

# **Singulärstetiges Spektrum kugelsymmetrischer Diracoperatoren**

**Dissertation an der Fakultät für Mathematik,  
Informatik und Statistik der  
Ludwig-Maximilians-Universität München**

**vorgelegt von**

**Dipl. Phys. Barbara Janauschek  
am 07.05.2014**



1. Berichterstatter: Prof. Hubert Kalf

2. Berichterstatter: Prof. Martin Klaus

Tag der Disputation: 06.06.2014

# Abstract

The physical picture of particle behaviour that arises from experimental data is that it belongs to one of the following: Either the particle always stays near the origin or the particle comes from infinity, is scattered and escapes to infinity. In the quantum mechanical description these two categories of behaviour are associated with point spectrum and absolutely continuous spectrum respectively. The corresponding spectral measures are point measures or absolutely continuous measures.

According to general results of the measure theory a measure can be decomposed in three parts: a pure point part, an absolutely continuous part and a singular continuous part.

In contrast to the well-known particle behaviour of the other two types of spectrum, the singular continuous spectrum is more difficult to interpret.

For the Schrödinger operator D.B. Pearson constructed an explicit class of potentials that give rise to purely singular continuous spectrum . This example allows the interpretation of the particle behaviour: The particle moves arbitrarily far away from the origin but it feels nevertheless the effect of the potential. Therefore it will recur infinitely often to the vicinity of the origin to run off infinitely often.

The result for the Schrödinger operator leads to the question whether there can be found similar results in relativistic quantum mechanics.

The aim of this paper is to construct for the first time an explicit potential for the Dirac operator that has purely singular continuous spectrum in  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ . The characteristic trait of this potential is that it consists of bumps whose distance is growing rapidly. This allows the particle to depart from the origin arbitrarily far. But the overall effect of the bumps will always lead the particle back to the origin.

## Zusammenfassung

In der Experimentalphysik beobachtet man einerseits gebundene Zustände und andererseits Streuzustände. Diesen Zuständen ordnet die klassische Quantenmechanik folgende Spektren zu: Punktspektrum und absolutstetiges Spektrum. Die zugehörigen Spektalmaße sind Punktmaße bzw. absolutstetige Maße.

In der Maßtheorie ist statuiert, dass jegliches Maß in drei Bestandteile zerlegt werden kann, nämlich ein Punktmaß, ein absolutstetiges Maß und ein singulärstetiges Maß.

Wie lässt sich dieses singulärstetige Spektrum in der Quantenmechanik interpretieren?

Für den Schrödingeroperator wurde durch D. B. Pearson eine explizite Potentialklasse konstruiert, die eine Interpretation des Teilchenverhaltens ermöglicht: Bei singulärstetigem Spektrum entfernt sich das Teilchen beliebig weit vom Ursprung, es kehrt aber auch beliebig oft zum Ursprung zurück.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Konstruktion einer Potentialklasse, die für Diracsysteme außerhalb der zentralen Lücke  $[-1, 1]$  rein singulärstetiges Spektrum aufweist.

Kennzeichnend für diese Potentiale sind Buckel, deren Abstände immer größer werden. Aufgrund der großen Abstände zwischen den Buckeln kann sich das Teilchen beliebig weit vom Ursprung entfernen. Die Gesamtheit der Potentialbuckel führt jedoch auch dazu, dass das Teilchen unendlich oft in Ursprungsnähe zurückkehren muß.

Mit den in der vorliegenden Arbeit konstruierten Potentialen konnte erstmals ein solches Beispiel in der relativistischen Quantenmechanik nachgewiesen werden.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Untersuchung des radialen Anteils des Diracoperators ohne Drehimpulsterme</b>	<b>7</b>
2.1 Allgemeine Bezeichnungen und Definitionen . . . . .	7
2.2 Eigenschaften des Prüfer-Radius und des Prüfer-Winkels . . . . .	11
2.3 Die Spektralfunktion . . . . .	21
2.4 Eigenschaften von $f_j$ und $m_j$ . . . . .	28
2.5 Singulärstetiges Spektrum . . . . .	38
2.5.1 Singulärstetiges Grenzmaß . . . . .	40
2.5.2 Beweis von Satz 2.21 . . . . .	65
2.6 Spektrale Eigenschaften des Grenzoperators $T$ . . . . .	70
2.6.1 Das wesentliche Spektrum von $T$ . . . . .	72
2.6.2 Zum Punktspektrum von $T$ . . . . .	73
<b>3 Untersuchung des radialen Anteils des potentialfreien Diracoperators mit Drehimpulstermen</b>	<b>75</b>
3.1 Lösung der potentialfreien Differentialgleichung mit Drehimpulstermen . . . . .	76
3.2 Transformation der Differentialgleichung . . . . .	78
<b>4 Der radiale Anteil des Diracoperators mit Buckelpotential und Drehimpulstermen auf <math>[1, \infty)</math></b>	<b>83</b>
4.1 Allgemeine Bezeichnungen und Definitionen . . . . .	83

4.2	Eigenschaften des Prüfer-Radius und des Prüfer-Winkels . . . . .	84
4.3	Die Spektralfunktion . . . . .	91
4.3.1	Eigenschaften von $\tilde{f}_j$ und $\tilde{m}_j$ . . . . .	95
4.4	Asymptotisches Verhalten von $\tilde{A}_j$ , $\tilde{B}_j$ und $\tilde{C}_j$ für $a_j \rightarrow \infty$ . .	97
4.5	Singulärstetiges Grenzmaß . . . . .	114
4.6	Spektrale Eigenschaften des Grenzoperators $\tilde{T}$ . . . . .	117
4.6.1	Das wesentliche Spektrum von $\tilde{T}$ . . . . .	118
4.6.2	Zum Punktspektrum von $\tilde{T}$ . . . . .	119
5	<b>Der radiale Anteil des Diracoperators mit Drehimpulstermen auf dem Intervall <math>(0,1]</math></b>	<b>122</b>
6	<b>Der radiale Anteil des Diracoperators mit Buckelpotential und Drehimpulstermen auf <math>\mathbb{R}^+</math></b>	<b>125</b>
7	<b>Das Spektrum für den dreidimensionalen kugelsymmetrischen Fall</b>	<b>130</b>
8	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>132</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>137</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>138</b>

Deep in the human unconsciousness is a pervasive need for a logical universe that makes sense. But the real universe is always one step beyond logic. - Frank Herbert, Dune

# 1 Einleitung

Die Maßtheorie statuiert, dass jedes Maß in ein Punktmaß, ein absolutstetiges Maß und ein singulärstetiges Maß zerlegt werden kann. In der mathematischen Physik, und hier insbesondere in der Quantenmechanik, werden die Spektren selbstadjungierter Operatoren untersucht. Nun stellt sich die Frage, ob bei den zugehörigen Spektralmaßen ebenfalls alle drei Typen von Maßen auftreten, und, wenn ja, welche Bedeutung sie haben.

Zum Punktspektrum gibt es zahlreiche Untersuchungen. Das klassische Beispiel schlechthin ist hier der Schrödingeroperator mit Coulombpotential, der das Wasserstoffatom im nichtrelativistischen Modell beschreibt (siehe beispielsweise [MESSIAH I], Kapitel 11). Das Punktspektrum wird durch gebundene Zustände erzeugt. Im Beispiel des Wasserstoffatoms ist dies das Elektron, das sich stets in der Nähe des Kerns aufhält.

Auch beim absolutstetigen Spektrum besteht der deutliche Bezug zu den experimentellen Beobachtungen. Absolutstetiges Spektrum wird bekanntlich durch Streuzustände erzeugt. Man denke beispielsweise an Rutherford's Streuexperiment. Bei diesen Zuständen kommen die Teilchen aus dem Unendlichen, erfahren eine Wechselwirkung und entfernen sich wieder ins Unendliche ([MESSIAH II], Kapitel 19).

In der Experimentalphysik sind das alltäglich beobachtete Verhalten von Teilchen gebundene Zustände und Streuzustände. Deshalb wurde beim Entwickeln von Modellen, die diese Experimente beschreiben, das Augenmerk entsprechend auf zwei Spektraltypen gelegt, nämlich das Punktspektrum und das absolutstetige Spektrum. Die mathematische Forschung konzentrierte sich somit auf Potentialklassen, die singulärstetiges Spektrum ausschließen. Als stellvertretende Beispiele seien [PERRY/SIGAL/SIMON] und [REED/SIMON 78] genannt. Damit wurde der als Normalfall erachteten Situation des Punktspektrums und des absolutstetigen Spektrums Rechnung

getragen, ohne das singulärstetige Spektrum näher zu untersuchen. [KATO] stellt in Bemerkung 1.8 des Kapitels X fest, dass bei Anwendungen der stetige Teil des Spektrums für die meisten selbstadjungierten Operatoren absolutstetig ist.

Nun weckt aber das oben zitierte maßtheoretische Ergebnis, wenn man sich näher damit befaßt, folgende Neugier: Wenn sich zwei Bestandteile eines Maßes physikalisch interpretieren lassen, ist das auch für den dritten möglich? Was hat es mit singulärstetigen Maßen auf sich? Gibt es Operatoren mit singulärstetigem Spektrum und kann man diesem ein wie auch immer exotisch geartetes Teilchenverhalten zuordnen? Gibt es Experimente, bei denen man dieses Verhalten beobachten kann?

Zunächst konnte zumindest die Existenz von singulärstetigem Spektrum mit Methoden der Inversen Streutheorie bewiesen werden ([ARONSZAJN]). Jedoch hat dieser Ansatz das Manko, nur die Existenz nachzuweisen, ohne nähere Aussagen zum zugehörigen Potential zu ermöglichen. In dieser Situation ohne nähere Kenntnis des Potentials bleibt offen, wie singulärstetiges Spektrum interpretiert werden kann.

Für den nächsten Schritt ist als Ziel gesteckt, ein geeignetes Potential explizit anzugeben, das Anlaß gibt für singulärstetiges Spektrum. Dies wirft die Frage auf, nach welchen Kriterien man passende Kandidaten für das Potential auswählen kann. Es gibt bereits eine ganze Anzahl von Sätzen, die singulärstetiges Spektrum ausschließen. Beispielsweise hat Lavine eine sogenannte No-Bump-Bedingung  $\frac{r}{2} \frac{dV}{dr} < \text{const}$  an das Potential  $V$  formuliert, die sicherstellt, dass das singulärstetige Spektrum leer ist ([LAVINE 72]). Wenn also eine derartige Buckelfreiheit ein absolutstetiges Spektrum garantiert, legt dies die Schlußfolgerung nahe, dass die Suche unter den Buckelpotentialen aussichtsreich ist.

D.B. Pearson untersuchte hierzu bereits eine Klasse von eindimensionalen Schrödingeroperatoren mit Buckelpotentialen und konnte zeigen, dass diese unter gewissen Bedingungen, die im Wesentlichen die Abstände zwischen den Buckeln, jedoch nicht die Form der Buckel betreffen, rein singulärstetiges Spektrum in  $(0, \infty)$  aufweisen ([PEARSON]).

Der erste Schwerpunkt von [PEARSON] ist die Formulierung eines abstrakten und allgemein anwendbaren Satzes über die Erzeugung singulärstetiger

Maße, der anschließend bei der Untersuchung der Eigenschaften von Spektralmaßen Anwendung findet. Ausgangspunkt für den maßtheoretischen Satz ist die Cantorfunktion aufgrund ihrer nachgewiesenen Singulärstetigkeit. Definiert ist sie als Grenze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^r \prod_{k=1}^n f_k(x) \, dx$$

mit

$$f_k(x) = \frac{3}{2} f(3^{k-1}x)$$

wobei die 1-periodische Funktion  $f$  durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

gegeben ist. Die Cantorverteilung ist singulär bezüglich des Lebesguemaßes. Entsprechend zeigt Pearson für eine Folge von Maßen  $\mu_n$ , die durch Produkte oszillierender Funktionen erzeugt werden, dass diese schwach gegen ein singulärstetiges Maß konvergiert.

Der zweite Teil von [PEARSON] ist der Konstruktion eines Potentials, das zu singulärstetigem Spektrum führt, gewidmet. Hierzu wird eine Folge von Operatoren mit jeweils endlich vielen Buckeln bestimmt, deren Grenze die gewünschten Eigenschaften hat. Dabei ist das Vorgehen wie folgt: In jedem Schritt werden zum Vorgängerpotential weitere Buckel hinzugefügt. Hierbei ist dafür Sorge zu tragen, dass der Abstand zwischen den Buckeln in einer geeigneten Art und Weise immer größer wird. Interessant ist dabei, dass die Gestalt des einzelnen Buckels nicht relevant ist. Lediglich die Gesamtheit der Buckel muß wie eine gänzlich reflektierende Barriere wirken. Aufgrund der großen Abstände zwischen den Buckeln sind die Reflektionen des Teilchens an den einzelnen Buckeln so gut wie unabhängig voneinander, und die Vorgabe an das Gesamtpotential kann dahingehend interpretiert werden, dass die Gesamttransmissionswahrscheinlichkeit 0 ist. In [KISELEV/LAST/SIMON] werden zu dieser Idee entsprechend Zufallsvariablen eingeführt, die nicht unabhängig sein müssen, solange die Terme erster Ordnung klein sind im Vergleich zu den Termen zweiter Ordnung. Kiselev, Last und Simon erzielen dabei für den Schrödingeroperator auf der Halbachse ein allgemeineres Resultat: Bei vorgegebenem abgeschlossenem Intervall  $S \subset (0, \infty)$  lässt sich rein

singulärstetiges Spektrum in  $(0, \infty) \setminus S$  und rein absolutstetiges Spektrum in  $S$  erzeugen.

Diese Überlegungen zu Zufallspfaden führen bereits zur physikalischen Interpretation der Zustände des singulärstetigen Spektrums. Hier verhalten sich die Teilchen weder wie gebundene Teilchen, noch wie gestreute Teilchen: Dass sich die Teilchen sowohl beliebig weit vom Ursprung entfernen, als auch beliebig oft zum Ursprung zurückkehren, macht den außergewöhnlich exotischen Charakter des Teilchenverhaltens aus.

Man hat zunächst den Eindruck, dass dieses merkwürdige Teilchenverhalten eine seltene Ausnahme darstellt. Es ist aber tatsächlich das völlige Gegenteil der Fall: Die Existenz einer ganzen Klasse von Operatoren mit singulärstetigem Spektrum zieht nämlich weitreichende Folgen nach sich. Nach [SIMON II] folgt nämlich, dass Potentiale generisch zu singulärstetigem Spektrum führen. Sie bilden also bei Weitem die Mehrheit. Das Erstaunliche ist nun, dass wir in der experimentell untersuchten Welt zwar die bekannten gebundenen bzw. gestreuten Teilchen beobachten, dass sich aber die sich seltsam verhaltenden Exoten bislang einer Beobachtung verschließen. Und dies obwohl die zugehörigen Potentiale, die Anlaß geben für singulärstetiges Spektrum, bei weitem in der Überzahl gegenüber dem nicht generischen Fall sind.

Die geschilderten Ergebnisse von Pearson und Simon sind im Bereich der nichtrelativistischen Quantenmechanik angesiedelt. Deshalb stellt sich die Frage, ob auch in einem relativistischen Modell ähnliche Ergebnisse abgeleitet werden können. Statt eines gewöhnlichen Differentialausdruckes des zu den Sturm-Liouville-Operatoren zählenden Schrödingeroperators sind im relativistischen Szenario Differentialgleichungssysteme der Untersuchungsgegenstand. Da die relativistischen Effekte für kleine Geschwindigkeiten verschwinden - sonst wären drastische Unterschiede zu beobachten - , sind aus physikalischen Gründen ähnliche Aussagen zu erwarten, auch wenn sich die Eigenschaften des Schrödingeroperators nur mit Einschränkungen auf den Diracoperator übertragen.

Um Erkenntnisse zum singulärstetigen Spektrum im relativistischen Fall zu gewinnen, liegt in der hier vorgelegten Arbeit im ersten Abschnitt das Augenmerk auf eindimensionalen Diracoperatoren auf der Halbachse. Nach dieser Vorbereitung werden die gewonnenen Ergebnisse auf den dreidimensionalen

Raum für Operatoren mit kugelsymmetrischen Potentialen übertragen.

Der erste Teil hat für den drehimpulsfreien Fall die Konstruktion einer Klasse eindimensionaler Diracoperatoren zum Gegenstand, welche ein rein singulärstetiges Spektrum außerhalb der zentralen Lücke  $[-1, 1]$  aufweisen. Dieses Ergebnis ist die relativistische Entsprechung zu den Schrödingeroperatoren mit rein singulärstetigem Spektrum in  $(0, \infty)$  bei [PEARSON].

Die Konstruktion eines Potentials, das rein singulärstetiges Spektrum erzeugt, fußt auf einer Folge approximierender Operatoren mit endlich vielen Buckeln. Von diesen wird gezeigt, dass die zugehörigen Spektralmaße schwach gegen ein Grenzmaß konvergieren, und dass dieses Grenzmaß singulärstetig ist.

Das Vorgehen bei der Bestimmung der approximierenden Operatoren ist durch das geschickte Platzieren von Buckeln geprägt. Bestimmendes Charakteristikum der Folge von Buckelpotentialen ist der immer größer werdende Abstand zwischen den Buckeln, die mit einer gewissen Anwachsraten immer weiter weg vom Ursprung gesetzt werden. Die Gestalt der Buckel ist - ähnlich wie im nichtrelativistischen Fall - nachrangig.

Aussagen zur Art des Spektrums werden aus dem Verhalten der Lösungen abgeleitet. Um für große Abstände vom Ursprung besser abschätzen zu können, wie sich die Lösungen entwickeln, wird nicht die klassische Diracgleichung untersucht, sondern die klassische Gleichung wird in eine äquivalente Form transformiert, die den Vorteil besitzt, dass in dieser die Drehimpulsterme, statt mit  $\frac{1}{r}$  abzuklingen, mit  $\frac{1}{r^2}$  für  $r > 1$  abgeschätzt werden können. Da in diese Transformation die Teilchenmasse eingeht, sind die Ergebnisse nicht auf masselose Teilchen übertragbar.

Ein weiteres wesentliches Hilfsmittel bei der Untersuchung des Lösungsverhaltens stellt die Prüfer-Transformation dar. Hierbei werden die beiden Komponenten der Lösungen durch verallgemeinerte Polarkoordinaten ausgedrückt. Bei dieser Art der Darstellung können die Werte der Lösungen jeweils an den Enden der Buckel anhand ihres Radialanteiles direkt verglichen werden.

Diese Vergleiche der Lösungswerte an den Buckelenden liefern Produkte von stark oszillierenden Funktionen, die an die oben erwähnte Produktdarstellung der Cantorfunktion erinnern. Durch Hinzunahme und geeignete Positionie-

rung weiterer Potentialbuckel kann das Verhalten der Lösungen so kontrolliert werden, dass das Spektralmaß des Grenzoperators singulärstetig ist.

Auf den Resultaten der Untersuchung des drehimpulsfreien Falles baut schließlich der zweite Teil der vorliegenden Arbeit auf, der der Situation auf der Halbachse, nunmehr aber unter Hinzunahme von Drehimpulstermen, gewidmet ist.

Indem der eindimensionale Operator als Radialanteil eines kugelsymmetrischen Operators verwendet wird, können die mit diesen Methoden gewonnenen Ergebnisse nun sogar auf den dreidimensionalen Raum übertragen werden.

Als Endergebnis ist festzuhalten, dass auch mit Drehimpulstermen die konkrete Konstruktion von Potentialen möglich ist, deren zugehörige Operatoren rein singulärstetiges Spektrum außerhalb der zentralen Lücke  $[-1, 1]$  besitzen.

Ob wir in der uns umgebenden Welt solche Zustände des singulärstetigen Spektrums auch beobachten können, bleibt als Frage offen. Bei der Suche nach geeigneten Experimenten bietet sich der Bereich der Magnetohydrodynamik an. Bei den aufgewickelten magnetischen Feldlinien wirken nichtperiodische Potentiale innerhalb von Fusionsreaktoren ([SALAT]).

Simplicity is the most difficult of all concepts. -  
 Brian Herbert and Kevin Anderson, Dune: House Corrino

## 2 Untersuchung des radialen Anteils des Diracoperators ohne Drehimpulsterme

In der Einleitung wurde bereits darauf hingewiesen, dass in der vorliegenden Arbeit Operatoren mit Buckelpotentialen untersucht werden, da diese aussichtsreiche Kandidaten für Operatoren mit rein singulärstetigem Spektrum sind.

Das Vorgehen zur Separation des Diracoperators im  $\mathbb{R}^3$  für kugelsymmetrische Potentiale ist beispielsweise in Abschnitt 20.3 von [WEIDMANN 2003] aufgezeigt. Im Folgenden ist der Untersuchungsgegenstand der radiale Anteil.

Zunächst wird der Begriff Buckelpotential exakt definiert.

Als Ausgangslage wird hierbei die Situation ohne Drehimpulsterme zugrunde gelegt. Unter dieser Voraussetzung werden Aussagen über das Lösungsverhalten abgeleitet. Als Hilfsmittel hierfür wird die sogenannte Prüfer-Transformation eingeführt. Mittels dieser Transformation lässt sich das Verhalten der Lösungen auf den potentialfreien Strecken zwischen den Buckeln kompakt beschreiben. Dies ermöglicht den direkten Vergleich der entsprechenden Werte der Lösungen an den Enden verschiedener Buckel.

### 2.1 Allgemeine Bezeichnungen und Definitionen

Die bereits mehrfach genannten Buckelpotentiale sind wie folgt definiert:

#### Bezeichnungen 2.1.

*Eine Funktion  $0 < q \in C(\mathbb{R}^+)$  heiße **Buckelpotential**, wenn es eine Folge von Buckelabständen  $D := (d_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , Folgen von Buckelbreiten  $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^N$  und Buckelhöhen  $(H_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \in (\mathbb{R}_0^+)^N$ , sowie eine Folge von Buckelprofilen  $(W_j)_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $0 < W_j \in C[0, \alpha_j]$ ,  $\int_0^{\alpha_j} W_j = 1$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) gibt, so dass*

gilt

$$q(r) = \begin{cases} 0 & 0 \leq r \leq a_1 \\ H_j W_j(r - a_j) & a_j < r < b_j \quad (j \in \mathbb{N}) \\ 0 & b_j \leq r < a_{j+1} \quad (j \in \mathbb{N}). \end{cases} \quad (1)$$

Dabei ist für  $j \in \mathbb{N}$

$$a_j := \sum_{i=1}^{j-1} (d_i + \alpha_i) + d_j \quad (2)$$

der Anfang, und

$$b_j := a_j + \alpha_j \quad (3)$$

das Ende des  $j$ -ten Buckels. Mit  $H_j$  ist die Höhe und mit  $\alpha_j$  die Breite des  $j$ -ten Buckels bezeichnet. Die Form des Buckels ist durch  $W_j \in C[0, \alpha_j]$  gegeben. Der Abstand des ersten Buckels vom Ursprung ist  $d_0$ . Für  $j \geq 2$  ist  $d_j$  der Abstand zwischen dem  $(j-1)$ -ten und dem  $j$ -ten Buckel. Im Folgenden wird noch die Definition  $b_0 := 0$  von Nutzen sein.

Eine Funktion  $q \in C(\mathbb{R}^+)$  wird **Potential mit endlich vielen Buckeln** genannt, wenn es  $n \in \mathbb{N}$  gibt mit  $H_n \neq 0$  und  $H_j = 0$  ( $j > n$ ). Ein solches  $n$ -Buckelpotential wird dann mit  $q_n$  bezeichnet, wobei  $D_n := (d_1, \dots, d_n)$  das  $n$ -Tupel der Buckelabstände ist, von denen das Potential abhängt.

Bei  $q$  handelt es sich um ein **Potential mit identischen Buckeln**, falls es  $H > 0$ ,  $\alpha > 0$  und  $0 < W \in C[0, \alpha]$  gibt, so dass  $H_j = H$ ,  $\alpha_j = \alpha$  und  $W_j = W$  für jedes  $j \in \mathbb{N}$  ist.

Entsprechend weist ein Potential mit einer endlichen Anzahl  $n$  von Buckeln identische Buckel auf, wenn gilt:

Es gibt  $H > 0$ ,  $\alpha > 0$  und  $0 < W \in C[0, \alpha]$  derart, dass  $H_1 = \dots = H_n = H$ ,  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \alpha$  und  $W_1 = \dots = W_n = W$  ist und  $H_j = 0$  für  $j > n$  gilt.

Beispiele für solche Buckelpotentiale sind in Abbildung 1 gezeigt.

Für ein Potential mit vorgegebener Anzahl  $n$  von Buckeln werden im Folgenden Aussagen über das Lösungsverhalten abgeleitet.

Sei  $n \in \mathbb{N}$  gegeben.

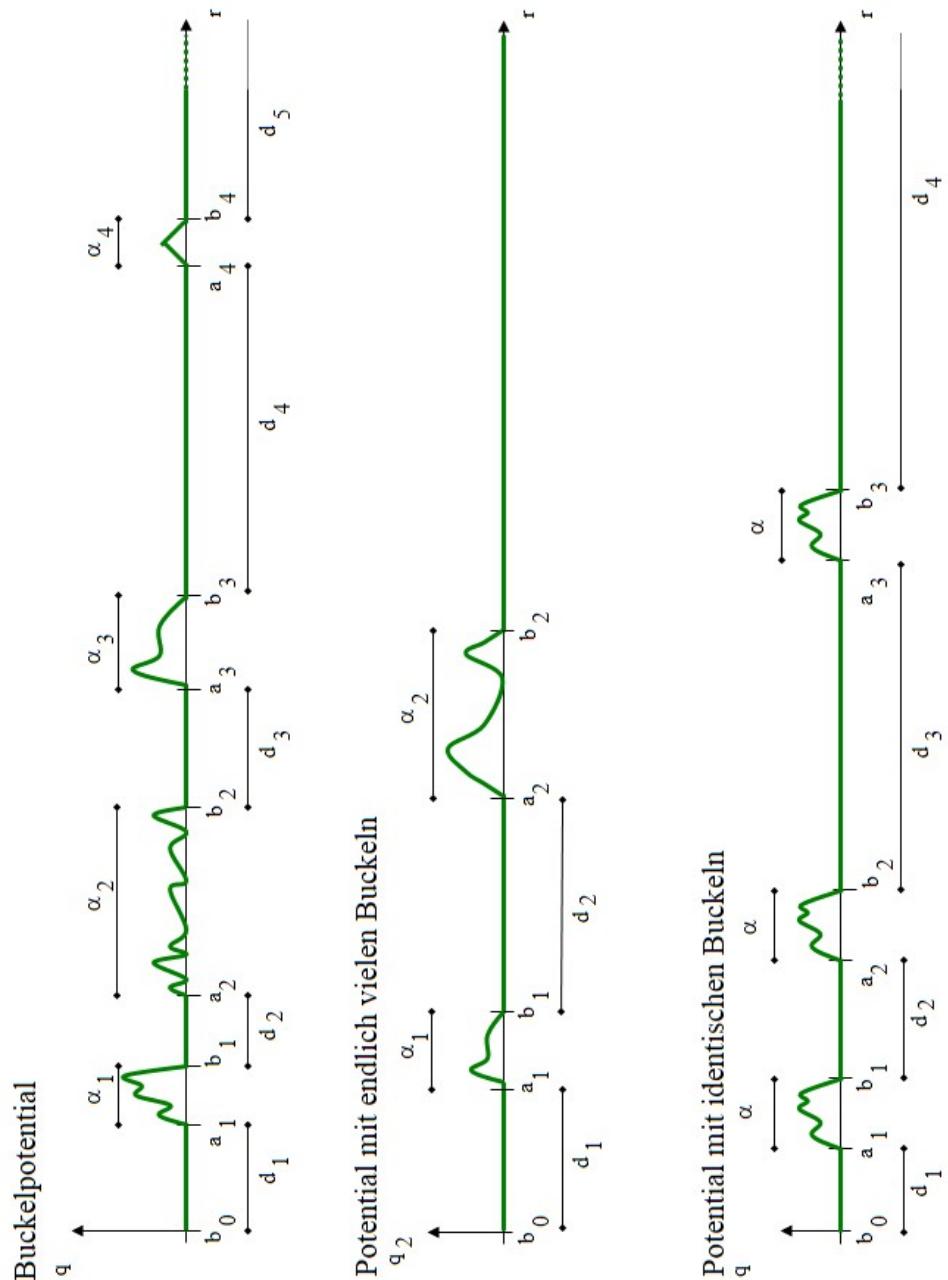


Abbildung 1: Buckelpotentiale

Mit der obigen Definition eines  $n$ -Buckel-Potentials  $q_n$  ergibt sich somit die zentrale Gleichung als das Diracsystem

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -q_n + 1 + \lambda \\ q_n + 1 - \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

auf  $\mathbb{R}_0^+$  mit Randbedingung bei 0 wird

$$\Psi_1(0) \sin \eta + \Psi_2(0) \cos \eta = 0 \quad (5)$$

mit  $\eta \in [0, \pi)$  gefordert.

Da nichttriviale Lösungen von (4) keine Nullstellen in  $\mathbb{R}^2$  besitzen, lassen sich für  $\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| > 1$  vermöge der folgenden verallgemeinerten Prüfer-Transformation neue abhängige Variablen einführen:

**Definition und Bemerkung 2.2. Verallgemeinerte Prüfer-Transformation**

Durch

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= R \cos \vartheta \\ \Psi_2 &= R \frac{\kappa}{1+\lambda} \sin \vartheta = R \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} \sin \vartheta \end{aligned} \quad (6)$$

seien der (verallgemeinerte) Prüfer-Radius  $R$  und der (verallgemeinerte) Prüfer-Winkel  $\vartheta$  definiert, wobei

$$\kappa := \text{sign}(\lambda) \sqrt{\lambda^2 - 1} \quad (\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| > 1) \quad (7)$$

ist<sup>1</sup>. (Dann ist umgekehrt  $\lambda = \text{sign}(\kappa) \sqrt{\kappa^2 + 1}$  ( $\kappa \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ )).

Der Prüfer-Radius ist eindeutig, der Prüfer-Winkel eindeutig bis auf eine additive Konstante aus  $2\pi\mathbb{Z}$  bestimmt. Man beachte, dass wegen  $|\lambda| > 1$  gilt:  $\text{sign}(\lambda) = \text{sign}(\lambda \pm 1)$ .

---

<sup>1</sup>[HUGHES/SCHMIDT] verwenden eine ähnliche Definition, die auch in der zentralen Lücke fortgesetzt wird:

$$\omega(\lambda) = \begin{cases} -\sqrt{\lambda^2 - 1}, & \lambda \in (-\infty, -1] \\ i\sqrt{1 - \lambda^2}, & \lambda \in (-1, 1) \\ \sqrt{\lambda^2 - 1}, & \lambda \in [1, \infty) \end{cases}$$

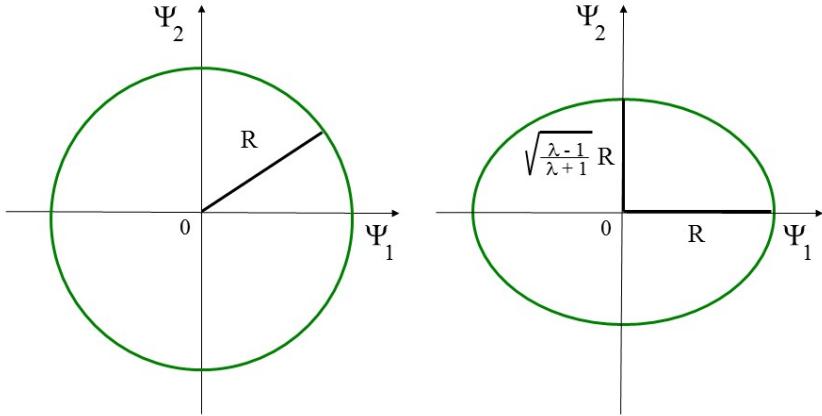


Abbildung 2: Klassische und verallgemeinerte Prüfer-Transformation

Im Vergleich zur klassischen Prüfer-Transformation

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= R \cos \vartheta \\ \Psi_2 &= R \sin \vartheta\end{aligned}$$

werden bei der hier verwendeten Verallgemeinerung Polarkoordinaten auf der durch die Halbmesser  $R$  und  $R \frac{\kappa}{1+\lambda} = R \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}$  bestimmten Ellipse definiert, was in Abbildung 2 dargestellt ist.

Es sei angemerkt, dass die Prüfer-Transformation auch bei der Untersuchung diskreter Dirac-Operatoren durch [CARVALHO/DE OLIVEIRA/PRADO] eine fundamentale Rolle spielt.

Der Zusammenhang zwischen Potential und dem Verhalten des Prüfer-Radius und des Prüfer-Winkels wird im folgenden Abschnitt hergestellt.

## 2.2 Eigenschaften des Prüfer-Radius und des Prüfer-Winkels

**Hilfssatz 2.3.**

Für den Prüfer-Radius  $R$  gilt:

$$(R^2)' = \frac{2}{\kappa} q_n \sin 2\vartheta R^2 \quad (8)$$

bzw.

$$(\log R)' = \frac{1}{\kappa} q_n \sin 2\vartheta. \quad (9)$$

Für die Ableitung des Prüfer-Winkels  $\vartheta$  gilt:

$$\vartheta' = -\kappa + \frac{q_n}{\kappa} (\lambda + \cos 2\vartheta), \quad (10)$$

was unabhängig von  $R$  ist.

Aus dem Hilfssatz folgt sofort folgende Feststellung:

**Bemerkung 2.4.**

Bei Kenntnis von  $\vartheta$  erhält man nach Hilfssatz 2.3 den Prüfer-Radius  $R$  durch einfache Integration.

*Beweis des Hilfssatzes*

Die Aussage über den Prüfer-Winkel wird direkt aus der Definition der verallgemeinerten Prüfer-Transformation abgeleitet. Aus (6) liest man für den Prüfer-Winkel

$$\vartheta(r) = \begin{cases} \arctan \left( \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \frac{\Psi_2(r)}{\Psi_1(r)} \right), & \text{falls } \Psi_1(r) \neq 0 \\ \operatorname{arccot} \left( \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} \frac{\Psi_1(r)}{\Psi_2(r)} \right), & \text{falls } \Psi_2(r) \neq 0 \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R}_0^+)$$

ab. Für seine Ableitung gilt

$$\vartheta' = -\kappa + \frac{q_n}{\kappa} (\lambda + \cos 2\vartheta),$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung des Hilfssatzes 2.3 gezeigt.

Die zu beweisenden Eigenschaften des Prüfer-Radius folgen aus der Tatsache, dass

$$R^2 = \Psi_1^2 + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \Psi_2^2 \quad (\text{verallgemeinerter Pythagoras}) \quad (11)$$

gilt, was direkt aus der Definition der Prüfer-Transformation folgt. Ableiten von (11) liefert

$$\begin{aligned} (R^2)' &= 2\Psi_1\Psi_2 \left( -q_n + 1 + \lambda + \frac{\lambda+1}{\lambda-1}(q_n + 1 - \lambda) \right) = \frac{4}{\lambda-1} q_n \Psi_1 \Psi_2 \\ &= \frac{2}{\lambda-1} q_n \sin 2\vartheta R^2 \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} = \frac{2}{\kappa} q_n \sin 2\vartheta R^2 \end{aligned}$$

Wegen  $(\log R)' = \frac{1}{2R^2}(R^2)' = \frac{1}{2R^2} \cdot \frac{2}{\lambda-1} q_n \sin 2\vartheta R^2 = \frac{1}{\lambda-1} q_n \sin 2\vartheta$  erhält man somit die zweite Behauptung des Hilfssatzes 2.3:

$$(\log R)' = \frac{1}{\kappa} q_n \sin 2\vartheta$$

□

Die Verwendung der verallgemeinerten Prüfervariablen vereinfacht dort, wo das Potential verschwindet, die Situation erheblich:

Auf den Intervallen  $(b_{j-1}, a_j)$  ( $j \in \{1, \dots, n\}$ ) und  $(b_n, \infty)$ , auf denen das Potential  $q_n$  den Wert 0 hat, gilt nämlich  $\vartheta' = -\kappa$ . Der Prüfer-Winkel zeigt also auf den potentialfreien Strecken lineares Verhalten. Dadurch erhalten die Werte des Prüfer-Winkels an den jeweiligen Buckelenden eine besondere Bedeutung. Für diese wird folgende Bezeichnung eingeführt:

### Bezeichnung 2.5.

*Der Wert des Prüfer-Winkels einer Lösung von (4) und (5) am Ende des  $j$ -ten Buckels eines Potentials, dessen Buckelpositionen durch das Distanztupel  $D_n$  charakterisiert sind, sei mit*

$$\vartheta_{n;j} := \vartheta(b_j; \cdot) \quad (j \in \{0, \dots, n\}) \quad (12)$$

*bezeichnet. Statt  $\vartheta_{n;n}$  wird die kürzere Bezeichnung  $\vartheta_n$  verwendet.*

Der Zusammenhang zwischen dem Wert des Prüfer-Winkels am Ende eines Buckels und dem Wert am Beginn des nächsten lautet:

$$\begin{aligned}\vartheta(a_j; \kappa) &= \vartheta(b_{j-1}; \kappa) - d_j \kappa \\ &= \vartheta_{n;j-1}(\kappa) - d_j \kappa \quad (j \in \{1, \dots, n\}).\end{aligned}\quad (13)$$

Außerdem gilt

$$\vartheta(r; \kappa) = \vartheta_n(\kappa) - r \kappa \quad (r > b_n). \quad (14)$$

Der Zusammenhang der Werte des Prüfer-Winkels auf den potentialfreien Bereichen mit den Werten an den jeweiligen Buckelenden ist in Abbildung 3 veranschaulicht.

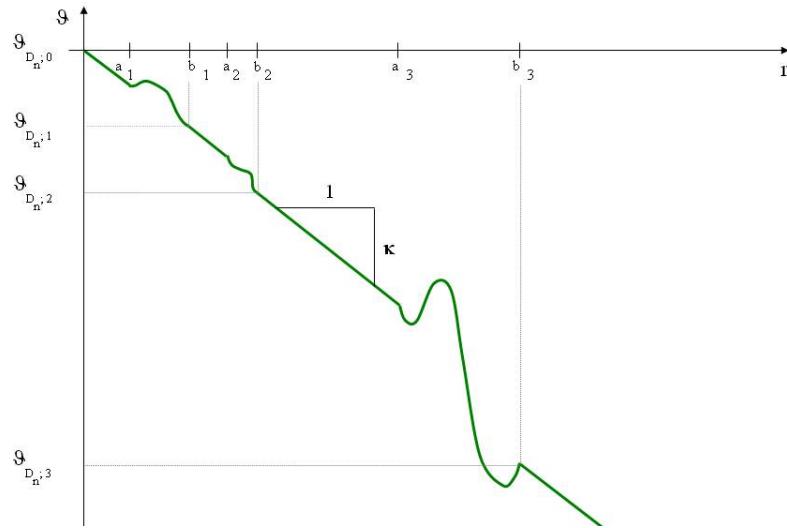


Abbildung 3: Schematische Darstellung des Verhaltens des Prüfer-Winkels

Der Prüfer-Winkel hat an der Stelle  $r = 0$  aufgrund der Randbedingung (5) den Wert  $\vartheta_{n,0} = \arctan \left( \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \tan \eta \right)$ .

Auch der Prüfer-Radius verhält sich auf den potentialfreien Strecken linear. Wegen (8) ist er dort sogar konstant. Deshalb sind die Werte des Prüfer-Radius an den Buckelenden ebenfalls von besonderer Bedeutung. Auch für den Wert des Prüfer-Radius am Ende eines Buckels wird daher eine abkürzende Bezeichnung definiert:

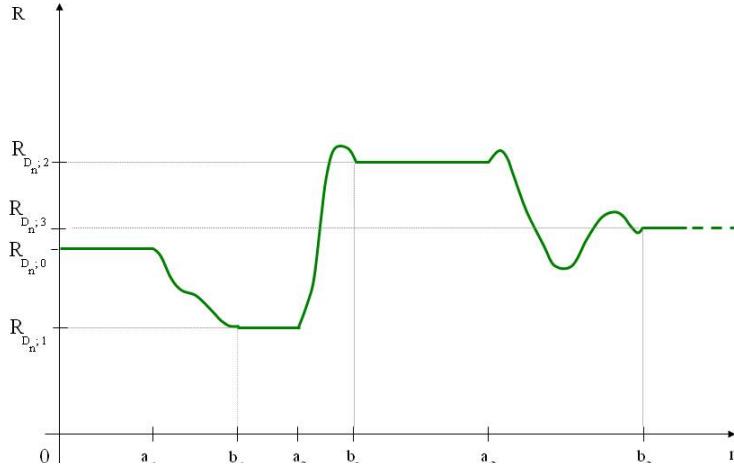


Abbildung 4: Schematische Darstellung des Prüfer-Radius-Verhaltens

## Bezeichnung 2.6.

*Mit*

$$R_{n;j} := R(b_j, \cdot) \quad (j \in \{0, \dots, n\}) \quad (15)$$

sei der Wert des Prüfer-Radius am Ende des  $j$ -ten Buckels bezeichnet. Für  $R_{n;n}$  wird auch die Bezeichnung  $R_n$  genutzt.

Mit dieser Definition lässt sich der Zusammenhang des Wertes des Prüfer-Radius am Ende eines Buckels und am Beginn des nächsten Buckels folgendermaßen formulieren:

$$R_{n;j-1}(\kappa) = R(a_j; \kappa) \quad (j \in \{1, \dots, n\}). \quad (16)$$

Das Verhalten von  $R$  in Abhangigkeit von  $r \in \mathbb{R}_0^+$  ist in Abbildung 4 beispielhaft dargestellt.

Man beachte, dass

$$\begin{aligned} R_{n;j} &= R_{m;j} \\ \vartheta_{n;i} &= \vartheta_{m;i} \quad (j \in \{0, \dots, \min\{n, m\}\}) \end{aligned}$$

gilt. Stimmen nämlich zwei endliche Buckelpotentiale mit  $m$  bzw.  $n$  Buckeln in ihren ersten  $\min\{n, m\}$  Buckeln bezüglich deren Form und Lage überein,

so sind entsprechend auch die zugehörigen Werte für die Prüfer-Winkel und Prüfer-Radien an den ersten  $\min\{n, m\}$  Buckelenden identisch. Dies ist

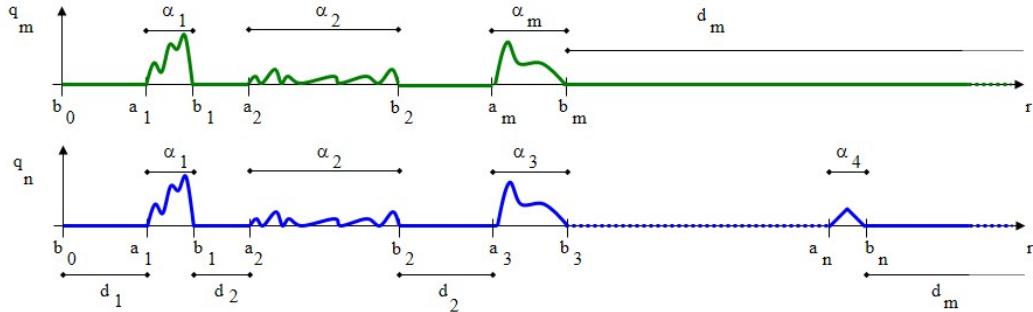


Abbildung 5: Zwei endliche Buckelpotentiale mit  $m$  bzw.  $n$  Buckeln, von denen die ersten  $m$  Buckel übereinstimmen

für die endlichen Buckelpotentiale aus Abbildung 5 schematisch in den Abbildungen 6 und 7 dargestellt.

