
Beiträge zur Erfassung von Wirbelschleppen mit Lidar

Simulation und Analyse rückgestreuter Signale
zur Windfeldbestimmung vor Flugzeugen

Markus Christoph Hirschberger



Dissertation

an der Fakultät für Mathematik, Informatik und Statistik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

Eingereicht am 06. Mai 2013

Erstgutachter: Prof. Dr. rer. nat. Ulrich G. Opper

Zweitgutachter: Apl. Prof. Dr. Ing., Dr. rer. nat. habil. Ulrich Schumann

Tag der Disputation: 01. August 2013

Zusammenfassung

Die im Nachlauf von Flugzeugen durch Auftrieb generierten, langlebigen Wirbelschleppen stellen aufgrund ihres in Kernnähe starken Windfeldes ein Risiko für die Flugstabilität nachfliegender Flugzeuge dar. Als Fernerkundungsinstrumente zur Windmessung eignen sich sog. Lidars („Light Detection and Ranging“). Von einem Lidar wird gepulste Laserstrahlung emittiert und die von Partikeln der Atmosphäre rückgestreuten Photonen werden reichweitenaufgelöst wieder am Ort der Emission empfangen.

Im Rahmen dieser Dissertation wird die Machbarkeit flugzeuggetragener Lidar-Sensoren zur aktiven Steuerung bei Durchfliegen von Scherwinden und turbulenten Luftströmungen (speziell Wirbelschleppen) mittels realitätsnaher Simulationen untersucht. Dazu wird die Ausbreitung der Photonen des gepulsten Laserlichts des Lidar-Sensors in der Atmosphäre mittels eines partiell deterministischen Markovschen (Sprung-)Prozesses (PDMP) modelliert. Auf einem geeignet gewählten Zustandsraum und mit Übergangswahrscheinlichkeiten, bestehend aus Markov-Kernen für zufällige Kollision, Streuerselektion, Wellenlängenänderung, Richtungsänderung sowie deterministischer Referenz- und Stokesvektoränderung, ergibt sich ein zeitdiskreter stationärer Markovscher Prozess. Daraus kann ein zeitstetiger stationärer korpuskularer Prozess mit Mehrfachstreuung, ein PDMP, inklusive Polarisation und Wellenlänge, hergeleitet werden.

Dieser Prozess ist in Form eines Monte-Carlo-Programmes zur Simulation mit Mehrfachstreuung und Polarisation realisiert. Für Messentfernungen über mehrere hundert Meter muss Mehrfachstreuung für eine realistische Analyse ebenso berücksichtigt werden wie Polarisation wegen nicht-sphärischer Streupartikel in der Atmosphäre.

Eine aufgrund der Messanforderungen notwendige, für die Simulationen neu entwickelte Messgeometrie erlaubt die Emission und Detektion der Photonen in viele Einzelrichtungen gleichzeitig, normiert auf Richtung und Distanz. Dadurch kann die rückgestreute Intensität in zur Flugrichtung transversalen Schichtebenen vor einem bewegten Objekt gemessen werden. Realistische Verteilungen von Extinktionskoeffizienten dienen als Maß für das variable Streuvermögen auf dem Photonenpfad. Solche Extinktionsprofile werden unter anderem aus den Konzentrationen passiver Tracerverteilungen von Wirbelschleppen generiert, die über Large-Eddy-Simulationen (LES) durch numerische Lösung von Navier-Stokes-Gleichungen erzeugt werden. Aus dem zu einem Zeitpunkt t_1 gegebenen Extinktionsprofil kann für einen kleinen Zeitschritt Δt ein gemäß dem LES-Windfeld zu t_1 verschobenes Extinktionsprofil zum Zeitpunkt t_2 erzeugt werden. Die aus vielen Richtungen in den Extinktionsprofilen zu Zeiten t_1 und t_2 rückgestreuten Photonen werden im Lidar-Detektor gesammelt, wodurch 2D-Bilder der Rückstreuung entstehen.

Zur Berechnung der 2D-Verschiebungs- bzw. Windvektoren werden vier Methoden entwickelt, bei denen je zwei Bilder miteinander verglichen werden. Zum Ersten kann eine Bewegung durch Verschiebung der räumlich gemittelten Schwerpunktpositionen erfasst werden. Der Schwerpunkt wird dabei als Position des Mittelwertes aufgefasst. Zum Zweiten wird ein Algorithmus entwickelt, der über das Shift-Theorem für Fourier-Transformierte eine Berechnung der Translation erlaubt. Zum Dritten lassen sich Windvektoren durch eine Variante der Kreuzkorrelation mit Subpixelgenauigkeit statistisch berechnen. Zum Vierten kombiniert eine neue, als „Weight-Shift“ bezeichnete Methode die Prinzipien von Kreuzkorrelation und Verschiebung der räumlich gemittelten Schwerpunktpositionen. Berechnungen in Echtzeit im Flugzeug sind im Prinzip mit allen vier Methoden möglich. Je nach Extinktionsmuster und Windfeld sind die Methoden unterschiedlich gut zur Auswertung geeignet.

Die Rückstreuintensitäten der Simulationen obigen Lidars für variable Laser-Wellenlängen und Flughöhen werden mit durch Zufallszahlen erzeugtem Rauschen versehen. Kreuzkorrelation liefert für Wirbelschleppen eine Auswertung solcher verrauschten Signalbilder in weniger als einer Sekunde. Die zur Flugrichtung transversalen Wind-Geschwindigkeiten und -Richtungen ließen sich mit dem simulierten Lidar sehr viel genauer rekonstruieren als mit bisherigen Lidar-Windmessmethoden.

Abstract

The long-lived wake vortices generated by lift behind aircraft pose a severe risk to the flight stability of following aircraft due to their powerful wind field near the core. Lidars (“Light detection and ranging”) are suited remote sensing instruments for wind measurements. A lidar emits pulsed laser radiation and the photons backscattered by the particles of the atmosphere are received range-resolved at the point of emission.

Within the scope of this dissertation the feasibility of aircraft-based lidar sensors for active control at fly-throughs of crosswinds and turbulent air motion (especially wake vortices) is investigated by realistic simulations. For this the propagation of the photons of pulsed laser light of the lidar sensor in the atmosphere is modelled by a partially deterministic Markovian process (PDMP). On a suitably chosen state space and with transition probabilities including Markov kernels for random collision, scatterer selection, change of wavelength, change of direction as well as deterministic change of reference and Stokes vector, a time-discrete stationary Markovian process is constructed. From this a stationary corpuscular process with multiple scattering in continuous time, a PDMP, including polarization and wavelength can be derived.

This process is transferred in the form of a Monte Carlo program for simulations including multiple scattering and polarization. For measurement distances of a few hundred meters multiple scattering has to be taken into consideration for realistic analyses as well as polarization due to non-spherical scattering particles in the atmosphere.

With a newly developed measurement geometry for the simulations, necessary due to the measurement requirements, emission and detection of photons in a multitude of single directions simultaneously and normalized relating to direction and distance is possible. This way the backscattered intensity can be measured in slabs transverse to flight direction in front of a moving object. Realistic distributions of extinction coefficients serve as a measure for the variable scattering potential on the photon path. Such extinction profiles are created for instance from the concentrations of passive tracer distributions of wake vortices that were generated with Large Eddy Simulations (LES) by solving the Navier-Stokes equations numerically. From the extinction profile at a time t_1 for a small time step Δt a shifted extinction profile at a time t_2 can be created by using the wind field from LES. The photons backscattered from many directions in the extinction profiles at times t_1 and t_2 are collected in the lidar detector, whereby 2D images of backscattered radiation are created.

For the calculation of 2D shift or wind vectors four methods are developed, that compare two images with each other. The first one uses shifts of spatially averaged gravity centers for detecting motion. The gravity center is interpreted here as the position of the mean value. The second one is an algorithm that makes use of the shift theorem for Fourier transforms in order to calculate the translation. The third one calculates the wind vectors statistically by a variant of the cross-correlation with sub-pixel accuracy. The fourth one, called “Weight-Shift“-method, combines the principles of cross-correlation and shifts of spatially averaged gravity centers. Real-time processing in the aircraft is possible with all four methods in principle. Depending on the extinction pattern and wind field, the methods are suited for evaluation differently well.

The backscattering intensities of simulations of the above lidar for variable laser wavelengths and flying altitudes are provided with noise created by random numbers. Cross-correlation of such noisy signal images for wake vortices yields an evaluation in less than one second. The wind velocities and directions transversal to the flight path could be reconstructable much more precisely with the simulated lidar than with present lidar wind measurement methods.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und kurzer Überblick	1
1.1	Gefährdung der Flugsicherheit in turbulenter Atmosphäre	1
1.2	Lidar-Sensoren an Bord von Flugzeugen	4
1.3	Anforderungen an Windmessungen vor Flugzeugen mit Lidar im kleinskalig-turbulenten Bereich	5
2	Monte-Carlo Simulationen eines gepulsten Laserstrahles zur Berechnung polarisierter Lidar-Rücksignale	11
2.1	Partiell deterministische Markovsche Sprungprozesse und Streueigenschaften zur Modellierung des Lichttransports	11
2.2	Messmethodik eines geeigneten Rückstreulidars (RSL) für Simulationen und Realität .	21
2.3	Monte-Carlo-Simulationen eines RSL mit pbs5: Allgemeine Funktionsweise von pbs und Neuerungen in pbs5	23
2.3.1	Der Lidar-Emitter (Laser) in pbs5	24
2.3.2	Der Lidar-Receiver (Detektor) in pbs5	28
2.3.3	Atmosphäre in pbs5: Extinktionsfunktion und Streueigenschaften	29
2.3.4	Messzeitintervalle und Intensitäten in pbs5-Simulationen	33
3	Eigenschaften turbulenter Strömungen in der Atmosphäre	41
3.1	Navier-Stokes-Gleichungen (NSG) zur Beschreibung (in)kompressibler Strömungen . .	41
3.2	Modellierung von Wirbelschleppen mittels Large Eddy Simulation (LES)	44
3.2.1	Numerische Lösungsmethoden für instationäre, inkompressible NSG	45
3.2.2	Mathematisch-numerische Modellierung mittels LES	46
3.2.3	Wirbel, Schichtung, Turbulenz und Anfangsbedingungen für LES	50
3.2.4	Resultate von LES	54
4	Berechnung von Shift-Vektoren zur Darstellung von Windfeldern	57
4.1	Formulierung und Implementierung der neuen Shift-Verfahren	57
4.1.1	Gravity Center Shift (GCS): räumlich gemittelte Schwerpunkt-Shifts	61
4.1.2	Fourier-Shift (FS)	66
4.1.3	Kreuzkorrelation (KK)	73
4.1.4	Weight-Shift (WSh): Kreuzkorrelation mit Gravity Center Shift	80
4.2	Anwendung und Vergleich der Leistungsfähigkeit der Shift-Algorithmen	82
4.2.1	Shifts einfacher Strukturen	82
4.2.2	Shifts aus Pulse-Stretching-Simulationen mit pbs4	87
4.2.3	Shifts ringförmiger Strukturen	94
4.2.4	Shifts aus Tracer-Simulationen	94

5 Simulationen der Signale eines Rückstreulidars zur Messung des transversalen Windes von Wirbelschleppen vor Flugzeugen	101
5.1 Rückstreulidar in Bodennähe bei 532 nm Wellenlänge	102
5.2 Rückstreulidar in großer Flughöhe bei 532 nm Wellenlänge	118
5.3 Rückstreulidar in Bodennähe bei 355 nm Wellenlänge	121
5.4 Rückstreulidar in großer Flughöhe bei 355 nm Wellenlänge	123
5.5 Rückstreulidar für alternative Extinktionsverteilungen und mehrere Messschichten zu einem Einzelzeitpunkt	125
6 Zusammenfassung	139
A Auf Streuung von Laserstrahlung basierende (Wind-)Messmethoden	143
A.1 Particle Imaging Velocimetry (PIV)	143
A.2 Speckle Imaging Velocimetry (SIV)	144
A.3 Wide Angle Imaging Lidar (WAIL)	147
A.4 Volume Imaging Lidar (VIL)	148
B Windmessung mit Doppler Wind Lidar vor Flugzeugen	149
B.1 Fringe-Imaging Doppler Wind Lidar (FI-DWL): Simulation von und hochpräzise Wellenlängenbestimmung aus verrauschten 2D Fabry-Pérot-interferometrischen Ringen . .	151
B.2 3D Ray-Tracing-Simulationen eines Fabry-Pérot-Etalons	155
Literaturverzeichnis	161
Abbildungsverzeichnis	173
Tabellenverzeichnis	176
Abkürzungsverzeichnis	177
Symbolverzeichnis	179
Index	185

Kapitel 1

Einleitung und kurzer Überblick

Das wesentliche Anliegen von Flugpassagieren ist eine sichere und pünktliche Ankunft am Zielort. Winde mit hohen Geschwindigkeiten wie etwa Böen oder die von vorausfliegenden Flugzeugen erzeugten Wirbelschleppen stellen jedoch ein Sicherheitsrisiko für sie durchfliegende Flugzeuge dar. Hier kann ein *flugzeuggetragener, vorausschauender Fernerkundungssensor* durch Messung von *Windstärke und Windrichtung* atmosphärischer Störphänomene vor dem Flugzeug dazu beitragen, die u. U. starken Kräfte auf ein Flugzeug bei Zusammentreffen mit einer solchen Luftmasse mittels einer aktiven Steuerung durch einen automatischen Feed-Forward-Controller kompensieren zu können (Hahn et al., 2010). Ziel ist eine Reduktion der Böenlast auf das Flugzeug sowie eine Erhöhung des Flugkomforts durch Verringerung von Zwischenfällen mit Verletzungen von Passagieren.

1.1 Gefährdung der Flugsicherheit in turbulenter Atmosphäre

Hauptaugenmerk der vorliegenden Arbeit ist die Reduktion der Gefährdung von Flugzeugen durch starke Windböen und wirbelförmige Strömungen der Luft, in denen extrem hohe Geschwindigkeiten auftreten können. Neben Jetstreams in der oberen Troposphäre bis zur Stratosphäre, **Clear Air Turbulence (CAT)** und Wirbelstürmen können horizontale oder vertikale Windscherungen insbesondere in Bodennähe zu einer ernsthaften Gefahr für sie begehende Flugzeuge werden.

Turbulenz kann in Wolken oder klarer Luft auftreten, v. a. in der Grenzschicht in 2000 – 3000 ft (1 ft \approx 0.3048 m) Höhe (Wolkensinger, 2010). Ein wesentliches Turbulenzphänomen für nachfolgende Flugzeuge stellen die von vorausfliegenden Flugzeugen im Nachlauf erzeugten **Wirbelschleppen (WS)** dar (Gerz et al., 2002). Sie sind eine unvermeidliche Folge des Auftriebs. Der Druckunterschied zwischen Flügelunterseite und -oberseite sorgt für Randwirbel (Wirbel an den Flügelspitzen) und für eine Wirbelschicht, die sich von der Hinterkante der Flügel ablöst. Ein System (Paar) solcher gegenläufig rotierender, hochenergetischer Nachlaufwirbel oder WS (siehe Abb. 1.1) erhält man durch das gemeinsame Aufrollen der beiden Randwirbel und der Wirbelschicht (Breitsamter (2007), S. 11).

Nachlaufwirbel sind das Hauptrisiko während Starts und Landungen, da nahe ihrer Zentren rotierende Windfelder mit Spitzengeschwindigkeiten bis zu $100 \frac{m}{s}$ und damit hohe Drehmomente auftreten können (siehe Abb. 1.2 für ihre Vertikalgeschwindigkeitskomponenten). Sie können bei Begegnung sogar zu Kontrollverlust über das Flugzeug führen, wenn das durch sie induzierte Rollmoment z. B. von einem kleinen Flugzeug, das in die WS eines großen, vorausfliegenden Flugzeugs einfliegt, nicht mehr kompensiert (ausgesteuert) werden kann.

Abbildung 1.3 zeigt die zeitliche Entwicklung der Struktur von Flugzeug-WS, wie sie während des Projekts **AWIATOR** (siehe auch Kap. 1.3) fotografiert wurde. Man unterteilt das Entwicklungsstadium von WS in vier Stufen: Nahfeld, erweitertes Nahfeld, Fernfeld und Zerfallsbereich (eine ausführliche Beschreibung zeigt Breitsamter (2007), S. 11-18). Das entstehende gegensinnig rotierende Wirbelpaar hat nach dem Aufrollvorgang und Verschmelzen der Wirbel im Bereich des erweiterten Nahfeldes einen geringeren lateralen Abstand b_0 als die Flügelspannweite B (vgl. auch Abb. 1.2).



(a) Mit Rauchgeneratoren sichtbar gemachte Wirbelschleppen des Forschungsflugzeuges ATTAS (VFW-614) des DLR in Braunschweig. Bild: DLR, CC BY.



(b) Wirbelschleppen einer B777. Bild: Asociación de Spotters de Canarias, CIF:G-38968558, CC BY-NC-ND, <http://www.cispotting.net/cms/?p=1152> .

Abbildung 1.1: Beispiele von realen, sichtbaren Wirbelschleppen.

Für die *anfängliche Zirkulation* der WS als Maß ihrer Stärke gilt im Stationärflug bei Gleichgewicht von Auftriebs- und Gewichtskraft mit dem Auftriebtheorem von Kutta-Joukovsky

$$\Gamma_0 \approx \frac{Mg}{sB\rho v_{A/C}} \quad , \quad (1.1)$$

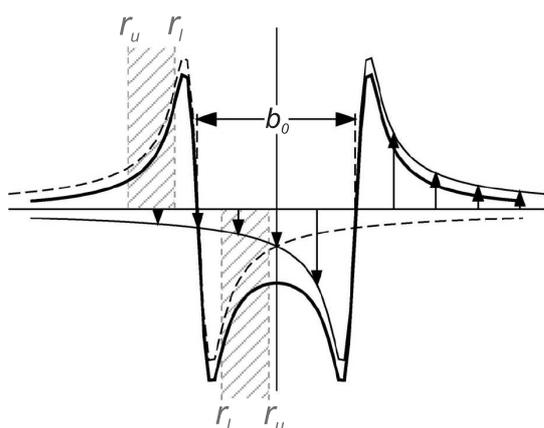
mit Flugzeugmasse M , Erdbeschleunigung $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$, Lastfaktor s , Spannweite B , Luftdichte ρ in der Atmosphäre sowie Fluggeschwindigkeit $v_{A/C}$. Je schwerer ein Flugzeug ist und je geringer seine Spannweite und Fluggeschwindigkeit, desto stärker sind die sich ausbildenden Wirbel zu Beginn. Je nach Atmosphäreigenschaften und gegebenem Γ_0 kann der Zerfall der WS (durch Instabilitäten und atmosphärische Einflüsse) mehrere Minuten dauern (Köpp et al., 2004).

Scher- und Seitenwinde können die WS oder ihre Zerfallsprodukte auf seitlich benachbarte Start- und Landebahnen bewegen. Daher wurden schon früh gestaffelte Mindestabstände (WS-Staffelung) für den Instrumentenflug aufeinanderfolgender Flugzeuge definiert (Breitsamter, 2007), die sich an den Startgewichten voraus- und nachfliegender Flugzeuge orientierten. Hierbei fand eine Unterteilung in drei Gewichtsklassen statt, wobei bei Folge eines schweren Flugzeugs ($> 137t$) auf ein kleines kein Abstandsreglement einzuhalten ist, ein auf ein schweres Flugzeug folgendes Leichtflugzeug ($< 7t$) dagegen mindestens 6 nautische Meilen (NM) (ca. 11km, da $1\text{ NM} \approx 1852\text{ m}$) Sicherheitsabstand einhalten soll. Entsprechende Kombinationen mit der mittleren Klasse ($7t - 137t$) ergeben alle weiteren Fälle, die zwischen den eben erwähnten Extremen liegen. Die Kapazität von Flughäfen wird dadurch begrenzt. Bei meteorologischen Bedingungen für schnellen Wirbelzerfall oder Entfernung der WS aus dem Flugkorridor kann der Abstand aber deutlich verkürzt werden, was kürzere Intervalle für Starts und Landungen und eine Reduktion von Warteschleifen und damit Treibstoffverbrauch ermöglicht.

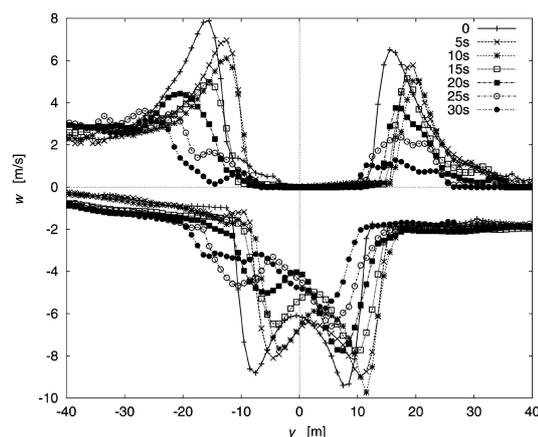
Dennoch kann die Langlebigkeit der Nachlaufwirbel und ihrer zum Teil noch energiereichen Fragmente nicht völlig ausgeschlossen werden (Hennemann, 2010), vgl. auch Abb. 1.3. Bisherige Unfälle im Zusammenhang mit WS resultierten allesamt aus Flügen auf Sicht (Gerz et al., 2002). Während in großer Flughöhe ausreichend Platz für Ausweichmanöver und Korrekturen von Ablenkungen durch Kräfte vorhanden ist, ist dies in Bodennähe (Start und Landung) nicht mehr sicher gewährleistet. Vertikale Höhenunterschiede zwischen Flugkorridoren werden durch erhöhte Auslastung des Luftraums immer geringer. All dies zeigt, dass ein sicheres Steuern des Flugzeugs durch das in Kürze zu durchfliegende Volumen unter beliebigen Atmosphäreinflüssen nur unter Kenntnis des u. U. kleinskaligen Wirbel- bzw. Windfeldes möglich ist.

Ziel ist daher der Bau eines Gerätes zur Wirbeldetektion, das dem Piloten bei ausreichend vorhandener Zeit Ausweichmanöver zum weiträumigen Umfliegen des Gefahrenbereichs für derartige Situationen bereitstellt, oder aber zumindest eine automatische Aussteuerungsregelung am Flugzeug zur Böenlastminderung bei Durchfliegen des Gefahrenbereichs erlaubt.

Hochreichweitige kurzzeitige **Radar**-Systeme an Bord eines Flugzeugs können bei Vorhandensein von Hydrometeoren den Wind vorausschauend messen (Halldórsson et al., 2005). Fehlen diese Hydrometeore (wie etwa bei klarem Wetter mit ausreichender Sichtweite), so ist es nur noch mit **Lidar**-Systemen über gerichtete Laserstrahlung möglich, aus den an Aerosolen und Molekülen rückgestreuten Photonen (Lichtteilchen) den Wind zu bestimmen.



(a) Skizze der Vertikalgeschwindigkeitsprofile zweier Lamb-Oseen-Wirbel in einem Abstand von b_0 (dünne Linien) und zugehörige Vertikalgeschwindigkeitseinhüllende des Nachlaufwirbelpaars (dicke Linie). Für den linken Wirbel ist in Grau das Radienintervall $r_l \leq r \leq r_u$ gezeigt, das zur Mittelung der Zirkulation mittels der sog. v_t -Methode verwendet wird (Holzäpfel et al. (2003), ©American Meteorological Society. Used with permission.).



(b) Mit Lidar am Boden gemessene, gemittelte Profile der maximalen und minimalen Vertikalgeschwindigkeiten w (in $\frac{m}{s}$) bei $x = 192$ m (x die Flugrichtung) für verschiedene Zeitpunkte. Die y -Werte (in m) im Bild entsprechen der Breite transversal zur Flugrichtung (Holzäpfel et al. (2003), ©American Meteorological Society. Used with permission.).

Abbildung 1.2: Vertikalgeschwindigkeitsprofile von Wirbelschleppen (simuliert und gemessen).

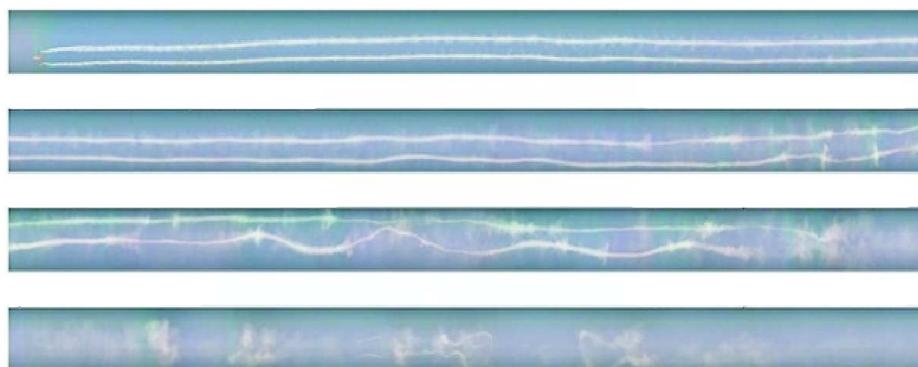


Abbildung 1.3: Fotografische Aufnahme von WS während des Projekts AWIATOR, deren fortschreitende zeitliche Entwicklung (Deformation und Zerfall) in vier Zeilen von links nach rechts dargestellt ist. Ausgehend vom Startzeitpunkt 0 s links oben entspricht jede Zeile einem Intervall von 32 s, so dass rechts unten eine Zeit von 128 s verstrichen ist. Es ist $\tau^* = 2.1$ pro Zeile und $\Delta x = 2.9$ NM pro Zeile (Bild aus de Bruin und Schrauf (2007), NLR Report no. NLR-TP-2007-527).

1.2 Lidar-Sensoren an Bord von Flugzeugen

Prinzipiell besteht ein Lidar aus einem Emitter in Form eines Lasers, und einem Receiver in Form eines Teleskops mit Detektor(en) inklusive Analysegerät(en), siehe Abb. 1.4. Im Gegensatz zum Radar sendet ein Lidar bevorzugt gepulste, nahezu monochromatische, kollimierte Laserstrahlung in die Atmosphäre aus, wo die Photonen (oder Lichtwellen) an unterschiedlich großen, mengenmäßig und in ihren Reflektions- und Brechungseigenschaften variierenden Teilchen (Partikeln) in alle möglichen Richtungen gestreut werden. Die kurzen Laser-Wellenlängen im Bereich zwischen etwa 250 nm und 10 μm fördern zwar die Streuung, jedoch gelangt nur ein sehr kleiner Teil dieser Strahlung in den Receiver, zum einen durch den schmalen Winkelbereich des Receiver-Teleskops, zum anderen durch Extinktion (d. h. Streuung und Absorption) im Strahlengang. Die folgende Studie beschränkt sich auf monostatische Lidars (Emitter und Receiver am selben Ort), d. h. die detektierbaren Photonen werden bei einfacher Streuung unter einem Winkel von etwa 180° zurückgestreut. Zeitliche Triggerung des Detektors ermöglicht entfernungs aufgelöste Informationen über diese Lichtteilchenzahl.

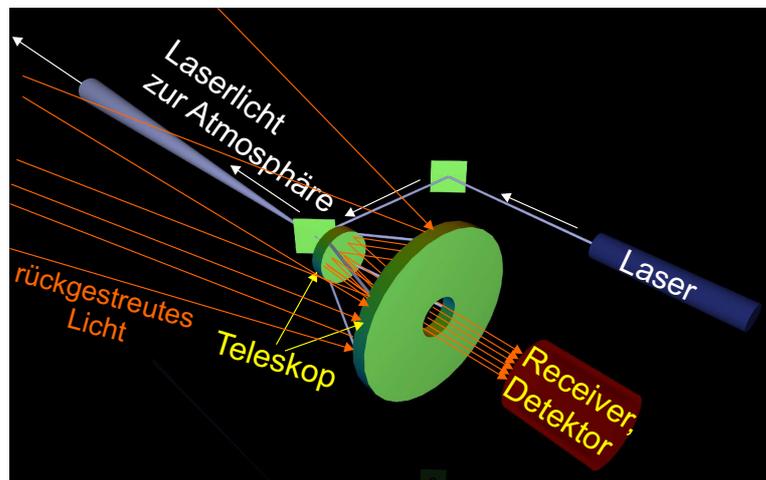


Abbildung 1.4: Aufbau eines Lidars (Erklärung siehe Text).

Lidar-Sensoren dienen der Erforschung von Atmosphäreneigenschaften mittels berührungsloser aktiver Fernerkundung. Ihre Anwendung umfasst z. B. die Messung der physikalischen Charakteristika von Saharastaub mittels **H**igh **S**pectral **R**esolution **L**idar (**HSRL**) (Esselborn et al., 2008), das Aufspüren von Spurengasen mittels **D**ifferential **A**bsorption **L**idar (**DIAL**) (Wirth et al., 2009) und **I**ntegrated **P**ath **D**ifferential **A**bsorption (**IPDA**) (Ehret et al., 2008, Amediek et al., 2008) oder die Messung von Windstärke und Windrichtung mittels **D**oppler **W**ind **L**idar (**DWL**), z. B. auch hinter Windkraftanlagen (Käsler et al., 2010).

Anfangs beschränkte man sich auf bodengestützte Messungen, auch auf Bergen. Bald nach Erfindung des Lasers (Maiman, 1960) begann man dort auch mit Windmessungen (Benedetti-Michelangeli et al., 1972). Aufgrund der beschränkten Reichweite bei gleichzeitigem Wissen um die Wichtigkeit der stratosphärischen und troposphärischen Klimaaktivitäten wurde das Anwendungsspektrum auf bewegte, fliegende Plattformen ausgeweitet (Bilbro et al., 1984, Keeler et al., 1987). Lidars auf Klimsatelliten wie *LITE* (Winker et al., 1996) für reine Streumessungen, oder zukünftige Systeme wie das HSRL der *EarthCARE*-Mission (Durand et al., 2007) oder das Wind-Lidar von *ADM-Aeolus* (Stoffelen et al., 2005), sind der derzeit letzte Schritt in dieser Entwicklung.

1.3 Anforderungen an Windmessungen vor Flugzeugen mit Lidar im kleinskalig-turbulenten Bereich

Was bisher jedoch fehlt, ist ein Lidar für hochaufgelöste Windmessungen *vor* einem Flugzeug, die zum weiträumigen Ausweichen, d. h. Umfliegen gefährlicher Luftströmungen, bzw. zum Aussteuern beim Durchfliegen einer Luftströmung verwendet werden können.

Aufgrund ihrer räumlichen Kleinskaligkeit (vgl. Abb. 1.1 bis 1.3) sind die Charakteristika von WS mittels vorausschauender berührungsfreier Sensoren extrem schwer zu bestimmen, gerade vor und von einem Flugzeug aus. Messungen des Windfeldes mit einer räumlichen Auflösung zumindest in der Größenordnung von wenigen Metern sind hierfür notwendig. Geeignete scannende Verfahren müssen zeitaufgelöste Informationen aus z. B. 2D Schichten der 3D WS liefern. Die Relativbewegung des messenden Flugzeugs (Fluggeschwindigkeit zwischen ca. $70 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ während Starts und Landungen und ca. $200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und höher während des Reiseflugs) zum Volumenbereich der WS muss berücksichtigt werden, wobei sich die WS ebenfalls zeitlich (wenn auch viel langsamer) in ihrer Struktur und ihrem Aufenthaltsort verändert. Die mögliche Zeitspanne für eine Messung inklusive Signalauswertung ist somit stark einschränkt.

Wie wir in Kap. 3 sehen werden, lassen sich WS heute durch Simulationen relativ genau reproduzieren, inklusive den Zerfallsmechanismen durch Turbulenz, die ihre Struktur in Abhängigkeit vom sie erzeugenden Flugzeugtyp verformen oder zerstören. Die Windfelder aus solchen Simulationen werden u. a. für Untersuchungen des Einflusses der Wirbelkrümmung auf das Gefahrenpotential bei Einflügen in Wirbelschleppen an einem Flugsimulator genutzt (Vechtel, 2012).

Turbulenz weist immer auch chaotische Züge auf, d. h. kleine Änderungen der Anfangsbedingungen in den beschreibenden nichtlinearen Differentialgleichungen können immense Abweichungen des Endzustandes zur Folge haben („Schmetterlingseffekt“). Hier stößt man mit der gegenwärtig verfügbaren Rechnerleistung selbst mit Supercomputern unter Verwendung vereinfachender Annahmen an seine Grenzen. Die Phänomene WS und Turbulenz an sich stellen also schon eine echte Herausforderung dar. Es muss zur Gewährleistung ausreichender Sicherheit daher eine den Simulationen von WS gleiche räumliche Auflösung angestrebt werden, was einem 3D Gitter mit Messwerten im Abstand von 1 m entspräche.

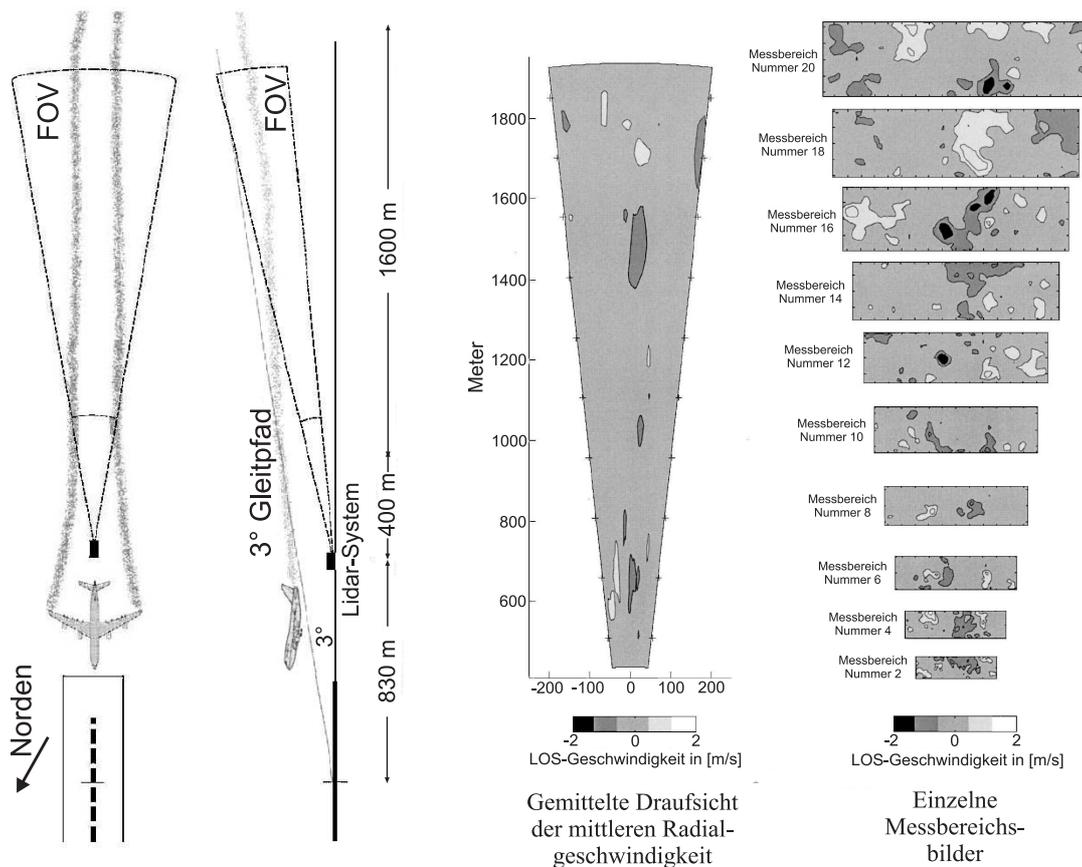
Schon vor einigen Jahren wurde mit Entwicklung und Tests geeigneter Lidar-Windmesssysteme im Rahmen einiger EU-Projekte die Arbeit an einer Umsetzung begonnen.

Im Projekt **MFLAME** (1997 – 2000) wurden am Flughafen Toulouse im Jahr 2000 die von Airbus A320 und A340 erzeugten WS mit DWL in einer Entfernung zwischen 400 m und 2000 m vom Boden aus vermessen, siehe Abb. 1.5(a). Resultate der Messungen sind beispielhaft in Abb. 1.5(b) gezeigt: die aufgrund des Dopplereffektes frequenzverschobenen sog. „Line-Of-Sight“(LOS)-Geschwindigkeitskomponenten v_{LOS} (siehe auch Anhang B) wurden für verschiedene Schichten vor dem Flugzeug aus den Messungen ermittelt (Keane et al., 2002). Der horizontale Scanbereich betrug hier 12° und der vertikale 3° . Dadurch hat man hier einen großen x -Beitrag zu v_{LOS} in Laser-Ausbreitungsrichtung, während die dazu transversalen y - und z -Beiträge von v_{LOS} sehr klein und damit stark fehlerbehaftet sind. Die transversal zur Flugrichtung verlaufenden Windrichtungen v und w wären damit eher schlecht messbar. Nur die Komponente u des Windes parallel zur Flugachse ließe sich bei obiger Messgeometrie gut bestimmen.

Im Nachfolgeprojekt **I-WAKE** (2002 – 2005) wurde ein modifiziertes MFLAME-Lidar für erste flugzeuggestützte Messungen eingesetzt. Zudem wurden die Anforderungen an ein flugzeuggetragenes Lidar, basierend auf den in den Messungen gemachten Erfahrungen, genauer definiert (Mutuel, 2005).

In **FIDELIO** (2004 – 2007) wurde ein Erbium-dotierter Faserlaser bei $1.5 \mu\text{m}$ Wellenlänge (anstelle des bisherigen Tm:LuAG-Lasers bei $2 \mu\text{m}$) entwickelt (Dolfi-Bouteyre et al., 2009).

In den bisher erwähnten Projekten wurden DWL mit Laser-Transmittern im Infrarotbereich zwischen $1.5 \mu\text{m}$ und $2 \mu\text{m}$ eingesetzt, die auf einem Heterodynempfang basierten. Als unüberwind-



(a) Draufsicht (links) und Elevation (rechts) der bodengestützten WS-Messungen von MFLAME. Das Blickfeld der Lidarmessungen und die Landeanflugkurve des WS-erzeugenden Flugzeugs sind dargestellt. Bild aus Keane et al. (2002). Reprinted with permission of the American Institute of Aeronautics and Astronautics.

(b) Messgeometrie mit Bildern gemittelter v_{LOS} -Komponenten, aufgenommen während der Landung eines A340. Links: gemittelte Draufsicht der mittleren v_{LOS} ; rechts: Bilder einzelner Schichten transversal zur Messrichtung. Die +-Markierungen im linken Teil des Bildes zeigen die Position der im rechten Teil dargestellten Schichten. Der Abstand zwischen zwei Markern in den Schichtbildern (rechts) beträgt 20 m. Bild aus Keane et al. (2002). Reprinted with permission of the American Institute of Aeronautics and Astronautics.

Abbildung 1.5: Bodengestützte WS-Messungen von MFLAME: Messgeometrie und LOS-Resultate.

bare Einschränkung blieb die hohe Pulsdauer (Pulslänge) τ_p von weit über 100 ns, die aufgrund des Fourier-Limits (Unschärfebeziehung) $\Delta f \tau_p \cong 1$ (\cong steht hier für „von der selben Größenordnung“) nicht mehr weiter verkürzt werden kann, ohne das Frequenz-Spektrum Δf gleichzeitig zu verbreitern. Bei größerem Δf versagt aber der notwendige Heterodynempfang seinen Dienst, der zudem nur auf Rückstreuung von Aerosolen und nicht auf Moleküle, die das Spektrum noch mehr verbreitern, ausgelegt ist. Diese Art von DWL sind also für Messungen in großer Flughöhe und mit hoher räumlicher Auflösung ungeeignet, auch wenn sie sehr weit vorausschauende Resultate erlauben.

Deshalb wurde im Rahmen des Projekts AWIATOR (2002 – 2007) ein vorausschauender DWL-Sensor bei 355 nm für zukünftige Böenlastminderung durch automatische Aussteuerung (z. B. durch Flügelklappen) mit Fringe-Imaging(FI)-Direktempfang entwickelt und im Flugzeug getestet (Schmitt et al., 2007). Auch wenn die Reichweite dieses Systems auf den Nahbereich (kurzreichweitig) bis 200 m vor dem Flugzeug beschränkt war (wesentlich höhere Zahl an rückgestreuten Photonen für Auswertung nötig als beim Heterodynempfang), lieferte es eine räumliche Auflösung von 30 m und 60 LOS-Komponenten pro Sekunde, und war damit das erste System dieser Art, das Windmessungen

auch in großer Flughöhe in Fluggeschwindigkeit erlaubte.

AWIATOR fand seine Fortführung im Projekt **Green-Wake** (2008 – 2012). Daneben wurden im Projekt **DELICAT** (2009 – 2012) langreichweitige CAT-Messungen in großer Flughöhe durchgeführt, die Ausweichmanöver erlauben und ausreichend Zeit zur Warnung der Passagiere bieten sollen (Vrancken et al., 2010).

Diese Dissertation wurde im Rahmen des DLR-internen Projekts **Wetter & Fliegen** (2008 – 2011) angefertigt (Gerz und Schwarz, 2012). In diesem Projekt ging es unter anderem um die Untersuchung der Eigenschaften bordgestützter Sensoren zur vorausschauenden Bestimmung atmosphärischer Störungen im Nah- und Fernbereich, die für eine Vorsteuerung zur Aussteuerung der Störung (Nahbereich) und zur Bestimmung von Ausweichmanövern (Fernbereich) dienen sollen. Langfristiges Ziel ist die Entwicklung eines Assistenzsystems, das bei Gefahr den Piloten warnt oder ein automatisches Entgegenwirken zu den gefährlichen Strömungen bietet.

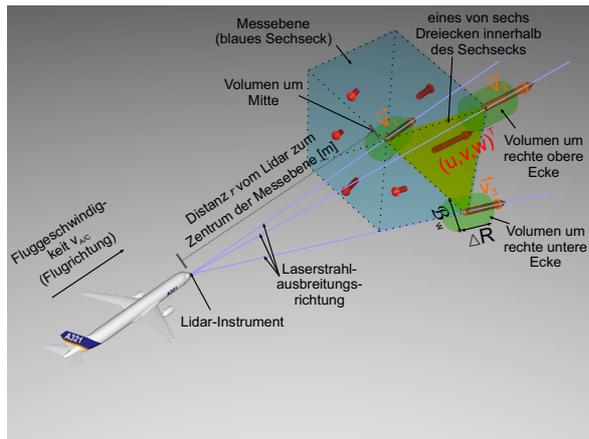
Die **Hauptfrage** zu Beginn dieser Dissertation lautete: *Ist ein geeigneter Sensor für aktive Steuermaßnahmen (Aussteuerung) bei Turbulenz-Durchflügen schon verfügbar (Antwort: nein) oder in naher Zukunft unter dem momentanen Stand der Lasertechnik und Optik überhaupt machbar?*

Die allgemeine Messsituation wird in Abb. 1.6 hier zunächst für ein flugzeuggestütztes DWL dargestellt und beschrieben. Durch die an Atmosphärenpartikeln ins Lidar rückgestreuten Photonen kann die Teilchenbewegung und damit der Wind, der sie transportiert, vor dem Flugzeug erfasst werden. Da ein oder mehrere Lidar(s) in, an, auf oder unter den Flügeln von der Analyse ausgeschlossen werden sollte(n), bleibt als einziger wirklich geeigneter Ort für einen Lidar-Sensor nur noch die Flugzeugnase. Daher beschränken wir unsere Analyse auf ein monostatisches Lidar in oder nahe der Flugzeugnase, wodurch auch die Zeit zwischen Messung einer Schicht vor dem Flugzeug und dem wirklichen Kontakt der Flügel mit dieser Schicht etwas verlängert wird.

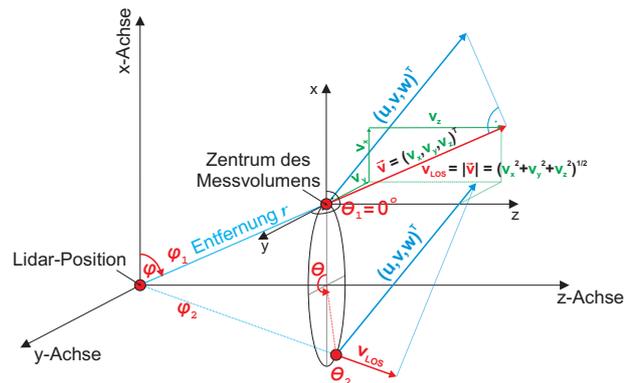
Dennoch wurde in einer generellen Analyse untersucht, wie sich Kombinationen mehrerer gleichzeitig messender DWL-Sensoren an verschiedenen Positionen des Flugzeugs (Nase, Seitenleitwerk und über oder unter dem Rumpf) auf die Messgenauigkeit auswirken (Wolkensinger, 2010). Abhängig von den Elevations- und Azimutwinkeln wurde die jeweilige Leistungsfähigkeit der Sensoren in x -, y - und z -Richtung inklusive ihrer Standardabweichungen bezüglich ihrer LOS-Geschwindigkeitskomponenten verglichen. Die Quintessenz ist, dass nur für große LOS-Blickwinkel die Standardabweichung der Komponenten transversal zur Flugrichtung im Rahmen gehalten werden kann. Der Nachteil in diesem Fall wäre jedoch ein Verlust an räumlichem Auflösungsvermögen, d. h. man hat so nur wenige oder gar nur einen Windvektor direkt vor dem Flugzeug. Somit kann man dann allenfalls großskalige Windscherungen oder Böen detektieren, aber keine kleinskaligen Strukturen wie WS.

Vom DLR Institut für Flugsystemtechnik wurden die Anforderungen an einen zur *Feed-Forward*-Kontrolle geeigneten vorausschauenden Sensor genauer bestimmt. Bezüglich der nötigen Präzision der Daten aus DWL-Messungen wird unterschieden zwischen den Anforderungen zur Bestimmung des Störphänomens aus reinen LOS-Geschwindigkeiten $v_{\text{LOS}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ mit Geschwindigkeitsbeiträgen v_x, v_y, v_z (Wolkensinger, 2011), und der Verwendung des vollständigen 3D Windvektors $(u, v, w)^T$ zur Flugsteuerung im Falle eines Landeanflugs (Horn und Schwarz, 2009). Beide Anforderungsprofile werden in Tabelle 1.1 verglichen. Die Anforderungen zur Bestimmung des Störphänomens sind höher, da hier nicht drei LOS-Richtungen (d. h. drei LOS-Geschwindigkeiten v_{LOS}) genommen werden, wie dies zur Bestimmung eines 3D Windvektors nötig ist, sondern immer nur ein v_{LOS} . Aufgrund der kleinen Blickwinkel der LOS-Richtungen für Lidars in vorausschauender Konfiguration sind die Fehler für v_y und v_z (transversal zur Flugrichtung) weitaus größer als für v_x .

Im Falle der Flugsteuerung erlaubt die Kenntnis von 3D Windvektoren in geeigneten Entfernungen vor einem Flugzeug die Herleitung der Kräfte und Impulse (Momente) durch den Wind auf das Flugzeug, wodurch die notwendigen Steuerbefehle zur Kompensation bestimmt werden können. Der Messfehler wird durch normalverteilte Werte mit vorgegebener Standardabweichung modelliert.



(a) Messgeometrie eines DWL mit drei LOS-Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ (orange), d. h. drei Messrichtungen, und vollständige 3D Windvektoren $(u, v, w)^T$ (rot), die jeweils aus drei LOS-Messungen generiert werden. Strahldurchmesser B_w und Range Bin ΔR definieren die Messvolumina am Messort.



(b) LOS-Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} (rot) und seine Komponenten v_x, v_y, v_z (grün, optisches Koordinatensystem!) in einer Messentfernung r für einen Azimutwinkel θ und einen Elevationswinkel φ , und resultierender Absolutwert v_{LOS} in einem konstanten Windfeld $(u, v, w)^T$ (blau). In dieser Abbildung sind zwei Realisationen von (θ, φ) mit v_{LOS} dargestellt (Hirschberger und Ehret (2011), S. 208, Abb. 2; with kind permission from Springer Science and Business Media).

Abbildung 1.6: Geometrie und Prinzip eines DWL an Bord eines Flugzeugs für vorausschauende Messungen.

Messparameter	Anforderungen	
	Ermittlung Störphänomen (nur LOS-Geschwindigkeiten)	Flugsteuerung (volle 3D Windvektoren)
Entfernung	150 m (–500 m)	30 – 150 m (120 – 600 m)
Punkte pro Ebene	min. 63 LOS-Richtungen	min. 20 volle 3D Windvektoren
Abtastrate (Ebenen pro s)	min. 10 Hz	min. 10 Hz
Messtiefe	max. 3% der Entfernung, d.h. 4.5 m (–15 m)	max. 10% der Entfernung, d.h. 3 – 15 m (12 – 60 m)
Fehler (Standardabweichung)	max. $0.5 \frac{m}{s}$ für v_{LOS}	max. $2.5 \frac{m}{s}$ für jeweils u, v, w

Tabelle 1.1: Allgemeine Messanforderungen für (Doppler-Wind-)Lidar-Systeme.

Alle Anforderungen in Tab. 1.1 gelten für den Landeanflug, mit Ausnahme derjenigen in Klammern, die bei Reisefluggeschwindigkeit gelten (4-5 mal höhere Fluggeschwindigkeit). Im Allgemeinen wird für die Flugsteuerung der kleinstmögliche Wert der Messentfernung in Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit präferiert. Der Scanwinkel hängt von der Messentfernung ab und sollte so angepasst werden, dass immer die volle Flügelspannweite abgedeckt wird.

Der Feed-Forward-Controller benötigt eine der folgenden Arten gemessener Lidar-Daten als Input:

1. Gemessener voller 3D Windvektor, v. a. aber die beiden Windkomponenten transversal zur Flugrichtung. Dann kann der Feed-Forward-Controller die erforderlichen Befehle direkt ableiten.
2. Kenntnis der Zirkulation, Kernradien und Position von Wirbelschleppen. Dann können idealisierte Modelle wie Burnham-Hallock oder Lamb-Oseen die nötigen Windvektoren herleiten.

Den Anforderungen von Tab. 1.1 und Punkt 1 oder 2 wird bislang kein Lidar-Sensor annähernd gerecht. Falls Punkt 1 mit ausreichender Auflösung erfüllt wird, ist Punkt 2 ebenfalls erfüllt. Daher versuchen wir im Folgenden die v_x -, aber v. a. die v_y - und v_z -Komponenten bzw. die transversalen Windkomponenten v und w gemäß Punkt 1 so gut wie möglich bestimmen zu können.

Im Rahmen dieser Dissertation wird im Wesentlichen ein **neues monostatisches gepulstes Lidar zur Windmessung vor Flugzeugen** für obige Anforderungen untersucht, das, anders als DWL, Windmessungen ohne Gebrauch des Doppler-Effekts gestattet. Dazu wird ein zukunftsweisender Ansatz zur Windmessung mit einem **Rückstreulidar (RSL)** durch numerisch-stochastische Simulationen ausführlich dargelegt, speziell hinsichtlich der Messgeometrie, Umwelt- und Laserfaktoren sowie der Signalauswertung, welche den Schwerpunkt dieser Arbeit bildet (siehe Kap. 2 bis 5). Dieses RSL erfordert ein neues Design und eine erhöhte Anzahl an Messrichtungen. Zur Berechnung der Windfelder wurden eine Reihe neu entwickelter oder bereits erprobter Verfahren sowie Kombinationen daraus miteinander verglichen, von denen jede für sich unter bestimmten Voraussetzungen gut anwendbar ist. Wie die Ergebnisse der Simulationen zeigen, könnte es mit einem solchen RSL möglich sein, mit weitaus höherer Präzision und Geschwindigkeit Daten über den Wind vor einem Flugzeug zu sammeln, als dies mit bisher erprobten Techniken (z. B. DWL) möglich ist.

Die Dissertation ist wie folgt gegliedert:

In **Kapitel 2** befassen wir uns mit dem theoretischen Unterbau des für die RSL-Simulationen verwendeten C++-Monte-Carlo Programmes **pbs**. Dazu wird die Ausbreitung der Photonen des gepulsten Laserlichts des Lidar-Sensors in der Atmosphäre mittels eines **partiell deterministischen Markovschen (Sprung-)Prozesses (PDMP)** modelliert. Auf einem geeignet gewählten Zustandsraum und mit **Übergangswahrscheinlichkeiten (TP)**, bestehend aus Markov-Kernen für zufällige Kollision, Streuerselektion, Wellenlängenänderung, Richtungsänderung sowie deterministischer Referenz- und Stokesvektoränderung, ergibt sich ein zeitdiskreter stationärer Markovscher Prozess. Daraus kann ein zeitstetiger stationärer korpuskularer Prozess mit Mehrfachstreuung, ein PDMP, inklusive Polarisation und Wellenlänge, hergeleitet werden. Dieser ist in Form von **pbs** zur Simulation realisiert. Für Messentfernungen über mehrere hundert Meter muss Mehrfachstreuung für eine realistische Analyse ebenso berücksichtigt werden wie Polarisation aufgrund nicht-sphärischer Streupartikel.

Eine neu entwickelte Messgeometrie in **pbs** zur Simulation von hochauflösenden WS-Messungen im Nahbereich vor Flugzeugen erlaubt die Emission und Detektion der Photonen in viele Einzelrichtungen gleichzeitig, normiert auf Richtung (Blickwinkel) und Distanz. Dadurch kann die rückgestreute Intensität (oder Photonenzahl) in zur Flugrichtung transversalen Schichtebenen vor einem bewegten Objekt gemessen werden. Realistische Verteilungen von Extinktionskoeffizienten in Form von 3D Quadern oder 3D Würfeln dienen als Maß für das variable Streuvermögen auf dem Photonenpfad. Die Streuung des Laserlichts wird durch verschiedene Arten von Mueller-Matrizen beschrieben.

In **Kapitel 3** wird gezeigt, wie durch numerische Lösung von **Navier-Stokes-Gleichungen (NSG)** mittels **Large Eddy Simulationen (LES)** passive Tracerverteilungen von WS inklusive Turbulenz generiert werden können, deren Konzentrationsverteilungen später in den RSL-Simulationen (siehe Kap. 5) in Form realitätsnaher Extinktions- bzw. Streuprofile verwendet werden.

Danach geht es in **Kapitel 4** um Methoden zur Berechnung von Verschiebungs- bzw. Windvektoren aus i. Allg. leicht unterschiedlichen 2D Bildern. Aus dem zu einem Zeitpunkt t_1 gegebenen (Tracer-)Profil kann für einen kleinen Zeitschritt Δt ein gemäß dem LES-Windfeld zu t_1 verschobenes (Tracer-)Profil zum Zeitpunkt t_2 erzeugt werden. Zum Ersten kann dann eine Bewegung durch Verschiebung der Schwerpunktpositionen (**Gravity Center Shift**, kurz **GCS**) erfasst werden. Der Schwerpunkt wird dabei als Position des Mittelwertes aufgefasst. Zum Zweiten wird ein Algorithmus entwickelt, der über das Shift-Theorem für Fourier-Transformierte eine Berechnung der Translation erlaubt (**Fourier-Shift**, kurz **FS**). Zum Dritten lassen sich Windvektoren durch eine Variante der **Kreuzkorrelation (KK)** mit Subpixelgenauigkeit statistisch berechnen. Zum Vierten kombiniert eine neue, als **Weight-Shift (WSh)** bezeichnete Methode die Prinzipien von KK und GCS.

In **Kapitel 5** werden die Tracerverteilungen der gleichen Schicht zu Zeiten t_1 und t_2 in Form von Extinktionsprofilen zur Simulation in die neue **pbs**-Version eingelesen. Die aus vielen Richtungen in

den Extinktionsprofilen zu t_1 und t_2 rückgestreuten Photonen werden im Lidar-Detektor gesammelt, wodurch 2D Bilder der Rückstreuung (inklusive Rauschen) entstehen, aus denen sich mit den Methoden von Kap. 4 die Verschiebungen bzw. Windvektoren berechnen lassen. Die Extinktionswerte und Streumatrizen werden dabei entsprechend Flughöhe und Messsituation variiert. Auch aus simulierten Messungen mehrerer Schichten zu einem einzelnen Zeitpunkt t und für alternative Extinktionsverteilungen können die räumlichen Verschiebungen der Luftmassen festgestellt werden.

Kapitel 6 fasst die Resultate zusammen. Es wird ein Fazit gezogen und ein Ausblick auf künftige Weiterentwicklungen der Simulationen bzw. Lidar-Geräte gegeben.

Anhang A beschreibt rein auf Streuung von Laserstrahlung basierende Messmethoden für Wind. **Anhang B** beschäftigt sich in Abschnitt B.1 aus Gründen der Kompaktheit der Dissertation nur sehr verkürzt mit der Windmessung durch ein FI-DWL. Für eine detaillierte Analyse eines solchen Systems sei hier auf [Hirschberger und Ehret \(2011\)](#) verwiesen. Eine ausführliche Darstellung zur Windmessung mit DWL vor Flugzeugen soll Teil eines zukünftigen DLR-Forschungsberichtes sein. Zusammenfassend werden realistische Ringmuster eines **Fabry-Pérot-Interferometers (FPI)** auf einem 2D **CCD**-Bildsensor (ein Array lichtempfindlicher Dioden) in der Brennebene dahinter simuliert. Unter Berücksichtigung der Streueigenschaften in der Atmosphäre und durch Zufallszahlen (**ZZen**) erzeugtem Rauschen wird getestet, wie genau eine Messung der Doppler-Verschiebung und damit des Windes in großer Flughöhe und Messdistanzen über 50 m in eine einzelne Blickrichtung (LOS) möglich ist. Hierzu werden zwei geeignete Algorithmen zur Berechnung des Zentrums und des Radius von 2D Ringen mit Subpixel-Präzision erläutert und angewandt. Der Abschnitt B.2 über einen 3D Ray-Tracing-Simulator eines FPI mit CCD hingegen wurde bislang nicht veröffentlicht und wird daher vollständig beschrieben.

Abschließend noch einige Hinweise:

- Die Vektoren und Punkte in den Bildern sind in der auf dem Dissertationsserver der Universitätsbibliothek München (<http://edoc.ub.uni-muenchen.de/>) verfügbaren pdf-Version bei Vergrößerung exakt erkennbar.
- Bei der graphischen Pixel-Darstellung in den Abbildungen sorgt eine bilineare Interpolation („Texture mapping“) dafür, dass immer vier Werte gewichtet gemittelt werden zu einem Wert in der Mitte zwischen den Punkten (Pixel). Dessen Farbe wird angezeigt.
- Bei der Beschreibung optischer Instrumente in Kap. 2, 5 und Anhang A, B kommt das optische Koordinatensystem zum Einsatz. Hier ist die Ausbreitungsrichtung des Laserstrahles die z -Achse und die x - bzw. die y -Achse transversal dazu. Dagegen verwendet man in den LES das aeronautische Koordinatensystem (siehe Kap. 3 und 4). Dabei ist x die Flugrichtung und die y - bzw. z -Achse senkrecht dazu. Wir werden zwischen beiden Koordinatensystemen je nach Situation wechseln.

Ergänzend zu dieser Dissertation seien dem Leser folgende Publikationen empfohlen:

M.C. Hirschberger, G. Ehret (2011), „Simulation and high-precision wavelength determination of noisy 2D Fabry-Pérot interferometric rings for direct-detection Doppler lidar and laser spectroscopy“, *Applied Physics B – Lasers and Optics*, Volume 103, Number 1, S. 207–222, DOI 10.1007/s00340-011-4391-9. Originaldatei erhältlich auf <http://www.springerlink.com/content/u33111vg67060665/>.

M.C. Hirschberger, T. Misaka, F. Holzäpfel, C. Horn (2012), „Simulated Lidar Signals for Wake Vortex Detection ahead of the Aircraft“, in: T. Gerz und C. Schwarz (Hrsg.), *The DLR Project Wetter & Fliegen*, DLR-FB 2012-02, S. 130–143. Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt Oberpfaffenhofen, Braunschweig, Göttingen und Hamburg.

Kapitel 2

Monte-Carlo Simulationen eines gepulsten Laserstrahles zur Berechnung polarisierter Lidar-Rücksignale

Dieses Kapitel behandelt die Theorie und Anwendung von Monte-Carlo Simulationen eines gepulsten Laserstrahles in Verbindung mit der hier für WS-Windmessungen speziell verwendeten Messgeometrie, um (polarisierte) Lidar-Rücksignale zur weiteren Analyse (v. a. in Kap. 5) berechnen zu können.

In Kap. 2.1 werden Ansätze zur Lösung der zur Beschreibung der Mehrfachstreuung von Photonen eines Laserpulses an Aerosolen oder Molekülen der Atmosphäre nötigen Strahlungstransport-Gleichungen (**RTE**) für die RSL-Simulationen dargestellt. Es wird verkürzt gezeigt, wie ein zeitlich diskreter Markov-Prozess $(\mathcal{S}, \mathcal{P})$ in einen zeitlich stetigen (d. h. kontinuierlichen) verallgemeinert werden kann, in einen sog. PDMP $(\mathcal{U}, \mathcal{Q})$, dessen Markov-Kerne aus den Markov-Kernen des zeitlich diskreten Prozesses entstehen. Dazu wird die sog. *Methode der fiktiven Kollision*, wenn möglich, iteriert angewandt. Über die so erhaltene *infinitesimale Erzeugende* dieses assoziierten PDMP erhält man RTE für polarisiertes Licht. Dieser stochastische Ansatz ist also einem allgemeinen RTE-Ansatz äquivalent, und kann zur Lösung verwendet werden. In diesem Zusammenhang werden auch die verwendeten Streueigenschaften kurz zusammenfasst. Für eine ausführlichere Darstellung der PDMP und Streueigenschaften siehe [Wengenmayer \(2008\)](#) oder [Hirschberger \(2007\)](#).

In Kap. 2.2 wird die hier verwendete, vorgeschlagene Messmethodik eines geeigneten RSL für Simulationen und Realität beschrieben. Dieses neue, simulierte RSL vereinigt die Messprinzipien der in Anhang A dargestellten, auf (Rück)Streuung basierenden und zum Teil zur Windmessung geeigneten Messsysteme in Form eines Lidars. Wichtig ist dabei die Messbarkeit des Windes durch dieses RSL ohne Zuhilfenahme des Dopplereffekts.

Die dafür nötigen Eigenschaften wurden in einer erweiterten Version des Programmes `pbs`, genannt `pbs5`, zur Simulation von Lidar-Rücksignalen inklusive Mehrfachstreuung und Polarisation implementiert, dessen grundlegende Funktionsweise inklusive der Neuerungen in Kap. 2.3 erläutert wird.

2.1 Partiiell deterministische Markovsche Sprungprozesse und Streueigenschaften zur Modellierung des Lichttransports

Mehrfachstreuung muss in Lidar-Simulationen berücksichtigt werden, um physikalische Phänomene wie Depolarisation durch sphärische Streuer, Laserpuls-Verbreiterung und Laserpuls-Verlängerung („Pulse Stretching“) oder den Verlauf der Photonen in dichten Wolken oder weit entfernten Zirren zu

erklären. Richtungsstreuung polarisierten Lichts durch kugelförmige und nicht-kugelförmige Streuer ist nicht rotationsinvariant in Bezug auf den einfallenden Laserstrahl. *Extinktion*, also der Energieverlust des Laserstrahls durch Wechselwirkung mit der Atmosphäre, setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: Absorption und Streuung. Absorption wird hier innerhalb der zu messenden Extinktionsschicht vernachlässigt werden (obwohl pbs dies berücksichtigen kann), d. h. wir fokussieren uns in den Messschichten auf elastische (Rück)Streuung monostatischer Lidars. Jeder Laserpuls besteht aus einer großen Anzahl (zu simulierender) Photonen.

Der Transport polarisierten Lichts durch die Atmosphäre wird im Folgenden als stochastischer korpuskularer Mehrfach-Streuprozess durch einen Markov-Prozess in diskreter (und später auch stetiger) Zeit mit Streuserlektion und Polarisation beschrieben. Dieser besteht aus einer iterativen Folge von Einfachstreuungen korpuskularer Photonen¹ an Streuern der Atmosphäre (z. B. Staubpartikel, Wassertröpfchen in Wolken oder Gasmoleküle). Jedes solche elementare Streueignis wird wiederum unterteilt in einige Berechnungsschritte.

Ausgangspunkt ist ein vollständiger *physikalischer Zustand*

$$s := (\mathbf{x}, \psi, \lambda, \phi, \rho, \mathbf{st}) \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3 \times \Psi \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^4 \quad (2.1)$$

eines Photons in einem ausreichend hoch dimensionierten Zustandsraum \mathcal{S} , wobei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ die Photonen-Position, $\psi \in \Psi$ die Art des letzten Streuteilchens aus der Menge Ψ aller Streuteilchen, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ die Photonen-Wellenlänge, $\phi \in \mathbb{S}^2$ die Photonen-Flugrichtung aus der Einheitskugel \mathbb{S}^2 des \mathbb{R}^3 , $\rho \in \mathbb{S}^2$ mit $\rho \perp \phi$ der Referenzvektor und \mathbf{st} der darauf bezogene sog. *normierte Stokes-Vektor* sind. Auf ρ und \mathbf{st} , die zur Beschreibung des Polarisationszustands des Photons dienen, werden wir weiter unten noch genauer eingehen.

Für die Borelsche σ -Algebra $\mathfrak{G} := \mathfrak{B}(\mathcal{S}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^3 \times \Psi \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^4)$ auf dem Zustandsraum \mathcal{S} werden die zugehörigen Rechtecksmengen $\mathcal{R} \in \mathfrak{G}$ definiert durch

$$\mathcal{R} := R_{\mathbf{x}} \times R_{\psi} \times R_{\lambda} \times R_{\phi} \times R_{\rho} \times R_{\mathbf{st}} \quad (2.2)$$

mit $R_{\mathbf{x}} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^3)$, $R_{\psi} \in \mathfrak{B}(\Psi)$, $R_{\lambda} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^+)$, $R_{\phi} \in \mathfrak{B}(\mathbb{S}^2)$, $R_{\rho} \in \mathfrak{B}(\mathbb{S}^2)$ und $R_{\mathbf{st}} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^4)$.

Wir können nun den Markov-Kern bzw. die Übergangswahrscheinlichkeit, engl. **Transition Probability (TP)**

$$\mathcal{P} : \mathcal{S} \times \mathfrak{G} \ni (s_m, \mathcal{R}) \mapsto \mathcal{P}(s_m, \mathcal{R}) \in [0, 1] \quad (2.3)$$

von einem Zustand $s_m \in \mathcal{S}$ in einen neuen Zustand $s_{m+1} \in \mathcal{R}$ wiederum als Komposition der Markov-Kerne für Kollision (Stoß), Streuserlektion, Wellenlänge, Streurichtung, Referenzvektor und Stokes-Vektor beschreiben, so dass durch die Abfolge bzw. Aneinanderreihung dieser \mathcal{P} ein *Markov-Prozess in diskreter Zeit* definiert werden kann. Dabei bewegt sich das Photon ausgehend vom letzten, dem m -ten Streupunkt \mathbf{x}_m entlang der Halbgeraden mit Fußpunkt \mathbf{x}_m mit konstanter Lichtgeschwindigkeit c in Richtung ϕ_m , bis es zum Zeitpunkt $t_{m+1} \in \mathbb{R}^+$ an der Position $\mathbf{x}_{m+1} := \mathbf{x}_m + c(t_{m+1} - t_m)\phi_m$ auf einen Streuer trifft. Da sich bei Bewegung im Vakuum zwischen dem m -ten und $(m+1)$ -ten Streueignis nur der Ortsvektor \mathbf{x} verändert, gilt in diesem Zeitraum mit $t_m \leq t < t_{m+1}$ für den Zustand des Photons

$$s_m^t := (\mathbf{x}_m + c(t - t_m)\phi_m, \psi_m, \lambda_m, \phi_m, \rho_m, \mathbf{st}_m) . \quad (2.4)$$

Die Zeitintervalle zwischen den Streueignissen sind durch die Streupunkte und Trajektorien bei konstantem c schon eindeutig festgelegt und damit in den s_m bereits implizit enthalten. Nun sollen die einzelnen TPs, aus denen sich \mathcal{P} zusammensetzt, definiert werden.

Zunächst definieren wir die TP für eine *Kollision* (einen *Stoß*) des Photons mit einem Streuer. Der atmosphärische *Extinktionskoeffizient* $\sigma : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $\sigma(s) \in \mathbb{R}_0^+$ (auch *Stoßintensität* genannt),

¹ Wir verwenden zur Beschreibung von Lichtstreuung ein rein klassisches Modell mit Licht als Teilchen, blenden also die Kohärenzeigenschaft von Licht als Welle aus.

der später der Sprungintensität eines PDMP entsprechen wird, entscheidet, wie hoch die Wahrscheinlichkeit eines $(m+1)$ -ten Stoßes des Photons entlang der Halbgeraden $\mathbf{x}_m + c(t-t_m)\phi_m$ ist. Dieses σ hängt also von \mathbf{x}_m und ϕ_m (v. a. bei Eiskristallen), aber auch von ψ_m , λ_m (v.a. bei Raman-Streuung), ρ_m und \mathbf{st}_m ab. Seinen Ursprung hat dieses σ im Beer-Lambert-Gesetz:

$$\Gamma : \mathcal{S} \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+) \longrightarrow [0, 1] \quad \text{mit} \quad (2.5)$$

$$(s_m; [0, t]) \longmapsto 1 - \exp\left(-\int_0^t \sigma(\mathbf{x}_m + c s \phi_m, \psi_m, \lambda_m, \phi_m, \rho_m, \mathbf{st}_m) ds\right)$$

gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das Photon im Zeitintervall $[0, t]$ nach bereits verstrichener Zeit t_m auf der Strecke von \mathbf{x}_m nach $\mathbf{x}_m + c(t-t_m)\phi_m$ mit einem Partikel der Atmosphäre kollidieren wird. Dabei ist $\Gamma(s_m; \cdot)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf den Borel-messbaren Teilmengen $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$ (da $t \in \mathbb{R}_0^+$) für beliebiges s_m .

Sei $Col(s_m; \cdot)$ das Bildmaß von $\Gamma(s_m; \cdot)$ unter der wegen $f^{-1}(\mathfrak{B}(\mathbb{R}^3)) = \{f^{-1}(R_{\mathbf{x}}) : R_{\mathbf{x}} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^3)\} \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$ messbaren Abbildung

$$f : (\mathbb{R}_0^+, \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^3)) \quad (2.6)$$

$$t \longmapsto \mathbf{x}_m + c t \phi_m$$

von \mathbb{R}_0^+ nach \mathbb{R}^3 mit Messräumen $(\mathbb{R}_0^+, \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+))$, $(\mathbb{R}^3, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^3))$ und zwei Maßen Γ und Col auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$ bzw. $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^3)$, so dass $Col(s_m; R_{\mathbf{x}}) = \Gamma(s_m; f^{-1}(R_{\mathbf{x}}))$ für $R_{\mathbf{x}} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^3)$ gilt. $Col(s_m; \cdot)$ konzentriert sich auf die in \mathbf{x}_m startende und in Richtung ϕ_m ausbreitende Halbgerade. Dann ist die Abbildung

$$Col : \mathcal{S} \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow [0, 1] \quad (2.7)$$

$$(s_m; R_{\mathbf{x}}) \longmapsto \Gamma(s_m; f^{-1}(R_{\mathbf{x}})) =: Col(s_m; R_{\mathbf{x}})$$

mit Borel-messbarer Teilmenge $R_{\mathbf{x}} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^3)$ von \mathbb{R}^3 ein Markov-Kern von $(\mathcal{S}, \mathfrak{G})$ nach $(\mathbb{R}^3, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^3))$, und wird als *Stoß-TP* bezeichnet. $Col(s_m; R_{\mathbf{x}})$ gibt also die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Photon mit Zustand s_m mit einem Streuer kollidieren wird, der sich im Punkt $\mathbf{x}_{m+1} \in R_{\mathbf{x}}$ befindet.

Weiter können wir eine *TP der Selektion des Streuertyps* einführen. Die Menge Ψ aller Streuertypen ist bei nur einer Teilchensorte in der Atmosphäre eine einelementige Menge, während bei mehreren Teilchensorten endlich oder sogar unendlich viele Streuertypen auftreten können. In Simulationen sind nur endliche Ψ umsetzbar. Für endliches Ψ wird hier jeder Streuertyp ψ mit einer Wahrscheinlichkeit entsprechend der Relation seiner lokalen Dichte (z. B. Extinktionskoeffizient σ) zu den lokalen Dichten der anderen Streuertypen ausgewählt. Eine so definierte TP für die Streuerselektion entspricht einer unabhängigen Mischung der verschiedenen Streuertypen. Für weitere Details, auch zu unendlich vielen Streuertypen, siehe etwa [Wengenmayer \(2008\)](#) oder [Hirschberger \(2007\)](#).

Im Falle einer endlichen Menge Ψ verschiedener Streuertypen wird das Photon im Punkt \mathbf{x}_{m+1} mit einem Teilchen vom Typ $\psi_{m+1} \in \Psi$ zusammenstoßen. Ein solcher Streuertyp ψ_{m+1} kann ein Ensemble von Molekülen, Mie-Streuern (z. B. gemischt gemäß einer gegebenen Größenverteilung) oder zufällig orientierten nicht-sphärischen Streuern sein. Statt einer einzelnen Stoßintensität σ gibt es jetzt mehrere Stoßintensitäten σ_ψ der verschiedenen Arten von Streupartikeln, die additiv sind. Dies impliziert eine Art stochastische Unabhängigkeit der damit verbundenen Stoß-Punktprozesse. Es gilt:

$$s_m \longmapsto \sigma(s_m) := \sum_{\psi \in \Psi} \sigma_\psi(s_m), \quad (2.8)$$

mit der *Stoßintensität* σ_ψ für den Streuertyp ψ .

Für jedes $\psi \in \Psi$ und für jedes s_m existiert eine Stoßintensität $\sigma_\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $s_m \mapsto \sigma_\psi(s_m)$. Dieses $\sigma_\psi(s_m)$ ist abhängig von s_m und von der Gestalt des Streuers ψ in \mathbf{x}_{m+1} . Mit

$$\overline{Col}_\psi(s_m; [0, t]) := 1 - \exp\left(-\int_0^t \sigma_\psi(\mathbf{x}_m + c s \phi_m, \psi_m, \lambda_m, \phi_m, \rho_m, \mathbf{st}_m) ds\right) \quad (2.9)$$

wird (ähnlich wie in Gl. (2.5)) auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$ eine zeitliche Stoß-TP, diesmal mit einem Partikel vom Typ ψ , definiert. Da σ_ψ nicht abhängig von ψ_m ist, kann ψ_m aus Gl. (2.9) gestrichen werden.

Der Markov-Kern \overline{Col}_ψ induziert auf der Halbgeraden $\{\mathbf{x}_m + ct\phi_m : t \in \mathbb{R}_0^+\}$ durch Einbettung dieser Halbgeraden einen Markov-Kern $Col_\psi : \mathcal{S} \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^3) \rightarrow [0, 1]$ mit $(s_m; B) \mapsto Col_\psi(s_m; B)$ und der Dichtefunktion

$$B \mapsto \gamma_\psi(s_m; B) := c \sigma_\psi(\mathbf{x}_m + ct\phi_m, \psi_m, \lambda_m, \phi_m, \rho_m, \mathbf{st}_m) \exp\left(-\int_0^t \sigma_\psi(\mathbf{x}_m + cs\phi_m, \psi_m, \lambda_m, \phi_m, \rho_m, \mathbf{st}_m) ds\right). \quad (2.10)$$

Damit ist also die TP Col_ψ , die sich auf σ_ψ bezieht, gegeben durch

$$(s_m; B) \mapsto Col_\psi(s_m; B) \quad \text{für } B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^3). \quad (2.11)$$

Als zur Additivität der σ_ψ (siehe Gl. (2.8)) äquivalente Unabhängigkeit gilt nun

$$Col(s_m; B) := \prod_{\psi \in \Psi} Col_\psi(s_m; B) \quad \text{für } B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^3). \quad (2.12)$$

Ähnlich der Dichte von Col_ψ aus Gl. (2.10) besitzt $Col(s_m; \cdot)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$B \mapsto \gamma(s_m; B) := c \sigma(\mathbf{x}_m + ct\phi_m, \psi_m, \lambda_m, \phi_m, \rho_m, \mathbf{st}_m) \exp\left(-\int_0^t \sigma(\mathbf{x}_m + cs\phi_m, \psi_m, \lambda_m, \phi_m, \rho_m, \mathbf{st}_m) ds\right). \quad (2.13)$$

Die bedingten Dichten von Col und Col_ψ für ein Ausbleiben der Streuung bis zu einem Ort $\mathbf{x}_m + ct\phi_m$ auf der Halbgeraden (d. h. bis zur Zeit t) sind proportional zu ihren jeweils zugehörigen σ und σ_ψ . Damit ist

$$Sel(s_m, \mathbf{x}_m + ct\phi_m; \{\psi_{m+1}\}) := \frac{\sigma_\psi(\mathbf{x}_m + ct\phi_m, \psi_m, \lambda_m, \phi_m, \rho_m, \mathbf{st}_m)}{\sum_{\nu \in \Psi} \sigma_\nu(\mathbf{x}_m + ct\phi_m, \psi_m, \lambda_m, \phi_m, \rho_m, \mathbf{st}_m)} \quad (2.14)$$

die Wahrscheinlichkeit für eine Kollision des Photons im Zustand s_m mit einem Streuer vom Typ ψ_{m+1} im Punkt $\mathbf{x}_m + ct\phi_m$. Die zufällige Auswahl des Streuers vom Typ ψ_{m+1} im Stoßpunkt \mathbf{x}_{m+1} ist somit stochastisch bestimmt durch die TP der Streuserlektion

$$Sel : (\mathcal{S} \times \mathbb{R}^3) \times \mathfrak{B}(\Psi) \longrightarrow [0, 1] \\ (s_m, \mathbf{x}_{m+1}; R_\psi) \mapsto Sel(s_m, \mathbf{x}_{m+1}; R_\psi) \quad (2.15)$$

aus Gl. (2.14) mit einer einelementigen Menge $R_\psi := \{\psi_{m+1}\}$, bestehend aus dem $(m+1)$ -ten Streuer vom Typ ψ_{m+1} . Dabei ist Sel unabhängig von der bisherigen Streuhistorie $(s_0, s_1, \dots, s_{m-1})$ des Photons und hängt nur von s_m und von \mathbf{x}_{m+1} ab, das \mathbf{x}_m in s_m ersetzt.

Manche Streuer in der Atmosphäre wie etwa die O₂- oder N₂-Moleküle, die die beiden Hauptkomponenten der Luft darstellen, können die Wellenlänge λ der einfallenden Strahlung (Photonen) während eines Streuereignisses ändern. Da diese *Raman-Streuung* ein quantenmechanischer Effekt ist, erfolgt die λ -Änderung zufällig. Somit kann die TP für eine Änderung der Wellenlänge zu λ_{m+1} ,

$$Wav : (\mathcal{S} \times \mathbb{R}^3 \times \Psi) \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^+) \longrightarrow [0, 1] \\ (s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}; R_\lambda) \mapsto Wav(s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}; R_\lambda), \quad (2.16)$$

für beliebiges $(s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1})$ und eine beliebige Borel-messbare Teilmenge R_λ von \mathbb{R}^+ definiert werden (siehe auch [Oppel und Czerwinski \(1998\)](#)). Dabei ist Wav unabhängig von der bisherigen Streuhistorie $(s_0, s_1, \dots, s_{m-1})$ des Photons und hängt nur von s_m , \mathbf{x}_{m+1} (ersetzt \mathbf{x}_m in s_m) und ψ_{m+1} (ersetzt ψ_m in s_m) ab. Speziell für die O₂- oder N₂-Moleküle aber existieren exakte Lösungen

für die TPs von der Wellenlänge der einfallenden zur gestreuten Strahlung (Penney et al., 1974, Wengenmayer, 2002). Die meisten anderen Streuer wie Mie-Teilchen (in Wasserwolken) oder Eiskristalle (in Zirren) ändern die Wellenlänge der einfallenden Wellen nicht.

Als Nächstes wird die stochastische Änderung der Flugrichtung des Photons nach ϕ_{m+1} am Streuort \mathbf{x}_{m+1} durch die *TP der Richtungsstreuung*

$$\begin{aligned} Dir : (\mathcal{S} \times \mathbb{R}^3 \times \Psi \times \mathbb{R}^+) \times \mathfrak{B}(\mathbb{S}^2) &\longrightarrow [0, 1] \\ (s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}; R_\phi) &\longmapsto Dir(s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}; R_\phi) \end{aligned} \quad (2.17)$$

für beliebiges $(s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1})$ und eine beliebige Borel-messbare Teilmenge R_ϕ von \mathbb{S}^2 definiert. Dieses *Dir* ist wieder unabhängig von $(s_0, s_1, \dots, s_{m-1})$ und hängt nur von s_m, \mathbf{x}_{m+1} (ersetzt \mathbf{x}_m in s_m), ψ_{m+1} (ersetzt ψ_m in s_m) und λ_{m+1} (ersetzt λ_m in s_m) ab. Dabei ist *Dir* abhängig vom Streuverhalten der Partikel der Atmosphäre für polarisiertes Licht. Polarisation wird hier in Form von *Stokes-Vektoren* berücksichtigt, während *Mueller-Matrizen* das Streuverhalten der Streuer wiedergeben und die Transformation der Stokes-Vektoren bei einer Streuung erlauben. Im Folgenden soll dieser Formalismus kurz erläutert werden.

Wie man natürliches Licht polarisiert und welche Arten von Polarisation es gibt, ist z. B. in Zinth und Zinth (2009) beschrieben. Mittels des sog. *Stokes-Vektors* (G. G. Stokes, 1852), der aus vier sog. *Stokesschen Parametern* besteht, die allesamt reelle Intensitäten angeben, werden die Polarisationszustände von Licht ausgedrückt. Für einen *Stokes-Vektor* $\mathbf{ST}(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\mathbf{ST}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} I_{\parallel}(\mathbf{x}) \\ I_{\perp}(\mathbf{x}) \\ U(\mathbf{x}) \\ V(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{x})\mathbf{E}_{\parallel}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{x})\mathbf{E}_{\perp}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{x})\mathbf{E}_{\perp}^*(\mathbf{x}) + \mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{x})\mathbf{E}_{\parallel}^*(\mathbf{x}) \\ i(\mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{x})\mathbf{E}_{\perp}^*(\mathbf{x}) - \mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{x})\mathbf{E}_{\parallel}^*(\mathbf{x})) \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

wobei $\mathbf{E}_{\parallel}, \mathbf{E}_{\perp}, \mathbf{E}_{\parallel}^*, \mathbf{E}_{\perp}^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{x})$ die komplexen E-(Vektor-)Feld-Anteile und $I(\mathbf{x}) = I_{\parallel}(\mathbf{x}) + I_{\perp}(\mathbf{x})$ die Gesamtintensität sind (* das komplex Konjugierte, \parallel die parallelen und \perp die senkrechten Anteile). In der Literatur (z. B. Born und Wolf (1999)) wird auch die äquivalente Form

$$\mathbf{ST} := (I, Q, U, V)^T = (I_{\parallel} + I_{\perp}, I_{\parallel} - I_{\perp}, U, V)^T \quad (2.19)$$

verwendet. Hierbei sind I die Intensität, Q der Polarisationsgrad und U sowie V Phasenbeziehungen. Der Polarisationszustandsvektor eines Photons (der zwischen zwei Streuungen von \mathbf{x} unabhängig und konstant ist) wird im stochastischen Modell durch den *normierten Stokes-Vektor*

$$\mathbf{st} := (i_{\parallel}, i_{\perp}, u, v)^T = \begin{cases} \left(\frac{I_{\parallel}}{I}, \frac{I_{\perp}}{I}, \frac{U}{I}, \frac{V}{I} \right)^T & \text{für } I \neq 0, \\ (0, 0, 0, 0)^T & \text{für } I = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

ausgedrückt. Intensität und Photonenzahl sind proportional zueinander, so dass sich durch gewichtete Summation der Stokes-Vektoren einzelner Photonen der Stokes-Vektor des gesamten Strahlungsflusses ergibt (Kerscher, 1994). Die (normierten) Stokes-Vektoren werden nun zur Berechnung einzelner Streuungen von polarisiertem, monochromatischem Licht an einzelnen sphärischen oder nicht-sphärischen Partikeln verwendet.

Ein einzelner Streuvorgang (wir betrachten nun wieder das $(m+1)$ -te Streuereignis) startet also mit einem normierten Stokes-Vektor \mathbf{st}_m in der Form von Gl. (2.20), der bezüglich der Ebene dargestellt ist, die durch die Einfallrichtung $\phi_m \in \mathbb{S}^2$ des Photons auf den Streuer, und die neue Ausbreitungsrichtung $\phi_{m+1} \in \mathbb{S}^2$ nach der Streuung aufgespannt wird. Damit bilden ϕ_m und ϕ_{m+1} den Streuwinkel $\vartheta = \vartheta(\phi_m, \phi_{m+1})$. Die von ϕ_m und dem Referenzvektor ρ_m mit $\rho_m \perp \phi_m$ aufgespannte *Referenzebene* (ρ_m, ϕ_m) vor der Streuung erfährt beim Streuvorgang die Rotation $\mathcal{L}(\xi)$.

Für diese Matrix $\mathcal{L}(\xi)$ zur Beschreibung der Drehung eines Stokes-Vektors gilt nach Chandrasekhar (1960)

$$\mathcal{L}(\xi) := \begin{pmatrix} \cos^2(\xi) & \sin^2(\xi) & \frac{1}{2}\sin(2\xi) & 0 \\ \sin^2(\xi) & \cos^2(\xi) & -\frac{1}{2}\sin(2\xi) & 0 \\ -\sin(2\xi) & \sin(2\xi) & \cos(2\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Die durch die Ebene (ϕ_m, ϕ_{m+1}) festgelegte Referenzebene (ρ_{m+1}, ϕ_{m+1}) nach der Streuung (sog. Streuebene) enthält den neuen Referenzvektor ρ_{m+1} mit den Eigenschaften $\rho_{m+1} \perp \phi_m$, $\rho_{m+1} \perp \phi_{m+1}$ und $\rho_{m+1} \in (\phi_m, \phi_{m+1})$. Es gilt:

$$\rho_{m+1} := \frac{(\phi_{m+1} \times \phi_m) \times \phi_{m+1}}{\|(\phi_{m+1} \times \phi_m) \times \phi_{m+1}\|}. \quad (2.22)$$

Sei $\xi := \Xi(\alpha, \beta) := \arccos(\langle \alpha, \beta \rangle)$ der Winkel zwischen $\alpha := \phi_m \times \rho_m$ und $\beta := \phi_{m+1} \times \rho_{m+1}$. Für die Drehung des Stokes-Vektors \mathbf{st}_m gilt dann

$$\mathcal{L}(\Xi(\phi_m \times \rho_m, \phi_{m+1} \times \rho_{m+1})) \cdot \mathbf{st}_m. \quad (2.23)$$

Um die Streuung polarisierten Lichts an einem Partikel in eine Richtung \mathbf{r} zu berechnen, wird der Stokes-Vektor der einfallenden Strahlung durch eine lineare Transformation mittels einer sog. *Mueller-Matrix* $\mathcal{M}(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mit Azimutwinkel $\theta \in [0, 2\pi[$ und Elevationswinkel $\varphi \in [0, \pi]$ in einen neuen Stokes-Vektor übergeführt. Allgemein gilt:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{\parallel s} \\ \mathbf{I}_{\perp s} \\ \mathbf{U}_s \\ \mathbf{V}_s \end{pmatrix} := \frac{1}{k^2 r^2} \mathcal{M}(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{\parallel i} \\ \mathbf{I}_{\perp i} \\ \mathbf{U}_i \\ \mathbf{V}_i \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathcal{M}(\theta, \varphi) := (m_{ij})_{i,j=1,\dots,4} : [0, 2\pi[\times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad (2.24)$$

mit Wellenzahl k und Länge $r = |\mathbf{r}|$; s steht für „scattered“ und i für „incoming“. Dieselbe Darstellung ergibt sich auch für die (I, Q, U, V)-Form des Stokes-Vektors aus Gl. (2.19). Explizite Angaben der einzelnen m_{ij} finden sich z. B. bei Mishchenko et al. (2000), S. 11. Im allgemeinsten Fall können die 16 Winkelemente m_{ij} einer solchen Phasenmatrix allesamt von 0 verschieden sein. Jedes m_{ij} stellt für sich eine winkelabhängige Funktion der Wellenlänge, Teilchengröße, Form und Komposition dar. Je symmetrischer die Streuer, desto weniger verschiedene Einträge ungleich 0 hat die Mueller-Matrix oftmals. Die Streumatrizen lassen sich nach Bohren und Huffman (1983) in verschiedene Klassen einteilen. Wir werden in Kap. 2.3 auf hier verwendete Mueller-Matrizen noch näher eingehen. Bezogen auf das $(m+1)$ -te Streueignis haben wir generell eine Mueller-Matrix der Form

$$\mathcal{M}(\lambda_m, \phi_m, \rho_m, \mathbf{st}_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}, \phi_{m+1}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}. \quad (2.25)$$

Dadurch erhalten wir den Stokes-Vektor \mathbf{ST}_{m+1} des gestreuten Photons (im Fernfeld) mit neuer Flugrichtung ϕ_{m+1} in einer Entfernung $r = |\mathbf{r}| = 1$ als

$$\mathbf{ST}_{m+1} := \mathcal{M}(\lambda_m, \phi_m, \rho_m, \mathbf{st}_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}, \phi_{m+1}) \cdot \mathcal{L}(\Xi(\phi_m \times \rho_m, \phi_{m+1} \times \rho_{m+1})) \cdot \mathbf{st}_m, \quad (2.26)$$

und schließlich \mathbf{st}_{m+1} durch Normierung von \mathbf{ST}_{m+1} .

Die neue Richtung $\phi_{m+1} \in \mathbb{S}^2$ des Photons wird in Koordinaten des Drehwinkels $\xi \in [0, 2\pi]$ und des Streuwinkels $\vartheta \in [0, \pi]$ transformiert, um die TP \mathcal{D} zu erhalten. Dazu führen wir eine Wahrscheinlichkeitsdichte ph_{pol} ein, die als *polarisierte Phasenfunktion* bezeichnet wird. Die Streuungsrichtungverteilung eines beliebigen Streuers muss nicht immer eine Dichte haben (orientierte Eiskristalle z.B. streuen nur in eine diskrete Anzahl an Richtungen). Die Mueller-Matrizen müssen gewisse Regularitätseigenschaften erfüllen, damit eine Dichte der Streuungsrichtungverteilung existiert (siehe Kerscher (1994)). Die polarisierte Phasenfunktion ist abhängig von der Gesamtintensität der Streuung:

$$ph_{pol}(\vartheta, \xi) := \frac{\mathbf{I}_{m+1}(\vartheta, \xi)}{4\pi} \quad \text{mit} \quad \mathbf{I}_{m+1}(\vartheta, \xi) := (\mathbf{I}_{\parallel, m+1} + \mathbf{I}_{\perp, m+1})(\vartheta, \xi). \quad (2.27)$$

Die unpolarisierte Phasenfunktion $ph(\vartheta)$ kann als Randdichte von $ph_{pol}(\vartheta, \xi)$ berechnet werden:

$$ph(\vartheta) := \int_0^{2\pi} ph_{pol}(\vartheta, \xi) d\xi. \quad (2.28)$$

Um die Berechnung der gemeinsamen Verteilungsfunktion \mathcal{D} von ϑ und ξ zu erleichtern wird die bedingte polarisierte Phasenfunktion als Dichte eingeführt:

$$ph_{bed}(\xi | \vartheta) := \begin{cases} \frac{ph_{pol}(\vartheta, \xi)}{ph(\vartheta)} & \text{für } ph(\vartheta) \neq 0, \\ 0 & \text{für } ph(\vartheta) = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Falls $ph(\vartheta)$ und $ph_{bed}(\xi | \vartheta)$ existieren, können wir \mathcal{D} definieren durch

$$\mathcal{D}(s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}; C) := \int_{C_\vartheta} \int_{C_\xi} ph_{bed}(\xi | \vartheta) d\xi ph(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad (2.30)$$

mit einer messbaren Rechtecksmenge $C := C_\vartheta \times C_\xi \subset [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ und dem Bild $R_\phi := \Phi^{-1}(C)$ der Inversen der Koordinatentransformation von ϕ nach ϑ und ξ .

Dann ist $Dir(s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}; \cdot)$ das Bildmaß von $\mathcal{D}(s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}; \cdot)$ unter der inversen Koordinatentransformation von $[0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{S}^2$.

Der Übergang vom Referenzvektor ρ_m zum neuen Referenzvektor ρ_{m+1} (wird nach Gl. (2.22) berechnet) ist deterministisch. ρ_{m+1} hängt von $s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}$ und ϕ_{m+1} ab. Dadurch kann die TP für den Referenzvektor

$$\begin{aligned} Ref : (\mathcal{S} \times \mathbb{R}^3 \times \Psi \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2) \times \mathfrak{B}(\mathbb{S}^2) &\longrightarrow [0, 1] \\ (s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}, \phi_{m+1}; R_\rho) &\longmapsto Ref(s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}, \phi_{m+1}; R_\rho) \end{aligned} \quad (2.31)$$

mit dem Dirac-Maß

$$Ref(s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}, \phi_{m+1}; R_\rho) := \delta_{\rho_{m+1}}(R_\rho) \quad (2.32)$$

für beliebiges $(s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}, \phi_{m+1})$ und eine beliebige Borel-messbare Teilmenge R_ρ der Einheitskugel \mathbb{S}^2 definiert werden. Das Dirac-Maß besitzt Einheitsmasse in $\rho_{m+1} \in \mathbb{S}^2$.

Ebenso ist der Übergang vom normierten Stokes-Vektor \mathbf{st}_m zum neuen normierten Stokes-Vektor \mathbf{st}_{m+1} deterministisch und hängt von $s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}, \phi_{m+1}$ sowie ρ_{m+1} ab. Für die Berechnung von \mathbf{ST}_{m+1} gilt Gl. (2.26). Anschließend wird \mathbf{ST}_{m+1} normiert, wodurch man \mathbf{st}_{m+1} erhält. Damit ist die TP für den normierten Stokes-Vektor

$$\begin{aligned} Pol : (\mathcal{S} \times \mathbb{R}^3 \times \Psi \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2) \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^4) &\longrightarrow [0, 1] \\ (s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}, \phi_{m+1}, \rho_{m+1}; R_{\mathbf{st}}) &\longmapsto Pol(s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}, \phi_{m+1}, \rho_{m+1}; R_{\mathbf{st}}), \end{aligned} \quad (2.33)$$

mit dem Dirac-Maß

$$Pol(s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}, \phi_{m+1}, \rho_{m+1}; R_{\mathbf{st}}) := \delta_{\mathbf{st}_{m+1}}(R_{\mathbf{st}}) \quad (2.34)$$

für beliebiges $(s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}, \phi_{m+1}, \rho_{m+1})$ und eine beliebige Borel-messbare Teilmenge $R_{\mathbf{st}}$ des \mathbb{R}^4 definiert. Das Dirac-Maß hat Einheitsmasse in $\mathbf{st}_{m+1} \in \mathbb{R}^4$.

Insgesamt lässt sich damit aus dem m -ten Zustandstupel $s_m := (\mathbf{x}_m, \psi_m, \lambda_m, \phi_m, \rho_m, \mathbf{st}_m)$ der nächste Zustand $s_{m+1} := (\mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}, \phi_{m+1}, \rho_{m+1}, \mathbf{st}_{m+1})$ eines Photons nach erfolgter Streuung konstruieren. Diese Prozedur wird mehrmals iteriert, wodurch Mehrfachstreuung simuliert werden kann.

Die TP \mathcal{P} des Markovschen korpuskularen multiplen Streuprozesses in diskreter Zeit $(\mathcal{S}, \mathcal{P})$ aus Gl. (2.3) setzt sich also aus den TPs von Kollision (Gl. (2.7)), Streuerselektion (Gl. (2.15)), Änderung der Wellenlänge (Gl. (2.16)), Streurichtung (Gl. (2.17)), Referenzvektor (Gl. (2.31)) und normiertem Stokes-Vektor (Gl. (2.33)) zusammen. Wir führen also eine *Markov-Komposition* folgender Markov-Kerne durch:

$$\begin{aligned}
 (s_m; R_{\mathbf{x}}) &\longmapsto Col(s_m; R_{\mathbf{x}}) \\
 (s_m, \mathbf{x}_{m+1}; R_{\psi}) &\longmapsto Sel(s_m, \mathbf{x}_{m+1}; R_{\psi}) \\
 (s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}; R_{\lambda}) &\longmapsto Wav(s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}; R_{\lambda}) \\
 (s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}; R_{\phi}) &\longmapsto Dir(s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}; R_{\phi}) \\
 (s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}, \phi_{m+1}; R_{\rho}) &\longmapsto Ref(s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}, \phi_{m+1}; R_{\rho}) \\
 (s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}, \phi_{m+1}, \rho_{m+1}; R_{\mathbf{st}}) &\longmapsto Pol(s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}, \phi_{m+1}, \rho_{m+1}; R_{\mathbf{st}}) .
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Dies geschieht durch iterative Integration:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(s_m; \mathcal{R}) &:= \\
 &\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\Psi} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{R}^4} 1_{\mathcal{R}}(\mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}, \phi_{m+1}, \rho_{m+1}, \mathbf{st}_{m+1}) \\
 &\quad Pol(s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}, \phi_{m+1}, \rho_{m+1}; d\mathbf{st}_{m+1}) \\
 &\quad Ref(s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}, \phi_{m+1}; d\rho_{m+1}) \\
 &\quad Dir(s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}; d\phi_{m+1}) \\
 &\quad Wav(s_m, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}; d\lambda_{m+1}) \\
 &\quad Sel(s_m, \mathbf{x}_{m+1}; d\psi_{m+1}) \\
 &\quad Col(s_m; d\mathbf{x}_{m+1})
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

für eine beliebige Borel-messbare Teilmenge \mathcal{R} des Zustandsraumes $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{15}$. Wir haben damit die TP für den stationären Markov-Prozess in diskreter Zeit $(\mathcal{S}, \mathcal{P})$ berechnet.

Um später eine Verknüpfung zu einem PDMP herstellen zu können, muss die Konstruktion der TP \mathcal{P} leicht angepasst in Abhängigkeit von t erfolgen. Dazu führen wir zeitabhängige Zustände

$$u_m := (t_m; s_m) \in \mathcal{U} := \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{S}, \quad m \in \mathbb{N}_0 \tag{2.37}$$

des Photons auf dem Zustandsraum \mathcal{U} ein, wobei s_m der Zustand des Photons nach dem m -ten Streueignis zum Zeitpunkt $t_m \in \mathbb{R}_0^+$ ist. Durch die Folge $(u_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ bzw. durch den Prozess $\{u_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ in diskreter Zeit wird somit der komplette Weg (Pfad) des einzelnen Photons angegeben, der zwischen den einzelnen Streueignissen linear verläuft. Derartige Prozesse $\{u_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ in diskreter Zeit werden vom Programm `pbs5` berechnet, um Lidar-Rücksignale zu simulieren.

Zum Startzeitpunkt $t_0 := 0$ mit Startzustand $u_0 := (t_0; s_0) \in \mathcal{U}$ des Photons herrscht eine gewisse *Startverteilung* vor, die durch das Wahrscheinlichkeitsmaß $\nu : \Upsilon \rightarrow [0, 1]$ beschrieben wird. In `pbs5` entspricht diese Startverteilung den Eigenschaften des Emitters wie Position, Laser-Wellenlänge sowie Richtung, Divergenz und Polarisation des ausgesandten Laserpulses. Ausgehend von ν beginnt eine *deterministische Bewegung* des Photons zu den einzelnen Streupunkten. Der Extinktionskoeffizient $\sigma : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ (auch als Stoßintensität bezeichnet, siehe oben) entspricht nun der Sprungintensität eines PDMP, denn mit der Dichtefunktion $\gamma(s_m; B)$ von $Col(s_m; \cdot)$ aus Gl. (2.13) mit $t \in \mathbb{R}^+$ anstelle von B können wir die TP zum nächsten Stoßzeitpunkt $t_{m+1} \in \mathbb{R}^+$ durch $T : \mathcal{U} \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^+) \rightarrow [0, 1]$ mit

$$\begin{aligned}
 T(u_m; R_t) &:= \int_{R_t \cap [t_m, \infty)} \sigma(\mathbf{x}_m + c(t - t_m) \phi_m, \psi_m, \lambda_m, \phi_m, \rho_m, \mathbf{st}_m) \\
 &\quad \cdot \exp\left(- \int_0^{t-t_m} \sigma(\mathbf{x}_m + cs \phi_m, \psi_m, \lambda_m, \phi_m, \rho_m, \mathbf{st}_m) ds\right) dt
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

angeben. Der Markov-Kern Col kann also durch den Markov-Kern T ersetzt werden.

Die TP für ein einzelnes Streueignis am nächsten Streupunkt $\mathbf{x}_{m+1} := \mathbf{x}_m + c(t_{m+1} - t_m)\phi_m$ ist äquivalent zur Sprung-TP $Q : \mathcal{S} \times \mathfrak{S} \rightarrow [0, 1]$, die die nicht-stetigen Sprünge in einem PDMP beschreibt. Dieser Markov-Kern Q wiederum setzt sich iterativ aus den TPs für Streuerselektion, Änderung der Wellenlänge, Änderung der Richtung, Änderung des Referenzvektors und Änderung des Stokes-Vektors zusammen. Für den Zustand des einfallenden Photons unmittelbar vor dem Streueignis an der Stelle \mathbf{x}_{m+1} gilt hier

$$\tilde{s}_{m+1} := (\mathbf{x}_{m+1}, \psi_m, \lambda_m, \phi_m, \rho_m, \mathbf{st}_m) . \quad (2.39)$$

Durch die stetige Bewegung auf Halbgeraden ändert sich die Ortskoordinate $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{m+1}$ eines Photons bei einem Streueignis nicht. Die *Positions-TP* ist also ein Dirac-Maß, und es gilt:

$$\begin{aligned} Pos : \mathcal{S} \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^3) &\rightarrow [0, 1] \\ (\tilde{s}_{m+1}, R_{\mathbf{x}}) &\mapsto \delta_{\mathbf{x}_{m+1}}(R_{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (2.40)$$

für ein beliebiges $\tilde{s}_{m+1} \in \mathcal{S}$ und für eine beliebige Borel-messbare Teilmenge $R_{\mathbf{x}}$ von \mathbb{R}^3 .

Durch Ersetzen der Zustände s_m durch \tilde{s}_{m+1} in den Gleichungen für die Markov-Kerne von Streuerselektion (2.15), Änderung der Wellenlänge (2.16), Streurichtung (2.17), Referenzvektor (2.31) und normiertem Stokes-Vektor (2.33) erhalten wir die vollständige *Streu-TP*

$$\begin{aligned} Q : \mathcal{S} \times \mathfrak{S} &\longrightarrow [0, 1] \\ (\tilde{s}_{m+1}; \mathcal{R}) &\longmapsto Q(\tilde{s}_{m+1}; \mathcal{R}) \end{aligned} \quad (2.41)$$

für eine beliebige Borel-messbare Teilmenge $\mathcal{R} := R_{\mathbf{x}} \times R_{\psi} \times R_{\lambda} \times R_{\phi} \times R_{\rho} \times R_{\mathbf{st}}$ des Zustandsraums \mathcal{S} wiederum (vgl. Gl. (2.36)) durch iterative Integration:

$$\begin{aligned} Q(\tilde{s}_{m+1}; \mathcal{R}) &:= \\ \int_{R_{\mathbf{x}}} \int_{R_{\psi}} \int_{R_{\lambda}} \int_{R_{\phi}} \int_{R_{\rho}} \int_{R_{\mathbf{st}}} &1_{\mathcal{R}}(\mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}, \phi_{m+1}, \rho_{m+1}, \mathbf{st}_{m+1}) \\ &Pol(\tilde{s}_{m+1}, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}, \phi_{m+1}, \rho_{m+1}; d\mathbf{st}_{m+1}) \\ &Ref(\tilde{s}_{m+1}, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}, \phi_{m+1}; d\rho_{m+1}) \\ &Dir(\tilde{s}_{m+1}, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}, \lambda_{m+1}; d\phi_{m+1}) \\ &Wav(\tilde{s}_{m+1}, \mathbf{x}_{m+1}, \psi_{m+1}; d\lambda_{m+1}) \\ &Sel(\tilde{s}_{m+1}, \mathbf{x}_{m+1}; d\psi_{m+1}) \\ &Pos(\tilde{s}_{m+1}; d\mathbf{x}_{m+1}) . \end{aligned} \quad (2.42)$$

Dabei wird im Vergleich zu Gl. (2.36) Col durch Pos ersetzt. Das Streueignis im Punkt \mathbf{x}_{m+1} wird in unserem Modell also durch $Q(\tilde{s}_{m+1}; \mathcal{R})$ komplett beschrieben.

Die *vollständige TP* \mathcal{Q} des korpuskularen multiplen Streuprozesses $\{u_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ mit Polarisation in diskreter Zeit kann wiederum durch Markov-Komposition der Markov-Kerne T und Q angegeben werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} : \mathcal{U} \times \Upsilon &\longrightarrow [0, 1] \\ \mathcal{Q}(u_m; \mathcal{R}') &:= \int_{\mathbb{R}_0^+} \int_{\mathcal{S}} 1_{\mathcal{R}'}(t, s) Q((\mathbf{x}_m + c(t - t_m)\phi_m, \psi_m, \lambda_m, \phi_m, \rho_m, \mathbf{st}_m); ds) T(u_m; dt) . \end{aligned} \quad (2.43)$$

Hierbei ist $\mathcal{U} := \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{S}$ der Zustandsraum und $\Upsilon := \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+) \otimes \mathfrak{S}$ die zugehörige Borelsche Produkt- σ -Algebra mit Elementen \mathcal{R}' . Es gilt $\mathcal{Q}(u_m; \mathcal{R}') = \mathcal{Q}((t_m, s_m); \mathcal{R}')$. Die Lösung der Differentialgleichung zur Beschreibung der deterministischen Bewegung des Photons zwischen den Sprüngen lautet

$$\varphi(t, s_m) = (\mathbf{x}_m + c(t - t_m)\phi_m, \psi_m, \lambda_m, \phi_m, \rho_m, \mathbf{st}_m) \quad (2.44)$$

für die Integralkurve $t \mapsto \varphi(t, s)$.

Damit haben wir den Übergang von einem stationären Markov-Prozess $(\mathcal{S}, \mathcal{P})$ in diskreter Zeit zu einem *partiell deterministischen Markovschen Sprungprozess* $(\mathcal{U}, \mathcal{Q})$ in kontinuierlicher (stetiger) Zeit vollzogen, der sich aus einem hoch-dimensionierten Zustandsraum \mathcal{U} sowie aus Trajektorien, die in der Ortskoordinate \mathbf{x} stetig und in den anderen Größen $\psi, \lambda, \phi, \rho$ und \mathbf{st} rechtsstetig (mit linksseitigen Limiten, d.h. „càdlàg“) sind, und aus einer *stationären Markovschen Familie von TPs* $(\mathcal{Q}(u_m; \mathcal{R}') : u_m \in \mathcal{U}, \mathcal{R}' \in \Upsilon)$ in kontinuierlicher Zeit zusammensetzt. Dieser Prozess $(\mathcal{U}, \mathcal{Q})$ ist der von den Programmen `pbs4` und `pbs5` (siehe Kap. 2.3) simulierte, um polarisierte Lidar-Rücksignale zu berechnen.

Abschließend kann eine Brücke vom korpuskularen Mehrfachstreuprozess zum Strahlungstransport von Licht geschlagen werden. Die so erhaltene RTE ist hier von skalarer Form und berücksichtigt die Polarisation und Wellenlänge von Licht. Zusammengefasst erhalten wir unter Verwendung der Theorie von PDMPs für den korpuskularen multiplen Streuprozess mit Polarisation und Änderung der Wellenlänge als sog. *infinitesimalen Erzeuger*

$$(\mathbf{A}f)(s) = (\mathbf{A}_D f)(s) + (\mathbf{A}_S f)(s) \text{ mit einer messbaren Funktion } f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.45)$$

bestehend aus einem deterministischen Teil zur Beschreibung der deterministischen Bewegung zwischen den Sprüngen

$$(\mathbf{A}_D f)(s) := \langle c\phi, \nabla_{\mathbf{x}} f(s) \rangle \quad (2.46)$$

und einem stochastischen Teil zur Beschreibung des Sprungverhaltens

$$(\mathbf{A}_S f)(s) := \sigma(s) \int_{\mathcal{S}} (f(s') - f(s)) Q(s, ds') \quad \forall s \in \mathcal{S}, f \in \mathcal{D}(\mathbf{A}) \quad (2.47)$$

mit Q nach Gl. (2.42). Hierbei heißt $\mathcal{D}(\mathbf{A}) := \{f \in \mathfrak{B}(\mathcal{S}) : \mathbf{A}f \text{ existiert als } \|\cdot\| \text{-Limes}\}$ Gebiet oder Bereich des infinitesimalen Erzeugers \mathbf{A} . Durch Einfügen des Erzeugers \mathbf{A} in eine skalare RTE ohne Quellterm erhalten wir das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} w(t, s) &= \langle c\phi, \nabla_{\mathbf{x}} w(t, s) \rangle - \sigma(s) w(t, s) + \sigma(s) \int_{\mathcal{S}} w(t, s') Q(s, ds') \\ w(0, s) &= g(s), \end{aligned} \quad (2.48)$$

wobei die Lösung $w(t, s)$ des Anfangswertproblems als Photonendichte in Abhängigkeit von der Zeit $t \in \mathbb{R}_0^+$ und dem Photonenzustand $s \in \mathcal{S}$ mit Anfangsbedingung $g \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$ interpretiert werden kann.

Um die Berechnung der Photonen-Pfade zu beschleunigen, kann die sog. „*Methode der fiktiven Kollisionen*“ benutzt werden, die auch als „fictitious shock technique“ oder „maximale Wirkungsquerschnitt-Methode“ bekannt ist (Lapeyre et al. (2003), S. 78 oder Marchuk et al. (1980), S. 9).

Sie wandelt den Prozess mit lokal variablen σ in einen Prozess mit *einem* konstanten $\tilde{\sigma} := \sup_{s \in \mathcal{S}} \sigma(s) < \infty$ um. Durch $\tilde{\sigma} \geq \sigma(s) \forall s \in \mathcal{S}$ werden im Mittel mehr Stöße auftreten, was durch Anpassung des Markov-Kerns für die reine Streuung, $Q(\tilde{s}; \mathcal{R})$, in Form eines neuen Markov-Kerns

$$Q'(\tilde{s}; \mathcal{R}) := \left(1 - \frac{\sigma(\tilde{s})}{\tilde{\sigma}}\right) \delta_{\tilde{s}}(\mathcal{R}) + \frac{\sigma(\tilde{s})}{\tilde{\sigma}} Q(\tilde{s}; \mathcal{R}) \quad (2.49)$$

geschieht. Damit muss der Extinktionskoeffizient $\sigma(\tilde{s})$ nun nur noch an den fiktiven Stoßpunkten genommen werden (und nicht mehr alle σ), um t aus Gl. (2.5) zu erhalten. Die Methode der fiktiven Kollisionen kann auch als PDMP geschrieben werden. Für weitere Details zur Verbesserung dieser Methode durch Iteration und zur Darstellung des multiplen Streuprozesses in den Simulationen siehe Oppel und Wengenmayer (2006), Wengenmayer (2008) oder Hirschberger (2007).

2.2 Messmethodik eines geeigneten Rückstreulidars (RSL) für Simulationen und Realität

Bislang gibt es kein RSL, das ohne Ausnutzung des Dopplereffekts den Wind vor Flugzeugen messen kann. DWL aber haben die in Kap. 1 erwähnten Schwierigkeiten bei Windmessungen transversal zur Flugrichtung. Darum werden im Anhang A (A.1 bis A.4) rein auf Rückstreuung basierende Messverfahren, die zum Teil Windmessung erlauben, beschrieben und analysiert.

Von ihnen sind jedoch jeweils nur Teile für ein für Messungen vor bewegten Objekten in Nahdistanz brauchbares RSL geeignet. Aus der **Particle Imaging Velocimetry (PIV)** von Anhang A.1 ist dies das Scannen in Ebenen, aus der **Speckle Imaging Velocimetry (SIV)** von Anhang A.2 das Scannen von Volumenschichten und der Strahlteiler, und vom **Volume Imaging Lidar (VIL)** von Anhang A.4 die Messgeometrie und der in verschiedene Richtungen scannende Laser (alternativ zum Strahlteiler), der ein großes Emitter-Blickfeld (**EFOV**) liefert. Aus dem **Wide Angle Imaging Lidar (WAIL)** von Anhang A.3 wären das große EFOV und Receiver-Blickfeld (**RFOV**) mit Abbildung der Intensitäten auf dem CCD wünschenswert, was aber aus im Anhang A.3 genannten Gründen nicht geht. Ein großes RFOV liefert zudem höhere mehrfach-gestreute Beiträge im Receiver.

Abbildung 2.1 zeigt das allgemeine Messprinzip eines für Windmessungen vor dem Flugzeug geeigneten RSL. Die Intensitäten der Rückstreuung von Laserlicht aus einer dünnen Messschicht (Tiefe i. Allg. einige Meter) für eine Vielzahl an Messrichtungen werden zu Zeitpunkten t_1 (Abb. 2.1(a)) und $t_2 = t_1 + \Delta t$ (Abb. 2.1(b)) gemessen. Aufgrund der Flugeschwindigkeit von $v_{A/C}$ auf die Ebene zu müssen die Winkel der Messrichtungen angepasst werden (d.h. zur Zeit t_2 müssen sie im Vergleich zur Zeit t_1 entsprechend vergrößert werden, um für beide Zeitpunkte jeweils genau die gleichen Punkte der selben Messschicht zu scannen). Mit den beiden Bildern aus einer festen Schicht d wird jeweils eine KK oder ähnliche Operation durchgeführt. Alternativ ist dies auch für zwei unterschiedliche Schichten d und $d + \Delta d$ zu gleichem Zeitpunkt t möglich. Dies ist nur für grobe Verschiebungen sinnvoll, bei denen keine Rotationsbewegung rekonstruiert werden muss (siehe Kap. 5.5), da durch die beiden leicht unterschiedlichen Messpositionen entlang der Flugachse (x) die beiden Bilder bei zwar gleicher Pixelzahl leichte Größenunterschiede bezüglich der y - und z -Dimensionen aufweisen. Bedingt durch die nötige Messanordnung mit Strahl-Auffächerung, die von einer einzelnen Lidar-Position ausgeht, bleibt eine Verzerrung, da in dem Bild aus der weiter entfernten Schicht im Vergleich zu dem aus der näheren Schicht ein Informationsverlust in der Mitte des Bildes auftritt (Seitenlänge der Pixel unterschiedlich).

Anstatt wie bei SIV je zwei hochaufgelöste CCD-Bilder ($\sim 1000 \times 1000$ Pixel) für einen Spot zu korrelieren, um den Wind in einem nur kleinen Ausschnitt vor dem Flugzeug zu bestimmen, wird beim neuen RSL einem solchen Spot nur ein einziger Intensitätswert pro Bild zugeordnet. Die Intensitätswerte der einzelnen Spots zweier Bilder des RSL werden korreliert, wodurch sich die transversalen y - z -Windvektoren für den gesamten wichtigen Bereich vor dem Flugzeug in einem Schritt berechnen lassen. Die Berechnungsdauer für nur einen ca. 1 m^2 großen Spot in SIV ist in etwa so groß wie die einer ca. $100 \text{ m} \times 60 \text{ m}$ großen Windfeld-Ebene für dieses RSL. Damit ist eine Echtzeitauswertung möglich, da hier deutlich weniger Pixel (ca. 200×120) zu korrelieren sein werden als bei PIV, wo Echtzeitauswertung möglich ist (Raffel et al., 2007). Vergrößerungs- oder Verkleinerungsfaktoren bei der Abbildung der realen Strömung auf ein CCD oder **CMOS** wie bei PIV treten hier nicht auf.

Die Aufnahme beim RSL kann nicht direkt per CCD, sondern nur über den Umweg der Trennung der Rücksignale in Abhängigkeit von ihrer Richtung erfolgen (die Anordnung der Rücksignale erfolgt dann in einer Ebene, die aussieht wie ein CCD-Bild). Da das RSL (anders als das VIL) im Meterbereich messen muss, wird bei einem Zeitintervall von zumeist $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ bei transversalen Windgeschwindigkeiten von über $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ eine Strukturverschiebung von mehr als 1 m stattfinden. Wenn man das volle Δt ausnutzt², um die Pulse für Bild 1 zeitversetzt nacheinander in die einzelnen

² Je höher die Messdistanz, desto länger dauert es, bis das Rücksignal eines emittierten Laserpulses wieder zurück im Receiver ist. Erst dann kann der nächste Puls in die nächste Richtung ausgesandt werden. Bei z.B. 500 m Messdistanz

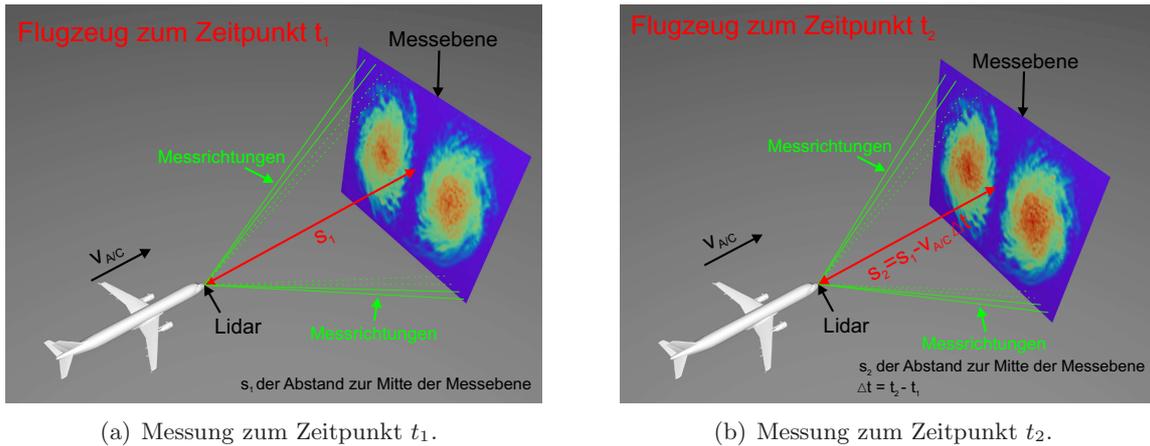


Abbildung 2.1: Messprinzip eines für Windmessungen vor dem Flugzeug geeigneten RSL. Die Intensitäten der Rückstreuung von Laserlicht aus einer dünnen Messschicht für eine Vielzahl an Messrichtungen werden zu Zeiten t_1 (Abb. 2.1(a)) und $t_2 = t_1 + \Delta t$ (Abb. 2.1(b)) gemessen. Dargestellt sind Intensitätsverteilungen der Rückstreuung aus Simulationen wie in Kap. 5. Aufgrund der Fortbewegung des Flugzeugs mit $v_{A/C}$ müssen die Winkel der Messrichtungen angepasst werden, um für beide Zeitpunkte jeweils genau die gleichen Punkte der selben Messschicht zu scannen.

Richtungen zu schicken, wie dies mit einem Scanner beim VIL im großskaligen Bereich der Fall ist, hätte man beim RSL bereits minimale Verschiebungen/Wanderungen der Strukturen während der Aufnahme von Bild 1. Man kann bei zu langsamem zeilen- oder spaltenweisem Scannen also durchaus mehrmals ein und dieselbe Intensitätsstruktur der Rückstreuung erfassen, während eine andere, zwischenzeitlich oder vorher vorhandene nie gemessen wird. Diese Verfälschung/Verwaschung der Rückstreuergebnisse spielt beim VIL trotz sequentiellem Scannen aufgrund der Großskaligkeit der Range Bins und Abstände der Azimut- und Elevationswinkel in großer Messentfernung kaum eine Rolle. Wir dagegen hätten beim neuen RSL leicht verschwommene Messbilder.

Eine Möglichkeit zur Lösung dieses Problems wäre die gleichzeitige/zeitgleiche Emission aller Laserpulse in die verschiedenen Richtungen zu einem Zeitpunkt und eine räumliche Trennung der zeitgleich im Teleskop empfangenen Signale durch Projektion auf ein CCD oder CMOS über geeignete optische Bauteile im Strahlengang. Dies scheint (momentan) etwas unrealistisch. Besser wäre es wohl, alle 0.1 s einen extrem starken Laserpuls zu erzeugen und diesen über Strahlteiler³/Fasern und Prismen/Gitter oder Ähnlichem vor Emission in die Atmosphäre in einzelne Photonenbündel gleicher Intensität mit diskreten, minimal unterschiedlichen Wellenlängen λ zu spalten⁴. Diese λ -Unterschiede müssen größer sein als die maximal möglichen Doppler-Shifts und Raman-Verschiebungen, die Licht bei Rückstreuung erfahren kann, damit das rückgestreute Licht einer bestimmten Wellenlänge wieder eindeutig seiner Emissionsrichtung zugeordnet werden kann, aber auch noch so klein, dass die von λ abhängigen Streueigenschaften der Atmosphärenpartikel keinen Einfluss bekommen. Zum Beispiel ein Frequenzkamm oder ein anderes spektral trennendes Messgerät liefert dann die den einzelnen empfangenen Wellenlängen zugeordneten Intensitäten, die im Detektor zeitgleich empfangen werden. Dann weiß man, wie viel Licht aus welcher Richtung zurückkommt und erhält eine Intensitätsverteilung, da in jede Richtung (nahezu) gleich viel Lichtenergie geschickt wurde.

und 30000 zu messenden Richtungen reichen 0.1 s gerade noch, um einen Scan der gesamten Ebene zu vervollständigen (Photonen mit Lichtgeschwindigkeit c , Hin- und Rückweg ca. 1000 m), bevor das nächste Bild zum nächsten „Zeitpunkt“ erstellt werden muss, um in der Zeitspanne $\Delta t = 0.1$ s zu bleiben.

³ Siehe Abb. 2.2(a) für ein Beispiel einer holographischen Linse. Es gibt auch winzige, um zwei Achsen drehbare (scannende) Mikrospiegel (MEMS), die durch Laserprojektion in sehr kurzer Zeit zeilenweise (Farb)Bilder auf Ebenen erzeugen, siehe Queren et al. (2011), S. 80. Ein solches Bauteil könnte auch in unserem Fall hilfreich sein.

