Semiklassische Asymptotik der Resolvente eines Diracoperators

Claudia Warmt

München 2011

Semiklassische Asymptotik der Resolvente eines Diracoperators

Claudia Warmt

Dissertation
an der Fakultät für Mathematik, Informatik und Statistik
der Ludwig–Maximilians–Universität
München

vorgelegt von
Claudia Warmt
aus Berlin

München, den 28. Juni 2011

Erstgutachter: Prof. Dr. Siedentop, Universität München
Zweitgutachter: Prof. Dr. Knauf, Universität Erlangen
Tag der mündlichen Prüfung: 19. Oktober 2011

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit widmet sich verschiedenen Aspekten der Diracgleichung der relativistischen Quantenmechanik aus Sicht der Mathematik. Motiviert durch das in den letzten Jahren geweckte Interesse an Graphen wird zuerst eine ausgezeichnete selbstadjungierte Fortsetzung des masselosen Diracoperators in zwei Dimensionen studiert, dessen Potential eine Coulomb-Singularität besitzt.

In einem weiteren Kapitel wird ein semiklassischer Diracoperator mit glattem und beschränktem Potential in beliebiger Dimension betrachtet. Ziel ist es, unter geeigneten Voraussetzungen die semiklassische Asymptotik des Greenschen Kerns zu untersuchen. Dazu wird eine geeignete Gewichtsfunktion konstruiert, die zur Konjugation des Diracoperators mit exponentiellen Gewichten dient. Ferner werden die Eigenwerte und Eigenprojektionen des Symbols des konjugierten Diracoperators studiert. Im Rahmen einer WKB-Konstruktion werden dann Näherungslösungen der komplexwertigen zeitabhängigen Hamilton-Jacobi-Gleichung und der Transportgleichungen ermittelt. Anschließend wird mit Hilfe eines Ansatzes in Gestalt eines Fourierintegraloperators mit komplexwertiger Phase eine Parametrix des konjugierten Diracoperators bestimmt. Schließlich wird die Asymptotik des Greenschen Kerns des konjugierten Diracoperators und damit auch die semiklassische Asymptotik des Distributionskerns der Inversen des Diracoperators ermittelt. Es wird gezeigt, daß dieser Kern als Produkt eines exponentiell abfallenden Faktors, der einen gewissen Agmon-Abstand enthält, und einer Amplitude, die eine asymptotische Entwicklung in Potenzen des semiklassischen Parameters besitzt, darstellbar ist. Ferner wird eine explizite Darstellung für den führenden Term dieser Asymptotik bewiesen.

This thesis adresses different aspects of the Dirac equation of relativistic quantum mechanics from a mathematical point of view. Motivated by the recent interest in graphene a distinguished self-adjoint extension of the massless Dirac operator in two dimensions will be studied whose potential has a Coulomb singularity.

Then a semi-classical Dirac operator with a smooth and bounded potential will be discussed in arbitrary dimensions. The aim is to study the semi-classical asymptotics of the Green kernel under suitable assumptions. To this end a suitable weight function will be constructed that will allow to conjugate the Dirac operator with exponential weights. Moreover, the eigenvalues and eigenprojections of the symbol of the conjugated Dirac operator will be studied. Through a WKB construction approximate solutions of the complex time dependent Hamilton-Jacobi equation and the transport equations will be determi-

ned. Afterwards a parametrix for the conjugated Dirac operator will be obtained using a Fourier integral operator with complex-valued phase function as an ansatz. Eventually, the asymptotics of the Green kernel of the conjugated Dirac operator and thereby also the semi-classical asymptotics of the distribution kernel of the inverse of the Dirac operator will be established. It will be shown that this kernel can be represented as a product of an exponentially decaying factor involving an associated Agmon distance and an amplitude that admitts an asymptotic expansion in powers of the semi-classical parameter. Furthermore, an explicit formula for the leading term in these asymptotics will be obtained.

Kapitel 1

Einleitung

Der Physiker P. A. M. Dirac widmete sich der Untersuchung der relativistischen Quantenmechanik, was zu der in [2] angegebenen Diracgleichung aus dem Jahre 1928 führte. Mittels dieser Gleichung läßt sich das Verhalten von relativistischen Teilchen mit Spin 1/2, wie das z.B. für Elektronen der Fall ist, beschreiben. Die Diracgleichung ist danach stets von großem Interesse in der relativistischen Quantenmechanik gewesen und viele ihrer Aspekte sind studiert worden. Zu dieser langen Geschichte gesellten sich in jüngerer Vergangenheit weitere Anstöße durch die neu gewonnene Bedeutung von Graphen erhalten. Bei Graphen handelt es sich um zweidimensionale, in einem Sechseckgitter angeordnete Kohlenstoffschichten in Graphit. Im Folgenden wollen wir uns mit zwei dieser Aspekte aus Sicht der Mathematik befassen. Zum einen betrifft das die Frage nach der Existenz einer ausgezeichneten selbstadjungierten Fortsetzung des minimalen Diracoperators mit Coulombartigem Potential in zwei Dimensionen. Zum anderen wenden wir uns der Untersuchung der semiklassischen Asymptotik der Resolvente eines Diracoperators zu.

1.1 Der Diracoperator mit Coulombartigem Potential in zwei Dimensionen

Hier wird das Problem studiert, das in der Bestimmung einer ausgezeichneten selbstadjungierten Fortsetzung des minimalen Diracoperators, dessen Potential eine Coulomb-Singularität besitzt, liegt. Ein erster Schritt wurde mittels der Kato-Ungleichung unternommen, mit deren Hilfe sich die Pseudo-Friedrichsfortsetzung definieren läßt. In den Arbeiten [4, 9, 11, 35, 40] finden sich ausgezeichnete selbstadjungierte Realisierung des Coulomb-Dirac-Operators in drei Dimensionen, sofern die Kopplungskonstante des Potentials die Bedingung $0 < g < 1$ erfüllt. Keine der bislang erwähnten Arbeiten konnte jedoch eine ausgezeichnete Fortsetzung im Fall der kritischen Kopplungskonstante 1 liefern. Dieses Problem wurde erst im Jahre 2007 in [32] gelöst. Der dabei stets betrachtete massive dreidimensionale Diracoperator war lange Zeit von primärer Bedeutung. Durch die in den letzten Jahren gewonnene Bedeutung von Graphen wurde das Interesse an der Untersuchung desselben Problems für einen masselosen zweidimensionalen Diracoperators verstärkt. Denn die Anregungen niedrigenergetischer Elektronen in Graphen lassen sich durch masselose Dirac-Fermionen in zwei Dimensionen beschreiben, wobei nur die Lichtgeschwindigkeit c durch die Fermi-Geschwindigkeit $\nu_F \approx 10^6 \frac{m}{s}$ ersetzt ist (siehe z. B. [14, 15, 17, 29]). Wie die Artikel [15, 17, 29] zeigen, ist das Problem stabil, wenn die Kopplungskonstante $< \frac{1}{2}$ ist, hingegen instabil, wenn die Kopplungskonstante $> \frac{1}{2}$ ist. Das legt nahe, daß der Wert der kritischen Kopplungskonstante bei der Suche nach einer ausgezeichneten selbstadjungierten Erweiterung in zwei Dimensionen $\frac{1}{2}$ ist.

In Kapitel 2 ist das Hauptergebnis die Charakterisierung einer ausgezeichneten selbstadjungierten Realisierung des masselosen zweidimensionalen Diracoperators mit Coulombartigem Potential, dessen Kopplungskonstante der Voraussetzung $g \leq \frac{1}{2}$ genügt. Ein wesentlicher Punkt des Beweises, der [32] folgt, ist die Verwendung einer Variante der Hardy-Ungleichung. Hardy-Ungleichungen für den Diracoperator finden sich etwa in [20, 30, 31]. Motiviert durch [21] wird in [20] eine Min-Max-Charakterisierung der Eigenwerte, die sich in der Lücke im wesentlichen Spektrum eines Diracoperators befinden, gezeigt. Dabei lassen sich auch Diracoperatoren mit Coulombartigem Potential behandeln und es ergeben sich neue Varianten der Hardy-Ungleichung, die dann in [31] auf direktem analytischem Wege bewiesen werden.

1.2 Semiklassische Asymptotik der Resolvente eines Diracoperators

Das Problem sich mit dem semiklassischen Limes der Diracgleichung zu befassen, hat eine lange Geschichte. Bereits im Jahre 1932 studierte W. Pauli in [10] mit Hilfe des WKB-Verfahrens dieses Problem. Allerdings konnte W. Pauli die Amplitude nur in einigen Spezialfällen bestimmen. Das wurde im Jahre 1963 von S. I. Rubinow und J. B. Keller in [28] verallgemeinert. Deren WKB-Lösung ist das Produkt aus einem Phasenfaktor und einer Amplitude, die eine Potenzreihe in $\hbar$ darstellt. Im Jahre 1982 wurde das Problem von K. Yajima in [41] aufgegriffen, um sich der quasiklassischen Näherung der Diracgleichung zu widmen, deren Evolutionsoperator zu konstruieren und sich dann in der darauf aufbauenden Arbeit [42] mit der Streutheorie zu befassen. Arbeiten jüngeren Datums sind etwa [37, 38] von J. Bolte und S. Keppeler, die eine semiklassische Entwicklung des Evolutionsoperators und eine Spurformel angeben. Diese Entwicklung erhalten J. Bolte und S. Keppeler, indem sie den Integralkern des Evolutionsoperators mit Hilfe einer Variante des WKB-Verfahrens untersuchen. An dieses Problem wollen wir in Kapitel 3 anschließen, wenn wir die semiklassische Asymptotik des Distributionskerns der Inversen des Diracoperators ermitteln. Dieser Kern wird sich als Produkt eines exponentiell abfallenden Faktors, der einen gewissen Agmon-Abstand enthält, und einer Amplitude, die eine asymptotische Entwicklung in Potenzen von $\hbar$ besitzt, darstellen lassen. Wir wollen dabei auf [8] aufbauen. In [8] wurde von O. Matte bereits eine dazu analoge asymptotische Entwicklung für eine Klasse von h-Pseudodifferentialoperatoren angegeben, deren Symbole periodisch in den Impulsvariablen sind. Der soeben erwähnte Agmon-Abstand geht hierbei aus einem

Finsler-Abstand in [8] hervor.

Viele Arbeiten befassen sich mit diversen Aspekten des semiklassischen Diracoperators. Abschließend wollen wir einige davon erwähnen. Abschnitt 14 aus [33] geht auf die semiklassische Näherungslösung des Cauchy-Problems für die Diracgleichung ein. Weiterhin behandelt [39] die Anzahl der Eigenwerte eines Diracoperators im semiklassischen Limes und den exponentiellen Abfall der Eigenfunktionen, sofern das Potential mehrere Minima und Maxima besitzt. Ferner wenden sich [19, 25] der Streutheorie zu. In [25] findet sich eine semiklassische Entwicklung der Streuamplitude eines Diracoperators und in [19] eine der Streuphase. Überdies werden in [5] Resonanzen und die Asymptotik der spektralen Verschiebungsfunktion des semiklassischen Diracoperators betrachtet.

1.2.1 Übersicht über die Hauptergebnisse

Im Folgenden geben wir eine Übersicht über die Ergebnisse von Kapitel 3. Weitere Informationen befinden sich in den Einleitungen der jeweiligen Abschnitte und Unterabschnitte.

In Kapitel 3 werden wir die semiklassische Asymptotik des Distributionskerns eines Diracoperators untersuchen und den führenden Koeffizienten dieser Asymptotik ermitteln. In Abschnitt 3.1 definieren wir zunächst semiklassische selbstadjungierte Diracoperatoren und führen den Distributionskern ein.

In Abschnitt 3.2 konjugieren wir den Diracoperator mit exponentiellen Gewichten. Dazu konstruieren wir eine geeignete Gewichtsfunktion, die im wesentlichen durch einen gewissen Agmon-Abstand gegeben ist, indem wir dem Beweis aus [8] folgen. Ferner studieren wir die Eigenwerte und Eigenprojektionen des Symbols des konjugierten Diracoperators. Denn die Asymptotik des Greenschen Kerns des konjugierten Diracoperators wird die des eigentlichen Operators bestimmen.

Dann geben wir in Abschnitt 3.3 eine Näherungslösung der zeitabhängigen Hamilton-Jacobi-Gleichung an. Da diese Gleichung komplexwertig ist, ist mit fast analytischen Fortsetzungen zu arbeiten und diese Gleichung wird nicht exakt lösbar sein. Dabei folgen wir den aus [6, 8, 27] bekannten Konstruktionen.

In Abschnitt 3.4 bestimmen wir einen Ansatz für eine Parametrix des konjugierten Diracoperators. Dazu zerlegen wir diesen durch geeignete Projektionen in einen Plus- und einen Minus-Teil und für jeden der beiden Teile konstruieren wir mittels eines WKB-Verfahrens Parametrizen der Wärmeleitungsgleichungen. Diese integrieren wir dann bzgl. der Zeitvariablen. Als Ansatz für die Parametrizen der Wärmeleitungsgleichungen verwenden wir Fourierintegraloperatoren mit komplexwertiger Phase. Ferner ermitteln wir Näherungslösungen der komplexwertigen Transportgleichungen und folgen dabei der Strategie aus [41]. Die so erhaltenen Lösungen der Hamilton-Jacobi-Gleichung und der Transportgleichungen setzen wir zu einer Lösung der zeitabhängigen Diracgleichung, die zum konjugierten Diracoperator gehört, zusammen.

Danach werden wir in Abschnitt 3.5 mittels eines Standardverfahrens den Teil der Parametrix konstruieren, der zum Bereich, wo das Symbol des konjugierten Diracoperators invertierbar ist, gehört. Insgesamt liefert uns das eine Parametrix des konjugierten Diracoperators und damit einen Ausdruck für den Kern der Inversen des Diracoperators.

In Abschnitt 3.6 bestimmen wir die Asymptotik des Greenschen Kerns des konjugierten Diracoperators mit Hilfe der Methode der stationären Phase. Es sei bemerkt, daß zu dieser Asymptotik nur der Plus-Teil beiträgt, wenn das Potential negativ ist.

Schließlich ermitteln wir in Abschnitt 3.7 die semiklassische Asymptotik des Distributionskerns der Inversen des Diracoperators und bestimmen den führenden Term dieser Asymptotik. Ferner betrachten wir statt negative, auch positive Potentiale und widmen uns dem Beispiel konstanter Potentiale.

In Anhang A werden wir die BMT-Gleichung für die Thomas-Präzession betrachten und den Zusammenhang zwischen dieser Gleichung und dem Ergebnis aus Abschnitt 3.7 herstellen. Dabei werden wir der Vorgehensweise aus [38] folgen, um die Transportgleichungen zu lösen, und so alternative Formeln zu denen aus Abschnitt 3.4 erhalten.

Kapitel 2

Der Diracoperator mit Coulombartigem Potential in zwei Dimensionen

2.1 Motivation

2.1.1 Verunreinigungen in Graphen

Aufgrund des in den letzten Jahren rasant gestiegenen Interesses an Graphen betrachten wir Verunreinigungen in Gestalt einer einzelnen Coulomb-Singularität in Graphen (siehe z. B. [15], [17] oder [29]). Wir bemerken zunächst, daß sich die Anregungen niedrigenergetischer Elektronen in Graphen durch masselose Dirac-Fermionen beschreiben lassen, wie etwa in Abschnitt II.B aus [14] dargestellt. Wenn wir $\hbar = 1$ setzen, ist durch

$$\nu_F \left(-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla - \frac{g}{r} \right) \phi = E\, \phi. \tag{2.1.1}$$

das Problem von Verunreinigung in Gestalt einer einzelnen Coulomb-Singularität, die sich im Ursprung des Koordinatensystems befindet, gegeben. Hierbei notieren wir durch σ_1, σ_2 die Pauli-Matrizes und durch $\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2)$ den Vektor der Pauli-Matrizes. Ferner bezeichnen wir mit r den Betrag von x. $\nu_F = \frac{3at}{2} \approx 10^6 \frac{m}{s}$ ist die Fermi-Geschwindigkeit, wobei $t \approx 2,7$ eV die Hopping-Energie zwischen nächsten Nachbarn und a der Kohlenstoff-Kohlenstoff-Abstand ist. $g = \frac{Ze^2}{\nu_F \epsilon_0}$ ist die Kopplungskonstante mit der Dielektrizitätskonstante ϵ_0, der Elementarladung e und der Kernladungszahl Z.

Wenn wir dieses Coulomb-Dirac-Problem in Graphen betrachten, hängt das Verhalten der Wellenfunktion vom Wert der Kopplungskonstante g ab. Einerseits gibt es den unterkritischen Fall, wenn g kleiner als der kritische Wert $g_c := \frac{1}{2}$ ist. In diesem Fall ist die Wellenfunktion durch gewisse spezielle Funktionen gegeben. Andererseits befinden wir uns im überkritischen Fall, wenn g größer als $\frac{1}{2}$ ist. Dann ist das Problem instabil, was dazu führt, daß das Elektron in den Kern stürzt.

Dies wird sich im Hauptergebnis, das sich im nächsten Abschnitt findet, in der folgenden Art und Weise wiederspiegeln. Wir werden eine ausgezeichnete selbstadjungierte Fortsetzung des masselosen zweidimensionalen Diracoperators mit Coulombartigem Potential, dessen Kopplungskonstante $g \leq \frac{1}{2}$ genügt, bestimmen.

2.1.2 Der Coulomb-Diracoperator in zwei Dimensionen

Wenn wir $\hbar$ und die Fermi-Geschwindigkeit ν_F gleich 1 setzen, erhalten wir den formalen Differentialausdruck $-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla - \frac{g}{r}$. Wir wollen nun diesen Differentialausdruck als ausgezeichneten selbstadjungierten Operator realisieren. Da Diracoperatoren nicht nach unten halbbeschränkt sind, ist es nicht möglich die Friedrichsfortsetzung als selbstadjungierte Fortsetzung zu definieren. Wir bemerken zunächst, daß die Kato-Ungleichung

$$\sqrt{-\Delta} \geq \frac{4\pi^2}{\Gamma(1/4)^4} \frac{1}{r}, \qquad \frac{4\pi^2}{\Gamma(1/4)^4} \approx 0,229$$

in zwei Dimensionen gilt. Ein Beweis dieser Ungleichung findet sich etwa in [1]. Dieser folgt der Strategie aus [22] und [23] . Folglich läßt sich unter Verwendung der Pseudo- Friedrichsfortsetzung eine Realisierung des Differentialausdrucks $-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla - \frac{g}{r}$ als ausgezeichneter selbstadjungierter Operator angeben, sofern $g \in \left(0, \frac{\Gamma(1/4)^4}{4\pi^2}\right]$ erfüllt ist. Nach Einführung von Polarkoordinaten sehen wir, daß $-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla - \frac{g}{r}$ aufgrund des „schwachen“ Grenzkreisfalls bei 0 eine selbstadjungierte Realisierung für $g \in (0, \frac{1}{2})$ besitzen sollte. Dem Problem, eine ausgezeichnete selbstadjugierte Realisierung für $g > \frac{\Gamma(1/4)^4}{4\pi^2}$ anzugeben, wenden wir uns im Folgenden zu.

Beispielsweise befassen sich die Arbeiten [4, 9, 11, 35, 40] mit einer ausgezeichneten selbstadjungierten Fortsetzung des minimalen Coulomb-Dirac-Operators in drei Dimensionen. Wir bemerken, daß es auch im zweidimensionalen Fall möglich ist den Arbeiten [4, 9, 40] zu folgen und so eine ausgezeichnete selbstadjungierte Realisierung von

$$D_0 - \frac{g}{r} := -i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + \beta - \frac{g}{r}, \qquad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

zu erhalten, dessen Kopplungskonstante $0 < g < \frac{1}{2}$ genügt. Indem man mit Hilfe der Strategie aus [40]

$$\left\| r^{1/2} (D_0 - i\eta) r^{1/2} u \right\|^2 - \left\| r^{1/2} (D_0' - i\eta) r^{1/2} u \right\|^2 \geq \frac{1}{4} \|u\|^2$$

für $\eta \in \mathbb{R}$ und $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$ mit dem Hilfsoperator

$$D_0' := \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot x}{r} (-i) \left(\partial_r + \frac{1}{2r}\right) + \beta$$

beweist, läßt sich das zweidimensionale Analogon

$$\left\| r^{-1/2} (D_0 - i\eta)^{-1} r^{-1/2} \right\| \leq 2$$

zu (2.2) aus [4] zeigen. Aus dieser Ungleichung kann man mittels [9] die Existenz einer eindeutig bestimmten selbstadjungierten Fortsetzung des minimalen zweidimensionalen Coulomb-Diracoperators folgern.

Da jedoch keine der bislang erwähnten Arbeiten eine ausgezeichnete selbstadjungierte Fortsetzung für die kritische Kopplungskonstante, deren Wert in zwei Dimensionen gleich $\frac{1}{2}$ ist, liefert, werden wir im nächsten Abschnitt der Strategie aus [32] folgen und deren Beweise auf den zweidimensionalen Fall übertragen. Das wird uns zu einer eindeutig bestimmten selbstadjungierten Realisierung des zweidimensionalen Diracoperators mit Coulombartigem Potential führen, dessen Kopplungskonstante $\leq \frac{1}{2}$ ist.

2.2 Ausgezeichnete selbstadjungierte Fortsetzung

2.2.1 Vorbemerkungen und Hauptergebnis

In diesem Abschnitt studieren wir masselose zweidimensionale Diracoperatoren. Zunächst führen wir die Klasse Coulombartiger Potentiale V ein, die wir im Folgenden betrachten werden. Ferner definieren wir in den Vorbemerkungen eine gewisse quadratische Form b_γ und zeigen mittels einer Variante der Hardy-Ungleichung die Nichtnegativität dieser Form. Schließlich können wir das Hauptergebnis dieses Abschnittes formulieren, das eine ausgezeichnete selbstadjungierte Fortsetzung des masselosen Diracoperators mit Coulombartigem Potential angibt und das im nächsten Unterabschnitt bewiesen werden wird. In diesem Abschnitt folgen wir [31, 32] und übertragen die dortige Argumentation auf den zweidimensionalen Fall.

Wir definieren den freien masselosen Diracoperator in 2 Dimensionen als den matrixwertigen partiellen Differentialoperator

$$H_0 \;:=\; \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla) \;:=\; \sum_{k=1}^{2} \sigma_k \,(-i\,\partial_{x_k}) \tag{2.2.1}$$

auf dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$. Hierbei notiert $\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2)$ den Vektor der Pauli-Matrizes und $x := (x_1, x_2)$ ein Element vom $\mathbb{R}^2$. Die hier auftretenden Pauli-Matrizes σ_1, σ_2 sind hermitesche (2×2)-Matrizen und genügen den Antivertauschungsrelationen

$$\{\sigma_k\,,\,\sigma_\ell\} \;:=\; \sigma_k\sigma_\ell + \sigma_\ell\sigma_k \;=\; 2\,\delta_{k\ell}\,\mathbb{1}_2, \qquad 1 \leqslant k, \ell \leqslant 2. \tag{2.2.2}$$

Wir wählen die Pauli-Matrizes als

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist bekannt, daß der freie Diracoperator H_0 auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$ wesentlich selbstadjungiert und auf $H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$ selbstadjungiert ist. Indem wir ein Potential V zum freien Diracoperator addieren, erhalten wir

$$H \;:=\; H_0 \;+\; V\,\mathbb{1}_2. \tag{2.2.3}$$

Dabei betrachten wir stets Coulombartige Potentiale V, die die folgende Voraussetzung erfüllen.

Voraussetzung 2.2.1. *Sei $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine nichtpositive Funktion derart, daß für jedes $x \in \mathbb{R}^2$*

$$-\frac{w(|x|)}{|x|} \leq V(x) \leq 0 \tag{2.2.4}$$

für eine positive, messbare Funktion $w : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gilt, die $w(|x|) \leq \frac{1}{2}$ für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ genügt.

Ferner definieren wir durch

$$b_\gamma(\phi, \phi) := \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{|\nabla \phi(x)|^2}{\gamma - V(x)} + (2 - \gamma + V(x)) |\phi(x)|^2 \right) dx, \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \tag{2.2.5}$$

eine symmetrische quadratische Form b_γ für $\gamma \in (0, 1)$ auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Im Folgenden wollen wir die Nichtnegativität und damit auch die Abschließbarkeit der Form b_γ zeigen. Dazu leiten wir in den nächsten beiden Lemmata eine geeignete Ungleichung her. Die Beweise dieser Lemmata folgen dem Beweis von Theorem 1 aus [31].

Lemma 2.2.2. *Sei $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Funktion und sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine positive Funktion. Dann gilt für jedes $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ die Ungleichung*

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} g(x) |\nabla \phi(x)|^2 dx \\ &\qquad \geq \int_{\mathbb{R}^2} \left(2\, h(|x|) + |x|\, h'(|x|) - \frac{1}{g(x)}\, h^2(|x|)\; |x|^2 \right) |\phi(x)|^2 dx. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Beweis. Wir beginnen mit der Definition der komplexen Variablen $z := x_1 + ix_2$. Folglich gilt für das konjugiert Komplexe $\overline{z} = x_1 - ix_2$. Ferner führen wir die Ableitungen $\partial_z := \partial_{x_1} - i\partial_{x_2}$ und $\partial_{\overline{z}} := \partial_{x_1} + i\partial_{x_2}$ ein. Damit schließen wir auf

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla = \begin{pmatrix} 0 & \partial_{x_1} - i\partial_{x_2} \\ \partial_{x_1} + i\partial_{x_2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_z \\ \partial_{\overline{z}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.7}$$

Offensichtlich ist für den Kommutator $[\,\partial_z,\, z\,] = 2$ erfüllt. Nun sei $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Funktion. Da beliebige A, B, C der Kommutatorrelation $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$ genügen, ergibt sich

$$[\,\partial_z,\, z\, h(r)] = 2\, h(r) + z\, (\partial_z h(r)) = 2\, h(r) + r\, h'(r),$$

wobei mit r der Betrag von $x \in \mathbb{R}^2$ bezeichnet wird. Das impliziert unter Verwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für jedes $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned}(\phi,\,(2\,h(r)+r\,h'(r))\,\phi\,) &= (\,\phi,[\,\partial_z,\,z\,h(r)]\,\phi\,)\\ &= -\left(\sqrt{g}\,\partial_{\bar z}\phi,\,\frac{1}{\sqrt{g}}\,z\,h(r)\,\phi\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\,\bar z\,h(r)\,\phi,\,\sqrt{g}\,\partial_z\phi\right)\\ &\leq \frac{1}{2}\,\|\sqrt{g}\,\partial_{\bar z}\phi\,\|^2+\left\|g^{-1/2}\,|z|\,h(r)\,\phi\,\right\|^2+\frac{1}{2}\,\|\sqrt{g}\,\partial_z\phi\,\|^2\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} g(x)\,|\nabla\phi(x)|^2dx+\int_{\mathbb{R}^2}\frac{h^2(r)\,|x|^2}{g(x)}\,|\phi(x)|^2dx \qquad (2.2.8)\end{aligned}$$

für eine beliebige positive Funktion $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Hierbei wird durch $(\,.\,,\,.\,)$ stets das Skalarprodukt auf $L^2\,(\mathbb{R}^2)$ und durch $\|\,.\,\|$ die zugehörige Norm notiert. Indem wir nun (2.2.8) nach dem ersten Term der rechten Seite auflösen, erhalten wir die Behauptung. □

Nun wenden wir Lemma 2.2.2 mit $g(x)=\frac{r}{w(r)+r}$ und $h\,(r)=\frac{1}{r}$ an, wobei wir den Betrag von $x\in\mathbb{R}^2$ durch r notieren.

Lemma 2.2.3. *Sei $w:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ eine positive, messbare Funktion, die $w\,(|x|)\leq\frac{1}{2}$ für jedes $x\in\mathbb{R}^2$ erfüllt. Dann gilt für jedes $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ die Ungleichung*

$$\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\nabla\phi(x)|^2}{\frac{w(|x|)}{|x|}+1}\,dx\;\geq\;\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{w(|x|)}{|x|}-1\right)|\phi(x)|^2\,dx. \qquad (2.2.9)$$

Beweis. Wenn wir in Lemma 2.2.2 $g(x)=\frac{|x|}{w(|x|)+|x|}$ und $h\,(|x|)=\frac{1}{|x|}$ einsetzen, erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\nabla_x\phi(x)|^2}{\frac{w(|x|)}{|x|}+1}\,dx\;\geq\;\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{|x|}-\frac{w(|x|)+|x|}{|x|}\right)|\phi(x)|^2\,dx,$$

was aufgrund der Voraussetzung $w\leq\frac{1}{2}$ unmittelbar die Behauptung ergibt. □

Nun wollen wir mit Hilfe von Lemma 2.2.3 zeigen, daß die durch (2.2.5) definierte quadratische Form b_γ nichtnegativ und damit abschließbar ist.

Proposition 2.2.4. *Seien $\gamma\in(0,1)$ und V ein Potential, das die Voraussetzung 2.2.1 erfüllt. Dann gilt $b_\gamma(\phi,\phi)\geq 0$ für jedes $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.*

Beweis. Aufgrund der Definition der quadratischen Form b_γ, der an V gestellten Voraussetzung 2.2.1 und der Ungleichung (2.2.9) aus Lemma 2.2.3 schließen wir auf

$$\begin{aligned}b_\gamma\,(\phi,\phi)\;:&=\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{|\nabla\phi(x)|^2}{\gamma-V(x)}+(2-\gamma+V(x))\,|\phi(x)|^2\right)dx\\ &\geq\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\nabla\phi(x)|^2}{\frac{w(|x|)}{|x|}+1}\,dx+\int_{\mathbb{R}^2}\left(1-\frac{w(|x|)}{|x|}\right)|\phi(x)|^2dx\;\geq\;0\end{aligned}$$

für beliebiges $\gamma\in(0,1)$ und für jedes $\phi\in C_0^\infty\,(\mathbb{R}^2)$. □

Da die quadratische Form b_γ für $\gamma \in (0,1)$ infolge von Proposition 2.2.4 abschließbar ist, können wir mit $\hat{b}_\gamma$ den Abschluß von b_γ bezeichnen. Ferner notieren wir durch $\mathcal{H}_{+1}^{\gamma}$ den Definitionsbereich des Abschlusses $\hat{b}_\gamma$ und durch $\left(\mathcal{H}_{+1}^{\gamma}\right)^* =: \mathcal{H}_{-1}^{\gamma}$ den Dualraum von $\mathcal{H}_{+1}^{\gamma}$ für $\gamma \in (0,1)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter, nichtnegativer, selbstadjungierter Operator S_γ, der $\hat{b}_\gamma(\phi,\phi) = (\phi, S_\gamma \phi)$ für jedes $\phi \in \mathcal{D}(S_\gamma) \subset \mathcal{H}_{+1}^{\gamma}$ erfüllt. S_γ erweitert sich zu einem isometrischen Isomorphismus von $\mathcal{H}_{+1}^{\gamma}$ in den Dualraum $\mathcal{H}_{-1}^{\gamma}$ und mit Hilfe von Theorem VI.2.23 aus [3] erhalten wir

$$\hat{b}_\gamma(\phi) \;=\; \left(S_\gamma^{1/2}\phi\,,S_\gamma^{1/2}\phi\right) \tag{2.2.10}$$

für jedes $\phi \in \mathcal{H}_{+1}^{\gamma} = \mathcal{D}\left(S_\gamma^{1/2}\right)$. Im folgenden Lemma zeigen wir die Unabhängigkeit des Definitionsbereiches $\mathcal{H}_{+1}^{\gamma}$ von der Wahl von γ. Der Beweis folgt dem Beweis der Proposition 2 aus [32].

Lemma 2.2.5. *Sei V ein Potential, das die Voraussetzung 2.2.1 erfüllt. Dann gilt*

$$\hat{b}_\gamma(\phi,\phi) \;\le\; \hat{b}_{\gamma'}(\phi,\phi) + [\,\gamma' - \gamma\,]_+ \left(\frac{1}{\gamma'\gamma} + 1\right) \|\phi\|_2^2 \tag{2.2.11}$$

für alle $\gamma, \gamma' \in (0,1)$. Hierbei notiert $[\,.\,]_+$ den Positivteil.

Beweis. Aufgrund der an V gestellten Voraussetzung 2.2.1 ergibt sich $\gamma'\gamma \le (\gamma - V(x))(\gamma' - V(x))$ für alle $\gamma, \gamma' \in (0,1)$ und für jedes $x \in \mathbb{R}^2$. Das impliziert im Fall von $\gamma' - \gamma > 0$

$$\frac{\gamma' - \gamma}{\gamma\gamma'} \;\ge\; \frac{\gamma' - \gamma}{(\gamma - V(x))(\gamma' - V(x))} \;=\; \frac{1}{\gamma - V(x)} - \frac{1}{\gamma' - V(x)}.$$

Damit schließen wir auf die Ungleichung

$$\frac{1}{\gamma - V(x)} - \frac{1}{\gamma' - V(x)} \;\le\; \frac{[\gamma' - \gamma]_+}{\gamma'\gamma}, \tag{2.2.12}$$

die im Fall von $\gamma' - \gamma \le 0$ offensichtlich erfüllt ist. Mit Hilfe dieser Ungleichung erhalten wir die Behauptung für $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. □

Aus Lemma 2.2.5 folgern wir $\mathcal{H}_{+1}^{\gamma'} \subset \mathcal{H}_{+1}^{\gamma}$ für alle $\gamma', \gamma \in (0,1)$ und erhalten damit die Unabhängigkeit von $\mathcal{H}_{+1}^{\gamma}$ von γ. Im Folgenden notieren wir durch $\mathcal{H}_{+1}$ den Definitionsbereich von $\hat{b}_\gamma$ und durch $\mathcal{H}_{-1}$ dessen Dualraum.

Nun geben wir den Definitionsbereich

$$\begin{aligned}\mathcal{D} \;:=\; \Big\{(\phi,\chi) \in \mathcal{H}_{+1} \times L^2\left(\mathbb{R}^2\right) \mid\; & (V + 2 - \gamma)\,\phi + (-i\partial_{x_1} - \partial_{x_2})\,\chi \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right), \\ & (-i\partial_{x_1} + \partial_{x_2})\,\phi + (V - \gamma)\,\chi \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right)\Big\}\end{aligned}$$

an, der die ausgezeichnete selbstadjungierten Fortsetzung des masselosen Diracoperators bestimmt, wie wir im nächsten Satz beweisen werden.

Die Definition von $\mathcal{D}$ ist im schwachen Sinn zu verstehen. Das bedeutet, daß sich die auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ definierten linearen Funktionale

$$\eta \mapsto (\eta\,,(V-\gamma)\chi) + ((-i\partial_{x_1} - \partial_{x_2})\,\eta\,,\phi)\,,$$
$$\eta \mapsto (\eta\,,(V+2-\gamma)\phi) + ((-i\partial_{x_1} + \partial_{x_2})\,\eta\,,\chi)\,,$$

in eindeutiger Weise zu beschränkten linearen Funktionale auf $L^2(\mathbb{R}^2)$ fortsetzen lassen. Ferner bemerken wir, daß aufgrund von Lemma 2.2.5 die Definition von $\mathcal{D}$ unabhängig von γ ist.

Der folgende Satz stellt das Hauptergebnis dieses Kapitels dar und gibt eine ausgezeichnete selbstadjungierte Fortsetzung des masselosen zweidimensionalen Diracoperators mit Coulombartigem Potential an. Der Beweis folgt dem Beweis von Theorem 4 aus [32], der sich mit dem dreidimensionalen massiven Fall befaßt.

Satz 2.2.6. *Sei V ein Potential, das die Voraussetzung 2.2.1 erfüllt. Dann ist $H := -i\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla + V\Big|_{\mathcal{D}}$ die eindeutig bestimmte selbstadjungierte Fortsetzung von $-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla + V\Big|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{C}^2)}$, deren Definitionsbereich*

$$\begin{aligned}\mathcal{D} := \Big\{(\phi,\chi) \in \mathcal{H}_{+1}\times L^2\left(\mathbb{R}^2\right) \mid (V+2-\gamma)\,\phi + (-i\partial_{x_1} - \partial_{x_2})\,\chi \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right),\\ (-i\partial_{x_1} + \partial_{x_2})\,\phi + (V-\gamma)\,\chi \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right)\Big\}\end{aligned}$$

in $\mathcal{H}_{+1}\times L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ enthalten ist.

2.2.2 Beweis von Satz 2.2.6

Indem wir der Strategie des Beweises von Theorem 4 aus [32] folgen, betrachten wir den durch

$$H_m := -i\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla + \beta + V, \qquad \beta := \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

gegebenen zweidimensionalen Diracoperator mit Masse $m = 1$ und Coulombartigem Potential. Dann definieren wir einen „reduzierten“ Operator, der nur auf die erste Komponente des 2er-Spinors angewandt wird. Ein wesentlicher Bestandteil des Beweises ist die Abschätzung $b_\gamma\,(\phi,\phi) \geq 0$, deren Beweis sich in Proposition 2.2.4 des vorherigen Abschnittes findet. Diese Ungleichung stellt eine Variante der Hardy-Ungleichung dar, die die Operatoren $-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla + \beta$ und V beinhaltet. Mittels dieser Ungleichung erhalten wir die Friedrichsfortsetzung des „reduzierten“ Operators, mit deren Hilfe wir eine selbstadjungierte Fortsetzung des Operators $-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla + \beta + V\Big|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{C}^2)}$ konstruieren können. Der Satz von Kato-Rellich impliziert, daß diese Fortsetzung auch eine selbstadjungierte Realisierung von $-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla + V$ ist.

Wir beginnen mit dem Beweis zweier Hilfsaussagen, die sich in den folgenden beiden Lemmata finden. Die Beweise folgen Proposition 6 und Lemma 7 aus [32].

Lemma 2.2.7. *Seien V ein Potential, das die Voraussetzung 2.2.1 erfüllt, und $\gamma \in (0,1)$. Dann gilt*

$$\mathcal{H}_{+1} \subset \left\{ \phi \in L^2(\mathbb{R}^2) \,\middle|\, \frac{(-i\partial_{x_1} \pm \partial_{x_2})\phi}{\gamma - V} \in L^2(\mathbb{R}^2) \right\}. \tag{2.2.13}$$

Beweis. Es genügt, die Behauptung für $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ zu zeigen. Infolge der an γ und V gestellten Voraussetzungen ist $\gamma - V(x) \geq \gamma - \gamma V(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ erfüllt. Daraus folgern wir mit Hilfe der Definition $\delta := \gamma(1-\gamma) > 0$ die Ungleichung

$$\frac{1}{\gamma - V(x)} - \frac{1}{1 - V(x)} \geq \frac{\delta}{(\gamma - V(x))^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Da wir aufgrund dieser Ungleichung unter Verwendung von Lemma 2.2.3 und wegen $1 - \gamma > \delta$ auf

$$\begin{aligned} b_\gamma(\phi\,,\phi) \;\geq\; & \delta \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\nabla\phi(x)|^2}{(\gamma - V(x))^2}\,dx + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\nabla\phi(x)|^2}{1 - V(x)}\,dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^2} (2 - \gamma + V(x))\,|\phi(x)|^2 dx \\ \geq\; & \delta \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\nabla\phi(x)|^2}{(\gamma - V(x))^2}\,dx + \int_{\mathbb{R}^2} (-1 - V(x))\,|\phi(x)|^2 dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^2} (2 - \gamma + V(x))\,|\phi(x)|^2 dx \\ \geq\; & \delta \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\nabla\phi(x)|^2}{(\gamma - V(x))^2}\,dx + \delta \int_{\mathbb{R}^2} |\phi(x)|^2 dx \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

für jedes $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ schließen, erhalten wir die Behauptung. □

Lemma 2.2.8. *Sei V ein Potential, das die Voraussetzung 2.2.1 erfüllt. Dann gilt für jedes $F \in L^2(\mathbb{R}^2)$ und jedes $\gamma \in (0,1)$*

$$(-i\partial_{x_1} \pm \partial_{x_2}) \left(\frac{F}{\gamma - V} \right) \in \mathcal{H}_{-1}. \tag{2.2.15}$$

Beweis. Mit Hilfe von (2.2.14) aus Lemma 2.2.7 erhalten wir für jedes $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} \left| \left((-i\partial_{x_1} \mp \partial_{x_2})\,\eta, \frac{F}{\gamma - V} \right) \right| &= \left| \left(\frac{(-i\partial_{x_1} \mp \partial_{x_2})\,\eta}{\gamma - V}\,, F \right) \right| \\ &\leq c\,\|\eta\|_{\mathcal{H}_{+1}} \cdot \|F\|_{L^2} \end{aligned}$$

für eine geeignete Konstante c. Daraus folgern wir, daß sich das lineare Funktional $\eta \mapsto \left((-i\partial_{x_1} \mp \partial_{x_2})\eta, \frac{F}{\gamma - V} \right)$ in eindeutiger Weise zu einem beschränkten linearen Funktional auf $\mathcal{H}_{+1}$ fortsetzen läßt, was die Behauptung impliziert. □

Nun wenden wir uns dem Beweis des Satzes 2.2.6 zu. Dieser wird dem Beweis von Theorem 4 aus [32] folgen.

Beweis. Wir werden in diesem Beweis zunächst den massiven zweidimensionalen Diracoperator $H_m := -i\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla+\beta+V$ mit Coulombartigem Potential betrachten. Wir werden zeigen, daß $H_m+1-\gamma$ auf $\mathcal{D}$ für jedes $\gamma\in(0,1)$ symmetrisch ist und daß $H_m+1-\gamma:\mathcal{D}\to L^2$ surjektiv und injektiv ist. Schließlich werden wir uns mit der Eindeutigkeitsaussage der Behauptung befassen.

Wir beginnen mit dem Beweis der Symmetrie von $H_m+1-\gamma$ auf $\mathcal{D}$ für jedes $\gamma\in(0,1)$. Dazu bemerken wir zunächst, daß für jedes $(\phi,\chi)\in\mathcal{D}$

$$(H_m+1-\gamma)\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(V+2-\gamma)\,\phi+(-i\partial_{x_1}-\partial_{x_2})\,\chi\\ (-i\partial_{x_1}+\partial_{x_2})\,\phi+(V-\gamma)\,\chi\end{pmatrix}$$

gilt. Folglich ist für jedes $\gamma\in(0,1)$ und für alle $(\phi,\chi)\,,\left(\tilde\phi,\tilde\chi\right)\in\mathcal{D}$ die Gleichheit von

$$\begin{aligned}&\left((H_m+1-\gamma)\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\tilde\phi\\ \tilde\chi\end{pmatrix}\right)\\ &=\left((V+2-\gamma)\,\phi+(-i\partial_{x_1}-\partial_{x_2})\,\chi,\tilde\phi\right)+\left((-i\partial_{x_1}+\partial_{x_2})\,\phi+(V-\gamma)\,\chi,\tilde\chi\right)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\left(\phi,(V+2-\gamma)\,\tilde\phi+(-i\partial_{x_1}-\partial_{x_2})\,\tilde\chi\right)+\left(\chi,(-i\partial_{x_1}+\partial_{x_2})\,\tilde\phi+(V-\gamma)\,\tilde\chi\right)\\ &\qquad=\left(\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix},(H_m+1-\gamma)\begin{pmatrix}\tilde\phi\\ \tilde\chi\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

zu zeigen, um die Symmetrie von $H_m+1-\gamma$ zu erhalten. Aufgrund der Definition von $\mathcal{D}$ schließen wir, daß

$$(V-\gamma)\left(\chi+\frac{(-i\partial_{x_1}+\partial_{x_2})\,\phi}{V-\gamma}\right) = (V-\gamma)\,\chi+(-i\partial_{x_1}+\partial_{x_2})\,\phi \tag{2.2.16}$$

in $L^2(\mathbb{R}^2)$ für jedes $(\phi,\chi)\in\mathcal{D}$ enthalten ist. Insgesamt ergibt sich wegen der Definition von S_γ und wegen der Definition der schwachen Ableitung für $(\phi,\chi)\in\mathcal{D}$ und für jedes $\tilde\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned}&\left((2-\gamma+V)\,\phi+(-i\partial_{x_1}-\partial_{x_2})\,\chi,\tilde\phi\right)\\ &\quad=\left((2-\gamma+V)\,\phi,\tilde\phi\right)+\left(\left(\frac{(-i\partial_{x_1}+\partial_{x_2})\,\phi}{\gamma-V}\right),(-i\partial_{x_1}+\partial_{x_2})\,\tilde\phi\right)\\ &\qquad-\left(\left(\frac{(-i\partial_{x_1}+\partial_{x_2})\,\phi}{\gamma-V}\right),(-i\partial_{x_1}+\partial_{x_2})\,\tilde\phi\right)+\left(\chi,(-i\partial_{x_1}+\partial_{x_2})\,\tilde\phi\right)\\ &\quad=\left(S_\gamma\phi,\tilde\phi\right)+\left((V-\gamma)\left(\chi+\left(\frac{(-i\partial_{x_1}+\partial_{x_2})\,\phi}{V-\gamma}\right)\right),\frac{(-i\partial_{x_1}+\partial_{x_2})\,\tilde\phi}{V-\gamma}\right).\end{aligned}$$

Hierbei ist die rechte Seite infolge von $\phi, \tilde{\phi} \in \mathcal{H}_{+1}$, (2.2.16) und Lemma 2.2.7 wohldefiniert. Da sowohl die linke als auch die rechte Seite der letzten Gleichungskette stetig in $\tilde{\phi}$ bzgl. $\| \,.\, \|_{\mathcal{H}_{+1}}$ sind, ist diese Gleichheit auf ganz $\mathcal{D}$ erfüllt. Daraus folgern wir

$$\begin{aligned}
&\left((H_m + 1 - \gamma) \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}\right) \\
&\quad = \left((V + 2 - \gamma)\,\phi + (-i\partial_{x_1} - \partial_{x_2})\,\chi, \tilde{\phi}\right) + \left((-i\partial_{x_1} + \partial_{x_2})\,\phi + (V - \gamma)\,\chi, \tilde{\chi}\right) \\
&\quad = \left(S_\gamma \phi, \tilde{\phi}\right) + \left((V - \gamma)\left(\chi + \frac{(-i\partial_{x_1} + \partial_{x_2})\,\phi}{V - \gamma}\right), \tilde{\chi} + \frac{(-i\partial_{x_1} + \partial_{x_2})\,\tilde{\phi}}{V - \gamma}\right).
\end{aligned}$$

Die Symmetrie der rechten Seite in $(\phi, \chi), (\tilde{\phi}, \tilde{\chi}) \in \mathcal{D}$ impliziert die Symmetrie von $H_m + 1 - \gamma$ für $\gamma \in (0, 1)$.

Nun werden wir zeigen, daß $H_m + 1 - \gamma : \mathcal{D} \to L^2$ für $\gamma \in (0, 1)$ bijektiv ist. Um die Surjektivität von $H_m + 1 - \gamma$ zu beweisen, seien $F_1, F_2 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ beliebig gewählt. Als erstes bemerken wir, daß nach Lemma 2.2.7 und Lemma 2.2.8 $F_1 + (-i\partial_{x_1} - \partial_{x_2})\left(\frac{F_2}{\gamma - V}\right) \in \mathcal{H}_{-1}$ erfüllt ist. Da S_γ ein isometrischer Isomorphismus von $\mathcal{H}_{+1}$ nach $\mathcal{H}_{-1}$ ist, gibt es ein eindeutig bestimmtes $\phi \in \mathcal{H}_{+1}$, für das

$$S_\gamma \phi \;=\; F_1 + (-i\partial_{x_1} - \partial_{x_2})\left(\frac{F_2}{\gamma - V}\right) \tag{2.2.17}$$

gilt. Ferner definieren wir χ durch $F_2 = (-i\partial_{x_1} + \partial_{x_2})\,\phi + (V - \gamma)\,\chi$. Das liefert

$$\chi \;=\; -\frac{F_2}{\gamma - V} - \frac{(i\partial_{x_1} - \partial_{x_2})\,\phi}{\gamma - V}, \tag{2.2.18}$$

was $\chi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ aufgrund von $F_2 \in L^2$ und Lemma 2.2.7 impliziert. Damit erhalten wir $(\phi, \chi) \in \mathcal{D}$. Für jedes $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ folgern wir mittels partieller Integrationen und unter Verwendung von (2.2.17)

$$\begin{aligned}
&(\eta, (V + 2 - \gamma)\,\phi + (-i\partial_{x_1} - \partial_{x_2})\,\chi) \\
&\quad = (\eta, (V + 2 - \gamma)\,\phi) + ((-i\partial_{x_1} + \partial_{x_2})\,\eta, \chi) \\
&\quad = (\eta, S_\gamma \phi) + \left((-i\partial_{x_1} + \partial_{x_2})\,\eta, \chi + \frac{(-i\partial_{x_1} + \partial_{x_2})\,\phi}{V - \gamma}\right) \\
&\quad = (\eta, F_1) + \left((-i\partial_{x_1} + \partial_{x_2})\,\eta, \frac{F_2}{\gamma - V} + \chi + \frac{(-i\partial_{x_1} + \partial_{x_2})\,\phi}{V - \gamma}\right).
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von (2.2.18) schließen wir, daß für jedes $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$(\eta, (V + 2 - \gamma)\,\phi + (-i\partial_{x_1} - \partial_{x_2})\,\chi) \;=\; (\eta, F_1) \tag{2.2.19}$$

gilt. Anhand von $F_1 \in L^2$ läßt sich das lineare Funktional $C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \ni \eta \mapsto (\eta, F_1)$ in eindeutiger Weise zu einem stetigen linearen Funktional auf $L^2(\mathbb{R}^2)$ fortsetzen. Das ergibt

$$(V + 2 - \gamma)\,\phi + (-i\partial_{x_1} - \partial_{x_2})\,\chi \;=\; F_1, \tag{2.2.20}$$

was die Surjektivität von $H_m + 1 - \gamma$ für $\gamma \in (0,1)$ zeigt.