Die Werte der Lösungen von (4) und (5) können wegen (9) und (10) auf den potentialfreien Intervallen aus ihren Werten, die sie am Ende eines vorangegangenen Buckels annehmen, ermittelt werden:

$$\begin{aligned}\Psi_1(r) &= R_{n;j-1}(\kappa) \cos(\vartheta_{n;j-1} - \kappa r) \\ \Psi_2(r) &= R_{n;j-1}(\kappa) \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} \sin(\vartheta_{n;j-1} - \kappa r) \quad (r \in (b_{j-1}; a_j), j \in \{1, \dots, n\}).\end{aligned}\tag{17}$$

Dabei kann der Ursprung ebenfalls als Buckelende aufgefaßt werden, was in der Bezeichnung  $b_0 := 0$  zum Ausdruck gebracht wird.

Wegen (17) beschreibt der Vektor  $\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$  der Lösung auf den potentialfreien Strecken eine gleichförmige Bewegung auf einer Ellipse, deren Halbmesser im Verhältnis  $\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}$  zueinander stehen.

Nun fehlt noch für die Lösungen der Zusammenhang der Werte am Buckelbeginn und am Buckelende. Dieser wird durch Transfermatrizen hergestellt:

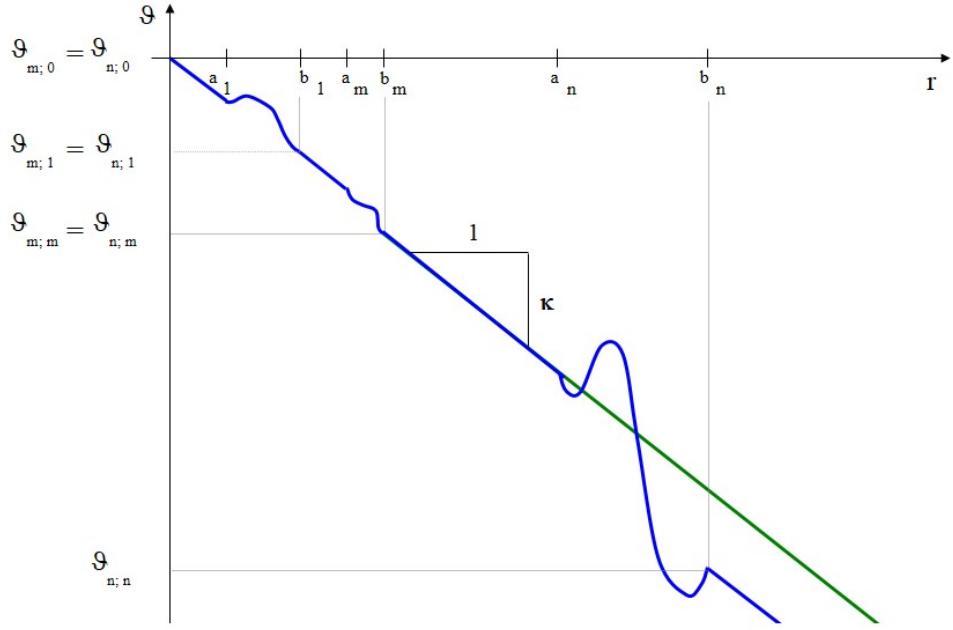


Abbildung 6: Prüfer-Winkel für zwei endliche Buckelpotentiale mit  $m$  bzw.  $n$  Buckeln, von denen die ersten  $m$  Buckel übereinstimmen

### Bezeichnungen 2.7.

$M^{(j)}$  bezeichne die Transfermatrix des  $j$ -ten Buckels.

$M^{(j)}$  kann folgendermaßen bestimmt werden:

Sei  $[0, \alpha_j]$  gegeben. Auf diesem Intervall wird die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -H_j W_j + 1 + \lambda \\ H_j W_j + 1 - \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

betachtet. Das zugehörige Fundamentalsystem mit Anfangswert  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  liefert an der Stelle  $\alpha_j$  die Transfermatrix  $M^{(j)}$ .

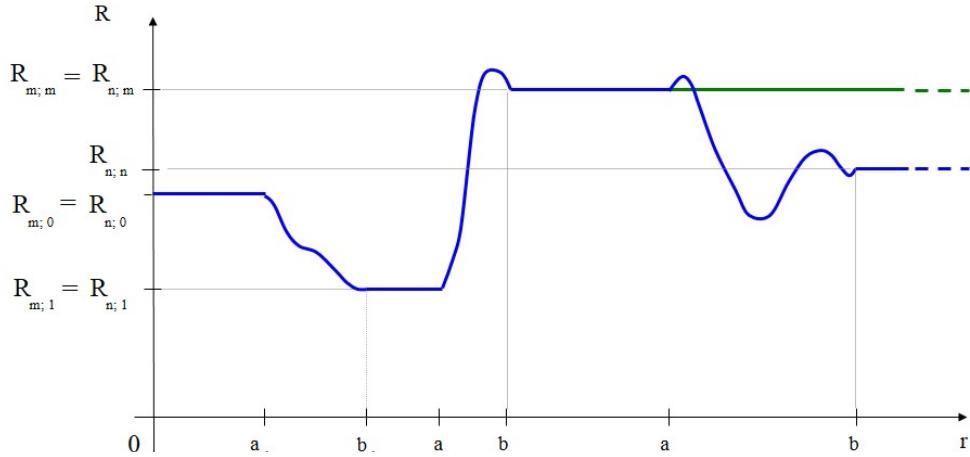


Abbildung 7: Prüfer-Radius für zwei endliche Buckelpotentiale mit  $m$  bzw.  $n$  Buckeln, von denen die ersten  $m$  Buckel übereinstimmen

Zum einen ist das Verhalten der Lösungen auf den potentialfreien Strecken zwischen den Buckeln gemäß Ergebnis (17) bekannt. Zum anderen ist das Verhalten der Lösungen bei den Buckeln durch Transfermatrizen gegeben. Faßt man diese beiden Informationen zusammen, erhält man folgenden Hilfssatz, der Auskunft über das Wachstumsverhalten der Lösungen insgesamt gibt:

### Hilfssatz 2.8.

*Für das Verhältnis der Quadrate der Prüfer-Radien am Ende des  $j$ -ten und des  $(j-1)$ -ten Buckels gilt:*

$$\begin{aligned} \frac{R_{n;j}^2}{R_{n;j-1}^2} &= \frac{1}{f_j(\cdot; \vartheta_{n;j-1} - \cdot d_j)} \\ &= A_j + B_j \cos(2(\vartheta_{n;j-1} - \cdot d_j)) + C_j \sin(2(\vartheta_{n;j-1} - \cdot d_j)), \end{aligned} \quad (18)$$

wobei

$$f_j(\kappa, y) := \frac{1}{A_j(\kappa) + B_j(\kappa) \cos(2y) + C_j(\kappa) \sin(2y)} > 0 \quad (\kappa \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}) \quad (19)$$

mit

$$A_j := \frac{1}{2} \left[ M_{11}^{(j)2} + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} M_{21}^{(j)2} + \frac{\lambda-1}{\lambda+1} M_{12}^{(j)2} + M_{22}^{(j)2} \right] \quad (20)$$

$$B_j := \frac{1}{2} \left[ M_{11}^{(j)2} + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} M_{21}^{(j)2} - \frac{\lambda-1}{\lambda+1} M_{12}^{(j)2} - M_{22}^{(j)2} \right] \quad (21)$$

$$C_j := \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} M_{11}^{(j)} M_{12}^{(j)} + \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} M_{21}^{(j)} M_{22}^{(j)} \quad (22)$$

definiert ist.

Beweis

Mit Hilfe der Beziehung

$$\begin{pmatrix} \Psi_1(b_j; \kappa) \\ \Psi_2(b_j; \kappa) \end{pmatrix} = M^{(j)}(\kappa) \begin{pmatrix} \Psi_1(a_j; \kappa) \\ \Psi_2(a_j; \kappa) \end{pmatrix}$$

leitet man unter Berücksichtigung des in (17) beschriebenen Verhaltens der Lösung  $\Psi$  auf den potentialfreien Strecken

$$\begin{aligned} \Psi_1(b_j; \kappa) &= M_{11}^{(j)}(\kappa) R_{n;j-1}(\kappa) \cos(\vartheta_{n;j-1} - \kappa d_j) \\ &\quad + M_{12}^{(j)}(\kappa) R_{n;j-1}(\kappa) \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} \sin(\vartheta_{n;j-1} - \kappa d_j) \end{aligned} \quad (23)$$

und

$$\begin{aligned} \Psi_2(b_j; \kappa) &= M_{21}^{(j)}(\kappa) R_{n;j-1}(\kappa) \cos(\vartheta_{n;j-1} - \kappa d_j) \\ &\quad + M_{22}^{(j)}(\kappa) R_{n;j-1}(\kappa) \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} \sin(\vartheta_{n;j-1} - \kappa d_j) \end{aligned} \quad (24)$$

ab.

Das Verhältnis der Prüfer-Radien am Ende des  $j$ -ten bzw.  $(j-1)$ -ten Buckels  $\frac{R_{n;j}^2}{R_{n;j-1}^2}$  ist echt positiv. Andernfalls wäre mit (11)  $\Psi$  wegen der Eindeutigkeit der Lösung die Nulllösung.

Aufgrund des verallgemeinerten Satzes von Pythagoras (11) ergibt sich für das Prüfer-Radienverhältnis, wenn man die soeben gewonnenen Beziehungen (23) und (24) verwendet:

$$\begin{aligned}
\frac{R_{n;j}^2}{R_{n;j-1}^2} &= \frac{1}{R_{n;j-1}^2} \left( \Psi_1^2(b_j; \cdot) + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \Psi_2^2(b_j; \cdot) \right) \\
&= \cos^2(\vartheta_{n;j-1} - \cdot d_j) \left[ M_{11}^{(j)2} + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} M_{21}^{(j)2} \right] \\
&\quad + \sin^2(\vartheta_{n;j-1} - \cdot d_j) \left[ \frac{\lambda-1}{\lambda+1} M_{12}^{(j)2} + M_{22}^{(j)2} \right] \\
&\quad + 2 \sin(\vartheta_{n;j-1} - \cdot d_j) \cos(\vartheta_{n;j-1} - \cdot d_j) \cdot \\
&\quad \cdot \left[ \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} M_{11}^{(j)} M_{12}^{(j)} + \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} M_{21}^{(j)} M_{22}^{(j)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ M_{11}^{(j)2} + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} M_{21}^{(j)2} + \frac{\lambda-1}{\lambda+1} M_{12}^{(j)2} + M_{22}^{(j)2} \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[ M_{11}^{(j)2} + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} M_{21}^{(j)2} - \frac{\lambda-1}{\lambda+1} M_{12}^{(j)2} - M_{22}^{(j)2} \right] \cos(2(\vartheta_{n;j-1} - \cdot d_j)) \\
&\quad + \left[ \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} M_{11}^{(j)} M_{12}^{(j)} + \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} M_{21}^{(j)} M_{22}^{(j)} \right] \sin(2(\vartheta_{n;j-1} - \cdot d_j)) \\
&= A_j + B_j \cos(2(\vartheta_{n;j-1} - \cdot d_j)) + C_j \sin(2(\vartheta_{n;j-1} - \cdot d_j)) \\
&= \frac{1}{f_j(\cdot; \vartheta_{n;j-1} - d_j \cdot)}.
\end{aligned}$$

□

### Bemerkung 2.9.

Die Funktionen  $A_j$ ,  $B_j$  und  $C_j$  sind für  $\kappa \in \mathbb{R}^*$  reell analytisch, da die Komponenten der Transfermatrizen  $M^{(j)}$  holomorph im Spektralparameter  $\lambda$  und dieser wiederum analytisch in  $\kappa \in \mathbb{R}^*$  ist.

Bevor die Eigenschaften von  $f_j$  näher untersucht werden, wird die Spektralfunktion des Anfangswertproblems (4), (5) ermittelt.

## 2.3 Die Spektralfunktion

**Satz 2.10.**

Für die Ableitung der zu (4) und (5) zugehörigen Spektralfunktion gilt:

$$\frac{d\varrho_n}{d\kappa}(\kappa) = \frac{1}{\pi} \left( \prod_{j=1}^n f_j(\kappa, \vartheta_{n;j-1}(\kappa) - \kappa d_j) \right) \mathcal{D}(\kappa) \quad (\kappa \in \mathbb{R}^*), \quad (25)$$

wobei

$$\mathcal{D}(\kappa) := \frac{\text{sign}(\kappa)\sqrt{\kappa^2 + 1} + 1}{\text{sign}(\kappa)\sqrt{\kappa^2 + 1}} R(0, \kappa) \quad (\kappa \in \mathbb{R}^*) \quad (26)$$

definiert ist.

**Bemerkung 2.11.**

Damit die Spektralfunktion eindeutig ist, ist noch wahlweise Linksstetigkeit oder Rechtsstetigkeit zu fordern ([LEVITAN/SARGSJAN 91]). Hier wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Linksstetigkeit der Vorzug gegeben. Die Spektralfunktion ist dann bis auf eine additive Konstante bestimmt. Diese sei so gewählt, dass die Spektralfunktion bei  $-\infty$  den Wert 0 annimmt.

Um den Satz zu beweisen, wird das Problem (4) und (5) entsprechend dem Vorgehen in Abschnitt 8.1.1 von [LEVITAN/SARGSJAN 91]<sup>2</sup> durch reguläre Probleme approximiert:

Statt auf  $\mathbb{R}^+$  wird die Gleichung (4) zunächst auf einem endlichen Intervall  $[b_0, b]$  betrachtet (mit  $b > b_n$ , damit alle  $n$  Buckel im betrachteten Intervall enthalten sind). Hier wird die etwas allgemeinere Notation  $b_0 := 0$  für das linke Ende des betrachteten Intervall verwendet, um die Vergleichbarkeit mit den Überlegungen aus Abschnitt 4.3 zu erhöhen. Bei  $b$  wird eine zusätzliche Randbedingung gestellt:

---

<sup>2</sup>Die Gestalt von (27) stimmt mit dem dort untersuchten System bis auf das Vorzeichen von  $\lambda$  überein. [LEVITAN/SARGSJAN 91] betrachten allgemeinere stetige Koeffizienten  $q_1$  und  $q_2$  für das System  $y_2'(x) - [\lambda + q_1(x)] y_1(x) = 0$ ,  $y_1'(x) + [\lambda + q_2(x)] y_2(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} \Psi_1(r) \\ \Psi_2(r) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -q_n(r) + 1 + \lambda \\ q_n(r) + 1 - \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1(r) \\ \Psi_2(r) \end{pmatrix} \quad (27)$$

$(r \in (0, b))$

$$\begin{aligned} \Psi_1(b_0) &= 1 & \Psi_2(b_0) &= 0 \\ \Psi_1(b) &= 1 & \Psi_2(b) &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Da das Spektrum von (27) und (28) nur aus Eigenwerten besteht, ist die zugehörige Spektralfunktion eine (bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmte) Stufenfunktion, welche jeweils bei den Eigenwerten einen Sprung aufweist. Die Höhe des Sprunges ist durch das Inverse der  $L_2$ -Norm der zugehörigen Eigenlösung gegeben.

Seien die Eigenwerte dieses Problems mit  $\lambda_{b;\tilde{n}}$ , die zugehörigen Eigenfunktionen, die die Anfangsbedingung  $\varphi_{b;\tilde{n}}^{(1)}(0) = 1$ ,  $\varphi_{b;\tilde{n}}^{(2)}(0) = 0$  erfüllen, mit  $\begin{pmatrix} \varphi_{b;\tilde{n}}^{(1)} \\ \varphi_{b;\tilde{n}}^{(2)} \\ \varphi_{b;\tilde{n}} \end{pmatrix}$  ( $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ ) bezeichnet und

$$a_{b;\tilde{n}}^2 := \int_0^b |\varphi_{b;\tilde{n}}(r)|^2 dr \quad (29)$$

definiert. (vgl. [LEVITAN/SARGSJAN 91], S. 213)

Dann ist

$$\varrho_{b;n}(\lambda) = \begin{cases} - \sum_{\lambda < \lambda_{b;\tilde{n}} \leq 0} \frac{1}{a_{b;\tilde{n}}^2} & (\lambda < 0) \\ \sum_{0 < \lambda_{b;\tilde{n}} \leq \lambda} \frac{1}{a_{b;\tilde{n}}^2} & (\lambda \geq 0) \end{cases} \quad (30)$$

die Spektralfunktion des regulären Problems vgl. [LEVITAN/SARGSJAN 75], S. 168<sup>3</sup>).

---

<sup>3</sup>Dort wird das System

$$\begin{aligned} y_2'(x) - [\lambda + q_1(x)] y_1(x) &= 0 \\ y_1'(x) + [\lambda + q_2(x)] y_2(x) &= 0 \end{aligned}$$

mit stetigen  $q_1$  und  $q_2$  untersucht. Die Gestalt stimmt mit (27) bis auf das Vorzeichen von  $\lambda$  überein.

Das typische Aussehen einer derartigen Spektralfunktion ist in Abbildung 8 dargestellt.

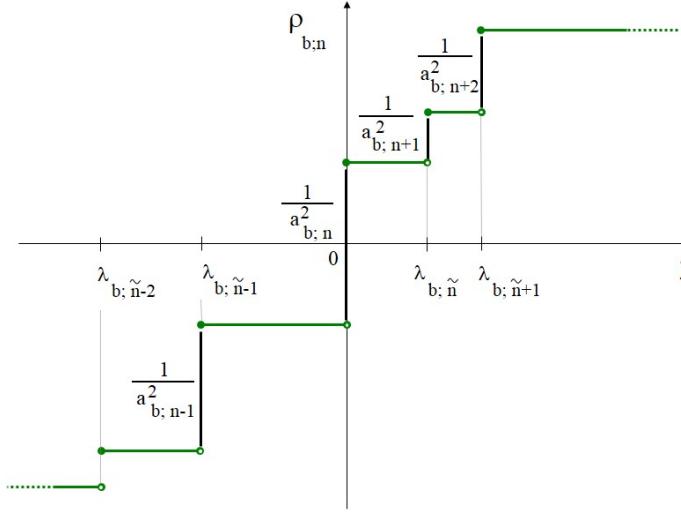


Abbildung 8: Spektralfunktion des regulären Problems

Ziel ist es, beim Übergang zur Grenze  $b \rightarrow \infty$  zum einen die Höhe der Sprünge der Spektralfunktion und zum anderen die Anzahl der Eigenwerte abzuschätzen. Dies ist Inhalt der folgenden beiden Hilfssätze. Diese bilden die Grundlage für die Bestimmung des im Satz 2.10 angegebenen Differentialquotienten.

Sei  $[\alpha, \beta] \subset R^*$  beliebig.

### Hilfssatz 2.12.

Es gilt

$$\frac{1}{b} a_{b:n}^2 \rightarrow R_n^2(\kappa) \frac{\lambda}{\lambda + 1} + o_{glm}(1) \quad (b \rightarrow \infty).$$

Dabei wird durch die Notation  $o_{glm}(1)$  zum Ausdruck gebracht, dass die Konvergenz in  $\kappa \in [\alpha, \beta]$  gleichmäßig ist.

*Beweis*

Die Koeffizienten in (27) werden in einen freien Anteil

$$T_{\text{fr}} := \begin{pmatrix} 0 & 1 + \lambda \\ 1 - \lambda & 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

und den Potentialanteil

$$S(r) := \begin{pmatrix} 0 & s_2(r) \\ s_1(r) & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $s_1(r) := q_n(r)$ ,  $s_2(r) := -q_n(r)$  ( $r \in [b_0, \infty)$ ) aufgeteilt. Diese allgemein gehaltene Notation wird gewählt, da in Abschnitt 4.3 ähnliche Überlegungen angestellt werden.

$$U(r, \kappa) := \begin{pmatrix} \cos \kappa r & -\frac{\kappa}{1+\lambda} \sin \kappa r \\ \frac{\kappa}{1+\lambda} \sin \kappa r & \cos \kappa r \end{pmatrix} \quad (r \in [b_0, \infty)) \quad (32)$$

ist das Fundamentalsystem zu

$$u' = T_{\text{fr}} u,$$

das die Randbedingung  $\psi(b_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  erfüllt. Sei  $u(r) := \begin{pmatrix} U_{11}(r) \\ U_{21}(r) \end{pmatrix}$ . Dann gilt für die Lösung  $\Psi$  von

$$\Psi' = (T_{\text{fr}} + S) \Psi,$$

die die Randbedingung  $\Psi(b_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  erfüllt (vgl. [EASTHAM], S. 6):

$$\Psi(r, \kappa) = u(r, \kappa) + U(r, \kappa) \int_{b_0}^r U^{-1}(s, \kappa) S(s) \Psi(s, \kappa) \, ds \quad (33)$$

Schreibt man

$$\begin{aligned} \Psi(r, \kappa) &= u(r, \kappa) + U(r, \kappa) \int_{b_0}^{\infty} U^{-1}(s, \kappa) S(s) \Psi(s, \kappa) \, ds \\ &\quad - U(r, \kappa) \int_r^{\infty} U^{-1}(s, \kappa) S(s) \Psi(s, \kappa) \, ds \end{aligned} \quad (34)$$

und definiert<sup>4</sup>

$$A(\kappa) \cos(\gamma(\kappa)) := 1 + \int_{b_0}^{\infty} \cos(\kappa s) s_2(s) \Psi_2(s) - \frac{1+\lambda}{\kappa} \sin(\kappa s) s_1(s) \Psi_1(s) \, ds \quad (35)$$

$$A(\kappa) \sin(\gamma(\kappa)) := \int_{b_0}^{\infty} \sin(\kappa s) s_2(s) \Psi_2(s) - \frac{\kappa}{1-\lambda} \cos(\kappa s) s_1(s) \Psi_1(s) \, ds \quad (36)$$

so erhält man für (34) nach Ausmultiplizieren aller Matrizen:

$$\begin{aligned} \Psi_1(r, \kappa) &= \\ &= \cos(\kappa r) A(\kappa) \cos(\gamma(\kappa)) + \sin(\kappa r) A(\kappa) \sin(\gamma(\kappa)) \\ &\quad - \cos(\kappa r) \int_r^{\infty} \left( \cos(\kappa s) s_2(s) \Psi_2(s) - \frac{1+\lambda}{\kappa} \sin(\kappa s) s_1(s) \Psi_1(s) \right) \, ds \\ &\quad - \sin(\kappa r) \int_r^{\infty} \left( \sin(\kappa s) s_2(s) \Psi_2(s) - \frac{\kappa}{1-\lambda} \cos(\kappa s) s_1(s) \Psi_1(s) \right) \, ds \\ &= \cos(\kappa r) A(\kappa) \cos(\gamma(\kappa)) + \sin(\kappa r) A(\kappa) \sin(\gamma(\kappa)) + o_{\text{glm}}(1) \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(r, \kappa) &= \\ &= \frac{-\kappa}{1+\lambda} \sin(\kappa r) A(\kappa) \cos(\gamma(\kappa)) + \frac{-\kappa}{1-\lambda} \cos(\kappa r) A(\kappa) \sin(\gamma(\kappa)) \\ &\quad + \frac{\kappa}{1+\lambda} \sin(\kappa r) \int_r^{\infty} \left( \cos(\kappa s) s_2(s) \Psi_2(s) - \frac{\lambda+1}{\kappa} \sin(\kappa s) s_1(s) \Psi_1(s) \right) \, ds \\ &\quad - \cos(\kappa r) \int_r^{\infty} \left( \frac{\lambda-1}{\kappa} \sin(\kappa s) s_2(s) \Psi_2(s) + \cos(\kappa s) s_1(s) \Psi_1(s) \right) \, ds \\ &= \cos(\kappa r) A(\kappa) \cos(\gamma(\kappa)) + \sin(\kappa r) A(\kappa) \sin(\gamma(\kappa)) + o_{\text{glm}}(1) \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (38)$$

Dass die Terme mit den Integralen  $o_{\text{glm}}(1)$  für  $r \rightarrow \infty$  sind, beruht auf den Eigenschaften von  $s_1$  und  $s_2$ , da nämlich  $q_n$  integrierbar ist, und der stetigen

---

<sup>4</sup>Ein ähnliches Vorgehen wird in [Coddington/Levinson], S. 255, für die Schrödinger-Gleichung  $Lx = -x'' + qx$ ,  $x(0) = 0$  mit  $\int_0^{\infty} |q| < \infty$  angewandt, um die Spektralfunktion als Funktion von  $s$ , mit  $s^2 := \lambda$  herzuleiten als  $\frac{d\rho}{ds}(s) = \frac{2s^2}{\pi A^2(s)}$ .

Abhängigkeit von  $\kappa \in [\alpha, \beta]$ . Dies liefert

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{b - b_0} \int_{b_0}^b |\Psi(r, \kappa)|^2 dr \\
&= \frac{A^2(\kappa)}{b - b_0} \int_{b_0}^b \left( \cos^2(\kappa r) \cos^2 \gamma + 2 \cos(\kappa r) \sin(\kappa r) \cos \gamma \sin \gamma + \sin^2(\kappa r) \sin^2 \gamma \right. \\
&\quad \left. + \frac{\kappa^2}{(1 + \lambda)^2} \sin^2(\kappa r) \cos^2 \gamma + 2 \frac{\kappa^2}{(-\lambda^2)} \cos(\kappa r) \sin(\kappa r) \cos \gamma \sin \gamma \right. \\
&\quad \left. + \frac{\kappa^2}{(1 - \lambda)^2} \cos^2(\kappa r) \sin^2 \gamma + o_{\text{glm}}(1) \right) dr \\
&= \frac{A^2(\kappa)}{b - b_0} \left[ b - b_0 - \frac{2}{\lambda + 1} \left( \frac{1}{2}(b - b_0) - \frac{1}{4\kappa} (\sin(2\kappa b) - \sin(2\kappa b_0)) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{\lambda^2 - 1} \sin^2 \gamma \left( \frac{1}{2}(b - b_0) - \frac{1}{4\kappa} (\sin(2\kappa b) - \sin(2\kappa b_0)) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{\lambda^2 - 1} \sin^2 \gamma (b - b_0) + o_{\text{glm}}(1) \right] \\
&\rightarrow A^2(\kappa) \frac{\lambda}{\lambda + 1} \quad (b \rightarrow \infty) \tag{39}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des verallgemeinerten Satzes von Pythagoras (11) kann für  $A$  ein Bezug zum Prüfer-Radius hergestellt werden: Es ist

$$\begin{aligned}
R^2(r, \kappa) &= \Psi_1^2(r, \kappa) + \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \Psi_2^2(r, \kappa) \\
&= A^2(\kappa) \left( \cos^2(\kappa r) \cos^2 \gamma + 2 \cos(\kappa r) \sin(\kappa r) \cos \gamma \sin \gamma + \sin^2(\kappa r) \sin^2 \gamma \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \left( \frac{\kappa^2}{(1 + \lambda)^2} \sin^2(\kappa r) \cos^2 \gamma + 2 \frac{\kappa^2}{1 - \lambda^2} \cos(\kappa r) \sin(\kappa r) \cos \gamma \sin \gamma \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\kappa^2}{(1 - \lambda)^2} \cos^2(\kappa r) \sin^2 \gamma + o_{\text{glm}}(1) \right) \right) \\
&= A^2(\kappa) \left( \cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma + o_{\text{glm}}(1) \right) = A^2(\kappa) + o_{\text{glm}}(1) \quad (r \rightarrow \infty) \tag{40}
\end{aligned}$$

Da nach Hilfsatz 2.3 der Prüfer-Winkel auf den potentialfreien Strecken konstant ist, ist mit der Bezeichnung aus Definition (15) für den Wert des Prüfer-Winkels am Ende des letzten Buckels  $R(r, \kappa) = R_n$  ( $r \geq b_n$ ), so dass  $A(\kappa) = R_n$  folgt.

Somit ist

$$\frac{1}{b} a_{b;\tilde{n}}^2 = R_n^2(\kappa) \frac{\lambda}{\lambda + 1} + o_{\text{glm}}(1) \quad (b \rightarrow \infty).$$

□

### Hilfssatz 2.13.

Für die Zahl  $N_b(\lambda_1, \lambda_2)$  der Eigenwerte von (27), (28) in  $(\lambda_1, \lambda_2]$  gilt:

$$N_b(\lambda_1, \lambda_2) = \left| \frac{b(\kappa_2 - \kappa_1)}{\pi} \right| + O(1) \quad (b \rightarrow \infty). \quad (41)$$

#### Beweis

Dies folgt direkt mit [WEIDMANN 87], S. 245

$$0 \leq N_b(\lambda_1, \lambda_2) = \left| \frac{\vartheta(b; \kappa_2) - \vartheta(b; \kappa_1)}{\pi} + c \right|,$$

wobei  $|c| \leq 1$  unabhängig von  $b, \lambda_1, \lambda_2$  ist.

□

#### Beweis von Satz 2.10

Um den gewünschten Differentialquotienten  $\frac{d\varrho_n}{d\kappa}$  zu bestimmen, werden die Vorbereitungen aus Hilfssatz 2.12 zur  $L_2$ -Norm der Eigenfunktionen und aus Hilfssatz 2.13 zur Zahl der Eigenwerte für den Differenzenquotienten  $\frac{\varrho_n(\kappa_2) - \varrho_n(\kappa_1)}{\kappa_2 - \kappa_1}$  zusammengeführt. Es ist damit

$$\varrho_{b;n}(\kappa_2) - \varrho_{b;n}(\kappa_1) = \frac{\frac{b(\kappa_2 - \kappa_1)}{\pi} + O(1)}{(b - b_0) \left( R_n^2(\kappa) \frac{\lambda}{\lambda + 1} + o_{\text{glm}}(1) \right)} \quad (b \rightarrow \infty)$$

Somit erhält man

$$\frac{\varrho_n(\kappa_2) - \varrho_n(\kappa_1)}{\kappa_2 - \kappa_1} = \frac{1}{\pi R_n^2(\kappa)} \frac{\lambda + 1}{\lambda}$$

Im Limes  $\kappa_2 \rightarrow \kappa_1$  liefert dies wegen  $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ :

$$\frac{d\varrho_n(\kappa)}{d\kappa} = \frac{1}{\pi R_n^2(\kappa)} \frac{\lambda(\kappa) + 1}{\lambda(\kappa)} \quad (\kappa \in [\alpha, \beta]), \quad (42)$$

beziehungsweise wegen  $\frac{d\kappa}{d\lambda} = \text{sign}(\lambda) \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}$  für die Ableitung der Spektralfunktion nach  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{\varrho}_n(\lambda)}{d\lambda} &= \frac{d\varrho_n}{d\kappa} \frac{d\kappa}{d\lambda}(\lambda) = \frac{1}{\pi R_n^2(\kappa(\lambda))} \frac{\lambda + 1}{\lambda} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \text{sign}(\lambda) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{R_n^2(\kappa(\lambda))} \sqrt{\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}} \quad (\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| > 1, \kappa(\lambda) \in [\alpha, \beta]) \end{aligned}$$

□

Nutzt man die Beziehung (18) bei (42) aus, so erhält man die folgende

**Definition 2.14.**

Das zum Anfangswertproblem (4), (5) gehörige Spektralmaß ist gegeben durch

$$\mu_n(\Sigma) = \int_{\Sigma} \frac{1}{\pi} \left( \prod_{j=1}^n f_j(\kappa, \vartheta_{n;j-1}(\kappa) - \kappa d_j) \right) \mathcal{D}(\kappa) d\kappa, \quad (43)$$

wobei  $\Sigma \subset \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ein beliebiges Kompaktum sei.

## 2.4 Eigenschaften von $f_j$ und $m_j$

Das Verhältnis der Prüfer-Radien an aufeinanderfolgenden Buckelenden weist oszillierende Bestandteile auf. Mittelt man  $f_j$ , so erhält man den Wert 1, was der folgende Hilfssatz besagt:

**Hilfssatz 2.15.**

Sei  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Dann gilt für  $\kappa \in \mathbb{R}^*$ :

$$\overline{f_j}(\kappa) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f_j(\kappa, y) dy = 1 \quad (44)$$

$$m_j(\kappa) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log f_j(\kappa, y) dy = \log \left( \frac{2}{A_j(\kappa) + 1} \right) \quad (45)$$

*Beweis*

Sei  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Wegen Definitionen (20), (21) und (22) gilt

$$\begin{aligned} A_j^2 - B_j^2 - C_j^2 &= M_{11}^{(j)2} M_{22}^{(j)2} - 2M_{11}^{(j)} M_{12}^{(j)} M_{21}^{(j)} M_{22}^{(j)} + M_{21}^{(j)2} M_{12}^{(j)2} \\ &= (\det M^{(j)})^2 = 1. \end{aligned} \quad (46)$$

und es gilt  $A_j > \sqrt{B_j^2 + C_j^2}$ . Mit [GRÖBNER/HOFREITER], S. 100, erhält man dann damit für das Integral

$$\begin{aligned} \overline{f_j}(\kappa) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f_j(\kappa, y) \, dy = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{A_j(\kappa) + B_j(\kappa) \cos 2y + C_j(\kappa) \sin 2y} \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{A_j(\kappa) + B_j(\kappa) \cos x + C_j(\kappa) \sin x} \, dx = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{A_j^2 - B_j^2 - C_j^2} = 1, \end{aligned}$$

was unabhängig von  $\kappa$  ist.

Außerdem gilt für  $m_j$  mit der Substitution  $x = 2y$  und der Parametertransformation  $B_j =: \varrho \cos \xi$ ,  $C_j =: -\varrho \sin \xi$  und der Berücksichtigung der Periodizität und Symmetrie des Cosinus:

$$\begin{aligned} m_j(\kappa) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log (A_j(\kappa) + B_j(\kappa) \cos 2y + C_j(\kappa) \sin 2y) \, dy \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log (A_j(\kappa) + B_j(\kappa) \cos x + C_j(\kappa) \sin x) \, dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log (A_j(\kappa) + \varrho \cos(\xi + x)) \, dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log (A_j(\kappa) + \varrho \cos(x)) \, dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log (A_j(\kappa) + \varrho \cos(x)) \, dx - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log (A_j(\kappa) - \varrho \cos(x)) \, dx \end{aligned}$$

Für die beiden Integrale erhält man schließlich mit [BRONSTEIN/SEMENDJAJEW], S. 69:

$$\begin{aligned} m_j(\kappa) &= -2 \frac{1}{2\pi} \pi \log \left( \frac{A_j(\kappa) + \sqrt{A_j(\kappa)^2 - \varrho^2}}{2} \right) \\ &= \log \left( \frac{2}{A_j(\kappa) + \sqrt{A_j(\kappa)^2 - B_j(\kappa)^2 - C_j(\kappa)^2}} \right) \\ &= \log \left( \frac{2}{A_j(\kappa) + 1} \right) \end{aligned}$$

Hier wurde zuletzt (46) verwendet.

□

$f_j$  kann als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden, da es die Eigenschaften  $f_j(\kappa, y) > 0$  ( $\kappa \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}$ ) und  $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi f_j(\kappa, y) dy = 1$  ( $\kappa \in \mathbb{R}^*$ ) aufweist<sup>5</sup>.

### Bemerkung 2.16.

Sei  $i \in \mathbb{N}$ . In  $m_i$  geht zwar die Gestalt des  $i$ -ten Buckels ein, d.h.  $m_i$  hängt von der Buckelbreite  $\alpha_i$  und vom Buckelprofil  $W_i$  ab.  $m_i$  ist jedoch unabhängig von der Position  $a_i$  des zugehörigen Buckels und hängt somit insbesondere nicht von den Buckelabständen  $d_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) ab.

### Hilfssatz 2.17.

Im Fall eines  $n$ -Buckelpotentials mit identischen Buckeln gilt:

$$m := m_j < 0 \quad (j \in \{1, \dots, n\})$$

Für den Beweis dieses Hilfssatzes wird folgende Aussage benötigt:

### Hilfssatz 2.18.

Die Spektralfunktion bestimmt das Potential eindeutig.

#### Beweis von Hilfssatz 2.18

In [GASYMOV/LEVITAN] wird das Problem

$$B \frac{dy}{dx} + Q(x)y = \lambda y, \quad (x \in \mathbb{R}_0^+) \quad (47)$$

$$y_1(0) = \sin \alpha, \quad y_2(0) = -\cos \alpha \quad (48)$$

---

<sup>5</sup> Zur weiteren Interpretation sei auf Untersuchungen zum Schrödingeroperator durch [AVRON/SIMON] verwiesen. Dort wird statt der Hilfsfunktion  $m_j$  in Anlehnung an [KAKUTANI] die Funktion  $\gamma_n := \int \sqrt{f_n} d\mu$  eingeführt. Das Grenzmaß ist singulärstetig im Falle  $\prod_n \gamma_n = 0$ . Dann konvergiert nämlich  $\prod_n f_n$  fast überall gegen 0. [PERRY] faßt das Bild mittels Transmissionswahrscheinlichkeit  $T$  und Reflektionswahrscheinlichkeit  $R$  zusammen:  $R \sim g_i^2 a(k) + O(g_i^3)$  und  $T = 1 - R$  liefern  $R/T \sim g_i^2 + O(g_i^3)$ , wobei  $g_i$  die Buckelhöhe bezeichnet.

betrachtet. Dabei ist  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  und die Koeffizientenmatrix  $Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & r(x) \end{pmatrix}$ ,  $p, q, r \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_0^+)$ .

Zunächst wird dort festgestellt, dass durch die Spektralfunktion  $\varrho(\lambda)$  des Problems die Gleichung (47) nicht eindeutig bestimmt ist, da auch die Gleichung

$$B\psi' + (\mathcal{A}^{-1}B\mathcal{A}' + \mathcal{A}^{-1}Q\mathcal{A})\psi = \lambda\psi$$

zur selben Spektralfunktion führt. Dabei ist

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} \cos \omega(x) & \sin \omega(x) \\ -\sin \omega(x) & \cos \omega(x) \end{pmatrix}$$

mit  $\omega$  absolutstetig und  $\psi = \mathcal{A}y$ .

Die Eindeutigkeit von (47) wird jedoch erreicht, wenn man für diese Gleichung eine mit den Worten von [GASYMOV/LEVITAN] als kanonisch bezeichnete Form fordert. Diese ist gegeben durch die Bedingung

$$\begin{aligned} \text{spur}(\mathcal{A}^{-1}B\mathcal{A} + \mathcal{A}^{-1}Q\mathcal{A}) &= 0 \\ \psi_1(0) &= 0, \quad \psi_2(0) = -1 \end{aligned}$$

Dann ist nämlich

$$\omega(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (p(s) + r(s)) \, ds + \alpha$$

eindeutig.

Jede Gleichung der Form (47) kann also mittels einer orthogonalen Transformation auf die kanonische Form

$$By' + Q_1y = \lambda y \tag{49}$$

mit  $\text{spur } Q_1 = 0$  gebracht werden. Die Transformation der Randbedingung liefert  $y_1(0) = 0$ ,  $y_2(0) = -1$ .

Bringt man die Gleichung (4) mit Randbedingung (5) mit der oben definierten Transformation in die kanonische Form, so ist nach [GASYMOV/LEVITAN] die zugehörige Spektralfunktion eindeutig.

□

*Beweis von Hilfssatz 2.17*

Da im Fall identischer Buckel für die zu den einzelnen Buckeln gehörenden Transfermatrizen  $M^{(1)} = \dots = M^{(n)} =: M$  gilt, ist  $A_1 = \dots = A_n =: A$ ,  $B_1 = \dots = B_n =: B$  und  $C_1 = \dots = C_n =: C$ , was  $f_1 = \dots = f_n =: f$  und  $m_1 = \dots = m_n =: m$  zur Folge hat.

Der Beweis der Behauptung  $m < 0$  wird in zwei Schritten geführt. Zunächst wird im ersten Schritt die Annahme  $m \equiv 0$  zu einem Widerspruch gebracht.

Da  $m$  holomorph ist, muß dann im Anschluß im zweiten Beweisschritt lediglich noch ausgeschlossen werden, dass  $m$  an isolierten Punkten  $\kappa \in \mathbb{R}$  verschwindet. Hätte nämlich  $m$  auf einem Intervall den Wert 0, so müßte nach [KNOPP 76], § 21,  $m$  schon die Nullfunktion sein (Denn es gibt dann eine offene zusammenhängende Menge in diesem Intervall, die Häufungspunkt von Nullstellen von  $m$  ist).

Für den ersten Beweisschritt sei die Widerspruchsannahme  $m \equiv 0$ . Dann ist wegen (45)  $A \equiv 1$ , und aufgrund von  $A^2 - B^2 - C^2 = 1$  folgt  $B \equiv C \equiv 0$ .

In Definition (19) eingesetzt liefert dies für  $j \in \{1, \dots, n\}$ :

$$\frac{R_{n;j-1}^2(\kappa)}{R_{n;j}^2(\kappa)} = f_j \equiv 1 \quad (\kappa \in \mathbb{R}^*). \quad (50)$$

Das heißt, es ist  $R_{n;j-1}^2 = R_{n;j}^2$  ( $j \in \{1, \dots, n\}$ ). Somit ist wegen  $R_{n;j} > 0$  ( $j \in \{0, \dots, n\}$ )

$$R_{n;j} \equiv R_{n;0} =: R_0 \quad (51)$$

Wegen (50) und (25) gibt es gewisse  $c_+, c_- \in \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} \varrho_n(\lambda(\kappa)) &= \varrho_{n-1}(\lambda(\kappa)) + c_+ & \kappa > 0 \\ \varrho_n(\lambda(\kappa)) &= \varrho_{n-1}(\lambda(\kappa)) + c_- & \kappa < 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Ziel ist es, für die Spektralfunktion  $\varrho_n(\lambda) = \varrho_{n-1}(\lambda) + c_-$  auf ganz  $\mathbb{R}$  zu zeigen, woraus dann der gewünschte Widerspruch abgeleitet werden wird.

Dazu wird folgende Hilfsfunktion  $\mathcal{R}$  definiert:

$$\mathcal{R} : \mathbb{C} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{C}, (\lambda, r) \mapsto (\lambda - 1)\Psi_1^2(r; \lambda) + (\lambda + 1)\Psi_2^2(r; \lambda) \quad (53)$$

wobei  $\Psi$  Lösung von (4) und (5) ist.