⁴ Auf jeden Fall müssen Photonenbündel mit leicht unterschiedlichem λ in die Richtungen ausgesandt werden. Dies könnte auch eine Vielzahl von energiearmen (praktisch zeitgleichen) Pulsen mit minimal verschiedenen λ sein.

2.3 Monte-Carlo-Simulationen eines RSL mit `pbs5`: Allgemeine Funktionsweise von `pbs` und Neuerungen in `pbs5`

Die für unsere Monte-Carlo-Simulationen eines gepulsten Laserstrahles in der Atmosphäre verwendete Mehrfachstreuungs-Lidargleichung fußt auf einer von [Marchuk et al. \(1980\)](#) am Computing Center in Novosibirsk in den siebziger Jahren hergeleiteten Lidar-RTE aus einer Summe iterierter Integrale hoher Ordnung, den einzelnen Mehrfachstreuungsbeiträgen. Zur Beschleunigung der Berechnung dieser Integrale wurden damals varianzreduzierende Methoden entwickelt. Ende der achtziger Jahre wurde am Mathematischen Institut der LMU München ein stochastisches Modell zur Berechnung mehrfachgestreuter Lidar-Rücksignale mit dem Satz von Ionescu-Tulcea definiert und Simulationen von Zweifachstreuungen mit Inversion durchgeführt ([Oppel et al., 1989](#)). Mit Beginn der neunziger Jahre wurde in Zusammenarbeit mit dem damaligen Institut für Optoelektronik des DLR in Oberpfaffenhofen und obigem Computing Center der Russischen Akademie der Wissenschaften in Novosibirsk am Mathematischen Institut der LMU München eine *exakte Mehrfachstreuungs-Lidargleichung* mit Polarisation hergeleitet und als Codes `pbs` und `pbs2`⁵ unter Verwendung varianzreduzierender Monte-Carlo-Methoden zur Berechnung sämtlicher Anteile der Lidar-Rücksignale implementiert ([Kerscher, 1994](#), [Kerscher et al., 1995](#), [Starkov et al., 1995](#), [Noormohammadian, 1996](#)).

Der stochastische Prozess der Mehrfachstreuung von Licht kann auch als korpuskularer Markovscher Lidar-Mehrfachstreuprozess mit Polarisation formuliert werden, siehe Kap. 2.1 bzw. [Oppel und Wengenmayer \(2003, 2006\)](#). Damit können z. B. mit TPs auch Änderungen der Wellenlänge stochastisch simuliert werden, wie dies bei Rotations-Ramanstreuung von Photonen (d. h. Raman-Lidars) üblich ist ([Wengenmayer et al., 2003](#)) und in `pbs3` implementiert wurde. Außerdem konnten damit auch Mischungen verschiedener Streupartikel wie Mie-Teilchen, O₂- oder N₂-Moleküle für Simulationen verwendet werden. Zuletzt fand eine Weiterentwicklung bezüglich der Detektor- und Extinktionseigenschaften statt. Die in C++ objekt-orientiert programmierte Version `pbs4` ist in der Lage, Rückstreusignale eines Laserpulses zeitaufgelöst mit CCDs variabler Auflösung als Detektor (statt bisher einer einzelnen Photodiode oder Ähnlichem) und in Atmosphären mit beliebiger, variabler Extinktionsfunktion zu simulieren ([Prigarin et al., 1998](#), [Oppel et al., 2007](#), [Wengenmayer, 2008](#)). Die Auswirkung verschiedener Streuer(mischungen) auf das resultierende Rücksignal-Streumuster unter Berücksichtigung der Polarisation auf dem CCD konnte damit analysiert und Vergleiche mit echten Messungen ([Roy et al., 2004](#), [Oppel et al., 2006](#)) und anderen Codes ([Chaikovskaya et al., 2009](#)) gezogen werden.

Neben `pbs` gibt es eine Reihe meteorologisch-physikalischer Codes zur Simulation von Strahlungstransport durch die Atmosphäre, etwa das Programm *MYSTIC* des Meteorologischen Instituts der LMU München ([Mayer, 2009](#)). Varianzreduzierende Monte-Carlo-Methoden spielen heute vor allem noch bei extrem dichten Wolken mit hoher optischer Tiefe eine Rolle und werden dazu weiterentwickelt ([Buras und Mayer, 2011](#)). Für die im Rahmen dieser Arbeit simulierten, eher dünnen atmosphärischen Strukturen spielen sie keine Rolle und daher wird darauf auch zugunsten einer höheren Photonenzahl durch beschleunigte Berechnung verzichtet.

In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten Wesensmerkmale der Software `pbs` und Neuerungen der Weiterentwicklung `pbs5` zur Simulation von Wirbelschleppenmessungen mit RSL vor Flugzeugen dargestellt werden. Wie `pbs4` gehorcht auch `pbs5` dem ANSI C++-Standard und kann damit von jedem ANSI C++-kompatiblen Compiler wie `gcc` auf UNIX- oder Windows-Systemen kompiliert werden.

⁵ In `pbs` wurde das Programm `rbs` (ohne Polarisation) mittels Mueller-Matrizen um Polarisation als Eigenschaft erweitert. Die Programme `pbs` und `pbs2` unterschieden sich im Format der Mueller-Matrizen.

2.3.1 Der Lidar-Emitter (Laser) in pbs5

Jede Simulation mit `pbs` startet mit dem Einlesen einer Eingabeparameter-Datei. Diese beinhaltet die *Parameter für die Emission eines Laserpulses*, zu denen

- die Position des Zentrums der Pulsemission $\mathbf{x}_E \in \mathbb{R}^3$ (in kartesischen Koordinaten),
- der Normalenvektor $\mathbf{n}_E \in S^2$, $\mathbf{n}_E = -\phi_E$ ($\phi_E \in S^2$ die Emissionsrichtung) auf die Emitter-Ebene, die eine Kreisscheibe der Fläche $A_E := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_E, \mathbf{n}_E \rangle = 0 \text{ und } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_E\| < r_E\}$ mit Mittelpunkt \mathbf{x}_E und Radius $r_E \in \mathbb{R}^+$ ist,
- der Winkel der Semidivergenz $\gamma_E \in [0, \frac{\pi}{2}]$ der Photonen, die gemäß einer Gleichverteilung auf der Kugelkappe in S^2 um die Hauptachsenrichtung ϕ_E (koaxialer Kegel) ausgesandt werden,
- der Referenzvektor des Emitters $\rho_E \in S^2$ mit $\rho_E \perp \phi_E$,
- die Polarisation der Photonen am Start in Form des normierten Stokes-Vektors $\mathbf{st}_E \in \mathbb{R}^4$, und
- die Pulslänge des ausgesandten Laserpulses $s_p \in \mathbb{R}_0^+$

zählen (siehe auch Abb. 2.2(b), die bereits die Neuerungen beinhaltet). Für das Emitter-Blickfeld gilt $\text{FOV}_E := \{\phi \in S^2 : \langle \phi, \phi_E \rangle > \cos(\gamma_E)\}$. Die Startverteilung aus Kap. 2.1 ist definiert durch

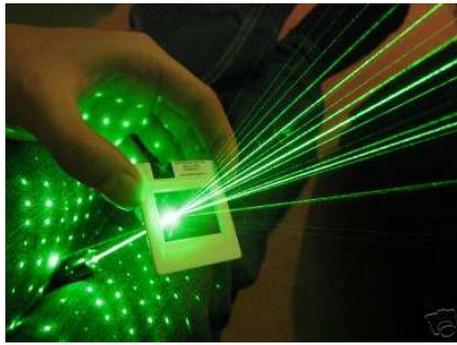
$$v : \Upsilon \rightarrow [0, 1], \quad B \mapsto v(B) := \mu_{t,E} \times \mu_{\mathbf{x},E} \times \mu_{\psi,E} \times \mu_{\lambda,E} \times \mu_{\phi,E} \times \mu_{\rho,E} \times \mu_{\mathbf{st},E}, \quad B \in \Upsilon. \quad (2.50)$$

Hierbei bezeichnen

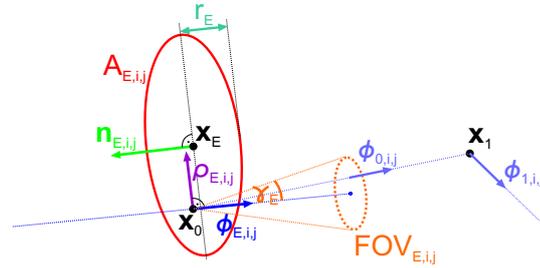
- $\mu_{t,E}$ die Dichte der normierten Gleichverteilung auf $[0, \frac{s_p}{c}]$ bezüglich des Lebesgue-Maßes λ_1 auf \mathbb{R} (Rechteckimpuls),
- $\mu_{\mathbf{x},E}$ die Dichte der normierten Gleichverteilung auf A_E bezügl. des Lebesgue-Maßes λ_2 auf S^2 ,
- $\mu_{\psi,E}$ das Dirac-Maß von ψ_E (in `pbs5` nicht verwendet),
- $\mu_{\lambda,E}$ das Dirac-Maß von λ_E (in `pbs5` nicht verwendet),
- $\mu_{\phi,E}$ die Dichte der normierten Gleichverteilung auf FOV_E bezüglich des Lebesgue-Maßes λ_3 auf \mathbb{R}^3 ,
- $\mu_{\rho,E}$ das Dirac-Maß von ρ_E , und
- $\mu_{\mathbf{st},E}$ das Dirac-Maß von \mathbf{st}_E .

Die Verwendung eines zuverlässigen und dabei möglichst schnellen **Zufallszahlengenerators (RNG)** ist für gute Resultate in Monte-Carlo-Simulationen wie `pbs` unerlässlich. Als Algorithmus zur Generierung auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilter Pseudo-ZZen wird in `pbs5` eine aktuelle C++-Variante des **Mersenne Twisters (MT)** verwendet (Matsumoto und Nishimura, 1998). In den früheren Versionen bis `pbs4` wurde statt des MT ein auf D. Lehmer's Residualmethode basierender Pseudo-RNG von Starkov eingesetzt. Zur Analyse des Rauschens in Kap. 5 und Anhang B.1 wird der RNG Ran nach Press et al. (2007), S. 342-343, verwendet werden.

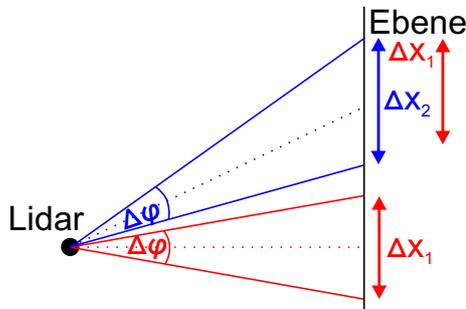
Der MT weist als rekursiver Algorithmus bei 32 Bit Genauigkeit in Bezug auf Tempo, Periode ($2^{19937} - 1$) und Ordnung der Gleichverteilung (623-dimensional) deutliche Vorteile zu älteren RNG auf (siehe Tab. 2.1), die (wie z. B. RANDU) häufig Lineare Kongruenzgeneratoren waren. Bei MT, Ran und Starkov traten Probleme wie die Anordnung der ZZen in Ebenen bei RANDU (siehe z. B. Kolonko (2008), S. 60, Abb. 6.5) als Ausdruck der Korreliertheit der ZZen bislang nicht auf. Sie hielten bisher (soweit bekannt) allen Tests stand und sind damit gute RNGs. Für Details zu analytischen Gütekriterien von RNGs siehe z. B. Kolonko (2008), Kap. 6.



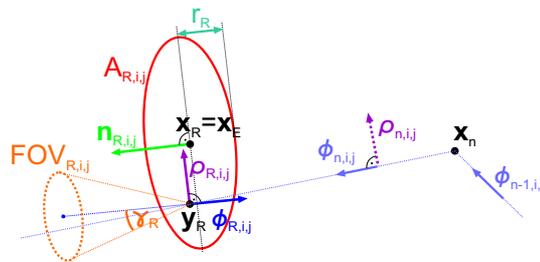
(a) Bild eines holographischen Strahlteilers für das vorgeschlagene RSL. Der hier grüne Laserstrahl (und damit die Energie eines seiner Pulse) wird in viele Bündel gespalten. Quelle: Internet (Ebay).



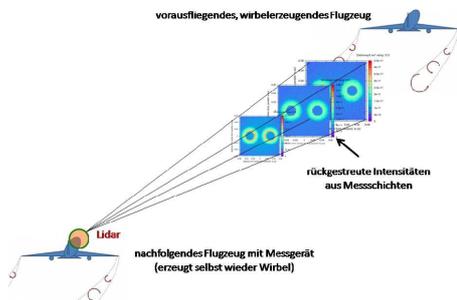
(b) Die Emitter-Geometrie in pbs5. $\phi_{0,i,j}$ bezeichnet die zufällige Emissionsrichtung eines Photons mit zufälligem Startpunkt \mathbf{x}_0 . Nach Streuung in \mathbf{x}_1 bewegt sich das Photon in Richtung $\phi_{1,i,j}$ weiter. Weitere Details siehe Text.



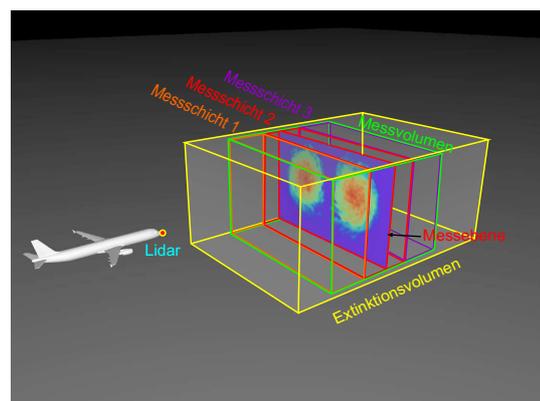
(c) Begründung für die Emission in viele getrennte Einzelrichtungen anstelle eines einzelnen aufgeweiteten Laserstrahls. Details siehe Anhang A.3.



(d) Die Receiver-Geometrie in pbs5. $\phi_{n-1,i,j}$ bezeichnet die vorletzte Flugrichtung eines Photons. Nach Streuung in \mathbf{x}_n bewegt sich das Photon in der Richtung $\phi_{n,i,j}$ weiter und trifft im FOV-Bereich die Receiver-Ebene. Weitere Details siehe Text.



(e) Allgemeine Messsituation für ein nachfolgendes Flugzeug. Messstrahlen weiten sich mit größerer Messentfernung immer weiter auf. Weiter entfernte Messschichten liefern größere Bilder, aber nicht mehr Information (Auflösung).



(f) Messschichten einer gewissen Dicke (orange, rot, lila) in einem Messvolumen (grün) befinden sich in pbs5 innerhalb des variablen Extinktionsvolumens (gelb). Positionierung der Messschichten (Wirbelbild) in der Mitte jeder Messschicht zwischen zwei Messgrenzebenen.

Abbildung 2.2: Funktionsweise des neuen Rückstreulidars und Simulationsparameter in pbs5.

RNG	Mersenne Twister	RANDU	Starkov	Ran (Num. Rec.)
Zeit für Berechnung in s	0.01516	0.02258	0.02745	0.01946
Periodenlänge	$2^{19937} - 1$	2^{29}	$> 10^8 + 1$	$\approx 3.138 \times 10^{57}$
Ordnung der Gleichverteilung	623			

Tabelle 2.1: Geschwindigkeitsvergleich von RNGs bei Erzeugung (hier 1000000) auf $[0, 1]$ gleichverteilter ZZen sowie Vergleich der Periodenlänge und Ordnung der Gleichverteilung (soweit bekannt).

Bezüglich $\mu_{\mathbf{x},E}$ enthält **pbs5** eine weitere wesentliche Neuerung: Die ZZen sind nun nicht mehr nur gleichverteilt, sondern es wird ein Gauß'sches Strahlprofil eines Lasers in Form normalverteilter Pseudo-ZZen berücksichtigt (Mackowski und Mishchenko, 2011). Das heißt, $\mu_{\mathbf{x},E}$ bezeichnet in **pbs5** (anders als oben) die Dichte der normierten Normalverteilung auf A_E .

Allgemein gilt für die Dichte der n -dimensionalen Normalverteilung $\mathcal{N}_{\mu,\Sigma}^n$ auf $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n)$ (siehe auch Bauer (2001), S. 263, Satz 30.2 und S. 266, Satz 30.4 für Gauß'sches Maß) mit Erwartungswertvektor $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ und symmetrischer, positiv-definiter Kovarianzmatrix Σ

$$\mathbf{n}_{\mu,\Sigma}(\mathbf{t}) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{t} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{t} - \mu)\right), \quad (2.51)$$

wobei $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ ist (Kolonko (2008), S. 250). Die n -dimensionale Standard-Normalverteilung $\mathcal{N}_{\mathbf{0},\mathbf{I}}^n$ mit $\mathbf{0} := (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ und $(n \times n)$ -Einheitsmatrix \mathbf{I} ist die gemeinsame Verteilung für die n -dimensionale **Zufallsvariable (ZVe)** bzw. den Vektor von ZVen $\mathbf{X} := (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn die ZVen X_1, \dots, X_n jeweils unabhängig und identisch $\mathcal{N}_{0,1}$ -verteilt sind. Da

$$\mathcal{N}_{(\mu_1, \dots, \mu_n), \Sigma}^n = \mathcal{N}_{\mu_1, \sigma_1^2} \times \dots \times \mathcal{N}_{\mu_n, \sigma_n^2} \quad \text{mit } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \quad \text{allgemein und} \quad (2.52)$$

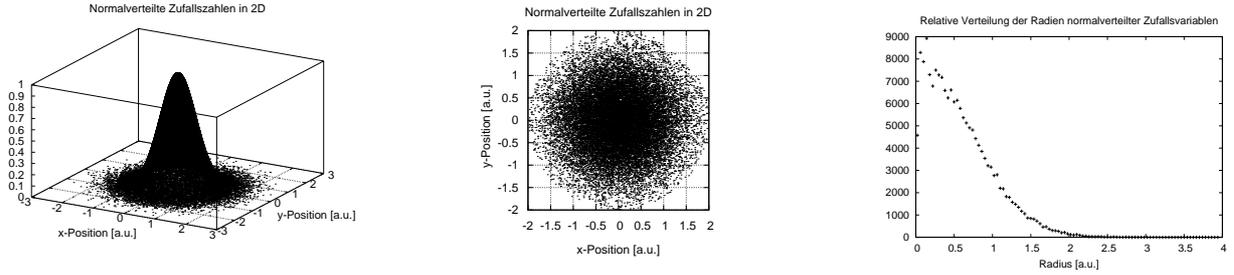
$$\mathcal{N}_{\mathbf{0},\mathbf{I}}^n = \mathcal{N}_{0,1} \times \dots \times \mathcal{N}_{0,1} \quad \text{bei uns speziell}$$

gilt, und weil die Kovarianz und damit auch der Korrelationskoeffizient unabhängiger ZVen 0 ist (ZVen unkorreliert) (Kolonko (2008), S. 251), muss der MT als RNG nur n -mal hintereinander aufgerufen werden. In den Simulationen von Kap. 5 haben wir für $n = 2$ Werte von $\mu = (0, 0)$ und $\Sigma = \mathbf{I}_2$ (\mathbf{I}_2 die 2D Einheitsmatrix). Abbildung 2.3(a) zeigt ein Beispiel von mit dem MT erzeugten 2D $\mathcal{N}_{0,1}$ -verteilten ZZen, wie sie in **pbs5** zum Einsatz kommen. Als Produkt zweier 1D $\mathcal{N}_{0,1}$ -verteilter ZZen werden sie mit der *Ratio-of-Uniforms*-Methode (Press et al. (2007), S. 369) erzeugt.

Da der Laserstrahl am Emissionspunkt achsensymmetrisch um die z -Achse ist und damit optimalerweise in der x - y -Ebene kreisförmig um das Zentrum bei $x = y = 0$ abfällt, darf $\mu_1 = \mu_2 = 0$ und $\sigma_1 = \sigma_2 = 1 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ gewählt werden. Die zufälligen x - y -Positionen (siehe Abb. 2.3(a) und 2.3(b)) werden dann mit dem Emitter-Radius r_E multipliziert, um die echte Emissionsposition \mathbf{x}_0 , bezogen auf das Emissionszentrum bei (hier) $\mathbf{x}_E = (0, 0, 0)^T$, zu erhalten. Für die gemäß der $\mathcal{N}_{0,1}$ -verteilten ZZen RN auf x und y festgelegten und mit RN_x und RN_y bezeichneten Zufallspositionen gilt

$$\text{RN}_x = 2^{-\frac{1}{2}} (\mu_1 + \sigma_1 \cdot \text{RN}(\mathcal{N}_{0,1})) \quad \text{und} \quad \text{RN}_y = 2^{-\frac{1}{2}} (\mu_2 + \sigma_2 \cdot \text{RN}(\mathcal{N}_{0,1})) \quad (2.53)$$

bei gleichzeitigem $z = 0$. Nur falls $(\text{RN}_x^2 + \text{RN}_y^2) > 2(\sigma_1 + \sigma_2)$ ist, wird die mögliche Photonen-Startposition \mathbf{x}_0 nicht für die **pbs**-Simulation verwendet. Ansonsten findet eine Multiplikation mit r_E statt und es gilt $\mathbf{x}_0 := (\text{RN}_x \cdot r_E, \text{RN}_y \cdot r_E, 0)^T$ für die Startposition und $r_{\text{Gauß}} := r_E \sqrt{\text{RN}_x^2 + \text{RN}_y^2}$ für den Radius (Abstand von der Mitte). Abbildung 2.3 zeigt die normale $\mathcal{N}_{0,1} \times \mathcal{N}_{0,1}$ -Verteilung von ZZen in 2D. Dabei wird in Abb. 2.3(a) mit zufälligen Positionen $(\text{RN}_x, \text{RN}_y) \in \mathbb{R}^2$ (in a.u.) nach Gl. (2.53) eine gemäß $\exp(-2(\text{RN}_x^2 + \text{RN}_y^2))$ gegebene Intensitätsverteilung der Zufallspositionen dargestellt, während in Abb. 2.3(b) die räumliche Verteilung der Tupel $(\text{RN}_x, \text{RN}_y)$ gezeigt wird. Die



- (a) $\mathcal{N}_{0,1} \times \mathcal{N}_{0,1}$ -verteilte Zufallspositionen (RN_x, RN_y) liefern mit Funktionswerten $\exp(-2(RN_x^2 + RN_y^2))$ näherungsweise eine normierte 2D-Gauß-Kurve. (b) Normalverteilte Startpositionen (RN_x, RN_y) in a.u. eines Gauß'schen Laserstrahl-Profils nach Gl. (2.53) vor Multiplikation mit r_E . Es gilt $RN_x^2 + RN_y^2 \leq 2(\sigma_1 + \sigma_2) = 4$. (c) Relative Häufigkeit zufälliger normalverteilter Radien $r = (RN_x^2 + RN_y^2)^{1/2}$ in a.u. auf kleinen Radialintervallen ($\Delta r = 0.04$).

Abbildung 2.3: Standard-normalverteilte ZZen in 2D. Die zufälligen x - bzw. y -Positionen werden mit RN_x bzw. RN_y bezeichnet. Radien bzw. Positionswerte in a.u. gehen durch Multiplikation mit r_E in Radien bzw. Positionen in m über, so dass ein Gauß'sches Strahlprofil simuliert werden kann.

Häufigkeit der Punkte nimmt (siehe v. a. Abb. 2.3(b)) wie gewünscht nach außen hin normalverteilt ab, was Abb. 2.3(c) bestätigt. Es wurden insgesamt 50000 $\mathcal{N}_{0,1}$ -verteilte ZZen simuliert, was in 25000 (RN_x, RN_y) -Tupeln resultiert. Für die Radien r in a.u. gilt $r = \sqrt{RN_x^2 + RN_y^2}$. Daraus wird eine Radienverteilung, d.h. eine Aufteilung der Radienwerte gemäß der Häufigkeit ihres Vorkommens in einem Intervall der Breite $\Delta r = 0.04$, berechnet. Diese ist in Abb. 2.3(c) für die ZZen aus Abb. 2.3(a) und 2.3(b) gezeigt, wobei die mittleren Radialpositionen $0.5(r_{i-1} + r_i)$ eines Intervalls Δr gegen die flächennormierte Anzahl der Werte N_r im Intervall $[r_{i-1}, r_i]$ (mit $i = 1, \dots, 100$), nämlich $N_r / (\pi(r_i^2 - r_{i-1}^2))$, aufgetragen ist. Die Intervalle sind festgelegt gemäß $r_i = i \Delta r$.

Abbildung 2.2(b) zeigt die erweiterte Messgeometrie in *pbs5*, deren Neuerungen nun erläutert werden. Die Photonen-Startpositionen \mathbf{x}_0 auf der Kreisscheibe sind nicht mehr gleich- sondern normalverteilt. Die Ausbreitungsrichtung ϕ_0 ist durch den Elevationswinkel (außer-axialer Zenitalwinkel) φ (der gemäß der Gleichverteilung auf $[0, \gamma_E]$ zufällig gewählt wird) und den Azimutwinkel θ (der gemäß der Gleichverteilung auf $[0, 2\pi]$ zufällig gewählt wird) über die Rotation $\phi_0 = \text{Rot}(\phi_E, \rho_E, \varphi, \theta) \cdot \phi_E$ festgelegt (Details zur Vektorrotation mit Definition der Referenzebene z. B. in Hirschberger (2007)). Aus ϕ_E , ρ_E , \mathbf{st}_E und ϕ_0 können auch der Stokes-Vektor \mathbf{st}_0 über $\mathbf{st}_0 = \mathcal{L}(\theta) \cdot \mathbf{st}_E$ und der Referenzvektor ρ_0 über $\rho_0 = \text{Rot}(\phi_E, \rho_E, \phi_0) \cdot \rho_E$ berechnet werden. Die Werte von r_E und FOV_E werden in den Simulationen von Kap. 5 zumeist klein gewählt (i. Allg. $r_E < 0.5$ m und $\text{FOV}_E < 1$ mrad).

Zur gleichzeitigen Simulation/Emission vieler Einzelstrahlen in verschiedene Richtungen können nun in *pbs5* die ϕ_E entsprechend der Emissionsrichtung angepasst werden, d. h. man hat eine Vielzahl an ϕ_E und ρ_E . Die dazu nötigen Parameter werden aus einer zusätzlichen Input-Datei eingelesen. Angegeben sind dort die ungerade Zahl $n_\theta \in \mathbb{N}$ der Azimutwinkel θ mit zugehöriger Winkelschrittweite $\Delta\theta$ und der erste Azimutwinkel θ_1 ganz links, so dass der jeweils i -te Azimutwinkel durch $\theta_i = \theta_1 + (i - 1) \Delta\theta$, $1 \leq i \leq n_\theta$ gegeben ist (d. h. ganz rechts befindet sich θ_{n_θ} und der zentrale Azimutwinkel ist $\theta_{(n_\theta+1)/2}$). Ebenso angegeben sind die ungerade Zahl $n_\varphi \in \mathbb{N}$ der Elevationswinkel φ mit zugehöriger Winkelschrittweite $\Delta\varphi$ und der erste Elevationswinkel φ_1 ganz unten, so dass der jeweils j -te Elevationswinkel durch $\varphi_j = \varphi_1 + (j - 1) \Delta\varphi$, $1 \leq j \leq n_\varphi$ gegeben ist (d. h. ganz oben befindet sich φ_{n_φ} und der zentrale Elevationswinkel ist $\varphi_{(n_\varphi+1)/2}$). Die θ bzw. φ werden wie gewohnt als y - bzw. x -Vektorkomponenten zusammen mit einer festen z -Vektorkomponente von $z = 1$ definiert.

Der Scan erfolgt in *pbs5* zunächst zeilenweise von links nach rechts (variables θ) und erhöht nach jeder Zeile den Elevationswinkel φ von unten nach oben. Bei zeitgleicher Emission in viele Richtungen spielt die Scan-Reihenfolge in der Realität keine Rolle. Insgesamt ergeben sich also $n_\theta \times n_\varphi$ verschie-

dene Messrichtungen. Die Emissionswinkel werden entsprechend der Kombination der θ_i und φ_j mit $\phi_{E,i,j} := \phi_E(\theta_i, \varphi_j)$ bezeichnet. Um den zentralen Emissionswinkel $\phi_{E,Z} := \phi_{E,(n_\theta+1)/2,(n_\varphi+1)/2} = \phi_E(\theta_{(n_\theta+1)/2}, \varphi_{(n_\varphi+1)/2})$ gilt Symmetrie bezüglich θ und φ . Es findet eine eigene RNG-Initialisierung für jede Emissionsrichtung $\phi_{E,i,j}$ durch ebenfalls mit dem MT erzeugte variable Seed-Werte statt, die auch zur Erzeugung des Gauß'schen Strahlprofils von Gl. (2.53) verwendet werden.

Die Normalenvektoren $\mathbf{n}_{E,i,j} \in S^2$ auf die Emitter-Ebene mit dem Gauß'schen Strahlprofil variieren entsprechend der Winkel gemäß $\mathbf{n}_{E,i,j} = -\phi_{E,i,j}$, d. h. die Orientierung des Laserstrahles ist variabel für alle i und j . Für die kreissymmetrischen Flächen des Gauß'schen Strahlprofils gilt nun jeweils $A_{E,i,j} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_E, \mathbf{n}_{E,i,j} \rangle = 0 \text{ und } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_E\| < r_E\}$ mit Mittelpunkt \mathbf{x}_E und Radius $r_E \in \mathbb{R}^+$. Für die variierenden Emitter-Blickfelder gilt $\text{FOV}_{E,i,j} := \{\phi \in S^2 : \langle \phi, \phi_{E,i,j} \rangle > \cos(\gamma_E)\}$. Zu jedem $\phi_{E,i,j}$ wird über das Vektorprodukt der zugehörige Referenzvektor $\rho_{E,i,j} \in S^2$ für alle $1 \leq \theta_i \leq n_\theta$ und $1 \leq \varphi_j \leq n_\varphi$ gemäß $\rho_{E,i,j} = (1, 0, 0)^T \times \phi_{E,i,j}$ berechnet, so dass wieder $\rho_{E,i,j} \perp \phi_{E,i,j} \forall i, j$ gilt. Fest bleiben (unabhängig vom Winkel) jedoch wie früher die Emitter-Position $\mathbf{x}_E = (0, 0, 0)^T$ und der Stokes-Vektor $\mathbf{st}_E = (i_1, i_2, u, v)^T = (1, 0, 0, 0)^T$.

2.3.2 Der Lidar-Receiver (Detektor) in pbs5

Weiter enthält die Input-Datei die *Parameter für die Receiver-Geometrie*. Dazu zählen

- die Position des Receivers $\mathbf{x}_R \in \mathbb{R}^3$. Im monostatischen Fall gilt $\mathbf{x}_R = \mathbf{x}_E$; es ist stets $\mathbf{x}_R = (0, 0, 0)^T$, so dass die Position des Emitters \mathbf{x}_E für bistatische Lidars in Bezug auf die Position des Receivers \mathbf{x}_R entsprechend verschoben wird. Auch die Extinktionsprofile, Absorptionskoeffizienten und Mueller-Matrizen werden dementsprechend positioniert.
- die (frei wählbare) Receiver-Fläche $A_R := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_R, \phi_R \rangle = 0 \text{ und } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_R\| < r_R\}$ in Form einer Kreisscheibe mit Mittelpunkt bei $\mathbf{x}_R = (0, 0, 0)^T$ und Radius $r_R \in \mathbb{R}^+$.
- der (frei wählbare) Normalenvektor $\mathbf{n}_R \in S^2$ auf die Receiver-Fläche mit $\mathbf{n}_R := -\phi_R$ ($\phi_R \in S^2$ der \mathbf{n}_R entgegengesetzte Vektor), der die Orientierung der Kreisscheibe festlegt.
- das Receiver-Blickfeld FOV_R in Form eines coaxialen Kegels mit zentraler Blickrichtung $-\phi_R$ und Semi-Blickwinkel $\gamma_R \in [0, \frac{\pi}{2}]$, sowie der Referenzvektor $\rho_R \in S^2$ mit $\rho_R \perp \phi_R$. Für das RFOV gilt $\text{FOV}_R := \{\phi \in S^2 : \langle \phi, -\phi_R \rangle > \cos(\gamma_R)\}$.

Wenn also $u_m := (t_m; \mathbf{x}_m, \psi_m, \lambda_m, \phi_m, \rho_m, \mathbf{st}_m)$ den zeitabhängigen Zustand eines Photons nach dem m -ten Streueignis bezeichnet, so gilt ein Photon als im Receiver detektiert, falls es zum ersten Mal die Fläche A_R aus der Richtung $\phi_m \in \text{FOV}_R$ kommend schneidet, d. h. falls

$$A_R \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \mathbf{x}_m + ct \phi_m \text{ mit } t \in [0, t_{m+1} - t_m[\text{ und } \phi_m \in \text{FOV}_R\} \neq \emptyset \quad (2.54)$$

gilt, wobei t_{m+1} den Zeitpunkt des $(m+1)$ -ten Streueignisses bezeichnet, das durch die Receiver-Erfassung nicht mehr eintritt, und c die Lichtgeschwindigkeit ist. Für die Polarisation des auf den Receiver treffenden Photons (d. h. für seinen Stokes-Vektor) gilt

$$\mathbf{ST}_R := \mathcal{L}(\Xi(\phi_m \times \rho_m, \phi_R \times \rho_R)) \cdot \mathbf{st}_m, \quad (2.55)$$

wobei der Stokes-Vektor \mathbf{st}_m des ankommenden Photons in die Polarisation \mathbf{ST}_R der durch $\phi_R \times \rho_R$ festgelegten Referenzebene des Receivers transformiert wird (\mathcal{L} und Ξ nach Gl. (2.23)).

Entsprechend der neuen Emitter-Eigenschaften umfasst pbs5 auch eine Erweiterung der Receiver-Geometrie (siehe Abb. 2.2(d)). Zum zentralen Emissionswinkel $\phi_{E,Z}$ gibt es einen zentralen Receiver-Winkel $\phi_{R,Z}$. Bei variierenden Emitter-Winkeln $\phi_{E,i,j} \forall i, j$ mit Normalenvektoren $\mathbf{n}_{E,i,j}$ kann nun der Receiver-Winkel entsprechend mitgedreht werden, d. h. es gilt $\mathbf{n}_{R,i,j} = \mathbf{n}_{E,i,j}$ bzw. $\phi_{R,i,j} = \phi_{E,i,j} \forall i, j$. Für die kreissymmetrischen Receiver-Flächen gilt jeweils $A_{R,i,j} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_R, \mathbf{n}_{R,i,j} \rangle =$

0 und $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_R\| < r_R$ mit Mittelpunkt \mathbf{x}_R und Radius $r_R \in \mathbb{R}^+$. Für die variierenden Receiver-Blickfelder gilt $\text{FOV}_{R,i,j} := \{\phi \in \mathbb{S}^2 : \langle \phi, -\phi_{R,i,j} \rangle > \cos(\gamma_R)\}$. Für die Referenzvektoren haben wir $\rho_{R,i,j} = \rho_{E,i,j} \forall i, j$, so dass wieder $\rho_{R,i,j} \perp \phi_{R,i,j} \forall i, j$ ist. Es wäre denkbar, eine entsprechend der Emissionsrichtung orientierte gewölbte Fläche zum Empfang auf Photodioden (bzw. einen festen CCD-artigen Empfänger mit gewölbten Pixel-Flächen) oder einen drehbaren Scanner zu konstruieren. Ein derartiges System wird in Kap. 5 simuliert. In diesem Fall müssen die einzelnen $A_{R,i,j}$ und $\text{FOV}_{R,i,j}$ klein gewählt werden. Alternativ könnte auch der Receiver bei variierenden Emissionsrichtungen eine feste Richtung (Teleskop fester Orientierung) haben (vorzugsweise $\phi_{R,Z}$). Dann können A_R und FOV_R viel größer gewählt werden (in einer für Lidars typischen Größe). In jedem Fall fest bleibt (unabhängig vom Winkel) wie früher die Receiver-Position $\mathbf{x}_R = (0, 0, 0)^T$.

2.3.3 Atmosphäre in pbs5: Extinktionsfunktion und Streueigenschaften

Zur Modellierung der gesamten Atmosphäre $\mathcal{H} := \mathbb{R}^3$ wird diese in pbs5 (wie früher) in $\mathfrak{s} \in \mathbb{N}$ verschiedene Schichten senkrecht zur zentralen Laserausbreitungsrichtung $\phi_{E,Z}$ (siehe Abb. 2.4) gemäß

$$\mathcal{H} := \bigcup_{k=1}^{\mathfrak{s}} \mathcal{H}_k, \quad \mathcal{H}_j \cap \mathcal{H}_k \neq \emptyset \text{ für } j, k \in \{1, \dots, \mathfrak{s}\} \text{ mit } j \neq k \quad (2.56)$$

unterteilt, wobei die Ränder (Begrenzungen) zwischen den Schichten an gewissen z -Positionen als $r_1, r_2, \dots, r_{\mathfrak{s}-2}, r_{\mathfrak{s}-1} \in \mathbb{R}$ mit $r_1 < r_2 < \dots < r_{\mathfrak{s}-2} < r_{\mathfrak{s}-1}$ bezeichnet werden. Für $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ kann \mathcal{H} somit zunächst unterteilt werden in

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &:= \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \text{falls } \mathfrak{s} = 1, \\ \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : z < r_1\} & \text{sonst,} \end{cases} \\ \mathcal{H}_k &:= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : z \geq r_{i-1}, z < r_i\} \text{ für } i = 2, \dots, \mathfrak{s} - 1, \\ \mathcal{H}_{\mathfrak{s}} &:= \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \text{falls } \mathfrak{s} = 1, \\ \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : z \geq r_{\mathfrak{s}-1}\} & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Die Trennebenen zwischen den Schichten verlaufen also parallel zur Receiver-Fläche zentraler Orientierung $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_{R,Z}, \mathbf{n}_{R,Z} \rangle = 0\}$. Mit den Zustandsräumen $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_k} := \mathcal{H}_k \times \Psi \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^4$, $k = 1, \dots, \mathfrak{s}$, in der jeweils k -ten Schicht können nun die atmosphärischen Eigenschaften wie Extinktionskoeffizienten σ_k , Überlebenswahrscheinlichkeiten (Absorptionskoeffizienten) q_k und Mueller-Matrizen m_k in jeder dieser \mathfrak{s} Schichten definiert werden.

Für die Extinktionsfunktion auf dem gesamten Zustandsraum $\mathcal{S} = \bigcup_{k=1}^{\mathfrak{s}} \mathcal{S}_{\mathcal{H}_k}$ gilt (wie in pbs4)

$$\sigma : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad \text{mit} \quad \sigma(s) := \sum_{k=1}^{\mathfrak{s}} 1_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}_k}}(s) \sigma_k(s), \quad (2.58)$$

wobei die Extinktionskoeffizienten über die messbare Abbildung⁶

$$\sigma_k : \mathcal{S}_{\mathcal{H}_k} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad \text{für } k = 1, \dots, \mathfrak{s} \quad (2.59)$$

festgelegt sind. Obergrenzen $\sigma_{\max,k} \in \mathbb{R}_0^+$ mit $\sigma_{\max,k} \geq \sup_{s \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}_k}} \sigma_k(s)$ müssen für alle σ_k auf $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_k}$ angegeben werden, um die Methode der fiktiven Stöße (siehe Kap. 2.1) anwenden zu können.

Ebenso wie die Extinktionsfunktion σ aus Gl. (2.58) können auch Funktionen für die Überlebenswahrscheinlichkeit durch

$$q : \mathcal{S} \longrightarrow [0, 1], \quad q(s) := \sum_{k=1}^{\mathfrak{s}} 1_{\mathcal{S}_{\mathcal{H}_k}}(s) q_k(s) \quad \text{mit} \quad q_k : \mathcal{S}_{\mathcal{H}_k} \longrightarrow [0, 1] \quad \text{für } k = 1, \dots, \mathfrak{s}$$

⁶ In der Realität ist diese Abbildung stetig, was durch die Diskretisierung in der Simulation nicht erreichbar ist.

und für die Mueller-Matrix durch

$$m : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbf{M} , \quad m(s) := \sum_{k=1}^s 1_{\mathcal{H}_k}(s) m_k(s) \quad \text{mit} \quad m_k : \mathcal{S}_{\mathcal{H}_k} \longrightarrow \mathbf{M} \quad \text{für } k = 1, \dots, s$$

auf \mathcal{S} angegeben werden, wobei \mathbf{M} die Menge aller Mueller-Matrizen bezeichne. Die q_k geben die Wahrscheinlichkeiten dafür an, dass ein Photon von einem Atmosphärenteilchen in der Schicht k nicht absorbiert, d. h. eliminiert, wird (großes q_k bedeutet hohe Überlebenswahrscheinlichkeit). Für $q_k = 1.0$ tritt somit keine Absorption auf und es kommen statistisch mehr Photonen im Receiver an.

Anders als die Absorptionskoeffizienten und Mueller-Matrizen, die nur in Schichten \mathcal{H}_k , $k = 1, \dots, s$ mit Grenzen r_i , $i = 1, \dots, s - 1$ transversal zur z -Richtung variiert werden können, ist es möglich, die Extinktionskoeffizienten in Rechtecken mit Seitenlängen Δx und Δy in der x - y -Ebene bei gleichbleibender Schicht \mathcal{H}_k der Dicke Δz zu definieren, wodurch also insgesamt in 3D Quader oder im Spezialfall $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ Würfel entstehen, die einzelne Extinktionswerte vorgeben. Für die Extinktionskoeffizienten $\sigma_{i,j,k}$, $i, j, k \in \mathbb{N}$ einzelner Quader (Würfel) hat man also folgende Abbildung

$$\sigma_{i,j,k} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ , \quad \mathbf{x} = (x_i, y_j, z_k)^T \longmapsto \sigma(\mathbf{x}) . \quad (2.60)$$

Aus `pbs4` bekannte Spezialfälle davon, wie z. B. konstante Extinktion innerhalb einer Schicht unendlicher transversaler Ausdehnung, konstante Extinktion innerhalb eines Quaders oder Würfels mit endlichen Seitenlängen (wurde für die Pulse-Stretching-Simulationen verwendet, siehe Kap. 4.2.2), schachbrettartige oder beliebige 3D Wolken können auch weiterhin simuliert werden (Details zu diesen Extinktionsfunktionen bei [Wengenmayer \(2008\)](#), S. 67 ff.).

Für alle $k \in \mathbb{N}$ sind die in `pbs5` zu den Schichten \mathcal{H}_k (höhenmäßig begrenzt durch $x_{\min}, x_{\max} \in \mathbb{R}$ und seitlich durch $y_{\min}, y_{\max} \in \mathbb{R}$) gehörigen Extinktionskoeffizienten σ_k der verwendeten Wirbelstrukturen definiert durch

$$\begin{aligned} \sigma_k(\mathbf{x}) &:= \sigma_{\text{in},(i,j,k)} 1_{W_{\text{in},k}}(\mathbf{x}) + \sigma_{\text{out}} 1_{W_{\text{out},k}}(\mathbf{x}) , \quad \text{mit} \\ W_{\text{in},k} &:= \{ \mathbf{x} \in \mathcal{H}_k : (x_{\min} \leq x \leq x_{\max}) \wedge (y_{\min} \leq y \leq y_{\max}) \} \quad \text{und} \\ W_{\text{out},k} &:= \overline{W_{\text{in},k}} \cap \mathcal{H}_k , \end{aligned} \quad (2.61)$$

wobei die $W_{\text{in},k}$ alle Werte innerhalb der k -ten Schicht und die $W_{\text{out},k}$ alle Werte außerhalb der k -ten Schicht bezeichnen. Außerdem findet die Diskretisierung in jeder z -Schicht \mathcal{H}_k entlang der x - und y -Achse durch (äquidistante) Grenzwerte $x_{\min} = x_0 < \dots < x_i < \dots < x_l = x_{\max}$ mit Indizes $i = 0, \dots, l \in \mathbb{N}$ und $y_{\min} = y_0 < \dots < y_j < \dots < y_m = y_{\max}$ mit Indizes $j = 0, \dots, m \in \mathbb{N}$ statt. Für diese Diskretisierung gilt $x_i = x_{\min} + i \Delta x \in \mathbb{R}$ bzw. $y_j = y_{\min} + j \Delta y \in \mathbb{R}$, wobei in unseren Simulationen $\Delta x = \Delta y = 0.5 \text{ m}$ oder $\Delta x = \Delta y = 1 \text{ m}$ sein werden. Die $l, m \in \mathbb{N}$ sind z. B. in den Simulationen (Kap. 5) mit Tracer-Daten (Kap. 3) $l = 129$ und $m = 209$ oder $l = 65$ und $m = 105$. Die Extinktionskoeffizienten $\sigma_{\text{in},(i,j,k)}$ jeder inneren z -Schicht $W_{\text{in},k}$ werden als eigene Extinktionsdatei mit konstantem k gesondert in `pbs` eingelesen. Die äußeren Extinktionskoeffizienten σ_{out} haben einen in der Input-Datei variierbaren Wert, der während der Simulation konstant bleibt und zumeist (viel) niedriger als das minimale $\sigma_{\text{in},(i,j,k)}$ gewählt wird, um Photonen, die das eigentliche Simulationsgebiet verlassen haben nicht noch fälschlicherweise im Receiver einzufangen.

Allen Extinktionsfunktionen aus `pbs4` und `pbs5` sind der maximale Extinktionskoeffizient σ_{\max} in der betreffenden z -Schicht sowie die Zahl `steps` der äquidistanten Integrationsintervalle zur Berechnung der optischen Schichtdicke als Eingabeparameter gemeinsam. Dabei muss `steps` umso größer gewählt werden je variabler die Extinktionsprofile sind, um eine gute Näherung für das Integral der optischen Dichte zu erhalten (für die Wirbelprofile wurden hier häufig ein großes `steps = 50` und $\sigma_{\max} = 5.0 \text{ km}^{-1}$ gewählt).

Um die Rückstreuung an Wirbelschleppen z. B. seitlich unter schrägen Winkeln mit `pbs5` simulieren zu können, müsste das Extinktionsprofil vor dem Einlesen als Datei zunächst um den entsprechenden Winkel in Bezug zur gleichbleibenden Orientierung des Lidars gedreht werden.

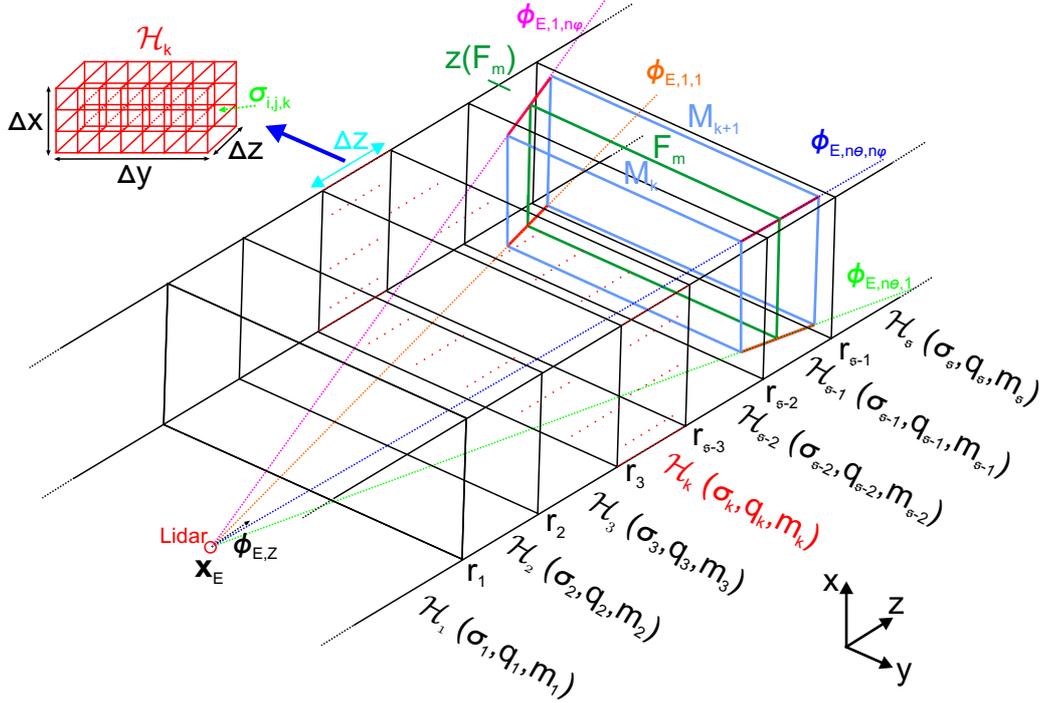


Abbildung 2.4: Atmosphäre in pbs5 (Extinktions- und Absorptionskoeffizienten sowie Mueller-Matrizen). Trapezförmige Quader als Messschichten in pbs5. Die äußeren Messrichtungen $\phi_{E,1,1}$, $\phi_{E,n_\theta,1}$, $\phi_{E,1,n_\phi}$, ϕ_{E,n_θ,n_ϕ} begrenzen in x - und y -Richtung die Messgrenzebenen M_k und Messebenen F_m . Die Extinktionskoeffizienten σ_k in einer Extinktionsschicht \mathcal{H}_k werden weiter unterteilt in Quader bzw. Würfel, so dass sie nicht mehr nur von k (z -Achse) sondern auch von i und j (x - und y -Achse) abhängen ($\sigma_{i,j,k}$). Weitere Details siehe Text.

Als Mueller-Matrizen (siehe auch Kap. 2.1) zur Berechnung einzelner Streueignisse von Photonen kommen in pbs5 zufällig orientierte Streuverteilungen⁷ zum Einsatz, die für eine bestimmte, einzelne Wellenlänge aus Programmen wie POLYMIE (modifizierte Gammaverteilung der Streuer basierend auf einem Mie-Algorithmus von W. J. Wiscombe (Wiscombe, 1980) mittels Sekantenmethode mit äquidistanter Schrittweite zur Integration über die Größenverteilung; programmiert von W. Krichbaumer und M. Kerscher), POLY_3 (von S. Prigarin zur Generierung einer Lognormalverteilung für kugelförmige Streuer geschrieben) oder Mieschka (prolate Sphäroide und kreisrunde Zylinder bei 355 nm; Details siehe Kap. 5) speziell berechnet wurden. Außerdem werden in den Simulationen von Kap. 5 aus Berechnungen von L. Xu mit der T-Matrix-Methode stammende Mueller-Matrizen (prolate oder oblate Zylinder und Sphäroide bei 532 nm) und eine Rayleigh-Mueller-Matrix verwendet werden. Diese Mueller-Matrizen und Phasenfunktionen sind in Abb. 5.26 bis 5.28 dargestellt.

In POLYMIE kommt eine *modifizierte Gamma-Verteilung* nach Deirmendjian (1969), S. 75 ff., in Form einer Familie von Größenverteilungsfunktionen (Dichte)

$$n(r) = ar^\alpha \exp(-br^\gamma), \quad 0 \leq r < \infty, \quad a, b, \gamma \in \mathbb{R}^+, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^+, \quad (2.62)$$

mit variablen Radien r zum Einsatz, die bei $r = 0$ und $r = \infty$ verschwindet. Für $\gamma = 1$ hat man wieder die gewöhnliche Gamma-Verteilung. Dabei geht der Mie-Größenparameter $\tilde{x} = \mathbf{k}r = \frac{2\pi}{\lambda}r$ mit Wellenvektor \mathbf{k} in die Größenverteilung $n(r)$ ein, da die Brechungsindizes n_{Br} der meisten Materialien von der Wellenlänge λ abhängen. Die Anzahl kugelförmiger Streupartikel pro Einheitsvolumen ist also durch

$$N = \frac{1}{\mathbf{k}} \int_0^\infty n(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (2.63)$$

⁷ Solche Mueller-Matrizen zufällig orientierter Streuer hängen nur vom Zenitwinkel φ und nicht vom Azimutwinkel θ ab, ebenso wenig wie von der Polarisation der einfallenden Lichtwelle.

mit Variable \tilde{x} statt r gegeben. Damit können der Volumen-Streuquerschnitt und die zur normierten Streumatrix gehörigen Einträge für Polydispersionen angegeben werden. Die voneinander unabhängigen Konstanten a , b , α , γ beziehen sich auf Größen der Frequenzverteilung, die durch Messungen bestimmt werden können. Durch Kenntnis der Gesamtteilchenanzahl pro Einheitsvolumen, N , bzw. des sog. *Modenradius* r_c (in POLYMIE einstellbar) ist bei beliebigen Parametern α und γ eine Bestimmung von a und b möglich (Details z. B. bei [Hirschberger \(2007\)](#), S. 34/35). So erhält man Größenverteilungen für Regenwolken, Dunstwolken, Hagelkörner oder Cumulus-, Corona-, MOP-, Doppelcorona-Wolken vom Typ C1 bis C4 nach [Deirmendjian \(1969\)](#), S. 78. Als Parameter zur Erzeugung von Mueller-Matrizen gemäß Gl. (2.62) wurden z. B. für die Pulse-Stretching-Simulationen (Kap. 4.2.2) $a = 0.4 \cdot 10^6$, $b = 0.2 \cdot 10^2$, $\alpha = 2$ und $\gamma = 1$ (Dunst Typ H, vgl. [Hirschberger \(2007\)](#), S. 36) mit $n_{Br} = 1.33 - i \cdot 0.1 \cdot 10^{-5}$ und $\lambda = 1064 \text{ nm}$ für variable r verwendet ([Wengenmayer, 2008](#)).

In POLY_3 werden als Parameter der kugelförmigen Streuer wie Wasser und Öl der Median als mittlerer Teilchenradius, die Standardabweichung für die Normalverteilung sowie die Feinheit der Approximation eingelesen. Man erhält so den lognormal-verteilten Modenradius und die Approximationen der Größenverteilungen in Teilchen pro m^3 in Abhängigkeit von r (hier 500 diskrete Werte für r). Durch Hinzunahme der Laserwellenlänge (λ des einfallenden Photons), der Brechungsindizes innerhalb und außerhalb des Streumediums und der Winkelauflösung für den Zenitwinkel φ können daraus die Mueller-Matrix und die Phasenfunktion für sphärische Partikel ermittelt werden.

Um z. B. Aerosole als Streupartikel zu simulieren, werden zufällig orientierte oblate und prolata Sphäroide verwendet. Unter einem *oblaten Sphäroid* versteht man eine um ihre schmalere Achse rotierte Ellipse, so dass sich ein Ellipsoid als Rotationskörper ergibt. Das Seitenverhältnis („aspect ratio“) a/b von horizontaler Halbachse a zu vertikaler Rotationshalbachse b des Sphäroids ist $(a/b) > 1$. Dagegen ist ein *prolates Sphäroid* eine um ihre breitere Achse rotierte Ellipse mit einem Seitenverhältnis $(a/b) < 1$. Die Mueller-Matrizen sind unabhängig vom Azimutwinkel θ und hängen nur vom Elevationswinkel φ ab. Zur Berechnung der zugehörigen Mueller-Matrizen wird die *T-Matrix-Methode* verwendet, die z. B. bei [Mishchenko et al. \(2000\)](#) beschrieben wird. Es gilt

$$\mathcal{M}_{\text{Sphäroid}}(\varphi) := \begin{pmatrix} m_{11}(\varphi) & m_{12}(\varphi) & 0 & 0 \\ m_{12}(\varphi) & m_{22}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33}(\varphi) & -m_{43}(\varphi) \\ 0 & 0 & m_{43}(\varphi) & m_{44}(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{für Sphäroide.} \quad (2.64)$$

Betrachtet man das Verhalten der Richtungsstreuintensitäten obiger Streuer bei einem einfallenden linear polarisierten Laserstrahl, so zeigt sich ein Fehlen der Rotationsinvarianz (siehe Abb. 5.27(a)). Die Streuintensität des gestreuten Photons hängt also sehr wohl von θ und φ ab. Dies wird z. B. bei [Wengenmayer \(2008\)](#) auf S. 46 und S.102-103 gezeigt. Es gilt:

$$\begin{aligned} I(\varphi, \theta; \mathbf{st}_m) &= \frac{1}{2} (2m_{12}(\varphi) + m_{11}(\varphi) + m_{22}(\varphi)) \\ &+ \frac{1}{2} (m_{11}(\varphi) - m_{22}(\varphi)) [(2i_{\parallel} - 1) \cos(2\theta) + u \sin(2\theta)], \end{aligned} \quad (2.65)$$

wobei \mathbf{st}_m der normierte Stokes-Vektor (i_{\parallel} und u Elemente davon) zur Beschreibung der Polarisation ist. Daraus kann eine von φ und θ abhängige polarisierte Phasenfunktion hergeleitet werden.

Als Spezialfall betrachten wir Mueller-Matrizen für die Streuung an *sphärischen Teilchen*. Falls der Durchmesser d des kugelförmigen Streuzentrums sehr viel kleiner als die Wellenlänge λ des Lichts ist, liegt *Rayleigh-Streuung* vor. Die *Mueller-Matrix für Rayleigh-Streuung* (siehe auch Simulation in

Kap. 5.2) lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{Rayl},1} &:= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{12} & m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix} \quad \text{für den Fall } d \ll \lambda, \text{ bzw.} \\ \mathcal{M}_{\text{Rayl},2} &:= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{12} & m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & -m_{34} & m_{33} \end{pmatrix} \quad \text{bei beliebiger Teilchengröße und -zusammensetzung.} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Falls der Durchmesser $d \approx \lambda$ ist, spricht man für kugelförmige Streuer von *Mie-Streuung*. In diesem Bereich muss mit starker Variation der Streueigenschaften mit der Wellenlänge gerechnet werden⁸. In Abhängigkeit vom Elevationswinkel $\varphi \in [0, \pi]$ gilt für die Mueller-Matrix bei Mie-Streuung:

$$\mathcal{M}_{\text{Mie}}(\varphi) := \begin{pmatrix} m_{11}(\varphi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33}(\varphi) & -m_{34}(\varphi) \\ 0 & 0 & m_{34}(\varphi) & m_{33}(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{für den Fall } d \approx \lambda. \quad (2.67)$$

Neben Mueller-Matrizen von Zylindern für Eispartikel als Streuer (siehe z. B. [Xu und Ding \(2002\)](#) oder [Ding und Xu \(2002\)](#)) gibt es noch welche für die Streuung an zufällig orientierten hexagonalen Eiskristallen, siehe etwa [Rother et al. \(2001\)](#) oder [Borovoi et al. \(2003\)](#) (Simulationen bei [Prigarin et al. \(2007\)](#)).

Bei uns besitzen die Mueller-Matrizen Einträge für die Matrixelemente m_{ij} gemäß z. B. Gl. (2.64) für Zenitalwinkel $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ in Schritten von 0.1° , d. h. eine Winkelauflösung von 1801 Werten. Sie verwenden die senkrecht-parallele Darstellung der Stokes-Vektoren⁹. Die für die Simulationen von Kap. 5 erzeugten und in pbs5 eingelesenen Streumatrizen werden dort noch detailliert beschrieben.

2.3.4 Messzeitintervalle und Intensitäten in pbs5-Simulationen

Die Abbildungen 2.2(e) und 2.2(f) veranschaulichen noch einmal die zu simulierende Situation.

In früheren pbs-Versionen galt für die konstante Messrichtung ϕ_E für das jeweils m -te **Messzeitintervall (MZI)** \mathcal{T}_m aus der Indexmenge $m = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}$ mit Anzahl der Unterteilungen $N_{\mathcal{T}} \in \mathbb{N}$ zwischen den minimalen und maximalen **Photonenweglängen (PWL)**, auch „Range“ genannt) $s_{\min}, s_{\max} \in \mathbb{R}_0^+$ mit $s_{\min} < s_{\max}$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_m &:= \left] \frac{s_{\min,m}}{c}, \frac{s_{\max,m}}{c} \right], \quad \text{mit} \\ s_{\min,m} &:= s_{\min} + \frac{m-1}{N_{\mathcal{T}}} \cdot (s_{\max} - s_{\min}), \\ s_{\max,m} &:= s_{\min} + \frac{m}{N_{\mathcal{T}}} \cdot (s_{\max} - s_{\min}). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Es wird also für jedes der $N_{\mathcal{T}}$ MZI entsprechend der Folge gleichmäßiger Unterteilungen ($\mathcal{T}_m : m \in N_{\mathcal{T}}$) des kompletten MZI $\left] \frac{s_{\min}}{c}, \frac{s_{\max}}{c} \right]$ der normierte, zeitabhängige, polarisierte Photonfluss berechnet. Die zeitliche Auflösung des rückgestreuten Lidarsignals beträgt also $(s_{\max} - s_{\min}) / (c \cdot N_{\mathcal{T}})$. Für die Länge der simulierten Laserpulse muss stets $s_p < \frac{1}{2N_{\mathcal{T}}} \cdot (s_{\max} - s_{\min})$ gelten.

Durch die variablen Emissionsrichtungen $\phi_{E,i,j} \forall i, j$ haben wir es in pbs5 mit unterschiedlich langen MZI zu tun, was eine Unterscheidung in $s_{\min}^{i,j}$ und $s_{\max}^{i,j}$ bei den minimalen und maximalen

⁸ Für $\lambda > d$ hat man verstärkt Vorwärtsstreuung, während für kleinere λ die Rückwärtsstreuung zunimmt.

⁹ Daneben gibt es noch die IQ-Form von Mueller-Matrizen mit IQ-Stokes-Vektoren.

PWL bzw. $s_{\min,m}^{i,j}$ und $s_{\max,m}^{i,j}$ für deren $N_{\mathcal{T}}$ äquidistante Unterteilungen sowie $\mathcal{T}_m^{i,j}$ bei den MZI je nach Richtung (θ_i, φ_j) bei gleichbleibender Anzahl an Intervallen $m = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}$ erforderlich macht. Wie dies in `pbs5` genau implementiert wurde, wird im Folgenden detailliert erläutert.

Die Zahl $\mathfrak{s} - 2$ der quaderförmigen variablen Extinktions-Volumenschichten¹⁰ entspricht häufig zugleich der Zahl der MZI $N_{\mathcal{T}}$ pro Richtung $\phi_{E,i,j}$, d. h. der Zahl der Messschichten (zeitliches „Gating“). Die minimale und maximale PWL werden relativ zur zentralen Emissionsrichtung $\phi_{E,Z} = (0, 0, 1)^T$ angegeben. Die Orientierung der Messebenen (Messschichten) F_m , $m \in \mathbb{N}$, $m = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}$ sowie der Messgrenzebenen¹¹ M_k , $k \in \mathbb{N}$, $k = 1, \dots, N_{\mathcal{T}} + 1$ in Bezug auf die zentrale Emissionsrichtung $\phi_{E,Z}$ wird über die Normalenvektoren $\mathbf{n}_{F_m} = \mathbf{n}_{M_k} = (0, 0, 1)^T$ bestimmt. In der Regel werden die x - y -Ebenen M_k mit konstantem z_k den Randschichten mit r_i , $i = 1, \dots, \mathfrak{s} - 1$ einer jeden quaderförmigen Volumenschicht $V_1, \dots, V_{\mathfrak{s}}$ (bzw. $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_{\mathfrak{s}}$) aus Extinktionskoeffizienten (siehe Abb. 2.4 und Kap. 2.3.3) entsprechen¹². Für die 3D Schnittpunkte der durch die einzelnen $\phi_{E,i,j}$ gegebenen Geraden mit den Messebenen gilt $\mathbf{x}_{i,j}^{F_m} := \mathbf{x}_E + ct_m \phi_{E,i,j} \forall t_m \in \mathbb{R}_0^+$. Um die Distanz ct_m von \mathbf{x}_E zur m -ten Messschicht F_m zu bestimmen, werden skalare Längen

$$l_{F_m}(\theta_i, \varphi_j) = - \frac{-\langle \mathbf{n}_{F_m}, \mathbf{x}_{1,1}^{F_m} \rangle + \langle \mathbf{n}_{F_m}, \mathbf{x}_E \rangle}{\langle \mathbf{n}_{F_m}, \phi_{E,i,j} \rangle} \quad (2.69)$$

für alle θ_i und φ_j berechnet, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt und $\mathbf{x}_{1,1}^{F_m}$ der gegebene Randpunkt links unten in jeder rechteckigen Messebene F_m ist (bekanntes z_{F_m} reicht, x und y beliebig wählbar). Einsetzen von $l_{F_m}(\theta_i, \varphi_j) \in \mathbb{R}^+$ liefert aus der jeweiligen Geradengleichung die exakte 3D Position

$$\mathbf{x}_{i,j}^{F_m} = \mathbf{x}_{F_m}(\theta_i, \varphi_j) := \mathbf{x}_E + l_{F_m}(\theta_i, \varphi_j) \phi_{E,i,j} \quad (2.70)$$

des Schnittpunkts mit der m -ten Messebene F_m . Wir bekommen also auch die Randpunkte der m -ten Messebene $\mathbf{x}_{1,1}^{F_m}$ (aus $\phi_{E,1,1}$) links unten, $\mathbf{x}_{n_{\theta},1}^{F_m}$ (aus $\phi_{E,n_{\theta},1} = \phi_{E,1,1} + (n_{\theta} - 1)\Delta\theta$) rechts unten, $\mathbf{x}_{1,n_{\varphi}}^{F_m}$ (aus $\phi_{E,1,n_{\varphi}} = \phi_{E,1,1} + (n_{\varphi} - 1)\Delta\varphi$) links oben, und $\mathbf{x}_{n_{\theta},n_{\varphi}}^{F_m}$ (aus $\phi_{E,n_{\theta},n_{\varphi}} = \phi_{E,1,1} + (n_{\theta} - 1)\Delta\theta + (n_{\varphi} - 1)\Delta\varphi$) rechts oben. Für die z -Position z_{F_m} der m -ten Messebene (mit $1 \leq m \leq N_{\mathcal{T}}$) gilt jeweils

$$z_{F_m} := z_{F_1} + (m - 1) \cdot \frac{z_{F_{N_{\mathcal{T}}}} - z_{F_1}}{N_{\mathcal{T}} - 1} = \frac{z_{M_m} + z_{M_{m+1}}}{2}. \quad (2.71)$$

Durch Ersetzen von F_m , $m \in \mathbb{N}$, $m = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}$ durch M_k , $k \in \mathbb{N}$, $k = 1, \dots, N_{\mathcal{T}} + 1$ können die skalaren Längen $l_{M_k}(\theta_i, \varphi_j) = -(-\langle \mathbf{n}_{M_k}, \mathbf{x}_{1,1}^{M_k} \rangle + \langle \mathbf{n}_{M_k}, \mathbf{x}_E \rangle) / (\langle \mathbf{n}_{M_k}, \phi_{E,i,j} \rangle)$ für die Distanz ct_k von \mathbf{x}_E zur k -ten Messgrenzebene M_k mit zu Gl. (2.70) äquivalenten 3D Schnittpunktpositionen $\mathbf{x}_{i,j}^{M_k} = \mathbf{x}_{M_k}(\theta_i, \varphi_j) := \mathbf{x}_E + l_{M_k}(\theta_i, \varphi_j) \phi_{E,i,j}$. Für die z -Position z_{M_k} der k -ten Messgrenzebene gilt jeweils

$$z_{M_k} := z_{M_1} + (k - 1) \cdot \frac{z_{M_{N_{\mathcal{T}}+1}} - z_{M_1}}{N_{\mathcal{T}}}, \quad (2.72)$$

wobei z_{M_1} den Vorderrand und $z_{M_{N_{\mathcal{T}}+1}}$ das Ende des gesamten Messbereichs bezeichne. So können in der Mitte zwischen den Rändern der Messebenen mit konstantem z_{F_m} die Längenskalen der Streuintensitäten in der x - y -Ebene (d. h. die Δx und Δy) entsprechend der Messentfernung normiert werden (Messebenen in höherer z -Entfernung sind größer, haben aber nicht mehr Messpunkte als nähere;

¹⁰ Wegen \mathfrak{s} Extinktionsschichten minus vorderer und hinterer Schicht, die hier generell konstante Extinktion erhalten oder nicht zur Messung herangezogen werden.

¹¹ Die Messgrenzebenen (oder auch Messgrenzschichten) sind hier die Schichten/Ebenen mit konstantem z , die die MZI vorne und hinten begrenzen. Dagegen wird die Mitte eines MZI, d. h. die an der z -Position zwischen zwei Messgrenzebenen gelegene Ebene als Messebene oder Messschicht bezeichnet.

¹² Das muss aber nicht so sein. Die MZI können im Vergleich zu den fest vorgegebenen Extinktionsschichten kürzer oder länger gewählt werden. Dennoch kann aus einer Simulation am meisten Information in möglichst kurzer Zeit gewonnen werden, wenn die Grenzen der Messschichten und der Extinktionsschichten einander entsprechen.

trotzdem sind die Seitenlängen der x - y -Pixel größer, die somit auf gleiche Längen normiert werden müssen). Manche Auswerteverfahren werden jedoch nur für gleich große Δx und Δy funktionieren.

Weiter müssen der minimale Abstand zwischen Emittierposition bei \mathbf{x}_E und der ersten Messgrenzschicht bei z_{M_1} (genannt $\mathbf{x}_Z^{M_1}$ mit Z für zentrale Emissionsrichtung) sowie zwischen \mathbf{x}_E und der letzten Messgrenzschicht bei $z_{M_{N_{\mathcal{T}+1}}}$ (genannt $\mathbf{x}_Z^{M_{N_{\mathcal{T}+1}}}$) berechnet werden. Zur Betrachtung werden also wieder die zentrale Emissionsrichtung $\phi_{E,Z} = (0, 0, 1)^T$ und die Normalenvektoren $\mathbf{n}_{M_1} = \mathbf{n}_{M_{N_{\mathcal{T}+1}}} = (0, 0, 1)^T$ der ersten und letzten Grenzschicht herangezogen, so dass

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_Z^{M_1} &:= \mathbf{x}_E + l_{M_1} \left(\theta_{\frac{n_\theta+1}{2}}, \varphi_{\frac{n_\varphi+1}{2}} \right) \phi_{E,Z} && \text{bzw.} \\ \mathbf{x}_Z^{M_{N_{\mathcal{T}+1}}} &:= \mathbf{x}_E + l_{M_{N_{\mathcal{T}+1}}} \left(\theta_{\frac{n_\theta+1}{2}}, \varphi_{\frac{n_\varphi+1}{2}} \right) \phi_{E,Z} \end{aligned} \quad (2.73)$$

für die Schnittpunkte mit der vorderen Grenzschicht M_1 bzw. hinteren Grenzschicht $M_{N_{\mathcal{T}+1}}$ gilt, wobei $i = \frac{n_\theta+1}{2}$ und $j = \frac{n_\varphi+1}{2}$ die Indizes der zentralen Winkel θ_i und φ_j bezeichnen und die $l_{M_k} \in \mathbb{R}^+$ wieder die oben definierten skalaren Längen sind. Dadurch kann nun die minimale PWL (Hin- und Rückrichtung, darum Faktor 2) zwischen \mathbf{x}_E und $\mathbf{x}_Z^{M_1}$ durch

$$s_{\min}^Z := s_{\min}^{\frac{n_\theta+1}{2}, \frac{n_\varphi+1}{2}} = 2 \cdot |\mathbf{x}_Z^{M_1} - \mathbf{x}_E| = 2 \cdot \sqrt{(x_Z^{M_1} - x_E)^2 + (y_Z^{M_1} - y_E)^2 + (z_Z^{M_1} - z_E)^2} \quad (2.74)$$

ebenso wie die maximale PWL zwischen \mathbf{x}_E und $\mathbf{x}_Z^{M_{N_{\mathcal{T}+1}}}$ durch

$$s_{\max}^Z := 2 \cdot |\mathbf{x}_Z^{M_{N_{\mathcal{T}+1}}} - \mathbf{x}_E| = 2 \cdot \sqrt{(x_Z^{M_{N_{\mathcal{T}+1}}} - x_E)^2 + (y_Z^{M_{N_{\mathcal{T}+1}}} - y_E)^2 + (z_Z^{M_{N_{\mathcal{T}+1}}} - z_E)^2} \quad (2.75)$$

angegeben werden, so dass für die minimale Weglänge eines Photons zwischen vorderer Messgrenzschicht M_1 und hinterer Messgrenzschicht $M_{N_{\mathcal{T}+1}}$ des gesamten Messbereichs

$$s_{\text{diff}}^Z = s_{\max}^Z - s_{\min}^Z \quad (2.76)$$

gilt. Da die Emittierrichtungen $\phi_{E,i,j}$ mit θ_i und φ_j variieren, müssen (wie gerade für $\phi_{E,Z} = \phi_{E, \frac{n_\theta+1}{2}, \frac{n_\varphi+1}{2}}$ berechnet) auch für alle $\phi_{E,i,j}$ die minimalen PWL $s_{\min}^{i,j}$ von \mathbf{x}_E nach $\mathbf{x}_{i,j}^{M_1}$ und die maximalen PWL $s_{\max}^{i,j}$ von \mathbf{x}_E nach $\mathbf{x}_{i,j}^{M_{N_{\mathcal{T}+1}}}$ bestimmt werden, um die minimalen Weglängen

$$s_{\text{diff}}^{i,j} = s_{\max}^{i,j} - s_{\min}^{i,j} \geq s_{\text{diff}}^Z \quad \forall i, j, \quad (2.77)$$

eines Photons innerhalb des gesamten Messbereichs in Abhängigkeit von $\phi_{E,i,j}$ zu erhalten. Für äquidistante Anordnung aller zwischen M_1 und $M_{N_{\mathcal{T}+1}}$ gelegenen Messgrenzschichten können gleich lange MZI für jede Messrichtung (θ_i, φ_j) zwischen den Messgrenzschichten definiert werden.

Für jede Messrichtung $\phi_{E,i,j}$ gilt in *pbs5* für das jeweils m -te MZI $\mathcal{T}_m^{i,j}$ mit $m = 1, \dots, N_{\mathcal{T}} \in \mathbb{N}$ zwischen den minimalen und maximalen PWL („Range“) $s_{\min}^{i,j} \in \mathbb{R}_0^+$ und $s_{\max}^{i,j} \in \mathbb{R}_0^+$ mit $s_{\min}^{i,j} < s_{\max}^{i,j}$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_m^{i,j} &:= \left] \frac{s_{\min}^{i,j}}{c}, \frac{s_{\max}^{i,j}}{c} \right], && \text{mit} \\ s_{\min,m}^{i,j} &:= s_{\min}^{i,j} + \frac{m-1}{N_{\mathcal{T}}} \cdot (s_{\max}^{i,j} - s_{\min}^{i,j}), \\ s_{\max,m}^{i,j} &:= s_{\min}^{i,j} + \frac{m}{N_{\mathcal{T}}} \cdot (s_{\max}^{i,j} - s_{\min}^{i,j}). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Es wird also für jedes der $N_{\mathcal{T}}$ MZI gemäß der Folge gleichmäßiger Unterteilungen ($\mathcal{T}_m^{i,j} : m \in N_{\mathcal{T}}$) des kompletten MZI $\left] \frac{s_{\min}^{i,j}}{c}, \frac{s_{\max}^{i,j}}{c} \right]$ der normierte, zeitabhängige, polarisierte Photonfluss in Abhängigkeit

von der variablen Messrichtung $\phi_{E,i,j}$ berechnet. Die zeitliche Auflösung des Lidar-Rücksignals aus der Richtung (θ_i, φ_j) beträgt also $(s_{\max}^{i,j} - s_{\min}^{i,j}) / (c \cdot N_{\mathcal{T}})$. Für die Länge der simulierten Laserpulse muss stets $s_p < \frac{1}{2N_{\mathcal{T}}} \cdot (s_{\max}^Z - s_{\min}^Z)$ gelten. Werte für s_{\min}^Z , s_{\max}^Z und $N_{\mathcal{T}}$ können im Input festgelegt werden.

Aufgrund der veränderten Anforderungen an die Messgeometrie in `pbs5` sind hier auch die Output-Dateien, die die simulierten Intensitätswerte der Rückstreuung bzw. die Anzahl empfangener Photonen beinhalten, entsprechend angepasst. Prinzipiell werden die klassischen Rücksignale eines Lidars simuliert, jedoch für viele Richtungen gleichzeitig. Gemäß der Anzahl der MZI ergeben sich $N_{\mathcal{T}}$ Output-Dateien, d. h. für jede Messschicht eine. Für jede einzelne der $n_{\theta} \times n_{\varphi}$ Richtungen (θ_i, φ_j) werden folgende Einträge in Form je einer Zeile in die m -te Output-Datei ($1 \leq m \leq N_{\mathcal{T}}$) geschrieben:

- Die x -Entfernung in km vom monostatischen Lidar in $\mathbf{x}_E := \mathbf{x}_R = (x_E, y_E, z_E)^T = (0, 0, 0)^T$ zum Schnittpunkt mit der Messebene F_m in Abhängigkeit vom Winkel φ_j :

$$x_j^{F_m} := x_{\min}^m + (j-1) \cdot \frac{x_{\max}^m - x_{\min}^m}{n_{\varphi} - 1} = |x_j^{F_m} - x_E|, \quad j = 1, \dots, n_{\varphi}, \quad m = 1, \dots, N_{\mathcal{T}} \in \mathbb{N}. \quad (2.79)$$

Die x_{\min}^m und x_{\max}^m bezeichnen dabei die unteren und oberen Ränder des x -Bereichs für die m -te Messschicht F_m .

- Die y -Entfernung in km vom Lidar in \mathbf{x}_E zum Schnittpunkt mit der Messebene F_m in Abhängigkeit vom Winkel θ_i :

$$y_i^{F_m} := y_{\min}^m + (i-1) \cdot \frac{y_{\max}^m - y_{\min}^m}{n_{\theta} - 1} = |y_i^{F_m} - y_E|, \quad i = 1, \dots, n_{\theta}, \quad m = 1, \dots, N_{\mathcal{T}} \in \mathbb{N}. \quad (2.80)$$

Die y_{\min}^m und y_{\max}^m bezeichnen dabei die linken und rechten Ränder des y -Bereichs für die m -te Messschicht F_m .

- Die Gesamt-Entfernung in km vom Lidar in \mathbf{x}_E zum Schnittpunkt mit F_m in Abhängigkeit von den Winkeln θ_i und φ_j (äquivalent zu Gl. (2.69)):

$$l_{F_m}(\theta_i, \varphi_j) := |\mathbf{x}_{i,j}^{F_m} - \mathbf{x}_E|, \quad i = 1, \dots, n_{\theta}, \quad j = 1, \dots, n_{\varphi}, \quad m = 1, \dots, N_{\mathcal{T}} \in \mathbb{N}. \quad (2.81)$$

Die z -Positionen der Messebenen F_m (äquivalent zu Gl. (2.71)) kennen wir durch die gegebenen zentralen minimalen und maximalen PWL s_{\min}^Z und s_{\max}^Z über

$$z_{F_m} := 0.5 \cdot \left(s_{\min}^Z + (m-0.5) \cdot \frac{s_{\max}^Z - s_{\min}^Z}{N_{\mathcal{T}}} \right), \quad m = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}. \quad (2.82)$$

Nun folgen nach den geometrischen Daten der Messpunkte die simulierten Werte für die einzelnen Richtungen (θ_i, φ_j) . Dazu zählen:

- Die Gesamtzahl der im Receiver aus der m -ten Messschicht und Richtung (θ_i, φ_j) empfangenen Photonen $n_{\text{rec},m}^{i,j}$ für die spezifische emittierte Laserwellenlänge λ , umgerechnet auf **Photoelektronen (PE)** oder auch **Ladungsträger (LT)** $n_{\text{PE,rec},m}^{i,j}$. Dazu wird wie in früheren `pbs`-Versionen das Verhältnis aus in der Simulation aus der m -ten Messschicht empfangenen Photonen ($n_{\text{sim},m}$) zu insgesamt simulierten (d. h. emittierten) Photonen (pfaden) n_{sim} berechnet. Dies geschieht in `pbs5` nun für jede Richtung (θ_i, φ_j) einzeln, so dass für dieses Verhältnis

$$\frac{n_{\text{sim},m}^{i,j}}{n_{\text{sim}}^{i,j}} \quad \text{mit } m = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}, \quad i = 1, \dots, n_{\theta}, \quad j = 1, \dots, n_{\varphi}$$

gilt. Diese Wahrscheinlichkeit oder relative Schätzung dafür, dass ein Photon aus einer bestimmten Messschicht zurückgestreut wieder im Receiver ankommt wird auch als **Intensität**

(in a.u.) bezeichnet. Um von der Intensität auf die reale (d.h. „physikalische“) Photonenzahl oder LT-Zahl schließen zu können, werden im Input zu `pbs5` einige physikalische Parameter eingelesen. Dies sind die emittierte Laser-Energie $E_L^{i,j}$ (in J) pro Richtung (i.Allg. für jede Richtung i, j konstant gleich groß, d.h. die Pulsenergie E_p wird durch Strahlteiler zerlegt in $E_p = \sum_{i,j} E_L^{i,j} = (n_\theta \cdot n_\varphi) \cdot E_L$), die Laser-Wellenlänge λ_L (in m), die Quanteneffizienz η_{rec} des Detektors wie z.B. Photodioden bei λ_L ($\eta_{\text{rec}} = 1.0$, um Photonenzahl zu erhalten; $0 < \eta_{\text{rec}} \leq 1$, um LT zu erhalten) und die sog. Instrumentenkonstante k_{Lidar} des Lidars (mit $0 \leq k_{\text{Lidar}} \leq 1$). Zusätzlich benötigen wir als Konstanten das Planck'sche Wirkungsquantum $h_{\text{Planck}} = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js und die Lichtgeschwindigkeit in Luft (ähnlich Vakuum) $c \approx 2.998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Die Gesamtzahl der pro Richtung emittierten Photonen n_{ph} berechnet sich dann über

$$n_{\text{ph}}^{i,j} := \frac{E_L^{i,j} \lambda_L}{h_{\text{Planck}} c}. \quad (2.83)$$

Schließlich erhalten wir zusammen mit den durch `pbs5` simulierten rückgestreuten Intensitäten die im Receiver aus der m -ten Messschicht und (i, j) -ten Richtung detektierten Photonen und daraus dann die PE-Zahlen (ohne zusätzliches Rauschen) durch

$$n_{\text{PE,rec},m}^{i,j} := k_{\text{Lidar}} \eta_{\text{rec}} n_{\text{ph}}^{i,j} \frac{n_{\text{sim},m}^{i,j}}{n_{\text{sim}}^{i,j}}, \quad (2.84)$$

mit $0 < k_{\text{Lidar}} \leq 1.0$ und $0 < \eta_{\text{rec}} \leq 1.0$.

- Die rückgestreute, empfangene Gesamtintensität, normiert entsprechend der quadrierten Distanz $l_{F_m}(\theta_i, \varphi_j)$ nach Gl. (2.81) und der ebenfalls nach Messrichtung variablen MZI ($s_{\text{max}}^{i,j} - s_{\text{min}}^{i,j}$). Es gilt

$$I_{\text{rec,norm},m}^{i,j} := \frac{(l_{F_m}(\theta_i, \varphi_j))^2}{(z_{F_m})^2} \cdot \frac{n_{\text{sim},m}^{i,j}}{n_{\text{sim}}^{i,j}} \cdot \frac{(s_{\text{max}}^Z - s_{\text{min}}^Z)}{(s_{\text{max}}^{i,j} - s_{\text{min}}^{i,j})}, \quad (2.85)$$

mit z_{F_m} nach Gl. (2.82). Diese normierten Intensitäten $I_{\text{rec,norm},m}^{i,j}$ werden in Kap. 5 von Bedeutung sein, da im Gegensatz zur PE-Zahl von Gl. (2.84) bei ihnen der Tatsache Rechnung getragen wird, dass mit zunehmender Entfernung der Winkel θ_i und φ_j von der zentralen Messrichtung bei $\theta_Z = \varphi_Z = 0^\circ$ in der Mitte (wo die MZI am kürzesten sind) die MZI entsprechend länger werden. Durch die höhere PWL außen ist dort auch die Strecke für einen möglichen Stoß wegen schrägen Einfalls in einen Extinktions-Würfel bzw. -Quader (bei $\theta_Z = \varphi_Z = 0^\circ$ dagegen gerader Einfall) entsprechend länger, d.h. die Stoßwahrscheinlichkeit wäre dort größer (vgl. Abb. 2.5). Dieses Ungleichgewicht wird durch die Faktoren $\frac{(l_{F_m}(\theta_i, \varphi_j))^2}{(z_{F_m})^2}$ sowie $\frac{(s_{\text{max}}^Z - s_{\text{min}}^Z)}{(s_{\text{max}}^{i,j} - s_{\text{min}}^{i,j})}$ kompensiert. Wichtig ist bei diesen normierten Intensitätswerten lediglich dass ihre Relativität untereinander gewahrt bleibt, nicht jedoch ihre absolute Größe. Insgesamt werden also aus der jeweiligen Messschicht empfangene Intensitäten $n_{\text{sim},m}^{i,j}/n_{\text{sim}}^{i,j}$ bei großen Winkeln θ_i und φ_j im Vergleich zu Intensitäten unter kleineren Winkeln entsprechend obiger Faktoren erniedrigt, was Unabhängigkeit der empfangenen Intensitäten von der Messrichtung ermöglicht¹³.

- Die rückgestreute, empfangene Photonenzahl, normiert entsprechend der quadrierten Distanz $l_{F_m}(\theta_i, \varphi_j)$ nach Gl. (2.81) und der ebenfalls nach Messrichtung variablen MZI ($s_{\text{max}}^{i,j} - s_{\text{min}}^{i,j}$). Sie berechnet sich bis auf den Faktor $k_{\text{Lidar}} n_{\text{ph}}^{i,j}$ wie die Gesamtintensität nach Gl. (2.85):

$$n_{\text{rec,norm},m}^{i,j} := k_{\text{Lidar}} n_{\text{ph}}^{i,j} \cdot \frac{(l_{F_m}(\theta_i, \varphi_j))^2}{(z_{F_m})^2} \cdot \frac{n_{\text{sim},m}^{i,j}}{n_{\text{sim}}^{i,j}} \cdot \frac{(s_{\text{max}}^Z - s_{\text{min}}^Z)}{(s_{\text{max}}^{i,j} - s_{\text{min}}^{i,j})}. \quad (2.86)$$

¹³ In der Realität wäre es auch denkbar, Kugeloberflächen-förmige, d.h. gewölbte „Schichten“ mit zum Lidar äquidistanten Messpunkten zu haben. Dann bräuchten die Intensitäten/Photonenzahlen nicht mehr normiert werden. Eine bessere räumliche Einteilung der gemessenen Windvektoren und damit brauchbarere Vorhersagen für das Flugzeug erlaubt mit diesem Messverfahren aber meist eine Messung in echten Ebenen transversal zur Flugrichtung.

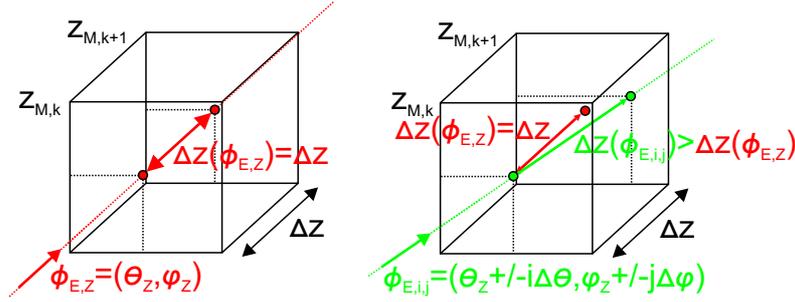


Abbildung 2.5: Begründung für die Notwendigkeit der Längennormierung. Aus zentraler Richtung $\phi_{E,Z}$ kommend ist die Wegstrecke Δz zwischen den Schnitten der Vorder- und Rückseite eines Quaders (Würfels) kürzer als für schrägen Einfall unter $\phi_{E,i,j} \neq \phi_{E,Z}$ unter Winkeln $\theta_Z \pm i\Delta\theta$ und $\varphi_Z \pm j\Delta\varphi$ ($i, j \in \mathbb{N}$). Die $z_{M,k}/z_{M,k+1}$ bezeichnen die vorderen/hinteren Messgrenzebenen.

Die normierte Photonenzahl wird als reelle Zahl gespeichert und später in Kap. 5 mit Rauschen verschiedener Formen versehen, um aus den `pbs5`-Simulationsdaten realistische Messdaten für die Auswertungen mit den Algorithmen zur Windberechnung zu generieren.

- Der normierte Gesamtpolarisationsvektor in Form eines normierten Stokes-Vektors $\mathbf{st}_{R,m}^{i,j} = (i_1, i_2, u, v)^T$, der wieder von der Messrichtung (θ_i, φ_j) und der Messschicht abhängt.
- Schließlich die Größen der vorhergehenden vier Punkte, jedoch gesplittet nach Anteilen der Streuordnung $q \in \mathbb{N}_0$. Das heißt, die unnormierte Gesamtzahl der PE, die normierten Gesamtintensitäten und Photonenzahlen sowie die normierten Gesamtpolarisationsvektoren können in ihre Anteile gemäß der in `pbs` simulierbaren Mehrfachstreuung gesplittet werden, was bei einer realen Messung nicht möglich wäre. Wenn wir davon ausgehen, dass die `pbs`-Simulationen die Streueigenschaften der Realität gut widerspiegeln, dann können daraus für die echten Messungen wichtige Schlüsse gezogen werden, wenn zwischen Anteil der Einfachstreuung und dem gesamten Rücksignal (siehe z.B. Gesamtphotonenzahl), das alle Anteile der Mehrfachstreuung schon enthält, die Unterschiede ausreichend gering sind, so dass mit den Windberechnungsverfahren von Kap. 4 noch gute Ergebnisse möglich sind. Da in den Auswertungen von Kap. 5 immer das durch Mehrfachstreuung verfälschte Gesamtsignal verwendet wird, ist eine Nachbildung des Fehlers durch Mehrfachstreuung bei realen Messungen möglich (eigentlich wünscht man sich nur Einfachstreuung, was aber nie möglich sein wird).

Auf die Intensitäten und Stokes-Vektoren zurückkommend kann auch eine mathematisch vertiefere Darstellung angegeben werden. Wie in Kap. 2.1 beschrieben, simuliert `pbs` einen polarisierten korpuskularen multiplen Streuprozess $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{K}}, \tilde{\mathbb{P}}^v; u_m : m \in \mathbb{N}_0; \mathcal{U}, \Upsilon)$. Dabei bezeichne $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus \tilde{N}$ den Raum der diskreten Pfade mit isolierten Sprungzeiten (\tilde{N} eine Nullmenge), $\tilde{\mathfrak{K}}$ die σ -Algebra auf $\tilde{\Omega}$, $\tilde{\mathbb{P}}^v$ das Wahrscheinlichkeitsmaß des Prozesses $\{u_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ (zeitabhängige Zustände u_m nach Gl. (2.37)) mit Startverteilung in $v : \Upsilon \rightarrow [0, 1]$ und $\mathcal{U} := \mathbb{R}_0^+ \times \mathcal{S}$ der Zustandsraum sowie $\Upsilon := \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+) \otimes \mathfrak{G}$ die zugehörige Borelsche Produkt- σ -Algebra mit Elementen \mathcal{R}' , siehe auch Kap. 2.1. Es sei

$$\begin{aligned} \overline{W}_{T_m,r}^{i,j} &:= \{\omega \in \tilde{\Omega} : \phi_{r,i,j} \in \text{FOV}_{R,i,j}\} \cap \\ &\quad \{\omega \in \tilde{\Omega} : A_{R,i,j} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \mathbf{x}_{r,i,j} + ct\phi_{r,i,j} \text{ mit } t \in [0, t_{r+1}^{i,j} - t_r^{i,j}[\} \neq \emptyset\} \cap \\ &\quad \left\{ \omega \in \tilde{\Omega} : t_r^{i,j} + \frac{-\langle \mathbf{x}_{r,i,j}, \phi_{r,i,j} \rangle}{c \cdot \langle \phi_{r,i,j}, \phi_{R,i,j} \rangle} \right\} \end{aligned} \quad (2.87)$$

mit $r \in \mathbb{N}$, $m = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}$, $i = 1, \dots, n_{\theta}$, $j = 1, \dots, n_{\varphi}$

die Menge aller Photonenpfade $\omega \in \tilde{\Omega}$, die die Receiver-Ebene mit Fläche $A_{R,i,j}$ und Blickfeld $\text{FOV}_{R,i,j}$ aus der Richtung (θ_i, φ_j) kommend inklusive des r -ten Streueignisses innerhalb des MZI $\mathcal{T}_m^{i,j}$ schneiden. Bei festem Receiver fällt die Abhängigkeit von i und j weg, d.h. festes A_R und FOV_R ersetzen $A_{R,i,j}$ und $\text{FOV}_{R,i,j}$. Von den Mengen $\overline{W}_{\mathcal{T}_m,r}^{i,j}$ müssen noch die Pfade subtrahiert werden, die die Receiver-Ebene vor der r -ten Streuung gekreuzt haben, um nur die Pfade zu erhalten, die die Receiver-Ebene nach der r -ten Streuung im MZI $\mathcal{T}_m^{i,j}$ aus der Richtung (θ_i, φ_j) kommend getroffen haben. Für letztere Menge gilt

$$W_{\mathcal{T}_m,r}^{i,j} := \overline{W}_{\mathcal{T}_m,r}^{i,j} \setminus \bigcup_{k=1}^{r-1} \overline{W}_{\mathcal{T}_m,k}^{i,j} \quad \forall r \in \mathbb{N}. \quad (2.88)$$

Die Intensität einer bestimmten Streuordnung von oben ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein mit Startverteilung ν in Richtung (θ_i, φ_j) ausgesandtes Photon nach seiner r -ten Streuung innerhalb des MZI $\mathcal{T}_m^{i,j}$ zum ersten Mal die Receiver-Ebene durchquert. Für diese Wahrscheinlichkeit gilt

$$P_{\mathcal{T}_m,r}^{i,j} := \int_{\tilde{\Omega}} 1_{W_{\mathcal{T}_m,r}^{i,j}}(\omega) \tilde{\mathbb{P}}^\nu(d\omega). \quad (2.89)$$

Wie oben erwähnt kann ein Lidar in der Realität natürlich nicht messen, um welche Streuordnung es sich bei einem empfangenen Photon handelt, sondern nur Gesamtintensität, Richtung und MZI. Die Simulation kann dies jedoch. Für die im MZI $\mathcal{T}_m^{i,j}$ aus der (i, j) -ten Richtung im Receiver empfangene Gesamtintensität $n_{\text{sim},m}^{i,j}/n_{\text{sim}}^{i,j}$ aus Gl. (2.84) gilt mit obiger Schreibweise

$$P_{\mathcal{T}_m}^{i,j} := \int_{\tilde{\Omega}} 1_{\bigcup_{k=1}^{\infty} W_{\mathcal{T}_m,k}^{i,j}}(\omega) \tilde{\mathbb{P}}^\nu(d\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\tilde{\Omega}} 1_{W_{\mathcal{T}_m,k}^{i,j}}(\omega) \tilde{\mathbb{P}}^\nu(d\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{\mathcal{T}_m,k}^{i,j}. \quad (2.90)$$

Dazu wird vorausgesetzt, dass die Mengen $W_{\mathcal{T}_m,k}^{i,j}$ mit $k \in \mathbb{N}$ disjunkt sind.

Ebenso können die zu erwartenden Anteile der r -ten Streuordnung an der Gesamtpolarisation mittels

$$\mathbf{ST}_{\mathcal{T}_m,r}^{i,j} := \int_{\tilde{\Omega}} \mathcal{L}(\Xi(\phi_{r,i,j}(\omega) \times \rho_{r,i,j}(\omega), \phi_{R,i,j} \times \rho_{R,i,j})) \cdot \mathbf{st}_r^{i,j}(\omega) \cdot 1_{W_{\mathcal{T}_m,r}^{i,j}}(\omega) \tilde{\mathbb{P}}^\nu(d\omega) \quad (2.91)$$

und die zu erwartende Gesamtpolarisation im Receiver mittels

$$\mathbf{ST}_{\mathcal{T}_m}^{i,j} := \int_{\tilde{\Omega}} \mathcal{L}(\Xi(\phi_{g(\omega),i,j}(\omega) \times \rho_{g(\omega),i,j}(\omega), \phi_{R,i,j} \times \rho_{R,i,j})) \cdot \mathbf{st}_{g(\omega)}^{i,j}(\omega) \cdot 1_{\bigcup_{k=1}^{\infty} W_{\mathcal{T}_m,k}^{i,j}}(\omega) \tilde{\mathbb{P}}^\nu(d\omega) \quad (2.92)$$

berechnet werden. Durch $g(\omega)$ wird dabei die (endliche) Anzahl der Streueignisse beschrieben bevor das aus Richtung (θ_i, φ_j) kommende Photon mit Trajektorie ω im m -ten MZI zum ersten Mal die Receiver-Fläche im FOV-Bereich schneidet. Aus den Gleichungen (2.91) und (2.92) können dann wieder die normierten Stokes-Vektoren $\mathbf{st}_{\mathcal{T}_m,r}^{i,j}$ und $\mathbf{st}_{\mathcal{T}_m}^{i,j}$ berechnet werden.

Daneben gibt es eine weitere Serie von Output-Dateien für die $N_{\mathcal{T}}$ Schichten, die die relativen Fehler (Wurzel der empirischen Varianz, d.h. Standardabweichung) der Gesamtintensität und auch getrennt nach allen Ordnungen der Streuung enthält. Für die (i, j) -te Richtung und MZI \mathcal{T}_m gilt mit

$$P_{\mathcal{T}_m}^{i,j} = \frac{n_{\text{sim},m}^{i,j}}{n_{\text{sim}}^{i,j}}$$

aus Gl. (2.90) für die Varianz des Gesamtsignals jeweils

$$\mathbb{V}_{\mathcal{T}_m}^{i,j} = \sqrt{\frac{1}{n_{\text{sim}}^{i,j} - 1} \cdot \left(\frac{(n_{\text{sim},m}^{i,j})^2}{n_{\text{sim}}^{i,j}} - (P_{\mathcal{T}_m}^{i,j})^2 \right)}, \quad (2.93)$$

bzw. prozentual ausgedrückt

$$\mathbb{V}_{\mathcal{T}_m, \%}^{i,j} = 100 \cdot \frac{\mathbb{V}_{\mathcal{T}_m}^{i,j}}{P_{\mathcal{T}_m}^{i,j}}. \quad (2.94)$$

Ebenso gilt mit

$$P_{\mathcal{T}_m, r}^{i,j} = \frac{n_{\text{sim}, m, r}^{i,j}}{n_{\text{sim}}^{i,j}}$$

für die Varianz des Signals der r -ten Streuordnung ($r \in \mathbb{N}$)

$$\mathbb{V}_{\mathcal{T}_m, r}^{i,j} = \sqrt{\frac{1}{n_{\text{sim}}^{i,j} - 1} \cdot \left(\frac{(n_{\text{sim}, m, r}^{i,j})^2}{n_{\text{sim}}^{i,j}} - (P_{\mathcal{T}_m, r}^{i,j})^2 \right)}, \quad (2.95)$$

bzw. prozentual ausgedrückt

$$\mathbb{V}_{\mathcal{T}_m, r, \%}^{i,j} = 100 \cdot \frac{\mathbb{V}_{\mathcal{T}_m, r}^{i,j}}{P_{\mathcal{T}_m, r}^{i,j}}. \quad (2.96)$$

Da nur eine begrenzte Anzahl an emittierten Photonen pro Richtung simuliert werden kann, und (wie wir in Kap. 5 sehen werden) die Extinktion an den Rändern der zu vermessenden Schichten zum Teil sehr gering ist, ist dort aufgrund der wenigen rückgestreuten Photonen die durch die Simulation bedingte Varianz hoch, während sie in der Mitte bei hoher Extinktion sehr viel geringer ist.

Außerdem kann in einer Zusatz-Datei die gesamte Simulationsdauer für alle Richtungen (i, j) und die durchschnittliche Dauer für eine einzelne Richtung ausgegeben werden.

`pbs5` wird durch Einlesen der Input-Dateien mit den Parametern zusammen mit der Gesamtzahl $n_{\text{sim}}^{i,j}$ der zu simulierenden Photonen pro Richtung (θ_i, φ_j) über die Kommandozeile gestartet.

Was nun noch fehlt sind Extinktionsprofile (Verteilungen der $\sigma_{i,j,k}$), die der Struktur eines Wirbels oder eines Paares von WS in der Realität möglichst gut entsprechen. Ihre Generierung wird in Kap. 3 und 5 ausführlich erläutert werden. Eine geeignete Möglichkeit ist z.B. die Verwendung der Konzentrationen von Tracer-Verteilungen wie in den Abb. 3.4(a) und 3.4(c), jedoch multipliziert mit einem geeigneten Faktor in der Einheit km^{-1} , so dass realistische Werte für die (maximalen) Extinktionskoeffizienten entstehen. Sogar Absolutwerte von Tangentialgeschwindigkeitsprofilen wie in den Abb. 3.3(g) und 3.3(h) würden bei entsprechender Normierung geeignete Verteilungen der Streuer bzw. Extinktionen liefern, die dann für die `pbs5`-Simulationen verwendet werden könnten. Aber auch selbsterzeugte spiralen- oder ringförmige Verteilungen werden als Extinktionsprofile angewandt werden, siehe Kap. 5.

Bei der Erzeugung der Wirbel-Extinktionsprofile wird vorausgesetzt, dass große Teilchen von der Strömung weniger gut mitgerissen werden als kleinere. Da in der Natur i. Allg. nur kleinere Streuer vorkommen, können wir die Annahme machen, dass die Streuer der lokalen Luftströmung im Wesentlichen folgen und sich damit mit der lokalen Strömungsgeschwindigkeit bewegen. Die Rückstreu-Bilder bestehen (anders als bei PIV) nicht aus diskreten Punkten/Flecken einzelner Tracer-Partikel, sondern sind häufig kontinuierliche Verteilungen ohne extreme Intensitätssprünge.

Die in Kap. 2.1 beschriebenen RTE-Lösungsverfahren werden also in Form des Programmes `pbs5` und in Verbindung mit den Auswertemethoden von Kap. 4 abschließend in Kap. 5 zum Einsatz kommen.

pro Einheitsmasse und q_j der molekulare Wärmestrom (Fröhlich, 2006, Garnier et al., 2009). In den Gleichungen (3.1) für kompressible Gasströmungen gingen die Annahme Newton'scher Fluide² und die Erfüllung der Kontinuumshypothese³ ein. Für den Scherspannungstensor gilt

$$\sigma_{ij} = \mu \left(2S_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} S_{kk} \right), \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad \text{mit} \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \right), \quad (3.2)$$

mit der dynamischen Viskosität μ , dem Kronecker-Delta δ_{ij} ($\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$) und den Komponenten S_{ij} des Scherratentensors $S(\mathbf{u})$. Die Gesamtenergie ist durch $E = C_v T + \frac{1}{2} u_i u_i$ mit der spezifischen Wärmekapazität C_v (bei konstantem Volumen) und Temperatur $T = T(p, \rho)$ gegeben. Der molekulare Wärmestrom hängt über $q_j = -\kappa \frac{\partial}{\partial x_j} T$, $j = 1, 2, 3$, von einem Temperaturgradient und der Wärmeleitfähigkeit κ ab. Die Größen ρ , p und T sind durch das ideale Gasgesetz miteinander verknüpft.

Mit der Abkürzung ∂_\diamond anstelle von $\frac{\partial}{\partial \diamond}$ für eine beliebige Variable \diamond , Impulsdichte $\mathbf{m} = \rho \mathbf{u} = (m_1, m_2, m_3)^T$ sowie Gravitationsvektor $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)^T$ lassen sich die Gl. (3.1) schreiben als:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \langle \nabla_x, \mathbf{m} \rangle &= 0, \\ \partial_t m_i + \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} (m_i u_j + p \delta_{ij}) &= \left(\sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} \sigma_{ij} \right) + \rho g_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ \partial_t (\rho E) + \langle \nabla_x, ((E + p \rho^{-1}) \mathbf{m}) \rangle &= \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} \left(\sum_{i=1}^3 \sigma_{ij} u_i - q_j \right) + Q - \langle \rho \mathbf{u}, \mathbf{g} \rangle, \end{aligned} \quad (3.3)$$

wobei Q ein Quellterm ist, und das Subskript x in ∇_x auf das Wirken des Nabla-Operators nur auf x -Komponenten hinweist, während ∇ eine Wirkung auf t inkludiert. Im Falle von Überschallströmungen oder stark aufsteigender (und abfallender) Luftmassen sind obige kompressiblen NSG für eine passende Beschreibung der Realität notwendig.

Da wir uns im Folgenden auf (bezüglich der Temperatur) neutral oder stabil geschichtete Atmosphäre bei geringen Höhenunterschieden und Turbulenz unterhalb des Überschallbereichs (kleine Machzahl) fokussieren werden, kann die geringe Änderung der Luftdichte mit der Höhe oder im Kern eines Wirbels vernachlässigt, d. h. konstante Dichte angenommen werden. Die dadurch vereinfachten, sog. *inkompressiblen NSG*, lauten damit (Fröhlich, 2006):

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{u} = \langle \nabla_x, \mathbf{u} \rangle = \partial_{x_i} u_i &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung}), \\ \partial_t u_i + \partial_{x_j} (u_i u_j) + \partial_{x_i} p - \partial_{x_j} (\nu 2 S_{ij}) &= F_i, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{Impulserhaltung}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dabei bedeutet die erste Bedingung von Gl. (3.4) ($\text{div } \mathbf{u} = 0$), dass das Fluid als homogen und inkompressibel angenommen wird. Bei den F_i handelt es sich um Komponenten einer äußeren Volumenkraft, und ν heißt kinematische Viskosität. Es gilt hier der Satz von Schwarz, der ein Vertauschen der Reihenfolge der Ableitungen erlaubt, sofern die zweiten partiellen Ableitungen $\partial_{x_j} \partial_{x_i} u_i$ bzw. $\partial_{x_i} \partial_{x_j} u_i$ von u_i für $i = 1, 2, 3$ stetig sind: $\partial_{x_j} (u_i u_j) = \partial_{x_j} (u_j u_i)$. Gleichungssysteme wie in Gl. (3.1) oder (3.4) sind erst in Verbindung mit passenden Anfangs- und Randbedingungen umfassend beschrieben. Insgesamt besteht (3.4) aus vier Gleichungen, da die F_i in drei Richtungen auftreten.

² Ein **Newton'sches Fluid** ist ein Gas/eine Flüssigkeit, dessen/deren Scherspannung τ über die (konstante) dynamische Viskosität μ proportional zur Schergeschwindigkeit du/dy ist: $\tau = \mu \frac{du}{dy}$, mit Strömungsgeschwindigkeit u und Ortskoordinate y normal zur Wand. Newton'sche Fluide sind etwa Wasser und Luft, aber auch viele Öle und Gase.

³ Die Kontinuumshypothese setzt Kontrollvolumina mit ausreichend großer Anzahl an Molekülen zur statistischen Mittelung und dadurch makroskopischen Beschreibung mit Druck p , Dichte ρ und Geschwindigkeit \mathbf{u} voraus.

Die *Inkompressibilität von Fluiden* wird so formuliert: Die Kontinuitätsgleichung von (3.1) kann umgeformt werden zu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \langle \nabla_x, \rho \mathbf{u} \rangle = 0, \quad (3.5)$$

und der Divergenzterm in obiger Gleichung kann auch geschrieben werden als

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \quad \text{mit} \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.6)$$

oder kürzer:

$$\langle \nabla_x, \rho \mathbf{u} \rangle = \rho \langle \nabla_x, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \nabla_x \rho \rangle = \rho \operatorname{div} \mathbf{u} + \langle \mathbf{u}, \operatorname{grad} \rho \rangle. \quad (3.7)$$

Da $\rho = \text{const.}$ vorausgesetzt wird, verschwindet der Gradient (keine räumliche Dichteschwankung) nach Teilen der Kontinuitätsgleichung durch ρ , und es ergibt sich zunächst (Kundu und Cohen, 2008)

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \langle \nabla_x, \mathbf{u} \rangle = 0, \quad (3.8)$$

wobei $D\rho/Dt$ die Änderungsrate der Dichte eines Fluidpartikels ist. Diese Ableitung kann für Änderungen von p, T oder der Zusammensetzung von Null verschieden sein. Ein **Fluid** heißt in der Regel **inkompressibel**, wenn sich seine Dichte nicht mit dem Druck verändert. Flüssigkeiten sind nahezu inkompressibel, ebenso wie Gase für Geschwindigkeiten bis etwa $100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, wo die anteilmäßige Veränderung des Absolutdrucks innerhalb der Strömung auch klein ist (Kundu und Cohen, 2008). Aufgrund der sog. **Boussinesq-Approximation** kann der erste Term in Gl. (3.8) vernachlässigt werden, und so erhält man die *inkompressible Form der Kontinuitätsgleichung*:

$$\langle \nabla_x, \mathbf{u} \rangle = 0. \quad (3.9)$$

Die **inkompressiblen NSG (INSG)** von Gl. (3.4) können auch mathematisch (hier nach Sohr (2001)) formuliert werden.

Sei dazu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene, nichtleere, zusammenhängende Teilmenge des n -dimensionalen euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n\}$, der einen Spezialfall eines topologischen Raumes darstellt. Es gelte $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ für die Raumpunkte \mathbf{x} und $t \in T \subset \mathbb{R}$ für die Zeitpunkte t der Menge aller Zeitpunkte $T = [0, t_{\max})$ mit $0 < t_{\max} \leq \infty$. Der \mathbb{R}^n sei versehen mit der 2-Norm $\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Weiter sei $\mathbf{u} : (\Omega, T) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $(\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), \dots, u_n(\mathbf{x}, t))$ ein zeitabhängiges Vektorfeld, das die Geschwindigkeitskomponenten u_i , $i = 1, \dots, n$ eines sich zeitlich und räumlich bewegendes Fluids angibt. Ebenso seien $p(\mathbf{x}, t) \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ die zugehörigen (skalaren) Drücke. Die (räumliche) Skalierung kann so gewählt werden, dass die Dichte auf 1 normiert ist (Ladyzhenskaya, 1975). Durch die vom Feld $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = (F_1(\mathbf{x}, t), \dots, F_n(\mathbf{x}, t)) \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ äußerer Kräfte verursachte Bewegung des Fluids erhält man folgende

Definition 3.1 (*Instationäre*, d.h. zeitabhängige INSG für $n = 2, 3$):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= \langle \nabla_x, \mathbf{u} \rangle = 0, \\ \mathbf{u}_t - \nu \Delta_x \mathbf{u} + \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{u}_{x_i} &= -\operatorname{grad} p + \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dabei seien \mathbf{u}_t und \mathbf{u}_{x_i} die partiellen Ableitungen $\partial_t u_i$ bezüglich der Zeit bzw. $\partial_{x_i} u_j$ bezüglich des Raums für $i, j = 1, \dots, n$. Weiter gelte für den Gradienten $\operatorname{grad} p = \nabla_x p$, für die Divergenz $\operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_{i x_i} = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u_i$, und für den Laplace-Operator Δ_x gelte $\Delta_x \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_{x_i x_i} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{u}) = \nabla_x \langle \nabla_x, \mathbf{u} \rangle - \nabla_x \times (\nabla_x \times \mathbf{u}) = \nabla_x \langle \nabla_x, \mathbf{u} \rangle - (\nabla_x \langle \nabla_x, \mathbf{u} \rangle - (\nabla_x)^2 \mathbf{u})$.

Zudem gelte für den nichtlinearen Term $\sum_{i=1}^n u_i \mathbf{u}_{x_i} = \langle \mathbf{u}, \nabla_x \mathbf{u} \rangle$, und $\nu = c \in \mathbb{R}_0^+$ sei der konstante kinematische Viskositätskoeffizient. Zur Lösung obiger Gleichungen sind in jedem Fall Anfangs- und Randwertbedingungen nötig. Diese lauten für Gl. (3.10):

$$\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{und} \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.11)$$

Dabei sei \mathbf{u}_0 der Anfangswert der Geschwindigkeit und $\partial\Omega$ der Rand von Ω , so dass $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$ einen Randwert darstellt. Bedingung $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$ in (3.11) entfällt, falls $\Omega = \mathbb{R}^n$ ist.

Damit gilt es jeweils die *unbekannten Größen* \mathbf{u} und p zu bestimmen. Für die *instationäre*, nichtlineare INSG (3.10) mit der Eigenschaft (3.11) lässt sich z. B. nach Sohr (2001) eine sog. schwache Lösung \mathbf{u} ermitteln. Dort wird auch nach einem Satz von Serrin (1963) und Masuda (1984) die Existenz schwacher Lösungen sowie ihre Eindeutigkeit unter Zusatzbedingungen bewiesen. Für $n = 2$ sind diese Zusatzbedingungen immer erfüllt, während sie für $n = 3$ (nur) eine beschränkte Klasse schwacher Lösungen bestimmen. Regularität und Eindeutigkeit schwacher Lösungen \mathbf{u} sind ungelöste Probleme in 3D (d.h. für $n = 3$). Ziel ist aber die Suche nach starken Lösungen der INSG. Bei Sohr (2001) wird die Existenz starker Lösungen unter Einschränkungen auf die gegebenen Größen \mathbf{F} und \mathbf{u}_0 für $n = 3$ gezeigt. Außerdem wird dort für $n = 2$ ein Existenz- und Eindeutigkeitsatz starker Lösungen der Gl. (3.10) bewiesen. Anders als für $n = 2$ lässt sich für $n = 3$ die Existenz nur lokal zeigen. Die Frage, ob für $n = 3$ auf dem gesamten Intervall eine starke Lösung \mathbf{u} ohne Bedingungen an die Kleinheit des Intervalls existiert, konnte (und kann) bislang nicht beantwortet werden. Die Ergebnisse von Fujita und Kato (1964) und Kozono und Ogawa (1994) werden von Sohr (2001) auf allgemeinere Ω und \mathbf{F} erweitert, um einen Satz über die *lokale* Existenz und Eindeutigkeit starker Lösungen in 3D zu beweisen. Nur für ein ausreichend kleines (d.h. kurzes) Anfangs-Zeitintervall $[0, t']$ mit $t' \leq t \in T$ erhält man immer eine starke Lösung.

Insgesamt gibt es, Stand heute, **keine** allgemeingültige Lösung im klassischen Sinne ohne irgendwelche zusätzlichen Bedingungen und Annahmen. Für $n = 2$ gibt es bereits weitreichende Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen sowie Regularitätseigenschaften, während die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit glatter Lösungen für $n = 3$ bisher ungeklärt ist und deshalb zu den Millennium-Problemen zählt, siehe Fefferman (2000) oder Sonar (2009). Aufgrunddessen gibt es momentan selbst theoretisch keine analytische Lösung für die instationären INSG und man ist gezwungen, diese Gleichungen numerisch zu approximieren.

3.2 Modellierung von Wirbelschleppen mittels Large Eddy Simulation (LES)

Numerische Strömungsmechanik (CFD) modelliert (turbulente) Strömungen physikalisch und versucht die mathematischen Gleichungen zu ihrer Beschreibung numerisch diskretisiert per Computer zu lösen (Wesseling, 2001). Im Gegensatz zur älteren, rechenintensiveren **direkten numerischen Simulation (DNS)** berechnet eine **Large Eddy Simulation (LES)** nur die energiereichen großskaligen Wirbelstrukturen in direkter Weise ($\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$) und modelliert zur Reduktion der Rechendauer die energiearmen kleinskaligen (\mathbf{u}') durch ein sog. Feinstrukturmodell. Die Berechnungen erfolgen in 3D auf einem größeren Gitter und fanden anfangs neben der Meteorologie v. a. in Strömungssimulationen zwischen Grenzflächen wie ebenen Platten (Deardorff, 1970) oder ebenen Kanälen und Ringspalten (Schumann, 1975) mit Finite-Differenzen-Gittern Anwendung. DNS und LES liefern mehr Informationen und Parameter über turbulente Strömungen, als dies eine experimentelle Messung meist kann.

3.2.1 Numerische Lösungsmethoden für instationäre, inkompressible NSG

Zweck der Lösung instationärer INSG ist die Gewinnung detaillierter turbulenter Geschwindigkeits-, Druck-, Temperatur- oder Dichtefelder in Raum und Zeit. Zur räumlichen Diskretisierung kommen Finite-Differenzen-, Finite-Elemente- oder Finite-Volumen-Verfahren sowie Spektralmethoden oder Partikelverfahren zum Einsatz (Fröhlich, 2006). Desweiteren gibt es inzwischen Splinemethoden oder Methoden mit Wavelets als Basisfunktionen. Letztere ermöglichen das Aufspüren der energiereichen Strömungsanteile, so dass nur diese Bereiche berechnet werden müssen.

Hier soll nur die **Finite-Differenzen(FD)-Methode** zur Lösung der instationären INSG nach Geschwindigkeit $(u_1, u_2, u_3)^T = (u, v, w)^T \in \mathbb{R}^3$ und Druck $p \in \mathbb{R}$ kurz dargestellt werden (allgemein bei Ladyzhenskaya (1985) ab S. 212). Der Druck p wird häufig durch Lösung einer Poisson-Gleichung berechnet (z. B. bei Williams (1969)). Um sicherzustellen, dass die numerische Lösung gegen einen sinnvollen Wert konvergiert, müssen das räumliche Gitter und auch die Zeitschritte nach und nach verfeinert werden (d.h. Erhöhung der Maschenzahl und Verkleinerung von Δt).

Bei der FD-Methode wird (mehrmalige und/oder partielle) Differenzierbarkeit der Funktionen in den NSG vorausgesetzt, wodurch sich der sog. *Differenzenquotient* angeben lässt, der eine Approximation für die lokale Differentiation darstellt. Man unterscheidet je nach Differenzbildung zwischen Vorwärts-, Rückwärts- und zentralen Differenzenquotienten. Diese sollen auf einem Gitter mit Würfel-Struktur (3D) kurz definiert werden.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega$ und Abschluss $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Mit Indizes $i, j, k \in \mathbb{Z}$ und einer konstanten Schrittweite (auch Maschenweite) $h \in \mathbb{R}^+$ in allen drei Raumrichtungen definiert man die Gitterpunkte $(i h, j h, k h)^T$. Nun muss man nach einer approximativen Lösung der instationären INSG von Gl. (3.10) unter den Anfangs- und Randwerten von Gl. (3.11) an endlich vielen (Gitter-)Punkten in $\bar{\Omega}$ suchen. Für die Ableitungen nach \mathbf{u} in Gl. (3.10) und (3.11) in einer Dimension gilt (vgl. auch Knabner und Angermann (2000)):

Gegeben sei ein Intervall $\Omega_i := (x_i - h, x_i + h)$ für $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, und $0 < h < \infty$. Der Rest res hängt von u_i und h ab, ist aber von h unabhängig beschränkbar. Weiter sei $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumnorm auf Ω_i . Es gilt:

- Für $u_i \in C^2(\bar{\Omega}_i)$ mit $\bar{\Omega}_i$ kompakt:

$$u_i'(x_i) = \frac{u_i(x_i + h) - u_i(x_i)}{h} + \text{res } h \quad \text{mit} \quad |\text{res}| \leq \frac{1}{2} \|u_i''\|_\infty < \infty, \quad (3.12)$$

$$u_i'(x_i) = \frac{u_i(x_i) - u_i(x_i - h)}{h} + \text{res } h \quad \text{mit} \quad |\text{res}| \leq \frac{1}{2} \|u_i''\|_\infty < \infty. \quad (3.13)$$

- Für $u_i \in C^3(\bar{\Omega}_i)$:

$$u_i'(x_i) = \frac{u_i(x_i + h) - u_i(x_i - h)}{2h} + \text{res } h^2 \quad \text{mit} \quad |\text{res}| \leq \frac{1}{6} \|u_i'''\|_\infty. \quad (3.14)$$

- Für $u_i \in C^4(\bar{\Omega}_i)$:

$$u_i''(x_i) = \frac{u_i(x_i + h) - 2u_i(x_i) + u_i(x_i - h)}{h^2} + \text{res } h^2 \quad \text{mit} \quad |\text{res}| \leq \frac{1}{12} \|u_i^{(4)}\|_\infty. \quad (3.15)$$

Der Beweis obiger Gleichungen folgt durch Anwendung der Taylor-Formel auf eine stetig differenzierbare Funktion u_i , d.h. es gilt $u_i(x_i \pm h) = p_n(x_i \pm h) + \text{res}_n(x_i \pm h)$, $n \in \mathbb{N}_0$ (p_n das n -te Taylor-Polynom mit Rest res_n), vgl. Knabner und Angermann (2000), S. 20.

Definition 3.2 (Differenzenquotienten) :

Der Quotient aus Gl. (3.12) heißt **Vorwärts-Differenzenquotient** (kurz: $\partial^+ u_i(x_i)$), der Quotient aus Gl. (3.13) **Rückwärts-Differenzenquotient** (kurz: $\partial^- u_i(x_i)$), und der Quotient aus Gl. (3.14) **Zentraler Differenzenquotient** (kurz: $\partial^0 u_i(x_i)$). Diese sind alle Ableitungen erster Ordnung. Dagegen bezeichnet Gl. (3.15) einen **Differenzenquotient zweiter Ordnung** (als Approximation der zweiten Ableitung, viermalige Differenzierbarkeit von u_i vorausgesetzt; kurz: $\partial^- \partial^+ u_i(x_i)$).

