}, \quad \overline{X^+} = -qX^-, \quad \overline{X^-} = -q^{-1}X^+, \tag{2.95}$$

können wir wieder eine Konjugation der inversen Elemente ableiten, so dass gilt

$$\overline{(X^\mu)^{-1}} = (\overline{X^\mu})^{-1}, \quad \mu \in \{0,+,-,3/0\}. \tag{2.96}$$

Dies bedeutet in expliziter Form

$$\begin{aligned}
\overline{(X^0)^{-1}} &= (X^0)^{-1}, \\
\overline{(X^{3/0})^{-1}} &= (X^{3/0})^{-1}, \\
\overline{(X^\pm)^{-1}} &= -q^{\mp 1}(X^\mp)^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Ändern wir die Normalordnung nun in der Weise ab, dass der Algebra-Isomorphismus definiert wird durch

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{W}}\left((x^0)^{n_0}(x^+)^{n_+}(x^{3/0})^{n_{3/0}}(x^-)^{n_-}\right) \\
&= (X^0)^{n_0}(X^-)^{n_-}(X^{3/0})^{n_{3/0}}(X^+)^{n_+},
\end{aligned} \tag{2.98}$$

so findet man jetzt für den allgemeinen Ausdruck des Sternproduktes

$$\begin{aligned}
& f \,\tilde{\star}\, g \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{\lambda}{\lambda_+}\right)^i \sum_{k+j=i} \frac{(R_{q^{-1}})_{k,j}(\underline{x})}{[[k]]_{q^{-2}}![[j]]_{q^{-2}}!} \, q^{-(2\hat{n}_3 - \hat{n}_+ + i)\hat{n}'_- - (2\hat{n}'_3 - \hat{n}'_- + i)\hat{n}_+} \\
&\quad \cdot \left((D^+_{q^{-2}})^i f\right)\left(x^0, x^+, x^{3/0}, q^{k-j}x^-\right) \\
&\quad \cdot \left((D^-_{q^{-2}})^i g\right)\left((x^0)', q^{k-j}(x^+)', (x^{3/0})', (x^-)'\right)\Big|_{x' \to x}.
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Die Transformationsformel, die den Übergang zwischen den beiden Sternproduktformeln (2.89) und (2.99) beschreibt, lässt sich jetzt darstellen als

$$f \star g \overset{\pm \leftrightarrow \mp}{\underset{q \leftrightarrow 1/q}{\longleftrightarrow}} f \,\tilde{\star}\, g, \tag{2.100}$$

womit wieder folgender Übergang symbolisiert werden soll:

$$D^{\pm}_{q^a} \rightarrow D^{\mp}_{q^{-a}}, \quad \hat{n}_{\pm} \rightarrow -\hat{n}_{\mp}, \quad q^{\pm 1} \rightarrow q^{\mp 1}. \tag{2.101}$$

Weiterhin können diese Sternproduktformeln (2.89) und (2.99) benutzt werden, um Umordnungsoperatoren zu berechnen, nämlich

$$\begin{aligned}
&\hat{U}^{-1}\tilde{f} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda_+}\right)^i \sum_{k+j=i} \frac{(R_q)_{k,j}(\underline{x})}{[[k]]_{q^2}![[j]]_{q^2}!}\, q^{2\hat{n}_+\hat{n}_- + (\hat{n}_+ + \hat{n}_-)(2\hat{n}_3+i)+2\hat{n}_3 i} \\
&\quad \cdot \left((D^+_{q^2}D^-_{q^2})^i f\right)(x^0, q^{j-k}x^+, x^{3/0}, q^{j-k}x^-),
\end{aligned} \tag{2.102}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{U}f \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\left(-\frac{\lambda}{\lambda_+}\right)^i \sum_{k+j=i} \frac{(R_{q^{-1}})_{k,j}(\underline{x})}{[[k]]_{q^{-2}}![[j]]_{q^{-2}}!}\, q^{-2\hat{n}_+\hat{n}_- - (\hat{n}_+ + \hat{n}_-)(2\hat{n}_3+i)-2\hat{n}_3 i} \\
&\quad \cdot \left((D^+_{q^{-2}}D^-_{q^{-2}})^i f\right)(x^0, q^{k-j}x^+, x^{3/0}, q^{k-j}x^-),
\end{aligned} \tag{2.103}$$

wobei $\widetilde{f}$ wieder eine Funktion bezeichnet, die zum Algebra-Isomorphismus $\widetilde{\mathcal{W}}$ korrespondiert, während f sich entsprechend auf die zu $\mathcal{W}$ gehörende Normalordnung bezieht. Und für das implizite Sternprodukt haben wir die Formeln

$$\begin{aligned}
&m_{x,x'}(f(\underline{x},\underline{x}') \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda_+}\right)^i \sum_{k+j=i} \frac{(R_q)_{k,j}(\underline{x})}{[[k]]_{q^2}![[j]]_{q^2}!}\, q^{(2\hat{n}_3+\hat{n}_- + i)\hat{n}'_+ + (2\hat{n}'_3+\hat{n}'_+ + i)\hat{n}_-} \\
&\quad \cdot \left(D^+_{q^2}D'^-_{q^2}\right)^i f(q^{j-k}x^-, q^{j-k}x'^+)\Big|_{x'\rightarrow x},
\end{aligned} \tag{2.104}$$

$$\tilde{m}_{x,x'}(f(\underline{x},\underline{x}') \tag{2.105}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{\lambda}{\lambda_+}\right)^i \sum_{k+j=i} \frac{(R_{q^{-1}})_{k,j}(\underline{x})}{[[k]]_{q^{-2}}![[j]]_{q^{-2}}!} q^{-(2\hat{n}_3+\hat{n}_++i)\hat{n}'_- - (2\hat{n}'_3+\hat{n}'_-+i)\hat{n}_+}$$
$$\cdot \left(D^-_{q^{-2}} D'^+_{q^{-2}}\right)^i f(q^{k-j}x^+, q^{k-j}x'^-)\Big|_{x'\to x}.$$

Für die kovarianten Koordinaten X_i, die mit den kontravarianten Koordinaten X^i durch die Identitäten

$$X_0 = X^0, \quad X_{3/0} = X^{3/0}, \quad X_+ = -qX^-, \quad X_- = -q^{-1}X^+ \tag{2.106}$$

verbunden sind, gelten die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} X_\mu X_0 &= X_0 X_\mu, \quad \mu \in \{0,+,-,3/0\}, \\ X_\pm X_{3/0} &= q^{\pm 2} X_{3/0} X_\pm, \\ X_+X_- - X_-X_+ &= \lambda\left(X_{3/0}X_{3/0} + X_0X_{3/0}\right). \end{aligned} \tag{2.107}$$

Durch Vergleich mit den Relationen (2.69) findet man wieder, dass die Relationen für die kovarianten Koordinaten aus jenen der kontravarianten Koordinaten durch die Ersetzungen

$$X^\pm \to X_\mp, \quad X^0 \to X_0, \quad X^{3/0} \to X_{3/0} \tag{2.108}$$

bzw.

$$x^\pm \to x_\mp, \quad x^0 \to x_0, \quad x^{3/0} \to x_{3/0} \tag{2.109}$$

hervorgehen.

Kapitel 3

Operatordarstellungen

Im vorhergehenden Kapitel hatten wir gesehen, dass die Einführung nichtkommutativer Koordinaten zu einem neuen Produkt zwischen kommutativen Funktionen führen kann, das als Sternprodukt bezeichnet wird. Für die nichtkommutativen Quantenraumalgebren lassen sich aber auch sogenannte kovariante Differentialkalküle konstruieren [15], [47]. Diese vermitteln auf den nichtkommutativen Koordinatenalgebren $\mathcal{A}_q$ eine Wirkung. Das Gleiche leisten auch die Hopf-Duale [48] der Quantengruppen, die sogenannten Quantenalgebren, die q-Deformationen der Einhüllenden von Lie-Algebren darstellen. Allgemein induziert nun jede Wirkung einer Algebra $\mathcal{H}$ auf der nichtkommutativen Algebra $\mathcal{A}_q$ mittels des Algebren-Isomorphismuses $\mathcal{W}$ auch eine Wirkung von $\mathcal{H}$ auf der korrespondierenden kommutativen Algebra $\mathcal{A}$, indem wir vereinbaren

$$\mathcal{W}(h \triangleright f) = h \triangleright \mathcal{W}(f), \quad h \in \mathcal{H}, \quad f \in \mathcal{A}. \tag{3.1}$$

Im Folgenden wollen wir nun für die von uns betrachteten Quantenräume die Darstellungen ihrer kovarianten Differentialkalküle auf den zugehörigen kommutativen Koordinatenalgebren bestimmen [49], [50]. Als Ergebnis dieser Berechnungen werden wir feststellen, dass die Darstellungen der partiellen Ableitungen gemäß

$$\partial^A f = (\partial^A f)_0 + \sum_{i>0} \lambda^i (\partial^A f)_i \tag{3.2}$$

in einen klassischen Beitrag sowie einen Anteil, der aus Korrekturen in Potenzen von λ besteht, zerfallen. Während die Korrekturterme $(\partial^A f)_i$ im klassischen Limes $q = 1$ verschwinden, geht der Beitrag $(\partial^A f)_0$ für diesen Fall in die gewöhnlichen Ableitungen über. Die Bedeutung der Korrekurterme wird deutlich, wenn man beachtet, dass die partiellen Ableitungen Raum- bzw. Zeitverschiebungen generieren. Sie bewirken nämlich, dass Verschiebungen in einer bestimmten Richtung auch von Veränderungen in anderen Richtungen begleitet werden. Nichtkommutative Räume verhalten sich also wie Festkörper, in denen die Nichtkommutativität wie bei einem Gitter auf einer Verkopplung der einzelnen Freiheitsgrade beruht. Bemerkenswert ist auch, dass bei den Euklidischen Räumen die Korrekturterme höchstens von zweiter Ordnung in λ sind, während im Minkowski-Raum grundsetzlich für jede Ordnung von λ entsprechende Korrekturen existieren.

3.1 Euklidischer Raum in drei Dimensionen

In [45] wurde gezeigt, wie sich auf dem dreidimensionalen q-deformierten Euklidischen Raum partielle Ableitungen einführen lassen. Die dabei angestellten Überlegungen ergaben, dass die Vertauschungsrelationen zwischen partiellen Ableitungen und räumlichen Koordinaten die Form

$$\partial^A X^B = g^{AB} + (\hat{R}^{-1})^{AB}_{CD} X^C \partial^D, \quad A,B,C,D \in \{3,\pm\}, \tag{3.3}$$

annehmen, wobei $\hat{R}^{-1}$ die inverse R-Matrix der Quantengruppe $SO_q(3)$ bezeichnet und g^{AB} die zugehörige Metrik. Explizit ausgeschrieben ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\partial^+ X^+ &= X^+ \partial^+, \\
\partial^+ X^3 &= q^2 X^3 \partial^+ - q^2 \lambda\lambda_+ X^+ \partial^3, \\
\partial^+ X^- &= -q + q^4 X^- \partial^+ - q^3 \lambda\lambda_+ X^3 \partial^3 + q^3 \lambda^2 \lambda_+ X^+ \partial^-,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
\partial^3 X^+ &= q^2 X^+ \partial^3, \\
\partial^3 X^3 &= 1 + q^2 X^3 \partial^3 - q^3 \lambda\lambda_+ X^+ \partial^-, \\
\partial^3 X^- &= q^2 X^- \partial^3 - q^2 \lambda\lambda_+ X^3 \partial^-,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
\partial^- X^+ &= -q^{-1} + q^4 X^+ \partial^-, \\
\partial^- X^3 &= q^2 X^3 \partial^-, \\
\partial^- X^- &= X^- \partial^-.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Konjugiert man die Relationen (3.3) unter Berücksichtigung der Identitäten [34]

$$\overline{\partial^+} = -q\bar{\partial}^-, \quad \overline{\partial^3} = \bar{\partial}^3, \quad \overline{\partial^-} = -q^{-1}\bar{\partial}^+, \tag{3.7}$$

so folgt

$$\bar{\partial}^A X^B = -q^{-6} g^{AB} + (\hat{R})^{AB}_{CD} X^C \bar{\partial}^D, \quad A, B, C, D \in \{3, \pm\}, \tag{3.8}$$

oder mit $\hat{\partial}^A = -q^6 \bar{\partial}^A$ in expliziter Form

$$\begin{aligned}
\hat{\partial}^+ X^+ &= X^+ \hat{\partial}^+, \\
\hat{\partial}^+ X^3 &= q^{-2} X^3 \hat{\partial}^+, \\
\hat{\partial}^+ X^- &= -q + q^{-4} X^- \hat{\partial}^+,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\partial}^3 X^+ &= q^{-2} X^+ \hat{\partial}^3 + q^{-2} \lambda\lambda_+ X^3 \hat{\partial}^+, \\
\hat{\partial}^3 X^3 &= 1 + q^{-2} X^3 \hat{\partial}^3 + q^{-3} \lambda\lambda_+ X^- \hat{\partial}^+, \\
\hat{\partial}^3 X^- &= q^{-2} X^- \hat{\partial}^3,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\partial}^- X^+ &= -q^{-1} + q^{-4} X^+ \hat{\partial}^- + q^{-3} \lambda\lambda_+ X^3 \hat{\partial}^3 + q^{-3} \lambda^{-2} \lambda_+ X^- \hat{\partial}^+, \\
\hat{\partial}^- X^3 &= q^{-2} X^3 \hat{\partial}^- + q^{-2} \lambda\lambda_+ X^- \hat{\partial}^3, \\
\hat{\partial}^- X^- &= X^- \hat{\partial}^-.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Die Quantenalgebra $U_q(su_2)$ des q-deformierten Euklidischen Raumes mit drei Dimensionen wird von den drei Generatoren L^+, L^- und $\tau^{-1/2}$ aufgespannt. Diese Algebra kann mit einer q-deformierten Version der dreidimensionalen Drehimpulsalgebra in Verbindung gebracht werden. Für die Vertauschungsrelationen zwischen ihren Generatoren und den räumlichen Koordinaten gilt nach [34][1]

$$\begin{aligned}
L^+ X^+ &= X^+ L^+, \\
L^+ X^3 &= X^3 L^+ - q X^+ \tau^{-\frac{1}{2}}, \\
L^+ X^- &= X^- L^+ - X^3 \tau^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
L^- X^+ &= X^+ L^- + X^3 \tau^{-\frac{1}{2}}, \\
L^- X^3 &= X^3 L^- + q^{-1} X^- \tau^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{3.13}$$

[1] Man beachte, dass im Vergleich zu [34] die Normierung der Generatoren $L^{\pm}$ geändert wurde.

$$\begin{aligned} L^- X^- &= X^- L^-, \\ \tau^{-\frac{1}{2}} X^\pm &= q^{\pm 2} X^\pm \tau^{-\frac{1}{2}}, \\ \tau^{-\frac{1}{2}} X^3 &= X^3 \tau^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Multipliziert man diese Relationen in geeigneter Weise mit den inversen Koordinaten, gewinnt man leicht die Vertauschungsrelationen zwischen den Generatoren der $U_q(su_2)$ und den inversen Elementen $(X^{-1})^A$,

$$\begin{aligned} L^+(X^+)^{-1} &= (X^+)^{-1} L^+, \\ L^+(X^3)^{-1} &= (X^3)^{-1} L^+ + q^{-1} X^+ (X^3)^{-2} \tau^{-\frac{1}{2}}, \\ L^+(X^-)^{-1} &= (X^-)^{-1} L^+ + q^{-1} X^3 (X^-)^{-2} \tau^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} L^-(X^-)^{-1} &= (X^-)^{-1} L^-, \\ L^-(X^3)^{-1} &= (X^3)^{-1} L^- - q^{-3} (X^3)^{-2} X^- \tau^{-\frac{1}{2}}, \\ L^-(X^+)^{-1} &= (X^+)^{-1} L^- - q^{-4} (X^+)^{-2} X^3 \tau^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} \tau^{-\frac{1}{2}}(X^\pm)^{-1} &= q^{\mp 2} (X^\pm)^{-1} \tau^{-\frac{1}{2}}, \\ \tau^{-\frac{1}{2}}(X^3)^{-1} &= (X^3)^{-1} \tau^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Diese Relationen erweisen sich als invariant unter Konjugation, falls man für die Quantenalgebra $U_q(su_2)$ eine Realitätsstruktur [34] mit

$$\overline{L^\pm} = -q^{\pm 1} L^\pm, \quad \overline{\tau^{-1/2}} = \tau^{-1/2} \tag{3.18}$$

wählt und für die Koordinaten bzw. ihre Inversen die aus Kapitel 2.1 bekannte Konjugation benutzt.

Die Quantenalgebra $U_q(su_2)$ ist außerdem eine Hopfalgebra, weshalb auch eine Hopfstruktur existiert, die sich nach [45] und [28] wie folgt angeben lässt:

$$\begin{aligned} \Delta(L^\pm) &= L^\pm \otimes \tau^{-\frac{1}{2}} + 1 \otimes L^\pm, \\ \Delta(\tau^{\frac{1}{2}}) &= \tau^{\frac{1}{2}} \otimes \tau^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} S(L^\pm) &= -L^\pm \tau^{\frac{1}{2}}, \\ S(\tau^{\frac{1}{2}}) &= \tau^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(L^\pm) &= 0, \\ \varepsilon(\tau^{\frac{1}{2}}) &= 1. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Für die Ableitungen ∂^+, ∂^- und ∂^3 kann man ebenfalls eine Hopfstruktur finden[2]. Zur Berechnung des Coproduktes geht man zunächst von einem Ansatz der Form

$$\Delta(\partial^A) = \partial^A \otimes 1 + \hat{O}^A_B \otimes \partial^B \tag{3.22}$$

aus und bestimmt die Operatoren $\hat{O}^A_B$ derart, dass mit diesem Coprodukt gilt

$$\partial^A X^B = (\partial^A_{(1)} \triangleright X^B)\partial^A_{(2)}, \tag{3.23}$$

also die Vertauschungsrelationen (3.4)-(3.6) erhalten werden[3]. Für die Ableitung ∂^-, welche die einfachsten Vertauschungsrelationen mit den Koordinaten erfüllt, findet man dann ohne Mühe

$$\Delta(\partial^-) = \partial^- \otimes 1 + \Lambda^{\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}} \otimes \partial^-, \tag{3.24}$$

wobei wir einen sogenannten Skalierungsoperator Λ mit

$$\begin{aligned} \Lambda(X^A)^{\pm 1} &= q^{\pm 4}(X^A)^{\pm 1}\Lambda, \quad A = \{\pm, 3\}, \\ \Lambda\partial^A &= q^{-4}\partial^A\Lambda, \\ \Lambda L^{\pm} &= L^{\pm}\Lambda, \\ \Lambda\tau^{\pm\frac{1}{2}} &= \tau^{\pm\frac{1}{2}}\Lambda \end{aligned} \tag{3.25}$$

eingeführt haben. Der Skalierungsoperator vertauscht also mit jedem Element der Quantenalgebra. Er ist außerdem unitär wegen

$$\overline{\Lambda} = \Lambda^{-1}, \tag{3.26}$$

und besitzt eine Hopfstruktur mit

$$\begin{aligned} \Delta(\Lambda) &= \Lambda \otimes \Lambda, \\ S(\Lambda) &= \Lambda^{-1}, \\ \varepsilon(\Lambda) &= 1. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Aus (3.24) lassen sich dann die anderen Coprodukte leicht berechnen, indem man ausnutzt

$$\begin{aligned} \Delta(\partial^3) &= \Delta(L^+ \triangleright \partial^-) = \triangle(L^+) \triangleright \triangle(\partial^-), \\ \Delta(\partial^-) &= \Delta(qL^- \triangleright \partial^3) = \triangle(qL^-) \triangleright \triangle(\partial^-). \end{aligned} \tag{3.28}$$

[2]Genauer gesagt bildet die Algebra der partiellen Ableitungen eine verzopfte Hopfalgebra, deren Bosonisierung eine gewöhnliche Hopfalgebra liefert. Näheres hierzu siehe in [27].

[3]Wir verwenden an dieser Stelle zur Bezeichnung des Coproduktes die sogenannte Sweedler Notation .

Diese Rechnungen führen zu dem Ergebnis

$$\begin{aligned}\Delta(\partial^-) &= \partial^- \otimes 1 + \Lambda^{\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}} \otimes \partial^-, \\ \Delta(\partial^3) &= \partial^3 \otimes 1 + \Lambda^{\frac{1}{2}} \otimes \partial^3 + \lambda\lambda_+\Lambda^{\frac{1}{2}}L^+ \otimes \partial^-, \\ \Delta(\partial^+) &= \partial^+ \otimes 1 + \Lambda^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}} \otimes \partial^+ + q\lambda\lambda_+\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}L^+ \otimes \partial^3 \\ &\quad + q^2\lambda^2\lambda_+\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}(L^+)^2 \otimes \partial^-.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Die Coeins der Ableitungen folgt sofort aus der Identität

$$\varepsilon(\partial^A) = \partial^A \triangleright 1 = 0, \quad A = \{\pm, 3\}. \tag{3.30}$$

Für die Berechnung der Antipode nutzt man die Relation

$$\varepsilon(\partial^A) = S(\partial^A_{(1)})\partial^A_{(2)} \tag{3.31}$$

aus und erhält auf diese Weise

$$\begin{aligned}S(\partial^-) &= -\Lambda^{-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}\partial^-, \\ S(\partial^3) &= -\Lambda^{-\frac{1}{2}}\partial^3 + q^2\lambda\lambda_+\Lambda^{-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}L^+\partial^-, \\ S(\partial^+) &= -\Lambda^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}}\partial^+ + q\lambda\lambda_+\Lambda^{-\frac{1}{2}}L^+\partial^3 - q^4\lambda^2\lambda_+\Lambda^{-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}(L^+)^2\partial^-.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Entsprechend lässt sich mit der Identiät

$$\varepsilon(\partial^A) = \partial^A_{(2)}S^{-1}(\partial^A_{(1)})$$

sofort die Inverse der Antipode bestimmen, nämlich

$$\begin{aligned}S^{-1}(\partial^-) &= -\partial^-\Lambda^{-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}, \\ S^{-1}(\partial^3) &= -\partial^3\Lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda\lambda_+\partial^-\Lambda^{-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}L^+, \\ S^{-1}(\partial^+) &= -\partial^+\Lambda^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}} + q^{-1}\lambda\lambda_+\partial^3\Lambda^{-\frac{1}{2}}L^+ + \lambda^2\lambda_+\partial^-\Lambda^{-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}(L^+)^2.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Führt man die gleichen Überlegungen nun mit den konjugierten Ableitungen durch, d.h. geht man anstelle von (3.3) von den Relationen (3.8) aus, so erhält man eine andere Hopfstruktur, nämlich

$$\begin{aligned}\Delta(\bar{\partial}^+) &= \bar{\partial}^+ \otimes 1 + \Lambda^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}} \otimes \bar{\partial}^+, \\ \Delta(\bar{\partial}^3) &= \bar{\partial}^3 \otimes 1 + \Lambda^{-\frac{1}{2}} \otimes \bar{\partial}^3 + \lambda\lambda_+\Lambda^{-\frac{1}{2}}L^- \otimes \bar{\partial}^+, \\ \Delta(\bar{\partial}^-) &= \bar{\partial}^- \otimes 1 + \Lambda^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}} \otimes \bar{\partial}^- + q^{-1}\lambda\lambda_+\Lambda^{-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}L^- \otimes \bar{\partial}^3\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$
\begin{aligned}
&+ q^{-2}\lambda^2\lambda_+\Lambda^{-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}(L^-)^2 \otimes \bar{\partial}^+,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S(\bar{\partial}^+) &= -\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}\bar{\partial}^+, \qquad (3.35)\\
S(\bar{\partial}^3) &= -\Lambda^{\frac{1}{2}}\bar{\partial}^3 + q^{-2}\lambda\lambda_+\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}L^-\bar{\partial}^+,\\
S(\bar{\partial}^-) &= -\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}}\bar{\partial}^- + q^{-1}\lambda\lambda_+\Lambda^{\frac{1}{2}}L^-\bar{\partial}^3 - q^{-4}\lambda^2\lambda_+\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}(L^-)^2\bar{\partial}^+,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{-1}(\bar{\partial}^+) &= -\overline{\partial}^+\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.36)\\
S^{-1}(\bar{\partial}^3) &= -\bar{\partial}^3\Lambda^{\frac{1}{2}} - \lambda\lambda_+\bar{\partial}^+\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}L^-,\\
S^{-1}(\bar{\partial}^-) &= -\bar{\partial}^-\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}} + q\lambda\lambda_+\bar{\partial}^3\Lambda^{\frac{1}{2}}L^- + \lambda^2\lambda_+\bar{\partial}^+\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}(L^-)^2,
\end{aligned}
$$

$$
\varepsilon(\bar{\partial}^+) = \varepsilon(\bar{\partial}^3) = \varepsilon(\bar{\partial}^-) = 0. \qquad (3.37)
$$

Die Linkswirkungen der Ableitungen auf normalgeordnete Monome lassen sich nun berechnen, indem man die partiellen Ableitungen unter wiederholter Anwendung der Relationen (3.4)-(3.6) von der linken Seite des Monoms nach rechts vollständig durchtauscht. Da für die triviale Darstellung

$$
\partial^A \triangleright k = \varepsilon(\partial^A)k = 0, \quad k \in \mathbb{C}, \qquad (3.38)
$$

gilt, tragen zur Darstellung nur die Terme bei, die nach dem vollständigen Durchtauschen keine Ableitung mehr enthalten. Für ∂^- gilt beispielsweise

$$
\begin{aligned}
\partial^-(X^+)^{n_+} &= -q^{-1}[[n_+]]_{q^4}(X^+)^{n-1} + q^{4n_+}(X^+)^{n_+}\partial^-, \qquad (3.39)\\
\partial^-(X^3)^{n_3} &= q^{2n_-}(X^3)^{n_3}\partial^-,\\
\partial^-(X^-)^{n_-} &= (X^-)^{n_-}\partial^-.
\end{aligned}
$$

Aus diesen Identitäten folgt sofort

$$
\partial^- \triangleright (X^+)^{n_+}(X^3)^{n_3}(X^-)^{n_-} = -q^{-1}[[n_+]]_{q^4}(X^+)^{n_+-1}(X^3)^{n_3}(X^-)^{n_-}. \qquad (3.40)
$$

Mit dieser Methode lassen sich auch die Linkswirkungen der übrigen partiellen Ableitungen auf normalgeordnete Monome berechnen. Mit der Relation (3.1) kann man dann sofort die Darstellung der Ableitungen auf der kommutativen Funktionenalgebra ablesen, nämlich

$$
\begin{aligned}
\partial^- \triangleright f &= -q^{-1}D^+_{q^4}f, \qquad (3.41)\\
\partial^3 \triangleright f &= D^3_{q^2}f(q^2x^+),\\
\partial^+ \triangleright f &= -qD^-_{q^4}f(q^2x^3) - q\lambda x^+(D^3_{q^2})^2f,
\end{aligned}
$$

wobei diesen Darstellungen die durch (2.6) gegebene Normalordnung zugrunde liegt. Da kontravariante und kovariante Ableitungen gemäß

$$\partial_+ = -q\partial^-, \quad \partial_3 = \partial^3, \quad \partial_- = -q^{-1}\partial^+ \tag{3.42}$$

zusammenhängen, können wir ebenso schreiben

$$\begin{aligned} \partial_+ \triangleright f &= D^+_{q^4} f, \\ \partial_3 \triangleright f &= D^3_{q^2} f(q^2 x^+), \\ \partial_- \triangleright f &= D^-_{q^4} f(q^2 x^3) + \lambda x^+ (D^3_{q^2})^2 f. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Auf die gleiche Weise lassen sich die Darstellungen der Generatoren L^+, L^- und $\tau^{\pm 1/2}$ sowie die der Skalierungsoperatoren $\Lambda^{\pm 1/2}$ ermitteln,

$$\begin{aligned} L^+ \triangleright f &= -q^2 x^3 (D^-_{q^4} f)(q^{-2} x^-) - q x^+ (D^3_{q^2} f)(q^{-2} x^-), \\ L^- \triangleright f &= x^3 (D^+_{q^4} f)(q^{-2} x^-) + q^{-1} x^- (D^3_{q^2} f)(q^{-2} x^-), \\ \tau^{\pm\frac{1}{2}} \triangleright f &= f(q^{\mp 2} x^+, q^{\pm 2} x^-), \\ \Lambda^{\pm\frac{1}{2}} \triangleright f &= f(q^{\pm 2} x^+, q^{\pm 2} x^3, q^{\pm 2} x^-). \end{aligned} \tag{3.44}$$

Vergleicht man nun die explizite Form der Relationen (3.3) mit jener der Relationen (3.8), so erkennt man, dass diese durch folgende Ersetzungen ineinander übergehen:

$$q \to q^{-1}, \quad \partial^\pm \to \hat{\partial}^\mp, \quad \partial^3 \to \hat{\partial}^3, \quad X^\pm \to X^\mp. \tag{3.45}$$

Diese Symmetrie erlaubt es, einfache Transformationsregeln zwischen den Darstellungen von ∂^A und $\hat{\partial}^A$ anzugeben, und zwar in der Form

$$\begin{aligned} \partial^\pm \triangleright f &\overset{\substack{\pm \,\to\, \mp \\ q \,\to\, 1/q}}{\longleftrightarrow} \hat{\partial}^\mp \,\tilde{\triangleright}\, f, \\ \partial^3 \triangleright f &\overset{\substack{\pm \,\to\, \mp \\ q \,\to\, 1/q}}{\longleftrightarrow} \hat{\partial}^3 \,\tilde{\triangleright}\, f. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Dies soll wieder symbolisieren, dass bezüglich der Normalordnung (2.27), für die außderdem gilt

$$\widetilde{\mathcal{W}}(h \,\tilde{\triangleright}\, f) = h \triangleright \widetilde{\mathcal{W}}(f), \quad h \in \mathcal{H}, \quad f \in \mathcal{A}, \tag{3.47}$$

die Darstellungen der konjugierten Ableitungen aus den Darstellungen (3.41) durch die Ersetzungen

$$D^\pm_{q^a} \to D^\mp_{q^{-a}}, \quad \hat{n}^\pm \to -\hat{n}^\mp, \quad x^\pm \to x^\mp, \quad q^{\pm 1} \to q^{\mp 1}$$

hervorgehen. Wollen wir noch die Darstellungen auf eine einheitliche Normalordnung beziehen, so können wir dies mit den Operatoren $\hat{U}$ und $\hat{U}^{-1}$ aus Kapitel 2.1 tun, da gilt

$$\begin{aligned} \partial^A \triangleright (\hat{U}^{-1} f) &= \hat{U}^{-1}(\partial^A \,\tilde{\triangleright}\, f), \\ \hat{\partial}^A \,\tilde{\triangleright}\, (\hat{U} f) &= \hat{U}(\hat{\partial}^A \triangleright f). \end{aligned} \tag{3.48}$$

Alle bisher betrachteten Darstellungen wurden in der Weise gewonnen, dass die darzustellenden Generatoren von der linken Seite eines normalgeordneten Monoms nach rechts durchgetauscht wurden. Die so erhaltenen Darstellungen können daher als Linksdarstellungen bezeichnet werden. Tauscht man jedoch die Generatoren von der rechten Seite eines normalgeordneten Monoms nach links durch, so entstehen Rechtsdarstellungen. Aus der sogenannten Unitaritätsbedingung [35], [36]

$$\begin{aligned} \overline{\partial^A \triangleright f} &= \bar{f} \triangleleft \overline{\partial^A}, \\ \overline{f \triangleleft \partial^A} &= \overline{\partial^A} \triangleright \bar{f} \end{aligned} \tag{3.49}$$

folgt allerdings, dass unter Konjugation Linksdarstellungen in Rechstdarstellungen übergehen und umgekehrt. Um dies zu demonstrieren, wenden wir die obige Formel auf die Identität (3.40) an und erhalten

$$(\overline{X^-})^{n_-}(\overline{X^3})^{n_3}(\overline{X^+})^{n_+} \triangleleft \overline{\partial^-} = -q^{-1}[[n_+]]_{q^4}(\overline{X^-})^{n_-}(\overline{X^3})^{n_3}(\overline{X^+})^{n_+-1}. \tag{3.50}$$

Mit der durch (2.24) festgelegten Konjugation der Koordinaten und unter Berücksichtigung der Konjugationseigenschaften (3.7) und (3.18) folgt weiterhin

$$(X^+)^{n_-}(X^3)^{n_3}(X^-)^{n_+} \triangleleft \bar{\partial}^+ = -q^{-1}[[n_+]]_{q^4}(X^+)^{n_-}(X^3)^{n_3}(X^-)^{n_+-1}. \tag{3.51}$$

Daraus liest man nun ab, dass die Rechtsdarstellung von $\bar{\partial}^+$ aus der Linksdarstellung von ∂^- hervorgeht, falls man erstere den Ersetzungen

$$x^{\pm} \rightarrow x^{\mp}, \quad D_{q^a}^{\pm} \rightarrow D_{q^a}^{\mp}, \quad \hat{n}^{\pm} \rightarrow \hat{n}^{\mp} \tag{3.52}$$

unterwirft. Führt man diese Überlegungen auch für die anderen Darstellungen durch, so gelangt man schließlich zu den folgenden einfachen Transformationsregeln:

$$f \triangleleft L^{\pm} \quad \overset{\pm \leftrightarrow \mp}{\longleftrightarrow} \quad L^{\mp} \triangleright f, \tag{3.53}$$

$$\begin{array}{rcl} f\,\tilde{\triangleleft}\,\partial^{\pm} & \overset{+\leftrightarrow-}{\longleftrightarrow} & \bar{\partial}^{\mp}\,\tilde{\triangleright}\,f, \\ f\,\tilde{\triangleleft}\,\partial^{3} & \overset{+\leftrightarrow-}{\longleftrightarrow} & \bar{\partial}^{3}\,\tilde{\triangleright}\,f, \\ & & \\ f \triangleleft \bar{\partial}^{\pm} & \overset{+\leftrightarrow-}{\longleftrightarrow} & \partial^{\mp} \triangleright f, \\ f \triangleleft \bar{\partial}^{3} & \overset{+\leftrightarrow-}{\longleftrightarrow} & \partial^{3} \triangleright f. \end{array}$$

Diese Regeln symbolisieren, dass mittels der Ersetzungen (3.52) die expliziten Ausdrücke links und rechts des Doppelpfeils ineinander überführbar sind. Eine weitere Möglichkeit, Links- und Rechtsdarstellungen ineinander überzuführen, ergibt sich aus den Formeln [28]

$$\begin{aligned} f \triangleleft h &= S^{-1}(h) \triangleright f, \\ f \triangleright h &= S(h) \triangleleft f, \end{aligned} \tag{3.54}$$

mit denen man problemlos die folgenden Identitäten herleiten kann:

$$\begin{aligned} f \triangleleft \tau^{\pm\frac{1}{2}} &= \tau^{\mp\frac{1}{2}} \triangleright f, \\ f \triangleleft \Lambda^{\pm\frac{1}{2}} &= \Lambda^{\mp\frac{1}{2}} \triangleright f. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Kennt man nun die Darstellungen der partiellen Ableitungen, so kann man aus den zugehörigen Coprodukten sofort Produktregeln gewinnen, da nämlich gilt

$$\begin{aligned} \partial^A \triangleright (f \star g) &= (\partial^A_{(1)} \triangleright f) \star (\partial^A_{(2)} \triangleright g), \\ (f \star g) \triangleleft \partial^A &= (\partial^A_{(2)} \triangleleft f) \star (\partial^A_{(1)} \triangleleft g). \end{aligned} \tag{3.56}$$

Die angestellten Überlegungen lassen sich nun in vielfältiger Weise anwenden, etwa wenn es darum geht, Vertauschungsrelationen zwischen partiellen Ableitungen und inversen Koordinaten zu bestimmen. So gilt beispielsweise unter Ausnutzung der Hopfstruktur von ∂^- und der Identität (3.23)

$$\partial^-(X^-)^{-1} = \partial^- \triangleright (X^-)^{-1} + (\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}} \triangleright (X^-)^{-1})\partial^-. \tag{3.57}$$

Berücksichtigen wir, dass die expliziten Ausdrücke für die Darstellungen der partiellen Ableitungen und die Symmetriegeneratoren auch für negative Potenzen der Koordinaten gelten, so erhalten wir aus der obigen Formel sofort

$$\partial^-(X^-)^{-1} = (X^-)^{-1}\partial^-. \tag{3.58}$$

Wenn wir nun diese Überlegungen auf alle Kombinationen von partiellen Ableitungen und inversen Koordinaten anwenden, finden wir schließlich die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned}
\partial^+(X^+)^{-1} &= (X^+)^{-1}\partial^+, \\
\partial^+(X^3)^{-1} &= -q^{-4}\lambda\lambda_+ X^+(X^3)^{-3} + q^{-2}(X^3)^{-1}\partial^+ \\
&\quad + q^{-4}\lambda\lambda_+ X^+(X^3)^{-2}\partial^3 \\
&\quad + q^{-1}(q^{-3}\lambda\lambda_+)^2(X^+)^2(X^3)^{-3}\partial^-, \\
\partial^+(X^-)^{-1} &= q^{-3}(X^-)^{-2} + (X^-)^{-1}\partial^+ \\
&\quad + q\lambda\lambda_+ q^{-4}X^3(X^-)^{-2}\partial^3 \\
&\quad - q\lambda^2\lambda_+ X^+(X^-)^{-2}\partial^- \\
&\quad + q^{-8}\lambda^2\lambda_+(q^2+q^{-2})(X^3)^2(X^-)^{-3}\partial^-,
\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
\partial^3(X^+)^{-1} &= q^{-2}(X^+)^{-1}\partial^3, \\
\partial^3(X^3)^{-1} &= 1 + q^{-2}(X^3)^{-1}\partial^3 + q^{-3}\lambda\lambda_+ X^+(X^3)^{-2}\partial^3, \\
\partial^3(X^-)^{-1} &= q^{-2}(X^-)^{-1}\partial^3 + \lambda\lambda_+ q^{-2}X^3(X^-)^2\partial^-,
\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
\partial^-(X^+)^{-1} &= -q^{-5}(X^+)^{-2} + q^{-4}(X^+)^{-1}\partial^3, \\
\partial^-(X^3)^{-1} &= q^{-2}(X^3)^{-1}\partial^-, \\
\partial^-(X^-)^{-1} &= (X^-)^{-1}\partial^-.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Es ist vielleicht einsehbar, dass die Bestimmung dieser Relationen auf traditionelle Weise, also durch Wahl geeigneter Ansätze und Lösen von Konsistenzbedingungen angesichts der Komplexität dieser Ausdrücke vergleichsweise mühsam wäre. Führt man diese Berechnung für die konjugierten Ableitungen durch, so erhält man Relationen, die aus den obigen wieder durch die Ersetzungen

$$q^{\pm 1} \to q^{\mp 1}, \quad X^{\pm} \to X^{\mp}, \quad \partial^{\pm} \to \hat{\partial}^{\mp}, \quad \partial^3 \to \hat{\partial}^3 \tag{3.62}$$

hervorgehen.

3.2 Euklidischer Raum in vier Dimensionen

Im Fall des q-deformierten Euklidischen Raumes mit vier Dimensionen ist das Vorgehen wieder analog zum dreidimensionalen Fall. Daher können wir uns auch darauf beschränken, lediglich die entsprechenden Resultate anzugeben. Die Vertauschungsrelationen zwischen partiellen Ableitungen und Koordinaten sind gegeben durch

$$\partial^i X^j = g^{ij} + q(\hat{R}^{-1})^{ij}_{kl} X^k \partial^l, \quad i,j,k,l = 1,\ldots,4, \tag{3.63}$$

wobei $\hat{R}$ die R-Matrix von $SO_q(4)$ und g^{ij} die Metrik des vierdimensionalen q-deformierten Euklidischen Raumes bezeichnet. Explizit ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
\partial^1 X^1 &= X^1\partial^1, \\
\partial^1 X^2 &= qX^2\partial^1, \\
\partial^1 X^3 &= qX^3\partial^1, \\
\partial^1 X^4 &= q^{-1} + q^2 X^4\partial^1,
\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}
\partial^2 X^1 &= qX^1\partial^2 - q\lambda X^2\partial^1, \\
\partial^2 X^2 &= X^2\partial^2, \\
\partial^2 X^3 &= 1 + q^2 X^3\partial^2 + q^2\lambda X^4\partial^1, \\
\partial^2 X^4 &= qX^4\partial^2,
\end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}
\partial^3 X^1 &= qX^1\partial^3 - q\lambda X^3\partial^1, \\
\partial^3 X^2 &= 1 + q^2 X^2\partial^3 + q^2\lambda X^4\partial^1, \\
\partial^3 X^3 &= X^3\partial^3, \\
\partial^3 X^4 &= qX^4\partial^3,
\end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}
\partial^4 X^1 &= q + q^2 X^1\partial^4 + q^2\lambda\left(X^2\partial^3 + X^3\partial^2 + \lambda X^4\partial^1\right), \\
\partial^4 X^2 &= qX^2\partial^4 - q\lambda X^4\partial^2, \\
\partial^4 X^3 &= qX^3\partial^4 - q\lambda X^4\partial^3, \\
\partial^4 X^4 &= X^4\partial^4.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Entsprechend gelten für die konjugierten Ableitungen $\bar{\partial}^A$ die Relationen

$$\bar{\partial}^i X^j = -q^{-4} g^{ij} + q^{-1}(\hat{R})^{ij}_{kl} X^k \bar{\partial}^l, \quad i,j,k,l = 1,\ldots,4, \tag{3.68}$$

was sich mit $\hat{\partial}^i = -q^4 \overline{\partial}^i$ in expliziter Form schreiben läßt als

$$\begin{aligned}
\hat{\partial}^1 X^1 &= X^1\hat{\partial}^1, \\
\hat{\partial}^1 X^2 &= q^{-1} X^2\hat{\partial}^1 + q^{-1}\lambda X^1\hat{\partial}^2,
\end{aligned} \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\partial}^1 X^3 &= q^{-1} X^3 \hat{\partial}^1 + q^{-1}\lambda X^1 \hat{\partial}^3, \\
\hat{\partial}^1 X^4 &= q^{-1} + q^{-2} X^4 \hat{\partial}^1 - q^{-2}\lambda (X^2 \hat{\partial}^3 + X^3 \hat{\partial}^2 - \lambda X^1 \hat{\partial}^4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\partial}^2 X^1 &= q^{-1} X^1 \hat{\partial}^2, \\
\hat{\partial}^2 X^2 &= X^2 \hat{\partial}^2, \\
\hat{\partial}^2 X^3 &= 1 + q^{-2} X^3 \hat{\partial}^2 - q^{-2}\lambda X^1 \hat{\partial}^4, \\
\hat{\partial}^2 X^4 &= q^{-1} X^4 \hat{\partial}^2 + q^{-1}\lambda X^2 \hat{\partial}^4,
\end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\partial}^3 X^1 &= q^{-1} X^1 \hat{\partial}^3, \\
\hat{\partial}^3 X^2 &= 1 + q^{-2} X^2 \hat{\partial}^3 - q^{-2}\lambda X^1 \hat{\partial}^4, \\
\hat{\partial}^3 X^3 &= X^3 \hat{\partial}^3, \\
\hat{\partial}^3 X^4 &= q^{-1} X^4 \hat{\partial}^3 + q^{-1}\lambda X^3 \hat{\partial}^4,
\end{aligned} \tag{3.71}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\partial}^4 X^1 &= q + q^{-2} X^1 \hat{\partial}^4, \\
\hat{\partial}^4 X^2 &= q^{-1} X^2 \hat{\partial}^4, \\
\hat{\partial}^4 X^3 &= q^{-1} X^3 \hat{\partial}^4, \\
\hat{\partial}^4 X^4 &= X^4 \hat{\partial}^4.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Zum vierdimensionalen q-deformierten Euklidischen Raum gehört wieder eine Quantenalgebra, die mit $U_q(so_4)$ bezeichnet und von den Generatoren $L_i^{\pm}$, K_i, $i = 1, 2$ aufgespannt wird [37]. Diese vertauschen mit den Koordinaten mittels der Relationen

$$\begin{aligned}
L_1^+ X^1 &= q X^1 L_1^+ - q^{-1} X^2, \\
L_1^+ X^2 &= q^{-1} X^2 L_1^+, \\
L_1^+ X^3 &= q X^3 L_1^+ + q^{-1} X^4, \\
L_1^+ X^4 &= q^{-1} X^4 L_1^+,
\end{aligned} \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned}
L_2^+ X^1 &= q X^1 L_2^+ - q^{-1} X^3, \\
L_2^+ X^2 &= q X^2 L_2^+ + q^{-1} X^4, \\
L_2^+ X^3 &= q^{-1} X^3 L_2^+, \\
L_2^+ X^4 &= q^{-1} X^4 L_2^+,
\end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned}
L_1^- X^1 &= q X^1 L_1^-, \\
L_1^- X^2 &= q^{-1} X^2 L_1^- - q X^1,
\end{aligned} \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned}
L_1^- X^3 &= q X^3 L_1^-, \\
L_1^- X^4 &= q^{-1} X^4 L_1^- + q X^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2^- X^1 &= q X^1 L_2^-, \\
L_2^- X^2 &= q X^2 L_2^-, \\
L_2^- X^3 &= q^{-1} X^3 L_2^- - q X^1, \\
L_2^- X^4 &= q^{-1} X^4 L_2^- + q X^2,
\end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}
K_1 X^1 &= q^{-1} X^1 K_1, \\
K_1 X^2 &= q X^2 K_1, \\
K_1 X^3 &= q^{-1} X^3 K_1, \\
K_1 X^4 &= q X^4 K_1,
\end{aligned} \tag{3.77}$$

$$\begin{aligned}
K_2 X^1 &= q^{-1} X^1 K_2, \\
K_2 X^2 &= q^{-1} X^2 K_2, \\
K_2 X^3 &= q X^3 K_2, \\
K_2 X^4 &= q X^4 K_2.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Wie im dreidimensionalen Fall lassen sich aus diesen Relationen durch Multiplikation mit den inversen Koordinaten wieder die Vertauschungsrelationen zwischen den Generatoren der $U_q(so_4)$ und den inversen Koordinaten finden, nämlich

$$\begin{aligned}
L_1^+ (X^1)^{-1} &= q^{-1} (X^1)^{-1} L_1^+ + q^{-1} (X^1)^{-2} X^2, \\
L_1^+ (X^2)^{-1} &= q (X^2)^{-1} L_1^+, \\
L_1^+ (X^3)^{-1} &= q^{-1} (X^3)^{-1} L_1^+ - q^{-1} (X^3)^{-2} X^4, \\
L_1^+ (X^4)^{-1} &= q (X^4)^{-1} L_1^+,
\end{aligned} \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}
L_2^+ (X^1)^{-1} &= q^{-1} (X^1)^{-1} L_2^+ + q^{-1} (X^1)^{-2} X^3, \\
L_2^+ (X^2)^{-1} &= q^{-1} (X^2)^{-1} L_2^+ - q^{-1} (X^2)^{-2} X^4, \\
L_2^+ (X^3)^{-1} &= q (X^3)^{-1} L_2^+, \\
L_2^+ (X^4)^{-1} &= q (X^4)^{-1} L_2^+,
\end{aligned} \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned}
L_1^- (X^1)^{-1} &= q^{-1} (X^1)^{-1} L_1^-, \\
L_1^- (X^2)^{-1} &= q (X^2)^{-1} L_1^- + q^3 \partial^1 (X^2)^{-2},
\end{aligned} \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned}
L_1^-(X^3)^{-1} &= q^{-1}(X^3)^{-1}L_1^-,\\
L_1^-(X^4)^{-1} &= q(X^4)^{-1}L_1^- - q^3X^3(X^4)^{-2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2^-(X^1)^{-1} &= q^{-1}(X^1)^{-1}L_2^-,\\
L_2^-(X^2)^{-1} &= q^{-1}(X^2)^{-1}L_2^-,\\
L_2^-(X^3)^{-1} &= q(X^3)^{-1}L_2^- + q^3X^1(X^3)^{-2},\\
L_2^-(X^4)^{-1} &= q(X^4)^{-1}L_2^- - q^3X^2(X^4)^{-2},
\end{aligned} \tag{3.82}$$

$$\begin{aligned}
K_1(X^1)^{-1} &= q(X^1)^{-1}K_1,\\
K_1(X^2)^{-1} &= q^{-1}(X^2)^{-1}K_1,\\
K_1(X^3)^{-1} &= q(X^3)^{-1}K_1,\\
K_1(X^4)^{-1} &= q^{-1}(X^4)^{-1}K_1,
\end{aligned} \tag{3.83}$$

$$\begin{aligned}
K_2(X^1)^{-1} &= q(X^1)^{-1}K_2,\\
K_2(X^2)^{-1} &= q(X^2)^{-1}K_2,\\
K_2(X^3)^{-1} &= q^{-1}(X^3)^{-1}K_2,\\
K_2(X^4)^{-1} &= q^{-1}(X^4)^{-1}K_2.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Mit der Konjugation

$$\overline{L_i^\pm} = q^{\mp 2}L_i^\mp, \quad \overline{K_i} = K_i, \quad i = 1,2, \tag{3.85}$$

und der Realitätsstruktur (2.53) bzw. (2.55) für die Koordinatenalgebra gehen diese Relationen in sich über. Die Hopfstruktur der Quantenalgebra $U_q(so_4)$ lautet jetzt

$$\begin{aligned}
\Delta(L_i^\pm) &= L_i^\pm \otimes 1 + K_i^{-1} \otimes L_i^\pm, \quad i = 1,2,\\
\Delta(K_i) &= K_i \otimes K_i,
\end{aligned} \tag{3.86}$$

$$\begin{aligned}
S(L_i^\pm) &= -K_i L_i^\pm,\\
S(K_i) &= K_i^{-1},
\end{aligned} \tag{3.87}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon(L_i^\pm) &= 0,\\
\varepsilon(K) &= 1.
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Mit den für den dreidimensionalen Fall bereits erläuterten Methoden ermittelt man für die Ableitungen wieder eine Hopfstruktur, und zwar

$$\begin{aligned}
\Delta(\partial^1) &= \partial^1 \otimes 1 + \Lambda^{\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} \otimes \partial^1, \\
\Delta(\partial^2) &= \partial^2 \otimes 1 + \Lambda^{\frac{1}{2}} K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} \otimes \partial^2 \\
&\quad + q\lambda \Lambda^{\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_1^+ \otimes \partial^1, \\
\Delta(\partial^3) &= \partial^3 \otimes 1 + \Lambda^{\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{-\frac{1}{2}} \otimes \partial^3 \\
&\quad + q\lambda \Lambda^{\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_2^+ \otimes \partial^1, \\
\Delta(\partial^4) &= \partial^4 \otimes 1 + \Lambda^{\frac{1}{2}} K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{-\frac{1}{2}} \otimes \partial^4 \\
&\quad - q^2\lambda^2 \Lambda^{\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_1^+ L_2^+ \otimes \partial^1 \\
&\quad - q\lambda \Lambda^{\frac{1}{2}} K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_2^+ \otimes \partial^2 \\
&\quad - q\lambda \Lambda^{\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{-\frac{1}{2}} L_1^+ \otimes \partial^3,
\end{aligned} \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned}
S(\partial^1) &= -\Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{-\frac{1}{2}} \partial^1, \\
S(\partial^2) &= -\Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{-\frac{1}{2}} (\partial^2 - q^2\lambda L_1^+ \partial^1), \\
S(\partial^3) &= -\Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} (\partial^3 - q^2\lambda L_2^+ \partial^1), \\
S(\partial^4) &= -\Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} (\partial^4 + q^2\lambda (L_1^+ \partial^3 + L_2^+ \partial^2)) \\
&\quad - q^4\lambda^2 \Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_1^+ L_2^+ \partial^1,
\end{aligned} \tag{3.90}$$

$$\begin{aligned}
S^{-1}(\partial^1) &= -\partial^1 \Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{-\frac{1}{2}}, \\
S^{-1}(\partial^2) &= -(\partial^2 - q\lambda \partial^1 L_1^+) \Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{-\frac{1}{2}}, \\
S^{-1}(\partial^3) &= -(\partial^3 - q\lambda \partial^1 L_2^+) \Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}}, \\
S^{-1}(\partial^4) &= -(\partial^4 + q\lambda(\partial^3 L_1^+ + \partial^2 L_2^+)) \Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} \\
&\quad - q^2\lambda^2 \partial^1 \Lambda^{-\frac{1}{2}} L_1^+ L_2^+ K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{3.91}$$

$$\varepsilon(\partial^1) = \varepsilon(\partial^2) = \varepsilon(\partial^3) = \varepsilon(\partial^4) = 0, \tag{3.92}$$

wobei wir wieder einen unitären Skalierungsoperator Λ eingeführt haben mit

$$\begin{aligned}
\Lambda X^i &= q^2 X^i \Lambda, \quad i = 1, \dots, 4, \\
\Lambda \partial^i &= q^{-2} \partial^i \Lambda,
\end{aligned} \tag{3.93}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda L_i^{\pm} &= L_i^{\pm}\Lambda, \\
\Lambda \tau^{\pm\frac{1}{2}} &= \tau^{\pm\frac{1}{2}}\Lambda
\end{aligned}$$

und der Hopfstruktur

$$\begin{aligned}
\Delta(\Lambda) &= \Lambda \otimes \Lambda, \\
S(\Lambda) &= \Lambda^{-1} = \overline{\Lambda}, \\
\varepsilon(\Lambda) &= 1.
\end{aligned} \tag{3.94}$$

In entsprechender Weise findet man für die Hopfstruktur der konjugierten Ableitungen

$$\begin{aligned}
\Delta(\hat{\partial}^1) &= \hat{\partial}^1 \otimes 1 + \Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{-\frac{1}{2}} \otimes \hat{\partial}^1 \\
&\quad - q^{-2}\lambda^2 \Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_1^- L_2^- \otimes \hat{\partial}^4 \\
&\quad - q^{-1}\lambda \Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{-\frac{1}{2}} L_1^- \otimes \hat{\partial}^2 \\
&\quad - q^{-1}\lambda \Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_2^- \otimes \hat{\partial}^3, \\
\Delta(\hat{\partial}^2) &= \hat{\partial}^2 \otimes 1 + \Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{-\frac{1}{2}} \otimes \hat{\partial}^2 \\
&\quad + q^{-1}\lambda \Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_2^- \otimes \hat{\partial}^4, \\
\Delta(\hat{\partial}^3) &= \hat{\partial}^3 \otimes 1 + \Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} \otimes \hat{\partial}^3 \\
&\quad + q^{-1}\lambda \Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_1^- \otimes \hat{\partial}^4, \\
\Delta(\hat{\partial}^4) &= \hat{\partial}^4 \otimes 1 + \Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} \otimes \hat{\partial}^4,
\end{aligned} \tag{3.95}$$

$$\begin{aligned}
S(\hat{\partial}^1) &= -\Lambda^{\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} (\hat{\partial}^1 + q^{-2}\lambda(L_1^- \hat{\partial}^2 + L_2^- \hat{\partial}^3)) \\
&\quad + q^{-4}\lambda^2 \Lambda^{\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_1^- L_2^- \hat{\partial}^4,
\end{aligned} \tag{3.96}$$

$$\begin{aligned}
S(\hat{\partial}^2) &= -\Lambda^{\frac{1}{2}} K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} (\hat{\partial}^2 - q^{-2}\lambda L_2^- \hat{\partial}^4), \\
S(\hat{\partial}^3) &= -\Lambda^{\frac{1}{2}} K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} (\hat{\partial}^3 - q^{-2}\lambda L_1^- \hat{\partial}^4), \\
S(\hat{\partial}^4) &= -\Lambda^{\frac{1}{2}} K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\partial}^4,
\end{aligned} \tag{3.97}$$

$$\begin{aligned}
S^{-1}(\hat{\partial}^1) &= -(\hat{\partial}^1 + q^{-1}\lambda(\hat{\partial}^2 L_1^- + \hat{\partial}^3 L_2^-))\Lambda^{\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} \\
&\quad - q^{-2}\lambda^2 \hat{\partial}^4 \Lambda^{\frac{1}{2}} L_1^- L_2^- K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}}, \\
S^{-1}(\hat{\partial}^2) &= -(\hat{\partial}^2 - q^{-1}\lambda \hat{\partial}^4 L_2^-)\Lambda^{\frac{1}{2}} K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{3.98}$$

$$\begin{aligned}
S^{-1}(\hat{\partial}^3) &= -(\hat{\partial}^3 - q^{-1}\lambda\hat{\partial}^4 L_1^-)\Lambda^{\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{-\frac{1}{2}}, \\
S^{-1}(\hat{\partial}^4) &= -\hat{\partial}^4 \Lambda^{\frac{1}{2}} K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{-\frac{1}{2}}, \\
\varepsilon(\hat{\partial}^1) &= \varepsilon(\hat{\partial}^2) = \varepsilon(\hat{\partial}^3) = \varepsilon(\hat{\partial}^4) = 0. \qquad (3.99)
\end{aligned}$$

Die Generatoren $L_i^\pm$, K_i, $i = 1, 2$, sowie der Skalierungsoperator Λ lassen sich mittels ihrer Vertauschungsrelationen mit den Koordinaten wieder in gewohnter Weise auf der Funktionenalgebra darstellen. Bezüglich der durch (2.42) festgelegten Normalordnung ergeben sich dabei die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
L_1^+ \triangleright f &= x^4 D_{q^2}^3 f(qx^1, q^{-1}x^2, q^{-1}x^3) - x^2 D_{q^2}^1 f(q^{-1}x^1), \qquad (3.100) \\
L_2^+ \triangleright f &= x^4 D_{q^2}^2 f(qx^1, q^{-1}x^2, q^{-1}x^3) - x^3 D_{q^2}^1 f(q^{-1}x^1), \\
L_1^- \triangleright f &= qx^3 D_{q^{-2}}^4 f(qx^1, q^{-1}x^2, qx^3) - qx^1 D_{q^{-2}}^2 f(qx^1), \\
L_2^- \triangleright f &= qx^2 D_{q^{-2}}^4 f(qx^1, qx^2, q^{-1}x^3) - qx^1 D_{q^{-2}}^3 f(qx^1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_1 \triangleright f &= f(q^{-1}x^1, qx^2, q^{-1}x^3, qx^4), \qquad (3.101) \\
K_2 \triangleright f &= f(q^{-1}x^1, q^{-1}x^2, qx^3, qx^4), \\
\Lambda^{\pm\frac{1}{2}} \triangleright f &= f(q^{\pm 1}x^1, q^{\pm 1}x^2, q^{\pm 1}x^3, q^{\pm 1}x^4).
\end{aligned}$$

Ebenso findet man in der gleichen Normalordnung für die konjugierten Ableitungen die Darstellungen

$$\begin{aligned}
\hat{\partial}^1 \triangleright f &= q^{-1} D_{q^{-2}}^4 f(q^{-1}x^2, q^{-1}x^3) + q^{-1}\lambda x^1 D_{q^{-2}}^2 D_{q^{-2}}^3 f, \qquad (3.102) \\
\hat{\partial}^2 \triangleright f &= D_{q^{-2}}^3 f(q^{-1}x^1), \\
\hat{\partial}^3 \triangleright f &= D_{q^{-2}}^2 f(q^{-1}x^1), \\
\hat{\partial}^4 \triangleright f &= q D_{q^{-2}}^1 f.
\end{aligned}$$

Da die Vertauschungsrelationen (3.64)-(3.67) aus den entsprechenden Relationen für die konjugierten Ableitungen, nämlich (3.69)-(3.72) durch die Ersetzungen

$$\partial^i \rightarrow \hat{\partial}^{i'}, \quad x^i \rightarrow x^{i'}, \quad q^{\pm 1} \rightarrow q^{\mp 1}, \quad i' = 5 - i, \qquad (3.103)$$

hervorgehen, lassen sich wieder die folgenden Transformationsregeln angeben:

$$\partial^i \,\tilde{\triangleright}\, f \overset{\substack{i \,\rightarrow\, i' \\ q \,\rightarrow\, 1/q}}{\longleftrightarrow} \hat{\partial}^{i'} \triangleright f, \quad i = 1, \ldots, 4. \qquad (3.104)$$

Dies zeigt nun an, dass man aus den Darstellungen (3.102) der konjugierten Ableitungen durch Anwendung der Ersetzungen

$$D^i_{q^a} \rightarrow D^{i'}_{q^{-a}}, \quad \hat{n}^i \rightarrow -\hat{n}^{i'}, \quad x^i \rightarrow x^{i'}, \quad q^{\pm 1} \rightarrow q^{\mp 1} \tag{3.105}$$

die Darstellungen der unkonjugierten Ableitungen erhält, jetzt allerdings bezüglich einer anderen, nämlich der durch (2.42) festgelegten Normalordnung. Möchte man die Darstellungen auf eine einheitliche Normalordnung umrechnen, so können wir dies wieder mit den durch (2.60) und (2.61) definierten Operatoren $\hat{U}$ und $\hat{U}^{-1}$ tun, da wie im dreidimensionalen Fall gilt

$$\begin{aligned} \partial^i \triangleright (\hat{U}^{-1} f) &= \hat{U}^{-1}(\partial^i \,\tilde{\triangleright}\, f), \\ \hat{\partial}^i \,\tilde{\triangleright}\, (\hat{U} f) &= \hat{U}(\hat{\partial}^i \triangleright f). \end{aligned} \tag{3.106}$$

Aus den Unitaritätsbedingungen

$$\begin{aligned} \overline{\partial^i \triangleright f} &= \bar{f} \triangleleft \overline{\partial^i}, \\ \overline{f \triangleleft \partial^i} &= \overline{\partial^i} \triangleright \bar{f} \end{aligned} \tag{3.107}$$

lassen sich mit den Konjugationseigenschaften

$$\overline{X^1} = q^{-1} X^4, \quad \overline{X^2} = X^3, \quad \overline{X^3} = X^2, \quad \overline{X^4} = q X^1, \tag{3.108}$$
$$\overline{\partial^1} = -q^{-5} \hat{\partial}^4, \quad \overline{\partial^2} = -q^{-4} \hat{\partial}^3, \quad \overline{\partial^3} = -q^{-4} \hat{\partial}^2, \quad \overline{\partial^4} = -q^{-3} \hat{\partial}^1,$$
$$\overline{L_i^+} = q^{-2} L_i^-, \quad \overline{L_i^-} = q^2 L_i^+, \quad i = 1, 2,$$

wieder die folgenden Regeln für den Übergang von Links- zu Rechstdarstellungen ableiten:

$$\begin{aligned} f \,\tilde{\triangleleft}\, \partial^i &\overset{j \leftrightarrow j'}{\longleftrightarrow} \bar{\partial}^{i'} \,\tilde{\triangleright}\, f, \\ f \triangleleft \bar{\partial}^i &\overset{j \leftrightarrow j'}{\longleftrightarrow} \partial^{i'} \triangleright f, \quad i = 1, \ldots, 4, \quad i' = 5 - i, \end{aligned} \tag{3.109}$$

$$\begin{aligned} f \triangleleft L_i^+ &\overset{j \leftrightarrow j'}{\longleftrightarrow} q^{-3} L_i^- \triangleright f, \\ f \triangleleft L_i^- &\overset{j \leftrightarrow j'}{\longleftrightarrow} q^3 L_i^+ \triangleright f, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{3.110}$$

Damit soll angedeutet werden, dass die Ausdrücke für die Rechtsdarstellungen durch die Ersetzungen

$$x^j \rightarrow x^{j'}, \quad D^j_{q^a} \rightarrow D^{j'}_{q^a}, \quad \hat{n}^j \rightarrow \hat{n}^{j'} \tag{3.111}$$

in jene für die Linksdarstellungen übergehen. Mit den Identitäten aus (3.54) finden wie schließlich noch die Beziehungen

$$\begin{aligned} f \triangleleft K_i &= (K_i)^{-1} \triangleright f, \quad i = 1, 2, \\ f \triangleleft \Lambda^{\pm\frac{1}{2}} &= \Lambda^{\mp\frac{1}{2}} \triangleright f. \end{aligned} \tag{3.112}$$