$\mathcal{R}(\cdot, b_j)$  ist auf  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  als holomorphe Funktion der Lösungskomponenten  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  holomorph. Außerdem stimmt  $\mathcal{R}$  für  $\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| > 1$  mit dem  $(\lambda - 1)$ -fachen des Quadrats des in (6) definierten Prüfer-Radius überein, wie der Vergleich mit dem verallgemeinerten Satz von Pythagoras (11) zeigt.

Es ist also wegen (51)

$$\mathcal{R}(\lambda, b_n) = (\lambda - 1)R_n^2(\kappa(\lambda)) = (\lambda - 1)R_0 \quad (\lambda \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty))$$

Da  $\mathcal{R}(\cdot, b_n)$  holomorph ist, gilt dann auch auf ganz  $\mathbb{C}$  die Beziehung  $\mathcal{R}(\lambda, b_n) = (\lambda - 1)R_0$ , da die holomorphe Fortsetzung eindeutig ist (siehe [KNOPP 76], S. 98 bzw. S.101).

Es ist also  $\mathcal{R}(\lambda, b_n) \neq 0 \quad (\lambda \neq 1)$ .

Wegen  $\frac{d}{dr}\mathcal{R}(\lambda, r) = 0 \quad (r \geq b_n)$  ist dann

$$\mathcal{R}(\lambda, r) = (\lambda - 1)R_0 \quad (r \in (b_n, \infty), \lambda \in \mathbb{C}) \quad (54)$$

Dass  $\lambda \in [-1, 1]$  kein Eigenwert sein kann, wird mit einer Fallunterscheidung  $\lambda \in (-1, 1)$ ,  $\lambda = -1$  und  $\lambda = 1$  mit Hilfe eines Widerspruchbeweises gezeigt:

Sei angenommen, dass  $\lambda_0 \in (-1, 1)$  ein Eigenwert von (4), (5) wäre. Dann lautete die zugehörige Eigenfunktion für  $r \geq b_n$

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta e^{\sigma r} + \xi e^{-\sigma r} \\ \frac{\sigma}{1+\lambda_0} (\zeta e^{\sigma r} + \xi e^{-\sigma r}) \end{pmatrix}$$

mit gewissen  $\zeta, \xi \in \mathbb{R}$  und  $\sigma = \sqrt{1 - \lambda_0^2}$ .

Aus der Forderung nach quadratischer Integrierbarkeit würde  $\zeta = 0$  folgen und man hätte für  $r \geq b_n$  im Widerspruch zu (54):

$$\mathcal{R}(\lambda_0, r) = \xi^2 \left( (\lambda_0 - 1) - (\lambda_0 + 1) \frac{\sigma^2}{(1 + \lambda_0)^2} \right) e^{-2\sigma r} = 0$$

$\lambda = -1$  ist kein Eigenwert des Problems (4), (5), da die allgemeine Lösung von (4) für  $r \geq b_j$  die Gestalt  $\Psi(r) = \begin{pmatrix} \zeta \\ -2\zeta r + \xi \end{pmatrix}$  mit  $\zeta, \xi \in \mathbb{R}$  hat. Eine solche Funktion ist aber nur für  $\zeta = \xi = 0$  quadratisch integrierbar. Analog zeigt man, dass  $\lambda = 1$  kein Eigenwert ist.

Somit ist gezeigt, dass (4), (5) (wohlgemerkt unter der Widerspruchsannahme  $m \equiv 0$ ) keine Eigenwerte in  $[-1, 1]$  besitzt. Man erhält deswegen aus (52) für  $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\varrho_n(\lambda(\kappa)) = \varrho_{n-1}(\lambda(\kappa)) + c_-.$$

Da nach Hilfssatz 2.18 die Spektralfunktion das Potential eindeutig bestimmt, ist dann aber  $q_{D_n} = q_{D_{n-1}}$  im Widerspruch zu  $W_n \neq 0$ .

Also ist  $m$  nicht die Nullfunktion.

Im zweiten Beweisschritt bleibt nun zu zeigen, dass  $m$  nicht an isolierten Punkten verschwindet.

Falls  $m(\kappa(\lambda_0)) = 0$  für ein  $\lambda_0 \in \mathbb{R}, |\lambda_0| > 1$  ausfällt, gehört  $\lambda_0$  nicht zum Punktspektrum, da die allgemeine Lösung von (4) für  $|\lambda_0| > 1$  für  $r \geq b_j$  die Form

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \zeta \cos \sigma r + \xi \sin \sigma r \\ \Psi_2 &= \frac{\sigma}{1+\lambda_0} (\zeta \cos \sigma r + \xi \sin \sigma r) \quad \zeta, \xi \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit  $\sigma = \sqrt{\lambda^2 - 1}$  besitzt. Diese Lösung ist jedoch nur für  $\zeta = \xi = 0$  quadratisch integrierbar. Es gibt also keine Eigenlösung.

Es ist also  $m(\kappa) < 0 \quad (\kappa \in \mathbb{R}^*)$ .

□

Im Fall kleiner werdender Buckel ist das asymptotische Verhalten von  $f_j$  bzw.  $m_j$  für gegen 0 gehende Buckelhöhe  $H_j$  von Interesse. Um dieses zu bestimmen, wird der folgende Hilfssatz verwendet, der Aussagen über das asymptotische Verhalten der Größen  $A_j$ ,  $B_j$  und  $C_j$  macht.

**Hilfssatz 2.19.** Sei  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

Es gilt für  $H_j \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}
 A_j &= 1 \\
 &+ \frac{1}{2} H_j^2 \left\{ \frac{8}{\kappa^2} \left( \int_{a_j}^{b_j} W(s - a_j) \sin \kappa s \cos \kappa s \, ds \right)^2 \right. \\
 &+ 4 \left( \int_{a_j}^{b_j} W(s - a_j) \sin^2 \kappa s \, ds \right) \left( \int_{a_j}^{b_j} W(s - a_j) \cos^2 \kappa s \, ds \right) \\
 &+ \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1} \left( \int_{a_j}^{b_j} W(s - a_j) \sin^2 \kappa s \, ds \right)^2 \\
 &\left. + \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1} \left( \int_{a_j}^{b_j} W(s - a_j) \cos^2 \kappa s \, ds \right)^2 \right\} \\
 &+ O(H_j^3)
 \end{aligned} \tag{55}$$

$$B_j = -H_j \frac{2}{\kappa} \int_{a_j}^{b_j} W(s - a_j) \sin 2\kappa s \, ds + O(H_j^2) \tag{56}$$

$$C_j = H_j \frac{2}{\kappa} \int_{a_j}^{b_j} W(s - a_j) \cos 2\kappa s \, ds + O(H_j^2) \tag{57}$$

*Beweis*

Sei ähnlich wie bei (31) mit

$$T_{fr} := \begin{pmatrix} 0 & 1 + \lambda \\ 1 - \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

wieder der potentialfreie Operator und mit

$$\mathcal{S}(H) := \begin{pmatrix} 0 & -HW(\cdot) \\ HW(\cdot) & 0 \end{pmatrix}$$

die Störung, die als Kopplungsparameter die Buckelhöhe  $H \in \mathbb{R}$  enthält, bezeichnet.

Das Fundamentalsystem der ungestörten Gleichung

$$\Psi' = T_{fr} \Psi, \quad (58)$$

betrachtet auf  $[0, \alpha_j]$  ist durch (32) gegeben.

Das kanonische Fundamentalsystem für die gestörte Gleichung

$$\Psi' = [T_{fr} + \mathcal{S}(H)]\Psi \quad (59)$$

mit Anfangswert  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  heiße  $\Phi(\cdot, H)$ . Es ist  $U(r) = \Phi(r, 0)$  ( $r \in [0, \alpha_j]$ ) und  $M^{(j)} = \Phi(\alpha_j, H_j)$ .

Die Definitionen (20), (21) und (22) werden folgendermaßen für reelles  $H$  verallgemeinert:

$$A(H) := \frac{1}{2} [\Phi_{11}^2(b_j, H) + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \Phi_{21}^2(b_j, H) + \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \Phi_{12}^2(b_j, H) + \Phi_{22}^2(b_j, H)] \quad (60)$$

$$B(H) := \frac{1}{2} [\Phi_{11}^2(b_j, H) + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \Phi_{21}^2(b_j, H) - \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \Phi_{12}^2(b_j, H) - \Phi_{22}^2(b_j, H)] \quad (61)$$

$$C(H) := \left[ \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} \Phi_{11}(b_j, H) \Phi_{12}(b_j, H) + \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \Phi_{21}(b_j, H) \Phi_{22}(b_j, H) \right] \quad (62)$$

(Dann ist  $A_j = A(H_j)$ ,  $B_j = B(H_j)$  und  $C_j = C(H_j)$  für  $j \in \{1, \dots, n\}$ .)

Verwendet man hier die Integralgleichung (33) in der Form

$$\Phi(r) = U(r) + U(r) \int_0^r U^{-1}(s) \mathcal{S}(s) \Phi(s) \, ds, \quad (63)$$

so kann man die Lösung iterativ einsetzen, um die Komponenten von  $\Phi$  in Abhängigkeit von Potenzen von  $H$  zu ermitteln.

Es ist

$$\tilde{U}^{(j)}(x, \kappa) = U(x, \kappa) + O(H_j) \quad (H_j \rightarrow 0) \quad (64)$$

In 0. Ordnung in  $H$  gilt dann:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \left[ U_{11}^2(b_j) + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} U_{21}^2(b_j) + \frac{\lambda-1}{\lambda+1} U_{12}^2(b_j) + U_{22}^2(b_j) \right] + O(H) \\
 &= 1 + O(H) \\
 B &= \frac{1}{2} \left[ U_{11}^2(b_j) + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} U_{21}^2(b_j) - \frac{\lambda-1}{\lambda+1} U_{12}^2(b_j) - U_{22}^2(b_j) \right] + O(H) \\
 &= 0 + O(H) \\
 C &= \left[ \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} U_{11}(b_j) U_{12}(b_j) + \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} U_{21}(b_j) U_{22}(b_j) \right] + O(H) \\
 &= 0 + O(H)
 \end{aligned}$$

Die erste Ordnung von  $A$  in  $H$  verschwindet, während man für die erste Ordnung in  $H$  von  $B$  bzw.  $C$

$$\begin{aligned}
 &- \frac{2}{\kappa} \int_{a_j}^{b_j} W(s - a_j) \sin 2\kappa s \, ds \\
 &\frac{2}{\kappa} \int_{a_j}^{b_j} W(s - a_j) \cos 2\kappa s \, ds
 \end{aligned}$$

erhält. Die zweite Ordnung von  $A$  in  $H$  lautet

$$\begin{aligned}
 &\frac{8}{\kappa^2} \left( \int_{a_j}^{b_j} W(s - a_j) \sin \kappa s \cos \kappa s \, ds \right)^2 \\
 &+ 4 \left( \int_{a_j}^{b_j} W(s - a_j) \sin^2 \kappa s \, ds \right) \left( \int_{a_j}^{b_j} W(s - a_j) \cos^2 \kappa s \, ds \right) \\
 &+ \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1} \left[ \left( \int_{a_j}^{b_j} W(s - a_j) \sin^2 \kappa s \, ds \right)^2 + \left( \int_{a_j}^{b_j} W(s - a_j) \cos^2 \kappa s \, ds \right)^2 \right] \\
 &=: \mathcal{W}_j(b_j, a_j, \kappa)
 \end{aligned} \tag{65}$$

□

Diese Vorbereitungen dienen dazu, das asymptotische Verhalten von  $f_j$  und  $m_j$  zu beschreiben:

**Hilfssatz 2.20.**

Sei  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Für  $H_j \rightarrow 0$  gilt:

$$\begin{aligned} f_j(\kappa, y) &= \left[ 1 - \frac{2H_j}{\kappa} \int_{a_j}^{b_j} W_j(s - a_j) \sin 2\kappa s \, ds \cos 2y \right. \\ &\quad \left. + \frac{2H_j}{\kappa} \int_{a_j}^{b_j} W_j(s - a_j) \cos 2\kappa s \, ds \sin 2y + O(H_j^2) \right]^{-1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} m_j &= -\frac{H_j^2}{2} \left\{ \frac{8}{\kappa^2} \left( \int_{a_j}^r W_j(s - a_j) \sin \kappa s \cos \kappa s \, ds \right)^2 \right. \\ &\quad + 4 \left( \int_{a_j}^r W_j(s - a_j) \sin^2 \kappa s \, ds \right) \left( \int_{a_j}^r W_j(s - a_j) \cos^2 \kappa s \, ds \right) \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1} \left[ \left( \int_{a_j}^r W_j(s - a_j) \sin^2 \kappa s \, ds \right)^2 + \left( \int_{a_j}^r W_j(s - a_j) \cos^2 \kappa s \, ds \right)^2 \right] \right\} \\ &< 0 \end{aligned} \tag{66}$$

*Beweis*

Die Asymptotik von  $f_j$  erhält man durch Einsetzen der Ergebnisse von Hilfssatz 2.20 in (19). (55) in (45) eingesetzt liefert die Behauptung (66) für  $m_j$ . Das Vorzeichen von  $m_j$  liest man bei (66) direkt ab.

□

## 2.5 Singulärstetiges Spektrum

Zielsetzung ist es, bei vorgegebenen Buckelprofilen die Abstände zwischen den Buckeln so zu bestimmen, dass das zugehörige Randwertproblem rein

singulärstetiges Spektrum besitzt.

Die Folgen für die Buckelhöhen, Buckelbreiten und Buckelformen, die die Buckelpfleprofile beschreiben, seien also vorgegeben. Ihre Eigenschaften werden bei der Formulierung des folgenden Satzes 2.21 genauer angegeben. Zu bestimmen ist die Folge  $D := (d_j)_{j \in \mathbb{N}}$  der Abstände zwischen den Buckeln derartig, dass das im Folgenden formulierte Problem (67) und (68) für  $\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| > 1$  rein singulärstetiges Spektrum aufweist.

Seien dazu Folgen  $(H_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N$  und  $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^N$  gegeben. Sei  $W_j \in C[0, \alpha_j] \setminus \{0\}$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) mit  $\int_0^{\alpha_j} |W_j| = 1$ .

Betrachtet wird

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -q + 1 + \lambda \\ q + 1 - \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (67)$$

mit der Randbedingung

$$\Psi_1(0) = 1, \quad \Psi_2(0) = 0. \quad (68)$$

Hierbei ist

$$q(r) = \begin{cases} 0 & 0 \leq r \leq a_1 \\ H_i W_i(r - a_i) & a_i < r < b_i \quad (i \in \mathbb{N}) \\ 0 & b_i \leq r < a_{i+1} \quad (i \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

mit

$$\begin{aligned} a_i &:= \sum_{j=1}^{i-1} (d_j + \alpha_j) + d_i \quad (i \in \mathbb{N}) \\ b_i &:= a_i + \alpha_i \quad (i \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Der Beweis von Satz 2.21 gliedert sich in zwei Teile: Zunächst wird gezeigt, dass bei geeigneter Wahl der  $d_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) zu den in (43) definierten Maßen ein singulärstetiges Grenzmaß existiert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\Sigma) =: \mu_D(\Sigma) \quad (\Sigma \subset \mathbb{R}^* \text{ kompakt}).$$

Im Anschluß wird im Abschnitt 2.6 gezeigt, dass dieses Grenzmaß das Maß des zu (67) gehörigen Grenzoperators ist.

### 2.5.1 Singulärstetiges Grenzmaß

Der zentrale Satz lautet:

**Satz 2.21.**

Seien Folgen  $(H_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N$  und  $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^N$  und zu letzteren Funktionen  $W_j \in C[0, \alpha_j]$  mit  $\int_0^{\alpha_j} |W_j| = 1$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) gegeben mit folgenden Eigenschaften:

Entweder sind die Buckel mit von Null verschiedener Höhe identisch oder es gilt  $H_j = 0$  nur für endlich viele Indizes  $j \in \mathbb{N}$ ,  $H_j \rightarrow 0$  ( $j \rightarrow \infty$ ) und

$$\sum_{j=1}^{\infty} H_j^2 \mathcal{W}_j = \infty \quad (69)$$

mit  $\mathcal{W}_j(b_j, a_j, \kappa)$  gemäß Definition (65).

Dann gibt es eine Folge  $D := (d_j)_{j \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^N$  mit der Eigenschaft, dass für jedes kompakte Intervall  $\Sigma \subset \mathbb{R}^*$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j(\Sigma) =: \mu_D(\Sigma)$$

existiert und ein singulärstetiges Maß auf  $\mathbb{R}^*$  definiert.

**Bemerkung 2.22.**

Die in Abschnitt 2.4 für den Schrödingeroperator skizzierte Interpretation des Teilchenverhaltens ([PERRY]) ist hier analog zu sehen: Wenn die Reflexion an den einzelnen Buckeln aufgrund der großen Buckelabstände als unabhängig von den vorangegangenen Reflexionen angesehen werden kann, ist das Verhältnis der Gesamtreflektionswahrscheinlichkeit zur Gesamttransmissionswahrscheinlichkeit die Summe der Quotienten aus Reflexionswahrscheinlichkeit und Transmissionswahrscheinlichkeit für die einzelnen Buckel. Die Bedingung (69) bedeutet eine Gesamttransmissionswahrscheinlichkeit von 0.

**Beispiel 2.23.**

Die Bedingung (69) wird beispielsweise von den Buckeln der Breite  $\alpha_j = 1$  mit den Buckelprofilen  $W_j \equiv 1$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) und den Buckelhöhen  $H_j = \sqrt{\frac{1}{j}}$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) erfüllt.

Für dieses Beispiel gilt nämlich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} H_j^2 \mathcal{W}_j(1, 0, \kappa) &= \\
&= \frac{1}{2j} \left[ \frac{8}{\kappa^2} \left[ \int_0^1 \sin \kappa s \cos \kappa s \, ds \right]^2 + 4 \left[ \int_0^1 \sin^2 \kappa s \, ds \right] \left[ \int_0^1 \cos^2 \kappa s \, ds \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1} \left[ \left( \int_0^1 \sin^2 \kappa s \, ds \right)^2 \left( \int_0^1 \cos^2 \kappa s \, ds \right)^2 \right] \right] \\
&\geq \frac{2}{j} \left[ \int_0^1 \sin^2 \kappa s \, ds \right] \left[ \int_0^1 \cos^2 \kappa s \, ds \right]
\end{aligned} \tag{70}$$

Vor dem eigentlichen Beweis von Satz 2.21 sei hier das Vorgehen kurz skizziert:

Ausgehend von einem endlichen Buckelpotential wird in jedem Schritt eine Reihe von zusätzlichen Buckeln hinzugenommen, wobei die Abstände zwischen neuen Buckeln gewisse Bedingungen erfüllen, damit Folgendes erreicht wird:

Zum einen sollen sich die Maße, die zu Potentialen gehören, die um zusätzliche Buckel erweitert wurden, von den Vorgängermaßen kaum unterscheiden (siehe (106) und (110)).

Zum anderen ist bei der Wahl der neuen Buckelabstände darauf zu achten, dass der Träger des zugehörigen neuen Maßes kleines Lebesguemaß hat (siehe (108), (107) und (112), (111)). Dies sichert beim Übergang zur Grenze  $n \rightarrow \infty$  die Singularität des Grenzmaßes.

Damit der Grenzoperator kein Punktspektrum in  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  besitzt, werden nur solche Folgen  $(d_j)_{j \in \mathbb{N}}$  für die Buckelabstände zugelassen, die eine gewisse Mindestanwachsrate aufweisen. Dadurch wird dafür gesorgt, dass der Prüferradius wegen weiter potentialfreier Strecken nicht schnell genug abfällt, um quadratintegrale Lösungen zu ermöglichen.

Abgesehen davon fußt der Beweis dieses Satzes auf folgenden Kernpunkten:

Es muß sichergestellt werden, dass das Grenzmaß  $\mu_D$  existiert. Um dies zu

gewährleisten, ist dafür Sorge zu tragen, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_{n+1}(\Sigma) - \mu_n(\Sigma))$$

für beliebiges Kompaktum  $\Sigma \subset \mathbb{R}^*$  absolut konvergent ist. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn durch geeignete Wahl der  $d_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ )

$$|\mu_{n+1}(\Sigma) - \mu_n(\Sigma)| < 2^{-n+2} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (71)$$

erreicht werden kann. (Man könnte aber auch jede andere summierbare Majorante für die Reihe wählen.)

Gemäß Konstruktion überträgt sich die Stetigkeit der Maße  $\mu_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) auf das Grenzmaß  $\mu_D$ .

Die Singularität von  $\mu_D$  wird dadurch erreicht, dass die approximierenden Maße so gewählt werden, dass sie auf Mengen konzentriert sind, deren Lebesguemaß für große  $n$  beliebig klein wird.

Um diese Eigenschaften des (noch zu bestimmenden) Grenzmaßes  $\mu_D$  zu erhalten, wird die Folge  $D$  induktiv bestimmt. In jedem Schritt müssen die neuen Folgenglieder  $d_j$  genügend groß im Vergleich zu den bereits festgelegten Folgengliedern gewählt werden. (Was „genügend groß“ bedeutet, wird beim Beweis des Satzes konkretisiert werden.)

Um die Aussagen für beliebige Intervalle  $\Sigma \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$  zu erhalten, wird während des Induktionsbeweises dieser Bereich durch gedoppelte Intervalle  $[-2n, -\frac{1}{2n}] \cup [\frac{1}{2n}, 2n]$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ausgeschöpft.

Der Beweis des Satzes stützt sich auf die Aussage von mehreren Hilfssätzen, die im Folgenden bewiesen werden:

Satz 2.24 hat die Tatsache zum Gegenstand, dass sich das Integral über das Mittel einer periodischen Funktion nur wenig vom Integral über die Funktion selbst unterscheidet, wenn man diese nur stark genug staucht. Daran ändert sich nichts, wenn ein stetig differenzierbarer Faktor zu dieser Funktion hinzutritt.

Nach Hilfssatz 2.26 gilt auch im Fall nicht identischer Buckel

$$-\sum_{j=1}^{\infty} m_j(\kappa) = \infty \quad \text{gleichmäßig in } \kappa \in [\alpha, \beta],$$

falls die Summe  $\sum_{j=1}^{\infty} H_j^2 \mathcal{W}_j(0, a_j, \kappa)$  divergiert.

Satz 2.31 wird für den Beweis von Satz 2.34 benötigt.

Dass (71) erreicht werden kann, beruht auf der Aussage von Hilfssatz 2.33.

Die Aussage von Satz 2.33 ermöglicht den Vergleich des zu einem  $n$ -Buckelpotential gehörenden Maßes  $\mu_n$  mit dem Maß, das entsteht, wenn man zu den  $n$  Buckeln noch einen weiteren in genügend großem Abstand hinzusetzt.

Hilfssatz 2.34 schließlich stellt sicher, dass die Maße  $\mu_n$  für wachsendes  $n$  auf Mengen mit gegen 0 gehendem Lebesguemaß konzentriert sind, wobei gleichzeitig die übrigen zuvor gestellten Forderungen an diese Maße erfüllt sein müssen.

### Vorbereitungen für den Beweis von Satz 2.21

Im folgenden Satz stehen periodische Funktionen im Mittelpunkt. Staucht man eine derartige Funktion stark genug, so unterscheidet sich ihr Integral beliebig wenig von ihrem Mittelwert:

#### Hilfssatz 2.24.

*$F : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig differenzierbar,  $G : [\alpha, \beta] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig differenzierbar und  $\pi$ -periodisch im zweiten Argument. Mit  $\bar{G} := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi G(\cdot, y) dy$  sei die Mittelung von  $G$  über das zweite Argument bezeichnet. Dann gilt:*

*Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es  $L_0 > 0$  so, dass für jedes  $L \geq L_0$  gilt*

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} F(\kappa) [G(\kappa, L\kappa) - \bar{G}(\kappa)] d\kappa \right| < \varepsilon.$$

*Beweis*

Da  $G$  stetig differenzierbar und im zweiten Argument  $\pi$ -periodisch ist, gilt

$$\sup_{\kappa \in [\alpha, \beta], y \in R} |G(\kappa, y)| = \sup_{\kappa \in [\alpha, \beta], y \in [0, \pi]} |G(\kappa, y)| =: B < \infty \quad (72)$$

Zunächst werden einige Vorüberlegungen für beliebiges  $L > 1$  angestellt.

Wegen  $G(\kappa, L\kappa) - \bar{G}(\kappa) = \frac{d}{d\kappa} \int_{\alpha}^{\kappa} (G(\tilde{\kappa}, L\tilde{\kappa}) - \bar{G}(\tilde{\kappa})) d\tilde{\kappa}$  ist mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} F(\kappa) [G(\kappa, L\kappa) - \bar{G}(\kappa)] d\kappa \\ &= F(\beta) \int_{\alpha}^{\beta} [G(\kappa, L\kappa) - \bar{G}(\kappa)] d\kappa \\ & \quad - \int_{\alpha}^{\beta} \left( F'(\kappa) \int_{\alpha}^{\kappa} [G(\tilde{\kappa}, L\tilde{\kappa}) - \bar{G}(\tilde{\kappa})] d\tilde{\kappa} \right) d\kappa \end{aligned} \quad (73)$$

Die so erhaltenen Terme werden im Folgenden einzeln untersucht.

Bezeichnet  $c_0$  das kleinste ganzzahlige Vielfache von  $\pi$ , das größer ist als  $L\alpha$ , und  $c_M$  das größte ganzzahlige Vielfache von  $\pi$ , das kleiner als  $L\beta$  ist, so erhält man eine Zerlegung von  $[L\alpha, L\beta]$  in zwei Randstücke  $[L\alpha, c_0]$  und  $[c_M, L\beta]$  und ein Mittelstück  $[c_0, c_M]$ , welches  $M := \frac{c_M - c_0}{\pi}$  Perioden der Länge  $\pi$  enthält (siehe Abbildung 9).



Abbildung 9: Zerlegung des Intervalls  $[L\alpha, L\beta]$  in  $M + 2$  Intervalle

Mit dieser Zerlegung lässt sich das Integral des ersten Terms von (73) ent-

sprechend als Summe von drei Integralen darstellen:

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha}^{\beta} [G(\kappa, L\kappa) - \bar{G}(\kappa)] \, d\kappa \stackrel{y=L\kappa}{=} \frac{1}{L} \int_{L\alpha}^{L\beta} \left[ G\left(\frac{y}{L}, y\right) - \bar{G}\left(\frac{y}{L}\right) \right] \, dy \\
&= \frac{1}{L} \int_{L\alpha}^{c_0} \left[ G\left(\frac{y}{L}, y\right) - \bar{G}\left(\frac{y}{L}\right) \right] \, dy + \frac{1}{L} \int_{c_0}^{c_M} \left[ G\left(\frac{y}{L}, y\right) - \bar{G}\left(\frac{y}{L}\right) \right] \, dy \\
&\quad + \frac{1}{L} \int_{c_M}^{L\beta} \left[ G\left(\frac{y}{L}, y\right) - \bar{G}\left(\frac{y}{L}\right) \right] \, dy \\
&=: I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

Für  $I_1$  erhält man, wenn man neben (72) noch  $\sup_{\kappa \in [\alpha, \beta]} |\bar{G}(\kappa)| \leq B$  verwendet und berücksichtigt, dass gemäß Definition  $c_0 - L\alpha \leq \pi$  ist, folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \frac{1}{L} \int_{L\alpha}^{c_0} \left( \sup_{\kappa \in [\alpha, \beta], \tilde{y} \in [0, \pi]} |G(\kappa, \tilde{y})| + \sup_{\kappa \in [\alpha, \beta]} |\bar{G}(\kappa)| \right) \, dy \\
&= \frac{1}{L} 2B(c_0 - L\alpha) \leq \frac{1}{L} 2B\pi
\end{aligned} \tag{74}$$

Ganz analog schätzt man  $|I_3|$  ab.

Das Integral  $I_2$  wird weiter zerlegt in  $M$  Integrale, die jeweils einen Integrationsbereich der Länge  $\pi$  besitzen.

Stellvertretend für diese wird hier  $[c_0, c_0 + \pi]$  näher betrachtet:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{c_0}^{c_0 + \pi} \left[ G\left(\frac{y}{L}, y\right) - \bar{G}\left(\frac{y}{L}\right) \right] \, dy \right| = \\
& \leq \int_{c_0}^{c_0 + \pi} \sup_{x \in [\frac{c_0}{L}, \frac{c_0 + \pi}{L}], y \in [0, \pi]} \left| G(x, y) - G\left(\frac{c_0}{L}, y\right) \right| \, dy + \int_{c_0}^{c_0 + \pi} \sup_{x \in [\frac{c_0}{L}, \frac{c_0 + \pi}{L}]} \left| \bar{G}\left(\frac{c_0}{L}\right) - \bar{G}(x) \right| \, dy \\
&= \pi \left[ \sup_{x \in [\frac{c_0}{L}, \frac{c_0 + \pi}{L}], y \in [0, \pi]} \left| G(x, y) - G\left(\frac{c_0}{L}, y\right) \right| + \sup_{x \in [\frac{c_0}{L}, \frac{c_0 + \pi}{L}]} \left| \bar{G}\left(\frac{c_0}{L}\right) - \bar{G}(x) \right| \right]
\end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass gemäß der Definition von  $\bar{G}$  die beiden Integrale  $\int_{c_0}^{c_0+\pi} \bar{G}(\frac{c_0}{L}) dy = \int_{c_0}^{c_0+\pi} G(\frac{c_0}{L}, y) dy$  den gleichen Wert aufweisen.

Faßt man alle Intervalle der Länge  $\pi$  zusammen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{\pi M}{L} \left( \sup_{x \in [\frac{c_0+(j_0-1)\pi}{L}, \frac{c_0+j_0\pi}{L}], y \in [0, \pi]} \left| G(x, y) - G\left(\frac{c_0 + (j_0 - 1)\pi}{L}, y\right) \right| \right. \\ &\quad \left. + \sup_{x \in [\frac{c_0+(j_0-1)\pi}{L}, \frac{c_0+j_0\pi}{L}]} \left| \bar{G}\left(\frac{c_0 + (j_0 - 1)\pi}{L}\right) - \bar{G}(x) \right| \right) \\ &=: \frac{\pi M}{L} H, \end{aligned}$$

wobei  $j_0$  der Index sei, für den das Maximum der Summanden angenommen wird.

Wegen (74) und der Endlichkeit von  $\sup_{\kappa \in [\alpha, \beta]} \frac{d}{d\kappa} F(\kappa) =: \|F'\|_\infty < \infty$  und  $|\sup_{\tilde{\kappa} \in [\alpha, \beta], \tilde{y} \in [0, \pi]} G(\tilde{\kappa}, \tilde{y}) + \sup_{\tilde{\kappa} \in [\alpha, \beta]} \bar{G}(\frac{\tilde{y}}{L})| =: C < \infty$  ist für die Abschätzung des zweiten Terms von (73) nur noch folgende Betrachtung, die wieder eine Zerlegung des Integrationsintervalls  $[L\alpha, L\kappa]$  in  $\tilde{M}$  ( $\tilde{M} \leq M$ ) Intervalle der Länge  $\pi$  und zwei Reststücke  $[\alpha, c_0]$ ,  $[c_0 + M\pi, L\kappa]$  mit Längen kleiner als  $\pi$  berücksichtigt, nötig:

$$\begin{aligned} L \left| \int_{\alpha}^{\kappa} [G(\tilde{\kappa}, L\tilde{\kappa}) - \bar{G}(\tilde{\kappa})] d\tilde{\kappa} \right| &= \left| \int_{L\alpha}^{L\kappa} \left[ G\left(\frac{y}{L}, y\right) - \bar{G}\left(\frac{y}{L}\right) \right] dy \right| \\ &\leq 2B\pi + \sum_{j=1}^{\tilde{M}} \left| \int_{c_0 + (j-1)\pi}^{c_0 + j\pi} \left[ G\left(\frac{y}{L}, y\right) - \bar{G}\left(\frac{y}{L}\right) \right] dy \right| \\ &\quad + \int_{c_0 + \tilde{M}\pi}^{L\kappa} \left| \sup_{\tilde{\kappa} \in [\alpha, \beta], \tilde{y} \in [0, \pi]} |G(\tilde{\kappa}, \tilde{y})| + \sup_{\tilde{\kappa} \in [\alpha, \beta]} \left| \bar{G}\left(\frac{y}{L}\right) \right| \right| dy \\ &\leq 2B\pi + \sum_{j=1}^M \left| \int_{c_0 + (j-1)\pi}^{c_0 + j\pi} \left[ G\left(\frac{y}{L}, y\right) - \bar{G}\left(\frac{y}{L}\right) \right] dy \right| + C\pi, \end{aligned}$$

was unabhängig von  $\kappa$  ist. Damit erhält man

$$\begin{aligned} & \left| - \int_{\alpha}^{\beta} \left( \left( \frac{d}{d\kappa} F(\kappa) \right) \int_{\alpha}^{\kappa} [G(\tilde{\kappa}, L\tilde{\kappa}) - \bar{G}(\tilde{\kappa})] d\tilde{\kappa} \right) d\kappa \right| \leq \\ & \leq \frac{\|F'\|_{\infty}}{L} (\beta - \alpha) \pi [2B + C + MH] \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\alpha}^{\beta} F(\kappa) [G(\kappa, L\kappa) - \bar{G}(\kappa)] d\kappa \right| \\ & \leq \frac{\pi}{L} [1 + \|F'\|_{\infty} (\beta - \alpha)] 2B + \frac{\pi}{L} [2B + \|F'\|_{\infty} (\beta - \alpha) C] \\ & \quad + \frac{M}{L} \pi [1 + \|F'\|_{\infty} (\beta - \alpha)] H \end{aligned}$$

Die Behauptung des Hilfssatzes folgt wegen  $\frac{M\pi}{L} \rightarrow 1$  ( $L \rightarrow \infty$ ) und der Tatsache, dass aufgrund der Stetigkeit von  $G$  und  $\tilde{G}$

$$\begin{aligned} H &= \sup_{x \in [\frac{c_0 + (j_0 - 1)\pi}{L}, \frac{c_0 + j_0\pi}{L}], y \in [0, \pi]} \left| G(x, y) - G\left(\frac{c_0 + (j_0 - 1)\pi}{L}, y\right) \right| \\ &\quad + \sup_{x \in [\frac{c_0 + (j_0 - 1)\pi}{L}, \frac{c_0 + j_0\pi}{L}]} \left| \bar{G}\left(\frac{c_0 + (j_0 - 1)\pi}{L}\right) - \bar{G}(x) \right| \\ &\rightarrow 0 \quad (L \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

□

### Korollar 2.25.

Sei  $I$  ein kompaktes Intervall. Seien  $F : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar  $H : [\alpha, \beta] \times \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $\pi$ -periodisch im zweiten Argument und  $z : [\alpha, \beta] \rightarrow I$  stetig differenzierbar.  $\bar{H} := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi H(\cdot, y, \cdot) dy$  sei das Mittel von  $H$  über das zweite Argument.

Dann gilt: Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es  $L_0 > 0$  so, dass für jedes  $L \geq L_0$  gilt

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} F(\kappa) [H(\kappa, L\kappa, z(\kappa)) - \bar{H}(\kappa, z(\kappa))] d\kappa \right| < \varepsilon. \quad (75)$$

*Beweis*

Die Behauptung folgt aus Satz 1 mit  $G(\kappa, y) = H(\kappa, y, z(\kappa))$ .

□

Die Aussage von Hilfssatz 2.17, dass im Fall identischer Buckel  $m < 0$  ist, kann folgendermaßen für Buckelpotentiale mit unterschiedlichen Buckeln verallgemeinert werden:

**Hilfssatz 2.26.**

*Unter den Voraussetzungen des Satzes 2.21 gilt*

$$-\sum_{j=1}^{\infty} m_j(\kappa) = \infty \quad \text{gleichmäßig in } \kappa \in [\alpha, \beta]$$

**Bemerkung 2.27.**

*Dies gilt unabhängig von der Wahl der Folge  $(d_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , da  $m_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) nach Bemerkung 2.16 nicht von dieser Folge abhängt.*

*Beweis des Hilfsatzes*

Im Fall identischer Buckel divergiert  $-\sum_{j=1}^{\infty} m_j(\kappa) = -\sum_{j=1}^{\infty} m(\kappa)$  gleichmäßig in  $\kappa \in [\alpha, \beta]$ , da die stetige Funktion  $m$  nach Hilfssatz 2.17 echt negativ ist.

Im Fall kleiner werdender Buckel gilt nach Voraussetzung des Satzes 2.21

$$\sum_{j=1}^{\infty} H_j^2 \mathcal{W}_j(0, a_j, \kappa) = \infty$$

Dann gilt aber wegen (66): Zu jedem  $\kappa_0 \in [\alpha, \beta]$  und jeder positiven Zahl  $M_0$  gibt es ein  $n_0(\kappa) \in \mathbb{N}$  so, dass für alle  $n \geq n_0(\kappa)$

$$-\sum_{j=1}^n m_j(\kappa) > M_0$$

ausfällt. Wegen der Stetigkeit der  $m_j$  ( $j \in \{1, \dots, n_0\}$ ) gibt es  $\delta(\kappa_0) > 0$  derart, dass für alle  $\kappa \in (\kappa_0 - \delta(\kappa_0), \kappa_0 + \delta(\kappa_0)) \cap [\alpha, \beta]$  gilt

$$-\sum_{j=1}^n m_j(\kappa) > \frac{M_0}{2} =: M.$$

Die offene Überdeckung

$$\bigcup_{\kappa_0 \in [\alpha, \beta]} \left( (\kappa_0 - \delta(\kappa_0), \kappa_0 + \delta(\kappa_0)) \cap [\alpha, \beta] \right)$$

des Kompaktums  $[\alpha, \beta]$  enthält eine endliche Teiliüberdeckung

$$\bigcup_{i=1}^r \left( (\kappa_i - \delta(\kappa_i), \kappa_i + \delta(\kappa_i)) \cap [\alpha, \beta] \right)$$

mit einem gewissen  $r \in \mathbb{N}$  und  $\kappa_j \in [\alpha, \beta]$  ( $\{j \in 1, \dots, r\}$ ). Definiert man  $n_0 := \max_{i \in \{1, \dots, r\}} n_0(\kappa_i)$ , so gilt, dass es zu jedem  $M = \frac{M_0}{2} > 0$  ein natürliches  $n_0$  gibt mit der Eigenschaft, dass für  $n \geq n_0$  die Summe  $-\sum_{j=1}^n m_j(\kappa) > M$  ausfällt, und zwar unabhängig von  $\kappa$ , so dass die Behauptung gezeigt ist.

□

Eine Vorbereitung für den Beweis von Hilfssatz 2.29 ist die folgende Feststellung, dass die Funktionen  $f_j$  nach unten beschränkt sind mit einer gemeinsamen Konstante  $\mathcal{C}$ :

### Hilfssatz 2.28.

Sei  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^*$ . Dann gibt es ein  $\mathcal{C} > 0$  mit

$$f_j(\kappa, y) \geq \mathcal{C} \quad (j \in \mathbb{N}, \kappa \in [\alpha, \beta], y \in \mathbb{R}). \quad (76)$$

*Beweis*

Im Fall identischer Buckel ist das trivial, denn

$$\frac{1}{f_j(\kappa, y)} = A(\kappa) + B(\kappa) \cos 2y + C(\kappa) \sin 2y$$

ist aufgrund der Tatsache, dass die positive Funktion  $f$  stetig in  $\kappa$  ist, auf  $[\alpha, \beta]$  beschränkt.

Im Falle kleiner werdender Buckel findet man wegen der in Hilfssatz 2.19 angegebenen Asymptotik (55), (56) und (57) von  $A_j$ ,  $B_j$  und  $C_j$  für  $H_j \rightarrow 0$  aufgrund von

$$\begin{aligned} & A_j(\kappa) + B_j(\kappa) \cos 2y + C_j(\kappa) \sin 2y \\ &= 1 + H_j \frac{2}{\kappa} \left[ \int_0^{\alpha_j} W_j(s) \sin 2\kappa s \, ds + \int_0^{\alpha_j} W_j(s) \cos 2\kappa s \, ds \right] + O_{\text{glm}}(H_j^2) \\ &\leq 1 + H_j \frac{4}{\min_{\kappa \in [\alpha, \beta]} \underbrace{\int_0^{\alpha_j} |W_j(s)| \, ds}_{=1}} + O_{\text{glm}}(H_j^2) \quad (H_j \rightarrow 0) \end{aligned}$$

ein  $\mathcal{C} > 0$ , das nicht von  $j \in \mathbb{N}$  abhängt, mit der Eigenschaft

$$A_j(\kappa) + B_j(\kappa) \cos 2y + C_j(\kappa) \sin 2y \leq \frac{1}{\mathcal{C}} \quad (\kappa \in [\alpha, \beta], y \in \mathbb{R}).$$

□

Diese Vorbereitung wird im folgenden Hilfssatz verwendet. Neben dem gemittelten Wert  $m_j$  der Größe  $\log f_j$  ist auch die ungemittelte Funktion  $h_j := \log f_j$  von Interesse. Für diese gilt folgende Abschätzung:

**Hilfssatz 2.29.**

Es gibt  $\mathcal{K} \geq 2$  mit

$$h_j^2 \leq \mathcal{K} (f_j - 1 - h_j) \quad (j \in \mathbb{N}), \quad (77)$$

wobei

$$h_j := \log f_j \quad (j \in \mathbb{N}) \quad (78)$$

definiert ist.

*Beweis*

Aus  $\log t \leq t - 1$  ( $t \in \mathbb{R}^+$ ) folgt

$$\frac{1}{2}(\log t)^2 = \int_1^t \frac{\log s}{s} ds \leq \int_1^t \frac{s-1}{s} ds = t - 1 - \log t \quad (t \geq 1).$$

Sei nun  $0 < c < 1$ . Dann gibt es  $\tilde{c} > 0$  mit

$$(\log t)^2 \leq \tilde{c}(t - 1 - \log t) \quad (t \in [c, 1]).$$

(Dies wird beispielsweise von  $\tilde{c} := \max_{s \in [c, 1]} \frac{(\log s)^2}{s-1-\log s} < \infty$  erfüllt.)

Mit  $\mathcal{K}_c := \max\{2, \tilde{c}\}$  hat man dann:

$$(\log t)^2 \leq \mathcal{K}_c(t - 1 - \log t) \quad (t \in [c, \infty)). \quad (79)$$

Die Behauptung (77) folgt aus (79) mit  $t = f_j$ ,  $c = \mathcal{C}$  von (76) und zugehörigem  $\mathcal{K} \geq 2$ .

□

### Korollar 2.30.

Aus (77) kann man

$$0 \leq \overline{h_j^2} \leq -\mathcal{K}m_j \quad (j \in \mathbb{N}) \quad (80)$$

folgern, indem man über das zweite Argument mittelt und  $\overline{f_j} = 1$  gemäß (44) und  $\overline{h_j} = m_j$  für  $j \in \mathbb{N}$  verwendet.