Während man für die zweiten Ableitungen (d.h. die Divergenz) nach \mathbf{u} in 2D bei Anwendung des Differenzenverfahrens einen sog. *5-Punkte-Stern* erhält (Knabner und Angermann, 2000), bekommt man in 3D eine Art „*7-Punkte-Stern*“. Das heißt, für die zweite Ableitung um den Punkt $(i h, j h, k h)$ in 3D gilt aufgrund von Gl. (3.15) :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}''(\mathbf{x}) &= \frac{u_1((i+1)h, jh, kh) - 2u_1(ih, jh, kh) + u_1((i-1)h, jh, kh)}{h^2} \\ &+ \frac{u_2(ih, (j+1)h, kh) - 2u_2(ih, jh, kh) + u_2(ih, (j-1)h, kh)}{h^2} \\ &+ \frac{u_3(ih, jh, (k+1)h) - 2u_3(ih, jh, kh) + u_3(ih, jh, (k-1)h)}{h^2} \\ &+ \text{res}(ih, jh, kh) h^2, \quad \text{oder kürzer} \\ \mathbf{u}''(\mathbf{x}) &\approx \frac{1}{h^2} (\mathbf{u}_{i-1,j,k} + \mathbf{u}_{i,j-1,k} + \mathbf{u}_{i,j,k-1} - 6\mathbf{u}_{i,j,k} + \mathbf{u}_{i+1,j,k} + \mathbf{u}_{i,j+1,k} + \mathbf{u}_{i,j,k+1}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Für die Randpunkte zu $(i h, j h, k h)$ gelten entsprechende Randbedingungen. Durch Vernachlässigung des Restterms können für viele Systeme partieller Differentialgleichungen genäherte Lösungen ermittelt werden. Die auftretenden, höherdimensionalen Matrizen, sind dünnbesetzt und können mit speziellen Verfahren (siehe z. B. Press et al. (2007), § 20) beschleunigt berechnet werden. Man kann in 3D einen 27-Punkte-Stern definieren, wenn man außer den Punkten entlang der Achsen um den zentralen Punkt mit $(i h, j h, k h)$ noch die Diagonalepunkte (Eckpunkte) berücksichtigt.

3.2.2 Mathematisch-numerische Modellierung mittels LES

Wirbelschleppen bzw. turbulente Strömungen werden am Institut für Physik der Atmosphäre des DLR in Oberpfaffenhofen mit den LES-Codes **LESTUF** und **MGLET** simuliert (Holzäpfel et al., 2010, Hennemann und Holzäpfel, 2011, Misaka et al., 2012). Mit LES kann die WS-Deformation mit fortschreitender Zeit für verschiedene Grade atmosphärischer Turbulenz und stabiler Temperaturschichtung dargestellt werden.

Für zeitlich hochaufgelöste LES sind zeitliche Mittel für \mathbf{u} und p (sog. Reynolds-Mittel) ungeeignet. Stattdessen versucht LES *lokale räumliche Mittel* von \mathbf{u} (und p) zu berechnen, im einfachsten Fall für FD auf strukturierten Gittern über Gitterzellen-Mittelung. Um die fehlende Rotationsinvarianz solcher Volumenmittlungen zu umgehen, können die Mittel alternativ durch *Faltung* mit einem räumlichen *Filterkern* (glatte, rotationssymmetrische Funktion) definiert werden (Berselli et al., 2006, John, 2004). Oft verwendet werden der Gauß'sche Filter oder der Box-Filter (auch Moving-Average-, Zylinderhut- oder Rechteckfilter genannt). Durch Operation eines solchen Filters mit \mathbf{u} ergibt sich der gemittelte Geschwindigkeitswert $\bar{\mathbf{u}}$ und die (turbulente) Fluktuation (Schwankung) $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$.

LESTUF ist eine Erweiterung des DNS-Codes **DISTUF** (Gerz, 1987, Gerz et al., 1989), der auf FD- und **Subgrid-Scale(SGS)**-Prinzipien aufbaut (Schumann, 1975, Kaltenbach et al., 1994). Die für WS nötige räumliche Auflösung könnte mit einer DNS wie DISTUF nicht in endlicher Zeit erreicht werden: die Schwankung der relevanten Größen reicht von bis zu $\simeq 10^3$ m für die Wellenlänge der dominierenden Crow-Instabilität und der auf sie wirkenden Wirbel bis hinunter zu $\simeq 10^{-3}$ m für den Dissipationsbereich (Hennemann, 2010). In LES werden nur die großen, energiereichen Wirbel genau berechnet, während die kleinen Wirbel durch einen dissipativen Schließungsansatz genähert werden.

LESTUF verwendet eine implizite Filterung, die den Gitterabstand zur Filterung benutzt und dadurch obige explizite Filter ersetzt. Es kann vorkommen, dass der zur Berechnung der Grobstruktur herangezogene Parameterwert (wie etwa \mathbf{u}) innerhalb der einzelnen Gitter (Maschen) schlecht dargestellt wird (Informationsverlust, wenn mehr Werte gegeben sind als die diskrete Schrittweite darstellen kann). Diese implizite Filterung kann jedoch einer expliziten Filterung entsprechen, wenn Gitterschrittweite und Filterbreite diskretisiert einander entsprechen (Fröhlich (2006), S.127–129).

Die Gleichungen aus (3.4) bzw. (3.10) werden numerisch integriert. Für konsistente Anfangs- und Randbedingungen ist ein *Spiegelwirbelkonzept* für das Wirbelpaar nötig. Details zu den durch die Wirbel induzierten Geschwindigkeitskomponenten und zur Positionierung der Wirbel zum Startzeitpunkt sind in Hennemann (2010) auf S. 20-22, beschrieben. LESTUF löst Gleichungen, die die Überlagerung homogener, (stabil) geschichteter turbulenter (Scherungs-)Felder mit Flugzeug-generierten 3D Wirbelfeldern beschreiben (Gerz und Holzäpfel, 1999). Diese Gleichungen sind die Kontinuitätsgleichung, die Impulserhaltungsgleichung, und die Energiegleichung zur Berechnung der potentiellen Temperatur θ als Abweichung vom mittleren Hintergrundzustand Θ (diese drei Gleichungen bilden die instationären, Boussinesq-approximierten 3D INSG, um die Geschwindigkeitsvektoren $(u_1, u_2, u_3)^T$ zu berechnen), sowie (falls nötig) die Erhaltungsgleichung einer dynamischen und chemisch inaktiven Abgaskonzentration (normiert durch ihren maximalen Anfangswert c). Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j u_i) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho_0^{-1} \frac{\partial p}{\partial x_i} &= \beta g \theta \delta_{i3}, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j \theta) + \frac{d\Theta}{dx_3} u_3 &= -\frac{\partial \sigma_{\theta j}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j c) &= -\frac{\partial \sigma_{cj}}{\partial x_j}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Dabei sind g der Wert der Gravitationsbeschleunigung, und $d\Theta/dx_3$ der räumlich und zeitlich konstante Gradient der mittleren Temperatur des atmosphärischen Hintergrunds (mit der potentiellen Referenztemperatur Θ). Die σ -Terme sind Feinstrukturterme, die modelliert werden (vgl. auch die Formeln (3.1) und (3.2) für σ_{ij}). Der Auftriebsanteil in der Impulsgleichung ist gegeben durch $\rho = -\rho_0 \beta \theta$, wobei ρ_0 der Referenzwert der Dichte, β der thermische Ausdehnungskoeffizient, und θ die potentielle Temperatur bezeichnen.

Die SGS-Flüsse werden durch einen modifizierten **Schließungsansatz von Smagorinsky** modelliert (siehe z.B. auch Fröhlich (2006), S. 155 ff.). Ausgehend von Deardorff (1970) bezeichnen die gestrichelten Größen die Abweichungen von lokalen Gittervolumenmitteln, so dass $\overline{u'_i u'_j}$ im Term $\sigma_{ij} := \overline{u'_i u'_j} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u'_l u'_l} = -2\nu_t S_{ij}$ der SGS-Reynolds-Spannungstensor ist (mit S_{ij} nach Gl. (3.2) und der stoffunabhängigen, turbulenten Viskosität ν_t). Der zur SGS-Viskositätsmodellierung verwendete, angepasste Ansatz von Smagorinsky (1963) lautet $\nu_t = (c_s \Delta)^2 (2 S_{ij} S_{ji})^{\frac{1}{2}}$ mit einer (theoretischen) Konstante von $c_s = 0.165$ für den Fall isotroper Turbulenz (Gerz und Holzäpfel (1999), Herleitung bei Hennemann (2010)), die die Dissipationsrate des Modells bestimmt, und einer Filterweite Δ als charakteristischem Längenmaß. Das berechnete ν_t wird zur Modellierung der Feinstruktur in der Energiegleichung im System (3.17) herangezogen: $\sigma_{\theta j} = -\nu_t (\text{Pr}_t)^{-1} (\partial\theta/\partial x_j)$ mit *turbulenter Prandtlzahl* $\text{Pr}_t = 0.419$ (Gerz und Holzäpfel, 1999). Ebenso gilt in Gl. (3.17) $\sigma_{cj} = -\nu_t (\text{Pr}_t)^{-1} (\partial c/\partial x_j)$. Zur Reduktion der Dissipativität des turbulenten Schließungsmodells von Smagorinsky innerhalb der Wirbelkerne (siehe auch Abschnitt 3.2.3) und der dadurch numerisch bedingten Abnahme der Tangentialgeschwindigkeiten sowie des Wachstums der Kernradien kommt die sog. NaCoo-Korrektur zum Einsatz (Holzäpfel, 2004, Hennemann und Holzäpfel, 2011).

Die in (3.17) beschriebene Form der in LESTUF zu lösenden INSG muss nun in eine diskrete, d.h. nur an endlich vielen Raum- und Zeitpunkten definierte Form umgewandelt werden, damit sie numerisch lösbar wird (Gustafsson, 2008).

Zur *räumlichen Diskretisierung* wird ein das zu simulierende Gebiet überstreichendes, in einzelne Maschen unterteiltes, gleichmäßiges **Gitter** eingeführt. Zur Berechnung der räumlichen Ableitungen kommen zentrale **Finite Differenzen zweiter Ordnung** wie in Gl. (3.15) (also Diskretisierungsfehler 2. Ordnung und weitestgehende Energieerhaltung) auf einem kartesischen versetzten Gitter (engl. „staggered grid“) zum Einsatz, siehe Abb. 3.1. Dabei werden die skalaren Größen, das sind der Druck p und die Temperatur T , zwischen den Maschen angegeben (d.h. im Mittelpunkt eines Würfels), die vektoriellen Größen, das sind hier die Geschwindigkeitskomponenten $(u_1, u_2, u_3)^T = (u, v, w)^T$, jedoch an den einzelnen Knotenpunkten (d.h. an den Ecken eines Würfels) (Gerz, 1987). Der räumliche Differenzenoperator erster Ordnung zur Approximation von beliebigen Variablen f (steht hier für p, θ, u_i , usw.) für $i = 1, 2, 3$ in (3.17) ist in der zentrierten Differenzenform (siehe auch Gl. (3.14)) gegeben durch $\partial^0 f(x_i) \approx (\Delta x_i)^{-1} (f(x_i + 0.5 \Delta x_i) - f(x_i - 0.5 \Delta x_i))$ und der räumliche Differenzenoperator zweiter Ordnung (siehe Gl. (3.15)) durch $\partial^- \partial^+ f(x_i) \approx (0.5 \Delta x_i)^{-2} (f(x_i + 0.5 \Delta x_i) - 2f(x_i) + f(x_i - 0.5 \Delta x_i))$. Für den Mittelungsoperator für die x_i -Richtung gilt $\bar{f}(x_i) = 0.5 (f(x_i + 0.5 \Delta x_i) + f(x_i - 0.5 \Delta x_i))$.

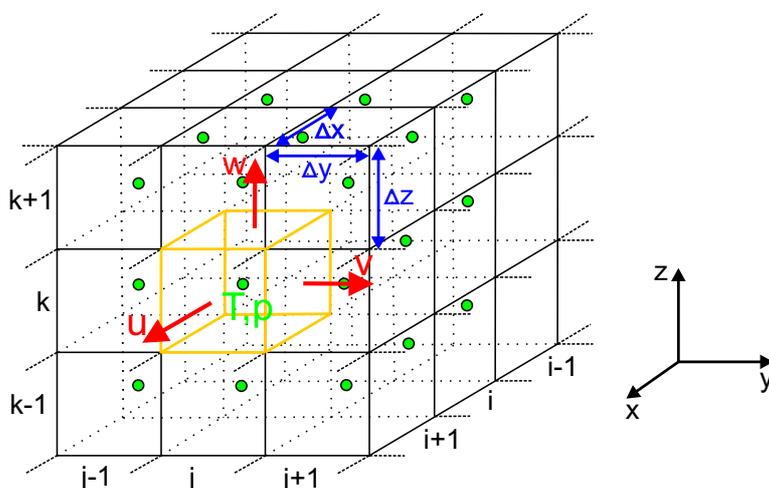


Abbildung 3.1: Kartesisch versetztes Gitter („staggered grid“): Ausschnitt einer Reihe von Würfeln eines $(x, y, z)^T$ -Volumens des Modellgitters mit Maschenlängen Δx , Δy und Δz und Positionierung der Variablen hier in der Masche $(i + 1, j, k)^T$. Dabei werden die skalaren Größen (das sind der Druck p und die Temperatur T) zwischen den Maschen angegeben, d.h. in den Mittelpunkten (grün) eines Würfels, die vektoriellen Größen (das sind hier die Geschwindigkeitskomponenten $(u, v, w)^T$) jedoch an den einzelnen Knotenpunkten (rot), d.h. auf den Flächen eines Würfels.

Zeitlich erfolgt die *Diskretisierung* mittels des **Adams-Bashforth**-Schemas, das ein explizites Ein-Schritt-Verfahren mit einer Genauigkeit zweiter Ordnung (Verwendung der beiden zeitlich vorhergehenden Berechnungsschritte) darstellt. Zwar hat es wie das „leapfrog“-Verfahren drei Zeitniveaus, jedoch enthält es einen zeitlichen Vorwärtsschritt von t nach $t + \Delta t$ (Prädiktor). Es kann als Approximation durch FD der zweiten Ableitungen der Variable f nach der Zeit angesehen werden:

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t \left(w_1 \frac{\partial f(t)}{\partial t} + w_2 \frac{\partial f(t - \Delta t)}{\partial t} \right) + \mathcal{O}((\Delta t)^3) \quad \text{mit} \quad (3.18)$$

$$\begin{cases} w_1 = \frac{3}{2} \text{ und } w_2 = -\frac{1}{2}, & \text{falls } n \geq 1 \text{ (} n, n + 1, \dots \text{ sind Zeitpunkte),} \\ w_1 = 1 \text{ und } w_2 = 0, & \text{falls } n = 0 \text{ (aus den Startfeldern für } t = 0 \Rightarrow \text{Eulerschritt).} \end{cases}$$

Zur Berechnung eines neuen, erneut divergenzfrees Geschwindigkeitsfeldes zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ ausgehend vom alten Geschwindigkeitsfeld zur Zeit t mittels Integration wird folgender Algorithmus angewendet (siehe Gerz (1987) und Hennemann (2010)):

1. Berechne die expliziten Beschleunigungen in der Impulsgleichung von (3.17) aus den vorherigen Berechnungsschritten unter vorläufiger Vernachlässigung des Druckterms. Man erhält ein neues *vorläufiges* (gekennzeichnet durch Tilde) Geschwindigkeitsfeld

$$\tilde{\mathbf{u}}(t + \Delta t) = \mathbf{u}(t) + \Delta t \text{AF}(t) \quad (3.19)$$

durch Anwendung des Adams-Bashforth-Verfahrens. Hier steht AF für den Advektions-, Auftriebs- und Feinstrukturterm $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ aus der zweiten Gleichung in (3.17).

2. Die durch die Kontinuitätsgleichung gewährleistete Divergenzfreiheit von \mathbf{u} liefert eine **Poissongleichung**

$$\langle \nabla_x, \mathbf{u}(t + \Delta t) \rangle = \langle \nabla_x, \tilde{\mathbf{u}}(t + \Delta t) \rangle - (\nabla_x)^2 (\Delta t \tilde{p}(t)) \Rightarrow \tilde{p}(t) = \frac{1}{(\nabla_x)^2} \left(\frac{1}{\Delta t} \langle \nabla_x, \tilde{\mathbf{u}}(t + \Delta t) \rangle \right) \quad (3.20)$$

wobei man das neue Druckfeld durch Lösung dieser Poisson-Gleichung erhält (siehe unten). Wir schreiben \tilde{p} , um den Übergang vom alten zum neuen Geschwindigkeitsfeld auszudrücken.

3. Das mit neuen Druckgradienten korrigierte Geschwindigkeitsfeld berechnet sich schließlich durch

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{u}(t) + \Delta t [\text{AF}(t) - \nabla p(t)]. \quad (3.21)$$

Das zur Lösung der Gleichungen (3.17) nötige Druckfeld wird für jeden Zeitschritt durch einen direkten Löser der diskreten Poisson-Gleichung in Gl. (3.20) mittels

$$\frac{p_{i-1,j,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i+1,j,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{p_{i,j-1,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i,j+1,k}}{(\Delta y)^2} + \frac{p_{i,j,k-1} - 2p_{i,j,k} + p_{i,j,k+1}}{(\Delta z)^2} = f_{i,j,k} \quad (3.22)$$

mit $i, j = 0, 1, \dots, n-1$, $k = 1, 2, \dots, n$ und $\Delta x = \Delta y = \Delta z = n^{-1}$ (unter Annahme einer normierten Länge von 1 zwischen den Punkten) berechnet (Details hierzu bei Schumann (1985)).

Nach einem ähnlichen Grundprinzip ist auch der zweite LES-Code **MGLET** aufgebaut (Manhart, 2004, Hokpunna, 2009, Hokpunna und Manhart, 2010, Holzäpfel et al., 2010, Misaka et al., 2011, 2012), in dem andere, zum Teil rechenintensivere Methoden als in LESTUF implementiert sind.

MGLET löst (ebenso wie LESTUF) die Boussinesq-approximierten NSG (vgl. Gl. (3.17); siehe auch Bannon (1995)), jedoch mittels einer Finite-Volumen-Methode mit zonalem Gitter und nicht-äquidistanter, versetzter, variabler Anordnung (Manhart, 2004, Holzäpfel et al., 2010, Misaka et al., 2012). Zusätzlich finden noch Gleichungen für passive Tracer Anwendung, die Advektion und Diffusion berücksichtigen. Typische Referenzwerte für Luftdichte ($\rho_0 = 0.35 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) und potentielle Temperatur ($\theta_0 = 332.1 \text{ K}$) bei Reiseflughöhe werden für die WS-Simulationen verwendet (Misaka et al., 2012). Die Präzision der notwendigen Geschwindigkeitsfelder und sonstiger Informationen über das Strömungsfeld kann durch eine Vergrößerung der Anzahl an Gitterpunkten oder Vergrößerung der Ordnung der Genauigkeit der numerischen Approximationen erhöht werden. Letztere Eigenschaft wird hier ausgenutzt, und so kommt in MGLET ein sog. kompaktes Schema vierter Ordnung (statt zweiter Ordnung in LESTUF) zum Einsatz. Hiermit werden die Variablen implizit räumlich interpoliert und differenziert, indem ein tridiagonales (Gleichungs-)System gelöst wird, das spektralartige Auflösung erreichen kann (Hokpunna und Manhart, 2010).

Die zeitliche Integration wurde als Runge-Kutta-Verfahren dritter Ordnung implementiert (Williamson (1980); siehe z.B. auch allgemein bei Wesseling (2001), S. 199 ff.).

Das Druckfeld wird iterativ durch Anwendung der sog. HSMAC⁴-Methode (Hirt und Cook, 1972) berechnet. Dadurch wird die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes verringert und unterhalb eines vorgegebenen Schwellwerts (hier $1.0 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$) gehalten.

⁴ engl. „Highly Simplified Marker-And-Cell“.

3.2.3 Wirbel, Schichtung, Turbulenz und Anfangsbedingungen für LES

Dieser Abschnitt fasst die Eigenschaften von **Wirbeln** sowie **Schichtung** und **Turbulenz** in LES zusammen. Weiter werden die in den LES von I. Hennemann und T. Misaka verwendeten **Anfangsbedingungen** angegeben. In dieser Arbeit beschränken wir uns auf Daten aus gegensinnig rotierenden Zwei-Wirbelsystemen (siehe auch Breitsamter (2007), S. 112-114), deren Zerfall und Dissipation durch die Crow-Instabilität (Crow, 1970) ausgelöst wird. In der Realität treten im Nachlauf des Flugzeuges auch vielwirbelige, gleich- oder gegensinnig rotierende Nachlaufstrukturen auf (Breitsamter (2007), S. 114-119). Das auch in der Realität auftretende „Wirbelplatzen“ bzw. der Wirbelzerfall wurde mit Simulationen untersucht (Moet et al., 2005, Misaka et al., 2012), ebenso wie die Krümmung der Wirbel (Hennemann und Holzäpfel, 2011).

Nach Saffman (1992) oder Kundu und Cohen (2008) ist die **Wirbelstärke** $\boldsymbol{\omega}$ (engl. vorticity) eines Fluidelements definiert als der Vektor

$$\boldsymbol{\omega} = \text{curl } \mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (3.23)$$

Generell unterscheidet man zwei Arten von Wirbeln: Die rotationsbehafteten **Festkörperwirbel** (auch *erzwungene Wirbel* genannt; für sie gilt $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$) und die rotationsfreien (oder wirbelfreien) **Potentialwirbel** (auch *freie Wirbel* genannt; für sie gilt $\text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{0}$). Festkörperwirbel beschreiben die Drehung eines starren Körpers mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_0 , d.h. für die Tangentialgeschwindigkeiten in Polarkoordinaten (r, θ) gilt $v_\theta = \omega_0 r$ und für die Radialgeschwindigkeiten gilt $v_r = 0$. Für Potentialwirbel gilt $v_\theta = \frac{K}{r}$ mit einer Konstante $K \in \mathbb{R}$, sowie $v_r = 0$.

Wir erinnern uns an die anfängliche Zirkulation Γ_0 aus Gl. (1.1). Allgemein ist die **Zirkulation** definiert durch

$$\Gamma = \oint_C \langle \mathbf{u}, d\mathbf{s} \rangle = \int_A \langle \boldsymbol{\omega}, d\mathbf{A} \rangle, \quad (3.24)$$

wobei \mathbf{u} der Vektor der Tangentialgeschwindigkeit ist, und $d\mathbf{s}$ die infinitesimale Breite in drei Raumrichtungen (Konturelement), so dass man zum einen Γ als Linienintegral von \mathbf{u} entlang einer beliebigen, abgeschlossenen Kurve C erhält. Ebenso kann Γ durch den Satz von Stokes auch als Flächenintegral mit der Rotation von \mathbf{u} über $\boldsymbol{\omega}$ als Integranden berechnet werden (Kundu und Cohen, 2008). Für die Zirkulation entlang einer Kreisbahn vom Radius r eines Festkörperwirbels gilt $\Gamma = 2\pi r^2 \omega_0$, d.h. die Zirkulation entspricht der Wirbelstärke $2\omega_0$ mal der Fläche $A = \pi r^2$. Für einen Potentialwirbel gilt $\Gamma = \int_0^{2\pi} v_\theta r d\theta = 2\pi K$.

Von Bedeutung ist zum einen der *viskose* bzw. *innere Kernradius* r_c , der den inneren Kernbereich eines Wirbels begrenzt. Er reicht vom Wirbelzentrum bei $r = 0$ mit minimalem $v_\theta = 0$ bis zu $r = r_c$ mit dem Maximum für v_θ (nach dem Aufrollvorgang). Zum anderen gibt es den *Wirbelstärkeradius* bzw. *äußeren Kernradius* r_v , der den rotierenden Kern mit fast der gesamten Zirkulation des Wirbels beinhaltet. Die jeweiligen Werte von r_c bzw. r_v variieren zum Teil erheblich (Breitsamter, 2007). Zwischen r_c und r_v treten die größten Geschwindigkeiten und Kräfte auf einfliegende Flugzeuge auf.

Als einfache Beispiele idealisierter Wirbel seien hier der **Rankine-Wirbel** und der **Lamb-Oseen-Wirbel** erwähnt (Saffman, 1992, Gerz et al., 2002, Breitsamter, 2007). Wir betrachten sie in Polarkoordinaten in der y - z -Ebene. Der *Rankine-Wirbel* besitzt einen Kern mit Festkörperwirbel-Eigenschaften, aber vom Rand des Kerns an nach außen ist er rotationsfrei. Im Wirbelkern nimmt die Tangentialgeschwindigkeit v_θ linear zu von $v_\theta(r = 0) = 0$ auf den maximalen Wert $v_\theta(r = r_c) = \Gamma_0 / (2\pi r_c)$. Die Radialgeschwindigkeit v_r ist überall 0. Insgesamt gilt also

$$v_\theta = \begin{cases} \frac{\Gamma_0}{2\pi r_c} \frac{r}{r_c} & \text{falls } r \leq r_c \\ \frac{\Gamma_0}{2\pi r} & \text{falls } r > r_c, \end{cases} \quad \text{und} \quad v_r = 0. \quad (3.25)$$

Realistischer aus Sicht des Tangentialgeschwindigkeitsprofils ist jedoch der *Lamb-Oseen-Wirbel*. Er wird im Folgenden ausschließlich als Initialisierungswirbel bei $t = 0$ für die LES angewandt werden.

Für ihn gilt:

$$v_\theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left(1 - e^{-1.25643 \left(\frac{r}{r_c}\right)^2} \right) \quad \text{und} \quad v_r = 0. \quad (3.26)$$

Ideale und gemessene Vertikalgeschwindigkeitsprofile zweier Einzelwirbel wurden bereits in Abb. 1.2 dargestellt und zum Teil in Kap. 1.1 beschrieben.

In den LES wird ein Paar gegensinnig rotierender Lamb-Oseen-Wirbel in die Domain eingesetzt, die als unendlich lange Wirbelfäden entlang der Flugrichtung x aufgefasst werden und für die der Aufrollvorgang bereits abgeschlossen ist (siehe z. B. Abb. 3.3(a)), was z. B. nach Breitsamter (2007) ab einem Abstand von 10 bis 20 Spannweiten des hinterherfliegenden zum wirbelerzeugenden Flugzeug vorausgesetzt werden darf. In diesem sog. „vortex regime“ ist die Ausströmgeschwindigkeit des Triebwerksstrahls bereits deutlich reduziert (siehe Hennemann (2010) für weitere Details).

Diese beiden Wirbel induzieren für gleich große Zirkulationsbeträge $|\Gamma_1| = |\Gamma_2| = |\Gamma_0|$ an den im Abstand b_0 befindlichen Zentren (siehe Abb. 1.2(a)) die abwärts gerichtete Geschwindigkeit $w_0 = \frac{\Gamma_0}{2\pi b_0}$ (Breitsamter, 2007). Ebenso gibt $t_0 = \frac{b_0}{w_0}$ die Zeit für ein Absinken des Wirbelpaares um b_0 mit der Geschwindigkeit w_0 an (t_0 ist eine Art Zeitmaß für die Lebensdauer der WS).

Die Gefährdung eines Flugzeugs beim Einflug in eine WS entlang der x -Achse entsteht im Wesentlichen durch die induzierten Querströmungs- bzw. Tangentialgeschwindigkeiten $v_\theta = \sqrt{v^2 + w^2}$ entlang der y - z -Ebene mit konstantem x , und mit Lateral- bzw. Vertikalgeschwindigkeiten v bzw. w . Die Gefahr, dass ein Flugzeug dabei ein sog. induziertes **Rollmoment** bzw. Auf- oder Abtrieb erfährt, ist speziell im Landeanflug in kurzem Abstand zum vorausfliegenden Flugzeug auf ähnlicher Flugbahn groß. Das nachfolgende Flugzeug muss ein ausreichend hohes Rollsteuerpotential besitzen, so dass das Rollmoment ausgesteuert werden kann und sich die Lage des Flugzeugs wieder stabilisiert. Für den Beiwert C_l des induzierten statischen Rollmoments gilt nach Herleitung bei Hennemann (2010), S. 88 ff. (siehe auch Winkelmann und Capart (2004) oder Breitsamter (2007)) die Näherung

$$C_l = \frac{8}{B^2} \int_{-\frac{B}{2}}^{+\frac{B}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{0.5B}\right)^2} \arctan\left(\frac{w(y)}{u(y) + u_0}\right) y \, dy. \quad (3.27)$$

Für einen Landeanflug wird $u_0 = 70 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ als Fluggeschwindigkeit des nachfolgenden Flugzeugs verwendet. Die volle Flügelspannweite B hängt vom jeweiligen Flugzeug ab. Diskretisiert erfolgt die Berechnung über die Sehnentrapezformel gemäß

$$C_l^{\text{num}} = \Delta y \left(\frac{1}{2} C_l\left(-\frac{B}{2}\right) + \frac{1}{2} C_l\left(\frac{B}{2}\right) + \sum_{j=-n+1}^{n-1} C_l\left(-\frac{B}{2} + j \cdot \Delta y\right) \right), \quad (3.28)$$

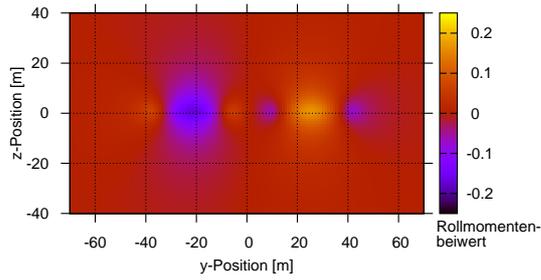
wenn man in Gl. (3.27) diskrete y -Positionen einsetzt, um die $C_l(y)$ zu erhalten. Es ist $\Delta y = 1$ m der Gitterabstand und $2n = B/(\Delta y)$ ($n \in \mathbb{N}$) die Anzahl der Stützstellen entlang der Spannweite.

In Abb. 3.2 sind Ergebnisse eigener Berechnungen von Rollmomentenbeiwerten C_l^{num} mit Daten aus LESTUF-Simulationen von I. Hennemann dargestellt. Mit Ausnahme von Abb. 3.2(b) sind entlang der x -Achse mit Werten von 2 m bis 401 m im Gitterabstand von 1 m gemittelte C_l^{num} abgebildet, wie sie durch die zum Zeitpunkt $t = 0$ von einem A340 erzeugten WS auf ein nachfolgendes Flugzeug bei senkrechtem Einflug in der y - z -Ebene hervorgerufen würden. Während $u_0 = 70 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ konstant bleibt, variiert die volle Flügelspannweite für die untersuchten Flugzeugtypen A320 ($B = 33.9$ m), B737 ($B = 28.8$ m) und Falcon ($B = 18.9$ m). Es wird um $(y, z) = (-20 \text{ m}, 0 \text{ m})$ bzw. $(y, z) = (20 \text{ m}, 0 \text{ m})$ deutlich sichtbar, dass ein kleines Flugzeug wie die Falcon höhere C_l^{num} bei Einflug in eine WS erfährt als ein größeres wie der A320. Ein Schnitt durch die z -Achse bei $z = 0$ m, d.h. eine x - y -Ebene, zeigt die relative Konstanz der C_l^{num} entlang der x -Achse, über die jeweils gemittelt wird (siehe Abb. 3.2(b)). Der Verlauf der Wirbelröhren ist dabei auch gut rekonstruierbar.

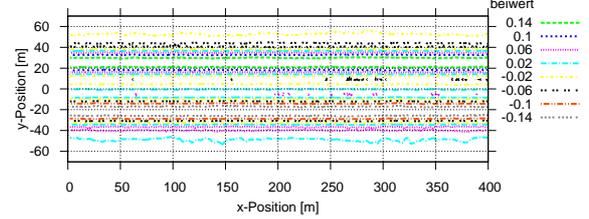
Bei genauerer Analyse des maximal zu erwartenden Rollmoments anhand von LES stellt sich jedoch die Schwierigkeit ihrer genauen Vorhersagbarkeit heraus (Hennemann, 2010), da es situationsbedingt zu starken Schwankungen kommen kann. Um so wichtiger wären daher genaue Kenntnisse des Windfeldes vor Durchfliegen der turbulenten Luftmasse.

3. Eigenschaften turbulenter Strömungen in der Atmosphäre

Wirbel-erzeugendes Flugzeug: A340 , nachfolgendes Flugzeug: A320
(mit voller Flügelspannweite von 33.9 m)



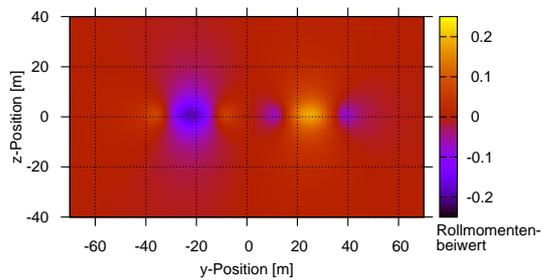
Wirbel-erzeugendes Flugzeug: A340 , nachfolgendes Flugzeug: A320
(mit voller Flügelspannweite von 33.9 m), Schnitt bei z=0m



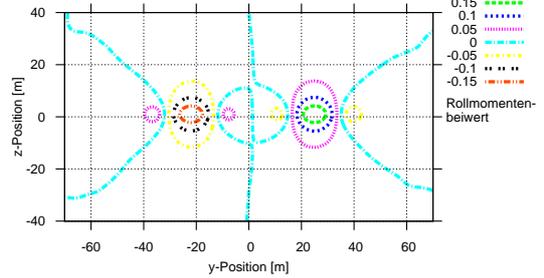
(a) Über x -Domain gemittelte Rollmomentenbeiwerte C_l^{num} auf einen A320 bei Einflug in Wirbelschleppen eines A340.

(b) Contour-Plot eines Schnitts bei $z = 0$ m durch die Domain mit Rollmomentenbeiwerten C_l^{num} auf einen A320.

Wirbel-erzeugendes Flugzeug: A340 , nachfolgendes Flugzeug: B737
(mit voller Flügelspannweite von 28.8 m)



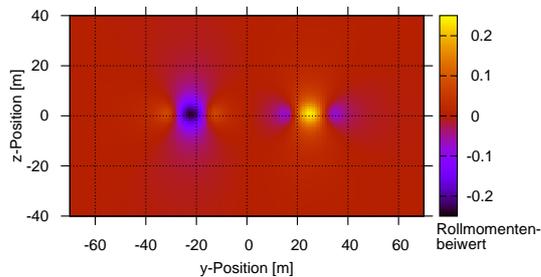
Wirbel-erzeugendes Flugzeug: A340 , nachfolgendes Flugzeug: B737
(mit voller Flügelspannweite von 28.8 m)



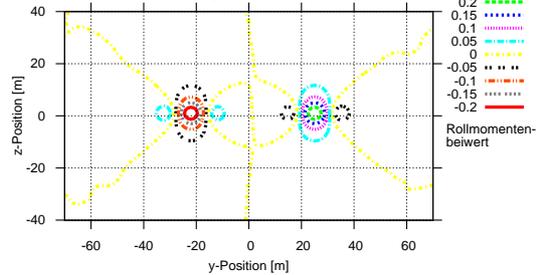
(c) Über x -Domain gemittelte C_l^{num} auf eine B737 bei Einflug in Wirbelschleppen eines A340.

(d) Wie Abb. 3.2(c), nur als Contour-Plot.

Wirbel-erzeugendes Flugzeug: A340 , nachfolgendes Flugzeug: Falcon
(mit voller Flügelspannweite von 18.9 m)



Wirbel-erzeugendes Flugzeug: A340 , nachfolgendes Flugzeug: Falcon
(mit voller Flügelspannweite von 18.9 m)



(e) Über x -Domain gemittelte C_l^{num} auf eine Falcon bei Einflug in Wirbelschleppen eines A340.

(f) Wie Abb. 3.2(e), nur als Contour-Plot.

Abbildung 3.2: Rollmomentenbeiwerte C_l^{num} auf verschiedene Flugzeugtypen (A320, B737, Falcon) beim Einflug in die Wirbelschleppen eines A340. Eine Mittelung der Werte entlang der x -Achse liefert die C_l^{num} in der y - z -Ebene. Die Varianz der Rollmomentenbeiwerte entlang der x -Achse ist gering (siehe Abb. 3.2(b)). Die kleine Falcon (Abb. 3.2(e)) erfährt höhere Rollmomente als die größeren A320 (Abb. 3.2(a)) und B737 (Abb. 3.2(c)).

Die Größen der Simulationsgebiete betragen $X \times Y \times Z = 400 \text{ m} \times 256 \text{ m} \times 256 \text{ m}$ für LESTUF und $X \times Y \times Z = 400 \text{ m} \times 384 \text{ m} \times 512 \text{ m}$ für MGLET bei einem gleichmäßigen Gitterabstand von $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1 \text{ m}$. Die WS eines A340-300 wurden in Form zweier gegensinnig rotierender Lamb-Oseen-Wirbel mit einem anfänglichen Wirbelabstand von $b_0 = 47.1 \text{ m}$ und einem Wirbelkernradius von $r_c = 3 \text{ m}$ in das jeweilige Simulationsgebiet „eingesetzt“. Die anfängliche maximale Zirkulation Γ_0 unterscheidet sich: während LESTUF einen Landeanflug mit $\Gamma_0 = 458 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ nachbildet, verwendet MGLET für die Simulation eines Reisefluges eine etwas höhere Zirkulation von $\Gamma_0 = 530 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$. Nach

obigen Formeln gelten für die mittleren anfänglichen Absinkgeschwindigkeiten der Wirbel $w_0 = 1.54 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ für LESTUF bzw. $w_0 = 1.79 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ für MGLET, sowie für die Referenz-Zeitskala $t_0 = 30.5 \text{ s}$ für LESTUF bzw. $t_0 = 26.3 \text{ s}$ für MGLET⁵. Die konstanten Zeitschritte sind für ein explizites Schema wie LESTUF mit $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ ausreichend klein gewählt. Zur Berücksichtigung der während des Aufrollvorgangs eingemischten Turbulenz aus Abgasstrahl, Flügel und Rumpf des Flugzeugs sowie der Grenzschichtturbulenz wird zusätzlich eine **rms**-Geschwindigkeit von $\sigma = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ für LESTUF bzw. $\sigma = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ für MGLET in Nähe des Wirbelkernradius hinzugefügt. Bei einer molekularen kinematischen Viskosität von $\nu = 4 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ beträgt für MGLET die Reynoldszahl $\text{Re} = \Gamma_0/\nu \approx 10^7$ (Holzäpfel et al., 2010, Hennemann und Holzäpfel, 2011, Misaka et al., 2012).

In MGLET wurden den Lamb-Oseen-Wirbeln drei anfängliche y - z -Querschnittsverteilungen **passiver Tracer** überlagert (siehe auch Abb. 2 in Misaka et al. (2012)). Der Tracer ist dabei entweder in den Wirbelkernen oder in den Halbovalen um die Wirbelzentren oder in einem Gesamtoval um beide Zentren gemeinsam eingeschlossen. Die Halboval-Tracerverteilung mit einer Querschnittsfläche von 3150 m^2 deckt sich gut mit Beobachtungen von Kondensstreifen nach Abschluss des Wirbel-Aufrollvorgangs und entspricht schätzungsweise einer 38s alten Abgasfahne (Misaka et al., 2012). Wir beschreiben hier nur die Verteilung der Tracerkonzentration in Halbovalen, die dem Betrag der modifizierten Strömungsfunktion $c_h(y, z) = |\Psi(y, z)|$ eines Wirbelpaares entspricht (Formeln für Tracerverteilungen in Wirbelkernen und Gesamtoval auch bei Misaka et al. (2012)), und es gilt

$$\Psi(y, z) = \begin{cases} 0.761 \left[\frac{y}{b_0} + \ln \left(\frac{\sqrt{z^2 + (y - 0.5b_0)^2}}{\sqrt{z^2 + (y + 0.5b_0)^2}} \right) - 0.128 \right]^{\frac{1}{2}} & \text{falls } \begin{cases} y > 0, \Psi < -0.128 \text{ oder} \\ y < 0, \Psi > 0.128, \end{cases} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.29)$$

mit einem Normierungsfaktor 0.761 des maximalen Konzentrationswertes auf 1 und 0.128 zur Anpassung der durch den Tracer bedeckten Fläche auf die Hälfte der Querschnittsfläche des Gesamtovals.

Die zweiwirbeligen WS sind hier eingebettet in unterschiedlich stark turbulente und geschichtete Umgebungen; der Wandel ihrer Struktur mit fortschreitender Zeit wird unter verschiedenen atmosphärischen Bedingungen untersucht. Zu den Eigenschaften **turbulenter Strömungen** gehören Schwankungen der 3D Größen \mathbf{u} , p und T und v. a. Instationarität und Nichtlinearität. Turbulenz entsteht, wenn Trägheitskräfte im Vergleich zur Viskosität überwiegen, was durch die Reynoldszahl $\text{Re} \equiv \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Viskosität}}$ ausgedrückt wird. Jede turbulente Strömung ist lokal isotrop und hat einen Trägheitsbereich, wenn Re hoch genug ist. Es ergibt sich die berühmte Darstellung des Energie- und Dissipationsspektrums isotroper Turbulenz mit dem $k^{-\frac{5}{3}}$ -Gesetz von Kolmogorov (z. B. bei Kundu und Cohen (2008), S. 562 ff., oder Fröhlich (2006), S. 23 ff.). Das Aussehen von WS kann v. a. in Bodennähe wegen dort starker Turbulenz (aufgrund von Orografie oder Konvektion) enorm beeinflusst werden, d.h. bei Starts und Landungen entstehen zum Teil chaotische Strukturen.

Drei verschiedene Arten von Umweltparametern kommen in LESTUF und MGLET zum Einsatz. Dies ist zum ersten die Stärke atmosphärischer Turbulenz, ausgedrückt durch die normierte Eddy(Wirbel)-Dissipationsrate $\varepsilon^* = (\varepsilon b_0)^{\frac{1}{3}} (w_0)^{-1}$, wobei ε die unnormierte Eddy-Dissipationsrate ist. Werte von $\varepsilon^* = \{0.01, 0.05, 0.23\}$ beschreiben dabei jeweils niedrige, mäßige bzw. starke Turbulenz. Zum zweiten dienen die normierten Brunt-Väisälä-Frequenzen zur Beschreibung stabiler Temperaturschichtung in den LES bei Verwendung eines konstanten Temperaturgradienten. Für sie gilt

$$N^* = t_0 N = t_0 \sqrt{\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial z}}, \quad (3.30)$$

wobei θ (θ_0) die potentielle (Anfangs-)Temperatur der Atmosphäre und $g \approx 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ die Fallbeschleunigung ist. Werte von $N^* = \{0.0, 0.35, 1.0\}$ stehen hierbei für neutrale, mäßig stabile bzw. sehr

⁵ Zum besseren Vergleich der Resultate aus Experimenten im Kleinformat mit der Realität können durch passende Referenzwerte dimensionslose Werte für t , Γ , etc., definiert werden, die mit * gekennzeichnet sind (t^* , Γ^* , etc.).

stabile Schichtungsbedingungen. Und zum dritten kommt ein durch b_0 normiertes turbulentes integrales Längenmaß L_t^* über alle Raumrichtungen zum Einsatz, um eine mittlere Wirbelgröße angeben zu können. Es gilt

$$L_t^* = \frac{L_t}{b_0} = \frac{1}{b_0} \frac{1}{4 v_{\text{rms}}^2} \int_{\mathbf{k}=0}^{\infty} \frac{\hat{E}(\mathbf{k})}{\mathbf{k}} d\mathbf{k} , \quad (3.31)$$

mit $\mathbf{k} = |(k_1, k_2, k_3)^T|$ und dem Spektrum $\hat{E}(\mathbf{k})$ der turbulenten kinetischen Energiedichte im Fourierraum (Hennemann und Holzäpfel, 2011, Misaka et al., 2012).

Die Analyse von In-Situ-Messungen mit dem Forschungsflugzeug Falcon in 9 – 11 km Flughöhe (Schumann et al., 1995) lässt Werte von $10^{-8} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^3} \leq \varepsilon \leq 2 \times 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^3}$ und $0.011 \text{ s}^{-1} \leq N \leq 0.023 \text{ s}^{-1}$ für die Simulationen als sinnvoll erscheinen. Im Falle der MGLET-Simulationen repräsentieren also Werte von $\varepsilon^* = 0.01$ (d.h. $\varepsilon = 1.2 \times 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^3}$) für niedrige Turbulenz und $N^* = 0.35$ (d.h. $N = 0.013 \text{ s}^{-1}$) für mäßige Temperaturschichtung die typischen Umweltparameter bei Reiseflughöhe im Tropopausenbereich. Dagegen ist in der Grenzschicht (unter ca. 1 km Flughöhe) eher starke Turbulenz ($\varepsilon^* = 0.23$) mit starker Temperaturschichtung ($N^* = 1.0$) zu erwarten (Misaka et al., 2012).

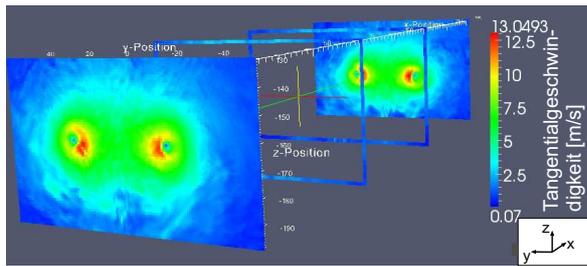
3.2.4 Resultate von LES

Dieser Abschnitt zeigt einige Resultate aus LESTUF-Simulationen von I. Hennemann und MGLET-Simulationen von T. Misaka für unterschiedliche Parameter und Anfangsbedingungen, sowie Ergebnisse eigener Berechnungen der Dichte aus LESTUF-Daten. Die Ergebnisse werden zumeist als 2D-Schnittbilder senkrecht zur x -Achse in y - z -Ebenen dargestellt.

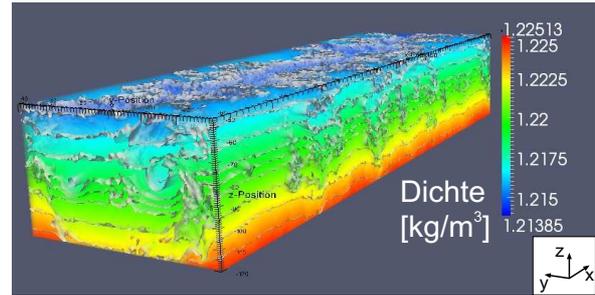
Abbildung 3.3 zeigt Ergebnisse von LESTUF-Simulationen. Während die Abb. 3.3(a) bis 3.3(f) Ergebnisse für den Fall $\varepsilon^* = 0.23$ und $N^* = 0.35$ (starke Turbulenz, mäßig stabile Schichtung) zeigen, stellen die Abb. 3.3(g) und 3.3(h) 2D Windfelder für den Fall $\varepsilon^* = 0.23$ und $N^* = 0$ (starke Turbulenz, neutrale Schichtung) dar. Alle Simulationsergebnisse mit LESTUF beruhen auf den Eigenschaften eines Airbus A340-300 (Spannweite $B = 60.3 \text{ m}$) im Landeanflug (Hennemann, 2010).

Neben Druck p , Temperatur T und Windvektoren $(u, v, w)^T$ ist die Dichte ρ eine wesentliche Größe. Wir werden ρ hier aus LESTUF-Daten für den Fall $\varepsilon^* = 0.23$ und $N^* = 0.35$ zur Zeit $t = 60 \text{ s}$ berechnen. Bekannt sind der konstante Standard-Druck $p_0 = 1013 \text{ hPa}$, die konstante Standard-Temperatur $T_0 = 288.15 \text{ K}$ (p_0 und T_0 für einen Landeanflug bei 15° C), die (über $N^* = 0.35$ und $t_0 = 30.5 \text{ s}$ bekannte) Brunt-Väisälä-Frequenz $N \approx 0.01 \text{ s}^{-1}$, die Erdbeschleunigung $g \approx 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, der Adiabatenkoeffizient $\kappa = 1.402$ für Luft unter Normalbedingungen und die Gaskonstante $R = 287.058 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$ für trockene Luft. Weiter sind aus den LESTUF-Daten der fluktuierende Druck $p'_{i,j,k}$ in Pa (siehe auch Abb. 3.3(c); $i, j, k \in \mathbb{N}$) und die fluktuierende Temperatur $T'_{i,j,k}$ in K (siehe auch Abb. 3.3(e) und 3.3(f)) zusätzlich gegeben. Diese Fluktuationen $p'_{i,j,k}$ und $T'_{i,j,k}$ sind im Vergleich zu den Standardwerten p_0 und T_0 relativ klein. Abbildung 3.3(c) zeigt deutlich das in den Wirbelkernen vorherrschende Druckminimum im Vergleich zur Umgebung. Die Strukturen für die $T'_{i,j,k}$ können sich je nach x -Position in der y - z -Ebene stark voneinander unterscheiden, siehe Abb. 3.3(e) und 3.3(f).

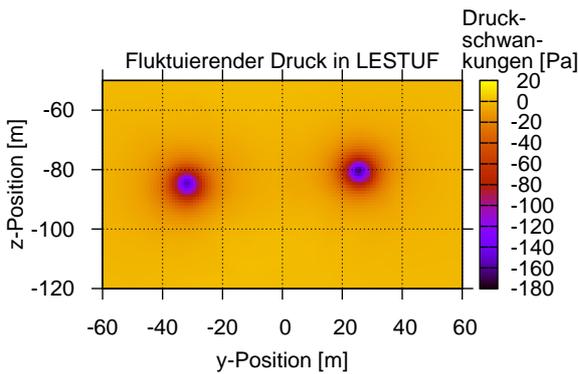
Daraus lässt sich nun der mittlere Temperaturgradient $dT/dz := \partial\theta/\partial z = -N^2 T_0 g^{-1}$ aus Gl. (3.30) berechnen. Der Gradient dT/dz ist negativ, da bei steigender Höhe die Temperatur abnimmt. Ebenso kann die Standarddichte unter Normalbedingungen, $\rho_0 := p_0 (R T_0)^{-1}$, berechnet werden, und daraus wiederum der mittlere Druckgradient $dp/dz := -\rho_0 g$ unter der Boussinesq-Approximation. Der Gradient dp/dz ist wieder negativ, da der Druck mit zunehmender Höhe abnimmt. Daraus lässt sich die echte Temperatur T in K mittels $T_{i,j,k} := T_0 + k' \cdot (dT/dz) + T'_{i,j,k}$ (hier mit $k' = 0 \text{ m}, \dots, 69 \text{ m}$) und der echte Druck p in Pa mittels $p_{i,j,k} := p_0 + k' \cdot (dp/dz) + p'_{i,j,k}$ berechnen. Schließlich erhalten wir die echte Dichte ρ in kg/m^3 durch $\rho_{i,j,k} := p_{i,j,k} (R T_{i,j,k})^{-1}$. Abbildung 3.3(b) zeigt die Dichteverteilung der $\rho_{i,j,k}$ über die gesamte 3D Domain, wie sie sich aus LESTUF-Daten zur Zeit $t = 60 \text{ s}$ ergibt. Die 9 grauen Konturflächen zeigen gleich große Abstände zwischen dem minimalen $\rho = 1.21385 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ und dem maximalen $\rho = 1.22513 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ an. Abbildung 3.3(d) zeigt einen 2D-Querschnitt bei $x = 302 \text{ m}$ aus Abb. 3.3(b). Die Wirbelkerne (blau) weisen einen leicht erniedrigten



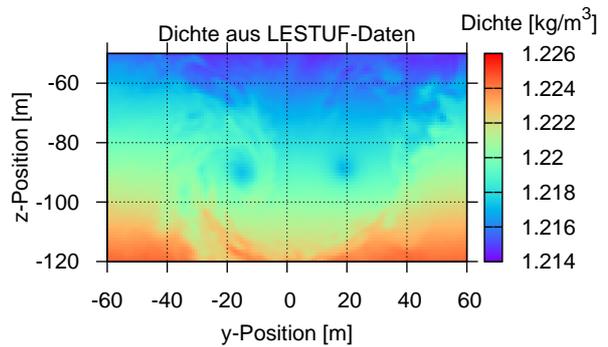
(a) Tangentialgeschwindigkeiten $v_\theta = \sqrt{v^2 + w^2}$ als y - z -Ebenen bei $x = 2$ m und $x = 302$ m für $t = 60$ s.



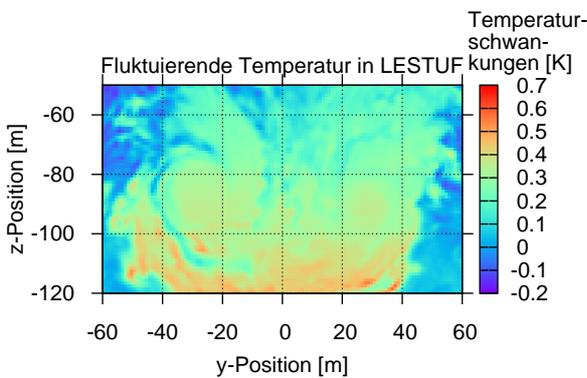
(b) Dichte ρ in kg/m^3 über gesamte Domain für $t = 60$ s. Konturlinien zeigen die Fluktuation von ρ .



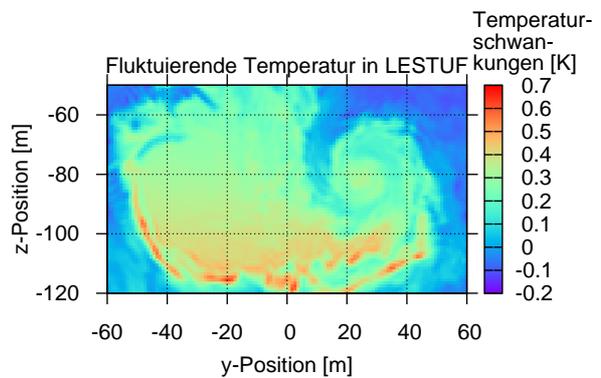
(c) Fluktuation des Drucks bei $x = 202$ m für $t = 60$ s.



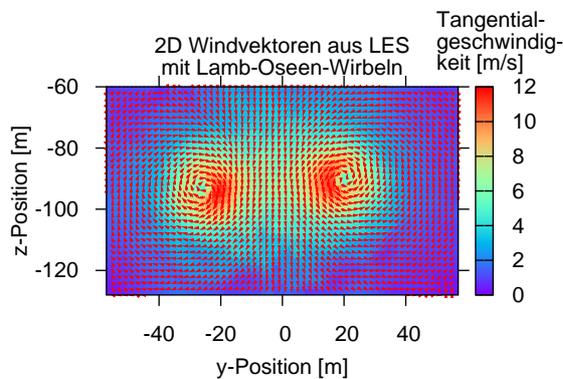
(d) Fluktuation der Dichte bei $x = 302$ m für $t = 60$ s.



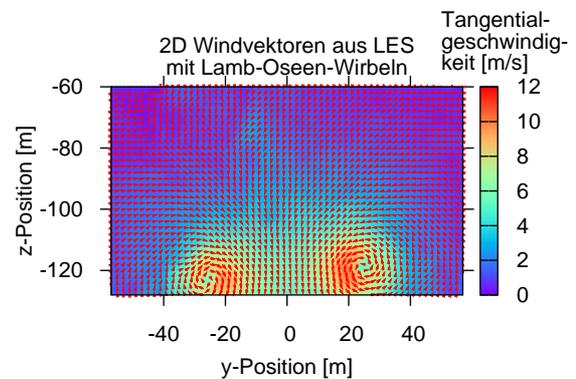
(e) Temperatur-Fluktuation bei $x = 2$ m für $t = 60$ s.



(f) Temperatur-Fluktuation bei $x = 202$ m für $t = 60$ s.



(g) Tangentialgeschwindigkeiten und 2D Windvektoren in einer y - z -Ebene bei $x = 202$ m für $t = 60$ s.



(h) Tangentialgeschwindigkeiten und 2D Windvektoren in einer y - z -Ebene bei $x = 202$ m für $t = 80$ s.

Abbildung 3.3: Ergebnisse aus LESTUF-Simulationen. Details siehe Text.

Dichtewert im Vergleich zur Umgebung auf. Die Dichteunterschiede wären jedoch relativ gering und für ein Lidar schwer detektierbar. Man kann dennoch durch Messung von Dichteunterschieden mit Lidar in gewissen Situationen großräumig auf den Wind schließen (Vrancken et al., 2010).

Die Abb. 3.3(a), 3.3(g) und 3.3(h) zeigen Tangentialgeschwindigkeiten $v_\theta = \sqrt{v^2 + w^2}$ z. T. zusammen mit den zugehörigen 2D Windvektoren aus LESTUF-Simulationen. Die Ausgangsstruktur eines Lamb-Oseen-Wirbels nach Gl. (3.26) ist sowohl nach $t = 60$ s (Abb. 3.3(a), 3.3(g)) als auch nach $t = 80$ s (Abb. 3.3(h)) noch deutlich sichtbar. Die Wirbel sinken jedoch mit fortschreitender Zeit ab und auch die Werte für v_θ in Kernnähe verringern sich (Abb. 3.3(g) verglichen mit Abb. 3.3(h)).

Dieses Absinken verdeutlichen auch noch einmal die Bilder aus MGLET-Simulationen in Abb. 3.4. Links sind Verteilungen der Tracerkonzentration als 2D-Schnitte für $x = 198.5$ m zu den Zeitpunkten $t = 44$ s (Abb. 3.4(a)) und $t = 60$ s (Abb. 3.4(c)) dargestellt. Die Tracer, deren Startverteilung bei $t = 0$ s durch Gl. (3.29) gegeben war, werden mit fortschreitender Zeit mit ihrer Umgebung vermischt, ihre Intensität im Wirbelzentrum sinkt leicht und die Wirbel verschwinden für $t = 60$ s (Abb. 3.4(c)) im gezeigten Ausschnitt nach unten aus dem Bild. Ebenso wie mit der Tracerkonzentration verhält es sich mit der Tangentialgeschwindigkeit v_θ in den rechten Abbildungen 3.4(b) (zur Zeit $t = 44$ s) und 3.4(d) (zur Zeit $t = 60$ s) an derselben Stelle $x = 198.5$ m. Auch v_θ ist für $t = 60$ s nahe des Wirbelkerns leicht niedriger als für $t = 44$ s.

Im Folgenden muss nun untersucht werden, wie gut sich diese Tracerverteilungen und die zugehörigen Geschwindigkeitsprofile mit RSL-Messungen vor dem Flugzeug rekonstruieren lassen.

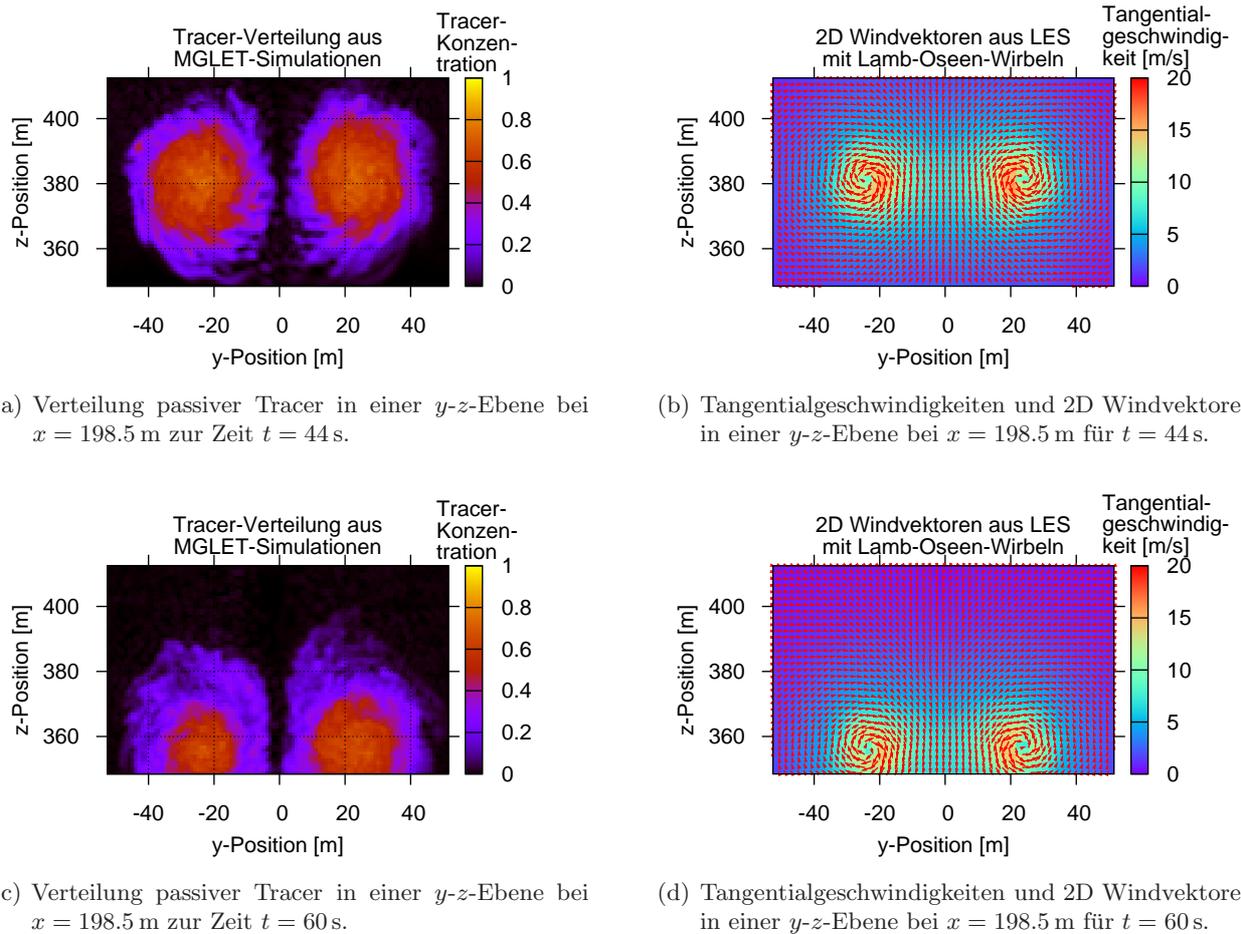


Abbildung 3.4: Ergebnisse aus MGLET-Simulationen. Details siehe Text.

Kapitel 4

Berechnung von Shift-Vektoren zur Darstellung von Windfeldern

Nachdem in Kap. 2 u. a. eine zur Visualisierung von Windfeldern geeignete Lidar-Messmethode vorgeschlagen und implementiert wurde, und in Kap. 3 gezeigt wurde, wie aus LES Wind-, Temperatur-, Druck-, Dichte- und Konzentrationsfelder erzeugt werden können, werden in diesem Kap. 4 Algorithmen zur Rekonstruktion eines vorgegebenen Windfeldes durch Vergleich zeitlich und räumlich hochauflösender 2D Schichtbilder im 3D Raum erläutert und analysiert. Auch für je zwei beliebige, leicht unterschiedliche Strukturen lassen sich solche Verschiebungs- oder Shift-Vektoren berechnen.

In Kap. 4.1 werden einige neue Verfahren zur Shift-Berechnung definiert. Das erste neue Verfahren zur Berechnung der Luftmassen-Verschiebungen beruht auf räumlich gemittelten Schwerpunktverschiebungen (genannt **Gravity-Center-Shift**-Methode, kurz **GCS**). Ebenso wird ein zweites neues, von der Verschiebungseigenschaft für **Fourier-Transformierte (FTe)** Gebrauch machendes Shift-Verfahren (genannt **Fourier-Shift**-Methode, kurz **FS**) mathematisch begründet und Lösungsmöglichkeiten zur Berechnung der Shift-Vektoren aufgezeigt. Als Drittes wird eine Variante der bekannten **Kreuzkorrelation (KK)** als Verfahren zur Shift-Berechnung mit Subpixelgenauigkeit eingeführt, die mittels **Fast Fourier Transformation (FFT)** beschleunigt werden kann. Abschließend wird als viertes, wiederum neues Verfahren eine Kombination aus KK und GCS entwickelt, die als **Weight-Shift**-Methode (**WSh**) bezeichnet wird.

In Kap. 4.2 werden die Fähigkeiten dieser vier Methoden dargestellt und miteinander verglichen. Je nach Situation (d. h. je nach zu vergleichenden Bildern) haben sie Vor- und Nachteile gegenüber einander. Eine Methode, die in jeder Situation gute Ergebnisse liefert, gibt es nicht. Die KK und WSh haben Vorteile bei der Rekonstruktion wirbelförmiger Windfelder von WS aus Tracerstrukturen (vgl. Abb. 3.4(a) und 3.4(b)), während die FS beispielsweise bei Scherwinden oder Böen (gleichmäßige Luftbewegung in eine Hauptrichtung) etwas besser geeignet ist. Die GCS kann z. B. Expansionen oder Kontraktionen von Ringstrukturen gut berechnen.

4.1 Formulierung und Implementierung der neuen Shift-Verfahren

In Abb. 4.1 wird das generelle Prinzip der Berechnung von Shift-Vektoren (hier in 2D) aus zwei leicht unterschiedlichen Bildern dargestellt, auf dem die in den folgenden Unterabschnitten definierten Verfahren allesamt beruhen. Bild 1 und 2 haben gleiches Seitenformat der y - und z -Achsen und setzen sich damit aus gleich vielen Pixeln zusammen. Wir wählen eine Reihe von (in Abb. 4.1 beige dargestellten) Sub-Rechtecken (nur eines je Bild eingezeichnet) an in Bild 1 und 2 jeweils äquivalenten Positionen und führen darauf gleiche mathematische Operationen aus, deren Resultate verglichen werden, um dadurch pro Sub-Rechteck je einen Shift-Vektor τ zu erhalten. In Abb. 4.1 verschiebt sich die gelb-orange-rote Masse im beige Sub-Rechteck von Bild 1 nach rechts in Bild 2, wodurch

der Shift-Vektor nach rechts zeigen würde. Durch Wiederholung für viele Sub-Rechtecke erhält man schließlich ein ganzes Feld von Shift-Vektoren (hier nur ein Vektor und ein Sub-Rechteck gezeigt).

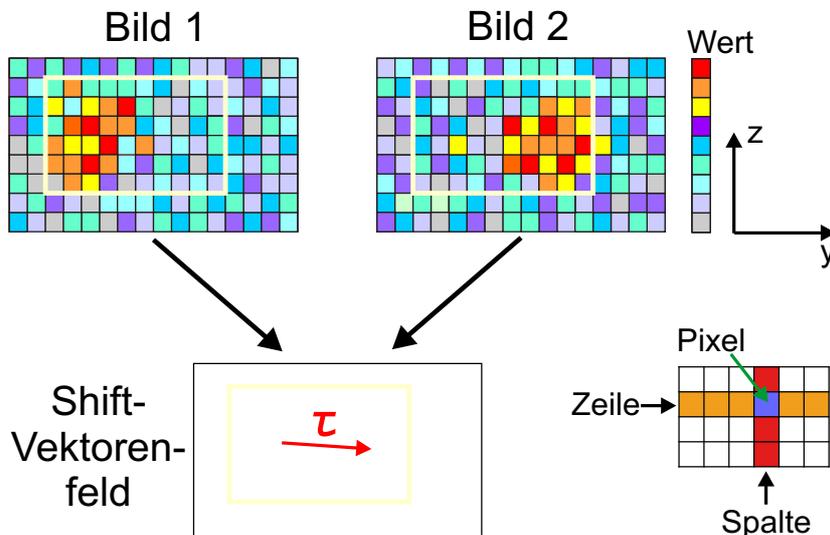


Abbildung 4.1: Generelles Prinzip der Berechnung von Shift-Vektoren (hier in 2D) aus zwei leicht unterschiedlichen Bildern. Details siehe Text.

Es sollen zunächst noch einige mathematisch relevante Vorbemerkungen gemacht werden. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $X := \mathbb{R}^n$ mit n -Tupeln $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ und $y = (y_1, \dots, y_n) \in X$. Zusammen mit der gewöhnlichen Topologie und der komponentenweisen Addition ist X eine lokalkompakte abelsche topologische Gruppe. Weiter ist X polnisch (Bauer, 1992) und ein Hilbertraum (Werner, 2005b).

Es bezeichne $\mathfrak{M}_b^+(X)$ die Menge der beschränkten (endlichen) nichtnegativen Maße auf der σ -Algebra \mathfrak{B}_X der Borelschen Teilmengen von X . Ebenso sei $\mathfrak{M}_b(X)$ der \mathbb{R} -lineare Raum der allgemeinen beschränkten Maße auf \mathfrak{B}_X , sowie $\mathcal{M}_b(X) := \{\mu + \nu i : \mu, \nu \in \mathfrak{M}_b(X)\}$ der \mathbb{C} -lineare Raum der Maße auf \mathfrak{B}_X mit Werten in \mathbb{C} . Schließlich sei $\mathfrak{M}_1^+(X) := \{\mu \in \mathfrak{M}_b^+(X) \mid \|\mu\| = 1\}$ die Menge der beschränkten normierten Maße, d.h. Wahrscheinlichkeitsmaße, auf \mathfrak{B}_X .

Theoretische Aspekte der Fourier-Analyse werden hier mit Maßen und Funktionen auf dem euklidischen Raum \mathbb{R}^n angegeben, siehe etwa Bauer (2001). Fourier-Analyse auf dem Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ wird z.B. in Reed und Simon (1975) beschrieben. Die Fourier-Analyse kann auch auf Gruppen definiert werden, siehe etwa Rudin (1962) oder Loomis (1953).

Definition 4.1 (Fourier-Transformierte und Fourier-Transformation für Maße auf \mathbb{R}^n):

1. Für $\mu \in \mathcal{M}_b(X)$ ist die **Fourier-Transformierte (FTe) des Maßes μ** definiert durch

$$\hat{\mu} : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad y \longmapsto \hat{\mu}(y) := \int_X e^{i\langle y, x \rangle} \mu(dx). \quad (4.1)$$

2. Als **Fourier-(Stieltjes-)Transformation (FT) für Maße** bezeichnet man die Abbildung

$$\kappa : \mathcal{M}_b(X) \longrightarrow \mathbb{C}^X, \quad \mu \longmapsto \kappa(\mu) := \hat{\mu}. \quad (4.2)$$

Hierbei steht \mathbb{C}^X für eine Abbildung $X \rightarrow \mathbb{C}$.

Für die Stetigkeit der Fourier-Transformierten $\hat{\mu}$ eines Maßes μ gilt:

Die Fourier-Transformierte $\hat{\mu}$ ist für alle Maße $\mu \in \mathfrak{M}_b^+(X)$ gleichmäßig stetig auf X (Beweis dazu siehe z. B. Bauer (2001), S. 189).

Weiter gilt für die Eindeutigkeit der Fourier-Transformation κ eines Maßes μ :

Die Fourier-Transformation $\kappa : \mathcal{M}_b(X) \rightarrow \mathbb{C}^X$, $\mu \mapsto \widehat{\mu}$ für Maße ist injektiv, d.h. jedes Maß $\mu \in \mathcal{M}_b(X)$ ist durch seine Fourier-Transformierte $\widehat{\mu}$ eindeutig bestimmt (Beweis etwa mit dem Satz von Fubini und dem Riesz'schen Darstellungssatz bei Bauer (2001), S. 199).

Beispiel 4.2 (Dirac-Maß und seine Fourier-Transformierte):

Für jedes $x \in X$ heißt das durch die Einheitsmasse in x definierte Wahrscheinlichkeitsmaß ε_x auf \mathfrak{B}_X ein *Dirac-Maß*, und es gilt:

$$\varepsilon_x(B) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall B \in \mathfrak{B}_X. \quad (4.3)$$

Für die Fourier-Transformierte eines zu $x \in X$ gehörigen Dirac-Maßes $\varepsilon_x \in \mathfrak{M}_1^+(X)$ gilt

$$\widehat{\varepsilon}_x(y) = e^{i\langle y, x \rangle} \quad \forall y \in X. \quad (4.4)$$

Insbesondere gilt der für uns wichtige Spezialfall $\widehat{\varepsilon}_0 = 1$ für einen Nullvektor aus X .

Es sei $\lambda : \mathfrak{B}_X \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}_0^+$ mit $\lambda := \lambda^n$ und $\widetilde{\mathbb{R}}_0^+ := \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ das n -dimensionale *Lebesgue-Maß*. Hierbei bezeichne $\mathcal{L}_1(X, \lambda)$ den \mathbb{C} -linearen Raum der λ -integrierbaren Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\int f(x) \lambda(dx) := \int \operatorname{Re}(f(x)) \lambda(dx) + i \int \operatorname{Im}(f(x)) \lambda(dx). \quad (4.5)$$

$\lambda := \lambda^n$ ist das translations- und rotationsinvariante *Haar-Maß* auf X .

Definition 4.3 (Fourier-Transformierte und Fourier-Transformation für Funktionen auf \mathbb{R}^n):

1. Für $f \in \mathcal{L}_1(X, \lambda)$ ist die **Fourier-Transformierte der Funktion f** definiert durch

$$\widehat{f} : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad y \longmapsto \widehat{f}(y) := \int_X e^{i\langle y, x \rangle} f(x) \lambda(dx). \quad (4.6)$$

2. Als **Fourier-Transformation für Funktionen** bezeichnet man die Abbildung

$$\mathcal{K} : \mathcal{L}_1(X, \lambda) \longrightarrow \mathbb{C}^X, \quad f \longmapsto \mathcal{K}(f) := \widehat{f}. \quad (4.7)$$

Bemerkung (Äquivalenz der Fourier-Transformierten von Maßen und Funktionen):

Sei $\mu : \mathfrak{B}_X \rightarrow \mathbb{C}$, $B \mapsto \mu(B) := \int_B f(x) \lambda(dx)$ mit der fast eindeutig bestimmten Radon-Nikodym-Ableitung $f \in \mathcal{L}_1(X, \lambda)$ von μ nach λ . Dann gilt $\widehat{\mu}(y) = \widehat{f}(y) \quad \forall y \in X$.

Satz 4.4 (Einige wichtige Eigenschaften der Fourier-Transformation von Maßen):

Gegeben seien Maße $\mu, \nu \in \mathcal{M}_b(X)$. Weiter sei

$$\tau_a : X \longrightarrow X, \quad x \longmapsto \tau_a(x) := x + a \quad (4.8)$$

die *Translationsabbildung* bzw. der **Shift**(-Vektor) eines $x \in X$ um ein $a \in X$. Zudem sei $\gamma_a : X \rightarrow \mathbb{T}$ mit $\gamma_a(x) := e^{i\langle x, a \rangle}$ für $a \in X$ ein Charakter (\mathbb{T} die Einheitskreislinie: \mathbb{T} für „Torus“). Dann gilt:

(a) **Faltungstheorem:** $\widehat{\mu * \nu} = \widehat{\mu} \cdot \widehat{\nu}$

(b) **Shift-Theorem:** $\widehat{\mu \circ \tau_a^{-1}} = \widehat{\mu} \gamma_a$

Beweis von Satz 4.4 nach Bauer (2001), S. 190:

- (a) Nach Bauer (1992), S. 167, gilt mit dem allgemeinen Transformationssatz und dem Satz von Fubini für je zwei Maße $\mu, \nu \in \mathcal{M}_b(X)$ und jede \mathfrak{B}_X -messbare beschränkte numerische Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ mit einer stetigen Abbildung $A_2 : X^2 \rightarrow X$, $(x, z) \mapsto A_2(x, z) := x + z$ folgende Gleichung:

$$\int f d(\mu * \nu) = \int f \circ A_2 d(\mu \otimes \nu) = \iint f(x + z) \mu(dx) \nu(dz). \quad (4.9)$$

Setzt man $f(x + z) = e^{i\langle y, x+z \rangle}$ mit $y \in X$ in Gl. (4.9) ein, so gilt:

$$\widehat{\mu * \nu}(y) = \int_X \int_X e^{i\langle y, x+z \rangle} \mu(dx) \nu(dz) = \int_X e^{i\langle y, x \rangle} \mu(dx) \cdot \int_X e^{i\langle y, z \rangle} \nu(dz) = \widehat{\mu}(y) \cdot \widehat{\nu}(y).$$

- (b) Für alle $\mu \in \mathcal{M}_b(X)$ mit $\|\mu\| := |\mu|(X) < +\infty$ ist jede beschränkte, stetige Funktion $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ auf X μ -integrierbar. Die Funktion

$$\gamma_a : X \longrightarrow \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset \mathbb{C}, \quad x \longmapsto \gamma_a(x) := e^{i\langle x, a \rangle} \quad (x \in X) \quad (4.10)$$

für alle $a \in X$ erfüllt diese Voraussetzungen, denn γ_a ist wegen $|e^{i\langle x, a \rangle}| = 1 \quad \forall a, x \in X$ beschränkt und ein stetiger Homomorphismus von der additiven Gruppe $(X, +)$ in die multiplikative Gruppe (\mathbb{T}, \cdot) , d.h. es gilt $\gamma_a(s + t) = \gamma_a(s) \cdot \gamma_a(t) \quad \forall s, t \in X$ (d.h. γ_a ist ein Charakter). Für alle $a \in X$ gilt damit $\widehat{\varepsilon}_a(x) \stackrel{\text{Gl. (4.4)}}{=} e^{i\langle x, a \rangle} = \gamma_a(x) \quad (x \in X)$. Zusammen mit Eigenschaft (a) und da $\mu \circ \tau_a^{-1}(x) = (\mu * \varepsilon_a)(x) \quad \forall x \in X$ ist, gilt

$$\widehat{\mu \circ \tau_a^{-1}}(x) = \widehat{\mu * \varepsilon_a}(x) \stackrel{(a)}{=} \widehat{\mu}(x) \cdot \widehat{\varepsilon}_a(x) = \widehat{\mu}(x) \gamma_a(x) \quad \forall x \in X. \quad \square$$

Diese Eigenschaften für die FT von Maßen $\mu \mapsto \widehat{\mu}$ lassen sich vermöge der Zerlegung $\text{Re}(f) = u^+ - u^-$ und $\text{Im}(f) = v^+ - v^-$ (siehe Gl. (4.5)) für ein Maß der Form $\mu = f\lambda$ mit einer λ -integrierbaren Dichte $f \geq 0$ auch auf die FT von Funktionen $f \mapsto \widehat{f}$ (siehe Def. 4.3) mittels $\widehat{f} = \widehat{u^+\lambda} - \widehat{u^-\lambda} + (\widehat{v^+\lambda} - \widehat{v^-\lambda})i$ übertragen. Es gilt

Bemerkung 4.5 (Wichtige Eigenschaften der Fourier-Transformation von Funktionen):

Für zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{L}_1(X, \lambda)$ gilt:

- (a) $f \mapsto \widehat{f}$ ist eine \mathbb{C} -lineare Abbildung; \widehat{f} ist gleichmäßig stetig.

- (b) **Faltungstheorem:** $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.

- (c) **Shift-Theorem:** $\widehat{f \circ \tau_a^{-1}}(x) = \widehat{f}(x) e^{i\langle x, a \rangle}$ für $a, x \in X$.

Bemerkung (Inverse der Fourier-Transformation):

Sei $f \in \mathcal{L}_1(X, \lambda)$ und \widehat{f} die zugehörige FTe. Falls auch $\widehat{f} \in \mathcal{L}_1(X, \lambda)$ ist, gilt für λ -fast alle $x \in X$:

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_X \widehat{f}(y) e^{-i\langle y, x \rangle} \lambda(dy) \quad (y \in X). \quad (4.11)$$

Hier sollen noch einige Eigenschaften der Faltungsoperation (siehe auch Satz 4.4 und Bemerkung 4.5) dargestellt werden (allgemeinere Definitionen bei Bauer (1992) oder Gänssler und Stute (1977)).

Beispiel 4.6 (Spezialfall: Faltung mit Dirac-Maß):

Sei τ_a mit $a \in X$ der Shift aus Gl. (4.8) und ε_a das durch die Einheitsmasse in a gegebene Dirac-Maß auf \mathfrak{B}_X aus Beispiel 4.2 mit $\varepsilon_a \in \mathfrak{M}_b^+(X)$ und $\|\varepsilon_a\| = 1$. Es gilt:

$$\mu(\tau_a^{-1}(B)) = \mu(B - a) = \varepsilon_a * \mu(B) \quad \forall \mu \in \mathfrak{M}_b^+(X) \quad \forall B \in \mathfrak{B}_X \quad \text{bzw.} \quad \mu \tau_a^{-1} = \varepsilon_a * \mu. \quad (4.12)$$

Dabei ist ε_0 die eindeutig bestimmte Einheit bezügl. $*$. Ist $\mu = \varepsilon_{a'}$, so gilt $\varepsilon_a * \varepsilon_{a'} = \varepsilon_{a+a'} \quad \forall a, a' \in X$.

Beispiel (Faltung von Funktionen) :

Seien $\mu = f \lambda$ und $\nu = g \lambda$ zwei Maße mit λ -integrierbaren Dichten bzw. λ -integrierbaren numerischen Funktionen $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Dann ist

$$f * g(x) := f * (g \lambda)(x) = \int_X f(x-y) g(y) \lambda(dy) \quad \forall x \in X \quad (4.13)$$

die Dichte von $\mu * \nu$ bezüglich λ , kurz $(f * g) \lambda = (f \lambda) * (g \lambda)$. Dabei heißt $f * g \geq 0$ die **Faltung der Funktionen** $f, g \geq 0$ und ist selbst wieder λ -integrierbar. Die *Kommutativität* von $*$ folgt in diesem Fall mit der Spiegelungs- und Translationsinvarianz von λ für alle $x \in X$ durch

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_X f(x-y) g(y) \lambda(dy) = \int_X f(x+y) g(-y) \lambda(dy) \\ &= \int_X f(y) g(x-y) \lambda(dy) = g * f(x). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ebenso zeigt man die *Assoziativität* $(f * g) * h = f * (g * h)$ für je drei λ -integrierbare Funktionen $f, g, h \geq 0$, das *Distributivgesetz* $f * (g + h) = f * g + f * h$ sowie die *Homogenität* $f * (r g) = (r f) * g = r (f * g)$ ($r \in \mathbb{R}^+$).

Einzelne Details zu theoretischen Aspekten von FTen und zum Zentralen Grenzwertsatz (der in Kap. 4.1.1 eine Rolle spielen wird) sind z. B. auch bei Pinsky (2002), Folland (1992), Grafakos (2008), Luong (2009) oder Gänsler und Stute (1977) beschrieben.

Zumeist beschränkt sich die folgende Darstellung auf den \mathbb{R}^3 (3D Raum) und den \mathbb{R}^2 (2D Raum). Letzterer wird in den hier gezeigten Simulationen angewandt, doch die Methodik lässt sich auch auf den 3D Fall ausweiten. Höherdimensionale Darstellungen ergeben sich in äquivalenter Weise.

4.1.1 Gravity Center Shift (GCS): räumlich gemittelte Schwerpunkt-Shifts

Faltungen können als sog. „Moving Weighted Averages“, d.h. bewegte gewichtete Mittelwerte, interpretiert werden (vgl. Folland (1992), S. 207). Für $n = 3$, d.h. für $X = \mathbb{R}^3$, gilt für den Mittelwert $\bar{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ einer reellen Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit Punkten $(x, y, z) \in [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2] \subset \mathbb{R}^3$:

$$\bar{f}(x, y, z) = \frac{1}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)(c_2 - c_1)} \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z) dz dy dx . \quad (4.15)$$

Allgemeiner lautet das gewichtete Mittel $\overline{f_w} : X \rightarrow \mathbb{R}$ von f auf $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$ in Bezug auf eine nicht-negative Gewichtsfunktion $w : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$:

$$\overline{f_w}(x, y, z) = \frac{\int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z) w(x, y, z) dz dy dx}{\int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} w(x, y, z) dz dy dx} . \quad (4.16)$$

Sei nun $g : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine weitere Funktion mit $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y, z) dz dy dx = 1$. Dann ist aber die Faltung nach Gl. (4.14)

$$f * g(x', y', z') = \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) g(x' - x, y' - y, z' - z) dz dy dx \quad (4.17)$$

gerade das *gewichtete Mittel* von f (auf ganz \mathbb{R}^3) in Bezug auf die Gewichtsfunktion $w(x, y, z) = g(x' - x, y' - y, z' - z)$.

Falls $g(x', y', z') = 0$ für $|x'| > a_1, |y'| > b_1$ und $|z'| > c_1$, dann ist $g(x' - x, y' - y, z' - z) = 0$ für $|x' - x| > a_1, |y' - y| > b_1$ und $|z' - z| > c_1$, so dass $f * g(x', y', z')$ ein gewichteter Mittelwert von f auf dem Intervall-Produkt $[x' - a_1, x' + a_1] \times [y' - b_1, y' + b_1] \times [z' - c_1, z' + c_1]$ ist. Speziell, falls

$$g(x', y', z') = \begin{cases} (2a_1)^{-1} (2b_1)^{-1} (2c_1)^{-1} & \text{falls } -a_1 < x' < a_1, -b_1 < y' < b_1 \text{ und } -c_1 < z' < c_1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist, so gilt

$$f * g(x', y', z') = \frac{1}{2^3 a_1 b_1 c_1} \int_{x'-a_1}^{x'+a_1} \int_{y'-b_1}^{y'+b_1} \int_{z'-c_1}^{z'+c_1} f(x, y, z) dz dy dx,$$

das ist der (*gewöhnliche*) Mittelwert von f auf $[x' - a_1, x' + a_1] \times [y' - b_1, y' + b_1] \times [z' - c_1, z' + c_1]$.

Der *Schwerpunkt* S wird als Position des Mittelwertes mit einer gewissen Varianz angesehen. Man hat also eine mehrfache Anwendung des eindimensionalen Zentralen Grenzwertsatzes getrennt für jede Dimension.

Nach [Brigola \(1997\)](#), S.101, gilt für eine *Dirac-Distribution* (Dirac-Impuls) δ in 1D sogar für beliebige stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (statt Testfunktionen, siehe unten) und $\forall t_0 \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt \stackrel{\text{Gl. (4.3)}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varepsilon_{t_0}(dt) = f(t_0), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.18)$$

Definition 4.7 (δ -Impuls):

Für eine Funktionenfolge ∞ -oft differenzierbarer Funktionen $f_n(t)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) dt = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ sei punktweise

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) dt = 1.$$

Das heißt, $\delta(t)$ ist keine klassische Funktion von $t \in \mathbb{R}$ und wird deshalb nicht punktweise für t definiert, sondern durch Integralwerte mit Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{D}$ (Mittelbildung mit Gewichtsfunktionen φ) für $n \rightarrow \infty$ über

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \varepsilon_0(dt) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) \varphi(t) dt. \quad (4.19)$$

Dabei bezeichnet \mathcal{D} den Raum aller ∞ -oft differenzierbaren Testfunktionen $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Träger $\text{Tr}(\varphi) = \{t \in \mathbb{R} \mid \varphi(t) \neq 0\} \subset [a_1, a_2] \subset \mathbb{R}$.

Daher ist die Verwendung von δ -Impulsen für Punktauswertungen und Abtastvorgänge bei stetigen Funktionen geeignet. Damit kann Gl. (4.18) als verallgemeinerte „ δ -Funktion“ zur Definition diskreter Verteilungen angewandt werden. Wir betrachten hierzu wieder den \mathbb{R}^3 . Verallgemeinerte δ -Funktionen mit drei Variablen werden definiert durch (vgl. [Brigola \(1997\)](#), S.117)

$$\langle \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0), \varphi(x, y, z) \rangle = \langle \varepsilon_{(x_0, y_0, z_0)}, \varphi(x, y, z) \rangle = \varphi(x_0, y_0, z_0)$$

für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ und $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, und können als verallgemeinerte Dichtefunktionen zur Beschreibung räumlich diskreter Verteilungen verwendet werden. Als verallgemeinerte Massendichte erhält man damit

$$\varrho(x, y, z) = \sum_{i=1}^r w_i \delta(x - x_i, y - y_i, z - z_i) = \sum_{i=1}^r \varepsilon_{(x_i, y_i, z_i)} w_i$$

für r Massenpunkte $w_i \in \mathbb{R}$ an den Positionen $(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$. Für Berechnungen mit kontinuierlichen und diskreten Verteilungen gelten dann dieselben Formeln.

Für GCS liegen in x, y, z äquidistant verteilte Massenpunkte (Funktionswerte) vor. Damit gilt

$$\varrho(x, y, z) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n w_{i,j,k} \delta(x - x_i, y - y_j, z - z_k) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \varepsilon_{(x_i, y_j, z_k)} w_{i,j,k}, \quad (4.20)$$

wenn dabei l, m bzw. n jeweils die Anzahl der x -, y - bzw. z -Werte bezeichnen und $w_{i,j,k} \in \mathbb{R}$ die Massenpunkte sind. Seien S_x, S_y und S_z jeweils die Schwerpunkte in x -, y - und z -Richtung. Für den 3D Schwerpunkt S der Punktmassen gilt (vgl. Brigola (1997), S. 102 in 1D)

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x \varrho(x, y, z) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x, y, z) dx} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x \left(\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n w_{i,j,k} \delta(x - x_i, y - y_j, z - z_k) \right) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n w_{i,j,k} \delta(x - x_i, y - y_j, z - z_k) \right) dx} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n w_{i,j,k} \int_{-\infty}^{\infty} x \delta(x - x_i, y - y_j, z - z_k) dx}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n w_{i,j,k} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i, y - y_j, z - z_k) dx} = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n x_i w_{i,j,k}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n w_{i,j,k}}, \\ S_y &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y \varrho(x, y, z) dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x, y, z) dy} = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^n y_j w_{i,j,k}}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^n w_{i,j,k}}, \quad S_z = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m z_k w_{i,j,k}}{\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m w_{i,j,k}}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

insgesamt für den 3D Schwerpunkt also $S = (S_x, S_y, S_z)^T$.

Durch Ersetzen von x durch y bzw. z können wir also auch die Schwerpunkte in y - bzw. z -Richtung berechnen. Für die Varianz gilt

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 \quad \text{mit} \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{l-1} \sum_{i=1}^l \left(\frac{\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n x_i w_{i,j,k}}{\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n w_{i,j,k}} - S_x \right)^2, \\ \sigma_y^2 &= \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^n y_j w_{i,j,k}}{\sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^n w_{i,j,k}} - S_y \right)^2, \quad \sigma_z^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m z_k w_{i,j,k}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m w_{i,j,k}} - S_z \right)^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Die Distribution ϱ aus Gl. (4.20) lässt sich zu einem diskreten Maß im \mathbb{R}^3 fortsetzen. Für jedes Maß μ auf \mathbb{R}^3 mit einer integrierbaren Dichtefunktion ϱ , ausgedrückt durch $d\mu = \varrho(x, y, z) dz dy dx$, wird durch

$$\begin{aligned} \langle D, \varphi \rangle &= \int \varphi d\mu = \left\langle \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n w_{i,j,k} \delta(x - x_i, y - y_j, z - z_k), \varphi(x, y, z) \right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y, z) \varrho(x, y, z) dz dy dx \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)) \end{aligned}$$

eine Distribution D definiert. Distributionen verallgemeinern also Maße und Funktionen.

Aus obigen Ausführungen kann ein diskretisierter Algorithmus zur Berechnung der Verschiebung der Schwerpunktposition und damit der Windbewegung hergeleitet werden.

Abbildung 4.2 zeigt das GCS-Verfahren zur Berechnung von Shift-Vektoren in 3D aus zwei Volumina, bestehend aus einer Reihe von 2D Schichten (Bildern). Die Volumina 1 und 2 ersetzen in 3D also die Bilder 1 und 2 in 2D (vgl. Abb. 4.1). Wir betrachten immer die Schwerpunkte von Untermengen z.B. des \mathbb{R}^3 . Diese Untermengen (Untervolumina) tragen Indizes $i \in \{i', i' + x_{\text{jump}}, i' + 2x_{\text{jump}}, \dots, i' + x_{\text{dim}} - x_{\text{step}}\}$ in x -Richtung, $j \in \{j', j' + y_{\text{jump}}, j' + 2y_{\text{jump}}, \dots, j' + y_{\text{dim}} - y_{\text{step}}\}$ in y -Richtung und $k \in \{k', k' + z_{\text{jump}}, k' + 2z_{\text{jump}}, \dots, k' + z_{\text{dim}} - z_{\text{step}}\}$ in z -Richtung, wobei jeweils die $i', j', k' \in \mathbb{N}$ seien, die $x_{\text{jump}}, y_{\text{jump}}, z_{\text{jump}} \in \mathbb{N}$ der Sprung zur nächsten Position einer Untermenge, $x_{\text{step}}, y_{\text{step}}, z_{\text{step}} \in \mathbb{N}$ jeweils eine Anzahl diskreter Werte für Intervalle auf einer Achse, und $x_{\text{dim}}, y_{\text{dim}}, z_{\text{dim}}$ die jeweilige Gesamtzahl an Positionen in eine bestimmte Richtung sei. Die Positionen seien in alle drei Raumrichtungen äquidistant.

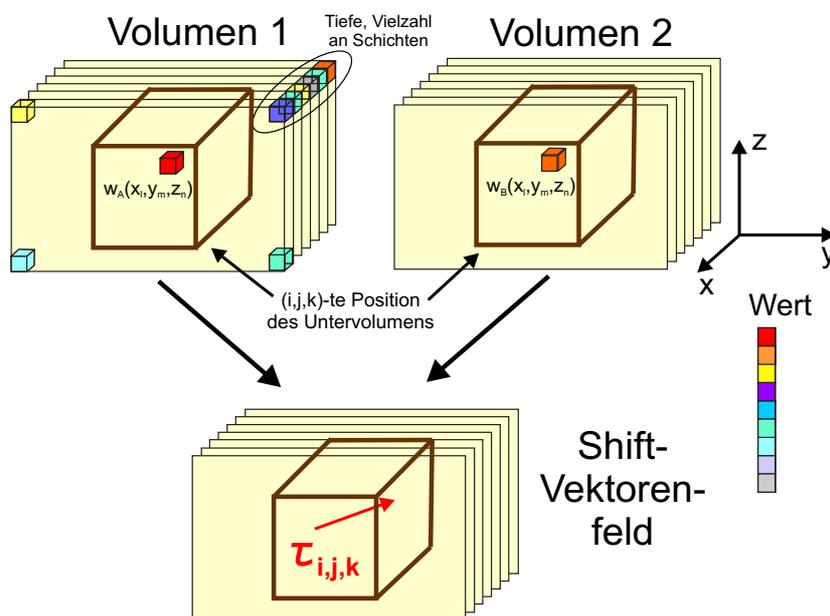


Abbildung 4.2: Methode zur Berechnung von 3D Shift-Vektoren über räumlich gemittelte Schwerpunktverschiebungen (GCS) aus zwei Volumina, bestehend aus einer Reihe von 2D Schichten (Bildern). Die Volumina 1 und 2 ersetzen in 3D also die Bilder 1 und 2 in 2D (vgl. Abb. 4.1). An den Positionen mit Koordinaten $(x_l, y_m, z_n)^T$ mit Indizes $l, m, n \in \mathbb{N}$ hat man in Volumen 1 die Werte $w_A(x_l, y_m, z_n)$ und in Volumen 2 die Werte $w_B(x_l, y_m, z_n)$. Wir wählen nun für jedes der beiden Volumina je einen Sub-Quader (speziell: Unterwürfel) mit Indizes $i, j, k \in \mathbb{N}$. Jedes solche Untervolumen setzt sich aus einer Reihe von Einzelwürfeln zusammen. Durch Verwendung der Gewichtsfunktionen $f_{A,l}^{x,S}, f_{B,l}^{x,S}, f_{A,m}^{y,S}, f_{B,m}^{y,S}, f_{A,n}^{z,S}, f_{B,n}^{z,S}$ (siehe Text) kann für beide Sub-Quader der gemittelte Positions-Schwerpunkt errechnet werden, und die Differenz der Schwerpunkte von Sub-Quader 1 und 2 liefert schließlich einen 3D Shift-Vektor $\tau_{i,j,k}$. Durch Wiederholung dieser Vorgehensweise für eine Vielzahl von Sub-Quadern, d.h. für alle (i, j, k) , erhalten wir schließlich ein 3D Shift-Vektorfeld (hier nur für einen Shift-Vektor $\tau_{i,j,k}$ gezeigt).

Es seien $A_{i,j,k} = (A_{i,j,k}^x, A_{i,j,k}^y, A_{i,j,k}^z)^T$ der 3D Schwerpunkt eines 3D Ausschnitts (Untervolumen oder Sub-Quader; speziell Unterwürfel) von Volumen 1 und $B_{i,j,k} = (B_{i,j,k}^x, B_{i,j,k}^y, B_{i,j,k}^z)^T$ der 3D Schwerpunkt eines 3D Ausschnitts von Volumen 2, jeweils mit unterem Rand an der Koordinate (x_i, y_j, z_k) . Dabei seien $A_{i,j,k}^x$ und $B_{i,j,k}^x$ jeweils die Schwerpunkte in x -Richtung, $A_{i,j,k}^y$ und $B_{i,j,k}^y$ die Schwerpunkte in y -Richtung, und $A_{i,j,k}^z$ und $B_{i,j,k}^z$ die Schwerpunkte in z -Richtung.

Dann gelte mit Funktionswerten $w_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ von Volumen 1 und $w_B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ von Volumen 2 an Koordinaten $(x_l, y_m, z_n)^T$ mit Indizes $l, m, n \in \mathbb{N}$ und den Gewichten (Positionen) in Volumen 1, $f_{A,l}^{x,S} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x_l$ in x -Richtung, $f_{A,m}^{y,S} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto y_m$ in y -Richtung, $f_{A,n}^{z,S} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto z_n$ in

z -Richtung, sowie den in Volumen 2 in gleicher Weise definierten $f_{B,l}^{x,S}$, $f_{B,m}^{y,S}$ und $f_{B,n}^{z,S}$, Folgendes:

$$\begin{aligned}
 A_{i,j,k}^{x,l} &= \sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} \sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} w_A(x_l, y_m, z_n) \quad \forall l \in \{i', i'+1, \dots, i'+x_{\text{step}}\} \quad , \quad \text{und damit} \\
 A_{i,j,k}^x &= \frac{A_{i,j,k}^{x,Z}}{A_{i,j,k}^{x,N}} = \frac{\sum_{l=i'}^{i'+x_{\text{step}}} A_{i,j,k}^{x,l} f_{A,l}^{x,S}}{\sum_{l=i'}^{i'+x_{\text{step}}} A_{i,j,k}^{x,l}} = \frac{\sum_{l=i'}^{i'+x_{\text{step}}} \left(\sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} \sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} w_A(x_l, y_m, z_n) \right) f_{A,l}^{x,S}}{\sum_{l=i'}^{i'+x_{\text{step}}} \sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} \sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} w_A(x_l, y_m, z_n)} .
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

$A_{i,j,k}^x$ ist der Schwerpunkt in x -Richtung im (i, j, k) -ten Untervolumen von Volumen 1. In Integraldarstellung gilt

$$\begin{aligned}
 A_{i,j,k}^{x,l} &= \int_{b_{j'}}^{b_{j'}+y_{\text{step}}} \left(\int_{c_{k'}}^{c_{k'}+z_{\text{step}}} w_A(x_l, y, z) dz \right) dy \quad \forall l \in \{i', i'+1, \dots, i'+x_{\text{step}}\} \quad , \quad \text{und damit} \\
 A_{i,j,k}^x &= \frac{A_{i,j,k}^{x,Z}}{A_{i,j,k}^{x,N}} = \frac{\int_{a_{i'}}^{a_{i'}+x_{\text{step}}} \left(\int_{b_{j'}}^{b_{j'}+y_{\text{step}}} \int_{c_{k'}}^{c_{k'}+z_{\text{step}}} w_A(x, y, z) dz dy \right) f_{A,l}^{x,S}(x) dx}{\int_{a_{i'}}^{a_{i'}+x_{\text{step}}} \int_{b_{j'}}^{b_{j'}+y_{\text{step}}} \int_{c_{k'}}^{c_{k'}+z_{\text{step}}} w_A(x, y, z) dz dy dx} .
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

In zu Gl. (4.23) äquivalenter Weise gilt für den x -Schwerpunkt im (i, j, k) -ten Untervolumen von Volumen 2 in diskreter Form

$$\begin{aligned}
 B_{i,j,k}^{x,l} &= \sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} \sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} w_B(x_l, y_m, z_n) \quad \forall l \in \{i', i'+1, \dots, i'+x_{\text{step}}\} \quad , \quad \text{und damit} \\
 B_{i,j,k}^x &= \frac{B_{i,j,k}^{x,Z}}{B_{i,j,k}^{x,N}} = \frac{\sum_{l=i'}^{i'+x_{\text{step}}} B_{i,j,k}^{x,l} f_{B,l}^{x,S}}{\sum_{l=i'}^{i'+x_{\text{step}}} B_{i,j,k}^{x,l}} = \frac{\sum_{l=i'}^{i'+x_{\text{step}}} \left(\sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} \sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} w_B(x_l, y_m, z_n) \right) f_{B,l}^{x,S}}{\sum_{l=i'}^{i'+x_{\text{step}}} \sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} \sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} w_B(x_l, y_m, z_n)} .
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Ebenso erhalten wir durch Substitution der A von Gl. (4.24) durch B wieder die Integraldarstellung von Gl. (4.25). In gleicher Weise berechnet man die y - und z -Schwerpunkte der (i, j, k) -ten Untervolumina der Volumina 1 und 2 (hier für diskreten Fall gezeigt; integrale Darstellungen für A und B genauso wie oben in Gl. (4.24) für $A_{i,j,k}^x$ gezeigt):

$$\begin{aligned}
 A_{i,j,k}^y &= \frac{A_{i,j,k}^{y,Z}}{A_{i,j,k}^{y,N}} = \frac{\sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} A_{i,j,k}^{y,m} f_{A,m}^{y,S}}{\sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} A_{i,j,k}^{y,m}} = \frac{\sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} \left(\sum_{l=i'}^{i'+x_{\text{step}}} \sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} w_A(x_l, y_m, z_n) \right) f_{A,m}^{y,S}}{\sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} \sum_{l=i'}^{i'+x_{\text{step}}} \sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} w_A(x_l, y_m, z_n)} \\
 B_{i,j,k}^y &= \frac{B_{i,j,k}^{y,Z}}{B_{i,j,k}^{y,N}} = \frac{\sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} B_{i,j,k}^{y,m} f_{B,m}^{y,S}}{\sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} B_{i,j,k}^{y,m}} = \frac{\sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} \left(\sum_{l=i'}^{i'+x_{\text{step}}} \sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} w_B(x_l, y_m, z_n) \right) f_{B,m}^{y,S}}{\sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} \sum_{l=i'}^{i'+x_{\text{step}}} \sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} w_B(x_l, y_m, z_n)}
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
 A_{i,j,k}^z &= \frac{A_{i,j,k}^{z,Z}}{A_{i,j,k}^{z,N}} = \frac{\sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} A_{i,j,k}^{z,n} f_{A,n}^{z,S}}{\sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} A_{i,j,k}^{z,n}} = \frac{\sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} \left(\sum_{l=i'}^{i'+x_{\text{step}}} \sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} w_A(x_l, y_m, z_n) \right) f_{A,n}^{z,S}}{\sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} \sum_{l=i'}^{i'+x_{\text{step}}} \sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} w_A(x_l, y_m, z_n)} \\
 B_{i,j,k}^z &= \frac{B_{i,j,k}^{z,Z}}{B_{i,j,k}^{z,N}} = \frac{\sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} B_{i,j,k}^{z,n} f_{B,n}^{z,S}}{\sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} B_{i,j,k}^{z,n}} = \frac{\sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} \left(\sum_{l=i'}^{i'+x_{\text{step}}} \sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} w_B(x_l, y_m, z_n) \right) f_{B,n}^{z,S}}{\sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} \sum_{l=i'}^{i'+x_{\text{step}}} \sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} w_B(x_l, y_m, z_n)}.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Aus den Gl. (4.23), (4.25), (4.26) und (4.27) lassen sich nun durch Vergleich der berechneten Schwerpunkte in den (i, j, k) -ten Sub-Quadern der Volumina 1 und 2 für alle (i, j, k) die **3D Shift-Vektoren**

$$\tau_{i,j,k} = (\tau_{i,j,k}^x, \tau_{i,j,k}^y, \tau_{i,j,k}^z)^T = (B_{i,j,k}^x - A_{i,j,k}^x, B_{i,j,k}^y - A_{i,j,k}^y, B_{i,j,k}^z - A_{i,j,k}^z)^T \tag{4.28}$$

bestimmen. So ist es möglich eine Vielzahl an (hier 3D) Shift-Vektoren zu erhalten.

Im folgenden Kap. 4.2 findet die Berechnung dann für 2D Schichtbilder (Slabs) des 3D statt. Da diese in der Flugzeug-Terminologie senkrecht zur Flugrichtung x orientiert sein werden, wird hier noch obiger Formalismus für y - z -Ebenen formuliert; für den **2D Shift-Vektor** gilt also

$$\begin{aligned}
 \tau_{j,k} &= (\tau_{j,k}^y, \tau_{j,k}^z)^T = (B_{j,k}^y - A_{j,k}^y, B_{j,k}^z - A_{j,k}^z)^T \quad \text{mit} \\
 A_{j,k}^y &= \frac{\sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} \left(\sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} w_A(y_m, z_n) \right) f_{A,m}^{y,S}}{\sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} \sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} w_A(y_m, z_n)}, \quad B_{j,k}^y = \frac{\sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} \left(\sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} w_B(y_m, z_n) \right) f_{B,m}^{y,S}}{\sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} \sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} w_B(y_m, z_n)} \\
 A_{j,k}^z &= \frac{\sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} \left(\sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} w_A(y_m, z_n) \right) f_{A,n}^{z,S}}{\sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} \sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} w_A(y_m, z_n)}, \quad B_{j,k}^z = \frac{\sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} \left(\sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} w_B(y_m, z_n) \right) f_{B,n}^{z,S}}{\sum_{n=k'}^{k'+z_{\text{step}}} \sum_{m=j'}^{j'+y_{\text{step}}} w_B(y_m, z_n)}
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

mit Funktionswerten $w_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ von Bild 1 und $w_B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ von Bild 2 an Punkten $(y_m, z_n)^T$.

4.1.2 Fourier-Shift (FS)

Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung von Verschiebungsvektoren ergibt sich durch Anwendung von Gl. (4.6) in Kombination mit dem Shift-Theorem aus Bem. 4.5 für Funktionen bzw. Verteilungen.

Wir betrachten wieder $X = \mathbb{R}^3$. Sei G die Verteilung der (Intensitäts-)Werte, Streupartikel, etc., in Volumen 1 (Anfangszustand), $\tau_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Translationsabbildung aus Satz 4.4, und H die Verteilung der Werte in Volumen 2 (Endzustand) nach der Translation um \mathbf{a} mittels $\tau_{\mathbf{a}}$. Es gilt

$$H = G \circ \tau_{\mathbf{a}}^{-1} = \{h(\mathbf{x}) := \mathbf{a} + g(\mathbf{x}) : g \in G, \mathbf{x} \in X\} \quad \text{mit} \quad \mathbf{a}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \tag{4.30}$$

Nach Bsp. 4.6 mit Gl. (4.12) hat man hier eine Faltung mit dem Dirac-Maß $\varepsilon_{\mathbf{a}}$ von \mathbf{a} gemäß

$$H = \varepsilon_{\mathbf{a}} * G \quad \text{mit der FTen} \quad \widehat{H} = \widehat{\varepsilon_{\mathbf{a}} * G}, \tag{4.31}$$

d.h. H ist das Bild von $\varepsilon_{\mathbf{a}} \times G$ unter der Addition. Für die FTe \widehat{H} gilt nach dem Faltungstheorem aus Bem. 4.5 $\widehat{H} = \widehat{\varepsilon_{\mathbf{a}}} \cdot \widehat{G}$. Dabei ist nach Gl. (4.4) $\widehat{\varepsilon_{\mathbf{a}}}(\mathbf{x}) = e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{a})} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Für die FTen \widehat{G} und

\widehat{H} gilt nach Gl. (4.1)

$$\widehat{G}(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} dG(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \widehat{H}(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} dH(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3). \quad (4.32)$$

Für die Verteilungen G und H gilt $G = \{g(x_l, y_m, z_n) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}\}$, $H = \{h(x_l, y_m, z_n) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}\}$ an Positionen $(x_l, y_m, z_n)^T$ mit $l, m, n \in \mathbb{N}$, und für ihre FTen $\widehat{G} = \{\widehat{g}(x_l, y_m, z_n) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}\}$, $\widehat{H} = \{\widehat{h}(x_l, y_m, z_n) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}\}$ an Positionen $(x_l, y_m, z_n)^T$ mit $l, m, n \in \mathbb{N}$. Andererseits gilt mit Gl. (4.30) für alle $\mathbf{x} = (x_{l_1}, y_{m_1}, z_{n_1})^T \in \mathbb{R}^3$:

$$\widehat{H}(\mathbf{x}) = e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle} \widehat{G}(\mathbf{x}). \quad (4.33)$$

Für alle $\mathbb{R}^3 \ni \mathbf{y} = (x_{l_2}, y_{m_2}, z_{n_2})^T$ und $\mathbb{R}^3 \ni \mathbf{z} = (x_{l_3}, y_{m_3}, z_{n_3})^T$ gilt:

$$\widehat{H}(\mathbf{y}) = e^{i\langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle} \widehat{G}(\mathbf{y}) \quad \text{und} \quad \widehat{H}(\mathbf{z}) = e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{a} \rangle} \widehat{G}(\mathbf{z}). \quad (4.34)$$

Durch Kombination je dreier solcher Fourier-Formeln wie in den Gl. (4.33) und (4.34) mit unterschiedlichen Punkten \mathbf{x} , \mathbf{y} und \mathbf{z} ergibt sich je ein 3D Shift-Vektor $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T = \tau_{i,j,k}$, wenn man die drei Gleichungen nach den drei Unbekannten a_x , a_y und a_z auflöst.

Wir beschränken uns für die Berechnung nun auf den \mathbb{R}^2 in der y - z -Ebene. Obige Gl. (4.30) bis (4.34) gelten entsprechend, wobei Vektoren aus dem \mathbb{R}^3 durch solche aus \mathbb{R}^2 ersetzt werden. Seien also $\mathbf{x}_1 = (y_{m_1}, z_{n_1})^T \in \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^2 \ni \mathbf{x}_2 = (y_{m_2}, z_{n_2})^T \neq \mathbf{x}_1$ zwei verschiedene Punkte im \mathbb{R}^2 , und

$$\begin{aligned} G \sim \{g(y_m, z_n) : m = 1, \dots, y_{\text{dim}}, n = 1, \dots, z_{\text{dim}}\} &= \begin{pmatrix} g(y_1, z_1) & \cdots & g(y_1, z_{z_{\text{dim}}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(y_{y_{\text{dim}}}, z_1) & \cdots & g(y_{y_{\text{dim}}}, z_{z_{\text{dim}}}) \end{pmatrix}, \\ \widehat{G} = \{\widehat{g}(y_m, z_n) : m = 1, \dots, y_{\text{dim}}, n = 1, \dots, z_{\text{dim}}\} &= \begin{pmatrix} \widehat{g}(y_1, z_1) & \cdots & \widehat{g}(y_1, z_{z_{\text{dim}}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{g}(y_{y_{\text{dim}}}, z_1) & \cdots & \widehat{g}(y_{y_{\text{dim}}}, z_{z_{\text{dim}}}) \end{pmatrix}, \\ H \sim \{h(y_m, z_n) : m = 1, \dots, y_{\text{dim}}, n = 1, \dots, z_{\text{dim}}\} &= \begin{pmatrix} h(y_1, z_1) & \cdots & h(y_1, z_{z_{\text{dim}}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h(y_{y_{\text{dim}}}, z_1) & \cdots & h(y_{y_{\text{dim}}}, z_{z_{\text{dim}}}) \end{pmatrix}, \\ \widehat{H} = \{\widehat{h}(y_m, z_n) : m = 1, \dots, y_{\text{dim}}, n = 1, \dots, z_{\text{dim}}\} &= \begin{pmatrix} \widehat{h}(y_1, z_1) & \cdots & \widehat{h}(y_1, z_{z_{\text{dim}}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{h}(y_{y_{\text{dim}}}, z_1) & \cdots & \widehat{h}(y_{y_{\text{dim}}}, z_{z_{\text{dim}}}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Matrizen von Funktions- und FT-Werten. Man hat also ein diskretes System von Gleichungen

$$\widehat{H}(\mathbf{x}_r) = e^{i\langle \mathbf{x}_r, \mathbf{a} \rangle} \widehat{G}(\mathbf{x}_r) \quad (4.36)$$

für endlich viele Punkte $\mathbf{x}_r = (y_m, z_n)^T \in \mathbb{R}^2$, $r, m, n \in \mathbb{N}$. Für je zwei \mathbf{x} mit unterschiedlichen Indizes der Positionen (d.h. $\mathbf{x}_1 = (y_{m_1}, z_{n_1})^T \neq \mathbf{x}_2 = (y_{m_2}, z_{n_2})^T$, aber $m_1 = m_2 \in \mathbb{N}$ oder $n_1 = n_2 \in \mathbb{N}$ durchaus möglich) können die FTen-Matrizen von Gl. (4.36) komponentenweise ausgewertet werden, um je einen 2D Shift-Vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$ (zwei Unbekannte a_1 und a_2) aus je zwei Gleichungen (4.36) zu berechnen. Eine Vielzahl solcher \mathbf{a} in einer bestimmten Umgebung kann zur Verbesserung der Ergebnisse gemittelt werden. Wir werden im Folgenden ein Lösungsverfahren dazu angeben.

Zunächst werden die FTen aus Gl. (4.6), ihre Inversen aus Gl. (4.11) sowie die FTen des Dirac-Maßes aus Gl. (4.4) auf eine für die numerischen Berechnungen besser geeignete Darstellung mit

einem zusätzlichen Faktor von -2π im Exponenten umgestellt. Nach z. B. Pinsky (2002), S. 90/91, oder Bracewell (1978), S. 7, kann man statt Gl. (4.6) und Gl. (4.11) auch

$$\widehat{f}(y) := \int_{\mathbf{X}} e^{-2\pi i \langle y, x \rangle} f(x) \lambda(dx) \quad , \quad x, y \in \mathbf{X} \quad (4.37)$$

für die FTe und ihre Inverse

$$\widehat{\widehat{f}}(x) \approx \int_{\mathbf{X}} \widehat{f}(y) e^{2\pi i \langle y, x \rangle} \lambda(dx) \quad , \quad x, y \in \mathbf{X} \quad (4.38)$$

schreiben. Entsprechend gilt für die FTe des Dirac-Maßes aus Gl. (4.4) dann

$$\widehat{\varepsilon}_x(y) = e^{-2\pi i \langle y, x \rangle} \quad \forall y \in \mathbf{X}. \quad (4.39)$$

Das heißt für Gl. (4.36) gilt

$$e^{-2\pi i \langle \mathbf{x}_r, \mathbf{a} \rangle} = \frac{\widehat{H}(\mathbf{x}_r)}{\widehat{G}(\mathbf{x}_r)} \quad (r \in \mathbb{N}) \quad (4.40)$$

mit zweidimensionalen FTen nach Gl. (4.37) und ähnlich Gl. (4.32):

$$\widehat{G}(\mathbf{x}_r) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i \langle \mathbf{x}_r, \mathbf{y} \rangle} G d\mathbf{y} \quad \text{und} \quad \widehat{H}(\mathbf{x}_r) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i \langle \mathbf{x}_r, \mathbf{y} \rangle} H d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x}_r, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, r \in \mathbb{N}), \quad (4.41)$$

oder in numerischer, diskreter Form mit Funktionswerten $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $(y_m, z_n) \mapsto g(y_m, z_n)$ und $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $(y_m, z_n) \mapsto h(y_m, z_n)$ an endlich vielen Positionen $(y_m, z_n)^T$ mit $m = 1, \dots, y_{\dim} \in \mathbb{N}$ und $n = 1, \dots, z_{\dim} \in \mathbb{N}$ für die diskreten FTen:

$$e^{-2\pi i \langle (y_m, z_n)^T, (a_1, a_2)^T \rangle} = \frac{\widehat{h}(y_m, z_n)}{\widehat{g}(y_m, z_n)} \quad \text{mit}$$

$$\widehat{g}(y_m, z_n) = \frac{(y_{y_{\dim}} - y_1)(z_{z_{\dim}} - z_1)}{y_{\dim} z_{\dim}} \sum_{k=1}^{z_{\dim}} \sum_{j=1}^{y_{\dim}} e^{-2\pi i \langle (y_m, z_n)^T, (y_j, z_k)^T \rangle} g(y_j, z_k) \quad \text{und}$$

$$\widehat{h}(y_m, z_n) = \frac{(y_{y_{\dim}} - y_1)(z_{z_{\dim}} - z_1)}{y_{\dim} z_{\dim}} \sum_{k=1}^{z_{\dim}} \sum_{j=1}^{y_{\dim}} e^{-2\pi i \langle (y_m, z_n)^T, (y_j, z_k)^T \rangle} h(y_j, z_k). \quad (4.42)$$

Um korrekte, normierte Rücktransformierte (Inverse, vgl. Gl. (4.38)) von \widehat{g} und \widehat{h} zu erhalten, findet folgende symmetrische Implementierung für \widehat{g} und seine Inverse $\widehat{\widehat{g}}$ Anwendung (vgl. Burger und Burge (2006), S. 331 ff.):

$$\widehat{g}(y_m, z_n) := \widehat{g}_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{y_{\dim} \cdot z_{\dim}}} \sum_{k=0}^{z_{\dim}-1} \sum_{j=0}^{y_{\dim}-1} e^{-2\pi i \left(\frac{j \cdot m}{y_{\dim}} + \frac{k \cdot n}{z_{\dim}} \right)} g_{j,k} \quad \text{und}$$

$$\widehat{\widehat{g}}(y_m, z_n) := \widehat{\widehat{g}}_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{y_{\dim} \cdot z_{\dim}}} \sum_{k=0}^{z_{\dim}-1} \sum_{j=0}^{y_{\dim}-1} e^{+2\pi i \left(\frac{j \cdot m}{y_{\dim}} + \frac{k \cdot n}{z_{\dim}} \right)} \widehat{g}_{j,k} \quad (4.43)$$

mit $g_{j,k} = g(y_j, z_k)$, $\widehat{g}_{j,k} = \widehat{g}(y_j, z_k)$ und $m = 0, \dots, y_{\dim} - 1 \in \mathbb{N}$ und $n = 0, \dots, z_{\dim} - 1 \in \mathbb{N}$. Ebenso wird \widehat{h} (und wo notwendig $\widehat{\widehat{h}}$) berechnet. Die Inversen $\widehat{\widehat{g}}$ und $\widehat{\widehat{h}}$ dienen hier zumeist nur der Kontrolle der Richtigkeit der FTen (Ausnahme: KK mit FFT). Zur beschleunigten Berechnung kann 2D FFT (wo sie aufgrund von z.B. Zweierpotenzen von y_{\dim} und z_{\dim} anwendbar ist) zum Einsatz kommen (Brigham, 1997, Press et al., 2007).

Wir führen nun wieder Berechnungen auf Sub-Rechtecken in 2D (in 3D: Sub-Quader oder Sub-Volumina), sog. Templates (dt. „Schablonen, Masken“), für zwei leicht unterschiedliche Bilder durch. Wie in Kap. 4.1.1 haben wir wieder $y_{\text{dim}}, z_{\text{dim}} \in \mathbb{N}$ als Gesamtzahl der Positionen der jeweiligen Achse der Gesamtbilder 1 und 2, $y_{\text{jump}}, z_{\text{jump}} \in \mathbb{N}$ als Sprünge (über eine Anzahl von Positionen) zum nächsten Sub-Rechteck, sowie (neu) $y_{\text{dim}}^{\text{Temp}}, z_{\text{dim}}^{\text{Temp}} \in \mathbb{N}$ mit $y_{\text{dim}}^{\text{Temp}} \bmod 2 = 0$ und $z_{\text{dim}}^{\text{Temp}} \bmod 2 = 0$ für eine gerade Zahl der y - bzw. z -Positionen von Sub-Rechtecken der Gesamtbilder ($y_{\text{dim}}^{\text{Temp}} \leq y_{\text{dim}}, z_{\text{dim}}^{\text{Temp}} \leq z_{\text{dim}}$). Auch ungerade $y_{\text{dim}}^{\text{Temp}}$ und $z_{\text{dim}}^{\text{Temp}}$ sind möglich. Wir berechnen nun die FTen bezogen auf diese Sub-Rechtecke, d.h.

$$\begin{aligned} \widehat{g}^{\text{Temp}}(y_m, z_n) &:= \widehat{g_{m,n}^{\text{Temp}}} = \frac{1}{\sqrt{y_{\text{dim}}^{\text{Temp}} \cdot z_{\text{dim}}^{\text{Temp}}}} \sum_{k=0}^{z_{\text{dim}}^{\text{Temp}}-1} \sum_{j=0}^{y_{\text{dim}}^{\text{Temp}}-1} e^{-2\pi i \left(\frac{j \cdot m}{y_{\text{dim}}^{\text{Temp}}} + \frac{k \cdot n}{z_{\text{dim}}^{\text{Temp}}} \right)} g_{j,k} \quad \text{und} \\ \widehat{h}^{\text{Temp}}(y_m, z_n) &:= \widehat{h_{m,n}^{\text{Temp}}} = \frac{1}{\sqrt{y_{\text{dim}}^{\text{Temp}} \cdot z_{\text{dim}}^{\text{Temp}}}} \sum_{k=0}^{z_{\text{dim}}^{\text{Temp}}-1} \sum_{j=0}^{y_{\text{dim}}^{\text{Temp}}-1} e^{-2\pi i \left(\frac{j \cdot m}{y_{\text{dim}}^{\text{Temp}}} + \frac{k \cdot n}{z_{\text{dim}}^{\text{Temp}}} \right)} h_{j,k} \end{aligned} \quad (4.44)$$

mit hier $m = 0, \dots, y_{\text{dim}}^{\text{Temp}} - 1 \in \mathbb{N}$ und $n = 0, \dots, z_{\text{dim}}^{\text{Temp}} - 1 \in \mathbb{N}$ sowie $g_{j,k} = g(y_j, z_k)$ und $h_{j,k} = h(y_j, z_k)$. Bei Zweierpotenzen für $y_{\text{dim}}^{\text{Temp}}$ und $z_{\text{dim}}^{\text{Temp}}$ kann wieder 2D FFT verwendet werden. Durch die Sub-Intervallstruktur, d.h. durch den lokaleren und eingeschränkten Informationsgehalt der Funktionswerte $g_{j,k}$ bzw. $h_{j,k}$, unterscheiden sich die FTen von Gl. (4.44) essentiell von denen aus Gl. (4.43) an gleichen Stellen $(y_m, z_n)^T$, daher auch die Unterscheidung $\widehat{g}^{\text{Temp}}, \widehat{h}^{\text{Temp}}$ von \widehat{g}, \widehat{h} . Alternativ kann anstelle eines Sub-Quadrats auch um den Mittelpunkt des Sub-Quadrats eine kreisförmige Umgebung definiert werden, auf der FTe berechnet werden; FFT ist hier nicht mehr möglich.

