

**Langzeitentwicklung
kompakter Doppelsternsysteme
mit Bestrahlungsrückkopplung**

Dissertation
der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Andreas Büning
aus Marl

München, den 30. Juli 2003

Erstgutachter: Priv.-Doz. Dr. Hans Ritter

Zweitgutachter: Prof. Dr. Harald Lesch

Tag der mündlichen Prüfung: 24. November 2003

Kurzzusammenfassung

Als kompakte Doppelsterne werden Systeme bezeichnet, bei denen zumindest einer der beiden Sterne ein kompakter Stern, also ein Weißer Zwerg, ein Neutronenstern oder ein Schwarzes Loch ist. Überfüllt der Begleitstern sein kritisches ROCHE-Volumen und ist somit die Materie in seinen äußersten Schichten gravitativ nicht mehr eindeutig an diesen Stern gebunden, so kann der Begleiter Masse an den kompakten Stern verlieren, bei deren Akkretion große Mengen gravitativer Bindungsenergie freigesetzt werden können.

Vorarbeiten zeigen, daß die Bestrahlung des masseverlierenden Sterns durch die Akkretionsleuchtkraft des Begleiters Rückwirkungen auf den Massentransfer haben kann, falls der masseverlierende Stern eine konvektive Hülle besitzt. Dies kann dazu führen, daß die Massentransferrate auf langen Zeitskalen um ihr Langzeitmittel oszilliert. In Frage kommen hierfür Systeme mit einem massearmen Hauptreihenstern oder Riesen als Massegeber, also Kataklysmische Veränderliche (CV) und Massearme Röntgendoppelsterne (LMXB). Bei den ersteren ist der kompakte Stern ein Weißer Zwerg, bei den letzteren ein Neutronenstern oder ein Schwarzes Loch. Die Bestrahlung führt dazu, daß der Stern seine eigene Energie über den bestrahlten Teil seiner Oberfläche weniger effizient abstrahlen kann und daß er daher auf seiner KELVIN-HELMHOLTZ-Zeitskala expandiert. Durch die Expansion des Sterns wird der Massentransfer und damit die Bestrahlung noch verstärkt – es kommt zu einer Rückkopplung zwischen der Massentransferrate und der Bestrahlung. Dieser Effekt kann dazu führen, daß die stationäre Massentransferrate instabil wird und sich das System quasi immer entweder im „High State“ bei erhöhtem Massentransfer oder im „Low State“ bei verringertem oder sogar abgeschaltetem Massentransfer befindet.

Es gibt ein auf einfachen Sternmodellen, sogenannten Bipolytropen beruhendes analytisches Modell für das Auftreten von Massentransferzyklen sowie einzelne numerische Entwicklungsrechnungen, bei denen der masseverlierende Stern als Bipolytrope und der kompakte Stern als Punktmasse behandelt wird. Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit besteht nun darin, dieses analytische Modell und insbesondere die Grenzen der Instabilitätsbereiche durch numerische Rechnungen mit vollen 1D-hydrostatischen Sternmodellen für den masseverlierenden Stern zu bestätigen.

Es wird daher zunächst ein Algorithmus entwickelt, der es ermöglicht, insbesondere das Ein- und Ausschalten des Massentransfers numerisch mit der erforderlichen Genauigkeit zu verfolgen, da dies mit einem bestehenden Sternentwicklungsprogramm auf Grund verschiedener numerischer Probleme nicht möglich gewesen wäre. Dazu wird gezeigt, daß für ein physikalisch sinnvolles Modell

des Massentransfers das üblicherweise verwendete explizite Verfahren zur Bestimmung der Massentransferrate numerisch instabil ist, außer für sehr kleine Zeitschritte. Es wird ferner gezeigt, daß ein implizites Verfahren dieses Problem nicht aufweist. Daher wird die Gesamtmasse als zusätzliche Variable dem üblichen (impliziten) HENYCY-Iterationsschema zum Lösen der Sternaufbaugleichungen hinzugefügt. Hierdurch wird die Anzahl der benötigten Zeitschritte für eine einfache Langzeitentwicklungsrechnung ohne Bestrahlungsrückkopplung von einigen 10^4 bis 10^5 auf wenige 10^3 Zeitschritte reduziert.

Des Weiteren wird das analytische Modell ausführlich mittels linearer Stabilitätsanalyse hergeleitet und diskutiert sowie durch Hinzunahme eines bisher vernachlässigten Terms verbessert. Es ergibt sich schließlich eine einfache Ungleichung als Bedingung für das Auftreten von bestrahlungsinduzierten Massentransferzyklen. Hierbei zeigt sich, daß, anders als dies zuvor erwartet worden war, für realistische Bestrahlungsmodelle nicht nur Kataklysmische Veränderliche, sondern auch Massearme Röntgendoppelsterne unter Umständen Massentransferzyklen durchlaufen können.

Schließlich werden numerische Langzeitentwicklungen sowohl für nuklear unentwickelte als auch nuklear entwickelte Sterne gerechnet. Vergleiche mit dem analytischen Modell zeigen eine recht gute quantitative Übereinstimmung für unentwickelte Sterne. Für stark entwickelte Sterne, für die das analytische Modell formal nicht anwendbar ist, zeigen sich deutliche Unterschiede.

Ob und welche Systeme instabil sind, hängt im Wesentlichen von zwei Unbekannten ab: der Drehimpulsverlustrate durch magnetische Bremsung und der Bestrahlungseffizienz α , welche angibt, ein wie großer Anteil der Akkretionsleuchtkraft die Photosphäre des masseverlierenden Sterns erreicht. Für sphärische Akkretion und eine graue Atmosphäre ist per Definition $\alpha = 1$. Für $\alpha \gtrsim 0.1$ können Kataklysmische Veränderliche Massentransferzyklen durchlaufen, für $\alpha \lesssim 0.1$ dagegen Massearme Röntgendoppelsterne.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Entwicklung von kompakten Doppelsternen	13
2.1	Das Roche-Potential	13
2.2	Der Massentransfer	20
2.2.1	Die Bernoulli-Gleichung	21
2.2.2	Die Massentransferrate in optisch dünner Approximation	21
2.2.3	Die Massentransferrate in optisch dicker Approximation .	24
2.3	Die Langzeitentwicklung halbgetrennter Doppelsternsysteme . . .	27
2.3.1	Die Stationaritätsbedingung	27
2.3.2	Die zeitliche Entwicklung des Roche-Radius	28
2.3.3	Die zeitliche Entwicklung des Sternradius	31
2.3.3.1	Allgemeines	31
2.3.3.2	Der adiabatische Masse-Radius-Exponent	34
2.3.3.3	Der Masse-Radius-Exponent des thermischen Gleichgewichts	39
2.3.3.4	Der thermische Masse-Radius-Exponent	40
2.3.3.5	Der effektive Masse-Radius-Exponent	42
2.3.4	Die stationäre Massentransferrate	42
2.3.5	Lineare Stabilitätsanalyse	45
2.3.6	Antriebsmechanismen des Massentransfers	50
2.3.6.1	Die nukleare Entwicklung	50
2.3.6.2	Drehimpulsverlustmechanismen	51
2.3.6.3	Die thermische Relaxation	52
2.3.7	Der Einfluß des Spins des masseverlierenden Sterns auf die Langzeitentwicklung	54
2.4	Numerische Stabilität des Massentransfers	58
2.4.1	Das explizite Verfahren	58
2.4.2	Das Feigenbaum-Szenario	61
2.4.3	Das implizite Verfahren	68
3	Bestrahlte Sterne	73
3.1	Der Reflexionseffekt	73
3.2	Der intrinsische Fluß	78
3.3	Bestrahlungsmodelle	86
3.3.1	Die effektiv blockierte Oberfläche	86
3.3.2	Das „Constant Flux“ Modell	89
3.3.3	Das „Point Source“ Modell	90
3.4	Massentransferzyklen	91

3.5	Lineare Stabilitätsanalyse	95
3.5.1	Die thermische Relaxation	95
3.5.2	Die Stabilitätskriterien	98
3.5.3	Die Bestrahlungsrückkopplung	103
3.5.4	Die thermische Relaxation für Bipolytrope	108
3.5.5	Das Homologiemodell	110
3.6	Diskussion der Bestrahlungsinstabilität	113
3.6.1	Das Verhältnis der Zeitskalen	113
3.6.2	Kataklysmische Veränderliche	115
3.6.3	Massearme Röntgendoppelsterne	132
3.6.4	Die Eigenleuchtkraft des Weißen Zwergs	141
3.6.5	Intermittierende Bestrahlung	141
3.6.6	Beobachtbare Konsequenzen	144
4	Zusammenfassung und Ausblick	147
A	Die Grundgleichungen des Sternaufbaus	151
B	Das Sternentwicklungsprogramm	155
B.1	Allgemeines	155
B.2	Diskretisierung des Sternaufbaus	156
B.3	Die inneren Randbedingungen	159
B.4	Die äußeren Randbedingungen	161
B.4.1	Die äußeren Randbedingungen ohne Bestrahlung	161
B.4.2	Die äußeren Randbedingungen mit symmetrischer Bestrahlung	163
B.4.3	Die äußeren Randbedingungen mit asymmetrischer Bestrahlung	164
B.5	Das Newton-Verfahren	164
B.6	Das modifizierte Henyey-Verfahren	165
B.7	Der Algorithmus	169
B.8	Die partiellen Ableitungen	174
C	Die Zustandsgleichung	181
C.1	Allgemeines	181
C.2	Mischungen von Wasserstoff und Helium	182
C.3	Der Beitrag des Photonengases	184
C.4	Transformation von Gas- in Gesamtdruck	185
C.5	Molekulargewichte	186
C.6	Die Mischungsentropie	187
D	Mathematische Definitionen	189
	Literaturverzeichnis	193

1 Einleitung

Veränderliche Sterne sind seit vielen Jahrhunderten bekannt. Es gibt periodische und nichtperiodische Veränderliche, einige sind Einzelsterne in speziellen Phasen ihrer Entwicklung (T Tauri Sterne, Cepheiden, Pulsare), bei anderen handelt es sich um Doppelsternsysteme, deren Komponenten sich gegenseitig in ihrer Entwicklung beeinflussen (Kataklysmische Veränderliche, Röntgendoppelsterne, Supersoft Sources) oder die nur durch ihre Bahnneigung relativ zum Beobachter als Veränderliche erscheinen (Bedeckungsveränderliche), wieder andere sind gar keine Sterne im eigentlichen Sinn (Quasare, Aktive Galaktische Kerne).

Es ist klar, daß tendenziell diejenigen Objekte am leichtesten zu beobachten sind, die am langlebigsten und am hellsten sind. Denn die langlebigeren Objekte sind zahlreicher und die helleren Objekte auffälliger. Zu den bekanntesten und am leichtesten zu beobachtenden veränderlichen Sternen zählen daher kompakte Doppelsterne. Dies sind Systeme, bei denen zumindest einer der beiden Sterne ein kompakter Stern, also ein Weißer Zwerg, ein Neutronenstern oder ein Schwarzes Loch ist. Für sich genommen sind kompakte Sterne im Allgemeinen sehr leuchtschwach und daher kaum zu beobachten. Verliert der Begleiter jedoch Materie an den kompakten Stern, die von diesem akkretiert wird, so wird bei der Akkretion die gravitative Bindungsenergie der akkretierten Materie freigesetzt. Die hierbei entstehende Akkretionsleuchtkraft übersteigt üblicherweise die Eigenleuchtkraft des Doppelsternsystems um mehrere Größenordnungen, so daß das System auch aus großer Entfernung beobachtet werden kann. Speziell Massearme Röntgendoppelsterne oder Low Mass X-Ray Binaries sind auf Grund ihrer durchdringenden harten Röntgenstrahlung durch die gesamte galaktische Scheibe zu beobachten, so daß trotz ihrer Seltenheit eine ganze Reihe dieser Objekte bekannt ist.

Doppelsternsysteme lassen sich grob in drei Gruppen einteilen: in getrennte, halbgetrennte und Kontaktsysteme. In getrennten Systemen findet kein Massentransfer statt, wenn man davon absieht, daß einer der Sterne auch aus dem Sternwind des Begleiters akkretieren kann. Die beiden Sterne entwickeln sich in der Regel wie Einzelsterne, solange sie getrennt bleiben. Sie können lediglich durch die Präsenz ihres Begleiters verformt, bzw. durch Gezeitenkräfte zu einer mit der Bahnbewegung synchronen Rotation gezwungen werden, oder sie können von ihrem Begleiter bestrahlt werden. Die weitaus meisten Systeme fallen in diese Kategorie. In Kontaktsystemen kreisen die beiden Sterne in einer gemeinsamen Hülle um den Schwerpunkt des Systems. In halbgetrennten Systemen ist einer der beiden Sterne so ausgedehnt, daß die Materie in seinen äußersten Schichten gravitativ nicht mehr eindeutig an diesen Stern gebunden ist und allmählich in den Potentialtopf des Begleiters strömen kann. Diese Ma-

terie kann vom Begleiter akkretiert werden und, speziell, wenn es sich dabei um einen kompakten Stern wie einen Weißen Zwerg, einen Neutronenstern oder ein Schwarzes Loch handelt, zu verschiedensten beobachtbaren Phänomenen führen. Insbesondere erscheinen solche Systeme im Allgemeinen als Veränderliche, die den größten Teil ihrer Leuchtkraft im fernen UV oder im Röntgenbereich abstrahlen.

Handelt es sich bei dem masseverlierenden Stern ebenfalls um einen kompakten Stern, dann müssen notwendigerweise der Bahnabstand und die Bahnperiode der beiden Sterne so klein und der Drehimpulsverlust durch Abstrahlung von Gravitationswellen daher so groß sein, daß das System nur sehr kurzlebig ist. Handelt es sich beim Begleiter um einen weit entwickelten Stern, etwa in der Phase des Helium- oder Kohlenstoffbrennens, so ist seine verbleibende Entwicklungszeit sehr kurz und das System ebenfalls kurzlebig. Deshalb sind nur für kompakte Doppelsternsysteme mit einem langlebigen Begleiter, einem Hauptreihenstern oder einem (wasserstoffbrennenden) Unterriesen oder Riesen genügend Systeme bekannt (RITTER und KOLB, 2003).

Damit ein solches System langlebig ist, muß außerdem der Massentransfer über lange Zeiten aufrechterhalten werden, die Langzeitentwicklung muß also auf großen Zeitskalen verhältnismäßig gleichförmig ablaufen. Für diese Aufrechterhaltung des Massentransfers über lange Zeitskalen ist ein Antriebsmechanismus erforderlich. Entweder muß der Radius des masseverlierenden Sterns wachsen, oder der Bahnabstand der beiden Sterne schrumpfen. Das erstere geschieht infolge nuklearer Entwicklung, das letztere infolge von Drehimpulsverlusten. Je nachdem, welcher dieser beiden Prozesse dominiert, entwickelt sich das betroffene System in der Regel entweder zu längeren oder zu kürzeren Bahnperioden.

Halbgetrennte, kompakte Doppelsternsysteme aus einem Materie akkretierenden Weißen Zwerg und einem masseverlierenden, masseärmeren Begleiter, meist einem massearmen Hauptreihenstern, seltener einem Riesen oder einem zweiten Weißen Zwerg, bezeichnet man als Kataklysmische Veränderliche oder Cataclysmic Variables (von griech. κατακλυσμός – Überschwemmung, Sintflut). Die bei der Akkretion auf den Weißen Zwerg freigesetzte gravitative Bindungsenergie führt, abhängig vom genauen Ablauf des Akkretionsprozesses, zu einer Reihe von beobachtbaren Akkretionsphänomenen. Zu den auffälligsten zählen die sogenannten Zwergnovaausbrüche, bei denen die Helligkeit des Systems für einige Tage bis Wochen um etwa 2 – 5 Magnituden ansteigt, um anschließend wieder abzufallen und für längere Zeit, von einigen Wochen bis zu Jahrzehnten, in einem Ruhezustand zu verweilen. Die bei der Akkretion freigesetzte gravitative Bindungsenergie wird in diesen Systemen hauptsächlich als fernes UV und als weiche Röntgenstrahlung emittiert und übersteigt die Eigenleuchtkraft des Weißen Zwergs und seines Begleiters üblicherweise um mehrere Größenordnungen (WARNER, 1995).

Da sich im Laufe der Zeit immer mehr wasserstoffreiche Materie auf der Oberfläche des Weißen Zwergs ansammelt, steigt der Druck am unteren Rand der wasserstoffreichen Schicht immer weiter, bis schließlich der Druck so groß geworden ist, daß das Wasserstoffbrennen in dieser Schicht zündet: Der Stern erscheint

als Nova. Wieviel Materie ein Weißer Zwerg akkretieren kann, bis es zum Novaausbruch kommt, hängt einerseits von der Gravitationsbeschleunigung des Weißen Zwergs und somit seiner Masse und andererseits von der Temperatur in der wasserstoffreichen Schicht und somit der Akkretionsrate ab (WARNER, 1995, Abb. 5.19). Für übliche CVs mit Akkretionsraten von 10^{-10} bis $10^{-8} \frac{M_{\odot}}{\text{yr}}$ müssen hierfür etwa 10^{-6} bis $10^{-4} M_{\odot}$ akkretiert werden. Deshalb ist bei den meisten CVs seit ihrer Entdeckung noch kein Novaausbruch beobachtet worden.

Man unterscheidet zwischen magnetischen und nichtmagnetischen CVs. Bei der ersten Gruppe, deren Mitglieder überwiegend bei kurzen Bahnperioden zu finden sind, ist das Magnetfeld des Weißen Zwergs so stark, daß dieser synchron mit der Bahn rotiert. Die Materie strömt vom Begleiter entlang der Feldlinien und wird direkt an einem oder beiden magnetischen Polen des Weißen Zwergs akkretiert. Bei den nichtmagnetischen CVs sammelt sich die Materie dagegen in einer Akkretionsscheibe um den Weißen Zwerg, bevor sie endgültig akkretiert wird.

Die große Gruppe der nichtmagnetischen CVs mit Hauptreihensternen als Massegeber erstreckt sich über Bahnperioden von etwa 78 min bis ungefähr 10 hr und zerfällt in zwei große Untergruppen: die Novaähnlichen Veränderlichen (NL) und die Zwergnovae (DN). Die Novaähnlichen Veränderlichen zeichnen sich durch eine im Wesentlichen konstante Leuchtkraft aus, während sich bei den Zwergnovae Zwergnovaausbrüche und Ruhephasen abwechseln. Dieses so unterschiedliche Verhalten der beiden CV-Klassen wird auf thermische Instabilitäten in der Akkretionsscheibe zurückgeführt, und diese Instabilitäten wiederum lassen sich auf unterschiedliche Massentransferraten zurückführen.

Betrachtet man CVs mit nuklear unentwickelten Hauptreihensternen, deren nukleare Entwicklungszeitskala weitaus größer als das Alter des Universum ist, so ist klar, daß der Massentransfer in diesen Systemen nicht durch nukleare Entwicklung, sondern nur durch Drehimpulsverluste angetrieben werden kann. Das Langzeitmittel der Massentransferrate hängt für übliche Drehimpulsverlustmechanismen von Systemparametern wie den Massen der beiden Sterne, ihrem Bahnabstand, ihrer Rotationsperiode, dem Radius des masseverlierenden Sterns o.ä. ab. Durch verschiedene Relationen zwischen diesen Größen läßt sich das Langzeitmittel der Massentransferrate im Wesentlichen auf eine Abhängigkeit von der Bahnperiode sowie den Massen der beiden Sterne, bzw. ihrem Massenverhältnis zurückführen. Für übliche Systemparameter variiert die mittlere Massentransferrate bei vorgegebener Bahnperiode jedoch nur geringfügig mit den Massen der beiden Sterne. Trägt man die Massentransferrate gegen die Bahnperiode auf, so sollten daher alle CVs im Wesentlichen auf einer Linie liegen. Dies steht jedoch im Widerspruch zu den Beobachtungen, denen zufolge Novaähnliche Veränderliche bei der gleichen Bahnperiode eine um ein bis zwei Größenordnungen höhere Massentransferrate aufweisen als Zwergnovae (WARNER, 1995, Abb. 9.8).

Selbst wenn die tatsächlichen Massentransferraten aus Beobachtungen nur sehr schwer und ungenau zu bestimmen sind, so besteht doch kaum ein Zweifel, daß Novaähnliche Veränderliche bei der gleichen Bahnperiode trotz anscheinend

gleicher Systemparameter eine wesentlich höhere Massentransferrate aufweisen als Zwergnovae. Aber warum ist das so?

Im Prinzip gibt es zwei mögliche Ansätze, diese Diskrepanz zwischen Theorie und Beobachtung zu erklären. Zum einen ist es möglich, daß die masseverlierenden Sterne in CVs nicht chemisch homogen sind, sondern daß ein großer Teil von ihnen nuklear deutlich entwickelt ist (PYLYSER und SAVONIJE, 1988). Nuklear entwickelte Sterne haben in der Regel bei gleicher Masse einen größeren Radius als unentwickelte Sterne und somit CVs mit entwickelten Sternen als Massegeber einen größeren Bahnabstand, bzw. eine größere Bahnperiode. Bei gleicher Bahnperiode sind CVs mit entwickelten Sternen also masseärmer. Für übliche Antriebsmechanismen des Massentransfers führt dies zu einer niedrigeren Massentransferrate für nuklear entwickelte CVs, so daß hiernach in Novaähnlichen Veränderlichen unentwickelte Sterne zu finden sein müßten, in Zwergnovae jedoch entwickelte Sterne. Da die nukleare Entwicklungszeitskala für massearme Hauptreihensterne größer ist als das Alter des Universums, besteht die einzige Möglichkeit, massearme, entwickelte Hauptreihensterne zu erhalten, darin, entwickelte Hauptreihensterne größerer Masse ($\sim 1 - 3 M_{\odot}$) in kurzer Zeit ihrer wasserstoffreichen Hülle zu berauben, so daß schließlich nur noch ihr mit Helium angereicherter Kern zurückbleibt.

Eine andere Möglichkeit, unterschiedliche Massentransferraten bei gleichen Bahnperioden zu erklären, besteht darin, daß zwar für Novaähnliche Veränderliche und Zwergnovae das Langzeitmittel der Massentransferrate für diese Systeme das gleiche ist, daß aber die Massentransferrate im Laufe der Zeit um diesen Mittelwert oszilliert. Derartige Oszillationen müßten auf Zeitskalen ablaufen, die lang sind im Vergleich zu der Zeit, die vergangen ist, seit diese Systeme bekannt sind. Anderenfalls hätten schon zahlreiche Systeme beobachtet werden müssen, die sich von Novaähnlichen Veränderlichen zu Zwergnovae oder umgekehrt entwickelt haben. Man kann erwarten, daß die größte Zeitskala, auf der solche Oszillationen ablaufen können, die thermische Zeitskala, bzw. die KELVIN-HELMHOLTZ-Zeitskala des masseverlierenden Sterns ist. Auf dieser Zeitskala paßt sich die thermische Struktur des Sterns an Änderungen seiner äußeren Randbedingungen an. Sie liegt in der Größenordnung von einigen 10^7 Jahren für Hauptreihensterne von einer Sonnenmasse und einigen 10^9 Jahren für sehr massearme Hauptreihensterne.

Das einzige funktionierende Modell, das Langzeitoszillationen in der Massentransferrate erklären kann, ist das der Bestrahlungsrückkopplung. Hierbei wird davon ausgegangen, daß der kompakte Stern Materie von seinem Begleiter akkretiert. Bei diesem Akkretionsvorgang wird die gravitative Bindungsenergie der akkretierten Materie freigesetzt, und der masseverlierende Stern kann durch die dabei entstehende Akkretionsleuchtkraft bestrahlt werden. Es ist klar, daß der Stern nur auf der dem kompakten Begleiter zugewandten Seite bestrahlt wird, die Bestrahlung also asymmetrisch erfolgt. Das führt dazu, daß die bestrahlte Seite heißer und daher heller ist als die unbestrahlte. Die Bestrahlung eines Sterns durch seinen Begleiter ist als Reflexionseffekt (reflection effect) bekannt (EDDINGTON, 1926, VAZ, 1985). Für Sterne mit konvektiven Hüllen bewirkt dieser Effekt, daß der Stern seine Eigenleuchtkraft über die bestrahlte Seite

weniger effizient abstrahlen kann als über die unbestrahlte, weil der konvektive Energietransport in den äußersten Schichten durch die Bestrahlung gehemmt wird (VAZ und NORDLUND, 1985).

Beim Einsetzen des Massentransfers und somit der Bestrahlung sinkt die netto über die Oberfläche abgestrahlte Energie, also die *intrinsische Leuchtkraft* des Sterns, und der Stern schwillt an. Diese Expansion findet auf der thermischen Zeitskala statt und führt zu einer Verstärkung des Massentransfers und dieser wiederum zu einer Verstärkung der Bestrahlung: Es entsteht eine Rückkopplung. Dieser Mechanismus funktioniert jedoch nicht beliebig lange. Er würde spätestens nach einer KELVIN-HELMHOLTZ-Zeitskala zum Erliegen kommen, wenn der Stern ein neues thermisches Gleichgewicht erreicht hätte. Jedoch beginnt die Massentransferrate schon vorher auf ihr Langzeitmittel abzusinken, und die Rückkopplung funktioniert in umgekehrter Richtung. Die Bestrahlung wird schwächer, der Stern kann seine Energie effizienter über die bestrahlte Oberfläche abstrahlen, und er beginnt zu schrumpfen, so daß die Massentransferrate weiter verringert wird. Dies kann dazu führen, daß sich der Massentransfer sogar komplett abschaltet, bis ein neuer Zyklus beginnt.

Es gibt ein analytisches Modell für das Auftreten bestrahlungsinduzierter Massentransferzyklen, welches auf einfachen Sternmodellen, sogenannten Bipolytropen beruht. Es sagt voraus, daß CVs mit unentwickelten Hauptreihensternen unterhalb von $\sim 0.7 M_{\odot}$ für übliche Drehimpulsverlustraten stabil gegenüber Massentransferzyklen sind (KING et al., 1996, RITTER et al., 2000). Für CVs mit stark entwickelten Sternen halten KING et al. (1997) jedoch das Auftreten derartiger Zyklen für möglich. Die Aussagekraft des Bipolytropenmodells ist allerdings formal auf chemisch homogene Sterne, d.h. unentwickelte Hauptreihensterne beschränkt und läßt sich daher nicht direkt auf entwickelte CVs übertragen.

Bisher wurden die Voraussagen des Bestrahlungsrückkopplungsmodells numerisch fast ausschließlich mit vereinfachten, bipolytropen Sternmodellen überprüft. So gibt es zum einen Rechnungen mit einem vereinfachten Ein-Zonen-Modell für die Reaktion der konvektiven Hülle auf Bestrahlung und einem nicht-realistischen Modell für die Bestrahlungsgeometrie (RITTER et al., 1995, 2000). Zum anderen gibt es Rechnungen, ebenfalls mit dem Ein-Zonen-Modell, aber zumindest mit einem realistischeren Modell für die Bestrahlungsgeometrie, bei dem der Begleiter als Punktquelle behandelt wird (MCCORMICK und FRANK, 1998). Dafür aber beschäftigen sich die letztgenannten Rechnungen hauptsächlich mit von der Massentransferrate abhängigen Drehimpulsverlustraten. Daß für eine genügend starke Abhängigkeit $\dot{J}(\dot{M})$ Massentransferzyklen „erzwungen“ werden können, ist theoretisch zuvor bereits von KING et al. (1996) gezeigt worden.

Bei der einzigen veröffentlichten Rechnung, die mit einem echten 1D-hydrostatischen Sternmodell und mit realistischen Bestrahlungstabellen statt dem Ein-Zonen-Modell, wenn auch einer nichtrealistischen Bestrahlungsgeometrie durchgeführt wurde, handelt es sich um eine Kurzzeitentwicklung, die mehr als „proof of concept“ für die Bestrahlungstabellen denn als numerische Bestä-

tigung für das analytische Bestrahlungsrückkopplungsmodell dient (HAMEURY und RITTER, 1997).

Bisher nicht durchgeführt wurden

- Rechnungen mit vollen, d.h. 1D-hydrostatischen Sternmodellen zur Bestätigung der Ergebnisse der Bipolytopenrechnungen, insbesondere der Grenzen der Parameterbereiche, in denen Massentransferzyklen laut dem analytischen Modell auftreten,
- numerische Rechnungen für CVs mit entwickelten Sternen, sowohl für Sterne der Terminal Age Main Sequence (TAMS), als auch für die bereits oben erwähnten entwickelten Kerne massereicherer Sterne nach Verlust ihrer Hülle, als auch für Unterriesen und Riesen,
- numerische Langzeitentwicklungen von entwickelten und unentwickelten CVs für verschiedene Drehimpulsverluststraten,
- Benutzung der vollen Bestrahlungstabellen von HAMEURY und RITTER (1997) für die Reaktion der konvektiven Hülle auf Bestrahlung,
- Benutzung realistischerer Modelle für die Bestrahlungsgeometrie in Verbindung mit den oben genannten Punkten.

Die Abarbeitung dieser genannten Punkte ist das Hauptanliegen der vorliegenden Arbeit. Des weiteren sollen die numerischen Entwicklungsrechnungen auch auf weitere Systeme wie Massearme Röntgendoppelsterne (LMXB) ausgedehnt werden, die, anders als CVs, einen Neutronenstern oder ein Schwarzes Loch anstatt eines Weißen Zwergs enthalten. Ein Überblick über diese Systeme findet sich bei LEWIN und VAN PARADIJS (1995). Nach bisheriger Auffassung können LMXBs für halbwegs realistische Systemparameter keine Massentransferzyklen durchlaufen (KING et al., 1996, 1997, RITTER et al., 2000).

Der Grund, warum bisher noch keine adäquaten Rechnungen mit vollen Sternmodellen durchgeführt wurden, liegt hauptsächlich darin, daß die numerische Behandlung der Bestrahlungsrückkopplung eine Reihe von Problemen aufwirft, die entweder nichttrivial oder zumindest nur relativ zeitaufwendig zu lösen sind. Mit der Lösung dieser numerischen Probleme beschäftigt sich der erste Teil der vorliegenden Arbeit. Ziel ist die Entwicklung eines Doppelsternentwicklungsprogramms, das insbesondere das Ein- und Ausschalten des Massentransfers numerisch mit der nötigen Genauigkeit berechnen kann, was mit den bestehenden Sternentwicklungsprogrammen nicht möglich gewesen wäre. Als Ausgangspunkt dient das Einzelsternentwicklungsprogramm von SCHLATTL et al. (1997), welches ursprünglich auf KIPPENHAHN et al. (1967) zurückgeht.

Zusammengefaßt beschäftigt sich die vorliegende Arbeit allgemein mit der Langzeitentwicklung halbgetrennter Doppelsternsysteme aus einem masseverlierenden Hauptreihenstern oder Riesen und einem akkretierenden kompakten Stern, einem Weißen Zwerg, Neutronenstern oder Schwarzem Loch. Hierzu zählen die verschiedenen Typen von Kataklysmischen Veränderlichen und Röntgendoppelsternen sowie Symbiotische Sterne. In Kapitel 2 werden die physikalischen und

numerischen Grundlagen diskutiert, die notwendig sind, um überhaupt die Langzeitentwicklung halbgetrennter Doppelsternsysteme numerisch akkurat behandeln zu können. Welche Grundlagen dies sind, soll im Folgenden näher ausgeführt werden.

Doppelsterne sind gravitativ aneinander gebunden. Die genaue Form des Gravitationspotentials hängt von der Materieverteilung im System und somit dem mechanischen Aufbau der beiden Sterne ab. Der Sternaufbau ist wiederum vom Gravitationspotential abhängig. Die Behandlung der Dynamik von Doppelsternen mit Massentransfer ist daher ein hochkomplexes dreidimensionales, hydrodynamisches Problem. Auch wenn mittlerweile numerische Rechnungen für vereinfachte, meist polytrope Modelle existieren, die die Entwicklung über die Dauer einiger Bahnumläufe verfolgen (BISIKALO et al., 1998, MOTL et al., 2002, PHILLIPS und PODSIADLOWSKI, 2002), so liegen Langzeitentwicklungen, etwa über die nukleare Entwicklungszeitskala der beiden Einzelsterne, weit jenseits der derzeitigen technischen Möglichkeiten.

Aus diesem Grund wird die Entwicklung solcher Systeme üblicherweise im Rahmen der ROCHE-Approximation behandelt, welche in Abschnitt 2.1 vorgestellt wird. Hierbei wird die Berechnung des Gravitationspotentials von der des Sternaufbaus entkoppelt. Für die Herleitung des ROCHE-Potentials werden die Sterne im mitrotierenden Bezugssystem als Punktmassen mit festen Koordinaten behandelt. Diese Approximation kann natürlich nur sinnvoll sein, wenn die Sterne ihren gemeinsamen Schwerpunkt auf Kreisbahnen umlaufen. Für die Berechnung des Sternaufbaus werden die Komponenten des Doppelsternsystems als (sphärische) Einzelsterne behandelt und können durch eindimensionale, hydrostatische Sternmodelle beschrieben werden. Die hierfür nötigen Sternaufbaugleichungen werden in Anhang A kurz angesprochen.

Ein wichtiges Konzept in diesem Zusammenhang ist das des kritischen ROCHE-Volumens bzw. des zugehörigen ROCHE-Radius. Das ROCHE-Volumen eines Sterns ist definiert als das Volumen innerhalb der größten Äquipotentialfläche, die das Zentrum des Sterns, aber nicht das des Begleiters umschließt. Es ist dasjenige Volumen, in dem ein (ruhendes) Probeneteilchen gravitativ eindeutig an diesen Stern gebunden ist. Überfüllt der Stern sein ROCHE-Volumen, so ist die Materie außerhalb nicht mehr an den Stern gebunden und kann in den Potentialtopf des Begleiters strömen oder sogar dem System verloren gehen.

In Abschnitt 2.2 werden zwei Modelle zur Berechnung der Massentransferrate als Funktion des Sternradius hergeleitet. Da Hauptreihensterne und Riesen keinen im mathematischen Sinne scharfen Rand besitzen, können auch Sterne, die ihr ROCHE-Volumen nur geringfügig unterfüllen, Masse an ihren Begleiter verlieren, wenn Teile der optisch dünnen Schichten oberhalb der Photosphäre außerhalb des ROCHE-Volumens liegen. Die Massentransferrate ist daher eine zwar stetige Funktion der Differenz zwischen Sternradius R und ROCHE-Radius R_R , die aber auf einer charakteristischen Länge $H \ll R$ sehr steil anwächst.

Ist der Massentransfer stabil, so stellt sich innerhalb einer relativ kurzen Zeit die Massentransferrate unabhängig von der Anfangsbedingung auf einen stationären Wert ein, der im Wesentlichen nur durch die Antriebszeitskala des

Massentransfers bestimmt wird. Das Langzeitmittel der Massentransferrate ist nämlich nicht von der expliziten Massentransferformel als Funktion von R und R_R abhängig, sondern R und R_R stellen sich so ein, daß \dot{M} den Wert der stationären Massentransferrate annimmt. Mit der formalen Berechnung der stationären Massentransferrate und der Untersuchung ihrer Stabilität sowie einer kurzen Diskussion verschiedener Antriebsmechanismen beschäftigt sich Abschnitt 2.3. Des weiteren wird eine Herleitung für den Einfluß des Spins des masseverlierenden Sterns auf die Entwicklung des Systems angegeben. Falls der Spin nämlich berücksichtigt werden soll, so sind die sich hieraus ergebenden zusätzlichen Terme, obwohl sie auf den ersten Blick vernachlässigbar scheinen, dennoch für die numerische Stabilität von Bedeutung.

Die charakteristische Länge H , auf der die Massentransferrate anwächst, ist ein Maß dafür, wie scharf der Sternrand definiert ist. H wird auch als charakteristische Skalenhöhe bezeichnet, und für massearme Hauptreihensterne ist $\frac{H}{R}$ von der Größenordnung 10^{-4} , für Riesen dagegen von der Größenordnung 10^{-2} . Das bedeutet, daß Hauptreihensterne im Allgemeinen einen wesentlich genauer definierten Rand haben als Riesen.

Eine charakteristische Skalenhöhe von 10^{-4} bringt erhebliche numerische Probleme für die Berechnung der Massentransferrate mit sich. Um eine glatte Massenüberstromrate als Funktion der Zeit mit einem relativen Fehler von z.B. 10^{-2} zu erhalten, ist der Radius des Sterns auf 10^{-6} genau zu bestimmen. Für übliche Sternradien von einigen 10^{10} cm bedeutet dies, daß der Radius mit einer Genauigkeit von einigen 10^4 cm bzw. einigen wenigen hundert Metern bestimmt werden muß. Selbst der (scheinbare) Radius der Sonne (in Bogensekunden) kann derzeit nur mit einer Genauigkeit von einigen 10^{-5} gemessen werden, und verschiedene Messungen stimmen nur auf einige 10^{-4} überein, wobei der Radius selbst noch auf der Zeitskala von Jahren über einige 10^{-4} fluktuiert (GOLBASI et al., 2001, PAP et al., 2001, NOËL, 2002). Dies ist jedoch prinzipiell kein Problem, da für Massentransferrechnungen nicht der absolute Sternradius, sondern nur seine differentielle Änderung zwischen aufeinanderfolgenden Zeitschritten zählt. Der Radius selbst läßt sich mathematisch exakt definieren, beispielsweise für graue Atmosphären über eine optische Tiefe von $\tau = \frac{2}{3}$.

Eine numerische Genauigkeit von 10^{-6} für den Radius zu erreichen, stellt eine nicht unbeachtliche Anforderung an den Sternentwicklungscode dar. Insbesondere die Zustandsgleichung, aber auch andere Größen wie die Opazitäten müssen genügend glatte Funktionen der Zustandsvariablen (Druck, Temperatur, chemische Zusammensetzung) sein, zumindest aber stetig differenzierbar. Erfahrungen mit numerischen Rechnungen zeigen, daß eine Implementation, die bei bestimmten Werten von Temperatur, Druck oder chemischer Zusammensetzung zwischen verschiedenen Zustandsgleichungen oder Interpolationstabellen umschaltet, für Massentransferrechnungen vollkommen unbrauchbar ist. Angenommen, beim Umschalten von einer Zustandsgleichung auf eine andere ändert sich der Sternradius zwischen zwei Zeitschritten um 1%, so entspricht dies 100 Skalenhöhen. Für die Massentransferrate in optisch dünner Approximation nach RITTER (1988) bedeutet dies eine Änderung um einen Faktor $e^{100} \approx 10^{43}$, so daß sich die Massentransferrate instantan um 43 Größenordnungen ändert. Die-

ses Verhalten ist natürlich nicht physikalisch. Schrumpft der Radius instantan um 1%, so schaltet sich der Massentransfer ab, wächst der Radius um 1%, so überfüllt der Stern sein ROCHE-Volumen dermaßen, daß die verwendete Approximation zusammenbricht. Selbst wenn sich die Zustandsgleichung nur für einen einzigen Gitterpunkt des Sternmodells ändert, so kann dies zu Sprüngen in der Massentransferrate um einige Größenordnungen führen.

Des weiteren muß die Zustandsgleichung alle relevanten Bereiche in Druck, Temperatur sowie in der chemischen Zusammensetzung abdecken. Es muß möglich sein, mit derselben Zustandsgleichung Hauptreihensterne von einigen Sonnenmassen bis hinunter zu den masseärmsten Hauptreihensternen zu rechnen, von unentwickelten Sternen solarer Zusammensetzung bis zu Sternen am Ende des zentralen Wasserstoffbrennens, die kühlen, ausgedehnten Hüllen von Riesen ebenso wie ihre entarteten Heliumkerne, Sterne mit wasserstoffreichen Hüllen genauso wie Sterne, von denen auf Grund des Massenverlusts nur die heliumreichen Kerne übriggeblieben sind. Es gibt nur wenige Zustandsgleichungen, die diese Anforderungen erfüllen, darunter die Zustandsgleichung von SAUMON et al. (1995), die bekanntermaßen brauchbare Ergebnisse für massearme Sterne liefert. Ihre Implementierung wird in Anhang C diskutiert.

Abschnitt 2.4 behandelt die numerische Stabilität des Massentransfers. Es wird hier analytisch gezeigt, daß das von einer Reihe von Autoren verwandte explizite Zeitschrittverfahren zur Bestimmung des Massenverlusts ΔM in einem Zeitschritt Δt numerisch instabil ist, falls die Zeitschrittlänge größer ist als ein kritischer Wert Δt_{\max} , der sich explizit angeben läßt. Für größere Zeitschritte durchläuft die Massentransferrate ein FEIGENBAUM-Szenario, so daß nach einem Weg gesucht werden muß, die Instabilität zu „kontrollieren“. Mit Hilfe der Theorie des „Controlling Chaos“ läßt sich zeigen, daß ein NEWTON-Verfahren im Wesentlichen eine optimale Kontrolle der chaotischen Dynamik bietet. Da für die Lösung der Sternaufbaugleichungen üblicherweise bereits ein NEWTON-Verfahren, nämlich das sogenannte HENYEY-Verfahren (KIPPENHAHN et al., 1967), benutzt wird, bietet es sich an, die Gesamtmasse M als zusätzliche Variable in das HENYEY-Verfahren einzubauen. Eine detaillierte Beschreibung des modifizierten Algorithmus findet sich in Anhang B.

Mit dem Problem der Bestrahlungsrückkopplung beschäftigt sich Kapitel 3, welches den eigentlichen Kern der Arbeit ausmacht. Zu Beginn wird in Abschnitt 3.1 die Reaktion von Sternen auf Bestrahlung im Rahmen des Reflexionseffekts ausführlich erläutert. Hierbei wird auch kurz auf das von verschiedenen Autoren verwendete Ein-Zonen-Modell für die Reaktion konvektiver Sternhüllen auf Bestrahlung eingegangen und eine Abschätzung für die maximal mögliche Radiusänderung als Folge der Bestrahlung gegeben.

Im Anschluß daran wird in Abschnitt 3.2 diskutiert, wie sich der intrinsische Fluß als Funktion des Bestrahlungsflusses verhält und inwieweit dieses Verhalten durch die chemische Zusammensetzung der bestrahlten Atmosphäre, die Mischungsweglänge sowie den Einfallswinkel relativ zur Oberflächennormalen beeinflusst wird. Hierbei werden Ergebnisse von NORDLUND und VAZ (1990) für nichtgraue Atmosphären mit den entsprechenden Werten aus den Bestrah-

lungstabellen von HAMEURY und RITTER (1997) verglichen. Diese Tabellen, die die Reaktion konvektiver Sternhüllen auf Bestrahlung für graue Atmosphären angeben, bilden die Grundlage der numerischen Rechnungen in dieser Arbeit, da es derzeit noch keine vollen Atmosphärenmodelle gibt, die die Bestrahlung des Sterns berücksichtigen und für Sternentwicklungsrechnungen verwendbar wären. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit im Hinblick auf die Bestrahlungsrückkopplung eine graue Atmosphäre verwandt. Dies kann insbesondere für kühle, massearme Hauptreihensterne zu signifikanten, systematischen Abweichungen von 100 K und mehr in der Effektivtemperatur führen (CHABRIER und BARAFFE, 1997, MONTALBÁN et al., 2000). Das Ziel dieser Arbeit ist es jedoch nicht, möglichst akkurate Sternmodelle, mit oder ohne Bestrahlung, zu produzieren, sondern die Wirkung von Bestrahlung auf den Massentransfer eines halbgetrennten Doppelsternsystems zu untersuchen. Das heißt, es geht um die durch Bestrahlung hervorgerufenen *differentiellen* Änderungen der stellaren Kenngrößen Leuchtkraft, Effektivtemperatur und insbesondere des Radius zwischen einem bestrahlten und einem unbestrahlten Modell, und nicht um die absoluten Werte dieser Größen. Auch das Spektrum der bestrahlten Atmosphäre ist für Massentransferrechnungen irrelevant, so daß die Verwendung einer grauen Atmosphäre für dieses Problem sinnvoll ist, so ungenau die Resultate für unbestrahlte, kühle Sterne im Vergleich zu den Ergebnissen für nichtgrauen Atmosphären auch sein mögen.

Für die Modellierung der Geometrie des Bestrahlungsflusses werden in Abschnitt 3.3 zwei Bestrahlungsmodelle vorgestellt: das *Constant Flux* Modell, welches der Einfachheit halber eine konstante Bestrahlungsstärke auf der angestrahlten Oberfläche annimmt, und das detailliertere *Point Source* Modell, welches annimmt, daß der Stern durch eine Punktquelle am Ort des Begleiters angestrahlt wird.

Eine schematische Darstellung des Ablaufs derartiger Massentransferzyklen auf der thermischen Zeitskala sowie ein Überblick über die verwendeten physikalischen Komponenten des Modells findet sich in Abschnitt 3.4. Das analytische Modell wird schließlich in Abschnitt 3.5 entwickelt, in Anlehnung an die Arbeiten von RITTER et al. (1995, 1996), KING et al. (1996), RITTER et al. (2000). Hierfür wird eine lineare Stabilitätsanalyse für die stationäre Massentransferrate durchgeführt, die auf ein einfaches Kriterium für das Auftreten von Massentransferzyklen führt. Im Rahmen des Bipolytopenmodells und unter Verwendung einiger einfacher Homologieannahmen läßt sich schließlich ein expliziter Ausdruck für das Instabilitätskriterium und somit für das Auftreten von Massentransferzyklen auf der thermischen Zeitskala angeben.

Zum Abschluß werden in Abschnitt 3.6 werden numerische Langzeitentwicklungen von Kataklysmischen Veränderlichen und Massearmen Röntgendoppelsternen für verschiedene mögliche Drehimpulsverlustraten präsentiert sowie das Auftreten von Massentransferzyklen für diese Systeme ausführlich diskutiert und mit den Vorhersagen des analytischen Modells verglichen.

2 Entwicklung von kompakten Doppelsternen

2.1 Das Roche-Potential

Die dynamische Entwicklung von Doppelsternsystemen wird üblicherweise in der ROCHE-Approximation behandelt. Dabei werden die beiden Sterne für die Bestimmung des Gravitationspotentials als Punktmassen betrachtet und so die Lösung der Sternaufbaugleichungen von der Lösung der POISSON-Gleichung für das Gravitationspotential entkoppelt. Dies führt zu einer drastischen Vereinfachung, die es ermöglicht, die Entwicklung der Sterne durch eindimensionale, hydrostatische Modelle zu beschreiben anstatt durch volle dreidimensionale, hydrodynamische Modelle.

Das Gravitationspotential zweier Punktmassen M_1 und M_2 , die sich am Ort \mathbf{R}_1 bzw. \mathbf{R}_2 befinden, ist mit der Gravitationskonstante Γ durch

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma M_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_1|} - \frac{\Gamma M_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_2|} \quad (2.1)$$

gegeben. Diese Formel gilt auch allgemein für ausgedehnte Körper mit einer sphärisch symmetrischen Massenverteilung (z.B. sphärische Sterne) für \mathbf{r} außerhalb der beiden Körper.

Rotieren die beiden Massen mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ um ihren gemeinsamen Schwerpunkt \mathbf{R}_s , so erfährt ein Massenelement im mitrotierenden Bezugssystem die Beschleunigung

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla\Phi(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}. \quad (2.2)$$

Für die Herleitung des ROCHE-Potentials wird nun vorausgesetzt, daß die beiden Massen auf Kreisbahnen umlaufen und somit $\boldsymbol{\omega}$ konstant ist, d.h. $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$. Des weiteren wird angenommen, daß sich das betrachtete Massenelement relativ zum rotierenden Bezugssystem in Ruhe befindet, d.h. $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$. Dadurch fallen sowohl die *Linear-* als auch die *Coriolisbeschleunigung* weg, und die Bewegungsgleichung im mitrotierenden System läßt sich unter Einbeziehung der Zentrifugalbeschleunigung durch ein *effektives Potential* beschreiben. Wählt man die Rotationsachse parallel zur z -Achse, d.h. $\boldsymbol{\omega} =: \omega \mathbf{e}_z$, so ergibt sich im mitrotierenden Schwerpunktssystem:

$$\Phi_R(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2), \quad (2.3)$$

wobei x und y die kartesischen Komponenten von \mathbf{r} bezeichnen.

Verschiebt man ferner den Koordinatenursprung nach \mathbf{R}_1 und wählt als x -Achse die Verbindungslinie der beiden Massen, d.h. $\mathbf{R}_2 = A\mathbf{e}_x$, wobei A den Bahnabstand bezeichne, so erhält man

$$\Phi_R(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma M_1}{|\mathbf{r}|} - \frac{\Gamma M_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_2|} - \frac{1}{2}\omega^2 ((x - |\mathbf{R}_s|)^2 + y^2) \quad (2.4)$$

mit dem Schwerpunkt

$$\mathbf{R}_s = \frac{M_2}{M_1 + M_2} A\mathbf{e}_x. \quad (2.5)$$

Durch Einführung dimensionsloser Koordinaten

$$\xi := \frac{x}{A}, \quad \eta := \frac{y}{A}, \quad \zeta := \frac{z}{A} \quad (2.6)$$

sowie des Massenverhältnisses

$$q := \frac{M_1}{M_2}, \quad (2.7)$$

ergibt sich unter Verwendung des dritten KEPLERSchen Gesetzes

$$\omega^2 = \frac{\Gamma(M_1 + M_2)}{A^3} \quad (2.8)$$

das dimensionslose ROCHE-Potential

$$\hat{\Phi}_R(\xi, \eta, \zeta) = - \left[\frac{q}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} + \frac{1}{\sqrt{(1 - \xi)^2 + \eta^2 + \zeta^2}} + \frac{1 + q}{2} \left(\left(\xi - \frac{1}{1 + q} \right)^2 + \eta^2 \right) \right], \quad (2.9)$$

das in Abb. 2.1 in der x - y -Ebene dargestellt ist. Es gilt:

$$\Phi_R(A\xi, A\eta, A\zeta) = \frac{\Gamma M_2}{A} \hat{\Phi}_R(\xi, \eta, \zeta). \quad (2.10)$$

Man bezeichnet denjenigen Punkt $(\xi_{L_1}, 0, 0)$ auf der Verbindungslinie zwischen \mathbf{R}_1 und \mathbf{R}_2 , auf dem das ROCHE-Potential ein lokales Maximum annimmt, als L_1 - oder *inneren* LAGRANGE-Punkt. Das Volumen innerhalb derjenigen Äquipotentialfläche mit $\hat{\Phi}_R = \hat{\Phi}_R(\xi_{L_1})$, die M_1 umschließt, heißt ROCHE-Volumen von M_1 . Der ROCHE-Radius von M_1 ist definiert als derjenige Radius einer Sphere, die gerade das ROCHE-Volumen von M_1 umschließt, und ist in den gewählten, dimensionslosen Einheiten offensichtlich nur vom Massenverhältnis q abhängig. In absoluten Einheiten gilt daher für den ROCHE-Radius:

$$R_R(q) = A f_R(q). \quad (2.11)$$

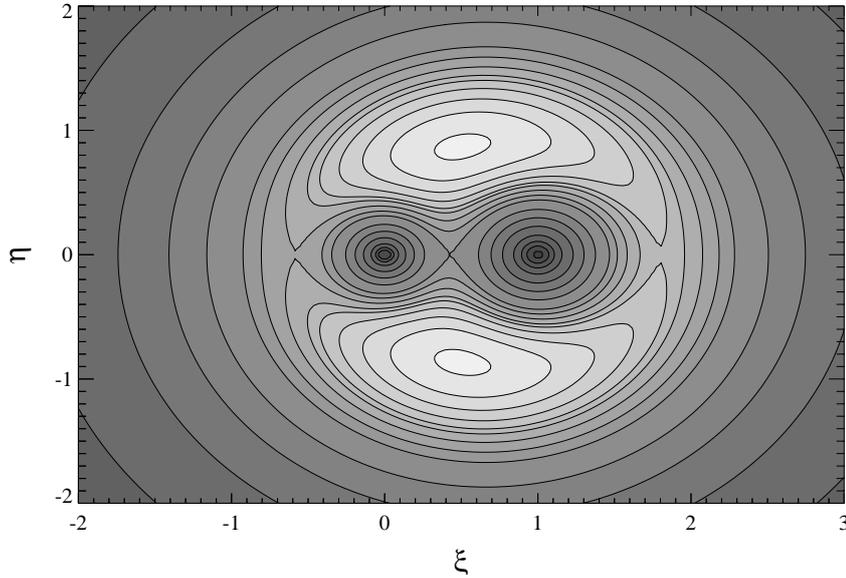


Abbildung 2.1: Graphische Darstellung des ROCHE-Potentials Φ_R für $q = 0.5$ in der ξ - η -Ebene. Die Höhenlinien sind nicht äquidistant in Einheiten des Potentials. Helle Graustufen entsprechen einem hohen, dunkle Graustufen einem niedrigen Potential.

Sowohl der dimensionslose ROCHE-Radius $f_R(q)$ als auch die Position des L_1 -Punktes ξ_{L_1} lassen sich nur numerisch berechnen und sind tabelliert (MOCHNACKI, 1984). Einfache analytische Näherungen sind durch

$$f_R(q) \approx \left(\frac{8}{34}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{q}{q+1}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.12a)$$

für $q < 0.8$ und

$$f_R(q) \approx 0.38 + 0.2 \log q \quad (2.12b)$$

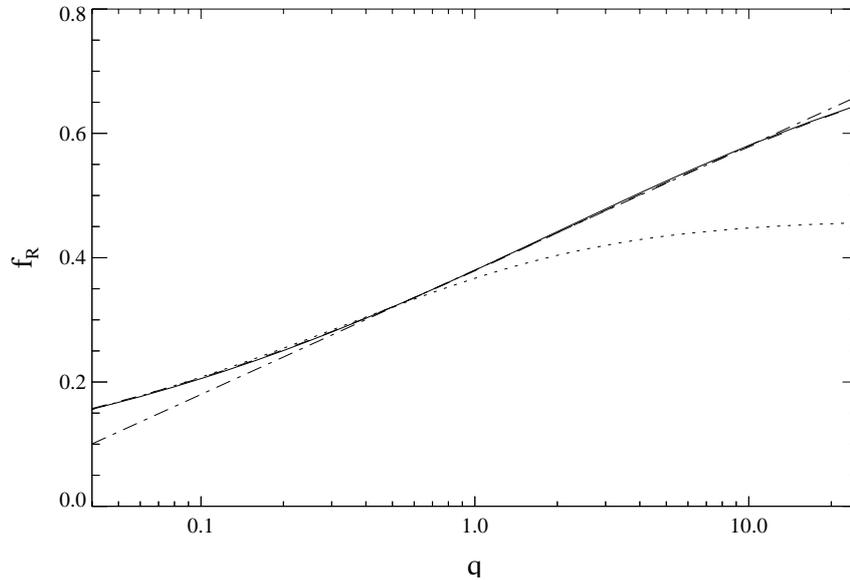
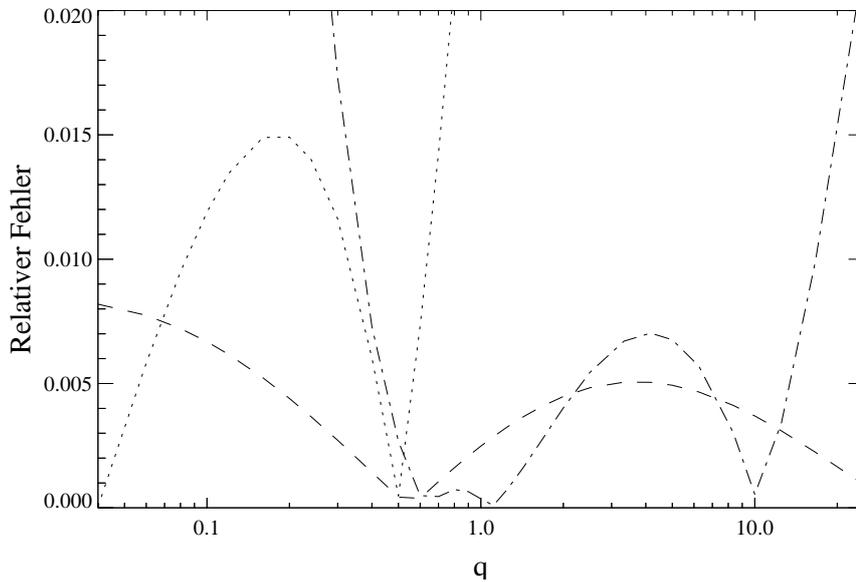
für $0.3 < q < 20$ gegeben (PACZYŃSKI, 1971). Eine bessere Näherung stellt

$$f_R(q) \approx \frac{0.49 q^{\frac{2}{3}}}{0.6 q^{\frac{2}{3}} + \ln\left(1 + q^{\frac{1}{3}}\right)} \quad (2.13)$$

dar, die im Bereich $0.03 \leq q \leq 30$ bis auf etwa 1% mit dem tatsächlichen ROCHE-Radius übereinstimmt (EGGLETON, 1983). Abb. 2.2 zeigt einen Vergleich der analytischen Näherungen mit der numerischen Lösung.

Für nicht zu kleine oder zu große Werte von q läßt sich die Position des L_1 -Punktes ξ_{L_1} durch

$$\xi_{L_1}(q) = 0.296724 + 0.332525 q - 0.13495 q^2 \quad (2.14a)$$

(a) Dimensionsloser ROCHE-Radius $f_R(q)$ für verschiedene Approximationen

(b) Relativer Fehler der Approximationen im Vergleich zur numerischen Lösung

Abbildung 2.2: Vergleich der numerischen Lösung von MOCHNACKI (durchgezogene Linie in Abb. 2.2(a)) für den dimensionslosen ROCHE-Radius mit den analytischen Näherungen von EGGLETON (gestrichelte Linie) und PACZYŃSKI (punktierter Linie für (2.12a) und strichpunktierter Linie für (2.12b)).

für $0.2 \leq q < 0.85$ und

$$\xi_{L_1}(q) = 0.383435 + 0.1635417q - 0.318852q^2 \quad (2.14b)$$

für $0.85 \leq q \leq 2.8$ mit einem relativen Fehler von weniger als 5% approximieren (KOLB, 1988). Eine auf einem größeren Bereich $0.057 \leq q \leq 32$ gültige Näherungsformel mit einem relativen Fehler von 0.5% ist durch

$$\xi_{L_1}(q) \approx 1 - \frac{1}{1 + q^{0.404}} \quad (2.15)$$

gegeben. Für extreme Werte von q ist hingegen die analytische Näherung

$$\xi_{L_1}(q) \approx w - \frac{1}{3}w^2 - \frac{1}{9}w^3 - \dots \quad (2.16)$$

für $q \rightarrow 0$ bzw.

$$\xi'_{L_1}(q) = 1 - \xi_{L_1}\left(\frac{1}{q}\right) \quad (2.17)$$

für $q \rightarrow \infty$ mit

$$w(q) = \left(\frac{q}{3(1+q)}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.18)$$

vorzuziehen (KOPAL, 1959, 1989)¹. Ein graphischer Vergleich der numerischen Lösung mit den angegebenen Approximationen ist in Abb. 2.3 dargestellt.

Am L_1 -Punkt $(\xi_{L_1}, 0, 0)$ gilt:

$$\nabla \hat{\Phi}_R = 0, \quad \nabla^2 \hat{\Phi}_R \neq 0, \quad (2.19)$$

d.h. das Potential hat dort einen Sattel². Es bezeichnen

$$C_1 := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \hat{\Phi}_R(\xi_{L_1}, 0, 0) = -\frac{1}{2}(2g(q) + q + 1) < 0, \quad (2.20a)$$

$$C_2 := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \hat{\Phi}_R(\xi_{L_1}, 0, 0) = \frac{1}{2}(g(q) - q - 1) > 0, \quad (2.20b)$$

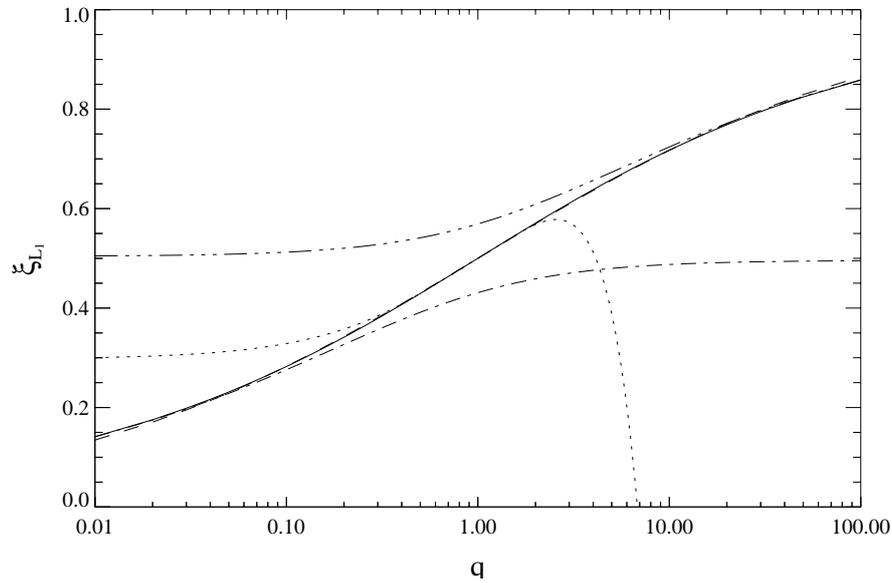
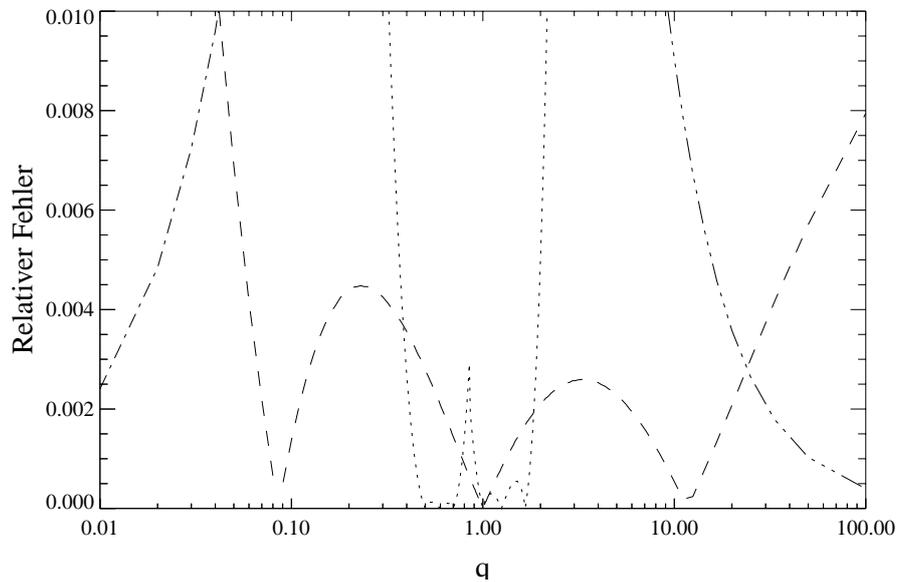
$$C_3 := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \hat{\Phi}_R(\xi_{L_1}, 0, 0) = \frac{1}{2}g(q) > 0 \quad (2.20c)$$

mit

$$g(q) = \frac{q}{\xi_{L_1}^3} + \frac{1}{(1 - \xi_{L_1})^3} \quad (2.21)$$

¹Zum Vergleich mit KOPAL (1989, S. 14) ist zu beachten: Dort ist zum einen q als $\frac{M_2}{M_1}$ definiert, und zum anderen enthält die Formel von $w(q)$ einen Druckfehler.

²In ξ -Richtung handelt es sich um ein lokales Maximum, in η - und ζ -Richtung um ein lokales Minimum.

(a) $\xi_{L_1}(q)$ für verschiedene Approximationen.

(b) Relativer Fehler der Approximationen im Vergleich zur numerischen Lösung.

Abbildung 2.3: Vergleich der numerischen Lösung für $\xi_{L_1}(q)$ von MOCKNACKI (durchgezogene Linie in Abb. 2.3(a)) mit verschiedenen Approximationen. (2.14) ist punktiert, (2.15) gestrichelt dargestellt. Strichpunktiert und punktiert-strichpunktiert sind die analytischen Näherungslösungen von KOPAL (2.16) für $q \rightarrow 0$, bzw. $q \rightarrow \infty$.

die zweiten Ableitungen von $\hat{\Phi}_R$ nach den Koordinaten am L_1 -Punkt. Dann läßt sich das ROCHE-Potential in einer Umgebung des L_1 -Punktes in zweiter Ordnung durch

$$\hat{\Phi}_R(\xi, \eta, \zeta) \approx \hat{\Phi}_{L_1} + [C_1(\xi - \xi_{L_1})^2 + C_2\eta^2 + C_3\zeta^2] \quad (2.22)$$

approximieren³.

Die Kräfteverhältnisse in Doppelsternsystemen weichen mehr oder weniger von der idealisierten ROCHE-Näherung ab, weil zum einen die Äquipotentialflächen, die im hydrostatischen Gleichgewicht Flächen gleichen Drucks und gleicher Dichte entsprechen, nicht exakt sphärisch sind. Die Abweichungen werden umso größer, je näher die Sternoberfläche dem kritischen Potential $\Phi_{L_1} := \Phi_R(x_{L_1})$ kommt. Da die Masse in Sternen in der Regel sehr stark zum Sternzentrum hin konzentriert ist, sind die Auswirkungen dieser Abweichungen auf das Potential vernachlässigbar, selbst wenn die Hüllen der Sterne deutlich von der sphärischen Form abweichen (PRINGLE, 1985).

Bei Sternen, die ihr ROCHE-Volumen ausfüllen, ist es üblich, den Radius in sogenannten *volumenäquivalenten Radien* anzugeben, d.h. man betrachtet denjenigen Radius R_V , den ein sphärischer Stern mit demselben Volumen hätte. 3D-Simulationen zeigen, daß ein Stern, sein ROCHE-Volumen ausfüllt, auf Grund der geometrischen Verzerrung durch das nichtsphärische Gravitationspotential einen um 5 – 12% größeren volumenäquivalenten Radius als ein äquivalenter sphärischer Einzelstern besitzt (RENVOIZÉ et al., 2002).

Es ist möglich, jeder Äquipotentialfläche mit $\Phi_V \leq \Phi_{L_1}$ eindeutig einen volumenäquivalenten Radius R_V zuzuordnen, so daß $R_V(\Phi_V)$ eine streng monoton wachsende Funktion ist. Die zugehörige Umkehrfunktion läßt sich als $\frac{1}{r}$ -Potential mit einem Formfaktor $f(q, R_V)$ beschreiben:

$$\Phi_V(R_V) =: -\frac{\Gamma M_1}{R_V} f(q, R_V). \quad (2.23)$$

Offensichtlich muß $f(q, R_V)$ für $R_V \rightarrow 0$ gegen 1 gehen, da für kleine Radien $R_V \ll R_R$ der Unterschied zwischen KEPLER- und ROCHE-Potential verschwindet, und wird maximal für $R_V \rightarrow R_R$. Die Ableitung

$$\left. \frac{d\Phi_V}{dR_V} \right|_{R_R} =: \frac{\Gamma M_1}{R_R^2} \gamma_R(q) \quad (2.24)$$

bezeichnet man als *effektive Gravitationsbeschleunigung*, und definiert darüber eine dimensionslose Funktion $\gamma_R(q)$, die die mittlere Abweichung der Oberflächenbeschleunigung eines Sterns, der sein ROCHE-Volumen ausfüllt, gegenüber der eines Einzelsterns beschreibt⁴. $\gamma_R(q)$ ist im interessierenden Bereich eine streng monoton fallende Funktion von der Größenordnung 1. Sie läßt sich mit einer Genauigkeit von etwa 1% durch

$$\gamma_R(q) \approx \begin{cases} 0.954 - 0.039 \log q + 0.114(\log q)^2, & \text{falls } 0.05 \leq q \leq 1, \\ 0.954 - 0.025 \log q - 0.038(\log q)^2, & \text{falls } 1 < q \leq 25 \end{cases} \quad (2.25)$$

³Die gemischten zweiten Ableitungen verschwinden am L_1 -Punkt.

⁴Es gilt: $\gamma_R(q) = f(q, R_R) + R_R \left. \frac{\partial f(q, R_V)}{\partial R_V} \right|_{R_R}$.

approximieren (RITTER, 1988)⁵.

Zum anderen weichen reale Doppelsternsysteme dadurch von dem idealisierten ROCHE-Modell ab, daß sich die beiden Sterne nicht notwendigerweise auf Kreisbahnen bewegen müssen und auch nicht starr rotieren. Allerdings sorgt bei Sternen, die ihr ROCHE-Volumen zumindest zu einem nennenswerten Teil ausfüllen, die Gezeitenreibung auf kurzen Zeitskalen für die Zirkularisierung des Orbits und die Synchronisation von Rotations- und Bahnperiode. Bei Sternen mit konvektiven Hüllen ist die Synchronisationszeitskala von der Größenordnung

$$t_{\text{sync}} \sim 10^4 \left(\frac{2}{q}\right) \left(1 + \frac{1}{q}\right) P^4 \quad (2.26)$$

und die Zirkularisationszeitskala von der Größenordnung

$$t_{\text{circ}} \sim 10^6 q \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{q}\right)\right)^{\frac{5}{3}} P^{\frac{16}{3}}, \quad (2.27)$$

wobei die Bahnperiode P in Tagen und die Zeitskalen t_{sync} sowie t_{circ} in Jahren angegeben sind (ZAHN, 1977). Ein kurzer Überblick über Dämpfungszeitskalen für verschiedene Dämpfungsmechanismen findet sich bei HURLEY et al. (2002).

Aus diesem Grund kann die ROCHE-Näherung für Doppelsterne mit Massentransfer als genügend genau angenommen werden, da das Auftreten von Massentransfer erfordert, daß der masseverlierende Stern sein ROCHE-Volumen im Wesentlichen ausfüllt oder sogar überfüllt, so daß Gezeitenreibung wichtig wird. Für eine ausführlichere und allgemeinere Behandlung des ROCHE-Problems sei auf KOPAL (1959, 1989) verwiesen.

2.2 Der Massentransfer

Das Potential Φ_{L_1} des inneren LAGRANGE-Punktes liegt deutlich niedriger als das $\frac{1}{r}$ -Potential des Einzelsterns im Unendlichen. Sternmaterie, die sich außerhalb des kritischen ROCHE-Volumens des Sterns befindet, ist gravitativ nicht eindeutig an diesen gebunden und kann in den Potentialtopf des Begleiters strömen oder sogar dem System verloren gehen. Es ist klar, daß ein Stern, der sein ROCHE-Volumen überfüllt, strenggenommen nicht im hydrostatischen Gleichgewicht sein kann, da er ständig Materie über den L_1 -Punkt an seinen Begleiter verliert. Sogar ein Stern, der etwas kleiner als sein ROCHE-Radius ist, kann Materie über den L_1 -Punkt verlieren, da Sterne im Allgemeinen keinen scharfen Rand haben und somit optisch dünne Schichten der oberen Atmosphäre über den ROCHE-Radius hinausragen können.

⁵Zu beachten ist, daß in dem zitierten Artikel der masseverlierende Stern den Index 2 trägt, während er in dieser Arbeit den Index 1 besitzt, so daß q in q^{-1} übergeht.

2.2.1 Die Bernoulli-Gleichung

Die Materie aus höheren Atmosphärenschichten, die ein Stern über den L_1 -Punkt verliert, wird zur Aufrechterhaltung des hydrostatischen Gleichgewichts aus tieferen Schichten nachgeführt. Es bildet sich ein Materiestrom aus dem Potentialtopf des masseverlierenden Primärsterns in den des Sekundärsterns, der durch das Integral der Stromdichte $j = \rho v$ über die L_1 -Ebene gegeben ist:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x_{L_1}, y, z) v(x_{L_1}, y, z) dy dz. \quad (2.28)$$

In gewisser Weise läßt sich der Massentransfer am L_1 -Punkt als Strömung durch eine LAVAL-Düse auffassen, deren „Wände“ durch das Gravitationspotential gebildet werden. Eine solche Düse hat die Eigenschaft, daß die Stromdichte j an der engsten Stelle maximal wird, während der Druck über den ganzen Weg kontinuierlich ab- und die Geschwindigkeit zunimmt. Dabei kann die Geschwindigkeit an der engsten Stelle, also dem L_1 -Punkt, höchstens die Schallgeschwindigkeit

$$v_s = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} \quad (2.29)$$

annehmen (LANDAU und LIFSCHITZ, 1991). Analytische Berechnungen zeigen, daß für einen optisch dünnen Materiestrom zumindest in einer ε -Umgebung um den L_1 -Punkt Schallgeschwindigkeit erreicht wird (LUBOW und SHU, 1975).

Ist die Strömung *stationär*, d. h. ist sie an jedem Raumpunkt zeitlich konstant, so läßt sich die BERNOULLI-Gleichung anwenden, die besagt, daß an jedem Punkt einer durch l parametrisierten Stromlinie mit der lokalen Strömungsgeschwindigkeit $v(l)$

$$\frac{1}{2} (v^2(l_2) - v^2(l_1)) + \Phi_R(l_2) - \Phi_R(l_1) + \int_{\rho(l_1)}^{\rho(l_2)} \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} d\rho = 0 \quad (2.30)$$

erfüllt ist⁶ (MIHALAS und MIHALAS, 1984, LANDAU und LIFSCHITZ, 1991).

Durch Vorgabe von $\frac{dP}{d\rho}$ ergibt sich hieraus eine Gleichung für $\rho(l_2)$ als Funktion von $\rho(l_1)$. Hieraus läßt sich durch eine geeignete Wahl von l_1 und l_2 für eine beliebige Stromlinie die Dichte in der L_1 -Ebene und somit die Massenüberstromrate aus (2.28) berechnen.

2.2.2 Die Massentransferrate in optisch dünner Approximation

Als *optisch dünnen Massentransfer* bezeichnet man den Fall, daß der masseverlierende Stern sein ROCHE-Volumen nicht vollständig ausfüllt, so daß der

⁶Die BERNOULLI-Gleichung ist auch unter Berücksichtigung der Corioliskraft im mitrotierenden Bezugssystem gültig (LUBOW und SHU, 1975).

Materiestrom nur aus den optischen dünnen Atmosphärenschichten oberhalb der Photosphäre gespeist wird. Die sich hierfür ergebende Massenüberstromrate wurde bereits von RITTER (1988) diskutiert.

Die optisch dünnen, äußeren Atmosphärenschichten verhalten sich in guter Näherung wie ein ideales Gas. Für einen optisch dünnen Materiestrom kann daher die ideale Gasgleichung

$$\frac{P}{\rho} = \frac{k}{\mu} T \quad (2.31)$$

mit der BOLTZMANN-Konstanten k und dem Molekulargewicht μ angewendet werden.

Der Gasstrom von der Photosphäre bis zum L_1 -Punkt wird als isotherm⁷ und das Molekulargewicht als konstant angenommen, d.h. es gilt:

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{k}{\mu} T, \quad (2.32)$$

woraus sich die isotherme Schallgeschwindigkeit

$$v_s = \sqrt{\frac{kT}{\mu}} \quad (2.33)$$

ergibt.

Es sei nun $\mathbf{r}(l)$ eine beliebige, durch l parametrisierte Stromlinie, die von der Photosphäre des Sterns durch die L_1 -Ebene verläuft. Ohne Einschränkung kann angenommen werden, daß $\mathbf{r}(l_1)$ in der Photosphäre liegt, wo sich der Stern noch in guter Näherung im hydrostatischen Gleichgewicht befindet, d.h. $v(l_1) = 0$ gilt, während $\mathbf{r}(l_2)$ in der L_1 -Ebene liegt mit $v(l_2) \approx v_s$. Es bezeichne ferner $\rho_0 := \rho(l_1)$ die Dichte und $\Phi_0 := \Phi_R(l_1) = \frac{\Gamma M_2}{A} \hat{\Phi}_R(l_1)$ das Gravitationspotential am Photosphärenpunkt. Unter der Annahme einer stationären Strömung läßt sich die BERNOULLI-Gleichung anwenden. Durch Einsetzen von (2.32) in (2.30) und Auflösen nach $\rho(l_2)$ ergibt sich:

$$\rho(l_2) = \frac{\rho_0}{\sqrt{e}} \exp\left(-\frac{\Phi_R(l_2) - \Phi_0}{v_s^2}\right). \quad (2.34)$$

Nun ließe sich die TAYLOR-Entwicklung von $\hat{\Phi}_R$ aus (2.22) einsetzen und ergäbe eine Abhängigkeit von $\rho \sim \exp(-\Delta R^2)$ für die Dichte entlang der x -Achse (MEYER und MEYER-HOFMEISTER, 1983), wobei sich diese Abhängigkeit jedoch auf den *wahren* Abstand ΔR zwischen dem Photosphärenpunkt und dem L_1 -Punkt bezöge. Diese Darstellung wäre aber für das zu untersuchende Problem ungeeignet⁸.

⁷Diese Annahme ist offensichtlich nicht erfüllt, wenn der Materiestrom durch die Leuchtkraft des Begleiters signifikant aufgeheizt wird. Allerdings kann bei Vorhandensein einer Akkretionsscheibe um den Begleiter davon ausgegangen werden, daß der L_1 -Punkt durch den (kühlen) Rand der Scheibe abgeschattet wird.

⁸Beispielsweise hätte die Zeitableitung von $\Delta R \sim \sqrt{\Phi_{L_1} - \Phi_0}$ eine Polstelle für $\Phi_0 = \Phi_{L_1}$ im dem Fall, daß das Photosphärenpotential, bedingt durch die Expansion des Sterns, über einen gewissen Zeitraum linear anwächst.

Stattdessen bietet es sich im Folgenden an, den Abstand zwischen dem ROCHE-Radius und dem Sternradius in volumenäquivalenten Einheiten⁹ zu verwenden (RITTER, 1988). Aus (2.24) ergibt sich somit das Potential in der Photosphäre eines nahezu sein ROCHE-Volumen füllenden Sterns mit Radius R :

$$\Phi_0 \approx \Phi_{L_1} + \left. \frac{\partial \Phi_V}{\partial R} \right|_{R_R} (R - R_R) = \Phi_{L_1} + \frac{\Gamma M_1}{R_R^2} \gamma_R(q) (R - R_R). \quad (2.35)$$

Ferner folgt aus (2.22) mit der Definition von

$$B_2 := \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_R}{\partial y^2} = \frac{\Gamma M_2}{2A^3} \frac{\partial^2 \hat{\Phi}_R}{\partial \eta^2} = \frac{\Gamma M_2}{A^3} C_2 > 0, \quad (2.36a)$$

$$B_3 := \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_R}{\partial z^2} = \frac{\Gamma M_2}{2A^3} \frac{\partial^2 \hat{\Phi}_R}{\partial \zeta^2} = \frac{\Gamma M_2}{A^3} C_3 > 0 \quad (2.36b)$$

für das Potential in der L_1 -Ebene:

$$\Phi_R(l_2) \approx \Phi_{L_1} + B_2 y^2 + B_3 z^2. \quad (2.37)$$

Durch Einsetzen der isothermen Schallgeschwindigkeit (2.33), der Potentialentwicklung entlang der x -Achse (2.35) und der Potentialentwicklung in der L_1 -Ebene (2.37) in (2.34) ergibt sich die Dichte in der L_1 -Ebene unabhängig von der gewählten Stromlinie als

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{e}} \exp\left(-\frac{\Gamma M_1 \gamma_R(q)}{v_s^2 R_R^2} (R - R_R)\right) \exp\left(-\frac{B_2 y^2 + B_3 z^2}{v_s^2}\right). \quad (2.38)$$

Die *Druckskalenhöhe* eines Einzelsterns an der Oberfläche läßt sich aus den Sternaufbaugleichungen (A.2), (A.3) und der idealen Gasgleichung (2.31) berechnen:

$$H_{P,0} = -P \left. \frac{\partial r}{\partial P} \right|_R = \left(-\frac{kT\rho}{\mu}\right) \left(-\frac{R^2}{\rho\Gamma M}\right) = \frac{kTR^2}{\mu\Gamma M}. \quad (2.39)$$

Für einen Stern in einem Doppelsternsystem, der sein ROCHE-Volumen ausfüllt, ist die effektive Gravitationsbeschleunigung (2.24) zu berücksichtigen, d.h. in volumenäquivalenten Radien ergibt sich:

$$H_P = \frac{kTR_R^2}{\mu\Gamma M_1} \frac{1}{\gamma_R(q)} = \frac{H_{P,0}}{\gamma_R(q)}. \quad (2.40)$$

Nach Einsetzen der isothermen Schallgeschwindigkeit (2.33) und der Dichte in der L_1 -Ebene (2.38) in das Flächenintegral (2.28) über der Stromdichte $j = \rho v_s$ läßt sich dieses unter Benutzung des Integrals der GAUSSSchen

⁹Falls nicht explizit anders erwähnt, bezeichnet der *Sternradius* R in dieser Arbeit immer den *volumenäquivalenten Sternradius* R_V .

Glockenkurve¹⁰ über y und z explizit auswerten. Unter Verwendung der effektiven Druckskalenhöhe (2.40) ergibt sich schließlich folgende Formel für die Massenüberstromrate:

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{e}} \frac{v_s^3}{\sqrt{B_2 B_3}} \rho_0 \exp\left(\frac{R - R_R}{H_P}\right). \quad (2.41)$$

Die Massenverlustrate $\dot{M} = -I < 0$ hängt somit im Wesentlichen nur von der Differenz $R - R_R$ ab; die Abhängigkeit von den Massen der Sterne sowie von photosphärischen Kenngrößen wie Dichte oder Effektivtemperatur ist im Vergleich zur exponentiellen Abhängigkeit von $R - R_R$ vernachlässigbar¹¹. Für analytische Untersuchungen wird daher häufig die Vereinfachung

$$\dot{M} = -\dot{M}_0 \exp\left(\frac{R - R_R}{H_P}\right) \quad (2.42)$$

mit einer Konstanten \dot{M}_0 verwendet.

Für Hauptreihensterne ist $\frac{H_P}{R}$ von der Größenordnung $10^{-4} - 10^{-3}$, für Riesen deutlich größer, bis zu wenigen 10^{-2} . Faktisch bedeutet dies, daß ein Doppelsystem in einer langlebigen Phase des Massentransfers in guter Näherung, d.h. bis auf einige H_P die Bedingung $R = R_R$ erfüllen muß. Wäre der masseverlierende Stern merklich kleiner, fände kein Massentransfer statt; wäre er merklich größer, so wäre die Massenüberstromrate so hoch, daß ein solches System nur sehr kurzlebig wäre. Freilich läßt sich der Massentransfer beim Überfüllen des ROCHE-Volumens nicht mehr in der optisch dünnen Approximation behandeln, sondern erfordert einen neuen Ansatz, auf den im Folgenden eingegangen werden soll.

2.2.3 Die Massentransferrate in optisch dicker Approximation

Als *optisch dicken Massentransfer* bezeichnet man den Fall, daß der masseverlierende Stern sein ROCHE-Volumen überfüllt, so daß Material aus den optisch dicken Schichten unterhalb der Photosphäre direkt über den L_1 -Punkt strömt. Die zugehörige Massenüberstromrate wurde von KOLB (1988), KOLB und RITTER (1990) hergeleitet.

Als Zustandsgleichung wird auch hier die ideale Gasgleichung (2.31) verwendet. Die spezifische Wärme bei konstantem Volumen bzw. konstantem Druck ist für

¹⁰Es gilt: $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sigma\sqrt{2\pi}$.

