MESSTHEORIE
und
ULTRAPRODUKTKONSTRUKTION

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Philosophie an der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von

K. Hegner
aus Münchberg

KOPIERTAXI Hamich, GbR, 15345 Garzau,
2009

Referent:	Prof. Dr. P. Hinst
Korreferent:	Prof. Dr. U. Moulines
Tag der mündlichen Prüfung:	9. Februar 2009.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1: Einleitung

Der Psychologie und den Sozialwissenschaften stehen eine Fülle von numerischen Verfahren und Modellen zur Verfügung, mit deren Hilfe empirische Gegenstände dieser Wissenschaften abgebildet werden; und diese numerischen Bilder werden mathematisch behandelt. Zur Rechtfertigung und Begründung verschiedener mathematischer Behandlungsweisen hat sich eine eigene methodische Teildisziplin entwickelt: die **Messtheorie** (Scott & Suppes, 1958; Pfanzagl, 1959, 1968; Suppes & Zinnes, 1963; Krantz, Luce, Suppes & Tversky, 1971; Narens, 1985). Suppes umschreibt diesen Begriff in *Introduction to LOGIC* (1957, S. 265) so: "The primary aim of the theory of measurement, ... , is to show in a precise fashion how to pass from qualitative observations ('This rod is longer than that one,' ...) to the quantitative assertions needed in empirical science ('The length of this rod is 7,2 centimeters,' ...)." Auch 45 Jahre später formuliert er nahezu gleichlautend in seinem Buch *Representation and Invariance of Scientific Structures* (2002, S. 4).

Die messtheoretischen Bemühungen zur Erschließung eines empirischen Bereichs oder zur Begründung eines spezifischen numerischen Modells, werden gemäß der oben zitierten Literatur zur Messtheorie in drei verschiedene Themenbereiche unterteilt:

1. Sind in einem **Repräsentationssatz** (meist nur hinreichende und nicht immer einstufige) Bedingungen zu nennen, die ein empirischer Bereich / ein Datensatz zu erfüllen hat, damit eine homomorphe Abbildung des empirischen in den fraglichen numerischen Bereich besteht.
2. Ist ein **Eindeutigkeitstheorem** zu formulieren, das angibt mit welchen Transformationen von einer homomorphen Abbildung zu einer anderen - wiederum homomorphen - übergegangen werden kann; das Theorem sagt aus, wie eindeutig die Abbildung ist. Dabei werden fünf Grade der Eindeutigkeit unterschieden: Nominal-, Ordinal-, Intervall-, Ratio- und Absolutskalierbarkeit. Dieses Konzept der Eindeutigkeit, das auf Stevens (1946, 1959) zurückgeht, ist nun ausdifferenziert worden (Narens, 1981a, 1981b; Luce & Narens, 1983, 1985). Neben den Begriff der Eindeutigkeit ist nun der der Homogenität getreten.
3. Sind in einem **Bedeutsamkeitstheorem** Aussagen darüber zu treffen, welchen statistischen Behandlungen die numerischen Bilder der empirischen Gegenstände unterworfen werden können, ohne zu einer Artefaktbildung zu führen. Über dieses Theorem sind Messtheorie und Statistik miteinander verknüpft.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Repräsentationstheorem und sieht dabei *erstens* ihre Hauptaufgabe darin, darzustellen, welche (algebraischen) Bedingungen hinreichend und/oder notwendig dafür sind, dass eine Klasse von Strukturen in einer Sprache erster Stufe *axiomatisiert* werden kann. Wegen der Testbarkeit einstufiger Allsätze (Lehmann; 1985) und wegen der Vollständigkeit einstufiger Sprachen wird dieses Vorgehen für wichtig gehalten.

Die zweite Art von Repräsentation betrifft die homomorphe Einbettung einer Struktur in eine numerische Struktur; hier geht es darum, hinreichende und/oder notwendige Bedingungen dafür zu finden, dass eine Klasse von Strukturen durch eine numerische Struktur repräsentiert, d.h. *metrisiert* werden kann.

In beiden Fällen befasst sich die Arbeit hauptsächlich mit Resultaten, die mit Hilfe der modelltheoretischen Methode der Konstruktion von Quotierten Reduzierten Produkten von Familien von Strukturen desselben Typs modulo eines (Ultra-)Filters gewonnen werden können. Die Arbeit möchte so einen Beitrag zur allgemeinen Wissenschaftstheorie leisten, deren Aufgabe u.a. darin besteht, die logische Struktur wissenschaftlicher Theorien aufzuklären. Wobei unter einer wissenschaftlichen Theorie – gemäß der strukturalistischen Auffassung, die auf Bourbaki zurückgeht, – eine Klasse von Strukturen einer Strukturart / eines Typs verstanden wird. Suppes hat 1957 schon die Wichtigkeit dieser Auffassung für messtheoretische/methodologische Zwecke betont.

Als Metasprache für die vorliegende Ausarbeitung dient die Umgangssprache zusammen mit einer naiven mengentheoretischen Sprache, wie sie etwa bei Enderton (1977) dargestellt ist, und die auf den Axiomen von Zermelo und Fraenkel, dem Fundierungsaxiom und dem Auswahlaxiom aufbaut.

Dabei wird die **Subtraktion zwischen Mengen** mit '\' symbolisiert. Für alle A, B soll also gelten:

$$A \backslash B = \{ x \mid x \in A \;\&\; x \notin B \}.$$

Eine **Relation** ist eine Menge von **geordneten Paaren**; für das geordnete Paar (x,y) soll gelten:

$$(x,y) = \{ \{ x \}, \{ x,y \} \}.$$

Um die **erste** und die **zweiteProjektion / Koordinate** eines geordneten Paares ansprechen zu können, soll für alle p, u gelten:

$$\mathrm{pr1}(p) = u \text{ gdw } p \text{ ist geordnetes Paar } \& \; \exists v \; p = (u, v).$$

Und für alle p, v soll gelten:

$$\mathrm{pr2}(p) = v \text{ gdw } p \text{ ist geordnetes Paar } \& \; \exists u \; p = (u, v).$$

Für den Definitions-, den Wertebereich und das Feld von Relationen werden eigene Bezeichnungen eingeführt, so soll für alle R gelten:

$$\mathrm{Dom}(R) = \{\, x \mid \exists y \,\&\, (x, y) \in \mathrm{R} \,\},$$

$$\mathrm{Ran}(R) = \{\, y \mid \exists x \,\&\, (x, y) \in \mathrm{R} \,\},$$

$$\mathrm{Fld}(R) = \mathrm{Dom}(R) \cup \mathrm{Ran}(R).$$

Für alle A und alle B wird das **Cartesische Produkt** von A und B mit

$$A \times B = \{\, p \mid p \text{ ist geordnetes Paar } \&\ \mathrm{pr1}(p) \in A \ \&\ \mathrm{pr2}(p) \in B \,\}$$

definiert.

Relationen können in ihrem Definitions-, ihrem Wertebereich oder auch in beiden Bereichen beschränkt sein; für alle R, A soll jeweils gelten:

$$R \upharpoonright A = \{\, (a, b) \mid (a, b) \in \mathrm{R} \,\&\, a \in A \,\},$$

$$R \upharpoonleft A = \{\, (a, b) \mid (a, b) \in \mathrm{R} \,\&\, b \in A \,\},$$

$$\mathrm{R} \llbracket A = \{\, p \mid p \in \mathrm{R} \,\&\, p \in A \times A \,\}.$$

Funktionen sollen **rechtseindeutige** Relationen sein. Die Funktionswerte einer Funktion f werden mit f_i, f^i, f(i) oder mit f 'i bezeichnet, mit $i \in \mathrm{Dom}(f)$; dementsprechend für eine etwa dreistellige Funktion f mit $\langle a,b,c \rangle \in \mathrm{Dom}(f)$: $f_{\langle a,b,c \rangle}$ usw. Die Redeweise 'f ist Abbildung von A nach B' meint: f ist Funktion & Dom(f) = A und $\mathrm{Ran}(f) \subseteq B$; 'f ist Funktion von A auf B': Ran(f) = B; 'f ist Funktion auf A': Dom(f) = A.

Umständlichkeiten in der Darstellung werden dadurch hervorgerufen, dass in der Metasprache der Konvention gefolgt wird, den Zählvorgang bei 1 und nicht bei 0 zu beginnen. Die Menge der Funktionen von $\{1, 2\}$ nach M wird so mit ${}^{\{1,2\}}M$ bezeichnet und nicht mit ${}^{2}M$, wobei

$${}^{\mathrm{N}}\mathrm{M} = \{\, \mathrm{f} \mid \mathrm{f} \text{ ist Funktion auf N und } \mathrm{Ran(f)} \subseteq \mathrm{M} \,\}.$$

Tupel sind Relationen, deren Definitionsbereich ein nichtleeres Anfangsstück von $\mathbb{N}^+$ ist.

Für alle *a*, *b*, *c* soll gelten: $\langle\, a, b \,\rangle = \{\, (1, a), (2, b) \,\}$;

$$\langle\, a, b, c \,\rangle = \{\, (1, a), (2, b), (3, c) \,\}.$$

#t gibt die Länge des Tupels t an, z.B. ist $\#\langle\, a, b \,\rangle = 2$.

Die Kartesische Produktbildung die zu Tupeln führt, soll mit einer eigenen Funktionskonstanten definiert sein: für alle $\mathcal{A}$, B:

$$\mathcal{A} \otimes B = \{\, t \mid t \text{ ist 2-Tupel } \& \ t_1 \in \mathcal{A} \ \& \ t_2 \in B \,\}.$$

$\mathbb{N}$ bezeichnet die natürlichen, $\mathbb{R}$ die reellen Zahlen, $\mathbb{N}^+$ die positiven natürlichen Zahlen und $\mathbb{R}^+$ dementsprechend.

Mit $<_{\mathbb{N}}$ wird auf die 2-stellige Prädikatkonstante der natürlichen Zahlen Bezug genommen, für die gilt: $\forall x \, \forall y \, (x, y \in \mathbb{N}, \text{ dann } x <_{\mathbb{N}} y \text{ gdw } x \in y).$

Des weiteren soll gelten:

$$\forall x \, \forall y \, (x \leq_{\mathbb{N}} y \text{ gdw } (x <_{\mathbb{N}} y \text{ or } x = y))$$ und

$$\forall x \, \forall y \, (y >_{\mathbb{N}} x \text{ gdw } x \leq_{\mathbb{N}} y \ \& \ x \neq y).$$

Wenn der Index an den Symbolen '<' und '≤' fehlt, so ist immer '$<_{\mathbb{N}}$' bzw. '$\leq_{\mathbb{N}}$' gemeint. Analog dazu bezieht sich $<_{\mathrm{O}}$ auf die Prädikatkonstante der mengentheoretischen Metasprache, für die gilt: $\forall \alpha \, \forall \beta \, (\alpha, \beta \text{ Ordinalzahl, dann } \alpha <_{\mathrm{O}} \beta \text{ gdw } \alpha \in \beta).$

Für alle anderen Indizes, die von $\mathbb{N}$ und von O verschieden sind, soll gelten:

$$\forall \mathcal{A} \, \forall x \, \forall y \, (x \leq_{\mathcal{A}} y \ \text{ gdw } \ \langle x, y \rangle \in \mathcal{A}_{2,1});$$

$$\forall \mathcal{A} \, \forall x \, \forall y \, (x <_{\mathcal{A}} y \ \text{ gdw } \ \langle x, y \rangle \in \mathcal{A}_{2,1} \ \& \ \langle y, x \rangle \notin \mathcal{A}_{2,1});$$

$$\forall \mathcal{A} \, \forall x \, \forall y \, (x \sim_{\mathcal{A}} y \ \text{ gdw } \ \langle x, y \rangle, \langle y, x \rangle \in \mathcal{A}_{2,1}).$$

(Vgl. Definition 5.1.1. In Anwendungen ist $\mathcal{A}$ in der Regel eine Struktur vom Typ $\langle\langle 2 \rangle, \varnothing\rangle$ gemäß Definition 2.2.7).

Die Kardinalität einer Menge A wird mit $|A|$ bezeichnet.

Als Junktoren der Metasprache werden '⇒', 'wenn..., dann ....', '⇔', 'genau dann, wenn...', 'gdw', '&', 'und', 'or' und 'oder' verwendet. Die Quantoren 'es gibt ein ...' und 'für alle ...' werden mit '∃' und mit '∀' bezeichnet; 'Ø' steht für die leere Menge.

Kapitel 2: Grundbegriffe

In diesem Kapitel werden die syntaktischen und modelltheoretischen Begriffe bereitgestellt, die in den späteren Kapiteln benötigt werden.

2.1 Definition der syntaktischen Begriffe einer Sprache erster Stufe

Im *Abschnitt 2.1* wird zunächst ein Begriff der *Sprache erster Stufe eines Typs* definiert. Eine Sprache S erster Stufe im Sinn dieser Definition ist ein 4-Tupel. Das erste Glied S_1 ist eine abzählbar unendliche Folge, deren Glieder die *Variablen* von S sind. Das zweite Glied S_2 ist eine eineindeutige Funktion auf dem Definitionsbereich des ersten Gliedes μ_1 des Typs μ von S, deren Werte die *Prädikatkonstanten* von S sind. Das dritte Glied von S S_3 zählt die logischen Konstanten von S auf, und zwar das Negationszeichen, das Konjunktionszeichen, den Existenzquantor, das Identitätszeichen, die linke und die rechte Klammer und das Komma. Das vierte Glied S_4 ist eine eineindeutige Funktion auf dem zweiten Glied μ_2 des Typs μ von S, deren Werte die *Individuenkonstanten* von S sind. Ist S eine Sprache erster Stufe vom Typ μ, dann ist μ ein 2-Tupel; das erste Glied μ_1 ist eine Folge natürlicher Zahlen, welche die Stellenzahlen der Prädikatkonstanten mit entsprechendem Index darstellen, und das zweite Glied μ_2 ist eine Menge, die als Indexmenge der Individuenkonstanten dient; ist $i \in \mu_2$, dann ist $S_{4,\,i}$ die Individuenkonstante mit Index *i*. Eine Sprache erster Stufe enthält keine Funktionskonstanten; dies ist keine echte Einschränkung, da Funktionskonstanten durch Prädikatkonstanten vertreten werden können.

Für Sprachen erster Stufe werden die üblichen Begriffe definiert: *Zeichenreihe, Atomformel, Formel, Atomsatz, Satz* (Atomformel bzw. Formel ohne freie Variablen). Ferner werden die üblichen Standardjunktoren und -quantoren, die keine logischen Grundkonstanten sind, eingeführt. Ebenso verschiedene Normalformbegriffe, die später benötigt werden.

Die Darstellung wird zum Teil von Bell & Slomson (1974) übernommen; in diesem Buch wird auch skizziert, welche Änderungen an der Sprachdefinition vorgenommen werden müssten, um auch mit Funktionskonstanten umzugehen.

Ein Teil der Begriffe wird vorausgesetzt; so: 'freies' und 'gebundenes Vorkommnis einer Variablen', 'Variable x frei für y in ϕ', 'Teilformel' und 'Tautologie'.

2.1.1 Definition.-

$\mathcal{S}$ ist eine *Sprache erster Stufe von Typ* μ

gdw

(1) $\mathcal{S}$ ist ein 4-Tupel & μ ist ein 2-Tupel & μ_1 ist Folge in $\mathbb{N}^+$ &

(2) $\mathcal{S}_1$ ist eine unendliche Abzählung &

(3) $\mathcal{S}_2$ ist eine eineindeutige Funktion auf Dom(μ_1) &

(4) $\mathcal{S}_3$ ist ein 7-Tupel &

(5) $\mathcal{S}_4$ ist eine eineindeutige Funktion auf μ_2 &

(6) Ran($\mathcal{S}_1$), Ran($\mathcal{S}_2$), Ran($\mathcal{S}_3$) und Ran($\mathcal{S}_4$) sind wechselseitig disjunkt.

Ist die Abzählung $\mathcal{S}_2$ endlich, so ist $\mathcal{S}$ eine **endliche Sprache erster Stufe**. Der Begriff '**einstufige Sprache**' wird bedeutungsgleich zu 'Sprache erster Stufe' verwendet.

2.1.2 Definitionen.-

Es sei

$\neg_{\mathcal{S}}$ = $\langle \mathcal{S}_{3,1} \rangle$ (das *Negationszeichen* von $\mathcal{S}$);

$\wedge_{\mathcal{S}}$ = $\langle \mathcal{S}_{3,2} \rangle$ (das *Konjunktionszeichen* von $\mathcal{S}$);

$\exists_{\mathcal{S}}$ = $\langle \mathcal{S}_{3,3} \rangle$ (der *Existenzquantor* von $\mathcal{S}$);

$(_{\mathcal{S}}$ = $\langle \mathcal{S}_{3,4} \rangle$ (die *linke Klammer* von $\mathcal{S}$);

$)_{\mathcal{S}}$ = $\langle \mathcal{S}_{3,5} \rangle$ (die *rechte Klammer* von $\mathcal{S}$);

$,_{\mathcal{S}}$ = $\langle \mathcal{S}_{3,6} \rangle$ (das *Komma* von $\mathcal{S}$);

$=_{\mathcal{S}}$ = $\langle \mathcal{S}_{3,7} \rangle$ (das *Identitätszeichen* von $\mathcal{S}$).

2.1.3 <u>Definitionen</u>.-

$\mathrm{VAR}_S = \{ V \mid$ es gibt ein $p \in \mathrm{Ran}(S_1)$ & $V = \langle p \rangle \}$.

$\mathrm{PRÄD}_S = \{ P \mid$ es gibt ein $t \in \mathrm{Ran}(S_2)$ & $P = \langle t \rangle \}$.

$\mathrm{INDK}_S = \{ K \mid$ es gibt ein $u \in \mathrm{Ran}(S_4)$ & $K = \langle u \rangle \}$.

Für die Erfülltheitsdefinition weiter unten werden die folgenden "Abzählungen" benötigt.

2.1.4 <u>Definitionen</u>.-

${}^S\mathrm{V}$ ist Funktion auf $\mathrm{Dom}(S_1)$ & $\forall i\, (i \in \mathrm{Dom}(S_1) \Rightarrow {}^S\mathrm{V}_i = \langle S_{1,i} \rangle)$.

${}^S\mathrm{P}$ ist Funktion auf $\mathrm{Dom}(S_2)$ & $\forall i\, (i \in \mathrm{Dom}(S_2) \Rightarrow {}^S\mathrm{P}_i = \langle S_{2,i} \rangle)$.

${}^S\mathrm{K}$ ist Funktion auf $\mathrm{Dom}(S_4)$ & $\forall i\, (i \in \mathrm{Dom}(S_4) \Rightarrow {}^S\mathrm{K}_i = \langle S_{4,i} \rangle)$.

Mit ${}^S\mathrm{V}$ werden die Variablen, mit ${}^S\mathrm{P}$ die Prädikatkonstanten, mit ${}^S\mathrm{K}$ die Individuenkonstanten und mit S_3 die logischen Partikel von S "abgezählt". Wenn $i \in \mathrm{Dom}(S_2)$, dann ist $\langle S_{2,i} \rangle$ eine $\mu_1(i)$-stellige Prädikatkonstante; d. h. P ist eine n-stellige Prädikatkonstante von S, wenn es ein $i \in \mathrm{Dom}(S_2)$ gibt, so dass $n = \mu_1(i)$ und $P = \langle S_{2,i} \rangle$.

Die Definitionen 2.1.2 und 2.1.3 sind so angelegt, dass die atomaren Ausdrücke von S 1-Tupel sind; das ist nötig, damit diese Elemente bei einer unten zu definierenden Verknüpfungsoperation von Tupeln, als Argumente zur Verfügung stehen.

Die nächste Definition legt die Menge der *Atomzeichen von S* fest:

2.1.5 <u>Definition</u>.-

$\mathrm{AT}_S = \mathrm{Ran}(S_1) \cup \mathrm{Ran}(S_2) \cup \mathrm{Ran}(S_3) \cup \mathrm{Ran}(S_4)$.

Nun wird die Menge der *endlichen Zeichenreihen von S* definiert.

2.1.6 Definition.-

$$\mathrm{ZR}_S = \{\, p \mid p = \emptyset \text{ oder } \exists n \in \mathbb{N}^+ \;\&\; p \in {}^{\{1,\dots,n\}}\mathrm{AT}_S \,\}.$$

Auf der Menge ZR_S ist eine zweistellige Verknüpfungsoperation VK_S definierbar.

2.1.7 Definition.-

VK_S ist eine Funktion, $\mathrm{Dom}(\mathrm{VK}_S) = {}^{\{1,2\}}\mathrm{ZR}_S$ & für alle $x, y \in \mathrm{ZR}_S$ gilt:

$$\mathrm{VK}_S(\langle x, y\rangle) = z$$

gdw

z endliche Folge & $\#z = \#x + \#y$ & für alle i mit $1 \leq_{\mathbb{N}} i \leq_{\mathbb{N}} \#x$ gilt $z_i = x_i$

und für $\#x + 1 \leq_{\mathbb{N}} i \leq_{\mathbb{N}} \#x + \#y$ gilt $z_i = y_{i - \#x}$.

Da bei der Definition der Begriffe 'Atomformel' und 'Formel' eine Verknüpfungsoperation mit nur zwei Argumentstellen zu schwer lesbaren Symbolreihen führen würde, soll nun rekursiv eine Verknüpfungsoperation VVK_S^n mit einer beliebigen Zahl von Argumentstellen definiert werden. Die Korrektheit der folgenden Definition sichert das Rekursionstheorem:

2.1.8 Definition.-

(1) VVK_S ist Funktion auf $\mathbb{N}$ &

(2) $\mathrm{VVK}_S^0 = \mathrm{VK}_S$ &

(3) für alle $n \in \mathbb{N}$:

VVK_S^{n+1} ist Funktion auf ${}^{\{1,2,\dots,n+3\}}\mathrm{ZR}_S$ und für alle z:

$$z \in {}^{\{1,\dots,n+3\}}\mathrm{ZR}_S \Rightarrow \mathrm{VVK}_S^{n+1}(z) = \mathrm{VK}_S(\langle \mathrm{VVK}_S^n(\langle z_1, \dots, z_{n+2}\rangle), z_{n+3}\rangle).$$

Um im folgenden Text die metasprachlichen Ausdrücke wie üblich anschreiben zu können, wird nun auch das Funktionssymbol VVK_S^n für die n-stellige Verknüpfung weggelassen; es wird also die folgende Schreibkonvention getroffen:

$$VVK_S{}^n\,(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1\, x_2 \dots x_n\,;$$

Die Argumente von VVK_S^n werden nebeneinander geschrieben unter Weglassung der Klammern, der Kommata und der Funktionskonstanten.

2.1.9 Definition.-

ϕ ist *Atomformel von S*

gdw

(1) es ein μ gibt, so dass S Sprache erster Stufe vom Typ μ ist &

(2) es gibt ein ψ, $\xi \in VAR_S \cup INDK_S$ & $\phi = \psi =_S \xi$ oder

es existiert ein $n \in Dom(\mu_1)$ & ϕ ist $\mu_1(n) + 1$ – Tupel &

$\phi_1 = S_{2,n}$ & für $i \in \{ 2, ..., \mu_1(n) + 1 \}$ ist $\phi_i \in VAR_S \cup INDK_S$.

Atomsätze von S enthalten nur Individuenkonstanten von S und keine Variablen:

2.1.10 Definition.-

ϕ ist *Atomsatz von S*

gdw

ϕ ist Atomformel von S & ϕ enthält keine Variablen von S.

Nun kann FML_S, 'die Menge der Formeln von S' induktiv definiert werden:

2.1.11 Definition.-

(1) Wenn ϕ Atomformel von S, dann $\phi \in \mathrm{FML}_S$.

(2) Wenn ferner $\phi \in \mathrm{FML}_S$, dann $\neg_S\phi \in \mathrm{FML}_S$ und wenn weiterhin $\phi \in \mathrm{FML}_S$ und $\psi \in \mathrm{FML}_S$ dann $(_S\, \phi \wedge_S \psi)_S \in \mathrm{FML}_S$ und wenn schließlich $\phi \in \mathrm{FML}_S$ und $v \in \mathrm{VAR}_S$, dann $\exists_S v\, \phi \in \mathrm{FML}_S$.

(3) Für alle $\boldsymbol{M}$: wenn für alle Atomformeln ϕ von S gilt $\phi \in \boldsymbol{M}$, wenn ferner für alle $\phi \in \boldsymbol{M}$ gilt $\neg_S\phi \in \boldsymbol{M}$, und wenn weiterhin für alle $\phi \in \boldsymbol{M}$ und alle $\psi \in \boldsymbol{M}$ gilt $(_S\, \phi \wedge_S \psi)_S \in \boldsymbol{M}$, und wenn schließlich für alle $\phi \in \boldsymbol{M}$ und alle $v \in \mathrm{VAR}_S$ gilt $\exists_S v\phi \in \boldsymbol{M}$, dann ist $\mathrm{FML}_S \subseteq \boldsymbol{M}$.

2.1.12 Satz.- (Schwaches Prinzip der Formel-Induktion)

Für alle S: wenn S eine Sprache erster Stufe ist, dann gilt für alle $\boldsymbol{M}$:

wenn für alle Atomformeln ϕ von S gilt $\phi \in \boldsymbol{M}$,

wenn ferner für alle $\phi \in \boldsymbol{M} \cap \mathrm{FML}_S$ $\neg_S\, \phi \in \boldsymbol{M}$,

und wenn für alle $\phi \in \boldsymbol{M} \cap \mathrm{FML}_S$ und alle $\psi \in \boldsymbol{M} \cap \mathrm{FML}_S$ gilt $(_S\, \phi \wedge_S \psi)_S \in \boldsymbol{M}$,

und wenn schließlich für alle $\phi \in \boldsymbol{M} \cap \mathrm{FML}_S$ und alle $v \in \mathrm{VAR}_S$ gilt $\exists_S\, v\, \phi \in \boldsymbol{M}$,

dann ist $\mathrm{FML}_S \subseteq \boldsymbol{M}$.