3.3 Minkowski-Raum

Schließlich soll wieder der aus physikalischer Sicht besonders interessante Fall des q-deformierten Minkowski-Raumes behandelt werden. Die von den Euklidischen Räumen bekannten Überlegungen lassen sich problemlos übertragen, wobei die Resultate allerdings oft eine verwickeltere Struktur aufweisen. Die Vertauschungsrelationen zwischen partiellen Ableitungen und Koordinaten können wieder geschrieben werden als [34]

$$\partial^\mu X^\nu = \eta^{\mu\nu} + q^{-2}(\hat{R}_{II}^{-1})^{\mu\nu}_{\rho\sigma} X^\rho \partial^\sigma, \quad \mu, \nu, \rho, \sigma \in \{0, 3, \pm\}, \tag{3.113}$$

wobei η^{AB} die Metrik und $\hat{R}_{II}$ eine der beiden R-Matrizen des q-deformierten Minkowski-Raumes bezeichnet [42]. Aus Gründen der Vereinfachung führen wir anstelle von ∂^3 und X^3 die Lichtkegelgrößen $\partial^{3/0} = \partial^3 - \partial^0$ und $X^{3/0} = X^3 - X^0$ ein. In expliziter Form lauten dann die obigen Relationen

$$\begin{aligned} \partial^{3/0} X^{3/0} &= X^{3/0}\partial^{3/0}, \\ \partial^{3/0} X^+ &= X^+\partial^{3/0} + q^{-1}\lambda X^{3/0}\partial^+, \\ \partial^{3/0} X^3 &= 1 + q^{-2}X^3\partial^{3/0} + q^{-2}\lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0}\partial^{3/0} + q^{-2}\lambda X^-\partial^+, \\ \partial^{3/0} X^- &= q^{-2}X^-\partial^{3/0}, \end{aligned} \tag{3.114}$$

$$\begin{aligned} \partial^+ X^{3/0} &= q^{-2}X^{3/0}\partial^+, \\ \partial^+ X^+ &= X^+\partial^+, \\ \partial^+ X^3 &= X^3\partial^+ - \lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0}\partial^+ - \lambda\lambda_+^{-1}X^+\partial^{3/0}, \\ \partial^+ X^- &= -q + q^{-2}X^-\partial^+ - q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0}\partial^{3/0}, \end{aligned} \tag{3.115}$$

$$\begin{aligned} \partial^- X^{3/0} &= X^{3/0}\partial^- + q^{-1}\lambda X^-\partial^{3/0}, \\ \partial^- X^+ &= -q^{-1} + q^{-2}X^+\partial^- + q^{-2}\lambda X^{3/0}\partial^0 + q^{-2}\lambda^2 X^-\partial^+ \\ &\quad + q^{-2}\lambda X^3\partial^{3/0} + q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0}\partial^{3/0}, \\ \partial^- X^3 &= q^{-2}X^3\partial^- + q^{-2}\lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0}\partial^- + q^{-1}\lambda X^-\partial^0 \end{aligned} \tag{3.116}$$

$$\begin{aligned}
& \quad + \lambda\lambda_+^{-1}(1+2q^{-2})X^-\partial^{3/0}, \\
\partial^- X^- &= X^-\partial^-,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial^0 X^{3/0} &= 1 + q^{-2}X^{3/0}\partial^0 + q^{-2}\lambda X^-\partial^+ - \lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0}\partial^{3/0}, \\
\partial^0 X^+ &= q^{-2}X^+\partial^0 + q^{-1}\lambda X^3\partial^+ - \lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0}\partial^+ - \lambda\lambda_+^{-1}X^+\partial^{3/0}, \\
\partial^0 X^3 &= X^3\partial^0 - \lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0}\partial^0 - q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}X^+\partial^- + q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}X^-\partial^+ \\
&\quad + q^{-2}\lambda\lambda_+^{-1}X^3\partial^{3/0} - \lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0}\partial^{3/0}, \\
\partial^0 X^- &= X^-\partial^0 + q^{-2}\lambda\lambda_+^{-1}X^-\partial^{3/0} - \lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0}\partial^-.
\end{aligned} \tag{3.117}$$

Und für die konjugierten Ableitungen gilt

$$\bar\partial^\mu X^\nu = -q^4\eta^{\mu\nu} + q^2(\hat R_{II})^{\mu\nu}_{\rho\sigma}X^\rho\bar\partial^\sigma, \tag{3.118}$$

was in expliziter Form mit $\hat\partial^\mu = -q^{-4}\bar\partial^\mu$ wieder ergibt

$$\begin{aligned}
\hat\partial^{3/0} X^{3/0} &= X^{3/0}\hat\partial^{3/0}, \\
\hat\partial^{3/0} X^- &= X^-\hat\partial^{3/0} - q\lambda X^{3/0}\hat\partial^-, \\
\hat\partial^{3/0} X^3 &= 1 + q^2X^3\hat\partial^{3/0} - q^2\lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0}\hat\partial^{3/0} - q^2\lambda X^+\hat\partial^-, \\
\hat\partial^{3/0} X^+ &= q^2X^+\hat\partial^{3/0},
\end{aligned} \tag{3.119}$$

$$\begin{aligned}
\hat\partial^- X^{3/0} &= q^2X^{3/0}\hat\partial^-, \\
\hat\partial^- X^- &= X^-\hat\partial^-, \\
\hat\partial^- X^3 &= X^3\hat\partial^- + \lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0}\hat\partial^- + \lambda\lambda_+^{-1}X^-\hat\partial^{3/0}, \\
\hat\partial^- X^+ &= -q^{-1} + q^2X^+\hat\partial^- + q\lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0}\hat\partial^{3/0},
\end{aligned} \tag{3.120}$$

$$\begin{aligned}
\hat\partial^+ X^{3/0} &= X^{3/0}\hat\partial^+ - q\lambda X^+\hat\partial^{3/0}, \\
\hat\partial^+ X^- &= -q + q^2X^-\hat\partial^+ - q^2\lambda X^{3/0}\hat\partial^0 + q^2\lambda^2X^+\hat\partial^- \\
&\quad - q^2\lambda X^3\hat\partial^{3/0} - q\lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0}\hat\partial^{3/0}, \\
\hat\partial^+ X^3 &= q^2X^3\hat\partial^+ - q^2\lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0}\hat\partial^+ - q\lambda X^+\hat\partial^0 \\
&\quad - \lambda\lambda_+^{-1}(1+2q^2)X^+\hat\partial^{3/0}, \\
\hat\partial^+ X^+ &= X^+\hat\partial^+,
\end{aligned} \tag{3.121}$$

$$\begin{aligned}
\hat\partial^0 X^{3/0} &= 1 + q^2X^{3/0}\hat\partial^0 - q^2\lambda X^+\hat\partial^- + \lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0}\hat\partial^{3/0} \\
\hat\partial^0 X^- &= q^2X^-\hat\partial^0 - q\lambda X^3\hat\partial^- + \lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0}\hat\partial^- + \lambda\lambda_+^{-1}X^-\hat\partial^{3/0},
\end{aligned} \tag{3.122}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\partial}^0 X^3 &= X^3\hat{\partial}^0 + \lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0}\hat{\partial}^0 + q\lambda\lambda_+^{-1}X^-\hat{\partial}^+ - q\lambda\lambda_+^{-1}X^+\hat{\partial}^- \\
&\quad - q^2\lambda\lambda_+^{-1}X^3\hat{\partial}^{3/0} + \lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0}\hat{\partial}^{3/0}, \\
\hat{\partial}^0 X^+ &= X^+\hat{\partial}^0 - q^2\lambda\lambda_+^{-1}X^+\hat{\partial}^{3/0} + \lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0}\hat{\partial}^+.
\end{aligned}
$$

Die Quantenalgebra des q-deformierten Minkowski-Raumes ist bekanntlich die q-deformierte Lorentz-Algebra [39], [51], [52]. Die Vertauschungsrelationen zwischen Lorentz-Generatoren und Koordinaten lauten dabei [53]

$$
\begin{aligned}
T^+X^0 &= X^0T^+, \\
T^+X^- &= q^2X^-T^+ + q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}X^3, \\
T^+X^+ &= q^{-2}X^+T^+, \\
T^+X^{3/0} &= X^{3/0}T^+ + q^{-\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}X^+,
\end{aligned}
\tag{3.123}
$$

$$
\begin{aligned}
T^-X^0 &= X^0T^-, \\
T^-X^- &= q^2X^-T^-, \\
T^-X^+ &= q^{-2}X^+T^- + q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}X^3, \\
T^-X^{3/0} &= X^{3/0}T^- + q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}X^-,
\end{aligned}
\tag{3.124}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau^3X^0 &= X^0\tau^3, \\
\tau^3X^\pm &= q^{\mp 4}X^\pm\tau^3, \\
\tau^3X^{3/0} &= X^{3/0}\tau^3,
\end{aligned}
\tag{3.125}
$$

$$
\begin{aligned}
T^2X^+ &= qX^+T^2, \\
T^2X^- &= q^{-1}X^-T^2 + q^{-\frac{3}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}X^{3/0}\tau^1, \\
T^2X^3 &= qX^3T^2 - q\lambda_+^{-1}\lambda X^{3/0}T^2 + q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}X^+\tau^1, \\
T^2X^{3/0} &= q^{-1}X^{3/0}T^2,
\end{aligned}
\tag{3.126}
$$

$$
\begin{aligned}
S^1X^- &= qX^-S^1, \\
S^1X^+ &= q^{-1}X^+S^1 - q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}X^{3/0}\sigma^2, \\
S^1X^3 &= q^{-1}X^3S^1 + q^{-1}\lambda_+^{-1}\lambda X^{3/0}S^1 - q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}X^-\sigma^2, \\
S^1X^{3/0} &= qX^{3/0}S^1,
\end{aligned}
\tag{3.127}
$$

$$
\tau^1X^- = q^{-1}X^-\tau^1, \tag{3.128}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau^1 X^+ &= qX^+\tau^1 - q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda^2 X^{3/0}T^2, \\
\tau^1 X^3 &= q^{-1}X^3\tau^1 + q^{-1}\lambda_+^{-1}\lambda X^{3/0}\tau^1 - q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda^2 X^- T^2, \\
\tau^1 X^{3/0} &= qX^{3/0}\tau^1, \\
\\
\sigma^2 X^+ &= q^{-1}X^+\sigma^2, \\
\sigma^2 X^- &= qX^-\sigma^2 + q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda^2 X^{3/0}S^1, \\
\sigma^2 X^3 &= qX^3\sigma^2 - q\lambda_+^{-1}\lambda X^{3/0}\sigma^2 + q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda^2 X^+ S^1, \\
\sigma^2 X^{3/0} &= q^{-1}X^{3/0}\sigma^2.
\end{aligned}
\tag{3.129}
$$

Es erweist sich als sehr mühsam, aus diesen Identitäten entsprechende Vertauschungsrelationen mit den inversen Koordinaten abzuleiten. Wir wollen daher dieses Problem vorerst zurückstellen.

Zunächst ist wieder klar, dass die q-Lorentz-Algebra eine Hopfstruktur hat, die sich wie folgt angeben läßt [39]:

$$
\begin{aligned}
\Delta(\tau^3) &= \tau^3 \otimes \tau^3, \\
\Delta(T^\pm) &= T^\pm \otimes 1 + (\tau^3)^{\frac{1}{2}} \otimes T^\pm, \\
\Delta(\tau^1) &= \tau^1 \otimes \tau^1 + \lambda^2 S^1(\tau^3)^{-\frac{1}{2}} \otimes T^2, \\
\Delta(\sigma^2) &= \sigma^2 \otimes \sigma^2 + \lambda^2 T^2(\tau^3)^{-\frac{1}{2}} \otimes S^1, \\
\Delta(T^2) &= T^2 \otimes \tau^1 + (\tau^3)^{-\frac{1}{2}}\sigma^2 \otimes T^2, \\
\Delta(S^1) &= S^1 \otimes \sigma^2 + (\tau^3)^{\frac{1}{2}}\tau^1 \otimes S^1,
\end{aligned}
\tag{3.130}
$$

$$
\begin{aligned}
S(\tau^3) &= -(\tau^3)^{-1}, \\
S(T^\pm) &= -(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}T^\pm, \\
S(T^2) &= -q^2(\tau^3)^{\frac{1}{2}}T^2, \\
S(S^1) &= -(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}S^1, \\
S(\tau^1) &= \sigma^2, \\
S(\sigma^2) &= \tau^1,
\end{aligned}
\tag{3.131}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(\tau^3) &= \varepsilon(\sigma^2) = \varepsilon(\tau^1) = 1, \\
\varepsilon(T^\pm) &= \varepsilon(T^2) = \varepsilon(S^1) = 0.
\end{aligned}
\tag{3.132}
$$

Aus den Relationen (3.114)-(3.117) finden wir mit den bekannten Methoden wieder eine Hopfstruktur für die partiellen Ableitungen, die mit den

Lorentz-Generatoren geschrieben werden kann als

$$
\begin{aligned}
\Delta(\partial^{3/0}) &= \partial^{3/0}\otimes 1+\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau^1\otimes\partial^{3/0} \\
&\quad -q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{\frac{1}{2}}(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}S^1\otimes\partial^+, \\
\Delta(\partial^+) &= \partial^+\otimes 1+\Lambda^{\frac{1}{2}}(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}\sigma^2\otimes\partial^+-q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{\frac{1}{2}}T^2\otimes\partial^{3/0}, \\
\Delta(\partial^-) &= \partial^-\otimes 1+\Lambda^{\frac{1}{2}}(\tau^3)^{\frac{1}{2}}\tau^1\otimes\partial^--q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{\frac{1}{2}}S^1\otimes\partial^0 \\
&\quad -\lambda^2\Lambda^{\frac{1}{2}}(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}T^-S^1\otimes\partial^+ \\
&\quad +q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{\frac{1}{2}}(\tau^1T^--q^{-1}S^1)\otimes\partial^{3/0}, \\
\Delta(\partial^0) &= \partial^0\otimes 1+\Lambda^{\frac{1}{2}}\sigma^2\otimes\partial^0-q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{\frac{1}{2}}T^2(\tau^3)^{\frac{1}{2}}\otimes\partial^- \\
&\quad +q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{\frac{1}{2}}(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}(T^-\sigma^2+qS^1)\otimes\partial^+ \\
&\quad -\lambda_+^{-1}\Lambda^{\frac{1}{2}}(\lambda^2T^-T^2+q(\tau^1-\sigma^2))\otimes\partial^{3/0},
\end{aligned}
\tag{3.133}
$$

$$
\begin{aligned}
S(\partial^{3/0}) &= -\Lambda^{-\frac{1}{2}}\sigma^2\partial^{3/0}-q^{-\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{-\frac{1}{2}}S^1\partial^+, \\
S(\partial^+) &= -\Lambda^{-\frac{1}{2}}\tau^1(\tau^3)^{\frac{1}{2}}\partial^+-q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{-\frac{1}{2}}T^2(\tau^3)^{\frac{1}{2}}\partial^{3/0}, \\
S(\partial^-) &= -\Lambda^{-\frac{1}{2}}\sigma^2(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}\partial^--q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{-\frac{1}{2}}(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}S^1\partial^0 \\
&\quad +q^{-2}\lambda^2\Lambda^{-\frac{1}{2}}(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}S^1T^-\partial^+ \\
&\quad +q^{-\frac{5}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{-\frac{1}{2}}(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}(\sigma^2T^--q^3S^1)\partial^{3/0}, \\
S(\partial^0) &= -\Lambda^{-\frac{1}{2}}\tau^1\partial^0-q^{\frac{5}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{-\frac{1}{2}}T^2\partial^- \\
&\quad +q^{-\frac{3}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{-\frac{1}{2}}(\tau^1T^-+qS^1)\partial^+ \\
&\quad +\lambda_+^{-1}\Lambda^{-\frac{1}{2}}(q(\sigma^2-\tau^1)+\lambda^2T^2T^-)\partial^{3/0},
\end{aligned}
\tag{3.134}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{-1}(\partial^{3/0}) &= -\partial^{3/0}\Lambda^{-\frac{1}{2}}\sigma^2-q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\lambda\partial^+\Lambda^{-\frac{1}{2}}S^1, \\
S^{-1}(\partial^+) &= -\partial^+\Lambda^{-\frac{1}{2}}\tau^1(\tau^3)^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\partial^{3/0}\Lambda^{-\frac{1}{2}}T^2(\tau^3)^{\frac{1}{2}}, \\
S^{-1}(\partial^-) &= -\partial^-\Lambda^{-\frac{1}{2}}\sigma^2(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\partial^0\Lambda^{-\frac{1}{2}}S^1(\tau^3)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad +\lambda^2\partial^+\Lambda^{-\frac{1}{2}}S^1(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}T^- \\
&\quad +q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\partial^{3/0}\Lambda^{-\frac{1}{2}}(T^-\sigma^2-q^{-1}S^1)(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}, \\
S^{-1}(\partial^0) &= -\partial^0\Lambda^{-\frac{1}{2}}\tau^1-q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\partial^-\Lambda^{-\frac{1}{2}}T^2 \\
&\quad +q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\partial^+\Lambda^{-\frac{1}{2}}(\tau^1T^-+qS^1)
\end{aligned}
\tag{3.135}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \lambda_+^{-1} \partial^{3/0} \Lambda^{-\frac{1}{2}} (q(\sigma^2 - \tau^1) + \lambda^2 T^2 T^-), \\
\varepsilon(\partial^{3/0}) &= \varepsilon(\partial^+) = \varepsilon(\partial^-) = \varepsilon(\partial^0) = 0,
\end{aligned}
\tag{3.136}
$$

wobei der unitäre Skalierungsoperator Λ nun bestimmt ist durch

$$
\begin{aligned}
\Lambda X^\mu &= q^{-2} X^\mu \Lambda, \quad \mu \in \{\pm, 3, 3/0\}, \\
\Lambda \partial^\mu &= q^2 \partial^\mu \Lambda.
\end{aligned}
\tag{3.137}
$$

Außerdem vertauscht Λ mit allen Lorentz-Generatoren und besitzt in üblicher Weise eine Hopfstruktur der Form

$$
\begin{aligned}
\Delta(\Lambda) &= \Lambda \otimes \Lambda, \\
S(\Lambda) &= \Lambda^{-1} = \overline{\Lambda}, \\
\varepsilon(\Lambda) &= 1.
\end{aligned}
\tag{3.138}
$$

In entsprechender Weise leitet man aus den Relationen (3.119)-(3.122) die Hopfstruktur für die konjugierten Ableitungen ab und findet

$$
\begin{aligned}
\Delta(\hat{\partial}^{3/0}) &= \hat{\partial}^{3/0} \otimes 1 + \Lambda^{-\frac{1}{2}} (\tau^3)^{-\frac{1}{2}} \sigma^2 \otimes \hat{\partial}^{3/0} \\
&\quad - q^{\frac{3}{2}} \lambda_+^{\frac{1}{2}} \lambda \Lambda^{-\frac{1}{2}} T^2 \otimes \hat{\partial}^-, \\
\Delta(\hat{\partial}^-) &= \hat{\partial}^- \otimes 1 + \Lambda^{-\frac{1}{2}} \tau^1 \otimes \hat{\partial}^- - q^{\frac{1}{2}} \lambda_+^{-\frac{1}{2}} \lambda \Lambda^{-\frac{1}{2}} (\tau^3)^{-\frac{1}{2}} S^1 \otimes \hat{\partial}^{3/0}, \\
\Delta(\hat{\partial}^+) &= \hat{\partial}^+ \otimes 1 + \Lambda^{-\frac{1}{2}} \sigma^2 \otimes \hat{\partial}^+ - q^{\frac{1}{2}} \lambda_+^{\frac{1}{2}} \lambda \Lambda^{-\frac{1}{2}} T^2 (\tau^3)^{\frac{1}{2}} \otimes \hat{\partial}^0 \\
&\quad - q^{\frac{1}{2}} \lambda_+^{-\frac{1}{2}} \lambda \Lambda^{-\frac{1}{2}} (\tau^3)^{-\frac{1}{2}} (T^+ \sigma^2 + q \tau^3 T^2) \otimes \hat{\partial}^{3/0} \\
&\quad + q^2 \lambda^2 \Lambda^{-\frac{1}{2}} T^2 T^+ \otimes \hat{\partial}^-, \\
\Delta(\hat{\partial}^0) &= \hat{\partial}^0 \otimes 1 + \Lambda^{-\frac{1}{2}} (\tau^3)^{-\frac{1}{2}} \tau^1 \otimes \hat{\partial}^0 - q^{-\frac{1}{2}} \lambda_+^{-\frac{1}{2}} \lambda \Lambda^{-\frac{1}{2}} S^1 \otimes \hat{\partial}^+ \\
&\quad - q^{\frac{1}{2}} \lambda_+^{-\frac{1}{2}} \lambda \Lambda^{-\frac{1}{2}} (q T^+ \tau^1 - T^2)) \otimes \hat{\partial}^- \\
&\quad + \lambda_+^{-1} \Lambda^{-\frac{1}{2}} (\tau^3)^{-\frac{1}{2}} (\lambda^2 T^+ S^1 + q^{-1} (\tau^3 \tau^1 - \sigma^2)) \otimes \hat{\partial}^{3/0},
\end{aligned}
\tag{3.139}
$$

$$
\begin{aligned}
S(\hat{\partial}^{3/0}) &= -\Lambda^{\frac{1}{2}} \tau^1 (\tau^3)^{\frac{1}{2}} \hat{\partial}^{3/0} - q^{\frac{3}{2}} \lambda_+^{\frac{1}{2}} \lambda \Lambda^{\frac{1}{2}} T^2 (\tau^3)^{\frac{1}{2}} \hat{\partial}^-, \\
S(\hat{\partial}^-) &= -\Lambda^{\frac{1}{2}} \sigma^2 \hat{\partial}^- - q^{-\frac{3}{2}} \lambda_+^{-\frac{1}{2}} \lambda \Lambda^{\frac{1}{2}} S^1 \hat{\partial}^{3/0}, \\
S(\hat{\partial}^+) &= -\Lambda^{\frac{1}{2}} \tau^1 \hat{\partial}^+ - q^{\frac{5}{2}} \lambda_+^{\frac{1}{2}} \lambda \Lambda^{\frac{1}{2}} T^2 \hat{\partial}^0 \\
&\quad - q^{\frac{3}{2}} \lambda_+^{-\frac{1}{2}} \lambda \Lambda^{\frac{1}{2}} (q \tau^1 T^+ + T^2) \hat{\partial}^{3/0}
\end{aligned}
\tag{3.140}
$$

$$
\begin{aligned}
& - q^4\lambda^2\Lambda^{\frac{1}{2}}T^2T^+\hat{\partial}^-, \\
S(\hat{\partial}^0) \;&=\; -\Lambda^{\frac{1}{2}}(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}\sigma^2\hat{\partial}^0 - q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{\frac{1}{2}}(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}S^1\hat{\partial}^+ \\
& - q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{\frac{1}{2}}(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}(\sigma^2T^+ - q\tau^3T^2)\hat{\partial}^- \\
& - \lambda_+^{-1}\Lambda^{\frac{1}{2}}(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}(\lambda^2T^+S^1 + q(\sigma^2 - \tau^3\tau^1))\hat{\partial}^{3/0},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{-1}(\hat{\partial}^{3/0}) \;&=\; -\hat{\partial}^{3/0}\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau^1(\tau^3)^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\lambda\hat{\partial}^-\Lambda^{\frac{1}{2}}T^2(\tau^3)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.141)\\
S^{-1}(\hat{\partial}^-) \;&=\; -\hat{\partial}^-\Lambda^{\frac{1}{2}}\sigma^2 - q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\hat{\partial}^{3/0}\Lambda^{\frac{1}{2}}S^1, \\
S^{-1}(\hat{\partial}^+) \;&=\; -\hat{\partial}^+\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau^1 - q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\lambda\hat{\partial}^0\Lambda^{\frac{1}{2}}T^2 \\
& - q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\hat{\partial}^{3/0}\Lambda^{\frac{1}{2}}(\tau^1T^+ + q^{-1}T^2) \\
& - \lambda^2\hat{\partial}^-\Lambda^{\frac{1}{2}}T^2T^+, \\
S^{-1}(\hat{\partial}^0) \;&=\; -\hat{\partial}^0\Lambda^{\frac{1}{2}}\sigma^2(\tau^3)^{-\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\hat{\partial}^+\Lambda^{\frac{1}{2}}S^1(\tau^3)^{-\frac{1}{2}} \\
& - q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\hat{\partial}^-\Lambda^{\frac{1}{2}}(\sigma^2T^+ - q\tau^3T^2)\left(\tau^3\right)^{-\frac{1}{2}} \\
& - \lambda_+^{-1}\hat{\partial}^{3/0}\Lambda^{\frac{1}{2}}(\lambda^2T^+S^1 + q(\sigma^2 - \tau^1\tau^3))(\tau^3)^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

$$
\varepsilon(\hat{\partial}^{3/0}) \;=\; \varepsilon(\hat{\partial}^+) = \varepsilon(\hat{\partial}^-) = \varepsilon(\hat{\partial}^0). \qquad (3.142)
$$

Die Berechnung der Darstellungen der partiellen Ableitungen erfolgt im Prinzip auf die gleiche Weise wie im Fall der Euklidischen Räume. Allerdings tauchen jetzt eine Reihe neuer Ausdrücke auf, die sich als charakteristisch für den q-Minkowski-Raum erweisen. Die Art ihres Auftretens wollen wir anhand eines Beispiels kurz demonstrieren. So findet man für die partielle Ableitung $\partial^{3/0}$ und die Koordinate X^3 durch Anwendung der Relationen (3.114)-(3.117) zunächst

$$
\begin{aligned}
\partial^{3/0}(X^3)^n \;&=\; q^{-2}(X^3 + \lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0})\partial^{3/0} \qquad (3.143)\\
& + \sum_{k=0}^{n-1} q^{-2k}(X^3 + \lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0})^k(X^3)^{n-1-k} \\
& + q^{-2}\lambda\sum_{k=1}^{n-1} q^{-2k}(X^3 + \lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0})^kX^-\partial^+(X^3)^{n-1-k}.
\end{aligned}
$$

Zur weiteren Auswertung benötigen wir für $\partial^+(X^3)^n$ eine entsprechende Formel, nämlich

$$
\partial^+(X^3)^n \;=\; (X^3 - \lambda\lambda_+^{-1}X^{3/0})^n\partial^+ \qquad (3.144)
$$

$$- \lambda\lambda_+^{-1} \sum_{i=0}^{n-2} (X^3 - \lambda\lambda_+^{-1} X^{3/0})^i X^+ \partial^{3/0} (X^3)^{n-2-i}.$$

Durch rekursive Anwendung dieser beiden Formeln gelangt man schließlich zu folgendem Ausdruck:

$$\begin{aligned}
&\partial^{3/0}(X^3)^n \qquad (3.145)\\
= &\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (q^{-2}\lambda^2\lambda_+^{-1})^k \sum_{j_1=0}^{n-2k} \sum_{j_2=0}^{n-2k-j_1} \cdots \sum_{j_{2k}=0}^{n-2k-j_1-\ldots-j_{2k-1}} q^{2(j_2+j_4+\ldots+j_{2k})} \\
&\qquad \cdot q^{-2(n-2k)} (X^3 + \lambda\lambda_+^{-1} X^{3/0})^{n-2k} (X^- X^+)^k \partial^{3/0} \\
&+ q^{-2}\lambda \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} (q^{-2}\lambda^2\lambda_+^{-1})^k \sum_{j_1=0}^{n-2k-1} \cdots \sum_{j_{2k+1}=0}^{n-2k-1-j_1-\ldots-j_{2k}} q^{-2(j_1+j_3+\ldots+j_{2k+1})} \\
&\qquad \cdot (X^3 + \lambda\lambda_+^{-1} X^{3/0})^{n-2k-1} (X^- X^+)^k X^- \partial^+ \\
&+ \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} (q^{-2}\lambda^2\lambda_+^{-1})^k \sum_{j_1=0}^{n-2k-1} \cdots \sum_{j_{2k+1}=0}^{n-2k-1-j_1-\ldots-j_{2k}} q^{-2(j_1+j_3+\ldots+j_{2k+1})} \\
&\qquad \cdot (X^3 + \lambda\lambda_+^{-1} X^{3/0})^{j_1+j_2+\ldots+j_{2k+1}} \\
&\qquad \cdot (X^- X^+)^k (X^3)^{n-2k-1-j_1-\ldots-j_{2k+1}}.
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $[s]$ die sogenannte Gauß-Klammer, also die größte ganze Zahl, die nicht größer ist als s. Für die weitere Umformung müssen die Terme $(X^-X^+)^k$ normalgeordnet werden. Dazu greifen wir auf die aus Kapitel 2.3 bekannten Überlegungen zurück. Lösen wir nämlich die Identitäten

$$\begin{aligned}
\hat{r}^2 &= -a_q(X^0, X^{3/0}) + \lambda_+ X^- X^+, \qquad (3.146)\\
\hat{r}^2 &= -a_{q^{-1}}(X^0, X^{3/0}) + \lambda_+ X^+ X^-
\end{aligned}$$

mit

$$a_q(X^0, X^{3/0}) = q^2 (X^{3/0})^2 + q\lambda_+ X^0 X^{3/0} \qquad (3.147)$$

nach X^-X^+ bzw. X^+X^- auf, so können wir leicht die folgenden Formeln bestätigen:

$$\begin{aligned}
(X^-X^+)^k &= (\lambda_+)^{-k} (\hat{r}^2 + a_q(X^0, X^{3/0}))^k \qquad (3.148)\\
&= (\lambda_+)^{-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \hat{r}^{2i} (a_q(X^0, X^{3/0}))^{k-i}
\end{aligned}$$

$$= \quad (\lambda_+)^{-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \sum_{p=0}^{i} \lambda_+^p (X^+)^p (a_q(X^0, q^{2p} X^{3/0}))^{k-i} \cdot (S_q)_{i,p}(X^0, X^{3/0})(X^-)^p,$$

$$(X^+X^-)^k \quad = \quad (\lambda_+)^{-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \sum_{p=0}^{i} \lambda_+^p (X^+)^p (a_{q^{-1}}(X^0, q^{2p} X^{3/0}))^{k-i} \cdot (S_q)_{i,p}(X^0, X^{3/0})(X^-)^p, \tag{3.149}$$

wobei $(S_q)_{i,p}$ das Polynom aus Formel (2.87) bezeichnet. Dabei haben wir wegen der Vertauschbarkeit von $\hat{r}^2$ und $a_{q^{\pm 1}}$ zunächst die gewöhnliche Binomialformel anwenden können. Anschließend wurde die Identität (2.88) für die weitere Normalordnung von $\hat{r}^2$ benutzt. Anhand der obigen Ausdrücke wird nun klar, dass wegen der Normalordnung der Ausdrücke $(X^-X^+)^k$ bzw. $(X^+X^-)^k$ die Darstellungen der partiellen Ableitungen die folgenden Polynome von Grad 2k enthalten:

$$(M^\pm)^k_{i,j}(\underline{x}) \equiv (M^\pm)^k_{i,j}(x^0, x^+, x^{3/0}, x^-) \tag{3.150}$$

$$= \binom{k}{i} \lambda_+^j \left(a_{q^{\pm 1}}(q^{2j} x^{3/0})\right)^i \left(x^+x^-\right)^j (S_q)_{k-j,j}(x^0, x^{3/0}),$$

$$(M^{+-})^{k,l}_{i,j,u}(\underline{x}) \equiv (M^{+-})^{k,l}_{i,j,u}(x^0, x^+, x^{3/0}, x^-) \tag{3.151}$$

$$= \binom{k}{i}\binom{l}{j} \lambda_+^u \left(a_q(q^{2u} x^{3/0})\right)^{k-i} \left(a_{q^{-1}}(q^{2u} x^{3/0})\right)^{l-j} \cdot (x^+x^-)^u S_{i+j,u}(x^0, x^{3/0}).$$

Außerdem können die geschachtelten Summen im Ausdruck (3.145) noch weiter vereinfacht werden, wie das folgende Beispiel zeigen soll:

$$\sum_{j_1=0}^{n-2k} \sum_{j_2=0}^{n-2k-j_1} \cdots \sum_{j_{2k}=0}^{n-2k-j_1-\ldots-j_{2k-1}} q^{2(j_2+j_4+\ldots+j_{2k})} \tag{3.152}$$

$$= \sum_{0 \le j_1+j_2+\ldots+j_{2k} \le n-2k} 1 \cdot q^{2(j_2+j_4+\ldots+j_{2k})}$$

$$= \sum_{0 \le j_1+j_2+\ldots+j_{2k} \le n-2k} 1 \cdot q^{2(j_{k+1}+j_{k+2}+\ldots+j_{2k})}.$$

Diese Summe kann als ein Spezialfall verallgemeinerter Binomiale angesehen werden. Diese Binomiale werden definiert, indem man zunächst die Grössen

$$(K_n)_a^{(k)} \equiv \sum_{j_1=0}^{n-k} \sum_{j_2=0}^{n-k-j_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{n-k-j_1-\ldots-j_{k-1}} a^{j_1+j_2+\ldots+j_k}, \quad n \geq k \geq 1, \tag{3.153}$$

einführt und eine Operation $\circ$ durch

$$(K_n)_a^{(k)} \circ (K_{n-k})_b^{(l)} \equiv \sum_{j_1=0}^{n-k-l} \ldots \sum_{j_{k+l}=0}^{n-k-l-j_1-\ldots-j_{k+l-1}} a^{j_1+\ldots+j_k}\, b^{j_{k+1}+\ldots+j_{k+l}} \tag{3.154}$$

vereinbart. Damit lassen sich nun verallgemeinerte Kombinationssymbole definieren,

$$(K_n)_{a_1,\ldots,a_l}^{(k_1,\ldots,k_l)} \equiv (K_n)_{a_1}^{(k_1)} \circ (K_{n-k_1})_{a_2}^{(k_2)} \circ \ldots \circ (K_{n-k_1-\ldots-k_l})_{a_l}^{(k_l)}. \tag{3.155}$$

Diese Objekte können weiterhin zur Definition neuer Differentiationsoperatoren verwendet werden, indem man für Potenzen in x zunächst die Identitäten

$$D_{a_1,\ldots,a_l}^{(k_1,\ldots,k_l)} x^n = \begin{cases} (K_n)_{a_1,\ldots,a_l}^{(k_1,\ldots,k_l)} x^{n-k_1-\ldots-k_l}, \\ 0, \quad \text{falls } n < k_1 + \ldots + k_l \end{cases} \tag{3.156}$$

festlegt. Anschließend läßt sich die Wirkung dieser Operatoren auf Potenzreihen durch lineare Fortsetzung erklären. Genaue Formeln zur Berechnung dieser Kombinationen und der zugehörigen Operatoren finden sich in Anhang C. Für die Darstellungen der partiellen Ableitungen und der Lorentz-Generatoren werden insbesondere Operatoren benötigt, die wir wie folgt bezeichnen wollen:

$$\begin{aligned} (D_{1,q}^3)^{k,l} &\equiv D_{1,q^2}^{(k,l)}, \\ (D_{2,q}^3)^{k,l} &\equiv D_{y_-/x^3,q^2y_-/x^3}^{(k,l)}, \\ (D_{3,q}^3)_{i,j}^{k,l} &\equiv D_{y_+/x^3,q^2y_+/x^3,y_-/x^3,q^2y_-/x^3}^{(k,l,i,j)}, \end{aligned} \tag{3.157}$$

wobei wir zur Abkürzung

$$y_\pm = y_\pm(x^0, x^{3/0}) = x^0 + \frac{2}{\lambda_+} q^{\pm 1} x^{3/0} \tag{3.158}$$

eingeführt haben. Man beachte dabei, dass diese Operatoren ausschließlich auf die Koordinaten x^3 wirken sollen. Mit diesen Größen lassen sich die konjugierten partiellen Ableitungen auf der kommutativen Funktionenalgebra wie folgt darstellen, falls wir die durch (2.70) festgelegte Normalordnung zugrundelegen:

$$\begin{aligned}
&\hat{\partial}^{3/0} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^3, x^-) &(3.159)\\
=\ &\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_+^k \sum_{0\leq i+j\leq k} (M^-)^k_{i,j}(\underline{x})(T^{3/0})^i_j f,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{\partial}^{-} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^3, x^-) &(3.160)\\
=\ &-q^{-1} D^+_{q^2} f\\
&+\frac{\lambda}{\lambda_+}\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_+^k \sum_{0\leq i+j\leq k} \Big\{(M^+)^k_{i,j}(\underline{x})(T_1^-)^i_j f + q^{-1}(M^-)^k_{i,j}(\underline{x})(T_2^-)^i_j f\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{\partial}^{+} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^3, x^-) &(3.161)\\
=\ &-q\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_+^k \sum_{0\leq i+j\leq k} \Big\{(M^-)^k_{i,j}(\underline{x})(T_1^+)^i_j f + \lambda(M^+)^k_{i,j}(\underline{x})(T_2^+)^i_j f\Big\}\\
&-q\frac{\lambda}{\lambda_+}\sum_{0\leq k+l<\infty} \alpha_+^{k+l} \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}\sum_{0\leq u\leq i+j} (M^{+-})^{k,l}_{i,j,u}(\underline{x})(T_3^+)^{k,l}_u f\\
&-\frac{\lambda}{\lambda_+}\sum_{0\leq k+l<\infty} \alpha_+^{k+l+1} \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l+1}\sum_{0\leq u\leq i+j} (M^{+-})^{k,l+1}_{i,j,u}(\underline{x})(T_4^+)^{k,l}_u f,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{\partial}^{0} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^3, x^-) &(3.162)\\
=\ &\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_+^k \sum_{0\leq i+j\leq k} \Big\{(M^+)^k_{i,j}(\underline{x})(T_1^0)^i_j f - q\frac{\lambda}{\lambda_+}(M^-)^k_{i,j}(\underline{x})(T_2^0)^i_j f\Big\}\\
&-q^2\frac{\lambda}{\lambda_+}\sum_{0\leq k+l<\infty} \alpha_+^{k+l} \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}\sum_{0\leq u\leq i+j} (M^{+-})^{k,l}_{i,j,u}(\underline{x})(T_3^0)^{k,l}_u f\\
&+\frac{\beta}{\lambda_+}\sum_{0\leq k+l<\infty} \alpha_+^{k+l+1} \sum_{i=0}^{k+1}\sum_{j=0}^{l}\sum_{0\leq u\leq i+j} (M^{+-})^{k+1,l}_{i,j,u}(\underline{x})(T_4^0)^{k,l}_u f\\
&+\lambda_+^{-1}\sum_{0\leq k+l<\infty} \alpha_+^{k+l+1} \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l+1}\sum_{0\leq u\leq i+j} (M^{+-})^{k,l+1}_{i,j,u}(\underline{x})(T_5^0)^{k,l}_u f,
\end{aligned}$$

wobei

$$\alpha_+ = -q^2\frac{\lambda^2}{\lambda_+^2}, \quad \beta = q + \lambda_+. \tag{3.163}$$

Um die Struktur unserer Ausdrücke besser verdeutlichen zu können, haben wir die folgenden abkürzenden Bezeichnungen eingeführt:

$$(T^{3/0})^i_j f = \Big[(O^{3/0})_i f \big|_{x^3\to x^0+x^{3/0}} \Big](q^{2j}x^{3/0}), \tag{3.164}$$

$$\begin{aligned}
(T_1^-)^i_j f &= \Big[(O_1^-)_i f \big|_{x^3\to x^0+x^{3/0}} \Big](q^{2(j+1)}x^{3/0}), \\
(T_2^-)^i_j f &= \Big[(O_2^-)_i f \big|_{x^3\to x^0+x^{3/0}} \Big](q^{2j}x^{3/0}),
\end{aligned} \tag{3.165}$$

$$\begin{aligned}
(T_1^0)^i_j f &= \Big[(O_1^0)_i f \big|_{x^3\to y_+} - q^2\frac{\lambda}{\lambda_+}\,(O_2^0)_i f \big|_{x^3\to q^2 y_+} \Big](q^{2j}x^{3/0}), \\
(T_2^0)^i_j f &= \Big[(O_3^0)_i f \big|_{x^3\to x^0+x^{3/0}} + (O_4^0)_i f \big|_{x^3\to q^2 y_-} \Big](q^{2j}x^{3/0}), \\
(T_3^0)^{k,l}_u f &= \Big[(Q_1^0)_{k,l} f \big|_{x^3\to x^0+x^{3/0}} \Big](q^{2u}x^{3/0}), \\
(T_4^0)^{k,l}_u f &= \Big[(Q_2^0)_{k,l} f \big|_{x^3\to x^0+x^{3/0}} \Big](q^{2u}x^{3/0}), \\
(T_5^0)^{k,l}_u f &= \Big[(Q_3^0)_{k,l} f \big|_{x^3\to x^0+x^{3/0}} \Big](q^{2u}x^{3/0}),
\end{aligned} \tag{3.166}$$

$$\begin{aligned}
(T_1^+)^i_j f &= \Big[(O_1^+)_i f \big|_{x^3\to q^2 y_-} \Big](q^{2j}x^{3/0}), \\
(T_2^+)^i_j f &= \Big[(O_2^+)_i f \big|_{x^3\to y_+} \Big](q^{2j}x^{3/0}), \\
(T_3^+)^{k,l}_u f &= \Big[(Q_1^+)_{k,l} f \big|_{x^3\to x^0+x^{3/0}} \Big](q^{2u}x^{3/0}), \\
(T_4^+)^{k,l}_u f &= \Big[(Q_2^+)_{k,l} f \big|_{x^3\to x^0+x^{3/0}} \Big](q^{2u}x^{3/0}).
\end{aligned} \tag{3.167}$$

Diese hängen wiederum von den folgenden Operatorausdrücken ab:

$$(O^{3/0})_k f = (D^3_{2,q})^{k,k+1} f(q^2x^+), \tag{3.168}$$

$$\begin{aligned}
(O_1^-)_k f &= x^-(D^3_{2,q})^{k+1,k+1} f(q^2x^+), \\
(O_2^-)_k f &= x^{3/0} D^+_{q^2}(D^3_{2,q})^{k,k+1} f(q^2x^+),
\end{aligned} \tag{3.169}$$

$$\begin{aligned}
(O_1^0)_k f &= D_{q^2}^{3/0}(D_{1,q}^3)^{k,k} f \\
&\quad - q^3\lambda_+^{-1}\lambda^2 x^+ x^{3/0} D_{q^2}^+ D_{q^2}^{3/0}(D_{1,q}^3)^{k,k+1} f, \\
(O_2^0)_k f &= x^-(D_{1,q^{-1}}^3)^{k,k+1} D_{q^2}^- f(q^2 x^{3/0}), \\
(O_3^0)_k f &= q x^+ D_{q^2}^+ (D_{2,q}^3)^{k,k+1} f, \\
(O_4^0)_k f &= x^{3/0} D_{q^2}^+ (D_{1,q^{-1}}^3)^{k,k} D_{q^2}^- f,
\end{aligned} \tag{3.170}$$

$$\begin{aligned}
(Q_1^0)_{k,l} f &= (x^0 + q^{-1}\lambda x^3)(D_{3,q}^3)_{l,l+1}^{k+1,k} f \\
&\quad + q\lambda_+^{-1}\lambda(q+\lambda_+)x^+ x^{3/0} D_{q^2}^+ (D_{3,q}^3)_{l,l+1}^{k,k+1} f \\
&\quad - q^3\lambda_+^{-1}\lambda^2 x^+ x^{3/0}(x^0 + q^{-1}\lambda x^{3/0}) D_{q^2}^+ (D_{3,q}^3)_{l,l+1}^{k+1,k+1} f, \\
(Q_2^0)_{k,l} f &= (D_{3,q}^3)_{l,l+1}^{k+1,k+1} f, \\
(Q_3^0)_{k,l} f &= q^{-1}(D_{3,q}^3)_{l+1,l+1}^{k+1,k} f - q^2\lambda_+^{-1}\lambda^2 x^+ x^{3/0} D_{q^2}^+ (D_{3,q}^3)_{l+1,l+1}^{k+1,k+1} f,
\end{aligned} \tag{3.171}$$

$$\begin{aligned}
(O_1^+)_k f &= (D_{1,q^{-1}}^3)^{k,k} D_{q^2}^- f, \\
(O_2^+)_k f &= x^+ D_{q^2}^{3/0}(D_{1,q}^3)^{k,k+1} f,
\end{aligned} \tag{3.172}$$

$$\begin{aligned}
(Q_1^+)_{k,l} f &= (q+\lambda_+)x^+(D_{3,q}^3)_{l,l+1}^{k,k+1} f \\
&\quad - q^2\lambda x^+(x^0 + q^{-1}\lambda x^3)(D_{3,q}^3)_{l,l+1}^{k+1,k+1} f, \\
(Q_2^+)_{k,l} f &= x^+(D_{3,q}^3)_{l+1,l+1}^{k+1,k+1} f.
\end{aligned} \tag{3.173}$$

Vergleicht man die Relationen der beiden Differentialkalküle miteinander, so erkennt man leicht, dass diese mittels der Ersetzungen

$$\partial^\pm \to \hat{\partial}^\mp, \quad \partial^3 \to \hat{\partial}^3, \quad X^\pm \to X^\mp, \quad q \to q^{-1} \tag{3.174}$$

ineinander übergehen. Diese Crossing-Symmetrie ist nun dafür verantwortlich, dass die Darstellungen der partiellen Ableitungen ∂^μ, $\mu \in \{0, \pm, 3/0\}$ leicht aus den obigen Darstellungen der konjugierten Ableitungen gewonnen werden können, indem man die folgenden Transformationen anwendet:

$$\begin{aligned}
\partial^\pm \,\tilde{\triangleright}\, f &\quad \overset{\substack{\pm \leftrightarrow \mp \\ q \leftrightarrow 1/q}}{\longleftrightarrow} \quad \hat{\partial}^\mp \triangleright f, \\
\partial^3 \,\tilde{\triangleright}\, f &\quad \overset{\substack{\pm \leftrightarrow \mp \\ q \leftrightarrow 1/q}}{\longleftrightarrow} \quad \hat{\partial}^3 \triangleright f.
\end{aligned} \tag{3.175}$$

Diese symbolisieren nämlich, dass die expliziten Ausdrücke für die Darstellungen der konjugierten Ableitungen $\hat{\partial}^\mu$ durch die Ersetzungen

$$D^{\pm}_{q^a} \rightarrow D^{\mp}_{q^{-a}}, \quad \hat{n}_\pm \rightarrow -\hat{n}_\mp, \quad q^{\pm 1} \rightarrow q^{\mp 1} \tag{3.176}$$

in die entsprechenden Darstellungen der unkonjugierten partiellen Ableitungen übergehen, wobei sich letztere jetzt aber auf die durch (2.98) definierte Normalordnung beziehen müssen. Möchte man die Darstellungen auf die gleiche Normalordnung beziehen, kann man dies wieder mit Hilfe der durch (2.102) und (2.103) gegebenen Umordnungsoperatoren $\hat{U}^{-1}$ und $\hat{U}$ erreichen, da gilt

$$\begin{aligned} \partial^\mu \triangleright (\hat{U}^{-1} f) &= \hat{U}^{-1}(\partial^\mu \,\tilde{\triangleright}\, f), \\ \hat{\partial}^\mu \,\tilde{\triangleright}\, (\hat{U} f) &= \hat{U}(\hat{\partial}^\mu \triangleright f). \end{aligned} \tag{3.177}$$

Auf die gleiche Art, wie man die Darstellungen der partiellen Ableitungen des Minkowski-Raumes berechnet hat, kann man auch die Darstellungen der Lorentz-Generatoren finden. Diese haben bezüglich der durch (2.70) festgelegten Normalordnung die folgende Form:

$$\begin{aligned} & \tau^3 \triangleright f(x^+, x^0, x^{3/0}, x^-) \\ = \; & f(q^{-4}x^+, q^4 x^-), \end{aligned} \tag{3.178}$$

$$\begin{aligned} & T^+ \triangleright f(x^+, x^0, x^{3/0}, x^-) \\ = \; & q^{-\frac{1}{2}} \lambda_+^{\frac{1}{2}} \left[x^0 D^-_{q^2} f + x^{3/0} D^-_{q^4} f + q x^+ D^{3/0}_{q^2} f \right] (q^{-2} x^+), \end{aligned} \tag{3.179}$$

$$\begin{aligned} & T^- \triangleright f(x^+, x^0, x^{3/0}, x^-) \\ = \; & q^{\frac{1}{2}} \lambda_+^{\frac{1}{2}} \left[x^0 D^+_{q^2} f + x^{3/0} D^+_{q^4} f + q x^- D^{3/0}_{q^2} f \right] (q^{-2} x^+), \end{aligned} \tag{3.180}$$

$$\begin{aligned} & T^2 \triangleright f(x^+, x^3, x^{3/0}, x^-) \\ = \; & \lambda_+^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_0^k \sum_{0 \leq i+j \leq k} \left\{ q^{\frac{1}{2}} (M^-)^k_{i,j}(\underline{x}) (T_1^T)^i_j f + q^{-\frac{1}{2}} (M^+)^k_{i,j}(\underline{x}) (T_2^T)^i_j f \right\} \end{aligned} \tag{3.181}$$

$$\begin{aligned} & S^1 \triangleright f(x^+, x^3, x^{3/0}, x^-) \\ = \; & -q \lambda_+^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_0^k \sum_{0 \leq i+j \leq k} \left\{ q^{\frac{1}{2}} (M^-)^k_{i,j}(\underline{x}) (T_1^S)^i_j f + q^{-\frac{1}{2}} (M^+)^k_{i,j}(\underline{x}) (T_2^S)^i_j f \right\} \end{aligned} \tag{3.182}$$

$$\begin{aligned}
&\tau^1 \triangleright f(x^+, x^3, x^{3/0}, x^-) \qquad (3.183)\\
=\ & \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_0^k \sum_{0\leq i+j\leq k} \Big\{ (M^+)^k_{i,j}(\underline{x})(T_2^\tau)^i_j f - \frac{\lambda^2}{\lambda_+}(M^-)^k_{i,j}(\underline{x})(T_1^\tau)^i_j f \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sigma^2 \triangleright f(x^+, x^3, x^{3/0}, x^-) \qquad (3.184)\\
=\ & \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_0^k \sum_{0\leq i+j\leq k} (M^-)^k_{i,j}(\underline{x})(T^\sigma)^i_j f,
\end{aligned}$$

wobei $\alpha_0 = -(\lambda/\lambda_+)^2$. Außerdem haben wir zur Verdeutlichung der Struktur die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$\begin{aligned}
(T_1^T)^k_j \triangleright f &= \Big[(O_1^T)_k f\big|_{x^3\rightarrow y_-} \Big](q^{2j}x^{3/0}), \\
(T_2^T)^k_j \triangleright f &= \Big[(O_2^T)_k f\big|_{x^3\rightarrow y_+} \Big](q^{2j}x^{3/0}),
\end{aligned} \tag{3.185}$$

$$\begin{aligned}
(T_1^S)^k_j \triangleright f &= \Big[(O_1^S)_k f\big|_{x^3\rightarrow y_-} \Big](q^{2j}x^{3/0}), \\
(T_2^S)^k_j \triangleright f &= \Big[(O_2^S)_k f\big|_{x^3\rightarrow y_+} \Big](q^{2j}x^{3/0}),
\end{aligned} \tag{3.186}$$

$$\begin{aligned}
(T_1^\tau)^k_j \triangleright f &= \Big[(O_1^\tau)_k f|_{x^3\rightarrow y_-} \Big](q^{2j}x^{3/0}), \\
(T_2^\tau)^k_j \triangleright f &= \Big[(O_2^\tau)_k f|_{x^3\rightarrow y_+} - q\frac{\lambda^2}{\lambda_+}\,(O_3^\tau) f|_{x^3\rightarrow y_+} \Big](q^{2j}x^{3/0}),
\end{aligned} \tag{3.187}$$

$$(T^\sigma)^k_j \triangleright f = \Big[(O^\sigma)_k f|_{x^3\rightarrow y_-} \Big](q^{2j}x^{3/0}). \tag{3.188}$$

Die darin auftretenden Operatoren sind definiert durch

$$\begin{aligned}
(O_1^T)_k f &= q^{-1}x^{3/0}(D^3_{1,q^{-1}})^{k,k} D^-_{q^2} f(qx^+, q^{-1}x^{3/0}, q^{-1}x^-), \\
(O_2^T)_k f &= x^+(D^3_{1,q})^{k,k+1} f(qx^+, qx^{3/0}, q^{-1}x^-),
\end{aligned} \tag{3.189}$$

$$\begin{aligned}
(O_1^S)_k f &= q^{-1}x^{3/0}(D^3_{1,q^{-1}})^{k,k} D^+_{q^2} f(q^{-1}x^+, q^{-1}x^{3/0}, qx^-), \\
(O_2^S)_k f &= x^-(D^3_{1,q^{-1}})^{k,k+1} f(q^{-1}x^+, qx^{3/0}, qx^-),
\end{aligned} \tag{3.190}$$

$$(O_1^\tau)_k f = (x^{3/0})^2 D^+_{q^2}(D^3_{1,q^{-1}})^{k,k} D^-_{q^2} f(qx^+, q^{-1}x^{3/0}, q^{-1}x^-), \tag{3.191}$$

$$
\begin{aligned}
(O_2^\tau)_k f &= (D^3_{1,q})^{k,k} f(qx^+, qx^{3/0}, q^{-1}x^-) \\
&\quad - q\lambda_+^{-1}\lambda^2 x^+ x^{3/0} D^+_{q^2}(D^3_{1,q})^{k,k+1} f(qx^+, qx^{3/0}, q^{-1}x^-), \\
(O_3^\tau)_k f &= qx^{3/0}x^-(D^3_{1,q^{-1}})^{k,k+1} D^-_{q^2} f(qx^+, qx^{3/0}, q^{-1}x^-), \\
\\
(O^\sigma)_k f &= (D^3_{1,q^{-1}})^{k,k} f(q^{-1}x^+, q^{-1}x^{3/0}, qx^-).
\end{aligned}
\tag{3.192}
$$

Schließlich können wir noch die allgemeine Darstellung des Skalierungsoperators Λ angeben, die nämlich lautet

$$
\Lambda \triangleright f(x^+, x^0, x^{3/0}, x^-) = f(q^{-2}x^0, q^{-2}x^+, q^{-2}x^{3/0}, q^{-2}x^-). \tag{3.193}
$$

Mit diesen Darstellungen ist es nun relativ einfach unter Verwendung der Hopfstruktur der Lorentz-Algebra die Vertauschungsrelationen zwischen Lorentz-Generatoren und inversen Koordinaten zu finden. Allgemein muß bekanntlich gelten

$$
h(X^\mu)^{-1} = (h_{(1)} \triangleright (X^\mu)^{-1})h_{(2)}, \tag{3.194}
$$

was in expliziter Form zu folgenden Ausdrücken führt:

$$
\begin{aligned}
T^+(X^0)^{-1} &= (X^0)^{-1}T^+, \\
T^+(X^{3/0})^{-1} &= (X^{3/0})^{-1}T^+ - q^{1/2}\lambda_+^{1/2}(X^{3/0})^{-2}X^+, \\
T^+(X^+)^{-1} &= q^2(X^+)^{-1}T^+, \\
T^+(X^-)^{-1} &= q^{-2}(X^-)^{-1}T^+ - q^{-1/2}\lambda_+^{1/2}(X^-)^{-2}(X^{3/0} + q^{-2}X^0),
\end{aligned}
\tag{3.195}
$$

$$
\begin{aligned}
T^-(X^0)^{-1} &= (X^0)^{-1}T^-, \\
T^-(X^{3/0})^{-1} &= (X^{3/0})^{-1}T^- - q^{-1/2}\lambda_+^{1/2}(X^{3/0})^{-2}X^-, \\
T^-(X^-)^{-1} &= q^{-2}(X^-)^{-1}T^-, \\
T^-(X^+)^{-1} &= q^2(X^+)^{-1}T^- - q^{1/2}\lambda_+^{1/2}(X^+)^{-2}(X^{3/0} + q^2X^0),
\end{aligned}
\tag{3.196}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau^3(X^0)^{-1} &= (X^0)^{-1}\tau^3, \\
\tau^3(X^{3/0})^{-1} &= (X^{3/0})^{-1}\tau^3, \\
\tau^3(X^\pm)^{-1} &= q^{\pm 4}(X^\pm)^{-1}\tau^3,
\end{aligned}
\tag{3.197}
$$

$$
\begin{aligned}
T^2(X^{3/0})^{-1} &= q(X^{3/0})^{-1}T^2, \\
T^2(X^+)^{-1} &= q^{-1}(X^+)^{-1}T^2, \\
T^2(X^-)^{-1} &= q(X^-)^{-1}T^2 - q^{-3/2}\lambda_+^{-1/2}X^{3/0}(X^-)^{-2}\tau^1,
\end{aligned}
\tag{3.198}
$$

$$
\begin{aligned}
T^2(X^3)^{-1} &= (T^2 \triangleright (X^3)^{-1})\tau^1 + (\sigma^2 \triangleright (X^3)^{-1})T^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S^1(X^{3/0})^{-1} &= q^{-1}(X^{3/0})^{-1}S^1, \\
S^1(X^-)^{-1} &= q^{-1}(X^-)^{-1}S^1, \\
S^1\left(X^+\right)^{-1} &= q(X^+)^{-1}S^1 + q^{-1/2}\lambda_+^{-1/2}(X^+)^{-2}X^{3/0}\sigma^2, \\
S^1(X^3)^{-1} &= (S^1 \triangleright (X^3)^{-1})\sigma^2 + (\tau^1 \triangleright (X^3)^{-1})S^1,
\end{aligned}
\tag{3.199}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau^1(X^{3/0})^{-1} &= q^{-1}(X^{3/0})^{-1}\tau^1, \\
\tau^1(X^-)^{-1} &= q(X^-)^{-1}\tau^1, \\
\tau^1(X^+)^{-1} &= q^{-1}(X^+)^{-1}\tau^1 + q^{3/2}\lambda_+^{-1/2}\lambda^2X^{3/0}(X^+)^{-2}T^2, \\
\tau^1(X^3)^{-1} &= (\tau^1 \triangleright (X^3)^{-1})\tau^1 + \lambda^2(S^1 \triangleright (X^3)^{-1})T^2,
\end{aligned}
\tag{3.200}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2(X^{3/0})^{-1} &= q(X^{3/0})^{-1}\sigma^2, \\
\sigma^2(X^+)^{-1} &= q(X^+)^{-1}\sigma^2, \\
\sigma^2(X^-)^{-1} &= q^{-1}(X^-)^{-1}\sigma^2 - q^{1/2}\lambda_+^{-1/2}\lambda^2(X^-)^{-2}X^{3/0}S^1, \\
\sigma^2(X^3)^{-1} &= (\sigma^2 \triangleright (X^3)^{-1})\sigma^2 + \lambda^2(T^2 \triangleright (X^3)^{-1})S^1,
\end{aligned}
\tag{3.201}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
T^2 \triangleright (X^3)^{-1} &= q^{-3/2}\sum_{k=0}^{\infty}(q^2\alpha_0)^k\,(K_{-1})_{1,q^2}^{(k,k+1)} \\
&\quad \cdot \sum_{0\leq i+j\leq k} \lambda_+^{j-1/2}\binom{k}{i}(X^+)^{j+1}\left(a_+(q^{2j}X^{3/0})\right)^i \\
&\quad \cdot S_{k-i,j}(X^0, X^{3/0}) \cdot (X^0 + 2q^{2j+1}\lambda_+^{-1}X^{3/0})^{-2(k+1)}(X^-)^j,
\end{aligned}
\tag{3.202}
$$

$$
\begin{aligned}
S^1 \triangleright (X^3)^{-1} &= -q^{-3/2}\sum_{k=0}^{\infty}(q^{-2}\alpha_0)^k\,(K_{-1})_{1,q^{-2}}^{(k,k+1)} \\
&\quad \cdot \sum_{0\leq i+j\leq k} \lambda_+^{j-1/2}\binom{k}{i}(X^+)^{j}\left(a_+(q^{2j}X^{3/0})\right)^i \\
&\quad \cdot S_{k-i,j}(X^0, X^{3/0}) \cdot (X^0 + 2q^{2j+1}\lambda_+^{-1}X^{3/0})^{-2(k+1)}(X^-)^{j+1},
\end{aligned}
\tag{3.203}
$$

$$
\tau^1 \triangleright (X^3)^{-1} = q\sum_{k=0}^{\infty}(q^2\alpha_0)^k\,(K_{-1})_{1,q^2}^{(k,k)}
\tag{3.204}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot \sum_{0\leq i+j\leq k} \lambda_+^j \binom{k}{i} (X^+)^j \left(a_+(q^{2j}X^{3/0})\right)^i \\
&\cdot S_{k-i,j}(X^0, X^{3/0}) \cdot (X^0 + 2q^{2j+1}\lambda_+^{-1}X^{3/0})^{-2k-1}(X^-)^j,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 \triangleright (X^3)^{-1} \;=\; & q^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(q^{-2}\alpha_0)^k \, (K_{-1})^{(k,k)}_{1,q^{-2}} \\
&\cdot \sum_{0\leq i+j\leq k} \lambda_+^j \binom{k}{i} (X^+)^j \left(a_-(q^{2j}X^{3/0})\right)^i \\
&\cdot S_{k-i,j}(X^0, X^{3/0}) \cdot (X^0 + 2q^{2j-1}\lambda_+^{-1}X^{3/0})^{-2k-1}(X^-)^j.
\end{aligned}
\tag{3.205}
$$

Man beachte, dass wir diese Ausdrücke zunächst mit Hilfe der Darstellungen auf der kommutativen Funktionenalgebra gewonnen haben und sie dann mittels des Algebra-Isomorphismuses wieder in die nichtkommutative Koordinatenalgebra übertragen haben.