Nach diesen Vorbereitungen, die dem Zwecke dienten, sich eine Konstante  $\mathcal{K}$  zu verschaffen, für die die Abschätzung (80) (unabhängig von  $j \in \mathbb{N}$ ) gilt, folgt nun die Formulierung von

### Hilfssatz 2.31.

Sei  $\varepsilon > 0$  und  $\underline{\nu} \in \mathbb{N}_0$ . Die natürliche Zahl  $\bar{\nu} > \underline{\nu}$  sei so groß, dass

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{-\sum_{i=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} m_i} d\kappa < \frac{2\varepsilon}{\mathcal{K}}$$

ausfällt. Sei  $j_0 \in \{\underline{\nu} + 1, \dots, \bar{\nu}\}$ ,  $\Theta : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann gibt es  $L_{\Theta} > 0$  so, dass für alle  $L \geq L_{\Theta}$  gilt:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{[h_{j_0}(\kappa, \Theta(\kappa) - \kappa L)]^2}{\left[ \frac{1}{2} \sum_{i=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} m_i(\kappa) \right]^2} < \varepsilon.$$

### Bemerkungen 2.32.

1. Dass durch hinreichend großes  $\bar{\nu}$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{-\sum_{i=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} m_i} < \frac{2\varepsilon}{\mathcal{K}}$$

gewährleistet werden kann, stellt Hilfsatz 2.26 sicher.

2. Die stetige Differenzierbarkeit von  $\Theta$  muß vorausgesetzt werden, um Satz 2.24 anwenden zu können. In den Situationen, in denen Satz 2.31 verwendet wird, wird ohnehin eine sogar holomorphe Funktion die Rolle von  $\Theta$  übernehmen.

### Beweis von Satz 2.31

Zur Abkürzung sei

$$N(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa) := \frac{1}{2} \sum_{i=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} m_i(\kappa)$$

definiert.

Dass  $N(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa) \neq 0$  ist, ist im Fall identischer Buckel wegen Hilfsatz 2.17 sofort ersichtlich.

Im Fall kleiner werdender Buckel folgt dies aus Hilfssatz 2.20.

Es ist also

$$N(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa) < 0 \quad (81)$$

Nach Satz 2.24 (angewendet mit  $G(\kappa, y) = h_{j_0}^2(\kappa, \Theta(\kappa) - y)$ ),  $F = \frac{1}{N(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa)^2}$ ) gibt es  $L_\Theta > 0$  mit

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{h_{j_0}^2(\kappa, \Theta(\kappa) - \kappa L) - \overline{h_{j_0}^2}(\kappa)}{N(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa)^2} d\kappa \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (L \geq L_\Theta). \quad (82)$$

Außerdem erhält man wegen (80) und da  $-m_j \geq 0$  ( $j \in \{\underline{\nu} + 1, \dots, \bar{\nu}\}$ ), wenn man die Voraussetzung ausnützt:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\overline{h_{j_0}^2}(\kappa)}{N(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa)^2} d\kappa &\leq -\mathcal{K} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{m_{j_0}}{N(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa)^2} d\kappa \leq -\mathcal{K} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sum_{i=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} m_i(\kappa)}{N(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa)^2} d\kappa \\ &= -\frac{\mathcal{K}}{4} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sum_{i=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} m_i(\kappa)} d\kappa < \frac{\mathcal{K}}{4} \frac{2\varepsilon}{\mathcal{K}} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (83)$$

Aus (82) und (83) folgt die Behauptung, denn für  $L \geq L_\Theta$  gilt:

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha}^{\beta} \frac{[h_{j_0}^2(\kappa, \Theta(\kappa) - \kappa L)]^2}{N(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa)^2} d\kappa \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\overline{h_{j_0}^2}(\kappa)}{N(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa)^2} d\kappa + \left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{h_{j_0}^2(\kappa, \Theta(\kappa) - \kappa L) - \overline{h_{j_0}^2}(\kappa)}{N(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa)^2} d\kappa \right| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Der folgende Hilfsatz gestattet den Vergleich zwischen dem Maß  $\mu_{n;d,\Theta}$  und dem  $n$ -Buckelmaß  $\mu_n$ . Folgende Situationen werden hierbei verglichen: Einerseits wird die Situation betrachtet, bei der das  $n$ -Buckelpotential  $q_n$  durch das Tupel  $D_n$  von Buckelabständen gegeben ist. Diesem wird formal ein Potential gegenübergestellt, das in den ersten  $n$  Buckeln mit  $q_n$  übereinstimmt, aber einen zusätzlichen Buckel aufweist. Der  $n+1$ -te Buckel wird dabei durch die zunächst noch allgemein gehaltenen Größen  $\Theta$  und  $d$  beschrieben. Eine Konkretisierung erfolgt dann im Beweis von Hilfssatz 2.34.

### Hilfssatz 2.33.

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $d_1, \dots, d_n > 0$ ,  $\Theta : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es  $d_0 > 0$  mit: Ist  $d \geq d_0$ , so gilt für jedes Intervall  $\Sigma \subset [\alpha, \beta]$

$$|\mu_{n;d,\Theta}(\Sigma) - \mu_n(\Sigma)| < \varepsilon,$$

wobei

$$\begin{aligned} \mu_{n;d,\Theta}(\Sigma) &:= \\ &:= \int_{\Sigma} \left( \frac{1}{\pi} \left( \prod_{j=1}^n f_j(\kappa, \vartheta_{n;j-1}(\kappa) - \kappa d_j) \right) f_{n+1}(\kappa, \Theta(\kappa) - \kappa d) \mathcal{D}(\kappa) \right) d\kappa \quad (84) \end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{D}(\kappa) = \frac{\text{sign}(\kappa) \sqrt{\kappa^2 + 1} + 1}{\text{sign}(\kappa) \sqrt{\kappa^2 + 1}} R(0, \kappa) \quad (\kappa \in [\alpha, \beta])$$

wie in (26) definiert ist und  $\mu_n$  gemäß (43) zu verstehen ist.

### Beweis von Satz 2.33

Sei

$$\gamma_1 := \max_{\kappa \in [\alpha, \beta]} \left( \prod_{j=1}^n f_j(\kappa, \vartheta_{n;j-1}(\kappa) - \kappa d_j) \right) \mathcal{D}(\kappa) \quad (85)$$

$$\gamma_2 := \max_{\kappa \in [\alpha, \beta]} \left| \frac{d}{d\kappa} \left[ \prod_{j=1}^n f_j(\kappa, \vartheta_{n;j-1}(\kappa) - \kappa d_j) \mathcal{D}(\kappa) \right] \right| \quad (86)$$

$\gamma_1$  und  $\gamma_2$  sind endlich, da die Funktionen  $f_j$ ,  $\vartheta_{n;j-1}$  und  $\mathcal{D}$  auf dem Komplexum  $[\alpha, \beta]$  stetig sind.

Sei  $g_{n+1} := f_{n+1} - 1$ . Dann ist wegen (44)  $\overline{g_{n+1}} = 0$ .

$d_0 > 0$  ist so groß zu wählen, dass

$$\frac{\pi}{d_0} \max_{\kappa \in [\alpha, \beta], y \in [0, \pi]} |g_{n+1}(\kappa, y)| < \frac{\varepsilon}{2} \frac{\pi}{\gamma_1 + (\beta - \alpha)\gamma_2} =: \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}, \quad (87)$$

ausfällt und für  $\kappa_1, \kappa_2 \in [\alpha, \beta]$

$$|\kappa_1 - \kappa_2| \leq \frac{\pi}{d_0} \Rightarrow \max_{\eta \in R} |g_{n+1}(\kappa_1, \Theta(\kappa_1) - \eta) - g_{n+1}(\kappa_2, \Theta(\kappa_2) - \eta)| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \frac{1}{\beta - \alpha} \quad (88)$$

gilt. Letzteres ist möglich, da  $\Theta$  stetig und  $g_{n+1}$  auf dem Kompaktum  $[\alpha, \beta] \times [0, \pi]$  gleichmäßig stetig ist. (Wegen der Periodizität von  $g_{n+1}$  im 2. Argument genügt es,  $g_{n+1}$  nur auf  $[\alpha, \beta] \times [0, \pi]$  zu betrachten.)

Sei  $d \geq d_0$ . Zunächst werden nun im Folgenden Abschätzungen für ein beliebiges Intervall  $\tilde{\Sigma} \subset [\alpha, \beta]$  ermittelt, welche dann im Anschluß beim Beweis der eigentlichen Behauptung angewendet werden.

$\tilde{\Sigma}$  wird wie in Abbildung 10 skizziert in  $r$  Teilintervalle  $I_1, \dots, I_r$  mit  $x_1 := \inf \tilde{\Sigma}$  und  $x_{i+1} := x_i + \frac{\pi}{d}$  ( $i \in \{1, \dots, r-1\}$ ), sowie  $I_i := [x_i, x_{i+1}]$  ( $i \in \{1, \dots, r-1\}$ ) und  $I_r := [x_{r-1}, \sup \tilde{\Sigma}]$  zerlegt. Dabei seien die Längen gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mu_L(I_i) &= \frac{\pi}{d} \quad (i \in \{1, \dots, r-1\}) \\ \mu_L(I_r) &\leq \frac{\pi}{d_0}, \end{aligned}$$

wobei  $\mu_L$  das Lebesguemaß bezeichnet.

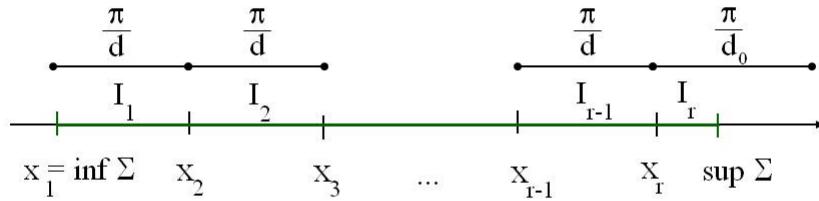


Abbildung 10: Zerlegung von  $\tilde{\Sigma}$  in  $r$  Intervalle

Wegen (87) gilt

$$\left| \int_{I_r} g_{n+1}(\kappa, \Theta(\kappa) - \kappa d) \, d\kappa \right| \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \quad (89)$$

Für  $i \in \{1, \dots, r-1\}$  und beliebiges  $\kappa_i \in I_i$  erhält man, wenn man beachtet, dass für die Integrationsvariable  $\kappa$  wegen  $\mu_0(I_i) = \frac{\pi}{d_0}$  stets  $|\kappa - \kappa_i| \leq \frac{\pi}{d_0}$  erfüllt ist, und somit (88) verwendet werden kann:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{I_i} [g_{n+1}(\kappa, \Theta(\kappa) - \kappa d) - g_{n+1}(\kappa_i, \Theta(\kappa_i) - \kappa d)] \, d\kappa \right| \\ & \leq \int_{I_i} |g_{n+1}(\kappa, \Theta(\kappa) - \kappa d) - g_{n+1}(\kappa_i, \Theta(\kappa_i) - \kappa d)| \, d\kappa \\ & \leq \mu(I_i) \max_{\kappa \in I_i} |g_{n+1}(\kappa, \Theta(\kappa) - \kappa d) - g_{n+1}(\kappa_i, \Theta(\kappa_i) - \kappa d)| \\ & < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \frac{1}{\beta - \alpha} \frac{\beta - \alpha}{r-1}. \end{aligned} \quad (90)$$

Außerdem erhält man mit der Substitution  $y = \Theta(\kappa_i) - \kappa d$  und unter Ausnutzung der Periodizität von  $g_{n+1}$  im zweiten Argument:

$$\begin{aligned} \int_{I_i} g_{n+1}(\kappa_i, \Theta(\kappa_i) - \kappa d) \, d\kappa &= -\frac{1}{d} \int_{\Theta(\kappa_i) - dx_i}^{\Theta(\kappa_i) - d(x_i + \frac{\pi}{d})} g_{n+1}(\kappa_i, y) \, dy \\ &= -\frac{1}{d} \int_0^\pi g_{n+1}(\kappa_i, y) \, dy = 0, \end{aligned} \quad (91)$$

denn wegen  $\overline{f_{n+1}} = 1$  gemäß (44) ist  $\overline{g_{n+1}} = 0$ .

Faßt man die Ergebnisse (89), (90) und (91) für alle Teilintervalle  $I_i$  ( $i \in$

$\{1, \dots, r\}$ ) zusammen, so erhält man, da  $\int_{I_i} g_{n+1}(\kappa_i, \Theta(\kappa_i) - \kappa d) d\kappa = 0$  ist:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\tilde{\Sigma}} g_{n+1}(\kappa, \Theta(\kappa) - \kappa d) d\kappa \right| \leq \\
& \leq \left( \sum_{i=1}^{r-1} \left[ \left| \int_{I_i} (g_{n+1}(\kappa, \Theta(\kappa) - \kappa d) - g_{n+1}(\kappa_i, \Theta(\kappa_i) - \kappa d)) d\kappa \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \int_{I_i} g_{n+1}(\kappa_i, \Theta(\kappa_i) - \kappa d) d\kappa \right] \right] \right) + \left| \int_{I_r} g_{n+1}(\kappa, \Theta(\kappa) - \kappa d) d\kappa \right| \\
& < \left( \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \frac{1}{r-1} \right) + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} = \tilde{\varepsilon}. \tag{92}
\end{aligned}$$

Mit diesen Vorbereitungen wird nun die Behauptung des Satzes bewiesen.

Sei nun  $\Sigma \subset [\alpha, \beta]$  ein Intervall.

Wenn man  $g_{n+1} = \frac{d}{d\kappa} \int_{\inf \Sigma}^{\kappa} g_{n+1}$  verwendet und partiell integriert, erhält man

$$\begin{aligned}
& |\mu_{n;d,\Theta}(\Sigma) - \mu_n(\Sigma)| = \\
& = \frac{1}{\pi} \left| \int_{\Sigma} g_{n+1}(\kappa, \Theta(\kappa) - \kappa d) \left( \prod_{j=1}^n f_j(\kappa, \vartheta_{n;j-1}(\kappa) - \kappa d_j) \right) \mathcal{D}(\kappa) d\kappa \right| \\
& \leq \frac{1}{\pi} \left| \int_{\Sigma} \int_{\inf \Sigma}^{\kappa} g_{n+1}(\tilde{\kappa}, \Theta(\tilde{\kappa}) - \tilde{\kappa} d) d\tilde{\kappa} \cdot \right. \\
& \quad \left. \cdot \frac{d}{d\kappa} \left( \prod_{j=1}^n f_j(\kappa, \vartheta_{n;j-1}(\kappa) - \kappa d_j) \mathcal{D}(\kappa) \right) d\kappa \right| \\
& \quad + \frac{1}{\pi} \left| \int_{\inf \Sigma}^{\sup \Sigma} g_{n+1}(\tilde{\kappa}, \Theta(\tilde{\kappa}) - \tilde{\kappa} d) d\tilde{\kappa} \left( \prod_{j=1}^n f_j(\kappa, \vartheta_{n;j-1}(\kappa) - \kappa d_j) \right) \mathcal{D}(\kappa) \right| \\
& \leq \frac{\gamma_2}{\pi} \int_{\Sigma} \left| \int_{\inf \Sigma}^{\sup \Sigma} g_{n+1}(\tilde{\kappa}, \Theta(\tilde{\kappa}) - \tilde{\kappa} d) d\tilde{\kappa} \right| d\kappa \\
& \quad + \frac{\gamma_1}{\pi} \left| \int_{\inf \Sigma}^{\sup \Sigma} g_{n+1}(\tilde{\kappa}, \Theta(\tilde{\kappa}) - \tilde{\kappa} d) d\tilde{\kappa} \right|,
\end{aligned}$$

wobei die Definitionen (85) und (86) verwendet wurden.

Wendet man hierauf (92) mit  $\bar{\Sigma} = [\inf \Sigma, \kappa]$  bzw.  $\tilde{\Sigma} = [\inf \Sigma, \sup \Sigma]$  an, so ergibt dies schließlich

$$\begin{aligned} |\mu_{n;d,\Theta}(\Sigma) - \mu_n(\Sigma)| &< \frac{\gamma_2}{\pi} \int_{\Sigma} \tilde{\varepsilon} d\kappa + \frac{\gamma_1}{\pi} \tilde{\varepsilon} = \frac{\gamma_2}{\pi} \mu_0(\Sigma) \tilde{\varepsilon} + \frac{\gamma_1}{\pi} \tilde{\varepsilon} \\ &\leq \tilde{\varepsilon} \left( \frac{\gamma_2(\beta - \alpha)}{\pi} + \frac{\gamma_1}{\pi} \right) = \varepsilon, \end{aligned}$$

da ja wegen  $\Sigma \subset [\alpha, \beta]$  für das Lebesguemaß von  $\Sigma$  gilt:  $\mu_L(\Sigma) \leq \beta - \alpha$ .

□

Ausgangslage für den folgenden Hilfssatz sind endliche Buckelpotentiale. Diese stimmen paarweise jeweils bis auf den letzten Buckel überein. Die Aussage des Satzes ist, dass sich die zugehörigen Spektralmaße nur geringfügig unterscheiden, wenn der jeweils zusätzliche Buckel weit draußen platziert wird. Außerdem kann die Position des jeweiligen zusätzlichen Buckels dabei so gewählt werden, dass das Spektralmaß auf einer Menge mit kleinem Lebesguemaß konzentriert ist.

### Hilfssatz 2.34.

Sei  $[-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^*$ ,  $\underline{\nu} \in \mathbb{N}_0$ ,  $d_1, \dots, d_{\underline{\nu}} > 0$ ,  $\varepsilon, \gamma > 0$ . Dann gibt es  $\mathbb{N} \ni \bar{\nu} > \underline{\nu}$  und  $d_{\underline{\nu}+1} \geq \exp(\underline{\nu}^2), \dots, d_{\bar{\nu}} \geq \exp((\bar{\nu} - 1)^2)$  mit:

Für jedes Intervall  $\Sigma \subset [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta]$  gilt:

$$|\mu_{j+1}(\Sigma) - \mu_j(\Sigma)| < \gamma 2^{-(j+1)} \quad (j \in \{\underline{\nu}, \dots, \bar{\nu} - 1\}) \quad (93)$$

und

$$\begin{aligned} \mu_L \left( \left\{ \kappa \in [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta] \mid \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{\pi} \left( \prod_{j=1}^{\bar{\nu}} f_j(\kappa, \vartheta_{\bar{\nu};j-1}(\kappa) - \kappa d_j) \right) \mathcal{D}(\kappa) > \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \right\} \right) \\ < \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei  $\mu_L$  das Lebesguemaß bezeichnet.

**Bemerkungen 2.35.**

1. Die Bedingung  $d_{\underline{\nu}+i} \geq \exp((\underline{\nu} + i - 1)^2) \quad i \in \{1, \dots, \bar{\nu} - \underline{\nu}\}$  wird lediglich gestellt, um in Abschnitt 2.6.2 ausschließen zu können, dass der Grenzoperator Punktspektrum in  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  besitzt.
2. Statt des in (93) verwendeten Faktors  $2^{-(j+1)}$  können auch andere positive Zahlen  $v_j \quad (j \in \{\underline{\nu}, \dots, \bar{\nu} - 1\})$  gewählt werden, sofern diese einer Folge  $(v_j)_{j \in N}$  entstammen, welche die Eigenschaft  $\sum_{j \in N} v_j < \infty$  besitzt.

*Beweis*

Sei

$$M := \frac{1}{\pi} \sup_{\kappa \in [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta]} \left( \prod_{j=1}^{\underline{\nu}} f_j(\kappa, \vartheta_{\underline{\nu}; j-1}(\kappa) - \kappa d_j) \right) \mathcal{D}(\kappa). \quad (94)$$

$M$  ist endlich, da die Funktionen  $f_j$  ( $j \in \{1, \dots, \underline{\nu}\}$ ) analytisch sind.

Gemäß Bemerkung 2.16 hängt  $m_j$  ( $j \in \{\underline{\nu}, \dots, \bar{\nu}\}$ ) nicht von den noch zu bestimmenden  $d_j$  ( $j \in \{\underline{\nu}, \dots, \bar{\nu}\}$ ) ab.

Die natürliche Zahl  $\bar{\nu} > \underline{\nu}$  kann aufgrund von Hilfssatz 2.26 so groß gewählt werden, dass für alle  $\kappa \in [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta]$

$$N(\underline{\nu}, \bar{\nu}; \kappa) := \frac{1}{2} \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} m_j(\kappa) < \log \left( \frac{1}{M} \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \right) < 0 \quad (95)$$

gilt und

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\kappa}{N(\underline{\nu}, \bar{\nu}; \kappa)^2} &< \frac{2\varepsilon}{\mathcal{K}} \\ \int_{-\beta}^{-\alpha} \frac{d\kappa}{N(\underline{\nu}, \bar{\nu}; \kappa)^2} &< \frac{2\varepsilon}{\mathcal{K}} \end{aligned}$$

ausfällt.

Dass dies für genügend großes  $\bar{\nu}$  möglich ist, gewährleistet Satz 2.26 beziehungsweise ist trivial im Fall konstanter Buckelhöhen.

Es sei  $\Delta\nu := \bar{\nu} - \underline{\nu}$  definiert.

Im Folgenden werden schrittweise die Abstände  $d_j$  der Buckel  $\underline{\nu} + 1$  bis  $\bar{\nu}$  bestimmt.

### 1. Schritt

Sei  $d_{\underline{\nu}+1} \geq \exp(\underline{\nu}^2)$ . Um die folgenden Bedingungen (96), (97) und (98) zu erfüllen, muß  $d_{\underline{\nu}+1}$  gegebenfalls noch vergrößert werden. Hilfssatz 2.33 (angewendet auf die Intervalle  $[-\beta, -\alpha]$  und  $[\alpha, \beta]$ ) gewährleistet, dass

$$|\mu_{\underline{\nu}+1}(\Sigma) - \mu_{\underline{\nu}}(\Sigma)| < \gamma 2^{-(\underline{\nu}+1)} \quad (96)$$

für beliebiges Intervall  $\Sigma \subset [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta]$  erreicht werden kann durch Wahl eines genügend großen  $d_{\underline{\nu}+1}$ . (Man beachte, dass (96) bestehen bleibt, wenn man  $d_{\underline{\nu}+1}$  gegebenfalls noch weiter vergrößert.) Bei der Anwendung von Hilfssatz 2.33 entsprechen sich jeweils  $d$  und  $d_{\underline{\nu}+1}$ ,  $\Theta$  und  $\vartheta_{\underline{\nu}}$ , sowie  $\mu_{n;d,\Theta}$  und  $\mu_{\underline{\nu}+1}$ .

Zusätzlich soll  $d_{\underline{\nu}+1}$  so groß sein, dass

$$\int_{-\beta}^{\alpha} \frac{[h_{\underline{\nu}+1}(\kappa, \vartheta_{D_{\underline{\nu}}; \underline{\nu}}(\kappa) - \kappa d_{\underline{\nu}+1}))]^2}{N(\underline{\nu}, \bar{\nu}; \kappa)^2} < \frac{1}{8} \frac{1}{\Delta\nu} \varepsilon \quad (97)$$

ist, was durch Anwendung von Hilfssatz 2.31 (mit  $i_0 = \underline{\nu} + 1$ ,  $\Theta(\kappa) = \vartheta_{\underline{\nu}}$  und  $L = d_{\underline{\nu}+1}$ ) gesichert werden kann. Die gleiche Bedingung soll auch bei Integration über das Intervall  $[\alpha, \beta]$  erfüllt sein. (Gemäß Hilfssatz 2.31 werden diese Forderungen auch noch erfüllt, wenn  $d_{\underline{\nu}+1}$  bei Bedarf weiter vergrößert wird.)

Des weiteren werde  $d_{\underline{\nu}+1}$  unter Umständen nochmals vergrößert, um vermöge Hilfssatz 2.24

$$\begin{aligned} \int_{-\beta}^{-\alpha} (-2m_{\underline{\nu}+1}(\kappa) (h_{\underline{\nu}+1}(\kappa, \vartheta_{\underline{\nu}}(\kappa) - \kappa d_{\underline{\nu}+1}) - m_{\underline{\nu}+1}(\kappa))) N(\underline{\nu}, \bar{\nu}; \kappa)^{-2} d\kappa \\ < \frac{1}{8} \frac{1}{\Delta\nu} \varepsilon \end{aligned} \quad (98)$$

und Analoges bei Integration über  $[\alpha, \beta]$  zu gewährleisten. ( $G(\kappa, y)$  entspricht hier  $h_{\underline{\nu}+1}(\kappa, \vartheta_{\underline{\nu}}(\kappa) - y)$  und  $F(\kappa)$  der Quotient  $-2m_{\underline{\nu}+1}(\kappa)N(\underline{\nu}, \bar{\nu}; \kappa)^{-2}$ ).

Damit ist nun  $d_{\underline{\nu}+1}$  bestimmt (und wird fortan nicht mehr verändert).

**k. Schritt (mit  $k \in \{2, \dots, \bar{\nu} - \underline{\nu}\}$ )**

Sei  $d_{\underline{\nu}+k} \geq \exp((\underline{\nu} + k - 1)^2)$ . Um die folgenden Bedingungen (99), (100), (101) und (102) zu erfüllen, muß  $d_{\underline{\nu}+k}$  gegebenenfalls noch vergrößert werden. Aufgrund von Hilfssatz 2.33 (angewendet auf die Intervalle  $[-\beta, -\alpha]$  und  $[\alpha, \beta]$  mit  $d_{\underline{\nu}+k}$  statt  $d$ ,  $\vartheta_{\underline{\nu}+k-1}$  an Stelle von  $\Theta$  und  $\mu_{\underline{\nu}+k}$  für  $\mu_{n;d,\Theta}$ ) kann durch eine genügend große Wahl von  $d_{\underline{\nu}+k}$  gewährleistet werden, dass

$$|\mu_{\underline{\nu}+k}(\Sigma) - \mu_{\underline{\nu}+k-1}(\Sigma)| < \gamma 2^{-(\underline{\nu}+k)} \quad (99)$$

gilt.

Außerdem sei  $d_{\underline{\nu}+k}$  so groß, dass sowohl

$$\int_{-\beta}^{-\alpha} [h_{\underline{\nu}+k}(\kappa, \vartheta_{\underline{\nu}+k-1}(\kappa) - \kappa d_{\underline{\nu}+k})]^2 N(\underline{\nu}, \bar{\nu}; \kappa)^{-2} < \frac{1}{8} \frac{1}{\Delta \nu} \varepsilon \quad (100)$$

als auch die analoge Abschätzung für das Integral über  $[\alpha, \beta]$  gilt, was aufgrund von Hilfssatz 2.31 (mit  $i_0 = \underline{\nu} + k$ ,  $\Theta(\kappa) = \vartheta_{\underline{\nu}+k-1}$  und  $L = d_{\underline{\nu}+k}$  möglich ist).

Zusätzlich werde  $d_{\underline{\nu}+k}$  bei Bedarf noch vergrößert, um vermöge Hilfssatz 2.24 (mit  $G(\kappa, y) = h_{\underline{\nu}+k}(\kappa, \vartheta_{\underline{\nu}+k-1}(\kappa) - y)$  und  $F(\kappa) = -\frac{2m_{\underline{\nu}+k}}{\sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} m_j(\kappa)}$ )

$$\begin{aligned} & \int_{-\beta}^{-\alpha} \frac{(-2m_{\underline{\nu}+k}(\kappa) (h_{\underline{\nu}+k}(\kappa, \vartheta_{\underline{\nu}+k-1}(\kappa) - \kappa d_{\underline{\nu}+k}) - m_{\underline{\nu}+k}(\kappa)))}{N(\underline{\nu}, \bar{\nu}; \kappa)^2} d\kappa \\ & < \frac{1}{8} \frac{1}{\Delta \nu} \varepsilon \end{aligned} \quad (101)$$

(und entsprechend auch bei Integration über  $[\alpha, \beta]$ ) sicherzustellen.

Überdies möge  $d_{\underline{\nu}+k}$  so groß sein, dass die folgenden  $2(k - 2)$  Bedingungen

erfüllt sind: Für  $s \in \{2, \dots, k-1\}$  soll nämlich gelten:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\beta}^{-\alpha} (h_{\underline{\nu}+k}(\kappa, \vartheta_{\underline{\nu}+k-1}(\kappa) - \kappa d_{\underline{\nu}+k}) - m_{\underline{\nu}+k}(\kappa)) \cdot \\
& \quad \cdot (h_{\underline{\nu}+s}(\kappa, \vartheta_{\underline{\nu}+s-1}(\kappa) - \kappa d_{\underline{\nu}+s}) - m_{\underline{\nu}+s}(\kappa)) N(\underline{\nu}, \bar{\nu}; \kappa)^{-2} d\kappa \\
& < \frac{1}{8} \frac{1}{k-1} \frac{1}{\Delta\nu} \varepsilon.
\end{aligned} \tag{102}$$

und entsprechend bei Integration über  $[\alpha, \beta]$ . Hierbei wird Hilfssatz 2.24 mit  $G(\kappa, y) = h_{\underline{\nu}+k}(\kappa, \vartheta_{\underline{\nu}+k-1} - y)$  und

$$F = (h_{\underline{\nu}+s}(\cdot, \vartheta_{\underline{\nu}+s-1}(\cdot) - \cdot d_{\underline{\nu}+s}) - m_{\underline{\nu}+s}) N(\underline{\nu}, \bar{\nu}; \kappa)^{-2}$$

2( $k-2$ )-mal angewendet.

Aufgrund von (96) und (99) ist der erste Teil der Behauptung des Satzes gezeigt.

Als Vorbereitung zum Beweis des zweiten Teils werden folgende Abschätzungen durchgeführt:

Es sei  $\kappa \in [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta]$ . Aus

$$\frac{1}{\pi} \left( \prod_{j=1}^{\bar{\nu}} f_j(\kappa, \vartheta_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j) \right) \mathcal{D}(\kappa) > \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)}$$

folgt gemäß Definition (94) von  $M$

$$M \left( \prod_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} f_j(\kappa, \vartheta_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j) \right) > \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)},$$

woraus durch Logarithmieren

$$\log \left( \prod_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} f_j(\kappa, \vartheta_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j) \right) > \log \left( \frac{\varepsilon}{2M(\beta - \alpha)} \right)$$

gefolgert werden kann. Dann gilt auch mit Definition (78), wenn man (95) verwendet, das Folgende:

$$\sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} h_j(\kappa, \vartheta_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j) > N(\underline{\nu}, \bar{\nu}; \kappa)$$

Dies ist äquivalent zu (man subtrahiere  $2N(\underline{\nu}, \bar{\nu}; \kappa)$ ):

$$\sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} (h_j(\kappa, \vartheta_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j) - m_j(\kappa)) > -\frac{1}{2} \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} m_j(\kappa).$$

Wegen (95) ist die rechte Seite dieser Ungleichung positiv, so dass Division durch  $-\frac{1}{2} \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} m_j(\kappa) = N(\underline{\nu}, \bar{\nu}; \kappa)$

$$\frac{\sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} (h_j(\kappa, \vartheta_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j) - m_j(\kappa))}{N(\underline{\nu}, \bar{\nu}; \kappa)} > 1$$

liefert und man schließlich

$$H(\kappa) := \left( \frac{\sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} (h_j(\kappa, \vartheta_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j) - m_j(\kappa))}{\frac{1}{2} \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} m_j(\kappa)} \right)^2 > 1$$

hat. Es gilt also

$$\begin{aligned} & \mu_L \left( \left\{ \kappa \in [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta] \middle| \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \frac{1}{\pi} \left( \prod_{j=1}^{\bar{\nu}} f_j(\kappa, \vartheta_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j) \right) \mathcal{D}(\kappa) > \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \right\} \right) \\ & \leq \mu_L \left( \left\{ \kappa \in [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta] \middle| H(\kappa) > 1 \right\} \right). \end{aligned} \quad (103)$$

Da  $H(\kappa) \geq 1$  ( $\kappa \in [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta]$ ) ist, gilt somit

$$\mu_L(\{H(\kappa) > 1\}) = \int_{\{H(\kappa) > 1\}} 1 \leq \int_{\{H(\kappa) > 1\}} H(\kappa) \, d\kappa \leq \int_{[-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta]} H(\kappa) \, d\kappa. \quad (104)$$

Wegen

$$\begin{aligned} & -2m_j(\kappa)h_j(\kappa, \vartheta_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j) + m_j^2(\kappa) \\ & \leq -2m_j(\kappa)(h_j(\kappa, \vartheta_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j) - m_j(\kappa)) \end{aligned}$$

ist dann für  $\kappa \in [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta]$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} (h_j(\kappa, \vartheta_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j) - m_j)^2 \leq \\ & \leq \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} h_j^2(\kappa, \vartheta_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j) \\ & + \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} (-2m_j(\kappa)(h_j(\kappa, \vartheta_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j) - m_j(\kappa))) \\ & + \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \sum_{i=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} (h_j(\kappa, \vartheta_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j) - m_j(\kappa)) \cdot \\ & \quad \cdot (h_i(\kappa, \vartheta_{i-1}(\kappa) - \kappa d_i) - m_i(\kappa)). \end{aligned}$$

Diese Abschätzung für den in (104) auftretenden Zähler von  $H$  ermöglicht die Anwendung von (97), (98), (100), (101) und (102), so dass man schließlich

$$\mu_L(\{\kappa \in [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta] \mid H(\kappa) > 1\}) < \varepsilon$$

erhält, woraus wegen (103) die Behauptung folgt.

□

### 2.5.2 Beweis von Satz 2.21

Im folgenden Beweis des Satzes 2.21 wird gezeigt, dass zu vorgegebenen Buckelprofilen sowohl im Falle identischer Buckel als auch im Fall gegen 0 gehender Buckelhöhe - letzteres, wenn Bedingung (69) erfüllt ist - die Abstände zwischen den Buckeln so bestimmt werden können, dass das zugehörige Maß (43) singulärstetig ist.

Auf Seite 41 wurde die Vorgehensweise des Induktionsbeweises von Satz 2.21 bereits skizziert, der im Folgenden detailliert geführt wird.

*Beweis von Satz 2.21*

Sei  $\Xi_n := [-2n, -\frac{1}{2n}] \cup [\frac{1}{2n}, 2n]$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) (vgl. Abbildung 11).

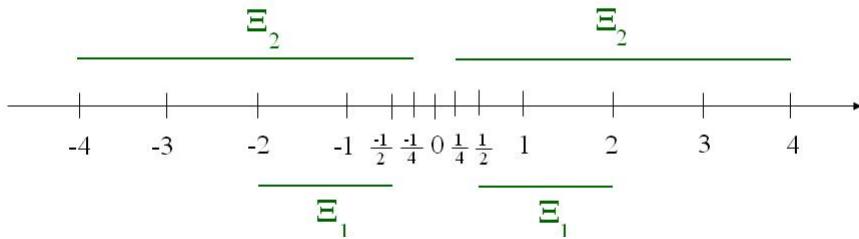


Abbildung 11: Intervalle  $\Xi_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

$(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei eine streng monotone Nullfolge mit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n < \infty$ .

Der Beweis wird durch vollständige Induktion nach  $\nu_n$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ) geführt.

1. Schritt:

Nach Hilfssatz 2.34 gibt es zu  $\underline{\nu} = \nu_0 := 0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_1$ ,  $\gamma = \varepsilon_1$  und  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = 2$  eine natürliche Zahl  $\nu_1$  und positive Zahlen

$$d_1 \geq \exp(0^2), \dots, d_{\nu_1} \geq \exp((\nu_1 - 1)^2) \quad (105)$$

so, dass für jedes kompakte Intervall  $\Sigma \subset \Xi_1$

$$|\mu_{j+1}(\Sigma) - \mu_j(\Sigma)| < \varepsilon_1 2^{-(j+1)} \quad (j \in \{0, \dots, \nu_1 - 1\}) \quad (106)$$

und

$$\mu_L(\mathcal{S}_1) < \varepsilon_2 \quad (107)$$

gilt, wobei

$$\mathcal{S}_1 := \left\{ \kappa \in \Xi_1 \left| \frac{1}{\pi} \left( \prod_{j=1}^{\nu_1} f_j(\kappa, \vartheta_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j) \right) \mathcal{D}(\kappa) > \frac{\varepsilon_1}{\mu_L(\Xi_1)} \right. \right\} \quad (108)$$

definiert ist.

$\mathcal{S}_1$  besteht aus endlich vielen Intervallen<sup>6</sup>. Die Anzahl der Intervalle, aus denen  $\mathcal{S}_1$  besteht, sei mit  $s_1$  bezeichnet und  $r_1 := s_1$  definiert.

*n.* Schritt:

Hilfssatz 2.34 gewährleistet, dass es zu  $\underline{\nu} = \nu_{n-1}$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_n$ ,  $\gamma = \frac{\varepsilon_{n-1}}{r_{n-1}}$  und  $\alpha = \frac{1}{2n}$ ,  $\beta = 2n$  eine natürliche Zahl  $\nu_n > \nu_{n-1}$  und positive Zahlen

$$d_{\nu_{n-1}+1} \geq \exp(\nu_{n-1}^2), \dots, d_{\nu_n} \geq \exp((\nu_n - 1)^2) \quad (109)$$

so gibt, dass für jedes kompakte Intervall  $\Sigma \subset \Xi_n$

$$|\mu_{j+1}(\Sigma) - \mu_j(\Sigma)| < \frac{\varepsilon_{n-1}}{r_{n-1}} 2^{-(j+1)} \quad (j \in \{\nu_{n-1}, \dots, \nu_n - 1\}) \quad (110)$$

und

$$\mu_L(\mathcal{S}_n) < \varepsilon_n \quad (111)$$

ist, wobei

$$\mathcal{S}_n := \left\{ \kappa \in \Xi_n \left| \frac{1}{\pi} \left( \prod_{j=1}^{\nu_n} f_j(\kappa, \vartheta_{j-1}(\kappa) - \kappa d) \right) \mathcal{D}(\kappa) > \frac{\varepsilon_n}{\mu_L(\Xi_n)} \right. \right\} \quad (112)$$

definiert ist.

---

<sup>6</sup> Die Nullstellenmenge der Hilfsfunktion  $\frac{1}{\pi} \left( \prod_{j=1}^{\nu_1} f_j(\cdot, \vartheta_{\nu;j-1} - \cdot d) \right) \mathcal{D} - \frac{\varepsilon_1}{\mu_L(\Xi_1)}$  liegt diskret und abgeschlossen in  $\Xi_1$ . Besäße diese Menge der Nullstellen einen Häufungspunkt, so müßte die Hilfsfunktion nach dem Identitätssatz für analytische Funktionen (siehe [KNOPP 76], §21) die Nullfunktion sein, was nicht der Fall ist.

$\mathcal{S}_n$  besteht wegen einer analogen Argumentation wie für  $\mathcal{S}_1$  aus einer endlichen Anzahl  $s_n$  von Intervallen. Sei  $r_n := \max_{j \in \{1, \dots, n\}} s_j$  definiert.

Dass die auf diese Weise induktiv bestimmte Folge  $D := (d_j)_{j \in N}$  die gewünschten Eigenschaften besitzt, wird im Folgenden in vier Beweisschritten gezeigt.

Sei dazu  $\Sigma \subset \mathbb{R}^*$  ein kompaktes Intervall.

(Dann gibt es  $\tilde{n} \in \mathbb{N}$  so, dass  $\Sigma \subset \Xi_n$  ( $n \geq \tilde{n}$ ) ist.)

**1. Der Grenzwert der Folge der Maße  $(\mu_j)_{j \rightarrow \infty}$  existiert.**

Es ist nämlich wegen  $\frac{\varepsilon_{n-1}}{r_{n-1}} \leq \frac{\varepsilon_1}{r_1}$ , (106) und (110) für  $m \geq 2$ :

$$\sum_{j=m}^{\infty} |\mu_{j+1}(\Sigma) - \mu_j(\Sigma)| \leq \sum_{j=m}^{\infty} \frac{\varepsilon_1}{r_1} 2^{-(j+1)} = \frac{\varepsilon_1}{r_1} 2^{-m} < \frac{\varepsilon_1}{r_1} < \infty$$

unabhängig von  $\Sigma$ . Dann ist die Folge  $(\mu_j(\Sigma))_{j \geq m}$  aufgrund der Konvergenz der obigen Reihe gleichmäßig konvergent. Das Grenzelement sei mit

$$\mu_D(\Sigma) := \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j(\Sigma) \quad (113)$$

bezeichnet.

**2.  $\mu_D$  ist stetig**

Sei  $\varepsilon > 0$ .

$n \in \mathbb{N}$  sei so groß, dass für beliebiges kompaktes Intervall  $\Sigma \subset \mathbb{R}^*$

$$|\mu_n(\Sigma) - \mu_D(\Sigma)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Wegen der Stetigkeit von  $\mu_n$  (vgl. Gleichung (25)) gibt es dann  $\delta > 0$  so, dass gilt:

$$\mu_L(\Sigma) < \delta \Rightarrow \mu_n(\Sigma) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann ist aber  $\mu_D$  stetig, denn es ist

$$\mu_L(\Sigma) < \delta \Rightarrow 0 \leq \mu_D(\Sigma) \leq |\mu_D(\Sigma) - \mu_n(\Sigma)| + \mu_n(\Sigma) < \varepsilon.$$

### 3. $\mu_D$ ist singulär

Zunächst werden einige vorbereitende Überlegungen angestellt.

Sei  $n \in \mathbb{N}$ .

Es ist

$$|\mu_n(\mathcal{S}_n) - \mu_D(\mathcal{S}_n)| < \varepsilon_n. \quad (114)$$

Da  $\mathcal{S}_n$  aus  $s_n$  Intervallen besteht, wird zum Beweis dieser Behauptung zunächst die Differenz der Maße für ein einzelnes kompaktes Intervall abgeschätzt. Sei also  $\Sigma \subset \mathbb{R}^*$  ein kompaktes Intervall. Dann gibt es eine natürliche Zahl  $\tilde{n}$  so, dass für alle  $n \geq \tilde{n}$  gilt  $\Sigma \subset \Xi_n$ . Mit (110) (man beachte, dass (110) für Distanzen  $d_j$  ( $j \in \{\nu_n + 1, \dots, \nu_{n+1}\}$ ) auch mit Faktoren  $\frac{\varepsilon_i}{r_i}$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) statt  $\frac{\varepsilon_n}{r_n}$  gilt, da  $\frac{\varepsilon_i}{r_i} \geq \frac{\varepsilon_n}{r_n}$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) ist) erhält man

$$\begin{aligned} |\mu_n(\Sigma) - \mu_D(\Sigma)| &= \left| \sum_{j=\nu_n+1}^{\infty} (\mu_j(\Sigma) - \mu_{j-1}(\Sigma)) \right| \leq \frac{\varepsilon_n}{r_n} \sum_{j=\nu_n+1}^{\infty} 2^{-(j+1)} \\ &= \frac{\varepsilon_n}{r_n} 2^{-(\nu_n+1)} \leq \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_n}{r_n} \end{aligned} \quad (115)$$

Für  $\mathcal{S}_n$ , das aus  $s_n \leq r_n$  Intervallen besteht, liefert dies die Behauptung (114).