Die **Sätze** von S bilden eine Teilmenge von FML_S; dazu:

2.1.13 Definition.-

$\mathrm{SATZ}_S = \{\, \phi \mid \phi \in \mathrm{FML}_S \,\&\, \phi$ hat keine freien Variablen $\}$.

Als Abkürzungen, um manche Formeln leichter lesen zu können, werden nun noch die drei üblichen logischen Operatoren und der Allquantor in die Metasprache eingeführt:

Wenn ϕ, $\psi \in FML_S$ und $v \in VAR_S$, dann soll

$(\phi \vee_S \psi)$	für	$\neg_S (_S \neg_S \phi \wedge_S \neg_S \psi)_S$
$(\phi \rightarrow_S \psi)$	für	$(_S \neg_S \phi \vee_S \psi)_S$
$(\phi \leftrightarrow_S \psi)$	für	$(_S (_S \phi \rightarrow_S \psi)_S \wedge_S (_S \psi \rightarrow_S \phi)_S)_S$ und
$\forall_S v\, \phi$	für	$\neg_S \exists_S v \neg_S \phi$ stehen.

Für die Anwendungen in Abschnitt 2.3 werden die folgenden syntaktischen Begriffe benötigt.

2.1.14 Definition.-

ϕ ist in *pränexer Normalform in S*

gdw

$\phi \in FML_S$ und ϕ ist entweder quantorenfrei, oder es gibt ein $n \in \mathbb{N}^+$ und Funktionen R, S und T, so dass $Dom(R) = Dom(S) = Dom(T) = \{1, ..., n\}$ und $Ran(R) = Ran(T) = \{ \varnothing, \neg_S \}$ und $Ran(S) \subseteq VAR_S$ und S ist linkseindeutig und weiterhin gibt es eine quantorenfreie Formel ψ von S, so dass: $\phi = R_1 \exists_S S_1\, T_1 \dots R_n \exists_S S_n\, T_n\, \psi$.

2.1.15 Definition.-

ψ ist in *konjunktiver Normalform in S*

gdw

ψ quantorenfreie Formel von S; und es gibt eine endliche Teilmenge Φ der Atomformeln von S und ein $n \in \mathbb{N}^+$ und eine Abzählung s der Elemente von Φ, so dass für alle $k \in \{1, ..., n\}$ gilt: $s_k \in \Phi$; und weiterhin gibt es ein $m \in \mathbb{N}^+$ und eine Funktion λ auf $\{ 1, ..., m \} \times \{1, ..., n \}$, so dass für alle $i \in \{ 1, ..., m \}$ und alle $j \in \{ 1, ..., n \}$ gilt:

$$(\lambda_{i,j} = s_j \text{ oder } \lambda_{i,j} = \neg_S s_j \text{ oder } \lambda_{i,j} = \varnothing)$$

$$\& \ \psi = (\lambda_{1,1} \vee_S \dots \vee_S \lambda_{1,n}) \wedge_S \dots \wedge_S (\lambda_{m,1} \vee_S \dots \vee_S \lambda_{m,n}).$$

2.1.16 Definition.-

ξ ist *Präfix von* ϕ in $\mathcal{S}$

gdw

$\phi \in FML_{\mathcal{S}}$ und ϕ ist entweder quantorenfrei und $\xi = \varnothing$, oder es gibt ein $n \in \mathbb{N}^+$ und Funktionen R, S und T, so dass Dom(R) = Dom(S) = Dom(T) = $\{1, ..., n\}$ und Ran(R) = Ran(T) = $\{ \varnothing, \neg_{\mathcal{S}} \}$ und Ran(S) $\subseteq VAR_{\mathcal{S}}$ und S ist linkseindeutig und es gibt es eine quantorenfreie Formel ψ von $\mathcal{S}$, so dass:

$$\phi = R_1 \exists_{\mathcal{S}} S_1\, T_1 \dots R_n \exists_{\mathcal{S}} S_n\, T_n\, \psi \;\&$$
$$\xi = R_1 \exists_{\mathcal{S}} S_1\, T_1 \dots R_n \exists_{\mathcal{S}} S_n\, T_n\,.$$

2.1.17 Definition.-

ξ ist *Kern von* ϕ *in* $\mathcal{S}$

gdw

$\phi \in FML_{\mathcal{S}}$ und ϕ ist entweder quantorenfrei und $\xi = \phi$, oder es gibt ein $n \in \mathbb{N}^+$ und Funktionen R, S und T, so dass Dom(R) = Dom(S) = Dom(T) = $\{1, ..., n\}$ und Ran(R) = Ran(T) = $\{ \varnothing, \neg_{\mathcal{S}} \}$ und Ran(S) $\subseteq VAR_{\mathcal{S}}$ und S ist linkseindeutig und ξ ist quantorenfreie Formel von $\mathcal{S}$ und $\phi = R_1 \exists_{\mathcal{S}} S_1\, T_1 \dots R_n \exists_{\mathcal{S}} S_n\, T_n\, \xi$.

2.1.18 Definition.-

ϕ *Allsatz von* $\mathcal{S}$

gdw

$\phi \in SATZ_{\mathcal{S}}$ und es gibt ein $n \in \mathbb{N}^+$ und eine linkseindeutige Funktion S so dass Dom(S) = $\{ 1, ..., n \}$ und Ran(S) $\subseteq VAR_{\mathcal{S}}$ und weiterhin gibt es eine quantorenfreie Formel ψ von $\mathcal{S}$, so dass: $\phi = \neg_{\mathcal{S}} \exists_{\mathcal{S}} S_1 \dots \exists_{\mathcal{S}} S_n\, \psi$.

2.1.19 Definition.-

ϕ *Existenzsatz von* $\mathcal{S}$

gdw

$\phi \in$ SATZ$_{\mathcal{S}}$ und es gibt ein $n \in \mathbb{N}^+$ und eine linkseindeutige Funktion $\mathcal{S}$ so dass Dom($\mathcal{S}$) = $\{ 1, ..., n \}$ und Ran($\mathcal{S}$) $\subseteq$ VAR$_{\mathcal{S}}$ und weiterhin gibt es eine quantorenfreie Formel ψ von $\mathcal{S}$, so dass: $$\phi = \exists_{\mathcal{S}} \mathcal{S}_1 \dots \exists_{\mathcal{S}} \mathcal{S}_n\ \psi.$$

2.2 Algebraische und mengentheoretische Begriffe

Im *Abschnitt 2.2* werden verschiedene rein mengentheoretische Begriffe eingeführt, deren genaue Definitionen später benötigt werden: Vorausgesetzt wird der Begriff des n-Tupels im Sinn einer Funktion auf der Menge der positiven ganzen Zahlen von 1 bis einschließlich n. Definiert werden dann z.B.: *Verkettung* zweier Tupel, *n-stelliges Prädikat* (Menge von n-Tupeln), *n-stellige Operation* (rechtseindeutiges $(n + 1)$-stelliges Prädikat usw. Der Wert einer n-stelligen Operation P für ein Argument t wird mit $P[t]$ bezeichnet. $(x \bullet_P y)$ steht für $P[\langle x, y\rangle]$.

Die weiteren Definitionen im Abschnitt 2.2 betreffen den Begriff der Struktur eines Typs und damit zusammenhängende Begriffe. Eine Struktur $\mathcal{A}$ vom Typ μ ist ein 3-Tupel, bestehend aus einer nichtleeren Menge $\mathcal{A}_1$, einer Folge $\mathcal{A}_2$ der Länge Dom(μ_1) von $\mu_{1,j}$-stelligen Prädikaten $\mathcal{A}_{2,j}$ ($j \in$ Dom(μ_1)) und einer Abbildung $\mathcal{A}_3$ von μ_2 nach $\mathcal{A}_1$. Eine solche Struktur liefert im Kontext des Erfüllbarkeitsbegriffs die Interpretanten der Prädikatkonstanten und Individuumkonstanten einer Sprache $\mathcal{S}$ erster Stufe des Typs μ. Als weitere auf den Begriff der Struktur Bezug nehmende Begriffe werden u.a. definiert: *Substruktur, homomorphe Einbettung* einer Struktur in eine andere desselben Typs, *isomorphe Einbettung* einer Struktur in eine andere desselben Typs, *Isomorphismus* von einer Struktur auf eine andere desselben Typs. Ferner werden einige einschlägige Theoreme bewiesen.

2.2.1 Definition.-

Für alle u, v: $(u \wedge v) = \{ (i,y) \mid \exists m \exists n (u$ ist m-Tupel & v ist n-Tupel

& $[(i,y) \in u$ or $\exists j (1 \leq_{\mathbb{N}} j \leq_{\mathbb{N}} n \;\&\; i = m + j \;\&\; y = v_j)]) \}$.

2.2.2 Satz.-

Für alle u, v, m, n: wenn u ein m-Tupel und v ein n-Tupel ist, dann gilt:

(i) $u \wedge v$ ist ein $(m + n)$-Tupel;

(ii) $\forall i (1 \leq_{\mathbb{N}} i \leq_{\mathbb{N}} m \Rightarrow (u \wedge v)_i = u_i);$

(iii) $\forall j (1 \leq_{\mathbb{N}} j \leq_{\mathbb{N}} n \Rightarrow (u \wedge v)_{m+j} = v_j).$

Beweis: Sei u m-Tupel und v n-Tupel.

ad (i): Nach Voraussetzung ist $m \in \mathbb{N}^+$ & $n \in \mathbb{N}^+$, also ist $(m + n) \in \mathbb{N}^+$. Nach Definition ist

$(u \wedge v)$ eine Relation. Wir beweisen nun, dass $(u \wedge v)$ rechtseindeutig ist.

Sei $(i, y) \in (u \wedge v)$ & $(i, z) \in (u \wedge v)$.

Dann

$\exists m\, \exists n$ (u ist m-Tupel & v ist n-Tupel & [(i, y) $\in$ u or $\exists j\,(1 \leq_N j \leq_N n$ & i = m+j & y = v_j)]).

Seien m', n' so.

Dann ist m = m' & n = n', also [(i, y) $\in$ u or $\exists j\,(1 \leq_N j \leq_N$ n & i = m + j & y =v_j)]. Ferner

$\exists m\, \exists n$ (u ist m-Tupel & v ist n-Tupel & [(i, z) $\in$ u or $\exists j\,(1 \leq_N j \leq_N n$ & i = m+j & z = v_j)]).

Seien m'' und n'' so.

Dann ist m = m'' und n = n'' und [(i, z) $\in$ u or $\exists j\,(1 \leq_N j \leq_N$ n & i = m + j & z = v_j)]).

Es ergeben sich vier Fälle:

<u>Fall 1</u>: (i, y) $\in$ u & (i, z) $\in$ u. Da u Funktion ist, ist dann y = z.

<u>Fall 2</u>: (i, y) $\in$ u & $\exists j\,(1 \leq_N j \leq_N$ n & i = m + j & z = v_j).

Sei j so. Dann ist einerseits i $\in$ Dom(u), also 1 $\leq_N$ i $\leq_N$ m, andererseits ist i = m + j mit 1 $\leq_N$ j $\leq_N$ n, also m $\leq_N$ i, also i $\leq_N$ m & m $\leq_N$ i; und da 1 $\leq_N$ j ist m $\neq$ i. Also kann dieser Fall nicht eintreten.

<u>Fall 3</u>: $\exists j$ (1 $\leq_N j \leq_N$ n & i = m + j & y = v_j) & (i, z) $\in$ u.

Dieser Fall führt ebenso wie Fall 2 zu einem Widerspruch, kann also nicht eintreten.

<u>Fall 4</u>: $\exists j\,(1 \leq_N j \leq_N$ n & i = m + j & y = v_j) & $\exists j$ (1 $\leq_N j \leq_N$ n & i = m + j & z = v_j).

Sei j, j' so. Dann ist i = m + j & i =m + j', also m + j = m + j', also j = j'. Dann ist y = v_j & z = v_j & y = z.

In den beiden Fällen, die eintreten können ist also y = z. Also ist y = z. Dann gilt

$$\forall i\, \forall y\, \forall z\, (\, (i, y) \in u \,^\wedge\, v \;\&\; (i, z) \in u \,^\wedge\, v \Rightarrow y = z).$$

Also ist u $^\wedge$ y rechtseindeutig. Also ist u $^\wedge$ v rechtseindeutige Relation, d. h. Funktion.

Als nächstes beweisen wir, dass

$$\mathrm{Dom}(u \,^\wedge\, v) = \{\, z \mid 1 \leq_N z \leq_N m + n \,\}.$$

Sei also zunächst i $\in$ Dom(u $^\wedge$ v).

Dann $\exists y\,(\mathrm{i}, y) \in \mathrm{u}^\wedge \mathrm{v}$. Sei $(\mathrm{i}, \mathrm{y}) \in \mathrm{u}^\wedge \mathrm{v}$. Dann

$$\exists m\, \exists n\, (\text{ u ist } m\text{-Tupel \& v ist } n\text{-Tupel \&}$$

$$[\, (\mathrm{i}, \mathrm{y}) \in \mathrm{u} \text{ \& oder } \exists j\, (\, 1 \leq_{\mathrm{N}} j \leq_{\mathrm{N}} n \;\&\; \mathrm{i} = m + j \;\&\; \mathrm{y} = \mathrm{v}_j\,)\,]\,).$$

Seien m', n' so. Dann ist m' = m & n' = n, also

$$[\, (\mathrm{i}, \mathrm{y}) \in \mathrm{u} \text{ oder } \exists j\, (\, 1 \leq_{\mathrm{N}} j \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{n} \;\&\; \mathrm{i} = \mathrm{m} + j \;\&\; \mathrm{y} = \mathrm{v}_j\,)\,].$$

<u>Fall 1</u>: $(\mathrm{i}, \mathrm{y}) \in \mathrm{u}$. Dann ist $\mathrm{i} \in \mathrm{Dom(u)}$, also $1 \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{i} \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{m}$, also $1 \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{i} \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{m} + \mathrm{n}$.

<u>Fall 2</u>: $\exists j\, (\, 1 \leq_{\mathrm{N}} j \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{n} \;\&\; \mathrm{i} = \mathrm{m} + j \;\&\; \mathrm{y} = \mathrm{v}_j\,)$.

Sei j so. Dann ist $1 \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{j} \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{n}$ & $\mathrm{i} = \mathrm{m} + \mathrm{j}$. Dann ist $\mathrm{m} + \mathrm{j} \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{m} + \mathrm{n}$, also $\mathrm{i} \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{m} + \mathrm{n}$.

Also ist $\mathrm{i} \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{m} + \mathrm{n}$. Also ist $\mathrm{i} \in \{\, z \mid 1 \leq_{\mathrm{N}} z \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{m} + \mathrm{n}\,\}$.

Also ist $\mathrm{Dom}(\mathrm{u}^\wedge \mathrm{v}) \subseteq \{\, z \mid 1 \leq_{\mathrm{N}} z \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{m} + \mathrm{n}\,\}$.

Sei nun umgekehrt $\mathrm{i} \in \{\, z \mid 1 \leq_{\mathrm{N}} z \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{m} + \mathrm{n}\,\}$.

Dann ist $1 \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{i} \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{m} + \mathrm{n}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

<u>Fall 1</u>: n = 0. Dann ist $1 \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{i} \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{m}$, also $\mathrm{i} \in \mathrm{Dom(u)}$. Dann $\exists y\,(\mathrm{i}, y) \in \mathrm{u}$. Sei $(\mathrm{i}, \mathrm{y}) \in \mathrm{u}$.

Dann $\exists m\, \exists n\, (\text{ u ist } m\text{-Tupel \& v ist } n\text{-Tupel \&}$

$$[\, (\mathrm{i}, \mathrm{y}) \in \mathrm{u} \text{ or } \exists j\, (\, 1 \leq_{\mathrm{N}} j \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{n} \;\&\; \mathrm{i} = m{+}j \;\&\; \mathrm{y} = \mathrm{v}_j\,)\,]\,).$$

Dann ist $(\mathrm{i}, \mathrm{y}) \in \mathrm{u}^\wedge \mathrm{v}$. Dann ist $\mathrm{i} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{u}^\wedge \mathrm{v})$.

<u>Fall 2</u>: $0 <_{\mathrm{N}} \mathrm{n}$. Dann folgt mit $\mathrm{i} \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{m} + \mathrm{n}$,

$$\text{dass } \mathrm{i} \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{m} \text{ or } \exists j\, (\, 1 \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{j} \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{n} \;\&\; \mathrm{i} = \mathrm{m} + j\,).$$

<u>Fall 2.1</u>: $\mathrm{i} \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{m}$. Dann folgt wie im Fall 1, dass $\mathrm{i} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{u}^\wedge \mathrm{v})$.

<u>Fall 2.2</u>: $\exists j\, (\, 1 \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{j} \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{n} \;\&\; \mathrm{i} = \mathrm{m} + j\,)$.

Sei j so. Dann ist $\mathrm{j} \in \mathrm{Dom(v)}$, also $\exists y\,(\mathrm{j}, y) \in \mathrm{v}$. Sei $(\mathrm{j}, \mathrm{y}) \in \mathrm{v}$.

Dann ist $\mathrm{y} = \mathrm{v}_{\mathrm{j}}$. Dann $\exists j\, (\, 1 \leq_{\mathrm{N}} j \leq_{\mathrm{N}} \mathrm{n} \;\&\; \mathrm{i} = \mathrm{m} + j \;\&\; \mathrm{y} = \mathrm{v}_j\,)$.

Dann $\exists m\, \exists n\, (\text{ u ist } m\text{-Tupel \& v ist } n\text{-Tupel}$

$$\&\, [\, (\mathrm{i}, \mathrm{y}) \in \mathrm{u} \text{ oder } \exists j\, (\, 1 \leq_{\mathrm{N}} j \leq_{\mathrm{N}} n \;\&\; \mathrm{i} = m + j \;\&\; \mathrm{y} = \mathrm{v}_j\,)\,]\,).$$

Dann ist $(i, y) \in u \wedge v$. Dann ist $i \in \mathrm{Dom}(u \wedge v)$.

Also ist $i \in \mathrm{Dom}(u \wedge v)$.

Also ist $\{ z \mid 1 \leq_N z \leq_N m + n \} \subseteq \mathrm{Dom}(u \wedge v)$.

Insgesamt ist also $\mathrm{Dom}(u \wedge v) = \{ z \mid 1 \leq_N z \leq_N m + n \}$.

Dann ist also $u \wedge v$ Funktion auf $\{ z \mid 1 \leq_N z \leq_N m + n \}$& $(m + n) \in \mathbb{N}^+$.

Also ist $u \wedge v$ ein $(m + n)$-Tupel.

<u>ad (ii)</u>: Sei $1 \leq_N i \leq_N m$. Dann ist $i \in \mathrm{Dom}(u)$. Dann ist $(i, u_i) \in u$. Dann ist $(i, u_i) \in (u \wedge v)$, also ist $(u \wedge v)_i = u_i$.

<u>ad (iii)</u>: Sei $1 \leq_N j \leq_N n$. Dann ist $1 \leq_N j \leq_N n$ & $m + j = m + j$ & $v_j = v_j$. Also

$$\exists j\, (1 \leq_N j \leq_N n \;\&\; m + j = m + j \;\&\; v_j = v_j).$$

Dann ist $(m + j, v_j) \in (u \wedge v)$. Also ist $(u \wedge v)_{m+j} = v_j$.

In den Definitionen 2.2.3 wird nun der Begriff 'Prädikat' in der Reihe von Bedeutungszusammenhängen für die mengentheoretische Metasprache definiert, die für die vorliegende Arbeit benötigt werden; insbesondere werden 'Operationen' als spezielle Prädikate definiert.

2.2.3 <u>Definitionen</u>.-

Für alle *P*, alle *n* und alle *A*:

(a) *P* ist ein Prädikat

gdw $P \subseteq \{ t \mid t$ ist ein Tupel mindestens der Länge $1 \}$.

(b) *P* ist ein Prädikat in *A*

gdw *P* ist ein Prädikat & $\forall t\, (t \in P \Rightarrow \mathrm{Ran}(t) \subseteq A)$.

(c) P ist n-stelliges Prädikat

gdw $n \in \mathbb{N}^{+}$ & $\forall t\,(t \in P \Rightarrow t$ ist n-Tupel).

(d) P ist n-stelliges Prädikat in A

gdw P ist n-stelliges Prädikat & $\forall t\,(t \in P \Rightarrow \mathrm{Ran}(t) \subseteq A)$.

(e) $\mathrm{dom}(P) = \{\, t \mid t$ ist Tupel mindestens der Länge 1 & $\exists z\, t^\wedge \langle z\rangle \in P \,\}$.

(f) $\mathrm{ran}(P) = \{\, z \mid \exists t\,(t$ ist Tupel mindestens der Länge 1 & $t^\wedge \langle z\rangle \in P)\,\}$.

(g) $\mathrm{fld}(P) = \mathrm{Ran}(\bigcup P)$.

(h) P ist ein rechtseindeutiges Prädikat

gdw $P \subseteq \{\, t \mid t$ ist ein Tupel mindestens der Länge 2 $\}$ & $\forall t\,\forall z\,\forall z'\,(t$ ist ein Tupel mindestens der Länge 1 & $t^\wedge \langle z\rangle \in P$ & $t^\wedge \langle z'\rangle \in P \Rightarrow z = z')$.

(i) P ist ein rechtseindeutiges Prädikat in A

gdw P ist rechtseindeutiges Prädikat & $\forall t\,(t \in P \Rightarrow \mathrm{Ran}(t) \subseteq A)$.

(j) P ist ein n-stelliges rechtseindeutiges Prädikat

gdw $2 \leq_{\mathrm{N}} n$ & $P \subseteq \{\, t \mid t$ ist ein n-Tupel $\}$

& $\forall t\,\forall z\,\forall z'\,(t$ ist ein $(n\text{-}1)$-Tupel & $t^\wedge \langle z\rangle \in P$ & $t^\wedge \langle z'\rangle \in P \Rightarrow z = z')$.

(k) P ist ein n-stelliges rechtseindeutiges Prädikat in A

gdw P ist ein n-stelliges rechtseindeutiges Prädikat & $\forall t\,(t \in P \Rightarrow \mathrm{Ran}(t) \subseteq A)$.

(l) P ist eine Operation

gdw P ist ein rechtseindeutiges Prädikat.

(m) P ist eine Operation in A

gdw P ist rechtseindeutiges Prädikat in A.

(n) P ist eine n-stellige Operation

gdw $1 \leq_{\mathrm{N}} n$ & P ist ein $(n+1)$-stelliges rechtseindeutiges Prädikat .

(o) P ist eine n-stellige Operation in A

gdw P ist eine n-stellige Operation & $\forall t\ (t \in P \Rightarrow \mathrm{Ran}(t) \subseteq A)$.

(p) P ist eine abgeschlossene, n-stellige Operation in A

gdw P ist eine n-stellige Operation in A &

$\forall t\ (\ t\ n\text{-Tupel}\ \&\ \forall i\ (\ 1 \leq_{\mathrm{N}} i \leq_{\mathrm{N}} n \Rightarrow t_i \in A\ ) \Rightarrow t \in \mathrm{dom}(P)\ )$.

(q) P ist ein homogenes Prädikat

gdw P ist Prädikat & $\forall t \forall t'\ (\ t, t' \in P \Rightarrow \mathrm{Dom}(t) = \mathrm{Dom}(t')\ )$.

(r) [*die Stellenzahl des Prädikats P:*] $\mathrm{stz}\ (P) = \mathrm{Dom}(\bigcup (P)\ )$.

(s) P ist homogene Familie von Prädikaten

gdw $P \neq \varnothing$ & P ist Funktion & $\forall i\ (\ i \in \mathrm{Dom}(P) \Rightarrow P_i$ ist homogenes Prädikat &

$\forall i'\ (\ i' \in \mathrm{Dom}(P) \Rightarrow \mathrm{stz}(P_{i'}) = \mathrm{stz}(P_i)\ )\ )$.

(t) P ist Familie von n-stelligen Prädikaten

gdw P ist Funktion & $\forall i\ (i \in \mathrm{Dom}(P) \Rightarrow P_i$ ist n-stelliges Prädikat).

(u) P ist homogene Familie von Prädikaten in A

gdw P ist homogene Familie von Prädikaten & A ist Funktion auf $\mathrm{Dom}(P)$ &

$\forall i\ (i \in \mathrm{Dom}(P) \Rightarrow P_i$ ist Prädikat in A_i).

(v) P ist Familie von n-stelligen Prädikaten in A

gdw P, A sind Funktionen & $\mathrm{Dom}(P) = \mathrm{Dom}(A)$ &

$\forall i\ (i \in \mathrm{Dom}(P) \Rightarrow P_i$ ist n-stelliges Prädikat in A_i).

(w) [*die Stellenzahl der Familie P:*] $\mathrm{stz}^*(P) = \mathrm{stz}(\bigcup \mathrm{Ran}(P))$.

2.2.4 <u>Lemmata zu 2.2.3</u>.-

(a) Für alle P: wenn P ein homogenes Prädikat ist, dann ist $\mathrm{stz}(P) \in \mathbb{N}^+$ &

$\forall t\ (t \in P \Rightarrow t$ ist Funktion auf $\mathrm{stz}(P)$) & $\forall n$ (P ist n-stelliges Prädikat $\Rightarrow \mathrm{stz}(P) = n$).

<u>Beweis:</u> Sei P homogenes Prädikat. Dann ist P Prädikat & $P \neq \emptyset$ &

$$\forall t \forall t' (t, t' \in P \Rightarrow \mathrm{Dom}(t) = \mathrm{Dom}(t')).$$

Nach Def. 2.2.3(r) gilt $\mathrm{stz}(P) = \mathrm{Dom}(\bigcup P)$.