Es werden nun jeweils zwei unterschiedliche Punkte $(y_{m_1}, z_{n_1})^T$ und $(y_{m_2}, z_{n_2})^T$ des Subbereichs ausgewählt und für sie die Gleichungen

$$e^{-2\pi i \langle (y_{m_1}, z_{n_1})^T, (a_1, a_2)^T \rangle} = \frac{\widehat{h_{m_1, n_1}^{\text{Temp}}}}{\widehat{g_{m_1, n_1}^{\text{Temp}}}} \quad \text{und} \quad e^{-2\pi i \langle (y_{m_2}, z_{n_2})^T, (a_1, a_2)^T \rangle} = \frac{\widehat{h_{m_2, n_2}^{\text{Temp}}}}{\widehat{g_{m_2, n_2}^{\text{Temp}}}} \quad (4.45)$$

nach einem einzelnen Shift-Vektor $(a_1, a_2)^T = \mathbf{a}$ aufgelöst. Alle möglichen Kombinationen an Punkten und Werten für Gleichungen gemäß (4.45) um den Mittelpunkt des Sub-Bereichs werden berechnet, d.h. eine endliche Anzahl an Vektoren \mathbf{a}_r , $r \in \mathbb{N}$ werden pro Sub-Bereich bestimmt, die dann gemittelt pro Sub-Bereich je einen Shift-Vektor

$$\begin{aligned} \tau_{j,k} &= \bar{\mathbf{a}}_{j,k} = \frac{1}{r} \sum_{r \in \mathbb{N}} \mathbf{a}_r \quad \text{für alle} \\ j &= \frac{1}{2} y_{\text{dim}}^{\text{Temp}}, \frac{1}{2} y_{\text{dim}}^{\text{Temp}} + y_{\text{jump}}, \frac{1}{2} y_{\text{dim}}^{\text{Temp}} + 2 y_{\text{jump}}, \dots \quad \text{und} \quad j < y_{\text{dim}} - \frac{1}{2} y_{\text{dim}}^{\text{Temp}}, \\ k &= \frac{1}{2} z_{\text{dim}}^{\text{Temp}}, \frac{1}{2} z_{\text{dim}}^{\text{Temp}} + z_{\text{jump}}, \frac{1}{2} z_{\text{dim}}^{\text{Temp}} + 2 z_{\text{jump}}, \dots \quad \text{und} \quad k < z_{\text{dim}} - \frac{1}{2} z_{\text{dim}}^{\text{Temp}} \end{aligned} \quad (4.46)$$

ergeben. Die Fußpunkte dieser Vektoren $\tau_{j,k}$ befinden sich am jeweiligen Mittelpunkt des Sub-Bereichs, über den gemittelt wird.

Eine exakte Berechnung von $\tau_{j,k}$ ist allenfalls bei exakt gleichbleibendem Muster möglich, d.h. alle Punkte (Werte) von Bild 1 sind in Bild 2 um die gleiche Länge und in die gleiche Richtung verschoben (vgl. Abb. 4.8). Durch die Mittelung vieler Vektoren pro Sub-Bereich ist es möglich, auch bei veräuschten, nur noch fast identischen verschobenen Strukturen der Bilder 1 und 2 einen weniger schwankungsanfälligen (fehlerbehafteten) Shift-Vektor $\tau_{j,k}$ zu erhalten. Über die zu erwartende Verschiebung einzelner Punkte oder Strukturen gibt es in der Realität keine Vorahnung (die einzelnen

Pixel-Werte können sich verändern, ebenso die im Bild enthaltene Gesamtmasse), so dass Mittelung über definierte, äquidistante Sub-Bereiche dringend erforderlich ist.

Eine erste Lösungsmöglichkeit zur Berechnung eines einzelnen \mathbf{a} wäre die Zerlegung der Exponentialfunktion in den Gleichungen (4.45) in Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned} k_{m_1, n_1} &:= \frac{\widehat{h_{m_1, n_1}^{\text{Temp}}}}{\widehat{g_{m_1, n_1}^{\text{Temp}}}} = \cos\left(-2\pi\left(\frac{y_{m_1} a_1}{y_{\text{dim}}} + \frac{z_{n_1} a_2}{z_{\text{dim}}}\right)\right) + i \sin\left(-2\pi\left(\frac{y_{m_1} a_1}{y_{\text{dim}}} + \frac{z_{n_1} a_2}{z_{\text{dim}}}\right)\right) \quad \text{sowie} \\ k_{m_2, n_2} &:= \frac{\widehat{h_{m_2, n_2}^{\text{Temp}}}}{\widehat{g_{m_2, n_2}^{\text{Temp}}}} = \cos\left(-2\pi\left(\frac{y_{m_2} a_1}{y_{\text{dim}}} + \frac{z_{n_2} a_2}{z_{\text{dim}}}\right)\right) + i \sin\left(-2\pi\left(\frac{y_{m_2} a_1}{y_{\text{dim}}} + \frac{z_{n_2} a_2}{z_{\text{dim}}}\right)\right). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Wenn man obige Gleichungen für k_{m_1, n_1} und k_{m_2, n_2} nach Real- und Imaginärteilen trennt und diese mit \cos^{-1} bzw. \sin^{-1} multipliziert, erhält man

$$\begin{aligned} -2\pi\left(\frac{y_{m_1} a_1}{y_{\text{dim}}} + \frac{z_{n_1} a_2}{z_{\text{dim}}}\right) &:= \arccos(\text{Re}(k_{m_1, n_1})) \quad , \\ -2\pi\left(\frac{y_{m_1} a_1}{y_{\text{dim}}} + \frac{z_{n_1} a_2}{z_{\text{dim}}}\right) &:= \arcsin(\text{Im}(k_{m_1, n_1})) \quad , \\ -2\pi\left(\frac{y_{m_2} a_1}{y_{\text{dim}}} + \frac{z_{n_2} a_2}{z_{\text{dim}}}\right) &:= \arccos(\text{Re}(k_{m_2, n_2})) \quad , \\ -2\pi\left(\frac{y_{m_2} a_1}{y_{\text{dim}}} + \frac{z_{n_2} a_2}{z_{\text{dim}}}\right) &:= \arcsin(\text{Im}(k_{m_2, n_2})). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Die folgende Betrachtung beschränkt sich auf die Realteile aus Gl. (4.48); äquivalente Berechnungen für die Imaginärteile zur Bestimmung von a_1 und a_2 ergeben sich einfach durch Ersetzen von Re durch Im und arccos durch arcsin in den folgenden Gleichungen. Es gilt für die Gleichung mit $\text{Re}(k_{m_1, n_1})$

$$a_1 = \frac{y_{\text{dim}}^{\text{Temp}}}{y_{m_1}} \left(\frac{\arccos(\text{Re}(k_{m_1, n_1})) z_{\text{dim}}^{\text{Temp}} + z_{n_1} a_2 2\pi}{-2\pi z_{\text{dim}}^{\text{Temp}}} \right) \quad (4.49)$$

und für die Gleichung mit $\text{Re}(k_{m_2, n_2})$

$$a_2 = \frac{z_{\text{dim}}^{\text{Temp}}}{z_{n_2}} \left(\frac{\arccos(\text{Re}(k_{m_2, n_2})) y_{\text{dim}}^{\text{Temp}} + y_{m_2} a_1 2\pi}{-2\pi y_{\text{dim}}^{\text{Temp}}} \right). \quad (4.50)$$

Durch Einsetzen von a_1 aus Gl. (4.49) in Gl. (4.50) und anschließende Umformung folgt verkürzt

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{z_{\text{dim}}^{\text{Temp}}}{z_{n_2}} \left(\frac{\arccos(\text{Re}(k_{m_2, n_2})) y_{\text{dim}}^{\text{Temp}} + y_{m_2} \left(\frac{y_{\text{dim}}^{\text{Temp}}}{y_{m_1}} \left(\frac{\arccos(\text{Re}(k_{m_1, n_1})) z_{\text{dim}}^{\text{Temp}} + z_{n_1} a_2 2\pi}{-2\pi z_{\text{dim}}^{\text{Temp}}} \right) \right) 2\pi}{-2\pi y_{\text{dim}}^{\text{Temp}}} \right) \\ &= -\frac{z_{\text{dim}}^{\text{Temp}} \arccos(\text{Re}(k_{m_2, n_2}))}{z_{n_2} 2\pi} + \frac{y_{m_2}}{y_{m_1} z_{n_2} 2\pi} \arccos(\text{Re}(k_{m_1, n_1})) z_{\text{dim}}^{\text{Temp}} + \frac{y_{m_2}}{y_{m_1} z_{n_2} 2\pi} z_{n_1} a_2 2\pi \\ \implies a_2 \left(1 - \frac{y_{m_2} z_{n_1}}{y_{m_1} z_{n_2}} \right) &= -\frac{z_{\text{dim}}^{\text{Temp}} \arccos(\text{Re}(k_{m_2, n_2}))}{z_{n_2} 2\pi} + \frac{y_{m_2}}{y_{m_1} z_{n_2} 2\pi} \arccos(\text{Re}(k_{m_1, n_1})) z_{\text{dim}}^{\text{Temp}} \\ a_2 &= \left(1 - \frac{y_{m_2} z_{n_1}}{y_{m_1} z_{n_2}} \right)^{-1} \left(-\frac{z_{\text{dim}}^{\text{Temp}} \arccos(\text{Re}(k_{m_2, n_2}))}{z_{n_2} 2\pi} + \frac{y_{m_2}}{y_{m_1} z_{n_2} 2\pi} \arccos(\text{Re}(k_{m_1, n_1})) z_{\text{dim}}^{\text{Temp}} \right) \\ &= \frac{z_{\text{dim}}^{\text{Temp}}}{2\pi} \left(-\frac{\arccos(\text{Re}(k_{m_2, n_2}))}{z_{n_2} - \frac{y_{m_2} z_{n_1}}{y_{m_1}}} + \frac{y_{m_2} \arccos(\text{Re}(k_{m_1, n_1}))}{y_{m_1} z_{n_2} - y_{m_2} z_{n_1}} \right). \end{aligned} \quad (4.51)$$

a_2 aus Gl. (4.51) eingesetzt in a_1 aus Gl. (4.49) ergibt:

$$a_1 = \frac{y_{\text{dim}}^{\text{Temp}}}{2\pi y_{m_1}} \left(-\arccos(\text{Re}(k_{m_1, n_1})) + \frac{z_{n_1} \arccos(\text{Re}(k_{m_2, n_2}))}{z_{n_2} - \frac{y_{m_2} z_{n_1}}{y_{m_1}}} - \frac{z_{n_1} y_{m_2} \arccos(\text{Re}(k_{m_1, n_1}))}{y_{m_1} z_{n_2} - y_{m_2} z_{n_1}} \right). \quad (4.52)$$

Die Nenner in Gl. (4.51) und Gl. (4.52) müssen jeweils $\neq 0$ sein, um eine Lösung für $(a_1, a_2)^T$ erhalten zu können. Das heißt, es gibt Punkte $(y_m, z_n)^T$, für die keine Berechnung von $(a_1, a_2)^T$ möglich ist. Solche $(a_1, a_2)^T$ gehen also nicht in die Mittelung für ein $\bar{\mathbf{a}}_{j,k} = \tau_{j,k}$ ein! Eventuell können der Faktor 2π und die $y_{\text{dim}}^{\text{Temp}}$ und $z_{\text{dim}}^{\text{Temp}}$ vernachlässigt werden (durch Setzen von $2\pi = 1$, $y_{\text{dim}}^{\text{Temp}} = 1$ und $z_{\text{dim}}^{\text{Temp}} = 1$ in obigen Gleichungen).

Die Trennung in Real- und Imaginärteile erlaubt jedoch keine gleichzeitige und damit keine vollständige Lösung für $(a_1, a_2)^T$. Auch gibt es z. B. immer nur dann eine Lösung, wenn $-1 \leq \text{Re}(k_{m_1, n_1}) \leq +1$ und $-1 \leq \text{Re}(k_{m_2, n_2}) \leq +1$ gilt, da nur dort der arccos und arcsin definiert ist. Da sich die Werte der FTen in den Brüchen $\widehat{h_{m_i, n_i}^{\text{Temp}}} / \widehat{g_{m_i, n_i}^{\text{Temp}}}$, $i = 1, 2$, kaum unterscheiden, liegen die dann berechneten Funktionswerte für arccos und arcsin noch näher beieinander, was die Fehleranfälligkeit der Berechnung erhöht. Bei Punkten um $(0, 0)^T$ gibt es Schwierigkeiten und die Linearität der $(y, z)^T$ -Punktpositionen ist nicht gewährleistet. Daher muss die Lösung über den *Logarithmus* erfolgen:

$$\begin{aligned} k_{m_1, n_1} &:= \frac{\widehat{h_{m_1, n_1}^{\text{Temp}}}}{\widehat{g_{m_1, n_1}^{\text{Temp}}}} = e^{-2\pi i \langle (y_{m_1, z_{n_1}})^T, (a_1, a_2)^T \rangle} \iff \log(k_{m_1, n_1}) = -i 2\pi \langle (y_{m_1, z_{n_1}})^T, (a_1, a_2)^T \rangle, \\ k_{m_2, n_2} &:= \frac{\widehat{h_{m_2, n_2}^{\text{Temp}}}}{\widehat{g_{m_2, n_2}^{\text{Temp}}}} = e^{-2\pi i \langle (y_{m_2, z_{n_2}})^T, (a_1, a_2)^T \rangle} \iff \log(k_{m_2, n_2}) = -i 2\pi \langle (y_{m_2, z_{n_2}})^T, (a_1, a_2)^T \rangle. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Daraus folgt $\text{Im}(\log(k_{m_1, n_1})) = -2\pi(y_{m_1} a_1 + z_{n_1} a_2)$ und $\text{Im}(\log(k_{m_2, n_2})) = -2\pi(y_{m_2} a_1 + z_{n_2} a_2)$. Diese Gleichungen können zu einem linearen Gleichungssystem zusammengefasst werden:

$$\begin{pmatrix} \text{Im}(\log(k_{m_1, n_1})) \\ \text{Im}(\log(k_{m_2, n_2})) \end{pmatrix} = -2\pi \begin{pmatrix} y_{m_1} & z_{n_1} \\ y_{m_2} & z_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

Für lineare Systeme gibt es eine eigene Theorie, siehe etwa [Saleh und Teich \(2007\)](#) und die dortigen Literaturhinweise. Soweit bekannt gibt es aber für obiges System bisher kein Lösungsverfahren zur Bestimmung von Shift-Vektoren. Als Lösungsverfahren dieses linearen Gleichungssystems kann eine simple Gauß-Jordan-Elimination nach [Press et al. \(2007\)](#), S. 44-45, angewandt werden, denn es gilt

$$Ax = b \quad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} y_{m_1} & z_{n_1} \\ y_{m_2} & z_{n_2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad b := \begin{pmatrix} \text{Im}(\log(k_{m_1, n_1})) \\ \text{Im}(\log(k_{m_2, n_2})) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}, \quad x := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}. \quad (4.55)$$

Der Faktor -2π kann wieder gleich 1 gesetzt werden. Ebenso würde die Berechnung über die Inverse Matrix A^{-1} zu Lösungen führen:

$$\begin{aligned} x &= A^{-1} b = \frac{1}{y_{m_1} z_{n_2} - z_{n_1} y_{m_2}} \begin{pmatrix} z_{n_2} & -z_{n_1} \\ -y_{m_2} & y_{m_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Im}(\log(k_{m_1, n_1})) \\ \text{Im}(\log(k_{m_2, n_2})) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{y_{m_1} z_{n_2} - z_{n_1} y_{m_2}} \begin{pmatrix} z_{n_2} \text{Im}(\log(k_{m_1, n_1})) - z_{n_1} \text{Im}(\log(k_{m_2, n_2})) \\ -y_{m_2} \text{Im}(\log(k_{m_1, n_1})) + y_{m_1} \text{Im}(\log(k_{m_2, n_2})) \end{pmatrix} \\ \implies a_1 &= \frac{1}{y_{m_1} z_{n_2} - z_{n_1} y_{m_2}} (z_{n_2} \text{Im}(\log(k_{m_1, n_1})) - z_{n_1} \text{Im}(\log(k_{m_2, n_2}))), \\ a_2 &= \frac{1}{y_{m_1} z_{n_2} - z_{n_1} y_{m_2}} (-y_{m_2} \text{Im}(\log(k_{m_1, n_1})) + y_{m_1} \text{Im}(\log(k_{m_2, n_2}))). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Die maximale Anzahl möglicher Shift-Vektoren pro Sub-Rechteck beträgt $(y_{\text{dim}}^{\text{Temp}} z_{\text{dim}}^{\text{Temp}} - 1) \cdot (y_{\text{dim}}^{\text{Temp}} z_{\text{dim}}^{\text{Temp}})$ (für jeden Punkt gibt es potentiell Kombinationsmöglichkeiten mit jedem anderen Punkt auf dem Sub-Rechteck). Es können alternativ nur Punkte $(y_m, z_n)^T$ miteinander kombiniert werden, die einen Mindestabstand voneinander haben oder (für eine kreisförmige Umgebung statt eines Sub-Rechtecks) die in einem gewissen Radialbereich um einen bestimmten Punkt liegen. Es gilt

$$\forall k = 0, \dots, z_{\text{dim}}^{\text{Temp}} - 1 \quad \forall j = 0, \dots, y_{\text{dim}}^{\text{Temp}} - 1 \quad \forall n = 0, \dots, z_{\text{dim}}^{\text{Temp}} - 1 \quad \forall m = 0, \dots, y_{\text{dim}}^{\text{Temp}} - 1 :$$

Berechnungen laut Gl. (4.54) mit Gauß-Jordan-Elimination werden durchgeführt, falls $m \neq j$ und/oder $n \neq k$,

$$\text{und } \sqrt{((m-j)\Delta y)^2 + ((n-k)\Delta z)^2} \geq d_{\text{Limit}} \text{ für Sub-Rechtecke,}$$

$$\text{bzw. } \sqrt{((m-j)\Delta y)^2 + ((n-k)\Delta z)^2} \leq d_{\text{Limit}} \text{ für kreisförmige Umgebungen.}$$

Dabei sei Δy bzw. Δz der äquidistante Abstand zwischen zwei benachbarten y - bzw. z -Positionen, und d_{Limit} ein Grenzwert für die minimale oder maximale Distanz zwischen zwei 2D Punkten. Als Problem bleibt beim Logarithmus weiterhin die Abhängigkeit der Berechnung von den Positionen $(y_m, z_n)^T$. Da die Brüche $\widehat{h_{m_i, n_i}^{\text{Temp}}} / \widehat{g_{m_i, n_i}^{\text{Temp}}}$, $i = 1, 2$, alle etwa 1 sind, ist der Logarithmus solcher Brüche nahe 0, was zu hohen Schwankungen der Werte für die $(a_1, a_2)^T$ führen kann.

Die Verallgemeinerung obiger Vorgehensweise zur Berechnung eines einzelnen $\tau_{j,k}$ auf viele Indextupel (j, k) zeigt Abb. 4.3 für den Fall von Sub-Rechtecken (Templates). Die Sprünge zwischen den Zentren der einzelnen Templates an Punkten $(y_j, z_k)^T$ sind jeweils von der Größe/Pixelanzahl y_{jump} bzw. z_{jump} . Die Templates haben hier jeweils 5×5 -Pixel; sie dürfen die Ränder der Gesamtbilder 1 und 2 nicht überschreiten. Wir vergleichen immer Templates an den selben Stellen in Bild 1 und 2 (daher gleiche Nummerierung), in der Abbildung ist dies das grüne Template 1. Da wir uns in 2D befinden, reichen je zwei Pixel und ihre Werte $(g(y_{m_1}, z_{n_1}), g(y_{m_2}, z_{n_2}))$ in Bild 1, sowie $(h(y_{m_1}, z_{n_1}), h(y_{m_2}, z_{n_2}))$ in Bild 2) an den selben Positionen im Template 1 in Bild 1 und 2 aus, und wir berechnen die auf die Templates 1 bezogenen FTen $\widehat{g^{\text{Temp}}(y_{m_1}, z_{n_1})}$, $\widehat{g^{\text{Temp}}(y_{m_2}, z_{n_2})}$ sowie $\widehat{h^{\text{Temp}}(y_{m_1}, z_{n_1})}$, $\widehat{h^{\text{Temp}}(y_{m_2}, z_{n_2})}$, um schließlich durch Gauß-Jordan-Elimination von Gl. (4.55) oder durch Gl. (4.56) einen einzelnen Vektor $(a_1, a_2)^T$ zu erhalten. Wie oben beschrieben wird das dargestellte Vorgehen für viele Kombinationen von je zwei Punkten auf den Templates 1 durchgeführt, so dass am Ende ein gemittelter 2D Shift-Vektor $\tau_{j,k}$ pro (j, k) steht. Durch Wiederholung für viele (j, k) erhält man ein ganzes 2D Shift-Vektorfeld.

Obiges Prinzip kann auf den 3D Fall übertragen werden. Man hat dann wie in Gl. (4.53)

$$\begin{aligned} k_{l_1, m_1, n_1} &:= \frac{\widehat{h_{l_1, m_1, n_1}^{\text{Temp}}}}{\widehat{g_{l_1, m_1, n_1}^{\text{Temp}}}} = e^{-2\pi i \langle (x_{l_1}, y_{m_1}, z_{n_1})^T, (a_x, a_y, a_z)^T \rangle} \iff \log(k_{l_1, m_1, n_1}) = -i 2\pi \left\langle \begin{pmatrix} x_{l_1} \\ y_{m_1} \\ z_{n_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \right\rangle, \\ k_{l_2, m_2, n_2} &:= \frac{\widehat{h_{l_2, m_2, n_2}^{\text{Temp}}}}{\widehat{g_{l_2, m_2, n_2}^{\text{Temp}}}} = e^{-2\pi i \langle (x_{l_2}, y_{m_2}, z_{n_2})^T, (a_x, a_y, a_z)^T \rangle} \iff \log(k_{l_2, m_2, n_2}) = -i 2\pi \left\langle \begin{pmatrix} x_{l_2} \\ y_{m_2} \\ z_{n_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \right\rangle, \\ k_{l_3, m_3, n_3} &:= \frac{\widehat{h_{l_3, m_3, n_3}^{\text{Temp}}}}{\widehat{g_{l_3, m_3, n_3}^{\text{Temp}}}} = e^{-2\pi i \langle (x_{l_3}, y_{m_3}, z_{n_3})^T, (a_x, a_y, a_z)^T \rangle} \iff \log(k_{l_3, m_3, n_3}) = -i 2\pi \left\langle \begin{pmatrix} x_{l_3} \\ y_{m_3} \\ z_{n_3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Wie in Gl. (4.54) können obige Gleichungen wieder als lineares Gleichungssystem geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} \text{Im}(\log(k_{l_1, m_1, n_1})) \\ \text{Im}(\log(k_{l_2, m_2, n_2})) \\ \text{Im}(\log(k_{l_3, m_3, n_3})) \end{pmatrix} = -2\pi \begin{pmatrix} x_{l_1} & y_{m_1} & z_{n_1} \\ x_{l_2} & y_{m_2} & z_{n_2} \\ x_{l_3} & y_{m_3} & z_{n_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \text{ mit } Ax = b \text{ wie in Gl. (4.55) für 3D.} \quad (4.58)$$

Die Lösung nach $x = \mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$ erfolgt dann wie oben mittels Gauß-Jordan-Elimination.

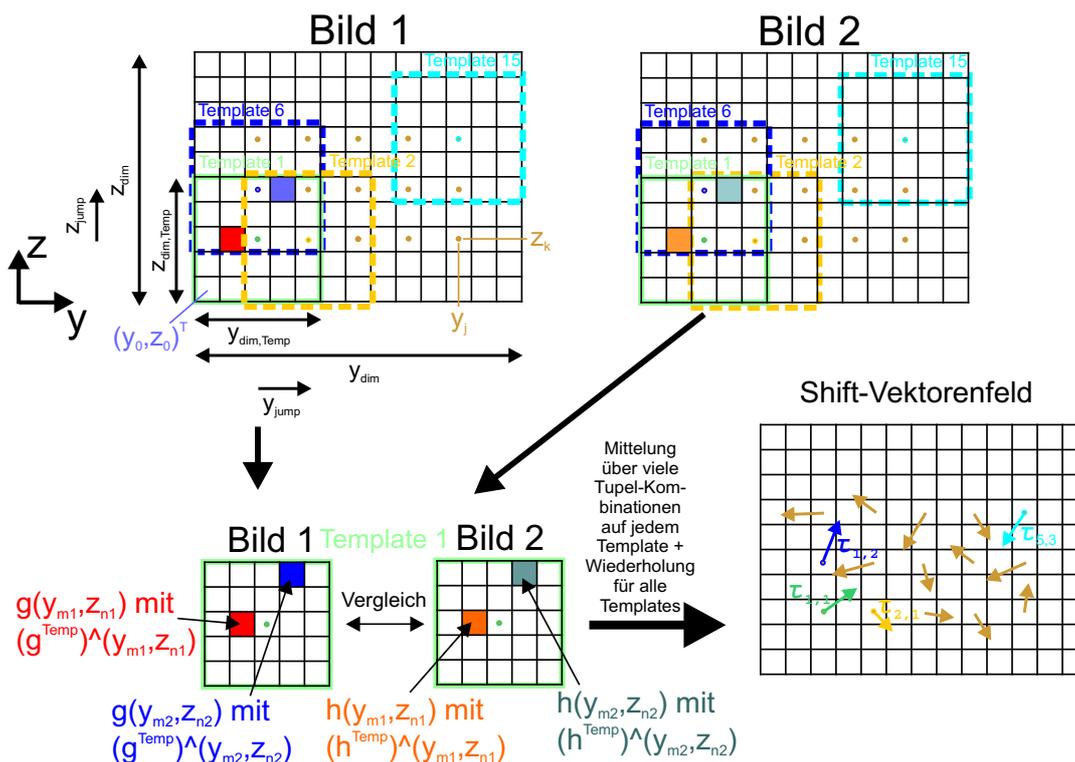


Abbildung 4.3: Methode zur Berechnung von 2D Shift-Vektoren über Fourier-Transformationen aus zwei Bildern. Details siehe Text (Kap. 4.1.2).

4.1.3 Kreuzkorrelation (KK)

Die Berechnung zweier kurzzeitig hintereinander aufgenommener Bilder findet bei PIV (vgl. Anhang A.1) u. a. mittels KK statt. Mathematische Darstellungen zu statistischen PIV-Berechnungen bzw. zu digitaler PIV findet man z. B. bei Keane und Adrian (1992) bzw. Westerweel (1993, 1997). Während in der PIV-Theorie die räumliche (Intensitäts-)Verteilung einer bestimmten Zahl an Tracer-Partikeln innerhalb der Strömung zu verschiedenen Zeitpunkten in Abfragefenstern mittels KK analysiert wird (vgl. Raffel et al. (2007), Kap. 3), haben wir es für unser RSL mit einer kontinuierlichen Rückstreuverteilung ohne getrennte Peaks bei einzelnen Tracern zu tun, da Streupartikel auf die große Messdistanz nicht mehr einzeln sichtbar/detektierbar sind.

In PIV treten v. a. zwei Arten von Bildaufnahmen auf: einerseits sog. „Single Frame/Double Exposure“-Aufnahmen, bei denen zu zwei Zeitpunkten t und $t + \Delta t$ die Tracer-Streuverteilungen gleichzeitig miteinander auf *einem* Bild akkumuliert werden und die Auswertung über Autokorrelation oder KK stattfindet; und andererseits sog. „Double Frame/Single Exposure“-Aufnahmen (auch „Multi-Frame/Single Exposure“), bei denen zu zwei (oder mehr) Zeitpunkten t und $t + \Delta t$ (und $t + 2\Delta t$, usw. bei „Multi-Frame“) die Tracer-Streuverteilungen *jeweils auf einem* einzelnen CCD/CMOS-Bild dargestellt werden und die Auswertung mit KK durchgeführt wird. Letztere Methode wird in den RSL-Simulationen Anwendung finden, da jedes Bild durch eigenständige Lichtpulse zur Belichtung (Scans zu unterschiedlichen Zeitpunkten) entsteht, so dass eine eindeutige zeitliche Einordnung der Bildreihenfolge vorhanden ist (Raffel et al. (2007), Kap. 4). Während die hier angewandte KK unterschiedliche Bilder korreliert, wird bei der Autokorrelation das Bild mit sich selbst bzw. zwei identische Bilder miteinander verglichen. Nach Werner (2005a), S. 329 kann die KK auch zur Scherwind-Bestimmung in der Atmosphäre verwendet werden. Wir werden zeigen, dass damit sogar Geschwindigkeitsvektorfelder von WS rekonstruiert werden können.

Die Korrelation ist von der Faltung nur durch die implizite Spiegelung des Faltungskerns verschieden, siehe Burger und Burge (2006), S. 414. Während für die Faltung $*$ zweier Maße das Faltungs-

theorem aus Gl. (4.4) gilt, unterscheidet sich die Korrelation \star im **Korrelationstheorem** zweier Maße hiervon nur durch das Auftreten eines komplex konjugierten Maßes $\bar{\nu}$: $\widehat{\mu \star \nu} = \widehat{\mu} \cdot \widehat{\bar{\nu}}$.

In der Signalanalyse wird eine zeitliche 1D Verschiebung zwischen zwei ähnlichen bzw. gleichen Signalen mittels Korrelation bestimmt (Schrüfer (1990), Kap. 7). Die 1D Theorie für Zeitsignale kann erweitert werden auf die KK zweier stochastischer Prozesse (von Storch und Zwiers (1999), S. 228) und auf räumliche 2D Bilder oder 3D Volumina mit Werteverteilungen. Zur Berechnung der Shift-Vektoren werden wie bei FS je zwei Bilder zerlegt in eine Vielzahl von Untergebieten (Sub-Rechtecken), die hier wie in PIV als „Abfragefenster“ bezeichnet werden. Die Zeitspanne Δt zwischen den beiden Bildern sollte nicht zu groß sein, um zumindest noch näherungsweise Linearität der Shift-Bewegung annehmen und die Shifts nachweisen zu können, aber auch nicht zu kurz, um überhaupt eine Bewegung feststellen zu können und damit die Teilchen am Rand nicht den Bild-Bereich verlassen. Die zeitlichen Abstände zwischen den Bildern sollten angepasst werden, je nachdem ob starke, schnelle Bewegung (kürzere Zeitabstände) oder langsame Bewegung (größere Zeitabstände) vorhanden ist, so dass die Shifts auch detektiert werden können.

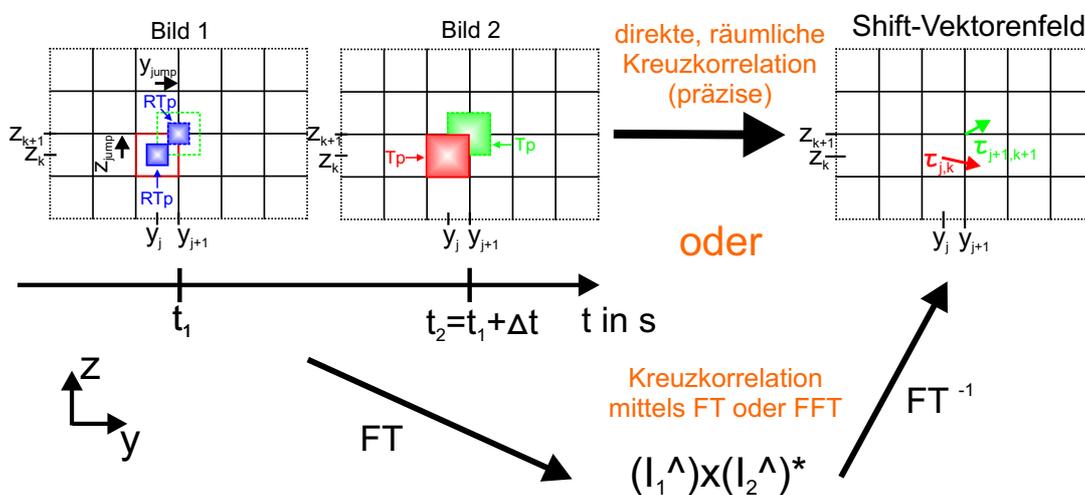


Abbildung 4.4: Die Berechnung von 2D Shift-Vektoren über KK aus zwei hintereinander aufgenommenen Bildern erfolgt entweder direkt oder mittels FT bzw. FFT. Die Intensitätsverteilungen I_1 von Bild 1 und I_2 von Bild 2 werden beim Fourier-Weg transformiert (\widehat{I}_1 und \widehat{I}_2), von \widehat{I}_2 wird das komplex Konjugierte \widehat{I}_2^* gebildet und dann das Produkt $\widehat{I}_1 \cdot \widehat{I}_2^*$, welches noch rücktransformiert wird. Die Berechnung findet auf Referenz-Templates (RTp) und Templates (Tp) statt.

Beim Einzelprozess der Verschiebung haben wir es, wie schon in Kap. 4.1.2, mit einem linearen System zu tun: die anfängliche Intensitätsverteilung I_1 von Bild 1 (mit Werten w_A) wird durch eine Verschiebungsfunktion τ_a (und in der Realität einen Rausch-Term R aus mehreren Formen des Rauschens) auf die neue Ausgabe-Intensitätsverteilung I_2 (mit Werten w_B) abgebildet. Bei genauer Kenntnis von τ_a und R können diese als Übergangsfunktionen verwendet werden, um aus I_1 schließlich I_2 zu generieren. Jedoch kennen wir immer nur die I_1 und I_2 , nicht aber τ_a und R . Die Aufgabe besteht nun darin, das Feld von Shift-Vektoren \mathbf{a} über τ_a statistisch bestmöglich zu schätzen, wobei gleichzeitig das Rauschen R ausgeschlossen wird (oder werden muss, da man sein Ausmaß nicht kennt; R ist ein zusätzlicher Fehlerterm). In Kap. 4.1.2 wurde über FS mittels einer Entfaltung, d. h. durch Division je zweier FTer, die Shift-Funktion τ_a rückberechnet. Hier wird τ_a dadurch bestimmt, die beste Übereinstimmung zwischen zwei Bildausschnitten auf statistische Weise zu berechnen.

Die zwei 2D Bilder zu Zeitpunkten t und $t + \Delta t$ werden mittels Abfragefenstern einer bestimmten Größe (z.B. 16×16 oder 32×32 Pixel, damit FFT genutzt werden kann) abgetastet, siehe Abb. 4.4. Für jedes solche Abfragefenster wird die KK (genauer der **Kreuzkorrelationskoeffizient**, kurz **KKKoeff**) zwischen Bild 1 und 2 berechnet, und daraus dann die Verschiebung der Peak-Position, d.h. der Shift-Vektor. Wir müssen hier ein ausgewähltes Teilbild (Abfragefenster) von Bild 1 mit

Werten w_A an Positionen $(y_m, z_n)^T$, das sog. **Referenz-Template (RTp)**, innerhalb eines größeren Bildbereichs (Bildausschnitts) von Bild 2 mit Werten w_B , dem sog. **Template (Tp)**, suchen, vgl. Abb. 4.4 und 4.5. Man spricht hierbei von „Template Matching“ (Burger und Burge, 2006), da der gesuchte Bildteil (das RTp) des ersten Bildes über einen erweiterten Bereich (das Tp) des zweiten Bildes bewegt wird und die Differenz zwischen RTp von Bild 1 und darunterliegendem Bereich des Tp von Bild 2 gemessen wird. Wir speichern die Positionen höchster Übereinstimmung zwischen RTp und Tp. Dadurch kann ein Feld linearer Verschiebungsvektoren berechnet werden, wobei jeder Vektor durch die Analyse der Bewegung lokaler Bildausschnitte zustande kommt, deren Inhalte bestmöglich übereinstimmen. Seien Δy und Δz die Verschiebungen des Tp-Ausschnitts von Bild 2 gegenüber dem gleich großen RTp aus Bild 1 auf den y - bzw. z -Achsen. Die *Kreuzkorrelationsfunktion* für eine Verschiebung um $(\Delta y, \Delta z)$ in 2D ist definiert durch

$$K_f(\Delta y, \Delta z) = \lim_{y_{\text{dim}}^{\text{Ref}} \rightarrow \infty} \frac{1}{y_{\text{dim}}^{\text{Ref}}} \lim_{z_{\text{dim}}^{\text{Ref}} \rightarrow \infty} \frac{1}{z_{\text{dim}}^{\text{Ref}}} \int_{-\frac{z_{\text{dim}}^{\text{Ref}}}{2}}^{+\frac{z_{\text{dim}}^{\text{Ref}}}{2}} \int_{-\frac{y_{\text{dim}}^{\text{Ref}}}{2}}^{+\frac{y_{\text{dim}}^{\text{Ref}}}{2}} w_A(y, z) w_B(y + \Delta y, z + \Delta z) dy dz, \quad (4.59)$$

mit den jeweiligen Seitenlängen $y_{\text{dim}}^{\text{Ref}}$ und $z_{\text{dim}}^{\text{Ref}}$ des Referenz-Templates. Für die *diskrete Kreuzkorrelationsfunktion* an der um $(\Delta y, \Delta z)$ verschobenen Stelle (y_j, z_k) in 2D gilt allgemein

$$K_f(y_j, z_k) = (w_A \star w_B)(y_j, z_k) = \sum_{n=0}^{z_{\text{dim}}^{\text{Ref}}-1} \sum_{m=0}^{y_{\text{dim}}^{\text{Ref}}-1} w_A(y_m, z_n) w_B(y_m + \Delta y, z_n + \Delta z). \quad (4.60)$$

In den Berechnungen wird diese Kreuzkorrelationsfunktion K_f ersetzt durch den besser geeigneten, präziseren KKKoeff K_c (siehe unten).

Die Summe der quadratischen Abstände zwischen den w_A und w_B dient bei der Herleitung der KKKoeff als Ausgangspunkt (Burger und Burge (2006), S. 413 ff.). Da die Quadratsumme der w_B über die dem RTp entsprechenden Bereiche der Templates Tp i. Allg. nicht konstant ist und damit das Resultat von Variationen der Intensitäten in Bild 2 abhängt, führt man zur Verbesserung von Gl. (4.60) die *normierte Kreuzkorrelation* K_n ein. Für sie gilt

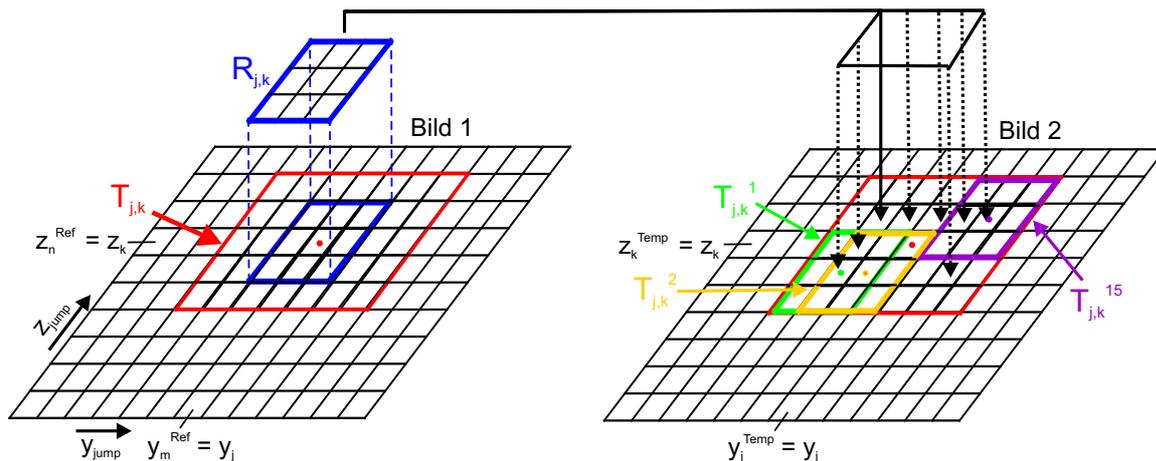
$$K_n(y_j, z_k) = \frac{\sum_{n=0}^{z_{\text{dim}}^{\text{Ref}}-1} \sum_{m=0}^{y_{\text{dim}}^{\text{Ref}}-1} w_A(y_m, z_n) w_B(y_m + \Delta y, z_n + \Delta z)}{\left(\sum_{n=0}^{z_{\text{dim}}^{\text{Ref}}-1} \sum_{m=0}^{y_{\text{dim}}^{\text{Ref}}-1} (w_A(y_m, z_n))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{z_{\text{dim}}^{\text{Ref}}-1} \sum_{m=0}^{y_{\text{dim}}^{\text{Ref}}-1} (w_B(y_m + \Delta y, z_n + \Delta z))^2 \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.61)$$

Die nun folgende Prozedur zur Berechnung der Shifts mittels KKKoeff K_c wird in den Abb. 4.4 und 4.5 veranschaulicht. Zentrum des Templates $T_{j,k} \subset$ Bild 2 ist das Pixel mit Position (y_j, z_k) , d.h. Index (j, k) . Ebenso wird um dieses Zentrum ein kleinerer Ausschnitt $R_{j,k} \subset$ Bild 1 selektiert, das RTp mit $R_{j,k} \subset T_{j,k}$. In unserem Fall wird ein räumlicher Überlapp der einzelnen Templates $T_{j,k}$ von Bild 2 in Abhängigkeit von j und k zugelassen, siehe Abb. 4.4.

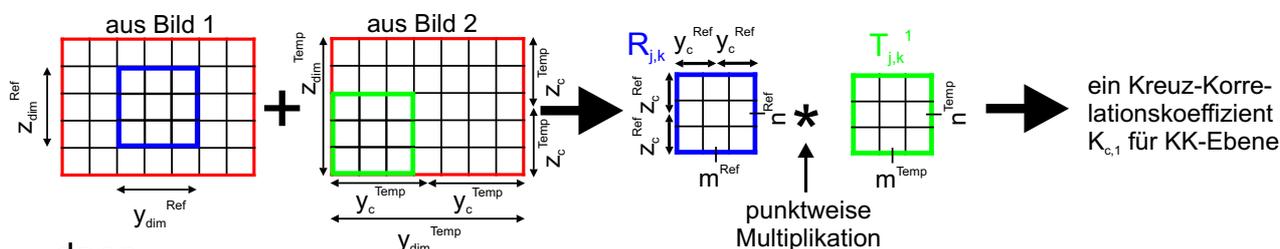
Seien $y_{\text{dim}}^{\text{Ref}}$ und $z_{\text{dim}}^{\text{Ref}}$ die Anzahl der Positionen des gewählten RTp entlang der jeweiligen Achsen y und z , sowie $y_{\text{dim}}^{\text{Temp}}$ und $z_{\text{dim}}^{\text{Temp}}$ die Anzahl der Positionen des gewählten Tp. Weiter seien $y_c^{\text{Ref}} = \lfloor \frac{1}{2} y_{\text{dim}}^{\text{Ref}} \rfloor$ die nächstkleinere positive ganze Zahl der Hälfte von $y_{\text{dim}}^{\text{Ref}}$ (bei ungeradzahligem Wert wird abgerundet) und ebenso $z_c^{\text{Ref}} = \lfloor \frac{1}{2} z_{\text{dim}}^{\text{Ref}} \rfloor$, $y_c^{\text{Temp}} = \lfloor \frac{1}{2} y_{\text{dim}}^{\text{Temp}} \rfloor$, $z_c^{\text{Temp}} = \lfloor \frac{1}{2} z_{\text{dim}}^{\text{Temp}} \rfloor$. Mit diesen Zahlen aus \mathbb{N} können die Positionen der zentralen (j, k) -ten Shift-Vektoren angegeben und die Ränder des Bildbereichs bei den Berechnungen ausgeschlossen werden.

Wir definieren als Zentren der (j, k) -ten Templates (d.h. als Fußpunkte der Shift-Vektoren $\tau_{j,k}$) die Positionen $y_{j^{\text{Temp}}}$ und $z_{k^{\text{Temp}}}$ mit Indizes

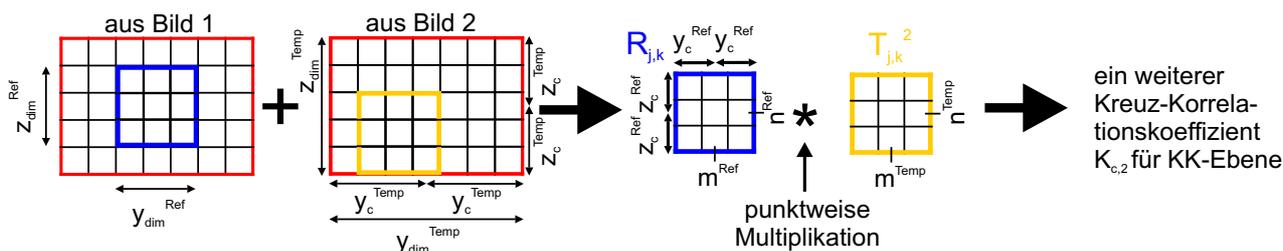
$$\begin{aligned} j^{\text{Temp}} &= y_c^{\text{Temp}}, y_c^{\text{Temp}} + y_{\text{jump}}, y_c^{\text{Temp}} + 2 y_{\text{jump}}, \dots, y_{\text{dim}} - y_c^{\text{Temp}} \quad \text{und} \\ k^{\text{Temp}} &= z_c^{\text{Temp}}, z_c^{\text{Temp}} + z_{\text{jump}}, z_c^{\text{Temp}} + 2 z_{\text{jump}}, \dots, z_{\text{dim}} - z_c^{\text{Temp}}. \end{aligned}$$



also:



dann:

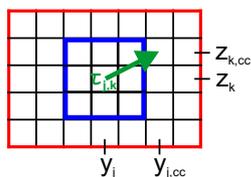


Wiederholen dieses Vorgangs für alle $T_{j,k}^i$ bei gleichem $R_{j,k}$, d.h. Bestimmung aller $K_{c,i}$, die damit die KK-Ebene um (y_j^{Temp}, z_k^{Temp}) bilden:

$K_{c,1}$	$K_{c,4}$		
$K_{c,2}$			
$K_{c,3}$			$K_{c,15}$

Für 3x3 RTp und 7x5 Tp hat man hier eine 5x3 KK-Ebene.

Daraus Bestimmung des maximalen K_c (zusammen mit seiner Position) aus allen $K_{c,i}$. Dies liefert ausgehend vom Fußpunkt (y_j, z_k) das $\tau_{j,k}$ für dieses Paar aus $R_{j,k}$ und $T_{j,k}$.



Wiederholung dieser Prozedur für alle j und k liefert ein Feld von 2D-Shift-Vektoren $\tau_{j,k}$ mit Fußpunkten (y_j, z_k) und Spitzen bei $(y_{j,cc}, z_{k,cc})$; Erweiterung auf Subpixel-Präzision möglich.

Abbildung 4.5: Methode zur Berechnung von 2D Shift-Vektoren über Kreuzkorrelation aus zwei Bildern mittels RTp und Tp des zweiten Bildes, auf denen das RTp des ersten Bildes jeweils gesucht wird. Die Zentrumsposition des optimalen Überlapps wird für jedes (y_j, z_k) bestimmt. Die Strecke von (y_j^{Temp}, z_k^{Temp}) zur Position des maximalen KK-Koeffizienten K_c gibt Länge und Richtung des Shift-Vektors $\tau_{j,k}$ an. Durch Wiederholung kann ein ganzes Shift-Vektorfeld aus vielen $\tau_{j,k}$ berechnet werden. Nachteil bei einem 7×5 -Tp: ein starkes Wandern nach links oder rechts wird bevorzugt erkannt. Quadratisch (d. h. 7×7 oder 8×8) wäre in diesem Fall besser.

Weiter wählen wir zu jedem solchen Tp aus Bild 2 mit Zentrum $(y_{j^{\text{Temp}}}, z_{k^{\text{Temp}}})$ ein RTp aus Bild 1 mit Werten w_A an den Stellen $(y_{m^{\text{Ref}}}, z_{n^{\text{Ref}}})$ mit Indizes

$$\begin{aligned} m^{\text{Ref}} &= j^{\text{Temp}} - y_c^{\text{Ref}}, j^{\text{Temp}} - y_c^{\text{Ref}} + 1, \dots, j^{\text{Temp}} + y_c^{\text{Ref}} - 1, j^{\text{Temp}} + y_c^{\text{Ref}} \quad \text{und} \\ n^{\text{Ref}} &= k^{\text{Temp}} - z_c^{\text{Ref}}, k^{\text{Temp}} - z_c^{\text{Ref}} + 1, \dots, k^{\text{Temp}} + z_c^{\text{Ref}} - 1, k^{\text{Temp}} + z_c^{\text{Ref}}. \end{aligned}$$

Wir berechnen zu jedem solchen (j, k) -ten RTp

$$\begin{aligned} \text{die Summe seiner Werte} \quad \Sigma_{j,k}^R &= \sum_{n^{\text{Ref}}} \sum_{m^{\text{Ref}}} w_A(y_{m^{\text{Ref}}}, z_{n^{\text{Ref}}}) \\ \text{und die Summe der Quadrate seiner Werte} \quad \Sigma_{j,k}^{R^2} &= \sum_{n^{\text{Ref}}} \sum_{m^{\text{Ref}}} (w_A(y_{m^{\text{Ref}}}, z_{n^{\text{Ref}}}))^2. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Die Zahl der Pixel des RTp bleibt während der Berechnung konstant und für sie gilt

$$p_R = y_{\text{dim}}^{\text{Ref}} \cdot z_{\text{dim}}^{\text{Ref}}. \quad (4.63)$$

Für den Mittelwert des (j, k) -ten RTp gilt

$$\bar{R}_{j,k} = \frac{1}{p_R} \cdot \Sigma_{j,k}^R, \quad (4.64)$$

und für die Wurzel der Varianz, das ist die Standardabweichung, gilt

$$\sigma_R = \left(\sum_{n^{\text{Ref}}} \sum_{m^{\text{Ref}}} (w_A(y_{m^{\text{Ref}}}, z_{n^{\text{Ref}}}) - \bar{R}_{j,k})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (\Sigma_{j,k}^{R^2} - p_R (\bar{R}_{j,k})^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.65)$$

Nun berechnen wir die Übereinstimmung zwischen diesem RTp (das sich um die Mitte des größeren Tp aus Bild 2 befindet) mit gleichgroßen Bereichen aus dem Tp. Wir legen dazu das RTp-Rechteck an alle möglichen Positionen innerhalb des Tp aus Bild 2, ohne dabei seine Grenzen zu überschreiten (siehe Abb. 4.5), und führen folgende Operationen aus:

Zunächst setzen wir den KKKoeff auf seinen minimal möglichen Wert $K_c = -1.0$. Der KKKoeff ist das Maß für die Übereinstimmung zwischen zwei Bildbereichen. Für alle Punkte mit Indizes

$$\begin{aligned} m^{\text{Temp}} &= j^{\text{Temp}} - y_c^{\text{Temp}}, j^{\text{Temp}} - y_c^{\text{Temp}} + 1, \dots, j^{\text{Temp}} + y_c^{\text{Temp}} - y_{\text{dim}}^{\text{Ref}} - 1, j^{\text{Temp}} + y_c^{\text{Temp}} - y_{\text{dim}}^{\text{Ref}}; \\ n^{\text{Temp}} &= k^{\text{Temp}} - z_c^{\text{Temp}}, k^{\text{Temp}} - z_c^{\text{Temp}} + 1, \dots, k^{\text{Temp}} + z_c^{\text{Temp}} - z_{\text{dim}}^{\text{Ref}} - 1, k^{\text{Temp}} + z_c^{\text{Temp}} - z_{\text{dim}}^{\text{Ref}} \end{aligned}$$

des Tp aus Bild 2 werden nun die Werte w_B aus Bild 2 mit den Indizes

$$\begin{aligned} m_{cc}^{\text{Temp}} &= j^{\text{Temp}} - y_c^{\text{Temp}} + j', j^{\text{Temp}} - y_c^{\text{Temp}} + 1 + j', \dots, j^{\text{Temp}} - y_c^{\text{Temp}} + y_{\text{dim}}^{\text{Ref}} + j' \\ &= m^{\text{Ref}} + y_c^{\text{Ref}} - y_c^{\text{Temp}} + j', \dots, m^{\text{Ref}} + y_c^{\text{Ref}} - y_c^{\text{Temp}} + y_{\text{dim}}^{\text{Ref}} + j', \quad j' \in \mathbb{N}, \quad \text{und} \\ n_{cc}^{\text{Temp}} &= k^{\text{Temp}} - z_c^{\text{Temp}} + k', k^{\text{Temp}} - z_c^{\text{Temp}} + 1 + k', \dots, k^{\text{Temp}} - z_c^{\text{Temp}} + z_{\text{dim}}^{\text{Ref}} + k' \\ &= n^{\text{Ref}} + z_c^{\text{Ref}} - z_c^{\text{Temp}} + k', \dots, n^{\text{Ref}} + z_c^{\text{Ref}} - z_c^{\text{Temp}} + z_{\text{dim}}^{\text{Ref}} + k', \quad k' \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

verglichen mit den in Bild 1 an den entsprechenden Positionen liegenden Werten w_A mit Indizes m^{Ref} und n^{Ref} wie oben definiert. Dies wird $\forall j' = 0, 1, \dots, y_{\text{dim}}^{\text{Temp}} - y_{\text{dim}}^{\text{Ref}}$ und $\forall k' = 0, 1, \dots, z_{\text{dim}}^{\text{Temp}} - z_{\text{dim}}^{\text{Ref}}$ wiederholt und dabei jeweils der i -te ($i \in \mathbb{N}$) Wert $K_{c,i}$ von $K_c = \max_{i \in \mathbb{N}} K_{c,i}$ ermittelt gemäß

$$\begin{aligned} K_{c,i}(y_{j^{\text{Temp}}}, z_{k^{\text{Temp}}}) &:= \frac{\sum_{n^{\text{Ref}}} \sum_{m^{\text{Ref}}} \left((w_B(y_{m_{cc}^{\text{Temp}}}, z_{n_{cc}^{\text{Temp}}}) - \bar{T}_{j,k}) \cdot (w_A(y_{m^{\text{Ref}}}, z_{n^{\text{Ref}}}) - \bar{R}_{j,k}) \right)}{(\sigma_T^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sigma_R^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\left(\sum_{n^{\text{Ref}}} \sum_{m^{\text{Ref}}} w_B(y_{m_{cc}^{\text{Temp}}}, z_{n_{cc}^{\text{Temp}}}) \cdot w_A(y_{m^{\text{Ref}}}, z_{n^{\text{Ref}}}) \right) - p_R \bar{T}_{j,k} \bar{R}_{j,k}}{\left(\Sigma_{j,k}^{T^2} - p_R (\bar{T}_{j,k})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sigma_R} \end{aligned} \quad (4.66)$$

mit dem Mittelwert

$$\bar{T}_{j,k} = \frac{1}{p_R} \Sigma_{j,k}^T \quad (4.67)$$

eines Ausschnitts des (j,k) -ten Tp an der Stelle $(y_{m_{Temp}}, z_{n_{Temp}})^T$ (gleich groß wie das RTp), wobei

$$\Sigma_{j,k}^T = \sum_{n_{cc}^{Temp}} \sum_{m_{cc}^{Temp}} w_B(y_{m_{cc}^{Temp}}, z_{n_{cc}^{Temp}}) \quad \text{und} \quad \Sigma_{j,k}^{T^2} = \sum_{n_{cc}^{Temp}} \sum_{m_{cc}^{Temp}} \left(w_B(y_{m_{cc}^{Temp}}, z_{n_{cc}^{Temp}})^2 \right) \quad (4.68)$$

seien. Weiter gelte für die Wurzel der Varianz des Tp-Ausschnitts:

$$\sigma_T = \left(\sum_{n_{cc}^{Temp}} \sum_{m_{cc}^{Temp}} (w_B(y_{m_{cc}^{Temp}}, z_{n_{cc}^{Temp}}) - \bar{T}_{j,k})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\Sigma_{j,k}^{T^2} - p_R (\bar{T}_{j,k})^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.69)$$

Durch Wiederholung für alle Tp-Ausschnitte (in Abb. 4.5 mit $T_{j,k}^i$ bezeichnet) mit RTp-Größe an allen Stellen $(y_{m_{Temp}}, z_{n_{Temp}})^T$ und Vergleich mit dem RTp nach obigem Prinzip erhält man eine ganze KK-Ebene um das jeweilige Template-Zentrum $(y_{j_{Temp}}, z_{k_{Temp}})^T$. Diese KK-Ebene hat allgemein eine Größe von $((y_{dim}^{Temp} - y_{dim}^{Ref}) + 1) \cdot ((z_{dim}^{Temp} - z_{dim}^{Ref}) + 1)$ Pixeln. Aus allen $K_{c,i}$ der KK-Ebene wird der maximale Wert als K_c für jedes (j,k) zusammen mit den Positionsindizes gespeichert. Die Werte von $K_c \in \mathbb{R}$ liegen zwischen -1 und $+1$. Aus der Differenz der Positionen mit Indizes (j^{Temp}, k^{Temp}) der RTp-Mitte zur neuen Position maximaler Korrelation mit Indizes (j_{cc}, k_{cc}) , d.h. eine Verschiebung im Pixelbereich um $r = j_{cc} - j^{Temp}$, $s = k_{cc} - k^{Temp}$, erhalten wir schließlich einen einzelnen 2D Shift-Vektor $\tau_{j,k} = (y_r, z_s)^T = (y_{j_{cc} - j^{Temp}}, z_{k_{cc} - k^{Temp}})^T$.

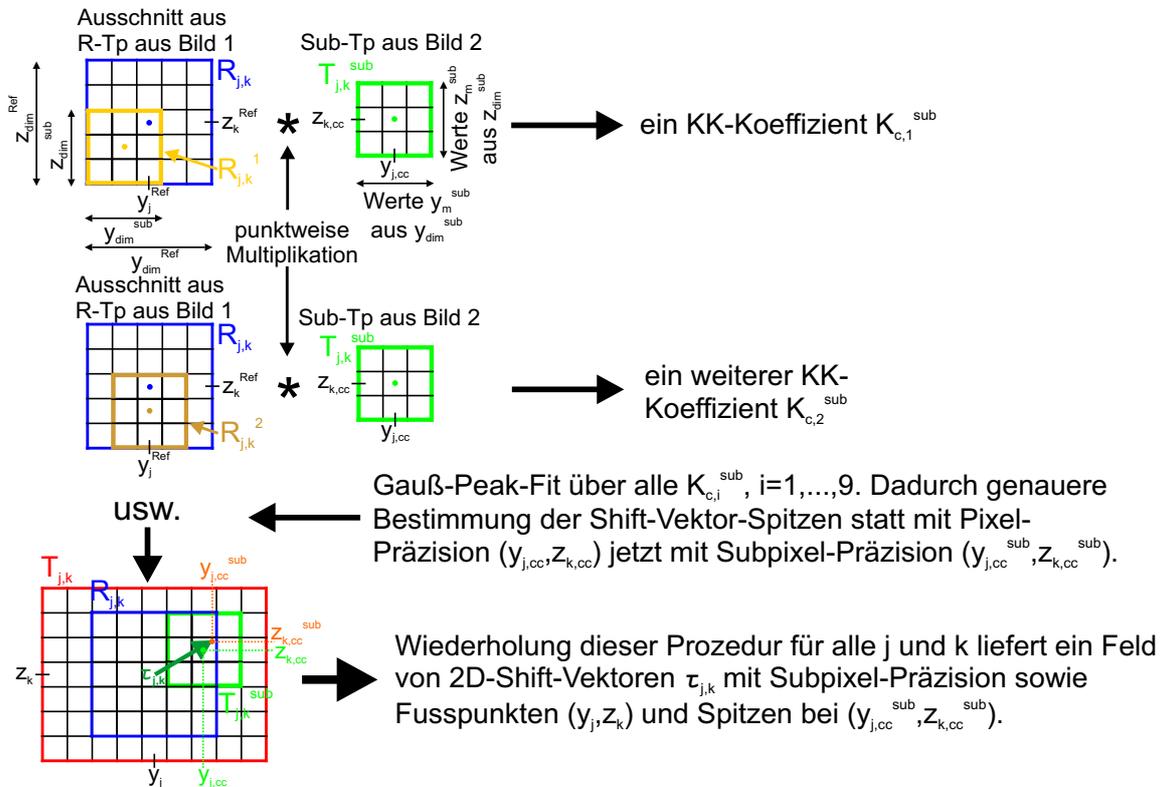


Abbildung 4.6: Verbesserte Berechnung von 2D Shift-Vektoren mit Sub-Pixel-Präzision über Kreuzkorrelation aus zwei Bildern. Details siehe Text.

Die Bestimmung der Vektor-Spitzen von $\tau_{j,k}$ kann z. B. durch einen *Gauß-Peak-Fit* von Pixel-Präzision (d. h. Vektorspitze bei $(y_{j_{cc}}, z_{k_{cc}})^T$) auf Subpixel-Präzision (Vektorspitze bei $(y_{j_{cc}}^{sub}, z_{k_{cc}}^{sub})^T$)

verbessert werden, siehe Abb. 4.6. Dazu wählen wir eine symmetrische Umgebung um die Punkte $(y_{j_{cc}}, z_{k_{cc}})^T$ mit den Indizes (j_{cc}, k_{cc}) im Tp von Bild 2. Wie in Abb. 4.6 ist dies i. Allg. eine $y_{\text{dim}}^{\text{sub}} \times z_{\text{dim}}^{\text{sub}} = 3 \times 3$ Umgebung, genannt $T_{j,k}^{\text{sub}}$. Dieses hellgrüne Quadrat wird nun kreuzkorreliert gemäß Gl. (4.66) mit je einem gleich großen Ausschnitt $R_{j,k}^i$, $i = 1, \dots, 9$, mit ebenfalls jeweils $y_{\text{dim}}^{\text{sub}} \times z_{\text{dim}}^{\text{sub}} = 3 \times 3$ Pixeln des RTP $R_{j,k}$ von Bild 1 (blau; in Abb. 4.6 5×5 Pixel groß, während das rote Tp $T_{j,k}$ diesmal 9×7 Pixel groß ist). Es gilt

$$K_{c,i}^{\text{sub}}(y_{m_{\text{sub}}}, z_{n_{\text{sub}}}) = \frac{\sum_{n_{\text{sub}}} \sum_{m_{\text{sub}}} \left((w_B(y_{m_{\text{sub}}}, z_{n_{\text{sub}}}) - \bar{T}_{j,k}^{\text{sub}}) \cdot (w_A(y_{m_i^{\text{Ref}}}, z_{n_i^{\text{Ref}}}) - \bar{R}_{j,k}^i) \right)}{(\sigma_{T,\text{sub}}^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sigma_{R,i}^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.70)$$

mit $m_{\text{sub}} = j_{cc} - 1, j_{cc}, j_{cc} + 1$, $n_{\text{sub}} = k_{cc} - 1, k_{cc}, k_{cc} + 1$ des Sub-Tp, und gleich großen Indextmengen $m_i^{\text{Ref}} \subset m^{\text{Ref}}$, $n_i^{\text{Ref}} \subset n^{\text{Ref}}$ der i -ten Ausschnitte des RTP, sowie der Pixelanzahl des Sub-Tp und damit der Ausschnitte des RTP $p_{T,\text{sub}} = y_{\text{dim}}^{\text{sub}} \cdot z_{\text{dim}}^{\text{sub}}$, dem Mittelwert des i -ten Ausschnitts des (j, k) -ten RTP

$$\bar{R}_{j,k}^i = \frac{1}{p_{T,\text{sub}}} \cdot \sum_{j,k}^{R,i} \quad \text{mit} \quad \sum_{j,k}^{R,i} = \sum_{n_i^{\text{Ref}}} \sum_{m_i^{\text{Ref}}} w_A(y_{m_i^{\text{Ref}}}, z_{n_i^{\text{Ref}}})$$

$$\text{und der Summe der Quadrate seiner Werte} \quad \sum_{j,k}^{R^2,i} = \sum_{n_i^{\text{Ref}}} \sum_{m_i^{\text{Ref}}} (w_A(y_{m_i^{\text{Ref}}}, z_{n_i^{\text{Ref}}}))^2.$$

Ebenso gelte für den Mittelwert des Sub-Tp

$$\bar{T}_{j,k}^{\text{sub}} := \frac{1}{p_{T,\text{sub}}} \cdot \sum_{j,k}^{T,\text{sub}} \quad \text{mit} \quad \sum_{j,k}^{T,\text{sub}} = \sum_{n_{\text{sub}}} \sum_{m_{\text{sub}}} w_B(y_{m_{\text{sub}}}, z_{n_{\text{sub}}})$$

$$\text{und der Summe der Quadrate seiner Werte} \quad \sum_{j,k}^{T^2,\text{sub}} = \sum_{n_{\text{sub}}} \sum_{m_{\text{sub}}} (w_B(y_{m_{\text{sub}}}, z_{n_{\text{sub}}}))^2.$$

Weiter gelte für die Wurzel der Varianzen, das sind die Standardabweichungen

$$\sigma_{R,i} = \left(\sum_{n_i^{\text{Ref}}} \sum_{m_i^{\text{Ref}}} (w_A(y_{m_i^{\text{Ref}}}, z_{n_i^{\text{Ref}}}) - \bar{R}_{j,k}^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j,k}^{R^2,i} - p_{T,\text{sub}} (\bar{R}_{j,k}^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{und}$$

$$\sigma_{T,\text{sub}} = \left(\sum_{n_{\text{sub}}} \sum_{m_{\text{sub}}} (w_B(y_{m_{\text{sub}}}, z_{n_{\text{sub}}}) - \bar{T}_{j,k}^{\text{sub}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j,k}^{T^2,\text{sub}} - p_{T,\text{sub}} (\bar{T}_{j,k}^{\text{sub}})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nun kommt der Gauß-Peak-Fit zur verbesserten Schätzung der Position maximaler Korrelation (ähnlich Raffel et al. (2007), S. 160). Wir haben neun RTP-Ausschnitte $R_{j,k}^1, \dots, R_{j,k}^9$ und durch Kombination mit dem Sub-Tp um $(y_{j_{cc}}, z_{k_{cc}})^T$ dadurch neun KKKoeff $K_{c,1}^{\text{sub}}, \dots, K_{c,9}^{\text{sub}}$ auf dem Sub-Tp. Die Berechnung von $(j_{cc}^{\text{sub}}, k_{cc}^{\text{sub}}) \in \mathbb{R}^2$ („reelle Indizes“, anders als $(j_{cc}, k_{cc}) \in \mathbb{N}^2$) folgt über

$$j_{cc}^{\text{sub}} = j_{cc} + \frac{\ln(K_c^{\text{sub}}(y_{j_{cc}} - 1, z_{k_{cc}})) - \ln(K_c^{\text{sub}}(y_{j_{cc}} + 1, z_{k_{cc}}))}{2 \ln(K_c^{\text{sub}}(y_{j_{cc}} - 1, z_{k_{cc}})) - 4 \ln(K_c^{\text{sub}}(y_{j_{cc}}, z_{k_{cc}})) + 2 \ln(K_c^{\text{sub}}(y_{j_{cc}} + 1, z_{k_{cc}}))} \quad \text{und}$$

$$k_{cc}^{\text{sub}} = k_{cc} + \frac{\ln(K_c^{\text{sub}}(y_{j_{cc}}, z_{k_{cc}} - 1)) - \ln(K_c^{\text{sub}}(y_{j_{cc}}, z_{k_{cc}} + 1))}{2 \ln(K_c^{\text{sub}}(y_{j_{cc}}, z_{k_{cc}} - 1)) - 4 \ln(K_c^{\text{sub}}(y_{j_{cc}}, z_{k_{cc}})) + 2 \ln(K_c^{\text{sub}}(y_{j_{cc}}, z_{k_{cc}} + 1))} \quad \text{mit}$$

$$K_c^{\text{sub}}(y_{j_{cc}} - 1, z_{k_{cc}}) = K_{c,4}^{\text{sub}}, \quad K_c^{\text{sub}}(y_{j_{cc}}, z_{k_{cc}}) = K_{c,5}^{\text{sub}}, \quad K_c^{\text{sub}}(y_{j_{cc}} + 1, z_{k_{cc}}) = K_{c,6}^{\text{sub}},$$

$$K_c^{\text{sub}}(y_{j_{cc}}, z_{k_{cc}} - 1) = K_{c,2}^{\text{sub}}, \quad K_c^{\text{sub}}(y_{j_{cc}}, z_{k_{cc}} + 1) = K_{c,8}^{\text{sub}}. \quad (4.71)$$

Es sind also nur je drei Punkte in jeder Richtung zur Anwendung eines sog. Drei-Punkt-Schätzers nötig, jedoch sind auch andere Schätzer mit mehr Punkten und diagonal denkbar. Wegen des natürlichen Logarithmus \ln müssen die $K_c^{\text{sub}} > 0$ sein und die Nenner in den Termen j_{cc}^{sub} und k_{cc}^{sub} müssen $\neq 0$ sein. Dies liefert schließlich eine Vektorspitze an der Stelle $(y_{j_{cc}^{\text{sub}}}, z_{k_{cc}^{\text{sub}}})^T$ mit Subpixel-Genauigkeit und damit einen einzelnen 2D Shift-Vektor $\tau_{j,k}$ (der dunkelgrüne Pfeil in Abb. 4.6).

Alternativ kann man für den Gauß-Peak-Fit auch ohne weitere Berechnung die angrenzenden $K_{c,i}$ aus Gl. (4.66) verwenden. Man spart sich dann die Gl. (4.70) und ersetzt die $K_c^{\text{sub}}(\cdot, \cdot)$ einfach durch die $K_{c,i} := K_c(\cdot, \cdot)$. Um Ausreißer bei den Vektoren zu minimieren, können auch mehrere Peaks (d. h. höchste KKKoeff) detektiert und gespeichert werden (Raffel et al. (2007), S. 161). Man sammelt eine gewisse Anzahl an höchsten Korrelations-Peaks und scannt dann die Korrelations-Ebene, d. h. man sucht die zentralen Korrelationspunkte, deren z. B. acht umgebende Korrelationswerte zusammen mit dem Zentrum im Mittel ein lokales Maximum liefern. Der zentrale Korrelationspunkt mit dem höchsten Mittel kann dann als Peak und damit Vektorspitze des Shift-Vektors genommen werden; Subpixel-Operationen können dann wie oben angewandt werden.

Dann kommt das nächste RTp mit zugehörigem Tp, dessen Index-Tupel (j, k) bezüglich j und/oder k gemäß y_{jump} und/oder z_{jump} erhöht ist, und die komplette obige Prozedur wird in gleicher Weise für ein weiteres $\tau_{j,k}$ wiederholt. Dadurch erhalten wir das komplette Shift-Vektorfeld. Bei der KK liefert ein schärferer, eindeutigerer Peak des KKKoeff eine höhere Peak-Erkennungswahrscheinlichkeit und Rausch-Effekte führen nicht mehr so häufig zu fehlerhaften Peakpositionen.

Obige Formulierung einer direkten KK kann im Fall von RTp und Tp mit Dimensionen von Zweierpotenz auch ersetzt werden durch eine schnellere aber auch ungenauere 2D FFT. Da die Berechnung der KKKoeff als lokales Maß nach Gl. (4.66) anders als die durch globale lineare Korrelation nach Gl. (4.60) nicht mehr so einfach und effizient im Spektralraum erfolgen kann (Burger und Burge, 2006), wird hier die Berechnung im Ortsraum ohne FFT erfolgen. Ebenso ist der Geschwindigkeitsvorteil zunächst marginal, da die Tp maximal 32×32 Pixel Größe haben (geringe Anzahl an Messwerten!). Erst für Echtzeit-Zwecke könnte eine FFT von Vorteil sein, wenn durch sie im Vergleich zur optimalen FT keine zu großen Fehler bei der Berechnung entstehen. In Raffel et al. (2007), S.135-139, Lewis (1995) oder Zucker und Mazeh (1994) werden Möglichkeiten zur Implementation beschrieben.

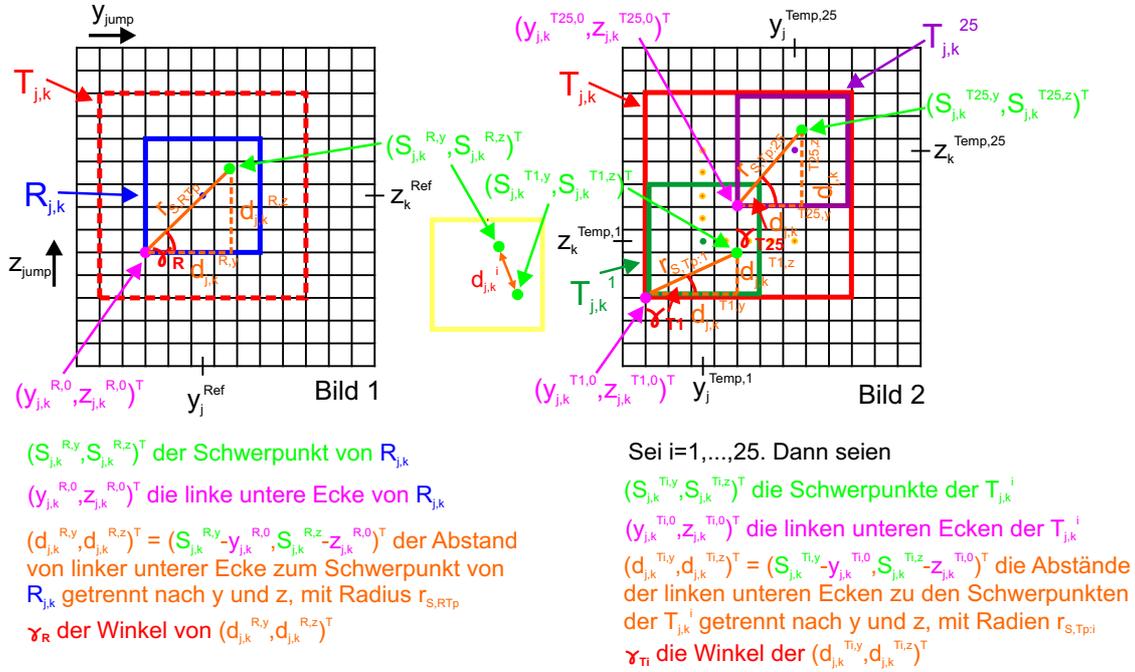
Die hier berechneten 2D Shift-Vektoren sind nur bis zu einem gewissen Grad unabhängig, da ein Überlappbereich der beiden aktuellen Abfragefenster (RTp von Bild 1 und Tp von Bild 2) zu den beiden Abfragefenstern des vorangehenden Geschwindigkeitsvektors existiert. In der Mitte der WS um den Wirbelkern sind viele Vektoren in kleinen Abständen nötig, um die Rotationsbewegung der Wirbel räumlich auflösen zu können. Jede Verschiebungsbewegung eines RTp liefert je einen Vektor und kann für sich genommen keine Rotation oder Deformation beschreiben oder detektieren.

4.1.4 Weight-Shift (WSh): Kreuzkorrelation mit Gravity Center Shift

Als vierte Möglichkeit zur Shift-Berechnung sei abschließend die WSh-Methode erläutert. Sie stellt eine Kombination der Methoden aus Kap. 4.1.1 und 4.1.3 dar und ist (soweit bekannt) wieder ein neues Verfahren, das so vorher nicht angewandt wurde. Allgemein sucht man wie bei der KK, an welcher Position sich eine Eigenschaft des RTp von Bild 1 in einem größeren Tp von Bild 2 am ehesten wiederfindet. In diesem Fall wird die Position des Schwerpunkts des RTp bezogen auf seine linke untere Ecke berechnet. Dann werden Ausschnitte des Tp von der Größe des RTp genommen und für diese ebenfalls jeweils der Schwerpunkt bezogen auf die linke untere Ecke berechnet. Ist der räumliche Abstand der Position der Schwerpunkte (mit Referenzpunkt linke untere Ecke) zwischen einem der Ausschnitte des Tp und dem RTp minimal, so wird von der Mitte des RTp von Bild 1 (Fußpunkt) zur Mitte des jeweiligen Ausschnitts des Tp von Bild 2 (Spitze) ein Shift-Vektor $\tau_{j,k}$ gebildet. Durch Wiederholung dieses Vorgehens wie oben bei der KK (siehe Kap. 4.1.3) erhält man ein ganzes Shift-Vektorfeld. Die WSh-Methode kann räumlich wiederum für Verschiebungen in 2D oder 3D zum Einsatz kommen. Sie kann auch auf Subpixel-Präzision erweitert werden. Voraussetzung

bzw. Grundannahme für die Funktionsweise von WSh ist, dass die Gesamtmasse (d. h. die Gesamtintensität) in Bild 1 und 2 bzw. in den Tp und dem RTp praktisch gleich bleiben, damit auch gleiche Schwerpunkte einer gleichen Intensitätsverteilung mit gleichen Intensitätsmaxima entsprechen.

In Abb. 4.7 ist die Vorgehensweise zur Berechnung der Shift-Vektoren in 2D mit Pixel-Präzision mittels WSh dargestellt. Wie bei der KK wählen wir ein RTp $R_{j,k}$ um $(y_j^{\text{Ref}}, z_k^{\text{Ref}})^T$ in Bild 1. In Abb. 4.7 hat es 5×5 Pixel. Nun wird der Schwerpunkt $(S_{j,k}^{R,y}, S_{j,k}^{R,z})^T$ von $R_{j,k}$ in Bezug auf den Referenzpunkt $(y_{j,k}^{R,0}, z_{j,k}^{R,0})^T$ von $R_{j,k}$ der linken unteren Ecke berechnet. Es sei hierbei an die GCS-Methode aus Kap. 4.1.1 erinnert, v. a. an die Formel zur Berechnung der Schwerpunkte in 2D, Gl. (4.29). Es wird also zunächst $(S_{j,k}^{R,y}, S_{j,k}^{R,z})^T$ berechnet und dann $(y_{j,k}^{R,0}, z_{j,k}^{R,0})^T$ davon subtrahiert, wodurch die Abstände $(d_{j,k}^{R,y}, d_{j,k}^{R,z})^T = (S_{j,k}^{R,y} - y_{j,k}^{R,0}, S_{j,k}^{R,z} - z_{j,k}^{R,0})^T$ des Schwerpunkts von $R_{j,k}$ getrennt nach y - und z -Achse bezogen auf die linke untere Ecke des RTp angegeben werden können. Alternativ kann der Abstand zur linken unteren Ecke von $R_{j,k}$ statt in kartesischen Koordinaten auch in Polarkoordinaten (in 2D; Kugelkoordinaten in 3D) ausgedrückt werden, wie in Abb. 4.7 durch den Winkel γ_R und die orange Strecke vom rosa zum grünen Punkt als Radius angedeutet. Für den Radius würde gelten $r_{S,RTp} := \sqrt{(d_{j,k}^{R,y})^2 + (d_{j,k}^{R,z})^2}$. Implementiert wurde die kartesische Variante.



Vergleich der Schwerpunkte $(S_{j,k}^{T^i,y}, S_{j,k}^{T^i,z})^T$ mit $(S_{j,k}^{R,y}, S_{j,k}^{R,z})^T$ bzgl. ihres Abstands $d_{j,k}^i$ für alle i . Das $T_{j,k}^i$ mit minimalem Abstand zu $R_{j,k}$ bzgl. der Schwerpunkte stellt das am besten geeignete Shift-Gebiet dar, und der Shift-Vektor hat seine Spitze in der Mitte dieses Tp-Ausschnitts bei $(y_j^{\text{Temp},i}, z_k^{\text{Temp},i})^T$.

Abbildung 4.7: Berechnung von 2D Shift-Vektoren über WSh-Methode aus zwei Bildern. Details siehe Text.

Nun wird auf einem das RTp umgebenden, größeren Tp in Bild 2 derjenige Ausschnitt gesucht, der den dem RTp nächstgelegenen Schwerpunkt (wieder bezogen auf die linke untere Ecke des Ausschnitts) besitzt. Da das Tp $T_{j,k}$ in Abb. 4.7 9×9 Pixel hat, ergeben sich in diesem Beispiel 25 Sub-Tp $T_{j,k}^i$. Für jedes dieser $T_{j,k}^i$ (mit Mittelpunkten $(y_j^{\text{Temp},i}, z_k^{\text{Temp},i})^T$) werden die Schwerpunkte $(S_{j,k}^{T^i,y}, S_{j,k}^{T^i,z})^T$ berechnet und davon die Koordinaten der unteren linken Ecken $(y_{j,k}^{T^i,0}, z_{j,k}^{T^i,0})^T$ subtrahiert, so dass erneut die Abstände $(d_{j,k}^{T^i,y}, d_{j,k}^{T^i,z})^T = (S_{j,k}^{T^i,y} - y_{j,k}^{T^i,0}, S_{j,k}^{T^i,z} - z_{j,k}^{T^i,0})^T$ der Schwerpunkte der $T_{j,k}^i$ getrennt nach y - und z -Achse bezogen auf die linken unteren Ecken der Tp-Ausschnitte $T_{j,k}^i$ angegeben werden können. In Polarkoordinaten hätte man wieder für alle $i \in I$ (mit im Beispiel $I = \{1, \dots, 25\}$) die Winkel γ_{T^i} und die Radien $r_{S,Tp^i} := \sqrt{(d_{j,k}^{T^i,y})^2 + (d_{j,k}^{T^i,z})^2}$.

Da hier kartesische Koordinaten verwendet werden, reicht es, den Tp-Ausschnitt $T_{j,k}^i$ zu bestimmen, dessen $d_{j,k}^{T^i,y}$ sowie $d_{j,k}^{T^i,z}$ den minimalen Abstand zu den $d_{j,k}^{R,y}$ und $d_{j,k}^{R,z}$ des RTP unter allen solchen Abständen $d_{j,k}^i$ haben. Dies geschieht nach folgender Formel:

$$d_{j,k}^{\min} := \min_{i \in I} d_{j,k}^i = \min_{i \in I} \sqrt{(d_{j,k}^{T^i,y} - d_{j,k}^{R,y})^2 + (d_{j,k}^{T^i,z} - d_{j,k}^{R,z})^2}. \quad (4.72)$$

Zum Fußpunkt des Vektors im Zentrum des RTP bei $(y_{j,\text{Ref}}, z_{k,\text{Ref}})^T$ erhalten wir im Zentrum des Tp-Ausschnitts mit dem minimalen $d_{j,k}^{\min}$ mit zugehörigem $i \in I$ bei $(y_{j,\text{Temp},i}, z_{k,\text{Temp},i})^T$ die Spitze des 2D Shift-Vektors.

Weiter ist eine Verbesserung der Präzision in den Subpixel-Bereich möglich. Bisher hat man bei Präzision im Pixel-Bereich Kenntnis der Positionen $(y_{j_{\text{WSh}}}, z_{k_{\text{WSh}}})^T$ mit Indizes $(j_{\text{WSh}}, k_{\text{WSh}})^T \in \mathbb{N}^2$ mit nur natürlichen Werten. Durch Erhöhung der Präzision hat man Werte für die Indizes (bzw. Positionen) im Reellen, d.h. $(j_{\text{WSh}}^{\text{sub}}, k_{\text{WSh}}^{\text{sub}})^T \in \mathbb{R}^2$ (bzw. $(y_{j_{\text{WSh}}^{\text{sub}}}, z_{k_{\text{WSh}}^{\text{sub}}})^T \in \mathbb{R}^2$) mit

$$y_{j_{\text{WSh}}^{\text{sub}}} := y_{j_{\text{WSh}}} + \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 (d_{j,k}^{T^i,y} - d_{j,k}^{R,y}) \quad \text{und} \quad z_{k_{\text{WSh}}^{\text{sub}}} := z_{k_{\text{WSh}}} + \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 (d_{j,k}^{T^i,z} - d_{j,k}^{R,z}), \quad (4.73)$$

wobei die $d_{j,k}^{T^i,y}$ bzw. $d_{j,k}^{T^i,z}$ die Schwerpunkt-Abstände zum linken bzw. unteren Rand für den besten, mit Pixel-Präzision bestimmten Tp-Ausschnitt und die 8 Tp-Ausschnitte in der direkt daran angrenzenden Umgebung sind.

Durch Wiederholung obiger Prozedur für alle Indizes (j, k) , d.h. Punkte $(y_j, z_k)^T$ (mit Sprüngen y_{jump} und z_{jump}) als Zentren, erhält man wieder ein ganzes Feld von (2D) Shift-Vektoren.

Durch das Speichern mehrerer nächst-minimaler Schwerpunktsabstände zwischen RTP und Tp-Ausschnitten zum minimalen können wie bei KK Ausreißer bei den Shift-Vektoren reduziert werden. Man wählt also je einen dieser möglichen nächst-minimalen Schwerpunktsabstände und natürlich den minimalen und bezieht die Schwerpunktsabstände zwischen dem RTP und den Ausschnitten des Tp in ihrer direkten Umgebung mit ein. Man bildet dann den (arithmetischen) Mittelwert über alle Schwerpunktsabstände, und dort, wo dieser minimal ist, ist dann der statistisch mit dieser Methode berechenbare, minimale Schwerpunktsabstand und damit die Spitze des Shift-Vektors.

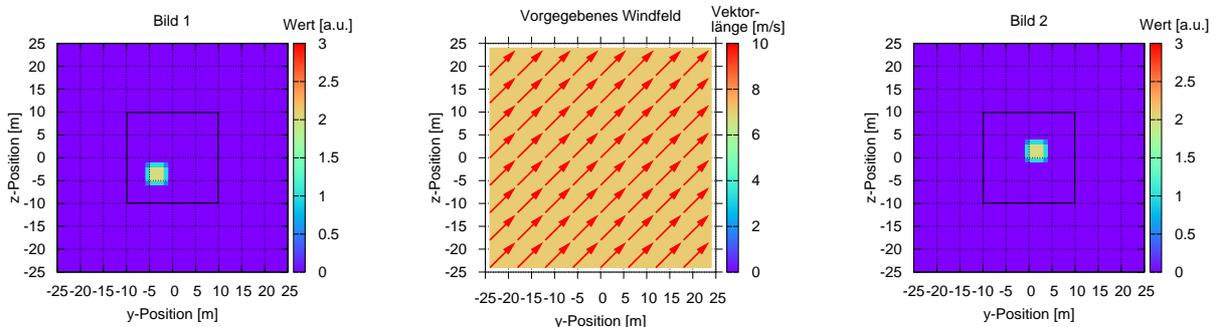
4.2 Anwendung und Vergleich der Leistungsfähigkeit der Shift-Algorithmen

Nach der Beschreibung der vier potentiellen Shift-Algorithmen zur Analyse von (RSL-)Bildern in Kap. 4.1 folgt nun ein genereller Vergleich ihrer Leistungsfähigkeit anhand für Wind und Wirbel charakteristischer Strukturen, wie sie später als Extinktionsprofile in die RSL-Simulationen eingelesen werden können. Dadurch ist bereits eine Abschätzung ihrer Brauchbarkeit möglich, ohne eine langwierige Simulation mit `pbs` durchführen zu müssen. Die absolute Größe der einzelnen Werte ist oft nicht entscheidend, sondern nur die relative Größe zueinander. Effekte wie Varianz durch reduzierte Photonentrajektorien-Zahl in den Monte-Carlo-Simulationen oder Rauschen werden (mit Ausnahme von Kap. 4.2.2) erst in Kap. 5 berücksichtigt.

4.2.1 Shifts einfacher Strukturen

Als einfache Strukturen betrachten wir hier Rechtecke, speziell Quadrate, die eine bezüglich Richtung und Länge vorgegebene konstante Verschiebung erfahren, welche in der Realität einem konstanten, homogenen Windfeld entspricht. Dies kann vereinfacht als Wölkchen-artige Struktur mit hohem Rückstreuvermögen (verglichen mit ihrer direkten Umgebung) angesehen werden.

Als Bildbereich in 2D betrachten wir auf der Fläche $Y \times Z = [-25 \text{ m}, 25 \text{ m}] \times [-25 \text{ m}, 25 \text{ m}]$ eine Quadrat-Verschiebung nach rechts oben relativ in der Mitte des gesamten Bildbereichs, siehe Abb. 4.8(a), 4.8(c). Der Wert des Quadrats ist konstant 2 und kann beliebig gewählt sein; seine Größe ist $3 \text{ m} \times 3 \text{ m}$. Die räumliche Auflösung beträgt 1 m , d. h. man hat Werte im Abstand von 1 m entlang y - und z -Achse. Die vorgegebene Verschiebung beträgt 5 m in positive y -Richtung und 5 m in positive z -Richtung, zusammen also eine Verschiebung der Länge $\sqrt{2 \cdot (5 \text{ m})^2} \approx 7.07 \text{ m}$. Bei einem Zeitabstand von 1 s zwischen Bild 1 und 2 hat man also ein homogenes konstantes Windfeld der Stärke $v_{\text{ges}} = \sqrt{v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{2 \cdot (5 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2} \approx 7.07 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nach rechts oben, siehe Abb. 4.8(b). Natürlich kann man die räumliche Dimensionierung um einen beliebigen Faktor (z. B. 10) vergrößern, um eher Wolken-typische Größen der Strukturen zu erhalten. Jedoch muss dann bei gleichbleibender räumlicher Auflösung die konstante Verschiebung in Metern auch dementsprechend größer sein, gleichbedeutend bei gleichbleibendem Windfeld mit einem entsprechend größeren Zeitintervall zwischen Bild 1 und 2 (z. B. 10 s). Ansonsten wird es für die Auswertelgorithmen schwerer, gute Resultate rückzurechnen.

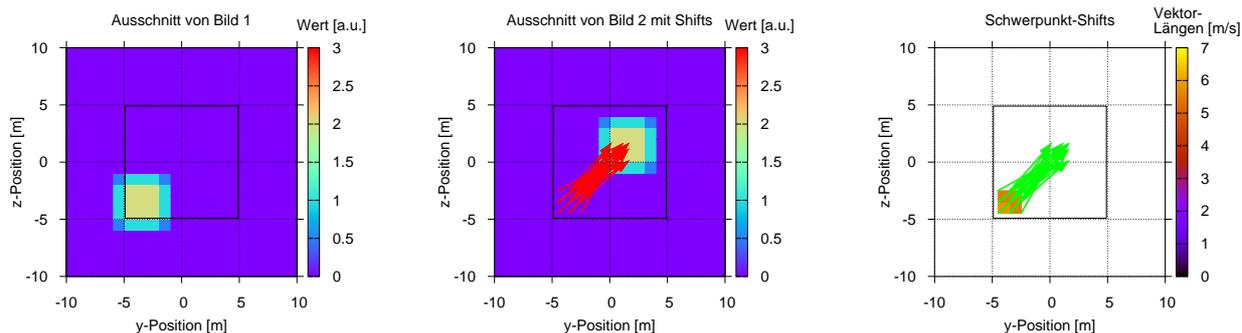


- (a) Bild 1 entspricht einer Verteilung mit Funktionswerten zum Zeitpunkt t_1 auf der Fläche $Y \times Z$. Hier hat man ein einfaches Quadrat mit konstantem Wert 2.
- (b) Das Quadrat wird entsprechend des vorgegebenen homogenen konstanten 2D Windfeldes nach rechts oben verschoben mit $v_y = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $v_z = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, d. h. $v_{\text{ges}} \approx 7.07 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- (c) Bild 2 zum Zeitpunkt t_2 ist das Ergebnis einer Verschiebung der Verteilung, d. h. des Quadrats aus Abb. 4.8(a) gemäß des Windfeldes von Abb. 4.8(b).

Abbildung 4.8: Einfache Verschiebungen eines Werte-Quadrats auf einer quadratischen Fläche der Größe $Y \times Z = [-25 \text{ m}, 25 \text{ m}] \times [-25 \text{ m}, 25 \text{ m}]$. Die schwarze Berandung in den Abb. 4.8(a) und 4.8(c) zeigt den in den folgenden Abbildungen dargestellten Bildausschnitt, für den die Verschiebung berechnet werden kann (Rand ohne Masse, d. h. keine Shift-Detektion möglich).

Als Erstes untersuchen wir das Potential der GCS-Methode aus Kap. 4.1.1 für diese Art von Struktur, deren Werte von Bild 1 nach 2 konstant bleiben. Dargestellt ist in Abb. 4.9 jeweils ein vergrößerter Ausschnitt von $Y \times Z = [-25 \text{ m}, 25 \text{ m}] \times [-25 \text{ m}, 25 \text{ m}]$ (entspricht 51×51 Pixeln), der nur noch die Region zeigt, auf der die Verschiebung der Struktur in dieser Situation natürlicherweise rekonstruierbar ist. Wo keine Werte (bzw. Intensitätsmasse) vorliegen, kann man auch keine Shifts berechnen. Abbildung 4.9(a) zeigt nochmal einen vergrößerten Ausschnitt von Bild 1 zur Zeit t_1 , d. h. von Abb. 4.8(a). Der schwarze Kasten in Abb. 4.9 gibt die jeweils $10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ große Region wieder, auf der die Schwerpunkte von Bild 1 und 2 in der Auswertung verglichen werden. Die Sprünge von einer solchen Region zur nächsten betragen hier $y_{\text{jump}} = z_{\text{jump}} = 2 \text{ m}$. Abbildung 4.9(b) zeigt einen vergrößerten Ausschnitt von Bild 2 zur Zeit t_2 , d. h. von Abb. 4.8(c), und mittels GCS berechnete Shift-Vektoren (rot). Wie man deutlich sieht, stimmen Richtung und Länge der Vektoren relativ gut mit dem vorgegebenen Windfeld aus Abb. 4.8(b) überein (Abb. 4.9(c) bestätigt dies für die Länge, die gemittelt über 9 Längen-Werte etwa $5.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ beträgt; $7.07 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ wäre optimal). Vier Vektoren an den Rändern eines Farbquadrats liefern einen gemittelten Vektorlängen-Farbwert („Texture mapping“!).

Als Zweites wird die FS-Methode aus Kap. 4.1.2 zur Vektor-Rückgewinnung auf die Verschiebung

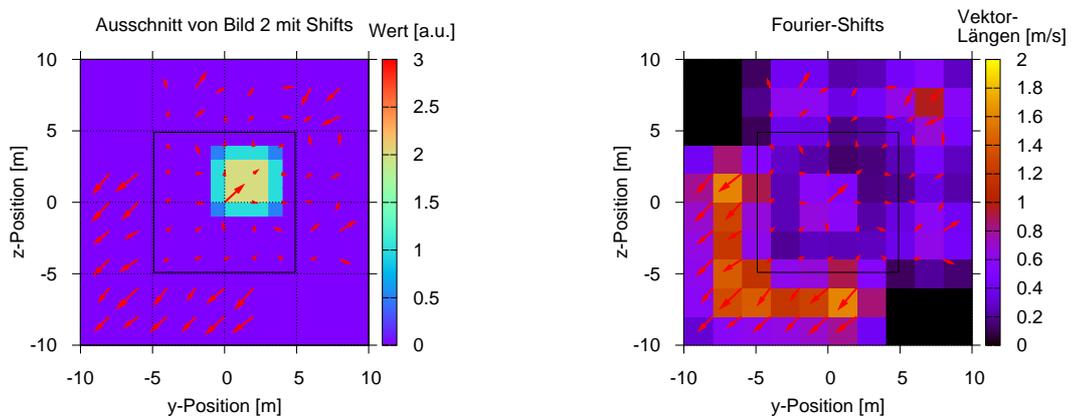


(a) Vergrößerter Ausschnitt von Bild 1 zur Zeit t_1 , d. h. von Abb. 4.8(a).
 (b) Vergrößerter Ausschnitt von Bild 2 zur Zeit t_2 , d. h. von Abb. 4.8(c), und mittels GCS berechnete Shift-Vektoren (rot).
 (c) Länge der Shift-Vektoren (siehe Farbskala) zusammen mit grünen Vektoren wie in Abb. 4.9(b) zur Kennzeichnung ihrer Fußpunkte.

Abbildung 4.9: Berechnung von Shift-Vektoren mittels Gravity Center Shift (GCS). Einfache Verschiebungen eines Werte-Quadrats auf einer quadratischen Fläche (vgl. Abb. 4.8). Hier ist jeweils ein vergrößerter Ausschnitt von $Y \times Z = [-25 \text{ m}, 25 \text{ m}] \times [-25 \text{ m}, 25 \text{ m}]$ der zur Berechnung wesentlichen Region dargestellt. Der schwarze Kasten zeigt jeweils die Größe eines Bereichs zur Berechnung von Schwerpunkten zum Erhalt eines einzelnen Shift-Vektors.

aus Abb. 4.8 angewandt. Wir betrachten wieder den Ausschnitt von Bild 1 zur Zeit t_1 aus Abb. 4.9(a). In Abb. 4.10(a) ist derselbe Ausschnitt, jedoch von Bild 2 zur Zeit t_2 , zusammen mit den mittels FS berechneten Shift-Vektoren (rot) dargestellt. Der schwarze Kasten zeigt wieder die Größe eines Bereichs zur Mittelung von Fourier-Shifts zur Gewinnung eines einzelnen Shift-Vektors (je $10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$). Die FTen werden dann bezogen auf jedes solche quadratische Gebiet neu berechnet. Es gilt $y_{\text{jump}} = z_{\text{jump}} = 2 \text{ m}$ für die Sprünge, d. h. das Wandern der schwarzen Quadrate. Lediglich der Vektor mit Fußpunkt in der Mitte des hier dargestellten schwarzen Quadrats liefert die richtige Richtung, die Vektorlängen sind mit FS nicht genau rekonstruierbar (siehe auch Abb. 4.10(b)). Der Einfluss der Umgebung in den FTen anderer schwarzer Quadrate verfälscht die übrigen Ergebnisse. Bei Verschiebung einer kontinuierlichen Struktur (anstelle eines diskreten, kleinen Quadrats) lässt sich zumindest die Richtung an den passenden Stellen besser rekonstruieren, siehe Kap. 4.2.2.

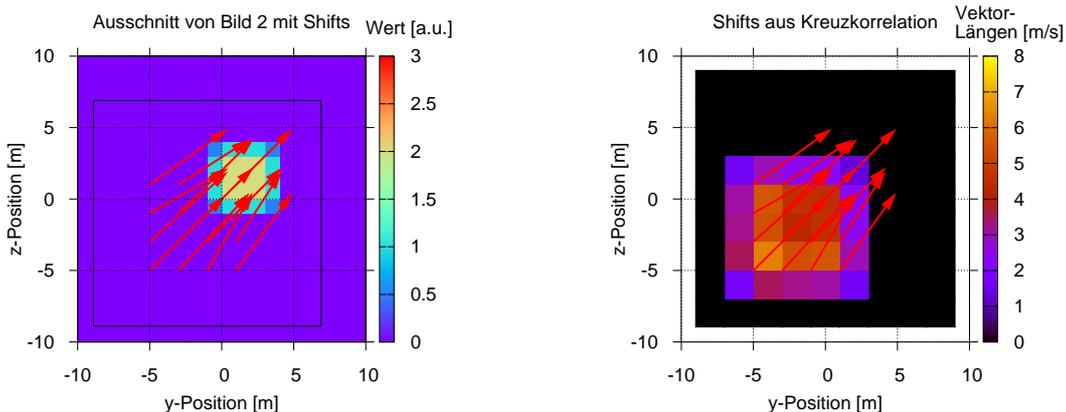
Die dritte Methode zur Rekonstruktion der Shift-Vektoren in der Situation von Abb. 4.8 ist die KK aus Kap. 4.1.3. Abbildung 4.11(a) zeigt die mit KK rückgerechneten Vektoren (rot), im Hintergrund ist wieder der Ausschnitt von Bild 2 dargestellt. Die Länge der Shift-Vektoren zusammen mit roten Vektoren wie in Abb. 4.11(a) zur Kennzeichnung ihrer Fußpunkte zeigt Abb. 4.11(b). Der schwarze Kasten in den Abb. 4.11(a) und 4.11(c) zeigt jeweils die Größe (16×16 Pixel) eines T_p -Bereichs zur Suche nach einem Bildbereich von Bild 2, der dem vorgegebenen, im Zentrum des schwarzen Kastens befindlichen $R T_p$ (8×8 Pixel) von Bild 1 am ehesten entspricht. Es sind $y_{\text{jump}} = z_{\text{jump}} = 2 \text{ m}$. Die Vektor-Bestimmung erfolgt mit Subpixel-Genauigkeit auf Basis der in Kap. 4.1.3 beschriebenen Methoden. Wie man schon in den Abb. 4.11(a) und 4.11(b) gut erkennen kann, stimmen Länge und Richtung der Vektoren im Wesentlichen sehr gut mit den vorgegebenen (Abb. 4.8(b)) überein. Die Abb. 4.11(c) und 4.11(d) zur Fehleranalyse bestätigen dies: lediglich in der Mitte tauchen einige stärker fehlerbehaftete Längen und Richtungen auf. Hauptgrund für die Fehler dürfte die geringe Anzahl an zur Verfügung stehenden Wertepunkten, d. h. Pixeln, sein. Damit hat man auch nur wenige Werte für die $R T_p$ und T_p .



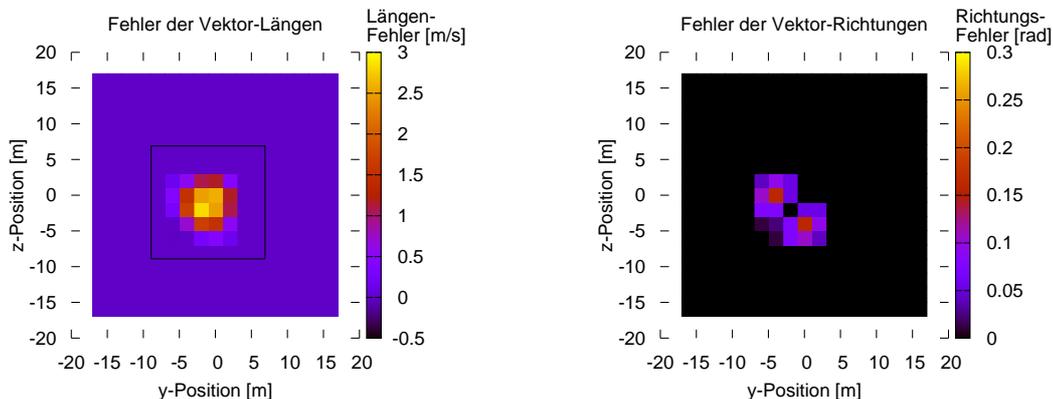
(a) Vergrößerter Ausschnitt von Bild 2 zur Zeit t_2 , d. h. von Abb. 4.8(c), und mittels FS berechnete Shift-Vektoren (rot). Der nicht dargestellte vergrößerte Ausschnitt von Bild 1 ist wieder Abb. 4.9(a).

(b) Länge der Shift-Vektoren (siehe Farbskala) zusammen mit roten Vektoren wie in Abb. 4.10(a) zur Kennzeichnung ihrer Fußpunkte. Vier Vektoren an den Rändern eines Farbquadrats liefern einen gemittelten Vektorlängen-Farbwert.

Abbildung 4.10: Berechnung von Shift-Vektoren mittels der Fourier-Shift-Methode (FS) aus Kap. 4.1.2. Einfache Verschiebungen eines Werte-Quadrats auf einer quadratischen Fläche (vgl. Abb. 4.8). Hier ist jeweils ein vergrößerter Ausschnitt von $Y \times Z = [-25 \text{ m}, 25 \text{ m}] \times [-25 \text{ m}, 25 \text{ m}]$ der zur Berechnung wesentlichen Region dargestellt. Der schwarze Kasten zeigt jeweils die Größe eines Bereichs zur Mittelung von Fourier-Shifts zur Gewinnung eines einzelnen Shift-Vektors. Der Vektor in der Mitte des dargestellten schwarzen Kastens gibt die Richtung (nach rechts oben) richtig wieder, die Länge jedoch nicht. Andere Mittelungsquadrate der Größe $10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ in der Umgebung liefern bezüglich Länge und Richtung verfälschte Vektoren.



(a) Vergrößerter Ausschnitt von Bild 2 zur Zeit t_2 , d. h. von Abb. 4.8(c), und mittels KK berechnete Shift-Vektoren (rot).
 (b) Länge der Shift-Vektoren (siehe Farbskala) zusammen mit roten Vektoren wie in Abb. 4.11(a) zur Kennzeichnung ihrer Fußpunkte.

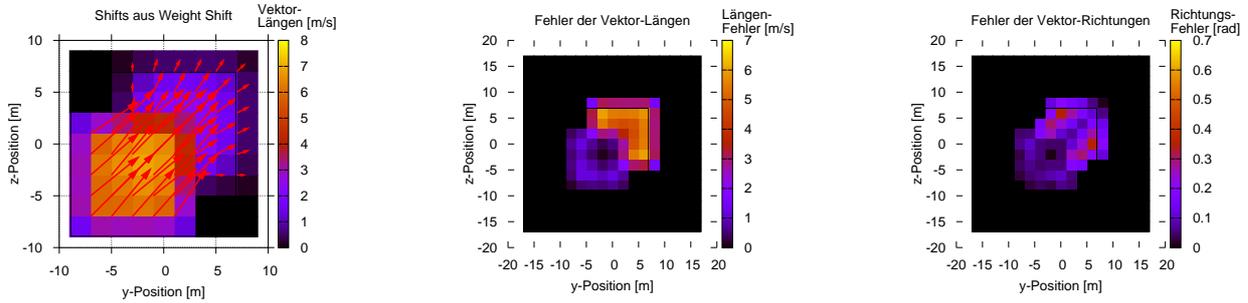


(c) Abweichungen zwischen den Längen der mit KK rückgerechneten Shift-Vektoren und den Längen der vorgegebenen Shift-Vektoren des Windfeldes von Abb. 4.8(b) ($v_{ges} \approx 7.07 \frac{m}{s}$), d. h. Geschwindigkeitsabweichung in $\frac{m}{s}$.
 (d) Abweichungen zwischen den Richtungen der mit KK rückgerechneten Shift-Vektoren und denen der vorgegebenen Shift-Vektoren des Windfeldes (nach rechts oben) von Abb. 4.8(b), d. h. Winkelabweichung in rad.

Abbildung 4.11: Berechnung von Shift-Vektoren mittels Kreuzkorrelation (KK) nach Kap. 4.1.3. Einfache Verschiebungen eines Werte-Quadrats auf einer quadratischen Fläche (vgl. Abb. 4.8). Der schwarze Kasten in den Abb. 4.11(a) und 4.11(c) zeigt jeweils die Größe (16×16 Pixel) eines Tp-Bereichs zur Suche nach einem Bildbereich von Bild 2, der dem vorgegebenen, im Zentrum des schwarzen Kastens befindlichen Rtp (8×8 Pixel) von Bild 1 am ehesten entspricht. Subpixel-Methoden wurden angewandt. Abweichungen der Länge und Richtung des mit KK rückgerechneten vom vorgegebenen Windfeld (siehe Abb. 4.8(b)) sind dargestellt.

Als Viertes untersuchen wir noch das Potential der WSh-Methode aus Kap. 4.1.4 in Bezug auf die Struktur von Abb. 4.8. In zu Abb. 4.11(b) für KK äquivalenter Weise zeigt Abb. 4.12(a) mit WSh berechnete Vektoren (rot) in Verbindung mit ihrer Länge (siehe Farbskala). Hier sind die kürzeren Vektoren rechts oben fehlerhaft, wie auch die Analyse bezüglich Länge und Richtung in den Abb. 4.12(b) und 4.12(c) zeigt, denn dort dürfte keine Bewegung detektierbar sein. Im wichtigen Bereich links unten sind sie jedoch relativ korrekt wiedergegeben. Man könnte somit die zu kurzen Vektoren rechts oben als Ausreißer löschen. Die Eigenschaften von Rtp und Tp sind die gleichen wie eben bei

der KK; wieder sind $y_{\text{jump}} = z_{\text{jump}} = 2$ m. Die Subpixel-Berechnung erfolgt nach Gl. (4.73).



(a) Mit WSh berechnete Shift-Vektoren (rot) zusammen mit ihrer Länge. Die Aussage dieser Abbildung entspricht der von Abb. 4.11(b) für WSh statt KK.

(b) Abweichungen zwischen den Längen der mit WSh rückgerechneten Shift-Vektoren und den Längen der vorgegebenen Shift-Vektoren des Windfeldes von Abb. 4.8(b) ($v_{\text{ges}} \approx 7.07 \frac{\text{m}}{\text{s}}$).

(c) Abweichungen zwischen den Richtungen der mit WSh rückgerechneten Shift-Vektoren und den Richtungen der vorgegebenen Shift-Vektoren des Windfeldes (nach rechts oben) von Abb. 4.8(b).

Abbildung 4.12: Berechnung von Shift-Vektoren mittels Weight-Shift-Methode (WSh) nach Kap. 4.1.4. Einfache Verschiebungen eines Werte-Quadrats auf einer quadratischen Fläche (vgl. Abb. 4.8). Jedes Tp von Bild 2 besteht aus 16×16 Pixeln, jedes RTp von Bild 1 aus 8×8 Pixeln. Die Subpixel-Berechnung erfolgte nach Gl. (4.73). Abweichungen der Länge und Richtung des mit WSh rückgerechneten vom vorgegebenen Windfeld (siehe Abb. 4.8(b)) sind dargestellt. In Abb. 4.12(a) sind die kürzeren Vektoren rechts oben fehlerhaft.

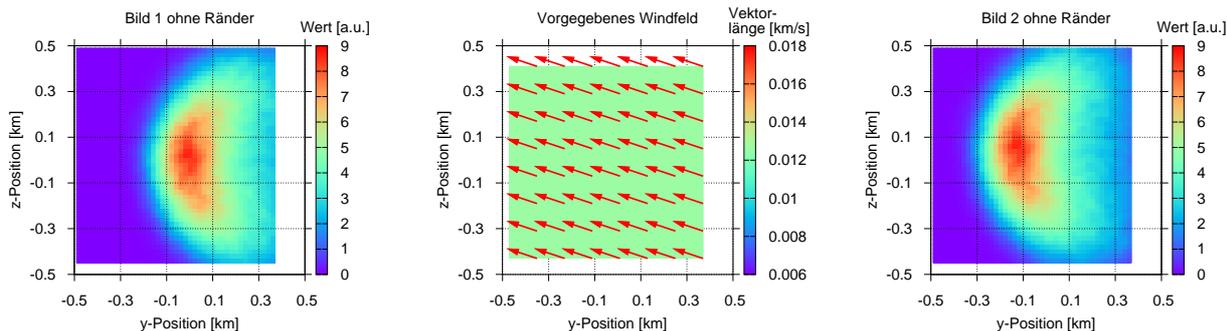
In der hier untersuchten Situation eines konstanten Windfeldes können alle Shift-Methoden als zur Bewegungsdetektion brauchbar bezeichnet werden. Die Richtung wird von allen Methoden richtig detektiert; lediglich die FS-Methode weist bei der Länge große Abweichungen auf.

4.2.2 Shifts aus Pulse-Stretching-Simulationen mit pbs4

Als Nächstes folgt zunächst eine Analyse der Güte der Methoden anhand einer komplexen Struktur mit variablen Werten, die *gleichmäßig* mittels eines konstanten, homogenen Windfeldes verschoben wird. Das zur Verschiebung gewählte Muster stammt aus sog. **Pulse-Stretching(PS)**-Simulationen der Streuung für ein bistatisches Lidar von M. Wengenmayer (Details zu ihrer Erzeugung mit **pbs4** siehe Wengenmayer (2008), S. 86-90). Es ist in Abb. 4.13(a) als Bild 1 ohne Ränder dargestellt.

Für unsere Shift-Berechnungen ist nur die gegebene Verteilung der Werte und ihre Position entscheidend, nicht ihr Absolutwert; Werte in „arbitrary units“ (a. u.) genügen daher. Die Punkt-Positionen liegen auf der Fläche $Y \times Z = [-0.49 \text{ km}, 0.49 \text{ km}] \times [-0.49 \text{ km}, 0.49 \text{ km}]$ (50×50 Pixel) und die Punkt-Abstände (räumliche Auflösung) betragen 0.02 km. Das Zeitintervall Δt zwischen den Bildern soll hier 10 s sein, um realistische Geschwindigkeitswerte für eingelesenes und rückgewonnenes Windfeld erhalten zu können. Die Positionswerte könnten aber genauso um z. B. einen Faktor 10 in den Meter-Bereich verringert werden ($Y \times Z = [-49 \text{ m}, 49 \text{ m}] \times [-49 \text{ m}, 49 \text{ m}]$) und Δt ebenso auf 1.0 s. Hier müssen die Ränder des Bildbereichs rechts unten entfernt (d. h. ihre Pixel-Werte verworfen) werden, da eine (Wind-)Bewegung nach links oben stattfindet und diese Positionen im verschobenen Bild 2 (siehe Abb. 4.13(c)) nicht mehr auftauchen.

Das konstante, homogene Windfeld (siehe Abb. 4.13(b)), gemäß dem Bild 1 in Bild 2 übergeht, setzt sich aus den Komponenten $v_y = \frac{-0.120 \text{ km}}{10 \text{ s}} = -12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $v_z = \frac{0.040 \text{ km}}{10 \text{ s}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ zusammen, mit Gesamtgeschwindigkeit $v_{\text{ges}} = (v_y^2 + v_z^2)^{1/2} \approx 12.65 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



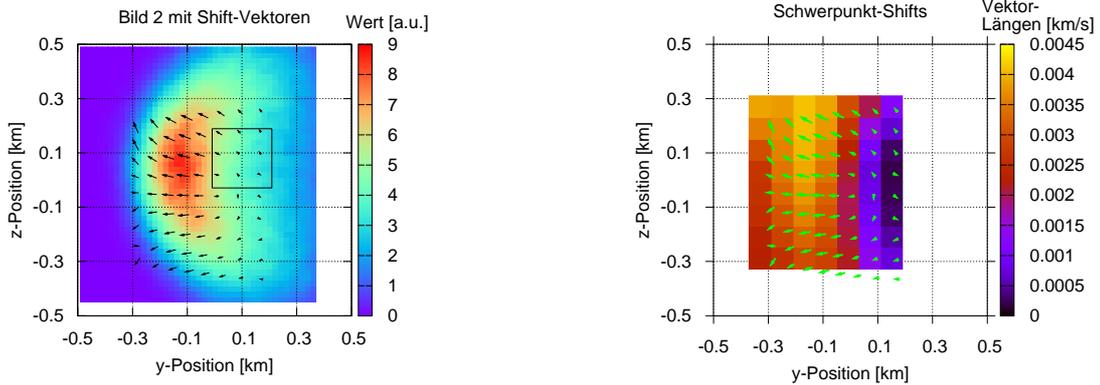
- (a) Bild 1 entspricht einer Verteilung mit beliebigen Funktionswerten gemäß eines PS-Intensitätsbildes zur Zeit t_1 auf der an den Rändern zugeschnittenen Fläche $Y \times Z$.
- (b) Bild 1 aus Abb. 4.13(a) wird gemäß diesem vorgegebenen homogenen konstanten 2D Windfeld nach links oben verschoben mit $v_y = -12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $v_z = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, d. h. $v_{\text{ges}} \approx 12.65 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- (c) Bild 2 zum Zeitpunkt t_2 ist das Ergebnis einer Verschiebung der Verteilung aus Abb. 4.13(a) gemäß des Windfeldes von Abb. 4.13(b).

Abbildung 4.13: Konstante Verschiebungen eines Pulse-Stretching(PS)-Intensitätsmusters auf einer quadratischen Fläche der Größe $Y \times Z = [-0.49 \text{ km}, 0.49 \text{ km}] \times [-0.49 \text{ km}, 0.49 \text{ km}]$ (50×50 Pixel). Die Bilder 4.13(a) und 4.13(c) wurden am rechten unteren Rand entsprechend der Bewegung nach links oben (siehe Abb. 4.13(b)) zugeschnitten.

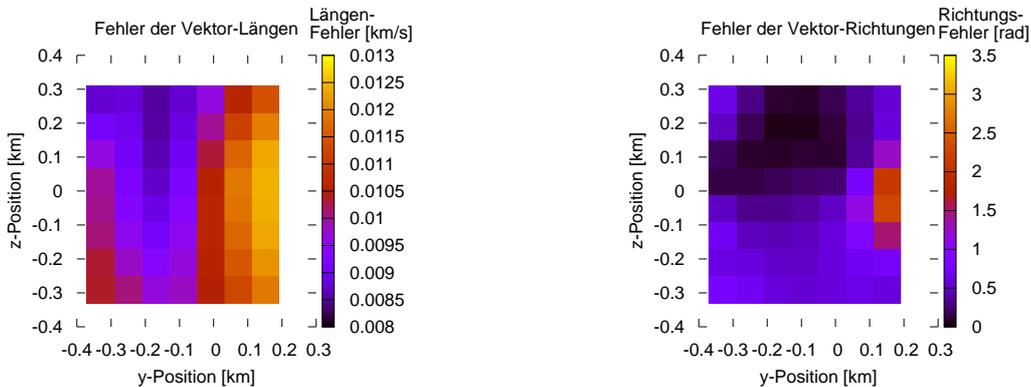
Als Erstes zunächst wieder zur Rückgewinnung des obigen Windfeldes mittels GCS aus Kap. 4.1.1. Die Resultate sind in Abb. 4.14 dargestellt. Es wurde $y_{\text{jump}} = z_{\text{jump}} = 0.08 \text{ km}$ (d. h. je 4 Pixel) gewählt. Der Skalierungsfaktor zur besseren graphischen Darstellung der Vektoren beträgt $sc = 10.0$, d. h. die Vektoren wurden in den Abbildungen um einen Faktor 10 gestreckt. Abbildung 4.14(a) zeigt im Hintergrund die Funktionswerte von Bild 2 zur Zeit t_2 , d. h. von Abb. 4.13(c). Außerdem sind die mit GCS berechneten Shift-Vektoren (schwarz) mit $sc = 10.0$ dargestellt. Diese sind auch in Abb. 4.14(b) in grün gezeigt, jedoch diesmal in Verbindung mit der rückgerechneten Vektorlänge, die allgemein im Vergleich zur vorgegebenen viel zu klein ausfällt und auch nicht (wie zu erwarten wäre) konstant ist. Dies spiegeln dann auch die großen Abweichungen in der Analyse der Längen in Abb. 4.14(c) wider. Dagegen wird die Richtung zum Teil relativ gut wiedergegeben, wie Abb. 4.14(d) zeigt. Zwar sind im unteren und im rechten Teil die Abweichungen auch hier groß, links oben dagegen sind sie relativ gering ($< 1 \text{ rad}$). Jedoch haben auch die Vektor-Richtungen hohe Varianz.

Für Verbesserung sorgt hier die FS-Methode aus Kap. 4.1.2 zur Vektor-Rückrechnung. Die Größe eines Bereiches zur Mittelung von Fourier-Shifts zur Gewinnung eines einzelnen Shift-Vektors beträgt wie eben (Abb. 4.14) wieder 12×12 Pixel. Ebenso ist wieder $y_{\text{jump}} = z_{\text{jump}} = 0.08 \text{ km}$. Wenn man im Hintergrund von Abb. 4.15(a) statt der dort gezeigten Vektorlängen wieder Bild 2 (vgl. Abb. 4.13(c)) betrachtet, sieht man, dass das Wandern der Struktur nach links oben mit FS relativ gut rekonstruiert werden kann. Für die Vektoren gilt hier $sc = 2.0$. Die Abweichungen von Längen (Abb. 4.15(b)) und Richtungen (Abb. 4.15(c)) sind insgesamt relativ gering. Nur links oben sind die rückgerechneten Vektoren viel zu lang, rechts unten sind dagegen z. T. die Richtungen stark fehlerbehaftet.

Als Nächstes folgt die Rekonstruktion des Windfeldes von Abb. 4.13(b) mit KK aus Kap. 4.1.3. Alle Eigenschaften sind wie eben bei FS gewählt. Lediglich die Suchbereiche, das sind hier die T_p , haben eine Größe von 12×12 Pixeln, während die dort zu suchenden, verschobenen RTP nur 6×6 Pixel haben. Die Werte-Anzahl des Gesamtbildes und damit der T_p ist sehr gering, was bei der Berechnung mit KK wohl der Hauptgrund für die auftretenden Fehler sein dürfte. Wieder zeigt Abb. 4.16(a) die mit KK rückgerechneten Vektorlängen zusammen mit den Shift-Vektoren. Die Abb. 4.16(b) und 4.16(c) zeigen wiederum die dabei entstehenden Abweichungen (Fehler) zwischen vorgegebenem und rückgerechnetem Windfeld. Die Fehler sind akzeptabel; jedoch treten zwei grobe Ausreißer bezüglich der Länge auf. Auch weichen die Richtungen rechts und unten stärker ab.



- (a) Funktionswerte von Bild 2 zur Zeit t_2 , d. h. von Abb. 4.13(c), im Hintergrund, und mit GCS berechnete Shift-Vektoren (schwarz) mit Skalierungsfaktor $sc = 10.0$.
- (b) Länge der Shift-Vektoren zusammen mit grünen Vektoren wie in Abb. 4.14(a) zur Kennzeichnung ihrer Fußpunkte.



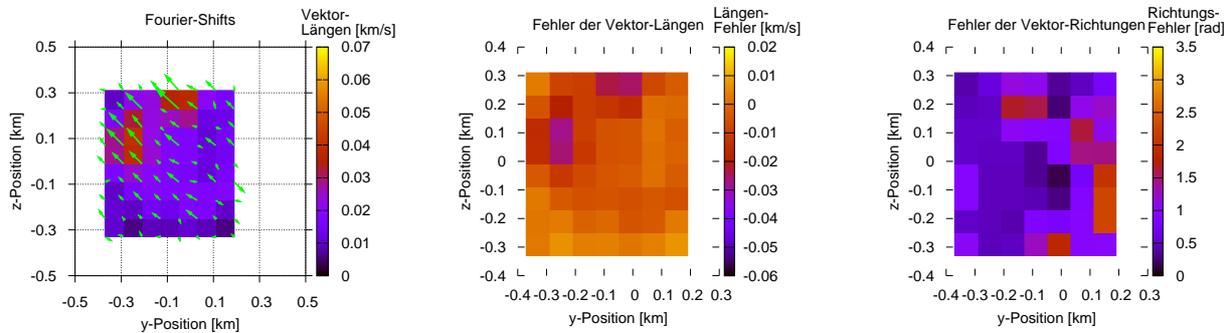
- (c) Abweichungen zwischen den Längen der mit GCS rückgerechneten Shift-Vektoren und den Längen der vorgegebenen Shift-Vektoren des Windfeldes von Abb. 4.13(b) ($v_{ges} \approx 0.0126 \frac{km}{s}$).
- (d) Abweichungen zwischen den Richtungen der mit GCS rückgerechneten Shift-Vektoren und den Richtungen der vorgegebenen Shift-Vektoren des Windfeldes (nach links oben) von Abb. 4.13(b).