Außerdem gilt für  $\mathcal{S}_n$ , welches nach Definition eine Teilmenge von  $\Xi_n$  ist:

$$\begin{aligned} \mu_n(\mathcal{S}_n) &= \mu_n(\Xi_n) - \mu_n(\Xi_n \setminus \mathcal{S}_n) \\ &= \mu_n(\Xi_n) - \int_{\Xi_n \setminus \mathcal{S}_n} \frac{1}{\pi} \left( \prod_{j=1}^{\nu_n} f_j(\kappa, \vartheta_{j-1}(\kappa) - \kappa d) \right) \mathcal{D}(\kappa) d\kappa \\ &\geq \mu_n(\Xi_n) - \int_{\Xi_n \setminus \mathcal{S}_n} \frac{\varepsilon_n}{\mu_L(\Xi_n)} \geq \mu_n(\Xi_n) - \int_{\Xi_n} \frac{\varepsilon_n}{\mu_L(\Xi_n)} \\ &\geq \mu_n(\Xi_n) - \varepsilon_n. \end{aligned} \quad (116)$$

Dass

$$\mu_D(\mathcal{S}_n) \geq \mu_D(\Xi_n) - 3\varepsilon_n \quad (117)$$

gilt, liegt an folgender Betrachtung, die (114) und (116) verwendet:

$$\begin{aligned}\mu_D(\mathcal{S}_n) &\geq \mu_n(\mathcal{S}_n) - |\mu_D(\mathcal{S}_n) - \mu_n(\mathcal{S}_n)| \geq \mu_n(\Xi_n) - 2\varepsilon_n \\ &\geq \mu_D(\Xi_n) - 3\varepsilon_n,\end{aligned}\tag{118}$$

wobei Letzteres wegen (115), angewendet auf die beiden Intervalle, aus denen  $\Xi_n$  besteht, gilt.

(118) einerseits und (107) und (111) andererseits bilden die Grundlage für den folgenden Nachweis der Singularität von  $\mu_D$ . Sei dazu  $E_l := \sum_{s=l}^{\infty} \varepsilon_s$  ( $l \in \mathbb{N}$ ) und

$$\mathcal{S} := \bigcap_{l=1}^{\infty} \left( \bigcup_{k=l}^{\infty} \mathcal{S}_k \right) =: \bigcap_{l=1}^{\infty} \mathcal{P}_l$$

definiert. Dann ist

$$\mathbb{R}^* \setminus \mathcal{S} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \left( \bigcap_{s=l}^{\infty} \mathbb{R}^* \setminus \mathcal{S}_s \right).$$

Da nach (111) für  $k \in \mathbb{N}$  gilt:  $\mu_L(\mathcal{S}_k) < \varepsilon_k$ , ist für  $l \in \mathbb{N}$

$$\mu_L(\mathcal{P}_l) = \mu_L \left( \bigcup_{k=l}^{\infty} \mathcal{S}_k \right) \leq \sum_{k=l}^{\infty} \varepsilon_k = E_l < \infty,$$

da  $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$  nach Voraussetzung summierbar ist. Damit erhält man für jedes  $l_0 \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \mu_L \left( \bigcap_{l=1}^{\infty} \mathcal{P}_l \right) \leq \mu_L(\mathcal{P}_{l_0}) \leq E_{l_0}.$$

Wegen  $E_{l_0} \rightarrow 0$  ( $l_0 \rightarrow \infty$ ) gilt somit:

$$\mu_L(\mathcal{S}) = 0$$

$\mathcal{S}$  ist also eine Lebesguenullmenge.

#### 4. $\mu_D$ ist auf $\mathcal{S}$ konzentriert.

Es ist

$$\begin{aligned}\mu_D(\mathbb{R}^* \setminus \mathcal{S}) &= \mu_D \left( \left( \bigcup_{m=1}^{\infty} \Xi_m \right) \setminus \mathcal{S} \right) = \mu_D \left( \bigcup_{m=1}^{\infty} \Xi_m \setminus \mathcal{S} \right) \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu_D(\Xi_m \setminus \mathcal{S}).\end{aligned}$$

Für die Summanden gilt dabei

$$\begin{aligned}\mu_D(\Xi_m \setminus \mathcal{S}) &= \mu_D\left(\Xi_m \cap \left[\bigcup_{l=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=l}^{\infty} \mathbb{R}^* \setminus \mathcal{S}_k\right)\right]\right) \\ &= \mu_D\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} \left(\Xi_m \cap \bigcap_{k=l}^{\infty} \mathbb{R}^* \setminus \mathcal{S}_k\right)\right) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \mu_D\left(\bigcap_{k=l}^{\infty} \Xi_m \setminus \mathcal{S}_k\right) = 0\end{aligned}$$

Letzteres folgt aus der folgenden Betrachtung: Für  $k_0 := \max\{l, m\}$  ist, da ja  $\Xi_{k_0} \supset \Xi_m$  ist und (117) gilt:

$$\mu_D\left(\bigcap_{s=l}^{\infty} (\mathbb{R}^* \setminus \mathcal{S}_s)\right) \leq \mu_D(\Xi_{k_0} \setminus \mathcal{S}_{k_0}) \leq 3\varepsilon_{k_0},$$

Somit folgt

$$\mu_D\left(\bigcap_{k=l}^{\infty} (\Xi_m \setminus \mathcal{S}_k)\right) = 0,$$

was die Behauptung

$$\mu_D(\mathbb{R}^* \setminus \mathcal{S}) = 0$$

liefert.

□

## 2.6 Spektrale Eigenschaften des Grenzoperators $T$

Im vorangegangenen Abschnitt wurde eine Folge von Maßen  $(\mu_n)_{n \in N}$  induktiv bestimmt derart, dass das Grenzmaß dieser Folge singulärstetig ist. Es bleibt zu zeigen, dass dieses Grenzmaß das Spektralmaß eines Differentialoperators  $T$  ist.

Hierzu werde zunächst ein Differentialoperator definiert, von dem im Anschluß gezeigt wird, dass er die geforderten Eigenschaften aufweist.

Dazu wird das Potential

$$q = \begin{cases} 0 & 0 \leq r \leq a_1 \\ H_i W_i(r - a_i) & a_i < r < b_i \quad (i \in \mathbb{N}) \\ 0 & b_i \leq r < a_{i+1} \quad (i \in \mathbb{N}) \end{cases} \quad (119)$$

mit

$$\begin{aligned} a_i &:= \sum_{j=1}^{i-1} (d_j + \alpha_j) + d_i \quad (i \in \{1, \dots, n\}) \\ b_i &:= a_i + \alpha_i \quad (i \in \{1, \dots, n\}), \end{aligned}$$

betrachtet. Hierbei ist  $D := (d_j)_{j \in \mathbb{N}}$  die im vorigen Abschnitt 2.5.2 definierte Folge von Buckelabständen.

Mit diesem Potential sei der Differentialausdruck<sup>7</sup>

$$\tau := \sigma_2 p + \sigma_3 + q \quad (120)$$

mit  $p := -i \frac{d}{dr}$  definiert.

Der zugehörige maximale Operator mit Definitionsbereich

$$\left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^+)^2 \mid u \in AC_{loc}(\mathbb{R}^+)^2, \tau u \in L^2(\mathbb{R}^+)^2 \right\}$$

sei mit  $T^{\max}$  bezeichnet (vgl. [WEIDMANN 71]). Es gelte die Randbedingung (68).

Der freie (maximale) Diracoperator  $\hat{T}_{fr}$  (auf  $\mathbb{R}^+$ ) mit Definitionsbereich

$$D(\hat{T}_{fr}) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^+)^2 \mid u \in AC_{loc}(\mathbb{R}^+)^2, \tau_0 \Psi \in L^2(\mathbb{R}^+)^2 \right\}$$

(mit  $\tau_0 := \sigma_2 p + \sigma_3$ ) ist selbstadjungiert [WEIDMANN 71] und hat wesentliches Spektrum  $\sigma_{ess}(\hat{T}_{fr}) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ .

---

<sup>7</sup> Dabei sind  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  die Pauli-Matrizen  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  und  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

### 2.6.1 Das wesentliche Spektrum von $T$

**Hilfssatz 2.36.**

Es gilt

$$\sigma_{ess}(T) \supset \sigma_{ess}(T_{fr})$$

*Beweis*

Sei  $\lambda \in \sigma_{ess}(T_{fr})$ . Dann gibt es nach [WEIDMANN 76], Satz 7.24, eine singuläre Folge,  $(\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T_0^{\min})$  zu  $T_{fr}$  und  $\lambda$ .

Sei nun  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $\text{supp } \Psi_n \subset \mathbb{R}$  ist, gibt es  $x_n, y_n \in \mathbb{R}$  mit  $\text{supp } \Psi_n \subset (x_n, y_n)$ . Da die Buckelabstände  $(d_j)_{j \in \mathbb{N}}$  wegen (105) und (109) schneller als  $(\exp(j-1)^2)_{j \in \mathbb{N}}$  wachsen, gibt es einen Index  $j(n) \in \mathbb{N}$  mit  $d_{j(n)} > y_n - x_n$ .

Die Funktion  $\Psi_n$  lässt sich deshalb so verschieben, dass ihr Träger in einem potentialfreien Bereich zu liegen kommt:

$$\Phi_n := \Psi_n(\cdot + x_n - b_{j(n)}).$$

Die Folge  $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine singuläre Folge zu  $T$  und  $\lambda$  und somit  $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$ .

□

**Bemerkungen 2.37.**

- Beim Beweis von  $\sigma_{ess}(T) \supset (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$  wurde lediglich die Eigenschaft  $\limsup_{j \rightarrow \infty} d_j = \infty$  des Potentials  $q_D$  verwendet. Andere Eigenschaften wie die Buckelhöhen oder Buckelformen wurden für den Beweis nicht benötigt.

- Im Fall  $H_j \rightarrow 0$  ( $j \rightarrow \infty$ ) gilt sogar

$$\sigma_{ess}(T) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty),$$

denn einerseits ist nach [WEIDMANN 71], Kor. 6.9.<sup>8</sup>

$$\sigma_{ess}(T) \cap (-1, 1) = \emptyset$$

und andererseits nach [WEIDMANN 71], Satz 6.10

$$\sigma_{ess}(T) \supset \mathbb{R} \setminus (-1, 1),$$

## 2.6.2 Zum Punktspektrum von $T$

Es gilt der folgende

**Hilfssatz 2.38.**

$T$  besitzt keine Eigenwerte in  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ .

**Bemerkung 2.39.**

Die Aussage des Hilfssatzes ist bereits unter der alleinigen Voraussetzung  $d_j \geq \exp((j-1)^2)$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) unabhängig von der Buckelbeschaffenheit gültig.

*Beweis*

Wegen (9) ist nämlich für  $n \in \mathbb{N}$  (unabhängig von der Randbedingung, die bei 0 gestellt wurde):

$$\log(R(b_n)) = \log(R(a_n)) + \int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{\kappa} H_n W(r - a_n) \sin 2\vartheta \, dr$$

und

$$\log(R(r)) = \log(R(b_{n-1})) \quad (r \in [b_{n-1}, a_n]).$$

Folglich gilt, da  $b_n - a_n = \alpha_n$  ist:

$$\begin{aligned} \log(R(b_n)) &\geq \log(R(0)) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\kappa|} H_i \int_0^{\alpha_j} |W_i|(r) \, dr \\ &\geq - \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\kappa|} \underbrace{\sup_{j \in \mathbb{N}} \left\{ H_j \int_0^{\alpha_j} |W_j|(r) \, dr \right\}}_{=: \omega} \geq -n \frac{1}{|\kappa|} \omega, \end{aligned}$$

---

<sup>8</sup> Es ist hier (mit den Bezeichnungen, die in [WEIDMANN 71] Verwendung finden)  $P(r) = \begin{pmatrix} -q(r) - 1 & 0 \\ 0 & -q(r) + 1 \end{pmatrix} \rightarrow P_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P_0$  hat die Eigenwerte  $-1, 1$ .

wobei  $\omega < \infty$  ist, da aufgrund der Voraussetzungen von Satz 2.21  $(H_j)_{j \in N}$  Nullfolge ist und  $\int_0^{\alpha_j} |W_i|(r) dr = 1$  ist.

Dann ist

$$R(r) \geq R(0) \exp\left(-n \frac{1}{|\kappa|} \omega\right) \quad (r \in [b_n, a_{n+1}])$$

Hiermit erhält man unter Verwendung der besonderen Gestalt des Potentials gemäß (119) und der Tatsache, dass nach Konstruktion  $d_{j+1} \geq \exp(j^2)$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) gilt:

$$\begin{aligned} \int_{b_n}^{\infty} \underbrace{R^2(r) dr}_{>0} &> \int_{\bigcup_{j=n}^{\infty} [b_j, a_{j+1}]} R^2(r) dr \geq \int_{\bigcup_{j=n}^{\infty} [b_j, a_{j+1}]} R^2(0) \exp\left(-j \frac{2}{|\kappa|} \omega\right) dr \\ &= \sum_{j=n}^{\infty} d_{j+1} R^2(0) \exp\left(-\frac{2j}{|\kappa|} \omega\right) \geq \sum_{j=n}^{\infty} R^2(0) \exp\left(j^2 - \frac{2j}{|\kappa|} \omega\right) \\ &= \sum_{j=n}^{\infty} \exp\left(\left(j - \frac{\omega}{|\kappa|}\right)^2\right) R^2(0) \exp\left(-\left(\frac{\omega}{|\kappa|}\right)^2\right) = \infty, \end{aligned}$$

da  $j - \frac{\omega}{|\kappa|} > 0$  ( $j > \frac{\omega}{|\kappa|}$ ) ist.

Die zugehörige Lösung ist somit nicht quadratisch integrierbar, da wegen (6) für  $\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| > 1$  gilt:

$$\Psi_1^2 + \Psi_2^2 = R^2 \left( \cos^2 \vartheta + \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \sin^2 \vartheta \right) \geq R^2 \min\left\{1, \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\right\}.$$

Also gibt es kein Punktspektrum in  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ .

□

Wegen letzterem hat man also für das stetige Spektrum

$$(-\infty, -1) \cup (1, \infty) \subset \sigma_c(T) \tag{121}$$

bzw. im Fall  $H_j \rightarrow 0$  sogar:

$$(-\infty, -1) \cup (1, \infty) = \sigma_c(T)$$

After a while he says, «Do you believe in ghosts?» «No.» I say. «Why not?» «Because they are *un-sci-enti-fic*.» The way I say this makes John smile. «They contain no matter.» I continue, «and have no energy and therefore, according to the laws of science, do not exist except in people's minds.» The whiskey, the fatigue and the wind in the trees start mixing in my mind. «Of course,» I add, «the laws of science contain no matter and have no energy either and therefore do not exist except in people's minds. It's best to be completely scientific about the whole thing and refuse to believe in either ghosts or the laws of science. That way you're safe. That doesn't leave you very much to believe in, but that's scientific too.» - Robert M. Pirsig, Zen and the Art of Motorcycle Maintenance

### 3 Untersuchung des radialen Anteils des potentialfreien Diracoperators mit Drehimpulstermen

Bevor der Radialanteil des kugelsymmetrischen Operators mit einem Buckelpotential untersucht wird, werden in diesem Abschnitt als Vorbereitung Ergebnisse für den potentialfreien Fall zusammengestellt. Untersuchungsgegenstand ist also der eindimensionale freie Diracoperator mit Drehimpulstermen.

Zunächst wird in diesem Abschnitt der Differentialausdruck für eine feste Drehimpulsquantenzahl  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  betrachtet<sup>9</sup>.

Für diese Ausgangssituation ist eine alternative Darstellung der Differentialgleichung günstiger, um die Gestalt der Lösungen zu bestimmen. Daher gliedert sich der folgende Abschnitt in zwei Teile. Im ersten wird die Differentialgleichung für den potentialfreien Fall mit Drehimpuls gelöst. Im zweiten Teil wird diese Differentialgleichung transformiert, so dass sie der aus Abschnitt 2 bekannten Gestalt von (4) entspricht, bei der die Drehimpulsterme

---

<sup>9</sup> Die vorliegende Arbeit zielt auf Ergebnisse im  $\mathbb{R}^3$  ab. Im  $\mathbb{R}^2$  hätte man für die Drehimpulsquantenzahl  $k \in \mathbb{Z} - \frac{1}{2}$ .

mit  $\frac{1}{r^2}$  abfallen. Dieses Abklingverhalten wird bei Abschätzungen im Abschnitt 4 Verwendung finden.

### 3.1 Lösung der potentialfreien Differentialgleichung mit Drehimpulstermen

Sei  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

Betrachtet wird auf  $\mathbb{R}^+$  die Gleichung

$$h_0 y := \left[ \sigma_2 p + \sigma_3 + \sigma_1 \frac{k}{r} \right] y = \lambda y, \quad (122)$$

mit den Paulimatrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und dem Impulsterm  $p = -i \frac{d}{dr}$ ,

Ausschreiben von (122) liefert

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\frac{k}{r} & 1 + \lambda \\ 1 - \lambda & \frac{k}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (123)$$

Hieraus lässt sich folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung ableiten:

$$r^2 y_1'' - [r^2(1 - \lambda^2) + (k + k^2)] y_1 = 0$$

Die allgemeine Lösung kann mittels Besselfunktionen  $J_{\pm|k+\frac{1}{2}|}$  bzw. Webersfunktionen  $Y_{\pm|k+\frac{1}{2}|}$  wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{r} Z_{\pm|k+\frac{1}{2}|} \left( -\sqrt{\lambda^2 - 1} r \right) \\ &= c_1 \sqrt{r} J_{\pm|k+\frac{1}{2}|} \left( -\sqrt{\lambda^2 - 1} r \right) + c_2 \sqrt{r} Y_{\pm|k+\frac{1}{2}|} \left( -\sqrt{\lambda^2 - 1} r \right) \end{aligned} \quad (124)$$

(siehe [KAMKE], Abschnitt 132).

Einsetzen zeigt, dass

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{r} J_{|k+\frac{1}{2}|}(-\sqrt{\lambda^2 - 1} r) \\ \text{sign}(k) \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} \sqrt{r} J_{|k-\frac{1}{2}|}(-\sqrt{\lambda^2 - 1} r) \end{pmatrix} \quad (125)$$

und

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{r} Y_{|k+\frac{1}{2}|}(-\sqrt{\lambda^2 - 1} r) \\ \text{sign}(k) \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} \sqrt{r} Y_{|k-\frac{1}{2}|}(-\sqrt{\lambda^2 - 1} r) \end{pmatrix} \quad (126)$$

Lösungen von (123) sind.

$v$  und  $w$  sind linear unabhängig.

Da für alle  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  gilt  $|k \pm \frac{1}{2}| \geq +\frac{1}{2}$ , kann man für die Komponenten von (125) die Abschätzung  $|J_{|k \pm \frac{1}{2}|}(r)| \leq \text{const}(|k \pm \frac{1}{2}|) \cdot |r|^{k \pm \frac{1}{2}}$  ( $r \in \mathbb{R}$ ) verwenden (siehe [KOSHLYAKOV/SMIRNOV/GLINER], S. 174).

Die Lösung  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  ist somit in  $L^2(0, c)$  für beliebiges  $c > 0$ .

Andererseits ist die zweite Lösung  $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$  nicht in  $L^2(0, c)$ . Für  $n \in \mathbb{N}_0$  kann man nämlich aufgrund der Tatsache, dass  $|k \pm \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2}$  für  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  ist, für  $Y_{n+\frac{1}{2}}(r) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(r) \cos((n+\frac{1}{2})\pi) - J_{-n-\frac{1}{2}}(r)}{\sin((n+\frac{1}{2})\nu\pi)}$  (siehe [WATSON], S. 64) die Darstellung

$$\begin{aligned} J_{-n-\frac{1}{2}}(r) &= \left( \frac{2}{\pi r} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \cos \left( r + \frac{1}{2}n\pi \right) \sum_{0 \leq j \leq \frac{1}{2}n} \frac{(-1)^j (n+2j)!}{(2j)!(n-2j)!(2r)^{2j}} \right. \\ &\quad \left. - \sin \left( r + \frac{1}{2}n\pi \right) \sum_{0 \leq j \leq \frac{1}{2}(n-1)} \frac{(-1)^j (n+2j+1)!}{(2j+1)!(n-2j-1)!(2r)^{2j+1}} \right] \end{aligned}$$

(siehe [WATSON], S. 55) verwenden, um zu folgern, dass für  $r \rightarrow 0$  gilt  $Y_{|k \pm \frac{1}{2}|}(r) = \text{const}(|k \pm \frac{1}{2}|) \cdot r^{-|k \pm \frac{1}{2}|}$ .

Bei 0 liegt somit der Grenzpunktfall vor.

### 3.2 Transformation der Differentialgleichung

Die Drehimpulsterme in Gleichung (122) fallen mit  $\frac{1}{r}$  ab. Für die weiteren Betrachtungen in Abschnitt 4 erweist sich die Transformation der Gleichung (122) als hilfreich, da ähnlich wie in Abschnitt 2 das Lösungsverhalten mit Hilfe der Prüfertransformation untersucht wird und Terme mit einem Abklingverhalten  $\frac{1}{r^2}$  abgeschätzt werden.

#### Hilfssatz 3.1.

*Der Differentialoperator*

$$h_0 = \sigma_2 p + \sigma_3 + \frac{k}{r} \sigma_1$$

aus (122) ist äquivalent zu folgendem Differentialoperator:

$$\sigma_2 p + m\sigma_3 + l, \quad (127)$$

wobei

$$m(r) := \sqrt{1 + \frac{k^2}{r^2}} \quad (r \in \mathbb{R}^+) \quad (128)$$

$$l(r) := \frac{k}{2(r^2 + k^2)} \quad (r \in \mathbb{R}^+) \quad (129)$$

definiert ist<sup>10</sup>.

In diesem Sinne entspricht damit die Differentialgleichung (123) der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1 \\ \tilde{\Psi}_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & m-1-l+\lambda+1 \\ m-1+l-\lambda+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1 \\ \tilde{\Psi}_2 \end{pmatrix}. \quad (130)$$

#### Bemerkungen 3.2.

*m kann als ortsabhängige Masse aufgefaßt werden. l ist der Drehimpuls (vgl. [SCHMIDT]).*

*Da in (128) die auf 1 normierte Masse des Teilchens eingeht, ist die Transformation nicht auf den Fall masseloser Teilchen übertragbar.*

---

<sup>10</sup> Alternativ bestünde die Möglichkeit, den Term  $m-1$  als Größe zu definieren.

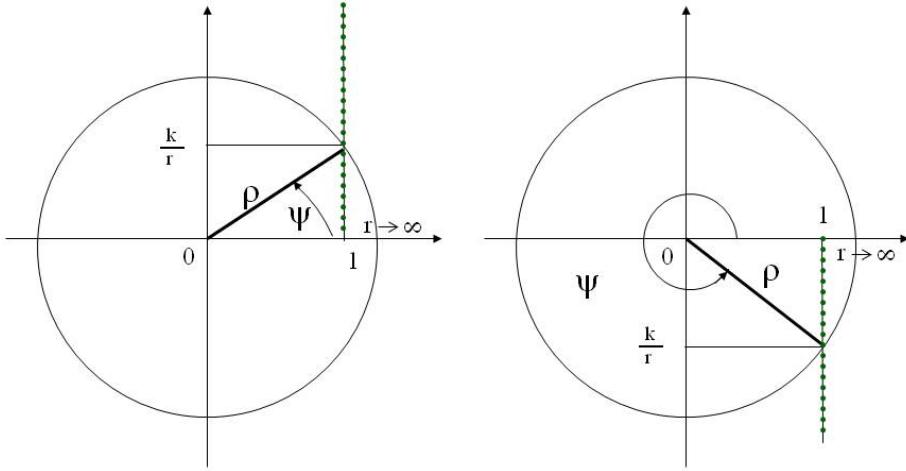


Abbildung 12: Polarkoordinaten im Fall  $k \in \mathbb{N}$  bzw.  $k \in -\mathbb{N}$

*Beweis von Hilfssatz 3.1*

Der Beweis folgt [SCHMIDT].

Seien Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k}{r} \end{pmatrix} =: \rho(r) \begin{pmatrix} \cos \psi(r) \\ \sin \psi(r) \end{pmatrix}$$

definiert (vgl. Abbildung 12). Dabei ist  $\psi$  bis auf eine additive Konstante aus  $2\pi\mathbb{Z}$  eindeutig bestimmt.

Dann ist  $\rho^2 = 1 + \frac{k^2}{r^2}$  und  $\rho = \cos \psi + \frac{k}{r} \sin \psi$ , sowie  $0 = \frac{k}{r} \cos \psi - \sin \psi$ . Für die Ableitung von  $\psi$  gilt:

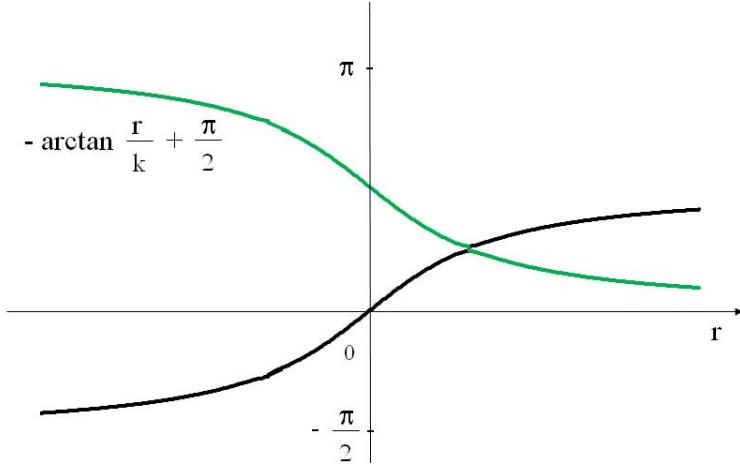
$$\psi' = -\frac{k}{r^2 + k^2}$$

Dann ist  $\psi = -\arctan\left(\frac{r}{k}\right) + \text{const.}$

Im Fall  $k > 0$  liest man die Konstante bis auf Vielfache von  $2\pi\mathbb{Z}$  leicht aus der Asymptotik von  $\psi$  für  $r \rightarrow \infty$  als  $\frac{\pi}{2}$  ab (vgl. Abbildung 13).

Es ist also

$$\psi = -\arctan\left(\frac{r}{k}\right) + \frac{\pi}{2} \quad (131)$$

Abbildung 13:  $k > 0$ : Asymptotik von  $\psi$  für  $r \rightarrow \infty$ 

Im Fall  $k < 0$  erhält man (vgl. Abbildung 14)

$$\psi = \arctan\left(\frac{r}{|k|}\right) + \frac{3\pi}{2}. \quad (132)$$

Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \cos \frac{\psi}{2} & -\sin \frac{\psi}{2} \\ \sin \frac{\psi}{2} & \cos \frac{\psi}{2} \end{pmatrix}$$

ist offensichtlich punktweise orthogonal und hat stetig differenzierbare Komponenten.

Einsetzen von (131) bzw. (132) liefert nach Vereinfachen mittels  $\sin(\arctan y) = \sqrt{\frac{y^2}{1+y^2}}$  für beliebiges  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$A(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \text{sign}(k) \sqrt{1 + \sqrt{\frac{r^2}{k^2+r^2}}} & \sqrt{1 - \sqrt{\frac{r^2}{k^2+r^2}}} \\ \sqrt{1 - \sqrt{\frac{r^2}{k^2+r^2}}} & \text{sign}(k) \sqrt{1 + \sqrt{\frac{r^2}{k^2+r^2}}} \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$A^* \left( \sigma_2 p + \sigma_3 + \frac{k}{r} \sigma_1 \right) A = \sigma_2 p + \sqrt{1 + \frac{k^2}{r^2}} \sigma_3 + \frac{k}{2(r^2 + k^2)}.$$

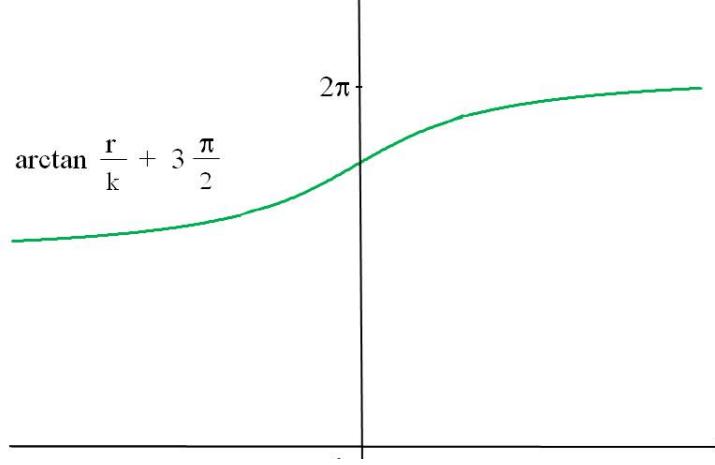


Abbildung 14:  $k < 0$ : Asymptotik von  $\psi$  für  $r \rightarrow \infty$

Löst  $y$  (122), so ist somit  $A^*y$  eine Lösung von (130).

Insbesondere kann man für (130) eine  $L^2$ -Lösung explizit angeben:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1 \\ \tilde{\Psi}_2 \end{pmatrix} &= A^*(r)v(r) = \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\psi(r)}{2} & \sin \frac{\psi(r)}{2} \\ -\sin \frac{\psi(r)}{2} & \cos \frac{\psi(r)}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{r} J_{|k+\frac{1}{2}|}(-\sqrt{\lambda^2 - 1}r) \\ \text{sign}(k) \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{1+\lambda} \sqrt{r} J_{|k-\frac{1}{2}|}(-\sqrt{\lambda^2 - 1}r) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \text{sign}(k) \sqrt{1 + \sqrt{\frac{r^2}{k^2+r^2}}} \sqrt{r} J_{|k+\frac{1}{2}|}(-\sqrt{\lambda^2 - 1}r) \\ + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{r^2}{k^2+r^2}}} \text{sign}(k) \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{1+\lambda} \sqrt{r} J_{|k-\frac{1}{2}|}(-\sqrt{\lambda^2 - 1}r) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{1 - \sqrt{\frac{r^2}{k^2+r^2}}} \sqrt{r} J_{|k+\frac{1}{2}|}(-\sqrt{\lambda^2 - 1}r) \\ + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{r^2}{k^2+r^2}}} \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{1+\lambda} \sqrt{r} J_{|k-\frac{1}{2}|}(-\sqrt{\lambda^2 - 1}r) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{133}$$

was den Beweis von Hilfssatz 3.1 abschließt.

□

Die Abschätzung

$$0 \leq \sqrt{1 + \frac{k^2}{r^2}} - 1 = \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{k^2}{r^2}} - 1\right) \left(\sqrt{1 + \frac{k^2}{r^2}} + 1\right)}{\sqrt{\frac{k^2}{r^2} + 1} + 1} = \frac{1 + \frac{k^2}{r^2} - 1}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{r^2}} + 1} \leq \frac{k^2}{r^2}$$

ist eine Grundlage für die folgende

**Bemerkung 3.3.**

*Der Vorteil der Darstellung (127) besteht im Abklingverhalten der Masse- und Drehimpulsterme für  $r \rightarrow \infty$ . Es gilt nämlich:*

$$0 \leq m(r) - 1 = \sqrt{1 + \frac{k^2}{r^2}} - 1 \leq \frac{k^2}{r^2} \quad (134)$$

und

$$|l(r)| = \left| \frac{k}{2(r^2 + k^2)} \right| \leq \frac{|k|}{2r^2}. \quad (135)$$

## 美不胜收

Es gibt zu viele schöne Sachen, als dass man sie alle bewundern könnte.

## 4 Der radiale Anteil des Diracoperators mit Buckelpotential und Drehimpulstermen auf $[1, \infty)$

Nachdem in Abschnitt 2 die vereinfachte Situation des radialen Anteils des Diracoperators unter Vernachlässigung der Drehimpulsterme untersucht wurde, werden in diesem Abschnitt diese Ergebnisse als Grundlage für die Betrachtung des allgemeinen Falles mit Drehimpulstermen verwendet. Dabei wird die Situation auf das Intervall  $[1, \infty)$  eingeschränkt. Im folgenden Abschnitt wird das Intervall  $(0, 1]$  untersucht, um schließlich die Ergebnisse beider Intervalle für die Halbachse  $\mathbb{R}^+$  zusammenzufassen.

### 4.1 Allgemeine Bezeichnungen und Definitionen

Sei  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  eine vorgegebene Drehimpulsquantenzahl.

Die folgenden Betrachtungen werden für ein  $n$ -Buckelpotential  $q_n$  durchgeführt (Definition wie in Kapitel 2 in den Bezeichnungen 2.1). Sei also  $n \in \mathbb{N}$  und  $q_n$  gegeben.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei  $d_1 > 1$ .

Ausgangslage ist die auf  $\mathbb{R}^+$  betrachtete Gleichung

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1 \\ \tilde{\Psi}_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & m-1-q_n-l+\lambda+1 \\ m-1+q_n+l-\lambda+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1 \\ \tilde{\Psi}_2 \end{pmatrix} \quad (136)$$

mit der ortsabhängigen Masse  $m$  wie in (128) und dem Drehimpuls  $l$  wie in (129).

### Bezeichnungen 4.1.

Der zu (136) gehörende Differentialausdruck sei bezeichnet mit

$$h_n := \sigma_2 p + m \sigma_3 + l + q_n. \quad (137)$$

Im Folgenden werden Überlegungen für das Intervall  $[1, \infty)$  angestellt, die anschließend mit den Ergebnissen für das Intervall  $(0, 1)$  zusammengeführt werden. Gibt man bei  $r = 1$  eine Randbedingung vor, so können Lösungen durch die in Abschnitt 3 gewonnenen  $L^2$ -Lösungen auf  $(0, 1)$  zu Lösungen auf  $\mathbb{R}^+$  fortgeschrieben werden.

Sei im Folgenden  $r \in [1, \infty)$ .

### Definition und Bemerkung 4.2.

Analog zu (6) in Definition 2.2 im drehimpulsfreien Fall werden hier mit Hilfe folgender verallgemeinerter Prüfertransformation neue abhängige Variablen eingeführt:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_1 &= \tilde{R} \cos \tilde{\vartheta} \\ \tilde{\Psi}_2 &= \tilde{R} \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} \sin \tilde{\vartheta} \end{aligned} \quad (138)$$

Sei wieder für  $\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| > 1$

$$\kappa := \text{sign}(\lambda) \sqrt{\lambda^2 - 1}$$

## 4.2 Eigenschaften des Prüfer-Radius und des Prüfer-Winkels

Es gilt der folgende

### Hilfssatz 4.3.

Für den Prüfer-Radius  $\tilde{R}$  gilt:

$$(\log \tilde{R})' = \sin 2\tilde{\vartheta} \left( \frac{1}{\kappa} q_n + F_k(r; \kappa) \right) \quad (139)$$

wobei

$$F_k(r; \kappa) := \frac{1}{\kappa} l(r) + \frac{\lambda}{\kappa} [m(r) - 1] \quad (140)$$

die Eigenschaft

$$|F_k(r; \kappa)| \leq \frac{C_{k,\kappa}}{r^2} \quad (r \geq 1, \kappa \in \mathbb{R}^*) \quad (141)$$

besitzt mit der Konstanten

$$C_{k,\kappa} := \frac{|k|}{2|\kappa|} + \frac{|\lambda| k^2}{|\kappa|}. \quad (142)$$

Für die Ableitung des Prüfer-Winkels  $\tilde{\vartheta}$  gilt:

$$\tilde{\vartheta}' = -\kappa + \frac{q_n}{\kappa} \left( \lambda + \cos 2\tilde{\vartheta} \right) + G_k(r; \kappa). \quad (143)$$

Dabei gilt für

$$G_k(r; \kappa) := \frac{1}{\kappa} (\lambda + \cos 2\tilde{\vartheta}(r)) l(r) + \frac{1}{\kappa} (1 + \lambda \cos 2\tilde{\vartheta}(r)) [m(r) - 1] \quad (144)$$

die Abschätzung

$$|G_k(r; \kappa)| \leq \frac{\tilde{C}_{k,\kappa}}{r^2} \quad (r \geq 1, \kappa \in \mathbb{R}^*) \quad (145)$$

mit der Konstanten

$$\tilde{C}_{k,\kappa} := \frac{(|\lambda| + 1) (|k| + 2k^2)}{2|\kappa|}. \quad (146)$$

#### Bemerkung 4.4.

Der Vergleich von (10) in Hilfssatz 2.3 und (143) zeigt, dass für  $r \rightarrow \infty$  die Ableitungen des Prüfer-Winkels  $\vartheta$  im Fall ohne Drehimpuls und die Ableitungen des Prüfer-Winkels  $\tilde{\vartheta}$  im Fall mit Drehimpuls asymptotisch gleiche Struktur aufweisen, da der bei (143) neu hinzugekommene Term  $G_k$  wegen (145) gegen 0 geht.

Stellt man (9) und (139) einander gegenüber, so zeigt sich, dass auch  $(\log R)'$  und  $(\log \tilde{R})'$  für  $r \rightarrow \infty$  die gleiche Gestalt besitzen, da nach (141) der zusätzliche Term in (139) für große  $r$  klein wird.

Der Prüfer-Winkel verhält sich also auf den potentialfreien Strecken fast linear. Der Prüfer-Radius ist dort fast konstant.

*Beweis von Hilfssatz 4.3*

Nach Definition (138) der Prüfervariablen erhält man analog wie im Beweis von Hilfssatz 2.3 mit entsprechenden Umformungen

$$\begin{aligned}
 (\log \tilde{R})' &= \frac{1}{\kappa} q_n \sin 2\tilde{\vartheta} + \sin 2\tilde{\vartheta} \left[ \frac{1}{\kappa} l(r) + \frac{\lambda}{\kappa} [m(r) - 1] \right] \\
 &= \frac{1}{\kappa} q_n \sin 2\tilde{\vartheta} + \sin 2\tilde{\vartheta} F_k(r; \kappa),
 \end{aligned} \tag{147}$$

wobei Definition (140) verwendet wurde.

Mit (134) und (135) kann mit Hilfe der in (142) definierten Konstanten

$$|F_k(r; \kappa)| = \left| \frac{1}{\kappa} \frac{k}{2(r^2 + k^2)} + \frac{\lambda}{\kappa} \left( \sqrt{1 + \frac{k^2}{r^2}} - 1 \right) \right| \leq \frac{C_{k,\kappa}}{r^2} \quad (r \geq 1, \kappa \in \mathbb{R}^*)$$

abgeschätzt werden, so dass der erste Teil der Behauptung gezeigt ist.

Für die Ableitung des Prüfer-Winkels erhält man mit Definition (144)

$$\begin{aligned}
 \tilde{\vartheta}' &= -\kappa + \frac{q_n}{\kappa} (\lambda + \cos 2\tilde{\vartheta}(r)) + \frac{1}{\kappa} (\lambda + \cos 2\tilde{\vartheta}) l(r) \\
 &\quad + \frac{1}{\kappa} (1 + \lambda \cos 2\tilde{\vartheta}(r)) (m(r) - 1) \\
 &= -\kappa + \frac{q_n}{\kappa} (\lambda + \cos 2\tilde{\vartheta}) + G_k(r; \kappa).
 \end{aligned}$$

Es gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 |G_k(r; \kappa)| &= \left| \frac{1}{\kappa} (\lambda + \cos 2\tilde{\vartheta}(r)) l(r) + \frac{1}{\kappa} (1 + \lambda \cos 2\tilde{\vartheta}(r)) [m(r) - 1] \right| \\
 &\leq \frac{1}{|\kappa|} (|\lambda| + 1) \frac{|k|}{2r^2} + \frac{1}{|\kappa|} (|\lambda| + 1) \frac{k^2}{r^2} \\
 &= \frac{1}{2|\kappa|} (|\lambda| + 1) (|k| + 2k^2) \frac{1}{r^2} = \frac{\tilde{C}_{k,\kappa}}{r^2}
 \end{aligned}$$

mit der in (146) definierten Konstanten  $\tilde{C}_{k,\kappa}$ .

□

Integriert man (139) bzw. (143) über  $[b_{j-1}, a_j]$ , so erhält man

$$\tilde{R}(a_j) = \tilde{R}(b_{j-1}) \exp \left( \int_{b_{j-1}}^{a_j} \sin 2\tilde{\vartheta}(s) F_k(s; \kappa) \, ds \right) \quad (148)$$

und

$$\tilde{\vartheta}(a_j) = \tilde{\vartheta}(b_{j-1}) - \kappa d_j + \int_{b_{j-1}}^{a_j} G_k(s; \kappa) \, ds. \quad (149)$$

#### Bezeichnungen 4.5.

Für  $j \in \{1, \dots, n\}$  bezeichne bei Vorliegen des  $n$ -Buckelpotentials  $q_n$

$$\tilde{R}_{n;j}(\kappa) := \tilde{R}(b_j, \kappa). \quad (150)$$

den Wert des Prüfer-Radius am Ende des  $j$ -ten Buckels. Mit

$$\tilde{\vartheta}_{n;j}(\kappa) := \tilde{\vartheta}(b_j, \kappa) \quad (151)$$

wird der Prüfer-Winkel am Ende des  $j$ -ten Buckels bezeichnet. Im Fall  $j = n$  wird die kürzere Bezeichnung  $\tilde{R}_n$  bzw.  $\tilde{\vartheta}_n$  verwendet.

Mit diesen Bezeichnungen kann man die Lösung  $\tilde{\Psi}$  am Beginn des  $j$ -ten Buckels durch den Wert am Ende des  $(j-1)$ -ten Buckels somit folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_1(a_j) &= \tilde{R}_{n;j-1}(\kappa) \exp \left( \int_{b_{j-1}}^{a_j} \sin 2\tilde{\vartheta}(s, \kappa) F_k(s; \kappa) \, ds \right) \cdot \\ &\quad \cdot \cos \left( \tilde{\vartheta}_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j + \int_{b_{j-1}}^{a_j} G_k(s, \kappa) \, ds \right) \end{aligned} \quad (152)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_2(a_j) &= \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} \tilde{R}_{n;j-1}(\kappa) \exp \left( \int_{b_{j-1}}^{a_j} \sin 2\tilde{\vartheta}(s, \kappa) F_k(s; \kappa) \, ds \right) \cdot \\ &\quad \cdot \sin \left( \tilde{\vartheta}_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j + \int_{b_{j-1}}^{a_j} G_k(s, \kappa) \, ds \right) \end{aligned} \quad (153)$$

**Definition und Bemerkung 4.6.**

Für  $j = 0$  sei

$$\tilde{R}_{n;0}(\kappa) := \tilde{R}(1, \kappa) \quad (154)$$

$$\tilde{\vartheta}_{n;0}(\kappa) := \tilde{\vartheta}(1, \kappa) \quad (155)$$

definiert.

Die Stelle  $r = 1$  wird also wie ein Buckelende  $b_0$  behandelt.

Im folgenden Hilfssatz wird das Verhältnis  $\frac{\tilde{R}_{n;j}^2}{\tilde{R}_{n;j-1}^2}$  für  $j \in \{1, \dots, n\}$  angegeben, das es ermöglicht, den Wert der Lösung  $\tilde{\Psi}$  an der Stelle  $a_j$  mit dem Wert der Lösung an der Stelle  $b_0$  in Beziehung zu setzen.