Und da P homogen ist, gilt: $\forall t\ (t \in P \Rightarrow \mathrm{Dom}(t) = \mathrm{Dom}(\bigcup P)$,

und $\mathrm{stz}(P) \in \mathbb{N}^+$ folgt, da für alle t gilt:

$$t \text{ Tupel} \Rightarrow \mathrm{Dom}(t) \in \mathbb{N}^+$$

und da alle Tupel von P mindestens die Länge 1 haben.

Nun gilt für alle $t \in$ P: t ist Funktion auf Dom(t) & Dom(t) = stz(P),

also gilt $\forall t\,(\, t \in \mathrm{P} \Rightarrow t$ ist Funktion auf stz(P)).

Sei nun n $\in \mathbb{N}$ und sei P n-stelliges Prädikat.

Dann $\forall t\,(\, t \in \mathrm{P} \Rightarrow t$ ist n-Tupel), nach Def. 2.2.3(c).

Dann $\forall t\,(\, t \in \mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Dom}(t) = \mathrm{n}\,)$.

Und es folgt: $\forall n$ (P ist n-stelliges Prädikat $\Rightarrow$ stz(P) = n).

(b) Für alle P, n: P ist Familie von n-stelligen Prädikaten

gdw P ist homogene Familie von Prädikaten & $\forall i\,(\, i \in \mathrm{Dom}(P) \Rightarrow \mathrm{stz}(P_i) = n\,)$.

<u>Beweis:</u> Sei P Familie von n-stelligen Prädikaten

gdw P $\neq \emptyset$ & P Funktion & $\forall i\,(\, i \in \mathrm{Dom(P)} \Rightarrow \mathrm{P}_i$ ist n-stelliges Prädikat)

gdw P $\neq \emptyset$ & P Funktion & $\forall i\,(\, i \in \mathrm{Dom(P)} \Rightarrow \mathrm{P}_i$ Prädikat & $\mathrm{P}_i \neq \emptyset$

& n $\in \mathbb{N}^+$ & $\forall t\,(\, t \in \mathrm{P}_i \Rightarrow t$ ist n-Tupel))

gdw P $\neq \emptyset$ & P ist Funktion & $\forall i\,(\, i \in \mathrm{Dom(P)}$

$\Rightarrow \mathrm{P}_i$ ist homogenes Prädikat & stz(P_i) = n)

gdw P $\neq \emptyset$ & P ist Funktion & $\forall i\,(\, i \in \mathrm{Dom(P)} \Rightarrow \mathrm{P}_i$ ist homogenes Prädikat &

$\forall i'\,(\, i' \in \mathrm{Dom(P)} \Rightarrow \mathrm{stz}(\mathrm{P}_{i'}) = \mathrm{stz}(\mathrm{P}_i)\,)\,)$

& $\forall i\,(\, i \in \mathrm{Dom(P)} \Rightarrow \mathrm{stz}(\mathrm{P}_i) = \mathrm{n}\,)$

gdw P ist homogene Familie von Prädikaten

& $\forall i\,(\, i \in \mathrm{Dom(P)} \Rightarrow \mathrm{stz}\ \mathrm{P}_i) = \mathrm{n}\,)$.

(c) Für alle P: wenn P eine homogene Familie von Prädikaten ist, dann gilt

$\forall i\,(\, i \in \mathrm{Dom}(P) \Rightarrow \mathrm{stz}^*(P) = \mathrm{stz}(P_i)\,)$.

Beweis: Sei P eine homogene Familie von Prädikaten und sei $i \in \mathrm{Dom}(P)$.

Sei $n \in \mathrm{stz}^*(P)$, dann $n \in \mathrm{stz}(\bigcup \mathrm{Ran}(P))$; dann gibt es ein $i' \in \mathrm{Dom}(P)$, so dass $P_{i'} \in \mathrm{Ran}(P)$ & $n \in \mathrm{stz}(P_{i'})$; sei i' so; dann $n \in \mathrm{Dom}(\bigcup P_{i'}) = \mathrm{stz}(P_{i'})$; und da P homogene Familie von Prädikaten ist, gilt für alle j, j': $j, j' \in \mathrm{Dom}(P) \Rightarrow \mathrm{stz}(P_j) = \mathrm{stz}(P_{j'})$, und $n \in \mathrm{stz}(P_i)$ folgt.

Sei $n \in \mathrm{stz}(P_i)$; dann ist $n \in \mathrm{Dom}(\bigcup P_i)$; dann ist $n \in \mathrm{Dom}(\bigcup(\bigcup \mathrm{Ran}(P))) = \mathrm{stz}(\bigcup \mathrm{Ran}(P))$ $= \mathrm{stz}^*(P)$, da u. a. $P_i \in \mathrm{Ran}(P)$;

somit folgt: $\forall n\,(n \in \mathrm{stz}^*(P) \Leftrightarrow n \in \mathrm{stz}(P_i))$.

Und schließlich folgt $\forall i\,(i \in \mathrm{Dom}(P) \Rightarrow \mathrm{stz}^*(P) = \mathrm{stz}(P_i))$.

(d) Für alle *P*, *n*: wenn *P* eine Familie von *n*-stelligen Prädikaten ist, dann ist $\mathrm{stz}^*(P) = n$.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und sei P Familie von n-stelligen Prädikaten.

Dann folgt mit 2.2.4(b):

P ist homogene Familie von Prädikaten & $\forall i\,(i \in \mathrm{Dom}(P) \Rightarrow \mathrm{stz}(P_i) = n)$.

Und da nach Lemma 2.2.4(c) gilt:

$$\forall i\,(i \in \mathrm{Dom}(P) \Rightarrow \mathrm{stz}^*(P) = \mathrm{stz}(P_i)),$$

folgt unmittelbar die Behauptung.

Nun ist noch allgemein ein Ausdruck festzulegen, der den Wert einer **Operation** für ein Argument bezeichnet:

2.2.5 Definition.-

Für alle *P*, *t*, *z*:

$P[t] = z$ gdw ([P ist eine Operation & $t \in \mathrm{Dom}(P)$ & $t^\wedge \langle z \rangle \in P$] or [($P$ ist keine Operation or $t \notin \mathrm{Dom}(P)$) & $z = \emptyset$]).

Für den Spezialfall 2-stelliger Operationen wird nun noch eine Infix-Notation eingeführt:

2.2.6 Definition.-

$\forall P \, \forall x \, \forall y \, (\, (x \bullet_P y) = P[\langle x, y \rangle] \,)$.

Der folgende Begriff ist zentral für den Rest der Arbeit:

2.2.7 Definition.-

$\mathcal{A}$ ist eine *Struktur vom Typ* μ

gdw

(1) $\mathcal{A}$ ist 3-Tupel, μ ist 2-Tupel, μ_1 ist Folge in $\mathbb{N}^+$ &

(2) $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$ &

(3) $\mathcal{A}_2$ ist Funktion auf $\mathrm{Dom}(\mu_1)$ &

$\forall i \, (\, i \in \mathrm{Dom}(\mu_1) \Rightarrow \mathcal{A}_{2,i}$ ist ein $\mu_{1,i}$–stelliges Prädikat in $\mathcal{A}_1$) &

(4) $\mathcal{A}_3$ ist Abbildung von μ_2 nach $\mathcal{A}_1$.

Wenn $\mathcal{A}$ Struktur, dann heiße $\mathcal{A}_1$ der **Individuenbereich von** $\mathcal{A}$.

2.2.8 Definition.-

$\mathrm{typ}(\mathcal{A}) = \langle \langle \, \mathrm{stz}(\mathcal{A}_{2,j}) \, \rangle_{j \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}, 2)} , \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_3) \, \rangle$.

2.2.9 Satz.-

Für alle $\mathcal{A}$, μ: wenn $\mathcal{A}$ eine Struktur vom Typ μ ist, dann ist $\mathrm{typ}(\mathcal{A}) = \mu$.

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ Struktur vom Typ μ. Dann gilt nach Def. 2.2.7: μ ist 2-Tupel & μ_1 ist Folge in $\mathbb{N}^+$ und $\mathcal{A}_2$ ist Funktion auf $\mathrm{Dom}(\mu_1)$ so dass

$\forall i \, (\, i \in \mathrm{Dom}(\mu_1) \Rightarrow \mathcal{A}_{2,i}$ ist ein $\mu_{1,i}$–stelliges Prädikat in $\mathcal{A}_1$)

und $\mathcal{A}_3$ ist Abbildung von μ_2 nach $\mathcal{A}_1$.

Nun gilt $\mathrm{Dom}(\mu_1) = \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_2)$, des Weiteren ist für jedes $j \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_2)$ $\mathcal{A}_{2,j}$ ein $\mu_{1,j}$-stelliges Prädikat in $\mathcal{A}_1$ und $\mu_{1,j} = \mathrm{stz}(\mathcal{A}_{2,j})$ folgt; d. h. $\mu_1 = \mathrm{typ}(\mathcal{A})_1$. Und da $\mathcal{A}_3$ Abbildung von μ_2 nach $\mathcal{A}_1$ ist, gilt: $\mathrm{typ}(\mathcal{A})_2 = \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_3) = \mu_2$, und es folgt schließlich $\mathrm{typ}(\mathcal{A}) = \mu$.

2.2.10 Definitionen.-

(1) $\mathcal{R}$ ist numerische Struktur des Typs μ

gdw $\mathcal{R}$ Struktur vom Typ μ & $\mathcal{R}_1 = \mathbb{R}$.

(2) $\mathcal{R}$ ist numerische Struktur

gdw $\exists \mu$ & $\mathcal{R}$ ist numerische Struktur vom Typ μ.

2.2.11 Definition.-

$\mathcal{B}$ ist *Sub-/ Unterstruktur von* $\mathcal{A}$

gdw

es gibt ein μ, so dass gilt:

(1) $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind Strukturen vom Typ μ &

(2) $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{A}_1$ und für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_2)$: $\mathcal{B}_{2,i} = \mathcal{A}_{2,i} \cap {}^{\{1, \ldots, \mu(1)(i)\}}\mathcal{B}_1$ &

(3) $\mathcal{B}_3 = \mathcal{A}_3 \upharpoonright \mathcal{B}_1$.

2.2.12 Definition.-

f ist *homomorphe Einbettung von* $\mathcal{A}$ *in* $\mathcal{B}$

gdw

es ein μ gibt, so dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ jeweils Strukturen vom Typ μ sind und f Abbildung von $\mathcal{A}_1$ nach $\mathcal{B}_1$ ist und

(i) $\forall i \forall a\,(\,i \in \mathrm{Dom}(\mu_1)\ \&\ a \in {}^{\{1,\ldots,\mu(1)(i)\}}\mathcal{A}_1 \Rightarrow$

$(\,a \in \mathcal{A}_{2,i} \Leftrightarrow \langle f(a_1), \ldots, f(a_{\mu(1)(i)})\rangle \in \mathcal{B}_{2,i})\,)$ und

(ii) $\forall \xi\,(\,\xi \in \mu_2 \Rightarrow f(\mathcal{A}_3(\xi)) = \mathcal{B}_3(\xi)\,).$

2.2.13 Definition.-

f ist *isomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$*

gdw f ist homomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ & f ist eineindeutig.

2.2.14 Definition.-

$\mathcal{A}$ ist in $\mathcal{B}$ isomorph [homomorph] einbettbar

gdw

$\exists f$, so dass f isomorphe [homomorphe] Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ ist.

2.2.15 Definition.-

f ist Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{B}$

gdw

f isomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ & $\mathrm{Ran}(f) = \mathcal{B}_1$.

Für isomorphe Strukturen wird noch eine kompaktere Bezeichnungsweise eingeführt:

2.2.16 Definition.-

$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$

gdw

$\exists f$, so dass f Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{B}$ ist.

Für eine Klasse von Strukturen und für Sub- und isomorphe Strukturen von **einzelnen** Strukturen werden nun Funktionskonstanten definiert:

2.2.17 Definitionen.-

STRUK $= \{ \mathcal{A} \mid$ es gibt ein μ & $\mathcal{A}$ Struktur vom Typ $\mu \}$.

$\mathbf{S}(\mathcal{A}) = \{ \mathcal{B} \mid \mathcal{B}$ Substruktur von $\mathcal{A} \}$.

$\mathbf{S}_n(\mathcal{A}) = \{ \mathcal{B} \mid \mathcal{B}$ Substruktur von $\mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}^+$ und $|\mathcal{B}_1| \leq_{\mathbb{N}} n \}$.

$\mathbf{S}_\omega(\mathcal{A}) = \{ \mathcal{B} \mid \mathcal{B}$ Substruktur von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}_1$ endlich $\}$.

$\mathbf{I}(\mathcal{A}) = \{ \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \cong \mathcal{A} \}$.

Die Funktionskonstanten für Sub- und isomorphe Strukturen von **Klassen** von Strukturen sollen folgendermaßen bezeichnet und definiert werden:

2.2.18 Definitionen.-

$\mathbf{II}(K) = \{ \mathcal{B} \mid$ es gibt eine Struktur $\mathcal{A} \in K$ & $\mathcal{B} \cong \mathcal{A} \}$.

$\mathbf{SS}(K) = \{ \mathcal{B} \mid$ es gibt eine Struktur $\mathcal{A} \in K$ & $\mathcal{B} \in \mathbf{S}(\mathcal{A}) \}$.

$\mathbf{SS}_n(K) = \{ \mathcal{B} \mid$ es gibt eine Struktur $\mathcal{A} \in K$ und $\mathcal{B} \in \mathbf{S}_n(\mathcal{A}) \}$.

$\mathbf{SS}_\omega(K) = \{ \mathcal{B} \mid$ es gibt eine Struktur $\mathcal{A} \in K$ und $\mathcal{B} \in \mathbf{S}_\omega(\mathcal{A}) \}$.

Für die Betrachtung isomorpher Strukturen ist folgendes Theorem wesentlich:

2.2.19 Satz.-

Wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Strukturen eines Typs μ sind, und wenn f isomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ ist, dann gibt es eine Struktur $\mathcal{C}$ vom Typ μ und einen Isomorphismus g von $\mathcal{C}$ auf $\mathcal{B}$, so dass $f \subseteq g$ und $\mathcal{A} \in$ $\mathbf{S}(\mathcal{C})$.

<u>Beweis :</u> Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Strukturen des Typs μ und sei f Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$.

Sei nun $\mathcal{C}_1 = \mathcal{A}_1 \cup \{ (\mathcal{A}_1, x) \mid x \in \mathcal{B}_1 \setminus \mathrm{Ran}(f) \}$.

Dann gilt: $\mathcal{A}_1 \cap \{ (\mathcal{A}_1, x) \mid x \in \mathcal{B}_1 \setminus \mathrm{Ran}(f) \} = \emptyset$;

denn wäre $S = \mathcal{A}_1 \cap \{ (\mathcal{A}_1, x) \mid x \in \mathcal{B}_1 \setminus \mathrm{Ran}(f) \} \neq \emptyset$,

dann würde für alle $m \in S$ gelten:

$$m = (\mathcal{A}_1, x) \text{ mit } x \in \mathcal{B}_1 \setminus \mathrm{Ran}(f),$$

weiterhin würde für alle $m \in S$ gelten:

$$m \cap S \neq \emptyset;$$

es gäbe also kein $m \in S$ mit $m \cap S = \emptyset$; die Annahme $S \neq \emptyset$ würde so zu einem Widerspruch zum Fundierungsaxiom führen, das für alle S fordert:

$$S \neq \emptyset \Rightarrow \exists m\, (m \in S \;\&\; m \cap S = \emptyset);$$

somit folgt schließlich:

$$\mathcal{A}_1 \cap \{ (\mathcal{A}_1, x) \mid x \in \mathcal{B}_1 \setminus \mathrm{Ran}(f) \} = \emptyset.$$

Sei nun g Funktion von $\mathcal{C}_1$ nach $\mathcal{B}_1$, so dass gilt :

$$g(a) = f(a) \text{ für alle } a \in \mathcal{A}_1$$

und

$$g((\mathcal{A}_1, x)) = x \text{ für alle } x \in \mathcal{B}_1 \setminus \mathrm{Ran}(f);$$

aufgrund der Konstruktion von $\mathcal{C}_1$ und von g ist g dann offenkundig eine eineindeutige Funktion von $\mathcal{C}_1$ auf $\mathcal{B}_1$.

Nun wird eine Struktur $\mathcal{C}$ von Typ μ definiert, so dass $\mathcal{C}_1$ der Individuenbereich von $\mathcal{C}$ ist und g ein Isomorphismus von $\mathcal{C}$ auf $\mathcal{B}$ ist.

Sei dazu $i \in \mathrm{Dom}(\mu_1)$, sei $\mu_{1,i} = m$, seien $c_1, \ldots, c_m \in \mathcal{C}_1$ und sei die m-stellige i-te Relation von $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}_{2,i} = \{ \langle c_1, \ldots, c_m \rangle \mid (g(c_1), \ldots, g(c_m)) \in \mathcal{B}_{2,i} \};$$

dann gilt für alle $c_1, ..., c_m \in \mathcal{C}_1$:

$$\langle c_1, ..., c_m \rangle \in \mathcal{C}_{2,i} \Leftrightarrow (g(c_1), ..., g(c_m)) \in \mathcal{B}_{2,i} ;$$

das gilt für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mu_1)$.

Sei nun $\xi \in \mu_2$. Dann gilt $g(\mathcal{C}_3(\xi)) = \mathcal{B}_3(\xi)$, da f isomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ ist und da $f \subseteq g$. Und es folgt, dass g Isomorphismus von $\mathcal{C}$ auf $\mathcal{B}$ ist.

Offensichtlich ist $\mathcal{A} \in \mathbf{S}(\mathcal{C})$.

□

Weiterhin gelten einige Hilfssätze:

2.2.20 <u>Hilfssatz</u>.-

Sei $\mathcal{B}$ Struktur eines Typs μ, dann gilt:

$$\forall \mathcal{A} (\mathcal{A} \in \mathbf{S}(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A} \text{ ist in } \mathcal{B} \text{ isomorph einbettbar}).$$

<u>Beweis:</u> Sei $\mathcal{A} \in \mathbf{S}(\mathcal{B})$; dann ist die Identitätsabbildung *Id* von $\mathcal{A}_1$ nach $\mathcal{B}_1$ isomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$.

2.2.21 <u>Hilfssatz</u>.-

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Strukturen eines Typs μ und sei $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Dann

$$\forall \mathcal{A}^* (\mathcal{A}^* \in \mathbf{S}(\mathcal{A}) \Rightarrow \exists \mathcal{B}^* (\mathcal{B}^* \in \mathbf{S}(\mathcal{B}) \;\&\; \mathcal{A}^* \cong \mathcal{B}^*)).$$

<u>Beweis:</u> Gelte $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Dann folgt mit Definition 2.216: $\exists f$, so dass f Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{B}$ ist.

Sei f so. Sei nun $\mathcal{A}^* \in \mathbf{S}(\mathcal{A})$.

Dann ist $f \upharpoonright \mathcal{A}^*_1$ isomorphe von $\mathcal{A}^*$ in ein Submodell von $\mathcal{B}$.

2.2.22 Lemmata.-

Sei $K \subseteq$ **STRUK**. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in K$.

Dann sind die folgenden drei Bedingungen äquivalent:

(i) $\mathcal{A}$ ist in $\mathcal{B}$ isomorph einbettbar.

(ii) $\exists \mathcal{B}^* \,(\mathcal{B}^* \in \mathbf{S}(\mathcal{B})\ \&\ \mathcal{A} \cong \mathcal{B}^*)$.

(iii) $\mathcal{A} \in \mathbf{II}(\mathbf{S}(\mathcal{B}))$.

Beweis: Sei $K \subseteq$ **STRUK** und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in K$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ isomorph einbettbar.

Dann gibt es nach Def. 2.2.14 eine Funktion *f*, so dass *f* isomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$.

Sei f so.

Sei nun $\mathcal{B}^*$ 3-Tupel, so dass

$$\mathcal{B}^*_1 = \mathrm{Ran}(f),$$

$$\mathcal{B}^*_2 \text{ sei Funktion auf } \mathrm{Dom}(\mu_1),$$

$$\text{so dass für } \forall i\,(i \in \mathrm{Dom}(\mu_1) \Rightarrow \mathcal{B}^*_{2,i} = \mathcal{B}_{2,i} \cap {}^{\{1,\ldots,\mu(1)(i)\}}\mathcal{B}^*_1)$$

$$\text{und } \mathcal{B}^*_3 \text{ sei Funktion auf } \mu_2 \text{, so dass } \forall i\,(i \in \mu_2 \Rightarrow \mathcal{B}^*_{3,i} = \mathcal{B}_{3,i}).$$

Dann ist $\mathcal{B}^*_1 \neq \emptyset$, da $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$ und mit den Definitionen 2.2.11 und 2.2.17 folgt:

$$\mathcal{B}^* \in \mathbf{S}(\mathcal{B}).$$

Weiterhin gilt:

$$\forall i\, \forall a\, (i \in \mathrm{Dom}(\mu_1)\ \&\ a \in {}^{\{1,\ldots,\mu(1)(i)\}}\mathcal{A}_1 \Rightarrow$$

$$(a \in A_{2,i} \Leftrightarrow \langle f(a_1), \ldots, f(a_{\mu(1)(i)}) \rangle \in \mathcal{B}_{2,i})),$$

und

$$\forall \xi\, (\xi \in \mu_2 \Rightarrow f(\mathcal{A}_3(\xi)) = \mathcal{B}_3(\xi)),$$

da f isomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ ist; und mit $\mathcal{B}^*_1 = \mathrm{Ran}(f)$ folgt: $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}^*$.

Somit gilt: $\exists \mathcal{B}^* \,(\mathcal{B}^* \in \mathbf{S}(\mathcal{B})\ \&\ \mathcal{A} \cong \mathcal{B}^*)$,

wenn $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ einbettbar ist.

(ii)⇒(iii): Gelte: $\exists\mathcal{B}^*\ (\mathcal{B}^* \in \mathbf{S}(\mathcal{B})\ \&\ \mathcal{A} \cong \mathcal{B}^*)$.

Dann folgt mit Definition 2.2.18: $\mathcal{A} \in \mathbf{II}(\mathbf{S}(\mathcal{B}))$.

(iii)⇒(i) Gelte $\mathcal{A} \in \mathbf{II}(\mathbf{S}(\mathcal{B})$.

Dann gibt es ein $\mathcal{B}^* \in \mathbf{S}(\mathcal{B})$, so dass $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}^*$.

Sei $\mathcal{B}^*$ so.

Dann $\exists f$, so dass f Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{B}^*$ ist.

Sei f so. Dann ist f isomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. Und mit Definition 2.2.14 folgt:

$\mathcal{A}$ ist in $\mathcal{B}$ isomorph einbettbar.

2.2.23 Hilfssatz.-

Sei $K \subseteq$ **STRUK**. Dann gilt:

$$\mathbf{SS}(\mathbf{II}(K)) \subseteq \mathbf{II}(\mathbf{SS}(K)).$$

Beweis: Sei $K \subseteq$ **STRUK**. Sei $\mathcal{A} \in \mathbf{SS}(\mathbf{II}((K))$.

Dann gilt gemäß Definition 2.2.18:

$$\exists\mathcal{B} \in \mathbf{II}(K)\ \&\ \mathcal{A} \in \mathbf{S}(\mathcal{B}).$$

Sei $\mathcal{B}$ so.

Da $\mathcal{B} \in \mathbf{II}(K)$ gilt gemäß Definition 2.2.18:

$$\exists\mathcal{C} \in K\ \&\ \mathcal{B} \cong \mathcal{C}.$$

Sei $\mathcal{C}$ so.

Es ist $\mathcal{A} \in \mathbf{S}(\mathcal{B})$; da weiterhin $\mathcal{B} \cong \mathcal{C}$, folgt mit Hilfssatz 2.2.21:

$$\exists\mathcal{C}^* \in \mathbf{S}(\mathcal{C})\ \&\ \mathcal{C}^* \cong \mathcal{A}.$$

Sei $\mathcal{C}^*$ so.

Da $\mathcal{C} \in K$ und $\mathcal{C}^* \in \mathbf{S}(\mathcal{C})$, ist

$$\mathcal{C}^* \in \mathbf{SS}(K).$$

Und es folgt: $\mathcal{A} \in \mathbf{II}(\mathbf{SS}(\mathrm{K}))$.

Damit ist $\mathbf{SS}(\mathbf{II}(\mathrm{K})) \subseteq \mathbf{II}(\mathbf{SS}(\mathrm{K}))$ bewiesen.

Nach Tarski (1954; S. 575) *gilt zwar auch* $\mathbf{II}(\mathbf{SS}(\mathrm{K})) \subseteq \mathbf{SS}(\mathbf{II}(\mathrm{K}))$, *aber für diesen Beweis wird der Austauschsatz von* Steinitz *benötigt und die dabei einzusetzenden algebraischen Hilfsmittel übersteigen den Umfang der vorliegenden Arbeit.*

Nun werden noch einzelne Eigenschaften von Klassen von Strukturen definiert, auf die weiter unten Bezug genommen wird.

2.2.24 Definition.-

Für alle K, μ: K ist *homogene Klasse von Strukturen des Typs* μ

gdw

$K \neq \emptyset$ & $\forall \mathcal{A}$ ($\mathcal{A} \in K \Rightarrow \mathcal{A}$ Struktur des Typs μ).

2.2.25 Definition.-

Für alle K: K ist *homogene Klasse von Strukturen*

gdw

$\exists \mu$ (K ist homogene Klasse von Strukturen des Typs μ).

2.2.26 Definition.-

Für alle K, μ: $\mathrm{typ}^{\circ}(K) = \mu$

gdw

([K ist homogene Klasse von Strukturen & $\mu \in \{ \mathrm{typ}(\mathcal{A}) \}_{\mathcal{A} \in K}$] oder [K ist keine homogene Klasse von Strukturen & $\mu = \emptyset$]).