Abbildung 4.14: Berechnung von Shift-Vektoren mittels GCS nach Kap. 4.1.1. Gleichmäßige Verschiebung eines komplexen PS-Musters auf einer an den Rändern zugeschnittenen quadratischen Fläche (vgl. Abb. 4.13). Der schwarze Kasten in Abb. 4.14(a) zeigt die jeweilige Größe (hier 12×12 Pixel) eines Bereichs zur Berechnung von Schwerpunkten zum Erhalt eines einzelnen Shift-Vektors. Die Abweichungen der Länge des mit GCS rückgerechneten vom vorgegebenen Windfeld (siehe Abb. 4.14(c)) sind variabel und sehr groß. Die Richtungsfehler halten sich in Grenzen.

Am besten schneidet in der Situation von Abb. 4.13 die WSh-Methode von Kap. 4.1.4 ab. Die Voraussetzungen sind wie eben bei der KK (RTp mit 6×6 Pixeln, Tp mit 12×12 Pixeln) und den anderen Verfahren oben. Lediglich die Skalierung der Vektoren ist $sc = 4.0$. Die Abweichungen der Längen und Richtungen der mit WSh rückgerechneten Vektoren und dem vorgegebenen Windfeld (siehe Abb. 4.13(b)) sind zumeist gering. Die Länge der rückgerechneten Vektoren ist generell um ca. $0.004 \frac{km}{s}$ zu gering; rechts treten hier größere Abweichungen auf. Insgesamt zeigen die Längen aber bei WSh die geringste Varianz verglichen mit den anderen Methoden. Auch treten hier für die Richtungen im oberen Bereich die mit Abstand geringsten Abweichungen auf. Unten sind die Richtungsfehler hier auch wieder erhöht. Die Bewegung nach links wird im unteren Bildbereich zwar noch

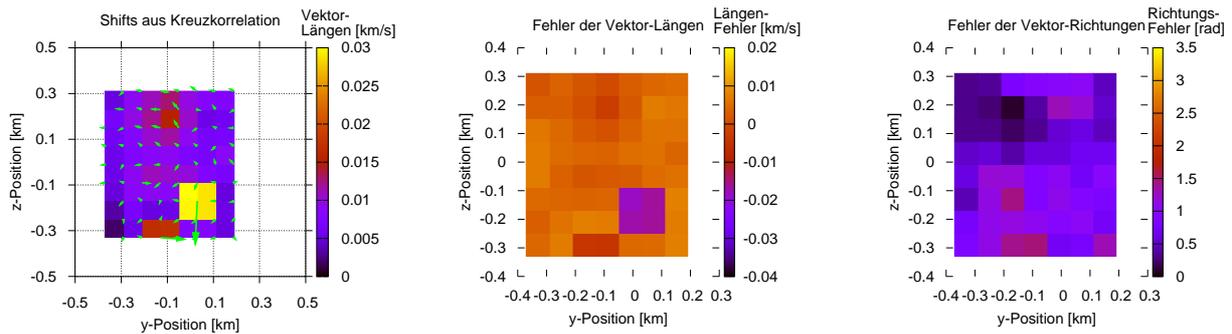
4. Berechnung von Shift-Vektoren zur Darstellung von Windfeldern

rekonstruiert (siehe grüne Vektoren in Abb. 4.17(a)), nicht jedoch die nach oben gerichtete.



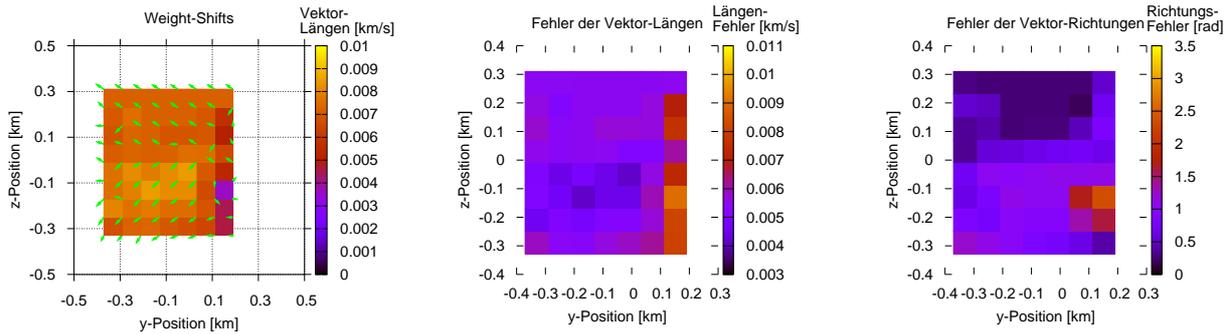
- (a) Länge der Shift-Vektoren (siehe Farbskala) zusammen mit grünen, mit FS rückgerechneten Vektoren. (b) Abweichungen zwischen den Längen der mit FS rückgerechneten und vorgegebenen Shift-Vektoren des Windfeldes von Abb. 4.13(b). (c) Abweichungen zwischen den Richtungen der mit FS rückgerechneten und vorgegebenen Shift-Vektoren des Windfeldes von Abb. 4.13(b).

Abbildung 4.15: Berechnung von Shift-Vektoren mittels FS nach Kap. 4.1.2. Gleichmäßige Verschiebung eines komplexen PS-Musters auf einer an den Rändern zugeschnittenen quadratischen Fläche (vgl. Abb. 4.13). Die Abweichungen der Längen und Richtungen des mit FS rückgerechneten vom vorgegebenen Windfeld (siehe Abb. 4.13(b)) sind größtenteils gering. Nur links oben sind die rückgerechneten Pfeile viel zu lang, rechts unten sind die Richtungen fehlerbehaftet.



- (a) Länge der Shift-Vektoren (siehe Farbskala) zusammen mit grünen, mit KK rückgerechneten Vektoren. (b) Abweichungen zwischen den Längen der mit KK rückgerechneten und vorgegebenen Shift-Vektoren des Windfeldes von Abb. 4.13(b). (c) Abweichungen zwischen den Richtungen der mit KK rückgerechneten und vorgegebenen Shift-Vektoren des Windfeldes von Abb. 4.13(b).

Abbildung 4.16: Berechnung von Shift-Vektoren mittels KK nach Kap. 4.1.3. Gleichmäßige Verschiebung eines komplexen PS-Musters auf einer an den Rändern zugeschnittenen quadratischen Fläche (vgl. Abb. 4.13). Die Abweichungen der Längen und Richtungen des mit KK rückgerechneten vom vorgegebenen Windfeld (siehe Abb. 4.13(b)) sind größtenteils gering. Lediglich zwei Vektoren (rechts und unten) sind viel zu lang. Rechts und unten sind die Richtungen ebenfalls stärker fehlerbehaftet.



- (a) Länge der Shift-Vektoren (siehe Farbskala) zusammen mit grünen, mit WSh rückgerechneten Vektoren.
 (b) Abweichungen zwischen den Längen der mit WSh rückgerechneten und vorgegebenen Shift-Vektoren des Windfeldes von Abb. 4.13(b).
 (c) Abweichungen zwischen den Richtungen der mit WSh rückgerechneten und vorgegebenen Shift-Vektoren des Windfeldes von Abb. 4.13(b).

Abbildung 4.17: Berechnung von Shift-Vektoren mittels WSh nach Kap. 4.1.4. Gleichmäßige Verschiebung eines komplexen PS-Musters auf einer an den Rändern zugeschnittenen quadratischen Fläche (vgl. Abb. 4.13). Die Abweichungen der Längen und Richtungen des mit WSh rückgerechneten vom vorgegebenen Windfeld (siehe Abb. 4.13(b)) sind großteils gering. Die Länge der rückgerechneten Vektoren ist generell um ca. $0.004 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ zu gering; rechts treten hier größere Abweichungen auf. Die Richtungen passen oben sehr gut, unten sind sie schlechter.

Abschließend wird noch kurz gezeigt, wie gut die vier Shift-Berechnungsmethoden für zwei beliebige komplexe PS-Strukturen mit variablen Werten, die **nicht gleichmäßig** mittels eines konstanten, homogenen Windfeldes verschoben werden, geeignet sind. Diese beiden Bilder 1 und 2 stammen direkt aus den PS-Simulationen und beinhalten ein Verschwinden der (Intensitäts-)Masse aus den Bildern. Dies macht die Sache hier kompliziert. Zudem ist kein Windfeld vorgegeben, so dass keine quantitative Längen- und Richtungsanalyse durchgeführt werden kann. Dennoch sollte sich das Wandern der Struktur nach links qualitativ rekonstruieren lassen. Man hätte somit Kenntnis über die Richtung eines Windfeldes und (durch den zeitlichen Abstand Δt zwischen beiden Bildern) auch über die Stärke. Länge und Richtung der Verschiebung dürfen als variabel angenommen werden.

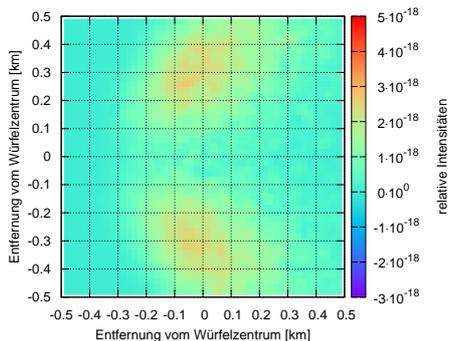
Die beiden Bilder sind in Abb. 4.18 dargestellt. Abbildung 4.18(a) zeigt ein PS-Intensitätsbild zu einem beliebigen Zeitpunkt t_1 auf einer quadratischen Fläche $Y \times Z = [-0.49 \text{ km}, 0.49 \text{ km}] \times [-0.49 \text{ km}, 0.49 \text{ km}]$ (50×50 Pixel). Dagegen ist das PS-Intensitätsbild von Abb. 4.18(b) zu einem späteren Zeitpunkt t_2 nach links verschoben und die Intensität (in a. u.) hat an Gesamtmasse im Vergleich zum ersten Bild verloren.

In Abb. 4.19 werden dann die mit den vier Methoden aus Kap. 4.1 berechneten Shift-Vektorfelder für die Bilder 1 und 2 miteinander verglichen. Die Parameter wurden optimiert gewählt und sind in Tab. 4.1 zusammengefasst. Die vor allem im linken Bereich stattfindende Verschiebung der Hauptmasse (siehe Abb. 4.18) nach links oben und links unten wird von GCS am besten wiedergegeben (Abb. 4.19(a)). Relativ gut schneidet auch die mit GCS „verwandte“ WSh-Methode ab (Abb. 4.19(d)). Die KK weist einige Ausreißer auf, kann aber die Bewegung nach links oben und unten im linken Bereich einigermaßen rekonstruieren (Abb. 4.19(c)). Die FS-Methode dagegen liefert hier ein unbrauchbares, uneinheitliches Vektorfeld, das die Shift-Bewegung nicht anzeigt (Abb. 4.19(b)).

Um die Geeignetheit von GCS für die Situation mehrerer solcher PS-Bilder zu verdeutlichen, ist in Abb. 4.20 noch einmal eine Bildfolge mit mit GCS bestimmten Verschiebungsvektoren dargestellt. Die Bilder jeweils links zeigen die Ausgangsverteilung der Intensität (sozusagen Bild 1 zur Zeit t_1) und die Bilder jeweils rechts im Hintergrund die Verteilung der Intensität von Bild 2 zur Zeit t_2 sowie davor die mit GCS berechneten Shift-Vektoren. Masse verschwindet immer mehr aus den Bildern. Das Wandern nach links ist aber jeweils deutlich rekonstruierbar.

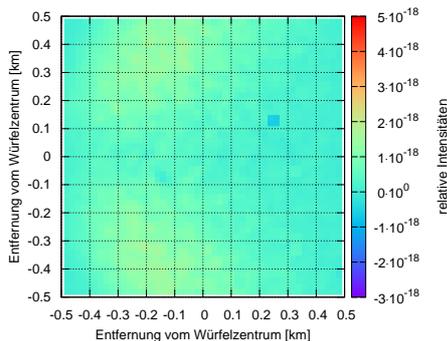
4. Berechnung von Shift-Vektoren zur Darstellung von Windfeldern

Diffusion des Strahles (parallel polarisiert) aus zum Strahl senkrechtem Blickwinkel.
RFOV = 10 mrad, EFOV = 0.1 mrad, Entfernung 1000 km; Würfel 1x1x1 km;
M101.sp oblate Zylinder; Zeitintervall 1001.5-1001.6



(a) Bild 1 entspricht einer Verteilung mit beliebigen Funktionswerten gemäß eines PS-Intensitätsbildes zum Zeitpunkt t_1 .

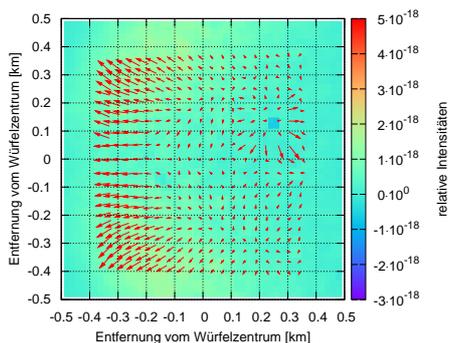
Diffusion des Strahles (parallel polarisiert) aus zum Strahl senkrechtem Blickwinkel.
RFOV = 10 mrad, EFOV = 0.1 mrad, Entfernung 1000 km; Würfel 1x1x1 km;
M101.sp oblate Zylinder; Zeitintervall 1001.7-1001.8



(b) Bild 2 entspricht einer Verteilung mit beliebigen Funktionswerten gemäß eines PS-Intensitätsbildes zum späteren Zeitpunkt t_2 .

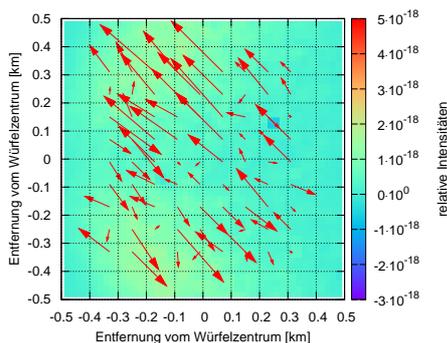
Abbildung 4.18: Variable Verschiebungen eines PS-Intensitätsmusters auf einer Fläche der Größe $Y \times Z = [-0.49 \text{ km}, 0.49 \text{ km}] \times [-0.49 \text{ km}, 0.49 \text{ km}]$ (50×50 Pixel). Das Muster von Abb. 4.18(b) ist im Vergleich zu dem von Abb. 4.18(a) nach links verschoben und hat deutlich an Gesamtmasse der Intensität verloren. Die pbs4-Parameter über den Abbildungen sind für die Shifts irrelevant.

Diffusion des Strahles (parallel polarisiert) aus zum Strahl senkrechtem Blickwinkel.
RFOV = 10 mrad, EFOV = 0.1 mrad, Entfernung 1000 km; Würfel 1x1x1 km;
M101.sp oblate Zylinder; Zeitintervall 1001.7-1001.8



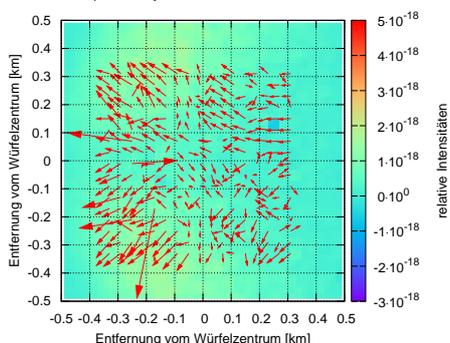
(a) Mit GCS ermittelte Shift-Vektoren.

Diffusion des Strahles (parallel polarisiert) aus zum Strahl senkrechtem Blickwinkel.
RFOV = 10 mrad, EFOV = 0.1 mrad, Entfernung 1000 km; Würfel 1x1x1 km;
M101.sp oblate Zylinder; Zeitintervall 1001.7-1001.8



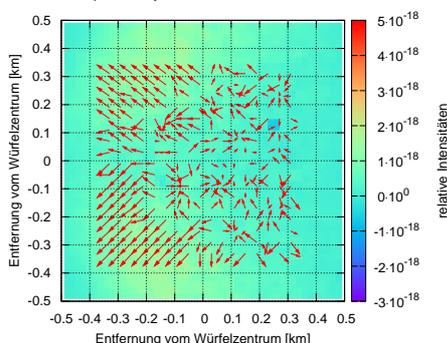
(b) Mit FS ermittelte Shift-Vektoren.

Diffusion des Strahles (parallel polarisiert) aus zum Strahl senkrechtem Blickwinkel.
RFOV = 10 mrad, EFOV = 0.1 mrad, Entfernung 1000 km; Würfel 1x1x1 km;
M101.sp oblate Zylinder; Zeitintervall 1001.7-1001.8



(c) Mit KK ermittelte Shift-Vektoren.

Diffusion des Strahles (parallel polarisiert) aus zum Strahl senkrechtem Blickwinkel.
RFOV = 10 mrad, EFOV = 0.1 mrad, Entfernung 1000 km; Würfel 1x1x1 km;
M101.sp oblate Zylinder; Zeitintervall 1001.7-1001.8



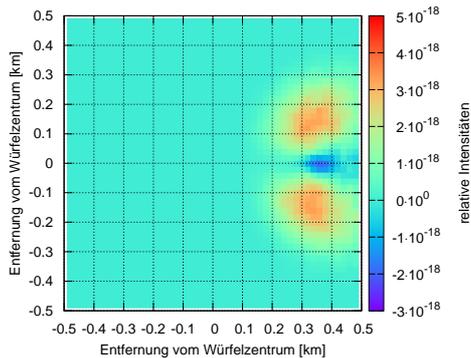
(d) Mit WSh ermittelte Shift-Vektoren.

Abbildung 4.19: Rekonstruktion der Verschiebungen von Bild 1 nach 2 (von Abb. 4.18) mittels der vier bekannten Methoden: Nur GCS (Abb. 4.19(a)) und mit Abstrichen WSh (Abb. 4.19(d)) schneiden hierbei gut ab und können die Bewegung nach links im linken Bereich von Abb. 4.18(b), die hier im Hintergrund dargestellt ist, wiedergeben.

Shift-Algorithmus	GCS-Methode	FS-Methode	KK-Methode	WSH-Methode
Skalierungsfaktor sc	1.0	1.0	0.5	0.5
$y_{\text{jump}} / z_{\text{jump}}$	2 / 2	4 / 4	2 / 2	2 / 2
T_p -Größe (Pixel)	10×10	16×16	16×16	16×16
RT_p -Größe (Pixel)	–	–	8×8	8×8

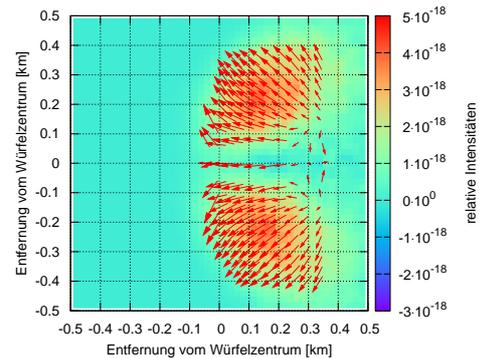
Tabelle 4.1: Parameter für Algorithmen zur Berechnung der Shift-Vektoren von Abb. 4.19.

Diffusion des Strahles (parallel polarisiert) aus zum Strahl senkrechtem Blickwinkel.
RFOV = 10 mrad, EFOV = 0.1 mrad, Entfernung 1000 km; Würfel $1 \times 1 \times 1$ km;
M101.sp oblate Zylinder; Zeitintervall 1001.1-1001.2



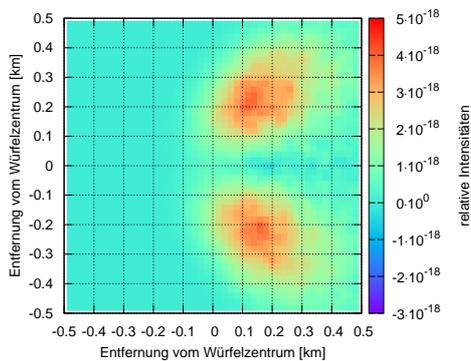
(a) Bild 1 zur Zeit t_1 .

Diffusion des Strahles (parallel polarisiert) aus zum Strahl senkrechtem Blickwinkel.
RFOV = 10 mrad, EFOV = 0.1 mrad, Entfernung 1000 km; Würfel $1 \times 1 \times 1$ km;
M101.sp oblate Zylinder; Zeitintervall 1001.3-1001.4



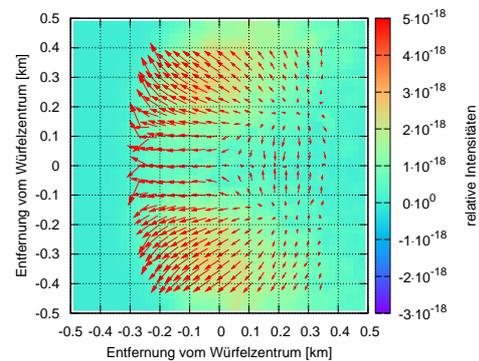
(b) Bild 2 zur Zeit t_2 mit Shifts.

Diffusion des Strahles (parallel polarisiert) aus zum Strahl senkrechtem Blickwinkel.
RFOV = 10 mrad, EFOV = 0.1 mrad, Entfernung 1000 km; Würfel $1 \times 1 \times 1$ km;
M101.sp oblate Zylinder; Zeitintervall 1001.5-1001.6



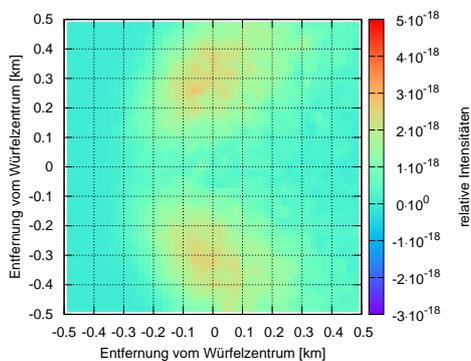
(c) Bild 1 zur Zeit t_1 .

Diffusion des Strahles (parallel polarisiert) aus zum Strahl senkrechtem Blickwinkel.
RFOV = 10 mrad, EFOV = 0.1 mrad, Entfernung 1000 km; Würfel $1 \times 1 \times 1$ km;
M101.sp oblate Zylinder; Zeitintervall 1001.7-1001.8



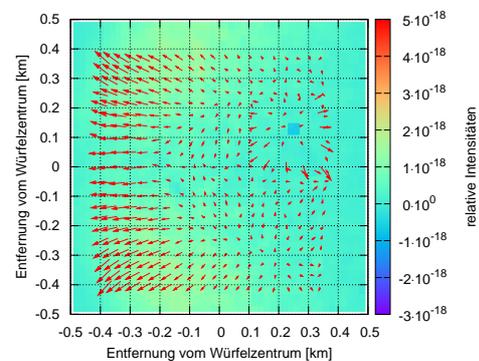
(d) Bild 2 zur Zeit t_2 mit Shifts.

Diffusion des Strahles (parallel polarisiert) aus zum Strahl senkrechtem Blickwinkel.
RFOV = 10 mrad, EFOV = 0.1 mrad, Entfernung 1000 km; Würfel $1 \times 1 \times 1$ km;
M101.sp oblate Zylinder; Zeitintervall 1001.5-1001.6



(e) Bild 1 zur Zeit t_1 .

Diffusion des Strahles (parallel polarisiert) aus zum Strahl senkrechtem Blickwinkel.
RFOV = 10 mrad, EFOV = 0.1 mrad, Entfernung 1000 km; Würfel $1 \times 1 \times 1$ km;
M101.sp oblate Zylinder; Zeitintervall 1001.7-1001.8



(f) Bild 2 zur Zeit t_2 mit Shifts.

Abbildung 4.20: Mit GCS berechnete Verschiebungen aus PS-Simulationsdaten für verschiedene Bilder 1 und 2.

4.2.3 Shifts ringförmiger Strukturen

Als Nächstes werden selbsterzeugte ringförmige Strukturen mit idealisierten Streuer-Verteilungen um die Zentren eines fiktiven WS-Paares untersucht (siehe Abb. 4.21(a) und 4.21(b); Verfahren zur Erzeugung siehe Kap. 5.5). Die Bilder haben eine räumliche Auflösung von 1.5 m bei einem Gebiet von jeweils $Y \times Z = [-64.5 \text{ m}, 64.5 \text{ m}] \times [-37.5 \text{ m}, 37.5 \text{ m}]$, was 87×51 Pixeln entspricht. Es geht hier die Annahme ein, dass im Wirbelkern (der hier sehr groß gewählt wurde) keine Partikel vorhanden sind und sich um den Kern, wo die Strömung am stärksten ist, die Teilchen während des Aufrollvorgangs immer stärker sammeln und zur Mitte wandern. Die Streuintensität ist dann unmittelbar außerhalb des Kerns am größten. Da es sich hierbei noch um keine Extinktionsprofile handelt, genügen beliebige Werte in a. u. (nur ihre Verteilung ist entscheidend).

Nun kann man wieder die vier Shift-Methoden auf das Bild 1 zum Zeitpunkt t_1 (Abb. 4.21(a)) und Bild 2 zum Zeitpunkt t_2 (Abb. 4.21(b)) anwenden. Die optimierten Parameter für ihre Anwendung sind in Tab. 4.2 aufgelistet. Ihre Resultate sind in Abb. 4.21(c) bis 4.21(f) gezeigt. Sie zeigen deutliche Vorteile für die KK (Abb. 4.21(e)), deren Shift-Vektoren fast ausschließlich zur Mitte der Ringe zeigen und die damit die Ringkontraktion von Bild 1 nach 2 richtig wiedergeben. Relativ gut schneidet auch GCS ab (Abb. 4.21(c)). Nahe der Ringe zeigen die Vektoren nach innen (was richtig ist), außerhalb der Ringe jedoch nach außen (dort sollte keine Bewegung mehr detektiert werden). Die beiden anderen Algorithmen sind in der hier gegebenen Situation eher unbrauchbar. Die WSh-Methode liefert noch einige Vektoren die zur Mitte zeigen (Abb. 4.21(f)). Die FS-Methode dagegen liefert eine eher ungeordnete Mischung von Vektoren verschiedenster Richtungen und Längen, die meist nicht passen (siehe Abb. 4.21(d)). Dort, wo die Ringe sind und damit die Bewegung, sind sie jedoch am besten, und damit dort durchaus hilfreich.

4.2.4 Shifts aus Tracer-Simulationen

Zum Schluss wenden wir die Shift-Algorithmen auf komplexe Strukturen von passiven Tracern mit vorgegebenen Lamb-Oseen-Wirbeln aus MGLET an (Misaka et al., 2012). Hier ist also ein stark variables Geschwindigkeitsfeld schon vorgegeben. Die Tracer-Verteilung von Abb. 4.22(a) ist eine mittels eigener Interpolation in der räumlichen Auflösung von 1 m (MGLET-Daten) auf 0.5 m erhöhte Struktur bei einem Wirbelalter von 44 s. Ebenso wurde die räumliche Auflösung der hier verwendeten v_y - und v_z -Komponenten der Windvektoren von 1 m auf 0.5 m erhöht. Das selektierte Gebiet ist ein 2D Schnitt mit $Y \times Z = [-52.5 \text{ m}, 51.5 \text{ m}] \times [348.5 \text{ m}, 412.5 \text{ m}]$ (209×129 Pixel) senkrecht zur Flugrichtung des Flugzeugs (x -Achse) bei $x = 201.5 \text{ m}$. Da die Anforderungen an das Lidar Wind-Messwerte alle 0.1 s erfordern, wird hier $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ gewählt. MGLET-Daten werden aufgrund der großen Datenmengen nur alle 2 oder 4 Sekunden ausgegeben, so dass Bild 2 hier explizit aus dem gegebenen Bild 1 und dem Lamb-Oseen-Windfeld für $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ konstruiert werden musste.

Erneute Anwendung der vier Shift-Algorithmen auf Bild 1 und 2 liefert die in den Abb. 4.22(c) bis 4.22(f) dargestellten Vektorfelder (verwendete optimierte Parameter für die Algorithmen zeigt Tab. 4.3). KK und, mit leichten Abstrichen, WSh schneiden hier am besten ab, auch vor allem was die Länge und Richtung der Shift-Vektoren angeht. Dies zeigen die absoluten Vektorlängen in Abb. 4.23 und die Analyse der Abweichungen zwischen Lamb-Oseen- und rekonstruiertem Windfeld in Abb. 4.24. KK und WSh können die Drehbewegung rekonstruieren, was für GCS und FS nicht der Fall ist. Die beiden letzteren liefern auch viel zu kurze Vektoren zurück (siehe Abb. 4.23(a) und 4.23(b)).

Die Ergebnisse und Güte der Auswertalgorithmen in den in Kap. 4.2 dargestellten Situationen sind in Tab. 4.4 zusammengefasst. Die Güte der einzelnen Shift-Algorithmen wird dort in folgende Kategorien unterteilt: + steht für gut, o für mittelmäßig und – für schlecht. Die Bewertung wurde (soweit vorhanden) anhand der Längen- und Richtungsfehler (siehe z. B. in den Abb. 4.11, 4.12, 4.14 bis 4.17, Abb. 4.24) zwischen den vorgegebenen und den rekonstruierten (Wind-)Vektoren eher subjektiv vorgenommen. In allen anderen Fällen (insbesondere auch für „PS-Muster (inhomogene

Verschiebung)“ und „Ringförmige Strukturen mit Ringkontraktion“, wo eine Klassifizierung allein anhand der Richtung vorgenommen wurde) erfolgt die Bewertung der berechneten Vektorfelder anhand der aus den vorgegebenen Musteränderungen (Windfelder) zu erwartenden Längen und Richtungen. Entscheidend ist in diesen Fällen, dass die Massenbewegung im Wesentlichen richtig wiedergegeben wird. Eine objektivere Bewertung z. B. durch Mittelung über alle Längen- und Richtungsfehler wird für die in diesem Kap. 4.2 dargestellten Situationen nicht durchgeführt und ist auch nicht sinnvoll, da die Bedeutung der einzelnen Vektoren an den jeweiligen Positionen sich voneinander unterscheiden. So sind z. B. im Fall des Windfeldes von Abb. 4.22(b) die längeren Vektoren um die Wirbelkerne und in der Bildmitte von wesentlich größerer Bedeutung als die kurzen Vektoren am Rand. Theoretisch wäre allenfalls eine Gewichtung möglich, die den Vektoren z. B. um den Wirbelkern eine höhere Bedeutung verleiht als am Bildrand. Doch auch dies ist problematisch, da die Windvektorverteilung bzw. -struktur von Windfeld zu Windfeld unterschiedlich ist.

Aus Tab. 4.4 ist in Verbindung mit den Abbildungen der rekonstruierten Vektorfelder, auf die in der Tabelle verwiesen wird, ersichtlich, dass je nach gegebenem Muster und je nach vorgegebenem Wandern dieses Musters (Windfeld) die einzelnen Shift-Algorithmen unterschiedlich gut geeignet sind (wurde in diesem Kap. 4.2 analysiert). Die KK-Methode liefert im Durchschnitt die besten Resultate, vor allem aber für Wirbelstrukturen wie in Abb. 4.22(b). Darum ist die KK die Methode, die in Kap. 5 bevorzugt auf die Rückstreubilder zur Berechnung des Windfeldes angewandt werden wird.

Entscheidend ist aber auch die Echtzeit-Tauglichkeit der einzelnen Shift-Vektor-Berechnungsmethoden für Windmessungen an Bord vor einem Flugzeug. Es bleibt bei 10 kontinuierlich zu messenden Windfeldern pro Sekunde nur eine Zeitspanne von maximal 0.1 s, um ein 2D Windfeld aus den gemessenen (bzw. in Kap. 5 simulierten) Rückstreudaten zu berechnen. Darum wird in Tab. 4.5 das Tempo (der Rechenzeitaufwand) der Methoden zur Auswertung auf einem Rechner mit 2.5 GHz-Prozessor in den einzelnen Situationen untersucht und miteinander verglichen. Es sind in den Kästchen von Tab. 4.5 jeweils neben den Nummern der Shift-Vektor-Abbildungen zunächst die Gesamtzeit (in s) der Berechnung des kompletten Vektorfeldes und dann darunter in Klammern die zugehörige Zeit für die Berechnung eines Einzelvektors angegeben. Indem man die Gesamtzeit durch die Zeit zur Berechnung eines Einzelvektors teilt, kann man auf die ungefähre Zahl der so berechneten 2D Shift-Vektoren schließen. In den Abbildungen sind häufig aufgrund hoher Datenmengen nicht alle berechneten Vektoren dargestellt. Unterschiede in der Durchschnittszeit pro berechnetem Shift-Vektor entstehen durch die je nach Muster optimale Dimensionierung z. B. der Template-Parameter.

Als am schnellsten erweist sich die GCS-Methode, die bei Wirbelfeldern jedoch qualitative Schwierigkeiten hat (siehe Kategorie „Passive Tracer mit Lamb-Oseen-Windfeld“ in Tab. 4.4). Die FS-Methode erweist sich als sehr langsam, kann aber durch FFT, Verringerung der Anzahl zu berechnender Vektoren auf die nötige Anzahl (20-100 pro Windfeld) und Herunterschrauben der verwendeten Parameter-Spezifikationen (Verringerung der Tp-Größe) auch um etwa einen Faktor 10 bis 100 beschleunigt werden (Zeiten < 1 s). Die KK- und die WSh-Methode dagegen erreichen auch ohne Einschränkungen leicht die Echtzeit-Geschwindigkeitsanforderungen und sind beide für die Rekonstruktion des Windfeldes von Wirbelschleppen geeignet (insbesondere die KK). In 0.032 s erhält man mit KK unter den Parametern von Tab. 4.3 ca. 1360 2D Shift-Vektoren (Zeit für einen Vektor: $2.35 \cdot 10^{-5}$ s), bräuchte also für eine ausreichende Zahl von 100 Windvektoren nur ca. 0.002 s, was weit unterhalb der erlaubten 0.1 s pro Windfeldebene bliebe. Das heißt dann für die Windfeldberechnung aus je zwei aus den pbs5-Simulationen in Kap. 5 erhaltenen Rückstreubildern bei gleicher räumlicher Auflösung (maximal 209×129 Pixel, so wie in Abb. 4.22(b)) und gleichen KK-Parametern, dass auch für diese eine Windfeldberechnung mit KK in Echtzeit an Bord eines Flugzeugs möglich ist.

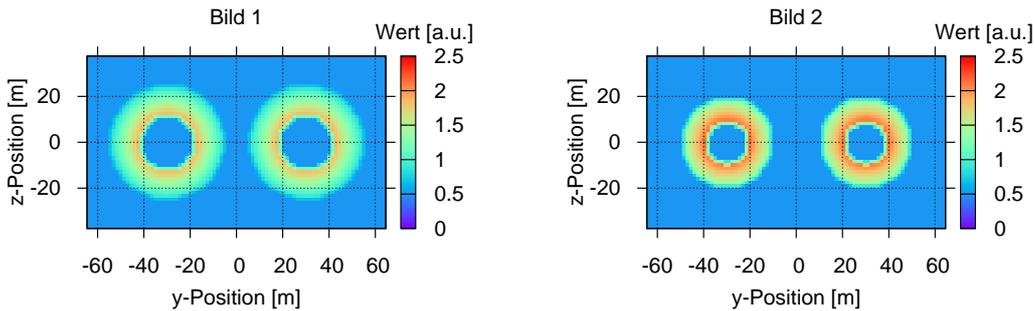
Fazit: Eine Universalmethode, die jedes Wandern eines Musters wiedergeben kann (ohne dazu zusätzliche Annahmen oder Kenntnisse über das Aussehen der Struktur und des Windfeldes hineinzustecken), gibt es nicht. Welches Muster als Rückstreubild auftreten wird weiß man von vornherein nicht. Man könnte aber dann das unmittelbar vorhergehende Rückstreubild als Referenz nehmen und hätte so die Möglichkeit den dafür geeigneten Algorithmus zur Windfeld-Rekonstruktion zu wählen.

Alle vier Shift-Algorithmen sind zur Echtzeit-Berechnung von Windfeldern an Bord geeignet.

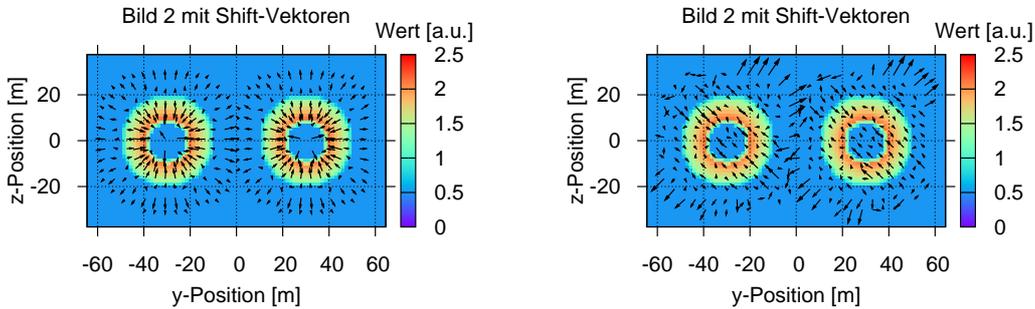
Im anschließenden Kapitel 5 werden nun die Methoden und Resultate der vorangegangenen Kapitel 2 bis 4 gemeinsam angewandt.

Shift-Algorithmus	GCS-Methode	FS-Methode	KK-Methode	WSh-Methode
Skalierungsfaktor sc	3.0	10.0	1.0	1.0
$y_{\text{jump}} / z_{\text{jump}}$	3 / 3	3 / 3	3 / 3	3 / 3
Tp-Größe (Pixel)	10×10	10×10	20×20	16×16
RTp-Größe (Pixel)	–	–	10×10	8×8

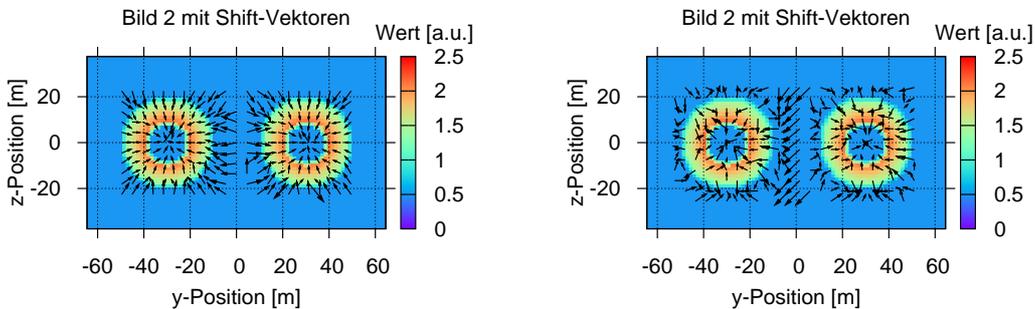
Tabelle 4.2: Parameter für Algorithmen zur Berechnung der Shift-Vektoren von Abb. 4.21.



- (a) Bild 1 entspricht einer idealisierten Streuer-Verteilung um die Zentren von WS zu einem Zeitpunkt t_1 .
 (b) Bild 2 entspricht einer idealisierten Streuer-Verteilung um die Zentren von WS zu t_2 . Verglichen mit Bild 1 findet in Bild 2 eine „Ringkontraktion“ mit Massenerhöhung zu den Kernen hin statt.

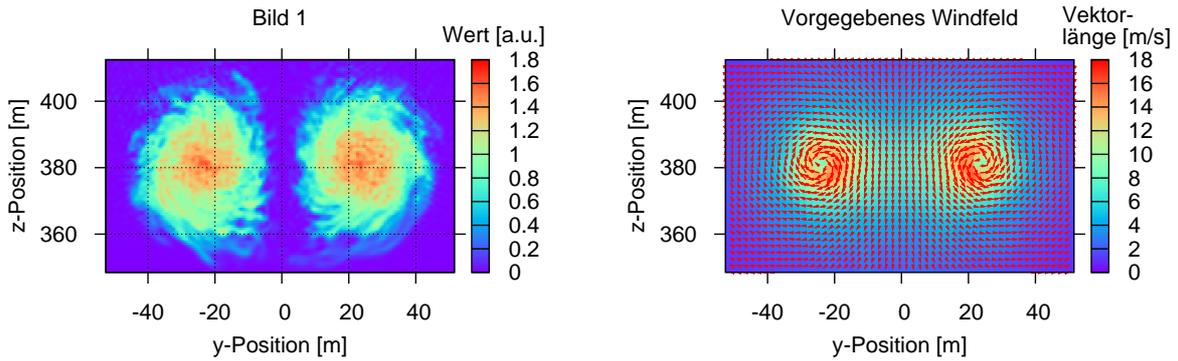


- (c) Bild 2 mit Shift-Vektoren aus GCS.
 (d) Bild 2 mit Shift-Vektoren aus FS.

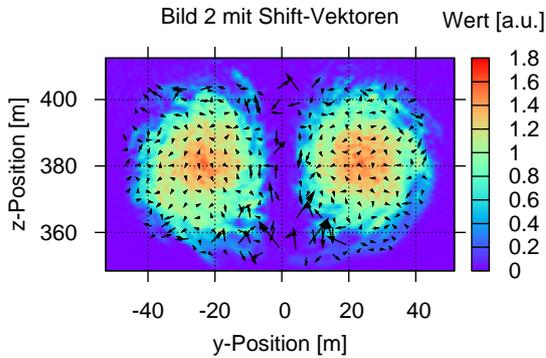


- (e) Bild 2 mit Shift-Vektoren aus KK.
 (f) Bild 2 mit Shift-Vektoren aus WSh.

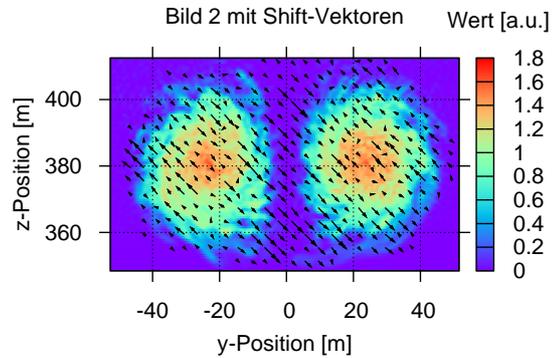
Abbildung 4.21: Zwei Bilder 1 (Abb. 4.21(a)) und 2 (Abb. 4.21(b)) auf $Y \times Z = [-64.5 \text{ m}, 64.5 \text{ m}] \times [-37.5 \text{ m}, 37.5 \text{ m}]$ (87×51 Pixel) mit idealisierten Streuer-Verteilungen um die Zentren eines fiktiven WS-Paares. Die Abb. 4.21(c) bis 4.21(f) zeigen wieder die mittels der vier Algorithmen aus Kap. 4.1 berechneten Shift-Vektorfelder.



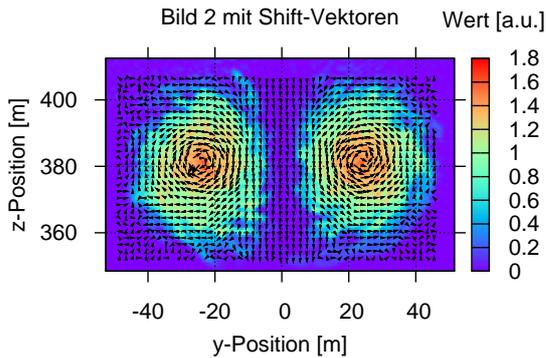
(a) Bild 1: Tracer-Verteilung zur Zeit t_1 aus MGLET-Simulationsdaten. (b) v_y - und v_z -Komponenten des vorgegebenen Lamb-Oseen-Wirbelfeldes zur Zeit t_1 (zusammen mit den resultierenden Vektorlängen) aus MGLET-Daten ($sc = 0.2$). Daraus wird Bild 2 mit der Tracer-Verteilung zur Zeit t_2 konstruiert.



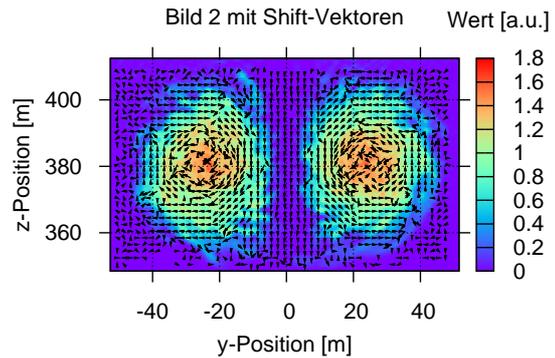
(c) Bild 2 mit Shift-Vektoren aus GCS.



(d) Bild 2 mit Shift-Vektoren aus FS.



(e) Bild 2 mit Shift-Vektoren aus KK.



(f) Bild 2 mit Shift-Vektoren aus WSh.

Abbildung 4.22: Zwei Bilder 1 (Abb. 4.22(a)) und 2 (z.B. im Hintergrund von Abb. 4.22(c)) auf $Y \times Z = [-52.5 \text{ m}, 51.5 \text{ m}] \times [348.5 \text{ m}, 412.5 \text{ m}]$ (209×129 Pixel) mit Tracer-Verteilungen aus MGLET-Simulationsdaten (Werte in a. u. genügen hier, da keine Extinktionsprofile). Das vorgegebene Lamb-Oseen-Wirbelfeld (Abb. 4.22(b)) dient (neben der Fehleranalyse) der Erzeugung von Bild 2 zur Zeit $t_2 = t_1 + 0.1 \text{ s}$. Unterschiede zwischen Bild 1 und 2 sind aufgrund des sehr kleinen $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ mit bloßem Auge nicht zu erkennen. Die mittels der Shift-Algorithmen rückgerechneten Windvektoren sind zusammen mit Bild 2 in den Abb. 4.22(c) bis 4.22(f) dargestellt.

4. Berechnung von Shift-Vektoren zur Darstellung von Windfeldern

Shift-Algorithmus	GCS-Methode	FS-Methode	KK-Methode	WSh-Methode
Skalierungsfaktor sc	2.0	1.0	0.2	0.2
$y_{\text{jump}} / z_{\text{jump}}$	8 / 8	8 / 8	4 / 4	4 / 4
Tp-Größe (Pixel)	16×16	12×12	16×16	8×8
RTp-Größe (Pixel)	–	–	8×8	4×4

Tabelle 4.3: Parameter für Shift-Algorithmen zu den Abbildungen 4.22 bis 4.24.

Shift-Algorithmus	GCS-Methode	FS-Methode	KK-Methode	WSh-Methode
Einfache Strukturen (Rechtecke, z.B. Quadrate)	Abb. 4.9 L: +, R: +	Abb. 4.10 L: –, R: +	Abb. 4.11 L: +, R: +	Abb. 4.12 L: +, R: +
PS-Muster (gleichmäßige Verschiebung)	Abb. 4.14 L: –, R: o	Abb. 4.15 L: o, R: +	Abb. 4.16 L: o, R: o	Abb. 4.17 L: o, R: o
PS-Muster (inhomogene Verschiebung)	Abb. 4.19(a) R: +	Abb. 4.19(b) R: –	Abb. 4.19(c) R: o	Abb. 4.19(d) R: o
Ringförmige Strukturen mit Ringkontraktion	Abb. 4.21(c) R: +	Abb. 4.21(d) R: o	Abb. 4.21(e) R: +	Abb. 4.21(f) R: o
Passive Tracer mit Lamb-Oseen-Windfeld	Abb. 4.22(c) L: –, R: –	Abb. 4.22(d) L: –, R: –	Abb. 4.22(e) L: +, R: +	Abb. 4.22(f) L: o, R: o

Tabelle 4.4: Klassifizierung und Leistungsfähigkeit der Shift-Algorithmen entsprechend der gegebenen zwei Bildstrukturen für Zeitpunkte t_1 und t_2 (alternativ auch für zwei Schichten in Entfernungen d und $d + \Delta d$), wie in diesem Kap. 4.2 analysiert. Neben der Nummer der Abbildung, in der das berechnete Vektorfeld dargestellt ist, stehen die Abkürzungen L und R jeweils für die Güte der Wiedergabe der Länge (d. h. der Windstärke) bzw. Richtung der vorgegebenen bzw. zu erwartenden Vektoren. Die Güte wird in Kategorien unterteilt: + steht für gut, o für mittelmäßig und – für schlecht. Bei „PS-Muster (inhomogene Verschiebung)“ und „Ringförmige Strukturen mit Ringkontraktion“ ist nur eine Bewertung anhand der Richtung der berechneten Vektorfelder möglich.

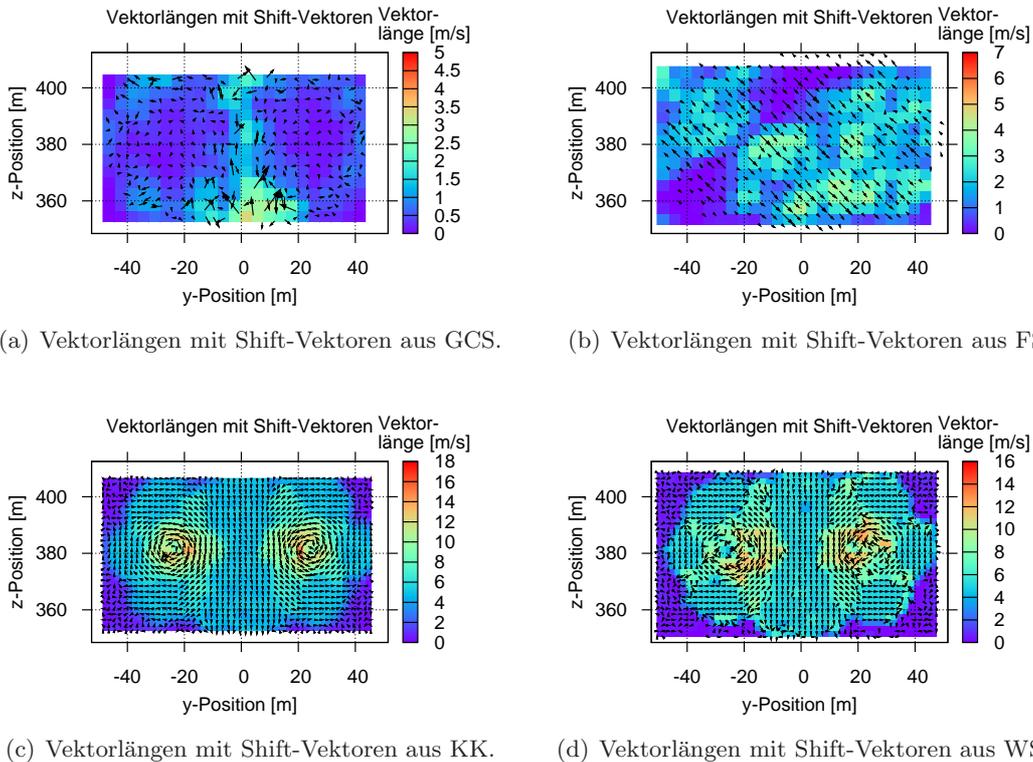
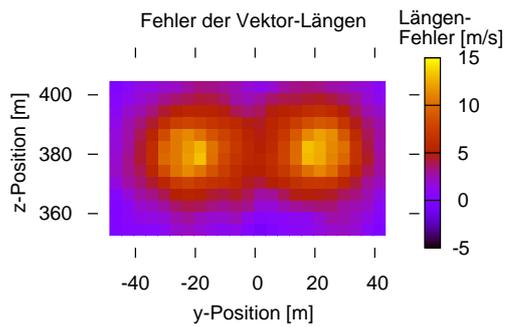


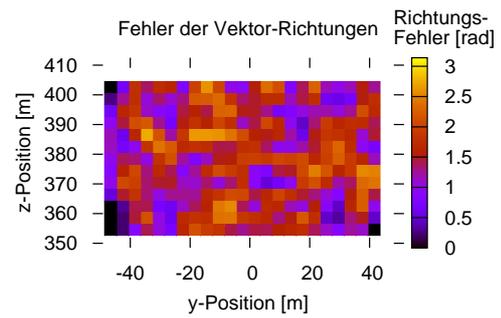
Abbildung 4.23: Vektorlängen rekonstruierter 2D Shift-Vektoren getrennt nach angewandtem Shift-Algorithmus. Rückgerechnete Vektoren sind eingezeichnet (Skalierung nach Tab. 4.3).

Shift-Algorithmus	GCS-Methode	FS-Methode	KK-Methode	WSh-Methode
Einfache Strukturen (Rechtecke, z.B. Quadrate)	Abb. 4.9 0.00057 s ($1.43 \cdot 10^{-6}$ s)	Abb. 4.10 5.53 s (0.0138 s)	Abb. 4.11 0.0076 s ($2.35 \cdot 10^{-5}$ s)	Abb. 4.12 0.0155 s ($4.79 \cdot 10^{-5}$ s)
PS-Muster (gleichmäßige Verschiebung)	Abb. 4.14 0.00014 s ($2.0 \cdot 10^{-6}$ s)	Abb. 4.15 6.05 s (0.084 s)	Abb. 4.16 0.00073 s ($8.95 \cdot 10^{-6}$ s)	Abb. 4.17 0.0019 s ($2.67 \cdot 10^{-5}$ s)
PS-Muster (inhomogene Verschiebung)	Abb. 4.19(a) 0.00047 s ($1.18 \cdot 10^{-6}$ s)	Abb. 4.19(b) 26.3 s (0.41 s)	Abb. 4.19(c) 0.0072 s ($2.47 \cdot 10^{-5}$ s)	Abb. 4.19(d) 0.014 s ($4.80 \cdot 10^{-5}$ s)
Ringförmige Strukturen mit Ringkontraktion	Abb. 4.21(c) 0.00043 s ($1.33 \cdot 10^{-6}$ s)	Abb. 4.21(d) 11.03 s (0.034 s)	Abb. 4.21(e) 0.013 s ($5.94 \cdot 10^{-5}$ s)	Abb. 4.21(f) 0.015 s ($6.0 \cdot 10^{-5}$ s)
Passive Tracer mit Lamb-Oseen-Windfeld	Abb. 4.22(c) 0.0011 s ($3.43 \cdot 10^{-6}$ s)	Abb. 4.22(d) 33.64 s (0.090 s)	Abb. 4.22(e) 0.032 s ($2.35 \cdot 10^{-5}$ s)	Abb. 4.22(f) 0.022 s ($1.46 \cdot 10^{-5}$ s)

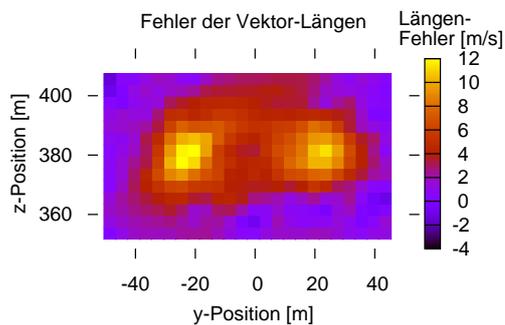
Tabelle 4.5: Tempo (Rechenzeitaufwand in Sekunden) der Shift-Algorithmen zur Berechnung von 2D-Vektorfeldern entsprechend der gegebenen zwei Bildstrukturen für Zeitpunkte t_1 und t_2 (alternativ auch für zwei Schichten in Entfernungen d und $d + \Delta d$), wie in diesem Kap. 4.2 analysiert. In den einzelnen Kästchen stehen zusammen mit der Nummer der Abbildung, in der das berechnete Vektorfeld dargestellt ist, die Gesamtzeit (in s) der Berechnung des kompletten Vektorfeldes und in Klammern die zugehörige Zeit für die Berechnung eines Einzelvektors. Weitere Details siehe Text.



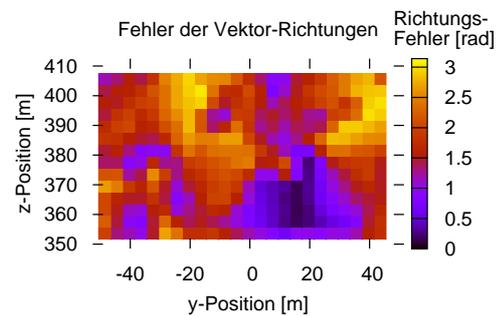
(a) Abweichungen der Vektorlängen für GCS.



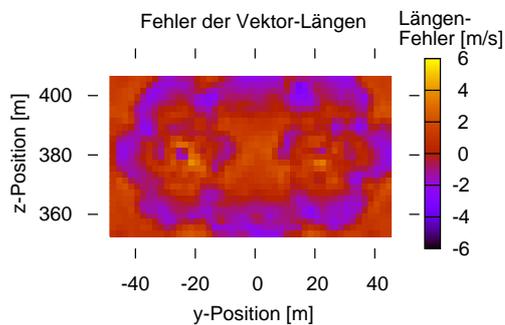
(b) Abweichungen der Vektorrichtungen für GCS.



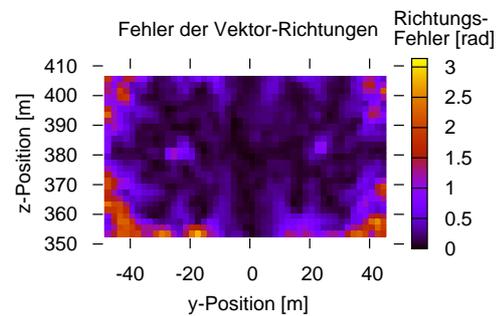
(c) Abweichungen der Vektorlängen für FS.



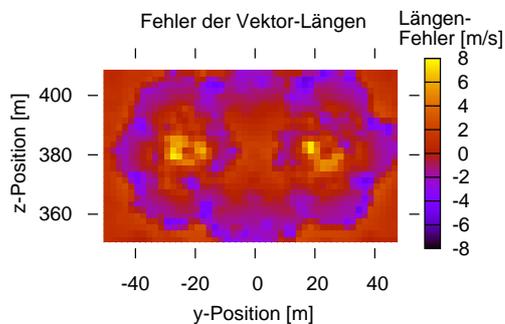
(d) Abweichungen der Vektorrichtungen für FS.



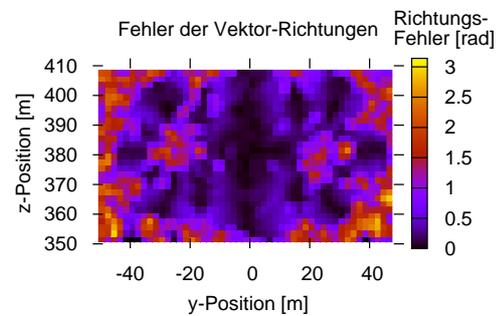
(e) Abweichungen der Vektorlängen für KK.



(f) Abweichungen der Vektorrichtungen für KK.



(g) Abweichungen der Vektorlängen für WSh.



(h) Abweichungen der Vektorrichtungen für WSh.

Abbildung 4.24: Abweichungen zwischen den Längen (links) und Richtungen (rechts) der mittels der vier verschiedenen Algorithmen rückgerechneten Shift-Vektoren und den Längen/Richtungen der vorgegebenen Shift-Vektoren des Windfeldes von Abb. 4.22(b).

Kapitel 5

Simulationen der Signale eines Rückstreulidars zur Messung des transversalen Windes von Wirbelschleppen vor Flugzeugen

Nun wird mit `pbs5` das in Kap. 2.2, 2.3 und 4.1 begründete, neue Messverfahren eines RSL simuliert, das eine Reihe von Vorteilen gegenüber der Doppler-Technik bietet:

- verbesserte räumliche Auflösung in der Breite, Höhe und Tiefe
- höhere Messfrequenz (bei wenigen Wind-Vektoren) und höhere Messentfernung möglich
- transversale Komponenten des Windes (d. h. senkrecht zur Flugrichtung) sind direkt messbar \Rightarrow keine zusätzlichen Messungenauigkeiten durch parallele Geschwindigkeitskomponenten wie bei den LOS-Komponenten des DWL
- Verzicht auf mechanische (langsame) Bauteile, wie z. B. Scanner, möglich
- keine hohen Verluste der rückgestreuten Anteile im Strahlengang durch Filter, nur solares Filter nötig \Rightarrow Verwendung einfacherer und evtl. billigerer Systemkomponenten möglich
- insgesamt kompaktere Bauweise \Rightarrow geeignet zum Einbau auch in kleinere, leichtere Flugzeuge, die durch WS besonders gefährdet sind.

Ein weiterer großer Vorteil eines solchen RSL im Vergleich zu einem DWL ist seine Unabhängigkeit von Frequenz- bzw. Wellenlängen-Shifts. Eine Kalibrierung wie beim FI-DWL in Anhang B.1 ist also nicht nötig, da keine Doppler-Verschiebung gemessen werden braucht. Das RSL aus Kap. 2.2 funktioniert allein durch Detektion der rückgestreuten Photonen (Intensitäten) und damit PE auf dem Detektor aus Schichten einer gewissen Dicke (d. h. MZI einer gewissen Länge) in variable LOS-Richtungen (siehe Kap. 2.3), zusammen mit den Auswerteverfahren von Kap. 4.1. Dabei müssen die Anteile des Rauschens wie in Anhang B.1 ebenfalls berücksichtigt werden.

Der Nachteil des RSL ist, dass zwei Schichtmessungen zu leicht unterschiedlichen Zeitpunkten t_1 und t_2 erfolgen müssen, um die Bewegung der Partikel in der Atmosphäre, d. h. Richtung und Geschwindigkeit des Windes, bestimmen zu können. Die Zeit zwischen zwei Scans ist abhängig von der Fluggeschwindigkeit. Dennoch reicht nach den unten folgenden Simulationen beim RSL eine Einzelmessung pro Zeitpunkt aus, so dass auf eine Mittelung je LOS-Richtung wie bei DWL verzichtet werden kann¹. Je zwei Rücksignal-Bilder der gleichen Messschicht d zu zwei Zeitpunkten t und $t + \Delta t$ werden dann vorzugsweise mit KK oder WSh (Kap. 4.1) ausgewertet, um den Wind zu erhalten. Mit

¹ Beim DWL würde prinzipiell auch eine Messung, d. h. das Rücksignal eines Laserpulses pro LOS-Richtung reichen. Durch das hohe Rauschen muss aber i. Allg. über Signale mehrerer Pulse gemittelt werden.

diesen Auswertemethoden können aber auch zwei räumlich unterschiedliche Schichten d und $d + \Delta d$ zum selben Zeitpunkt t miteinander verglichen und dadurch eine Bewegung detektiert werden.

Sogar unter für DWL schlechten Winkeln (winzige v_x und v_y) und für größere Entfernungen können transversale Windkomponenten u und v senkrecht zur optischen Flugachse z mit einem solchen RSL schneller und möglicherweise präziser gemessen und bestimmt werden. Diese transversalen Komponenten von Windvektoren sind entscheidend für die Flugstabilität von Flugzeugen. Die Dicken der Messschichten können für das RSL kleiner als 5 Meter sein und die Messentfernungen können weit über 100 m liegen. Die True Air Speed des Flugzeuges braucht beim RSL nicht wie bei DWL von den Messergebnissen abgezogen zu werden, um die Windgeschwindigkeit zu erhalten.

Anders als in [Hirschberger et al. \(2012\)](#) wird in den RSL-Simulationen in diesem Kapitel die **solare Hintergrundstrahlung (SHG)** berücksichtigt, da die Anzahl rückgestreuter Photonen des Laserpulses pro LOS-Richtung im Vergleich zu den solaren Photonen viel geringer sein wird als bei den FI-DWL-Simulationen in [Hirschberger und Ehret \(2011\)](#) (d. h. geringere Pulsenergie pro Richtung, dafür aber mehr getrennte Richtungen) und auch etwas geringer als in der RSL-Simulation in [Hirschberger et al. \(2012\)](#). Es wird hier ein gleichmäßig verteilter, gleich großer Untergrund zu den Photonen pro Richtung (Pixel) angenommen, was der Realität nahe kommen dürfte². Mehr Pulsenergie pro Richtung oder verstärkte Rückstreuung würde den Einfluss der SHG deutlich reduzieren.

Ergebnisse einer Simulation eines RSL inklusive Analyse der Signale zur Windbestimmung vor Flugzeugen, speziell von kleinskaligen Strukturen wie WS, sind auch in [Hirschberger et al. \(2012\)](#) dargestellt. Dort wurde jedoch außer der Varianz des Signals aufgrund der endlichen Zahl simulierter Photonen keine andere Form von Rauschen betrachtet. Dies wird im Folgenden nachgeholt.

5.1 Rückstreulidar in Bodennähe bei 532 nm Wellenlänge

Zur Simulation eines RSL brauchen wir realistische Schichten komplexer turbulenter Strukturen wie WS und ein Programm das diese Profile in Form von Extinktionen in 3D einliest. Die Extinktion, also die Abschwächung eines Lichtstrahles in einer bestimmten Richtung, variiert je nach räumlicher Position, und ist die Summe aus Streuung und Absorption. Hier wird Absorption **in** der zu messenden Schicht ausgeschlossen, so dass die Extinktionskoeffizienten letztlich als Maß für die Wahrscheinlichkeit der Streuung eines Photons auf seinem Richtungspfad innerhalb der Messschicht an Teilchen der Atmosphäre dienen. Die rückgestreuten Photonen (Intensitäten) aus einer Schicht von WS aus den verschiedenen Messrichtungen werden aus Sicht des nachfolgenden Flugzeuges zu einem Schichtbild aneinandergesetzt. Schließlich können die empfangenen Photonen zusammen mit Rauschtermen in PE-Zahlen zur Auswertung umgerechnet werden. Abschließend liefern dann bevorzugt die KK oder die WSh-Methode die transversalen u - und v -Komponenten (in Kap. 3 und 4 waren dies v und w bzw. v_y und v_z) aus zwei kompletten Rückstreubildern zu leicht verschiedenen Zeitpunkten.

Für das Extinktionsprofil von WS kommen hier die Konzentrationen des Tracer-Profiles von Abb. 3.4(a) zum Einsatz (Umrechnung dimensionsloser Konzentrationen auf Extinktionen in km^{-1} siehe weiter unten). Das vorherrschende, vorgegebene Windfeld bei einem Wirbelalter von $t = 44\text{s}$ entspricht dem von Abb. 3.4(b). Die Auflösung aus den LES beträgt für die Tracer-Verteilungen und die Geschwindigkeiten jeweils 1 m in jede der drei räumlichen Richtungen. Unter Beachtung von Abb. 3.1 werden für die RSL-Simulationen die Geschwindigkeitskomponenten u und v der LES von den Ecken ins Zentrum des Würfels (hier Pixels) verschoben. Dadurch können dann die Extinktionswerte des zweiten Profils über dieses (u, v) -Feld aus dem ersten Extinktionsprofil konstruiert werden.

Da Messungen von Schichten (Messebenen) nach den Messanforderungen aus Tabelle 1.1 mindestens mit 10 Hz stattfinden sollten, darf die Bewegung der Tracer zwischen zwei Bildern nur $\Delta t = 0.1\text{s}$ dauern. Dies ist auch optimal für die Auswerteverfahren zur Windberechnung (z. B. KK). Leider wur-

² Die empfangene SHG ist aber natürlich auch zu einem gewissen Teil leicht abhängig von der Blickrichtung des Receivers. Damit ist sie also in der Realität leicht variabel.

den die Daten von LES aufgrund ihrer hohen Datenmenge nur alle 2-4 s ausgegeben (gespeichert), so dass also Tracer-Profile im Abstand von 0.1 s nicht gegeben sind. Deshalb werden hier die gegebenen 2D (u, v) -Geschwindigkeitsfelder aus Schichten senkrecht zur optischen z -Achse nach Abb. 3.4(b) herangezogen und das erste Teilchenbild zum Zeitpunkt t_1 wird entsprechend der gegebenen u - und v -Geschwindigkeitskomponenten bewegt (z. B. bedeutet ein Vektor $(u, v)^T = (10 \frac{\text{m}}{\text{s}}, -5 \frac{\text{m}}{\text{s}})^T$ bei einem Zeitintervall von $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ eine Bewegung von 1 m in x -Richtung und -0.5 m in y -Richtung), so dass durch Zuweisung der neuen verschobenen Positionen ein zweites Teilchenbild zum Zeitpunkt $t_2 = t_1 + \Delta t$ erzeugt wird. Das Konstruktionsprinzip (das auch zuvor zur Erzeugung von Abb. 4.22(b) zum Einsatz kam) beruht darauf, zu schauen ob sich die Spitze des Vektors mit im obigen Beispiel $(1 \text{ m}, -0.5 \text{ m})^T$ in den Bereich eines anderen Pixels mit 1 m Seitenlänge bewegt hat. Ist dies der Fall, wird der Pixelwert (Tracer-Intensität) des Fußpunktes in den entsprechenden neuen Pixel verschoben. Bei mehreren Werten für ein Pixel wird der entsprechende Mittelwert gebildet. Für dieses kurze Δt sollte die Teilchenbewegung durch diese Methode physikalisch adäquat beschrieben werden und kann somit zum Beweis des Prinzips und der Tauglichkeit des RSL angewandt werden. Nur in nächster Nähe zu den Wirbelzentren liefert dieses Konstruktionsprinzip fehlerbehaftetere radiale Geschwindigkeitskomponenten (Divergenz), siehe z. B. Abb. 5.3 oder (besser) Abb. 5.11 unten.

Aus Tests mit den Auswertalgorithmen ging hervor, dass eine räumliche Auflösung von 1 m die Präzision der Berechnung der Windfelder aus den Bildern reduziert (vgl. auch Abb. 5.3 und 5.11 für KK). Deshalb können sowohl die Tracerverteilungen als auch die Geschwindigkeitsfelder aus MGLET-Simulationen zur Berechnung des zweiten Bildes räumlich interpoliert werden, um eine räumliche Auflösung von 0.5 m zu erhalten. Damit hätten die Bilder statt bisher $105 \times 65 = 6825$ Pixel für 1 m Auflösung dann sogar $209 \times 129 = 26961$ Pixel für 0.5 m Auflösung. In beiden Fällen ist es jedoch möglich, die Rotationsbewegung des Windes um die Kerne der WS in axialer Blickrichtung mehr oder weniger genau sichtbar zu machen und zu rekonstruieren.

Abschließend werden die Werte obiger kontinuierlicher Tracer-Verteilungen durch einen geeigneten linearen Faktor (in der Einheit km^{-1}) gestreckt oder gestaucht. Dieser Faktor orientiert sich am für die zu simulierende Flughöhe gegebenen Extinktionswert, der nach Vaughan et al. (1998) und den dortigen Gleichungen für klare Luft definiert ist (siehe auch Hirschberger und Ehret (2011)). Die relative Struktur des Tracer-Profiles bleibt im Extinktionsprofil erhalten, das nun realistische Extinktionskoeffizienten enthält. In der nun folgenden Simulation war dieser Streckungsfaktor 0.30 km^{-1} , da in 500 m Höhe bei $\lambda = 532 \text{ nm}$ Laser-Wellenlänge die Extinktion $\alpha = \alpha_{\text{mol}} + \alpha_{\text{aer}} = (0.134 + 1.566) \times 10^{-4} \text{ m}^{-1} = 0.17 \text{ km}^{-1}$ betrug. Durch den Streckungsfaktor erhält man in den Extinktionsbildern mittlere Werte von etwa 0.15 km^{-1} und maximale von etwa 0.25 km^{-1} .

Wir betrachten zunächst Simulationen mit einer räumlichen Auflösung von nur 1 m. Abbildung 5.1 zeigt die mit obiger Methode erhaltenen Extinktionsprofile zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 , wie sie nachfolgend in die pbs5-RSL-Simulationen eingelesen werden. Mit bloßem Auge ist kein Unterschied erkennbar. Dies liegt an der Winzigkeit der Verschiebung der Extinktionen während $\Delta t = 0.1 \text{ s}$. Die Angabe der x - und y -Positionen bezieht sich auf die Original-Positionen aus den MGLET-Simulationen und nicht auf die eigentliche simulierte Flughöhe. Die x -Position ist jeweils als Relativwert zu betrachten, siehe auch Abb. 5.4 unten, wo die Positionen in Metern um 0 angegeben werden. Abbildung 5.2 zeigt links (Abb. 5.2(a)) das durch MGLET vorgegebene Windfeld (Vektoren geben Richtung und Länge an; Länge ist auch farbig im Hintergrund dargestellt), sowie rechts (Abb. 5.2(b)) das durch KK aus den beiden Extinktionsbildern von Abb. 5.1 rekonstruierte Windfeld. Hier sind jeweils die u - und v -Komponenten des Windfeldes transversal zur Flugrichtung (optische z -Achse) gezeigt. Die Werte an den Rändern gehen durch die KK-typischen RTp von 8×8 Pixeln und Tp von 16×16 Pixeln in Abb. 5.2(b) verloren. Zur besseren Sichtbarkeit wurden die Vektoren in Abb. 5.2 jeweils mit dem Faktor 0.2 gestaucht und zudem nur jeder vierte Vektor je Richtung/Achse dargestellt. Abbildung 5.3 zeigt die Abweichungen der Vektorlängen (Abb. 5.3(a)) und Vektorrichtungen (Abb. 5.3(b)) der mittels KK rekonstruierten Geschwindigkeitsvektoren (Abb. 5.2(b)) von den optimalen eingelesenen Geschwindigkeitsvektoren (Abb. 5.2(a)). Die leichte räumliche Asymmetrie der

dargestellten Werte in den Abb. 5.2(b), 5.3(a) und 5.3(b) um die Zentren der ursprünglichen Domain von $[-52 \text{ m}, +52 \text{ m}] \times [348.5 \text{ m}, 412.5 \text{ m}]$ (rechts und oben scheinen eine Reihe von Pixeln zu fehlen) ist auf die Reduktion der ursprünglichen Domain durch die T_p und die Berechnung nur jedes vierten Vektors je Achse zurückzuführen. Die Suche auf den T_p startet immer links unten. Ein negativer (positiver) Wert beim **Längenfehler** bzw. **Fehler des Geschwindigkeitsbetrags** Δv (Abb. 5.3(a)) bedeutet dabei, dass das mit KK rekonstruierte Windfeld an dieser Position zu lange (kurze) Windvektoren zurückliefert. Das heißt im Fall von Abb. 5.3(a), dass die mit KK rekonstruierten Vektoren in der Mitte des Windfeldes, die nach unten zeigen, insgesamt deutlich zu lang sind (blau-schwarz), während sie im Wirbelkern und außen deutlich zu kurz sind (orange-gelb). Dagegen berechnet sich der **Richtungsfehler** bzw. **Winkelfehler** $\Delta\alpha$ der Vektoren nach der Formel

$$\Delta\alpha = \arccos \left(\frac{u_{\text{MGLET}} \cdot u_{\text{KK}} + v_{\text{MGLET}} \cdot v_{\text{KK}}}{((u_{\text{MGLET}})^2 + (v_{\text{MGLET}})^2)^{\frac{1}{2}} \cdot ((u_{\text{KK}})^2 + (v_{\text{KK}})^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \in [0, \pi], \quad (5.1)$$

wobei u_{MGLET} , v_{MGLET} bzw. u_{KK} , v_{KK} die jeweiligen u - und v -Komponenten des vorgegebenen MGLET- bzw. des mit KK aus den Extinktionsprofilen rekonstruierten Windfeldes bezeichnen. Abbildung 5.3(b) zeigt dabei in der Mitte die geringste Winkelabweichung (schwarz-blau), während weiter außen die Richtungsfehler deutlich erhöht sind (orange-rot). Diesen Rekonstruktionsfehler, der sich in den Längen- und Richtungsabweichungen bemerkbar macht, schleppen wir aber weiterhin mit, und er beruht auf der zu geringen Pixelzahl (Richtungen). Bei einer Verdoppelung der Auflösung von 1 m auf 0.5 m tritt aber eine deutliche Verbesserung ein (siehe auch Abb. 5.11 unten).

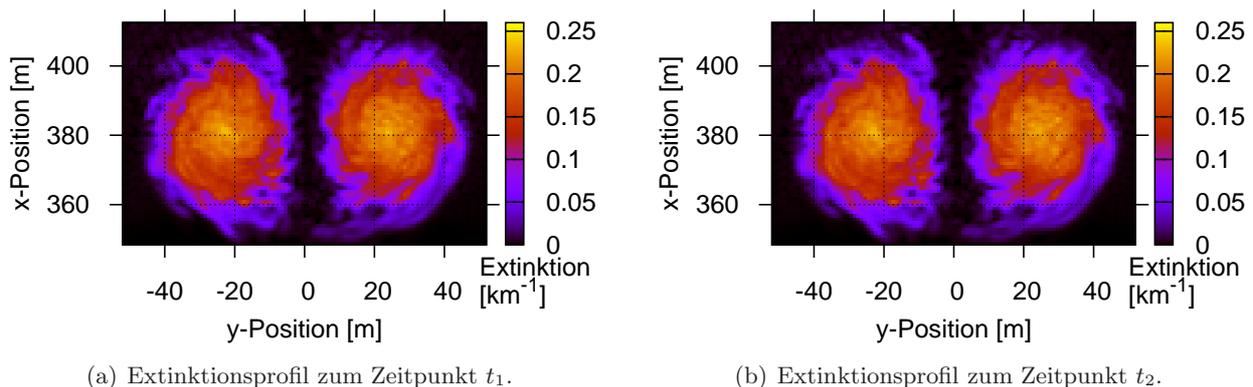


Abbildung 5.1: Extinktionsprofile zu den Zeitpunkten t_1 und $t_2 = t_1 + 0.1 \text{ s}$ in 500 m Flughöhe und bei 532 nm Laser-Wellenlänge für eine einzelne Schicht bei niedriger räumlicher Auflösung von 1 m, d. h. $105 \times 65 = 6825$ Pixeln. Unterschiede sind höchstens in den dunkelgelben Zentren der Wirbelverteilungen sichtbar.

Für die Simulationen des RSL kommt nun das Monte-Carlo Programm für polarisierte Rücksignale `pbs5` aus Kap. 2 zum Einsatz. Damit kann der Beitrag aus einer bestimmten Messrichtung rückgestreuter und vom Receiver eingefangener Photonen inklusive Polarisation berechnet werden. Die Struktur des Rückstreuolumens (Extinktionsprofils) kann mehr oder weniger exakt rekonstruiert werden, wenn einzelne, schwächere Pulse in eine Vielzahl an Richtungen mit einem kleinen EFOV emittiert werden (äquivalent zu einem starken Laserpuls, der in viele schwächere aufgespalten wird, die dann auf die einzelnen Richtungen verteilt werden). Für einen einzelnen starken Puls mit aufgeweitetem großem EFOV ist dies aus den in Anhang A.3 genannten Gründen nicht möglich.

Diese Schwierigkeiten werden hier durch eine hohe Zahl an simulierten (in der Realität: gemessenen) Richtungen (zunächst 105×65 , später 209×129) aus einer festen Position (monostatisches Lidar) für die Zeiten t_1 und t_2 bei 2 Millionen emittierten, simulierten Photonenpfaden pro Richtung³ eliminiert. Die Divergenz, d. h. das EFOV jedes Strahles beträgt in den Simulationen

³ Dies liefert bei 105×65 Richtungen 13.65 Milliarden simulierte Photonenpfade.

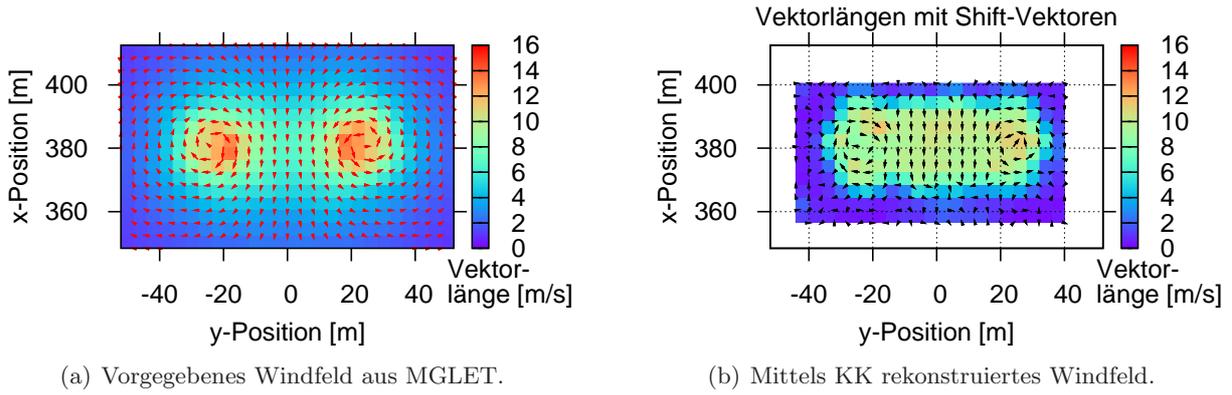


Abbildung 5.2: u - und v -Komponenten des vorgegebenen (links) und des aus den Extinktionsprofilen von Abb. 5.1 mittels KK rekonstruierten (rechts) Windfeldes.

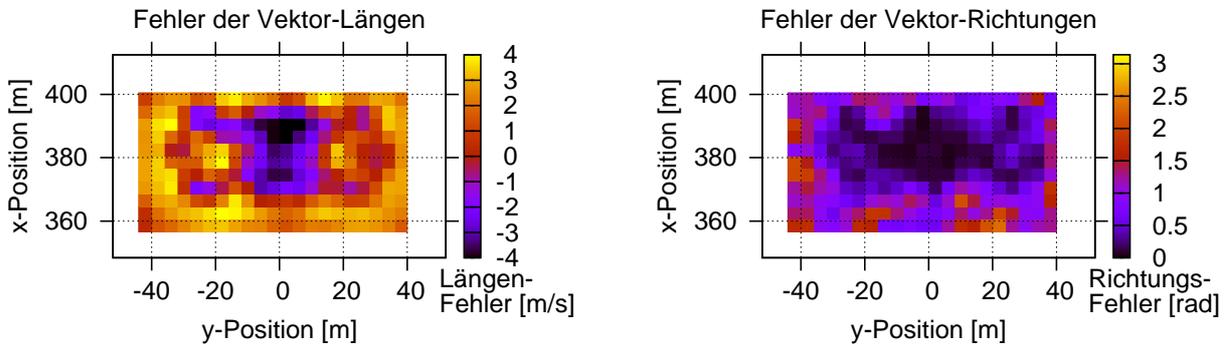


Abbildung 5.3: Relative Abweichungen der Geschwindigkeitsbeträge (links; in m/s) zwischen dem Windfeld aus MGLET und dem mittels KK aus den Extinktionsprofilen berechneten Windfeld mit zugehörigen relativen Abweichungen der Windrichtungen (rechts; in rad).

$\text{FOV}_E = 0.2 \text{ mrad}$, während das Semi-RFOV $0.5 \cdot \text{FOV}_R = 0.25 \text{ mrad}$ ist, also $\text{FOV}_R = 0.5 \text{ mrad}$. Weiter wird ein Gauß'sches Laserstrahlprofil nach Gl. (2.53) mit $\mu_1 = \mu_2 = 0$ und $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ und einem Emitter-Radius von $r_E = 0.02 \text{ m}$ simuliert, während der Receiver-Radius $r_R = 0.05 \text{ m}$ war.

Zu t_1 betrug die z -Distanz vom Lidar bei $\mathbf{x}_E = (0, 0, 0)^T$ zum Beginn der zu messenden Schicht 250 m . Genauer reichte das Extinktionsprofil von $z = 250 \text{ m}$ bis $z = 255 \text{ m}$. Erfasst wird aber nur das MZI, das so gewählt wurde, dass Signale aus dem Bereich zwischen $z = 250 \text{ m}$ und $z = 252.5 \text{ m}$ vom Receiver empfangen werden. Da die zentralen Positionen der Extinktionsquader in der transversalen x - y -Schicht von -52 m bis $+52 \text{ m}$ in y -Richtung und von -32 m bis $+32 \text{ m}$ in x -Richtung reichen, und das Zentrum des MZI bei einer Distanz von $z = 251.25 \text{ m}$ liegt, berechnen sich über

$$\frac{\theta_{\max}}{2} = \arctan\left(\frac{52}{251.25}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\varphi_{\max}}{2} = \arctan\left(\frac{32}{251.25}\right)$$

die bezüglich $(x, y)^T = (0, 0)^T$ symmetrischen maximalen Azimutwinkel θ_{\max} bzw. Elevationswinkel φ_{\max} des Laser-Emitters. Für den zentralen Emissionswinkel gilt $\phi_{E,Z} = (\theta_Z, \varphi_Z) = (0 \text{ rad}, 0 \text{ rad})$. Die um $\phi_{E,Z}$ spiegelsymmetrischen Winkel zur Zeit t_1 lagen damit zwischen $-0.2041 \text{ rad} \leq \theta \leq 0.2041 \text{ rad}$ für den Azimutwinkel mit 105 äquidistanten Unterteilungen und $-0.1267 \text{ rad} \leq \varphi \leq 0.1267 \text{ rad}$ für den Elevationswinkel mit 65 äquidistanten Unterteilungen.

Bei $v_{A/C} = 150 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ Fluggeschwindigkeit bewegt sich das Flugzeug während $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ entlang der z -Achse um 15 m auf diese erste Messschicht zu. Damit hat man zum Zeitpunkt t_2 eine um 15 m

verkürzte Messdistanz zwischen 235 m und 237.5 m. Die Winkel des Emitters müssen also entsprechend vergrößert werden, um wieder die gleichen transversalen Stellen der x - y -Messebene im Zentrum bei $z = 236.25$ m zu treffen, die zu t_1 bei $z = 251.25$ m lagen. Zu t_2 gilt dann $-0.2166 \text{ rad} \leq \theta \leq 0.2166 \text{ rad}$ für den Azimutwinkel und $-0.1346 \text{ rad} \leq \varphi \leq 0.1346 \text{ rad}$ für den Elevationswinkel.

Die MZI werden so gewählt, dass bei $\phi_{E,Z}$ (also Strahlen die das Zentrum der Extinktionsschicht anvisieren) nur eine $\Delta z = 2.5$ m dicke Schicht komplett gemessen wird. Dies ändert sich für außerezentrale Winkel, wo die Strahlen je nach Richtung eine leicht höhere Distanz als 2.5 m zurücklegen werden, was durch die Normierung bezüglich Distanz und Richtung aus Kap. 2.3 korrigiert wird. Dadurch werden die Quader der Extinktionsschicht durch die Laserstrahlen erfasst.

Der linear polarisierte Laserstrahl des Emitters hat eine Pulsdauer von $\tau_p = 10$ ns (Pulslänge von 3 m). Damit sind räumliche Auflösungen bis hinunter zu 1.5 m möglich. Die Pulsenergie in jede der 105×65 Messrichtungen soll im Folgenden zunächst konstant 0.5 mJ sein⁴, was insgesamt einer Laserenergie von 3.4 J pro Sekunde, also 3.4 W, entspräche. Mit einem leistungsstarken Lasersystem wie WALES (Wirth et al., 2009), das bei $\lambda = 532$ nm eine Leistung von 10 W liefert, könnten also etwa 3 Schichtbilder pro Sekunde gemessen werden, was ca. 1.5 kompletten Windfeldern pro Sekunde entspräche (10 Windfelder, also 20 Schichtbilder, wären nach den Messanforderungen nötig).

Die Extinktion in der Umgebung der zu messenden Schicht wird auf einen konstanten Wert von 0.1 km^{-1} gesetzt, und berücksichtigt neben der Streuung (anders als für die Messschicht) auch die Absorption. Sie wird vom MZI nicht erfasst. Gemessen wird dagegen in der 5 m tiefen Extinktionsschicht, siehe Abb. 5.1. Durch die kurze Messdistanz und die geringen Extinktionen wird hier auf varianzreduzierende Monte-Carlo-Methoden verzichtet. `pbs5` berücksichtigt die Beiträge aller Ordnungen der Mehrfachstreuung im Gesamtsignal. Anders als bei existierenden Lidars können die Beiträge der Mehrfachstreuung für jedes MZI einzeln ausgegeben werden (hier wurden immer nur die ersten beiden Streuordnungen mit Stokes-Vektoren gespeichert). Aufgrund der kurzen Messentfernungen und des geringen RFOV sind die Beiträge der Mehrfachstreuung zumeist aber gering.

Als Streuermischungen bei $\lambda = 532$ nm kommen bei niedriger Flughöhe zufällig orientierte oblate bzw. prolate Sphäroide von L. Xu (siehe Kap. 2.3.3) in Frage, die aerosole Streupartikel darstellen. Es wird in Kap. 5.1 nur die Mueller-Matrix `J4.sp` prolater Sphäroide mit einem Seitenverhältnis von $a/b = 0.5882$ zum Einsatz kommen ($a/b = 1$ wäre eine Kugel mit Radius a). Für die Größenverteilung der Streuer wird nach Hansen und Travis (1974) ein effektiver Radius von $r_{\text{Eff}} = 0.5 \mu\text{m}$ und eine effektive Varianz von $v_{\text{Eff}} = 0.20$ (dimensionslos) verwendet. Der komplexe Brechungsindex der Streuer beträgt $n_{\text{Br}} = 1.53 + i \cdot 0.008$. Für die Messungen in großer Flughöhe bei 532 nm in Kap. 5.2 sind zufällig orientierte oblate bzw. prolate Zylinder besser geeignet, da sie Eispartikel darstellen. Das Verhältnis von Durchmesser d zu Länge l der kreiszylinderförmigen Streuer beträgt $d/l < 1$ für prolate und $d/l > 1$ für oblate Zylinder. Hier werden nur prolate Zylinder (Mueller-Matrix `M180.sp` von L. Xu) mit einem Verhältnis von $d/l = 0.5$ und $r_{\text{Eff}} = 1.0160 \mu\text{m}$ und $v_{\text{Eff}} = 0.11$ zum Einsatz kommen. Der komplexe Brechungsindex von Eis beträgt dabei $n_{\text{Br}} = 1.312 + i \cdot 2.553 \cdot 10^{-9}$. Für die Zylinder wird mehr Mehrfachstreuung auftreten als für die Sphäroide (Oppel, 2005), wodurch die Rücksignale zur Windberechnung stärker verfälscht sein werden. Daneben wird bei 532 nm in großer Flughöhe noch eine Mueller-Matrix für Rayleigh-Streuung verwendet, wie sie z. B. nach Hansen und Travis (1974), Gl. (2.14) oder (2.15), definiert ist.

Das Richtungsstreuverhalten in Abhängigkeit von Elevations- und Azimutwinkel (ausgedrückt durch Richtungsstreuintensitäten) aller in dieser Arbeit verwendeten Mueller-Matrizen ist in den Abb. 5.27 (für 532 nm) bzw. 5.28 (für 355 nm; siehe weiter unten) dargestellt. Die zugehörigen Phasenfunktionen zeigt Abb. 5.26 (Definitionen (un)polarisierter Phasenfunktionen siehe Gl. (2.27) bis (2.29); als Intensitätswerte werden immer die linken oberen Einträge m_{11} einer Mueller-Matrix genommen).

⁴ Die pro Richtung emittierte Pulsenergie kann nachträglich bei der Auswertung der Rückstreubilder noch reduziert oder erhöht werden. Ein Wert von 0.5 mJ ist aber in klarer Luft meist nötig, um genügend rückgestreute Photonen zu empfangen und damit das Rauschen ausreichend niedrig zu halten.

Die im Receiver empfangenen rückgestreuten Intensitäten bzw. Photonen werden anschließend entsprechend ihrer Laser-Emissionsrichtungen zu Bildern zusammengefügt, die den eingelesenen Extinktionsprofilen von Abb. 5.1 ähneln. Dadurch entstehen die Bilder normierter Intensitäten der Abb. 5.4(a) und 5.4(b) nach Gl. (2.85), sowie die Bilder normierter Photonenzahlen der Abb. 5.4(c) und 5.4(d) nach Gl. (2.86). Die durch die verkürzte Messdistanz erhöhten Rückstreuintensitäten bzw. Photonenzahlen (beide als reelle Werte) zum Zeitpunkt t_2 erfordern einen Korrekturfaktor von $(236.25/251.25)^2$, der die Werte der zweiten Bilder auf das Niveau der ersten Bilder reduziert, um eine äquivalente Masse zu Zeiten t_1 und t_2 für die Auswertelgorithmen zur Verfügung zu haben. Der Faktor orientiert sich dabei an der quadratischen Zunahme der rückgestreuten Intensität mit abnehmender Messdistanz in der Lidargleichung. In der Realität muss also zum Zeitpunkt t_2 eine entsprechend obigen Korrekturfaktors im Vergleich zu t_1 reduzierte Menge an Photonen in die einzelnen Messrichtungen emittiert werden.

Um die normierten Photonenzahlen der Bilder auf PE- bzw. LT-Zahlen umzurechnen, wie sie auf einem echten Photodetektor vorkommen⁵, müssen eine Reihe von Größen berücksichtigt werden.

Zunächst muss bei Messungen während des Tages zu den Photonenzahlen die SHG addiert werden. Sie kann hier, anders als beim FI-DWL in Hirschberger und Ehret (2011), nicht vernachlässigt werden, da man bei jeder einzelnen Blickrichtung nur einen einzelnen Pixelwert hat und nicht wie beim CCD des FI-DWL eine Vielzahl an Pixeln, auf die die solaren Photonen verteilt würden. Das Programm `libRadtran` (Mayer und Kylling, 2005) lieferte hier eine maximale solare Photonenzahl von $n \approx 51$ pro Messrichtung (Pixel) bei einer Flughöhe von 500 m und $\lambda = 532$ nm. Diese wurde wie folgt berechnet: Für die vom Sonnenfilter abgeschwächte SHG auf dem Photodetektor gilt die Formel

$$P_{\text{backgr}}(\lambda) = L_{\text{atmo}}(\lambda) A_r \pi (0.5\Theta)^2 B_{\text{eff}}(\lambda) \tau_f \tau_t, \quad (5.2)$$

mit der Atmosphärenstrahlung L_{atmo} [W/(m² nm sr)] für die mit `libRadtran` berechneten spezifischen Wellenlängen λ , der Teleskopfläche $A_r \approx 0.0078$ m² (Receiver-Radius von 0.05 m), dem EFOV (voller Winkel) von $\Theta = 0.5$ mrad, dem Teleskop-Transmissionsfaktor $\tau_t = 0.15$ (Lidar-Konstante ohne Sonnenfilter) und dem Produkt $B_{\text{eff}}(\lambda) \tau_f$ (Maximalwert von $\alpha_f = 0.60$ bei 532 nm bzw. später 355 nm, siehe unten) eines Filters und seines Transmissionsfaktors. Für das kurze MZI beträgt die Energie $\Delta E(\lambda) = P_{\text{backgr}}(\lambda) \Delta t = n E_{\text{ph}}$, mit einer Photonenzahl $n(\lambda)$ und der Energie eines einzelnen Photons $E_{\text{ph}}(\lambda) = hc \lambda^{-1}$ mit Planck'schem Wirkungsquantum h , Lichtgeschwindigkeit c und verschiedenen, verteilten λ -Werten. Für ein **Fabry-Pérot-Etalon(FPE)**-Sonnenfilter kann eine Lorentz-Funktion als Approximation zur Darstellung einer Filterfunktion für einen einzelnen Etalon-Fringe mit der Filtertransmission

$$I_{\text{T,f}}(\lambda) = \alpha_f \left(1 + \frac{\lambda - \lambda_c}{0.5 \Delta \lambda} \right)^{-1} \in (0, \dots, \alpha_f] \quad (5.3)$$

verwendet werden (Flesia und Korb, 1999, Ehret et al., 2008), wobei α_f die angenommene Höchsttransmission (engl. *peak transmission*) des Filters, $\lambda_c = 354.7$ nm die zentrale Wellenlänge und $\Delta \lambda$ die **FWHM** (Full Width at Half Maximum) des Filters ist. Für obige Berechnungen mit den Gl. (5.2) und (5.3) wurden zudem $\Delta t = 8.33 \cdot 10^{-9}$ s für ein MZI von 2.5 m, zentrale Wellenlänge $\lambda_c = 532$ nm und FWHM des Filters von $\Delta \lambda = 0.2$ nm bei Höchsttransmission $\alpha_f = 0.60$ als Parameter verwendet. Da hier ein Worst-Case-Szenario simuliert wurde, dürften $n_{\text{solar}} = 20$ (statt 51) Photonen bei 2.5 m Messschichttiefe als konstantem Rauschterm ausreichend sein, d. h. jeweils 20 solare Photonen werden hier pro Richtung zur Zahl n_{laser} der rückgestreuten Laser-Photonen addiert.

Wie in Gl. (B.5) für das FI-DWL können durch ZZen Photonenrauschen und das Ausleserauschen des Detektors hinzugefügt werden, so dass für die Zahl der LT auf dem Photodetektor insgesamt

$$n_{\text{C},i,j} = \text{RN}_{\text{Poi},i,j} + \text{RN}_{\mathcal{N},i,j} \quad (5.4)$$

⁵ Ungleich der PE-Zahl von Gl. (2.84), die nur eine grobe Abschätzung ohne Rauschterm liefert.

5. Simulationen der Signale eines Rückstreulidars zur Messung des transversalen Windes von Wirbelschleppen vor Flugzeugen

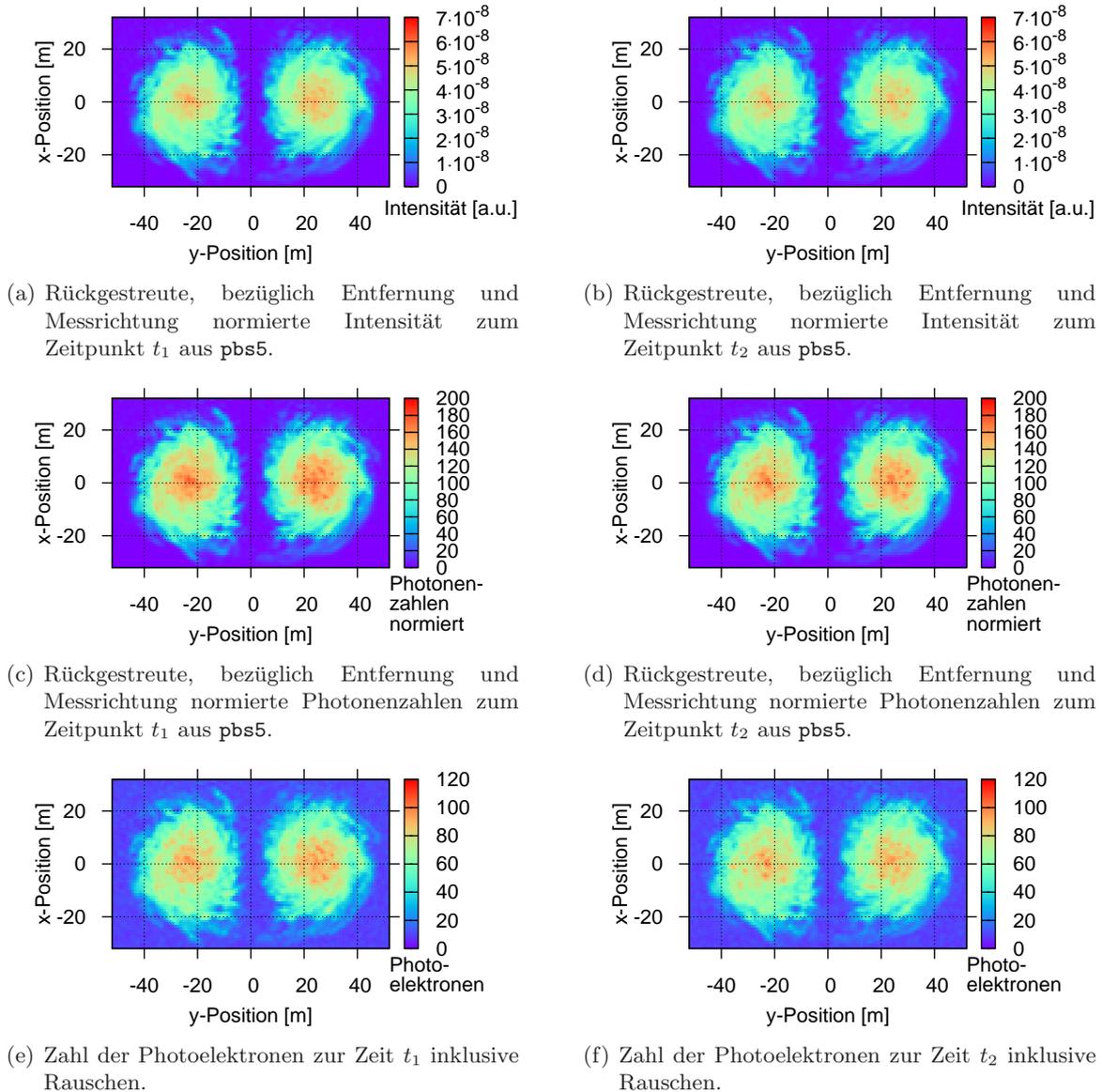


Abbildung 5.4: **Rückstreuprofile aus pbs5-Simulationen:** links jeweils die Bilder zum Zeitpunkt t_1 , rechts die Bilder zum Zeitpunkt t_2 . Während die Intensität und Photonenzahl noch kein Rauschen außer der Monte-Carlo-Varianz beinhalten, enthalten die Bilder der PE-Zahl bereits das SHG sowie Photon- und Detektorauslese-Rauschen.

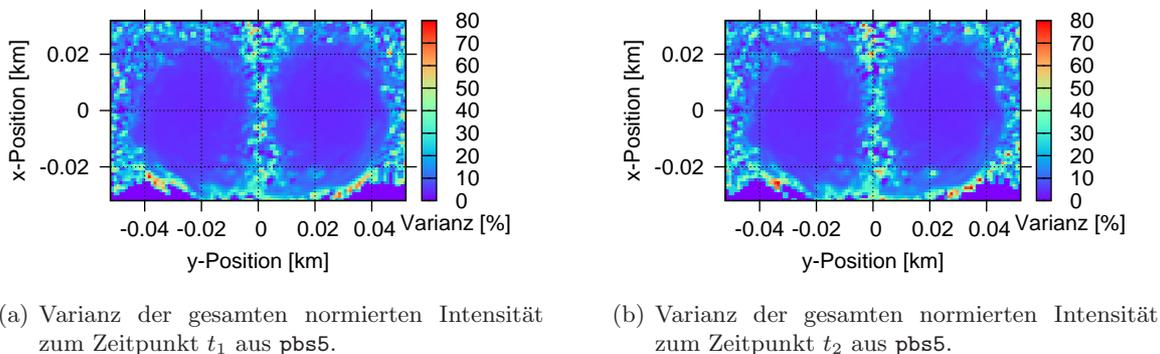


Abbildung 5.5: Monte-Carlo-Varianzen der rückgestreuten Intensitäten aus pbs5-Simulationen zum Zeitpunkt t_1 (links) und zum Zeitpunkt t_2 (rechts).

für alle Richtungen θ_i und φ_j gilt. Dabei seien wieder $\text{RN}_{\text{Poi},i,j} \in \mathbb{N}_0$ die Zahl der LT inklusive Photonenrauschen nach Gl. (B.3) (mit $n_{\text{sg},i,j} = \eta_{\text{rec}} \cdot (n_{\text{laser},i,j} + n_{\text{solar},i,j}) \quad \forall i, j$ nach Gl. (B.2), wobei η_{rec} die Quanteneffizienz zur Umwandlung von Photonen in PE ist; hier sei $\eta_{\text{rec}} = 0.50$) und $\text{RN}_{\mathcal{N},i,j} \in \mathbb{Z}$ die LT des Ausleserauschens nach Gl. (B.4). Als Parameter der Normalverteilung für das Ausleserauschen wurden hier $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ verwendet. Die Lidar-Konstante von $k_{\text{Lidar}} = 0.15$ ist in den Photonenzahlen n_{laser} und n_{solar} schon eingerechnet. Werte von $n_{\text{C},i,j} < 0$ werden gleich 0 gesetzt. Die resultierenden Bilder der PE-Verteilungen sind in den Abb. 5.4(e) und 5.4(f) dargestellt.

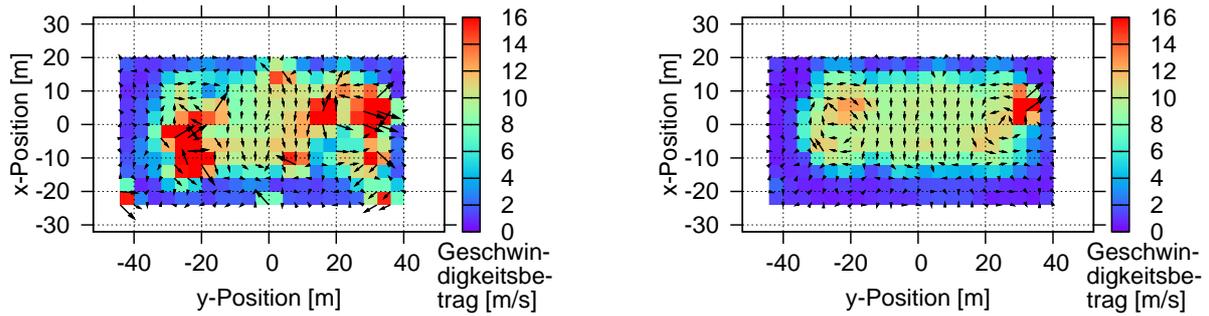
Die Varianzen der pbs5-Simulation nach Gl. (2.94) aufgrund endlicher Anzahl an simulierten Photonenpfaden (2 Millionen pro Richtung) zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 sind in den Abb. 5.5(a) und 5.5(b) gezeigt. Die Varianzen halten sich v. a. in den zentralen Wirbelbereichen, also da, wo viel (Rück-)Streuung auftritt, in Grenzen; nur am Rand sind sie teilweise sehr hoch. Die Dauer für eine pbs5-Simulation in 6825 Messrichtungen betrug mit einem 2.5 GHz Prozessor ca. 3 Stunden.

Zur Signalanalyse mit dem KK-Algorithmus von Kap. 4.1.3 werden jeweils die Intensitäten von Abb. 5.4(a) und 5.4(b) oder die PE-Zahlen von Abb. 5.4(e) und 5.4(f) miteinander verglichen. Weiter unten wird obige Analyse auch noch bei höherer Auflösung (0.5 m statt 1 m) und mit der WSh-Methode von Kap. 4.1.4 anstelle der KK durchgeführt werden. Die hier verwendeten Algorithmen zur Windfeldbestimmung basieren also im Wesentlichen auf dem Suchen bester Übereinstimmungen zwischen einem gewählten RTP von Bild 1 zu t_1 und einer Zahl ebensogroßer Tp-Ausschnitte in einem bestimmten Bereich von Bild 2 zu t_2 . Für KK wurden bei den Bildern mit 105×65 Pixeln und 1 m Auflösung 8×8 Pixel umfassende RTP auf einer 16×16 Pixel umfassenden Suchregion verwendet.

Abbildung 5.6 zeigt mittels KK aus den Rückstreubildern rekonstruierte Windfelder, berechnet aus den PE-Zahlen inklusive Rauschen (links; Abb. 5.6(a)) sowie aus den pbs5-Intensitäten (rechts; Abb. 5.6(b)). Während die Shifts aus Intensitäten noch ein zumeist relativ sauber rekonstruiertes Windfeld zeigen, enthält das Windfeld aus PE mit Rauschen viele grobe Ausreißer hinsichtlich Geschwindigkeit (v. a. rote Punkte für hier zu lange Vektoren) und Pfeilrichtung. Die zum Teil starken Abweichungen liegen in beiden Fällen an der zu geringen Anzahl an Pixeln an den und um die Wirbelkerne, wodurch die Suchprozedur mit KK dort deutlich an Präzision verliert. Dies spiegelt sich auch in den relativen Differenzen wieder. Abbildung 5.7 vergleicht die relativen Differenzen von eingelesenem Windprofil aus Abb. 5.2(a) und dem aus PE-Bildern mit KK rekonstruierten Windfeld aus Abb. 5.6(a) bezüglich ihrer Längen- bzw. Geschwindigkeitsbetragsfehler (links; Abb. 5.7(a)) und ihrer Richtungsfehler (rechts; Abb. 5.7(b)). Hierbei bedeutet ein positiver Wert beim Längenfehler, dass die rekonstruierten Windvektoren im Vergleich zu den vorgegebenen zu lange sind. Die Abb. 5.7(c) und 5.7(d) zeigen die Längen- und Richtungsfehler zwischen eingelesenem Windfeld aus Abb. 5.2(a) und dem aus Intensitäten mit KK rekonstruierten Windfeld aus Abb. 5.6(b). Der negative Effekt des Rauschens zeigt sich deutlich in den erhöhten Fehlern der oberen Abb. 5.7(a) und 5.7(b) im Vergleich zu den unteren Abb. 5.7(c) und 5.7(d).

Da aber bei der Rekonstruktion des vorgegebenen Windfeldes aus den eingelesenen Extinktionsprofilen mittels KK (Abb. 5.2) Fehler auftraten (siehe Abb. 5.3), müssen diese subtrahiert werden, um die eigentlich durch die geringe Rückstreuung und das Rauschen verursachten Fehler bezüglich Länge und Richtung zu erhalten. Es werden also in Abb. 5.8 die relativen Differenzen zwischen dem mit KK berechneten Windfeld aus PE-Zahlen (oben) oder Intensitäten (unten) von dem aus den eingelesenen Extinktionsprofilen mit KK rekonstruierten Windfeld dargestellt, und zwar wieder bezüglich ihrer Vektorlängen (links; Abb. 5.8(a) bzw. 5.8(c)) sowie Vektorrichtungen (rechts; Abb. 5.8(b) bzw. 5.8(d)). Die unteren Abbildungen zeigen für die berechneten Intensitäten einen stark verringerten Fehler im Vergleich zu denen von Abb. 5.7. Auch für die PE sind die Fehler in Abb. 5.8 etwas geringer als in Abb. 5.7. Dennoch ist das Ergebnis wenig zufriedenstellend, da sehr viele Vektoren in den verrauschten Rückstreubildern unzureichend rekonstruiert werden.

Abhilfe schafft hier eine Erhöhung der Zahl der Messrichtungen und damit der Auflösung um einen Faktor 2 von bisher 1 m auf 0.5 m je Achse. Man hat auf diese Weise $193 \times 129 = 24897$ anstelle



(a) Mit Kreuzkorrelation aus den Photoelektronenzahlen (mit Rauschen) rekonstruiertes Windfeld: Absolutgeschwindigkeiten mit Richtungen von t_1 nach t_2 . (b) Mit Kreuzkorrelation aus den Intensitäten der pbs5-Simulationen rekonstruiertes Windfeld: Absolutgeschwindigkeiten mit Richtungen von t_1 nach t_2 .

Abbildung 5.6: Rekonstruktion des Windfeldes mittels Kreuzkorrelation aus Photoelektronenzahlen mit Rauschen (links) und aus pbs5-Intensitäten ohne Rauschen (rechts).

von $105 \times 65 = 6825$ Pixeln in den Extinktionsprofilen (Abb. 5.9), wobei die Zahl der y -Positionen von eigentlich 209 auf 193 aufgrund der vergrößerten Tp-Struktur (nun 16×16 Pixel große RTP, die auf 32×32 Pixel großen Quadratflächen gesucht werden) und der anschließenden Fehleranalyse reduziert werden musste. Die zusätzlich geschaffenen Pixelwerte wurden durch Interpolation aneinander angrenzender Werte in den Extinktionsprofilen von Abb. 5.1 erzeugt, so dass ein kontinuierlicherer Übergang als bisher entsteht. Die nachfolgenden Abb. 5.9 bis 5.15 entsprechen dann den Abb. 5.1 bis 5.4 und 5.6 bis 5.8, nur für erhöhte Auflösung von 0.5 m anstelle von 1 m. Abschließend zeigt Abb. 5.16 das mit KK aus den PE-Zahlen rekonstruierte Windfeld von Abb. 5.13(a) (links; Abb. 5.16(a)), sowie das mit KK aus den pbs5-Intensitäten rekonstruierte Windfeld von Abb. 5.13(b) (rechts; Abb. 5.16(b)), jedoch jeweils ohne Windvektoren, deren Länge und Richtung um mehr als $5.0 \frac{m}{s}$ und 0.8 rad vom vorgegebenen MGLT-Windfeld abweicht. Im Hintergrund sind die zugehörigen PE-Zahlen bzw. Intensitäten zum Zeitpunkt t_2 gezeigt.

Durch Verdoppelung der Auflösung erhöht sich die pbs5-Simulationsdauer von ca. 3 Stunden um einen Faktor 4 auf etwa 11-12 Stunden. Jedoch sind signifikante Verbesserungen in jeglicher Hinsicht zu erkennen. Es gibt nur noch sehr wenige Ausreißer hinsichtlich Länge und Richtung der mit KK rekonstruierten Windvektoren. Die Gesamtzahl der potentiellen Windvektoren in den relevanten Bereichen vervierfacht sich, man hat also einen großen Informationsgewinn. Der wesentliche Nachteil ist, dass die Verbesserungen mit einer vierfach höheren notwendigen Energie einhergehen. Außerdem müssen in der Realität viermal mehr Richtungen (nahezu) zeitgleich gescannt werden. Die Berechnungsdauer des Windfeldes mit KK steigt durch hier größere Tp und RTP auf 0.225 s für 960 2D Windvektoren an, würde aber wegen einer Dauer von 0.000234 s pro Einzelvektor in einer Zeitspanne von 0.1 s für absolut ausreichende ca. 420 2D Windvektoren pro Windfeld in Echtzeit reichen.

Abschließend soll noch kurz auf die WSh-Methode anstelle der KK eingegangen werden. Bei hoher Auflösung von 0.5 m bleiben die Rückstreubilder (PE und Intensitäten) gleich (siehe Abb. 5.12), nur die rückgerechneten Windfelder und die Fehler bezüglich Länge und Richtung der Vektoren weisen Unterschiede auf. Bei WSh kommen hier 4×4 Pixel große RTP auf 8×8 Pixel großen Suchregionen zum Einsatz (liefert die besten Ergebnisse). In Abb. 5.17 sind eine Reihe von Vektorfeldern dargestellt: Abb. 5.17(a) zeigt das aus den Extinktionsprofilen von Abb. 5.9 mit WSh rekonstruierte Windfeld entsprechend Abb. 5.10(b) für KK, nur ohne Vektoren, die längen- oder richtungsmäßig um mehr als $5.0 \frac{m}{s}$ oder 0.8 rad abweichen. Es treten in den Windfeldern der Extinktionsprofile v. a. in den Wirbelzentren zum Teil größere Fehler auf. Die anschließende Rückrechnung der pbs5-Intensitäten (entsprechend Abb. 5.13(b) für KK) liefert ein verschwommenes, ungeordnetes Bild von Vektorlängen und Richtungen, siehe Abb. 5.17(b). Jedoch können daraus noch relativ viele brauchbare Vektoren gewonnen werden, wie Abb. 5.17(c) zeigt, wo wieder Vektoren, die längen- oder richtungsmäßig um

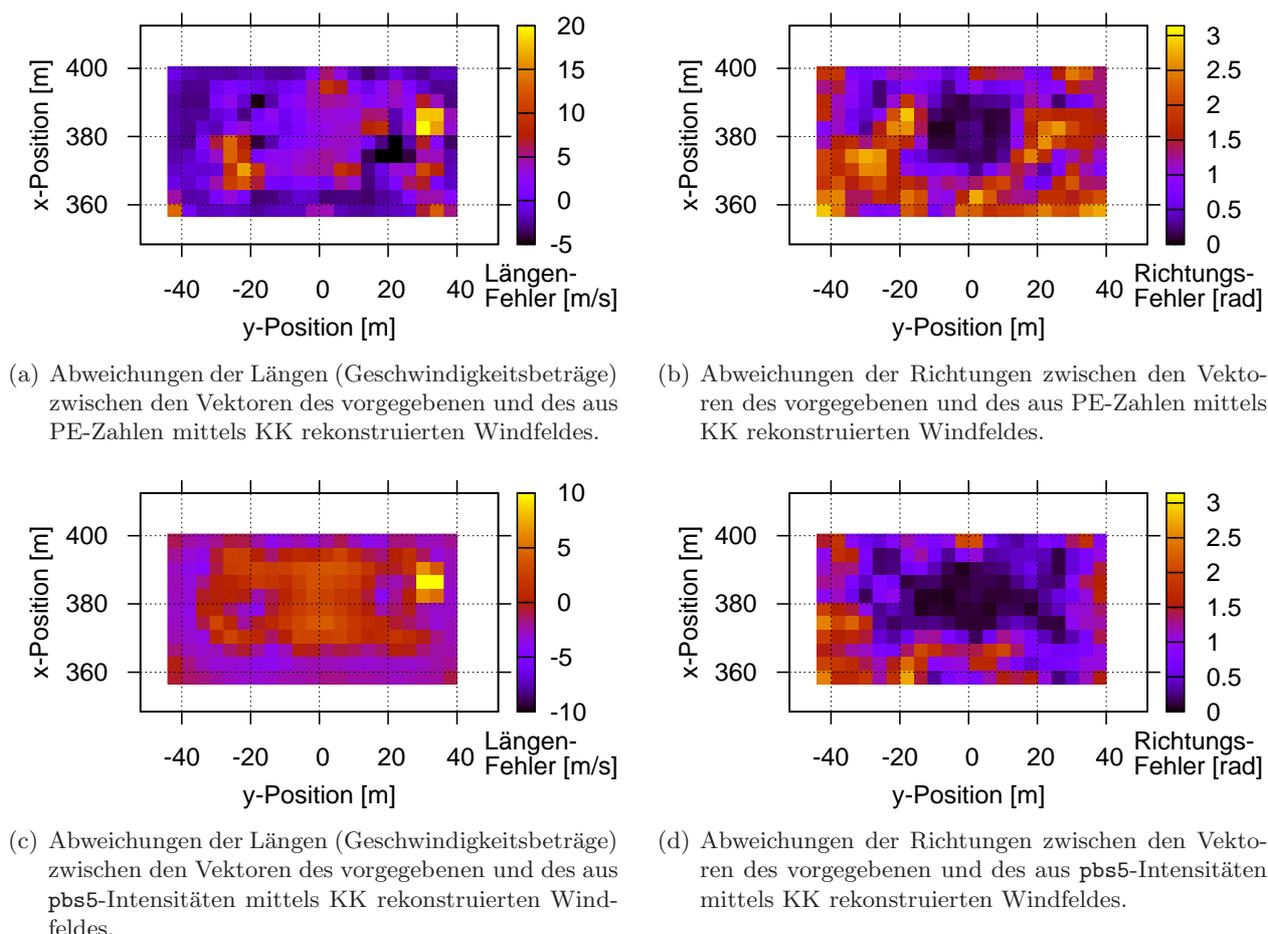


Abbildung 5.7: Relative Abweichungen der Geschwindigkeitsbeträge (oben links; in m/s) zwischen dem optimalen Windfeld aus MGLT und dem mittels KK aus den Photoelektronenzahlen berechneten Windfeld mit zugehörigen relativen Abweichungen der Windrichtungen (oben rechts; in rad). Die unteren Bilder zeigen das Gleiche wie die oberen, nur für pbs5-Intensitäten.

mehr als $5.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ oder 0.8 rad abweichen, entfernt wurden. Anders sieht es bei den PE-Bildern aus, wo Rauschen explizit berücksichtigt wird. Hier gibt es kaum noch annähernd korrekte Windvektoren, was Abb. 5.17(d) verdeutlicht. Die WSh ist deutlich weniger zur Rekonstruktion wirbelförmiger Windfelder geeignet als die KK. Auf eine Darstellung der Fehleranalyse wird hier deswegen verzichtet. Man kann mit WSh aber auf deutlich kleineren Templates und damit schneller teilweise brauchbare Shift-Resultate erzielen.

Insgesamt zeigen die Ergebnisse der Simulationen eines RSL für Windmessungen mittels obigen Beweisprinzips in diesem Fall die Machbarkeit der Detektion der Rotationsbewegung der Wirbel, v. a. mit dem KK-basierten Algorithmus. Die Fehler für die aus den Rückstreuprofilen mit KK rekonstruierten Längen und Richtungen der Windvektoren sind bei hoher Auflösung (193×129 Pixel) v. a. für die Intensitäten recht gering; auch die Vektorrekonstruktion für die PE funktioniert bis auf die Wirbelkern-nahen Bereiche ganz gut, siehe Abb. 5.13, 5.14 und 5.15. Die Zahl der Windvektoren pro Messebene ist bezogen auf die Messanforderungen mehr als ausreichend. Die Windkomponente in Flugrichtung (optische w -Komponente) kann mit dieser Messmethode nicht durch Simulation mit den Auswertalgorithmen bestimmt werden und dürfte im Flug auch nur schwer messbar sein.