Bisher wurden auf dem q-Minkowski-Raum ausschließlich Linksdarstellungen betrachtet. Wie in den vorhergehenden Abschnitten lassen sich die Rechtsdarstellungen aus den Unitaritätsbedingungen

$$
\begin{aligned}
\overline{\partial^\mu \triangleright f} &= \bar{f} \triangleleft \overline{\partial^\mu}, \\
\overline{f \triangleleft \partial^\mu} &= \overline{\partial^\mu} \triangleright \bar{f}
\end{aligned}
\tag{3.206}
$$

unter Berücksichtigung der Konjugationseigenschaften

$$
\overline{X^0} = X^0, \quad \overline{X^{3/0}} = X^{3/0}, \quad \overline{X^+} = -qX^-, \quad \overline{X^-} = -q^{-1}X^+,
\tag{3.207}
$$

$$
\overline{\partial^0} = -q^4\hat{\partial}^0, \quad \overline{\partial^3} = -q^4\hat{\partial}^{3/0}, \quad \overline{\partial^+} = q^5\hat{\partial}^-, \quad \overline{\partial^-} = q^3\hat{\partial}^+,
$$

$$
\overline{T^+} = q^{-2}T^-, \quad \overline{T^-} = q^2 T^+
$$

gewinnen. Damit erhält man dann die Transformationsregeln

$$
\begin{aligned}
f \triangleleft \partial^0 &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \bar{\partial}^0 \triangleright f, \\
f \triangleleft \partial^{3/0} &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \bar{\partial}^{3/0} \triangleright f, \\
f \triangleleft \partial^{\pm} &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \bar{\partial}^{\mp} \triangleright f,
\end{aligned}
\tag{3.208}
$$

$$
\begin{aligned}
f \,\tilde{\triangleleft}\, \bar{\partial}^0 &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \partial^0 \,\tilde{\triangleright}\, f, \\
f \,\tilde{\triangleleft}\, \bar{\partial}^{3/0} &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \partial^{3/0} \,\tilde{\triangleright}\, f,
\end{aligned}
\tag{3.209}
$$

$$
\begin{aligned}
f \,\tilde{\triangleleft}\, \bar{\partial}^{\pm} &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \partial^{\mp} \,\tilde{\triangleright}\, f, \\
f \triangleleft T^{+} &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} -q^{-3} T^{-} \triangleright f, \\
f \triangleleft T^{-} &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} -q^{3} T^{+} \triangleright f,
\end{aligned}
\tag{3.210}
$$

wobei der Übergang zwischen dem linken und dem rechten Ausdruck durch die Ersetzungen

$$
x^{\pm} \rightarrow x^{\mp}, \quad D_{q^a}^{\pm} \rightarrow D_{q^a}^{\mp}, \quad \hat{n}^{\pm} \rightarrow \hat{n}^{\mp}
\tag{3.211}
$$

erfolgt. Mit der Identität

$$
f \triangleleft h = S^{-1}(h) \triangleright f
\tag{3.212}
$$

und den Antipoden aus (3.131) erhält man für die Rechstdarstellungen der verbleibenden Lorentz-Generatoren schließlich

$$
\begin{aligned}
f \triangleleft T^{2} &= -(\tau^{3})^{\frac{1}{2}} T^{2} \triangleright f, \\
f \triangleleft S^{1} &= -q^{2} (\tau^{3})^{-\frac{1}{2}} S^{1} \triangleright f, \\
f \triangleleft \tau^{1} &= \sigma^{2} \triangleright f, \\
f \triangleleft \sigma^{2} &= \tau^{1} \triangleright f, \\
f \triangleleft \tau^{3} &= (\tau^{3})^{-1} \triangleright f, \\
f \triangleleft \Lambda &= \Lambda^{-1} \triangleright f.
\end{aligned}
\tag{3.213}
$$

Kapitel 4

q-Integration

Nachdem wir im letzten Kapitel die Darstellungen der partiellen Ableitungen für eine spezielle Normalordnung berechnet haben, sind wir nun in der Lage, Integrale als eine Umkehrung der Differentiation einzuführen. Dabei wird sich zeigen, dass unsere Überlegungen in gewisser Hinsicht als eine mehrdimensionale Verallgemeinerung des Jackson-Integrals [13] angesehen werden können. Zu diesem Zweck erweitern wir zunächst die Ableitungsalgebra durch inverse Elemente, und zwar auf die gleiche Weise wie in Kapitel 2. Anschließend suchen wir nach entsprechenden Realisierungen dieser Elemente, indem wir Operatoren bestimmen, welche die Wirkungen der partiellen Ableitungen, wie sie im vorangehenden Kapitel berechnet wurden, umkehren. Konkret läuft dieses Vorgehen auf das Lösen von entsprechenden q-Differentialgleichungen hinaus. Die so erhaltenen Ergebnisse haben die Form von unendlichen Summen und stellen daher eine Methode zur Diskretisierung klassischer Integrale zur Verfügung [54].

So wie es für die Ableitungen Links- und Rechtsdarstellungen gibt, muß man dementsprechend zwischen Links- und Rechtsintegralen unterscheiden. In völliger Analogie zum klassischen Fall lassen sich aus den Leibnizregeln der Differentiation wieder Regeln zur partiellen Integration ableiten. Schließlich ermöglicht unser Zugang auch die Konstruktion von Volumenintegralen, die sich über den gesamten Raum erstrecken. Diese sind bis auf eine Normierung eindeutig und haben die wichtige Eigenschaft, sowohl unter Translationen als auch unter Wirkungen der Symmetriealgebra invariant zu sein. Vergleichen wir unser Vorgehen mit der Vielzahl von Versuchen, Integrale auf Quantenräumen einzuführen [55], [56], [57], [58], [59], so stellen wir fest, dass sich unser Integralbegriff weitgehend an die Überlegungen in [60] anlehnt, wo Integration ebenfalls als eine Umkehrung der Differentiation aufgefasst wird. Allerdings sind die dortigen Untersuchungen vorwiegend algebraischer Natur, während in unseren Betrachtungen der analytische Aspekt im Vordergrund steht.

Im Rahmen unserer Berechnungen werden wir feststellen, dass unsere Integralausdrücke wie im Fall der Differentiation in Korrekturterme und einen klassischen Beitrag zerfallen. Weiterhin werden wir sehen, dass bei Integration über den gesamten Raum und Vernachlässigung von Oberflächentermen die Korrekturterme zum Ergebnis nicht mehr beitragen und die einzelnen Integrationen wieder unabhängig voneinander werden. Die nichtkommutative Struktur unseres Raumes führt also bei Integration zu Oberflächeneffekten, welche für das Auftreten von Korrekturtermen verantwortlich sind. Dies bedeutet aber auch, dass Nichtkommutativität stets ein lokales Phänomen ist, das bei globaler Betrachtung nicht unbedingt eine Rolle spielen muss.

4.1 Euklidischer Raum in drei Dimensionen

Die partiellen Ableitungen ∂^A erfüllen formal die gleichen Vertauschungsrelationen [34] wie die Koordinaten X^A, weshalb gilt

$$\begin{aligned} \partial^3\partial^\pm &= q^{\pm 2}\partial^\pm\partial^3, \\ \partial^-\partial^+ &= \partial^+\partial^- + \lambda\partial^3\partial^3. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Wie im Fall der Koordinaten können wir auch auf der Algebra der Ableitungen inverse Elemente einführen mit

$$\partial^A(\partial^A)^{-1} = (\partial^A)^{-1}\partial^A = 1, \quad A \in \{+,3,-\}. \tag{4.2}$$

Die verbleibenden Vertauschungsrelationen zwischen partiellen Ableitungen und ihren Inversen können dann auf die gleiche Weise bestimmt werden wie in Kapitel 2.1, so dass gilt

$$\begin{aligned} (\partial^3)^{-1}\partial^\pm &= q^{\mp 2}\partial^\pm(\partial^3)^{-1}, \\ (\partial^\pm)^{-1}\partial^3 &= q^{\pm 2}\partial^3(\partial^\pm)^{-1}, \\ (\partial^-)^{-1}\partial^+ &= \partial^+(\partial^-)^{-1} - q^{-4}\lambda(\partial^3)^2(\partial^-)^{-2}, \\ \partial^-(\partial^+)^{-1} &= (\partial^+)^{-1}\partial^- - q^{-4}\lambda(\partial^+)^{-2}(\partial^3)^2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Entsprechend findet man für die Relationen, welche die inversen Elemente untereinander erfüllen, die Identitäten

$$\begin{aligned}
(\partial^3)^{-1}(\partial^\pm)^{-1} &= q^{\pm 2}(\partial^\pm)^{-1}(\partial^3)^{-1}, \\
(\partial^-)^{-1}(\partial^+)^{-1} &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i\, [[i]]_{q^4}! \left(\begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix}_{q^4} \right)^2 \\
&\quad \cdot (\partial^+)^{-(i+1)}(\partial^3)^{2i}(\partial^-)^{-(i+1)}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Da die partiellen Ableitungen ∂^A sich bezüglich der Quantenalgebra $U_q(su_2)$ genauso wie die Koordinaten X^A verhalten, vertauschen diese mit den Generatoren der $U_q(su_2)$ auch auf die gleiche Weise, weshalb gilt

$$\begin{aligned}
L^+\partial^+ &= \partial^+ L^+, \\
L^+\partial^3 &= \partial^3 L^+ - q\partial^+\tau^{-\frac{1}{2}}, \\
L^+\partial^- &= \partial^- L^+ - \partial^3\tau^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
L^-\partial^+ &= \partial^+ L^- + \partial^3\tau^{-\frac{1}{2}}, \\
L^-\partial^3 &= \partial^3 L^- + q^{-1}\partial^-\tau^{-\frac{1}{2}}, \\
L^-\partial^- &= \partial^- L^-,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
\tau^{-\frac{1}{2}}\partial^\pm &= q^{\pm 2}\partial^\pm\tau^{-\frac{1}{2}}, \\
\tau^{-\frac{1}{2}}\partial^3 &= \partial^3\tau^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Wie im Fall der Koordinatenalgebra gewinnt man aus diesen Relationen leicht die Vertauschungsrelationen zwischen den Generatoren der $U_q(su_2)$ und den inversen Elementen $(\partial^A)^{-1}$:

$$\begin{aligned}
L^+(\partial^+)^{-1} &= (\partial^+)^{-1}L^+, \\
L^+(\partial^3)^{-1} &= (\partial^3)^{-1}L^+ + q^{-1}\partial^+(\partial^3)^{-2}\tau^{-\frac{1}{2}}, \\
L^+(\partial^-)^{-1} &= (\partial^-)^{-1}L^+ + q^{-1}\partial^3(\partial^-)^{-2}\tau^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
L^-(\partial^-)^{-1} &= (\partial^-)^{-1}L^-, \\
L^-(\partial^3)^{-1} &= (\partial^3)^{-1}L^- - q^{-3}(\partial^3)^{-2}\partial^-\tau^{-\frac{1}{2}}, \\
L^-(\partial^+)^{-1} &= (\partial^+)^{-1}L^- - q^{-4}(\partial^+)^{-2}\partial^3\tau^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
\tau^{-\frac{1}{2}}(\partial^\pm)^{-1} &= q^{\mp 2}(\partial^\pm)^{-1}\tau^{-\frac{1}{2}}, \\
\tau^{-\frac{1}{2}}(\partial^3)^{-1} &= (\partial^3)^{-1}\tau^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Für den Skalierungsoperator hingegen gilt

$$\Lambda^{\frac{1}{2}}(\partial^A)^{-1} = q^2(\partial^A)^{-1}\Lambda^{\frac{1}{2}}, \quad A \in \{\pm, 3\}. \tag{4.11}$$

All diese Relationen gelten in der gleichen Form auch für die konjugierten Ableitungen $\bar{\partial}^A$, d.h. man kann in den obigen Formeln die Ersetzungen

$$\partial^A \to \bar{\partial}^A, \quad (\partial^A)^{-1} \to (\bar{\partial}^A)^{-1}, \quad A \in \{\pm, 3\}, \tag{4.12}$$

ausführen und erhält so die entsprechenden Identitäten für den Kalkül der konjugierten Ableitungen.

In Kapitel 3 hatten wir gesehen, dass die Darstellungen der partiellen Ableitungen auf einer kommutativen Funktionenalgebra gemäß

$$\partial^A \triangleright F = \left((\partial^A_{(i=0)}) + (\partial^A_{(i>0)})\right) F \tag{4.13}$$

in zwei Anteile zerfallen. Diese Erkenntnis nutzen wir aus bei der Suche nach Lösungen der Gleichung

$$\partial^A \triangleright F = f \tag{4.14}$$

für gegebenes f. Wir können nämlich die obige Gleichung wegen (4.13) wie folgt nach F auflösen:

$$\begin{aligned} F &= \left(\partial^A\right)^{-1} \triangleright f = \frac{1}{(\partial^A_{(i=0)}) + (\partial^A_{(i>0)})} f \\ &= \frac{1}{(\partial^A_{(i=0)})\left(1 + (\partial^A_{(i=0)})^{-1}(\partial^A_{(i>0)})\right)} f \\ &= \frac{1}{\left(1 + (\partial^A_{(i=0)})^{-1}(\partial^A_{(i>0)})\right)} \cdot \frac{1}{(\partial^A_{(i=0)})} f \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[(\partial^A_{(i=0)})^{-1}(\partial^A_{(i>0)})\right]^k (\partial^A_{(i=0)})^{-1} f. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Um diese Formel anzuwenden, muss man zunächst in der Darstellung der betreffenden Ableitung die beiden Anteile, also klassischen Beitrag und Korrekturterm identifizieren, und anschließend den Operator für den klassischen Beitrag invertieren. Im Fall der Ableitung ∂^+ finden wir etwa

$$\begin{aligned} (\partial^+_{(i=0)})f &= -qD^-_{q^4} f(q^2x^3), \\ (\partial^+_{(i>0)})f &= -q\lambda x^+(D^3_{q^2})^2 f. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Das Inverse des Operators $(\partial^+_{(i=0)})$ können wir dann darstellen als

$$(\partial^+_{(i=0)})^{-1} f = -q^{-1}(D^-_{q^4})^{-1} f(q^{-2}x^3), \tag{4.17}$$

wobei $(D^A_{q^a})^{-1}$ ein Jackson-Integral bzgl. der Variablen X^A bezeichnet. Dessen explizite Form haben wir im Anhang A angegeben. Verfahren wir für die verbleibenden partiellen Ableitungen in gleicher Weise, so finden wir

$$\begin{aligned}
(\partial^+_{(i=0)})^{-1} f &= -q^{-1}(D^-_{q^4})^{-1} f(q^{-2}x^3), \\
(\partial^3_{(i=0)})^{-1} f &= (D^3_{q^2})^{-1} f(q^{-2}x^+), \\
(\partial^-_{(i=0)})^{-1} f &= -q(D^+_{q^4})^{-1} f
\end{aligned} \tag{4.18}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
(\partial^+_{(i>0)}) f &= -q\lambda x^+ (D^3_{q^2})^2 f, \\
(\partial^3_{(i>0)}) f &= 0, \\
(\partial^-_{(i>0)}) f &= 0.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Setzen wir diese Ausdrücke schließlich in (4.15) ein, so ergeben sich als mögliche Lösung von (4.14)

$$\begin{aligned}
(\partial^-)^{-1} \triangleright f &= -q(D^+_{q^4})^{-1} f, \\
(\partial^3)^{-1} \triangleright f &= (D^3_{q^2})^{-1} f(q^{-2}x^+), \\
(\partial^+)^{-1} \triangleright f &= -q^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k \, q^{2k(k+1)} \left[x^+ (D^-_{q^4})^{-1} (D^3_{q^2})^2 \right]^k \\
&\quad \cdot (D^-_{q^4})^{-1} f(q^{-2(k+1)} x^3).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Suchen wir hingegen Lösungen der Gleichung

$$\hat{\partial}^A \,\tilde{\triangleright}\, F = f, \tag{4.21}$$

so können wir die durch (3.46) beschriebene Symmetrie zwischen den Darstellungen der partiellen Ableitungen und denen ihrer Konjugierten ausnützen. Es gilt daher

$$\begin{aligned}
(\partial^\pm)^{-1} \triangleright f &\quad \overset{\pm \to \mp}{\underset{}{\overset{q \to 1/q}{\longleftrightarrow}}} \quad (\hat{\partial}^\mp)^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f, \\
(\partial^3)^{-1} \triangleright f &\quad \overset{\pm \to \mp}{\underset{}{\overset{q \to 1/q}{\longleftrightarrow}}} \quad (\hat{\partial}^3)^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f,
\end{aligned} \tag{4.22}$$

was bedeutet, dass der Übergang vom linken zum rechten Ausdruck einfach durch die Ersetzungen

$$x^{\pm} \rightarrow x^{\mp}, \quad q^{\pm 1} \rightarrow q^{\mp 1}, \quad \hat{n}^{\pm} \rightarrow -\hat{n}^{\mp} \tag{4.23}$$
$$D^{\pm}_{q^a} \rightarrow D^{\mp}_{q^{-a}}, \quad (D^{\pm}_{q^a})^{-1} \rightarrow (D^{\mp}_{q^{-a}})^{-1}$$

gelingt. Dabei ist jedoch zu beachten, dass die Operatoren $(\hat{\partial}^A)^{-1}$ sich jetzt auf eine andere Normalordnung beziehen, so dass bei Bedarf unter Verwendung der Operatoren $\hat{U}^{-1}$ und $\hat{U}$ aus (2.33)-(2.34) noch eine Umordnung nötig wird,

$$\begin{aligned} (\hat{\partial}^A)^{-1} \triangleright (\hat{U}^{-1} f) &= \hat{U}^{-1}((\hat{\partial}^A)^{-1} \tilde{\triangleright} f), \\ (\partial^A)^{-1} \tilde{\triangleright} (\hat{U} f) &= \hat{U}((\partial^A)^{-1} \triangleright f). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Falls wir jedoch Lösungen der Gleichungen

$$F \,\tilde{\triangleleft}\, \partial^A = f \quad \text{oder} \quad F \triangleleft \bar{\partial}^A = f \tag{4.25}$$

suchen, so finden wir diese wieder unter Berücksichtigung des bekannten Zusammenhangs zwischen Links- und Rechtsdarstellungen. In Analogie zu den Regeln (3.54) gilt daher im Fall der ersten Gleichung

$$\begin{aligned} f \,\tilde{\triangleleft}\, (\partial^{\pm})^{-1} &\stackrel{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} (\bar{\partial}^{\mp})^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f, \\ f \,\tilde{\triangleleft}\, (\partial^{3})^{-1} &\stackrel{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} (\bar{\partial}^{3})^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f, \end{aligned} \tag{4.26}$$

während für die zweite Gleichung sich die Lösungen aus

$$\begin{aligned} f \triangleleft (\bar{\partial}^{\pm})^{-1} &\stackrel{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} (\partial^{\mp})^{-1} \triangleright f, \\ f \triangleleft (\bar{\partial}^{3})^{-1} &\stackrel{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} (\partial^{3})^{-1} \triangleright f \end{aligned} \tag{4.27}$$

ergeben. Der Übergang vom linken zum rechten Ausdruck erfolgt jetzt durch die Ersetzungen

$$x^{\pm} \rightarrow x^{\mp}, \quad D^{\pm}_{q^a} \rightarrow D^{\mp}_{q^a}, \quad (D^{\pm}_{q^a})^{-1} \rightarrow (D^{\mp}_{q^a})^{-1}, \quad \hat{n}^{\pm} \rightarrow \hat{n}^{\mp}. \tag{4.28}$$

Wir wollen nun die Frage, inwieweit Differentiation und Integration Umkehrungen voneinander sind, etwas genauer betrachten. In diesem Zusammenhang ist es wichtig zu erkennen, dass unsere Integralausdrücke mit Hilfe von Jackson-Integralen formuliert sind. Für deren eindeutige Festlegung ist jedoch die Angabe ihrer Integrationsgrenzen notwendig. Wählen wir für die untere Grenze sämtlicher Jackson-Integral stets $x^A = 0$, so können wir unsere Integralausdrücke (4.20) als bestimmte Integrale über das Intervall $\left[0, x^A\right]$ ansehen. Für die Jackson-Integrale gilt, wie man leicht nachprüfen kann, der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in der gewohnten Form, also

$$\begin{aligned} D^A_{q^a}\left[(D^A_{q^a})^{-1} f\big|_0^{x^A}\right] &= f, \\ (D^A_{q^a})^{-1} D^A_{q^a} f\big|_0^{x^A} &= f\big|_0^{x^A}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Dies überträgt sich dann auch auf die klassischen Beiträge in den Ausdrücken, die wir für die partiellen Ableitungen und ihre Inversen gefunden haben, weshalb gilt

$$\begin{aligned} \partial^A_{(i=0)}\left[(\partial^A_{(i=0)})^{-1} f\big|_0^{x^{\bar{A}}}\right] &= f, \\ (\partial^A_{(i=0)})^{-1} \partial^A_{(i=0)} f\big|_0^{x^{\bar{A}}} &= f\big|_0^{x^{\bar{A}}}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Dabei haben wir außerdem berücksichtigt, dass die Koordinaten, welche die oberen Integrationsgrenzen bestimmen anders indiziert werden müssen als die zugehörigen Operatoren $(\partial^A_{(i=0)})^{-1}$. Führen wir nun den Operator

$$\hat{C}^A f = (\partial^A_{(i=0)})^{-1} (\partial^A_{(i>0)}) f\big|_0^{x^{\bar{A}}} \tag{4.31}$$

ein, so können wir unter Berücksichtigung der Ausdrücke (4.13) und (4.15) sowie der Relationen (4.30) folgende Rechnung ausführen:

$$\begin{aligned} &(\partial^A)^{-1} \partial^A f\big|_0^{x^{\bar{A}}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\hat{C}^A)^k (f - f(x^{\bar{A}} = 0)\Big|_0^{x^{\bar{A}}} - \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{C}^A)^k f\Big|_0^{x^{\bar{A}}} \\ &= f - f(x^{\bar{A}} = 0) - \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{C}^A)^k f(x^{\bar{A}} = 0)\Big|_0^{x^{\bar{A}}}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Aus der Konstruktion unserer Integralausdrücke folgt außerdem sofort

$$\partial^A \left[(\partial^A)^{-1} f\big|_0^{x^{\bar{A}}}\right] = f, \tag{4.33}$$

was zusammen mit (4.32) eine nichtkommutative Version des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung darstellt. Es ist jedoch zu betonen, dass diese Überlegungen der Beschränkung unterliegen, dass die unteren Integrationsgrenzen stets den Wert $x^{\bar{A}} = 0$ annehmen müssen. Die Konstruktion von bestimmten Integralen mit beliebigen Grenzen erfordert allerdings weitergehende Betrachtungen, die an dieser Stelle nicht weiter verfolgt werden sollen.

Aus den Leibniz-Regeln für die partiellen Ableitungen lassen sich in Analogie zum undeformierten Fall Regeln für die partielle Integration ableiten. Um die folgenden Ausdrücke übersichtlicher schreiben zu können, wollen wir eine Reihe von neuen Bezeichnungen einführen. So kennzeichnen wir Links- bzw. Rechtsdarstellungen von jetzt an stets mit einem entsprechenden Index,

$$\begin{aligned} \partial_L^A f &\equiv \partial^A \triangleright f, \\ \partial_R^A f &\equiv f \,\tilde{\triangleleft}\, \partial^A, \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned} \hat{\partial}_L^A f &\equiv \hat{\partial}^A \,\tilde{\triangleright}\, f, \\ \hat{\partial}_R^A f &\equiv f \triangleleft \hat{\partial}^A. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Entsprechendes gilt für die zugehörigen Links- bzw. Rechtsintegrale,

$$\begin{aligned} (\partial^A)_L^{-1} f &\equiv (\partial^A)^{-1} \triangleright f, \\ (\partial^A)_L^{-1} f &\equiv f \,\tilde{\triangleleft}\, (\partial^A)^{-1}, \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned} (\hat{\partial}^A)_R^{-1} f &\equiv (\hat{\partial}^A)^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f, \\ (\hat{\partial}^A)_R^{-1} f &\equiv f \triangleleft (\hat{\partial}^A)^{-1}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Außerdem wollen wir für die in (4.32) auftretende Differenz eine spezielle Abkürzung einführen, nämlich

$$f\|_0^{x^{\bar{A}}} \equiv f - f(x^{\bar{A}} = 0) - \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{C}^A)^k \, f(x^{\bar{A}} = 0)\Big|_0^{x^{\bar{A}}}. \tag{4.38}$$

Die in der rechten Seite der letzten Formel vermerkten Integrationsgrenzen beziehen sich immer auf die in den jeweiligen Operatoren auftretenden Jackson-Integrale. Das folgende Beispiel soll nun kurz illustrieren, wie Regeln zur partiellen Integration aus den Leibniz-Regeln hergeleitet werden können:

$$\partial_L^-(f \star g) = (\partial_L^- f) \star g + (\Lambda^{\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}} f) \star (\partial_L^- g), \tag{4.39}$$

$$
\begin{aligned}
(\partial_L^- f) \star g &= \partial_L^- (f \star g) - (\Lambda^{\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}} f) \star (\partial_L^- g), \\
(\partial^-)_L^{-1} (\partial_L^- f) \star g|_0^{x^A} &= f \star g\|_{x^+=0}^{x^A} - (\partial^-)_L^{-1} (\Lambda^{\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}} f) \star (\partial_L^- g)\Big|_{x^+=0}^{x^A} .
\end{aligned}
$$

Wendet man diese Überlegungen auch auf die anderen Linksableitungen an, erhält man insgesamt die Identitäten

$$
\begin{aligned}
(\partial^-)_L^{-1} (\partial_L^- f) \star g\,|_{x^+=0}^{a} &= f \star g\,\|_{x^+=0}^{a} \\
&\quad - (\partial^-)_L^{-1}\, (\Lambda^{1/2} \tau^{-1/2} f) \star \partial_L^- g\Big|_{x^+=0}^{a} , \\
(\partial^3)_L^{-1} (\partial_L^3 f) \star g\,|_{x^3=0}^{a} &= f \star g\,\|_{x^3=0}^{a} - (\partial^3)_L^{-1}\, (\Lambda^{1/2} f) \star \partial_L^3 g\Big|_{x^3=0}^{a} \\
&\quad - \lambda\lambda_+ (\partial^3)_L^{-1}\, (\Lambda^{1/2} L^+ f) \star \partial_L^- g\Big|_{x^3=0}^{a} , \\
(\partial^+)_L^{-1} (\partial_L^+ f) \star g\,|_{x^-=0}^{a} &= f \star g\,\|_{x^-=0}^{a} - (\partial^+)_L^{-1}\, (\Lambda^{1/2} \tau^{1/2} f) \star \partial_L^+ g\Big|_{x^-=0}^{a} \\
&\quad - q\lambda\lambda_+ (\partial^+)_L^{-1}\, (\Lambda^{1/2} \tau^{1/2} L^+ f) \star \partial_L^3 g\Big|_{x^-=0}^{a} \\
&\quad - q^2\lambda^2\lambda_+ (\partial^+)_L^{-1}\, (\Lambda^{1/2} \tau^{1/2} (L^+)^2 f) \star \partial_L^- g\Big|_{x^-=0}^{a} .
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

Dabei ist in den obigen Ausdrücken stets zu beachten, dass die Lorentz-Generatoren Linkswirkungen vermitteln. Für die konjugierten Linksableitungen kann man nun in der gleichen Weise verfahren und gelangt dann zu den Regeln

$$
\begin{aligned}
(\hat{\partial}^+)_L^{-1} (\hat{\partial}_L^+ f) \star g\,|_{x^-=0}^{a} &= f \star g\,\|_{x^-=0}^{a} \\
&\quad - (\hat{\partial}^+)_L^{-1}\, (\Lambda^{-1/2} \tau^{-1/2} f) \star \hat{\partial}_L^+ g\Big|_{x^-=0}^{a} , \\
(\hat{\partial}^3)_L^{-1} (\hat{\partial}_L^3 f) \star g\,|_{x^3=0}^{a} &= f \star g\,\|_{x^3=0}^{a} - (\hat{\partial}^3)_L^{-1}\, (\Lambda^{-1/2} f) \star \hat{\partial}_L^3 g\Big|_{x^3=0}^{a} \\
&\quad - \lambda\lambda_+ (\hat{\partial}^3)_L^{-1}\, (\Lambda^{-1/2} L^- f) \star \hat{\partial}_L^+ g\Big|_{x^3=0}^{a} , \\
(\hat{\partial}^-)_L^{-1} (\hat{\partial}_L^- f) \star g\,|_{x^+=0}^{a} &= f \star g\,\|_{x^+=0}^{a} - (\hat{\partial}^-)_L^{-1}\, (\Lambda^{-1/2} \tau^{1/2} f) \star \hat{\partial}_L^- g\Big|_{x^+=0}^{a} \\
&\quad - q^{-1}\lambda\lambda_+ (\hat{\partial}^-)_L^{-1}\, (\Lambda^{-1/2} \tau^{1/2} L^- f) \star \hat{\partial}_L^3 g\Big|_{x^+=0}^{a} \\
&\quad - q^{-2}\lambda^2\lambda_+ (\hat{\partial}^-)_L^{-1}\, (\Lambda^{-1/2} \tau^{1/2} (L^-)^2 f) \star \hat{\partial}_L^+ g\Big|_{x^+=0}^{a} .
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

Um die Regeln der partiellen Integration im Fall der Rechtsableitungen zu finden, muss man von den Leibniz-Regeln der Form

$$
(f \star g) \triangleleft \partial^A = (f \triangleleft \partial_{(2)}^A)(g \triangleleft \partial_{(1)}^A) \tag{4.42}
$$

ausgehen. Mit dem gleichen Vorgehen wie im Fall der Linksableitungen bekommt man

$$
\begin{aligned}
(\partial^-)^{-1}_R f \star \partial^-_R g\,|^a_{x^+=0} &= f \star g\,\|^a_{x^+=0} \\
&\quad - (\partial^-)^{-1}_R (\partial^-_R f) \star (\Lambda^{-1/2}\tau^{1/2} g)\big|^a_{x^+=0}\,, \\
(\partial^3)^{-1}_R f \star \partial^3_R g\,|^a_{x^3=0} &= f \star g\,\|^a_{x^3=0} - (\partial^3)^{-1}_R (\partial^3_R f) \star (\Lambda^{-1/2} g)\big|^a_{x^3=0} \\
&\quad + \lambda\lambda_+ (\partial^3)^{-1}_R (\partial^-_R f) \star (\Lambda^{-1/2}\tau^{1/2} L^+ g)\big|^a_{x^3=0}\,, \\
(\partial^+)^{-1}_R f \star \partial^+_R g\,|^a_{x^-=0} &= f \star g\,\|^a_{x^-=0} - (\partial^+)^{-1}_R (\partial^+_R f) \star (\Lambda^{-1/2}\tau^{-1/2} g)\big|^a_{x^-=0} \\
&\quad + q^{-1}\lambda\lambda_+ (\partial^+)^{-1}_R (\partial^3_R f) \star (\Lambda^{-1/2} L^+ g)\big|^a_{x^-=0} \\
&\quad - \lambda^2\lambda_+ (\partial^+)^{-1}_R (\partial^-_R f) \star (\Lambda^{-1/2}\tau^{1/2} (L^+)^2 g)\big|^a_{x^-=0}\,,
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

wobei wir noch die Rechtsdarstellungen der Lorentz-Generatoren in Linksdarstellungen umgeschrieben haben. Für die Rechtsdarstellungen der konjugierten Ableitungen finden wir entsprechende Formeln:

$$
\begin{aligned}
(\hat{\partial}^+)^{-1}_R f \star \hat{\partial}^+_R g\,|^a_{x^-=0} &= f \star g\,\|^a_{x^-=0} \\
&\quad - (\hat{\partial}^+)^{-1}_R (\hat{\partial}^+_R f) \star (\Lambda^{1/2}\tau^{1/2} g)\big|^a_{x^-=0}\,, \\
(\hat{\partial}^3)^{-1}_R f \star \hat{\partial}^3_R g\,|^a_{x^3=0} &= f \star g\,\|^a_{x^3=0} - (\hat{\partial}^3)^{-1}_R (\hat{\partial}^3_R f) \star (\Lambda^{1/2} g)\big|^a_{x^3=0} \\
&\quad + \lambda\lambda_+ (\hat{\partial}^3)^{-1}_R (\hat{\partial}^+_R f) \star (\Lambda^{1/2}\tau^{1/2} L^- g)\big|^a_{x^3=0}\,, \\
(\hat{\partial}^-)^{-1}_R f \star \hat{\partial}^-_R g\,|^a_{x^+=0} &= f \star g\,\|^a_{x^+=0} - (\hat{\partial}^-)^{-1}_R (\hat{\partial}^-_R f) \star (\Lambda^{1/2}\tau^{-1/2} g)\big|^a_{x^+=0} \\
&\quad + q\lambda\lambda_+ (\hat{\partial}^-)^{-1}_R (\hat{\partial}^3_R f) \star (\Lambda^{1/2} L^- g)\big|^a_{x^+=0} \\
&\quad - \lambda^2\lambda_+ (\hat{\partial}^-)^{-1}_R (\hat{\partial}^+_R f) \star (\Lambda^{1/2}\tau^{1/2} (L^-)^2 g)\big|^a_{x^+=0}\,.
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

Am Ende dieses Abschnitts wollen wir noch erörtern, wie sich ihm Rahmen unserer Betrachtungen Volumenintegrale definieren lassen, insbesondere solche, die sich über den gesamten Raum erstrecken. Zunächst ist es naheliegend, eine Volumenintegration durch sukzessive Integration über alle Koordinaten zu erklären. Die Relationen (4.4) lassen allerdings erwarten, dass die einzelnen Integrationen nicht unabhängig voneinander ausgeführt werden können, also nicht vertauschen, so dass das Ergebnis der Volumenintegration davon abhängt, in welcher Reihenfolge über die einzelnen Koordinaten integriert wird. Wenn wir jedoch Oberflächenterme systematisch vernachlässigen, weil wir davon ausgehen, dass sämtliche Funktionen im Unendlichen verschwinden, dann unterscheiden sich die verschiedenen Möglichkeiten der

Volumenintegration nur um eine Normierung, wie die folgende Rechnung verdeutlicht:

$$
\begin{aligned}
& (\partial^-)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^+)^{-1} \triangleright f \\
= \; & q^2(\partial^-)^{-1}(\partial^+)^{-1}(\partial^3)^{-1} \triangleright f \\
= \; & \sum_{i=0}^{\infty} q^{2(i+2)}\lambda^i \, [[i]]_{q^4}! \left(\begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} \right)^2 (\partial^+)^{-(i+1)}(\partial^3)^{2i-1}(\partial^-)^{-(i+1)} f \\
= \; & q^4(\partial^+)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^-)^{-1} f + O.T.
\end{aligned} \tag{4.45}
$$

Dabei steht das Symbol $O.T.$ stellvertretend für die unberücksichtigten Oberflächenterme, also Term, bei denen über mindestens eine Koordinate nicht integriert wurde. Durch Fortführung dieser Rechnungen finden wir schließlich die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
& (\partial^+)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^-)^{-1} \triangleright f \\
= \; & q^{-4}(\partial^-)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^+)^{-1} \triangleright f + O.T. \\
= \; & q^{-2}(\partial^3)^{-1}(\partial^-)^{-1}(\partial^+)^{-1} \triangleright f + O.T. \\
= \; & q^{-2}(\partial^3)^{-1}(\partial^+)^{-1}(\partial^-)^{-1} \triangleright f + O.T. \\
= \; & q^{-2}(\partial^-)^{-1}(\partial^+)^{-1}(\partial^3)^{-1} \triangleright f + O.T. \\
= \; & q^{-2}(\partial^+)^{-1}(\partial^-)^{-1}(\partial^3)^{-1} \triangleright f + O.T.
\end{aligned} \tag{4.46}
$$

Die Gültigkeit dieser Zusammenhänge lässt sich noch auf eine andere Art und Weise einsehen, die uns außerdem eine einfache Möglichkeit zur Berechung der Volumenintegrale aufzeigt. Setzen wir nämlich in einen der Ausdrücke aus (4.46) die Darstellungen für die inversen partiellen Ableitungen ein, wie sie sich aus der allgemeinen Formel (4.15) ergeben, so erkennt man, dass in den von λ abhängigen Termen mindestens eine Integration vollständig aufgehoben wird. Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass in den von λ abhängigen Termen nicht mehr über alle Koordinaten integriert wird. Diese stellen somit Oberflächenterme dar und können aus diesem Grund unberücksichtigt bleiben. Der explizite Ausdruck zur Berechnung des Volumenintegrals lautet daher

$$
\begin{aligned}
& (\partial^+)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^-)^{-1} \triangleright f \\
= \; & (\partial^+_{(i=0)})^{-1}(\partial^3_{(i=0)})^{-1}(\partial^-_{(i=0)})^{-1} \triangleright f + O.T. \\
= \; & q^{-4}(D^-_{q^4})^{-1}(D^3_{q^2})^{-1}(D^+_{q^4})^{-1} f(q^{-2}x^+, q^{-2}x^3) + O.T.
\end{aligned} \tag{4.47}
$$

Im Übrigen kann man leicht nachprüfen, dass die Operatoren $(\partial^A_{(i=0)})^{-1}$, $A \in \{3, \pm\}$ in einer Weise vertauschen, dass die Beziehungen aus (4.46) wieder erfüllt sind. Die konjugierten Volumenintegrale werden im Rahmen der Transformationsregel (4.22) zusammen mit (4.23) erhalten, weshalb gilt

$$(\partial^+)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^-)^{-1} \triangleright f \overset{\substack{\pm \to \mp \\ q \to 1/q}}{\longleftrightarrow} (\hat{\partial}^-)^{-1}(\hat{\partial}^3)^{-1}(\hat{\partial}^+)^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f. \tag{4.48}$$

Entsprechend folgen aus dem Zusammenhang zwischen Links- und Rechtsintegralen die beiden Beziehungen

$$\begin{aligned} f \,\tilde{\triangleleft}\, (\partial^+)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^-)^{-1} &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} (\bar{\partial}^-)^{-1}(\bar{\partial}^3)^{-1}(\bar{\partial}^+)^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f, \\ f \triangleleft (\bar{\partial}^-)^{-1}(\bar{\partial}^3)^{-1}(\bar{\partial}^+)^{-1} &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} (\partial^+)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^-)^{-1} \triangleright f. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Abschließend wollen wir noch darauf eingehen, dass die eingeführten Volumenintegrale sowohl unter Translationen als auch der Wirkung der Quantenalgebra invariant sind, falls wir wieder konsequent Oberflächenterme vernachlässigen. Es ist also insbesondere zu zeigen, dass gilt

$$\begin{aligned} \partial^A \triangleright \int_L d_qV f &= \int_L d_qV \partial^A \triangleright f = \varepsilon(\partial^A) \int_L d_qV f = 0, \\ L^\pm \triangleright \int_L d_qV f &= \int_L d_qV L^\pm \triangleright f = \varepsilon(L^\pm) \int_L d_qV f = 0, \\ \tau \triangleright \int_L d_qV f &= \int_L d_qV \tau \triangleright f = \varepsilon(\tau) \int_L d_qV f = \int_L d_qV f, \end{aligned} \tag{4.50}$$

falls man wieder die Einschränkung macht, dass sämtliche Oberflächenterme vernachlässigbar sind. Außerdem haben wir in (4.50) auf eine neue Bezeichnung unserer Volumenintegrale zurückgegriffen, nämlich

$$\begin{aligned} \int_L d_qV f &\equiv (\partial^+)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^-)^{-1} \triangleright f, \\ \int_R d_qV f &\equiv f \,\tilde{\triangleleft}\, (\partial^+)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^-)^{-1}, \\ \int_L d_q\overline{V} f &\equiv (\bar{\partial}^-)^{-1}(\bar{\partial}^3)^{-1}(\bar{\partial}^+)^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f, \\ \int_R d_q\overline{V} f &\equiv f \triangleleft (\bar{\partial}^-)^{-1}(\bar{\partial}^3)^{-1}(\bar{\partial}^+)^{-1}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Der Nachweis dieser Identitäten in (4.50) gelingt auf eine sehr direkte Art und Weise. Dazu setzen wir in die obigen Ausdrücke die explizite Form (4.47) des

Volumenintegrals ein und berechnen unter Verwendung der Darstellungen aus Kapitel 3.1, wie die Symmetriegeneratoren und partiellen Ableitungen darauf wirken. Läßt man Oberflächenterme, also jene Terme, in denen über mindestens eine Koordinate nicht integriert wird, unberücksichtigt, so findet man die obigen Identitäten bestätigt. Mit der gleichen Methode lässt sich aber auch zeigen, dass gilt

$$\begin{aligned}
\left(\int_L d_qVf\right) \,\tilde{\triangleleft}\, \partial^A &= \int_L d_qVf \,\tilde{\triangleleft}\, \partial^A = \varepsilon(\partial^A)\int_L d_qVf = 0, \qquad (4.52)\\
\left(\int_L d_qVf\right) \triangleleft L^{\pm} &= \int_L d_qVf \triangleleft L^{\pm} = \varepsilon(L^{\pm})\int_L d_qVf = 0,\\
\left(\int_L d_qVf\right) \triangleleft \tau &= \int_L d_qVf \triangleleft \tau = \varepsilon(\tau)\int_L d_qVf = \int_L d_qVf.
\end{aligned}$$

Entsprechend weist man die Links- und Rechtsinvarianz der Rechtsintegrale sowie der konjugierten Integrale nach, wobei für letztere die Translationsinvarianz in Bezug auf die konjugierten Ableitungen zu formulieren ist, d.h. es gilt jetzt

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}^A \triangleright \int_L d_q\overline{V}f &= \int_L d_q\overline{V}\bar{\partial}^A \triangleright f = \varepsilon(\bar{\partial}^A)\int_L d_q\overline{V}f = 0, \qquad (4.53)\\
\left(\int_L d_q\overline{V}f\right) \triangleleft \bar{\partial}^A &= \int_L d_q\overline{V}f \triangleleft \bar{\partial}^A = \varepsilon(\bar{\partial}^A)\int_L d_q\overline{V}f = 0,\\
\bar{\partial}^A \,\tilde{\triangleright}\, \int_R d_q\overline{V}f &= \int_R d_q\overline{V}\bar{\partial}^A \,\tilde{\triangleright}\, f = \varepsilon(\bar{\partial}^A)\int_R d_q\overline{V}f = 0,\\
\left(\int_R d_q\overline{V}f\right) \triangleleft \bar{\partial}^A &= \int_R d_q\overline{V}f \triangleleft \bar{\partial}^A = \varepsilon(\bar{\partial}^A)\int_R d_q\overline{V}f = 0.
\end{aligned}$$

4.2 Euklidischer Raum in vier Dimensionen

Der q-deformierte Euklidische Raum in vier Dimensionen kann wieder in Analogie zum dreidimensionalen Fall abgehandelt werden. Wir beginnen daher mit den Vertauschungsrelationen [37]

$$\partial^1\partial^2 = q\partial^2\partial^1, \quad \partial^1\partial^3 = q\partial^3\partial^1, \quad \partial^2\partial^4 = q\partial^4\partial^2, \quad \partial^3\partial^4 = q\partial^3\partial^2, \qquad (4.54)$$

$$\partial^2\partial^3 = \partial^3\partial^2, \quad \partial^4\partial^1 = \partial^1\partial^4 + \lambda\partial^2\partial^3$$

und führen inverse Elemente durch

$$\partial^i(\partial^i)^{-1} = (\partial^i)^{-1}\partial^i = 1, \quad i = 1, \ldots, 4, \tag{4.55}$$

ein. Die verbleibenden Vertauschungsrelationen zwischen partiellen Ableitungen und ihren Inversen lauten dann

$$\begin{aligned}
(\partial^2)^{-1}\partial^1 &= q\partial^1(\partial^2)^{-1}, \\
(\partial^3)^{-1}\partial^1 &= q\partial^1(\partial^3)^{-1}, \\
(\partial^4)^{-1}\partial^2 &= q\partial^2(\partial^4)^{-1}, \\
(\partial^4)^{-1}\partial^3 &= q\partial^3(\partial^4)^{-1}, \\
(\partial^3)^{-1}\partial^2 &= \partial^2(\partial^3)^{-1}, \\
(\partial^4)^{-1}\partial^1 &= \partial^1(\partial^4)^{-1} - q^2\lambda\partial^2\partial^3(\partial^4)^{-2},
\end{aligned} \tag{4.56}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\partial^2(\partial^1)^{-1} &= q(\partial^1)^{-1}\partial^2, \\
\partial^3(\partial^1)^{-1} &= q(\partial^1)^{-1}\partial^3, \\
\partial^4(\partial^2)^{-1} &= q(\partial^2)^{-1}\partial^4, \\
\partial^4(\partial^3)^{-1} &= q(\partial^3)^{-1}\partial^4, \\
\partial^4(\partial^1)^{-1} &= (\partial^1)^{-1}\partial^4 - q^2\lambda(\partial^1)^{-2}\partial^2\partial^3, \\
\partial^3(\partial^2)^{-1} &= (\partial^2)^{-1}\partial^3.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Untereinander erfüllen die inversen Elemente die Relationen

$$\begin{aligned}
(\partial^2)^{-1}(\partial^1)^{-1} &= q^{-1}(\partial^1)^{-1}(\partial^2)^{-1}, \\
(\partial^3)^{-1}(\partial^1)^{-1} &= q^{-1}(\partial^1)^{-1}(\partial^3)^{-1}, \\
(\partial^4)^{-1}(\partial^2)^{-1} &= q^{-1}(\partial^2)^{-1}(\partial^4)^{-1}, \\
(\partial^4)^{-1}(\partial^3)^{-1} &= q^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^4)^{-1}, \\
(\partial^3)^{-1}(\partial^2)^{-1} &= (\partial^2)^{-1}(\partial^3)^{-1}, \\
(\partial^4)^{-1}(\partial^1)^{-1} &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i\, [[i]]_{q^{-2}}! \left(\begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix}_{q^{-2}} \right)^2 \\
&\quad \cdot (\partial^1)^{-(i+1)}(\partial^2)^i(\partial^3)^i(\partial^4)^{-(i+1)}.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Wie im dreidimensionalen Fall vertauschen die Generatoren der $U_q(so_4)$ mit den partiellen Ableitungen auf die gleiche Weise wie mit den Koordinaten, weshalb gilt

$$\begin{aligned} L_1^+\partial^1 &= q\partial^1 L_1^+ - q^{-1}\partial^2, \\ L_1^+\partial^2 &= q^{-1}\partial^2 L_1^+, \\ L_1^+\partial^3 &= q\partial^3 L_1^+ + q^{-1}\partial^4, \\ L_1^+\partial^4 &= q^{-1}\partial^4 L_1^+, \end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned} L_2^+\partial^1 &= q\partial^1 L_2^+ - q^{-1}\partial^3, \\ L_2^+\partial^2 &= q\partial^2 L_2^+ + q^{-1}\partial^4, \\ L_2^+\partial^3 &= q^{-1}\partial^3 L_2^+, \\ L_2^+\partial^4 &= q^{-1}\partial^4 L_2^+, \end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned} L_1^-\partial^1 &= q\partial^1 L_1^-, \\ L_1^-\partial^2 &= q^{-1}\partial^2 L_1^- - q\partial^1, \\ L_1^-\partial^3 &= q\partial^3 L_1^-, \\ L_1^-\partial^4 &= q^{-1}\partial^4 L_1^- + q\partial^3, \end{aligned} \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned} L_2^-\partial^1 &= q\partial^1 L_2^-, \\ L_2^-\partial^2 &= q\partial^2 L_2^-, \\ L_2^-\partial^3 &= q^{-1}\partial^3 L_2^- - q\partial^1, \\ L_2^-\partial^4 &= q^{-1}\partial^4 L_2^- + q\partial^2, \end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned} K_1\partial^1 &= q^{-1}\partial^1 K_1, \\ K_1\partial^2 &= q\partial^2 K_1, \\ K_1\partial^3 &= q^{-1}\partial^3 K_1, \\ K_1\partial^4 &= q\partial^4 K_1, \end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned} K_2\partial^1 &= q^{-1}\partial^1 K_2, \\ K_2\partial^2 &= q^{-1}\partial^2 K_2, \\ K_2\partial^3 &= q\partial^3 K_2, \\ K_2\partial^4 &= q\partial^4 K_2. \end{aligned} \tag{4.64}$$

Die Vertauschungsrelationen mit den inversen partiellen Ableitungen haben dann die Form

$$L_1^+(\partial^1)^{-1} = q^{-1}(\partial^1)^{-1}L_1^+ + q^{-1}(\partial^1)^{-2}\partial^2, \tag{4.65}$$

$$
\begin{aligned}
L_1^+(\partial^2)^{-1} &= q(\partial^2)^{-1}L_1^+, \\
L_1^+(\partial^3)^{-1} &= q^{-1}(\partial^3)^{-1}L_1^+ - q^{-1}(\partial^3)^{-2}\partial^4, \\
L_1^+(\partial^4)^{-1} &= q(\partial^4)^{-1}L_1^+,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_2^+(\partial^1)^{-1} &= q^{-1}(\partial^1)^{-1}L_2^+ + q^{-1}(\partial^1)^{-2}\partial^3, \\
L_2^+(\partial^2)^{-1} &= q^{-1}(\partial^2)^{-1}L_2^+ - q^{-1}(\partial^2)^{-2}\partial^4, \\
L_2^+(\partial^3)^{-1} &= q(\partial^3)^{-1}L_2^+, \\
L_2^+(\partial^4)^{-1} &= q(\partial^4)^{-1}L_2^+,
\end{aligned} \tag{4.66}
$$

$$
\begin{aligned}
L_1^-(\partial^1)^{-1} &= q^{-1}(\partial^1)^{-1}L_1^-, \\
L_1^-(\partial^2)^{-1} &= q(\partial^2)^{-1}L_1^- + q^3\partial^1(\partial^2)^{-2}, \\
L_1^-(\partial^3)^{-1} &= q^{-1}(\partial^3)^{-1}L_1^-, \\
L_1^-(\partial^4)^{-1} &= q(\partial^4)^{-1}L_1^- - q^3\partial^3(\partial^4)^{-2},
\end{aligned} \tag{4.67}
$$

$$
\begin{aligned}
L_2^-(\partial^1)^{-1} &= q^{-1}(\partial^1)^{-1}L_2^-, \\
L_2^-(\partial^2)^{-1} &= q^{-1}(\partial^2)^{-1}L_2^-, \\
L_2^-(\partial^3)^{-1} &= q(\partial^3)^{-1}L_2^- + q^3\partial^1(\partial^3)^{-2}, \\
L_2^-(\partial^4)^{-1} &= q(\partial^4)^{-1}L_2^- - q^3\partial^2(\partial^4)^{-2},
\end{aligned} \tag{4.68}
$$

$$
\begin{aligned}
K_1(\partial^1)^{-1} &= q(\partial^1)^{-1}K_1, \\
K_1(\partial^2)^{-1} &= q^{-1}(\partial^2)^{-1}K_1, \\
K_1(\partial^3)^{-1} &= q(\partial^3)^{-1}K_1, \\
K_1(\partial^4)^{-1} &= q^{-1}(\partial^4)^{-1}K_1,
\end{aligned} \tag{4.69}
$$

$$
\begin{aligned}
K_2(\partial^1)^{-1} &= q(\partial^1)^{-1}K_2, \\
K_2(\partial^2)^{-1} &= q(\partial^2)^{-1}K_2, \\
K_2(\partial^3)^{-1} &= q^{-1}(\partial^3)^{-1}K_2, \\
K_2(\partial^4)^{-1} &= q^{-1}(\partial^4)^{-1}K_2.
\end{aligned} \tag{4.70}
$$

Für den Skalierungsoperator hingegen gilt nun

$$\Lambda(\partial^i)^{-1} = q^2(\partial^i)^{-1}\Lambda, \qquad i = 1, \ldots, 4. \tag{4.71}$$

Die Relationen für die konjugierten Ableitungen $\bar{\partial}^i$ erhält man aus den obigen Identitäten wieder durch die Ersetzungen

$$\partial^i \to \bar{\partial}^i, \quad (\partial^i)^{-1} \to (\bar{\partial}^i)^{-1}, \quad i = 1, \ldots, 4. \tag{4.72}$$

Die Berechnung der Integrale gelingt auch hier mit der allgemeinen Formel (4.15). Aus den Darstellungen der konjugierten partiellen Ableitungen folgt zunächst

$$
\begin{aligned}
(\hat{\partial}^1_{(i=0)})^{-1} f &= q(D^4_{q^{-2}})^{-1} f(qx^2, qx^3), \\
(\hat{\partial}^2_{(i=0)})^{-1} f &= (D^3_{q^{-2}})^{-1} f(qx^1), \\
(\hat{\partial}^3_{(i=0)})^{-1} f &= (D^2_{q^{-2}})^{-1} f(qx^1), \\
(\hat{\partial}^4_{(i=0)})^{-1} f &= q^{-1}(D^1_{q^{-2}})^{-1} f
\end{aligned}
\tag{4.73}
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
(\hat{\partial}^1_{(i>0)}) f &= q^{-1}\lambda x^1 D^2_{q^{-2}} D^3_{q^{-2}} f, \\
(\hat{\partial}^2_{(i>0)}) f &= 0, \\
(\hat{\partial}^3_{(i>0)}) f &= 0, \\
(\hat{\partial}^4_{(i>0)}) f &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.74}
$$

Einsetzen in (4.15) liefert dann für den konjugierten Kalkül die Ausdrücke

$$
\begin{aligned}
(\hat{\partial}^1)^{-1} \triangleright f &= q \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k q^{-k(k+1)} \left[x^1 (D^4_{q^{-2}})^{-1} D^2_{q^{-2}} D^3_{q^{-2}} \right]^k \\
&\quad \cdot (D^4_{q^{-2}})^{-1} f(q^{k+1}x^2, q^{k+1}x^3), \\
(\hat{\partial}^2)^{-1} \triangleright f &= (D^3_{q^{-2}})^{-1} f(qx^1), \\
(\hat{\partial}^3)^{-1} \triangleright f &= (D^2_{q^{-2}})^{-1} f(qx^1), \\
(\hat{\partial}^4)^{-1} \triangleright f &= q^{-1}(D^1_{q^{-2}})^{-1} f.
\end{aligned}
\tag{4.75}
$$

Der Zusammenhang zwischen konjugierten und unkonjugierten Integralen lässt sich wieder in der Form

$$
(\partial^i)^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f \overset{\substack{i \to i' \\ q \to 1/q}}{\longleftrightarrow} (\hat{\partial}^{i'})^{-1} \triangleright f, \quad i' = 5 - i, \tag{4.76}
$$

angeben, d.h. beide Ausdrücke gehen durch die Ersetzungen

$$
\begin{aligned}
& x^{\pm} \to x^{\mp}, \quad q^{\pm 1} \to q^{\mp 1}, \quad \hat{n}^i \to -\hat{n}^{i'}, \\
& D^i_{q^a} \to D^{i'}_{q^{-a}}, \quad (D^i_{q^a})^{-1} \to (D^{i'}_{q^{-a}})^{-1}
\end{aligned}
\tag{4.77}
$$

auseinander hervor. Für die Umrechnung auf eine einheitliche Normalordnung kann man noch die Operatoren $\hat{U}^{-1}$ und $\hat{U}$ aus (2.60)-(2.61) im Rahmen der Identitäten

$$\begin{aligned} (\hat{\partial}^i)^{-1} \triangleright (\hat{U}^{-1} f) &= \hat{U}^{-1}((\hat{\partial}^i)^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f), \\ (\partial^i)^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, (\hat{U} f) &= \hat{U}((\partial^i)^{-1} \triangleright f) \end{aligned} \tag{4.78}$$

anwenden. Die Ausdrücke für die Rechtsintegrale ergeben sich wie schon im Fall der partiellen Ableitungen mittels der Regeln

$$\begin{aligned} f \triangleleft (\partial^i)^{-1} &\overset{j \leftrightarrow j'}{\longleftrightarrow} (\bar{\partial}^{i'})^{-1} \triangleright f, \\ f \,\tilde{\triangleleft}\, (\bar{\partial}^i)^{-1} &\overset{j \leftrightarrow j'}{\longleftrightarrow} (\partial^{i'})^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f. \end{aligned} \tag{4.79}$$

Der Übergang vom rechten zum linken Ausdruck und umgekehrt erfolgt also hier wieder durch die Ersetzungen

$$x^j \to x^{j'}, \quad D^j_{q^a} \to D^{j'}_{q^a}, \quad (D^j_{q^a})^{-1} \to (D^{j'}_{q^a})^{-1}, \quad \hat{n}^j \to \hat{n}^{j'}. \tag{4.80}$$

Der allgemeine Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation, wie er durch die Formeln (4.32) und (4.33) beschrieben wird, gilt natürlich auch für den q-deformierten Euklidischen Raum in vier Dimensionen. Aus diesem Grund können wir in völliger Analogie zum dreidimensionalen Fall Regeln für die partielle Integration angeben. Mit den Bezeichnungen aus dem vorangegangenen Abschnitt lauten diese im Fall der unkonjugierten Linksintegrale

$$\begin{aligned} & (\partial^1)^{-1}_L (\partial^1_L f) \star g \big|^a_{x^4=0} \\ = \;& f \star g \,\|^a_{x^4=0} - (\partial^1)^{-1}_L (\Lambda^{1/2} K_1^{1/2} K_2^{1/2} f) \star \partial^1_L g \Big|^a_{x^4=0}, \end{aligned} \tag{4.81}$$

$$\begin{aligned} & (\partial^2)^{-1}_L (\partial^2_L f) \star g \big|^a_{x^3=0} \\ = \;& f \star g \,\|^a_{x^3=0} - (\partial^2)^{-1}_L (\Lambda^{1/2} K_1^{-1/2} K_2^{1/2} f) \star \partial^2_L g \Big|^a_{x^3=0} \\ & - q\lambda \, (\partial^2)^{-1}_L (\Lambda^{1/2} K_1^{1/2} K_2^{1/2} L_1^+ f) \star \partial^1_L g \Big|^a_{x^3=0}, \end{aligned} \tag{4.82}$$

$$\begin{aligned} & (\partial^3)^{-1}_L (\partial^3_L f) \star g \big|^a_{x^2=0} \\ = \;& f \star g \,\|^a_{x^2=0} - (\partial^3)^{-1}_L (\Lambda^{1/2} K_1^{1/2} K_2^{-1/2} f) \star \partial^3_L g \Big|^a_{x^3=0} \end{aligned} \tag{4.83}$$

$$- q\lambda\, (\partial^3)^{-1}_L(\Lambda^{1/2}K_1^{1/2}K_2^{1/2}L_2^+ f) \star \partial^1_L g\Big|^a_{x^2=0}\,,$$

$$\begin{aligned}
&(\partial^4)^{-1}_L(\partial^4_L f) \star g\big|^a_{x^1=0} && (4.84)\\
= \;& f \star g\,\|^a_{x^1=0} - (\partial^4)^{-1}_L(\Lambda^{1/2}K_1^{-1/2}K_2^{-1/2} f) \star \partial^4_L g\Big|^a_{x^1=0}\\
&+ q\lambda\, (\partial^4)^{-1}_L(\Lambda^{1/2}K_1^{1/2}K_2^{-1/2}L_1^+ f) \star \partial^3_L g\Big|^a_{x^1=0}\\
&+ q\lambda\, (\partial^4)^{-1}_L(\Lambda^{1/2}K_1^{-1/2}K_2^{1/2}L_2^+ f) \star \partial^2_L g\Big|^a_{x^1=0}\\
&+ q^2\lambda^2\, (\partial^4)^{-1}_L(\Lambda^{1/2}K_1^{1/2}K_2^{1/2}L_1^+L_2^+ f) \star \partial^1_L g\Big|^a_{x^1=0}.
\end{aligned}$$

Für die konjugierten Linksintegrale hingegen finden wir entsprechend

$$\begin{aligned}
&(\hat\partial^1)^{-1}_L(\hat\partial^1_L f) \star g\Big|^a_{x^4=0} && (4.85)\\
= \;& f \star g\,\|^a_{x^4=0} - (\hat\partial^1)^{-1}_L(\Lambda^{-1/2}K_1^{-1/2}K_2^{-1/2} f) \star \hat\partial^1_L g\Big|^a_{x^4=0}\\
&+ q^{-1}\lambda\, (\hat\partial^1)^{-1}_L(\Lambda^{-1/2}K_1^{1/2}K_2^{-1/2}L_1^- f) \star \hat\partial^2_L g\Big|^a_{x^4=0}\\
&+ q^{-1}\lambda\, (\hat\partial^1)^{-1}_L(\Lambda^{-1/2}K_1^{-1/2}K_2^{1/2}L_2^- f) \star \hat\partial^3_L g\Big|^a_{x^4=0}\\
&+ q^{-2}\lambda^2\, (\hat\partial^1)^{-1}_L(\Lambda^{-1/2}K_1^{1/2}K_2^{-1/2}L_1^-L_2^- f) \star \hat\partial^4_L g\Big|^a_{x^4=0}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\hat\partial^2)^{-1}_L(\hat\partial^2_L f) \star g\Big|^a_{x^3=0} && (4.86)\\
= \;& f \star g\,\|^a_{x^3=0} - (\hat\partial^2)^{-1}_L(\Lambda^{-1/2}K_1^{1/2}K_2^{-1/2} f) \star \hat\partial^2_L g\Big|^a_{x^3=0}\\
&- q^{-1}\lambda\, (\hat\partial^2)^{-1}_L(\Lambda^{-1/2}K_1^{1/2}K_2^{1/2}L_2^- f) \star \hat\partial^4_L g\Big|^a_{x^3=0}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\hat\partial^3)^{-1}_L(\hat\partial^3_L f) \star g\Big|^a_{x^2=0} && (4.87)\\
= \;& f \star g\,\|^a_{x^2=0} - (\hat\partial^3)^{-1}_L(\Lambda^{-1/2}K_1^{-1/2}K_2^{1/2} f) \star \hat\partial^3_L g\Big|^a_{x^2=0}\\
&- q^{-1}\lambda\, (\hat\partial^3)^{-1}_L(\Lambda^{-1/2}K_1^{1/2}K_2^{1/2}L_1^- f) \star \hat\partial^4_L g\Big|^a_{x^2=0}\,,
\end{aligned}$$

$$(\hat\partial^4)^{-1}_L(\hat\partial^4_L f) \star g\Big|^a_{x^1=0} \qquad (4.88)$$

$$= \quad f \star g \,\|_{x^1=0}^{a} - (\hat{\partial}^4)_L^{-1}(\Lambda^{-1/2}K_1^{1/2}K_2^{1/2}f) \star \hat{\partial}_L^4 g\Big|_{x^1=0}^{a}.$$

Für die Rechtsintegrale gibt es natürlich ebenso Regeln zur partiellen Integration. Im Fall der unkonjugierten Integrale lassen diese sich schreiben als

$$\begin{aligned} &(\partial^1)_R^{-1} f \star \partial_R^1 g\big|_{x^4=0}^{a} \\ = \quad & f \star g \,\|_{x^4=0}^{a} - (\partial^1)_R^{-1}(\partial_R^1 f) \star (\Lambda^{-1/2}K_1^{-1/2}K_2^{-1/2}g)\Big|_{x^4=0}^{a}, \end{aligned} \tag{4.89}$$

$$\begin{aligned} &(\partial^2)_R^{-1} f \star \partial_R^2 g\big|_{x^3=0}^{a} \\ = \quad & f \star g \,\|_{x^3=0}^{a} - (\partial^2)_R^{-1}(\partial_R^2 f) \star (\Lambda^{-1/2}K_1^{1/2}K_2^{-1/2}g)\Big|_{x^3=0}^{a} \\ & + \lambda\, (\partial^2)_R^{-1}(\partial_R^1 f) \star (\Lambda^{-1/2}K_1^{1/2}K_2^{-1/2}L_1^+ g)\Big|_{x^3=0}^{a}, \end{aligned} \tag{4.90}$$

$$\begin{aligned} &(\partial^3)_R^{-1} f \star \partial_R^3 g\big|_{x^2=0}^{a} \\ = \quad & f \star g \,\|_{x^2=0}^{a} - (\partial^3)_R^{-1}(\partial_R^3 f) \star (\Lambda^{-1/2}K_1^{-1/2}K_2^{1/2}g)\Big|_{x^2=0}^{a} \\ & + \lambda\, (\partial^3)_R^{-1}(\partial_R^1 f) \star (\Lambda^{-1/2}K_1^{-1/2}K_2^{1/2}L_2^+ g)\Big|_{x^2=0}^{a}, \end{aligned} \tag{4.91}$$

$$\begin{aligned} &(\partial^4)_R^{-1} f \star \partial_R^4 g\big|_{x^1=0}^{a} \\ = \quad & f \star g \,\|_{x^1=0}^{a} - (\partial^4)_R^{-1}(\partial_R^4 f) \star (\Lambda^{-1/2}K_1^{1/2}K_2^{1/2}g)\Big|_{x^1=0}^{a} \\ & - \lambda\, (\partial^4)_R^{-1}(\partial_R^3 f) \star (\Lambda^{-1/2}K_1^{1/2}K_2^{1/2}L_1^+ g)\Big|_{x^1=0}^{a} \\ & - \lambda\, (\partial^4)_R^{-1}(\partial_R^2 f) \star (\Lambda^{-1/2}K_1^{1/2}K_2^{1/2}L_2^+ g)\Big|_{x^1=0}^{a} \\ & + \lambda^2\, (\partial^4)_R^{-1}(\partial_R^1 f) \star (\Lambda^{-1/2}K_1^{1/2}K_2^{1/2}L_1^+ L_2^+ g)\Big|_{x^1=0}^{a}, \end{aligned} \tag{4.92}$$

während für die konjugierten Rechtsintegrale gilt

$$\begin{aligned} &(\hat{\partial}^1)_R^{-1} f \star \hat{\partial}_R^1 g\Big|_{x^4=0}^{a} \\ = \quad & f \star g \,\|_{x^4=0}^{a} - (\hat{\partial}^1)_R^{-1}(\hat{\partial}_R^1 f) \star (\Lambda^{1/2}K_1^{1/2}K_2^{1/2}g)\Big|_{x^4=0}^{a} \\ & - \lambda\, (\hat{\partial}^1)_R^{-1}(\hat{\partial}_R^2 f) \star (\Lambda^{1/2}K_1^{1/2}K_2^{1/2}L_1^- g)\Big|_{x^4=0}^{a} \\ & - \lambda\, (\hat{\partial}^1)_R^{-1}(\hat{\partial}_R^3 f) \star (\Lambda^{1/2}K_1^{1/2}K_2^{1/2}L_2^- g)\Big|_{x^4=0}^{a} \end{aligned} \tag{4.93}$$

$$+\lambda^2\,(\hat\partial^1)^{-1}_R(\hat\partial^4_R f)\star(\Lambda^{1/2}K_1^{1/2}K_2^{1/2}L_1^- L_2^- g)\Big|^a_{x^4=0},$$

$$\begin{aligned}&(\hat\partial^2)^{-1}_R f\star\hat\partial^2_R g\Big|^a_{x^3=0} \qquad (4.94)\\ =\;& f\star g\,\|^a_{x^3=0}-(\hat\partial^2)^{-1}_R(\hat\partial^2_R f)\star(\Lambda^{1/2}K_1^{-1/2}K_2^{1/2}g)\Big|^a_{x^3=0}\\ &+\lambda\,(\hat\partial^2)^{-1}_R(\hat\partial^4_R f)\star(\Lambda^{1/2}K_1^{-1/2}K_2^{1/2}L_2^- g)\Big|^a_{x^3=0},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\hat\partial^3)^{-1}_R f\star\hat\partial^3_R g\Big|^a_{x^2=0} \qquad (4.95)\\ =\;& f\star g\,\|^a_{x^2=0}-(\hat\partial^3)^{-1}_R(\hat\partial^3_R f)\star(\Lambda^{1/2}K_1^{-1/2}K_2^{-1/2}g)\Big|^a_{x^2=0}\\ &+\lambda\,(\hat\partial^3)^{-1}_R(\hat\partial^4_R f)\star(\Lambda^{1/2}K_1^{1/2}K_2^{-1/2}L_1^- g)\Big|^a_{x^2=0},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\hat\partial^4)^{-1}_R f\star\hat\partial^4_R g\Big|^a_{x^1=0} \qquad (4.96)\\ =\;& f\star g\,\|^a_{x^1=0}-(\hat\partial^4)^{-1}_R(\hat\partial^4_R f)\star(\Lambda^{1/2}K_1^{-1/2}K_2^{-1/2}g)\Big|^a_{x^1=0}.\end{aligned}$$