2.2.27 Satz.-

Für alle K: wenn K ist homogene Klasse von Strukturen, dann gilt

$$\forall \mathcal{A} \, (\mathcal{A} \in K \Rightarrow \mathrm{typ}^{\circ}(K) = \mathrm{typ}(\mathcal{A})).$$

Beweis: Sei K homogene Klasse von Strukturen. Dann gibt es ein μ, so dass K homogene Klasse von Strukturen des Typs μ ist. Sei μ so. Sei nun $\mathcal{A} \in$ K. Dann ist $\mathcal{A}$ Struktur des Typs μ. Dann folgt mit Satz 2.2.9: $\mathrm{typ}(\mathcal{A}) = \mu$. Und da $\mu \in \{\mathrm{typ}(\mathcal{B})\}_{\mathcal{B} \in \mathrm{K}}$ folgt mit 2.2.26

$$\mathrm{typ}^{\circ}(\mathrm{K}) = \mu.$$

2.3 Semantische Begriffe

Im *Abschnitt 2.3* wird der für die modelltheoretische Semantik grundlegende Begriff der *Erfüllung* einer Formel einer Sprache erster Stufe eines Typs μ durch eine Struktur des Typs μ bzgl. einer Belegung x definiert. Ferner werden die grundlegenden Standardtheoreme bewiesen, also das *Koinzidenztheorem,* das *Isomorphietheorem* und das *Überführungstheorem.* Der modelltheoretische Begriff der *logischen Folgerung* (aus der Klasse Σ folgt in der Sprache erster Stufe $\mathcal{S}$ die Formel Φ, $\Sigma \Vdash_{\mathcal{S}} \Phi$) wird definiert und das Deduktionstheorem wird bewiesen.

Auf den letzten Seiten des Abschnitts 2.3 wird eine Version der Methode der *Diagramme* dargestellt. Diese besteht darin, dass einerseits eine Sprache $\mathcal{S}$ erster Stufe um die Elemente einer Menge X als neue Individuenkonstanten und andererseits eine Struktur $\mathcal{A}$ desselben Typs um die Werte einer Funktion f als Interpretanten für die neuen Individuenkonstanten erweitert wird; *das Diagramm von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{S}$* ist die Klasse der Atomsätze und negierten Atomsätze der Erweiterung von $\mathcal{S}$ um $\mathcal{A}_1$, welche nur "neue" Individuenkonstanten enthalten und durch die Erweiterung von $\mathcal{A}$ um die Werte der auf $\mathcal{A}_1$ beschränkten Identitätsfunktion, d.h. um die Elemente von $\mathcal{A}_1$, erfüllt werden. Anschließend wird das *Diagramm-Lemma* bewiesen, welches besagt, dass das Diagramm von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{S}$ genau durch die Strukturen erfüllt wird, welche durch die Erweiterung der Strukturen $\mathcal{B}$, in die $\mathcal{A}$ isomorph eingebettet werden kann, um die Werte des jeweiligen Isomorphismus entstehen.

2.3.1 Definition.-

$\mathcal{A}$ ist *ein Modell für $\mathcal{S}$ vom Typ μ*

gdw

$\mathcal{A}$ ist Struktur vom Typ μ & $\mathcal{S}$ ist eine Sprache erster Stufe vom Typ μ.

2.3.2 Definition.-

$\mathcal{A}$ ist *Modell für $\mathcal{S}$*

gdw

es ein μ gibt, so dass $\mathcal{A}$ Modell für $\mathcal{S}$ vom Typ μ ist.

2.3.3 Definition.-

x ist eine Belegung aus $\mathcal{A}$

gdw

x ist Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathcal{A}_1$.

2.3.4 Definition.-

$x(n/a) = (x \setminus \{ (n, x_n) \}) \cup \{ (n, a) \}$.

Die Belegung x unterscheidet sich also von der Belegung $x(n/a)$ allenfalls an der Stelle n. Es soll hier der Konvention gefolgt werden, dass in Kontexten, in denen kein Bezug zu einer Sprache betrachtet wird, von einer Struktur geredet wird; ist der Sprachbezug relevant, wird der Begriff 'Modell' verwendet.

Nun werden Modellklassen einer einstufigen Sprache definiert.

2.3.5 Definition.-

$\mathbf{MOD}_S = \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A}$ Modell für $S \}$.

2.3.6 Definition.-

K ist *Klasse von Modellen von S*

gdw

$K \subseteq \mathbf{MOD}_S$.

Es wird noch ein Begriff für das Komplement einer Klasse von Modellen benötigt:

2.3.7 Definition.-

K' ist *das Komplement von K in S*

gdw

$K' = \mathbf{MOD}_S \setminus K$.

Bevor nun der zentrale semantische Begriff für die Modelltheorie – nach Tarski – definiert werden kann, muss noch eine Funktion definiert werden, die die Interpretation der Variablen und der Individuenkonstanten der fraglichen Sprache regelt:

2.3.8 Definition.-

Für alle $S, \mathcal{A}$:

(1) Wenn $\mathcal{A}$ Modell für S und x Belegung aus $\mathcal{A}$ ist, dann soll gelten:

$$\mathrm{val}_{S,\mathcal{A},x} \text{ ist Funktion auf } \mathrm{VAR}_S \cup \mathrm{INDK}_S \;\&$$

$$\forall i\,(i \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathrm{val}_{S,\mathcal{A},x}({}^S\mathrm{V}_i) = x_i)\;\&$$

$$\forall j\,(j \in \mathrm{Dom}(S_4) \Rightarrow \mathrm{val}_{S,\mathcal{A},x}({}^S\mathrm{K}_j) = \mathcal{A}_{3,j});$$

(2) wenn $\mathcal{A}$ kein Modell für S oder x keine Belegung aus $\mathcal{A}$ ist, dann soll gelten:

$$\mathrm{val}_{S,\mathcal{A},x} = \emptyset.$$

Jetzt kann der Begriff 'Modell $\mathcal{A}$ mit der Belegung x erfüllt die Formel ϕ in S' definiert werden, der abgekürzt so geschrieben werden soll:

$$\mathcal{A} \models_{S,x} \phi.$$

Wenn kein Missverständnis auftreten kann, wird der Bezug auf die Sprache 'S' öfters weggelassen: $\mathcal{A} \models_x \phi$.

2.3.9 Definition.-

Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für S vom Typ μ und sei x eine Belegung aus $\mathcal{A}$, dann soll gelten:

(1) $\forall a \forall b\, (a, b \in \mathrm{VAR_S} \cup \mathrm{INDK_S} \Rightarrow$

$$\mathcal{A} \models_{\mathrm{S,x}} a =_{\mathrm{S}} b \text{ gdw } \mathrm{val}_{\mathrm{S},\mathcal{A},\mathrm{x}}(a) = \mathrm{val}_{\mathrm{S},\mathcal{A},\mathrm{x}}(b)\,) \qquad \&$$

(2) $\forall i \forall t\, (i \in \mathrm{Dom}(^{\mathrm{S}}\mathrm{P})$ & t ist Folge der Länge $\mu_{1,i}$ in $\mathrm{VAR_S} \cup \mathrm{INDK_S} \Rightarrow$

$$\mathcal{A} \models_{\mathrm{S,x}} {}^{\mathrm{S}}\mathrm{P}_i\, t_1 \ldots t_{\mu,1,i}$$

$$\text{gdw} \quad \langle\, \mathrm{val}_{\mathrm{S},\mathcal{A},\mathrm{x}}(\, t_1\,), \ldots, \mathrm{val}_{\mathrm{S},\mathcal{A},\mathrm{x}}(\, t_{\mu,1,i}\,)\,\rangle \in \mathcal{A}_{2,i}\,) \qquad \&$$

(3) $\forall \psi\, (\, \psi \in \mathrm{FML_S} \Rightarrow$

$$\mathcal{A} \models_{\mathrm{S,x}} \neg_{\mathrm{S}} \psi \text{ gdw nicht } \mathcal{A} \models_{\mathrm{S,x}} \psi) \qquad \&$$

(4) $\forall \xi \forall \psi\, (\, \xi, \psi \in \mathrm{FML_S} \Rightarrow$

$$\mathcal{A} \models_{\mathrm{S},x} (_{\mathrm{S}}\, \xi \wedge_{\mathrm{S}} \psi)_{\mathrm{S}} \text{ gdw } \mathcal{A} \models_{\mathrm{S,x}} \xi \text{ und } \mathcal{A} \models_{\mathrm{S,x}} \psi) \qquad \&$$

(5) $\forall n \forall \psi\, (\, n \in \mathrm{Dom}(^{\mathrm{S}}\mathrm{V})$ und $\psi \in \mathrm{FML_S} \Rightarrow$

$$\mathcal{A} \models_{\mathrm{S,x}} \exists_{\mathrm{S}} {}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_n\, \psi \text{ gdw für ein } a \in \mathcal{A}_1 \text{: } \mathcal{A} \models_{\mathrm{S,x}(n/a)} \psi).$$

Für die definierten logischen Zeichen von S: $\vee_{\mathrm{S}}$, $\rightarrow_{\mathrm{S}}$, $\leftrightarrow_{\mathrm{S}}$ und $\forall_{\mathrm{S}}$ ergeben sich dann die üblichen Erfülltheitsbedingungen für Formeln:

2.3.10 Satz.-

Wenn S eine Sprache erster Stufe ist, dann gilt für alle $\phi, \psi \in \mathrm{FML_S}$, *alle Modelle* $\mathcal{A}$ *von S und alle Belegungen x aus* $\mathcal{A}$:

$\mathcal{A} \models_{\mathrm{S},x} \phi \vee_{\mathrm{S}} \psi$	gdw	$\mathcal{A} \models_{\mathrm{S},x} \phi$ oder $\mathcal{A} \models_{\mathrm{S},x} \psi$;
$\mathcal{A} \models_{\mathrm{S},x} \phi \rightarrow_{\mathrm{S}} \psi$	gdw	(nicht $\mathcal{A} \models_{\mathrm{S},x} \phi$) oder $\mathcal{A} \models_{\mathrm{S},x} \psi$;
$\mathcal{A} \models_{\mathrm{S},x} \phi \leftrightarrow_{\mathrm{S}} \psi$	gdw	$\mathcal{A} \models_{\mathrm{S},x} \phi \rightarrow_{\mathrm{S}} \psi$ und $\mathcal{A} \models_{\mathrm{S},x} \psi \rightarrow_{\mathrm{S}} \phi$;
$\mathcal{A} \models_{\mathrm{S},x} \forall_{\mathrm{S}} {}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_n\, \psi$	gdw	für alle $a \in \mathcal{A}_1$ gilt $\mathcal{A} \models_{\mathrm{S},x(n/a)} \psi$.

Beweis : Sei also S Sprache erster Stufe, seien ϕ und ψ Formeln von S, sei $\mathcal{A}$ Modell für S und sei x eine Belegung aus $\mathcal{A}$.

Dann gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\mathcal{A} \models_{S,x} \phi \vee_S \psi$$

(nach Definition von $\vee_S$)

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{S,x} \neg_S(\neg_S\phi \wedge_S \neg_S\psi)$$

$$\text{gdw nicht } \mathcal{A} \models_{S,x} \neg_S\phi \wedge_S \neg_S\psi$$

$$\text{gdw nicht } (\mathcal{A} \models_{S,x} \neg_S\phi \text{ und } \mathcal{A} \models_{S,x} \neg_S\psi)$$

$$\text{gdw nicht (nicht } \mathcal{A} \models_{S,x} \phi \text{ und nicht } \mathcal{A} \models_{S,x} \psi)$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{S,x} \phi \text{ oder } \mathcal{A} \models_{S,x} \psi).$$

Die Beweise für $\rightarrow_S$ und $\leftrightarrow_S$ erfolgen entsprechend.

Für den Allquantor gilt:

$$\mathcal{A} \models_{S,x} \forall_S {}^S V_n \psi$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{S,x} \neg_S \exists_S {}^S V_n \neg_S \psi$$

(nach Definition von $\forall_S$)

$$\text{gdw nicht } \mathcal{A} \models_{S,x} \exists_S {}^S V_n \neg_S \psi$$

$$\text{gdw nicht (es gibt ein } a \text{ (} a \in \mathcal{A}_1 \text{ und } \mathcal{A} \models_{S,x(n/a)} \neg_S \psi \text{))}$$

$$\text{gdw es kein } a \text{ gibt, so dass (} a \in \mathcal{A}_1 \text{ und } \mathcal{A} \models_{S,x(n/a)} \neg_S \psi \text{)}$$

$$\text{gdw für alle } a \text{ (} a \notin \mathcal{A}_1 \text{ oder nicht } \mathcal{A} \models_{S,x(n/a)} \neg_S \psi \text{)}$$

$$\text{gdw für alle } a \text{ (wenn } a \in \mathcal{A}_1 \text{ dann } \mathcal{A} \models_{S,x(n/a)} \psi \text{)}$$

$$\text{gdw für alle } a \in \mathcal{A}_1 \text{ gilt } \mathcal{A} \models_{S,x(n/a)} \psi.$$

□

Die Definition 2.3.9 zeigt, dass es bei verschiedenen Belegungen für die Erfüllung einer Formel ϕ nur auf die Belegung der freien Variablen von ϕ ankommt; dazu

2.3.11 Koinzidenztheorem.-

Sei S *Sprache erster Stufe vom Typ* μ, *sei* $\mathcal{A}$ *Modell für* S, *sei* ϕ *Formel von* S, *seien* a & b *Belegungen aus* $\mathcal{A}$, *so dass für alle i:*

$$(i \in \mathrm{Dom}(S_1) \ \&\ {}^{S}V_i \text{ frei in } \phi \Rightarrow a_i = b_i),$$

dann gilt: $$\mathcal{A} \models_{S,a} \phi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models_{S,b} \phi.$$

Beweis : Seien die Voraussetzungen für S und $\mathcal{A}$ erfüllt.

Der Beweis erfolgt mit Formelinduktion gemäß Def. 2.1.11(3). Sei dazu

$$\mathbf{M} = \{\, \phi \mid \phi \in \mathrm{FML}_S \ \&\ \forall a \forall b\, (\, a, b \text{ Belegungen aus } \mathcal{A} \ \&$$
$$\forall i\, (\, i \in \mathrm{Dom}(S_1) \ \&\ {}^{S}V_i \text{ frei in } \phi \Rightarrow a_i = b_i\,) \Rightarrow$$
$$\mathcal{A} \models_{S,a} \phi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models_{S,b} \phi)\,\}.$$

Angenommen ϕ enthält keine Quantoren und keine Junktoren. Dann ist entweder

$$\phi = x =_S y$$

mit x, y $\in \mathrm{VAR}_S \cup \mathrm{INDK}_S$ und für alle Belegungen *a, b* aus $\mathcal{A}$, die den freien Variablen identische Individuen zuweisen gilt:

$$\mathcal{A} \models_{S,a} \phi \text{ gdw } \mathcal{A} \models_{S,b} \phi,$$

oder es gibt ein $j \in \mathrm{Dom}(\mu_1)$ und ein *t*, so dass *t* Folge der Länge $\mu_{1,j}$ in $\mathrm{VAR}_S \cup \mathrm{INDK}_S$ ist und: $$\phi = {}^{S}P_j\, t_1 \ldots t_{\mu,1,j}\,;$$

dann gilt für alle Belegungen *a, b* aus $\mathcal{A}$, die den freien Variablen identische Werte zuweisen: $$\mathcal{A} \models_{S,a} \phi$$

$$\text{gdw } \langle \mathrm{val}_{S,\mathcal{A},a}(t_1), \ldots, \mathrm{val}_{S,\mathcal{A},a}(t_{\mu,1,j}) \rangle \in \mathcal{A}_{2,j}$$
$$\text{gdw } \langle \mathrm{val}_{S,\mathcal{A},b}(t_1), \ldots, \mathrm{val}_{S,\mathcal{A},b}(t_{\mu,1,j}) \rangle \in \mathcal{A}_{2,j}$$
$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{S,b} \phi;$$

das gilt für alle so spezifizierten Belegungen *a* und *b* aus $\mathcal{A}$; damit ist gezeigt, dass alle Atomformeln von S Element von **M** sind.

Sei nun $\phi \in \mathbf{M}$ und seien a und b Belegungen aus $\mathcal{A}$ so dass:

$$\forall i\ (\ i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{S}_1)\ \&\ {}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_i \text{ frei in } \phi \Rightarrow \mathrm{a}_i = \mathrm{b}_i).$$

Dann gilt:

$$\mathcal{A} \models_{\mathrm{S,\,a}} \neg\phi$$

$$\text{gdw nicht } \mathcal{A} \models_{\mathrm{S,\,a}} \phi$$

$$\text{gdw nicht } \mathcal{A} \models_{\mathrm{S,\,b}} \phi$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{\mathrm{S,\,b}} \neg_{\mathrm{S}}\, \phi;$$

das zeigt, dass $\neg_{\mathrm{S}}\, \phi \in \mathbf{M}$, wenn $\phi \in \mathbf{M}$.

Sei nun $\phi \in \mathbf{M}$ und sei $\psi \in \mathbf{M}$; seien a und b Belegungen aus $\mathcal{A}$, so dass

$$\forall i\ (\ i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{S}_1)\ \&\ (\ {}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_i \text{ frei in } \phi \text{ oder } {}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_i \text{ frei in } \psi\ ) \Rightarrow \mathrm{a}_i = \mathrm{b}_i).$$

Dann gilt:

$$\mathcal{A} \models_{\mathrm{S,\,a}} (_{\mathrm{S}}\ \phi \wedge_{\mathrm{S}} \psi\ )_{\mathrm{S}}$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{\mathrm{S,\,a}} \phi \text{ und } \mathcal{A}\ _{\mathrm{S,a}}\ \psi$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{\mathrm{S,\,b}} \phi \text{ und } \mathcal{A}\ _{\mathrm{S,\,b}}\ \psi$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{\mathrm{S,\,b}} (_{\mathrm{S}}\ \phi \wedge_{\mathrm{S}} \psi\ )_{\mathrm{S}}\ .$$

Sei wiederum $\phi \in \mathbf{M}$, sei $\nu \in \mathrm{VAR}_{\mathrm{S}}$ und seien a und b Belegungen aus $\mathcal{A}$, so dass

$$\forall i\ (\ i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{S}_1)\ \&\ {}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_i \text{ frei in } \phi \Rightarrow \mathrm{a}_i = \mathrm{b}_i\ ).$$

Da $\nu \in \mathrm{VAR}_{\mathrm{S}}$, gibt es ein $j \in \mathbb{N}^+$ mit $\nu = {}^{\mathrm{S}}\mathbf{V}_j$. Sei j so.

Dann gilt:

$$\mathcal{A} \models_{\mathrm{S,\,a}} \exists^{\mathrm{S}}\mathbf{V}_{\mathrm{j}}\ \phi$$

$$\text{gdw es ein } c \in \mathcal{A}_1 \text{ gibt, so dass } \mathcal{A} \models_{\mathrm{S,\,a(j}/c)} \phi$$

$$\text{gdw es ein } c \in \mathcal{A}_1 \text{ gibt, so dass } \mathcal{A} \models_{\mathrm{S,\,b(j}/c)} \phi$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{\mathrm{S,\,b}} \exists^{\mathrm{S}}\mathbf{V}_{\mathrm{j}}\ \phi;$$

das zeigt, dass $\exists\nu\ \phi \in \mathbf{M}$, wenn $\phi \in \mathbf{M}$ und $\nu \in \mathrm{VAR}_{\mathrm{S}}$.

Somit erfüllt **M** die Voraussetzungen von Def. 2.1.11(3), und es gilt:

$$\mathrm{FML}_{\mathrm{S}} \subseteq \mathbf{M}.$$

Damit ist das Theorem für alle Modelle und alle Formeln von S bewiesen.

Es gilt folgender Spezialfall des obigen Theorems:

2.3.12 Satz.-

Sei S Sprache erster Stufe; dann gilt für alle Modelle $\mathcal{A}$ und alle Sätze ϕ von S:

$$\forall a \, \forall b \; (a, b \text{ Belegungen aus } \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \models_{S,a} \phi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models_{S,b} \phi).$$

Beweis : Wenn $\phi \in SATZ_S$, dann hat ϕ keine freien Variablen.

Eine Folgerung aus diesem Theorem ergibt:

2.3.13 Satz.-

Sei S Sprache erster Stufe. Dann gilt für alle Modelle $\mathcal{A}$ von S und alle Sätze ϕ von S:

$$\exists a \; (a \text{ Belegung aus } \mathcal{A} \text{ und } \mathcal{A} \models_{S,a} \phi)$$

gdw

$$\forall b \; (b \text{ Belegung aus } \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \models_{S,b} \phi).$$

Wegen dieses Theorems wird bei der Erfüllheitsrelation eines **Satzes** durch ein Modell von S die Angabe einer Belegung öfters weggelassen. Wenn ϕ Satz von S, dann sagt man für

$$\mathcal{A} \models_S \phi$$

auch '$\mathcal{A}$ erfüllt ϕ',

'ϕ ist wahr in $\mathcal{A}$',

'ϕ gilt in $\mathcal{A}$'

oder '$\mathcal{A}$ ist Modell für ϕ'.

Nun kann der Isomorphiesatz für Formeln bewiesen werden, der besagt, dass zwei isomorphe Modelle einer einstufigen Sprache die gleichen Formeln dieser Sprache erfüllen.

2.3.14 <u>Isomorphietheorem</u>.-

Sei S *Sprache erster Stufe vom Typ* μ. *Dann gilt für alle Modelle* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *von* S *und alle Formeln* ϕ *von* S: *wenn f Isomorphismus von* $\mathcal{A}$ *auf* $\mathcal{B}$ *ist dann gilt für alle a, b:*

$$(a \text{ Belegung aus } \mathcal{A} \ \& \ b \text{ Belegung aus } \mathcal{B} \ \&$$

$$\forall i \, (i \in \mathrm{Dom}(\mathsf{S}_1) \ \& \ \mathrm{V}_i \text{ frei in } \phi \Rightarrow b_i = f(a_i) \,)$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} \models_{\mathsf{S}, a} \phi \text{ gdw } \mathcal{B} \models_{\mathsf{S}, b} \phi).$$

<u>Beweis :</u> Sei S Sprache erster Stufe vom Typ μ, seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Modelle von S und sei f Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{B}$.

Nun wird mit Formelinduktion bewiesen, dass $\mathrm{FML}_\mathsf{S} \subseteq \mathbf{M}$, wenn

$$\mathbf{M} = \{ \phi \mid \phi \in \mathrm{FML}_\mathsf{S} \ \& \ \forall a \forall b \, (a \text{ Belegung aus } \mathcal{A} \ \& \ b \text{ Belegung aus } \mathcal{B} \ \&$$

$$\forall i \, (i \in \mathrm{Dom}(\mathsf{S}_1) \ \& \ \mathrm{V}_i \text{ frei in } \phi \Rightarrow b_i = \mathrm{f}(a_i) \,)$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} \models_{\mathsf{S}, a} \phi \text{ gdw } \mathcal{B} \models_{\mathsf{S}, b} \phi) \}.$$

Sei nun ϕ Atomformel von S; seien a und b Belegungen aus $\mathcal{A}$ bzw. aus $\mathcal{B}$, so dass

$$\forall i \, (i \in \mathrm{Dom}(\mathsf{S}_1) \ \& \ \mathrm{V}_i \text{ frei in } \phi \Rightarrow \mathrm{b}_i = \mathrm{f}(\mathrm{a}_i) \,).$$

Dann ist entweder $\phi = x =_\mathsf{S} y$

mit $x, y \in \mathrm{VAR}_\mathsf{S} \cup \mathrm{INDK}_\mathsf{S}$, dann gilt:

$$\mathcal{A} \models_{\mathsf{S}, \mathrm{a}} x =_\mathsf{S} y$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{\mathsf{S}, \mathrm{a}} \mathrm{val}_{\mathsf{S}, \mathcal{A}, \mathrm{a}} (x) = \mathrm{val}_{\mathsf{S}, \mathcal{A}, \mathrm{a}} (y)$$

$$\text{gdw } \mathcal{B} \models_{\mathsf{S}, \mathrm{b}} \mathrm{val}_{\mathsf{S} \mathcal{B}, \mathrm{b}} (x) = \mathrm{val}_{\mathsf{S} \mathcal{B}, \mathrm{b}} (y)$$

$$\text{gdw } \mathcal{B} \models_{\mathsf{S}, \mathrm{b}} x =_\mathsf{S} y$$

da f eineindeutig ist, oder es gibt ein $j \in \mathrm{Dom}(\mu_1)$ und eine Folge t der Länge $\mu_{1,j}$ in $\mathrm{VAR}_\mathsf{S} \cup \mathrm{INDK}_\mathsf{S}$ so dass $\phi = {}^\mathsf{S}\mathrm{P}_j \, t_1 \ldots t_{\mu, 1, j}$;

dann gilt: $\mathcal{A} \models_{\mathsf{S}, \mathrm{a}} \phi$

$$\text{gdw } \langle \, \mathrm{val}_{\mathsf{S}, \mathcal{A}, \mathrm{a}}(t_1), \ldots, \mathrm{val}_{\mathsf{S}, \mathcal{A}, \mathrm{a}}(t_{\mu, 1, j}) \, \rangle \in \mathcal{A}_{2, j}$$

$$\text{gdw } \langle\, f(\, val_{S,\mathcal{B},b}(\, t_1\,)\,),\, ...,\, f(\, val_{S,\mathcal{B},b}(\, t_{\mu,1,j}\,)\,)\,\rangle \in \mathcal{B}_{2,j}$$

$$\text{gdw } \mathcal{B} \models_{S,b} \phi,$$

da f Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{B}$ ist.

Damit ist gezeigt, dass alle Atomformeln von S in **M** sind.

Sei nun $\phi \in \mathbf{M}$ und seien a und b entsprechende Belegungen aus $\mathcal{A}$ und aus $\mathcal{B}$.