Eine Hauptschwierigkeit dieser Art eines RSL dürfte in der Realität die Notwendigkeit vieler hochauflösender Schichtmessungen in sehr kurzen Zeitabständen sein, da die KK-Algorithmen zur Windberechnung nur für extrem kurze Zeitintervalle ($0.05 \leq \Delta t \leq 0.2$ Sekunden in unserem Fall;

5. Simulationen der Signale eines Rückstreulidars zur Messung des transversalen Windes von Wirbelschleppen vor Flugzeugen

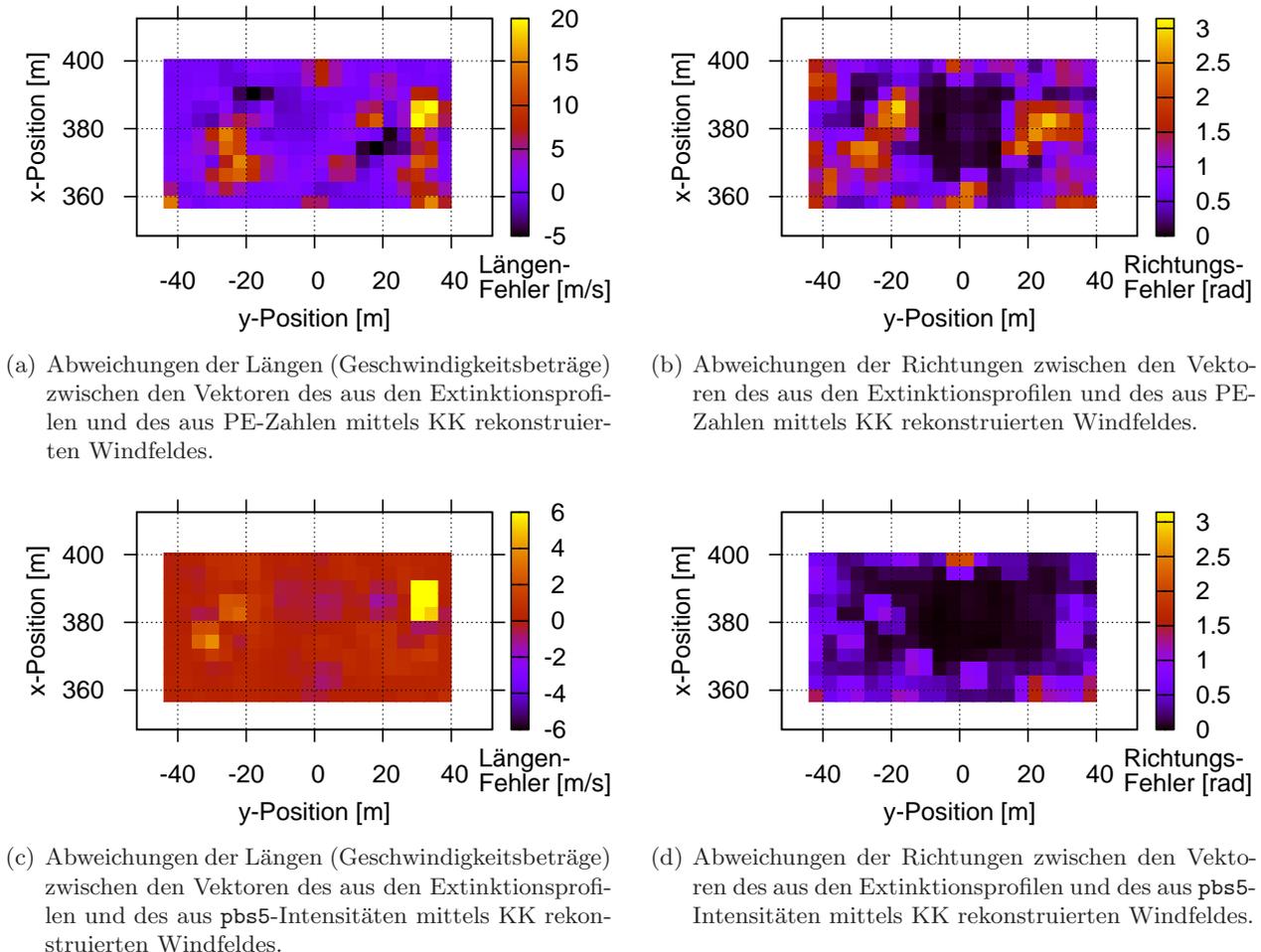


Abbildung 5.8: Relative Abweichungen der mittels KK berechneten Geschwindigkeitsbeträge (oben links; in m/s) zwischen den Windfeldern aus Extinktionsprofilen und den Windfeldern aus Photoelektronenzahlen mit zugehörigen relativen Abweichungen der Windrichtungen (oben rechts; in rad). Die unteren Bilder zeigen das Gleiche wie die oberen, nur für pbs5-Intensitäten.

siehe auch PIV) zwischen zwei Bildern geeignet sind. Dies deckt sich aber auch mit den Messanforderungen (möglichst 10 Hz, also 20 Messungen pro Sekunde). Auch wenn die Bewegung der Streuer für derart kleine Δt kaum sichtbar ist, können die KK- und WSh-Algorithmen sie detektieren; Rauschen beliebiger Form während der Messung sorgt aber zum Teil für große Berechnungsfehler.

Eine räumliche Auflösung von 0.5 m (d. h. 193×129 Pixel) ist mindestens notwendig, um die Rotationseigenschaft der Wirbel detektieren zu können. Dies zeigen auch die eher schlechten Ergebnisse bei 1 m (105×65 Pixel) von oben. In PIV-Labormessungen und unter geeigneteren Messgeometrien als der hier notwendigen sind gewöhnlich Streuverteilungen weitaus höherer Auflösungen auf ICCD-Kameras in Echtzeit messbar (Raffel et al., 2007).

Simulationen für kürzere Messdistanzen (z. B. 120 m zu t_1 und 110 m zu $t_2 = t_1 + 0.1$ s bei einer angenommenen Fluggeschwindigkeit von $v_{A/C} = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$) ergaben bei Tag keine Verbesserungen, da durch Vergrößerung der Winkel das MZI entsprechend verkürzt werden muss (bei 1 m transversaler Auflösung der Messschichten auf 2 m zentraler Messtiefe und bei 0.5 m Auflösung auf 1 m Messtiefe), wodurch weniger rückgestreute Photonen im Receiver ankommen. Schlimmer ist aber die notwendige Vergrößerung des RFOV und des EFOV, durch die zwar einerseits wegen kürzerer Messdistanz um einen quadratischen Faktor mehr Photonen eingefangen werden (hier im Vergleich zu 235 m bzw. 250 m Messentfernung etwa viermal so viele), dafür aber tagsüber auch entsprechend mehr solare Photonen, was den Vorteil der verkürzten Distanz wieder zunichtemacht.

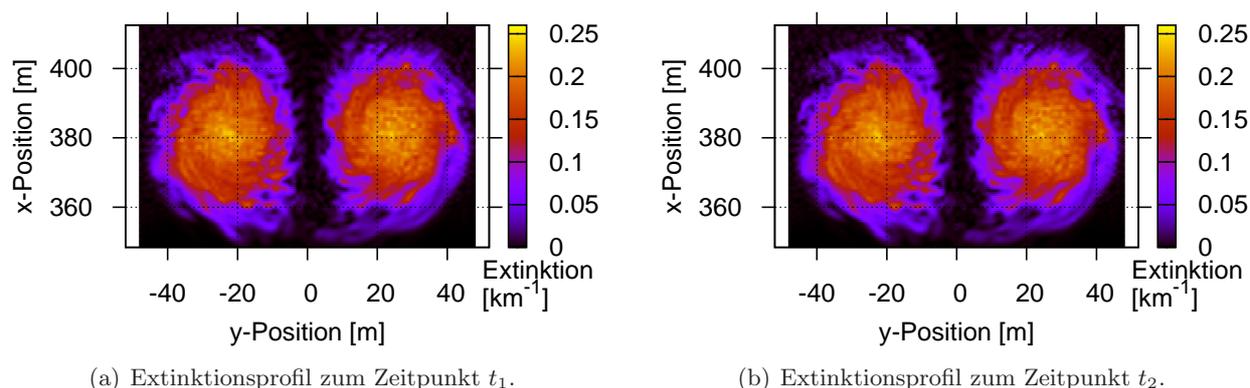


Abbildung 5.9: Extinktionsprofile zu Zeitpunkten t_1 und $t_2 = t_1 + 0.1$ s in 500 m Flughöhe und bei $\lambda = 532$ nm für eine einzelne Schicht bei *erhöhter räumlicher Auflösung* von 0.5 m, d. h. 193×129 Pixeln. Unterschiede sind höchstens in den dunkelgelben Zentren der Wirbelverteilungen sichtbar.

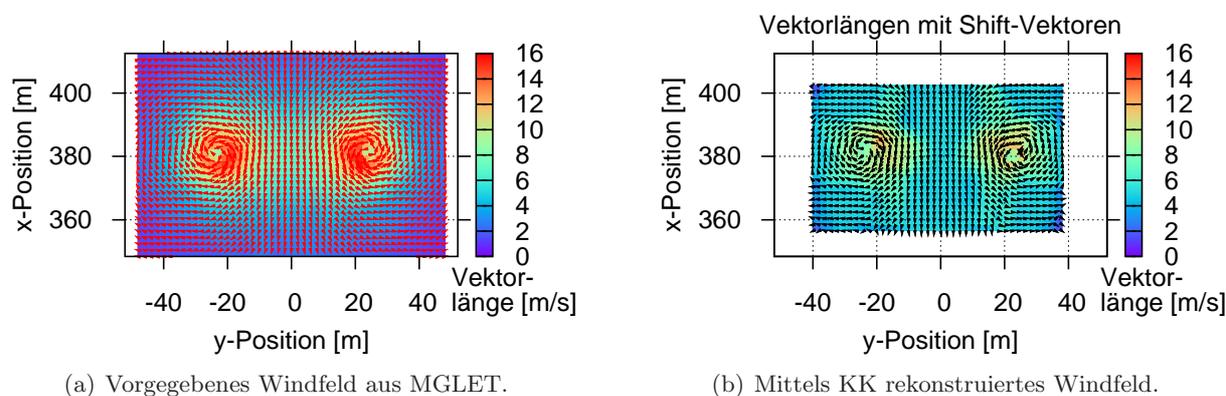


Abbildung 5.10: u - und v -Komponenten des vorgegebenen (links) und des aus den Extinktionsprofilen von Abb. 5.9 mittels KK rekonstruierten (rechts) Windfeldes bei 0.5 m transversaler Auflösung.

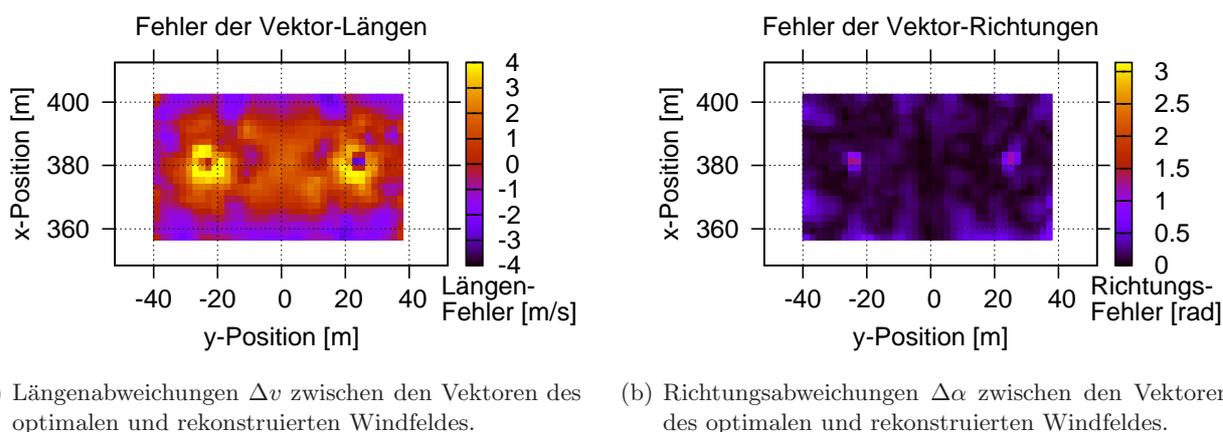


Abbildung 5.11: Relative Abweichungen der Geschwindigkeitsbeträge (links; in m/s) zwischen dem Windfeld aus MGLET und dem mittels KK aus den Extinktionsprofilen berechneten Windfeld mit zugehörigen relativen Abweichungen der Windrichtungen (rechts; in rad) bei 0.5 m transversaler Auflösung.

5. Simulationen der Signale eines Rückstreulidars zur Messung des transversalen Windes von Wirbelschleppen vor Flugzeugen

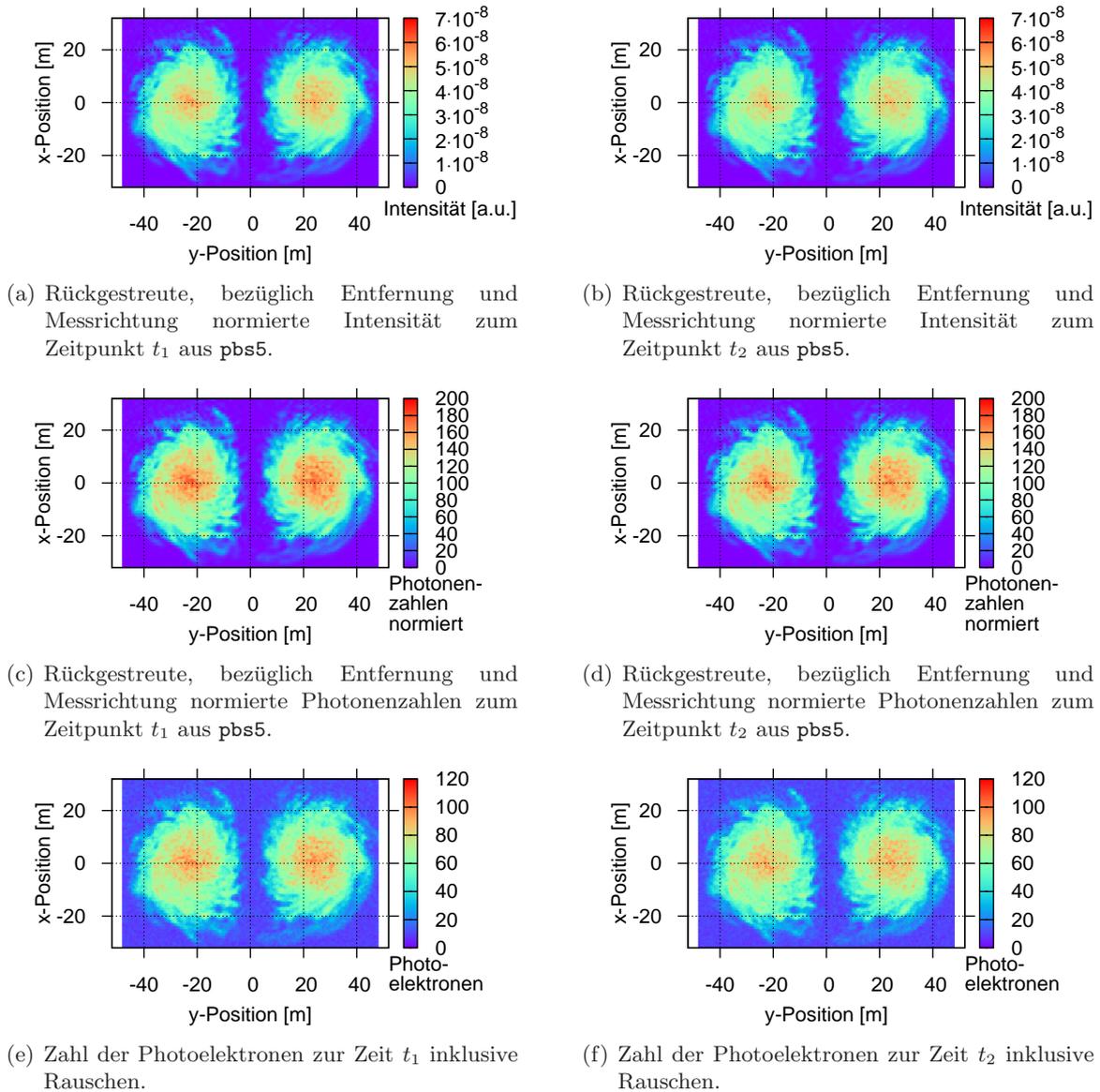


Abbildung 5.12: Rückstreuprofile aus pbs5 genau wie in Abb. 5.4, aber mit 0.5 m transversaler Auflösung.

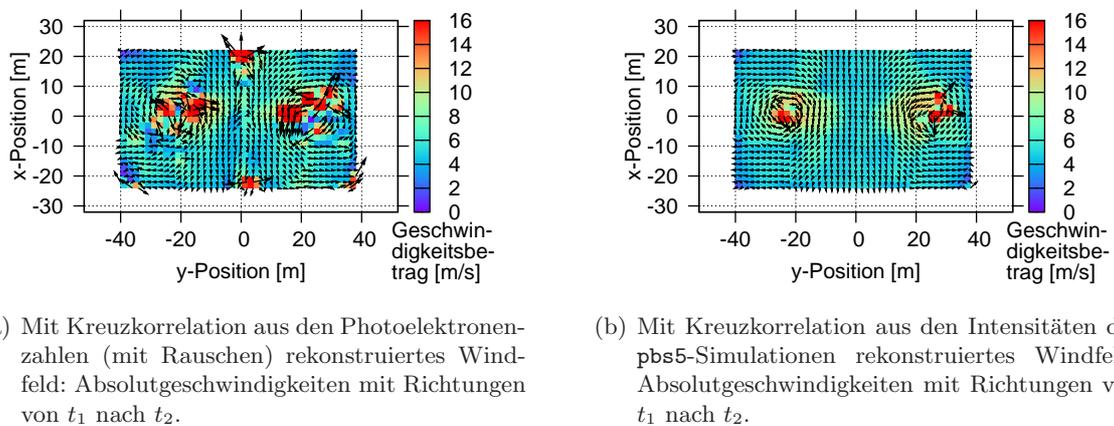


Abbildung 5.13: Rekonstruktion des Windfeldes wie in Abb. 5.6, aber mit 0.5 m transversaler Auflösung.

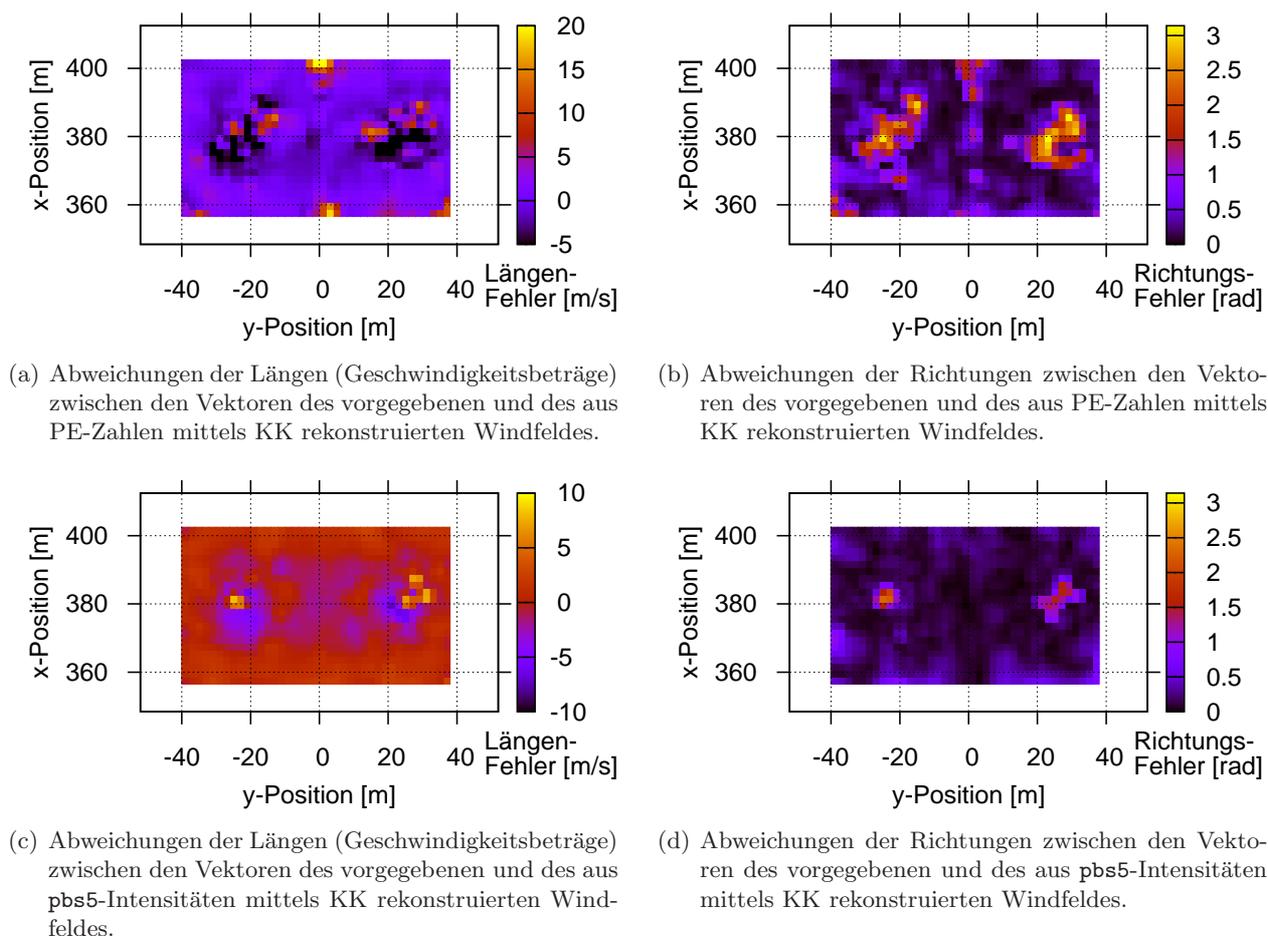


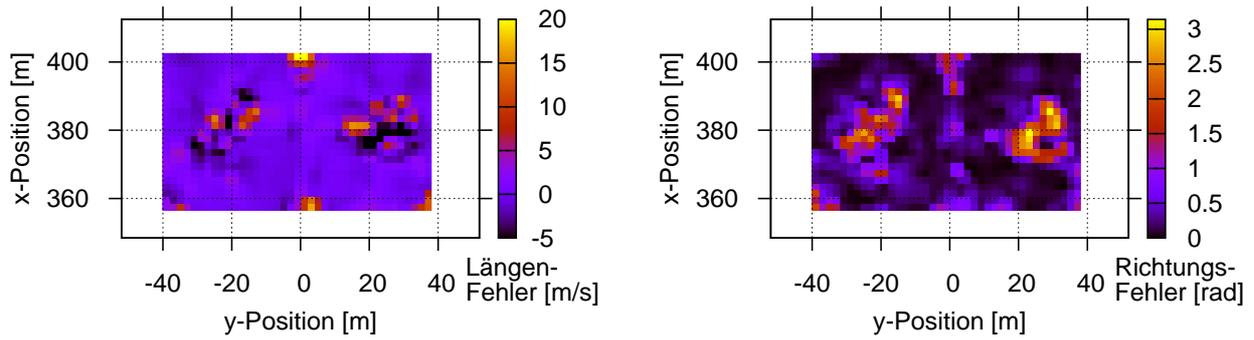
Abbildung 5.14: Relative Abweichungen der Geschwindigkeitsbeträge (oben links; in m/s) zwischen dem Windfeld aus MGLET und dem mit KK aus PE-Zahlen berechneten Windfeld mit zugehörigen relativen Abweichungen der Windrichtungen (oben rechts; in rad) bei 0.5 m transversaler Auflösung. Die unteren Bilder zeigen das Gleiche wie die oberen, nur für pbs5-Intensitäten.

Bei Nacht oder ohne Sonne hätte eine kürzere Messdistanz aber einen Vorteil, da keine SHG vorhanden wäre und damit das **Signal-zu-Rauschen-Verhältnis (SNR)** größer würde. Dann zeigen sich auch in Simulationen für ein EFOV von 0.5 mrad und ein Semi-RFOV von 1 mrad Vorteile gegenüber Messungen in größerer Distanz, siehe Abb. 5.18(a) für 1 m transversale Auflösung. Die Zahl mit pbs5 simulierter Photonenpfade wurde von 2 auf 3 Millionen erhöht, um durch die Verkürzung des MZI von 2.5 m auf 2 m keine erhöhte Varianz zu erhalten. Während die Ergebnisse für das Windfeld aus den rückgestreuten Intensitäten zwischen verkürzter (110 m und 120 m) und normaler Messdistanz (235 m und 250 m) sich gemäß der Abb. 5.18(b) und 5.6(b) kaum unterscheiden, ist der Vorteil für die aus den PE-Zahlen rekonstruierten Windfelder für kurze Messdistanz bei Nacht (Abb. 5.18(a)) im Vergleich zu normaler Messdistanz bei Tag/Sonne (Abb. 5.6(a)) deutlich sichtbar.

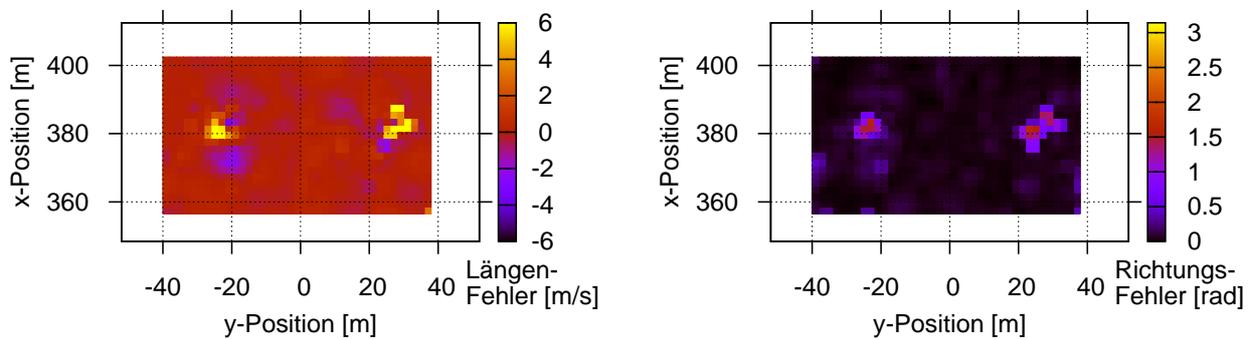
Alle Parameter der Messgeometrie sowie Laser- und Detektoreigenschaften wie EFOV, RFOV oder Messdistanz sind in allen hier gezeigten Simulationen und ihren Ergebnissen bis zu einem gewissen Grad schon optimiert bzw. möglichst realitätsnah gewählt. Der Receiver z. B. sollte möglichst klein sein, was er bei einem Radius von $r_R = 0.05$ m auch ist.

In den folgenden Abschnitten 5.2 bis 5.4 werden wir nacheinander mit der gleichen Vorgehensweise wie in diesem Kap. 5.1 mittels KK die Windfelder aus Rückstreuverteilungen in ca. 8500 m Flughöhe bei $\lambda = 532$ nm Laserwellenlänge und in 500 m sowie ca. 8500 m Flughöhe bei $\lambda = 355$ nm Laserwellenlänge rekonstruieren, um zu untersuchen, ob auch in großer Flughöhe und für eine au-

5. Simulationen der Signale eines Rückstreulidars zur Messung des transversalen Windes von Wirbelschleppen vor Flugzeugen

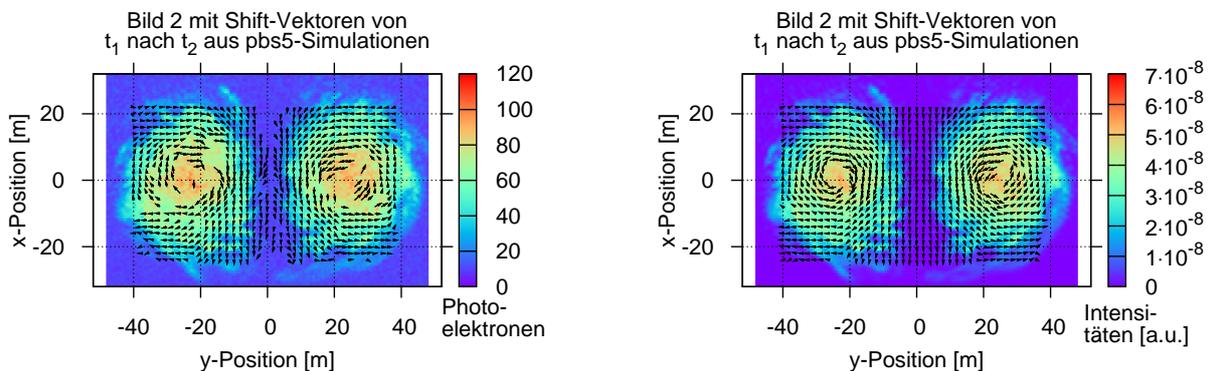


(a) Abweichungen der Längen (Geschwindigkeitsbeträge) zwischen den Vektoren des aus den Extinktionsprofilen und des aus PE-Zahlen mittels KK rekonstruierten Windfeldes. (b) Abweichungen der Richtungen zwischen den Vektoren des aus den Extinktionsprofilen und des aus PE-Zahlen mittels KK rekonstruierten Windfeldes.



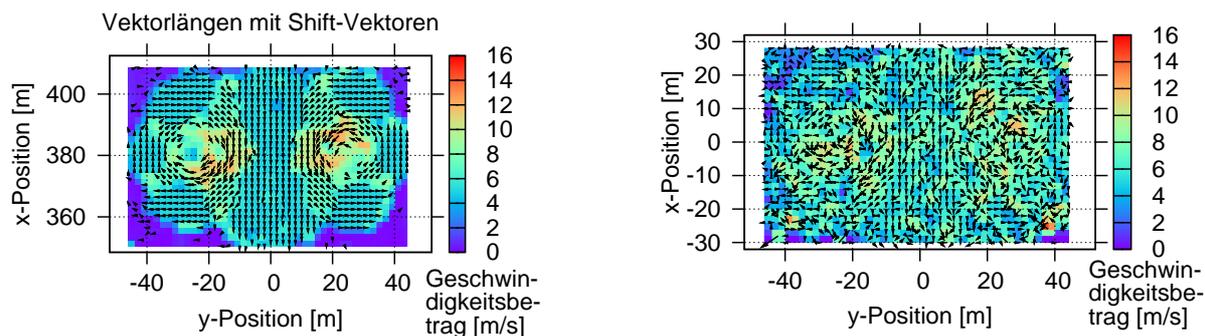
(c) Abweichungen der Längen (Geschwindigkeitsbeträge) zwischen den Vektoren des aus den Extinktionsprofilen und des aus pbs5-Intensitäten mittels KK rekonstruierten Windfeldes. (d) Abweichungen der Richtungen zwischen den Vektoren des aus den Extinktionsprofilen und des aus pbs5-Intensitäten mittels KK rekonstruierten Windfeldes.

Abbildung 5.15: Relative Abweichungen der mit KK berechneten Geschwindigkeitsbeträge (oben links; in m/s) zwischen den Windfeldern aus Extinktionsprofilen und denen aus PE-Zahlen mit zugehörigen relativen Abweichungen der Windrichtungen (oben rechts; in rad) bei 0.5 m transversaler Auflösung. Die unteren Bilder zeigen das Gleiche wie die oberen, nur für pbs5-Intensitäten.

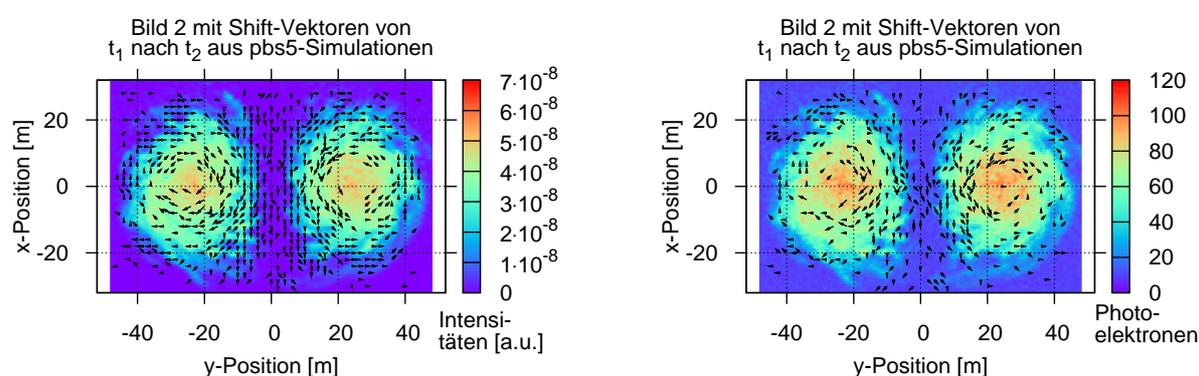


(a) Mittels Kreuzkorrelation aus den Photoelektronenzahlen (mit Rauschen) rekonstruiertes Windfeld. (b) Mittels Kreuzkorrelation aus den Intensitäten der pbs5-Simulationen rekonstruiertes Windfeld.

Abbildung 5.16: Rekonstruktion des Windfeldes aus PE-Zahlen mit Rauschen (links) und aus pbs5-Intensitäten ohne Rauschen (rechts) bei 0.5 m räumlicher Auflösung. Zu fehlerhafte Vektoren wurden entfernt.

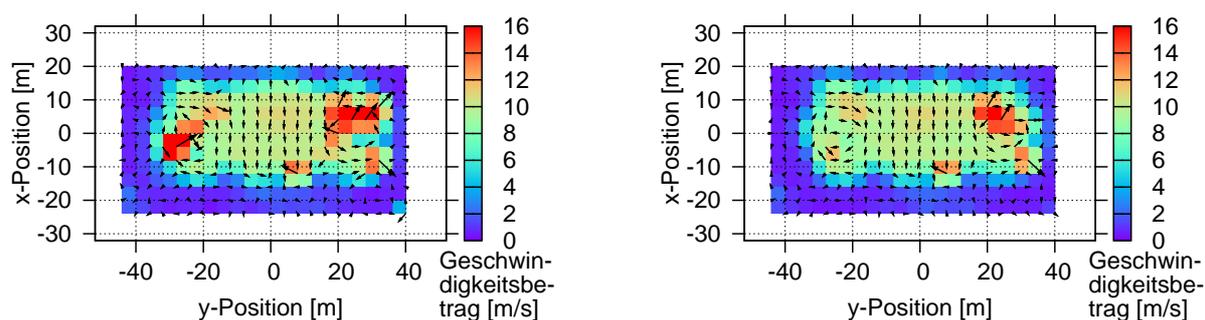


- (a) Mit WSh-Methode aus den eingelesenen Extinktionsprofilen (siehe Abb. 5.9) rekonstruiertes Windfeld.
- (b) Mit WSh-Methode aus pbs5-Intensitäten rekonstruiertes Windfeld: Absolutgeschwindigkeiten mit Richtungen von t_1 nach t_2 .



- (c) Mit WSh-Methode aus pbs5-Intensitäten (ohne Rauschen) rekonstruiertes Windfeld.
- (d) Mit WSh-Methode aus den Photoelektronenzahlen (mit Rauschen) rekonstruiertes Windfeld.

Abbildung 5.17: Rekonstruktion des Windfeldes mit der WSh-Methode aus Extinktionsprofilen (links oben), pbs5-Intensitäten (rechts oben und links unten) und PE-Zahlen mit Rauschen (rechts unten) bei 0.5 m transversaler Auflösung. Vektoren, die vom vorgegebenen Windfeld aus Abb. 5.10(a) um mehr als $5.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und 0.8 rad abweichen, werden jeweils nicht angezeigt (außer in Abb. 5.17(b)).



- (a) Mit KK aus den Photoelektronenzahlen (Rauschen ohne solare Photonen, da bei Nacht) rekonstruiertes Windfeld: Absolutgeschwindigkeiten mit Richtungen von t_1 nach t_2 .
- (b) Mit KK aus den Intensitäten der pbs5-Simulationen rekonstruiertes Windfeld: Absolutgeschwindigkeiten mit Richtungen von t_1 nach t_2 .

Abbildung 5.18: Rekonstruktion des Windfeldes mittels Kreuzkorrelation aus Photoelektronenzahlen mit Rauschen bei Nacht (links) und aus pbs5-Intensitäten ohne Rauschen (rechts). Die transversale räumliche Auflösung war 1 m (wie in Abb. 5.6). Die Messdistanz war hier auf 120 m bei t_1 und 110 m bei t_2 verkürzt, wodurch das EFOV und RFOV entsprechend vergrößert wurde.

gensicherere Wellenlänge akzeptable Messergebnisse zu erwarten sind. Dazu werden die Extinktion und die Streueigenschaften (Mueller-Matrizen) mit der Flughöhe und Wellenlänge variiert.

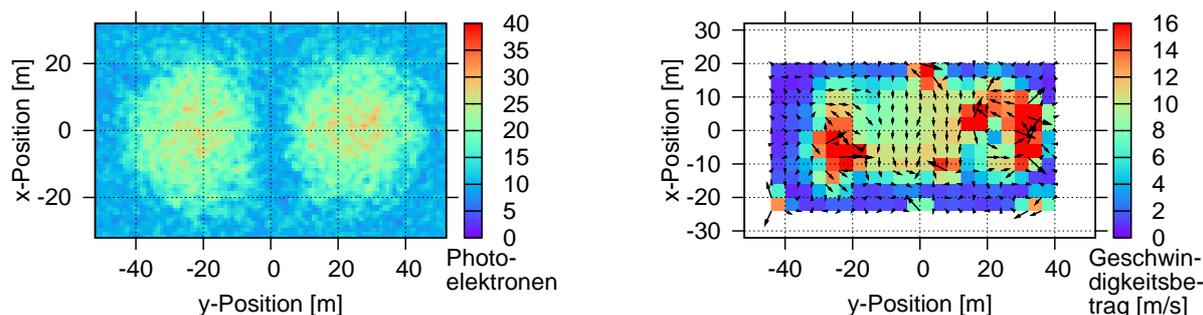
5.2 Rückstreulidar in großer Flughöhe bei 532 nm Wellenlänge

In größerer Flughöhe tritt vermehrt Streuung an Eispartikeln auf. Ihr Streuverhalten wird (wie in Kap. 5.1 erläutert) durch Mueller-Matrizen prolater Zylinder (M180.sp) beschrieben, siehe auch Abb. 5.26(a) und 5.27(b). Bei gleichbleibendem $\lambda = 532$ nm ist in großer Flughöhe das Extinktionsvermögen und damit das Streuvermögen reduziert, vgl. Abb. B.1. Wir betrachten wieder eine Messung bei 1 m transversaler Auflösung in normaler Entfernung (235 m bzw. 250 m) mit den gleichen Parametern wie oben in Kap. 5.1 (Abb. 5.1 bis 5.8), nur eben mit Mueller-Matrix M180.sp und mit mittlerer Extinktion nach Vaughan et al. (1998) von $\alpha(532 \text{ nm}, 8500 \text{ m Höhe}) \approx 0.0055 \text{ km}^{-1}$. Die in pbs5 eingelesenen Extinktionsprofile haben eine maximale Extinktion von 0.0083 km^{-1} , und ihr Mittelwert entspricht etwa 0.005 km^{-1} . Man konnte aus den Simulationen in Bodennähe (Kap. 5.1) bereits abschätzen, dass 200 rückgestreute Photonen in Wirbelkernumgebung (also ca. 100 PE) pro Messrichtung das Minimum darstellen, um unter den Annahmen an das Rauschen akzeptable Ergebnisse für den Wind zu bekommen. Doch selbst bei 25-facher Pulsenergie von $25 \cdot 0.5 \text{ mJ} = 12.5 \text{ mJ}$ pro Messrichtung im Vergleich zu den Simulationen in Bodennähe erhält man hier in 8500 m Höhe maximal völlig unzureichende 50 Photonen (ca. 25-30 PE), was insgesamt stark verrauschte PE-Bilder zu t_1 und t_2 liefert (siehe Abb. 5.19(a) für t_1). Die solare Photonenzahl ist etwa die gleiche wie in 500 m Flughöhe (maximal 54 statt 51; 20 solare Photonen im Mittel angenommen).

Außerdem hat man durch M180.sp mehr Mehrfachstreuung und etwa 5-mal weniger Rückstreuung im Vergleich zu J4.sp. Dies zeigt sich, wenn man das Extinktionsprofil in Bodennähe (Kap. 5.1, Abb. 5.1) mit $\alpha(532 \text{ nm}, 500 \text{ m Höhe}) \approx 30 \cdot \alpha(532 \text{ nm}, 8500 \text{ m Höhe})$ zusammen mit den Mueller-Matrizen M180.sp verwendet. Dann hat man bei normaler Pulsenergie von 0.5 mJ pro Richtung statt vorher maximal ca. 200 Photonen in 500 m Höhe (siehe Abb. 5.4(c) bzw. 5.4(d)) nur noch maximal 40 Photonen. Dies wären dann maximal ca. 25 PE, was indiskutable Ergebnisse liefern würde. Abbildung 5.19(b) zeigt dagegen ein mit KK rekonstruiertes Windfeld bei 5-facher Pulsenergie von 2.5 mJ je Richtung. Die PE-Zahl beträgt in den Bildern dann maximal etwa 120 (nicht gezeigt), doch selbst die erhöhte Pulsenergie reicht hier nicht aus, um gute Ergebnisse zu erzielen. Man würde hier mit einem 10 W Laser gerade mal ein halbes Windfeld pro Sekunde messen, also viel zu wenig gemäß der Messanforderungen von Tab. 1.1. Simulationen mit höherer Auflösung machen hier wenig Sinn, da noch mehr Laserenergie dazu nötig wäre. Dennoch kann die Simulation mit hoher Extinktion einer Messung in 8500 m Höhe in einer dichteren Eiswolke entsprechen. Bei 355 nm Wellenlänge würde man gemäß Abb. B.1 mehr rückgestreute Photonen empfangen (siehe unten).

Eine weitere Simulation untersucht das Rückstreuverhalten und die Windfeld-Rekonstruktion anhand einer Rayleigh-Mueller-Matrix (allgemein bei Hansen und Travis (1974) oder Abb. 5.26(a) und 5.27(c)). Die Extinktion kann als in 8500 m Höhe in klarer Luft realistisch angesehen werden, da sie nur maximal 0.017 km^{-1} (also doppelt so viel wie oben) beträgt. Unter sonst gleichen Messparametern wie oben wird die Varianz durch 8 Millionen simulierte Photonenpfade ausreichend gering gehalten. Die Pulsenergie je Richtung beträgt hier wieder 0.5 mJ. Die Rayleigh-Streumatrix liefert hier bis zu 400 PE (siehe Abb. 5.20(a)), wodurch auch die Auswertung mit KK sehr gute Ergebnisse liefert (siehe Abb. 5.20(b)). Deshalb halten sich auch die Abweichungen in Grenzen: Abb. 5.20(c) zeigt die relativ niedrigen Vektorlängenabweichungen zwischen Windfeld aus Extinktionsprofil und Windfeld aus PE (wie in Abb. 5.8(a)) und Abb. 5.20(d) die zugehörigen Vektorrichtungsabweichungen (wie in Abb. 5.8(b)).

Außerdem wurde noch eine Simulation mit 0.5 m transversaler Auflösung für eine sehr hohe Extinktion von maximal 1.25 km^{-1} , wie sie für Kondensstreifen oder Zirren üblich ist, durchgeführt. Als Mueller-Matrix kommt wieder M180.sp (prolate Zylinder) zum Einsatz.



- (a) Zahl der Photoelektronen zum Zeitpunkt t_1 aus `pbs5` inklusive Rauschen bei 25-facher Pulsenergie von 12.5 mJ pro Messrichtung und mittlerer Extinktion von 0.005 km^{-1} in 8500 m Flughöhe.
- (b) Mit KK aus PE-Zahlen rekonstruiertes Windfeld bei hoher mittlerer Extinktion von 0.15 km^{-1} wie in 500 m Flughöhe, aber Mueller-Matrix `M180.sp` und 5-facher emittierter Pulsenergie von 2.5 mJ: Absolutgeschwindigkeiten mit Richtungen von t_1 nach t_2 .

Abbildung 5.19: Photoelektronenzahl bei geringer Extinktion (links) und rekonstruiertes Windfeld (rechts) bei hoher Extinktion für Mueller-Matrix `M180.sp`.

Vom Institut für Physik der Atmosphäre wurde (zum Teil in Kooperation mit anderen Forschungseinrichtungen) eine Reihe von In-Situ-Messungen der Eigenschaften von Streuteilchen in der Atmosphäre durchgeführt. Unter anderem wurden dabei in den Experimenten SULFUR 1-7 die Eigenschaften von Aerosolpartikeln und der Kondensstreifenbildung aus Flugzeugabgasfahnen untersucht (Schumann et al., 2002). Jedes der In-Situ-Messgeräte kann jeweils nur Teilchen mit einem gewissen minimalen und maximalen Durchmesser erfassen. Daraus kann dann eine Teilchengrößenverteilung in Abhängigkeit vom Durchmesser angegeben werden. Petzold und Schröder (1998) z. B. zeigen einige solche aus Messungen bestimmte Verteilungen für Aerosole aus Flugzeugabgasen.

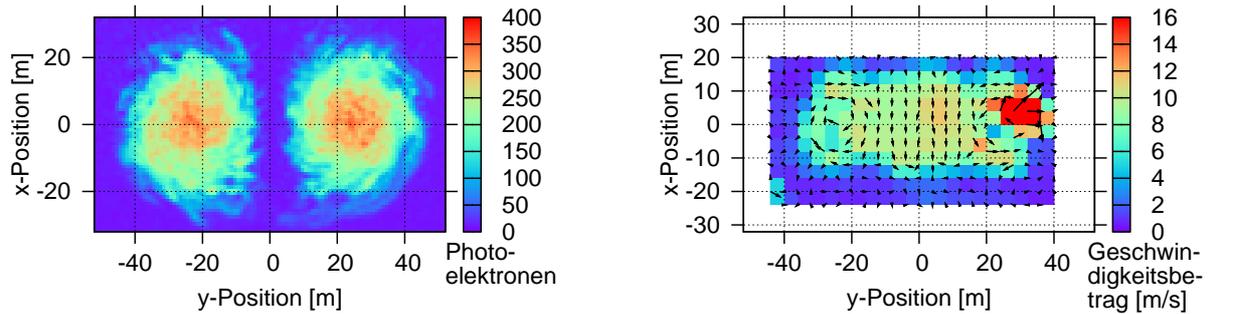
Generell lässt sich feststellen, dass die Durchmesser der Aerosolpartikel aus Flugzeugabgasen je nach emittierendem Flugzeugtyp, Flugbedingungen oder Zeit zwischen Emission und Messung stark variieren. In einer Messung wurde die mittlere Mode von Eiskristallen in jungen Abgasfahnen zu $1 \mu\text{m}$ bestimmt, die Teilchengrößenverteilungen variierten aber zwischen dem Zentrum und den Randbereichen der Abgasfahne stark (Schumann et al., 2002).

Durch neuere In-Situ-Messungen während der CONCERT-Kampagne konnten Extinktion und optische Tiefe von 14 jungen (weniger als 10 Minuten alten) Kondensstreifen 9 verschiedener Flugzeuge ermittelt werden (Voigt et al., 2011). Davon wurden 6 Kondensstreifen in wolkenfreier Luft beobachtet, während alle anderen in dünne Zirruswolken eingebettet waren. Die Kondensstreifen wurden bei Temperaturen von 214-224 K und Flughöhen von 8.8-11.1 km untersucht. Es wurde unter Annahme nicht-sphärischer Partikel mit einem Brechungsindex von 1.31 (Eis) ein effektiver Radius von $r_{\text{EFF}} = 2.9 \mu\text{m}$ mit einem Seitenverhältnis von 0.5 ermittelt. In weniger als 180 Sekunden alten Kondensstreifen wurden Eiskristalle mit $r_{\text{EFF}} = 1 - 3 \mu\text{m}$ gemessen (Voigt et al., 2010). All das deckt sich einigermaßen mit den Eigenschaften unserer Mueller-Matrix `M180.sp` prolater Zylinder mit $d/l = 0.5$, $r_{\text{EFF}} = 1.0160 \mu\text{m}$ und komplexem Brechungsindex von Eis ($1.312 + i \cdot 2.553 \cdot 10^{-9}$).

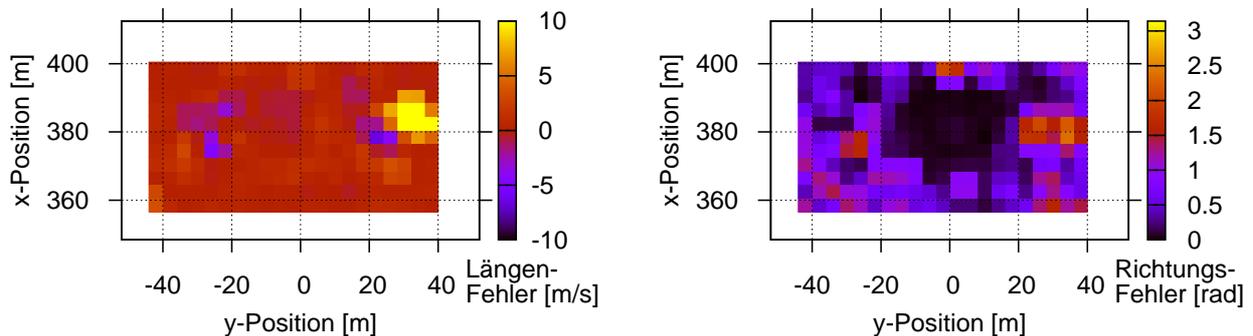
Eine ausführliche Analyse der variierenden Teilchenformen und -größen in Zirren und Kondensstreifen unter Berücksichtigung von Messdaten findet sich bei Schumann et al. (2011). Die mittleren Radien der Streuteilchen in Zirren und Kondensstreifen wachsen mit fortschreitender Zeit nach der Emission an und können (viel) größer als $1 \mu\text{m}$ werden (siehe etwa Voigt et al. (2010) und darin zitierte Literatur). Im Allgemeinen kann man bei Lidar-Messungen vor einem Flugzeug nicht auf so große Streupartikel aus einem vorausfliegenden Flugzeug hoffen, sondern muss sich an den Extinktionen für klare Luft und den Streueigenschaften für Partikel mit $r_{\text{EFF}} \leq 1 \mu\text{m}$ orientieren.

Der Extinktionskoeffizient berechnet sich aus Messungen durch das Integral über das Produkt aus projiziertem Teilchenquerschnitt und der größenabhängigen Extinktionseffizienz Q_{ext} bei sicht-

5. Simulationen der Signale eines Rückstreulidars zur Messung des transversalen Windes von Wirbelschleppen vor Flugzeugen



- (a) Zahl der Photoelektronen zum Zeitpunkt t_1 aus `pbs5` inklusive Rauschen bei einer Pulsenergie von 0.5 mJ pro Messrichtung.
- (b) Mittels Kreuzkorrelation aus den Photoelektronenzahlen rekonstruiertes Windfeld: Absolutgeschwindigkeiten mit Richtungen von t_1 nach t_2 .



- (c) Abweichungen der Längen (Geschwindigkeitsbeträge) zwischen den Vektoren des aus den Extinktionsprofilen und des aus PE-Zahlen mittels KK rekonstruierten Windfeldes.
- (d) Abweichungen der Richtungen zwischen den Vektoren des aus den Extinktionsprofilen und des aus PE-Zahlen mittels KK rekonstruierten Windfeldes.

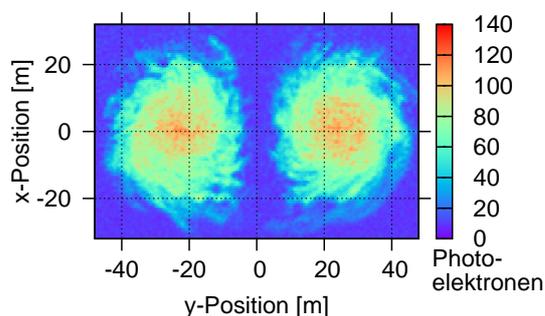
Abbildung 5.20: PE-Zahlen (links oben), rekonstruiertes Windfeld (rechts oben) sowie zugehörige Abweichungen zwischen dem Windfeld aus Extinktionen und dem aus PE-Bildern bezüglich Länge (links unten) und Richtung (rechts unten) bei geringer mittlerer Extinktion von ca. 0.01 km^{-1} in 8500 m Flughöhe für eine Rayleigh-Mueller-Matrix.

baren Wellenlängen (550 nm)⁶. Eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Extinktion ergab einen mittleren Wert von $\alpha = 1.2 (0.7) \text{ km}^{-1}$ (Voigt et al., 2011). Der Maximalwert von α in der nächsten Simulation wird bei 1.25 km^{-1} und der Mittelwert unter 1 km^{-1} liegen, was gut mit den gemessenen Werten übereinstimmt. Die Kondensstreifen eines A340 für Teilchen größer als $3 \mu\text{m}$ zeigen Extinktionen bis zu 5 km^{-1} (Abb. 5 in Voigt et al. (2010)). Die für die RSL-Simulationen in Kap. 5 als Extinktionsprofile verwendeten passiven Tracer-Verteilungen erlauben die Untersuchung von turbulentem Transport und Mischprozessen von Eispartikeln (Misaka et al., 2012). Andererseits können diese Tracer-Verteilungen mit WS, wie sie in Lidar-Messungen an Kondensstreifen (Sussmann, 1999) visualisiert wurden, verglichen werden. Auch mit Lidar wurde die Mikrophysik der Eiskristalle in Verbindung mit der Dynamik der Nachlaufwirbel analysiert, um den Bedeckungsgrad und die optische Dicke der Kondensstreifen genauer bestimmen zu können (Sussmann und Gierens, 1999).

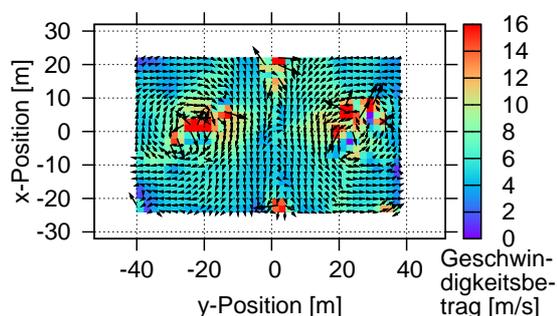
Nun zu unserer Simulation für Kondensstreifen oder Zirren mit 0.5 m transversaler Auflösung bei einer Extinktion von maximal 1.25 km^{-1} mit prolaten Zylindern (`m180.sp`) als Streuern. Fast alle Parameter wurden wie bei den Simulationen mit 0.5 m Auflösung zuvor gewählt. Lediglich das MZI wurde von 1 m auf 2.5 m verlängert (reduziert die Varianz), die Zahl simulierter Photonenpfade je Richtung beträgt wieder 2 Millionen. Die wesentlichen Ergebnisse sind in Abb. 5.21 in zu Abb. 5.20 (oben) äquivalenter Form dargestellt. Lediglich in und an den Wirbelkernen sowie am äußeren Rand

⁶ Der Unterschied zwischen der Extinktion bei 532 nm Wellenlänge in unserer Simulation und der angegebenen Extinktion bei 550 nm dürfte gering sein.

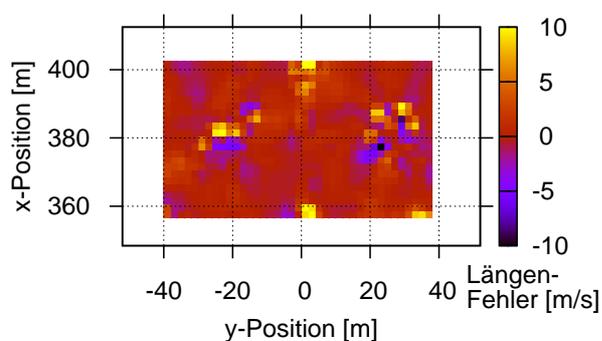
treten größere Fehler bei der Rekonstruktion des Windfeldes auf. Die Zahl der erhaltenen PE reicht aber aus, um abschätzen zu können, wo sich die Wirbel und ihre Kerne befinden.



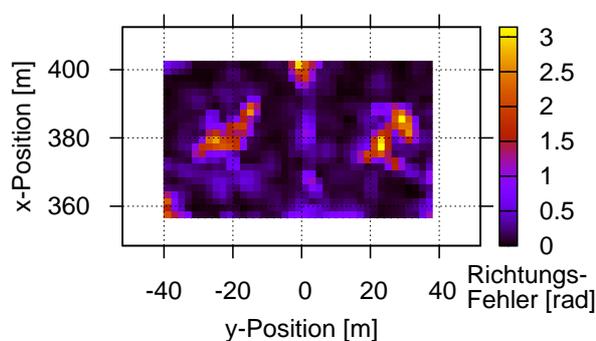
(a) Zahl der Photoelektronen zum Zeitpunkt t_1 aus pbs5 inklusive Rauschen bei einer Pulsenergie von 0.5 mJ pro Messrichtung.



(b) Mittels Kreuzkorrelation aus den Photoelektronenzahlen rekonstruiertes Windfeld: Absolutgeschwindigkeiten mit Richtungen von t_1 nach t_2 .



(c) Abweichungen der Längen (Geschwindigkeitsbeträge) zwischen den Vektoren des aus den Extinktionsprofilen und des aus PE-Zahlen mittels KK rekonstruierten Windfeldes.



(d) Abweichungen der Richtungen zwischen den Vektoren des aus den Extinktionsprofilen und des aus PE-Zahlen mittels KK rekonstruierten Windfeldes.

Abbildung 5.21: PE-Zahlen (links oben), rekonstruiertes Windfeld (rechts oben) sowie zugehörige Abweichungen zwischen dem Windfeld aus Extinktionen und dem aus PE-Bildern bezüglich Länge (links unten) und Richtung (rechts unten) bei starker Extinktion eines Kondensstreifens von ca. 1 km^{-1} in 8–11 km Flughöhe für prolate Zylinder (M180.sp) bei 0.5 m transversaler Auflösung.

Zusammenfassend kann man bislang sagen, dass die Energie heutiger Spitzen-Laser für Lidar-messungen höchstens für 1 bis 2 volle Windfelder pro Sekunde reichen dürfte. Wenn man also nur ein Windfeld messen möchte, müssen zwei Messungen von Schichten in einem kurzen Zeitintervall $\Delta t < 0.2 \text{ s}$ möglichst mit einem Doppelpuls-Laser durchgeführt werden (Halldórsson et al., 2006).

5.3 Rückstreulidar in Bodennähe bei 355 nm Wellenlänge

Von Bennett et al. (2010) wurden an den Flughäfen von Manchester und London Heathrow mit einem schnell scannenden Lidar bei $\lambda = 355 \text{ nm}$ Messungen der Verteilung von Abgasfahnen von Flugzeugen in verschiedenen Modi (z. B. Start, Landung, Landeanflug, etc.) durchgeführt. Es wurde seitlich zur Start- und Landebahn gemessen, wodurch sich Schichtbilder ähnlich den hier simulierten ergaben. Eine wesentliche Erkenntnis war das geringe Rückstreuvermögen der Laserphotonen aus den Abgasfahnen. Der verwendete Scanner ist für unsere Anforderungen viel zu langsam (1 Scan dauerte 2s) und das räumliche Auflösungsvermögen (nur 5 m) reicht nicht. Die Ergebnisse lassen sich in unsere Simulationen nur schwer einbinden, da die Größen und Einheiten dort andere waren. Lediglich

die Streupartikelradien bei Landungen könnten interessant sein. Dort vermischt sich der Rauch des Reifenabriebs mit den Abgasfahnen. Dies wird bei uns aber nicht untersucht, da die Rückstreuung bei der Landung dann viel größer als sonst üblich wäre.

Wir wollen nun Ergebnisse von Simulationen für ein bei 355 nm Wellenlänge emittierendes Lidar zeigen. Da die von L. Xu berechneten, nicht-sphärischen Mueller-Streumatrizen nur für $\lambda = 532$ nm vorhanden sind, müssen für Simulationen bei anderen Wellenlängen (hier speziell $\lambda = 355$ nm) andere (nicht-sphärische) Mueller-Matrizen gesucht oder erzeugt werden. Dazu eignet sich z. B. das Programm *Mieschka* (Rother, 2009), für das auch eine Datensammlung für Sphäroide unterschiedlicher Streueigenschaften existiert (Schmidt et al., 2009)⁷. In 500 m Flughöhe werden mit *Mieschka* prolata Sphäroide mit (außer der Wellenlänge) zu Xu (*J4.sp*) äquivalenten Eigenschaften generiert (Brechungsindex von Aerosol: $1.53 + i \cdot 0.008$). In Kap. 5.4 (unten) brauchen wir bei 8500 m Flughöhe noch kreisrunde Zylinder, die mit *Mieschka* für einen Durchmesser von $2 \mu\text{m}$ bei einem Seitenverhältnis von $d/l = 1$ erzeugt wurden (Brechungsindex von Eis: $1.312 + i \cdot 2.553 \cdot 10^{-9}$).

Wie in Kap. 2.3.3 geschildert, können aber auch die Programme *POLYMIE* und *POLY_3* verwendet werden, um Streumatrizen zu kreieren. Hier wird in 500 m Höhe eine Mueller-Matrix aus *POLYMIE* von Dunst Typ L mit den Parametern $a = 4.9757 \cdot 10^6$, $b = 15.1186$, $\alpha = 2$, $\gamma = 0.5$, $N = 100 \text{ cm}^{-3}$ und Modenradius $r_c = 0.07 \mu\text{m}$ bei einem Brechungsindex von $n_{\text{Br}} = 1.537 - i \cdot 0.008$ und bei $\lambda = 355$ nm für variable r verwendet (siehe auch Gl. (2.62)). Eine weitere Mueller-Matrix zur Simulation der Streuung in einer Wasserwolke wird mittels *POLY_3* erzeugt. Bei $\lambda = 355$ nm und einem Brechungsindex von $n_{\text{Br}} = 1.33 - i \cdot 1.0 \cdot 10^{-5}$ wird eine Lognormalverteilung mit einem Median des Partikelradius von $10 \mu\text{m}$ und einer Standardabweichung von $3 \mu\text{m}$ hergestellt.

Die Phasenfunktionen bzw. Streuintensitäten der eben beschriebenen Mueller-Matrizen sind in den Abb. 5.26(b) bzw. 5.28 dargestellt.

Die Zahl solarer Photonen beträgt bei $\lambda = 355$ nm nach Gl. (5.2) und (5.3), und sonst gleichen Parametern wie bei 532 nm nur noch maximal 24 (23) Photonen bei 500 m (8500 m) Flughöhe. Es werden also wieder gleichmäßig 20 Photonen je Richtung zu den rückgestreuten Laser-Photonen als Rauschen addiert. Die transversale räumliche Auflösung wird im Folgenden generell hoch sein (0.5 m), also wieder 193×129 Messrichtungen (Pixel). Die Pulsenergie bleibt konstant bei 0.5 mJ je Richtung.

Wir zeigen in Abb. 5.22 zunächst Ergebnisse aus *pbs5*-Simulationen mit *POLYMIE* Dunst Typ L Mueller-Matrizen bei $\lambda = 355$ nm in 500 m Höhe bei mittlerer Extinktion von etwa 0.3 km^{-1} in klarer Luft nach Vaughan et al. (1998). Aufgrund der vielen rückgestreuten Photonen und damit vielen vorhandenen PE ist das Rauschen sehr gering (Abb. 5.22(a)). Dadurch lässt sich auch das Windfeld bis auf die Wirbelzentren sehr genau rekonstruieren (Abb. 5.22(b), 5.22(c) und 5.22(d)).

Als Nächstes untersuchen wir eine Wasserwolke mit der Mueller-Matrix für lognormalverteiltes Wasser aus *POLY_3* von oben. Da eine typische Wasserwolke eine optische Tiefe (Dicke) von 5-50 und eine geometrische Dicke (Höhe) von 0.5-6.0 km aufweisen kann (Schumann et al., 2012), wird hier der Extinktionskoeffizient der simulierten Wasserwolke als maximal ca. 5 km^{-1} abgeschätzt (die Umgebung der zu messenden Schichten bekommt in dieser *pbs*-Simulation auch eine hohe Extinktion von 3 km^{-1} , anders als sonst, wo die Umgebungsextinktion konstant nur 0.1 km^{-1} ist). Der effektive Radius der Partikel einer Wasserwolke beträgt laut Schumann et al. (2012) 5-15 μm . Der mittlere Wert $10 \mu\text{m}$ wurde hier für die lognormalverteilten Wasser-Streumatrizen verwendet (siehe oben). Die Untergrenze einer Wasserwolke beginnt in der Regel bei einer Höhe von 1 – 2 km. Durch die im Vergleich zu den Simulationen mit Dunst sogar noch erhöhte Photoelektronenzahl für die Wasserwolke sind die Resultate sogar noch etwas besser (siehe Abb. 5.23).

Als letzter Fall wird Rückstreuung bei $\lambda = 355$ nm und geringer Flughöhe von 500 m anhand oben beschriebener Mueller-Matrix für prolata Sphäroide aus *Mieschka* (von Rother) untersucht. Die Extinktion beträgt wie oben bei Dunst im Mittel nur (für klare Luft übliche) 0.3 km^{-1} . Bei sonst gleichen Parametern erhält man für die hier verwendete Mueller-Matrix im Vergleich zu der von L.

⁷ Alternativen wären z. B. auch die T-Matrix-Programme nach Mishchenko et al. (2000) oder von Doicu et al. (2006).

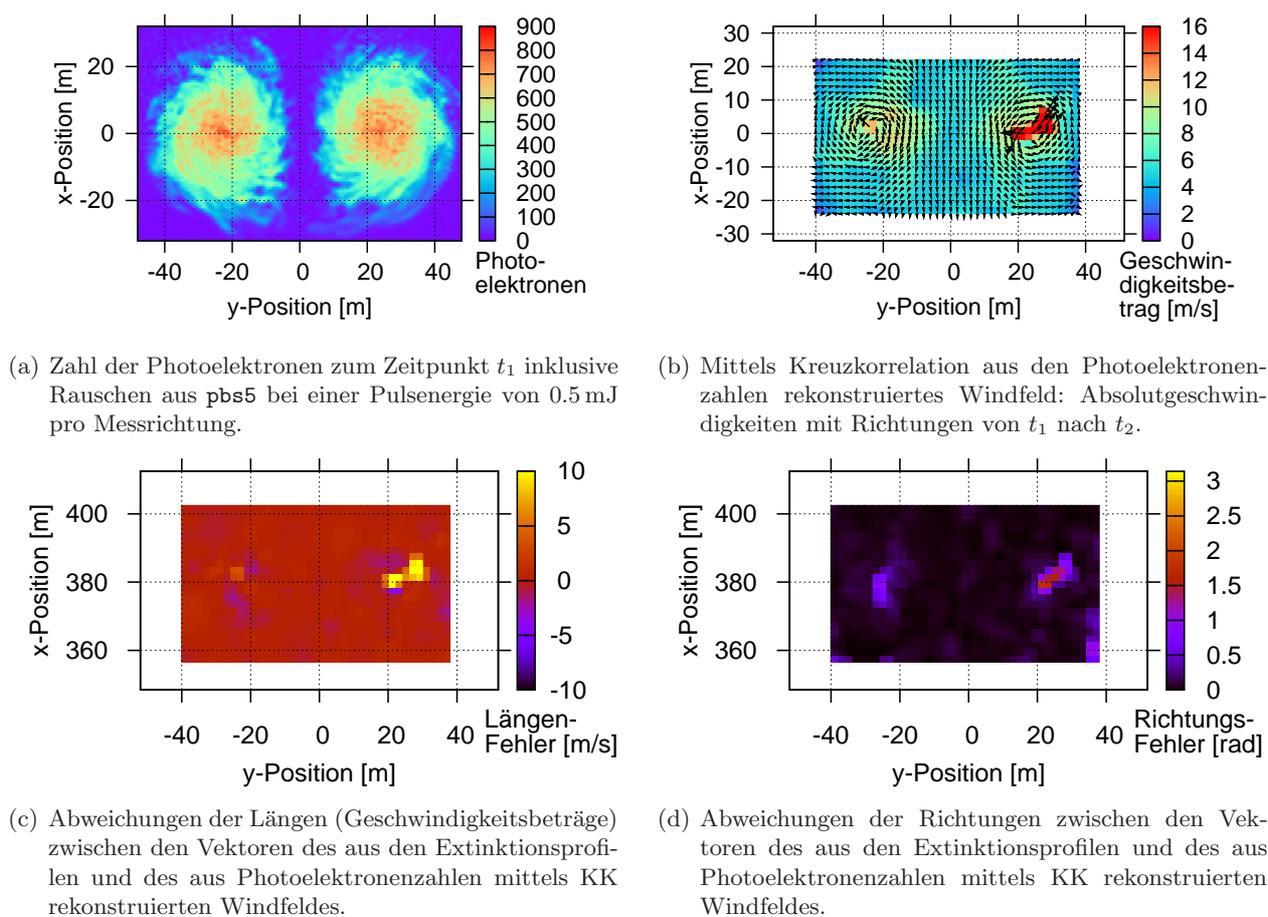


Abbildung 5.22: Photoelektronenzahlen (links oben), rekonstruiertes Windfeld (rechts oben) sowie zugehörige Abweichungen zwischen dem Windfeld aus Extinktionen und dem aus PE-Bildern bezüglich Länge (links unten) und Richtung (rechts unten) bei Extinktion in klarer Luft von ca. 0.3 km^{-1} in 500 m Höhe für Dunst Typ L (POLYMIE) bei 0.5 m transversaler Auflösung.

Xu bei 532 nm erzeugten (J4.sp) weniger rückgestreute Photonen, obwohl bei 355 nm Wellenlänge eigentlich durch die höhere Extinktion in 500 m Höhe mehr Photonen rückgestreut werden sollten. Man sieht also, dass je nach verwendetem T-Matrix-Programm zur Erzeugung der Mueller-Matrizen durchaus sich stark unterschiedlich verhaltende Streumatrizen entstehen können. Die Signalanalyse fällt beim hier untersuchten Fall bei weniger als 80 Ladungsträgern pro Richtung und damit hohem Rauschen eher schlecht aus (siehe Abb. 5.24).

5.4 Rückstreulidar in großer Flughöhe bei 355 nm Wellenlänge

Abschließend noch ein Simulationsbeispiel bei $\lambda = 355 \text{ nm}$ in über 8000 m Flughöhe anhand eines Kondensstreifens, so wie oben für $\lambda = 532 \text{ nm}$ gezeigt (siehe Abb. 5.21). Die Extinktion ist mit einem Maximalwert von 1.25 km^{-1} wieder sehr hoch. Als Mueller-Matrizen kommen die oben erwähnten, mit Mieschka berechneten, kreisrunden Zylinder zum Einsatz. Hier zeigt sich der deutliche Vorteil einer kürzeren Wellenlänge in Form einer ca. viermal höheren LT-Anzahl, vgl. Abb. 5.25(a) mit Abb. 5.21(a) von oben⁸. Das Windfeld lässt sich bis auf die Wirbelkerne (und teilweise den oberen Rand) recht ordentlich rekonstruieren, siehe Abb. 5.25(b) bis 5.25(d). Die Ergebnisse wären in klarer Luft bei 8500 m Flughöhe selbst bei 355 nm und einer mittleren Extinktion von 0.027 km^{-1} (über 30-mal

⁸ Hier scheint also durch die mit Mieschka berechnete Mueller-Matrix für Zylinder mehr Rückstreuung als für die M180.sp-Matrix für 532 nm vorhanden zu sein.

5. Simulationen der Signale eines Rückstreulidars zur Messung des transversalen Windes von Wirbelschleppen vor Flugzeugen

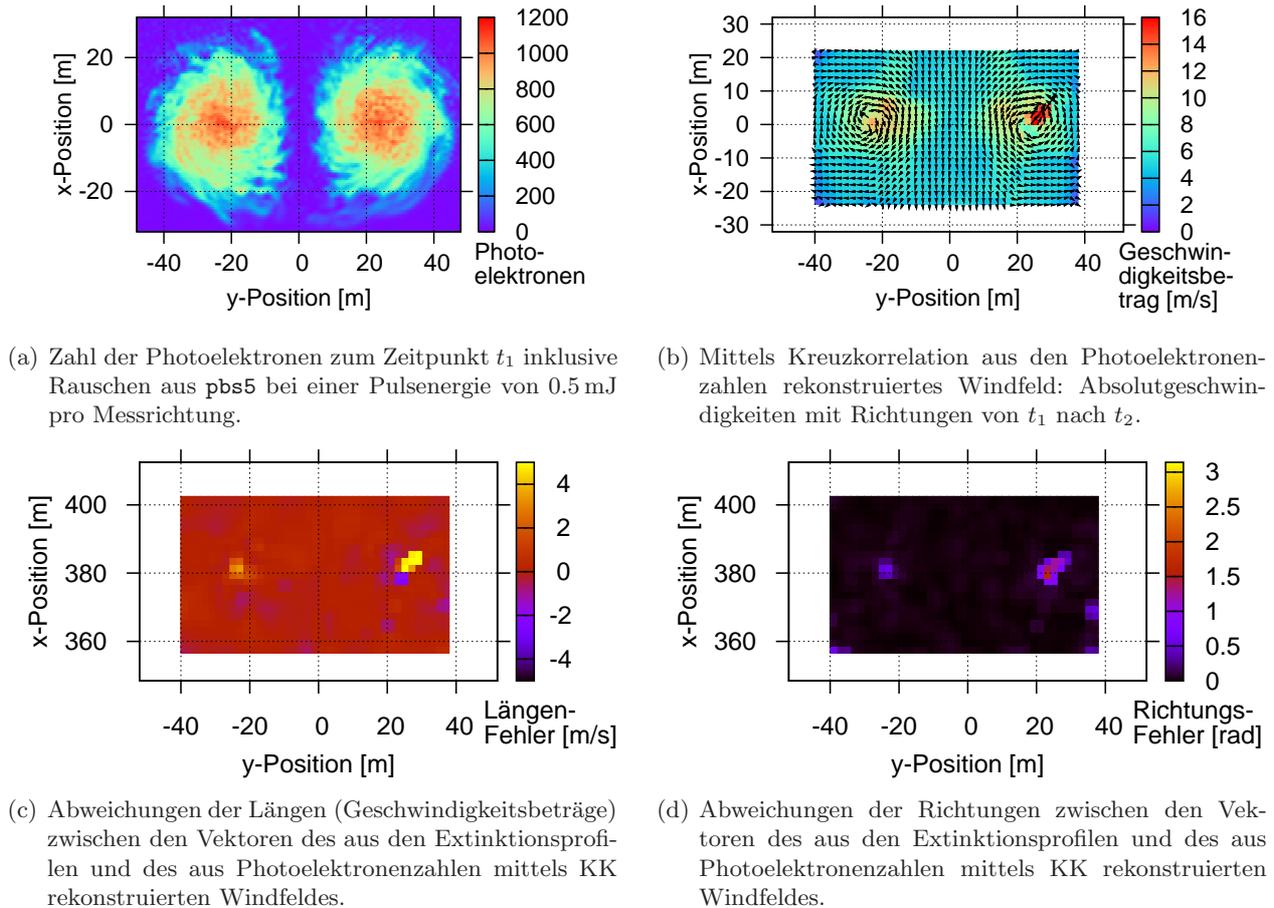


Abbildung 5.23: PE-Zahlen (links oben), rekonstruiertes Windfeld (rechts oben) sowie zugehörige Abweichungen zwischen dem Windfeld aus Extinktionen und dem aus PE-Bildern bezüglich Länge (links unten) und Richtung (rechts unten) bei Extinktion einer Wasserwolke von maximal ca. 5 km^{-1} in über 1000 m Höhe mit Mueller-Matrix aus POLY_3 bei 0.5 m transversaler Auflösung.

niedriger als für den Kondensstreifen) sehr schlecht, deshalb wird dieser Fall auch nicht analysiert.

Zusammenfassend lässt sich für die Kap. 5.1 bis 5.4 sagen, dass prinzipiell außerhalb der Wirbelkerne eine Präzision von mindestens $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bezüglich der Windvektorenlängen inklusive unkritischer Richtungsfehler für eine Ebene transversal zur Flugrichtung erreichbar ist. Allerdings wird man mit dem heutigen Stand der Technik maximal ein bis zwei derartige Windfeldebene vollständig messen können. Man würde aber mit einem RSL-System wie dem hier simulierten unter Umständen ein wesentlich größeres Stück näher an die Anforderungen herankommen als mit einem DWL.

Es ist auch möglich, die RSL-Geometrie an die Anforderungen anzupassen. Ein einzelner 2D Windvektor lässt sich mit KK und WSh generell auf einem einzelnen Tp mit 8×8 bis 32×32 Pixeln (d. h. Messrichtungen) berechnen. Man kann also durchaus bei weniger Messrichtungen mehr Photonen in jede einzelne Richtung emittieren oder mehr Schichten pro Sekunde messen. Jedoch kann man dann nur einen sehr kleinen Ausschnitt der hier simulierten Messebenen, die beide Wirbel erfassen, scannen und erhält somit wenig Information. Oder aber man bildet gleichmäßig über das Bild verteilt nur z. B. 16×16 Tp bei 0.5 m Auflösung und berechnet pro Ebene nur 20 2D Windvektoren. Dann hätte man nur 5120 statt 24897 Messrichtungen, so dass nur ein Fünftel der Laserenergie nötig wäre. Das heißt, man könnte fünfmal so viele Ebenen mit dann pro Ebene nur 20 Windvektoren messen. Allerdings verliert man die Überlappbereiche der einzelnen Tp, d. h. die Rückstreuintensität jeder Messrichtung wird in der Regel nur für ein Tp und nicht für mehrere verwendet.

Die verbesserte Rückstreuung bei $\lambda = 355 \text{ nm}$ bezahlt man momentan noch mit einer durch eine

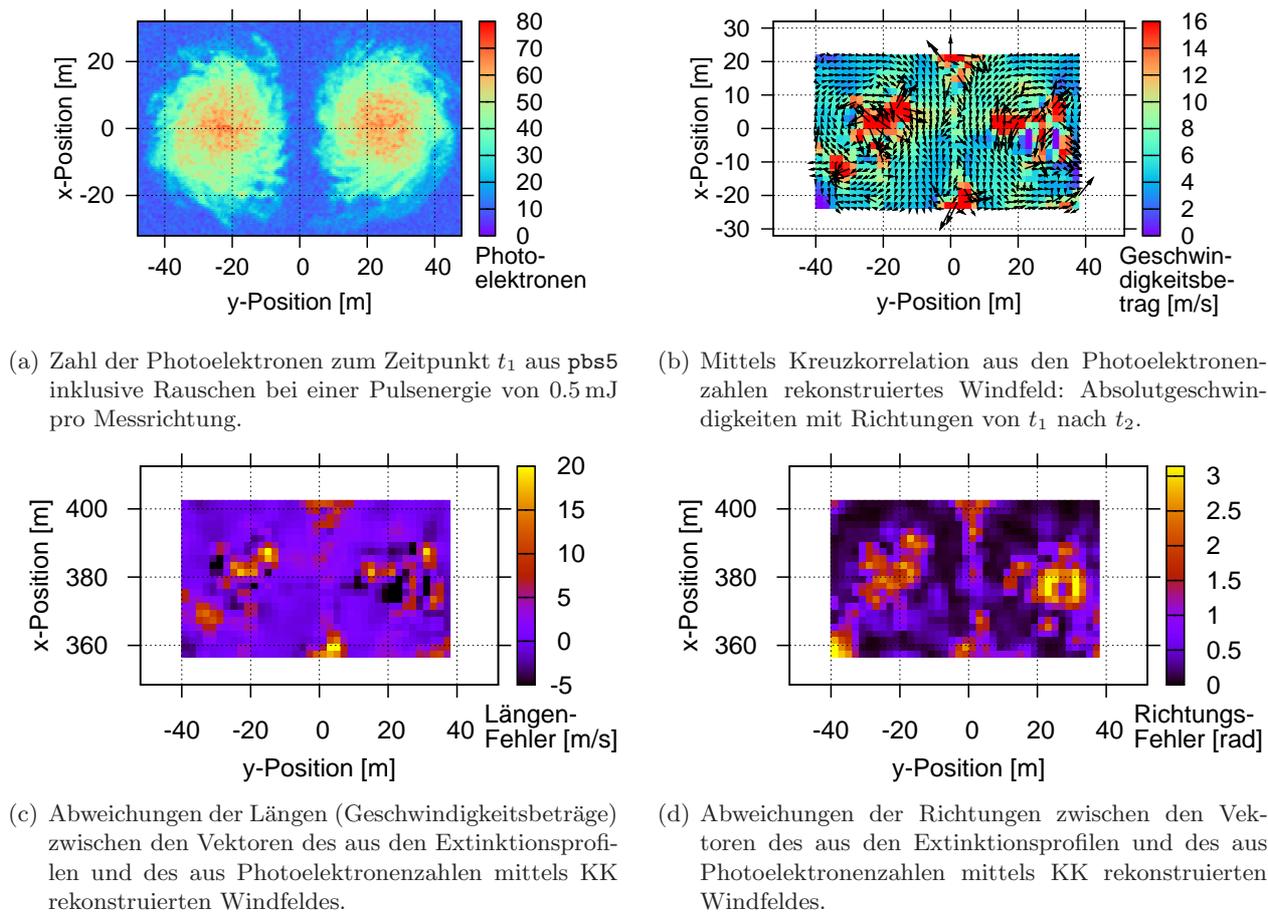


Abbildung 5.24: PE-Zahlen (links oben), rekonstruiertes Windfeld (rechts oben) sowie zugehörige Abweichungen zwischen dem Windfeld aus Extinktionen und dem aus PE-Bildern bezüglich Länge (links unten) und Richtung (rechts unten) bei Extinktion in klarer Luft von ca. 0.3 km^{-1} in 500 m Höhe für Mueller-Matrix prolater Sphäroide nach Rother bei 0.5 m transversaler Auflösung.

weitere Frequenzkonversion im Vergleich zu $\lambda = 532 \text{ nm}$ reduzierte Laserenergie. Ein Laser bei 355 nm mit gutem Strahlprofil hat heute maximal 3-4 W (Reitebuch et al., 2009, Rabadan et al., 2010).

5.5 Rückstreulidar für alternative Extinktionsverteilungen und mehrere Messschichten zu einem Einzelzeitpunkt

Dieser letzte Unterabschnitt fasst noch einige neue Erzeugungsverfahren für alternative Extinktionsverteilungen von Wirbeln bzw. Wirbelschleppen zusammen.

Zunächst wird eine Version der Tracer-Profile aus MGLET-Simulationen von Abb. 5.9(a) und 5.9(b) (also $\Delta t = 0.1 \text{ s}$) mit verstärkten, punktuell hohen Extinktionskoeffizienten erzeugt. Dies geschieht in vier Schritten:

1. Schritt:

Seien $f_{i,j}^{\text{Tr}} \in \mathbb{R} \forall i = 0, \dots, m-1, j = 0, \dots, n-1$ (hier mit $m = 209$ und $n = 129$, d. h. räumliche Auflösung von 0.5 m) die Funktionswerte der MGLET-Tracerverteilung von Bild 1 mit Werten wie in Abb. 3.4(a). Suche nun nach dem maximalen Funktionswert $f_{\max}^{\text{Tr}} := \max_{x_i, y_j \in \mathbb{N}} f_{i,j}^{\text{Tr}} \forall i, j$ unter allen Funktionswerten $f_{i,j}^{\text{Tr}}$ auf dem gesamten MGLET-Tracerbild.

5. Simulationen der Signale eines Rückstreulidars zur Messung des transversalen Windes von Wirbelschleppen vor Flugzeugen

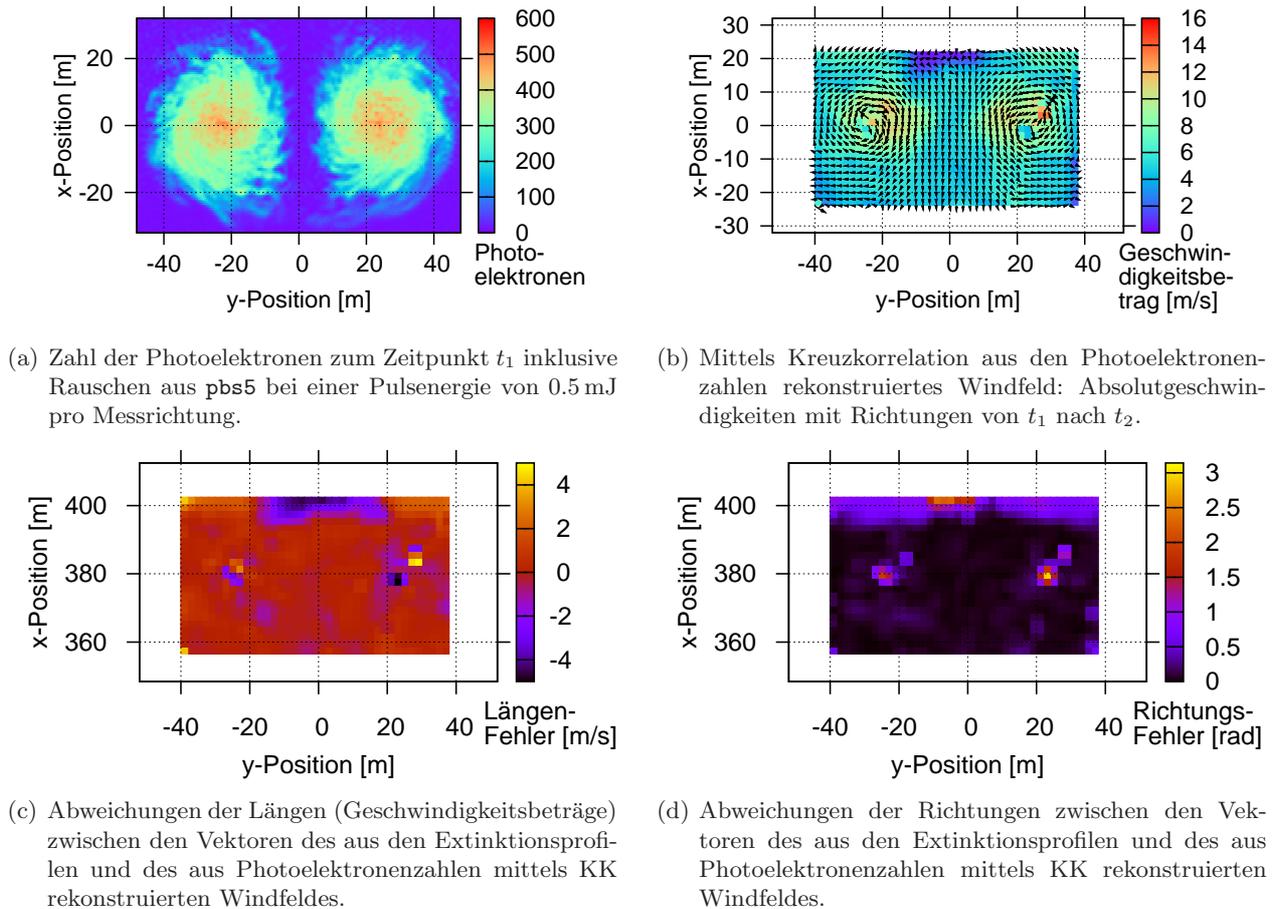


Abbildung 5.25: PE-Zahlen (links oben), rekonstruiertes Windfeld (rechts oben) sowie zugehörige Abweichungen zwischen Windfeld aus Extinktionen und aus PE-Bildern bezüglich Länge (links unten) und Richtung (rechts unten) bei starker Extinktion eines Kondensstreifens von ca. 1 km^{-1} in 8 – 11 km Flughöhe für prolate Zylinder (von Mieschka) bei 0.5 m transversaler Auflösung.

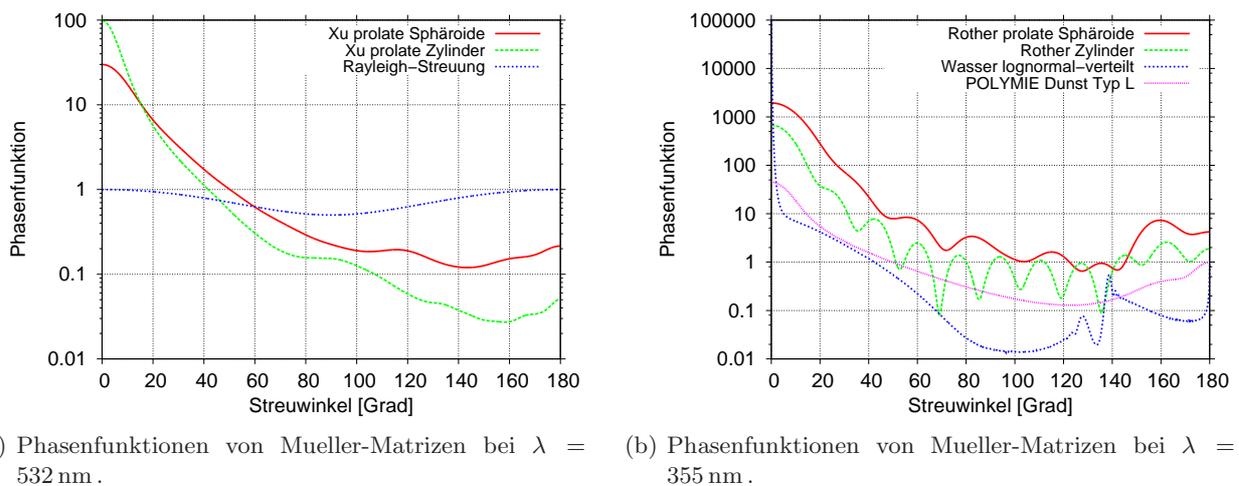


Abbildung 5.26: Phasenfunktionen in den Simulationen verwendeter Mueller-Matrizen für 532 nm (links) und 355 nm (rechts).

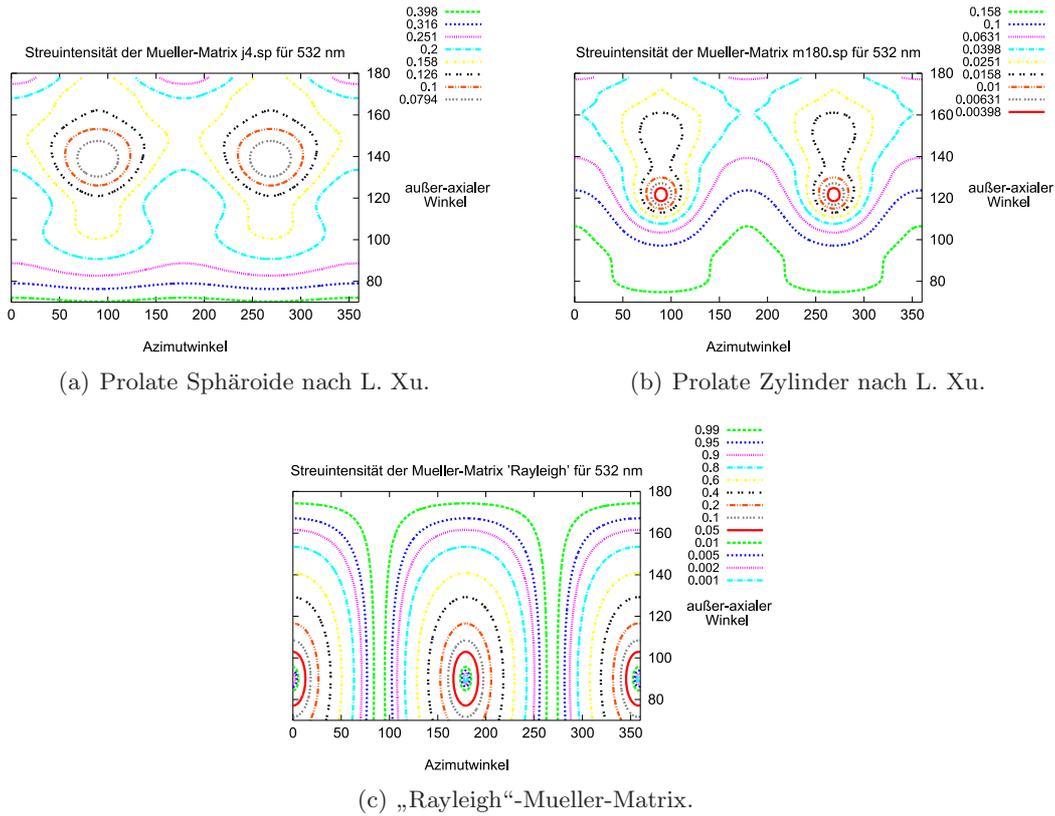


Abbildung 5.27: Streuintensitäten verwendeter Mueller-Matrizen für $\lambda = 532$ nm. Intensitäten in Abhängigkeit vom Azimutwinkel zwischen $[0^\circ, 360^\circ]$ und vom außer-axialen Winkel zwischen $[70^\circ, 180^\circ]$.

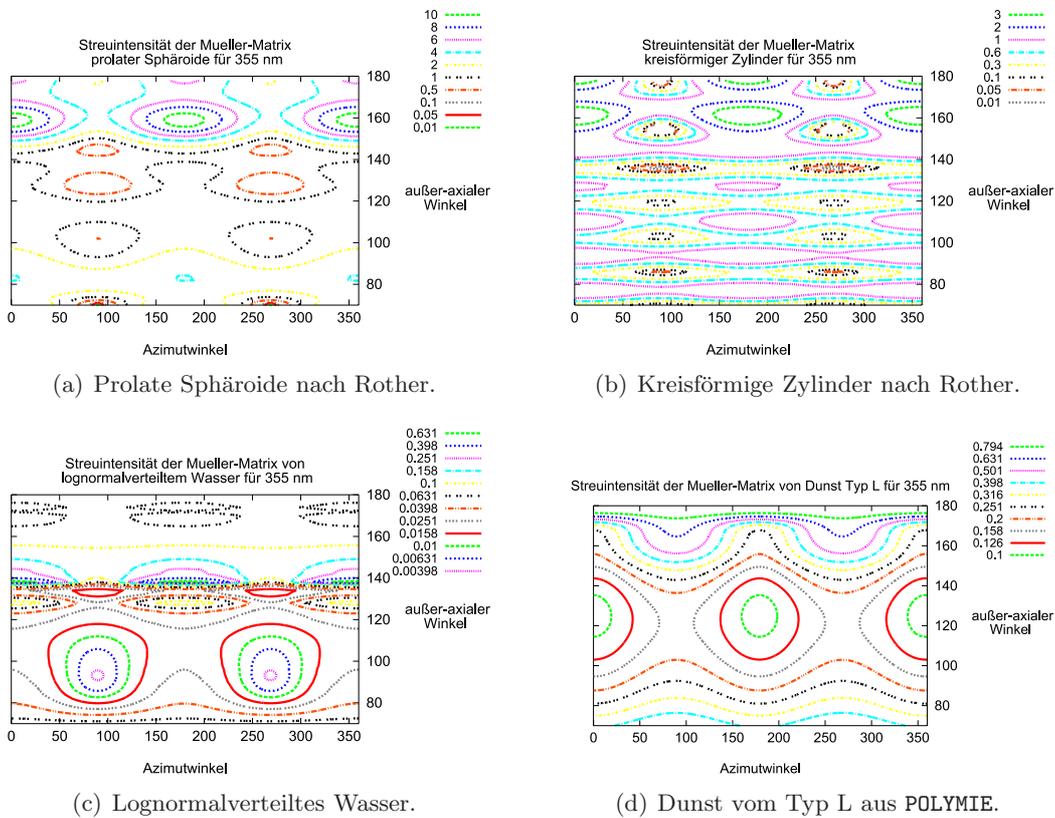


Abbildung 5.28: Streuintensitäten verwendeter Mueller-Matrizen für $\lambda = 355$ nm.

2. Schritt:

Erzeuge Zufallszahlen $\text{RN}_{i,j} \in [0, 1] \forall i, j$ wie oben und erzeuge daraus diskrete Werte

$$\text{RN}'_{i,j} = \begin{cases} 1.0 & \text{falls } (\text{RN}_{i,j} \geq a_{\max}) \wedge ((f_{i,j}^{\text{Tr}})^2 > (b_{\max} \cdot f_{\max}^{\text{Tr}})), \\ 0.0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (5.5)$$

wobei die Parameter $a_{\max}, b_{\max} \in \mathbb{R}$ frei wählbar sind. In der Verteilung von Abb. 5.29(a) waren $a_{\max} = 0.80$ und $b_{\max} = 0.1$.

3. Schritt:

Die „punktueller“ Extinktionsverteilung von Bild 1 (wie in Abb. 5.29(a)) ergibt sich schließlich durch

$$f_{i,j}^{\text{ext}} = f_{i,j}^{\text{Tr}} + g_{\text{RN}} \cdot \text{RN}'_{i,j} \quad \forall i, j, \quad (5.6)$$

mit einem frei wählbaren Gewichtungsfaktor $g_{\text{RN}} \in \mathbb{R}$ für die punktuellen Tracer (hier ist $g_{\text{RN}} = 1.5$).

4. Schritt:

Abschließend wird die punktueller Extinktionsverteilung der $f_{i,j}^{\text{ext}}$ von Bild 2 (siehe Abb. 5.29(b)) über das Windfeld von Abb. 3.4(b) aus den $f_{i,j}^{\text{ext}}$ -Werten von Bild 1 wie üblich erzeugt. Mit einem Faktor können die Extinktionswerte der Bilder 1 und 2 erhöht oder erniedrigt werden.

Wie früher kann aus den beiden Extinktionsprofilen über die Kreuzkorrelation das Windfeld von Abb. 3.4(b) relativ gut rekonstruiert werden, siehe Abb. 5.29(c). Die Abweichungen der rekonstruierten Vektorlängen (Abb. 5.29(d)) und Vektorrichtungen (hier nicht dargestellt) vom ursprünglichen Windfeld sind (wie zuvor) bei den Wirbelkernen und am Rand am größten. Das Rauschen der Lidar-Simulation fehlt in diesen Extinktionsprofil-Darstellungen.

Als Nächstes werden zusammen mit einem allgemeinen Lamb-Oseen-Wirbelfeld einfache Extinktionsverteilungen erzeugt. Zuerst wird die Vorgehensweise zur Generierung der Extinktionsverteilung von Abb. 5.30(a) geschildert. Die x - und y -Positionen werden so festgelegt, dass 0 nicht als x - oder y -Wert vorkommt:

$$x_i = 0.25 - 0.5 \Delta x (m - 2i) \quad , \quad y_j = 0.25 - 0.5 \Delta y (n - 2j) \quad \text{für } i = 0, \dots, m-1, \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (5.7)$$

Hier betragen die Schrittweiten $\Delta x = \Delta y = 0.5 \text{ m}$ und die Zahl der Positionen je Achse $m = 160$ bzw. $n = 120$. Zur Erzeugung der Extinktionsverteilung berechnen wir v_θ aus Gl. (3.26). Die Radien $r_{i,j} = r(x_i, y_j) = (x_i^2 + y_j^2)^{\frac{1}{2}}$ werden in die Formel für die Tangentialgeschwindigkeiten eines Lamb-Oseen-Wirbels eingesetzt, die hier auch Funktionswerte $f_{i,j}^{\text{LaOs}}$ definiert:

$$f_{i,j}^{\text{LaOs}} = v_\theta^{i,j} = \frac{\Gamma_0}{2\pi r_{i,j}} \left(1 - e^{-1.25643 \left(\frac{r_{i,j}}{r_c}\right)^2} \right) \quad \forall i, j, \quad (5.8)$$

wobei die Anfangszirkulation $\Gamma_0 = 458 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ und der Wirbel-Kernradius $r_c = 4.0 \text{ m}$ ⁹ hier beide sehr hoch seien. Die x - und y -Geschwindigkeitskomponenten lauten

$$u_{i,j} = \frac{v_\theta^{i,j} y_j}{r_{i,j}} \quad \text{und} \quad v_{i,j} = -\frac{v_\theta^{i,j} x_i}{r_{i,j}} \quad \forall i, j, \quad (5.9)$$

d. h. die Wirbeldrehung erfolgt im Uhrzeigersinn, siehe Abb. 5.30(c). Für die endgültige Extinktionsverteilung von Bild 1 zum Zeitpunkt t_1 gilt

$$f_{i,j}^{\text{ext}} = \log \left(\left(\left(\frac{v_\theta^{i,j} y_j}{r_{i,j}} \right)^2 + \left(\frac{-v_\theta^{i,j} x_i}{r_{i,j}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad \forall i, j \quad \text{mit } r_{i,j} \neq 0, \quad (5.10)$$

⁹ Typische Werte von Wirbelkernradien im Verhältnis zur Flügelspannweite eines Flugzeugs findet man z. B. bei Delisi et al. (2003).

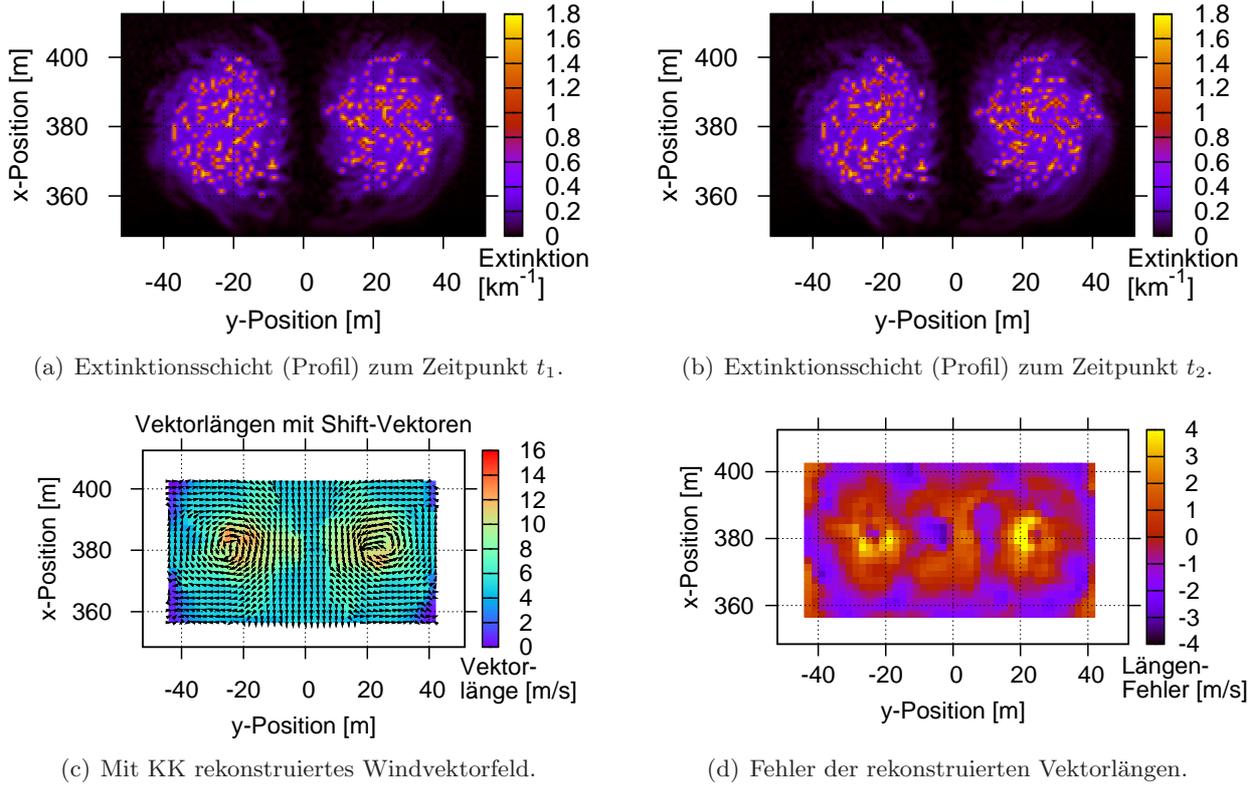


Abbildung 5.29: Extinktionsschichten mit punktuellen Tracern zu Zeitpunkten t_1 und $t_2 = t_1 + 0.1$ s (oben) und mit KK rückgerechnetes Windfeld mit zugehörigen Längenfehlern (unten).

siehe Abb. 5.30(a) (Werte noch um einen Faktor 0.02 reduziert). Daraus ergibt sich mit der Geschwindigkeitsverteilung von Abb. 5.30(c) bei einem Zeitschritt von $\Delta t = 0.1$ s wiederum die Extinktionsverteilung zum Zeitpunkt t_2 von Abb. 5.30(b). Die Unterschiede von Bild 1 zu Bild 2 sind mit bloßem Auge kaum zu erkennen. Dennoch können sie mit der KK mit 4×4 Pixel großen RTP auf 8×8 Tp im Wesentlichen wieder korrekt rekonstruiert werden, wie Abb. 5.30(d) zeigt, bei der fehlerhafte Vektoren entfernt wurden. Die Fehleranalyse in den Abb. 5.30(e) und 5.30(f) weist vor allem im Zentrum der Kleeblatt-förmigen Struktur größere Längen- und Richtungsfehler der Windvektoren aus. Auch auf den Diagonalen sind die Fehler etwas erhöht. Bereiche außerhalb des „Kleeblatts“ sind aufgrund der dort niedrigen Geschwindigkeiten für die Fehleranalyse eher uninteressant.

Als weitere Extinktionsverteilung konstruieren wir einen sog. **Spiralenwirbel**. Dazu seien durch

$$r_k = k \frac{r_b}{n_r}, \quad k = 0, \dots, n_r - 1 \quad \text{bzw.} \quad \varphi_l = l \frac{(\varphi_b - \varphi_a)}{n_\varphi}, \quad l = 0, \dots, n_\varphi - 1 \quad (5.11)$$

die Radien bzw. Winkel eines Kreises definiert, wobei r_b der maximale Radius und φ_a bzw. φ_b der minimale bzw. maximale Winkel seien (hier $r_b = 30$ m, $\varphi_a = 0^\circ$ und $\varphi_b = 360^\circ$). Außerdem seien n_r und n_φ die Anzahl der Indizes (Positionen) für Radien und Winkel (hier $n_r = 200$ und $n_\varphi = 2880$). Für die Funktionswerte aus obigen Polarkoordinaten-Positionswerten gelte

$$f_{k,l}^{\text{polar}} = \begin{cases} f_{\text{max}} - \Delta\varphi \cdot \varphi_l & \text{falls } ((r_k \geq r_a) \wedge (r_k \leq r_b) \wedge (\varphi_l \geq \varphi_a) \wedge (\varphi_l \leq \varphi_b)), \\ f_{\text{in}} & \text{sonst,} \end{cases} \quad (5.12)$$

wobei r_a der minimale Radius, f_{max} der maximale Funktionswert des Spiralenwirbels, $\Delta\varphi$ ein konstanter Winkelabnahmefaktor und f_{in} der innere Funktionswert im Wirbelkern seien (hier $r_a = 3$ m, $f_{\text{max}} = 0.5$, $\Delta\varphi = 0.001$ und $f_{\text{in}} = 0.1$).

Durch Kombination der Radien und Winkel erhält man die echten Polarkoordinaten-Positionen

$$x_{k,l}^{\text{polar}} = r_k \cos(\varphi_l) \quad \text{und} \quad y_{k,l}^{\text{polar}} = r_k \sin(\varphi_l) \quad \forall k = 0, \dots, n_r - 1, l = 0, \dots, n_\varphi - 1. \quad (5.13)$$

Weiter können auch kartesische Koordinaten definiert werden:

$$x_i^{\text{kart}} = x_{\text{low}} + i \Delta x \quad \forall i = 0, \dots, n_x - 1 \quad \text{und} \quad y_j^{\text{kart}} = y_{\text{low}} + j \Delta y \quad \forall j = 0, \dots, n_y - 1, \quad (5.14)$$

wobei Δx bzw. Δy die Schrittweiten, x_{low} bzw. y_{low} die unteren Grenzen und n_x bzw. n_y die Anzahl der Positionen in x - bzw. y -Richtung seien (hier $\Delta x = \Delta y = 0.5 \text{ m}$, $x_{\text{low}} = y_{\text{low}} = -40 \text{ m}$ und $n_x = n_y = 161$).

Um nun die zu den kartesischen Koordinaten gehörigen Extinktionswerte $f_{i,j}^{\text{ext}} \in \mathbb{R}$ zu generieren, kommt folgender kurzer Algorithmus zum Einsatz:

Sei $r = 0$ ($r \in \mathbb{N}$) mit Funktionswert $f_r = 0$ ($f_r \in \mathbb{R}$).

Seien $i = 0, \dots, n_x - 1$ und $j = 0, \dots, n_y - 1$.

Sei $s = 0$ ($s \in \mathbb{N}$).

$\forall k = 0, \dots, n_r - 1$ und $l = 0, \dots, n_\varphi - 1$ gelte:

$$\text{Falls} \left((|x_i^{\text{kart}} - x_{k,l}^{\text{polar}}| \leq \frac{\Delta x}{2}) \wedge (|y_j^{\text{kart}} - y_{k,l}^{\text{polar}}| \leq \frac{\Delta y}{2}) \right)$$

$$\forall x_i^{\text{kart}} \text{ mit } i = 0, \dots, n_x - 1 \text{ und } y_j^{\text{kart}} \text{ mit } j = 0, \dots, n_y - 1.$$

Dann sei $f_{i,j}^{\text{ext}} := f_r + f_{k,l}^{\text{polar}}$ und $s := s + 1$. Setze $f_r := f_{i,j}^{\text{ext}}$.

$$\text{Falls dagegen} \left((|x_i^{\text{kart}} - x_{k,l}^{\text{polar}}| > \frac{\Delta x}{2}) \vee (|y_j^{\text{kart}} - y_{k,l}^{\text{polar}}| > \frac{\Delta y}{2}) \right) \quad (5.15)$$

$$\forall x_i^{\text{kart}} \text{ mit } i = 0, \dots, n_x - 1 \text{ und } y_j^{\text{kart}} \text{ mit } j = 0, \dots, n_y - 1.$$

Dann sei $f_{i,j}^{\text{ext}} := f_r$ und $s := s$. Setze $f_r := f_{i,j}^{\text{ext}}$.

$$\text{Falls } f_{i,j}^{\text{ext}} \neq 0 : \quad f_{i,j}^{\text{ext}} := \frac{f_{i,j}^{\text{ext}}}{s}.$$

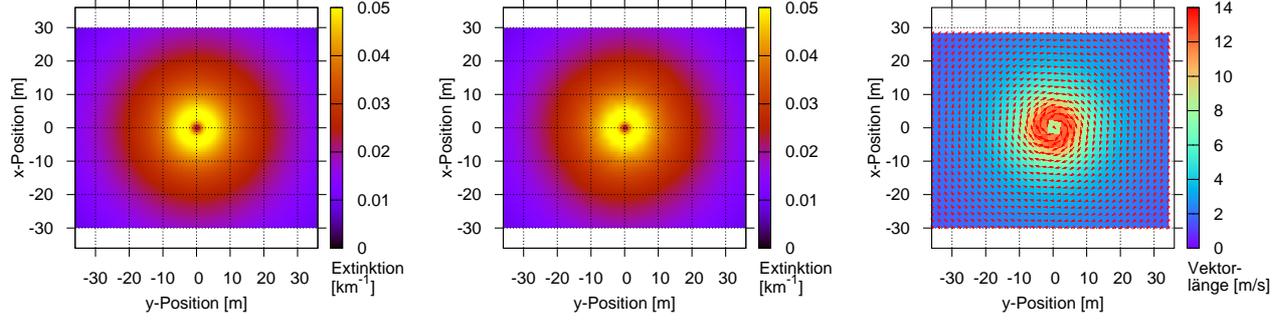
$$\text{Falls } |f_{i,j}^{\text{ext}}| \leq 0.001 : \quad f_{i,j}^{\text{ext}} = f_{\text{out}}.$$

Setze $r := r + 1$.

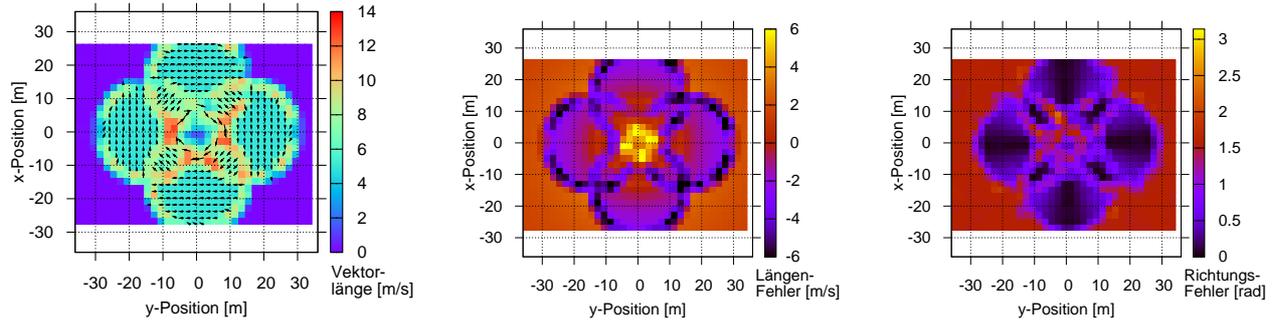
usw.,

wobei f_{out} der konstante Funktionswert außerhalb des Spiralenwirbels sei (hier $f_{\text{out}} = 0.05$). Die $f_{i,j}^{\text{ext}}$ mit $i = 0, \dots, n_x - 1$ und $j = 0, \dots, n_y - 1$ bilden dann die Extinktionsverteilung zum Zeitpunkt t_1 (siehe Abb. 5.31(a); Werte noch um einen Faktor 0.02 reduziert). Wie vorhin ergibt sich mit $\Gamma_0 = 458 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ und dem jetzt kleineren Kernradius von $r_c = r_a = 3 \text{ m}$ ein (etwas stärkeres) Lamb-Oseen-Windfeld gemäß Gl. (5.8) und (5.9), siehe Abb. 5.31(c). Daraus wird wieder bei einem Zeitschritt von $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ ein Bild 2 erzeugt, vgl. Abb. 5.31(b). Das mit KK rekonstruierte Windfeld (genau wie eben, ohne zu fehlerhafte Vektoren) und die Fehleranalyse sind in den Abb. 5.31(d) bis 5.31(f) dargestellt. Wie zuvor in Abb. 5.30 kann das Windfeld einigermaßen rekonstruiert werden; größere Fehler treten lediglich in der Mitte und auf den Diagonalen auf.

Eine erweiterte Alternative zu obigem Spiralenwirbel stellt ein sog. **Logarithmischer Spiralenwirbel** dar. Die Positionen x_i und y_j mit $i = 0, \dots, m - 1$ und $j = 0, \dots, n - 1$ (hier $m = 160$ und $n = 120$) sind die gleichen wie zuvor in Gl. (5.7) definiert. Es sind wieder $\Delta x = \Delta y = 0.5 \text{ m}$, $\Gamma_0 = 458 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$, $r_c = 4.0 \text{ m}$ und $n_\varphi = 1000$ die Zahl der Winkelunterteilungen. Das Lamb-Oseen-Windfeld entspricht also dem von Abb. 5.30(c), nur dass durch Vertauschen der Vorzeichen von $u_{i,j}$ und $v_{i,j}$ (siehe Gl. (5.9)) die Rotation nun gegen den Uhrzeigersinn erfolgt.



(a) Extinktionsschicht (Profil) zum (b) Extinktionsschicht (Profil) zum (c) Vorgegebenes Lamb-Oseen-Windfeld.



(d) Mit KK rekonstruiertes Windfeld: (e) Fehler rekonstruierter Vektorlängen mit Shift-Vektoren. (f) Fehler rekonstruierter Vektorrichtungen.

Abbildung 5.30: Spezieller Einzelwirbel mit Extinktions- und Geschwindigkeitsverteilung nach Lamb-Oseen.

Sei $r \in \mathbb{N}$. Wir definieren Winkelunterteilungen

$$\varphi_r = \frac{r \pi}{n_\varphi} \quad \forall r = 0, \dots, n_\varphi - 1, \quad (5.16)$$

und daraus Funktionswerte (unterteilt in $f_{r,1} \in \mathbb{R}$ und $f_{r,2} \in \mathbb{R}$)

$$f_r = \begin{cases} f_{r,1} = 1 + r \gamma n_\varphi^{-1} & \text{für } r = 0, \dots, n_\varphi - 1, \\ f_{r,2} = 1 + 2\gamma - (r - n_\varphi) n_\varphi^{-1} \gamma & \text{für } r = n_\varphi, \dots, 2n_\varphi - 1, \end{cases} \quad (5.17)$$

wobei $\gamma \in \mathbb{R}$ ein beliebig wählbarer konstanter Faktor sei (hier $\gamma = 8.0$). Daraus lassen sich die Extinktionswerte $f_{i,j}^{\text{ext}} \in \mathbb{R}$ kreieren. Dies geschieht in zwei Schritten:

1. Schritt:

$$\begin{aligned} \forall j = 0, \dots, \frac{n}{2} - 1 \\ \forall i = 0, \dots, m - 1 \\ \forall r = 0, \dots, n_\varphi - 1 : \\ \text{Falls } \varphi_r \leq \arccos\left(\frac{x_i}{(x_i^2 + y_j^2)^{1/2}}\right) < \varphi_{r+1}, \text{ dann: } f_{i,j}^{\text{ext}} = \log(f_{r,1}) + f_{r,1} \cdot v_\theta^{i,j}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

2. Schritt:

$$\forall j = \frac{n}{2}, \dots, n-1$$

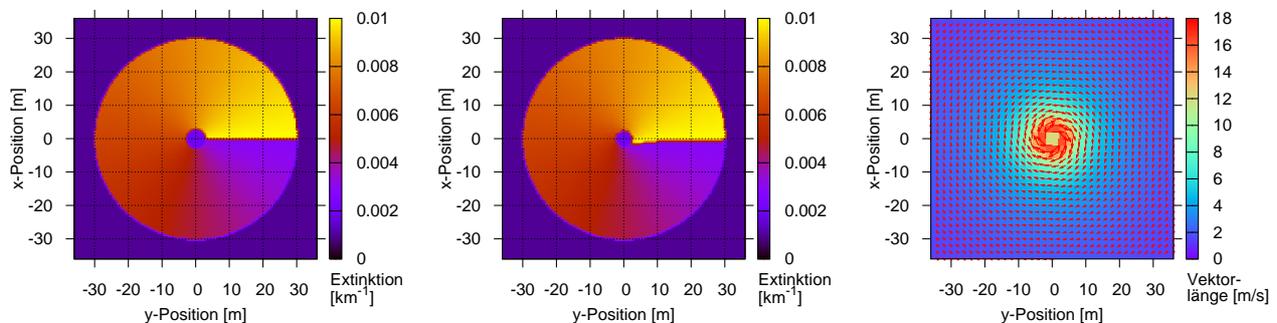
$$\forall i = 0, \dots, m-1$$

$$\forall r = 0, \dots, n_\varphi - 1 :$$

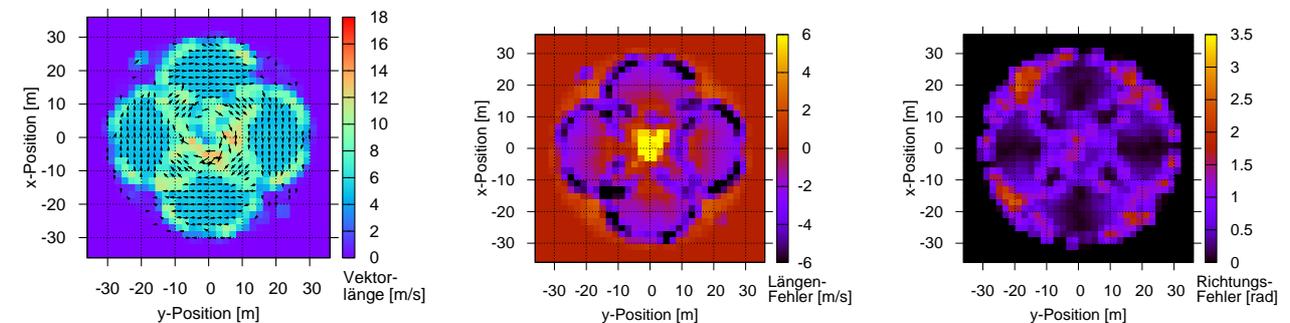
$$\text{Falls } \varphi_r \leq \arccos\left(\frac{x_i}{(x_i^2 + y_j^2)^{1/2}}\right) < \varphi_{r+1}, \text{ dann: } f_{i,j}^{\text{ext}} = \log(f_{r,2}) + f_{r,2} \cdot v_\theta^{i,j}.$$

(5.19)

Dabei ist $v_\theta^{i,j}$ nach Gl. (5.8) definiert. Das so entstandene Extinktionsbild (Abb. 5.32(a); Extinktion hier noch um einen Faktor 0.001 erniedrigt) zur Zeit t_1 wird dann gegen den Uhrzeigersinn verschoben, wodurch man mit $\Delta t = 0.1$ s das Extinktionsbild zur Zeit t_2 erhält (Abb. 5.32(b)). Die Rekonstruktion des Windfeldes mit KK erfolgt unter den selben Bedingungen wie eben und liefert auch ähnliche Ergebnisse (siehe Abb. 5.32(c)).



(a) Extinktionsschicht (Profil) zum Zeitpunkt t_1 . (b) Extinktionsschicht (Profil) zum Zeitpunkt t_2 . (c) Vorgegebenes Lamb-Oseen-Windfeld.



(d) Mit KK rekonstruiertes Windfeld: (e) Fehler rekonstruierter Vektorlängen mit Shift-Vektoren. (f) Fehler rekonstruierter Vektorrichtungen.

Abbildung 5.31: Extinktionsverteilung in Form eines Spiralenwirbels, in Kombination mit einem Lamb-Oseen-Windfeld.

Es können auch zwei Spiralenwirbel als Extinktionsverteilungen so konstruiert werden, dass eine Rekonstruktion der Drehbewegung mit der GCS-Methode von Kap. 4.1.1 möglich ist. Dazu werden wieder Wirbel wie in Abb. 5.31 verwendet (lediglich die Nahtstellen sind nun von der positiven y - zur positiven x -Achse verschoben), die mittels der Parameter aus den Gl. (5.11) bis (5.15) konstruiert werden. Diese Parameter sind hier für die Extinktionsbilder aus Abb. 5.33(a) und 5.33(b) im Wesentlichen gleich: $r_a = 4$ m, $r_b = 30$ m, $\varphi_a = 0^\circ$, $\varphi_b = 360^\circ$, $n_r = 200$, $n_\varphi = 2880$, $\Delta\varphi = 0.001$, $f_{in} = 4.7$, $f_{out} = 4.5$, $\Delta x = \Delta y = 1.0$ m, $x_{low} = y_{low} = -40$ m und $n_x = n_y = 81$. Unterschiedlich zwischen beiden Bildern sind lediglich die f_{max} -Werte: $f_{max,Bild1} = 5.0 \neq f_{max,Bild2} = 4.9$. Die so

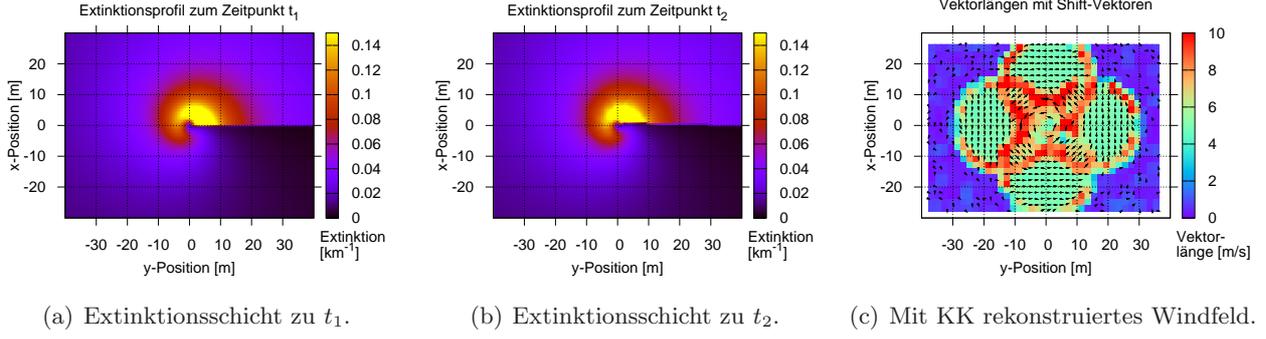


Abbildung 5.32: Extinktionsverteilung in Form eines logarithmischen Spiralenwirbels, in Kombination mit einem Lamb-Oseen-Windfeld.

entstandenen Extinktionsbilder ergeben bei einem Vergleich mit der GCS-Methode das Shift-Feld von Abb. 5.33(c), wobei die dargestellten Vektoren zur besseren Sichtbarkeit um einen Faktor 50000 gestreckt wurden. Die Templates hatten eine Größe von 7×7 Pixeln.