Im Folgenden werden wir die Injektivität von $H_m + 1 - \gamma$ für $\gamma \in (0,1)$ beweisen. Aus dem Ansatz $(H_m + 1 - \gamma)(\phi, \chi) = (0,0)$ erhalten wir aufgrund von (2.2.17) und (2.2.18)

$$\chi \;=\; -\frac{(i\partial_{x_1} - \partial_{x_2})\,\phi}{\gamma - V}, \qquad S_\gamma \phi \;=\; 0.$$

Weil S_γ ein Isomorphismus ist, ergibt sich $\phi = 0$ und $\chi = 0$.

Schließlich zeigen wir die Eindeutigkeit der selbstadjungierten Fortsetzung. Wir nehmen an, daß H' eine weitere selbstadjungierte Fortsetzung von $-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + \beta + V\Big|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{C}^2)}$ ist, deren Definitionsbereich $\mathcal{D}'$ in $\mathcal{H}_{+1} \times L^2(\mathbb{R}^2)$ enthalten ist. Die Selbstadjungiertheit von H liefert für jedes $\left(\tilde{\phi}, \tilde{\chi}\right) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$ und jedes $(\phi, \chi) \in \mathcal{D}'$

$$\left(\begin{pmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}, H \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}\right) = \left(H \begin{pmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}\right).$$

Das impliziert, daß

$$(V + 2 - \gamma)\,\phi + (-i\partial_{x_1} - \partial_{x_2})\,\chi, (-i\partial_{x_1} + \partial_{x_2})\,\phi + (V - \gamma)\,\chi \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$$

im schwachen Sinn erfüllt ist. Wir erhalten $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ und damit gilt $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$, was die Eindeutigkeitsaussage der Behauptung beweist.

Damit haben wir eine ausgezeichnete selbstadjungierte Fortsetzung des massiven zweidimensionalen Diracoperators $-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + \beta + V\Big|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{C}^2)}$ mit Coulombartigem Potential bestimmt. Mit Hilfe des Satzes von Kato-Rellich folgern wir, daß diese Fortsetzung $-\beta$ eine selbstadjungierte Realisierung des masselosen Diracoperators $-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + V$ darstellt.

□

Kapitel 3

Semiklassische Asymptotik der Resolvente eines Diracoperators

3.1 Semiklassischer Diracoperator

Wir werden in diesem Kapitel semiklassische, selbstadjungierte Diracoperatoren in $d \in \mathbb{N}$ Dimensionen untersuchen und folgen hierbei der Darstellung in [18]. Ferner werden wir die Klasse von Potentialen V angeben, die wir im Folgenden betrachten werden. Dieser kurze Abschnitt läuft auf die Einführung des Distributionskerns hinaus. Denn unser Ziel ist die Bestimmung der semiklassischen Asymptotik dieses Kerns.

Der freie Diracoperator mit Masse eins und semiklassischem Parameter h in $d \in \mathbb{N}$ Raumdimensionen ist ein matrixwertiger partieller Differentialoperator gegeben durch

$$D_{h,0} := \boldsymbol{\alpha} \cdot (-ih\nabla) + \alpha_0 := \sum_{k=1}^{d} \alpha_k \, (-ih \, \partial_{x_k}) + \alpha_0, \qquad h \in (0,1]. \tag{3.1.1}$$

Dabei notiert $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, ..., \alpha_d)$ den Vektor der Dirac-Matrizes und $x := (x_1, ..., x_d)$ ein Element vom $\mathbb{R}^d$. Die hier auftretenden Dirac-Matrizes $\alpha_0, \ldots, \alpha_d$ sind hermitesche $(d_* \times d_*)$-Matrizen und genügen den Antivertauschungsrelationen

$$\{\alpha_k \, , \, \alpha_\ell\} := \alpha_k \alpha_\ell + \alpha_\ell \alpha_k = 2 \, \delta_{k\ell} \, \mathbb{1}, \qquad 0 \leqslant k, \ell \leqslant d. \tag{3.1.2}$$

Nach der Darstellungstheorie der Clifford-Algebren existieren Matrizen mit dieser Eigenschaft und ihre minimale Dimension d_* lautet $2^{[(d+1)/2]} \in 2\mathbb{N}$. Also ist $\alpha_k = \alpha_k^* \in \mathscr{L}\big(\mathbb{C}^{2^{d_*}}\big)$. Im Fall $d = 1$ vereinfacht sich der Vektor der Dirac-Matrizes zu $\boldsymbol{\alpha} := \alpha_1$ und es gilt $d_* = 2$. Die Dirac-Matrizes lassen sich etwa als folgende (2×2)-Matrizen

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.1.3}$$

wählen. Eine explizite Darstellung der Dirac-Matrizes für beliebige Dimension d findet sich etwa im Anhang von [34]. Im Folgenden werden aber nur die Antivertauschungsrelationen

(3.1.2) verwandt und nicht die explizite Darstellung der Dirac-Matrizes. Es ist bekannt, daß $D_{h,0}$ wesentlich selbstadjungiert auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^{d_*})$ und selbstadjungiert auf $H^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^{d_*})$ ist. Indem man die Fouriertransformierte von $D_{h,0}$ diagonalisiert, zeigt sich, daß das Spektrum von $D_{h,0}$ rein absolut stetig und durch

$$\sigma(D_{h,0}) \;=\; \sigma_{\mathrm{ac}}(D_{h,0}) \;=\; (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \tag{3.1.4}$$

gegeben ist. Addition von einem glatten Potential V zum freien Diracoperator liefert nun

$$D_{h,V} \;:=\; D_{h,0} \;+\; V\, \mathbb{1}_{d_*}. \tag{3.1.5}$$

V genüge dabei stets den folgenden Voraussetzungen.

Voraussetzung 3.1.1. *Sei $V \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ und für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ gelte*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_x^\alpha V(x)| \;<\; \infty. \tag{3.1.6}$$

Ferner existiere ein $\delta \in (0,1)$ derart, daß

$$-1 + \delta \;\leqslant\; V(x) \;\leqslant\; -\delta, \qquad x \in \mathbb{R}^d, \tag{3.1.7}$$

gelte.

Im Hinblick auf (3.1.4) impliziert die soeben aufgestellte Voraussetzung, daß $D_{h,V}$ selbstadjungiert auf $H^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^{d_*})$ und stetig invertierbar ist. In der Tat ist das Symbol

$$\widehat{D}_V(x,\xi) \;:=\; \boldsymbol{\alpha} \cdot \xi + \alpha_0 + V(x), \qquad (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d},$$

von $D_{h,V}$ in dem Sinn gleichmäßig elliptisch, daß

$$\big|\det\big(\widehat{D}_V(x,\xi)\big)\big| = \big(1 + |\xi|^2 - V^2(x)\big)^{d_*/2} \geqslant (2\delta - \delta^2)^{d_*/2} > 0, \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d},$$

gilt. Daher ist die Inverse $D_{h,V}^{-1}$ durch einen matrixwertigen h-Pseudodifferentialoperator gegeben, dessen Distributionskern $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x,y) \mapsto D_{h,V}^{-1}(x,y)$ außerhalb der Diagonalen glatt ist.

3.2 Konstruktion einer Gewichtsfunktion

Wir werden die asymptotische Entwicklung in Potenzen von h des in Abschnitt 3.1 eingeführten Distributionskerns $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x,y) \mapsto D_{h,V}^{-1}(x,y)$ für feste $x \neq y$ untersuchen. In diesem Abschnitt stellen wir den ersten Schritt in der Herleitung der semiklassischen Asymptotik dar. Dazu konjugieren wir den Diracoperator mit exponentiellen Gewichten $e^{\varphi/h}$. Bei φ handelt es sich um eine geeignete Gewichtsfunktion, die den exponentiellen Abfall von $D_{h,V}^{-1}(x,y)$ modelliert. Die im folgenden angegebene Konstruktion von φ folgt dabei dem Beweis in Abschnitt 4 aus [8]. Es wird sich zeigen, daß φ im wesentlichen durch einen gewissen Agmon-Abstand gegeben ist, da φ eine Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung $H(x, \varphi'(x)) = 0$ ist, die zu der in (3.2.11) definierten Hamiltonschen Funktion H gehört.

Genauer gesagt seien $x_\star$ und $y_\star$ zwei verschiedene, fest gewählte Punkte im $\mathbb{R}^d$, die den in Voraussetzung 3.2.3 angegebenen Bedingungen genügen. Wenn wir nun durch d_{A} den Agmon-Abstand notieren, dann suchen wir eine beschränkte Gewichtsfunktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, die

$$\varphi(x_\star) - \varphi(y_\star) \;=\; d_{\mathrm{A}}(x_\star, y_\star) \tag{3.2.1}$$

erfüllt. Da φ beschränkt und glatt ist, gilt offensichtlich

$$D^{-1}_{h,V}(x_\star, y_\star) \;=\; e^{-\varphi(x_\star)/h}\, D^{-1}_{h,V,\varphi}(x_\star, y_\star)\, e^{\varphi(y_\star)/h}, \tag{3.2.2}$$

wobei $D^{-1}_{h,V,\varphi}(x, y)$ der Distributionskern der Inversen des in (3.2.3) definierten konjugierten Diracoperators ist. Unser Ziel besteht also in der Bestimmung der Asymptotik des Greenschen Kerns von $D_{h,V,\varphi}$, da sich die Asymptotik von $D^{-1}_{h,V,\varphi}(x_\star, y_\star)$ von der von $D^{-1}_{h,V}(x_\star, y_\star)$ nur um den Faktor $e^{-d_{\mathrm{A}}(x_\star, y_\star)/h}$ unterscheidet.

3.2.1 Eigenwerte des Symbols des konjugierten Diracoperators

In diesem Unterabschnitt geben wir die Eigenwerte und Eigenprojektionen des Symbols des konjugierten Diracoperators an. Wir beginnen mit der Definition des konjugierten Diracoperators durch

$$\begin{aligned} D_{h,V,\varphi} \;&:=\; e^{\varphi/h}\, D_{h,V}\, e^{-\varphi/h} \\ &=\; \boldsymbol{\alpha} \cdot (-ih\,\nabla + i\nabla\varphi) \,+\, \alpha_0 \,+\, V\, \mathbb{1}_{d_*} \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

und notieren durch $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x, y) \mapsto D^{-1}_{h,V,\varphi}(x, y)$ den Distributionskern der Inversen des konjugierten Diracoperators. Nun wollen wir die partielle Differentialgleichung motivieren, die die Gewichtsfunktion φ bestimmt. Dazu betrachten wir die Matrix

$$\widehat{D}_V(x, \zeta) \;:=\; \boldsymbol{\alpha} \cdot \zeta \,+\, \alpha_0 \,+\, V(x)\, \mathbb{1}, \qquad (x, \zeta) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^d, \tag{3.2.4}$$

die im Allgemeinen nicht hermitesch ist. Da die Dirac-Matrizes hermitesch sind, gilt

$$\widehat{D}_V(x, \zeta)^\star \;=\; \boldsymbol{\alpha} \cdot \overline{\zeta} \,+\, \alpha_0 \,+\, V(x)\, \mathbb{1}, \qquad (x, \zeta) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^d.$$

Ergo ist $\widehat{D}_V(x, \zeta)$ zwar für $\zeta \in \mathbb{R}^d$, nicht notwendigerweise aber für $\zeta \in \mathbb{C}^d$ hermitesch. Die Matrix $\widehat{D}_V(x, \zeta)$ besitzt die beiden komplexen Eigenwerte

$$\lambda_\pm(x, \zeta) \;:=\; \pm\sqrt{1 + \zeta^2} \,+\, V(x), \qquad (x, \zeta) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^d,\ |\Im\zeta| < 1, \tag{3.2.5}$$

der Vielfachheit $(d_*/2)$. Dabei setzen wir für jedes $\zeta \in \mathbb{C}^d$ zur Abkürzung $\zeta^2 := \zeta_1^2 + \cdots + \zeta_d^2$. Ferner notiert $\sqrt{\cdot}$ den Zweig der Quadratwurzel, der $\Re\sqrt{\cdot} > 0$ genügt, wobei die komplexe Ebene entlang der negativen reellen Achse aufgeschnitten wird. Die im Allgemeinen nicht orthogonalen Eigenprojektionen zu den durch (3.2.5) gegebenen Eigenwerten sind definiert durch

$$\Lambda^{\pm}(\zeta) := \frac{1}{2}\,\mathbb{1} \,\pm\, \frac{1}{2}\,S(\zeta), \quad S(\zeta) := \frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\zeta \,+\, \alpha_0}{\sqrt{1+\zeta^2}}, \quad \zeta\in\mathbb{C}^d,\ |\Im\zeta|<1. \tag{3.2.6}$$

Mit Hilfe von (3.1.2), was $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\zeta)^2 = \zeta^2\,\mathbb{1}$ und damit auch

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\zeta+\alpha_0)^2 \;=\; (\boldsymbol{\alpha}\cdot\zeta)^2 + \boldsymbol{\alpha}\cdot\zeta\alpha_0 + \alpha_0\boldsymbol{\alpha}\cdot\zeta + \alpha_0^2 \;=\; (\zeta^2+1)\,\mathbb{1}$$

impliziert, ergibt sich für $\zeta\in\mathbb{C}^d$, $|\Im\zeta|<1$,

$$\Lambda^+(\zeta)+\Lambda^-(\zeta) \;=\; \mathbb{1}, \qquad S(\zeta)^2 \;=\; \mathbb{1}, \qquad \Lambda^{\pm}(\zeta)^2 \;=\; \Lambda^{\pm}(\zeta), \tag{3.2.7}$$

$$\widehat{D}_V(x,\zeta)\,\Lambda^{\pm}(\zeta) \;=\; \lambda_{\pm}(\zeta)\,\Lambda^{\pm}(\zeta). \tag{3.2.8}$$

Denn für $\zeta\in\mathbb{C}^d$, $|\Im\zeta|<1$, gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{D}_V(x,\zeta)\,\Lambda^{\pm}(\zeta) \;&=\; (\boldsymbol{\alpha}\cdot\zeta+\alpha_0)\,\frac{1}{2}\left(\mathbb{1} \,\pm\, \frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\zeta \,+\, \alpha_0}{\sqrt{1+\zeta^2}}\right) + V(x)\Lambda^{\pm}(\zeta)\\
&=\; \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\zeta+\alpha_0 \pm \sqrt{1+\zeta^2}\right) + V(x)\Lambda^{\pm}(\zeta)\\
&=\; \pm\sqrt{1+\zeta^2}\,\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\zeta+\alpha_0}{\sqrt{1+\zeta^2}} + \mathbb{1}\right) + V(x)\Lambda^{\pm}(\zeta)\\
&=\; \left(\pm\sqrt{1+\zeta^2}+V(x)\right)\Lambda^{\pm}(\zeta) \;=\; \lambda_{\pm}(\zeta)\,\Lambda^{\pm}(\zeta).
\end{aligned}$$

Die übrigen in (3.2.7) auftretenden Gleichungen sind offensichtlich erfüllt.

Da die in (3.2.5) definierten $\lambda_\pm$ die Eigenwerte von $\widehat{D}_V$ der Vielfachheit $d_\star/2$ sind, erhalten wir

$$\det\left(\widehat{D}_V(x,\xi)\right) \;=\; \lambda_+^{d_\star/2}(x,\xi)\,\lambda_-^{d_\star/2}(x,\xi)$$

und so schließen wir auf

$$\begin{aligned}
\left|\det\left(\widehat{D}_V(x,\xi)\right)\right| \;&=\; \left|(\sqrt{\xi^2+1}+V(x))^{d_\star/2}(-\sqrt{\xi^2+1}+V(x))^{d_\star/2}\right|\\
&=\; \left(1+|\xi|^2-V^2(x)\right)^{d_\ast/2} \geq \left(1-(-1+\delta)^2\right)^{d_\ast/2}\\
&=\; (2\delta-\delta^2)^{d_\ast/2} > 0, \quad (x,\xi)\in\mathbb{R}^{2d},
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

d.h. das Symbol $\widehat{D}_V$ ist gleichmäßig elliptisch.

Weil $\cos(\theta) = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)$ für $\theta\in(-\pi/2,\pi/2)$ ist, erlangen wir die Gleichung $\cos^2(\theta/2) = (1+\cos(\theta))/2 \geqslant \cos(\theta)$. Ferner gilt für $z = |z|\,e^{i\theta}\in\mathbb{C}$, $\Re z>0$,

$$\Re\sqrt{z} = \Re\sqrt{|z|}e^{i\theta/2} = \sqrt{|z|}\,\cos(\theta/2) \geqslant \sqrt{|z|\,\cos(\theta)} = \sqrt{\Re z},$$

was Formel (68) aus [16] ist und im weiteren Verlauf dieses Kapitels noch Verwendung finden wird. Insbesondere betrachten wir nun $z = 1+\zeta^2$. Wir bemerken, daß wir $\zeta^2 =$

$(\Re\zeta)^2 - (\Im\zeta)^2 + 2i\Re\zeta\Im\zeta$ erhalten, wenn wir $\zeta = \Re\zeta + i\Im\zeta$ notieren. Es ergibt sich für $\zeta \in \mathbb{C}^d,\ |\Im\zeta| < 1$,

$$\Re\sqrt{1+\zeta^2} \geqslant \sqrt{1+\Re\zeta^2} = \sqrt{1+(\Re\zeta)^2-(\Im\zeta)^2}, \qquad (3.2.10)$$

wobei $|\Im\zeta| < 1$ gewährleistet, daß $\Re z > 0$ erfüllt ist.

3.2.2 Agmon-Abstand und Gewichtsfunktion

Im Folgenden behandeln wir die partielle Differentialgleichung, die die Gewichtsfunktion φ bestimmt und die bereits in der Einleitung zu Abschnitt 3.2 erwähnt wurde. Wir werden zeigen, daß die Lösung dieser Eikonalgleichung im wesentlichen durch einen gewissen Agmon-Abstand gegeben ist. Wir beginnen mit dem eindimensionalen Fall und werden sehen, daß die Bestimmung der Lösung in diesem Fall elementar ist. Um dann den höherdimensionalen Fall zu lösen, greifen wir auf ein Ergebnis aus Abschnitt 4 aus [8] zurück.

Zunächst führen wir die Hamiltonsche Funktion

$$H(x,p) := -\sqrt{1-|p|^2} - V(x), \qquad x,p \in \mathbb{R}^d,\ |p| < 1, \qquad (3.2.11)$$

ein. Die partielle Differentialgleichung, die die Gewichtsfunktion φ bestimmt, ist dann die Eikonalgleichung, die zu dieser Hamiltonsche Funktion gehört. Zwischen dem Eigenwert λ_+ und der Hamiltonschen Funktion H besteht der folgende Zusammenhang

$$H(x,p) = -\sqrt{1-p^2} - V(x) = -\lambda_+(x, ip), \qquad x,p \in \mathbb{R}^d,\ |p| < 1. \qquad (3.2.12)$$

Nun werden wir den zugehörigen Agmon-Abstand d_{A} auf $\mathbb{R}^d$ bestimmen. Dieser modelliert die Rate des exponentiellen Abfalls des Greenschen Kerns, wie wir im weiteren Verlauf dieses Kapitels zeigen werden. Um den Agmon-Abstand d_{A} angeben zu können, führen wir so wie in Abschnitt 4 aus [8] zunächst einige Begriffe aus der Finsler-Geometrie ein. In [8] wird ein allgemeinerer Fall betrachtet. Die dort auftretende Finsler-Metrik entspricht hier einer geeigneten Agmon-Metrik. Denn der Figuratrix ist anders als in [8] eine Sphäre mit Radius $\sqrt{1-V^2(x)}$, wie wir sogleich zeigen werden. Alle nun folgenden Definitionen finden sich beispielsweise in [36]. Sei für $x \in \mathbb{R}^d$ durch

$$k_x^\star := \left\{ p \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, H(x,p) \le 0 \right\} = \left\{ p \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \sqrt{1-|p|^2} + V(x) \ge 0 \right\} \qquad (3.2.13)$$

der Polarkörper notiert. Da das Potential V nach (3.1.7)

$$-1+\delta \leqslant V(x) \leqslant -\delta, \qquad x \in \mathbb{R}^d, \qquad (3.2.14)$$

für ein $\delta \in (0,1)$ genügt, ist der als der Rand von $k_x^\star$ definierte Figuratrix von der Gestalt

$$\mathbb{f}_x := \left\{ p \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, H(x,p) = 0 \right\} = \left\{ p \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, |p| = \sqrt{1-V(x)^2} \right\}. \qquad (3.2.15)$$

Wir führen noch $\mathbb{f} := H^{-1}(\{0\})$ und die Stützfunktion $F(x,v) := \sup\left\{\left\langle p \,\middle|\, v\right\rangle \mid p \in k_x^\star\right\}$ ein. Für $v \neq 0$ läßt sich die Stützfunktion auch durch $F(x,v) = \langle p(x,\mathring{v})\,|v\rangle$ charakterisieren. Dabei ist $p(x,\mathring{v})$ der eindeutig bestimmte Punkt auf $\mathbb{f}_x$, in dem das äußere Normalenfeld auf $\mathbb{f}_x$ gleich $\mathring{v} := \frac{v}{|v|}$ ist. Damit schließen wir auf $p(x,\mathring{v}) = \sqrt{1 - V(x)^2}\,\mathring{v}$ und wir erhalten für $F : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$ die Formel

$$F(x,v) \;=\; \sqrt{1 - V(x)^2}\,|v|, \qquad x, v \in \mathbb{R}^d. \tag{3.2.16}$$

Durch die Stützfunktion werden k_x und der Indikatrix i_x definiert. Diese sind für $x \in \mathbb{R}^d$ dann von der Gestalt

$$k_x := \{v \mid F(x,v) \leq 1\} = \left\{ v \,\middle|\, |v| \leq \left(\sqrt{1 - V(x)^2}\right)^{-1} \right\},$$
$$i_x := \{v \mid F(x,v) = 1\} = \left\{ v \,\middle|\, |v| = \left(\sqrt{1 - V(x)^2}\right)^{-1} \right\}.$$

Durch G notieren wir die Matrix mit den Einträgen

$$G_{ij} := \left(\frac{1}{2}F^2\right)''_{v^i v^j} = F F''_{v^i v^j} + F'_{v^i} F'_{v^j}, \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

Es folgt

$$G(x,v) \;=\; G(x) \;=\; (1 - V^2(x))\,\mathbb{1}_d, \qquad x \in \mathbb{R}^d, \tag{3.2.17}$$

da G nicht von v abhängt. Weil das Potential V die Voraussetzung 3.1.1 erfüllt, ergibt sich

$$\inf\left\{ F(x,\mathring{v}) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^d,\ \mathring{v} \in S^{d-1} \right\} \;>\; 0. \tag{3.2.18}$$

F hat alle Eigenschaften einer Finsler-Struktur und definiert durch

$$d_A(x,y) = \inf_{q: y \rightsquigarrow x} A(q) \quad , \quad A(q) := \int F(q,\dot{q}) = \int \left\langle \dot{q} \,\middle|\, G(q)\,\dot{q} \right\rangle^{1/2} \tag{3.2.19}$$

für $x, y \in \mathbb{R}^d$ den Agmon-Abstand auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Dabei wird das Infimum für ein $b > 0$ über alle stückweisen glatten Kurven $q : [0,b] \to \mathbb{R}^d$ gebildet, für die $q(0) = y$ und $q(b) = x$ gilt. Wegen Voraussetzung 3.1.1 wird das Infimum in der Definition des Agmon-Abstandes tatsächlich angenommen. Diese minimierenden Pfade nennen wir Geodäten. Ferner findet sich in [39] der explizite Ausdruck $d_A = \left(1 - V(x)^2\right) \mathrm{d}x^2$ für den Agmon-Abstand.

Betrachten wir nun zunächst den eindimensionalen Fall. Wir suchen eine Lösung φ der Eikonalgleichung $H(x,\varphi'(x)) = 0$ in einer kompakten Umgebung der Geodäte. Außerhalb dieses Kompaktums wird φ der Ungleichung $H(x,\varphi'(x)) < 0$ genügen. Die Lösung wird durch einen gewissen modifizierten Agmon-Abstand gegeben sein.

Proposition 3.2.1. *Sei $d = 1$ und sei V ein Potential, das der Voraussetzung 3.1.1 genüge. Dann gelten die folgenden Behauptungen:*

(i) Für $y \in \mathbb{R}$ ist die in $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$H(x,\phi'(x)) \;=\; -\sqrt{1-\phi'(x)^2} - V(x) \;=\; 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \pm\phi' > 0, \quad \phi(y) = 0$$

durch die glatte Funktion

$$\phi(x) \;=\; \pm \int_y^x \sqrt{1-V^2(t)}\,dt, \qquad x \in \mathbb{R},$$

gegeben. Es gelten $\phi(x) = \pm d_{\mathrm{A}}(x,y)$ für $x \geqslant y$ und $\phi(x) = \mp d_{\mathrm{A}}(x,y)$ für $x < y$.
(ii) Seien $x_\star, y_\star \in \mathbb{R}$ gegeben, die $x_\star \neq y_\star$ erfüllen. Dann existieren ein kompaktes Intervall $K_0 \subset \mathbb{R}$ mit $x_\star, y_\star \in \mathring{K}_0$ und eine Funktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, für die $\varphi(x) - \varphi(y) = d_{\mathrm{A}}(x,y)$ für jedes $x, y \in K_0$ mit $\operatorname{sgn}(x-y) = \operatorname{sgn}(x_\star - y_\star)$ gilt, die in einer Umgebung von $\pm\infty$ konstant ist und die

$$H(x,\varphi'(x)) \leqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{und} \quad H(x,\varphi'(x)) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in K_0 \tag{3.2.20}$$

genügt.

Beweis. (i): Jede Lösung $\phi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ von $H(x,\phi'(x)) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, genügt $\phi'(x)^2 = 1 - V(x)^2$. Wegen der Voraussetzung $-1+\delta \leqslant V \leqslant -\delta$ gilt also entweder $\phi' > 0$ oder $\phi' < 0$ auf $\mathbb{R}$. Ergo ist $H(x,\phi') = 0$ äquivalent zu

$$\phi'(x) \;=\; \pm\sqrt{1-V(x)^2}, \quad \text{falls } \pm\phi' > 0.$$

Da $\phi(y) = 0$ ist, erhalten wir durch Integrieren der letzten Gleichung die Lösung

$$\phi(x) \;=\; \phi(x) - \phi(y) \;=\; \pm \int_y^x \sqrt{1-V(t)^2}dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Um den Teil der Behauptung, der den Agmon-Abstand betrifft, zu zeigen, erinnern wir uns zunächst an die Definition des Agmon-Abstandes (siehe auch (3.2.19))

$$d_{\mathrm{A}}(x,y) \;:=\; \inf_{q:y\rightsquigarrow x} \int \big\langle\, \dot q \,\big|\, G(q)\,\dot q \,\big\rangle^{1/2}, \qquad x,y \in \mathbb{R}^d.$$

Dabei wird das Infimum für ein $b > 0$ über alle stückweise glatten Pfade $q : [0,b] \to \mathbb{R}^d$ gebildet, für die $q(0) = y$ und $q(b) = x$ gilt. Wir bemerken, daß der Ausdruck $\int\langle\, \dot q \,|\, G(q)\,\dot q \,\rangle^{1/2}$ sich nicht ändert, wenn der Pfad q umparametrisiert wird. Wir betrachten zunächst den Fall $y \leqslant x$. Für $y \leqslant x$ wählen wir den Pfad $q(t) = y + t$, $t \in [0, x-y]$. Da $q(0) = y$ und $q(x-y) = x$ gelten, folgt

$$d_A(x,y) \;\leq\; \int_0^{x-y} G(y+t)^{1/2}\,dt \;=\; \int_y^x (1-V^2(t))^{1/2}\,dt \;=\; \pm\phi(x).$$

Für $y > x$ setzen wir den Pfad $q(t) = y - t$, $t \in [0, y-x]$ ein. Insgesamt ergibt sich $\phi(x) = \pm\operatorname{sgn}(x-y)\,d_{\mathrm{A}}(x,y)$.

(ii): Wir wählen ein Kompaktum K_0 derart, daß $x_\star, y_\star \in \mathring{K}_0$ gilt. Innerhalb des Kompaktums K_0 definieren wir das gesuchte φ durch das in (i) konstruierte ϕ, außerhalb von K_0 modifizieren wir ϕ geeignet. Dazu wählen wir eine Abschneidefunktion $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$, für die $\theta(t)$ genau dann gleich eins ist, wenn $t \in K_0$ ist. Wir setzen nun

$$\varphi(x) := \pm \int_{y_\star}^{x} \theta(t) \sqrt{1 - V^2(t)}\, dt, \qquad x \in K_0,$$

wobei wir das +-Vorzeichen genau dann wählen, wenn $x_\star > y_\star$ ist. Anhand dieser Definition von φ folgt

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(y) &= \pm \int_{y_\star}^{x} \sqrt{1 - V^2(t)}\, dt \mp \int_{y_\star}^{y} \sqrt{1 - V^2(t)}\, dt \\ &= \begin{cases} + \int_y^x \sqrt{1 - V^2(t)}\, dt \text{ für } x \geq y, \\ - \int_y^x \sqrt{1 - V^2(t)}\, dt \text{ für } x < y \end{cases} \quad = d_{\mathrm{A}}(x,y) \end{aligned}$$

für $x, y \in K_0$ mit $\operatorname{sgn}(x-y) = \operatorname{sgn}(x_\star - y_\star)$, was den ersten Teil der Behauptung zeigt. φ genügt nach Teil (i) $H(x, \varphi') = 0$ auf K_0 und für $x \notin K_0$ gilt $\varphi'(x)^2 = \theta(x)^2(1 - V^2(x)) < 1 - V^2(x)$, was $V^2(x) < 1 - \varphi'(x)^2$ und damit auch $0 > -\sqrt{1 - \varphi'(x)^2} - V(x) = H(x, \varphi'(x))$ impliziert. □

Nun wenden wir uns dem mehrdimensionalen Fall zu. Dazu bemerken wir zunächst, daß die eindeutig bestimmte Viskositätslösung von

$$H\left(x, \phi'(x)\right) = 0 \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \{y\} \qquad \text{und} \qquad \phi\left(y\right) = 0 \tag{3.2.21}$$

durch $\phi(x) = d_A(x,y)$ gegeben ist. Ferner gilt $u \leq \phi$ für jedes lokal lipschitzstetige $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, das $u(y) = 0$ und fast überall $H(x, u'(x)) \leq 0$ genügt. Das Problem, daß der Agmon-Abstand nicht glatt ist, werden wir im Folgenden lösen. Dazu notieren wir den Fluß des zu H gehörenden Hamiltonschen Vektorfeldes durch $\Phi = (X, P) : \mathcal{D}(\Phi) \to \mathbb{R}^{2d}$, wobei $\mathcal{D}(\Phi) = \{(t, x, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times B_1 : t \in I_{\max}(x,p)\}$ ist. Also erhalten wir

$$\partial_t \Phi = \partial_t \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_p H(X,P) \\ -\nabla_x H(X,P) \end{pmatrix} \quad \text{auf } \mathcal{D}(\Phi), \quad \Phi(0) = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}. \tag{3.2.22}$$

Hierbei definieren wir durch $I_{\max}(x,p)$ das Existenzintervall für die maximale Lösung des Anfangswertproblems $\dot{\rho} = (\nabla_p H(\rho), -\nabla_x H(\rho))$, $\rho(0) = (x,p)$ und $B_1 := \{p \in \mathbb{R}^d : p^2 < 1\}$.

Wir interessieren uns für die Trajektorien des Hamiltonschen Vektorfeldes

$$X_H(x,p) := \begin{pmatrix} \nabla_p H(x,p) \\ -\nabla_x H(x,p) \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}^d,\ |p| < 1, \tag{3.2.23}$$

und deren Beziehung zu den Geodäten. Wir erinnern an [36, Seite 197].

Lemma 3.2.2. *Sei* $\begin{pmatrix} \gamma \\ \varpi \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^{2d}$ *eine glatte Kurve, die den Hamiltonschen Gleichungen*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_p H \\ -\nabla_x H \end{pmatrix}(x,p) \tag{3.2.24}$$

auf einem nicht trivialen Intervall I derart genüge, daß

$$H(\gamma(t), \varpi(t)) = 0 \tag{3.2.25}$$

für $t \in I$ gelte. Dann gilt, daß γ eine Geodäte bezüglich der Agmon-Metrik G ist.

Nun notieren wir durch $\exp_y : T_y\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ die Exponentialabbildung in $y \in \mathbb{R}^d$, die zu der Agmon-Metrik G gehört. Dann wissen wir, daß die Exponentialabbildung

$$\exp_y(v) := \begin{cases} q_{y,v}(1), & \text{für } v \neq 0 \\ y, & \text{für } v = 0, \end{cases}$$

erfüllt. Dabei ist $q_{y,v}$ die eindeutig bestimmte Geodäte, die zum Zeitpunkt $t = 0$ mit Geschwindigkeit v durch den Punkt y läuft. Wir erinnern uns daran, daß zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^d$ genau dann konjugiert zueinander heißen, wenn die Ableitung $\exp_y'(v)$ singulär ist. Hierbei ist $v \in \mathbb{R}^d$ so gewählt, daß $\exp_y(v) = x$ gilt. In diesem Kapitel werden wir nur Argumente des Greenschen Kerns betrachten, die die folgende Voraussetzung erfüllen.

Voraussetzung 3.2.3. *Seien $x_\star, y_\star \in \mathbb{R}^d$, für die $x_\star \neq y_\star$ gelte, und es existiere eine bis auf Umparametrisierung eindeutige minimierende Geodäte, die von $y_\star$ nach $x_\star$ laufe. Ferner seien $x_\star$ und $y_\star$ nicht konjugiert zueinander.*

Es ist bekannt, daß die Voraussetzung 3.2.3 stets für fest gewähltes $y_\star$ erfüllt ist, sofern $x_\star$ hinreichend nah bei $y_\star$ liegt. Wir bemerken noch, daß es eine bis auf Umparametrisierung eindeutige minimierende Geodäte gibt, die in entgegengesetzter Richtung von $x_\star$ nach $y_\star$ läuft, wenn die Voraussetzung 3.2.3 gilt. Außerdem können wir die Geodäte, die von $y_\star$ nach $x_\star$ läuft, bzw. die, die von $x_\star$ nach $y_\star$ läuft, um ein kleines Stück derart verlängern, daß sie ihre minimierende Eigenschaft nicht verliert. Nun können wir folgenden Spezialfall von [8, Proposition 4.5] beweisen.

Proposition 3.2.4. *Seien $d \geqslant 2$, V ein Potential, das der Voraussetzung 3.1.1 genüge, und $x_\star$ und $y_\star$ Punkte, die die Voraussetzung 3.2.3 erfüllen. Dann existieren ein Punkt y_0, der auf der Verlängerung der Geodäten, die von $x_\star$ nach $y_\star$ läuft, liegt, eine kompakte Umgebung K_0 von der Strecke der Geodäte von $y_\star$ nach $x_\star$, eine offene Menge $\mathscr{W} \subset T_{y_0}\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d$, die ein Sterngebiet in bezug auf 0 ist, und eine beschränkte Funktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, deren partielle Ableitungen beliebiger Ordnung beschränkt sind, für die die folgenden Aussagen gelten:*

(i) Für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ gelten $|\nabla\varphi(x)| < 1$,

$$H(x, \nabla\varphi(x)) \leqslant 0 \quad \text{und} \quad H(x, \nabla\varphi(x)) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in K_0. \tag{3.2.26}$$

(ii) *Es gilt* $\varphi(x) - \varphi(y_\star) = d_{\mathrm{A}}(x, y_\star)$ *für jedes* x*, das auf der Strecke der Geodäte von* $y_\star$ *nach* $x_\star$ *liegt.*

(iii) $\exp_{y_0}\restriction_{\mathscr{W}} \in C^1(\mathscr{W}, \mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathscr{W} \setminus \{0\}, \mathbb{R}^d)$ *ist injektiv auf* $\mathscr{W}$ *und es gilt*

$$K_0 \subset \exp_{y_0}(\mathscr{W}) \setminus \{y_0\}.$$

(iv) *Zu jedem* $x \in K_0$ *existiert ein eindeutig bestimmtes Paar* $(\tau, p_0) \in (0, \infty) \times \mathbb{f}_{y_0}$*, das die Eigenschaft besitzt, daß die Projektion von* $[0, \tau] \ni t \mapsto \Phi(t, y_0, p_0)$ *auf* $\mathbb{R}^d_x$ *eine minimierende Geodäte, die von* y_0 *nach* x *läuft, ist. Es gilt*

$$\Phi(\tau, y_0, p_0) \;=\; (x, \nabla\varphi(x)) \;=\; \big(X(\tau, y_0, p_0), \nabla\varphi(X(\tau, y_0, p_0))\big). \tag{3.2.27}$$

Beweis. Die Proposition wurde in [8] unter den folgenden Voraussetzungen bewiesen. Zum einen sollte

$$\inf\big\{\, F(x, \mathring{v}) \;:\; x \in \mathbb{R}^d,\ \mathring{v} \in S^{d-1} \,\big\} \;>\; 0 \tag{3.2.28}$$

gelten, wobei $F : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$ die in (3.2.16) eingeführte Finsler-Struktur ist, die durch $F(x, v) := \langle\, v \,|\, G(x)\, v\,\rangle^{1/2} = \sqrt{1 - V^2(x)}\,|v|$, $x, v \in \mathbb{R}^d$, gegeben ist. Wie bereits in (3.2.18) bemerkt, ist diese Bedingung erfüllt, was unmittelbar aus (3.1.7) folgt. Ferner sollten die Voraussetzungen, daß $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R})$ ist, daß für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ die Funktion $H(x, \cdot\,) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ streng konvex und gerade ist und daß $H(x, 0) < 0$ ist, gelten. Wegen (3.1.7) werden wir H auf die im Folgenden angegebene Art und Weise modifizieren, um zu erreichen, daß die soeben eingeführten Bedingungen erfüllt sind. Wir schränken nun das durch (3.2.12) gegebene H auf die Menge $\mathbb{R}^d \times \{p \in \mathbb{R}^d :\ |p| \leqslant 1 - \delta^2/2\}$ ein und wählen dann eine beliebige glatte Fortsetzung dieser Einschränkung auf $\mathbb{R}^{2d}$, die den in [8] gestellten Bedingungen genügen. Die Behauptungen der Proposition 3.2.4 hängen dabei nicht von der Wahl dieser Fortsetzung ab. □

3.2.3 Eigenschaften des Symbols des konjugierten Diracoperators

In diesem Unterabschnitt betrachten wir einige wichtige Eigenschaften der Eigenwerte des Symbols

$$\widehat{D}_{V,\varphi}(x, \xi) \;:=\; \widehat{D}_V(x, \xi + i\nabla\varphi(x)), \qquad (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d}. \tag{3.2.29}$$

Wir werden sehen, daß der Realteil des einen Eigenwerts nichtnegativ, der des anderen hingegen echt negativ ist. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird sich zeigen, daß nur der Teil, der zum Eigenwert mit dem nichtnegativen Realteil gehört, zur asymptotischen Entwicklung des Distributionskerns beiträgt.

Im Folgenden nehmen wir stets an, daß das Potential V die Voraussetzung 3.1.1 erfüllt, daß die Punkte $x_\star$ und $y_\star$ der Voraussetzung 3.2.3 genügen und daß φ die Funktion ist, die durch Proposition 3.2.1 im Fall von $d = 1$ gegeben ist bzw. durch Proposition 3.2.4, falls $d \geqslant 2$ ist. Wir beginnen damit die komplexwertigen Symbole

$$\begin{aligned} a_\pm(x,\xi) &:= \mp i\lambda_\pm\big(x, \xi + i\nabla\varphi(x)\big) \\ &= -i\sqrt{1 + (\xi + i\nabla\varphi(x))^2} \mp iV(x), \qquad (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}, \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

zu definieren. Da $|\nabla\varphi| < 1$ ist, sind a_+ und a_- wohldefinierte, komplexwertige, glatte Funktionen auf $\mathbb{R}^{2d}$. In den nächsten beiden Lemmata sammeln wir einige grundlegende Eigenschaften von $a_\pm$. Entscheidend wird dabei sein, daß der Imaginärteil von $a_\pm$ nicht positiv ist und daß die Ableitung vom Realteil von $a_\pm$ nicht verschwindet, falls der Imaginärteil von $a_\pm$ gleich Null ist. Dies wird es uns ermöglichen, die in Abschnitt 3.3 verwendete Konstruktionen zur Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung durchzuführen. Von nun an setzen wir zur Abkürzung $(a_\pm)''_{x\xi} := d_\xi \nabla_x a_\pm$, $H''_{px} := d_x \nabla_p H$, usw.

Lemma 3.2.5. *Für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ gelten*

$$\Im a_+(x,\xi) \leqslant 0, \tag{3.2.31}$$

$$\Im a_+(x,\xi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x,\xi) \in K_0 \times \{0\}. \tag{3.2.32}$$

Dabei ist K_0 aus Proposition 3.2.1 im Fall von $d = 1$ bekannt bzw. aus Proposition 3.2.4, falls $d \geqslant 2$ ist. Ferner gelten für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ die folgenden Aussagen

$$a_+(x,0) = iH(x, \nabla\varphi(x)), \tag{3.2.33}$$

$$\nabla_\xi a_+(x,0) = \nabla_p H(x, \nabla\varphi(x)), \tag{3.2.34}$$

$$(a_+)''_{\xi x}(x,0) = H''_{px}(x, \nabla\varphi(x)) + H''_{pp}(x, \nabla\varphi(x))\, \varphi''(x), \tag{3.2.35}$$

$$(a_+)''_{\xi\xi}(x,0) = -iH''_{pp}(x, \nabla\varphi(x)). \tag{3.2.36}$$

Für jedes $x \in K_0$ gelten insbesondere

$$a_+(x,0) = 0, \quad \nabla_x a_+(x,0) = 0, \quad (a_+)''_{xx}(x,0) = 0, \tag{3.2.37}$$

$$\nabla_\xi a_+(x,0) = -\nabla\varphi(x)/V(x) \neq 0. \tag{3.2.38}$$

Beweis. Aufgrund von (3.2.10) und Proposition 3.2.4(i) erhalten wir für $x, \xi \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} \Im a_+(x,\xi) &= -\Re\sqrt{1 - (\nabla\varphi(x))^2 + \xi^2 + 2i\,\langle\, \xi \,|\, \nabla\varphi(x)\,\rangle} - V(x) \\ &\leqslant -\sqrt{1 + (\Re(i\nabla\varphi(x) + \xi))^2 - (\Im(i\nabla\varphi(x) + \xi))^2} - V(x) \\ &= -\sqrt{1 - (\nabla\varphi(x))^2 + \xi^2} - V(x) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Ferner gilt wegen (3.2.26) und der soeben hergeleiteten Ungleichungen, daß genau dann $\Im a_+(x,\xi) = 0$ ist, wenn $\xi = 0$ und $x \in K_0$ ist. Dies impliziert (3.2.31) und (3.2.32). Offensichtlich gilt $a_+(x,0) = i(-\sqrt{1 - (\nabla\varphi(x))^2} - V(x)) = iH(x, \nabla\varphi(x))$. Ferner folgt aus (3.2.12) $\nabla_p H(x,p) = -\nabla_p \lambda_+(x, ip) = -i\nabla_\xi \lambda_+(x, ip)$ für $x \in \mathbb{R}^d$ und $|p| < 1$. Daraus ergibt sich $\nabla_p H(x, \nabla\varphi(x)) = -\nabla_\xi \lambda_+(x, i\nabla\varphi(x)) = \nabla_\xi a_+(x,0)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^d$, was (3.2.34) ist. Mittels (3.2.34) schließen wir auf $(a_+)''_{\xi x}(x,0) = d_x \nabla_p H(x, \nabla\varphi(x)) = H''_{px}(x, \nabla\varphi(x)) + H''_{pp}(x, \nabla\varphi(x))\,\varphi''(x)$, was (3.2.35) ist. Außerdem gilt

$$H''_{pp}(x,p) = -id_p \nabla_\xi \lambda_+(x, ip) = (\lambda_+)''_{\xi\xi}(x, ip), \qquad x \in \mathbb{R}^d, \quad |p| < 1,$$

weswegen wir $-iH''_{pp}(x, \nabla\varphi(x)) = -i(\lambda_+)''_{\xi\xi}(x, i\nabla\varphi(x)) = (a_+)''_{\xi\xi}(x,0)$, also auch Gleichung (3.2.36) erhalten. Offenbar ist $a_+(x,0) = iH(x, \nabla\varphi(x)) = 0$ für jedes $x \in K_0$ nach Proposition 3.2.4(i). Die verbleibenden Aussagen von (3.2.37) lassen sich wie folgt unter Verwendung von Proposition 3.2.4(i) zeigen:

$$\begin{aligned}
(a_+)'_x(x,\xi) &= -i\left(\nabla_x V(x) - \frac{\nabla\varphi(x)\,\varphi''(x)}{\sqrt{1-\nabla\varphi(x)^2}}\right)\\
&= \frac{i}{-V(x)}\left(V(x)\,\nabla_x V(x) + \frac{1}{2}\left(\nabla\varphi(x)^2\right)'\right)\\
&= \frac{i}{-V(x)}\left(V(x)\,\nabla_x V(x) - V(x)\,\nabla_x V(x)\right) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a_+)''_{xx}(x,\xi) = {}& -iV''(x) + i\frac{\left(\varphi''^2(x) + \nabla\varphi(x)\,\varphi'''(x)\right)\sqrt{1-\nabla\varphi^2(x)}}{\sqrt{1-\varphi'^2(x)}^2}\\
&+ \frac{\left(\nabla\varphi(x)\,\varphi''(x)\right)^2}{\sqrt{1-\varphi'^2(x)}^3}\\
={}& -iV''(x) - i\frac{\left(\varphi''^2(x) + \nabla\varphi(x)\,\varphi'''(x)\right)V(x) + \frac{(V(x)\nabla V(x))^2}{V(x)}}{V^2(x)}\\
={}& \frac{-i}{V^2(x)}\big(V''(x)\,V^2(x) + V(x)\,\nabla V^2(x)\\
&\qquad + \left(\varphi''^2(x) + \nabla\varphi(x)\,\varphi'''(x)\right)V(x)\big)\\
={}& \frac{-i}{V(x)}\left(-\varphi''^2(x) - \nabla\varphi(x)\,\varphi'''(x) + \varphi''^2(x) + \nabla\varphi(x)\,\varphi'''(x)\right)\\
={}& 0.
\end{aligned}$$

Schließlich berechnen wir mit Hilfe von Proposition 3.2.4(i)

$$\nabla_\xi\, a_+(x,0) = (-i)\,\frac{i\nabla\varphi(x)}{\sqrt{1-\left(\nabla\varphi(x)\right)^2}} = \frac{\nabla\varphi(x)}{-V(x)} \neq 0.$$

□

Lemma 3.2.6. *Für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ gilt*

$$\Im a_-(x,\xi) \leqslant -2\delta < 0. \tag{3.2.39}$$

Dabei wurde δ in Voraussetzung 3.1.1 eingeführt.

Beweis. Da $H(x, \nabla\varphi(x)) \leqslant 0$ auf $\mathbb{R}^d$ gilt, impliziert die Ungleichung (3.2.10)

$$\begin{aligned}\Im a_-(x,\xi) \;&=\; -\Re\sqrt{1-(\nabla\varphi(x))^2+\xi^2+2i\,\langle\,\xi\,|\,\nabla\varphi(x)\,\rangle}+V(x)\\ &\leqslant\; -\sqrt{1-(\nabla\varphi(x))^2}+V(x)\;\leqslant\;2V(x)\;\leqslant\;-2\,\delta\end{aligned}$$

für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^d$. □

3.3 Die komplexwertige Hamilton-Jacobi-Gleichung

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die semiklassische Asymptotik des Distributionskerns zu bestimmen. Dazu wird eine Parametrix der Wärmeleitungsgleichung konstruiert werden. Da die Eigenwerte komplexwertig sind, wird als Ansatz für diese Parametrix ein Fourierintegraloperator mit komplexwertiger Phase verwendet werden. Also ist eine Näherungslösung der zeitabhängigen komplexwertigen Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\partial_t\psi_\pm + a_\pm\big(x, \nabla_x\psi_\pm\big) \;=\; \mathcal{O}\big((\Im\psi_\pm)^N\big),\quad N\in\mathbb{N}, \tag{3.3.1}$$

$$\psi_\pm(0,x,\eta) \;=\; \langle\,\eta\,|\,x\,\rangle,\qquad \Im\psi_\pm \geqslant 0 \tag{3.3.2}$$

zu ermitteln, was in diesem Abschnitt geschehen wird. Diese Näherungslösung wird sich schließlich in Korollar 3.3.11 finden. Da die hier auftretenden Symbole $a_\pm$ komplexwertig sind, müssen wir mit fast analytischen Fortsetzungen (siehe auch Anhang B) arbeiten und wir werden die Hamilton-Jacobi-Gleichung nicht exakt, sondern nur bis auf Fehlerterme, die von der Ordnung $\mathcal{O}((\Im\psi_\pm)^N)$ sind, lösen können.

In diesem Abschnitt werden wir den aus [6, 8, 27] bekannten Konstruktionen folgen. Wir werden anders als in [27], aber ebenso wie in [6, 8] stets beliebige Symbole und nicht Symbole, die homogen vom Grad 1 sind, betrachten. Dabei stellen wir Alternativen zu den Beweisen aus [27] dar, um die Ableitungen gewisser Fehlerterme und geeigneter impliziter Funktionen zu kontrollieren.