¹¹Denn insbesondere verändern sich derartige absolute Kenngrößen, zu denen auch der Radius und der ROCHE-Radius gehören, im Laufe einer Sternentwicklung nur langsam und über weniger Größenordnungen als dies bei Differenzen derartiger Kenngrößen wie $R - R_R$ geschehen kann.

vollständig ionisiertes oder vollständig nichtionisiertes atomares Gas durch

$$c_V = T \left(\frac{dS}{dT} \right)_{\rho, \mu} = \frac{3k}{2\mu}, \quad (2.43)$$

$$c_P = T \left(\frac{dS}{dT} \right)_{P, \mu} = \frac{5k}{2\mu} \quad (2.44)$$

gegeben, wobei S die Entropie pro Masseneinheit bezeichnet.

Ein Problem für die Berechnung des Strömungsverlaufs stellt die a priori unbekannte Temperaturschichtung der Gasströmung dar. Solange die Strömungsgeschwindigkeit groß genug ist, kann zumindest der Energieaustausch zwischen verschiedenen Schichten in genügender Tiefe unterhalb der Photosphäre vernachlässigt werden. Für eine adiabatische Strömung gilt entlang einer Stromlinie

$$P = K\rho^\gamma \quad (2.45)$$

mit einem Adiabatenindex

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} \quad (2.46)$$

und einer von der gewählten Stromlinie abhängigen Adiabatenkonstanten K , die sich aus der idealen Gasgleichung (2.31) und aus (2.45) ergibt:

$$K = \frac{kT}{\mu} \rho^{1-\gamma}. \quad (2.47)$$

Für vollständig ionisiertes, atomares Gas hat γ den Wert $\frac{5}{3}$.

Es gilt:

$$\frac{dP}{d\rho} = K\gamma\rho^{\gamma-1}, \quad (2.48)$$

so daß die Schallgeschwindigkeit durch

$$v_s = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{kT}{\mu}} \quad (2.49)$$

gegeben ist. Es wird nun, wie in Abschnitt 2.2.2 beschrieben, l_1 und l_2 entlang einer beliebigen Stromlinie $\mathbf{r}(l)$ so gewählt, daß $\mathbf{r}(l_2)$ in der L_1 -Ebene liegt und $v(l_1)$ einerseits gegenüber $v(l_2)$ vernachlässigbar ist, andererseits aber auch nicht so klein ist, daß der Gasstrom ins thermische Gleichgewicht gelangen kann. Dies mag in einer (nicht zu kleinen) Umgebung um den L_1 -Punkt erfüllt sein, aber dadurch ist es nicht möglich, für alle Stromlinien ein und dasselbe Ausgangspotential $\Phi_R(l_1) = \Phi_0$ zu wählen, da die Stromlinien die zugehörige Äquipotentialfläche beliebig weit vom L_1 -Punkt entfernt mit beliebig geringer Geschwindigkeit passieren können, im Widerspruch zur Annahme einer schnellen, adiabatischen Strömung. Es bezeichne $\rho_i := \rho(l_i)$, $\Phi_i := \Phi_R(l_i)$

sowie $T_i := T(l_i)$, dann ergibt sich durch Einsetzen von (2.48) und (2.49) in die BERNOULLI-Gleichung (2.30):

$$\frac{1}{2}K\gamma\rho_2^{\gamma-1} + \Phi_2 - \Phi_1 + K\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\rho_2^{\gamma-1} - \rho_1^{\gamma-1}\right) = 0. \quad (2.50)$$

Um diese Gleichung auflösen zu können, werde nun ad hoc angenommen, daß die Stromlinien in der Nähe der L_1 -Punktes auf Äquipotentialflächen verlaufen, d.h. $\Phi_1 = \Phi_2$ gilt¹². Damit folgt für die Dichte ρ_2 in der L_1 -Ebene:

$$\rho_2 = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \rho_1. \quad (2.51)$$

Der optisch dicke Anteil der Massenüberstromrate ergibt sich somit aus (2.28) als Integral über diejenige Teilfläche A der L_1 -Ebene mit $\Phi_{L_1} \leq \Phi_R \leq \Phi_{\text{ph}}$:

$$I = \int_A \rho_2 v_s dA = \int_{\Phi_{L_1}}^{\Phi_{\text{ph}}} \rho_2 v_s \frac{dA}{d\Phi_R} d\Phi_R. \quad (2.52)$$

Gleichung (2.37) liefert für ein vorgegebenes Potential $\Phi_{\text{ph}} \geq \Phi_{L_1}$ eine Parametrisierung

$$z(y) = \pm \sqrt{\frac{\Phi_R - \Phi_{L_1} - B_2 y^2}{B_3}}, \quad (2.53)$$

für den Rand derjenigen (elliptischen) Teilfläche innerhalb der L_1 -Ebene mit $\Phi_{L_1} \leq \Phi_R \leq \Phi_{\text{ph}}$. Hieraus läßt sich sofort die Fläche A als Funktion des Potentials Φ_R ausrechnen:

$$A(\Phi_R) = 2 \int_{-y_{\text{max}}}^{y_{\text{max}}} z(y) dy, \quad (2.54)$$

wobei der Maximalwert y_{max} offensichtlich für $z(y_{\text{max}}) = 0$ angenommen wird, d.h.:

$$y_{\text{max}} = \sqrt{\frac{\Phi_R - \Phi_{L_1}}{B_2}}. \quad (2.55)$$

Daraus folgt:

$$A(\Phi_R) = 2\sqrt{\frac{B_2}{B_3}} \int_{-y_{\text{max}}}^{y_{\text{max}}} \sqrt{y_{\text{max}}^2 - y^2} dy = \frac{\pi}{\sqrt{B_2 B_3}} (\Phi_R - \Phi_{L_1}). \quad (2.56)$$

¹²Diese Annahme muß nicht notwendigerweise erfüllt sein. Für den im folgenden ausgeführten analytischen Ansatz zur Berechnung des optisch dicken Anteils des Materiestroms ist jedoch eine Annahme über Φ_1 und Φ_2 erforderlich, da die BERNOULLI-Gleichung ansonsten nicht gelöst werden kann.

Durch Einsetzen der Schallgeschwindigkeit (2.49), der Dichte in der L_1 -Ebene (2.51) sowie (2.56) in das Integral über die Stromdichte (2.52) ergibt sich der optisch dicke Anteil der Massenüberstromrate:

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{B_2 B_3}} F(\gamma) \int_{\Phi_{L_1}}^{\Phi_{\text{ph}}} \sqrt{\frac{kT_1}{\mu_1}} \rho_1 d\Phi_R \quad (2.57)$$

mit

$$F(\gamma) = \sqrt{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}. \quad (2.58)$$

Um dieses Integral schließlich explizit ausrechnen zu können, ist also die Kenntnis von $\rho_1(\Phi_R)$ und $T_1(\Phi_R)$ erforderlich, d.h. die Kenntnis der thermischen Struktur der äußeren Hülle. Dies ist im Allgemeinen nur numerisch möglich.

Es läßt sich zeigen, daß sich die Massentransferrate in optisch dicker Approximation (2.57) für Polytrope mit dem Polytropenindex

$$n = \frac{1}{\gamma - 1} \quad (2.59)$$

sich tendenziell wie

$$\dot{M} \sim (R - R_R)^{\frac{3}{2} + n} \quad (2.60)$$

verhält (KOLB, 1988). Dieses Ergebnis ist konsistent mit früheren Resultaten für vollkonvektive Sterne mit $n = \frac{3}{2}$ von PACZYŃSKI und SIEKIEWICZ (1972), SAVONIJE (1978).

2.3 Die Langzeitentwicklung halbgetrennter Doppelsternsysteme

2.3.1 Die Stationaritätsbedingung

In den folgenden Abschnitten bezeichne der Index 1 den masseverlierenden Stern und der Index 2 den akkretierenden Stern. Des weiteren werde aus Gründen der Einfachheit angenommen, daß die Massentransferrate \dot{M} nur von $\Delta R_1 := R_1 - R_{R,1}$ abhängt. Dies ist in guter Näherung sowohl für die optisch dünne (2.41) als auch für die optisch dicke Massenüberstromrate (2.57) gültig, zumindest, solange sich das Massenverhältnis $q = \frac{M_1}{M_2}$ sowie der Sternaufbau, und damit die Zustandsgrößen in der Atmosphäre, nicht gravierend ändern. Mit dieser Annahme ergibt sich automatisch, daß die Massentransferrate genau dann stationär ist, wenn ΔR_1 zeitlich konstant ist. Die *Stationaritätsbedingung* lautet somit:

$$\dot{R}_{R,1} = \dot{R}_1. \quad (2.61)$$

Als formale Stationaritätsbedingung betrachtet man statt (2.61) auch häufig

$$\frac{\dot{R}_{R,1}}{R_{R,1}} = \frac{\dot{R}_1}{R_1}. \quad (2.62)$$

Für das qualitative Verständnis sind die beiden Gleichungen äquivalent, quantitativ ist der Unterschied von der Größenordnung $\frac{\Delta R_1}{R_1}$ und somit in der Regel vernachlässigbar.

2.3.2 Die zeitliche Entwicklung des Roche-Radius

Das Bahnträgheitsmoment zweier Punktmassen beträgt

$$\Theta = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} A^2, \quad (2.63)$$

und der Bahndrehimpuls ergibt sich mit dem dritten KEPLERSchen Gesetz (2.8) zu

$$J = \Theta \omega = \sqrt{\frac{\Gamma M_1^2 M_2^2}{M_1 + M_2}} A. \quad (2.64)$$

Der ROCHE-Radius (2.11) des masseverlierenden Primärsterns als Funktion von M_1 , M_2 und J ist somit durch

$$R_{R,1}(M_1, M_2, J) = A f_R(q) = \frac{M_1 + M_2}{\Gamma M_1^2 M_2^2} J^2 f_R\left(\frac{M_1}{M_2}\right) \quad (2.65)$$

mit der totalen Zeitableitung

$$\frac{\dot{R}_{R,1}}{R_{R,1}} = \frac{\partial \ln R_{R,1}}{\partial \ln M_1} \frac{\dot{M}_1}{M_1} + \frac{\partial \ln R_{R,1}}{\partial \ln M_2} \frac{\dot{M}_2}{M_2} + \frac{\partial \ln R_{R,1}}{\partial \ln J} \frac{\dot{J}}{J} \quad (2.66)$$

gegeben.

Es bezeichne

$$\eta(M_1, M_2, J) := -\frac{dM_2}{dM_1} \quad (2.67)$$

den vom Sekundärstern akkretierten Anteil des Materiestroms, der durch die Physik des Akkretionsvorgangs beschrieben wird und für den üblicherweise

$$0 \leq \eta \leq 1 \quad (2.68)$$

angenommen wird. Im Zusammenhang mit Novaexplosionen kann η möglicherweise sogar negativ werden, falls nicht nur die akkretierte, wasserstoffreiche Schicht, sondern auch Teile der darunterliegenden Schichten bei der Novaexplosion herausgeschleudert werden (PRIALNIK und KOVETZ, 1995).

Ein Doppelsternsystem kann auf zwei Arten Drehimpuls verlieren. Zum einen kann der Bahndrehimpuls J explizit von der Zeit abhängen, beispielsweise durch

Drehimpulsverluste infolge der Abstrahlung von Gravitationswellen. Man bezeichnet

$$\frac{\dot{J}_{\text{sys}}}{J} := \left(\frac{d \ln J}{dt} \right)_M \quad (2.69)$$

auch als *systematischen Drehimpulsverlust*, da er unabhängig von eventuellem Massenverlust aus dem System auftritt, d.h. bei konstanter Gesamtmasse

$$M = M_1 + M_2. \quad (2.70)$$

Zum anderen verläßt der nichtakkretierte Anteil des Materiestroms das System mit einem spezifischen Drehimpuls. Man spricht von *Consequential Angular Momentum Loss* (CAML), da er nur als Folge von Massenverlust auftritt, d.h. durch Änderung der Gesamtmasse M bei festgehaltener Zeit t :

$$\frac{\dot{J}_{\text{caml}}}{J} := \left(\frac{d \ln J}{dM} \right)_t \frac{\dot{M}}{M}. \quad (2.71)$$

Offensichtlich gilt:

$$\dot{J} = \dot{J}_{\text{sys}} + \dot{J}_{\text{caml}}. \quad (2.72)$$

Ein Maß für den spezifischen Drehimpuls, mit dem die Materie dem System verloren geht, ist durch

$$\nu(M_1, M_2, J) := \left(\frac{d \ln J}{d \ln M} \right)_t \quad (2.73)$$

gegeben.

Mit Hilfe der Definition von η in (2.67) läßt sich \dot{M}_2 durch $-\eta \dot{M}_1$ und M_2 durch M_1 und q in der Zeitableitung von $R_{R,1}$ in (2.66) ersetzen. Die explizite Auswertung der partiellen Ableitungen schließlich führt auf

$$\frac{\dot{R}_{R,1}}{R_{R,1}} = \zeta_{R,1} \frac{\dot{M}_1}{M_1} + 2 \left(\frac{d \ln J}{dt} \right)_{\text{sys}} \quad (2.74)$$

mit

$$\zeta_{R,1} = (1 - \eta)(2\nu + 1) \frac{q}{1 + q} - 2(1 - \eta q) + (1 + \eta q) \frac{d \ln f_R}{d \ln q}. \quad (2.75)$$

Durch Vorgabe von \dot{J}_{sys} sowie der a priori freien Parameter η und ν läßt sich $\dot{R}_{R,1}$ somit explizit angeben (RITTER, 1999).

Der Verlauf von $\zeta_{R,1}(q)$ ist in Abb. 2.4 für verschiedene Werte von η und ν dargestellt. Für $\eta = 1$ (konservativer Massentransfer) ist $\zeta_{R,1}$ unabhängig von ν . Je kleiner η ist, d.h., ein je größerer Anteil der Massenüberstromrate also dem System verloren geht, desto wichtiger wird ν . Für den (unphysikalischen) Fall, daß $\eta = 0$ und $\nu = 0$ gilt, bleibt $\zeta_{R,1}$ sogar im gesamten betrachteten

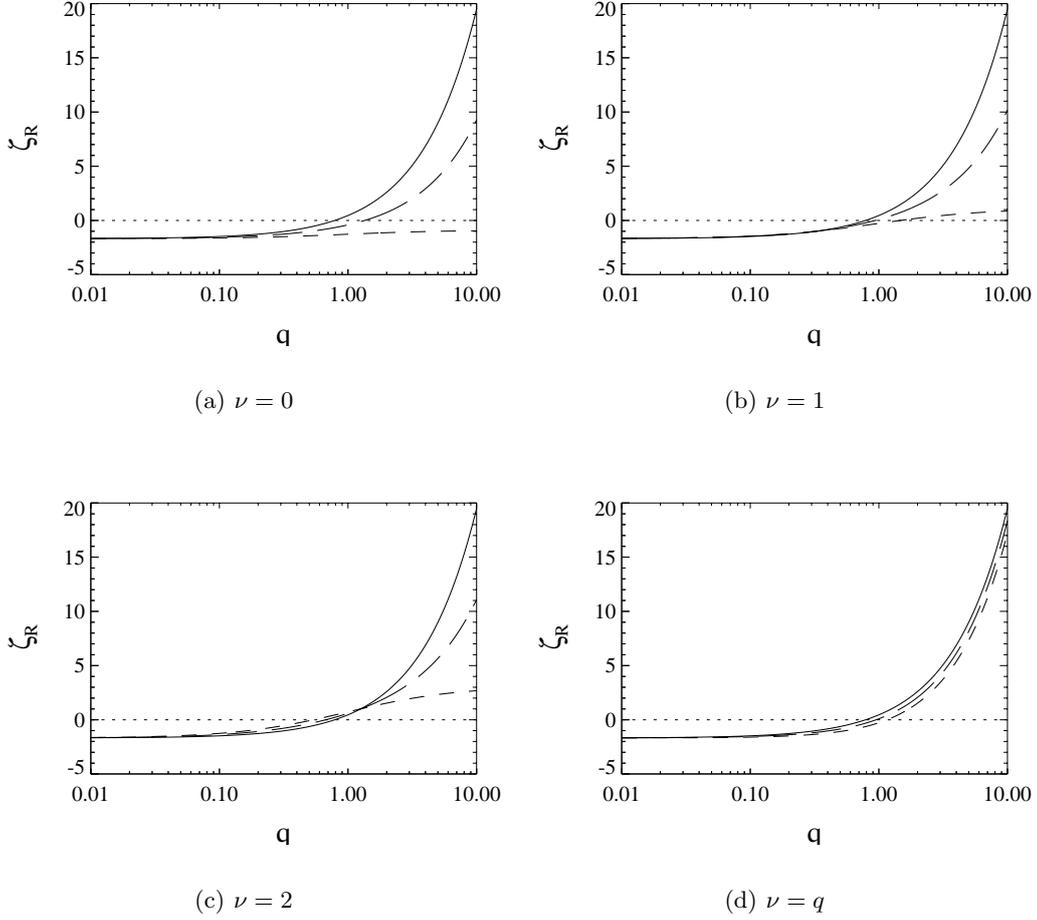


Abbildung 2.4: $\zeta_{R,1}(q)$ für verschiedene Werte von η (durchgezogene Linien: 1, langgestrichelte Linien: $\frac{1}{2}$, kurzgestrichelte Linien: 0) und ν . Die kurzgestrichelte Linie in Abb. 2.4(a) gibt den stabilstmöglichen (unphysikalischen) Fall an: Massenverlust ohne Drehimpulsverlust. Abb. 2.4(d) mit $\nu = q$ ist der physikalisch relevanteste Fall, in dem die Materie das System mit dem spezifischen Drehimpuls des akkretierenden Sterns verläßt. Für die Berechnung von $\zeta_{R,1}$ wurde die Näherungsformel (2.13) von EGGLETON verwendet.

Massenbereich $0.01 \leq q \leq 10$ negativ. Eine physikalisch sinnvolle Annahme ist, daß das System Masse mit dem spezifischen Drehimpuls

$$j_2 = \frac{J_2}{M_2} = \frac{\theta_2 \omega}{M_2} \quad (2.76)$$

des Sekundärsterns verliert, beispielsweise durch Jets oder strahlungsgetriebene Winde aus der Akkretionsscheibe. Das Trägheitsmoment des Sekundärsterns bezüglich der Rotationsachse des Systems im Abstand

$$d_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} A \quad (2.77)$$

ist durch

$$\theta_2 = M_2 d_2^2 = \frac{M_1^2 M_2}{(M_1 + M_2)^2} A^2 \quad (2.78)$$

gegeben. Die Anwendung des dritten KEPLERSchen Gesetzes (2.8) sowie (2.64) führt schließlich auf

$$j_2 = \frac{M_1}{M_2} \frac{J}{M_1 + M_2} \quad (2.79)$$

und somit auf

$$\nu = \left(\frac{d \ln J}{d \ln M} \right)_t = \frac{M}{J} j_2 = q. \quad (2.80)$$

In diesem Fall, der in Abb. 2.4(d) dargestellt ist, ist $\zeta_{R,1}$ für große Massenverhältnisse nur schwach von η abhängig. Für $q \rightarrow 0$ geht $\zeta_{R,1}$ in der EGGLETON-Approximation (2.13), im Wesentlichen unabhängig von η und ν , gegen einen Wert von $-\frac{5}{3}$.

Selbst wenn der Drehimpulsverlust nicht kontinuierlich abläuft, wie dies beispielsweise für Systeme der Fall ist, die häufig Novaexplosionen erleiden, so läßt sich deren Entwicklung dennoch durch kontinuierliche Massen- und Drehimpulsverluste mit einem mittleren η und ν beschreiben (SCHENKER et al., 1998).

2.3.3 Die zeitliche Entwicklung des Sternradius

2.3.3.1 Allgemeines

Anders als für den ROCHE-Radius ist es für den Sternradius im Allgemeinen unmöglich, einen verwertbaren geschlossenen Ausdruck für die zeitliche Entwicklung anzugeben, da die Berechnung des Sternradius die Lösung der Sternaufbaugleichungen erfordert. Für die Diskussion der Entwicklung halbgetrennter Doppelsternsysteme ist es üblich, die Zeitentwicklung des Radius R formal in drei Terme aufzuspalten:

$$\frac{dR}{dt} = \left(\frac{dR}{dt} \right)_{\text{ad}} + \left(\frac{dR}{dt} \right)_{\text{th}} + \left(\frac{dR}{dt} \right)_{\text{nuc}}. \quad (2.81)$$

Der erste Term gibt hierbei die adiabatische Reaktion des Sternradius auf Massenverlust an bei festgehaltener thermischer und chemischer Struktur, der zweite Term die Radiusänderung durch thermische Relaxation bei festgehaltener chemischer Struktur und der letzte Term die Radiusänderung durch nukleare Entwicklung. Im Folgenden sollen formale Ausdrücke für diese drei Terme hergeleitet werden, um zu zeigen, daß die a priori willkürlich scheinende Aufspaltung von \dot{R} in Gleichung (2.81) tatsächlich auf im Prinzip, und nur im Prinzip quantifizierbare, physikalische Größen führt.

Für das von der Massenschale M_r eingeschlossene Volumen V_r gilt:

$$\frac{\partial V_r}{\partial M_r} = \frac{1}{\rho}, \quad (2.82)$$

und daraus folgt für das Gesamtvolumen eines Sterns:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \int_0^M \frac{1}{\rho} dM_r. \quad (2.83)$$

Die zeitliche Entwicklung des Sternradius läßt sich auf die zeitliche Entwicklung des Sternvolumens zurückführen, d.h.

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dV} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{dV}{dt}, \quad (2.84)$$

wobei die zeitliche Entwicklung des Sternvolumens nach (2.83) durch

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\rho_0} \frac{dM}{dt} - \int_0^M \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} dM_r \quad (2.85)$$

mit der Photosphärendichte ρ_0 gegeben ist. Der erste Term ist insofern willkürlich, als daß die „Wahl“ der Definition des Sternradius und die sich daraus ergebende „Photosphärendichte“ ρ_0 nicht eindeutig vorgegeben ist.

$\rho(M_r, t)$ ist für eine feste Massenschale M_r eine thermodynamische Variable, deren zeitliche Entwicklung durch die Sternaufbaugleichungen beschrieben wird und für die daher kein geschlossener Ausdruck angegeben werden kann. Der Wert von ρ selbst ist im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht durch die Vorgabe des Drucks P , der Entropie pro Masseneinheit S sowie der relativen Massenanteile der m verschiedenen Teilchensorten X_1, \dots, X_m eindeutig bestimmt. Im Folgenden wird die in der Thermodynamik übliche Schreibweise verwendet, wonach $\left(\frac{dY}{dX}\right)_Z$ die totale Ableitung einer Größe Y nach X bei festgehaltenem Z bezeichnet.

Die sich aus (2.84) und (2.85) ergebende Zeitentwicklung des Radius,

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{4\pi R^2 \rho_0} \frac{dM}{dt} - \frac{1}{4\pi R^2} \int_0^M \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} dM_r, \quad (2.86)$$

soll nun formal in einzelne Terme aufgespalten werden. Der erste Term

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{inst}} := \frac{1}{4\pi R^2 \rho_0} \frac{dM}{dt} \quad (2.87)$$

beschreibt das instantane Schrumpfen des Sternradius bei Massenverlust durch das Abtragen der äußersten Schichten, ohne daß der Stern die Möglichkeit hat, sich hydrostatisch oder thermisch zu readjustieren, d.h. für $\dot{\rho} = 0$. Dieser Term ist durch die freie Wahl der Photosphäre nicht eindeutig bestimmt. Dies ist insofern kein Problem, als daß dieser Term für sich allein genommen keine physikalische Bedeutung hat, da das Entfernen der äußersten Massenschale nicht von der dadurch bedingten hydrodynamischen Reaktion des Sterns getrennt werden kann. Nur beides zusammen, das instantane Schrumpfen des Sterns

durch Abtragen der äußeren Schichten und die gleichzeitige Readjustierung des hydrostatischen Gleichgewichts haben eine physikalische Bedeutung.

Die zeitliche Entwicklung der Dichte ρ läßt sich wie folgt aufspalten:

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{S,X_j} + \left[\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{X_j} - \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{S,X_j} \right] + \left[\left(\frac{d\rho}{dt}\right) - \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{X_j} \right]. \quad (2.88)$$

Der erste Summand entspricht der Änderung der Dichte bei konstanter Entropie und chemischer Zusammensetzung, also der Readjustierung des hydrostatischen Gleichgewichts als Reaktion des Sterns auf den instantanen Massenverlust. Aus (2.86) läßt sich sofort die zugehörige Radiusänderung durch die hydrostatische Readjustierung angeben:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{hydr}} = -\frac{1}{4\pi R^2} \int_0^M \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{S,X_j} dM_r. \quad (2.89)$$

Die adiabatische Änderung des Sternradius ist die Summe der instantanen Radiusänderung durch Abtragen der äußeren Schichten und der Readjustierung des hydrostatischen Gleichgewichts und somit durch

$$\begin{aligned} \left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{ad}} &= \left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{inst}} + \left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{hydr}} \\ &= \frac{1}{4\pi R^2 \rho_0} \frac{dM}{dt} - \frac{1}{4\pi R^2} \int_0^M \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{S,X_j} dM_r \end{aligned} \quad (2.90)$$

gegeben.

Der zweite Summand in (2.88) gibt die Relaxation des Sterns bei konstanter chemischer Zusammensetzung abzüglich der adiabatischen Relaxation an, also nur die thermische Relaxation. Die zugehörige Änderung des Sternradius ist somit durch

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{th}} = -\frac{1}{4\pi R^2} \int_0^M \frac{1}{\rho^2} \left[\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{X_j} - \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{S,X_j} \right] dM_r \quad (2.91)$$

gegeben und die Änderung des Radius durch die nukleare Entwicklung analog dazu durch

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{nuc}} = -\frac{1}{4\pi R^2} \int_0^M \frac{1}{\rho^2} \left[\left(\frac{d\rho}{dt}\right) - \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{X_j} \right] dM_r. \quad (2.92)$$

Die Zeitableitungen von ρ mit den jeweiligen Nebenbedingungen zu einem vorgegebenen Zeitpunkt ergeben sich im Prinzip aus der Lösung der Sternaufbaugleichungen unter denselben Nebenbedingungen. Für die praktische Anwendung ist dieser Ansatz allerdings ungeeignet.

2.3.3.2 Der adiabatische Masse-Radius-Exponent

Ist die Zeitskala des Massenverlusts

$$\tau_M = -\frac{M}{\dot{M}} \quad (2.93)$$

sehr viel größer als die hydrostatische Zeitskala des Sterns τ_{hydr} , so wird sich nach einer Zeit $t \sim \tau_{\text{hydr}}$ der Stern auf den Massenverlust \dot{M} einstellen und faktisch einen hydrostatischen Gleichgewichtszustand einnehmen. Diese Annahme ist im Grunde immer erfüllt, da τ_{hydr} von der Größenordnung der Schallaufzeit $\frac{R}{v_s}$ durch den Stern ist.

Es soll nun angenommen werden, daß der Stern nur adiabatisch auf den Massenverlust reagieren kann. In diesem Fall sind $S(M_r)$ und $X_j(M_r)$ zeitlich konstant, und die Reaktion des Sterns ist auf die Readjustierung des Drucks beschränkt:

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{S, X_j} = \frac{\partial\rho}{\partial P} \left(\frac{dP}{dt}\right)_{S, X_j}. \quad (2.94)$$

Der Druck $P(M_r)$ bzw. die Dichte $\rho(M_r)$ ist unter der Nebenbedingung des hydrostatischen Gleichgewichts für vorgegebenes $S(M_r)$ und $X_j(M_r)$ sowie vorgegebene Gesamtmasse M eindeutig bestimmt. Wird dem Stern nun stetig differenzierbar Masse entnommen, so ändert sich auch die Dichte unter den obigen Nebenbedingungen stetig differenzierbar mit der Masse, und zwar unabhängig vom zeitlichen Verlauf des Massenverlusts. Das bedeutet, daß die Dichte im hydrostatischen Gleichgewicht eine Funktion von M_r und M allein, d.h. $P = P_e(M_r, M)$ ist.

$$\alpha(M_r) := \left(\frac{d\rho}{dM}\right)_{M_r, P=P_e, S, X_j} \quad (2.95)$$

ist daher eine durch den Sternaufbau eindeutig bestimmte Funktion, und es gilt:

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{M_r, P=P_e, S, X_j} = \alpha(M_r) \frac{dM}{dt}. \quad (2.96)$$

Durch Einsetzen von (2.94) und (2.96) in (2.86) ergibt sich:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{S, X_j} = \left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{ad}} = \frac{1}{4\pi R^2} \left[\frac{1}{\rho_0} - \int_0^M \frac{\alpha(M_r)}{\rho^2} dM_r \right] \frac{dM}{dt}. \quad (2.97)$$

Die Annahme von $\tau_M \gg \tau_{\text{hydr}}$ führt also dazu, daß $\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{ad}}$ und \dot{M} proportional zueinander sind.

Es ist üblich, die adiabatische Reaktion eines Sterns auf Massenverlust als

$$\left(\frac{d \ln R}{dt}\right)_{\text{ad}} = \zeta_s \frac{d \ln M}{dt} \quad (2.98)$$

zu schreiben mit dem *adiabatischen Masse-Radius-Exponenten*

$$\zeta_s := \left(\frac{d \ln R}{d \ln M} \right)_{S, X_j}. \quad (2.99)$$

Aus (2.97) läßt sich nun sofort ζ_s angeben:

$$\zeta_s = \frac{M}{4\pi R^3} \left[\frac{1}{\rho_0} - \int_0^M \frac{\alpha(M_r)}{\rho^2} dM_r \right]. \quad (2.100)$$

Diese rein formale Schreibweise ist jedoch für eine praktische Anwendung, etwa die Berechnung von ζ_s völlig ungeeignet.

Lediglich für einfache *Polytropen* läßt sich ζ_s explizit ausrechnen. Als *Polytropen* bezeichnet man Sterne, deren mechanischer Aufbau einer Gleichung des Typs

$$P(M_r) = K' \rho(M_r)^{1+\frac{1}{n}} \quad (2.101)$$

mit dem *Polytropenindex* n und der *Polytropenkonstanten* K' gehorcht. Für diese Sterne ist der adiabatische Masse-Radius-Exponent durch

$$\zeta_s = \frac{1-n}{3-n} \quad (2.102)$$

gegeben (CHANDRASEKHAR, 1957, HJELLMING und WEBBINK, 1987)¹³.

Ein Stern kann eine polytrope Struktur aufweisen, wenn die Zustandsgleichung selbst polytrop ist, also

$$P = K' \rho^{1+\frac{1}{n}} \quad (2.103)$$

erfüllt, oder wenn durch eine weitere Nebenbedingung nur eine der thermodynamischen Größen ρ , T und P unabhängig von den anderen ist. Das letztere ist beispielsweise bei isentropen Sternen, also Sternen mit konstanter Entropie der Fall. Hier ist die Druck- und Temperaturschichtung über den adiabatischen Temperaturgradienten

$$\nabla_{\text{ad}} = \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_S \quad (2.104)$$

miteinander gekoppelt. Für ideales, einatomiges Gas mit $\nabla_{\text{ad}} = \frac{2}{5}$ folgt daher

$$P \sim \rho T \sim \rho P^{\nabla_{\text{ad}}} \quad (2.105)$$

und somit

$$P = K \rho^\gamma = K \rho^{\frac{1}{1-\nabla_{\text{ad}}}} = K \rho^{\frac{5}{3}} \quad (2.106)$$

¹³ ζ_s ergibt sich nach CHANDRASEKHAR (1957, Kap. 4, Gl. 74) über die Abhängigkeit der Polytropenkonstanten von M und R .

mit einer geeigneten Adiabantenkonstanten K analog zu (2.45). Durch Vergleich mit (2.101) ergibt sich schließlich der Polytropenindex eines solchen Sterns zu

$$n = \frac{1}{\gamma - 1} = \frac{3}{2}. \quad (2.107)$$

Sterne, wie beispielsweise vollkonvektive, massearme Hautreihensterne bis etwa $0.35 M_{\odot}$, lassen sich in guter Näherung durch Polytropenmodelle mit $n = \frac{3}{2}$ beschreiben, und der adiabatische Masse-Radius-Exponent hat den Wert

$$\zeta_s = -\frac{1}{3}. \quad (2.108)$$

Ein negativer adiabatischer Masse-Radius-Exponent bedeutet, daß solche, *adiabatisch* geschichteten (und somit konvektiven) Sterne als Reaktion auf adiabatischen Massenverlust expandieren. Sterne mit *unteradiabatischer* Schichtung, d.h. radiative Sterne weisen ein nach außen hin steigendes Entropieprofil $\frac{\partial S}{\partial M_r} > 0$ auf. Sie werden in der Literatur häufig als Polytrope mit $n = 3$ beschrieben¹⁴, für die formal für einen beliebig geringen Massenverlust ζ_s gegen unendlich geht. Reale Sterne, ob sie nun rein radiativ sind oder sowohl Gebiete mit radiativer als auch mit adiabatischer Schichtung aufweisen, liegen zwischen den beiden Extremen, d.h.

$$-\frac{1}{3} < \zeta_s < \infty. \quad (2.109)$$

Eine *überadiabatische* Schichtung mit ineffizienter Konvektion führt zu einem nach außen hin fallenden Entropieprofil $\frac{\partial S}{\partial M_r} < 0$. Derartige Schichten expandieren schneller als adiabatische, so daß im Prinzip

$$\zeta_s < -\frac{1}{3} \quad (2.110)$$

werden kann (HJELLMING, 1989). Allerdings tritt überadiabatische Konvektion nur in Sternhüllen auf, da die Konvektion im Sterninneren immer effizient und somit praktisch adiabatisch ist. Nennenswerte Volumenanteile mit überadiabatischer Schichtung kommen lediglich in den ausgedehnten Hüllen von Riesen und Überriesen vor (HJELLMING und WEBBINK, 1987, HJELLMING, 1989).

Dieses Verhalten von Sternen gegenüber schnellem, adiabatischem Massenverlust läßt sich an Hand von Entropieprofilen verstehen und wird von WEBBINK (1985) ausführlich diskutiert. Abb. 2.5 zeigt den Entropieverlauf für Nullalter-Hauptreihensterne solarer Zusammensetzung im thermischen Gleichgewicht von 0.1 bis $0.5 M_{\odot}$. Das benutzte Sternentwicklungsprogramm und die verwendeten Zustandsgleichungen von SAUMON et al. (1995, SCVH) und POLS et al. (1995, PTEZ) sind in Anhang B bzw. Anhang C beschrieben. Alle Modelle weisen eine vernachlässigbare, überadiabatische Konvektionszone an der Oberfläche auf. Die drei masseärmsten Modelle mit 0.1, 0.2 und $0.3 M_{\odot}$ zeigen ein fast

¹⁴Die Annahme, daß das Verhältnis von Strahlungs- zu Gasdruck durch den ganzen Stern hinweg konstant ist, führt auf Polytrope mit Index $n = 3$. Diese Näherung ist für radiative Sterne vertretbar, solange der Strahlungsdruck vernachlässigbar ist.

konstantes Entropieprofil¹⁵ und sind vollkonvektiv. Wird einem solchen Stern der Masse M von außen eine Schicht der Masse ΔM weggenommen, ohne daß dieser thermisch relaxieren kann, so weist er eine höhere Entropie auf als ein thermisch relaxierter Stern mit der Masse $M - \Delta M$. Eine höhere Entropie bedeutet, der Stern ist zu heiß, seine adiabatische Reaktion auf den Massenverlust besteht folglich in einer Expansion. Die Modelle mit 0.4 und $0.5 M_{\odot}$ besitzen zwar einen radiativen Kern mit unteradiabatischer Schichtung sowie eine tiefe konvektive Hülle, verhalten sich aber auf Grund ihres Entropieprofils ähnlich wie vollkonvektive Sterne.

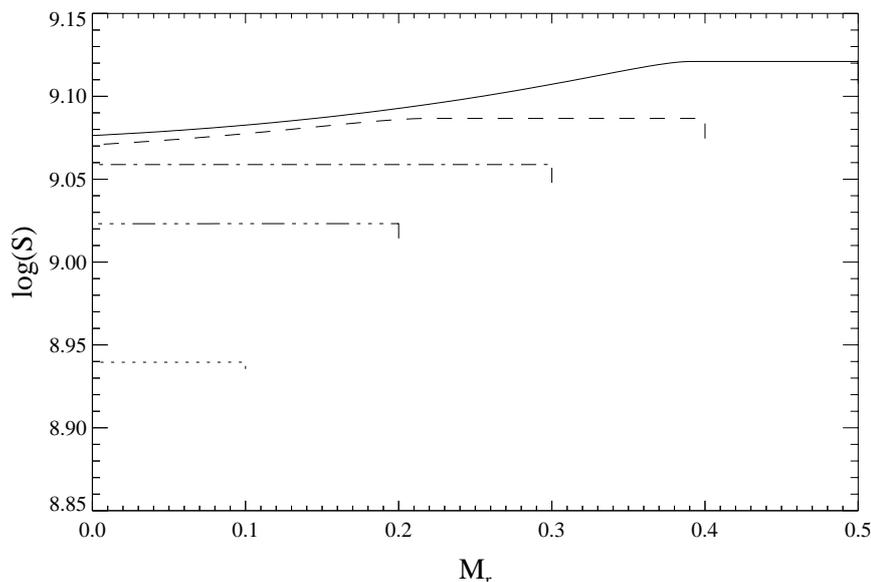


Abbildung 2.5: Entropieprofile für ZAMS Sterne (SCVH) solarer Zusammensetzung im thermischen Gleichgewicht für $0.5 M_{\odot}$ (durchgezogene Linie), $0.4 M_{\odot}$ (gestrichelte Linie), $0.3 M_{\odot}$ (strichpunktiierte Linie), $0.2 M_{\odot}$ (punktiertrichpunktiierte Linie), $0.1 M_{\odot}$ (punktiierte Linie).

Abb. 2.6 zeigt die Entropieprofile etwas massereicherer Hauptreihensterne zwischen 0.6 und $1.0 M_{\odot}$. Diese weisen einen großen radiativen Kern, eine mit zunehmender Masse weiter schrumpfende konvektive Hülle sowie eine deutlich größere, wenn auch immer noch vernachlässigbare, überadiabatische Konvektionszone auf. Wird einem solchen Stern Masse weggenommen, so ist die Entropie im Vergleich zu einem thermisch relaxierten Modell im Kern zu hoch, in der Hülle jedoch zu niedrig. Da das Volumen des Kerns vernachlässigbar gegenüber dem der Hülle ist, wird die adiabatische Reaktion im Wesentlichen durch das Entropieprofil der Hülle bestimmt. Eine im Vergleich zum thermischen Gleichgewicht zu niedrigere Entropie bedeutet, der Stern ist zu kühl, seine adiabatische Reaktion besteht in einer Kontraktion.

¹⁵Da der tatsächliche Temperaturgradient ∇ geringfügig größer ist als der adiabatische Temperaturgradient ∇_{ad} , fällt die Entropie in den konvektiven Zonen von innen nach außen geringfügig ab.

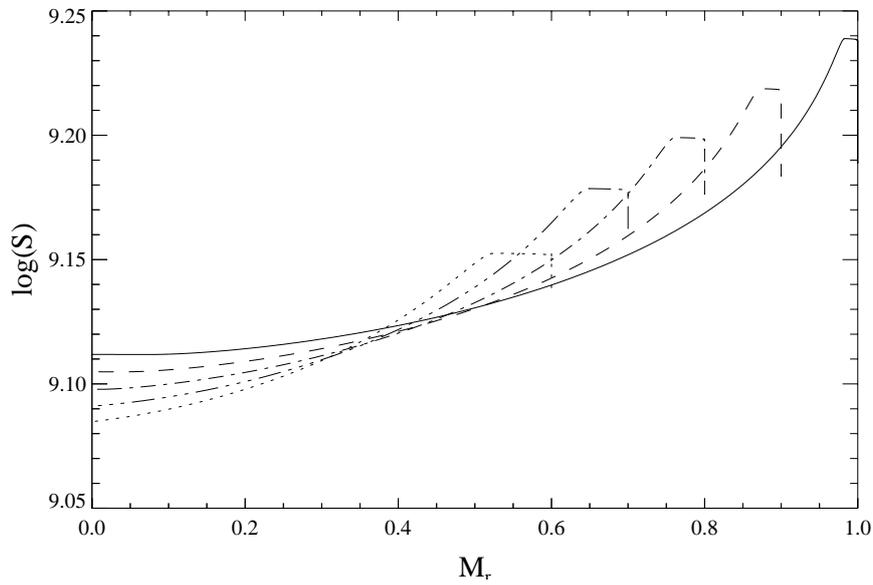


Abbildung 2.6: Entropieprofile für ZAMS Sterne (PTEZ) solarer Zusammensetzung im thermischen Gleichgewicht für $1.0 M_\odot$ (durchgezogene Linie), $0.9 M_\odot$ (gestrichelte Linie), $0.8 M_\odot$ (strichpunktierte Linie), $0.7 M_\odot$ (punktiert-strichpunktierte Linie), $0.6 M_\odot$ (punktierte Linie).

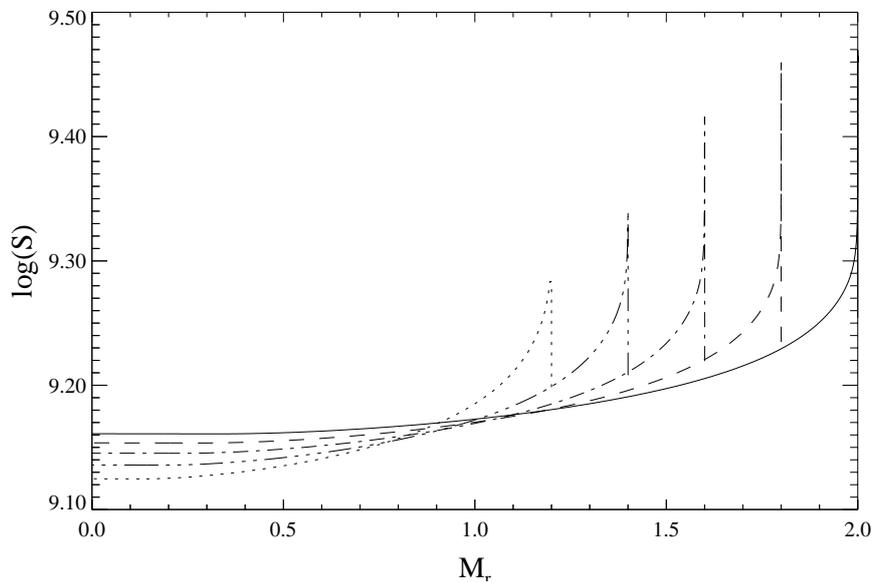


Abbildung 2.7: Entropieprofile für ZAMS Sterne (PTEZ) solarer Zusammensetzung im thermischen Gleichgewicht für $2.0 M_\odot$ (durchgezogene Linie), $1.8 M_\odot$ (gestrichelte Linie), $1.6 M_\odot$ (strichpunktierte Linie), $1.4 M_\odot$ (punktiert-strichpunktierte Linie), $1.2 M_\odot$ (punktierte Linie).

Noch massereichere Hauptreihensterne, wie sie in Abb. 2.7 dargestellt werden, haben keine konvektive Hülle, abgesehen von einer dünnen, überadiabatischen Konvektionszone, dafür aber einen konvektiven Kern. Auch sie reagieren auf adiabatischen Massenverlust mit Kontraktion. Allerdings führt das äußerst steile Entropieprofil an der Oberfläche dazu, daß sich der adiabatische Masse-Radius-Exponent ζ_s mit dem Abtragen der äußeren Schichten sehr schnell ändert, falls der Stern nicht thermisch relaxieren kann (HJELLMING und WEBBINK, 1987).

2.3.3.3 Der Masse-Radius-Exponent des thermischen Gleichgewichts

Analog zum adiabatischen Masse-Radius-Exponenten ζ_s ist es auch möglich, einen *Masse-Radius-Exponenten des thermischen Gleichgewichts* zu definieren. Ist nämlich die Zeitskala des Massenverlusts τ_M deutlich größer als die KELVIN-HELMHOLTZ-Zeitskala

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{\Gamma M^2}{RL} \quad (2.111)$$

des Sterns, so wird sich der Stern nach einer Zeit $t \sim \tau_{\text{KH}}$ auf den Massenverlust \dot{M} einstellen und in guter Näherung sowohl einen hydrostatischen als auch thermischen Gleichgewichtszustand einnehmen.

Es soll nun angenommen werden, daß der Stern nur adiabatisch und thermisch auf den Massenverlust reagieren kann. In diesem Fall ist nur die chemische Zusammensetzung X_j zeitlich konstant, und der Stern kann durch Adjustierung von Druck und Entropie relaxieren:

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_{X_j}. \quad (2.112)$$

Die Dichte $\rho(M_r)$ ist durch die Nebenbedingungen des hydrostatischen und thermischen Gleichgewichts für vorgegebenes X_j und vorgegebene Gesamtmasse M eindeutig bestimmt. Verliert der Stern stetig differenzierbar an Masse, so ändert sich auch die Dichte unter den obigen Nebenbedingungen stetig differenzierbar. Der Druck im hydrostatischen und die Entropie im thermischen Gleichgewicht sind Funktionen von M_r und M allein, d.h. $P = P_e(M_r, M)$ und $S = S_e(M_r, M)$.

$$\beta(M_r) := \left(\frac{d\rho}{dM} \right)_{M_r, P=P_e, S=S_e, X_j} \quad (2.113)$$

ist deshalb eine durch den momentanen Sternaufbau eindeutig bestimmte Funktion, und es gilt analog zu (2.96):

$$\left(\frac{d\rho}{dt} \right)_{M_r, P=P_e, S=S_e, X_j} = \beta(M_r) \frac{dM}{dt}. \quad (2.114)$$

Durch Einsetzen von (2.112) und (2.114) in (2.86) folgt hieraus analog zu (2.97):

$$\begin{aligned} \left(\frac{dR}{dt}\right)_{X_j} &= \left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{ad}} + \left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{th}} \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \left[\frac{1}{\rho_0} - \int_0^M \frac{\beta(M_r)}{\rho^2} dM_r \right] \frac{dM}{dt}. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Die Annahme von $\tau_M \gg \tau_{\text{KH}}$ führt also dazu, daß $\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{ad}} + \left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{th}}$ zu \dot{M} proportional ist.

Definiert man nun analog zu ζ_s in (2.99) den Masse-Radius-Exponenten des thermischen Gleichgewichts

$$\zeta_e = \left(\frac{d \ln R}{d \ln M}\right)_{X_j}, \quad (2.116)$$

so folgt aus (2.115) sofort:

$$\zeta_e = \frac{M}{4\pi R^3} \left[\frac{1}{\rho_0} - \int_0^M \frac{\beta(M_r)}{\rho^2} dM_r \right]. \quad (2.117)$$

Auch diese rein formale Schreibweise ist für eine praktische Anwendung, etwa die Berechnung von ζ_e völlig ungeeignet.

Abb. 2.8 zeigt den Verlauf von ζ_e für Nullalter-Hauptreihensterne solarer Zusammensetzung. In diesem speziellen Fall ist ζ_e nichts anderes als die Steigung der Hauptreihe in einem Masse-Radius-Diagramm. Allgemein handelt es sich bei ζ_e um eine Zahl der Größenordnung 1, die in der Regel positiv ist. Lediglich Riesen und Überriesen können einen negativen Masse-Radius-Exponenten des thermischen Gleichgewichts besitzen.

2.3.3.4 Der thermische Masse-Radius-Exponent

Ist die Zeitskala des Massentransfers größer als die hydrodynamische Zeitskala, aber kleiner als die KELVIN-HELMHOLTZ-Zeitskala, wird sich zwar ein hydrostatisches, aber kein thermisches Gleichgewicht einstellen können. Auch für diesen Fall ist es möglich, einen Masse-Radius-Exponenten analog zu (2.99) und (2.116) zu definieren:

$$\begin{aligned} \zeta &:= \left(\frac{d \ln R}{d \ln M}\right)_{X_j} = \left(\frac{d \ln R}{dt}\right)_{X_j} \left(\frac{d \ln M}{dt}\right)^{-1} \\ &= \left[\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{ad}} + \left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{th}} \right] \frac{M}{R} \left(\frac{dM}{dt}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Zwar ist der Stern im hydrostatischen Gleichgewicht und $\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{ad}}$ erfüllt Gleichung (2.97), aber (2.115) gilt nicht, da der Stern nicht im thermischen Gleichgewicht ist, so daß ζ und ζ_e im Allgemeinen verschieden sind.

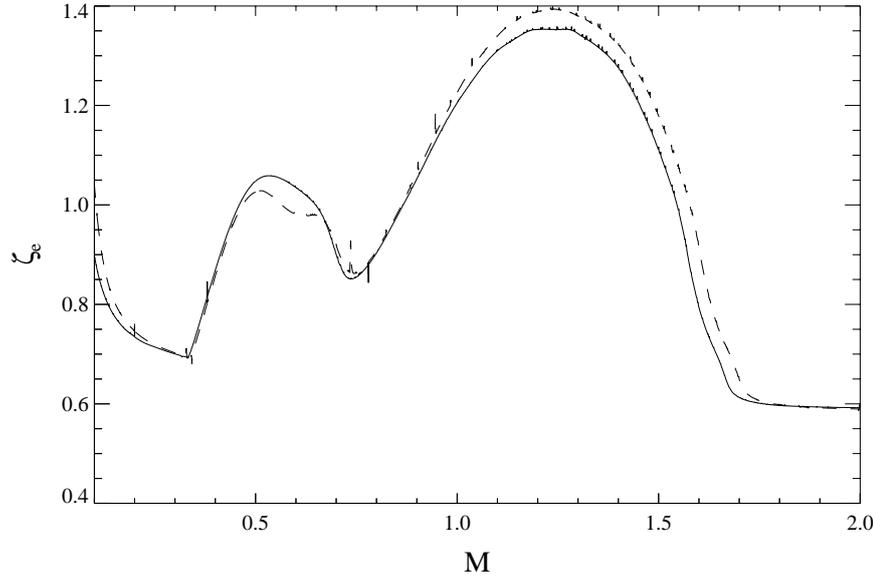


Abbildung 2.8: Masse-Radius-Exponent des thermischen Gleichgewichts für ZAMS Sterne solarer Zusammensetzung für zwei verschiedene Zustandsgleichungen: SCVH (durchgezogene Linie) und PTEZ (gestrichelte Linie).

Definiert man die thermische Zeitskala

$$\tau_{\text{th}} = \left(\frac{d \ln R}{dt} \right)_{\text{th}}^{-1} \quad (2.119)$$

als diejenige Zeitskala, auf der sich der Sternradius durch thermische Relaxation ändert, so läßt sich (2.118) unter Verwendung der Definition von ζ_s in (2.98) zu

$$\zeta = \zeta_s + \frac{1}{\tau_{\text{th}}} \frac{M}{\dot{M}} = \zeta_s - \frac{\tau_M}{\tau_{\text{th}}} \quad (2.120)$$

umschreiben. Es ist anschaulich klar, daß τ_{th} selbst nicht von der Massentransferrate abhängt, sondern lediglich von der momentanen thermischen Struktur des Sterns.

Im thermischen Gleichgewicht verschwindet die thermische Relaxation, und τ_{th} ist formal unendlich. Aus (2.120) folgt daher automatisch, daß Sterne, die sich im thermischen Gleichgewicht befinden, auf das instantane Einschalten des Massenverlusts rein adiabatisch reagieren:

$$\lim_{\tau_{\text{th}} \rightarrow \infty} \zeta = \zeta_s. \quad (2.121)$$

Dies ändert sich erst, wenn sich nach einem genügend großen Bruchteil der KELVIN-HELMHOLTZ-Zeitskala die thermische Relaxation einschaltet, nachdem der Stern durch den Massenverlust aus dem thermischen Gleichgewicht gebracht wurde.

Betrachtet man nun andererseits einen Stern, der sich nicht im thermischen Gleichgewicht befindet, so kann die thermische Relaxation im Wesentlichen nicht schneller als auf der KELVIN-HELMHOLTZ-Zeitskala erfolgen, d.h. es gilt:

$$\tau_{\text{KH}} \lesssim \tau_{\text{th}} < \infty. \quad (2.122)$$

Im Grenzfall beliebig hoher Massentransferraten gilt nun

$$\lim_{\tau_M \rightarrow 0} \zeta = \zeta_s, \quad (2.123)$$

auch dieser Stern wird also rein adiabatisch reagieren. Damit ist die Definition von ζ konsistent mit der Definition von ζ_s für $\tau_M \rightarrow 0$ und $\tau_{\text{th}} \rightarrow \infty$. Im Grenzfall beliebig niedriger Massentransferraten muß ζ gegen ζ_e konvergieren:

$$\lim_{\tau_M \rightarrow \infty} \zeta = \zeta_e, \quad (2.124)$$

zumindest, wenn der Stern genügend Zeit ($t \sim \tau_{\text{KH}}$) hatte, thermisch zu relaxieren.

2.3.3.5 Der effektive Masse-Radius-Exponent

Da sich bei numerischen Rechnungen in der Regel die adiabatische und thermische Relaxation nicht von der nuklearen Entwicklung trennen läßt, wird gelegentlich der sogenannte *effektive Masse-Radius-Exponent*

$$\zeta_{\text{eff}} := \frac{d \ln R}{d \ln M} \quad (2.125)$$

definiert, der auch die nukleare Entwicklung mit einschließt.

Im Folgenden wird für die Behandlung der Zeitentwicklung des Sternradius meist

$$\frac{d \ln R}{dt} = \zeta \frac{d \ln M}{dt} + \left(\frac{d \ln R}{dt} \right)_{\text{nuc}}, \quad (2.126)$$

bzw. die äquivalente Formulierung

$$\frac{d \ln R}{dt} = \zeta_s \frac{d \ln M}{dt} + \left(\frac{d \ln R}{dt} \right)_{\text{th}} + \left(\frac{d \ln R}{dt} \right)_{\text{nuc}} \quad (2.127)$$

verwendet. Beide Formeln ergeben sich direkt durch Einsetzen der Definition von ζ_s aus (2.98) bzw. von ζ aus (2.118) in (2.81).

2.3.4 Die stationäre Massentransferrate

In halbgetrennten Doppelsternsystemen, die lange Phasen von Massentransfer durchlaufen, erfüllt der masseverlierende Stern in guter Näherung

$$R = R_R \quad (2.128)$$

mit einer Genauigkeit von einigen charakteristischen Skalenhöhen

$$H := \left(\frac{1}{\dot{M}} \frac{\partial \dot{M}}{\partial \Delta R} \right)^{-1} \ll R. \quad (2.129)$$

H ist die charakteristische Länge, um die der Abstand $\Delta R = R - R_R$ vergrößert werden muß, damit die Massentransferrate um den Faktor e anwächst. Für die optisch dünne Massentransferrate (2.42) ist H durch die Druckskalenhöhe H_P aus (2.40) gegeben.

Für die Entwicklung des Systems wichtig sind die Zeitskala der nuklearen Entwicklung

$$\tau_{\text{nuc}} = \left(\frac{d \ln R}{dt} \right)_{\text{nuc}}^{-1}, \quad (2.130)$$

die Zeitskala des Drehimpulsverlustes

$$\tau_J = - \left(\frac{d \ln J}{dt} \right)_{\text{sys}}^{-1} \quad (2.131)$$

und die thermische Zeitskala

$$\tau_{\text{th}} = \left(\frac{d \ln R}{dt} \right)_{\text{th}}^{-1}. \quad (2.132)$$

τ_J ist grundsätzlich positiv und τ_{nuc} in der Regel ebenfalls, da Sterne fast während ihrer gesamten Entwicklung von der Hauptreihe bis zum Asymptotischen Riesenast auf Grund ihrer nuklearen Entwicklung expandieren. Über das Vorzeichen von τ_{th} läßt sich a priori nichts aussagen.

Aus der Zeitentwicklung des ROCHE-Radius (2.74) sowie des Sternradius (2.127) läßt sich unter Verwendung von $R = R_R$ eine Differentialgleichung erster Ordnung für die Zeitentwicklung von $\Delta R = R - R_R$ aufstellen:

$$\frac{d}{dt} \Delta R = \frac{R}{\tau_d} + \frac{R}{\tau_{\text{th}}} + (\zeta_s - \zeta_R) \frac{R}{M} \dot{M}(\Delta R) \quad (2.133)$$

mit

$$\frac{1}{\tau_d} := \frac{1}{\tau_{\text{nuc}}} + \frac{2}{\tau_J} = \left(\frac{d \ln R}{dt} \right)_{\text{nuc}}^{-1} - 2 \left(\frac{d \ln J}{dt} \right)_{\text{sys}}^{-1}. \quad (2.134)$$

τ_d hat die Dimension einer Zeit und wird als *Antriebszeitskala des Massentransfers* bezeichnet. Es wurde hierfür ΔR an Stelle von \dot{M} als unabhängige Variable gewählt, da die sich hieraus ergebenden Gleichungen einfacher zu handhaben sind.

Durch Anwendung der Stationaritätsbedingung (2.61) auf (2.133) ergibt sich sofort die *stationäre Massenverlustrate*:

$$\overline{\dot{M}} = - \frac{M}{\zeta_s - \zeta_R} \left(\frac{1}{\tau_d} + \frac{1}{\tau_{\text{th}}} \right). \quad (2.135)$$

Hieraus folgt, daß zum einen \overline{M} formal existiert, falls die beteiligten Größen ζ_s , ζ_R , τ_{th} und τ_d auf einer Zeitskala $\tau > \tau_{\text{hydr}}$ konstant sind und somit das Konzept eines adiabatischen Masse-Radius-Exponenten anwendbar ist. Zum zweiten ist aus der obigen Formulierung offensichtlich, daß es für ein vorgegebenes τ_{th} *genau eine* stationäre Massentransferrate \overline{M} geben kann. Zum dritten hängt der Wert von \overline{M} nicht von der physikalischen Massentransferformel als Funktion von ΔR ab. Es ist für die numerische Berechnung der Langzeitentwicklung eines solchen Systems unwesentlich, ob etwa die optisch dünne (2.42) oder die optisch dicke Massentransferformel (2.57) oder eine beliebige andere, artifizielle Formel benutzt wird. Voraussetzung ist lediglich, daß \overline{M} eine streng monoton fallende Funktion von ΔR ist und daß die charakteristische Skalenhöhe H klein gegenüber R ist, so daß $R = R_R$ in guter Näherung erfüllt ist. Lediglich beim Ein- und Ausschalten des Massentransfers spielt die physikalische Massentransferformel eine Rolle. Tatsächlich stellt sich $\overline{\Delta R}$ so ein, daß die stationäre Massentransferrate genau (2.135) erfüllt.

Definiert man nun τ'_d als Antriebszeitskala des Massentransfers unter Einbeziehung der thermischen Relaxation, also über

$$\frac{1}{\tau'_d} := \frac{1}{\tau_d} + \frac{1}{\tau_{\text{th}}} = \frac{1}{\tau_{\text{nuc}}} + \frac{2}{\tau_J} + \frac{1}{\tau_{\text{th}}}, \quad (2.136)$$

so läßt sich (2.135) in der folgenden markanten Form schreiben:

$$\zeta_s - \zeta_R = \frac{\overline{\tau_M}}{\tau'_d}. \quad (2.137)$$

Das bedeutet, daß das Verhältnis der stationären Massentransferzeitskala

$$\overline{\tau_M} = -\frac{M}{\overline{M}} \quad (2.138)$$

zur Antriebszeitskala inklusive der thermischen Relaxation τ'_d allein durch $\zeta_s - \zeta_R$ gegeben ist.

Mit Hilfe von (2.120) läßt sich (2.137) in die äquivalente Formulierung

$$\bar{\zeta} - \zeta_R = \frac{\overline{\tau_M}}{\tau_d}. \quad (2.139)$$

überführen. In diesem Fall geht die thermische Relaxation in den stationären thermischen Masse-Radius-Exponenten $\bar{\zeta}$ über, und das Verhältnis der stationären Massentransferzeitskala $\overline{\tau_M}$ zur Antriebszeitskala τ_d ist allein durch $\bar{\zeta} - \zeta_R$ gegeben.

Sowohl (2.137) als auch (2.139) sind für die Berechnung der tatsächlichen Massentransferrate allerdings denkbar ungeeignet, da sowohl ζ_s als auch $\left(\frac{d \ln R}{dt}\right)_{\text{nuc}}$ und $\left(\frac{d \ln R}{dt}\right)_{\text{th}}$ äußerst nichttriviale Funktionen des Sternaufbaus sind und nicht in geschlossener Form angegeben werden können.

2.3.5 Lineare Stabilitätsanalyse

Mittels *linearer Stabilitätsanalyse* (GUCKENHEIMER und HOLMES, 1983) soll nun untersucht werden, unter welchen Bedingungen ein Fixpunkt $\bar{\Delta R} := \dot{M}^{-1}(\dot{M})$ der Differentialgleichung (2.133) und damit auch die stationäre Massentransferrate stabil ist gegenüber Störungen des Gleichgewichts. Hierfür ist lediglich die Reaktion des Systems auf kurzen Zeitskalen gegenüber Störungen von Bedeutung. Daher kann angenommen werden, daß die Variationen in den absoluten Systemparametern R , M , ζ_R und τ_d für die Stabilitätsanalyse vernachlässigbar sind im Vergleich zu Änderungen in ΔR , und werden somit im Folgenden als konstant angesehen. Eine Stabilitätsdiskussion mit \dot{M} statt ΔR als unabhängiger Variabler findet sich bei SCHENKER et al. (1998).

Nach dem *Satz von HARTMAN-GROBMAN* ist der Fixpunkt $\bar{\mathbf{x}}$ eines Vektorfeldes $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x})$ stabil, falls alle Eigenwerte von $D\mathbf{F}$ an der Stelle $\bar{\mathbf{x}}$ einen negativen Realteil besitzen, und er ist instabil, falls auch nur ein Eigenwert einen positiven Realteil besitzt¹⁶. Da es sich bei dem Vektorfeld

$$F(\Delta R) := \frac{d}{dt}\Delta R = \frac{R}{\tau_d} + \frac{R}{\tau_{th}} + (\zeta_s - \zeta_R)R \frac{\dot{M}(\Delta R)}{M} \quad (2.140)$$

der Differentialgleichung (2.133) um ein eindimensionales, kontinuierliches System handelt, ist der Fixpunkt stabil, falls DF negativ ist, und instabil, falls DF positiv ist. Eine Störung des Gleichgewichtszustandes entwickelt sich nämlich wegen

$$\frac{d}{dt}(x - \bar{x}) \approx DF(\bar{x})(x - \bar{x}) \quad (2.141)$$

proportional zu $\exp(DF t)$. Damit ist der Fixpunkt auch ein Attraktor, da in einer genügend kleinen Umgebung um \bar{x} alle Lösungen asymptotisch gegen \bar{x} konvergieren.

F hängt nur über \dot{M} von ΔR ab. Insbesondere verändert eine lokale Variation der Massentransferrate weder ζ_s noch τ_{th} , da beide nur von der momentanen Sternstruktur abhängen, die jedoch erst nach einer endlichen Zeit Δt von der veränderten Massentransferrate beeinflusst wird. Lokal, d.h. zur Zeit t bewirkt eine Variation von \dot{M} lediglich eine Änderung der differentiellen Größen, d.h. \dot{R} , $\dot{\zeta}_s$ und $\dot{\tau}_{th}$. Die Zeitskala, auf der sich diese Größen selbst ändern, muß natürlich groß sein gegenüber der Zeitskala, auf der Störungen der Massentransferrate gedämpft (oder verstärkt) werden, damit der eindimensionale Ansatz (2.133) mit ΔR als einziger Variabler gerechtfertigt ist.

Dies ist beispielsweise nicht der Fall bei hohen Massentransferraten für Sterne mit radiativen Hüllen, die sich (noch) im thermischen Gleichgewicht befinden. Denn für solche Sterne geht in polytroper Näherung für eine beliebig dünne äußerste Schicht ζ_s formal gegen unendlich (HJELLMING und WEBBINK, 1987),

¹⁶ $D\mathbf{F}$ bezeichnet die totale Ableitung des Vektorfeldes $F = (F_1, \dots, F_n)$ nach seinen Argumenten $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, also die JACOBI-Matrix von \mathbf{F} . Für den im Folgenden betrachteten eindimensionalen Fall ist $D\mathbf{F}$ gerade $\frac{dF}{d\Delta R}$.

so daß sich ζ_s beim Einschalten des Massentransfers mit dem Abtragen der äußersten Schichten auf kurzen Zeitskalen ändert. Da jedoch Massenverlust nicht instantan auftritt, sondern sich auf einer (wenn auch kurzen) Zeitskala kontinuierlich einschaltet, so daß ζ_s bzw. τ_{th} nach dem Ende der Einschaltphase endliche, langsam veränderliche Größen sind, können die Voraussetzungen für die Anwendung von (2.133) für reale Systeme als gegeben angenommen werden.

Für die Ableitung des Vektorfelds F gilt daher:

$$DF|_{\overline{\Delta R}} = \frac{dF}{d\Delta R} \Big|_{\overline{\Delta R}} = (\zeta_s - \zeta_R) \frac{R}{M} \frac{d\dot{M}}{d\Delta R} \Big|_{\overline{\Delta R}}. \quad (2.142)$$

\dot{M} ist eine negative, streng monoton fallende Funktion von ΔR , so daß

$$\frac{d\dot{M}}{d\Delta R} < 0 \quad (2.143)$$

immer erfüllt ist. Hieraus folgt, daß

$$DF|_{\overline{\Delta R}} = \frac{dF}{d\Delta R} \Big|_{\overline{\Delta R}} < 0 \quad (2.144)$$

am Fixpunkt $\overline{\Delta R}$ genau dann erfüllt ist, wenn bereits

$$\zeta_s - \zeta_R > 0 \quad (2.145)$$

gilt. Dies ist das Kriterium für *adiabatische* oder *dynamische Stabilität gegen Massenverlust*. Hiermit ist gezeigt, daß, falls es eine stationäre Lösung von (2.133) gibt, die stationäre Massentransferrate $\dot{M}(\overline{\Delta R})$ dann und nur dann¹⁷ stabil gegen Störungen ist, wenn ζ_s größer ist als ζ_R , wenn also bei zunehmender Massentransferrate der Sternradius schneller schrumpft (langsamer wächst) als der ROCHE-Radius des Sterns schrumpft (wächst).

Aus der Formel für die stationäre Massentransferrate (2.137) läßt sich ferner ersehen, daß es für vorgegebenes ζ_s und τ_{th} genau dann eine stationäre Massentransferrate gibt, wenn das Produkt von $\zeta_s - \zeta_R$ und τ_d' positiv ist, da τ_M per Definition selbst positiv ist. Wie in der obigen Stabilitätsanalyse gezeigt, ist die stationäre Massentransferrate genau dann stabil, wenn $\zeta_s - \zeta_R$ positiv und damit auch τ_d' positiv ist. Daher sind zwei Fälle mit stationärer Massentransferrate zu unterscheiden:

- $\tau_d' > 0$ und $\zeta_s > \zeta_R$: Aus (2.142) ist zu ersehen, daß $DF < 0$ in diesem Fall nicht nur in einer Umgebung um den Fixpunkt $\overline{\Delta R}$, sondern sogar global gilt. Das bedeutet aber nichts anderes, als daß je zwei beliebig benachbarte Lösungen von (2.133) asymptotisch gegen dieselbe Lösung konvergieren. Da es genau eine stationäre Lösung gibt, müssen also *alle* Lösungen gegen den Fixpunkt $\overline{\Delta R}$ konvergieren. Völlig unabhängig vom Startwert von ΔR bzw. \dot{M} muß das durch (2.133) beschriebene System auf die stationäre Lösung zulaufen.

¹⁷Der rein akademische Fall *marginaler* Stabilität, d.h. $\zeta_s = \zeta_R$ soll hier vernachlässigt werden, da schon der geringste Massentransfer die Systemparameter geringfügig ändert, so daß ein marginal stabiles System sich entweder in die eine oder andere Richtung entwickelt.

- $\tau'_d < 0$ und $\zeta_s < \zeta_R$: In diesem Fall schrumpft der Radius im Vergleich zum ROCHE-Radius infolge von nuklearer Entwicklung, Drehimpulsverlusten und thermischer Relaxation, und die stationäre Massentransferrate ist gleichzeitig dynamisch instabil. Es gilt $DF > 0$ für alle ΔR , und der Fixpunkt $\overline{\Delta R}$ ist nun ein Repulsor. Alle Lösungen von (2.133) außer dem Fixpunkt selbst divergieren. Ist $\Delta R(0) > \overline{\Delta R}$, so divergiert $\Delta R(t)$ gegen $+\infty$, bis der Massentransfer auf dynamischer Zeitskala abläuft und der Modellansatz zusammenbricht. Ist dagegen $\Delta R(0) < \overline{\Delta R}$, so divergiert $\Delta R(t)$ gegen $-\infty$, so daß der Massentransfer schließlich abbricht. Physikalisch entspräche dieser Fall beispielsweise einem System mit $\zeta_e > \zeta_R > \zeta_s$ mit einem thermisch stark relaxierenden masseverlierenden Stern, etwa einem unentwickelten, massearmen, vollkonvektiven Hauptreihenstern. Auf Massenverlust reagieren diese Sterne adiabatisch mit Expansion ($\zeta_s < 0$). Ihre Entropie ist im Vergleich zu einem thermisch relaxierten Stern der gleichen Masse zu hoch, der Stern somit zu heiß. Die thermische Reaktion besteht nun darin, die überschüssige Energie abzustrahlen, d.h. der Stern kontrahiert ($\zeta_e > 0$), die thermische Relaxation wirkt der adiabatischen entgegen. Für ein solches System ist τ_{th} negativ, und, falls die thermische Relaxation stark genug ist, auch τ'_d . Die stationäre Massentransferrate ist durch $\overline{\tau}_M = (\zeta_s - \zeta_R)\tau'_d$ gegeben und stellt einen instabilen, hyperbolischen Fixpunkt dar. Formal würde für ein solches System für $\Delta R(0) > \overline{\Delta R}$ die Massentransferrate gegen unendlich gehen, für $\Delta R(0) < \overline{\Delta R}$ jedoch gegen Null. Für reale Systeme (ohne Bestrahlung) treffen die nötigen Voraussetzungen jedoch nicht zu, da zum einen ein System mit $\zeta_e > \zeta_R > \zeta_s$, das in eine Phase des Massentransfers eintritt, thermisch im Gleichgewicht ist, d.h. $\tau'_d = \tau_d > 0$, und ein Stern, der nicht im thermischen Gleichgewicht ist, bereits einen signifikanten Massenverlust erlitten haben muß, und das auf dynamischer Zeitskala (wegen $\zeta_s < \zeta_R$). Tatsächlich stellt sich heraus, daß dieser Fall für die Behandlung der Bestrahlungsrückkopplung in Kapitel 3 von Bedeutung ist, da unter diesen Umständen die thermische Relaxation ihr Vorzeichen verändern und der Fixpunkt in einem gewissen Sinne dynamisch instabil werden kann. Aber hierfür reicht der eindimensionale Ansatz (2.133) nicht aus, sondern die thermische Relaxation selbst muß als Variable behandelt werden.

Es gibt noch zwei weitere Fälle, für die allerdings keine stationäre Massentransferrate existiert. Für ein System mit $\zeta_s > \zeta_R$ und $\tau'_d < 0$ ist $\frac{d}{dt}\Delta R$ nach (2.133) immer negativ, so daß der Massentransfer schließlich aufhört. Für ein System mit $\zeta_s < \zeta_R$ und $\tau'_d > 0$ ist $\frac{d}{dt}\Delta R$ immer positiv, so daß der Massentransfer schließlich auf dynamischer Zeitskala abläuft.

Längere Phasen von stationärem Massentransfer sind also nur für Systeme mit $\tau'_d > 0$ und $\zeta_s > \zeta_R$ möglich, so daß im Folgenden auch nur solche Systeme betrachtet werden. Daß die Antriebszeitskala inklusive der thermischen Relaxation größer als Null ist, bedeutet, daß der Radius des Sterns im Verhältnis zu seinem ROCHE-Radius durch nukleare Entwicklung, systematische Drehimpulsverluste und thermische Relaxation insgesamt wächst ($\tau'_d > 0$), während die adiabatische Relaxation den Radius im Verhältnis zum ROCHE-Radius schrumpfen läßt

($\zeta_s > \zeta_R$). Es stellt sich schließlich ein von der vorgegebenen thermischen Relaxation τ_{th} abhängiges, stabiles Gleichgewicht zwischen beiden Effekten ein.

Eine wichtige Frage bei der Behandlung von Massentransfer ist, welche Transfertrate sich schließlich einstellt. Bei den bisherigen Überlegungen wurde davon ausgegangen, daß die thermische Relaxation τ_{th} fest vorgegeben ist. Dies ist für reale Systeme natürlich nicht der Fall. Stattdessen stellt sich eine thermische Relaxation als Folge eines über längere Zeit andauernden Massenverlustes ein. Ist die Massenverlustrate niedrig, bleibt der Stern im Wesentlichen im thermischen Gleichgewicht, ist die Massenverlustrate hingegen hoch, wird sich eine starke thermische Relaxation einstellen. Im Folgenden soll untersucht werden, welchen Wert τ_M und τ_{th} im Laufe der Zeit annehmen werden, um (2.139) zu erfüllen.

Als Kriterium für *thermische Stabilität* gegen Massenverlust bezeichnet man

$$\zeta_e - \zeta_R > 0. \quad (2.146)$$

Es bedeutet nichts anderes, als daß der thermische Gleichgewichtsradius als Reaktion auf Massenverlust schneller schrumpft (langsamer wächst) als der ROCHE-Radius des Sterns schrumpft (wächst). Ein Stern, der sowohl adiabatisch als auch thermisch stabil gegen Massenverlust ist, stellt sich, falls $\tau_{KH} \ll \tau_d$ gilt, auf eine stationäre Massentransfertrate ein, die durch

$$\overline{\tau_M} = (\bar{\zeta} - \zeta_R)\tau_d = (\zeta_e - \zeta_R)\tau_d \sim \tau_d \quad (2.147)$$

gegeben ist. Denn dies ist offensichtlich eine selbstkonsistente Lösung von (2.139), da für $\tau_M \sim \tau_d \gg \tau_{KH}$ der Stern thermisch relaxieren kann und ζ den Wert ζ_e annimmt.

Für ein System, das dagegen nur adiabatisch, aber nicht thermisch stabil gegen Massenverlust ist, für das also $\zeta_e < \zeta_R < \zeta_s$ gilt, muß sich eine wesentlich höhere stationäre Massentransfertrate einstellen, egal wie groß τ_d ist. Dies kann wie folgt veranschaulicht werden:

- Wäre $\overline{\tau_M} > \tau_{KH}$, so könnte der Stern thermisch relaxieren und ζ würde den Wert ζ_e annehmen, was auf Grund der thermischen Instabilität $\zeta_e < \zeta_R$ zu einem drastischen Anwachsen von $|\dot{M}|$ führen würde, im Widerspruch zur Annahme einer stationären Massenverlustrate. Daraus folgt, daß $\overline{\tau_M} \leq \tau_{KH}$ gelten muß.
- Wäre $\overline{\tau_M} \sim \tau_{hydr} \ll \tau_{KH}$ und der Massentransfer somit adiabatisch mit $\zeta = \zeta_s$, so wäre dies ebenfalls keine konsistente Lösung von (2.139). Denn $\overline{\tau_M} = (\zeta_s - \zeta_R)\tau_d$ ist ebenfalls von der Größenordnung der Antriebszeitskala τ_d und somit größer als τ_{KH} . Der Stern könnte auf Grund der niedrigen Massentransfertrate relaxieren, im Widerspruch zur Annahme des adiabatischen Massentransfers. Folglich muß auch $\overline{\tau_M} \gg \tau_{hydr}$ gelten.

Die Zeitskala des stationären Massentransfers muß sich also auf einen Wert zwischen τ_{hydr} und τ_{KH} einstellen. Man spricht hierbei von *Massentransfer auf thermischer Zeitskala*. Da die Antriebszeitskala τ_d in der Regel wesentlich größer

als τ_{KH} ist, besteht die einzige konsistente Lösung von (2.139) darin, daß ζ einen stationären Wert von $\bar{\zeta} \approx \zeta_R$ annimmt:

$$|\bar{\zeta} - \zeta_R| = \frac{\bar{\tau}_M}{\tau_d} \leq \frac{\tau_{\text{KH}}}{\tau_d} \ll 1. \quad (2.148)$$

Die Tatsache, daß dynamisch stabile ($\zeta_s > \zeta_R$), aber thermisch instabile ($\zeta_e < \zeta_R$) Systeme überhaupt über eine stationäre Massentransferrate verfügen, ist eine Folge der getroffenen Annahmen über das eindimensionale System (2.133), daß nämlich die thermische Relaxation τ_{th} fest vorgegeben ist. Dies ist natürlich nur dann der Fall, wenn die Zeitskala τ_{per} , auf der Störungen der stationären Massentransferrate weggedämpft werden, klein ist gegenüber der Zeitskala, auf der sich τ_{th} ändert. Betrachtet man τ_{th} jedoch genau wie \dot{M} bzw. ΔR nicht als Konstante, sondern als Variable, so gibt es für thermischen Massentransfer formal *keine* stationäre Massentransferrate. Diese Rechnung wird in Kapitel 3 im Rahmen der Untersuchung der Bestrahlungsrückkopplung durchgeführt. Die Existenz eines stationären Zustands hängt direkt von den Annahmen über das System, bzw. von den beteiligten Zeitskalen ab. Läßt man beispielsweise neben τ_{th} auch ζ_s variieren, so gibt es formal überhaupt keinen stationären Zustand mehr.

$\zeta_e < \zeta_s$ ist typisch für radiative Sterne. Diese können das steile Entropieprofil in ihrer Hülle (vgl. Abb. 2.7) und somit den hohen adiabatischen Masse-Radius-Exponenten nur aufrechterhalten, wenn die Hülle thermisch relaxieren kann. Das wiederum erfordert, daß die Zeitskala des Massentransfers größer ist als die thermische Zeitskala der Hülle. Für thermisch instabile Systeme mit $\zeta_e < \zeta_R$ bewegt sich die Massentransferzeitskala in der Größenordnung eines Bruchteils von τ_{KH} . Für höhere Massenverlustraten kann das steile Entropieprofil der Hülle nicht für beliebig lange Zeit aufrechterhalten werden, so daß ζ_s stark schrumpft. Schließlich wird der Stern nach dem Abtragen der Hülle dynamisch instabil. Dieser Effekt wird als *Delayed Dynamical Instability* bezeichnet (HJELLMING und WEBBINK, 1987, SCHENKER et al., 2002, PODSIADLOWSKI et al., 2002).

Systeme, die thermisch stabil sind, aber adiabatisch instabil ($\zeta_s < \zeta_R < \zeta_e$), können zwar formal eine stationäre Massenverlustrate besitzen, die jedoch, wie bereits diskutiert, nicht stabil ist.

Es läßt sich zeigen, daß die Reaktion auf instantane Änderungen der Massentransferrate immer rein adiabatisch ist. Betrachtet man eine Störung $\delta\dot{M}$ der stationären Massentransferrate \bar{M} , so gilt nach (2.133):

$$\frac{d}{dt}(\Delta R - \overline{\Delta R}) = \frac{d}{dt}\Delta R = \frac{R}{\tau_d} + \frac{R}{\tau_{\text{th}}} + (\zeta_s - \zeta_R)\frac{R}{\bar{M}}(\bar{M} + \delta\dot{M}). \quad (2.149)$$

Durch Einsetzen der stationären Massentransferrate (2.135) ergibt sich:

$$\frac{d}{dt}\Delta R = (\zeta_s - \zeta_R)\frac{R}{\bar{M}}\delta\dot{M}. \quad (2.150)$$

Für instantane Änderungen von \dot{M} hängt ζ nur linear von τ_M ab. (2.120) liefert:

$$\zeta = \zeta_s - \frac{\tau_M}{\tau_{\text{th}}} = \zeta_s - \frac{1}{\tau_{\text{th}}}\frac{M}{\bar{M} + \delta\dot{M}}. \quad (2.151)$$

Ferner läßt sich τ_{th} durch

$$\tau_{\text{th}} = \frac{\overline{\tau_M}}{\zeta_s - \bar{\zeta}} \quad (2.152)$$

ersetzen, welches, eingesetzt in (2.151), auf den Masse-Radius-Exponenten als Funktion der Störung $\delta\dot{M}$ führt:

$$\zeta(\delta\dot{M}) = \bar{\zeta} + (\zeta_s - \bar{\zeta}) \frac{\delta\dot{M}}{\dot{M} + \delta\dot{M}}. \quad (2.153)$$

Diese Formel gilt prinzipiell auch für beliebig große „Störungen“. Speziell für niedrige Massentransferraten, d.h. $\zeta \approx \zeta_e$ ergibt sich:

$$\zeta(\delta\dot{M}) = \zeta_e + (\zeta_s - \zeta_e) \frac{\delta\dot{M}}{\dot{M} + \delta\dot{M}}. \quad (2.154)$$

Störungen entwickeln sich $\sim \exp(DFt)$, d.h. sie werden auf einer Zeitskala

$$\tau_{\text{per}} = \frac{1}{|DF|} \quad (2.155)$$

weggedämpft. Aus der Definition der charakteristischen Skalenhöhe (2.129), der Formel für die stationäre Massentransferrate (2.139) sowie (2.142) ergibt sich:

$$\tau_{\text{per}} = \frac{H}{R} \frac{\tau_M}{\zeta_s - \zeta_R} = \frac{H}{R} \tau'_d. \quad (2.156)$$

Störungen, und dazu zählt auch der Ein- und Ausschaltvorgang des Massentransfers, werden also auf einer Zeitskala weggedämpft, die kurz ist im Vergleich zur Entwicklungszeitskala des Systems, da $\frac{H}{R} \ll 1$ ist.

2.3.6 Antriebsmechanismen des Massentransfers

2.3.6.1 Die nukleare Entwicklung

Als Antrieb für den Massentransfer kommen im Wesentlichen zwei Mechanismen in Frage: Expansion des Sternradius durch nukleare Entwicklung und Kontraktion des ROCHE-Radius durch Drehimpulsverluste.

Wird der Massentransfer durch die nukleare Entwicklung des masseverlierenden Sterns angetrieben, so verläuft der Massentransfer eines adiabatisch und thermisch stabilen Sterns auf der nuklearen Zeitskala.

$$\tau_{\text{nuc}} = \left(\frac{dR}{dt} \right)_{\text{nuc}}^{-1} \quad (2.157)$$

ist von der Größenordnung des Verhältnisses von vorhandener nuklearer Energie und nuklearer Leuchtkraft und liegt im Bereich von $10^9 - 10^{12}$ Jahren für massearme Hauptreihensterne und etwa $10^7 - 10^8$ Jahren für Riesen.