Dann gilt:

$$\mathcal{A} \models_{S,a} \neg_S \phi$$

$$\text{gdw nicht } \mathcal{A} \models_{S,a} \phi$$

$$\text{gdw nicht } \mathcal{B} \models_{S,b} \phi$$

$$\text{gdw } \mathcal{B} \models_{S,b} \neg_S \phi;$$

das zeigt, dass $\neg_S \phi \in \mathbf{M}$, wenn $\phi \in \mathbf{M}$.

Sei nun $\phi \in \mathbf{M}$ und sei $\psi \in \mathbf{M}$ und seien a und b Belegungen aus $\mathcal{A}$ und aus $\mathcal{B}$, so dass

$$\forall i\,(\, i \in \mathrm{Dom}(S_1)\ \&\ (\, V_i \text{ frei in } \phi \text{ oder } {}^{S}V_i \text{ frei in } \psi\,) \Rightarrow b_i = f(\, a_i\,)\,).$$

Dann gilt: $\mathcal{A} \models_{S,a} \phi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models_{S,b} \phi;$

und weiterhin gilt: $\mathcal{A} \models_{S,a} \psi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models_{S,b} \psi.$

Und es folgt:

$$\mathcal{A} \models_{S,a} (_S\, \phi \wedge_S \psi\,)_S$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{S,a} \phi \text{ und } \mathcal{A} \models_{S,a} \psi$$

$$\text{gdw } \mathcal{B} \models_{S,b} \phi \text{ und } \mathcal{B} \models_{S,b} \psi$$

$$\text{gdw } \mathcal{B} \models_{S,b} (_S\, \phi \wedge_S \psi\,)_S\,;$$

damit ist gezeigt, dass $\phi \wedge_S \psi \in \mathbf{M}$, wenn ϕ und $\psi \in \mathbf{M}$.

Sei nun $\phi \in \mathbf{M}$, sei $\nu \in VAR_S$ und seien a und b Belegungen aus $\mathcal{A}$ und aus $\mathcal{B}$,

so dass $\forall i\,(\, i \in \mathrm{Dom}(S_1)\ \&\ V_i \text{ frei in } \phi \Rightarrow b_i = f(\, a_i\,)\,).$

Dann gibt es ein $j \in \mathbb{N}^+$ mit $\nu = {}^{S}V_j$; sei j so.

Angenommen : $\mathcal{A} \models_{S, a} \exists^S \mathbf{V}_j \, \phi$.

Dann gibt es ein $c \in \mathcal{A}_1$, so dass $\mathcal{A} \models_{S, a(j/c)} \phi$. Sei c so. Nun ist $\phi \in \mathbf{M}$ und a(j/c) ist Belegung aus $\mathcal{A}$ und b(j/f(c)) ist Belegung aus $\mathcal{B}$ und

$$\forall i \, (\, i \in \mathrm{Dom}(S_1) \; \& \; V_i \text{ frei in } \phi \Rightarrow (\, b(\, j/f(c) \,) \,)_i = f(\, a(j/c)_i \,) \,).$$

Daher gilt: $\mathcal{A} \models_{S, a(j/c)} \phi$ gdw $\mathcal{B} \models_{S, b(j/f(c))} \phi$;

und es folgt: $\mathcal{B} \models_{S, b(j/f(c))} \phi$;

also gilt $\mathcal{B} \models_{S, b} \exists^S v \, \phi$.

Angenommen umgekehrt: $\mathcal{B} \models_{S,b} \exists^S v \, \phi$.

Dann gibt es ein $e \in \mathcal{B}_1$, so dass $\mathcal{B} \models_{S, b(j/e)} \phi$.

Sei e so. Nun ist b(j/e) Belegung aus $\mathcal{B}$, a(j/f^{-1}(e)) ist Belegung aus $\mathcal{A}$ und es gilt:

$$\forall i \, (\, i \in \mathrm{Dom}(S_1) \; \& \; V_i \text{ frei in } \phi \Rightarrow (\, b(j/e) \,)_i = f(\, a(\, j/f^{-1}(e) \,)_i \,) \,).$$

Sei nun g = f^{-1}(e). Dann gilt: $\mathcal{B} \models_{S, b(j/e)} \phi$ gdw $\mathcal{A} \models_{S, a(j/g)} \phi$;

also: $\mathcal{A} \models_{S, a(j/g)} \phi$;

und es folgt schließlich

$$\mathcal{A} \models_{S, a} \exists^S V_j \, \phi.$$

Somit ist das Bikonditional

$$\mathcal{A} \models_{S, a} \exists^S \mathbf{V}_j \, \phi \text{ gdw } \mathcal{B} \models_{S, b} \exists^S \mathbf{V}_j \, \phi$$

bewiesen, und es ist gezeigt, dass $\exists v \, \phi \in \mathbf{M}$ ist, wenn $\phi \in \mathbf{M}$ ist.

D. h. **M** erfüllt die Voraussetzungen von Def. 2.1.11(3) und es gilt:

$$\mathrm{FML}_S \subseteq \mathbf{M};$$

und das Theorem ist für alle Modelle $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von S für die

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$$

gilt und alle $\phi \in \mathrm{FML}_S$ bewiesen.

□

2.3.15 Korollar.-

Sei S Sprache erster Stufe vom Typ μ. Dann gilt für alle isomorphen Modelle $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von S und alle Sätze ϕ von S:

$$\mathcal{A} \models_S \phi \text{ gdw } \mathcal{B} \models_S \phi.$$

Neben dem **Koinzidenztheorem** und dem **Isomorphiesatz** ist das **Überführungstheorem** ein weiteres wichtiges logisches Hilfsmittel; es regelt den Umgang mit Formeln einer einstufigen Sprache, bei denen Individuumvariablen durch Individuumkonstanten – und umgekehrt – substituiert werden.

Hierbei ist es notwendig, sog. Variablenkonfusion zu vermeiden. Da nur freie Vorkommnisse von Individuumvariablen durch Individuumvariablen oder -konstanten ersetzt werden, gilt es, diejenigen Substitutionen auszuschließen, bei denen die „neue" Individuumvariable unter den Wirkungsbereich eines Quantors gerät. Die Bedingungen, unter denen eine Individuumvariable / -konstante durch eine Individuumvariable ersetzt werden darf, regelt die folgende Definition.

2.3.16 Definition.-

Für alle S: *v ist für α in ϕ von S substituierbar*

gdw

$v \in \mathrm{VAR}_S$ & $\alpha \in \mathrm{VAR}_S \cup \mathrm{INDK}_S$ &

(ϕ ist Atomformel von S

oder

$\exists \psi$ ($\psi \in \mathrm{FML}_S$ & $\phi = \neg_S \psi$ & v ist für α in ψ von S substituierbar)

oder

$\exists \psi \exists \delta$ ($\psi, \delta \in \mathrm{FML}_S$ & $\phi = (_S\, \psi \wedge_S \delta)_S$ & v ist für α in ψ von S substituierbar

$\& \ \nu$ ist für α in δ von S substituierbar)

oder

$\exists \xi \exists \psi$ ($\xi \in \mathrm{VAR}_S$ & $\psi \in \mathrm{FML}_S$ & $\phi = \exists_S \xi \psi$ &

([$\alpha \in \mathrm{VAR}_S$ & α ist nicht frei in $\exists_S \xi \psi$]

oder

[$\alpha \in \mathrm{INDK}_S$ & α ist kein Teilausdruck von $\exists_S \xi \psi$])

oder

[$\nu \neq \xi$ & ν ist für α in ψ von S substituierbar])).

Nun wird die Substitutionsfunktion $\mathrm{Sub}_S(\langle \_, \_, \_ \rangle)$ rekursiv definiert.

2.3.17 Definition.-

Sei S Sprache erster Stufe. Dann soll gelten:

(1) Sub_S ist eine Funktion auf

$\{ t \mid t$ ist ein 3-Tupel & $t_1, t_2 \in \mathrm{VAR}_S \cup \mathrm{INDK}_S$ & $t_3 \in \mathrm{FML}_S \}$ &

(2) für alle ν, α, b, c: wenn $\nu, \alpha \in \mathrm{VAR}_S \cup \mathrm{INDK}_S$ & $b, c \in \mathrm{VAR}_S \cup \mathrm{INDK}_S$,

dann gilt:

(a) $b = \alpha$ & $c \neq \alpha$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Sub}_S(\langle \nu, \alpha, (b =_S c) \rangle) = (\nu =_S c)$ &

(b) $c = \alpha$ & $b \neq \alpha$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Sub}_S(\langle \nu, \alpha, (b =_S c) \rangle) = (b =_S \nu)$ &

(c) $b, c = \alpha$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Sub}_S(\langle \nu, \alpha, (b =_S c) \rangle) = (\nu =_S \nu)$ &

(d) $b, c \neq \alpha$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Sub}_S(\langle \nu, \alpha, (b =_S c) \rangle) = (b =_S c)$ &

(3) für alle ν, α, i, t, t':

wenn $\nu, \alpha \in \mathrm{VAR}_S \cup \mathrm{INDK}_S$ & $i \in \mathrm{Dom}(\mu_1)$ & t, t' sind

Folgen der Länge $\mu_1(i)$ in $\mathrm{VAR}_S \cup \mathrm{INDK}_S$ &

$$\forall j\,(j \in \{1, ..., \mu_1(i)\} \Rightarrow ([\,t_j = \alpha \Rightarrow t'_j = v\,] \;\&\; [\,t_j \neq \alpha \Rightarrow t'_j = t_j\,])),$$

dann ist $\mathrm{Sub}_S(\langle\, v, \alpha, {}^S\mathrm{P}_i\, t_1 \ldots t(\mu_1(i))\,\rangle) = {}^S\mathrm{P}_i\, t'_1 \ldots t'(\mu_1(i))$ &

(4) für alle v, α, ψ:

wenn $v, \alpha \in \mathrm{VAR}_S \cup \mathrm{INDK}_S$ & $\psi \in \mathrm{FML}_S$, dann

$$\mathrm{Sub}_S(\langle\, v, \alpha, \neg_S\, \psi\,\rangle) = \neg_S\, \mathrm{Sub}_S(\langle\, v, \alpha, \psi\,\rangle) \;\&$$

(5) für alle v, α, ψ, δ:

wenn $v, \alpha \in \mathrm{VAR}_S \cup \mathrm{INDK}_S$ & $\psi, \delta \in \mathrm{FML}_S$, dann

$$\mathrm{Sub}_S(\langle\, v, \alpha, \delta \wedge_S \psi\,\rangle) = \mathrm{Sub}_S(\langle\, v, \alpha, \delta\,\rangle) \wedge_S \mathrm{Sub}_S(\langle\, v, \alpha, \psi\,\rangle)) \;\&$$

(6) für alle v, α, ψ, ξ:

wenn $v, \alpha \in \mathrm{VAR}_S \cup \mathrm{INDK}_S$ & $\psi \in \mathrm{FML}_S$ & $\xi \in \mathrm{VAR}_S$, dann gilt:

([wenn $\alpha = \xi$, dann $\mathrm{Sub}_S(\langle\, v, \alpha, \exists_S\, \xi\, \psi\,\rangle) = \exists_S\, \xi\, \psi$] &

[wenn $\alpha \neq \xi$, dann $\mathrm{Sub}_S(\langle\, v, \alpha, \exists_S\, \xi\, \psi\,\rangle) = \exists_S\, \xi\, \mathrm{Sub}_S(\langle\, v, \alpha, \psi\,\rangle)$]).

2.3.18 <u>Überführungstheorem</u>.-

Für alle $\mathcal{S}, \mathcal{A}, \phi, x$: wenn $\mathcal{S}$ eine Sprache erster Stufe, $\mathcal{A}$ ein Modell für $\mathcal{S}$, $\phi \in \mathrm{FML}_{\mathcal{S}}$ und x eine Belegung aus $\mathcal{A}$ ist, dann gilt:

(1)
$$\forall \alpha\, \forall v\, \forall \mathcal{A}'\,(\,\alpha \in \mathrm{INDK}_{\mathcal{S}} \;\&\; v \in \mathrm{VAR}_{\mathcal{S}} \;\&$$
$$\mathcal{A}' = \langle\, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3\,(\,\mathcal{S}_4^{-1}(\alpha)\; /\; x(\mathcal{S}_1^{-1}(v))\,)\,\rangle$$
$$\Rightarrow (\mathcal{A} \models_{\mathcal{S},x} \phi \text{ gdw } \mathcal{A}' \models_{\mathcal{S},x} \mathrm{Subst}_{\mathcal{S}}\,(\langle\, \alpha, v, \phi\,\rangle))).$$

(2)
$$\forall \alpha\, \forall v\, \forall x'(\,\alpha \in \mathrm{INDK}_{\mathcal{S}} \;\&\; v \in \mathrm{VAR}_{\mathcal{S}} \;\&\; v \text{ ist nicht frei in } \phi$$
$$\&\; v \text{ ist substituierbar für } \alpha \text{ in } \phi \text{ von } \mathcal{S}$$
$$\&\; x' = x\,(\,\mathcal{S}_1^{-1}(v)\; /\; \mathcal{A}_3(\,\mathcal{S}_4^{-1}(\alpha)\,)\,)$$
$$\Rightarrow (\mathcal{A} \models_{\mathcal{S},x} \phi \text{ gdw } \mathcal{A} \models_{\mathcal{S},x'} \mathrm{Subst}_{\mathcal{S}}\,(\,\langle v, \alpha, \phi\,\rangle))).$$

<u>Beweis:</u> Es wird nur (2) bewiesen, da dieser Fall weiter unten benötigt wird.

Sei S Sprache erster Stufe, $\mathcal{A}$ Modell für S, $\alpha \in \mathrm{INDK}_{\mathsf{S}}$, $\nu \in \mathrm{VAR}_{\mathsf{S}}$. Sei

$$\mathbf{M} = \{\ \phi \mid \forall x \forall x' (\ \nu \text{ ist nicht frei in } \phi\ \&$$

$$\nu \text{ ist substituierbar für } \alpha \text{ in } \phi \text{ von } \mathsf{S}\ \&\ x \text{ ist Belegung aus } \mathcal{A}\ \&$$

$$x' = x\,(\,\mathsf{S}_1^{-1}(\nu)\ /\ \mathcal{A}_3(\,\mathsf{S}_4^{-1}(\alpha)\,)\,)\ \&$$

$$\Rightarrow (\mathcal{A} \models_{\mathsf{S},x} \phi \text{ gdw } \mathcal{A} \models_{\mathsf{S},x'} \mathrm{Subst}_{\mathsf{S}}\,(\langle \nu, \alpha, \phi \rangle)\,)\ \}.$$

Wir beweisen mit Formel-Induktion: $\mathrm{FML}_{\mathsf{S}} \subseteq \mathbf{M}$.

Sei $\phi \in \mathrm{FML}_{\mathsf{S}}$.

<u>(Induktionsbasis)</u>

Sei ϕ Atomformel von S. Angenommen, die Voraussetzungen von $\mathbf{M}$ sind erfüllt, d. h. es gelte ν ist nicht frei in ϕ & ν ist substituierbar für α in ϕ von S & x ist Belegung aus $\mathcal{A}$ & $x' = x\,(\,\mathsf{S}_1^{-1}(\nu)\ /\ \mathcal{A}_3(\,\mathsf{S}_4^{-1}(\alpha)\,)\,)$.

Nun sind zwei Fälle möglich:

<u>Fall 1:</u> Angenommen,

$$\exists b\, \exists c\, (b, c \in \mathrm{VAR}_{\mathsf{S}} \cup \mathrm{INDK}_{\mathsf{S}}\ \&\ \phi = b =_{\mathsf{S}} c).$$

Seien b, c so. Dann sind vier Unterfälle möglich:

<u>Fall 1.1:</u> Sei $b = \alpha$ & $c \neq \alpha$.

Da ν nicht frei in ϕ ist, ist $\nu \neq b$ & $\nu \neq c$. Dann gilt:

$$\mathcal{A} \models_{\mathsf{S},x} \phi$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{\mathsf{S},x} b =_{\mathsf{S}} c$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{\mathsf{S},x} \alpha =_{\mathsf{S}} c$$

$$\text{gdw } \mathrm{val}_{\mathsf{S},\mathcal{A},x}(\alpha) = \mathrm{val}_{\mathsf{S},\mathcal{A},x}(c)$$

$$\text{gdw } \mathrm{val}_{\mathsf{S},\mathcal{A},x'}(\nu) = \mathrm{val}_{\mathsf{S},\mathcal{A},x'}(c)$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{\mathsf{S},x'} \nu =_{\mathsf{S}} c$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{S, x'} \mathrm{Sub}_S(\langle \nu, \alpha, \phi \rangle).$$

Die restlichen drei Fälle beweist man entsprechend.

Fall 2: Angenommen,

$$\exists j\, (j \in \mathrm{Dom}(\mu_1)\ \&\ \exists t_1 \ldots \exists t_{\mu(1)(j)}\, (\, t_1\, , \ldots, t_{\mu(1)(j)} \in \mathrm{VAR}_S \cup \mathrm{INDK}_S$$

$$\&\ \phi = {}^S\mathrm{P}_j t_1 \ldots t_{\mu(1)(j)}\,)\,).$$

Seien j und t_1 , ..., $t_{\mu(1)(j)}$ so. Da ν nicht frei in ϕ gilt $\forall i\, (\, i \in \{1, \ldots, \mu_1(j)\} \Rightarrow t_i \neq \nu\,)$.

Sei t' Folge der Länge $\mu_1(j)$ &

$$\forall i\, (\, [\, i \in \{1, \ldots, \mu_1(j)\}\ \&\ t_i = \alpha \Rightarrow t'_i = \nu\,]$$

$$\&\ [\, i \in \{1, \ldots, \mu_1(j)\}\ \&\ t_i \neq \alpha \Rightarrow t'_i = t_i\,]\,).$$

Dann gilt: $$\mathcal{A} \models_{S, x} \phi$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{S, x} {}^S\mathrm{P}_j\, t_1 \ldots t_{\mu(1)(j)}$$

$$\text{gdw } \langle\, \mathrm{val}_{S, \mathcal{A}, x}\, (t_1), \ldots, \mathrm{val}_{S, \mathcal{A}, x}\, (t_{\mu(1)(j)})\, \rangle \in \mathcal{A}_{2,\, j}$$

$$\text{gdw } \langle\, \mathrm{val}_{S, \mathcal{A}, x'}\, (t'_1), \ldots, \mathrm{val}_{S, \mathcal{A}, x'}\, (t'_{\mu(1)(j)})\, \rangle \in \mathcal{A}_{2,\, j}$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{S, x'} {}^S\mathrm{P}_j\, t'_1 \ldots t'_{\mu(1)(j)}$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{S, x} \mathrm{Sub}_S(\langle \nu, \alpha, \phi \rangle).$$

Das zeigt, dass alle Atomformeln von S in **M** sind.

(Induktionsschritt)

(a) Sei $\phi \in$ **M**, und gelte

$$\nu \text{ ist nicht frei in } \neg_S\, \phi\ \&\ \nu \text{ ist substituierbar für } \alpha \text{ in } \neg_S\, \phi \text{ von S }\&$$

$$\text{x ist Belegung aus } \mathcal{A}\ \&\ x' = x\, (\, S_1^{-1}(\nu)\, /\, \mathcal{A}_3(\, S_4^{-1}(\alpha)\,)\,).$$

Dann ist ν nicht frei in ϕ & ν ist substituierbar für α in ϕ. Dann folgt mit I. V.:

$$\mathcal{A} \models_{S, x} \phi \text{ gdw } \mathcal{A} \models_{S, x'} \mathrm{Sub}_S(\langle \nu, \alpha, \phi \rangle).$$

Dann folgt: $$\mathcal{A} \models_{S, x} \neg_S\, \phi$$

$$\text{gdw nicht } (\mathcal{A} \models_{S, x} \phi\,)$$

$$\text{gdw nicht } (\mathcal{A} \models_{S,x'} \text{Sub}_S(\langle \nu, \alpha, \phi \rangle))$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{S,x'} \neg_S \text{Sub}_S(\langle \nu, \alpha, \phi \rangle)$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{S,x'} \text{Sub}_S(\langle \nu, \alpha, \neg_S \phi \rangle).$$

Also ist $\neg_S \phi \in \mathbf{M}$, wenn $\phi \in \mathbf{M}$.

(b) Seien $\phi, \psi \in \mathbf{M}$ und sei ν nicht frei in $(_S\, \phi \wedge_S \psi\,)_S$ und sei ν substituierbar für α in $(_S\, \phi \wedge_S \psi\,)_S$. Dann ist ν in ϕ und in ψ nicht frei & ν ist für α in ϕ und in ψ substituierbar.

Dann folgt mit I. V.:

$$\mathcal{A} \models_{S,x} \phi \text{ gdw } \mathcal{A} \models_{S,x'} \text{Sub}_S(\langle \nu, \alpha, \phi \rangle)$$

und $$\mathcal{A} \models_{S,x} \psi \text{ gdw } \mathcal{A} \models_{S,x'} \text{Sub}_S(\langle \nu, \alpha, \psi \rangle).$$

Dann folgt: $$\mathcal{A} \models_{S,x} (_S\, \phi \wedge_S \psi\,)_S$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{S,x} \phi \;\&\; \mathcal{A} \models_{S,x} \psi$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{S,x'} \text{Sub}_S(\langle \nu, \alpha, \phi \rangle) \;\&\; \mathcal{A} \models_{S,x'} \text{Sub}_S(\langle \nu, \alpha, \psi \rangle)$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{S,x'} \text{Sub}_S(\langle \nu, \alpha, \phi \rangle) \wedge_S \text{Sub}_S(\langle \nu, \alpha, \psi \rangle)$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{S,x'} \text{Sub}_S(\langle \nu, \alpha, (_S\, \phi \wedge_S \psi\,)_S \rangle).$$

Und $(_S\, \phi \wedge_S \psi\,)_S \in \mathbf{M}$, wenn $\phi, \psi \in \mathbf{M}$.

(c) Sei $\phi \in \mathbf{M}$ und sei $\xi \in \text{VAR}_S$.

Sei ν nicht frei in $\exists_S\, \xi\, \phi$ und sei ν für α in $\exists_S\, \xi\, \phi$ von S substituierbar.

Dann gilt nach 2.3.17:

$$\exists \xi' \exists \psi\, (\, \xi' \in \text{VAR}_S \;\&\; \psi \in \text{FML}_S \;\&\; \exists_S\, \xi\, \phi = \exists_S\, \xi'\, \psi \;\&$$

$$(\, [\, \alpha \in \text{VAR}_S \;\&\; \alpha \text{ ist nicht frei in } \exists_S\, \xi'\, \psi\,]$$

oder

$$[\, \alpha \in \text{INDK}_S \;\&\; \alpha \text{ ist kein Teilausdruck von } \exists_S\, \xi'\, \psi\,]\,)$$

oder

$$[\, \nu \neq \xi' \;\&\; \nu \text{ ist für } \alpha \text{ in } \psi \text{ von S substituierbar} \,]\,).$$

Seien ξ' und ψ so. Dann ist $\xi' = \xi$ und $\psi = \phi$. Ferner ist $\alpha \notin VAR_S$; dann folgt:

$$(\,[\, \alpha \in INDK_S \;\&\; \alpha \text{ ist kein Teilausdruck von } \exists_S \xi \phi \,]$$

oder

$$[\, \nu \neq \xi \;\&\; \nu \text{ ist für } \alpha \text{ in } \phi \text{ von S substituierbar} \,]\,).$$

Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Sei α kein Teilausdruck von $\exists_S \xi \phi$. Dann gilt:

$$Sub_S(\langle \nu, \alpha, \exists_S \xi \phi \rangle) = \exists_S \xi \phi.$$

Dann $\mathcal{A} \models_{S,x} \exists_S \xi \phi$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{S,x} Sub_S(\langle \nu, \alpha, \exists_S \xi \phi \rangle) \quad (*)$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{S,x'} Sub_S(\langle \nu, \alpha, \exists_S \xi \phi \rangle). \quad (**)$$

Der Übergang (*) gdw (**) folgt aus dem Koinzidenztheorem.

Fall 2: Sei $\nu \neq \xi$ & ν ist für α in ϕ von S substituierbar. Dann ist ν nicht frei in ϕ.

Nun gilt die Induktionsvoraussetzung; d. h.:

für alle Belegungen x aus $\mathcal{A}$ und alle x' mit $x' = x\,(\,S_1^{-1}(\nu) \,/\, \mathcal{A}_3(\,S_4^{-1}(\alpha)\,)\,)$

gilt:

$$\mathcal{A} \models_{S,x} \phi \text{ gdw } \mathcal{A} \models_{S,x'} Sub_S(\langle \nu, \alpha, \phi \rangle),$$

wenn ν nicht frei in ϕ ist und wenn ν für α in ϕ von S substituierbar ist.

Aus typographischen Gründen sind für die folgende Äquivalenzenkette drei Abkürzungen erforderlich:

$$j = S_1^{-1}(\xi);\ k = S_1^{-1}(\nu) \text{ und } l = \mathcal{A}_3(S_4^{-1}(\alpha)).$$

Dann $\mathcal{A} \models_{S,x} \exists_S \xi \phi$

$$\text{gdw } \exists a\,(\, a \in \mathcal{A}_1 \;\&\; \mathcal{A} \models_{S,x(j/a)} \phi \,)$$

$$\text{gdw } \exists a\,(\, a \in \mathcal{A}_1 \;\&\; \mathcal{A} \models_{S,x(j/a)(k/l)} Sub(\langle \nu, \alpha, \phi \rangle)) \quad (*)$$

$$\text{gdw } \exists a\ (a \in \mathcal{A}_1\ \&\ \mathcal{A} \models_{S,\, x\,(k/l)(j/a)} \mathrm{Sub}(\langle \nu, \alpha, \phi \rangle)) \qquad (**)$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{S,\, x(k/l)} \exists_S\, \xi\, \mathrm{Sub}_S(\langle \nu, \alpha, \phi \rangle)$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{S,\, x(k/l)} \mathrm{Sub}_S(\langle \nu, \alpha, \exists_S\, \xi \phi \rangle)$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{S,\, x'} \mathrm{Sub}_S(\langle \nu, \alpha, \exists_S\, \xi \phi \rangle).$$

Der Übergang (*) gdw (**) erfolgt mit: $j \neq k$.