Dieser Abschnitt besteht aus zwei Unterabschnitten. In Unterabschnitt 3.3.1 geben wir Abschätzungen des zu $a_\pm$ gehörenden Hamiltonschen- und Berührungsflusses an. In Unterabschnitt 3.3.2 geben wir eine Näherungslösung der komplexwertigen Hamilton-Jacobi-Gleichung an.

3.3.1 Der Hamiltonsche- und der Berührungsfluß

In diesem Unterabschnitt werden wir Abschätzungen des zu $a_\pm$ gehörenden Hamiltonschen- und Berührungsflusses angeben. Wir beginnen damit fast analytische Fortsetzungen der komplexwertigen Symbole $a_\pm$ einzuführen. In Anhang B werden wir einige grundlegende Eigenschaften der fast analytischen Fortsetzungen zusammenfassen. Die von uns gesuchten Abschätzungen werden sich im Folgenden mittels Taylorentwicklungen ergeben. Schließlich werden wir noch die antiholomorphen Ableitungen des Hamiltonschen Flusses untersuchen, was sich im letzten Korollar dieses Unterabschnitts finden wird. Wir werden dabei den

Konstruktionen aus [8, 27] folgen. Wir werden anders als in [27], aber ebenso wie in [8] stets beliebige Symbole betrachten und nicht Symbole, die homogen vom Grad 1 sind.

Wir nehmen an, daß das Potential V die Voraussetzung 3.1.1 erfüllt und daß die Punkte $x_\star$ und $y_\star$ der Voraussetzung 3.2.3 genügen. φ sei die Funktion, die durch Proposition 3.2.1 im Fall von $d = 1$ gegeben ist bzw. durch Proposition 3.2.4, falls $d \geqslant 2$ ist. Ferner werden wir von nun an durch die Symbole x, y, ξ und η komplexe Variablen im $\mathbb{C}^d$ notieren. Wir definieren $\rho = (x, \xi)$ und $\partial_{x_j} = (\partial_{\Re x_j} - i\partial_{\Im x_j})/2$, $\partial_{\overline{x}_j} = (\partial_{\Re x_j} + i\partial_{\Im x_j})/2$, $\nabla_x = (\nabla_{\Re x} - i\nabla_{\Im x})/2$, $\nabla_{\overline{x}} = (\nabla_{\Re x} + i\nabla_{\Im x})/2, \ldots$ und ebenso verfahren wir mit den komplexen Variablen y, ξ und η.

Wir setzen φ und V fast analytisch fort. Die fast analytischen Fortsetzungen von φ und V sind glatte Funktionen, die auf $\mathbb{C}^d$ definiert sind und für die zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{C}^d$ und jedem $N \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2d}$ eine Konstante $C_{N,K,\alpha} \in (0, \infty)$ derart existiert, daß

$$
\begin{aligned}
|\partial^\alpha_{(\Re x, \Im x)} \nabla_{\overline{x}} \varphi(x)| &\leqslant C_{N,K,\alpha} \, |\Im x|^N, \qquad x \in K, \\
|\partial^\alpha_{(\Re x, \Im x)} \nabla_{\overline{x}} V(x)| &\leqslant C_{N,K,\alpha} \, |\Im x|^N, \qquad x \in K,
\end{aligned}
$$

gelten. Wir notieren diese fast analytischen Fortsetzungen wiederum durch φ und V und mit den Symbolen φ und V seien für den Rest dieses Kapitels die fast analytischen Fortsetzungen gemeint. Einige nützliche Eigenschaften von fast analytischen Fortsetzungen finden sich in Anhang B. Es existiert eine offene Umgebung $\Omega \subset \mathbb{C}^{2d}$ von $\mathbb{R}^{2d}$, auf der die Symbole

$$
a_\pm(x, \xi) = -i\sqrt{1 + (\xi + i\nabla\varphi(x))^2} \mp iV(x), \qquad (x, \xi) \in \Omega,
$$

wohldefiniert und fast analytisch sind. Zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset \Omega$ und jedem $N \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^{4d}$ gibt es eine Konstante $C_{N,K,\alpha} \in (0, \infty)$, die der Abschätzung

$$
|\partial^\alpha_{(\Re\rho, \Im\rho)} \nabla_{\overline{\rho}} a_\pm(\rho)| \leqslant C_{N,K,\alpha} \, |\Im\rho|^N, \quad \rho \in K, \tag{3.3.3}
$$

genügt. Es gilt sogar $\nabla_{\overline{\xi}} a_\pm = 0$ auf Ω. In diesem Unterabschnitt folgen wir den Arbeiten [6, 27], um den Hamiltonschen- und den Berührungsfluß, der zu $a_\pm$ gehört, abzuschätzen. Auf Ω führen wir die Hamiltonschen Vektorfelder

$$
\mathscr{H}_{a_\pm} := \langle \nabla_\xi a_\pm \,|\, \nabla_x \rangle - \langle \nabla_x a_\pm \,|\, \nabla_\xi \rangle = \sum_{j=1}^d \big(a_\pm\big)'_{\xi_j} \partial_{x_j} - \big(a_\pm\big)'_{x_j} \partial_{\xi_j}
$$

und die Elementarwirkungen

$$
\mathscr{A}_\pm(\rho) := \langle \nabla_\xi a_\pm(\rho) \,|\, \xi \rangle - a_\pm(\rho), \qquad \rho = (x, \xi) \in \Omega,
$$

ein. Hierbei notiert $\langle \cdot \,|\, \cdot\cdot \rangle$ die Fortsetzung des euklidischen Skalarproduktes zu einer Bilinearform auf $\mathbb{C}^d$. Aus (3.2.37) folgern wir

$$
\mathscr{A}_+(x, 0) = -a_+(x, 0) = 0, \qquad x \in K_0, \tag{3.3.4}
$$

was wir später noch verwenden werden. Wir fügen nun noch eine weitere Variable $s \in \mathbb{C}$ zu $(x, \xi) \in \Omega$ hinzu, die die Wirkung parametrisiert und mittels der wir die Berührungsfelder

$$\mathscr{K}_{a_\pm} := -\mathscr{A}_\pm \, \partial_s + \mathscr{H}_{a_\pm} = (a_\pm - \langle \nabla_\xi a_\pm \,|\, \xi \rangle) \, \partial_s + \mathscr{H}_{a_\pm} \qquad \text{auf } \mathbb{C} \times \Omega,$$

definieren können. Schließlich führen wir die reellen partiellen Differentialoperatoren

$$\widehat{\mathscr{H}_{a_\pm}} := \mathscr{H}_{a_\pm} + \overline{\mathscr{H}}_{a_\pm}, \qquad \widehat{\mathscr{K}_{a_\pm}} := \mathscr{K}_{a_\pm} + \overline{\mathscr{K}}_{a_\pm}$$

ein. Ferner stellen wir fest, daß sich wegen

$$\begin{aligned} c\,\partial_z + \bar{c}\,\partial_{\bar{z}} &= (\Re c + i\Im c)(\partial_{\Re z} - i\partial_{\Im z})/2 + (\Re c - i\Im c)(\partial_{\Re z} + i\partial_{\Im z})/2 \\ &= (\Re c)\,\partial_{\Re z} + (\Im c)\,\partial_{\Im z} \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

der partielle Differentialoperator $\widehat{\mathscr{H}_{a_\pm}}$ durch

$$\widehat{\mathscr{H}_{a_\pm}} = \sum_{j=1}^{d} \big(\Re a_\pm\big)'_{\xi_j} \partial_{\Re x_j} + \big(\Im a_\pm\big)'_{\xi_j} \partial_{\Im x_j} - \big(\Re a_\pm\big)'_{x_j} \partial_{\Re \xi_j} - \big(\Im a_\pm\big)'_{x_j} \partial_{\Im \xi_j} \tag{3.3.6}$$

darstellen läßt. Wenn wir nun die kanonische Basis vom $\mathbb{C}^{2d}$ durch $(\mathsf{e}_1, \dots, \mathsf{e}_{2d})$ notieren, ist unter der Identifizierung $\partial_{\Re x_j} \leftrightarrow \mathsf{e}_j$, $\partial_{\Im x_j} \leftrightarrow i\mathsf{e}_j$, $\partial_{\Re \xi_j} \leftrightarrow \mathsf{e}_{d+j}$, $\partial_{\Im \xi_j} \leftrightarrow i\mathsf{e}_{d+j}$, $j = 1, \dots, d$, der Vektor im $\mathbb{C}^{2d}$, der $\widehat{\mathscr{H}_{a_\pm}}$ entspricht, gegeben durch

$$\sum_{j=1}^{d} \big((\Re a_\pm)'_{\xi_j} + i (\Im a_\pm)'_{\xi_j} \big) e_j - \big((\Re a_\pm)'_{x_j} + i (\Im a_\pm)'_{x_j} \big) e_{j+d}.$$

Also gilt

$$\widehat{\mathscr{H}_{a_\pm}} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \nabla_\xi a_\pm \\ -\nabla_x a_\pm \end{pmatrix}. \tag{3.3.7}$$

Aus (3.3.5) und (3.3.6) ergibt sich

$$\begin{aligned} \widehat{\mathscr{K}_{a_\pm}} &= \Re\left(a_\pm - \langle \nabla_\xi a_\pm \,|\, \xi \rangle\right) \partial_{\Re s} + \Im\left(a_\pm - \langle \nabla_\xi a_\pm \,|\, \xi \rangle\right) \partial_{\Im s} \\ &\quad + \big(\nabla_\xi \Re a_\pm\big) \nabla_{\Re x} + \big(\nabla_\xi \Im a_\pm\big) \nabla_{\Im x} - \big(\nabla_x \Re a_\pm\big) \nabla_{\Re \xi} - \big(\nabla_x \Im a_\pm\big) \nabla_{\Im \xi}. \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Offensichtlich sind $\widehat{\mathscr{H}_{a_\pm}}$ und $\widehat{\mathscr{K}_{a_\pm}}$ reelle partielle Differentialoperatoren, was $[\widehat{\mathscr{K}_a}, \Re] = 0$ und $[\widehat{\mathscr{K}_a}, \Im] = 0$ impliziert. Ebensolches gilt für $\widehat{\mathscr{H}_{a_\pm}}$. Wir definieren $\mathfrak{S} : \mathbb{C}^{1+2d} \to \mathbb{R}$ durch

$$\mathfrak{S}(s, x, \xi) := -\Im s - \langle \Im x \,|\, \Re \xi \rangle = -\Im\big(s + \langle x \,|\, \Re \xi \rangle\big), \quad (s, x, \xi) \in \mathbb{C}^{1+2d}.$$

Dieses $\mathfrak{S}$ entspricht der Funktion $-\langle \Im x \,|\, \Re \xi \rangle$, falls das Symbol homogen vom Grad 1 in ξ ist, wie es in Referenz [27] zu finden ist. Die Abschätzung von $\widehat{\mathscr{K}_{a_\pm}}\,\mathfrak{S}$, die das nun folgende Lemma liefert, ergibt sich mittels Taylorentwicklungen und unter Verwendung von $\Im a_\pm \leq 0$, was nach (3.2.31) und (3.2.39) gilt. Der Beweis ist eine Variante von Lemma 1.7 aus [27].

Lemma 3.3.1. *Zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset \Omega$ gibt es eine Konstante $C_K \in (0,\infty)$ derart, daß für jedes $(s,\rho) = (s,x,\xi) \in \mathbb{C} \times K$ die Abschätzung*

$$(\widehat{\mathscr{K}_{a_\pm}}\,\mathfrak{S})(s,\rho) \;\geqslant\; -\frac{3}{4}\,\Im a_\pm(\Re\rho) - C_K\,|\Im\rho|^3 \tag{3.3.9}$$

gilt.

Beweis. Mit a sei a_+ oder a_- gemeint. Aufgrund der in (3.3.8) angegebenen Darstellung für $\widehat{\mathscr{K}_a}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathscr{K}_a}\big(s + \langle\, x \,|\, \Re\xi \,\rangle\big) \;&=\; \Re\left(a - \langle\, \nabla_\xi a \,|\, \xi \,\rangle\right) + i\,\Im\left(a - \langle\, \nabla_\xi a \,|\, \xi \,\rangle\right) + \langle\, \nabla_\xi \Re a \,|\, \Re\xi \,\rangle + \\
&\quad + \langle\, i\nabla_\xi \Im a \,|\, \Re\xi \,\rangle - \langle\, x \,|\, \nabla_x \Re a \,\rangle \\
&=\; a - \langle\, \nabla_\xi a \,|\, \xi \,\rangle + \langle\, \nabla_\xi a \,|\, \Re\xi \,\rangle - \langle\, x \,|\, \Re\nabla_x a \,\rangle \\
&=\; a - \langle\, \nabla_\xi a \,|\, i\Im\xi \,\rangle - \langle\, i\Im x \,|\, \nabla_x a \,\rangle - \Re\langle\, \overline{x} \,|\, \nabla_x a \,\rangle
\end{aligned}$$

auf Ω. Die letzte Gleichung gilt wegen

$$\begin{aligned}
\langle\, x \,|\, \Re\nabla_x a \,\rangle \;&=\; \langle\, \Re x \,|\, \Re\nabla_x a \,\rangle + \langle\, \Im x \,|\, \Im\nabla_x a \,\rangle + \langle\, i\Im x \,|\, \Re\nabla_x a + i\Im\nabla_x a \,\rangle \\
&=\; \Re\langle\, \overline{x} \,|\, \nabla_x a \,\rangle + \langle\, i\Im x \,|\, \nabla_x a \,\rangle.
\end{aligned}$$

Indem wir den Imaginärteil bilden und $[\widehat{\mathscr{K}_a}, \Im] = 0$ verwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned}
-\widehat{\mathscr{K}_a}\,\mathfrak{S} \;&=\; -\Im\big(\widehat{\mathscr{K}_a}(s + \langle\, x \,|\, \Re\xi \,\rangle)\big) \;=\; \Im\big(a - \langle\, \nabla_\xi a \,|\, i\Im\xi \,\rangle - \langle\, i\Im x \,|\, \nabla_x a \,\rangle\big) \\
&=\; \Im a - \langle\, \Re\nabla_\rho a \,|\, \Im\rho \,\rangle
\end{aligned}$$

für $\rho = (x,\xi) \in \Omega$. Im nächsten Schritt führen wir eine Taylorentwicklung von a und $\nabla_\rho a$ um $\Re\rho$ durch. Dabei werden die antiholomorphen Ableitungen mittels $|\partial^\alpha_{(\Re\rho,\Im\rho)} \nabla_{\overline{\rho}} a_\pm(\rho)| \leqslant C_{N,K,\alpha}\,|\Im\rho|^N$ bzw. $\partial^\alpha_{(\Re\rho,\Im\rho)} \nabla_{\overline{\rho}} a(\Re\rho) = 0$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^{4d}$, was nach (3.3.3) gilt, behandelt. Es folgt

$$\begin{aligned}
\Im a - \langle\, \Re\nabla_\rho a \,|\, \Im\rho \,\rangle \;&=\; \Im a(\Re\rho) \;+ \langle\, \Re\nabla_\rho a(\Re\rho) \,|\, \Im\rho \,\rangle - \frac{1}{2}\,\langle\, \Im\rho \,|\, \Im a''_{\rho\rho}(\Re\rho)\,\Im\rho \,\rangle \\
&\quad - \langle\, \Re\nabla_\rho a(\Re\rho) \,|\, \Im\rho \,\rangle + \;\langle\, \Im\rho \,|\, \Im a''_{\rho\rho}(\Re\rho)\,\Im\rho \,\rangle + \mathcal{O}\big(|\Im\rho|^3\big) \\
&=\; \Im a(\Re\rho) \;+\; \frac{1}{2}\,\langle\, \Im\rho \,|\, \Im a''_{\rho\rho}(\Re\rho)\,\Im\rho \,\rangle + \mathcal{O}\big(|\Im\rho|^3\big).
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Außerdem liefert eine Taylorentwicklung von $a(\Re\rho \pm t\Im\rho)$ um $\Re\rho$ für $t > 0$ und die Verwendung von (3.3.3)

$$a(\Re\rho \pm t\Im\rho) = a(\Re\rho) \pm t\langle\, \nabla_\rho a(\Re\rho) \,|\, \Im\rho \,\rangle + \frac{t^2}{2}\langle\, \Im\rho \,|\, a''_{\rho\rho}(\Re\rho)\Im\rho \,\rangle + t^3\mathcal{O}\big(|\Im\rho|^3\big).$$

Damit schließen wir auf

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t^2}\,\Im a(\Re\rho) + \frac{1}{2}\,\langle\, \Im\rho \,|\, \Im a''_{\rho\rho}(\Re\rho)\,\Im\rho \,\rangle \\
&\quad= \frac{1}{2t^2}\,\big(\Im a(\Re\rho + t\Im\rho) + \Im a(\Re\rho - t\Im\rho)\big) + t\,\mathcal{O}\big(|\Im\rho|^3\big).
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

Die durch die Landau-Symbole in (3.3.10) und (3.3.11) gegebenen Konstanten lassen sich gleichmäßig wählen, sofern ρ eine kompakte Teilmenge von Ω durchläuft. Wenn wir $t = 2$ setzen und $\Im a \leqslant 0$ verwenden, gelangen wir zu der Ungleichung

$$\begin{aligned}-\widehat{\mathscr{K}_a}\,\mathfrak{S} \;&=\; \frac{3}{4}\,\Im a(\Re\rho) + \frac{1}{8}\big(\Im a(\Re\rho + t\Im\rho) + \Im a(\Re\rho - t\Im\rho)\big) + \;\mathcal{O}\big(|\Im\rho|^3\big)\\ &\leq\; \frac{3}{4}\,\Im a(\Re\rho) + \;\mathcal{O}\big(|\Im\rho|^3\big).\end{aligned}$$

□

Wir erinnern uns daran, daß die Hamiltonsche Matrix $\mathbb{F}_{a_\pm}$ von $a_\pm$ durch

$$\mathbb{F}_a\,\theta = \begin{pmatrix} a''_{\xi x} & a''_{\xi\xi} \\ -a''_{xx} & -a''_{x\xi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_x\\ \theta_\xi\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a''_{\xi\overline{x}} & a''_{\xi\overline{\xi}} \\ -a''_{x\overline{x}} & -a''_{x\overline{\xi}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\theta}_x\\ \overline{\theta}_\xi\end{pmatrix} \tag{3.3.12}$$

für $a \in \{a_+, a_-\}$ gegeben ist, indem wir uns auch an (3.3.7) entsinnen. Hierbei ist $\theta = (\theta_x, \theta_\xi) \in \mathbb{C}^{2d}$. Wir bemerken noch, daß die rechte Matrix auf dem reellen Bereich $\mathbb{R}^{2d} \subset \Omega$ verschwindet, da $\partial^\alpha_{(\Re\rho,\Im\rho)}\nabla_{\overline{\rho}}\,a(\Re\rho) = 0$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^{4d}$ nach (3.3.3) ist. Von nun an verwenden wir die Abkürzung $a''_{x\overline{\xi}} = \frac{1}{4}(d\Re\xi + id\Im\xi)(\nabla_{\Re x} - i\nabla_{\Im x})\,a$, usw. Durch $\mathscr{I} : \mathbb{C}^{2d} \to \mathbb{C}^{2d}$ sei die Multiplikation mit i notiert. Dann folgt aus (3.3.3), daß zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset \Omega$ und jedem $N \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^{4d}$ eine Konstante $C_{N,K,\alpha} \in (0,\infty)$ existiert, für die

$$\frac{1}{2}\,\big\|\,\partial^\alpha_{(\Re\rho,\Im\rho)}[\mathscr{I}, \mathbb{F}_a]\,\big\| = \left\|\partial^\alpha_{(\Re\rho,\Im\rho)}\begin{pmatrix} a''_{\xi\overline{x}} & a''_{\xi\overline{\xi}} \\ -a''_{x\overline{x}} & -a''_{x\overline{\xi}}\end{pmatrix}\right\| \leqslant C_{N,K,\alpha}\,|\Im\rho|^N \tag{3.3.13}$$

auf K gilt. Wiederum meinen wir mit a das Symbol a_+ oder a_-. Wir bezeichnen den Fluß von $\widehat{\mathscr{H}_{a_\pm}}$ mit $\kappa_t^\pm = (Q^\pm, \Xi^\pm) : \mathcal{D}(\kappa^\pm) \to \mathbb{C}^{2d}$. Dabei ist $\mathcal{D}(\kappa^\pm) = \{(t,y,\eta) \in \mathbb{R}\times\Omega : t \in J^\pm_{\max}(y,\eta)\}$, wobei $J^\pm_{\max}(y,\eta)$ das Existenzintervall für die maximale Lösung des $4d$-dimensionalen reellen Anfangswertproblems $\dot\rho = \widehat{\mathscr{H}_{a_\pm}}(\rho)$, $\rho(0) = (y,\eta)$ ist und

$$\partial_t\kappa^\pm = \partial_t\begin{pmatrix} Q^\pm \\ \Xi^\pm\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\nabla_\xi a_\pm(Q^\pm,\Xi^\pm)\\ -\nabla_x a_\pm(Q^\pm,\Xi^\pm)\end{pmatrix} \tag{3.3.14}$$

auf $\mathcal{D}(\kappa^\pm)$ ist. Der Fluß von $\widehat{\mathscr{K}_{a_\pm}}$ ist dann durch $(\varsigma^\pm, \kappa^\pm) : \mathbb{C}\times\mathcal{D}(\kappa^\pm) \to \mathbb{C}^{1+2d}$ gegeben, wobei $\varsigma^\pm$ durch

$$\varsigma^\pm(s,t,y,\eta) := \varsigma_t^\pm(s,y,\eta) := s - \int_0^t \mathscr{A}_\pm(\kappa_r^\pm(y,\eta))\,dr, \quad s \in \mathbb{C},\ (t,y,\eta) \in \mathcal{D}(\kappa^\pm),$$

definiert ist. Um das folgende Lemma formulieren zu können, erinnern wir uns daran, daß (X,P) in (3.2.22) eingeführt wurde und daß durch $I_{\max}(x,p)$ das Existenzintervall für die maximale Lösung des Anfangswertproblems $\dot\rho = (\nabla_p H(\rho), -\nabla_x H(\rho))$, $\rho(0) = (x,p)$ notiert wurde.

Lemma 3.3.2. *Sei $x_0 \in K_0$ und sei $I \subset I_{\max}(x_0, \nabla\varphi(x_0))$ ein Intervall derart, daß $X(t, x_0, \nabla\varphi(x_0)) \in K_0$ für jedes $t \in I$ gelte. Dann gelten $I \subset J^+_{\max}(x_0, 0)$ und*

$$Q^+(t, x_0, 0) \;=\; X\big(t, x_0, \nabla\varphi(x_0)\big), \quad \Xi^+(t, x_0, 0) \;=\; 0, \qquad t \in I.$$

Beweis. Aus (3.3.7) ergibt sich $\widehat{\mathscr{H}_{a_+}} = \nabla_\xi a_\pm \cdot \nabla_{\Re x} - \nabla_x a_\pm \nabla_{\Re\xi}$. Damit folgt wegen (3.2.34) und (3.2.37) $\widehat{\mathscr{H}_{a_+}} = \nabla_p H(x, \nabla\varphi) \cdot \nabla_{\Re x}$ auf $K_0 \times \{0\}$. Ferner gilt $\partial_t X_t(x_0, \nabla\varphi(x_0)) = \nabla_p H(\Phi_t(x_0, \nabla\varphi(x_0)))$ und $\Phi_t(x_0, \nabla\varphi(x_0)) = (X_t, \nabla\varphi(X_t))(x_0, \nabla\varphi(x_0))$ für $t \in I$ aufgrund von (3.2.27). □

Lemma 3.3.3. *Seien $\tau > 0$ und $\rho : [0, \tau] \to \mathbb{R}^{2d}$ eine reelle Integralkurve von $\widehat{\mathscr{H}_{a_+}}$, für die $\rho(0) \in K_0 \times \{0\} = \{\Im a_+ = 0\}$ gelte. Dann gilt $\rho([0, \tau]) \subset K_0 \times \{0\}$.*

Beweis. Zunächst stellen wir fest, daß $K_0 \times \{0\} = \{\Im a_+ = 0\}$ wegen (3.2.32) erfüllt ist. Nach Voraussetzung gelten $\frac{d}{dt}\rho(t) = (\nabla_\xi a_+, -\nabla_x a_+)(\rho(t))$ und $\Im\rho(t) = 0$, also auch $\Im(\nabla_\xi a_+, -\nabla_x a_+)(\rho(t)) = \frac{d}{dt}\Im\rho(t) = 0$. Da a_+ den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf dem reellen Bereich genügt, ergibt sich $(\Im a_+)'_{\Re\rho}(\rho(t)) = \Im(a_+)'_\rho(\rho(t)) = 0$. Demzufolge verschwindet die Ableitung von $(\Im a_+)\restriction_{\mathbb{R}^{2d}}$ entlang ρ. Damit folgt aus $\Im a_+(\rho(0)) = 0$, daß $\rho([0, \tau]) \subset \{\Im a_+ = 0\}$ gilt. Indem wir (3.2.32) verwenden, erhalten wir $\rho([0, \tau]) \subset K_0 \times \{0\}$. □

Im Folgenden untersuchen wir die Trajektorien von $\widehat{\mathscr{K}_{a_\pm}}$, die von den Ebenen

$$\mathfrak{L}_0(\eta) \;:=\; \big\{(-\psi_0(y, \eta), y, \nabla_y\psi_0(y, \eta)) \;:\; y \in \mathbb{C}^d\big\}$$

ausgehen. Dabei ist $\psi_0(y, \eta) = \langle\, \eta \,|\, y \,\rangle$ für $y \in \mathbb{C}^d$ und $\eta \in \mathbb{R}^d$, was $\nabla_y\psi_0(y, \eta) = \eta$ impliziert. Wir betrachten nun nur reelle η, da ψ_0 in diesem Fall der Ungleichung

$$\begin{aligned} \Im\psi_0(y, \eta) - \langle\, \Im y \,|\, \Re\nabla_y\psi_0(y, \eta) \,\rangle \;&=\; \langle\, \Im y \,|\, \eta \,\rangle - \langle\, \Im y \,|\, \eta \,\rangle \\ &\geqslant\; -\mathcal{O}\big(|\Im(y, \eta)|^3\big), \quad y \in \mathbb{C}^d, \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

genügt. Diese Ungleichung werden wir verwenden, um die in Lemma 3.3.4 angegebenen Abschätzungen zu zeigen. Der Beweis von Lemma 3.3.4 folgt dabei [27], wo jedoch zunächst Symbole betrachtet werden, die homogen vom Grad 1 sind. Er findet sich aber auch in Lemma 5.3 aus [8]. Lemma 3.3.4 wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels zur Kontrolle der Fehlerterme dienen.

Lemma 3.3.4. *Seien $y_0, \eta_0 \in \mathbb{R}^d$. Im Minus-Fall setzen wir $\tau = 0$. Im Plus-Fall wählen wir ein $\tau \in J^+_{\max}(y_0, \eta_0)$, $\tau \geqslant 0$. Falls $\tau > 0$ ist, nehmen wir an, daß $\kappa^+_t(y_0, \eta_0)$ für jedes $t \in [0, \tau]$* reell *ist und daß $\Im a_+(y_0, \eta_0) = 0$ ist. Dann existieren ein $\varepsilon > 0$, ein $C \in (0, \infty)$ und eine Umgebung $\mathscr{O} \subset \mathbb{C}^{1+2d}$ von $(-\psi_0(y_0, \eta_0), y_0, \eta_0)$, für die die Ungleichungen*

$$\mathfrak{S}(\varsigma^\pm_t, \kappa^\pm_t) \;\geqslant\; \frac{1}{2}\int_0^t -\Im a_\pm(\Re\kappa^\pm_u)\, du - C\, |\Im\kappa^\pm_t|^3, \tag{3.3.16}$$

$$|\Im\kappa^\pm_t|^2 + \mathfrak{S}(\varsigma^\pm_t, \kappa^\pm_t) \geqslant \frac{1}{C}\Big\{|\Im\kappa^\pm_r|^2 + \mathfrak{S}(\varsigma^\pm_r, \kappa^\pm_r) + \int_r^t -\Im a_\pm(\Re\kappa^\pm_u)\, du\Big\}, \tag{3.3.17}$$

$$|\Im\kappa^\pm_r|^2 \;\leqslant\; C\,\big(|\Im\kappa^\pm_t|^2 + \mathfrak{S}(\varsigma^\pm_t, \kappa^\pm_t)\big) \tag{3.3.18}$$

auf $\mathfrak{L}_0(\eta_0) \cap \mathscr{O}$ *für jedes* $0 \leqslant r \leqslant t \leqslant \tau + \varepsilon$ *und jedes* $h \in [0,1]$ *gelten. Die Konstanten* ε *und* C *lassen sich gleichmäßig wählen, sofern sich* η_0 *in einer kompakten Menge befindet.*

Insbesondere ist $\kappa_r^{\pm}(\rho)$ *für jedes* $r \in [0,t]$ *reell, wenn* $(s,\rho) \in \mathfrak{L}_0(\eta_0) \cap \mathscr{O}$ *ist und* $\kappa_t^{\pm}(\rho)$ *und* $\varsigma_t^{\pm}(s,\rho)$ *für ein* $t \in [0, \tau+\varepsilon]$ *reell sind.*

Beweis. Um die Notation zu vereinfachen, werden wir in diesem Beweis auf alle $\pm$-Indizes verzichten. Indem wir [27, pp. 351] folgen, bilden wir den Imaginärteil von (3.3.14) und erhalten $\frac{d}{dt}\,\Im\kappa_t \;=\; \Im\widehat{\mathscr{H}_a}(\kappa_t)$. Nun führen wir an $\widehat{\mathscr{H}_a}(\kappa_t)$ eine Taylorentwicklung um $\Re\kappa_t$ durch und schließen so auf

$$\frac{d}{dt}\,\Im\kappa_t \;=\; \Re\big(d_\rho\widehat{\mathscr{H}_a}(\Re\kappa_t + iv(t)\Im\kappa_t)\big)\,\Im\kappa_t + \Im\widehat{\mathscr{H}_a}(\Re\kappa_t)$$

für eine Zwischenstelle $v(t)$. Die Matrix $A(t) := \Re\big(d_\rho\widehat{\mathscr{H}_a}(\Re\kappa_t + iv(t)\Im\kappa_t)\big)$ hängt in glatter Weise von t und auch von κ ab. Dann impliziert die Duhamelsche Formel

$$\Im\kappa_u \;=\; B_{u,t}\,\Im\kappa_t + \int_t^u B_{u,r}\,\Im\widehat{\mathscr{H}_a}(\Re\kappa_r)\,dr,$$

wobei $B_{s,t}$ als Lösung von $(\frac{d}{ds} - A(s))B_{s,t} = 0$, $B_{t,t} = \mathbb{1}$ gegeben ist. Unter Verwendung der Identifizierung (3.3.7) folgt die Abschätzung

$$|\Im\kappa_u| \;\leqslant\; \mathcal{O}(1)\left(|\Im\kappa_t| + \int_u^t |\Im a'(\Re\kappa_r)|\,dr\right). \tag{3.3.19}$$

Dies gilt für jedes ρ, das sich in einer kompakten, komplexen Umgebung von (y_0,η_0) befindet, und für jedes $u,t \in [0,\tau+\varepsilon_1]$ für ein $\varepsilon_1 > 0$. Denn die Kurven $[0,\tau+\varepsilon_1] \ni t \mapsto \Re\kappa_t(\rho)$ bewegen sich in einem Kompaktum, sofern ρ eine kompakte Menge durchläuft. Nun schätzen wir (3.3.19) weiter ab. Da nach Lemma 3.2.5 und Lemma 3.2.6 $-\Im a_\pm \geq 0$ gilt, läßt sich auf $-\Im a_\pm$ die Standardabschätzung für positive Funktionen anwenden. Ferner schließen wir mittels der Hölderschen Ungleichung auf

$$\begin{aligned}\int_u^t |\Im a'(\Re\kappa_v)|dv \;&\leq\; \mathcal{O}(1)\int_u^t \big(-\Im a(\Re\kappa_v)\big)^{1/2}dv\\ &\leq\; \mathcal{O}(1)\,(t-u)^{1/2}\left(\int_u^t -\Im a(\Re\kappa_v)dv\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich aus (3.3.19)

$$|\Im\kappa_r| \;\leqslant\; \mathcal{O}(1)\,\big(|\Im\kappa_t| + (I_u^t)^{1/2}\big), \qquad I_u^t(\rho) := \int_u^t -\Im a(\Re\kappa_v(\rho))\,dv, \tag{3.3.20}$$

wobei $0 \leqslant u \leqslant r \leqslant t \leqslant \tau+\varepsilon_1$ ist. Als nächstes erinnern wir uns daran, daß $\frac{d}{dt}\mathfrak{S}(\varsigma_t,\kappa_t) = \widehat{\mathscr{K}_a}(\mathfrak{S})(\varsigma_t,\kappa_t)$ gilt. Nun integrieren wir die Abschätzung (3.3.9) von u bis t und verwenden

(3.3.20) zur Abschätzung von $|\Im\kappa_r|$ für $r \in [u,t]$. So erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(\varsigma_t,\kappa_t) &\geqslant \mathfrak{S}(\varsigma_u,\kappa_u) + \frac{3}{4}\,I_u^t - \mathcal{O}(1)(t-u)|\Im\kappa_u|^3 \\ &\geqslant \mathfrak{S}(\varsigma_u,\kappa_u) + \frac{3}{4}\,I_u^t - \mathcal{O}(1)\,(t-u)\,\big(|\Im\kappa_t|^3 + (I_u^t)^{3/2}\big).\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Insbesondere ergibt sich für den Fall $u = 0$

$$\mathfrak{S}(\varsigma_t,\kappa_t) \;\geqslant\; \mathfrak{S}(\varsigma_0,\kappa_0) + \Big(\frac{3}{4} - t\,\mathcal{O}(1)\,(I_0^t)^{1/2}\Big)\,I_0^t - \mathcal{O}(1)\,t\,|\Im\kappa_t|^3.$$

Ferner stellen wir im Fall von $u = 0$ mit Hilfe von (3.3.20) fest, daß $|\Im\rho|^3 \leq O(1)\,\big(|\Im\kappa_t|^3 + (I_0^t)^{3/2}\big)$ gilt. Aufgrund von (3.3.15) folgt

$$\mathfrak{S}(\varsigma_0,\kappa_0) \geqslant -\mathcal{O}(1)\,|\Im\rho|^3 \geqslant -\mathcal{O}(1)\,\big(|\Im\kappa_t|^3 + (I_0^t)^{3/2}\big). \tag{3.3.22}$$

Falls im Plus-Fall $\tau > 0$ ist, verwenden wir die Voraussetzung $\Im a_+(y_0,\eta_0) = 0$ und Lemma 3.3.3, um auf $\Im a_+(\kappa_t^+(y_0,\eta_0)) = 0$ für $t \in [0,\tau]$ zu schließen, was $I_u^t(y_0,\eta_0) = 0$ für $0 \leqslant u \leqslant t \leqslant \tau$ impliziert. Nun wenden wir uns wieder dem allgemeinen Fall zu. Indem wir annehmen, daß ρ in einer hinreichend kleinen Umgebung von (y_0,η_0) enthalten ist und daß $\varepsilon_1 > 0$ hinreichend klein ist, lassen sich die Integrale $I_u^t(\rho)$ für $0 \leqslant u \leqslant t \leqslant \tau + \varepsilon_1$ beliebig klein wählen. Daraus ergibt sich insbesondere $\frac{3}{4} - \mathcal{O}(1)(I_0^t)^{1/2} \geq \frac{1}{2}$ bzw. $\frac{3}{4} - \mathcal{O}(1)(t-u)(I_u^t)^{1/2} \geq \frac{1}{2}$. Aus (3.3.21) und (3.3.22) folgen nun (3.3.16) und die Abschätzung

$$\mathfrak{S}(\varsigma_t,\kappa_t) \geqslant \mathfrak{S}(\varsigma_u,\kappa_u) + \frac{1}{2}\,I_u^t - \mathcal{O}(1)\,(t-u)\,|\Im\kappa_t|^3, \tag{3.3.23}$$

für $0 \leqslant u \leqslant t \leqslant \tau + \varepsilon_1$.

Wenn wir nun (3.3.20) für $r = u$ quadrieren und durch eine geeignete Konstante dividieren, erhalten wir $\frac{2}{C}|\Im\kappa_u|^2 \leq \frac{1}{4}\big(|\Im\kappa_t|^2 + I_u^t\big)$. Dabei setzen wir voraus, daß die Konstante $C \geqslant 4$ genügt. Falls wir dies dann zu (3.3.23) addieren, erhalten wir

$$\mathfrak{S}(\varsigma_t,\kappa_t) + \frac{1}{4}|\Im\kappa_t|^2 \geqslant \mathfrak{S}(\varsigma_u,\kappa_u) + \frac{2}{C}|\Im\kappa_u|^2 + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Big)\,I_u^t - \mathcal{O}(1)(t-u)|\Im\kappa_t|^3.$$

Wenn wir nun die Umgebung von (y_0,η_0) weiter einschränken, können wir annehmen, daß $\max_{t\in[0,\tau+\varepsilon_1]}|\Im\kappa_t|$ so klein ist, daß $\mathcal{O}(1)(t-u)|\Im\kappa_t| \leq \frac{3}{4}$ gilt. Aus der vorangegangenen Abschätzung folgern wir, daß sich

$$\mathfrak{S}(\varsigma_t,\kappa_t) + |\Im\kappa_t|^2 \geqslant \mathfrak{S}(\varsigma_u,\kappa_u) + \frac{2}{C}\,|\Im\kappa_u|^2 + \frac{1}{4}\,I_u^t \tag{3.3.24}$$

für $0 \leqslant u \leqslant t \leqslant \tau + \varepsilon_1$ ergibt. Da (3.3.16) gilt und da das Integral aufgrund von $-\Im a_\pm \geq 0$ nichtnegativ ist, können wir die Umgebung von (y_0,η_0) derart einschränken, daß $|\Im\kappa_u(\rho)|$ so klein ist, daß

$$\Big(1 - \frac{1}{C}\Big)\mathfrak{S}(\varsigma_u,\kappa_u) + \frac{1}{C}|\Im\kappa_u|^2 \geqslant \Big(1 - \frac{1}{C}\Big)\Big(\mathfrak{S}(\varsigma_u,\kappa_u) + \mathcal{O}(1)|\Im\kappa_u|^3\Big) \geq 0$$

für jedes $u \in [0, \tau + \varepsilon_1]$ gilt. Dann ziehen wir den letzten Term von der rechten Seite von (3.3.24) ab und verwenden $C \geqslant 4$, um schließlich

$$\big(\mathfrak{S}(\varsigma_t, \kappa_t) + |\Im \kappa_t|^2\big) \geqslant \frac{1}{C}\,\big(\mathfrak{S}(\varsigma_u, \kappa_u) + |\Im \kappa_u|^2\big) + \frac{1}{C}\,I_u^t$$

zu erhalten, was (3.3.17) ist.

Nun ist noch (3.3.18) zu zeigen. Wir schränken nun die Umgebung von (y_0, η_0) derart ein, daß $|\Im \kappa_u(\rho)|$ so klein ist, daß $C|\Im \kappa_r| \leq \frac{1}{2}$ gilt. Dann schließen wir aus (3.3.16) auf $\frac{1}{C}(\mathfrak{S}(\varsigma_r, \kappa_r) + \frac{1}{2}\,|\Im \kappa_r|^2) \geqslant 0$. Diese Ungleichung ziehen wir von der rechten Seite von (3.3.17) ab und erhalten

$$|\Im \kappa_t|^2 + \mathfrak{S}(\zeta_t, \kappa_t) \;\geq\; \frac{1}{2C}\,|\Im \kappa_r|^2 + I_r^t \;\geq\; \frac{1}{2C}\,|\Im \kappa_r|^2$$

für $0 \leq r \leq t$, da das Integral I_r^t nichtnegativ ist.

Um den letzten Teil der Behauptung zu beweisen, betrachten wir $(s, \rho) \in \mathfrak{L}_0(\eta_0) \cap \mathscr{O}$ und nehmen an, daß $\kappa_t^\pm(\rho)$ und $\varsigma_t^\pm(s, \rho)$ für ein $t \in [0, \tau + \varepsilon]$ reell sind. Mittels (3.3.18) ergibt sich dann $|\Im \kappa_r|^2 \leq C\,\mathfrak{S}(\zeta_t, \kappa_t) = 0$ für $0 \leq r \leq t$. Also ist $\kappa_r^\pm(\rho)$ für alle $r \in [0, t]$ reell. □

Das nun folgende Korollar wird noch im weiteren Verlauf dieses Kapitels Verwendung finden. Der Beweis der Abschätzungen, die dieses Korollar an die antiholomorphen Ableitungen liefert, stellt eine Alternative zu den aus [8, 27] bekannten Beweisen dar.

Korollar 3.3.5. *Seien (y_0, η_0), τ und ε so wie in Lemma 3.3.4, setze $T := \tau + \varepsilon$ und sei $K \subset \mathbb{C}^{2d}$ eine hinreichend kleine kompakte Umgebung von (y_0, η_0). Dann existieren für jedes $N \in \mathbb{N}$ und jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^{4d+1}$ und $\beta \in \mathbb{N}_0^{3d+1}$ Konstanten $C_{N,K,T,\alpha}, C'_{N,K,T,\beta} \in (0, \infty)$, für die*

$$\big\|\partial^\alpha_{(t,\Re\rho,\Im\rho)} d_{\overline{\rho}} \kappa_t^\pm(\rho)\big\| \leqslant C_{N,K,T,\alpha} \sup_{s\in[0,t]} |\Im \kappa_s^\pm(\rho)|^N, \quad \rho \in K,\ t \in [0, T], \tag{3.3.25}$$

und für $(y, \eta) \in K \cap (\mathbb{C}^d \times \mathbb{R}^d)$ und $t \in [0, T]$

$$\big\|\partial^\beta_{(t,\Re y,\Im y,\Re\eta)} d_{(\overline{y},\overline{\eta})} \kappa_t^\pm(y, \eta)\big\| \leqslant C'_{N,K,T,\beta}\big(|\Im \kappa_t^\pm(y, \eta)|^2 + \mathfrak{S}(\varsigma_t^\pm, \kappa_t^\pm)(y, \eta)\big)^N \tag{3.3.26}$$

gelten.

Beweis. Zur Vereinfachung der Notation verzichten wir in diesem Beweis auf alle $\pm$-Indizes. Sei durch $\mathscr{I}$ die Multiplikation mit i notiert. Dann schließen wir auf

$$\big\|\partial^\alpha_{(t,\Re\rho,\Im\rho)} d_{\overline{\rho}} \kappa_t(\rho)\big\| = \frac{1}{2}\,\big\|\,[\,\mathscr{I}, \partial^\alpha_{(t,\Re\rho,\Im\rho)} \kappa'_t(\rho)\,]\big\|, \quad \rho \in K. \tag{3.3.27}$$

Ferner erhalten wir unter Verwendung von (3.3.14), daß $\kappa_t'(\rho)$, $\rho \in K$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,\kappa_t'(\rho) \;&=\; \frac{\partial}{\partial\kappa}\begin{pmatrix}\nabla_\xi a(\kappa(\rho))\\ -\nabla_x a(\kappa(\rho))\end{pmatrix}\kappa_t'(\rho) + \frac{\partial}{\partial\overline{\kappa}}\begin{pmatrix}\nabla_\xi a(\kappa(\rho))\\ -\nabla_x a(\kappa(\rho))\end{pmatrix}\overline{\kappa_t'(\rho)}\\
&= \begin{pmatrix} a''_{\xi x}(\kappa(\rho)) & a''_{\xi\xi}(\kappa(\rho))\\ -a''_{xx}(\kappa(\rho)) & -a''_{x\xi}(\kappa(\rho))\end{pmatrix}\kappa_t'(\rho)\\
&\quad + \begin{pmatrix} a''_{\xi\overline{x}}(\kappa(\rho)) & a''_{\xi\overline{\xi}}(\kappa(\rho))\\ -a''_{x\overline{x}}(\kappa(\rho)) & -a''_{x\overline{\xi}}(\kappa(\rho))\end{pmatrix}\overline{\kappa_t'(\rho)} \;=\; \mathbb{F}_a(\kappa_t(\rho))\,\kappa_t'(\rho)
\end{aligned}$$

für $t \in [0,T]$ genügt, daß $\kappa_s'(\kappa_t'(\rho)) = \kappa_{t+s}'(\rho)$ für $t, t+s \in [0,T]$ und $\kappa_0'(\rho) = \mathbb{1}$ gelten. Insbesondere ergibt sich $[\mathscr{I},\, \kappa_0'(\rho)] = 0$. Da beliebige A, B, C die Kommutatorrelation $[A, BC] = B[A,C] + [A,B]C$ erfüllen, folgt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,[\mathscr{I}, \kappa_t'(\rho)] \;&=\; \big[\mathscr{I},\, \mathbb{F}_a(\kappa_t(\rho))\,\kappa_t'(\rho)\big]\\
&= \mathbb{F}_a(\kappa_t(\rho))\,[\mathscr{I}, \kappa_t'(\rho)] \,+\, [\mathscr{I}, \mathbb{F}_a(\kappa_t(\rho))]\,\kappa_t'(\rho), \qquad t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Weil die Anfangsbedingung der Gleichung $[\mathscr{I}, \kappa_0'(\rho)] = 0$ genügt und κ_t' die homogene Differentialgleichung $\frac{d}{dt}\kappa_t'(\rho) = \mathbb{F}_a(\kappa_t(\rho))\,\kappa_t'(\rho)$ löst, liefert die Duhamelsche Formel

$$[\mathscr{I}, \kappa_t'(\rho)] \;=\; \int_0^t \kappa_{t-s}'(\rho)\,[\mathscr{I}, \mathbb{F}_a(\kappa_s(\rho))]\,\kappa_s'(\rho)\,ds, \qquad t \in [0,T],\; \rho \in K.$$

Indem wir $\sup_{t\in[0,T]} \sup_{\rho\in K} \|\kappa_t'(\rho)\| < \infty$ und $[\mathscr{I}, \mathbb{F}_a(\kappa_s(\rho))] = \mathcal{O}\big(|\Im\kappa_s(\rho)|^N\big)$, $N \in \mathbb{N}$, was nach (3.3.13) gilt, verwenden, folgern wir, daß die Abschätzung

$$\big\|[\mathscr{I}, \partial^\alpha_{(\Re\rho,\Im\rho)}\kappa_t'(\rho)]\big\| \leqslant C'_{K,N,T,\alpha} \sup_{s\in[0,T]} |\Im\kappa_s(\rho)|^N, \qquad \rho \in K, \tag{3.3.28}$$

für eine Konstante $C'_{K,N,T,\alpha} \in (0,\infty)$ im Fall von $\alpha = 0$ erfüllt ist. Nehmen wir nun an, daß (3.3.28) für jeden Multiindex der Länge $\leqslant n \in \mathbb{N}_0$ gelte und $|\alpha| = n+1$ sei. Dann berechnen wir

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,[\mathscr{I}, \partial^\alpha_{(\Re\rho,\Im\rho)}\kappa_t'] &= [\mathscr{I}\,, \partial^\alpha_{(\Re\rho,\Im\rho)}(\mathbb{F}_a(\kappa_t)\,\kappa_t')\,]\\
&= [\mathscr{I}, \mathbb{F}_a(\kappa_t)\,\partial^\alpha_{(\Re\rho,\Im\rho)}\kappa_t'\,]\\
&\quad + \sum_{0<\beta\leqslant\alpha}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}[\mathscr{I}, \partial^\beta_{(\Re\rho,\Im\rho)}\mathbb{F}_a(\kappa_t)\partial^{\alpha-\beta}_{(\Re\rho,\Im\rho)}\kappa_t']\\
&= \mathbb{F}_a(\kappa_t)\,[\mathscr{I}, \partial^\alpha_{(\Re\rho,\Im\rho)}\kappa_t'] + [\mathscr{I}, \mathbb{F}_a(\kappa_t)]\,\partial^\alpha_{(\Re\rho,\Im\rho)}\kappa_t'\\
&\quad + \sum_{0<\beta\leqslant\alpha}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\big\{[\mathscr{I}, \partial^\beta_{(\Re\rho,\Im\rho)}\mathbb{F}_a(\kappa_t)]\,\partial^{\alpha-\beta}_{(\Re\rho,\Im\rho)}\kappa_t'\\
&\quad + \partial^\beta_{(\Re\rho,\Im\rho)}\mathbb{F}_a(\kappa_t)\,[\mathscr{I}, \partial^{\alpha-\beta}_{(\Re\rho,\Im\rho)}\kappa_t']\big\}.
\end{aligned} \tag{3.3.29}$$

Wenn wir darauf die Duhamelsche Formel anwenden, erhalten wir unter Verwendung von $\partial^\alpha_{(\Re\rho,\Im\rho)}\kappa'_0(\rho) = 0$, was $[\mathscr{I}, \partial^\alpha_{(\Re\rho,\Im\rho)}\kappa'_0] = 0$ impliziert,

$$\begin{aligned}[\mathscr{I}, \partial^\alpha_{(\Re\rho,\Im\rho)}\kappa'_t] \; = \; \int_0^t \kappa'_{t-s}(\rho)\Big\{ & [\mathscr{I}, \mathbb{F}_a(\kappa_s)]\, \partial^\alpha_{(\Re\rho,\Im\rho)}\kappa'_s \\ & + \sum_{0<\beta\leqslant\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Big([\mathscr{I}, \partial^\beta_{(\Re\rho,\Im\rho)}\mathbb{F}_a(\kappa_s)]\, \partial^{\alpha-\beta}_{(\Re\rho,\Im\rho)}\kappa'_s \\ & + \partial^\beta_{(\Re\rho,\Im\rho)}\mathbb{F}_a(\kappa_s)\, [\mathscr{I}, \partial^{\alpha-\beta}_{(\Re\rho,\Im\rho)}\kappa'_s] \Big) \Big\} ds.\end{aligned}$$

Da wir wissen, daß nach (3.3.13) $\sup_{t\in[0,T]}\sup_{\rho\in K} \|\partial^{\alpha-\beta}_{(\Re\rho,\Im\rho)}\kappa'_t(\rho)\| < \infty$ für $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$ und $\|\,[\mathscr{I}, \partial^\beta_{(\Re\rho,\Im\rho)}\mathbb{F}_a(\kappa_t)]\,\| = \mathcal{O}\big(|\Im\kappa_t(\rho)|^N\big)$ gelten und daß für $0 < \beta \leqslant \alpha$ nach Induktionsvoraussetzung $\|\,[\mathscr{I}, \partial^{\alpha-\beta}_{(\Re\rho,\Im\rho)}\kappa'_t]\,\| = \mathcal{O}\big(\sup_{s\in[0,T]} |\Im\kappa_s(\rho)|^N\big)$ erfüllt ist, folgt die Abschätzung

$$\big\|[\mathscr{I}, \partial^\alpha_{(\Re\rho,\Im\rho)}\kappa'_t(\rho)]\big\| \leqslant C''_{K,N,T,\alpha} \sup_{s\in[0,T]} |\Im\kappa_s(\rho)|^N, \qquad \rho \in K,$$

für ein $C''_{K,N,T,\alpha} \in (0,\infty)$ und für $\alpha \in \mathbb{N}_0^{4d}$, $|\alpha| = n+1$. Um auch noch die Zeitableitungen höherer Ordnung zu berücksichtigen, leiten wir (3.3.29) unter Verwendung der Abschätzung (3.3.29) nach der Zeitvariablen ab, die wir soeben für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^{4d}$ bewiesen haben. So schließen wir auf

$$\big\|[\mathscr{I}, \partial^\alpha_{(t,\Re\rho,\Im\rho)}\kappa'_t(\rho)]\big\| \leqslant C'''_{K,N,T,\alpha} \sup_{s\in[0,T]} |\Im\kappa_s(\rho)|^N, \qquad \rho \in K, \tag{3.3.30}$$

was für eine Konstante $C'''_{K,N,T,\alpha} \in (0,\infty)$ und für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^{4d+1}$ gilt. Indem wir uns daran erinnern, daß wir (3.3.27) bereits gezeigt haben, folgt aus (3.3.30) die erste Abschätzung der Behauptung (3.3.25). Die zweite Abschätzung der Behauptung (3.3.26) folgt aus (3.3.25) mit Hilfe von (3.3.18). □

3.3.2 Näherungslösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung

Das Ziel dieses Unterabschnittes ist es eine Lösung der komplexwertigen Hamilton-Jacobi-Gleichung (3.3.1)&(3.3.2) anzugeben. Da die Symbole $a_\pm$ komplexwertig sind, wird die Hamilton-Jacobi-Gleichung nicht exakt lösbar sein. Durch eine aus der klassischen Mechanik bekannten Methode werden wir diese Näherungslösung erhalten, die dann im wesentlichen als gewisse erzeugende Funktion der kanonischen Relationen gegeben sein wird. Wir werden den Konstruktionen aus [6, 8, 27] folgen. Dabei werden wir anders als in [27], aber ebenso wie in [6, 8] stets beliebige Symbole und nicht Symbole, die homogen vom Grad 1 sind, betrachten.