2.3.6.2 Drehimpulsverlustmechanismen

Eine absolute Untergrenze für den Drehimpulsverlust ist durch die Abstrahlung von Gravitationswellen gegeben. Er beträgt für zwei Punktmassen, die einander mit der Bahnfrequenz ω umkreisen, nach der Allgemeinen Relativitätstheorie

$$\dot{J}_{\text{grav}} = -\frac{32\Gamma^{\frac{7}{3}}}{5c^5} M_1^2 M_2^2 (M_1 + M_2)^{-\frac{2}{3}} \omega^{\frac{7}{3}}, \quad (2.158)$$

wobei Γ die Gravitationskonstante und c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnen (LANDAU und LIFSCHITZ, 1951, 1992). Behandelt man die Sterne nicht als Punktmassen sondern als ausgedehnte Körper, so ergibt sich eine höhere Drehimpulsverlustrate, so daß auch bei Einbeziehung des Spins in die Drehimpulsbilanz die Drehimpulsverlustzeitskala geringfügig kleiner wird (BOYARCHUK et al., 2002).

\dot{J}_{grav} ist nur wichtig für enge Systeme mit kurzen Bahnperioden von einigen Stunden. Für Kataklysmische Veränderliche mit typischen Werten von M_1 , M_2 und einer Bahnperiode von einigen Stunden liegt die Zeitskala des Drehimpulsverlustes durch Gravitationswellen in der Größenordnung von $10^9 - 10^{10}$ Jahren. Für längerperiodische Systeme ist die Gravitationswellenabstrahlung gegenüber der nuklearen Entwicklung vernachlässigbar.

Ein weiterer, in der Literatur häufig diskutierter, wenn auch bis heute nur unzureichend verstandener Drehimpulsverlustmechanismus ist die magnetische Bremsung. Die Grundidee besteht darin, daß der Sternwind des masseverlierenden Sterns entlang der Magnetfeldlinien abströmt und bis zum Erreichen des ALFVÉN-Radius mit dem Magnetfeld korotiert, so daß der Wind einen hohen spezifischen Drehimpuls fortträgt. Durch die in Abschnitt 2.1 beschriebene Synchronisation von Spin- und Bahnperiode wird der verlorene Drehimpuls im Wesentlichen der Bahnbewegung entzogen. Das Magnetfeld selbst wird durch einen Dynamoeffekt in der konvektiven Hülle erzeugt. Nach einer von VERBUNT und ZWAAN (1981) entwickelten empirischen Relation ist der Drehimpulsverlust durch magnetische Bremsung durch

$$\dot{J}_{\text{VZ}} = -5 \cdot 10^{-29} \frac{\text{s}}{\text{cm}^2} \frac{M_1 R_{g,1}^2 R_1^4 \omega^3}{f_{\text{VZ}}^2} \quad (2.159)$$

gegeben, mit einem durch Beobachtungen an isolierten G -Sternen bestimmten Parameter f_{VZ} von der Größenordnung 1 und dem Trägheitsradius $R_{g,1}$. Er ist über das Trägheitsmoment

$$\theta_1 = \int_V (\mathbf{r} - \mathbf{r}\mathbf{e}_z)^2 \rho d^3r = \frac{2}{3} \int_0^{M_1} r^2 dM_r =: M_1 R_{g,1}^2 R_1^2 \quad (2.160)$$

definiert. Ein von MESTEL und SPRUIT (1987) vorgeschlagenes alternatives Modell basiert ebenfalls darauf, daß der Sternwind entlang offener Feldlinien des Magnetfeldes abströmt und bis zum ALFVÉN-Radius mit dem Magnetfeld korotiert. In dieses Modell gehen zwei freie Parameter ein, die im Prinzip ebenfalls

durch Beobachtungen zu bestimmen sind. Unter bestimmten vereinfachenden Annahmen (KOLB, 1992) ist die Bremsrate durch

$$\frac{\dot{J}_{\text{MS}}}{J} = -3.22 \cdot 10^{-9} \text{yr}^{-1} q \left(1 + \frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^{-\frac{2}{3}} \quad (2.161)$$

gegeben.

Doch nicht nur der genaue Mechanismus der magnetischen Bremsung ist unklar, sondern sogar die Größenordnung der Bremsraten ist umstritten. SILLS et al. (2000), ANDRONOV et al. (2003) folgern aus neueren Beobachtungen von Sternhaufen eine sehr viel geringere Bremsrate. Hiernach saturiert oberhalb einer kritischen Rotationsfrequenz ω_{crit} die Magnetfeldstärke auf Grund der endlichen konvektiven Umwälzzeitkala τ_{ot} . Für Hauptreihensterne oberhalb einer halben Sonnenmasse wird für ω_{crit} eine sogenannte ROSSBY-Skalierung angesetzt:

$$\omega_{\text{crit}} = \omega_{\text{crit},\odot} \frac{\tau_{\text{ot},\odot}}{\tau_{\text{ot}}} \quad (2.162)$$

mit der solaren Umwälzzeitkala $\tau_{\text{ot},\odot}$ und einem $\omega_{\text{crit},\odot}$ von der Größenordnung von $10\omega_{\odot}$. Die Bremsrate ist durch

$$\dot{J}_{\text{magn}} = -K \sqrt{\frac{R}{R_{\odot}} \frac{M_{\odot}}{M}} f(\omega) \quad (2.163)$$

mit $K = 2.7 \cdot 10^{47} \text{g cm s}$ und

$$f(\omega) = \begin{cases} \omega^3, & \text{falls } \omega \leq \omega_{\text{crit}}, \\ \omega_{\text{crit}}^2 \omega, & \text{falls } \omega > \omega_{\text{crit}} \end{cases} \quad (2.164)$$

gegeben. Für Sterne niedrigerer Masse wird von den Autoren ein um eine Größenordnung kleineres ω_{crit} verwendet. Für die praktische Anwendung in Hinblick auf Langzeitentwicklungen von engen Doppelsternen ist (2.163) bedauerlicherweise ungeeignet. Zum einen ist ω_{crit} im Grunde ein freier Parameter, zum anderen fehlt ein analytischer Ansatz für den Übergang von Hauptreihensternen mittlerer Masse zu massearmen Hauptreihensternen in der Drehimpulsverlustrate (2.163).

Abb. 2.9 zeigt die Entwicklung einer massearmen Kataklysmischen Veränderlichen bis zum Periodenminimum für verschiedene Bremsraten und verschiedene Werte von η . Tabelle 2.1 enthält die zugehörigen Anfangsparameter. Die „Schleife“ in der Massentransferrate bei einer Bahnperiode von etwa drei Stunden, vornehmlich für schwache Bremsung sichtbar, wird dadurch verursacht, daß der Stern zu diesem Zeitpunkt vollkonvektiv wird und daher seinen Radius auf einer relativ kurzen Zeitskala ändert.

2.3.6.3 Die thermische Relaxation

Bei der thermischen Relaxation handelt es sich üblicherweise nicht um einen Antriebsmechanismus für den Massenverlust, auch wenn sie durchaus einen Einfluß

Modell-Nr.	$M_{1,i}/M_{\odot}$	$M_{2,i}/M_{\odot}$	η	ν	\dot{J}
1	0.5	0.8	1	-	\dot{J}_{VZ}
2	0.5	0.8	0	q	\dot{J}_{VZ}
3	0.5	0.8	1	-	$5\dot{J}_{\text{grav}}$
4	0.5	0.8	0	q	$5\dot{J}_{\text{grav}}$
5	0.5	0.8	1	-	\dot{J}_{grav}
6	0.5	0.8	0	q	\dot{J}_{grav}

Tabelle 2.1: Anfängliche Systemparameter der in Abb. 2.9 dargestellten Entwicklungsrechnungen.

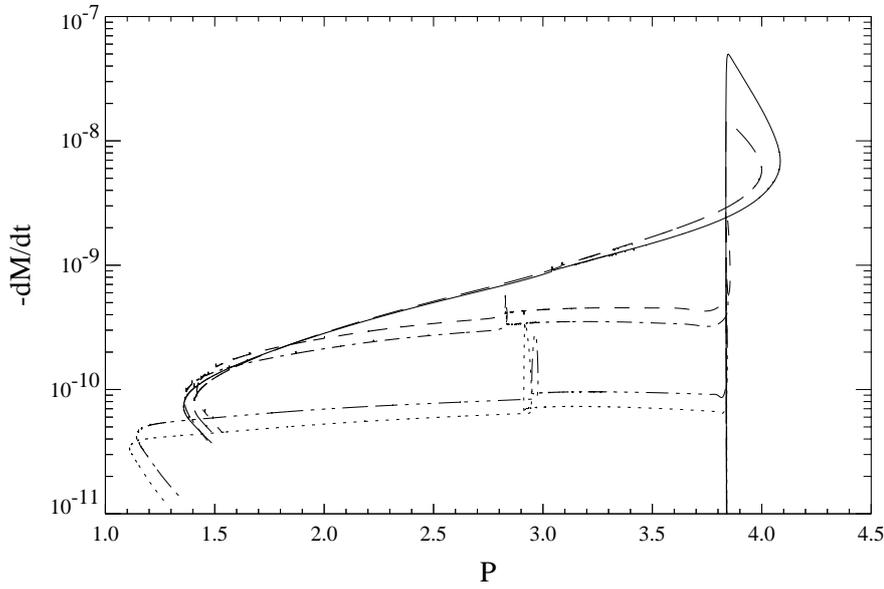


Abbildung 2.9: Massentransferrate \dot{M} [M_{\odot}/yr] als Funktion der Bahnperiode P [hr] für ein System aus einem wenig entwickelten Hauptreihenstern mit anfänglich $0.5 M_{\odot}$ und einem Weißen Zwerg mit anfänglich $0.8 M_{\odot}$ für verschiedene Bremsraten. Tabelle 2.1 enthält die anfänglichen Systemparameter. Die durchgezogene Linie entspricht Modell 1, die langgestrichelte Modell 2, die kurzgestrichelte Modell 3, die strichpunktierte Modell 4, die punktiert-strichpunktierte Modell 5 und die punktierte Modell 6.

auf die Massentransferrate nehmen kann. Bei thermisch instabilen Systemen ($\zeta_e < \zeta_R$) wird der Massentransfer allerdings im Wesentlichen durch die thermische Relaxation bestimmt, nachdem der masseverlierende Stern einmal durch nukleare Entwicklung oder Drehimpulsverluste sein ROCHE-Volumen ausgefüllt hat. Auch wenn diese beiden Mechanismen plötzlich abgeschaltet würden, so würde der Massenverlust weiterlaufen, so daß man in diesem Zusammenhang durchaus von der thermischen Relaxation als Antriebsmechanismus sprechen kann.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, daß der Stern sich beim Einsetzen des

Massenverlusts nicht im thermischen Gleichgewicht befindet. Dies tritt auf bei Sternen, die nach dem Ende des zentralen Wasserstoffbrennens auf der thermischen Zeitskala von der Hauptreihe durch die HERTZSPRUNG-Lücke zum Fuß des Riesenastes wandern. Beim Übergang vom zentralen Wasserstoffbrennen zum Wasserstoffschalenbrennen ändert sich die thermische Gleichgewichtskonfiguration des Sterns zwar instantan, der neue Gleichgewichtszustand wird aber erst auf der KELVIN-HELMHOLTZ-Zeitskala erreicht. Füllt der Stern, während er sich durch die HERTZSPRUNG-Lücke bewegt, sein ROCHE-Volumen aus, so handelt es sich in diesem Fall bei der thermischen Relaxation eindeutig um den Antriebsmechanismus für den nun folgenden Massenverlust.

2.3.7 Der Einfluß des Spins des masseverlierenden Sterns auf die Langzeitentwicklung

Der Gesamtdrehimpuls eines starr rotierenden, halbgetrennten Systems ist im Wesentlichen durch die Summe aus dem Bahndrehimpuls J_{orb} (2.64) und dem Spindrehimpuls J_1 des sein ROCHE-Volumen füllenden Sterns gegeben. Der Spin des Sekundärsterns wird hierbei vernachlässigt. Dies ist gerechtfertigt, solange der Sekundärstern deutlich kleiner als sein ROCHE-Radius ist und nicht zu schnell rotiert. Für einen Neutronenstern ist J_2 auch bei kritischer Rotation vernachlässigbar, für einen Weißen Zwerg aber nicht unbedingt. Der akkretierende Stern wird im Folgenden als Punktmasse behandelt. Wie in Abschnitt 2.1 diskutiert wurde, ist die Zeitskala der Synchronisation der Bahnbewegung mit der Eigenrotation eines sein ROCHE-Volumen füllenden Sterns kurz gegenüber typischen Entwicklungszeitskalen. Daher gilt für den Gesamtdrehimpuls:

$$J_{\text{tot}} = J_{\text{orb}} + J_1 = \theta_{\text{orb}}\omega + \theta_1\omega. \quad (2.165)$$

Das Bahnträgheitsmoment θ_{orb} ist durch (2.63) gegeben und das Spinträgheitsmoment θ_1 durch (2.160) mit dem totalen Differential

$$d \ln \theta_1 = d \ln M_1 + 2 d \ln R_{g,1} + 2 d \ln R_{R,1}. \quad (2.166)$$

Die Änderung des Gesamtdrehimpulses kann nur durch systematischen Drehimpulsverlust oder *Consequential Angular Momentum Loss* erfolgen:

$$dJ_{\text{tot}} = dJ_{\text{sys}} + dJ_{\text{caml}}. \quad (2.167)$$

Diese sowie die weiter unten benutzten Größen wurden in Abschnitt 2.3.2 bereits diskutiert. dJ_{sys} folgt aus dem gewählten Drehimpulsverlustmechanismus, und aus der Definition von ν in (2.73), die auf den Bahndrehimpuls bezogen ist, folgt für dJ_{caml} :

$$dJ_{\text{caml}} = \nu J_{\text{orb}} d \ln M, \quad (2.168)$$

wobei sich die Änderung der Gesamtmasse M mit Hilfe der Definition von η aus (2.67) zu

$$d \ln M = (1 - \eta) \frac{q}{1 + q} d \ln M_1 \quad (2.169)$$

ergibt. Für den ROCHE-Radius (2.11) folgt analog:

$$d \ln R_{R,1} = d \ln A + \frac{d \ln f_R}{d \ln q} (1 + \eta q) d \ln M_1, \quad (2.170)$$

wobei sich die Änderung des Bahnabstandes mit (2.64) als

$$d \ln A = 2 d \ln J_{\text{orb}} + \left[(1 - \eta) \frac{q}{1 + q} - 2(1 - \eta q) \right] d \ln M_1 \quad (2.171)$$

schreiben läßt. Die Änderung des Bahndrehimpulses folgt nun aus

$$d J_{\text{orb}} = d J_{\text{tot}} - d J_1 \quad (2.172)$$

durch Einsetzen von (2.167), (2.168) und (2.169) in (2.172):

$$d J_{\text{orb}} = d J_{\text{sys}} - d J_1 + J_{\text{orb}} \nu (1 - \eta) \frac{q}{1 + q} d \ln M_1. \quad (2.173)$$

Einsetzen in (2.171) und Verwendung des Zwischenergebnisses in (2.170) liefert die Änderung des ROCHE-Radius

$$d \ln R_{R,1} = \zeta_{R,1} d \ln M_1 + \frac{2}{J_{\text{orb}}} d J_{\text{sys}} - \frac{2}{J_{\text{orb}}} d J_1 \quad (2.174)$$

mit dem aus (2.75) bekannten Masse-Radius-Exponenten des ROCHE-Radius für zwei Punktmassen:

$$\zeta_{R,1} = (1 - \eta)(2\nu + 1) \frac{q}{1 + q} - 2(1 - \eta q) + (1 + \eta q) \frac{d \ln f_R}{d \ln q}. \quad (2.175)$$

Aus dem dritten KEPLERSchen Gesetz (2.8) folgt das totale Differential der Rotationsfrequenz

$$d \ln \omega = -\frac{3}{2} d \ln A + \frac{1}{2} d \ln M, \quad (2.176)$$

und mit Hilfe von (2.166) hieraus die Änderung des Spins:

$$d \ln J_1 = d \ln M_1 + 2 d \ln R_{g,1} + 2 d \ln R_1 - \frac{3}{2} d \ln A + d \ln M. \quad (2.177)$$

Das Einsetzen von (2.169) und (2.170) liefert:

$$d \ln J_1 = -\frac{3}{2} d \ln R_{R,1} + 2 d \ln R_{g,1} + 2 d \ln R_1 + \left[1 + (1 - \eta) \frac{q}{1 + q} + \frac{3}{2} (1 + \eta q) \frac{d \ln f_R}{d \ln q} \right] d \ln M_1, \quad (2.178)$$

welches, eingesetzt in (2.174), auf das totale Differential von $R_{R,1}$ führt:

$$\left[1 - 3 \frac{J_1}{J_{\text{orb}}} \right] d \ln R_{R,1} = [\zeta_{R,1} - \zeta_{R,\text{corr}}] d \ln M_1 - 4 \frac{J_1}{J_{\text{orb}}} d \ln R_1 + \frac{2}{J_{\text{orb}}} d J_{\text{sys}} - 4 \frac{J_1}{J_{\text{orb}}} d \ln R_{g,1} \quad (2.179)$$

mit

$$\zeta_{R,\text{corr}} = 2 \frac{J_1}{J_{\text{orb}}} \left(1 + (1 - \eta) \frac{q}{1 + q} + \frac{3}{2} (1 + \eta q) \frac{d \ln f_R}{d \ln q} \right). \quad (2.180)$$

Für $R_1 = R_{R,1}$ ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{J_1}{J_{\text{orb}}} \right] d \ln R_{R,1} &= [\zeta_{R,1} - \zeta_{R,\text{corr}}] d \ln M_1 \\ &+ \frac{2}{J_{\text{orb}}} dJ_{\text{sys}} - 4 \frac{J_1}{J_{\text{orb}}} d \ln R_{g,1}. \end{aligned} \quad (2.181)$$

Das Verhältnis der beiden Drehimpulse ist durch das Verhältnis von Spinträgheitsmoment (2.160) und Bahnträgheitsmoment (2.63)

$$\frac{J_1}{J_{\text{orb}}} = \frac{\theta_1}{\theta_{\text{orb}}} = (1 + q) f_R^2(q) R_{g,1}^2 \quad (2.182)$$

gegeben, so daß hieraus die Korrektur für $\zeta_{R,1}$ als Funktion des Massenverhältnisses und des Gyrationradius $R_{g,1}$ folgt:

$$\zeta_{R,\text{corr}} = 2(1 + q) f_R^2(q) \left(1 + (1 - \eta) \frac{q}{1 + q} + \frac{3}{2} (1 + \eta q) \frac{d \ln f_R}{d \ln q} \right) R_{g,1}^2. \quad (2.183)$$

Abb. 2.10(a) zeigt den Trägheitsradius für Nullalter-Hauptreihensterne solarer Zusammensetzung. Für massearme, vollkonvektive Sterne ist $R_{g,1} \approx 0.46$, und für massereichere, radiative Sterne $R_{g,1} \approx 0.22$. Für diese beiden Grenzfälle ist $\zeta_{R,\text{corr}}$ in Abb. 2.10(b) dargestellt. $\zeta_{R,\text{corr}}$ hängt nur schwach von η ab, ist also für konservativen und nichtkonservativen Massentransfer kaum verschieden. Deutlich sichtbar ist dagegen der Einfluß des Gyrationradius, doch um den wirklichen Einfluß des Spins auf reale Systeme zu erhalten, ist noch der Faktor $1 + \frac{J_1}{J_{\text{orb}}}$ zu berücksichtigen. Aus (2.181) läßt sich ersehen, daß im Ergebnis $\zeta_{R,1}$ verkleinert wird, d.h. das System wird durch die Spin-Bahn-Kopplung gegen Massenverlust stabilisiert, falls

$$\left(1 - \frac{\zeta_{R,\text{corr}}}{\zeta_{R,1}} \right) \zeta_{R,1} < \left(1 + \frac{J_1}{J_{\text{orb}}} \right) \zeta_{R,1} \quad (2.184)$$

gilt. Da $\zeta_{R,\text{corr}}$ positiv ist, ist diese Ungleichung für positives $\zeta_{R,1}$ automatisch erfüllt. Für negatives $\zeta_{R,1}$ muß

$$|\zeta_{R,1}| < \frac{\zeta_{R,\text{corr}}}{(1 + q) f_R^2(q) R_{g,1}^2} \quad (2.185)$$

gelten. Die Differenz zwischen

$$\frac{\partial \ln R_{R,1}}{\partial \ln M_1} = \frac{\zeta_{R,1} - \zeta_{R,\text{corr}}}{1 + \frac{J_1}{J_{\text{orb}}}} \quad (2.186)$$

unter Berücksichtigung des Spins und

$$\frac{\partial \ln R_{R,1}}{\partial \ln M_1} = \zeta_{R,1} \quad (2.187)$$

ohne Berücksichtigung des Spins führt auf

$$\Delta\zeta_{R,1} = \frac{\zeta_{R,1} - \zeta_{R,\text{corr}}}{1 + \frac{J_1}{J_{\text{orb}}}} - \zeta_{R,1} = -\frac{\zeta_{R,\text{corr}} + \frac{J_1}{J_{\text{orb}}}\zeta_{R,1}}{1 + \frac{J_1}{J_{\text{orb}}}}. \quad (2.188)$$

Von besonderem Interesse ist diese Korrektur von $\zeta_{R,1}$ für Systeme, die sich am Rande der dynamischen Instabilität bewegen, bzw. die im Laufe ihrer Entwicklung an diesen Rand gelangen können. Speziell gilt dies für thermisch instabile Systeme ($\zeta_e < \zeta_R$) mit einem radiativen Stern ($R_{g,1} \sim 0.22$) und einem großen Massenverhältnis ($q \sim 2 - 3$). Mit einem Wert von $\zeta_{R,\text{corr}} \sim 0.1$ und $\zeta_{R,1} \sim 3$ sowie $\frac{J_1}{J_{\text{orb}}}$ in der Größenordnung von einigen 10^{-2} ergibt sich für solche Systeme eine Korrektur von $\Delta\zeta_{R,1} \sim -0.2$. Um diesen Betrag wird $\zeta_{R,1}$ also effektiv bei Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung verkleinert und das System somit gegen Massenverlust stabilisiert.

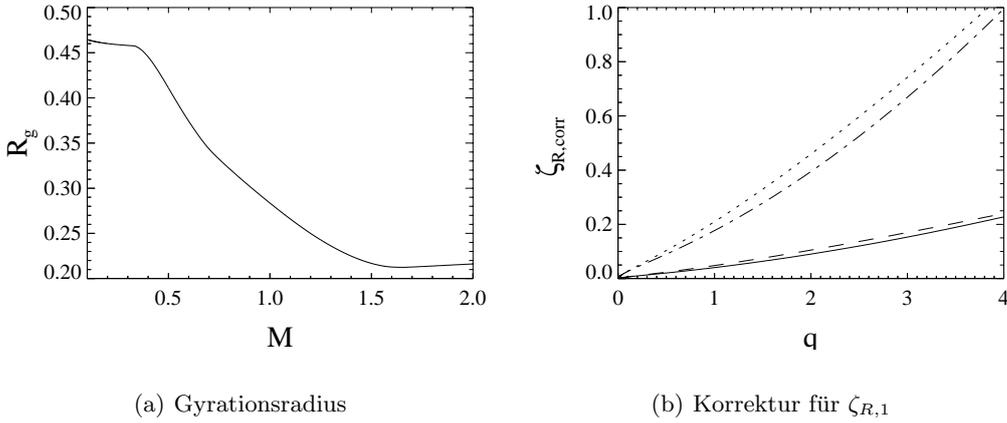


Abbildung 2.10: (a) Gyrationradius R_g und (b) $\zeta_{R,\text{corr}}$ für Nullalter-Hauptreihensterne solarer Zusammensetzung im thermischen Gleichgewicht (SCVH) für zwei Grenzfälle von R_g (vollkonvektiver Stern: $R_g \approx 0.46$, radiativer Stern: $R_g \approx 0.22$) und zwei Werte von η (konvolutiver Massentransfer: $\eta = 1$, nichtkonservativer Massentransfer: $\eta = 0$). Durchgezogene Linie: $\eta = 1, R_g = 0.22$, gestrichelte Linie: $\eta = 0, R_g = 0.22$, strichpunktierte Linie: $\eta = 1, R_g = 0.46$, punktierte Linie: $\eta = 0, R_g = 0.22$.

Allerdings ist hierbei der Beitrag von $d \ln R_{g,1}$ aus (2.181) nicht berücksichtigt, für den kein analytischer Ansatz existiert. Numerische Rechnungen zeigen jedoch, daß dieser Beitrag im Allgemeinen nicht vernachlässigt werden kann, speziell für radiative Sterne, die Massenverlust auf thermischer Zeitskala erleiden. Denn solche Sterne mit anfänglich $R_{g,1} \sim 0.22$ entwickeln sich mit Verlust ihrer Hülle hin zu isentropen Sternen mit $R_{g,1} \sim 0.46$, falls sie nicht genügend Zeit bekommen, thermisch zu relaxieren. Die Vergrößerung von $R_{g,1}$ infolge von Massenverlust auf thermischer Zeitskala wirkt der Verkleinerung von $\zeta_{R,1}$ durch die Spin-Bahn-Kopplung entgegen, wie sich aus (2.181) erkennen läßt. Wie groß der

verbleibende Nettoeffekt tatsächlich ist, wurde im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter untersucht.

2.4 Numerische Stabilität des Massentransfers

2.4.1 Das explizite Verfahren

Für die numerische Berechnung halbgetrennter Doppelsternsysteme ist es von Bedeutung zu wissen, ob und unter welchen Bedingungen numerische Methoden zur Berechnung der Massentransferrate stabil sind, insbesondere da schon seit Jahren die Existenz von Instabilitäten bekannt ist (PASTETTER und RITTER, 1989, KOLB und RITTER, 1990), wenn dieses Problem auch von den meisten Autoren stillschweigend übergangen wird.

Die einfachste und naheliegendste Methode, die Sternmasse als Funktion der Zeit zu berechnen, ist die explizite Vorwärtsintegration der Massentransferrate \dot{M} nach der Zeit mittels EULER-Verfahren:

$$M_{n+1} = M_n + \dot{M}(t_n) \Delta t_n. \quad (2.189)$$

Im Folgenden soll untersucht werden, inwiefern allein die Zeitdiskretisierung die Berechnung der Massentransferrate $\dot{M}(t_n)$ als Funktion der Zeit t_n beeinflusst. Aus Gründen der Einfachheit sei die Zeitschrittlänge Δt konstant und die momentane Massentransferrate durch die vereinfachte optisch dünne Massentransferformel (2.42) als Funktion von $\Delta R = R - R_R$ gegeben:

$$\dot{M}(t_n) = -\dot{M}_0 \exp\left(\frac{\Delta R(t_n)}{H_P}\right). \quad (2.190)$$

Dieser Ansatz wurde aus Gründen der Einfachheit gewählt, und kann auch auf jede beliebige andere Massentransferformel mit einer charakteristischen Skalenhöhe H am Fixpunkt $\bar{\Delta R}$ angewendet werden. Des weiteren soll statt $\dot{M}(t_n)$ der Abstand zwischen Sternradius und ROCHE-Radius $\Delta R_n := \Delta R(t_n)$ betrachtet werden, die durch die Massentransferformel (2.190) eineindeutig verknüpft sind. Die Zeitentwicklung von ΔR_n ergibt sich aus der Differentialgleichung (2.133) in diskretisierter Form:

$$\Delta R_{n+1} = \Delta R_n + \left[\frac{R}{\tau'_d} + (\zeta_s - \zeta_R) \frac{R}{M} \dot{M}(\Delta R_n) \right] \Delta t =: \Phi(\Delta R_n). \quad (2.191)$$

Offensichtlich hat das diskretisierte System (2.191) denselben Fixpunkt ΔR wie das kontinuierliche System (2.133).

Nach dem *Satz von HARTMAN-GROBMAN* ist der Fixpunkt \bar{x} einer Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \Phi(x)$ stabil, falls alle Eigenwerte von $D\Phi$ an der Stelle x vom Betrag kleiner sind als 1, und er ist instabil, falls auch nur ein Eigenwert vom Betrag größer ist als 1 (GUCKENHEIMER und HOLMES, 1983). Eine Störung des Fixpunktes entwickelt sich nämlich wegen

$$x_{n+1} - \bar{x} = \Phi(x_n) - \Phi(\bar{x}) \approx D\Phi(\bar{x})(x_n - \bar{x}) \quad (2.192)$$

für n Iterationen proportional zu $(D\Phi)^n(\bar{x})$. Sind die Eigenwerte von $D\Phi(\bar{x})$ vom Betrag kleiner 1, so ist der Fixpunkt ein Attraktor, d.h. daß in einer genügend kleinen Umgebung um \bar{x} alle Lösungen asymptotisch gegen \bar{x} konvergieren.

Mit der Definition von F aus (2.140) und Φ aus (2.191) gilt:

$$D\Phi(\overline{\Delta R}) = 1 + DF(\overline{\Delta R}) \Delta t. \quad (2.193)$$

Damit ist das Stabilitätskriterium

$$|D\Phi(\overline{\Delta R})| = |1 + DF(\overline{\Delta R}) \Delta t| < 1 \quad (2.194)$$

wegen $DF(\overline{\Delta R}) < 0$ (die Massentransferrate ist ja streng monoton fallend) äquivalent zu

$$1 + DF(\overline{\Delta R}) \Delta t > -1. \quad (2.195)$$

Durch Einsetzen der stationären Massentransferrate aus (2.137) in DF aus (2.142) erhält man

$$DF(\overline{\Delta R}) = -\frac{R}{H_P} \frac{1}{\tau_d'}, \quad (2.196)$$

woraus sich sofort die Stabilitätsbedingung für die Zeitschrittlänge Δt als Resultat ergibt:

$$\Delta t < 2 \frac{H_P}{R} \tau_d' =: \Delta t_{\max}. \quad (2.197)$$

Dies bedeutet nichts anderes, als daß das explizite Verfahren gegen den Fixpunkt, bzw. die stationäre Massentransferrate konvergiert, falls Δt kleiner als die kritische Zeitschrittlänge Δt_{\max} ist. Dann und nur dann kann das explizite Verfahren die physikalisch korrekten Werte liefern. Ist Δt jedoch größer, wird der Fixpunkt des diskretisierten (numerischen) Systems instabil, obwohl der Fixpunkt des kontinuierlichen (physikalischen) Systems natürlich stabil ist. Das heißt, daß das explizite Verfahren prinzipiell nicht mehr in der Lage ist, die physikalisch korrekten Werte zu liefern! Dies folgt allein aus dem Ansatz einer Zeitdiskretisierung (2.189) und ist in keinsten Weise auf numerische Ungenauigkeiten in der Berechnung des Sternaufbaus zurückzuführen. Tatsächlich wird bei der Herleitung angenommen, daß ζ_s und τ_{th} und somit der Sternaufbau mit unendlicher Genauigkeit bekannt sind und sich nur auf Zeitskalen $\tau \gg \Delta t$ ändern.

Es ist hierbei auch vollkommen irrelevant, daß (2.191) in keinen realen Sternentwicklungscode implementiert werden würde, da ζ_s und τ_{th} weder bekannt noch in geeigneter Form analytisch angegeben werden können. Ihr Wert hängt vom Verlauf der Zustandsgrößen T , P , S und r *durch den ganzen Stern hindurch* ab und könnte numerisch nur unter großem Aufwand ermittelt werden. Die obige Stabilitätsanalyse beantwortet lediglich die folgende Frage: Unter der Annahme, daß zur Zeit t_n die Massentransferrate mit einem kleinen Fehler ε zu $\dot{M}(t_n)$ bestimmt wird, welchen Fehler liefert ein idealer, zeitdiskretisierter Algorithmus

für $\dot{M}(t_{n+1})$? Und die Antwort ist: Falls Δt größer ist als ein kritischer Wert Δt_{\max} , vergrößert sich der Fehler mit jedem Zeitschritt.

Dies läßt sich leicht aus (2.192) ersehen: Ein Orbit¹⁸ in einer genügend kleinen Umgebung des Fixpunkts entwickelt für einen Startwert sich ΔR_0 in der Form

$$\Delta R_n = \overline{\Delta R} + (D\Phi)^n(\overline{\Delta R}) (\Delta R_0 - \overline{\Delta R}), \quad (2.198)$$

was mit (2.193) und (2.196) auf

$$\Delta R_n = \overline{\Delta R} + \left(1 - \frac{R}{H_P} \frac{\Delta t}{\tau'_d}\right)^n (\Delta R_0 - \overline{\Delta R}) \quad (2.199)$$

führt. Es können nun folgende Fälle betrachtet werden:

1. $\Delta t \ll \frac{H_P}{R} \tau'_d$: Es gilt näherungsweise

$$1 - \frac{R}{H_P} \frac{\Delta t}{\tau'_d} \approx \exp\left(-\frac{R}{H_P} \frac{\Delta t}{\tau'_d}\right), \quad (2.200)$$

das diskrete System verhält sich also qualitativ und quantitativ wie das kontinuierliche. Ein gravierender Nachteil besteht darin, daß auf Grund der kleinen Zeitschrittlänge sehr viele Zeitschritte notwendig sind, um die Phase des Massentransfers für ein Doppelsternsystem durchzurechnen. Eine solche Rechnung ist auch mit den heutigen Rechenkapazitäten recht aufwendig.

2. $\Delta t = \frac{H_P}{R} \tau'_d \pm \varepsilon$ mit $\varepsilon \ll \frac{H_P}{R} \tau'_d$: Ein Orbit in der Umgebung des Fixpunktes entwickelt sich näherungsweise wie

$$\Delta R_n \approx \overline{\Delta R} - \left(\pm \frac{R}{H_P} \frac{\varepsilon}{\tau'_d}\right)^n (\Delta R_0 - \overline{\Delta R}), \quad (2.201)$$

d. h. der Orbit erreicht den Fixpunkt quasi instantan. Ein solches Verhalten ist physikalisch zwar nicht korrekt, aber da Δt von der Größenordnung der Abklingzeit τ ist, würde man schon nach wenigen Zeitschritten physikalisch richtige Ergebnisse erwarten können.

3. $\frac{H_P}{R} \tau'_d < \Delta t < 2\frac{H_P}{R} \tau'_d$: Der Orbit oszilliert mit abnehmender Amplitude um den Fixpunkt herum.
4. $\Delta t > 2\frac{H_P}{R} \tau'_d$: Der Orbit oszilliert mit wachsender Amplitude und divergiert (in linearer Näherung) ins Unendliche.

Es läßt sich abschätzen, wie viele Zeitschritte ein explizites Verfahren für die Berechnung einer Massentransferphase eines Doppelsternsystems bräuchte. Die Gesamtdauer des Massentransfers wird von der Größenordnung der Antriebszeitskala inklusive der thermischen Relaxation τ'_d sein. Wählt man die nach (2.197) maximal erlaubte Zeitschrittlänge Δt_{\max} , so ergibt sich eine Größenordnung von etwa

$$n = \frac{\tau'_d}{\Delta t_{\max}} = \frac{R}{2H_P} \quad (2.202)$$

¹⁸Als Orbit einer Abbildung Φ bezeichnet man die Folge $\{x_0, \Phi(x_0), \Phi \circ \Phi(x_0), \dots, \Phi^n(x_0), \dots\}$.

nötigen Zeitschritten. $\frac{H_P}{R}$ liegt im Bereich von etwa 10^{-4} für massearme Hauptreihensterne bis etwa 10^{-2} für Riesen. Um also beispielsweise die Entwicklung einer Kataklysmischen Veränderlichen mit einem massearmen Hauptreihenstern als Donor und einem Weißen Zwerg als Akkretor zu berechnen, wären in erster Näherung $5 \cdot 10^3$ Zeitschritte nötig. Pro Zeitschritt kann dem Donor die Masse

$$\frac{\Delta M_{\max}}{M} = \frac{|\dot{M}|}{M} \Delta t_{\max} = \frac{\Delta t_{\max}}{\tau_M} = (\zeta_s - \zeta_R) \frac{\Delta t_{\max}}{\tau'_d} = (\zeta_s - \zeta_R) \frac{2H_P}{R} \quad (2.203)$$

entnommen werden. Nach n Zeitschritten könnte die Masse M_0 somit auf

$$M_n = \left(1 - (\zeta_s - \zeta_R) \frac{2H_P}{R} \right)^n M_0 \quad (2.204)$$

reduziert werden. Für sehr massearme Hauptreihensterne liegt ζ_s bei $-\frac{1}{3}$, und für genügend kleines Massenverhältnis q geht ζ_R in der EGGLETON-Approximation (2.13) gegen $-\frac{5}{3}$. Bei $\frac{H_P}{R} = 10^{-4}$ sind also mindestens 2600 Zeitschritte für eine Halbierung der Donormasse erforderlich, bei $\frac{H_P}{R} = 10^{-3}$ jedoch nur 260. Das bedeutet, daß man durch künstliches Anheben der Skalenhöhe bzw. durch Wahl einer „geeigneten“ Massentransferformel die für die numerische Berechnung nötige Rechenzeit drastisch verkürzen kann. Da, wie in Abschnitt 2.3.4 gezeigt, die stationäre Massentransferrate jedoch nicht von der Wahl der Massentransferformel abhängt, wird die Langzeitentwicklung halbgrennter Doppelsternsysteme nicht dadurch beeinflußt, jedoch sehr wohl der Ein- und Ausschaltvorgang des Massentransfers. Ausnahmen sind Systeme, in denen sich der Radius und somit die Massentransferrate auf kurzen Zeitskalen ändert wie beispielsweise Sterne auf dem Asymptotischen Riesenast in der Phase der *thermischen Pulse* (PASTETTER und RITTER, 1989).

Ein numerisch noch schwierigeres Problem stellen radiative Sterne dar, die eine Phase thermischen Massenverlusts erleiden. Bei einem genügend großen Massenverhältnis ist ζ_e kleiner als ζ_R , und das Doppelsternsystem wird thermisch instabil. Da ein Donor mit einer radiativen Hülle ein großes ζ_s besitzt, findet der Massentransfer auf der thermischen Zeitskala statt. Kann der Stern über lange Zeit ein zweistelliges ζ_s aufrecht erhalten, so können leicht 10^4 bis 10^5 Zeitschritte des expliziten Verfahrens notwendig werden, um die Masse des Donors zu halbieren.

2.4.2 Das Feigenbaum-Szenario

Bisher unbeantwortet ist die Frage nach dem globalen Verhalten des zeitdiskretisierten Systems, sobald der Fixpunkt instabil wird. Das lokale Verhalten ergab sich aus der linearen Stabilitätsanalyse: Ein genügend benachbarter Orbit oszilliert mit wachsender Amplitude um den Fixpunkt. Für das globale Verhalten wird sich zeigen, daß die explizite Massentransferformel (2.189) für wachsende Zeitschrittlänge ein sogenanntes FEIGENBAUM-Szenario (FEIGENBAUM, 1978,

1980) durchläuft. Um das globale Verhalten von (2.191) für beliebig große Zeitschritte zu verstehen, ist jedoch ein Exkurs in die Theorie der Nichtlinearen Dynamik notwendig. Abschnitt D enthält die hierfür notwendigen mathematischen Definitionen und Zusammenhänge.

Zur Vereinfachung der Diskussion soll nun das Iterationsschema (2.191) vereinfacht werden.

$$x := \frac{\Delta R - \overline{\Delta R}}{H} \quad (2.205)$$

bezeichne den Abstand vom Fixpunkt $\overline{\Delta R}$ in Einheiten der lokalen Skalenhöhe H am Fixpunkt $\overline{\Delta R}$ und

$$\delta := \frac{\Delta t}{\tau'_d} \frac{R}{H} \quad (2.206)$$

die Zeitschrittlänge in Einheiten der Antriebszeitskala τ'_d unter Einbeziehung der thermischen Relaxation dividiert durch die Skalenhöhe in Einheiten des Sternradius. In diesen Einheiten läßt sich (2.191) als eine Iteration von

$$f_\delta(x) = \frac{F(\Delta R) - \overline{\Delta R}}{H} = x + \left[1 + (\zeta_s - \zeta_R) \frac{\dot{M}}{M} \tau'_d \right] \delta \quad (2.207)$$

schreiben. Definiert man ferner

$$g(x) := \frac{\dot{M}}{M} \quad (2.208)$$

als das Verhältnis von momentaner und stationärer Massentransferrate, so geht (2.207) unter Benutzung der Relation für die stationäre Massentransferrate (2.137) in

$$f_\delta(x) = x + [1 - g(x)] \delta \quad (2.209)$$

über. Für $g(x)$ gilt offensichtlich:

$$g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.210a)$$

$$g(0) = 1, \quad (2.210b)$$

$$g'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.210c)$$

$$g'(0) = \frac{1}{M} \frac{d\dot{M}}{d\Delta R} \frac{d\Delta R}{dx} = 1. \quad (2.210d)$$

(2.210a) und (2.210c) folgen automatisch aus der Annahme, daß die Massentransferrate mit zunehmendem ΔR streng monoton wächst, (2.210b) folgt direkt aus der Definition von $g(x)$, und (2.210d) ergibt sich aus der Definition der Skalenhöhe (2.129). Für eine Massentransferrate, die exakt Null ist für alle $\Delta R \leq \Delta R_0$ für ein vorgegebenes ΔR_0 , gilt natürlich nur $g(x) \geq 0$ bzw. $g'(x) \geq 0$.

Als nächstes soll gezeigt werden, daß die durch δ parametrisierte Funktionenschar f_δ für alle physikalisch sinnvollen Massentransferformeln *topologisch äquivalent* ist zu einer Familie von \mathcal{S} -unimodalen Funktionen und daß f_δ qualitativ eine vergleichbare Dynamik aufweist wie die auf $[0, 1]$ definierte *logistische Abbildung*

$$f_r(x) = rx(1 - x) \quad (2.211)$$

für $1 \leq r \leq 4$.

Offensichtlich ist f_δ selbst keine unimodale Abbildung nach Definition D.5, da zum einen der Definitionsbereich \mathbb{R} ist und zum anderen das Maximum von f_d nicht bei 0, sondern wegen

$$\frac{df_\delta}{dx} = 1 - \delta g'(x) \quad (2.212)$$

bei

$$x_\delta := g'^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\right) \quad (2.213)$$

liegt. Durch eine einfache Translation

$$\vartheta_\delta(x) := x + x_\delta \quad (2.214)$$

mit der Umkehrabbildung

$$\vartheta_\delta^{-1}(x) := x - x_\delta \quad (2.215)$$

geht f_δ über in

$$\hat{f}_\delta(x) := \vartheta_\delta^{-1} \circ f_\delta \circ \vartheta_\delta(x) = x + [1 - g(x + x_\delta)] \delta. \quad (2.216)$$

Durch Konstruktion sind f_δ und \hat{f}_δ *topologisch konjugiert* für alle $\delta > 0$, so daß die beiden durch δ parametrisierten Funktionenscharen dieselben Orbits und somit dieselbe Dynamik aufweisen.

Der Fixpunkt \bar{x}_δ von \hat{f}_δ ist durch

$$\bar{x}_\delta = -x_\delta \quad (2.217)$$

gegeben, da g wegen (2.210c) streng monoton wachsend und somit umkehrbar ist mit $g^{-1}(1) = 0$. Der Fixpunkt von \hat{f}_δ entspricht dem Fixpunkt der ursprünglichen Abbildung f_δ , und er ist stabil, wenn die Ungleichung

$$\left| \frac{d\hat{f}_\delta}{dx} \right| = |1 - \delta g'(\bar{x} + x_\delta)| < 1 \quad (2.218)$$

erfüllt ist. Dies ist wegen $\delta > 0$ und $g' > 0$ offensichtlich genau dann der Fall, wenn

$$\delta < \frac{2}{g'(\bar{x}_\delta + x_\delta)} = \frac{2}{g'(0)} = 2 \quad (2.219)$$

gilt. Das ist aber wegen der Definition von δ in (2.206) exakt die Bedingung (2.197) für die explizite Massentransferformel. Dies ist natürlich nicht überraschend, da f_δ und \hat{f}_δ durch Konstruktion topologisch konjugiert sind und sich deshalb nicht nur der Fixpunkt, sondern *alle* Orbits der beiden Abbildungen eins zu eins entsprechen.

Um zu zeigen, daß die Funktionenschar \hat{f}_δ topologisch äquivalent ist zu einer Familie von \mathcal{S} -unimodalen Abbildungen, fehlt noch eine Schar h_δ von Homöomorphismen, die die auf \mathbb{R} definierte Funktionenschar \hat{f}_δ auf eine Schar \mathcal{S} -unimodaler Funktionen \tilde{f}_δ auf dem Intervall $[-1, 1]$ abbildet. Dies wird erfüllt von einem von δ unabhängigen Diffeomorphismus

$$h :] - 1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \frac{\exp(y) - 1}{\exp(y) + 1} \quad (2.220)$$

mit der Umkehrabbildung

$$h^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow] - 1, 1[, \quad x \mapsto \ln \frac{1 + x}{1 - x}. \quad (2.221)$$

Hieraus läßt sich die Funktionenschar

$$\tilde{f}_\delta = h^{-1} \circ \hat{f}_\delta \circ h \quad (2.222)$$

definieren. Für ein beliebiges δ ist die Abbildung \tilde{f}_δ durch Konstruktion¹⁹ topologisch konjugiert zu \hat{f}_δ . Die Abbildungen \tilde{f}_δ bilden allerdings keine *vollständige* Familie im Sinne von Definition D.11.

Abbildung 2.11 zeigt ein FEIGENBAUM-Diagramm für die vereinfachte optisch dünne Massentransferrate (2.42). Aufgetragen sind jeweils 50 Iterationen von \hat{f}_δ für jeweils einen Orbit für 5000 verschiedene Werte von δ . Der Fixpunkt $\bar{x} = 0$ entspricht der stationären Massentransferrate und der Bifurkationspunkt $\delta = 2$ der kritischen Zeitschrittlänge von

$$\Delta t_{\max} = 2 \frac{H}{R} \tau'_d. \quad (2.223)$$

Schon für einen eineinhalb mal so großen Zeitschritt ($\delta = 3$) ist die Dynamik chaotisch. Eine Oszillation über eine Spannbreite von $\Delta x = 1$ entspricht einer Variation von ΔR über eine Skalenhöhe H . Da die Skalenhöhe für die optisch dünne Massentransferrate unabhängig vom gewählten Fixpunkt $\overline{\Delta R}$ ist, ist auch das Bifurkationsdiagramm unabhängig von $\overline{\Delta R}$. Denn es gilt für die optisch dünne Massentransferrate (2.42):

$$g(x) = \frac{\dot{M}(\Delta R(x))}{\overline{M}} = \frac{\dot{M}(Hx + \overline{\Delta R})}{\dot{M}(\overline{\Delta R})} = \exp(x). \quad (2.224)$$

¹⁹Genaugenommen sind hierfür h und \tilde{f}_δ stetig an den Rändern ihrer Definitionsbereiche zu ergänzen. Dies ist jedoch unkritisch. h_δ wird hierfür auf $[-1, 1]$ erweitert mit $h_\delta(-1) = -\infty$ und $h_\delta(1) = \infty$, \tilde{f}_δ auf $[-1, 1]$ mit $\tilde{f}_\delta(-1) = -1$ und $\tilde{f}_\delta(1) = -1$. Orbits, die unter \hat{f}_δ gegen $+\infty$ ($-\infty$) divergieren, entsprechen Orbits, die unter \tilde{f}_δ gegen $+1$ (-1) konvergieren.

Dies ist im Allgemeinen jedoch nicht der Fall. Wählt man beispielsweise eine Massentransferformel

$$\dot{M} = \begin{cases} -\dot{M}_0 \exp\left(\frac{\Delta R}{H}\right), & \text{falls } \Delta R < 0, \\ -\dot{M}_0 \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right), & \text{falls } \Delta R > 0, \end{cases} \quad (2.225)$$

die sich aus einer optisch dünnen Komponente $\sim \exp(x)$ für $\Delta R < 0$ und einer optisch dicken $\sim x^3$ für $\Delta R > 0$ zusammensetzt, so ist die Skalenhöhe für $\Delta R > 0$ durchaus von der Wahl des Fixpunktes abhängig. Abb. 2.12 zeigt die Bifurkationsdiagramme für $\overline{\Delta R} = 0$ und $\overline{\Delta R} = \frac{30}{19}H$. Die Unterschiede sind jedoch nur gering.

Eine dritte Möglichkeit ist, \dot{M} auf Null zu setzen, falls der Stern seinen ROCHE-Radius unterfüllt, wie sie beispielsweise im EGGLETON-Sternentwicklungscode (POLS et al., 1995) verwendet wird (HAN et al., 2000):

$$\dot{M} = \begin{cases} 0, & \text{falls } \Delta R < 0, \\ \frac{1}{6}x^3, & \text{falls } \Delta R > 0. \end{cases} \quad (2.226)$$

Abb. 2.13 zeigt das zugehörige FEIGENBAUM-Diagramm für $\overline{\Delta R} = 3$. Auf Grund des deutlichen Unterschieds in der verwandten Massentransferformel im Vergleich zu den vorherigen Beispielen sind die Unterschiede zu Abb. 2.11 und 2.12 zumindest mit bloßem Auge sichtbar.

Auch wenn die dargestellten FEIGENBAUM-Szenarien recht suggestiv sind, stellt sich die Frage, was damit bewiesen ist. Die verwendeten Abbildungen \hat{f}_δ sind topologisch äquivalent zu \mathcal{S} -unimodalen Abbildungen, aber leider nicht topologisch äquivalent zu einer vollständigen Familie \mathcal{S} -unimodaler Abbildungen wie beispielsweise der logistischen Abbildung (2.211), so daß der mathematisch exakte Beweis für das Auftreten des FEIGENBAUM-Szenarios nicht gebracht werden kann.

Es läßt sich jedoch zeigen, daß eine \mathcal{S} -unimodale Abbildung genau drei verschiedene Arten asymptotischer Dynamik annehmen kann: Zum ersten kann die Dynamik stabil sein mit *genau einem* stabilen periodischen Orbit oder Fixpunkt, auf den fast alle anderen Orbits zulaufen. Zum zweiten kann die Dynamik ergodisch, aber nicht chaotisch sein. Der Attraktor ist in diesem Fall eine CANTOR-Menge, ohne daß die für chaotische Dynamik notwendige *sensible Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen* auftritt. Zum dritten kann die Dynamik chaotisch sein, mit einem sogenannten *seltsamen Attraktor* (GUCKENHEIMER und HOLMES, 1983). Das aber bedeutet in Verbindung mit den FEIGENBAUM-Diagrammen in Abb. 2.11-2.13: Wenn für einen Wert von δ nicht fast alle Orbits auf genau einen periodischen Orbit konvergieren, wie dies offensichtlich für weite Parameterbereiche der Fall ist, so muß die Dynamik chaotisch oder zumindest ergodisch sein.

Außerdem erscheint bei etwa $\delta \approx 3$ in Abb. 2.11 ein stabiler Orbit der Periode 3. Allein die Existenz eines (nicht notwendigerweise stabilen) Orbits der Periode 3 für \mathcal{S} -unimodale Abbildungen ist nach der berühmten Aussage „Period three implies chaos“ von LI und YORKE (1975) ein Beweis für das Vorhandensein chaotischer Dynamik (vgl. auch Theorem D.13 und Bemerkung D.14).

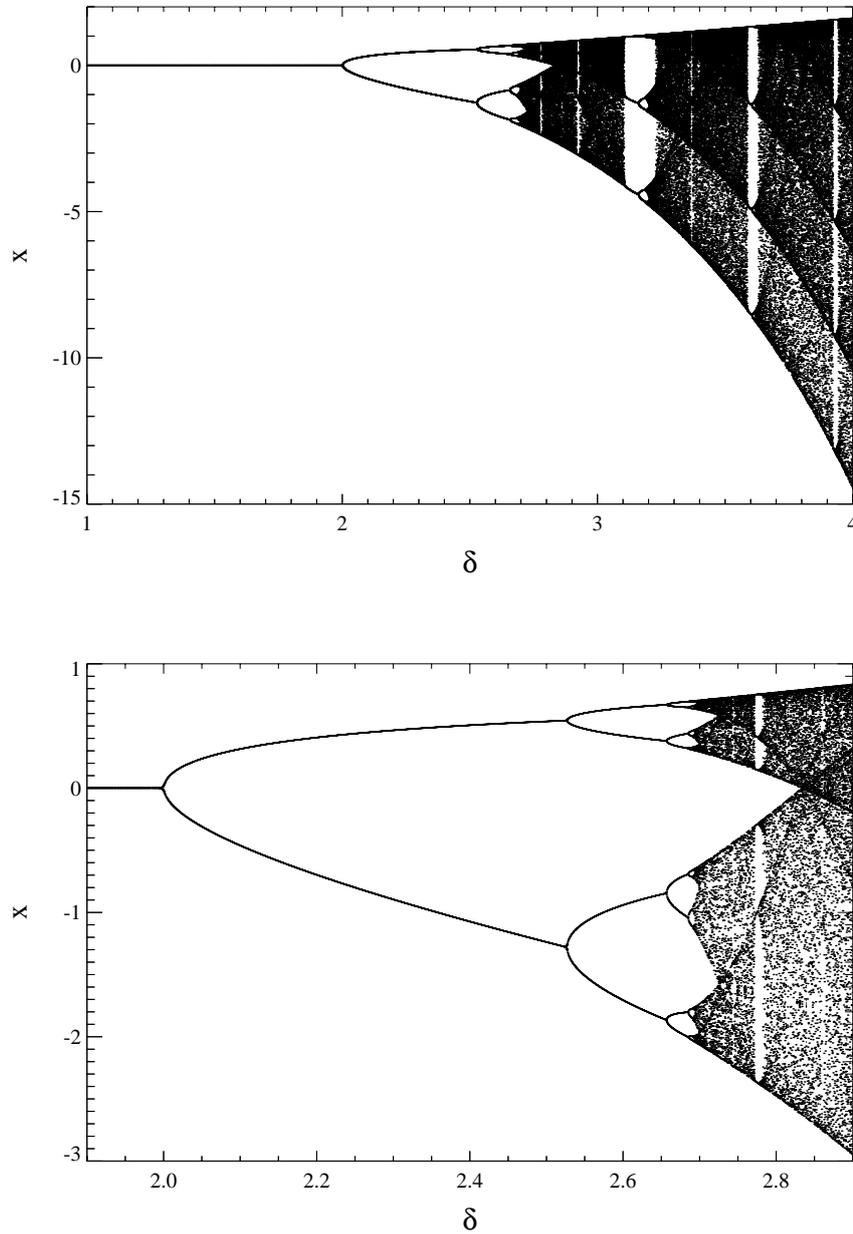


Abbildung 2.11: FEIGENBAUM-Diagramm der Abbildung $x \mapsto f_\delta(x)$ für die optisch dünne Massentransferformel $g(x) = \exp(x)$ bzw. $\dot{M}(\Delta R) = -\dot{M}_0 \exp\left(\frac{\Delta R}{H_P}\right)$.

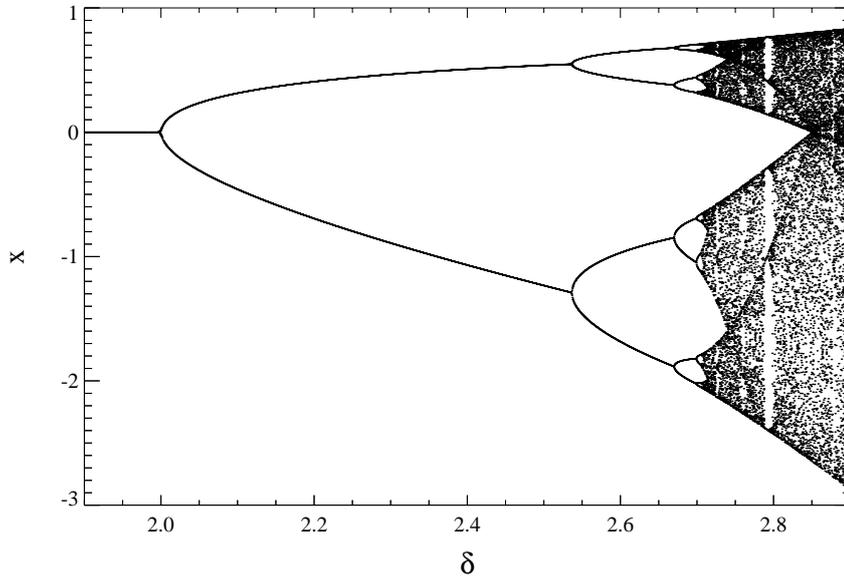
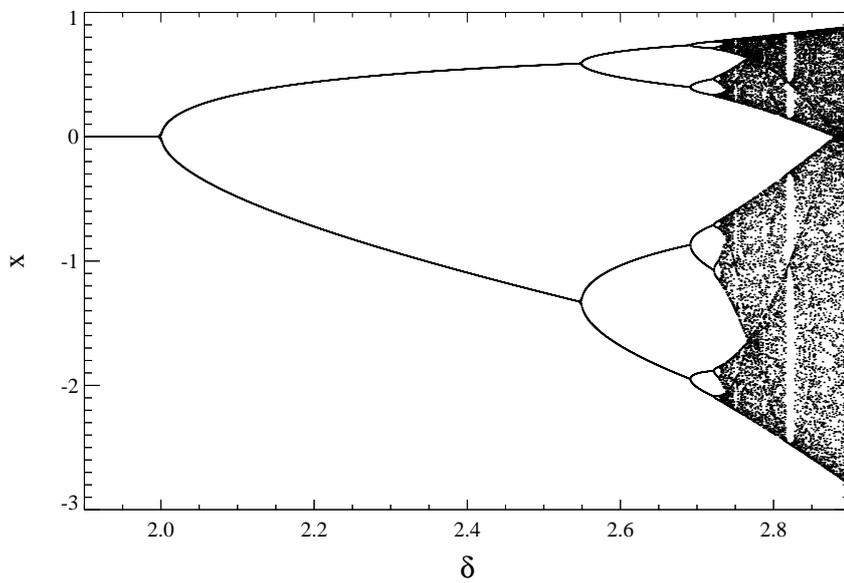
(a) $\overline{\Delta R} = 0, H = 1$ (b) $\overline{\Delta R} = 2, H = \frac{19}{15}$

Abbildung 2.12: FEIGENBAUM-Diagramm der Abbildung $x \mapsto f_\delta(x)$ für $g(x)$ bzw. $\dot{M}(\Delta R)$ gemäß (2.225).

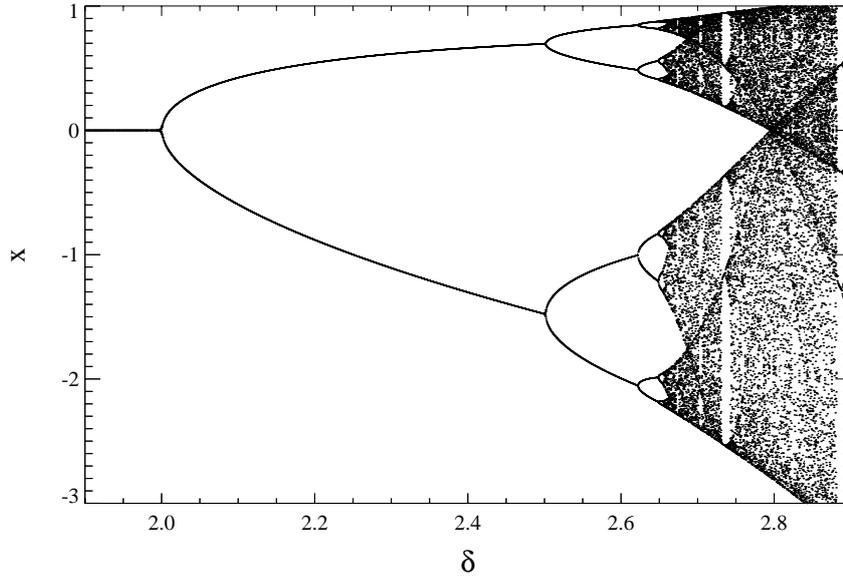


Abbildung 2.13: FEIGENBAUM-Diagramm der Abbildung $x \mapsto f_\delta(x)$ für $g(x)$ bzw. $\dot{M}(\Delta R)$ gemäß (2.226) für $\overline{\Delta R} = 2$, $H = \frac{2}{3}$.

2.4.3 Das implizite Verfahren

Nun, da die Ursache der numerischen Instabilität bekannt ist, bleibt die Frage, wie sich das Problem beheben läßt, um die immense Verschwendung von Rechenzeit zu verhindern. Ein relativ junger Teilbereich der Nichtlinearen Dynamik beschäftigt sich genau mit dieser Aufgabenstellung, dem *Controlling Chaos*. Bei den meisten im Folgenden zitierten Autoren wird der stabilisierende Effekt verschiedener Verfahren stellvertretend für die logistische Abbildung (2.211) untersucht. Die dort erhaltenen Ergebnisse lassen sich qualitativ auf vergleichbare Systeme wie den expliziten Massentransferalgorithmus (2.191) bzw. (2.209) mit einem Chaos- oder Kontrollparameter δ übertragen.

Es gibt im Wesentlichen zwei verschiedene Ansätze, um einen Fixpunkt oder periodischen Orbit in einem Bereich chaotischer Dynamik zu stabilisieren. Die erste Technik (OTT et al., 1990, BOCCALETTI et al., 2000) basiert darauf, einen Systemparameter in einer geeigneten Weise geringfügig zu stören, so daß die Lage des Fixpunkts nicht verändert, dieser jedoch stabilisiert wird. Dieses Verfahren erfordert die exakte Kenntnis des Fixpunkts. Da der Wert der stationären Massentransferrate jedoch prinzipiell unbekannt ist, läßt es sich auf den expliziten Massentransferalgorithmus nicht anwenden.

Das zweite Verfahren geht auf PYRAGAS (1992) zurück. Hierbei wird die Iterationsabbildung

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad (2.227)$$

welche im konkreten Fall der numerischen Stabilität des Massentransfers durch Φ aus (2.191) zu identifizieren ist, durch einen Korrekturterm mit einer geeignet

zu wählenden Konstanten K modifiziert²⁰:

$$x_{k+1} = f(x_k) + K(x_k - x_{k-1}). \quad (2.228)$$

Der Korrekturterm selbst ist linear in $x_k - x_{k-1}$, er benutzt also lediglich die Kenntnis des vorherigen Iterationsschritts x_{k-1} und führt eine lineare Rückkopplung in die Dynamik ein, die den Fixpunkt \bar{x} offensichtlich unverändert läßt. Daher wird diese Methode auch als *delayed linear feedback* bezeichnet. BIELAWSKI et al. (1994) benutzen eine abgewandelte Version des Verfahrens, indem der lineare Rückkopplungsterm auf einen (im Grunde beliebigen) Kontrollparameter des Systems angewendet wird, und nicht auf die Iterationsgleichung (2.227) selbst. Abhängig von der Wahl von K läßt sich die Stabilitätsgrenze zu größeren Werten des Chaosparameters δ verschieben, jedoch ist dies für das vorliegende Problem bei weitem nicht ausreichend.

Die von SOCOLAR et al. (1994) durchgeführte Erweiterung auf eine geeignete Einbeziehung *aller vorherigen* Iterationsschritte liefert deutlich bessere Resultate. Sie ist äquivalent zur Einführung eines einzigen zusätzlichen Parameters R , in den die Kenntnis aller vorherigen Iterationsschritte x_1, x_2, \dots, x_{k-1} einfließt, so daß der Korrekturterm für den Kontrollparameter durch

$$\varepsilon_k = K(x_k - x_{k-1}) + R\varepsilon_{k-1} \quad (2.229)$$

gegeben ist. Für $R \rightarrow 1$ läßt sich der Stabilitätsbereich im Parameterraum unbegrenzt erweitern, allerdings kann der Einzugsbereich des Fixpunkts beliebig klein werden.

DE SOUSA VIEIRA und LICHTENBERG (1996) schlagen eine nichtlineare Rückkopplung der Form

$$x_{k+1} = f(x_k) + K(f(x_k) - f(x_{k-1})) \quad (2.230)$$

vor, bei der nicht die Werte des jetzigen k -ten und des vorherigen $(k-1)$ -ten Iterationsschritts verwendet werden, sondern die Werte des nächsten $(k+1)$ -ten und des jetzigen k -ten Iterationsschritts, wie man sie ohne Berücksichtigung der Rückkopplung ($K = 0$) erhielte. Hierdurch ergibt sich eine deutliche Vergrößerung des Einzugsbereichs des Fixpunkts. Die Kombination der nichtlinearen Rückkopplung mit Einbeziehung aller vorherigen Iterationsschritte führt auf die modifizierte Iterationsanweisung

$$x_{k+1} = f(x_k) + K(f(x_k) - f(x_{k-1})) + R\varepsilon_k. \quad (2.231)$$

Stellt man nun die Frage, wie diese zwei Kontrollparameter K und R zu wählen sind, damit der Fixpunkt *superstabil*²¹ wird für beliebige Werte des Chaosparameters δ , so erhält man die folgenden Bedingungen für K und R :

$$R = K, \quad (2.232a)$$

$$K = (Df(\bar{x}) - 1)^{-1} Df(\bar{x}). \quad (2.232b)$$

²⁰Für die Stabilisierung eines Orbits der Periode n wird $f^n(x)$ statt $f(x)$ betrachtet.

²¹Ein Fixpunkt \bar{x} heißt *superstabil*, wenn $f'(\bar{x}) = 0$ gilt. Das Iterationsverfahren $x \mapsto f(x)$ in der Nähe eines solchen Fixpunkts ist mindestens quadratisch konvergent.

Das Ersetzen von ε_k durch x_{k+1} in (2.231) durch Verwendung von (2.229) führt schließlich auf

$$x_{k+1} = f(x_k) - K(f(x_k) - x_k) \quad (2.233)$$

als modifizierte Iterationsabbildung. Der Fixpunkt dieses Systems bleibt für beliebig hohe Werte von δ stabil (DE SOUSA VIEIRA und LICHTENBERG, 1996).

Da der explizite Massentransferalgorithmus (2.191) die Form

$$f(x) = x + G(x), \quad (2.234)$$

nämlich

$$f(\Delta R) = \Delta R + \left[\frac{R}{\tau'_d} + (\zeta_s - \zeta_R) \frac{R}{\bar{M}} \dot{M}(\Delta R) \right] \Delta t, \quad (2.235)$$

hat, ist (2.233) äquivalent zu

$$x_{k+1} = x_k + DG^{-1}(\bar{x}) G(x_k), \quad (2.236)$$

Der Fixpunkt \bar{x} , d.h. die stationäre Massentransferrate \bar{M} ist prinzipiell unbekannt, so daß die beste mögliche Approximation für $DG(\bar{x})$ durch $DG(x_k)$ gegeben ist. Dann ist (2.236) aber nichts anderes als das NEWTON-Verfahren für $G(x)$. Daher ist das NEWTON-Verfahren das vermutlich beste Verfahren, um ΔR bzw. \bar{M} mit vertretbarem Rechenaufwand zu berechnen.

Es verbleibt jedoch noch das Problem, inwiefern der explizite Massentransferalgorithmus numerisch in ein NEWTON-Verfahren überführt werden kann, insbesondere da die Systemparameter ζ_s und τ'_d im Allgemeinen nicht bekannt sind, sondern nur durch die Lösung der Sternaufbaugleichungen berechnet werden können. Glücklicherweise werden die Sternaufbaugleichungen in üblichen Sternentwicklungsprogrammen bereits durch ein spezielles NEWTON-Verfahren, das sogenannte HENYEY-Verfahren (KIPPENHAHN et al., 1967) gelöst. Es zeigt sich, daß es möglich ist, dieses Verfahren so zu modifizieren, daß die Gesamtmasse M als zusätzliche Variable und die Massentransferrate \dot{M} als zusätzliche äußere Randbedingung eingebaut werden können. Eine detaillierte Beschreibung des modifizierten Verfahrens befindet sich in Anhang B. Voraussetzung für die Anwendung des modifizierten HENYEY-Verfahrens ist jedoch, daß die Massentransferrate nur von den Sternaufbauvariablen an der Oberfläche, d.h. R , T , P und L abhängen darf. Dies ist beispielsweise der Fall für die optisch dünne Massentransferrate (2.41), jedoch nicht für die optisch dicke Massentransferrate (2.57). Des weiteren ist es notwendig, daß \dot{M} stetig differenzierbar ist. Ein lediglich stetiger Übergang von einer optisch dünnen Massentransferrate für $\Delta R < 0$ zu einer optisch dicken Massentransferrate für $\Delta R > 0$, wie sie von KOLB und RITTER (1990) benutzt wird, ist daher mit diesem Algorithmus nicht möglich.

Abb. 2.14 zeigt ein FEIGENBAUM-Szenario, das mit dem in Anhang B diskutierten Sternentwicklungscode unter Benutzung des expliziten Massentransferalgorithmus erzeugt wurde. Jeder einzelne Punkt gibt die optisch dünne Massentransferrate am Ende des jeweiligen Zeitschrittes an, die gestrichelte Linie im

Vergleich dazu das Resultat des impliziten Verfahrens. Der Parameterbereich zwischen der Destabilisierung des Fixpunkts und dem ersten Auftreten chaotischer Dynamik ist recht schmal, daher ist es nicht einfach, geeignete Systemparameter zu finden, um den Bereich der Periodenverdopplung abzubilden. Die Orbits höherer Perioden sind deshalb auch nicht sichtbar, dafür jedoch ein Fenster der Periode 5 im chaotischen Bereich. Für diese Berechnung wurde der Zeitschritt Δt konstant gehalten, die Variation des Chaosparameters

$$\delta = \frac{\Delta t}{\tau'_d} \frac{R}{H_P} \quad (2.237)$$

erfolgte ausschließlich über die thermische Relaxation

$$\left(\frac{d \ln R}{dt} \right)_{\text{th}} = \frac{1}{\tau_{\text{th}}} \quad (2.238)$$

(und somit implizit über τ'_d), die über (2.136) mit δ gekoppelt ist. Dies ist auch der Grund, weshalb das gezeigte FEIGENBAUM-Szenario nach Erreichen der maximalen Massentransferrate, bzw. der maximalen thermischen Relaxation rückwärts abläuft.

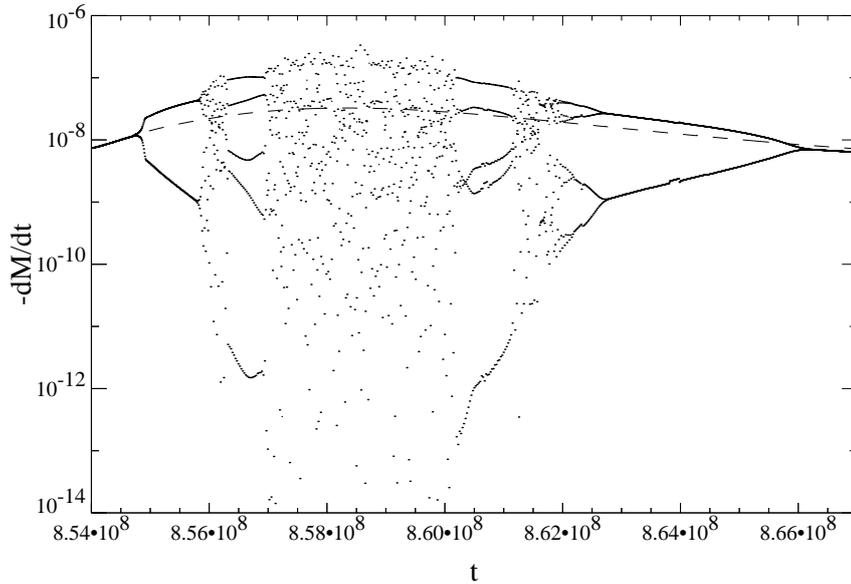


Abbildung 2.14: Massentransferrate $\dot{M}[M_{\odot}/\text{yr}]$ als Funktion der Zeit $t[\text{yr}]$ für einen frühen Fall A Massentransfer in einem Doppelsternsystem mit $M_1 = 2M_{\odot}$ und $M_2 = 2M_{\odot}$ bei einer konstanten Zeitschrittlänge von 5000 Jahren. Die Variation des Chaosparameters δ wird durch die einsetzende thermische Relaxation bewirkt. Die Dynamik ist am instabilsten, wenn τ_{th} maximal ist. Jeder Punkt entspricht einem Zeitschritt des expliziten Verfahrens, die gestrichelte Linie zeigt das Resultat des impliziten Verfahrens unter denselben Bedingungen.

3 Bestrahlte Sterne

3.1 Der Reflexionseffekt

Aus Beobachtungen enger Doppelsternsysteme ist bekannt, daß Sterne, die von ihrem Begleiter bestrahlt werden, eine helle, heiße und eine dunkle, kühle Seite aufweisen können. Hierzu zählen unter Anderem einige binäre Zentralsterne planetarischer Nebel, präkataklysmische Veränderliche oder auch Systeme aus eng benachbarten Hauptreihensternen und insbesondere Bedeckungsveränderliche. Tabellen mit Beispielsystemen finden sich bei EDDINGTON (1926), RITTER et al. (2000), bzw. in den dort zitierten Referenzen.

Die Atmosphärenschichten der dem Begleiter zugewandten Seite eines Sterns werden durch die Strahlung des Begleiters aufgeheizt und besitzen daher nicht nur eine andere bolometrische Helligkeit, sondern auch ein anderes Spektrum als die Atmosphärenschichten auf der unbestrahlten Seite. Für einen terrestrischen Beobachter ändern sich Helligkeit und Spektrum deshalb mit der Bahnphase des Systems. Die *bolometrische Reflexionsalbedo*

$$w_{\text{bol}} = \frac{\sigma T_{\text{irr}}^4 - \sigma T_{\text{eff}}^4}{F_{\text{irr}}} \quad (3.1)$$

bezeichnet den Anteil des Bestrahlungsflusses F_{irr} , der von der bestrahlten Seite „reflektiert“ wird, $T_{\text{irr}}(F_{\text{irr}})$ die Effektivtemperatur der bestrahlten Seite und T_{eff} die Effektivtemperatur der unbestrahlten Seite. Genaugenommen ist F_{irr} auf der bestrahlten Seite des Sterns natürlich nicht konstant, sondern hängt vom Einfallswinkel und der Entfernung des jeweiligen Oberflächenelements von der Energiequelle ab, so daß w_{bol} eigentlich eine lokale Größe ist.

Über lange Zeit wurden in zahlreichen Veröffentlichungen lediglich die Auswirkungen des sogenannten *Reflexionseffekts* (reflection effect) auf das Spektrum bzw. die Lichtkurve von engen Doppelsternsystemen betrachtet. Eine Übersicht über ältere Artikel findet sich bei VAZ (1985). Der Einfluß von Bestrahlung auf den Massentransfer in einem halbgetrennten Doppelsternsystem auf langen Zeitskalen wurde dagegen zum ersten Mal von PODSIADLOWSKI (1991) diskutiert. Lang in diesem Sinne meint lang im Vergleich zu üblichen Beobachtungszeitskalen von Tagen, Jahren oder Jahrhunderten. Untersuchungen über den Einfluß von Bestrahlung auf den Massentransfer auf kurzen Zeitskalen, etwa um die Lichtkurven Kataklysmischer Veränderlicher oder Massearmer Röntgendoppelsterne zu erklären, wurden schon früher angestellt (OSAKI, 1985, HAMEURY et al., 1986, KING, 1989, HAMEURY et al., 2000), sind jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Es ist klar, daß Sterne im Strahlungsgleichgewicht die gesamte von außen einfallende Energie auch wieder abstrahlen müssen, so daß die Reflexionsalbedo in guter Näherung 1 ist (EDDINGTON, 1926). Dies ist der Fall für Sterne mit radiativen Hüllen. Der Grund liegt darin, daß radiative Hüllenlösungen der Sternaufbaugleichungen im Wesentlichen unabhängig von den äußeren Randbedingungen gegen die gleiche Lösung im Inneren des Sterns konvergieren (KIPPENHAHN und WEIGERT, 1990, Kap. 10). Anschaulich bedeutet es, daß der radiative Fluß

$$F_{\text{rad}} = \frac{4ac}{3\kappa} \frac{\Gamma M_r}{r^2} \frac{T^4}{P} \nabla_{\text{rad}} \quad (3.2)$$

durch Bestrahlung nicht verändert wird; denn eine Abflachung des Temperaturgradienten ∇_{rad} durch Aufheizen der äußersten Schichten kann problemlos durch eine Anhebung der Temperatur T kompensiert werden. Da der von der Oberfläche abgestrahlte Fluß σT_{irr}^4 die Summe aus eingestrahltm Fluß F_{irr} und *intrinsischem Fluß* $F_{\text{int}} = F_{\text{rad}}$ ist, gilt für die Effektivtemperatur der bestrahlten Oberfläche:

$$\sigma T_{\text{irr}}^4 = F_{\text{int}} + F_{\text{irr}} = \sigma T_{\text{eff}}^4 + F_{\text{irr}}. \quad (3.3)$$

Der intrinsische Fluß F_{int} ist also für radiative Hüllen mit $w_{\text{bol}} = 1$ unabhängig von der Bestrahlungsstärke. Wird die Bestrahlung instantan abgeschaltet, so fällt die Effektivtemperatur auf der zuvor bestrahlten Seite von T_{irr} auf T_{eff} ab. Dies erfolgt ebenfalls instantan, genauer gesagt auf der Zeitskala der äußersten, durch die Bestrahlung aufgeheizten Schichten.

Für Sterne mit konvektiven Hüllen, die sich per Definition nicht im Strahlungsgleichgewicht befinden, ist die Reflexionsalbedo jedoch nicht notwendigerweise 1. Im Inneren von Sternen ist Konvektion immer effektiv, d.h. adiabatisch und die Entropie somit räumlich konstant. Das bedeutet, daß für einen einseitig bestrahlten Stern in genügender Tiefe der konvektiven Hülle die Entropie auf der bestrahlten und der unbestrahlten Seite gleich sein muß. Hierdurch wird der Fluß durch die äußeren Schichten und damit die Reflexionsalbedo bestimmt (RUCIŃSKI, 1969).

Dieser Zusammenhang läßt sich wie folgt veranschaulichen: Betrachtet man einen Stern mit einer tiefen konvektiven Hülle, einmal unbestrahlt und einmal symmetrisch bestrahlt unter der Annahme, daß die Reflexionsalbedo 1 ist. Dann wäre der intrinsische Fluß σT_{eff}^4 des unbestrahlten Sterns gleich dem intrinsischen Fluß $\sigma T_{\text{irr}}^4 - F_{\text{irr}}$ des bestrahlten Sterns, d.h. beide Sterne strahlten netto dieselbe Energiemenge ab und hätten eine ähnliche thermische Struktur mit adiabatisher Konvektion im Innern und überadiabatisher Konvektion in den äußeren Schichten. Der bestrahlte Stern hätte jedoch eine höhere Effektivtemperatur an der Oberfläche und wäre durch die konvektive Hülle hindurch heißer, hätte somit tief in der Hülle eine höhere Entropie bei gleichem adiabatischen Temperaturgradienten. Betrachtet man nun einen halbseitig bestrahlten Stern, so muß nach dem oben gesagten die Entropie tief unter der Oberfläche auf beiden Seiten übereinstimmen. Da die Effektivtemperatur auf der bestrahlten

Seite höher ist, muß dort der Temperaturgradient ∇ in den äußeren Schichten flacher sein, der konvektive Fluß, der nur von der Differenz zwischen ∇ und ∇_{ad} abhängt¹, ist somit kleiner. Der intrinsische Fluß F_{int} durch die bestrahlte Seite ist also geringer als durch die unbestrahlte Seite (VAZ und NORDLUND, 1985). Auch bei einem Stern mit einer konvektiven Hülle fällt beim instantanen Abschalten der Bestrahlung die Effektivtemperatur auf der zuvor bestrahlten Seite von T_{irr} auf T_{eff} ab. Denn T_{eff} wird durch die Entropie der adiabatischen Konvektionszone bestimmt, die auf beiden Seiten des Sterns gleich ist. Durch die fest vorgegebene Entropie im Innern wächst σT_{irr}^4 auf der bestrahlten Seite langsamer als der Bestrahlungsfluß F_{irr} .

Das bedeutet, daß Bestrahlung den intrinsischen Fluß F_{int} reduzieren kann, so daß insgesamt weniger Energie über die Oberfläche abgestrahlt wird, ein Teil der intrinsischen Leuchtkraft des Sterns quasi „blockiert“ wird. Für einen Beobachter scheint es, als reflektiere der Stern den eingestrahnten Fluß nicht vollständig ($w_{\text{bol}} < 1$), obwohl es sich tatsächlich um eine Reduzierung des intrinsischen Flusses F_{int} handelt. Es ergeben sich hieraus zwei Fragen: Wie stark ist die Reduzierung des intrinsischen Flusses als Funktion der Bestrahlung, und was bewirkt dieser Effekt?

Es existiert kein zufriedenstellendes analytisches Modell, das F_{int} als Funktion von F_{irr} beschreibt, da es sich bei einseitiger Bestrahlung eines Sterns im Grunde um ein 3D-strahlungshydrodynamisches Problem handelt. Denn durch den Temperaturunterschied zwischen der bestrahlten und unbestrahlten Seite entsprechen Flächen gleichen Drucks nicht mehr Flächen gleicher Dichte, so daß die äußeren Schichten im Prinzip nicht mehr im hydrostatischen Gleichgewicht sein können, es kommt zu Zirkulationen und lateralem Energieaustausch; die sphärische Symmetrie wird gebrochen.

Unter der Voraussetzung, daß die Bestrahlung nicht zu stark ist, was bedeutet, daß F_{irr} den intrinsischen Fluß $F_{\text{eff}} = \sigma T_{\text{eff}}^4$ des unbestrahlten Sterns nicht um Größenordnungen übersteigt (*weak irradiation assumption*), lassen sich eine Reihe von vereinfachenden Annahmen treffen. Diese Voraussetzung ist erfüllt für die meisten getrennten Systeme und auch für zahlreiche halbgetrennte Systeme wie Kataklysmische Veränderliche, bei denen F_{irr} und F_{eff} von der gleichen Größenordnung sind. Sie ist nicht notwendigerweise erfüllt für Massearme Röntgendoppelsterne (LMXB) und extrasolare Riesenplaneten (EGP).

Falls F_{irr} nicht zu groß ist, so werden nur die äußersten Schichten signifikant durch die Bestrahlung beeinflusst, das adiabatische Innere bleibt jedoch praktisch unverändert. Selbst wenn in den äußeren Schichten der adiabatischen Konvektionszone auf der bestrahlten Seite der intrinsische Fluß verschwinden sollte, so wird dadurch die Temperatur- und Druckschichtung kaum verändert. Denn $\nabla - \nabla_{\text{ad}}$ ist für effektive Konvektion sehr viel kleiner als 1, eine winzige Änderung in ∇ kann den konvektiven Energietransport komplett abschalten. Hieraus folgt aber auch, daß für genügend starke Bestrahlung im Prinzip der gesamte

¹Genaugenommen hängt der konvektive Fluß von der Differenz zwischen dem wahren Temperaturgradienten ∇ und dem Temperaturgradienten $\nabla_e \approx \nabla_{\text{ad}}$ eines aufsteigenden konvektiven Elements ab (KIPPENHAHN und WEIGERT, 1990, Kap. 7).

konvektive Fluß blockiert werden kann, bis schließlich $\nabla < \nabla_{\text{ad}}$ wird und die Konvektion verschwindet.

Oberhalb der adiabatischen Konvektionszone befindet sich im Wesentlichen nur die überadiabatische Konvektionszone, die sich über einige Skalenhöhen H_P erstrecken kann und in der Regel klein in Masse ist. Eine Ausnahme bilden ausgedehnte Riesen, deren überadiabatische Konvektionszone beachtliche Ausmaße annehmen kann, sowie massearme Hauptreihensterne unterhalb von etwa $0.5 - 0.6 M_{\odot}$, deren überadiabatische Konvektionszone praktisch vernachlässigbar ist.