**Hilfssatz 4.7.**

Für das Verhältnis der Quadrate der Prüfer-Radien am Ende des  $j$ -ten und des  $(j-1)$ -ten Buckels gilt für  $j \in \{1, \dots, n\}$ :

$$\frac{\tilde{R}_{n;j}^2(\kappa)}{\tilde{R}_{n;j-1}^2(\kappa)} = \frac{1}{\tilde{f}_j(\kappa; \tilde{\vartheta}_{n;j-1} - d_j \kappa; \int_{b_{j-1}}^{a_j} G_k(s; \kappa) ds)}, \quad (156)$$

wobei

$$\tilde{f}_j(\kappa, y, z) := \frac{\exp\left(-2 \int_{b_{j-1}}^{a_j} F_k(s; \kappa) ds\right)}{\tilde{A}_j(\kappa) + \tilde{B}_j(\kappa) \cos(2(y+z)) + \tilde{C}_j(\kappa) \sin(2(y+z))} \quad (\kappa \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}) \quad (157)$$

mit

$$\tilde{A}_j := \frac{1}{2} \left[ \left( \tilde{M}_{11}^{(j)} \right)^2 + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \left( \tilde{M}_{21}^{(j)} \right)^2 + \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \left( \tilde{M}_{12}^{(j)} \right)^2 + \left( \tilde{M}_{22}^{(j)} \right)^2 \right] \quad (158)$$

$$\tilde{B}_j := \frac{1}{2} \left[ \left( \tilde{M}_{11}^{(j)} \right)^2 + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \left( \tilde{M}_{21}^{(j)} \right)^2 - \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \left( \tilde{M}_{12}^{(j)} \right)^2 - \left( \tilde{M}_{22}^{(j)} \right)^2 \right] \quad (159)$$

$$\tilde{C}_j := \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} \tilde{M}_{11}^{(j)} \tilde{M}_{12}^{(j)} + \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \tilde{M}_{21}^{(j)} \tilde{M}_{22}^{(j)} \quad (160)$$

definiert ist. Dabei ist  $\tilde{M}^{(j)}$  die zum  $j$ -ten Buckel gehörige Transfermatrix.

**Bemerkung 4.8.**

Weder der Zähler noch der Nenner von  $\tilde{f}_j$  können verschwinden, da  $\tilde{f}_j$  als Quotient von  $\tilde{R}_{n;j}^2$  und  $\tilde{R}_{n;j-1}^2$  definiert ist. Wäre einer der Werte des Prüfer-Radius 0, läge die Nulllösung vor.

Für den Beweis dieses Hilfssatzes wird noch die folgende Aussage benötigt:

**Hilfssatz 4.9.**

Sei  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^*$ ,  $K \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  gegeben. Für das dritte Argument der Funktion  $\tilde{f}_j$  in (156) gilt: Es gibt ein kompaktes Intervall  $I_{\alpha, \beta, K}$  mit:

$$\int_{b_{j-1}}^{a_j} G_k(s, \kappa) \, ds \in I_{\alpha, \beta, K} \quad (\kappa \in [\alpha, \beta], k \in K)$$

Dies gilt unabhängig von  $j \in \mathbb{N}$ . Insbesondere kann das Intervall  $I_{\alpha, \beta, K}$  unabhängig von den Werten  $a_j$  und  $b_{j-1}$  angegeben werden.

*Beweis dieses Hilfssatzes*

Da wegen Hilfssatz 4.3

$$|G_k(s)| \leq \frac{\tilde{C}_{k, \kappa}}{s^2} \quad (s \geq 1)$$

ist, gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{b_{j-1}}^{a_j} G_k(s; \kappa) \, ds \right| &\leq \tilde{C}_{k, \kappa} \left( -\frac{1}{a_j} + \frac{1}{b_{j-1}} \right) \leq \tilde{C}_{k, \kappa} \\ &= \frac{|k| + 2k^2}{2|\kappa|} \leq \frac{\max_{k \in K}(|k| + 2k^2)}{\min_{\kappa \in [\alpha, \beta]} 2|\kappa|}. \end{aligned}$$

Setzt man

$$I_{\alpha, \beta, K} := \left[ -\frac{\max_{k \in K}(|k| + 2k^2)}{\min_{\kappa \in [\alpha, \beta]} 2|\kappa|}, \frac{\max_{k \in K}(|k| + 2k^2)}{\min_{\kappa \in [\alpha, \beta]} 2|\kappa|} \right],$$

so ist

$$\int_{b_{j-1}}^{a_j} G_k(s; \kappa) \, ds \in I_{\alpha, \beta, K},$$

was unabhängig von  $j$  gilt und insbesondere unabhängig davon ist, welche Werte  $b_{j-1}$  und  $a_j$  betrachtet werden.

□

### Beweis von Hilfssatz 4.7

Die Transfermatrix  $\tilde{M}^{(j)}$  für den  $j$ -ten Buckel ist gegeben durch den Wert, den das Fundamentalsystem der auf  $[a_j, a_j + \alpha_j]$  betrachteten Gleichung

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & m - H_j W_j - l + \lambda \\ m + H_j W_j + l - \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

welches den Anfangswert  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  hat, an der Stelle  $a_j + \alpha_j = b_j$  annimmt.

Wegen  $\tilde{\Psi}(b_j) = \tilde{M}^{(j)} \tilde{\Psi}(a_j)$  ist dann mit (152) und (153)

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_1(b_j) &= \tilde{M}_{11}^{(j)} \tilde{R}_{j-1} \exp \left( \int_{b_{j-1}}^{a_j} \sin 2\tilde{\vartheta}(s) F_k(s; \kappa) ds \right) \cos \left( \tilde{\vartheta}_{j-1} - \kappa d_j + \int_{b_{j-1}}^{a_j} G_k(s; \kappa) ds \right) \\ &\quad + \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} \tilde{M}_{12}^{(j)} \exp \left( \int_{b_{j-1}}^{a_j} \sin 2\tilde{\vartheta}(s) F_k(s; \kappa) ds \right) \sin \left( \tilde{\vartheta}_{j-1} - \kappa d_j + \int_{b_{j-1}}^{a_j} G_k(s; \kappa) ds \right) \\ \tilde{\Psi}_2(b_j) &= \tilde{M}_{21}^{(j)} \tilde{R}_{j-1} \exp \left( \int_{b_{j-1}}^{a_j} \sin 2\tilde{\vartheta}(s) F_k(s; \kappa) ds \right) \cos \left( \tilde{\vartheta}_{j-1} - \kappa d_j + \int_{b_{j-1}}^{a_j} G_k(s; \kappa) ds \right) \\ &\quad + \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} \tilde{M}_{22}^{(j)} \exp \left( \int_{b_{j-1}}^{a_j} \sin 2\tilde{\vartheta}(s) F_k(s; \kappa) ds \right) \sin \left( \tilde{\vartheta}_{j-1} - \kappa d_j + \int_{b_{j-1}}^{a_j} G_k(s; \kappa) ds \right) \end{aligned}$$

Dies liefert analog dem Beweis von Hilfssatz 2.8 nach Vereinfachen:

$$\frac{\tilde{R}_{n;j}^2}{\tilde{R}_{n;j-1}^2} = \frac{1}{\tilde{R}_{n;j-1}^2} \left[ \tilde{\Psi}_1^2(b_j, \cdot) + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \tilde{\Psi}_2^2(b_j, \cdot) \right] = \frac{1}{\tilde{f}_j(\cdot; \tilde{\vartheta}_{n;j-1} - d_j; \int_{b_{j-1}}^{a_j} G_k(s; \kappa) ds)}. \quad (161)$$

□

Vor der Untersuchung der Eigenschaften von  $\tilde{f}_j$  wird zunächst die Spektralfunktion des Problems (136) und (163) bestimmt:

### 4.3 Die Spektralfunktion

**Satz 4.10.**

Es gilt für die Ableitung der Spektralfunktion zu

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1 \\ \tilde{\Psi}_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & m-1-q_n-l+\lambda+1 \\ m-1+q_n+l-\lambda+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1 \\ \tilde{\Psi}_2 \end{pmatrix}, \quad (162)$$

mit Randbedingung

$$\tilde{\Psi}_1(1) = 1, \quad \tilde{\Psi}_2(1) = 0 \quad (163)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\varrho}_n}{d\kappa}(\kappa) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \prod_{j=1}^n \tilde{f}_j(\kappa, \tilde{\vartheta}_{n;j-1}(\kappa) - \kappa d_j, \int_{b_{j-1}}^{a_j} G_k(s, \kappa) ds) \right) \tilde{\mathcal{D}}(\kappa) \quad (\kappa \in \mathbb{R}^*), \end{aligned} \quad (164)$$

wobei

$$\tilde{\mathcal{D}}(\kappa) := \frac{\text{sign}(\kappa)\sqrt{\kappa^2 + 1} + 1}{\text{sign}(\kappa)\sqrt{\kappa^2 + 1}} R(1, \kappa) \quad (\kappa \in \mathbb{R}^*). \quad (165)$$

*Beweis*

Um den Satz zu beweisen, wird wie im Beweis von Satz 2.10 vorgegangen, indem das Problem (162) und (163) zunächst auf dem endlichen Intervall  $(1, b)$  mit zusätzlicher Randbedingung bei  $b$  untersucht wird:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1 \\ \tilde{\Psi}_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & m-1-q_n-l+\lambda+1 \\ m-1+q_n+l-\lambda+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1 \\ \tilde{\Psi}_2 \end{pmatrix} \quad (r \in (1, b)) \quad (166)$$

$$\tilde{\Psi}_1(b) = 1, \quad \tilde{\Psi}_2(b) = 0. \quad (167)$$

Auch hier ist die Spektralfunktion eine Stufenfunktion, die bei den Eigenwerten  $\lambda_{b;\tilde{n}}$  Sprünge der Höhe  $\tilde{a}_{b;\tilde{n}}^2 := \int_1^b |\varphi_{b;\tilde{n}}(r)|^2 dr$  aufweist:

$$\tilde{\varrho}_{b;n}(\lambda) = \begin{cases} - \sum_{\lambda < \lambda_{b;\tilde{n}} \leq 0} \frac{1}{\tilde{a}_{b;\tilde{n}}^2} & (\lambda < 0) \\ \sum_{0 < \lambda_{b;\tilde{n}} \leq \lambda} \frac{1}{\tilde{a}_{b;\tilde{n}}^2} & (\lambda \geq 0) \end{cases}$$

(vgl. [LEVITAN/SARGSJAN 91], S. 214 Abschnitt 8.1.1<sup>11</sup>).

Sei  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^*$  und  $K \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  beliebig. Dann gilt der folgende

**Hilfssatz 4.11.**

Es gilt

$$\frac{1}{b-1} \tilde{a}_{b;\tilde{n}}^2 \rightarrow \tilde{R}_n^2(\kappa) \frac{\lambda}{\lambda+1} + o_{\text{glm}}(1) \quad (b \rightarrow \infty). \quad (168)$$

Dabei wird durch die Notation  $o_{\text{glm}}(1)$  zum Ausdruck gebracht, dass die Konvergenz in  $\kappa \in [\alpha, \beta]$  und in  $k \in K$  gleichmäßig ist.

*Beweis*

Der Beweis erfolgt völlig analog zum Beweis von Hilfssatz 2.12.

Hier ist jedoch das linke Intervallende  $b_0 = 1$ , so dass beispielsweise das Fundamentalsystem (32) um 1 verschoben werden muss (zur Vereinfachung wird  $\tilde{r} := r - 1$  verwendet):

$$U(\tilde{r}, \kappa) := \begin{pmatrix} \cos \kappa \tilde{r} & -\frac{\kappa}{1-\lambda} \sin \kappa \tilde{r} \\ \frac{\kappa}{1+\lambda} \sin \kappa \tilde{r} & \cos \kappa \tilde{r} \end{pmatrix} \quad (\tilde{r} \in [0, \infty))$$

Die Koeffizienten der Matrix  $S$  lauten hier:

$$\begin{aligned} s_1(r) &:= m(r) - 1 + q_n(r) + l(r) \\ s_2(r) &:= m(r) - 1 + q_n(r) + l(r) \end{aligned}$$

---

<sup>11</sup>Die Gestalt von (162) stimmt mit dem von [LEVITAN/SARGSJAN 91] untersuchten System bis auf das Vorzeichen von  $\lambda$  überein. Dort gehen stetige Koeffizienten  $q_1$  und  $q_2$  in das System  $y_2'(x) - [\lambda + q_1(x)] y_1(x) = 0$ ,  $y_1'(x) + [\lambda + q_2(x)] y_2(x) = 0$  ein.

Diese sind auf  $(1, b)$  (mit  $b > 1$  beliebig) integrierbar, denn mit (134) und (135) hat man

$$|m(r) - 1 + l(r)| \leq \frac{k^2}{r^2} + \frac{|k|}{2r^2} \leq \frac{\text{const}}{r^2} \quad (169)$$

unabhängig von  $\kappa$ . Das endliche Buckelpotential  $q_n$  ist ohnehin integrierbar.

Deshalb gilt gemäß (37) und (38):

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_1(\tilde{r}, \kappa) &= \\ &= \cos(\kappa\tilde{r})A(\kappa)\cos(\gamma(\kappa)) + \sin(\kappa\tilde{r})A(\kappa)\sin(\gamma(\kappa)) \\ &\quad - \cos(\kappa\tilde{r}) \int_{\tilde{r}}^{\infty} \left( \cos(\kappa s)s_2(s+1)\tilde{\Psi}_2(s) - \frac{1+\lambda}{\kappa} \sin(\kappa s)s_1(s+1)\tilde{\Psi}_1(s) \right) ds \\ &\quad - \sin(\kappa\tilde{r}) \int_{\tilde{r}}^{\infty} \left( \sin(\kappa s)s_2(s+1)\tilde{\Psi}_2(s) - \frac{\kappa}{1-\lambda} \cos(\kappa s)s_1(s)\tilde{\Psi}_1(s+1) \right) ds \\ &= \cos(\kappa\tilde{r})A(\kappa)\cos(\gamma(\kappa)) + \sin(\kappa\tilde{r})A(\kappa)\sin(\gamma(\kappa)) + o_{\text{glm}}(1) \quad (\tilde{r} \rightarrow \infty) \\ \\ \tilde{\Psi}_2(\tilde{r}, \kappa) &= \\ &= \frac{-\kappa}{1+\lambda} \sin(\kappa\tilde{r})A(\kappa)\cos(\gamma(\kappa)) + \frac{-\kappa}{1-\lambda} \cos(\kappa\tilde{r})A(\kappa)\sin(\gamma(\kappa)) \\ &\quad + \frac{\kappa}{1+\lambda} \sin(\kappa\tilde{r}) \int_{\tilde{r}}^{\infty} \left( \cos(\kappa s)s_2(s+1)\tilde{\Psi}_2(s) - \frac{\lambda+1}{\kappa} \sin(\kappa s)s_1(s+1)\tilde{\Psi}_1(s) \right) ds \\ &\quad - \cos(\kappa\tilde{r}) \int_{\tilde{r}}^{\infty} \left( \frac{\lambda-1}{\kappa} \sin(\kappa s)s_2(s+1)\tilde{\Psi}_2(s) + \cos(\kappa s)s_1(s+1)\tilde{\Psi}_1(s) \right) ds \\ &= \cos(\kappa\tilde{r})A(\kappa)\cos(\gamma(\kappa)) + \sin(\kappa\tilde{r})A(\kappa)\sin(\gamma(\kappa)) + o_{\text{glm}}(1) \quad (\tilde{r} \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Mit (39) und (40) erhält man für die Lösung  $\tilde{\Psi}$  die Behauptung (168).  $\square$

Nach Abschätzen der  $L^2$ -Normen der Eigenfunktionen für große  $b$  steht für den Beweis des Satzes 4.10 noch eine Aussage zur Anzahl der Eigenwerte aus:

**Hilfssatz 4.12.**

Für die Zahl  $\tilde{N}_b(\lambda_1, \lambda_2)$  der Eigenwerte von (166), (167) in  $(\lambda_1, \lambda_2]$  gilt:

$$\tilde{N}_b(\lambda_1, \lambda_2) = \left| \frac{b(\beta - \alpha)}{\pi} \right| + O(1) \quad (b \rightarrow \infty). \quad (170)$$

*Beweis*

Die Zahl der Eigenwerte, die man durch Abzählen der Nullstellen des Prüfer-Winkels in Abhängigkeit von  $\lambda$  erhält, beträgt nach [WEIDMANN 71], Satz 3.1

$$\begin{aligned} 0 \leq \tilde{N}_b(\lambda_1, \lambda_2) &= \left| \frac{\tilde{\vartheta}(b; \kappa(\lambda_2)) - \tilde{\vartheta}(b; \kappa(\lambda_1))}{\pi} + c \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \tilde{\vartheta}_n(\kappa_2) - \tilde{\vartheta}_n(\kappa_1) - (\kappa_2 - \kappa_1)(b - b_n) + \int_{b_n}^b (G_k(r; \kappa_2) - G_k(r; \kappa_1)) \, dr + c \right| \\ &= \left| \frac{b(\beta - \alpha)}{\pi} \right| + O(1) \quad (b \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

□

Nun werden die Aussagen der Hilfssätze 4.11 und Hilfssatz 4.12 genau wie im Beweis von Satz 2.10 verwendet, um die Spektralfunktion zu bestimmen, so dass man ausgehend von

$$\tilde{\varrho}_{b;n}(\kappa_2) - \tilde{\varrho}_{b;n}(\kappa_1) = \frac{\frac{b(\kappa_2 - \kappa_1)}{\pi} + O(1)}{(b - b_0) \left( \tilde{R}_n^2(\kappa) \frac{\lambda}{\lambda+1} + o_{\text{glm}}(1) \right)} \quad (b \rightarrow \infty)$$

Folgendes

$$\frac{d\tilde{\varrho}_n(\kappa)}{d\kappa} = \frac{1}{\pi \tilde{R}_n^2(\kappa)} \frac{\lambda(\kappa) + 1}{\lambda(\kappa)} \quad (\kappa \in [\alpha, \beta])$$

erhält.

□

Hiermit kann man das zugehörige Maß angeben:

**Bemerkung 4.13.**

*Das zu (164) gehörige Maß ist gegeben durch*

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_n(\Sigma) &= \\ &= \int_{\Sigma} \frac{1}{\pi} \left( \prod_{j=1}^n \tilde{f}_j(\kappa, \tilde{\vartheta}_{n;j-1}(\kappa) - \kappa d_j, \int_{b_{j-1}}^{a_j} G_k(s, \kappa) ds) \right) \quad (171)\end{aligned}$$

für beliebige kompakte Teilmengen  $\Sigma \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

#### 4.3.1 Eigenschaften von $\tilde{f}_j$ und $\tilde{m}_j$

**Bemerkung 4.14.**

Der folgende Hilfssatz liefert ähnliche Aussagen wie Hilfssatz 2.15, denn wenn man  $\tilde{f}_j$  über das zweite Argument mittelt, zeigt sich, dass  $\overline{\tilde{f}_j}(\kappa; z)$  ungefähr 1 ist. Der Mittelwert von  $\tilde{m}_j$  ist ungefähr  $\log\left(\frac{2}{\tilde{A}_j(\kappa)+1}\right)$ .

**Hilfssatz 4.15.**

Sei  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Dann gilt für  $\kappa \in \mathbb{R}^*, z \in \mathbb{R}$  :

$$\overline{\tilde{f}_j}(\kappa; z) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \tilde{f}_j(\kappa, y, z) dy = \exp\left(-2 \int_{b_{j-1}}^{a_j} F_k(s; \kappa) ds\right) \quad (172)$$

$$\begin{aligned}\tilde{m}_j(\kappa; z) &:= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \tilde{f}_j(\kappa, y, z) dy = \log\left(\frac{2}{\tilde{A}_j(\kappa)+1}\right) - 2 \int_{b_{j-1}}^{a_j} F_k(s; \kappa) ds \\ &\quad (173)\end{aligned}$$

**Bemerkung 4.16.**

$\overline{\tilde{f}_j}$  und  $\tilde{m}_j$  hängen nicht vom jeweiligen zweiten Argument ab.<sup>12</sup> Deshalb wird das zweite Argument im Folgenden bei der Notation unterdrückt werden.

---

<sup>12</sup> Im Fall ohne Drehimpulsterme war in Bemerkung 2.16 festgehalten worden, dass  $m_j$  nicht von den Buckelabständen abhängt. Nach Hilfssatz 2.15 ist im drehimpulsfreien Fall sogar  $\overline{f_j}(\kappa) = 1$ .

*Beweis von Hilfssatz 4.15*

Sei  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Wegen Definitionen (158), (159) und (160) gilt

$$\tilde{A}_j^2 - \tilde{B}_j^2 - \tilde{C}_j^2 = \left( \tilde{M}^{(j)} \right)^2 = 1. \quad (174)$$

Sei  $\kappa \in \mathbb{R}^*, z \in \mathbb{R}$ .

Aufgrund der Periodizität wirkt sich die Verschiebung um  $+2z$  bei Integration von 0 bis  $\pi$  nicht aus. Nach [GRÖBNER/HOFREITER], S. 100, ist mit einer analogen Rechnung wie beim Beweis von Hilfssatz 2.15, da die Voraussetzung  $A_j > \sqrt{B_j^2 + C_j^2}$  aufgrund von (174) erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{f}_j}(\kappa, z) &= \exp \left( -2 \int_{b_{j-1}}^{a_j} F_k(s; \kappa) \, ds \right) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\tilde{A}_j(\kappa) + \tilde{B}_j(\kappa) \cos 2(y+z) + \tilde{C}_j(\kappa) \sin 2(y+z)} \, dy \\ &= \exp \left( -2 \int_{b_{j-1}}^{a_j} F_k(s; \kappa) \, ds \right) \end{aligned}$$

Dies ist unabhängig von  $z \in \mathbb{R}$ .

Entsprechendes Vorgehen wie beim Beweis von Hilfssatz 2.15 liefert

$$\tilde{m}_j(\kappa, z) = \log \left( \frac{2}{\tilde{A}_j(\kappa) + 1} \right) - 2 \int_{b_{j-1}}^{a_j} F_k(s; \kappa) \, ds,$$

was unabhängig von  $z \in \mathbb{R}$  ist.

□

#### 4.4 Asymptotisches Verhalten von $\tilde{A}_j$ , $\tilde{B}_j$ und $\tilde{C}_j$ für $a_j \rightarrow \infty$

Sei

$$\tilde{T}_0 := \begin{pmatrix} 0 & -H_j W_j(\cdot - a_j) + 1 + \lambda \\ H_j W_j(\cdot - a_j) + 1 - \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\tilde{\mathcal{S}} := \begin{pmatrix} 0 & m-1-l \\ m-1+l & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Terme mit ortsabhängiger Masse und Drehimpuls werden im Folgenden als Störung  $\tilde{\mathcal{S}}$  des Operators  $\tilde{T}_0$  aufgefaßt.

Das Fundamentalsystem mit Anfangswert  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  von  $\tilde{\Psi}' = \tilde{T}_0 \tilde{\Psi}$ , betrachtet auf  $[a_j, b_j]$  sei mit  $\tilde{U}^{(j)}$  bezeichnet<sup>13</sup>.

Das Fundamentalsystem von  $\tilde{\Psi}' = (\tilde{T}_0 + \tilde{\mathcal{S}})\tilde{\Psi}$ , betrachtet auf  $[a_j, b_j]$ , welches Anfangswert  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  hat, sei mit  $\tilde{\Phi}^{(j)}$  bezeichnet.

Erinnert sei an die Definition  $\kappa := \text{sign}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 - 1}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| > 1$ ).

**Hilfssatz 4.17.**

Es ist für  $j \in \mathbb{N}$

$$\left\| \tilde{\Phi}^{(j)} - \tilde{U}^{(j)}(r) \right\|_1 \leq \text{const} \frac{1}{a_j}$$

für  $r \in [a_j, b_j]$  unabhängig von  $\kappa \in [\alpha, \beta]$ .

*Beweis*

Ausgangslage ist erneut eine Integralgleichung nach Art von [EASTHAM], S. 6.:

$$\tilde{\Phi}^{(j)}(r) = \tilde{U}^{(j)}(r) + \tilde{U}^{(j)}(r) \int_{a_j}^r \tilde{U}^{(j)-1}(s) \tilde{\mathcal{S}}(s) \tilde{\Phi}^{(j)}(s) ds$$

<sup>13</sup> NB: Die Gleichung  $\tilde{\Psi}' = \tilde{T}_0 \tilde{\Psi}$  ist mit (59) identisch

Mit der Abschätzung (169) kann man mit dem bereits mehrfach angewandten Verfahren für  $i_1, i_2 \in \{1, 2\}$  folgendes ermitteln:

$$\left\| \left( \tilde{\Phi}^{(j)}(r) - \tilde{U}^{(j)}(r) \right) \right\| \leq \text{const} \frac{1}{a_j}.$$

□

Des Weiteren besitzen die Funktionen  $\tilde{f}_j$  folgende Eigenschaft, welche analog zur Aussage des Hilfssatzes 2.28 des Kapitels 2 ist:

**Hilfssatz 4.18.**

Sei die Folge der Buckelhöhen  $(H_j)_{j \in \mathbb{N}}$  gegeben. Sei  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Folge von Buckelpositionen mit der Eigenschaft, dass  $\left( \frac{1}{a_j} \right)_{j \in \mathbb{N}}$  schneller gegen 0 geht als  $(H_j)_{j \in \mathbb{N}}$ .

Sei  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  und  $I \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall.

Dann gilt

$$\tilde{f}_j(\kappa, y, z) \geq \mathcal{C}_k \quad (j \in \mathbb{N}, \kappa \in [\alpha, \beta], y \in I, z \in I).$$

*Beweis*

Es ist

$$\tilde{f}_j(\kappa, y, z) = \frac{\exp \left( -2 \int_{b_{j-1}}^{a_j} F_k(s; \kappa) \, ds \right)}{\tilde{A}_j(\kappa) + \tilde{B}_j(\kappa) \cos(2(y+z)) + \tilde{C}_j(\kappa) \sin(2(y+z))}$$

Für den Zähler von  $\tilde{f}_j$  gilt unter Verwendung von  $b_j \geq 1$  ( $j \in \mathbb{N}$ ), da wegen (141)

$$\left| \int_{b_{j-1}}^{a_j} F_k(s; \kappa) \, ds \right| \leq \int_1^\infty \frac{C_{k,\kappa}}{s^2} \, ds = C_{k,\kappa}$$

ist,

$$\exp \left( -2 \int_{b_{j-1}}^{a_j} F_k(s; \kappa) \, ds \right) \geq \exp(-2C_{k,\kappa}),$$

was unabhängig von  $(a_j)_{j \in N}$  ist.

Im Folgenden wird der Nenner abgeschätzt. Mit den Definitionen (158), (159) und (160) gilt für das Doppelte des Nenners von  $\tilde{f}_j$

$$\begin{aligned}
& 2 \left| \tilde{A}_j(\kappa) + \tilde{B}_j(\kappa) \cos(2(y+z)) + \tilde{C}_j(\kappa) \sin(2(y+z)) \right| \\
&= \left| \left[ \left( \tilde{M}_{11}^{(j)} \right)^2 + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \left( \tilde{M}_{21}^{(j)} \right)^2 + \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \left( \tilde{M}_{12}^{(j)} \right)^2 + \left( \tilde{M}_{22}^{(j)} \right)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[ \left( \tilde{M}_{11}^{(j)} \right)^2 + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \left( \tilde{M}_{21}^{(j)} \right)^2 - \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \left( \tilde{M}_{12}^{(j)} \right)^2 - \left( \tilde{M}_{22}^{(j)} \right)^2 \right] \cos(2(y+z)) \right. \\
&\quad \left. + 2 \left[ \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} \tilde{M}_{11}^{(j)} \tilde{M}_{12}^{(j)} + \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \tilde{M}_{21}^{(j)} \tilde{M}_{22}^{(j)} \right] \sin(2(y+z)) \right| \\
&\leq \left( \tilde{M}_{11}^{(j)} \right)^2 + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \left( \tilde{M}_{21}^{(j)} \right)^2 + \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \left( \tilde{M}_{12}^{(j)} \right)^2 + \left( \tilde{M}_{22}^{(j)} \right)^2 + \left( \tilde{M}_{11}^{(j)} \right)^2 + \\
&\quad + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \left( \tilde{M}_{21}^{(j)} \right)^2 + 2 \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} \left| \tilde{M}_{11}^{(j)} \tilde{M}_{12}^{(j)} \right| + 2 \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \left| \tilde{M}_{21}^{(j)} \tilde{M}_{22}^{(j)} \right|. \quad (175)
\end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, dass mit  $\tilde{\Phi}$  und  $\tilde{U}$  beispielsweise

$$\begin{aligned}
\left( \tilde{M}_{11}^{(j)} \right)^2 &= \tilde{\Phi}_{11}(\alpha_j)^2 = \left( \tilde{\Phi}_{11}(\alpha_j) - \tilde{U}_{11} \right)^2 + 2\tilde{U}_{11} \left( \tilde{\Phi}_{11}(\alpha_j) - \tilde{U}_{11} \right) + \tilde{U}_{11}^2 \\
&\leq \text{const} \frac{1}{a_j^2} + 2 \left\| \tilde{U} \right\| \text{const} \frac{1}{a_j} + M_{11}^{(j)2} \\
&= \text{const} \frac{1}{a_j^2} + 2 \left\| \tilde{U} \right\| \text{const} \frac{1}{a_j} + \left( M_{11}^{(j)} - U_{11} \right)^2 + 2 \left( M_{11}^{(j)} - U_{11} \right) U_{11} + U_{11}^2 \\
&\leq \text{const} \frac{1}{a_j^2} + 2 \left\| \tilde{U} \right\| \text{const} \frac{1}{a_j} \text{const} H_j^2 + 2 \text{const} H_j \cdot 1 + 1^2 \quad (176)
\end{aligned}$$

mit  $U$  aus (32) unter Berücksichtigung von (64) abgeschätzt werden kann.

Für (175) erhält man, da  $\frac{\lambda+1}{\lambda-1}, \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$  für  $\kappa \in [\alpha, \beta]$  beschränkt sind, aufgrund der Eigenschaften der Folgen  $\left( \frac{1}{a_j} \right)_{j \in N}$  und  $(H_j)_{j \in N}$

$$\begin{aligned}
& 2 \left| \tilde{A}_j(\kappa) + \tilde{B}_j(\kappa) \cos(2(y+z)) + \tilde{C}_j(\kappa) \sin(2(y+z)) \right| \\
&\leq \text{const} H_j + O(H_j^2)
\end{aligned}$$

Damit ist der Nenner von  $f_j$  größer oder gleich  $\frac{1}{\text{const}_{H_j}}$  plus höhere Potenzen in  $H_j$ .

Faßt man die Ergebnisse für Zähler und Nenner zusammen, folgt die Behauptung.

□

Die Aussage  $-\sum_{j=1}^{\infty} m_j(\kappa) = \infty$  von Hilfssatz 2.26 ist auch in der allgemeinen Situation mit Drehimpuls für kleiner werdende Buckel gültig:

**Hilfssatz 4.19.**

Sei  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^*$  und  $I \subset \mathbb{R}$  ein endliches Intervall. Seien Folgen  $(H_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N$  und  $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^N$  und zu letzteren Funktionen  $W_j \in C[0, \alpha_j]$  mit  $\int_0^{\alpha_j} |W_j| = 1$  gegeben mit folgenden Eigenschaften:

$H_j = 0$  nur für endlich viele Indizes  $j \in \mathbb{N}$ ,  $H_j \rightarrow 0$  ( $j \rightarrow \infty$ ) und

$$\sum_{j=1}^{\infty} H_j^2 \mathcal{W}_j = \infty$$

Dabei ist  $\mathcal{W}_j(b_j, a_j, \kappa)$  wie in (65) definiert.

Sei  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^N$  eine beliebige Folge, für die  $\left(\frac{1}{a_j}\right)_{j \in \mathbb{N}}$  schneller gegen 0 geht als  $\left(H_{j+1}^3\right)_{j \in \mathbb{N}}$ .

Dann gibt es zu jedem  $Q \in \mathbb{R}^+$  eine natürliche Zahl  $\nu$  so, dass

$$-\sum_{j=1}^{\nu} \tilde{m}_j(\kappa, z) > Q \quad (\kappa \in [\alpha, \beta], z \in I).$$

*Beweis*

Auswertung des Fundamentalsystems  $\tilde{\Phi}^{(j)}$  an der Stelle  $b_j$  liefert für die Komponenten der Tranfermatrix  $\tilde{M}^{(j)}$ :

$$\left[ \tilde{M}^{(j)} \right]_{i_1, i_2} = \tilde{\Phi}_{r, p}^{(j)}(b_j) = M^{(j)}_{i_1, i_2} + O_{\text{glm}}\left(\frac{1}{a_j}\right) \quad (a_j \rightarrow \infty) \quad (177)$$

Damit gilt für  $\kappa \in [\alpha, \beta], z \in I$  mit der Definition (158) von  $\tilde{A}_j$  gemäß Definition (173) von  $\tilde{m}_j$ , indem man für die einzelnen Terme von  $\tilde{A}_j$  die analogen Überlegungen wie bei (176) anstellt:

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_j(\kappa, z) &= -\log \left( \frac{\tilde{A}_j(\kappa) + 1}{2} \right) + 2 \int_{b_{j-1}}^{a_j} F_k(s; \kappa) \, ds \\
&= -\log \left( \frac{\frac{1}{2} \left[ \left( \tilde{M}_{11}^{(j)} \right)^2 + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \left( \tilde{M}_{21}^{(j)} \right)^2 + \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \left( \tilde{M}_{12}^{(j)} \right)^2 + \left( \tilde{M}_{22}^{(j)} \right)^2 \right] + 1}{2} \right) \\
&\quad + 2 \int_{b_{j-1}}^{a_j} F_k(s; \kappa) \, ds \\
&= -\log \left( \frac{\frac{1}{2} \left[ M_{11}^{(j)2} + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} M_{21}^{(j)2} + \frac{\lambda-1}{\lambda+1} M_{12}^{(j)2} + M_{22}^{(j)2} + O\left(\frac{1}{a_j}\right) \right] + 1}{2} \right) \\
&\quad + 2 \int_{b_{j-1}}^{a_j} F_k(s; \kappa) \, ds \\
&= -\log \left( \frac{A_j(\kappa) + 1}{2} + O\left(\frac{1}{a_j}\right) \right) + 2 \int_{b_{j-1}}^{a_j} F_k(s; \kappa) \, ds \\
&\geq -\log \left( \frac{A_j(\kappa) + 1}{2} + O\left(\frac{1}{a_j}\right) \right) - 2C_{k,\kappa} \frac{1}{a_j}, \tag{178}
\end{aligned}$$

da wegen (141)

$$2 \int_{b_{j-1}}^{a_j} F_k(s; \kappa) \, ds \geq -2C_{k,\kappa} \left( \frac{1}{a_j} - \frac{1}{b_{j-1}} \right) \geq -2C_{k,\kappa} \frac{1}{a_j}. \tag{179}$$

Mit (65) erhält man für (178)

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_j(\kappa, z) &\geq -\frac{H_j^2}{2} \mathcal{W}_j(r, a_j, \kappa) + O(H_j^3) - 2C_{k,\kappa} \frac{1}{a_j} \\
&= -\frac{H_j^2}{2} \frac{1}{\lambda^2 - 1} \underbrace{\mathcal{W}_j(r, a_j, \kappa)}_{>0} + O(H_{j+1}^3)
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$-\sum_{j=1}^{\nu} \tilde{m}_j(\kappa, z) > Q \quad (\kappa \in [\alpha, \beta], z \in I)$$

für jede Folge  $(a_j)_{j \in N}$ , da nach Voraussetzung

$$\sum_{j \in N} \frac{H_j^2}{2} \mathcal{W}_j(r, a_j, \kappa) = \infty$$

gilt.

□

Zur Vorbereitung des Beweises des zentralen Satzes 4.26 dient der folgende

**Hilfssatz 4.20.**

Sei  $(a_j)_{j \in N}$  eine beliebige Folge von Buckelpositionen. Sei  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^*$ . Sei  $\varepsilon > 0$ ,  $\underline{\nu} \in \mathbb{N}_0$  und  $I \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall.

$\bar{\nu} > \underline{\nu}$  sei so groß, dass unabhängig von  $z \in I$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{-\sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{m}_j(\kappa)} d\kappa < \frac{2\varepsilon}{3\mathcal{K}} \quad (180)$$

und

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\exp(2C_{k,\kappa} \exp(\underline{\nu}^2)) - 1}{\left[ \frac{1}{2} \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{m}_j(\kappa, z) \right]^2} d\kappa < \frac{\varepsilon}{3\mathcal{K}} \quad (181)$$

ist mit  $C_{k,\kappa}$  aus (142) und  $\mathcal{K}$  gemäß (77).

Sei  $j_0 \in \{\underline{\nu} + 1, \dots, \bar{\nu}\}$  und  $\Theta : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann gibt es  $L_{\Theta} \in \mathbb{N}$  so, dass für alle  $L > L_{\Theta}$  gilt:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\left[ \tilde{h}_{j_0}(\kappa, \Theta(\kappa) - \kappa L, z) \right]^2}{\left[ \frac{1}{2} \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{m}_j(\kappa, z) \right]^2} d\kappa < \varepsilon \quad (z \in I)$$

Dabei ist  $\tilde{h}_{j_0}$  folgendermaßen definiert:

$$\tilde{h}_{j_0}(\kappa, y, z) := \log \tilde{m}_{j_0}(\kappa, y, z). \quad (182)$$

Im drehimpulsfreien Fall ist die entsprechende Behauptung in Hilfssatz 2.31 formuliert.

**Bemerkung 4.21.**

*Satz 4.19 gewährleistet, dass es  $\bar{\nu} > \underline{\nu}$  gibt, so dass unabhängig von  $z \in I$  und unabhängig von der Folge der Buckelpositionen  $(a_j)_{j \in N}$  die Voraussetzungen (180) und (181) erfüllt werden.*

*Beweis*

Wegen

$$\tilde{m}_j = -\log \left( \frac{\tilde{A}_{a_j} + 1}{2} \right) - 2 \int_{b_{j-1}}^{a_j} F_k(s; \cdot) \, ds = \log \left( \frac{A_j + 1}{2} \right) + O_{\text{glm}} \left( \frac{1}{a_{j-1}} \right)$$

gibt es eine von  $(a_j)_{j \in N}$  abhängende Konstante mit  $|\tilde{m}_j - m_j| \leq \text{const} \frac{1}{a_{j-1}}$ .  
Es ist also

$$\left| \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} (\tilde{m}_j - m_j) \right| \leq \text{const} \frac{\bar{\nu} - \underline{\nu}}{a_{\underline{\nu}}}.$$

Somit gibt es wegen (81)

$$\mathcal{N}_k(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa) := \inf_{\substack{(a_j)_{j \in N} \\ z \in I}} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{m}_j(\kappa, z) \right\} > 0. \quad (183)$$

Es gilt dann wegen des Korollars 2.25 zu Hilfsatz 2.24 (mit  $\frac{1}{\mathcal{N}_k(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa)^2}$  für  $F$  und  $\tilde{h}_{j_0}^2$  für  $H$  eingesetzt) für  $L > L_\Theta$ , (mit  $L_\Theta$  aus Korollar 2.25):

$$\left| \int_\alpha^\beta \frac{\tilde{h}_{j_0}^2(\kappa, \Theta(\kappa) - \kappa L, z) - \tilde{h}_{j_0}^2(\kappa, z)}{\left[ \frac{1}{2} \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{m}_j(\kappa, z) \right]^2} \right| \leq \left| \int_\alpha^\beta \frac{\tilde{h}_{j_0}^2(\kappa, \Theta(\kappa) - \kappa L, z) - \tilde{h}_{j_0}^2(\kappa, z)}{\mathcal{N}_k(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa)^2} \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (184)$$

Wegen  $\tilde{h}_j^2 \leq \mathcal{K} (\tilde{f}_j - 1 - \tilde{h}_j)$  ist andererseits

$$\tilde{h}_j^2 \leq \mathcal{K} \left( \exp \left( -2 \int_{b_{j-1}}^{a_j} F_k(s; \cdot) \, ds \right) - 1 - \tilde{m}_j \right),$$

wobei  $\tilde{h}_j = \tilde{m}_j$  verwendet wurde. Nutzt man

$$\begin{aligned} \exp \left( -2 \int_{b_{j-1}}^{a_j} F_k(s; \cdot) \, ds \right) - 1 &\leq \exp \left( 2C_{k,\kappa} \left( \frac{1}{a_j} - \frac{1}{b_{j-1}} \right) \right) - 1 \\ &\leq \exp \left( 2C_{k,\kappa} \frac{1}{a_j} \right) - 1 \exp \left( 2C_{k,\kappa} \exp(-(j-1)^2) \right) - 1 \\ &\leq \exp \left( 2C_{k,\kappa} \exp(-\underline{\nu}^2) \right) - 1 \quad (j \in \{\underline{\nu} + 1, \dots, \bar{\nu}\}), \end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\overline{\tilde{h}_{j_0}^2}(\kappa, z)}{\left[ \frac{1}{2} \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{m}_j(\kappa, z) \right]^2} \\ &\leq \mathcal{K} \left( \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\exp(2C_{k,\kappa} \exp(-\underline{\nu}^2)) - 1}{\left[ \frac{1}{2} \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{m}_j(\kappa, z) \right]^2} \, d\kappa - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{m_{a_{j_0}}}{\left[ \frac{1}{2} \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{m}_j(\kappa, z) \right]^2} \right) \\ &\leq \mathcal{K} \left( \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\exp(2C_{k,\kappa} \exp(-\underline{\nu}^2)) - 1}{\left[ \frac{1}{2} \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{m}_j(\kappa, z) \right]^2} \, d\kappa - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{m}_j}{\left[ \frac{1}{2} \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{m}_j(\kappa, z) \right]^2} \right) \\ &= \mathcal{K} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\exp(2C_{k,\kappa} \exp(-\underline{\nu}^2)) - 1}{\left[ \frac{1}{2} \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{m}_j(\kappa, z) \right]^2} \, d\kappa - \frac{\mathcal{K}}{4} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{m}_j(\kappa, z)} \, d\kappa \leq \frac{2\varepsilon}{3} \quad (185) \end{aligned}$$

als Abschätzung. Addieren von (184) und (185) liefert die Behauptung.  $\square$

Im folgenden Satz wird ein Vergleich der Maße angestellt, die zu den Potentialen  $q_n$  und  $q_{n+1}$  gehören, welche sich im letzten Buckel unterscheiden. Hierbei ist die Position der  $n$  Buckel von  $q_n$  fixiert, während der Mindestabstand  $d_0$  des neuen  $n+1$ -ten Buckels hingegen noch zu bestimmen ist. In dieser Hinsicht ist das Vorgehen vergleichbar mit der Strategie bei Hilfssatz 2.33 im drehimpulsfreien Fall des Abschnitts 2.5.