Wir nehmen an, daß das Potential V die Voraussetzung 3.1.1 erfüllt und daß die Punkte $x_\star$ und $y_\star$ der Voraussetzung 3.2.3 genügen. φ ist die Funktion, die durch Proposition 3.2.1 im Fall von $d = 1$ gegeben ist bzw. durch Proposition 3.2.4, falls $d \geqslant 2$ ist.

Wir beginnen mit der Einführung impliziter Funktionen, die der Eigenschaft genügen, daß sich die kanonischen Relationen als Graph dieser Funktionen darstellen lassen. Dazu erinnern wir uns zunächst an die aus (3.3.14) bekannte Notation und wir definieren

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathscr{D}}^+ &:= \big\{ (t,y,0) \in \mathbb{R}_0^+ \times K_0 \times \{0\} \;:\; Q_{t'}^+(y,0) \in K_0,\ t' \in [0,t] \big\},\\
\mathscr{D}^+ &:= \big\{ (t,x,0) \in \mathbb{R}_0^+ \times K_0 \times \{0\} \;:\; Q_{-t'}^+(x,0) \in K_0,\ t' \in [0,t] \big\},\\
\widetilde{\mathscr{E}}^+ &:= (\{0\} \times \mathbb{R}^{2d}) \cup \widetilde{\mathscr{D}}^+, \qquad \mathscr{E}^+ := (\{0\} \times \mathbb{R}^{2d}) \cup \mathscr{D}^+,\\
\mathscr{F}^+ &:= \big\{ (t, Q_t^+(y,0), 0, y, 0) \;:\; (t,y,0) \in \widetilde{\mathscr{D}}^+ \big\} \cup \big\{ (0,x,\eta,x,\eta) \;:\; x,\eta \in \mathbb{R}^d \big\}.
\end{aligned}$$

Wir können $\mathscr{F}^+$ als Graph der Funktion $(k^+, g^+) : \mathscr{E}^+ \to \mathbb{R}^{2d}$ darstellen, wenn wir

$$k^+(t,x,0) := Q^+(-t,x,0), \quad (t,x,0) \in \mathscr{D}^+, \tag{3.3.31}$$

$$k^+(0,x,\eta) := x, \qquad (x,\eta) \in \mathbb{R}^{2d}, \tag{3.3.32}$$

und

$$g^+(t,x,0) := 0, \;\; (t,x,0) \in \mathscr{D}^+, \qquad g^+(0,x,\eta) := \eta, \;\; (x,\eta) \in \mathbb{R}^{2d}, \tag{3.3.33}$$

setzen. Nach Lemma 3.3.2 gilt für $(t,x,0) \in \mathscr{D}^+$

$$k^+(t,x,0) \;=\; Q^+(-t,x,0) \;=\; X(-t,x,\nabla\varphi(x)). \tag{3.3.34}$$

Im Minus-Fall definieren wir

$$\widetilde{\mathscr{E}}^- := \mathscr{E}^- := \{0\} \times \mathbb{R}^{2d}, \quad \mathscr{F}^- := \big\{(0,x,\eta,x,\eta) \;:\; x,\eta \in \mathbb{R}^d\big\}.$$

Dann ist $\mathscr{F}^-$ der Graph von $(k^-, g^-) : \mathscr{E}^- \to \mathbb{R}^{2d}$, wobei

$$k^-(0,x,\eta) := x, \quad g^-(0,x,\eta) := \eta, \qquad (x,\eta) \in \mathbb{R}^{2d}, \tag{3.3.35}$$

ist. In dem nun folgenden Lemma beweisen wir, daß wir $k^\pm$ und $g^\pm$ zu glatten Funktionen fortsetzen können, die in einer Umgebung von $\mathscr{E}^\pm$ definiert sind. Ferner wird das nächste Lemma zeigen, daß sich die kanonischen Relationen

$$C_t^\pm \;:=\; \big\{(x,\xi,y,\eta) \in \mathbb{C}^{2d} \times \mathbb{C}^{2d} \,\big|\, (x,\xi) \;=\; \kappa_t^\pm(y,\eta)\big\}, \quad t \geq 0,$$

welche durch den Fluß von $\widehat{\mathscr{H}_{a_\pm}}$ gegeben sind, als Graph eben dieser Funktionen in einer Umgebung von $\mathscr{F}^\pm$ darstellen lassen. Der Beweis, der eine Alternative zu den aus [8, 27] bekannten Beweisen ist, ergibt sich mittels des Satzes über implizite Funktionen.

Lemma 3.3.6. *Es existieren offene Umgebungen $\mathscr{G}^\pm$ von $\overline{\mathscr{E}}^\pm$ in $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{C}^{2d}$ und $\mathscr{H}^\pm$ von $\overline{\mathscr{F}}^\pm$ in $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{C}^{2d} \times \Omega$ und Funktionen $k^\pm, g^\pm \in C^\infty(\mathscr{G}^\pm, \mathbb{C}^d)$, für die für jedes $(t,x,\xi,y,\eta) \in \mathscr{H}^\pm$ die Äquivalenz*

$$(x,\xi) = \big(Q_t^\pm(y,\eta), \Xi_t^\pm(y,\eta)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(\, y = k^\pm(t,x,\eta) \;\wedge\; \xi = g^\pm(t,x,\eta) \,\big)$$

gilt.

Beweis. Wir betrachten

$$F^{\pm}(t,x,\xi,y,\eta) \;:=\; \big(x - Q^{\pm}(t,y,\eta),\, \xi - \Xi^{\pm}(t,y,\eta)\big) \tag{3.3.36}$$

für alle $(x,\xi,t,y,\eta) \in \mathbb{C}^{2d} \times \mathcal{D}(\kappa^{\pm})$. Wir wollen darauf den Satz über implizite Funktionen anwenden. Wir fassen nun $F^{\pm}$ als eine $\mathbb{R}^{4d}$-wertige Funktion in $8d+1$ reellen Variablen auf. Für $t=0$ gilt $F^{\pm}(0,x,\xi,y,\eta) = (x-y, \xi-\eta)$ und offensichtlich ist

$$(F^{\pm})'_{(\Re\xi,\Im\xi,\Re y,\Im y)}\big|_{t=0} : \mathbb{R}^{4d} \to \mathbb{R}^{4d}, \quad (F^{\pm})'_{(\Re\xi,\Im\xi,\Re y,\Im y)}\big|_{t=0} \;=\; \begin{pmatrix} 0_{2d} & -\mathbb{1}_{2d} \\ \mathbb{1}_{2d} & 0_{2d} \end{pmatrix}$$

invertierbar. Das beweist die Behauptung im Minus-Fall. Im Plus-Fall erhalten wir für beliebiges $(x,\xi,t,y,\eta) \in \mathbb{C}^{2d} \times \mathcal{D}(\kappa^{+})$

$$(F^{+})'_{(\Re\xi,\Im\xi,\Re y,\Im y)}(t,x,\xi,y,\eta) \;=\; \begin{pmatrix} 0_{2d} & -(Q^{+})'_{(\Re y,\Im y)} \\ \mathbb{1}_{2d} & -(\Xi^{+})'_{(\Re y,\Im y)} \end{pmatrix} (t,y,\eta).$$

Wir erinnern uns daran, daß $Q^{+}(t,y,0) = X(t,y,\nabla\varphi(y))$ für $(t,y,0) \in \widetilde{\mathscr{D}}^{+}$ nach Lemma 3.3.2 gilt. Dabei verwenden wir die Notation, die vor der Formel (3.2.22) eingeführt wurde. Wir schließen auf $(\Im Q^{+})'_{\Im y}(t,y,0) = (\Re Q^{+})'_{\Re y}(t,y,0) = d_y[X(t,y,\nabla\varphi(y))]$ und $(\Re Q^{+})'_{\Im y}(t,y,0) = -(\Im Q^{+})'_{\Re y}(t,y,0) = 0$ für $(t,y,0) \in \widetilde{\mathscr{D}}^{+}$ infolge von (3.3.28). Ebenfalls erhalten wir $\Xi^{+}(t,y,0) = 0$ und folglich $(\Xi^{+})'_{(\Re y,\Im y)}(t,y,0) = 0$ für $(t,y,0) \in \widetilde{\mathscr{D}}^{+}$. Das impliziert, daß

$$(F^{+})'_{(\Re\xi,\Im\xi,\Re y,\Im y)}(t,Q^{+}(t,y,0),0,y,0) = \begin{pmatrix} 0_{2d} & -d_y[X(t,y,\nabla\varphi(y))] \otimes \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_{2d} & 0_{2d} \end{pmatrix}$$

für jedes $(t,y,0) \in \widetilde{\mathscr{D}}^{+}$ gilt. Ferner ist die Matrix $d_y[X(t,y,\nabla\varphi(y))]$ invertierbar, da sie die Fundamentalmatrix einer gewissen matrixwertigen gewöhnlichen Differentialgleichung zum Zeitpunkt Null ist. Denn es ist $X(0,y,\nabla\varphi(y)) = Q^{+}(0,y,0) = y$, folglich $d_y[X(0,y,\nabla\varphi(y))] = \mathbb{1}$ und damit auch

$$\begin{aligned} \partial_t d_y[X(t,y,\nabla\varphi(y))] \;&=\; d_y \nabla_p H(x,\nabla\varphi(x))\big|_{x=X(t,y,\nabla\varphi(y))} \\ &=\; \mathbb{B}(t,y)\, d_y[X(t,y,\nabla\varphi(y))] \end{aligned}$$

für jedes $(t,y,0) \in \widetilde{\mathscr{D}}^{+}$ erfüllt, wobei

$$\mathbb{B}(t,y) := \big(H''_{px}\big(x,\nabla\varphi(x)\big) + H''_{pp}\big(x,\nabla\varphi(x)\big)\,\varphi''(x)\big)\big|_{x=X(t,y,\nabla\varphi(y))} \tag{3.3.37}$$

ist. Mit $d_y[X(t,y,\nabla\varphi(y))]$ ist auch $(F^{+})'_{(\Re\xi,\Im\xi,\Re y,\Im y)}$ invertierbar. Da $\mathscr{F}^{+}$ sich global als Graph darstellen läßt, schließen wir mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, daß Funktionen k^{+} und g^{+} mit den in der Behauptung gewünschten Eigenschaften existieren und daß diese Funktionen eindeutig sind, sofern die Umgebung von $\mathscr{G}^{+}$ hinreichend klein gewählt ist. $\square$

Im Folgenden werden wir zeigen, daß eine Lösung von (3.3.1) durch die aus der klassischen Mechanik bekannte Formel

$$\begin{aligned}\psi_\pm(t,x,\eta) &:= (Z_\pm \circ K_\pm)(t,x,\eta)\\ &= \langle\, k^\pm(t,x,\eta)\,|\,\eta\,\rangle + \int_0^t \mathscr{A}_\pm\big(\kappa_r^\pm(k^\pm(t,x,\eta),\eta)\big)\,dr \end{aligned}\tag{3.3.38}$$

für $(t,x,\eta)\in\mathscr{G}^\pm$ gegeben ist, wobei

$$Z_\pm(t,y,\eta) \;:=\; -\varsigma_t^\pm(-\langle\, y\,|\,\eta\,\rangle, y,\eta) \;=\; \langle\, y\,|\,\eta\,\rangle + \int_0^t \mathscr{A}_\pm(\kappa_r^\pm(y,\eta))\,dr$$

für $(t,y,\eta)\in\mathcal{D}(\kappa^\pm)$ ist und

$$K_\pm(t,x,\eta) \;:=\; \big(t,k^\pm(t,x,\eta),\eta\big), \qquad (t,x,\eta)\in\mathscr{G}^\pm, \tag{3.3.39}$$

ist. Offensichtlich gilt $\psi_\pm(0,x,\eta) = \langle\, x\,|\,\eta\,\rangle$ nach (3.3.32) und (3.3.35). Um nun zu beweisen, daß das soeben definierte $\psi_\pm$ die Hamilton-Jacobi-Gleichung (3.3.1) löst, führen wir die Gewichte

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}_\pm &:= |\Im\kappa^\pm|^2 + \mathfrak{S}(-Z_\pm,\kappa^\pm), \quad \text{auf } \mathcal{D}(\kappa^\pm),\\ \Gamma_\pm &:= \widetilde{\Gamma}_\pm\circ K_\pm \;=\; |\Im(x,g^\pm)|^2 - \langle\, \Im x\,|\,\Re g^\pm\,\rangle + \Im\psi_\pm, \quad \text{auf } \mathscr{G}^\pm,\end{aligned}$$

ein. Diese werden zur Kontrolle der Fehlerterme dienen. In der Definition dieser Gewichte wurde verwandt, daß $\kappa_t^\pm(k^\pm(t,x,\eta),\eta) = (x,g^\pm(t,x,\eta))$ für jedes $(t,x,\eta)\in\mathscr{G}^\pm$ ist.

Der Beweis des nächsten Lemmas folgt [27] und findet sich auch in Lemma 5.7 aus [8].

Lemma 3.3.7. *Es gibt eine offene Umgebung $\widetilde{\mathscr{N}_\pm}\subset\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{C}^d\times\mathbb{R}^d$ vom Abschluß von $\widetilde{\mathscr{E}}^\pm$ derart, daß zu jeder kompakten Teilmenge $K\subset\widetilde{\mathscr{N}_\pm}$ eine Konstante $C_K\in(0,\infty)$ existiert, für die für jedes $(t,y,\eta)\in K$ und $r\in[0,t]$*

$$\begin{aligned}\Im Z_\pm(t,y,\eta) &\geqslant \langle\, \Im Q^\pm\,|\,\Re\Xi^\pm\,\rangle(t,y,\eta) - \frac{1}{2}\int_0^t \Im a_\pm(\Re\kappa_s(y,\eta))\,ds\\ &\quad - C_K\,\big|\Im(Q^\pm,\Xi^\pm)(t,y,\eta)\big|^3, \end{aligned}\tag{3.3.40}$$

$$\frac{1}{2}\,\big|\Im(Q^\pm,\Xi^\pm)(r,y,\eta)\big|^2 \leqslant \widetilde{\Gamma}_\pm(r,y,\eta) \leqslant C_K\,\widetilde{\Gamma}_\pm(t,y,\eta) \tag{3.3.41}$$

gelten.

Beweis. Zuerst prüfen wir die Voraussetzungen von Lemma 3.3.4. Wir erinnern uns daran, daß für jedes $\eta_0\in\mathbb{R}^d$ die in Lemma 3.3.4 auftretende Konstante C gleichmäßig gewählt werden kann, sofern η_0 sich in einer kompakten Menge befindet. Im Minus-Fall setzen wir stets $\tau = 0$. Im Plus-Fall wählen wir $\tau = 0$, falls $(y_0,\eta_0)\notin K_0\times\{0\}$ ist. Falls jedoch $\eta_0 = 0$ und $y_0\in K_0$ sind, definieren wir $\tau = \max\{t\geqslant 0 : X(r,y_0,\nabla\varphi(y_0))\in K_0,\ r\in[0,t]\}$. Dann sind alle Voraussetzungen von Lemma 3.3.4 erfüllt, da $\Im a_+(y_0,0) = 0$ und

$\Im\kappa_t(y_0, 0) = \Im(X(t, y_0, \nabla\varphi(y_0)), 0) = 0$ für $t \in [0, \tau]$ nach (3.2.32) bzw. Lemma 3.3.2 gelten. Im Folgenden verzichten wir auf sämtliche $\pm$-Indizes. Mittels Lemma 3.3.4 zeigen wir nun zunächst den ersten Teil der Behauptung (3.3.40). Aus (3.3.16) aus Lemma 3.3.4 folgt für $(t, y, \eta) \in K$

$$\begin{aligned} \Im Z(t,y,\eta) - \langle\, \Im Q \,|\, \Re\Xi \,\rangle(t,y,\eta) \;&=\; \mathfrak{S}(-Z, Q, \Xi)(t,y,\eta) \\ &\geqslant\; \frac{1}{2}\int_0^t -\Im a(\Re\kappa_s(y,\eta))\,ds \\ &\quad\; - \mathcal{O}(1)\left|\Im(Q,\Xi)(t,y,\eta)\right|^3. \end{aligned}$$

Wiederum unter Verwendung von (3.3.16) und da $-\Im a \geq 0$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}(r,y,\eta) - \left|\Im(Q,\Xi)(r,y,\eta)\right|^2 \;&=\; \mathfrak{S}(-Z, Q, \Xi)(r,y,\eta) \\ &\geq\; -\mathcal{O}(1)\left|\Im(Q,\Xi)(r,y,\eta)\right|^3. \end{aligned}$$

Wenn wir nur eine hinreichend kleine Umgebung von $\widetilde{\mathscr{E}}$ betrachten, in der $\left|\Im(Q,\Xi)(r,y,\eta)\right|$ verschwindet, können wir annehmen, daß $\left|\Im(Q,\Xi)(r,y,\eta)\right|$ so klein wie gewünscht ist. So ergibt sich die erste Ungleichung in (3.3.41). Schließlich folgern wir aus (3.3.17) von Lemma 3.3.4

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}(t,y,\eta) \;\geq\; \frac{1}{C}\Big\{ &\left|\Im(Q,\Xi)(r,y,\eta)\right|^2 + \mathfrak{S}(-Z,Q,\Xi)(r,y,\eta) \\ &+ \int_r^t -\Im a(\Re\kappa_u(y,\eta))du \Big\} \;\geq\; \frac{1}{C}\,\widetilde{\Gamma}(r,y,\eta). \end{aligned}$$

□

Nun wollen wir Abschätzungen der Ableitungen der impliziten Funktionen $k^\pm$ und $g^\pm$ bestimmen. Dazu definieren wir

$$\mathscr{N}_\pm := K_\pm^{-1}(\widetilde{\mathscr{N}_\pm}), \tag{3.3.42}$$

wobei $K_\pm$ durch (3.3.39) gegeben ist und $\widetilde{\mathscr{N}_\pm}$ in Lemma 3.3.7 derart eingeführt wurde, daß $\mathscr{N}_\pm \subset \mathscr{G}^\pm$ eine Umgebung von $\overline{\mathscr{E}}^\pm$ in $[0,\infty) \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{R}_d$ ist. Der Beweis des nun folgenden Lemmas stellt eine Alternative zu den aus [8, 27] bekannten Beweisen dar. Ferner werden die Abschätzungen der impliziten Funktionen, die dieses Lemma liefert, auch im nächsten Kapitel in Hinblick auf die Transportgleichungen Verwendung finden.

Lemma 3.3.8. *Seien $k^\pm, g^\pm \in C^\infty(\mathscr{G}^\pm, \mathbb{C}^d)$ die in Lemma 3.3.6 eingeführten impliziten Funktionen. Dann existiert zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset \mathscr{G}^\pm$ und jedem $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^{3d+1}$ eine Konstante $C_{N,K,\alpha} \in (0,\infty)$ derart, daß für jedes $(t,x,\eta) \in K$*

$$\left\|\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} d_{\overline{x}}(k^\pm, g^\pm)(t,x,\eta)\right\| \;\leqslant\; C_{N,K,\alpha}\,\Gamma_\pm(t,x,\eta)^N$$

gilt.

Beweis. Wir verzichten in diesem Beweis zur Vereinfachung der Schreibweise auf alle $\pm$-Indizes und erinnern uns zunächst an die in (3.3.36) getroffene Definition. Indem wir den Satz über implizite Funktionen so wie im Beweis von Lemma 3.3.6 anwenden, erhalten wir

$$\begin{pmatrix} k'_{(\Re x,\Im x)} \\ g'_{(\Re x,\Im x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{2d} & -Q'_{(\Re y,\Im y)} \\ \mathbb{1}_{2d} & -\Xi'_{(\Re y,\Im y)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{2d} \\ 0_{2d} \end{pmatrix},$$

wobei alle Ableitungen von Q und Ξ in $(t, k(t,x,\eta), \eta)$ für $(t,x,\eta) \in \mathscr{G}$ ausgewertet werden. Wir bezeichnen diese Matrizen mit A, B und C. Also wird die obige Gleichung zu $A = B^{-1}\,C$. Sei durch $\mathscr{I}_n$ die Multiplikation mit i auf $\mathbb{C}^d = \mathbb{R}^{2d}$ notiert. Dann gilt

$$\mathscr{I} = \mathbb{1}_n \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ferner führen wir die folgende Schreibweise $[\mathscr{I}, A] := \mathscr{I}_{2d}A - A\mathscr{I}_d$. ein. Da für beliebige E, F, G die Kommutatorrelation $[E, FG] = F[E,G] + [E,F]G$ erfüllt ist, erhalten wir

$$[\mathscr{I}, A] = [\mathscr{I}, B^{-1}]\,C + B^{-1}\,[\mathscr{I}, C] = B^{-1}\,[B, \mathscr{I}]\,B^{-1}\,C. \tag{3.3.43}$$

Indem wir Ableitungen von (3.3.43) bilden, ergibt sich für $\alpha \in \mathbb{N}_0^{1+3d}$

$$\begin{aligned} &[\mathscr{I}, \partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} A] \\ &= \sum_{\beta+\gamma+\delta=\alpha} c(\beta,\gamma,\delta)\,\{\partial^\beta_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} B^{-1}\}[\partial^\gamma_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} B, \mathscr{I}]\{\partial^\delta_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} (B^{-1}C)\} \end{aligned}$$

für gewisse kombinatorische Konstanten $c(\beta,\gamma,\delta) \in (0,\infty)$. Hierbei ist der Kommutator $[\partial^\gamma_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} B, \mathscr{I}]$ von der Gestalt

$$\sum [\partial^{\gamma'}_{(\Re\rho,\Im\rho)} B, \mathscr{I}] \cdot \big(\text{Polynom in den partiellen Ableitungen von } k\big).$$

Aus Korollar 3.3.5 und (3.3.41) schließen wir

$$\big\|\,[\mathscr{I}, \partial^{\gamma'}_{(\Re\rho,\Im\rho)} B]\,\big\| \leqslant C_{N,K,T,\gamma'}\,\Gamma(t,x,\eta)^N.$$

□

Wir wollen zeigen, daß die Formel (3.3.38) eine Lösung von (3.3.1) darstellt. Dazu folgen wir einem aus der klassischen Mechanik bekannten Beweis (siehe etwa Seite 479 aus [36]) und vergleichen das Differential von $Z_\pm$ mit dem Pullback unter der Abbildung

$$\Theta_\pm(t,y,\eta) := \big(t, \kappa_t^\pm(y,\eta)\big) = \big(t, Q^\pm(t,y,\eta), \Xi^\pm(t,y,\eta)\big), \qquad (t,y,\eta) \in \mathcal{D}(\kappa^\pm),$$

von der Cartanschen Form,

$$\omega_\pm := \xi\,dx - a_\pm(x,\xi)\,dt.$$

$\omega_\pm$ wird als Form auf $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{2d}$ betrachtet, also ist $dx_j = d\Re x_j + i d\Im x_j$ und wir verwenden die Abkürzung $\xi\,dx := \xi_1\,dx_1 + \cdots + \xi_d\,dx_d$. Der Beweis des nun folgenden Lemmas findet sich auch als Beweis von Lemma 5.8 aus [8].

Lemma 3.3.9. *(i) Auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset \mathcal{D}(\kappa^\pm)$, auf der $|t| \leqslant t_0$ ist, gilt für alle $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^{4d+1}$*

$$\partial^\alpha_{(t,\Re y,\Im y,\Re\eta,\Im\eta)}\big(dZ_\pm - \Theta^*_\pm\omega_\pm - y\,d\eta\big) \;=\; \mathcal{O}\big(\max_{|r|\leqslant t_0}|\Im\kappa^\pm_r(y,\eta)|^N\big). \tag{3.3.44}$$

(ii) Sei $\widetilde{\mathscr{N}_\pm}$ die in Lemma 3.3.7 auftretende Menge (also ist η reell). Dann gilt

$$\partial^\alpha_{(t,\Re y,\Im y,\eta)}\big(dZ_\pm - \Theta^*_\pm\omega_\pm - y\,d\eta\big) \;=\; t\,\mathcal{O}\big(\widetilde{\Gamma}^N_\pm\big)$$

auf $\widetilde{\mathscr{N}_\pm}$ und für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^{3d+1}$, wobei die Landau-Symbole gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\widetilde{\mathscr{N}_\pm}$ sind.

Beweis. Wir verzichten auch in diesem Beweis auf alle $\pm$-Indizes zur Vereinfachung der Schreibweise. Wir definieren $\lambda := dZ - \Theta^*\omega$ und verwenden

$$\partial_t Z \;=\; \langle\,\Xi\,|\,\nabla_\xi a(Q,\Xi)\,\rangle - a(Q,\Xi) \;=\; \langle\,\Xi\,|\,\partial_t Q\,\rangle \;-\; a(Q,\Xi), \tag{3.3.45}$$

um die Darstellung

$$\begin{aligned}\lambda \;=\; &(Z'_y - \langle\,\Xi\,|\,Q'_y\,\rangle)\,dy + (Z'_{\overline{y}} - \langle\,\Xi\,|\,Q'_{\overline{y}}\,\rangle)\,d\overline{y} + (Z'_\eta - \langle\,\Xi\,|\,Q'_\eta\,\rangle)\,d\eta\\ &+ (Z'_{\overline{\eta}} - \langle\,\Xi\,|\,Q'_{\overline{\eta}}\,\rangle)\,d\overline{\eta}\end{aligned}$$

zu erhalten. Hierbei haben wir für $\langle\,\Xi\,|\,\partial_{y_1}Q\,\rangle\,dy_1 + \cdots + \langle\,\Xi\,|\,\partial_{y_d}Q\,\rangle\,dy_d$ die Abkürzung $\langle\,\Xi\,|\,Q'_y\,\rangle\,dy$ eingeführt. Sei durch $\varkappa$ eine der Variablen $y_j, \overline{y}_j, \eta_j, \overline{\eta}_j$, $j = 1,\dots,d$, notiert. Wir definieren $\lambda_\varkappa := Z'_\varkappa - \langle\,\Xi\,|\,Q'_\varkappa\,\rangle$. Nun schließen wir aufgrund von (3.3.45), der Hamiltonschen Gleichungen, (3.3.14), und der fast Analytizität von a auf

$$\begin{aligned}\partial_t\lambda_\varkappa \;&=\; \partial_\varkappa\big(\langle\,\Xi\,|\,\partial_t Q\,\rangle - a(Q,\Xi)\big) - \langle\,\partial_t\Xi\,|\,\partial_\varkappa Q\,\rangle - \langle\,\Xi\,|\,\partial_t\partial_\varkappa Q\,\rangle\\ &=\; \langle\,\partial_\varkappa\Xi\,|\,\nabla_\xi a(Q,\Xi)\,\rangle - \partial_\varkappa\big(a(Q,\xi)\big) + \langle\,\nabla_x a(Q,\Xi)\,|\,\partial_\varkappa Q\,\rangle\\ &=\; -\langle\,\nabla_{\overline{x}} a(Q,\Xi)\,|\,\overline{\partial_{\overline{\varkappa}} Q}\,\rangle - \langle\,\nabla_{\overline{\xi}} a(Q,\Xi)\,|\,\overline{\partial_{\overline{\varkappa}}\Xi}\,\rangle.\end{aligned}$$

Indem wir die letzte Zeile mit $G_\varkappa$ bezeichnen, gilt $\partial_t\lambda_\varkappa = G_\varkappa$. Mittels (3.3.3) ergibt sich

$$\partial^\alpha_{(t,\Re y,\Im y,\Re\eta,\Im\eta)} G_\varkappa \;=\; \mathcal{O}\big(|\Im(Q,\Xi)|^N\big). \tag{3.3.46}$$

Die Anfangsbedingung $(Z,Q,\Xi)|_{t=0} = (\langle\,y\,|\,\eta\,\rangle, y, \eta)$ impliziert

$$\begin{aligned}&Z'_y|_{t=0} = \eta, && Z'_\eta|_{t=0} = y, && Z'_{\overline{y}}|_{t=0} = Z'_{\overline{\eta}}|_{t=0} = 0,\\ &Q'_y|_{t=0} \;=\; \mathbb{1}, && Q'_\eta|_{t=0} = Q'_{\overline{y}}|_{t=0} = Q'_{\overline{\eta}}|_{t=0} = 0. &&\end{aligned}$$

Daraus folgt $\lambda(0,y,\eta) = y\,d\eta$. Aus $\partial_t\lambda_\varkappa = G_\varkappa$ schließen wir auf

$$\lambda(t,y,\eta) - y\,d\eta = \sum_\varkappa \int_0^t G_\varkappa(r,y,\eta)\,dr, \qquad (t,y,\eta) \in \mathcal{D}(\kappa),$$

woraus wir mit Hilfe von (3.3.46) Teil (i) der Behauptung folgern. Teil (ii) erhalten wir nun infolge von Lemma 3.3.7. □

Da auf $\mathscr{G}^\pm$

$$Z_\pm \circ K_\pm = \psi_\pm, \quad Q^\pm \circ K_\pm = x, \quad \Xi^\pm \circ K_\pm = g^\pm \tag{3.3.47}$$

gelten, erhalten wir die folgende Proposition, deren Beweis sich auch im Beweis von Proposition 5.9 aus [8] findet.

Proposition 3.3.10. *Sei $\psi_\pm$ die in (3.3.38) eingeführte Funktion. Dann gelten*

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\Re\eta)}\big(\partial_t\psi_\pm + a_\pm(x,\nabla_x\psi_\pm)\big) \;&=\; \mathcal{O}(\Gamma^N_\pm), && (3.3.48)\\
\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\Re\eta)}(\nabla_x\psi_\pm - g^\pm) \;&=\; \mathcal{O}(\Gamma^N_\pm), && (3.3.49)\\
\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\Re\eta)}(\nabla_\eta\psi_\pm - k^\pm) \;&=\; \mathcal{O}(\Gamma^N_\pm), && (3.3.50)\\
\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\Re\eta)}\nabla_{\overline{x}}\psi_\pm \;&=\; \mathcal{O}(\Gamma^N_\pm), && (3.3.51)\\
\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\Re\eta)}\nabla_{\overline{\eta}}\psi_\pm \;&=\; \mathcal{O}(\Gamma^N_\pm) && (3.3.52)
\end{aligned}$$

auf $\mathscr{N}_\pm$ für $N \in \mathbb{N}$ und jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^{3d+1}$. Alle Landau-Symbole sind gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathscr{N}_\pm$.

Beweis. Lemma 3.3.9(ii) und $\Gamma_\pm = \widetilde{\Gamma}_\pm \circ K_\pm$ implizieren

$$\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\Re\eta)}K^*_\pm\big(dZ_\pm - \Theta^*_\pm\omega_\pm - y\,d\eta\big) \;=\; \mathcal{O}(\Gamma^N_\pm)$$

auf $K^{-1}(\widetilde{\mathscr{N}_\pm}) = \mathscr{N}_\pm$. Ferner zeigt (3.3.47), daß

$$\begin{aligned}
K^*_\pm\big(dZ_\pm - \Theta^*_\pm\omega_\pm - y\,d\eta\big) \;&=\; d(K^*_\pm Z_\pm) - (\Theta_\pm\circ K_\pm)^*\omega_\pm - k^\pm\,d\eta\\
&=\; d\psi_\pm - g^\pm\,dx + a_\pm(x,g^\pm)\,dt - k^\pm\,d\eta
\end{aligned}$$

auf $\mathscr{G}^\pm$ gilt. □

Das letzte Korollar in diesem Unterabschnitt faßt die Eigenschaften von $\psi_\pm$ auf dem reellen Bereich zusammen. Wie sich zeigen wird, lassen sich die Gewichte $\Gamma_\pm$ durch $\Im\psi_\pm$ auf dem reellen Bereich ersetzen. Wir erhalten, daß $\psi_\pm$ die von uns gewünschte Lösung des Problems (3.3.1)&(3.3.2) ist.

Korollar 3.3.11. *(i) Es gibt eine reelle Umgebung $\mathscr{M}^\pm_{\mathbb{R}}$ von $\mathscr{E}^\pm$ in $\mathbb{R}^+_0 \times \mathbb{R}^{2d}$ derart, daß für jedes $(t,x,\eta) \in \mathscr{M}^\pm_{\mathbb{R}}$ die folgenden Relationen*

$$\begin{aligned}
\Im\psi_\pm(t,x,\eta) \;&\geqslant\; \frac{1}{\mathcal{O}(1)}|\,\Im g^\pm(t,x,\eta)|^2, && (3.3.53)\\
\Im\psi_+(t,x,\eta) \;&=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad (t,x,\eta)\in\mathscr{E}^+, && (3.3.54)\\
\Im\psi_-(t,x,\eta) \;&=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad t=0,\ x,\eta\in\mathbb{R}^d, && (3.3.55)
\end{aligned}$$

gelten. Infolgedessen gilt

$$\Im\psi_\pm \;\geqslant\; \frac{1}{\mathcal{O}(1)}\,\Gamma_\pm \qquad \text{auf } \mathscr{M}^\pm_{\mathbb{R}}, \tag{3.3.56}$$

was (3.3.48)–(3.3.52) *auf* $\mathscr{M}_{\mathbb{R}}^{\pm}$ *impliziert, wobei die rechte Seite dieser Gleichungen durch* $\mathcal{O}_N((\Im\psi_\pm)^N)$ *ersetzt wird. Insbesondere gilt*

$$\partial^{\alpha}_{(t,\Re x,\Im x,\Re\eta)}\big(\partial_t\psi_\pm + a_\pm(x,\nabla_x\psi_\pm)\big) \;=\; \mathcal{O}\big((\Im\psi_\pm)^N\big) \qquad \textit{auf } \mathscr{M}_{\mathbb{R}}^{\pm}. \tag{3.3.57}$$

(Alle Landau-Symbole sind gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathscr{M}_{\mathbb{R}}^{\pm}$*.)*
(ii) Für jedes $(t,x,0)\in\mathscr{D}^+$ *und* $\beta\in\mathbb{N}_0^{d+1}$ *gelten*

$$\partial^{\beta}_{(t,x)}\psi_+(t,x,0)=0, \qquad \nabla_\eta\psi_+(t,x,0)=X(-t,x,\nabla\varphi(x)). \tag{3.3.58}$$

Beweis. (i): Aus (3.3.40) und (3.3.47) und da $-\Im a_\pm \geq 0$ ist, folgt

$$\Im\psi_\pm - \langle\, \Im x \,|\, \Re g^\pm \,\rangle \;\geqslant\; -\mathcal{O}(1)\,|\Im(x,g^\pm)|^3 \qquad \text{auf } \mathscr{N}_\pm. \tag{3.3.59}$$

Wir erinnern uns daran, daß $\mathscr{N}_\pm$ eine Umgebung von $\mathscr{E}^\pm$ in $\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{C}^d\times\mathbb{R}^d$ ist. Folglich ist $(\mathscr{N}_\pm)_{\mathbb{R}} := \mathscr{N}_\pm\cap(\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}^{2d})$ eine Umgebung von $\mathscr{E}^\pm$ in $\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}^{2d}$. Seien $(t_0,x_0,\eta_0)\in\mathscr{E}^\pm$ und $K\subset(\mathscr{N}_\pm)_{\mathbb{R}}$ eine kompakte Umgebung von (t_0,x_0,η_0) in $(\mathscr{N}_\pm)_{\mathbb{R}}$. Für hinreichend klein gewähltes $\varepsilon_0>0$ gilt $(t,x+\varepsilon\,\Im g^\pm(t,x,\eta),\eta)\in K'\subset(\mathscr{N}_\pm)_{\mathbb{R}}$ für jedes $(t,x,\eta)\in K$ und $|\varepsilon|<\varepsilon_0$. Dabei ist K' ebenfalls kompakt. Aufgrund von (3.3.59) existieren Konstanten $C,C'\in(0,\infty)$, die für jedes $(t,x,\eta)\in K$ den Ungleichungen

$$\begin{aligned}\Im\psi_\pm(t,x-\varepsilon\,\Im g^\pm(t,x,\eta),\eta) \;&\geqslant\; -C\,\big|\Im g^\pm\big(t,x-\varepsilon\,\Im g^\pm(t,x,\eta),\eta\big)\big|^3\\ &\geqslant\; -C'\,\big|\Im g^\pm(t,x,\eta)\big|^3\end{aligned} \tag{3.3.60}$$

genügen. Indem wir eine Taylorentwicklung der linken Seite der Abschätzung (3.3.60) bzgl. x durchführen, wobei wir (3.3.49) und (3.3.51) verwenden, erhalten wir

$$\Im\psi_\pm \geqslant \varepsilon\,|\Im g^\pm|^2 - C''\left(|\Im g^\pm|^3+\varepsilon^2\,|\Im g^\pm|^2\right) - \varepsilon\, C_{N_0}\,|\Im\psi_\pm|^{N_0} \qquad \text{auf } K$$

für ein $N_0\in\mathbb{N}$, $N_0\geqslant 2$ und $C'',C_{N_0}\in(0,\infty)$. Nun wählen wir ein $\varepsilon\in(0,\frac{1}{2C''})$, für das $\varepsilon<\varepsilon_0$ und $\varepsilon\, C_{N_0}\,|\Im\psi_\pm|^{N_0-1}<1/2$ auf K gelten. Damit ergibt sich $\Im\psi_\pm+(1/2)|\Im\psi_\pm|\geqslant(\varepsilon/2)|\Im g^\pm|^2-C''|\Im g^\pm|^3$ auf K. Als nächstes erinnern wir uns daran, daß nach (3.3.33) und (3.3.35) die Gleichung $\Im g^\pm=0$ auf $\mathscr{E}^\pm$ gilt. Wenn wir die kompakte Umgebung K von (t_0,x_0,η_0) weiter einschränken, können wir annehmen, daß $C''|\Im g^\pm|<\varepsilon/4$ auf K gilt. Wir folgern (3.3.53). Schließlich definieren wir $\mathscr{M}_{\mathbb{R}}^{\pm}$ als Vereinigung aller Mengen $\mathring{K}$. Hierbei läuft die Vereinigung über alle $(t_0,x_0,\eta_0)\in\mathscr{E}^\pm$.

Im nächsten Schritt beweisen wir (3.3.54) und (3.3.55). Zuerst sei $(t,x,\eta)\in\mathscr{E}^\pm$. Für $t=0$ gilt $\Im\psi_\pm(0,x,\eta)=\Im\langle\, x\,|\,\eta\,\rangle=0$. Falls $(t,x,0)\in\mathscr{D}^+$ ist, wissen wir, daß $\kappa(r,k(t,x,0),0)\in K_0\times\{0\}$ für jedes $r\in[0,t]$ ist. Folglich ist aufgrund von (3.3.4) $\mathscr{A}_+(\kappa(r,k(t,x,0),0))=0$ für $r\in[0,t]$. Indem wir uns an die in (3.3.38) getroffene Definition von ψ_+ erinnern, erhalten wir $\psi_+(t,x,0)=0$. Damit ist die Implikation „$\Leftarrow$“ in (3.3.54) und (3.3.55) gezeigt. Das beweist aber auch die erste Gleichung von (ii).

Um die andere Implikation zu zeigen, nehmen wir an, daß $(t,x,\eta)\in\mathscr{M}_{\mathbb{R}}^{\pm}$ für $t>0$ und $\Im\psi_\pm(t,x,\eta)=0$ gilt. (3.3.53) impliziert dann $\Im g^\pm(t,x,\eta)=0$ und damit auch

$\Gamma_\pm(t,x,\eta)=0$, da x reell ist. Aufgrund der Ungleichung (3.3.41) und dank (3.3.47) läßt sich der Imaginärteil der Integralkurve von $\widehat{\mathscr{H}_{a_\pm}}$, die $(y,\eta):=(k^\pm(t,x,\eta),\eta)$ und $(x,g^\pm(t,x,\eta))$ verbindet, durch $\Gamma_\pm$ abschätzen. Das beweist, daß diese Integralkurve reell ist.

Da wir wissen, daß $\Im a_+(y,\eta)\le 0$ und $\Im a_-(y,\eta)<0$ nach (3.2.31) bzw. (3.2.39) gilt, nehmen wir an, daß $\Im a_\pm(y,\eta)<0$ ist. Dann folgt $\Im\psi_\pm(t,x,\eta)>0$ mit Hilfe von (3.3.40), da x reell ist und $\Im g^\pm=0$ ist. Im Minus-Fall erhalten wir einen Widerspruch zu (3.2.39), was zeigt, daß es kein $(t,x,\eta)\in\mathscr{M}_{\mathbb{R}}^-$ gibt, für das $t>0$ und $\Im\psi_-(t,x,\eta)=0$ gilt. Im Plus-Fall folgern wir $\Im a_+(y,\eta)=0$. Aufgrund von (3.2.32) sind also $y\in K_0$ und $\eta=0$. Lemma 3.3.3 impliziert $(t,y,0)\in\widetilde{\mathscr{D}}^+$ und damit auch $(t,x,0)\in\mathscr{D}^+$.

Schließlich wollen wir Teil (ii) beweisen. Wir bemerken zunächst, daß wegen (3.3.33) $\Gamma_+(t,x,0)=0$ für $(t,x,0)\in\mathscr{D}^+$ gilt. Damit ergibt sich mit Hilfe von (3.3.50) und (3.3.31)

$$\nabla_\eta\psi_+(t,x,0)\;=\;k^+(t,x,0)\;=\;X(-t,x,\nabla\varphi(x)).$$

Ferner erhalten wir $\nabla_x\psi_+(t,x,0)=g^+(t,x,0)=0$ infolge von (3.3.49) und (3.3.33) und $\partial_t\psi_+(t,x,0)=-a_+(x,0)=0$ nach (3.3.48) bzw. (3.2.32). $\square$

3.4 Die Transportgleichungen

3.4.1 Ansatz für eine Parametrix

Wir wollen eine Parametrix des konjugierten Diracoperators $D_{h,V,\varphi}:=e^{\varphi/h}D_{h,V}e^{-\varphi/h}$ bestimmen. Dazu zerlegen wir $D_{h,V,\varphi}$ mittels der in (3.2.6) eingeführten Projektionen in einen Plus- und einen Minus-Teil. Für jeden dieser beiden Teile konstruieren wir mittels eines WKB-Verfahrens Parametrizen der zugehörigen Wärmeleitungsgleichungen. Diese integrieren wir dann bzgl. der Zeitvariablen t. Da die Eigenwerte komplexwertig sind, verwenden wir als Ansatz für die Parametrizen der Wärmeleitungsgleichungen Fourierintegraloperatoren mit komplexwertiger Phase. Also ist der Ansatz für den Greenschen Kern

$$\begin{aligned}D^{-1}_{h,V,\varphi}(x,y)=&\sum_{\sharp\in\{+,-\}}\sharp\int_0^\infty\!\!\int_{\mathbb{R}^d}e^{i\psi_\sharp(t,x,\eta)/h-i\langle\, y\,|\,\eta\,\rangle/h}\sum_{\nu=0}^\infty h^\nu\,B_\sharp^\nu(t,x,\eta)\,\frac{d\eta\,dt}{(2\pi h)^d\,h}\\&+\check{q}(x,x-y).\end{aligned}$$

Das hier auftretende Symbol q gehört zum Bereich, wo das Symbol $\widehat{D}_{h,V,\varphi}$ gleichmäßig elliptisch ist, und wird zu Beginn von Abschnitt 3.5 konstruiert werden. Zur Herleitung der Gleichungen die $\psi_\pm$ und $B_\pm^\nu$ bestimmen, berechnen wir formal

$$e^{-i\psi_\pm/h}\big(\pm h\,\partial_t\,+\,\boldsymbol{\alpha}\cdot(-ih\,\nabla+i\nabla\varphi)+\alpha_0+V\big)e^{i\psi_\pm/h}\sum_{\nu=0}^\infty h^\nu\,B_\pm^\nu$$

$$
\begin{aligned}
&= \big(\pm i\,\partial_t\psi_\pm \pm h\partial_t + \boldsymbol{\alpha}\cdot(-ih\nabla + \nabla_x\psi_\pm + i\nabla\varphi) + \alpha_0 + V\big) \sum_{\nu=0}^{\infty} h^\nu B_\pm^\nu \\
&= \big(\pm i\,\partial_t\psi_\pm + \boldsymbol{\alpha}\cdot(\nabla_x\psi_\pm + i\nabla\varphi) + \alpha_0 + V\big) B_\pm^0 \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{\infty} h^\nu \Big\{ (\pm\partial_t - i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla) B_\pm^{\nu-1} \\
&\quad + \big(\pm i\partial_t\psi_\pm + \boldsymbol{\alpha}\cdot(\nabla_x\psi_\pm + i\nabla\varphi) + \alpha_0 + V\big) B_\pm^\nu \Big\} \overset{!}{=} 0. \qquad (3.4.1)
\end{aligned}
$$

Wir führen nun eine glatte Abschneidefunktion $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{C}^{2d})$ ein, für die $\chi \equiv 1$ auf einer kleinen reellen Umgebung von $K_0 \times \{0\}$ und $0 \leqslant \chi \leqslant 1$ auf $\mathbb{R}^{2d}$ gilt und deren Träger $\operatorname{supp}(\chi)$ in einer kleinen komplexen Umgebung von $K_0 \times \{0\}$ enthalten ist. Sei χ eine fast analytische Fortsetzung von $\chi\restriction_{\mathbb{R}^{2d}}$, für die

$$
\big|\partial^\alpha_{(\Re y,\Im y,\Re\eta,\Im\eta)} \nabla_{(\overline{y},\overline{\eta})}\chi(y,\eta)\big| \leqslant C_{N,\alpha}\,|\Im(y,\eta)|^N, \qquad (y,\eta)\in\mathbb{C}^{2d},
$$

für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^{4d}$ und geeignete Konstanten $C_{N,\alpha} \in (0,\infty)$ erfüllt ist.