D. h.: $\exists_S\, \xi \phi \in \mathbf{M}$, wenn $\phi \in \mathbf{M}$ und $\xi \in \mathrm{VAR}_S$.

Und es folgt: $\mathrm{FML}_S \subseteq \mathbf{M}$;

damit ist das Überführungstheorem (2) bewiesen.

Um über die Eigenschaften von Strukturen zu reden, tritt neben den Isomorphiebegriff der schwächere modelltheoretische Begriff der *einstufigen Äquivalenz*:

2.3.19 Definition.-

$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind in *S einstufig äquivalent* $-\ \mathcal{A} \equiv_S \mathcal{B}\ -$

gdw

S Sprache erster Stufe & $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Modelle von S & für alle $\xi \in \mathrm{SATZ}_S$ gilt:

$$\mathcal{A} \models_S \xi \text{ gdw } \mathcal{B} \models_S \xi.$$

Isomorphe Strukturen sind immer einstufig äquivalent, die Umkehrung gilt nicht. Beispiele für einstufig äquivalente Strukturen, die nicht isomorph sind, lassen sich etwa bei Bell & Slomson (1974[3], S. 74-77) finden.

Der Begriff der 'einstufigen Äquivalenz' bezieht sich auf Strukturen und die Erfüllung von Sätzen einer einstufigen Sprache durch diese Strukturen. Die analoge Begriffsbildung für die Erfüllung von Formeln einer einstufigen Sprache durch Modelle dieser Sprache ist:

2.3.20 Definition.-

$\mathcal{A}$ ist *einstufiges Submodell* von $\mathcal{B}$ in $\mathcal{S}$

und $\mathcal{B}$ ist *einstufige Erweiterung* von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{S}$

gdw

$\mathcal{S}$ Sprache erster Stufe & $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Modelle von $\mathcal{S}$ & $\mathcal{A} \in \mathbf{S}(\mathcal{B})$ & für alle $\phi \in \mathrm{FML}_{\mathcal{S}}$

und alle Belegungen x aus $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A} \models_{S,x} \phi \;\leftrightarrow\; \mathcal{B} \models_{S,x} \phi.$$

Für die obige Definition wird nun noch eine metasprachliche Prädikatkonstante eingeführt:

2.3.21 Definition.-

Für alle $\mathcal{S}$ soll gelten:

$$\mathcal{A} \prec_{S} \mathcal{B}$$

gdw

$\mathcal{A}$ ist einstufiges Submodell von $\mathcal{B}$ in $\mathcal{S}$.

Die nächste Definition führt eine bequeme Redeweise ein, um mit einstufigen Submodellen und Einbettungen umgehen zu können.

2.3.22 Definition.-

f ist einstufige Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ über $\mathcal{S}$

gdw

$\exists \mathcal{C}\,(\,\mathcal{C} \prec_{S} \mathcal{B}$ & *f ist Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{C}$*$\,)$.

Im Beweis für das Theorem von Löwenheim und Skolem (abwärts) wird das folgende Lemma benötigt. Es gibt notwendige und hinreichende Bedingungen an, damit ein Submodell $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}$ ein einstufiges Submodell von $\mathcal{B}$ ist.

2.3.23 Lemma.-

Sei $\mathcal{S}$ *Sprache erster Stufe. Seien* $\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{B}$ *Modelle für* $\mathcal{S}$, *so dass* $\mathcal{A} \in \mathbf{S}(\mathcal{B})$. *Dann gilt:*

$$\mathcal{A} \prec_S \mathcal{B}$$

gdw

$$\forall \phi \forall n \forall x \,(\, \phi \in \mathrm{FML}_S \;\&\; n \in \mathbb{N}^+ \;\&\; x \text{ Belegung aus } \mathcal{A} \;\&\; \mathcal{B} \models_{S,x} \exists_S {}^S V_n \,\phi$$
$$\Rightarrow \exists a \,(\, a \in \mathcal{A}_1 \;\&\; \mathcal{B} \models_{S,x(n/a)} \phi \,).$$

Beweis: Seien die Voraussetzungen erfüllt.

($\Rightarrow$) Gelte $\mathcal{A} \prec_S \mathcal{B}$.

Sei $\phi \in \mathrm{FML}_S$, sei n $\in \mathbb{N}^+$, sei x Belegung aus $\mathcal{A}$ und gelte $\mathcal{B} \models_{S,x} \exists_S {}^S V_n \,\phi$.

Dann

$$\mathcal{A} \models_{S,x} \exists_S {}^S V_n \,\phi,$$

da vorausgesetzt ist, dass $\mathcal{A}$ einstufiges Submodell von $\mathcal{B}$ ist.

Dann gibt es ein $a \in \mathcal{A}_1$, so dass:

$$\mathcal{A} \models_{S,x(n/a)} \phi$$

und $\mathcal{B} \models_{S,x(n/a)} \phi$ folgt.

($\Leftarrow$) Angenommen

$$\forall \phi \forall n \forall x \,(\, \phi \in \mathrm{FML}_S \;\&\; n \in \mathbb{N}^+ \;\&\; x \text{ Belegung aus } \mathcal{A} \;\&\; \mathcal{B} \models_{S,x} \exists_S {}^S V_n \,\phi$$
$$\Rightarrow \exists a \,(\, a \in \mathcal{A}_1 \;\&\; \mathcal{B} \models_{S,x(n/a)} \phi \,)\,).$$

Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{A} \prec_S \mathcal{B}$ folgt; d. h., dass für alle Formeln ϕ von $\mathcal{S}$ und alle Belegungen x aus $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A} \models_{S,x} \phi \text{ gdw } \mathcal{B} \models_{S,x} \phi.$$

Sei dazu: $\mathbf{M} = \{\ \phi \mid \phi \in \mathrm{FML}_S \ \&\ \forall x\ (\ x \text{ Belegung aus } \mathcal{A}$

$$\Rightarrow \mathcal{A} \models_{S,x} \phi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models_{S,x} \phi)\ \}.$$

Es wird mit Formelinduktion gezeigt, dass $\mathrm{FML}_S \subseteq \mathbf{M}$ gilt.

<u>Induktionsbasis:</u> Da $\mathcal{A} \in \mathbf{S}(\mathcal{B})$, gilt für alle Atomformeln ϕ von S und alle Belegungen x aus $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \models_{S,x} \phi \text{ gdw } \mathcal{B} \models_{S,x} \phi.$$

Somit sind alle Atomformeln von S in **M**.

Ebenso offensichtlich ist, dass $\phi \in \mathbf{M}$, wenn $\phi = \neg_S\ \psi \ \&\ \psi \in \mathbf{M}$

und dass $\phi \in \mathbf{M}$, wenn $\phi = \psi \wedge_S \chi \ \&\ \psi, \chi \in \mathbf{M}$.

Sei nun $\phi = \exists_S\ {}^S V_n\ \psi$ und gelte $\psi \in \mathbf{M}$.

Angenommen x Belegung aus $\mathcal{A}$ und gelte: $\mathcal{A} \models_{S,x} \exists_S\ {}^S V_n\ \psi$.

Dann gibt es $a \in \mathcal{A}_1$, so dass $\mathcal{A} \models_{S,x(n/a)} \psi$. Sei a so. Nun gilt für alle Belegungen x aus $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \models_{S,x} \psi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models_{S,x} \psi;$$

also gilt $\mathcal{A} \models_{S,x(n/a)} \psi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models_{S,x(n/a)} \psi$;

dann $\mathcal{B} \models_{S,x(n/a)} \psi$;

und $\mathcal{B} \models_{S,x} \exists_S\ {}^S V_n\ \psi$ folgt.

Gelte nun $\mathcal{B} \models_{S,x} \exists_S\ {}^S V_n\ \psi$.

Dann gibt es nach Voraussetzung ein $a \in \mathcal{A}_1$, so dass

$$\mathcal{B} \models_{S,x(n/a)} \psi.$$

Sei a so. Da $\psi \in \mathbf{M}$, folgt: $\mathcal{A} \models_{S,x(n/a)} \psi$,

und schließlich gilt: $\mathcal{A} \models_{S,x} \exists_S\ {}^S V_n\ \psi$.

Das zeigt, dass $\exists_S\ {}^S V_n\ \psi \in \mathbf{M}$, wenn $\psi \in \mathbf{M}$.

Der Satz 2.2.19 über Einbettungen gilt auch für einstufige Einbettungen:

2.3.24 Satz.-

Wenn $\mathcal{S}$ Sprache erster Stufe und wenn f einstufige Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ über $\mathcal{S}$ ist, dann gibt es ein Modell $\mathcal{C}$ von $\mathcal{S}$, und einen Isomorphismus g von $\mathcal{C}$ auf $\mathcal{B}$, so dass $\mathcal{A} \prec_{\mathcal{S}} \mathcal{C}$ und $f \subseteq g$.

Beweis: Sei $\mathcal{S}$ Sprache erster Stufe und sei f einstufige Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ über $\mathcal{S}$.

Dann gilt gemäß Definition 2.3.22:

$$\exists \mathcal{B}' (\mathcal{B}' \in \mathbf{S}(\mathcal{B}) \ \& \ \mathcal{B}' \prec_{\mathcal{S}} \mathcal{B} \ \& \text{ f ist Isomorphismus von } \mathcal{A} \text{ auf } \mathcal{B}').$$

Sei $\mathcal{B}'$ so.

Nach Satz 2.2.19 gilt:

$$\exists \mathcal{C} (\mathcal{A} \in \mathbf{S}(\mathcal{C}) \ \& \ \exists g (g \text{ ist Isomorphismus von } \mathcal{C} \text{ auf } \mathcal{B} \ \& \ f \subseteq g)).$$

Seien $\mathcal{C}$ und g so.

Sei nun $\phi \in FML_{\mathcal{S}}$ und sei x Belegung aus $\mathcal{A}$.

Dann gilt $\mathcal{A} \models_{\mathcal{S}, x} \phi$

gdw $\mathcal{B}' \models_{\mathcal{S}, f \circ x} \phi$

– $\mathcal{B}' \prec_{\mathcal{S}} \mathcal{B}$ & $f \circ x$ Belegung aus $\mathcal{B}'$ –

gdw $\mathcal{B} \models_{\mathcal{S}, f \circ x} \phi$

– Koinzidenztheorem 2.3.11 & $\mathrm{Ran}(x) \subseteq \mathcal{A}_1$ & $g \restriction \mathcal{A}_1 = f$ –

gdw $\mathcal{B} \models_{\mathcal{S}, g \circ x} \phi$

– Isomorphietheorem 2.3.14 –

gdw $\mathcal{C} \models_{\mathcal{S}, x} \phi$.

Damit ist $\mathcal{A} \prec_{\mathcal{S}} \mathcal{C}$ bewiesen.

Im Folgenden werden die logischen und modelltheoretischen Begriffe, die weiter unten benötigt werden – angepasst an die vorliegende Sprache – definiert. Sätze, die diese Begriffe enthalten, werden angeführt, und ein Teil dieser Sätze wird bewiesen.

Um nun ausdrücken zu können, dass eine Klasse Σ von Formeln in $\mathcal{A}$ gilt, benötigt man den Begriff '$\mathcal{A}$ erfüllt simultan Σ', für den eine eigene Prädikatkonstante eingeführt wird:

2.3.25 Definition.-

$\mathcal{A} \Vdash_{S,x} \Sigma$

gdw

$\mathcal{A}$ Modell für S ist, x Belegung aus $\mathcal{A}$ ist, $\Sigma \subseteq \mathrm{FML}_S$ ist &

$$\forall \phi \,(\, \phi \in \Sigma \Rightarrow \mathcal{A} \models_{S,x} \phi).$$

Nun kann der Isomorphiesatz für Satzmengen einer Sprache erster Stufe bewiesen werden:

2.3.26 Satz.-

Sei S *Sprache erster Stufe vom Typ* μ. *Dann gilt für alle Modelle* $\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{B}$ *von* S *und alle* $\Sigma \subseteq$ SATZ_S : $\qquad \mathcal{A} \cong \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \Vdash_S \Sigma$ gdw $\mathcal{B} \Vdash_S \Sigma$.

Beweis : Sei S Sprache erster Stufe, seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Modelle von S, so dass $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$; und sei $\Sigma \subseteq \mathrm{SATZ}_S$.

Sei $\phi \in \Sigma$.

Dann gilt $\qquad \mathcal{A} \models_S \phi$ gdw $\mathcal{B} \models_S \phi$,

da ϕ Formel von S ohne freie Variablen ist. Das gilt für alle $\phi \in \Sigma$ und es folgt schließlich: $\qquad \mathcal{A} \Vdash_S \Sigma$ gdw $\mathcal{B} \Vdash_S \Sigma$,

wenn $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Nun kann definiert werden, wann 'ϕ logische Folgerung in S aus Σ' ist:

2.3.27 Definition.-

$\Sigma \Vdash_S \phi$

gdw

$\Sigma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{FML}_S$ &

$\forall \mathcal{A} \forall x$ ($\mathcal{A}$ Modell für S & x Belegung aus $\mathcal{A}$ & $\mathcal{A} \Vdash_{S,x} \Sigma \Rightarrow \mathcal{A} \models_{S,x} \phi$).

Die nächste Definition legt fest, welche Formeln von S zueinander logisch äquivalent sind:

2.3.28 Definition.-

ϕ und ψ sind logisch äquivalent in S

gdw

$\{\phi\} \Vdash_S \psi$ & $\{\psi\} \Vdash_S \phi$.

Nun werden einige Sätze – ohne Beweis – zitiert, die weiter unten bei Beweisen angezogen werden.

2.3.29 Hilfssatz.-

Sei S Sprache erster Stufe; sei ϕ quantorenfreie Formel von S. Dann gibt es eine quantorenfreie Formel ψ von S in konjunktiver Normalform, so dass ϕ und ψ logisch äquivalent sind und für alle Variablen v von S gilt:

$$v \text{ frei in } \phi \Leftrightarrow v \text{ frei in } \psi.$$

2.3.30 Satz.-

Sei S Sprache erster Stufe. Dann gibt es zu jeder Formel ϕ von S eine Formel ψ von S, so dass ψ in pränexer Normalform ist, ϕ und ψ logisch äquivalent sind und für alle Variablen v von S gilt:

$$v \text{ frei in } \phi \Leftrightarrow v \text{ frei in } \psi.$$

2.3.31 <u>Satz</u>.-

Sei S Sprache erster Stufe. Dann gibt es zu jedem Satz ϕ von S einen Satz ψ von S, so dass ψ in pränexer Normalform ist, und ϕ und ψ logisch äquivalent sind.

Es gilt das Deduktionstheorem:

2.3.32 <u>Satz.-</u>

Sei S Sprache erster Stufe, sei $\Sigma \cup \{ \phi, \psi \} \subseteq FML_S$. Dann gilt:

$$\Sigma \cup \{\phi\} \Vdash_S \psi \Leftrightarrow \Sigma \Vdash_S \phi \rightarrow_S \psi.$$

<u>Beweis :</u> Seien die Voraussetzungen für S, Σ , ϕ, und ψ erfüllt.

($\Rightarrow$) Gelte: $\Sigma \cup \{\phi\} \Vdash_S \psi$.

Dann folgt mit Definition 2.3.27:

$\forall \mathcal{A} \forall x$ ($\mathcal{A}$ Modell für S & x Belegung aus $\mathcal{A}$ & $\mathcal{A} \Vdash_{S,x} \Sigma \cup \{\phi\} \Rightarrow \mathcal{A} \models_{S,x} \psi$).

Sei nun $\mathcal{A}$ Modell für S, sei x Belegung aus $\mathcal{A}$ und gelte:

$$\mathcal{A} \Vdash_{S,x} \Sigma.$$

Gelte weiterhin: $\mathcal{A} \models_{S,x} \phi$.

Dann folgt: $\mathcal{A} \models_{S,x} \psi$,

und mit Satz 2.3.10 erhält man:

$$\mathcal{A} \models_{S,x} \phi \rightarrow_S \psi.$$

Gelte nun $\mathcal{A} \models_{S,x} \phi$ nicht.

Dann folgt: $\mathcal{A} \models_{S,x} \phi \rightarrow_S \psi$.

Also gilt für alle Modelle $\mathcal{A}$ von S und alle Belegungen x aus $\mathcal{A}$ so dass

$$\mathcal{A} \Vdash_{S,x} \Sigma:$$

$$\mathcal{A} \models_{S,x} \phi \rightarrow_S \psi,$$

wenn $\Sigma \cup \{\phi\} \Vdash_S \psi$, und $\Sigma \Vdash_S \phi \rightarrow_S \psi$ folgt.

($\Leftarrow$) Gelte $\Sigma \Vdash_S \phi \rightarrow_S \psi$.

Sei $\mathcal{A}$ Modell für S, sei x Belegung aus $\mathcal{A}$, so dass $\mathcal{A} \Vdash_{S,x} \Sigma$, dann folgt:

$$\mathcal{A} \models_{S,x} \phi \rightarrow_S \psi.$$

Gemäß Satz 2.3.10 gilt dann:

$$(\text{ nicht } \mathcal{A} \models_{S,x} \phi) \text{ oder } \mathcal{A} \models_{S,x} \psi).$$

Wenn nun $\mathcal{A} \models_{S,x} \phi$, dann folgt: $\mathcal{A} \models_{S,x} \psi$. Und es gilt:

$\forall \mathcal{A} \forall x$ ($\mathcal{A}$ Modell für S & x Belegung aus $\mathcal{A}$ & $\mathcal{A} \Vdash_{S,x} \Sigma \cup \{\phi\} \Rightarrow \mathcal{A} \models_{S,x} \psi$).

Und es folgt: $\Sigma \cup \{\phi\} \Vdash_S \psi$,

wenn $\Sigma \Vdash_S \phi \rightarrow_S \psi$. □

Die folgenden Begriffe werden weiter unten noch benötigt.

2.3.33 Definition.-

Σ Theorie von S

gdw

$\Sigma \subseteq SATZ_S$ & $\Sigma \neq \emptyset$.

2.3.34 Definition.-

Σ endlich axiomatisierbare Theorie in S

gdw

Σ Theorie von S ist und es ein $n \in \mathbb{N}^+$ und eine Funktion $\alpha \in {}^{\{1,\ldots,n\}}SATZ_S$ gibt, so dass gilt:

$$\{ \phi \mid \phi \in SATZ_S \,\&\, \Sigma \Vdash_S \phi \} = \{ \phi \mid \phi \in SATZ_S \,\&\, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \Vdash_S \phi \}.$$

Es gilt folgender Hilfssatz:

2.3.35 Hilfssatz.-

Wenn S Sprache erster Stufe ist, und wenn Σ Theorie von S ist, die in S endlich axiomatisierbar ist, dann gibt es einen Satz ϕ von S, so dass:

$$\{ \psi \mid \psi \in \mathrm{SATZ}_S \;\&\; \Sigma \Vdash_S \psi \} = \{ \psi \mid \psi \in \mathrm{SATZ}_S \;\&\; \{\phi\} \Vdash_S \psi \}.$$

Beweis: Sei S Sprache erster Stufe und sei Σ Theorie von S, die in S endlich axiomatisierbar ist. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}^+$ und eine Funktion $\alpha \in {}^{\{1, ..., n\}}\mathrm{SATZ}_S$, so dass gilt:

$$\{ \psi \mid \psi \in \mathrm{SATZ}_S \;\&\; \Sigma \Vdash_S \psi \} = \{ \psi \mid \psi \in \mathrm{SATZ}_S \;\&\; \{ \alpha_1 , ..., \alpha_n \} \Vdash_S \psi\}.$$

Seien n und α so.

Dann gilt für

$$\phi = \alpha_1 \wedge_S ... \wedge_S \alpha_n :$$

$$\{ \psi \mid \psi \in \mathrm{SATZ}_S \;\&\; \{\alpha_1 , ..., \alpha_n\} \Vdash_S \psi \} = \{ \psi \mid \psi \in \mathrm{SATZ}_S \;\&\; \{\phi\} \Vdash_S \psi \}.$$

2.3.36 Definition.-

Σ ist *widerspruchsfrei in S*

gdw

$\Sigma \subseteq \mathrm{FML}_S$ und es gibt ein $\phi \in \mathrm{FML}_S$ und nicht gilt $\Sigma \Vdash_S \phi$.

2.3.37 Definition.-

Σ erfüllbare Theorie von S

gdw

Σ Theorie von S und es gibt ein Modell $\mathcal{A}$ von S, so dass $\mathcal{A} \models_S \Sigma$.

2.3.38 Definition.-

Σ endlich erfüllbare Theorie von S

gdw

Σ Theorie von S und für jedes endliche $\sigma \subseteq \Sigma$ gibt es ein Modell $\mathcal{A}$ von S, so dass

$$\mathcal{A} \Vdash_S \sigma.$$

2.3.39 Hilfssatz.-

(1) *Wenn* S *Sprache erster Stufe, dann wird die leere Menge* $\varnothing$ *von allen Modellen von* S *erfüllt.*

(2) *Die leere Menge* $\varnothing$ *ist widerspruchsfrei in* S.

Beweis : Sei S Sprache erster Stufe.

(1) Sei $\mathcal{A}$ Modell für S und sei x Belegung aus $\mathcal{A}$. Da es kein $\phi \in \mathrm{FML}_S$ gibt, so dass $\phi \in \varnothing$, folgt aus $\quad \forall\phi\, (\phi \in \varnothing \Rightarrow \mathcal{A} \models_S \phi)$:

$$\mathcal{A} \Vdash_{S,x} \varnothing;$$

somit gilt für alle Modelle $\mathcal{A}$ von S und alle Belegungen x aus $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \text{ Modell für } S \Rightarrow \mathcal{A} \Vdash_{S,x} \varnothing.$$

(2) Sei ϕ diejenige Formel von S, so dass gilt: $\phi = {}^S V_1 =_S {}^S V_1$. Sei weiterhin $\mathcal{A}$ Modell von S so dass $\mathcal{A}_1 = \mathbb{N}$ und sei x Belegung aus $\mathcal{A}$, so dass:

$$\forall i\, (i \in \mathrm{Dom}(x) \Rightarrow x_i = 1).$$

Dann gilt: $\quad$ nicht $\mathcal{A} \models_{S,x} \phi \wedge_S \neg\phi$.

Es gibt also eine Formel ψ von S mit $\psi = \phi \wedge_S \neg\phi$, so dass $\mathcal{A}$ ψ nicht erfüllt.

D.h.:

$\exists\mathcal{A}\exists x\, (\mathcal{A}$ Modell für S & x Belegung aus $\mathcal{A}$ & $\mathcal{A} \Vdash_{S,x} \varnothing$ & nicht $\mathcal{A} \models_{S,x} \psi$).

Dann gilt weiterhin:

nicht $\forall\mathcal{A}\forall x\, (\mathcal{A}$ Modell für S & x Belegung aus $\mathcal{A}$ &

$$\mathcal{A} \Vdash_{S,x} \varnothing \Rightarrow \mathcal{A} \models_{S,x} \psi).$$

Nach Definition 2.3.27 gilt dann $\varnothing \Vdash_S \psi$ nicht.

D.h.: $\varnothing \subseteq FML_S$ & es gibt ein $\psi \in FML_S$ & nicht gilt $\varnothing \Vdash_S \psi$.

Und mit Definition 2.3.36 folgt:

$\varnothing$ ist widerspruchsfrei in S.

Also ist die leere Menge widerspruchsfrei in S.

2.3.40 Satz.-

Sei S Sprache erster Stufe; dann sind die folgenden zwei Bedingungen äquivalent:

(1) *Σ ist erfüllbare Theorie von S.*

(2) *Σ widerspruchsfreie Theorie von S.*

Beweis : Sei S Sprache erster Stufe.

(1)⇒(2) Sei Σ erfüllbare Theorie in S. Dann ist Σ Theorie von S und es gibt ein Modell von S, das Σ simultan erfüllt. Sei $\mathcal{A}$ ein solches Modell. Dann gilt:

$$\mathcal{A} \Vdash_S \Sigma.$$

Da Σ nichtleer ist, gibt es ein $\phi \in \Sigma$ und es gilt: $\mathcal{A} \models_S \phi$;

dann gilt weiterhin: nicht $\mathcal{A} \models_S \neg_S\phi$;

somit gibt es ein Modell $\mathcal{A}$ von S, so dass

$$\mathcal{A} \Vdash_S \Sigma \text{ und nicht } \mathcal{A} \models_S \neg\phi$$

und $\neg\phi \in SATZ_S$; somit ist $\neg\phi$ keine logische Folgerung aus Σ. Da $\Sigma \subseteq FML_S$ und (nicht $\Sigma \Vdash_S \neg\phi$) ist gezeigt, dass Σ und $\neg\phi$ das Definiens von Def. 2.3.36 erfüllen; und somit ist Σ widerspruchsfreie Theorie von S.

(2)⇒(1) Sei nun Σ widerspruchsfreie Theorie von S.