Durch Kombination mehrerer solcher Extinktionsprofile kann eine Art „Walzenraum“ mehrerer solcher Schichten konstruiert werden.

Eine wichtige Anwendungsmöglichkeit ist die **zeitgleiche Messung mehrerer Schichten**. Durch die Azimut- und Elevationswinkel werden die Messebenen mit zunehmender Distanz immer größer. Doch zunächst zur Erzeugung mehrerer Extinktionsschichten aus **zwei 2D Archimedischen Spiralenwirbeln**, die einen 3D Walzenraum bilden, und die unterschiedliche Radien und Extinktionsverteilungen aufweisen. Als grundlegende Parameter werden hier jeweils $\forall r = 0, \dots, n_\varphi - 1$ (n_φ die Zahl der Unterteilungen für den polaren Winkel φ ; hier $n_\varphi = 10000$) die

Winkel	$\varphi_r = \varphi_{\min} + r \Delta\varphi \pi$,
Funktionswerte (linker Wirbel)	$f_{1,r} = f_{1,\max} - r \Delta f_1$,
Funktionswerte (rechter Wirbel)	$f_{2,r} = f_{2,\max} - r \Delta f_2$,
x-Positionen (linker Wirbel)	$x_{1,r}^{\text{kart}} = \frac{v}{\omega} (\varphi_r + \varphi_{\text{Shift}} \pi)^{\frac{1}{\rho}} \cos((\varphi_r + \varphi_{\text{Shift}} \pi)^{\frac{1}{\rho}}) + x_{s,\text{left}}$,
y-Positionen (linker Wirbel)	$y_{1,r}^{\text{kart}} = \frac{v}{\omega} (\varphi_r + \varphi_{\text{Shift}} \pi)^{\frac{1}{\rho}} \left(-\sin((\varphi_r + \varphi_{\text{Shift}} \pi)^{\frac{1}{\rho}}) \right) + y_{s,\text{left}}$,
x-Positionen (rechter Wirbel)	$x_{2,r}^{\text{kart}} = \frac{v}{\omega} (\varphi_r + \varphi_{\text{Shift}} \pi)^{\frac{1}{\rho}} \left(-\cos((\varphi_r + \varphi_{\text{Shift}} \pi)^{\frac{1}{\rho}}) \right) + x_{s,\text{right}}$,
y-Positionen (rechter Wirbel)	$y_{2,r}^{\text{kart}} = \frac{v}{\omega} (\varphi_r + \varphi_{\text{Shift}} \pi)^{\frac{1}{\rho}} \left(-\sin((\varphi_r + \varphi_{\text{Shift}} \pi)^{\frac{1}{\rho}}) \right) + y_{s,\text{right}}$

definiert, wobei φ_{\min} die untere Grenze für die polaren Winkel φ in Vielfachen von π (hier $\varphi_{\min} = 0$), $\Delta\varphi$ die Schrittweite für die φ (hier $\Delta\varphi = 0.008$), $f_{1,\max}$ bzw. $f_{2,\max}$ die Maximalwerte für die Funktionswerte $f_{1,r}$ bzw. $f_{2,r}$ der Spiralen (hier $f_{1,\max} = f_{2,\max} = 0.3$), Δf_1 bzw. Δf_2 die Abnahmefaktoren für die Funktionswerte $f_{1,r}$ bzw. $f_{2,r}$ (hier $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0.000025$), v die Geschwindigkeit eines Punktes auf der Spirale in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (hier $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$), ω die Winkelgeschwindigkeit der Spirale um das Zentrum in s^{-1} (hier $\omega = 18 \text{ s}^{-1}$), $\varphi_{\text{Shift}} \in [0, 2\pi)$ die Phasenverschiebung der gegenläufig rotierenden Wirbel (hier $\varphi_{\text{Shift}} = 0.0$), $\rho \in \mathbb{R}$ eine Konstante im Exponenten (hier $\rho = 1.0$), und $x_{s,\text{left}}$, $y_{s,\text{left}}$ bzw. $x_{s,\text{right}}$, $y_{s,\text{right}}$ die Verschiebungen des linken bzw. rechten Wirbels bezüglich des Ursprungs (bei $(0,0)^T$) in x - und y -Richtung (hier $x_{s,\text{left}} = -30 \text{ m}$, $x_{s,\text{right}} = +30 \text{ m}$ und $y_{s,\text{left}} = y_{s,\text{right}} = 0 \text{ m}$) seien.

Als Nächstes definieren wir wieder die Pixel- bzw. Punkte-Positionen auf der x -, y - und z -Achse für das Gesamtbild, wo beide Wirbel zu einem Bild vereint werden. Diese sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
 x_i &= x_{\text{low}} + i \Delta x & \forall i = 0, \dots, n_x, \\
 y_j &= y_{\text{low}} + j \Delta y & \forall j = 0, \dots, n_y, \\
 z_k &= z_{\text{low}} + k \Delta z & \forall k = 0, \dots, n_z,
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

wobei $x_{\text{low}}, y_{\text{low}}, z_{\text{low}}$ die unteren Grenzen der jeweiligen Achsen (hier $x_{\text{low}} = -64.5$ m, $y_{\text{low}} = -37.5$ m, $z_{\text{low}} = 0$ m), $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ die Schrittweiten (hier $\Delta x = \Delta y = 1.5$ m, $\Delta z = 50$ m) sowie n_x, n_y, n_z die Anzahl der Positionen (hier $n_x = 86, n_y = 50, n_z = 10$) in die jeweilige Richtung seien.

Sei weiter $(s_b : b \in \mathbb{N})$ eine Folge von Indizes mit $s_b \in \mathbb{N} \forall b \in \mathbb{N}$ und $f_{\text{out}} \in \mathbb{R}$ ein konstanter Funktionswert außerhalb der Wirbel (hier $f_{\text{out}} = 0.05$). Außerdem sei $\varphi_{\text{min},k}$ (mit $\varphi_{\text{min},0} = \varphi_{\text{min}}$) für alle $k = 0, \dots, n_z - 1$ eine Unterteilung der φ_{min} für alle z -Schichten. Nun können die Wirbelfunktionswerte $f_{i,j}^{\text{mean}} \in \mathbb{R}$ (bzw. f_l^{mean}) mittels des folgenden Algorithmus bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
 & \forall k = 0, \dots, n_z - 1 \quad \forall t = s_{k+1} - 0.5 s_k, \dots, n_\varphi - 1 \\
 & \text{Falls } \left((k + 0.9) < \frac{(k + 1)(\varphi_t - \varphi_{\text{min},k})}{8\pi} < (k + 1.1) \right) \\
 & \text{Sei } l = 0 \text{ mit } l \in \mathbb{N} \\
 & \forall j = 0, \dots, n_y \quad \forall i = 0, \dots, n_x : \quad f_{i,j}^{\text{mean}} = 0.0 \\
 & \forall j = 0, \dots, n_y \quad \forall i = 0, \dots, n_x \\
 & \quad m = 0 \text{ mit } m \in \mathbb{N} \\
 & \quad \forall p = s_{k+1} - 0.5 s_k, \dots, i - 1 \\
 & \quad f_l^{\text{mean}} := \sum_p (f_{1,p} + f_{2,p}) \text{ und } m := m + 1 \quad \forall p \text{ mit } \left((|x_i - x_{1,p}^{\text{kart}}| \leq \frac{\Delta x}{2}) \wedge \right. \\
 & \quad \left. (|y_j - y_{1,p}^{\text{kart}}| \leq \frac{\Delta y}{2}) \wedge (|x_i - x_{2,p}^{\text{kart}}| \leq \frac{\Delta x}{2}) \wedge (|y_j - y_{2,p}^{\text{kart}}| \leq \frac{\Delta y}{2}) \right), \\
 & \quad f_l^{\text{mean}} := \sum_p f_{1,p} \text{ und } m := m + 1 \quad \forall p \text{ mit } \left((|x_i - x_{1,p}^{\text{kart}}| \leq \frac{\Delta x}{2}) \wedge \right. \\
 & \quad \left. (|y_j - y_{1,p}^{\text{kart}}| \leq \frac{\Delta y}{2}) \right) \wedge \left((|x_i - x_{2,p}^{\text{kart}}| > \frac{\Delta x}{2}) \vee (|y_j - y_{2,p}^{\text{kart}}| > \frac{\Delta y}{2}) \right), \\
 & \quad f_l^{\text{mean}} := \sum_p f_{2,p} \text{ und } m := m + 1 \quad \forall p \text{ mit } \left((|x_i - x_{1,p}^{\text{kart}}| > \frac{\Delta x}{2}) \vee \right. \\
 & \quad \left. (|y_j - y_{1,p}^{\text{kart}}| > \frac{\Delta y}{2}) \right) \wedge \left((|x_i - x_{2,p}^{\text{kart}}| \leq \frac{\Delta x}{2}) \wedge (|y_j - y_{2,p}^{\text{kart}}| \leq \frac{\Delta y}{2}) \right), \\
 & \quad f_l^{\text{mean}} := f_l^{\text{mean}} \quad \forall p \text{ mit } \left((|x_i - x_{1,p}^{\text{kart}}| > \frac{\Delta x}{2}) \vee \right. \\
 & \quad \left. (|y_j - y_{1,p}^{\text{kart}}| > \frac{\Delta y}{2}) \vee (|x_i - x_{2,p}^{\text{kart}}| \leq \frac{\Delta x}{2}) \wedge (|y_j - y_{2,p}^{\text{kart}}| \leq \frac{\Delta y}{2}) \right), \\
 & \quad \text{Falls } f_l^{\text{mean}} \neq 0 : f_l^{\text{mean}} := \frac{f_l^{\text{mean}}}{m}, \quad \text{falls } f_l^{\text{mean}} = 0 : f_l^{\text{mean}} := f_{\text{out}}. \\
 & \quad \varphi_{\text{min},k+1} := \varphi_t, \quad s_{k+2} := t,
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

und so weiter. Insgesamt erhält man dann mit den hier verwendeten Parameterwerten (in Klammern) aus den f_l^{mean} -Werten die Extinktionsschichten von Archimedischen Spiralenwirbeln aus Abb. 5.34 (nur 9 von 10 Profilen gezeigt; x - und y -Achse aus obigem Code in Darstellung vertauscht!), die im Folgenden zur Simulation mehrerer Schichten gleichzeitig verwendet werden. Die Extinktionsschichten sollen die Streuerverteilung in Wirbelschleppen eines vorausfliegenden Flugzeuges wiedergeben, die sich mit größer werdender Distanz hinter dem Flugzeug verbreitert. Das heißt ein nachfliegendes Flugzeug wird zunächst die Extinktionsschicht 1 aus Abb. 5.34(a) erfassen (durchfliegen), während es zuletzt die noch weiter entfernte Extinktionsschicht 9 berühren wird, die dem vorausfliegenden Flugzeug noch am nächsten ist und deren Extinktion hier höher ist.

Die Extinktionsschichten aus Abb. 5.34 werden nun in eine pbs5-RSL-Simulation eingelesen. Das Flugzeug bzw. monostatische Lidar befindet sich in 2000 m Entfernung zum vorderen Rand

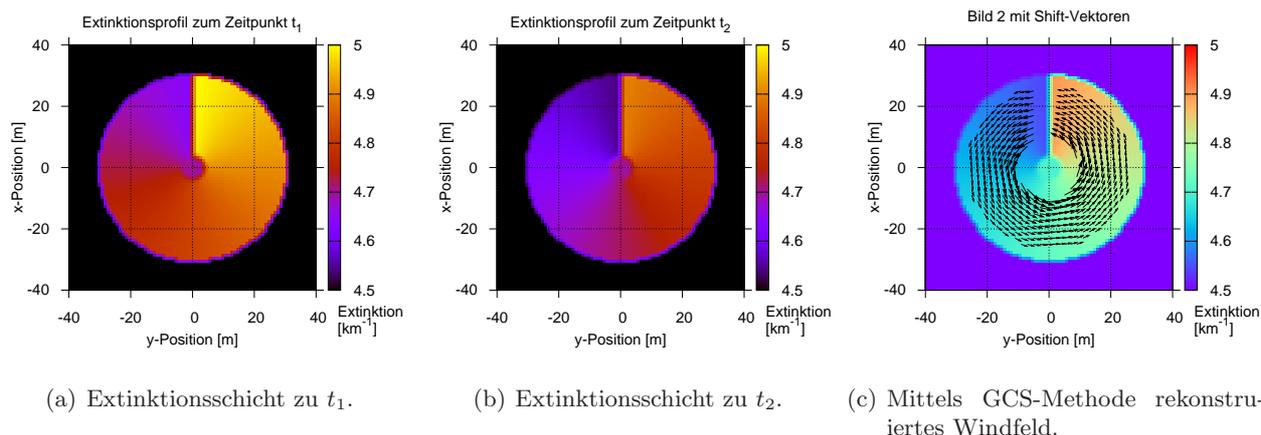


Abbildung 5.33: Zwei Spiralenwirbel mit durch GCS-Methode rekonstruierbarem Windfeld.

der ersten Extinktionsschicht (Abb. 5.34(a)). Diese Schicht hat wie jede weitere eine Dicke von 50 m. Extinktionsschicht 9 (Abb. 5.34(i)) würde sich also transversal zur Flugrichtung zwischen 2400 m und 2450 m entfernt vom messenden Flugzeug befinden. Die Azimutwinkel in der Simulation zu einem festen Zeitpunkt liegen zwischen $-1.74^\circ \leq \theta \leq 1.74^\circ$, die Elevationswinkel zwischen $-1.01^\circ \leq \varphi \leq 1.01^\circ$ bei 87×51 Messrichtungen. Die MZI sind in der `pbs5`-Simulation so gewählt, dass sie gerade die 50 m Schichten möglichst vollständig erfassen, wodurch die Varianz der Monte-Carlo-Simulation durch das große MZI reduziert werden kann. Als Mueller-Matrizen wurden wieder die prolaten Sphäroide von Rother (vgl. Abb. 5.26(b) und 5.28(a)) verwendet, d. h. die simulierte Laserwellenlänge war 355 nm. Alle weiteren Parameter wurden wie in den Unterkapiteln zuvor üblich gewählt. Insgesamt erhält man dadurch die in Abb. 5.35 gezeigten normierten `pbs5`-Intensitäten für die Messschichten 1 (Abb. 5.35(a)) bis 9 (Abb. 5.35(i)). Wie man deutlich sehen kann, sind die „tieferen“, höherdistanten Messschichten durch die lineare Laser-Ausbreitung transversal höher und breiter (der violette Rand zeigt, dass die Breite des eingelesenen Extinktionsfeldes überschritten wurde und damit von dort keine Rückstreuung empfangen wird, da dort die Extinktion 0 ist). Dadurch werden in den tieferen Schichten die Wirbel nur noch kleiner dargestellt als in Wirklichkeit, da die Zahl der Messpunkte bzw. Messrichtungen für jede Ebene gleichbleibt, die Ebenen aber flächenmäßig immer größer werden. Man hat hier also in größerer Messdistanz zunehmend einen Informationsverlust.

Dennoch können die Unterschiede zwischen zwei beliebigen Schichten, d. h. das Wandern bzw. Verbreitern der Streuer, z. B. mit der GCS-Methode rekonstruiert werden. Ein solches Resultat zeigt Abb. 5.36 für einen Vergleich von Messschicht 1 und 5 für ein 10×10 Pixel umfassendes Template. Für eine Messung bei wenig Sonneneinfluss (nur 20 solare Photonen auf Detektor bei 50 m langen MZI) und den zuvor verwendeten Rausch-Faktoren erhält man für einen 11 W Laser bei einer Messung pro Sekunde lediglich noch maximal 60 PE (LT) pro Richtung (gleichbedeutend mit hohem Rauschen). Dass man direkt einem Wirbelschleppen-erzeugenden Flugzeug hinterherfliegt, ist in dieser Darstellung daran erkennbar, dass die Streuerverteilung in der weiter entfernten Messschicht noch nicht so ausgedehnt ist wie in der näheren. Daher zeigen die Shift-Pfeile dann zur Mitte (vgl. Abb. 5.36(b)). Die Messdistanz muss bei einem derartigen Detektionsverfahren aber extrem hoch sein, damit die Messwinkel möglichst klein werden, so dass die Strukturen in den tieferen Schichten nur unwesentlich kleiner als in den vorderen erscheinen.

Abschließend noch einige Extinktionsprofile von kombinierten Spiralenwirbelpaaren, die mit der Methode von Abb. 5.31 und zugehörigen Formeln generiert wurden. Dabei werden zunächst zwei einzelne gegenläufig rotierende Spiralenwirbel erzeugt. Es können ein konstantes Wandern jedes Wirbels, Radienveränderungen (Kernradius oder äußerer Radius) und Variationen der Extinktionswerte im Wirbelkern und außen von Schicht zu Schicht berücksichtigt werden. Schließlich werden die Werte

5. Simulationen der Signale eines Rückstreulidars zur Messung des transversalen Windes von Wirbelschleppen vor Flugzeugen

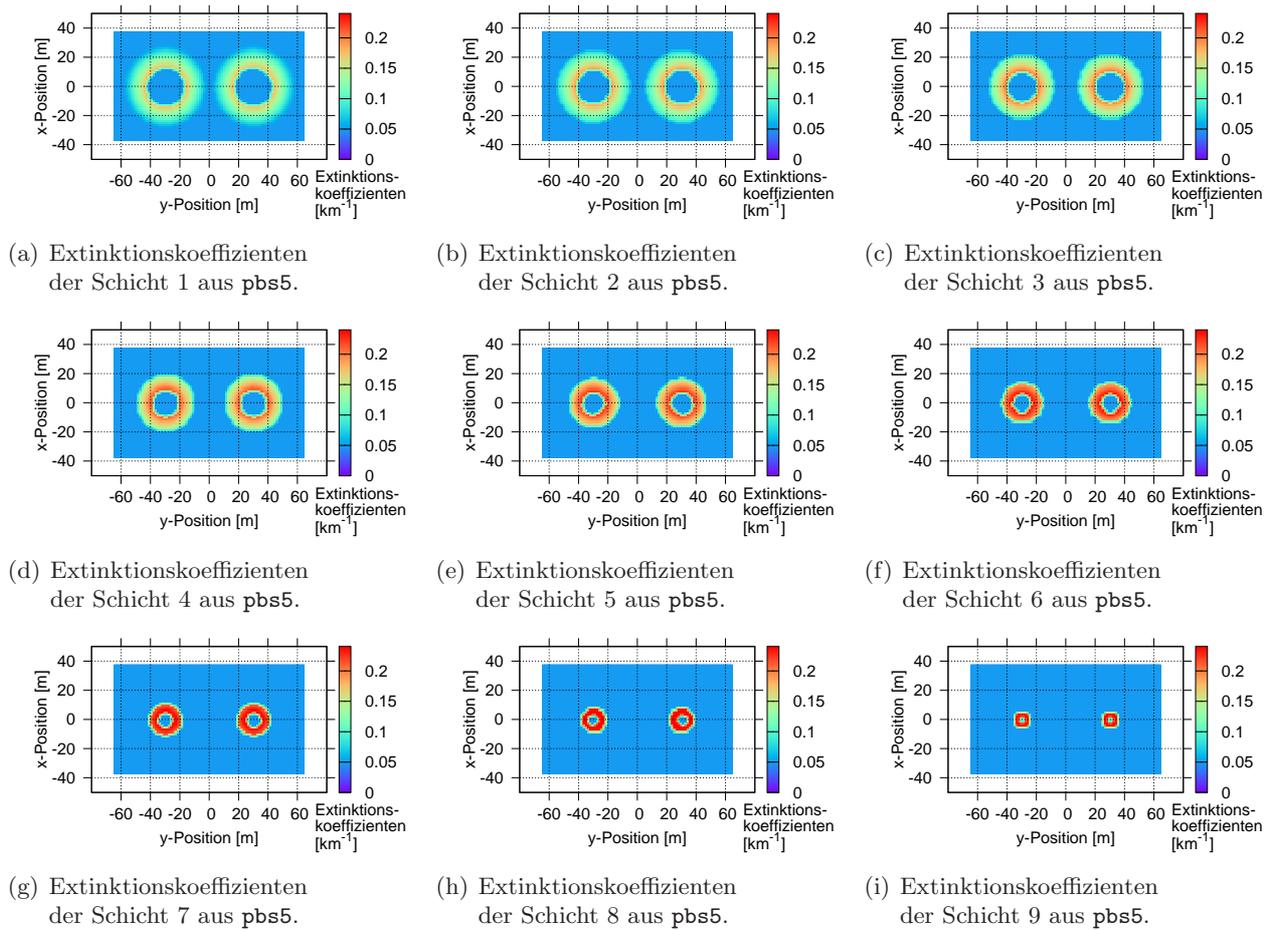


Abbildung 5.34: Extinktionsschichten aus Archimedischen Spiralenwirbeln zur Berechnung mehrerer Schichten zeitgleich an festem Ort.

bei Überlagerung summiert. Solche Profile sind für mehrere Extinktionsschichten in Abb. 5.37 gezeigt. Sie können zur Simulation einer Messung mehrerer Schichten gleichzeitig eingesetzt werden.

Alle in diesem letzten Unterabschnitt gezeigten Extinktionsprofile können in pbs5-Simulationen eingelesen und die Rückstreubilder (auch mit Rauschen) anhand verschiedener Methoden verglichen werden, wodurch sich bei geeigneten Bildern und Methoden Shift-Felder rekonstruieren lassen.

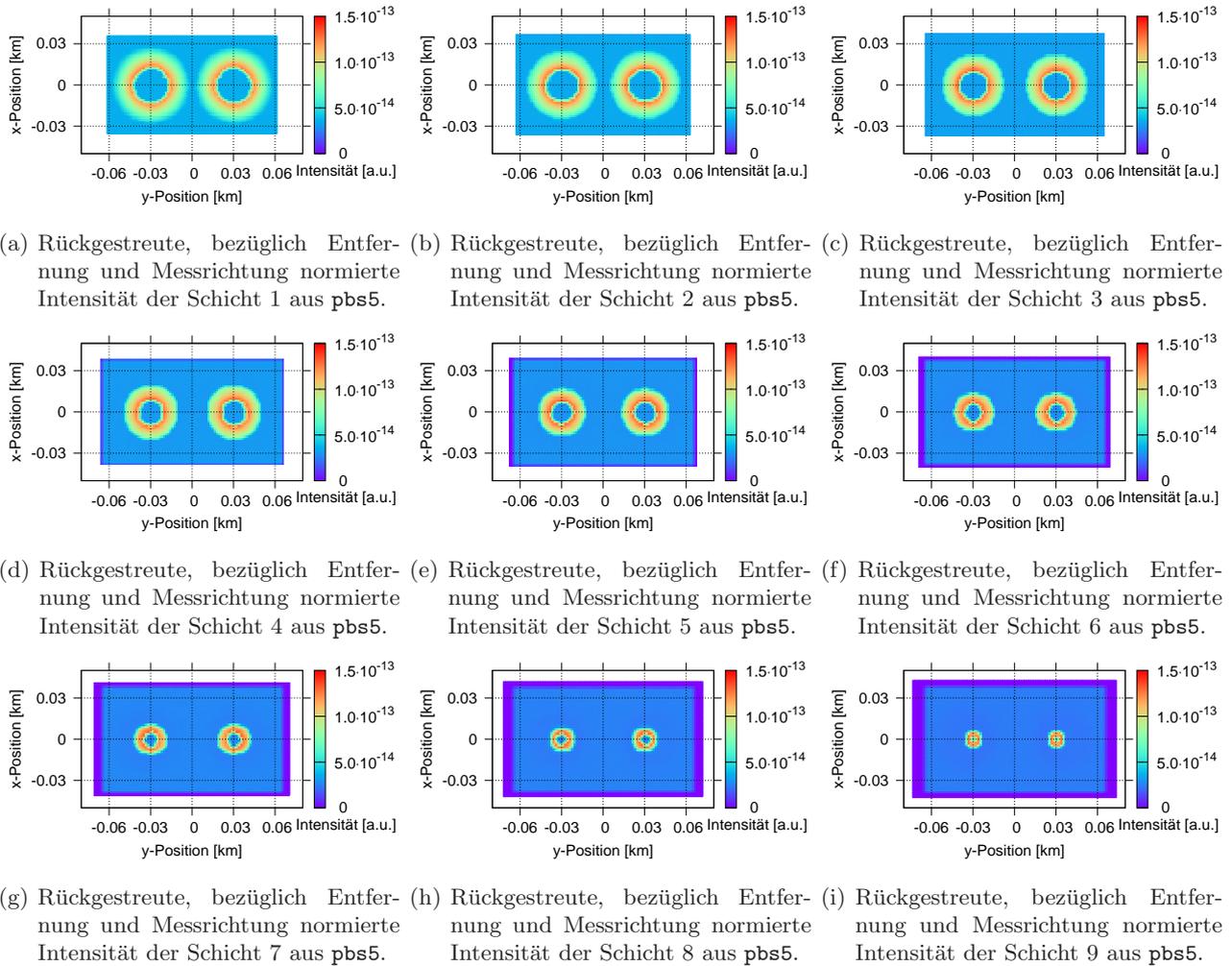


Abbildung 5.35: Intensitäten aus einer Simulation der Rückstreuung aus mehreren Messschichten (entspricht Extinktionsschichten) von je 50 m Dicke: Schicht 1 zwischen 2000-2050 m Entfernung, Schicht 2 zwischen 2050-2100 m Entfernung, usw. bis Schicht 9 zwischen 2400-2450 m.

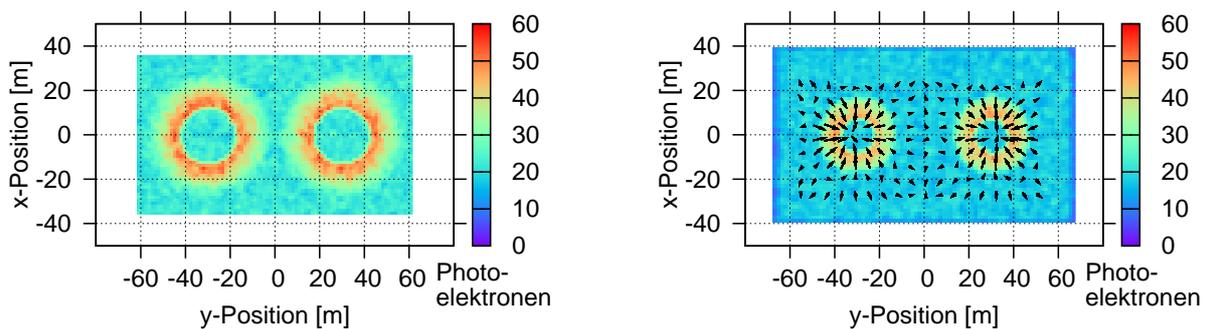


Abbildung 5.36: Ergebnisse einer pbs5-simulierten Messung mehrerer Schichten zeitgleich. Aus den PE-Zahlen inklusive Rauschen kann in den PE-Bildern von Schicht 1 (dem hinterherfliegenden Flugzeug näher) nach Schicht 5 über die GCS-Methode eine Verschiebung zur Mitte detektiert werden, woraus sich auf Wirbelschleppen eines vorausfliegenden Flugzeuges schließen lässt.

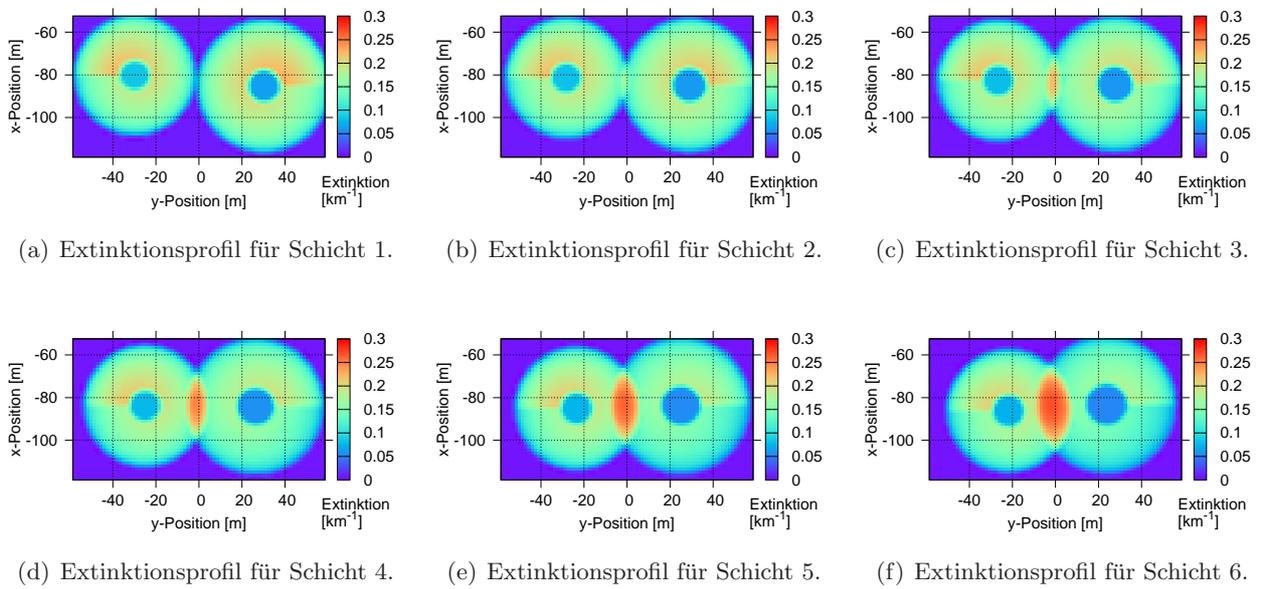


Abbildung 5.37: Einige Extinktionsschichten gegenläufig rotierender Spiralenwirbel mit variablen Radien, etc., für eine Simulation mehrerer Schichten.

Kapitel 6

Zusammenfassung

Die Hauptfrage zu Beginn dieser Dissertation lautete: Ist ein geeigneter Sensor für aktive Steuermaßnahmen (Aussteuerung) bei Turbulenz-Durchflügen schon verfügbar (Antwort: nein) oder in naher Zukunft unter dem momentanen Stand der Lasertechnik und Optik überhaupt machbar? Im Rahmen dieser Dissertation wurde also die Machbarkeit flugzeuggetragener Lidar-Sensoren zur aktiven Steuerung bei Durchfliegen von Scherwinden und turbulenten Luftströmungen (speziell von Wirbelschleppen) mittels realitätsnaher Simulationen theoretisch untersucht. Neben dem im Hauptteil (Kap. 2 bis 5) analysierten, neuen Typ eines **Rückstreulidars (RSL)** wurde auch das Signalanalyseverfahren des einzigen weiteren für die Messanforderungen geeigneten Lidars, eines sog. **Fringe-Imaging Doppler-Wind-Lidars (FI-DWL)**, in einer Flughöhe von 8500 m genauer untersucht. Letzteres wird im Anhang B dieser Arbeit aus Platzgründen nur kurz zusammengefasst (weitere Details zu den durchgeführten Simulationen und ihren Ergebnissen in [Hirschberger und Ehret \(2011\)](#)).

Für dieses FI-DWL wurden realistische Ringmuster eines **Fabry-Pérot-Etalons (FPE)** auf einem 2D CCD-Bildsensor (ein Array lichtempfindlicher Dioden; auch ein CMOS wäre möglich) in der Brennebene dahinter simuliert (siehe auch Abb. [B.2\(b\)](#) bzw. [B.4](#)). Unter Berücksichtigung der Streueigenschaften in der Atmosphäre und dem durch Zufallszahlen erzeugten starken Rauschen wurde getestet, wie genau eine Messung der Doppler-Verschiebung in großer Flughöhe in eine einzelne Blickrichtung (Line-Of-Sight) und damit des Windes möglich ist. Dazu wurden zwei geeignete Algorithmen zur Berechnung des Zentrums und des Radius von 2D Ringen mit Subpixel-Präzision erläutert und angewandt. Bestenfalls ergaben sich bei exakt bekanntem Zentrum der Ringe bei einer Messdistanz von 56 m und einem Messzeitintervall (Range Bin) mit einer räumlichen Tiefe von 10 m bei einer Mittelung über 20 solche verrauschte 2D CCD-Ringbilder mit 960×780 Pixeln Auflösung ein Bias und eine Standardabweichung von knapp besser (niedriger) als $2 \frac{m}{s}$ für eine Line-Of-Sight-Geschwindigkeitskomponente. Bei nicht exakt bekanntem, schwankendem Zentrum (was in der Realität der Fall ist) beträgt nach ebenfalls 20 Ringbildern der Bias im besten Fall ca. $7 \frac{m}{s}$ bzw. die Standardabweichung ca. $3 \frac{m}{s}$ (Details hierzu in [Hirschberger und Ehret \(2011\)](#)).

Obige Genauigkeit dieses FI-DWL für die Line-Of-Sight-Geschwindigkeiten genügt damit nicht den hohen Anforderungen von Tab. [1.1](#) für vorausschauende z. B. Wirbelschleppen-Messungen an Bord von Flugzeugen. (FI-)DWL haben zudem große Messfehler für die zur Flugrichtung transversalen, optischen u - und v -Komponenten des Windes. Die Signalanalyse dauert momentan noch deutlich zu lange für Echtzeit-Auswertungen (mehrere Sekunden pro Line-Of-Sight-Komponente), da eine Vielzahl notwendigerweise hochaufgelöster 2D Ringbilder ausgewertet werden muss, um lediglich einen, oft zu fehlerbehafteten 3D Windvektor zu erhalten.

Darum wurde ein spezielles Rückstreulidar mit neuer und schneller Signalverarbeitung als Alternative vorgeschlagen und analysiert, das ohne Nutzung des Doppler-Effekts auskommt. Die technische Umsetzung eines solchen Systems war nicht Teil dieser Arbeit. Wie das System technisch realisiert

werden sollte, wurde aber in Kap. 2.2 kurz beschrieben. Die Verwendung eines Scanners wie beim bereits realisierten FI-DWL-Instrument von oben empfiehlt sich aufgrund der Vielzahl an nötigen Messrichtungen bei diesem neuen Typ eines RSL nicht. Stattdessen sollten ein oder mehrere Strahlteiler die Laserpulse möglichst zeitgleich in Form von Photonenbündeln gleicher Energie auf die einzelnen Richtungen verteilen und ihre Rücksignale auch wieder zeitgleich im Receiver empfangen werden, wo sie nach Emissionsrichtungen und damit Empfangsrichtungen getrennt werden müssen.

Das RSL muss die geringen rückgestreuten Intensitätsanteile des ausgesandten Laserlichts aus ein und derselben möglichst dünnen Volumen-Messschicht für eine Vielzahl an Messrichtungen zu zwei leicht unterschiedlichen Zeitpunkten t_1 und t_2 (und damit aufgrund der Fluggeschwindigkeit $v_{A/C}$ für zwei leicht unterschiedliche Messdistanzen zur Messschicht) messen, siehe Abb. 2.1. Dies erfordert wegen der Relativbewegung des Flugzeugs bezogen auf die Messschicht die Vergrößerung der Messwinkel der emittierten Laserstrahlen zum zweiten Messzeitpunkt im Vergleich zum ersten, um wieder genau dieselben Punkte anzuvisieren. Insgesamt erhält man so je zwei bezüglich Richtung und Distanz normierte 2D-Bilder der rückgestreuten Intensitäten aus einer festen Schicht d vor dem Flugzeug, für die sich danach dann ein 2D-Windfeld rekonstruieren lässt.

Die Ausbreitung der Photonen des gepulsten Laserlichts des RSL-Sensors in der Atmosphäre wurde mittels eines partiell deterministischen Markovschen (Sprung-)Prozesses (PDMP) modelliert. Auf einem geeignet gewählten Zustandsraum und mit Übergangswahrscheinlichkeiten, bestehend aus Markov-Kernen für zufällige Kollision, Streuerselektion, Wellenlängenänderung, Richtungsänderung sowie deterministischer Referenz- und Stokesvektoränderung, ergibt sich ein zeitdiskreter stationärer Markovscher Prozess. Daraus kann ein zeitstetiger stationärer korpuskularer Prozess mit Mehrfachstreuung, ein PDMP, inklusive Polarisation und Wellenlänge, hergeleitet werden. Dieser Prozess ist in Form des Monte-Carlo-Programmes `pbs5` zur Simulation mit Mehrfachstreuung und Polarisation realisiert, das nun auch die oben beschriebene, neue Messgeometrie simulieren kann.

Realistische, unter anderem aus den dimensionslosen Konzentrationen passiver Tracerverteilungen von Wirbelschleppen aus Large-Eddy-Simulationen (LES) generierte Verteilungen von Extinktionskoeffizienten (umgerechnet auf Einheit km^{-1}) dienen in `pbs5` als Maß für das variable Streuvermögen auf dem Photonenpfad. Aus dem zu einem Zeitpunkt t_1 gegebenen Extinktionsprofil wurde für einen kleinen Zeitschritt Δt ein gemäß dem LES-Windfeld zu t_1 verschobenes Extinktionsprofil zum Zeitpunkt t_2 erzeugt. Die aus vielen Richtungen in den Extinktionsprofilen zu Zeiten t_1 und t_2 rückgestreuten Photonen wurden zu 2D-Bildern der Rückstreuung zusammengefügt.

Zur Berechnung der 2D-Verschiebungs- bzw. Windvektoren wurden vier Methoden entwickelt, bei denen je zwei Bilder miteinander verglichen werden. Zum Ersten wurde eine Bewegung durch Verschiebung der räumlich gemittelten Schwerpunktpositionen erfasst (Gravity-Center-Shift-Methode, kurz GCS). Der Schwerpunkt wurde dabei als Position des Mittelwertes aufgefasst. Zum Zweiten wurde ein Algorithmus entwickelt, der über das Shift-Theorem für Fourier-Transformierte eine Berechnung der Translation erlaubt (Fourier-Shift-Methode, kurz FS). Zum Dritten wurden Windvektoren durch eine Variante der Kreuzkorrelation (KK) mit Subpixelgenauigkeit statistisch berechnet. Zum Vierten kombinierte eine neue, als Weight-Shift (WSh) bezeichnete Methode die Prinzipien von Kreuzkorrelation (KK) und Verschiebung der räumlich gemittelten Schwerpunktpositionen (GCS).

Je nach gegebenen Mustern und zu messender Strukturverschiebung waren die einzelnen Methoden unterschiedlich gut geeignet (siehe Tab. 4.4). Eine Universalmethode, die für jedes Wandern (Wind-Strömung) eines beliebigen Musters gleich gut geeignet wäre (ohne dazu zusätzliche Annahmen oder Kenntnisse über das Aussehen der Struktur und des Windfeldes hineinzustecken), gibt es nicht. Zur Berechnung der Windfelder von Wirbelschleppen erwies sich die Kreuzkorrelation als qualitativ am besten, so dass diese für die Simulationen in Kap. 5 überwiegend zur Auswertung zum Einsatz kam. Auch die WSh-Methode konnte für unverrauschte Bilder überzeugen (siehe Kap. 4). Lediglich bei den verrauschten Rückstreubildern (siehe Kap. 5) hatte sie Probleme bei der Rekon-

struktion eines Wirbel-Windfeldes. Die Methoden GCS und FS sind vor allem zur Rekonstruktion der Richtung häufig gut geeignet. Rotierende Geschwindigkeitsfelder wie die von Wirbelschleppen können sie jedoch nicht berechnen.

Berechnungen in Echtzeit im Flugzeug sind im Prinzip mit allen vier Methoden möglich (siehe Tab. 4.5). Bei der FS-Methode könnten z. B. FFT oder Verringerung der Template-Größe Temposteigerungen um etwa einen Faktor 10 bis 100 bewirken, um Berechnungszeiten bis hinunter zu 0.1 s pro Windfeld zu erreichen. Alle anderen Methoden (GCS, KK und WSh) genügen leicht den Anforderungen von Tab. 1.1. Sie können in jedem Fall 100 und mehr 2D Windvektoren innerhalb der erlaubten Zeitspanne von 0.1 s pro Windfeld berechnen.

Für die Kreuzkorrelation reichten für die mit realistischem Rauschen versehenen Rückstreubilder (Photoelektronenzahlen) aus pbs5 193 × 129 Richtungen und damit Punkte aus, um den zur Flugrichtung vertikalen und horizontalen, gefährlichen Wind in 2D für einen Bereich von ca. 100 m × 60 m (größer als Flügelspannweite und Flugzeughöhe) vor dem Flugzeug mit der nach den Messanforderungen nötigen Präzision zu ermitteln (siehe Kap. 5). Die Berechnungsdauer des Windfeldes mit KK steigt durch hier größere Tp (32 × 32 Punkte) und RTp (16 × 16 Punkte) auf 0.225 s für 960 2D Windvektoren an, würde aber wegen einer Dauer von 0.000234 s pro Einzelvektor in einer Zeitspanne von 0.1 s für absolut ausreichende ca. 420 2D Windvektoren pro Windfeld in Echtzeit reichen.

Die Fehler für die in Kap. 5 aus verrauschten Rückstreubildern rekonstruierten Windfelder hinsichtlich der Windvektor-Längen (Geschwindigkeitsbeträge) und Windvektor-Richtungen waren je nach Stärke der Extinktion (Streuvermögen) zum Teil sehr gering. Lediglich in und an den Wirbelkernen (starke Änderung der Windfeldstruktur um den Wirbelkern auf wenigen Pixeln) und am Bildrand traten größere Fehler auf. Bei zu geringer Extinktion (Rückstreuung) braucht man entsprechend mehr Laserenergie, um genügend rückgestreute Photonen zu erhalten und um so das Rauschen auf dem Photodetektor ausreichend gering zu halten, so dass eine gute Berechnung der Verschiebungs- bzw. Windvektoren noch möglich ist. Die Energie heute typischer Lasersysteme für Fernerkundung reicht für das simulierte RSL zwar bislang nur für ein oder maximal zwei komplette 2D Windfelder pro Sekunde. Durch die niedrigeren Anforderungen an die Strahlqualität sind hier aber auch noch deutlich höhere Laserleistungen möglich, so dass aus den Ergebnissen für das RSL starke Vorteile gegenüber einem FI-DWL erkennbar sind, wo man nach diesen Analysen hinsichtlich der Laserleistung nur sehr wenige 2D oder 3D Windvektoren pro Sekunde (< 10) messen könnte (Auswertung für FI-DWL dauert pro Windvektor aber länger als 1 s, siehe oben).

Generell (sowohl für RSL als auch FI-DWL) sollte die kürzere Laser-Wellenlänge von 355 nm der stärker augenschädlichen Wellenlänge von 532 nm vorgezogen werden, da sie erhöhtes (molekulares) Rückstreuvermögen in großer Flughöhe bietet (vgl. Abb. B.1 für die empfangbaren Photonenzahlen in Abhängigkeit von Wellenlänge und Flughöhe).

Bislang ist kein passender Lidar-Sensor zur aktiven Steuerung verfügbar. Aus den Ergebnissen dieser FI-DWL- und RSL-Simulationen erscheint es sinnvoll, ein FI-DWL für die Messung der (aeronautischen) x - mit einem RSL für die Messung der zur Flugrichtung transversalen y - und z - Geschwindigkeitskomponenten zu kombinieren. Möglicherweise sind die Wirbelgeschwindigkeiten in Flugrichtung weniger wichtig für die aktive Steuerung, so dass die transversalen Messungen eines RSL ausreichend sein könnten.

Im Gegensatz zu allen dem Autor bisher bekannten publizierten Resultaten von Simulationen oder Messungen eines Lidars wurde hier erstmals das räumlich und zeitlich hochaufgelöste Windfeld einer Wirbelschleppe unter realitätsnahen Winkeln und Flugbedingungen mittels geeigneter Auswerteverfahren rekonstruiert. Anders als bei PIV in einem Wasserschleppkanal müssen die Signale aus den einzelnen Richtungen bei zeitgleicher Erfassung nach Richtungen getrennt erfasst werden und können nicht direkt zeitgleich auf ein CCD projiziert werden. Tracer-Partikel fehlen zudem in der Atmosphäre und die empfangenen rückgestreuten Intensitäten sind kontinuierlich, d. h. diskrete Punkte wie bei PIV, die sich mit der Strömung bewegen, werden in der Realität nicht auftreten.

Das Prinzip eines RSL wäre auch nützlich für Windkraftanlagen, um in ihrem Nachlauf zu messen oder um die Orientierung der Windräder zu optimieren und diese an die gegebenen Windverhältnisse anzupassen. Im Gegensatz zu Flugzeugen liegt hier keine bewegte Plattform vor, wodurch das Design und der Bau eines solchen Lidar-Systems leichter sein dürfte. Vor allem könnte die Analyse auf den 3D Raum ausgeweitet werden, da das RSL mehr als nur ein paar Schichten messen könnte (siehe auch [Schols und Eloranta \(1992\)](#)).

Die Auswerteverfahren zu den simulierten Ringen eines FPE zur Windanalyse vor Flugzeugen mit einem FI-DWL erreichen größenordnungsmäßig die nötige Präzision, die durch verbesserte räumliche Auflösung auf dem CCD/CMOS noch entsprechend erhöht werden kann. Dies geht momentan noch auf Kosten der Analyse-Dauer, die für Wind-Messungen **vor** dem Flugzeug bis zum Durchfliegen der gescannten Luftschicht strikt beschränkt ist.

Trotz der im Rahmen dieser Arbeit erzielten Fortschritte sollte ein Lidar-System nur als unterstützendes Hilfsmittel in Ausnahmesituationen und Notfällen für die Piloten dienen. Einflüge in junge Wirbelschleppen mit hoher Zirkulation und großen Rollmomenten beim Landeanflug sollen und können durch ein derartiges System wohl kaum realisiert werden, da auch bei genauer Kenntnis des Wirbelgeschwindigkeitsfeldes die Wirkung der Wirbelschleppen durch Gegensteuern nicht in jedem Fall kompensiert werden kann ([Vechtel, 2012](#)).

Auch mit einem derartigen System bleibt ein Restrisiko, da ein zuverlässiger Betrieb des Lidars unter widrigen Bedingungen (Flugzeug, vorausschauende Messung in kurzer Zeit) gewährleistet sein muss. Daher sollte, ein funktionierendes System vorausgesetzt, während des Fluges eine ständige Überprüfung der Systeme auf ihre Funktionstüchtigkeit stattfinden.

Schließlich bleibt immer noch die Natur, die oft unvorhergesehene Überraschungen mit sich bringen kann: Turbulenz ist ein komplexes Phänomen, dessen Erforschung noch nicht abgeschlossen ist (man schaue nur auf die Navier-Stokes-Gleichungen, die sich bis jetzt immer noch nur für Spezialfälle lösen lassen). Wind-Lidars können Turbulenz nur schwer messen ([Sathe et al., 2011](#)). Die mathematische Beschreibung zur Messung turbulenter Spektren (lange Mittelung) mit DWL für Windkraftanlagen ist sehr komplex ([Sathe und Mann, 2012](#)). Wir sind noch nicht in der Lage, gewisse Strömungen mathematisch-physikalisch zu beschreiben.

Viel stärkere Laserpulse (d. h. höhere Photonenzahlen) sind aus Gründen der Augensicherheit nicht möglich. Darum braucht es neue Detektoren und v. a. Analyse- und Auswertemethoden. In dieser Arbeit wurden mehrere Methoden entwickelt und analysiert, die keine oder möglichst wenige zusätzliche Annahmen verwenden, und die einen wesentlichen Beitrag für künftige Fernerkundungslidars (zur Windmessung) vor bewegten Objekten liefern.

Auch wenn im Rahmen dieser Arbeit signifikante Fortschritte bezüglich der Anzahl messbarer Windvektoren und Messpräzision (unter anderem durch neue Auswerteverfahren) erzielt wurden, so handelt es sich doch nur um Simulationen, die beim Bau oder im Betrieb der optischen Geräte auftretende technische Probleme nur zum Teil berücksichtigen können. Prinzipiell sollte es mit den in [Kap. 5](#) analysierten Verfahren bei gutem Betrieb des Lidars möglich sein, zumindest einige Windvektoren vernünftig vor einem Flugzeug messen zu können.

Soweit bekannt, wurde bislang kein Flugzeug-getragenes RSL oder DWL für Windmessungen vor einem Flugzeug gebaut oder im Flug erprobt, das den hohen Anforderungen aus [Kap. 1](#) gerecht würde.

Anhang A

Auf Streuung von Laserstrahlung basierende (Wind-)Messmethoden

In diesem Abschnitt sollen die physikalischen Laser- bzw. Lidar-Messkonzepte dargelegt werden, auf denen das Wind-Messverfahren des simulierten RSL von Kap. 2.2 basiert.

A.1 Particle Imaging Velocimetry (PIV)

Unter PIV versteht man ein strömungsmechanisches Verfahren, bei dem die Bewegung von kleinen (mehrere μm Durchmesser), meist der Strömung beigefügten Tracer- bzw. Seed-Partikeln (Streuern) quer zur optischen Achse durch die Streubilder je zweier Laserpulse im Detektor dargestellt wird (Raffel et al., 2007). Anders als Doppler-Anemometer erlauben PIV-Messungen Echtzeit-Darstellungen von 2D-Geschwindigkeitsfeldern, ohne dafür in verschiedene Richtungen scannen zu müssen. Sogar 3D-Geschwindigkeitsvektoren sind mit speziellen Aufbauten bestimmbar, wobei sich jedoch z.B. mehrere Kameras an unterschiedlichen Stellen befinden müssen. Alle obigen Aussagen beziehen sich auf Labor-Messungen, die einen eingeschränkten Winkelbereich und eine kurze Messdistanz aufweisen.

Abbildung A.1 zeigt einen Standard-Aufbau eines PIV-Systems in einem Windkanal (adaptiert von Raffel et al. (2007)). Ein Laser beleuchtet mittels Doppelpulsen in kurzem zeitlichem Abstand eine sehr dünne Volumenschicht („Ebene“) innerhalb der Tracer-geseedeten Strömung. Der Zeitabstand zwischen den Pulsen hängt von der mittleren Strömungsgeschwindigkeit und dem Vergrößerungsfaktor bei der Abbildung ab. PIV beruht auf der Annahme, dass die Seed-Partikel von der Strömung mitgerissen werden, d.h. kennt man die Bewegung der Teilchen, so kennt man auch die Strömung¹. Ein Teil des an den Tracern gestreuten Lichts gelangt über eine abbildende Optik (Linse) auf eine hochauflösende Film- oder CCD-Kamera. Wesentlich für PIV ist auch die räumliche Trennung der Seed-Partikel und die durch sie verursachte kontrastreiche Streuung. Durch geeignete abbildende Optiken ist es möglich, die Position der Teilchen im verkleinerten Maßstab auf einen oder mehrere Detektoren zu projizieren. Die Größe der CCD-Pixel ist dann klein genug, um einzelne Partikel als sich zumeist über mehrere Pixel erstreckende Flecken wiederzuerkennen. Die so erhaltenen 2D-Bilder werden z.B. auf einer Festplatte gespeichert oder sofort analysiert.

Das Auswerteverfahren von PIV beruht auf Auto- und/oder Kreuzkorrelation. Zwei digitale Bilder zu leicht unterschiedlichen Zeitpunkten (Pulsen) t und t' im Abstand Δt werden miteinander verglichen. Die vollständigen Bilder werden dazu in kleinere Teilflächen, sog. *Abfragefenster*, unterteilt, und für jedes dieser Abfragefenster wird dann mittels KK der lokale Verschiebungsvektor aus beiden Bildern für die darin befindlichen Tracer-Partikel berechnet. Innerhalb eines Abfragefensters wird eine gleichförmige Bewegung der Streuer zwischen den beiden Beleuchtungen vorausgesetzt.

¹ Dies wird hier auch für die RSL-Simulationen in Kap. 5 für noch kleinere Streuer vorausgesetzt, die Strömungen leichter folgen als größere. Abbildung 1.1(a) in Kap. 1 zeigt deutlich, wie der Rauch die Bewegung der WS annimmt.

Dabei dient ein Abfragefenster des ersten Bildes als Maske, für die dann im zweiten Bild ein Abfragefenster gleicher Größe mit maximaler Übereinstimmung zum vorgegebenen Pattern aus Bild 1 gesucht wird. Durch Bestimmung des räumlichen Mittelpunkts beider Abfragefenster erhält man schließlich die Verschiebung von einem Bild zum nächsten für diesen kleinen Abfragebereich. Diese Prozedur wird für viele (alle möglichen) Abfragefenster des ersten Bildes wiederholt, bis sich am Ende ein vollständiges Feld von Shift-Vektoren ergibt. Abhängig von der Größe der kompletten Bilder und der Abfragefenster sowie der verwendeten Prozessierungsalgorithmen dauert ein vollständiger Vergleich zweier Bilder zur Berechnung mehrerer tausend Geschwindigkeitsvektoren mit heutigen Standardrechnern größenordnungsmäßig ca. eine Sekunde (Raffel et al., 2007).

Das PIV-Verfahren kann leider nicht eins-zu-eins auf unsere Messsituation übertragen werden. Streuer mit großen Radien wie die Tracer in PIV (inklusive Kenntnis der Radien), die eine unnatürlich hohe Verstärkung des Streuvermögens bewirken, sind in der Atmosphäre selten (Ausnahmen: Schneefall, Regen, Kondensstreifen, Zirren, Aschewolken, etc.). Die Streuung in PIV wird in der Regel nicht in Rückrichtung (180°) gemessen, sondern Laser (Sender) und CCD-Kamera (Empfänger) sind z. B. in einem zueinander senkrechten Winkel positioniert, vgl. Abb. A.1. Es wird in der 2D-Ausführung des Verfahrens auch nur eine einzelne dünne Schicht beleuchtet, was die Situation zur Bildaufnahme auf dem CCD und die anschließende Analyse erheblich erleichtert. Auf den CCD-Bildern sind die starken Streusignale einzelner Tracer-Partikel deutlich erkennbar und durch räumliche Abstände getrennt (diskrete weiße Punkte auf dunklem Untergrund). Zudem ist es unmöglich, Bilder einzelner Aerosole (Streuteilchen) für lange atmosphärische Pfade bis hinauf in den Kilometerbereich zu erhalten (auf CCD einzelne Partikel nicht mehr auflösbar, d.h. nicht mehr zu trennen).

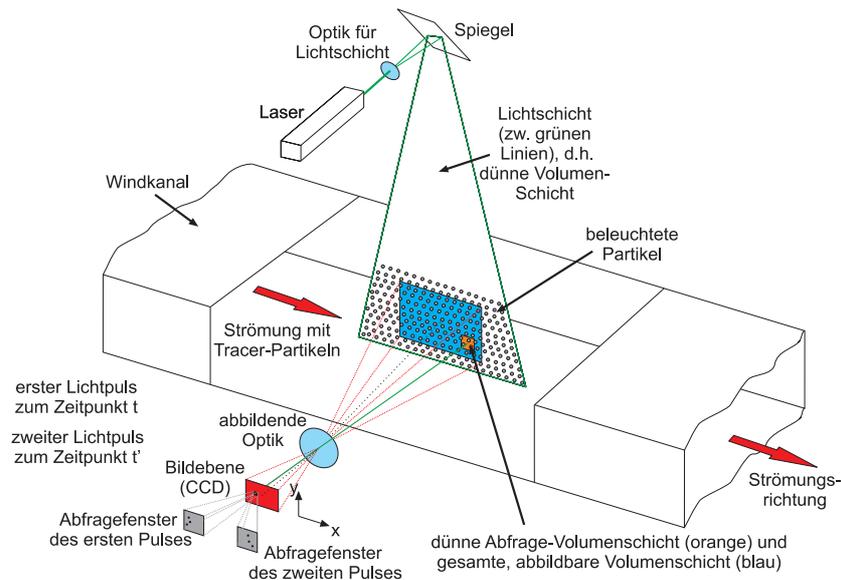


Abbildung A.1: Aufbau und Messgeometrie eines PIV-Systems. Darstellung ähnlich Raffel et al. (2007), S. 4, Abb. 1.4. With kind permission of Springer Science+Business Media.

A.2 Speckle Imaging Velocimetry (SIV)

SIV ist ein PIV-ähnliches Verfahren, bei dem die Dichteverteilung der Luftmoleküle gemessen wird (Fomin, 1998, Halldórsson et al., 2006, Banakh und Falits, 2010). Ebenso wie PIV wurde auch SIV bisher nur auf kurze Distanzen bis ca. 100m erforscht (Halldórsson et al., 2005). Tracer-Partikel (wie bei PIV) werden hier nicht zugegeben, sondern die Rücksignale aus den Schichten enthalten statistisch verteilte Laser-Speckle, die durch Verwendung von Doppelaufnahmen in kurzem zeitlichem Abstand als Indikatoren für eine Bewegung der Luftströmung dienen. Diese Doppelbilder wer-

den mit der PIV-spezifischen Methode der KK ausgewertet. Laser-Speckle sind körnige Fleckenmuster (Granulationen) und entstehen durch Zerstörung des ursprünglich homogenen oder Gauß'schen 2D-Laserstrahlprofil-Querschnitts aufgrund verschieden langer optischer Weglängen der einzelnen Elementarwellen des ausgesandten „Wellenbündels“ durch Brechungsindexvariationen in der durchquerten Luft (Zerstörung der Kohärenz des ausgesandten Laserpulses). Grundannahme ist das Vorhandensein von Kohärenz der emittierten Strahlung, wodurch die in Luft gestreuten, empfangenen Elementarwellen untereinander wieder kohärent sind. Amplitude und Phase der einzelnen Elementarwellen variieren in Abhängigkeit vom Ort, und so ergibt sich in Luft ein komplexes, unregelmäßiges Intensitäts-Interferenzmuster (siehe v.a. Abb. 1 in [Banakh und Falits \(2010\)](#)). Bei Wind ändert sich die Brechungsindexstruktur der Luft räumlich und zeitlich, und damit ändern sich auch die Interferenzstrukturen. Die zeitliche Variation zwischen zwei aufgenommenen Specklemustern entsteht durch die Veränderung des Brechungsindex transversal zur Laserstrahlachse, wodurch auf die transversale Bewegung der Luft geschlossen werden kann.

Bewegung von Luft sowie Wirbelzerfall führen zu Druck- und Temperaturgradienten. Letztere sind die überwiegende Ursache für die Schwankungen der Brechungsindizes von Luft. Heiße Abgase von Triebwerken vermengen sich mit den vorhandenen Wirbelstrukturen, so dass insgesamt eine fein-aufgelöste Temperatur- und damit Brechungsindexverteilung der Luft entsteht.

Für Windmessungen im Fernfeld aus Speckle-Aufnahmen ist nun Folgendes zu tun: Aufnahme eines Specklebildes aus einer Entfernung z (optische Koordinaten) zu einem ersten Zeitpunkt t_1 und Ermittlung der transversalen Struktur der bei z vorhandenen Inhomogenitäten des Brechungsindex. Danach Wiederholung der Messung des Brechungsindex-Verlaufs zu einem zweiten Zeitpunkt $t_2 = t_1 + \Delta t$ am gleichen Ort z so kurzzeitig nach t_1 , dass transversale Luftverschiebungen bei Auswertung gerade sichtbar werden und gleichzeitig die Kohärenzzeit der Speckle nicht überschritten wird (1-5 ms nach [Halldórsson et al. \(2005\)](#)). Abschließend liefert wieder eine KK beider Messungen das Geschwindigkeitsfeld. Dasselbe kann auch noch für eine zweite Messdistanz z' durchgeführt werden.

Abbildung [A.2](#) zeigt links einen möglichen SIV-Aufbau. Zwei CCD-Kameras mit Bildverstärkerplatte (MCP) und extrem kurzer Verschlusszeit nehmen bei dieser Anordnung die Speckle-Bilder aus den rückgestreuten Signalen zweier durch einen Doppelpuls laser kurz hintereinander (zeitlicher Abstand $0.1 \text{ ms} \leq \delta\tau \leq 10 \text{ ms}$) ausgesandter Pulse L und L' aus den Volumenschichten V (mit Bildern 1 und 1') und V' (mit Bildern 2 und 2') auf (Schichten müssen eng beieinander liegen, so dass kaum Strahlaufweitung stattfindet, und sehr dünn sein). Räumliche (zwei Schichten) und zeitliche (zwei Pulse) KKs der CCD-Bilder liefern letztlich das transversale Luft-Geschwindigkeitsfeld eines Wirbels zwischen beiden Messvolumina (Luftschichten).

Ein Flugzeug würde sich in der Zeit zwischen beiden Pulsen kaum bewegen (max. 1 m). Bis zum nächsten Puls paar vergeht eine viel längere Zeitspanne (Repetitionsrate i. Allg. $\tau \leq 50 \text{ Hz}$), in der das Flugzeug sich viel weiter fortbewegt hat. Wenn sich das Flugzeug 1 m bewegt, die Luft gleichzeitig aber nur einige cm, müssen die Messzeitpunkte (Messintervalle) entsprechend der Orientierung, Position (kürzere Messentfernung für zweiten Puls verglichen mit erstem, da man sich der Messschicht inzwischen genähert hat) und Fluggeschwindigkeit angepasst werden. Die Messentfernungen z und z' , ihr räumlicher Abstand Δz und die Slabtiefe können durch Variation der Gate-Zeiten der Elektronik (Sync) beliebig eingestellt werden. Die Dicke der Luftschichten wird durch die Zeitpunkte für Öffnung und Verschluss der Kameras festgelegt, der Durchmesser des gescannten Bereichs (Spots im Bild rechts unten in [Abb. A.2](#)) wird durch den Laserstrahlquerschnitt bestimmt. Der für die Korrelation zweier Speckle-Bilder brauchbare Atmosphärenquerschnitt bleibt so klein wie das vom Teleskop ausgesandte parallele Strahlenbündel, siehe [Banakh und Falits \(2009\)](#).

In SIV soll eine Aufspaltung des Laserpulses mittels eines holographischen Strahlteilers bzw. eines Transmissionsgitters in mehrere (viele) Einzelstrahlen erfolgen (siehe [Abb. A.2](#) rechts oben), wodurch auch ein partielles Ab-scannen (Spot-Bereiche) größerer Atmosphärenschichten möglich würde. Die so entstandenen diskreten Einzelstrahlen würden dann mit zunehmender Distanz immer weiter aufgeweitet, wodurch mit jedem Einzelstrahl ein größerer ringförmiger Bereich erfasst werden könnte.

Die notwendige kurze Zeitdifferenz zwischen zwei Pulsen von 1-5 ms kann ein Nachteil sein: nimmt man z.B. eine transversale Windkomponente rein in optischer x -Richtung von $v_x = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ an, so hätte sich der Wind in 5 ms um gerade einmal 2.5 cm bewegt. Solch kleine, kurzzeitige und vor allem lokale Windbewegungen sind eher uninteressant, da die Luftmasse innerhalb von 5 ms noch nicht durchflogen wird und sich bis dahin die Windstruktur etliche Male verändert haben kann. Man müsste also riesige Datenmengen analysieren und über viele Profile mitteln, um das ganze Windfeld zu scannen. Selbst dann bleiben große Bereiche, für die man den Wind nicht kennt (außerhalb der Spots).

Mit SIV wurde in klarer Luft das Rücksignal einzelner, auf 1 m Durchmesser aufgeweiteter Pulse eines frequenzverdoppelten Nd:YAG-Doppelpuls-Lasers (Pulsdauer ca. 10 ns) aus einer bestimmten Atmosphärenschicht (nach Halldórsson et al. (2006) 3 m dick und 45 m entfernt) gemessen und dazu auf *einem* ICCD abgebildet (koaxiale, monostatische Anordnung). Dabei konnte die Intensitätsverteilung über die Zeit von einem Laserpuls zu einem anderen verglichen werden und die Bildung von Speckle dargestellt werden (Halldórsson et al., 2005). Die mittlere Speckle-Größe auf den CCD-Bildern überschreitet mit 10 – 50 μm die typische Größe eines CCD-Pixels von heutzutage 10 μm , die PIV-gleiche Verschiebung der einzelnen Flecken ist also analysierbar. Ein Gebläse sorgte in und um die Messschicht für Verwirbelungen bei drei unterschiedlichen Streuszenarien: Schneefall, künstlichem CO_2 -Nebel sowie klarer Luft. Die Auswertung der Bilder wurde mit PIV-KK-Algorithmen basierend auf FFT durchgeführt; Weiterentwicklungen der Standardverfahren auf Brechungsindexvariationen sind in Banakh und Falits (2009, 2010) beschrieben. Theoretische Simulationen ergaben für die optimale Zeit zwischen zwei Pulsen einen Wert von $\delta\tau = 0.03\text{s}$. Für eine numerische Modellierung kohärenter Laser-Strahlung in der Atmosphäre und ihres empfangenen Rücksignals durch Phasenbilder unter Berücksichtigung der Variabilität des Brechungsindex sei auf Banakh et al. (2000) und Halldórsson et al. (2006) verwiesen. Wir werden diese Brechungsindex-Eigenschaften in unserem RSL nicht verwenden (inkohärentes Lidar). Die Welleneigenschaften von Licht innerhalb des optischen Strahlengangs (unabhängig von der Atmosphäre) werden in Anhang B.2 für Raytracing-Simulationen noch eine wichtige Rolle spielen.

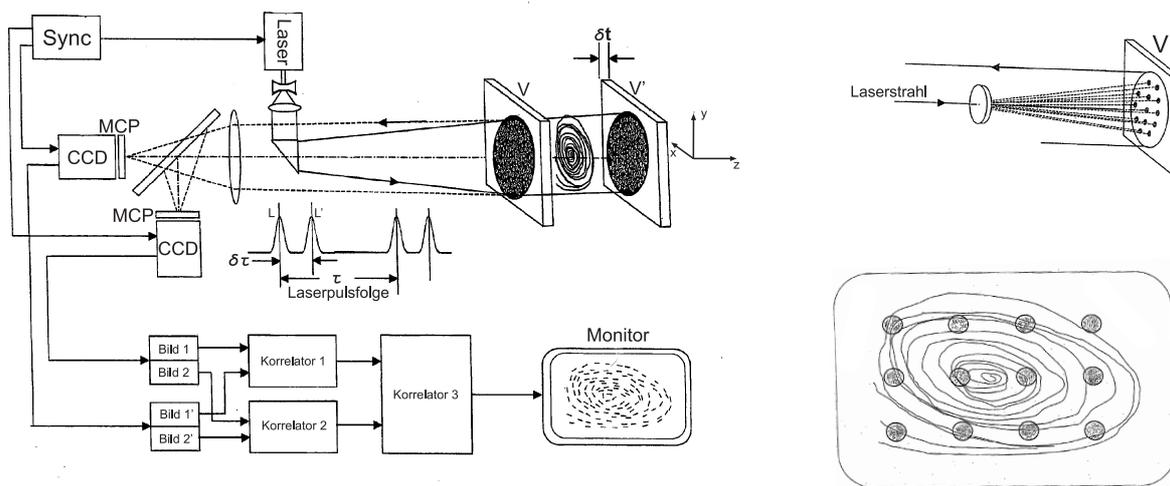


Abbildung A.2: Aufbau eines SIV-Lidar-Systems nach Halldórsson (2009), Europäische Patentschrift EP 1 910 868 B1. Links: vollständiges Messsystem nach Halldórsson (2009), S. 20, Fig. 2 (Abbildung hier geändert); rechts oben: holographischer Strahlteiler oder Transmissionsgitter zur Auftrennung des Laserpulses in viele Einzelpulse (Einzelstrahlen) nach Halldórsson (2009), S. 23, Fig. 5 (Abbildung hier geändert); rechts unten: Durchmesser der aufgeweiteten, diskreten Einzelstrahlen (kugelförmig) im Vergleich mit dem anvisierten Luft-Messvolumen (Halldórsson (2009), S. 24, Fig. 6). Mit freundlicher Genehmigung des Europäischen Patentamts.

A.3 Wide Angle Imaging Lidar (WAIL)

In den vergangenen Jahren wurden monostatische RSL entwickelt, die gestreute Strahlung auch von außerhalb der Emitter-Strahlachse aufgrund ihres hohen RFOV detektieren können (Davis et al., 1999). Das bodengestützte WAIL des Los Alamos National Laboratory (LANL) ist in der Lage, Mehrfachstreuung in Wolken aus verbreiterten Rückstreumustern zu vermessen (Polonsky et al., 2005, Love et al., 2007). Bei WAIL handelt es sich um einen Vorläufer des von NASA Goddard entwickelten flugzeuggestützten *THickness from Off-beam Returns*-Systems (THOR) (Cahalan et al., 2005) und des *In-cloud*-Lidar der Universität von Colorado und der Firma SPEC Inc. (Evans et al., 2003). Sie erlauben aus so gemessenen Daten Schätzungen der Extinktionskoeffizienten und der geometrischen Dicken dichter Wolkenschichten, und damit der optischen Dicken.

Abbildung A.3(a) zeigt den typischen Aufbau eines WAIL im Vergleich zu einem Standard-Lidar. Ein Standard-Lidar sammelt im Receiver nur rückgestreutes Licht aus einem sehr schmalen Winkelbereich um den ausgesandten Laserstrahl. EFOV und RFOV sind etwa gleich groß, so dass aus dem Strahlenweg in der Atmosphäre herausgestreutes Licht absichtlich ignoriert wird und so für den Receiver verloren geht. Dadurch kann vom Boden aus nur die Untergrenze optisch dichter Wolken vermessen werden. Dagegen ist ein WAIL gerade für die Detektion dieser aus dem Laserstrahl herausgestreuten Photonen ausgelegt. Laserpulse mit nicht-absorbierenden Wellenlängen werden in Richtung der Wolke(n) ausgesandt und nach vielfacher Streuung in der Wolke wird ein geringer Anteil im Receiver mit *extrem großem* FOV empfangen. Auch bei WAIL werden weitwinkelige 2D CCD-Bilder der räumlichen Verteilung des rückgestreuten Lichts in Abhängigkeit von der Zeit nach Aussenden des Pulses aufgenommen, so dass eine Art Film entsteht. Mit einem WAIL ist es dadurch möglich, das Innere sogar dichter Wolken bis hinauf zur Obergrenze der Wolke zu erfassen.

Dennoch ist auch ein WAIL alleine kein geeignetes System für Windmessungen vor Flugzeugen. Ein Verfahren mit einem einzelnen, stark aufgeweiteten Puls, der die ganze Messebene scannt, ist mit einem einzigen, festen, größentechnisch stark eingeschränkten Receiver nicht umsetzbar. Man erhält auf dem CCD zwar ein Muster, aber keine Projektion der Rückstreuintensitäten, da die Intensitäten nach außen auf dem CCD stark abfallen. Die seitlichen Bereiche einer Rückstreuebene vor dem Flugzeug werden also mit einem einzelnen Puls nicht mit den zentral vor dem Flugzeug befindlichen Bereichen gleichgewichtet wiedergegeben. In Kap. 2 erklärt Abb. 2.2(c) dies vereinfacht in einer x - z -Ebene (x die Höhe, z die Strahlrichtung). Das Lidar emittiert Licht in zwei gleich großen (Elevations)Winkelbereichen $\Delta\varphi = 20^\circ$. Die Messebene bei festem z zeigt das längere Intervall Δx_2 für die blaue, außer-axiale Messrichtung im Vergleich zur roten, zentralen Messrichtung, das ein Intervall $\Delta x_1 < \Delta x_2$ hat. Damit hätte man im blauen Bereich mehr Positionen, wo Streuung stattfinden könnte. Während die Rückstreuung im roten Winkelbereich symmetrisch um 180° erfolgt, ist dies im blauen Winkelbereich mit Streuung außerhalb von 180° nicht der Fall. Auch ist für die blaue Richtung (trotz gleich großem $\Delta\varphi$) die Wahrscheinlichkeit wieder im Lidar-Receiver rückgestreut anzukommen wesentlich geringer (aufgrund der außeraxialen Messgeometrie). Die gestrichelte rote Strecke hat eine kleinere Distanz vom Lidar zur Streuebene als die gestrichelte blaue Strecke. Damit ist es wahrscheinlicher, aus der zentralen roten Richtung ein Photon im Receiver zu empfangen.

Man kann dies ganz einfach nachstellen, indem man in einem komplett dunklen Raum mit einer CCD-Fotokamera mit dem Blitz ein Bild senkrecht vor einer glatten homogenen Wand schießt. Die Wand ist dann ein stark reflektierendes „Hard Target“ und verhält sich damit in Bezug auf das Blitzlicht wie eine Ebene extrem hohen Rückstreuvermögens für einen aufgeweiteten Laserpuls. Das auf dem CCD entstehende Foto zeigt ein deutliches Abfallen der eingefangenen Blitzlicht-Intensität (Helligkeit) nach außen hin. Da also von der Wand kommend nicht überall gleich viel Licht an jeder Stelle des Fotos von der Fotokamera eingefangen wird, ist keine Gleichgewichtung aller Bereiche vor der Fotokamera vorhanden. Somit ist mit einem WAIL, trotz des großen RFOV, keine Windmessung durchführbar. Mit vielen Einzelstrahlen wie bei SIV und beim folgenden VIL ist dies jedoch möglich.

A.4 Volume Imaging Lidar (VIL)

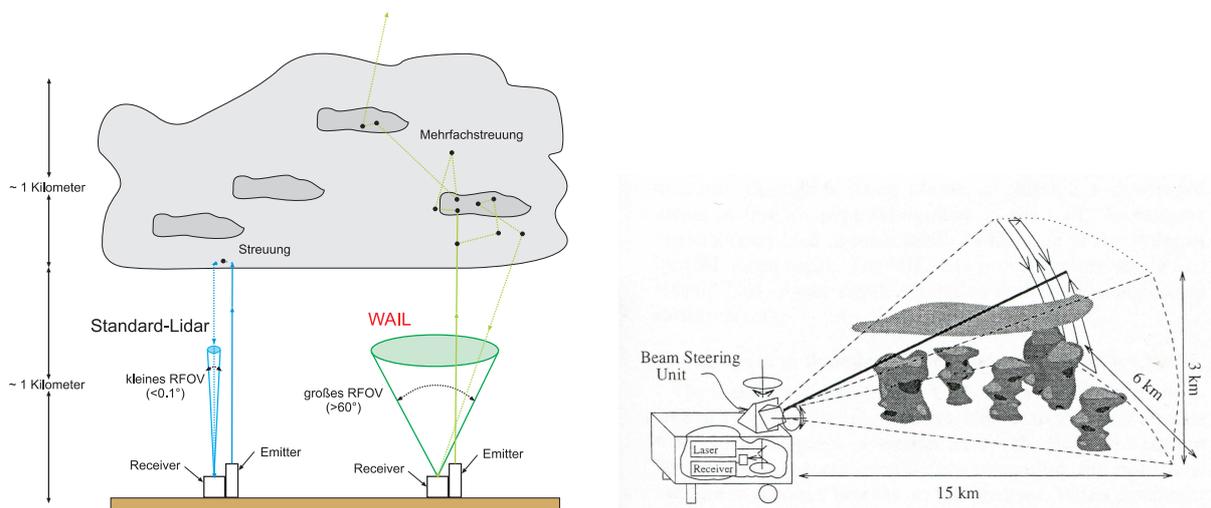
Prinzipiell wird das in Kap. 2.2 vorgeschlagene, neue Wind-RSL am ehesten dem VIL der Universität Wisconsin, Madison (USA) ähneln (Schols und Eloranta, 1992, Mayor und Eloranta, 2001, Mayor et al., 2003). Die generelle Funktionsweise des VIL zur Windmessung wird z.B. bei Eloranta et al. (1975) oder Sasano et al. (1982) beschrieben.

Das VIL ist ein bodenbasiertes, elastisches Aerosol-RSL zur 4D Abtastung der Atmosphäre (3D Raum plus Zeit). Es transmittiert Laserpulse und empfängt Photonen einer festen Wellenlänge (1 nm Bandbreite des Receivers) zur Messung der relativen, unkalibrierten Rückstreuintensitäten, ohne dabei z.B. Molekularstreuung, Frequenzverschiebung (Doppler, Raman) oder Depolarisation zu messen.

Mit dem VIL können Inhomogenitäten im natürlich in der Atmosphäre vorkommenden Aerosolgehalt beobachtet werden, die die konvektive Struktur klarer Luft zeigen. Abbildung A.3(b) zeigt eine mögliche Messgeometrie des VIL aus Piironen und Eloranta (1995). Ein vollständiger Scan einer solchen Domain dauert 2.5 bis 5 Minuten. Jeder Volumen-Scan besteht aus 4500-9000 Lidar-Profilen bei 5-10 Millionen unabhängigen Messungen. Für Aerosole in klarer Luft beträgt die räumliche Auflösung (Range Bin) 15 m bei einer Messentfernung von bis zu 18 km (Mayor und Eloranta, 2001).

Über die Inhomogenitäten der Atmosphärenstruktur kann aus Bildern zu leicht unterschiedlichen Zeitpunkten t_1 und t_2 wie bei PIV mittels KK (siehe Kap. 4.1.3) der Wind berechnet werden. Wie mit KK z.B. der Querwind bestimmt werden kann, zeigt verkürzt Werner (2005a), S. 329.

Der große Unterschied zwischen VIL und dem für unsere Zwecke erforderlichen System ist die Notwendigkeit des Verzichts auf zeitliche Mittelung über Volumenmessungen und auf ein scannendes Bauteil zur Verteilung der Pulse auf verschiedene Messrichtungen. Beides ist aus Zeitgründen ($v_{A/C} \approx 70 - 200 \frac{m}{s}$) nicht oder nur mit nicht hinnehmbaren Abstrichen (keine Echtzeit-Messungen) möglich. Die räumliche Auflösung muss bei uns im Meterbereich liegen (VIL: nur 15 m) und die Pulse in die einzelnen Richtungen dürfen nicht so stark sein (VIL: 400 mJ Pulsenergie bei 100 Hz Repetitionsrate, siehe Mayor und Eloranta (2001)), um die Augensicherheit gewährleisten zu können. Pulse müssen hier zeitgleich in die verschiedenen Richtungen ausgesandt und die Rücksignale auch wieder zeitgleich empfangen (!) werden, wobei nach den einzelnen Richtungen unterschieden werden können muss.



(a) Vergleich des Messkonzeptes eines Standard-Lidars mit dem des WAIL nach Love et al. (2007). Figure used with kind permission of the first author.

(b) Messgeometrie des VIL aus Piironen und Eloranta (1995); Copyright 1995 by the American Geophysical Union. Das Volumen-Scannmuster besteht aus einer azimuthalen Folge von Laser-Scans variierender Elevationswinkel. Die grauen Strukturen zeigen 3D-Aerosolgebiete, an denen v. a. Streuung stattfindet.

Abbildung A.3: Messgeometrien des WAIL (links) und des VIL (rechts).

Anhang B

Windmessung mit Doppler Wind Lidar vor Flugzeugen

In der atmosphärischen Fernerkundung werden bislang meist (gepulste) **Doppler Wind Lidars (DWL)** ([Werner, 2005a](#), [Reitebuch, 2012](#)) als Werkzeuge zur Messung von Wellenlängen- bzw. Frequenzverschiebungen $\Delta\lambda_L$ bzw. Δf_L von Licht, das von sich in Bewegung befindlichen Molekülen und Aerosolen rückgestreut wird, verwendet, um daraus Informationen über Geschwindigkeit und Richtung des Windes zu extrahieren. Ziel ist hier der Einsatz solcher DWLs an Bord zur vorausschauenden Bestimmung des Windfeldes **vor** Flugzeugen. Aussteuern und Ausweichen erfordern verschiedene Messmethoden mit unterschiedlichen Sensor-Anforderungen. Als am für die Messanforderungen geeignetsten erweist sich ein **Fringe-Imaging(FI)**-DWL mit **Fabry-Pérot-Etalons (FPE)** für LOS-Messungen vor einem Flugzeug. Für eine detaillierte Analyse eines solchen Systems sei hier auf [Hirschberger und Ehret \(2011\)](#) verwiesen. Weitere Aspekte zu DWLs werden auch in der darin zitierten Literatur behandelt. Eine ausführliche Darstellung zur Windmessung mit DWL vor Flugzeugen soll Teil eines zukünftigen DLR-Forschungsberichtes sein.

Bei der DWL-Technik kommt es auf die Messung der v_{LOS} -Komponenten an. Eine Vielzahl an möglichen geometrischen Messanordnungen vor Flugzeugen unter Verwendung auch mehrerer Lidarsensoren sind denkbar, siehe [Wolkensinger \(2010\)](#), Kap. 6.1 (auch die Messfehler, d. h. Standardabweichungen, werden dort berechnet). Da Lidarsensoren für alle bekannten Doppler-Messverfahren zur Auswertung von Interferenzen eine äußerst unbewegliche, stabile Positionierung an Bord des Flugzeuges erfordern, müssen unter physikalisch-optischen Gesichtspunkten Lidars auf/in den Tragflügeln, auf und unter dem Rumpf oder im/am Seitenleitwerk von der Analyse ausgeschlossen werden. Wir beschränken uns also auf **ein** Lidar in der Flugzeugnase. Man hat hier zudem für die Aussteuerungselektronik den Vorteil einer vergrößerten Zeitspanne zwischen Messung und Kontakt der Tragflügel mit der gemessenen Luftmasse (erhöhte Vorausschautfernung bzw. Reichweite des Lasers).

Zur Windbestimmung über die LOS-Beträge nutzt man den *nicht-relativistischen optischen Doppler-Effekt* aus: wenn sich die Streuer auf das Lidar zubewegen, wird die rückgestreute Laser-Strahlung (unter Vernachlässigung der Flugzeug-Eigenbewegung) zu höheren Frequenzen f (niedrigeren Wellenlängen $\lambda = c f^{-1}$) verschoben und umgekehrt. Der durch ein monostatisches DWL unter einem Streuwinkel von 180° effektiv detektierte Doppler-Shift in Form einer Frequenz- bzw. Wellenlängenverschiebung $\Delta f_L \in \mathbb{R}$ bzw. $\Delta\lambda_L \in \mathbb{R}$ ist

$$\Delta f_L = 2 f_0 v_{\text{LOS}} c^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \Delta\lambda_L = -2 \lambda_0 v_{\text{LOS}} c^{-1}, \quad (\text{B.1})$$

mit der ausgesandten Frequenz $f_0 \in \mathbb{R}$ bzw. Wellenlänge $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ des Laserlichts, $v_{\text{LOS}} \in \mathbb{R}$ die zu bestimmende Geschwindigkeit der Luftmasse in LOS und $c \approx 3.0 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ die konstante Lichtgeschwindigkeit in klarer Luft mit Brechungsindex $n \approx 1$ und $v_{\text{LOS}} \ll c$. Kennt man also f_0 bzw. λ_0 und die Shifts Δf_L bzw. $\Delta\lambda_L$ hinreichend genau, kann man über Gl. (B.1) auf v_{LOS} schließen. Wie

aus Gl. (B.1) ersichtlich, sind die zu messenden Δf_L bzw. $\Delta \lambda_L$ aufgrund c extrem klein und erfordern hochpräzise Instrumente und spezielle Auswerteverfahren. Eine LOS-Komponente von $v_{LOS} = 1 \frac{m}{s}$ bei $\lambda_0 = 354.7 \text{ nm}$ entspricht einer λ -Verschiebung von gerade einmal $\Delta \lambda_L = 2.4 \text{ fm}$.

Abbildung B.1 zeigt die Anzahl empfangener Photonen in Abhängigkeit von Flughöhe und Wellenlänge der emittierten Laserpulse für Messentfernungen bis 200 m vor dem Flugzeug.

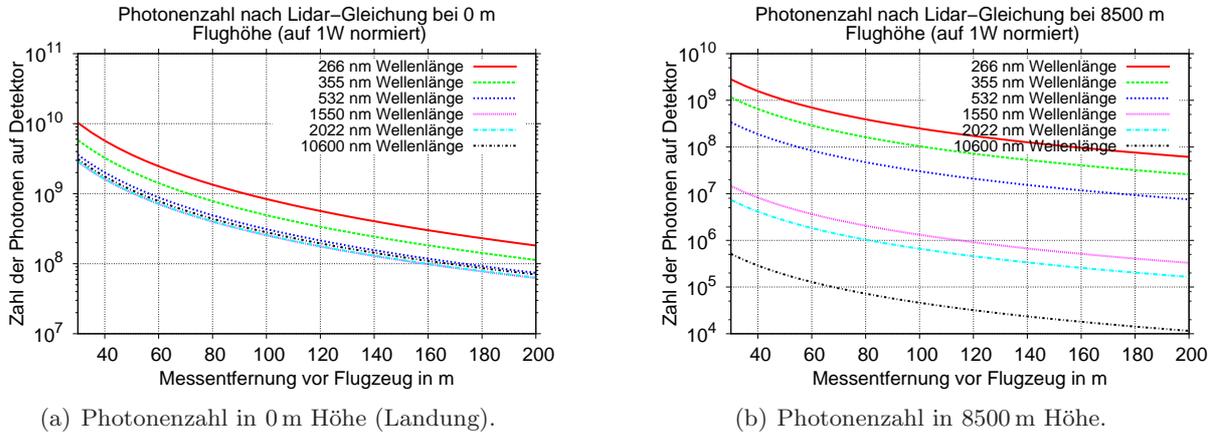


Abbildung B.1: Anzahl der in einer bestimmten Flughöhe durch aerosole und molekulare Streuung **empfangenen Photonen** (logarithmische Achse) in Abhängigkeit von der Messentfernung vor einem Flugzeug für sechs typische Laser-Wellenlängen λ . Die Berechnung erfolgt über die Lidar-Gleichung für Einfachstreuung. Jeweils konstant betragen die MZI 10 m, der Receiver-Radius 0.2 m, die Lidar-Konstante 0.15 und die emittierte Laser-Leistung $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$. Die Extinktions- und Rückstreukoeffizienten stammen aus [Vaughan et al. \(1998\)](#). Je größer die Flughöhe, desto größer ist die räumliche Differenz der Kurvenverläufe zwischen großen und kleinen λ . Je höher man also fliegt, desto geeigneter ist ein kleines λ .

Gerade für langreichweitigere Messungen bei Vorhandensein von Aerosolen eignen sich kohärente Systeme. Bei **kohärenten DWL-Systemen mit Heterodynempfang (HE)** wird einmodige, nahezu monochromatische Laserstrahlung der Frequenz f_0 in die Atmosphäre geschickt und das Rücksignal kohärent, d. h. phasenstabil, detektiert. Durch Signalanalyse kann die Frequenzverschiebung Δf_L mittels FFT spektral über das Leistungsdichtespektrum bestimmt werden (Details z. B. bei [Smalikho \(2003\)](#) oder [Köpp et al. \(2004\)](#)). Insgesamt können DWL mit Überlagerungsempfang nur für Ausweichverfahren (große Messdistanz) in Bodennähe oder niedriger Flughöhe als bedingt geeignet bezeichnet werden. Molekulare Rückstreuung ist mit kohärenten DWLs nicht messbar.

Wird der molekulare Anteil („Rayleigh-Anteil“) im Verhältnis zum aerosolen Anteil („Mie-Anteil“) am Rücksignal größer, wie dies in klarer Luft bei großer Flughöhe der Fall ist, so ist aufgrund des fehlenden Mie-Peaks im Vergleich zu geringeren Höhen ein anderer Typ von DWL, sog. DWL mit Direktempfang, erforderlich. Am besten ist hierbei ein FI-DWL Sensor mit FPE zur Spektralanalyse geeignet, wie er im Projekt AWIATOR für Messungen im Nahbereich (50 – 150 m) vor Flugzeugen bei einem räumlichen Auflösungsvermögen von ca. 30 m entwickelt wurde. Der AWIATOR-Sensor war das erste flugzeuggetragene, getestete Interferometer für Windgeschwindigkeitsmessungen **vor** einem Flugzeug ([Schmitt et al., 2007](#), [Rabadan et al., 2010](#)) und macht Gebrauch von den molekular verbreiterten Fringe-Mustern, die vom FPE auf einem 2D **Intensified CCD (ICCD)** in der Brennebene dahinter erzeugt werden.

Es fehlte jedoch ein Nachweis, dass die erforderliche Genauigkeit von Windmessungen vor Flugzeugen mit einer endlichen, geringen Menge (wegen hoher Fluggeschwindigkeit) an zu analysierenden Signalen (FPE-Ringbildern) erreichbar ist. Darum wurde in [Hirschberger und Ehret \(2011\)](#) ausführlich ein FI-DWL, das die Doppler-Shifts im Nahbereich vor Flugzeugen zur Aussteuerung unter Verwendung der winkelabhängigen räumlichen Distanz von FPE-Ringen auf einem 2D CCD

misst, mittels Simulationen auf seine mögliche Präzision für v_{LOS} -Messungen in großer Flughöhe (8500 m) bei einer Messdistanz von 56 m (76 m) und Messtiefe (MZI) von 10 m unter heute möglichen Lidar-Leistungsmerkmalen hin analysiert.

B.1 Fringe-Imaging Doppler Wind Lidar (FI-DWL): Simulation von und hochpräzise Wellenlängenbestimmung aus verrauschten 2D Fabry-Pérot-interferometrischen Ringen

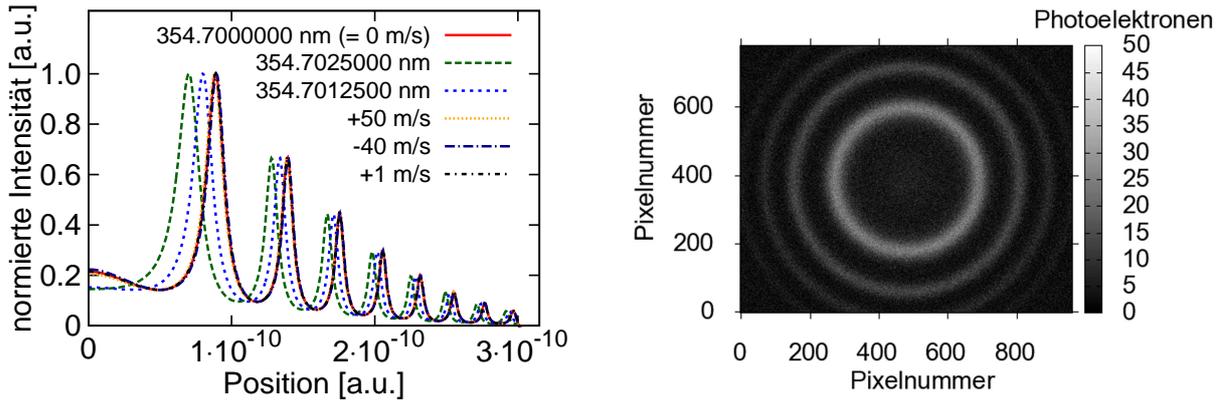
Der Schwerpunkt oben genannten Artikels liegt auf zwei neuartigen Radien-Berechnungsmethoden inklusive Ringmittelpunkt-Bestimmung, die die komplette, durch Messung vorhandene, stark verrauschte 2D Information auf einem CCD-Schirm im Brennpunkt hinter einem FPE verwerten, wodurch das Rauschen einzelner 1D Schnitte durch einen solchen 2D Ring beträchtlich reduziert wird und sich die Peak-Position wesentlich genauer ermitteln lässt. Nach einer Kalibrierung, durch die die Ringradien zu den Wellenlängen und somit den Doppler-Shifts in Beziehung gesetzt werden, werden diese Algorithmen, die die Differenz zwischen den Ringradien von Referenz- und rückgestreutem Signal, und dadurch $\Delta\lambda_L$ in je eine LOS-Richtung berechnen, auf ihre Brauchbarkeit hin überprüft.

Eine Vielzahl an Methoden zur Berechnung der Radien von FPE-Ringen wurde in der Literatur beschrieben (z. B. [Meissner \(1941\)](#)), einige davon mit Mittelpunktberechnungsverfahren (z. B. [Barakat und Medhat \(1986\)](#), [O’Hora et al. \(2005\)](#)). Während diese Verfahren hauptsächlich für schwach verrauschte Ringmuster geeignet sind, wie sie in Laborexperimenten oder z. B. bei starker Photonen-Rückstreuung an Aerosolen vorkommen, ist unser Ansatz auch in Situationen mit sehr verrauschten, schwer identifizierbaren Ringen (und damit Ringmittelpunkten) mit nahezu rein molekularer Rückstreuung und der Notwendigkeit von Subpixel-Genauigkeit für die Radienwerte, wie sie bei monostatischen DWL-Messungen üblich sind, geeignet.

In die FPE-Ringerzeugung gehen atmosphärische Effekte und Rauschen ein. Ein Referenzmodell der Atmosphäre ([Vaughan et al., 1995, 1998](#)) aus flugzeuggestützten Rückstreuemessungen für spezifische Wellenlängen wird angewandt, um die Rückstreu- und Extinktionskoeffizienten bei 355 nm abzuschätzen. Die ungefähre Anzahl rückgestreuter Photonen pro Messbereich wird durch die bekannte Lidargleichung für Einfachstreuung ([Measures, 1992](#)) berechnet. Bei einer Messentfernung von $r = 56$ m (76 m) erreichen etwa 24 (13) Millionen Photonen das CCD. Typische Werte neuester DWL-Instrumente wurden für diese Betrachtungen ins Auge gefasst ([Reitebuch et al., 2009](#)). Mie- und Rayleigh-Streufunktionen werden hier für eine Faltung verwendet, um die Ringe unterschiedlicher Breite in Abhängigkeit von der Temperatur und des Drucks bzw. der Höhen entsprechend der US-Standardatmosphäre ([Champion, 1985](#)) zu erzeugen. Die transmittierte Intensität des FPE wird durch die klassische Airy-Funktion ohne Absorption an den Platten ([Vaughan, 1989](#), [Hernandez, 1986](#), [Zinth und Zinth, 2009](#)) beschrieben.

Für die so generierten 1D Ringmuster zeigt [Abb. B.2\(a\)](#), wie klein die zu detektierenden Unterschiede der Peak-Positionen zur Bestimmung realer v_{LOS} -Werte selbst für unverrauschte Fringe- bzw. Ringstrukturen in 1D sind. Der Unterschied zwischen der roten Kurve (vom Laser emittierte zentrale Wellenlänge bei 354.7 nm) zur orangenen Kurve beträgt riesige $v_{\text{LOS}} = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Der Unterschied der Verläufe bzw. Peaks ist aber mit bloßem Auge kaum sichtbar. Entsprechend schwieriger ist ein Unterschied zwischen der roten und schwarz-gestrichelten Kurve auszumachen, der einem v_{LOS} von $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ entspricht. Solche Unterschiede müssen aber detektierbar sein. Die in [Hirschberger und Ehret \(2011\)](#) beschriebenen Algorithmen sind unter derartigen Optimalbedingungen (kein Rauschen) in der Lage, solche Unterschiede zwischen den Peak-Positionen zu finden, da sie den Ringmittelpunkt im Subpixelbereich praktisch exakt berechnen können. Da aber bei Messungen mit monostatischen DWL in dünner Luft wie hier mit ganz wenigen empfangbaren rückgestreuten Photonen ein nicht unerhebliches Rauschen die Kurven von [Abb. B.2\(a\)](#) verfälscht (siehe z. B. rote Kurve in [Abb. B.3](#)), wird dieses Vorhaben nicht so leicht realisierbar sein.

Aus obigen 1D Ringmustern kann ein rotationssymmetrisches 2D Muster nicht-äquidistanter Ringe zunächst ohne Rauschen erzeugt werden. Durch Zufallszahlenerzeugung mit dem Ran-RNG (siehe auch Kap. 2.3.1) kann Rauschen auf dem Detektor (CCD) modelliert werden. Drei Hauptquellen von Rauschen stören die optimale Form der Ringe. Für das Referenzsignal ist das *Speckle-Rauschen* von großer Bedeutung, bei eher geringfügigem *Photonen-Rauschen*. Dagegen umfasst das rückgestreute Signal vernachlässigbares Speckle-Rauschen, während hier das Photonen-Rauschen dominiert. Das *Ausleserauschen* des CCD tritt für beide Signalarten auf. *Dunkelstrom-Rauschen* kann aufgrund der kurzen Gatterzeit (Öffnungszeit) von 67 ns und des schmalbandigen Filters im FI-Receiver ignoriert werden. Solares Rauschen kann ebenso von der Modellierung ausgeschlossen werden.



(a) Minimalität der zu detektierenden Shifts zur Bestimmung realistischer v_{LOS} aus 1D Fringe-Mustern. (b) Muster bei $\lambda=354.7$ nm durch Verteilung von PE inkl. Rauschen auf Pixel des CCD-Bildes (Hirschberger und Ehret (2011), S. 213, Abb. 6d; with kind permission from Springer Science and Business Media).

Abbildung B.2: 1D Fringe-Muster (links) und verrauschte FPE-Ringstrukturen in 2D auf einem CCD (rechts).

CCDs sind Datenfelder (Arrays) lichtempfindlicher Photodioden, die aus Photonen mit einer Quanteneffizienz η ($\eta \approx 0.21$ für das simulierte CCD bei 355 nm) Elektronen erzeugen und speichern (Dussault und Hoess, 2004). Wir definieren die Anzahl an *Signalelektronen* oder PE (e^-), die durch eine Zahl n rückgestreuter oder direkter Photonen erzeugt wird durch

$$n_{\text{sg}} = \eta n. \quad (\text{B.2})$$

Diese n_{sg} Signalelektronen werden über alle Pixel des CCD verteilt, und ihre Zahl auf jedem Pixel wird gerundet. *Photonen-Rauschen* (engl. *Shot noise*) entsteht durch statistische Fluktuationen in der Zahl der Photonen bei niedrigen Zählraten auf dem Detektor und wird durch eine Poisson-Statistik beschrieben (Liu et al., 2006, Cézar et al., 2007). Falls die Zahl der Signalelektronen auf ein einzelnes Pixel $n_{\text{sg},i}$ (mit Index i) ist, dann bezeichnet $\overline{n_{\text{sg}}} = \frac{1}{m \cdot n} \sum_{i=1}^{m \cdot n} n_{\text{sg},i}$ die mittlere Zahl an Signalelektronen auf jedes Pixel ($\overline{n_{\text{sg}}}$ ist Mittelwert und Varianz einer Poissonverteilung), wobei m und n jeweils die Dimensionen der x - und der y -Achsen (z. B. $m = 961$ und $n = 781$ Pixel in Abb. B.2(b)) bezeichnen. Zur Simulation der Anzahl der e^- wurde der RNG Ran verwendet, um daraus Poisson-verteilte ZZen mittels der sog. *rejection-method* (dt. Zurückweisungsmethode) (Press et al., 2007) zu erzeugen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung lautet

$$\mathbb{P}_{\text{Poi}, \overline{n_{\text{sg}}}}(X_{\text{sg},i} = n_{\text{sg},i}) = \frac{\overline{n_{\text{sg}}}^{n_{\text{sg},i}}}{(n_{\text{sg},i})!} \exp(-\overline{n_{\text{sg}}}). \quad (\text{B.3})$$

Sie bezeichnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ZZen (ZVen) $X_{\text{sg},i}$ die Werte (Realisationen) $n_{\text{sg},i}$ annehmen werden (Cézar et al., 2007). Gammaverteilte ZZen dienen zur Charakterisierung des

Speckle-Rauschens. Das Ausleserauschen des CCD folgt einer Normalverteilung (Gauß'schen Verteilung), wodurch mit der sog. „ratio-of-uniforms“-Methode (Press et al., 2007) erzeugte normalverteilte ZZen verwendet werden, mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\mathbb{P}_{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)}(X_{\text{sg},i} = n_{\text{sg},i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\mu - n_{\text{sg},i})^2}{2\sigma^2}\right), \quad (\text{B.4})$$

mit dem Mittelwert $\mu = 0$ und der Varianz σ^2 (σ kann bedingt durch den CCD-Typ variieren; hier wurde $\sigma = 5.0$ gewählt, ähnlich einem von Cézard et al. (2007) für ein CCD gemessenen Wert).

Für Simulationen von Rückstreusignalen (wie in Abb. B.2(b)) beträgt die Gesamtzahl der Ladungsträger auf einem Pixel i

$$n_{\text{C},i} = \text{RN}_{\text{Poi},i} + \text{RN}_{\mathcal{N},i}, \quad (\text{B.5})$$

wobei $\text{RN}_{\text{Poi},i}$ und $\text{RN}_{\mathcal{N},i}$ die ZZen jeweils inklusive Photon- und Ausleserauschen sind, die unter Verwendung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen aus den Gl. (B.3) und (B.4) erzeugt wurden. Für Referenzsignale oder zur Kalibrierung erhält man $n_{\text{C},i} = \text{RN}_{\Gamma,i} + \text{RN}_{\mathcal{N},i}$, wobei die $\text{RN}_{\Gamma,i}$ die ZZen inklusive Speckle-Rauschen sind. Negative Zahlen von $n_{\text{C},i}$, die aufgrund der normalverteilten ZZen auftreten können, werden auf 0 gesetzt (Zahlen von e^- kleiner 0 sind unmöglich).

Nun geht es um die Berechnung von Ringradien stark verrauschter Ringstrukturen und damit von absoluten Wellenlängen, und ihren Differenzen. Zur exakten Bestimmung der Länge einer Linie muss zunächst ihr Anfangspunkt exakt bekannt sein. Dieses Prinzip gilt genauso für die Ringradien, und deswegen ist eine Bestimmung des Mittelpunkts notwendig, denn für einen Bias (eine systematische Messabweichung oder ein systematischer Fehler) der v_{LOS} von $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ müssen die Radien mit einer Auflösung besser als $1/40$ einer **Pixelseitenlänge (PSL)** von $10 \mu\text{m}$ bestimmt werden, was auch für eine gute Kalibrierung des Messinstruments unerlässlich ist. Zwei unterschiedliche Methoden werden in Hirschberger und Ehret (2011) dann auf die verrauschten 2D Ring-Bilder (siehe Abb. B.2(b)) angewandt, um das Rauschen zu reduzieren und um sie in 1D Bilder umzuwandeln. Dann kann man durch einen einfachen Fit an die Funktion die exakte Position des Radius ermitteln.

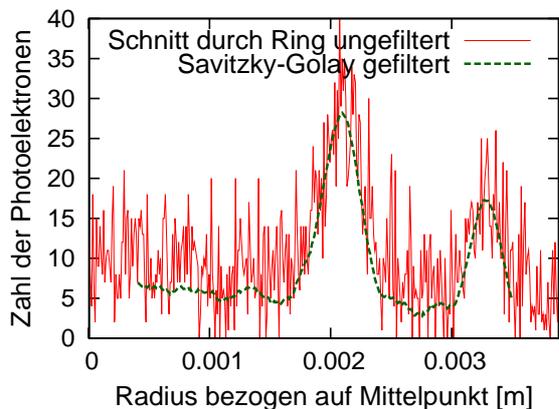
Der Radius und Mittelpunkt solcher verrauschten Ringe lässt sich allenfalls grob abschätzen. Ein automatisiertes Auswerteverfahren an Bord eines Flugzeuges, wie es in Hirschberger und Ehret (2011) beschrieben wird, muss immer funktionieren und ohne zusätzliche Annahmen auskommen. Es ist also nicht möglich einen quadratischen Bildausschnitt um z. B. den inneren Ring zu selektieren und die Annahme einer Symmetrie der Punkte oben und unten sowie links und rechts hineinzustecken, um daraus den exakten Mittelpunkt zu bestimmen (damit ließe sich der Mittelpunkt allenfalls grob abschätzen, da das Rauschen die Symmetrie der Intensitätswerte deutlich verfälscht). Bei so stark verrauschten Ringen ist auch keine klare Abgrenzung oder Berandung der einzelnen Ringstrukturen mehr möglich. Vielmehr ist ein Mittelpunkt dadurch bestimmt, dass für einen Punkt bei einem bestimmten vorgegebenen Radius ein Ringsegment mit einer gewissen radialen Breite Δr für die Summe der Intensitätswerte der zum Ringsegment gehörigen Pixel einen maximalen Wert liefert.

Das Zentrum dient als Startpunkt für die Berechnungsmethoden. Die erste Methode ist eine Variante von Bresenham's **Midpoint Line (ML)** Algorithmus (Bresenham, 1965) erweitert auf radiale Linien für jeden Winkel zwischen 0° und 360° (d. h. $[0, 2\pi)$ in rad) einer kreisförmigen Umgebung, d. h. 1D Schnitte durch die 2D Ringe. Schließlich erhalten wir aus jeder Linie eine Funktion aus PE-Werten n_{C} in Abhängigkeit von den Radiuswerten (Pixeln) ausgehend vom Zentrum. Eine Schwierigkeit ist der Verrauschtheitsgrad einer solchen einzelnen Linie, wie in den Abb. B.3(a) und B.3(b) für einen Winkel von $\alpha = 269^\circ$ gezeigt. Auch wenn ein Savitzky-Golay-Filter (Savitzky und Golay, 1964, Ziegler, 1981, Press et al., 2007) eine gute Abschätzung liefert und verrauschte Daten solcher nicht-äquidistanter Fringes unterschiedlicher Breite glättet, genügt es nicht, einfach die einzelnen 1D Linien (Schnitte) mit diesem Filter zu fitten (siehe auch gestrichelte grüne Kurve in Abb. B.3(a)). Dagegen werden bei ML die radial berechneten PE-Werte n_{C} für Positionen gleichen Abstands zum Mittelpunkt aufsummiert und durch die Zahl aller radialen Linien geteilt werden, was gemittelte reelle Zahlenwerte für die mittleren PE-Zahlen liefert. Die zweite Methode, genannt

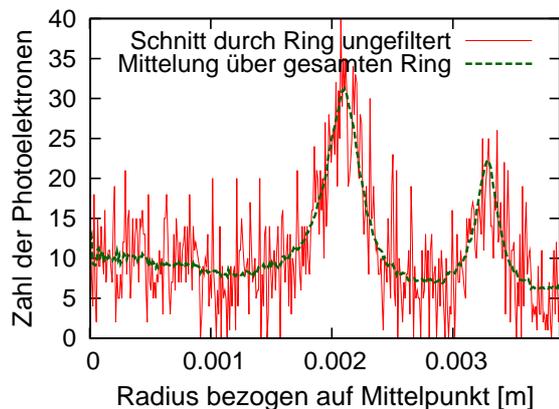
Circular-Averaging(CA)-Methode, funktioniert wie die Mittelpunkt-Berechnungsprozedur. Die Summe der PE-Zahlen von auf Ringsegmenten der festen Breite Δr um den berechneten Mittelpunkt gelegenen Pixel werden hier gemittelt. Unterschiede der Fit-Kurven von ML und CA sind schwer sichtbar, obwohl diese tatsächlich existieren (siehe Fig. 13 in [Hirschberger und Ehret \(2011\)](#); in Abb. B.3(b) ist nur eine mit CA gemittelte Kurve gezeigt). Die unterschiedliche Funktionsweise der ML- und der CA-Methode wird abschließend in Abb. B.4 nochmal zusammengefasst dargestellt.

Die Peaks der Fit-Kurven aus ML und CA werden mit der sog. *Levenberg-Marquardt-Methode* ([Press et al., 2007](#)) an ein Polynom $p(r) = ar^2 + br + c$ vom Grad 2 mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ gefittet, um den Radius aus der Position des Maximums als $r = -b/(2a)$ noch genauer bestimmen zu können.

CA stellte sich als verlässlicher und präziser als ML heraus. Ergebnisse der Simulationen sowie die verwendeten Algorithmen sind in [Hirschberger und Ehret \(2011\)](#) beschrieben.

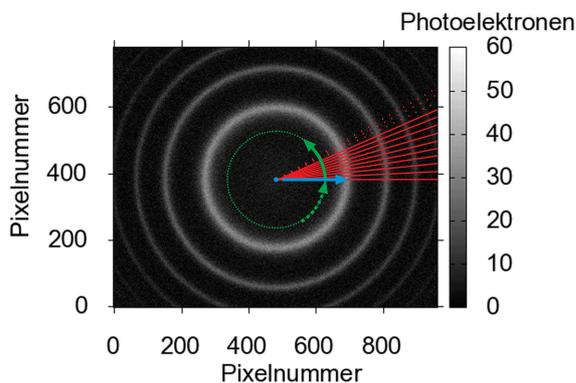


(a) Auswertung: Einzelschnitt vom berechneten Mittelpunkt zum Rand des Gebietes (berechnet mit ML) bei einem Winkel von 269° (rot) und gefiltert mit Savitzky-Golay (grün). Die Werte an den Rändern gehen bei diesem Fit verloren ([Hirschberger und Ehret \(2011\)](#), S. 218, Abb. 12; with kind permission from Springer Science and Business Media).

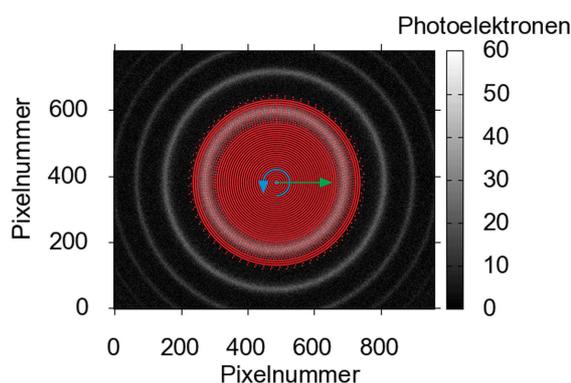


(b) Auswertung: Einzelschnitt vom berechneten Mittelpunkt zum Rand des Gebietes (berechnet mit ML) bei einem Winkel von 269° (rot) und gefiltert mit CA über alle Winkel des 2D Ringbildes (grün). Ergebnis ist eine äußerst glatte, gut gemittelte Funktion.

Abbildung B.3: Schnitt durch einen Ring vom Zentrum aus mit anschließender Filterung (PSL: $10 \mu\text{m}$).



(a) ML-Prinzip: Die Operation des blauen Pfeils wird wiederholt ausgeführt, und zwar z. B. bis Geraden eines vollen Kreises berechnet wurden (grüne Pfeile).



(b) CA-Prinzip: Die Operation des blauen Pfeils wird wiederholt ausgeführt, d. h. es werden Kreise gebildet, und zwar in Richtung des grünen Pfeils (vom Zentrum nach außen) bis der Bildrand erreicht wird.

Abbildung B.4: Vergleich des Prinzips der Methoden ML und CA.

B.2 3D Ray-Tracing-Simulationen eines Fabry-Pérot-Etalons

In diesem Abschnitt geht es um die numerische Erzeugung Fabry-Pérot-interferometrischer Ringmuster auf einem CCD durch ein speziell dafür entwickeltes (nicht-kommerzielles) 3D Ray-Tracing-Programm, das leicht variable zufällige Wellen simuliert (im Folgenden als **Wave Ray-Tracing (WRT)** bezeichnet). Man hat hier also eine Art Monte-Carlo Ray-Tracing-Simulation der sich durch ein festes FPE aus Quarz (statt Vakuum zwischen Platten) ausbreitenden Strahlen. Das heißt, das Etalon im WRT-Simulator ist eben berandet und vorne und hinten am Glas- bzw. Quarzkörper reflektionsbeschichtet.

Nach der Erfindung des FPI im Jahre 1899 wurde eine umfassende Interferenz-Theorie entwickelt, die durch Mehrfach-Reflexionen zwischen den Platten und Transmission die Generierung der Fringes (Ringe) im Fokus hinter einer zweiten Linse auf einem 2D Schirm (Ebene) beschrieb (siehe z. B. [Born und Wolf \(1999\)](#)). Im Folgenden werden diese Elemente in Form eines 3D Ray-Tracing-Programmes implementiert, das die Strahlengänge vieler einzelner Wellen basierend auf zufälligen Startrichtungen, Wellenvektoren und anderen Eigenschaften optischer Wellen simuliert. Die Simulationen werden in geometrisch realitätsnahen Dimensionen (Größen) für die optischen Bauteile durchgeführt. Als Ergebnis erhält man wieder die aus [Abb. B.2\(b\)](#) bekannten, für FPE typischen Fringes auf einem 2D CCD (hier mit 80×60 Pixeln; CCD-Bilder mit höherer Auflösung, etwa mit 961×781 Pixeln wie vorhin, würden die Simulationsdauer exorbitant ansteigen lassen). Diese Muster entstehen hier durch Schnitte der ebenen Wellen mit den Pixeln der CCD-Ebene unter Verwendung der Intensitäten, die aufgrund der Amplitude und Phase der Wellen variieren. Theoretisch könnten die Radien der Peaks dieser Fringes und damit die Lichtwellenlänge wieder mit den Methoden aus [Abschnitt B.1](#) berechnet werden, was hier aber aufgrund der geringen Auflösung wenig Sinn macht. Der WRT-Simulator erfüllt hier also eher einen akademischen, die Funktionsweise eines FPE veranschaulichenden Zweck. Es kann damit visualisiert werden, wie winzige Verschiebungen der geometrischen Objekte (Linsen, FPE-Platten bzw. -Ränder, CCD) im Receiver die Ringstruktur auf dem CCD beeinflussen können. Für generelle Darstellungen von Ray-Tracing und seinen Funktionsprinzipien siehe etwa [Lindlein und Leuchs \(2007\)](#), [Glassner \(1989\)](#) oder [Stavroudis \(1972\)](#), und Referenzen darin. Diverse Publikationen beschreiben Ray-Tracing-Simulationen anderer Interferometer als eines FPE, siehe etwa [Douglas et al. \(1995\)](#) oder [Tesar et al. \(2000\)](#). Der Artikel von [Stone \(2000\)](#) beschreibt mittels Ray-Tracing-Simulationen ein Michelson- und ein Twyman-Green-Interferometer.

Abbildung [B.5\(a\)](#) zeigt den WRT-simulierten FPE-Aufbau. Die ebenen Wellen, beschrieben durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A} \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \phi), \quad (\text{B.6})$$

mit Amplitudenvektor $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)^T$, Frequenz $\omega = 2\pi c\lambda^{-1}$, Zeitpunkt t , Richtungswellenvektor $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)^T$, Positionsvektor $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)^T$ und Phase ϕ , starten ihre Ausbreitung entlang der z -Achse an zufällig (durch ZZen) leicht variierenden Startpositionen \mathbf{r}_0 oder/und Richtungen \mathbf{k}_0 (mit konstanten z_0 bzw. $k_{0,z}$). Es gilt also z. B. $A_{0,x} = A_{x,\text{mean}} + A_{x,\text{var}}(\text{RN} - 0.5)$ mit vorgegebenem Mittelwert $A_{x,\text{mean}}$ der Amplitude für die x -Achse, vorgegebenem Varianz-Faktor $A_{x,\text{var}}$ sowie ZZ $\text{RN} \in [0, 1]$. Genauso gilt $A_{0,y} = A_{y,\text{mean}} + A_{y,\text{var}}(\text{RN} - 0.5)$ und $A_{0,z} = A_{z,\text{mean}} + A_{z,\text{var}}(\text{RN} - 0.5)$ mit wieder anderen ZZen $\text{RN} \in [0, 1]$. Dieses Prinzip kann nun fortgesetzt werden, so dass für die Komponenten der Richtungswellenvektoren $k_{0,x} = k_{x,\text{mean}} + k_{x,\text{var}}(\text{RN} - 0.5)$, $k_{0,y} = k_{y,\text{mean}} + k_{y,\text{var}}(\text{RN} - 0.5)$, $k_{0,z} = k_{z,\text{mean}} + k_{z,\text{var}}(\text{RN} - 0.5)$, für die Komponenten der Startpositionen $r_{0,x} = r_{x,\text{mean}} + r_{x,\text{var}}(\text{RN} - 0.5)$, $r_{0,y} = r_{y,\text{mean}} + r_{y,\text{var}}(\text{RN} - 0.5)$, $r_{0,z} = r_{z,\text{mean}} + r_{z,\text{var}}(\text{RN} - 0.5)$, und für die Startzeitpunkte $t_0 = t_{0,\text{mean}} + t_{0,\text{var}}(\text{RN} - 0.5)$ gilt. Die ZZen sind dabei jeweils unabhängig voneinander. In den Simulationen werden generell $A_{0,z}$ und ϕ_0 jeweils auf den Wert 0 gesetzt werden. In der Simulation von [Abb. B.5\(b\)](#) waren $A_{x,\text{mean}} = A_{y,\text{mean}} = 0.7$, $k_{z,\text{mean}} = 1.0$ und $t_{0,\text{mean}} = 1.1 \cdot 10^{-10}$ s, während alle sonstigen Mittelwerte mit 0.0 festgelegt wurden. Außerdem wurde lediglich für $r_{x,\text{var}} = r_{y,\text{var}} = 0.005$ m eine Varianz ungleich 0 verwendet, alle anderen Varianz-Faktoren waren 0. Prinzipiell könnten aber alle oben genannten Mittelwert- und Varianzgrößen zur Erzeugung der

Startgrößen \mathbf{A}_0 , \mathbf{k}_0 , \mathbf{r}_0 und t_0 variieren. Eine bikonvexe Linse im optischen Pfad lenkt die Wellen auf das Etalon. Der Schnittpunkt

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \tau \mathbf{k}_0, \tau \in \mathbb{R} \quad (\text{B.7})$$

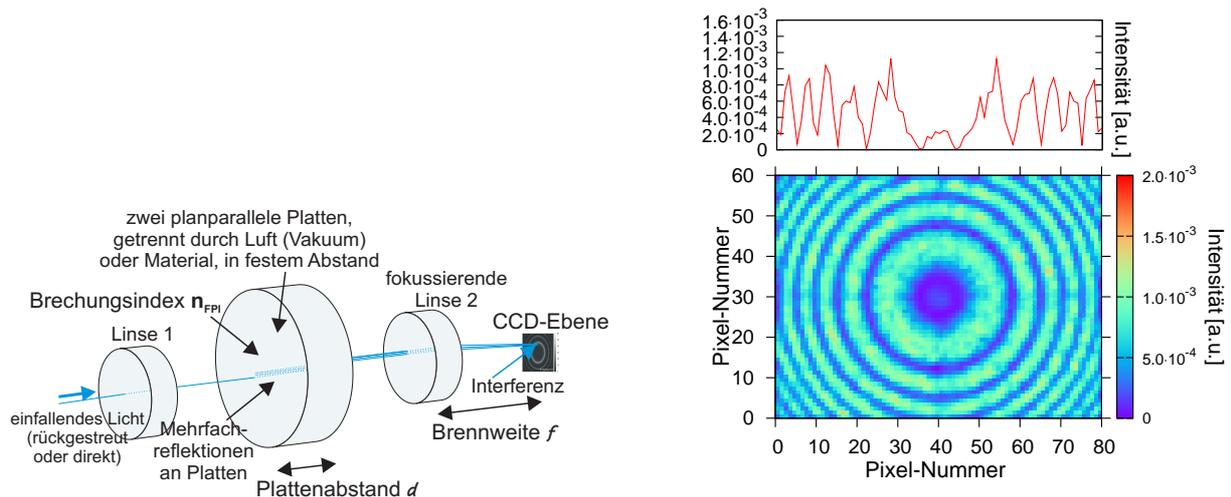
der von Startposition \mathbf{r}_0 in Startrichtung \mathbf{k}_0 ausgehenden geraden Strahllinie mit der vorderen (der Lichtquelle zugewandten) Seite von Linse 1, beschrieben durch eine Kugel mit der Gleichung

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c) = R^2 \quad (\text{B.8})$$

(mit Kugelzentrum \mathbf{r}_c und Radius R als Maß für die Krümmung) wird berechnet durch Auflösen von Gl. (B.8) nach \mathbf{r}_1^2 und durch Ersetzen von \mathbf{r}_1 aus Gl. (B.7) in Gl. (B.8). Schließlich erhalten wir eine quadratische Gleichung

$$\mathbf{k}_0^2 \tau^2 + (2(\mathbf{r}_0 \mathbf{k}_0 - \mathbf{r}_c \mathbf{k}_0))\tau + (-2\mathbf{r}_c \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_c^2 + \mathbf{r}_0^2 - R^2) = 0 \quad (\text{B.9})$$

mit unbekanntem τ . Aus den Koeffizienten von Gl. (B.9) kann die Diskriminante dc berechnet werden. Gleichung (B.9) liefert also keine ($dc < 0$), eine ($dc = 0$) oder zwei ($dc > 0$) Lösungen für τ . Im Falle zweier möglicher Lösungen ist das minimale τ das korrekte τ , bei keiner Lösung stoppt die Simulation dieser Welle an dieser Stelle sofort, da kein Schnittpunkt mit der Linse auftritt. Die Position (Stelle) des ersten Schnitts wäre im Falle einer Lösung für τ dann $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \tau_0 \mathbf{k}_0$ mit dem durch Gl. (B.9) berechneten Skalar τ_0 .



(a) Simulierter Aufbau: Festes FPE mit umgebendem Linsensystem zur Erzeugung von Interferenzringmustern auf einem CCD im Brennpunkt hinter Linse 2.

(b) Intensitätsverteilung eines 2D FPE Fringe-Musters auf einem CCD, das durch einen 3D Wave Ray-Tracing-Simulator für ein Quarzkörper-Etalon erzeugt wurde. Darüber ein horizontaler 1D Schnitt durch das Zentrum des Ringsystems bei Pixel-Nummer 30 der y -Achse. Die CCD PSL betrug $40 \mu\text{m}$, 1.5 Millionen Wellenpfade wurden bei einer zentralen Wellenlänge von 354.70375 nm simuliert.

Abbildung B.5: Vom 3D Ray-Tracing-Programm simulierter Aufbau eines FPE (links) und Ergebnis einer solchen FPE Ray-Tracing-Simulation (rechts).

Eine Gerade $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2$ durch die vorgegebenen Zentren der Kugeln für die Vorderseite der Linse (\mathbf{m}_1) und für die Rückseite der Linse (\mathbf{m}_2) dient als Grundlinie zur Messung der Höhe von Linse 1, die die Vertikale senkrecht zu dieser Grundlinie ist. Falls diese Höhe (in m) einen gewissen Grenzwert überschreitet, findet auch kein Schnitt mit der Linse statt (Abbruch für diese einzelne Welle). Die Höhe von Linse 1 wird berechnet mittels

$$h_1 = \left\| \mathbf{m}_2 - \mathbf{r}_1 + \mathbf{m}_{L1} \left(\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{m}_2) \mathbf{m}_{L1}}{\|\mathbf{m}_{L1}\| \|\mathbf{m}_{L1}\|} \right) \right\|, \quad (\text{B.10})$$

wobei \mathbf{m}_2 das Zentrum der Kugeloberfläche der Rückseite von Linse 1 ist, und \mathbf{m}_{L1} der Mittelpunkt der Gerade zwischen \mathbf{m}_1 und \mathbf{m}_2 mit dem Zentrum der Kugeloberfläche \mathbf{m}_1 der Vorderseite von Linse 1 ist. Diese Formel wurde durch geometrische Überlegungen hergeleitet. Die Norm eines Vektors $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ ist allgemein definiert durch $\|\mathbf{v}\| = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$.