Ist die überadiabatische Konvektionszone klein in Masse, so ist ihre thermische Zeitskala kurz. RITTER et al. (2000, Anhang A) argumentieren, daß deshalb lateraler Energietransport innerhalb der überadiabatischen Konvektionszone vernachlässigt werden kann, insbesondere da der Temperaturgradient in radialer Richtung größer ist als in lateraler. Daher läßt sich Bestrahlung als lokaler Effekt für jedes Oberflächenelement einzeln behandeln.

Vereinfachte hydrodynamische Simulationen zeigen speziell für Röntgendoppelsterne, daß bei Vernachlässigung der Verformung der Sternoberfläche durch den äußeren Strahlungsdruck Zirkulationen in den äußeren Schichten entstehen, die sich bei genügend starker Bestrahlung mit Überschallgeschwindigkeit bewegen können (MARTIN und DAVEY, 1995). Andere Simulationen zeigen, daß bei Vernachlässigung von Zirkulationen und bei extremer Bestrahlung durch den Begleiter die Sternoberfläche infolge des äußeren Strahlungsdrucks signifikant verformt werden kann (PHILLIPS und PODSIADLOWSKI, 2002). Berücksichtigt man beide Effekte, so reicht schon eine geringe Verformung der Sternoberfläche, und die Zirkulationen bewegen sich nur noch mit Unterschallgeschwindigkeit (BEER und PODSIADLOWSKI, 2002).

Auf der Idee, daß sich Bestrahlung als lokaler Effekt für jedes Oberflächenelement einzeln behandeln läßt, beruht das von RITTER et al. (1995, 2000) vorgeschlagene Ein-Zonen-Modell: Der Temperaturverlauf durch die überadiabatische Konvektionszone wird linear approximiert und die Temperatur des unteren Randes am Übergang zur adiabatischen Konvektionszone als konstant angenommen. Unter Annahme eines Potenzgesetzes

$$\kappa = \kappa_0 P^a T^b \tag{3.4}$$

für die Opazität und einigen anderen vereinfachenden Annahmen ist es möglich, F_{int} als Funktion von F_{irr} anzugeben. In diesem Modell wird der intrinsische Fluß völlig blockiert, falls die Effektivtemperatur T_{irr} die Temperatur am unteren Rand der überadiabatischen Konvektionszone erreicht. Auf Details soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden. Die entscheidende Erkenntnis ist jedoch, daß ein Stern mit einer tiefen konvektiven Hülle durch Bestrahlung daran gehindert werden kann, Energie über seine angestrahlte Oberfläche abzustrahlen. Diese Wirkung von Bestrahlung ist vergleichbar mit der Blockierung des intrinsischen Flusses durch Sternflecken (VAZ und NORDLUND, 1985), wie sie von SPRUIT (1982) behandelt wurde.

Ein unbestrahlter Stern, der im thermischen Gleichgewicht die Oberflächenleuchtkraft L_e , die Effektivtemperatur T_e , den Radius R_e sowie die nukleare Leuchtkraft $L_{\text{nuc}} = L_e$ besitzt, erfüllt die STEPHAN-BOLTZMANN-Gleichung

$$L_e = 4\pi\sigma R_e^2 T_e^4. \quad (3.5)$$

Wird nun durch Einschalten von Bestrahlung oder das Auftreten von Sternflecken ein Anteil s der intrinsischen Leuchtkraft blockiert, so ist der Stern nicht mehr im thermischen Gleichgewicht, da mehr nukleare Energie erzeugt als über die Oberfläche abgestrahlt wird. Dies führt auf der Diffusionszeitskala der konvektiven Hülle zu einer geringfügigen Erhöhung der Effektivtemperatur der unbestrahlten Oberfläche und damit einhergehend zu einer geringfügigen Vergrößerung des Radius, die allerdings selbst bei Blockierung eines signifikanten Anteils der intrinsischen Leuchtkraft vernachlässigbar ist (SPRUIT, 1982). Für praktische Zwecke bleiben Radius und Effektivtemperatur als Reaktion auf ein instantanes Ein- und Ausschalten der Bestrahlung konstant.

Der blockierte Anteil des intrinsischen Flusses verbleibt im Wesentlichen in der konvektiven Hülle und heizt diese auf. Auf der KELVIN-HELMHOLTZ-Zeitskala *der konvektiven Hülle* führt dies zu einem Anwachsen des Radius (SPRUIT, 1982). Auf der KELVIN-HELMHOLTZ-Zeitskala *des gesamten Sterns* wird schließlich auch der radiative Kern (falls vorhanden) durch die Veränderungen in der Hülle beeinflusst, und es wird sich ein neues thermisches Gleichgewicht einstellen. Die entscheidende Frage ist jedoch, wie dieses aussehen wird.

Grundsätzlich kann der Stern auf drei Arten reagieren, um sein neues thermisches Gleichgewicht zu erreichen: Er kann seine Effektivtemperatur erhöhen und so die Abstrahlung insbesondere auf der unbestrahlten Seite erhöhen, er kann seinen Radius vergrößern, um die abstrahlende Fläche zu vergrößern, und er kann die nukleare Leuchtkraft reduzieren. Was im Einzelfall passiert, hängt vom konkreten Sternaufbau ab. Es lassen sich aber Abschätzungen für den maximal möglichen Effekt der thermischen Relaxation angeben. Nimmt man an, daß ein Anteil s der Oberfläche komplett blockiert ist, daß hier also $F_{\text{int}} = 0$ gilt, der verbleibende Anteil $1 - s$ der Oberfläche jedoch vollständig unblockiert ist mit $F_{\text{int}} = F_e = \sigma T_e^4$, so sinkt instantan die Leuchtkraft auf

$$L_{\text{int}} = (1 - s)L_e, \quad (3.6)$$

und die STEPHAN-BOLTZMANN-Gleichung geht über in

$$L_{\text{int}} = 4\pi\sigma(1 - s)R^2 T_{\text{eff}}^4, \quad (3.7)$$

bzw.

$$L_s = 4\pi\sigma(1 - s)R_s^2 T_s^4 \quad (3.8)$$

im thermischen Gleichgewicht bei vorgegebener Bestrahlung. Der Index s bezeichnet hierbei Größen im thermischen Gleichgewicht bei vorgegebener Bestrahlung, bzw. vorgegebenem s und der Index e Größen im thermischen Gleichgewicht ohne Bestrahlung, d.h. bei $s = 0$.

Reduziert der Stern lediglich seine nukleare Leuchtkraft und behält Effektivtemperatur und Radius unverändert bei, so muß L_{nuc} um den Faktor $1 - s$ kleiner werden. Erhöht der Stern nur seine Effektivtemperatur, so steigt diese auf

$$T_s(s) = \left(\frac{L_s}{4\pi\sigma(1-s)R_s^2} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{L_e}{4\pi\sigma(1-s)R_e^2} \right)^{\frac{1}{4}} = (1-s)^{-\frac{1}{4}} T_e. \quad (3.9)$$

Vergrößert der Stern als letzte Möglichkeit nur seinen Radius, so wächst dieser auf

$$R_s(s) = \left(\frac{L_s}{4\pi\sigma(1-s)T_s^4} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{L_e}{4\pi\sigma(1-s)T_e^4} \right)^{\frac{1}{2}} = (1-s)^{-\frac{1}{2}} R_e. \quad (3.10)$$

Für $s = \frac{1}{2}$, d.h. die Blockierung der halben Oberfläche entspräche dies einer Halbierung der nuklearen Leuchtkraft, bzw. einer Erhöhung der Effektivtemperatur der unblockierten Seite um $\sqrt[4]{2} \approx 1.19$, bzw. einer Vergrößerung des Radius um $\sqrt{2} \approx 1.41$.

Für Riesen an der HAYASHI-Linie, deren Effektivtemperatur durch die HAYASHI-Linie selbst vorgegeben ist und deren nukleare Leuchtkraft durch die Kernmasse-Leuchtkraft-Beziehung bestimmt wird, ist tatsächlich zu erwarten, daß der Stern auf Bestrahlung im Wesentlichen durch Änderung des Radius reagiert. Für Hauptreihensterne ist keine so einfache Aussage möglich, jedoch lassen sich durch Homologieannahmen auch hier einige prinzipielle Erkenntnisse gewinnen. So gilt für massearme Hauptreihensterne im thermischen Gleichgewicht

$$L_{\text{nuc},s}(s) = (1-s)^l L_e, \quad (3.11a)$$

$$T_s(s) = (1-s)^t T_e, \quad (3.11b)$$

$$R_s(s) = (1-s)^r R_e \quad (3.11c)$$

mit Werten von $l \approx 0.75$, $t \approx -0.003$ und $r \approx -0.1$ (RITTER, 1994, RITTER et al., 2000). Für $s = \frac{1}{2}$ ergibt sich ein etwa 7% größerer Radius.

Es soll an dieser Stelle nochmals betont werden, daß die oben diskutierten Variationen in Leuchtkraft, Effektivtemperatur und Radius auf der *thermischen Zeitskala* des bestrahlten Sterns stattfinden. Diese Zeitskala ist lang im Vergleich zu üblichen Beobachtungszeitskalen von Tagen, Jahren oder gar Jahrhunderten. Daher können diese Variationen nicht zur Erklärung von Effekten auf kurzen Zeitskalen verwendet werden.

3.2 Der intrinsische Fluß

Bei Untersuchungen des Reflexionseffekts können Variationen auf der thermischen Zeitskala üblicherweise vernachlässigt werden, da es den meisten Autoren darum geht, die Spektren und Lichtkurven von getrennten Systemen zu modellieren. Die Zeitskalen der äußersten Schichten, die von der Bestrahlung direkt

beeinflusst werden, sind so klein, daß Veränderungen auf der thermischen Zeitskala für die Berechnung der Atmosphärenstruktur praktisch keine Rolle spielen. Daher ist es hierfür ausreichend, die derzeitige Effektivtemperatur T_{eff} der unbestrahlten Seite zu kennen. Ob sich der Stern im thermischen Gleichgewicht befindet, ist dabei irrelevant. Des weiteren ist der Radius in getrennten Systemen im Grunde bedeutungslos, da er keinen Einfluß auf die Entwicklung des Systems hat. In halbgetrennten Systemen ist dies natürlich anders, da dort die Massentransferrate sensibel vom Radius des masseverlierenden Sterns abhängt, und Bestrahlung somit die Entwicklung derartiger Systeme auf der thermischen Zeitskala beeinflussen kann.

Zum ersten Mal wurde der Zusammenhang zwischen der thermischen Relaxation als Reaktion auf Bestrahlung und dem Massentransfer von PODSIADLOWSKI (1991) diskutiert, allerdings beschränkt auf symmetrisch bestrahlte Sterne. Symmetrische Bestrahlung hat den Vorteil, daß sie numerisch einfacher zu behandeln ist als asymmetrische Bestrahlung. Nach einer Modifikation der äußeren Randbedingungen lassen sich symmetrisch bestrahlte Sterne wie unbestrahlte Einzelsterne mit einem 1D-hydrostatischen Code behandeln. Für einen Stern in einem Wärmebad der Temperatur T_b , bzw. in einem isotropen äußeren Strahlungsfeld mit $F_{\text{irr}} = \sigma T_b^4$ geht unter der Annahme einer grauen Atmosphäre die STEPHAN-BOLTZMANN-Gleichung (3.5) in

$$L_{\text{int}} = 4\pi\sigma(T_{\text{irr}}^4 - T_b^4)R^2 \quad (3.12)$$

über. Für Details der Behandlung symmetrischer Bestrahlung sei auf Anhang B.4.2 verwiesen. Entwicklungsrechnungen für symmetrisch bestrahlte Sterne finden sich bei TOUT et al. (1989).

Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt diskutiert wurde, sind radiative Sterne unempfindlich gegenüber Bestrahlung. Die intrinsische Leuchtkraft und der Radius ändern sich kaum, selbst wenn der Bestrahlungsfluß $F_{\text{irr}} = \sigma T_b^4$ größer ist als der intrinsische Fluß $F_{\text{eff}} = \sigma T_{\text{eff}}^4$ des unbestrahlten Sterns. Die Effektivtemperatur T_{irr} der bestrahlten Seite als Funktion von F_{irr} ist daher durch die Relation (3.3) gegeben.

Sterne mit konvektiven Hüllen werden dagegen sehr stark von der Bestrahlung beeinflusst. Für zunehmende Bestrahlungsstärke expandiert der Stern bei gleichzeitig schrumpfendem intrinsischem Fluß, bis der Stern schließlich rein radiativ und somit unempfindlich gegen eine weitere Erhöhung der Bestrahlungsstärke wird. Abb. 3.1 zeigt die intrinsische Oberflächenleuchtkraft, die nukleare Leuchtkraft, den Radius sowie $\frac{1}{\tau_U} = \frac{\dot{U}}{U}$ als Maß für die thermische Relaxation eines Nullalter-Hauptreihensterns mit $0.5 M_{\odot}$ als Funktion der Zeit für instantan eingeschaltete Bestrahlung unterschiedlicher Intensität. Die Zeitskala, auf der sich die Innere Energie U anfänglich ändert, ist nach unten durch die KELVIN-HELMHOLTZ-Zeitskala $\tau_{\text{KH}} \approx 5 \cdot 10^8 \text{yr}$ beschränkt. Denn für genügend starke Bestrahlung geht L_{int} anfänglich gegen Null, und die gravitative Leuchtkraft

$$L_g = L_{\text{int}} - L_{\text{nuc}}$$

kann vom Betrag her nicht größer als L_{nuc} werden.

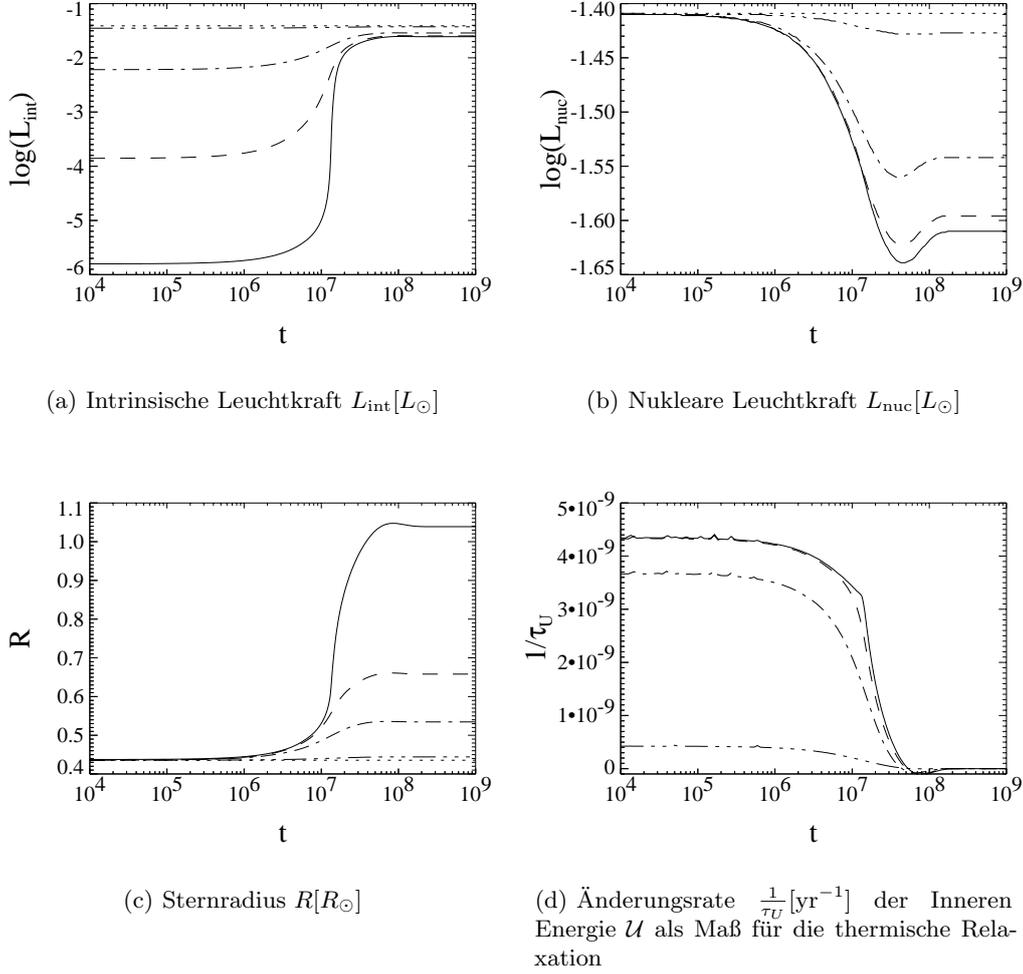


Abbildung 3.1: Thermische Relaxation eines Nullalter-Hauptreihensterns (SCVH) solarer Zusammensetzung mit $0.5 M_{\odot}$. Dargestellt ist die Reaktion auf instantan eingeschaltete, symmetrische Bestrahlung als Funktion der Zeit $t[\text{yr}]$ für $f_{\text{irr}} = 100$ (durchgezogene Linie), $f_{\text{irr}} = 10$ (gestrichelte Linie), $f_{\text{irr}} = 1$ (strichpunktierte Linie) und $f_{\text{irr}} = \frac{1}{10}$ (punktier-strichpunktierte Linie) und $f_{\text{irr}} = 0$ (punktier-te Linie).

Als Maß für die Wirkung der Bestrahlung wird im Folgenden statt der bolometrischen Reflexionsalbedo w_{bol} der intrinsische Fluß F_{int} als Funktion des dimensionslosen Bestrahlungsflusses

$$f_{\text{irr}} := \frac{F_{\text{irr}}}{F_{\text{eff}}} \quad (3.13)$$

betrachtet:

$$f_{\text{int}}(f_{\text{irr}}) := \frac{F_{\text{int}}}{F_{\text{eff}}} = \frac{\sigma T_{\text{irr}}^4 - F_{\text{irr}}}{\sigma T_{\text{eff}}^4} = \frac{T_{\text{irr}}^4}{T_{\text{eff}}^4} - f_{\text{irr}}. \quad (3.14)$$

Für die Skalierung von F_{irr} und F_{int} wurde F_{eff} verwendet, da der momentane Fluß, bzw. die Effektivtemperatur auf der unbestrahlten Seite meßbar ist, im Gegensatz zum Fluß F_e des unbestrahlten Sterns im thermischen Gleichgewicht.

Für radiative Sterne ist $f_{\text{int}}(f_{\text{irr}}) = 1$ für beliebige Bestrahlungsstärken f_{irr} . Dies stellt gleichzeitig eine obere Grenze für f_{int} dar. Eine Abschätzung für f_{int} nach unten folgt aus $T_{\text{irr}} \geq T_{\text{eff}}$ für $T_b < T_{\text{eff}}$:

$$f_{\text{int}}(f_{\text{irr}}) \geq \tilde{f}_{\text{int}}(f_{\text{irr}}) := \begin{cases} 1 - f_{\text{irr}}, & \text{falls } f_{\text{irr}} < 1, \\ 0, & \text{falls } f_{\text{irr}} \geq 1. \end{cases} \quad (3.15)$$

$f_{\text{int}} \geq 1 - f_{\text{irr}}$ ist äquivalent zu $w_{\text{bol}} \geq 0$, da w_{bol} sich durch Verknüpfung von (3.1) und (3.14) als

$$w_{\text{bol}} = (f_{\text{int}} + f_{\text{irr}} - 1) \frac{F_{\text{eff}}}{F_{\text{irr}}} \quad (3.16)$$

schreiben läßt. Für reale Sternmodelle muß $f_{\text{int}}(f_{\text{irr}})$ somit zwischen $\tilde{f}_{\text{int}}(f_{\text{irr}})$ und 1 liegen, und für verschwindende Bestrahlung gilt $f_{\text{int}}(0) = 1$. Diese Abschätzung ist jedoch nicht strikt. Für nicht zu großes F_{irr} und Einstrahlung in einem flachen Winkel kann bei konstant gehaltener Entropie in der adiabatischen Konvektionszone, abhängig von der Atmosphärenstruktur und speziell der Opazität, w_{bol} auch negativ werden. Der bestrahlte Stern ist in diesem Fall *kühler* als der unbestrahlte (VAZ und NORDLUND, 1985).

Es ist anschaulich klar, daß ein Stern in einem Doppelsternsystem nicht symmetrisch von seinem Begleiter bestrahlt wird, sondern nur auf der dem Begleiter zugewandten Seite. Der Stern kann daher eine helle, heiße und eine dunkle, kühle Seite besitzen. Dies ist von Seiten der Beobachter seit Jahrzehnten bekannt, und darum wird der Reflexionseffekt auch als asymmetrisches Bestrahlungsproblem behandelt. Wie bereits in Abschnitt 2.1 diskutiert wurde, sind für Sterne, die ihr ROCHE-Volumen zu einem großen Teil ausfüllen, die Zeitskalen für die Zirkularisation der Bahnbewegung sowie für die Synchronisation der Eigenrotation klein gegenüber den typischen Entwicklungszeitskalen des Systems. Das bedeutet, daß diese Sterne ihrem Begleiter effektiv immer dieselbe Seite zuwenden. Auf ihrer bestrahlten Seite wird, falls ihre Hülle konvektiv ist, ein bestimmter Anteil des intrinsischen Flusses blockiert, während sie über ihre unbestrahlte Seite weiterhin ihre Energie effizient abstrahlen können. Erste Rechnungen, die die Wirkung asymmetrischer Bestrahlung durch eine zeitlich periodische, symmetrische Bestrahlung zu simulieren versuchten, zeigten, daß das vereinfachte Modell symmetrischer Bestrahlung die Wirkung der Bestrahlung deutlich überschätzt und daß eine physikalisch adäquatere Behandlung des Problems nötig ist (HAMEURY et al., 1993).

Bei der Vernachlässigung des lateralen Energietransports gilt die modifizierte STEPHAN-BOLTZMANN-Gleichung (3.12) lokal für jedes Oberflächenelement, und die intrinsische Leuchtkraft ergibt sich als Integral über die gesamte

Oberfläche:

$$L_{\text{int}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_{\text{int}} R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \quad (3.17)$$

Die Berechnung von L_{int} wird dadurch zurückgeführt auf die Kenntnis von $F_{\text{int}}(F_{\text{irr}})$, bzw. $f_{\text{int}}(f_{\text{irr}})$.

Der Vorteil dieses Ansatzes besteht darin, daß die asymmetrische Bestrahlung als Teil der Oberflächenrandbedingung behandelt wird, während das Sterninnere selbst weiterhin durch ein 1D-hydrostatisches Modell beschrieben werden kann. In diesem Fall werden die Sternaufbaugleichungen quasi „auf der unbestrahlten Seite gelöst“. Dies liefert die Effektivtemperatur T_{eff} und die Gravitationsbeschleunigung g_{eff} auf der unbestrahlten Seite. Die Berechnung von F_{int} erfolgt hieraus folgendermaßen: Sind T_{eff} und g_{eff} einmal bekannt, so ergibt sich durch Lösen der Sternaufbaugleichungen in den äußeren Schichten die Entropie in der adiabatischen Konvektionszone, welche auf der bestrahlten und unbestrahlten Seite als identisch angenommen wird. Für verschiedene Werte von F_{irr} werden nun die Sternaufbaugleichungen auf der bestrahlten Seite gelöst mit (3.12) als äußerer Randbedingung. Hieraus ergibt sich $F_{\text{int}}(F_{\text{irr}})$, so daß das Integral (3.17) schließlich ausgewertet werden kann. Für die numerische Behandlung asymmetrischer Bestrahlung in dieser Arbeit wurden die Bestrahlungstabellen von HAMEURY und RITTER (1997) verwendet, ergänzt um neue Tabellen, die freundlicherweise von J.-M. HAMEURY eigens für diese Arbeit erstellt wurden. Diese Tabellen liefern $f_{\text{int}}(f_{\text{irr}})$ für einen weiten Parameterbereich von T_{eff} und g_{eff} , sind jedoch formal nur für graue Atmosphären und senkrechten Lichteinfall gültig.

Es ist klar, daß die Annahme einer grauen Atmosphäre für den bestrahlten Stern und eines PLANCK-Spektrums für das äußere Strahlungsfeld nur eine sehr grobe Näherung darstellt. Unterschiedliche Eigenschaften von optischem, ultraviolettem und Röntgenlicht wie eine unterschiedliche Eindringtiefe werden hierbei vollständig ignoriert. Eine geringe Eindringtiefe hat zur Folge, daß große Teile des äußeren Strahlungsfeldes in den äußersten, optisch dünnen Schichten² der Photosphäre absorbiert und reprozessiert werden, ohne daß hierdurch die photosphärischen Randbedingungen merklich beeinflußt werden. Diese „Effizienz“ der Bestrahlung für eine nichtgraue Atmosphäre im Vergleich zu einer grauen Atmosphäre wird über einen freien Effizienzparameter α_{irr} berücksichtigt. Für einen äußeren Strahlungsstrom mit demselben Spektrum wie der bestrahlte Stern selbst ist die Effizienz α_{irr} per Definition exakt 1.

Die Bestrahlung erfolgt nicht notwendigerweise kontinuierlich, sondern kann auf kurzen Zeitskalen fluktuieren. Da die Beziehung zwischen f_{int} und f_{irr} nicht linear ist, hängt die Wirkung der Bestrahlung nicht nur vom Mittelwert von f_{irr} ab, sondern auch von der Amplitude und Periode der Fluktuationen. Dieser Effekt wird durch einen weiteren Parameter α_d modelliert, der für eine kontinuierliche

²„Optisch dünn“ bezieht sich hier auf die Durchlässigkeit für das vom Stern emittierte Strahlungsfeld. Für das äußere Strahlungsfeld können dieselben Schichten optisch dick sein.

Bestrahlung per Definition 1 ist. Für eine Punktquelle mit der Leuchtkraft L im Abstand d ist der „effektive“ Bestrahlungsfluß daher durch

$$F_{\text{irr}} = \alpha_d \alpha_{\text{irr}} \frac{L}{4\pi d^2} \quad (3.18)$$

gegeben.

Modelle von nichtgrauen Atmosphären mit Bestrahlung durch PLANCK-Spektren (NORDLUND und VAZ, 1990, BRETT und SMITH, 1993) als auch reale Sternspektren (NORDLUND und VAZ, 1990, BARMAN und HAUSCHILDT, 2002, BARMAN, 2002) sind mittlerweile verfügbar. Diese Berechnungen sind jedoch zu aufwendig, um hieraus Tabellen in der benötigten Form zu generieren. Allerdings ist es es sehr wohl möglich, einzelne Rechnungen für bestrahlte Atmosphären mit denen für graue Atmosphären zu vergleichen, um zumindest Kenntnisse über die Größenordnung des Effizienzparameters α_{irr} zu gewinnen.

Da der intrinsische Fluß f_{int} von der Eindringtiefe des äußeren Strahlungsfeldes abhängt, ist die Bestrahlung umso effektiver, je niedriger die Opazität und somit die Metallizität der Atmosphäre ist. Für einen vorgegebenen dimensionslosen Bestrahlungsfluß f_{irr} ist der intrinsische Fluß f_{int} also umso kleiner, je geringer die Metallizität ist. Abb. 3.2 zeigt f_{int} als Funktion der Metallizität für ein spezielles Doppelsternsystem. Die Resultate der grauen Approximation (*Kreuz*) unterscheiden sich in diesem Fall nicht wesentlich von denen für eine nichtgraue Atmosphäre des bestrahlten Sterns, sowohl für ein eingestrahktes PLANCK-Spektrum (*Dreieck*) als auch für ein reales Sternspektrum (*Raute*). Dies liegt daran, daß die Bestrahlungseffizienz α_{irr} nicht wesentlich von 1 verschieden ist, solange die Quelle hauptsächlich im Optischen strahlt. Die erwähnten Daten wurden aus NORDLUND und VAZ (1990) entnommen. Der zum Vergleich aus den Tabellen von HAMEURY und RITTER (1997) gewonnene Datenpunkt (*Stern*) für solare Zusammensetzung ist hiermit im Wesentlichen konsistent.

Des weiteren hängt die Blockierung des intrinsischen Flusses von der Physik der Konvektion, speziell der Mischungsweglänge, ab. Abb. 3.3 zeigt f_{int} als Funktion der Mischungsweglänge für eine nichtgraue Atmosphäre sowohl für ein eingestrahktes PLANCK- als auch ein reales Sternspektrum. Die Blockierung ist umso effizienter, je größer die Mischungsweglänge ist, und verschwindet für eine Mischungsweglänge von 0, da in diesem Grenzfall der konvektive Energietransport wegfällt und sich der Stern wie ein radiativer Stern verhält.

Abb. 3.4 schließlich zeigt f_{int} als Funktion des Einfallswinkels ϑ für einen konstanten äußeren Bestrahlungsfluß $f_{\text{irr}} \approx 1.006$. Hierbei sind die Datenreihen von NORDLUND und VAZ (1990) tatsächlich für ein festes f_{irr} für verschiedene Werte von ϑ berechnet worden, während die Bestrahlungstabellen von HAMEURY und RITTER (1997) formal nur für senkrechten Einfall gültig sind, und die zugehörige Datenreihe in Abb. 3.4 daher einen streifenden Einfall über eine variable Bestrahlungsstärke $f_{\text{irr}} \cos \vartheta$ simuliert. Physikalisch macht es sehr wohl einen Unterschied, ob die Atmosphäre senkrecht mit $f_{\text{irr}} \cos \vartheta$ oder unter einem Winkel ϑ mit f_{irr} bestrahlt wird, da bei streifendem Einfall die optische Weglänge

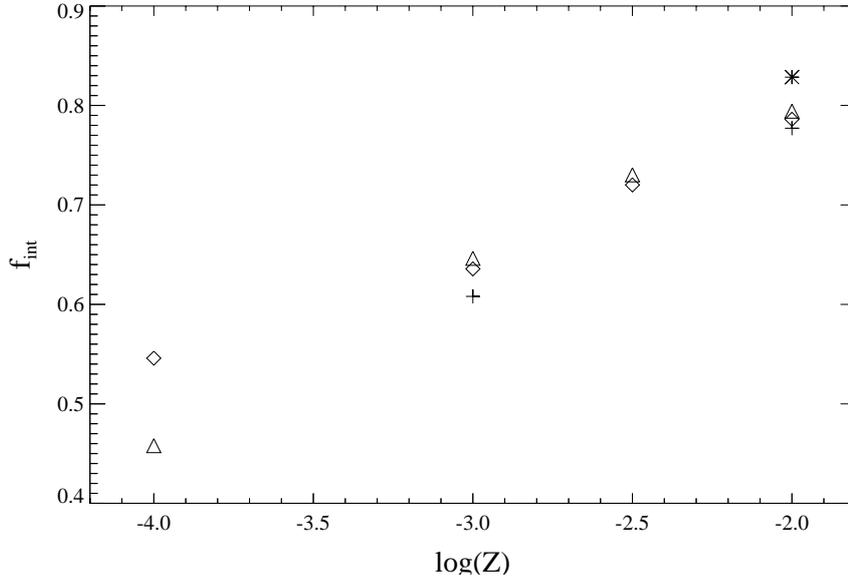


Abbildung 3.2: Der intrinsische Fluß f_{int} als Funktion der Metallizität Z für einen Stern mit $T_0 = 4500 \text{ K}$ und $\log g = 4.5$, dessen Atmosphäre mit $f_{\text{irr}} \approx 1.006$ in einem Einfallswinkel von $\vartheta = 47.9^\circ$ zur Oberflächennormalen, d.h. effektiv mit $f_{\text{irr}} \approx 0.674$ bestrahlt wird. Die Bestrahlung erfolgt durch einen Begleitstern mit $T_2 = 6000 \text{ K}$ und einem relativen Radius von $r = \frac{R}{A} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Dargestellt ist f_{int} für eine nichtgraue Atmosphäre, die von einem realen Sternspektrum bestrahlt wird (*Raute*), eine nichtgraue Atmosphäre, die von einem PLANCK-Spektrum bestrahlt wird (*Dreieck*) und eine bestrahlte graue Atmosphäre (*Kreuz*). Die Daten wurden aus NORDLUND und VAZ (1990, Tabelle 1) entnommen. Ein Vergleichswert (*Stern*) für bestrahlte graue Atmosphären bei senkrechtem Einfall für $f_{\text{irr}} \approx 0.674$ wurde den Bestrahlungstabellen von HAMEURY und RITTER (1997) entnommen.

zunimmt. Für eine planparallele Atmosphäre ist das im Winkel ϑ einfallende äußere Strahlungsfeld f_{irr} in einer optischen Tiefe τ nämlich durch

$$f_{\text{irr}}(\tau, \vartheta) = f_{\text{irr}}(0, \vartheta) \exp\left(-\frac{\tau}{\cos \vartheta}\right) \quad (3.19)$$

gegeben, wobei die vom Einfallswinkel abhängige Bestrahlungsstärke bei $\tau = 0$ durch

$$f_{\text{irr}}(0, \vartheta) = f_{\text{irr}}(0, 0) \cos \vartheta \quad (3.20)$$

gegeben ist (BRETT und SMITH, 1993).

Aus diesem Grund wäre in Abb. 3.4 eher eine mit dem Einfallswinkel wachsende Abweichung zwischen den Datenreihen von NORDLUND und VAZ (1990) sowie HAMEURY und RITTER (1997) zu erwarten. Die Daten zeigen jedoch eine mit wachsendem Einfallswinkel abnehmende Abweichung, die daher vermutlich zum größten Teil auf andere Ursachen wie unterschiedliche Opazitäten oder Zustandsgleichungen zurückzuführen ist. Ein weiterer Grund könnte darin liegen,

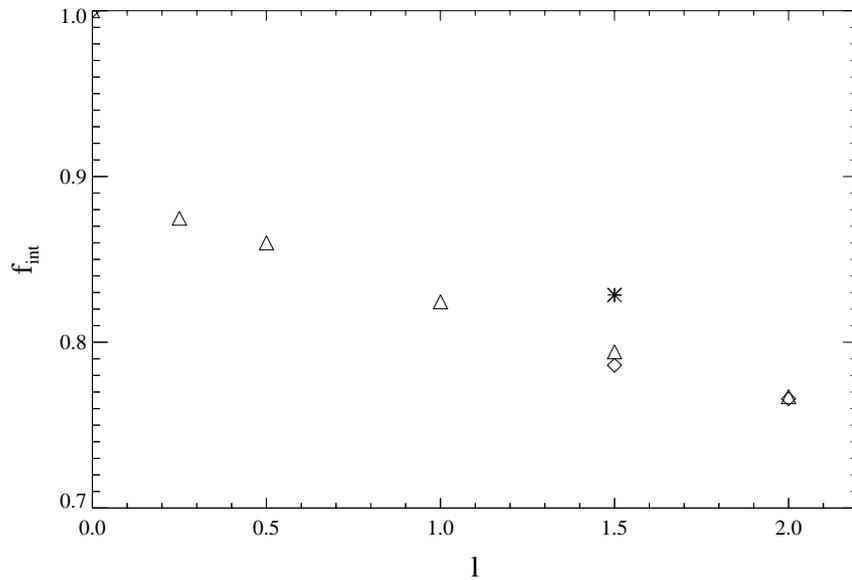


Abbildung 3.3: Der intrinsische Fluß f_{int} als Funktion der Mischungsweglänge l in Einheiten der Druckskalenhöhe H_P . Die Daten wurden aus NORDLUND und VAZ (1990, Tabelle 2) sowie den Bestrahlungstabellen von HAMEURY und RITTER (1997) entnommen. Legende wie in Abb. 3.2.

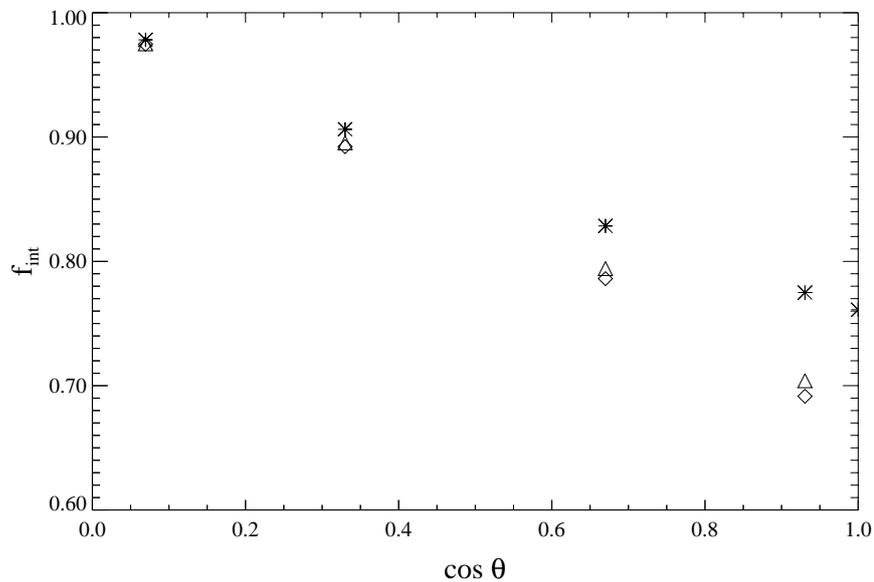


Abbildung 3.4: Der intrinsische Fluß f_{int} als Funktion des Einfallswinkels ϑ . Die Daten wurden aus NORDLUND und VAZ (1990, Tabelle 3) sowie den Bestrahlungstabellen von HAMEURY und RITTER (1997) entnommen. Legende wie in Abb. 3.2.

daß NORDLUND und VAZ (1990) ein nichtgraues, HAMEURY und RITTER (1997) jedoch ein graues Atmosphärenmodell für die dargestellten Daten verwendet haben. Bedauerlicherweise gibt es keine Rechnungen für graue Atmosphären unter verschiedenen Einfallswinkeln³. Dennoch scheint der Ansatz vertretbar, die Bestrahlungstabellen von HAMEURY und RITTER (1997) auch für Einfallswinkel $\vartheta \neq 0$ zu verwenden.

3.3 Bestrahlungsmodelle

3.3.1 Die effektiv blockierte Oberfläche

Mit Hilfe der Definition von f_{int} aus (3.14) läßt sich die intrinsische Leuchtkraft (3.17) als

$$L_{\text{int}} = \sigma T_{\text{eff}}^4 R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f_{\text{int}}(f_{\text{irr}}(\vartheta, \varphi)) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \quad (3.21)$$

schreiben. Diese Darstellung ist jedoch unanschaulich. Stattdessen ist es vorteilhafter, die intrinsische Leuchtkraft als Funktion der Kenngrößen T_{eff} und R auf der unbestrahlten Seite sowie eines *effektiv blockierten Oberflächenanteils* s zu schreiben:

$$L_{\text{int}} = 4\pi(1 - s)\sigma T_{\text{eff}}^4 R^2. \quad (3.22)$$

Offensichtlich gilt:

$$s := \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [1 - f_{\text{int}}(f_{\text{irr}}(\vartheta, \varphi))] \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \quad (3.23)$$

Der Stern verhält sich also so, als wäre ein Anteil s seiner Oberfläche vollständig durch Bestrahlung blockiert, während ein Anteil $1 - s$ der Oberfläche vollständig unbestrahlt wäre und einen Fluß $F_{\text{int}} = \sigma T_{\text{eff}}^4$ abstrahlte.

Es zeigt sich, daß Sterne mit konvektiven Hüllen selbst für große Bestrahlungsstärken nicht radiativ werden, solange der Anteil der unbestrahlten Oberfläche, über den der Stern effizient seine Energie abstrahlen kann, nicht zu klein wird (RITTER, 1994, RITTER et al., 1995, 2000).

Abb. 3.5 zeigt die intrinsische Oberflächenleuchtkraft, die nukleare Leuchtkraft, den Radius sowie $\frac{1}{\tau U} = \frac{\dot{U}}{U}$ als Maß für die thermische Relaxation für einen Nullalter-Hauptreihensterns mit $0.5 M_{\odot}$ als Funktion der Zeit für instantan eingeschaltete, asymmetrische Bestrahlung. Der Grenzfall $s \rightarrow 1$ entspricht starker, symmetrischer Bestrahlung (vgl. Abb. 3.1). Für $s < 1$ ist die gravitative Leuchtkraft anfänglich durch $sL_{\text{nuc},e}$ bzw. sL_e gegeben, da der Stern über die

³Die diesbezüglichen Daten bei VAZ und NORDLUND (1985, Tabelle 5) sind nur für Sterne mit $Z = 10^{-3}$ gültig, auch wenn dies dort nicht explizit angegeben ist.

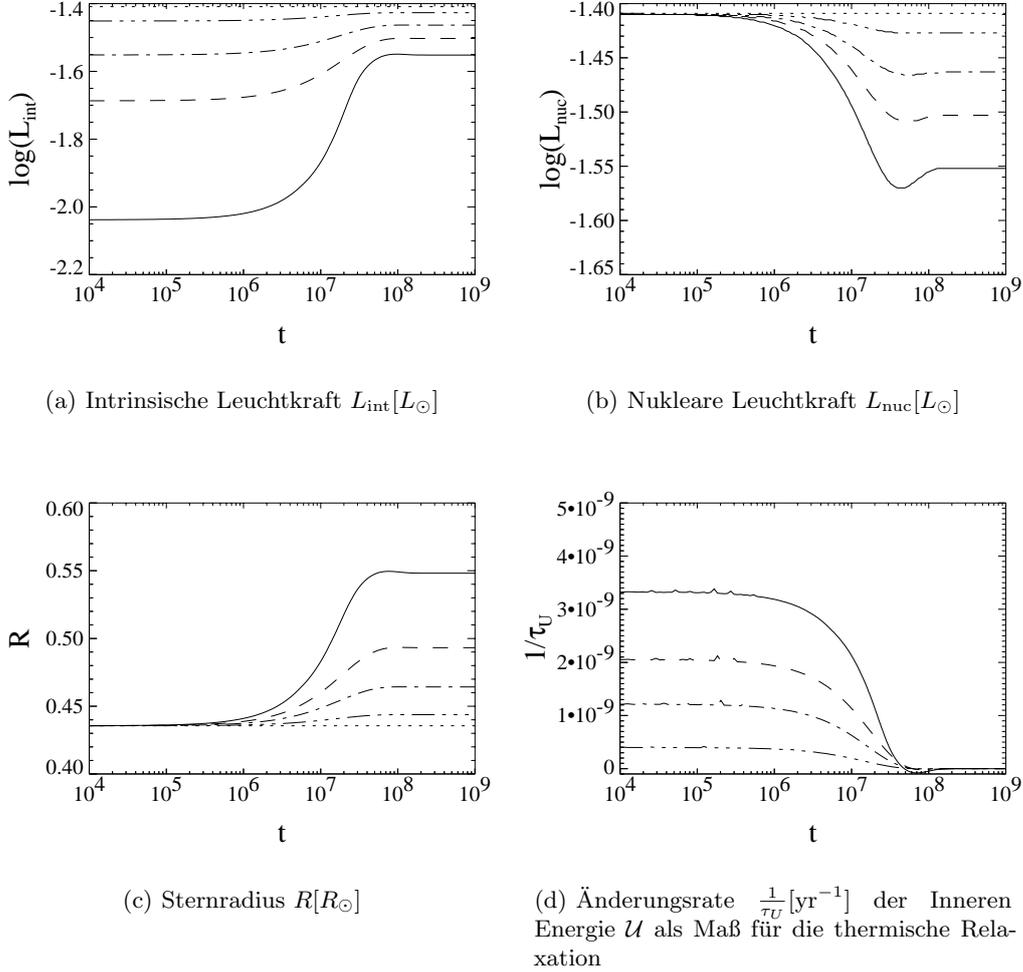


Abbildung 3.5: Thermische Relaxation eines Nullalter-Hauptreihensterns (SCVH) solarer Zusammensetzung mit $0.5 M_{\odot}$. Dargestellt ist die Reaktion auf instantan eingeschaltete, asymmetrische Bestrahlung als Funktion der Zeit $t[\text{yr}]$ für einen effektiv blockierten Anteil der Oberfläche von $s = 0.8$ (durchgezogene Linie), $s = 0.5$ (gestrichelte Linie), $s = 0.3$ (strichpunktiierte Linie) und $s = 0.1$ (punktiert-strichpunktiierte Linie) und $s = 0$ (punktierte Linie).

nichtblockierte Fläche $1 - s$ weiterhin ungestört abstrahlen kann. Das bedeutet, daß nicht nur $\dot{\mathcal{U}}$, sondern auch die Zeitentwicklung des Radius anfänglich proportional zu s ist:

$$\left(\frac{d \ln R}{dt}\right)_{\text{th}} \sim \frac{s}{\tau_{\text{KH}}}. \quad (3.24)$$

Diese Relation folgt direkt aus dem Bipolytopenmodell, auf das in Abschnitt 3.5.4 näher eingegangen werden soll.

Für die weitere Diskussion ist es nun notwendig, das zu verwendende Bestrah-

lungsmodell genauer zu spezifizieren. Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Wirkung von Bestrahlung und Massentransfer aufeinander in engen Doppelsternsystemen zu untersuchen. Hierfür wird angenommen, daß die Bestrahlung durch freigesetzte gravitative Energie bei der Akkretion der transferierten Materie auf einen kompakten Begleitstern mit der Masse M_2 erfolgt. Ist der Radius des Akkretors R_2 vernachlässigbar im Vergleich zu seinem kritischen ROCHE-Radius, so beträgt die Akkretionsleuchtkraft näherungsweise

$$L_{\text{accr}} = \frac{\Gamma M_2}{R_2} \dot{M}_{\text{accr}} = -\eta \frac{\Gamma M_2}{R_2} \dot{M}_1, \quad (3.25)$$

wobei η den Anteil des gesamten Materiestroms angibt, der auf dem Begleiter akkretiert wird. Da der größte Teil der Akkretionsleuchtkraft in der unmittelbaren Umgebung des Akkretors freigesetzt wird, wird die Strahlungsquelle im Folgenden als punktförmig behandelt. Der effektive Strahlungsstrom im Abstand d beträgt demnach

$$f_{\text{irr}} = \frac{F_{\text{irr}}}{\sigma T_{\text{eff}}^4} = \alpha_d \alpha_{\text{irr}} \alpha_{\text{accr}} \frac{L_{\text{accr}}}{4\pi d^2 \sigma T_{\text{eff}}^4}, \quad (3.26)$$

wobei α_{accr} die Abweichung von der Isotropie des Strahlungsfeldes, α_{irr} die wellenlängenabhängige Effizienz, α_d die Wirkung intermittierender Bestrahlung und T_{eff} die Effektivtemperatur auf der unbestrahlten Seite des Sterns angeben. Befindet sich der L_1 -Punkt im Strahlungsfeld des akkretierenden Sterns, so sind die Temperatur des Strahlungsstroms sowie die Druckskalenhöhe am substellaren Punkt a priori unbekannt, und die optisch dünne Massentransferformel (2.41) kann nicht angewendet werden. Dies ist beispielsweise bei Polaren, magnetischen CVs, der Fall und kann auch zu kurzzeitigen Oszillationen in der Massenüberstromrate führen (KING, 1989). Daher wird des weiteren angenommen, daß der Begleiter von einer Akkretionsscheibe umgeben ist, die den L_1 -Punkt beschattet. Der Materiestrom befindet sich somit nur im Strahlungsfeld des masseverlierenden Sterns und wird nicht durch die Akkretionsleuchtkraft des Begleiters aufgeheizt. Die thermische Zeitskala der Schichten oberhalb der Photosphäre ist so kurz, daß für die optisch dünne Massentransferrate (2.41) der Materiestrom als isotherm mit Temperatur T_{eff} angesehen werden kann.

Ferner wird angenommen, daß der bestrahlte Stern sein kritisches ROCHE-Volumen ausfüllt und in der ROCHE-Approximation als sphärisch behandelt werden kann. Die Abweichung von der Sphärizität speziell in der Nähe des L_1 -Punktes kann aus zwei Gründen vernachlässigt werden: Zum einen wird hierdurch die Größe der bestrahlten Fläche nicht wesentlich verändert, da der betroffene Bereich recht klein ist, zum anderen liegt der L_1 -Punkt selbst im Schatten der Akkretionsscheibe. Die Dicke der Akkretionsscheibe wird im Folgenden vernachlässigt, so daß die Größe der bestrahlten Oberfläche hierdurch nicht beeinflußt wird. Das äußere Strahlungsfeld F_{irr} an der Oberfläche des Donors ist daher rotationssymmetrisch um die Verbindungsachse der beiden Sterne. Wählt man $\vartheta = 0$ entlang der Verbindungsachse, so werden alle Oberflächenelemente des Donors mit $0 \leq \vartheta < \vartheta_{\text{max}}$ bestrahlt, während die Gebiete mit

$\vartheta_{\max} < \vartheta \leq \pi$ im Schatten liegen. Es gilt:

$$\cos \vartheta_{\max} = \frac{R_1}{A}. \quad (3.27)$$

Für $\vartheta > \vartheta_{\max}$ ist f_{int} konstant 1, und der Beitrag zum Oberflächenintegral (3.23) verschwindet. Hieraus folgt für den effektiv blockierten Oberflächenanteil:

$$s = \frac{1}{2} \int_0^{\vartheta_{\max}} [1 - f_{\text{int}}(f_{\text{irr}}(\vartheta))] \sin \vartheta \, d\vartheta. \quad (3.28)$$

Offensichtlich ist s durch die vorgegebene Bestrahlungsgeometrie nach oben begrenzt. Aus $f_{\text{int}} \geq 0$ ergibt sich der maximale Anteil der Oberfläche, die durch Bestrahlung blockiert werden kann:

$$s \leq \frac{1}{2} \int_0^{\vartheta_{\max}} \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{2} (1 - \cos \vartheta_{\max}) =: s_{\max}. \quad (3.29)$$

Offensichtlich ist s_{\max} automatisch kleiner als $\frac{1}{2}$. Für reale Systeme mit nicht zu kleinen Massenverhältnissen liegt s_{\max} im Bereich von 0.3 bis 0.4.

Berücksichtigt man, daß die Akkretionsscheibe eine endliche Dicke besitzt, so verkleinert sich die bestrahlte Oberfläche und somit im Wesentlichen nur s_{\max} . Umgekehrt führt die Berücksichtigung eines gewissen lateralen Energieflusses zu einer Ausdehnung der durch die Bestrahlung beeinflussten Oberfläche um einige Prozent über den Terminator zu einer Vergrößerung von s_{\max} . Eine Veränderung von s_{\max} selbst um 10–20 % aber ändert nichts Wesentliches an den Resultaten in den folgenden Abschnitten.

3.3.2 Das „Constant Flux“ Modell

Das einfachste Modell zur Berechnung des effektiv blockierten Anteils s der Oberfläche als Funktion der Akkretionsleuchtkraft ist das sogenannte *Constant Flux* Modell (RITTER et al., 1995, 2000). Hierbei wird angenommen, daß der Bestrahlungsfluß F_{irr} auf der gesamten bestrahlten Seite konstant und bei einem Bahnabstand A im Mittel durch

$$F_{\text{irr}} = \langle F_{\text{irr}} \rangle := \alpha_d \alpha_{\text{irr}} \alpha_{\text{accr}} \frac{L_{\text{accr}}}{4\pi A^2} \quad (3.30)$$

gegeben ist⁴. Am substellaren Punkt ($\vartheta = 0$) ist der Abstand zur Quelle geringer, der Fluß daher deutlich größer:

$$F_{\text{irr}}(0) \approx \alpha_d \alpha_{\text{irr}} \alpha_{\text{accr}} \frac{L_{\text{accr}}}{4\pi (A - R_1)^2}. \quad (3.31)$$

⁴RITTER et al. (1995, 2000) benutzen für das *Constant Flux* Modell $F_{\text{irr}} = \frac{1}{2} \langle F_{\text{irr}} \rangle$ als Mittelwert für den bestrahlten Teil der Sternoberfläche.

In der Nähe des Terminators ist der Bestrahlungsfluß auf Grund des flachen Einfalls dagegen deutlich kleiner als $\langle F_{\text{irr}} \rangle$ und verschwindet für $\vartheta = \vartheta_{\text{max}}$.

Hieraus folgt für den Anteil der effektiv blockierten Oberfläche aus (3.28) und der Definition von s_{max} in (3.29):

$$s = \frac{1}{2} \int_0^{\vartheta_{\text{max}}} [1 - f_{\text{int}}(\langle f_{\text{irr}} \rangle)] \sin \vartheta d\vartheta = s_{\text{max}} [1 - f_{\text{int}}(\langle f_{\text{irr}} \rangle)]. \quad (3.32)$$

Der blockierte Anteil der Oberfläche ist also in erster Näherung durch den Anteil der bestrahlten Oberfläche s_{max} mal dem im Mittel blockierten Fluß $1 - f_{\text{int}}(\langle f_{\text{irr}} \rangle)$ gegeben. Dies ist auch der Grund, warum eine teilweise Abschätzung des Sterns durch den Rand der Akkretionsscheibe das Problem nicht fundamental ändert. Es würde lediglich s_{max} verkleinert.

3.3.3 Das „Point Source“ Modell

Eine wesentlich bessere, wenn auch numerisch kompliziertere Approximation ist durch das sogenannte *Point Source* Modell (KING et al., 1996, RITTER et al., 2000) gegeben, dessen Bestrahlungsgeometrie in Abb. 3.6 schematisch dargestellt ist. Für ein Oberflächenelement in einem Winkel ϑ gegenüber der Verbindungsachse der beiden Sterne, von dem aus sich die Strahlungsquelle im Abstand d vom Oberflächenelement in einem Winkel β gegenüber der Oberflächennormalen befindet, ist der Bestrahlungsfluß senkrecht zur Oberfläche durch

$$F_{\text{irr}}(\vartheta) = \alpha_d \alpha_{\text{irr}} \alpha_{\text{accr}} \frac{L_{\text{accr}}}{4\pi d^2} \cos \beta \quad (3.33)$$

gegeben.

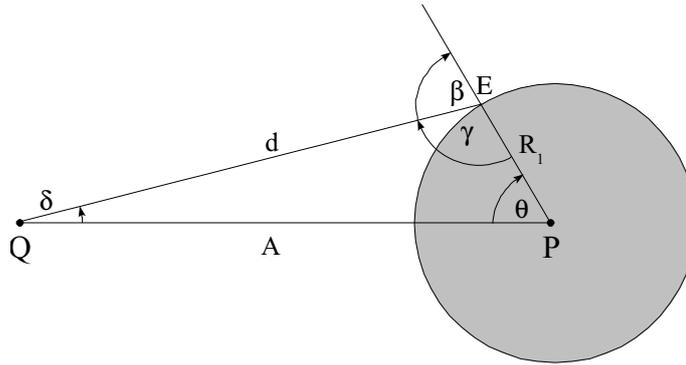


Abbildung 3.6: Das *Point Source* Modell

Es wird nun das Dreieck betrachtet, das durch die Quelle Q , das Zentrum des bestrahlten Sterns P und das Oberflächenelement E mit den Winkeln δ , ϑ und γ gebildet wird. Für den Abstand d folgt aus dem Kosinussatz:

$$d^2 = A^2 + R_1^2 - 2AR_1 \cos \vartheta. \quad (3.34)$$

Aus

$$\delta = \pi - \gamma - \vartheta \quad (3.35)$$

folgt

$$\sin \delta = \sin(\vartheta + \gamma) = \sin \vartheta \cos \gamma + \cos \vartheta \sin \gamma, \quad (3.36)$$

und aus dem Sinussatz folgen zugleich

$$\sin \delta = \frac{R_1}{A} \sin \gamma \quad (3.37)$$

und

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \vartheta} = \frac{A}{d}. \quad (3.38)$$

Gleichsetzen von (3.36) und (3.37) sowie Auflösen nach $\cos \gamma$ liefert:

$$\cos \gamma = \left(\frac{R_1}{A} - \cos \vartheta \right) \frac{\sin \gamma}{\sin \vartheta} = \left(\frac{R_1}{A} - \cos \vartheta \right) \frac{A}{d}. \quad (3.39)$$

Für den Einfallswinkel β gilt somit unter Anwendung der Definition von ϑ_{\max} aus (3.27):

$$\cos \beta = \cos(\pi - \gamma) = -\cos \gamma = (\cos \vartheta - \cos \vartheta_{\max}) \frac{A}{d}. \quad (3.40)$$

Durch Einsetzen von (3.34) und (3.40) in (3.33) ergibt sich schließlich:

$$F_{\text{irr}}(\vartheta) = \alpha_d \alpha_{\text{irr}} \alpha_{\text{accr}} \frac{L_{\text{accr}}}{4\pi A^2} h(\vartheta) = \langle F_{\text{irr}} \rangle h(\vartheta) \quad (3.41)$$

mit

$$h(\vartheta) = \frac{\cos \vartheta - \cos \vartheta_{\max}}{(1 - 2 \cos \vartheta \cos \vartheta_{\max} + \cos^2 \vartheta_{\max})^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.42)$$

Der Anteil der blockierten Oberfläche s wird hieraus durch explizite Ausführung des Integrals (3.28) bestimmt.

3.4 Massentransferzyklen

Im Unterschied zu Sternflecken kann Bestrahlung außer der Blockierung eines Teils des intrinsischen Flusses noch einen weiteren Effekt bewirken: Aufheizung der bestrahlten Atmosphäre. Dies äußert sich in einem Anstieg der Effektivtemperatur auf der bestrahlten Seite und damit einer Vergrößerung der Druckskalenhöhe. Die Idee, daß durch Bestrahlung die Massenverlustrate auf kurzen Zeitskalen von Stunden oder Tagen vergrößert wird, was zu beobachtbaren Kurzzeitvariationen in den Lichtkurven beispielsweise von Kataklysmischen Veränderlichen führen kann, liegt nahe. Tatsächlich kann allein durch Ausdehnung

der bestrahlten Atmosphäre sowie der darunterliegenden Schichten der Sternradius formal um etliche Skalenhöhen anwachsen, auf der bestrahlten Seite allein, wohlgermerkt (BARMAN, 2002). Inwieweit der Radius des gesamten Sterns bei Berücksichtigung des Druckausgleichs mit der unbestrahlten Seite, bzw. der Abschattung durch den äußeren Rand der Akkretionsscheibe tatsächlich anwächst, sei einmal dahingestellt. Tatsächlich ist umstritten, ob die Beobachtungsdaten beispielsweise einen verstärkten Massenüberstrom infolge von Zwergnovaausbrüchen belegen oder nicht (OSAKI und MEYER, 2003). In jedem Fall handelt es sich hierbei um Kurzzeitvariationen, die nicht Gegenstand dieser Arbeit sind.

Oszillationen oder Zyklen in der Massentransferrate auf Zeitskalen von der Größenordnung der thermischen Zeitskala des bestrahlten Sterns wurden zum ersten Mal von PODSIADLOWSKI (1991) für massearme Röntgendoppelsterne unter symmetrischer Bestrahlung diskutiert. Ein im Zusammenhang mit Massentransferzyklen zitierter Artikel von WU et al. (1995) begründet weder die darin verwendeten Differentialgleichungen, noch ist dieser Ansatz je weiterverfolgt worden. Der erste Versuch, das Auftreten von Massentransferzyklen auf der thermischen Zeitskala zu modellieren, geht auf RITTER et al. (1995) zurück. Das Prinzip dahinter ist recht einfach. Sobald der Stern einmal seinen ROCHE-Radius erreicht, startet der Massentransfer. Damit startet eine positive Rückkopplung, die in Abb. 3.7 schematisch dargestellt wird: Eine Erhöhung der Massentransferrate \dot{M} führt zu einer Erhöhung der Akkretionsrate \dot{M}_{accr} , welche wiederum zu einer erhöhten Akkretionsleuchtkraft L_{accr} führt. Dadurch vergrößert sich der Strahlungsfluß F_{irr} an der Oberfläche des masseverlierenden Sterns, wodurch ein immer größerer Teil der intrinsischen Leuchtkraft L_{int} an der Abstrahlung gehindert wird. Der Stern versucht, sich den geänderten Verhältnissen anzupassen und expandiert dabei auf der thermischen Zeitskala, um sein neues, von der momentanen Bestrahlungsstärke abhängiges, thermisches Gleichgewicht zu erreichen. Der wachsende Radius R wiederum erhöht die Massentransferrate \dot{M} .

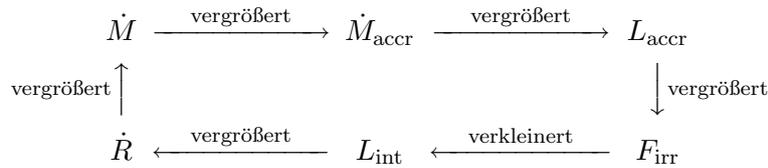


Abbildung 3.7: Schematische Darstellung der Bestrahlungsrückkopplung beim Einschalten des Massentransfers.

Jedoch funktioniert diese Rückkopplung nicht beliebig lange. Spätestens, wenn der maximale Anteil s_{max} der Oberfläche durch Bestrahlung blockiert ist, bewirkt eine weitere Erhöhung der Massentransferrate keine weitere Verringerung der intrinsischen Leuchtkraft. Die Massentransferrate wird dann nur noch von der thermischen Relaxation bestimmt. Um die erhöhte Massentransferrate aufrecht zu erhalten, muß der Radius entsprechend weiterwachsen. Dieser jedoch

würde spätestens bei Erreichen des neuen thermischen Gleichgewichts saturieren, welches bei vorgegebener Bestrahlungsstärke durch $L_g = 0$ definiert ist. Bei Erreichen des thermischen Gleichgewichts schließlich würde der Massentransfer nur noch durch nukleare Entwicklung und Drehimpulsverluste angetrieben, so daß die Massentransferrate schon vorher abnehmen und ihrem säkularen Wert zustreben muß.

Spätestens dann wird die Bestrahlungsrückkopplung negativ, wie in Abb. 3.8 schematisch dargestellt wird. Die fallende Massentransferrate \dot{M} verringert die Akkretionsrate \dot{M}_{accr} , diese die Akkretionsleuchtkraft L_{accr} und jene wiederum den Bestrahlungsfluß F_{irr} . Sobald die Massentransferrate und damit F_{irr} unter einen kritischen Wert gefallen ist, erhöht sich die intrinsische Leuchtkraft L_{int} , da ein immer kleinerer Teil des intrinsischen Flusses durch das schwächer werdende äußere Strahlungsfeld blockiert wird. Als Resultat strahlt der Stern mehr Energie ab und beginnt, infolge der thermischen Relaxation auf der thermischen Zeitskala zu schrumpfen. Dadurch verringert sich die Massentransferrate weiter, bis schließlich der Massenüberstrom versiegt und aus dem halbgetrennten Doppelsternsystem ein getrenntes geworden ist. Durch nukleare Entwicklung und Drehimpulsverluste erreicht der Stern irgendwann wieder seinen ROCHE-Radius, und ein neuer Massentransferzyklus beginnt.

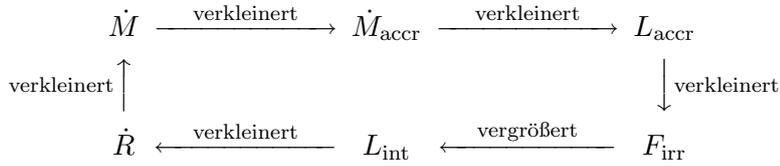


Abbildung 3.8: Schematische Darstellung der Bestrahlungsrückkopplung beim Ausschalten des Massentransfers.

Um die Langzeitentwicklung halbgetrennter Doppelsternsysteme und das Auftreten von Massentransferzyklen auf der thermischen Zeitskala numerisch verfolgen zu können, ist die Bestrahlungsrückkopplung physikalisch zu modellieren. Hierfür sind erforderlich:

- Die Massentransferrate \dot{M} als Funktion des Abstandes von Stern- und ROCHE-Radius: Modelle für die optisch dünne und die optisch dicke Massentransferrate wurden in den Abschnitten 2.2.2 und 2.2.3 diskutiert und führten auf die Massentransferformeln (2.41) und (2.57). Im Folgenden wird für die Diskussion der Bestrahlungsrückkopplung immer die vereinfachte optisch dünne Massentransferformel

$$\dot{M} = -\dot{M}_0 \exp\left(\frac{R - R_R}{H_P}\right) \quad (3.43)$$

aus (2.42) verwendet, die Schlußfolgerungen sind jedoch übertragbar auf

beliebige Massentransferformeln mit einer charakteristischen Skalenhöhe

$$H = \left(\frac{1}{\dot{M}} \frac{d\dot{M}}{d\Delta R} \right)^{-1} \ll R. \quad (3.44)$$

- Die Akkretionsrate \dot{M}_{accr} als Funktion der Massentransferrate: Die genaue Physik des Akkretionsvorgangs zu modellieren liegt jenseits der Zielsetzung dieser Arbeit. Stattdessen wird die Akkretionsrate durch den in (2.67) definierten freien Parameter η bestimmt:

$$\dot{M}_{\text{accr}} = -\langle \eta \rangle \dot{M}. \quad (3.45)$$

Hierbei bezeichnet $\langle \eta \rangle$ den mittleren Wert von η über lange Zeitskalen. Weiße Zwerge in Kataklysmischen Veränderlichen können beispielsweise auf kurzen Zeitskalen die gesamte transferierte Masse akkretieren ($\eta = 1$), während sie auf langen Zeitskalen jedoch infolge von Novaexplosionen wieder Masse verlieren können ($\langle \eta \rangle < 1$).

- Die Akkretionsleuchtkraft L_{accr} als Funktion der momentanen Akkretionsrate $-\eta\dot{M}$: Hierfür wird, wie in Abschnitt 3.3.1 bereits diskutiert, angenommen, daß L_{accr} durch die bei der Akkretion freigesetzte gravitative Bindungsenergie (3.25) gegeben ist:

$$L_{\text{accr}} = -\frac{\Gamma M_2}{R_2} \eta \dot{M}. \quad (3.46)$$

Ob die akkretierte Materie im Laufe der Zeit dem akkretierenden Stern wieder verloren geht, ist für die Bestimmung der momentanen Akkretionsleuchtkraft irrelevant. Deshalb geht an dieser Stelle η und nicht $\langle \eta \rangle$ ein. Der Beitrag des nuklearen Brennens der akkretierten Materie etwa bei Novaausbrüchen wird vernachlässigt, da es sich hierbei um kurzfristige Ereignisse handelt, die in relativ großen Zeitabständen stattfinden und somit den thermischen Zustand des masseverlierenden Sterns kaum beeinflussen.

- Der Bestrahlungsfluß F_{irr} an der Oberfläche des masseverlierenden Sterns als Funktion der Akkretionsleuchtkraft: Das Problem der Bestrahlungsgeometrie wurde in den Abschnitten 3.3.2 und 3.3.3 diskutiert und führt auf die Gleichungen (3.30) und (3.41). Für das *Constant Flux* Modell gilt

$$\langle F_{\text{irr}} \rangle = \alpha_d \alpha_{\text{irr}} \alpha_{\text{accr}} \frac{L_{\text{accr}}}{4\pi A^2} \quad (3.47)$$

und für das *Point Source* Modell

$$F_{\text{irr}}(\vartheta) = \alpha_d \alpha_{\text{irr}} \alpha_{\text{accr}} \frac{L_{\text{accr}}}{4\pi A^2} h(\vartheta) = \langle F_{\text{irr}} \rangle h(\vartheta). \quad (3.48)$$

- Die intrinsische Leuchtkraft L_{int} als Funktion des Bestrahlungsflusses: Die Ermittlung dieser Größe besteht im Wesentlichen aus der Berechnung des intrinsischen Flusses F_{int} als Funktion von F_{irr} . Die hierfür nötigen Werte werden aus den Tabellen von HAMEURY und RITTER (1997) interpoliert. L_{int} ergibt sich hieraus durch Integration über die gesamte Oberfläche, bzw. über die modifizierte STEPHAN-BOLTZMANN-Gleichung (3.22) über den effektiv blockierten Anteil s der Oberfläche:

$$L_{\text{int}} = 4\pi(1 - s)\sigma T_{\text{eff}}^4 R^2, \quad (3.49)$$

wobei s selbst durch die Gleichungen (3.28) bzw. (3.32) gegeben ist. Für das *Constant Flux* Modell gilt

$$s = s_{\text{max}} \left[1 - \frac{\langle F_{\text{int}} \rangle}{F_{\text{eff}}} \right] \quad (3.50)$$

und für das *Point Source* Modell

$$s = \frac{1}{2} \int_0^{\vartheta_{\text{max}}} \left[1 - \frac{F_{\text{int}}(\vartheta)}{F_{\text{eff}}} \right] \sin \vartheta \, d\vartheta. \quad (3.51)$$

- Der Radius bzw. die zeitliche Änderung des Radius als Funktion der intrinsischen Leuchtkraft: Dies ist der numerisch langwierigste und aufwendigste Teil der Berechnung, da der Sternradius durch die Lösung der Sternaufbaugleichungen (A.2), (A.3), (A.4) und (A.7) für ein eindimensionales, sphärisches Sternmodell berechnet wird. Eine detaillierte Beschreibung des verwendeten Sternentwicklungsprogramms findet sich in Anhang B.

Damit sind die Voraussetzungen zur numerischen Behandlung der Bestrahlungsrückkopplung für volle Sternmodelle gegeben. Fast sämtliche früheren Berechnungen beruhen auf der Verwendung von Bipolytropen-Modellen (RITTER et al., 1995, MCCORMICK und FRANK, 1998, RITTER et al., 2000). Meist wurden diese Rechnungen mit dem in Abschnitt 3.1 bereits erwähnten Ein-Zonen-Modell für den Energietransport in der überadiabatischen Konvektionszone durchgeführt, einige wenige Rechnungen von HAMEURY und RITTER (1997) jedoch auch mit vollen Sternmodellen und Bestrahlungstabellen .

3.5 Lineare Stabilitätsanalyse

3.5.1 Die thermische Relaxation

Bei der Stabilitätsanalyse für den Massentransfer in Abschnitt 2.3.4 wurde explizit angenommen, daß die thermische Relaxation $\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{th}}$ bzw. τ_{th} konstant ist. Dies kann bei Berücksichtigung der Bestrahlungsrückkopplung offensichtlich nicht mehr angenommen werden, da diese gerade auf der Veränderung der thermischen Relaxation durch Bestrahlung basiert. Für eine erweiterte Stabilitätsanalyse unter Einschluß der Bestrahlungsrückkopplung ist also zusätzlich

zur Differentialgleichung (2.133) für die zeitliche Entwicklung von $\Delta R = R - R_R$ ein Modell für die thermische Relaxation und damit eine zweite Differentialgleichung erforderlich. Die folgende Stabilitätsdiskussion findet sich in äquivalenter Form, wenn auch in weniger anschaulichen Größen, bei KING et al. (1996).

Definiert man als thermische Relaxation⁵

$$K := \left(\frac{dR}{dt} \right)_{\text{th}} = \frac{R}{\tau_{\text{th}}}, \quad (3.52)$$

so läßt sich die erste Differentialgleichung (2.133) als

$$\frac{d}{dt} \Delta R = (\zeta_s - \zeta_R) R \frac{\dot{M}}{M} + K + \frac{R}{\tau_d} \quad (3.53)$$

schreiben. Eine analytische Formel für die thermische Relaxation anzugeben, ist im Allgemeinen nicht möglich. Daher ist es nötig, für die Behandlung der Bestrahlungsrückkopplung die Sternaufbaugleichungen numerisch zu lösen. Jedoch ist es zumindest im Rahmen eines bipolytropen Modells möglich, eine Formel für K anzugeben (RITTER et al., 1995). Ohne weiter auf die genaue Form der thermischen Relaxation einzugehen, ist klar, daß der Radius R gleich dem thermischen Gleichgewichtsradius bei vorgegebener Bestrahlung R_s ist, falls sich der Stern im thermischen Gleichgewicht befindet, und daß die thermische Relaxation in der Regel umso stärker sein wird, je größer der Unterschied zwischen momentanem Radius und Gleichgewichtsradius ist. R_s selbst ist von der Bestrahlung und damit von \dot{M} , bzw. ΔR abhängig. Daher bietet es sich an, stattdessen den Gleichgewichtsradius des unbestrahlten Sterns R_e als Referenzradius zu betrachten. Es leuchtet ein, daß in einem stationären Zustand des Systems sowohl die Massentransferrate als auch die thermische Relaxation stationär sein müssen und deshalb sowohl ΔR als auch

$$\Delta R_e := R - R_e = (R - R_s) + (R_s - R_e) \quad (3.54)$$

als konstant angenommen werden können. Für die Stabilitätsanalyse wird deshalb zusätzlich zu $\frac{d}{dt} \Delta R$ wie in Abschnitt 2.3.4 noch $\frac{d}{dt} \Delta R_e$ betrachtet.

Die zeitliche Entwicklung von R_e ist über den in Abschnitt 2.3.3.3 diskutierten Masse-Radius-Exponenten des thermischen Gleichgewichts

$$\zeta_e = \left(\frac{d \ln R_e}{d \ln M} \right)_{X_j} \quad (3.55)$$

definiert. Unter Berücksichtigung der nuklearen Entwicklung gilt:

$$\frac{d \ln R_e}{dt} = \zeta_e \frac{d \ln M}{dt} + \left(\frac{d \ln R_e}{dt} \right)_{\text{nuc}}. \quad (3.56)$$

Die Differenz zwischen der Zeitentwicklung des Sternradius (2.127) und der des Gleichgewichtsradius (3.56) führt auf

$$\frac{d}{dt} \Delta R_e = (R \zeta_s - R_e \zeta_e) \frac{\dot{M}}{M} + \left(\frac{dR}{dt} \right)_{\text{th}} + \left(\frac{dR}{dt} \right)_{\text{nuc}} - \left(\frac{dR_e}{dt} \right)_{\text{nuc}}. \quad (3.57)$$

⁵KING et al. (1996) definieren K als $\left(\frac{d \ln R}{dt} \right)_{\text{th}}^{-1}$.

Unter der Annahme, daß der Stern nur geringfügig aus dem thermischen Gleichgewicht ausgelenkt ist und somit

$$R \approx R_e \quad (3.58)$$

sowie

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{nuc}} \approx \left(\frac{dR_e}{dt}\right)_{\text{nuc}} \quad (3.59)$$

gilt, geht (3.57) über in

$$\frac{d}{dt} \Delta R_e = (\zeta_s - \zeta_e) R \frac{\dot{M}}{M} + K. \quad (3.60)$$

Diese Annahme ist nicht unbedingt notwendig, vereinfacht jedoch die folgenden Gleichungen und führt dazu, daß sich das Endergebnis in einer prägnanteren und anschaulicheren Form schreiben läßt. Sie ist automatisch erfüllt, wenn das System im stationären Zustand nur schwach bestrahlt wird. Es wird sich herausstellen, daß dies für Kataklysmische Veränderliche in der Regel der Fall ist, für Massearme Röntgendoppelsterne jedoch nicht unbedingt. Wird die Annahme nicht gemacht, so ist im Folgenden ζ_e durch $\frac{R_e}{R} \zeta_e$ zu ersetzen, und $\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{nuc}}$ und $\left(\frac{dR_e}{dt}\right)_{\text{nuc}}$ heben sich nicht weg. Der Einfluß dieser Terme auf die im Folgenden diskutierten Ableitungen ist vernachlässigbar, solange $\tau_{\text{KH}} \ll \bar{\tau}_M$ und $\frac{H_P}{R} \ll 1$ erfüllt sind. Daher soll für die folgende Diskussion (3.60) statt (3.57) verwendet werden.

(3.60) ist die zweite für die Stabilitätsanalyse nötige Differentialgleichung, welche die thermische Reaktion des Systems auf Massenverlust beschreibt. (3.53) und (3.60) bilden ein System zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta R \\ \Delta R_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\zeta_s - \zeta_R) R \frac{\dot{M}}{M} + K + \frac{R}{\tau_d} \\ (\zeta_s - \zeta_e) R \frac{\dot{M}}{M} + K \end{pmatrix} =: \mathbf{F} \begin{pmatrix} \Delta R \\ \Delta R_e \end{pmatrix}. \quad (3.61)$$

Die Stationaritätsbedingung bzw. Fixpunktgleichung lautet:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta R \\ \Delta R_e \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} \Delta R \\ \Delta R_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

Die erste Zeile dieses Gleichungssystems ist identisch zur Stationaritätsbedingung (2.61) für das eindimensionale System.

Nach dem Satz von HARTMANN-GROBMAN ist ein Fixpunkt eines Vektorfeldes \mathbf{F} stabil, falls alle Eigenwerte von $D\mathbf{F}$ einen negativen Realteil besitzen, und instabil, falls auch nur einer einen positiven Realteil besitzt. Nimmt man an, daß die nukleare Entwicklung $\left(\frac{d \ln R}{dt}\right)_{\text{nuc}}$ und die systematischen Drehimpulsverluste $\left(\frac{d \ln J}{dt}\right)_{\text{sys}}$ weder von ΔR , noch von ΔR_e abhängen, so gilt:

$$D\mathbf{F} = \begin{pmatrix} (\zeta_s - \zeta_R) \frac{R}{H_P} \frac{\bar{M}}{M} + \frac{\partial K}{\partial \Delta R} & \frac{\partial K}{\partial \Delta R_e} \\ (\zeta_s - \zeta_e) \frac{R}{H_P} \frac{\bar{M}}{M} + \frac{\partial K}{\partial \Delta R} & \frac{\partial K}{\partial \Delta R_e} \end{pmatrix}, \quad (3.63)$$

wobei \overline{M} die stationäre Massentransferrate bezeichnet. Strenggenommen hängt die Drehimpulsverlustrate zwar vom Radius ab, und auch die nukleare Entwicklung wird durch den thermischen Aufbau des Sterns und somit ΔR_e beeinflusst. Jedoch sind diese Effekte klein, so daß sie hier vernachlässigt werden.

3.5.2 Die Stabilitätskriterien

Die Eigenwerte von \mathbf{DF} sind durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \text{Sp}(\mathbf{DF}) + \det(\mathbf{DF}) \quad (3.64)$$

gegeben und lauten

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \text{Sp}(\mathbf{DF}) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \text{Sp}^2(\mathbf{DF}) - \det(\mathbf{DF})}. \quad (3.65)$$

Damit beide Eigenwerte einen negativen Realteil haben, muß als *notwendiges* Kriterium bereits

$$\text{Sp}(\mathbf{DF}) = (\zeta_s - \zeta_R) \frac{R}{H_P} \frac{\overline{M}}{M} + \frac{\partial K}{\partial \Delta R} + \frac{\partial K}{\partial \Delta R_e} < 0 \quad (3.66)$$

erfüllt sein. Umgekehrt ist die stationäre Lösung in jedem Fall instabil, falls $\text{Sp}(\mathbf{DF})$ positiv ist. Die physikalische Bedeutung dieser drei Terme ist nun die folgende: Der erste Term reflektiert die adiabatische Reaktion des Systems auf Massenverlust. Für ein dynamisch stabiles System gilt $\zeta_s - \zeta_R > 0$, so daß der erste Term immer negativ ist und zur Stabilisierung in (3.66) beiträgt. Der dritte Term $\frac{\partial K}{\partial \Delta R_e}$ gibt an, wie sich die thermische Relaxation mit dem Abstand von R und R_e verhält. Ein negativer Wert bedeutet eine negative Rückkopplung zwischen $R - R_e$ und K : Je größer R im Vergleich zu seinem Gleichgewichtsradius ist, desto stärker ist die thermische Relaxation, die den Sternradius zu verkleinern sucht; je kleiner R ist, desto stärker ist die thermische Relaxation, die den Sternradius zu vergrößern sucht. Daher ist

$$\frac{\partial K}{\partial \Delta R_e} < 0 \quad (3.67)$$

eine sinnvolle Annahme für die thermische Relaxation, so daß auch dieser Term zur Stabilisierung von (3.66) beiträgt. Das notwendige Kriterium für Stabilität kann daher nur verletzt sein, falls der zweite Term $\frac{\partial K}{\partial \Delta R}$ positiv und vom Betrag größer ist als die anderen beiden Terme zusammen. Doch was ist die physikalische Bedeutung dieses Terms?

$$\frac{\partial K}{\partial \Delta R} > 0 \quad (3.68)$$

bedeutet, daß die Rückkopplung zwischen der thermischen Relaxation und dem Abstand zwischen R und R_R und somit der Massentransferrate positiv ist. Je größer R im Vergleich zu R_R ist, desto größer ist die thermische Relaxation, die

den Sternradius zu vergrößern sucht; je kleiner R im Vergleich zu R_R ist, desto größer ist die thermische Relaxation, die den Sternradius zu verkleinern sucht. Genau diese Art der Rückkopplung wird durch Bestrahlung bewirkt, und die Frage ist nun, ob diese Rückkopplung stark genug sein kann, um die stationäre Lösung zu destabilisieren.

Ein *hinreichendes* Kriterium für die Stabilität des Fixpunkts ist, daß der Realteil des zweiten Terms in (3.65) vom Betrag kleiner ist als der (negative) erste Term:

$$\left| \operatorname{Re} \left(\sqrt{\frac{1}{4} \operatorname{Sp}^2(\mathbf{DF}) - \det(\mathbf{DF})} \right) \right| < \left| \frac{1}{2} \operatorname{Sp}(\mathbf{DF}) \right|, \quad (3.69)$$

so daß beide Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ einen negativen Realteil haben. \mathbf{DF} ist eine reelle Matrix, die obige Wurzel ist somit entweder reell oder rein imaginär. Ist die Wurzel rein imaginär, so ist der Realteil Null und (3.69) automatisch erfüllt. Dann muß der Term unter der Wurzel also negativ sein, und es gilt:

$$\det(\mathbf{DF}) > \frac{1}{4} \operatorname{Sp}^2(\mathbf{DF}) > 0. \quad (3.70)$$

Ist die Wurzel reell, der Term unter der Wurzel also positiv, so ist (3.69) äquivalent zu

$$\left| \sqrt{\frac{1}{4} \operatorname{Sp}^2(\mathbf{DF}) - \det(\mathbf{DF})} \right| < \left| \frac{1}{2} \operatorname{Sp}(\mathbf{DF}) \right|, \quad (3.71)$$

und dies wiederum ist äquivalent zu

$$\det(\mathbf{DF}) > 0. \quad (3.72)$$

Die Determinante von \mathbf{DF} läßt sich mit (3.63) explizit auswerten:

$$\det(\mathbf{DF}) = (\zeta_e - \zeta_R) \frac{R}{H_P} \frac{\overline{M}}{M} \frac{\partial K}{\partial \Delta R_e}. \quad (3.73)$$

$\frac{\partial K}{\partial \Delta R_e}$ und \overline{M} sind immer negativ, so daß (3.72) schließlich äquivalent ist zu

$$\zeta_e - \zeta_R > 0. \quad (3.74)$$

Das hinreichende Kriterium (3.74) für die Stabilität des Fixpunkts ist also identisch mit dem Kriterium für thermische Stabilität gegen Massenverlust (2.146).