**Satz 4.22.**

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $d_1, \dots, d_n > 0$ , und  $\varepsilon > 0$ .

Dann gibt es  $d_0 > \alpha_n$  mit: Ist  $d_{n+1} \geq d_0$ , so gilt für jedes Intervall  $\Sigma \subset [\alpha, \beta]$

$$|\tilde{\mu}_{n+1}(\Sigma) - \tilde{\mu}_n(\Sigma)| < \varepsilon,$$

wobei

$$\tilde{\mu}_n(\Sigma) = \int_{\Sigma} \frac{1}{\pi} \left[ \prod_{j=1}^n \tilde{f}_j \left( \kappa, \tilde{\vartheta}_{n;j-1}(\kappa) - \kappa d_j, \int_{b_{j-1}}^{a_j} G_k(s; \kappa) \right) \right] \mathcal{D}(\kappa) d\kappa$$

das Maß zum  $n$ -Buckel-Potential bezeichnet.

$$\tilde{\mu}_{n+1}(\Sigma) = \int_{\Sigma} \frac{1}{\pi} \left[ \prod_{j=1}^{n+1} \tilde{f}_j \left( \kappa, \tilde{\vartheta}_{n+1;j-1}(\kappa) - \kappa d_j, \int_{b_{j-1}}^{a_j} G_k(s; \kappa) \right) \right] \mathcal{D}(\kappa) d\kappa$$

ist das Maß zu dem Potential mit  $n+1$  Buckeln, das in den ersten  $n$  Buckeln einschließlich ihrer Position mit dem Potential, das zu  $\tilde{\mu}_n$  gehört, übereinstimmt.

Beweis

Sei  $\Sigma \subset [\alpha, \beta]$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{n+1}(\Sigma) - \tilde{\mu}_n(\Sigma) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} \left\{ \left( \prod_{j=1}^n \tilde{f}_j \left( \kappa, \tilde{\vartheta}_{n;j-1}(\kappa) - \kappa d_j, \int_{b_{j-1}}^{a_j} G_k(s; \kappa) \right) \mathcal{D}(\kappa) \cdot \right. \right. \\ &\quad \cdot \left. \left. \left[ \tilde{f}_{n+1} \left( \kappa, \tilde{\vartheta}_{D_{n+1};n}(\kappa) - \kappa d_{n+1}, \int_{b_{j-1}}^{a_j} G_k(s; \kappa) \right) \right] \right) \right\} d\kappa. \end{aligned} \quad (186)$$

Da  $\tilde{f}_{n+1}$  sowohl im ersten als auch im dritten Argument von  $\kappa$  abhängt, wird das dritte Argument im Folgenden in der Notation unterdrückt.

Schiebt man folgendermaßen Terme ein

$$\tilde{f}_{n+1} = \tilde{f}_{n+1} - \overline{\tilde{f}}_{n+1} + \overline{\tilde{f}}_{n+1},$$

so kann man (186) termweise abschätzen:

Es gilt nach Satz 2.24

$$\left| \int_{\Sigma} \left( \prod_{j=1}^n \tilde{f}_j \right) \mathcal{D} \left[ \tilde{f}_{n+1} - \bar{\tilde{f}}_{n+1} \right] \right| < \frac{1}{2} \varepsilon$$

für alle  $d_{n+1} \geq d_I$  für genügend großes  $d_I > 0$ .

Nach Hilfssatz 4.15 ist  $\bar{\tilde{f}}_{n+1}(\kappa; z) = \exp \left( -2 \int_{b_n}^{a_{n+1}} F_k(s; \kappa) ds \right)$ . Da nach Hilfssatz 4.3  $|F_k(r; \kappa)| \leq \frac{C_{k,\kappa}}{r^2}$  ( $r \geq 1, \kappa \in \mathbb{R}^*$ ) abgeschätzt werden kann, ist

$$\left| -2 \int_{b_n}^{a_{n+1}} F_k(s; \kappa) ds \right| \leq 2C_{k,\kappa} \left( -\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{b_n} \right) \leq 2C_{k,\kappa} \frac{1}{b_n}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \left| \bar{\tilde{f}}_{n+1}(\kappa) - 1 \right| &= \left| \exp \left( -2 \int_{b_n}^{a_{n+1}} F_k(s; \kappa) ds \right) - 1 \right| \\ &= O_{\text{glm}} \left( \frac{1}{b_n} \right) \quad (\kappa \in [\alpha, \beta]). \end{aligned}$$

Mit genügend großem  $b_n$  kann also erreicht werden, dass

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} \left( \prod_{j=1}^n \tilde{f}_j \right) \mathcal{D} \left( \bar{\tilde{f}}_{n+1}(\kappa) - 1 \right) \right| < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Durch genügend große Wahl des Abstandes  $d_{n+1}$  zum neuen ( $n+1$ )-ten Buckel erhält man also

$$|\tilde{\mu}_{n+1}(\Sigma) - \tilde{\mu}_n(\Sigma)| < \varepsilon.$$

□

Im folgenden Satz werden endliche Buckelpotentiale betrachtet. Diese stimmen paarweise jeweils bis auf den letzten Buckel überein. Die Aussage des Satzes ist, dass sich die zugehörigen Spektralmaße nur geringfügig unterscheiden, wenn der jeweils zusätzliche Buckel weit draußen platziert wird. Außerdem kann die Position des jeweiligen zusätzlichen Buckels dabei so gewählt

werden, dass das Spektralmaß auf einer Menge mit kleinem Lebesguemaß konzentriert ist.

Bei der Formulierung des Satzes wird bei der Notation der Maße zusätzlich die hier zu berücksichtigende Abhängigkeit von der Drehimpulsquantenzahl  $k$  angegeben.

**Satz 4.23.**

Sei  $[-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^*$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall,  $\underline{\nu} \in \mathbb{N}_0$ ,  $d_1, \dots, d_{\underline{\nu}} > 0$ ,  $K \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  endlich,  $\varepsilon, \gamma > 0$ . Dann gibt es  $\bar{\nu} > \underline{\nu}$  und

$$d_{\underline{\nu}+1} \geq \exp(\underline{\nu}^2), \dots, d_{\bar{\nu}} \geq \exp((\bar{\nu} - 1)^2) \quad (187)$$

mit:

Für jedes  $k \in K$  ist für jedes Intervall  $\Sigma \subset [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta]$ :

$$|\tilde{\mu}_{j+1;k}(\Sigma) - \tilde{\mu}_{j;k}(\Sigma)| < \gamma 2^{-(j+1)} \quad (j \in \{\underline{\nu}, \dots, \bar{\nu} - 1\})$$

und für jedes  $k \in K$  gilt

$$\mu_L \left( \left\{ \kappa \in [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta] \middle| \frac{d\tilde{\vartheta}_{\bar{\nu};k}}{d\kappa} > \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \right\} \right) < \varepsilon.$$

**Bemerkung 4.24.**

Die Bedingung (187) wird lediglich gestellt, um bei Satz 4.29 ausschließen zu können, dass der Grenzoperator Punktspektrum in  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  besitzt.

*Beweis*

Sei

$$M := \frac{1}{\pi} \sup_{\substack{\kappa \in [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta] \\ z \in I, k \in K}} \left( \prod_{j=1}^{\underline{\nu}} \tilde{f}_j^{(k)} \left( \kappa, \tilde{\vartheta}_{\underline{\nu};j-1}(\kappa) - \kappa d_j, z \right) \right) \mathcal{D}(\kappa) \quad (188)$$

$M$  ist endlich wegen der Stetigkeit der  $\tilde{f}_j^{(k)}$  ( $j \in \{1, \dots, \underline{\nu}\}$ ).

Sei

$$\mathcal{G}_j(\kappa) := \int_{b_{j-1}}^{a_j} G_k(\kappa, s) \, ds \quad (j \in \{1, \dots, \underline{\nu}\}).$$

Die natürliche Zahl  $\bar{\nu} > \underline{\nu}$  kann aufgrund von Hilfssatz 4.19 so groß gewählt werden, dass für alle  $\kappa \in [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta]$

$$\mathcal{N}_{(a_j);k}(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa) := \frac{1}{2} \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{m}_j(\kappa, z) < \log \left( \frac{1}{M} \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \right) < 0 \quad (z \in I) \quad (189)$$

für jede Wahl von  $(a_j)_{j \in N}$  mit  $a_j \geq \exp((j-1)^2)$  gilt und

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\kappa}{\mathcal{N}_{(a_j);k}(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa)^2} < \frac{2\varepsilon}{\mathcal{K}}, \quad \int_{-\beta}^{-\alpha} \frac{d\kappa}{\mathcal{N}_{(a_j);k}(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa)^2} < \frac{2\varepsilon}{\mathcal{K}}$$

ausfällt (wende Hilfssatz 4.19 für jedes  $k \in K$  an und wähle maximales  $\bar{\nu}$ ). Außerdem soll mit  $C := \max_{k \in K, \kappa \in [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta]} C_{k, \kappa}$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\exp(2C \exp(\underline{\nu}^2)) - 1}{\mathcal{N}_{(a_j);k}(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa)^2} d\kappa < \frac{\varepsilon}{3\mathcal{K}}$$

und entsprechendes bei Integration über  $[-\beta, -\alpha]$  gelten. Dass dies für genügend großes  $\bar{\nu}$  möglich ist, gewährleistet ebenfalls Hilfssatz 4.19.

Es sei  $\Delta\nu := \bar{\nu} - \underline{\nu}$  definiert.

Im Folgenden werden schrittweise die Buckelabstände  $d_j$  ( $j \in \{\underline{\nu}+1, \dots, \bar{\nu}\}$ ) bestimmt.

## 1. Schritt

Sei  $k \in K$  beliebig.

Sei  $d_{\underline{\nu}+1}^{(k)} \geq \exp(\underline{\nu}^2)$ . Um die folgenden Bedingungen (190), (191) und (192) zu erfüllen, muß  $d_{\underline{\nu}+1}^{(k)}$  gegebenenfalls noch vergrößert werden. Satz 4.22 (angewendet auf die Intervalle  $[-\beta, -\alpha]$  und  $[\alpha, \beta]$ ) gewährleistet, dass

$$|\tilde{\mu}_{\underline{\nu}+1;k}(\Sigma) - \tilde{\mu}_{\underline{\nu};k}(\Sigma)| < \gamma 2^{-(\underline{\nu}+1)} \quad (190)$$

für beliebiges Intervall  $\Sigma \subset [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta]$  erreicht werden kann durch genügend großes  $d_{\underline{\nu}+1}^{(k)}$  (Abstand zum neuen Buckel). (Man beachte, dass (190) bestehen bleibt, wenn man  $d_{\underline{\nu}+1}^{(k)}$  gegebenfalls noch vergrößert.)

Zusätzlich soll  $d_{\underline{\nu}+1}^{(k)}$  so groß sein, dass

$$\frac{1}{\left[\log\left(\frac{\varepsilon}{2M(\beta-\alpha)}\right)\right]^2} \cdot \int_{-\beta}^{-\alpha} \left[ \tilde{h}_{\underline{\nu}+1}(\kappa, \tilde{\vartheta}_{\underline{\nu}}(\kappa) - \kappa d_{\underline{\nu}+1}^{(k)}, \mathcal{G}_{\underline{\nu}}(\kappa)) \right]^2 d\kappa < \frac{1}{8} \frac{1}{\Delta\nu} \varepsilon, \quad (191)$$

was durch Anwendung von Hilfssatz 4.20 (mit  $j_0 = \underline{\nu} + 1$ ,  $\Theta(\kappa) = \tilde{\vartheta}_{\underline{\nu}}$  und  $L = d_{\underline{\nu}+1}^{(k)}$ ) gesichert werden kann. Dabei ist  $\tilde{h}_{\underline{\nu}+1} := \log \tilde{m}_{\underline{\nu}+1}$ . Die gleiche Bedingung soll auch bei Integration über das Intervall  $[\alpha, \beta]$  erfüllt sein. (Gemäß Hilfssatz 4.20 werden diese Forderungen auch noch erfüllt, wenn  $d_{\underline{\nu}+1}^{(k)}$  bei Bedarf weiter vergrößert wird.)

Des weiteren werde  $d_{\underline{\nu}+1}^{(k)}$  unter Umständen noch vergrößert, um vermöge Hilfssatz 2.24

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\left[\log\left(\frac{\varepsilon}{2M(\beta-\alpha)}\right)\right]^2} \cdot \\ & \cdot \left| \int_{-\beta}^{-\alpha} -2\tilde{m}_{\underline{\nu}+1}(\kappa) \left( \tilde{h}_{\underline{\nu}+1} \left( \kappa, \tilde{\vartheta}_{\underline{\nu}}(\kappa) - \kappa d_{\underline{\nu}+1}^{(k)}, \mathcal{G}_{\underline{\nu}}(\kappa) \right) - \tilde{m}_{\underline{\nu}+1}(\kappa) \right) d\kappa \right| \\ & < \frac{1}{8} \frac{1}{\Delta\nu} \varepsilon \end{aligned} \quad (192)$$

und analog bei Integration über  $[\alpha, \beta]$  zu gewährleisten. ( $H(\kappa, y, z)$  entspricht hier  $\tilde{h}_{\underline{\nu}+1}(\kappa, \tilde{\vartheta}_{\underline{\nu}}(\kappa) - y, z)$  und  $F(\kappa)$  der Quotient  $-2\tilde{m}_{\underline{\nu}+1}(\kappa)N(\underline{\nu}, \bar{\nu}; \kappa)^{-2}$ ). Damit ist nun  $d_{\underline{\nu}+1}^{(k)}$  bestimmt.

Setze  $d_{\underline{\nu}+1} := \max_{k \in K} d_{\underline{\nu}+1}^{(k)}$  ( $d_{\underline{\nu}+1}$  ist jetzt fest gewählt und wird fortan nicht mehr verändert).

### i. Schritt (mit $i \in \{2, \dots, \bar{\nu} - \underline{\nu}\}$ )

Zunächst wird wieder ein festes  $k \in K$  betrachtet.

Sei  $d_{\underline{\nu}+i}^{(k)} \geq \exp((\underline{\nu} + i - 1)^2)$ .

Um die folgenden Bedingungen (193), (194), (195) und (196) zu erfüllen, muß  $d_{\underline{\nu}+i}^{(k)}$  gegebenfalls noch vergrößert werden. Aufgrund von Satz 4.22 (angewendet auf die Intervalle  $[-\beta, -\alpha]$  und  $[\alpha, \beta]$ ) kann durch eine genügend große Wahl von  $d_{\underline{\nu}+i}^{(k)}$  gewährleistet werden, dass

$$|\tilde{\mu}_{\underline{\nu}+i;k}(\Sigma) - \tilde{\mu}_{D\underline{\nu}+i-1;k}(\Sigma)| < \gamma 2^{-(\underline{\nu}+i)} \quad (193)$$

gilt.

Außerdem sei  $d_{\underline{\nu}+i}^{(k)}$  so groß, dass sowohl

$$\int_{-\beta}^{-\alpha} \frac{\left[ \tilde{h}_{\underline{\nu}+i} \left( \kappa, \tilde{\vartheta}_{\underline{\nu}+i-1}(\kappa) - \kappa d_{\underline{\nu}+i}^{(k)}, \mathcal{G}_{\underline{\nu}+i-1}(\kappa) \right) \right]^2}{\left[ \log \left( \frac{\varepsilon}{2M(\beta - \alpha)} \right) \right]^2} < \frac{1}{8} \frac{1}{\Delta\nu} \varepsilon \quad (194)$$

als auch die analoge Abschätzung für das Integral über  $[\alpha, \beta]$  gilt, die Hilfsatz 4.20 (mit  $j_0 = \underline{\nu} + i$ ,  $\Theta(\kappa) = \tilde{\vartheta}_{\underline{\nu}+i-1}$  und  $L = d_{\underline{\nu}+i}^{(k)}$ ) ermöglicht.

Zusätzlich werde  $d_{\underline{\nu}+i}^{(k)}$  bei Bedarf noch vergrößert, um vermöge Hilfsatz 2.24 (mit  $G(\kappa, y) = h_{\underline{\nu}+i}(\kappa, \tilde{\vartheta}_{\underline{\nu}+i-1}(\kappa) - y)$  und  $F(\kappa) = -\frac{2\tilde{m}_{\underline{\nu}+i}}{\sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\underline{\nu}} \tilde{m}_j(\kappa)}$ )

$$\int_{-\beta}^{-\alpha} \frac{-2\tilde{m}_{\underline{\nu}+i}(\kappa) \left( \tilde{h}_{\underline{\nu}+i} \left( \kappa, \tilde{\vartheta}_{\underline{\nu}+i-1}(\kappa) - \kappa d_{\underline{\nu}+i}^{(k)}, \mathcal{G}_{\underline{\nu}+i-1}(\kappa) \right) - \tilde{m}_{\underline{\nu}+i}(\kappa) \right)}{\left[ \log \left( \frac{\varepsilon}{2M(\beta - \alpha)} \right) \right]^2} d\kappa < \frac{\varepsilon}{8\Delta\nu} \quad (195)$$

(und entsprechend auch bei Integration über  $[\alpha, \beta]$ ) sicherzustellen.

Überdies möge  $d_{\underline{\nu}+i}^{(k)}$  so groß sein, dass die folgenden  $2(i-2)$  Bedingungen erfüllt sind. Für  $s \in \{2, \dots, i-1\}$  gelte nämlich:

$$\begin{aligned} & \int_{-\beta}^{-\alpha} \left( \tilde{h}_{\underline{\nu}+i} \left( \kappa, \tilde{\vartheta}_{\underline{\nu}+i-1}(\kappa) - \kappa d_{\underline{\nu}+i}^{(k)}, \mathcal{G}_{\underline{\nu}+i-1}(\kappa) \right) - \tilde{m}_{\underline{\nu}+i}(\kappa) \right) \cdot \\ & \quad \cdot \left( \tilde{h}_{\underline{\nu}+s} \left( \kappa, \tilde{\vartheta}_{\underline{\nu}+s-1}(\kappa) - \kappa d_{\underline{\nu}+s}^{(k)}, \mathcal{G}_{\underline{\nu}+s-1}(\kappa) \right) - \tilde{m}_{\underline{\nu}+s}(\kappa) \right) N(\underline{\nu}, \bar{\nu}; \kappa)^{-2} d\kappa \\ & < \frac{1}{8} \frac{1}{i-1} \frac{1}{\Delta\nu} \varepsilon. \end{aligned} \quad (196)$$

und entsprechend bei Integration über  $[\alpha, \beta]$ . Hierbei wird Korollar 2.25 2( $i-2$ )-mal angewendet mit  $H(\kappa, y) = \tilde{h}_{\underline{\nu}+i}(\kappa, \tilde{\vartheta}_{D_{\underline{\nu}+i-1}, \underline{\nu}+i-1} - y)$  und

$$F = \left( \tilde{h}_{\underline{\nu}+s}(\cdot, \tilde{\vartheta}_{\underline{\nu}+s-1}(\cdot) - \cdot d_{\underline{\nu}+s}^{(k)}, \mathcal{G}_{\underline{\nu}+s-1}(\kappa)) - \tilde{m}_{\underline{\nu}+s} \right) \cdot N(\underline{\nu}, \bar{\nu}; \kappa)^{-2}.$$

Setze  $d_{\underline{\nu}+i} := \max_{k \in K} d_{\underline{\nu}+i}^{(k)}$ . Sei

$$\mathcal{G}_{\underline{\nu}+i}(\kappa) := \int_{b_{\underline{\nu}+i-1}}^{a_{\underline{\nu}+i}} G_k(\kappa, s) \, ds \quad (\kappa \in \mathbb{R}^*).$$

Aufgrund von (190) und (193) ist der erste Teil der Behauptung des Satzes gezeigt.

Als Vorbereitung zum Beweis des zweiten Teils werden folgende Abschätzungen durchgeführt:

Es sei  $\kappa \in [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta]$ .

**Hilfssatz 4.25.**

Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt für die oben bestimmten  $d_j$  ( $j \in \{\underline{\nu}+1, \dots, \bar{\nu}\}$ ) unabhängig von  $k \in K$

$$\mu_L \left( \left\{ \frac{d\tilde{\vartheta}_{\bar{\nu}}}{d\kappa} > \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \right\} \right) < \varepsilon.$$

*Beweis*

Aus

$$\frac{1}{\pi} \left( \prod_{j=1}^{\bar{\nu}} \tilde{f}_j(\kappa, \tilde{\vartheta}_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) \right) \mathcal{D}(\kappa) > \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)}$$

folgt gemäß Definition (188) von  $M$

$$M \left( \prod_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{f}_j(\kappa, \tilde{\vartheta}_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) \right) > \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)},$$

woraus durch Logarithmieren

$$\log \left( \prod_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{f}_j(\kappa, \tilde{\vartheta}_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) \right) > \log \left( \frac{\varepsilon}{2M(\beta - \alpha)} \right)$$

gefolgert werden kann. Dann gilt auch mit (182), wenn man (189) verwendet:

$$\sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{h}_j(\kappa, \tilde{\vartheta}_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) > N(\underline{\nu}, \bar{\nu}; \kappa)$$

Daraus folgt (man subtrahiere  $2N(\underline{\nu}, \bar{\nu}; \kappa)$ ):

$$\sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} (\tilde{h}_j(\kappa, \tilde{\vartheta}_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) - \tilde{m}_j(\kappa, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa))) > -\frac{1}{2} \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{m}_j(\kappa, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) \quad (197)$$

Wegen (189) ist die rechte Seite dieser Ungleichung positiv, so dass Division durch  $-\frac{1}{2} \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{m}_j(\kappa, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) = -\mathcal{N}_{(a_j);k}(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa) > 0$

$$\frac{\sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} (\tilde{h}_j(\kappa, \tilde{\vartheta}_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) - \tilde{m}_j(\kappa, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)))}{-\mathcal{N}_{(a_j);k}(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa)} > 1$$

liefert und man schließlich

$$H(\kappa) := \left( \frac{\sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} (\tilde{h}_j(\kappa, \tilde{\vartheta}_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) - \tilde{m}_j(\kappa, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)))}{\frac{1}{2} \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{m}_j(\kappa, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa))} \right)^2 > 1$$

hat. Es gilt also

$$\begin{aligned} & \mu_L \left( \left\{ \kappa \in [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta] \mid \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \frac{1}{\pi} \left( \prod_{j=1}^{\bar{\nu}} \tilde{f}_j(\kappa, \tilde{\vartheta}_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) \right) \mathcal{D}(\kappa) > \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \right\} \right) \\ & \leq \mu_L \left( \left\{ \kappa \in [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta] \mid \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \frac{\left( \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} (\tilde{h}_j(\kappa, \tilde{\vartheta}_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) - \tilde{m}_j(\kappa, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa))) \right)^2}{\frac{1}{2} \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{m}_j(\kappa, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa))} > 1 \right\} \right). \end{aligned}$$

Da  $H(\kappa) \geq 0$  ( $\kappa \in [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta]$ ) ist, gilt somit

$$\mu_L(\{H(\kappa) > 1\}) = \int_{\{H(\kappa) > 1\}} 1 \leq \int_{\{H(\kappa) > 1\}} H(\kappa) d\kappa = \int_{[-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta]} H(\kappa) d\kappa. \quad (198)$$

Wegen

$$\begin{aligned} & -2\tilde{m}_j(\kappa, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa))\tilde{h}_j(\kappa, \tilde{\vartheta}_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) + \tilde{m}_j^2(\kappa, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) \\ & \leq -2\tilde{m}_j(\kappa, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) \left( \tilde{h}_j(\kappa, \tilde{\vartheta}_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) - \tilde{m}_j(\kappa, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) \right) \end{aligned}$$

ist dann für  $\kappa \in [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta]$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \left( \tilde{h}_j(\kappa, \tilde{\vartheta}_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) - \tilde{m}_j(\kappa, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) \right)^2 \\ & \leq \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{h}_j^2(\kappa, \tilde{\vartheta}_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) \\ & \quad + \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \left( -2\tilde{m}_j(\kappa, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot \left( \tilde{h}_j(\kappa, \tilde{\vartheta}_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) - \tilde{m}_j(\kappa, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) \right) \right) \\ & \quad + \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \sum_{i=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \left( \tilde{h}_j(\kappa, \tilde{\vartheta}_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) - \tilde{m}_j(\kappa, \mathcal{G}_{j-1}(\kappa)) \right) \cdot \\ & \quad \cdot \left( \tilde{h}_i(\kappa, \tilde{\vartheta}_{i-1}(\kappa) - \kappa d_i, \mathcal{G}_{i-1}(\kappa)) - \tilde{m}_i(\kappa, \mathcal{G}_{i-1}(\kappa)) \right). \end{aligned}$$

Diese Abschätzung für den in (198) auftretenden Zähler ermöglicht die Anwendung von (191), (192), (194), (195) und (196), so dass man schließlich

$$\mu_L(\{\kappa \in [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta] \mid H(\kappa) > 1\}) < \varepsilon$$

erhält.

□

Mit dem Beweis des Lemmas ist der Beweis des Satzes abgeschlossen.  $\square$

## 4.5 Singulärstetiges Grenzmaß

Dass auch in der Situation mit Drehimpulstermen eine geeignete Wahl der Buckelabstände zu einem singulärstetigen Grenzmaß führt, ist Inhalt des folgenden Satzes (seine drehimpulsfreie Entsprechung ist Satz 2.21):

**Satz 4.26.**

Seien Folgen  $(H_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N$  und  $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^N$  und zu letzteren Funktionen  $W_j \in C[0, \alpha_j]$  gegeben mit folgenden Eigenschaften:

Es gelte  $H_j = 0$  nur für endlich viele Indizes  $j \in \mathbb{N}$ ,  $H_j \rightarrow 0$  ( $j \rightarrow \infty$ ) und

$$\sum_{j=1}^{\infty} H_j^2 W_j = \infty, \quad (199)$$

wobei  $W_j$  wie in (65) definiert ist.

Dann gibt es eine Folge  $D := (d_j)_{j \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^N$  mit der Eigenschaft, dass für jedes kompakte Intervall  $\Sigma \subset \mathbb{R}^*$  jedes  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_j(\Sigma) =: \tilde{\mu}_D(\Sigma)$$

existiert und ein singulärstetiges Maß auf  $\mathbb{R}^*$  definiert.

Im folgenden Beweis des Satzes 4.26 wird gezeigt, dass zu vorgegebenen Buckelprofilen, für welche die Bedingung (199) erfüllt ist, die Abstände  $d_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) zwischen den Buckeln so bestimmt werden können, dass die zugehörigen Maße (171) in der Grenze ein singulärstetiges Maß definieren.

Vor dem eigentlichen Induktionsbeweis sei hier das Vorgehen skizziert:

In jedem Schritt wird ausgehend von einem endlichen Buckelpotential eine Reihe von zusätzlichen Buckeln hinzugenommen, wobei die Abstände zwischen den neuen Buckeln gewisse Bedingungen erfüllen müssen, um Folgendes zu erreichen:

Die neu gewonnenen Maße der Potentiale mit zusätzlichen Buckeln unterscheiden sich kaum von den Vorgängermaßen (siehe (201)). Dies wird durch einen genügend großen Abstand zum jeweiligen Vorgängerbuckel bewirkt.

Zusätzlich ist bei der Wahl der neuen Buckelabstände darauf zu achten, dass der Träger des zugehörigen neuen Maßes kleines Lebesguemaß hat (siehe (203), (202), (207), (206)), was die Singularität des Grenzmaßes gewährleistet.

Gemäß Konstruktion überträgt sich die Stetigkeit der Maße  $\tilde{\mu}_j$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) auf das Grenzmaß  $\tilde{\mu}_D$ .

Eine Mindestanwachsrate der Buckelabstände sorgt dafür, dass der Grenzoperator kein Punktspektrum besitzt.

*Beweis von Satz 4.26*

Sei  $\Xi_n := [-2n, -\frac{1}{2n}] \cup [\frac{1}{2n}, 2n]$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Diese Intervallschachtelung schöpft  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  aus (vgl. Abbildung 11).

$(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei eine streng monotone Nullfolge mit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n < \infty$ .

Der Beweis wird durch vollständige Induktion nach  $\nu_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) geführt.

1. Schritt:

Nach Satz 4.23 gibt es zu  $\underline{\nu} = \nu_0 := 0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_1$ ,  $\gamma = \varepsilon_1$  und  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = 2$  eine natürliche Zahl  $\nu_1$  und positive Zahlen

$$d_1 \geq \exp(0^2), \dots, d_{\nu_1} \geq \exp((\nu_1 - 1)^2) \quad (200)$$

so, dass für jedes kompakte Intervall  $\Sigma \subset \Xi_1$  und alle  $k \in K_1 := \{-1\} \cup \{1\}$

$$|\tilde{\mu}_{j+1}(\Sigma) - \tilde{\mu}_j(\Sigma)| < \varepsilon_1 2^{-(j+1)} \quad (j \in \{0, \dots, \nu_1 - 1\}) \quad (201)$$

und

$$\mu_L(\tilde{\mathcal{S}}_1) < \varepsilon_2 \quad (202)$$

gilt, wobei die Menge  $\tilde{\mathcal{S}}_1$  wie folgt definiert ist:

$$\tilde{\mathcal{S}}_1 := \left\{ \kappa \in \Xi_1 \left| \frac{1}{\pi} \left( \prod_{j=1}^{\nu_1} \tilde{f}_j(\kappa, \vartheta_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j) \right) \mathcal{D}(\kappa) > \frac{\varepsilon_1}{\mu_L(\Xi_1)} \right. \right\} \quad (203)$$

$\tilde{\mathcal{S}}_1$  besteht aus endlich vielen Intervallen (vgl. die Argumentation im Beweis von Satz 2.21 auf S. 66). Die Anzahl der Intervalle, aus denen  $\tilde{\mathcal{S}}_1$  besteht, sei mit  $s_1$  bezeichnet und  $r_1 := s_1$  definiert.

*n.* Schritt:

Satz 4.23 gewährleistet, dass es zu  $\underline{\nu} = \nu_{n-1}$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_n$ ,  $\gamma = \frac{\varepsilon_{n-1}}{r_{n-1}}$  und  $\alpha = \frac{1}{2n}$ ,  $\beta = 2n$  eine natürliche Zahl  $\nu_n > \nu_{n-1}$  und positive Zahlen

$$d_{\nu_{n-1}+1} \geq \exp(\nu_{n-1}^2), \dots, d_{\nu_n} \geq \exp((\nu_n - 1)^2) \quad (204)$$

so gibt, dass für jedes kompakte Intervall  $\Sigma \subset \Xi_n$  und jedes  $k \in K_n := \{-n, \dots, -1\} \cup \{1, \dots, n\}$

$$|\tilde{\mu}_{j+1}(\Sigma) - \tilde{\mu}_j(\Sigma)| < \frac{\varepsilon_{n-1}}{r_{n-1}} 2^{-(j+1)} \quad (j \in \{\nu_{n-1}, \dots, \nu_n - 1\}) \quad (205)$$

und

$$\mu_L(\tilde{\mathcal{S}}_n) < \varepsilon_n \quad (206)$$

ist, wobei  $\tilde{\mathcal{S}}_n$  folgendermaßen definiert ist:

$$\tilde{\mathcal{S}}_n := \left\{ \kappa \in \Xi_n \left| \frac{1}{\pi} \left( \prod_{j=1}^{\nu_n} \tilde{f}_j(\kappa, \vartheta_{j-1}(\kappa) - \kappa d_j) \right) \mathcal{D}(\kappa) > \frac{\varepsilon_n}{\mu_L(\Xi_n)} \right. \right\} \quad (207)$$

Ähnlich wie  $\tilde{\mathcal{S}}_1$  besteht  $\tilde{\mathcal{S}}_n$  ebenfalls aus einer endlichen Anzahl  $s_n$  von Intervallen. Es sei  $r_n := \max_{j \in \{1, \dots, n\}} s_j$ .

Dass die auf diese Weise induktiv bestimmte Folge  $D := (d_j)_{j \in N}$  die gewünschten Eigenschaften besitzt, wird im Folgenden gezeigt.

Sei dazu  $\Sigma \subset \mathbb{R}^*$  ein kompaktes Intervall.

Dann gibt es  $\tilde{n} \in \mathbb{N}$  so, dass  $\Sigma \subset \Xi_n$  ( $n \geq \tilde{n}$ ) ist.

### 1. Existenz des Grenzwertes $\lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_j(\Sigma)$

Der Nachweis erfolgt entsprechend dem Beweis von Satz 2.21 im Abschnitt 2.5.2. Der Grenzwert sei bezeichnet mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_j(\Sigma) =: \tilde{\mu}_D(\Sigma). \quad (208)$$

### 2. Stetigkeit von $\tilde{\mu}_D$

Auch dieser Beweisschritt kann Eins zu Eins von der entsprechenden Passage beim Beweis von Satz 2.21 übernommen werden.

### 3. Singularität von $\tilde{\mu}_D$

Die Singularität des Grenzmaßes ergibt sich aufgrund der Konstruktion analog wie im Beweis von Satz 2.21.

### 4. $\tilde{\mu}_D$ ist auf $\mathcal{S}$ konzentriert

Ebenfalls wie im Beweis des Satzes 2.21 schließt man, dass  $\tilde{\mu}_D$  ist auf  $\mathcal{S}$  konzentriert ist.

□

## 4.6 Spektrale Eigenschaften des Grenzoperators $\tilde{T}$

Dass das im vorangegangenem Abschnitt ermittelte singulärstetige Grenzmaß das Spektralmaß eines Differentialoperators ist, ist Gegenstand dieses Abschnitts. Hierzu werde zunächst ein Differentialoperator definiert, von dem im Anschluß gezeigt wird, dass er die geforderten Eigenschaften aufweist.

Das Grenzmaß aus Abschnitt 4.5 ist gegeben durch die Folge von Buckelprofilen  $(W_j)_{j \in \mathbb{N}} \in C[0, \alpha_j]^N$ , die vorgegebenen Buckelhöhen  $(H_j)_{j \in \mathbb{N}} \in R^N$  und durch die gemäß Satz 4.26 bestimmte Folge der Buckelabstände  $D := (d_j)_{j \in \mathbb{N}}$ .

Mit diesen Parametern wird folgendes Potential definiert

$$q = \begin{cases} 0 & 1 \leq r \leq a_1 \\ H_n W_n(r - a_n) & a_i < r < b_i \quad (i \in \mathbb{N}) \\ 0 & b_i \leq r < a_{i+1} \quad (i \in \mathbb{N}) \end{cases} \quad (209)$$

mit

$$\begin{aligned} a_i &:= b_{i-1} + d_i \quad (i \in \{1, \dots, n\}) \\ b_i &:= a_i + \alpha_i \quad (i \in \{1, \dots, n\}). \end{aligned}$$

Zu diesem Potential sei der Differentialausdruck

$$\tau_q := \sigma_2 p + m\sigma_3 + l + q \quad (210)$$

mit  $p := -i \frac{d}{dr}$  definiert. Der zu  $\tau_q$  gehörige maximale Operator mit Definitionsbereich

$$\left\{ u \in L^2([1, \infty))^2 \mid u \in AC_{loc}([1, \infty))^2, \tau_q u \in L^2([1, \infty)^2)^2 \right\}$$

sei mit  $\tilde{T}^{\max}$  bezeichnet (vgl. [WEIDMANN 71]).

$\tilde{T}^{\min}$  sei der entsprechende minimale Operator mit Definitionsbereich

$$D(\tilde{T}^{\min}) = \left\{ u \in D(\tilde{T}^{\max}) \mid \text{supp } u \subset \subset \mathbb{R}_0^+(1, \infty) \right\}.$$

$\tilde{T}$  bezeichne eine selbstadjungierte Fortsetzung von  $\tilde{T}^{\min}$ .

Die spektralen Eigenschaften von  $\tilde{T}$  werden mit denen des freien Dirac-operators  $T_{fr}$  verglichen.

#### 4.6.1 Das wesentliche Spektrum von $\tilde{T}$

##### Hilfssatz 4.27.

Es ist

$$\sigma_{ess}(\tilde{T}) = \sigma_{ess}(T_{fr}) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

*Beweis*

Die Argumentation erfolgt ähnlich wie beim Beweis von Hilfssatz 2.36 mit Hilfe von [WEIDMANN 76], Satz 7.24 und liefert  $\sigma_{ess}(\tilde{T}) \supset \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ .

Außerdem ist nach [WEIDMANN 71], Kor. 6.9.,  $\sigma_{ess}(\tilde{T}) \cap (-1, 1) = \emptyset$ .

□

**Bemerkung 4.28.**

Beim Beweis von  $\sigma_{ess}(\tilde{T}) \supset (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$  wurde lediglich die Eigenschaft  $\limsup_{j \rightarrow \infty} d_j = \infty$  des Potentials  $q$  verwendet. Andere Eigenschaften wie die Buckelhöhen oder Buckelformen wurden für den Beweis nicht benötigt.

#### 4.6.2 Zum Punktspektrum von $\tilde{T}$

Es gilt der folgende

**Hilfssatz 4.29.**

$\tilde{T}$  besitzt keine Eigenwerte in  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ .

**Bemerkung 4.30.**

Die Aussage des Hilfssatzes ist bereits unter der alleinigen Voraussetzung  $d_j \geq \exp((j-1)^2)$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) unabhängig von der Buckelbeschaffenheit gültig.

*Beweis*

Wegen (139) und (140) gilt für  $n \in \mathbb{N}$  (unabhängig von der Randbedingung,

die bei 0 gestellt wurde):

$$\begin{aligned} \log(\tilde{R}(a_n + \alpha_n)) &= \log(\tilde{R}(a_n)) + \\ &+ \int_{a_n}^{a_n + \alpha_n} \left( \frac{1}{\kappa} H_n W(r - a_n) \sin 2\vartheta \, dr + \sin 2\tilde{\vartheta} F_k(r; \kappa) \right) \, dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log(\tilde{R}(r)) &= \log(\tilde{R}(a_{n-1} + \alpha_{n-1})) + \\ &+ \int_{a_{n-1} + \alpha_{n-1}}^{a_n} \sin 2\tilde{\vartheta} F_k(r; \kappa) \, dr \quad (r \in [a_{n-1} + \alpha_{n-1}, a_n]). \end{aligned}$$

Mit (141) erhält man

$$\begin{aligned} \log(\tilde{R}(a_n + \alpha_n)) &\geq \\ &\geq \log(\tilde{R}(1)) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\kappa|} H_i \int_1^{\alpha_j} |W_i|(r) \, dr - \int_1^{a_n + \alpha_n} \frac{C_{k,\kappa}}{r^2} \\ &\geq - \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\kappa|} \underbrace{\sup_{j \in N} \left\{ H_j \int_0^{\alpha_j} |W_j|(r) \, dr \right\}}_{=:\omega} - \frac{C_{k,\kappa}}{a_n + \alpha_n} \\ &\geq -n \frac{1}{|\kappa|} \omega - \frac{C_{k,\kappa}}{a_n + \alpha_n}, \end{aligned}$$

wobei  $\omega < \infty$  ist, da aufgrund der Voraussetzungen von Satz 2.21  $(H_j)_{j \in N}$  eine Nullfolge ist und  $\int_0^{\alpha_j} |W_i|(r) \, dr = 1$  ist. Dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{R}(r) &\geq \tilde{R}(1) \exp \left( -n \frac{1}{|\kappa|} \omega - \frac{C_{k,\kappa}}{a_n + \alpha_n} \right) \\ &= \text{const} \exp \left( -n \frac{1}{|\kappa|} \omega \right) \quad (r \in [b_n, a_{n+1}]). \end{aligned}$$

Hiermit erhält man unter Verwendung der besonderen Gestalt des Potentials gemäß (209) und der Tatsache, dass nach Konstruktion  $d_{j+1} \geq \exp(j^2)$  ( $j \in$

$\mathbb{N}$ ) gilt und da  $j - \frac{\omega}{|\kappa|} > 0$  ( $j > \frac{\omega}{|\kappa|}$ )  $j - \frac{\omega}{|\kappa|} > 0$  ( $j > \frac{\omega}{|\kappa|}$ ) ist:

$$\begin{aligned}
 \int_{b_n}^{\infty} \underbrace{\tilde{R}^2(r) dr}_{>0} &> \int_{\bigcup_{j=n}^{\infty} [b_j, a_{j+1}]} \tilde{R}^2(r) dr \geq \int_{\bigcup_{j=n}^{\infty} [b_j, a_{j+1}]} \text{const}^2 \exp\left(-j \frac{2}{|\kappa|} \omega\right) dr \\
 &= \sum_{j=n}^{\infty} d_{j+1} \text{const}^2 \exp\left(-\frac{2j}{|\kappa|} \omega\right) \geq \sum_{j=n}^{\infty} \text{const}^2 \exp\left(j^2 - \frac{2j}{|\kappa|} \omega\right) \\
 &= \sum_{j=n}^{\infty} \exp\left(\left(j - \frac{\omega}{|\kappa|}\right)^2\right) \text{const}^2 \exp\left(-\left(\frac{\omega}{|\kappa|}\right)^2\right) = \infty.
 \end{aligned}$$

Die zugehörige Lösung ist folglich nicht quadratisch integrierbar, da aufgrund von (138) für  $\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| > 1$  gilt:

$$\tilde{\Psi}_1^2 + \tilde{\Psi}_2^2 = \tilde{R}^2 \left( \cos^2 \vartheta + \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \sin^2 \vartheta \right) \geq \tilde{R}^2 \min\{1, \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\}.$$

Somit gibt es kein Punktspektrum in  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ .

□

Faßt man die vorstehenden Ergebnisse zusammen, so erhält man

**Satz 4.31.**

$\tilde{T}$  besitzt außerhalb der zentralen Lücke  $[-1, 1]$  rein singulärstetiges Spektrum:

$$\begin{aligned}
 \sigma(\tilde{T}) \cap ((-\infty, -1) \cup (1, \infty)) &= \\
 &= \sigma_{sc}(\tilde{T}) \cap ((-\infty, -1) \cup (1, \infty)) \supset (-\infty, -1) \cup (1, \infty)
 \end{aligned}$$

□

All you really need to know for the moment is that the universe is a lot more complicated than you might think, even if you start from a position of thinking it's pretty complicated in the first place. - Douglas Adams, *Mostly Harmless*

## 5 Der radiale Anteil des Diracoperators mit Drehimpulstermen auf dem Intervall $(0,1]$

Nachdem im vorangegangen Abschnitt das Intervall  $[1, \infty)$  untersucht wurde, wird in diesem Abschnitt das Intervall  $(0, 1]$  betrachtet. Ziel ist es, für die Situation auf diesem Intervall zu zeigen, dass rein diskretes Spektrum vorliegt.

Da der erste Buckel aufgrund von  $d_1 > 1$  rechts von 1 liegt, können die im Abschnitt 3 für den potentialfreien Fall auf der Halbachse  $\mathbb{R}^+$  gewonnenen Ergebnisse analog erschlossen werden.