Wie im dreidimensionalen Fall, so lassen sich auch für den q-deformierten Euklidischen Raum mit vier Dimensionen Volumenintegrale definieren, indem wir sukzessive über die vier unterschiedlichen Raumrichtungen integrieren. Falls nun Oberflächenterme wieder vernachlässigt werden, reduzieren sich die einzelnen Integrale auf die Ausdrücke

$$(\partial^i)^{-1}f=(\partial^i_{(i=0)})^{-1}f+O.T.,\quad i=1,\dots,4. \qquad (4.97)$$

In diesem Fall ist die Reihenfolge der Integrationen über die verschiedenen Raumrichtungen bis auf einen globalen Skalierungsfaktor willkürlich, da gilt

$$\begin{aligned}(\partial^1)^{-1}(\partial^2)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^4)^{-1} &= (\partial^1)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^2)^{-1}(\partial^4)^{-1}= \qquad (4.98)\\ q(\partial^1)^{-1}(\partial^2)^{-1}(\partial^4)^{-1}(\partial^3)^{-1} &= q(\partial^1)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^4)^{-1}(\partial^2)^{-1}=\\ q(\partial^2)^{-1}(\partial^1)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^4)^{-1} &= q(\partial^3)^{-1}(\partial^1)^{-1}(\partial^2)^{-1}(\partial^4)^{-1}=\\ q^3(\partial^2)^{-1}(\partial^4)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^1)^{-1} &= q^3(\partial^3)^{-1}(\partial^4)^{-1}(\partial^2)^{-1}(\partial^1)^{-1}=\\ q^3(\partial^4)^{-1}(\partial^2)^{-1}(\partial^1)^{-1}(\partial^3)^{-1} &= q^3(\partial^4)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^1)^{-1}(\partial^2)^{-1}=\\ q^4(\partial^4)^{-1}(\partial^2)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^1)^{-1} &= q^4(\partial^4)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^2)^{-1}(\partial^1)^{-1}=\\ &= q^2\ \times\text{restliche Kombinationen.}\end{aligned}$$

Diese Identitäten können durch Einsetzen von (4.97) leicht bestätigt werden. Für die konjugierten Objekte gelten natürlich entsprechende Beziehungen. Die Formel (4.97) führt uns dann in der konjugierten Version zu einer expliziten Form des konjugierten Volumenintegrals, nämlich

$$\begin{aligned} & (\hat{\partial}^1)^{-1}(\hat{\partial}^2)^{-1}(\hat{\partial}^3)^{-1}(\hat{\partial}^4)^{-1} \triangleright f \\ = \; & q^4 (D^4_{q^{-2}})^{-1}(D^3_{q^{-2}})^{-1}(D^2_{q^{-2}})^{-1}(D^1_{q^{-2}})^{-1} f(q^2x^1, qx^2, qx^3). \end{aligned} \tag{4.99}$$

Aus dem Zusammenhang zwischen unkonjugierten und konjugierten Integralen folgt schließlich

$$\begin{aligned} & (\hat{\partial}^1)^{-1}(\hat{\partial}^2)^{-1}(\hat{\partial}^3)^{-1}(\hat{\partial}^4)^{-1} \triangleright f \\ \overset{\substack{i \,\to\, i' \\ q \,\to\, 1/q}}{\longleftrightarrow} \; & (\partial^4)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^2)^{-1}(\partial^1)^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f, \end{aligned} \tag{4.100}$$

während die Transformationsregeln für den Übergang von Rechts- in Linksintegrale und umgekehrt zu den folgenden Regeln

$$\begin{aligned} & f \,\tilde{\triangleleft}\, (\bar{\partial}^1)^{-1}(\bar{\partial}^2)^{-1}(\bar{\partial}^3)^{-1}(\bar{\partial}^4)^{-1} \\ \overset{j \leftrightarrow j'}{\longleftrightarrow} \; & (\partial^4)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^2)^{-1}(\partial^1)^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f, \end{aligned} \tag{4.101}$$

$$\begin{aligned} & f \triangleleft (\partial^4)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^2)^{-1}(\partial^1)^{-1} \\ \overset{j \leftrightarrow j'}{\longleftrightarrow} \; & (\bar{\partial}^1)^{-1}(\bar{\partial}^2)^{-1}(\bar{\partial}^3)^{-1}(\bar{\partial}^4)^{-1} \triangleright f \end{aligned} \tag{4.102}$$

führen. Wie schon im dreidimensionalen Fall erweisen sich die Volumenintegrale als translations- und rotationsinvariant. Für Linkswirkungen gilt dann

$$\begin{aligned} \partial^i \,\tilde{\triangleright} \int_{L/R} d_qV f &= \int_{L/R} d_qV \partial^i \triangleright f = \varepsilon(\partial^i) \int_{L/R} d_qV f = 0, \\ L^{\pm}_j \triangleright \int_{L/R} d_qV f &= \int_{L/R} d_qV L^{\pm}_j \triangleright f = \varepsilon(L^{\pm}_j) \int_{L/R} d_qV f = 0, \\ K_j \triangleright \int_{L/R} d_qV f &= \int_{L/R} d_qV K_j \triangleright f = \varepsilon(K_j) \int_{L/R} d_qV f = \int_{L/R} d_qV f \end{aligned} \tag{4.103}$$

und entsprechend für Rechtwirkungen

$$\left(\int_{L/R} d_qV f \right) \triangleleft \partial^i = \int_{L/R} d_qV f \triangleleft \partial^i = \varepsilon(\partial^i) \int_{L/R} d_qV f = 0, \tag{4.104}$$

$$\begin{aligned}
\left(\int_{L/R} d_qVf\right) \triangleleft L_j^{\pm} &= \int_{L/R} d_qVf \triangleleft L_j^{\pm} = \varepsilon(L_j^{\pm}) \int_{L/R} d_qVf = 0, \\
\left(\int_{L/R} d_qVf\right) \triangleleft K_j &= \int_{L/R} d_qVf \triangleleft K_j = \varepsilon(K_j) \int_{L/R} d_qVf = \int_{L/R} d_qVf,
\end{aligned}$$

wobei $i = 1, \ldots, 4$, $j = 1, 2$, und

$$\begin{aligned}
\int_L d_qVf &\equiv (\partial^4)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^2)^{-1}(\partial^1)^{-1} \tilde{\triangleright} f, \qquad (4.105) \\
\int_R d_qVf &\equiv f \triangleleft (\partial^4)^{-1}(\partial^3)^{-1}(\partial^2)^{-1}(\partial^1)^{-1}, \\
\int_L d_q\overline{V}f &\equiv (\bar{\partial}^1)^{-1}(\bar{\partial}^2)^{-1}(\bar{\partial}^3)^{-1}(\bar{\partial}^4)^{-1} \triangleright f, \\
\int_R d_q\overline{V}f &\equiv f \,\tilde{\triangleleft}\, (\bar{\partial}^1)^{-1}(\bar{\partial}^2)^{-1}(\bar{\partial}^3)^{-1}(\bar{\partial}^4)^{-1}.
\end{aligned}$$

Ebenso können wir für die konjugierten Integrale schreiben

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}^i \triangleright \int_{L/R} d_q\overline{V}f &= \int_{L/R} d_q\overline{V}\bar{\partial}^i \triangleright f = \varepsilon(\bar{\partial}^i) \int_{L/R} d_q\overline{V}f = 0, \qquad (4.106) \\
L_j^{\pm} \triangleright \int_{L/R} d_q\overline{V}f &= \int_{L/R} d_q\overline{V}L_j^{\pm} \triangleright f = \varepsilon(L_j^{\pm}) \int_{L/R} d_q\overline{V}f = 0, \\
K_j \triangleright \int_{L/R} d_q\overline{V}f &= \int_{L/R} d_q\overline{V}K_j \triangleright f = \varepsilon(K_j) \int_{L/R} d_q\overline{V}f = \int_{L/R} d_q\overline{V}f
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\left(\int_{L/R} d_q\overline{V}f\right) \tilde{\triangleleft}\, \bar{\partial}^i &= \int_{L/R} d_q\overline{V}f \,\tilde{\triangleleft}\, \bar{\partial}^i = \varepsilon(\bar{\partial}^i) \int_{L/R} d_qVf = 0, \qquad (4.107) \\
\left(\int_{L/R} d_q\overline{V}f\right) \triangleleft L_j^{\pm} &= \int_{L/R} d_q\overline{V}f \triangleleft L_j^{\pm} = \varepsilon(L_j^{\pm}) \int_{L/R} d_q\overline{V}f = 0, \\
\left(\int_{L/R} d_q\overline{V}f\right) \triangleleft K_j &= \int_{L/R} d_q\overline{V}f \triangleleft K_j = \varepsilon(K_j) \int_{L/R} d_q\overline{V}f = \int_{L/R} d_q\overline{V}f.
\end{aligned}$$

4.3 Minkowski-Raum

Abgesehen von einigen Besonderheiten unterscheidet sich die Behandlung des q-deformierten Minkowski-Raumes von jener der Euklidischen Räume kaum.

Wir beginnen daher mit den Relationen zwischen den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial^0 &= \partial^0 \partial^\mu, \quad \mu \in \{0,+,-,3/0\}, \\ \partial^\pm \partial^{3/0} &= q^{\mp 2} \partial^{3/0} \partial^\pm, \\ \partial^- \partial^+ - \partial^+ \partial^- &= \lambda(\partial^{3/0}\partial^{3/0} + \partial^0 \partial^{3/0}). \end{aligned} \tag{4.108}$$

Nach Einführung inverser Elemente mittels

$$(\partial^\mu)^{-1}\,\partial^\mu = \partial^\mu\,(\partial^\mu)^{-1} = 1, \quad \mu \in \{0,+,-,3/0\}, \tag{4.109}$$

ergeben sich die zusätzlichen Relationen

$$\begin{aligned} \partial^0(\partial^\mu)^{-1} &= (\partial^\mu)^{-1}\partial^0, \quad \mu \in \{0,+,-,3/0\}, \\ (\partial^{3/0})^{-1}\partial^\pm &= q^{\mp 2}\partial^\pm(\partial^{3/0})^{-1}, \\ (\partial^\pm)^{-1}\partial^{3/0} &= q^{\pm 2}\partial^{3/0}(\partial^\pm)^{-1}, \\ \partial^-(\partial^+)^{-1} &= (\partial^+)^{-1}\partial^- - q^{-2}\lambda(\partial^+)^{-2}(q^{-2}\partial^{3/0} + \partial^0)\partial^{3/0}, \\ (\partial^-)^{-1}\partial^+ &= \partial^+(\partial^-)^{-1} - q^{-2}\lambda\partial^{3/0}(q^{-2}\partial^{3/0} + \partial^0)(\partial^-)^{-2} \end{aligned} \tag{4.110}$$

und

$$\begin{aligned} (\partial^0)^{-1}(\partial^\mu)^{-1} &= (\partial^\mu)^{-1}(\partial^0)^{-1}, \quad \mu \in \{0,+,-,3/0\}, \\ (\partial^{3/0})^{-1}(\partial^\pm)^{-1} &= q^{\pm 2}(\partial^+)^{-1}(\partial^{3/0})^{-1}, \\ (\partial^-)^{-1}(\partial^+)^{-1} &= q^2 \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda\lambda_+^{-1})^i\,[[i]]_{q^2}! \left(\begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix}_{q^{-2}} \right)^2 \\ &\quad \cdot \sum_{j+k=i} (-q^6)^k q^{i(i+2k)} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \sum_{p=0}^{k} (q^{4j}\lambda_+)^p \\ &\quad \cdot (\partial^+)^{p-(i+1)}(\partial^{3/0})^{2j}(S_q)_{k,p}(\partial^0,\partial^{3/0})(\partial^-)^{p-(i+1)}. \end{aligned} \tag{4.111}$$

Die Lorentz-Generatoren vertauschen mit den partiellen Ableitungen formal auf die gleiche Weise wie mit den Koordinaten, weshalb gilt

$$\begin{aligned} T^+\partial^0 &= \partial^0 T^+, \\ T^+\partial^- &= q^2\partial^- T^+ + q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\partial^3, \\ T^+\partial^+ &= q^{-2}\partial^+ T^+, \\ T^+\partial^{3/0} &= \partial^{3/0} T^+ + q^{-\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\partial^+, \end{aligned} \tag{4.112}$$

$$\begin{aligned}
T^-\partial^0 &= \partial^0 T^-, \\
T^-\partial^- &= q^2\partial^- T^-, \\
T^-\partial^+ &= q^{-2}\partial^+ T^- + q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\partial^3, \\
T^-\partial^{3/0} &= \partial^{3/0} T^- + q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\partial^-,
\end{aligned} \tag{4.113}$$

$$\begin{aligned}
\tau^3\partial^0 &= \partial^0\tau^3, \\
\tau^3\partial^\pm &= q^{\mp 4}\partial^\pm\tau^3, \\
\tau^3\partial^{3/0} &= \partial^{3/0}\tau^3,
\end{aligned} \tag{4.114}$$

$$\begin{aligned}
T^2\partial^+ &= q\partial^+ T^2, \\
T^2\partial^- &= q^{-1}\partial^- T^2 + q^{-\frac{3}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\partial^{3/0}\tau^1, \\
T^2\partial^3 &= q\partial^3 T^2 - q\lambda_+^{-1}\lambda\partial^{3/0} T^2 + q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\partial^+\tau^1, \\
T^2\partial^{3/0} &= q^{-1}\partial^{3/0} T^2,
\end{aligned} \tag{4.115}$$

$$\begin{aligned}
S^1\partial^- &= q\partial^- S^1, \\
S^1\partial^+ &= q^{-1}\partial^+ S^1 - q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\partial^{3/0}\sigma^2, \\
S^1\partial^3 &= q^{-1}\partial^3 S^1 + q^{-1}\lambda_+^{-1}\lambda\partial^{3/0} S^1 - q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\partial^-\sigma^2, \\
S^1\partial^{3/0} &= q\partial^{3/0} S^1,
\end{aligned} \tag{4.116}$$

$$\begin{aligned}
\tau^1\partial^- &= q^{-1}\partial^-\tau^1, \\
\tau^1\partial^+ &= q\partial^+\tau^1 - q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda^2\partial^{3/0} T^2, \\
\tau^1\partial^3 &= q^{-1}\partial^3\tau^1 + q^{-1}\lambda_+^{-1}\lambda\partial^{3/0}\tau^1 - q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda^2\partial^- T^2, \\
\tau^1\partial^{3/0} &= q\partial^{3/0}\tau^1,
\end{aligned} \tag{4.117}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2\partial^+ &= q^{-1}\partial^+\sigma^2, \\
\sigma^2\partial^- &= q\partial^-\sigma^2 + q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda^2\partial^{3/0} S^1, \\
\sigma^2\partial^3 &= q\partial^3\sigma^2 - q\lambda_+^{-1}\lambda\partial^{3/0}\sigma^2 + q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda^2\partial^+ S^1, \\
\sigma^2\partial^{3/0} &= q^{-1}\partial^{3/0}\sigma^2.
\end{aligned} \tag{4.118}$$

Die Vertauschungsrelationen mit den inversen partiellen Ableitungen lauten dementsprechend

$$\begin{aligned}
T^+(\partial^0)^{-1} &= (\partial^0)^{-1}T^+, \\
T^+(\partial^{3/0})^{-1} &= (\partial^{3/0})^{-1}T^+ - q^{1/2}\lambda_+^{1/2}(\partial^{3/0})^{-2}\partial^+, \\
T^+(\partial^+)^{-1} &= q^2(\partial^+)^{-1}T^+, \\
T^+(\partial^-)^{-1} &= q^{-2}(\partial^-)^{-1}T^+ - q^{-1/2}\lambda_+^{1/2}(\partial^-)^{-2}(\partial^{3/0} + q^{-2}\partial^0),
\end{aligned} \tag{4.119}$$

$$\begin{aligned}
T^-(\partial^0)^{-1} &= (\partial^0)^{-1}T^- \\
T^-(\partial^{3/0})^{-1} &= (\partial^{3/0})^{-1}T^- - q^{-1/2}\lambda_+^{1/2}(\partial^{3/0})^{-2}\partial^-, \\
T^-(\partial^-)^{-1} &= q^{-2}(\partial^-)^{-1}T^-, \\
T^-(\partial^+)^{-1} &= q^2(\partial^+)^{-1}T^- - q^{1/2}\lambda_+^{1/2}(\partial^+)^{-2}(\partial^{3/0} + q^2\partial^0),
\end{aligned} \tag{4.120}$$

$$\begin{aligned}
\tau^3(\partial^0)^{-1} &= (\partial^0)^{-1}\tau^3, \\
\tau^3(\partial^{3/0})^{-1} &= (\partial^{3/0})^{-1}\tau^3, \\
\tau^3(\partial^\pm)^{-1} &= q^{\pm 4}(\partial^\pm)^{-1}\tau^3,
\end{aligned} \tag{4.121}$$

$$\begin{aligned}
T^2(\partial^{3/0})^{-1} &= q(\partial^{3/0})^{-1}T^2, \\
T^2(\partial^+)^{-1} &= q^{-1}(\partial^+)^{-1}T^2, \\
T^2(\partial^-)^{-1} &= q(\partial^-)^{-1}T^2 - q^{-3/2}\lambda_+^{-1/2}\partial^{3/0}(\partial^-)^{-2}\tau^1, \\
T^2(\partial^3)^{-1} &= (T^2 \triangleright (\partial^3)^{-1})\tau^1 + (\sigma^2 \triangleright (\partial^3)^{-1})T^2,
\end{aligned} \tag{4.122}$$

$$\begin{aligned}
S^1(\partial^{3/0})^{-1} &= q^{-1}(\partial^{3/0})^{-1}S^1, \\
S^1(\partial^-)^{-1} &= q^{-1}(\partial^-)^{-1}S^1, \\
S^1(\partial^+)^{-1} &= q(\partial^+)^{-1}S^1 + q^{-1/2}\lambda_+^{-1/2}(\partial^+)^{-2}\partial^{3/0}\sigma^2, \\
S^1(\partial^3)^{-1} &= (S^1 \triangleright (\partial^3)^{-1})\sigma^2 + (\tau^1 \triangleright (\partial^3)^{-1})S^1,
\end{aligned} \tag{4.123}$$

$$\begin{aligned}
\tau^1(\partial^{3/0})^{-1} &= q^{-1}(\partial^{3/0})^{-1}\tau^1, \\
\tau^1(\partial^-)^{-1} &= q(\partial^-)^{-1}\tau^1, \\
\tau^1(\partial^+)^{-1} &= q^{-1}(\partial^+)^{-1}\tau^1 + q^{-1/2}\lambda_+^{-1/2}\lambda^2(\partial^+)^{-2}\partial^{3/0}T^2, \\
\tau^1(\partial^3)^{-1} &= (\tau^1 \triangleright (\partial^3)^{-1})\tau^1 + \lambda^2(S^1 \triangleright (\partial^3)^{-1})T^2,
\end{aligned} \tag{4.124}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2(\partial^{3/0})^{-1} &= q(\partial^{3/0})^{-1}\sigma^2, \\
\sigma^2(\partial^+)^{-1} &= q(\partial^+)^{-1}\sigma^2,
\end{aligned} \tag{4.125}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2(\partial^-)^{-1} &= q^{-1}(\partial^-)^{-1}\sigma^2 - q^{1/2}\lambda_+^{-1/2}\lambda^2(\partial^-)^{-2}\partial^{3/0}S^1, \\
\sigma^2(\partial^3)^{-1} &= (\sigma^2 \triangleright (\partial^3)^{-1})\sigma^2 + \lambda^2(T^2 \triangleright (\partial^3)^{-1})S^1,
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
T^2 \triangleright (\partial^3)^{-1} &= q^{-3/2}\sum_{k=0}^{\infty}(q^2\alpha_0)^k\,(K_{-1})_{1,q^2}^{(k,k+1)} \\
&\quad \cdot \sum_{0\leq i+j\leq k} \lambda_+^{j-1/2}\binom{k}{i}(\partial^+)^{j+1}(a_q(q^{2j}\partial^{3/0}))^i \\
&\quad \cdot (S_q)_{k-i,j}(\partial^0,\partial^{3/0})(\partial^0 + 2q^{2j+1}\lambda_+^{-1}\partial^{3/0})^{-2(k+1)}(\partial^-)^j,
\end{aligned} \tag{4.126}$$

$$\begin{aligned}
S^1 \triangleright (\partial^3)^{-1} &= -q^{-3/2}\sum_{k=0}^{\infty}(q^{-2}\alpha_0)^k\,(K_{-1})_{1,q^{-2}}^{(k,k+1)} \\
&\quad \cdot \sum_{0\leq i+j\leq k} \lambda_+^{j-1/2}\binom{k}{i}(\partial^+)^{j}(a_q(q^{2j}\partial^{3/0}))^i \\
&\quad \cdot (S_q)_{k-i,j}(\partial^0,\partial^{3/0})(\partial^0 + 2q^{2j+1}\lambda_+^{-1}\partial^{3/0})^{-2(k+1)}(\partial^-)^{j+1},
\end{aligned} \tag{4.127}$$

$$\begin{aligned}
\tau^1 \triangleright (\partial^3)^{-1} &= q\sum_{k=0}^{\infty}(q^2\alpha_0)^k\,(K_{-1})_{1,q^2}^{(k,k)} \\
&\quad \cdot \sum_{0\leq i+j\leq k} \lambda_+^{j}\binom{k}{i}(\partial^+)^{j}(a_q(q^{2j}\partial^{3/0}))^i \\
&\quad \cdot (S_q)_{k-i,j}(\partial^0,\partial^{3/0})(\partial^0 + 2q^{2j+1}\lambda_+^{-1}\partial^{3/0})^{-2k-1}(\partial^-)^j,
\end{aligned} \tag{4.128}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 \triangleright (\partial^3)^{-1} &= q^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(q^{-2}\alpha_0)^k\,(K_{-1})_{1,q^{-2}}^{(k,k)} \\
&\quad \cdot \sum_{0\leq i+j\leq k} \lambda_+^{j}\binom{k}{i}(\partial^+)^{j}(a_{q^{-1}}(q^{2j}\partial^{3/0}))^i \\
&\quad \cdot (S_q)_{k-i,j}(\partial^0,\partial^{3/0})(\partial^0 + 2q^{2j-1}\lambda_+^{-1}\partial^{3/0})^{-2k-1}(\partial^-)^j.
\end{aligned} \tag{4.129}$$

Es sei bemerkt, dass sämtliche Identitäten dieses Abschnitts durch die Ersetzungen

$$\partial^\mu \to \hat{\partial}^\mu, \quad (\partial^\mu)^{-1} \to (\hat{\partial}^\mu)^{-1} \tag{4.130}$$

in jene des konjugierten Kalküls übergehen.

Die Darstellungen für die inversen partiellen Ableitungen können wir wieder mittels der allgemeinen Formel (4.15) bestimmen. Dazu müssen wir im Fall der konjugierten Ableitungen die folgenden Ausdrücke einsetzen:

$$\begin{aligned}
(\hat{\partial}^{3/0}_{(i=0)})^{-1}_L f(x^+,x^{3/0},x^3,x^-) &= (D^3_{q-q^2})^{-1} f(q^{-2}x^+), \\
(\hat{\partial}^{-}_{(i=0)})^{-1}_L f(x^+,x^{3/0},x^3,x^-) &= -q(D^+_{q^2})^{-1} f, \\
(\hat{\partial}^{+}_{(i=0)})^{-1}_L f(x^+,x^{3/0},x^3,x^-) &= -q^{-1}(D^-_{q^2})^{-1} f(q^{-2}q_+x^3), \\
(\hat{\partial}^{0}_{(i=0)})^{-1}_L f(x^+,x^{3/0},x^3,x^-) &= (D^{3/0}_{q^2})^{-1} f(q_-x^3)
\end{aligned} \tag{4.131}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
&(\hat{\partial}^{3/0}_{(i>0)})_L f(x^+,x^{3/0},x^3,x^-) \\
=\; &\sum_{l=1}^{\infty} \alpha_+^l \sum_{0\leq i+j\leq l} (M^-)^l_{i,j}(\underline{x})(T^3)^i_j f,
\end{aligned} \tag{4.132}$$

$$\begin{aligned}
&(\hat{\partial}^{-}_{(i>0)})_L f(x^+,x^{3/0},x^3,x^-) \\
=\; &\frac{\lambda}{\lambda_+}\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_+^l \sum_{0\leq i+j\leq l} \Big\{(M^+)^k_{i,j}(\underline{x})(T_1^-)^i_j f + q^{-1}(M^-)^k_{i,j}(\underline{x})(T_2^-)^i_j f\Big\},
\end{aligned} \tag{4.133}$$

$$\begin{aligned}
&(\hat{\partial}^{+}_{(i>0)})_L f(x^+,x^3,x^{3/0},x^-) \\
=\; &-q\lambda x^+ (D^{3/0}_{q^2} D^3_{q^2} f)^{-1} f(q_+x^3) \\
&-q\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_+^k \sum_{0\leq i+j\leq k} \Big\{(M^-)^k_{i,j}(\underline{x})(T_1^+)^i_j f + \lambda (M^+)^k_{i,j}(\underline{x})(T_2^+)^i_j f\Big\} \\
&-q\frac{\lambda}{\lambda_+}\sum_{0\leq k+l<\infty} \alpha_+^{k+l} \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}\sum_{0\leq u\leq i+j} (M^{+-})^{k,l}_{i,j,u}(\underline{x})(T_3^+)^{k,l}_u f \\
&-\frac{\lambda}{\lambda_+}\sum_{0\leq k+l<\infty} \alpha_+^{k+l+1} \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l+1}\sum_{0\leq u\leq i+j} (M^{+-})^{k,l+1}_{i,j,u}(\underline{x})(T_4^+)^{k,l}_u f,
\end{aligned} \tag{4.134}$$

$$\begin{aligned}
&(\hat{\partial}^{0}_{(i>0)})_L f(x^+,x^{3/0},x^3,x^-) \\
=\; &-q^2\frac{\lambda}{\lambda_+} x^- D^-_{q^2}(D^3_{q^{-2}} f)(q^2x^{3/0}, q^2q_+x^3) - q^2\frac{\lambda}{\lambda_+} x^+ D^+_{q^2} D^3_{q^2q_-} f
\end{aligned} \tag{4.135}$$

$$
\begin{aligned}
&- q\frac{\lambda}{\lambda_+} x^{3/0} D^+_{q^2} D^-_{q^2} f(q^2 q_- x^3) \\
&- q^3 \frac{\lambda^2}{\lambda_+} x^+ x^{3/0} D^+_{q^2} (D^{3/0}_{q^2} D^3_{q^2} f)(q_+ x^3) \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_+^k \sum_{0\leq i+j\leq k} \Big\{ (M^+)^k_{i,j}(\underline{x})(T^0_1)^k_j f + q\frac{\lambda}{\lambda_+}(M^-)^k_{i,j}(\underline{x})(T^0_2)^i_j f \Big\} \\
&- q^2 \frac{\lambda}{\lambda_+} \sum_{0\leq k+l<\infty} \alpha_+^{k+l} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} \sum_{0\leq u\leq i+j} (M^{+-})^{k,l}_{i,j,u}(\underline{x})(T^0_3)^{k,l}_u f \\
&+ \frac{\beta}{\lambda_+} \sum_{0\leq k+l<\infty} \alpha_+^{k+l+1} \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{j=0}^{l} \sum_{0\leq u\leq i+j} (M^{+-})^{k+1,l}_{i,j,u}(\underline{x})(T^0_4)^{k,l}_u f \\
&+ \lambda_+^{-1} \sum_{0\leq k+l<\infty} \alpha_+^{k+l+1} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l+1} \sum_{0\leq u\leq i+j} (M^{+-})^{k,l+1}_{i,j,u}(\underline{x})(T^0_5)^{k,l}_u f,
\end{aligned}
$$

wobei wir neben den Bezeichnungen aus Kapitel 3.3 zusätzlich noch

$$
q_\pm = 1 \pm \frac{\lambda}{\lambda_+}\frac{x^{3/0}}{x^3} \tag{4.136}
$$

verwendet haben. Es ist zu beachten, dass die obigen Operatoren immer nur dann anwendbar sind, wenn sie auf Funktionen wirken können, die explizit nur von den Koordinaten x^+, x^-, x^3 und $x^{3/0}$ abhängen. Man überzeugt sich leicht, dass die Anwendung dieser Operatoren im Allgemeinen aber Ausdrücke liefert, die auch von x^0 abhängen. Da in der Formel (4.15) die Operatoren $(\hat{\partial}^A_{(i>0)})$ wiederholt angewendet werden, ist es notwendig die Koordinate x^0 nach jedem Auftreten konsequent durch $x^3 - x^{3/0}$ zu ersetzen. Konkret bedeutet dies, dass wir die Formel (4.15) stets in der Form

$$
F = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[(\hat{\partial}^A_{(i=0)})^{-1} \Big((\hat{\partial}^A_{(i>0)}) \Big|_{x^0 \to x^3 - x^{3/0}} \Big) \right]^k (\hat{\partial}^A_{(i=0)})^{-1} f \tag{4.137}
$$

verwenden müssen.

Zwischen konjugierten und unkonjugierten Integralen besteht in Analogie zu den partiellen Ableitungen ein Zusammenhang in der Form

$$
(\partial^\pm)^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f \quad \overset{\pm \leftrightarrow \mp}{\underset{q \leftrightarrow 1/q}{\longleftrightarrow}} \quad (\hat{\partial}^\mp)^{-1} \triangleright f, \tag{4.138}
$$

$$
\begin{aligned}
(\partial^0)^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f &\quad \overset{\substack{\pm\leftrightarrow\mp \\ q\leftrightarrow 1/q}}{\longleftrightarrow} \quad (\hat{\partial}^0)^{-1} \triangleright f, \\
(\partial^{3/0})^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f &\quad \overset{\substack{\pm\leftrightarrow\mp \\ q\leftrightarrow 1/q}}{\longleftrightarrow} \quad (\hat{\partial}^{3/0})^{-1} \triangleright f,
\end{aligned}
$$

d.h. beide Ausdrücke gehen durch die Ersetzungen

$$
\begin{gathered}
x^{\pm} \to x^{\mp}, \quad q^{\pm 1} \to q^{\mp 1}, \quad \hat{n}^{\pm} \to -\hat{n}^{\mp}, \\
D^{\pm}_{q^a} \to D^{\mp}_{q^{-a}}, \quad (D^{\pm}_{q^a})^{-1} \to (D^{\mp}_{q^{-a}})^{-1}
\end{gathered} \tag{4.139}
$$

ineinander über. Für eine einheitliche Normalordnung können wir wieder die Operatoren $\hat{U}^{-1}$ und $\hat{U}$ aus (2.102)-(2.103) im Rahmen der Identitäten

$$
\begin{aligned}
(\hat{\partial}^{\mu})^{-1} \triangleright (\hat{U}^{-1} f) &= \hat{U}^{-1}((\hat{\partial}^{\mu})^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f), \\
(\partial^{\mu})^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, (\hat{U} f) &= \hat{U}((\partial^{\mu})^{-1} \triangleright f)
\end{aligned} \tag{4.140}
$$

verwenden. Die Rechtsintegrale des Minkowski-Raumes folgen aus den Linksintegralen durch Anwendung der Regeln

$$
\begin{aligned}
f \,\tilde{\triangleleft}\, (\partial^0)^{-1} &\quad \overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \quad (\bar{\partial}^0)^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f, \\
f \,\tilde{\triangleleft}\, (\partial^{3/0})^{-1} &\quad \overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \quad (\bar{\partial}^{3/0})^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f, \\
f \,\tilde{\triangleleft}\, (\partial^{\pm})^{-1} &\quad \overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \quad (\bar{\partial}^{\mp})^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f,
\end{aligned} \tag{4.141}
$$

$$
\begin{aligned}
f \triangleleft (\bar{\partial}^0)^{-1} &\quad \overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \quad (\partial^0)^{-1} \triangleright f, \\
f \triangleleft (\bar{\partial}^{3/0})^{-1} &\quad \overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \quad (\partial^{3/0})^{-1} \triangleright f, \\
f \triangleleft (\bar{\partial}^{\pm})^{-1} &\quad \overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \quad (\partial^{\mp})^{-1} \triangleright f,
\end{aligned} \tag{4.142}
$$

wobei der Übergang vom rechten zum linken Ausdruck und umgekehrt durch

$$
x^{\pm} \to x^{\mp}, \quad D^{\pm}_{q^a} \to D^{\mp}_{q^a}, \quad (D^{\pm}_{q^a})^{-1} \to (D^{\mp}_{q^a})^{-1}, \quad \hat{n}^{\pm} \to \hat{n}^{\mp} \tag{4.143}
$$

erfolgt.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in der allgemeinen Form (4.32) und (4.33) behält auch für den q-deformierten Minkowski-Raum seine Gültigkeit. Daher lassen sich auch wieder Regeln zur partiellen Integration angeben, die im Fall der unkonjugierten Linksintegrale lauten

$$
\left(\partial^{3/0}\right)_L^{-1} (\partial_L^{3/0} f) \star g \Big|_{x^3=0}^{a} \tag{4.144}
$$

$$
\begin{aligned}
&= f \star g \,\|_{x^3=0}^{a} - (\partial^{3/0})_L^{-1}(\Lambda^{1/2}\tau^1 f) \star \partial_L^{3/0} g \Big|_{x^3=0}^{a} \\
&\quad + q^{1/2}\lambda_+^{1/2}\lambda(\partial^{3/0})_L^{-1}(\Lambda^{1/2}(\tau^3)^{-1/2}S^1 f) \star \partial_L^{+} g \big|_{x^3=0}^{a},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\partial^+)_L^{-1}(\partial_L^+ f) \star g \big|_{x^-=0}^{a} \\
&= f \star g \,\|_{x^-=0}^{a} - (\partial^+)_L^{-1}(\Lambda^{1/2}(\tau^3)^{-1/2}\sigma^2 f) \star \partial_L^{+} g \big|_{x^-=0}^{a} \\
&\quad + q^{3/2}\lambda_+^{-1/2}\lambda(\partial^+)_L^{-1}(\Lambda^{1/2}T^2 f) \star \partial_L^{3/0} g \Big|_{x^-=0}^{a},
\end{aligned}
\tag{4.145}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\partial^-)_L^{-1}(\partial_L^- f) \star g \big|_{x^+=0}^{a} \\
&= f \star g \,\|_{x^+=0}^{a} - (\partial^-)_L^{-1}(\Lambda^{1/2}(\tau^3)^{1/2}\tau^1 f) \star \partial_L^{-} g \big|_{x^+=0}^{a} \\
&\quad + q^{-1/2}\lambda_+^{1/2}\lambda(\partial^-)_L^{-1}(\Lambda^{1/2}S^1 f) \star \partial_L^{0} g \big|_{x^+=0}^{a} \\
&\quad + \lambda^2(\partial^-)_L^{-1}(\Lambda^{1/2}(\tau^3)^{-1/2}T^-S^1 f) \star \partial_L^{+} g \big|_{x^+=0}^{a} \\
&\quad - q^{-1/2}\lambda_+^{-1/2}\lambda(\partial^-)_L^{-1}(\Lambda^{1/2}(\tau^1T^- - q^{-1}S^1) f) \star \partial_L^{3/0} g \Big|_{x^+=0}^{a},
\end{aligned}
\tag{4.146}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\partial^0)_L^{-1}(\partial_L^0 f) \star g \big|_{x^{3/0}=0}^{a} \\
&= f \star g \,\|_{x^{3/0}=0}^{a} - (\partial^0)_L^{-1}(\Lambda^{1/2}\sigma^2 f) \star \partial_L^{0} g \big|_{x^{3/0}=0}^{a} \\
&\quad + q^{1/2}\lambda_+^{-1/2}\lambda(\partial^0)_L^{-1}(\Lambda^{1/2}T^2(\tau^3)^{1/2} f) \star \partial_L^{-} g \big|_{x^{3/0}=0}^{a} \\
&\quad - q^{-1/2}\lambda_+^{-1/2}\lambda\left(\partial^0\right)_L^{-1}(\Lambda^{1/2}(\tau^3)^{-1/2}(T^-\sigma^2 + qS^1) f) \star \partial_L^{+} g \big|_{x^{3/0}=0}^{a} \\
&\quad + \lambda_+^{-1}(\partial^0)_L^{-1}(\Lambda^{1/2}(\lambda_-^2 T^-T^2 + q(\tau^1 - \sigma^2)) f) \star \partial_L^{3/0} g \Big|_{x^{3/0}=0}^{a},
\end{aligned}
\tag{4.147}
$$

während für die konjugierten Linksintegrale gilt

$$
\begin{aligned}
&(\hat\partial^{3/0})_L^{-1}(\hat\partial_L^{3/0} f) \star g \Big|_{x^3=0}^{a} \\
&= f \star g \,\|_{x^3=0}^{a} - (\hat\partial^{3/0})_L^{-1}(\Lambda^{-1/2}(\tau^3)^{-1/2}\sigma^2 f) \star \hat\partial_L^{3/0} g \Big|_{x^3=0}^{a} \\
&\quad + q^{3/2}\lambda_+^{1/2}\lambda(\partial^{3/0})_L^{-1}(\Lambda^{-1/2}T^2 f) \star \hat\partial_L^{-} g \Big|_{x^3=0}^{a},
\end{aligned}
\tag{4.148}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\hat\partial^-)_L^{-1}(\hat\partial_L^- f) \star g \Big|_{x^+=0}^{a} \\
&= f \star g \,\|_{x^3=0}^{a} - (\hat\partial^-)_L^{-1}(\Lambda^{-1/2}\tau^1 f) \star \hat\partial_L^{-} g \Big|_{x^+=0}^{a} \\
&\quad + q^{1/2}\lambda_+^{-1/2}\lambda(\hat\partial^-)_L^{-1}(\Lambda^{-1/2}(\tau^3)^{-1/2}S^1 f) \star \hat\partial_L^{3/0} g \Big|_{x^+=0}^{a},
\end{aligned}
\tag{4.149}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\hat{\partial}^+)^{-1}_L(\hat{\partial}^+_L f)\star g\Big|^a_{x^-=0} &&(4.150)\\
=\;& f\star g\,\|^a_{x^-=0} - (\hat{\partial}^+)^{-1}_L(\Lambda^{-1/2}\sigma^2 f)\star\hat{\partial}^+_L g\Big|^a_{x^-=0}\\
&+q^{1/2}\lambda_+^{1/2}\lambda(\hat{\partial}^+)^{-1}_L(\Lambda^{-1/2}T^2(\tau^3)^{1/2}f)\star\hat{\partial}^0_L g\Big|^a_{x^-=0}\\
&+q^{1/2}\lambda_+^{-1/2}\lambda(\hat{\partial}^+)^{-1}_L(\Lambda^{-1/2}(\tau^3)^{-1/2}(T^+\sigma^2+q\tau^3T^2)f)\star\hat{\partial}^{3/0}_L g\Big|^a_{x^-=0}\\
&-q^2\lambda^2(\hat{\partial}^+)^{-1}_L(\Lambda^{-1/2}T^2T^+f)\star\hat{\partial}^-_L g\Big|^a_{x^-=0},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\hat{\partial}^0)^{-1}_L(\hat{\partial}^0_L f)\star g\Big|^a_{x^{3/0}=0} &&(4.151)\\
=\;& f\star g\,\|^a_{x^{3/0}=0} - (\hat{\partial}^0)^{-1}_L(\Lambda^{-1/2}(\tau^3)^{1/2}\tau^1 f)\star\hat{\partial}^0_L g\Big|^a_{x^{3/0}=0}\\
&+q^{-1/2}\lambda_+^{-1/2}\lambda(\hat{\partial}^0)^{-1}_L(\Lambda^{-1/2}S^1 f)\star\hat{\partial}^+_L g\Big|^a_{x^{3/0}=0}\\
&+q^{1/2}\lambda_+^{-1/2}\lambda(\hat{\partial}^0)^{-1}_L(\Lambda^{-1/2}(qT^+\tau^1-T^2)f)\star\hat{\partial}^-_L g\Big|^a_{x^{3/0}=0}\\
&-\lambda_+^{-1}(\hat{\partial}^0)^{-1}_L(\Lambda^{-1/2}(\tau^3)^{-1/2}(\lambda^2T^+S^1+q^{-1}(\tau^3\tau^1-\sigma^2))f)\\
&\star\hat{\partial}^{3/0}_L g\Big|^a_{x^{3/0}=0}.
\end{aligned}
$$

Für die unkonjugierten Rechtsintegrale finden wir entsprechend

$$
\begin{aligned}
&(\partial^{3/0})^{-1}_R f\star(\partial^{3/0}_R g)\Big|^a_{x^3=0} &&(4.152)\\
=\;& f\star g\,\|^a_{x^3=0} - (\partial^{3/0})^{-1}_R\partial^{3/0}_R f\star(\Lambda^{-1/2}\sigma^2 g)\big|^a_{x^3=0}\\
&-q^{1/2}\lambda_+^{1/2}\lambda(\partial^{3/0})^{-1}_R(\partial^+_R f)\star(\Lambda^{-1/2}S^1 g)\big|^a_{x^3=0},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\partial^+\right)^{-1}_R f\star(\partial^+_R g)\big|^a_{x^-=0} &&(4.153)\\
=\;& f\star g\,\|^a_{x^-=0} - (\partial^+)^{-1}_R(\partial^+_R f)\star(\Lambda^{-1/2}(\tau^3)^{1/2}\tau^1 g)\big|^a_{x^-=0}\\
&-q^{3/2}\lambda_+^{-1/2}\lambda(\partial^+)^{-1}_R(\partial^{3/0}_R f)\star(\Lambda^{-1/2}(\tau^3)^{1/2}T^2 g)\big|^a_{x^-=0},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\partial^-)^{-1}_R f\star(\partial^-_R g)\big|^a_{x^+=0} &&(4.154)\\
=\;& f\star g\,\|^a_{x^+=0} - (\partial^-)^{-1}_R(\partial^-_R f)\star(\Lambda^{-1/2}(\tau^3)^{-1/2}\sigma^2 g)\big|^a_{x^+=0}\\
&-q^{3/2}\lambda_+^{1/2}\lambda(\partial^-)^{-1}_R(\partial^0_R f)\star(\Lambda^{-1/2}(\tau^3)^{-1/2}S^1 g)\big|^a_{x^+=0}\\
&-q^2\lambda^2(\partial^-)^{-1}_R(\partial^+_R f)\star(\Lambda^{-1/2}(\tau^3)^{-1/2}T^-S^1 g)\big|^a_{x^+=0}
\end{aligned}
$$

$$-\,q^{1/2}\lambda_+^{-1/2}\lambda(\partial^-)^{-1}_R(\partial^{3/0}_R f)\star(\Lambda^{-1/2}(\tau^3)^{-1/2}(S^1-qT^-\sigma^2)g)\big|^a_{x^+=0}\,,$$

$$\begin{aligned}
&(\partial^0)^{-1}_R f\star(\partial^0_R g)\big|^a_{x^{3/0}=0} &(4.155)\\
=\;& f\star g\,\big\|^a_{x^{3/0}=0}-(\partial^0)^{-1}_R(\partial^0_R f)\star(\Lambda^{-1/2}\tau^1 g)\big|^a_{x^{3/0}=0}\\
&-q^{1/2}\lambda_+^{-1/2}\lambda(\partial^0)^{-1}_R(\partial^-_R f)\star(\Lambda^{-1/2}T^2 g)\big|^a_{x^{3/0}=0}\\
&-q^{1/2}\lambda_+^{-1/2}\lambda(\partial^0)^{-1}_R(\partial^+_R f)\star(\Lambda^{-1/2}(qS^1-\tau^1T^-)g)\big|^a_{x^{3/0}=0}\\
&+\lambda_+^{-1}(\partial^0)^{-1}_R(\partial^3_R f)\star\Lambda^{-1/2}(\lambda^2T^2T^-+q(\sigma^2-\tau^1))g\big|^a_{x^{3/0}=0}\,,
\end{aligned}$$

und ebenso für die konjugierten Rechtsintegrale

$$\begin{aligned}
&(\hat\partial^{3/0})^{-1}_R f\star(\hat\partial^{3/0}_R g)\Big|^a_{x^3=0} &(4.156)\\
=\;& f\star g\,\|^a_{x^3=0}-\,(\hat\partial^{3/0})^{-1}_R(\hat\partial^{3/0}_R g)\star(\Lambda^{1/2}(\tau^3)^{1/2}\tau^1 g)\big|^a_{x^3=0}\\
&-q^{3/2}\lambda_+^{1/2}\lambda(\hat\partial^{3/0})^{-1}_R(\hat\partial^-_R f)\star(\Lambda^{1/2}(\tau^3)^{1/2}T^2 g)\big|^a_{x^3=0}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\hat\partial^-)^{-1}_R f\star(\hat\partial^-_R g)\Big|^a_{x^+=0} &(4.157)\\
=\;& f\star g\,\|^a_{x^+=0}-(\hat\partial^-)^{-1}_R(\hat\partial^-_R f)\star(\Lambda^{1/2}\sigma^2 g)\big|^a_{x^+=0}\\
&-q^{1/2}\lambda_+^{-1/2}\lambda(\hat\partial^-)^{-1}_R(\hat\partial^{3/0}_R f)\star(\Lambda^{1/2}S^1 g)\big|^a_{x^+=0}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\hat\partial^+)^{-1}_R f\star(\hat\partial^+_R g)\Big|^a_{x^-=0} &(4.158)\\
=\;& f\star g\,\|^a_{x^-=0}-(\hat\partial^+)^{-1}_R(\hat\partial^+_R f)\star(\Lambda^{1/2}\tau^1 g)\big|^a_{x^-=0}\\
&-q^{1/2}\lambda_+^{1/2}\lambda(\hat\partial^+)^{-1}_R(\hat\partial^{3/0}_R f)\star(\Lambda^{1/2}(\tau^1T^++q^{-1}\tau^3T^2)g)\big|^a_{x^-=0}\\
&-\lambda^2(\hat\partial^+)^{-1}_R(\hat\partial^-_R f)\star(\Lambda^{1/2}T^2T^+g)\big|^a_{x^-=0}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\hat\partial^0)^{-1}_R f\star(\hat\partial^0_R g)\Big|^a_{x^{3/0}=0} &(4.159)\\
=\;& f\star g\,\big\|^a_{x^{3/0}=0}-(\hat\partial^0)^{-1}_R(\hat\partial^0_R f)\star(\Lambda^{1/2}(\tau^3)^{1/2}\sigma^2 g)\big|^a_{x^{3/0}=0}\\
&-q^{3/2}\lambda_+^{-1/2}\lambda(\hat\partial^0)^{-1}_R(\hat\partial^+_R f)\star(\Lambda^{1/2}(\tau^3)^{-1/2}S^1 g)\big|^a_{x^{3/0}=0}\\
&+q^{-1/2}\lambda_+^{-1/2}\lambda(\hat\partial^0)^{-1}_R(\hat\partial^-_R f)\star(\Lambda^{1/2}(\tau^3)^{-1/2}(q\tau^3T^2-\sigma^2T^+)g)\big|^a_{x^{3/0}=0}\\
&-q^{-1}\lambda_+^{-1}\lambda(\hat\partial^0)^{-1}_R(\hat\partial^{3/0}_R f)\\
&\star(\Lambda^{1/2}(\tau^3)^{1/2}(q^{-1}\lambda^2S^1T^++(\tau^3)^{-1}\sigma^2-\tau^2)g)\big|^a_{x^{3/0}=0}\,.
\end{aligned}$$

In bekannter Weise wollen wir abschließend wieder die Volumenintegrale für den q-deformierten Minkowski-Raum definieren. Für die sukzessive Integration über die vier unterschiedlichen Raumrichtungen lassen wir die Oberflächenterme unberücksichtigt und erhalten deshalb

$$\begin{aligned} (\partial^\mu)^{-1} f &= (\partial^\mu_{(i=0)})^{-1} f + O.T., \quad \mu \in \{\pm, 3, 3/0\}, \\ (\hat{\partial}^\mu)^{-1} f &= (\hat{\partial}^\mu_{(i=0)})^{-1} f + O.T. \end{aligned} \tag{4.160}$$

Bei Vertauschung der Integrationsreihenfolge tauchen dann wieder globale Skalierungsfaktoren auf, indem gilt

$$\begin{aligned} & (\partial^+)^{-1}(\partial^{3/0})^{-1}(\partial^-)^{-1}(\partial^0)^{-1} \triangleright f \\ = \; & q^{-4}(\partial^-)^{-1}(\partial^{3/0})^{-1}(\partial^+)^{-1}(\partial^0)^{-1} \triangleright f \\ = \; & q^{-2}(\partial^{3/0})^{-1}(\partial^-)^{-1}(\partial^+)^{-1}(\partial^0)^{-1} \triangleright f \\ = \; & q^{-2}(\partial^{3/0})^{-1}(\partial^+)^{-1}(\partial^-)^{-1}(\partial^0)^{-1} \triangleright f \\ = \; & q^{-2}(\partial^-)^{-1}(\partial^+)^{-1}(\partial^{3/0})^{-1}(\partial^0)^{-1} \triangleright f \\ = \; & q^{-2}(\partial^+)^{-1}(\partial^-)^{-1}(\partial^{3/0})^{-1}(\partial^0)^{-1} \triangleright f. \end{aligned} \tag{4.161}$$

Man kann sich übrigens davon überzeugen, dass die konjugierten Integrale die gleichen Identitäten erfüllen und diese unabhängig davon sind, ob Rechts- oder Linkswirkungen vorliegen. Für die explizite Darstellung der konjugierten Linksintegrale finden wir unter Verwendung von (4.160) den Ausdruck

$$\begin{aligned} & (\hat{\partial}^0)^{-1}(\hat{\partial}^+)^{-1}(\hat{\partial}^-)^{-1}(\hat{\partial}^{3/0})^{-1} \triangleright f \\ = \; & (D^{3/0}_{q^2})^{-1}(D^-_{q^2})^{-1}(D^+_{q^2})\left((D^3_{q_-q^2})^{-1} f\right)(q^{-2}x^+, q^{-2}x^3). \end{aligned} \tag{4.162}$$

Konjugierte und unkonjugierte Integrale hängen über

$$\begin{aligned} & (\hat{\partial}^0)^{-1}(\hat{\partial}^+)^{-1}(\hat{\partial}^-)^{-1}(\hat{\partial}^{3/0})^{-1} \triangleright f \\ \overset{\substack{\pm \leftrightarrow \mp \\ q \leftrightarrow 1/q}}{\longleftrightarrow} \; & (\partial^{3/0})^{-1}(\partial^-)^{-1}(\partial^+)^{-1}(\partial^0)^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f, \end{aligned} \tag{4.163}$$

zusammen, während Rechts- und Linksintegrale im Rahmen der Regeln

$$\begin{aligned} & f \triangleleft (\partial^{3/0})^{-1}(\partial^-)^{-1}(\partial^+)^{-1}(\partial^0)^{-1} \\ \overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \; & (\bar{\partial}^0)^{-1}(\bar{\partial}^+)^{-1}(\bar{\partial}^-)^{-1}(\bar{\partial}^{3/0})^{-1} \triangleright f, \end{aligned} \tag{4.164}$$

$$\begin{aligned} & f \,\tilde{\triangleleft}\, (\bar{\partial}^{3/0})^{-1}(\bar{\partial}^-)^{-1}(\bar{\partial}^+)^{-1}(\bar{\partial}^0)^{-1} \\ \overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \; & (\partial^0)^{-1}(\partial^+)^{-1}(\partial^-)^{-1}(\partial^{3/0})^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f \end{aligned} \tag{4.165}$$

ineinander überführbar sind.

Selbstverständlich sind unsere Volumenintegrale in Bezug auf Links- und Rechtswirkungen translations- und rotationsinvariant, so dass gilt

$$\begin{aligned}
\partial^\mu \,\tilde{\triangleright} \int_{L/R} d_qVf &= \int_{L/R} d_qV\partial^\mu \,\tilde{\triangleright}\, f = \varepsilon(\partial^\mu)\int_{L/R} d_qVf = 0, \qquad (4.166)\\
T \triangleright \int_{L/R} d_qVf &= \int_{L/R} d_qVT \triangleright f = \varepsilon(T)\int_{L/R} d_qVf = 0,\\
K \triangleright \int_{L/R} d_qVf &= \int_{L/R} d_qVK \triangleright f = \varepsilon(K)\int_{L/R} d_qVf = \int_{L/R} d_qVf,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\int_{L/R} d_qVf\right) \triangleleft \partial^\mu &= \int_{L/R} d_qVf \triangleleft \partial^\mu = \varepsilon(\partial^\mu)\int_{L/R} d_qVf = 0, \qquad (4.167)\\
\left(\int_{L/R} d_qVf\right) \triangleleft T &= \int_{L/R} d_qVf \triangleleft T = \varepsilon(T)\int_{L/R} d_qVf,\\
\left(\int_{L/R} d_qVf\right) \triangleleft K &= \int_{L/R} d_qVf \triangleleft K = \varepsilon(K)\int_{L/R} d_qVf = \int_{L/R} d_qVf,
\end{aligned}$$

wobei für T alle algebraartigen und für K alle gruppenartigen Generatoren einsetzbar sind, also

$$T \in \{T^\pm, S^1, T^2\}, \qquad K \in \{\tau^3, \tau^1, \sigma^2\}. \qquad (4.168)$$

In gewohnter Weise haben wir wieder auf die Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
\int_L d_qVf &\equiv (\partial^0)^{-1}(\partial^+)^{-1}(\partial^-)^{-1}(\partial^{3/0})^{-1} \,\tilde{\triangleright}\, f, \qquad (4.169)\\
\int_R d_qVf &\equiv f \triangleleft (\partial^{3/0})^{-1}(\partial^-)^{-1}(\partial^+)^{-1}(\partial^0)^{-1},\\
\int_L d_q\overline{V}f &\equiv (\bar{\partial}^0)^{-1}(\bar{\partial}^+)^{-1}(\bar{\partial}^-)^{-1}(\bar{\partial}^{3/0})^{-1} \triangleright f,\\
\int_R d_q\overline{V}f &\equiv f \,\tilde{\triangleleft}\, (\bar{\partial}^{3/0})^{-1}(\bar{\partial}^-)^{-1}(\bar{\partial}^+)^{-1}(\bar{\partial}^0)^{-1}
\end{aligned}$$

zurückgegriffen. Für die konjugierten Integrale gilt dann entsprechend

$$\bar{\partial}^\mu \triangleright \int_{L/R} d_q\overline{V}f = \int_{L/R} d_q\overline{V}\bar{\partial}^\mu \triangleright f = \varepsilon(\bar{\partial}^\mu)\int_{L/R} d_q\overline{V}f = 0, \qquad (4.170)$$

$$
\begin{aligned}
T \triangleright \int_{L/R} d_q\overline{V} f &= \int_{L/R} d_q\overline{V} T \triangleright f = \varepsilon(T) \int_{L/R} d_q\overline{V} f = 0, \\
K \triangleright \int_{L/R} d_q\overline{V} f &= \int_{L/R} d_q\overline{V} K \triangleright f = \varepsilon(K) \int_{L/R} d_q\overline{V} f = \int_{L/R} d_q\overline{V} f, \\
\left(\int_{L/R} d_q\overline{V} f \right) \tilde{\triangleleft}\, \bar{\partial}^\mu &= \int_{L/R} d_q\overline{V} f \,\tilde{\triangleleft}\, \bar{\partial}^\mu = \varepsilon(\bar{\partial}^\mu) \int_{L/R} d_q V f = 0, \qquad (4.171) \\
\left(\int_{L/R} d_q\overline{V} f \right) \triangleleft T &= \int_{L/R} d_q\overline{V} f \triangleleft T = \varepsilon(T) \int_{L/R} d_q\overline{V} f = 0, \\
\left(\int_{L/R} d_q\overline{V} f \right) \triangleleft K &= \int_{L/R} d_q\overline{V} f \triangleleft K = \varepsilon(K) \int_{L/R} d_q\overline{V} f = \int_{L/R} d_q\overline{V} f.
\end{aligned}
$$

Kapitel 5

Verzopfte Produkte

Vom geometrischen Standpunkt aus war allen bisherigen Überlegungen gemeinsam, dass wir immer nur einen Punkte im Raum betrachtet haben. Die Relationen zwischen seinen verschiedenen Koordinaten waren dann gemäß

$$(P^-)^{ab}_{cd}x^c x^d = 0 \tag{5.1}$$

durch den antisymmetrischen Projektor der zugrundeliegenden $\hat{R}$-Matrix bestimmt. Betrachten wir jedoch verschiedene Punkte des Raumes, so müssen wir festlegen, wie Koordinaten des einen Raumpunktes mit Koordinaten des anderen vertauschen. Die entscheidende Idee besteht nun darin, dass jedem Punkt des Raumes eine eigene Funktionenalgebra mit den Relationen (5.1) zugeordnet wird. Verlangt man nun, dass Tensorprodukte solcher Funktionenalgebren genauso wie die Funktionenalgebren selbst wieder Darstellungen der zugrundeliegenden Quantengruppe sind, so lässt sich zeigen, dass die verschiedenen Funktionenalgebren Objekte einer verzopften Tensorkategorie sind. Dies bedeutet, dass für jedes Paar von Funktionenalgebren V, W ein funktorieller Isomorphismus

$$\begin{aligned} \Psi_{V,W} \quad &: \quad V \otimes W \to W \otimes V, \\ \Psi_{V,W}(v \otimes w) \quad &= \quad \sum \mathcal{R}^{(2)} \triangleright w \otimes \mathcal{R}^{(1)} \triangleright v, \quad \forall v \in V,\ w \in W, \end{aligned} \tag{5.2}$$

existiert, wobei $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{(1)} \otimes \mathcal{R}^{(2)}$ die universelle R-Matrix der zugrunde liegenden Quantengruppe bezeichnet. Durch diese Abbildungen ist festgelegt, wie Elemente zweier unterschiedlicher Funktionenalgebren miteinander vertauschen. Insbesondere gilt für zwei Kopien von Quantenraumkoordinaten entweder

$$(1 \otimes X^A)(Y^B \otimes 1) = k(\hat{R})^{AB}_{CD}\, Y^C \otimes X^D \tag{5.3}$$

oder

$$(1 \otimes X^A)(Y^B \otimes 1) = k^{-1}(\hat{R}^{-1})^{AB}_{CD}\, Y^C \otimes X^D, \tag{5.4}$$

wobei $k \in \mathbb{C}$ und $\hat{R}$ die Vektordarstellung der universellen R-Matrix bezeichnet. Die zweite Möglichkeiten der Vertauschung resultiert daraus, dass anstelle der Abbildung Ψ auch deren Inverses verwendet werden kann. Für eine genaueren Begründung dieser strukturellen Überlegungen verweisen wir insbesondere auf die Überlegungen in [40], [62], [63] und [65].

In diesem Kapitel wollen wir berechnen, wie zwei normalgeordnete Monome aus unterschiedlichen Koordinatenalgebren unter Berücksichtigung der Relationen (5.3) bzw. (5.4) miteinander vertauschen. Dies gestattet es uns, für zwei kommutative Funktionenalgebren ein neues Produkt einzuführen, welches wir als Zopfprodukt bezeichnen wollen. Je nachdem, von welcher Verzopfung wir ausgehen, können wir definieren,

$$\underline{\odot}_L, \underline{\odot}_{\hat{L}} \quad : \quad \mathcal{A}_q \otimes \mathcal{A}'_q \rightarrow \mathcal{A}'_q \otimes \mathcal{A}_q, \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} f(X) \,\underline{\odot}_L\, g(Y) &= \mathcal{W}^{-1}((\mathcal{R}^{-1})^{(2)} \triangleright \mathcal{W}(g)) \otimes \mathcal{W}^{-1}((\mathcal{R}^{-1})^{(1)} \triangleright \mathcal{W}(f)) \\ f(X) \,\underline{\odot}_{\hat{L}}\, g(Y) &= \mathcal{W}^{-1}(\mathcal{R}^{(2)} \triangleright \mathcal{W}(g)) \otimes \mathcal{W}^{-1}(\mathcal{R}^{(1)} \triangleright \mathcal{W}(f)). \end{aligned}$$

In den beiden obigen Ausdrücken treten ausschließlich Linkswirkungen auf, weshalb wir auch von Links-Zopfprodukten sprechen. Genauso gut hätte man jedoch auch Rechtsdarstellungen verwenden können, so dass gilt

$$\begin{aligned} f(X) \,\underline{\odot}_R\, g(Y) &= \mathcal{W}^{-1}(\mathcal{W}(g) \triangleleft \mathcal{R}^{(2)}) \otimes \mathcal{W}^{-1}(\mathcal{W}(f) \triangleleft \mathcal{R}^{(1)}), \qquad (5.6) \\ f(X) \,\underline{\odot}_{\hat{R}}\, g(Y) &= \mathcal{W}^{-1}(\mathcal{W}(g) \triangleleft (\mathcal{R}^{-1})^{(2)}) \otimes \mathcal{W}^{-1}(\mathcal{W}(f) \triangleleft (\mathcal{R}^{-1})^{(1)}). \end{aligned}$$

Diese Rechts-Zopfprodukte sind aber wegen

$$\begin{aligned} (S^{-1} \otimes S^{-1}) \circ \mathcal{R} &= \mathcal{R}, \qquad (5.7) \\ (S^{-1} \otimes S^{-1}) \circ \mathcal{R}^{-1} &= \mathcal{R}^{-1} \end{aligned}$$

identisch mit den Links-Zopfprodukten. Es gilt insbesondere

$$\begin{aligned} f(X) \,\underline{\odot}_L\, g(Y) &= f(X) \,\underline{\odot}_{\hat{R}}\, g(Y), \qquad (5.8) \\ f(X) \,\underline{\odot}_{\hat{L}}\, g(Y) &= f(X) \,\underline{\odot}_R\, g(Y). \end{aligned}$$

Die Zopfprodukte lassen sich noch zum sogenannten verzopften Tensorprodukt der Algebra $V\underline{\otimes}W$ erweitern. Dieses Produkt ist nämlich definiert durch

$$\begin{aligned} \underline{\odot} \quad &: \quad (V \otimes W) \otimes (V \otimes W) \to V \otimes W \\ (w_1 \otimes v_1)\underline{\odot}(w_2 \otimes v_2) \quad &\equiv \quad (m_W \otimes m_V) \circ (w_1 \otimes \Psi_{V,W}(v_1, w_2) \otimes v_2), \end{aligned} \tag{5.9}$$

wobei m_V und m_W die nichtkommutativen Multiplikationen auf den jeweiligen Quantenraumalgebren V und W bezeichnen. Für genauere Informationen über die Eigenschaften dieses Produktes verweisen wir wieder auf [40], [62], [63] und [65]. Übertragen auf kommutative Funktionenalgebren bedeutet dies, dass wir auf der Tensoralgebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ zweier kommutativer Funktionenalgebren ein neues Tensorprodukt einführen können mit

$$\underline{\odot}_{\hat{L}} : (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}') \otimes (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}') \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}' \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned} & (f_1(x) \otimes g_1(y)) \,\underline{\odot}_{\hat{L}}\, (f_2(x) \otimes g_2(y)) \\ \equiv \; & \sum f_1 \star \mathcal{W}^{-1}(\mathcal{R}^{(2)} \triangleright \mathcal{W}(f_2)) \otimes \mathcal{W}^{-1}(\mathcal{R}^{(1)} \triangleright \mathcal{W}(g_1)) \star g_2 \\ = \; & f_1(x) \star (g_1(y) \,\underline{\odot}_{\hat{L}}\, f_2(x)) \star g_2(y). \end{aligned}$$

Ein entsprechender Ausdruck lässt sich natürlich auch für die andere Möglichkeit der Verzopfung angeben.