Setzt man die beiden Gleichungen der Stationaritätsbedingung (3.62) gleich, so ergibt sich für die stationäre Massentransferrate:

$$-\frac{\overline{M}}{M} = \frac{1}{\tau_M} = \frac{1}{\zeta_e - \zeta_R} \frac{1}{\tau_d}. \quad (3.75)$$

Dies ist genau die stationäre Massentransferrate für thermisch stabile Systeme (2.147). Hieraus ergibt sich eine bemerkenswerte Implikation: Für thermisch

instabile Systeme ($\zeta_e < \zeta_R$) kann (3.75) nur erfüllt sein, wenn die Antriebszeitskala τ_d negativ ist, wenn also der Radius durch nukleare Entwicklung und Drehimpulsverluste schneller schrumpft (langsamer wächst) als der ROCHE-Radius. Daß in diesem Fall der Massentransfer nicht stabil sein kann, ist anschaulich klar. Mathematisch bedeutet es, daß das hinreichende Kriterium ($\zeta_e > \zeta_R$) nicht erfüllt, $\det(\mathbf{DF})$ somit negativ, der Term unter der Wurzel in (3.65) positiv und die Wurzel vom Betrag größer ist als $\frac{1}{2} \text{Sp}(\mathbf{DF})$. Ein Eigenwert ist also positiv, der andere negativ und die stationäre Lösung von (3.61) ist ein instabiler hyperbolischer Fixpunkt, unabhängig davon, ob das notwendige Kriterium ($\text{Sp}(\mathbf{DF}) < 0$) erfüllt ist.

Für thermisch instabile Systeme ($\zeta_e < \zeta_R$) mit $\tau_d > 0$ kann es wegen (3.75) dagegen nicht nur keine stabile stationäre Lösung geben, sondern es kann nicht einmal eine instabile stationäre Lösung existieren. Dies steht in scheinbarem Widerspruch zur Aussage in Abschnitt 2.3.5, daß für $\zeta_s > \zeta_R$ und $\tau'_d > 0$ die stationäre Massentransferrate stabil ist (unabhängig von ζ_e). Diese ist nach (2.135) durch

$$-\frac{\overline{\dot{M}}}{\overline{M}} = \overline{\tau}_M = \frac{1}{\zeta_s - \zeta_R} \tau'_d = \frac{1}{\zeta_s - \zeta_R} \left(\frac{K}{R} + \tau_d \right) \quad (3.76)$$

gegeben. Störungen werden auf der Zeitskala

$$\tau_{\text{per}} = \frac{H_P}{R} \tau'_d \quad (3.77)$$

nivelliert. Ändert sich die thermische Relaxation K auf einer Zeitskala $\tau \gg \tau_{\text{per}}$, so wird sich die Massentransferrate in guter Näherung auf (3.76) einstellen. Diese „stationäre“ Massentransferrate ist zwar im eindimensionalen System (2.133) bei als konstant angenommener thermischer Relaxation K stationär, jedoch jedoch nicht im zweidimensionalen System (3.62) bei als variabel angenommener thermischer Relaxation K , da sich K auf einer Zeitskala $\tau \gg \tau_{\text{per}}$ ändert. Würde man zusätzlich berücksichtigen, daß auch ζ_s , ζ_e und ζ_R sich im Laufe der Entwicklung ändern, so könnte auch das zweidimensionale System (3.61) formal keine stationäre Lösung besitzen. Es ist alles nur eine Frage der involvierten Zeitskalen.

Das zweidimensionale System (3.61) kann also nur angewendet werden, wenn die Zeitskala, auf der sich K ändert, also τ_{KH} , klein ist gegenüber der Zeitskala, auf der sich die Systemparameter ändern, also τ_M . Dies ist beispielsweise nicht der Fall für Massentransfer auf der thermischen Zeitskala. Daher werden im Folgenden nur adiabatisch und thermisch stabile Systeme mit positiver Antriebszeitskala τ_d betrachtet werden. Nur diese Systeme können bei Berücksichtigung einer variablen thermischen Relaxation K eine stabile stationäre Massentransferrate besitzen und bei geeigneter Bestrahlungsrückkopplung $\frac{\partial K}{\partial \Delta R}$ eventuell Massentransferzyklen auf thermischer Zeitskala durchlaufen.

Setzt man (3.75) in eine der beiden Stationaritätsgleichungen (3.62) ein, so ergibt sich ein expliziter Ausdruck für die thermische Relaxation im Fixpunkt:

$$\frac{K}{R} = \frac{1}{\tau_{\text{th}}} = \frac{\zeta_s - \zeta_e}{\zeta_e - \zeta_R} \frac{1}{\tau_d} = \frac{\zeta_s - \zeta_e}{\tau_M}. \quad (3.78)$$

Die Zeitskala der stationären thermischen Relaxation τ_{th} ist also proportional zur Antriebszeitskala τ_d . Es bedeutet auch, daß K positiv ist, falls ζ_s größer als ζ_e ist, wenn also der Stern durch die adiabatische Reaktion schneller schrumpft (langsamer wächst) als sein Gleichgewichtsradius. Und sie ist negativ, falls ζ_s kleiner ist als ζ_e , wenn also der Stern durch die adiabatische Reaktion langsamer schrumpft (schneller wächst) als der Gleichgewichtsradius. Auch die Antriebszeitskala τ'_d inklusive der thermischen Relaxation läßt sich nun explizit angeben:

$$\frac{1}{\tau'_d} = \frac{1}{\tau_{\text{th}}} + \frac{1}{\tau_d} = \frac{\zeta_s - \zeta_R}{\zeta_e - \zeta_R} \frac{1}{\tau_d}. \quad (3.79)$$

Zusammengefaßt ergeben sich also die folgenden drei Relationen

$$\overline{\tau_M} = (\zeta_e - \zeta_R)\tau_d, \quad (3.80a)$$

$$\overline{\tau_M} = (\zeta_s - \zeta_R)\tau'_d, \quad (3.80b)$$

$$\overline{\tau_M} = (\zeta_s - \zeta_e)\tau_{\text{th}} \quad (3.80c)$$

zwischen der Zeitskala des stationären Massentransfers $\overline{\tau_M}$ und τ_d , τ'_d sowie τ_{th} .

Das notwendige Kriterium für Stabilität (3.66) läßt sich mit

$$\overline{\tau_M} = -\frac{M}{\dot{M}} \quad (3.81)$$

umschreiben zu

$$\zeta_s - \zeta_R > \frac{H_P}{R} \overline{\tau_M} \left[\frac{\partial K}{\partial \Delta R} + \frac{\partial K}{\partial \Delta R_e} \right]. \quad (3.82)$$

Dies entspricht dem Kriterium für adiabatische Stabilität (2.145) gegen Massenverlust unter Einbeziehung der thermischen Relaxation. Ist (3.82) erfüllt, so ist das System unter Einbeziehung der (variablen) thermischen Relaxation am Fixpunkt, das heißt quasi „lokal“ adiabatisch stabil gegen Massenverlust. Es gibt nun zwei mögliche Fälle, in denen eine stationäre Massentransferrate existieren kann:

- $\text{Sp}(\mathbf{DF}) < 0$ und $\zeta_e - \zeta_R > 0$: Sowohl das notwendige als auch hinreichende Kriterium sind erfüllt. In diesem Fall sind die Realteile beider Eigenwerte negativ und die stationäre Lösung ist stabil, sogar ein Attraktor. Das System ist sowohl adiabatisch als auch thermisch stabil gegen Massenverlust und die Massentransferrate ist durch (3.80a) gegeben.
- $\text{Sp}(\mathbf{DF}) > 0$ und $\zeta_e - \zeta_R > 0$: Das notwendige Kriterium ist nicht erfüllt, das hinreichende aber schon. $\det(\mathbf{DF})$ ist positiv und der zweite Term von (3.65) entweder rein imaginär oder zumindest vom Betrag kleiner als der erste Term. Beide Eigenwerte sind also positiv und die stationäre Lösung von (3.61) ist ein instabiler Fixpunkt, sogar ein Repulsor. Das System ist thermisch stabil und „lokal“ adiabatisch instabil. Wie sich Lösungen von

(3.61) global verhalten, hängt nun jedoch von der thermischen Relaxation ab. Ist $\zeta_s - \zeta_R < 0$, so läuft das System in den dynamischen Massentransfer. Gilt jedoch am Fixpunkt

$$\frac{H_P}{R} \frac{1}{\tau_M} \left[\frac{\partial K}{\partial \Delta R} + \frac{\partial K}{\partial \Delta R_e} \right] > \zeta_s - \zeta_R > 0, \quad (3.83)$$

so wird sich der Massenverlust bei einer genügend hohen Massentransfer-rate bzw. $\tau_M \rightarrow 0$ schließlich stabilisieren, und es können Massentransferzyklen auftreten. Dieser Fall erfordert jedoch eine genauere Analyse.

Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten dafür, wie die Dynamik in der Umgebung des Fixpunkts aussieht in Abhängigkeit von $\text{Sp}(\mathbf{DF})$ und $\det(\mathbf{DF})$:

- $\text{Sp}(\mathbf{DF}) \leq -2\sqrt{\det(\mathbf{DF})}$: Es gilt $\text{Sp}^2(\mathbf{DF}) \geq 4\det(\mathbf{DF})$ und die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ von \mathbf{DF} aus (3.65) sind rein reell und negativ. Alle Lösungen in der Umgebung des Fixpunktes laufen direkt und ohne Überschwinger auf den Fixpunkt zu.
- $-2\sqrt{\det(\mathbf{DF})} < \text{Sp}(\mathbf{DF}) < 0$: Es gilt $\text{Sp}^2(\mathbf{DF}) < 4\det(\mathbf{DF})$ und die Wurzel in (3.65) ist rein imaginär. Die Eigenwerte sind daher von der Form $\lambda_{1,2} = -\lambda \pm i\omega$ für $\lambda, \omega > 0$. Alle Lösungen in der Umgebung des Fixpunkts laufen spiralförmig auf den Fixpunkt zu, die Massentransferrate weist deshalb gedämpfte Schwingungen auf.
- $\text{Sp}(\mathbf{DF}) = 0$: Die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ sind rein imaginär. Das System erleidet eine HOPF-Bifurkation, bei der der für $\text{Sp}(\mathbf{DF}) < 0$ stabile Fixpunkt instabil wird und ein stabiler Grenzzyklus für $\text{Sp}(\mathbf{DF}) > 0$ entsteht. Dies läßt sich allerdings ohne Kenntnis von $K(\Delta R, \Delta R_e)$ nicht mathematisch beweisen. Unter Berücksichtigung nicht nur der linearen Terme, sondern auch der quadratischen Terme von \mathbf{F} läßt sich im Rahmen der *Normalformtheorie* (GUCKENHEIMER und HOLMES, 1983, Theorem 3.4.2 und Gl. 3.4.11) dieser Beweis führen. Nach einer geeigneten Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{\det(\mathbf{DF})}}{(\zeta_s - \zeta_e) \frac{R}{H_P} \frac{\dot{M}}{M} + \frac{\partial K}{\partial \Delta R}} \\ 1 & \frac{\frac{\partial K}{\partial \Delta R_e}}{(\zeta_s - \zeta_e) \frac{R}{H_P} \frac{\dot{M}}{M} + \frac{\partial K}{\partial \Delta R}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta R \\ \Delta R_e \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

gilt für einen Koeffizienten a gewisser quadratischer Terme in der TAYLOR-Entwicklung von \mathbf{F} : Falls a nicht Null ist, dann durchläuft \mathbf{F} an der Stelle $\text{Sp}(\mathbf{DF}) = 0$ eine HOPF-Bifurkation, bei der ein Grenzzyklus entsteht. Der Grenzzyklus ist stabil für $a < 0$ und instabil für $a > 0$. Der Koeffizient a setzt sich zusammen aus Kombinationen der zweiten und dritten gemischten partiellen Ableitungen von \mathbf{F} und ist daher im generischen Fall nicht Null. Für einen exakten Beweis ist jedoch die Kenntnis von K sowie \dot{M} und deren zweiten und dritten Ableitungen nötig.

- $0 < \text{Sp}(\mathbf{DF}) < 2\sqrt{\det(\mathbf{DF})}$: Es gilt $\text{Sp}^2(\mathbf{DF}) < 4\det(\mathbf{DF})$ und die Wurzel in (3.65) ist rein imaginär. Die Eigenwerte sind daher von der

Form $\lambda_{1,2} = \lambda \pm i\omega$ für $\lambda, \omega > 0$. Alle Lösungen in der Umgebung des Fixpunkts laufen spiralförmig vom Fixpunkt weg, die Massentransferrate weist deshalb Schwingungen mit wachsender Amplitude auf.

- $2\sqrt{\det(\mathbf{DF})} \leq \text{Sp}(\mathbf{DF})$: Es gilt $\text{Sp}^2(\mathbf{DF}) \geq 4\det(\mathbf{DF})$ und die Eigenwerte (3.65) von \mathbf{DF} sind rein reell und positiv. Alle Lösungen in der Umgebung des Fixpunktes laufen direkt und ohne Überschwinger vom Fixpunkt weg.

3.5.3 Die Bestrahlungsrückkopplung

Das Modell der Bestrahlungsrückkopplung beruht darauf, daß der Stern aus dem thermischen Gleichgewicht gebracht wird, indem ein gewisser Anteil s seiner Oberfläche effektiv durch Bestrahlung blockiert wird. Die intrinsische Leuchtkraft hängt für eine fest vorgegebene thermische Struktur des Sterns (bzw. eine fest vorgegebene Entropie in der adabatischen Konvektionszone) umkehrbar eindeutig nur von der Bestrahlungsstärke, bzw. der Massentransferrate, bzw. ΔR ab. Die zugehörigen mathematischen Zusammenhänge sind in den vorangegangenen Abschnitten diskutiert worden.

$\frac{\partial K}{\partial \Delta R}$ läßt sich allgemein auch als

$$\frac{\partial K}{\partial \Delta R} = \left(\frac{dK}{d\Delta R} \right)_{\Delta R_e} = \left(\frac{dK}{dL_{\text{int}}} \right)_{\Delta R_e} \left(\frac{dL_{\text{int}}}{d\Delta R} \right)_{\Delta R_e} \quad (3.85)$$

schreiben. L_{int} selbst hängt nicht direkt von ΔR ab, sondern nur über s . Denn die Größen R und T_{eff} aus (3.22) hängen nicht von der momentanen Massentransferrate ab. Daher gilt:

$$\frac{\partial K}{\partial \Delta R} = \left(\frac{dK}{dL_{\text{int}}} \right)_{\Delta R_e} \left(\frac{dL_{\text{int}}}{ds} \right)_{R, T_{\text{eff}}} \frac{ds}{d\dot{M}} \frac{d\dot{M}}{d\Delta R}. \quad (3.86)$$

Aus der Massentransferformel (3.43) ergibt sich:

$$\frac{d\dot{M}}{d\Delta R} = \frac{\dot{M}}{H_P}. \quad (3.87)$$

Für den effektiv blockierten Anteil s der Oberfläche folgt aus (3.28) für das *Point Source* Modell

$$\frac{ds}{d\dot{M}} = -\frac{1}{2} \int_0^{\vartheta_{\text{max}}} \frac{df_{\text{int}}}{df_{\text{irr}}} \frac{df_{\text{irr}}}{dL_{\text{accr}}} \frac{dL_{\text{accr}}}{d\dot{M}} \sin \vartheta d\vartheta \quad (3.88)$$

und aus (3.32) für das *Constant Flux* Modell

$$\frac{ds}{d\dot{M}} = -s_{\text{max}} \frac{df_{\text{int}}}{df_{\text{irr}}} \frac{df_{\text{irr}}}{dL_{\text{accr}}} \frac{dL_{\text{accr}}}{d\dot{M}}. \quad (3.89)$$

Für den Bestrahlungsfluß ergibt sich

$$\frac{df_{\text{irr}}}{dL_{\text{accr}}} = \frac{f_{\text{irr}}}{L_{\text{accr}}} \quad (3.90)$$

aus (3.47), bzw. (3.48) und für die Akkretionsleuchtkraft

$$\frac{dL_{\text{accr}}}{d\dot{M}} = \frac{dL_{\text{accr}}}{d\dot{M}_{\text{accr}}} \frac{d\dot{M}_{\text{accr}}}{d\dot{M}} = \frac{L_{\text{accr}}}{\dot{M}} \quad (3.91)$$

aus (3.45) und (3.46). Definiert man

$$s' := \dot{M} \frac{ds}{d\dot{M}} = \frac{ds}{d \ln(-\dot{M})} > 0, \quad (3.92)$$

so ergibt sich aus (3.88), (3.90) und (3.91)

$$s'_{\text{ps}} = -\frac{1}{2} \int_0^{\vartheta_{\text{max}}} \frac{df_{\text{int}}}{df_{\text{irr}}} f_{\text{irr}} \sin \vartheta d\vartheta \quad (3.93)$$

für das *Point Source* Modell. s'_{ps} läßt sich als Funktion von $\langle f_{\text{irr}} \rangle$ ausdrücken, welches über (3.41) definiert ist:

$$f_{\text{irr}}(\vartheta) = \langle f_{\text{irr}} \rangle h(\vartheta) = \frac{\langle F_{\text{irr}} \rangle}{F_{\text{eff}}} h(\vartheta). \quad (3.94)$$

Es gilt nämlich:

$$s'_{\text{ps}}(\langle f_{\text{irr}} \rangle) = -\frac{1}{2} \int_0^{\vartheta_{\text{max}}} \frac{df_{\text{int}}}{df_{\text{irr}}} \langle f_{\text{irr}} \rangle h(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (3.95)$$

Analog hierzu ergibt sich aus (3.89), (3.90) und (3.91)

$$s'_{\text{cf}}(\langle f_{\text{irr}} \rangle) = s'_{\text{cf}}(f_{\text{irr}}) = -s_{\text{max}} \frac{df_{\text{int}}}{df_{\text{irr}}} f_{\text{irr}} \quad (3.96)$$

für das *Constant Flux* Modell, für das per Definition

$$f_{\text{irr}} = \langle f_{\text{irr}} \rangle \quad (3.97)$$

gilt.

Für die intrinsische Leuchtkraft folgt aus (3.22):

$$\left(\frac{dL_{\text{int}}}{ds} \right)_{R, T_{\text{eff}}} = -4\pi R^2 T_{\text{eff}}^4 =: -\tilde{L}. \quad (3.98)$$

\tilde{L} ist hierbei die Leuchtkraft, die der Stern hätte, wenn die Bestrahlung instantan vollständig abgeschaltet würde. Dies ist nicht notwendigerweise die Leuchtkraft L_e , die er im thermischen Gleichgewicht ohne Bestrahlung hätte, da der Radius im stationären Zustand vom Gleichgewichtsradius deutlich verschieden sein kann.

Somit läßt sich die partielle Ableitung der thermischen Relaxation nach ΔR ausführen, und Einsetzen von (3.87), (3.92) und (3.98) in (3.86) führt auf

$$\frac{\partial K}{\partial \Delta R} = -\frac{\tilde{L}}{H_P} \left(\frac{dK}{dL_{\text{int}}} \right)_{\Delta R_e} s'(\langle f_{\text{irr}} \rangle), \quad (3.99)$$

wobei s' durch das geeignete Modell aus (3.95) oder (3.96) zu ersetzen ist. An dieser Stelle fehlt noch ein Modell für die Ableitung von K nach L_{int} , welches in Abschnitt 3.5.4 entwickelt werden soll.

Zunächst soll jedoch s' für das *Constant Flux* Modell diskutiert werden. s'_{cf} gibt an, wie sich der blockierte Anteil der Oberfläche mit der Bestrahlungsstärke, genauer gesagt mit der Massentransferrate, ändert. Aus (3.96) läßt sich leicht ersehen, daß s'_{cf} nicht negativ werden kann, da f_{int} eine in f_{irr} monoton fallende Funktion und $\frac{df_{\text{int}}}{df_{\text{irr}}}$ daher nicht positiv ist. Offensichtlich gilt

$$s'_{\text{cf}}(0) = 0$$

und

$$\lim_{f_{\text{irr}} \rightarrow \infty} s'_{\text{cf}}(f_{\text{irr}}) = 0, \quad (3.100)$$

da für genügend große Bestrahlungsstärke s saturieren muß, und s' somit gegen 0 geht. Abb. 3.9 zeigt s'_{cf} für unentwickelte Hauptreihensterne unterschiedlicher Masse.

Ein von KING et al. (1995, 1997) verwendetes Modell für s ist von der Form

$$s_k = s_{\text{max}} \tanh(k f_{\text{irr}}) \quad (3.101)$$

mit einem freien Parameter k von der Größe 1. Abb. 3.10 zeigt

$$s'_k = s_{\text{max}} \frac{k f_{\text{irr}}}{\cosh^2(k f_{\text{irr}})} \quad (3.102)$$

für $k = 1$ und $k = \frac{1}{4}$ sowie die numerisch aus den Tabellen von (HAMEURY und RITTER, 1997) ermittelten Werte von s'_{cf} für drei verschiedene Sternmodelle: einen unentwickelten Hauptreihenstern, einen Riesen in der Phase des Wasserstoff-Schalenbrennens und einen stark entwickelten Stern, bei dem es sich um den Kern eines entwickelten, ursprünglich deutlich massereicheren Hauptreihensterns handelt, der in einer Phase thermischen Massentransfers seine Hülle verloren hat.

Es stellt sich heraus, daß für viele Sternmodelle das Maximum von s'_{cf} bei etwa $f_{\text{irr}} \approx 3$ liegt und das simple Modell (3.101) mit Werten von $k \approx 0.2 - 0.3$ eine erstaunlich gute Approximation liefert, zumindest für Sterne mit ausgedehnten überadiabatischen Konvektionszonen. Für massearme Hauptreihensterne mit einer vernachlässigbaren überadiabatischen Konvektionszone liegt das Maximum von s'_{cf} dagegen bei deutlich geringeren Bestrahlungsstärken von ungefähr $f_{\text{irr}} \approx 1$. Eine brauchbare Approximation liefert das simple Modell (3.101) in diesem Fall für $k \approx 1$.

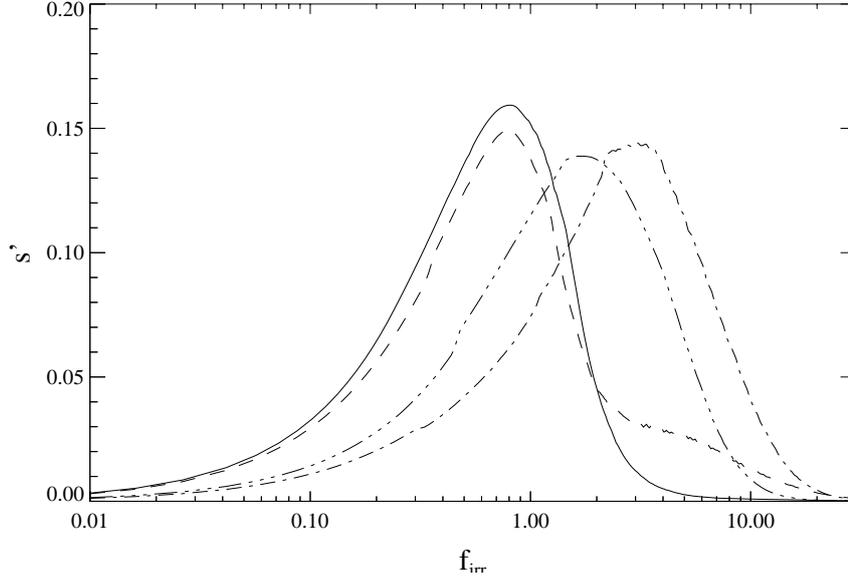


Abbildung 3.9: $s'_{cf}(f_{irr})$ für das *Constant Flux* Modell gemäß (3.96) für Nullalter-Hauptreihensterne mit $0.3 M_{\odot}$ (durchgezogene Linie), $0.5 M_{\odot}$ (gestrichelte Linie), $0.7 M_{\odot}$ (strichpunktiierte Linie) und $0.9 M_{\odot}$ (punktiert-strichpunktiierte Linie). s_{max} wurde auf 0.35 gesetzt.

Für das *Point Source* Modell (3.95) ist zu erwarten, daß s'_{ps} breiter und flacher ist als s'_{cf} für das gleiche Sternmodell. Der Grund liegt darin, daß für ein festes $\langle f_{irr} \rangle$ die Umgebung des substellaren Punkts⁶ bei $\vartheta = 0$ stärker bestrahlt wird als im *Constant Flux* Modell, die Gebiete in der Nähe des Terminators jedoch schwächer. Dadurch saturiert s erst bei größeren Bestrahlungsstärken und s'_{ps} ist gegenüber dem *Constant Flux* Modell verbreitert. Abb. 3.11 zeigt s'_{ps} für die gleichen unentwickelten Hauptreihensterne wie Abb. 3.9, und Abb. 3.12 zeigt s'_{ps} für die gleichen Sternmodelle wie Abb. 3.10. Wie zu erwarten war, sind die Maxima von s'_{ps} etwas kleiner als die Maxima von s'_{cf} , der Unterschied beträgt etwa ein Drittel. Außerdem sind die Maxima zu geringfügig größeren Bestrahlungsstärken verschoben. Am bemerkenswertesten ist jedoch, daß s'_{ps} bei hohen Bestrahlungsstärken wesentlich langsamer abfällt als s'_{cf} . Der Grund liegt natürlich darin, daß beim *Constant Flux* Modell die gesamte dem Begleiter zugewandte Seite mit demselben Fluß bestrahlt wird, so daß für genügend starke Bestrahlung schließlich der intrinsische Fluß vollständig blockiert wird, während es beim *Point Source* Modell auch für sehr großes $\langle f_{irr} \rangle$ noch nur gering bestrahlte Flächenelemente in der Nähe des Terminators gibt.

⁶Der substellare Punkt selbst wird von der Akkretionsscheibe beschattet. Aus Gründen der Einfachheit wird hier jedoch die Höhe der Akkretionsscheibe als vernachlässigbar angenommen. Durch die Berücksichtigung einer endlichen Höhe der Akkretionsscheibe verkleinert sich der maximale Oberflächenanteil s_{max} , der durch Bestrahlung blockiert werden kann, und auch der Verlauf von s'_{ps} kann sich geringfügig ändern. Auf die analytischen Betrachtungen hat dies keinen wesentlichen Einfluß, solange der größte Teil der dem Begleiter zugewandten Oberfläche ungehindert bestrahlt wird.

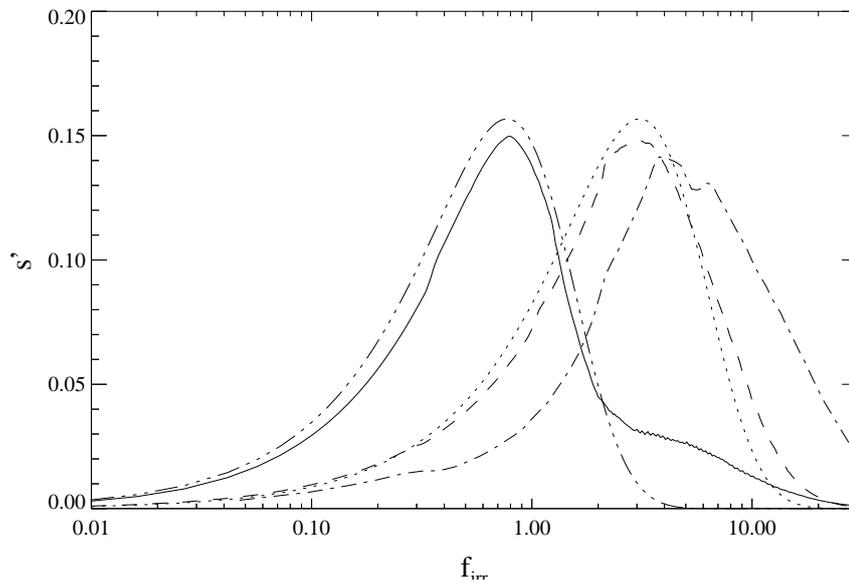


Abbildung 3.10: $s'_{cf}(f_{irr})$ für das *Constant Flux* Modell gemäß (3.96) für einen Nullalter-Hauptreihenstern mit $0.5 M_{\odot}$ (durchgezogene Linie), den Überrest ($M = 0.5 M_{\odot}$, $R = 0.73 R_{\odot}$, $X_c = 0.05$) eines thermischen Zeitskalen-Massentransfers von einem entwickelten Hauptreihenstern von ursprünglich $1.6 M_{\odot}$ (gestrichelte Linie), einen Riesen mit $0.8 M_{\odot}$ und $R = 35 R_{\odot}$ (strichpunktierte Linie), sowie s'_k für $k = 1$ (punktiert-strichpunktierte Linie) und $k = 0.25$ (punktierte Linie). s_{\max} wurde auf 0.35 gesetzt.

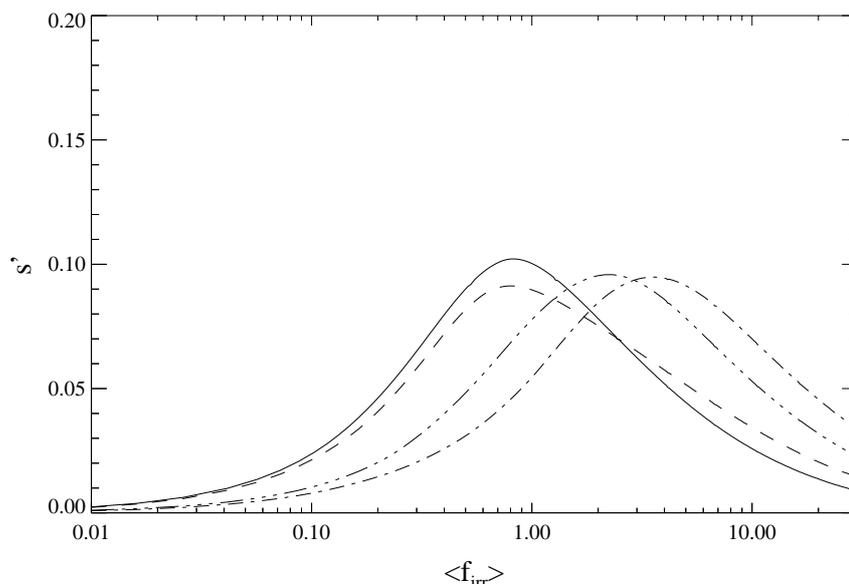


Abbildung 3.11: $s'_{ps}(\langle f_{irr} \rangle)$ für das *Point Source* Modell gemäß (3.95) für Nullalter-Hauptreihensterne. Legende wie in Abb. 3.9.

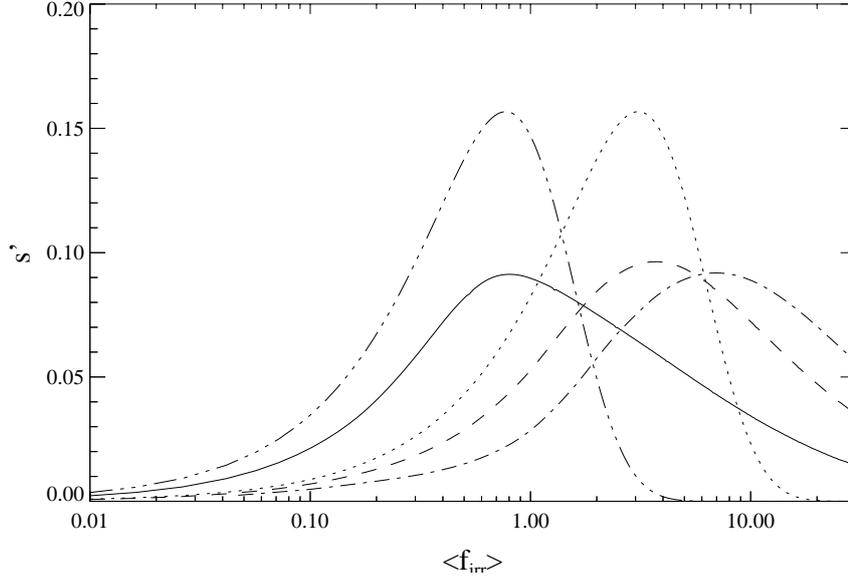


Abbildung 3.12: $s'_{\text{ps}}(\langle f_{\text{irr}} \rangle)$ für das *Point Source* Modell gemäß (3.95) für verschiedene Sternmodelle sowie zum Vergleich s'_k für $k = 1$ (punktstrichpunktiertere Linie) und $k = 0.25$ (punktierte Linie). Legende wie in Abb. 3.10.

3.5.4 Die thermische Relaxation für Bipolytrope

Im Bipolytrophenmodell läßt sich die thermische Relaxation explizit angeben (KOLB und RITTER, 1992). Der Kern des Sterns wird hierbei als Polytrope mit dem Polytropenindex n_1 sowie der nuklearen Leuchtkraft L_1 und die Hülle als Polytrope mit Polytropenindex $\frac{3}{2}$ sowie der nuklearen Leuchtkraft L_2 behandelt. L_i bezeichnet die Leuchtkraft am Übergang zwischen Kern und Hülle, und Q gibt das Verhältnis von Kernradius zum Gesamtradius an:

$$\left(\frac{d \ln R}{dt} \right)_{\text{th}} = - \frac{R}{\Gamma M^2} \frac{\frac{\partial H}{\partial Q} \frac{L_{\text{int}} - L_i - L_2}{H_2} - \frac{\partial f}{\partial Q} \frac{L_{\text{int}} - L_1 - L_2}{f}}{\frac{\partial H}{\partial Q} + \frac{H}{Q} \frac{\partial f}{\partial Q}}. \quad (3.103)$$

Die Größen H , H_2 und f sind Funktionen von Q und n_1 . Die einzige Größe, die von der momentanen Leuchtkraft an der Oberfläche abhängt, ist L_{int} selbst. Daher gilt:

$$\left(\frac{d}{dL_{\text{int}}} \frac{K}{R} \right)_{\Delta R_e} = \frac{\partial}{\partial L_{\text{int}}} \left(\frac{d \ln R}{dt} \right)_{\text{th}} = - \frac{R}{\Gamma M^2} \mathcal{F}(Q, n_1) \quad (3.104)$$

mit

$$\mathcal{F}(Q, n_1) = \frac{\frac{\partial H}{\partial Q} \frac{1}{H_2} - \frac{\partial f}{\partial Q} \frac{1}{f}}{\frac{\partial H}{\partial Q} + \frac{H}{Q} \frac{\partial f}{\partial Q}}. \quad (3.105)$$

Ist M_{ce} die Masse der konvektiven Hülle, so ist \mathcal{F} von der Größenordnung

$$\mathcal{F} \approx \frac{7}{3} \frac{M}{M_{\text{ce}}} \quad (3.106)$$

und nimmt für $Q = 0$, entsprechend einer Polytrope vom Index $\frac{3}{2}$, den Wert $\frac{7}{3}$ an (KING et al., 1996, RITTER et al., 2000). Eingesetzt in (3.99) ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \Delta R} &= -\frac{\tilde{L}}{H_P} \left(\frac{dK}{dL_{\text{int}}} \right)_{\Delta R_e} s' = -\frac{\tilde{L}}{H_P} R \left(\frac{d}{dL_{\text{int}}} \frac{K}{R} \right) s' \\ &= \mathcal{F} \frac{\tilde{L} R^2}{H_P \Gamma M^2} s' = \mathcal{F} \frac{4\pi\sigma T_{\text{eff}}^4 R^4}{H_P \Gamma M^2} s'. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Die momentane intrinsische Leuchtkraft des Sterns ist hierbei durch

$$L_{\text{int}} = 4\pi\sigma(1-s)R^2T_{\text{eff}}^4 = (1-s)\tilde{L} \quad (3.108)$$

und die intrinsische Leuchtkraft des Sterns im thermischen Gleichgewicht bei vorgegebener Bestrahlung durch

$$L_s = 4\pi\sigma(1-s)R_s^2T_s^4 \quad (3.109)$$

gegeben.

Im stationären Zustand des Systems befindet sich der Stern in guter Näherung im thermischen Gleichgewicht, so daß $R \approx R_s$ und $T_{\text{eff}} \approx T_s$ erfüllt sind. Definiert man die KELVIN-HELMHOLTZ-Zeitskala des bestrahlten Sterns als

$$\tau_{\text{KH},s} = \frac{\Gamma M^2}{R_s L_s} \quad (3.110)$$

und die entsprechende Zeitskala der konvektiven Hülle als

$$\tau_{\text{ce},s} := \frac{\tau_{\text{KH},s}}{\mathcal{F}} \approx \frac{3}{7} \frac{M_{\text{ce}}}{M} \tau_{\text{KH},s}, \quad (3.111)$$

so läßt sich (3.107) prägnant in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\partial K}{\partial \Delta R} = \frac{R_s}{H_P} \frac{s'}{1-s} \frac{1}{\tau_{\text{ce},s}}. \quad (3.112)$$

Hieraus lassen sich schon einige wichtige Erkenntnisse über das Auftreten von Massentransferzyklen gewinnen. Zum einen ist $\frac{\partial K}{\partial \Delta R}$ nicht negativ und umso größer, je kleiner $\frac{H_P}{R_s}$ und $\tau_{\text{ce},s}$ sind. Je kleiner die charakteristische Skalenhöhe ist, desto stärker wächst die Massentransferrate und somit auch die Bestrahlung als Reaktion auf eine Vergrößerung des Radius. Je kleiner τ_{ce} , desto schneller relaxiert der Stern thermisch, und umso schneller paßt er seinen Radius dem neuen Gleichgewichtszustand an. s' schließlich gibt an, wie stark L_{int} , bzw. der Gleichgewichtszustand des Stern auf eine Änderung in der Massentransferrate reagiert. Da es sich hierbei um die Stabilitätsanalyse für einen Fixpunkt handelt, zählt nur der Wert von s' am Fixpunkt selbst, das heißt für die stationäre Massentransferrate \overline{M} .

Die obige Rechnung wurde in ähnlicher Form bereits von RITTER et al. (1995) für das in Abschnitt 3.1 vorgestellte Ein-Zonen-Modell für $f_{\text{int}}(f_{\text{irr}})$ durchgeführt, und von RITTER et al. (1996) auf eine allgemeine Funktion für $f_{\text{int}}(f_{\text{irr}})$ und auf das *Point Source* Modell erweitert⁷.

Alternativ läßt sich (3.112) auch durch die thermischen Gleichgewichtswerte des unbestrahlten Sterns ausdrücken. Hierbei wird angenommen, daß die Effektivtemperatur nur geringfügig von der Bestrahlung abhängt ($T_e \approx T_s$). Tatsächlich sind die Änderungen in T_s als Funktion von s vernachlässigbar gegenüber jenen in R_s (vgl. Diskussion auf Seite 78). Mit der KELVIN-HELMHOLTZ-Zeitskala des unbestrahlten Sterns

$$\tau_{\text{KH}} := \tau_{\text{KH},e} = \frac{\Gamma M^2}{R_e L_e} \quad (3.113)$$

und der zugehörigen Zeitskala der konvektiven Hülle

$$\tau_{\text{ce}} := \tau_{\text{ce},e} = \frac{\tau_{\text{KH}}}{\mathcal{F}} \quad (3.114)$$

läßt sich (3.107) auch in der Form

$$\frac{\partial K}{\partial \Delta R} = \frac{R_s}{H_P} \frac{s'}{\tau_{\text{ce}}} \left(\frac{R_s}{R_e} \right)^3 \quad (3.115)$$

schreiben. Dies entspricht (bis auf den einheitenbedingten Vorfaktor) dem Resultat für p_x aus KING et al. (1996, Gl. 58).

3.5.5 Das Homologiemodell

Für den Abschluß der Stabilitätsanalyse fehlt noch ein Ausdruck für $\frac{\partial K}{\partial \Delta R_e}$, um die Ungleichung (3.66) explizit auswerten zu können. Anlehnend an das obige Bipolytropenmodell wird nun

$$\frac{K}{R} = \mathcal{F}' \frac{R}{\Gamma M^2} (L_{\text{int}} - L_{\text{nuc}}) \quad (3.116)$$

mit einem Parameter \mathcal{F}' von der Größenordnung 1 angesetzt. Dieser Ansatz ist vergleichbar mit demjenigen für K in KING et al. (1995, 1996, 1997). Er ist identisch zu (3.103), falls $L_1 = L_i$ gilt oder der Stern für $Q = 0$ vollkonvektiv ist, und führt formal auf den gleichen Term (3.112) für $\frac{\partial K}{\partial \Delta R}$. Im stationären Zustand des Systems sind $L_1 = L_i$ oder $Q = 0$ in guter Näherung erfüllt, so daß $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ gilt.

Die nukleare Leuchtkraft L_{nuc} hängt von der thermischen Struktur des Sterns, d.h. $T(M_r)$, $\rho(M_r)$ ab, sie muß daher bei der thermischen Relaxation berücksichtigt werden. Für Sterne mit zentralem Wasserstoffbrennen stellt

$$\varepsilon_{\text{nuc}} \sim \rho T^n \quad (3.117)$$

⁷In der Terminologie dieser und der meisten darauf folgenden Veröffentlichungen jener Autoren entspricht f_{irr} der Variablen x , $f_{\text{int}}(f_{\text{irr}})$ der Funktion $G(x)$ und $\frac{df_{\text{int}}}{df_{\text{irr}}}$ der Funktion $-g(x)$.

eine gute Näherung für die nukleare Energieerzeugung dar. Bei massearmen Sternen ($M \lesssim 1 M_\odot$), welche ihre Energie im Wesentlichen über die Proton-Proton-Kette erzeugen, ist $n \approx 5 - 6$. Mit (3.117) läßt sich aus den Sternaufbaugleichungen (A.2), (A.3) und (A.4) eine Homologierelation der Form

$$\begin{aligned} L_{\text{nuc}} &= L_e \left(\frac{R}{R_e} \right)^{-(n+3)} = L_e \left(\frac{R_s}{R_e} \right)^{-(n+3)} \left(\frac{R}{R_s} \right)^{-(n+3)} \\ &= L_s \left(\frac{R}{R_s} \right)^{-(n+3)} \end{aligned} \quad (3.118)$$

herleiten (STEHLE et al., 1996). Diese Relation kann mit $n = -3$ formal auf Riesen mit Wasserstoffschalenbrennen erweitert werden, da für diese Sterne die nukleare Energieerzeugung im Wesentlichen nur von der Kernmasse, nicht jedoch vom Aufbau der Hülle bzw. dem Sternradius abhängt, und somit konstant ist.

Durch Einsetzen von (3.108) und (3.109) in (3.116) läßt sich die thermische Relaxation als

$$K = R \frac{K}{R} = -\frac{\mathcal{F}}{\Gamma M^2} \left(4\pi\sigma(1-s)R^4 T_{\text{eff}}^4 - L_e R_e^2 \left(\frac{R}{R_e} \right)^{-(n+1)} \right) \quad (3.119)$$

schreiben. Der Gleichgewichtsradius R_e hängt weder von s , bzw. ΔR , noch von der thermischen Relaxation, bzw. ΔR_e ab. Daher gilt:

$$\frac{\partial R_e}{\partial \Delta R_e} = 0 \quad (3.120)$$

und

$$\frac{\partial R}{\partial \Delta R_e} = \frac{\partial}{\partial \Delta R_e} (R_e + \Delta R_e) = 1. \quad (3.121)$$

Wie im vorangegangenen Abschnitt soll nun angenommen werden, daß die Effektivtemperatur auf der unbestrahlten Seite auch bei einer Modulation der Bestrahlung im Wesentlichen unverändert bleibt ($T_e \approx T_s \approx T_{\text{eff}}$) und T_{eff} weder von ΔR noch von ΔR_e abhängig ist.

Nach diesen Vorarbeiten läßt sich die partielle Ableitung von K explizit ausführen:

$$\frac{\partial K}{\partial \Delta R_e} = -\frac{\mathcal{F}}{\Gamma M^2} \left(16\pi\sigma(1-s)R^3 T_{\text{eff}}^4 + (n+1)L_e R_e \left(\frac{R}{R_e} \right)^{-(n+2)} \right). \quad (3.122)$$

Dieses Resultat läßt sich nun auf verschiedene Weise ausdrücken. Zum einen durch die thermischen Gleichgewichtswerte bei vorgegebener Bestrahlung; unter Verwendung von (3.118) ergibt sich nämlich

$$\frac{\partial K}{\partial \Delta R_e} = -\mathcal{F} \frac{R_s L_s}{\Gamma M^2} \left(4 \left(\frac{R}{R_s} \right)^3 \left(\frac{T_{\text{eff}}}{T_s} \right)^4 + (n+1) \left(\frac{R}{R_s} \right)^{-(n+2)} \right), \quad (3.123)$$

welches mit (3.111), $R \approx R_s$ und $T_{\text{eff}} \approx T_s$ auf

$$\frac{\partial K}{\partial \Delta R_e} = -\frac{n+5}{\tau_{\text{ce},s}} \quad (3.124)$$

führt. Zum anderen läßt sich (3.122) durch die thermischen Gleichgewichtswerte des unbestrahlten Sterns ausdrücken:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \Delta R_e} = & -\mathcal{F} \frac{R_e L_e}{\Gamma M^2} \left(4(1-s) \left(\frac{R}{R_e} \right)^3 \left(\frac{T_{\text{eff}}}{T_e} \right)^4 \right. \\ & \left. + (n+1) \left(\frac{R}{R_e} \right)^{-(n+2)} \right) \end{aligned} \quad (3.125)$$

welches mit (3.114) und $T_{\text{eff}} \approx T_e$ auf

$$\frac{\partial K}{\partial \Delta R_e} = -\frac{1}{\tau_{\text{ce}}} \left(4(1-s) \left(\frac{R_s}{R_e} \right)^3 + (n+1) \left(\frac{R_s}{R_e} \right)^{-(n+2)} \right) \quad (3.126)$$

führt. In diesem Fall ist eine weitere Vereinfachung nicht möglich, da im Allgemeinen R_s und R_e bei Bestrahlung merklich verschieden sind. (3.126) entspricht dem Resultat für p_r aus KING et al. (1996, Gl. 43). Der Unterschied liegt im Wesentlichen darin, daß die genannten Autoren die Ableitung von $\frac{K}{R}$ bilden, während in dieser Arbeit die Ableitung von K verwendet wird. Dies führt auf unterschiedliche Vorfaktoren für die obigen Potenzen von $\frac{R_s}{R_e}$: 3 und $n+2$ in (KING et al., 1996, Gl. 43) gegenüber 4 und $n+1$ in dieser Arbeit. Wesentliche Auswirkungen hat dies nicht. Ursache ist der approximative Übergang von linearen zu logarithmischen Zeitableitungen in (KING et al., 1996, Gl. 2), auf welchen in der vorliegenden Arbeit verzichtet wird.

Damit Massentransferzyklen auftreten können, muß das notwendige Kriterium für Stabilität (3.66) verletzt sein. Durch Einsetzen von (3.112) und (3.124) ergibt sich also folgende Bedingung für das Entstehen von Massentransferzyklen:

$$\frac{R_s}{H_P} \frac{s'}{(1-s)\tau_{\text{ce},s}} > \frac{R_s}{H_P} \frac{(\zeta_s - \zeta_R)}{\tau_M} + \frac{\mathcal{F}}{\tau_{\text{KH},s}} (n+5). \quad (3.127)$$

Auflösen nach s' und die Verwendung von (3.111) sowie der stationären Massentransferrate (3.80b) liefert schließlich eine finale Bedingung für s' :

$$-\frac{d \ln(1-s)}{d \ln(-\dot{M})} = \frac{s'}{1-s} > \frac{\tau_{\text{ce},s}}{\tau'_d} + \frac{H_P}{R_s} (n+5). \quad (3.128)$$

Alternativ läßt sich das Kriterium für das Auftreten der Instabilität durch die thermischen Gleichgewichtswerte des unbestrahlten Sterns ausdrücken; durch Einsetzen von (3.115) und (3.126) in (3.66) und Auflösen nach s' ergibt sich analog:

$$s' > \frac{\tau_{\text{ce}}}{\tau'_d} + \frac{H_P}{R_s} \left[4(1-s) \left(\frac{R_s}{R_e} \right)^3 + (n+1) \left(\frac{R_s}{R_e} \right)^{-(n+2)} \right]. \quad (3.129)$$

s' am Fixpunkt muß also größer sein als das Verhältnis der Zeitskala der konvektiven Hülle τ_{ce} und der Antriebszeitskala τ'_d inklusive der thermischen Relaxation plus einem Zusatzterm von der Größe einiger Skalenhöhen $\frac{H_P}{R}$, der von KING et al. (1996) vernachlässigt wird. Auch wenn (3.128) eine deutlich kompaktere Schreibweise aufweist als die äquivalente Formulierung (3.129), so sind sie im Grunde für die praktische Anwendung gleich gut geeignet. Der a priori unbekannte Verlauf von $R_s(s)$ ist in (3.128) lediglich in der bestrahlungsabhängigen Zeitskala der konvektiven Hülle $\tau_{ce,s}$ versteckt.

3.6 Diskussion der Bestrahlungsinstabilität

3.6.1 Das Verhältnis der Zeitskalen

Anschaulich bedeutet das Resultat des vorangegangenen Abschnitts, daß die Blockierung des intrinsischen Flusses (s') bei Erhöhung der Massentransferrate schneller ansteigen muß, als die konvektive Hülle (τ_{ce}) thermisch auf den Massenverlust (τ'_d) reagieren kann. Systeme sind demnach a priori umso empfindlicher gegenüber Massentransferzyklen, je kleiner die Zeitskala der konvektiven Hülle τ_{ce} des masseverlierenden Sterns und je größer die Antriebszeitskala τ_d des Systems ist. Für Hauptreihensterne ist τ_{ce} um so kleiner, je größer ihre Masse ist, da der Massenanteil der konvektiven Hülle mit steigender Gesamtmasse schrumpft und τ_{ce} ungefähr proportional zum Verhältnis von M_{ce} und M ist:

$$\tau_{ce} = \frac{\tau_{KH}}{\mathcal{F}} \sim \frac{M_{ce}}{M} \tau_{KH}. \quad (3.130)$$

Hiernach sollten Hauptreihensterne mit dünnen äußeren Konvektionszonen ($M \sim 1M_\odot$) die größte Suszeptibilität aufweisen. Gleichzeitig steigt die Empfindlichkeit für die Bestrahlungsinstabilität mit wachsender Antriebszeitskala $\tau_d \sim \tau'_d$. Das bedeutet, daß Systeme, deren Entwicklung auf der größtmöglichen Zeitskala angetrieben wird, nämlich auf der Zeitskala für Drehimpulsverluste durch Gravitationswellen, tendenziell die größte Suszeptibilität aufweisen. Allerdings gibt es kaum Systeme, abgesehen vielleicht von massearmen CVs in und unterhalb der Periodenlücke, deren Entwicklung nur oder vorwiegend durch Gravitationswellenverluste angetrieben wird. Für massereichere Systeme wird nach allgemeiner Auffassung die magnetische Bremsung wichtig, die die gravitative Bremsung um ein bis zwei Größenordnungen übertreffen kann, abhängig vom verwendeten Bremsgesetz. Für eine hohe Bremsrate, wie sie durch die Formel von VERBUNT und ZWAAN (2.159) gegeben ist, werden beispielsweise CVs mit unentwickelten Hauptreihensternen praktisch unempfindlich gegen Bestrahlung außer für die massereichsten Systeme, da τ_d zu klein wird im Vergleich zu τ_{ce} (RITTER et al., 1995, 1996, 2000). Für Systeme mit Riesen dagegen ist auf Grund ihres großen Bahnabstandes und ihrer relativ kurzen nuklearen Zeitskala magnetische Bremsung vermutlich ineffektiv, und τ_{ce} ist klein gegenüber $\tau_d \approx \tau_{nuc}$. Dies macht diese Systeme a priori empfindlicher gegenüber der Bestrahlungsinstabilität als Systeme mit Hauptreihensternen und starker magnetischer Bremsung (KING et al., 1997).

Aus (3.45), (3.46) und (3.47) ergibt sich der effektive Bestrahlungsfluß als Funktion der stationären Massentransferrate $\overline{\dot{M}}_1$ zu

$$\langle F_{\text{irr}} \rangle = -\alpha_d \alpha_{\text{irr}} \alpha_{\text{accr}} \eta \frac{\Gamma M_2}{R_2} \frac{\overline{\dot{M}}_1}{4\pi A^2}. \quad (3.131)$$

Durch Ersetzen von $\overline{\dot{M}}_1$ durch τ'_d mittels (3.80b), von A durch den ROCHE-Radius $R_{R,1}$ mittels (2.11) und nach Definition des totalen Effizienzparameters

$$\alpha := \alpha_d \alpha_{\text{irr}} \alpha_{\text{accr}} \quad (3.132)$$

ergibt sich hieraus:

$$\langle F_{\text{irr}} \rangle = \frac{\alpha \eta}{\zeta_s - \zeta_R} \frac{M_1}{\tau'_d} \frac{\Gamma M_2}{R_2} \frac{f_{R,1}^2(q)}{4\pi R_{R,1}^2} \quad (3.133)$$

bzw.

$$\frac{1}{\tau'_d} = \frac{\zeta_s - \zeta_R}{\alpha \eta} \frac{4\pi R_2 R_{R,1}^2}{\Gamma M_1 M_2 f_{R,1}^2(q)} \langle F_{\text{irr}} \rangle. \quad (3.134)$$

Die Zeitskala der konvektiven Hülle ist in (3.114) durch

$$\tau_{\text{ce}} = \frac{\tau_{\text{KH}}}{\mathcal{F}} = \frac{\Gamma M_1^2}{\mathcal{F} R_{1,e} L_e} \quad (3.135)$$

definiert. In Verbindung mit (3.134) ergibt sich hieraus unter Benutzung von (3.109) das Verhältnis der beiden Zeitskalen:

$$\frac{\tau_{\text{ce}}}{\tau'_d} = \frac{\zeta_s - \zeta_R}{\alpha \eta \mathcal{F}} \frac{q R_2 R_{R,1}^2}{f_{R,1}^2(q) R_1^3} \frac{\langle F_{\text{irr}} \rangle}{\sigma T_e^4}. \quad (3.136)$$

\mathcal{F} läßt sich durch (3.106) abschätzen, und mit der Näherung für den ROCHE-Radius von PACZYŃSKI (2.12a) sowie $R_1 \approx R_{R,1}$ und $T_e \approx T_{\text{eff}}$ läßt sich (3.136) explizit als Funktion der dimensionslosen Bestrahlungsstärke $\langle f_{\text{irr}} \rangle$ angeben:

$$\frac{\tau_{\text{ce}}}{\tau'_d} \approx \frac{3}{7} \left(\frac{3^4}{8} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\zeta_s - \zeta_R}{\alpha \eta} (1+q)^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{3}} \frac{M_{\text{ce}}}{M_1} \frac{R_2}{R_1} \langle f_{\text{irr}} \rangle. \quad (3.137)$$

In der bisherigen Betrachtung wurden allerdings einige wesentliche Punkte nicht angesprochen: die Bedeutung des zweiten Terms im Instabilitätskriterium (3.129), der von der Größenordnung einiger Skalenhöhen ist, die Unsicherheit in der Kenntnis der tatsächlichen magnetischen Bremsrate sowie die Lage des Fixpunkts. Gibt es tatsächlich Systeme, für die s' am Fixpunkt genügend groß ist, um die Bestrahlungsinstabilität auszulösen, und wenn ja, welche sind es?

Der zweite Term in (3.129) ist von der Größenordnung einiger Skalenhöhen. Von einigen Autoren (RITTER et al., 1995, 1996, 2000) wird er komplett ignoriert,

von anderen wird er zwar prinzipiell berücksichtigt, aber für das Endresultat vernachlässigt (KING et al., 1996, 1997). Dies ist jedoch nur möglich, solange

$$\frac{\tau_{ce}}{\tau_d} \gg \frac{H_P}{R} \quad (3.138)$$

gilt. Sobald entweder $\frac{\tau_{ce}}{\tau_d}$ klein wird (wie für massereichere Hauptreihensterne) oder $\frac{H_P}{R}$ groß wird (wie für ausgedehnte Riesen), muß dieser Term berücksichtigt werden. Er führt dazu, daß der Bereich, in dem die Instabilitätsbedingung (3.128) erfüllt ist, beschränkt ist. Für das Auftreten der Bestrahlungsinstabilität muß nämlich notwendigerweise

$$s' > \delta \frac{H_P}{R} \quad (3.139)$$

erfüllt sein mit

$$\delta = \left[4(1-s) \left(\frac{R_s}{R_e} \right)^3 + (n+1) \left(\frac{R_s}{R_e} \right)^{-(n+2)} \right] \sim n+5. \quad (3.140)$$

s' ist nach oben durch die maximal bestrahlte Oberfläche $s_{\max} \sim 0.35$ begrenzt, in Wirklichkeit ist das Maximum jedoch deutlich kleiner bei etwa 0.08 – 0.15, abhängig vom Bestrahlungsmodell (vgl. Abb. 3.9 - 3.12). Da für $\langle f_{\text{irr}} \rangle \rightarrow 0$ und $\langle f_{\text{irr}} \rangle \rightarrow \infty$ auch s' verschwindet (vgl. Abschnitt 3.5.3), kann (3.139) nur in einem Intervall $[\langle f_{\text{irr}} \rangle_{\min}, \langle f_{\text{irr}} \rangle_{\max}]$ erfüllt sein. Nur in diesem Bereich, der im Folgenden als (potentielle) „Insel der Instabilität“ bezeichnet wird, können überhaupt Massentransferzyklen auftreten. Es ist anschaulich klar, daß, je größer dieses Intervall ist, desto größer die Chance ist, daß ein real existierendes Doppelsternsystem innerhalb dieser „Insel der Instabilität“ liegt und tatsächlich derartige Massentransferzyklen durchläuft.

Die Größe des Intervalls hängt zum einen von der genauen Form von s' , also dem jeweiligen Sternmodell, und zum anderen von der Größe von δ ab. Für Riesen, für die man formal $n \sim -3$ setzen kann, liegt δ im Bereich von 2, für massearme Hauptreihensterne mit $n \sim 5-6$ im Bereich von 10. Mit wachsender Bestrahlung und somit zunehmendem s und R variiert δ leicht, allerdings ist dieser Effekt nicht sehr groß. Die Abhängigkeit von s bzw. $\langle f_{\text{irr}} \rangle$ wird in der folgenden Diskussion vernachlässigt, insbesondere da die genaue Größe von δ , welche auf stark vereinfachenden Homologieannahmen basiert, nicht bekannt ist. Außerdem ist der Faktor \mathcal{F} , der in τ_{ce} eingeht, für unentwickelte Sterne nur bis auf einen Faktor 2 genau bekannt (RITTER et al., 2000), für entwickelte Sterne kann die Abweichung größer sein.

3.6.2 Kataklysmische Veränderliche

Für das Auftreten von Massentransferzyklen muß das Verhältnis von τ_{ce} und τ_d' klein genug sein. Für übliche Systemparameter folgt aus (3.137), daß hierfür im Allgemeinen $\frac{R_2}{R_1}$ möglichst klein sein muß. Dies ist beispielsweise der Fall

für Kataklysmische Veränderliche, Systeme aus einem akkretierenden Weißen Zwerg und einem masseverlierenden Hauptreihenstern oder Riesen.

Abb. 3.13 und 3.14 zeigen sowohl die rechte als auch die linke Seite von Ungleichung (3.128), nämlich s' und

$$f := \delta \frac{H_P}{R} + \frac{\tau_{ce}}{\tau'_d} \quad (3.141)$$

für ein CV-System aus einem unentwickelten Hauptreihenstern mit $0.5 M_\odot$ und einem Weißen Zwerg für verschiedene, in Tabelle 3.1 aufgelistete Parameterkombinationen. Beide Abbildungen zeigen s' sowohl für das *Constant Flux* Modell (durchgezogene Linie) als auch für das *Point Source* Modell (gestrichelte Linie).

Modell-Nr.	M_{WD}/M_\odot	q	$\langle \eta \rangle$	ν	ζ_R	α
1	0.8	$\frac{5}{8}$	1	-	-0.35	0.3
2	1.2	$\frac{5}{12}$	1	-	-0.80	0.3
3	0.8	$\frac{5}{8}$	0	q	-0.89	0.3
4	0.8	$\frac{5}{8}$	0	q	-0.89	0.1
5	0.8	$\frac{5}{8}$	0	q	-0.89	1.0

Tabelle 3.1: Systemparameter der in Abb. 3.13 und 3.14 dargestellten Systeme beim Einsetzen des Massentransfers.

In Abb. 3.13 wird f für die Modelle 1–3 dargestellt. Modell 1 (strichpunktierte Linie) und Modell 2 (punktiert-strichpunktierte Linie) entsprechen konservativem Massentransfer ($\langle \eta \rangle = 1$), Modell 3 (punktierte Linie) extrem nichtkonservativem Massentransfer ($\langle \eta \rangle = 0$). Eine Variation des Massenverhältnisses q (Modell 1 versus 2) wirkt sich im Wesentlichen nur über den Radius des Weißen Zwergs R_2 und somit über das Verhältnis der Radien $\frac{R_2}{R_1}$ auf f aus, da für übliche Systemparameter $\zeta_s - \zeta_R$ und $(1+q)^{\frac{2}{3}} q^{\frac{1}{3}}$ von der Größenordnung 1 sind. Der Radius des Weißen Zwergs wird hierbei über die Näherungsformel

$$R_2 = \frac{0.779 \cdot 10^9 \text{ cm}}{R_\odot} \left[\left(\frac{M_2}{M_{\text{Ch}}} \right)^{-\frac{2}{3}} - \left(\frac{M_2}{M_{\text{Ch}}} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.142)$$

von NAUENBERG (1972) mit einer CHANDRASEKHAR-Masse von $M_{\text{Ch}} = 1.44 M_\odot$ ermittelt. Außerdem ist für thermisch stabilen Massentransfer $q \lesssim 1$ und daher $M_2 \lesssim M_{\text{Ch}}$ erforderlich. q ist daher auf ein relativ kleines Intervall beschränkt, so daß sich eine Variation von q nur relativ schwach auf f auswirkt. Eine Verkleinerung von $\langle \eta \rangle$ wirkt tendenziell stabilisierend auf das System (Modell 1 versus 3), da der spezifische Drehimpuls der Masse, die dem System verloren geht, um den Faktor $\nu = q \lesssim 1$ kleiner ist als der spezifische Drehimpuls des Gesamtsystems. Für den adiabatischen Masse-Radius-Exponenten

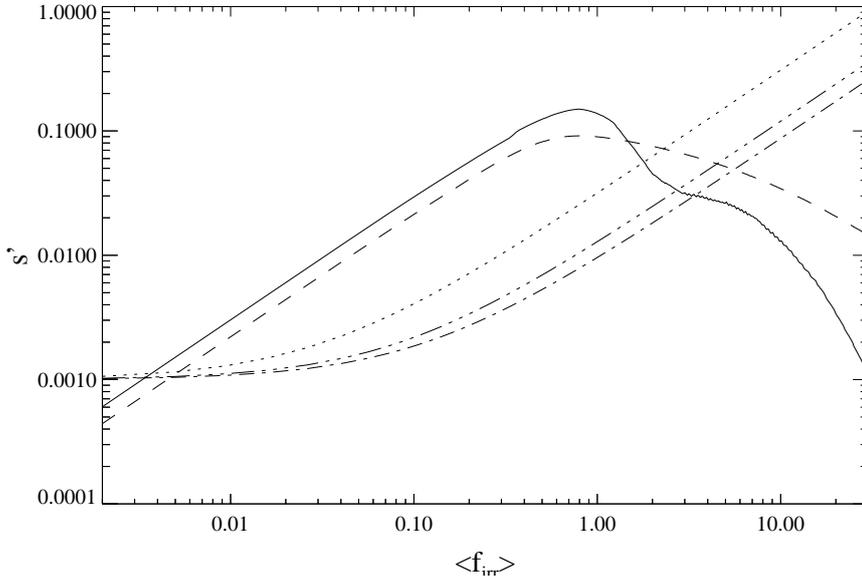


Abbildung 3.13: $s'(\langle f_{\text{irr}} \rangle)$ für ein CV-System mit einem unentwickelten Hauptreihenstern mit $0.5 M_{\odot}$ für das *Constant Flux* Modell (durchgezogene Linie) sowie das *Point Source* Modell (gestrichelte Linie). s' wird verglichen mit $\delta \frac{H_P}{R} + \frac{\tau_{\text{ce}}}{\tau_d}$ für verschiedene Werte von q und $\langle \eta \rangle$. Näheres siehe Text.

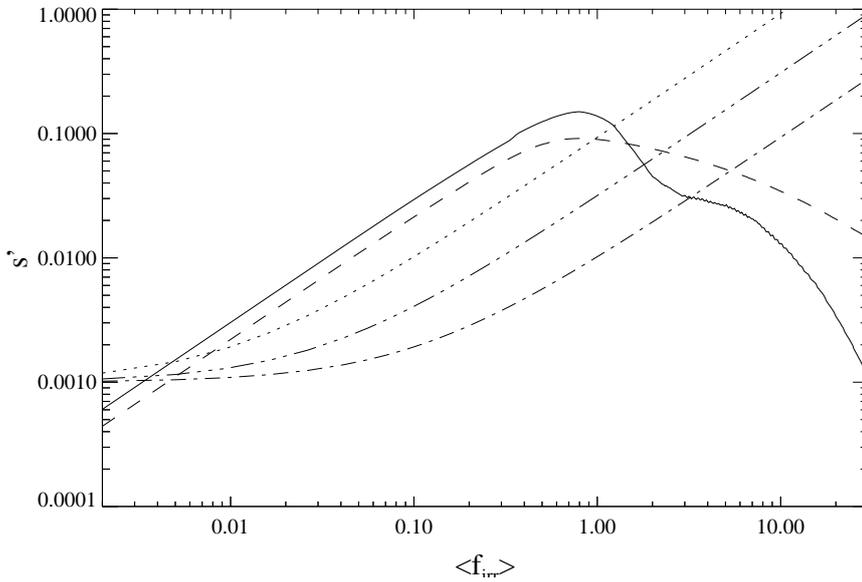


Abbildung 3.14: $s'(\langle f_{\text{irr}} \rangle)$ für ein CV-System mit einem unentwickelten Hauptreihenstern mit $0.5 M_{\odot}$ für das *Constant Flux* Modell (durchgezogene Linie) sowie das *Point Source* Modell (gestrichelte Linie). s' wird verglichen mit $\delta \frac{H_P}{R} + \frac{\tau_{\text{ce}}}{\tau_d}$ für $q = \frac{5}{8}$ und $\langle \eta \rangle = 0$ und verschiedene Werte des Effizienzparameters α : 1 (strichpunktigte Linie), 0.3 (punktirt-strichpunktigte Linie) und 0.1 (punktigte Linie). Näheres siehe Text.

des Hauptreihensterns wurde $\zeta_s \approx -0.14$ angesetzt (HJELLMING, 1989, Tabelle II.1), und die Druckskalenhöhe beträgt $\frac{H_P}{R} \approx 10^{-4}$. Mit einem geschätzten Wert von $\delta \approx 10$ ergibt sich daraus ein konstanter Beitrag von

$$\delta \frac{H_P}{R} \approx 10^{-3} \quad (3.143)$$

zur Funktion f .

In Abb. 3.14 wird f für die Modelle 3–5 für extrem nichtkonservativen Massentransfer für verschiedene Werte des Effizienzparameters α dargestellt. $\langle \eta \rangle = 0$ wurde gewählt, da die Weißen Zwerge in Kataklysmischen Veränderlichen durch Nova-Explosionen vermutlich einen Großteil der akkretierten Materie wieder verlieren und $\langle \eta \rangle = 0$ womöglich der Realität näher kommt als konservativer Massentransfer mit $\langle \eta \rangle = 1$. Tatsächlich kann $\langle \eta \rangle$ sogar negativ werden. Beobachtungen (LIVIO und TRURAN, 1994) deuten darauf hin, daß viele Novahüllen mit schwereren Elementen aus dem Inneren des Weißen Zwergs angereichert sind. Es gibt auch numerische Studien (PRIALNIK und KOVETZ, 1995), die darauf hindeuten, daß, abhängig von verschiedenen Modellparametern, Weiße Zwerge während einer Novaexplosion mehr Materie verlieren, als sie in der Zeit zwischen zwei Novaausbrüchen akkretiert haben.

Hierbei ist zu erwähnen, daß in der obigen Rechnung zwei verschiedene Werte von η , bzw. $\langle \eta \rangle$ benutzt werden. Zum einen gibt es die momentane Akkretionsrate, die in die Akkretionsleuchtkraft und somit die Bestrahlungsstärke eingeht. Hierfür wird angenommen, daß der Weiße Zwerg die gesamte transferierte Materie akkretiert und η in (3.137) immer den Wert 1 besitzt. Zum anderen gibt es die mittlere, durch $\langle \eta \rangle$ bestimmte Akkretionsrate, in die auch der Massenverlust durch Nova-Explosionen eingeht und die sich daher auf die Massen- und Drehimpulsbilanz (und somit auf ζ_R) auswirkt, nicht jedoch auf die Akkretionsleuchtkraft. Da die Zeitabstände zwischen aufeinanderfolgenden Nova-Explosionen in der Regel wesentlich kürzer sind als die Zeitschritte der numerischen Rechnungen, ist dieser Ansatz vertretbar, insbesondere da sich solche Systeme auf längeren Zeitskalen so verhalten, als finde die Akkretion mit einem mittleren Wert für η statt (SCHENKER et al., 1998).

Aus Abb. 3.13 und 3.14 läßt sich ersehen, daß Variationen in der Bestrahlungseffizienz α einen größeren Einfluß auf das Auftreten von Massentransferzyklen haben als Variationen in anderen Systemparametern. Generell läßt sich sagen, daß für $\alpha \gtrsim 0.3$ alle Systeme in einem gewissen Bereich Massentransferzyklen aufweisen. Für $\alpha \approx 0.1$ weisen zumindest viele Systeme noch einen Instabilitätsbereich auf, für $\alpha < 0.05$ jedoch sind fast alle Kataklysmischen Veränderlichen (von Extremfällen wie $\zeta_s \rightarrow \zeta_R$ abgesehen) stabil gegen die Bestrahlungsinstabilität.

Ob die Bestrahlungsrückkopplung für ein gegebenes System jedoch tatsächlich stark genug ist, um Massentransferzyklen auszulösen, hängt (ein genügend großes α vorausgesetzt) entscheidend davon ab, wie groß die stationäre Massentransferrate ist. Die „Insel der Instabilität“, in der $s' > f$ gilt, liegt für $\alpha = 0.3$ (punktiert-strichpunktierte Linie in Abb. 3.14) im Bereich von etwa

$\langle f_{\text{irr}} \rangle \approx 5 \cdot 10^{-3}$ bis $\langle f_{\text{irr}} \rangle \approx 2$ für das dargestellte System. Aus (3.137) läßt sich das damit verbundene Verhältnis von τ_{ce} und τ'_d bestimmen:

$$1.5 \cdot 10^{-4} \lesssim \frac{\tau_{\text{ce}}}{\tau'_d} \lesssim 6 \cdot 10^{-2}. \quad (3.144)$$

In etwa diesem Rahmen muß sich das Verhältnis der beiden Zeitskalen für das betrachtete System bewegen, wobei im Folgenden der Einfachheit halber angenommen werden soll, daß $\tau'_d \approx \tau_d$ gilt. Bei einer thermischen Zeitskala der konvektiven Hülle von $\tau_{\text{ce}} \sim 5 \cdot 10^7$ Jahren für den unentwickelten Hauptreihenstern mit $0.5 M_{\odot}$ muß die Antriebszeitskala τ_d also im Bereich

$$8 \cdot 10^8 \text{yr} \lesssim \tau_d \lesssim 3 \cdot 10^{11} \text{yr} \quad (3.145)$$

liegen. Wird das System nur durch Drehimpulsverluste aus gravitativer Bremsung angetrieben mit $\tau_d = \frac{\tau'_d}{2} \approx 4 \cdot 10^9 \text{yr}$, so ist daher das Auftreten von Massentransferzyklen zu erwarten. Die Bremsung durch Abstrahlung von Gravitationswellen stellt gleichzeitig eine obere Grenze für die physikalisch mögliche Antriebszeitskala dar. Die untere Grenze liegt nach (3.145) bei etwa einem Fünftel der Antriebszeitskala durch Gravitationswellen. Die stationäre Massentransferrate sollte daher für Drehimpulsverlusten zwischen $\dot{J} = \dot{J}_{\text{grav}}$ und $\dot{J} = 5\dot{J}_{\text{grav}}$ instabil sein. Abb. 3.15 und 3.16 zeigen die Entwicklung der Massentransferrate für Modell 3 aus Tabelle 3.1 für das *Point Source* Modell als Funktion der Zeit sowie der Bahnperiode, sowohl mit, als auch ohne Bestrahlungsrückkopplung. Es wurde hierfür ein Bremsgesetz mit

$$\dot{J} = \dot{J}_{\text{magn}} + \dot{J}_{\text{grav}} = 5\dot{J}_{\text{grav}} \quad (3.146)$$

willkürlich angesetzt, im Folgenden als „schwache“ magnetische Bremsung bezeichnet, im Gegensatz zur „starken“ magnetischen Bremsung nach VERBUNT und ZWAAN (2.159) für $f_{\text{VZ}} = 1$ (vgl. Abb. 2.9). Tatsächlich entstehen bei dem fünffachen der gravitativen Bremsrate Massentransferzyklen. Schon für eine geringfügig größere Bremsrate wird das System⁸ stabil, wie durch das analytische Modell vorhergesagt.

Der Unterschied in der Massentransferrate nach dem Ende der Massentransferzyklen zwischen den Rechnungen mit und ohne Bestrahlungsrückkopplung sind darauf zurückzuführen, daß der bestrahlte Stern bei gleicher Masse einen größeren Radius besitzt als sein unbestrahltes Pendant, was sich natürlich auf die Bremsrate auswirkt. Die obige und die folgenden Entwicklungsrechnungen wurden im Übrigen für das Modell eines geringfügig entwickelten Hauptreihensterns mit einem Wasserstoffanteil $X_c \approx 0.6$ im Zentrum und einem Alter von $11 \cdot 10^9$ Jahren durchgeführt.

Dieses Ergebnis läßt sich generell auf Systeme mit unentwickelten oder nur geringfügig entwickelten Hauptreihensternen zwischen etwa $0.4 M_{\odot}$ und $0.6 M_{\odot}$ übertragen. Solange die Bremsrate kleiner ist als ein kleines Vielfaches der gravitativen Bremsung, durchlaufen diese Systeme Massentransferzyklen. Für eine

⁸für das *Constant Flux* Modell

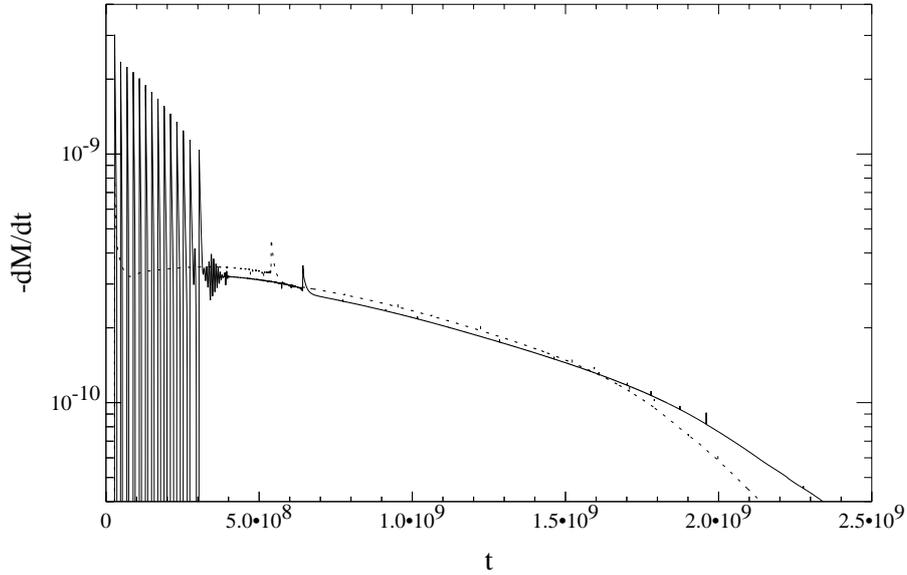


Abbildung 3.15: Massentransferrate $\dot{M} [M_{\odot}/\text{yr}]$ als Funktion der Zeit $t [\text{yr}]$ von einem wenig entwickelten Hauptreihenstern mit anfänglich $0.5 M_{\odot}$ auf einen Weißen Zwerg mit anfänglich $0.8 M_{\odot}$ bei schwacher Bremsung ($J = 5 \dot{J}_{\text{grav}}$). Die Rechnung wurde für extrem nicht-konservativen Massentransfer ($\langle \eta = 0 \rangle$, $\nu = q$) für das *Point Source* Modell mit $\alpha = 0.3$ durchgeführt und jenseits der Minimumperiode bei $M_1 = 0.04 M_{\odot}$ beendet. Die punktierte Linie kennzeichnet eine Vergleichsrechnung ohne Bestrahlungsrückkopplung.

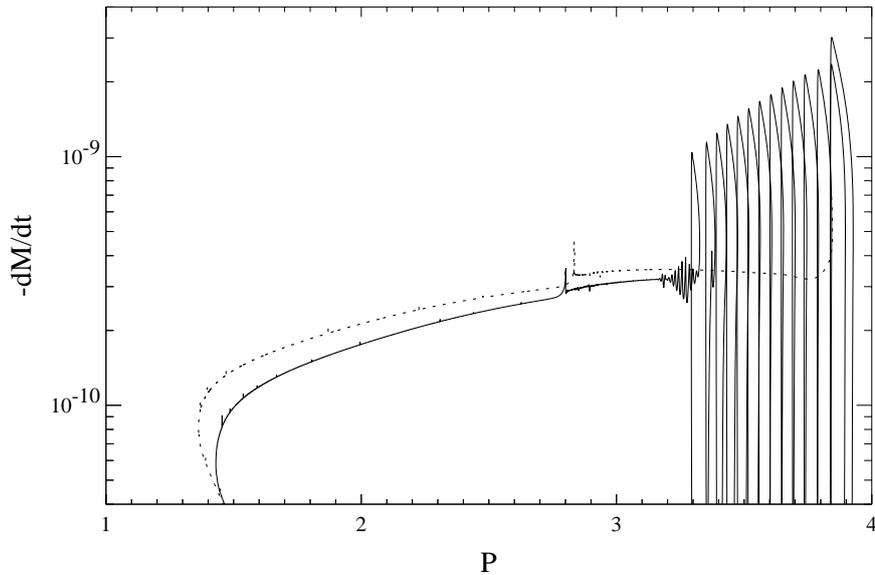


Abbildung 3.16: Massentransferrate $\dot{M} [M_{\odot}/\text{yr}]$ als Funktion der Bahnperiode $P [\text{hr}]$ für dasselbe System wie in Abb. 3.15.

stärkere magnetische Bremsung, etwa der nach VERBUNT und ZWAAN (2.159) mit $\tau_d \approx 5 \cdot 10^7 \text{yr}$ sind diese Systeme jedoch nicht empfindlich gegenüber der Bestrahlungsinstabilität, unabhängig von der Wahl von α oder anderen Systemparametern. Abb. 3.17 zeigt das gleiche System für konservativen Massentransfer und Abb. 3.18 für das *Constant Flux* anstatt des *Point Source* Modells. Erwartungsgemäß sind Systeme mit $\langle \eta \rangle = 1$ tendenziell instabiler als Systeme mit $\langle \eta \rangle = 0$, ebenso, wie das *Constant Flux* Modell tendenziell empfindlicher auf Bestrahlungsrückkopplung reagiert als das *Point Source* Modell. Abb. 3.19 schließlich zeigt die Entwicklung des Systems mit gravitativer Bremsung für $\alpha = 0.3$ und $\langle \eta \rangle = 0$. Bei eingeschalteter Bestrahlung und gravitativer Bremsung vergrößert sich das Periodenminimum hier um etwa zwei Minuten.

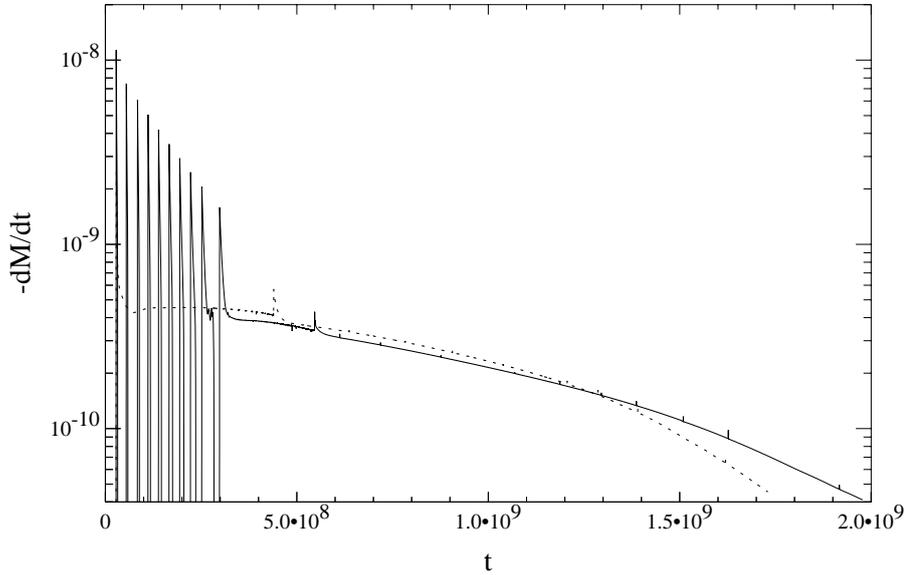


Abbildung 3.17: Massentransferrate $\dot{M} [M_{\odot}/\text{yr}]$ als Funktion der Zeit $t[\text{yr}]$ für dasselbe System wie in Abb. 3.15, allerdings für konservativen Massentransfer ($\langle \eta = 1 \rangle$).

Beim Übergang zu masseärmeren Hauptreihensternen nimmt τ_{ce} zu. Zum einen, weil die KELVIN-HELMHOLTZ-Zeitskala größer wird, zum anderen, weil die Relativmasse der konvektiven Hülle anwächst und der Stern bei etwa $0.35 M_{\odot}$ (abhängig vom chemischen Profil) vollkonvektiv wird. Dieser Übergang äußert sich in einem quasi instantanen Sprung in τ_{ce} , wodurch die Suszeptibilität gegenüber der Bestrahlungsrückkopplung ebenfalls instantan abnimmt, wie sich beispielsweise in Abb. 3.19 bei etwa $t \approx 2 \cdot 10^9 \text{yr}$ erkennen läßt. Des Weiteren ändert sich der Sternradius geringfügig. Dieser Effekt ist für die Spitzen in der Massentransferrate bei etwa $t \approx 5 \cdot 10^8 \text{yr} - 7 \cdot 10^8 \text{yr}$ in Abb. 3.15 - 3.18 verantwortlich.