Analog wie in (122) sei hier für  $(0, 1]$  der Operator

$$Z_0 := \sigma_2 p + \sigma_3 + \sigma_1 \frac{k}{r} \quad (211)$$

definiert, jedoch mit einer Randbedingung bei 1

$$y_1(1) \sin \eta + y_2(1) \cos \eta = 0 \text{ für ein } \eta \in [0, \pi]. \quad (212)$$

Bei 0 liegt der Grenzpunktfall vor, denn die Lösung  $v$  aus (125) ist auf  $(0, 1]$  quadratintegrierbar, während  $w$  aus (126) bei 0 nicht quadratintegrierbar ist.

Sei für ein  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  mit  $y$  die Lösung von  $Z_0 y = \lambda y$  bezeichnet, die die Randbedingung (212) erfüllt, und mit  $W(v, y)$  die Wronskideterminante von  $v$  und  $y$ , welche nicht von  $r \in (0, 1]$  abhängt.

Für  $r, s \in (0, 1]$  sei die Greensche Funktion definiert:

$$G(r, s) = \begin{cases} \frac{1}{W(v, y)} v(r) y^T(s) & \text{für } r \leq s \\ \frac{1}{W(v, y)} y(r) v^T(s) & \text{für } s < r \end{cases} \quad (213)$$

Da  $W(v, y)$  nicht von  $r$  abhängt, wird im Folgenden die Abschätzung für  $W(v, r)G(r, s)$  durchgeführt:

$$\begin{aligned}
 W(v, y)^2 & \int_0^1 \int_0^1 |G(r, s)|^2 \, ds \, dr = \\
 & = \int_0^1 |y(r)|^2 \int_0^r |v(s)|^2 \, ds \, dr + \int_0^1 |v(r)|^2 \int_0^s |y(s)|^2 \, dr \, ds \\
 & = 2 \int_0^1 |y(r)|^2 \int_0^r |v(s)|^2 \, ds \, dr
 \end{aligned} \tag{214}$$

Dabei wurde die Reihenfolge der Integration über  $s$  und  $r$  in eine Integration nach  $r$  und  $s$  überführt (Satz von Fubini).

Sei o.E.  $k > 0$ , was die Notation vereinfacht.

Mit [KOSHLYAKOV/SMIRNOV/GLINER], S. 174, kann man das Integral über  $v$  aufgrund der Gestalt (125) mit Hilfe von  $|J_\nu(x)| \leq \frac{|\frac{1}{2}x|^\nu}{\Gamma(\nu+1)}$  abschätzen.

Es ist also

$$\int_0^r |v(s)|^2 \, ds \propto r^{2k+1}. \tag{215}$$

Die Lösung  $y(r) = \gamma_1 v(r) + \gamma_2 w(r)$  ( $\gamma_1, \gamma_2$  geeignet, um die Randbedingung bei 1 zu erfüllen) wiederum kann aufgrund der Tatsache, dass sich für positive  $\nu$  die Funktion  $Y_\nu(r)$  für kleine  $r$  wie  $-\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{r}\right)^\nu$  verhält ([WATSON], S. 41), abschätzen:

$$|y(r)|^2 \propto r^{-2k-1} \text{ für kleine } r$$

In der Nähe von 0 erhält man somit

$$\int_0^\varepsilon |y(r)|^2 \int_0^r |v(s)|^2 \, ds \, dr \propto \int_0^\varepsilon r^{-2k-1} r^{2k+1} \, dr = \int_0^\varepsilon 1 \, dr.$$

Damit ist gezeigt, dass das Integral aus (214) trotz des singulären Verhaltens von  $y$  bei 0 endlich ist.

Somit liegt ein Hilbert-Schmidt-Operator vor.

Aus dessen Kompaktheit ([WEIDMANN 2000], Kapitel 3.3) folgt, dass rein diskretes Spektrum vorliegt.

Insbesondere ist also

$$\sigma_{ac}(Z_0) = \emptyset. \quad (216)$$

Im folgenden Abschnitt werden die Ergebnisse für die beiden Intervalle  $(0, 1]$  und  $[1, \infty)$  zusammengeführt.

Everything happens to everybody sooner or later if there is time enough. - George Bernard Shaw, Back to Methuselah

## 6 Der radiale Anteil des Diracoperators mit Buckelpotential und Drehimpulstermen auf $\mathbb{R}^+$

Zielsetzung dieses Abschnittes ist es, Aussagen über das Spektrum des auf ganz  $\mathbb{R}^+$  definierten Operators

$$\hat{T} := \sigma_2 p + \sigma_3 + q + \sigma_1 \frac{k}{r} \quad (217)$$

zu machen

Da  $q$  auf  $(0, 1]$  verschwindet, gilt für den Operator  $Z_0$  aus (211)

$$Z_0 = \sigma_2 p + \sigma_3 + q + \sigma_1 \frac{k}{r}.$$

Definiert man

$$Z_\infty := \sigma_2 p + \sigma_3 + q + \sigma_1 \frac{k}{r} \quad (218)$$

auf  $[1, \infty)$  mit der Randbedingung (212) bei  $r = 1$ , so stimmt

$$Z_0 \oplus Z_\infty$$

mit  $\hat{T}$  bis auf eine Störung vom Rang 1 überein<sup>14</sup>.

Nach [ARONSZAJN] bleibt das absolutstetige Spektrum bei endlichdimensionalen Störungen erhalten.

---

<sup>14</sup>Hier sei auf [SIMON I] verwiesen. Dort wird die allgemeine Situation des gestörten Operators  $A_\alpha := A + \alpha B$  mit  $B := (\varphi, \cdot)\varphi$  betrachtet, wobei  $B$  zwar Rang 1 hat, aber lediglich bezüglich der Sequilinearform des Raumes beschränkt ist. Der zugrundeliegende Vektor  $\varphi$  muss insbesondere nicht normierbar sein.

Deshalb stimmen die absolutstetigen Spektren von  $Z_0 \oplus Z_\infty$  und  $\hat{T}$  überein:

$$\sigma_{ac}(\hat{T}) = \sigma_{ac}(Z_0 \oplus Z_\infty) \quad (219)$$

Mit (216) erhält man

$$\sigma_{ac}(Z_0 \oplus Z_\infty) = \sigma_{ac}(Z_0) \cup \sigma_{ac}(Z_\infty) = \sigma_{ac}(Z_\infty). \quad (220)$$

Auf das Spektrum von  $Z_\infty$  wird mittels der Eigenschaften des ebenfalls auf  $[1, \infty)$  und mit der gleichen Randbedingung (212) bei  $r = 1$  definierten Operators

$$Q_1 := \sigma_2 p + m\sigma_3 + l + q \quad (221)$$

geschlossen.

Nach Satz 4.31 gilt

$$\sigma_{sc}(Q_1) \cap ((-\infty, -1) \cup (1, \infty)) \supset (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Da nach Abschnitt 3.2  $Q_1$  und  $Z_\infty$  unitär äquivalent sind, umfaßt das singulärstetige Spektrum von  $Z_\infty$  ebenfalls mindestens die beiden Intervalle  $((-\infty, -1) \cup (1, \infty))$ .

Ergänzend sei folgende Schlußkette dargestellt: Seien auf  $[1, \infty)$  weitere Operatoren definiert mit jeweils der Randbedingung (212):

$$Q_0 := \sigma_2 p + \sigma_3 + q \quad (222)$$

und

$$T_0 := \sigma_2 p + \sigma_3 \quad (223)$$

Die weitere Untersuchung vergleicht  $Q_0$  und  $T_0$ .

Bezeichne zu  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$   $\tilde{v}$  die Lösung von  $T_0 y = \lambda y$ , die die Randbedingung (212) erfüllt, und  $\tilde{w}$  die Lösung, die bei  $\infty$  quadratisch integrierbar ist.

Ohne Einschränkung<sup>15</sup> wird im Folgenden die Randbedingung  $\tilde{v}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  betrachtet. Weiter sei  $\varsigma := \sqrt{1 - \lambda^2}$ .

<sup>15</sup> Vgl. die Argumentation in [HUGHES/SCHMIDT], die sich darauf stützt, daß vermöge einer Möbius-Transformation die Titchmarsh-Weylschen  $m$ -Funktionen für verschiedene Randbedingungen miteinander in Beziehung gesetzt werden können.

Beide Lösungen können durch das Fundamentalsystem

$$U(r) = \begin{pmatrix} e^{\varsigma r} & -\frac{\varsigma}{1+\lambda} e^{-\varsigma r} \\ \frac{\varsigma}{1-\lambda} e^{\varsigma r} & e^{-\varsigma r} \end{pmatrix}$$

dargestellt werden:

$$\tilde{v}(r) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-\varsigma} e^{\varsigma r} + \frac{1}{2} e^{\varsigma} e^{-\varsigma r} \\ \frac{1}{2} e^{-\varsigma} \frac{\varsigma}{1-\lambda} e^{\varsigma r} - \frac{1}{2} e^{-\varsigma} \frac{1+\lambda}{\varsigma} e^{-\varsigma r} \end{pmatrix}$$

und

$$\tilde{w}(r) = \begin{pmatrix} -\frac{\varsigma}{1+\lambda} e^{-\varsigma r} \\ e^{-\varsigma r} \end{pmatrix}$$

Für diese Lösungen gelten die Abschätzungen

$$|\tilde{v}(r)| \leq \text{const}(\lambda) e^{\varsigma r} \quad (224)$$

und

$$|\tilde{w}(r)| \leq \text{const}(\lambda) e^{-\varsigma r}. \quad (225)$$

Sei mit  $\tilde{W}$  die zugehörige Wronskideterminante, welche nicht von  $r \in [1, \infty)$  abhängt, bezeichnet. Des weiteren sei die Greensche Funktion

$$\tilde{G}(r, s, \lambda) := \begin{cases} \frac{1}{\tilde{W}} \tilde{w}(r, \lambda) \tilde{v}^T(s, \lambda) & \text{für } 1 \leq s \leq r < \infty \\ \frac{1}{\tilde{W}} \tilde{v}(r, \lambda) \tilde{w}^T(s, \lambda) & \text{für } 1 \leq r < s < \infty \end{cases} \quad (226)$$

definiert.

Mit (224) und (225) erhält man

$$|\tilde{G}(r, s, \lambda)| \leq \text{const}(\lambda) e^{-\varsigma|r-s|}.$$

Für  $f \in L^2(1, \infty)^2$  ist

$$((T_0 - \lambda)^{-1} f)(r) = \int_1^\infty \tilde{G}(r, s, \lambda) f(s) \, ds \quad (r \geq 1).$$

Dann ist für  $g \in L^2(1, \infty)$  sowohl  $g(T_0 - \lambda)^{-1}$  als auch  $(T_0 - \lambda)^{-1}g$  ein Hilbert-Schmidt-Operator, denn es ist beispielsweise

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \left| g(r) \tilde{G}(r, s, \lambda) \right|^2 ds dr \leq \int_1^\infty |g(r)|^2 \int_{-\infty}^\infty e^{-\varsigma|r-s|} ds dr < \infty.$$

Ziel ist es, zu zeigen, daß

$$(Q_1 - \lambda)^{-1} - (Q_0 - \lambda)^{-1}$$

Spurklasse ist<sup>16</sup>. Dann ist nämlich mit [KATO], Kapitel X, Theorem 4.12:

$$\sigma_{ac}(Q_1) = \sigma_{ac}(Q_0).$$

Mit (121) aus Kapitel 2 erhält man<sup>17</sup>

$$\sigma_{ac}(Q_1) \cap ((-\infty, -1) \cup (1, \infty)) = \sigma_{ac}(Q_0) \cap ((-\infty, -1) \cup (1, \infty)) = \emptyset. \quad (227)$$

Für den Spurklassenachweis berechnet man zunächst mit Hilfe der zweiten Resolventengleichung (z.B. [WEIDMANN 2000], S. 190)

$$\begin{aligned} (Q_1 - \lambda)^{-1} - (Q_0 - \lambda)^{-1} &= \\ &= (Q_1 - \lambda)^{-1} (Q_0 - Q_1) (Q_0 - \lambda)^{-1} \\ &= (Q_1 - \lambda)^{-1} ((m-1)\sigma_3 + l) (Q_0 - \lambda)^{-1} \end{aligned} \quad (228)$$

und

$$\begin{aligned} (Q_0 - \lambda)^{-1} - (T_0 - \lambda)^{-1} &= \\ &= (T_0 - \lambda)^{-1} (T_0 - Q_0) (Q_0 - \lambda)^{-1} \\ &= -(T_0 - \lambda)^{-1} q (Q_0 - \lambda)^{-1}, \end{aligned} \quad (229)$$

sowie

$$\begin{aligned} (Q_1 - \lambda)^{-1} - (T_0 - \lambda)^{-1} &= \\ &= (Q_1 - \lambda)^{-1} (T_0 - Q_1) (T_0 - \lambda)^{-1} \\ &= -(Q_1 - \lambda)^{-1} (q + (m-1)\sigma_3 + l) (T_0 - \lambda)^{-1}. \end{aligned} \quad (230)$$

---

<sup>16</sup>Spurklasseigenschaften werden in [HUGHES/SCHMIDT] bei einer ähnlichen Argumentation herangezogen.

<sup>17</sup>Die Beweisschritte des Kapitels 2 sind völlig analog für den auf  $[1, \infty)$  mit Randbedingung bei 1 definierten Operator  $Q_0$  durchführbar.

Aus (230) leitet man

$$\begin{aligned} (Q_1 - \lambda)^{-1} &= \\ &= [1 - (Q_1 - \lambda)^{-1} (q + (m-1)\sigma_3 + l)] (T_0 - \lambda)^{-1} \end{aligned}$$

ab und aus (229)

$$(Q_0 - \lambda)^{-1} = (T_0 - \lambda)^{-1} [1 - q(Q_0 - \lambda)^{-1}].$$

Dies in (228) eingesetzt liefert

$$\begin{aligned} (Q_1 - \lambda)^{-1} - (Q_0 - \lambda)^{-1} &= \\ &= [1 - (Q_1 - \lambda)^{-1} (q + (m-1)\sigma_3 + l)] (T_0 - \lambda)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot ((m-1)\sigma_3 + l) (T_0 - \lambda)^{-1} [1 - q(Q_0 - \lambda)^{-1}]. \end{aligned}$$

Hierbei sind der erste Faktor  $[1 - (Q_1 - \lambda)^{-1} (q + (m-1)\sigma_3 + l)]$  und der letzte Faktor  $[1 - q(Q_0 - \lambda)^{-1}]$  beschränkt. Die mittleren Faktoren sind Spurklasse, denn es ist mit den Definitionen für die ortsabhängige Masse (128) und den Drehimpuls (129)

$$\begin{aligned} ((m-1)\sigma_3 + l) &= \\ &= \left( \left( 1 + \frac{k^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma_3 \cdot \left( \left( 1 + \frac{k^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \text{sign}(k) \left( \frac{\text{sign}(k) k}{2(r^2 + k^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{\text{sign}(k) k}{2(r^2 + k^2)} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

so dass man

$$\begin{aligned} (T_0 - \lambda)^{-1} ((m-1)\sigma_3 + l) (T_0 - \lambda)^{-1} &= \\ &= (T_0 - \lambda)^{-1} \sqrt{m-1} \cdot \sigma_3 \sqrt{m-1} (T_0 - \lambda)^{-1} \\ &\quad + (T_0 - \lambda)^{-1} \text{sign}(k) \sqrt{\text{sign}(k) l} \cdot \sqrt{\text{sign}(k) l} (T_0 - \lambda)^{-1} \end{aligned}$$

erhält. Beide Summanden sind jeweils das Produkt zweier Hilbert-Schmidt-Operatoren.

Mit (219) und (220) ist dann wegen (227)

$$\sigma_{ac}(\hat{T}) \cap ((-\infty, -1) \cup (1, \infty)) = \emptyset$$

und schließlich

$$\sigma_{sc}(\hat{T}) \cap ((-\infty, -1) \cup (1, \infty)) = ((-\infty, -1) \cup (1, \infty)). \quad (231)$$

□

Πολλὰ τὰ δεινὰ κ'οὐδὲν ἀνθρώπου  
δεινότερον πέλει.  
- Σοφοκλῆς, Αντιγόνη

## 7 Das Spektrum für den dreidimensionalen kugelsymmetrischen Fall

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der vorangehenden Abschnitte zur Untersuchung des radialen Anteils des Diracoperators verwendet, um eine Aussage für den kugelsymmetrischen Fall im  $\mathbb{R}^3$  zu gewinnen.

Betrachtet wird hier der Differentialoperator

$$H_q := \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + \beta + q(|\cdot|). \quad (232)$$

Dabei bezeichnet  $\boldsymbol{p}$  den mechanischen Impulsvektor des Teilchens und es ist

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

definiert, wobei  $\boldsymbol{\sigma}$  der Vektor der Pauli-Matrizen ist. Das Potential  $q(|\cdot|)$  ist gemäß Definition kugelsymmetrisch.

Aufgrund seiner Symmetrieeigenschaften kann der Operator  $H_q$  auf eine Schar gewöhnlicher Differentialoperatoren  $H_k$  ( $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ) reduziert werden (siehe [WEIDMANN 2003], Abschnitt 20.3).

Es gilt für  $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in D(H_k)$ :

$$H_k \begin{pmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g'_1(r) \\ g'_2(r) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v(r) + 1 & \frac{k}{r} \\ \frac{k}{r} & v(r) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \end{pmatrix} \quad (233)$$

In der Nomenklatur des Operators  $H_k$  wird die Abhängigkeit von der Drehimpulsquantenzahl zum Ausdruck gebracht. Diese Abhängigkeit war im vorbereitenden Abschnitt 4 bei der Bezeichnung des selbstadjungierten Operators  $\tilde{T}$  unterdrückt worden, da die vorbereitenden Betrachtungen für ein

festes  $k \in \mathbb{Z}$  angestellt wurden. Die Ergebnisse des Abschnittes 4.5 sind hingegen bereits für alle  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  gültig.

Ebenso war im Abschnitt 6 auf die explizite Angabe der Abhängigkeit von  $k$  verzichtet worden. Im Folgenden wird jedoch die  $k$ -Abhängigkeit in der Bezeichnung  $\tilde{T}_k$  für die Operatoren auf  $\mathbb{R}^+$ , die sowohl den Drehimpulsanteil als auch den Potentialanteil enthalten, angegeben.

Sei mit  $T_{q;ges}$  der durch den Differentialausdruck  $H_q$  bestimmte selbstdiagierte dreidimensionale Operator bezeichnet.

Da das Spektrum der orthogonalen Summe von Operatoren der Abschluß der Vereinigung der Spektren der Summanden ist (siehe z.B. [WEIDMANN 2003], Satz 18.2), gilt mit dem zentralen Satz 4.31 und dem Ergebnis (231) der Überlegungen aus Abschnitt 6

$$\sigma(T_{q;ges}) = \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sigma(\tilde{T}_k)} = \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sigma_{sc}(\tilde{T}_k)}.$$

Damit gilt

**Satz 7.1.**

$$\begin{aligned} \sigma(T_{q;ges}) \cap ((-\infty, -1) \cup (1, \infty)) \\ = \sigma_{sc}(T_{q;ges}) \cap ((-\infty, -1) \cup (1, \infty)) \end{aligned}$$

$T_{q;ges}$  besitzt also außerhalb der zentralen Lücke rein singulärstetiges Spektrum (sic!).

Das in Kapitel 4 konstruierte Potential  $q$  führt also zu dem bereits in der Einleitung beschriebenen exotischen Teilchenverhalten, bei dem sich die Teilchen sowohl beliebig weit vom Ursprung entfernen, als auch beliebig oft zum Ursprung zurückkehren.

## 8 Symboerverzeichnis

Symbol	Bedeutung/Definition	
$a_j$	Buckelanfang	S. 8
$a_{b;\tilde{n}}^2$	$\int_0^b  \varphi_{b;\tilde{n}} ^2 dr$	S. 22
$\tilde{a}_{b;\tilde{n}}^2$	$\int_1^b  \varphi_{b;\tilde{n}} ^2 dr$	S. 92
$A_j$	$\frac{1}{2} \left[ \left( M_{11}^{(j)} \right)^2 + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \left( M_{21}^{(j)} \right)^2 + \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \left( M_{12}^{(j)} \right)^2 + \left( M_{22}^{(j)} \right)^2 \right]$	S. 19
$\tilde{A}_j$	$\frac{1}{2} \left[ \left( \tilde{M}_{11}^{(j)} \right)^2 + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \left( \tilde{M}_{21}^{(j)} \right)^2 + \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \left( \tilde{M}_{12}^{(j)} \right)^2 + \left( \tilde{M}_{22}^{(j)} \right)^2 \right]$	S. 88
$AC_{loc}(\mathbb{R}^+)^2$	Raum der lokal absolutstetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^+$	S. 71
$b_j$	Buckelende	S. 8
$B_j$	$\frac{1}{2} \left[ \left( M_{11}^{(j)} \right)^2 + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \left( M_{21}^{(j)} \right)^2 - \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \left( M_{12}^{(j)} \right)^2 - \left( M_{22}^{(j)} \right)^2 \right]$	S. 19
$\tilde{B}_j$	$\frac{1}{2} \left[ \left( \tilde{M}_{11}^{(j)} \right)^2 + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \left( \tilde{M}_{21}^{(j)} \right)^2 - \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \left( \tilde{M}_{12}^{(j)} \right)^2 - \left( \tilde{M}_{22}^{(j)} \right)^2 \right]$	S. 88
$C_j$	$\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} M_{11}^{(j)} M_{12}^{(j)} + \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} M_{21}^{(j)} M_{22}^{(j)}$	S. 19
$\tilde{C}_j$	$\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} \tilde{M}_{11}^{(j)} \tilde{M}_{12}^{(j)} + \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \tilde{M}_{21}^{(j)} \tilde{M}_{22}^{(j)}$	S. 88
$C(\mathbb{R}^+)$	Raum der auf $\mathbb{R}^+$ stetigen Funktionen	S. 7
$D_n$	$n$ -Tupel von Buckelabständen	S. 13
$\mathcal{D}(\kappa)$	$\frac{\text{sign}(\kappa)\sqrt{\kappa^2+1}+1}{\text{sign}(\kappa)\sqrt{\kappa^2+1}} R(0, \kappa) \quad (\kappa \in \mathbb{R}^*)$	S. 21
$\tilde{\mathcal{D}}(\kappa)$	$\frac{\text{sign}(\kappa)\sqrt{\kappa^2+1}+1}{\text{sign}(\kappa)\sqrt{\kappa^2+1}} \tilde{R}(1, \kappa) \quad (\kappa \in \mathbb{R}^*)$	S. 91
$f_j(\kappa, y)$	$\frac{1}{A_j(\kappa) + B_j(\kappa) \cos(2y) + C_j(\kappa) \sin(2y)} \frac{\exp\left(-2 \int_{b_{j-1}}^{a_j} F_k(s; \kappa) ds\right)}{\tilde{A}_j(\kappa) + \tilde{B}_j(\kappa) \cos(2(y+z)) + \tilde{C}_j(\kappa) \sin(2(y+z))}$	S. 18
$\tilde{f}_j(\kappa, y, z)$	$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi f_j(\kappa, y) dy$	S. 88
$\overline{f}_j(\kappa)$	$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \tilde{f}_j(\kappa, y; z) dy$	S. 28
$\overline{\tilde{f}}_j(\kappa; z)$	$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \tilde{f}_j(\kappa, y; z) dy$	S. 95
$F_k(r; \kappa)$	$\frac{1}{\kappa} l(r) + \frac{\lambda}{\kappa} (m(r) - 1)$	S. 85
$g_{n+1}$	$f_{n+1} - 1$	S. 55
$G(r, s; \lambda)$	Greensche Funktion auf $(0, 1]$	S. 122

$G_k(r; \kappa)$	$\frac{1}{\kappa}(\lambda + \cos 2\tilde{\vartheta}(r))l(r) + \frac{1}{\kappa}(1 + \lambda \cos 2\tilde{\vartheta}(r))(m(r) - 1)$	S. 85
$\tilde{G}(r, s, \lambda)$	Greensche Funktion auf $[1, \infty)$	S. 127
$h_0$	$\sigma_2 p + \sigma_3 + \sigma_1 \frac{k}{r}$	S. 76
$h_j$	$\log f_j$	S. 50
$h_n$	$\sigma_2 p + m\sigma_3 + l + q_{D_n}$	S. 84
$\tilde{h}_{j_0}$	$\log \tilde{f}_{j_0}$	S. 102
$H$	Buckelhöhe bei identischen Buckeln	S. 8
$H_j$	Buckelhöhe	S. 7
$H_q$	Differentialausdruck im $\mathbb{R}^3$ mit kugelsymmetrischem Potential $q$	S. 130
$J_{\pm k+\frac{1}{2} }$	Besselfunktion	S. 76
$k$	Drehimpulsquantenzahl	S. 75
$\mathcal{K}$	Konstante $\geq 2$	S. 51
$l$	Drehimpuls	S. 78
$m$	ortsabhängige Masse	S. 78
$m_j$	$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log f_j(\kappa, y) dy$	S. 28
$\tilde{m}_j(\kappa; z)$	$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \tilde{f}_j(\kappa, y, z) dy$	S. 95
$M^{(j)}$	Transfermatrix des $j$ -ten Buckels	S. 17
$\tilde{M}^{(j)}$	Transfermatrix des $j$ -ten Buckels im Fall mit Drehimpuls	S. 90
$N(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa)$	$\frac{1}{2} \sum_{i=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} m_i(\kappa)$	S. 52
$N_b(\lambda_1, \lambda_2)$	Zahl der Eigenwerte zwischen $\lambda_1$ und $\lambda_2$ für das endliche Problem	S. 27
$\tilde{N}_b(\lambda_1, \lambda_2)$	Zahl der Eigenwerte zwischen $\lambda_1$ und $\lambda_2$ für das endliche Problem mit Drehimpuls	S. 94
$\mathcal{N}_k(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa)$	$\inf_{\substack{(a_j) \in \mathcal{A} \\ z \in I}} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{m}_j(\kappa, z) \right\}$	S. 103
$\mathcal{N}_{(a_j);k}(\underline{\nu}, \bar{\nu}, \kappa)$	$\frac{1}{2} \sum_{j=\underline{\nu}+1}^{\bar{\nu}} \tilde{m}_j(\kappa, z)$	S. 108
$\mathbf{p}$	Impulsvektor	S. 130

$q$	Buckelpotential	S. 7
$q_n$	Buckelpotential mit endlich vielen Buckeln	S. 8
$Q_0$	$\sigma_2 p + \sigma_3 + q_D$ auf $[1, \infty)$	S. 126
$Q_1$	$\sigma_2 p + m\sigma_3 + l + q_D$ auf $[1, \infty)$	S. 126
$R$	Prüfer-Radius	S. 10
$R_n$	Prüfer-Radius am Ende des $n$ -ten Buckels	S. 15
$R_{n;j}$	Prüfer-Radius am Ende des $j$ -ten Buckels eines Potentials, dessen Buckelpositionen durch das Distanztupel $D_n$ charakterisiert sind	S. 15
$\tilde{R}$	Prüfer-Radius im Fall mit Drehimpuls	S. 84
$\tilde{R}_n$	Prüfer-Radius am Ende des $n$ -ten Buckels im Fall mit Drehimpuls	S. 87
$\tilde{R}_{n;j}$	Wert des Prüfer-Radius am Ende des $j$ -ten Buckels des $n$ -Buckelpotentials $q_n$ im Fall mit Drehimpuls	S. 87
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	S. 10
$s_{1/2}(r)$	$\pm q_n(r)$	S. 24
$S(r)$	$\begin{pmatrix} 0 & s_2(r) \\ s_1(r) & 0 \end{pmatrix}$ auf $(0, b)$	S. 24
$\mathcal{S}_n$	$\left\{ \kappa \in \Xi_n \mid \frac{1}{\pi} \left( \prod_{j=1}^{\nu_n} f_j(\kappa, \vartheta_{j-1}(\kappa) - \kappa d) \right) \mathcal{D}(\kappa) > \frac{\varepsilon_n}{\mu_L(\Xi_n)} \right\}$	S. 66
$\tilde{\mathcal{S}}_n$	$\left\{ \kappa \in \Xi_n \mid \frac{1}{\pi} \left( \prod_{j=1}^{\nu_n} \tilde{f}_j(\kappa, \tilde{\vartheta}_{j-1}(\kappa) - \kappa d) \right) \mathcal{D}(\kappa) > \frac{\varepsilon_n}{\mu_L(\Xi_n)} \right\}$	S. 116
$T$	Grenzoperator	S. 70
$T_0$	$\sigma_2 p + \sigma_3$ auf $[1, \infty)$	S. 126
$T_{\text{fr}}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 + \lambda \\ 1 - \lambda & 0 \end{pmatrix}$ auf $(0, b)$	S. 24
$T_{q;ges}$	selbstadjungierter Operator mit kugelsymmetrischen Buckelpotential	S. 131
$T^{\max}$	maximaler Operator mit Potential $q$	S. 71
$T_{fr}$	freier Diracoperator auf $[1, \infty)$	S. 118

$\hat{T}$	$\sigma_2 p + \sigma_3 + q + \sigma_1 \frac{k}{r}$ auf $\mathbb{R}^+$	S. 125
$\hat{T}_{fr}$	freier Diracoperator im $\mathbb{R}^+$	S. 71
$\tilde{T}$	selbstadjungierte Fortsetzung von $\tilde{T}^{\min}$ auf $[1, \infty)$	S. 118
$\tilde{T}^{\max}$	maximaler Operator mit Potential $q$ auf $[1, \infty)$	S. 118
$\tilde{T}^{\min}$	minimaler Operator mit Potential $q$ auf $[1, \infty)$	S. 118
$\tilde{T}_{q,k}$	selbstadjungierter Operator mit Buckelpotential $q$ zur Drehimpulsquantenzahl $k$ auf $[1, \infty)$	S. 131
$W$	Buckelprofil bei identischen Buckeln	S. 8
$W(v, y)$	Wronskideterminante	S. 122
$W_j$	Form des $j$ -ten Buckels	S. 8
$\tilde{W}(\tilde{v}, \tilde{w})$	Wronskideterminante	S. 127
$\mathcal{W}_j(a, r, \kappa)$	zweite Ordnung von $A$ in $H$	S. 38
$Y_{\pm k+\frac{1}{2} }$	Weberfunktion	S. 76
$Z_0$	$\sigma_2 p + \sigma_3 + \sigma_1 \frac{k}{r}$ auf $(0, 1]$	S. 122
$Z_\infty$	$\sigma_2 p + \sigma_3 + q_D + \sigma_1 \frac{k}{r}$ auf $[1, \infty)$	S. 125

$\alpha$	Buckelbreite bei identischen Buckeln	S. 8
$\alpha_j$	Buckelbreite	S. 7
$\vartheta$	Prüfer-Winkel	S. 10
$\vartheta_{n;j}$	Wert des Prüfer-Winkels am Ende des $j$ -ten Buckles eines Potentials, dessen Buckelpositionen durch das Distanztuplel $D_n$ charakterisiert sind	S. 13
$\tilde{\vartheta}$	Prüfer-Winkel im Fall mit Drehimpuls	S. 85
$\vartheta_n$	Prüfer-Winkel am Ende des $n$ -ten Buckels im Fall mit Drehimpuls	S. 13
$\tilde{\vartheta}_{n;j}$	Prüfer-Winkel am Ende des $j$ -ten Buckels des $n$ -Buckelpotentials $q_n$ im Fall mit Drehimpuls	S. 87

$\tilde{\vartheta}_n$	Prüfer-Winkel am Ende des $n$ -ten Buckels im Fall mit Drehimpuls	S. 87
$\kappa$	$\text{sign}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 - 1}$ ( $\lambda \in \mathbb{R},  \lambda  > 1$ )	S. 10
$\mu_D$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$	S. 39
$\tilde{\mu}_D$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_j$	S. 114
$\mu_L$	Lebesguemaß	S. 55
$\mu_n$	Spektralmaß des $n$ -Buckelproblems	S. 28
$\mu_{n;d,\Theta}$	$\int_{\Sigma} \left( \frac{1}{\pi} \left( \prod_{j=1}^n f_j(\kappa, \vartheta_{n;j-1}(\kappa) - \kappa d_j) \right) f_{n+1}(\kappa, \Theta(\kappa) - \kappa d) \mathcal{D}(\kappa) \right) d\kappa$	S. 54
$\tilde{\mu}_n$	$\int_{\Sigma} \frac{1}{\pi} \left( \prod_{j=1}^n \tilde{f}_j(\cdot, \tilde{\vartheta}_{n;j-1}(\cdot) - \cdot d_j, \int_{b_{j-1}}^{a_j} G_k(s, \cdot) ds) \right) d\kappa$	S. 95
$\tilde{\mu}_{j;k}$	$\tilde{\mu}_n$ mit expliziter Angabe der $k$ -Abhängigkeit	S. 107
$\underline{\nu}, \overline{\nu}$	Indizes	S. 52
$\Xi_n$	$[-2n, -\frac{1}{2n}] \cup [\frac{1}{2n}, 2n]$	S. 65
$\varrho_n$	Spektralfunktion zum $n$ -Buckelproblem	S. 21
$\varrho_{b;n}$	Spektralfunktion zum $n$ -Buckelproblem auf $[0, b]$	S. 22
$\tilde{\varrho}_n$	Spektralfunktion zum $n$ -Buckelproblem auf $[1, \infty)$ mit Drehimpuls	S. 91
$\tilde{\varrho}_{b;n}$	Spektralfunktion zum $n$ -Buckelproblem auf $[1, b]$ mit Drehimpuls	S. 92
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Pauli-Matrizen	S. 71
$\sigma_c$	stetiges Spektrum	S. 74
$\sigma_{ess}$	wesentliches Spektrum	S. 71
$\sigma_{sc}$	singulärstetiges Spektrum	S. 121
$\tau$	$\sigma_2 p + \sigma_3 + q$ auf $\mathbb{R}^+$	S. 71
$\tau_0$	$\sigma_2 p + \sigma_3$ auf $\mathbb{R}^+$	S. 71
$\tau_q$	$\sigma_2 p + m\sigma_3 + l + q$ auf $[1, \infty)$	S. 118

## Abbildungsverzeichnis

1	Buckelpotentiale . . . . .	9
2	Klassische und verallgemeinerte Prüfer-Transformation . . . . .	11
3	Schematische Darstellung des Verhaltens des Prüfer-Winkels .	14
4	Schematische Darstellung des Prüfer-Radius-Verhaltens . . . . .	15
5	Zwei endliche Buckelpotentiale mit $m$ bzw. $n$ Buckeln, von denen die ersten $m$ Buckel übereinstimmen . . . . .	16
6	Prüfer-Winkel für zwei endliche Buckelpotentiale mit $m$ bzw. $n$ Buckeln, von denen die ersten $m$ Buckel übereinstimmen . .	17
7	Prüfer-Radius für zwei endliche Buckelpotentiale mit $m$ bzw. $n$ Buckeln, von denen die ersten $m$ Buckel übereinstimmen . .	18
8	Spektralfunktion des regulären Problems . . . . .	23
9	Zerlegung des Intervalls $[L\alpha, L\beta]$ in $M + 2$ Intervalle . . . . .	44
10	Zerlegung von $\tilde{\Sigma}$ in $r$ Intervalle . . . . .	55
11	Intervalle $\Xi_n$ ( $n \in \mathbb{N}$ ) . . . . .	65
12	Polarkoordinaten im Fall $k \in \mathbb{N}$ bzw. $k \in -\mathbb{N}$ . . . . .	79
13	$k > 0$ : Asymptotik von $\psi$ für $r \rightarrow \infty$ . . . . .	80
14	$k < 0$ : Asymptotik von $\psi$ für $r \rightarrow \infty$ . . . . .	81

## Literaturverzeichnis

[ARONSAJN] Aronszajn, N. (1957): On a problem of Weyl in the theory of singular Sturm-Liouville equations, in: American Journal of Mathematics, Vol. 79, No. 3, pp. 597-610

[AVRON/SIMON] Avron, J. E. / Simon, B. (1981): Transient and Recurrent Spectrum, in: Journal of Functional Analysis, Vol. 43, pp. 1-31

[CARVALHO/DE OLIVEIRA/PRADO] Carvalho, S. L. / de Oliveira, C. R. / Prado, R.A. (2011): Sparse one-dimensional discrete Dirac operators II: Spectral properties, in: Journal of Mathematical Physics, Vol.52, pp. 073501-1 - 073501-21

[BRONSTEIN/SEMENDJAJEW] I. N. Bronstein / K. A. Semendjajew (1991): Taschenbuch der Mathematik, 25. Auflage, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart

[CODDINGTON/LEVINSON] E. A. Coddington, N. Levinson (1955): Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill Book Company, New York

[EASTHAM] Eastham, Michael S. P. (1973): The Spectral Theory of Periodic Differential Equations, Scottish Academic Press, London

[EASTHAM 89] Eastham, Michael S. P. (1989): The asymptotic solution of linear differential systems, Oxford Science Publications, London Mathematical Society Monographs New Series, Clarendon Press, Oxford

[GASYMOV/LEVITAN] M. G. Gasymov / B. M. Levitan (1966): The inverse problem for the Dirac system, in: Soviet Mathematics, Translation of Doklady Akademii Nauk SSSR Tom 166 - Tom 171 (1966), Vol. 7, pp. 495-499

[GRÖBNER/HOFREITER] Gröbner, W. / Hofreiter, N. (1961): Integraltafel, Zweiter Teil - Bestimmte Integrale, Springer-Verlag, Wien

[HUGHES/SCHMIDT] Hughes, D. / Schmidt, K. M.: Absolutely Continuous Spectrum of Dirac Operators with Square Integrable Potentials, Preprint

[KAKUTANI] Kakutani, S. (1948): On Equivalence of Infinite Product Measures, in: Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 49, No. 1, pp. 214-224

[KAMKE] Kamke, E. (1956): Differentialgleichungen reeller Funktionen, 3. unveränderte Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig

[KATO] Kato, T. (1980): Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, Berlin (Reprint 1995)

[KISELEV/LAST/SIMON] Kiselev, A. / Last, Y. / Simon, B. (1997): Modified Prüfer and EFGP Transforms and the Spectral Analysis of one-dimensional Schrödinger Operators, in: Communications in Mathematical Physics, Vol. 194, No. 1, pp. 1-45

[KNOPP 76] Knopp, K. (1976): Funktionentheorie I, 13. Auflage, Walter de Gruyter, Berlin

[KOSHLYAKOV/SMIRNOV/GLINER] Koshlyakov, N. S. / Smirnov, M. M. / Gliner, E. B. (1964): Differential Equations of Mathematical Physics, North-Holland Publishing Company, Amsterdam

[LAVINE 72] Lavine, R. (1972): Commutators and scattering theory II: A class of one body problems, in: Indiana University Mathematics Journal, Vol. 21, pp. 643-656

[LAVINE 73] Lavine, R. (1973): Absolute continuity of positive spectrum for Schrödinger operators with long-range potentials, in: Journal of Functional Analysis, Vol. 12, No. 1, pp. 30-54

[LEVITAN/SARGSJAN 75] Levitan, B. M. / Sargsjan, I. S. (1975): Introduction to Spectral Theory, in: Translation of Mathematical Monographs, Vol. 39

[LEVITAN/SARGSJAN 91] Levitan, B. M. / Sargsjan, I. S. (1991): Sturm-Liouville and Dirac Operators, Mathematics and Its Applications (Soviet Series) Volume 59

[MESSIAH I] Messiah, A. (1991): Quantenmechanik, Band 1, 2. verbesserte Auflage, Walter de Gruyter Verlag, Berlin

[MESSIAH II] Messiah, A. (1990): Quantenmechanik, Band 2, Walter de Gruyter Verlag, Berlin

[PEARSON] Pearson, D. B. (1978): Singular Continuous Measures in Scattering Theory, in: Communications in Mathematical Physics, Vol. 60, pp. 13-36

[PERRY] Perry, P. A. (1983): Scattering Theory by the Enss Method, in: Mathematical Reports, Volume 1, Part 1, Harwood Academic Publishers, Chur

[PERRY/SIGAL/SIMON] Perry, P. / Sigal, I. / Simon, B. (1981): Spectral analysis of N-body Schrödinger operators, in: Annals of Mathematics (2) Vol. 114, pp. 519-567

[REED/SIMON 78] Reed, M. / Simon, B. (1978): Methods of Modern Mathematical Physics, IV. Analysis of operators, Academic Press, London

[REMMERT] Remmert, R. (1992): Funktionentheorie 1, 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin

[SALAT] Salat, A. (1992): Localization of modes in media with a simple quasi-periodic modulation, in: Physical Review A, Vol. 45, No. 2, pp. 1116-1121

[SCHMIDT] Schmidt, K. M. (1995): Dense point spectrum and absolutely continuous spectrum in spherically symmetric Dirac operators, in: Forum Mathematicum, Vol. 7, pp. 459-475

[SIMON I] Simon, B. (1995): Spectral Analysis of Rank One Perturbations and Applications, in: CRM Proceedings & Lecture Notes, Vol. 8, pp. 109-149

[SIMON II] Simon, B. (1995): Operators with singular continuous spectrum, I. General operators, in: Annals of Mathematics, Vol. 141, pp. 131-145

[TITCHMARSH] Titchmarsh, E. C. (1961): On the Nature of the Spectrum in Problems of Relativistic Quantum Mechanics, in: The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Second Series, Vol. 12, pp. 227-240

[WATSON] Watson, G. N. (1922): A Treatise of the Theory of Bessel Functions, Cambridge at the University Press

[WEIDMANN 67] Weidmann, J.(1967): Zur Spektraltheorie von Sturm-Liouville-Operatoren, in: Mathematische Zeitschrift, Band 98, S. 268-302

[WEIDMANN 71] Weidmann, J. (1971): Oszillationsmethoden für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, in: Mathematische Zeitschrift, Band 119, S. 349-373

[WEIDMANN 76] Weidmann, J. (1976): Lineare Operatoren in Hilberträumen, Mathematische Leitfäden, 1. Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart

[WEIDMANN 87] Weidmann, J. (1987): Spectral Theory of Ordinary Differential Operators, in: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1258, Springer Verlag, Berlin

[WEIDMANN 2000] Weidmann, J. (2000): Lineare Operatoren in Hilberträumen, Teil I: Grundlagen, B. G. Teubner Verlag, Stuttgart

[WEIDMANN 2003] Weidmann, J. (2003): Lineare Operatoren in Hilberträumen, Teil II: Anwendungen, B. G. Teubner Verlag, Wiesbaden

Bei allen, die mich während meines Studiums unterstützt haben, möchte ich mich vielmals bedanken.

Besonders gilt mein Dank Herrn Prof. Kalf für seine inspirierende und geduldige Betreuung meiner Dissertation.

Es war mir eine Freude, mich mit Prof. Pearson anlässlich seines Besuches in München über Buckelpotentiale und singulärstetige Schrödingeroperatoren austauschen zu können.

## **Eidesstattliche Versicherung**

(Siehe Promotionsordnung vom 12.07.11, §8, Abs. 2 Pkt. .5.)

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass die Dissertation von mir selbstständig, ohne unerlaubte Beihilfe angefertigt ist.

Barbara Janauschek

München, den 01.05.2014