Nehmen wir für den Moment an, daß die matrixwertigen Amplituden $B_\pm^0$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{T_0}): \quad & \partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)}\big\{ B_\pm^0(t,x,\eta) - \Lambda^\pm\big(x, \nabla_x\psi_\pm(t,x,\eta) + i\nabla\varphi(x)\big)\, B_\pm^0(t,x,\eta)\big\} \\
&\qquad = \mathcal{O}(\Gamma_\pm^N), \\
& B_\pm^0(0,x,\eta) = \chi(x,\eta)\,\Lambda^\pm\big(x, \eta + i\nabla\varphi(x)\big),
\end{aligned}
$$

genügen. Ferner folgen aus (3.4.1) die Transportgleichungen

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{T}_{\boldsymbol{\nu}})_{\boldsymbol{\nu}\geqslant\mathbf{1}}: \quad & \partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)}\big\{ (\mp\partial_t + i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)\, B_\pm^{\nu-1} \\
&\quad - (\pm i\partial_t\psi_\pm + \boldsymbol{\alpha}\cdot(\nabla_x\psi_\pm + i\nabla\varphi) + \alpha_0 + V)\, B_\pm^\nu\big\} = \mathcal{O}_N(\Gamma_\pm^N), \\
& B_+^\nu|_{t=0} = -B_-^\nu|_{t=0}.
\end{aligned}
$$

Falls $(\mathbf{T_0})$ gilt, läßt sich die vor $B_\pm^0$ in (3.4.1) auftretende Matrix durch einen ihrer Eigenwerte ersetzen und es ergeben sich die Hamilton-Jacobi-Gleichungen

$$
\pm i\,\partial_t\psi_\pm \pm \sqrt{1 + (\nabla_x\psi_\pm + i\nabla\varphi)^2} + V = \mathcal{O}(\Gamma_\pm^N).
$$

Diese sind gemäß der Definition (3.2.30) äquivalent zu den durch (3.3.1) definierten Problemen. In Abschnitt 3.3 wurden Lösungen von (3.3.1) bis auf Fehlerterme der Ordnung $\mathcal{O}(\Gamma_\pm^N)$ bestimmt. In Unterabschnitt 3.4.2 werden wir die Transportgleichungen $(\mathbf{T_0}), (\mathbf{T_1}), \ldots$ lösen. Da auch die Transportgleichungen komplexwertig sind, werden sich dabei ebenfalls Fehlerterme der Ordnung $\mathcal{O}(\Gamma_\pm^N)$ nicht vermeiden lassen. Schließlich verwenden wir in Unterabschnitt 3.4.3 die so erhaltenen Näherungslösungen der Hamilton-Jacobi-Gleichungen und der Transportgleichungen , um eine Lösung von $(\pm h\partial_t + D_{h,V,\varphi})\,u_\pm = 0$ zu erhalten. In Proposition 3.4.9 werden wir zeigen, daß diese Fehlerterme das WKB-Verfahren nicht zerstören.

Wir nehmen an, daß das Potential V die Voraussetzung 3.1.1 erfüllt und daß die Punkte $x_\star$ und $y_\star$ der Voraussetzung 3.2.3 genügen. $\psi_\pm$ ist die durch (3.3.38) definierte Funktion und φ ist die Funktion, die durch Proposition 3.2.1 im Fall von $d = 1$ gegeben ist bzw. durch Proposition 3.2.4, falls $d \geqslant 2$ ist. Ferner sind die Landau-Symbole gleichmäßig auf kompakten Teilmengen und die Variable η ist reell.

3.4.2 Näherungslösung der Transportgleichungen

In diesem Unterabschnitt lösen wir die Transportgleichungen $(\mathbf{T_0}), (\mathbf{T_1}), \ldots$ und folgen dabei Abschnitt 2.2 aus [41]. Diese Strategie werden wir an unsere Situation anpassen, indem wir Faktoren i und geeignete Vorzeichen an den richtigen Stellen ergänzen. Da sich die Transportgleichungen ebenso wie die Hamilton-Jacobi-Gleichung nicht exakt lösen lassen, haben wir ferner auf Fehlerterme zu achten.

Die Vorgehensweise ist dabei wie folgt. Zunächst formen wir die Transportgleichungen unter Verwendung der Hamilton-Jacobi-Gleichung zu einer neuen Folge $(\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}})$ um und führen dann matrixwertige Differentialoperatoren $L^\pm$ ein. Da es genügt gewisse Differentialgleichungen in $L^\pm$ zu lösen, um eine Lösung der Transportgleichungen zu erhalten, untersuchen wir die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen ebensolcher Differentialgleichungen. Schließlich berechnen wir den Wert gewisser $B^0_+(\tau, x, 0)$, den wir für die Bestimmung der Asymptotik des Greenschen Kerns benötigen werden.

Die hier verwandte Strategie entstammt den aufeinander aufbauenden Arbeiten [41] und [42], in denen die quasiklassische Näherung der Diracgleichung behandelt wird. In [41] wird das asymptotische Verhalten des quasiklassischen Evolutionsoperators für endliche Zeiten im Limes $h \searrow 0$ studiert. [42] befaßt sich dann mit der Streutheorie.

Alternative Lösungswege finden sich z.B. in [28, 38]. In Anhang A aus [5] wird die Strategie aus [28] dargestellt, wenn mittels des WKB-Verfahrens eine Parametrix des Evolutionsoperators für kleine Zeiten konstruiert wird. Es sei bemerkt, daß in [5] dreidimensionale Diracoperatoren, die mit einem nichtskalaren Potential versehen sind, behandelt werden. Der Vorgehensweise aus [38] werden wir später in Anhang A folgen, indem wir diese an unsere Situation anpassen werden, um die Transportgleichungen $(\mathbf{T_0}), (\mathbf{T_1}), \ldots$ im dreidimensionalen Fall zu lösen.

Wir beginnen mit der Definition der Gamma-Matrizen

$$\gamma_0 := \alpha_0, \quad \gamma_j := -\alpha_0\,\alpha_j, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Damit erhalten wir wegen $\{\alpha_k\,,\,\alpha_\ell\} = 2\,\delta_{k\ell}\,\mathbb{1}$ für $0 \le k\,,\ell \le d$

$$(\gamma_0)^2 = \mathbb{1}, \qquad (\gamma_j)^2 = -\mathbb{1}, \quad j = 1, \ldots, d, \tag{3.4.2}$$

$$\{\gamma_\mu\,,\,\gamma_\nu\} = 0, \qquad 0 \leqslant \mu < \nu \leqslant d. \tag{3.4.3}$$

Ferner definieren wir

$$\begin{aligned} &\partial_0^\pm := \pm i\partial_t, \qquad \partial_j^\pm := -\partial_{x_j}, \\ &\Pi_0^\pm := \pm\sqrt{1 + (\nabla_x\psi_\pm + i\nabla\varphi)^2}, \quad \Pi_j^\pm := \partial_{x_j}\psi_\pm + i\partial_{x_j}\varphi, \\ &\mathbf{\Pi}^\pm := \big(\Pi_1^\pm, \ldots, \Pi_d^\pm\big), \end{aligned}$$

wobei $j = 1, \ldots, d$ ist, und

$$\tilde{\partial}^{\pm} := \sum_{\mu=0}^{d} \gamma_\mu \, \partial_\mu^{\pm}, \qquad \tilde{\Pi}^{\pm} := \sum_{\mu=0}^{d} \gamma_\mu \, \Pi_\mu^{\pm} \quad \text{auf } \mathscr{N}_{\pm}.$$

Wir erinnern uns daran, daß die Mengen $\mathscr{N}_{\pm}$ in (3.3.42) eingeführt wurden. Wir formen die Transportgleichungen auf $\mathscr{N}_{\pm}$ mit Hilfe der in (3.3.48) gegebenen Hamilton-Jacobi-Gleichungen in eine neue Folge von Gleichungen um, die gegeben ist durch

$$(\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}}) \begin{cases} \partial^{\alpha}_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} \big((\tilde{\Pi}^{\pm} - 1)\, B_{\pm}^{\nu} + i \tilde{\partial}^{\pm} B_{\pm}^{\nu-1} \big) \;=\; \mathcal{O}_N(\Gamma_{\pm}^{N}), \quad N \in \mathbb{N}, \\ \partial^{\alpha}_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} (\tilde{\Pi}^{\pm} + 1)\, \tilde{\partial}^{\pm} \, B_{\pm}^{\nu} \;=\; \mathcal{O}_N(\Gamma_{\pm}^{N}), \quad N \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dabei ist $\nu \in \mathbb{N}_0$ und wir setzen $B_{\pm}^{-1} := 0$.

Lemma 3.4.1. *Falls $B_{\pm}^{\nu}$ für $\nu \in \mathbb{N}_0$ die ersten Gleichungen in $(\mathbf{K_1}), (\mathbf{K_2}), \ldots$ auf einer Umgebung $\mathscr{N}'_{\pm} \subset \mathscr{N}_{\pm}$ von $\mathscr{E}_{\pm}$ in $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{R}^d$ erfüllt, dann genügt $B_{\pm}^{\nu}$ auch den Transportgleichungen $(\mathbf{T_1}), (\mathbf{T_2}), \ldots$ auf $\mathscr{N}'_{\pm}$.*

Beweis. Unter Verwendung der soeben getroffenen Definitionen von $\tilde{\Pi}^{\pm}$ und $\tilde{\partial}^{\pm}$ und durch Multiplikation mit α_0 läßt sich für $\nu \in \mathbb{N}$ die erste Gleichung von $(\mathbf{K}_\nu)$ darstellen als

$$\begin{aligned} &\partial^{\alpha}_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} \Big\{ \big(\pm \alpha_0 \sqrt{1 + (\nabla_x \psi_{\pm} + i \nabla \varphi)^2} - \alpha_0 \, \boldsymbol{\alpha} \cdot (\nabla_x \psi_{\pm} + i \, \nabla \varphi) - 1 \big) \, B_{\pm}^{\nu} \\ &\qquad + \big(\mp \alpha_0 \, \partial_t + i \, \alpha_0 \, \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \big) \, B_{\pm}^{\nu-1} \Big\} \;=\; \mathcal{O}_N(\Gamma_{\pm}^{N}) \\ \Longleftrightarrow \quad &\partial^{\alpha}_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} \Big\{ \big(\mp \partial_t + i \, \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \big) \, B_{\pm}^{\nu-1} + \big(\pm \sqrt{1 + (\nabla_x \psi_{\pm} + i \nabla \varphi)^2} \\ &\qquad + V - \boldsymbol{\alpha} \cdot (\nabla_x \psi_{\pm} + i \, \nabla \varphi) - \alpha_0 - V \big) \, B_{\pm}^{\nu} \Big\} \;=\; \mathcal{O}_N(\Gamma_{\pm}^{N}) \\ \Longrightarrow \quad &\partial^{\alpha}_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} \Big\{ \big(\mp \partial_t + i \, \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \big) \, B_{\pm}^{\nu-1} - \big(\pm i \, \partial_t \, \psi_{\pm} + \boldsymbol{\alpha} \cdot (\nabla \psi_{\pm} + i \nabla \varphi) \\ &\qquad + \alpha_0 + V \big) \, B_{\pm}^{\nu} \Big\} \;=\; \mathcal{O}_N(\Gamma_{\pm}^{N}), \end{aligned}$$

was äquivalent zu $(\mathbf{T}_{\boldsymbol{\nu}})$ ist. Im letzten Schritt wurde die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\partial^{\alpha}_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} \big(\pm i \partial_t \psi_{\pm} \pm \sqrt{1 + (\nabla_x \psi_{\pm} + i \nabla \varphi)^2} + V \big) = \mathcal{O}_N(\Gamma_{\pm}^{N}), \quad N \in \mathbb{N},$$

verwandt, die wir in (3.3.48) finden. □

Da wir bereits wissen, daß die Gamma-Matrizen γ_μ und γ_ν antikommutieren, kennen wir den Kommutator

$$[\gamma_\mu \, , \, \gamma_\nu] \;=\; \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu \;=\; 2 \, \gamma_\mu \gamma_\nu$$

für $\mu, \nu = 0, \ldots, d$, $\mu \neq \nu$. Nun schreiben wir zur Abkürzung

$$\sigma_{\mu\nu} \;:=\; \frac{i}{2} \, [\gamma_\mu \, , \, \gamma_\nu] \;=\; i \gamma_\mu \, \gamma_\nu, \quad (\mathrm{rot}^{\pm} \, \Pi^{\pm})_{\mu\nu} \;:=\; (\partial_\mu^{\pm} \Pi_\nu^{\pm}) - (\partial_\nu^{\pm} \Pi_\mu^{\pm}) \tag{3.4.4}$$

für alle $\mu, \nu = 0, \ldots, d$ mit $\mu \neq \nu$. Wir definieren den matrixwertigen partiellen Differentialoperator

$$L^{\pm} := \pm i\{\partial_t, \Pi_0^{\pm}\} + \sum_{j=1}^{d}\{\partial_{x_j}, \Pi_j^{\pm}\} - i \sum_{0\leqslant\mu<\nu\leqslant d} \sigma_{\mu\nu}\,(\mathrm{rot}^{\pm}\,\Pi^{\pm})_{\mu\nu} \tag{3.4.5}$$

auf $\mathscr{N}_{\pm}$. Aufgrund von (3.4.2), (3.4.3) und (3.4.4) läßt sich $L^{\pm}$ zu

$$\begin{aligned} L^{\pm} =\ & \gamma_0^2\,\{\partial_0^{\pm}, \Pi_0^{\pm}\} + \sum_{\mu=1}^{d} \gamma_\mu^2\,\{\partial_\mu^{\pm}, \Pi_\mu^{\pm}\} + \sum_{0\leq\mu<\nu\leq d} \gamma_\mu\gamma_\nu\,\left(\partial_\mu^{\pm}\Pi_\nu^{\pm}\right) \\ & - \sum_{0\leq\mu<\nu\leq d} \gamma_\mu\gamma_\nu\,\left(\partial_\nu^{\pm}\Pi_\mu^{\pm}\right) \\ =\ & \sum_{\mu=0}^{d} \gamma_\mu^2\,\{\partial_\mu^{\pm}, \Pi_\mu^{\pm}\} + \sum_{0\leq\mu\neq\nu\leq d} \gamma_\mu\gamma_\nu\,\left(\partial_\mu^{\pm}\Pi_\nu^{\pm}\right) \\ =\ & \sum_{\mu=0}^{d} \gamma_\mu^2\,\{\partial_\mu^{\pm}, \Pi_\mu^{\pm}\} + \sum_{0\leq\mu\neq\nu\leq d} \gamma_\mu\gamma_\nu\,\Big(\left(\partial_\mu^{\pm}\Pi_\nu^{\pm}\right) + \Pi_\nu^{\pm}\partial_\mu^{\pm} + \Pi_\mu^{\pm}\partial_\nu^{\pm}\Big) \\ =\ & \sum_{\mu=0}^{d} \gamma_\mu^2\,\{\partial_\mu^{\pm}, \Pi_\mu^{\pm}\} + \sum_{0\leq\mu\neq\nu\leq d} \gamma_\mu\,\gamma_\nu\,(\partial_\mu^{\pm}\circ\Pi_\nu^{\pm} + \Pi_\mu^{\pm}\,\partial_\nu^{\pm}) \\ =\ & \sum_{\mu=0}^{d}\{\gamma_\mu\partial_\mu^{\pm}, \gamma_\mu\Pi_\mu^{\pm}\} + \sum_{0\leq\mu\neq\nu\leq d} \{\gamma_\mu\partial_\mu^{\pm}, \gamma_\nu\Pi_\nu^{\pm}\} \;=\; \{\tilde{\partial}^{\pm}\,,\,\tilde{\Pi}^{\pm}\} \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

umformen. Die Differentialoperatoren $L^{\pm}$ haben wir eingeführt, da die $B_{\pm}^{\nu}$ im Folgenden als Lösungen gewisser Differentialgleichung in $L^{\pm}$ charakterisiert werden. In Proposition 3.4.4 werden wir zeigen, daß die so gewählten $B_{\pm}^{\nu}$ die Transportgleichungen lösen. Zunächst untersuchen wir die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen gegeben durch den Operator $L^{\pm}$.

Lemma 3.4.2. *Seien $\mathscr{N}_{\pm}' \subset \mathscr{N}_{\pm}$ eine Umgebung von $\mathscr{E}_{\pm}$ in $\mathbb{R}_0^{+} \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{R}^d$ und $R \in C^\infty(\mathscr{N}_{\pm}', \mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$ eine glatte matrixwertige Funktion, die*

$$\partial^{\alpha}_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} d_{\overline{x}} R \;=\; \mathcal{O}(\Gamma_{\pm}^{N}), \qquad N\in\mathbb{N},\ \alpha\in\mathbb{N}_0^{3d+1}, \tag{3.4.7}$$

erfülle. Ferner genüge $c \in C^\infty(\mathbb{C}^d \times \mathbb{R}^d)$

$$\partial^{\alpha}_{(\Re x,\Im x,\eta)} d_{\overline{x}} c \;=\; \mathcal{O}(|\Im x|^{N}), \qquad N\in\mathbb{N},\ \alpha\in\mathbb{N}_0^{3d}. \tag{3.4.8}$$

Dann existiert ein $B^{\pm} \in C^\infty(\mathscr{N}_{\pm}', \mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$, für das

$$\partial^{\alpha}_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} (L^{\pm}\,B^{\pm} - R) = \mathcal{O}(\Gamma_{\pm}^{N}),\ \ \partial^{\beta}_{(\Re x,\Im x,\eta)} (B^{\pm}|_{t=0} - c) = \mathcal{O}(|\Im x|^{N}), \tag{3.4.9}$$

$$\partial^{\alpha}_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} d_{\overline{x}} B^{\pm} = \mathcal{O}(\Gamma_{\pm}^{N}) \tag{3.4.10}$$

für jedes $N \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^{3d+1}$ und $\beta \in \mathbb{N}_0^{3d}$ gelten. Falls $C^\pm \in C^\infty(\mathcal{N}'_\pm, \mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$ eine weitere Lösung von (3.4.9) und (3.4.10) ist, dann gilt $\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)}(B^\pm - C^\pm) = \mathcal{O}(\Gamma^N_\pm)$ für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^{3d+1}$.

Beweis. Mit Hilfe der Definition von $L^\pm$ erhalten wir

$$L^\pm = \pm 2i\Pi_0^\pm\,\partial_t + 2\mathbf{\Pi}^\pm \cdot \nabla_x + M^\pm,$$

wobei $M^\pm$ durch

$$M^\pm \;:=\; \pm i(\partial_t \Pi_0^\pm) + \mathrm{div}_x \mathbf{\Pi}^\pm - i \sum_{0\leqslant\mu<\nu\leqslant d} \sigma_{\mu\nu}\,(\mathrm{rot}^\pm\,\Pi^\pm)_{\mu\nu}$$

definiert ist. Ferner setzen wir

$$W^\pm \;:=\; -(\pm 2i\Pi_0^\pm)^{-1}\,M^\pm, \qquad S^\pm \;:=\; (\pm 2i\Pi_0^\pm)^{-1}\,R.$$

Wir betrachten die maximalen Lösungen $\widetilde{B}^\pm$ der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\partial_t \widetilde{B}^\pm(t,y,\eta) = W^\pm\big(t, Q^\pm(t,y,\eta),\eta\big)\,\widetilde{B}^\pm(t,y,\eta) + S^\pm\big(t, Q^\pm(t,y,\eta),\eta\big), \tag{3.4.11}$$

die für $(t,y,\eta) \in \widetilde{\mathcal{N}'_\pm}$ definiert sind, zur Randbedingung $\widetilde{B}(0,y,\eta) = c(y,\eta)$. Dabei wurde $\widetilde{\mathcal{N}'_\pm}$ in Lemma 3.3.7 eingeführt. Wir definieren noch das Vektorfeld

$$Z_\pm \;:=\; \nabla_\xi a_\pm(x, g^\pm)\cdot\nabla_x$$

auf $\mathcal{G}^\pm$. Hierbei sind uns $g^\pm$ und $\mathcal{G}^\pm$ aus Lemma 3.3.6 bekannt. Nun untersuchen wir den Fluß des reellen Vektorfeldes $\widehat{Z}_\pm := Z_\pm + \overline{Z}_\pm$. Aus $c\,\partial_z + \overline{c}\,\partial_{\overline{z}} = (\Re c)\,\partial_{\Re z} + (\Im c)\,\partial_{\Im z}$ folgt unmittelbar

$$\widehat{Z}_\pm \;=\; \sum_{j=1}^d \big(\Re a_\pm(x,g^\pm)\big)'_{\xi_j}\,\partial_{\Re x_j} + \big(\Im a_\pm(x,g^\pm)\big)'_{\xi_j}\,\partial_{\Im x_j}.$$

Wenn wir die kanonische Basis vom $\mathbb{C}^d$ durch $(\mathsf{e}_1,\ldots,\mathsf{e}_d)$ notieren, ist unter der Identifizierung $\partial_{\Re x_j} \leftrightarrow \mathsf{e}_j$, $\partial_{\Im x_j} \leftrightarrow i\mathsf{e}_j$, $j = 1,\ldots,d$, der Vektor im $\mathbb{C}^d$, der $\widehat{Z}_\pm$ entspricht, durch

$$\sum_{j=1}^d \Big(\big(\Re a_\pm(x,g^\pm)\big)'_{\xi_j} + i\,\big(\Im a_\pm(x,g^\pm)\big)'_{\xi_j}\Big)\,e_j$$

gegeben, also ist $\widehat{Z}_\pm \;\leftrightarrow\; \nabla_\xi a_\pm(x,g^\pm)$. Für jedes $(t,y,\eta) \in \mathcal{D}(\kappa^\pm)$, das die Eigenschaft $(t, Q^\pm(t,y,\eta),\eta) \in \mathcal{G}^\pm$ besitzt, gilt $g^\pm(t,Q^\pm(t,y,\eta),\eta) = \Xi^\pm(t,y,\eta)$. Dank (3.3.14) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\dot{Q}^\pm(t,y,\eta) \;&=\; \nabla_\xi a_\pm(Q^\pm(t,y,\eta), \Xi^\pm(t,y,\eta))\\ &=\; \nabla_\xi a_\pm(Q^\pm(t,y,\eta), g^\pm(t, Q^\pm(t,y,\eta),\eta)).\end{aligned}$$

Damit ist eine geeignete Einschränkung von $Q^\pm : \mathcal{D}(\kappa^\pm) \to \mathbb{C}^d$ gleich dem Fluß des reellen Vektorfeldes $\widehat{Z}_\pm$. Indem wir

$$B^\pm(t,x,\eta) \;:=\; \widetilde{B}^\pm\big(t,k^\pm(t,x,\eta),\eta\big)$$

definieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}
(\partial_t B^\pm + \widehat{Z}_\pm\, B^\pm)&\big(t,Q^\pm(t,y,\eta),\eta\big) \\
&= \frac{d}{dt}\, B^\pm\big(t,Q^\pm(t,y,\eta),\eta\big) \;=\; \partial_t \widetilde{B}^\pm(t,y,\eta) \\
&= W^\pm\big(t,Q^\pm(t,y,\eta),\eta\big)\, \widetilde{B}^\pm(t,y,\eta) + S^\pm\big(t,Q^\pm(t,y,\eta),\eta\big), \qquad (3.4.12)
\end{aligned}$$

da $k^\pm(t,Q^\pm(t,y,\eta),\eta) = y$ ist. Aus

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi a_\pm(x,\nabla_x\psi_\pm) &= (-i)\,\big(1 + (\nabla_x\psi_\pm + i\nabla\varphi)^2\big)^{-1/2}\,(\nabla_x\psi_\pm + i\nabla\varphi) \\
&= (\pm 2i\Pi_0^\pm)^{-1} 2\mathbf{\Pi}^\pm
\end{aligned}$$

schließen wir dank der Differentialgleichung (3.4.12), der $B^\pm$ genügt, und anhand der Definition von $\widehat{Z}_\pm$ auf

$$\begin{aligned}
(\pm 2i\Pi_0^\pm)^{-1}&(L^\pm\, B^\pm - R) \\
&= (\pm 2i\Pi_0^\pm)^{-1}\,\big(\pm 2i\Pi_0^\pm\,\partial_t + 2\mathbf{\Pi}^\pm\cdot\nabla_x + M^\pm\big)\, B^\pm - S^\pm \\
&= \big(\partial_t + \nabla_\xi a_\pm(x,\nabla_x\psi_\pm)\cdot\nabla_x - W^\pm\big)\, B^\pm - S^\pm \\
&= \big(\partial_t + \nabla_\xi a_\pm(x,\nabla_x\psi_\pm)\cdot\nabla_x - \partial_t - \widehat{Z}_\pm\big)\, B^\pm \qquad (3.4.13) \\
&= -\overline{\nabla_\xi a_\pm(x,g^\pm)}\cdot\nabla_{\overline{x}} B^\pm + \big(\nabla_\xi a_\pm(x,\nabla_x\psi_\pm) - \nabla_\xi a_\pm(x,g^\pm)\big)\cdot\nabla_x B^\pm. \qquad (3.4.14)
\end{aligned}$$

Wir verzichten in dem Teil des Beweises, der sich mit der Existenzaussage befaßt, auf alle $\pm$-Indizes. Wegen (3.3.49) wissen wir, daß $\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)}(\nabla_x\psi - g) = \mathcal{O}(\Gamma^N)$ gilt, was

$$\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)}\big(\nabla_\xi a(x,\nabla_x\psi) - \nabla_\xi a(x,g)\big) \;=\; \mathcal{O}(\Gamma^N) \qquad (3.4.15)$$

für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^{3d+1}$ impliziert. Offensichtlich sind alle partiellen Ableitungen von B auf kompakten Teilmengen von $\mathscr{N}'$ beschränkt. Um $d_{\overline{x}}B$ zu untersuchen, stellen wir fest, daß

$$d_{\overline{x}}B = d_{\overline{x}}\widetilde{B}(t,k,\eta) = (d_y\widetilde{B})(t,k,\eta)\, d_{\overline{x}}k + (d_{\overline{y}}\widetilde{B})(t,k,\eta)\, d_{\overline{x}}\overline{k}$$

erfüllt ist. Hierbei ist $\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} d_{\overline{x}}k = \mathcal{O}(\Gamma^N)$ aus Lemma 3.3.8 bekannt und es genügt eine ähnliche Schranke für $d_{\overline{y}}\widetilde{B}$ zu finden, um (3.4.10) zu erhalten. Dazu leiten wir die Differentialgleichung (3.4.11) ab und schließen so auf

$$\begin{aligned}
\partial_t d_{\overline{y}}\widetilde{B} = W\big(t,Q,\eta\big)\, d_{\overline{y}}\widetilde{B} &+ \big(d_x W\big(t,Q,\eta\big)\, d_{\overline{y}}Q\big)\,\widetilde{B} + \big(d_{\overline{x}} W\big(t,Q,\eta\big)\, d_{\overline{y}}\overline{Q}\big)\,\widetilde{B} \\
&+ d_x S\big(t,Q,\eta\big)\, d_{\overline{y}}Q + d_{\overline{x}} S\big(t,Q,\eta\big)\, d_{\overline{y}}\overline{Q},
\end{aligned}$$

was

$$\begin{aligned}&\partial^\alpha_{(t,\Re y,\Im y,\eta)}\big(\partial_t d_{\overline{y}}\widetilde{B} - W\big(t,Q,\eta\big)\, d_{\overline{y}}\widetilde{B}\big) \\ &= \partial^\alpha_{(t,\Re y,\Im y,\eta)}\big(\big(d_x W\big(t,Q,\eta\big)\, d_{\overline{y}}Q\big)\,\widetilde{B} + \big(d_{\overline{x}} W\big(t,Q,\eta\big)\, d_{\overline{y}}\overline{Q}\big)\,\widetilde{B} \\ &\quad + d_x S\big(t,Q,\eta\big)\, d_{\overline{y}}Q + d_{\overline{x}} S\big(t,Q,\eta\big)\, d_{\overline{y}}\overline{Q}\big) \;=\; \mathcal{O}(\widetilde{\Gamma}^N)\end{aligned} \tag{3.4.16}$$

wegen (3.3.26), (3.3.51), (3.4.7) und $|\Im Q|^2 \leqslant \mathcal{O}(1)\widetilde{\Gamma}$ beweist. Aufgrund von $\widetilde{B}(0,y,\eta) = c(y,\eta)$ folgt unter Verwendung der Voraussetzung (3.4.8) an c, daß $\partial^\alpha_{(\Re y,\Im y,\eta)} d_{\overline{y}}\widetilde{B}|_{t=0} = \partial^\alpha_{(\Re y,\Im y,\eta)} d_{\overline{y}}c = \mathcal{O}(|\Im y|^N)$ gilt. Ferner bemerken wir, daß

$$\widetilde{B}(0,y,\eta) = \widetilde{B}(0,k(0,x,\eta),\eta) = B(0,y,\eta)$$

erfüllt ist. Indem wir darauf die Duhamelsche Formel anwenden, folgern wir

$$\partial_t d_{\overline{y}}\widetilde{B} = W\big(t,Q,\eta\big)\, d_{\overline{y}}\widetilde{B} + \mathcal{O}(\widetilde{\Gamma}^N), \quad d_{\overline{y}}\widetilde{B}|_{t=0} = \mathcal{O}(|\Im y|^N).$$

Daraus ergibt sich

$$d_{\overline{y}}\widetilde{B} \;=\; U_{t,0}\,\mathcal{O}(|\Im y|^N) + \int_0^t U_{t,s}\,\mathcal{O}\big(\widetilde{\Gamma}(s,y,\eta)^N\big)\,ds. \tag{3.4.17}$$

Dabei genügt $U_{t,s}$ der Differentialgleichung $\partial_t U_{t,s} = W(t,Q(t,y,\eta),\eta)\,U_{t,s}$, $U_{s,s} = \mathbb{1}$. Da $\widetilde{\Gamma}(s,y,\eta) \leqslant \mathcal{O}(1)\,\widetilde{\Gamma}(t,y,\eta)$, $s \in [0,t]$, nach Lemma 3.3.7 gilt, impliziert das

$$d_{\overline{y}}\widetilde{B} \;=\; \mathcal{O}\big(\widetilde{\Gamma}(t,y,\eta)^N\big). \tag{3.4.18}$$

Nun wollen wir $\partial^\alpha_{(\Re y,\Im y,\eta)} d_{\overline{y}}\widetilde{B} = \mathcal{O}\big(\widetilde{\Gamma}^N\big)$ mittels Induktion für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^{3d}$ zeigen. Den Induktionsanfang $d_{\overline{y}}\widetilde{B} = \mathcal{O}\big(\widetilde{\Gamma}^N\big)$ haben wir bereits bewiesen. Wir nehmen $\partial^\beta_{(\Re y,\Im y,\eta)} d_{\overline{y}}\widetilde{B} = \mathcal{O}\big(\widetilde{\Gamma}^N\big)$ für jedes $\beta \in \mathbb{N}_0^{3d}$ mit $|\beta| \leqslant n \in \mathbb{N}_0$ an. Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^{3d}$mit $|\alpha| = n+1$. Dann ergibt sich aus (3.4.16)

$$\partial_t\partial^\alpha_{(\Re y,\Im y,\eta)} d_{\overline{y}}\widetilde{B} - \partial^\alpha_{(\Re y,\Im y,\eta)}\Big(W(t,Q,\eta)\, d_{\overline{y}}\widetilde{B}\Big) \;=\; \mathcal{O}(\widetilde{\Gamma}^N)$$

und unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\partial_t\partial^\alpha_{(\Re y,\Im y,\eta)} d_{\overline{y}}\widetilde{B} - W(t,Q,\eta)\,\partial^\alpha_{(\Re y,\Im y,\eta)} d_{\overline{y}}\widetilde{B} \;=\; \mathcal{O}(\widetilde{\Gamma}^N). \tag{3.4.19}$$

Da $\partial^\alpha_{(\Re y,\Im y,\eta)} d_{\overline{y}}\widetilde{B}|_{t=0} = \mathcal{O}(|\Im y|^N)$ gilt, liefert die Anwendung der Duhamelschen Formel auf (3.4.19)

$$\partial^\alpha_{(\Re y,\Im y,\eta)} d_{\overline{y}}\widetilde{B} = U_{t,0}\,\mathcal{O}(|\Im y|^N) + \int_0^t U_{t,s}\,\mathcal{O}\big(\widetilde{\Gamma}(s,y,\eta)^N\big)\,ds. \tag{3.4.20}$$

Dabei ist $U_{t,s}$ nach wie vor die Lösung von $\partial_t U_{t,s} = W(t, Q(t,y,\eta),\eta)\, U_{t,s}$, $U_{s,s} = \mathbb{1}$. So wie zuvor (siehe (3.4.18)) schließen wir auf $\partial^\alpha_{(\Re y,\Im y,\eta)} d_{\overline{y}} \widetilde{B} = \mathcal{O}\big(\widetilde{\Gamma}^N\big)$. Indem wir die Differentialgleichung (3.4.16) verwenden, erhalten wir zunächst

$$\partial_t d_{\overline{y}} \widetilde{B} \;=\; W\big(t,Q,\eta\big)\, d_{\overline{y}} \widetilde{B} + \mathcal{O}(\widetilde{\Gamma}^N) \;=\; \mathcal{O}(\widetilde{\Gamma}^N).$$

Wenn wir annehmen, daß wir $\partial^\alpha_{(t,\Re y,\Im y,\eta)} d_{\overline{y}} \widetilde{B} = \mathcal{O}\big(\widetilde{\Gamma}^N\big)$ für alle $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^{3d+1}$ mit $|\alpha| = n$ gezeigt haben, folgern wir induktiv mittels der Differentialgleichung (3.4.16)

$$\partial^\alpha_{(t,\Re y,\Im y,\eta)} \partial_t d_{\overline{y}} \widetilde{B} \;=\; \partial^\alpha_{(t,\Re y,\Im y,\eta)} \big(W\big(t,Q,\eta\big)\, d_{\overline{y}} \widetilde{B}\big) + \mathcal{O}(\widetilde{\Gamma}^N) = \mathcal{O}(\widetilde{\Gamma}^N).$$

Das impliziert $\partial^\alpha_{(t,\Re y,\Im y,\eta)} d_{\overline{y}} \widetilde{B} = \mathcal{O}\big(\widetilde{\Gamma}^N\big)$ für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^{3d+1}$. Insgesamt ergibt sich (3.4.10). Ableiten von (3.4.13) liefert

$$\begin{aligned}\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} (L^\pm\, B^\pm - R) = \;& \partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} \Big((\pm 2i\Pi_0^\pm)^{-1} \big(- \overline{\nabla_\xi a_\pm(x,g^\pm)} \cdot \nabla_{\overline{x}} B^\pm \\ & + \big(\nabla_\xi a_\pm(x,\nabla_x \psi_\pm) - \nabla_\xi a_\pm(x,g^\pm)\big) \cdot \nabla_x B^\pm \big) \Big)\end{aligned}$$

und mit Hilfe von (3.4.13) und (3.4.15) folgt (3.4.9).

Im Folgenden beweisen wir die Eindeutigkeit der Lösung. Sei $C^\pm$ eine weitere Lösung von (3.4.9) und (3.4.10). Dann gilt $(\pm 2i\Pi_0^\pm)^{-1} L^\pm (B^\pm - C^\pm) =: G^\pm$, wobei

$$\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} G^\pm \;=\; \partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} \big((\pm 2i\Pi_0^\pm)^{-1} (L^\pm B^\pm - R) - (L^\pm C^\pm - R) \big) \;=\; \mathcal{O}(\Gamma_\pm^N)$$

nach (3.4.9) erfüllt ist. Ferner betrachten wir

$$\begin{aligned}(\pm 2i\Pi_0^\pm)^{-1} L^\pm \;=\;& \partial_t + \nabla_\xi a_\pm(x,\nabla_x\psi_\pm)\cdot\nabla_x - W^\pm \;=\; \partial_t + \widehat{Z}_\pm - W^\pm \\ & - \overline{\nabla_\xi a_\pm(x,g^\pm)}\cdot\nabla_{\overline{x}} + \big(\nabla_\xi a_\pm(x,\nabla_x\psi_\pm) - \nabla_\xi a_\pm(x,g^\pm)\big)\cdot\nabla_x.\end{aligned}$$

Dabei ist $\widehat{Z}_\pm = \nabla_\xi a_\pm(x,g^\pm)\cdot\nabla_x + \overline{\nabla_\xi a_\pm(x,g^\pm)}\cdot\nabla_{\overline{x}}$ (siehe (3.4.13)). Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\big(\partial_t + \widehat{Z}_\pm - W^\pm\big)(B^\pm - C^\pm) \;=\;& G^\pm + \big\{ \overline{\nabla_\xi a_\pm(x,g^\pm)}\cdot\nabla_{\overline{x}} - \big(\nabla_\xi a_\pm(x,\nabla_x\psi_\pm) \\ & - \nabla_\xi a_\pm(x,g^\pm)\big)\cdot\nabla_x \big\}(B^\pm - C^\pm).\end{aligned}$$

Sei durch $\widetilde{S}^\pm$ die rechte Seite der letzten Identität notiert. Wir definieren $\widetilde{E}^\pm := (B^\pm - C^\pm)(t,Q^\pm,\eta)$. Da eine geeignete Einschränkung von $Q^\pm$ der Fluß des reellen Vektorfeldes $\widehat{Z}_\pm$ ist, ergibt sich

$$\partial_t \widetilde{E}^\pm - W^\pm(t,Q^\pm,\eta)\,\widetilde{E}^\pm \;=\; \widetilde{S}^\pm(t,Q^\pm,\eta).$$

Dabei ist $\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} \widetilde{S}^\pm = \mathcal{O}(\Gamma_\pm^N)$ aufgrund von (3.4.15) und (3.4.10) und da $\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} G^\pm = \mathcal{O}(\Gamma_\pm^N)$ ist. Nun wenden wir uns der Anfangsbedingung zu. Wegen (3.4.9) gilt

$$\partial^\beta_{(\Re y,\Im y,\eta)} \widetilde{E}^\pm|_{t=0} \;=\; \partial^\beta_{(\Re y,\Im y,\eta)} \big((B^\pm(0,y,\eta) - c) - (C^\pm(0,y,\eta) - c) \big) \;=\; \mathcal{O}(|\Im y|^N).$$

Mit Hilfe desselben Induktionsargumentes, das in diesem Beweis verwendet wurde, um $d_{\overline{y}}\widetilde{B}$ zu untersuchen, schließen wir auf $\partial^\alpha_{(t,\Re y,\Im y,\eta)} \widetilde{E}^\pm = \mathcal{O}(\widetilde{\Gamma}_\pm^N)$, was $\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} (B^\pm - C^\pm) = \mathcal{O}(\Gamma_\pm^N)$ für $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^{3d+1}$ impliziert. $\square$

Das folgende Lemma werden wir in Proposition 3.4.4 mit $f^\pm = i\tilde{\partial}^\pm B_\pm^{\nu-1}$ und $u^\pm = B_\pm^\nu$ für $\nu \in \mathbb{N}_0$ anwenden. Dabei ist $B_\pm^{-1} := 0$. Der Beweis des nächsten Lemmas folgt dem Beweis der Proposition 2.6 aus [41].

Lemma 3.4.3. *Seien $\mathscr{N}'_\pm \subset \mathscr{N}_\pm$ eine Umgebung von $\mathscr{E}_\pm$ in $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{R}^d$ und $f^\pm, u^\pm \in C^\infty(\mathscr{N}'_\pm, \mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$ glatte, matrixwertige Funktionen, die*

$$\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)}(\tilde{\Pi}^\pm + 1)\, f^\pm \;=\; \mathcal{O}(\Gamma_\pm^N), \tag{3.4.21}$$

$$\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)}\big(L^\pm\, u^\pm + \tilde{\partial}^\pm f^\pm\big) \;=\; \mathcal{O}(\Gamma_\pm^N), \tag{3.4.22}$$

$$\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} d_{\overline{x}} u^\pm \;=\; \mathcal{O}(\Gamma_\pm^N), \tag{3.4.23}$$

$$\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} d_{\overline{x}} f^\pm \;=\; \mathcal{O}(\Gamma_\pm^N) \tag{3.4.24}$$

für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^{3d+1}$ und die

$$\partial^\beta_{(\Re x,\Im x,\eta)}\big((\tilde{\Pi}^\pm(0,x,\eta) - 1)\, u^\pm(0,x,\eta) + f^\pm(0,x,\eta)\big) \;=\; \mathcal{O}(|\Im x|^N) \tag{3.4.25}$$

für jedes $(0,x,\eta) \in \mathscr{N}'_\pm$, $N \in \mathbb{N}$ und $\beta \in \mathbb{N}_0^{3d}$ genügen. Dann erfüllt $u^\pm$

$$\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)}\big((\tilde{\Pi}^\pm - 1)\, u^\pm + f^\pm\big) \;=\; \mathcal{O}(\Gamma_\pm^N), \tag{3.4.26}$$

$$\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)}(\tilde{\Pi}^\pm + 1)\, \tilde{\partial}^\pm u^\pm \;=\; \mathcal{O}(\Gamma_\pm^N) \tag{3.4.27}$$

auf $\mathscr{N}'_\pm$ für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^{3d+1}$.

Beweis. Infolge von (3.4.2) und (3.4.3) erhalten wir

$$\begin{aligned}
(\tilde{\Pi}^\pm)^2 \;&=\; \left(\Pi_0^\pm + \sum_{j=1}^d \alpha_j \Pi_j^\pm\right)\left(\Pi_0^\pm - \sum_{k=1}^d \alpha_k \Pi_k^\pm\right) \;=\; \left(\Pi_0^\pm\right)^2 - \sum_{j=1}^d \left(\Pi_j^\pm\right)^2 \\
&=\; \left(\sqrt{1 + (\nabla_x \psi_\pm + i\nabla\varphi)^2}\right)^2 - (\nabla_x \psi_\pm + i\nabla\varphi)^2 = \mathbb{1},
\end{aligned}$$

was wegen (3.4.6)

$$\begin{aligned}
(\tilde{\Pi}^\pm - 1)\, L^\pm \;&=\; \tilde{\Pi}^\pm\{\tilde{\partial}^\pm\,,\, \tilde{\Pi}^\pm\} \;-L^\pm \;=\; \tilde{\Pi}^\pm\tilde{\partial}^\pm\tilde{\Pi}^\pm + \tilde{\partial}^\pm - L^\pm \\
&=\; \{\tilde{\partial}^\pm\,,\, \tilde{\Pi}^\pm\}\, \tilde{\Pi}^\pm - L^\pm \;=\; L^\pm\, (\tilde{\Pi}^\pm - 1)
\end{aligned}$$

ergibt. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
L^\pm\left((\tilde{\Pi}^\pm - 1)\, u^\pm + f^\pm\right) \;&=\; (\tilde{\Pi}^\pm - 1)\, L^\pm\, u^\pm + (\tilde{\partial}^\pm\tilde{\Pi}^\pm + \tilde{\Pi}^\pm\tilde{\partial}^\pm)\, f^\pm \\
&=\; (\tilde{\Pi}^\pm - 1)\, (L^\pm\, u^\pm + \tilde{\partial}^\pm f^\pm) + \tilde{\partial}^\pm(\tilde{\Pi}^\pm + 1)\, f^\pm.
\end{aligned}$$

Das impliziert mit Hilfe von (3.4.21) und (3.4.22) $\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} L^\pm\left((\tilde{\Pi}^\pm - 1)\, u^\pm + f^\pm\right) = \mathcal{O}_N(\Gamma_\pm^N)$. Darauf dürfen wir wegen (3.4.25) Lemma 3.4.2 mit $R = 0$ und $c = 0$ anwenden. Da $C^\pm = 0$ eine weitere Lösung ist, ergibt sich insgesamt $\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)}\big((\tilde{\Pi}^\pm - 1)\, u^\pm + f^\pm\big) = \mathcal{O}_N(\Gamma_\pm^N)$. Die Identität (3.4.27) folgern wir aus (3.4.22) und (3.4.26), weil $(\tilde{\Pi}^\pm + 1)\, \tilde{\partial}^\pm u^\pm = L^\pm\, u^\pm + \tilde{\partial}^\pm f^\pm - \tilde{\partial}^\pm\big((\tilde{\Pi}^\pm - 1)\, u^\pm + f^\pm\big)$ ist. $\square$

Aufgrund von Lemma 3.4.2 können wir $B_\pm^\nu \in C^\infty(\mathscr{N}_\pm', \mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$ für $\nu \in \mathbb{N}_0$ als Lösungen der Differentialgleichungen

$$\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)}\big(L^\pm B_\pm^\nu + i\tilde\partial^\pm(\tilde\partial^\pm B_\pm^{\nu-1})\big) \;=\; \mathcal{O}(\Gamma_\pm^N), \qquad B_\pm^{-1} := 0 \tag{3.4.28}$$

auf $\mathscr{N}_\pm'$ zu Anfangsbedingungen

$$B_\pm^0(0,x,\eta) \;:=\; \chi(x,\eta)\,\Lambda^\pm\big(\mathbf{\Pi}^\pm(0,x,\eta)\big) \;=\; \chi(x,\eta)\,\Lambda^\pm\big(\eta + i\nabla\varphi(x)\big), \tag{3.4.29}$$

für $(0,x,\eta) \in \mathscr{N}_\pm'$ und

$$B_\pm^\nu|_{t=0} := \,-(2\Pi_0^\pm)^{-1}\alpha_0\,(i\tilde\partial^+ B_+^{\nu-1} + i\tilde\partial^- B_-^{\nu-1})\big|_{t=0}, \qquad \nu \in \mathbb{N}, \tag{3.4.30}$$

definieren. Hierbei ist χ die im Abschnitt unterhalb der Formel (3.4.1) eingeführte Abschneidefunktion. Wir fassen die Ergebnisse der vorangegangenen Konstruktionen in der folgenden Proposition zusammen. Ihr Beweis folgt Lemma 2.7 aus [41].

Proposition 3.4.4. *Die matrixwertigen Amplituden $B_\pm^\nu \in C^\infty(\mathscr{N}_\pm', \mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$, die durch* (3.4.28)–(3.4.30) *definiert sind, lösen die Transportgleichungen* $(\mathbf{T_0}), (\mathbf{T_1}), (\mathbf{T_2}), \ldots$ *auf $\mathscr{N}_\pm'$ und genügen*

$$\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)}(\tilde\Pi^\pm + 1)\,\tilde\partial^\pm B_\pm^\nu \;=\; \mathcal{O}(\Gamma_\pm^N), \qquad N \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{N}_0^{3d+1}. \tag{3.4.31}$$

Ferner gilt

$$\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)} d_{\overline{x}} B_\pm^\nu \;=\; \mathcal{O}(\Gamma_\pm^N), \qquad N \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{N}_0^{3d+1}. \tag{3.4.32}$$

Die Träger von $B_\pm^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}_0$, sind kompakt und in einer fest gewählten, kompakten Umgebung von $\mathscr{D}_\pm$ enthalten.

Beweis. Der Beweis erfolgt mittels Induktion und verwendet Lemma 3.4.3. Für $\nu = 0$ setzen wir $f^\pm = 0$. Damit ist (3.4.21) erfüllt und (3.4.22) ist gerade (3.4.28). Die Anfangsbedingung (3.4.25) ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
&\big(\tilde\Pi^\pm(0,x,\eta) - 1\big) B_\pm^0(0,x,\eta)\\
&\qquad = \alpha_0\big(\pm\sqrt{1+\zeta^2}\big)\left(1 - \frac{\alpha\cdot\zeta + \alpha_0}{\pm\sqrt{1+\zeta^2}}\right)\Big|_{\zeta=\eta+i\nabla\varphi} B_\pm^0(0,x,\eta)\\
&\qquad = 2\,\alpha_0\big(\pm\sqrt{1+(\eta+i\nabla\varphi)^2}\big)\big(1 - \Lambda^\pm(\eta+i\nabla\varphi)\big)\,B_\pm^0(0,x,\eta) \;=\; 0.
\end{aligned} \tag{3.4.33}$$

Letzteres gilt nach der in (3.4.29) an $B_\pm^0$ gestellten Anfangsbedingung. (3.4.23) folgt anhand der Definition von $B_\pm^0$ aus (3.4.10), was in Lemma 3.4.2 zu finden ist. Lemma 3.4.3 impliziert nun, daß (3.4.31) für $\nu = 0$ gilt, da dies (3.4.27) aus Lemma 3.4.3 ist. Ferner ist nach (3.4.26) $\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)}(\tilde\Pi^\pm - 1)\,B_\pm^0 = \mathcal{O}(\Gamma_\pm^N)$. Daraus folgern wir in einer zu (3.4.33) analogen Rechnung

$$\begin{aligned}
&\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)}\big(B_\pm^0 - \Lambda^\pm(\nabla_x\psi_\pm + i\nabla\varphi)\,B_\pm^0\big)\\
&\quad = \partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)}\Big(\big(\pm 2\alpha_0\sqrt{1+(\nabla_x\psi_\pm + i\nabla\varphi)^2}\big)^{-1}(\tilde\Pi^\pm - 1)B_\pm^0\Big) \;=\; \mathcal{O}(\Gamma_\pm^N).
\end{aligned}$$

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir nehmen nun an, daß $B_\pm^\nu$ $(\mathbf{T}_{\boldsymbol{\nu}})$, (3.4.31) und (3.4.32) für jedes $\nu = 0, \ldots, n$ genügt. Dann gelten (3.4.21)–(3.4.24) mit $f^\pm = i\tilde{\partial}^\pm B_\pm^n$ und $u^\pm = B_\pm^{n+1}$ aufgrund von (3.4.31), der Definition von $B_\pm^{n+1}$ und wegen (3.4.10) aus Lemma 3.4.2. Für $t = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}(\tilde{\Pi}^\pm - 1)\, B_\pm^{n+1}\big|_{t=0} &= (-2\Pi_0^\pm)^{-1} \left(\tilde{\Pi}^\pm - 1\right) \alpha_0 \,(i\tilde{\partial}^+ B_+^n + i\tilde{\partial}^- B_-^n)\big|_{t=0} \\ &= (-2\Pi_0^\pm)^{-1} \left(\Pi_0^\pm + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\Pi}^\pm - \alpha_0\right) (i\tilde{\partial}^+ B_+^n + i\tilde{\partial}^- B_-^n)\big|_{t=0}. \end{aligned} \tag{3.4.34}$$

Ferner stellen wir fest, daß sich aus (3.4.31) mit $\nu = n$

$$\partial^\beta_{(\Re x, \Im x, \eta)} \{\Pi_0^\pm \,(i\tilde{\partial}^\pm B_\pm^n)\big|_{t=0} - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\Pi}^\pm - \alpha_0)\,(i\tilde{\partial}^\pm B_\pm^n)\big|_{t=0}\} = \mathcal{O}(|\Im x|^N) \tag{3.4.35}$$

ergibt, da

$$\begin{aligned}\Gamma(0, x, \eta) &= |\Im(x, g^\pm)|^2 - \langle\, \Im x \,|\, \Re g^\pm \,\rangle + \Im\psi_\pm\,\big|_{t=0} \\ &= |\Im(x, \eta)|^2 - \langle\, \Im x \,|\, \Re\eta \,\rangle + \Im\langle\, \eta \,|\, x \,\rangle\end{aligned}$$

für reelles η erfüllt ist, was $\Gamma(0, x, \eta) = \mathcal{O}(|\Im x|^2)$ impliziert. Dabei ist

$$\boldsymbol{\Pi}^\pm\big|_{t=0} = \eta + i\nabla\varphi(x), \tag{3.4.36}$$

was unabhängig von der Wahl des Plus- oder Minus-Index ist. Aus (3.4.34)-(3.4.36) folgern wir

$$\begin{aligned}\partial^\beta_{(\Re x, \Im x, \eta)} \{(\tilde{\Pi}^\pm - 1)\, B_\pm^{n+1}\big|_{t=0}\} &= \partial^\beta_{(\Re x, \Im x, \eta)} \{(-2\Pi_0^\pm)^{-1} \left((\Pi_0^\pm + \Pi_0^+)(i\tilde{\partial}^+ B_+^n)\right. \\ &\qquad \left.+ (\Pi_0^\pm + \Pi_0^-)(i\tilde{\partial}^- B_-^n)\right)\big|_{t=0}\} \\ &= \partial^\beta_{(\Re x, \Im x, \eta)} \{ - i\tilde{\partial}^\pm B_\pm^n\big|_{t=0}\} \qquad \bmod \mathcal{O}(|\Im x|^N)\end{aligned}$$

für $\beta \in \mathbb{N}_0^{3d}$. Im letzten Schritt wurde

$$\Pi_0^+\big|_{t=0} = \sqrt{1 + (\eta + i\nabla\varphi)^2} = -\Pi_0^-\big|_{t=0} \tag{3.4.37}$$

verwandt. Damit erhalten wir (3.4.25). Wiederum mit Hilfe von Lemma 3.4.3 schließen wir auf (3.4.31) für $\nu = n+1$ und $\partial^\alpha_{(t, \Re x, \Im x, \eta)}((\tilde{\Pi}^\pm - 1)\, B_\pm^{n+1} + i\tilde{\partial}^\pm B_\pm^n) = \mathcal{O}(\Gamma_\pm^N)$, was gerade die Gleichungen $(\mathbf{K_{n+1}})$ sind. Das impliziert unter Verwendung von Lemma 3.4.1, daß $B_\pm^{n+1}$ der Differentialgleichung in $(\mathbf{T_{n+1}})$ genügt. Die Anfangsbedingung in $(\mathbf{T_{n+1}})$ ist erfüllt, da

$$B_+^{n+1}|_{t=0} \;=\; -(2\sqrt{1 + (\eta + i\nabla\varphi)^2})^{-1} \alpha_0 \,(i\tilde{\partial}^+ B_+^n + i\tilde{\partial}^- B_-^n)\big|_{t=0} \;=\; -B_-^{n+1}|_{t=0},$$

nach (3.4.30) und (3.4.37) gilt.