Die Funktionen s' und f verändern sich dagegen beim Übergang zu kleineren Sternmassen kaum, so daß die Antriebszeitskala τ_d immer größer werden muß,

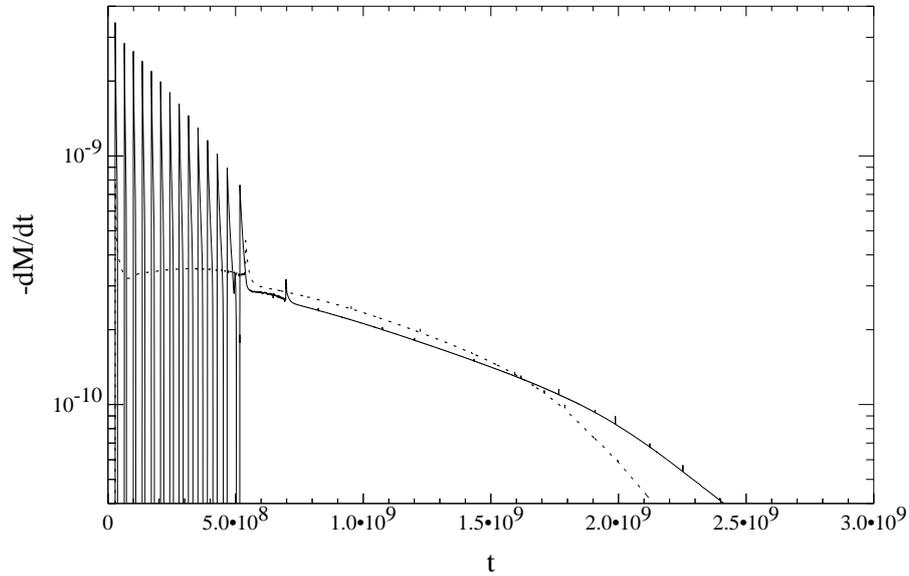


Abbildung 3.18: Massentransferrate $\dot{M} [M_{\odot}/\text{yr}]$ als Funktion der Zeit $t [\text{yr}]$ für dasselbe System wie in Abb. 3.15, allerdings für das *Constant Flux* Modell.

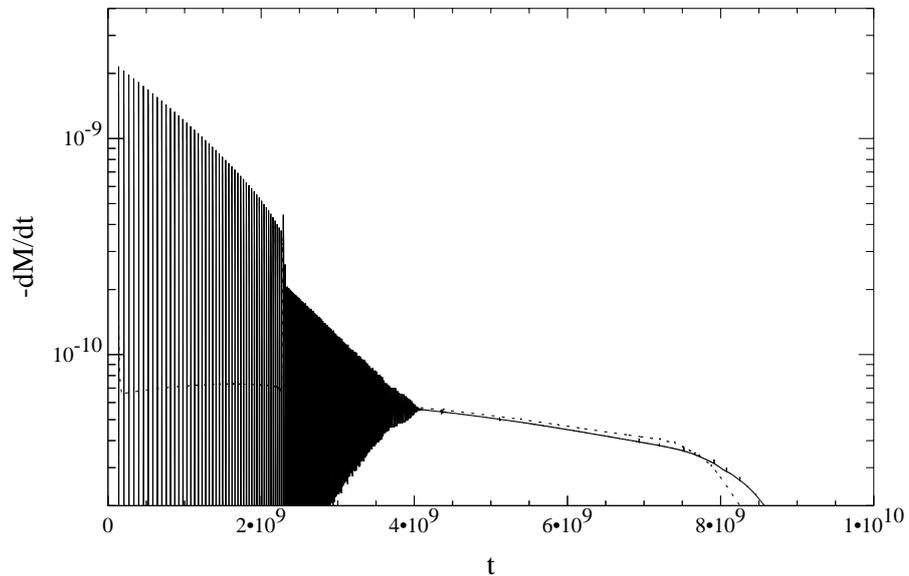


Abbildung 3.19: Massentransferrate $\dot{M} [M_{\odot}/\text{yr}]$ als Funktion der Zeit $t [\text{yr}]$ für dasselbe System wie in Abb. 3.15, allerdings für $\dot{J} = \dot{J}_{\text{grav}}$.

da nach (3.144) das für das Auftreten der Instabilität nötige Verhältnis von τ_{ce} und τ_d weiterhin zwischen 10^{-4} und einigen 10^{-2} liegen muß. Spätestens, wenn die kleinste Antriebszeitskala, für die die Bestrahlungsinstabilität auftreten kann, größer ist als die Zeitskala der gravitativen Bremsung, können keine Massentransferzyklen mehr entstehen. Dies tritt ein für Hauptreihensterne zwischen $0.2 M_\odot$ und $0.3 M_\odot$, so daß selbst für Systeme mit allein gravitativer Bremsung die Massentransferzyklen abklingen. Dies entspricht einer Bahnperiode von 2 bis 3 Stunden. Systeme mit noch masseärmeren, unentwickelten Sternen bzw. noch kürzeren Bahnperioden sind daher grundsätzlich stabil.

Beim Übergang zu massereicheren Hauptreihensternen nimmt τ_{ce} ab. Auf Grund der überadiabatischen Konvektionszone dieser Sterne ist das Maximum von s' zu etwas höheren Bestrahlungsstärken verschoben und auch der konstante Beitrag $\delta \frac{H_P}{R}$ von f ist etwas größer, da die Skalenhöhe für diese Sterne einige wenige 10^{-4} beträgt. Diese Verschiebung ist jedoch klein im Vergleich zur Änderung von τ_{ce} . Für einen Hauptreihenstern mit $1 M_\odot$ und $\tau_{ce} \approx 3 \cdot 10^5 \text{yr}$ muß daher τ_d zwischen einigen 10^6 und einigen 10^9 Jahren liegen. Und tatsächlich sind diese Systeme instabil für starke magnetische Bremsung nach VERBUNT und ZWAAN (2.159) mit $\tau_d \approx 5 \cdot 10^7 \text{yr}$, während sie erwartungsgemäß stabil sind für rein gravitative Bremsung mit $\tau_d \approx 10^{10} \text{yr}$. Abb. 3.20 und 3.21 zeigen die Entwicklung eines Systems mit einem wenig entwickelten ($X_c \approx 0.6$) Hauptreihenstern mit $1 M_\odot$ und einem Weißen Zwerg mit $0.8 M_\odot$. Für $\langle \eta \rangle = 0$ und $\nu = q$ ist dieses System thermisch stabil mit $\zeta_e \approx 1.2$ und $\zeta_R \approx 0.17$. Für starke magnetische Bremsung (Abb. 3.20) ist die stationäre Massentransferrate anfänglich instabil. Bei schwächerer Bremsung (Abb. 3.21) läuft das System erst bei etwa $M_1 \approx 0.7 M_\odot$ in die Instabilität hinein.

Abb. 3.22 zeigt eine Bereichsauflösung von Abb. 3.15. Die einzelnen Zyklen sind hier gut zu erkennen. Beim Übergang von instabilem zu stabilem Verhalten schrumpft die Amplitude des stabilen Grenzzyklus auf Null, während die stationäre Lösung stabil wird. Auffällig in diesem Fall ist, daß nach dem Ende der ausgedehnten Massentransferzyklen das System für eine kurze Zeit ($3 \cdot 10^8 \text{yr} \leq t \leq 4 \cdot 10^8 \text{yr}$) noch Oszillationen geringer Amplitude, aber mit einer deutlich kürzeren Periode durchläuft. In Abb. 3.19 ist der gleiche Effekt zu beobachten, wobei hier der Übergang von instabilem zu stabilem Verhalten gleichmäßig erfolgt.

Im Fall marginaler Instabilität, d.h. für Oszillationen geringer Amplitude läßt sich die in Abschnitt 3.5 hergeleitete Linearisierung des Systems anwenden: Im Fixpunkt sind die Eigenwerte (3.65) des Systems von der Form $\lambda \pm i\omega$. Die Schwingungsfrequenz

$$\omega = \sqrt{DF} \quad (3.147)$$

läßt sich mit den Resultaten aus (3.73), (3.80b) sowie (3.126) zu

$$\omega = \sqrt{(\zeta_s - \zeta_R) \frac{R}{H_P} \frac{\bar{M}}{M} \frac{\partial K}{\partial \Delta R_e}} \approx \sqrt{\frac{R}{H_P} \frac{1}{\tau_d'} \frac{\mathcal{F}}{\tau_{KH}}} \delta \quad (3.148)$$

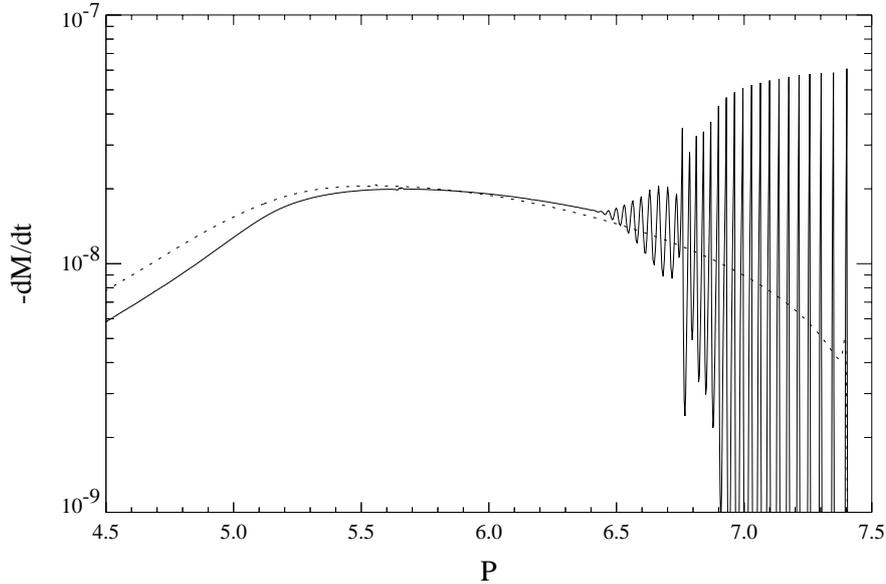


Abbildung 3.20: Massentransferrate $\dot{M} [M_{\odot}/\text{yr}]$ als Funktion der Bahnperiode $P[\text{hr}]$ für einen wenig entwickelten Hauptreihenstern mit anfänglich $1 M_{\odot}$ auf einen Weißen Zwerg mit anfänglich $0.8 M_{\odot}$ bei starker magnetischer Bremsung nach VERBUNT und ZWAAN (1981). Die Rechnung wurde für extrem nicht-konservativen Massentransfer ($\langle \eta = 0 \rangle, \nu = q$) für das *Point Source* Modell mit $\alpha = 0.3$ durchgeführt und bei $M_1 = 0.5 M_{\odot}$ beendet. Die punktierte Linie kennzeichnet eine Vergleichsrechnung ohne Bestrahlungsrückkopplung.

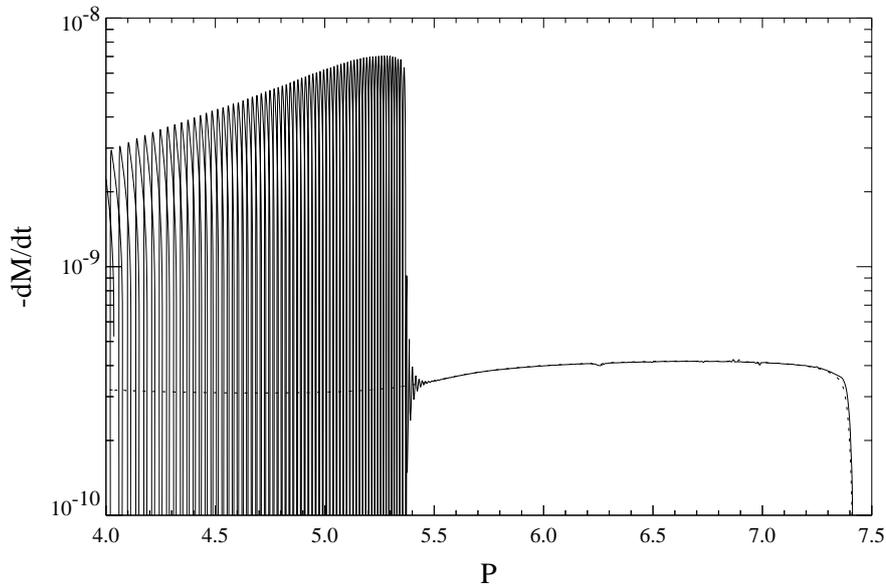


Abbildung 3.21: Massentransferrate $\dot{M} [M_{\odot}/\text{yr}]$ als Funktion der Bahnperiode $P[\text{hr}]$ für dasselbe System wie in Abb. 3.20, allerdings für schwache Bremsung mit $\dot{J} = 5\dot{J}_{\text{grav}}$.

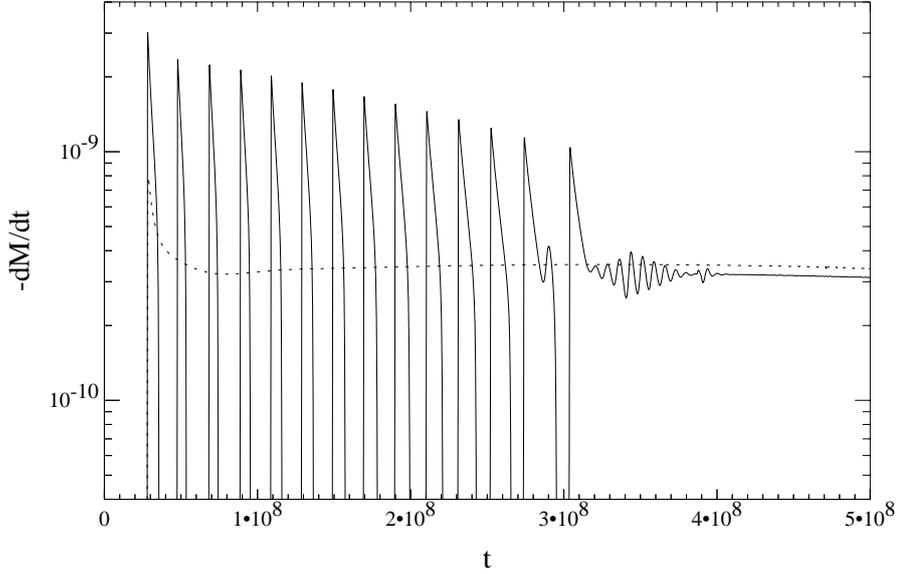


Abbildung 3.22: Bereichsvergrößerung von Abb. 3.15. Die Rechnung endet bei $M_1 \approx 0.34 M_\odot$.

umformen. Mit $\frac{H_P}{R} \approx 10^{-4}$, $\delta \approx 10$, $\tau'_d \approx \tau_d$ sowie der Definition von τ_{ce} (3.111) ergibt sich somit eine Periode von

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2\pi \sqrt{\frac{H_P}{R} \frac{\tau_{ce}\tau_d}{\delta}} \approx 0.02 \sqrt{\tau_{ce}\tau_d}. \quad (3.149)$$

Diese Approximation gilt jedoch nur in linearer Näherung, solange sich der stabile Grenzyklus in einer genügend kleinen Umgebung um den Fixpunkt befindet. Im Grenzfall großer Amplituden ist die Dauer des „High State“ durch die Relaxationszeitskala τ_{ce} gegeben.

Abb. 3.23 zeigt einen einzelnen „High State“ in Abhängigkeit des Effizienzparameters α für Modell 1 aus Tabelle 3.1 und das *Constant Flux* Modell. Für große Werte von α ist die Bestrahlungsrückkopplung stark, und das System läuft nach dem Einsetzen des Massentransfers auf sehr kurzer Zeitskala in den „High State“. Solange die Massentransferrate hoch genug ist, daß die bestrahlte Seite des Sterns durch den Bestrahlungsfluß praktisch vollständig blockiert ist, nimmt die Expansionsrate des Sterns und somit die Massentransferrate als Folge der sich abschwächenden thermischen Relaxation ab. Sobald die Massentransferrate soweit gesunken ist, daß der blockierte Anteil der Sternoberfläche abnimmt, setzt die Bestrahlungsrückkopplung in umgekehrter Richtung ein, und der Stern tritt auf sehr kurzer Zeitskala in den „Low State“ ein. Der Radius schrumpft, und der Massentransfer versiegt, bis die nukleare Entwicklung oder der Drehimpulsverlust den Stern wieder an seinen ROCHE-Radius herangeführt haben, und der Zyklus von Neuem startet.

Für kleinere Werte von α wird die Dauer des „High State“ immer kürzer, bis schließlich die Massentransferrate sinusförmig wird mit der in (3.148) angege-

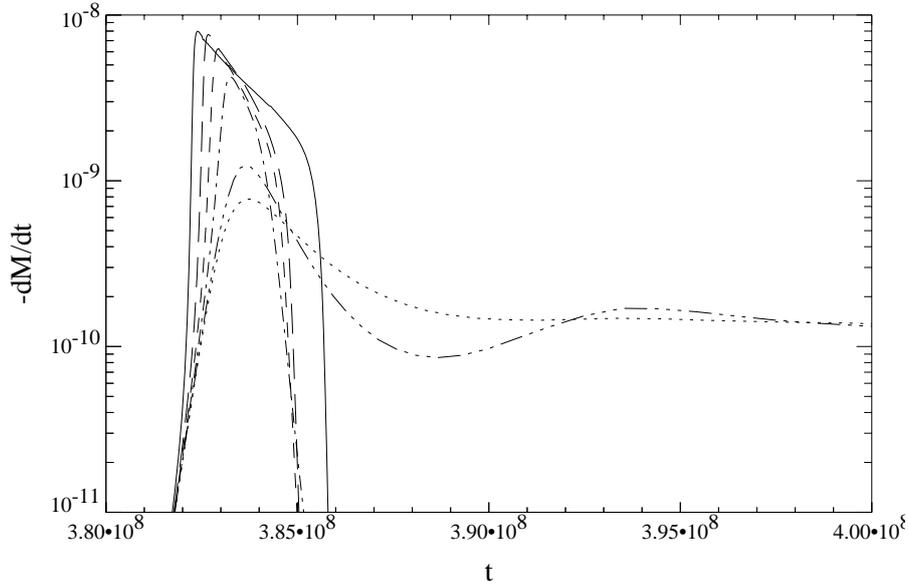


Abbildung 3.23: Massentransferrate $\dot{M} [M_{\odot}/\text{yr}]$ als Funktion der Zeit $t [\text{hr}]$ für Modell 1 aus Tabelle 3.1 für das *Constant Flux* Modell mit $\dot{J} = \dot{J}_{\text{grav}}$ für $\alpha = 0.5$ (durchgezogene Linie), $\alpha = 0.2$ (langgestrichelte Linie), $\alpha = 0.1$ (kurzgestrichelte Linie), $\alpha = 0.05$ (strichpunktierte Linie), $\alpha = 0.02$ (punktiert-strichpunktierte Linie) und $\alpha = 0.01$ (punktierte Linie).

benen Schwingungsfrequenz ω . Für noch schwächere Rückkopplung sind die Schwingungen gedämpft oder verschwinden sogar komplett.

Die Dauer des zentralen Wasserstoffbrennens ist für massearme Sterne sehr viel größer als das Alter des Universums. Ein Stern mit $0.5 M_{\odot}$ verbrennt beispielsweise in 10^{10} Jahren etwa 10 Prozent seines Wasserstoffs im Kern zu Helium. Massearme Sterne können sich daher seit ihrer Entstehung noch nicht signifikant von der Nullalter-Hauptreihe wegentwickelt haben. Die einzige Möglichkeit, massearme, entwickelte Sterne zu erhalten, besteht darin, einen massereichen, entwickelten Stern seiner Hülle zu berauben. Dies kann durch Massentransfer auf der thermischen Zeitskala geschehen. Bei einem anfänglichen Massenverhältnis q von 2 bis 3 sind derartige Systeme thermisch instabil ($\zeta_e < \zeta_R$) und der Massentransfer verläuft auf der thermischen Zeitskala, so daß der Stern seine wasserstoffreiche Hülle verliert, während die chemische Zusammensetzung des Kerns sich auf Grund der verhältnismäßig langen nuklearen Zeitskala kaum ändert. Voraussetzung für ein solches System ist natürlich, daß es adiabatisch stabil ($\zeta_s > \zeta_R$), ist. Das bedeutet, daß der massegebende Stern ein relativ großes ζ_s besitzen muß. Dies ist der Fall für massereichere Hauptreihen- und Nachhauptreihensterne ab etwa $1 M_{\odot}$, die noch nicht den Riesenast bzw. die HAYASHI-Linie erreicht haben. Zu groß darf das anfängliche Massenverhältnis aber auch nicht sein, insbesondere bei nur wenig entwickelten Sternen, da radiative Sterne oder Sterne mit nur dünnen konvektiven Hüllen im Inneren ein flaches Entropieprofil aufweisen (vgl. Abb. 2.7, Seite 38), was dazu führt, daß

diese Sterne nach dem raschen Abtragen der Hülle praktisch isentrop werden, und somit ähnlich wie vollkonvektive Sterne mit $\zeta_s = -\frac{1}{3}$ reagieren. Wird die Hülle des Sterns bis auf den isentropen Kern abgetragen, bevor das System thermisch stabil wird und der Stern also thermisch relaxieren kann, so kommt es zur Delayed Dynamical Instability, und das System wird adiabatisch instabil (HJELLMING und WEBBINK, 1987, SCHENKER et al., 2002, PODSIADLOWSKI et al., 2002). Deshalb kommen für thermischen Zeitskalen-Massentransfer in CVs nur Sterne mit 1 bis 3 Sonnenmassen und einem anfänglichen Massenverhältnis von 2 – 3 in Frage.

Auf diese Weise ist es also möglich, einen massearmen Stern mit einem praktisch beliebigen Wasserstoffgehalt im Kern zu erzeugen, während die Hülle noch die ursprüngliche chemische Zusammensetzung reflektiert oder auch schon angebranntes Material enthält. Ein solcher Stern wird als „Überrest eines thermischen Zeitskalen-Massentransfers“ bzw. „Remnant of Thermal Timescale Mass Transfer“ (RTTMT) bezeichnet. Die Entstehung einiger beobachteter Systeme wird auf eine solche oder ähnliche Entwicklung zurückgeführt (KOLB et al., 2000, SCHENKER et al., 2002). Abb. 3.24 zeigt s' und f für einen $0.5 M_\odot$ RTTMT mit $X_c = 0.05$, bei dem es sich um den Kern eines stark entwickelten Hauptreihensterns von ursprünglich $1.6 M_\odot$ handelt. Die Zeitskala der konvektiven Hülle τ_{ce} beträgt weniger als ein Zehntel derjenigen eines unentwickelten Hauptreihensterns gleicher Masse, und er hat einen um 70% größeren Radius. Des weiteren besitzt er eine überadiabatische Konvektionszone, so daß das Maximum von s' bei $\langle f_{\text{irr}} \rangle = 3 - 4$ liegt.

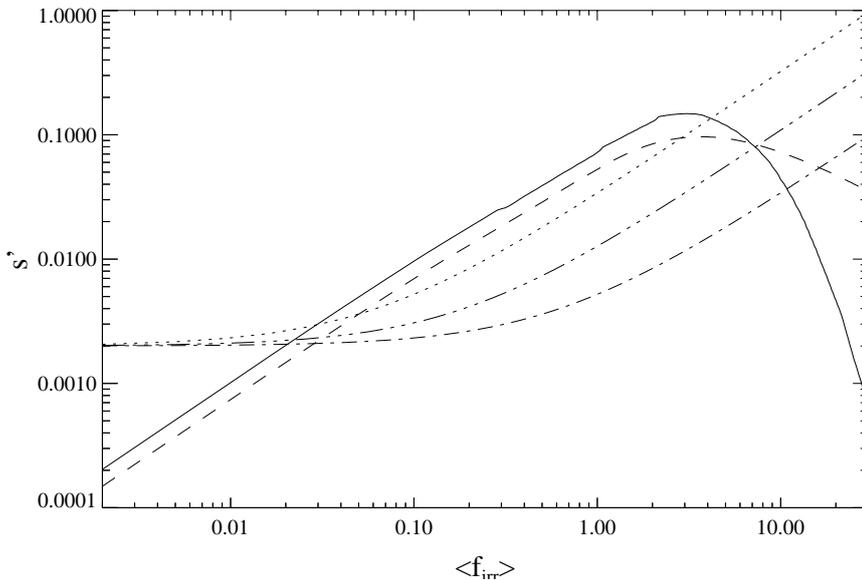


Abbildung 3.24: $s'(\langle f_{\text{irr}} \rangle)$ für ein CV-System mit dem Überrest ($M = 0.5 M_\odot$, $R = 0.73 R_\odot$, $X_c = 0.05$) eines thermischen Zeitskalen-Massentransfers von einem entwickelten Hauptreihenstern von ursprünglich $1.6 M_\odot$. Legende wie in Abb. 3.14.

Für $\alpha = 0.3$ liegt die „Insel der Instabilität“ zwischen etwa $\langle f_{\text{irr}} \rangle \approx 0.03$ und $\langle f_{\text{irr}} \rangle \approx 7$, so daß das Verhältnis von τ_{ce} und τ'_d im Bereich

$$3 \cdot 10^{-4} \lesssim \frac{\tau_{\text{ce}}}{\tau'_d} \lesssim 7 \cdot 10^{-2} \quad (3.150)$$

liegen muß, damit Massentransferzyklen auftreten können. Diese Abschätzung unterscheidet sich kaum von derjenigen für Hauptreihensterne (3.144). Der Grund hierfür ist, daß sich die Funktionen s' und f für unentwickelte Hauptreihensterne und RTTMT nicht wesentlich unterscheiden. Die Form von s' ist für alle Sterne im Wesentlichen die gleiche, die Lage des Maximums hängt dagegen von der Tiefe der überadiabatischen Konvektionszone ab. Für massearme Hauptreihensterne ohne überadiabatische Konvektionszone liegt das Maximum bei $\langle f_{\text{irr}} \rangle \approx 1$ und für massereichere Hauptreihensterne oder RTTMT mit überadiabatischen Konvektionszonen bei $\langle f_{\text{irr}} \rangle \approx 3$. Damit ist der Einfluß von s' auf die Lage der „Insel der Instabilität“ weniger als eine Größenordnung. Die Skalenhöhe beträgt für diese Sterne einige 10^{-4} , und die Funktion f hängt im Wesentlichen nur vom Massenanteil der konvektiven Hülle und vom Verhältnis von Sternradius zum Radius des Weißen Zwerges ab. Der betrachtete RTTMT hat zwar einen größeren Radius als der Hauptreihenstern gleicher Masse und eine dünnere konvektive Hülle, so daß auch f zu höheren Bestrahlungsstärken verschoben ist. Im Ergebnis ist der Nettoeffekt durch die gleichzeitige Verschiebung von s' und f in diesem Fall nahezu vernachlässigbar.

Der entscheidende Unterschied zwischen unentwickelten Hauptreihensternen und RTTMT ist daher durch die kürzere thermische Zeitskala als Folge der kürzeren KELVIN-HELMHOLTZ-Zeitskala der konvektiven Hülle gegeben. Für $\tau_{\text{ce}} \approx 3 \cdot 10^6 \text{yr}$ und $\tau_d \approx \tau'_d$ ergibt sich aus (3.150) nämlich:

$$4 \cdot 10^7 \text{yr} \lesssim \tau_d \lesssim 10^{10} \text{yr}. \quad (3.151)$$

Abb. 3.25 und 3.26 zeigen die Massentransferrate als Funktion der Zeit, bzw. der Bahnperiode für zwei RTTMT für verschiedene Bremsraten und verschiedene Anfangsbedingungen⁹. Bei beiden Entwicklungsrechnungen erreicht der masseverlierende Stern eine Masse von $0.5 M_{\odot}$ bei einer Bahnperiode von 8, bzw. 7 Stunden, ohne daß es zum Auftreten von Massentransferzyklen kommt, und das, obwohl die Antriebszeitskala τ_d in beiden Fällen im durch das analytische Modell vorhergesagten Instabilitätsbereich liegt. Erst bei einer Bahnperiode von 5 Stunden wird die stationäre Massentransferrate in beiden Systemen instabil. Der Grund liegt vermutlich darin, daß das Bipolytopenmodell, welches formal auf entwickelte Sterne auch gar nicht anwendbar ist, die tatsächliche thermische Zeitskala der konvektiven Hülle unterschätzt, so daß stark entwickelte Sterne deutlich stabiler gegenüber der Bestrahlungsinstabilität sind als zuvor erwartet.

⁹Um die gezeigten Entwicklungsrechnungen vom Einsetzen des Massentransfers bis zum Periodenminimum ohne Unterbrechung durchführen zu können, wurden für die äußersten Schichten Opazitätstabellen für Sterne solarer Zusammensetzung verwendet. Vergleichsrechnungen für die letzte Phase des Massentransfers mit Opazitätstabellen, die die korrekten Häufigkeiten von Helium sowie den CNO-Elementen berücksichtigen, deuten darauf hin, daß die Verwendung „falscher“ Opazitäten zwar den Sternradius ändert, aber den Verlauf der Massentransferzyklen nicht wesentlich beeinflusst.

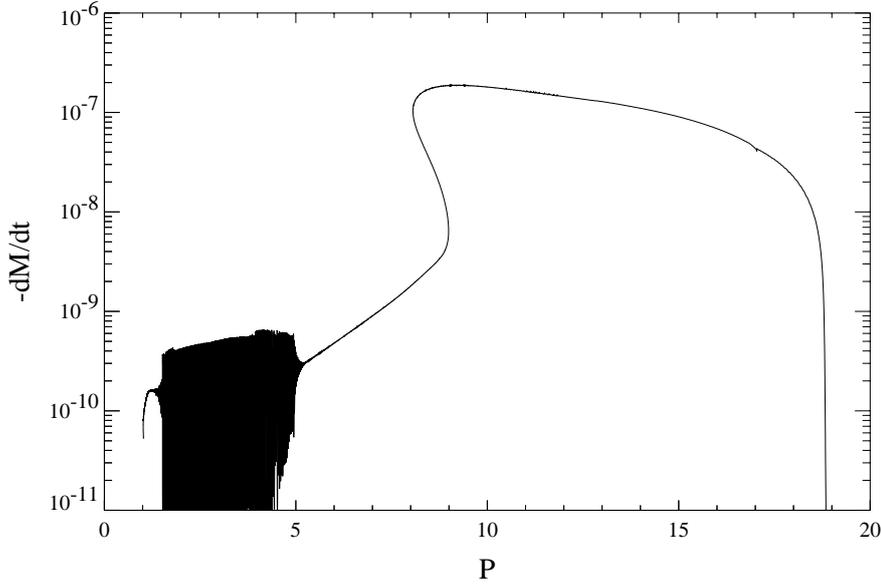


Abbildung 3.25: Massentransferrate $\dot{M}[M_{\odot}/\text{yr}]$ als Funktion der Bahnperiode $P[\text{hr}]$ für ein System aus einem Stern am Ende des zentralen Wasserstoffbrennens ($X_c \approx 0.05$) mit anfänglich $1.5 M_{\odot}$ und einem Weißen Zwerg mit anfänglich $0.6 M_{\odot}$. Die Bremsrate ist durch $\dot{J} = \dot{J}_{\text{VZ}}$ gegeben und es wurde $\langle \eta \rangle = 0.25$ sowie $\alpha = 0.3$ gewählt. Die Massentransferzyklen setzen bei etwa $M_1 \approx 0.26 M_{\odot}$ bzw. $M_2 \approx 0.91 M_{\odot}$ ein.

Das bedeutet, daß, anders als bisher angenommen (KING et al., 1997), stark entwickelte Sterne generell *nicht* empfindlicher sind als unentwickelte Hauptreihensterne, sondern daß sie wegen ihrer kürzeren thermischen Zeitskala *bei kürzeren Antriebszeitskalen* τ_d empfindlich für die Bestrahlungsinstabilität sind, wenn auch dieser Effekt deutlich geringer auszufallen scheint, als sich auf Grund des Bipolytopenmodells erwarten ließe. CVs mit unentwickelten Sternen und Bahnperioden von 3 – 5 Stunden werden also nur instabil, wenn die Bremsrate ein kleines Vielfaches der gravitativen Bremsung beträgt und werden bei 2 – 3 Stunden selbst für gravitative Bremsung stabil. CVs mit stark entwickelten Sternen können dagegen auch für Bremsung nach VERBUNT und ZWAAN (2.159) instabil werden und es bis zu Bahnperioden unterhalb von 2 Stunden auch bleiben.

Eine weitere, bisher nicht diskutierte Klasse Kataklysmischer Veränderlicher sind Systeme mit einem Riesen oder Überriesen als Massegeber. Abb. 3.27 zeigt s' und f für ein System mit einem Riesen von $0.8 M_{\odot}$, einer Kernmasse von $0.32 M_{\odot}$ und einem Radius von $35 R_{\odot}$. Zum einen besitzt ein Riese eine ausge dehnte überadiabatische Konvektionszone, so daß das Maximum von s' bei etwa $\langle f_{\text{irr}} \rangle \approx 5 - 8$ liegt. Zum anderen ist die Druckskalenhöhe und somit der konstante Beitrag $\delta \frac{H_P}{R}$ von f für Riesen signifikant größer als für Hauptreihensterne, so daß die „Insel der Instabilität“ deutlich kleiner ist. Für den dargestellten Fall liegt sie im Bereich 0.2 bis 40 in $\langle f_{\text{irr}} \rangle$, abhängig vom Bestrahlungsmodell. Für

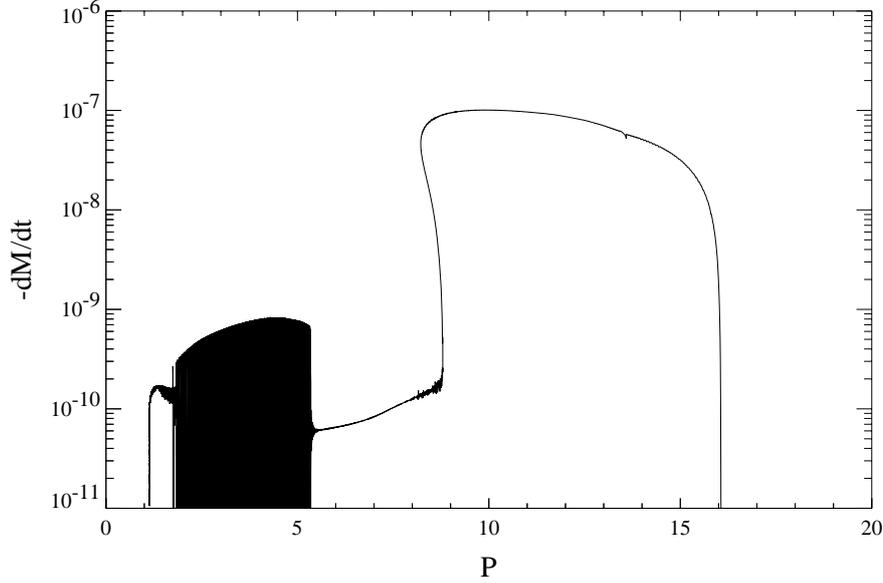


Abbildung 3.26: Massentransferrate $\dot{M}[M_{\odot}/\text{yr}]$ als Funktion der Bahnperiode $P[\text{hr}]$ für ein System aus einem Stern am Ende des zentralen Wasserstoffbrennens ($X_c \approx 0.2$) mit anfänglich $1.5 M_{\odot}$ und einem Weißen Zwerg mit anfänglich $0.6 M_{\odot}$. Die Bremsrate ist durch $\dot{J} = 5\dot{J}_{\text{grav}}$ gegeben und es wurde $\langle \eta \rangle = 0.25$ sowie $\alpha = 0.3$ gewählt. Die Massentransferzyklen setzen bei etwa $M_1 \approx 0.31 M_{\odot}$ bzw. $M_2 \approx 0.90 M_{\odot}$ ein.

$\alpha = 0.3$ ergibt sich

$$1.5 \cdot 10^{-4} \lesssim \frac{\tau_{\text{ce}}}{\tau'_d} \lesssim 3 \cdot 10^{-2}. \quad (3.152)$$

Nun ist für einen Riesen auf Grund des großen Radius die Bahnperiode recht lang und somit magnetische Bremsung vermutlich vernachlässigbar. Daher wird der Massentransfer eines solchen Systems hauptsächlich durch die nukleare Entwicklung des Riesen angetrieben. Diese ist jedoch im Gegensatz zum magnetischen Bremsgesetz bekannt, so daß die Antriebszeitskala für diese Systeme keinen freien Parameter enthält.

Ein Riese mit τ_{ce} von 10^3 Jahren und einer nuklearen Zeitskala von 10^7 Jahren ist nach (3.152) nicht empfindlich für die Bestrahlungsinstabilität. Stattdessen kann man nun die Frage stellen, wie groß α sein muß, damit für ein solches System die Massentransferrate instabil wird. In diesem konkreten Fall ist ein $\alpha \geq 1$ zu erwarten, Rechnungen mit vollen Sternmodellen zeigen, daß ein Wert von $\alpha \sim 2$ nötig wäre, um Massentransferzyklen auszulösen. Ein derart hoher Wert von α ist vermutlich nicht realistisch, so daß CVs mit einem Riesen stabil sind und keine Massentransferzyklen durchlaufen.

Allgemein läßt sich aus der Kernmasse-Leuchtkraft-Beziehung eine analytische Formel für das Verhältnis von τ_{ce} für Riesen mit einer Anfangskernmasse $M_{c,i}$

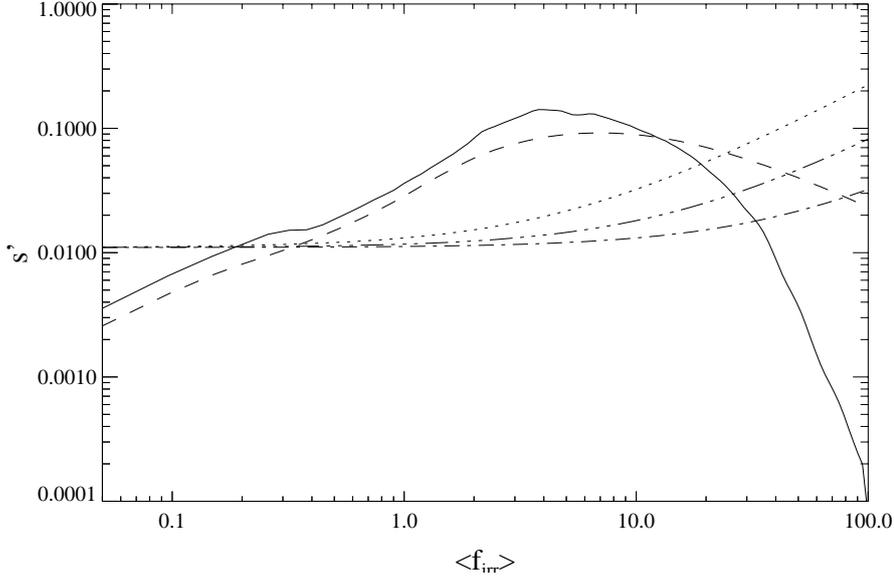


Abbildung 3.27: $s'(\langle f_{\text{irr}} \rangle)$ für ein CV-System aus einem Riesen mit $0.8 M_{\odot}$ und $R = 35 R_{\odot}$. Legende wie Abb. 3.14.

angeben (RITTER, 1999, Gl. 43):

$$\frac{\tau_{\text{ce}}}{\tau_d} \approx -3 \cdot 10^{-4} \frac{\zeta_e - \zeta_R}{\zeta_R} \frac{M_1 - M_c}{M_1} \left(\frac{M_1}{M_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{0.25 M_{\odot}}{M_{c,i}} \right)^6 \left(1 - \frac{t}{t_{\infty}} \right)^{\frac{7}{6}}. \quad (3.153)$$

Die Kernmasse entwickelt sich nach

$$M_c = M_{c,i} \left(1 - \frac{t}{t_{\infty}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \approx M_{c,i} \left(1 - \frac{t}{t_{\infty}} \right)^{-\frac{1}{7}}, \quad (3.154)$$

wobei t_{∞} die Zeit angibt, nach der die Kernmasse formal unendlich wird. Ersetzt man nun $M_{c,i}$ durch (3.154) in (3.153), so ergibt sich

$$\frac{\tau_{\text{ce}}}{\tau_d} \approx -3 \cdot 10^{-4} \frac{\zeta_e - \zeta_R}{\zeta_R} \frac{M_1 - M_c}{M_1} \left(\frac{M_1}{M_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{0.25 M_{\odot}}{M_c} \right)^6. \quad (3.155)$$

Fast alle Faktoren auf der rechten Seite sind kleiner als 1. So ist $\zeta_e < 0$ für Riesen, die aktuelle Kernmasse $M_c < M_1$, und für thermisch stabile Systeme gilt in der Regel $M_1 < M_{\odot}$. Damit ist das Verhältnis aus τ_{ce} und τ_d zu klein für die Bestrahlungsinstabilität, es sei denn, die Kernmasse ist kleiner als $0.25 M_{\odot}$ und gleichzeitig klein gegenüber M_1 . In diesem Fall handelt es sich um einen Unterriesen oder einen noch wenig ausgedehnten Riesen, der den Übergang zwischen RTTMT und Riesen darstellt, und unter Umständen tatsächlich Massentransferzyklen durchlaufen kann. Für das in Abb. 3.27 dargestellte System gilt nach obiger Formel:

$$\frac{\tau_{\text{ce}}}{\tau_d} \approx 3 \cdot 10^{-5}, \quad (3.156)$$

so daß ein etwa um eine Größenordnung höhere Effizienz, also $\alpha \sim 3$ nötig wäre, Massentransferzyklen auszulösen, in grober Übereinstimmung mit den numerischen Rechnungen.

Es gibt mehrere Gründe, warum CVs mit Riesen als Massegeber stabil sind, anders als dies von KING et al. (1997) erwartet wurde. Zum ersten wurde von den genannten Autoren der Term der Größenordnung $\frac{H_P}{R}$ im Instabilitätskriterium (3.128), bzw. (3.129) vernachlässigt, der bewirkt, daß der Instabilitätsbereich nicht nur zu hohen Bremsraten, sondern auch zu niedrigen Bremsraten beschränkt ist, so daß Systeme nicht automatisch für beliebig kleine Verhältnisse $\frac{\tau_{ce}}{\tau_d}$ instabil werden. Zum zweiten besitzen Riesen eine weit ausgedehntere überadiabatische Konvektionszone als Hauptreihensterne, so daß das Maximum von s' zu höheren Bestrahlungsstärken verschoben ist. Und zum dritten besitzen Riesen eine wesentlich größere Skalenhöhe als Hauptreihensterne, so daß ihre „Insel der Instabilität“ deutlich kleiner ist als die von Hauptreihensternen.

3.6.3 Massearme Röntgendoppelsterne

Aus dem vorangegangenen Abschnitt ist hervorgegangen, daß Kataklysmische Veränderliche sich für $0.1 \lesssim \alpha \lesssim 1$ im Bereich der Bestrahlungsinstabilität befinden (eine geeignete Antriebszeitskala vorausgesetzt). Verkleinert man α um eine Größenordnung oder – was nach (3.145) äquivalent ist – vergrößert man den Radius des akkretierenden Sterns R_2 um eine Größenordnung, so werden diese Systeme stabil. Damit die Massentransferrate bei Systemen mit einem größeren Radius des Akkretors, beispielsweise eines akkretierenden Hauptreihensterns, instabil werden kann, wäre ein unrealistisch hoher Wert von $\alpha \gg 1$ erforderlich. Massentransferzyklen können also, wenn überhaupt, nur in Systemen auftreten, in denen der Begleitstern höchstens den Radius eines Weißen Zwerges hat, also nur in kompakten Doppelsternsystemen.

Eine weitere Klasse von Systemen mit einem kleinen Massenverhältnis und einem kompakten Begleiter stellen die Massearmen Röntgendoppelsterne (LMXB) dar, Systeme aus einem akkretierenden Neutronenstern oder einem Schwarzen Loch und einem masseverlierenden Hauptreihenstern oder Riesen. Im Folgenden werden nur LMXBs mit Neutronensternen betrachtet. Prinzipiell verläuft die Diskussion für solche Systeme genauso wie für CVs. Während der Radius eines Weißen Zwergs von $0.8 M_\odot$ etwa ein hundertstel des Sonnenradius (~ 7000 km) beträgt, ist der Radius eines Neutronensterns von der Größenordnung ~ 10 km und somit etwa um drei Zehnerpotenzen kleiner. Das bedeutet, daß bei gleicher Akkretionsrate – der Einfluß anderer Systemparameter sei an dieser Stelle vernachlässigt – die Bestrahlungsstärke $\langle f_{\text{irr}} \rangle$ um einen Faktor $\sim 10^3$ größer ist, als wenn der Begleiter ein Weißer Zwerg wäre. Liegt das Maximum von s' für ein CV-System bei einer Bestrahlungsstärke $\langle f_{\text{irr}} \rangle \approx 1$, welche z.B. bei einer säkularen Massentransferrate von $10^{-9} \frac{M_\odot}{\text{yr}}$ für $\alpha = 0.1$ erreicht werde, so liegt das Maximum von s' für ein entsprechendes LMXB-System zwar auch bei $\langle f_{\text{irr}} \rangle \approx 1$ (der masseverlierende Stern ist ja derselbe), aber auf Grund des kleinen Neutronensternradius ist bei gleicher Massentransferrate ein Wert

von $\alpha = 10^{-4}$ erforderlich, damit im stationären Zustand des Systems $\langle f_{\text{irr}} \rangle \approx 1$ gilt.

In erster Näherung bedeutet dies, daß, um Massentransferzyklen in einem LMBX-System zu erhalten, α um den Faktor $\frac{R_{\text{NS}}}{R_{\text{WD}}}$ gegenüber den Werten in CV-Systemen verkleinert werden muß. So kleine Werte von α gelten als unwahrscheinlich, insbesondere da bei Akkretion auf Neutronensterne große Mengen harter Röntgenstrahlung freigesetzt werden, bei Akkretion auf Weiße Zwerge jedoch vorwiegend Ultraviolettes Licht und weiche Röntgenstrahlung. Harte Röntgenstrahlung hat eine größere Eindringtiefe in die Photosphäre und somit ein größeres α_{irr} als weiche Röntgenstrahlung oder gar Ultraviolettes Licht. Daher wird von KING et al. (1996, 1997), RITTER et al. (2000) angenommen, daß die für das Auftreten der Instabilität in LMXB-Systemen nötigen Werte von α zu klein sind und LMXBs daher keine Massentransferzyklen durchlaufen. Dies ist richtig für das *Constant Flux* Modell, jedoch nicht für das *Point Source* Modell. Denn für dieses Bestrahlungsmodell fällt s' zu höheren Bestrahlungsstärken wesentlich langsamer ab, weil die Regionen in der Nähe des Terminators selbst für hohe Bestrahlungsstärken nur teilweise durch die Bestrahlung blockiert werden. Deshalb ist es für das *Point Source* Modell nicht nötig, die Bestrahlungseffizienz so klein zu machen, daß der effektive Bestrahlungsfluß auf $\langle f_{\text{irr}} \rangle \sim 1$ reduziert wird, sondern lediglich so weit, daß s' größer als f wird. Dies läßt sich aus den Abb. 3.28-3.30 deutlich erkennen. In dieser Hinsicht unterscheiden sich Systeme mit wenig entwickelten Hauptreihensternen (Abb. 3.28) nur geringfügig von Systemen mit RTTMT (Abb. 3.29) oder Riesen (Abb. 3.30): Im *Point Source* Modell wird s' schon unterhalb von $\langle f_{\text{irr}} \rangle \lesssim 10^2 - 10^3$ größer als f . Das bedeutet, daß LMXBs für $\alpha \lesssim 10^{-2} - 10^{-1}$ instabil sein können. Die untere Grenze für α liegt bei etwa $10^{-6} - 10^{-4}$.

Natürlich gilt auch für LMXBs tendenziell, daß Systeme mit wenig entwickelten, massearmen Hauptreihensternen als Massegeber nur für schwache Bremsung instabil werden können, weil nur für eine genügend große Antriebszeitskala τ_d das Verhältnis $\frac{\tau_{\text{ce}}}{\tau_d}$ klein genug werden kann. Systeme mit einem stark entwickelten RTTMT oder einem wenig entwickelten Hauptreihenstern mittlerer Masse können jedoch auch für volle magnetische Bremsung nach VERBUNT und ZWAAN (2.159) instabil werden.

Betrachtet man nun das in Abb. 3.28 dargestellte LMXB-System mit einem unentwickelten Hauptreihenstern von $0.8 M_{\odot}$, so läßt sich ablesen, daß für das *Point Source* Modell die Instabilitätsbedingung $s' > f$ bei $\alpha = 0.1$ ungefähr für $0.02 \lesssim \langle f_{\text{irr}} \rangle \lesssim 150$ erfüllt ist. Dies entspricht nach (3.137) einem Verhältnis der Zeitskalen von

$$8 \cdot 10^{-7} \lesssim \frac{\tau_{\text{ce}}}{\tau_d} \lesssim 6 \cdot 10^{-3}. \quad (3.157)$$

Mit einer Zeitskala der konvektiven Hülle von etwa $4 \cdot 10^6$ Jahren und $\tau_d \approx \tau'_d$ erhält man hieraus als Bedingung für das Auftreten von Massentransferzyklen:

$$7 \cdot 10^8 \text{ yr} \lesssim \tau_d \lesssim 6 \cdot 10^{12} \text{ yr}. \quad (3.158)$$

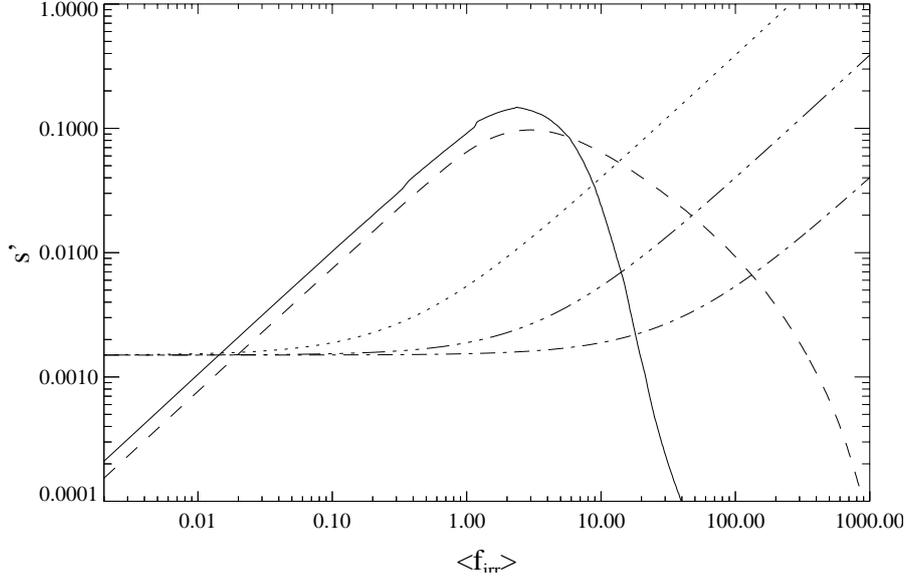


Abbildung 3.28: $s'(\langle f_{\text{irr}} \rangle)$ für ein LMXB-System aus einem unentwickelten Hauptreihenstern mit $0.8 M_{\odot}$ und einem Neutronenstern mit $1.4 M_{\odot}$ ($q \approx 0.57$) für das *Constant Flux* Modell (durchgezogene Linie) sowie das *Point Source* Modell (gestrichelte Linie). s' wird verglichen mit f für $\langle \eta \rangle = \eta = 1$ und verschiedene Werte des Effizienzparameters: $\alpha = 0.1$ (strichpunktierte Linie), $\alpha = 10^{-2}$ (punktirt-strichpunktierte Linie) und $\alpha = 10^{-3}$ (punktierter Linie).

Es ist also zu erwarten, daß dieses System für gravitative Bremsung ($\tau_{\text{grav}} = \frac{\tau_I}{2} \approx 6 \cdot 10^9 \text{yr}$) und auch noch für schwache magnetische Bremsung mit etwa $\dot{J} = 5\dot{J}_{\text{grav}}$ bzw. einer Antriebszeitskala von 10^8 Jahren instabil gegen Bestrahlungsrückkopplung ist. Dies ist auch tatsächlich der Fall, wie Abb. 3.31 zeigt. Allerdings ist das System nur marginal instabil, so daß die Amplitude der Massentransferzyklen sehr klein ausfällt und damit praktisch auch nicht beobachtet werden könnte. Für abnehmendes α verstärkt sich die Instabilität, und die Amplitude wächst. Für $\alpha = 0.01$ befindet sich das System tief im Instabilitätsbereich, und die Zyklen in Abb. 3.32 sind deutlich zu erkennen.

Abb. 3.33 zeigt die Entwicklung eines stark entwickelten RTTMT bis zur Minimumperiode für starke magnetische Bremsung nach VERBUNT und ZWAAN (2.159) und $\alpha = 0.1$. Die Massentransferzyklen setzen bei einer Restmasse von etwa $0.31 M_{\odot}$ ein. Eine Analyse von Abb. 3.29 zeigt, daß sich die „Insel der Instabilität“ an diesem Punkt der Entwicklung über das Intervall $0.02 \lesssim \langle f_{\text{irr}} \rangle \lesssim 200$ erstreckt, welches

$$8 \cdot 10^{-7} \lesssim \frac{\tau_{\text{ce}}}{\tau'_d} \lesssim 8 \cdot 10^{-3} \quad (3.159)$$

entspricht. Mit $\tau_{\text{ce}} \approx 1.5 \cdot 10^6 \text{yr}$ ergibt sich hieraus als Bedingung

$$2 \cdot 10^8 \text{yr} \lesssim \tau_d \lesssim 2 \cdot 10^{12} \text{yr} \quad (3.160)$$

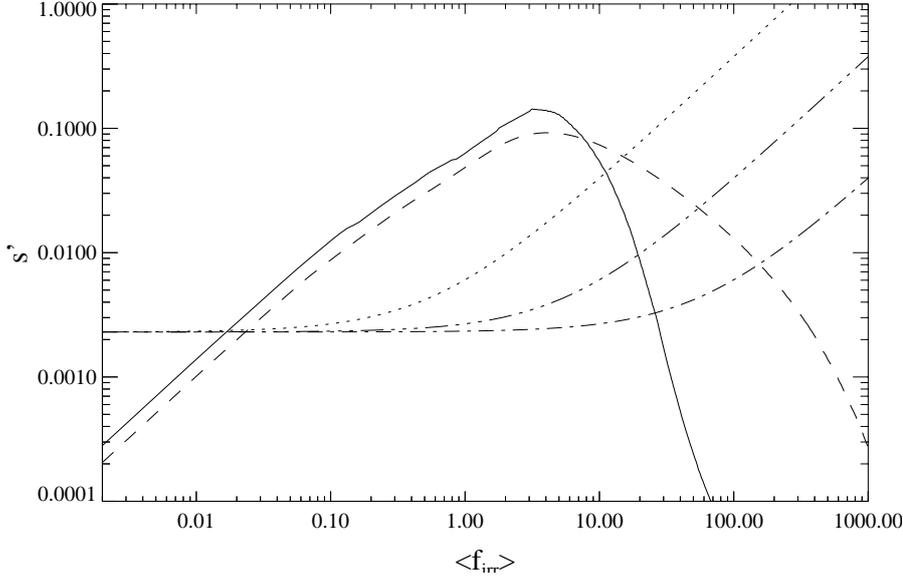


Abbildung 3.29: $s'(\langle f_{\text{irr}} \rangle)$ für ein LMBX-System aus einem einem RTTMT am Ende des zentralen Wasserstoffbrennens mit $0.3 M_{\odot}$ für das *Constant Flux* Modell (durchgezogene Linie) sowie das *Point Source* Modell (gestrichelte Linie). s' wird verglichen mit f für $\langle \eta \rangle = \eta = 1$ und verschiedene Werte des Effizienzparameters: $\alpha = 0.1$ (strichpunktierte Linie), $\alpha = 10^{-2}$ (punktiert-strichpunktierte Linie) und $\alpha = 10^{-3}$ (punktierte Linie).

für das Auftreten von Massentransferzyklen. Beim Einschalten der Massentransferzyklen in Abb. 3.33 liegt die Antriebszeitskala bei $\tau_d = \frac{\tau_d}{2} \approx 5 \cdot 10^8 \text{yr}$. Demnach sollte sich das System zu diesem Zeitpunkt schon tief im Bereich der Instabilität befinden. Diese Abweichung vom durch die analytische Approximation vorhergesagten Verhalten ist möglicherweise darauf zurückzuführen, daß die aus dem Bipolytopenmodell hergeleitete thermische Zeitskala der konvektiven Hülle für chemisch inhomogene Sterne nicht anwendbar, bzw. nur sehr ungenau ist.

Eine Besonderheit, die bei Massentransferzyklen in LMXB-Systemen auftreten kann, sind Oszillationen mit kleiner Amplitude am Ende des „High State“, die schließlich zum vorübergehenden Abschalten des Massentransfers führen, wie in Abb. 3.34 exemplarisch an den ersten Zyklen des Systems aus Abb. 3.33 dargestellt ist.

Analog dazu läßt sich nun auch die Frage stellen, ob Riesen in LMXBs, anders als in CVs, Massentransferzyklen aufweisen können. Aus Abb. 3.30 läßt sich ablesen, daß die „Insel der Instabilität“ für $\alpha = 0.1$ im Bereich $0.3 \lesssim \langle f_{\text{irr}} \rangle \lesssim 200$ liegt. Dies entspricht

$$1.5 \cdot 10^{-6} \lesssim \frac{\tau_{\text{ce}}}{\tau_d'} \lesssim 10^{-3}. \quad (3.161)$$

Ein solcher Wert für das Verhältnis der beiden Zeitskalen ist nach der analyti-

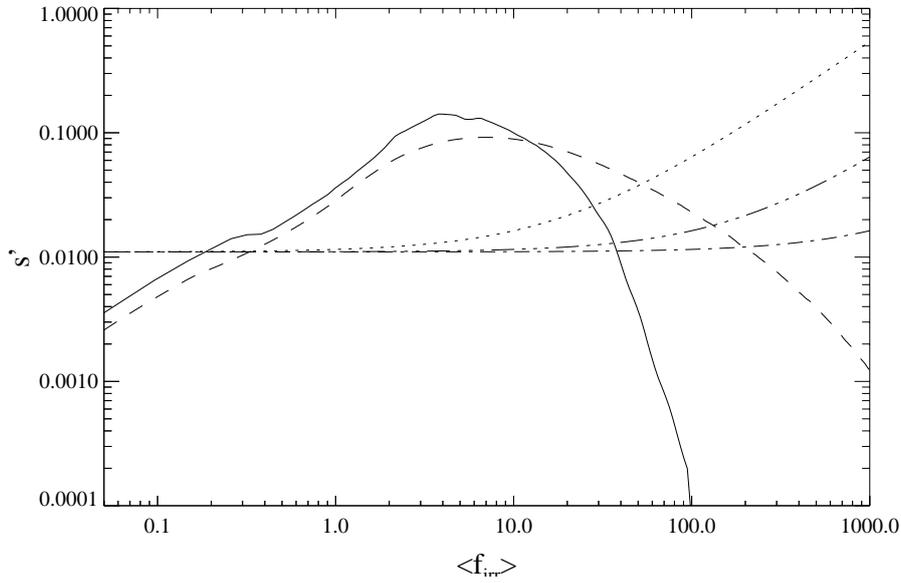


Abbildung 3.30: $s'(\langle f_{\text{irr}} \rangle)$ für ein LMBX-System aus einem Riesen mit $0.8 M_{\odot}$ für das *Constant Flux* Modell (durchgezogene Linie) sowie das *Point Source* Modell (gestrichelte Linie). s' wird verglichen mit f für $\langle \eta \rangle = \eta = 1$ und verschiedene Werte des Effizienzparameters: $\alpha = 0.1$ (strichpunktierte Linie), $\alpha = 10^{-2}$ (punktiert-strichpunktierte Linie) und $\alpha = 10^{-3}$ (punktierte Linie).

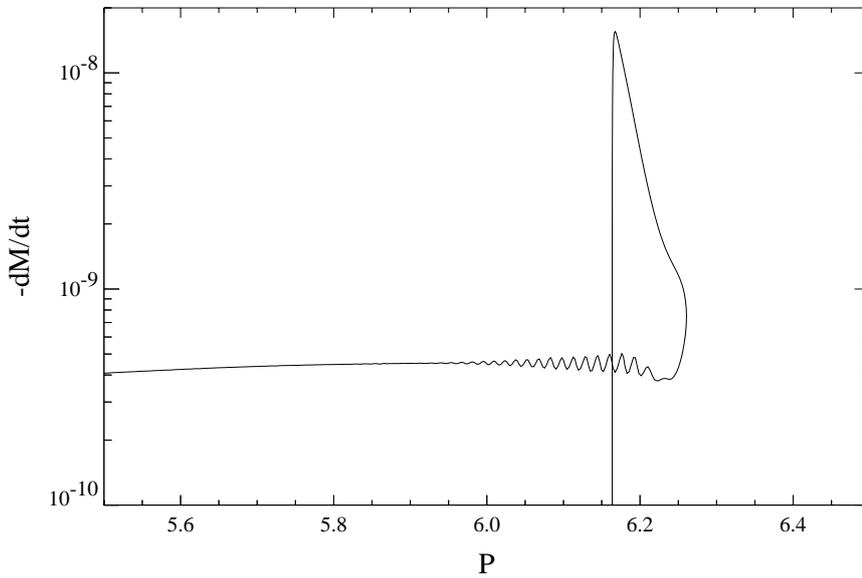


Abbildung 3.31: Massentransferrate $\dot{M}[M_{\odot}/\text{yr}]$ als Funktion der Bahnperiode $P[\text{hr}]$ für ein System aus einem wenig entwickelten Hauptreihenstern mit $0.8 M_{\odot}$ und einem Neutronenstern mit $1.4 M_{\odot}$. Die Rechnung wurde mit $\langle \eta \rangle = \eta = 1$ und $\alpha = 0.1$ sowie einer Bremsrate von $\dot{J} = 5\dot{J}_{\text{grav}}$ durchgeführt. Das System ist nur marginal instabil.

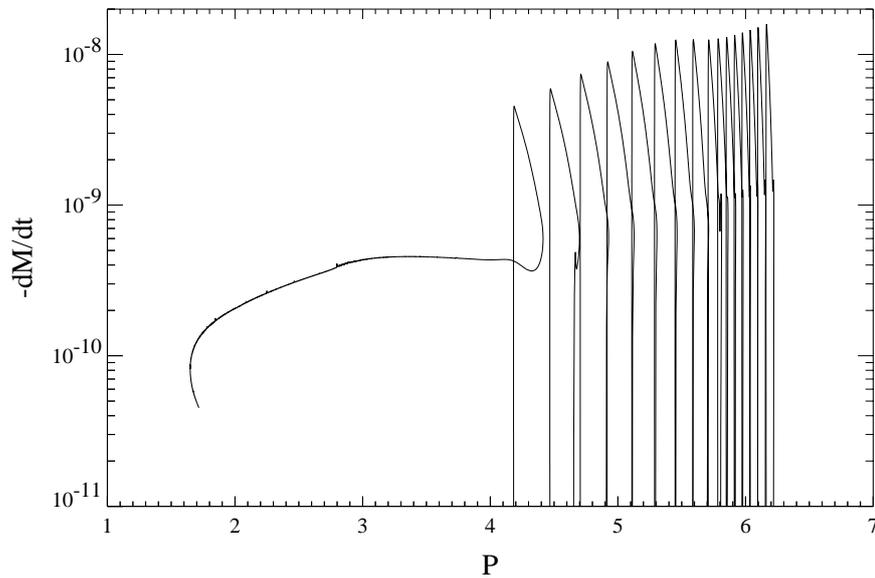


Abbildung 3.32: Massentransferrate $\dot{M}[M_{\odot}/\text{yr}]$ als Funktion der Bahnperiode $P[\text{hr}]$ für das gleiche System wie in Abb. 3.31, jedoch für $\alpha = 10^{-2}$.

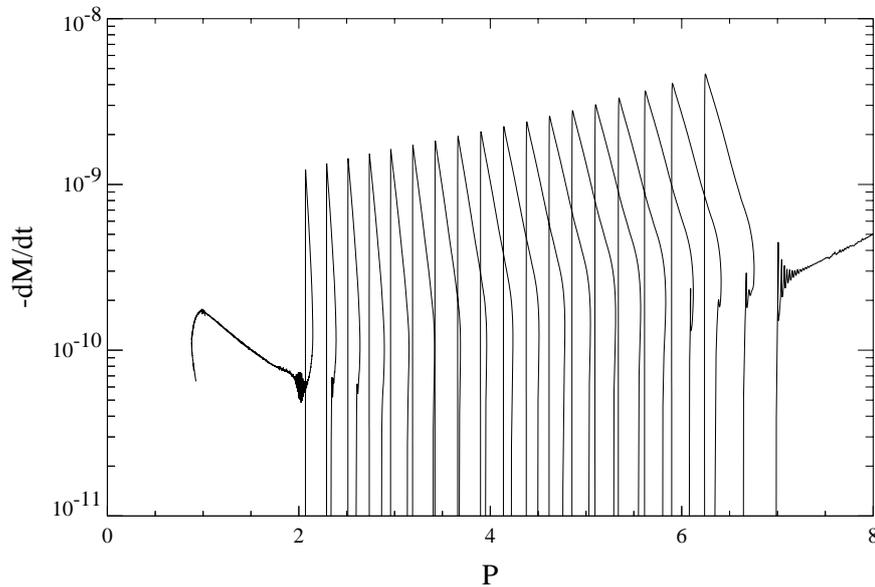


Abbildung 3.33: Massentransferrate $\dot{M}[M_{\odot}/\text{yr}]$ als Funktion der Bahnperiode $P[\text{hr}]$ für ein System aus einem RTTMT am Ende des zentralen Wasserstoffbrennens ($X_c \approx 0.05$) und einem Neutronenstern von anfänglich $1.4 M_{\odot}$. Die Rechnung wurde mit $\langle \eta \rangle = \eta = 1$ und $\alpha = 0.1$ sowie einer Bremsrate von $\dot{J} = \dot{J}_{VZ}$ durchgeführt. Die Massentransferzyklen setzen bei etwa $M_1 \approx 0.31 M_{\odot}$ bzw. $M_2 \approx 1.79 M_{\odot}$ ein.

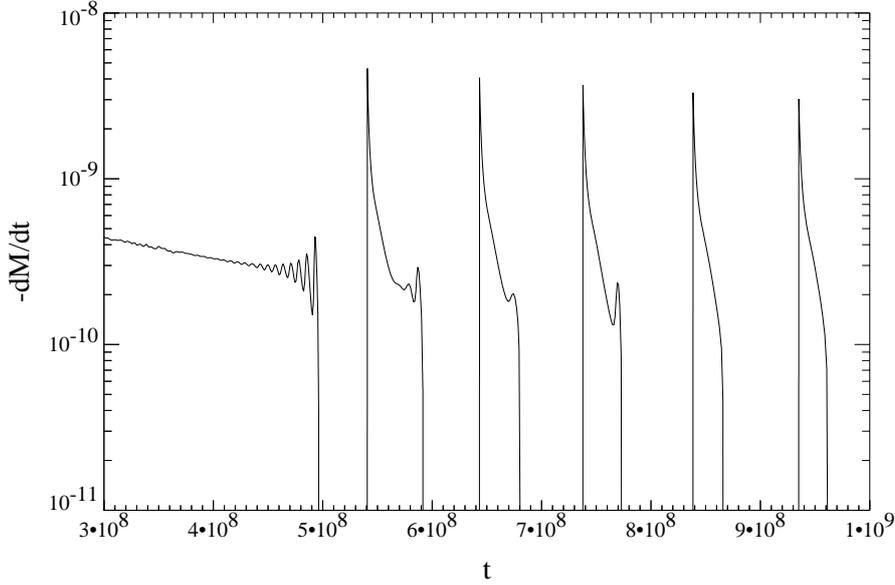


Abbildung 3.34: Massentransferrate $\dot{M}[M_{\odot}/\text{yr}]$ als Funktion der Zeit $t[\text{yr}]$ für dasselbe System wie in Abb. 3.33. Dargestellt sind die ersten Massentransferzyklen in der Entwicklung.

schen Approximation (3.155) tatsächlich realistisch. Für $\tau_{\text{ce}} \approx 10^3 \text{yr}$ muß die nukleare Antriebszeitskala lediglich im Bereich

$$10^6 \text{yr} \lesssim \tau_d \lesssim 7 \cdot 10^8 \text{yr} \quad (3.162)$$

liegen. Abb. 3.35 bzw. 3.36 zeigen die Entwicklung eines LMXB mit einem Riesen von $0.8 M_{\odot}$ mit einer Kernmasse von etwa $0.28 M_{\odot}$. Die Rechnung endet nach sechs Massentransferzyklen, in denen die Masse des Sterns bis auf etwa $0.5 M_{\odot}$ abgetragen wird.

Damit ist gezeigt, daß in dem in dieser Arbeit vorgestellten Modell der Bestrahlungsrückkopplung, anders als bisher angenommen, auch LMXBs möglicherweise Massentransferzyklen durchlaufen können. Inwieweit dieses Modell auch für LMXBs gültig ist, ist jedoch zumindest fraglich:

- Zum ersten ist die Bestrahlungsstärke $\langle f_{\text{irr}} \rangle$ für nicht zu kleines α am substellaren Punkt¹⁰ von der Größenordnung $10^2 - 10^3$. Dies ist im Widerspruch zur Annahme einer schwachen Bestrahlung von der Größenordnung $\langle f_{\text{irr}} \rangle \sim 1$. Ob und inwieweit das Modell bei derart hohen Bestrahlungsstärken noch gültig ist, ist daher nicht offensichtlich.
- Zum zweiten ist bei hohen Bestrahlungsstärken das Verhalten der Photosphärenschichten in der Nähe des Terminators für den Verlauf von s' entscheidend, da die Regionen in der Nähe des substellaren Punkts praktisch

¹⁰Der substellare Punkt selbst ist nach dem verwendeten Bestrahlungsmodell im Schatten der Scheibe. Die angegebene Größenordnung von $\langle f_{\text{irr}} \rangle$ gilt auch für Regionen der Sternoberfläche mit nahezu senkrechtem Bestrahlungseinfall.

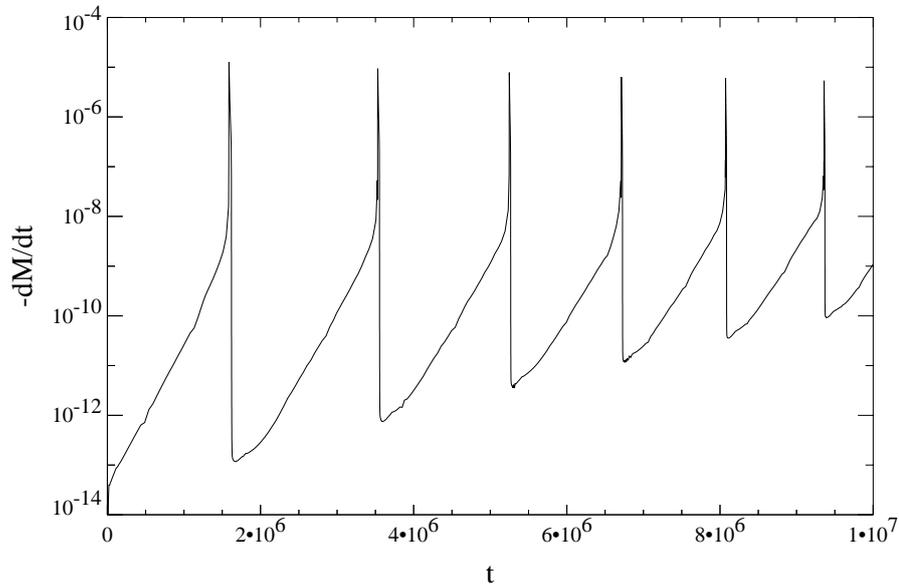


Abbildung 3.35: Massentransferrate $\dot{M}[M_{\odot}/\text{yr}]$ als Funktion der Zeit $t[\text{yr}]$ für ein System aus einem Riesen mit anfänglich $0.8 M_{\odot}$ und $25 R_{\odot}$ und einem Neutronenstern von anfänglich $1.4 M_{\odot}$. Die Rechnung wurde mit $\langle \eta \rangle = \eta = 1$ und $\alpha = 0.1$ sowie einer Bremsrate von $\dot{J} = 5\dot{J}_{\text{grav}}$ durchgeführt. Der eigentliche Antrieb des Massentransfers erfolgt jedoch durch die nukleare Entwicklung.

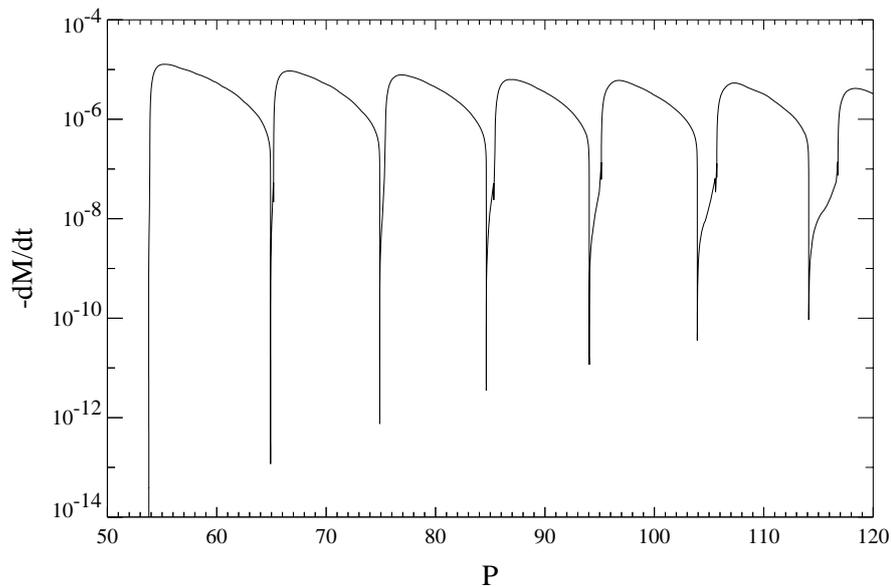


Abbildung 3.36: Massentransferrate $\dot{M}[M_{\odot}/\text{yr}]$ als Funktion der Bahnperiode $P[\text{d}]$ für dasselbe System wie in Abb. 3.35.

immer vollständig blockiert sind, solange der Massentransfer anhält. Die Regionen in der Nähe des Terminators werden hierbei mit dem hundert- bis tausendfachen des intrinsischen Flusses in einem sehr flachen Winkel bestrahlt. Für diesen Fall sind die Bestrahlungstabellen von HAMEURY und RITTER (1997) jedoch nicht gedacht. Inwieweit die Annahme einer effektiven Bestrahlung eines Oberflächenelements im Winkel ϑ mit dem Fluß $\langle f_{\text{irr}} \rangle \cos \vartheta$ die tatsächlichen physikalischen Verhältnisse in der Nähe des Terminators reflektiert, ist unklar.

- Zum dritten ist nicht gesichert, daß der Massentransfer in LMXB-Systemen durch Überfüllen des ROCHE-Volumens des masseverlierenden Sterns erfolgt. Möglicherweise wird der Massentransfer, nachdem er einmal angestoßen wurde, durch bestrahlungsgetriebene Winde aufrechterhalten (BASKO und SUNYAEV, 1973, BASKO et al., 1977, IBEN JR. et al., 1997). In diesem Fall kann es sein, daß der masseverlierende Stern sein ROCHE-Volumen deutlich unterfüllt, ohne daß der Massentransfer deswegen versiegen würde. Damit wäre die Massentransferrate nicht mehr an ΔR gekoppelt, und es gäbe keine Bestrahlungsrückkopplung und auch keine durch diesen Mechanismus ausgelösten Massentransferzyklen.

Tragen strahlungsgetriebene Winde oder andere, nicht von ΔR abhängige Mechanismen zur Massentransferrate bei, d.h. ist die Massentransferrate durch

$$\dot{M} = \dot{M}_W - \dot{M}_0 \exp\left(\frac{\Delta R}{H_P}\right) \quad (3.163)$$

mit einem konstanten Beitrag \dot{M}_W gegeben statt nur durch (3.43), so gilt für die Ableitung von \dot{M} statt (3.87):

$$\frac{1}{\dot{M}} \frac{d\dot{M}}{d\Delta R} = -\frac{\dot{M}_0}{\dot{M}} \frac{1}{H_P} \exp\left(\frac{\Delta R}{H_P}\right) = \frac{1}{H_P} \frac{\dot{M} - \dot{M}_W}{\dot{M}}. \quad (3.164)$$

In allen Gleichungen muß demzufolge H_P durch die „effektive“ Skalenhöhe

$$\frac{\dot{M}}{\dot{M} - \dot{M}_W} H_P > H_P \quad (3.165)$$

ersetzt werden. Ist \dot{M}_W nicht vernachlässigbar, so vergrößert sich die „effektive“ Skalenhöhe, und das System wird hierdurch tendenziell stabilisiert. Ist \dot{M}_W selbst wieder von ΔR abhängig, beispielsweise, weil die Drehimpulsverlustrate von der (bestrahlungsgetriebenen) Windverlustrate abhängt (KING et al., 1996), so ist statt H_P natürlich

$$H = \left(\frac{1}{\dot{M}} \frac{d\dot{M}}{d\Delta R} \right)^{-1} \quad (3.166)$$

als „effektive“ Skalenhöhe zu verwenden.

3.6.4 Die Eigenleuchtkraft des Weißen Zwergs

Der Bestrahlungsfluß $\langle f_{\text{irr}} \rangle$ in CVs wird genaugenommen nicht nur durch bei der Akkretion freigesetzte gravitative Energie erzeugt, sondern es trägt auch die Eigenleuchtkraft L_{WD} des Weißen Zwergs dazu bei:

$$L_2 = L_{\text{accr}} + L_{\text{WD}}. \quad (3.167)$$

Statt (3.47) gilt dann für den Bestrahlungsfluß:

$$\langle f_{\text{irr}} \rangle = \alpha_d \alpha_{\text{irr}} \alpha_{\text{accr}} \frac{L_{\text{accr}} + L_{\text{WD}}}{4\pi A^2 \sigma T_{\text{eff}}^4}, \quad (3.168)$$

und hieraus folgt:

$$\frac{d \ln \langle f_{\text{irr}} \rangle}{d \ln L_{\text{accr}}} = \frac{L_{\text{accr}}}{L_{\text{WD}} + L_{\text{accr}}} < 1. \quad (3.169)$$

Dieses Resultat geht in (3.90) ein und führt dazu, daß schließlich s' um diesen Faktor verkleinert wird. Ist die Leuchtkraft des Systems von der Eigenleuchtkraft des Weißen Zwergs dominiert ($L_{\text{WD}} \rightarrow L_2$), so verschwindet die Bestrahlungsrückkopplung.

Speziell für sehr massearme Systeme kann die Eigenleuchtkraft des Weißen Zwergs einen merklichen Anteil des intrinsischen Flusses des masseverlierenden Sterns blockieren. Ein System in der Nähe des Periodenminimums hat typische Werte von $R_{\text{WD}} \approx 10^{-2} R_{\odot}$, $A \approx 0.6 R_{\odot}$, $T_{\text{eff}} \approx 2200 \text{ K}$. Die Weißen Zwerge in solchen Systemen sind in der Regel sehr alt und daher verhältnismäßig kühl ($T_{\text{WD}} \approx 10^4 \text{ K}$) und strahlen einen Großteil ihrer Energie im sichtbaren Bereich ab. Ihre Bestrahlungseffizient α_{irr} ist daher vermutlich ~ 1 . Der effektive Bestrahlungsfluß liegt somit in der Größenordnung

$$\langle f_{\text{irr}} \rangle = \frac{\langle F_{\text{irr}} \rangle}{F_0} \approx \alpha_{\text{irr}} \left(\frac{R_{\text{WD}}}{A} \right)^2 \frac{T_{\text{WD}}^4}{T_0^4} \approx 0.1. \quad (3.170)$$

Für heißere Weiße Zwerge kann dieser Wert entsprechend größer werden.

3.6.5 Intermittierende Bestrahlung

Ein weiterer wichtiger Punkt, auf den bisher nicht eingegangen wurde, ist intermittierende Bestrahlung. Viele CVs akkretieren nämlich auch auf kurzen Zeitskalen nicht mit einer gleichbleibenden Rate. Die Klasse der Zwergnovae, die sich noch in eine Reihe verschiedener Subtypen unterteilt, zeichnet sich beispielsweise durch kurzzeitige Ausbrüche auf einer Zeitskala von einigen Tagen bis Wochen aus, während derer die Leuchtkraft um mehrere Größenordnungen ansteigt. Die Klasse der Novaähnlichen Veränderlichen besitzt dagegen eine im Wesentlichen konstante Helligkeit. Eine ausführliche Diskussion der verschiedenen CV-Klassen findet sich bei WARNER (1995).

Zurückgeführt wird das so unterschiedliche Verhalten der beiden ansonsten so ähnlichen CV-Klassen auf eine thermische Instabilität der Akkretionsscheibe. Liegt die Temperatur überall in der Scheibe über einem für die Wasserstoffionisation kritischen Wert T_{crit} , so ist die Scheibe thermisch stabil. Die Materie strömt in diesem Fall mit einer gleichbleibenden Rate von außen nach innen durch die Scheibe, und die Massenüberstromrate über den L_1 -Punkt ist gleich der Akkretionsrate auf den Weißen Zwerg. Fällt die Temperatur aber an irgendeinem Punkt in der Scheibe unter diesen kritischen Wert, so wird die Scheibe instabil (SMAK, 1984, SHAFER et al., 1986). In diesem Fall nimmt die Scheibe abwechselnd einen „High“ und einen „Low State“ ein. Im „High State“ liegt die Massendurchstromrate über der säkularen Rate, und die Scheibe entleert sich solange, bis nicht mehr genug Materie vorhanden ist, um die hohe Durchstromrate aufrechtzuerhalten. Die Scheibe wechselt nun in den „Low State“, in dem die Durchstromrate unter der säkularen Rate liegt, und die Scheibe füllt sich wieder auf, bis der Zyklus von Neuem beginnt. Im „High State“ der Scheibe steigt die Helligkeit der CV um mehrere Größenklassen an, so daß man bei diesen Systemen intermittierende Bestrahlung vorliegen hat. Für LMXBs gilt ähnliches, allerdings spielt bei diesen Systemen möglicherweise auch die Bestrahlung der Scheibe eine Rolle (KING, 1995).

Die Temperatur an einem Punkt der stationären Scheibe hängt von der Massendurchstromrate und der Entfernung vom Zentrum ab. Die niedrigste Temperatur wird am Außenrand der Scheibe erreicht, und der Scheibenradius hängt von Bahnabstand ab. Daher gibt es eine vom Bahnabstand bzw. der Bahnperiode abhängige kritische Massentransferrate \dot{M}_{crit} . Liegt die säkulare Transferrate über diesem Wert und somit die Temperatur der Scheibe überall oberhalb von T_{crit} , so ist die Scheibe stabil, und das System erscheint als Novaähnliche Veränderliche. Liegt die säkulare Transferrate unter diesem Wert, so ist die Scheibe instabil, und das System erscheint als Zwergnova.

Bei CVs ist die Akkretionsleuchtkraft im „Low State“ der Scheibe zu niedrig, um die stationäre Massenüberstromrate zu destabilisieren. Im „High State“ der Scheibe ist sie dagegen vermutlich groß genug. Da die Zeitskala der Scheibeninstabilitäten verschwindend klein ist gegenüber der thermischen Zeitskala des masseverlierenden Sterns, wird die Wirkung von „High“ und „Low State“ der Akkretionsscheibe sich in irgendeiner gemittelten Form auf den Stern auswirken. Die ersten Versuche, den Effekt intermittierender Bestrahlung numerisch über sphärisch symmetrisch bestrahlte Sterne über zu simulieren, gehen auf HARPAZ und RAPPAPORT (1995) zurück.