Im Folgenden wollen wir für die von uns betrachteten Quantenäume Möglichkeiten zur Berechnung ihrer Zopfprodukte aufzeigen. Bei der Ableitung expliziter Formeln können wir uns allerdings auf eine Ausprägung des Zopfproduktes beschränken, da die anderen Zopfprodukte dann mittels einfacher Ersetzungsregeln sofort ableitbar sind.

5.1 Euklidischer Raum in drei Dimensionen

Da Koordinaten und Ableitungen algebraisch völlig gleich behandelt werden können, ist es leicht einzusehen, dass die Hopfstrukturen der Koordinaten aus jener der Ableitungen formal durch die Ersetzungen

$$\begin{aligned} \partial^A \;&\to\; X^A, \quad A \in \{\pm, 3\}, \\ \Lambda \;&\to\; \Lambda^{-1} \end{aligned} \tag{5.11}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \bar{\partial}^A &\to X^A, \quad A \in \{\pm, 3\}, \\ \Lambda &\to \Lambda^{-1} \end{aligned} \tag{5.12}$$

hervorgehen. Mit dem Coprodukt können dann die Vertauschungsrelationen zwischen zwei identischen Kopien von Quantenraumkoordinaten geschrieben werden als

$$X^A Y^B = (X^A_{(1)} \triangleright Y^B) X^A_{(2)}, \tag{5.13}$$

vorausgesetzt, es gilt

$$X^A \triangleright Y^B = \varepsilon(Y^B) = 0. \tag{5.14}$$

Dies lässt sich aber mit den in Kapitel 3.1 eingeführten Braiding-Operatoren auch schreiben als

$$\begin{aligned} X^A Y^B &= (1 \otimes X^A)(Y^A \otimes 1) \\ &= (X^A \otimes 1 + \hat{O}^A_C \otimes X^C) \triangleright (Y^A \otimes 1) \\ &= (X^A \triangleright Y^A) \otimes 1 + (\hat{O}^A_C \triangleright Y^B) \otimes X^C \\ &= ((\hat{O}^A_C \triangleright Y^B) \otimes 1)(1 \otimes X^C) \\ &= (\hat{O}^A_C \triangleright Y^B) X^C. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Das Problem, zwei Monome verschiedener Koordinatenalgebren aneinander vorbeizutauschen, kann damit auf die bereits gelöste Frage zurückgeführt werden, wie die Braiding-Operatoren bzw. die Generatoren der Quantenalgebra auf die Koordinatenalgebra wirken. Je nachdem, welche Hopfstruktur wir dabei in (5.13) zugrunde legen, müssen wir die Braiding-Operatoren unterschiedlich spezifizieren.

Zunächst wollen wir uns erst einmal darauf beschränken, Potenzen der Koordinaten X^A an Monomen in Y^B vorbeizuziehen. Die expliziten Ausdrücke der Braiding-Operatoren wählen wir aus jener Hopfstruktur, die sich durch den mit (5.12) beschriebenen Übergang ergibt. In diesem Fall finden wir für Potenzen von X^+ sowie X^3

$$\begin{aligned} &\big(1 \otimes (X^+)^{n_+}\big)\big((Y^+)^{m_+}(Y^3)^{m_3}(Y^-)^{m_-} \otimes 1\big) \\ =\ & (\hat{O}^+_A \otimes X^A)^{n_+} \triangleright \big((Y^+)^{m_+}(Y^3)^{m_3}(Y^-)^{m_-} \otimes 1\big) \\ =\ & \Big[(\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}})^{n_+} \triangleright (Y^+)^{m_+}(Y^3)^{m_3}(Y^-)^{m_-}\Big] \otimes (X^+)^{n_+}, \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\big(1 \otimes (X^3)^{n_3}\big)\big((Y^+)^{m_+}(Y^3)^{m_3}(Y^-)^{m_-} \otimes 1\big) \tag{5.17}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\hat{O}^3_A \otimes X^A)^{n_3} \triangleright \big((Y^+)^{m_+}(Y^3)^{m_3}(Y^-)^{m_-} \otimes 1\big) \\
&= \sum_{k=0}^{n_3} \begin{bmatrix} n_3 \\ k \end{bmatrix}_{q^2} (\lambda\lambda_+)^k \Big[(\Lambda^{\frac{1}{2}})^{n_3}(L^-)^k \triangleright (Y^+)^{m_+}(Y^3)^{m_3}(Y^-)^{m_-}\Big] \\
&\quad \otimes (X^+)^k (X^3)^{n_3-k}.
\end{aligned}
$$

Für die Herleitung dieser beiden Formeln haben wir insbesondere die Relationen

$$
\begin{aligned}
&(\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}} \otimes X^+)^{n_+} \\
&= (\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}})^{n_+} \otimes (X^+)^{n_+},
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\Lambda^{\frac{1}{2}} \otimes X^3 + \lambda\lambda_+ \Lambda^{\frac{1}{2}} L^- \otimes X^+)^{n_3} \\
&= \sum_{k=0}^{n_3} \begin{bmatrix} n_3 \\ k \end{bmatrix}_{q^2} (\lambda\lambda_+)^k (\Lambda^{\frac{1}{2}})^{n_3} (L^-)^k \otimes (X^+)^k (X^3)^{n_3-k}
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

verwendet. Im Vergleich zu (5.16) bzw. (5.17) erhalten wir für die Potenzen von X^- eine kompliziertere Identität,

$$
\begin{aligned}
&\big(1 \otimes (X^-)^{n_-}\big)\,\big((Y^+)^{m_+}(Y^3)^{m_3}(Y^-)^{m_-} \otimes 1\big) \\
&= (\hat{O}^-_A \otimes X^A)^{n_-} \triangleright \big((Y^+)^{m_+}(Y^3)^{m_3}(Y^-)^{m_-} \otimes 1\big) \\
&= \sum_{i=0}^{n_-} \sum_{k=0}^{n_-} \sum_{l=0}^{n_- - k} (-1)^k \frac{(\lambda\lambda_+)^i}{[[n_-]]_{q^2}!} q^{n_-^2 + k(k-1) - 2l(n_- - i - k - l)} \\
&\cdot \begin{bmatrix} n_- \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} n_- - k \\ l \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} n_- \\ i \end{bmatrix}_{q^2} \\
&\cdot \Big[(\Lambda^{\frac{1}{2}})^{n_-}(L^-)^{i+k+l}(\tau^{\frac{1}{2}})^{n_-} \triangleright (Y^+)^{m_+}(Y^3)^{m_3}(Y^-)^{m_-}\Big] \\
&\otimes (L^-)^{n_- - k - l} \triangleright (X^+)^i (X^3)^{n_- - i},
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

deren Herleitung auch umfangreichere Überlegungen nötig macht. Diese zielen darauf ab, über die Formel

$$
(L^-)^{n_-} \triangleright (X^3)^{n_-} = q^{-n_-^2} [[n_-]]_{q^2}! (X^-)^{n_-} \tag{5.21}
$$

in Verbindung mit

$$
(L^-)^{n_-} \triangleright (X^3)^{n_-} \tag{5.22}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{ad}_L(L^-)^{n_-}(X^3)^{n_-} \\
&= ((L^-)^{n_-})_{(1)}(X^3)^{n_-}(S((L^-)^{n_-}))_{(2)} \\
&= \sum_{k=0}^{n_-} \begin{bmatrix} n_- \\ k \end{bmatrix}_{q^2} (L^-)^{n_- - k}(X^3)^{n_-} S((L^-)^k(\tau^{\frac{1}{2}})^{n_- - k})
\end{aligned}
$$

die Potenzen von X^- vollständig durch die Koordinaten X^3 und die Symmetriegeneratoren auszudrücken, wobei wir in der letzten Identität von (5.22) ausgenutzt haben, dass gilt

$$
\begin{aligned}
\Delta(L^-)^{n_-} &= (\Delta(L^-))^{n_-} \qquad (5.23)\\
&= (L^- \otimes \tau^{-\frac{1}{2}} + 1 \otimes L^-)^{n_-} \\
&= \sum_{k=0}^{n_-} q^{-2k(n_- - k)} \begin{bmatrix} n_- \\ k \end{bmatrix}_{q^2} (L^-)^{n_- - k} \otimes (L^-)^k(\tau^{-\frac{1}{2}})^{n_- - k}.
\end{aligned}
$$

Dann nämlich lässt sich das komplizierte Coprodukt für die Potenzen von X^- mit Hilfe der einfacheren Coprodukte für die Potenzen von X^3 sowie jener der Symmetriegeneratoren formulieren. Berücksichtigt man schließlich, dass die Relationen (5.13) und (5.14) sich auch auf beliebige Elemente der jeweiligen Funktionenalgebren erweitern lassen, so folgt (5.20) ohne weitere Probleme.

Durch sukzessive Anwendung der Gleichungen (5.16), (5.17) und (5.20) können wir nun ermitteln, wie zwei normalgeordnete Monome aus identischen Kopien der Quantenraumalgebra miteinander vertauschen. Zunächst können wir nämlich schreiben

$$
\begin{aligned}
&\big(1 \otimes (X^+)^{n_+}(X^3)^{n_3}(X^-)^{n_-}\big)\,\big((Y^+)^{m_+}(Y^3)^{m_3}(Y^-)^{m_-} \otimes 1\big) \qquad (5.24)\\
&= \sum_{i=0}^{n_3}\sum_{j=0}^{n_-}\sum_{k=0}^{n_-}\sum_{l=0}^{n_- - k} (-1)^k \frac{(\lambda\lambda_+)^{i+j}}{[[n_-]]_{q^2}!} \\
&\quad \cdot q^{n_-^2 + k(k-1) + 2l(k+l+j) - 2n_+(i+j+k+l) - 2n_- l} \\
&\quad \cdot \begin{bmatrix} k+l \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} n_3 \\ i \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} n_- \\ j \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} n_- \\ k+l \end{bmatrix}_{q^2} \\
&\quad \cdot \Big[(\Lambda^{\frac{1}{2}})^{n_+ + n_3 + n_-}(L^-)^{i+j+k+l}(\tau^{\frac{1}{2}})^{n_- - n_+} \triangleright (Y^+)^{m_+}(Y^3)^{m_3}(Y^-)^{m_-}\Big] \\
&\quad \otimes (X^+)^{n_+ + i}(X^3)^{n_3 - i}\Big[(L^-)^{n_- - k - l} \triangleright (X^+)^j(X^3)^{n_- - j}\Big].
\end{aligned}
$$

Für die weitere Auswertung dieser Formel ist es notwendig, die Wirkung von Potenzen des Generators L^- auf normalgeordnete Monome zu kennen. Mit (5.23) folgt zunächst

$$\begin{aligned}
& (L^-)^n \triangleright (X^+)^{m_+}(X^3)^{m_3}(X^-)^{m_-} \\
= & \sum_{k=0}^{n} q^{-2k(n-k)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \left[(L^-)^k \triangleright (X^+)^{m_+}\right] \\
& \cdot \left[(L^-)^{n-k}(\tau^{-\frac{1}{2}})^k \triangleright (X^3)^{m_3}(X^-)^{m_-}\right].
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Weiterhin finden wir mit dem Ansatz

$$(L^-)^n \triangleright (X^+)^m = \sum_{\substack{i+j=n \\ 0\leq j\leq i\leq m}} C^{n,m}_{i,j}\,(X^+)^{m-i}(X^3)^{i-j}(X^-)^j \tag{5.26}$$

die Rekursionsformel

$$\begin{aligned}
C^{n+1,m}_{i,j} &= q^{-2j}\,[[m-i+1]]_{q^4}\,C^{n,m}_{i-1,j} \\
&\quad + q^{-2(j-1)-1}\,[[i-j+1]]_{q^2}\,C^{n,m}_{i,j-1}.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Diese besitzt als Lösung den Ausdruck

$$C^{n,m}_{i,j} = q^{-j^2}\,[[i]]_{q^4}! \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_{q^4} t_{i,j}, \tag{5.28}$$

wobei

$$\begin{aligned}
t_{i,0} &= 1, \\
t_{i,j} &= \sum_{0\leq r_1+\ldots+r_j\leq i}\ \prod_{u=1}^{j} q^{-2(j-u+1)r_u}[[i-j+u-r_1-\ldots-r_u+u]]_{q^2}.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Mit diesen Ergebnissen bekommen wir schließlich

$$\begin{aligned}
& (L^-)^n \triangleright (X^+)^{m_+}(X^3)^{m_3}(X^-)^{m_-} \\
= & \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{i+j=k \\ 0\leq j\leq i\leq m_+}} q^{-2(n-k)(k+j)-(n-k)^2-2m_-n+2j(m_3-i-j)-j^2} \\
& \cdot [[i]]_{q^4}![[n-k]]_{q^2}! \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} m_+ \\ i \end{bmatrix}_{q^4} \begin{bmatrix} m_3 \\ n-k \end{bmatrix}_{q^2} t_{i,j} \\
& \cdot (X^+)^{m_+-i}(X^3)^{m_3-(n-k)+i-j}(X^-)^{m_-+(n-k)+j}.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Die zugehörige Darstellung auf der kommutativen Funktionenalgebra lässt sich daraus leicht ablesen als

$$\begin{aligned}
&(L^-)^n \triangleright f(x^+, x^3, x^-) \qquad (5.31)\\
=& \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{i+j=k\\ 0\leq j\leq i}} q^{(k-n)(k+n+2j)-j^2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^2} t_{i,j}\\
&\cdot (x^3)^{i-j}(x^-)^{n-k+j}(D^+_{q^4})^i (D^3_{q^2})^{n-k} f(q^{2j}x^3, q^{-2n}x^-).
\end{aligned}$$

Mit der Formel (5.30) gelingt insbesondere die vollständige Berechnung der Wirkung, die im zweiten Tensorfaktor auf der rechten Seite von Gleichung (5.24) auftaucht. Nach einigen Umformungen sowie Normalordnung aller auftretenden Monome finden wir dann einen Ausdruck zur Berechnung des Zopfproduktes zweier kommutativer Funktionen, und zwar

$$\begin{aligned}
&f(x^+, x^3, x^-) \underline{\odot}_{\hat{L}}\, g(y^+, y^3, y^-) \qquad (5.32)\\
=& \sum_{i,s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{s} \sum_{k+l+t=s} \sum_{\substack{u+v=t\\ 0\leq v\leq u\leq j}} (-1)^k (\lambda\lambda_+)^{i+j} t_{u,v}\\
&\cdot q^{-k-v+2(k+l+i+j)^2+2v(s-v)+2u(i-v)-2j(i-l)+l^2+lt+t^2}\\
&\cdot \frac{[[u]]_{q^4}!}{[[i]]_{q^4}![[k]]_{q^4}![[l]]_{q^4}![[s]]_{q^4}![[t]]_{q^4}!} \begin{bmatrix} j \\ u \end{bmatrix}_{q^4} \begin{bmatrix} s \\ j \end{bmatrix}_{q^2}\\
&\cdot q^{2(\hat{n}^+_x+\hat{n}^3_x+\hat{n}^-_x)(\hat{n}^+_y+\hat{n}^3_y+\hat{n}^-_y)+2(\hat{n}^+_x-\hat{n}^-_x)(\hat{n}^+_y-\hat{n}^-_y)}\\
&\cdot (L^-)^{i+j+k+l} \triangleright g(q^{-2(k+l+i+j)}y^+, q^{2(k+l+i+j)}y^-)\\
&\otimes (x^+)^{i+j-u}(x^3)^{s-j+u-v}(x^-)^v\\
&\cdot (D^3_{q^2})^i (D^-_{q^2})^s f(q^{2(j-u)}x^3, q^{-2(i+j+l)}x^-).
\end{aligned}$$

Auf die gleiche Weise können wir nun ein zweites Zopfprodukt herleiten, wenn wir stattdessen von der durch (5.11) beschriebenen Hopfstrukur ausgehen. Die explizite Formel dafür lässt sich jedoch auf das bereits berechnete Zopfprodukt zurückführen, wenn wir wieder die Crossing-Symmetrien beachten, die wir bereits im Zusammenhang mit den Darstellungen der partiellen Ableitungen verwendet haben. Die genaue Bedeutung dieser Crossing-Symmetrien wird klarer, wenn man bedenkt, dass es in der von uns betrachteten Tensorkategorie immer zwei Möglichkeiten einer Verzopfung gibt, die durch zwei verschiedene, aber zueinander inverse R-Matrizen beschrieben werden. Dies ist letztlich auch der Grund dafür, dass zwei Arten von partiellen

Ableitungen mit unterschiedlichen Hopfstrukturen auftreten. Alle bisherigen und zukünftigen Rechnungen können somit stets für beide Verzopfungen ausgeführt werden. Dabei zeigt sich, dass korrespondierende Ausdrücke, die man für unterschiedliche Verzopfungen erhält, durch die Ersetzungen

$$D^{\pm}_{q^a} \to D^{\mp}_{q^{-a}}, \quad \hat{n}^{\pm} \to -\hat{n}^{\mp}, \quad x^{\pm} \to x^{\mp}, \quad q^{\pm 1} \to q^{\mp 1} \tag{5.33}$$

ineinander übergehen, sofern man für jede Verzopfung eine geeignete Normalordnung vorgibt. Dieser Zusammenhang ist uns bereits bei den Linksdarstellungen der partiellen Ableitungen begegnet und gilt in entsprechender Weise auch für die Zopfprodukte. Wir können daher für die zu unterschiedlichen Verzopfungen gehörigen Zopfprodukte folgenden Zusammenhang angeben:

$$f(x^+, x^3, x^-) \, \underline{\odot}_{\hat{L}} \, g(y^+, y^3, y^-) \overset{\substack{\pm \,\to\, \mp \\ q \,\to\, 1/q}}{\longleftrightarrow} f(x^-, x^3, x^+) \, \underline{\widetilde{\odot}}_L \, g(y^-, y^3, y^+). \tag{5.34}$$

Dabei deutet das Tildezeichen an, dass die Funktionen der rechten Seite sich auf die durch (2.27) bestimmte Normalordnung beziehen müssen.

Alle bisher behandelten Zopfprodukte basierten darauf, dass ein links stehendes Monom nach rechts durchgetauscht wurde. Es handelt sich daher um Links-Zopfprodukte. Man kann aber ebenso von den Relationen

$$X^A Y^B = Y^B_{(2)} (X^A \triangleleft Y^B_{(1)}), \tag{5.35}$$

mit

$$X^A \triangleleft Y^B = \varepsilon(X^A) = 0 \tag{5.36}$$

ausgehen und zur Berechnung des Zopfproduktes ein rechts stehendes Monom nach links durchtauschen. Dies führt uns dann dementsprechend zu Rechts-Zopfprodukten. Ihre Berechnung lässt sich wie im Fall der Links-Zopfprodukte durch Spezifizierung der Hopfstruktur sowie der zugehörigen Braiding-Operatoren organisieren. Sehr viel leichter ist es jedoch, die Rechts-Zopfprodukte durch die Anwendung von Crossing-Symmetrien aus den Links-Zopfprodukten abzuleiten. Dieses Phänomen ist uns bereits bei den partiellen Ableitungen begegnet, und zwar in Form der Ersetzungsregeln

$$x^{\pm} \to x^{\mp}, \quad D^{\pm}_{q^a} \to D^{\mp}_{q^a}, \quad \hat{n}^{\pm} \to \hat{n}^{\mp}, \tag{5.37}$$

die uns bekanntlich den Übergang zwischen Links- und Rechtsdarstellungen ermöglichen. Da die Berechnungen von Zopfprodukten letztlich auf der gleichen algebraischen Grundlage erfolgen, lassen sich diese Regeln auch für die

Transformation von Links- in Rechts-Zopfprodukte anwenden, weshalb gilt

$$\begin{aligned} & f(x^+, x^3, x^-) \,\underline{\odot}_{\hat{L}}\, g(y^+, y^3, y^-) \\ \overset{+\leftrightarrow-}{\longleftrightarrow}\ & f(x^+, x^3, x^-) \,\underline{\odot}_{R}\, g(y^+, y^3, y^-), \end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned} & f(x^-, x^3, x^+) \,\underline{\tilde{\odot}}_{\hat{R}}\, g(y^-, y^3, y^+) \\ \overset{+\leftrightarrow-}{\longleftrightarrow}\ & f(x^-, x^3, x^+) \,\underline{\tilde{\odot}}_{L}\, g(y^-, y^3, y^+). \end{aligned} \tag{5.39}$$

Die Bezeichnung der Zopfprodukte haben wir dabei wieder in Analogie zu jener der Ableitungen und Integrale vorgenommen, d.h. der Index L/R gibt zunächst Auskunft darüber, ob der jeweilige Ausdruck durch Vertauschen von links nach rechts oder umgekehrt erhalten wurde. Je nachdem, ob der Index zusätzlich mit einem Dach versehen ist oder nicht, können wir außerdem ablesen, welche Verzopfung zugrundeliegt.

5.2 Euklidischer Raum in vier Dimensionen

Die Berechung von Zopf-Produkten des q-deformierten Euklidischen Raumes lässt sich in weitgehender Analogie zum dreidimensionalen Fall vornehmen. Die beiden Hopfstrukturen für die Koordinaten können wieder aus jenen der partiellen Ableitungen durch die Ersetzungen

$$\begin{aligned} \partial^i &\to X^i, \quad i \in \{1, \ldots, 4\}, \\ \Lambda &\to \Lambda^{-1} \end{aligned} \tag{5.40}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \hat{\partial}^i &\to X^i, \quad i \in \{1, \ldots, 4\}, \\ \Lambda &\to \Lambda^{-1} \end{aligned} \tag{5.41}$$

erhalten werden. Die im letzten Kapitel angestellten Betrachtungen zur expliziten Berechnung des Zopfproduktes mit Hilfe der Hopfstruktur sowie der damit verbundenen Braiding-Operatoren übertragen sich problemlos auf den vierdimensionalen Euklidischen Raum.

Zunächst wollen wir wieder damit beginnen, Potenzen einzelner Koordinaten an einem normalgeordneten Monom einer zweiten Koordinatenalgebra von links nach rechts vorbeizutauschen. Legen wir die beim Übergang (5.40) erhaltene Hopfstruktur zugrunde, so bekommen wir für Potenzen von X^1, X^2 und X^3

$$\begin{aligned}
&\big(1 \otimes (X^1)^{n_1}\big)\big(Y^{m_1,m_2,m_3,m_4} \otimes 1\big) && (5.42)\\
=\;& (\hat{O}^1_i \otimes X^i)^{n_1} \triangleright (Y^{m_1,m_2,m_3,m_4} \otimes 1)\\
=\;& \Big[(\Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}})^{n_1} \triangleright Y^{m_1,m_2,m_3,m_4}\Big] \otimes (X^1)^{n_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\big(1 \otimes (X^2)^{n_2}\big)\big(Y^{m_1,m_2,m_3,m_4} \otimes 1\big) && (5.43)\\
=\;& (\hat{O}^2_i \otimes X^i)^{n_2} \triangleright (Y^{m_1,m_2,m_3,m_4} \otimes 1)\\
=\;& \sum_{k=0}^{n_2} \begin{bmatrix} n_2 \\ k \end{bmatrix}_{q^{-2}} (q\lambda)^i \Big[(\Lambda^{-\frac{1}{2}})^{n_2} (K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_1^+)^k (K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}})^{n_2-i} \triangleright Y^{m_1,m_2,m_3,m_4}\Big]\\
& \otimes (X^1)^k (X^2)^{n_2-k},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\big(1 \otimes (X^3)^{n_3}\big)\big(Y^{m_1,m_2,m_3,m_4} \otimes 1\big) && (5.44)\\
=\;& (\hat{O}^3_i \otimes X^i)^{n_3} \triangleright (Y^{m_1,m_2,m_3,m_4} \otimes 1)\\
=\;& \sum_{k=0}^{n_3} \begin{bmatrix} n_3 \\ k \end{bmatrix}_{q^{-2}} (q\lambda)^i \Big[(\Lambda^{-\frac{1}{2}})^{n_3} (K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_2^+)^k (K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{-\frac{1}{2}})^{n_3-i} \triangleright Y^{m_1,m_2,m_3,m_4}\Big]\\
& \otimes (X^1)^k (X^3)^{n_3-k},
\end{aligned}$$

wobei wir als Abkürzung verwendet haben

$$Y^{m_1,m_2,m_3,m_4} \equiv (Y^1)^{m_1} (Y^2)^{m_2} (Y^3)^{m_3} (Y^4)^{m_4}. \tag{5.45}$$

Bei der Herleitung dieser Formeln haben wir auf folgende Identitäten zurückgegriffen:

$$\begin{aligned}
&(\Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} \otimes X^1)^{n_1} && (5.46)\\
=\;& (\Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}})^{n_1} \otimes (X^1)^{n_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} \otimes X^2 + q\lambda \Lambda^{-\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_1^+ \otimes X^1)^{n_2} && (5.47)\\
=\;& \sum_{k=0}^{n_2} \begin{bmatrix} n_2 \\ k \end{bmatrix}_{q^{-2}} (q\lambda)^i \Big[(\Lambda^{-\frac{1}{2}})^{n_2} (K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_1^+)^k (K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}})^{n_2-i}\Big]\\
& \otimes (X^1)^k (X^2)^{n_2-k},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(\Lambda^{-\frac{1}{2}}K_1^{\frac{1}{2}}K_2^{-\frac{1}{2}}\otimes X^3+q\lambda\Lambda^{-\frac{1}{2}}K_1^{\frac{1}{2}}K_2^{\frac{1}{2}}L_2^+\otimes X^1)^{n_3} \qquad (5.48)\\
=&\sum_{k=0}^{n_3}\begin{bmatrix} n_3\\ k\end{bmatrix}_{q^{-2}}(q\lambda)^i\Big[(\Lambda^{-\frac{1}{2}})^{n_3}(K_1^{\frac{1}{2}}K_2^{\frac{1}{2}}L_2^+)^k(K_1^{\frac{1}{2}}K_2^{-\frac{1}{2}})^{n_3-i}\Big]\\
&\otimes(X^1)^k(X^3)^{n_3-k}.
\end{aligned}
$$

Die Vertauschung von Potenzen der Koordinaten X^4 mit normalgeordneten Monomen einer zweiten Koordinatenalgebra erfolgt hingegen mit der Formel

$$
\begin{aligned}
&\big(1\otimes(X^4)^{n_4}\big)\big(Y^{m_1,m_2,m_3,m_4}\otimes 1\big) \qquad (5.49)\\
=\;&(\hat{O}_i^4\otimes X^i)^{n_4}\triangleright(Y^{m_1,m_2,m_3,m_4}\otimes 1)\\
=\;&\sum_{l=0}^{n_2}\sum_{j=0}^{n_3}\sum_{k=0}^{n_4}\sum_{v=0}^{n_4-k}\sum_{u=0}^{n_4}(-1)^k\frac{(q\lambda)^{l+j+u}}{[[n_4]]_{q^2}!}q^{\frac{1}{2}n_4(n_4+1)+k(k+1)-\frac{1}{2}u(u-1)-n_4(k+v)}\\
&\cdot q^{2v(n_4-k-v)+u(n_4-u)}\begin{bmatrix} n_4\\ k\end{bmatrix}_{q^2}\begin{bmatrix} n_4-k\\ v\end{bmatrix}_{q^{-2}}\begin{bmatrix} n_4\\ u\end{bmatrix}_{q^{-2}}\\
&\cdot\Big[(\Lambda^{-\frac{1}{2}})^{n_4}(K_1^{\frac{1}{2}})^{-n_4+k+v}(K_2^{\frac{1}{2}})^{-n_4+2u}(L_1^+)^{k+v}(L_2^+)^u\Big]\triangleright Y^{m_1,m_2,m_3,m_4}\\
&\otimes(L_1^+)^{n_4-k-v}\triangleright(X^1)^u(X^3)^{n_4-u}.
\end{aligned}
$$

Deren Herleitung gelingt in Analogie zum dreidimensionalen Fall, indem wir mittels der Gleichung

$$
(L_1^+)^{n_4}\triangleright(X^3)^{n_4}=q^{-\frac{1}{2}n_4(n_4+1)}[[n_4]]_{q^2}!\,(X^-)^{n_4} \qquad (5.50)
$$

und

$$
\begin{aligned}
&(L_1^+)^{n_4}\triangleright(X^3)^{n_4} \qquad (5.51)\\
=\;&\mathrm{ad}_L(L_1^+)^{n_4}(X^3)^{n_4}\\
=\;&((L_1^+)^{n_4})_{(1)}(X^3)^{n_4}(S(L_1^+)^{n_4})_{(2)}\\
=\;&\sum_{k=0}^{n_4}\begin{bmatrix} n_4\\ k\end{bmatrix}_{q^{-2}}(L^+)^k(K_1^{-1})^{n_4-k}(X^3)^{n_4}S(L_1^+)^{n_4-k}
\end{aligned}
$$

die Potenzen von X^4 auf die Koordinaten X^3 und die Symmetriegeneratoren zurückführen, wobei wir für die letzte Identität die Formel

$$
\begin{aligned}
\Delta(L_1^+)^{n_4}&=(\Delta(L_1^+))^{n_4} \qquad (5.52)\\
&=(L_1^+\otimes 1+K_1^{-1}\otimes L_1^+)^{n_4}\\
&=\sum_{k=0}^{n_4}\begin{bmatrix} n_4\\ k\end{bmatrix}_{q^2}(L_1^+)^k(K_1^{-1})^{n_4-k}\otimes(L_1^+)^{n_4-k}
\end{aligned}
$$

benutzt haben. Auf diese Weise wird es es wieder möglich, das Coprodukt für die Potenzen von X^4 durch die Coprodukte für die Potenzen von X^3 und jener der Symmetriegeneratoren auszudrücken. Der weitere Gang der Rechnung entspricht dann dem im dreidimensionalen Fall.

Durch sukzessive Anwendung der Formeln (5.42)-(5.49) lässt sich nun ausrechnen, wie man ein ganzes Monom an einem zweiten Monom einer anderen Koordinatenalgebra vorbeitauscht. Dabei stellt sich heraus, dass wir für die konkrete Auswertung allerdings noch wissen müssen, wie die Potenzen der Generatoren L_i^+ in expliziter Form auf normalgeordnete Monome wirken. Diese Aufgabe lösen wir mit den gleichen Methoden, die uns bereits geholfen haben, die Wirkung von Potenzen des Generators L^+ im Fall des dreidimensionalen Euklidischen Raumes zu finden. Wir beschränken uns daher darauf, die Ergebnisse dieses Vorgehens anzugeben, nämlich

$$\begin{aligned}
&(L_1^+)^n \triangleright (X^1)^{n_1}(X^2)^{n_2}(X^3)^{n_3}(X^4)^{n_4} \\
= \; &\sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^{n_1(n-2k)-(n_2+n_3)(n-k)+\frac{1}{2}k(k-1)+\frac{1}{2}(n-k)(n-k-1)} \\
&\cdot [[k]]_{q^2}!\, [[n-k]]_{q^2}! \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^{-2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} n_3 \\ n-k \end{bmatrix}_{q^2} \\
&\cdot (X^1)^{n_1-k}(X^2)^{n_2+k}(X^3)^{n_3-(n-k)}(X^4)^{n_4+(n-k)},
\end{aligned} \tag{5.53}$$

$$\begin{aligned}
&(L_2^+)^n \triangleright (X^1)^{n_1}(X^2)^{n_2}(X^3)^{n_3}(X^4)^{n_4} \\
= \; &\sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^{n_1(n-2k)-(n_2+n_3)(n-k)+\frac{1}{2}k(k-1)+\frac{1}{2}(n-k)(n-k-1)} \\
&\cdot [[k]]_{q^2}!\, [[n-k]]_{q^2}! \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^{-2}} \begin{bmatrix} n_1 \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} n_2 \\ n-k \end{bmatrix}_{q^2} \\
&\cdot (X^1)^{n_1-k}(X^2)^{n_2-(n-k)}(X^3)^{n_3+k}(X^4)^{n_4+(n-k)}.
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Auf der kommutativen Funktionenalgebra führt dies zu den Ausdrücken

$$\begin{aligned}
&(L_1^+)^n \triangleright f(x^1,x^2,x^3,x^4) \\
= \; &\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} q^{\frac{1}{2}k(k-1)+\frac{1}{2}(n-k)(n-k-1)} (x^2)^{n-k}(x^4)^k \\
&\cdot (D_{q^2}^1)^{n-k}(D_{q^2}^3)^k f(q^{-(n-2k)}x^1, q^{-k}x^2, q^{-k}x^3),
\end{aligned} \tag{5.55}$$

$$(L_2^+)^n \triangleright f(x^1,x^2,x^3,x^4) \tag{5.56}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} q^{\frac{1}{2}k(k-1)+\frac{1}{2}(n-k)(n-k-1)} (x^3)^{n-k} (x^4)^k \\
&\quad \cdot (D_{q^2}^1)^{n-k} (D_{q^2}^2)^k f(q^{-(n-2k)} x^1, q^{-k} x^2, q^{-k} x^3).
\end{aligned}
$$

Wir können also zusammenfassen, dass die Berechnung des Zopfproduktes zweier Monome zunächst die sukzessive Anwendung der Formeln (5.42)-(5.49) zusammen mit den Identitäten (5.53) und (5.54) erforderlich macht. Nach einigen elementaren Umformungen und der vollständigen Normalordnung aller Monome ist es wieder möglich, die allgemeine Form des Zopfproduktes für zwei kommutative Funktionen abzulesen, für das wir jetzt erhalten

$$
\begin{aligned}
& f(x^1, x^2, x^3, x^4) \underline{\odot}_L \, g(y^1, y^2, y^3, y^4) \qquad (5.57)\\
&= \sum_{i,j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\substack{k+l+v=s \\ \leq v \leq u \leq s}} (-1)^{k+v} (q\lambda)^{i+j+u} q^{\frac{1}{2}i(i+1)+\frac{1}{2}j(j+1)+k(k+1)} \\
&\quad \cdot q^{\frac{1}{2}u(u+1)+\frac{1}{2}v(v-1)+\frac{1}{2}s(s+1)+(u-v)(i+j-2s)-u(v+2j)+i(j-2k-2l)} \\
&\quad \cdot \frac{1}{[[i]]_{q^2}![[j]]_{q^2}![[k]]_{q^2}![[l]]_{q^2}!} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} s \\ u \end{bmatrix}_{q^2} \\
&\quad \cdot q^{(\hat{n}_x^1+\hat{n}_x^2+\hat{n}_x^3+\hat{n}_x^4)(\hat{n}_y^1+\hat{n}_y^2+\hat{n}_y^3+\hat{n}_y^4)-(\hat{n}_x^1-\hat{n}_x^4)(\hat{n}_y^1-\hat{n}_y^4)-(\hat{n}_x^2-\hat{n}_x^3)(\hat{n}_y^2-\hat{n}_y^3)} \\
&\quad \cdot (L_1^+)^{i+l+k} (L_2^+)^{j+u} \triangleright g(y^1, y^2, y^3, y^4) \\
&\quad \otimes (x^1)^{i+j+u-v} (x^2)^v (x^3)^{s-u} \\
&\quad \cdot (D_{q^2}^2)^i (D_{q^2}^3)^j (D_{q^2}^4)^s f(q^{-(i+j+u-v)} x^2, q^{-(i+j+u-v)} x^2, q^{i+j+u-v-s} x^4).
\end{aligned}
$$

Das Zopfprodukt für die zweite Hopfstruktur der Koordinaten finden wir wieder unter Anwendung der bekannten Crossing-Symmetrien, d.h. wir müssen lediglich die Ersetzungsregel

$$
\begin{aligned}
& f(x^1, x^2, x^3, x^4) \underline{\odot}_L \, g(y^1, y^2, y^3, y^4) \qquad (5.58)\\
\overset{\substack{i \,\to\, i' \\ q \,\to\, 1/q}}{\longleftrightarrow} \quad & f(x^4, x^3, x^2, x^1) \, \underline{\tilde{\odot}}_R \, g(y^4, y^3, y^2, y^1)
\end{aligned}
$$

anwenden und berücksichtigen, dass beide Ausdrücke bezüglich unterschiedlicher Normalordnungen gelten. Explizit haben wir also die Substitutionen

$$
D_{q^a}^i \to D_{q^{-a}}^{i'}, \quad \hat{n}^i \to -\hat{n}^{i'}, \quad x^i \to x^{i'}, \quad q^{\pm 1} \to q^{\mp 1} \qquad (5.59)
$$

mit $i' = 5 - i$ vorzunehmen, um zwischen beiden Ausdrücken hin- und herwechseln zu können. In entsprechender Weise bekommen wir auch wieder die

Rechts-Zopfprodukte, die mit den Links-Zopfprodukten über die Regeln

$$\begin{aligned} & f(x^4,x^3,x^2,x^1)\,\underline{\tilde{\odot}}_{\hat{R}}\,g(y^4,y^3,y^2,y^1) \\ \overset{j\leftrightarrow j'}{\longleftrightarrow}\;& f(x^4,x^3,x^2,x^1)\,\underline{\tilde{\odot}}_{\hat{L}}\,g(y^4,y^3,y^2,y^1), \end{aligned} \tag{5.60}$$

$$\begin{aligned} & f(x^1,x^2,x^3,x^4)\,\underline{\odot}_{R}\,g(y^1,y^2,y^3,y^4) \\ \overset{j\leftrightarrow j'}{\longleftrightarrow}\;& f(x^1,x^2,x^3,x^4)\,\underline{\odot}_{L}\,g(y^1,y^2,y^3,y^4) \end{aligned} \tag{5.61}$$

in Beziehung stehen, wobei der Übergang in den beiden obigen Formeln mittels

$$x^j \to x^{j'}, \quad D^j_{q^a} \to D^{j'}_{q^a}, \quad \hat{n}^j \to \hat{n}^{j'} \tag{5.62}$$

erfolgt.

5.3 Minkowski-Raum

Die Berechnung von Zopfprodukten für den q-deformierten Minkowski-Raum erfolgt grundsätzlich auf die gleiche Weise wie bei den q-deformierten Euklidischen Räumen. Trotzdem weist das Vorgehen für diesen Fall aber auch eine Reihe von Besonderheiten auf. Zunächst existieren wieder zwei Hopfstrukturen, die wir durch die Ersetzungen

$$\begin{aligned} \partial^\mu &\to X^\mu, \quad \mu\in\{\pm,3,0\}, \\ \Lambda &\to \Lambda^{-1} \end{aligned} \tag{5.63}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \hat{\partial}^\mu &\to X^\mu, \quad \mu\in\{\pm,3,0\}, \\ \Lambda &\to \Lambda^{-1} \end{aligned} \tag{5.64}$$

in gewohnter Weise aus denen der partiellen Ableitungen erhalten. Bei den weiteren Berechnungen konzentrieren wir uns vorerst auf die erste dieser beiden Hopfstrukturen, da sich dann alle weiteren Resultate durch die Anwendung von Crossing-Symmetrien bestimmen lassen.

Als Erstes versuchen wir Potenzen einzelner Koordinaten mit einem normalgeordneten Monom einer zweiten Koordinatenalgebra zu vertauschen. Im

Fall der Koordinaten X^+, $X^{3/0}$ und X^- gelingt dies in weitgehender Analogie zu den Euklidischen Räumen. So bekommen wir insbesondere für die Koordinaten $X^{3/0}$ und X^+ die Relationen

$$\begin{aligned}
&\left(1 \otimes (X^+)^{n_+}\right)\left(Y^{m_+,m_{3/0},m_3,m_-} \otimes 1\right) \\
=\ &(\hat{O}^+_\mu \otimes X^\mu)^{n_+} \triangleright (Y^{m_+,m_{3/0},m_3,m_-} \otimes 1) \\
=\ &\sum_{k=0}^{n_+} \begin{bmatrix} n_+ \\ k \end{bmatrix}_{q^2} (-q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda)^k \\
&\cdot \left[(\Lambda^{\frac{1}{2}})^{n_+}(T^2)^k(\sigma^2)^{n_+-k}(\tau^3)^{-\frac{1}{2}(n_+-k)} \triangleright Y^{m_+,m_{3/0},m_3,m_-}\right] \\
&\otimes (X^+)^{n_+-k}(X^{3/0})^k,
\end{aligned} \tag{5.65}$$

$$\begin{aligned}
&\left(1 \otimes (X^{3/0})^{n_{3/0}}\right)\left(Y^{m_+,m_{3/0},m_3,m_-} \otimes 1\right) \\
=\ &(\hat{O}^{3/0}_\mu \otimes X^\mu)^{n_{3/0}} \triangleright (Y^{m_+,m_{3/0},m_3,m_-} \otimes 1) \\
=\ &\sum_{k=0}^{n_{3/0}} \begin{bmatrix} n_{3/0} \\ k \end{bmatrix}_{q^2} (-q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\lambda)^k q^{-k(k+1)} \\
&\cdot \left[(\Lambda^{\frac{1}{2}})^{n_{3/0}}(S^1)^k(\tau^1)^{n_{3/0}-k}(\tau^3)^{-\frac{1}{2}k} \triangleright Y^{m_+,m_{3/0},m_3,m_-}\right] \\
&\otimes (X^+)^k(X^{3/0})^{n_{3/0}-k}.
\end{aligned} \tag{5.66}$$

Die diesen Identitäten entsprechende Formel für die Koordinate X^- finden wir ebenfalls mit einer Methode, die wir bereits für die Euklidischen Räume angewandt haben. Zu diesem Zweck berechnen wir die Wirkung

$$(T^-)^n \triangleright (X^{3/0})^n = (q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}})^n [[n]]_{q^2}!(X^-)^n. \tag{5.67}$$

Dieser Ausdruck muss aber zugleich mit der adjungierten Rechtswirkung übereinstimmen, für die wiederum gilt

$$\begin{aligned}
&(T^-)^n \triangleright (X^{3/0})^n \\
=\ &\mathrm{ad}_L(T^-)^n (X^{3/0})^n \\
=\ &((T^-)^n)_{(1)}(X^{3/0})^n(S(T^-)^n)_{(2)} \\
=\ &\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^2} (-1)^k q^{k(k-1)}(T^-)^{n-k}(X^{3/0})^n(T^-)^k.
\end{aligned} \tag{5.68}$$

Dabei haben wir verwendet

$$\Delta(T^-)^n \ = \ (\Delta(T^-))^n \tag{5.69}$$

$$
\begin{aligned}
&= (T^- \otimes 1 + \tau^{\frac{1}{2}} \otimes T^-)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^2} (T^-)^k (\tau^3)^{\frac{1}{2}k} \otimes (T^-)^{n-k},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S(T^-)^n &= (-(\tau^3)^{-\frac{1}{2}} T^-)^n \qquad (5.70)\\
&= (-1)^n q^{n(n-1)} (\tau^3)^{-\frac{1}{2}n} (T^-)^n.
\end{aligned}
$$

Mit diesen Überlegungen können wir die Potenzen von X^- nun schreiben als

$$
(X^-)^n = \frac{(q^{\frac{3}{2}} \lambda_+^{\frac{1}{2}})^{-n}}{[[n]]_{q^2}!} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^2} (-1)^k q^{k(k-1)} (T^-)^{n-k} (X^{3/0})^n (T^-)^k. \qquad (5.71)
$$

Wenden wir auf beide Seiten dieser Gleichung das Coprodukt an, so können wir wieder die Braiding-Operatoren für die Vertauschung von Potenzen der Koordinaten X^- ablesen. Auf diese Weise finden wir nach einigen Umformungen den Ausdruck

$$
\begin{aligned}
&\big(1 \otimes (X^-)^{n_-}\big)\big(Y^{m_+,m_{3/0},m_3,m_-} \otimes 1\big) \qquad (5.72)\\
= \; &(\hat{O}_\mu^- \otimes X^\mu)^{n_-} \triangleright (Y^{m_+,m_{3/0},m_3,m_-} \otimes 1) \\
= \; &\sum_{k=0}^{n_-} \sum_{l=0}^{n_- - k} \sum_{i=0}^{n_-} (-1)^{k+i} \lambda^i \frac{(q^{\frac{1}{2}} \lambda_+^{\frac{1}{2}})^{i-n_-}}{[[n_-]]_{q^2}!} q^{k(k+1)+i(i-1)+2(n_- - k - l - i)(i+k) - n_-} \\
&\cdot \begin{bmatrix} n_- \\ k+l \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} n_- \\ i \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} k+l \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \\
&\cdot \Big[(\Lambda^{\frac{1}{2}})^{n_-} (T^-)^l (\tau^1)^{n_- - i} (S^1)^i (T^-)^j (\tau^3)^{\frac{1}{2}(n_- - l - i - k)} \triangleright Y^{m_+,m_{3/0},m_3,m_-} \Big] \\
&\otimes (T^-)^{n_- - k - l} \triangleright (X^+)^i (X^{3/0})^{n_- - i}.
\end{aligned}
$$

Möchte man hingegen das Braiding von Potenzen der Koordinaten X^0 bestimmen, so ist ein Vorgehen vorteilhaft, bei dem die Potenzen von X^0 durch Objekte ersetzt werden, deren Braiding bereits bekannt ist oder auf einfache Weise bestimmt werden kann. Im Anhang haben wir insbesondere gezeigt, dass sich die Potenzen von X^0 mit geeigneten Koeffizienten $F_{k,l}^n$ ausdrücken lassen als

$$
(X^0)^{n_0} = \sum_{k=0}^{n_0} \sum_{l=0}^{\min(k, n_0 - k)} F_{k,l}^{n_0} \cdot (X^+)^k (X^{3/0})^{l-k} \mathcal{Y}_0^{n_0 - l - k} (X^-)^k, \qquad (5.73)
$$

wobei

$$\mathcal{Y}_0^m \equiv (T^-)^m \triangleright (X^+)^m. \tag{5.74}$$

Diese Identität erlaubt es uns, einen Basiswechsel durchzuführen, da nämlich gilt

$$\begin{aligned}
&(X^+)^{n_+}(X^{3/0})^{n_{3/0}}(X^0)^{n_0}(X^-)^{n_-} \qquad (5.75)\\
= &\sum_{k=0}^{n_0}\sum_{l=0}^{\min(k,n_0-k)} q^{2n_{3/0}k}F^{n_0}_{k,l}\cdot(X^+)^{n_++k}(X^{3/0})^{n_{3/0}+l-k}\mathcal{Y}_0^{n_0-l-k}(X^-)^{n_-+k}\\
= &\sum_{k=0}^{n_0}\sum_{l=0}^{\min(k,n_0-k)} q^{2n_{3/0}k-2(n_0-l-k)(n_-+k)}F^{n_0}_{k,l}\\
&\cdot(X^+)^{n_++k}(X^{3/0})^{n_{3/0}+l-k}\langle\mathcal{Y}_0^{n_0-l-k},(X^-)^{n_-+k}\rangle,
\end{aligned}$$

wobei

$$\langle\mathcal{Y}_0^m,(X^-)^k\rangle \equiv (T^-)^m \triangleright ((X^+)^m(X^-)^k). \tag{5.76}$$

Die Elemente dieser neuen Basis besitzen ein vergleichsweise einfach zu berechnendes Braiding. So finden wir zunächst die Identität

$$\begin{aligned}
&\big(1\otimes(X^+)^{n_+}(X^{3/0})^{n_{3/0}}[(T^-)^{n_0}\triangleright(X^+)^{n_0}(X^-)^{n_-}]\big)\big(Y^{\underline{m}}\otimes 1\big) \qquad (5.77)\\
= &\Big[(\hat{O}^+_\mu\otimes X^\mu)^{n_+}(\hat{O}^{3/0}_\nu\otimes X^\nu)^{n_{3/0}}\,\Delta(T^-)^{n_0}\\
&\cdot(\hat{O}^+_\rho\otimes X^\rho)^{n_0}(\hat{O}^-_\sigma\otimes X^\sigma)^{n_-}\Big]\triangleright(Y^{\underline{m}}\otimes 1),
\end{aligned}$$

aus der wir schließlich den folgenden Ausdruck ableiten können:

$$\begin{aligned}
&\big((X^+)^{n_+}(X^{3/0})^{n_{3/0}}\langle\mathcal{Y}_0^{n_0},(X^-)^{n_-}\rangle\big)\,\underline{\odot}_L Y^{\underline{m}} \qquad (5.78)\\
= &\sum_{i=0}^{n_+}\sum_{j=0}^{n_{3/0}}(-q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\lambda)^i(-q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\lambda)^j q^{-j(j+1)-2(n_+-2i)j}\begin{bmatrix} n_+\\ i\end{bmatrix}_{q^2}\begin{bmatrix} n_{3/0}\\ j\end{bmatrix}_{q^2}\\
&\cdot\frac{(q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}})^{-n_-}}{[[n_-]]_{q^2}!}\sum_{k=0}^{n_0}\sum_{l=0}^{n_-}\sum_{u=0}^{n_0-k}\sum_{v=0}^{n_--l}(-1)^{k+l}q^{k(k-1)+l(l-1)+2k(n_--n_0)}\\
&\cdot\begin{bmatrix} k+u\\ u\end{bmatrix}_{q^2}\begin{bmatrix} l+v\\ v\end{bmatrix}_{q^2}\begin{bmatrix} n_0\\ k+u\end{bmatrix}_{q^2}\begin{bmatrix} n_-\\ l+v\end{bmatrix}_{q^2}\\
&\cdot\sum_{s=0}^{n_0}\sum_{t=0}^{n_-}(-q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda)^s(-q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\lambda)^t q^{-t(t+1)}\begin{bmatrix} n_0\\ s\end{bmatrix}_{q^2}\begin{bmatrix} n_-\\ t\end{bmatrix}_{q^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot \Big[(T^2)^i (S^1)^j (\sigma^2)^{n_+ - i} (\tau^1)^{n_{3/0} - j} (\tau^3)^{-\frac{1}{2}(n_+ - i + j)} (\Lambda^{\frac{1}{2}})^{n_+ + n_{3/0}} \\
&\cdot (T^-)^u (\tau^3)^{\frac{1}{2}(n_- - l - v)} (S^1)^t (\tau^1)^{n_- - t} (\tau^3)^{-\frac{1}{2}t} (T^-)^{k+l} (\Lambda^{\frac{1}{2}})^{n_-}\Big] \triangleright Y^{\underline{m}} \\
&\otimes (X^+)^{n_+ - i + j} (X^{3/0})^{n_{3/0} - j + i} \Big[(T^-)^{n_0 - k - u} \triangleright \Big((X^+)^{n_0 - s} (X^{3/0})^s \\
&\cdot (T^-)^{n_- - l - v} \triangleright ((X^+)^t (X^{3/0})^{n_- - t})\Big)\Big].
\end{aligned}
$$

Für die vollständige Auswertung der letzten Formel benötigen wir noch die explizite Form für die Wirkung von Potenzen der Generatoren T^-, die jedoch im Anhang C angegeben ist.

Der entscheidende Gedanke unserer Überlegung besteht also darin, eines der beiden Monome, die wir miteinander vertauschen wollen, durch die Elemente einer neue Basis auszudrücken, deren Braiding einfacher zu berechnen ist. Aus diesem Grund brauchen wir für die Implementierung des Zopfproduktes auf der Menge der kommutativen Funktionen einen Operator, der den durch (5.75) beschriebenen Basiswechsel ausführt. Dies leistet der in Anhang C eingeführte Φ-Operator. Weiterhin lässt sich dann aus (5.78) mit etwas Geschick ablesen, wie die Funktionen $\Phi(f)$ und g manipuliert werden müssen, um aus ihnen das Zopfprodukt zwischen den kommutativen Funktionen f und g zu erhalten. Als Ergebnis dieses Bemühens kann man schließlich finden

$$
\begin{aligned}
&f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \underline{\odot}_L \, g(y^+, y^{3/0}, y^0, y^-) \qquad (5.79)\\
= \; & q^{(\hat{n}_x^+ + \hat{n}_x^{3/0} + \hat{n}_x^0 + \hat{n}_x^-)(\hat{n}_y^+ + \hat{n}_y^{3/0} + \hat{n}_y^0 + \hat{n}_y^-)} \\
&\cdot \sum_{i,j=0}^{\infty} (-q^{\frac{3}{2}} \lambda_+^{-\frac{1}{2}} \lambda)^i \, (-q^{\frac{1}{2}} \lambda_+^{\frac{1}{2}} \lambda)^j \, \frac{q^{-j(j+1)+4ij}}{[[i]]_{q^2}! [[j]]_{q^2}!} \\
&\cdot \sum_{k,l,u,v=0}^{\infty} (-1)^{k+l} \, \frac{q^{k(k-1)+l(l-1)}}{[[k]]_{q^2}! [[l]]_{q^2}! [[u]]_{q^2}! [[v]]_{q^2}!} \\
&\cdot \sum_{s,t=0}^{\infty} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=0}^{\infty} (-\lambda)^{s+t} (\lambda_+^{-\frac{1}{2}})^{s+\delta} \, \frac{q^{-t^2 + \frac{3}{2}(s-\delta)}}{[[s]]_{q^2}! [[t]]_{q^2}! [[t+\delta]]_{q^2}!} \\
&\cdot \Big[(\hat{B}_L^{(3)})_{i,j,\alpha,\beta} \, (\hat{B}_L^{(2)})_{k,u,s,\gamma} \, (\hat{B}_L^{(1)})_{l,v,t,\delta} \, (T^-)^{k+l}\Big] \triangleright g(\underline{y}) \\
&\otimes \Big[(\hat{B}_R^{(4)})_{s,t,\gamma-k-u,\delta-l-v} \, (\hat{B}_R^{(3)})_{\alpha+j,\beta+i,\gamma,\delta} \\
&\cdot (\hat{B}_R^{(2)})_{i,j,s,t} \, (\hat{B}_R^{(1)})_{k+u,l+v}\Big] \triangleright \Big[\big(\hat{\Phi}(f)\big)(q^{-2j} x^+, q^{-2k} x^0, q^{2k} x^-)\Big].
\end{aligned}
$$

Dabei haben die im linken Tensorfaktor auftretenden Operatoren die Form

$$\begin{aligned} &(\hat{B}_L^{(1)})_{i,j,k,l} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \\ =\ & q^{2(l+k-i-j)k} \big((T^-)^j (S^1)^k (\tau^1)^l\big) \triangleright f(q^{-2(l-i-j)} x^+, q^{2(l-i-j)} x^-), \end{aligned} \tag{5.80}$$

$$\begin{aligned} &(\hat{B}_L^{(2)})_{i,j,k,l} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \\ =\ & q^{-2(l+k-i-j)k} \big((T^-)^j (T^2)^k (\sigma^2)^l\big) \triangleright f(q^{-2(k-i-j)} x^+, q^{2(k-i-j)} x^-), \end{aligned} \tag{5.81}$$

$$\begin{aligned} &(\hat{B}_L^{(3)})_{i,j,k,l} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \\ =\ & \big((T^2)^i (S^1)^j (\sigma^2)^k (\tau^1)^l\big) \triangleright f(q^{2(k+j)} x^+, q^{-2(k+j)} x^-), \end{aligned} \tag{5.82}$$

während für die Operatoren des rechten Tensorfaktors gilt

$$\begin{aligned} &(\hat{B}_R^{(1)})_{i,j} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \\ =\ & (x^0)^i (x^-)^j (D_{q^2}^0)^i (D_{q^2}^-)^j f, \end{aligned} \tag{5.83}$$

$$\begin{aligned} &(\hat{B}_R^{(2)})_{i,j,k,l} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \\ =\ & (x^+)^j (x^{3/0})^i (D_{q^2}^+)^i (D_{q^2}^{3/0})^j (D_{q^2}^0)^k (D_{q^2}^-)^l f, \end{aligned} \tag{5.84}$$

$$\begin{aligned} &(\hat{B}_R^{(3)})_{i,j,k,l} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \\ =\ & \hat{\delta}_i^+ \hat{\delta}_j^{3/0} \hat{\delta}_k^0 \hat{\delta}_l^- f, \end{aligned} \tag{5.85}$$

$$\begin{aligned} &(\hat{B}_R^{(4)})_{i,j,k,l} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \\ =\ & \sum_{s=0}^{j} \sum_{\frac{l+j-s}{2} \le t \le l+j-s} q^{2i(j-s-t)} (C_q)_{s,t}^{l+j,j} \cdot (x^0)^s (x^{3/0})^{i-j-l+s+2t} \\ & \cdot (\hat{B}_R^{(5)})_{k+i,i-j-l+s+2t} \triangleright \big((x^0)^{j-s-t} (x^-)^{l+j-s-t} f\big), \end{aligned} \tag{5.86}$$

$$\begin{aligned} &(\hat{B}_R^{(5)})_{i,j} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \\ =\ & \sum_{u=0}^{i} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\frac{u-s}{2} \le t \le u-s} (q^{\frac{3}{2}} \lambda_+^{\frac{1}{2}})^{i-u} (q^{\frac{1}{2}} \lambda_+^{\frac{1}{2}})^{u-2t} q^{(u-s-t)(2(j-i+s+t)+1)} \\ & \cdot \frac{[[i]]_{q^2!}}{[[u]]_{q^2!}} \begin{bmatrix} j \\ i-u \end{bmatrix}_{q^2} (x^0)^s (x^{3/0})^{2t+s-i} (x^-)^{i-s-t} \\ & \cdot \Big[q^{2\hat{n}_0 \hat{n}_{3/0}} (\hat{T}_q^0)_{s,t,u-s-t} (D_{q^{-2}}^0)^{s+t} f(q^{-2(i-u)} x^0) \Big]_{x^0 \to x^+}. \end{aligned} \tag{5.87}$$

Die Operatoren $\hat{\delta}_i^A$, $(\hat{T}_q^0)_{i,j,k}$ sowie das Polynom $(C_q)_{k,l}^{i,j}$ sind in Anhang C angegeben.

Die übrigen Zopfprodukte können nun wieder durch Anwendung von Crossing-Symmetrien bestimmt werden. Insbesondere gilt die Transformationsregel

$$\begin{aligned} & f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \,\underline{\odot}_L\, g(y^+, y^{3/0}, y^0, y^-) \\ \overset{\substack{i \to i' \\ q \to 1/q}}{\longleftrightarrow} \quad & f(x^-, x^0, x^{3/0}, x^+) \,\underline{\widetilde{\odot}}_{\hat{L}}\, g(y^-, y^0, y^{3/0}, y^+), \end{aligned} \tag{5.88}$$

d.h. wir müssen einfach die Substitutionen

$$D_{q^a}^{\pm} \to D_{q^{-a}}^{\mp}, \quad \hat{n}_{\pm} \to -\hat{n}_{\mp}, \quad q^{\pm 1} \to q^{\mp 1} \tag{5.89}$$

ausführen, um dann das zur zweiten Hopfstruktur gehörige Zopfprodukt bezüglich der umgedrehten Normalordnung zu erhalten. Entsprechend ist der Zusammenhang zwischen Rechts- und Links-Zopfprodukten durch die Regeln

$$\begin{aligned} & f(x^-, x^0, x^{3/0}, x^+) \,\underline{\widetilde{\odot}}_{\hat{R}}\, g(y^-, y^0, y^{3/0}, y^+) \\ \overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \quad & f(x^-, x^0, x^{3/0}, x^+) \,\underline{\widetilde{\odot}}_{\hat{L}}\, g(y^-, y^0, y^{3/0}, y^+), \end{aligned} \tag{5.90}$$

$$\begin{aligned} & f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \,\underline{\odot}_R\, g(y^+, y^{3/0}, y^0, y^-) \\ \overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \quad & f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \,\underline{\odot}_L\, g(y^+, y^{3/0}, y^0, y^-). \end{aligned} \tag{5.91}$$

gegeben, die wieder einen Übergang mittels der Substitutionen

$$x^{\pm} \to x^{\mp}, \quad D_{q^a}^{\pm} \to D_{q^a}^{\mp}, \quad \hat{n}^{\pm} \to \hat{n}^{\mp} \tag{5.92}$$

symbolisieren.

Kapitel 6

Translationen

Im vorhergehenden Kapitel waren wir davon ausgegangen, dass jedem Punkt des Raumes eine eigene Koordinatenalgebra zugeordnet ist. Außerdem hatten wir gefordert, dass jede dieser Koordinatenalgebren Objekt einer verzopften Tensorkategorie sein soll, nämlich jener Kategorie, die von den Darstellungsmoduln einer gegebenen Symmetriealgebra gebildet wird. Von besonderer Bedeutung ist nun die Frage, wie sich in diesem Setting Translationen sinnvoll definieren lassen. Wir wollen hierbei vorwiegend den Überlegungen in [66] folgen. Diesen entsprechend sind die durch Translation entstandenen Funktionen gemäß

$$\mathcal{A}_q \ni F(X) \rightarrow \Delta(F(X)) = F(X\underline{\oplus}Y) \in \mathcal{A}_q\underline{\otimes}\mathcal{A}_q \tag{6.1}$$

Elemente aus dem verzopften Tensorprodukt zweier Koordinatenalgebren. Weiterhin fordert man, dass die translatierten Funktionen untereinander die gleichen algebraischen Relationen erfüllen wie die untranslatierten. Demnach benötigen wir also eine Abbildung

$$\Delta : \mathcal{A}_q \rightarrow \mathcal{A}_q\underline{\otimes}\mathcal{A}_q, \quad \Delta(F(X)) = F(X\underline{\oplus}Y) \tag{6.2}$$

mit

$$\Delta(FG) = \Delta(F)\Delta(G).$$

Wie durch die Bezeichnung dieses Algebren-Homomorphismus bereits angedeutet, erfüllt das Coprodukt der Koordinatenalgebra genau diese Vorgaben.