Dann gibt es ein $\phi \in FML_S$, so dass nicht gilt $\Sigma \Vdash_S \phi$. Sei ϕ^* eine solche Formel. Dann gilt nach Def.2.3.27, da $\Sigma \cup \{\phi^*\} \subseteq FML_S$:

$$\text{nicht } (\forall \mathcal{A} \forall x\, ((\mathcal{A} \text{ Modell von } S \,\&\, x \text{ Belegung aus } \mathcal{A} \,\&\, \mathcal{A} \Vdash_{S,x} \Sigma) \Rightarrow \mathcal{A} \models_{S,x} \phi^*));$$

also gilt: $\exists \mathcal{A} \exists x\, ((\mathcal{A} \text{ Modell von } S \,\&\, x \text{ Belegung aus } \mathcal{A} \,\&\, \mathcal{A} \Vdash_{S,x} \Sigma)$

$$\& \text{ nicht } (\mathcal{A} \models_{S,x} \phi^*));$$

damit ist gezeigt, dass es ein Modell von S gibt, das Σ simultan erfüllt, wenn Σ widerspruchsfreie Theorie von S ist. □

2.3.41 Definition.-

Σ vollständige Theorie von S

gdw

Σ widerspruchsfreie Theorie von S ist & für alle $\phi \in SATZ_S$ gilt:

$$\Sigma \Vdash_S \phi \text{ oder } \Sigma \Vdash_S \neg_S \phi.$$

2.3.42 Hilfssatz.-

Sei S Sprache erster Stufe. Dann gilt für alle Theorien Σ von S:

Σ vollständige Theorie von S

gdw

$$\forall \phi\, (\phi \in SATZ_S \Rightarrow (\Sigma \Vdash_S \phi \Leftrightarrow \text{nicht } \Sigma \Vdash_S \neg_S \phi)).$$

Beweis. Sei S Sprache erster Stufe und sei Σ Theorie von S.

($\Rightarrow$) Sei Σ vollständig und sei $\phi \in SATZ_S$.

Dann gilt:

$$\Sigma \Vdash_S \phi \text{ oder } \Sigma \Vdash_S \neg_S \phi.$$

Angenommen weiterhin $\Sigma \Vdash_S \phi$.

Dann gilt $\Sigma \Vdash_S \neg_S\phi$ nicht; denn sonst wäre Σ widersprüchlich.

Gelte nun $\Sigma \Vdash_S \neg_S\phi$ nicht, dann folgt – wegen der Vollständigkeit –

$$\Sigma \Vdash_S \phi.$$

($\Leftarrow$) Gelte

$$\forall\phi\,(\,\phi \in \mathrm{SATZ}_S \Rightarrow (\,\Sigma \Vdash_S \phi \Leftrightarrow \text{nicht } \Sigma \Vdash_S \neg_S\phi\,)\,).$$

Und sei $\phi \in \mathrm{SATZ}_S$. Dann führt die Annahme

$$\text{nicht } (\,\Sigma \Vdash_S \phi \text{ oder } \Sigma \Vdash_S \neg_S\phi\,)$$

zu einem Widerspruch.

Zum Schluss dieses Kapitels werden nun noch die notwendigen Begriffe definiert, die zur exakten Anwendung der sog. ***Diagramm-Methode*** benötigt werden; in vielen Fällen wird mit dem Diagramm einer speziellen Struktur gearbeitet; dazu wird für jedes Individuum einer Struktur eine eigene Individuenkonstante in einer erweiterten Sprache eingeführt. Hier nun die notwendigen Definitionen und Sätze.

Als Erstes wird der Begriff der um X *einfach erweiterten, einstufigen Sprache* S definiert:

2.3.43 Definition.-

$$\mathrm{sEL}_X(S) = \langle\, S_1, S_2, S_3, S_4 \cup \langle\, (\,\mathrm{pr1}(p), \mathrm{AT}_S\,)\,\rangle_{p \in (X \times \{\mathrm{Dom}(S, 4)\}\,)}\rangle.$$

Die nächste Definition legt den Begriff einer um f *einfach erweiterten Struktur* $\mathcal{A}$ fest:

2.3.44 Definition.-

$$\mathrm{sEM}_f(\mathcal{A}) = \langle\, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3 \cup \langle\, f(\mathrm{pr1}(p))\,\rangle_{p \in (\mathrm{Dom}(f) \times \{\mathrm{Dom}(\mathcal{A}, 3)\}\,)}\,\rangle.$$

Mit einer Spezialisierung von f auf die Identitätsabbildung, beschränkt auf den Individuenbereich eines Modells / einer Struktur $\mathcal{A}$, erhält man den Begriff der *vollständigen, einfachen Erweiterung der Struktur* $\mathcal{A}$:

2.3.45 <u>Definition</u>.-

CsEM $(\mathcal{A})$ = sEM$_{\mathrm{Id}\restriction\mathcal{A}(1)}(\mathcal{A})$.

Für das Diagramm-Lemma (s. u.) ist eine Reihe von Hilfssätzen wichtig:

2.3.46 <u>Satz</u>.-

Wenn V eine Menge ist, dann ist $\langle\, (x, V)\, \rangle_{x \in U}$ eineindeutige Funktion auf U und

$$V \cap \{\, (x, V)\, \}_{x \in U} = \emptyset.$$

<u>Beweis:</u> Seien x, x' $\in$ U mit x $\neq$ x', dann ist (x, V) $\neq$ (x', V) und $\langle(x, V)\rangle_{x \in U}$ ist eineindeutig.

Angenommen, es gibt ein a mit

$$a \in V \cap \{\, (x, V)\, \}_{x \in U}\, .$$

Sei a so. Dann ist a $\in$ V, und es gibt ein $x \in$ U, so dass:

$$a = (\, x, V\,).$$

Dann gilt: $\quad V \in \{\, x, V\, \} \in \{\, \{x\}, \{x, V\, \}\, \} = (\, x, V\,) \in V,$

im Widerspruch zum Regularitätsaxiom. Also gilt

$$V \cap \{\, (x, V)\, \}_{x \in U} = \emptyset.$$

Offensichtlich gilt folgende Verallgemeinerung von 2.3.46:

2.3.47 Satz.-

Wenn V eine Menge und h eine eineindeutige Funktion auf U ist, dann ist $\langle (h(x), V) \rangle_{x \in U}$ eineindeutige Funktion auf U und

$$V \cap \{ (h(x), V) \}_{x \in U} = \emptyset.$$

2.3.48 Satz.-

Wenn $\mathcal{A}$ Struktur vom Typ μ & f Funktion & $Ran(f) \subseteq \mathcal{A}_1$, dann ist $sEM_f(\mathcal{A})$ Struktur vom Typ $\langle \mu_1, \mu_2 \cup (Dom(f) \times \{ \mu_2 \}) \rangle$.

Beweis: Es ist zu zeigen, dass $sEM_f(\mathcal{A})_3 = \mathcal{A}_3 \cup \langle f(pr1(p)) \rangle_{p \in (Dom(f) \times \{\mu,2\})}$ Abbildung von $\mu_2 \cup (Dom(f) \times \{\mu_2\})$ nach $\mathcal{A}_1$ ist.

$sEM_f(\mathcal{A})_3$ ist eine Funktion; denn nach 2.3.47 ist

$$\mu_2 \cap \{ (x, \mu_2) \}_{x \in Dom(f)} = \emptyset;$$

d. h.: $Dom(\mathcal{A}_3) = \mu_2$ und

$$Dom(\langle f(pr1(p)) \rangle_{p \in (Dom(f) \times \{\mu,2\})}) = Dom(f) \times \{\mu_2\}$$

sind disjunkt; und da die Vereinigung zweier Funktionen mit disjunkten Definitionsbereichen wiederum eine Funktion ist und da $Ran(\mathcal{A}_3) \subseteq \mathcal{A}_1$ und $Ran(\langle f(pr1(p)) \rangle_{p \in (Dom(f) \times \{\mu,2\})}) \subseteq \mathcal{A}_1$, ist $sEM_f(\mathcal{A})_3$ Abbildung von $\mu_2 \cup (Dom(f) \times \{\mu_2\})$ nach $\mathcal{A}_1$.

2.3.49 Satz.-

Wenn S Sprache erster Stufe vom Typ μ, dann ist $sEL_X(S)$ eine Sprache erster Stufe vom Typ $\langle \mu_1, \mu_2 \cup (X \times \{\mu_2\}) \rangle$.

Beweis: Es ist zu beweisen, dass $sEL_X(S)_4$ eineindeutige Funktion auf $\mu_2 \cup (X \times \{\mu_2\})$ ist und dass $Ran(sEL_X(S)_1)$ bis $Ran(sEL_X(S)_4)$ wechselseitig disjunkt sind.

Zunächst sind $Dom(S_4) = \mu_2$ und $Dom(\langle (pr1(p), AT_S) \rangle_{p \in (X \times \{\mu(2)\})}) = X \times \{\mu_2\}$ nach

2.3.47 disjunkt.

Des Weiteren sind $\mathrm{Ran}(S_4)$ und $\mathrm{Ran}(\langle(\mathrm{pr1}(p), AT_S)\rangle_{p \in (X \times \{\mu(2)\})})$ disjunkt;

denn $\mathrm{Ran}(S_4) \subseteq AT_S$ und nach 2.3.47 gilt:

$$AT_S \cap \{ (\mathrm{pr1}(p), AT_S) \}_{p \in (X \times \{\mu(2)\})} = \emptyset.$$

Weiterhin ist $\langle(\mathrm{pr1}(p), AT_S)\rangle_{p \in (X \times \{\mu(2)\})}$ eineindeutige Funktion auf $X \times \{\mu_2\}$, denn für x, $x' \in X$ mit $x \neq x'$ gilt:

$$\langle(\mathrm{pr1}(p), AT_S)\rangle_{p \in (X \times \{\mu(2)\})} (x, \mu_2) \neq \langle(\mathrm{pr1}(p), AT_S)\rangle_{p \in (X \times \{\mu(2)\})} (x', \mu_2).$$

Und da die Adjunktion zweier eineindeutiger Funktionen mit je disjunktem Definitions- und Wertebereich wiederum eineindeutig ist, ist

$$sEL_X(S)_4 = S_4 \cup \langle(\mathrm{pr1}(p), AT_S)\rangle_{p \in (X \times \{\mu(2)\})}$$

eineindeutige Funktion auf $\mu_2 \cup (X \times \{\mu_2\})$.

Und da je $\mathrm{Ran}(sEL_X(S)_1) = \mathrm{Ran}(S_1)$ ... $\mathrm{Ran}(sEL_X(S)_3) = \mathrm{Ran}(S_3)$ und da $\mathrm{Ran}(S_1)$ ... $\mathrm{Ran}(S_3) \subseteq AT_S$ folgt mit 2.3.47 je die Disjunktheit von $\mathrm{Ran}(sEL_X(S)_1)$ bis $\mathrm{Ran}(sEL_X(S)_3)$ von $\mathrm{Ran}(sEL_X(S)_4)$.

Und $\langle \mu_1, \mu_2 \cup (X \times \{\mu_2\}) \rangle$ ist somit der Typ von $sEL_X(S)$.

2.3.50 <u>Satz</u>.-

Wenn $\mathcal{A}$ Modell für S vom Typ μ & f ist Abbildung von X nach $\mathcal{A}_1$, dann ist $sEM_f(\mathcal{A})$ ein Modell für $sEL_X(S)$ vom Typ $\langle \mu_1, \mu_2 \cup (X \times \{\mu_2\}) \rangle$.

<u>Beweis:</u> Seien die Voraussetzungen erfüllt. Dann ist nach Satz 2.3.48 $sEM_f(\mathcal{A})$ Struktur vom Typ $\langle \mu_1, \mu_2 \cup (X \times \{\mu_2\}) \rangle$ und nach Satz 2.3.49 ist $sEL_X(S)$ Sprache erster Stufe des Typs $\langle \mu_1, \mu_2 \cup (X \times \{\mu_2\}) \rangle$. Und somit ist $sEM_f(\mathcal{A})$ Modell für $sEL_X(S)$ vom Typ $\langle \mu_1, \mu_2 \cup (X \times \{\mu_2\}) \rangle$.

2.3.51 Satz.-

Wenn $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Modell für S vom Typ μ & $X \subseteq \mathcal{A}_1$ & f Abbildung von X nach $\mathcal{B}_1$, dann ist $sEM_f(\mathcal{B})$ Modell für $sEL_X(S)$ vom Typ $\langle \mu_1, \mu_2 \cup (X \times \{\mu_2\})\rangle$.

Beweis: Wenn die Voraussetzungen gelten, folgt wiederum mit Satz 2.3.48: $sEM_f(\mathcal{B})$ ist Struktur vom Typ $\langle \mu_1, \mu_2 \cup (X \times \{\mu_2\})\rangle$; weiterhin ist $sEL_X(S)$ Sprache erster Stufe des Typs $\langle \mu_1, \mu_2 \cup (X \times \{\mu_2\})\rangle$ und somit ist $sEM_f(\mathcal{B})$ Modell für $sEL_x(S)$ vom

$$\text{Typ } \langle \mu_1, \mu_2 \cup (X \times \{\mu_2\})\rangle.$$

Nun kann der Begriff des *Diagramms der Struktur* $\mathcal{A}$ *in der Sprache* S definiert werden.

2.3.52 Definition.-

$$\begin{gathered} \mathrm{Diagr}(\mathcal{A}, S) = \{ \phi \mid [\phi \text{ ist Atomsatz von } sEL_{\mathcal{A},1}(S) \text{ or} \\ \exists \phi' (\phi' \text{ ist Atomsatz von } sEL_{\mathcal{A},1}(S) \;\&\; \phi = \neg_S \phi')] \\ \&\; \forall \alpha (\alpha \in \mathrm{Ran}(sEL_{\mathcal{A},1}(S)_4) \;\&\; \alpha \text{ kommt in } \phi \text{ vor} \Rightarrow \alpha \in (\mathcal{A}_1 \times \{ AT_S \})) \\ \&\; CsEM(\mathcal{A}) \models_{sEL(\mathcal{A}, 1)(S)} \phi \}. \end{gathered}$$

2.3.53 Satz.-

Für alle $\mathcal{A}$, S, μ: wenn $\mathcal{A}$ ein Modell für S vom Typ μ ist, dann gilt

$$\begin{gathered} \forall \phi (\phi \text{ ist Atomsatz von } sEL_{\mathcal{A},1}(S) \Rightarrow \\ \phi \in \mathrm{Diagr}(\mathcal{A}, S) \text{ oder } \neg_S \phi \in \mathrm{Diagr}(\mathcal{A}, S)). \end{gathered}$$

2.3.54 Diagramm-Lemma.-

Wenn $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Modelle für S vom Typ μ und f Abbildung von $\mathcal{A}_1$ nach $\mathcal{B}_1$ ist, dann gilt:

$$f \text{ isomorphe Einbettung von } \mathcal{A} \text{ in } \mathcal{B}$$

$$\text{gdw} \qquad sEM_f(\mathcal{B}) \models_{sEL(\mathcal{A},1)(S)} \mathrm{Diagr}(\mathcal{A}, S).$$

Beweis: Seien die Voraussetzungen für $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, S, μ, f erfüllt.

Sei $\quad S' = sEL_{\mathcal{A}(1)}(S)$.

Sei $\quad \mathcal{A}' = CsEM(\mathcal{A})$.

Sei $\quad \mathcal{B}' = sEM_f(\mathcal{B})$.

(↓) Sei f isomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ und sei $\phi \in Diagr(\mathcal{A}, S)$. Dann gilt:

$$[\ \phi \text{ ist Atomsatz von } S' \text{ or } \exists\phi'\ (\ \phi' \text{ ist Atomsatz von } S'\ \&\ \phi = \neg_S \phi'\ )\ ]\ \&$$

$$\mathcal{A}' \models_{S'} \phi.$$

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden. Um diese zu beweisen, beweisen wir zunächst (H_1) und (H_2).

(H_1): $\quad \forall i\ (\ i \in Dom(\mathcal{A}'_3) \Rightarrow f(\mathcal{A}'_{3,i}) = \mathcal{B}'_{3,i}\ ).$

Sei dazu i $\in Dom(\mathcal{A}'_3)$. Dann ist i $\in \mu_2 \cup (\ \mathcal{A}_1 \times \{\mu_2\}\ )$.

Fall 1: Sei i $\in \mu_2$. Dann i $\in Dom(\mathcal{A}_3)$. Dann $f(\mathcal{A}_{3,i}) = \mathcal{B}_{3,i}$. Dann $f(\mathcal{A}'_{3,i}) = \mathcal{B}'_{3,i}$.

Fall 2: Sei i $\in (\ \mathcal{A}_1 \times \{\mu_2\}\ )$. Dann $f(\mathcal{A}'_{3,i}) = f(pr1(i))$, mit $pr1(i) \in \mathcal{A}_1$. Ferner $\mathcal{B}'_{3,i} = f(pr1(i))$. Dann $f(\mathcal{A}'_{3,i}) = \mathcal{B}'_{3,i}$. Also $f(\mathcal{A}'_{3,i}) = \mathcal{B}'_{3,i}$.

(H_2): $\quad \forall\phi\ (\ \phi \text{ ist Atomsatz von } S' \Rightarrow (\mathcal{A}' \models_{S'} \phi \Leftrightarrow \mathcal{B}' \models_{S'} \phi)\ ).$

Sei ϕ Atomsatz von S'. Dann

$$\exists m\ \exists n\ (\ m \in Dom(\mu_1)\ \&\ n \text{ ist Folge der Länge } \mu_{1,m} \text{ in } Dom(S'_4)$$

$$\&\ \phi = {}^{S}P_m\ {}^{S'}K_{n,1} \ldots {}^{S'}K_{n\,(\mu(1)(m))}\ ).$$

Seien m und n so. Sei $x = \mathbb{N} \times \{\mathcal{A}'_{3,n,1}\}$. Dann ist x Belegung aus $\mathcal{A}'$. Dann gilt:

$$\mathcal{A}' \models_{S',x} \phi$$

$$\text{gdw } \mathcal{A}' \models_{S',x} {}^{S}P_m\ {}^{S'}K_{n,1} \ldots {}^{S'}K_{n(\mu(1)(m))}$$

$$\text{gdw } \langle\ val_{S',\mathcal{A}',x}(\ {}^{S'}K_{n,j}\ )\ \rangle_{j \in \{1,\ldots,\mu(1)(m)\}} \in \mathcal{A}_{2,m}$$

$$\text{gdw } \langle\ \mathcal{A}'_{3(n(j))}\ \rangle_{j \in \{1,\ldots,\mu(1)(m)\}} \in \mathcal{A}_{2,m}$$

$$\text{gdw } \langle\ f\ (\mathcal{A}'_{3(n(j))}\ )\ \rangle_{j \in \{1,\ldots,\mu(1)(m)\}} \in \mathcal{B}_{2,m}$$

$$\text{gdw } \langle \mathcal{B}'_{3,n,j} \rangle_{j \in \{1, \ldots, \mu(1)(m)\}} \in \mathcal{B}_{2,m} \qquad \text{(mit } (H_1))$$

$$\text{gdw } \langle \mathrm{val}_{S', \mathcal{B}', f\circ x} ({}^{S'}K_{n,j}) \rangle_{j \in \{1, \ldots, \mu(1)(m)\}} \in \mathcal{B}_{2,m}$$

$$\text{gdw } \mathcal{B}' \models_{S', f\circ x} {}^{S}P_m\, {}^{S'}K_{n,1} \ldots {}^{S'}K_{n(\mu(1)(m))}$$

$$\text{gdw } \mathcal{B}' \models_{S', f\circ x} \phi.$$

Mit (H_2) folgt nun weiter:

<u>Fall 1:</u> Angenommen, ϕ ist Atomsatz von S'. Dann folgt mit $\mathcal{A}' \models_{S'} \phi$ und mit (H_2):

$$\mathcal{B}' \models_{S'} \phi.$$

<u>Fall2:</u> Angenommen

$$\exists \phi' (\phi' \text{ ist Atomsatz von } S' \;\&\; \phi = \neg_S \phi').$$

Sei ϕ' so. Dann folgt mit (H_2):

$$\mathcal{A}' \models_{S'} \phi' \Leftrightarrow \mathcal{B}' \models_{S'} \phi'.$$

Dann gilt: $\mathcal{A}' \models_{S'} \neg_S\phi' \Leftrightarrow \mathcal{B}' \models_{S'} \neg_S\phi'$,

also $\mathcal{A}' \models_{S'} \phi \Leftrightarrow \mathcal{B}' \models_{S'} \phi$.

Dann folgt mit $\mathcal{A}' \models_{S'} \phi$: $\mathcal{B}' \models_{S'} \phi$. Also $\mathcal{B}' \models_{S'} \phi$.

Also gilt $\forall \phi (\phi \in \mathrm{Diagr}(\mathcal{A}, S) \Rightarrow \mathcal{B}' \models_{S'} \phi)$.

Also $\mathcal{B}' \Vdash_{S'} \mathrm{Diagr}(\mathcal{A}, S)$.

(↑) Gelte $\mathcal{B}' \Vdash_{S'} \mathrm{Diagr}(\mathcal{A}, S)$.

Um zu beweisen, dass f isomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ ist, wird (A), (B) und (C) bewiesen.

(A): f ist Injektion von $\mathcal{A}_1$ nach $\mathcal{B}_1$.

Nach Voraussetzung ist f Abbildung von $\mathcal{A}_1$ nach $\mathcal{B}_1$. Dann ist nur noch die Eineindeutigkeit von f zu beweisen. Sei also a, b $\in \mathcal{A}_1$ & f(a) = f(b).

Dann ist $(a, \mu_2), (b, \mu_2) \in (\mathcal{A}_1 \times \{\mu_2\})$, also $(a, \mu_2), (b, \mu_2) \in \mathrm{Dom}(\mathcal{B}'_3)$ und $(a, \mu_2), (b, \mu_2) \neq \mu_2$ und $\mathcal{B}'_{3\,(a, \mu(2))} = f(a)$ & $\mathcal{B}'_{3(b, \mu(2))} = f(b)$.

Dann ist $\mathcal{B}'_{3\,(a,\,\mu(2))} = \mathcal{B}'_{3\,(b,\,\mu(2))}$.

Nach Theorem 2.3.51 ist $\mathcal{B}'$ Modell für S' vom Typ $\langle\, \mu_1, \mu_2 \cup (\mathcal{A}_1 \times \{\mu_2\})\,\rangle$. Sei $x = \mathbb{N} \times \{f(a)\}$. Dann ist x Belegung aus $\mathcal{B}'$. Ferner ist $(a, \mu_2), (b, \mu_2) \in \mathrm{Dom}(S'_4)$. Dann gilt:

$$\mathrm{val}_{S',\mathcal{B}',x}({}^{S'}K_{(a,\,\mu(2))}) = \mathcal{B}'_{3\,(a,\mu(2))}$$

und $$\mathrm{val}_{S',\mathcal{B}',x}({}^{S'}K_{(b,\,\mu(2))}) = \mathcal{B}'_{3\,(b,\mu(2))}\,.$$

Dann ist $$\mathrm{val}_{S',\mathcal{B}',x}({}^{S'}K_{(a,\,\mu(2))}) = \mathrm{val}_{S',\mathcal{B}',x}({}^{S'}K_{(b,\,\mu(2))}).$$

Dann gilt $$\mathcal{B}' \models_{S',x} ({}^{S'}K_{(a,\mu(2))} =_S {}^{S'}K_{(b,\mu(2))}).$$

Nun ist $({}^{S'}K_{(a,\mu(2))} =_S {}^{S'}K_{(b,\mu(2))})$ ein Atomsatz von S'.

Sei $y = \mathbb{N} \times \{a\}$. Dann ist y Belegung aus $\mathcal{A}'$. Angenommen,

$$\text{nicht } \mathcal{A}' \models_{S',y} ({}^{S'}K_{(a,\mu(2))} =_S {}^{S'}K_{(b,\mu(2))}).$$

Nach Theorem 2.3.50 ist $\mathcal{A}'$ Modell für S' vom Typ $\langle\, \mu_1, \mu_2 \cup (\mathcal{A}_1 \times \{\mu_2\})\,\rangle$.

Dann gilt: $$\mathcal{A}' \models_{S',y} \neg_S ({}^{S'}K_{(a,\mu(2))} =_S {}^{S'}K_{(b,\mu(2))}).$$

Dann ist $$\neg_S ({}^{S'}K_{(a,\mu(2))} =_S {}^{S'}K_{(b,\mu(2))}) \in \mathrm{Diagr}(\mathcal{A}, S).$$

Nach Voraussetzung ist $\mathcal{B}' \Vdash_{S'} \mathrm{Diagr}(\mathcal{A}, S)$. Dann ist

$$\mathcal{B}' \models_{S'} \neg_S ({}^{S'}K_{(a,\mu(2))} =_S {}^{S'}K_{(b,\mu(2))}).$$

Dann gilt nicht: $\mathcal{B}' \models_{S',x} ({}^{S'}K_{(a,\mu(2))} =_S {}^{S'}K_{(b,\mu(2))})$, im Widerspruch zum oben bewiesenen Gegenteil. Also gilt

$$\mathcal{A}' \models_{S',y} ({}^{S'}K_{(a,\mu(2))} =_S {}^{S'}K_{(b,\mu(2))}).$$

Dann ist $$\mathrm{val}_{S',\mathcal{A}',y}({}^{S'}K_{(a,\mu(2))}) = \mathrm{val}_{S',\mathcal{A}',y}({}^{S'}K_{(b,\mu(2))}).$$

Nun ist $$\mathrm{val}_{S',\mathcal{A}',y}({}^{S'}K_{(a,\mu(2))}) = \mathcal{A}'_{3\,(a,\mu(2))} = a$$

& $$\mathrm{val}_{S',\mathcal{A}',y}({}^{S'}K_{(b,\mu(2))}) = \mathcal{A}'_{3,(b,\mu(2))} = b.$$

Also ist a = b. Also gilt

$$\forall a \forall b\, (\, a, b \in \mathcal{A}_1 \ \&\ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b\,).$$

Dann ist f Injektion von $\mathcal{A}_1$ nach $\mathcal{B}_1$.