Entscheidend für die Reaktion des Sterns auf intermittierende Bestrahlung ist die thermische Zeitskala der überadiabatischen Konvektionszone τ_{sa} . Für einen Hauptreihenstern von $0.8 M_{\odot}$ und einer Relativmasse von $3 \cdot 10^{-10}$ für die überadiabatische Konvektionszone ergibt sich ein Wert von

$$\tau_{\text{sa}} = \frac{U_{\text{sa}}}{L} \approx 20 \text{ min}, \quad (3.171)$$

und für einen Riesen der gleichen Masse mit $110 L_{\odot}$ und einer Relativmasse der

überadiabatischen Konvektionszone von $5 \cdot 10^{-5}$ ergibt sich ein Wert von

$$\tau_{\text{sa}} = \frac{U_{\text{sa}}}{L} \approx 10 \text{ d.} \quad (3.172)$$

U_{sa} bezeichnet hierbei die Innere Energie der überadiabatischen Konvektionszone und L die Gesamtleuchtkraft des Sterns. Ist die Dauer eines Ausbruchs kürzer als τ_{sa} , so kann der Stern während der Dauer des Ausbruchs seine Energie nicht über die bestrahlte Fläche abstrahlen, und die überadiabatische Konvektionszone heizt sich auf. Auf den Zustand, genauer gesagt die Entropie der tieferliegenden adiabatischen Konvektionszone hat dies jedoch keinen Einfluß. Unmittelbar nach dem Ende des Ausbruchs strahlt die überadiabatische Konvektionszone die aufgestaute Energie wieder ab, und der Nettoeffekt ist quasi Null. Der Stern verhält sich, als werde er im Mittel lediglich vom Bestrahlungsfluß im „Low State“ beleuchtet. Es gilt:

$$\alpha_d \approx \frac{\langle f_{\text{irr,low}} \rangle}{\langle f_{\text{irr,mean}} \rangle} = \frac{\dot{M}_{\text{low}}}{\dot{M}}, \quad (3.173)$$

wobei $\langle f_{\text{irr,mean}} \rangle$ den mittleren Bestrahlungsfluß bezeichnet. $\alpha_d = 1$ entspricht Akkretion mit einer stationären Rate.

Auf Grund der kurzen Zeitskala der überadiabatischen Konvektionszone ist es auch irrelevant, daß der Stern nicht über eine KELVIN-HELMHOLTZ-Zeitskala synchron mit der Bahn rotiert, sondern es reicht, wenn der Stern auf einer Zeitskala $\tau \gg \tau_{\text{sa}}$ synchron rotiert. Dies ist jedoch angesichts der kurzen, in Abschnitt 2.1 diskutierten Synchronisationszeitskalen gegeben.

Für Zwergnovae, deren masseverlierender Stern über eine nennenswerte überadiabatische Konvektionszone verfügt, ist daher α_d und somit α viel zu klein, um Massentransferzyklen auszulösen. Für Novaähnliche Veränderliche ist dagegen per Definition $\alpha_d = 1$. Ob und welche dieser Systeme Massentransferzyklen durchlaufen, hängt von den Werten von α_{accr} , α_{irr} und natürlich dem magnetischen Bremsgesetz ab.

Ist die Dauer eines Ausbruchs deutlich größer als τ_{sa} , so stellt sich nicht nur die überadiabatische Konvektionszone auf die neuen äußeren Randbedingungen ein, sondern es wird auch der Energietransport von der adiabatischen Konvektionszone nach außen blockiert, und die Entropie der adiabatischen Konvektionszone steigt. Nach dem Ende des Ausbruchs kann zwar die überadiabatische Konvektionszone die in ihr angestaute Energie abstrahlen, die adiabatische Konvektionszone aber nicht. Daher wächst in jedem „High State“ der Scheibe die Entropie in der adiabatischen Konvektionszone um einen geringen Betrag. Ist im „High State“ der Scheibe der intrinsische Fluß auf der bestrahlten Seite vollständig blockiert und der Bestrahlungsfluß im „Low State“ der Scheibe Null, so gilt näherungsweise:

$$\alpha_d \approx \frac{\tau_{\text{high}}}{\tau_{\text{high}} + \tau_{\text{low}}}, \quad (3.174)$$

wobei τ_{high} und τ_{low} die jeweilige Dauer des „High“ bzw. „Low State“ bezeichnen.

Nun besitzen nicht alle massegebenden Sterne in CVs eine überadiabatische Konvektionszone. Es ist daher möglich, daß unentwickelte Hauptreihensterne mit $M \lesssim 0.5 M_{\odot}$ auch von kurzen Ausbrüchen beeinflusst werden (BRETT und SMITH, 1993), da die adiabatische Konvektionszone bis an die Photosphäre reicht. Dies würde bedeuten, daß für massearme, unentwickelte CVs mit einer Bahnperiode von bis zu fünf Stunden α_d durch (3.174) gegeben ist.

3.6.6 Beobachtbare Konsequenzen

Nachdem das Problem der Massentransferzyklen auf thermischer Zeitskala in den vorangegangenen Abschnitten ausführlich diskutiert wurde, verbleibt die Frage, welche beobachtbaren Konsequenzen dieses mögliche Phänomen auf die Population der Kataklysmischen Veränderlichen, bzw. der Massearmen Röntgendoppelsterne hat.

Klar ist, daß ein einzelner Zyklus viel zu lange dauert, um jemals beobachtet werden zu können. Stattdessen würde man Mitglieder einer Population in verschiedenen Stadien der Entwicklung beobachten und daraus möglicherweise den falschen Schluß ziehen, daß es sich um verschiedene Populationen handelt, oder die Größe einer Population dramatisch unterschätzen, wenn die meisten ihrer Mitglieder sich unbeobachtbar im „Low State“ befinden.

Von marginal instabilen Systemen abgesehen überspannt die Massentransferrate der bestrahlungsunstabilen Systeme im Laufe eines Zyklus mehrere Größenordnungen, oder der Massentransfer schaltet sich im „Low State“ sogar komplett ab. Die Zeitskala des Ein- und Ausschaltens des Massentransfers ist sehr kurz im Vergleich zur Dauer des „High“ oder „Low State“. Sobald beim Einschalten des Massentransfers ein Anteil s der intrinsischen Leuchtkraft des Sterns blockiert ist, wird der Massentransfer durch die thermische Relaxation angetrieben. Nach dem Bipolytopenmodell ist die Antriebszeitskala durch $\frac{\tau_{ce}}{s}$ gegeben. Die Zeitskala, auf der Störungen nivelliert werden, ist nach dem in Abschnitt 2.4 gesagten von der Größenordnung einiger $\frac{H_P}{R}$ mal der Antriebszeitskala. Dies ist wesentlich kürzer als die Antriebszeitskala selbst, so daß sich das in Abschnitt 2.3.5 diskutierte eindimensionale Modell (2.140) für vorgegebene thermische Relaxation K auf den Einschaltvorgang anwenden läßt. Die Dauer des Einschaltvorgangs (und analog auch des Ausschaltvorgangs) ist also von der Größenordnung

$$\tau \sim \frac{H_P}{R} \frac{\tau_{ce}}{s_{\max}} \quad (3.175)$$

und somit ein verschwindender Bruchteil der gesamten Zykluszeit. Daher ist anzunehmen, daß sich praktisch alle Mitglieder einer Population entweder im „High“ oder im „Low State“ befinden.

Im „Low State“ ist die Massentransferrate entweder sehr niedrig oder Null, so daß solche Systeme kaum beobachtet werden können und im Regelfall als getrennte Doppelsternsysteme erscheinen. Da die säkulare Massentransferrate durch Massentransferzyklen kaum beeinflusst wird, ist das Verhältnis von τ_{high}

und τ_{low} durch das Verhältnis der Massentransferrate im „High State“ \dot{M}_{high} zur säkularen Massentransferrate $\overline{\dot{M}}$ gegeben. Nur der Anteil

$$\frac{\tau_{\text{high}}}{\tau_{\text{high}} + \tau_{\text{low}}} \approx \frac{\overline{\dot{M}}}{\dot{M}_{\text{high}}} \quad (3.176)$$

der Population ist beobachtbar. Dies kann etwa die Hälfte oder auch nur ein verschwindender Bruchteil der Population sein, wie sich aus den Abbildungen in den vorangegangenen Abschnitten ersehen läßt. Allgemein gilt: Je schwächer die Bremsung, d.h. je kleiner die säkulare Massentransferrate, desto größer ist der nicht beobachtbare Anteil der Population im „Low State“. Die Massentransferrate im „High State“ ist nicht konstant, sondern nimmt, von einem Maximalwert ausgehend, mit der sich abschwächenden thermischen Relaxation ab. Sie überspannt etwa eine Größenordnung in \dot{M} .

Aus diesem Grund bieten sich Massentransferzyklen als eine natürliche Erklärung für unterschiedliche beobachtete Massentransferraten bei ansonsten ähnlichen Systemen an. So würden beispielsweise bestrahlungsstabile Systeme eine niedrige Massentransferrate aufweisen und als Zwergnovae erscheinen, während bestrahlungsunstabile Systeme im „High State“ deutlich höhere Massentransferraten aufwiesen und als Novaähnliche Veränderliche sichtbar wären.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Die numerische Simulation von Massentransferzyklen auf thermischer Zeitskala, wie sie im Zusammenhang mit der Entwicklung kompakter Doppelsternsysteme in der Literatur des öfteren diskutiert wurden, bildete den Schwerpunkt dieser Arbeit. Hierbei gab es zwei miteinander verknüpfte Zielsetzungen: Zum einen sollte das von RITTER et al. (1995, 1996), KING et al. (1996), RITTER et al. (2000) für Sterne mit einer konvektiven Hülle entwickelte, analytische Modell zum Auftreten von Massentransferzyklen numerisch durch Verwendung vollständiger hydrostatischer Sternmodelle überprüft werden. Fast alle zuvor durchgeführten numerischen Simulationen beruhten lediglich auf Bipolytopenmodellen. Zum anderen sollte die von KING et al. (1997) getroffene Vorhersage überprüft werden, wonach Kataklysmische Veränderliche mit nuklear entwickelten Sternen, die im Rahmen des analytischen Modells formal nicht behandelt werden können, eine höhere Suszeptibilität gegenüber Massentransferzyklen aufweisen sollten als Kataklysmische Veränderliche mit unentwickelten Hauptreihensterne.

Als Voraussetzung für die Durchführung der gewünschten Entwicklungsrechnungen war es notwendig, einen numerischen Algorithmus zu entwickeln, der es ermöglichte, den Massentransfer und insbesondere das Ein- und Ausschalten des Massentransfers sowohl physikalisch mit hinreichender Genauigkeit als auch numerisch stabil mit einer akzeptablen Anzahl von Zeitschritten zu berechnen. In diesem Zusammenhang wurde analytisch gezeigt, daß das üblicherweise verwendete explizite Verfahren zur Bestimmung der Massentransferrate numerisch instabil ist, falls die gewählte Zeitschrittlänge Δt größer ist als eine kritische Zeitschrittlänge Δt_{\max} , die sich explizit angeben läßt. Es konnte gezeigt werden, daß für eine einfache Langzeitentwicklung einer CV mit einem massearmen Hauptreihensterns ohne Bestrahlungsrückkopplung mindestens 2600 Zeitschritte pro Halbierung der Sternmasse notwendig sind. In der Praxis sind es sogar noch deutlich mehr, da Δt_{\max} zur Laufzeit nicht genau genug bestimmt werden kann, so daß für eine Langzeitentwicklung von $\sim 1 M_{\odot}$ auf $\sim 0.1 M_{\odot}$ einige 10^4 Zeitschritte benötigt werden, für den besonders instabilen Massentransfer auf der thermischen Zeitskala können es sogar einige 10^5 Zeitschritte werden.

Außerdem wurde gezeigt, daß ein implizites Zeitschrittverfahren in Form eines NEWTON-Verfahrens eine vermutlich optimale Kontrolle der numerischen Instabilitäten bietet. Die Gesamtmasse M des Sterns wurde daher als zusätzliche Variable in das HENYEY-Iterationsverfahren, ein NEWTON-Verfahren zur Lösung der Sternaufbaugleichungen, eingebaut. Hierdurch konnte die Anzahl der für eine Langzeitentwicklung notwendigen Zeitschritte auf wenige 10^3 reduziert werden.

Es wurde das analytische Modell von KING et al. (1996), RITTER et al. (2000)

ausführlich hergeleitet und diskutiert. Hierbei wurde ein bisher vernachlässigter Term berücksichtigt. Dieser bewirkt, daß es nicht nur eine obere Grenze für die Drehimpulsverluste, bzw. die Expansionsrate durch nukleare Entwicklung gibt, oberhalb derer ein System grundsätzlich stabil ist, sondern daß es auch eine untere Grenze gibt, unterhalb derer ein System ebenfalls stabil ist.

CVs mit Riesen als Massegeber liegen für physikalisch sinnvolle Werte des Bestrahlungseffizienzparameters α unterhalb dieser Grenze, so daß sie, anders als erwartet, vermutlich stabil sind.

Für CVs mit unentwickelten Hauptreihensternen liefert das analytische Modell quantitativ brauchbare Vorhersagen für das Auftreten von Massentransferzyklen. Damit diese Systeme instabil werden, ist ein verhältnismäßig großer Wert des Effizienzparameters von $\alpha \gtrsim 0.1$ Voraussetzung. Des weiteren ist für Systeme mit Bahnperioden von 3 bis 5 Stunden, bzw. Donormassen von etwa $0.35 - 0.6 M_{\odot}$ eine niedrige Drehimpulsverlustrate erforderlich, die ein kleines Vielfaches der gravitativen Bremsrate nicht überschreiten darf, während für längerperiodische Systeme mit Donormassen von $\sim 1 M_{\odot}$ eine höhere Drehimpulsverlustrate erforderlich ist. Zwischen 2 und 3 Stunden werden alle CVs mit unentwickelten Hauptreihensternen selbst für die niedrigste mögliche Bremsrate, also Bremsung allein durch Abstrahlung von Gravitationswellen, stabil.

Die erforderliche niedrige Bremsrate im Periodenbereich von 3 – 5 Stunden ist wesentlich niedriger als die üblicherweise verwendeten Bremsraten, etwa nach VERBUNT und ZWAAN (1981), und auch niedriger als die für das Periodenlückenmodell (SPRUIT und RITTER, 1983, KOLB, 1993) notwendige Bremsrate. Sie ist jedoch verträglich mit den von SILLS et al. (2000), ANDRONOV et al. (2003) aus neueren Beobachtungen abgeleiteten Bremsraten.

Für die stark entwickelten Kerne massereicherer Hauptreihensterne nach Verlust ihrer Hülle, sogenannte Remnants of Thermal Timescale Mass Transfer, für die das analytische Modell formal nicht anwendbar ist, zeigen sich deutliche Abweichungen zwischen den auf diese Systeme übertragenen Aussagen des analytischen Modells und den numerischen Entwicklungsrechnungen, und zwar sind diese Systeme stabiler als erwartet. Die Ursache ist möglicherweise, daß das analytische Modell die thermische Zeitskala der konvektiven Hülle in diesen Systemen unterschätzt.

Von Massearmen Röntgendoppelsternen war ursprünglich angenommen worden, daß die Bestrahlungsstärke für physikalisch sinnvolle Werte von α im Allgemeinen zu groß ist, um Massentransferzyklen auszulösen. Dies ist jedoch nicht der Fall, wenn berücksichtigt wird, daß die Regionen in der Nähe des Terminators nur in einem sehr flachen Winkel und somit nur mit einem verhältnismäßig geringen effektiven Fluß bestrahlt werden. Das führt dazu, daß selbst für sehr hohe Bestrahlungsstärken die Bestrahlungsrückkopplung nicht vollständig verschwindet. Es zeigt sich, daß massearme Röntgendoppelsterne sowohl mit Hauptreihensternen als auch mit Riesen als Massegeber für $\alpha \lesssim 0.1$ unter Umständen Massentransferzyklen durchlaufen können. Für LMXBs mit unentwickelten Hauptreihensternen gilt in Bezug auf die für Massentransferzyklen erforderlichen Bremsraten das für CVs mit unentwickelten Hauptreihensternen gesagte.

Eine große Unbekannte in der Diskussion der Bestrahlungszyklen stellt der Effizienzparameter α dar. Dieser Parameter als Funktion des Spektrums der Bestrahlung entscheidet, welche Systeme unter welchen Bedingungen Massentransferzyklen durchlaufen können. Im Prinzip ist es heutzutage möglich, volle Atmosphärenmodelle mit Bestrahlung durch ein vorgegebenes Spektrum zu berechnen und durch Vergleich mit grauen Atmosphärenmodellen α_{irr} zu erhalten. Durch den Vergleich der aus den Atmosphärenmodellen errechneten synthetischen Spektren mit tatsächlich beobachteten Spektren bestrahlter Atmosphären ist es prinzipiell möglich, $\alpha_{\text{irr}}\alpha_{\text{accr}}$ zu bestimmen und so auch Informationen über α_{accr} zu gewinnen.

Sollte α für bestimmte Unterklassen der Kataklysmischen Veränderlichen, bzw. der Massearmen Röntgendoppelsterne in einer geeigneten Größenordnung liegen, so ließen sich für diesen Wert von α Populationsstudien durchführen, um eine Verteilung der Massentransferraten, bzw. den Anteil der Systeme im beobachtbaren „High State“ an der Gesamtpopulation zu bestimmen. Durch den Vergleich der synthetischen Verteilungen mit der beobachteten Verteilung ließen sich schließlich Rückschlüsse auf das tatsächliche magnetische Bremsgesetz ziehen.

A Die Grundgleichungen des Sternaufbaus

Einzelsterne sind, vernachlässigt man Rotation und starke Magnetfelder, sphärisch symmetrisch. Selbst Sterne in einem Doppelsternsystem, die ihr kritisches ROCHE-Volumen ausfüllen, weichen nur geringfügig, und dies auch nur in den äußeren Schichten, von der sphärischen Struktur ab (PRINGLE, 1985).

Die mechanische und thermische Struktur sphärischer Sterne ist durch vier Grundgleichungen, partielle Differentialgleichungen in zwei Variablen, bestimmt. In LAGRANGEScher Formulierung sind die unabhängigen Variablen die Zeit t sowie die Relativmasse

$$M_r = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' \quad (\text{A.1})$$

innerhalb der Massenschale mit Radius r , wobei ρ die Dichte bezeichnet (COX und GIULI, 1968, KIPPENHAHN und WEIGERT, 1990). Die erste Sternaufbaugleichung

$$\frac{\partial r}{\partial M_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (\text{A.2})$$

beschreibt die Verteilung der Masse durch den Stern von $M_r = 0$ bis $M_r = M$.

$$\frac{\partial P}{\partial M_r} = -\frac{\Gamma M_r}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \quad (\text{A.3})$$

mit der Gravitationskonstanten Γ ist die Bewegungsgleichung für die Massenschale M_r . Im hydrostatischen Gleichgewicht, d.h. für $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = 0$ bestimmt sie die hydrostatische Struktur des Sterns. Die dritte Grundgleichung

$$\frac{\partial L_r}{\partial M_r} = \varepsilon_{\text{nuc}} - \varepsilon_\nu + \varepsilon_g \quad (\text{A.4})$$

folgt aus der Energieerhaltung und gibt an, wie sich der durch die Massenschale M_r nach außen fließende Energiestrom L_r an der Stelle M_r ändert. ε_{nuc} bezeichnet hierbei die nukleare Energieerzeugung pro Masse und Zeit, ε_ν die Neutrinoverluste pro Masse und Zeit und ε_g die pro Masse und Zeit freigesetzte Wärmeenergie, die sich aus thermischer, gravitativer und chemischer Energie zusammensetzt¹:

$$dQ = -T dS = dU - \frac{P}{\rho^2} d\rho + \frac{\mathcal{M}}{\mu^2} d\mu. \quad (\text{A.5})$$

¹Sämtliche extensiven thermodynamischen Variablen wie die Innere Energie U oder die Entropie S sind in dieser Arbeit immer pro Masseneinheit angegeben. Das Volumen V geht daher in $\frac{1}{\rho}$, dV in $-\frac{1}{\rho^2} d\rho$, die Teilchenzahl N in das inverse Molekulargewicht $\frac{1}{\mu}$, und dN in $-\frac{1}{\mu^2} d\mu$ über. In der Literatur wird meist die dimensionslose Größe $\tilde{\mu} := \frac{\mu}{1 \text{ amu}}$ statt μ und $\mathcal{R} := \frac{k}{1 \text{ amu}}$ statt der BOLTZMANN-Konstanten k verwendet. \mathcal{R} bezeichnet hierbei *nicht* die allgemeine Gaskonstante. Für eine Einführung in die Thermodynamik sei auf (JELITTO, 1989) verwiesen.

Der letzte Term mit dem *elektrochemischen Potential* \mathcal{M} beschreibt die Änderung des Ionisationsgrades bzw. Molekülbildung, die in der Literatur meist in der Behandlung der Inneren Energie U eingeschlossen sind. Somit ist ε_g durch die zeitliche Änderung² der Entropie gegeben:

$$\varepsilon_g = -T \left(\frac{dS}{dt} \right)_{M_r}. \quad (\text{A.6})$$

Die vierte Sternaufbaugleichung schließlich beschreibt den Energietransport:

$$\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} = \nabla \quad (\text{A.7})$$

Für reinen Strahlungstransport ergibt sich der *radiative Temperaturgradient*

$$\nabla_{\text{rad}} = \frac{3\kappa}{16\pi ca\Gamma} \frac{L_r P}{M_r T^4} \quad (\text{A.8})$$

mit der *Opazität* κ , der Strahlungsdichtekonstante a und der Lichtgeschwindigkeit c . Für Energietransport durch rein adiabatische Konvektion ist die vierte Sternaufbaugleichung dagegen durch den *adiabatischen Temperaturgradienten*

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{\text{ad}} = \nabla_{\text{ad}}(T, P, \mu) \quad (\text{A.9})$$

gegeben, der nichts anderes ist als die totale Ableitung der Temperatur nach dem Druck bei konstanter Entropie. Für nichtadiabatische Konvektion liegt der wahre Temperaturgradient ∇ zwischen beiden Extremen, und eine Konvektionstheorie ist erforderlich. Üblich ist die Verwendung der *Mischungswegtheorie* (BÖHM-VITENSE, 1958, COX und GIULI, 1968).

Zur Lösung der Sternaufbaugleichungen bei vorgegebenem chemischem Profil scheint somit die Kenntnis der *Fundamentalgleichung* der Thermodynamik $S(U, \rho, \mu)$ (bzw. $U(S, \rho, \mu)$ in der Energiedarstellung) in einer beliebigen Darstellung mit den konjugierten Variablenpaaren $U \leftrightarrow T$, $\rho \leftrightarrow P$, $\mu \leftrightarrow \mathcal{M}$ (bzw. $S \leftrightarrow T$, $\rho \leftrightarrow P$, $\mu \leftrightarrow \mathcal{M}$ in der Energiedarstellung) erforderlich, aus der sich alle weiteren thermodynamischen Größen wie ρ und ∇_{ad} herleiten lassen. In der Praxis reicht jedoch, eine Umformulierung von (A.6) vorausgesetzt, eine *Zustandsgleichung* für ρ sowie die Kenntnis einiger thermodynamischer Koeffizienten. Des weiteren wird noch die Kenntnis der Materialfunktionen κ , ε_n und ε_ν benötigt.

²Die totale Ableitung der Entropie $\frac{dS}{dt}$ bezieht sich hierbei auf die totale Ableitung von S nach t in einer festen Massenschale M_r bei variablen thermodynamischen Größen T , P und μ . Innerhalb der Sternaufbaugleichungen böte es sich an, stattdessen $\varepsilon_g = -T \frac{\partial S}{\partial t}$ zu benutzen, was trotz unterschiedlicher Schreibweise ebenfalls die Ableitung von S nach t bei konstantem M_r bezeichnet. Die Ambivalenz dieser beiden Schreibweisen führt häufig zu Irritationen, wenn nicht deutlich gesagt wird, bezüglich welcher Variablen die totale, bzw. die partielle Ableitung gebildet wird. Es wird in dieser Arbeit daher häufig auf die in der Thermodynamik „übliche“ Nomenklatur $\left(\frac{dX}{dY} \right)_Z$ zurückgegriffen. Sie bedeutet die Ableitung von X nach Y unter der Nebenbedingung, daß Z konstant ist.

Für die zeitliche Entwicklung der chemischen Zusammensetzung sind weitere Gleichungen erforderlich:

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{m_i}{\rho} \left(\sum_{j=1}^I r_{ji} - r_{ij} \right), \quad i = 1, \dots, I \quad (\text{A.10})$$

und

$$\sum_{i=1}^I X_i = 1. \quad (\text{A.11})$$

Hierbei bezeichnet X_i den Massenanteil und m_i die Kernmasse des Isotops i , sowie r_{ij} die nuklearen Reaktionsraten. In konvektiven Zonen ist zu berücksichtigen, daß die Massenanteile X_i im Wesentlichen räumlich konstant sind. Die Zeitentwicklung der Mittelwerte ergibt sich in diesem Fall als Integral über die lokalen Änderungen von X_i zuzüglich der Änderungen durch die Verschiebung der Grenzen der Konvektionszone und das damit verbundene Mischen mit Material von außerhalb der Konvektionszone.

B Das Sternentwicklungsprogramm

B.1 Allgemeines

Das für diese Arbeit verwendete Sternentwicklungsprogramm basiert auf einem ursprünglich von KIPPENHAHN et al. (1967) entwickelten Code, der im Laufe der Zeit von verschiedenen Leuten verändert und weiterentwickelt wurde und der speziell auf die akkurate Berechnung von Sonnenmodellen optimiert wurde (SCHLATTTL et al., 1997, SCHLATTTL, 1999).

Bei der Lösung der Sternaufbaugleichungen werden die Gleichungen (A.2), (A.3), (A.4) sowie (A.7), die die mechanische und thermische Struktur des Sterns beschreiben, getrennt von den Gleichungen (A.10) sowie (A.11), die die chemische Entwicklung beschreiben, behandelt. Da das nukleare Netzwerk inklusive der Reaktionsraten (CAUGHLAN et al., 1985, ADELBERGER et al., 1998) für diese Arbeit unverändert übernommen wurde, soll darauf nicht weiter eingegangen werden. Ebenfalls unverändert blieb die Konvektionstheorie. Alle Sternentwicklungsrechnungen wurden mit der klassischen Mischungswegtheorie (BÖHM-VITENSE, 1958) mit einem Mischungswegparameter l von 1.5 durchgeführt.

Mit dem freundlicherweise von H. SCHLATTTL und A. WEISS zur Verfügung gestellten Sternentwicklungscode war es bedauerlicherweise nicht möglich, auf Grund von physikalischen und numerischen Unzulänglichkeiten in den vorhandenen Zustandsgleichungen und den Opazitäten, Hauptreihensterne kleiner als etwa $0.7 M_{\odot}$ zu rechnen. Die vorhandenen OPAL-Opazitätstabellen (IGLESIAS und ROGERS, 1996), die für niedrige Temperaturen durch die ALEXANDER-FERGUSON-Opazitäten (ALEXANDER und FERGUSON, 1994) ergänzt werden, mußten für diese Arbeit zu höheren Dichten und Drücken, wie sie in den Hüllen massearmer Hauptreihensterne vorkommen, erweitert werden. Die hierfür nötigen Tabellen wurden freundlicherweise von P. HAUSCHILDT und J. FERGUSON erzeugt. Des weiteren stellte es sich als notwendig heraus, die Zustandsgleichungen zu ersetzen, worauf in Anhang C eingegangen wird.

Die Berechnung der mechanischen und thermischen Struktur des Sterns basiert auf dem sogenannten HENYHEY-Iterationsschema (KIPPENHAHN et al., 1967). Wie in Abschnitt 2.4 gezeigt wird, ist es notwendig, ein implizites Verfahren zu benutzen, um eine genügend glatte Massentransferrate mit möglichst geringem Rechenaufwand zu erhalten. Der erste Vorschlag für ein äußerst einfaches, implizites Verfahren geht auf SAVONIJE (1978) zurück. Das für die Entwicklungsrechnungen in dieser Arbeit entwickelte Verfahren ist wesentlich komplexer und wird in den folgenden Abschnitten detailliert beschrieben. Es basiert darauf, die Sternmasse M als zusätzliche Variable dem HENYHEY-Verfahren hinzuzufügen. Insbesondere ist es notwendig, eine zusätzliche äußere Randbedingung für

M einzuführen. Ein ähnliches Verfahren, welches \dot{M} statt M als zusätzliche Variable benutzt, wurde unabhängig von BENVENUTO und DE VITO (2003) entwickelt. Des weiteren ist es erforderlich, eine äußere Randbedingung, die STEFAN-BOLTZMANN-Gleichung, zu modifizieren, um den Effekt der Bestrahlungsrückkopplung auf den Sternaufbau modellieren zu können. Für die Reaktion konvektiver Sternhüllen auf Bestrahlung wird auf die Tabellen von HAMEURY und RITTER (1997) sowie auf weitere, von J.-M. HAMEURY eigens für diesen Zweck erstellte Bestrahlungstabellen zurückgegriffen.

B.2 Diskretisierung des Sternaufbaus

Als Grundlage für die numerische Berechnung dient ein sphärisch symmetrischer Stern, über den ein eindimensionales Gitter von m nicht äquidistanten Stützstellen in der unabhängigen Variablen $0 \leq \frac{M_r}{M} \leq 1$ gelegt wird. Es werden im Prinzip die Sternaufbaugleichungen in LAGRANGEScher Formulierung, (A.2), (A.3), (A.4) sowie (A.7), verwendet und durch Differenzgleichungen für die Stützstellen ersetzt. $q_k^{(n)}$ bezeichne die k -te Stützstelle des Sterns zur Zeit t_n mit

$$q_1^{(n)} = 1, \quad q_m^{(n)} = 0, \quad (\text{B.1})$$

d.h. die erste Stützstelle entspricht dem Sternrand, die letzte dem Sternzentrum. $P_k^{(n)}$, $T_k^{(n)}$, $r_k^{(n)}$, $L_k^{(n)}$, $X_{j,k}^{(n)}$ seien die Werte der Variablen P , T , r , L_r sowie X_j an der Stelle $\frac{M_r}{M} = q_k^{(n)}$ zur Zeit t_n . Bei Berücksichtigung von Massenverlust kommt noch als zusätzliche Variable die Gesamtmasse $M^{(n)}$ hinzu. Die geeignete Wahl der Stützstellen zur Laufzeit ist von außerordentlicher Bedeutung. Große Änderungen im Sternaufbau über einen kleinen Massenbereich Δq , wie sie beispielsweise in den äußersten Schichten unterhalb der Photosphäre oder beim Übergang zwischen Schichten mit konvektivem und radiativem Energietransport auftreten, müssen hoch aufgelöst werden. Gleichzeitig soll die Gesamtzahl der Gitterpunkte möglichst klein sein, um Rechenzeit zu sparen. Aus diesem Grund wird ein spezieller Gitterpunktalgorithmus verwendet, der deutlich bessere Ergebnisse liefert als frühere Verfahren (WAGENHUBER und WEISS, 1994).

$M^{(n)}$, $P_k^{(n)}$, $T_k^{(n)}$, $r_k^{(n)}$, $L_k^{(n)}$, $X_{j,k}^{(n)}$ seien für alle Teilchensorten j für ein vorgegebenes n für alle $k \in \{1, \dots, m\}$ aus einem Vorgängermodell gegeben, und es sollen nun die Werte für den $(n+1)$ -ten Zeitschritt berechnet werden. Die praktische Implementierung sieht wie folgt aus: Erst wird die zeitliche Entwicklung der chemischen Zusammensetzung aus (A.10) sowie (A.11) berechnet, und man erhält $X_{j,k}^{(n+1)}$ für alle $k \in \{1, \dots, m\}$. Es verbleiben somit noch die vier Differentialgleichungen für die mechanische und thermische Struktur des Sterns. Im Folgenden wird der hochgestellte Index $(n+1)$ zur Vereinfachung der Nomenklatur fortgelassen, während (n) beibehalten wird und den zugehörigen Wert des Vormodells bezeichnet.

Der Stern wird als im hydrostatischen Gleichgewicht befindlich angenommen, so daß die zweite Zeitableitung von r in (A.3) verschwindet. Des weiteren verwendet das Sternentwicklungsprogramm für P , T und r logarithmische, für L_r dagegen lineare Größen, weil dies numerisch günstiger ist. In der unabhängigen Variablen

$$q := \frac{M_r}{M} \quad (\text{B.2})$$

lassen sich die verbliebenen Sternaufbaugleichungen (A.2), (A.3), (A.4) sowie (A.7) dann wie folgt schreiben:

$$\frac{\partial \ln r}{\partial q} = \frac{M}{4\pi r^3 \rho}, \quad (\text{B.3a})$$

$$\frac{\partial \ln P}{\partial q} = -\frac{\Gamma q M^2}{4\pi r^4 P}, \quad (\text{B.3b})$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial q} = (\varepsilon_{\text{nuc}} - \varepsilon_\nu + \varepsilon_g)M, \quad (\text{B.3c})$$

$$\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} = \nabla. \quad (\text{B.3d})$$

Der Temperaturgradient ∇ ist entweder gleich dem radiativen Temperaturgradienten

$$\nabla_{\text{rad}} = \frac{3\kappa}{16\pi^2 a c} \frac{L_r P}{q M T^4}, \quad (\text{B.4})$$

oder sich ergibt sich nach der Mischungswegtheorie aus ∇_{rad} und dem adiabatischen Temperaturgradienten ∇_{ad} , der aus dem lokalen thermodynamischen Gleichgewicht und somit der Zustandsgleichung folgt und daher unabhängig von M ist.

Die linke Seite der Sternaufbaugleichungen (B.3) wird durch Differenzgleichungen für die Werte der Strukturvariablen an den Stützstellen ersetzt, während die rechte Seite in geeigneter Weise an den Stützstellen ausgewertet wird. Bezeichnet

$$\mathbf{x} := (P, T, r, L) \in \mathbb{R}^4 \quad (\text{B.5})$$

einen Vektor der Strukturvariablen an einer Stützstelle, so lassen sich für die rechte Seite von (B.3) die Funktionen

$$g_{k,r}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, M) := \frac{M}{4\pi \tilde{r}_k^3 \tilde{\rho}_k}, \quad (\text{B.6a})$$

$$g_{k,P}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, M) := -\frac{\Gamma \tilde{q}_k M^2}{4\pi \tilde{r}_k^4 \tilde{P}_k}, \quad (\text{B.6b})$$

$$g_{k,L}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, M) := (\tilde{\varepsilon}_{\text{nuc},k} - \tilde{\varepsilon}_{\nu,k} + \tilde{\varepsilon}_{g,k}) M, \quad (\text{B.6c})$$

$$g_{k,T}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, M) := \tilde{\nabla}_k \quad (\text{B.6d})$$

definieren. Hierbei wird für die Variablen r , P , T , ρ das geometrische Mittel ihrer Werte an den Stützstellen k und $k + 1$ eingesetzt, d.h.

$$\begin{aligned}\tilde{r}_k &:= \sqrt{r_k r_{k+1}}, & \tilde{P}_k &:= \sqrt{P_k P_{k+1}}, & \tilde{T}_k &:= \sqrt{T_k T_{k+1}}, \\ \tilde{\rho}_k &:= \sqrt{\rho(T_k, P_k) \rho(T_{k+1}, P_{k+1})},\end{aligned}\tag{B.7a}$$

und für alle übrigen das arithmetische Mittel¹, d.h.

$$\tilde{q}_k := \frac{1}{2} (q_k + q_{k+1}), \quad \tilde{L}_k := \frac{1}{2} (L_k + L_{k+1}).\tag{B.7b}$$

Es werden somit für die Stützstellen $k = 1, \dots, m - 2$ die Nullstellen der folgenden Funktion gesucht:

$$\mathbf{f}_k \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k+1} \\ M \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f_{k,P} \\ f_{k,T} \\ f_{k,r} \\ f_{k,L} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{\ln P_{k+1} - \ln P_k}{q_{k+1} - q_k} - g_{k,P} \\ \frac{\ln T_{k+1} - \ln T_k}{\ln P_{k+1} - \ln P_k} - g_{k,T} \\ \frac{\ln r_{k+1} - \ln r_k}{q_{k+1} - q_k} - g_{k,r} \\ \frac{L_{k+1} - L_k}{q_{k+1} - q_k} - g_{k,L} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.\tag{B.8}$$

Es handelt sich hierbei um $4(m - 2)$ Gleichungen für die $4(m - 1) + 1$ Unbekannten P_k , T_k , r_k , L_k und M . Die für die eindeutige Auflösung fehlenden Gleichungen müssen geeigneten Randbedingungen für $k = 1$ bzw. $k = m$ entnommen werden.

ε_g ist gemäß (A.6) über die zeitliche Änderung der Entropie bei festem M_r definiert. Da die Sternaufbaugleichungen (B.3) in der gewählten, pseudo-LAGRANGESchen Formulierung Differentialgleichungen in q und nicht in M_r sind, ist somit ε_g von der Gesamtmasse M abhängig. Denn es gilt:

$$\varepsilon_{g,k} = -T_k \frac{\Delta S_k}{\Delta t} = -\frac{T_k}{\Delta t} \left(S_k - S^{(n)} \left(\frac{M}{M^{(n)}} q_k \right) \right),\tag{B.9}$$

wobei $M^{(n)}$ die Masse und $S^{(n)}(q)$ den Entropieverlauf des Vormodells bezeichnen. Wird die Masse im laufenden Zeitschritt Δt von $M^{(n)}$ auf M reduziert, so befand sich die Massenschale, die sich beim jetzigen Modell bei q_k (entsprechend $M_r = q_k M$) befindet, beim Vormodell an der Position $\frac{M q_k}{M^{(n)}}$ (entsprechend $M_r = q_k^{(n)} M^{(n)}$). Es gilt daher:

$$\frac{\partial \varepsilon_{g,k}}{\partial M} = \frac{T_k}{\Delta t} \frac{q_k}{M^{(n)}} S'^{(n)} \left(\frac{M}{M^{(n)}} q_k \right) \approx \frac{T_k}{\Delta t} \frac{q_k}{M^{(n)}} \frac{S_{k+1}^{(n)} - S_k^{(n)}}{q_{k+1} - q_k},\tag{B.10}$$

wobei $S'^{(n)}$ die Ableitung von $S^{(n)}$ nach dem Argument bezeichnet. Die letzte Näherung gilt natürlich nur, wenn $S_V(q)$ glatt genug ist und das Verhältnis $\frac{M}{M^{(n)}}$

¹Diese Wahl hat lediglich numerische Gründe. Und zwar ist der Logarithmus des geometrischen Mittels gerade das arithmetische Mittel der Logarithmen: $\ln \sqrt{ab} = \frac{1}{2} (\ln a + \ln b)$. Daher spart die Berechnung des geometrischen Mittels für logarithmische Größen Rechenzeit.

nicht zu sehr von 1 verschieden ist (abhängig von der Gitterpunktdichte). Der Beitrag der Ableitung von ε_g nach M ist absolut essentiell für die Behandlung von Massentransfer auf der thermischen Zeitskala.

Numerische Rechnungen zeigen, daß die Verwendung von S zur Berechnung von ε_g zu kleinen zeitlichen Fluktuationen in den stellaren Kenngrößen führt. Eine alternative Formulierung ist durch

$$\varepsilon_g = \frac{P}{\rho} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \left(\frac{1}{\nabla_{\text{ad}}} \frac{\dot{T}}{T} - \frac{\dot{P}}{P} \right) \quad (\text{B.11})$$

gegeben (KIPPENHAHN und WEIGERT, 1990, Gl 4.27), welche glattere Resultate liefert. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{g,k}}{\partial M} = & \frac{P_k}{\rho_k} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \Big|_{\mathbf{x}_k} \frac{q_k}{M^{(n)}} \left[(\ln P^{(n)})' \left(\frac{M}{M^{(n)}} q_k \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\nabla_{\text{ad}}} (\ln T^{(n)})' \left(\frac{M}{M^{(n)}} q_k \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$(\ln P^{(n)})'$ bzw. $(\ln T^{(n)})'$ bezeichnen hierbei die Ableitungen von $\ln P^{(n)}$ und $\ln T^{(n)}$ nach dem Argument.

Die partiellen Ableitungen von $f_{k,T}$, also die Ableitungen des Temperaturgradienten ergeben sich aus der Mischungswegtheorie und sollen im Folgenden nicht weiter ausgeführt werden. Die partielle Ableitung von ∇_{rad} nach der Masse läßt sich explizit hinschreiben, während ∇_{ad} als lokale thermodynamische Größe nicht von der Masse abhängig ist. Die partielle Ableitung des wahren Temperaturgradienten wird vom verwendeten Sternentwicklungscode ignoriert. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß Fehler in den Ableitungen nur die Konvergenzgeschwindigkeit des (modifizierten) HENYEY-Verfahrens, jedoch nicht das Ergebnis beeinflussen.

B.3 Die inneren Randbedingungen

Im Zentrum des Sterns besitzen die Sternaufbaugleichungen (B.3a) und (B.3b) für $r = 0$ (hebbare) Polstellen. Daher müssen P , T , r und L um $M_r = 0$ herum entwickelt werden (KIPPENHAHN und WEIGERT, 1990, Kap. 10). Der Index c bezeichne die Werte im Sternzentrum.

Für genügend kleine M_r (d.h. $\rho \approx \rho_c$) gilt offensichtlich:

$$r \approx \left(\frac{3}{4\pi} \frac{M_r}{\rho_c} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (\text{B.13})$$

Eingesetzt in (A.3) ergibt sich

$$\frac{\partial P}{\partial M_r} \approx -\frac{\Gamma}{4\pi} \left(\frac{4\pi}{3} \rho_c \right)^{\frac{4}{3}} M_r^{-\frac{1}{3}}, \quad (\text{B.14})$$

und daraus für den Druck in einer Umgebung um $r = 0$:

$$P \approx P_c - \frac{\Gamma}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \rho_c^{\frac{4}{3}} (qM)^{\frac{2}{3}}. \quad (\text{B.15})$$

Aus

$$\frac{\partial L_r}{\partial M_r} = \varepsilon_{\text{nuc}} - \varepsilon_\nu + \varepsilon_g \quad (\text{B.16})$$

ergibt sich

$$L_r \approx (\varepsilon_{\text{nuc}} - \varepsilon_\nu + \varepsilon_g) qM, \quad (\text{B.17})$$

und der Temperaturgradient wird durch das arithmetische Mittel approximiert:

$$\frac{\ln T - \ln T_c}{\ln P - \ln P_c} \approx \frac{1}{2} (\nabla + \nabla_c). \quad (\text{B.18})$$

Tatsächlich verwendet werden (B.13), (B.15), (B.17) und (B.18) im Sternentwicklungsprogramm in der folgenden Formulierung:

$$\frac{P}{P_c} - 1 = -\frac{\Gamma}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\rho_c^{\frac{4}{3}} (qM)^{\frac{2}{3}}}{P_c}, \quad (\text{B.19a})$$

$$\frac{\ln T - \ln T_c}{\ln P - \ln P_c} = \frac{1}{2} (\nabla + \nabla_c), \quad (\text{B.19b})$$

$$3 \ln r = \ln q + \ln M - \ln \rho_c + \ln \frac{3}{4\pi}, \quad (\text{B.19c})$$

$$L_r = \frac{1}{2} (\varepsilon_{\text{nuc}} + \varepsilon_{\text{nuc},c} - \varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu,c} - \varepsilon_g - \varepsilon_{g,c}) qM. \quad (\text{B.19d})$$

Wertet man die rechte Seite an der Stützstelle $m - 1$ unter Benutzung von $q_m = 0$ und $r_m = 0$ aus, so erhält man mit der Definition von

$$h_P(\mathbf{x}_{m-1}, \mathbf{x}_m, M) := -\frac{\Gamma}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\rho_m^{\frac{4}{3}} (q_{m-1} M)^{\frac{2}{3}}}{P_m}, \quad (\text{B.20a})$$

$$h_T(\mathbf{x}_{m-1}, \mathbf{x}_m, M) := \tilde{\nabla}_{m-1}, \quad (\text{B.20b})$$

$$h_r(\mathbf{x}_{m-1}, \mathbf{x}_m, M) := \ln q_{m-1} + \ln M - \ln \rho_m + \ln \frac{3}{4\pi}, \quad (\text{B.20c})$$

$$h_L(\mathbf{x}_{m-1}, \mathbf{x}_m, M) := (\tilde{\varepsilon}_{n,m-1} - \tilde{\varepsilon}_{\nu,m-1} + \tilde{\varepsilon}_{g,m-1}) q_{m-1} M. \quad (\text{B.20d})$$

die folgenden Gleichungen für die inneren Randbedingungen:

$$\mathbf{f}_{m-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{m-1} \\ \mathbf{x}_m \\ M \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f_{m-1,P} \\ f_{m-1,T} \\ f_{m-1,r} \\ f_{m-1,L} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{P_{m-1} - 1 - h_P}{P_{m-1}} \\ \frac{\ln T_{m-1} - \ln T_m}{\ln P_{m-1} - \ln P_m} - h_T \\ h_r - 3 \ln r_{m-1} \\ L_{m-1} - h_L \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (\text{B.21})$$

Es wird bei dieser Schreibweise davon ausgegangen, daß \mathbf{x}_m o.B.d.A. nur aus zwei Komponenten besteht, nämlich

$$\mathbf{x}_m = \begin{pmatrix} P_m \\ T_m \end{pmatrix}. \quad (\text{B.22})$$

Durch die inneren Randbedingungen werden 4 Gleichungen mit zwei neuen Unbekannten P_m und T_m eingeführt. Um das Gleichungssystem aus (B.8) und (B.21) zu lösen, fehlen somit noch drei zusätzliche Gleichungen.

B.4 Die äußeren Randbedingungen

B.4.1 Die äußeren Randbedingungen ohne Bestrahlung

Für eine graue Atmosphäre ist die Opazität κ per Definition wellenlängenunabhängig und die optische Tiefe durch

$$\tau = \int_r^\infty \kappa \rho dr' \quad (\text{B.23})$$

definiert. Diejenige Massenschale mit $\tau = \frac{2}{3}$ wird als Photosphäre bezeichnet und definiert den Radius R des Sterns. Die Effektivtemperatur T_{eff} ist über den lokalen Strahlungsfluß

$$F_{\text{eff}} =: \sigma T_{\text{eff}}^4 \quad (\text{B.24})$$

definiert. Im Rahmen der grauen Approximation wird $T(R) = T_{\text{eff}}$ gesetzt, und hierdurch ergibt sich schon als erste äußere Randbedingung die STEFAN-BOLTZMANN-Formel

$$L = 4\pi\sigma R^2 T_{\text{eff}}^4, \quad (\text{B.25})$$

bzw. in der Formulierung, wie sie vom Sternentwicklungsprogramm verwendet wird:

$$\ln R = \frac{1}{2} \ln L - \frac{1}{2} \ln 4\pi\sigma - 2 \ln T_{\text{eff}}. \quad (\text{B.26})$$

Aus (B.23) folgt

$$\frac{d\tau}{dr} = -\kappa\rho, \quad (\text{B.27})$$

und mit den ersten beiden Sternaufbaugleichungen (A.2) und (A.3) erhält man in der Atmosphäre:

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{dP}{dM_r} \frac{dM_r}{dr} \left(\frac{d\tau}{dr} \right)^{-1} = \frac{\Gamma M_r}{r^2 \kappa} \approx \frac{\Gamma M}{R^2 \kappa}. \quad (\text{B.28})$$

Diese letzte Näherung ist für $0 \leq \tau \leq \frac{2}{3}$ gültig, solange sich praktisch die gesamte Masse innerhalb des Sternradius R befindet und die räumliche Ausdehnung der darüberliegenden Atmosphärenschichten bis $\tau = 0$ klein ist gegenüber R .

Die Opazität κ hängt von den thermodynamischen Variablen P , T und dem Molekulargewicht μ ab, die nach der optischen Tiefe τ parametrisiert werden. Damit geht (B.28) in eine Differentialgleichung des Typs

$$\frac{dP(\tau)}{d\tau} = f(P(\tau), \tau) \quad (\text{B.29})$$

über, die durch numerische Integration gelöst werden kann. Als Anfangsbedingung wählt man den Druck für $\tau = 0$, d.h. außerhalb der Photosphäre. Dort ist P nur durch den Strahlungsdruck

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3}U = \frac{a}{3}T^4 \quad (\text{B.30})$$

als Funktion der inneren Energie U des Strahlungsfeldes, bzw. der Temperatur gegeben. Für den Verlauf der Temperatur durch die optisch dünnen Schichten oberhalb der Photosphäre wird die EDDINGTON-Approximation

$$T(\tau) = T_{\text{eff}} \left(\frac{3}{4} \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{B.31})$$

angesetzt. Somit gilt:

$$P(0) = \frac{a}{6}T_{\text{eff}}^4. \quad (\text{B.32})$$

Als Lösung von (B.28) für $\tau = \frac{2}{3}$ erhält man durch Trennung der Variablen und formale Integration den Photosphärendruck

$$P_{\text{ph}} = P \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{a}{6}T_{\text{eff}}^4 + \frac{\Gamma M}{R^2} \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\kappa(P(\tau), T(\tau), \mu(\tau))} d\tau. \quad (\text{B.33})$$

Durch Umformen ergibt sich die zweite äußere Randbedingung

$$P_{\text{ph}} = \frac{2\Gamma M}{3R^2} \left[\frac{3}{2} \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\kappa} d\tau + \frac{3R^2}{2\Gamma M} \frac{a}{6} T_{\text{eff}}^4 \right] =: \frac{2\Gamma M}{3R^2} \frac{1}{\bar{\kappa}} \quad (\text{B.34})$$

mit einer „mittleren Opazität“ $\bar{\kappa}(T_{\text{eff}}, R, M)$.

Die dritte und letzte äußere Randbedingung schließlich ist durch die Massenverlustrate \dot{M} gegeben. Wie sich aus der Diskussion des modifizierten HENYEY-Verfahrens in Abschnitt B.6 ersehen lassen wird, ist es für die Anwendung dieses Verfahrens numerisch erforderlich, daß \dot{M} nur von den Strukturvariablen T , P , r und L_r an der äußersten Stützstelle abhängt. Dies ist beispielsweise nicht der Fall für die optisch dicke Massentransferrate (2.57), da diese sich

als Integral über die äußeren Sternschichten ergibt. Die optisch dünne Massentransferrate (2.41) dagegen läßt sich unter Anwendung der idealen Gasgleichung (2.31) sowie der isothermen Schallgeschwindigkeit (2.32) als Funktion von R , T_{eff} , P_{ph} , des Photosphärenmolekulargewichts μ_{ph} sowie der Doppelsternparameter schreiben:

$$\dot{M} = -\frac{1}{\pi\sqrt{e}} \frac{1}{\sqrt{B(M)C(M)}} \sqrt{k \frac{T_{\text{eff}}}{\mu_{\text{ph}}}} P_{\text{ph}} \exp\left(\frac{R - R_R}{H_P}\right). \quad (\text{B.35})$$

Wertet man nun die rechte Seite von (B.26), den Logarithmus von (B.34) sowie (B.35) an den äußeren Stützstellen aus, so erhält man mit der Definition der Funktionen

$$s_M(\mathbf{x}_1, M) := -\frac{1}{\pi\sqrt{e}} \frac{1}{\sqrt{B(M)C(M)}} \sqrt{k \frac{T_1}{\mu_1}} P_1 e^{-\frac{R_R - r_1}{H_P}}, \quad (\text{B.36})$$

$$s_R(\mathbf{x}_1, M) := \frac{1}{2} \ln L_1 - \frac{1}{2} \ln 4\pi\sigma - 2 \ln T_1, \quad (\text{B.37})$$

$$s_P(\mathbf{x}_1, M) := \ln \frac{2\Gamma}{3} + \ln M - 2 \ln r_1 - \ln \bar{\kappa}. \quad (\text{B.38})$$

schließlich die drei Differenzgleichungen für die äußerste Stützstelle:

$$\mathbf{f}_0(\mathbf{x}_1, M) := \begin{pmatrix} f_{0,M} \\ f_{0,R} \\ f_{0,P} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} s_M - \frac{M - M^{(n)}}{\Delta t} \\ s_R - \ln r_1 \\ s_P - \ln P_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.39})$$

$M = M^{(n+1)}$ bezeichnet hierbei die aktuelle Masse zur Zeit t_{n+1} und $M^{(n)}$ die Masse zur Zeit t_n . Mit diesen drei zusätzlichen Gleichungen läßt sich das bisher aufgestellte Gleichungssystem aus (B.8), (B.21) und (B.39) für die $4m - 1$ Unbekannten endlich lösen.

B.4.2 Die äußeren Randbedingungen mit symmetrischer Bestrahlung

Die numerische Behandlung sphärisch symmetrisch bestrahlter Sterne unterscheidet sich nur unwesentlich von der unbestrahlter Sterne. Die STEPHAN-BOLTZMANN-Gleichung (B.25) geht über in

$$L_{\text{int}} + L_{\text{irr}} = L_{\text{int}} + 4\pi\sigma R^2 T_b^4 = 4\pi\sigma R^2 T_{\text{eff}}^4, \quad (\text{B.40})$$

wobei T_b die Temperatur des äußeren Strahlungsfeldes bezeichnet. Statt s_R aus (B.37) ist daher

$$s_{R,\text{symm}} = \frac{1}{2} \ln(L_1 + L_{\text{irr}}) - \frac{1}{2} \ln 4\pi\sigma - 2 \ln T_1 \quad (\text{B.41})$$

für die äußeren Randbedingungen zu benutzen. Außerdem ist der Temperaturverlauf in den äußeren Schichten nicht durch (B.31), sondern durch

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \left(\frac{2}{3} + \tau\right) + \frac{3}{4} T_b^4 \left(\frac{2}{3} - \tau\right) \quad (\text{B.42})$$

gegeben (TOUT et al., 1989, Gl. 29). Dadurch ändert sich auch der Startwert $P(0)$ für die Integration des Photosphärendrucks in (B.34).

B.4.3 Die äußeren Randbedingungen mit asymmetrischer Bestrahlung

Asymmetrische Bestrahlung wird durch die Blockierung des intrinsischen Flusses auf einem Anteil s der Sternoberfläche behandelt. s selbst hängt von der Bestrahlungsstärke und somit im Endeffekt von \dot{M} ab. Eine detaillierte Diskussion findet sich in Abschnitt 3.3. Die STEPHAN-BOLTZMANN-Gleichung (B.25) geht in

$$L = 4\pi\sigma(1 - s(\dot{M}))R^2T_{\text{eff}}^4 \quad (\text{B.43})$$

über. Statt s_R aus (B.37) ist daher

$$s_{R,\text{asymm}} = \frac{1}{2} \ln L_1 - \frac{1}{2} \ln 4\pi\sigma - 2 \ln T_1 - \frac{1}{2} \ln(1 - s) \quad (\text{B.44})$$

für die äußeren Randbedingungen zu benutzen. Die zweite äußere Randbedingung (B.34) wird hierdurch nicht beeinflusst.

B.5 Das Newton-Verfahren

Das komplette Gleichungssystem aus (B.8), (B.21) und (B.39) lautet:

$$\mathbf{f} := (\mathbf{f}_0, \dots, \mathbf{f}_{m-1}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{4m-1}. \quad (\text{B.45})$$

Hierbei handelt es sich um eine Nullstellensuche für die Funktion \mathbf{f} . Die Suche nach der Lösung wird iterativ mit dem NEWTON-Verfahren betrieben. Das Verfahren basiert darauf, daß für einen gegebenen Startwert

$$\mathbf{X}_i = (M, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)_i \quad (\text{B.46})$$

die Sekante von \mathbf{f} an der Stelle \mathbf{X}_i ,

$$\text{Sek}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}(\mathbf{X}_i) + \mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{X}_i)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) \quad (\text{B.47})$$

betrachtet wird. Die Nullstelle der Sekante,

$$\mathbf{X}_{i+1} := \mathbf{X}_i - \mathbf{D}\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{X}_i) \mathbf{f}(\mathbf{X}_i) \quad (\text{B.48})$$

stellt eine bessere Näherung für die Nullstelle von \mathbf{f} dar als \mathbf{X}_i , vorausgesetzt die Determinante von $\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{X}_i)$ ist ungleich 0 und der Startwert liegt hinreichend nahe an der gesuchten Nullstelle von \mathbf{f} . Das NEWTON-Verfahren ist dann quadratisch konvergent (SCHWARZ, 1993).

Der Startwert \mathbf{X}_i eines Iterationsschritts wird um einen gewissen Wert $\delta\mathbf{X}_i$ korrigiert, um \mathbf{X}_{i+1} zu erhalten. Für die Bestimmung dieser Korrektur ist offensichtlich die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystem erforderlich:

$$\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{X}_i) \delta\mathbf{X}_i = -\mathbf{f}(\mathbf{X}_i). \quad (\text{B.49})$$

B.6 Das modifizierte Henyey-Verfahren

Für den Fall konstanter Masse wird schon lange das sogenannte HENYEY-Verfahren verwendet (KIPPENHAHN et al., 1967). Für den Fall variabler Masse läßt sich das Verfahren nicht direkt anwenden, sondern es muß modifiziert werden. Die modifizierte HENYEY-Matrix $D\mathbf{f}(\mathbf{X})$ hat die folgende Struktur:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial M} & \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial M} & \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial M} & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}_3} & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_{m-2}}{\partial M} & & & & \frac{\partial f_{m-2}}{\partial \mathbf{x}_{m-2}} & \frac{\partial f_{m-2}}{\partial \mathbf{x}_{m-1}} & 0 \\ \frac{\partial f_{m-1}}{\partial M} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial f_{m-1}}{\partial \mathbf{x}_{m-1}} & \frac{\partial f_{m-1}}{\partial \mathbf{x}_m} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.50})$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems wird nun schrittweise durchgeführt.

Schritt 0: Es gilt wegen (B.49):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial M} & \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta M \\ \delta \mathbf{x}_1 \end{pmatrix} = (-\mathbf{f}_0), \quad (\text{B.51})$$

bzw. komponentenweise:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_{0,M}}{\partial M} & \frac{\partial f_{0,M}}{\partial P_1} & \frac{\partial f_{0,M}}{\partial T_1} & \frac{\partial f_{0,M}}{\partial r_1} & \frac{\partial f_{0,M}}{\partial L_1} \\ \frac{\partial f_{0,L}}{\partial M} & \frac{\partial f_{0,L}}{\partial P_1} & \frac{\partial f_{0,L}}{\partial T_1} & \frac{\partial f_{0,L}}{\partial r_1} & \frac{\partial f_{0,L}}{\partial L_1} \\ \frac{\partial f_{0,P}}{\partial M} & \frac{\partial f_{0,P}}{\partial P_1} & \frac{\partial f_{0,P}}{\partial T_1} & \frac{\partial f_{0,P}}{\partial r_1} & \frac{\partial f_{0,P}}{\partial L_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta M \\ \delta P_1 \\ \delta T_1 \\ \delta r_1 \\ \delta L_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_{0,M} \\ -f_{0,L} \\ -f_{0,P} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.52})$$

Dieses für sich genommen nicht lösbare Gleichungssystem läßt sich umschreiben, indem die zu δr_1 und δL_1 gehörigen Komponenten auf die andere Seite gebracht werden. Man erhält:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 \begin{pmatrix} \delta M \\ \delta P_1 \\ \delta T_1 \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{0,M}}{\partial M} & \frac{\partial f_{0,M}}{\partial P_1} & \frac{\partial f_{0,M}}{\partial T_1} \\ \frac{\partial f_{0,L}}{\partial M} & \frac{\partial f_{0,L}}{\partial P_1} & \frac{\partial f_{0,L}}{\partial T_1} \\ \frac{\partial f_{0,P}}{\partial M} & \frac{\partial f_{0,P}}{\partial P_1} & \frac{\partial f_{0,P}}{\partial T_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta M \\ \delta P_1 \\ \delta T_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -f_{0,M} - \frac{\partial f_{0,M}}{\partial r_1} \delta r_1 - \frac{\partial f_{0,M}}{\partial L_1} \delta L_1 \\ -f_{0,L} - \frac{\partial f_{0,L}}{\partial r_1} \delta r_1 - \frac{\partial f_{0,L}}{\partial L_1} \delta L_1 \\ -f_{0,P} - \frac{\partial f_{0,P}}{\partial r_1} \delta r_1 - \frac{\partial f_{0,P}}{\partial L_1} \delta L_1 \end{pmatrix} =: \mathbf{b}_0. \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

Der Vektor \mathbf{b}_0 läßt sich wiederum schreiben als

$$\mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f_{0,M}}{\partial r_1} & -\frac{\partial f_{0,M}}{\partial L_1} & -S_M \\ -\frac{\partial f_{0,L}}{\partial r_1} & -\frac{\partial f_{0,L}}{\partial L_1} & -S_r \\ -\frac{\partial f_{0,P}}{\partial r_1} & -\frac{\partial f_{0,P}}{\partial L_1} & -S_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_1 \\ \delta L_1 \\ 1 \end{pmatrix} =: \mathbf{B}_0 \begin{pmatrix} \delta r_1 \\ \delta L_1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.54})$$

Ist \mathbf{A}_0 invertierbar (das sei hier vorausgesetzt), so existiert wegen (B.53) und (B.54) eine eindeutig bestimmte Matrix

$$\mathbf{C}^{(0)} := \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{B}_0 \quad (\text{B.55})$$

mit der Eigenschaft, daß gilt:

$$\begin{pmatrix} \delta M \\ \delta P_1 \\ \delta T_1 \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{(0)} \begin{pmatrix} \delta r_1 \\ \delta L_1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.56})$$

Hierdurch ist es möglich, die Berechnung der Unbekannten δM , δP_1 und δT_1 auf die Berechnung von δr_1 und δL_1 zurückzuführen. Die Berechnung der Matrix $\mathbf{C}^{(0)}$ erfolgt im Rahmen des verwendeten Sternentwicklungsprogramms durch ein simples GAUSS-Eliminationsverfahren mit PIVOT-Suche (SCHWARZ, 1993).

Ferner sei eine Matrix $\tilde{\mathbf{C}}^{(0)}$ gegeben mit

$$\begin{pmatrix} \delta P_1 \\ \delta T_1 \\ \delta M \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{C}}^{(0)} \begin{pmatrix} \delta r_1 \\ \delta L_1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.57})$$

Die letzten zwei Zeilen von $\mathbf{C}^{(0)}$ sind offensichtlich identisch mit den ersten zwei Zeilen von $\tilde{\mathbf{C}}^{(0)}$, und die erste Zeile von $\mathbf{C}^{(0)}$ mit der letzten von $\tilde{\mathbf{C}}^{(0)}$.

Schritt k ($1 \leq k \leq m - 2$): Als Voraussetzung seien aus dem $(k - 1)$ -ten Schritt δM , δP_k und δT_k als Funktion von δr_k und δL_k gegeben:

$$\begin{pmatrix} \delta P_k \\ \delta T_k \\ \delta M \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{C}}^{(k-1)} \begin{pmatrix} \delta r_k \\ \delta L_k \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.58})$$

Aus der k -ten Zeile der HENYEV-Matrix (B.50) und dem Gleichungssystem (B.49) erhält man

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial M} & \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \mathbf{x}_k} & \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta M \\ \delta \mathbf{x}_k \\ \delta \mathbf{x}_{k+1} \end{pmatrix} = (-\mathbf{f}_k). \quad (\text{B.59})$$

Dies sind 4 Gleichungen mit 9 Unbekannten. Ersetzt man nun δM , δP_k sowie δT_k mit Hilfe von (B.58) und bringt die zu δr_{k+1} sowie δL_{k+1} gehörigen Kom-

ponenten auf die rechte Seite der Gleichung, so erhält man analog zu (B.53):

$$\mathbf{A}_k \begin{pmatrix} \delta r_k \\ \delta L_k \\ \delta P_{k+1} \\ \delta T_{k+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \tilde{f}_{k,P}^{(r)} & \tilde{f}_{k,P}^{(L)} & \frac{\partial f_{k,P}}{\partial P_{k+1}} & \frac{\partial f_{k,P}}{\partial T_{k+1}} \\ \tilde{f}_{k,T}^{(r)} & \tilde{f}_{k,T}^{(L)} & \frac{\partial f_{k,T}}{\partial P_{k+1}} & \frac{\partial f_{k,T}}{\partial T_{k+1}} \\ \tilde{f}_{k,r}^{(r)} & \tilde{f}_{k,r}^{(L)} & \frac{\partial f_{k,r}}{\partial P_{k+1}} & \frac{\partial f_{k,r}}{\partial T_{k+1}} \\ \tilde{f}_{k,L}^{(r)} & \tilde{f}_{k,L}^{(L)} & \frac{\partial f_{k,L}}{\partial P_{k+1}} & \frac{\partial f_{k,L}}{\partial T_{k+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_k \\ \delta L_k \\ \delta P_{k+1} \\ \delta T_{k+1} \end{pmatrix} \quad (\text{B.60})$$

$$:= \mathbf{b}_k = \begin{pmatrix} -\tilde{f}_{k,P} - \frac{\partial f_{k,P}}{\partial r_{k+1}} \delta r_{k+1} - \frac{\partial f_{k,P}}{\partial L_{k+1}} \delta L_{k+1} \\ -\tilde{f}_{k,T} - \frac{\partial f_{k,T}}{\partial r_{k+1}} \delta r_{k+1} - \frac{\partial f_{k,T}}{\partial L_{k+1}} \delta L_{k+1} \\ -\tilde{f}_{k,r} - \frac{\partial f_{k,r}}{\partial r_{k+1}} \delta r_{k+1} - \frac{\partial f_{k,r}}{\partial L_{k+1}} \delta L_{k+1} \\ -\tilde{f}_{k,L} - \frac{\partial f_{k,L}}{\partial r_{k+1}} \delta r_{k+1} - \frac{\partial f_{k,L}}{\partial L_{k+1}} \delta L_{k+1} \end{pmatrix}.$$

mit x

$$\tilde{f}_{k,x}^{(r)} = \frac{\partial f_{k,x}}{\partial r_k} + \frac{\partial f_{k,x}}{\partial P_k} \tilde{\mathcal{C}}_{1,1}^{(k-1)} + \frac{\partial f_{k,x}}{\partial T_k} \tilde{\mathcal{C}}_{2,1}^{(k-1)} + \frac{\partial f_{k,x}}{\partial M} \tilde{\mathcal{C}}_{3,1}^{(k-1)}, \quad (\text{B.61a})$$

$$\tilde{f}_{k,x}^{(L)} = \frac{\partial f_{k,x}}{\partial L_k} + \frac{\partial f_{k,x}}{\partial P_k} \tilde{\mathcal{C}}_{1,2}^{(k-1)} + \frac{\partial f_{k,x}}{\partial T_k} \tilde{\mathcal{C}}_{2,2}^{(k-1)} + \frac{\partial f_{k,x}}{\partial M} \tilde{\mathcal{C}}_{3,2}^{(k-1)}, \quad (\text{B.61b})$$

$$\tilde{f}_{k,x} = f_{k,x} + \frac{\partial f_{k,x}}{\partial P_k} \tilde{\mathcal{C}}_{1,3}^{(k-1)} + \frac{\partial f_{k,x}}{\partial T_k} \tilde{\mathcal{C}}_{2,3}^{(k-1)} + \frac{\partial f_{k,x}}{\partial M} \tilde{\mathcal{C}}_{3,3}^{(k-1)}, \quad (\text{B.61c})$$

wobei x ein Platzhalter für P, T, r, L ist. Insgesamt handelt es sich bei (B.61) also um 12 Gleichungen.

Der Vektor \mathbf{b}_k läßt sich schreiben als

$$\mathbf{b}_k = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f_{k,P}}{\partial r_{k+1}} & -\frac{\partial f_{k,P}}{\partial L_{k+1}} & -f_{k,P} \\ -\frac{\partial f_{k,T}}{\partial r_{k+1}} & -\frac{\partial f_{k,T}}{\partial L_{k+1}} & -f_{k,T} \\ -\frac{\partial f_{k,r}}{\partial r_{k+1}} & -\frac{\partial f_{k,r}}{\partial L_{k+1}} & -f_{k,r} \\ -\frac{\partial f_{k,L}}{\partial r_{k+1}} & -\frac{\partial f_{k,L}}{\partial L_{k+1}} & -f_{k,L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_{k+1} \\ \delta L_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix} =: \mathbf{B}_k \begin{pmatrix} \delta r_{k+1} \\ \delta L_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.62})$$

Dann existiert wegen (B.60) und (B.62) eine eindeutig bestimmte Matrix

$$\mathbf{C}^{(k)} := \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{B}_k \quad (\text{B.63})$$

mit

$$\begin{pmatrix} \delta r_k \\ \delta L_k \\ \delta P_{k+1} \\ \delta T_{k+1} \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{(k)} \begin{pmatrix} \delta r_{k+1} \\ \delta L_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.64})$$

Wie sich leicht nachrechnen läßt, gibt es wegen (B.58) außerdem eine Matrix $\tilde{\mathcal{C}}^{(k)}$ mit

$$\begin{pmatrix} \delta P_{k+1} \\ \delta T_{k+1} \\ \delta M \end{pmatrix} = \tilde{\mathcal{C}}^{(k)} \begin{pmatrix} \delta r_{k+1} \\ \delta L_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.65})$$

Und zwar sind die letzten zwei Zeilen von $\mathbf{C}^{(k)}$ mit den ersten zwei von $\tilde{\mathbf{C}}^{(k)}$ identisch, und für die dritte Zeile von $\tilde{\mathbf{C}}^{(k)}$ gilt:

$$\tilde{\mathbf{C}}_{3,1}^{(k)} = \sum_{i=1}^2 \tilde{\mathbf{C}}_{3,i}^{(k-1)} \mathbf{C}_{i,1}^{(k)}, \quad (\text{B.66a})$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{3,2}^{(k)} = \sum_{i=1}^2 \tilde{\mathbf{C}}_{3,i}^{(k-1)} \mathbf{C}_{i,2}^{(k)}, \quad (\text{B.66b})$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{3,3}^{(k)} = \sum_{i=1}^2 \tilde{\mathbf{C}}_{3,i}^{(k-1)} \mathbf{C}_{i,3}^{(k)} + \tilde{\mathbf{C}}_{3,3}^{(k-1)}. \quad (\text{B.66c})$$

Schritt $m-1$: Aus der Lösung des $(m-2)$ -ten Schritts sei der Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} \delta P_{m-1} \\ \delta T_{m-1} \\ \delta M \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{C}}^{(m-2)} \begin{pmatrix} \delta r_{m-1} \\ \delta L_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.67})$$

vorgegeben.

Aus der $(m-1)$ -ten Zeile der HENYEV-Matrix (B.50) und dem Gleichungssystem (B.49) erhält man

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_{m-1}}{\partial M} & \frac{\partial \mathbf{f}_{m-1}}{\partial \mathbf{x}_{m-1}} & \frac{\partial \mathbf{f}_{m-1}}{\partial \mathbf{x}_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta M \\ \delta \mathbf{x}_{m-1} \\ \delta \mathbf{x}_m \end{pmatrix} = (-\mathbf{f}_m). \quad (\text{B.68})$$

Dies sind 4 Gleichungen in 7 Unbekannten². Benutzt man nun (B.67), um δM , δP_{m-1} und δT_{m-1} zu eliminieren, so erhält man

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_{m-1,P}^{(r)} & \tilde{f}_{m-1,P}^{(L)} & \frac{\partial f_{m-1,P}}{\partial P_m} & \frac{\partial f_{m-1,P}}{\partial T_m} \\ \tilde{f}_{m-1,T}^{(r)} & \tilde{f}_{m-1,T}^{(L)} & \frac{\partial f_{m-1,T}}{\partial P_m} & \frac{\partial f_{m-1,T}}{\partial T_m} \\ \tilde{f}_{m-1,r}^{(r)} & \tilde{f}_{m-1,r}^{(L)} & \frac{\partial f_{m-1,r}}{\partial P_m} & \frac{\partial f_{m-1,r}}{\partial T_m} \\ \tilde{f}_{m-1,L}^{(r)} & \tilde{f}_{m-1,L}^{(L)} & \frac{\partial f_{m-1,L}}{\partial P_m} & \frac{\partial f_{m-1,L}}{\partial T_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_{m-1} \\ \delta L_{m-1} \\ \delta P_m \\ \delta T_m \end{pmatrix} \quad (\text{B.69})$$

$$= \begin{pmatrix} -\tilde{f}_{m-1,P} \\ -\tilde{f}_{m-1,T} \\ -\tilde{f}_{m-1,r} \\ -\tilde{f}_{m-1,L} \end{pmatrix}$$

² \mathbf{x}_m enthält nur zwei Komponenten: P_m und T_m .

mit

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{m-1,x}^{(r)} &:= \frac{\partial f_{m-1,x}}{\partial r_{m-1}} + \frac{\partial f_{m-1,x}}{\partial P_{m-1}} \tilde{C}_{1,1}^{(m-2)} + \frac{\partial f_{m-1,x}}{\partial T_{m-1}} \tilde{C}_{2,1}^{(m-2)} \\ &\quad + \frac{\partial f_{m-1,x}}{\partial M} \tilde{C}_{3,1}^{(m-2)}, \end{aligned} \quad (\text{B.70a})$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{m-1,x}^{(L)} &:= \frac{\partial f_{m-1,x}}{\partial L_{m-1}} + \frac{\partial f_{m-1,x}}{\partial P_{m-1}} \tilde{C}_{1,2}^{(m-2)} + \frac{\partial f_{m-1,x}}{\partial T_{m-1}} \tilde{C}_{2,2}^{(m-2)} \\ &\quad + \frac{\partial f_{m-1,x}}{\partial M} \tilde{C}_{3,2}^{(m-2)}, \end{aligned} \quad (\text{B.70b})$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{m-1,x} &:= f_{m-1,x} + \frac{\partial f_{m-1,x}}{\partial P_{m-1}} \tilde{C}_{1,3}^{(m-2)} + \frac{\partial f_{m-1,x}}{\partial T_{m-1}} \tilde{C}_{2,3}^{(m-2)} \\ &\quad + \frac{\partial f_{m-1,x}}{\partial M} \tilde{C}_{3,3}^{(m-2)}, \end{aligned} \quad (\text{B.70c})$$

wobei x wieder als Platzhalter für P, T, r, L dient. Dieses letzte Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, und somit lassen sich alle anderen $\delta P_k, \delta T_k, \delta r_k, \delta L_k$ sowie δM sukzessive mit Hilfe von $C^{(k)}$ und $\tilde{C}^{(k)}$ berechnen.

Bei der praktischen Anwendung des modifizierten HENYEEY-Verfahrens hat es sich gezeigt, daß eine gute Vorschätzung von \dot{M} für den Startwert des Iterationsverfahrens empfehlenswert ist, da \dot{M} sehr empfindlich von R abhängt und eine Korrektur von $\delta R \sim 10^{-4}$ in einem Iterationsschritt schon zu einer Änderung um eine Größenordnung in \dot{M} führen kann. Für alle anderen Strukturvariablen werden dagegen die Werte des Vormodells als Startwert verwendet. Es hat sich außerdem als sinnvoll herausgestellt, die Korrekturen δM in den ersten Iterationsschritten nicht anzuwenden, da die vorgeschätzte Massentransferrate anfangs bessere Werte liefert. Insbesondere in einer Phase thermisch instablen Massentransfers kann R pro Zeitschritt um mehrere Skalenhöhen schrumpfen, so daß im ersten oder zweiten Iterationsschritt die Korrektur δM für einen ungünstigen Startwert durchaus etwa $\frac{1}{10}$ der Sternmasse betragen könnte.

B.7 Der Algorithmus

Im Folgenden wird ein Algorithmus aufgezeigt, ein lineares Gleichungssystem des Typs (B.49) mit der in (B.50) angegebenen modifizierten HENYEEY-Matrix zu lösen. Sei nun m die Anzahl der Blöcke in der Matrix, v die Anzahl der unabhängigen Variablen pro Stützstelle sowie $b < v$ die Anzahl der äußeren Randbedingungen (ohne Berücksichtigung der zusätzlichen Randbedingung $f_{0,M} = 0$ durch den Massentransfer). Die Zahl der inneren Randbedingungen betrage $v-b$. Im Fall des Sternentwicklungsprogramms ist $v = 4$ (es gibt für jede Stützstelle k die vier Variablen P_k, T_k, r_k und L_k) und $b = 2$.

$\delta x_k^{(1)}, \dots, \delta x_k^{(v)}$ für $k = 1, \dots, m-1$ seien die zu bestimmenden Korrekturen in Gleichung (B.49) an der Stützstelle k und $x_m^{(1)}, \dots, x_m^{(v-b)}$ die Korrekturen an der innersten Stützstelle sowie δM die Änderung der Masse. Ferner sei die

modifizierte HENYEV-Matrix (B.50) gegeben, die aus den folgenden Blöcken besteht:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial M}\right)_i, \quad i = 1, \dots, b+1, \quad (\text{B.71a})$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial M}\right)_i, \quad i = 1, \dots, v, \quad k = 1, \dots, m-1, \quad (\text{B.71b})$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{x}_1}\right)_{i,j}, \quad i = 1, \dots, b+1, \quad j = 1, \dots, v, \quad (\text{B.71c})$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \mathbf{x}_l}\right)_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, v, \quad k = 1, \dots, m-1, \quad l = k, k+1, \quad (\text{B.71d})$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}_{m-1}}{\partial \mathbf{x}_m}\right)_{i,j}, \quad i = 1, \dots, v, \quad j = 1, \dots, v-b. \quad (\text{B.71e})$$

Die rechte Seite von Gleichung (B.49) ist durch

$$(-\mathbf{f}_0)_i \quad i = 1, \dots, b+1 \quad (\text{B.72a})$$

$$(-\mathbf{f}_k)_i \quad i = 1, \dots, v, \quad k = 1, \dots, m-1. \quad (\text{B.72b})$$

gegeben.

Schritt 0: Es seien $\mathbf{A}_0 \in \mathbb{R}^{(b+1) \times (b+1)}$ sowie $\mathbf{B}_0, \mathbf{C}^{(0)}, \tilde{\mathbf{C}}^{(0)} \in \mathbb{R}^{(b+1) \times (v-b+1)}$.

\mathbf{A}_0 sei gegeben durch

$$(\mathbf{A}_0)_{i,1} := \left(\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial M}\right)_i, \quad i = 1, \dots, b+1, \quad (\text{B.73a})$$

$$(\mathbf{A}_0)_{i,j} := \left(\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{x}_1}\right)_{i,j-1}, \quad i = 1, \dots, b+1, \quad j = 2, \dots, b+1, \quad (\text{B.73b})$$

und \mathbf{B}_0 durch

$$(\mathbf{B}_0)_{i,j} := -\left(\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{x}_1}\right)_{i,j+b}, \quad i = 1, \dots, b+1, \quad j = 1, \dots, v-b, \quad (\text{B.74a})$$

$$(\mathbf{B}_0)_{i,v-b+1} := -(\mathbf{f}_0)_i, \quad i = 1, \dots, b+1. \quad (\text{B.74b})$$

Ferner sei

$$\mathbf{C}^{(0)} := \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{B}_0, \quad (\text{B.75})$$

und die ersten b Zeilen von $\tilde{\mathbf{C}}^{(0)}$ seien durch die letzten b Zeilen von $\mathbf{C}^{(0)}$ gegeben³:

$$\tilde{\mathbf{C}}_{i,j}^{(0)} := \mathbf{C}_{i+1,j}^{(0)}, \quad i = 1, \dots, b, \quad j = 1, \dots, v - b + 1, \quad (\text{B.76a})$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{b+1,j}^{(0)} := \mathbf{C}_{1,j}^{(0)}, \quad j = 1, \dots, v - b + 1. \quad (\text{B.76b})$$

Dann erfüllen $\mathbf{C}^{(0)}$ und $\tilde{\mathbf{C}}^{(0)}$ die folgenden Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} \delta M \\ \delta x_1^{(1)} \\ \vdots \\ \delta x_1^{(b)} \end{pmatrix} = \mathbf{C}_0 \begin{pmatrix} \delta x_1^{(b+1)} \\ \vdots \\ \delta x_1^{(v)} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.77})$$

und

$$\begin{pmatrix} \delta x_1^{(1)} \\ \vdots \\ \delta x_1^{(b)} \\ \delta M \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{C}}^{(0)} \begin{pmatrix} \delta x_1^{(b+1)} \\ \vdots \\ \delta x_1^{(v)} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.78})$$

Schritt k ($1 \leq k \leq m - 2$): Es sei $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{v \times v}$, $\mathbf{B}_k, \mathbf{C}^{(k)} \in \mathbb{R}^{v \times (v-b+1)}$ und $\tilde{\mathbf{C}}^{(k)} \in \mathbb{R}^{(b+1) \times (v-b+1)}$. Aus dem vorhergehenden Schritt ist $\tilde{\mathbf{C}}^{(k-1)}$ gegeben mit:

$$\begin{pmatrix} \delta x_k^{(1)} \\ \vdots \\ \delta x_k^{(b)} \\ \delta M \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{C}}^{(k-1)} \begin{pmatrix} \delta x_k^{(b+1)} \\ \vdots \\ \delta x_k^{(v)} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.79})$$

\mathbf{A}_k sei gegeben durch

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_k)_{i,j} &:= \left(\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \mathbf{x}_k} \right)_{i,j+b} \\ &+ \left(\left(\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_k} \right)_{i,1} \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_k} \right)_{i,b} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial M} \right)_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{1,j}^{(k-1)} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{C}}_{b,j}^{(k-1)} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{b+1,j}^{(k-1)} \end{pmatrix} \right) \right), \end{aligned} \quad (\text{B.80a})$$

$$i = 1, \dots, v, \quad j = 1, \dots, v - b$$

³ $\tilde{\mathbf{C}}_0$ ist so gewählt, daß die Formulierung für Schritt 0 konsistent ist mit der Formulierung von $\tilde{\mathbf{C}}_k$ in Schritt k . Die Idee ist, daß es auf diese Weise möglich ist, bei der konkreten Implementierung des Algorithmus in einer Programmiersprache den Code übersichtlicher zu gestalten und gleichzeitig Speicher zu sparen, indem für die Zeilen, die bei \mathbf{C}_k und $\tilde{\mathbf{C}}_k$ identisch sind, nur einmal Speicher reserviert wird.

sowie

$$(\mathbf{A}_k)_{i,j} := \left(\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} \right)_{i,j-v+b}, \quad i = 1, \dots, v, \quad j = v-b+1, \dots, v. \quad (\text{B.80b})$$

\mathbf{B}_k sei gegeben durch

$$(\mathbf{B}_k)_{i,j} := - \left(\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} \right)_{i,j+b}, \quad i = 1, \dots, v, \quad j = 1, \dots, v-b \quad (\text{B.81a})$$

sowie

$$(\mathbf{B}_k)_{i,v-b+1} := -(\mathbf{f}_k)_i - \left(\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \mathbf{x}_k} \right)_{i,1} \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \mathbf{x}_k} \right)_{i,b} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial M} \right)_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{1,v-b+1}^{(k-1)} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{C}}_{b,v-b+1}^{(k-1)} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{b+1,v-b+1}^{(k-1)} \end{pmatrix} \right), \quad (\text{B.81b})$$

$$i = 1, \dots, v.$$

Dann sei

$$\mathbf{C}^{(k)} := \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{B}_k, \quad (\text{B.82})$$

d.h. es gilt

$$\begin{pmatrix} \delta x_k^{(b+1)} \\ \vdots \\ \delta x_k^{(v)} \\ \delta x_{k+1}^{(1)} \\ \vdots \\ \delta x_{k+1}^{(b)} \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{(k)} \begin{pmatrix} \delta x_{k+1}^{(b+1)} \\ \vdots \\ \delta x_{k+1}^{(v)} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.83})$$

und die letzten b Zeilen von $\mathbf{C}^{(k)}$ sind mit den ersten b Zeilen von $\tilde{\mathbf{C}}^{(k)}$ identisch:

$$\tilde{\mathbf{C}}_{i,j}^{(k)} := \mathbf{C}_{i+v-b,j}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, b, \quad j = 1, \dots, v-b+1. \quad (\text{B.84a})$$

Die letzte Zeile von $\tilde{\mathbf{C}}^{(k)}$ sei nun gegeben durch

$$\tilde{\mathbf{C}}_{b+1,j}^{(k)} := \left(\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{1,j}^{(k)} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{v-b,j}^{(k)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{b+1,1}^{(k-1)} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{C}}_{b+1,v-b}^{(k-1)} \end{pmatrix} \right) + \delta_{j,v-b+1} \tilde{\mathbf{C}}_{b+1,v-b+1}^{(k-1)}, \quad (\text{B.85})$$

$$j = 1, \dots, v-b+1.$$

Damit erfüllt $\tilde{\mathbf{C}}^{(k)}$ die Bedingung

$$\begin{pmatrix} \delta x_{k+1}^{(1)} \\ \vdots \\ \delta x_{k+1}^{(b)} \\ \delta M \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{C}}^{(k)} \begin{pmatrix} \delta x_{k+1}^{(b+1)} \\ \vdots \\ \delta x_{k+1}^{(v)} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.86})$$

Schritt m-1: Es seien $\mathbf{A}_{m-1} \in \mathbb{R}^{v \times v}$ sowie \mathbf{B}_{m-1} und $\mathbf{C}^{(m-1)} \in \mathbb{R}^{v \times 1}$, d.h. v -komponentige Vektoren. Aus dem vorhergehende Schritt ist $\tilde{\mathbf{C}}^{(m-2)}$ gegeben mit:

$$\begin{pmatrix} \delta x_{m-1}^{(1)} \\ \vdots \\ \delta x_{m-1}^{(b)} \\ \delta M \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{C}}^{(m-2)} \begin{pmatrix} \delta x_{m-1}^{(b+1)} \\ \vdots \\ \delta x_{m-1}^{(v)} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.87})$$

\mathbf{A}_{m-1} sei gegeben durch

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{m-1})_{i,j} := & \left(\left(\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{m-1}}{\partial \mathbf{x}_{m-1}} \right)_{i,1} \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{m-1}}{\partial \mathbf{x}_{m-1}} \right)_{i,b} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{m-1}}{\partial M} \right)_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{1,j}^{(m-2)} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{C}}_{b,j}^{(m-2)} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{b+1,j}^{(m-2)} \end{pmatrix} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{m-1}}{\partial \mathbf{x}_{m-1}} \right)_{i,j+b}, \quad i = 1, \dots, v, \right. \\ & \left. j = 1, \dots, v - b, \right. \end{aligned} \quad (\text{B.88a})$$

$$(\mathbf{A}_{m-1})_{i,j} := \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{m-1}}{\partial \mathbf{x}_m} \right)_{i,j-v+b}, \quad i = 1, \dots, v, \quad j = v - b + 1, \dots, v \quad (\text{B.88b})$$

und \mathbf{B}_{m-1} durch

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_{m-1})_i := & - \left(\left(\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{m-1}}{\partial \mathbf{x}_{m-1}} \right)_{i,1} \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{m-1}}{\partial \mathbf{x}_{m-1}} \right)_{i,b} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{m-1}}{\partial M} \right)_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{1,v-b+1}^{(m-2)} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{C}}_{b,v-b+1}^{(m-2)} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{b+1,v-b+1}^{(m-2)} \end{pmatrix} \right) \right) \\ & - (\mathbf{f}_{m-1})_i, \quad i = 1, \dots, v. \end{aligned} \quad (\text{B.89})$$

Dann gilt:

$$\mathbf{C}^{(m-1)} := \mathbf{A}_{m-1}^{-1} \mathbf{B}_{m-1}. \quad (\text{B.90})$$

Ab diesem Punkt liegen alle Informationen vor, um die gesuchten Korrekturen $\delta x_k^{(i)}$ zu berechnen. Und zwar gilt:

$$\begin{pmatrix} \delta x_{m-1}^{(b+1)} \\ \vdots \\ \delta x_{m-1}^{(v)} \\ \delta x_m^{(1)} \\ \vdots \\ \delta x_m^{(b)} \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{(m-1)}. \quad (\text{B.91})$$

Die übrigen Variablen werden schließlich sukzessive berechnet aus (B.77) und (B.83).