Dass die Coprodukte in sinnvoller Weise als Verschiebungen interpretierbar sind, lässt sich mit der folgenden Überlegung verdeutlichen. Betrachten wir nämlich das Coprodukt von Potenzen einzelner Koordinaten, so gilt

$$\Delta((X^A)^n) = (\Delta(X^A))^n = (X^A \otimes 1 + \hat{O}^A_B \otimes Y^B)^n \triangleright 1. \tag{6.3}$$

Wandelt man den letzten Ausdruck unter Berücksichtigung der Operatorwirkungen in eine Summe um, so gelangt man zu q-Analoga des klassischen Binomial-Theorems. Solche Rechnungen sind im Bereich der speziellen q-Funktionen weit verbreitet [67], [68], [10]. Für beliebige Elemente der nichtkommutativen Koordinatenalgebren gilt entsprechend

$$\Delta(F(X^A)) = F(\Delta(X^A)) = F(X^A \otimes 1 + \hat{O}^A_B \triangleright \otimes Y^B). \tag{6.4}$$

Falls F in Form einer Potenzreihe dargestellt ist, gestatten die q-Binomial-Regeln das Ableiten von q-deformierten Versionen der Taylor-Formel. Diese Zusammenhänge lassen sich dann mittels

$$f(x \underline{\oplus} y) \equiv \left(\mathcal{W}_x^{-1} \otimes \mathcal{W}_y^{-1}\right)(\Delta(\mathcal{W}(f))) \tag{6.5}$$

wieder auf die kommutative Funktionenalgebra $\mathcal{A}$ übertragen.

Wir können die letzte Formel auch als eine mit der Symmetrie der Quantengruppe verträgliche Translation betrachten, welche eine gegebene Funktion um y verschiebt. Eine naheliegende Frage ist nun, ob es möglich ist, durch eine weitere Translation diese Verschiebung wieder rückgängig zu machen. Dass dies tatsächlich der Fall ist, lässt sich mit der für Hopfalgebren gültigen Relation

$$(m \circ (S \otimes id) \circ \Delta)(F) = \varepsilon(F) = (m \circ (id \otimes S) \circ \Delta)(F) \tag{6.6}$$

einsehen, wobei m die nichtkommutative Multiplikation auf der Quantenraumalgebra $\mathcal{A}_q$ bezeichnet. Überträgt man nämlich die Wirkung der Antipode durch die Vereinbarung

$$f(\underline{\ominus} x) \equiv \mathcal{W}^{-1}(S(f)) \tag{6.7}$$

auf die Elemente der kommutativen Koordinatenalgebra, so kann man die Relation (6.6) sofort in die Identität

$$f\left(x \underline{\oplus} y \underline{\oplus} (\underline{\ominus} y)\right) = m_{y,z} \circ f\left(x \underline{\oplus} y \underline{\oplus} (\underline{\ominus} z)\right) = f(x) \tag{6.8}$$

übersetzen, falls $m_{y,z}$ die implizite Sternmultiplikation bezüglich x und y bezeichnet.

An dieser Stelle wollen wir außerdem auf eine Konvention hinweisen, die wir im Folgenden immer wieder verwenden werden. So sollen bei der Auswertung von Funktionen der Form $f(x\underline{\oplus}y)$ die Tensorfaktoren grundsätzlich kommutativ multipliziert werden, falls die zu den beiden Tensorfaktoren korrespondierenden Koordinaten unterschiedlich bezeichnet sind. Im Gegensatz dazu werden die Tensorfaktoren der Sternmultiplikation unterworfen, wenn die zugehörigen Koordinaten die gleiche Bezeichung tragen, d.h. wir vereinbaren

$$f(x\underline{\oplus}x) \equiv m_{x,y} \circ f(x\underline{\oplus}y). \tag{6.9}$$

Als Letztes wollen wir noch darauf eingehen, wie zwei Funktionen $f(x\underline{\oplus}y)$ und $g(x\underline{\oplus}y)$ miteinander multipliziert werden. Dies ist jedoch mit den in Kapitel 5 angestellten Überlegungen sofort klar. Die durch Translation aus f und g hervorgegangenen Funktionen sind ja Elemente aus der Algebra $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$. Auf deren nichtkommutativem Analogon $\mathcal{A}_q\underline{\otimes}\mathcal{A}_q$ gilt aber

$$(X_1 \otimes Y_1)\,\underline{\odot}\,(X_2 \otimes Y_2) \equiv (m_X \otimes m_Y) \circ (X_1 \otimes \Psi_{Y,X}(Y_2, X_2) \otimes Y_2), \tag{6.10}$$

wobei $m_{x,y}$ wieder die nichtkommutative Multiplikation auf den jeweiligen Quantenraumalgebren bezeichnet. Übertragen wir diese Relationen auf die kommutative Algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, so können wir das Zopfprodukt zweier translatierter Funktionen als Elemente aus $\mathcal{A}\underline{\otimes}\mathcal{A}$ wie folgt erklären:

$$\begin{aligned} & f(x\underline{\oplus}y)\ \underline{\odot}\ g(x\underline{\oplus}y) \\ \equiv\quad & (m_{x,x'} \otimes m_{y,y'}) \circ \big(f(x\underline{\oplus}y')\,\underline{\odot}_{y',x'}\,g(x'\underline{\oplus}y)\big)\Big|_{x',y' \to x,y}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Das Zopfprodukt im letzten Ausdruck bezieht sich dabei nur auf die in seinem Index angegebenen Tensorfaktoren. Entsprechendes gilt natürlich für die Operatoren $m_{x,x'}$ bzw. $m_{y,y'}$ zur impliziten Sternmultiplikation bezüglich der in ihrem Index angegebenen Koordinaten. Ihre expliziten Ausdrücke sind in Kapitel 2 aufgeführt.

Gemäß diesen Überlegungen werden wir in diesem Kapitel für die von uns betrachteten Quantenräume Ausdrücke ableiten, welche es gestatten, Coprodukt und Antipode normalgeordneter Monome zu berechnen. Indem wir diese Ausdrücke ins Kommutative übertragen und auf beliebige Funktionen verallgemeinern, gelangen wir auf der kommutativen Funktionenalgebra zu einem Translationsbegriff, der mit der zugrundeliegenden Quantengruppensymmetrie verträglich ist.

6.1 Euklidischer Raum in drei Dimensionen

Die Berechnungen basieren auf Überlegungen, die wir bereits im vorhergehenden Kapitel angewandt haben. Um diese geschickt zu organisieren, unterscheiden wir durch die Bezeichnungen

$$X_L^A = X^A \otimes 1 \qquad \text{und} \qquad X_R^A = \hat{O}_B^A \otimes X^B, \tag{6.12}$$

zwischen Links- und Rechtskoordinaten, wobei die Braiding-Operatoren wieder aus der für die Koordinaten gewählten Hopfstruktur abgelesen werden können. Mit diesen Bezeichnungen können wir nun schreiben

$$\begin{aligned} & \Delta((X^+)^{n_+}(X^3)^{n_3}(X^-)^{n_-}) \\ = \; & (X_L^+ + X_R^+)^{n_+}(X_L^3 + X_R^3)^{n_3}(X_L^- + X_R^-)^{n_-}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Den letzten Ausdruck wollen wir nun so umformen, dass alle Rechtskoordinaten entsprechend ihrem Namen rechts von den Linkskoordinaten stehen. Dazu müssen wir aber wissen, wie die einzelnen Objekte miteinander vertauschen. Es ist leicht einsehbar, dass sowohl die Rechtskoordinaten als auch die Linkskoordinaten jeweils eine eigene Quantenraumalgebra aufspannen. Wir haben es also mit zwei identischen Kopien einer Quantenraumalgebra zu tun, weshalb die Vertauschungsrelationen zwischen Links- und Rechtskoordinaten durch die R-Matrix (oder deren Inverses) der zugrunde liegenden Quantengruppe festgelegt sind. Explizit haben wir daher entweder die Relationen

$$X_R^A X_L^B = (\hat{O}_C^A \triangleright X^B) \otimes X^C \sim (\hat{R})^{AB}_{CD}\, X_L^C X_R^D \tag{6.14}$$

oder

$$X_R^A X_L^B = (\hat{O}_C^A \triangleright X^B) \otimes X^C \sim (\hat{R}^{-1})^{AB}_{CD}\, X_L^C X_R^D,$$

je nachdem, welche Hopfstruktur wir für die Koordinaten auswählen.

Wir wollen im Folgenden die Berechnungen zunächst für die durch (5.12) bestimmte Hopfstruktur durchführen. Mit der Formel (6.14) finden wir dann sofort

$$\begin{aligned} X_R^+ X_L^+ &= q^4 X_L^+ X_R^+, \\ X_R^+ X_L^3 &= q^2 X_L^3 X_R^+, \\ X_R^+ X_L^- &= X_L^- X_R^+, \\ X_R^3 X_L^3 &= q^2 X_L^3 X_R^3 + q\lambda\lambda_+ X_L^- X_R^+, \\ X_R^3 X_L^- &= q^2 X_L^- X_R^3, \\ X_R^- X_L^- &= q^4 X_L^- X_R^-. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Andere Relationen werden von uns vorerst nicht benötigt. Aus (6.15) folgt weiterhin

$$\Delta_{\hat{L}}(X^+)^{n_+} = (X_L^+ + X_R^+)^{n_+} = \sum_{k=0}^{n_+} \begin{bmatrix} n_+ \\ k \end{bmatrix}_{q^4} (X_L^+)^k (X_R^+)^{n_+-k}, \tag{6.16}$$

$$\Delta_{\hat{L}}(X^-)^{n_-} = (X_L^- + X_R^-)^{n_-} = \sum_{k=0}^{n_-} \begin{bmatrix} n_- \\ k \end{bmatrix}_{q^4} (X_L^-)^k (X_R^-)^{n_--k}, \tag{6.17}$$

wobei wir zur Spezifizierung und weiteren Unterscheidung das Coprodukt mit einem geeigneten Index versehen haben. Die Ermittlung der entsprechenden Identität für $\Delta_{\hat{L}}(X^3)^{n_3}$ erfordert einen etwas größeren Aufwand. Wir machen zunächst den Ansatz

$$\begin{aligned} \Delta_{\hat{L}}(X^3)^{n_3} &= (X_L^3 + X_R^3)^{n_3} \\ &= \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{k=0}^{\min(i,n_3-i)} C_{i,k}^{n_3} \cdot (X_L^3)^{i-k} (X_L^-)^k (X_R^+)^k (X_R^3)^{n_3-i-k} \end{aligned} \tag{6.18}$$

und finden für die unbekannten Koeffizienten unter Ausnutzung von (6.15) die Rekursionsrelation

$$\begin{aligned} C_{i,k}^{n_3+1} &= q^{2(i+k)} C_{i,k}^{n_3} + C_{i-1,k}^{n_3} \\ &\quad + q\lambda\lambda_+ q^{2(i-k)} [[i-(k-1)]]_{q^2}!\, C_{i,k-1}^{n_3}, \\ C_{i,0}^{n_3} &= \begin{bmatrix} n_3 \\ i \end{bmatrix}_{q^2}. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Als deren Lösung ergibt sich der Ausdruck

$$C_{i,k}^{n_3} = (q\lambda\lambda_+)^k \frac{[[i+k]]_{q^2}!}{[[i-k]]_{q^2}![[2k]]_{q^2}!!} \begin{bmatrix} n_3 \\ i+k \end{bmatrix}_{q^2}, \tag{6.20}$$

wobei die q-Doppelfakultät definiert ist als

$$[[2k]]_{q^2}!! \equiv [[2k]]_{q^2} [[2(k-1)]]_{q^2} \dots [[2]]_{q^2}. \tag{6.21}$$

Um nun das Coprodukt eines normalgeordneten Monoms zu berechnen, setzen wir zunächst die Ausdrücke (6.16)-(6.18) in

$$\Delta_{\hat{L}}((X^+)^{n_+}(X^3)^{n_3}(X^-)^{n_-}) = \Delta_{\hat{L}}(X^+)^{n_+} \Delta_{\hat{L}}(X^3)^{n_3} \Delta_{\hat{L}}(X^-)^{n_-} \tag{6.22}$$

ein. Anschließend müssen wir noch unter Verwendung der Relationen (6.15) dafür sorgen, dass wieder alle Rechtskoordinaten auch wieder rechts von den Linkskoordinaten stehen. Als Ergebnis dieses Vorgehens erhalten wir schließlich den Ausdruck

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\hat{L}}((X^+)^{n_+}(X^3)^{n_3}(X^-)^{n_-}) \qquad (6.23)\\
&= \sum_{k_+=0}^{n_+}\sum_{k_3=0}^{n_3}\sum_{k_-=0}^{n_-}\sum_{i=0}^{\min(k_3,n_3-k_3)} (q\lambda\lambda_+)^i \frac{[[k_3+i]]_{q^2}!}{[[2i]]_{q^2}!![[k_3-i]]_{q^2}!}\\
&\quad\cdot q^{2(n_+-k_+)(k_3-i)+2(n_3-i-k_3)k_-} \begin{bmatrix} n_+ \\ k_+ \end{bmatrix}_{q^4} \begin{bmatrix} n_3 \\ k_3+i \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} n_- \\ k_- \end{bmatrix}_{q^4}\\
&\quad\cdot (Y^+)^{k_+}(Y^3)^{k_3-i}(Y^-)^{k_-+i} \otimes (X^+)^{n_+-k_++i}(X^3)^{n_3-i-k_3}(X^-)^{n_--k_-},
\end{aligned}$$

wobei wir außerdem berücksichtigt haben

$$\begin{aligned}
&(X_L^+)^{n_+}(X_L^3)^{n_3}(X_L^-)^{n_-} \cdot (X_R^+)^{m_+}(X_R^3)^{m_3}(X_R^-)^{m_-} \qquad (6.24)\\
&= (Y^+)^{n_+}(Y^3)^{n_3}(Y^-)^{n_-} \otimes (X^+)^{m_+}(X^3)^{m_3}(X^-)^{m_-}.
\end{aligned}$$

Vollziehen wir in gewohnter Weise den Übergang ins Kommutative, so können wir die durch (6.5) definierte Operation darstellen als

$$\begin{aligned}
&f(y \,\underline{\oplus}_{\hat{L}}\, x) \qquad (6.25)\\
&= \sum_{k_+=0}^{n_+}\sum_{k_3=0}^{n_3}\sum_{k_-=0}^{n_-}\sum_{i=0}^{k_3} (q\lambda\lambda_+)^i \frac{(y^+)^{k_+}(y^3)^{k_3-i}(y^-)^{k_-+i}}{[[2i]]_{q^2}!![[k_+]]_{q^4}![[k_3-i]]_{q^2}![[k_-]]_{q^4}!}\\
&\quad\cdot (x^+)^i \Big((D_{q^4}^+)^{k_+}(D_{q^2}^3)^{k_3+i}(D_{q^4}^-)^{k_-} f\Big)(q^{2(k_3-i)}x^+, q^{2k_-}x^3),
\end{aligned}$$

Als nächsten Schritt wollen wir die zu diesem Coprodukt gehörige Antipode berechnen. Diese muss so bestimmt werden, dass die Identität (6.6) erfüllt ist. Mit den Formeln (6.16) und (6.17) folgt dann aber sofort [66]

$$\begin{aligned}
S_{\hat{L}}(X^+)^{n_+} &= (-1)^{n_+}q^{2(n_+-1)n_+}(X^+)^{n_+}, \qquad (6.26)\\
S_{\hat{L}}(X^-)^{n_-} &= (-1)^{n_-}q^{2(n_--1)n_-}(X^+)^{n_-}.
\end{aligned}$$

Die Berechnung des entsprechenden Ausdrucks für X^3 macht hingegen wieder eine Reihe weiterer Überlegungen nötig. Zunächst gilt im Rahmen der von uns benutzten Hopfstruktur

$$S_{\hat{L}}\left(X^3\right)^{n_3} = 1 \triangleleft \Big(-(\Lambda^{-\frac{1}{2}})X^3 + q^2\lambda\lambda_+(\Lambda^{-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}L^+)X^-\Big)^{n_3}. \qquad (6.27)$$

Für die Auswertung dieses Ausdruck ist es notwendig, die Linkswirkungen zu berechnen. Dazu machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} & 1 \triangleleft \Big(-(\Lambda^{-\frac{1}{2}})X^3 + q^2\lambda\lambda_+(\Lambda^{-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}L^+)X^-\Big)^{n_3} \\ = & \sum_{0\leq 2i\leq n_3} C_i^{n_3}\,(X^-)^i(X^3)^{n_3-2i}(X^+)^i \end{aligned} \tag{6.28}$$

und finden für die unbekannten Koeffizienten die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} C_i^{n_3+1} &= -q^{2(n_3+i)}C_i^{n_3} \\ &\quad - q^{-1}\lambda\lambda_+ q^{2(n_3+i-1)}\,[[n_3-2(i-1)]]_{q^{-2}}\,C_{i-1}^{n_3}, \\ C_0^{n_3} &= (-1)^{n_3}q^{n_3(n_3-1)}. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Diese besitzt als Lösungen

$$C_i^{n_3} = (-1)^{n_3}\,(q^{-1}\lambda\lambda_+)^i\,q^{n_3(n_3-1)-2i(n_3-2i)}\,[[2i-1]]_{q^2}!!\begin{bmatrix} n_3 \\ 2i \end{bmatrix}_{q^2}. \tag{6.30}$$

Fassen wir alle Ergebnisse zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & S_{\hat{L}}\,(X^3)^{n_3} \\ = & \sum_{0\leq 2i\leq n_3} (-1)^{n_3}\,(q^{-1}\lambda\lambda_+)^i\,q^{n_3(n_3-1)-2i(n_3-2i)} \\ & \cdot[[2i-1]]_{q^2}!!\begin{bmatrix} n_3 \\ 2i \end{bmatrix}_{q^2}(X^-)^i(X^3)^{n_3-2i}(X^+)^i. \end{aligned} \tag{6.31}$$

Bisher kennen wir also die Antipode für Potenzen der einzelnen Koordinaten. Wollen wir nun die Antipode für beliebige normalgeordnete Monome bestimmen, so ist zu berücksichtigen, dass unsere Quantenraumalgebra eine verzopfte Hopfalgebra darstellt [62], in der gilt

$$S\circ m = m\circ(S\otimes S)\circ\Psi, \tag{6.32}$$

wobei die Verzopfung gegeben ist durch

$$\Psi(X^A, Y^B) = (\hat{O}^A_C \triangleright Y^B)\otimes X^C, \tag{6.33}$$

während m die Multiplikation auf der Quantenraumalgebra bezeichnet. Mit diesem Axiom folgt nun leicht

$$\begin{aligned} & S_{\hat{L}}((X^+)^{n_+}(X^3)^{n_3}(X^-)^{n_-}) = \\ & q^{2n_+n_3}\,S_{\hat{L}}((X^3)^{n_3}(X^-)^{n_-})\,S_{\hat{L}}(X^+)^{n_+} = \\ & q^{2n_+n_3+2n_3n_-}\,S_{\hat{L}}(X^-)^{n_-}S_{\hat{L}}(X^3)^{n_3}S_{\hat{L}}(X^+)^{n_+}. \end{aligned} \tag{6.34}$$

Setzen wir in den letzten Ausdruck die Formeln aus (6.26) und (6.31) ein, so bekommen wir schließlich die Identität

$$\begin{aligned}
& S_{\hat{L}}((X^+)^{n_+}(X^3)^{n_3}(X^-)^{n_-}) \qquad (6.35)\\
= \; & (-1)^{n_+ + n_3 + n_-} \, q^{2n_+(n_+ + n_3 + 1) + 2n_-(n_- + n_3 - 1) + n_3(n_3 - 1)} \\
& \cdot \sum_{0 \leq 2k \leq n_3} (q^{-1}\lambda\lambda_+)^k \, q^{-2k(n_3 - 2k)} \, [[2k-1]]_{q^2}!! \begin{bmatrix} n_3 \\ 2k \end{bmatrix}_{q^2} \\
& \cdot (X^-)^{n_- + k}(X^3)^{n_3 - 2k}(X^+)^{n_+ + k}.
\end{aligned}$$

Unsere Formel für die Antipode hängt allerdings von Monomen ab, deren Normalordnung gegenüber dem ursprünglichen Monom umgedreht ist. Beim Übergang ins Kommutative ist aus diesem Grund noch der Umordnungsoperator $\hat{U}^{-1}$ aus Kapitel 2 auf das Ergebnis anzuwenden. Im Kommutativen erhalten wir somit für die in (6.7) definierte Operation die Darstellung

$$\begin{aligned}
& \hat{U}(f(\underline{\ominus}_{\hat{L}} x)) \qquad (6.36)\\
= \; & \sum_{k=0}^{\infty} (q^{-1}\lambda\lambda_+)^k q^{4k^2} \, \frac{[[2k-1]]_{q^2}!!}{[[2k]]_{q^2}!!} \, (x^+ x^-)^k (D^3_{q^2})^{2k} \\
& \cdot q^{2\hat{n}_+(\hat{n}_+ + \hat{n}_3 - 1) + 2\hat{n}_-(\hat{n}_- + \hat{n}_3 - 1) + \hat{n}_3(\hat{n}_3 - 1)} \, f(-x^+, -q^{-2k}x^3, -x^-).
\end{aligned}$$

Die Ausdrücke (6.25) und (6.36) bilden jedoch nicht die einzige Möglichkeit, eine Hopfstruktur auf der kommutativen Koordinatenalgebra zu realisieren, wie die folgenden Überlegungen deutlich machen. Zu diesem Zweck ist es sinnvoll, noch einmal die Darstellungen der partiellen Ableitungen aus Kapitel 3 zu betrachten und sich zu vergegenwärtigen, dass die Rollen von Koordinaten und partiellen Ableitungen stets vertauschbar sind. Aus diesem Grund lassen sich alle Ausdrücke, die wir für die Koordinatenalgebra ableiten, auch auf die Algebra der partiellen Ableitungen anwenden und umgekehrt. In Kapitel 3 hatten wir bereits gesehen, dass der Unterschied in den Linksdarstellungen der konjugierten und unkonjugierten Ableitungen auch zu verschiedenen Hopfstrukturen führt. Entsprechendes gilt für die Rechtsdarstellungen. Daher können wir feststellen, dass es zu jeder der vier Möglichkeiten, partielle Ableitungen auf der Koordinatenalgebra darzustellen, eine eigene Hopfstruktur gibt. Diese wollen wir im Folgenden, je nachdem, ob sie zu einer Rechts- oder einer Linksdarstellung gehören, mit dem Index R bzw. L kennzeichnen. Wenn die Hopfstruktur sich außerdem auf die Darstellung der konjugierten partiellen Ableitungen bezieht, so zeigen wir dies mit einem zusätzlichen Hut über dem Index an. Diese enge Korrespondenz zwischen den Darstellungen der partiellen Ableitungen und den einzelnen Hopfstrukturen ist dafür verantwortlich, dass die Hopfstrukturen durch die gleichen Transformationen ineinander übergehen wie die zugehörigen Darstellungen. Da aber die Hopfstrukturen von partiellen Ableitungen und Koordinaten von gleicher Form sind, gelangt man mit diesen Überlegungen schließlich zu den Regeln

$$f(x \,\underline{\oplus}_{\hat{L}}\, y) \quad \overset{\substack{\pm \,\rightarrow\, \mp \\ q \,\rightarrow\, 1/q}}{\longleftrightarrow} \quad f(x \,\underline{\tilde{\oplus}}_{L}\, y), \tag{6.37}$$

$$\begin{aligned} f(x \,\underline{\oplus}_{\hat{L}}\, y) \quad &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \quad f(x \,\underline{\oplus}_{R}\, y), \\ f(x \,\underline{\tilde{\oplus}}_{\hat{R}}\, y) \quad &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \quad f(x \,\underline{\tilde{\oplus}}_{L}\, y) \end{aligned} \tag{6.38}$$

und

$$f(\underline{\ominus}_{\hat{L}}\, x) \quad \overset{\substack{\pm \,\rightarrow\, \mp \\ q \,\rightarrow\, 1/q}}{\longleftrightarrow} \quad f(\underline{\tilde{\ominus}}_{L}\, x), \tag{6.39}$$

$$\begin{aligned} f(\underline{\ominus}_{\hat{L}}\, x) \quad &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \quad f(\underline{\ominus}_{R}\, x), \\ f(\underline{\tilde{\ominus}}_{\hat{R}}\, x) \quad &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \quad f(\underline{\tilde{\ominus}}_{L}\, x). \end{aligned} \tag{6.40}$$

6.2 Euklidischer Raum in vier Dimensionen

Die Überlegungen im vierdimensionalen Fall sind wieder völlig analog zu jenen des vorherigen Abschnitts, so dass wir uns im Folgenden relativ kurz fassen können. Diesmal gehen wir für die expliziten Berechnungen von der Hopfstruktur (5.40) aus. Mit den Relationen

$$X^i_R X^i_L = q^{-2} X^i_L X^i_R, \quad i = 1, \ldots, 4, \tag{6.41}$$

finden wir sofort

$$\Delta_L (X^i)^{n_i} = (X^i_L + X^i_R)^{n_i} = \sum_{k=0}^{n_i} \begin{bmatrix} n_i \\ k \end{bmatrix}_{q^{-2}} (X^i_L)^k (X^i_R)^{n_i - k}. \tag{6.42}$$

Damit erhalten wir

$$\Delta_L((X^1)^{n_1}(X^2)^{n_2}(X^3)^{n_3}(X^4)^{n_4}) \tag{6.43}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Delta_L(X^1)^{n_1}\Delta_L(X^2)^{n_2}\Delta_L(X^3)^{n_3}\Delta_L(X^4)^{n_4} \\
&= \sum_{k=0}^{n_1}\sum_{l=0}^{n_2}\sum_{m=0}^{n_3}\sum_{n=0}^{n_4} \begin{bmatrix} n_1 \\ k \end{bmatrix}_{q^{-2}} \begin{bmatrix} n_2 \\ l \end{bmatrix}_{q^{-2}} \begin{bmatrix} n_3 \\ m \end{bmatrix}_{q^{-2}} \begin{bmatrix} n_4 \\ n \end{bmatrix}_{q^{-2}} \\
&\quad \cdot (X_L^1)^k (X_R^1)^{n_1-k} (X_L^2)^l (X_R^2)^{n_2-l} \\
&\quad \cdot (X_L^3)^m (X_R^3)^{n_3-m} (X_L^4)^n (X_R^4)^{n_4-n}.
\end{aligned}
$$

Für die weitere Umformung benötigen wir außerdem die Identitäten

$$
\begin{aligned}
X_R^1 X_L^2 &= q^{-1} X_L^2 X_R^1, \\
X_R^1 X_L^3 &= q^{-1} X_L^3 X_R^1, \\
X_R^2 X_L^4 &= q^{-1} X_L^4 X_R^2, \\
X_R^3 X_L^4 &= q^{-1} X_L^4 X_R^3. \\
X_R^2 X_L^3 &= X_L^3 X_R^2 + \lambda X_L^4 X_R^1, \\
X_R^1 X_L^4 &= X_L^4 X_R^1.
\end{aligned}
\tag{6.44}
$$

Mit diesen Relationen lassen sich die Rechtskoordinaten in (6.43) leicht an den Linkskoordinaten vorbeitauschen. Eine Ausnahme bilden lediglich die Koordinaten X_R^2 und X_L^3. Um die Vertauschungsrelationen zwischen Potenzen dieser beiden Koordinaten zu finden, berechnen wir zunächst mit dem Operatorausdruck für X_R^2

$$
\begin{aligned}
(X_R^2)^n &= (\Lambda^{\frac{1}{2}} K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} \otimes X^2 + q\lambda \Lambda^{\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_1^+ \otimes X^1)^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} (q\lambda)^i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_{q^{-2}} (\Lambda^{-\frac{1}{2}})^n \, (K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_1^+)^i \, (K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}})^{n-i} \\
&\quad \otimes (X^1)^i (X^2)^{n-i}.
\end{aligned}
\tag{6.45}
$$

Damit folgt nun sofort

$$
\begin{aligned}
&(X_R^2)^n (X_L^3)^m \\
&= \sum_{i=0}^{n} (q\lambda)^i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_{q^{-2}} (\Lambda^{-\frac{1}{2}})^n \, (K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_1^+)^i \, (K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}})^{n-i} \triangleright (X^3)^m \\
&\quad \otimes (X^1)^i (X^2)^{n-i}.
\end{aligned}
\tag{6.46}
$$

Durch direktes Ausrechnen bestätigt man weiternhin, dass gilt

$$
(K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_1^+)^i \triangleright (X^3)^m = [[i]]_{q^{-2}}! \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_{q^{-2}} (X^3)^{m-i} (X^4)^i, \tag{6.47}
$$

was uns bei Einsetzen in (6.46) schließlich liefert

$$
\begin{aligned}
&(X^2_R)^n(X^3_L)^m \qquad (6.48)\\
&= \sum_{i=0}^{n} \lambda^i\, [[i]]_{q^{-2}}! \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_{q^{-2}} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_{q^{-2}} (X^3)^{m-i}(X^4)^i \otimes (X^1)^i(X^2)^{n-i}.
\end{aligned}
$$

Mit diesen Identitäten sind wir jetzt in der Lage für das Coprodukt eines normalgeordneten Monoms den folgenden Ausdruck abzuleiten:

$$
\begin{aligned}
&\Delta_L((X^1)^{n_1}(X^2)^{n_2}(X^3)^{n_3}(X^4)^{n_4}) \qquad (6.49)\\
&= \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\sum_{k_3=0}^{n_3}\sum_{k_4=0}^{n_4}\sum_{i=0}^{\min(n_2-k_2,k_3)} \lambda^i\, q^{-(k_2+k_3-i)(n_1-k_1)-k_4(n_2+n_3-k_2-k_3-i)}\\
&\quad \cdot [[i]]_{q^{-2}}! \begin{bmatrix} k_2+i \\ i \end{bmatrix}_{q^{-2}} \begin{bmatrix} k_3 \\ i \end{bmatrix}_{q^{-2}}\\
&\quad \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q^{-2}} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2+i \end{bmatrix}_{q^{-2}} \begin{bmatrix} n_3 \\ k_3 \end{bmatrix}_{q^{-2}} \begin{bmatrix} n_4 \\ k_4 \end{bmatrix}_{q^{-2}}\\
&\quad \cdot (Y^1)^{k_1}(Y^2)^{k_2}(Y^3)^{k_3-i}(Y^4)^{k_4+i}\\
&\quad \otimes (X^1)^{n_1-k_1+i}(X^2)^{n_2-k_2-i}(X^3)^{n_3-k_3}(X^4)^{n_4-k_4}.
\end{aligned}
$$

Ins Kommutative übertragen liefert dies schließlich

$$
\begin{aligned}
&f(y \,\underline{\oplus}_L\, x) \qquad (6.50)\\
&= \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{\infty}\sum_{k_4=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k_3} \lambda^i \begin{bmatrix} k_3 \\ i \end{bmatrix}_{q^{-2}} \frac{(y^1)^{k_1}(y^2)^{k_2}(y^3)^{k_3-i}(y^4)^{k_4+i}}{[[k_1]]_{q^{-2}}![[k_2]]_{q^{-2}}![[k_3]]_{q^{-2}}![[k_4]]_{q^{-2}}!}\\
&\quad \otimes (x^1)^i \Big((D^1_{q^{-2}})^{k_1} (D^2_{q^{-2}})^{k_2+i}\\
&\quad \cdot (D^3_{q^{-2}})^{k_3} (D^4_{q^{-2}})^{k_4} f\Big)(q^{-(k_2+k_3+i)}x^1, q^{-k_4}x^2, q^{-k_4}x^3). \qquad (6.51)
\end{aligned}
$$

Als Nächstes bestimmen wir die zu unserem Coprodukt Δ_L gehörige Antipode. Aus (6.42) folgt sofort

$$
S_L(X^i)^n = (-1)^n q^{-n(n-1)}(X^i)^n, \quad i = 1, \ldots, 4. \qquad (6.52)
$$

Mit Hilfe des Axioms (6.32) können wir aus diesen Identitäten dann wieder die Antipode für ein normalgeordnetes Monom berechnen, wenn wir berücksichtigen, dass die Abbildung Ψ durch die bereits berechneten Vertauschungsrelationen von Links- und Rechtskoordinaten gegeben ist. Aus diesen Überlegungen können wir schließlich folgenden Ausdruck für die Antipode eines normalgeordneten Monoms ableiten:

$$
\begin{aligned}
& S_L((X^1)^{n_1}(X^2)^{n_2}(X^3)^{n_3}(X^4)^{n_4}) \\
= \; & (-1)^{n_1+n_2+n_3+n_4}\, q^{-n_1(n_1-1)-n_2(n_2-1)-n_3(n_3-1)-n_4(n_4-1)} \\
& \cdot \sum_{k=0}^{\min(n_2,n_3)} \lambda^k\, q^{-\frac{1}{2}k(k+1)-k^2+(n_1+n_4+k)(n_2+n_3)}\, [[k]]_{q^{-2}}! \begin{bmatrix} n_2 \\ k \end{bmatrix}_{q^{-2}} \begin{bmatrix} n_3 \\ k \end{bmatrix}_{q^{-2}} \\
& \cdot (X^4)^{n_4+k}(X^3)^{n_3-k}(X^2)^{n_2-k}(X^1)^{n_1+k}.
\end{aligned} \tag{6.53}
$$

Übersetzen wir diesen Ausdruck ins Kommutative, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
& \hat{U}(f(\underline{\ominus}_L x)) \\
= \; & \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k q^{-\frac{1}{2}k(k+1)-k^2}\, \frac{(x^1x^4)^k}{[[k]]_{q^{-2}}!}\, (D^2_{q^{-2}} D^3_{q^{-2}})^k \\
& \cdot q^{-\hat{n}_1(\hat{n}_1-1)-\hat{n}_2(\hat{n}_2-1)-\hat{n}_3(\hat{n}_3-1)-\hat{n}_4(\hat{n}_4-1)-(\hat{n}_1+\hat{n}_2)(\hat{n}_3+\hat{n}_4)} \\
& \cdot f(-x^1, -q^k x^2, -q^k x^3, -x^4).
\end{aligned} \tag{6.54}
$$

Wie im Fall des dreidimensionalen Euklidischen Raumes folgen dann mittels der Crossing-Symmetrien wieder die Korrespondenzen

$$
f(x \,\underline{\widetilde{\oplus}}_{\hat{L}}\, y) \overset{\substack{i \,\to\, i' \\ q \,\to\, 1/q}}{\longleftrightarrow} f(x \,\underline{\oplus}_L\, y), \tag{6.55}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x \,\underline{\widetilde{\oplus}}_{\hat{L}}\, y) &\overset{j \leftrightarrow j'}{\longleftrightarrow} f(x \,\underline{\widetilde{\oplus}}_R\, y), \\
f(x \,\underline{\oplus}_{\hat{R}}\, y) &\overset{j \leftrightarrow j'}{\longleftrightarrow} f(x \,\underline{\oplus}_L\, y)
\end{aligned} \tag{6.56}
$$

und

$$
f(\underline{\widetilde{\ominus}}_{\hat{L}} x) \overset{\substack{i \,\to\, i' \\ q \,\to\, 1/q}}{\longleftrightarrow} f(\underline{\ominus}_L x), \tag{6.57}
$$

$$
\begin{aligned}
f(\underline{\widetilde{\ominus}}_{\hat{L}} x) &\overset{j \leftrightarrow j'}{\longleftrightarrow} f(\underline{\widetilde{\ominus}}_R x), \\
f(\underline{\ominus}_{\hat{R}} x) &\overset{j \leftrightarrow j'}{\longleftrightarrow} f(\underline{\ominus}_L x).
\end{aligned} \tag{6.58}
$$

6.3 Minkowski-Raum

Wie schon in den früheren Kapiteln verlangt der q-deformierte Minkowski-Raum bei der expliziten Berechnung von Coprodukt und Antipode ein gesondertes Vorgehen. Die hierbei benötigten Methoden sind uns aber bereits bei der Berechnung des Zopfproduktes begegnet. Konkret bedeutet dies, dass wir die Zeitkoordinate wieder durch Generatoren mit einfacherer Hopfstruktur ausdrücken und dadurch jedes normalgeordnete Monom wie in Kapitel 5.3 schreiben als

$$\begin{aligned}
&(X^+)^{n_+}(X^{3/0})^{n_{3/0}}(X^0)^{n_0}(X^-)^{n_-} \\
= &\sum_{k=0}^{n_0}\sum_{l=0}^{\min(k,n_0-k)} q^{2n_{3/0}k-2(n_0-l-k)(n_-+k)}\, F^n_{k,l} \\
&\cdot (X^+)^{n_++k}(X^{3/0})^{n_{3/0}+l-k}[(T^-)^{n_0-l-k} \triangleright (X^+)^{n_0-l-k}(X^-)^{n_-+k}].
\end{aligned} \tag{6.59}$$

Mit dieser Formel können wir das Coprodukt normalgeordneter Monome zurückführen auf Terme der Form

$$\begin{aligned}
&\Delta((X^+)^{n_+}(X^{3/0})^{n_{3/0}}[(T^-)^{n_0} \triangleright (X^+)^{n_0}(X^-)^{n_-})] \\
= \;&\Delta(X^+)^{n_+}\Delta(X^{3/0})^{n_{3/0}}[\Delta(T^-)^{n_0} \triangleright (\Delta(X^+)^{n_0}\Delta(X^-)^{n_-})].
\end{aligned} \tag{6.60}$$

Wir zeigen nun, welche Rechenschritte zur vollständigen Auswertung des letzten Ausdrucks notwendig sind und geben dann eine Vorschrift an, die genau dieses Vorgehen für kommutative Funktionen nachbildet. Bei diesen expliziten Berechnungen wollen wir uns auf die durch (5.63) gegebene Hopfstruktur beziehen.

Als Erstes werten wir den Ausdruck $\Delta_L(X^+)^{n_0}\Delta_L(X^-)^{n_-}$ aus. Mit den Relationen

$$\begin{aligned}
X^+_R X^+_L &= q^2 X^+_L X^+_R, \\
X^-_R X^-_L &= q^2 X^-_L X^-_R,
\end{aligned} \tag{6.61}$$

finden wir die Identitäten

$$\Delta_L(X^-)^{n_-} = (X^-_L + X^-_R)^{n_-} = \sum_{v=0}^{n_-} \begin{bmatrix} n_- \\ v \end{bmatrix}_{q^2} (X^-_L)^{n_--v}(X^-_R)^v, \tag{6.62}$$

$$\Delta_L(X^+)^{n_0} = (X^+_L + X^+_R)^{n_0} = \sum_{u=0}^{n_0} \begin{bmatrix} n_0 \\ u \end{bmatrix}_{q^2} (X^+_L)^{n_0-u}(X^+_R)^u. \tag{6.63}$$

Aus dem expliziten Ausdruck für das Coprodukt von X^+ folgt außerdem

$$(X^+_R)^u = (\Lambda^{-\frac{1}{2}}(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}\sigma^2 \otimes X^+ - q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{\frac{1}{2}}T^2 \otimes X^{3/0})^u \tag{6.64}$$

$$= \sum_{i=0}^{u} (-q^{\frac{3}{2}} \lambda_+^{-\frac{1}{2}} \lambda)^i q^{2i(u-i)} \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix}_{q^2}$$
$$\cdot (\Lambda^{-\frac{1}{2}})^u (\sigma^2)^{u-i} (T^2)^i ((\tau^3)^{-\frac{1}{2}})^{u-i} \otimes (X^+)^{u-i} (X^{3/0})^i.$$

Unter Verwendung dieser Formel können wir aber das Coprodukt (6.63) schließlich umformen zu

$$\begin{aligned} \Delta_L(X^+)^{n_0} &= \sum_{u=0}^{n_0} \sum_{i=0}^{u} (-q^{\frac{3}{2}} \lambda_+^{-\frac{1}{2}} \lambda)^i \, q^{2i(u-i)} \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} n_0 \\ u \end{bmatrix}_{q^2} \\ &\cdot (X^+)^{n_0-u} (\Lambda^{-\frac{1}{2}})^u (\sigma^2)^{u-i} (T^2)^i ((\tau^3)^{-\frac{1}{2}})^{u-i} \\ &\otimes (X^+)^{u-i} (X^{3/0})^i. \end{aligned} \tag{6.65}$$

Die Identitäten (6.62) und (6.65) setzen wir in $\Delta_L(X^+)^{n_0}\Delta_L(X^-)^{n_-}$ ein, wobei wir die Symmetriegeneratoren aus (6.65) nach rechts wirken lassen. Nach einigen elementaren Umformungen erhalten wir dann

$$\begin{aligned} &\Delta_L(X^+)^{n_0}\Delta_L(X^-)^{n_-} \\ &= \sum_{u=0}^{n_0} \sum_{v=0}^{n_-} \sum_{i=0}^{\min(u,n_- - v)} (-q\lambda\lambda_+^{-1})^i \, [[i]]_{q^2}! \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} v+i \\ v \end{bmatrix}_{q^2} \\ &\cdot \begin{bmatrix} n_0 \\ u \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} n_- \\ v+i \end{bmatrix}_{q^2} (X^+)^{n_0-u} (X^{3/0})^i (X^-)^{n_- - v - i} \\ &\otimes (X^+)^{u-i} (X^{3/0})^i (X^-)^v. \end{aligned} \tag{6.66}$$

Als Nächstes wollen wir $\Delta_L(X^+)^{n_+}\Delta_L(X^{3/0})^{n_{3/0}}$ auf die gleiche Weise berechnen. Da wir die explizite Form für $\Delta_L(X^+)^{n_+}$ durch (6.65) bereits kennen, können wir uns sofort $\Delta_L(X^{3/0})^{n_{3/0}}$ zuwenden. Wie gewohnt folgt aus

$$X_R^{3/0} X_L^{3/0} = q^2 X_L^{3/0} X_R^{3/0} \tag{6.67}$$

die Identität

$$\Delta_L(X^{3/0})^{n_{3/0}} = (X_L^{3/0} + X_R^{3/0})^{n_{3/0}} = \sum_{l=0}^{n_{3/0}} \begin{bmatrix} n_{3/0} \\ l \end{bmatrix}_{q^2} (X_L^{3/0})^{n_{3/0}-l} (X_R^{3/0})^l. \tag{6.68}$$

Aus der expliziten Form für das Coprodukt von $X^{3/0}$ folgt außerdem

$$(X_R^{3/0})^l = (\Lambda^{-\frac{1}{2}}\tau^1 \otimes X^{3/0} - q^{\frac{1}{2}} \lambda_+^{\frac{1}{2}} \lambda \Lambda^{-\frac{1}{2}} (\tau^3)^{-\frac{1}{2}} S^1 \otimes X^+)^l \tag{6.69}$$

$$
\begin{aligned}
= \; & \sum_{j=0}^{l} (-q^{\frac{1}{2}} \lambda_+^{\frac{1}{2}} \lambda)^j \begin{bmatrix} l \\ j \end{bmatrix}_{q^2} (\Lambda^{-\frac{1}{2}})^l ((\tau^3)^{-\frac{1}{2}} S^1)^j (\tau^1)^{l-j} \\
& \otimes (X^+)^j (X^{3/0})^{l-j}.
\end{aligned}
$$

Setzen wir den letzten Ausdruck wieder in (6.68) ein, so erhalten wir die Identität

$$
\begin{aligned}
\Delta_L (X^{3/0})^{n_{3/0}} = \; & \sum_{l=0}^{n_{3/0}} \sum_{j=0}^{l} (-q^{\frac{1}{2}} \lambda_+^{\frac{1}{2}} \lambda)^j \begin{bmatrix} n_{3/0} \\ l \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} l \\ j \end{bmatrix}_{q^2} \\
& \cdot (X^{3/0})^{n_{3/0}-l} (\Lambda^{-\frac{1}{2}})^l ((\tau^3)^{-\frac{1}{2}} S^1)^j (\tau^1)^{l-j} \\
& \otimes (X^+)^j (X^{3/0})^{l-j}.
\end{aligned} \tag{6.70}
$$

Fügen wir die Formeln für $\Delta_L(X^+)^{n_+}$ und $\Delta_L(X^{3/0})^{n_{3/0}}$ wieder zusammen, so ergibt sich nach einer entsprechenden Umordnung der einzelnen Generatoren ohne größere Probleme die Formel

$$
\begin{aligned}
& \Delta_L (X^+)^{n_+} \Delta_L (X^{3/0})^{n_{3/0}} \\
= \; & \sum_{k=0}^{n_+} \sum_{l=0}^{n_3} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} (-q^{\frac{3}{2}} \lambda_+^{-\frac{1}{2}} \lambda)^i \, (-q^{\frac{1}{2}} \lambda_+^{\frac{1}{2}} \lambda)^j \\
& \cdot q^{-j(j+1)-2j(k-2i)-i(n_+-k)+i(n_3-l)} \\
& \cdot \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} l \\ j \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} n_+ \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} n_3 \\ l \end{bmatrix}_{q^2} \\
& \cdot (T^2)^i (X^+)^{n_+-k} (X^{3/0})^{n_3-l} \\
& \cdot (\sigma^2)^{k-i} (S^1)^j (\tau^1)^{l-j} ((\tau^3)^{-\frac{1}{2}})^{k+j-i} (\Lambda^{\frac{1}{2}})^{k+l} \\
& \otimes (X^+)^{k+j-i} (X^{3/0})^{l+i-j}.
\end{aligned} \tag{6.71}
$$

Kommen wir noch einmal zum Ausgangspunkt unserer Überlegungen zurück und betrachten erneut die Gleichung (6.60). Setzen wir in deren rechte Seite die Formeln (5.69), (6.66) und (6.71) ein, so gelangen wir zu Ausdrücken, die von folgenden Termen abhängen:

$$
\begin{aligned}
& (T^2)^i \triangleright \Big[(X^+)^{n_+-k} (X^{3/0})^{n_{3/0}-l} \\
& \cdot \Big((\sigma^2)^{k-i} (S^1)^j (\tau^1)^{l-j} (T^-)^{n_0-\alpha} \triangleright (X^+)^{n_0-u} (X^{3/0})^s (X^-)^{n_--v-s} \Big) \Big] \\
& \otimes (X^+)^{k+j-i} (X^{3/0})^{l+i-j} [(T^-)^\alpha \triangleright (X^+)^{u-s} (X^{3/0})^s (X^-)^v].
\end{aligned} \tag{6.72}
$$

Die Auswertung des zweiten Tensorfaktors erfordert die Kenntnis der Wirkung von Potenzen des Generators T^-. Diese haben wir im Anhang C in Form der Identität (C.25) angegeben. Wir können uns daher sofort der Berechnung des zweiten Tensorfaktors zuwenden. Wir wollen uns dabei jedoch auf die Umformung von

$$(\sigma^2)^{k-i}(S^1)^j(\tau^1)^{l-j}(T^-)^{n_0-\alpha} \triangleright (X^+)^{n_0-u}(X^{3/0})^s(X^-)^{n_- - v-s} \tag{6.73}$$

beschränken und verzichten darauf, die Wirkung der Generatoren T^2 explizit auszuschreiben. Es erweist sich für den weiteren Verlauf der Rechnung als günstig, die Linkswirkung in (6.73) mittels der Antipode für die Lorentz-Generatoren [52] in eine Rechtswirkung umzuschreiben. Auf diese Weise erhalten wir

$$\begin{aligned} & (\sigma^2)^{k-i}(S^1)^j(\tau^1)^{l-j}(T^-)^{n_0-\alpha} \triangleright (X^+)^{n_0-u}(X^{3/0})^s(X^-)^{n_- - v-s} \\ = \ & (X^+)^{n_0-u}(X^{3/0})^s(X^-)^{n_- - v-s} \triangleleft S((\sigma^2)^{k-i}(S^1)^j(\tau^1)^{l-j}(T^-)^{n_0-\alpha}), \end{aligned} \tag{6.74}$$

wobei

$$\begin{aligned} & S((\sigma^2)^{k-i}(S^1)^j(\tau^1)^{l-j}(T^-)^{n_0-\alpha}) \\ = \ & (-1)^{n_0-\alpha+j}\, q^{(n_0-\alpha-1)(n_0-\alpha)+j(j-1)+2j(n_0-\alpha)} \\ & \cdot ((\tau^3)^{-\frac{1}{2}})^{n_0-\alpha+j}(T^-)^{n_0-\alpha}(\sigma^2)^{l-j}(S^1)^j(\tau^1)^{k-j}. \end{aligned} \tag{6.75}$$

Was wir jetzt noch brauchen, ist die explizite Kenntnis der Rechtswirkungen für die Potenzen der in (6.74) bzw. (6.75) auftretenden Generatoren. Im Fall des Generators T^- können wir diese mittels

$$\begin{aligned} f \triangleleft (T^-)^m &= S^{-1}(T^-)^m \triangleright f \\ &= (-1)^m q^{-m(m-1)}(T^-)^m(\tau^3)^{-\frac{1}{2}m} \triangleright f \end{aligned} \tag{6.76}$$

leicht aus den bereits bekannten Linkswirkungen gewinnen, während sich für die übrigen Generatoren die folgenden Identitäten finden lassen:

$$\begin{aligned} & (X^+)^{n_+}(X^{3/0})^{n_{3/0}}(X^-)^{n_-} \triangleleft (\tau^1)^m \\ = \ & q^{m(n_- - n_{3/0} - n_+)}\, (X^+)^{n_+}(X^{3/0})^{n_{3/0}}(X^-)^{n_-}, \end{aligned} \tag{6.77}$$

$$\begin{aligned} & (X^+)^{n_+}(X^{3/0})^{n_{3/0}}(X^-)^{n_-} \triangleleft (S^1)^m \\ = \ & (q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}})^m\, q^{m(n_+ - n_- - n_{3/0})-m(m-1)} \end{aligned} \tag{6.78}$$

$$\cdot\, [[m]]_{q^2}! \begin{bmatrix} n_+ \\ m \end{bmatrix}_{q^2} (X^+)^{n_+-\,m}(X^{3/0})^{n_{3/0}+m}(X^-)^{n_-},$$

$$\begin{aligned} & (X^+)^{n_+}(X^{3/0})^{n_{3/0}}(X^-)^{n_-} \triangleleft (\sigma^2)^m \\ = \; & \sum_{k=0}^{\min(n_-,m)} \; (-\lambda_+^{-1}\lambda^2)^k \, q^{m(n_{3/0}+n_+-\,n_-)+2k(n_+-\,n_{3/0}-k)} \\ & \cdot\, [[k]]_{q^2}!\,[[k]]_{q^{-2}}! \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} n_+ \\ k \end{bmatrix}_{q^{-2}} \begin{bmatrix} n_- \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \\ & \cdot\, (X^+)^{n_+-\,k}(X^{3/0})^{n_{3/0}+2k}(X^-)^{n_--\,k}. \end{aligned} \tag{6.79}$$

Allerdings sind diese Formeln in (6.74) bzw. (6.75) nur dann anwendbar, wenn die Generatoren σ^2, S^1 und τ^1 vor dem Generator T^- auf das Monom wirken. Aus diesem Grund brauchen wir eine Relation, mit der wir die Potenzen von T^- an den übrigen Generatoren vorbei nach rechts vertauschen können. Die Vertauschungsrelationen der Lorentz-Generatoren [52] ermöglichen jedoch durch elementare Berechnung die Ableitung der Identität

$$\begin{aligned} & (T^-)^{n_0-\alpha}(\sigma^2)^{l-j}(S^1)^j(\tau^1)^{k-j} \\ = \; & \sum_{\beta=0}^{\min(n_0-\alpha,l-j)} \; \sum_{\gamma=0}^{\min(n_0-\alpha-\beta,k-i)} (-\lambda)^\beta (q^2\lambda)^\gamma q^{-\beta(\beta-1)} \\ & \cdot\, q^{2(n_0-\alpha-\beta)(k-i-2\beta-\gamma)-2(n_0-\alpha)(l-j-\beta)} \\ & \cdot\, [[\beta+\gamma]]_{q^2}! \begin{bmatrix} l-j \\ \beta \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} k-i \\ \gamma \end{bmatrix}_{q^{-2}} \begin{bmatrix} n_0-\alpha \\ \beta+\gamma \end{bmatrix}_{q^2} \\ & \cdot (\sigma^2)^{l-j-\beta}\,(S^1)^{\beta+\gamma+j}\,(\tau^1)^{k-i-\gamma}\,(T^-)^{n_0-\alpha-\beta-\gamma}. \end{aligned} \tag{6.80}$$

Damit haben wir alle Rechenschritte abgehandelt, die es grundsätzlich ermöglichen, das Coprodukt eines normalgeordneten Monoms zu ermitteln. Das skizzierte Vorgehen kann nun übersetzt werden in Operatorvorschriften zur Manipulation kommutativer Funktionen bzw. ihrer Potenzreihenentwicklungen. Das Vorgehen hierbei steht in weitgehender Analogie zu jenem in Kapitel 5.3. Legen wir beim Übergang ins Kommutative die Nomalordnung $X^+X^{3/0}X^0X^-$ zugrunde, dann können wir schließlich mit den in Kapitel 5.3 eingeführten Operatoren schreiben

$$f(x \,\underline{\oplus}_L\, y) \tag{6.81}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \sum_{k,l=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} (q^{-1}\lambda)^{i+j} \, (-q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}})^i \, \frac{q^{2i}}{[[i]]_{q^2}![[j]]_{q^2}!} \\
& \cdot \sum_{u,v=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{u} \sum_{t,p=0}^{\infty} (-q\lambda\lambda_+^{-1})^s \, \frac{q^{p(p-1)-2pl}}{[[v]]_{q^2}![[s]]_{q^2}!} \\
& \cdot \Big[(T^2)^i \, \Delta^{(4)}_{k-i,j,l,s,p} \, \Delta^{(3)}_{k+l,u,v,s} \, \Delta^{(2)}_{k-i+j,u-v-s,t} \, \Delta^{(1)}_{i,j,k,l} \, \hat{\delta}^0_{p+t} \Big] \triangleright \hat{\Phi}(f(\underline{x})) \\
& \otimes (y^+)^{k+j-i} (y^{3/0})^{l+i-j} \, Q^{s,t,u,v}_{l+i-j}(y^+, y^{3/0}, y^0, y^-),
\end{aligned}
$$

wobei wir zur Abkürzung noch die folgenden Operatoren eingeführt haben:

$$
\begin{aligned}
& \Delta^{(1)}_{i,j,k,l} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \qquad (6.82) \\
= \quad & \frac{q^{-2j(k-2i)}}{[[k-i]]_{q^2}![[l-j]]_{q^2}!} \Big((D^+_{q^2})^k (D^{3/0}_{q^2})^l f \Big) (q^{-i}x^+, q^i x^{3/0}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \Delta^{(2)}_{i,j,k} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \qquad (6.83) \\
= \quad & \frac{q^{-2ij+2k(i+j)}}{[[k]]_{q^2}!} \, (x^0)^k (D^0_{q^2})^k f(q^{-2k}x^0, q^{-2(i-k)}x^-),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \Delta^{(3)}_{i,j,k,l} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \qquad (6.84) \\
= \quad & \frac{q^{il}}{[[j-l]]_{q^2}!} \Big((D^0_{q^2})^j (D^-_{q^2})^{k+l} f \Big) (q^i x^0, q^i x^-),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \Delta^{(4)}_{i,j,k,l,p} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \qquad (6.85) \\
= \quad & \sum_{u=0}^{\min(p,k-j)} \sum_{v=0}^{\min(p-u,i)} (-1)^v \, (q^{\frac{1}{2}}\lambda\lambda_+^{-\frac{1}{2}})^{u+v} \, q^{2v+u(u+1)+2l(k-j-u)} \\
& \cdot \sum_{w=0}^{k-j-u} (-\lambda_+^{-1}\lambda^2)^w \, q^{-w(w-1)+2l(k-j-u-w)-(u+v+j)(l-2w)-(i-v)(l-2(p-u-w))} \\
& \cdot [[u+v]]_{q^2}! \begin{bmatrix} p \\ u+v \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix}_{q^{-2}} \begin{bmatrix} u+w \\ u \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} k-j \\ u+w \end{bmatrix}_{q^2} \\
& \cdot \Delta^{(6)}_{j+l+2w,u+v,p} \, \Delta^{(5)}_{k,j+u,v,w} \triangleright f(q^{-i-2(j+p)}x^0, q^{i+2(j+p)}x^-),
\end{aligned}
$$

$$
\Delta^{(5)}_{i,j,k,l} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \qquad (6.86)
$$

$$= \quad q^{-(j+k)(j+k-1)}\,(D^0_{q^2})^{j+k+l}(D^-_{q^2})^l f(q^{i-2k}x^0, q^{-i-2k}x^-),$$

$$\begin{aligned}
&\Delta^{(6)}_{i,j,k} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \qquad (6.87)\\
=\; &\sum_{u=0}^{k-j}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{\frac{u-s}{2}\leq t\leq u-s} (q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}})^{k-j-u}\, q^{-(k-j)(k-j-1)}\\
&\cdot q^{2(u-s-t)(i+2j-k+u)}\,\frac{[[k-j]]_{q^2}!}{[[u]]_{q^2}!}\begin{bmatrix} i+j \\ k-j-u \end{bmatrix}_{q^2}\\
&\cdot (x^0)^s (x^{3/0})^{i-k+s+2(j+t)}(x^-)^{k-j-s-t}\,(\hat{E}_q)_{u,s,t} \triangleright f(q^{2u}x^0, q^{-2(k-j)}x^-).
\end{aligned}$$

Darüber hinaus tritt in (6.81) ein Polynom auf, dessen explizite Form gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
&Q_u^{i,j,k,l}(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \qquad (6.88)\\
=\; &\sum_{v=0}^{j}\sum_{s=0}^{k-i}\sum_{\frac{v-s}{2}\leq t\leq v-s} \frac{(q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}})^{j-v}}{[[v]]_{q^2}!}\, q^{2(u+v-j)(k-i)-2u(s+t)}\\
&\cdot q^{2(v-s-t)(i-j+v)}\,(C_q)^{v,k-i}_{s,t}\begin{bmatrix} i \\ j-v \end{bmatrix}_{q^2}\\
&\cdot (x^0)^s (x^+)^{k-i-s-t}\,\big(x^{3/0}\big)^{i-j+s+2t}\big(x^-\big)^{j+l-s-t}.
\end{aligned}$$

Schließlich wollen wir noch die Definition des Operators E aus (6.85) angeben, für den gelten soll

$$\begin{aligned}
&(\hat{E}_q)_{j,s,t} \triangleright (x^+)^{n_+}(x^{3/0})^{n_{3/0}}(x^0)^{n_0}(x^-)^{n_-} \qquad (6.89)\\
=\; &q^{2n_{3/0}(n_0-s-t)}\,(C_q)^{j,n_0}_{s,t}\cdot (x^+)^{n_+ + n_0-s-t}(x^{3/0})^{n_{3/0}}(x^-)^{n_-}.
\end{aligned}$$

was sich zu folgendem Operatorausdruck verallgemeinern lässt:

$$\begin{aligned}
&(\hat{E}_q)_{j,s,t} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \qquad (6.90)\\
=\; &(q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}})^{j-2t}\, q^{-(j-s-t)(2(j-s-t)-1)}\\
&\Big[(\hat{T}^0_q)_{s,t,j-s-t}\, q^{2\hat{n}_0\hat{n}_{3/0}}(D^0_{q^{-2}})^{s+t} f\Big]_{x^0\to x^{3/0}}.
\end{aligned}$$

Die Berechnung der Antipode können wir ähnlich wie die des Coproduktes durchführen. D.h., wir gehen wieder von der Identität (6.59) aus und führen damit die Bestimmung der Antipode eines normalgeordneten Monoms auf die Auswertung des folgenden Ausdrucks zurück:

$$\begin{aligned} & S_L((X^+)^{n_+}(X^{3/0})^{n_{3/0}}(T^-)^{n_0} \triangleright (X^+)^{n_0}(X^-)^{n_-}) \\ = \;& S_L((T^-)^{n_0} \triangleright (X^+)^{n_0}(X^-)^{n_-})\, S_L(X^{3/0})^{n_{3/0}} S_L(X^+)^{n_+} \\ = \;& [(T^-)^{n_0} \triangleright (S_L(X^-)^{n_-} S_L(X^+)^{n_0})]\, S_L(X^{3/0})^{n_{3/0}} S_L(X^+)^{n_+}. \end{aligned} \tag{6.91}$$

Dabei haben wir neben der Identität (6.32) zusätzlich ausgenutzt, dass gilt

$$S(h \triangleright f) = S(f) \triangleleft S(h) = h \triangleright S(f). \tag{6.92}$$

Als Erstes wollen wir einen Ausdruck für $S_L(X^{3/0})^{n_{3/0}} S_L(X^+)^{n_+}$ berechnen. Mit den gleichen Methoden, die wir bereits bei der Bestimmung des Coproduktes angewandt haben, finden wir

$$\begin{aligned} & S_L(X^{3/0})^{n_{3/0}} \\ = \;& (-\Lambda^{\frac{1}{2}}\sigma^2 X^{3/0} - q^{-\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{\frac{1}{2}} S^1 X^+)^{n_{3/0}} \\ = \;& (-\Lambda^{\frac{1}{2}})^{n_{3/0}} q^{n_{3/0}(n_{3/0}-1)} \sum_{j=0}^{n_{3/0}} (q^{-\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\lambda)^j \begin{bmatrix} n_{3/0} \\ j \end{bmatrix}_{q^{-2}} \\ & \cdot (\sigma^2)^{n_{3/0}-j}(S^1)^j (X^{3/0})^{n_{3/0}-j}(X^+)^j \end{aligned} \tag{6.93}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} & S_L(X^+)^{n_+} \\ = \;& (-\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau^1(\tau^3)^{\frac{1}{2}} X^+ - q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{\frac{1}{2}} T^2(\tau^3)^{\frac{1}{2}} X^{3/0}) \\ = \;& (-\Lambda^{-\frac{1}{2}})^{n_+}(\tau^3)^{\frac{1}{2}n_+}\, q^{n_+(n_+-1)} \sum_{j=0}^{n_+} (q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda)^j\, q^{j(j+1-n_+)} \begin{bmatrix} n_+ \\ j \end{bmatrix}_{q^2} \\ & \cdot (\tau^1)^{n_+-j}(X^{3/0})^j (X^+)^{n_+-j}(T^2)^j. \end{aligned} \tag{6.94}$$

Durch Zusammenfügen dieser beiden Ausdrücke erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} & S_L(X^{3/0})^{n_{3/0}} S_L(X^+)^{n_+} \\ = \;& (-\Lambda^{\frac{1}{2}})^{n_{3/0}+n_+}(\tau^3)^{\frac{1}{2}n_+}\, q^{n_{3/0}(n_{3/0}-1)+n_+(n_+-1)} \\ & \cdot \sum_{j=0}^{n_{3/0}} \sum_{k=0}^{n_+} \sum_{l=0}^{\min(j,n_+-k)} (\lambda_+^{\frac{1}{2}})^{j-k-l}\lambda^{j+k-2l} \end{aligned} \tag{6.95}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot\, q^{\frac{3}{2}(k-j)+\frac{1}{2}l+k(k+1)+\frac{3}{2}l(l+1)+2kl+(n_{3/0}-n_+-2j)(k+l)}\\
&\cdot\, [[l]]_{q^2}! \begin{bmatrix} j \\ l \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} k+l \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} n_{3/0} \\ j \end{bmatrix}_{q^{-2}} \begin{bmatrix} n_+ \\ k+l \end{bmatrix}_{q^2}\\
&\cdot\, (\sigma^2)^{n_{3/0}-j}(S^1)^j(\tau^1)^{n_+-k-l}\,(X^{3/0})^{n_{3/0}-j+k+l}(X^+)^{n_++j-k-l}(T^2)^{k+l}.
\end{aligned}
$$

Als Nächstes wenden wir uns dem Term $S_L(X^-)^{n_-}S_L(X^+)^{n_0}$ zu und versuchen auch für diesen einen expliziten Ausdruck zu finden. Aus dem Coprodukt für X^- folgt aber sofort

$$
S_L(X^-)^{n_-} = (-1)^{n_-}q^{n_-(n_--1)}(X^-)^{n_-}. \tag{6.96}
$$

Dies liefert zusammen mit (6.94) die Formel

$$
\begin{aligned}
& S_L(X^-)^{n_-}S_L(X^+)^{n_0} \qquad (6.97)\\
= \;& (-1)^{n_0+n_-}\, q^{n_0(n_0-1)+n_-(n_--1)}\\
&\cdot \sum_{i=0}^{\min(n_0,n_-)} (-q\lambda\lambda_+^{-1})^i\, q^{-2i(n_-+n_0-2i)}\,[[i]]_{q^2}! \begin{bmatrix} n_- \\ i \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} n_0 \\ i \end{bmatrix}_{q^2}\\
&\cdot\, (X^-)^{n_--i}(X^{3/0})^{2i}(X^+)^{n_0-i},
\end{aligned}
$$

wobei wir wieder alle Symmetriegeneratoren aus (6.94) nach links durchgetauscht und anschließend durch ihre Coeins ersetzt haben.