Schließlich erinnern wir uns, daß die Abschätzungen (3.4.32) aus Lemma 3.4.2 folgen. Der letzte Teil der Behauptung, der sich mit den Trägern von $B_\pm^\nu$ befaßt, ergibt sich offensichtlich aus Lemma 3.4.2 und daraus, daß die Werte von t auf $\mathcal{N}_\pm'$ beschränkt sind und daß die Träger der Anfangsbedingungen $B_\pm^\nu|_{t=0}$ in $\mathrm{supp}(\chi)$ enthalten sind. □

Um die Asymptotik führender Ordnung des Greenschen Kerns von $D_{h,V}$ in $(x_\star, y_\star)$ zu bestimmen, müssen wir den Wert von $B_+^0(\tau, x, 0)$ für $(\tau, x, 0) \in \mathring{\mathscr{D}}^+$ kennen. Damit befaßt sich das folgende Lemma. Dazu erinnern wir uns, daß anhand der Definition aus $(\tau, x, 0) \in \mathring{\mathscr{D}}^+$ folgt, daß es ein $y \in K_0$ gibt, für das $Q^+(t, y, 0) \in K_0$, $t \in [0, \tau]$ und $Q^+(\tau, y, 0) = x$ gelten.

Lemma 3.4.5. *Sei B_+^0 eine Lösung von $(\mathbf{T_0})$, die durch*

$$\partial^\alpha_{(t,\Re x,\Im x,\eta)}\big(L^+ B_+^0\big) \;=\; \mathcal{O}\big(\Gamma_+^N\big), \quad B_+(0, x, \eta) \;=\; \chi(x, \eta)\Lambda^+(\eta + i\nabla\varphi(x))$$

gegeben ist (siehe auch (3.4.28) *und* (3.4.29)*). Seien $(\tau, x, 0) \in \mathring{\mathscr{D}}^+$ und $U(\cdot, y) : [0, \tau] \to \mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*})$ eine Lösung von*

$$\frac{d}{dt} U(t, y) \;=\; -\frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2} \cdot \frac{\nabla V(Q^+(t, y, 0))}{V(Q^+(t, y, 0))}\, U(t, y) \qquad U(0, y) = \mathbb{1}, \tag{3.4.38}$$

auf $[0, \tau]$, wobei $Q^+(\tau, y, 0) = x$ ist. Dann gilt

$$B_+^0(\tau, x, 0) = \frac{(-V(y))^{1/2}\,\chi(y, 0)\, U(\tau, y)}{(-V(x))^{1/2}\,\det\big[d_y Q^+(\tau, y, 0)\big]^{1/2}} \Big(\frac{1}{2}\,\mathbb{1} - \frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot i\nabla\varphi(y) + \alpha_0}{2V(y)}\Big). \tag{3.4.39}$$

Beweis. Wegen Korollar 3.3.11 (ii) gelten $\psi_+(t, x, 0) = 0$ und $\nabla_x\psi_+(t, x, 0) = 0$. Deshalb ergeben sich $\Pi_0^+(t, x, 0) = \sqrt{1 - \nabla\varphi(x)^2} = -V(x)$ aus Proposition 3.2.4 (i) und $\Pi_j^+(t, x, 0) = i\partial_{x_j}\varphi$ für $j \in \{1, \ldots, d\}$ und für alle $(t, x, 0) \in \mathscr{D}^+$. Daraus folgt $\boldsymbol{\Pi}^+(t, x, 0) = i\nabla\varphi(x)$ für alle $(t, x, 0) \in \mathscr{D}^+$. Ferner schließen wir auf $\partial_t\Pi_0^+(t, x, 0) = -\partial_t V(x) = 0$ und $\mathrm{div}_x\boldsymbol{\Pi}^+(t, x, 0) = i\Delta\varphi(x)$. Wir erinnern uns, daß $\partial_i^+ := -\partial_{x_i}$ ist und $\partial_0^+ := i\partial_t$ ist. Das impliziert für $i, j \in \{1, \ldots, d\}$

$$\begin{aligned} \partial_i^+\Pi_j^+(t, x, 0) &= -i\partial_{x_i}\partial_{x_j}\varphi(x), \qquad \partial_j^+\Pi_0^+(t, x, 0) \;=\; \partial_{x_j}V(x), \\ \partial_0^+\Pi_j^+(t, x, 0) &= -\partial_t\partial_{x_j}\varphi(x) \;=\; 0. \end{aligned}$$

Dann folgern wir aus der Definition von $\mathrm{rot}^+\,\boldsymbol{\Pi}^+$, die wir in (3.4.4) finden,

$$\begin{aligned} -i\sum_{0\leqslant\mu<\nu\leqslant d}\sigma_{\mu\nu}\,(\mathrm{rot}^+\,\boldsymbol{\Pi}^+)_{\mu\nu}(t, x, 0) &= -\sum_{j=1}^d \alpha_j\,(\mathrm{rot}^+\,\boldsymbol{\Pi}^+)_{0j}(t, x, 0) \\ &\quad - \sum_{1\leq k<j\leq d}\alpha_j\alpha_k\,(\mathrm{rot}^+\,\boldsymbol{\Pi}^+)_{kj}(t, x, 0) \\ &= -\sum_{j=1}^d \alpha_j\,\big((\partial_0^+\Pi_j^+) - (\partial_j^+\Pi_0^+)\big)(t, x, 0) \\ &\quad - \sum_{1\leq k<j\leq d}\alpha_j\alpha_k\,\big((\partial_k^+\Pi_j^+) - (\partial_j^+\Pi_k^+)\big)(t, x, 0) \\ &= -\sum_{j=1}^d \alpha_j\,\big(0 - \partial_{x_j}V(x)\big) \;=\; \boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla V(x) \end{aligned}$$

für jedes $(t,x,0) \in \mathscr{D}^+$. Wenn wir das im Beweis von Lemma 3.4.2 definierte

$$W^+ \;:=\; -(2i\Pi_0^+)^{-1}\Big(i\partial_t\Pi_0^+ + \mathrm{div}_x\boldsymbol{\Pi}^+ - i\sum_{0\leqslant\mu<\nu\leqslant d}\sigma_{\mu\nu}\,(\mathrm{rot}^+\,\Pi^+)_{\mu\nu}\Big)$$

für beliebiges $(t,x,0) \in \mathscr{D}^+$ betrachten, erhalten wir

$$W^+(t,x,0) \;=\; \big(2iV(x)\big)^{-1}\big(i\Delta\varphi(x) + \boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla V(x)\big).$$

Für $(t,y,0) \in \widetilde{\mathscr{D}}^+$ ist die Differentialgleichung, die B_+^0 bestimmt, die Differentialgleichung (3.4.11) mit $S^+ = 0$. Damit ergeben sich

$$\begin{aligned}\partial_t\widetilde{B}_+^0(t,y,0) &= W^+\big(t,Q^+(t,y,0),0\big)\,\widetilde{B}_+^0(t,y,0)\\ &= \frac{i\Delta\varphi(Q^+(t,y,0)) + \boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla V(Q^+(t,y,0))}{2iV(Q^+(t,y,0))}\,\widetilde{B}_+^0(t,y,0)\end{aligned} \tag{3.4.40}$$

für $t\in[0,\tau]$ und die Anfangsbedingung

$$\widetilde{B}_+^0(0,y,0) \;=\; \chi(y,0)\,\Lambda^+(i\nabla\varphi(y)) \;=\; \chi(y,0)\Big(\frac{1}{2}\,\mathbb{1} - \frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot i\nabla\varphi(y) + \alpha_0}{2V(y)}\Big).$$

Dabei ist $\chi = 1$ in einer kleinen reellen Umgebung von $K_0\times\{0\}$ erfüllt, was $\chi(y,0) = 1$ für $y \in K_0$ impliziert.

Nun verwenden wir den Ansatz $\widetilde{B}_+^0(t,y,0) = \widetilde{b}(t,y)\,U(t,y)\,\widetilde{B}_+^0(0,y,0)$, wobei $\widetilde{b}$ eine skalare Funktion ist. Mit Hilfe dieses Ansatzes sehen wir, daß

$$\partial_t\widetilde{b}(t,y) \;=\; \frac{\Delta\varphi(Q^+(t,y,0))}{2V(Q^+(t,y,0))}\,\widetilde{b}(t,y), \quad t\in[0,\tau], \quad \widetilde{b}(0,y) = \chi(y,0) \tag{3.4.41}$$

die Gleichung ist, die wir zu lösen haben. Dazu definieren wir

$$F(x) \;:=\; \nabla_p H(x,\nabla\varphi(x)) \;=\; -\nabla_p\sqrt{1-|p|^2}\,\Big|_{p=\nabla\varphi(x)} \;=\; -V^{-1}(x)\,\nabla\varphi(x)$$

für $x \in K_0$ und betrachten die Gleichung $\partial_t Q^+(t,y,0) = F(Q^+(t,y,0))$. Diese gilt wegen $\nabla_\xi a_+(x,0) = \nabla_p H(x,\nabla\varphi(x))$ für $x \in K_0$, was in Lemma 3.2.5 zu finden ist. Dann liefert die Anwendung der Liouvilleschen Formel auf $\partial_t Q^+(t,y,0) = F(Q^+(t,y,0))$

$$\partial_t \det[d_yQ^+(t,y,0)] \;=\; \mathrm{div}\,F(Q^+(t,y,0))\,\det[d_yQ^+(t,y,0)], \quad (t,y,0)\in\widetilde{\mathscr{D}}^+.$$

Hierbei ist $\mathrm{div}F = -V^{-1}\Delta\varphi - V^{-1}\nabla V\cdot F$. Es folgt für $(t,y,0)\in\widetilde{\mathscr{D}}^+$

$$\partial_t\,\big(\det[d_yQ^+(t,y,0)]\big)^{-1/2} \;=\; -\frac{1}{2}\,\mathrm{div}\,F(Q^+(t,y,0))\,\big(\det[d_yQ^+(t,y,0)]\big)^{-1/2}.$$

Nun können wir die elementare Rechnung

$$\begin{aligned}
&\partial_t\big\{(-V(Q^+(t,y,0)))^{-1/2}\,\det[d_yQ^+(t,y,0)]^{-1/2}\big\}\\
&= \partial_t\,\big\{(-V(Q^+(t,y,0)))^{-1/2}\big\}\det[d_yQ^+(t,y,0)]^{-1/2}\\
&\quad + (-V(Q^+(t,y,0)))^{-1/2}\partial_t\,\big\{\det[d_yQ^+(t,y,0)]^{-1/2}\big\}\\
&= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\nabla V(Q^+(t,y,0))}{V(Q^+(t,y,0))}\,F(Q^+(t,y,0)) + \operatorname{div} F(Q^+(t,y,0))\right\}\\
&\quad \times \big\{(-V(Q^+(t,y,0)))^{-1/2}\,\det[d_yQ^+(t,y,0)]^{-1/2}\big\}\\
&= \frac{\Delta\varphi(Q^+(t,y,0))}{2V(Q^+(t,y,0))}\,\big\{(-V(Q^+(t,y,0)))^{-1/2}\,\det[d_yQ^+(t,y,0)]^{-1/2}\big\}
\end{aligned}$$

durchführen. Es folgt, daß

$$\begin{aligned}
\widetilde{b}(t,y) &:= \frac{(-V(Q^+(0,y,0)))^{1/2}}{(-V(Q^+(t,y,0))^{1/2}}\,\det[d_yQ^+(t,y,0)]^{-1/2}\\
&= \frac{(-V(y))^{1/2}}{(-V(x))^{1/2}}\,\det[d_yQ^+(t,y,0)]^{-1/2}
\end{aligned}$$

die in (3.4.41) gegebene Differentialgleichung löst. Die aus (3.4.41) bekannte Anfangsbedingung ist wegen

$$\widetilde{b}(0,y) \;=\; \frac{(-V(Q^+(0,y,0)))^{1/2}}{(-V(Q^+(0,y,0)))^{1/2}}\det[d_yQ^+(0,y,0)]^{-1/2} \;=\; \det[d_yy]^{-1/2} \;=\; 1$$

erfüllt.

Schließlich zeigen wir, daß der von uns gewählte Ansatz

$$\widetilde{B}^0_+(t,y,0) = \widetilde{b}(t,y)\,U(t,y)\,\widetilde{B}^0_+(0,y,0)$$

eine Lösung von (3.4.40) ist. Denn daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung (3.4.39). Da die Anfangsbedingung offensichtlich erfüllt ist, erhalten wir mit Hilfe von (3.4.38) und (3.4.41)

$$\begin{aligned}
\partial_t\widetilde{B}^0_+(t,y,0) &= \big(\partial_t\widetilde{b}(t,y)\big)U(t,y)\,\widetilde{B}^0_+(0,y,0) + \widetilde{b}(t,y)\big(\partial_tU(t,y)\big)\widetilde{B}^0_+(0,y,0)\\
&= \left(\frac{i\Delta\varphi(Q^+(t,y,0))}{2iV(Q^+(t,y,0))} + \frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla V(Q^+(t,y,0))}{2iV(Q^+(t,y,0))}\right)\\
&\quad\times\widetilde{b}(t,y)\,U(t,y)\,\widetilde{B}^0_+(0,y,0)\\
&= \frac{i\Delta\varphi(Q^+(t,y,0)) + \boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla V(Q^+(t,y,0))}{2iV(Q^+(t,y,0))}\,\widetilde{B}^0_+(t,y,0).
\end{aligned}$$

□

Das Lemma 3.4.5 gilt insbesondere im eindimensionalen Fall. Wir wenden uns nun dem Fall $d = 1$ zu und studieren die Gleichung (3.4.39), die die Lösung der ersten Transportgleichung angibt.

Lemma 3.4.6. *Seien $d = 1$, B_+^0 eine Lösung von* ($\mathbf{T_0}$)*, die durch* (3.4.28) *und* (3.4.29) *gegeben ist, und* $(\tau, x, 0) \in \mathring{\mathscr{D}}^+$*. Dann gilt*

$$\begin{aligned} B_+^0(\tau, x, 0) \;=\; & \frac{\chi(y,0)}{2(-V(x))^{1/2}\,(-V(y))^{1/2}\,(Q^+)'_y(\tau,y,0)^{1/2}} \\ & \cdot \big(\cos(\vartheta(\tau))\,\mathbb{1} - i\sin(\vartheta(\tau))\,\alpha_1\big)\big(i\varphi'(y)\,\alpha_1 + \alpha_0 - V(y)\big), \end{aligned} \tag{3.4.42}$$

wobei $Q^+(\tau, y, 0) = x$, $\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *und*

$$\vartheta(t) \;:=\; \int_0^t \frac{V'(Q^+(s,y,0))}{2V(Q^+(s,y,0))}\,ds, \qquad t \in [0,\tau],$$

sind.

Beweis. Aus Lemma 3.4.5 ist bekannt, daß eine Lösung von

$$\frac{d}{dt}\,U(t,y) \;=\; -i\,\frac{V'(Q^+(t,y,0))}{2V(Q^+(t,y,0))}\,\alpha_1\,U(t,y),\ t \in [0,\tau], \quad U(0,y) \;=\; \mathbb{1}, \tag{3.4.43}$$

zu bestimmen ist, da in einer Dimension $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1$ gilt. Dazu multiplizieren wir (3.4.43) mit $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und schließen auf

$$\frac{d}{dt}\,\widetilde{U}(t,y) \;=\; -i\,\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{V'(Q^+(t,y,0))}{2V(Q^+(t,y,0))}\,\widetilde{U}(t,y),$$

wobei $\widetilde{U}(t,y) := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} U(t,y)$ ist. Mit Hilfe der Definition

$$\vartheta(t) \;:=\; \int_0^t \frac{V'(Q^+(s,y,0))}{2V(Q^+(s,y,0))}\,ds, \qquad t \in [0,\tau],$$

ergibt sich

$$\widetilde{U}(t,y) \;=\; \begin{pmatrix} e^{-i\vartheta(t)} & 0 \\ 0 & e^{+i\vartheta(t)} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,\tau].$$

Dann folgern wir, daß

$$\begin{aligned} U(t,y) \;&=\; -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\widetilde{U}(t,y)\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{i\vartheta(t)} + e^{-i\vartheta(t)} & e^{-i\vartheta(t)} - e^{i\vartheta(t)} \\ e^{-i\vartheta(t)} - e^{i\vartheta(t)} & e^{-i\vartheta(t)} + e^{i\vartheta(t)} \end{pmatrix} \;=\; \cos(\vartheta(t))\,\mathbb{1} - i\sin(\vartheta(t))\,\alpha_1 \end{aligned}$$

Lösung von (3.4.43) für $t \in [0,\tau]$ ist. Die Anfangsbedingung $U(0,y) = \mathbb{1}$ ist offensichtlich erfüllt. Wenn wir das in (3.4.39) einsetzen, erhalten wir die Behauptung. $\square$

In der folgenden Bemerkung widmen wir uns der Gleichung (3.4.40), die $\widetilde{B}_+^0$ und damit auch B_+^0 bestimmt.

Bemerkung 3.4.7. *Im Beweis von Lemma 3.4.5 taucht die Gleichung*

$$\partial_t \widetilde{B}_+^0(t,y,0) \;=\; \frac{\Delta\varphi(Q^+(t,y,0))}{2V(Q^+(t,y,0))}\,\widetilde{B}_+^0(t,y,0) + \frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla V(Q^+(t,y,0))}{2iV(Q^+(t,y,0))}\,\widetilde{B}_+^0(t,y,0)$$

auf (siehe auch (3.4.40)*). Wir erinnern uns an die im Beweis von Lemma 3.4.5 getroffene Definition* $F(x) \;:=\; \nabla_p H(x,\nabla\varphi(x)) \;=\; -V^{-1}(x)\,\nabla\varphi(x)$ *, woraus wir* $\mathrm{div}F = -V^{-1}\Delta\varphi - V^{-1}\nabla V\cdot F$ *folgern. Das impliziert, daß* (3.4.40) *keine vollständige Divergenz von* F *enthält. Nach dem, was uns im Fall eines semiklassischen Schrödingeroperators bekannt ist, würden wir eine vollständige Divergenz von* F *in der Gleichung* (3.4.40) *erwarten. Der matrixwertige Teil in* (3.4.40) *ist der, der dem Unterschied zwischen dem semiklassischem Dirac- und Schrödingeroperator geschuldet ist. In Anhang A werden wir eine andere Herangehensweise an die Bestimmung von* B_+^0 *vorstellen. In der Gleichung, die in Anhang A zur Bestimmung von* B_+^0 *auftauchen wird, wird eine vollständige Divergenz von* F *zu finden sein.*

Im folgenden Korollar untersuchen wir mit Hilfe von Lemma 3.4.5 das Symmetrieverhalten von B_+^0. Dazu definieren wir

$$M(x_\star,y_\star) := (-V(x_\star))\Lambda^+(i\varpi(\tau))\,\alpha_0\,U(\tau)\,(-V(y_\star))\Lambda^+(i\varpi(0)).$$

Wir werden zeigen, daß $M(x_\star,y_\star)^* = M(y_\star,x_\star)$ gilt. Das impliziert, daß die Formel (3.7.1) aus Satz 3.7.1 das Symmetrieverhalten eines Kerns eines matrixwertigen selbstadjungierten Operators besitzt.

Korollar 3.4.8. *Seien* B_+^0 *eine Lösung von* ($\mathbf{T_0}$)*, die durch* (3.4.28) *und* (3.4.29) *gegeben ist, und* $x_\star, y_\star$ *Punkte, die die Voraussetzung 3.2.3 erfüllen. Sei*

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \varpi \end{pmatrix} : [0,\tau] \to \mathbb{R}^{2d}$$

eine glatte Kurve, die der Gleichung

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \nabla_p H \\ -\nabla_x H \end{pmatrix}(x,p) \tag{3.4.44}$$

und $H(\gamma(t),\varpi(t)) = 0$ *genüge und für die* $\gamma(0) = y_\star$ *und* $\gamma(\tau) = x_\star$ *gelte. Dann gilt*

$$B_+^0(\tau,x_\star,0) \;=\; (-V(x_\star))\,\Lambda^+(i\varpi(\tau))\,\alpha_0\,B_+^0(\tau,x_\star,0).$$

Daraus folgt

$$B_+^0(\tau,x_\star,0) \;=\; \frac{M(x_\star,y_\star)\,\chi(y_\star,0)}{(-V(y_\star))^{1/2}(-V(x_\star))^{1/2}\det\left[d_yQ^+(\tau,y_\star,0)\right]^{1/2}},$$

wobei $M(x_\star,y_\star) \;:=\; (-V(x_\star))\Lambda^+(i\varpi(\tau))\,\alpha_0\,U(\tau)\,(-V(y_\star))\Lambda^+(i\varpi(0))$ *definiert ist. Ferner gilt* $M(x_\star,y_\star)^* = M(y_\star,x_\star)$.

Beweis. Es ist bekannt, daß $\tilde{\Pi}^+(\tau, x_\star, 0) = -\alpha_0\, \boldsymbol{\alpha} \cdot i\nabla\varphi(x_\star) + \alpha_0\,(-V(x_\star))$ gilt, wobei $\nabla\varphi(x_\star) = \varpi(\tau)$ ist. Dann ergibt sich aus der Gleichung $(\mathbf{K_0})$ $(\tilde{\Pi}^+ - 1)\, B_+^0 = 0$

$$\begin{aligned} B_+^0(\tau, x_\star, 0) &= \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\tilde{\Pi}^+(\tau, x_\star, 0)\Big)\, B_+^0(\tau, x_\star, 0) \\ &= (-V(x_\star))\,\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_0 + \boldsymbol{\alpha}\cdot i\nabla\varphi(x_\star)}{-V(x_\star)} + \mathbb{1}\right)\alpha_0\, B_+^0(\tau, x_\star, 0) \\ &= (-V(x_\star))\,\Lambda^+(i\varpi(\tau))\,\alpha_0\, B_+^0(\tau, x_\star, 0). \end{aligned}$$

Wenn wir das in (3.4.39) einsetzen, schließen wir wegen $\nabla\varphi(y_\star) = \varpi(0)$ auf

$$\begin{aligned} B_+^0(\tau, x_\star, 0) &= \frac{(-V(x_\star))\,\Lambda^+(i\varpi(\tau))\,\alpha_0(-V(y_\star))^{1/2}\,\chi(y_\star, 0)\,U(\tau)}{(-V(x_\star))^{1/2}\,\det\big[d_yQ^+(\tau, y_\star, 0)\big]^{1/2}}\,\Lambda^+(i\varpi(0)) \\ &= \frac{M(x_\star, y_\star)\,\chi(y_\star, 0)}{(-V(y_\star))^{1/2}(-V(x_\star))^{1/2}\det\big[d_yQ^+(\tau, y_\star, 0)\big]^{1/2}}. \end{aligned}$$

Hierbei ist $M(x_\star, y_\star) := (-V(x_\star))\Lambda^+(i\varpi(\tau))\,\alpha_0\,U(\tau)\,(-V(y_\star))\Lambda^+(i\varpi(0))$.

Im Folgenden werden wir beweisen, daß das hermitesch Konjugierte von $M(x_\star, y_\star)$ denselben Ausdruck wie das Vertauschen der Rollen von $x_\star$ und $y_\star$ in $M(x_\star, y_\star)$ liefert.

Wir bemerken zunächst, daß die Hamiltonsche Trajektorie in $\{H = 0\}$, deren Projektion auf den Ortsraum von $x_\star$ nach $y_\star$ verläuft, durch

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\gamma} \\ \widetilde{\varpi} \end{pmatrix}(t) := \begin{pmatrix} \gamma \\ -\varpi \end{pmatrix}(\tau - t), \qquad t \in [0, \tau],$$

gegeben ist. Folglich gilt

$$M(y_\star, x_\star) = (-V(y_\star))\Lambda^+(-i\varpi(0))\,\alpha_0\,\widetilde{U}(\tau)\,(-V(x_\star))\Lambda^+(-i\varpi(\tau)),$$

wobei $\widetilde{U}$ eine Lösung von

$$\frac{d}{dt}\,\widetilde{U}(t) = i\boldsymbol{\alpha}\cdot w(\widetilde{\gamma}(t))\,\widetilde{U}(t), \quad t \in [0, \tau], \qquad w := -(2V)^{-1}\nabla V$$

ist. Aufgrund von

$$\Lambda^+(i\varpi(\tau))^* = \frac{1}{2}\,\mathbb{1} + \frac{1}{2}\frac{\alpha\cdot(-i\varpi(\tau)) + \alpha_0}{-V(x_\star)} = \Lambda^+(-i\varpi(\tau))$$

und wegen $\Lambda^+(i\varpi(0))^* = \Lambda^+(-i\varpi(0))$ genügt es $\alpha_0\,\widetilde{U}(\tau) = U(\tau)^*\,\alpha_0$ zu zeigen, um $M(y_\star, x_\star) = M(x_\star, y_\star)^*$ zu erhalten.

Nun wollen wir $\alpha_0\,\widetilde{U}(\tau) = U(\tau)^*\,\alpha_0$ beweisen. Dazu erinnern wir uns, daß $U(\tau)$ nach (3.4.38) eine Lösung von

$$\frac{d}{dt}\,U(t) = i\boldsymbol{\alpha}\cdot w(\gamma(t))\,U(t), \quad t \in [0, \tau], \qquad U(0) = \mathbb{1},$$

ist. Damit läßt sich $U(\tau)$ durch die Dysonreihe $U(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(\tau)$ darstellen. Dabei ist

$$I_n(\tau) := \int_{\tau\,\triangle_n} i\boldsymbol{\alpha}\cdot w(\gamma(t_n))\cdots i\boldsymbol{\alpha}\cdot w(\gamma(t_1))\,dt_1\ldots dt_n.$$

Ferner notieren wir durch $\tau\,\triangle_n := \{0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant \tau\}$ den Standard-n-Simplex. Das impliziert unter Verwendung von $\{\alpha_0,\alpha_j\} = 0$ und $\alpha_j^* = \alpha_j$, $j = 1,\ldots,d$,

$$\begin{aligned} I_n(\tau)^*\,\alpha_0 &= \int_{\tau\,\triangle_n} \{i\boldsymbol{\alpha}\cdot w(\gamma(t_n))\cdots i\boldsymbol{\alpha}\cdot w(\gamma(t_1))\}^*\;dt_1\ldots dt_n\,\alpha_0 \\ &= \int_{\tau\,\triangle_n} (-1)^n\,i\boldsymbol{\alpha}\cdot w(\gamma(t_1))\cdots i\boldsymbol{\alpha}\cdot w(\gamma(t_n))\,dt_1\ldots dt_n\,\alpha_0 \\ &= \alpha_0 \int_{\tau\,\triangle_n} i\boldsymbol{\alpha}\cdot w(\gamma(t_1))\cdots i\boldsymbol{\alpha}\cdot w(\gamma(t_n))\,dt_1\ldots dt_n. \end{aligned}$$

Wenn wir im letzten Ausdruck die Substitution $s_1 = \tau - t_n,\ldots,s_n = \tau - t_1$ durchführen, erhalten wir

$$\begin{aligned} &\alpha_0 \int_{\tau\,\triangle_n} i\boldsymbol{\alpha}\cdot w(\gamma(\tau - s_n))\cdots i\boldsymbol{\alpha}\cdot w(\gamma(\tau - s_1))\,dt_1\ldots dt_n \\ &\quad= \alpha_0 \int_{\tau\,\triangle_n} i\boldsymbol{\alpha}\cdot w(\widetilde{\gamma}(s_n))\cdots i\boldsymbol{\alpha}\cdot w(\widetilde{\gamma}(s_1))\,ds_1\ldots ds_n =: \alpha_0\,\widetilde{I}_n(\tau). \end{aligned}$$

Daraus folgt $\widetilde{U}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{I}_n(\tau)$. Insgesamt ergibt sich

$$\alpha_0\,\widetilde{U}(\tau) = \alpha_0 \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{I}_n(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(\tau)^*\alpha_0 = U(\tau)^*\,\alpha_0.$$

□

3.4.3 Näherungslösung der zeitabhängigen konjugierten Diracgleichung

In diesem Unterabschnitt wollen wir eine Lösung von $(\pm h\partial_t + D_{h,V,\varphi})\,u_\pm = 0$ bestimmen, indem wir die Ergebnisse aus Abschnitt 3.3 und Unterabschnitt 3.4.2 verwenden. Dort haben wir die Hamilton-Jacobi-Gleichungen bzw. die Transportgleichungen bis auf Fehlerterme der Ordnung $\mathcal{O}(\Gamma_\pm^N)$ gelöst. Diese Fehlerterme zerstören jedoch nicht das WKB-Verfahren, wie wir in Proposition 3.4.9 zeigen werden.

Wir beginnen mit der Wahl glatter Abschneidefunktionen $\varrho_\pm \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{2d})$, die $\varrho_\pm \equiv 1$ in einer Umgebung von $\mathscr{E}_\pm$ genügen, für deren Träger $\operatorname{supp}(\varrho_\pm) \subset \mathscr{N}_\pm' \cap (\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{2d})$ gelten und deren partielle Ableitungen beliebiger Ordnung gleichmäßig beschränkt sind. Zunächst definieren wir die Borel-Resummation $B_\pm(\,\cdot\,;h) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{2d}, \mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$, $h \in (0,1]$, durch

$$B_\pm(t,x,\eta;h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} h^\nu\,\theta(h/\varepsilon_\nu)\,\varrho_\pm(t,x,\eta)\,B_\pm^\nu(t,x,\eta) \tag{3.4.45}$$

für $(t,x,\eta) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{2d}$ und $h \in (0,1]$, wobei $\theta \in C^\infty(\mathbb{R},[0,1])$ gleich 1 auf $(-\infty,1]$ und gleich 0 auf $[2,\infty)$ ist. Dabei setzen wir $B_\pm^\nu$ außerhalb des ursprünglichen Definitionsbereiches $\mathscr{N}_\pm'$ gleich Null. Falls die Konvergenz $\varepsilon_\nu \searrow 0$ hinreichend schnell ist, erhalten wir

$$\sup \left\| \partial^\alpha_{(t,x,\eta)} \Big(B_\pm(t,x,\eta;h) - \sum_{\nu=0}^{N} h^\nu \, \varrho_\pm(t,x,\eta) \, B_\pm^\nu(t,x,\eta) \Big) \right\| \leqslant C_{N,\alpha} \, h^{N+1} \tag{3.4.46}$$

für $N \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2d+1}$, $h \in (0, h_{\alpha,N}]$ und geeignete Konstanten $C_{N,\alpha}, h_{\alpha,N} \in (0,\infty)$, wobei das Supremum über $(t,x,\eta) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{2d}$ gebildet wird. Weitere Eigenschaften der Borel-Resummation finden sich etwa in Proposition 2.3.2 aus [7].

Proposition 3.4.9. *Es gibt matrixwertige Funktionen* $\check{r}_\pm(\,\cdot\,;h) \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{2d}, \mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$, *die einen kompakten Träger besitzen, die den Gleichungen*

$$(\pm h\,\partial_t + D_{h,V,\varphi})\,(e^{i\psi_\pm/h}\,B_\pm) = \check{r}_\pm, \qquad h \in (0,1],$$

genügen und für die zu jedem $N \in \mathbb{N}$ *und* $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2d+1}$ *derart eine Konstante* $C_{N,\alpha} \in (0,\infty)$ *existiert, daß*

$$\sup_{(t,x,\eta)\in\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}^{2d}} \|\partial^\alpha_{(t,x,\eta)} \check{r}_\pm(t,x,\eta;h)\| \leqslant C_{N,\alpha}\, h^N, \quad h \in (0,1], \tag{3.4.47}$$

gilt.

Beweis. Wir betrachten die in (3.4.1) auftretenden Terme, die zu den verschiedenen Potenzen von h gehören. Dann wissen wir, daß jeder dieser Terme eine glatte matrixwertige Funktion auf $\mathscr{N}_\pm'$ ist, dessen partielle Ableitungen beliebiger Ordnung gleich $\mathcal{O}(\Gamma_\pm^N)$, $N \in \mathbb{N}$, sind. Wenn wir uns erinnern, daß $\Gamma_\pm \leqslant \mathcal{O}(1)\,\Im\psi_\pm$ auf dem reellen Bereich nach (3.3.56) aus Lemma 3.3.11 ist, ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned}(\pm h\,\partial_t + D_{h,V,\varphi})\,[e^{i\psi_\pm/h}\,B_\pm] &= \sum_{\nu=0}^{\infty} h^\nu\; \theta(h/\varepsilon_\nu)\, e^{i\psi_\pm/h}\, \mathcal{O}\big((\Im\psi_\pm)^N\big) \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{\infty} h^\nu\, \theta(h/\varepsilon_\nu)\, e^{i\psi_\pm/h}\, [(\pm\partial_t - i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)\varrho_\pm]\, B_\pm^{\nu-1} \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{\infty} h^\nu\, \big(\theta(h/\varepsilon_{\nu-1}) - \theta(h/\varepsilon_\nu)\big)\, e^{i\psi_\pm/h} \\ &\quad \times (\pm\partial_t - i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)[\varrho_\pm\, B_\pm^{\nu-1}].\end{aligned} \tag{3.4.48}$$

Folglich sind beliebige partielle Ableitungen des ersten Terms der rechten Seite von (3.4.48) durch

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} h^\nu \theta(h/\varepsilon_\nu)\, e^{i\psi_\pm/h} \cdot \big(\text{Polynom in den partiellen Ableitungen von } \psi_\pm\big)$$

gegeben. Mit Hilfe von

$$e^{-\Im\psi_\pm/h}\,(\Im\psi_\pm)^N \;\leqslant\; \Big(\frac{(\Im\psi_\pm)^N}{N!\,h^N}\Big)^{-1}(\Im\psi_\pm)^N \;=\; N!\,h^N, \qquad N\in\mathbb{N}, \tag{3.4.49}$$

werden die inversen Potenzen von h, die im Polynom in den partiellen Ableitungen von $\psi_\pm$ auftreten, kompensiert. Das impliziert, daß die partiellen Ableitungen des ersten Terms in (3.4.48) von der Ordnung $\mathcal{O}(h^\infty)$ sind.

Ferner gilt $\Im\psi_\pm > 0$ auf $\mathrm{supp}(\varrho_\pm')$ und beliebige partielle Ableitungen von $R_\nu := [(\pm\partial_t - i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)\varrho_\pm]\,B_\pm^\nu$ sind lokal beschränkt. Daher ergibt sich $\partial^\alpha_{(t,x,\eta)}[e^{i\psi_\pm/h}\,R_\nu] = \mathcal{O}(h^\infty)$.

Indem wir uns erinnern, daß θ gleich 1 auf dem Intervall $(-\infty,1]$ ist und daß (ε_ν) eine monoton fallende Folge ist, erhalten wir $\theta(h/\varepsilon_{\nu-1}) - \theta(h/\varepsilon_\nu) = 0$ für jedes $h\in(0,\varepsilon_\nu)$ und $\nu\in\mathbb{N}$. Damit folgern wir, daß beliebige partielle Ableitungen des dritten Terms der rechten Seite von (3.4.48) von der Ordnung $\mathcal{O}(h^\infty)$ sind. □

3.5 Parametrix des konjugierten Diracoperators

In diesem Abschnitt werden wir eine Parametrix des konjugierten Diracoperators $D_{h,V,\varphi} := e^{\varphi/h}D_{h,V}e^{-\varphi/h}$ angeben und damit einen Ausdruck für den Kern der Inversen des Diracoperators $D_{h,V}$ erhalten. Um die approximative Inverse von $D_{h,V,\varphi}$ zu bestimmen, integrieren wir die Parametrix der Wärmeleitungsgleichung bzgl. der Zeitvariablen t und ergänzen einen Term, der zum Bereich, wo das Symbol $\widehat{D}_{V,\varphi}$ gleichmäßig elliptisch ist, gehört. Dazu erinnern wir uns an die asymptotische Entwicklung der Komposition zweier Symbole und konstruieren dann mittels eines Standardverfahrens den Teil der Parametrix, der zum Bereich außerhalb von $K_0\times\{0\}$ gehört. Denn dort ist das Symbol $\widehat{D}_{V,\varphi}$ invertierbar.

Seien $k,m\in\mathbb{R}$ und $b:\mathbb{R}^{2d}\times(0,h_0]\to\mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*})$ eine Abbildung. Wir notieren $b\in S^k(\langle\xi\rangle^m;\mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$, falls $h_0>0$ und $b(\,\cdot\,;h)\in C^\infty(\mathbb{R}^{2d},\mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$ für $h\in(0,h_0]$ ist und falls zu jedem $\alpha\in\mathbb{N}_0^{2d}$ Konstanten $h_\alpha, C_\alpha\in(0,\infty)$ existieren, für die

$$\|\partial^\alpha_{(x,\xi)}b(x,\xi;h)\| \;\leqslant\; C_\alpha\,\langle\xi\rangle^m\,h^{-k}, \qquad x,\xi\in\mathbb{R}^d,\ h\in(0,h_\alpha],$$

gilt. Ferner definieren wir

$$S^{-\infty}(\langle\xi\rangle^{-\infty};\mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*})) \;:=\; \bigcap_{k\in\mathbb{N}} S^k(\langle\xi\rangle^{-k};\mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*})).$$

Im Folgenden verwenden wir die semiklassische Standardquantisierung matrixwertiger Symbole $b\in S^k(\langle\xi\rangle^m;\mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$, die durch die oszillierenden Integrale

$$\mathrm{Op}_h(b)\,f(x) := \int e^{i\langle\,\xi\,|\,x-y\,\rangle/h}\,b(x,\xi)\,f(y)\,\frac{dyd\xi}{(2\pi h)^d}, \quad f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^{d_*})$$

bestimmt ist. Seien $k_1,k_2,m_1,m_2\in\mathbb{R}$. Wir betrachten Symbole $b\in S^{k_1}(\langle\xi\rangle^{m_1};\mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$ und $c\in S^{k_2}(\langle\xi\rangle^{m_2};\mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$. Dann ist das Symbol $b\#_h c$ von $\mathrm{Op}_h(b)\circ\mathrm{Op}_h(c)$ ein Element von $S^{k_1+k_2}(\langle\xi\rangle^{m_1+m_2};\mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$ und $b\#_h c$ besitzt die asymptotische Entwicklung

$$b\#_h c(x,\xi;h) = e^{ihD_\eta D_y}\, b(x,\eta)\, c(y,\xi)\Big|_{y=x,\eta=\xi} \asymp \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \frac{h^{|\alpha|}}{i^{|\alpha|}\alpha!}\,(\partial_\xi^\alpha b)(x,\xi)\,(\partial_x^\alpha c)(x,\xi)$$

in $S^{k_1+k_2}(\langle\xi\rangle^{m_1+m_2};\mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$. Im Fall von skalaren Symbolen findet sich das etwa in Kapitel 2.7 aus [7].

Nun wenden wir uns dem Symbol $\widehat{D}_{V,\varphi}(x,\xi)$ des konjugierten Diracoperators zu und stellen fest, daß nach Voraussetzung 3.1.1 $\widehat{D}_{V,\varphi}(x,\xi) = \boldsymbol{\alpha}\cdot(\xi + i\nabla\varphi(x)) + \alpha_0 + V(x) \in S^0(\langle\xi\rangle;\mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$ gilt. Ferner ist $\widehat{D}_{V,\varphi}(x,\xi)$ außerhalb von $K_0\times\{0\}$ invertierbar. Denn analog zur Rechnung in (3.2.9) ergibt sich

$$\left|\det\widehat{D}_{V,\varphi}(x,\xi)\right| = (1 + |\xi + i\nabla\varphi(x)|^2 - V^2(x))^{d_\star/2}.$$

Folglich ist $\left|\det\widehat{D}_{V,\varphi}(x,\xi)\right| \geq (1 - |\nabla\varphi(x)|^2 - V^2(x))^{d_\star/2} > 0$ für $x\notin K_0$ mit Hilfe von Lemma 3.2.4 erfüllt.

Wenn das Symbol $\widehat{D}_{V,\varphi}(x,\xi)$ für jedes $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2d}$ invertierbar wäre, gäbe es eine wohlbekannte asymptotische Entwicklung der Gestalt $\check{q}(x,\xi)\asymp\sum_{\nu=0}^\infty h^\nu\, q_\nu(x,\xi)$ des matrixwertigen Symbols des inversen Operators. Wir werden diese asymptotische Entwicklung formal angeben und $q_\nu(x,\xi)$ in jedem Punkt $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2d}$ bestimmen, in dem $\widehat{D}_{V,\varphi}(x,\xi)$ invertierbar ist. Da das Symbol $\widehat{D}_{V,\varphi}(x,\xi)$ nur außerhalb von $K_0\times\{0\}$ invertierbar ist, führen wir eine glatte Abschneidefunktion ein, um allein den Bereich außerhalb von $K_0\times\{0\}$ zu betrachten. Wir wählen eine Abschneidefunktion $\widetilde{\chi}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d},[0,1])$, für die $\widetilde{\chi}\equiv 1$ in einer kleinen Umgebung von $K_0\times\{0\}$ gilt und deren Träger $\operatorname{supp}(\widetilde{\chi})$ in $\{\chi = 1\}$ enthalten ist. Hierbei ist χ im Abschnitt unterhalb der Formel (3.4.1) definiert worden. Sei $\tilde{q}$ eine Borel-Resummation der rechten Seite von

$$\tilde{q}(x,\xi)\asymp\sum_{\nu=0}^\infty h^\nu\, q_\nu(x,\xi)\,(1-\widetilde{\chi}(x,\xi))$$

in $S^0(\langle\xi\rangle^{-1};\mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$. Dann ist $D_{h,V,\varphi}\circ\operatorname{Op}_h(\tilde{q})$ ein Pseudodifferentialoperator, dessen Symbol die asymptotische Entwicklung

$$\widehat{D}_{V,\varphi}\#_h\tilde{q}(x,\xi)\asymp 1-\widetilde{\chi}(x,\xi)+\sum_{\nu=0}^\infty h^\nu\,\check{r}_\nu(x,\xi)$$

besitzt. Denn unter Verwendung der Formel für die asymptotische Entwicklung der Komposition zweier Symbolen erhalten wir

$$\begin{aligned}\widehat{D}_{V,\varphi}\#_h\tilde{q}(x,\xi) &\asymp \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d}\frac{h^{|\alpha|}}{i^{|\alpha|}\alpha!}\big(\partial_\xi^\alpha\widehat{D}_{V,\varphi}\big)(x,\xi)\,(\partial_x^\alpha\tilde{q})(x,\xi)\\ &= \widehat{D}_{V,\varphi}(x,\xi)q_0(x,\xi)(1-\widetilde{\chi}(x,\xi))\\ &\quad + h\,\big\{\nabla_\xi\widehat{D}_{V,\varphi}(x,\xi)\nabla_x\big(q_0(x,\xi)(1-\widetilde{\chi}(x,\xi))\big)\\ &\quad + \widehat{D}_{V,\varphi}(x,\xi)\,q_1(x,\xi)\,(1-\widetilde{\chi}(x,\xi))\big\}+\cdots.\end{aligned}$$

Wir setzen $q_0(x,\xi) = \widehat{D}_{V,\varphi}(x,\xi)^{-1}$. Weil jeder Fehlerterm $\check{r}_\nu$ entweder einen Faktor $(1-\widetilde{\chi})$ oder gewisse partielle Ableitungen von $\widetilde{\chi}$ enthält, ergibt sich $\operatorname{supp}(\check{r}_\nu) \subset \{\chi = 1\}$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0$.

Indem wir

$$q \;:=\; \tilde{q}\#_h(1-\chi)$$

definieren, schließen wir auf

$$\widehat{D}_{V,\varphi}\#_h q(x,\xi) \;\asymp\; 1-\chi(x,\xi). \tag{3.5.1}$$

Wir führen einen Operator $\mathcal{P}_h$ ein, der die approximative Inverse des konjugierten Diracoperators darstellt, was wir im nächsten Satz beweisen werden. Wir definieren den Operator $\mathcal{P}_h : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^{d_*}) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^{d_*})$ durch

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}_h\, f)(x) := \sum_{\sharp\in\{+,-\}} \sharp \int_0^\infty\!\!\int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\psi_\sharp(t,x,\eta)/h - i\langle\,\eta\,|\,y\,\rangle/h}\, B_\sharp(t,x,\eta;h)\, f(y)\, \frac{dy d\eta dt}{(2\pi h)^d h} \\ + \operatorname{Op}_h(q)\, f(x), \qquad x\in\mathbb{R}^d,\; f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^{d_*}).\end{aligned} \tag{3.5.2}$$

Da die Amplituden $B_\sharp(\,.\,;h)$ kompakten Träger haben, ist der Integrationsbereich der Integrale, die hier in der ersten Zeile auftreten, nur ein Kompaktum. Das impliziert die Wohldefiniertheit von $\mathcal{P}_h$. Ferner ist $\mathcal{P}_h$ offensichtlich ein Integraloperator, dessen Kern von der Gestalt

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_h(x,y) = \sum_{\sharp\in\{+,-\}} \sharp \int_0^\infty\!\!\int_{\mathbb{R}^{d}} e^{i\psi_\sharp(t,x,\eta)/h - i\langle\,\eta\,|\,y\,\rangle/h}\, B_\sharp(t,x,\eta;h)\, \frac{d\eta dt}{(2\pi h)^d h} \\ +\; \check{q}(x,x-y)\end{aligned} \tag{3.5.3}$$

ist. Wir erinnern uns, daß $\check{q}(x,y-x)$ der Distributionskern von $\operatorname{Op}_h(q)$ ist, wobei $\check{q}(x,y)$ durch $\check{q}(x,y) = (\mathcal{F}_h^{-1})_{\xi\to y}\, q(x,y)$ gegeben ist. Hierbei ist die semiklassische Fouriertransformation durch

$$\hat{f}(\eta) := (\mathcal{F}_h\, f)(\eta) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle\,\eta\,|\,y\,\rangle/h}\, f(y)\, dy, \qquad \eta\in\mathbb{R}^d,\; f\in L^1(\mathbb{R}^d,\mathscr{V}),$$

definiert. Hierbei ist $\mathscr{V}$ gleich $\mathbb{C}^{d_*}$ oder $\mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*})$. Indem wir mittels der Operatoren

$$\frac{1 - ih\,(\overline{\nabla_\eta\psi_\pm} - y)\cdot\nabla_\eta}{1 + |\nabla_\eta\psi_\pm - y|^2}$$

partiell integrieren und wenn wir verwenden, daß diese Operatoren

$$\frac{1 - ih\,(\overline{\nabla_\eta\psi_\pm} - y)\cdot\nabla_\eta}{1 + |\nabla_\eta\psi_\pm - y|^2}\, e^{i\psi_\pm(t,x,\eta)/h - i\langle\,\eta\,|\,y\,\rangle/h} \;=\; e^{i\psi_\pm(t,x,\eta)/h - i\langle\,\eta\,|\,y\,\rangle/h}$$

erfüllen, und daß $B_\pm$ kompakten Träger besitzen, erhalten wir

$$\|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\mathcal{P}_h(x,y)\| \;\leqslant\; C_{N,\alpha,\beta}\, h^{-|\alpha|-|\beta|}\, \langle x\rangle^{-N}\, \langle y\rangle^{-N}, \qquad x,y\in\mathbb{R}^d,$$

für jedes $N\in\mathbb{N}$ und $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^d$ und für geeignete Konstanten $C_{N,\alpha,\beta}\in(0,\infty)$.