B.8 Die partiellen Ableitungen

Es sei \tilde{y}_k das geometrische Mittel der Werte einer Funktion $y(x)$ an den Stützstellen x_k und x_{k+1} , d.h.

$$\tilde{y}_k = \sqrt{y_k y_{k+1}} = \sqrt{y(x_k) y(x_{k+1})}. \quad (\text{B.92})$$

Dann gilt:

$$\frac{\partial \tilde{y}_k}{\partial \ln x_k} = x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \sqrt{y(x_k) y(x_{k+1})} = \frac{1}{2} \tilde{y}_k \left. \frac{\partial \ln y}{\partial \ln x} \right|_{x_k}, \quad (\text{B.93a})$$

$$\frac{\partial \tilde{y}_k}{\partial \ln x_{k+1}} = \frac{1}{2} \tilde{y}_k \left. \frac{\partial \ln y}{\partial \ln x} \right|_{x_{k+1}}. \quad (\text{B.93b})$$

Es sei \tilde{y}_k das arithmetische Mittel der Werte einer Funktion $y(x)$ an den Stützstellen x_k und x_{k+1} , d.h.

$$\tilde{y}_k = \frac{1}{2}(y_k + y_{k+1}) = \frac{1}{2}(y(x_k) + y(x_{k+1})). \quad (\text{B.94})$$

Dann gilt:

$$\frac{\partial \tilde{y}_k}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x_k}, \quad (\text{B.95a})$$

$$\frac{\partial \tilde{y}_k}{\partial x_{k+1}} = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x_{k+1}}. \quad (\text{B.95b})$$

Die partiellen Ableitungen der äußeren Randbedingungen Die Differenzgleichungen (B.39) für die äußeren Randbedingungen des Sterns werden im Folgenden nach den Strukturvariablen an der äußersten Stützstelle P_1 , T_1 , r_1 und L_1 sowie der Gesamtmasse M abgeleitet.

Die partiellen Ableitungen von $f_{0,M}$: Für die partiellen Ableitungen von $f_{0,M}$ werden im Folgenden auch die partiellen Ableitungen der Druckskalenhöhe

$$H_P = \frac{kT_1 r_1^2}{\mu_{\text{ph}} \Gamma M \gamma_R} \quad (\text{B.96})$$

aus (2.40) berücksichtigt, jedoch nicht die Massenabhängigkeit der Potentialkoeffizienten B und C der optisch dünnen Massentransferrate (B.35):

$$\frac{\partial f_{0,M}}{\partial M} = \frac{s_M}{M} \left(\frac{r_1 - R_R}{H_P} (1 + \delta) - \frac{R_R}{H_P} \frac{\partial \ln R_R}{\partial \ln M} \right) - \frac{1}{\Delta t}, \quad (\text{B.97a})$$

$$\frac{\partial f_{0,M}}{\partial \ln P_1} = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \mu_{\text{ph}}}{\partial \ln P_1} + \frac{r_1 - R_R}{H_P} \frac{\partial \ln \mu_{\text{ph}}}{\partial \ln P_1} \right) s_M, \quad (\text{B.97b})$$

$$\frac{\partial f_{0,M}}{\partial \ln T_1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{r_1 - R_R}{H_P} \right) \left(1 - \frac{\partial \ln \mu_{\text{ph}}}{\partial \ln T_1} \right) s_M, \quad (\text{B.97c})$$

$$\frac{\partial f_{0,M}}{\partial \ln r_1} = \left(\frac{2R_R - r_1}{H_P} - \frac{R_R}{H_P} \frac{\partial \ln R_R}{\partial \ln r_1} \right) s_M, \quad (\text{B.97d})$$

$$\frac{\partial f_{0,M}}{\partial L_1} = 0. \quad (\text{B.97e})$$

δ reflektiert hierbei die Abhängigkeit der effektiven Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche des masseverlierenden Sterns und kann üblicherweise wie die Ableitungen von B , C , und μ_{ph} vernachlässigt werden, da sie die Konvergenz des HENYEY-Verfahrens nicht wesentlich beeinflussen. Es gilt:

$$\delta = (1 + \eta q) \frac{d \ln \gamma_R}{d \ln q}. \quad (\text{B.98})$$

Möchte man die Kopplung von Bahn- und Spindrehimpuls durch Synchronisation der Bahnbewegung mit der Eigenrotation des masseverlierenden Sterns berücksichtigen, können die dabei entstehenden Zusatzterme numerisch nicht ignoriert werden. Die Ableitung des ROCHE-Radius nach dem Sternradius ergibt sich aus (2.179) zu

$$\frac{\partial \ln R_R}{\partial \ln r_1} = -4 \frac{J_1}{J_{\text{orb}} - 3J_1}, \quad (\text{B.99})$$

und die Ableitung des ROCHE-Radius ergibt sich unter Berücksichtigung der Korrekturen durch die Spin-Bahn-Kopplung zu:

$$\frac{\partial \ln R_R}{\partial \ln M} = (\zeta_R - \zeta_{R,\text{corr}}) \frac{J_{\text{orb}}}{J_{\text{orb}} - 3J_1}, \quad (\text{B.100})$$

wobei ζ_R der gewöhnliche Masse-ROCHE-Radius-Exponent (2.75) ohne Berücksichtigung des Spindrehimpulses ist. Offensichtlich muß jedoch die Änderung des Gyrationradius R_g aus (2.179) unberücksichtigt bleiben, weil es nicht möglich ist, eine analytische Formel für die Abhängigkeit von R_g von den Oberflächenbedingungen anzugeben, da der Gyrationradius ein Integral über alle Massenschalen ist. Aus diesem Grund konvergiert das modifizierte HENYEY-Verfahren prinzipiell schlechter, wenn der Spindrehimpuls berücksichtigt wird.

Die partiellen Ableitungen von $f_{0,R}$ für asymmetrische Bestrahlung:

$$\frac{\partial f_{0,R}}{\partial M} = \frac{1}{2(1-s)} \frac{\partial s}{\partial M}, \quad (\text{B.101a})$$

$$\frac{\partial f_{0,R}}{\partial \ln P_1} = \frac{1}{2(1-s)} \frac{\partial s}{\partial \ln P_1}, \quad (\text{B.101b})$$

$$\frac{\partial f_{0,R}}{\partial \ln T_1} = -2 + \frac{1}{2(1-s)} \frac{\partial s}{\partial \ln T_1}, \quad (\text{B.101c})$$

$$\frac{\partial f_{0,R}}{\partial \ln r_1} = -1 + \frac{1}{2(1-s)} \frac{\partial s}{\partial \ln r_1} \quad (\text{B.101d})$$

$$\frac{\partial f_{0,R}}{\partial L_1} = \frac{1}{2L_1}. \quad (\text{B.101e})$$

Die durch Bestrahlung blockierte Oberfläche ist nach (3.28), bzw. (3.32) von der Bestrahlungsgeometrie über ϑ_{\max} von R , durch die Wahl der Bestrahlungstabelle von g und T_{eff} und über $\langle f_{\text{irr}} \rangle$ von \dot{M} abhängig. Da diese Abhängigkeiten nicht trivial sind müssen die partiellen Ableitungen von s numerisch ausgewertet werden.

Für symmetrisch bestrahlte Sterne gehen (B.101d) und (B.101e) über in

$$\frac{\partial f_{0,R}}{\partial \ln r_1} = -1 + \frac{L_{\text{irr}}}{L_1 + L_{\text{irr}}}, \quad (\text{B.102a})$$

bzw.

$$\frac{\partial f_{0,R}}{\partial L_1} = \frac{1}{2(L_1 + L_{\text{irr}})}. \quad (\text{B.102b})$$

Die partiellen Ableitungen von $f_{0,P}$:

$$\frac{\partial f_{0,P}}{\partial M} = \frac{1}{M} - \frac{\partial \ln \bar{\kappa}}{\partial M}, \quad (\text{B.103a})$$

$$\frac{\partial f_{0,P}}{\partial \ln P_1} = -1, \quad (\text{B.103b})$$

$$\frac{\partial f_{0,P}}{\partial \ln T_1} = -\frac{\partial \ln \bar{\kappa}}{\partial \ln T_1}, \quad (\text{B.103c})$$

$$\frac{\partial f_{0,P}}{\partial \ln r_1} = 2 - \frac{\partial \ln \bar{\kappa}}{\partial \ln r_1}, \quad (\text{B.103d})$$

$$\frac{\partial f_{0,P}}{\partial L_1} = 0. \quad (\text{B.103e})$$

Für das in (B.34) definierte $\bar{\kappa}$ lassen sich im Allgemeinen keine Ableitungen angeben, so daß (B.103a), (B.103c) und (B.103d) durch numerische Differentiation von $f_{0,P}$ bestimmt werden. Formal lassen sich zumindest (B.103a) und (B.103d) in der Näherung (B.33) sogar explizit ausrechnen. Für die Hilfsfunktion

$$h := e^{sP} = P_{\text{ph}} = \frac{\Gamma M}{R^2} \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\kappa} d\tau + \frac{a}{6} T_1^4 \quad (\text{B.104})$$

gilt nämlich:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{0,P}}{\partial M} &= \frac{\partial s_P}{\partial M} = \frac{\partial \ln h}{\partial M} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial M} \\ &= \frac{1}{h} \frac{1}{M} \left(h - \frac{a}{6} T_1^4 \right) = \frac{1}{M} \left(1 - \frac{a}{6} \frac{T_1^4}{h} \right)\end{aligned}\quad (\text{B.105})$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{0,P}}{\partial \ln r_1} &= \frac{\partial s_P}{\partial \ln r_1} = \frac{r_1}{h} \frac{\partial h}{\partial r_1} = -\frac{2}{h} \frac{\Gamma M}{r_1^2} \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\kappa} d\tau \\ &= -\frac{2}{h} \left(h - \frac{a}{6} T_1^4 \right) = -2 + \frac{a}{6} \frac{T_1^4}{h}.\end{aligned}\quad (\text{B.106})$$

Die partiellen Ableitungen an den Gitterpunkten $1 \leq k \leq m-2$:

Die partiellen Ableitungen von $f_{k,P}$:

$$\frac{\partial f_{k,P}}{\partial M} = -\frac{2}{M} g_{k,P}, \quad (\text{B.107a})$$

$$\frac{\partial f_{k,P}}{\partial \ln P_k} = -\frac{1}{q_{k+1} - q_k} + \frac{1}{2} g_{k,P}, \quad (\text{B.107b})$$

$$\frac{\partial f_{k,P}}{\partial \ln T_k} = 0, \quad (\text{B.107c})$$

$$\frac{\partial f_{k,P}}{\partial \ln r_k} = 2g_{k,P}, \quad (\text{B.107d})$$

$$\frac{\partial f_{k,P}}{\partial L_k} = 0, \quad (\text{B.107e})$$

$$\frac{\partial f_{k,P}}{\partial \ln P_{k+1}} = \frac{1}{q_{k+1} - q_k} + \frac{1}{2} g_{k,P}, \quad (\text{B.107f})$$

$$\frac{\partial f_{k,P}}{\partial \ln T_{k+1}} = 0, \quad (\text{B.107g})$$

$$\frac{\partial f_{k,P}}{\partial \ln r_{k+1}} = 2g_{k,P}, \quad (\text{B.107h})$$

$$\frac{\partial f_{k,P}}{\partial L_{k+1}} = 0, \quad (\text{B.107i})$$

Die partiellen Ableitungen von $f_{k,r}$:

$$\frac{\partial f_{k,r}}{\partial M} = -\frac{1}{M} g_{k,r}, \quad (\text{B.108a})$$

$$\frac{\partial f_{k,r}}{\partial \ln P_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} \Big|_{\mathbf{x}_k} g_{k,r}, \quad (\text{B.108b})$$

$$\frac{\partial f_{k,r}}{\partial \ln r_k} = -\frac{1}{q_{k+1} - q_k} + \frac{3}{2}g_{k,r}, \quad (\text{B.108c})$$

$$\frac{\partial f_{k,r}}{\partial \ln T_k} = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right|_{\mathbf{x}_k} g_{k,r}, \quad (\text{B.108d})$$

$$\frac{\partial f_{k,r}}{\partial L_k} = 0, \quad (\text{B.108e})$$

$$\frac{\partial f_{k,r}}{\partial \ln P_{k+1}} = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} \right|_{\mathbf{x}_{k+1}} g_{k,r}, \quad (\text{B.108f})$$

$$\frac{\partial f_{k,r}}{\partial \ln r_{k+1}} = \frac{1}{q_{k+1} - q_k} + \frac{3}{2}g_{k,r}, \quad (\text{B.108g})$$

$$\frac{\partial f_{k,r}}{\partial \ln T_{k+1}} = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right|_{\mathbf{x}_{k+1}} g_{k,r}, \quad (\text{B.108h})$$

$$\frac{\partial f_{k,r}}{\partial L_{k+1}} = 0, \quad (\text{B.108i})$$

Die partiellen Ableitungen von $f_{k,L}$:

$$\frac{\partial f_{k,L}}{\partial M} = -\frac{g_{k,L}}{M} - \frac{M}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{g,k}}{\partial M} + \frac{\partial \varepsilon_{g,k+1}}{\partial M} \right), \quad (\text{B.109a})$$

$$\frac{\partial f_{k,L}}{\partial \ln P_k} = -\frac{M}{2} \left. \frac{\partial}{\partial \ln P} (\varepsilon_n - \varepsilon_\nu + \varepsilon_g) \right|_{\mathbf{x}_k}, \quad (\text{B.109b})$$

$$\frac{\partial f_{k,L}}{\partial \ln T_k} = -\frac{M}{2} \left. \frac{\partial}{\partial \ln T} (\varepsilon_n - \varepsilon_\nu + \varepsilon_g) \right|_{\mathbf{x}_k}, \quad (\text{B.109c})$$

$$\frac{\partial f_{k,L}}{\partial \ln r_k} = 0, \quad (\text{B.109d})$$

$$\frac{\partial f_{k,L}}{\partial L_k} = -\frac{1}{q_{k+1} - q_k}, \quad (\text{B.109e})$$

$$\frac{\partial f_{k,L}}{\partial \ln P_{k+1}} = -\frac{M}{2} \left. \frac{\partial}{\partial \ln P} (\varepsilon_n - \varepsilon_\nu + \varepsilon_g) \right|_{\mathbf{x}_{k+1}}, \quad (\text{B.109f})$$

$$\frac{\partial f_{k,L}}{\partial \ln T_{k+1}} = -\frac{M}{2} \left. \frac{\partial}{\partial \ln T} (\varepsilon_n - \varepsilon_\nu + \varepsilon_g) \right|_{\mathbf{x}_{k+1}}, \quad (\text{B.109g})$$

$$\frac{\partial f_{k,L}}{\partial \ln r_{k+1}} = 0, \quad (\text{B.109h})$$

$$\frac{\partial f_{k,L}}{\partial L_{k+1}} = \frac{1}{q_{k+1} - q_k}, \quad (\text{B.109i})$$

Die Partiellen Ableitungen der inneren Randbedingungen Die Funktionen, die im Folgenden abgeleitet werden, sind in Abschnitt B.3 auf Seite 159ff definiert.

Die partiellen Ableitungen von $f_{m-1,P}$:

$$\frac{\partial f_{m-1,P}}{\partial M} = -\frac{2 h_P}{3 M}, \quad (\text{B.110a})$$

$$\frac{\partial f_{m-1,P}}{\partial \ln P_{m-1}} = \frac{P_{m-1}}{P_m}, \quad (\text{B.110b})$$

$$\frac{\partial f_{m-1,P}}{\partial \ln T_{m-1}} = 0, \quad (\text{B.110c})$$

$$\frac{\partial f_{m-1,P}}{\partial \ln r_{m-1}} = 0, \quad (\text{B.110d})$$

$$\frac{\partial f_{m-1,P}}{\partial \ln L_{m-1}} = 0, \quad (\text{B.110e})$$

$$\frac{\partial f_{m-1,P}}{\partial \ln P_m} = -\frac{P_{m-1}}{P_m} - \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} \Big|_{\mathbf{x}_m} - 1 \right) h_P, \quad (\text{B.110f})$$

$$\frac{\partial f_{m-1,P}}{\partial \ln T_m} = -\frac{4}{3} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \Big|_{\mathbf{x}_m} h_P. \quad (\text{B.110g})$$

Die partiellen Ableitungen von $f_{m-1,r}$:

$$\frac{\partial f_{m-1,r}}{\partial M} = \frac{1}{M}, \quad (\text{B.111a})$$

$$\frac{\partial f_{m-1,r}}{\partial \ln P_{m-1}} = 0, \quad (\text{B.111b})$$

$$\frac{\partial f_{m-1,r}}{\partial \ln T_{m-1}} = 0, \quad (\text{B.111c})$$

$$\frac{\partial f_{m-1,r}}{\partial \ln r_{m-1}} = -3, \quad (\text{B.111d})$$

$$\frac{\partial f_{m-1,r}}{\partial L_{m-1}} = 0, \quad (\text{B.111e})$$

$$\frac{\partial f_{m-1,r}}{\partial \ln P_m} = -\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} \Big|_{\mathbf{x}_m}, \quad (\text{B.111f})$$

$$\frac{\partial f_{m-1,r}}{\partial \ln T_m} = -\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \Big|_{\mathbf{x}_m}. \quad (\text{B.111g})$$

Die partiellen Ableitungen von $f_{m-1,L}$:

$$\frac{\partial f_{m-1,L}}{\partial M} = -\frac{h_L}{M} - \frac{1}{2} M q_{m-1} \frac{\partial \varepsilon_{g,m-1}}{\partial M}, \quad (\text{B.112a})$$

$$\frac{\partial f_{m-1,L}}{\partial \ln P_{m-1}} = -\frac{1}{2} M_{m-1} \frac{\partial}{\partial \ln P_{m-1}} (\varepsilon_n - \varepsilon_\nu + \varepsilon_g) \Big|_{\mathbf{x}_{m-1}}, \quad (\text{B.112b})$$

$$\frac{\partial f_{m-1,L}}{\partial \ln T_{m-1}} = -\frac{1}{2} M_{m-1} \frac{\partial}{\partial \ln T_{m-1}} (\varepsilon_n - \varepsilon_\nu + \varepsilon_g) \Big|_{\mathbf{x}_{m-1}}, \quad (\text{B.112c})$$

$$\frac{\partial f_{m-1,L}}{\partial \ln r_{m-1}} = 0, \quad (\text{B.112d})$$

$$\frac{\partial f_{m-1,L}}{\partial L_{m-1}} = 1, \quad (\text{B.112e})$$

$$\frac{\partial f_{m-1,L}}{\partial \ln P_m} = -\frac{1}{2} M_{m-1} \frac{\partial}{\partial \ln P_m} (\varepsilon_n - \varepsilon_\nu + \varepsilon_g)|_{\mathbf{x}_m}, \quad (\text{B.112f})$$

$$\frac{\partial f_{m-1,L}}{\partial \ln T_m} = -\frac{1}{2} M_{m-1} \frac{\partial}{\partial \ln T_m} (\varepsilon_n - \varepsilon_\nu + \varepsilon_g)|_{\mathbf{x}_m}. \quad (\text{B.112g})$$

C Die Zustandsgleichung

C.1 Allgemeines

Für die Sternentwicklungsrechnungen in dieser Arbeit wurde die Zustandsgleichung von SAUMON et al. (1995), im Folgenden als SCVH bezeichnet, sowie zu Vergleichszwecken die Zustandsgleichung von POLS et al. (1995), im Folgenden als PTEZ bezeichnet, verwendet.

Die SCVH basiert auf zwei Zustandsgleichungen für reinen Wasserstoff, bzw. reines Helium, aus denen sich nach weiter unten aufgeführten Formeln die thermodynamischen Zustandsvariablen für beliebige Mischungen von Wasserstoff und Helium berechnen lassen. Durch diesen Ansatz wird allerdings ein Fehler in den Konzentrationen der einzelnen Ionisationszustände gemacht. So hängen nach der SAHA-Gleichung (KIPPENHAHN und WEIGERT, 1990, Kap. 14) die Gleichgewichtskonzentrationen von H_2 , H und H^+ nicht nur von T und P und dem Elektronendruck der durch die Ionisation von Wasserstoff freigesetzten Elektronen ab, sondern vom Gesamtelektronendruck, zu dem auch die bei der Ionisation von Helium freigesetzten Elektronen beitragen. Dies gilt umgekehrt natürlich auch für die Gleichgewichtskonzentrationen von He , He^+ und He^{++} , so daß es im Prinzip nicht möglich ist, die Ionisationsgrade eines Elements unabhängig von denen aller anderen vorhandenen Elementen zu berechnen. Diese Kopplung beeinflußt jedoch nur die obersten Sternschichten, in denen Wasserstoff und Helium partiell ionisiert sind.

Elemente, die schwerer sind als Helium werden von der SCVH nicht direkt, sondern wie Helium behandelt, so daß eine chemische Zusammensetzung mit Massenanteilen von X , Y und Z für Wasserstoff, Helium und Metalle als Mischung aus Wasserstoff mit einem *effektiven Heliumgehalt* $Y + Z$ behandelt wird. Für Details der Zustandsgleichung sei auf SAUMON et al. (1995) verwiesen.

Es hatte sich sich als notwendig erwiesen, eine neue Zustandsgleichung in den von H. SCHLATTTL und A. WEISS zur Verfügung gestellten Sternentwicklungscode (SCHLATTTL et al., 1997, SCHLATTTL, 1999) einzubauen, zum einen auf Grund großer anfänglicher Probleme mit der numerischen Stabilität und zum anderen dadurch, daß der Code zuvor nur für Sternmodelle mit einer Masse größer als $0.7 M_{\odot}$ benutzt worden war. Die Wahl fiel auf die SCVH, da diese bekanntermaßen gute Ergebnisse für massearme Sterne liefert (CHABRIER und BARAFFE, 1997, BARAFFE et al., 1997, MONTALBÁN et al., 2000). Wegen schlechter Erfahrungen mit Unstetigkeitsstellen in der Zustandsgleichung in Verbindung mit Massentransferrechnungen beschloß ich, anders als in Sternentwicklungsprogrammen üblich, keine fertigen Tabellen für vorgegebene chemische Zusammensetzung zu generieren, sondern die thermodynamischen Zustandsvariablen zur

Laufzeit aus den Tabellen für reinen Wasserstoff und reines Helium direkt zu berechnen. Dies hat zur Folge, daß alle Größen nicht nur stetig differenzierbar in T und P , sondern auch in der chemischen Zusammensetzung sind. Ob das verwendete Verfahren wirklich notwendig ist oder überhaupt meßbar glattere Resultate lieferte, wurde nicht überprüft. Die für die vorliegende Arbeit verwendeten Tabellen wurden freundlicherweise von I. BARAFFE generiert.

Die Standardvorgehensweise wäre gewesen, Tabellen für vorgegebene chemische Zusammensetzung für verschiedene Werte von Y und Z zu generieren, diese zur Laufzeit durch zweidimensionale Spline-Interpolation in T und P (oder vergleichbaren Größen) zu interpolieren, und dann über benachbarte Tabellen den gesuchten Wert für die gewünschte chemische Zusammensetzung durch ein Polynom zu interpolieren.

Zum Vergleich wurden einige Rechnungen mit der PTEZ durchgeführt. Dabei wurden auch für diese Zustandsgleichung die thermodynamischen Größen zur Laufzeit nach demselben Schema bzw. mit demselben Code wie für die SCVH aus einer Wasserstoff- und einer Heliumzustandsgleichung erzeugt. Dies ist definitiv nicht die Art und Weise, in der die PTEZ von ihren Autoren für die Verwendung in Sternentwicklungsprogrammen gedacht war. Aus folgendem Grund war dies jedoch notwendig: Die PTEZ ist als einzige Zustandsgleichung auf dem kompletten betrachteten Bereich in T und P definiert und glatt. Die SCVH dagegen ist nur auf einem (wenn auch großen) Bereich von $\log T \sim 3$ bis etwa $\log T \sim 7$ und $\log P_{\text{gas}} \sim 4$ bis $\log P_{\text{gas}} \sim 19$ definiert. Dies führt dazu, daß die Tabellen der SCVH für alle außer den masseärmsten Sternen im Kern der Sterne für hohe Temperaturen und Drücke ergänzt werden müssen. Dieser (wenn auch durch Spline-Interpolation geglättete) Übergang führt zu einem kleinen, aber sichtbaren „Sprung“ in den Zustandsgrößen an der Übergangsstelle. Für die Entropieprofile in Abb. 2.6 und 2.7 wurde daher aus ästhetischen Gründen die PTEZ benutzt, merkliche quantitative Änderungen im Sternaufbau oder der Sternentwicklung ergeben sich hierdurch nicht. Für die Erweiterung der SCVH zu hohen und niedrigen Temperaturen und Drücken wurde ebenfalls die PTEZ verwendet.

C.2 Mischungen von Wasserstoff und Helium

In diesem Abschnitt werden die Gleichungen angegeben, nach denen die thermodynamischen Größen ρ , S und U sowie deren erste und zweite Ableitungen für eine beliebige Mischung aus Wasserstoff und Helium zur Laufzeit im Sternentwicklungsprogramm berechnet werden. Größen, die mit H bzw. He indiziert werden, bezeichnen die jeweiligen Größen für reinen Wasserstoff bzw. Helium. P bezeichnet im Folgenden den Gasdruck.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 - Y}{\rho^H} + \frac{Y}{\rho^{He}}, \quad (\text{C.1})$$

$$U = (1 - Y)U^H + YU^{He}, \quad (\text{C.2})$$

$$S = (1 - Y)S^H + YS^{He} + S_{\text{mix}}. \quad (\text{C.3})$$

Hierbei ist S_{mix} die Mischungsentropie der verschiedenen Teilchensorten. Die Mischungsentropie zwischen den verschiedenen Ionisationszuständen sowie der freien Elektronen von Wasserstoff (H_2, H, H^+) einerseits und Helium (He, He^+, He^{++}) andererseits sind bereits in S^H bzw. S^{He} berücksichtigt. Die partiellen Ableitungen der Inneren Energie U sind im Folgenden nicht angegeben, sie ergeben sich aber automatisch aus den Formeln für die Entropie S durch Ersetzen von S durch U und $S_{\text{mix}} = 0$.

Die ersten partiellen Ableitungen von ρ lauten:

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} = (1 - Y) \frac{\rho}{\rho^H} \frac{\partial \ln \rho^H}{\partial \ln T} + Y \frac{\rho}{\rho^{He}} \frac{\partial \ln \rho^{He}}{\partial \ln T}, \quad (\text{C.4a})$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} = (1 - Y) \frac{\rho}{\rho^H} \frac{\partial \ln \rho^H}{\partial \ln P} + Y \frac{\rho}{\rho^{He}} \frac{\partial \ln \rho^{He}}{\partial \ln P}. \quad (\text{C.4b})$$

Die ersten partiellen Ableitungen¹ von S lauten:

$$\frac{\partial \ln S}{\partial \ln T} = (1 - Y) \frac{S^H}{S} \frac{\partial \ln S}{\partial \ln T} + Y \frac{S^{He}}{S} \frac{\partial \ln S}{\partial \ln T} + \frac{S_{\text{mix}}}{S} \frac{\partial \ln S_{\text{mix}}}{\partial \ln T}, \quad (\text{C.5a})$$

$$\frac{\partial \ln S}{\partial \ln P} = (1 - Y) \frac{S^H}{S} \frac{\partial \ln S}{\partial \ln P} + Y \frac{S^{He}}{S} \frac{\partial \ln S}{\partial \ln P} + \frac{S_{\text{mix}}}{S} \frac{\partial \ln S_{\text{mix}}}{\partial \ln P}. \quad (\text{C.5b})$$

Die zweiten partiellen Ableitungen von ρ lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial \ln T \partial \ln P} &= (1 - Y) \frac{\rho}{\rho^H} \left[\frac{\partial^2 \ln \rho^H}{\partial \ln T \partial \ln P} + \frac{\partial \ln \rho^H}{\partial \ln T} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} - \frac{\partial \ln \rho^H}{\partial \ln P} \right) \right] \\ &+ Y \frac{\rho}{\rho^{He}} \left[\frac{\partial^2 \ln \rho^{He}}{\partial \ln T \partial \ln P} + \frac{\partial \ln \rho^{He}}{\partial \ln T} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} - \frac{\partial \ln \rho^{He}}{\partial \ln P} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial \ln T^2}$ und $\frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial \ln P^2}$ ergeben sich hieraus durch Ersetzen von $\partial \ln P$ durch $\partial \ln T$ und umgekehrt. Die zweiten partiellen Ableitungen von S lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln S}{\partial \ln T \partial \ln P} &= (1 - Y) \frac{S^H}{S} \left[\frac{\partial^2 \ln S}{\partial \ln T \partial \ln P} + \frac{\partial \ln S^H}{\partial \ln T} \left(\frac{\partial \ln S}{\partial \ln P} - \frac{\partial \ln S^H}{\partial \ln P} \right) \right] \\ &+ Y \frac{S^{He}}{S} \left[\frac{\partial^2 \ln S}{\partial \ln T \partial \ln P} + \frac{\partial \ln S^{He}}{\partial \ln T} \left(\frac{\partial \ln S}{\partial \ln P} - \frac{\partial \ln S^{He}}{\partial \ln P} \right) \right] \\ &+ \frac{S_{\text{mix}}}{S} \left[\frac{\partial^2 \ln S_{\text{mix}}}{\partial \ln T \partial \ln P} + \frac{\partial \ln S_{\text{mix}}}{\partial \ln T} \left(\frac{\partial \ln S_{\text{mix}}}{\partial \ln P} - \frac{\partial \ln S_{\text{mix}}}{\partial \ln P} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 \ln S}{\partial \ln T^2}$ und $\frac{\partial^2 \ln S}{\partial \ln P^2}$ ergeben sich hieraus durch Ersetzen von $\partial \ln P$ durch $\partial \ln T$ und umgekehrt.

Der adiabatische Temperaturgradient ist durch

$$\nabla_{\text{ad}} := \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_S = - \frac{\frac{\partial \ln S}{\partial \ln P}}{\frac{\partial \ln S}{\partial \ln T}} \quad (\text{C.8})$$

¹Die Gleichungen (45) und (46) in SAUMON et al. (1995) sind mit Druckfehlern behaftet.

gegeben, und die partiellen Ableitungen lauten:

$$\frac{\partial \nabla_{\text{ad}}}{\partial \ln T} = - \frac{\frac{\partial^2 \ln S}{\partial \ln P \partial \ln T} \frac{\partial \ln S}{\partial \ln T} - \frac{\partial \ln S}{\partial \ln P} \frac{\partial^2 \ln S}{\partial \ln T^2}}{\left(\frac{\partial \ln S}{\partial \ln T}\right)^2}, \quad (\text{C.9a})$$

$$\frac{\partial \nabla_{\text{ad}}}{\partial \ln P} = - \frac{\frac{\partial^2 \ln S}{\partial \ln P^2} \frac{\partial \ln S}{\partial \ln T} - \frac{\partial \ln S}{\partial \ln P} \frac{\partial^2 \ln S}{\partial \ln T \partial \ln P}}{\left(\frac{\partial \ln S}{\partial \ln T}\right)^2}. \quad (\text{C.9b})$$

C.3 Der Beitrag des Photonengases

Die Innere Energie des Photonengases pro Masseneinheit ist durch

$$U_{\text{rad}} = a \frac{T^4}{\rho} \quad (\text{C.10})$$

und die Entropie pro Masseneinheit durch

$$S_{\text{rad}} = \frac{4}{3} a \frac{T^3}{\rho} \quad (\text{C.11})$$

gegeben. Für die gesamte Innere Energie pro Masse gilt

$$U = U_{\text{gas}} + U_{\text{rad}} \quad (\text{C.12})$$

und für die Gesamtentropie

$$S = S_{\text{gas}} + S_{\text{rad}}. \quad (\text{C.13})$$

P bezeichnet im Folgenden den Gasdruck. Die ersten partiellen Ableitungen von U lauten:

$$\frac{\partial \ln U}{\partial \ln T} = \frac{U_{\text{gas}}}{U} \frac{\partial \ln U_{\text{gas}}}{\partial \ln T} + \frac{U_{\text{rad}}}{U} \left(4 - \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right), \quad (\text{C.14a})$$

$$\frac{\partial \ln U}{\partial \ln P} = \frac{U_{\text{gas}}}{U} \frac{\partial \ln U_{\text{gas}}}{\partial \ln P} - \frac{U_{\text{rad}}}{U} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P}. \quad (\text{C.14b})$$

Die ersten partiellen Ableitungen von S lauten:

$$\frac{\partial \ln S}{\partial \ln T} = \frac{S_{\text{gas}}}{S} \frac{\partial \ln S_{\text{gas}}}{\partial \ln T} + \frac{S_{\text{rad}}}{S} \left(3 - \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right), \quad (\text{C.15a})$$

$$\frac{\partial \ln S}{\partial \ln P} = \frac{S_{\text{gas}}}{S} \frac{\partial \ln S_{\text{gas}}}{\partial \ln P} - \frac{S_{\text{rad}}}{S} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P}. \quad (\text{C.15b})$$

Die zweiten partiellen Ableitungen von U lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln U}{\partial \ln T \partial \ln P} &= \frac{U_{\text{gas}}}{U} \left[\frac{\partial \ln U_{\text{gas}}}{\partial \ln T \partial \ln P} + \frac{\partial \ln U_{\text{gas}}}{\partial \ln T} \left(\frac{\partial \ln U_{\text{gas}}}{\partial \ln P} - \frac{\partial \ln U}{\partial \ln P} \right) \right] \\ &+ \frac{U_{\text{rad}}}{U} \left[\frac{\partial^2 \ln U_{\text{rad}}}{\partial \ln T \partial \ln P} + \frac{\partial \ln U_{\text{rad}}}{\partial \ln T} \left(\frac{\partial U_{\text{rad}}}{\partial \ln P} - \frac{\partial \ln U}{\partial \ln P} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 \ln U}{\partial \ln T^2}$ und $\frac{\partial^2 \ln U}{\partial \ln P^2}$ ergeben sich hieraus durch Ersetzen von $\partial \ln P$ durch $\partial \ln T$ und umgekehrt. Die zweiten partiellen Ableitungen von S lauten: .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln S}{\partial \ln T \partial \ln P} &= \frac{S_{\text{gas}}}{S} \left[\frac{\partial \ln S_{\text{gas}}}{\partial \ln T \partial \ln P} + \frac{\partial \ln S_{\text{gas}}}{\partial \ln T} \left(\frac{\partial \ln S_{\text{gas}}}{\partial \ln P} - \frac{\partial \ln S}{\partial \ln P} \right) \right] \\ &+ \frac{S_{\text{rad}}}{S} \left[\frac{\partial^2 \ln S_{\text{rad}}}{\partial \ln T \partial \ln P} + \frac{\partial \ln S_{\text{rad}}}{\partial \ln T} \left(\frac{\partial S_{\text{rad}}}{\partial \ln P} - \frac{\partial \ln S}{\partial \ln P} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 \ln S}{\partial \ln T^2}$ und $\frac{\partial^2 \ln S}{\partial \ln P^2}$ ergeben sich hieraus durch Ersetzen von $\partial \ln P$ durch $\partial \ln T$ und umgekehrt.

C.4 Transformation von Gas- in Gesamtdruck

Des Gesamtdruck P ist die Summe aus Gas- und Strahlungsdruck:

$$P = P_{\text{gas}} + \frac{a}{3} T^4. \quad (\text{C.18})$$

Das Verhältnis von Gas- und Gesamtdruck werde als

$$\beta := \frac{P_{\text{gas}}}{P} \quad (\text{C.19})$$

bezeichnet. Es gilt:

$$\left(\frac{d\beta}{dT} \right)_P = -\frac{4}{T}(1 - \beta), \quad (\text{C.20a})$$

$$\left(\frac{d\beta}{dP} \right)_T = \frac{1}{P}(1 - \beta). \quad (\text{C.20b})$$

Ist eine Größe f nur als Funktion von T und P_{gas} gegeben, so ergeben sich die Ableitungen von $f(T, P_{\text{gas}}(T, P))$ nach T und P aus den partiellen Ableitungen von $f(T, P_{\text{gas}})$ nach T und P_{gas} unter häufiger Ausnutzung von (C.20) wie folgt:

$$\left(\frac{df}{d \ln T} \right)_P = \frac{\partial f}{\partial \ln T} - 4 \frac{1 - \beta}{\beta} \frac{\partial f}{\partial \ln P_{\text{gas}}}, \quad (\text{C.21a})$$

$$\left(\frac{df}{d \ln P} \right)_T = \frac{1}{\beta} \frac{\partial f}{\partial \ln P_{\text{gas}}}. \quad (\text{C.21b})$$

Die zweiten partiellen Ableitungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 f}{d \ln T^2} \right)_P &= \frac{\partial^2 f}{\partial \ln T^2} - 4 \frac{1 - \beta}{\beta} \left[2 \frac{\partial^2 f}{\partial \ln T \partial \ln P_{\text{gas}}} \right. \\ &\left. + \frac{4}{\beta} \frac{\partial f}{\partial \ln P_{\text{gas}}} - 4 \frac{1 - \beta}{\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial \ln P_{\text{gas}}^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.22a})$$

sowie

$$\left(\frac{d^2 f}{d \ln P^2} \right)_T = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \ln P_{\text{gas}}^2} - \frac{1-\beta}{\beta^2} \frac{\partial f}{\partial \ln P_{\text{gas}}} \quad (\text{C.22b})$$

und

$$\left(\frac{d}{d \ln P} \left(\frac{df}{d \ln T} \right)_P \right)_T = \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial \ln T \partial \ln P_{\text{gas}}} - 4 \frac{1-\beta}{\beta^2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \ln P_{\text{gas}}^2} - \frac{\partial f}{\partial \ln P_{\text{gas}}} \right]. \quad (\text{C.22c})$$

C.5 Molekulargewichte

Es bezeichnen n_{H_2} , n_H , n_{H^+} die Konzentrationen, d.h. die relativen Teilchenzahlen von molekularem, atomarem und ionisiertem Wasserstoff und $n_{e,X}$ die Konzentration freier Elektronen. Es gilt:

$$n_{H_2} + n_H + n_{H^+} + n_{e,X} = 1. \quad (\text{C.23})$$

Es bezeichnen μ_{H_2} , μ_H , μ_{H^+} die Molekulargewichte von molekularem, atomarem und ionisiertem Wasserstoff. Mit $n_{H^+} = n_{e,X}$ ist das mittlere Molekulargewicht durch

$$\mu_X = \mu_{H_2} n_{H_2} + \mu_H n_H + \mu_{H^+} \frac{1}{2} (1 - n_{H_2} - n_H) \quad (\text{C.24})$$

gegeben, und mit $n_{H^+} = n_{e,X}$ und $\mu_{H_2} = 2$, $\mu_H = 1 = \mu_{H^+}$ ergibt sich:

$$\mu_X = \frac{1}{2} (3n_{H_2} + n_H + 1). \quad (\text{C.25})$$

Es bezeichnen n_{He} , n_{He^+} , $n_{He^{++}}$ die Konzentrationen von atomarem sowie ein- und zweifach ionisiertem Helium und $n_{e,Y}$ die Konzentration freier Elektronen. Es gilt:

$$n_{He} + n_{He^+} + n_{He^{++}} + n_{e,Y} = 1. \quad (\text{C.26})$$

Es bezeichnen μ_{He} , μ_{He^+} , $\mu_{He^{++}}$ die Molekulargewichte von atomarem sowie ein- und zweifach ionisiertem Helium. Mit

$$n_{e,Y} = \frac{1}{3} (2 - 2n_{He} - n_{He^+}) \quad (\text{C.27})$$

ist das Molekulargewicht durch

$$\mu_Y = \mu_{He} n_{He} + \mu_{He^+} n_{He^+} + \mu_{He^{++}} \frac{1}{3} (1 - n_{He} - 2n_{He^+}) \quad (\text{C.28})$$

gegeben, und mit $\mu_{He} = \mu_{He^+} = \mu_{He^{++}} = 2$ ergibt sich:

$$\mu_Y = \frac{1}{3} (4 + 8n_{He} + 4n_{He^+}). \quad (\text{C.29})$$

Unter der Annahme, daß bei den häufigsten Metallen die Anzahl der Protonen und Neutronen im Atomkern gleich ist, ist das Verhältnis von Elektronen zu Ionen bei Vollionisation 1 zu $\frac{\mu_{Z,0}}{2}$, wobei $\mu_{Z,0}$ das mittlere Molekulargewicht der Metalle im nichtionisierten Zustand bezeichnet. Bei voller Ionisation gilt für die Metallkonzentration

$$n_Z = \frac{1}{1 + \frac{\mu_{Z,0}}{2}} \quad (\text{C.30})$$

und für die Elektronenkonzentration

$$n_{e,Z} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\mu_{Z,0}}}. \quad (\text{C.31})$$

Das mittlere Molekulargewicht ergibt sich zu

$$\mu_Z = \mu_{Z,0}(1 - n_{e,Z}). \quad (\text{C.32})$$

Das mittlere Molekulargewicht für eine Mischung aus Wasserstoff, Helium und schwereren Elementen mit den Massenanteilen X , Y und Z ist durch

$$\frac{1}{\mu} = \frac{X}{\mu_X} + \frac{Y}{\mu_Y} + \frac{Z}{\mu_Z} \quad (\text{C.33})$$

gegeben.

Das Elektronenmolekulargewicht μ_e gibt das mittlere Molekulargewicht pro freiem Elektron an. Es gilt:

$$\frac{1}{\mu_e} = n_{e,X} \frac{X}{\mu_X} + n_{e,Y} \frac{Y}{\mu_Y} + n_{e,Z} \frac{Z}{\mu_Z}. \quad (\text{C.34})$$

C.6 Die Mischungsentropie

Die Mischungsentropie S_{mix} ist diejenige Entropie, die durch die Mischung von Wasserstoff und Helium entsteht. Die Mischungsentropie der einzelnen Ionisationszustände von Wasserstoff (H_2 , H , H^+) einerseits und der einzelnen Ionisationszustände von Helium (He , He^+ , He^{++}) andererseits sind bereits in den Entropien S^H und S^{He} der reinen Zustandsgleichungen von Wasserstoff und Helium berücksichtigt (SAUMON et al., 1995). Es gilt:

$$\frac{S_{\text{mix}}}{k} = \frac{1-Y}{\mu_H} \frac{2}{1+n_H+3n_{H_2}} \left[\ln(1+b\gamma) - n_{e,X} \ln(1+\delta) + b\gamma \left(\ln\left(1+\frac{1}{b\gamma}\right) - n_{e,Y} \ln\left(1+\frac{1}{\delta}\right) \right) \right] \quad (\text{C.35})$$

mit

$$b = \frac{\mu_H}{\mu_{He}} \frac{Y}{1-Y}, \quad (\text{C.36a})$$

$$\gamma = \frac{3}{2} \frac{1+n_H+3n_{H_2}}{1+2n_{He}+n_{He^+}}, \quad (\text{C.36b})$$

$$\delta = \frac{3}{2} \frac{2-2n_{He}-n_{He^+}}{1-n_{H_2}-n_H} \beta \gamma. \quad (\text{C.36c})$$

Für das totale Differential von S_{mix} ergibt sich

$$\frac{dS_{\text{mix}}}{k} = \frac{1-Y}{n_H} (f dg + g df) \quad (\text{C.37})$$

mit

$$f = \frac{2}{1 + n_H + 3n_{H_2}}, \quad (\text{C.38})$$

$$df = -f \frac{dn_H + 3dn_{H_2}}{1 + n_H + 3n_{H_2}} \quad (\text{C.39})$$

und

$$g = h_1 + h_2 + h_3 + h_4. \quad (\text{C.40})$$

Hierbei sind die Funktionen h_i definiert als

$$h_1 = \ln(1 + b\gamma), \quad (\text{C.41a})$$

$$h_2 = -n_{e,X} \ln(1 + \delta), \quad (\text{C.41b})$$

$$h_3 = b\gamma \ln\left(1 + \frac{1}{b\gamma}\right), \quad (\text{C.41c})$$

$$h_4 = -b\gamma n_{e,Y} \ln\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \quad (\text{C.41d})$$

mit den totalen Differentialen

$$dh_1 = \frac{b}{1 + b\gamma} d\gamma, \quad (\text{C.42a})$$

$$dh_2 = -\ln(1 + \delta) dn_{e,X} - n_{e,X} \frac{1}{1 + \delta} d\delta, \quad (\text{C.42b})$$

$$dh_3 = \left[\ln\left(1 + \frac{1}{b\gamma}\right) - \frac{1}{1 + b\gamma} \right] b d\gamma, \quad (\text{C.42c})$$

$$dh_4 = -b \ln\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) [\gamma dn_{e,Y} + n_{e,Y} d\gamma] + \frac{b\gamma}{\delta} n_{e,Y} \frac{\delta}{1 + \delta} d\delta. \quad (\text{C.42d})$$

Die totalen Differentiale von γ und δ sind hierbei durch

$$d\gamma = \gamma \left[\frac{dn_H + 3dn_{H_2}}{1 + n_H + 3n_{H_2}} - \frac{2dn_{He} + dn_{He^+}}{1 + dn_{He} + n_{He^+}} \right], \quad (\text{C.43a})$$

$$d\delta = \delta \left[\frac{1}{\gamma} d\gamma - \frac{2dn_{He} + dn_{He^+}}{2 - 2n_{He} - n_{He^+}} + \frac{dn_{H_2} + dn_H}{1 - n_{H_2} - n_H} \right] \quad (\text{C.43b})$$

gegeben.

D Mathematische Definitionen

In diesem Abschnitt werden einige grundlegende mathematische Begriffe definiert, die für die Diskussion des Verhaltens des expliziten Massentransferalgorithmus in 2.4.2 für große Zeitschritte erforderlich sind. Eine ganze Klasse von eindimensionalen, reellen Abbildungen, zu denen die explizite Massentransferformel (2.191) genauso wie die *logistische Abbildung* (2.211) gehören, durchläuft für einen Kontrollparameter μ ein sogenanntes FEIGENBAUM-Szenario (FEIGENBAUM, 1978, 1980). Das mathematische Standardwerk für die Dynamik eindimensionaler Abbildungen in diesem Zusammenhang ist COLLET und ECKMANN (1980). Vereinfachte Darstellungen finden sich unter anderem bei THOMPSON und STEWART (1986), JACKSON (1991).

Definition D.1. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt Homöomorphismus, falls f stetig ist und die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ existiert. Ist die Abbildung sogar differenzierbar, so bezeichnet man f als Diffeomorphismus.

Definition D.2. Für ein Vektorfeld $F : X \rightarrow X$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist der Orbit von $x \in X$ durch die Lösung $\Phi_t(x)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(x) = F(x) \quad (\text{D.1})$$

definiert.

Definition D.3. Für eine Abbildung $f : X \rightarrow X$ ist der Orbit von $x \in X$ durch

$$\mathcal{O}_f(x) := \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\} \quad (\text{D.2})$$

definiert.

Definition D.4. Es sei f \mathcal{C}^3 -differenzierbar, d.h. dreimal stetig differenzierbar. Die SCHWARZsche Ableitung von f ist definiert als

$$\mathcal{S}f(x) := \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2. \quad (\text{D.3})$$

Definition D.5. Eine Abbildung $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ heißt unimodal, wenn gilt:

(i) f ist stetig.

(ii) $f(0) = 1$.

(iii) f ist streng monoton wachsend auf $[-1, 0]$ und streng monoton fallend auf $[0, 1]$.

f heißt außerdem C^1 -unimodal, falls zusätzlich gilt:

(iv) f ist einmal stetig differenzierbar, und es gilt $f(x) \neq 0 \forall x \neq 0$.

Definition D.6. Eine Abbildung f heißt S-unimodal, falls gilt:

(i) f ist C^1 -unimodal.

(ii) f ist C^3 -differenzierbar.

(iii) $\mathcal{S}f(x) < 0 \forall x \in [-1, 1]$. Für $x = 0$ ist $\mathcal{S}f(0) = -\infty$ erlaubt. Die Bedingung, daß die SCHWARZsche Ableitung $\mathcal{S}f(x)$ überall negativ ist, ist äquivalent dazu, daß $\sqrt{|f'(x)|}$ für $x < 0$ und für $x > 0$ eine konvexe Funktion ist (THOMPSON und STEWART, 1986).

(iv) f bildet das Intervall $[f(1), 1]$ auf sich selbst ab.

(v) $f''(0) < 0$.

Definition D.7. Zwei Vektorfelder $F : X \rightarrow X$ und $\tilde{F} : Y \rightarrow Y$ auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten X und Y heißen topologisch äquivalent, falls es einen Homöomorphismus $h : Y \rightarrow X$ gibt mit

$$\tilde{F} = h^{-1} \circ F \circ h. \quad (\text{D.4})$$

Falls außerdem die Orbits von \tilde{F} durch h in die Orbits von F abgebildet werden, so heißen F und \tilde{F} topologisch konjugiert. Das bedeutet, daß ein Fixpunkt unter F in einen Fixpunkt unter \tilde{F} übergeht, ein periodischer Orbit in einen periodischen Orbit, ein stabiler Orbit in einen stabilen Orbit, und ein instabiler Orbit in einen instabilen Orbit. Die Dynamik des Systems bleibt also unter der Transformation h erhalten.

Definition D.8. Zwei Abbildungen $f : X \rightarrow X$ und $\tilde{f} : Y \rightarrow Y$ heißen topologisch äquivalent, falls es einen Homöomorphismus $h : Y \rightarrow X$ gibt mit

$$\tilde{f} = h^{-1} \circ f \circ h. \quad (\text{D.5})$$

Hierbei werden die Orbits von f in Orbits von \tilde{f} überführt, so daß zwei topologisch äquivalente Abbildungen auch automatisch topologisch konjugiert sind (Anmerkung: Für Vektorfelder ist dies nicht automatisch der Fall).

Definition D.9. Es seien zwei parameterabhängige Familien von Abbildungen $f_\delta : X \rightarrow X$ und $\tilde{f}_\mu : Y \rightarrow Y$ gegeben. Die beiden Familien heißen topologisch äquivalent, falls es einen Homöomorphismus p zwischen den Parameterräumen gibt und eine Familie von Homöomorphismen $h_\delta : X \rightarrow Y$, die stetig von μ (bzw. δ) abhängen und Orbits von f_δ in Orbits von $\tilde{f}_\mu = \tilde{f}_{p(\delta)}$ überführen.

Bemerkung D.10. Zwei topologische äquivalente Familien f_δ und \tilde{f}_μ durchlaufen unter einer Variation von δ bzw. $\mu = p(\delta)$ die gleiche dynamisch Entwicklung (ARNOLD, 1983).

Definition D.11. Es sei $\mu \mapsto f_\mu$ eine Abbildung von $[0, 1]$ in den Raum der C^1 -unimodalen Abbildungen mit

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |f_\mu(x) - f_{\mu_0}(x)| + |f'_\mu(x) - f'_{\mu_0}(x)| \rightarrow 0 \quad (\text{D.6})$$

für $\mu \rightarrow \mu_0$ (sup bezeichnet das Supremum). Dies ist äquivalent dazu, daß f_μ und f'_μ stetig in μ sind. Eine solche Familie von Abbildungen f_μ heißt vollständig, falls gilt:

- (i) $f_0(0) = 1$.
- (ii) $f_1(1) = f_1(-1) = -1$.

Bemerkung D.12. Jede vollständige Familie S -unimodaler Abbildungen durchläuft für μ von 0 bis 1 ein sogenanntes FEIGENBAUM-Szenario: Für ein $\mu_1 > 0$ wird der (einzige) Fixpunkt instabil, und es entsteht ein stabiler Orbit der Periode 2. Mit zunehmendem μ kommt es zu einer ganzen Kaskade von Periodenverdopplungen bei μ_{n+1} , bei denen der stabile Orbit der Periode 2^n instabil wird, und ein stabiler Orbit der Periode 2^{n+1} entsteht. Bei einem kritischen Wert von μ_∞ schließlich existieren unendlich viele instabile Orbits der Perioden 2^n , und die Dynamik des Systems ist ergodisch. Chaotische¹ Dynamik tritt erst für $\mu > \mu_\infty$ auf. Zwischen μ_∞ und 1 existieren unendlich viele „periodische Fenster“, Parameterbereiche mit einem stabilen, periodischen Orbit, der seinerseits für zunehmendes μ eine Kaskade von Periodenverdopplungen erleidet. Es gibt Fenster aller Perioden und dazwischen Bereiche mit chaotischer Dynamik, die wiederum von periodischen Fenstern durchsetzt sind. Wählt man ein beliebiges μ zwischen μ_∞ und 1, so besteht eine positive Wahrscheinlichkeit, daß die Dynamik von f_μ chaotisch ist². Für $\mu = 1$ umfaßt der Bereich chaotischer Dynamik das gesamte Intervall $[-1, 1]$.

Theorem D.13. Theorem von ŠARKOVSKII (ŠARKOVSKII, 1964, ŠTEFAN, 1977): Gegeben sei eine Anordnung der Natürlichen Zahlen in der folgenden Weise:

$$\begin{aligned} 3 &> 5 > 7 > 9 > \dots \\ &> 2 \cdot 3 > 2 \cdot 5 > 2 \cdot 7 > 2 \cdot 9 > \dots \\ &> 2^n \cdot 3 > 2^n \cdot 5 > 2^n \cdot 7 > 2^n \cdot 9 \\ &> 2^m > \dots > 8 > 4 > 2 > 1. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

¹Zusätzlich zu ergodischer Dynamik ist für das Auftreten von Chaos noch die sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen erforderlich, d.h. daß zwei beliebig benachbarte Orbits exponentiell auseinanderlaufen.

²In anderen Worten: Die Menge aller μ , für die f_μ chaotische Dynamik aufweist hat ein LEBESGUE-Maß größer Null.

f sei eine stetige Abbildung von einem (nicht notwendigerweise endlichen) Teilintervall der reellen Zahlen auf sich selbst. Dann gilt: Hat *f* einen Orbit der Periode $p \in \mathbb{N}$, dann hat *f* auch einen Orbit der Periode q für alle $q < p$ gemäß der obigen Anordnung.

Bemerkung D.14. Das Theorem von ŠARKOVSKII führt sofort auf den berühmten Ausspruch „Periode drei impliziert Chaos“ von (LI und YORKE, 1975): Hat eine solche Abbildung einen Orbit der Periode drei, so hat sie Orbits aller Perioden.

Dies bedeutet nicht, daß die Dynamik dann automatisch chaotisch ist. Betrachtet man beispielsweise ein „Fenster der Periode drei“ in einem FEIGENBAUM-Szenario wie in Abb. 2.11, so ist der Orbit der Periode drei stabil, und fast alle³ anderen Orbits konvergieren asymptotisch gegen den Orbit der Periode drei, bis auf die unendlich vielen Orbits aller anderen Perioden. Für eine Familie \mathcal{S} -unimodaler Funktionen bedeutet dies, daß sie, um von stabiler Dynamik mit nur einem einzigen Fixpunkt, bzw. Orbit der Periode eins zu einem „Fenster der Periode drei“ zu gelangen, ein FEIGENBAUM-Szenario durchlaufen muß.

³Fast alle Orbits im Sinne des LEBESGUE-Maßes.

Literaturverzeichnis

- E. G. ADELBERGER, S. M. AUSTIN, J. N. BAHCALL, A. B. BALANTEKIN, G. BOGAERT et al., *Solar fusion cross sections*, Rev. Mod. Phys. **70** (1998), 1265–1291.
- D. R. ALEXANDER und J. W. FERGUSON, *Low-temperature Rosseland opacities*, Astrophys. J. **437** (1994), 879–891.
- N. ANDRONOV, M. PINSONNEAULT und A. SILLS, *Cataclysmic variables: An empirical angular momentum loss prescription from open cluster data*, Astrophys. J. **582** (2003), 358–368.
- V. I. ARNOLD, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, in: M. BERGER, B. ECKMANN und S. R. S. VARADHAN (Hg.), Band 250 der Reihe *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: A Series of Comprehensive Studies in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1983.
- I. BARAFFE, G. CHARBRIER, F. ALLARD und P. H. HAUSCHILDT, *Evolutionary models for metal-poor low-mass stars. Lower main sequence of globular clusters and halo field stars*, Astron. Astrophys. **327** (1997), 1054–1069.
- T. S. BARMAN, *Irradiated Model Atmospheres for Extrasolar Giant Planets and Secondary Stars of Pre-Cataclysmic Variables*, Dissertation, University of Georgia, 2002.
- T. S. BARMAN und P. H. HAUSCHILDT, *Irradiation of CV secondaries*, in: B. T. GÄNSICKE, K. BREUERMAN und K. REINSCH (Hg.), *The Physics of Cataclysmic Variables and Related Objects*, Astron. Soc. Pac., San Francisco, Band 261 der Reihe *ASP Conf. Ser.*, 49–52, 2002.
- M. M. BASKO, S. HATCHETT, R. MCCRAY und R. A. SUNYAEV, *Evaporative winds in X-ray binaries*, Astrophys. J. **215** (1977), 276–284.
- M. M. BASKO und R. A. SUNYAEV, *Interaction of the X-ray source radiation with the atmosphere of the normal star in close binary systems*, Astrophys. Space Sc. **23** (1973), 117–158.
- M. E. BEER und P. PODSIADLOWSKI, *Irradiation effects in compact binaries*, in: C. A. TOUT und W. VAN HAMME (Hg.), *Exotic Stars as Challenges to Evolution*, Astron. Soc. Pac., San Francisco, Band 279 der Reihe *ASP Conf. Ser.*, 253–258, 2002.
- O. G. BENVENUTO und M. A. DE VITO, *A code for stellar binary evolution and its application to the formation of helium white dwarfs*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **342** (2003), 50–60.

- S. BIELAWSKI, D. DEROZIER und P. GLORIEUX, *Controlling unstable periodic orbits by a delayed continuous feedback*, Phys. Rev. E **49** (1994), R971–974.
- D. V. BISIKALO, A. A. BOYARCHUK, V. M. CHECHETKIN, O. A. KUZNETSOV und D. MOLteni, *Three-dimensional numerical simulation of gaseous flow structure in semidetached binaries*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **300** (1998), 39–48.
- S. BOCCALETTI, C. GREBOGI, Y.-C. LAI, H. MANCINI und D. MAZA, *The control of chaos: Theory and applications*, Phys. Rep. **329** (2000), 103–197.
- E. BÖHM-VITENSE, *Über die Wasserstoffkonvektionszone in Sternen verschiedener Effektivtemperaturen und Leuchtkräfte*, Z. f. Astrophys. **46** (1958), 108–143.
- A. A. BOYARCHUK, D. V. BISIKALO, O. A. KUZNETSOV und V. M. CHECHETKIN, *Mass Transfer in Close Binary Systems*, Taylor and Francis, London, New York, 2002.
- J. M. BRETT und R. C. SMITH, *A model atmosphere investigation of the effect of irradiation on the secondary star in a dwarf nova*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **264** (1993), 641–653.
- G. R. CAUGHLAN, W. A. FOWLER, M. J. HARRIS und B. A. ZIMMERMAN, *Tables of thermonuclear reaction rates for low-mass nuclei ($1 \leq Z \leq 14$)*, Atomic Data and Nuclear Data Tables **32** (1985), 197ff.
- G. CHABRIER und I. BARAFFE, *Structure and evolution of low-mass stars*, Astron. Astrophys. **327** (1997), 1039–1053.
- S. CHANDRASEKHAR, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover Publications, Dover, 1957.
- P. COLLET und J.-P. ECKMANN, *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, in: A. JAFFE und D. RUELLE (Hg.), Band 1 der Reihe *Progress in Physics*, Birkhäuser Verlag, Boston, 1980.
- J. P. COX und R. T. GIULI, *Principles of Stellar Structure I/II*, Gordon and Breach, Science Publishers, New York, London, Paris, 1968.
- P. CVITANOVIĆ (Hg.), *Universality in Chaos*, Adam Hilger Ltd, Bristol, 1984.
- A. S. EDDINGTON, *The reflection effect in eclipsing variables*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **86** (1926), 320–327.
- P. P. EGGLETON, *Approximation to the radii of Roche lobes*, Astrophys. J. **268** (1983), 368.
- M. J. FEIGENBAUM, *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*, J. Stat. Phys. **19** (1978), 25–52.
- M. J. FEIGENBAUM, *Universal behaviour in nonlinear systems*, Los Alamos Science **1** (1980), 4–27, siehe auch Nachdruck in CVITANOVIĆ (1984).
- O. GOLBASI, F. CHOLLET, K. KILIÇ, V. SINCEAC, Z. ASLAN et al., *Solar radius determinations obtained with the CCD astrolabe at TUBITAK National Observatory*, Astron. Astrophys. **368** (2001), 1077–1082.

- J. GUCKENHEIMER und P. HOLMES, in: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Band 42 der Reihe *Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- J.-M. HAMEURY, A. R. KING und J.-P. LASOTA, *A model for soft X-ray transients*, AA **162** (1986), 71–79.
- J.-M. HAMEURY, A. R. KING, J.-P. LASOTA und F. RAISON, *Structure and evolution of X-ray heated compact binaries*, Astron. Astrophys. **277** (1993), 81–92.
- J.-M. HAMEURY, J.-P. LASOTA und B. WARNER, *The zoo of dwarf novae: illumination, evaporation and disc radius variation*, Astron. Astrophys. **353** (2000), 244–252.
- J.-M. HAMEURY und H. RITTER, *Illumination in binaries*, Astron. Astrophys. **123** (1997), 273–277.
- Z. HAN, C. A. TOUT und P. P. EGGLETON, *Low and intermediate-mass close binary evolution and the initial – final mass relation*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **319** (2000), 215–222.
- A. HARPAZ und S. RAPPAPORT, *Heating of a rotating star*, Astron. Astrophys. **294** (1995), L49–L52.
- M. S. HJELLMING, *Rapid Mass Transfer in Binary Systems*, Dissertation, Illinois University at Urbana-Champaign, Savoy, 1989.
- M. S. HJELLMING und R. F. WEBBINK, *Thresholds for rapid mass transfer in binary systems. I. Polytopic models*, Astrophys. J. **318** (1987), 794–808.
- J. R. HURLEY, C. A. TOUT und O. R. POLS, *Evolution of binary stars and the effects of tides on binary populations*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **329** (2002), 897–928.
- I. IBEN JR., A. V. TUTUKOV und A. V. FEDOROVA, *On the evolution of low-mass X-ray binaries under the influence of a donor stellar wind induced by X-rays from the accretor*, Astrophys. J. **486** (1997), 955–986.
- C. A. IGLESIAS und F. J. ROGERS, *Updated OPAL opacities*, Astrophys. J. **464** (1996), 943–953.
- E. A. JACKSON, *Perspectives of Nonlinear Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- R. J. JELITTO, *Thermodynamik und Statistik*, Band 6 der Reihe *Theoretische Physik*, Aula Verlag, Wiesbaden, 2. Aufl., 1989.
- A. R. KING, *Irradiation of the companion star in cataclysmic variables*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **241** (1989), 365–374.
- A. R. KING, *Accretion in close binaries*, in: W. H. G. LEWIN, J. VAN PARADIJS und E. P. J. VAN DEN HEUVEL (Hg.), *X-Ray Binaries*, Cambridge Astrophysics Series, Cambridge University Press, Cambridge, 419–456, 1995.

- A. R. KING, J. FRANK, U. KOLB und H. RITTER, *Mass transfer cycles in cataclysmic variables*, *Astrophys. J.* **444** (1995), L37–L40.
- A. R. KING, J. FRANK, U. KOLB und H. RITTER, *Global analysis of mass transfer cycles in cataclysmic variables*, *Astrophys. J.* **467** (1996), 761–772.
- A. R. KING, J. FRANK, U. KOLB und R. RITTER, *Mass transfer cycles in close binaries with evolved companions*, *Astrophys. J.* **482** (1997), 919–928.
- R. KIPPENHAHN und A. WEIGERT, *Stellar Structure and Evolution*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- R. KIPPENHAHN, A. WEIGERT und E. HOFMEISTER, *Methods for calculating stellar evolution*, in: B. ALDER, S. FERNBACH und M. ROSENBERG (Hg.), *Astrophysics*, Band 7 der Reihe *Methods in Computational Physics*, Academic Press, New York, 129–190, 1967.
- U. KOLB, *Entwicklung enger Doppelsternsysteme mit kühlen Komponenten*, Diplomarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München, 1988.
- U. KOLB, *Eine Populationsstudie kataklysmischer Doppelsterne*, Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität München, 1992.
- U. KOLB, *A model for the intrinsic population of cataclysmic variables*, *Astron. Astrophys.* **271** (1993), 149–166.
- U. KOLB, M. B. DAVIES, A. KING und H. RITTER, *The violent past of Cygnus X-2*, *MNRAS* **317** (2000), 438–446.
- U. KOLB und H. RITTER, *A comparative study of the evolution of a close binary using a standard and an improved technique for computing mass transfer*, *Astron. Astrophys.* **236** (1990), 385–392.
- U. KOLB und H. RITTER, *Advantages and limitations of the bipolytropic model for computing the secular evolution of cataclysmic binaries*, *Astron. Astrophys.* **254** (1992), 213–223.
- Z. KOPAL, *Close Binary Systems*, in: M. A. ELLISON und A. C. B. LOVELL (Hg.), Band 5 der Reihe *The International Astrophysics Series*, John Wiley & Sons, New York, 1959.
- Z. KOPAL, *The Roche Problem*, *Astrophysics and Space Sciences Library*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.
- L. LANDAU und E. LIFSCHITZ, *The Classical Theory of Fields*, Addison-Wesley Series in Advanced Physics, Pergamon Press, London, Paris, 1. Aufl., 1951.
- L. D. LANDAU und E. M. LIFSCHITZ, *Hydrodynamik*, Band 6 der Reihe *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Akademie Verlag, Berlin, 5. Aufl., 1991.
- L. D. LANDAU und E. M. LIFSCHITZ, *Klassische Feldtheorie*, Band 2 der Reihe *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Akademie Verlag, Berlin, 12. Aufl., 1992.
- W. H. G. LEWIN und J. VAN PARADIJS (Hg.), *X-Ray Binaries*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

- T.-Y. LI und J. A. YORKE, *Period three implies chaos*, Am. Math. Monthly **82** (1975), 985–992.
- M. LIVIO und J. W. TRURAN, *On the interpretation and implications of nova abundances: An abundance of riches or an overabundance of enrichments*, Astrophys. J. **425** (1994), 797–801.
- S. H. LUBOW und F. H. SHU, *Gas dynamics of semidetached binaries*, Astrophys. J. **198** (1975), 383–405.
- T. J. MARTIN und S. C. DAVEY, *Application of smoothed particle hydrodynamics to atmospheric motions in interacting binary systems*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **275** (1995), 31–42.
- P. MCCORMICK und J. FRANK, *Evolutionary effects of irradiation in cataclysmic variables*, Astrophys. J. **500** (1998), 923–934.
- L. MESTEL und H. C. SPRUIT, *On magnetic braking of late-type stars*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **226** (1987), 57–66.
- F. MEYER und E. MEYER-HOFMEISTER, *A model for the standstill of the Z Camelopardalis variables*, Astron. Astrophys. **121** (1983), 29–34.
- D. MIHALAS und B. W. MIHALAS, *Foundations of Radiation Hydrodynamics*, Oxford University Press, New York, 1984.
- S. W. MOCHNACKI, *Accurate integrations of the Roche model*, Astrophys. J. Suppl. Series **55** (1984), 551–561.
- J. MONTALBÁN, F. D’ANTONA und I. MAZZITELLI, *Structure and evolution of low-mass population II stars*, Astron. Astrophys. **360** (2000), 935–951.
- P. M. MOTL, J. E. TOHLIN und J. FRANK, *Numerical methods for the simulation of dynamical mass transfer in binaries*, Astrophys. J. Suppl. Series **138** (2002), 121–148.
- M. NAUENBERG, *Analytic approximations to the mass-radius relation and energy of zero-temperature stars*, Astrophys. J. **175** (1972), 417–430.
- F. NOËL, *On solar radius measurements with Danjon astrolabes*, Astron. Astrophys. **396** (2002), 667–672.
- Å. NORDLUND und L. P. R. VAZ, *The reflection effect in model stellar atmospheres II: The bolometric reflection albedo in non-grey atmospheres with convection*, Astron. Astrophys. **228** (1990), 231–237.
- Y. OSAKI, *Irradiation-induced mass-overflow instability as a possible cause of superoutbursts in SU UMa stars*, Astron. Astrophys. **144** (1985), 369–380.
- Y. OSAKI und F. MEYER, *Is evidence for enhanced mass transfer during dwarf-nova outbursts well substantiated?*, Astron. Astrophys. **401** (2003), 325–337.
- E. OTT, C. GREBOGI und J. A. YORKE, *Controlling chaos*, Phys. Rev. Lett. **64** (1990), 1196–1199.
- B. PACZYŃSKI, *Evolutionary processes in close binary systems*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **9** (1971), 183–208.

- B. PACZYŃSKI und R. SIEKIEWICZ, *Evolution of close binaries - Mass exchange on the dynamical time scale*, Acta Astron. **22** (1972), 73–71.
- J. PAP, E. G. JILINSKI, A. H. ANDREI, S. P. PULIAEV und E. R. NETO, *On the relation between total irradiance and radius variations*, Astron. Astrophys. 1005–1018.
- L. PASTETTER und H. RITTER, *Evolution of close binary systems that undergo a dynamically stable late case C mass transfer*, Astron. Astrophys. **214** (1989), 186–202.
- S. PHILLIPS und P. PODSIADLOWSKI, *Irradiation pressure effects in close binary systems*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **337** (2002), 431–333.
- P. PODSIADLOWSKI, *Irradiation-driven mass transfer in low-mass X-ray binaries*, Nature **350** (1991), 136–138.
- P. PODSIADLOWSKI, S. RAPPAPORT und E. PFAHL, *Evolutionary binary sequences for low- and intermediate-mass X-ray binaries*, Astrophys. J. **565** (2002), 1107–1133.
- O. R. POLS, C. A. TOUT, P. P. EGGLETON und Z. HAN, *Approximate input physics for stellar modelling*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **274** (1995), 964–974.
- D. PRIALNIK und A. KOVETZ, *An extended grid of multicycle nova evolution models*, Astrophys. J. **445** (1995), 789–810.
- J. E. PRINGLE, *Introduction*, in: J. E. PRINGLE und R. A. WADE (Hg.), *Interacting Binary Stars*, Band 6 der Reihe *Cambridge Astrophysics Series*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- E. H. P. PYLYSER und G. J. SAVONIJE, *The evolution of low-mass close binary systems with a compact component. II. Systems captured by angular momentum losses*, Astron. Astrophys. **208** (1988), 52–62.
- K. PYRAGAS, *Continuous control of chaos by self-controlling feedback*, Phys. Lett. A **170** (1992), 421–428.
- V. RENVOIZÉ, I. BARAFFE, U. KOLB und H. RITTER, *Distortion of secondaries in semi-detached binaries and the cataclysmic variable period minimum*, Astron. Astrophys. **389** (2002), 485–493.
- H. RITTER, *Turning on and off mass transfer in cataclysmic binaries*, Astron. Astrophys. **202** (1988), 93–100.
- H. RITTER, *Secular evolution of compact binaries: Tema con variazioni*, Mem. Soc. Astron. Ital. **65** (1994), 173–181.
- H. RITTER, *Analytical solution for the evolution of a binary with stable mass transfer from a giant*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **309** (1999), 360–372.
- H. RITTER und U. KOLB, *Catalogue of cataclysmic binaries, low-mass X-ray binaries and related objects (Seventh edition)*, Astron. Astrophys. **404** (2003), 301–303.

- H. RITTER, Z. ZHANG und J.-M. HAMEURY, *Secular evolution of cataclysmic variables with irradiation-induced mass transfer*, in: A. EVANS und J. H. WOOD (Hg.), *Cataclysmic Variables and Related Objects*, Proceedings of the 158th Colloquium of the IAU, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- H. RITTER, Z. ZHANG und U. KOLB, *The reaction of low-mass stars to anisotropic irradiation and its implications for the secular evolution of cataclysmic binaries*, in: A. BIANCHINI, M. DELLA VALLE und M. ORIO (Hg.), *Cataclysmic Variables*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 479–486, 1995.
- H. RITTER, Z.-Y. ZHANG und U. KOLB, *Irradiation and mass transfer in low-mass compact binaries*, *Astron. Astrophys.* **360** (2000), 959–990.
- S. M. RUCIŃSKI, *The photometric proximity effects in close binary systems II: The bolometric reflection effect for stars with deep convective envelopes*, *Acta Astron.* **19** (1969), 245–255.
- A. N. ŠARKOVSKII, *Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself*, *Ukr. Mat. Z.* **16** (1964), 61–71.
- D. SAUMON, G. CHABRIER und H. M. VAN HORN, *An equation of state for low-mass stars and giant planets*, *Astrophys. J. Suppl. Series* **99** (1995), 713–741.
- G. J. SAVONIJE, *Roche-lobe overflow in X-ray binaries*, *Astron. Astrophys.* **62** (1978), 317–338.
- K. SCHENKER, A. R. KING, U. KOLB, G. A. WYNN und Z. ZHANG, *AE Aquarii: how CVs descend from supersoft binaries*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **337** (2002), 1105–1112.
- K. SCHENKER, U. KOLB und H. RITTER, *Properties of discontinuous and nova-amplified mass transfer in cataclysmic variables*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **297** (1998), 633–647.
- H. SCHLATTL, *The Sun, a Laboratory for Neutrino- and Astrophysics*, Dissertation, Technische Universität München, 1999.
- H. SCHLATTL, A. WEISS und H.-G. LUDWIG, *A solar model with improved subatmospheric stratification*, *Astron. Astrophys.* **322** (1997), 646–652.
- H. R. SCHWARZ, *Numerische Mathematik*, B. G. Teubner, Stuttgart, 3. Aufl., 1993.
- A. W. SHAFER, J. C. WHEELER und J. K. CANNIZZO, *Mass transfer in cataclysmic variables: Clues from the dwarf nova period distribution*, *Astrophys. J.* **305** (1986), 261–266.
- A. SILLS, M. H. PINSONNEAULT und D. M. TERNDROP, *The angular momentum evolution of very low mass stars*, *Astrophys. J.* **534** (2000), 335–347.
- J. SMAK, *Outbursts of dwarf novae*, *Publ. Astron. Soc. Pac.* **96** (1984), 5–18.
- J. E. SOCOLAR, D. W. SUKOW und D. J. GAUTHIER, *Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems*, *Phys. Rev. E* **50** (1994), 3245–3248.

- M. DE SOUSA VIEIRA und A. J. LICHTENBERG, *Controlling chaos using nonlinear feedback with delay*, Phys. Rev. E **54** (1996), 1200–1207.
- H. C. SPRUIT, *Effects of spots on a star's radius and luminosity*, Astron. Astrophys. **108** (1982), 348–355.
- H. C. SPRUIT und H. RITTER, *Stellar activity and the period gap in cataclysmic variables*, Astron. Astrophys. **124** (1983), 267–272.
- P. ŠTEFAN, *A theorem of Šarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line*, Comm. Math. Phys. **54** (1977), 237–248.
- R. STEHLE, H. RITTER und U. KOLB, *An analytic approach to the secular evolution of cataclysmic variables*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **279** (1996), 581–590.
- J. M. T. THOMPSON und H. B. STEWART, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, John Wiley and Sons, Chichester, New York, 1986.
- C. A. TOUT, P. P. EGGLETON, A. C. FABIAN und J. E. PRINGLE, *The evolution of irradiated stars*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **238** (1989), 427–438.
- L. P. R. VAZ, *The reflection effect in eclipsing binary systems*, Astrophys. Space Sc. **113** (1985), 349–364.
- L. P. R. VAZ und Å. NORDLUND, *The reflection effect in model stellar atmospheres I: Grey atmospheres with convection*, Astron. Astrophys. **147** (1985), 281–299.
- F. VERBUNT und C. ZWAAN, *Magnetic braking in low-mass X-ray binaries*, Astron. Astrophys. **100** (1981), L7–L9.
- J. WAGENHUBER und A. WEISS, *Numerical methods for AGB evolution*, Astron. Astrophys. **286** (1994), 121–135.
- B. WARNER, *Cataclysmic Variable Stars*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- R. F. WEBBINK, *Stellar Evolution and Binaries*, in: J. E. PRINGLE und R. A. WADE (Hg.), *Interacting Binary Stars*, Band 6 der Reihe *Cambridge Astrophysics Series*, Cambridge University Press, Cambridge, 39–70, 1985.
- K. WU, D. T. WICKRAMASINGHE und B. WARNER, *Feedback mass transfer in cataclysmic variables: An explanation of the behaviour of VY Scl stars*, Publ. Astron. Soc. Aust. **12** (1995), 60–65.
- J.-P. ZAHN, *Tidal friction in close binary stars*, Astron. Astrophys. **57** (1977), 383–394, siehe auch Erratum in ZAHN (1978).
- J.-P. ZAHN, *Erratum: Tidal friction in close binary stars*, Astron. Astrophys. **67** (1978), 162.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich all denen danken, die mir beim Gelingen meiner Dissertation mit Rat und Tat zur Seite standen und ohne die die vorliegende Arbeit nur sehr viel schwerer zu realisieren gewesen wäre. Mein besonderer Dank gilt:

Meinem Doktorvater Dr. Hans Ritter für zahllose lehrreiche Diskussionen, sein nahezu unerschöpfliches Wissen über Doppelsternsysteme und zahlreiche Anregungen, die mir eine unschätzbare Hilfe waren,

Dr. Helmut Schlattl und Dr. Achim Weiss für das zur Verfügung Stellen ihres Sternentwicklungscode, und Dr. Helmut Schlattl insbesondere für seine grenzenlose Leidenschaft, mir Fragen zu den Interna des Sternentwicklungscode jederzeit zu beantworten, für seine Fähigkeit, zu fast jedem Problem innerhalb von Sekunden die verantwortliche Codezeile nennen zu können, und ohne den die notwendigen Modifikationen des Codes hart am Rande der Unmöglichkeit gewesen wären,

Dr. Isabelle Baraffe für das Generieren von EOS-Tabellen hoher Auflösung,

Dr. Jean-Marie Hameury dafür, daß er einen seit Jahren angestaubten Code innerhalb von wenigen Stunden zum Laufen brachte und mir neue Bestrahlungstabellen in höherer Auflösung zur Verfügung stellte,

Prof. Dr. Peter Hauschildt und Prof. Dr. Jason Ferguson für das Generieren von Opazitätstabellen für die Atmosphären massearmer Sterne,

Dr. Martin Reinecke für zahlreiche Diskussionen, Meta-Template-Programmierung, Software-Support und die Lösung einiger kniffliger L^AT_EX-Probleme,

Kaustuv Moni Basu für die Beantwortung von Fragen zur englischen Grammatik,

ferner Maria Depner, Martin Flaskamp, Dr. Ulrich Kolb und Dr. Klaus Schenker.