Setzen wir nun die Identitäten (6.95) und (6.97) in den letzten Ausdruck von (6.91) ein und formen diesen mit Hilfe der Identitäten (6.95) und (6.97) um, so gelangen wir zu Termen, die von folgenden Kombinationen aus Symmetriegeneratoren und Koordinaten abhängen:

$$
\begin{aligned}
&\Big[\Big((T^-)^{n_0} \triangleright (X^-)^{n_--i}(X^{3/0})^{2i}(X^+)^{n_0-i}\Big) \qquad (6.98)\\
&\triangleleft\big((\sigma^2)^{n_{3/0}-j}(S^1)^j(\tau^1)^{n_+-k-l}\big)\,(X^{3/0})^{n_{3/0}-j+k+l}(X^+)^{n_++j-k-l}\Big] \triangleleft (T^2)^{k+l}.
\end{aligned}
$$

Es erweist sich wieder als sinnvoll, sämtliche Linkswirkungen in Rechtswirkungen umzuschreiben. Aus diesem Grund führen wir die folgenden Umformungen aus

$$
\begin{aligned}
& [(T^-)^{n_0} \triangleright (X^-)^{n_--i}(X^{3/0})^{2i}(X^+)^{n_0-i}] \qquad (6.99)\\
& \triangleleft[(\sigma^2)^{n_{3/0}-j}(S^1)^j(\tau^1)^{n_+-k-l}]\\
= \;& [(X^-)^{n_--i}(X^{3/0})^{2i}(X^+)^{n_0-i}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\triangleleft[S(T^-)^{n_0}(\sigma^2)^{n_{3/0}-j}(S^1)^j(\tau^1)^{n_+-k-l}]\\
= \;& q^{n_0(n_0-1)}\,[(X^-)^{n_--i}(X^{3/0})^{2i}(X^+)^{n_0-i}]\\
&\triangleleft[(-(\tau^3)^{-\frac{1}{2}})^{n_0}(T^-)^{n_0}(\sigma^2)^{n_{3/0}-j}(S^1)^j(\tau^1)^{n_+-k-l}].
\end{aligned}
$$

Das weitere Vorgehen entspricht wieder jenem im Fall des Coproduktes, indem wir mittels der Identität

$$
\begin{aligned}
&(T^-)^{n_0}(\sigma^2)^{n_{3/0}-j}(S^1)^j(\tau^1)^{n_+-k-l} \qquad (6.100)\\
= \;& \sum_{\alpha=0}^{\min(n_0,n_{3/0}-j)}\;\sum_{\beta=0}^{\min(n_0-\alpha,n_+-k-l)} (-\lambda)^\alpha(q^2\lambda)^\beta\\
&\cdot q^{-\alpha(\alpha-1)-2n_0(n_{3/0}-j-\alpha)+2(n_0-\alpha)(n_+-k-l+\alpha-\beta)}\\
&\cdot [[\alpha+\beta]]_{q^2}! \begin{bmatrix} n_0 \\ \alpha+\beta \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} n_{3/0}-j \\ \alpha \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} n_+-k-l \\ \beta \end{bmatrix}_{q^{-2}}\\
&\cdot (\sigma^2)^{n_{3/0}-j-\alpha}\,(S^1)^{j+\alpha+\beta}\,(\tau^1)^{n_+-k-l-\beta}\,(T^-)^{n_0-\alpha-\beta}
\end{aligned}
$$

die T^--Generatoren zunächst nach rechts vertauschen und anschließend die einzelnen Wirkungen mit Ausnahme jener der T^2-Generatoren sukzessive auswerten. Die Wirkung für die Potenzen der T^--Generatoren haben wir bereits bei der Berechnung des Coproduktes ermittelt. Jetzt benötigen wir diese allerdings für Monome umgedrehter Normalordnung. Mit der gleichen Methode, die bereits zur Ableitung der Formel (C.25) in Anhang 5.3 geführt hat, finden wir

$$
\begin{aligned}
&(T^-)^m \triangleright ((X^-)^{n_-}(X^{3/0})^{n_{3/0}}(X^+)^{n_+}) \qquad (6.101)\\
= \;& q^{m(2n_-+m)}\sum_{k=0}^{m}(q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}})^k\, q^{-2(n_++n_{3/0}-1)(m-k)}\\
&\cdot [[k]]_{q^{-2}}! \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{q^{-2}} \begin{bmatrix} n_{3/0} \\ k \end{bmatrix}_{q^{-2}}\\
&\cdot \sum_{\substack{0\leq s+l\leq \min(n_+,m-k)\\ m-k\leq s+2l}} q^{2(n_{3/3}-k)(s+l)}\,(C_{q^{-1}})^{m-k,n_+}_{s,l}\\
&\cdot (X^0)^s(X^-)^{n_-+m-s-l}(X^{3/0})^{n_{3/0}+2l+s-m}(X^+)^{n_+-s-l}.
\end{aligned}
$$

Die zugehörige Rechtswirkung finden wir daraus dann mit Hilfe der Relation (6.76). Die Rechtswirkungen der Generatoren σ^2, τ^1 und S^1 können hingegen mit folgenden Identitäten sukzessive berechnet werden:

$$\begin{aligned}
& (X^-)^{n_-}(X^{3/0})^{n_{3/0}}(X^+)^{n_+} \triangleleft (\sigma^2)^m \\
= \;& q^{m(n_+ + n_{3/0} - n_-)}(X^-)^{n_-}(X^{3/0})^{n_{3/0}}(X^+)^{n_+},
\end{aligned} \tag{6.102}$$

$$\begin{aligned}
& (X^-)^{n_-}(X^{3/0})^{n_{3/0}}(X^+)^{n_+} \triangleleft (S^1)^m \\
= \;& q^{m(n_+ - n_- + n_{3/0})}\,(q^{+\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}})^m\,[[m]]_{q^{-2}}!\begin{bmatrix} n_+ \\ m \end{bmatrix}_{q^{-2}} \\
& \cdot (X^-)^{n_-}(X^{3/0})^{n_{3/0}+m}(X^+)^{n_+ - m},
\end{aligned} \tag{6.103}$$

$$\begin{aligned}
& (X^-)^{n_-}(X^{3/0})^{n_{3/0}}(X^+)^{n_+} \triangleleft (\tau^1)^m \\
= \;& \sum_{k=0}^{\min(n_+,m)} (-\lambda_+^{-1}\lambda^2)^k\, q^{\frac{1}{2}k(k+1) - n_+(m+2k) + (n_- - n_{3/0})(m-2k) + 2k^2} \\
& \cdot ([[k]]_{q^2}!)^2 \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{q^{-2}} \begin{bmatrix} n_+ \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} n_- \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \\
& \cdot (X^-)^{n_- - k}(X^{3/0})^{n_{3/0}+2k}(X^+)^{n_+ - k}.
\end{aligned} \tag{6.104}$$

Damit haben wir alle Rechenschritte angegeben, mit denen sich ein expliziter Ausdruck für die Antipode eines normalgeordneten Monoms bestimmen lässt. In völliger Analogie zur Behandlung des Coprodukts geben wir wieder einen Operatorausdruck an, der das beschriebene Vorgehen auf eine kommutative Funktion überträgt. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass wir bei unseren Rechnungen von der Normalordnung $X^+X^{3/0}X^0X^-$ ausgegangen sind. Wir müssen allerdings wieder feststellen, dass am Ende des skizzierten Verfahrens sich ein Ergebnis mit einer umgedrehten Normalordnung ergibt, das noch die Anwendung eines Umordnungsoperators notwendig macht. Unter Berücksichtigung dieser Umstände können wir dann für die kommutativen Funktionen schreiben

$$\begin{aligned}
& \hat{U}(f(\underline{\ominus}_L x)) \\
= \;& \sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{j}(-q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}})^{k+l}\,\lambda^{j+k+2l} \\
& \cdot \frac{q^{\frac{3}{2}l(l+1)+k(k+2)+j(j-2)+(k+l)^2-2(jk+jl-kl)}}{[[j-l]]_{q^2}![[l]]_{q^2}![[k]]_{q^2}!} \\
& \cdot (T^2)^{k+l} \triangleright \Big[(x^+)^j(x^{3/0})^{k+l}\,S^{(2)}_{j,k+l} \triangleright \Big((D^+_{q^2})^{k+l}(D^{3/0}_{q^{-2}})^j S^{(1)}_{k+l} \triangleright (\hat{\Phi}f)\Big)\Big],
\end{aligned} \tag{6.105}$$

wobei wir zur Abkürzung die folgenden Operatoren eingeführt haben:

$$\begin{aligned}
&S^{(2)}_{j,k} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \qquad (6.106)\\
=\;& \sum_{i=0}^{\infty} (-q\lambda\lambda_+^{-1})^i \, \frac{q^{i(i-1)}}{[[i]]_{q^{-2}}!} \sum_{u,v=0}^{\infty} (q^{\frac{1}{2}}\lambda\lambda_+^{-\frac{1}{2}})^{u+v} \, \frac{q^{-u(u-1)}}{[[u]]_{q^2}![[v]]_{q^{-2}}!}\\
&\cdot \sum_{w,p=0}^{\infty} (-1)^{u+p} \, (-\lambda^2\lambda_+^{-1})^w \, \frac{q^{-p(p-1)+\frac{1}{2}w(w+1)}}{[[w]]_{q^{-2}}!}\\
&\cdot \Big[S^{(6)}_{2(i+w)+j+u+v,p,k} \, S^{(5)}_{2i+j+u,v,w} \, S^{(4)}_{i,j+u+v} \, S^{(3)}_{i,u,v} \Big] \triangleright (\hat{\delta}^0_{u+v+p} f),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&S^{(3)}_{i,j,k} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \qquad (6.107)\\
=\;& q^{-2k(j+k-1)} \, (x^0)^{j+k} (x^{3/0})^j \, q^{-\hat{n}_{3/0}(\hat{n}_- + \hat{n}_0) + 2\hat{n}_0\hat{n}_+}\\
&\cdot \Big((D^0_{q^2})^{j+k} (D^{3/0}_{q^2})^j (D^-_{q^{-2}})^i f \Big) (q^{-2(j+k)}x^0, q^{2k}x^+, q^{i-j-k}x^{3/0}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&S^{(4)}_{i,j} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \qquad (6.108)\\
=\;& q^{ij} (D^0_{q^{-2}})^{i+j} f(q^j x^0, q^{-j}x^-),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&S^{(5)}_{i,j,k} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \qquad (6.109)\\
=\;& q^{k(i+j+2k)} (x^+)^{j+k} q^{\hat{n}_+(\hat{n}_- - \hat{n}_0)}\\
&\cdot \Big((D^+_{q^{-2}})^{j+k} (D^0_{q^2} D^-_{q^2})^k f \Big) (q^{-3k}x^0, q^{-(i+j)}x^+, q^{-k}x^-)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&S^{(6)}_{i,j,k} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) \qquad (6.110)\\
=\;& \sum_{l=0}^{j} (q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}})^l \, q^{(j-l)(j+l-2(i-1))} \, [[l]]_{q^2}! \begin{bmatrix} j \\ l \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} i \\ l \end{bmatrix}_{q^{-2}}\\
&\cdot \sum_{s=0}^{\infty} \; \sum_{\frac{j-l-s}{2} \leq t \leq j-l-s} q^{2(s+t)(i+k-l)} \, (x^0)^s (x^{3/0})^{i+2t-j+s} (x^-)^{j-s-t}\\
&\cdot (\hat{E}_{q^{-1}})_{j-l,s,t} \triangleright f(q^{2(j-k)}x^0, q^{-2(j-l)}x^+).
\end{aligned}$$

Abschließende geben wir wieder die Transformationsregeln an, die es uns auf einfache Weise erlauben, die Formeln für die anderen Hopfstrukturen zu finden, nämlich

$$f(x \underline{\oplus}_L\, y) \quad \overset{\substack{\pm\,\to\,\mp \\ q\,\to\,1/q}}{\longleftrightarrow} \quad f(x \,\underline{\widetilde{\oplus}}_{\hat{L}}\, y), \tag{6.111}$$

$$\begin{aligned} f(x \underline{\oplus}_L\, y) \quad &\overset{+\leftrightarrow-}{\longleftrightarrow} \quad f(x \underline{\oplus}_{\hat{R}}\, y), \\ f(x \,\underline{\widetilde{\oplus}}_R\, y) \quad &\overset{+\leftrightarrow-}{\longleftrightarrow} \quad f(x \,\underline{\widetilde{\oplus}}_{\hat{L}}\, y) \end{aligned} \tag{6.112}$$

und

$$f(\underline{\ominus}_L x) \quad \overset{\substack{\pm\,\to\,\mp \\ q\,\to\,1/q}}{\longleftrightarrow} \quad f(\underline{\widetilde{\ominus}}_{\hat{L}} x), \tag{6.113}$$

$$\begin{aligned} f(\underline{\ominus}_L x) \quad &\overset{+\leftrightarrow-}{\longleftrightarrow} \quad f(\underline{\ominus}_{\hat{R}} x), \\ f(\underline{\widetilde{\ominus}}_R x) \quad &\overset{+\leftrightarrow-}{\longleftrightarrow} \quad f(\underline{\widetilde{\ominus}}_{\hat{L}} x). \end{aligned} \tag{6.114}$$

Kapitel 7

q-Exponentiale

In den letzten fünf Kapiteln haben wir den Aufbau einer q-Analysis durch die explizite Berechnung von Sternprodukten, Ableitungsoperatoren, Integralen, Zopfprodukten sowie Translationen weit vorangetrieben. Was jetzt noch fehlt, um diesen Satz an Elementen vorerst komplett zu machen, ist die Konstruktion von q-Exponentialen. Die Existenz q-deformierter Analoga für die klassische Exponentialfunktion ist im Rahmen der q-Funktionen sowie des damit verbundenen q-Kalküls hinreichend bekannt [46], [10], [14]. Dieser q-Kalkül kann aber nach den Überlegungen in [66] als eine Analysis über einer Algebra mit der einfachen Verzopfung

$$\Psi(x \otimes y) = q(y \otimes x) \tag{7.1}$$

angesehen werden. Stellt man also diese Verzopfung in den Mittelpunkt der Überlegungen [11], so gelangt man zu einer axiomatischen Behandlung des q-Kalküls, die sich leicht auf beliebige Verzopfungen verallgemeinern lässt. Obwohl bisher nicht explizit erwähnt, ordnen sich all unsere bisherigen Betrachungen genau diesem Zugang unter und lassen sich daher als eine mehrdimensionale Version des bekannten q-Kalküls verstehen. Der entscheidende Vorteil dieser Vorgehensweise gegenüber einer rein heuristischen besteht nun darin, dass sie in Übereinstimmung mit den abstrakten Überlegungen aus der Kategorientheorie steht. Damit ist nämlich die Forderung verbunden, dass alle Objekte kovariant bezüglich einer zugrunde liegenden Quantengruppe sein müssen. Und eben dieses Kovarianzprinzip erweist sich schließlich als der eigentliche Bauplan zur Errichtung einer voll funktionsfähigen Theorie. Für genauere Erläuterungen hierzu verweisen wir auf [69], [18].

Ganz allgemein kann man Exponentiale dadurch einführen, dass man zunächst von zwei Algebren ausgeht, zwischen denen eine duale Paarung besteht, d.h. eine Abbildung

$$\langle\, ,\, \rangle : A \otimes A^* \to K \quad \text{mit} \quad \left\langle e_a, f^b \right\rangle = \delta_a^b, \tag{7.2}$$

falls e_a die Basis von A und f^b die dazu duale Basis von A^* bezeichnet. Das Exponential wird nun definiert als die dazu duale Abbildung

$$\exp : K \to A \otimes A^* \quad \text{mit} \quad \exp = \sum_a e_a \otimes f^a. \tag{7.3}$$

Wie in [66] gezeigt, sind aber die Koordinatenalgebren dual zu ihren Ableitungsalgebren, und zwar vermöge der Abbildung

$$\langle\, ,\, \rangle : \mathcal{M}_\partial \otimes \mathcal{M}_x \to K \quad \text{mit} \quad \left\langle f(\partial_i), g(x^j) \right\rangle \equiv \varepsilon(f(\partial_i) \triangleright g(x^j)). \tag{7.4}$$

Wenn es also gelingt in $\mathcal{M}_\partial$ und $\mathcal{M}_x$ Basen zu finden, die bezüglich der obigen Paarung dual zueinander sind, hat man gemäß (7.3) das Exponential gefunden. Nach [66] gelten dann außerdem die Relationen

$$\partial^i \triangleright \exp(x \mid \partial) = \exp(x \mid \partial) \star \partial^i \tag{7.5}$$

sowie

$$\begin{aligned} (\varepsilon \otimes id) \exp(x \mid \partial) &= 1, \\ (id \otimes \varepsilon) \exp(x \mid \partial) &= 1. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Dies bedeutet, dass unsere Exponentiale analog dem klassischen Fall als Eigenfunktionen des Impulsoperators aufgefasst werden können, also eine q-deformierte Version der ebenen Wellen darstellen.

Neben (7.4) gibt es jedoch noch andere Möglichkeiten, zwischen der Ableitungsalgebra und der Koordinatenalgebra eine duale Paarung einzuführen. Der Grund hierfür ist, dass nämlich für jede der vier verschiedenen Möglichkeiten, die partiellen Ableitungen auf der Koordinatenalgebra darzustellen, eine eigene duale Paarung existiert. Wir können daher folgende Paarungen unterscheiden:

$$\begin{aligned} \langle f(\partial), g(x) \rangle_{L,\bar{R}} &\equiv \varepsilon(f(\partial) \triangleright g(x)) = \varepsilon(f(\partial) \,\bar{\triangleleft}\, g(x)), \\ \langle f(\hat{\partial}), g(x) \rangle_{\bar{L},R} &\equiv \varepsilon(f(\hat{\partial}) \,\bar{\triangleright}\, g(x)) = \varepsilon(f(\hat{\partial}) \triangleleft g(x)), \\ \langle f(x), g(\partial) \rangle_{L,\bar{R}} &\equiv \varepsilon(f(x) \triangleright g(\partial)) = \varepsilon(f(x) \,\bar{\triangleleft}\, g(\partial)), \\ \langle f(x), g(\hat{\partial}) \rangle_{\bar{L},R} &\equiv \varepsilon(f(x) \,\bar{\triangleright}\, g(\hat{\partial})) = \varepsilon(f(x) \triangleleft g(\hat{\partial})). \end{aligned} \tag{7.7}$$

Die Indizes sollen dabei angeben, wie die Wirkungen von Koordinaten und Ableitungen aufeinander die duale Paarung bestimmen. Außerdem unterscheiden wir ab jetzt konjugierte und unkonjugierte Ableitungen nicht mehr, d.h. es gilt wie für die Koordinaten

$$\overline{\partial^i} = \partial_i. \tag{7.8}$$

Stattdessen existieren für die partiellen Ableitungen zwei Darstellungen, die unter Konjugation ineinander übergehen. Aus diesem Grund haben wir in (7.7) zur Unterscheidung dieser Darstellungen die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \partial^i \,\bar{\triangleright}\, f &\equiv \bar{\partial}^i \triangleright f, \\ \partial^i \,\bar{\triangleleft}\, f &\equiv \bar{\partial}^i \triangleleft f, \end{aligned} \tag{7.9}$$

eingeführt. Die Ableitungen $\hat{\partial}^i$ unterscheiden sich somit von ∂^i nur noch um eine Normierung. Diese Sichtweise erlaubt eine völlig symmetrische Behandlung von Koordinaten- und Ableitungsalgebra. Dementsprechend stimmen die Darstellung der Koordinaten in (7.7) formal mit jenen der Ableitungen überein, da man die Rollen von Ableitungen und Koordinaten aufgrund ihrer völligen Gleichbehandlung einfach vertauschen darf. Zu jeder der vier Paarungen in (7.7) gibt es ein eigenes Exponential, so dass wir in Ergänzung der Identität (7.5) folgende Liste bekommen:

$$\begin{aligned} \partial^i \triangleright \exp(x_{\hat{R}} \mid \partial_L) &= \exp(x_{\hat{R}} \mid \partial_L) \star \partial^i, \\ \hat{\partial}^i \,\bar{\triangleright}\, \exp(x_R \mid \hat{\partial}_{\hat{L}}) &= \exp(x_R \mid \hat{\partial}_{\hat{L}}) \star \hat{\partial}^i, \\ \partial^i \star \exp(\partial_{\hat{R}} \mid x_L) &= \exp(\partial_{\hat{R}} \mid x_L) \,\bar{\triangleleft}\, \partial^i, \\ \hat{\partial}^i \star \exp(\hat{\partial}_R \mid x_{\hat{L}}) &= \exp(\hat{\partial}_R \mid x_{\hat{L}}) \triangleleft \hat{\partial}^i. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Da diese verschiedenen Exponentiale in Korrespondenz zu unterschiedlichen Darstellungen der partiellen Ableitungen stehen und letztere durch Crossing-Symmetrien miteinander verbunden sind, können wir aus der Kenntnis eines Exponentials die anderen problemlos ableiten. Im Folgenden soll die explizite Form dieser Exponentiale bestimmt werden, und zwar für jeden der von uns betrachteten Quantenräume. Im Gegensatz zu den vorhergehenden Kapiteln können alle notwendigen Rechnungen sofort auf den kommutativen Algebren durchgeführt werden.

7.1 Euklidischer Raum in drei Dimensionen

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist die duale Paarung

$$\langle f(\partial), g(x)\rangle_{L,\hat{R}} \equiv \varepsilon(f(\partial) \triangleright g(x)) = \varepsilon(f(\partial) \,\bar{\triangleleft}\, g(x)). \tag{7.11}$$

Mit den Darstellungen der partiellen Ableitungen aus Kapitel (3.1) findet man die Identitäten

$$\begin{aligned}
\left\langle (\partial_A)^m, (x^+)^n \right\rangle_{L,\hat{R}} &= \varepsilon((\partial_A)^m \triangleright (x^+)^n) = [[n]]_{q^4}!\delta_{m,n}\delta_{A,+}, \qquad (7.12)\\
\left\langle (\partial_A)^m, (x^-)^n \right\rangle_{L,\hat{R}} &= \varepsilon((\partial_A)^m \triangleright (x^-)^n) = [[n]]_{q^4}!\delta_{m,n}\delta_{A,-},\\
\left\langle (\partial_A)^m, (x^3)^n \right\rangle_{L,\hat{R}} &= \varepsilon((\partial_A)^m \triangleright (x^3)^n) = [[n]]_{q^2}!\delta_{m,n}\delta_{A,3}.
\end{aligned}$$

Aus diesen lässt sich dann leicht unter Verwendung der charakteristischen Eigenschaft für die duale Paarung, nämlich

$$\langle f(\partial), g(x)\cdot h(x)\rangle = \left\langle f(\partial)_{(1)}, g(x)\right\rangle \cdot \left\langle f(\partial)_{(2)}, h(x)\right\rangle \tag{7.13}$$

die folgende Formel ableiten:

$$\begin{aligned}
&\left\langle (\partial_-)^{m_-}(\partial_3)^{m_3}(\partial_+)^{m_+}, (x^+)^{n_+}(x^3)^{n_3}(x^-)^{n_-} \right\rangle_{L,\hat{R}} \qquad (7.14)\\
&= \delta_{m_+,n_+}\delta_{m_3,n_3}\delta_{m_-,n_-}\, [[m_+]]_{q^4}![[m_3]]_{q^2}![[m_-]]_{q^4}!.
\end{aligned}$$

Für das Exponential machen wir nun den allgemeinen Ansatz

$$\begin{aligned}
&\exp(x_{\hat{R}} \mid \partial_L) \qquad (7.15)\\
&= \sum_{\underline{n}=0}^{\infty}\sum_{\underline{m}=0}^{\infty} f_{\underline{n},\underline{m}} \cdot (x^+)^{n_+}(x^3)^{n_3}(x^-)^{n_-} \otimes (\partial_-)^{m_-}(\partial_3)^{m_3}(\partial_+)^{m_+},
\end{aligned}$$

wobei $\underline{m}$ bzw. $\underline{n}$ die Gesamtheit der Variablen m_i bzw. n_i, $i \in \{+,3,-\}$ bezeichnet. Aus der Identität

$$\partial_i \triangleright \exp(x_{\hat{R}} \mid \partial_L) = \exp(x_{\hat{R}} \mid \partial_L) \star \partial_i \tag{7.16}$$

folgt allgemein

$$\begin{aligned}
&((\partial_-)^{k_-}(\partial_3)^{k_3}(\partial_+)^{k_+}) \triangleright \exp(x_{\hat{R}} \mid \partial_L) \qquad (7.17)\\
&= \exp(X_{\hat{R}} \mid \partial_L) \star ((\partial_-)^{k_-}(\partial_3)^{k_3}(\partial_+)^{k_+})
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} & (\varepsilon \otimes id)((\partial_-)^{k_-}(\partial_3)^{k_3}(\partial_+)^{k_+}) \triangleright \exp(x_{\hat{R}} \mid \partial_L) \\ = \quad & (\varepsilon \otimes id) \exp(x_{\hat{R}} \mid \partial_L) \star ((\partial_-)^{k_-}(\partial_3)^{k_3}(\partial_+)^{k_+}). \end{aligned} \tag{7.18}$$

Dies ergibt zusammen mit (7.15), (7.14) und (7.6)

$$\begin{aligned} & \sum_{\underline{m}=0}^{\infty} f_{\underline{k},\underline{m}} \, [[k_+]]_{q^4}![[k_3]]_{q^2}![[k_-]]_{q^4}! \, (\partial_-)^{m_-}(\partial_3)^{m_3}(\partial_+)^{m_+} \\ = \quad & (\partial_-)^{k_-}(\partial_3)^{k_3}(\partial_+)^{k_+}. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Daraus lesen wir aber sofort ab, dass gelten muss

$$\begin{aligned} f_{\underline{k},\underline{m}} &= \frac{1}{[[k_+]]_{q^4}![[k_3]]_{q^2}![[k_-]]_{q^4}!}, \quad \text{falls} \quad k_i = m_i, \\ f_{\underline{k},\underline{m}} &= 0, \quad \text{sonst.} \end{aligned} \tag{7.20}$$

Damit haben wir für unser Exponential den folgenden Ausdruck gefunden:

$$\begin{aligned} & \exp(x_{\hat{R}} \mid \partial_L) \\ = \quad & \sum_{\underline{n}=0}^{\infty} \frac{(x^+)^{n_+}(x^3)^{n_3}(x^-)^{n_-} \otimes (\partial_-)^{n_-}(\partial_3)^{n_3}(\partial_+)^{n_+}}{[[n_+]]_{q^4}![[n_3]]_{q^2}![[n_-]]_{q^4}!}. \end{aligned} \tag{7.21}$$

Verwenden wir hingegen kontravariante Ableitungen, so können wir auch schreiben

$$\begin{aligned} & \exp(x_{\hat{R}} \mid \partial_L) \\ & = \sum_{\underline{n}=0}^{\infty} (-q)^{n_+ - n_-} \frac{(x^+)^{n_+}(x^3)^{n_3}(x^-)^{n_-} \otimes (\partial^+)^{n_-}(\partial^3)^{n_3}(\partial^-)^{n_+}}{[[n_+]]_{q^4}![[n_3]]_{q^2}![[n_-]]_{q^4}!}. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Die anderen Exponentiale ergeben sich daraus leicht durch die bekannten Crossing-Symmetrien. Dies ist insoweit verständlich, als die Bestimmung der Exponentiale auf die Berechnung der dualen Paarungen zurückgeführt werden kann und diese wiederum durch die Darstellungen der Ableitungen bzw. Koordinaten festgelegt sind. Damit übertragen sich die Korrespondenzen zwischen den verschiedenen Darstellungen auf die zugehörigen Exponentiale, weshalb gilt

$$\begin{aligned} \exp(x_{\hat{R}} \mid \partial_L) \quad & \overset{\pm \to \mp}{\underset{}{\overset{q \to 1/q}{\longleftrightarrow}}} \quad \widetilde{\exp}(x_R \mid \hat{\partial}_{\hat{L}}), \\ \exp(\partial_{\hat{R}} \mid x_L) \quad & \overset{\pm \to \mp}{\underset{}{\overset{q \to 1/q}{\longleftrightarrow}}} \quad \widetilde{\exp}(\hat{\partial}_R \mid x_{\hat{L}}), \end{aligned} \tag{7.23}$$

d.h. wir haben jeweils die Substitutionen

$$q \leftrightarrow q^{-1}, \quad \partial^{\pm} \leftrightarrow \hat{\partial}^{\mp}, \quad \partial^3 \leftrightarrow \hat{\partial}^3, \quad x^{\pm} \leftrightarrow x^{\mp} \tag{7.24}$$

vorzunehmen. Das $\sim$-Zeichen soll außerdem andeuten, dass den rechten Ausdrücken im Vergleich zu den linken umgedrehte Normalordnungen zugrunde liegen, und zwar sowohl bezüglich der Algebra der Koordinaten wie auch der Algebra der partiellen Ableitungen. Aus dem Zusammenhang zwischen Links- und Rechtsdarstellungen folgt weiterhin

$$\begin{aligned} \exp(x_{\hat{R}} \mid \partial_L) &\overset{+\leftrightarrow-}{\longleftrightarrow} \exp(\partial_{\hat{R}} \mid x_L), \\ \widetilde{\exp}(x_R \mid \hat{\partial}_{\hat{L}}) &\overset{+\leftrightarrow-}{\longleftrightarrow} \widetilde{\exp}(\hat{\partial}_R \mid x_{\hat{L}}), \end{aligned} \tag{7.25}$$

wobei für diesen Übergang neben den Ersetzungen

$$x^{\pm} \leftrightarrow x^{\mp}, \quad \partial^{\pm} \leftrightarrow \partial^{\mp}, \quad \hat{\partial}^{\pm} \leftrightarrow \hat{\partial}^{\mp} \tag{7.26}$$

noch eine Vertauschung der Tensorfaktoren notwendig ist.

7.2 Euklidischer Raum in vier Dimensionen

Die Bestimmung der Exponentiale für den vierdimensionalen Raum erfolgt in völliger Analogie zum dreidimensionalen Fall. Der Ansatz für das Exponential lautet nun

$$\exp(x_R \mid \hat{\partial}_{\hat{L}}) = \sum_{\underline{n}=0}^{\infty} \sum_{\underline{m}=0}^{\infty} f_{\underline{n},\underline{m}} \cdot (x^{1,\ldots,4})^{\underline{n}} \otimes (\hat{\partial}_{4,\ldots,1})^{\underline{m}}, \tag{7.27}$$

wobei

$$\begin{aligned} (x^{1,\ldots,4})^{\underline{n}} &= (X^1)^{n_1}(X^2)^{n_2}(X^3)^{n_3}(X^4)^{n_4}, \\ (\hat{\partial}_{4,\ldots,1})^{\underline{m}} &= (\hat{\partial}_4)^{m_4}(\hat{\partial}_3)^{m_3}(\hat{\partial}_2)^{m_2}(\hat{\partial}_1)^{m_1}. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Für die explizite Form der dualen Paarung

$$\Big\langle f(\hat{\partial}), g(x) \Big\rangle_{\hat{L},R} \equiv \varepsilon(f(\hat{\partial}) \,\bar{\triangleright}\, g(x)) = \varepsilon(f(\hat{\partial}) \triangleleft g(x)) \tag{7.29}$$

gilt jetzt

$$\begin{aligned}
&\left\langle (\hat{\partial}_{4,\dots,1})^{\underline{m}}, (x^{1,\dots,4})^{\underline{n}} \right\rangle_{\hat{L},R} \qquad (7.30)\\
= \;& \delta_{m_1,n_1}\delta_{m_2,n_2}\delta_{m_3,n_3}\delta_{m_4,n_4}\\
&\cdot [[m_1]]_{q^{-2}}![[m_2]]_{q^{-2}}![[m_3]]_{q^{-2}}![[m_4]]_{q^{-2}}!.
\end{aligned}$$

Auf die gleiche Weise wie im vorhergehenden Kapitel folgt dann für die Koeffizienten in (7.27)

$$\begin{aligned}
f_{\underline{k},\underline{m}} &= \frac{1}{[[k_1]]_{q^{-2}}![[k_2]]_{q^{-2}}![[k_3]]_{q^{-2}}![[k_4]]_{q^{-2}}!}, \quad \text{falls} \quad k_i = m_i, \qquad (7.31)\\
f_{\underline{k},\underline{m}} &= 0, \quad \text{sonst.}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das Exponential der Ausdruck

$$\exp(x_R \mid \hat{\partial}_{\hat{L}}) = \sum_{\underline{n}=0}^{\infty} \frac{(x^{1,\dots,4})^{\underline{n}} \otimes (\hat{\partial}_{4,\dots,1})^{\underline{n}}}{[[n_1]]_{q^{-2}}![[n_2]]_{q^{-2}}![[n_3]]_{q^{-2}}![[n_4]]_{q^{-2}}!}. \qquad (7.32)$$

Aufgrund der Crossing-Symmetrien gelten wieder die Zusammenhänge

$$\begin{aligned}
\exp(x_R \mid \hat{\partial}_{\hat{L}}) &\overset{\substack{i \,\to\, i' \\ q \,\to\, 1/q}}{\longleftrightarrow} \widetilde{\exp}(x_{\hat{R}} \mid \partial_L), \qquad (7.33)\\
\widetilde{\exp}(\hat{\partial}_R \mid x_{\hat{L}}) &\overset{\substack{i \,\to\, i' \\ q \,\to\, 1/q}}{\longleftrightarrow} \exp(\partial_{\hat{R}} \mid x_L).
\end{aligned}$$

In expliziter Form beschreiben diese Regeln einen Übergang mit Hilfe der Substitutionen

$$q \leftrightarrow q^{-1}, \quad \partial^i \leftrightarrow \hat{\partial}^{i'}, \quad x^i \leftrightarrow x^{i'}. \qquad (7.34)$$

Des Weiteren gilt auch

$$\begin{aligned}
\widetilde{\exp}(x_{\hat{R}} \mid \partial_L) &\overset{j \leftrightarrow j'}{\longleftrightarrow} \widetilde{\exp}(\partial_{\hat{R}} \mid x_L), \qquad (7.35)\\
\exp(x_R \mid \hat{\partial}_{\hat{L}}) &\overset{j \leftrightarrow j'}{\longleftrightarrow} \exp(\hat{\partial}_R \mid x_{\hat{L}}),
\end{aligned}$$

wobei jetzt der Übergang durch Vertauschung der Tensorfaktoren und Anwendung der Ersetzungen

$$x^i \leftrightarrow x^{i'}, \quad \partial^i \leftrightarrow \partial^{i'}, \quad \hat{\partial}^i \leftrightarrow \hat{\partial}^{i'} \qquad (7.36)$$

erfolgt.

7.3 Minkowski-Raum

Die Bestimmung von Exponentialen für den q-deformierten Minkowski-Raum verlangt wie immer eine gesonderte Betrachtung. Die Komplexität der Darstellungen für die partiellen Ableitungen macht es schwierig, die duale Paarung zwischen Ableitungsalgebra und Koordinatenalgebra auszuwerten. Aus diesem Grund verzichten wir auf eine explizite Berechnung dieser dualen Paarung, die ja grundsätzlich aus den Darstellungen der partiellen Ableitungen bestimmt werden kann. Wir beschränken uns vielmehr darauf, zu einer Basis aus normalgeordneten Monomen die dazu duale Basis zu bestimmen. Ansonsten entspricht das grundsätzliche Vorgehen jenem im Fall der Euklidischen Räume, mit dem Unterschied, dass die Überlegungen eben einen größeren Aufwand erfordern.

Zunächst suchen wir wieder einen geeigneten Ansatz für unser Exponential. Damit dieses in der zugrundeliegenden Kategorie ein Skalar darstellt, muss gelten

$$\begin{aligned} \Lambda \triangleright \exp(x_R \mid \hat{\partial}_{\hat{L}}) &= \exp(x_R \mid \hat{\partial}_{\hat{L}}) \triangleleft \Lambda, \\ \tau^3 \triangleright \exp(x_R \mid \hat{\partial}_{\hat{L}}) &= \exp(x_R \mid \hat{\partial}_{\hat{L}}) \triangleleft \tau^3. \end{aligned} \tag{7.37}$$

Dies impliziert für das Exponential die allgemeine Form

$$\exp(x_R \mid \hat{\partial}_{\hat{L}}) = \sum_{\underline{m}=0}^{\infty} f^{\underline{m}}(\underline{x}) \otimes (\hat{\partial}_-)^{m_-}(\hat{\partial}_{3/0})^{m_{3/0}}(\hat{\partial}_0)^{m_0}(\hat{\partial}_+)^{m_+} \tag{7.38}$$

wobei

$$\begin{aligned} & f^{\underline{m}}(\underline{x}) \\ = & \sum_{\substack{2l+v\leq m_{3/0} \\ m_0+v\geq 0,\, m_\pm+l\geq 0}} f^{\underline{m}}_{l,v} \cdot (x^+)^{m_+ + l}(x^{3/0})^{m_0+v}(x^3)^{m_{3/0}-2l-v}(x^-)^{m_- + l}. \end{aligned} \tag{7.39}$$

Um die folgenden Identitäten kürzer schreiben zu können, vereinbaren wir als Abkürzungen

$$\begin{aligned} \hat{\partial}^{\underline{k}} &\equiv (\hat{\partial}_-)^{k_-}(\hat{\partial}_{3/0})^{k_{3/0}}(\hat{\partial}_0)^{k_0}(\hat{\partial}_+)^{k_+}, \\ x^{\underline{k}} &\equiv (x^+)^{k_+}(x^{3/0})^{k_0}(x^3)^{k_{3/0}}(x^-)^{k_-}. \end{aligned} \tag{7.40}$$

Als Nächstes versuchen wir die unbekannten Koeffizienten $f^{\underline{m}}_{l,v}$ zu bestimmen. Zu diesem Zweck setzen wir den obigen Ansatz für das Exponential in die

Gleichung

$$(\varepsilon \otimes id) \circ \hat{\partial}^{\underline{k}} \triangleright \exp(x_R \mid \hat{\partial}_{\hat{L}}) = \hat{\partial}^{\underline{k}} \tag{7.41}$$

ein und erhalten schließlich das Gleichungssystem

$$\sum_{\substack{2l+v\leq m_{3/0} \\ m_0+v\geq 0,\, m_\pm + l\geq 0}} f^{\underline{m}}_{l,v} \cdot \left\langle \hat{\partial}^{\underline{k}}, x^{\underline{m}+(l,v,-2l-v,l)} \right\rangle_{\hat{L},R} = \delta^{\underline{m},\underline{k}}, \tag{7.42}$$

wobei

$$\delta^{\underline{m},\underline{n}} = \delta^{m_+,n_+}\delta^{m_{3/0},n_{3/0}}\delta^{m_0,n_0}\delta^{m_-,n_-}. \tag{7.43}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich noch weiter vereinfachen, wenn wir berücksichtigen, dass für die duale Paarung gilt

$$\left\langle \hat{\partial}^{\underline{m}}, x^{\underline{m}+(l,v,-2l-v,l)} \right\rangle_{\hat{L},R} = 0, \quad \text{falls } 2l+v>0 \text{ oder } v>0. \tag{7.44}$$

Von der Gültigkeit dieser Identitäten kann man sich leicht anhand der Darstellungen der partiellen Ableitungen auf der Koordinatenalgebra überzeugen. Ist nämlich $2l+v>0$, so treten in der dualen Paarung die $\hat{\partial}^{3/0}$-Ableitungen mit einer höheren Potenz auf als die x^3-Koordinaten. Dies bedeutet aber, dass die Wirkung in der Definition der dualen Paarung verschwindet. Entsprechendes gilt für den Fall $v>0$, allerdings jetzt mit dem Unterschied, dass die Wirkungen der ∂^0-Ableitungen nicht mehr alle $x^{3/0}$-Koordinaten beseitigen können und die Anwendung der Coeins durch die duale Paarung schließlich Null ergibt.

Aus (7.44) kann man folgern, dass gilt

$$f^{\underline{m}}_{l,v} = 0, \quad \text{falls } v<0, \text{ oder } 2l+v<0. \tag{7.45}$$

Mit diesem Wissen lassen sich die Polynome $f^{\underline{m}}(\underline{x})$ in der Form

$$f^{\underline{m}}(\underline{x}) = \sum_{\substack{0\leq 2l+v\leq m_{3/0} \\ 0\leq v,\, -\min(m_+,m_-)\leq l}} f^{\underline{m}}_{l,v} \cdot (x^+)^{m_+ + l}(x^{3/0})^{m_0+v}(x^3)^{m_{3/0}-2l-v}(x^-)^{m_- + l} \tag{7.46}$$

schreiben, während wir unser Gleichungssystem (7.42) jetzt einschränken können auf

$$\sum_{\substack{0\leq 2l+v\leq m_{3/0} \\ 0\leq v,\, -\min(m_+,m_-)\leq l}} f^{\underline{m}}_{l,v} \cdot \left\langle \hat{\partial}^{\underline{m}+(l',v',-2l'-v',l')}, x^{\underline{m}+(l,v,-2l-v,l)} \right\rangle_{\hat{L},R} = \delta^{l'}_0 \delta^{v'}_0. \tag{7.47}$$

Wir wollen als Nächstes einen Algorithmus angeben, mit dem wir obiges Gleichungssystem lösen können. Zu diesem Zweck führen wir die Funktion

$$k(m_{3/0}, v, l) \equiv \sum_{i=0}^{v-1} \left(\left[\frac{m_{3/0} - i}{2} \right] + \left[\frac{i}{2} \right] \right) + v + l + \left[\frac{v}{2} \right] + 1 \tag{7.48}$$

ein, wobei die eckigen Klammern wieder die Gauß-Funktion bezeichnen. Den Wertebereich der ganzzahligen Variablen v und l wollen wir einschränken auf

$$\begin{aligned} 0 &\leq v \leq m_{3/0}, \\ -\left[\frac{v}{2} \right] &\leq l \leq \left[\frac{m_{3/0} - v}{2} \right]. \end{aligned} \tag{7.49}$$

Daraus folgern wir sofort, dass der größte Wert, den k annehmen kann, gegeben ist durch

$$k_{\max}(m_{3/0}) \equiv \sum_{i=0}^{m_{3/0}-1} \left(\left[\frac{m_{3/0} - i}{2} \right] + \left[\frac{i}{2} \right] \right) + m_{3/0} + \left[\frac{m_{3/0}}{2} \right] + 1. \tag{7.50}$$

Umgekehrt kann man bei vorgebenem $m_{3/0}$ aus dem Wert für k wieder die zugehörigen Werte für v und l bestimmen, und zwar durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} v_k &\equiv \max \left\{ j \in \mathbb{N}_0 \mid k - \sum_{i=0}^{j-1} \left(\left[\frac{m_{3/0} - i}{2} \right] + \left[\frac{i}{2} \right] \right) - j > 0 \right\}, \\ l_k &\equiv k - \sum_{i=0}^{v_k-1} \left(\left[\frac{m_{3/0} - i}{2} \right] + \left[\frac{i}{2} \right] \right) - v_k - \left[\frac{v_k}{2} \right] - 1. \end{aligned} \tag{7.51}$$

Der Grund für die Einführung von k besteht nun darin, dass man durch die Vereinbarung

$$f^m_{k(v,l)} \equiv f^m_{v,l} \tag{7.52}$$

das Gleichungssystem (7.47) auf die Form

$$\begin{aligned} f^m_k &= \sum_{\substack{1 \leq j < k \\ -\min(m_+, m_-) \leq l_j}} f^m_j \cdot \frac{\langle k, j \rangle^m_{\hat{L},R}}{\langle k, k \rangle^m_{\hat{L},R}}, \quad \text{für } 1 < k \leq k_{\max}, \\ f^m_1 &= \frac{1}{\langle 1, 1 \rangle^m_{\hat{L},R}} \end{aligned} \tag{7.53}$$

bringen kann, wobei

$$\langle k,j\rangle^{\underline{m}}_{\hat{L},R} \equiv \left\langle \hat{\partial}^{\underline{m}+(l_k,v_k,-2l_k-v_k,l_k)}, x^{\underline{m}+(l_j,v_j,-2l_j-v_j,l_j)} \right\rangle_{\hat{L},R}. \tag{7.54}$$

Damit haben wir aber letztlich eine Rekursionsrelation gefunden, aus der wir für die Koeffizienten $f_k^{\underline{m}}$ mit $k > 1$ den Ausdruck

$$f_k^{\underline{m}} = \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i \sum_{\substack{1=j_0<j_1<\ldots<j_i=k \\ -\min(m_+,m_-)\leq l_{j_1},\ldots,l_{j_i}}} \frac{\prod_{p=1}^{i}\langle j_p, j_{p-1}\rangle^{\underline{m}}_{\hat{L},R}}{\prod_{r=0}^{i}\langle j_r, j_r\rangle^{\underline{m}}_{\hat{L},R}} \tag{7.55}$$

ableiten können. Setzen wir dieses Ergebnis in unseren Ansatz (7.38) ein, so erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} &\exp(x_R \mid \hat{\partial}_{\hat{L}}) \\ = &\sum_{\underline{m}=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_{\max}(m_{3/0})} \frac{1}{\langle 1,1\rangle^{\underline{m}}_{\hat{L},R}} \\ &\cdot \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i \sum_{\substack{1=j_0<j_1<\ldots<j_i=k \\ -\min(m_+,m_-)\leq l_{j_1},\ldots,l_{j_i}}} \prod_{p=1}^{i} \frac{\langle j_p, j_{p-1}\rangle^{\underline{m}}_{\hat{L},R}}{\langle j_p, j_p\rangle^{\underline{m}}_{\hat{L},R}} \\ &\cdot (x^+)^{m_++l_k}(x^{3/0})^{m_0+v_k}(x^3)^{m_{3/0}-2l_k-v_k}(x^-)^{m_-+l_k} \\ &\otimes (\hat{\partial}_-)^{m_-}(\hat{\partial}_{3/0})^{m_{3/0}}(\hat{\partial}_0)^{m_0}(\hat{\partial}_+)^{m_+}. \end{aligned} \tag{7.56}$$

Die expliziten Ausdrücke für die verschiedenen Exponentiale hängen nun wieder über die Transformationsregeln

$$\begin{aligned} \exp(x_R \mid \hat{\partial}_{\hat{L}}) &\overset{\substack{\pm\,\to\,\mp \\ q\,\to\,1/q}}{\longleftrightarrow} \widetilde{\exp}(x_{\hat{R}} \mid \partial_L), \\ \widetilde{\exp}(\hat{\partial}_R \mid x_{\hat{L}}) &\overset{\substack{\pm\,\to\,\mp \\ q\,\to\,1/q}}{\longleftrightarrow} \exp(\partial_{\hat{R}} \mid x_L) \end{aligned} \tag{7.57}$$

und

$$\begin{aligned} \widetilde{\exp}(x_{\hat{R}} \mid \partial_L) &\overset{+\leftrightarrow-}{\longleftrightarrow} \widetilde{\exp}(\partial_{\hat{R}} \mid x_L), \\ \exp(x_R \mid \hat{\partial}_{\hat{L}}) &\overset{+\leftrightarrow-}{\longleftrightarrow} \exp(\hat{\partial}_R \mid x_{\hat{L}}) \end{aligned} \tag{7.58}$$

zusammmen, wobei der Übergang in den ersten beiden Relationen durch die Ersetzungen

$$q \leftrightarrow q^{-1}, \quad \partial^{\pm} \leftrightarrow \hat{\partial}^{\mp}, \quad \partial^3 \leftrightarrow \hat{\partial}^3, \quad x^{\pm} \leftrightarrow x^{\mp} \tag{7.59}$$

und in den letzten beiden durch die Vertauschung der Tensorfaktoren und die Substitutionen

$$x^{\pm} \leftrightarrow x^{\mp}, \quad \partial^{\pm} \leftrightarrow \partial^{\mp}, \quad \hat{\partial}^{\pm} \leftrightarrow \hat{\partial}^{\mp} \tag{7.60}$$

erfolgt.

Anhang A

Notation

1. Die antisymmetrischen q-Zahlen sind definiert durch [26]

$$[[c]]_{q^a} \equiv \frac{1-q^{ac}}{1-q^a}, \qquad a, c \in \mathbb{C}. \tag{A.1}$$

Von diesen zu unterscheiden sind die symmetrischen q-Zahlen

$$[c]_{q^a} \equiv \frac{q^{ac}-q^{-ac}}{q^a-q^{-a}}, \qquad a, c \in \mathbb{C}. \tag{A.2}$$

Für $m \in \mathbb{N}$ können wir außerdem die q-Fakultäten durch

$$[[m]]_{q^a}! \equiv [[1]]_{q^a}\,[[2]]_{q^a} \ldots [[m]]_{q^a}\,, \qquad [[0]]_{q^a}! \equiv 1 \tag{A.3}$$

einführen. Schließlich gibt es auch ein q-Analogon der gewöhnlichen Binomialkoeffizienten, das gegeben ist durch

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ m \end{bmatrix}_{q^a} \equiv \frac{[[\alpha]]_{q^a}\,[[\alpha-1]]_{q^a} \ldots [[\alpha-m+1]]_{q^a}}{[[m]]_{q^a}!} \tag{A.4}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$.

2. Die Jackson-Ableitungen bezüglich der Koordinate x^A sind definiert durch

$$D^A_{q^a} f \equiv \frac{f\left(x^A\right) - f(q^a x^A)}{(1-q^a)x^A}, \tag{A.5}$$

wobei f auch von anderen Koordinaten abhängen kann. Durch mehrfache Anwendung des Operators $D^A_{q^a}$,erhält man Jackson-Ableitungen höherer Ordnung,

$$(D^A_{q^a})^i f \equiv \underbrace{D^A_{q^a} D^A_{q^a} \ldots D^A_{q^a}}_{i \text{ mal}} f. \tag{A.6}$$

3. Für $a > 0$, $q > 1$ und $x^A > 0$ lautet die Definition des Jackson-Integrals

$$\begin{aligned}
(D^A_{q^a})^{-1} f\Big|_0^{x^A} &= -(1-q^a)\sum_{k=1}^{\infty}(q^{-ak}x^A) f(q^{-ak}x^A), \\
(D^A_{q^a})^{-1} f\Big|_{x^A}^{\infty} &= -(1-q^a)\sum_{k=0}^{\infty}(q^{ak}x^A) f(q^{ak}x^A), \\
(D^A_{q^{-a}})^{-1} f\Big|_0^{x^A} &= (1-q^{-a})\sum_{k=0}^{\infty}(q^{-ak}x^A) f(q^{-ak}x^A), \\
(D^A_{q^{-a}})^{-1} f\Big|_{x^A}^{\infty} &= (1-q^{-a})\sum_{k=1}^{\infty}(q^{ak}x^A) f(q^{ak}x^A).
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Für $a > 0$, $q > 1$ und $x^A < 0$ gilt hingegen

$$\begin{aligned}
(D^A_{q^a})^{-1} f\Big|_{x^A}^{0} &= (1-q^a)\sum_{k=1}^{\infty}(q^{-ak}x^A) f(q^{-ak}x^A), \\
(D^A_{q^a})^{-1} f\Big|_{-\infty}^{x^A} &= (1-q^a)\sum_{k=0}^{\infty}(q^{ak}x^A) f(q^{ak}x^A), \\
(D^A_{q^{-a}})^{-1} f\Big|_{x^A}^{0} &= -(1-q^{-a})\sum_{k=0}^{\infty}(q^{-ak}x^A) f(q^{-ak}x^A), \\
(D^A_{q^{-a}})^{-1} f\Big|_{-\infty}^{x^A} &= -(1-q^{-a})\sum_{k=1}^{\infty}(q^{ak}x^A) f(q^{ak}x^A).
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Es sei bemerkt, dass mit den Formeln (A.7) und (A.8) auch q-Integrale über beliebigen Intervallen formuliert werden können [26].

4. Kommutative Koordinaten werden normalerweise mit kleinen Buchstaben (z.B. x^+, x^-, x^3) bezeichnet, während nichtkommutative Koordinaten durch Großbuchstaben (z.B. X^+, X^-, X^3) dargestellt werden.

5. Es werden in kommutativen Funktionen nur solche Argumente explizit angegeben, die von einer Skalierung betroffen sind, d.h. wir schreiben beispielsweise

$$f(q^2x^+) \quad \text{anstelle von} \quad f(q^2x^+, x^3, x^-). \tag{A.9}$$

1. Argumente, die in Klammern eingeschlossen sind, beziehen sich immer auf das erste, links davon stehende Objekt. So gilt beispielsweise

$$D_{q^2}^+ f(q^2x^+) = D_{q^2}^+ (f(q^2x^+)) \tag{A.10}$$

oder

$$D_{q^2}^+ (D_{q^2}^+ f + D_{q^2}^- f)(q^2x^+) = D_{q^2}^+ \left[(D_{q^2}^+ f + D_{q^2}^- f)(q^2x^+) \right]. \tag{A.11}$$

Dagegen betrifft das Ersetzungssymbol $|_{x' \to x}$ den gesamten Ausdruck, der sich links von diesem erstreckt, also

$$(M^-)^l_{i,j}\,(O_1^-)_l f\big|_{x^3 \to y_-} = \left[(M^-)^l_{i,j} (O_1^-)_l f \right]\big|_{x^3 \to y_-}. \tag{A.12}$$

Anhang B

Verallgemeinerte Variationen

In Kapitel 3.3 hatten wir die Objekte

$$(K_n)^{(k_1,\ldots,k_l)}_{a_1,\ldots,a_l} \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{l} k_i \leq n, \quad k_i, n \in \mathbb{N}, \tag{B.1}$$

als verallgemeinerte Kombinationen eingeführt. Für diese gelten nun eine Reihe einfacher Regeln, die sich unmittelbar aus ihrer Definition durch die Gleichungen (3.153)-(3.155) ergeben.

1. So finden wir die gewöhnlichen Binomiale als Spezialfall wieder, indem gilt

$$(K_n)^{(k)}_1 = \binom{n}{k}. \tag{B.2}$$

2. Ebenso existiert eine Art Kontraktionsregel mit der Form

$$(K_n)^{(k,l)}_{a,a} = (K_n)^{(k+l)}_a. \tag{B.3}$$

3. Außerdem besteht eine Invarianz unter Permutation der Koeffizienten a_i, da man leicht nachprüfen kann, dass gilt

$$(K_n)^{(k_1,\ldots,k_l)}_{a_1,\ldots,a_l} = (K_n)^{(k_{\pi(1)},\ldots,k_{\pi(l)})}_{a_{\pi(1)},\ldots,a_{\pi(l)}}, \tag{B.4}$$

   wobei π irgend eine Permutation von $\{1,\ldots,l\}$ sein soll.

Aufgrund dieser Eigenschaften lassen sich die betrachteten Objekte in drei unterschiedliche Kategorien einteilen, nämlich

1.
$$(K_n)^{(k_1,\dots,k_l)}_{a_1,\dots,a_l}, \quad a_i \neq 1 \quad \text{für alle } i \in \{1,\dots,l\}, \tag{B.5}$$

2.
$$(K_n)^{(k_1,\dots,k_l)}_{a_1,\dots,a_{l-1},1}, \quad a_i \neq 1 \quad \text{für alle } i \in \{1,\dots,l-1\}, \tag{B.6}$$

3.
$$(K_n)^{(k)}_1. \tag{B.7}$$

Für die explizite Berechnung der $(K_n)^{(k_1,\dots,k_l)}_{a_1,\dots,a_l}$ führen wir diese zunächst auf die Elemente der zweiten Kategorie zurück, um diese dann durch die gewöhnlichen Binomialkoeffizienten auszudrücken. Zu diesem Zweck brauchen wir noch die beiden folgenden Regeln, die man durch elementare Berechnung finden kann:

1.
$$(K_n)^{(k)}_a = (1-a)^{-k} - \sum_{m=0}^{k-1} a^{n-m}\,(1-a)^{m-k}\,(K_n)^{(m)}_1, \tag{B.8}$$

2.
$$\begin{aligned}(K_n)^{(k,l)}_{a,1} &= \sum_{m=0}^{l}(-1)^{l-m}\binom{k+l-1-m}{k-1}(1-a)^{m-k-l}\,(K_n)^{(m)}_1 \\ &\quad - (-1)^l \sum_{m=0}^{k-1} a^{n-m}\binom{k+l-1-m}{l}(1-a)^{m-k-l}\,(K_n)^{(m)}_1,\end{aligned} \tag{B.9}$$

3.
$$\begin{aligned}&(K_n)^{(k_1,\dots,k_l)}_{a_1,\dots,a_l} \circ \left(b^{n-k_1-\dots-k_l}\,(K_{n-k_1-\dots-k_l})^{(q_1,\dots,q_p)}_{c_1,\dots,c_p}\right) \\ &= b^{n-k_1-\dots-k_l}\left((K_n)^{(k_1,\dots,k_l)}_{\frac{a_1}{b},\dots,\frac{a_l}{b}} \circ (K_{n-k_1-\dots-k_l})^{(q_1,\dots,q_p)}_{c_1,\dots,c_p}\right).\end{aligned} \tag{B.10}$$

Mit den Regeln (B.8) und (B.10) können wir leicht eine Rekursionsformel finden mit der Form

$$\begin{aligned}&(K_n)^{(k_1,\dots,k_l)}_{a_1,\dots,a_l} \\ =\;& (K_n)^{(k_1,\dots,k_{l-1})}_{a_1,\dots,a_{l-1}} \circ (K_{n-k_1-\dots-k_{l-1}})^{(k_l)}_{a_l} \\ =\;& -\sum_{m=0}^{k_l-1} a_l^{n-k_1-\dots-k_{l-1}-m}\,(1-a_l)^{m-k_l}\,(K_n)^{(k_1,\dots,k_{l-1},m)}_{\frac{a_1}{a_l},\dots,\frac{a_{l-1}}{a_l},1} \\ &+ (1-a_l)^{-k_l}\,(K_n)^{(k_1,\dots,k_{l-1})}_{a_1,\dots,a_{l-1}}.\end{aligned} \tag{B.11}$$

Durch deren wiederholte Anwendung erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
&(K_n)^{(k_1,\ldots,k_l)}_{a_1,\ldots,a_l} \\
= \; & -\sum_{i=1}^{l}\Big(\prod_{j=i+1}^{l}(1-a_j)^{-k_j}\Big) \\
&\cdot \sum_{m=0}^{k_i-1} a_i^{n-k_1-\ldots-k_{i-1}-m}\,(1-a_i)^{m-k_i}\,(K_n)^{(k_1,\ldots,k_{i-1},m)}_{\frac{a_1}{a_i},\ldots,\frac{a_{i-1}}{a_i},1}.
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Damit ist es gelungen, die Variationen (B.5) auf die spezielleren Variationen (B.6) zurückzuführen. Mit Hilfe der Regeln (B.9) und (B.10) können wir eine weitere Rekursionsformel ableiten, die es uns ermöglicht, die Variationen (B.6) durch die gewöhnlichen Binomialkoeffizienten auszudrücken. Dazu berechnen wir wieder

$$\begin{aligned}
&(K_n)^{(k_1,\ldots,k_l)}_{a_1,\ldots,a_{l-1},1} \\
= \; & (K_n)^{(k_1,\ldots,k_{l-2})}_{a_1,\ldots,a_{l-2}} \circ (K_{n-k_1-\ldots-k_{l-2}})^{(k_{l-1},k_l)}_{a_{l-1},1} \\
= \; & \sum_{m=0}^{k_l}(-1)^{k_l-m}\binom{k_l+k_{l-1}-m-1}{k_{l-1}-1} \\
&\quad \cdot (1-a_{l-1})^{m-k_l-k_{l-1}}(K_n)^{(k_1,\ldots,k_{l-2},m)}_{a_1,\ldots,a_{l-2},1} \\
&- (-1)^{k_l}\sum_{m=0}^{k_{l-1}-1}\binom{k_l+k_{l-1}-m-1}{k_l} \\
&\quad \cdot a_{l-1}^{n-k_1-\ldots-k_{l-2}-m}\,(1-a_{l-1})^{m-k_l-k_{l-1}}\,(K_n)^{(k_1,\ldots,k_{l-2},m)}_{\frac{a_1}{a_{l-1}},\ldots,\frac{a_{l-2}}{a_{l-1}},1}
\end{aligned} \tag{B.13}$$

und erhalten so die gewünschte Identität.

Mit Hilfe dieser neuen Kombinationssymbole haben wir in Kapitel 3.3 die Ableitungen

$$D^{(k_1,\ldots,k_l)}_{a_1,\ldots,a_l}x^n = \begin{cases} (K_n)^{(k_1,\ldots,k_l)}_{a_1,\ldots,a_l}\, x^{n-k_1-\ldots-k_l}, \\ 0, \quad \text{falls } n < k_1+\ldots+k_l \end{cases} \tag{B.14}$$

eingeführt. Aufgrund dieser Definition ergeben sich aus den obigen Identitäten (B.12) und (B.13) entsprechende Beziehungen für die neuen Ableitungen. So liefert etwa die Relation (B.12) sofort

$$D^{(k_1,\ldots,k_l)}_{a_1,\ldots,a_l}f(x) \tag{B.15}$$

$$= -\sum_{i=1}^{l}\Big(\prod_{j=i+1}^{l}(x-a_jx)^{-k_j}\Big)$$
$$\cdot\sum_{m=0}^{k_i-1}(x-a_ix)^{m-k_i}\left(D^{(k_1,\ldots,k_{i-1},m)}_{\frac{a_1}{a_i},\ldots,\frac{a_{i-1}}{a_i},1}f\right)(a_ix),$$

während aus (B.13) die Identität

$$\begin{aligned} & D^{(k_1,\ldots,k_l)}_{a_1,\ldots,a_{l-1},1}f(x) \\ = \; & \sum_{m=0}^{k_l}(-1)^{k_l-m}\binom{k_l+k_{l-1}-m-1}{k_{l-1}-1} \\ & \qquad \cdot(x-a_{l-1}x)^{m-k_l-k_{l-1}}\,D^{(k_1,\ldots,k_{l-2},m)}_{a_1,\ldots,a_{l-2},1}f(x) \\ & -(-1)^{k_l}\sum_{m=0}^{k_{l-1}-1}\binom{k_l+k_{l-1}-m-1}{k_l} \\ & \qquad \cdot(x-a_{l-1}x)^{m-k_l-k_{l-1}}\left(D^{(k_1,\ldots,k_{l-2},m)}_{\frac{a_1}{a_{l-1}},\ldots,\frac{a_{l-2}}{a_{l-1}},1}f\right)(a_{l-1}x) \end{aligned} \tag{B.16}$$

folgt. Durch wiederholte Anwendung dieser Formeln lassen sich alle betrachteten Ableitungen auf die einfachen Ableitungen

$$D^{(k)}_1 f(x)=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial x^k}f(x) \tag{B.17}$$

zurückführen.

Anhang C

Spezielle Operatoren

In den Kapiteln 5.3 und 6.3 haben wir für den q-deformierten Minkowski-Raum Formeln zur Berechnung von Zopfprodukt, Coprodukt und Antipode bestimmt. Um diese Ausdrücke auf der kommutativen Funktionenalgebra realisieren zu können, haben wir verschiedene Operatoren eingeführt, deren Ursprung im Folgenden kurz diskutiert werden soll.