Satz 3.5.1. *(i) Es gibt ein $\tilde r \in S^{-\infty}(\langle\xi\rangle^{-\infty};\mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$, für das*

$$D_{h,V,\varphi}\,\mathcal{P}_h \;=\; \mathbb{1} - \mathrm{Op}_h(\tilde r)$$

gilt.
(ii) Es gibt ein $h_0 \in (0,1]$ und glatte Kerne $\mathcal{R}_h \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d},\mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$, $h \in (0,h_0]$, für die

$$\|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\mathcal{R}_h(x,y)\| \leqslant C_{N,\alpha,\beta}\,h^N\langle x\rangle^{-N}\langle y\rangle^{-N}, \qquad x,y\in\mathbb{R}^d,\ h\in(0,h_0], \tag{3.5.4}$$

für jedes $N\in\mathbb{N}$ und für jedes $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^d$ und geeignete Konstanten $C_{N,\alpha,\beta}\in(0,\infty)$ gilt und für die

$$D_{h,V}^{-1}(x,y) \;=\; e^{-(\varphi(x)-\varphi(y))/h}\,(\mathcal{P}_h(x,y)+\mathcal{R}_h(x,y)), \qquad x\neq y,$$

gilt.

Beweis. (i): Mit Hilfe von Proposition 3.4.9 schließen wir für $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^{d_*})$ auf

$$\begin{aligned}
&D_{h,V,\varphi}\sum_{\sharp\in\{+,-\}}\sharp\int_0^\infty\!\!\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\psi_\sharp(t,x,\eta)/h}\,B_\sharp(t,x,\eta;h)\,\hat f(\eta)\,\frac{d\eta\,dt}{(2\pi h)^d\,h}\\
&\quad= -\sum_{\sharp\in\{+,-\}}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty \partial_t\big(e^{i\psi_\sharp(t,x,\eta)/h}\,B_\sharp(t,x,\eta;h)\big)\,\hat f(\eta)\,\frac{dt\,d\eta}{(2\pi h)^d}\\
&\qquad+\sum_{\sharp\in\{+,-\}}\sharp\int_0^\infty\!\!\int_{\mathbb{R}^d}\check r_\sharp(t,x,\eta;h)\,\hat f(\eta)\,\frac{d\eta\,dt}{(2\pi h)^d\,h}\\
&\quad=\int_{\mathbb{R}^d}\chi(x,\eta)\,e^{i\langle\,\eta\,|\,x\,\rangle/h}\sum_{\sharp\in\{+,-\}}\Lambda^\sharp\big(\eta+i\nabla\varphi(x)\big)\,\hat f(\eta)\,\frac{d\eta}{(2\pi h)^d}\\
&\qquad-\mathrm{Op}_h(\tilde r_1)f(x).
\end{aligned}\tag{3.5.5}$$

Dabei ist $\Lambda^+ + \Lambda^- = \mathbb{1}$. In der soeben durchgeführten Rechnung wurde verwandt, daß in dem Integral, das hier in der ersten Zeile auftritt, nur über ein Kompaktum integriert wird. Insbesondere trägt zum Wert des Integrals $\int_0^\infty\partial_t(\cdots)\,dt$ nur die Auswertung von $(\cdots)$ in 0, nicht aber die bei ∞ bei. Um die Auswertung bei 0 zu bestimmen, verwenden wir die Anfangsbedingungen $B_\pm^0(0,x,\eta)=\chi(x,\eta)\Lambda^\pm\big(\eta+i\nabla\varphi(x)\big)$ und $B_+^\nu|_{t=0}=-B_-^\nu|_{t=0}$, $\nu\geq 1$, die nach (3.4.29) und (3.4.30) gelten. Ferner definieren wir

$$\tilde r_1(x,\eta;h) \;:=\; -\sum_{\sharp\in\{+,-\}}\int_0^\infty e^{-i\langle\,\eta\,|\,x\,\rangle/h}\,\check r_\sharp(t,x,\eta;h)\,\frac{dt}{h}.$$

Da (3.4.47) gilt und $\check r$ kompakten Träger besitzt, ist $\tilde r_1$ ein Symbol in $S^{-\infty}(\langle\eta\rangle^{-\infty};\mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$. Denn wenn $\partial^\alpha_{(x,\eta)}$ auf $\tilde r_1$ angewandt wird, werden die inversen Potenzen von h, die sich beim Ableiten der Phase $e^{-i\langle\,\eta\,|\,x\,\rangle/h}$ ergeben, durch die Ableitungen von $\check r_\sharp$ kompensiert, die von der Ordnung $\mathcal{O}(h^\infty)$ sind. Aufgrund von (3.5.1) erhalten wir

$$D_{h,V,\varphi}\,\mathrm{Op}_h(q)\,f(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle\,\eta\,|\,x\,\rangle/h}\,(1-\chi(x,\eta))\,\hat f(\eta)\,\frac{d\eta}{(2\pi h)^d} - \mathrm{Op}_h(\tilde r_2)f(x)$$

für ein $\tilde{r}_2 \in S^{-\infty}(\langle\eta\rangle^{-\infty}, \mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$. Damit schließen wir für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^{d_*})$ auf

$$D_{h,V,\varphi}\,(\mathcal{P}_h f)(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle\,\eta\,|\,x\,\rangle/h}\,\hat{f}(\eta)\,\frac{d\eta}{(2\pi h)^d} - \mathrm{Op}_h(\tilde{r}_1)f(x) - \mathrm{Op}_h(\tilde{r}_2)f(x).$$

Das zeigt Teil (i) der Behauptung, wenn wir $\tilde{r} := \tilde{r}_1 + \tilde{r}_2$ definieren.

(ii): Für hinreichend kleines $h > 0$ sind $\|\mathrm{Op}_h(\tilde{r})\|_{\mathscr{L}(L^2)} \leqslant 1/2$ und $(\mathbb{1} - \mathrm{Op}_h(\tilde{r}))^{-1} = \mathrm{Op}_h(c)$ für ein $c \in S^0(1; \mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$ erfüllt. Da mit Hilfe der Definition von $\mathrm{Op}_h(c)$ die Gleichung $\mathrm{Op}_h(c)\,(\mathbb{1} - \mathrm{Op}_h(\tilde{r})) = \mathbb{1}$ gilt, was $\mathrm{Op}_h(c-1) = \mathrm{Op}_h(c)\,\mathrm{Op}_h(\tilde{r})$ impliziert, folgt $c - 1 \in S^{-\infty}(\langle\eta\rangle^{-\infty}; \mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$ wegen $\tilde{r} \in S^{-\infty}(\langle\eta\rangle^{-\infty}; \mathscr{L}(\mathbb{C}^{d_*}))$. Offensichtlich gilt $\mathcal{P}_h\mathrm{Op}_h(c) = \mathcal{P}_h + \mathcal{P}_h\mathrm{Op}_h(c-1)$ und der Distributionskern von $\mathrm{Op}_h(c-1)$, den wir durch $\mathcal{K}_h$ notieren, genügt der Abschätzung $\|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\mathcal{K}_h(x,y)\| \leqslant C_{N,\alpha,\beta}\,h^N\,\langle x{-}y\rangle^{-N}$. Uns ist bereits bekannt, daß $\mathcal{P}_h$ ein Integraloperator mit Integralkern $\mathcal{P}_h(x,y)$ ist, für den

$$\|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\mathcal{P}_h(x,y)\| \;\leqslant\; C_{N,\alpha,\beta}\,h^{-|\alpha|-|\beta|}\,\langle x\rangle^{-N}\,\langle y\rangle^{-N}, \qquad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

gilt. Daraus folgern wir, daß $\mathcal{R}_h := \mathcal{P}_h\,\mathrm{Op}_h(c-1)$ ein Integraloperator mit glattem Kern ist, den wir mit demselben Symbol bezeichnen werden, und daß (3.5.4) erfüllt ist. Da $D_{h,V,\varphi}\,(\mathcal{P}_h + \mathcal{R}_h) = D_{h,V,\varphi}\,\mathcal{P}_h\,\mathrm{Op}_h(c) = \mathbb{1}$ nach (i) gilt und da $D_{h,V,\varphi} = e^{\varphi/h}\,D_{h,V}\,e^{-\varphi/h}$ ist, wobei φ beschränkt ist und alle partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung von φ beschränkt sind, erhalten wir $e^{-\varphi/h}(\mathcal{P}_h + \mathcal{R}_h)\,e^{\varphi/h} = D_{h,V}^{-1}$. □

3.6 Die Asymptotik führender Ordnung

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Asymptotik von $e^{\varphi(x)/h}\,D_{h,V}^{-1}(x,y)\,e^{-\varphi(y)/h}$ mittels der Methode der stationären Phase, die wir in der Zeitvariablen und in den Impulsvariablen des Fourierintegraloperators anwenden. Zu dieser Asymptotik trägt nur der Plus-Teil bei, wie wir anhand von geeigneten partiellen Integrationen sehen werden. Das liefert uns die erste Proposition dieses Abschnittes. Die in diesem Ergebnis auftretende Determinante ist im eindimensionalen Fall, den wir zuerst betrachten werden, trivial. Im höherdimensionalen Fall werden wir diese jedoch weiter umformen. Schließlich werden die Ergebnisse dieses Abschnittes mit Hilfe von Satz 3.5.1 Beweise für unsere Hauptergebnisse Satz 3.7.1 und Satz 3.7.5 ergeben.

Seien $x_\star$ und $y_\star$ fest gewählte, ausgezeichnete Punkte, die der Voraussetzung 3.2.3 genügen. Zunächst erinnern wir uns an den in (3.5.2) definierten Operator $\mathcal{P}_h$ und dessen durch (3.5.3) gegebenen Integralkern. Dessen Asymptotik in $x_\star$ und in $y_\star$ wollen wir in diesem Abschnitt bestimmen. Sei

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \varpi \end{pmatrix} : [0,\tau] \to \mathbb{R}^{2d}$$

eine glatte Kurve, die (3.2.24) löst und (3.2.25) erfüllt und für die $\gamma(0) = y_\star$ und $\gamma(\tau) = x_\star$ gilt. Folglich löst diese Kurve

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \gamma \\ \varpi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_p H \\ -\nabla_x H \end{pmatrix}(\gamma, \varpi) \tag{3.6.1}$$

und genügt $H(\gamma(t), \varpi(t)) = 0$. Desweiteren definieren wir

$$v_{y_\star} := \frac{d}{dt}\gamma(0), \qquad v_{x_\star} := \frac{d}{dt}\gamma(\tau).$$

Proposition 3.6.1. *Sei $d \in \mathbb{N}$. Wenn $h \in (0,1]$ gegen Null strebt, erhalten wir*

$$\begin{aligned} &D^{-1}_{h,V,\varphi}(x_\star, y_\star) \\ &= \frac{1}{h^d}\Big(\frac{h}{2\pi}\Big)^{\frac{d-1}{2}} \frac{U(\tau, y_\star)\big(i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\varphi(y_\star) + \alpha_0 - V(y_\star)\big)\big(1+\mathcal{O}(h)\big)}{2|V(y_\star)|^{1/2}|V(x_\star)|^{1/2}\sqrt{\det\begin{pmatrix} 0 & -v_{y_\star}^\top \\ v_{x_\star} & id_\eta Q^+(\tau, y_\star, 0)\end{pmatrix}}}, \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

wobei wir die aus (3.4.39) *bekannte Notation verwenden.*

Beweis. Aufgrund von Satz 3.5.1(ii) genügt es den Kern $\mathcal{P}_h$ zu betrachten. Zuerst zeigen wir mittels eines Standardargumentes, daß der Distributionskern $\check{q}(x, x-y)$ von $\mathrm{Op}_h(q)$ in (3.5.3) nicht zur asymptotischen Entwicklung in (3.6.2) beiträgt. Wir wollen also $\check{q}(x, x-y) = \mathcal{O}(h^\infty)$ beweisen. Für hinreichend große $N \in \mathbb{N}$ folgt das daraus, daß $(x-y)^{2N}\check{q}(x, x-y)$ die inverse Fouriertransformation von $h^{2N}\,\Delta_\xi^N q(x,\xi)$ bei $x-y$ ist, wobei $\Delta_\xi^N q(x,\xi)$ absolut integrierbar bezüglich ξ ist.

Als nächstes studieren wir das Integral

$$I_-(x_\star, y_\star) := \int_0^\infty\!\!\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\psi_-(t,x_\star,\eta)/h - i\langle\,\eta\,|\,y_\star\,\rangle/h}\, B_-(t, x_\star, \eta; h)\,\frac{d\eta\,dt}{(2\pi h)^d\,h}.$$

Für $t = 0$ ist $\psi_-(0, x_\star, \eta) - \langle\,\eta\,|\,y_\star\,\rangle = \langle\,\eta\,|\,x_\star - y_\star\,\rangle$ erfüllt. Da $x_\star \neq y_\star$ nach Voraussetzung 3.2.3 ist, können wir mittels des Operators

$$\frac{h\,(\overline{\nabla_\eta\psi_-} - y_\star)\cdot\nabla_\eta}{i\,|\nabla_\eta\psi_- - y_\star|^2}$$

partiell integrieren. Dieser besitzt die Eigenschaft

$$\frac{h\,(\overline{\nabla_\eta\psi_-} - y_\star)\cdot\nabla_\eta}{i\,|\nabla_\eta\psi_- - y_\star|^2}\, e^{i\psi_-/h - i\langle\,\eta\,|\,y_\star\,\rangle/h} = e^{i\psi_-/h - i\langle\,\eta\,|\,y_\star\,\rangle/h}.$$

Indem wir bezüglich η partiell integrieren, erhalten wir

$$\int_0^\varepsilon\!\!\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\psi_-(t,x_\star,\eta)/h - i\langle\,\eta\,|\,y_\star\,\rangle/h}\, B_-(t, x_\star, \eta; h)\,\frac{d\eta\,dt}{(2\pi h)^d\,h} = \mathcal{O}(h^\infty),$$

sofern $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist. Da $\Im\psi_-(t, x_\star, \eta) > 0$ für $t > 0$ infolge von (3.3.55) ist, ergibt sich $\int_\varepsilon^\infty\!\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\psi_-/h - i\langle\,\eta\,|\,y_\star\,\rangle/h}\, B_-\,d\eta dt = \mathcal{O}(h^\infty)$ für jedes feste $\varepsilon > 0$. Damit gilt $I_-(x_\star, y_\star) = \mathcal{O}(h^\infty)$.

Schließlich betrachten wir das Integral

$$I_+(x_\star, y_\star) \;:=\; \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\psi_+(t,x_\star,\eta)/h - i\langle\,\eta\,|\,y_\star\,\rangle/h}\, B_+(t, x_\star, \eta; h)\, \frac{d\eta\, dt}{(2\pi h)^d\, h}.$$

Das ist der einzige Term, der zur asymptotischen Entwicklung beiträgt. Wir wenden die Methode der stationären Phase, die wir aus §2 aus [26] kennen, bzgl. der $d+1$ Variablen (t, η) an. Die kritischen Punkte der Phase sind durch die Gleichungen

$$0 \;=\; \partial_t \psi_+(t, x_\star, \eta), \tag{3.6.3}$$

$$0 \;=\; \nabla_\eta \psi_+(t, x_\star, \eta) - y_\star \tag{3.6.4}$$

gegeben. Um die Asymptotik von $I_+(x_\star, y_\star)$ zu bestimmen, genügt es, alle kritischen Punkte (t, η) zu finden, für die $\Im\psi_+(t, x_\star, \eta) = 0$ gilt. Wir erinnern uns, daß $\Im\psi_+(t, x_\star, \eta) = 0$ aufgrund von (3.3.54) aus Korollar 3.3.11 $t = 0$ oder $(t, x_\star, \eta) \in \mathscr{D}^+$ impliziert. Wie zuvor integrieren wir partiell bezüglich η mittels des Operators

$$\frac{h\,(\overline{\nabla_\eta \psi_+} - y_\star) \cdot \nabla_\eta}{i\,|\nabla_\eta \psi_+ - y_\star|^2}$$

und schließen dann auf $\int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\psi_+/h - i\langle\,\eta\,|\,y_\star\,\rangle/h}\, B_+\, d\eta dt \;=\; \mathcal{O}(h^\infty)$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$. Der einzige kritische Punkt (t, η), für den $(t, x_\star, \eta) \in \mathscr{D}^+$ gilt, ist $(t, \eta) = (\tau, 0)$ wegen (3.3.58). Mit Hilfe der Methode der stationären Phase, die sich in §2 aus [26] findet, ergibt sich

$$I_+(x_\star, y_\star) \;=\; \frac{(2\pi h)^{\frac{d+1}{2}}}{(2\pi h)^d\, h}\, \frac{e^{i\psi_+(\tau,x_\star,0)/h}\, B_+^0(\tau, x_\star, 0)\, \big(1 + \mathcal{O}(h)\big)}{\sqrt{\det \frac{1}{i} \begin{pmatrix} \partial_t^2 \psi_+ & \partial_t d_\eta \psi_+ \\ \partial_t \nabla_\eta \psi_+ & d_\eta \nabla_\eta \psi_+ \end{pmatrix} (\tau, x_\star, 0)}}. \tag{3.6.5}$$

Aus (3.3.58) folgern wir $\psi_+(\tau, x_\star, 0) = 0$. Nun wollen wir die Ableitungen von ψ_+ untersuchen, die im Nenner der rechten Seite der Gleichung auftreten. Dazu bemerken wir, daß $\partial_t^2 \psi_+(\tau, x_\star, 0) = 0$ nach (3.3.58) gilt. Wenn wir die Identität $Q^+(t, k^+(t, x_\star, \eta), \eta) = x_\star$ bzgl. t und bzgl. η differenzieren, erhalten wir

$$d_y Q^+\, \partial_t k^+(t, x_\star, \eta) + d_{\overline{y}} Q^+\, \overline{\partial_t k^+(t, x_\star, \eta)} \;=\; -\partial_t Q^+,$$

$$d_y Q^+\, d_\eta k^+(t, x_\star, \eta) + d_{\overline{y}} Q^+\, \overline{d_\eta k^+(t, x_\star, \eta)} \;=\; -d_\eta Q^+.$$

Hierbei wird jede Ableitung von Q^+ in $(t, k^+(t, x^\star, \eta), \eta)$ ausgewertet. Wir setzen $(t, \eta) = (\tau, 0)$ ein. Nach Definition von $v_{y_\star}$ und $v_{x_\star}$ gelten $-\partial_t k^+(\tau, x_\star, 0) = \frac{d}{dt}\gamma(0) = v_{y_\star}$ und $\partial_t Q^+(\tau, y_\star, 0) = \frac{d}{dt}\gamma(\tau) = v_{x_\star}$. Ferner ist $d_\eta k^+(\tau, x_\star, 0) = d_\eta \nabla_\eta \psi_+(\tau, x_\star, 0)$ infolge von (3.3.50) aus Proposition 3.3.10 erfüllt. Indem wir noch Korollar 3.3.5 für die antiholomorphen Ableitungen verwenden, schließen wir insgesamt auf

$$d_y Q^+(\tau, y_\star, 0)\, v_{y_\star} \;=\; v_{x_\star}, \tag{3.6.6}$$

$$d_y Q^+(\tau, y_\star, 0)\, \tfrac{1}{i} d_\eta \nabla_\eta \psi_+(\tau, x_\star, 0) \;=\; i\, d_\eta Q^+(\tau, y_\star, 0). \tag{3.6.7}$$

Die Gleichung $\partial_t \nabla_\eta \psi_+(\tau, x_\star, 0) = \partial_t k^+(\tau, x_\star, 0) = -v_{y_\star}$, was aufgrund von (3.3.50) gilt, impliziert in Hinblick auf die aus (3.6.5) bekannte Determinante

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} 0 & \partial_t d_\eta \psi_+ \\ -\partial_t \nabla_\eta \psi_+ & \frac{1}{i}\, d_\eta \nabla_\eta \psi_+ \end{pmatrix} (\tau, x_\star, 0) \\ &\quad = \det \begin{pmatrix} 0 & -v_{y_\star}^\top \\ v_{y_\star} & d_y Q^+(\tau, y_\star, 0)^{-1}\, i\, d_\eta Q^+(\tau, y_\star, 0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.6.8}$$

Die Gleichung

$$B_+^0(\tau, x_\star, 0) = \frac{\chi(y_\star, 0)\, U(\tau, y_\star)(i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla\varphi(y_\star) + \alpha_0 - V(y_\star))}{2(-V(y_\star))^{1/2}(-V(x_\star))^{1/2} \det \left[d_y Q^+(\tau, y_\star, 0)\right]^{1/2}} \tag{3.6.9}$$

kennen wir bereits aus (3.4.39). Nun multiplizieren wir die Determinante (3.6.8) mit der, die in (3.4.39) auftritt. Letztere läßt sich auch darstellen durch

$$\det \left[d_y Q^+(\tau, y_\star, 0)\right] = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_y Q^+(\tau, y_\star, 0) \end{pmatrix}.$$

Daraus folgern wir unter Verwendung von (3.6.6)

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -v_{y_\star}^\top \\ v_{x_\star} & i\, d_\eta Q^+(\tau, y_\star, 0) \end{pmatrix}. \tag{3.6.10}$$

Da $\chi(y_\star, 0) = 1$ ist, erhalten wir unser Ergebnis (3.6.2), wenn wir $\psi_+(\tau, x_\star, 0) = 0$, (3.6.9) und (3.6.10) in (3.6.5) einsetzen. $\square$

Nun wenden wir uns dem eindimensionalen Fall zu und betrachten die Formel (3.6.2) in diesem Fall.

Proposition 3.6.2. *Im Fall von $d = 1$ gilt im Limes $h \searrow 0$*

$$\begin{aligned} D_{h,V,\varphi}^{-1}(x_\star, y_\star) = {} & \frac{(1 + \mathcal{O}(h))\big(\cos(\vartheta(\tau))\, \mathbb{1} - i \sin(\vartheta(\tau))\, \alpha_1\big)}{2h\, (1 - V^2(x_\star))^{1/4}(1 - V^2(y_\star))^{1/4}} \times \\ & \times \left(i \operatorname{sgn}(x_\star - y_\star)\, (1 - V^2(y_\star))^{1/2}\, \alpha_1 + \alpha_0 - V(y_\star)\right), \end{aligned} \tag{3.6.11}$$

wobei

$$\vartheta(\tau) := \int_0^\tau \frac{V'(Q^+(s, y_\star, 0))}{2V(Q^+(s, y_\star, 0))}\, ds$$

in Lemma 3.4.6 eingeführt wurde.

Beweis. Da im Fall $d = 1$ die in (3.6.2) auftretende Determinante zu $v_{x_\star}\, v_{y_\star}$ wird und $\boldsymbol{\alpha}$ zu α_1 wird, vereinfacht sich die Formel (3.6.2) zu

$$I_+(x_\star, y_\star) = (1 + \mathcal{O}(h))\, \frac{U(\tau, y_\star)\left(i\varphi'(y_\star)\, \alpha_1 + \alpha_0 - V(y_\star)\right)}{2h\, |V(x_\star)|^{1/2} |V(y_\star)|^{1/2} (v_{x_\star}\, v_{y_\star})^{1/2}}.$$

Hierbei haben $v_{x_\star}$ und $v_{y_\star}$ dasselbe Vorzeichen. Ferner gilt

$$|v_{y_\star}| = \left|\nabla_p H(y_\star, \varphi'(y_\star))\right| = \frac{|\varphi'(y_\star)|}{(1-\varphi'(y_\star)^2)^{1/2}} = \frac{(1-V^2(y_\star))^{1/2}}{|V(y_\star)|}.$$

Ebenso ergibt sich $|v_{x_\star}| = (1-V^2(x_\star))^{1/2}/|V(x_\star)|$. Daraus folgt

$$|V(x_\star)|^{1/2}|V(y_\star)|^{1/2}(v_{x_\star}\, v_{y_\star})^{1/2} \;=\; (1-V^2(x_\star))^{1/4}(1-V^2(y_\star))^{1/4}.$$

Infolge des Beweises von Lemma 3.4.6 kennen wir bereits die Gleichung

$$U(\tau, y_\star) \;=\; \cos(\vartheta(\tau))\,\mathbb{1} - i\sin(\vartheta(\tau))\,\alpha_1.$$

Schließlich gilt nach der Eikonalgleichung, der φ genügt und die wir in Proposition 3.2.1 finden, $\varphi'(y_\star) = \operatorname{sgn}(x_\star - y_\star)\,(1-V^2(y_\star))^{1/2}$. □

Das folgende Lemma befaßt sich mit der in (3.6.2) auftretenden Determinante im höherdimensionalen Fall.

Lemma 3.6.3. *Sei nun $d \geqslant 2$. Sei X die Projektion des in* (3.2.22) *definierten zu H gehörenden Hamiltonschen Flusses auf den Ortsraum. Sei*

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \varpi \end{pmatrix} : [0,\tau] \to \mathbb{R}^{2d}$$

eine glatte Kurve, die (3.2.24) *löst und* (3.2.25) *genügt und für die $\gamma(0) = y_\star$ und $\gamma(\tau) = x_\star$ gilt. Dann gilt*

$$i d_\eta Q^+(\tau, y_\star, 0) \;=\; d_p X(\tau, y_\star, \varpi(0)), \tag{3.6.12}$$

wobei $\varpi(0) = \nabla\varphi(y_\star)$ ist.

Beweis. Aufgrund von Lemma 3.3.2 gilt $Q^+(t, y_\star, 0) = X(t, y_\star, 0) = \gamma(t)$, $t \in [0,\tau]$. Wir definieren $\rho(t) := (\gamma(t), \varpi(t)) = (\gamma(t), \nabla\varphi(\gamma(t)))$, $t \in [0,\tau]$. Offensichtlich ist

$$\begin{pmatrix} d_\eta Q^+ \\ d_\eta \Xi^+ \end{pmatrix}(0, y_\star, 0) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

erfüllt. Ferner gilt

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} d_\eta Q^+ \\ d_\eta \Xi^+ \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} (a_+)''_{\xi x} & (a_+)''_{\xi\xi} \\ 0 & -(a_+)''_{x\xi} \end{pmatrix}(Q^+, 0)\begin{pmatrix} d_\eta Q^+ \\ d_\eta \Xi^+ \end{pmatrix},$$

wobei $d_\eta Q^+$, $d_\eta \Xi^+$ und Q^+ stets in $(t, y_\star, 0)$ ausgewertet werden. Das liefert unter Verwendung von (3.2.35) und (3.2.36)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} d_\eta Q^+ \\ d_\eta \Xi^+ \end{pmatrix}(t, y_\star, 0) = \begin{pmatrix} \mathbb{B}(t) & -i\mathbb{A}(t) \\ 0 & -\mathbb{B}(t)^\top \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_\eta Q^+ \\ d_\eta \Xi^+ \end{pmatrix}(t, y_\star, 0),$$

wobei $\mathbb{A}(t) := H''_{pp}(\rho(t))$ für $t \in [0,\tau]$ ist und

$$\mathbb{B}(t) \;:=\; \mathbb{B}(t,y_\star) \;=\; H''_{px}(\rho(t)) + H''_{pp}(\rho(t))\,\varphi''(\gamma(t)), \qquad t \in [0,\tau],$$

ist. Letzteres wurde bereits in (3.3.37) definiert. Andererseits gilt

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} d_pX \\ d_pP \end{pmatrix}(t,\rho(0)) = \begin{pmatrix} H''_{px} & H''_{pp} \\ -H''_{xx} & -H''_{xp} \end{pmatrix}(\rho(t))\begin{pmatrix} d_pX \\ d_pP \end{pmatrix}(t,\rho(0)), \tag{3.6.13}$$

$$\begin{pmatrix} d_pX \\ d_pP \end{pmatrix}(0,\rho(0)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}, \tag{3.6.14}$$

da

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_p H(X,P) \\ -\nabla_x H(X,P) \end{pmatrix}$$

ist. Weil $(a_+)''_{xx}(x,0) = 0$ für jedes $x \in K_0$ ist, folgt $0 = d_x(\nabla_x H(x,\nabla\varphi)) = H''_{xx}(x,\nabla\varphi) + H''_{xp}(x,\nabla\varphi)\,\varphi''$ auf K_0 mittels (3.2.34). Folglich ergibt sich, indem wir (3.6.13) und (3.6.14) verwenden, daß

$$\begin{pmatrix} \widetilde{X}(t) \\ \widetilde{P}(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} d_pX(t,\rho(t)) \\ -\varphi''(\gamma(t))\,d_pX(t,\rho(t)) + d_pP(t,\rho(t)) \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,\tau],$$

eine Lösung von

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \widetilde{X} \\ \widetilde{P} \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} \mathbb{B}(t) & \mathbb{A}(t) \\ 0 & -\mathbb{B}(t)^\top \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{X} \\ \widetilde{P} \end{pmatrix}(t), \quad \begin{pmatrix} \widetilde{X} \\ \widetilde{P} \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

ist, was (3.6.12) impliziert. □

Lemma 3.6.4. *Es gilt*

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -v_{y_\star}^\top \\ v_{x_\star} & id_\eta Q^+(\tau,y_\star,0) \end{pmatrix} = \frac{d_{\mathrm{A}}(x_\star,y_\star)^{d-1}\det\left(\exp'_{y_\star}(\exp^{-1}_{y_\star}(x_\star))\right)}{|V(x_\star)||V(y_\star)|(1-V^2(x_\star))^{\frac{d-2}{2}}(1-V^2(y_\star))^{\frac{d-2}{2}}}.$$

Beweis. Zur Vereinfachung der Notation verzichten wir in diesem Beweis auf den Index $\star$, der bei den ausgezeichneten Punkten $x_\star$ und $y_\star$ auftritt. Zuerst führen wir einige Schreibweisen ein. Wir notieren $G(z) = (1 - V^2(z))\mathbb{1}_d$ und $F(z,v_z) := \sqrt{1 - V(z)^2}\,|v_z|$ für $z = x, y$, was bereits in (3.2.17) bzw. (3.2.16) eingeführt wurde. Sei $b_1,\dots,b_d$ eine $G(y)$-Orthonormalbasis vom $\mathbb{R}^d$, für die $b_d = F(y,v_y)^{-1}v_y = (1-V^2(y))^{-1/2}v_y/|v_y|$ gilt. Ferner sei $c_1,\dots,c_d$ eine $G(x)$-Orthonormalbasis vom $\mathbb{R}^d$, für die $c_d = F(x,v_x)^{-1}v_x = (1-V^2(x))^{-1/2}v_x/|v_x|$ erfüllt ist. Wir bezeichnen mit $b_1^*,\dots,b_d^*$ bzw. mit $c_1^*,\dots,c_d^*$ die zugehörigen dualen Basen. Das liefert $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$ und $c_i^*(c_j) = \delta_{ij}$ für $1 \le i,j \le d$. Wir definieren B bzw. C als die Matrix, deren i-te Zeile gleich b_i^* bzw. c_i^* ist. Damit erhalten wir $B\,v_y = (1-V^2(y))^{1/2}\,|v_y|\,\mathsf{e}_d$ und $C\,v_x = (1-V^2(x))^{1/2}\,|v_x|\,\mathsf{e}_d$, wobei e_d der d-te kanonische Basisvektor vom $\mathbb{R}^d$ ist. Wenn wir $id_\eta Q^+(\tau,y,0) = d_pX(\tau,y,\varpi(0))$, was in (3.6.12) zu finden ist, verwenden, ergibt sich

$$\begin{aligned}&\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & C\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}0 & -v_y^\top\\ v_x & id_\eta Q^+(\tau,y,0)\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & B^\top\end{pmatrix}\\ &= (1-V^2(x))^{1/2}\,|v_x|\,(1-V^2(y))^{1/2}\,|v_y|\,\det\begin{pmatrix}0 & -\mathsf{e}_d^\top\\ \mathsf{e}_d & C\,d_pX(\tau,y,\varpi(0))\,B^\top\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Offensichtlich gelten $\det B = (1-V^2(y))^{d/2}$, $\det C = (1-V^2(x))^{d/2}$,

$$|v_y| = \big|\nabla_p H(y,\varpi(0))\big| = \frac{|\varpi(0)|}{(1-\varpi(0)^2)^{1/2}} = \frac{(1-V^2(y))^{1/2}}{|V(y)|},$$

und $|v_x| = (1-V^2(x))^{1/2}/|V(x)|$. Das impliziert

$$\begin{aligned}&(\det C)^{-1}\,(1-V^2(x))^{1/2}\,|v_x|\,(1-V^2(y))^{1/2}\,|v_y|\,(\det B)^{-1}\\ &\qquad= \big(|V(x)||V(y)|(1-V^2(x))^{\frac{d-2}{2}}(1-V^2(y))^{\frac{d-2}{2}}\big)^{-1}.\end{aligned}$$

Durch geeignete Entwicklung der Determinante schließen wir auf

$$\det\begin{pmatrix}0 & -\mathsf{e}_d^\top\\ \mathsf{e}_d & C\,d_pX(\tau,y,\varpi(0))\,B^\top\end{pmatrix} = \det\big((c_i^*\,d_pX(\tau,y,\varpi(0))\,(b_j^*)^\top)_{1\leqslant i,j\leqslant d-1}\big).$$

Insgesamt folgern wir

$$\det\begin{pmatrix}0 & -v_y^\top\\ v_x & id_\eta Q^+(\tau,y,0)\end{pmatrix} = \frac{\det\big((c_i^*\,d_pX(\tau,y,\varpi(0))\,(b_j^*)^\top)_{1\leqslant i,j\leqslant d-1}\big)}{|V(x)||V(y)|(1-V^2(x))^{\frac{d-2}{2}}(1-V^2(y))^{\frac{d-2}{2}}}. \tag{3.6.15}$$

Um die Projektion X des zu H gehörenden Hamiltonschen Flusses auf den Ortsraum mit der Exponentialabbildung in y zu vergleichen, bemerken wir zunächst, daß

$$X(\tau,y,p) = \exp_y\Big(d_{\mathrm{A}}\big(X(\tau,y,p),y\big)\,(1-V^2(y))^{-1/2}\,p/|p|\Big)$$

für $p\in\mathbb{R}^d$ in einer Umgebung von $\varpi(0)$ gilt, da $\mathcal{L}(p) := (1-V^2(y))^{-1/2}\,p/|p|$ bzgl. $G(y)$ normiert ist und da der Anfangsimpuls p der Hamiltonschen Trajektorie kollinear mit seiner Anfangsgeschwindigkeit ist. Mit Hilfe der Definition $r(p) := d_{\mathrm{A}}(X(\tau,y,p),y)$ folgt

$$d_pX(\tau,y,p) = \exp_y'\big(r(p)\,\mathcal{L}(p)\big)\big[\mathcal{L}(p)\otimes r'(p)\big] + r(p)\,\exp_y'\big(r(p)\,\mathcal{L}(p)\big)\,\mathcal{L}'(p).$$

Aufgrund des Gauß'schen Lemmas ist $c_i^*\exp_y'(r(\varpi(0))\,\mathcal{L}(\varpi(0)))\,\mathcal{L}(\varpi(0)) = 0$ für $i = 1,\dots,d-1$ erfüllt. Folglich gilt

$$c_i^*\,d_pX(\tau,y,\varpi(0))\,(b_j^*)^\top = r(\varpi(0))\,c_i^*\,\exp_y'\big(r(\varpi(0))\,\mathcal{L}(\varpi(0))\big)\,\mathcal{L}'(\varpi(0))\,(b_j^*)^\top$$

für $i,j = 1,\dots,d-1$. Sei durch $P^{\perp}_{\varpi(0)}$ die orthogonale Projektion auf das euklidische orthogonale Komplement von $\varpi(0)$ im $\mathbb{R}^d$ notiert. Dann erhalten wir

$$\mathcal{L}'(\varpi(0))\,(b_j^*)^{\top} \;=\; (1-V^2(y))^{-1/2}\,\frac{1}{|\varpi(0)|}\,P^{\perp}_{\varpi(0)}\,(1-V^2(y))\,b_j = b_j,$$

da $|\varpi(0)| = (1-V^2(y))^{1/2}$ gilt. Indem wir $r(\varpi(0)) = d_{\mathrm{A}}(x,y)$ und $r(\varpi(0))\,\mathcal{L}(\varpi(0)) = \exp_y^{-1}(x)$ verwenden, ergibt sich

$$\begin{aligned}&\det\big((c_i^*\,d_pX(\tau,y,\varpi(0))\,(b_j^*)^{\top})_{1\leqslant i,j\leqslant d-1}\big)\\ &\qquad = d_{\mathrm{A}}(x,y)^{d-1}\,\det\big((c_i^*\,\exp_y'(\exp_y^{-1}(x))\,b_j)_{1\leqslant i,j\leqslant d-1}\big).\end{aligned}$$

Nun können wir mittels $c_d^*\exp_y'(\exp_y^{-1}(x))\,b_d = 1$ auf

$$\det\big((c_i^*\,d_pX(\tau,y,\varpi(0))\,(b_j^*)^{\top})_{1\leqslant i,j\leqslant d-1}\big) = d_{\mathrm{A}}(x,y)^{d-1}\det\big(\exp_y'(\exp_y^{-1}(x))\big)$$

schließen. Wenn wir diese Identität in (3.6.15) einsetzen, liefert das die Behauptung. $\square$

3.7 Hauptergebnisse

In diesem Abschnitt werden wir die semiklassische Asymptotik des Distributionskerns der Inversen des Diracoperators $D_{h,V}$ für fest gewähltes $x \neq y$ ermitteln. Wir werden zeigen, daß dieser Kern sich als Produkt eines exponentiell abfallenden Faktors, der einen gewissen Agmon-Abstand enthält, und einer Amplitude, die eine vollständige asymptotische Entwicklung in Potenzen von h besitzt, darstellen läßt. Ferner werden wir den führenden Term dieser Asymptotik bestimmen. Eine dazu analoge asymptotische Entwicklung wurde bereits in [8] für eine Klasse von h-Pseudodifferentialoperatoren angegeben, deren Symbole periodisch bzgl. der Impulsvariablen sind. In [8] entspricht die hier auftretende Agmon-Metrik einer geeigneten Finsler-Metrik.

Wir geben zuerst das Hauptergebnis für den Fall $d \geqslant 2$ an und beschäftigen uns mit dessen Symmetrie. Dann wenden wir uns dem eindimensionalen Fall zu, in dem keine einschränkende Voraussetzung an die Punkte $x \neq y$ zu stellen ist. Danach halten wir fest, daß wir statt negative, auch positive Potentiale V betrachten können. Die Ergebnisse, die wir für positive Potentiale erhalten, finden sich in den beiden Korollaren dieses Abschnittes. Schließlich wenden wir Satz 3.7.1 für $d \geq 2$ bzw. Satz 3.7.5 für $d = 1$ auf konstante Potentiale an und vergleichen die so erhaltene Formel für die Asymptotik führender Ordnung mit dem wohlbekannten Ausdruck für den Greenschen Kern des Diracoperators.

Wir beginnen mit dem Hauptergebnis für den Fall $d \geqslant 2$. Dazu setzen wir die in Lemma 3.6.4 erhaltene Darstellung für die Determinante in die Formel für $D^{-1}_{h,V,\varphi}(x_\star,y_\star)$ ein, die wir aus Proposition 3.6.1 kennen.

Satz 3.7.1. *Seien $d \geqslant 2$, V ein Potential, das der Voraussetzung 3.1.1 genüge, und $x_\star, y_\star$ Punkte, die die Voraussetzung 3.2.3 erfüllen. Sei*

$$\begin{pmatrix}\gamma\\ \varpi\end{pmatrix} : [0,\tau] \to \mathbb{R}^{2d}$$

eine glatte Kurve, die (3.2.24) *und* (3.2.25) *genüge und für die* $\gamma(0) = y_\star$ *und* $\gamma(\tau) = x_\star$ *gelte. Dann gilt, wenn* $h > 0$ *gegen Null strebt,*

$$D_{h,V}^{-1}(x_\star, y_\star) = \frac{1}{h^d} \cdot \frac{(1 - V^2(x_\star))^{\frac{d-2}{4}}(1 - V^2(y_\star))^{\frac{d-2}{4}}}{\det\big[\exp'_{y_\star}(\exp^{-1}_{y_\star}(x_\star))\big]^{1/2}} \cdot \frac{(1 + \mathcal{O}(h))\, e^{-d_{\mathrm{A}}(x_\star,y_\star)/h}}{\big(2\pi\, d_{\mathrm{A}}(x_\star, y_\star)/h\big)^{\frac{d-1}{2}}}$$
$$\cdot\, U(\tau)\,(-V(y_\star))\Lambda^+(i\varpi(0)), \tag{3.7.1}$$

wobei $U(t)$, $t \in [0, \tau]$, *eine unitäre Matrix ist, die das matrixwertige Anfangsproblem*

$$\frac{d}{dt}U(t) \;=\; -\frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2} \cdot \frac{\nabla V(\gamma(t))}{V(\gamma(t))}\, U(t), \quad t \in [0, \tau], \qquad U(0) = \mathbb{1}$$

löst. Der in (3.7.1) *mit* $\mathcal{O}(h)$ *bezeichnete Term besitzt eine vollständige asymptotische Entwicklung in Potenzen von* h.

Beweis. Wenn wir die aus Lemma 3.6.4 bekannte Darstellung der Determinanten in (3.6.2) einsetzen, erhalten wir

$$D_{h,V,\varphi}^{-1}(x_\star, y_\star) = \frac{1}{h^d} \cdot \frac{(1 - V^2(x_\star))^{\frac{d-2}{4}}(1 - V^2(y_\star))^{\frac{d-2}{4}}}{\det\big[\exp'_{y_\star}(\exp^{-1}_{y_\star}(x_\star))\big]^{1/2}} \cdot \frac{1 + \mathcal{O}(h)}{\big(2\pi\, d_{\mathrm{A}}(x_\star, y_\star)/h\big)^{\frac{d-1}{2}}}$$
$$\cdot\, U(\tau) \cdot \frac{i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla\varphi(y_\star) + \alpha_0 - V(y_\star)}{2}. \tag{3.7.2}$$

Wegen $\nabla\varphi(y_\star) = \varpi(0)$ und $-V(y_\star) = \sqrt{1 - |\varpi(0)|^2}$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla\varphi(y_\star) + \alpha_0 - V(y_\star)}{2} \;&=\; (-V(y_\star))\,\frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot i\varpi(0) + \alpha_0}{\sqrt{1 - |\varpi(0)|^2}}\right) \\ &=\; (-V(y_\star))\Lambda^+(i\varpi(0)).\end{aligned}$$

Da $D_{h,V}^{-1}(x_\star, y_\star) \;=\; D_{h,V,\varphi}^{-1}(x_\star, y_\star)\, e^{-d_{\mathrm{A}}(x_\star,y_\star)/h}$ aufgrund von (3.2.1) und (3.2.2) erfüllt ist, folgt aus (3.7.2) die Behauptung des Satzes. □

Die folgenden beiden Bemerkungen befassen sich mit der Symmetrie des Ausdrucks für $D_{h,V}^{-1}(x_\star, y_\star)$ in $x_\star$ und $y_\star$, den uns Satz 3.7.1 liefert.

Bemerkung 3.7.2. *Der Faktor* $\varrho(x, y) := \det\big[\exp'_y(\exp^{-1}_y(x))\big]^{1/2}$ *ist aus der asymptotischen Entwicklung des zu* G *gehörenden Wärmeleitungskerns bekannt. In dieser Entwicklung tritt der Faktor* $\varrho(x, y)$ *im Nenner des führenden Koeffizienten auf. Insbesondere wissen wir, daß dieser Faktor symmetrisch ist. Folglich gilt* $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$.

In der nächsten Bemerkung zeigen wir, daß die durch (3.7.1) gegebene Formel für $D_{h,V}^{-1}(x_\star, y_\star)$ die Symmetrieeigenschaft eines Kerns eines matrixwertigen selbstadjungierten Operators besitzt, indem wir $D_{h,V}^{-1}(x_\star, y_\star)^* = D_{h,V}^{-1}(y_\star, x_\star)$ beweisen.

Bemerkung 3.7.3. *Die Gleichung (3.7.1) läßt sich auch darstellen als*

$$D_{h,V}^{-1}(x_\star, y_\star) = \frac{1}{h^d} \cdot \frac{(1 - V^2(x_\star))^{\frac{d-2}{4}}(1 - V^2(y_\star))^{\frac{d-2}{4}}}{\det\left[\exp'_{y_\star}(\exp_{y_\star}^{-1}(x_\star))\right]^{1/2}} \cdot \frac{(1 + \mathcal{O}(h))\, e^{-d_{\mathrm{A}}(x_\star,y_\star)/h}}{\big(2\pi\, d_{\mathrm{A}}(x_\star, y_\star)/h\big)^{\frac{d-1}{2}}} \cdot M(x_\star, y_\star),$$

wobei $M(x_\star, y_\star) := (-V(x_\star))\Lambda^+(i\varpi(\tau))\, \alpha_0\, U(\tau)\, (-V(y_\star))\Lambda^+(i\varpi(0))$ *ist. Ferner gilt*

$$D_{h,V}^{-1}(x_\star, y_\star)^* = D_{h,V}^{-1}(y_\star, x_\star).$$

Beweis. Aus Bemerkung 3.4.8 schließen wir auf

$$B_+^0(\tau, x_\star, 0) \;=\; (-V(x_\star))\, \Lambda^+(i\varpi(\tau))\, \alpha_0\, B_+^0(\tau, x_\star, 0).$$

Daraus folgern wir mit Hilfe von Lemma 3.4.5

$$U(\tau)\, \Lambda^+(i\varpi(0)) \;=\; (-V(x_\star))\, \Lambda^+(i\varpi(\tau))\, \alpha_0\, U(\tau)\, \Lambda^+(i\varpi(0))$$

und das ergibt

$$\begin{aligned} M(x_\star, y_\star) \;&:=\; (-V(x_\star))\Lambda^+(i\varpi(\tau))\, \alpha_0\, U(\tau)\, (-V(y_\star))\Lambda^+(i\varpi(0)) \\ &=\; U(\tau)\, (-V(y_\star))\Lambda^+(i\varpi(0)), \end{aligned}$$

was den ersten Teil der Behauptung zeigt.

Da wir nach Bemerkung 3.7.2 wissen, daß der Faktor $\varrho(x, y) := \det\left[\exp'_y(\exp_y^{-1}(x))\right]^{1/2}$ symmetrisch in x und y ist, ist

$$\frac{(1 - V^2(x_\star))^{\frac{d-2}{4}}(1 - V^2(y_\star))^{\frac{d-2}{4}}}{\det\left[\exp'_{y_\star}(\exp_{y_\star}^{-1}(x_\star))\right]^{1/2}} \cdot \frac{e^{-d_{\mathrm{A}}(x_\star,y_\star)/h}}{\big(d_{\mathrm{A}}(x_\star, y_\star)\big)^{\frac{d-1}{2}}}$$

offensichtlich symmetrisch in $x_\star$ und $y_\star$. $M(x_\star, y_\star)^* = M(y_\star, x_\star)$, was aufgrund von Bemerkung 3.4.8 gilt, liefert $D_{h,V}^{-1}(x_\star, y_\star)^* = D_{h,V}^{-1}(y_\star, x_\star)$. □

Bemerkung 3.7.4. *In Anhang A werden wir im Fall von* $d = 3$ *den Zusammenhang zwischen* $U(\tau)\, (-V(y_\star))\Lambda^+(i\varpi(0))$ *und der BMT-Gleichung für die Thomas-Präzession eines Drehimpulses entlang einer Teilchenbahn erläutern. Die Verbindung der BMT-Gleichung zur semiklassischen Analysis der durch* $D_{h,V}$ *erzeugten Zeitentwicklung wurde in [28, 38] untersucht.* ◇

Als nächstes geben wir unser Hauptergebnis im eindimensionalen Fall an. In diesem Fall müssen wir keine einschränkende Voraussetzung an die Punkte $x \neq y$ stellen.

Satz 3.7.5. *Seien* $x, y \in \mathbb{R}$ *mit* $x \neq y$ *und* V *ein Potential, das die Voraussetzung 3.1.1 im Fall von* $d = 1$ *erfülle. Sei*

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \varpi \end{pmatrix} : [0, \tau] \to \mathbb{R}^{2d}$$

eine glatte Kurve, die (3.2.24) *löse und* (3.2.25) *genüge und für die* $\gamma(0) = y$ *und* $\gamma(\tau) = x$ *gelte. Dann gilt im Limes, wenn* $h > 0$ *gegen Null strebt,*

$$D_{h,V}^{-1}(x,y) = \frac{1}{h} \cdot \frac{(1+\mathcal{O}(h)) \exp\Big(-\Big|\int_y^x \big(1-V^2(t)\big)^{1/2}\,dt\Big|\Big/h\Big)}{(1-V^2(x))^{1/4}(1-V^2(y))^{1/4}} \\ \cdot \big(\cos(\vartheta(\tau))\,\mathbb{1} - i\sin(\vartheta(\tau))\,\alpha_1\big)\,(-V(y))\,\Lambda^+(i\varpi(0)), \tag{3.7.3}$$

wobei

$$\vartheta(\tau) := \int_0^\tau \frac{V'(\gamma(t))}{2V(\gamma(t))}\,dt$$

ist. Der in (3.7.3) *durch* $\mathcal{O}(h)$ *abgekürzte Term besitzt eine vollständige asymptotische Entwicklung in Potenzen von* h.