Für die Gerade \mathbf{m} durch die Zentren \mathbf{m}_1 und \mathbf{m}_2 der Kugeloberflächen der Vorder- und Rückseite von Linse 1 können die Schnittpunkte \mathbf{s}_1 mit der Vorderseite von Linse 1 und \mathbf{s}_2 mit der Rückseite von Linse 1 berechnet werden, und daraus dann die Mitte der Linse 1 bei \mathbf{m}_{L1} , die zur Höhenmessung (siehe oben) herangezogen wird. Es seien $R_{L1,\text{front}}$ bzw. $R_{L1,\text{back}}$ die Krümmungsradien der Kugeloberfläche an der Vorder- bzw. Rückseite von Linse 1. Weiter seien $z_{\mathbf{m}_1}$ und $z_{\mathbf{m}_2}$ die z -Positionen von \mathbf{m}_1 und \mathbf{m}_2 . Falls

$$\left((z_{\mathbf{m}_1} > z_{\mathbf{m}_2}) \wedge ((R_{L1,\text{front}} > 0) \wedge (R_{L1,\text{back}} < 0)) \right) \vee \left((z_{\mathbf{m}_1} \leq z_{\mathbf{m}_2}) \wedge ((R_{L1,\text{front}} < 0) \wedge (R_{L1,\text{back}} > 0)) \right)$$

erfüllt ist, kann wie oben wiederum eine quadratische Gleichung der Form

$$(\|\mathbf{m}\|\|\mathbf{m}\|) t_1^2 + 2(\mathbf{m}(\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1)) t_1 + ((\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1)(\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1) - (R_{L1,\text{front}})^2) = 0$$

mit $(\|\mathbf{m}\|\|\mathbf{m}\|) =: A$, $2(\mathbf{m}(\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1)) =: B$ und $((\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1)(\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1) - (R_{L1,\text{front}})^2) =: C$ aufgestellt werden, die mittels der Diskriminante $dc = B^2 - 4AC$ keine ($dc < 0$), eine ($dc = 0$ mit Lösung $t_1 = -B/(2A)$) oder zwei ($dc > 0$ mit möglichen Lösungen $t_{1,a/b} = (-B \pm \sqrt{dc})/(2A)$ und $t_1 = \min(t_{1,a}, t_{1,b})$) Lösungen für \mathbf{s}_1 liefert, und zwar durch die Gleichung $\mathbf{s}_1 = \mathbf{m}_2 + t_1\mathbf{m}$. Auf äquivalente Weise erhalten wir auch den Schnittpunkt \mathbf{s}_2 und dadurch über $\mathbf{m}_{L1} = \mathbf{s}_1 + 0.5(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)$ die Mitte der Linse 1. Die eben geschilderte Prozedur wird auch zur Bestimmung der Mitte der fokussierenden Linse 2 angewandt.

Der normierte Normalenvektor am Schnittpunkt mit der Oberfläche der Kugel der Vorderseite von Linse 1 ist

$$\mathbf{e}_{n_1} = (\mathbf{m}_1 - \mathbf{r}_1) (\|\mathbf{m}_1 - \mathbf{r}_1\|)^{-1} = (e_{n_1,x}, e_{n_1,y}, e_{n_1,z})^T. \quad (\text{B.11})$$

Die verstrichene Zeit vom Start der Welle zum Zeitpunkt t_0 bis zum ersten Schnitt mit Linse 1 am Ort \mathbf{r}_1 ist

$$t_1 = t_0 + n_{\text{in}} \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0\| c^{-1}, \quad (\text{B.12})$$

so dass der Brechungsindex $n_{\text{in}} \geq 1$ je nach Medium die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, gegeben durch die Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum, reduziert. Unter Verwendung des Snelliusschen Brechungsgesetzes kann die Brechungsrichtung, d. h. der neue \mathbf{k} -Vektor innerhalb von Linse 1, durch den Winkel der einfallenden Welle

$$\theta_{\text{in},x1} = \arccos\left((e_{n_1,x}^2 + e_{n_1,z}^2)^{\frac{1}{2}} (k_{0,x}^2 + k_{0,z}^2)^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{B.13})$$

und den Winkel der ausfallenden Welle

$$\theta_{\text{out},x1} = \arcsin\left(\frac{n_{\text{in}}}{n_{\text{out}}} \right) \sin(\theta_{\text{in},x1}) \quad (\text{B.14})$$

berechnet werden, wobei n_{in} und n_{out} die Brechungsindizes der einfallenden bzw. der ausfallenden Welle sind. Ebenso werden die Winkel $\theta_{\text{in},y1}$ und $\theta_{\text{out},y1}$ mit den Gl. (B.13) und (B.14) berechnet, wobei nur x durch y ersetzt wird. Damit lautet schließlich der neue Richtungsvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= (k_{1,x}, k_{1,y}, k_{1,z})^T \quad \text{mit} \\ k_{1,x} &= (n_{\text{out}})^{-1} (n_{\text{in}} k_{0,x} + (n_{\text{out}} \cos(\theta_{\text{out},x1}) - n_{\text{in}} \cos(\theta_{\text{in},x1})) e_{n_1,x}), \\ k_{1,y} &= (n_{\text{out}})^{-1} (n_{\text{in}} k_{0,y} + (n_{\text{out}} \cos(\theta_{\text{out},y1}) - n_{\text{in}} \cos(\theta_{\text{in},y1})) e_{n_1,y}), \quad k_{1,z} = 1.0. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Für die Amplitude $\mathbf{A}_1 = (A_{1,x}, A_{1,y}, A_{1,z})^T$ des transmittierten E-Feldes nach dem Schnitt mit der Oberfläche der Vorderseite von Linse 1 gilt nach den Fresnel-Formeln (siehe z. B. Demtröder (1999)) zur Berechnung der Intensitäten mit der einfallenden Amplitude $\mathbf{A}_0 = (A_{0,x}, A_{0,y}, A_{0,z})^T$

$$\begin{aligned} A_{1,x} &= (1 - r_f) \left(\frac{n_{\text{in}} \cos(\theta_{\text{in},x1}) (\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_0) (T_x^\perp + T_x^\parallel)}{n_{\text{out}} \cos(\rho_{x1})} \right)^{\frac{1}{2}} \\ A_{1,y} &= (1 - r_f) \left(\frac{n_{\text{in}} \cos(\theta_{\text{in},y1}) (\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_0) (T_y^\perp + T_y^\parallel)}{n_{\text{out}} \cos(\rho_{y1})} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad A_{1,z} = (1 - r_f) A_{0,z} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

mit Anteilen des Transmissionsvermögens von

$$T_x^\perp = 1 - R_x^\perp, \quad T_y^\perp = 1 - R_y^\perp, \quad T_x^\parallel = 1 - R_x^\parallel, \quad T_y^\parallel = 1 - R_y^\parallel, \quad (\text{B.17})$$

mit Anteilen des Reflexionsvermögens von

$$\begin{aligned} R_x^\perp &= \left(\frac{\sin(\theta_{\text{in},x1} - \rho_{x1})}{\sin(\theta_{\text{in},x1} + \rho_{x1})} \right)^2, & R_y^\perp &= \left(\frac{\sin(\theta_{\text{in},y1} - \rho_{y1})}{\sin(\theta_{\text{in},y1} + \rho_{y1})} \right)^2, \\ R_x^\parallel &= \left(\frac{\tan(\theta_{\text{in},x1} - \rho_{x1})}{\tan(\theta_{\text{in},x1} + \rho_{x1})} \right)^2, & R_y^\parallel &= \left(\frac{\tan(\theta_{\text{in},y1} - \rho_{y1})}{\tan(\theta_{\text{in},y1} + \rho_{y1})} \right)^2, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

und Brechwinkeln

$$\rho_{x1} = \arccos \left(\frac{\sqrt{e_{n_{1,x}}^2 + e_{n_{1,z}}^2}}{\sqrt{k_{1,x}^2 + k_{1,z}^2}} \right) \quad \text{und} \quad \rho_{y1} = \arccos \left(\frac{\sqrt{e_{n_{1,y}}^2 + e_{n_{1,z}}^2}}{\sqrt{k_{1,y}^2 + k_{1,z}^2}} \right) \quad (\text{B.19})$$

sowie Reflektivitätsfaktor r_f (hier $r_f = 0.90$). Nach Gl. (B.6) gilt für das E-Feld der Welle nach Schnitt mit der Vorderseite von Linse 1 hinter der Grenzfläche

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_1, t_1) = \mathbf{A}_1 \cos(\omega_1 t_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1) \quad \text{mit Frequenz} \quad \omega_1 = 2\pi c (\lambda_0 n_1)^{-1}, \quad (\text{B.20})$$

wobei $n_{\text{out}} =: n_1 = 1.47$ der Brechungsindex für (Quarz)glas ist. Dagegen gilt für die Frequenz in Vakuum (Luft) $\omega_0 = 2\pi c (\lambda_0 n_0)^{-1}$ mit Brechungsindex $n_{\text{in}} =: n_0 = 1.00$.

Unter Beachtung der vertauschten Brechungsindizes für einfallende und ausfallende Welle und unter Verwendung der an der Vorderseite von Linse 1 berechneten Größen werden wie durch Gleichungen (B.7) bis (B.20) auch für die Rückseite von Linse 1 die Größen \mathbf{r}_2 , t_2 , \mathbf{k}_2 , \mathbf{A}_2 und mit ω_0 auch \mathbf{E}_2 nach Verlassen von Linse 1 an der Hinterseite berechnet.

Nun bewegt sich die Welle mit Amplitude \mathbf{A}_2 und E-Feld \mathbf{E}_2 in Vakuum vom Schnittpunkt \mathbf{r}_2 mit der Hinterseite von Linse 1 in Richtung \mathbf{k}_2 auf die vordere Platte des FPE zu. Die Platten des FPE sind in der Simulation von Abb. B.5(b) planparallel angeordnet, könnten aber auch leicht verkippt zueinander sein, wodurch die Interferenzringstruktur auf dem CCD jedoch zerstört würde. Seien $P_1 : \mathbf{a}_1 + b_1 e_x + c_1 e_y$ bzw. $P_2 : \mathbf{a}_2 + b_2 e_x + c_2 e_y$ die vordere bzw. hintere Plattenebene des FPE aus (Quarz)Glas. Für die zugehörigen Normalenvektoren der ersten Ebene gilt $\mathbf{n}_{P_1, z>0} = (b_1 e_x) \times (c_1 e_y)$ für den in positive bzw. $\mathbf{n}_{P_1, z<0} = (c_1 e_y) \times (b_1 e_x)$ für den in negative z -Richtung orientierten Normalenvektor. In äquivalenter Weise ergeben sich die Normalenvektoren der zweiten Ebene zu $\mathbf{n}_{P_2, z>0} = (b_2 e_x) \times (c_2 e_y)$ bzw. $\mathbf{n}_{P_2, z<0} = (c_2 e_y) \times (b_2 e_x)$. Die Länge (Distanz) $l_{P_1} \in \mathbb{R}$ von der Rückseite von Linse 1 zum Schnittpunkt mit der vorderen Platte P_1 wird dann mittels der Gleichung

$$l_{P_1} = - \frac{(-\mathbf{n}_{P_1, z<0} \mathbf{a}_1 + \mathbf{n}_{P_1, z<0} \mathbf{r}_2)}{\mathbf{n}_{P_1, z<0} \mathbf{k}_2} \quad (\text{B.21})$$

berechnet, woraus dann der Schnittpunkt mit Platte P_1 zu

$$\mathbf{r}_{P_1} = \mathbf{r}_2 + l_{P_1} \mathbf{k}_2 \quad (\text{B.22})$$

ermittelt wird. Ob ein Schnitt der Welle mit P_1 überhaupt stattfindet, muss durch orthogonale Projektionen $(\mathbf{r}_{P_1} - \mathbf{a}_1) \cdot (b_1 \mathbf{e}_x)$ bzw. $(\mathbf{r}_{P_1} - \mathbf{a}_1) \cdot (c_1 \mathbf{e}_y)$ auf das von den Basisvektoren $b_1 \mathbf{e}_x$ und $c_1 \mathbf{e}_y$ aufgespannte und durch Längenskalare begrenzte Platten-Rechteck (oder Plattenkreis) P_1 untersucht werden. Bei keinem Schnittpunkt stoppt die Simulation der betreffenden Welle hier.

Wieder werden ähnlich den Gl. (B.7) bis (B.20) der Wellenvektor \mathbf{k}_{P_1} , die Amplitude \mathbf{A}_{P_1} , die Zeit t_{P_1} sowie das E-Feld \mathbf{E}_{P_1} an der Grenzfläche P_1 wie für Linse 1 berechnet. Der Brechungsindex für das Glas-Etalon ist hier wie für die beiden Linsen 1 und 2 wieder $n_1 = 1.47$. Der Reflektivitätsfaktor aufgrund der FPE-Plattenbeschichtung beträgt $r_f = 0.90$. Aus obigen Werten kann dann auf gleiche Weise wie in Gl. (B.22) der Schnittpunkt \mathbf{r}_{P_2} und die Zeit t_{P_2} errechnet werden.

Ab jetzt haben wir es mit Mehrfachreflektionen innerhalb der Platten und gleichzeitiger Transmission von Wellenanteilen in positive z -Richtung aus dem FPE heraus Richtung zweiter, fokussierender Linse zu tun. Wir haben im FPE also vorwärtsgerichtete Wellenvektoren $\mathbf{k}_T := \mathbf{k}_{P_1} = (k_{T,x}, k_{T,y}, k_{T,z})^T$ von Platte 1 bis zum Schnitt mit Platte 2, und rückwärtsgerichtete, reflektierte Wellenvektoren von Platte 2 nach Platte 1, für die $\mathbf{k}_R := (-k_{T,x}, -k_{T,y}, -1.0)^T$ gilt. Die transmittierten Anteile $-\mathbf{k}_T$, die das FPE nach hinten verlassen, gehen verloren und werden Linse 2 nie erreichen. Dagegen werden die das FPE in Vorwärtsrichtung verlassenden Anteile zum Großteil Linse 2 erreichen und durchqueren, und im Optimalfall auch die CCD-Ebene erreichen. Während die durch Platte 1 (und später auch Platte 2) transmittierte Amplitude $\mathbf{A}_T = (A_{T,x}, A_{T,y}, A_{T,z})^T$ in Anlehnung an Gl. (B.16) berechnet wird, erhalten wir die Amplituden der an Platte 1 und 2 im FPE hin- und her reflektierten Wellen durch

$$\begin{aligned} A_{R,x} &= r_f \left(\frac{n_{\text{in}} \cos(\theta_{\text{in},x1}) (\mathbf{A}_T \cdot \mathbf{A}_T) (R_x^\perp + R_x^\parallel)}{n_{\text{out}} \cos(\rho_{x1})} \right)^{\frac{1}{2}} \\ A_{R,y} &= r_f \left(\frac{n_{\text{in}} \cos(\theta_{\text{in},y1}) (\mathbf{A}_T \cdot \mathbf{A}_T) (R_y^\perp + R_y^\parallel)}{n_{\text{out}} \cos(\rho_{y1})} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad A_{R,z} = r_f A_{T,z}. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Bei wiederholter Berechnung reflektierter \mathbf{A}_T und transmittierter Anteile sinken deren einzelne Beiträge mit zunehmender Zahl an Reflektionen/Transmissionen immer weiter ab. Die Zahl der maximal möglichen Hin- und Rückreflektionen sowie Transmissionen durch das FPE war in den Simulationen auf $n_{\text{Ref}} = 30$ beschränkt (niedrige endliche Zahl erhöht das Simulationstempo und vernachlässigt unwesentliche Intensitätsbeiträge auf dem CCD). Es wird bei jeder Reflektion überprüft, ob ein Schnitt mit der FPE-Platte vorliegt; wenn nicht, gibt es keine weiteren durch das FPE transmittierten Beiträge. Die oben erläuterten Prinzipien werden auch zur Bestimmung der transmittierten und reflektierten Beiträge des E-Feldes im FPE wiederholt ausgeführt. In der Interferenztheorie eines FPE werden die reflektierten E-Feldanteile durch eine geometrische Reihe ausgedrückt (Zinth und Zinth (2009), S. 191). Die das FPE in Richtung Linse 2 verlassenden Wellen haben gleiche Wellenvektoren (Richtungen) $\mathbf{k}_{T,\text{FPE},i}$ mit jedoch unterschiedlich großen Anteilen $\mathbf{E}_{T,\text{FPE},i}$, $i \geq 1$. Die (maximal r_f) Schnittpunkte $\mathbf{r}_{T,\text{FPE},i}$, $i \geq 1$ mit Platte 2 des FPE und die zugehörigen Zeitpunkte werden nach Gl. (B.7) und (B.12) ermittelt. Aus einer Welle am Startpunkt werden also hinter dem FPE im Idealfall eine Vielzahl an energetisch entsprechend reduzierten Wellen, die dann von der zweiten fokussierenden Linse auf das CCD gelenkt werden. Der Durchgang jeder einzelnen dieser Wellen durch Linse 2 wird genauso wie der Durchgang der Startwelle durch Linse 1 (siehe oben) berechnet.

Abschließend trifft eine gewisse Zahl an Wellen auf das CCD. Ob es einen Schnittpunkt einer Welle mit dem CCD gibt, wird wieder überprüft. Der Schnittpunkt wird entsprechend Formel (B.22) ermittelt, nur mit den entsprechenden Größen hinter Linse 2 (neues \mathbf{k} , neues \mathbf{r} , $\mathbf{a}_{\text{CCD}} = (a_{\text{CCD},x}, a_{\text{CCD},y}, a_{\text{CCD},z})^T$ als Stützpunkt der CCD-Ebene $E_{\text{CCD}} : \mathbf{a}_{\text{CCD}} + b_{\text{CCD}} \mathbf{e}_x + c_{\text{CCD}} \mathbf{e}_y$ statt \mathbf{a}_1

bzw. \mathbf{a}_2 der FPE-Platten, und neuer Normalenvektor \mathbf{n}_{CCD} der CCD-Ebene). Ist dies der Fall, wird der Index dieses Schnittpunkts in 2D auf dem CCD bestimmt. Sei $\mathbf{r}_{\text{CCD}} = (r_{\text{CCD},x}, r_{\text{CCD},y}, r_{\text{CCD},z})^T$ der Schnittpunkt mit der CCD-Ebene und $\mathbf{b}_{\text{CCD},i} = \mathbf{a}_{\text{CCD}} + i \cdot \text{step}_{\text{CCD}} = (b_{\text{CCD},x,i}, b_{\text{CCD},y,i}, b_{\text{CCD},z,i})^T$ (step_{CCD} die Breite bzw. Höhe eines Pixels, $i = 1, \dots, n_x$ die Indizes der Punkte auf der ersten Achse des CCD) sowie $\mathbf{c}_{\text{CCD},j} = \mathbf{a}_{\text{CCD}} + j \cdot \text{step}_{\text{CCD}} = (c_{\text{CCD},x,j}, c_{\text{CCD},y,j}, c_{\text{CCD},z,j})^T$ ($j = 1, \dots, n_y$ die Indizes der Punkte auf der zweiten Achse des CCD) die Zentren der (i, j) -ten Pixel mit Seitenlänge step_{CCD} . Hier waren $n_x = 80$, $n_y = 60$ und $\text{step}_{\text{CCD}} = 40 \mu\text{m}$. Wenn man für alle $i = 1, \dots, n_x$ das i sucht, für das $|b_{\text{CCD},x,i} - r_{\text{CCD},x}| \leq 0.5 \cdot \text{step}_{\text{CCD}}$ und gleichzeitig für alle $j = 1, \dots, n_y$ das j sucht, für das $|c_{\text{CCD},y,j} - r_{\text{CCD},y}| \leq 0.5 \cdot \text{step}_{\text{CCD}}$ gilt, erhält man den Index des CCD-Pixels, an dem der Schnitt der einfallenden Welle auftritt. Das auftreffende E-Feld der Welle $\mathbf{E}_{L2} = (E_{L2,x}, E_{L2,y}, E_{L2,z})^T$ ist das hinter Linse 2. Falls für die das CCD treffende Welle $(r_{\text{CCD},x} \geq a_{\text{CCD},x}) \wedge (r_{\text{CCD},x} \leq b_{\text{CCD},x,n_x}) \wedge (r_{\text{CCD},y} \geq a_{\text{CCD},y}) \wedge (r_{\text{CCD},y} \leq c_{\text{CCD},y,n_y})$ gilt, dann gilt für die Summe der x -, y - und z -Anteile der E-Felder des gesamten E-Feldes \mathbf{E}_{CCD} auf dem jeweils (i, j) -ten Pixel ($i = 1, \dots, n_x$ und $j = 1, \dots, n_y$) des CCD

$$\begin{aligned} E_{\text{CCD},x}^{i,j} &= \sum_{m \in \mathbb{N}} (E_m^{i,j})_{L2,x} = \sum_{m \in \mathbb{N}} (\mathbf{A}_m^{i,j})_{L2,x} \cos(\omega_0(t_m^{i,j})_{L2,x} - (\mathbf{k}_m^{i,j})_{L2,x}(\mathbf{r}_m^{i,j})_{L2,x}) \\ E_{\text{CCD},y}^{i,j} &= \sum_{m \in \mathbb{N}} (E_m^{i,j})_{L2,y} = \sum_{m \in \mathbb{N}} (\mathbf{A}_m^{i,j})_{L2,y} \cos(\omega_0(t_m^{i,j})_{L2,y} - (\mathbf{k}_m^{i,j})_{L2,y}(\mathbf{r}_m^{i,j})_{L2,y}) \\ E_{\text{CCD},z}^{i,j} &= \sum_{m \in \mathbb{N}} (E_m^{i,j})_{L2,z} = \sum_{m \in \mathbb{N}} (\mathbf{A}_m^{i,j})_{L2,z} \cos(\omega_0(t_m^{i,j})_{L2,z} - (\mathbf{k}_m^{i,j})_{L2,z}(\mathbf{r}_m^{i,j})_{L2,z}) \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

wobei m Wellenanteile pro Pixel summiert werden. Diese Zahl $m \in \mathbb{N}$ variiert natürlich i. Allg. von Pixel zu Pixel. Die Intensitätsverteilung für alle Pixel (i, j) auf dem CCD ergibt sich schließlich durch

$$I_{\text{CCD}}^{i,j} = \left((E_{\text{CCD},x}^{i,j})^2 + (E_{\text{CCD},y}^{i,j})^2 + (E_{\text{CCD},z}^{i,j})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall i = 1, \dots, n_x \quad \forall j = 1, \dots, n_y. \quad (\text{B.25})$$

Ein Beispiel einer solchen Intensitätsverteilung ist in Abb. B.5(b) dargestellt. Die Anzahl der insgesamt simulierten, emittierten Wellen betrug in diesem Fall $n_{\text{waves}} = 1500000$. Die verwendete Wellenlänge war $\lambda_0 = 354.70375 \text{ nm}$.

Die Emissionspositionen der Wellen (Strahlen) könnten auch wieder normalverteilt gemäß Gl. (2.53) sein, um ein Gauß'sches Strahlprofil simulieren zu können. Hier wurde ein gleichverteiltes „Flat-Top“-Laserprofil simuliert. Die z -Position des Lasers (der Lichtquelle) lag bei $z = 0 \text{ m}$. Alle Objekte (Linsen, FPE-Platten und CCD) wurden symmetrisch um die z -Achse positioniert. Mittelpunkt 1 von Linse 1 befand sich bei $\mathbf{m}_1 = (x, y, z)^T = (0, 0, 0.07 \text{ m})$ mit Krümmungsradius der Vorderseite von Linse 1 von $R_{L1,\text{front}} = 0.01 \text{ m}$. Weiter war der Mittelpunkt 2 von Linse 1 durch $\mathbf{m}_2 = (0, 0, 0.03 \text{ m})$ mit $R_{L1,\text{back}} = -0.10 \text{ m}$ gegeben ($R_{L1,\text{back}} < 0$ wegen bikonvexer Linse). Die Höhe von Linse 1 war auf $h_{1,\text{max}} = 0.02 \text{ m}$ symmetrisch um die z -Achse beschränkt. Danach folgt das FPE mit Platten bei $z = 0.08 \text{ m}$ (für P_1) und bei $z = 0.083 \text{ m}$ (für P_2) senkrecht zur z -Achse, d. h. der Plattenabstand betrug 3 mm . Der Radius der Platten in der x - y -Ebene war jeweils 1 cm . Für die fokussierende Linse 2 war der Mittelpunkt 1 bei $(0, 0, 0.13 \text{ m})$ mit Krümmungsradius 0.03 m und der Mittelpunkt 2 bei $(0, 0, 0.09 \text{ m})$ mit Krümmungsradius -0.03 m . Die maximale Höhe von Linse 2 war wieder 0.02 m . Für die CCD-Ebene gilt $\mathbf{a}_{\text{CCD}} = (-0.0016 \text{ m}, -0.0012 \text{ m}, 0.1507 \text{ m})^T$ und $\mathbf{b}_{\text{CCD},\text{max}} = (0.0032 \text{ m}, 0, 0)^T$ sowie $\mathbf{c}_{\text{CCD},\text{max}} = (0.0024 \text{ m}, 0, 0)^T$ mit PSL von je $\text{step}_{\text{CCD}} = 40 \mu\text{m}$ bei $n_x = 80$ und $n_y = 60$ Positionen auf den Achsen. Damit befand sich das CCD symmetrisch um die z -Achse bei $z = 0.1507 \text{ m}$.

Der WRT-Simulator wurde in ANSI-C++ implementiert. Auf einem 2.5 GHz -Rechner dauert eine Simulation wie in Abb. B.5(b) mehrere Minuten. Das Programm wäre für Multicore-Prozessierung geeignet (bislang nicht umgesetzt).

Literaturverzeichnis

- A. Amediek, A. Fix, M. Wirth, G. Ehret (2008). Development of an OPO system at $1.57\ \mu\text{m}$ for integrated path DIAL measurement of atmospheric carbon dioxide. *Appl. Phys. B* 92, 295–302.
- V.A. Banakh, A.V. Falits (2009). On the Possibility to Determine the Transverse Wind Velocity from the Correlation of Coherent Images of an Atmospheric Layer. *Optics and Spectroscopy* 107(2), 327–332.
- V.A. Banakh, A.V. Falits (2010). Visualization of the Velocity Field in a Turbulent Atmospheric Layer from Optical Radiation Passed through the Layer. *Atmospheric and Oceanic Optics* 23, 118–124.
- V.A. Banakh, I.N. Smalikho, C. Werner (2000). Numerical simulation of the effect of refractive turbulence on coherent lidar return statistics in the atmosphere. *Appl. Opt.* 39, 5403–5414.
- P.R. Bannon (1995). Potential Vorticity Conservation, Hydrostatic Adjustment, and the Anelastic Approximation. *J. Atmos. Sci.* 52, 2302–2312.
- N. Barakat, M. Medhat (1986). An Accurate Method for Calculating the Central Fractional Order of Interference in the Fabry-Perot Interferometer. *Opt. Acta* 33, 939–944.
- H. Bauer (1992). *Maß- und Integrationstheorie*. Walter de Gruyter und Co., Berlin. 2. Auflage.
- H. Bauer (2001). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Walter de Gruyter und Co. KG, Berlin. 5. Auflage.
- G. Benedetti-Michelangeli, F. Congeduti, G. Fiocco (1972). Measurement of Aerosol Motion and Wind Velocity in the Lower Troposphere by Doppler Optical Radar. *J. Atmos. Sci.* 29, 906–910.
- M. Bennett, S. Christie, A. Graham, D. Raper (2010). Lidar Observations of Aircraft Exhaust Plumes. *J. Atmos. Ocean. Tech.* 27, 1638–1651.
- L.C. Berselli, T. Iliescu, W.J. Layton (2006). *Mathematics of Large Eddy Simulation of Turbulent Flows*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- J. Bilbro, G. Fichtl, D. Fitzjarrald, M. Krause, R. Lee (1984). Airborne Doppler Lidar Wind Field Measurements. *Bull. Amer. Meteor. Soc.* 65, 348–359.
- C.F. Bohren, D.R. Huffman (1983). *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*. John Wiley and Sons.
- M. Born, E. Wolf (1999). *Principles of Optics*. Cambridge University Press. 7th (expanded) edition.
- A.G. Borovoi, I.A. Grishin, U.G. Oppel (2003). Mueller matrix for randomly oriented ice crystal particles. In G. Matvienko und V. Lukin (Hrsg.), *Ninth Joint International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics/Atmospheric Physics. Part II: Laser Sensing and Atmospheric Physics*, Volume 5027 von *Proc. SPIE*, S. 112–119.

- R.N. Bracewell (1978). *The Fourier Transform and Its Applications* (2. Auflage). McGraw-Hill Book Company.
- C. Breitsamter (2007). *Nachlaufwirbelsysteme großer Transportflugzeuge – Experimentelle Charakterisierung und Beeinflussung*. Herbert Utz Verlag, München.
- J.E. Bresenham (1965). Algorithm for computer control of a digital plotter. *IBM Systems Journal* 4, 25–30.
- E.O. Brigham (1997). *FFT-Anwendungen*. R. Oldenbourg Verlag, München Wien.
- R. Brigola (1997). *Fourieranalysis, Distributionen und Anwendungen*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden.
- R. Buras, B. Mayer (2011). Efficient unbiased variance reduction techniques for Monte Carlo simulations of radiative transfer in cloudy atmospheres: The solution. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 112, 434–447.
- W. Burger, M.J. Burge (2006). *Digitale Bildverarbeitung*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- R.F. Cahalan, M. McGill, J. Kolasinski, T. Várnai, K. Yetzer (2005). THOR – Cloud Thickness from Offbeam Lidar Returns. *J. Atmos. Ocean. Tech.* 22, 605–627.
- N. Cézard, A. Dolfi-Bouteyre, J.-P. Huignard, P. Flamant (2007). Development of a short-range 355-nm Rayleigh-Mie lidar using a Michelson interferometer for wind speed measurements. *Proc. SPIE* 6750, 0801–0810.
- L.I. Chaikovskaya, E.P. Zege, I.L. Katsev, M. Hirschberger, U.G. Oppel (2009). Lidar returns from multiply scattering media in multiple-field-of-view and CCD lidars with polarization devices: comparison of semi-analytical solution and Monte Carlo data. *Appl. Opt.* 48, 623–632.
- K.S.W. Champion (1985). *Handbook of geophysics and the space environment*, Kapitel Standard and reference atmospheres, S. 14–1. United States Air Force Geophysics Laboratory.
- S. Chandrasekhar (1960). *Radiative Transfer*. Dover Publications, Inc., New York.
- S.C. Crow (1970). Stability theory for a pair of trailing vortices. *AIAA Journal* 8, 2172–2179.
- A.B. Davis, R.F. Cahalan, J.D. Spinhirne, M.J. McGill, S.P. Love (1999). Off-beam lidar: An emerging technique in cloud remote sensing based on radiative Green-function theory in the diffusion domain. *Phys. Chem. Earth (B)* 24(3), 177–185.
- A.C. de Bruin, G. Schrauf (2007, August). Wake vortex results from the AWIATOR project. Technical Report NLR-TP-2007-527, National Aerospace Laboratory NLR. 23 Seiten.
- J.W. Deardorff (1970). A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* 41, 453–480.
- D. Deirmendjian (1969). *Electromagnetic Scattering on Spherical Polydispersions*. New York American Elsevier Publishing Company, Inc.
- D.P. Delisi, G.C. Greene, R.E. Robins, D.C. Vicroy, F.Y. Wang (2003). Aircraft wake vortex core size measurements. In 21st AIAA Applied Aerodynamics Conference, Orlando, FL, June 23rd-26th, 2003, AIAA-2003-3811, 9 Seiten.
- W. Demtröder (1999). *Experimentalphysik 2 – Elektrizität und Optik* (2. Auflage). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

- J. Ding, L. Xu (2002). Light scattering characteristics of small ice circular cylinders in visible, 1.38 μm , and some infrared wavelengths. *Opt. Eng.* 41(9), 2252–2266.
- A. Doicu, T. Wriedt, Y.A. Eremin (2006). *Light Scattering by Systems of Particles: Null-Field Method with Discrete Sources – Theory and Programs*. Springer Series in Optical Sciences. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- A. Dolfi-Bouteyre, G. Canat, M. Valla, B. Augère, C. Besson, D. Goular, L. Lombard, J.-P. Cariou, A. Durecu, D. Fleury, L. Bricteux, S. Brousmiche, S. Lugan, B. Macq (2009). Pulsed 1.5- μm LIDAR for Axial Aircraft Wake Vortex Detection Based on High-Brightness Large-Core Fiber Amplifier. *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.* 15, 441–450.
- N.G. Douglas, A.R. Jones, F.J. van Hoesel (1995). Ray-based simulation of an optical interferometer. *J. Opt. Soc. Am. A* 12(1), 124–131.
- Y. Durand, A. Hélière, J.-L. Bézy, R. Meynart (2007). The ESA EarthCARE mission: results of the ATLID instrument pre-developments. *Proc. SPIE* 6750, 675015.
- D. Dussault, P. Hoess (2004). Noise performance comparison of ICCD with CCD and EMCCD cameras. *Proc. SPIE* 5563, 195–204.
- G. Ehret, C. Kiemle, M. Wirth, A. Amediek, A. Fix, S. Houweling (2008). Space-borne remote sensing of CO_2 , CH_4 , and N_2O by integrated path differential absorption lidar: a sensitivity analysis. *Appl. Phys. B* 90, 593–608.
- E.W. Eloranta, J. King, J.M. Weinman (1975). The Determination of Wind Speeds in the Boundary Layer by Monostatic Lidars. *J. Appl. Meteorol.* 14, 1485–1489.
- M. Esselborn, M. Wirth, A. Fix, M. Tesche, G. Ehret (2008). Airborne high spectral resolution lidar for measuring aerosol extinction and backscatter coefficients. *Appl. Opt.* 47, 346–358.
- K.F. Evans, R.P. Lawson, P. Zmarzly, D. O’Connor, W.J. Wiscombe (2003). In Situ Cloud Sensing with Multiple Scattering Lidar: Simulations and Demonstration. *J. Atmos. Ocean. Tech.* 20, 1505–1522.
- C.L. Fefferman (2000). Existence & smoothness of the Navier-Stokes equations. http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/navierstokes.pdf (letzte Überprüfung: 28. April 2013).
- C. Flesia, C.L. Korb (1999). Theory of the double-edge molecular technique for Doppler lidar wind measurement. *Appl. Opt.* 38, 432–440.
- G.B. Folland (1992). *Fourier Analysis and Its Applications*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- N.A. Fomin (1998). *Speckle Photography for Fluid Mechanics Measurements*. Springer Verlag.
- J. Fröhlich (2006). *Large Eddy Simulation turbulenter Strömungen*. Wiesbaden Teubner Verlag.
- H. Fujita, T. Kato (1964). On the Navier-Stokes initial value problems. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 16, 269–315.
- P. Gänszler, W. Stute (1977). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- E. Garnier, N. Adams, P. Sagaut (2009). *Large Eddy Simulation for Compressible Flows*. Springer Verlag.

- T. Gerz (1987). *Direkte Simulation stabil geschichteter, homogen-turbulenter Scherströmungen*. Dissertation, LMU München, Fakultät für Physik.
- T. Gerz, F. Holzäpfel (1999). Wing-Tip Vortices, Turbulence, and the Distribution of Emissions. *AIAA Journal* 37, 1270–1276.
- T. Gerz, F. Holzäpfel, D. Darracq (2002). Commercial aircraft wake vortices. *Progress in Aerospace Sciences* 38, 181–208.
- T. Gerz, U. Schumann, S.E. Elghobashi (1989). Direct numerical simulation of stratified homogeneous turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.* 200, 563–594.
- T. Gerz, C. Schwarz (Hrsg.) (2012). *The DLR Project Wetter & Fliegen*, DLR–FB 2012–02. Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt Oberpfaffenhofen, Braunschweig, Göttingen und Hamburg.
- A.S. Glassner (Hrsg.) (1989). *An Introduction to Ray Tracing*. Morgan Kaufmann Publishers, Inc., San Francisco, California.
- L. Grafakos (2008). *Classical Fourier Analysis*. Springer, New York.
- B. Gustafsson (2008). *High Order Difference Methods for Time Dependent PDE*. Springer Series in Computational Mathematics 38. Springer–Verlag Berlin Heidelberg.
- K.-U. Hahn, D. Fischenberg, D. Niedermeier, C. Horn (2010). Wake Encounter Flight Assistance Based on Forward-Looking Measurement Processing. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, 2–5 August 2010, Toronto, Ontario Canada, AIAA 2010–7680*, 14 Seiten.
- T. Halldórsson (2009). Verfahren und Lidar-System zur Messung von Luftturbulenzen an Bord von Luftfahrzeugen sowie für Flughäfen und Windfarmen, Patent–No. EP 1 910 868 B1.
- T. Halldórsson, A. Langmeier, A. Prücklmeier, V.A. Banakh, A. Falits (2006). Particle and speckle imaging velocimetry applied to a monostatic lidar. *Proc. SPIE* 6522, 65220A.
- T. Halldórsson, V. Ziegler, R. Schneider (2005). Bordgestütztes Wirbelschleppen-Erkennungssystem (BoWES). In *Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress*, S. 2135–2144. DGLR-2005-065a.
- J.E. Hansen, L.D. Travis (1974). Light scattering in planetary atmospheres. *Space Sci. Rev.* 16, 527–610.
- I. Hennemann (2010). *Deformation und Zerfall von Flugzeugwirbelschleppen in turbulenter und stabil geschichteter Atmosphäre*. Dissertation, TU München.
- I. Hennemann, F. Holzäpfel (2011). Large-eddy simulation of aircraft wake vortex deformation and topology. *Proc. IMechE Vol. 225 Part G: J. Aerosp. Eng.* 225, 1336–1350.
- G. Hernandez (1986). *Fabry-Perot interferometers*. Cambridge University Press.
- M.C. Hirschberger (2007). Modellierung und Simulation eines gepulsten Laserstrahles durch einen partiell deterministischen Markovschen Sprungprozess zur Analyse von Lidarsignalen. Diplomarbeit, Mathematisches Institut der LMU München.
- M.C. Hirschberger, G. Ehret (2011). Simulation and high-precision wavelength determination of noisy 2D Fabry–Pérot interferometric rings for direct-detection Doppler lidar and laser spectroscopy. *Appl. Phys. B* 103(1), 207–222.

- M.C. Hirschberger, T. Misaka, F. Holzäpfel, C. Horn (2012). Simulated Lidar Signals for Wake Vortex Detection ahead of the Aircraft. In T. Gerz und C. Schwarz (Hrsg.), *The DLR Project Wetter & Fliegen, DLR-FB 2012-02*, S. 130–143. Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt Oberpfaffenhofen, Braunschweig, Göttingen und Hamburg.
- C.W. Hirt, J.L. Cook (1972). Calculating Three-Dimensional Flows around Structures and over Rough Terrain. *J. Comp. Phys.* 10, 324–340.
- A. Hokpunna (2009). *Compact fourth-order scheme for numerical simulations of Navier-Stokes Equations*. Dissertation, TU München, Fachgebiet Hydromechanik.
- A. Hokpunna, M. Manhart (2010). Compact fourth-order finite volume method for numerical solutions of Navier-Stokes equations on staggered grids. *J. Comp. Phys.* 229, 7545–7570.
- F. Holzäpfel (2004). Adjustment of Subgrid-Scale Parametrizations to Strong Streamline Curvature. *AIAA Journal* 42, 1369–1377.
- Frank Holzäpfel, Thomas Gerz, Friedrich Köpp, Eike Stumpf, Michael Harris, Robert I. Young, Agnès Dolfi-Bouteyre (2003). Strategies for Circulation Evaluation of Aircraft Wake Vortices Measured by Lidar. *J. Atmos. Oceanic Technol.* 20, 1183–1195.
doi: [http://dx.doi.org/10.1175/1520-0426\(2003\)020<1183:SFCEOA>2.0.CO;2](http://dx.doi.org/10.1175/1520-0426(2003)020<1183:SFCEOA>2.0.CO;2).
- F. Holzäpfel, T. Misaka, I. Hennemann (2010). Wake-Vortex Topology, Circulation, and Turbulent Exchange Processes. In *AIAA Atmospheric and Space Environments Conference, 2–5 August 2010, Toronto, Ontario, Canada AIAA 2010-7992*.
- C. Horn, C. Schwarz (2009). Sensor Requirements for a feed forward controller. Interner Bericht des DLR-Projekts „Wetter und Fliegen“, Juni 2009.
- V. John (2004). *Large Eddy Simulation of Turbulent Incompressible Flows*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- H.-J. Kaltenbach, T. Gerz, U. Schumann (1994). Large-eddy simulation of homogeneous turbulence and diffusion in stably stratified shear flow. *J. Fluid Mech.* 280, 1–40.
- Y. Käsler, S. Rahm, R. Simmet, M. Kühn (2010). Wake measurements of a multi-MW wind turbine with coherent long-range pulsed Doppler wind lidar. *J. Atmos. Oceanic Tech.* 27, 1529–1532.
- Michael Keane, Daniel Buckton, Michael Redfern, Christoph Bollig, Carsten Wedekind, Friedrich Köpp, Francois Berni (2002). Axial Detection of Aircraft Wake Vortices Using Doppler Lidar. *Journal of Aircraft* 39(5), 850–861.
- R.D. Keane, R.J. Adrian (1992). Theory of cross-correlation analysis of PIV images. *Appl. Sci. Res.* 49, 191–215.
- R.J. Keeler, R.J. Serafin, R.L. Schwiesow, D.H. Lenschow, J.M. Vaughan, A.A. Woodfield (1987). An Airborne Laser Air Motion Sensing System. Part I: Concept and Preliminary Experiment. *J. Atmos. Ocean. Tech.* 4, 113–127.
- M. Kerscher (1994). Simulation polarisierter, mehrfach gestreuter LIDAR Rücksignale. Diplomarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München.
- M. Kerscher, M. Noormohammadian, U.G. Oppel (1995). Methoden zur Bestimmung mikrophysikalischer Parameter mit einem Mehrkanal-Polarisations-LIDAR. Kennwort: MUSCLE, Mathematisches Institut der Ludwig-Maximilians-Universität München. Zum DFG-Schwerpunktprogramm „Physikalische Methoden der Fernerkundung von Atmosphäre und Hydrosphäre“.

- P. Knabner, L. Angermann (2000). *Numerik partieller Differentialgleichungen: eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- M. Kolonko (2008). *Stochastische Simulation*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden.
- F. Köpp, S. Rahm, I. Smalikhov (2004). Characterization of Aircraft Wake Vortices by $2\ \mu\text{m}$ Pulsed Doppler Lidar. *J. Atmos. Oceanic Tech.* 21, 194–206.
- H. Kozono, T. Ogawa (1994). Global strong solution and its decay properties for the Navier-Stokes equations in three dimensional domains with non-compact boundaries. *Math. Z.* 216, 1–30.
- P.K. Kundu, I.M. Cohen (2008). *Fluid Mechanics*. Elsevier Academic Press.
- O.A. Ladyzhenskaya (1975). Mathematical analysis of Navier-Stokes equations for incompressible liquids. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 7, 249–272.
- O.A. Ladyzhenskaya (1985). *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*. Applied Mathematical Sciences 49. Springer-Verlag New York Inc.
- B. Lapeyre, É. Pardoux, R. Sentis (2003). *Introduction to Monte-Carlo Methods for Transport and Diffusion Equations*. Oxford University Press.
- J.P. Lewis (1995). Fast Normalized Cross-Correlation. Industrial Light & Magic, expanded version of a paper from Vision Interface, pp. 120–123, 1995, <http://scribblethink.org/Work/nvisionInterface/nip.html>.
- N. Lindlein, G. Leuchs (2007). Ray Tracing. In F. Träger (Hrsg.), *Springer Handbook of Lasers and Optics*, Kapitel 2.4, S. 61–67. Springer, New York.
- Z. Liu, W. Hunt, M. Vaughan, C. Hostetler, M. McGill, K. Powell, D. Winker, Y. Hu (2006). Estimating random errors due to shot noise in backscatter lidar observations. *Appl. Opt.* 45, 4437–4447.
- L.H. Loomis (1953). *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*. Van Nostrand, New York.
- S.P. Love, T.C. Hale, I.N. Polonsky, A.B. Davis (2007). LANL's Wide-Angle Imaging Lidar (WAIL) for Active Cloud Probing: Instrument Enhancements and Further Data Analyses. In *Poster Abstract of the Seventeenth Atmospheric Radiation Measurement (ARM) Science Team Meeting, ARM-CONF-2007, March 2007, Monterey, California*.
- B. Luong (2009). *Fourier Analysis on Finite Abelian Groups*. Birkhäuser Boston.
- D.W. Mackowski, M.I. Mishchenko (2011). Direct simulation of multiple scattering by discrete random media illuminated by Gaussian beams. *Phys. Rev. A* 83, 013804, 9 Seiten.
- T.H. Maiman (1960). Stimulated Optical Radiation in Ruby. *Nature* 187(4736), 493–494.
- M. Manhart (2004). A zonal grid algorithm for DNS of turbulent boundary layers. *Computers and Fluids* 33, 435–461.
- G.I. Marchuk, G.A. Mikhailov, M.A. Nazarov, R.A. Darbinjan, B.A. Kargin, B.S. Elepov (1980). *The Monte Carlo Methods in Atmospheric Optics*, Volume 12 von *Springer Series in Optical Sciences*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- K. Masuda (1984). Weak solutions of Navier-Stokes equations. *Tohoku Math. Journ.* 36, 623–646.
- M. Matsumoto, T. Nishimura (1998). Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator. *ACM Trans. on Modeling and Computer Simulation* 8, 3–30.

- B. Mayer (2009). Radiative transfer in the cloudy atmospheres. *Eur. Phys. J. Conferences* 1, 75–99.
- B. Mayer, A. Kylling (2005). Technical note: The libRadtran software package for radiative transfer calculations – description and examples of use. *Atmos. Chem. Phys.* 5, 1855–1877.
- S.D. Mayor, E.W. Eloranta (2001). Two-Dimensional Vector Wind Fields from Volume Imaging Lidar Data. *J. Appl. Meteorol.* 40, 1331–1346.
- S.D. Mayor, G.J. Tripoli, E.W. Eloranta (2003). Evaluating Large-Eddy Simulations Using Volume Imaging Lidar Data. *Mon. Wea. Rev.* 131, 1428–1452.
- R.M. Measures (1992). *Laser Remote Sensing*. Wiley, Florida.
- K.W. Meissner (1941). Interference Spectroscopy. Part I. *J. Opt. Soc. Am.* 31, 405–427.
- T. Misaka, F. Holzäpfel, T. Gerz, M. Manhart, F. Schwertfirm (2011). Large-Eddy Simulation of Wake Vortex Evolution from Roll-Up to Vortex Decay. In *49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, 4–7 January 2011, Orlando, Florida, USA, AIAA 2011–1003*.
- T. Misaka, F. Holzäpfel, I. Hennemann, T. Gerz, M. Manhart, F. Schwertfirm (2012). Vortex bursting and tracer transport of a counter-rotating vortex pair. *Phys. Fluids* 24, 025104, 21 Seiten.
- M.I. Mishchenko, J.W. Hovenier, L.D. Travis (2000). *Light Scattering by Nonspherical Particles: Theory, Measurements and Applications*. Academic Press.
- H. Moet, F. Laporte, G. Chevalier, T. Poinso (2005). Wave propagation in vortices and vortex bursting. *Phys. Fluids* 17, 054109, 15 Seiten.
- L. Mutuel (2005). I-WAKE (Instrumentation system for onboard WAKE-vortex and other hazards detection, warning and avoidance): final publishable report, Ref: IWAKE-5-D-RE-THAV-055, June 2005. Technical report.
- M. Noormohammadian (1996). *Varianzreduzierende Monte-Carlo Methoden zur Berechnung mehrfach gestreuter LIDAR Rücksignale*. Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität München, Fakultät für Mathematik.
- M. O’Hora, B. Bowe, V. Toal (2005). Least squares algorithm for rapid analysis of Fabry-Perot fringe patterns. *J. Opt. A – Pure Appl. Op.* 7, 364–367.
- U.G. Ooppel (2005). Diffusion patterns of a pulsed laser beam seen by a monostatic and a bistatic CCD lidar. In A. Borovoi (Hrsg.), *13th International Workshop on Multiple Scattering Lidar Experiments (MUSCLE XIII), June 28 – July 1, 2004, St. Petersburg, Russia*, Volume 5829 von *Proc. SPIE*, S. 193–208.
- U.G. Ooppel, G. Czerwinski (1998). Multiple scattering LIDAR equations including polarization and change of wavelength. In P. Atanasov und D. Stoyanov (Hrsg.), *Tenth International School on Quantum Electronics: Laser Physics and Applications, Varna, Bulgaria, September 21–25, 1998*, Volume 3571 von *Proc. SPIE*, S. 14–25.
- U.G. Ooppel, A. Findling, W. Krichbaumer, S. Krieglmeier, M. Noormohammadian (1989). A Stochastic Model for the Calculation of Multiply Scattered LIDAR Returns. DLR–FB 89–36, DLR, Institut für Optoelektronik, Oberpfaffenhofen.

- U.G. Oppel, M. Hirschberger, M. Wengenmayer (2006). Simulation of the azimuthal dependence of cross-polarized lidar returns and its relation to optical depth and a comparison with measurements by N. Roy, G. Roy, L.R. Bissonnette, and J.R. Simard. In *14th International Workshop on Multiple Scattering Lidar Experiments (MUSCLE XIV)*, 4–7 October 2005, Université Laval, Québec, Canada, S. 27–39. Defence R&D Canada, Valcartier.
- U.G. Oppel, M. Wengenmayer (2003). Diffusion of the lidar beam seen from the receiver. In C. Werner, U. Oppel, und T. Rother (Hrsg.), *12th International Workshop on Multiple Scattering Lidar Experiments (MUSCLE XII)*, 10–12 September 2002, Oberpfaffenhofen, Germany, Volume 5059 von *Proc. SPIE*, S. 21–30.
- U.G. Oppel, M. Wengenmayer (2006). A new approach to simulation of lidar multiple scattering returns and time-resolved diffusion patterns of a laser beam including polarization. In *14th International Workshop on Multiple Scattering Lidar Experiments (MUSCLE XIV)*, 4–7 October 2005, Université Laval, Québec, Canada, S. 57–68. Defence R&D Canada, Valcartier.
- U.G. Oppel, M. Wengenmayer, S.M. Prigarin (2007). Monte Carlo simulations of polarized CCD lidar returns. *Atmospheric and Oceanic Optics* 20(12), 1086–1091.
- C.M. Penney, R.L. St. Peters, M. Lapp (1974). Absolute rotational Raman cross sections for N₂, O₂ and CO₂. *J. Opt. Soc. Am.* 64(5), 712–716.
- A. Petzold, F.P. Schröder (1998). Jet Engine Exhaust Aerosol Characterization. *Aerosol Sci. Technol.* 28, 62–76.
- A.K. Piironen, E.W. Eloranta (1995). Convective boundary layer mean depths and cloud geometrical properties obtained from volume imaging lidar data. *J. Geophys. Res.* 100(D12), 25569–25576. doi:10.1029/94JD02604 (<http://dx.doi.org/10.1029/94JD02604>).
- M.A. Pinsky (2002). *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets*. The American Mathematical Society.
- I.N. Polonsky, S.P. Love, A.B. Davis (2005). Wide-Angle Imaging Lidar deployment at the ARM Southern Great Plains site: Intercomparison of cloud property retrievals. *J. Atmos. Ocean. Tech.* 22, 628–648.
- W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery (2007). *Numerical recipes: the art of scientific computing* (3. Auflage). Cambridge University Press.
- S.M. Prigarin, A.G. Borovoi, I.A. Grishin, U.G. Oppel (2007). Statistical simulation of radiative transfer in optically anisotropic ice clouds. *Atmos. Oceanic Opt.* 20, 183–188.
- S.M. Prigarin, B.A. Kargin, U.G. Oppel (1998). Random fields of broken clouds and their associated direct solar radiation, scattered transmission and albedo. *Pure Appl. Opt.* 7, 1389–1402.
- D. Queren, A. Avramescu, S. Lutgen (2011). Grüne Welle für den Laser. *Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft Dezember 2011*, 78–84.
- G. Jenaro Rabadan, N.P. Schmitt, T. Pistner, W. Rehm (2010). Airborne Lidar for Automatic Feedforward Control of Turbulent In-Flight Phenomena. *J. Aircraft* 47, 392–403.
- Markus Raffel, Christian E. Willert, Steve T. Wereley, Jürgen Kompenhans (2007). *Particle Image Velocimetry – A Practical Guide* (2. Auflage). Springer-Verlag Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-540-72307-3.

- M. Reed, B. Simon (1975). *Methods of modern mathematical physics. II: Fourier Analysis, Self-adjointness*. Academic Press.
- O. Reitebuch (2012). Wind Lidar for Atmospheric Research. In U. Schumann (Hrsg.), *Atmospheric Physics: Background – Methods – Trends*, Research Topics in Aerospace, S. 487–508. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- O. Reitebuch, C. Lemmerz, E. Nagel, U. Paffrath, Y. Durand, M. Endemann, F. Fabre, M. Chaloupy (2009). The Airborne Demonstrator for the Direct-Detection Doppler Wind Lidar ALADIN on ADM-Aeolus. Part I: Instrument Design and Comparison to Satellite Instrument. *J. Atmos. Ocean. Tech.* 26, 2501–2515.
- T. Rother (2009). *Electromagnetic Wave Scattering on Nonspherical Particles: Basic Methodology and Simulations*. Springer Series in Optical Sciences. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- T. Rother, K. Schmidt, S. Havemann (2001). Light scattering on hexagonal ice columns. *J. Opt. Soc. Am. A* 18, 2512–2517.
- N. Roy, G. Roy, L.R. Bissonnette, J.-R. Simard (2004). Measurement of azimuthal dependence of cross-polarized lidar returns and its relation to optical depth. *Appl. Opt.* 43, 2777–2785.
- W. Rudin (1962). *Fourier analysis on groups*. Interscience Publishers – a division of John Wiley & Sons, New York - London.
- P.G. Saffman (1992). *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press.
- B.E.A. Saleh, M.C. Teich (2007). *Fundamentals of Photonics* (2. Auflage). Wiley Series in Pure and Applied Optics. Wiley-Interscience.
- Y. Sasano, H. Hirohara, T. Yamasaki, H. Shimizu, N. Takeuchi, T. Kawamura (1982). Horizontal Wind Vector Determination from the Displacement of Aerosol Distribution Patterns Observed by a Scanning Lidar. *J. Appl. Meteorol.* 21, 1516–1523.
- A. Sathe, J. Mann (2012). Measurement of turbulence spectra using scanning pulsed wind lidars. *J. Geophys. Res.* 117, D01201.
- A. Sathe, J. Mann, J. Gottschall, M.S. Courtney (2011). Can Wind Lidars Measure Turbulence? *J. Atmos. Ocean. Tech.* 28, 853–868.
- A. Savitzky, M.L.E. Golay (1964). Smoothing and differentiation of data by simplified least square procedures. *Anal. Chem.* 36, 1627–1639.
- K. Schmidt, J. Wauer, T. Rother, T. Trautmann (2009). Scattering database for spheroidal particles. *Appl. Opt.* 48, 2154–2164.
- N.P. Schmitt, W. Rehm, T. Pistner, P. Zeller, H. Diehl, P. Navé (2007). The AWIATOR airborne LIDAR turbulence sensor. *Aerosp. Sci. Technol.* 11, 546–552.
- J.L. Schols, E.W. Eloranta (1992). Calculation of Area-Averaged Vertical Profiles of the Horizontal Wind Velocity From Volume-Imaging Lidar Data. *J. Geophys. Res.* 97, 18395–18407.
- E. Schrüfer (1990). *Signalverarbeitung: numerische Verarbeitung digitaler Signale*. Carl Hanser Verlag, München Wien.
- U. Schumann (1975). Subgrid Scale Model for Finite Difference Simulations of Turbulent Flows in Plane Channels and Annuli. *J. Comput. Phys.* 18, 376–404.

- U. Schumann (1985). Algorithms for direct numerical simulation of shear-periodic turbulence. In *Lecture Notes in Physics*, Volume 218, S. 492–496. Springer-Verlag.
- U. Schumann, F. Arnold, R. Busen, J. Curtius, B. Kärcher, A. Kiendler, A. Petzold, H. Schlager, F. Schröder, K.-H. Wohlfrom (2002). Influence of fuel sulfur on the composition of aircraft exhaust plumes: The experiments SULFUR 1–7. *J. Geophys. Res.* 107, 4247–4274.
- U. Schumann, P. Konopka, R. Baumann, R. Busen, T. Gerz, H. Schlager, P. Schulte, H. Volkert (1995). Estimate of diffusion parameters of aircraft exhaust plumes near the tropopause from nitric oxide and turbulence measurements. *J. Geophys. Res.* 100, 14147–14162.
- U. Schumann, B. Mayer, K. Gierens, S. Unterstrasser, P. Jessberger, A. Petzold, C. Voigt, J.-F. Gayet (2011). Effective Radius of Ice Particles in Cirrus and Contrails. *J. Atmos. Sci.* 68, 300–321.
- U. Schumann, B. Mayer, K. Graf, H. Mannstein (2012). A Parametric Radiative Forcing Model for Contrail Cirrus. *J. Appl. Meteor. Climatol.* 51, 1391–1406.
- J. Serrin (1963). The initial value problem for the Navier-Stokes equations. In R. Langer (Hrsg.), *Nonlinear problems*, Univ. Wisconsin Press.
- J. Smagorinsky (1963). General Circulation Experiments with the Primitive Equations: I. The Basic Experiments. *Mon. Wea. Rev.* 91, 99–164.
- I. Smalikho (2003). Techniques of Wind Vector Estimation from Data Measured with a Scanning Coherent Doppler Lidar. *J. Atmos. Ocean. Tech.* 20, 276–291.
- H. Sohr (2001). *The Navier-Stokes equations : an elementary functional analytic approach*. Birkhäuser Verlag, Basel - Boston - Berlin.
- T. Sonar (2009). Die Navier-Stokes-Gleichungen: Turbulenzen um die Fluidmechanik. *Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft April 2009*, 78–87.
- A.V. Starkov, M. Noormohammadian, U.G. Oppel (1995). A stochastic model and a variance-reduction Monte-Carlo method for the calculation of light transport. *Appl. Phys. B* 60, 335–340.
- O.N. Stavroudis (1972). *The Optics of Rays, Wavefronts, and Caustics*, Volume 38 von *Pure and Applied Physics*. Academic Press New York and London.
- A. Stoffelen, J. Pailleux, E. Källén, J.M. Vaughan, L. Isaksen, P. Flamant, W. Wergen, E. Anderson, H. Schyberg, A. Culoma, R. Meynart, M. Endemann, P. Ingmann (2005). The Atmospheric Dynamics Mission for global wind field measurement. *Bull. Amer. Meteor. Soc.* 86, 73–87.
- B.D. Stone (2000). Modeling interferometers with lens design software. *Opt. Eng.* 39(7), 1748–1759.
- R. Sussmann (1999). Vertical dispersion of an aircraft wake: Aerosol-lidar analysis of entrainment and detrainment in the vortex regime. *J. Geophys. Res.* 104, 2117–2129.
- R. Sussmann, K.M. Gierens (1999). Lidar and numerical studies on the different evolution of vortex pair and secondary wake in young contrails. *J. Geophys. Res.* 104, 2131–2142.
- J. Tesar, R. Liang, M. Mansuripur (2000). Optical modeling combining geometrical ray tracing and physical-optics software. *Opt. Eng.* 39(7), 1845–1849.
- J.M. Vaughan (1989). *The Fabry-Perot Interferometer*. Bristol Adam Hilger.
- J.M. Vaughan, D.W. Brown, C. Nash, S.B. Alejandro, G.G. Koenig (1995). Atlantic atmospheric aerosol studies. 2. Compendium of airborne backscatter measurements at 10.6 μm . *J. Geophys. Res.* 100, 1043–1065.

- J.M. Vaughan, N.J. Geddes, P.H. Flamant, C. Flesia (1998). Establishment of a backscatter coefficient and atmospheric database. Technical report, ESA contract 12510/97/NL/RE. 110 Seiten.
- D. Vechtel (2012). Flight simulator study on the influence of vortex curvature on wake encounter hazard using LES wind fields. *The Aeronautical Journal* 116, 287–302.
- C. Voigt, U. Schumann, P. Jessberger, T. Jurkat, A. Petzold, J.-F. Gayet, M. Krämer, T. Thornberry, D.W. Fahey (2011). Extinction and optical depth of contrails. *Geophys. Res. Lett.* 38, L11806, pp. 1–5.
- C. Voigt, U. Schumann, T. Jurkat, D. Schäuble, H. Schlager, A. Petzold, J.-F. Gayet, M. Krämer, J. Schneider, S. Borrmann, J. Schmale, P. Jessberger, T. Hamburger, M. Lichtenstern, M. Scheibe, C. Gourbeyre, J. Meyer, M. Kübbeler, W. Frey, H. Kalesse, T. Butler, M.G. Lawrence, F. Holzäpfel, F. Arnold, M. Wendisch, A. Döpelheuer, K. Gottschaldt, R. Baumann, M. Zöger, I. Sölch, M. Rautenhaus, A. Dörnbrack (2010). In-situ observations of young contrails – overview and selected results from the CONCERT campaign. *Atmos. Chem. Phys.* 10, 9039–9056.
- H. von Storch, F.W. Zwiers (1999). *Statistical Analysis in Climate Research*. Cambridge University Press.
- P. Vrancken, M. Wirth, D. Rempel, G. Ehret, A. Dolfi-Bouteyre, L. Lombard, T. Gaudo, D. Rees, H. Barny, P. Rondeau (2010). Clear air turbulence detection and characterisation in the DELICAT airborne lidar project. In *Proceedings of the 25th International Laser Radar Conference*, S. 301–304.
- M. Wengenmayer (2002). Simulation mehrfachgestreuter Raman-LIDAR-Signale. Diplomarbeit, Mathematisches Institut der LMU München.
- M. Wengenmayer (2008). *Monte Carlo methods for calculating polarized CCD-LIDAR returns from in-homogeneous clouds*. Dissertation, LMU München, Fakultät für Mathematik, Informatik und Statistik.
- M. Wengenmayer, A.Y.S. Cheng, P. Völger, U.G. Oppel (2003). Raman lidar multiple scattering: theory and simulation. In C. Werner, U. Oppel, und T. Rother (Hrsg.), *12th International Workshop on Multiple Scattering Lidar Experiments (MUSCLE XII), 10–12 September 2002, Oberpfaffenhofen, Germany*, Volume 5059 von *Proc. SPIE*, S. 200–211.
- C. Werner (2005a). Doppler Wind Lidar. In C. Weitkamp (Hrsg.), *Lidar: Range-Resolved Optical Remote Sensing of the Atmosphere*, Springer Series in Optical Sciences, S. 325–354. Springer, New York.
- D. Werner (2005b). *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 5. Auflage.
- P. Wesseling (2001). *Principles of Computational Fluid Dynamics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- J. Westerweel (1993). *Digital Particle Image Velocimetry – Theory and Application*. Dissertation, Delft University Press.
- J. Westerweel (1997). Fundamentals of digital particle image velocimetry. *Meas. Sci. Technol.* 8, 1379–1392.
- G.P. Williams (1969). Numerical integration of the three-dimensional Navier-Stokes equations for incompressible flow. *J. Fluid Mech.* 37, 727–750.
- J.H. Williamson (1980). Low-Storage Runge-Kutta Schemes. *J. Comp. Phys.* 35, 48–56.
- G. Winckelmans, R. Capart (2004). Wake Vortex induced Rolling Moment on a follower Aircraft. Technical report. AW-UCL-114-001.

- D.M. Winker, R.H. Couch, M.P. McCormick (1996). An overview of LITE: NASA's Lidar In-space Technology Experiment. *Proc. IEEE* 84(2), 164–180.
- M. Wirth, A. Fix, P. Mahnke, H. Schwarzer, F. Schrandt, G. Ehret (2009). The airborne multi-wavelength water vapor differential absorption lidar WALES: system design and performance. *Appl. Phys. B* 96, 201–213.
- W.J. Wiscombe (1980). Improved Mie scattering algorithms. *Appl. Opt.* 19, 1505–1509.
- C. Wolkensinger (2010). Vergleich messtechnischer Konzepte zur bordgestützten Ermittlung atmosphärischer Störphänomene. Technical report, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR), Institut für Flugsystemtechnik, Braunschweig, IB 111–2010/35, 59 Seiten.
- C. Wolkensinger (2011). Autonomous Wake-Vortex Approximator (AWA): Autonomes Verfahren zur Erkennung von Wirbelschleppen aus Line-of-Sight (LoS) Messdaten eines vorausschauenden Sensors. Technical report, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR), Institut für Flugsystemtechnik, Braunschweig, IB 111–2011/14, 35 Seiten.
- L. Xu, J. Ding (2002). Light scattering characteristics by small ice particles with different size distributions and aspect ratios in visible and $1.38\ \mu\text{m}$ wavelengths. In K. Schaefer, O. Lado-Bordowsky, A. Comeron, M. Carleer, und J. Fender (Hrsg.), *Remote Sensing of Clouds and Atmosphere VI*, Volume 4539 von *Proc. SPIE*, S. 311–319.
- H. Ziegler (1981). Properties of Digital Smoothing Polynomial (DISPO) Filters. *Appl. Spectrosc.* 35, 88–92.
- W. Zinth, U. Zinth (2009). *Optik*. Oldenbourg Verlag. 2. Auflage.
- S. Zucker, T. Mazeh (1994). Study of spectroscopic binaries with TODCOR. I. A new two-dimensional correlation algorithm to derive the radial velocities of the two components. *The Astrophysical Journal* 420, 806–810.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Beispiele von realen, sichtbaren Wirbelschleppen	2
1.2	Vertikalgeschwindigkeitsprofile von Wirbelschleppen aus Holzäpfel et al. (2003)	3
1.3	Fotografische Aufnahme von Wirbelschleppen während des Projekts AWIATOR	3
1.4	Aufbau eines Lidars	4
1.5	Bodengestützte WS-Messungen von MFLAME: Messgeometrie und LOS-Resultate	6
1.6	Messgeometrie eines DWL an Bord eines Flugzeugs	8
2.1	Messprinzip eines für Windmessungen vor dem Flugzeug geeigneten Rückstreulidars	22
2.2	Funktionsweise des neuen Rückstreulidars und Simulationsparameter in <code>pbs5</code>	25
2.3	Standard-normalverteilte Zufallszahlen in 2D	27
2.4	Atmosphäre (Extinktion, Mueller-Matrizen) und Messschichten in <code>pbs5</code>	31
2.5	Begründung für die Notwendigkeit der Längennormierung	38
3.1	Kartesisch versetztes Gitter („staggered grid“)	48
3.2	Rollmomentenbeiwerte beim Einflug in die Wirbelschleppen eines A340	52
3.3	Ergebnisse aus LESTUF-Simulationen	55
3.4	Ergebnisse aus MGLET-Simulationen	56
4.1	Generelles Prinzip der Berechnung von 2D Shift-Vektoren aus zwei Bildern.	58
4.2	Berechnung von 3D Shift-Vektoren über räumlich gemittelte Schwerpunktverschiebungen (GCS) aus zwei Volumina, bestehend aus einer Reihe von 2D Schichten (Bildern)	64
4.3	Methode zur Berechnung von 2D Shift-Vektoren über Fourier-Transformationen	73
4.4	2D Shift-Vektoren aus Kreuzkorrelation zweier hintereinander aufgenommener Bilder	74
4.5	Methode zur Berechnung von 2D Shift-Vektoren über Kreuzkorrelation	76
4.6	Berechnung von 2D Shift-Vektoren mit Sub-Pixel-Präzision über Kreuzkorrelation	78
4.7	Berechnung von 2D Shift-Vektoren über Weight-Shift-Methode	81
4.8	Einfache Verschiebungen eines Werte-Quadrats auf einer quadratischen Fläche	83
4.9	Shift-Vektoren mittels Gravity Center Shift für einfache Struktur	84
4.10	Shift-Vektoren mittels Fourier-Shift-Methode für einfache Struktur	85
4.11	Shift-Vektoren mittels Kreuzkorrelation für einfache Struktur	86
4.12	Shift-Vektoren mittels Weight-Shift-Methode für einfache Struktur	87
4.13	Konstante Verschiebungen eines Pulse-Stretching-Intensitätsmusters	88
4.14	Shift-Vektoren mittels Gravity Center Shift für gleichmäßige Verschiebung eines komplexen Pulse-Stretching-Musters	89
4.15	Shift-Vektoren mittels Fourier-Shift-Methode für gleichmäßige Verschiebung eines komplexen Pulse-Stretching-Musters	90
4.16	Shift-Vektoren mittels Kreuzkorrelation für gleichmäßige Verschiebung eines komplexen Pulse-Stretching-Musters	90
4.17	Shift-Vektoren mittels Weight-Shift-Methode für gleichmäßige Verschiebung eines komplexen Pulse-Stretching-Musters	91

4.18	Variable Verschiebungen eines „Pulse Stretching“-Intensitätsmusters	92
4.19	Rekonstruktion der Verschiebungen von Bild 1 nach 2 mittels vier Methoden	92
4.20	Mit GCS berechnete Verschiebungen aus Pulse Stretching-Simulationsdaten	93
4.21	Zwei Bilder mit idealisierten Streuer-Verteilungen um die Zentren eines fiktiven Wirbelschleppenpaares	96
4.22	Zwei Bilder mit Tracer-Verteilungen aus MGLET-Simulationsdaten plus Lamb-Oseen-Wirbelfeld	97
4.23	Vektorlängen rekonstruierter 2D Shift-Vektoren getrennt nach Methode	98
4.24	Längen- und Richtungsabweichung rückgerechneter Shift-Vektoren	100
5.1	Extinktionsprofile zu den Zeitpunkten t_1 und $t_2 = t_1 + 0.1$ s in 500 m Flughöhe und bei 532 nm Laser-Wellenlänge für eine einzelne Schicht bei niedriger räumlicher Auflösung	104
5.2	u - und v -Komponenten von vorgegebenem und aus Extinktionsprofilen mittels KK rekonstruiertem Windfeld	105
5.3	Relative Abweichungen der Geschwindigkeitsbeträge und Richtungen zwischen Windfeld aus MGLET und aus Extinktionsprofilen berechnetem Windfeld	105
5.4	Rückstreuprofile aus pbs5 -Simulationen zu Zeiten t_1 und t_2 : Intensitäten, Photonenzahlen und Ladungsträgerzahlen	108
5.5	Monte-Carlo-Varianzen der rückgestreuten Intensitäten aus pbs5 zu t_1 und t_2	108
5.6	Rekonstruktion des Windfeldes mit KK aus Photoelektronenzahlen (mit Rauschen) und aus pbs5 -Intensitäten (ohne Rauschen)	110
5.7	Relative Abweichungen der Geschwindigkeitsbeträge und Richtungen zwischen Windfeld aus MGLET und mit KK aus Photoelektronenzahlen bzw. aus pbs5 -Intensitäten berechnetem Windfeld	111
5.8	Relative Abweichungen der mit KK berechneten Geschwindigkeitsbeträge und Richtungen zwischen Windfeldern aus Extinktionsprofilen und aus Photoelektronenzahlen bzw. pbs5 -Intensitäten	112
5.9	Extinktionsprofile zu t_1 und t_2 in 500 m Flughöhe und bei 532 nm Laser-Wellenlänge für eine einzelne Schicht bei erhöhter räumlicher Auflösung	113
5.10	u - und v -Komponenten von vorgegebenem und aus Extinktionsprofilen mittels KK rekonstruiertem Windfeld bei erhöhter räumlicher Auflösung	113
5.11	Relative Abweichungen der Geschwindigkeitsbeträge und Richtungen zwischen Windfeld aus MGLET und aus Extinktionsprofilen berechnetem Windfeld bei erhöhter räumlicher Auflösung	113
5.12	Rückstreuprofile aus pbs5 -Simulationen zu Zeiten t_1 und t_2 : Intensitäten, Photonenzahlen und Ladungsträgerzahlen bei erhöhter räumlicher Auflösung	114
5.13	Rekonstruktion des Windfeldes mit KK aus Photoelektronenzahlen (mit Rauschen) und aus pbs5 -Intensitäten (ohne Rauschen) bei erhöhter räumlicher Auflösung	114
5.14	Relative Abweichungen der Geschwindigkeitsbeträge und Richtungen zwischen Windfeld aus MGLET und mit KK aus Photoelektronenzahlen bzw. aus pbs5 -Intensitäten berechnetem Windfeld bei erhöhter räumlicher Auflösung	115
5.15	Relative Abweichungen der mit KK berechneten Geschwindigkeitsbeträge und Richtungen zwischen Windfeldern aus Extinktionsprofilen und aus Photoelektronenzahlen bzw. pbs5 -Intensitäten bei erhöhter räumlicher Auflösung	116
5.16	Rekonstruktion des Windfeldes aus Photoelektronenzahlen und pbs5 -Intensitäten bei erhöhter räumlicher Auflösung	116
5.17	Rekonstruktion des Windfeldes mit Weight-Shift-Methode aus Extinktionsprofilen, pbs5 -Intensitäten und Photoelektronenzahlen bei erhöhter räumlicher Auflösung	117
5.18	Rekonstruktion des Windfeldes mittels KK aus Photoelektronenzahlen (mit Rauschen) bei Nacht und aus pbs5 -Intensitäten (ohne Rauschen)	117

5.19	Photoelektronenzahl bei geringer Extinktion und rekonstruiertes Windfeld bei hoher Extinktion für M180.sp	119
5.20	Ergebnisse bei geringer mittlerer Extinktion in 8500 m Höhe für Rayleigh-Matrix . . .	120
5.21	Ergebnisse bei starker Extinktion (Kondensstreifen) in über 8000 m Höhe für M180.sp	121
5.22	Ergebnisse bei ca. 0.3 km^{-1} Extinktion in klarer Luft in 500 m Höhe für Dunst	123
5.23	Ergebnisse bei hoher Extinktion (Wasserwolke) mit Mueller-Matrix aus POLY_3	124
5.24	Ergebnisse bei ca. 0.3 km^{-1} Extinktion in 500 m Höhe für prolate Sphäroide aus Mieschka	125
5.25	Ergebnisse bei hoher Extinktion (Kondensstreifen) in über 8000 m Höhe für prolate Zylinder aus Mieschka	126
5.26	Phasenfunktionen verwendeter Mueller-Matrizen für $\lambda = 532 \text{ nm}$ und $\lambda = 355 \text{ nm}$. . .	126
5.27	Streuintensitäten verwendeter Mueller-Matrizen für $\lambda = 532 \text{ nm}$	127
5.28	Streuintensitäten verwendeter Mueller-Matrizen für $\lambda = 355 \text{ nm}$	127
5.29	Extinktionsschichten mit punktuellen Tracern und rückgerechnetes Windfeld	129
5.30	Spezieller Einzelwirbel mit Extinktionsverteilung nach Lamb-Oseen	131
5.31	Spiralenwirbel mit Lamb-Oseen-Windfeld	132
5.32	Logarithmischer Spiralenwirbel mit Lamb-Oseen-Windfeld	133
5.33	Zwei Spiralenwirbel mit durch GCS-Methode rekonstruierbarem Windfeld	135
5.34	Extinktionsschichten aus Archimedischen Spiralenwirbeln zur Berechnung mehrerer Schichten zeitgleich an festem Ort	136
5.35	Intensitäten aus einer Simulation mehrerer Schichten	137
5.36	Ergebnisse einer pbs5-simulierten Messung mehrerer Schichten zeitgleich	137
5.37	Extinktionsschichten gegenläufig rotierender Spiralenwirbel mit variablen Radien, etc.	138
A.1	Aufbau und Messgeometrie eines PIV-Systems	144
A.2	Aufbau eines SIV-Lidar-Systems nach Halldórsson (2009)	146
A.3	Messgeometrien des WAIL (nach Love et al. (2007)) und des VIL (aus Piironen und Eloranta (1995)).	148
B.1	Anzahl aus Rückstreuung empfangener Photonen in einer bestimmten Flughöhe in Abhängigkeit von Messentfernung vor Flugzeug für 6 typische Laser-Wellenlängen . .	150
B.2	1D Fringe-Muster und verrauschte FPE-Ringstrukturen in 2D auf einem CCD	152
B.3	Schnitt durch einen Ring vom Zentrum aus mit anschließender Filterung	154
B.4	Vergleich des Prinzips der Methoden ML und CA	154
B.5	FPE Ray-Tracing-Simulation: Aufbau und Ergebnis	156

Tabellenverzeichnis

1.1	Messanforderungen für DWL-Systeme	8
2.1	Geschwindigkeitsvergleich von RNGs bei Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen . . .	26
4.1	Parameter für Shift-Algorithmen von Abb. 4.19	93
4.2	Parameter für Shift-Algorithmen von Abb. 4.21	96
4.3	Parameter für Shift-Algorithmen zu den Abbildungen 4.22 bis 4.24	98
4.4	Klassifizierung und Leistungsfähigkeit der Shift-Algorithmen	98
4.5	Tempo der Shift-Algorithmen zur Berechnung von 2D-Vektorfeldern	99

Abkürzungsverzeichnis

Abkürzung	Bedeutung	erstes Vorkommen im Text in Kap.
AWIATOR	Aircraft Wing with Advanced Technology Operation	1.1
CA	Circular Averaging (Methode)	B.1
CAT	Clear Air Turbulence	1.1
CCD	Charge-Coupled Device (dt. ladungsgekoppeltes Bauteil)	1.3
CFD	Computational Fluid Dynamics	3.2
CMOS	Complementary Metal Oxide Semiconductor (dt. komplementärer Metall-Oxid-Halbleiter)	2.2
D	dimensional (z. B. 3D: dreidimensional)	1.3
DELICAT	Demonstration of Lidar based Clear Air Turbulence detection	1.3
DIAL	Differential Absorption Lidar	1.2
DISTUF	Direkte Simulation turbulenter Fluide	3.2.2
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt	1.3
DNS	Direct Numerical Simulation	3.2
DWL	Doppler Wind Lidar	1.2
EFOV	Emitter Field Of View (dt. Emitter-Blickfeld)	2.2
FD	Finite Differenzen	3.2.1
FFT	Fast-Fourier-Transformation (dt. Schnelle FT)	4
FI	Fringe-Imaging(-Technik)	1.3
FIDELIO	Fibre Laser Development for Next Generation LIDAR	1.3
FOV	Field Of View (dt. Blickfeld)	2.2
FPE	Fabry-Pérot-Etalon	5.1
FPI	Fabry-Pérot-Interferometer	1.3
FS	Fourier-Shift	1.3
FT	Fourier-Transformation	4.1
FTe	die Fourier-Transformierte	4
FWHM	Full Width at Half Maximum (Gesamtbreite bei halbem Maximalwert)	5.1
GCS	Gravity Center Shift	1.3
Green-Wake	Demonstration of Lidar based Wake-Vortex Detection System incorporating an Atmospheric Hazard Map	1.3
HE	Heterodynempfang	B
HSRL	High Spectral Resolution Lidar	1.2
ICCD	Intensified CCD	B
INSG	Inkompressible Navier-Stokes-Gleichung(en)	3.1
IPDA	Integrated Path Differential Absorption	1.2
I-WAKE	Instrumentation systems for onboard wake-vortex and other hazards detection, warning and avoidance	1.3

KK	Kreuzkorrelation	1.3
KKKoeff	Kreuzkorrelationskoeffizient	4.1.3
LES	Large Eddy Simulation (dt. Grobstruktursimulation)	1.3
LESTUF	Large Eddy Simulation turbulenter Fluide	3.2.2
Lidar	Light detection and ranging	1.1
LOS	Line Of Sight	1.3
LT	Ladungsträger	2.3.4
MFLAME	Multifunction Future Laser Atmospheric Measuring Equipment	1.3
MGLET	Multi Grid Large Eddy Turbulence	3.2.2
ML	Midpoint Line (Methode)	B.1
MT	Mersenne Twister	2.3.1
MZI	Messzeitintervall	2.3.4
NM	nautische Meilen	1.1
NSG	Navier-Stokes-Gleichung(en)	1.3
pbs	Simulator für polarisierte rückgestreute Lidar-Signale	1.3
pbs5	Version 5 des Monte-Carlo Simulators pbs	2
PDMP	Partiell deterministischer Markovscher (Sprung-)Prozess	1.3
PE	Photoelektron(en)	2.3.4
PIV	Particle Imaging Velocimetry	2.2
PS	Pulse Stretching	4.2.2
PSL	Pixelseitenlänge	B.1
PWL	Photonenweglänge	2.3.4
Radar	Radio detection and ranging	1.1
RFOV	Receiver Field Of View (dt. Receiver-Blickfeld)	2.2
rms	root mean square	3.2.3
RNG	Random Number Generator (dt. Zufallszahlengenerator)	2.3.1
RSL	Rückstreulidar	1.3
RTE	Radiative Transport Equation(s) (dt. Strahlungstransport-Gleichungen)	2
RTp	Referenz-Template	4.1.3
SGS	Subgrid-Scale	3.2.2
SHG	Solare Hintergrund(strahlung)	5
SIV	Speckle Imaging Velocimetry	2.2
SNR	Signal-Noise-Ratio (dt. Signal-zu-Rauschen-Verhältnis)	5.1
TP	Transition Probability (dt. Übergangswahrscheinlichkeit)	1.3
Tp	Template	4.1.3
VIL	Volume Imaging Lidar	2.2
WAIL	Wide Angle Imaging Lidar	2.2
WRT	Wave Ray Tracing	B.2
WS	Wirbelschleppe(n)	1.1
WSh	Weight-Shift	1.3
ZVe(n)	Zufallsvariable(n)	2.3.1
ZZ(en)	Zufallszahl(en)	1.3

Symbole und Einheiten

Symbol	Bedeutung	Einheit
\mathbf{A}	infinitesimale Erzeugende einer messbaren Funktion $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$	
A_E	Emitter-Kreisfläche mit Mittelpunkt \mathbf{x}_E und Radius $r_E \in \mathbb{R}^+$	m^2
A_R	Receiver-Kreisfläche mit Mittelpunkt \mathbf{x}_R und Radius $r_R \in \mathbb{R}^+$	m^2
$A_{i,j,k}, B_{i,j,k}$	3D Schwerpunkte von 3D Ausschnitten aus Volumen, etc.	
$A_{i,j,k}^x$	Schwerpunkt in x -Richtung im (i, j, k) -Untervolumen, usw. für y, z	
\mathbf{a}	3D Shift-Vektor $(a_x, a_y, a_z)^T$ bzw. 2D Shift-Vektor $(a_1, a_2)^T$	
B	Flügelspannweite	m
B_w	Laser-Strahldurchmesser	m
b_0	lateraler Wirbelabstand	m
$\mathfrak{B}(X)$ bzw. \mathfrak{B}_X	die Borelsche σ -Algebra auf X	
$\mathfrak{B}(\mathcal{S})$	Borelsche σ -Algebra auf dem Zustandsraum \mathcal{S}	
c	Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum oder in Luft $\approx 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$)	m s^{-1}
$Col(s_m; \cdot)$	Stoß-TP: ein Markov-Kern von $(\mathcal{S}, \mathfrak{B}(\mathcal{S}))$ nach $(\mathbb{R}^3, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^3))$	
Col_ψ	TP mit $Col_\psi : \mathcal{S} \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^3) \rightarrow [0, 1]$	
C_v	spezifische Wärmekapazität	J (K kg)^{-1}
$C_l (C_l^{\text{num}})$	induzierter statischer Rollmomentenbeiwert (numerisch)	–
$C^n(\Omega_i), n \in \mathbb{N}$	Menge aller Funktionen, deren Ableitungen bis zur Ordnung n auf Ω_i beschränkt und gleichmäßig stetig sind	
d	eine Messschicht; auch Durchmesser	m
Δd	räumliche Verschiebung von einer Messschicht zu einer anderen	m
$d_{j,k}^{R,y}, d_{j,k}^{R,z}$	Schwerpunkts-Abstände eines $R_{j,k}$ bezogen auf linke untere Ecke	m
$d_{j,k}^{T^i,y}, d_{j,k}^{T^i,z}$	Schwerpunkts-Abstände eines Sub-Tp $T_{j,k}^i$ zur linken unteren Ecke	m
$d_{j,k}^{\min}$	minimaler Abstand zwischen $(d_{j,k}^{T^i,y}, d_{j,k}^{T^i,z})^T$ und $(d_{j,k}^{R,y}, d_{j,k}^{R,z})^T$	m
$\mathcal{D}(\mathbf{A})$	Gebiet oder Bereich des infinitesimalen Erzeugers \mathbf{A}	
Dir	TP der Richtungsstreuung (stochast. Änderung der Flugrichtung)	
$\mathbf{E}_{\parallel}, \mathbf{E}_{\perp}, \mathbf{E}_{\parallel}^*, \mathbf{E}_{\perp}^*$	komplexe E-(Vektor-)Feld-Anteile	
$E_L^{i,j}$	vom Laser in Richtung (θ_i, φ_j) emittierte Energie	J
E_p	Pulsenergie eines Laserpulses	J
E	in NSG: die Gesamtenergie pro Einheitsmasse	J
$\hat{E}(\mathbf{k})$	Spektrum der turbulenten kinet. Energiedichte im Fourierraum	$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$
f	Frequenz	Hz
$\Delta f; \Delta f_L$	Frequenz-Spektrum; Frequenz-Verschiebung	Hz
$F_m, m \in \mathbb{N}$	m -te Messebene	
$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$	Feld äußerer Kräfte mit Komponenten $F_i, i \in \mathbb{N}$	
F_i	i -te Kraft-Komponente	N
$\text{FOV}_E, \text{FOV}_R$	Emitter- bzw. Receiver-Blickfeld	rad
\hat{f}	die Fourier-Transformierte der Funktion $f \in \mathcal{L}_1(X, \lambda)$	

\widehat{f}	die Rücktransformierte (Inverse) von \widehat{f}	
$\widehat{f}^{\text{Temp}}$	die Fourier-Transformierte bezogen auf ein Template	
$f * g$	Faltung der Funktionen $f, g \geq 0$	
\overline{f}	Mittelwert einer reellen Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$	
f_w	gewichtetes Mittel von f in Bezug auf Gewicht $w : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$	
$f_{A,l}^{x,S}, f_{A,m}^{y,S}, f_{A,n}^{z,S}$	Gewichte (Positionen) in Volumen 1 (B statt A in Volumen 2)	
g	Erdbeschleunigung	m s^{-2}
\mathbf{g}	Gravitationsvektor mit Komponenten g_1, g_2, g_3 je in m s^{-2}	
G, H	Verteilung der Intensitätswerte, etc., in Volumen (Bild) 1 bzw. 2	
$h \in \mathbb{R}^+$	Schrittweite (Maschenweite)	m
h_{Planck}	Planck'sches Wirkungsquantum mit $h_{\text{Planck}} = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$	J s
$\mathcal{H} := \mathbb{R}^3$	gesamte Atmosphäre in pbs5	
$\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_5$	einzelne Schichten der Atmosphäre	
$I_{\parallel}(\mathbf{x})$	paralleler Anteil der Intensität eines Stokes-Vektors	
$I_{\perp}(\mathbf{x})$	senkrechter Anteil der Intensität eines Stokes-Vektors	
$I(\mathbf{x})$	Summe aus parallelem und senkrechtem Anteil der Intensität	
$I_{\text{rec,norm},m}^{i,j}$	im Receiver aus (θ_i, φ_j) empfangene normierte Gesamtintensität	a. u.
\mathbf{k}	Wellenvektor (Komponenten je in m^{-1})	
k	Wellenzahl	m^{-1}
$k_{\text{Lidar}} \in (0, 1]$	Instrumentenkonstante des Lidars	
$\tilde{\mathcal{K}}$	die σ -Algebra auf $\tilde{\Omega}$	
\mathcal{K}	Fourier-Transformation für Funktionen $f \in \mathcal{L}_1(X, \lambda)$	
$K_f(y_j, z_k)$	(diskrete) Kreuzkorrelationsfunktion in 2D an der Stelle (y_j, z_k)	
$K_n(y_j, z_k)$	normierte Kreuzkorrelation in 2D an der Stelle (y_j, z_k)	
$K_c(y_j, z_k)$	Kreuzkorrelationskoeffizient in 2D an (y_j, z_k) ($K_c \in [-1.0, 1.0]$)	
$\mathcal{L}(\xi)$	Rotationsmatrix zur Drehung eines Stokes-Vektors um Winkel ξ	
$l_{F_m}(\theta_i, \varphi_j) \in \mathbb{R}^+$	skalare Länge zwischen \mathbf{x}_E und F_m in Abhängigkeit von θ_i und φ_j	m
L_t^*	normiertes turbulentes integrales Längenmaß (L_t : unnormiert in m)	–
$\mathcal{L}_1(X, \lambda)$	der \mathbb{C} -lineare Raum der λ -integrierbaren Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$	
M	Flugzeugmasse	kg
$\mathcal{M}(\theta, \varphi)$	Mueller-Matrix mit Azimutwinkel θ und Elevationswinkel φ	
$m_{ij}, i, j \in \mathbb{N}$	Winkelelemente einer Mueller-Matrix $\mathcal{M}(\theta, \varphi)$	
$m_k, k = 1, \dots, 5$	Mueller-Matrix in der k -ten Schicht	
$M_k, k \in \mathbb{N}$	k -te Messgrenzebene	
\mathbf{m}	Impulsdichte mit Komponenten m_1, m_2, m_3 je in N s	
$\mathfrak{M}_b^+(X)$	Menge der beschränkten (endlichen) nichtnegativen Maße auf \mathfrak{B}_X	
$\mathfrak{M}_b(X)$	der \mathbb{R} -lineare Raum der allgemeinen beschränkten Maße auf \mathfrak{B}_X	
$\mathcal{M}_b(X)$	der \mathbb{C} -lineare Raum der Maße auf \mathfrak{B}_X mit Werten in \mathbb{C}	
$\mathfrak{M}_1^+(X)$	die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathfrak{B}_X	
$\mathbf{n}_E, \mathbf{n}_R \in S^2$	Normalenvektor auf die Emitter- bzw. Receiver-Ebene	
$\mathbf{n}_{F_m}, \mathbf{n}_{M_k}$	Normalenvektoren auf F_m bzw. M_k	
$\mathcal{N}_{\mu, \Sigma}^n$	n -dimensionale Normalverteilung auf $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n)$	
$\mathbf{n}_{\mu, \Sigma}(\mathbf{t})$	Dichte von $\mathcal{N}_{\mu, \Sigma}^n$ mit $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$	
$n_{\theta} \in \mathbb{N}$	Anzahl der Azimutwinkel θ	
$n_{\varphi} \in \mathbb{N}$	Anzahl der Elevationswinkel φ	
n_r	Größenverteilung(sfunktion) in POLYMIE	
n_{Br}	(komplexer) Brechungsindex	
$n_{\text{rec},m}^{i,j}$	Gesamtzahl aus Messschicht m und (θ_i, φ_j) empfangener Photonen	
$n_{\text{rec,norm},m}^{i,j}$	im Receiver aus (θ_i, φ_j) empfangene normierte Photonenzahl	

$n_{\text{PE,rec},m}^{i,j}$	Photoelektronen- bzw. Ladungsträgerzahl aus $n_{\text{rec},m}^{i,j}$ ohne Rauschen	
$n_{\text{C},i,j}$	Photoelektronen- bzw. Ladungsträgerzahl aus $n_{\text{rec},m}^{i,j}$ mit Rauschen	
$n_{\text{sim},m}$	in pbs aus m -ter Messschicht empfangene Photonenzahl	
n_{sim}	Zahl insgesamt in pbs simulierter Photonenpfade	
n_{ph}	Gesamtzahl der pro Richtung emittierten Photonen	
N	Anzahl kugelförmiger Streupartikel pro Einheitsvolumen	
$N_{\mathcal{T}}$	Anzahl der MZI	
N^*	normierte Brunt-Väisälä-Frequenz (N : unnormiert in s^{-1})	–
p	Druck	Pa
$\mathcal{P} \in [0, 1]$	Übergangswahrscheinlichkeit (TP)	
$\mathcal{P}(s_m; \mathcal{R})$	TP für den stationären Markov-Prozess in diskreter Zeit	
$\tilde{\mathbb{P}}^v$	das Wahrscheinlichkeitsmaß des Prozesses $\{u_m : m \in \mathbb{N}_0\}$	
$P_{\mathcal{T}_m}^{i,j} (P_{\mathcal{T}_m,r}^{i,j})$	in $\mathcal{T}_m^{i,j}$ aus (θ_i, φ_j) empfangene Gesamtintensität (r -ter Anteil)	
$ph(\vartheta)$	unpolarisierte Phasenfunktion (Randdichte von $ph_{\text{pol}}(\vartheta, \xi)$)	
$ph_{\text{pol}}(\vartheta, \xi)$	polarisierte Phasenfunktion (eine Wahrscheinlichkeitsdichte)	
$ph_{\text{bed}}(\xi \vartheta)$	bedingte polarisierte Phasenfunktion	
Pol	TP für den normierten Stokes-Vektor (deterministisch)	
Pos	Positions-TP mit $Pos : \mathcal{S} \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^3) \rightarrow [0, 1]$	
Q	Polarisationsgrad; $Q = I_{\parallel}(\mathbf{x}) - I_{\perp}(\mathbf{x})$	
Q	TP für Streuereignis am nächsten Streupunkt, $Q : \mathcal{S} \times \mathfrak{S} \rightarrow [0, 1]$	
\mathcal{Q}	TP des korpuskularen multiplen Streuprozesses $\{u_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ mit Polarisation in diskreter Zeit; es gilt: $\mathcal{Q} : \mathcal{U} \times \Upsilon \rightarrow [0, 1]$	
$q_k, k = 1, \dots, s$	Überlebenswahrscheinlichkeit in der k -ten Schicht	
$q_j, j = 1, 2, 3$	molekularer Wärmestrom	W
\mathbf{r}	Richtung(svektor)	
r	Radius, Messentfernung, Länge $ r $	m
$r_1, \dots, r_{s-1} \in \mathbb{R}$	Ränder (Begrenzungen) zwischen Schichten $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_s$	m
$r_E, r_R \in \mathbb{R}^+$	Radius des Emitters bzw. Receivers	m
r_c	Modenradius in POLYMIE	m
r_c	viskoser bzw. innerer Kernradius (Wirbel)	m
r_v	Wirbelstärkeradius bzw. äußerer Kernradius	m
ΔR	Range Bin, Messtiefe, Messzeitintervall	m
$\mathcal{R} \in \mathfrak{B}(\mathcal{S})$	Rechtecksmengen zu $\mathfrak{B}(\mathcal{S})$	
R	spezifische Gaskonstante (für trockene Luft $R = 287.058 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$)	$\text{J}(\text{kg K})^{-1}$
Re	Reynolds-Zahl	–
Ref	TP für den Referenzvektor (deterministisch)	
RN	Zufallszahl	
$r_{\text{EFF}}, v_{\text{EFF}}$	effektiver Radius und Varianz nicht-spärlicher Streuer	m / –
s	Lastfaktor	–
s, s_m, s_m^t	vollständiger physikalischer Zustand eines Photons	
$s_p \in \mathbb{R}_0^+$	Pulslänge des ausgesandten Laserpulses in pbs	s
$s_{\text{min}}, s_{\text{max}} \in \mathbb{R}_0^+$	minimale bzw. maximale Photonenweglänge (PWL)	m
S	Schwerpunkt mit Komponenten S_x, S_y, S_z (je in Einheit m)	
$\mathbf{ST}(\mathbf{x})$	Stokes-Vektor an der Stelle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$	
\mathbf{ST}_R	Stokes-Vektor des auf den Receiver treffenden Photons	
$\mathbf{ST}_{\mathcal{T}_m}^{i,j} (\mathbf{ST}_{\mathcal{T}_m,r}^{i,j})$	Gesamtpolarisation im Receiver (r -ter Anteil davon)	
$\mathbf{st}, \mathbf{st}_m \in \mathbb{R}^4$	normierter Stokes-Vektor mit Anteilen $i_{\parallel}, i_{\perp}, u$ und v	
$\mathbf{st}_E \in \mathbb{R}^4$	Polarisation der Photonen am Start (normierter Stokes-Vektor)	
$\mathbf{st}_{R,m}^{i,j}$	normierter Gesamtpolarisationsvektor aus Messschicht m u. (θ_i, φ_j)	

\mathcal{S}	Zustandsraum eines Photons	
$(\mathcal{S}, \mathcal{P})$	Markovscher korpuskularer multipler Streuprozess in diskreter Zeit	
$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{S}_{\mathcal{H}_s}}$	Zustandsraum in der jeweiligen Schicht	
\mathbb{S}^2	Einheitskugel des \mathbb{R}^3	
Sel	TP der Streuerselektion mit $Sel : (\mathcal{S} \times \mathbb{R}^3) \times \mathfrak{B}(\Psi) \rightarrow [0, 1]$	
S_{ij}	Komponenten des Scherratentensors $S(\mathbf{u})$	s^{-1}
$t \in \mathbb{R}_0^+$	Zeit, einzelner Zeitpunkt	s
t_0	Zeit für Absinken eines Wirbelpaares um b_0 mit w_0	s
T	Menge aller Zeitpunkte	
$t_i, i \in \mathbb{N}$	Zeitpunkte	s
Δt	Zeitschritt, Zeitintervall	s
T	TP zum nächsten Stoßzeitpunkt t_{m+1} mit $T : \mathcal{U} \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^+) \rightarrow [0, 1]$	
\mathcal{T}_m	m -tes Messzeitintervall (MZI)	s
$T_{j,k}, R_{j,k}$	Template und Referenz-Template	
\mathbf{u}	(Strömungs-)Geschwindigkeitsvektor aus Komponenten u_1, u_2, u_3	$je\ m\ s^{-1}$
$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$	LES: Geschwindigkeitsvektoren energiereicher großskaliger Wirbel	$je\ m\ s^{-1}$
\mathbf{u}'	LES: Geschwindigkeitsvektoren energiearmer kleinskaliger Wirbel	$je\ m\ s^{-1}$
$\partial^+ / \partial^- u_i(x_i)$	Vorwärts- bzw. Rückwärts-Differenzenquotient	
$\partial^0 u_i(x_i)$	Zentraler Differenzenquotient	
$\partial^- \partial^+ u_i(x_i)$	Differenzenquotient zweiter Ordnung	
$u_m \in \mathcal{U}$	zeitabhängige Zustände des Photons auf dem Zustandsraum \mathcal{U}	
$\{u_m : m \in \mathbb{N}_0\}$	Prozess aus zeitabhängigen Zuständen des Photons	
$(\mathcal{U}, \mathcal{Q})$	PDMP in kontinuierlicher (stetiger) Zeit	
u	axiale Windgeschwindigkeitskomponente (aeronautisch)	$m\ s^{-1}$
	oder vertikale Windgeschwindigkeitskomponente (optisch)	$m\ s^{-1}$
u_0	Fluggeschwindigkeit des nachfolgenden Flugzeugs	$m\ s^{-1}$
$(u, v)^T$	der 2D Windvektor transversal zur Flugachse (optisch)	
$(u, v, w)^T$	der 3D Windvektor bestehend aus den Komponenten u, v und w	
$U(\mathbf{x})$	eine Phasenbeziehung des Stokes-Vektors	
$V(\mathbf{x})$	eine Phasenbeziehung des Stokes-Vektors	
$\mathbb{V}_{\mathcal{T}_m}^{i,j} (\mathbb{V}_{\mathcal{T}_m, \%}^{i,j})$	Varianz des Gesamtsignals im MZI \mathcal{T}_m aus Richtung (θ_i, φ_j) (in %)	
$\mathbb{V}_{\mathcal{T}_m, r}^{i,j} (\mathbb{V}_{\mathcal{T}_m, r, \%}^{i,j})$	wie eben, aber Varianz des Signals der r -ten Streuordnung (in %)	
\mathbf{v}	3D (LOS-)Vektor	
v	horizontale Windgeschwindigkeitskomponente (aeronautisch u. opt.)	$m\ s^{-1}$
$(v, w)^T$	der 2D Windvektor transversal zur Flugachse (aeronautisch)	
$v_{A/C}$	Fluggeschwindigkeit	$m\ s^{-1}$
v_{LOS}	Line-of-sight-Geschwindigkeitskomponente	$m\ s^{-1}$
v_x, v_y, v_z	Komponenten des 3D LOS-Vektors \mathbf{v} bzw. Geschwindigkeitsbeiträge zu v_{LOS} in x -, y - und z -Richtung; z. T. auch Windkomponenten	$m\ s^{-1}$
v_r bzw. $v_\theta (v_t)$	Radial- bzw. Tangentialgeschwindigkeiten	$m\ s^{-1}$
Δv	Längen- bzw. Geschwindigkeitsfehler von Geschwindigkeitsvektoren	$m\ s^{-1}$
w	vertikale Windgeschwindigkeitskomponente (aeronautisch)	$m\ s^{-1}$
	oder axiale Windgeschwindigkeitskomponente (optisch)	$m\ s^{-1}$
w_0	abwärts gerichtete (Absink-)Geschwindigkeit eines Wirbelpaares	$m\ s^{-1}$
$w_{i,j,k} \in \mathbb{R}$	Massenpunkte an den Positionen $(x_i, y_j, z_k)^T$	
$w_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$	Funktionswerte von Volumen 1 (w_B von Volumen 2), etc.	
$W_{in,k}, W_{out,k}$	alle Werte innerhalb bzw. außerhalb der k -ten Schicht \mathcal{H}_k	
$\bar{W}_{\mathcal{T}_m, r}^{i,j}$	Menge aller Photonenpfade $\omega \in \tilde{\Omega}$, die die Receiver-Ebene aus (θ_i, φ_j) inklusive des r -ten Streuereignisses im MZI $\mathcal{T}_m^{i,j}$ schneiden	

$W_{\mathcal{T}_m, r}^{i, j}$	$\overline{W}_{\mathcal{T}_m, r}^{i, j}$ ohne Schnitte mit Receiver-Ebene vor r -tem Streuereignis	
W_{av}	TP für eine Änderung der Wellenlänge	
x	Flugrichtung bzw. Flugachse (aeronautisch)	m
$\mathbf{x}, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^3$	Positionsvektor eines Photons, etc. (Komponenten je in m)	
$\mathbf{x}_E, \mathbf{x}_R \in \mathbb{R}^3$	Position des Zentrums von Pulsemission bzw. Photonen-Empfang	
x, y, z	kartesische Koordinaten	je m
X, Y, Z	Seitenlänge bzw. Länge von Intervallen auf der x -, y -, z -Achse	je m
$x_{\text{jump}} \in \mathbb{N}$	Sprung zur nächsten Position einer Untermenge (auch $y_{\text{jump}}, z_{\text{jump}}$)	
$x_{\text{step}}, y_{\text{step}}, z_{\text{step}}$	jeweils eine Anzahl diskreter Werte für Intervalle auf einer Achse	
$x_{\text{dim}}, y_{\text{dim}}, z_{\text{dim}}$	jeweilige Gesamtzahl an Positionen in eine bestimmte Richtung	
x_1, x_2, x_3	kartesische Koordinaten in NSG	je m
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	Seitenlängen z. B. der Quader von Extinktionskoeffizienten $\sigma_{i, j, k}$	je m
X	eine Menge, etc.	
\mathbf{X}	Vektor von Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n ; $\mathbf{X} := (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$	
$y_{\text{dim}}^{\text{Temp}}, z_{\text{dim}}^{\text{Temp}}$	Gesamtzahl an Positionen eines Templates in die jeweilige Richtung	
$y_{\text{dim}}^{\text{Ref}}, z_{\text{dim}}^{\text{Ref}}$	Gesamtzahl an Positionen eines RTp in die jeweilige Richtung	
$y_{\text{dim}}^{\text{sub}}, z_{\text{dim}}^{\text{sub}}$	Gesamtzahl an Positionen eines Sub-Tp in die jeweilige Richtung	
$\Delta y, \Delta z$	Verschiebungen eines Tp-Ausschnitts gegen RTp in 2D	je m
z	Flugrichtung bzw. Flugachse (optisch)	m
α	Extinktion(skoeffizient)	m^{-1}
$\Delta \alpha$	Richtungsfehler (auch Winkelfehler) von Geschwindigkeitsvektoren	rad
β	thermischer Ausdehnungskoeffizient	K^{-1}
γ	Wahrscheinlichkeitsdichte von $Col(s_m; \cdot)$	
γ_ψ	Dichtefunktion von Col_ψ	
$\gamma_E, \gamma_R \in [0, \frac{\pi}{2}]$	Semi-EFOV der Photonen bzw. Semi-RFOV des Receivers	rad
$\Gamma(\Gamma_0)$	(anfängliche) Zirkulation der Wirbel(schleppen)	$m^2 s^{-1}$
$\Gamma(s_m; \cdot)$	Beer-Lambert-Gesetz: W'Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$ für bel. s_m	
$\gamma_a : X \rightarrow \mathbb{T}$	ein Charakter für $a \in X$ (\mathbb{T} die Einheitskreislinie: \mathbb{T} für „Torus“)	
δ_{ij}	Kronecker-Delta ($\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$)	
δ	Dirac-Distribution (Dirac-Impuls)	
Δ	in LES: Filterweite	m
ε^*	normierte Eddy-Dissipationsrate (ε : unnormiert in $m^2 s^{-3}$)	–
ε_x	Dirac-Maß auf \mathfrak{B}_X	
$\widehat{\varepsilon}_x$	die Fourier-Transformierte eines Dirac-Maßes $\varepsilon_x \in \mathfrak{M}_1^+(X)$	
$\eta_{\text{rec}} \in (0, 1]$	Quanteneffizienz des Detektors	
$\theta, \theta_i, i \in \mathbb{N}$	Azimutwinkel	rad/°
θ	in LES: potentielle Temperatur mit Referenztemperatur Θ	K
$\Delta \theta$	Schrittweite zwischen Azimutwinkeln θ	rad/°
$\vartheta(\phi_m, \phi_{m+1})$	Streuwinkel von ϕ_m nach ϕ_{m+1}	rad/°
κ	Wärmeleitfähigkeit	$W (K m)^{-1}$
κ	Adiabatenkoeffizient für Luft unter Normalbedingungen	–
κ	Fourier-(Stieltjes-)Transformation für Maße $\mu \in \mathcal{M}_b(X)$	
$\lambda, \lambda_m \in \mathbb{R}^+$	Photonen-Wellenlänge	m
λ_L	Laser-Wellenlänge	m
$\Delta \lambda; \Delta \lambda_L$	Full Width at Half Maximum (Filter); Wellenlängen-Verschiebung	m
$\lambda_n, n \in \mathbb{N}$	Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^n	
$\lambda : \mathfrak{B}_X \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}_0^+$	n -dimensionales Lebesgue-Maß mit $\lambda := \lambda^n$ und $\tilde{\mathbb{R}}_0^+ := \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$	
$\mu_{\mathbf{x}, E}$	Dichte der normierten Normalverteilung auf A_E (in pbs5)	
μ	Erwartungswertvektor mit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$; ein Maß	
μ	in NSG: dynamische Viskosität	$m^2 s^{-1}$

$\hat{\mu}$	die Fourier-Transformierte des Maßes $\mu \in \mathcal{M}_b(X)$	
$\mu * \nu$	Faltung zweier Maße μ und ν	
$\mu \star \nu$	Korrelation zweier Maße μ und ν	
ν	in NSG: kinematische Viskosität (ν_t : turbulente Viskosität)	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
$\Xi(\alpha, \beta)$	Winkel zwischen zwei Richtungsvektoren α und β	$\text{rad}/^\circ$
ρ	(Luft-)Dichte (ρ_0 : Referenzwert der Dichte)	kg m^{-3}
$\rho, \rho_m \in \mathbb{S}^2$	Referenzvektor	
(ρ_m, ϕ_m)	Referenzebene vor der Streuung	
(ρ_{m+1}, ϕ_{m+1})	Referenzebene nach der Streuung („Streuebene“)	
$\rho_E, \rho_R \in \mathbb{S}^2$	Referenzvektor des Emitters bzw. Receivers	
$\rho(x, y, z)$	verallgemeinerte Massendichte	
$\sigma, \sigma_k, \sigma_{i,j,k} \in \mathbb{R}_0^+$	atmosph. Extinktionsfunktion bzw. -koeffizient; Stoßintensität	m^{-1}
σ_ψ	Stoßintensität des Streutyps ψ	
$\sigma_i^2, i \in \mathbb{N}$	Varianzen (σ : rms-Geschwindigkeit in m s^{-1})	$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$
σ_{ij}	Scherspannungstensor (Feinstrukturterm)	$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$
Σ	symmetrische, positiv-definite Kovarianzmatrix	
τ_p	Laser-Pulsdauer (Pulslänge)	s
$\tau_a(x), \tau, \tau_{i,j,k}$	Translationsabbildung bzw. Shift(-Vektor) eines $x \in X$ um $a \in X$	
$\nu : \Upsilon \rightarrow [0, 1]$	Wahrscheinlichkeitsmaß für Startverteilung des Photons auf Υ	
$\phi, \phi_m \in \mathbb{S}^2$	Photonen-Flugrichtung	
$\phi_E, \phi_R \in \mathbb{S}^2$	Emissionsrichtung des Laserpulses bzw. Orientierung des Receivers	
$\varphi, \varphi_j, j \in \mathbb{N}$	Elevationswinkel; Zenitwinkel	$\text{rad}/^\circ$
$\Delta\varphi$	Schrittweite zwischen Elevationswinkeln φ	$\text{rad}/^\circ$
$\varphi(t, s_m)$	Lösung für deterministische Bewegung des Photons zw. Sprüngen	
$\varphi \in \mathcal{D}$	∞ -oft differenzierbare Testfunktionen $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf Raum \mathcal{D}	
$\psi, \psi_m \in \Psi$	Streutyp; Art des letzten Streuteilchens	
Ψ	Menge aller Streuteilchen ψ	
$\Psi(y, z)$	modifizierte Strömungsfunktion eines Wirbelpaares (Tracervert.)	
$\omega \in \tilde{\Omega}$	einzelner Photonenpfad aus der Menge $\tilde{\Omega}$	
ω	Wirbelstärke (engl. vorticity); Einheit je Komponente: s^{-1}	
$\omega (\omega_0)$	(anfängliche) Winkelgeschwindigkeit	s^{-1}
$\tilde{\Omega} = \Omega \setminus \tilde{N}$	Raum diskreter Pfade mit isolierten Sprungzeiten (\tilde{N} : Nullmenge)	
$\Omega (\Omega_i)$	NSG bzw. FD: Menge (oder Gebiet) mit Intervallen $\Omega_i, i = 1, 2, 3$	je m
$i ; *$	imaginäre Einheit; das komplex Konjugierte	
$\text{Re}(z), \text{Im}(z)$	Realteil bzw. Imaginärteil einer komplexen Zahl z	
$\mathcal{O}(\cdot)$	Landau-Symbol aus der asymptotischen Analysis	
∇_x bzw. $\nabla; \Delta_x$	Nabla-Operator, angewandt auf \mathbf{x} bzw. Zeit t ; Laplace-Operator	
\times	Vektorprodukt; physikalisch auch Multiplikation skalarer Größen	

Einheit	Einheitenname	physikalische Größe
m	Meter	Länge
kg	Kilogramm	Masse
s	Sekunde	Zeit
K	Kelvin	Temperatur
$\text{Hz} = \text{s}^{-1}$	Hertz	Frequenz
$\text{N} = \text{kg m s}^{-2}$	Newton	Kraft
$\text{J} = \text{N m} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$	Joule	Energie
$\text{W} = \text{J s}^{-1}$	Watt	Leistung
$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$	Pascal	Druck
rad bzw. $^\circ$	Radian (sr: Steradian) bzw. Grad	Winkel

Index

- Absorption, 4, 102
- Beer-Lambert-Gesetz, 13
- Boussinesq-Approximation, 43
- Brunt-Väisälä-Frequenz, 53
- CCD, 10, 21, 73, 107, 151, 155
- CMOS, 21, 73
- Dichte, 54
- Differenzenquotient, 45
- Dirac-Distribution, Dirac-Impuls, 62
- Dirac-Maß, 17, 24, 59, 60, 66
- Doppler Wind Lidar, 4, 101, 149
- Doppler-Shift, 149, 151
- Eddy-Dissipationsrate, 53
- EFOV, 21, 104
- Energieerhaltungsgleichung, 41, 47
- Extinktion, 4, 12, 102
- Extinktionsfunktion, 29
- Extinktionskoeffizient, 12, 29, 102, 125
- Extinktionsprofile, 103
- Fabry-Pérot-Etalon, 107, 139, 149, 151, 155
- Fabry-Pérot-Interferometer, 10, 151
- Faltung, 60, 66
- Faltungstheorem, 59, 66
- Fast Fourier Transformation, 57, 69, 74, 80
- Feed-Forward-Controller, 1
- Festkörperwirbel, 50
- Finite-Differenzen-Methode, 45
- Fluid, 41, 43
- Fourier-Analyse, 58
- Fourier-Shift, 9, 57, 66, 83, 88, 94
- Fourier-Transformation, 58, 59
- Fourier-Transformierte, 57–59, 66, 68, 71, 72
- Fringe-Imaging DWL, 6, 101, 139, 149, 151
- Gauß-Jordan-Elimination, 71, 72
- Gleichverteilung, 24
- Gravity Center Shift, 9, 57, 61, 64, 80, 83, 88, 91, 94, 132, 135
- Heterodynempfang, 6, 150
- Hintergrundstrahlung, solare, 102, 107
- Impulserhaltungsgleichung, 41, 42, 47
- Infinitesimale Erzeugende, 11, 20
- Intensität, 36, 37, 101, 107, 135, 151, 160
- Kondensstreifen, 118, 123
- Kontinuitätsgleichung, 41, 42, 47
- Kontinuitätsgleichung, inkompressible Form, 43
- Korrelation, 74
- Korrelationstheorem, 74
- Kreuzkorrelation, 9, 57, 73, 74, 80, 84, 88, 94, 101, 109
- Kreuzkorrelationskoeffizient, 74, 77, 79
- Ladungsträgerzahl, 36
- Lamb-Oseen-Wirbel, 50, 52, 56, 94, 128
- Large Eddy Simulation, 9, 41, 44, 46, 102
- Laser-Strahlprofil, Gauß'sches, 26, 105
- Laser-Wellenlänge, 104
- Laserstrahl, gepulster, 11
- LESTUF, 46, 47, 54
- Lidar, 3
- Lidar-Emitter, 24, 105
- Lidar-Receiver, 28, 105
- Lidargleichung, 107, 150, 151
- Line-of-sight, 5, 101
- Markov-Kern, 11, 12
- Markovscher korpuskularer multipler Streuprozess
in diskreter Zeit, 18
- Markovscher Prozess, 9, 12
- Mehrfachstreuung, 11, 38, 106
- Mersenne Twister (MT), 24
- Messzeitintervall (MZI), 33, 105
- Methode der fiktiven Kollision, 11, 20
- MGLET, 46, 49, 56, 94, 125
- Mie-Streuung, 33
- Monte-Carlo-Simulation, 11, 23, 104
- Mueller-Matrix, 9, 16, 30–33, 106, 118, 122
- Navier-Stokes-Gleichungen, 9, 41
- Navier-Stokes-Gleichungen, inkompressible, 42, 43

- Navier-Stokes-Gleichungen, inkompressible und in-
stationäre, 43, 45
- Navier-Stokes-Gleichungen, inkompressible und in-
stationäre, Boussinesq-approximierte, 47
- Navier-Stokes-Gleichungen, kompressible, 41
- Particle Imaging Velocimetry, 21, 73, 112, 143
- Partiell Deterministischer Markovscher Sprung-
prozess (PDMP) in stetiger Zeit, 20
- pbs5, 23, 101
- PDMP, Sprungintensität eines, 18
- Phasenfunktion, 16, 17, 106, 122, 126
- Photodetektor, 107
- Photoelektronenzahl, 36, 101, 107, 152
- Photon, 3, 12
- Photonenweglänge, 33
- Photonenzahl, 37, 101, 107, 150–152
- Poisson-Gleichung, 45, 49
- Polarisation, 11, 15, 38, 104
- Positions-TP, 19
- Potentialwirbel, 50
- Pulse-Stretching, 32, 87
- Pulsenergie, 106
- Rauschen, 74, 101, 107, 151
- Ray Tracing, 155
- Rayleigh-Streuung, 32, 106, 118
- Referenz-Template, 75, 80
- Referenzebene, 15
- Referenzvektor, 12
- RFOV, 21, 105
- Richtungsstreuintensität, 106, 122, 127
- Ringmittelpunkt, 151
- Ringradius, 151, 153
- Rollmoment, 51, 52
- Rückstreulidar, 9, 73
- Rückstreulidar, Messmethodik, 21
- Rückstreulidar, Simulation, 23, 101
- Schichtung, 53
- Schließungsansatz von Smagorinsky, 47
- Schwerpunkt, 63, 64, 80, 82
- Shift-Theorem, 59
- Shift-Vektoren, 57, 59, 64, 66, 67, 69, 72, 74, 78,
80, 83, 88, 91, 94
- Speckle Imaging Velocimetry, 21, 144
- Sphäroide, 32, 106, 122
- Spiralenwirbel, 129, 130, 133, 135
- Stokes-Vektor, 12, 15
- Stoß-TP, 13
- Strahlungstransport-Gleichungen, 11, 20
- Streuprozess, polarisierter korpuskularer multipler,
38
- Streuteilchen, 12
- Streuung, 4, 102
- Strömung, kompressible, 41
- Tangentialgeschwindigkeiten, 56, 128
- Template, 69, 72, 75, 80
- TP der Richtungsstreuung, 15
- TP der Streuserlektion, 13, 14
- TP des korpuskularen multiplen Streuprozesses
mit Polarisation in diskreter Zeit, 19
- TP für Änderung der Wellenlänge, 14
- TP für den normierten Stokes-Vektor, 17
- TP für den Referenzvektor, 17
- TP für den stationären Markov-Prozess in diskre-
ter Zeit, 18
- TP für einzelnes Streueignis am nächsten Streu-
punkt, 19
- TP zum nächsten Stoßzeitpunkt, 18
- Tracer, passive, 49, 53, 94, 102, 125
- turbulente Strömung, 53
- Turbulenz, 1, 41, 53
- Übergangswahrscheinlichkeit (TP), 12
- Überlebenswahrscheinlichkeit, 29
- Varianz des Gesamtsignals, 40, 108, 109
- Varianz des Signals der r -ten Streuordnung, 40
- Vektorlänge, 83, 103
- Vektorlängenfehler, 104
- Vektorrichtung, 83, 103
- Vektorrichtungsfehler, 104
- Verschiebungsvektoren, 9
- Volume Imaging Lidar, 21, 148
- Wasserwolke, 122
- Weight-Shift, 9, 57, 80, 86, 89, 94, 101, 110
- Wellenlänge, 4, 149, 151, 153
- Wellenlängen-Shifts, 149
- Wide Angle Imaging Lidar, 21, 147
- Windfeld, 57, 82, 87, 94, 102, 109, 128
- Windvektor, 7, 56, 102
- Wirbelschleppen, 1, 52, 53, 94, 101, 134
- Wirbelstärke (engl. vorticity), 50
- Zirkulation, 50
- Zirren, 118
- Zufallsvariable, 26
- Zufallszahl, 10, 24, 26, 107, 155
- Zufallszahlengenerator (RNG), 24, 152
- Zylinder, 106, 118, 122

Eidesstattliche Versicherung

(Siehe Promotionsordnung vom 12.07.2011, § 8, Abs. 2 Pkt. 5)

Hiermit erkläre ich an Eidesstatt, dass die Dissertation von mir
selbstständig, ohne unerlaubte Beihilfe angefertigt ist.

Hirschberger, Markus Christoph

Name, Vorname

.....
Ort, Datum

.....
Unterschrift Doktorand

Danksagung

Zuerst möchte ich mich an dieser Stelle bei Herrn Professor Dr. Ulrich G. Oppel für die stets gute Betreuung, viele anregende Gespräche zur Erforschung neuer Ansätze eines RSL, sein ständiges Interesse am Fortschritt der Arbeit und die Übernahme des Erstgutachtens bedanken.

Herrn Professor Dr. Ulrich Schumann danke ich für Hinweise auf zukünftige Potentiale für DWL sowie seine Bereitschaft, als Zweitgutachter diese Dissertation zu bewerten.

Bei Herrn Dr. Gerhard Ehret möchte ich mich für viele konstruktive Diskussionen zur Modellierung eines FI-DWL und die fachliche Betreuung im Lidar-Bereich bedanken.

Ebenso möchte ich mich bei Dr. habil. Frank Holzäpfel für die fachliche Betreuung im Bereich Wirbelschleppen und die Organisation interner Meetings und Workshops im Projekt *Wetter und Fliegen* bedanken.

Weiter gilt mein Dank Dr. Oliver Reitebuch und Dr. Christoph Kiemle für wissenschaftliche Hinweise zu den Auswertemethoden und Streueigenschaften für Lidars, sowie Dr. Stephan Rahm, Rudi Simmet und Dr. Andreas Wiegele für erste Einführungen und die Demonstration des DLR Wind-Lidars.

Bei Dr. Thomas Gerz und Carsten Schwarz möchte ich mich für die gute Koordination und Leitung des Projektes *Wetter und Fliegen* bedanken. Den Kollegen in Braunschweig, besonders Christian Horn und Christoph Wolkensinger, möchte ich für die Zusammenarbeit während des Projektes Danke sagen.

Meinen Zimmerkollegen Dr. Felix Steinebach, Nico Hannemann und Marcus Moser während meiner Zeit als Doktorand am DLR danke ich für die allzeit angenehme Arbeitsatmosphäre und viele interessante Diskussionen und Fachgespräche.

In gleicher Weise bedanke ich mich bei allen Lidar-Kollegen am IPA für ihre Hilfsbereitschaft bei der Beantwortung wissenschaftlicher Fragen und sonstiger organisatorischer Angelegenheiten.

Der Wirbelschleppen-Gruppe, speziell Dr. Takashi Misaka und Dr. Ingo Hennemann, danke ich für ihre Daten aus MGLT- bzw. LESTUF-Simulationen.

Besonderer Dank gilt auch Dr. Martin Wengenmayer für die Bereitstellung der zuvor neuesten Version `pbs4` des Programmes `pbs`, auf dessen Basis die Weiterentwicklung zur neuen Version `pbs5` stattfand.