Als Erstes betrachten wir einen Operator, der auf Potenzen einer vorgegebenen Koordinate gemäß

$$\hat{\eta}_{q^a} \triangleright x^n = \frac{1}{[[n]]_{q^a}!}\, x^n \tag{C.1}$$

wirkt. Um die Wirkung dieses Operators für allgemeine Funktionen ablesen zu können, greifen wir auf die mit den Methoden des q-Kalküls [26], [46] leicht zu beweisende Identität

$$\frac{1}{[[n]]_{q^a}!} = (-1)^n q^{-\frac{a}{2}n(n+1)}\,(1-q^a)^n\,\frac{(q^{-a(1+n)};q^{-a})_\infty}{(q^{-a};q^{-a})_\infty} \tag{C.2}$$

zurück, wobei

$$(a;q^{-c})_\infty \equiv \prod_{j=1}^{\infty}(1-aq^{-c(j-1)}), \quad q>1. \tag{C.3}$$

Für die weitere Umformung gehen wir von der für $q>1$ gültigen Identität aus [26]

$$(z;q^{-c})_n \;\equiv\; \prod_{j=1}^{n}(1-zq^{-c(j-1)}) \tag{C.4}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j \prod_{i=0}^{j-1}(q^{-cn} - q^{-ci})}{(q^{-c}, q^{-c})_j}$$

und lassen in dieser die Variable n gegen Unendlich streben,

$$\begin{aligned} (z; q^{-c})_\infty &= \lim_{n\to\infty} (z; q^{-c})_n \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j \prod_{i=0}^{j-1}(-q^{-ci})}{(q^{-c}, q^{-c})_j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{[[j]]_{q^c}!} \left(\frac{q^c z}{1-q^c}\right)^j . \end{aligned} \tag{C.5}$$

Mit dem letzten Ausdruck in (C.5) gewinnen wir aus (C.2) schließlich die Formel

$$\frac{1}{[[n]]_{q^a}!} = \frac{q^{-\frac{a}{2}n^2}}{(q^{-a}; q^{-a})_\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-q^{-a(\frac{1}{2}+n)})^j}{[[j]]_{q^a}!} (q^{\frac{a}{2}} - q^{-\frac{a}{2}})^{n-j}. \tag{C.6}$$

Diese Identität gilt jedoch nur für $q^a > 1$. Im Fall $q^a < 1$ müssen wir daher zusätzlich die Relation

$$\frac{1}{[[n]]_{q^a}!} = q^{-\frac{a}{2}n(n-1)} \frac{1}{[[n]]_{q^{-a}}!} \tag{C.7}$$

berücksichtigen. Aus den letzten beiden Beziehungen lässt sich nun leicht die allgemeine Form des von uns benötigten Operators $\hat{\eta}^0_{q^{-2}}$ ablesen, nämlich

$$\hat{\eta}^0_{q^{-2}} \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^0, x^-) = \frac{1}{(q^{-2}; q^{-2})_\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-q\lambda)^j}{[[j]]_{q^2}!} f(q^{-2j-1}\lambda x^0). \tag{C.8}$$

Als Nächstes wollen wir uns einem Operator zuwenden, der auf Potenzen einer vorgegebenen Koordinate gemäß

$$\hat{\delta}_m \triangleright x^n = \begin{cases} x^n & \text{für } n = m, \\ 0 & \text{für } n \neq m \end{cases} \tag{C.9}$$

wirkt. Um wieder dessen allgemeine Darstellung zu finden, betrachten wir den Ausdruck

$$\prod_{j\neq m} (1 - q^{n-j}) = \prod_{j=0}^{m-1} (1 - q^{n-j}) \prod_{j=m+1}^{\infty} (1 - q^{n-j}) \tag{C.10}$$

$$
\begin{aligned}
&= (q^n;q^{-1})_m \prod_{j=1}^{\infty}(1-q^{n-m-1}q^{-j+1}) \\
&= (q^n;q^{-1})_m (q^{n-m-1};q^{-1})_\infty .
\end{aligned}
$$

Diese Umformungen zeigen uns insbesondere, dass gilt

$$
\frac{(q^n;q^{-1})_m (q^{n-m-1};q^{-1})_\infty}{(q^m;q^{-1})_m (q^{-1};q^{-1})_\infty} = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m, \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases} \tag{C.11}
$$

Daher können wir anstelle von (C.9) jetzt auch schreiben

$$
\hat{\delta}_m \triangleright x^n = \frac{(q^n;q^{-1})_m (q^{n-m-1};q^{-1})_\infty}{(q^m;q^{-1})_m (q^{-1};q^{-1})_\infty}\, x^n . \tag{C.12}
$$

Daraus lässt sich nun eine allgemeine Darstellung des Operators $\hat{\delta}_m$ ableiten, indem wir den Nenner auf der linken Seite der Identität (C.11) unter Verwendung von (C.5) und der Formel [26]

$$
(q^n;q^{-1})_m = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j q^{-\frac{1}{2}j(j-1)+nj} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q^{-1}} \tag{C.13}
$$

so umformen, dass wir schließlich erhalten

$$
\begin{aligned}
& (q^n;q^{-1})_m (q^{n-m-1};q^{-1})_\infty \\
= & \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{(q^m-q^{m+1})^{-i}}{[[i]]_q!}\, q^{-\frac{1}{2}j(j-1)+n(i+j)} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q^{-1}} .
\end{aligned} \tag{C.14}
$$

Mit dieser Identität finden wir für die allgemeine Darstellung des von uns benötigten Operators schließlich den Ausdruck

$$
\begin{aligned}
& \hat{\delta}^0_m \triangleright f(x^+, x^{3/0}, x^-, x^0) \\
= & \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j q^{-\frac{1}{2}j(j-1)-im}}{(q^m;q^{-1})_m (q^{-1};q^{-1})_\infty} \cdot \frac{(1-q)^{-i}}{[[i]]_q!} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q^{-1}} f(q^{i+j}x^0).
\end{aligned} \tag{C.15}
$$

In den Kapiteln 5.3 und 6.3 sind uns wiederholt die Größen $(T^-)^n \triangleright (X^+)^m$ begegnet. Diese stellen q-deformierte Analoga der sphärisch harmonischen

Funktionen dar [70], [71]. Zur Berechnung ihrer expliziten Form machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned}&(T^-)^m \triangleright (X^+)^n \\ =& \sum_{\substack{0\leq s+l\leq \min(n,m)\\ m\leq s+2l}} \sum_{i=m-s-l} (C_q)^{m,n}_{s,l,i} \cdot (X^+)^{n-s-l}(X^0)^s(X^{3/0})^{s+2l-m}(X^-)^{m-s-l}.\end{aligned} \tag{C.16}$$

Setzt man weiterhin

$$(C_q)^{m,n}_{s,l,i} = (q\lambda_+)^{\frac{1}{2}m} q^i (d_q)^{m,n}_{s,l,i}, \tag{C.17}$$

so findet man die Rekursionsformel

$$\begin{aligned}(d_q)^{m+1,n}_{s,l,i} &= [[n-s-l-i+1]]_{q^{-2}}\,(d_q)^{m,n}_{s-1,l,i} \\ &\quad + q^{-2(n-s-l-i)}\,[[n-s-l-i+1]]_{q^4}\,(d_q)^{m,n}_{s,l-1,i} \\ &\quad + q^{-2(n-s-l-i)}\,[[l+1]]_{q^2}\,(d_q)^{m,n}_{s,l+1,i-1},\end{aligned} \tag{C.18}$$

$$(d_q)^{n,n}_{n,0,0} = [[n]]_{q^{-2}}!, \tag{C.19}$$

deren Lösung man darstellen kann als

$$(d_q)^{m,n}_{s,l,i} \equiv q^{-2i^2}(q\lambda_+)^{-l}\,(T_q)^n_{s,l,i}\,[[s+l]]_{q^{-2}}!\begin{bmatrix} n \\ s+l\end{bmatrix}_{q^{-2}}, \tag{C.20}$$

$$\begin{aligned}(T_q)^n_{s,l,i} \equiv& \sum_{\substack{s_1+\ldots+s_{i+1}=s\\ l_1+\ldots+l_{i+1}=l}} \prod_{k=1}^{i} q^{-2\sum_{j=1}^k (s_j+l_j)}\,[[l-i+k-l_1-\ldots-l_k]]_{q^2} \\ &\cdot \sum_{\substack{0\leq t_\alpha\leq l_\alpha\\ \alpha=1,\ldots,i+1}} q^{2\sum_{u=1}^{i+1} t_u(n-s-l)} \prod_{k=1}^{i+1}\left(q^{2t_k\sum_{u=1}^{k-1}(s_u+t_u)}\,(P_q)^{s_k,l_k}_{t_k}\right),\end{aligned} \tag{C.21}$$

$$(P_q)^{v,p}_k \equiv \sum_{\substack{0\leq j_1+\ldots+j_p\leq v\\ 0\leq t_1+\ldots+t_k\leq p}} q^{2\sum_{u=1}^k (j_1+\ldots+j_{t_u}+t_u)}. \tag{C.22}$$

Diese Ergebnisse wollen wir nun dafür verwenden, um die Wirkung von $(T^-)^m$ in allgemeiner Form zu bestimmen. Unter Verwendung von (5.69) leiten wir zunächst die folgende Identität ab:

$$\begin{aligned}&(T^-)^m \triangleright (X^+)^{n_+}(X^0)^{n_0}(X^{3/0})^{n_{3/0}}(X^-)^{n_-} \\ =& \sum_{k=0}^m \begin{bmatrix} m \\ k\end{bmatrix}_{q^2} [(T^-)^{m-k}(\tau^3)^{\frac{1}{2}k} \triangleright (X^+)^{n_+}] \\ &\cdot [(T^-)^k \triangleright (X^{3/0})^{n_{3/0}}(X^-)^{n_-}].\end{aligned} \tag{C.23}$$

Setzen wir in den letzten Ausdruck die leicht zu bestätigende Identität

$$\begin{aligned}
&(T^-)^k \triangleright (X^{3/0})^{n_{3/0}}(X^-)^{n_-} \\
= \; &(q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}})^k \, [[k]]_{q^2}! \begin{bmatrix} n_{3/0} \\ k \end{bmatrix}_{q^2} (X^3)^{n_{3/0}-k}(X^-)^k
\end{aligned} \tag{C.24}$$

ein, so gelangen wir unter Berücksichtigung von (C.16) schließlich zu dem Ausdruck

$$\begin{aligned}
&(T^-)^m \triangleright (X^+)^{n_+}(X^0)^{n_0}(X^{3/0})^{n_{3/0}}(X^-)^{n_-} \\
= \; &\sum_{k=0}^{m} \sum_{\substack{0\leq s+l\leq \min(k,n_+) \\ k\leq s+2l}} (q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}})^{m-k}\, q^{-2(m-k)n_+ + 2(k-s-l)(n_{3/0}-m+k)} \\
&\cdot [[m-k]]_{q^2}! \begin{bmatrix} n_{3/0} \\ m-k \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{q^2} (C_q)^{k,n_+}_{s,l,k-s-l} \\
&\cdot (X^+)^{n_+ - s-l}(X^0)^{n_0+s}(X^{3/0})^{n_{3/0}-m+2l+s}(X^-)^{n_-+m-s-l}.
\end{aligned} \tag{C.25}$$

Der dazu korrespondierende Operatorausdruck für kommutative Funktionen lautet dann

$$\begin{aligned}
&(T^-)^m \triangleright f(x^+, x^0, x^{3/0}, x^-) \\
= \; &\sum_{k=0}^{m}\sum_{s=0}^{k} \sum_{\frac{k-s}{2}\leq l\leq k-s} q^{\frac{3}{2}m-l-k}(\lambda_+^{\frac{1}{2}})^{m-2l} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \\
&\cdot q^{-(k-s-l)(2(k-s-l)-1)}\, (\hat{T}_q^+)_{s,l,k-s-l}\, (D^+_{q^{-2}})^{s+l} \\
&\cdot ((D^{3/0}_{q^2})^{m-k} f)(q^{-2(m-k)}x^+, q^{2(k-s-l)}x^{3/0}),
\end{aligned} \tag{C.26}$$

wobei

$$\begin{aligned}
&(\hat{T}_q^+)_{s,l,i} \triangleright f(x^+, x^0, x^{3/0}, x^-) \\
\equiv \; &\sum_{\substack{s_1+\ldots+s_{i+1}=s \\ l_1+\ldots+l_{i+1}=l}} \Big(\prod_{k=1}^{i} q^{-2\sum_{j=1}^{k}(s_j+l_j)}\, [[l-i+k-l_1-\ldots-l_k]]_{q^2}\Big) \\
&\cdot \sum_{\substack{0\leq t_\alpha\leq l_\alpha \\ \alpha=1,\ldots,i+1}} \Big(\prod_{k=1}^{i+1} q^{2t_k\sum_{u=1}^{k-1}(s_u+t_u)}\, (P_q)^{s_k,l_k}_{t_k}\Big) f(q^{2\sum_{u=1}^{i+1}t_u}x^+).
\end{aligned} \tag{C.27}$$

Die Formel (C.16) gibt uns aber auch eine Möglichkeit an die Hand, die Potenzen von X^0 durch die Ausdrücke $(T^-)^n \triangleright (X^+)^n$ zu ersetzen, mit denen sich in manchen Fällen leichter rechnen läßt. Zu diesem Zweck lösen wir die Relation (C.16) wie folgt auf:

$$\begin{aligned}(X^0)^n &= \frac{1}{\gamma_n}\mathcal{Y}_0^n \\ &\quad - \frac{1}{\gamma_n}\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{\frac{n-s}{2}\leq l\leq n-s}(C_q)^{n,n}_{s,l,n-s-l} \\ &\quad \cdot (X^+)^{n-s-l}(X^0)^s(X^{3/0})^{s+2l-n}(X^-)^{n-s-l} \\ &= \frac{1}{\gamma_n}\mathcal{Y}_0^n \\ &\quad - \frac{1}{\gamma_n}\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-s}\sum_{i=0}^{l}\delta_{i,n-s-l}(C_q)^{n,n}_{s,l,i} \\ &\quad \cdot (X^+)^{n-s-l}(X^{3/0})^{l-(n-s-l)}(X^0)^s(X^-)^{n-s-l}\end{aligned} \tag{C.28}$$

mit

$$\gamma_n \equiv (q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}})^n[[n]]_{q^{-2}}! \tag{C.29}$$

und

$$\mathcal{Y}^n_{n-m} \equiv (T^-)^m \triangleright (X^+)^n. \tag{C.30}$$

Wendet man diese Formel rekursiv an, so findet man einen Ausdruck der Form

$$(X^0)^n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{\min(k,n-k)} F^n_{k,l}\cdot (X^+)^k(X^{3/0})^{l-k}\mathcal{Y}_0^{n-l-k}(X^-)^k \tag{C.31}$$

mit geeigneten Koeffizienten $F^n_{k,l}$. Damit können wir ein normalgeordnetes Monom umschreiben gemäß

$$\begin{aligned}&(X^+)^{n_+}(X^{3/0})^{n_{3/0}}(X^0)^{n_0}(X^-)^{n_-} \\ &= \sum_{k=0}^{n_0}\sum_{l=0}^{\min(k,n_0-k)} q^{2n_{3/0}k}F^n_{k,l}\cdot (X^+)^{n_++k}(X^{3/0})^{n_{3/0}+l-k}\mathcal{Y}_0^{n_0-l-k}(X^-)^{n_-+k} \\ &= \sum_{k=0}^{n_0}\sum_{l=0}^{\min(k,n_0-k)} q^{2n_{3/0}k-2(n_0-l-k)(n_-+k)}\, F^n_{k,l} \\ &\quad \cdot (X^+)^{n_++k}(X^{3/0})^{n_{3/0}+l-k}\langle\mathcal{Y}_0^{n_0-l-k},(X^-)^{n_-+k}\rangle,\end{aligned} \tag{C.32}$$

wobei

$$\langle \mathcal{Y}^n_m, (X^-)^k\rangle \equiv (T^-)^m \triangleright ((X^+)^n (X^-)^k). \tag{C.33}$$

Wir suchen nun einen geeigneten Operator, der diesen Wechsel der monomialen Basis auf kommutative Funktionen überträgt. Man kann sich überlegen, dass dieser Operator durch die Wirkung

$$\begin{aligned} & \hat{\Phi} \triangleright (x^+)^{n_+}(x^0)^{n_0}(x^{3/0})^{n_{3/0}}(x^-)^{n_-} \\ \equiv \; & \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{\varphi})^k \triangleright (x^+)^{n_+}(x^0)^{n_0}(x^{3/0})^{n_{3/0}}(x^-)^{n_-} \\ & + \frac{1}{\gamma_{n_0}} (x^+)^{n_+}(x^0)^{n_0}(x^{3/0})^{n_{3/0}}(x^-)^{n_-} \end{aligned} \tag{C.34}$$

gegeben ist, wobei

$$\begin{aligned} & \hat{\varphi} \triangleright (x^+)^{n_+}(x^0)^{n_0}(x^{3/0})^{n_{3/0}}(x^-)^{n_-} \\ \equiv \; & -\frac{1}{\gamma_{n_0}} \sum_{s=0}^{n_0-1} \sum_{l=0}^{n_0-s} \sum_{i=0}^{l} \delta_{n_0, i+l+s}\, q^{2in_{3/0}}\, (C_q)^{n_0,n_0}_{s,l,i} \\ & \cdot (x^+)^{n_+ + n_0 - s - l}(x^0)^s (x^{3/0})^{n_{3/0}+l-i}(x^-)^{n_- + i}, \end{aligned} \tag{C.35}$$

falls man nach dessen Ausführung noch die Ersetzung

$$(x^0)^{n_0}(x^-)^{n_-} \to (T^-)^{n_0} \triangleright ((x^0)^{n_0}(x^-)^{n_-}) \tag{C.36}$$

ausführt. Die allgemeine Form des $\hat{\varphi}$-Operators können wir aus (C.35) leicht ablesen. Sie lautet nämlich

$$\begin{aligned} & \hat{\varphi} \triangleright f(x^+, x^0, x^{3/0}, x^-) \\ \equiv \; & -\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (x^0)^s \Big[\Big((\hat{C}_q)_{s,l} (1-\hat{\delta}^0_s)\, \hat{\eta}^0_{q^{-2}} \Big) \triangleright f \,|_{x^0 \to x^+ x^-} \Big]. \end{aligned} \tag{C.37}$$

Da sich für den q-deformierten Minkowski-Raum die Bestimmung von Zopfprodukt, Coprodukt und Antipode mittels der Basistransformation (C.32) stark vereinfacht, bildet der Ausdruck

$$\begin{aligned} & \hat{\Phi} \triangleright f(x^+, x^0, x^{3/0}, x^-) \\ \equiv \; & \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{\varphi})^k \triangleright f(x^+, x^0, x^{3/0}, x^-) + \hat{\eta}^0_{q^{-2}} \triangleright f((q\lambda_+)^{\frac{1}{2}} x^0), \end{aligned} \tag{C.38}$$

stets den Ausgangspunkt für die entsprechenden Berechnungen auf der kommutativen Koordinatenalgebra.

Anhang D

Quantenalgebren

Die von uns betrachteten Quantenräume können als Darstellungsmoduln spezieller Quantenalgebren betrachtet werden. Diese Quantenalgebren stellen gleichsam eine q-deformierte Version jener Lie-Algebren dar, mit denen sich die Drehsymmetrie bzw. Lorentzsymmetrie der klassischen Räume beschreiben lassen. Ihre besondere Bedeutung besteht darin, dass alle mathematischen Gebilde zur Beschreibung physikalischer Phänomene in Bezug auf diese Quantenalgebren wohldefinierte Transformationseigenschaften haben müssen. Im Folgenden wollen wir die Algebrarelationen, die Konjugation und die Hopfstruktur der für uns wichtigen Quantenalgebren zusammenstellen.

Die dem q-deformierten Euklidischen Raum in drei Dimensionen zugrunde liegende Quantenraumalgebra $U_q(su_2)$ wird aufgespannt von den Generatoren L^+, L^- und $\tau^{1/2}$, welche folgenden Relationen genügen [34]:

$$\begin{aligned} \tau^{-1/2}L^{\pm} &= q^{\pm 2}L^{\pm}\tau^{-1/2}, \\ qL^+L^- - q^{-1}L^-L^+ &= q\lambda^{-1}\lambda_+^{-1}(1-\tau^{-1}). \end{aligned}$$

Daraus lässt sich eine andere bekannte Version der Algebra $U_q(su_2)$ ableiten, nämlich

$$\begin{aligned} q^{-1}T^+T^- - qT^-T^+ &= T^3, \\ q^2T^3T^+ - q^{-2}T^+T^3 &= \lambda_+T^+, \\ q^2T^-T^3 - q^{-2}T^3T^- &= \lambda_+T^-, \end{aligned} \tag{D.1}$$

falls man setzt

$$\begin{aligned} T^{\pm} &= q^{\mp\frac{1}{2}}\lambda_+^{1/2}\tau^{1/2}L^{\pm}, \\ T^3 &= \lambda^{-1}(1-\tau). \end{aligned} \tag{D.2}$$

Für die mit den Algebrarelationen verträgliche Konjugation gilt

$$\overline{L^{\pm}} = -q^{\pm 1}L^{\pm}, \quad \overline{\tau^{-1/2}} = \tau^{-1/2} \tag{D.3}$$

bzw.

$$\overline{T^{\pm}} = q^{\mp 2}T^{\pm}, \quad \overline{T^3} = T^3. \tag{D.4}$$

Die Hopfstruktur der Generatoren $L^{\pm}$ und τ lautet

$$\begin{aligned} \Delta(L^{\pm}) &= L^{\pm} \otimes \tau^{-1/2} + 1 \otimes L^{\pm}, \\ \Delta(\tau^{-1/2}) &= \tau^{-1/2} \otimes \tau^{-1/2}, \end{aligned} \tag{D.5}$$

$$\begin{aligned} S(L^{\pm}) &= -L^{\pm}\tau^{1/2}, \\ S(\tau^{-1/2}) &= \tau^{1/2}, \end{aligned} \tag{D.6}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(L^{\pm}) &= 0, \\ \varepsilon(\tau^{-1/2}) &= 1. \end{aligned} \tag{D.7}$$

In Analogie hierzu findet man für die Generatoren $T^{\pm}$ und T^3

$$\begin{aligned} \Delta(T^3) &= T^3 \otimes 1 + \tau \otimes T^3, \\ \Delta(T^{\pm}) &= T^{\pm} \otimes 1 + \tau^{1/2} \otimes T^{\pm}, \end{aligned} \tag{D.8}$$

$$\begin{aligned} S(T^3) &= -\tau^{-1}T^3, \\ S(T^{\pm}) &= -\tau^{-1/2}T^{\pm}, \end{aligned} \tag{D.9}$$

$$\varepsilon(T^A) = 0, \quad A \in \{\pm, 3\}. \tag{D.10}$$

Als Nächstes wollen wir die Quantenalgebra $U_q(so_4)$ betrachten [37], die als Algebra isomorph zum Tensorprodukt zweier $U_q(su_2)$-Algebren ist,

$$U_q(so_4) \cong U_q(su_2) \otimes U_q(su_2). \tag{D.11}$$

Diese wird also aufgespannt von zwei miteinander kommutierenden Sätzen von $U_q(su_2)$-Generatoren, nämlich $L_i^{\pm}$, K_i, $i = 1, 2$. In expliziter Form lauten deren Relationen

$$\begin{aligned} q^{-1}L_i^+L_i^- - qL_i^-L_i^+ &= \lambda^{-1}(1 - K_i^{-1}), \\ L_i^{\pm}K_i - q^{\mp 2}K_iL_i^{\pm} &= 0, \qquad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{D.12}$$

wobei Generatoren mit unterschiedlichen Indizes immer vertauschen. Die Konjugation ist nun gegeben durch

$$\begin{aligned} \overline{L_i^{\pm}} &= q^{\mp 2} L_i^{\mp}, \\ \overline{K_i} &= K_i, \qquad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{D.13}$$

Für die Hopfstruktur findet man schließlich

$$\begin{aligned} \Delta(K_i) &= K_i \otimes K_i, \\ \Delta(L_i^{\pm}) &= L_i^{\pm} \otimes 1 + K_i^{-1} \otimes L_i^{\pm}, \end{aligned} \tag{D.14}$$

$$\begin{aligned} S(K_i) &= K_i^{-1}, \\ S(L_i) &= -K_i L_i^{\pm}, \end{aligned} \tag{D.15}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(K_i) &= 0, \\ \varepsilon(L_i^{\pm}) &= 0. \end{aligned} \tag{D.16}$$

Als Letztes wollen wir noch die Relationen für die q-deformierte Lorentz-Algebra in der von uns benutzten Form [39], [51], [52] zusammenstellen. Die Algebra wir bestimmt durch die Identitäten

$$\begin{aligned} \tau^1 T^+ &= T^+ \tau^1 + \lambda T^2, \\ \tau^1 T^- &= q^{-2} T^- \tau^1 - \lambda S^1, \\ \tau^1 T^2 &= q^2 T^2 \tau^1, \\ \tau^1 S^1 &= S^1 \tau^1, \end{aligned} \tag{D.17}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 T^+ &= T^+ \sigma^2 - q^2 \lambda \tau^3 T^2, \\ \sigma^2 T^- &= q^2 T^- \sigma^2 + q^2 \lambda S^1, \\ \sigma^2 T^2 &= q^{-2} T^2 \sigma^2, \\ \sigma^2 S^1 &= S^1 \sigma^2, \end{aligned} \tag{D.18}$$

$$\begin{aligned} T^+ T^2 &= q^{-2} T^2 T^+, \\ T^- T^2 &= T^2 T^- + \lambda^{-1}(\sigma^2 - \tau^1), \\ T^+ S^1 &= q^2 S^1 T^+ + \lambda^{-1}(\tau^3 \tau^1 - \sigma^2), \\ T^- S^1 &= S^1 T^-, \\ T^+ T^- &= q^2 T^- T^+ + q\lambda^{-1}(1 - \tau^3), \end{aligned} \tag{D.19}$$

$$\begin{aligned}
T^2S^1 &= S^1T^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau^1\sigma^2 &= \sigma^2\tau^1 + q\lambda^3T^2S^1, \\
\tau^3\tau^1 &= \tau^1\tau^3, \\
\tau^3\sigma^2 &= \sigma^2\tau^3, \\
\tau^3T^\pm &= q^{\mp 4}T^\pm\tau^3, \\
\tau^3T^2 &= q^{-4}T^2\tau^3, \\
\tau^3S^1 &= q^4S^1\tau^3.
\end{aligned} \tag{D.20}$$

Hopfstruktur und Konjugation der $U_q(su_2)$-Generatoren T^+, T^- und τ^3 haben wir bereits angegeben. Die Hopfstruktur der verbleibenden Lorentz-Generatoren ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\Delta(\tau^1) &= \tau^1\otimes\tau^1 + \lambda^2S^1(\tau^3)^{-1/2}\otimes T^2, \\
\Delta(\sigma^2) &= \sigma^2\otimes\sigma^2 + \lambda^2T^2(\tau^3)^{1/2}\otimes S^1, \\
\Delta(T^2) &= T^2\otimes\tau^1 + (\tau^3)^{-1/2}\sigma^2\otimes T^2, \\
\Delta(S^1) &= S^1\otimes\sigma^1 + (\tau^3)^{1/2}\tau^1\otimes S^1,
\end{aligned} \tag{D.21}$$

$$\begin{aligned}
S(T^2) &= -q^2(\tau^3)^{1/2}T^2, \\
S(S^1) &= -(\tau^3)^{-1/2}S^1, \\
S(\tau^1) &= \sigma^2, \\
S(\sigma^2) &= \tau^1,
\end{aligned} \tag{D.22}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tau^1) &= \varepsilon(\sigma^2) = 1, \\
\varepsilon(T^2) &= \varepsilon(S^1) = 0.
\end{aligned} \tag{D.23}$$

Für das Verhalten unter Konjugation gilt

$$\begin{aligned}
\overline{\tau^1} &= (\tau^3)^{-1/2}\sigma^2, \\
\overline{\sigma^2} &= (\tau^3)^{1/2}\tau^1, \\
\overline{T^2} &= -(\tau^3)^{-1/2}S^1, \\
\overline{S^1} &= -q^2(\tau^3)^{1/2}T^2.
\end{aligned} \tag{D.24}$$

Anhang E

R-Matrizen

Unter Quantengruppen versteht man im Allgemeinen Hopfalgebren, die weder kommutativ noch kokommutativ sind. Dabei bezeichnet man eine Hopfalgebra H als kokommutativ, falls für ihr Coprodukt gilt

$$\tau \circ \Delta(h) = \Delta(h) \qquad \text{für alle } h \in H, \tag{E.1}$$

wobei τ die gewöhnliche Transposition bezeichnet. Die von uns betrachteten Quantengruppen besitzen nun die wichtige Eigenschaft der Coquasitriangularität. Dies bedeutet, dass die betreffenden Hopfalgebren bis auf eine Konjugation mit einem invertierbaren Element $\mathcal{R}$ kokommutativ sind, d.h. es gilt

$$\tau \circ \Delta h = \mathcal{R}(\Delta h)\mathcal{R}^{-1}. \tag{E.2}$$

Das Objekt $\mathcal{R}$ wird oft als universelle R-Matrix bezeichnet und ist außerdem Element aus $H \otimes H$. Meist wird diese universelle R-Matrix durch eine unendliche Reihe dargestellt. Betrachtet man jedoch Darstellungen der Hopfalgebra H auf einem Vektorraum V, also $T_V : H \to \mathcal{L}(V)$, so kann man aus den universellen R-Matrizen endlichdimensionale Matrizen gewinnen, nämlich

$$\hat{R}_{V,V} \equiv \tau \circ (T_V \otimes T_V)(\mathcal{R}). \tag{E.3}$$

Diese Matrizen wollen wir nun für die Vektordarstellungen im Fall der Quantengruppen $SO_q(3)$, und $SO_q(4)$ sowie der q-Lorentz-Gruppe angeben.

Die R-Matrix für $SO_q(3)$ hat in der Vektordarstellung Blockdiagonalform, wobei sich die einzelnen Blöcke wie folgt angeben lassen:

$$\begin{array}{c|cc} & ++ & -- \\ \hline ++ & 1 & 0 \\ -- & 0 & 1 \end{array} \tag{E.4}$$

$$\begin{array}{c|cc} & +3 & 3+ \\ \hline +3 & 0 & q^{-2} \\ 3+ & q^{-2} & q^{-2}\lambda\lambda_+ \end{array}, \tag{E.5}$$

$$\begin{array}{c|cc} & 3- & -3 \\ \hline 3- & 0 & q^{-2} \\ -3 & q^{-2} & q^{-2}\lambda\lambda_+ \end{array}, \tag{E.6}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & +- & 33 & -+ \\ \hline +- & 0 & 0 & q^{-4} \\ 33 & 0 & q^{-2} & q^{-2}\lambda\lambda_+ \\ -+ & q^{-4} & q^{-2}\lambda\lambda_+ & q^{-4}\lambda^2\lambda_+ \end{array}, \tag{E.7}$$

Die mit diesen Blöcken gebildete 9×9-Matrix besitzt außerdem eine Projektorzerlegung der Form

$$\hat{R} = P_+ - q^{-4}P_- + q^{-6}P_0, \tag{E.8}$$

wobei P_+ auf den 5-dimensionalen Eigenraum zum Eigenwert 1, P_- auf den 3-dimensionalen Eigenraum zum Eigenwert $-q^{-4}$ und P_0 schließlich auf den 1-dimensionalen Eigenraum von $\hat{R}$ projiziert. Die Projektorzerlegung der inversen Matrix lautet dann entsprechend

$$\hat{R}^{-1} = P_+ - q^4P_- + q^6P_0. \tag{E.9}$$

Ihre explizite Form kann man aus den obigen Blöcken leicht ableiten, indem man die Indizes $+$ und $-$ jeweils austauscht und anschließend q stets durch q^{-1} und λ durch $-\lambda$ ersetzt. Symbolisch können wir dies wieder als Crossing-Symmetrie ausdrücken und schreiben

$$\hat{R} \overset{\pm \to \mp}{\underset{}{\overset{q \to 1/q}{\longleftrightarrow}}} \hat{R}^{-1}. \tag{E.10}$$

Die R-Matrix für $SO_q(4)$ besitzt in der Vektordarstellung die folgenden nicht verschwindenden Matrixelemente:

$$\begin{aligned} \hat{R}^{11}_{11} &= \hat{R}^{22}_{22} = \hat{R}^{33}_{33} = \hat{R}^{44}_{44} = q, \\ \hat{R}^{12}_{21} &= \hat{R}^{13}_{31} = \hat{R}^{21}_{12} = \hat{R}^{24}_{42} = \hat{R}^{31}_{13} = \hat{R}^{34}_{42} = \hat{R}^{42}_{24} = \hat{R}^{43}_{34} = 1, \\ \hat{R}^{14}_{41} &= \hat{R}^{23}_{32} = \hat{R}^{32}_{23} = \hat{R}^{41}_{14} = q^{-1}, \\ \hat{R}^{12}_{12} &= \hat{R}^{13}_{13} = \hat{R}^{24}_{24} = \hat{R}^{34}_{34} = \lambda, \\ \hat{R}^{14}_{23} &= \hat{R}^{14}_{32} = \hat{R}^{23}_{14} = \hat{R}^{32}_{14} = -q^{-1}\lambda, \\ \hat{R}^{14}_{14} &= q^{-1}\lambda^2. \end{aligned} \tag{E.11}$$

Die dazugehörige Projektorzerlegung ist nun gegeben durch

$$\hat{R} = qP_+ - q^{-1}P_- + q^{-3}P_0, \tag{E.12}$$

wobei für diesen Fall P_+ jetzt auf einen 9-dimensionalen Eigenraum, P_- auf einen 6-dimensionalen und P_0 wieder auf einen 1-dimensionalen Eigenraum projiziert. Entsprechend lautet die Projektorzerlegung der inversen Matrix jetzt

$$\hat{R}^{-1} = q^{-1}P_+ - qP_- + q^3P_0. \tag{E.13}$$

Auch hier kann die explizite Form der inversen Matrix $\hat{R}^{-1}$ in einer zum dreidimensionalen Fall völlig analogen Weise durch Ausnutzen der Crossing-Symmetrien bestimmt werden, d.h. es gilt

$$\hat{R} \overset{i\,\rightarrow\,i'}{\underset{}{\overset{q\,\rightarrow\,1/q}{\longleftrightarrow}}} \hat{R}^{-1}, \quad i' = 5 - i. \tag{E.14}$$

Für den q-Minkowski-Raum existieren zwei R̂-Matrizen [42], die oft mit $\hat{R}_I$ und $\hat{R}_{II}$ bezeichnet werden. Aber nur eine von diesen, nämlich $\hat{R}_{II}$ erlaubt die Konstruktion eines kovarianten Differentialkalküls, weshalb wir uns auch auf die Angabe dieser Matrix beschränken wollen:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 00 & 03 & 30 & 33 & +- & -+ \\
\hline
00 & \frac{q^{-1}[2]_{q^2}}{\lambda_+} & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{\lambda_+} & -\frac{q\lambda}{\lambda_+} & -\frac{q^{-1}\lambda}{\lambda_+} \\
03 & 0 & -\frac{q^{-2}\lambda}{\lambda_+} & \frac{q^{-1}[2]_{q^2}}{\lambda_+} & -\frac{q^{-1}\lambda^2}{\lambda_+} & -\frac{q^{-1}\lambda}{\lambda_+} & \frac{q^{-1}\lambda}{\lambda_+} \\
30 & 0 & \frac{q^{-1}[2]_{q^2}}{\lambda_+} & -\frac{q^{-2}\lambda}{\lambda_+} & -\frac{q^{-1}\lambda^2}{\lambda_+} & -\frac{q^{-1}\lambda}{\lambda_+} & \frac{q^{-1}\lambda}{\lambda_+} \\
33 & -\frac{\lambda}{\lambda_+} & -\frac{q^{-1}\lambda^2}{\lambda_+} & -\frac{q^{-1}\lambda^2}{\lambda_+} & \frac{2-\lambda^2}{q\lambda_+} & -\frac{\beta_-\lambda}{\lambda_+} & \frac{q^{-1}\lambda}{\lambda_+} \\
+- & -\frac{q\lambda}{\lambda_+} & \frac{q^{-1}\lambda}{\lambda_+} & \frac{q^{-1}\lambda}{\lambda_+} & -\frac{\beta_-\lambda}{\lambda_+} & \lambda^2 & 1 \\
-+ & -\frac{q^{-1}\lambda}{\lambda_+} & -\frac{q^{-1}\lambda}{\lambda_+} & -\frac{q^{-1}\lambda}{\lambda_+} & \frac{q^{-1}\lambda}{\lambda_+} & 1 & 0
\end{array}, \tag{E.15}$$

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 0- & -0 & 3- & -3 & ++ & -- \\
\hline
0- & -\frac{q^{-2}\lambda}{\lambda_+} & \frac{q^{-1}[2]_{q^2}}{\lambda_+} & -\frac{\lambda}{\lambda_+} & \frac{q^{-2}\lambda}{\lambda_+} & 0 & 0 \\
-0 & \frac{q^{-1}[2]_{q^2}}{\lambda_+} & \frac{q^{-2}\lambda}{\lambda_+} & -\frac{\lambda}{\lambda_+} & \frac{q^{-2}\lambda}{\lambda_+} & 0 & 0 \\
3- & \frac{\lambda}{\lambda_+} & \frac{\lambda}{\lambda_+} & -\frac{\beta_+\lambda}{q\lambda_+} & \frac{2q^{-1}}{\lambda_+} & 0 & 0 \\
-3 & \frac{q^{-2}\lambda}{\lambda_+} & \frac{q^{-2}\lambda}{\lambda_+} & \frac{2q^{-1}}{\lambda_+} & \frac{q^{-2}\lambda}{\lambda_+} & 0 & 0 \\
++ & 0 & 0 & 0 & 0 & q^{-2} & 0 \\
-- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q^{-2}
\end{array}, \tag{E.16}$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 0+ & +0 & 3+ & +3 \\
\hline
0+ & -\frac{q^{-2}\lambda}{\lambda_+} & \frac{q^{-1}[2]_{q^2}}{\lambda_+} & \frac{q^{-2}\lambda}{\lambda_+} & -\frac{\lambda}{\lambda_+} \\
+0 & \frac{q^{-1}[2]_{q^2}}{\lambda_+} & -\frac{q^{-2}\lambda}{\lambda_+} & \frac{q^{-2}\lambda}{\lambda_+} & -\frac{\lambda}{\lambda_+} \\
3+ & -\frac{q^{-2}\lambda}{\lambda_+} & -\frac{q^{-2}\lambda}{\lambda_+} & \frac{q^{-2}\lambda}{\lambda_+} & \frac{2q^{-1}}{\lambda_+} \\
+3 & \frac{\lambda}{\lambda_+} & \frac{\lambda}{\lambda_+} & \frac{2q^{-1}}{\lambda_+} & -\frac{\beta_+\lambda}{q\lambda_+}
\end{array}, \tag{E.17}
$$

wobei

$$
\beta_\pm \equiv q^{\pm 1} + \lambda_+. \tag{E.18}
$$

Die dazugehörige Projektorzerlegung lautet jetzt

$$
\hat{R}_{II} = q^{-2}P_S + q^2 P_T - (P_+ + P_-). \tag{E.19}
$$

Das Inverse der R-Matrix gewinnen wir wieder im Rahmen der Crossing-Symmetrien, also über

$$
\hat{R}_{II} \overset{\substack{\pm \to \mp \\ q \to 1/q}}{\longleftrightarrow} \hat{R}_{II}^{-1}, \tag{E.20}
$$

während ihre Projektorzerlegung gegeben ist durch

$$
\hat{R}_{II}^{-1} = q^2 P_S + q^{-2} P_T - (P_+ + P_-). \tag{E.21}
$$

Anhang F

Quantenräume

Als Quantenräume bezeichnet man allgemein Comodule von Hopfalgebren. Solche Quantenräume lassen sich mit Hilfe der R-Matrizen aus Anhang E konstruieren. Diese beschreiben nämlich eine Abbildung auf dem Tensorprodukt zweier Vektordarstellungen der zugrunde liegenden Hopfalgebra. Dieses Tensorprodukt lässt sich aber gemäß

$$T_1 \otimes T_1 = T_2 \oplus T_{(1,1)} \oplus T_0 \tag{F.1}$$

ausreduzieren. Dabei bezeichnet T_2 die vollständig symmetrische Darstellung, $T_{(1,1)}$ die vollständig antisymmetrische Darstellung und T_0 schließlich die triviale eindimensionale Darstellung. Zu jeder dieser irreduziblen Darstellungen gehört also ein unter der Wirkung der Hopfalgebra invarianter Unterraum. Die Forderung nach Kovarianz verlangt nun, dass die durch die R-Matrix beschriebene Abbildung die zugehörigen Unterräume in sich überführt. Dies ist jedoch durch deren Projektorzerlegung

$$\hat{R} = \alpha_+ P_+ + \alpha_- P_- + \alpha_0 P_0, \tag{F.2}$$

stets gewährleistet, wobei α_+, α_- und α_0 die Eigenwerte der R-Matrix bezeichnen. Diese invarianten Darstellungsräume bilden aber auch Koordinatenalgebren, deren Relationen sich aus der Kenntnis der zugehörigen Projektoren ergeben. Wir wollen daher kurz skizzieren, wie man aus der R-Matrix diese Projektoren bestimmen kann.

Dazu gehen wir wieder von der Zerlegung (F.2) aus. Man kann sich nun leicht davon überzeugen, dass die Projektoren durch folgende Formeln ausgedrückt werden können:

$$
\begin{aligned}
P_+ &= \frac{(\hat{R}-\alpha_- I)(\hat{R}-\alpha_0 I)}{(\alpha_+ - \alpha_-)(\alpha_+ - \alpha_0)}, \\
P_- &= \frac{(\hat{R}-\alpha_+ I)(\hat{R}-\alpha_0 I)}{(\alpha_- - \alpha_+)(\alpha_- - \alpha_0)}, \\
P_0 &= \frac{(\hat{R}-\alpha_+ I)(\hat{R}-\alpha_- I)}{(\alpha_0 - \alpha_+)(\alpha_0 - \alpha_-)}.
\end{aligned}
\tag{F.3}
$$

Der Projektor P_- bestimmt über

$$
(P_-)^{ij}_{kl} X^k X^l = 0 \tag{F.4}
$$

die Relationen für die Algebra der Koordinaten, während die Algebra der Formen durch die Relationen

$$
\begin{aligned}
(P_+)^{ij}_{kl} dx^k dx^l &= 0, \\
(P_0)^{ij}_{kl} dx^k dx^l &= 0
\end{aligned}
\tag{F.5}
$$

festgelegt wird. Die Metrik der Koordinatenalgebra lässt sich schließlich aus dem Projektor P_0 mittels

$$
(P_0)^{ij}_{kl} = \frac{1}{g^{mn} g_{mn}} g^{ij} g_{kl} \tag{F.6}
$$

ablesen.

Mit diesen Überlegungen kann man nun bestätigen, dass im Fall des dreidimensionalen q-deformierten Euklidischen Raumes die Koordinatenalgebra den Relationen

$$
\begin{aligned}
X^3 X^+ &= q^2 X^+ X^3, \\
X^- X^3 &= q^2 X^3 X^-, \\
X^- X^+ &= X^+ X^- + \lambda X^3 X^3
\end{aligned}
\tag{F.7}
$$

genügt. Die nicht verschwindenden Elemente der zugehörigen Metrik lauten

$$
g^{+-} = -q, \quad g^{33} = 1, \quad g^{-+} = -q^{-1} \tag{F.8}
$$

sowie

$$
g_{+-} = -q, \quad g_{33} = 1, \quad g_{-+} = -q^{-1}, \tag{F.9}
$$

wobei

$$g^{AB}g_{BC} = \delta^A_C. \tag{F.10}$$

Damit lassen sich kovariante und kontravariante Koordinaten gemäß

$$X^A = g^{AB}X_B, \quad X_A = g_{AB}X^B \tag{F.11}$$

ineinander überführen. Die Relationen der Koordinatenalgebra sind außerdem verträglich mit der Konjugation

$$\overline{X^A} = \overline{X}_A = X_A. \tag{F.12}$$

Als invariante Länge haben wir schließlich noch den Ausdruck

$$X^AX_A = g_{AB}X^AX^B = -qX^+X^- + X^3X^3 - q^{-1}X^-X^+. \tag{F.13}$$

Für den q-deformierten Euklidischen Raum in vier Dimensionen lauten die Relationen der Koordinatenalgebra

$$\begin{aligned} X^1X^2 &= qX^2X^1, && \text{(F.14)} \\ X^1X^3 &= qX^3X^1, \\ X^3X^4 &= qX^4X^3, \\ X^2X^4 &= qX^4X^2, \\ X^2X^3 &= X^3X^2, \\ X^4X^1 &= X^1X^4 + \lambda X^2X^3. && \text{(F.15)} \end{aligned}$$

Die nicht verschwindenden Elemente der Metrik sind

$$g^{14} = q^{-1}, \quad g^{23} = g^{32} = 1, \quad g^{41} = q, \tag{F.16}$$

wobei wieder gilt

$$g^{ij} = g_{ij}, \quad g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j. \tag{F.17}$$

Die Relationen (F.11) und (F.12) gelten auch auf dem vierdimensionalen q-deformierten Euklidischen Raum. Die invariante Länge ist jetzt gegeben durch

$$X^iX_i = g_{ij}X^iX^j = q^{-1}X^1X^4 + X^2X^3 + X^3X^2 + qX^4X^1. \tag{F.18}$$

Für die Koordinatenalgebra des q-deformierten Minkowski Raumes findet man die Relationen

$$\begin{aligned} X^\mu X^0 &= X^0 X^\mu, \quad \mu \in \{0,+,-,3\}, \\ X^- X^3 - q^2 X^3 X^- &= -q\lambda X^0 X^-, \\ X^3 X^+ - q^2 X^+ X^3 &= -q\lambda X^0 X^+, \\ X^- X^+ - X^+ X^- &= \lambda(X^3 X^3 - X^0 X^3), \end{aligned} \tag{F.19}$$

während für die nicht verschwindenden Elemente der Metrik gilt

$$g^{00} = -1, \quad g^{33} = 1, \quad g^{+-} = -q, \quad g^{-+} = -q^{-1}. \tag{F.20}$$

Das invariante Längenelement hat nun die Form

$$X^\mu X_\mu = g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = -X^0 X^0 + X^3 X^3 - q X^+ X^- - q^{-1} X^- X^+. \tag{F.21}$$

Die Relationen (F.11), (F.12) und (F.17) behalten weiterhin ihre Gültigkeit.

Anhang G

Kovarianter Differentialkalkül

Zu jedem Quantenraum einer gegebenen Quantengruppe kann man einen kovarianten Differentialkalkül konstruieren. Genauer gesagt existieren stets zwei solcher Kalküle, die jeweils der R-Matrix und ihrer Inversen zugeordnet werden können. Dementsprechend gehen beide Kalküle unter Konjugation ineinander über. Wir wollen nun kurz skizzieren, wie man zu einer vorgegebenen R-Matrix den zugehörigen Kalkül konstruieren kann.

Zunächst gehen wir vom totalen Differential d aus und verlangen, dass dieses einer undeformierten Leibniz-Regel genügt [72], also

$$d(fg) = (df)g + f(dg), \tag{G.1}$$

wobei weiterhin gelten soll

$$d^2 = 0. \tag{G.2}$$

Bezeichnen wir die Differentiale zu Koordinaten des Quantenraumes mit

$$\xi^i \equiv dX^j, \tag{G.3}$$

so muss für deren Algebra gelten

$$\begin{aligned} (P_+)^{ij}_{kl}\xi^k\xi^l &= 0, \\ (P_0)^{ij}_{kl}\xi^k\xi^l &= 0. \end{aligned} \tag{G.4}$$

Daraus folgt aber sofort mit den Identitäten aus Anhang F

$$\begin{aligned} \xi^i\xi^j &= (P_0 + P_+ + P_-)^{ij}_{kl}\xi^k\xi^l \\ &= (P_-)^{ij}_{kl}\xi^k\xi^l = (\alpha_-)^{-1}(\hat{R})^{ij}_{kl}\xi^k\xi^l. \end{aligned} \tag{G.5}$$

Für den konjugierten Kalkül gilt hingegen

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^i\bar{\xi}^j &= (P_0 + P_+ + P_-)^{ij}_{kl}\bar{\xi}^k\bar{\xi}^l \\ &= (P_-)^{ij}_{kl}\bar{\xi}^k\bar{\xi}^l = \alpha_-(\hat{R}^{-1})^{ij}_{kl}\bar{\xi}^k\bar{\xi}^l. \end{aligned} \tag{G.6}$$

Um die Vertauschungsrelationen zwischen Differentialen und Koordinaten zu finden, macht man den Ansatz

$$X^i\xi^j = C^{ij}_{kl}\xi^k X^l. \tag{G.7}$$

Wendet man auf beide Seiten dieser Gleichung das äußere Differential an, so findet man leicht durch Vergleich mit den obigen Relationen die gesuchte Matrix. Es gilt dann insbesondere

$$X^i\xi^j = -(\alpha_-)^{-1}(\hat{R})^{ij}_{kl}\xi^k X^l. \tag{G.8}$$

Wiederholt man dieses Vorgehen für den konjugierten Kalkül, erhält man entsprechend

$$X^i\bar{\xi}^j = -\alpha_-(\hat{R}^{-1})^{ij}_{kl}\bar{\xi}^k X^l. \tag{G.9}$$

Wir führen nun partielle Ableitungen ein, indem wir für das totale Differential schreiben

$$d = \xi^i\partial_i. \tag{G.10}$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Relation

$$dX^A. = \xi^A. + X^A d. \tag{G.11}$$

ein und vertauscht mit Hilfe von (G.8) alle Differentiale nach links, so gewinnt man schließlich die Vertauschungsregeln

$$\partial_i X^j = \delta^j_i + (\alpha_-)^{-1}(\hat{R})^{jk}_{il}X^l\partial_k. \tag{G.12}$$

Die Differentiale können aber auch unter Verwendung der Relationen (G.9) vertauscht werden. In diesem Fall ergeben sich die Vertauschungsregeln für den zweiten Differentialkalkül mit

$$\hat{\partial}_i X^j = \delta^j_i + \alpha_-(\hat{R}^{-1})^{jk}_{il}X^l\hat{\partial}_k. \tag{G.13}$$

Abschließend sei bemerkt, dass die partiellen Ableitungen die gleichen algebraischen Eigenschaften aufweisen wie die Koordinaten, d.h. sie spannen einen Quantenraum mit den gleichen Relationen auf. Außerdem können wir mittels der Metrik kontravariante Ableitungen wie gewohnt einführen, indem wir vereinbaren

$$\partial^i = g^{ij}\partial_j, \quad \hat{\partial}^i = g^{ij}\hat{\partial}_j. \tag{G.14}$$

Damit lassen sich leicht die Vertauschungsrelationen der kontravarianten Ableitungen mit den Koordinaten berechnen. Man muss hierzu allerdings berücksichtigt, dass für den dreidimensionalen Euklidischen Raum

$$\begin{aligned} g^{AB}(\hat{R})^{CD}_{BE}g_{DF} &= q^{-4}(\hat{R}^{-1})^{AC}_{EF}, \\ g^{AB}(\hat{R}^{-1})^{CD}_{BE}g_{DF} &= q^{4}(\hat{R})^{AC}_{EF}, \end{aligned} \tag{G.15}$$

für den vierdimensionalen Euklidischen Raum entsprechend

$$\begin{aligned} g^{ij}(\hat{R})^{kl}_{jm}g_{ln} &= (\hat{R}^{-1})^{ik}_{mn}, \\ g^{ij}(\hat{R}^{-1})^{kl}_{jm}g_{ln} &= (\hat{R})^{ik}_{mn} \end{aligned} \tag{G.16}$$

und schließlich für den q-deformierten Minkowski-Raum

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}(\hat{R})^{\sigma\alpha}_{\nu\rho}g_{\alpha\beta} &= q^{-2}(\hat{R}^{-1})^{\mu\sigma}_{\rho\beta}, \\ g^{\mu\nu}(\hat{R}^{-1})^{\sigma\alpha}_{\nu\rho}g_{\alpha\beta} &= q^{2}(\hat{R})^{\mu\sigma}_{\rho\beta} \end{aligned} \tag{G.17}$$

gilt.

Literaturverzeichnis

[1] M. Fichtenmüller, A. Lorek, J. Wess, *q-deformed Phase Space and its Lattice Structure,* Z. Phys. **C71** (1996) 533, hep-th/9511106.

[2] J. Wess, *q-Deformed phase space and its lattice structure,* Int. J. Mod. Phys. **A12** (1997) 4997.

[3] B.L. Cerchiai, J. Wess, *q-Deformed Minkowski Space based on a q-Lorentz Algebra,* Eur. Phys. J. **C5** (1998) 553, math.QA/9801104.

[4] B.L. Cerchiai, *Hilbert space representations of a q-deformed Minkowski algebra,* Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München (1997).

[5] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields: Volume I: Foundations,* Cambridge University Press, Cambridge (2000).

[6] W. Heisenberg, Z. Phys. **43** (1930) 4.

[7] W. Heisenberg, Z. Phys. **120** (1943) 513, 673.

[8] W. Heisenberg, Phys. Today **29** (1976) 32.

[9] H.S. Snyder, Phys. Rev. **71** (1947) 38 & **72** (1947) 68.

[10] T.H. Koornwinder, S*pecial functions and q-commuting variables,* preprint (1996), q-alg/9608008.

[11] S. Majid, *Introduction to Braided Geometry and q-Minkowski Space,* preprint (1994), hep-th/9410241.

[12] F.H. Jackson, *On q-functions and a certain difference operator,* trans. Roy. Edin. **46** (1908) 253-281.

[13] F.H. Jackson, *q-Integration,* Proc. Durham Phil. Soc. **7** (1927) 182-189.

[14] L. C. Biedenharn, M. A. Lohe, *Quantum Group Symmetry and q-Tensor Algebras,* World Scientific, Singapore (1995).

[15] J. Wess, B. Zumino, *Covariant differential calculus on the quantum hyperplane*, Nucl. Phys. B. Suppl. **18** (1991) 302-312.

[16] J. Wess, *q-deformed Heisenberg Algebras*, in H. Gausterer, H. Grosse and L. Pittner, eds., Proceedings of the 38. Internationale Universitätswochen für Kern- und Teilchenphysik, no. 543 in Lect. Notes in Phys., Springer-Verlag, Schladming (2000), math-phy/9910013.

[17] S. Majid, *Representations, duals and quantum doubles of monoidal categories,* Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser. II, **26** (1991) 197-206.

[18] S. Majid, *Algebras and Hopf Algebras in Braided Categories,* Lec. Notes Pure Appl. Math. **158** (1994) 55-105.

[19] F. Bayen, M. Flato, C. Frønsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Deformation theory and quantisation. I. Deformations of symplectic structures,* Ann. Phys. **111** (1978) no. 1, 61.

[20] M. Kontsevich, *Deformation Quantization of Poisson Manifolds, I,* q-alg/9709040.

[21] S.L. Woronowicz, *Compact matrix pseudogroups,* Commun. Math. Phys. **111** (1987) 613.

[22] N.Yu. Reshetikhin, L.A. Takhtadzhyan, L.D. Faddeev, *Quantization of Lie Groups and Lie Algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990) 193.

[23] M. Takeuchi, *Matrix Bialgebras and Quantum Groups,*Israel J. Math. **72** (1990) 232.

[24] V.G. Drinfeld, *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation,* Soviet Math. Dokl. **32** (1985) 254-258.

[25] M. Jimbo, *A q-analogue of U(g) and the Yang-Baxter equation,* Lett. Math. Phys. **10** (1985) 63-69.

[26] A. Klimyk, K. Schmüdgen, *Quantum Groups and their Representations,* Springer Verlag, Berlin (1997).

[27] S. Majid, *Foundations of Quantum Group Theory,* University Press, Cambridge (1995).

[28] Chr. Blohmann, *Spin Representations of the q-deformed Poincaré Algebra,* Doktorarbeit, Ludwig Maximilians-Universität München, Sektion Physik (2001), math.QA/0110219.

[29] J. Madore, S. Schraml, P. Schupp, J. Wess, *Gauge Theory on Noncommutative Spaces,* Eur. Phys. J C**16** (2000) 161, hep-th/0001203.

[30] B. Jurčo, P. Schupp, *Non-commutative Yang-Mills theory from equivalence of star products,* Eur. Phys. J. C**14** (2000) 161, hep-th/0001203.

[31] B. Jurco, P. Schupp, J. Wess, *Non-commutative gauge theory for Poisson manifolds,* Nucl. Phys. B**584** (2000) 784, hep-th/0005005.

[32] J.E. Moyal, *Quantum mechanics as a statistical theory,* Proc. Camb. Phil. Soc. **45** (1949) 99.

[33] H. Wachter, M. Wohlgenannt, **-Products on quantum spaces,* Eur. Phys. J. C**23** (2002) 761-767, hep-th/0103120.

[34] A. Lorek, W. Weich, J. Wess, *Non Commutative Euclidean and Minkowski Structures,* Z. Phys. C**76** (1997) 375, q-alg/9702025.

[35] S. Majid, **-structures on braided spaces,* J. Math. Phys. **36** (1995) 4436-3339.

[36] S. Majid, *Quasi-*-structure on q-Poincaré algebras,* J. Geom. Phys. **22** (1997) 14-58.

[37] H. Ocambo, $SO_q(4)$ *quantum mechanics*, Z. Phys. C**70** (1996) 525.

[38] U. Carow-Watamura, M. Schlieker, M. Scholl, S. Watamura, Z. Phys. C**48** (1990) 159.

[39] W.B. Schmidke, J. Wess, B. Zumino, *A q-deformed Lorentz Algebra in Minkowski phase space,* Z. Phys. C**52** (1991) 471.

[40] S. Majid, *Examples of braided groups and braided matrices,* J. Math. Phys. **32** (1991) 3246-3253.

[41] V.K. Dobrev, *New q-Minkowski space-time and q-Maxwell equations hierarchy from q-conformal invariance,* Phys. Lett. **341B** (1994) 133-138 & **346B** (1995) 427.

[42] A. Lorek, W. B. Schmidke, J. Wess, *$SU_q(2)$ Covariant $\hat{R}$-Matrices for Reducible Representations,* Lett. Math. Phys. **31** (1994) 279.

[43] P.P. Kulish, N.Yu. Reshetikhin, *Quantum linear problem for the Sine-Gordon equation and higher representations,* Zap.Nauchn.Sem. LOMI **101** (1981) 101.

[44] V.G. Drinfeld, *Quantum groups,* Proc. of the Int. Congress of Math. (A.M. Gleason, ed.), Amer. math. Soc., Providence (1986) 798-826.

[45] A. Lorek, *q-Deformierte Quantenmechanik und Induzierte Wechselwirkungen,* Doktorarbeit, Ludwig Maximilians-Universität München, Sektion Physik (1995).

[46] V. Kac, P. Cheung, *Quantum Calculus,* Springer Verlag , Berlin (2000).

[47] U. Carow-Watamura, M. Schlieker, S. Watamura, $SO_q(N)-$ *covariant differential calculus on quantum space and deformation of Schrödinger equation,* Z. Phys. C**49** (1991) 439-446.

[48] A. van Daele, *Dual pairs of $\star$-Hopf algebras,* Bull. London Math. Soc. **25** (1993) 209.

[49] C. Bauer, H. Wachter, *Operator representations on quantum spaces,* Eur. Phys. J. C**31** (2003) 261-275, math-ph/0201023.

[50] C. Bauer, *Operatordarstellungen auf Quantenräumen,* Diplomarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München, Fakultät für Physik (2001).

[51] O. Ogievetskii, W.B. Schmidke, J. Wess, B. Zumino, *Six generator q-deformed Lorentz algebra,* Lett. Math. Phys. **23** (1991) 233.

[52] O. Ogievetsky, W.B. Schmidke, J. Wess, B. Zumino, *q-deformed Poincaré Algebra,* Commun. Math. Phys. **150** (1992) 495.

[53] M. Rohregger, J. Wess, *q-Deformed Lorentz Algebra in Minkowski phase space,* Eur. Phys. J. C**7** (1999) 177.

[54] H. Wachter, *q-Integration on quantum spaces,* Eur. Phys. J. C**32** (2004) 281-297, hep-th/0206083.

[55] H. Steinacker, *Integration on quantum Euclidean Space and sphere,* J. Math. Phys. **37** (1996) 4738.

[56] C. Chryssomalakos, B. Zumino, *Translations integrals and Fourier transforms in the quantum plane,* preprint LBL-34803, UCCB-PTH-93/30, in Salamfestschrift, edited by A. Ali, J. Ellis, and S. Randjbar-Daemi, World Sci., Singapore, 1993.

[57] G. Fiore, *The $SO_q(N)$-symmmetric harmonic oszillator on the quantum Euclidean space...,* Int. J. Mod. Phys. A**8** (1993) 4679.

[58] A. Hebecker, W. Weich, *Free particle in q-deformed configuration space,* Lett. Math. Phys. **26** (1992) 245.

[59] M.A. Dietz, *Symmetrische Formen auf Quantenalgebren,* Diplomarbeit, Universität Hamburg, Fakultät für Physik (2001).

[60] A. Kempf, S. Majid, *Algebraic q-integration and Fourier theory on quantum and braided spaces,* J. Math. Phys. **35** (1994) 6802.

[61] J. Schwenk, J. Wess, *A q-deformed quantum mechanical toy model,* Phys. Lett. B. **291** (1992) 273-277.

[62] S. Majid, *Braided groups,* J. Pure Appl. Algebra **86** (1993) 187-221.

[63] S. Majid, *Braided momentum in the q-Poincaré group,* J. Math. Phys. **34** (1993) 2045-2058.

[64] S. Majid, *Transmutation theory and rank for quantum braided groups,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **113** (1993) 45-70.

[65] S. Majid, *Cross products by braided groups and bosonization,* J. Algebra **163** (1994) 165-190.

[66] S. Majid, *Free braided differential calculus, braided binomial theorem and the braided exponential map,* J. Math. Phys. **34** (1993) 4843-4856.

[67] J. Cigler, *Operatormethoden für q-Identitäten,* Monatsh. Math. **88** (1979) 87-105.

[68] J. Cigler, *Operatormethoden für q-Identitäten II: q-Laguerre-Polynome,* Monatsh. Math. **91** (1981) 105-117.

[69] S. Majid, *A Quantum Groups Primer,* University Press, Cambridge (2002).

[70] F. Bachmaier, *The free particle on q-Minkowski space*, Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München, Fakultät für Physik (2003).

[71] N.Z. Iorgov, A.U. Klimyk, *Harmonics on the quantum euclidean space related to the quantum orthogonal group*, math.QA/0302119.

[72] A. Connes, *Non-Commutative Geometry,* Academic Press, New York (1994).

Lebenslauf

13.06.1973	geboren in Ulm als Sohn von Hermann und Ingeborg Wachter, geb. Hartmann
1979-1983	Grundschule, Weißenburg i. Bay.
1983-1992	Werner-von-Siemens Gymnasium, Weißenburg i. Bay.
Mai 1992	Abitur
1992-1998	Studium der Physik an der Julius-Maximilians Universität, Würzburg
Aug. 1994	Vordiplom im Studiengang Physik
1997-1998	Diplomarbeit in Theoretischer Physik bei Prof. Fraas über *'CP-Asymmetrien bei Spinkorrelationen zwischen Charginoproduktion und -zerfall'*.
Nov. 1998	Diplomprüfung im Studiengang Physik
Jun. 1999	Beginn der Promotion am Lehrstuhl von Prof. Wess an der Ludwig-Maximilians-Universität, München
Okt. 1999	Beginn des wirtschaftswissenschaftlichen Zusatzstudiengangs für Ingenieure und Naturwissenschaftler an der Fernuniversität, Hagen
Jan. 2003	Diplomvorprüfung im wirtschaftswissenschaftlichen Zusatzstudiengang