Beweis. Wir setzen

$$\frac{i\,\mathrm{sgn}(x-y)(1-V^2(y))^{1/2}\,\alpha_1 + \alpha_0 - V(y)}{2} = (-V(y))\,\Lambda^+(i\varpi(0)) \tag{3.7.4}$$

in Proposition 3.6.2 ein. (3.7.4) ergibt sich ebenso wie im Fall $d \geq 2$, der sich im Beweis von Proposition 3.7.1 findet. Wir erinnern uns an $d_{\mathrm{A}}(x,y) = \Big|\int_y^x \big(1-V^2(t)\big)^{1/2}\,dt\Big|$ aus Proposition 3.2.1. Dann folgt die Behauptung folgt aus $D_{h,V}^{-1}(x,y) = D_{h,V,\varphi}^{-1}(x,y)\,e^{-d_{\mathrm{A}}(x,y)/h}$, was nach (3.2.1) und (3.2.2) gilt. □

Es ist nicht notwendig, die in Voraussetzung 3.1.1 angegebene Wahl an das Vorzeichen der Potentiale V zu stellen, um unsere Hauptergebnisse zu beweisen. Statt dessen können wir auch positive V betrachten. In den nächsten beiden Korollaren wollen wir Potentiale V studieren, die der folgenden Voraussetzung genügen.

Voraussetzung 3.7.6. *Sei* $V \in C^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ *und für jeden Multiindex* $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ *gelte*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_x^\alpha V(x)| < \infty. \tag{3.7.5}$$

Ferner existiere ein $\delta \in (0,1)$, *für das*

$$\delta \leqslant V(x) \leqslant 1-\delta, \qquad x \in \mathbb{R}^d, \tag{3.7.6}$$

gelte.

Nun führen wir noch eine neue Hamiltonsche Funktion

$$\widetilde{H}(x,p) := -\sqrt{1-|p|^2} + V(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d,\ |p| < 1,$$

ein.

Korollar 3.7.7. *Seien $d \geqslant 2$ und $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ein glattes Potential, das der Voraussetzung 3.7.6 genüge. Seien $x_\star$ und $y_\star$ Punkte, die die Voraussetzung 3.2.3 erfüllen. Sei*

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\gamma} \\ \widetilde{\varpi} \end{pmatrix} : [0, \widetilde{\tau}] \to \mathbb{R}^{2d}$$

eine glatte Kurve, die

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \widetilde{\gamma} \\ \widetilde{\varpi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_p \widetilde{H} \\ -\nabla_x \widetilde{H} \end{pmatrix} (\widetilde{\gamma}, \widetilde{\varpi}) \tag{3.7.7}$$

löse, $\widetilde{H}(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\varpi}) = 0$ genüge und für die $\widetilde{\gamma}(0) = y_\star$ und $\widetilde{\gamma}(\widetilde{\tau}) = x_\star$ gelte. Dann gilt im Limes, wenn $h > 0$ gegen Null strebt,

$$\begin{aligned} D_{h,V}^{-1}(x_\star, y_\star) = \frac{1}{h^d} \cdot \frac{(1 - V^2(x_\star))^{\frac{d-2}{4}} (1 - V^2(y_\star))^{\frac{d-2}{4}}}{\det \big[\exp'_{y_\star}(\exp_{y_\star}^{-1}(x_\star)) \big]^{1/2}} \cdot \frac{(1 + \mathcal{O}(h))\, e^{-d_{\mathrm{A}}(x_\star, y_\star)/h}}{\big(2\pi\, d_{\mathrm{A}}(x_\star, y_\star)/h\big)^{\frac{d-1}{2}}} \\ \cdot \widetilde{U}(\widetilde{\tau}) \big(i\boldsymbol{\alpha} \cdot \widetilde{\varpi}(0) + \alpha_0 - V(y_\star)\, \mathbb{1} \big), \end{aligned} \tag{3.7.8}$$

wobei $\widetilde{U}(t)$, $t \in [0, \widetilde{\tau}]$, eine unitäre Matrix ist, die das matrixwertige Anfangswertproblem

$$\frac{d}{dt} \widetilde{U}(t) \;=\; \frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2} \cdot \frac{\nabla V(\widetilde{\gamma}(t))}{V(\widetilde{\gamma}(t))}\, \widetilde{U}(t), \; t \in [0, \widetilde{\tau}], \qquad \widetilde{U}(0) = \mathbb{1} \tag{3.7.9}$$

löst.

Beweis. Wenn $\alpha_0, \ldots, \alpha_d$ Dirac-Matrizes sind, genügen die Matrizen $\widetilde{\alpha}_j := -\alpha_j$ (3.1.2) für $j = 0, \ldots, d$ und damit sind $\widetilde{\alpha}_j$, $j = 0, \ldots, d$, Dirac-Matrizes. Da $D_{h,V}$ durch (3.1.1) und (3.1.5) definiert ist, gilt mit Hilfe der Definition $\widetilde{D}_{h,-V} := \widetilde{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (-ih\nabla) + \widetilde{\alpha}_0 - V$ die Gleichung $D_{h,V} = -\widetilde{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (-ih\nabla) - \widetilde{\alpha}_0 + V = -\widetilde{D}_{h,-V}$. Folglich können wir den Satz 3.7.1 auf $\widetilde{D}_{h,-V}$ anwenden. Zunächst untersuchen wir die Voraussetzung 3.2.3. Wir erinnern uns, daß Geodäten minimierende Pfade von $\int \big\langle\, \dot{q} \,\big|\, G(q)\, \dot{q}\, \big\rangle^{1/2}$ sind. Hierbei gilt für die Agmon-Metrik $G = (1 - V^2)\, \mathbb{1}$ nach (3.2.17). Da G nur von V^2 abhängt, ist G unabhängig vom Vorzeichen von V. Deswegen hängt die Gültigkeit der Voraussetzung 3.2.3 für zwei gegebene Punkte $x_\star, y_\star$ nicht vom Vorzeichen von V ab. Auch der Term, der in der ersten Zeile der rechten Seite von (3.7.1) auftritt und den wir durch

$$\Delta(x_\star, y_\star) \;:=\; \frac{1}{h^d} \cdot \frac{(1 - V^2(x_\star))^{\frac{d-2}{4}} (1 - V^2(y_\star))^{\frac{d-2}{4}}}{\det \big[\exp'_{y_\star}(\exp_{y_\star}^{-1}(x_\star)) \big]^{1/2}} \cdot \frac{(1 + \mathcal{O}(h))\, e^{-d_{\mathrm{A}}(x_\star, y_\star)/h}}{\big(2\pi\, d_{\mathrm{A}}(x_\star, y_\star)/h\big)^{\frac{d-1}{2}}}$$

notieren, ist unabhängig vom Vorzeichen von V, da der Agmon-Abstand und die Exponentialabbildung durch G bestimmt sind. Nun wenden wir uns der letzten Zeile von (3.7.1) zu. $D_{h,V}^{-1} = -\widetilde{D}_{h,-V}^{-1}$ liefert

$$D_{h,V}^{-1}(x_\star, y_\star) \;=\; \Delta(x_\star, y_\star)\, \widetilde{U}(\widetilde{\tau})\, (-V(y_\star)) \Lambda^+(i\widetilde{\varpi}(0)),$$

wobei $\widetilde{U}(t)$ für $t \in [0, \widetilde{\tau}]$ durch (3.7.9) definiert ist. Da nach Voraussetzung $\widetilde{H}(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\varpi}) = 0$ und damit auch $\sqrt{1 - |\widetilde{\varpi}(0)|^2} = -V(y_\star)$ gilt, was

$$\begin{aligned} -V(y_\star)\, \Lambda^+(i\widetilde{\varpi}(0)) &= -V(y_\star)\, \frac{1}{2} \Big(\mathbb{1} + \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot i\widetilde{\varpi}(0) + \alpha_0}{\sqrt{1 - |\widetilde{\varpi}(0)|^2}} \Big) \\ &= i\boldsymbol{\alpha} \cdot \widetilde{\varpi}(0) + \alpha_0 - V(y_\star)\, \mathbb{1} \end{aligned}$$

impliziert, läßt sich das auch durch

$$D_{h,V}^{-1}(x_\star, y_\star) = \Delta(x_\star, y_\star)\, \widetilde{U}(\widetilde{\tau}) \big(i\boldsymbol{\alpha} \cdot \widetilde{\varpi}(0) + \alpha_0 - V(y_\star)\, \mathbb{1} \big)$$

darstellen. □

Nun wenden wir uns dem Fall $d = 1$ zu. Das folgende Korollar liefert eine asymptotische Entwicklung von $D_{h,V}^{-1}(x, y)$, wenn V ein positives Potential darstellt.

Korollar 3.7.8. *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ und V ein Potential, das die Voraussetzung 3.7.6 im Fall von $d = 1$ erfülle. Sei*

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\gamma} \\ \widetilde{\varpi} \end{pmatrix} : [0, \widetilde{\tau}] \to \mathbb{R}^{2d}$$

eine glatte Kurve, die

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \widetilde{\gamma} \\ \widetilde{\varpi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_p \widetilde{H} \\ -\nabla_x \widetilde{H} \end{pmatrix} (\widetilde{\gamma}, \widetilde{\varpi}) \tag{3.7.10}$$

löse, $\widetilde{H}(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\varpi}) = 0$ genüge und für die $\widetilde{\gamma}(0) = y$ und $\widetilde{\gamma}(\widetilde{\tau}) = x$ gelte. Dann gilt im Limes, wenn $h > 0$ gegen Null strebt,

$$\begin{aligned} D_{h,V}^{-1}(x, y) = \frac{1}{h} \cdot \frac{(1 + \mathcal{O}(h)) \exp\Big(- \Big| \int_y^x \big(1 - V^2(t)\big)^{1/2} dt \Big| \Big/ h \Big)}{(1 - V^2(x))^{1/4} (1 - V^2(y))^{1/4}} \\ \cdot \big(\cos(\widetilde{\vartheta}(\widetilde{\tau}))\, \mathbb{1} + i \sin(\widetilde{\vartheta}(\widetilde{\tau}))\, \alpha_1 \big)\, (-V(y))\, \Lambda^+(i\widetilde{\varpi}(0)), \end{aligned}$$

wobei

$$\widetilde{\vartheta}(\widetilde{\tau}) := \int_0^{\widetilde{\tau}} \frac{V'(\widetilde{\gamma}(t))}{2V(\widetilde{\gamma}(t))} dt$$

ist.

Beweis. Wir folgen dem Beweis von Korollar 3.7.7 und definieren $\widetilde{D}_{h,-V}$ analog zu der in diesem Beweis getroffenen Definition. Dann wenden wir den Satz 3.7.5 auf $\widetilde{D}_{h,-V}$ an. Offensichtlich hängt die erste Zeile der rechten Seite von (3.7.3) nur von V^2 ab. Damit ist diese unabhängig vom Vorzeichen von V. Das einzige, das sich in Formel (3.7.3) ändert, ist das Vorzeichen von $i \sin(\vartheta(t))$. Aus diesem Minus Vorzeichen wird aufgrund von $\widetilde{\alpha}_1 = -\alpha_1$ ein Plusvorzeichen. □

Im folgenden Beispiel betrachten wir konstante Potentiale $V = -E$, wobei $E \in (-1, 1)$ ist. Wir bestimmen den Greenschen Kern von $D_{h,-E}$ mittels Fouriertransformation. Dann vergleichen wir den auf diese Weise erhaltenen Ausdruck mit der Asymptotik führender Ordnung, die Satz 3.7.1 für $d \geq 2$ bzw. (3.7.3) aus Satz 3.7.5 für $d = 1$ liefert.

Beispiel 3.7.9. *Wir wollen den Greenschen Kern von*

$$D_{h,-E} := \big(-ih\, \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla_x + \alpha_0 - E \big)$$

in Dimension $d \geq 1$ bestimmen. Dabei ist $V = -E$ konstant und $E \in (-1, 1)$. Dazu führen wir zunächst die modifizierte Besselfunktion 2. Art der Ordnung ν

$$K_\nu(r) := \frac{1}{2} \left(\frac{r}{2}\right)^\nu \int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2/4t-t}\, t^{-1-\nu} dt, \qquad \Re r^2 > 0, \quad \nu \in \mathbb{C},$$

ein, die auch MacDonald-Funktion genannt wird. Falls $d \in \mathbb{N}$ ungerade und $\nu = \frac{d}{2} - 1$ ist, läßt sich das $K_\nu(r)$ definierende Integral explizit berechnen. Nach (6.54) aus [12] ergibt sich beispielsweise $K_{1/2}(r) = \left(\frac{\pi}{2r}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-r}$, $r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, für $d = 3$, wobei $\sqrt{.}$ der Zweig der Wurzel mit $\Im \sqrt{.} \geq 0$ ist. Mittels Fouriertransformation läßt sich zeigen, daß für $x, y \in \mathbb{R}^d$ mit $x \neq y$

$$D_{h,E}^{-1}(x,y) = D_{h,-E} (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \left(\frac{|x-y|}{h\sqrt{1-E^2}}\right)^{1-\frac{d}{2}} K_{\frac{d}{2}-1}\left(\sqrt{1-E^2}\, \frac{|x-y|}{h}\right)$$

gilt (siehe z.B. Abschnitt 3.6 aus [12]). Zur Vereinfachung der Schreibweise notieren wir $K_{\frac{d}{2}-1} := K_{\frac{d}{2}-1}\left(\sqrt{1-E^2}\, \frac{|x-y|}{h}\right)$. Aus

$$-ih\, \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla_x K_{\frac{d}{2}-1} = -ih\, \boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{x-y}{|x-y|\, h} \sqrt{1-E^2} K'_{\frac{d}{2}-1},$$

$$(-ih\, \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla_x) \left(\frac{|x-y|}{h}\right)^{1-\frac{d}{2}} = -ih \left(1 - \frac{d}{2}\right) \boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{x-y}{|x-y|^2} \left(\frac{|x-y|}{h}\right)^{1-\frac{d}{2}},$$

folgt

$$\begin{aligned}
D_{h,E}^{-1}(x,y) &= (2\pi)^{-d/2} \left(\frac{|x-y|}{h\sqrt{1-E^2}}\right)^{1-\frac{d}{2}} D_{h,-E} K_{\frac{d}{2}-1} \\
&\quad + (2\pi)^{-d/2} \left(1-E^2\right)^{\frac{d}{4}-\frac{1}{2}} K_{\frac{d}{2}-1} (-ih\, \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla_x) \left(\frac{|x-y|}{h}\right)^{1-\frac{d}{2}} \\
&= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \left(1-E^2\right)^{\frac{d}{4}} \left(\frac{|x-y|}{h}\right)^{1-\frac{d}{2}} \Bigg\{ -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{x-y}{|x-y|} K'_{\frac{d}{2}-1} \\
&\quad + (\alpha_0 - E) \left(1-E^2\right)^{-\frac{1}{2}} K_{\frac{d}{2}-1} \\
&\quad + \left(\frac{d}{2} - 1\right) (1-E^2)^{-1/2} ih\, \boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{x-y}{|x-y|^2} K_{\frac{d}{2}-1} \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Das aus (9.7.2) und (9.7.4) aus [24] bekannte asymptotische Verhalten

$$K_\nu(r) \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2r}}\mathrm{e}^{-r}\left[1+\mathcal{O}\left(r^{-1}\right)\right], \qquad K'_\nu(r) \;=\; -\sqrt{\frac{\pi}{2r}}\mathrm{e}^{-r}\left[1+\mathcal{O}\left(r^{-1}\right)\right]$$

im Limes r gegen unendlich impliziert

$$\begin{aligned} D^{-1}_{h,E}(x,y) \;=\; & (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\left(1-E^2\right)^{\frac{d}{4}}\left(\frac{|x-y|}{h}\right)^{1-\frac{d}{2}}\Big\{(\alpha_0-E)\left(1-E^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ & + i\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{x-y}{|x-y|}\Big\}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1-E^2\right)^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{|x-y|}{h}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\sqrt{1-E^2}|x-y|/h} \\ & + \mathcal{O}\left(h^{\frac{d+1}{2}}\mathrm{e}^{-\sqrt{1-E^2}|x-y|/h}\right). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Asymptotik führender Ordnung

$$\begin{aligned} D^{-1}_{h,E}(x,y) \;=\; & \frac{1}{2}(2\pi)^{\frac{1-d}{2}}\left(1-E^2\right)^{\frac{d-3}{4}}\left(\frac{|x-y|}{h}\right)^{\frac{1-d}{2}}\mathrm{e}^{-\sqrt{1-E^2}|x-y|/h}\Big\{\alpha_0-E \\ & + i\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{x-y}{|x-y|}\sqrt{1-E^2}\Big\} + \mathcal{O}\left(h^{\frac{d+1}{2}}\mathrm{e}^{-\sqrt{1-E^2}|x-y|/h}\right). \end{aligned} \tag{3.7.11}$$

Da $\varpi(0) = \sqrt{1-E^2}\,\frac{x-y}{|x-y|}$ der konstante Impuls der Hamiltonschen Trajektorie, die von y nach x in $\{p^2 = 1-E^2\}$ läuft, ist und $d_{\mathrm{A}}(x,y) = \sqrt{1-E^2}\,|x-y|$, $\exp'_y = \mathbb{1}$, $U = \mathbb{1}$ und

$$(1-V^2(x))^{\frac{d-2}{4}}(1-V^2(y))^{\frac{d-2}{4}} \;=\; \left(1-E^2\right)^{\frac{d-2}{2}}$$

erfüllt ist, stimmt die Asymptotik (3.7.11) mit der, die der Satz 3.7.1 für $d \geq 2$ bzw. (3.7.3) aus Satz 3.7.5 für $d = 1$ liefert, überein.

Anhang A

Die BMT-Gleichung für die Thomas-Präzession

In diesem Anhang werden wir die Bargman-Michel-Telegdi-Gleichung für die Thomas-Präzession eines Drehimpulses entlang einer Teilchenbahn betrachten und den Zusammenhang zwischen dieser Gleichung und dem Ergebnis, das Satz 3.7.1 im dreidimensionalen Fall liefert, herstellen. Dabei werden wir der Vorgehensweise aus [38] folgen, um die Transportgleichungen zu lösen, und so werden wir eine Alternative zu der aus Unterabschnitt 3.4.2 bekannten Herangehensweise zur Bestimmung von B_+^0 angeben. Wie bereits in Bemerkung 3.4.7 erwähnt, wird sich anders als in (3.4.40) in der Formel, die wir im Folgenden für B_+^0 herleiten werden, eine vollständige Divergenz von F finden. Diesen Ausdruck, den wir für $B_+^0(\tau, x_\star, 0)$ erhalten werden, verwenden wir dann in einer zu den Beweisen von Abschnitt 3.6 analogen Rechnung, um eine Formel für die Asymptotik des Greenschen Kerns zu erlangen.

Wir wählen die Darstellung

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, \qquad \alpha_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

der Dirac-Matrizes. Dabei notieren

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Pauli-Matrizes. Wir wissen, daß der matrixwertige Term

$$M(x_\star, y_\star) = (-V(x_\star))\, \Lambda^+(i\varpi(\tau))\, \alpha_0\, U(\tau)\, (-V(y_\star))\, \Lambda^+(i\varpi(0)),$$

der in (3.7.1) auftritt, $\mathrm{Ran}\Lambda^+(i\varpi(0))$ auf $\mathrm{Ran}\Lambda^+(i\varpi(\tau))$ abbildet. Wenn wir geeignete Basen dieser Unterräume wählen, ist die zu diesen Basisvektoren gehörende darstellende Matrix von $M(x_\star, y_\star)$ eine Lösung einer Spin-Transportgleichung. Diese Transportgleichung ist der BMT-Gleichung für die Thomas-Präzession eines dreidimensionalen Drehimpulses ähnlich (siehe z. B. [28, 38]). Falls kein Magnetfeld auftritt, ist die Hamiltonsche Funktion, die die Teilchenbahn (γ, ϖ) bestimmt, durch

$$H(x,p) := -\sqrt{1-|p|^2} - V(x), \qquad x,p \in \mathbb{R}^d,\ |p|<1, \tag{A.0.1}$$

gegeben (siehe auch (3.2.11)). Also ist

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \varpi \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^{2d}$$

eine Lösung von

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_p H \\ -\nabla_x H \end{pmatrix}(x,p), \tag{A.0.2}$$

für die $H(\gamma(t), \varpi(t)) = 0$ für $t \in I$ gilt, woraus $\sqrt{1-\varpi^2} = -V(\gamma)$ folgt. Damit erhalten wir die Spin-Transportgleichung

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{s}(t) = i\,\mathfrak{M}(\gamma(t),\varpi(t))\,\mathfrak{s}(t), \qquad \mathfrak{M}(x,p) := \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\big(E(x)\times p\big)}{-2V(x)[1-V(x))]}, \tag{A.0.3}$$

wobei $E = -\nabla V$ das elektrische Feld und $\mathfrak{s}(t)$ eine komplexe (2×2)-Matrix ist. Wir bemerken, daß wir in H den Impuls durch einen imaginären Impuls ersetzen. Die zur BMT-Gleichung analoge Gleichung für die Hamiltonsche Funktion H ergibt sich aus der Gleichung (A.0.3). Wir wählen ein $u \in \mathbb{C}^2$ und berechnen die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\mathbf{s}(t) = \frac{\mathbf{s}(t)\times(E(\gamma(t))\times\varpi(t))}{-2V(\gamma(t))[1-V(\gamma(t))]}, \tag{A.0.4}$$

die der Erwartungswert $\mathbf{s}(t) := \langle\,\mathfrak{s}(t)\,u\,|\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathfrak{s}(t)\,u\,\rangle_{\mathbb{C}^2}$ des Vektors der Pauli-Matrizes erfüllt. wird. Wir wollen nun (A.0.3) zeigen und die Verbindung zu (3.7.1) herstellen. Wir beginnen mit der Gleichung (3.4.31) für B_+^0, welche auf $\mathscr{D}_+$ von der Gestalt

$$(\widetilde{\Pi}^+ + 1)\,\widetilde{\partial}^+ B_+^0 = 0$$

ist. Dabei ist $\widetilde{\partial}^+ := \alpha_0\,(\,i\partial_t + \boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla_x)$ und $\widetilde{\Pi}^+ := \alpha_0\,(\,\sqrt{1-|\nabla\varphi|^2}) - \boldsymbol{\alpha}\cdot i\nabla\varphi$ auf $\mathscr{D}_+$. Es folgt

$$(-V(x) + \boldsymbol{\alpha}\cdot i\nabla\varphi(x) + \alpha_0)(\,i\partial_t + \boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla_x)\,B_+^0(t,x,0) = 0$$

unter Verwendung von $\sqrt{1-|\nabla\varphi|^2} = -V$ und so ergibt sich

$$-2V(x)\,\Lambda^+(i\nabla\varphi(x))\,(i\partial_t + \boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla_x)\,B_+^0(t,x,0) = 0, \qquad (t,x,0)\in\mathscr{D}_+. \tag{A.0.5}$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}^3$ wird der Bildbereich von $\Lambda^+(i\nabla\varphi(x))$ von den zwei paarweise orthonormalen Eigenvektoren von $\widehat{D}(x, i\nabla\varphi(x))$ aufgespannt, die sich in der folgenden (4×2)-Matrix

$$W(x) := \frac{1}{\sqrt{-2V(x)[1-V(x)]}}\begin{pmatrix} [1-V(x)]\,\mathbb{1} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot i\nabla\varphi(x) \end{pmatrix} \tag{A.0.6}$$

finden. Wenn wir durch $W(x)^\top$ das Transponierte von $W(x)$ notieren, erhalten wir

$$W(x)^\top \;=\; \frac{1}{\sqrt{-2V(x)[1-V(x)]}}\Big((1-V(x))\,\mathbb{1}\,,\boldsymbol{\sigma}\cdot i\nabla\varphi(x)\Big).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
W(x)\,W(x)^\top \;&=\; \frac{1}{-2V(x)(1-V(x))}\begin{pmatrix} (1-V)^2\,\mathbb{1} & (1-V)\,\boldsymbol{\sigma}\cdot i\nabla\varphi(x) \\ (1-V)\,\boldsymbol{\sigma}\cdot i\nabla\varphi(x) & -|\nabla\varphi(x)|^2\,\mathbb{1}\end{pmatrix} \\
&=\; \frac{1}{-2V(x)}\,\boldsymbol{\alpha}\cdot i\nabla\varphi(x) + \frac{1}{-2V(x)}\begin{pmatrix}(1-V(x))\mathbb{1} & 0 \\ 0 & (-V(x)-1)\mathbb{1}\end{pmatrix} \\
&=\; \frac{1}{-2V(x)}\big(\boldsymbol{\alpha}\cdot i\nabla\varphi(x) + \alpha_0 - V(x)\,\mathbb{1}\big) \;=\; \Lambda^+(i\nabla\varphi(x)).
\end{aligned}$$

Wiederum mit Hilfe von $(\boldsymbol{\sigma}\cdot i\nabla\varphi)^2 = -|\nabla\varphi|^2\,\mathbb{1} = (V^2-1)\,\mathbb{1}$ schließen wir auf

$$W(x)^\top\,W(x) \;=\; \frac{1}{-2V(x)(1-V(x))}\big((1-V(x))^2 + V(x)^2 - 1\big)\,\mathbb{1} \;=\; \mathbb{1}.$$

Da B_+^0 die Gleichung ($\boldsymbol{T_0}$) erfüllt, genügt B_+^0 für $(t,x,0)\in\mathscr{D}_+$

$$B_+^0(t,x,0) \;=\; \Lambda^+(x,i\nabla\varphi(x))\,B_+^0(t,x,0) \;=\; W(x)\,W(x)^\top B_+^0(t,x,0).$$

Folglich gilt $B_+^0(t,x,0) = W(x)\,C(t,x)$ für eine (2×4)-Matrix $C(t,x)$. Die Gleichung (A.0.5) impliziert $W^\top(i\partial_t + \boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla_x)\,W\,C = 0$ und der Operator $-iW^\top(i\partial_t + \boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla_x)\,W$ läßt sich so wie in [38] zu

$$\begin{aligned}
&\partial_t - i\,W^\top\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla_x\circ(-2V(1-V))^{-1/2}\boldsymbol{\sigma}\cdot i\,\nabla\varphi \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla_x\circ\sqrt{(1-V)(-2V)^{-1}}\end{pmatrix} \\
&=\; \partial_t - i\,W^\top\begin{pmatrix}\frac{(4V-2)(i\,\nabla V\cdot\nabla\varphi-\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla V\times\nabla\varphi))}{-2\,(-2V(1-V))^{3/2}} + \frac{(i\Delta\varphi+i\nabla\varphi\cdot\nabla_x+\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla\varphi\times\nabla_x))}{(-2V\,(1-V))^{1/2}} \\ \frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla V}{2V(-2V(1-V))^{1/2}} + \frac{(1-V)^{1/2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla_x}{(-2V)^{1/2}}\end{pmatrix} \\
&=\; \partial_t + \frac{i}{2}\,\frac{4V-2}{(-2V)^2(1-V)}\,\big(i\,\nabla V\cdot\nabla\varphi - \boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla V\times\nabla\varphi) + (-2V)^{-1}\,i\,\Delta\varphi\big) \\
&\quad - \frac{i}{(-2V)^2\,(1-V)}\,\big(i\,\nabla\varphi\cdot\nabla V - \boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla\varphi\times\nabla V)\big) \\
&=\; \partial_t - V^{-1}\,\nabla\varphi\cdot\nabla_x + \frac{1}{2}\big(-V^{-1}\Delta\,\varphi + V^{-2}\,\nabla\,V\cdot\nabla\varphi\big) \\
&\quad + \,i\,(\,2\,V\,(1-V))^{-1}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla\varphi\times\nabla V)
\end{aligned}$$

umformen. Nach der in (A.0.3) getroffenen Definition für $\mathfrak{M}$ läßt sich der matrixwertige Teil durch

$$\mathfrak{M}(x,\nabla\varphi) \;=\; -(\,2\,V(1-V))^{-1}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla\varphi\times\nabla V)$$

darstellen. Ferner definieren wir $F(x) := \nabla_p H(x,\nabla\varphi(x))$. Aus

$$F(x) \;=\; -\nabla_p\sqrt{1-|p|^2}\,\Big|_{p=\nabla\varphi(x)} \;=\; -V^{-1}(x)\,\nabla\varphi(x),$$

für $x \in K_0$, woraus $\operatorname{div} F = -V^{-1}\Delta\varphi - V^{-1}\nabla V \cdot F$ folgt, ergibt sich

$$-iW^\top (i\partial_t + \boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla_x)\, W \;=\; \partial_t + F\cdot\nabla_x + \frac{1}{2}\operatorname{div}F - i\,\mathfrak{M}(x,\nabla\varphi).$$

Wir suchen nun Lösungen von

$$\big(\partial_t + F(x)\cdot\nabla_x + \frac{1}{2}\operatorname{div}F(x) - i\,\mathfrak{M}(x,\nabla\varphi(x))\big)C(t,x) \;=\; 0.$$

Indem wir γ für x einsetzen und weil $\varpi = \nabla\varphi(\gamma)$ und $\dot\gamma = F(\gamma)$ erfüllt sind, erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\,C(t,\gamma(t)) \;=\; -\frac{1}{2}\operatorname{div}F(\gamma(t))\,C(t,\gamma(t)) + i\,\mathfrak{M}(\gamma(t),\varpi(t))\,C(t,\gamma(t)). \tag{A.0.7}$$

Wir bemerken, daß in (A.0.7) anders als in (3.4.40) die vollständige Divergenz von F auftritt. Um (A.0.7) mit der Anfangsbedingung $C(0,y_\star) = W(y_\star)^\top$ zu lösen, verwenden wir den Ansatz $C(t,\gamma(t)) = \varrho(t)\,\mathfrak{s}(t)\,W(y_\star)^\top$, wobei ϱ eine skalare Funktion ist und $\mathfrak{s}$ die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\,\mathfrak{s}(t) \;=\; i\,\mathfrak{M}(\gamma(t),\varpi(t))\,\mathfrak{s}(t), \qquad \mathfrak{s}(0) = \mathbb{1}_2 \tag{A.0.8}$$

löst. Das impliziert

$$\frac{d}{dt}\,\varrho(t) \;=\; -\frac{1}{2}\operatorname{div}F(\gamma(t))\,\varrho(t), \qquad \varrho(0) = 1. \tag{A.0.9}$$

Da $\gamma(t) = Q^+(t,y_\star,0)$ ist, liefert das die Gleichung $\partial_t Q^+(t,y_\star,0) = F(Q^+(t,y_\star,0))$. Nun wenden wir die Liouvillesche Formel auf $\partial_t Q^+(t,y_\star,0) = F(Q^+(t,y_\star,0))$ an und erhalten

$$\partial_t \det[d_y Q^+(t,y_\star,0)] \;=\; \operatorname{div}F(Q^+(t,y_\star,0))\,\det[d_y Q^+(t,y_\star,0)], \quad (t,y_\star,0)\in\widetilde{\mathscr{D}}^+.$$

Daraus folgt

$$\partial_t \left(\det[d_y Q^+(t,y_\star,0)]\right)^{-1/2} \;=\; -\frac{1}{2}\operatorname{div}F(Q^+(t,y_\star,0))\,\left(\det[d_y Q^+(t,y_\star,0)]\right)^{-1/2}.$$

Damit ist $\varrho(t) := \det[d_y Q_+(t,y_\star,0)]^{-1/2}$, $t\in[0,\tau]$, Lösung von (A.0.9), da $\varrho(0) = 1$ ist. Wir schließen also auf

$$\begin{aligned} B^0_+(\tau,x_\star,0) \;&=\; W(x_\star)\,C(\tau,x_\star) \;=\; W(x_\star)\,\varrho(\tau)\,\mathfrak{s}(\tau)\,W(y_\star)^\top \\ &=\; \det[d_y Q_+(\tau,y_\star,0)]^{-1/2}\,W(x_\star)\,\mathfrak{s}(\tau)\,W(y_\star)^\top, \end{aligned} \tag{A.0.10}$$

was eine Alternative zur Formel (3.4.39) für B^0_+ darstellt. Nach (3.6.5), was sich im Beweis von Proposition 3.6.1 findet, gilt

$$I_+(x_\star,y_\star) \;=\; \frac{1}{2\pi h^2}\,\frac{B^0_+(\tau,x_\star,0)\,\big(1+\mathcal{O}(h)\big)}{\sqrt{\det\frac{1}{i}\begin{pmatrix}\partial_t^2\psi_+ & \partial_t d_\eta\psi_+\\ \partial_t\nabla_\eta\psi_+ & d_\eta\nabla_\eta\psi_+\end{pmatrix}(\tau,x_\star,0)}}. \tag{A.0.11}$$

Das Produkt der Determinanten läßt sich als

$$\begin{aligned}
\det[d_y Q_+(\tau, y_\star, 0)]\ \det\left(\frac{1}{i}\begin{pmatrix}\partial_t^2\psi_+ & \partial_t d_\eta \psi_+ \\ \partial_t \nabla_\eta \psi_+ & d_\eta \nabla_\eta \psi_+\end{pmatrix}(\tau, x_\star, 0)\right) \\
= \det\begin{pmatrix} 0 & -v_{y_\star}^\top \\ v_{x_\star} & i d_\eta Q^+(\tau, y_\star, 0)\end{pmatrix} \\
= \frac{d_{\mathrm{A}}(x_\star, y_\star)^2 \det\left(\exp'_{y_\star}(\exp_{y_\star}^{-1}(x_\star))\right)}{|V(x_\star)||V(y_\star)|(1-V^2(x_\star))^{1/2}(1-V^2(y_\star))^{1/2}}
\end{aligned}$$

berechnen. Dabei ergibt sich die erste Umformung aus dem Beweis von Proposition 3.6.1, die zweite gilt nach Lemma 3.6.4. Das impliziert

$$\begin{aligned}
I_+(x_\star, y_\star) \ = \ & \frac{(1-V^2(x_\star))^{\frac{1}{4}}(1-V^2(y_\star))^{\frac{1}{4}}\left(V(x_\star)V(y_\star)\right)^{\frac{1}{2}}}{h^3 \ \det\left[\exp'_{y_\star}(\exp_{y_\star}^{-1}(x_\star))\right]^{1/2}} \\
& \cdot W(x_\star)\, \mathfrak{s}(\tau)\, W(y_\star)^\top \cdot \frac{(1+\mathcal{O}(h))}{2\pi\, d_{\mathrm{A}}(x_\star, y_\star)/h}.
\end{aligned}$$

Indem wir den Ausdruck, den (A.0.10) für $B_+^0(\tau, x_\star, 0)$ liefert, statt (3.4.39) im Beweis von Proposition 3.6.1 verwenden, erhalten wir die Asymptotik

$$\begin{aligned}
& D_{h,V}^{-1}(x_\star, y_\star) \\
& = \frac{(1-V^2(x_\star))^{\frac{1}{4}}(1-V^2(y_\star))^{\frac{1}{4}}\left(V(x_\star)V(y_\star)\right)^{\frac{1}{2}}}{h^3 \ \det\left[\exp'_{y_\star}(\exp_{y_\star}^{-1}(x_\star))\right]^{1/2}} \cdot \frac{(1+\mathcal{O}(h))\, e^{-d_{\mathrm{A}}(x_\star, y_\star)/h}}{2\pi\, d_{\mathrm{A}}(x_\star, y_\star)/h} \\
& \quad \cdot W(x_\star)\, \mathfrak{s}(\tau)\, W(y_\star)^\top.
\end{aligned}$$

Dabei löst $\mathfrak{s}$ (A.0.3) mit $\mathfrak{s}(0) = \mathbb{1}_2$, W ist durch (A.0.6) gegeben und es gelten $\nabla\varphi(x_\star) = \nabla\varphi(\gamma(\tau)) = \varpi(\tau)$ und $\nabla\varphi(y_\star) = \nabla\varphi(\gamma(0)) = \varpi(0)$.

Anhang B

Fast analytische Fortsetzungen

In diesem Anhang zitieren wir die Definition einer fast analytischen Fortsetzung und listen einige Eigenschaften dieser Fortsetzungen aus Kapitel X.2 aus [13] ohne Beweis auf. Dabei verwenden wir die Notation aus [13].

Wir beginnen mit der Definition einer ϖ-flachen Funktion. Dazu betrachten wir eine offene Teilmenge Ω vom $\mathbb{R}^\nu$ und eine nichtnegative, in Ω Lipschitz-stetige Funktion ϖ. Eine komplexwertige Funktion f in Ω heißt ϖ-flach, falls zu jeder kompakten Teilmenge $\mathcal{K}$ von Ω und zu jeder nichtnegativen ganzen Zahl N eine positive Konstante $C = C(\mathcal{K}, N)$ existiert, für die

$$|f(x)| \leq C\,\varpi(x)^N, \qquad x \in \mathcal{K}, \tag{B.0.1}$$

erfüllt ist. Wir bezeichnen die Funktionen f und g in Ω als ϖ-äquivalent, falls die Differenz $f - g$ eine ϖ-flache Funktion ist. Ferner nennen wir eine Funktion f flach auf einer abgeschlossenen Teilmenge $\mathcal{S}$ von Ω, falls f eine ϖ-flache Funktion ist und $\varpi(x)$ als der Abstand von x zu $\mathcal{S}$ definiert ist. Eine nützliche Eigenschaft jeder glatten ϖ-flachen Funktion ist, daß alle Ableitungen dieser Funktion ebenfalls ϖ-flach sind (siehe Lemma 2.2 aus [13]).

Nun wenden wir uns der Definition einer fast analytischen Funktion zu. Seien $\mathcal{O}$ eine offene Teilmenge vom $\mathbb{C}^n$ und $\mathcal{S}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{O}$. Eine auf $\mathcal{O}$ glatte Funktion f heißt auf $\mathcal{S}$ fast analytisch, sofern $\overline{\partial} f$ flach auf $\mathcal{S}$ ist.

Damit schließen wir wie folgt auf die Definition einer fast analytischen Fortsetzung. Wir notieren durch $\mathcal{A}(\mathcal{O}, \mathcal{S})$ den Raum aller auf $\mathcal{O}$ glatten Funktionen, die auf $\mathcal{S}$ fast analytisch sind. Desweiteren führen wir die Schreibweisen $\mathcal{O}_\mathbb{R} := \mathcal{O} \cap \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\mathcal{O}}_\mathbb{R} := \mathcal{O}_\mathbb{R} + i\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ ein. Seien nun $\mathcal{O}$ eine offene Teilmenge vom $\mathbb{C}^n$, die in $\tilde{\mathcal{O}}_\mathbb{R}$ enthalten ist, und $\mathcal{N}(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\mathbb{R})$ der Raum der auf $\mathcal{O}$ glatten Funktionen, die auf $\mathcal{O}_\mathbb{R}$ flach sind. Dann stellen nach Lemma 2.3 aus [13] die Einschränkungen auf $\mathcal{O}_\mathbb{R}$ einen Isomorphismus von $\mathcal{A}(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\mathbb{R})/\mathcal{N}(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\mathbb{R})$ auf $C^\infty(\mathcal{O}_\mathbb{R})$ dar. Folglich läßt sich jede Funktion $f \in C^\infty(\mathcal{O}_\mathbb{R})$ als Äquivalenzklasse auf $\mathcal{O}_\mathbb{R}$ fast analytischer Funktionen modulo Funktionen aus $\mathcal{N}(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\mathbb{R})$ auffassen. Einen Repräsentanten dieser Äquivalenzklasse nennen wir eine fast analytische Fortsetzung von f in $\mathcal{O}$.

Die Konstruktion einer fast analytischen Fortsetzung $\tilde{f}$ der Funktion f ergibt sich mit

Hilfe der Darstellung

$$\tilde{f}(z) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!}(iy)^{\alpha} \partial_x^{\alpha} f(x)\, h(|y|/\epsilon_{|\alpha|}).$$

Hierbei wird die Summe über alle Multiindizes nichtnegativer ganzer Zahlen gebildet. Ferner notiert $z := x + iy$ die komplexe Variable und $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine geeignet gewählte, monoton fallende Nullfolge. Desweiteren wird mit h eine glatte Abschneidefunktion bezeichnet, die auf $\mathbb{R}$ definiert ist und $h(t) = 1$ für $|t| < 1$ und $h(t) = 0$ für $|t| > 2$ genügt.

Literaturverzeichnis

[1] Abdelkader Bouzouina. Stability of the two-dimensional Brown-Ravenhall operator. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 132(5):1133–1144, 2002.

[2] Paul A. M. Dirac. The Quantum Theory of the Electron. *Proc. R. Soc. A*, 117(778):610–624, 1928.

[3] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 132. Springer-Verlag, New York, 1966.

[4] Tosio Kato. Holomorphic families of Dirac operators. *Math. Z.*, 183(3):399–406, 1983.

[5] Abdallah Khochman. Resonances and spectral shift function for the semi-classical Dirac operator. *Rev. Math. Phys.*, 19(10):1071–1115, 2007.

[6] Valeri V. Kucherenko. Asymptotic solution of the Cauchy problem for equations with complex characteristics. *J. Soviet Math.*, 13:24–81, 1980.

[7] Andre Martinez. *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002.

[8] Oliver Matte. Correlation asymptotics for non-translation invariant lattice spin systems. *Math. Nachr.*, 281(5):721–759, 2008.

[9] Gheorghe Nenciu. Self-Adjointness and Invariance of the Essential Spectrum for Dirac Operators Defined as Quadratic Forms. *Comm. Math. Phys.*, 48(3):235–247, 1976.

[10] Wolfgang Pauli. Diracs Wellengleichung des Elektrons und geometrische Optik. *Helv. Phys. Acta*, 5:179, 1932.

[11] Upke-Walther Schmincke. Distinguished Selfadjoint Extensions of Dirac Operators. *Math. Z.*, 129:335–349, 1972.

[12] Michael E. Taylor. *Partial differential equations I.* Applied Mathematical Sciences, Band 115. Springer-Verlag, New York, 1996.

[13] Francois Trèves. *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators. Vol. 2.* Plenum Press, New York, 1980.

[14] Antonio H. Castro Neto; Francisco Guinea; Nuno M. R. Peres; Kostya S. Novoselov und Andre K. Geim. The electronic properties of graphene. *Rev. Mod. Phys.*, 81(1):109–162, 2009.

[15] Vitor M. Pereira; Johan Nilsson und Antonio H. Castro Neto. The Coulomb impurity problem in graphene. *Phys. Rev. Lett.*, 99:166802, 2007.

[16] Bernard Helffer und Bernard Parisse. Comparaison entre la décroissance de fonctions propres pour les opérateurs de Dirac et de Klein-Gordon. Application á l'étude de l'effet tunnel. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 60(2):147–187, 1994.

[17] Dmitry S. Novikov; Michael M. Fogler und Boris I. Shklovskii. Screening of a hypercritical charge in graphene. *Physical Review B*, 76:233402, 2007.

[18] Oliver Matte und Claudia Warmt. Semi-classical Green kernel asymptotics for the Dirac operator. wird erscheinen in. *Comm. Part. Diff. Equ.*

[19] Vincent Bruneau und Didier Robert. Asymptotics of the scattering phase for the Dirac operator: High energy, semi-classical and non-relativistic limits. *Ark. Mat.*, 37(1):1–32, 1999.

[20] Jean Dolbeault; Maria J. Esteban und Eric Séré. On the Eigenvalues of Operators with Gaps. Application to Dirac Operators. *J. Funct. Anal.*, 174(1):208–226, 2000.

[21] Marcel Griesemer und Heinz Siedentop. A Minimax Principle for the Eigenvalues in Spectral Gaps. *J. London Math. Soc. (2)*, 60(2):490–500, 1999.

[22] William D. Evans; Peter Perry und Heinz Siedentop. The Spectrum of Relativistic One-Electron Atoms According to Bethe and Salpeter. *Comm. Math. Phys.*, 178(3):733–746, 1996.

[23] Elliott H. Lieb und Horng-Tzer Yau. The Stability and Instability of Relativistic Matter. *Comm. Math. Phys.*, 118(2):177–213, 1988.

[24] Milton Abramowitz und Irene A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables.* National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, Band 55. U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964.

[25] Raymond Brummelhuis und Jean Nourrigat. Scattering amplitude for Dirac operators. *Comm. Part. Diff. Equ.*, 24(1-2):377–394, 1999.

[26] Anders Melin und Johannes Sjöstrand. Fourier integral operators with complex-valued phase functions. In *Fourier integral operators and partial differential equations (Colloq. Internat., Univ. Nice, Nice, 1974)*, pages 120–223. Lecture Notes in Math., Vol. 459. Springer, Berlin, 1975.

[27] Anders Melin und Johannes Sjöstrand. Fourier integral operators with complex phase functions and parametrix for an interior boundary value problem. *Comm. Partial Differential Equations*, 1(4):313–400, 1976.

[28] Sol I. Rubinow und Joseph B. Keller. Asymptotic Solution of the Dirac Equation. *Phys. Rev. (2)*, 131:2789–2796, 1963.

[29] Andrei V. Shytov; Mikhail I. Katsnelson und Leonid S. Levitov. Vacuum Polarization and Screening of Supercritical Impurities in Graphene. *Phys. Rev. Lett.*, 99:236801, 2007.

[30] Jean Dolbeault; Maria J. Esteban; Javier Duoandikoetxea und Luis Vega. Hardy-type estimates for Dirac operators. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 40(6):885–900, 2007.

[31] Jean Dolbeault; Maria J. Esteban; Michael Loss und Luis Vega. An analytical proof of Hardy-like inequalities related to the Dirac operator. *J. Funct. Anal.*, 216(1):1–21, 2004.

[32] Maria J. Esteban und Michael Loss. Self-adjointness for Dirac operators via Hardy-Dirac inequalities. *J. Math. Phys.*, 48(11):112107, 8, 2007.

[33] Victor P. Maslov und Mikhail V. Fedoriuk. *Semiclassical approximation in quantum mechanics*, volume 7 of *Mathematical Physics and Applied Mathematics*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1981. Contemporary Mathematics, 5.

[34] Hubert Kalf und Osanobu Yamada. Essential self-adjointness of n-dimensional Dirac operators with a variable mass term. *J. Math. Phys.*, 42(6):2667–2676, 2001.

[35] Martin Klaus und Rainer Wüst. Characterization and Uniqueness of Distinguished Self-Adjoint Extensions of Dirac Operators. *Comm. Math. Phys.*, 64(2):171–176, 1978/79.

[36] Mariano Giaquinta und Stefan Hildebrandt. *Calculus of variations II.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 311. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[37] Jens Bolte und Stefan Keppeler. Semiclassical Time Evolution and Trace Formula for Relativistic Spin-1/2 Particles. *Phys. Rev. Lett.*, 81(10):1987–1991, 1998.

[38] Jens Bolte und Stefan Keppeler. A Semiclassical Approach to the Dirac Equation. *Ann. Phys.*, 274(1):125–162, 1999.

[39] Xue Ping Wang. Puits multiples pour l'opérateur de Dirac. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 43(3):269–319, 1985.

[40] Rainer Wüst. Dirac Operations with Strongly Singular Potentials. Distinguished Self-Adjoint Extensions Constructed with a Spectral Gap Theorem and Cut-Off Potentials. *Math. Z.*, 152(3):259–271, 1977.

[41] Kenji Yajima. The quasiclassical approximation to Dirac equation I. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 29(1):161–194, 1982.

[42] Kenji Yajima. The quasiclassical approximation to Dirac equation II. Scattering theory. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 29(2):371–386, 1982.

Danksagung

Ich bedanke mich bei Herrn Prof. Dr. Heinz Siedentop für die Betreuung meines Dissertationsvorhabens und für die stete Ermunterung. Bei Herrn Priv.-Doz. Dr. Oliver Matte bedanke ich mich für die erfolgreiche Zusammenarbeit und dafür, daß er sich immer die Zeit genommen hat, um über Fragen und Probleme zu diskutieren. Herrn Prof. Dr. Hubert Kalf danke ich für die stets sehr hilfreichen Auskünfte und ebenso für die ein oder andere so wunderbar erzählte Anekdote, die einem immer ein Lächeln schenken konnte. Für die Hilfsbereitschaft, die sich nicht nur auf mathematische Fragestellungen bezog, sondern sich auch um das eigene Wohlbefinden drehte, danke ich Herrn Priv.-Doz. Dr. Edgardo Stockmeyer. Bei Herrn Sebastian Carstens und Herrn Andreas Fackler bedanke ich mich für die unermüdliche Ermunterung und Unterstützung. Und meinen Eltern, denen ich diese Arbeit widmen möchte, danke ich für ihr unendliches Verständnis und dafür, daß sie immer für mich da waren.

Lebenslauf

Persönliche Daten:

- Name: Claudia Yvonne Warmt
- geboren: am 30.01.1982 in Berlin
- Familienstand: ledig

Ausbildung:

- 1988-1992 : Oskar-Heinroth-Grundschule in Berlin
- 1992-2001: Besuch des humanistischen Zweigs des Goethe-Gymnasiums in Berlin
- 06/2001: Abitur am Goethe-Gymnasium in Berlin
- 10/2001-03/2002: Studium der Zahnmedizin an der FU Berlin
- 04/2002-09/2002: Studium der Rechtswissenschaften an der FU Berlin
- 10/2002-09/2007: Studium der Mathematik mit Nebenfach Logik und Wissenschaftstheorie an der LMU München
- 09/2007: Diplom in Mathematik an der LMU München
- seit 10/2007: Doktorandin an der LMU München am Lehrstuhl von Herrn Prof. Siedentop
- 10/2008-04/2011: Wissenschaftliche Mitarbeiterin an der Fakultät für Mathematik an der LMU München