(B) $$\forall i\,\forall a\,(\,i \in \mathrm{Dom}(\mu_1)\ \&\ a \in {}^{\{1,\dots,\mu,1,i\}}\mathcal{A}_1 \Rightarrow$$
$$(\,a \in \mathcal{A}_{2,i} \Leftrightarrow \langle\, f(a_1), \dots, f(a_{\mu,1,i})\,\rangle \in \mathcal{B}_{2,i})\,).$$

Sei hierzu $i \in \mathrm{Dom}(\mu_1)$ & $a \in {}^{\{1,\dots,\mu,1,i\}}\mathcal{A}_1$. Sei $y = \mathbb{N} \times \{a_1\}$. Dann ist y Belegung aus $\mathcal{A}'$. Sei $x = \mathbb{N} \times \{f(a_1)\}$. Dann ist x Belegung aus $\mathcal{B}'$.

Dann gilt: $$a \in \mathcal{A}_{2,i}$$
$$\text{gdw } \langle\, a_1, \dots, a_{\mu,1,i}\,\rangle \in \mathcal{A}_{2,i}$$
$$\text{gdw } \langle\, \mathcal{A}'_{3,(a,j,\mu,2)}\,\rangle_{j \in \{1,\dots,\mu,1,i\}} \in \mathcal{A}_{2,i}$$
$$\text{gdw } \langle\, \mathrm{val}_{S',\mathcal{A}',y}(\,{}^{S'}K_{(a,j,\mu,2)})\,\rangle_{j \in \{1,\dots,\mu,1,i\}} \in \mathcal{A}_{2,i}$$
$$\text{gdw } \mathcal{A}' \models_{S',y} {}^{S}P_i\ {}^{S'}K_{(a,1,\mu,2)} \dots {}^{S'}K_{(a,\mu,1,i,\mu,2)}$$
$$\text{gdw } {}^{S}P_i\ {}^{S'}K_{(a,1,\mu,2)} \dots {}^{S'}K_{(a,\mu,1,i,\mu,2)} \in \mathrm{Diagr}(\mathcal{A}, S)$$
$$\text{gdw } \mathcal{B}' \models_{S',x} {}^{S}P_i\ {}^{S'}K_{(a,1,\mu,2)} \dots {}^{S'}K_{(a,\mu,1,i,\mu,2)}$$
$$\text{gdw } \langle\, \mathrm{val}_{S',\mathcal{B}',x}(\,{}^{S'}K_{(a,j,\mu,2)})\,\rangle_{j \in \{1,\dots,\mu,1,i\}} \in \mathcal{B}_{2,i}$$
$$\text{gdw } \langle\, \mathcal{B}'_{3,(a,j,\mu,2)}\,\rangle_{j \in \{1,\dots,\mu,1,i\}} \in \mathcal{B}_{2,i}$$
$$\text{gdw } \langle\, f(a_j)\,\rangle_{j \in \{1,\dots,\mu,1,i\}} \in \mathcal{B}_{2,i}.$$

(C) $$\forall i\,(\,i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_3) \Rightarrow f(\mathcal{A}_{3,i}) = \mathcal{B}_{3,i}\,).$$

Sei $i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_3)$. Dann ist $i \in \mu_2$. Dann ist $\mathcal{A}'_{3,i} = \mathcal{A}_{3,i}$ und $\mathcal{B}'_{3,i} = \mathcal{B}_{3,i}$. Ferner ist $\mathcal{A}_{3,i} \in \mathcal{A}_1$, also $(\mathcal{A}_{3,i}, \mu_2) \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}'_3)$ & $(\mathcal{A}_{3,i}, \mu_2) \neq \mu_2$, also $\mathcal{A}'_{3,(\mathcal{A},3,i,\mu,2)} = \mathcal{A}_{3,i}$.

Sei $x = \mathbb{N} \times \{\mathcal{A}_{3,i}\}$; dann ist x Belegung aus $\mathcal{A}$ und aus $\mathcal{A}'$. Sei $y = \mathbb{N} \times \{f(\mathcal{A}_{3,i})\}$; dann ist y Belegung aus $\mathcal{B}$ und aus $\mathcal{B}'$.

Angenommen, $$f(\mathcal{A}_{3,i}) \neq \mathcal{B}_{3,i}.$$

Dann folgt mit $$\mathrm{val}_{S',\mathcal{B}',y}(\,{}^{S'}K_{(\mathcal{A},3,i,\mu,2)}) = \mathcal{B}'_{3,(\mathcal{A},3,i,\mu,2)} = f(\mathcal{A}_{3,i})$$

und $$\mathrm{val}_{S',\mathcal{B}',y}(\,{}^{S'}K_i) = \mathcal{B}'_{3,i} = \mathcal{B}_{3,i}$$
$$\mathrm{val}_{S',\mathcal{B}',y}(\,{}^{S'}K_{(\mathcal{A},3,i,\mu,2)}) \neq \mathrm{val}_{S',\mathcal{B}',y}(\,{}^{S'}K_i).$$

Dann nicht $$(\,\mathcal{B}' \models_{S',y} (\,{}^{S'}K_{(\mathcal{A},3,i,\mu,2)} =_S {}^{S'}K_i)\,).$$

Dann	$({}^{S'}K_{(\mathcal{A},3,i,\mu,2)} =_S {}^{S'}K_i) \notin \mathrm{Diagr}(\mathcal{A}, S)$.
Dann	$\neg_S({}^{S'}K_{(\mathcal{A},3,i,\mu,2)} =_S {}^{S'}K_i) \in \mathrm{Diagr}(\mathcal{A}, S)$.
Dann	$\mathcal{A}' \models_{S',x} \neg_S({}^{S'}K_{(\mathcal{A},3,i,\mu,2)} =_S {}^{S'}K_i)$.
Dann	$\mathrm{val}_{S',\mathcal{A}',x}({}^{S'}K_{(\mathcal{A},3,i,\mu,2)}) \neq \mathrm{val}_{S',\mathcal{A}',x}({}^{S'}K_i)$.
Dann	$\mathcal{A}'_{3,(\mathcal{A},3,i,\mu,2)} \neq \mathcal{A}'_{3,i}$.
Dann	$\mathcal{A}_{3,i} \neq \mathcal{A}'_{3,i}$,
im Widerspruch zu	$\mathcal{A}'_{3,i} = \mathcal{A}_{3,i}$.
Also	$f(\mathcal{A}_{3,i}) = \mathcal{B}_{3,i}$.

Mit (A), (B) und (C) folgt, dass f isomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ ist. □

Kapitel 3: Die Ultraprodukt- und Ultrapotenzkonstruktion

In diesem Kapitel wird der Begriff des *Ultraproduktes* einer homogenen Familie von Strukturen und dessen Spezialfall der *Ultrapotenz* einer Struktur entwickelt und das grundlegende Theorem von Łoš bewiesen. Ferner wird bewiesen, dass es zu einer Struktur mit unendlichem Individuenbereich Ultrapotenzen beliebig hoher Kardinalität gibt. Zusammen mit der Tatsache, dass die Ultrapotenz einer Struktur $\mathcal{A}$ elementar äquivalent zu $\mathcal{A}$ ist, folgt, dass Probleme der Messtheorie, die auf einer nicht hinreichend großen Kardinalität einschlägiger Strukturen entstanden sind, durch den Übergang zu einer geeigneten Ultrapotenz der betreffenden Strukturen gelöst werden können.

3.1 BOOLEsche Verbände

Abschnitt 3.1 ist der Einführung des Begriffs des *Boolschen Verbandes* gewidmet. Zunächst werden ordnungsrelevante Eigenschaften von Relationen definiert wie z.B. *transitiv, reflexiv, asymmetrisch, konnex.* Mit diesen werden dann Ordnungsstrukturen vom Typ $\langle\langle 2\rangle, \varnothing\rangle$ definiert, z.B. *partielle Ordnung* (transitiv, reflexiv, antisymmetrisch), *strikte partielle Ordnung* (transitiv, irreflexiv, asymmetrisch), *strikte totale Ordnung* (transitiv, irreflexiv, asymmetrisch, konnex), *potentielle Ordnung* (Struktur vom Typ $\langle\langle 2\rangle, \varnothing\rangle$). Es folgen Definitionen für die Begriffe *obere/untere Schranke, Supremum/Infimum, maximales/minimales Element, größtes/kleinstes Element.* Mit diesen Begriffen werden dann eingeführt die Begriffe *Verband* (partielle Ordnung, welche zu je zwei Elementen ein Infimum und ein Supremum enthält), *komplementärer Verband, Boolescher Verband.* Eine im weiteren Verlauf der Arbeit wichtige Art von Booleschen Verbänden sind die Verbände $\mathbf{V}(I) = \langle \mathrm{POT}(I), \langle \subseteq_{\mathrm{POT}(I)}\rangle, \varnothing\rangle$ für $I \neq \varnothing$.

3.1.1 <u>Definitionen</u>.-

Für alle $R, \mathcal{A}$:

R ist

(1) *transitiv*

(2) *reflexiv*

(3) *irreflexiv*

(4) *symmetrisch*

(5) *antisymmetrisch*

(6) *linear*

(7) *konnex*

(8) *asymmetrisch*

(9) *dicht*

(10) *wohlgeordnet*

(11) *strikt wohlgeordnet*

in $\mathcal{A}$

gdw

$R \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ & für alle $x, y, z \in \mathcal{A}$:

(1) $\langle x, y\rangle \in R$ & $\langle y, z\rangle \in R \Rightarrow \langle x, z\rangle \in R$

(2) $\langle x, x\rangle \in R$

(3) $\langle x, x\rangle \notin R$

(4) $\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle y, x\rangle \in R$

(5) $\langle x, y\rangle \in R$ & $\langle y, x\rangle \in R \Rightarrow x = y$

(6) $\langle x, y\rangle \in R$ oder $\langle y, x\rangle \in R$

(7) $\langle x, y\rangle \in R$ oder $\langle y, x\rangle \in R$ oder $x = y$

(8) $\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle y, x\rangle \notin R$

(9) $\langle x, y\rangle \in R$ & $x \neq y \Rightarrow \exists s \in A$, so dass $\langle x, s\rangle \in R$ & $\langle s, y\rangle \in R$ & $x \neq s \neq y$

(10) $\forall X\,(X \subseteq \mathcal{A}$ & $X \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists t\,(t \in X$ & $\forall s\,(s \in X \Rightarrow \langle t, s\rangle \in R)))$

(11) $\forall X\,(X \subseteq \mathcal{A}$ & $X \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists t\,(t \in X$ & $\forall s\,(s \in X \Rightarrow \langle t, s\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$ oder $t = s)))$.

3.1.2 Definitionen.-

Für alle $\mathcal{A}$:

$\mathcal{A}$ ist eine	(1) *QuasiOrdnung*	(6) *Wohlordnung*
	(2) *partielle Ordnung*	(7) *strikte, partielle Ordnung*
	(3) *schwache Ordnung*	(8) *strikte, totale Ordnung*
	(4) *totale Ordnung*	(9) *strikte Wohlordnung*
	(5) *dichte Ordnung*	(10) *potentielle Ordnung*

gdw

$\mathcal{A}$ ist Struktur vom Typ $\langle \langle 2 \rangle, \emptyset \rangle$ & :

(1) $\mathcal{A}_{2,1}$ ist transitiv und reflexiv in $\mathcal{A}_1$

(2) $\mathcal{A}_{2,1}$ ist transitiv, reflexiv und antisymmetrisch in $\mathcal{A}_1$

(3) $\mathcal{A}_{2,1}$ ist transitiv, reflexiv und linear in $\mathcal{A}_1$

(4) $\mathcal{A}_{2,1}$ ist transitiv, reflexiv, antisymmetrisch und linear in $\mathcal{A}_1$

(5) $\mathcal{A}_{2,1}$ ist transitiv, reflexiv, antisymmetrisch, linear und dicht in $\mathcal{A}_1$

(6) $\mathcal{A}_{2,1}$ ist transitiv, reflexiv, antisymmetrisch, linear und wohlgeordnet in $\mathcal{A}_1$

(7) $\mathcal{A}_{2,1}$ ist transitiv, irreflexiv und asymmetrisch in $\mathcal{A}_1$

(8) $\mathcal{A}_{2,1}$ ist transitiv, irreflexiv, asymmetrisch und konnex in $\mathcal{A}_1$

(9) $\mathcal{A}_{2,1}$ ist transitiv, irreflexiv, asymmetrisch, konnex und strikt wohlgeordnet in $\mathcal{A}_1$

(10) --- .

Zu der obigen Definitionenkette ist zu bemerken, dass die Reflexivität schwacher Ordnungen aus den Axiomen der Transitivität und der Konnektivität folgt. Bei den Totalordnungen folgt die Reflexivität aus den anderen Axiomen. Bei den strikten partiellen Ordnungen folgt die Asymmetrie aus der Transitivität und der Irreflexivität. Übersichtlichkeit war bei den vorliegenden Definitionen ein wichtigerer Gesichtspunkt als Sparsamkeit.

Die Terminologie ist bei den Ordnungsbegriffen noch uneindeutig. Z. B. werden totale Ordnungen häufig auch als lineare oder auch als einfache Ordnungen (*simple orderings*) bezeichnet. Oder: Suppes (1957; S. 216) nennt die Linearität '*strong connectedness*'.

3.1.3 Definition.-

$\mathcal{A}$' ist die durch K bestimmte Subordnung von $\mathcal{A}$

gdw

$\mathcal{A}' = \langle K, \langle \mathcal{A}_{2,1} \cap {}^{\{1,2\}}K \rangle, \emptyset \rangle$.

Es ist der folgende Satz offensichtlich:

3.1.4. Satz.-

Wenn $\mathcal{A}$ Struktur vom Typ $\langle \langle 2 \rangle, \varnothing \rangle$, $K \subseteq \mathcal{A}_1$ & $K \neq \varnothing$, dann ist die durch K bestimmte Subordnung von $\mathcal{A}$ Substruktur von $\mathcal{A}$.

3.1.5. Definition.-

K ist Kette in $\mathcal{A}$

gdw

(1) $\mathcal{A}$ ist potentielle Ordnung & $K \subseteq \mathcal{A}_1$ &

(2) die durch K bestimmte Subordnung von $\mathcal{A}$ ist linear.

3.1.6. Definition.-

x ist eine *obere [untere] Schranke von* A *in* $\mathcal{A}$

gdw

(1) $\mathcal{A}$ ist eine potentielle Ordnung & $x \in \mathcal{A}_1$ & $A \subseteq \mathcal{A}_1$ &

(2) für alle $a \in A$: $\langle a, x \rangle$ $[\langle x, a \rangle] \in \mathcal{A}_{2,1}$.

Als nächstes wird die kleinste obere und die größte untere Schranke definiert.

3.1.7. Definition.-

x ist *Supremum [Infimum] von* A *in* $\mathcal{A}$

gdw

(1) x ist obere [untere] Schranke von A in $\mathcal{A}$ &

(2) für alle y:

(y ist obere [untere] Schranke von A in $\mathcal{A} \Rightarrow \langle x, y \rangle$ $[\langle y, x \rangle] \in \mathcal{A}_{2,1}$).

3.1.8. <u>Satz</u>.-

In jeder potentiellen Ordnung $\mathcal{A}$, in der $\mathcal{A}_{2,1}$ antisymmetrisch in $\mathcal{A}_1$ ist, gibt es zu jedem $A \subseteq \mathcal{A}_1$ höchstens ein Supremum [Infimum] von A in $\mathcal{A}$.

<u>Beweis:</u> Seien x und y Suprema von A in $\mathcal{A}$. Dann gilt: $\langle x, y\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$ und $\langle y, x\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$. Und es folgt x = y. Entsprechend der Beweis für die Eindeutigkeit des Infimums.

Für das Supremum und das Infimum einer Menge wird eine Abkürzung eingeführt:

3.1.9. <u>Definitionen</u>.-

Wenn es ein Supremum [Infimum] von A in $\mathcal{A}$ gibt, dann für alle y:

$\mathrm{Sup}_{\mathcal{A}}(A) = y$ [$\mathrm{Inf}_{\mathcal{A}}(A) = y$]

gdw

y Supremum von A in $\mathcal{A}$ [y ist Infimum von A in $\mathcal{A}$].

Nun werden zwei eigene, 2-stellige Funktionskonstanten ... $\sqcap_{\mathcal{A}}$ ... bzw. ... $\sqcup_{\mathcal{A}}$ ... eingeführt, um das Infimum bzw. das Supremum von 2-elementigen Mengen zu bezeichnen.

3.1.10 <u>Definitionen</u>.-

$x \sqcap_{\mathcal{A}} y = \mathrm{Inf}_{\mathcal{A}}(\{x, y\})$

und

$x \sqcup_{\mathcal{A}} y = \mathrm{Sup}_{\mathcal{A}}(\{x, y\})$.

In einer potentiellen Ordnung ist zwischen dem größten und den maximalen Elementen zu unterscheiden; analog dazu ist die Begriffsbildung für das kleinste und die minimalen Elemente. Dazu die folgenden Definitionen:

3.1.11 Definitionen.-

x ist *maximales [minimales] Element von* $\mathcal{A}$

gdw

(1) $\mathcal{A}$ ist eine potentielle Ordnung und $x \in \mathcal{A}_1$ &

(2) für alle $y \in \mathcal{A}_1$: wenn $y \neq x$, dann $\langle x, y\rangle$ $[\langle y, x\rangle] \notin \mathcal{A}_{2,1}$.

3.1.12 Definitionen.-

x ist *größtes [kleinstes] Element von* $\mathcal{A}$

gdw

(1) $\mathcal{A}$ ist eine potentielle Ordnung und $x \in \mathcal{A}_1$ &

(2) für alle $y \in \mathcal{A}_1$: $\langle y, x\rangle$ $[\langle x, y\rangle] \in \mathcal{A}_{2,1}$.

In jeder potentiellen Ordnung ist das größte und kleinste Element eindeutig; dazu der folgende Satz:

3.1.13 Satz.-

In jeder potentiellen Ordnung $\mathcal{A}$, in der $\mathcal{A}_{2,1}$ antisymmetrisch in $\mathcal{A}_1$ ist, gibt es höchstens ein größtes Element.

Beweis: Seien s und t größte Elemente von $\mathcal{A}$. Dann ist $\langle s, t\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$ und $\langle t, s\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$; wegen der Antisymmetrie der potentiellen Ordnung gilt dann

$$s = t.$$

Entsprechend der Beweis für das kleinste Element.

Das größte und kleinste Element einer partiellen Ordnung werde je mit Hilfe einer einstelligen Funktionskonstanten bezeichnet:

3.1.14 Definition.-

Wenn es ein kleinstes [größtes] Element von $\mathcal{A}$ gibt, dann für alle x:

$0_{\mathcal{A}}$ [$1_{\mathcal{A}}$] $= x$

gdw

x ist kleinstes [größtes] Element von $\mathcal{A}$.

Ein Spezialfall der partiellen Ordnung ist der Verband:

3.1.15 Definition.-

$\mathcal{A}$ ist ein *Verband*

gdw

(1) $\mathcal{A}$ ist eine partielle Ordnung &

(2) für alle $x, y \in \mathcal{A}_1$ gibt ein s und ein t, so dass s Infimum von $\{x, y\}$ in $\mathcal{A}$ ist und t ist Supremum von $\{x, y\}$ in $\mathcal{A}$.

Weiter unten wird die Kommutativität und Assoziativität der Infimum- und der Supremumsbildung bei 2-elementigen Teilmengen eines Verbandes benötigt, hierzu die folgende Satzreihe:

3.1.16 Sätze.-

Sei $\mathcal{A}$ ein Verband, dann gilt für alle $x, y, z \in \mathcal{A}_1$:

(1) $x \sqcup_{\mathcal{A}} y = y \sqcup_{\mathcal{A}} x$ &

(2) $x \leq_{\mathcal{A}} z \,\&\, y \leq_{\mathcal{A}} z \Rightarrow x \sqcup_{\mathcal{A}} y \leq_{\mathcal{A}} z$ &

(3) $x \sqcup_{\mathcal{A}} (y \sqcup_{\mathcal{A}} z) = (x \sqcup_{\mathcal{A}} y) \sqcup_{\mathcal{A}} z$ &

(4) $(x \sqcup_{\mathcal{A}} y) \sqcap_{\mathcal{A}} y = y$.

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ Verband und seien x, y, z $\in \mathcal{A}_1$.

(1) $\{ x, y \} = \{ y, x \}$.

(2) Gelte $x \leq_{\mathcal{A}} z$ & $y \leq_{\mathcal{A}} z$. Dann ist z obere Schranke von $\{ x, y \}$ in $\mathcal{A}_1$. Da $x \sqcup_{\mathcal{A}} y$ kleinste obere Schranke von $\{ x, y \}$ in $\mathcal{A}_1$ ist, folgt: $x \sqcup_{\mathcal{A}} y \leq_{\mathcal{A}} z$.

(3) Es gilt: $x \leq_{\mathcal{A}} x \sqcup_{\mathcal{A}} y$ & $y \leq_{\mathcal{A}} x \sqcup_{\mathcal{A}} y$ &

$$x \sqcup_{\mathcal{A}} y \leq_{\mathcal{A}} (x \sqcup_{\mathcal{A}} y) \sqcup_{\mathcal{A}} z \;\&\; z \leq_{\mathcal{A}} (x \sqcup_{\mathcal{A}} y) \sqcup_{\mathcal{A}} z.$$

Wegen der Transitivität von $\leq_{\mathcal{A}}$ folgt:

$$x \leq_{\mathcal{A}} (x \sqcup_{\mathcal{A}} y) \sqcup_{\mathcal{A}} z \;\&\; y \leq_{\mathcal{A}} (x \sqcup_{\mathcal{A}} y) \sqcup_{\mathcal{A}} z.$$

Und mit (2) folgt: $y \sqcup_{\mathcal{A}} z \leq_{\mathcal{A}} (x \sqcup_{\mathcal{A}} y) \sqcup_{\mathcal{A}} z$.

Und wiederum mit (2):

$$x \sqcup_{\mathcal{A}} (y \sqcup_{\mathcal{A}} z) \leq_{\mathcal{A}} (x \sqcup_{\mathcal{A}} y) \sqcup_{\mathcal{A}} z. \qquad *$$

Weiterhin gilt: $y \leq_{\mathcal{A}} y \sqcup_{\mathcal{A}} z \leq_{\mathcal{A}} x \sqcup_{\mathcal{A}} (y \sqcup_{\mathcal{A}} z)$

und $x \leq_{\mathcal{A}} x \sqcup_{\mathcal{A}} (y \sqcup_{\mathcal{A}} z)$.

Mit (2) folgt: $x \sqcup_{\mathcal{A}} y \leq_{\mathcal{A}} x \sqcup_{\mathcal{A}} (y \sqcup_{\mathcal{A}} z)$.

Und wegen $z \leq_{\mathcal{A}} y \sqcup_{\mathcal{A}} z \leq_{\mathcal{A}} x \sqcup_{\mathcal{A}} (y \sqcup_{\mathcal{A}} z)$

folgt $(x \sqcup_{\mathcal{A}} y) \sqcup_{\mathcal{A}} z \leq_{\mathcal{A}} x \sqcup_{\mathcal{A}} (y \sqcup_{\mathcal{A}} z)$. **

Und wegen der von $\leq_{\mathcal{A}}$ geforderten Antisymmetrie folgt schließlich aus * und **:

$$(x \sqcup_{\mathcal{A}} y) \sqcup_{\mathcal{A}} z = x \sqcup_{\mathcal{A}} (y \sqcup_{\mathcal{A}} z).$$

(4) Es gilt:

$$(x \sqcup_{\mathcal{A}} y) \sqcap_{\mathcal{A}} y \leq_{\mathcal{A}} y.$$

Und da $y \leq_{\mathcal{A}} x \sqcup_{\mathcal{A}} y$

und $y \,_{\mathcal{A}}\!\leq y$,

folgt mit 3.1.17(2): $y \leq_{\mathcal{A}} (x \sqcup_{\mathcal{A}} y) \sqcap_{\mathcal{A}} y$.

Weiterhin gelten die folgenden zu 3.1.16 dualen Sätze:

3.1.17 Sätze.-

Sei $\mathcal{A}$ ein Verband, dann gilt für alle $x, y, z \in \mathcal{A}_1$:

(1) $x \sqcap_{\mathcal{A}} y = y \sqcap_{\mathcal{A}} x$ &

(2) $z \leq_{\mathcal{A}} x$ & $z \leq_{\mathcal{A}} y \Rightarrow z \leq_{\mathcal{A}} x \sqcap_{\mathcal{A}} y$

(3) $x \sqcap_{\mathcal{A}} (y \sqcap_{\mathcal{A}} z) = (x \sqcap_{\mathcal{A}} y) \sqcap_{\mathcal{A}} z$ &

(4) $(x \sqcap_{\mathcal{A}} y) \sqcup_{\mathcal{A}} y = y$.

Beweis analog zu den Beweisen in 3.1.16.

3.1.18 Definition.-

y ist *Komplement von x in $\mathcal{A}$*

gdw

(1) $\mathcal{A}$ ist Verband und $x, y \in \mathcal{A}_1$ & (2) $x \sqcup_{\mathcal{A}} y = 1_{\mathcal{A}}$ und $x \sqcap_{\mathcal{A}} y = 0_{\mathcal{A}}$.

3.1.19 Definition.-

$\mathcal{A}$ ist ein *komplementärer Verband*

gdw

(1) $\mathcal{A}$ ist Verband, der ein kleinstes und ein größtes Element enthält &

(2) zu jedem $x \in \mathcal{A}_1$ existiert ein y, so dass y Komplement von x in $\mathcal{A}$ ist.

3.1.20 Satz.-

In jedem komplementären Verband $\mathcal{A}$ gilt für alle $y \in \mathcal{A}_1$:

(1) $y \sqcup_{\mathcal{A}} 0_{\mathcal{A}} = y$ &

(2) $y \sqcap_{\mathcal{A}} 1_{\mathcal{A}} = y$ & $y \sqcap_{\mathcal{A}} 0_{\mathcal{A}} = 0_{\mathcal{A}}$ & $y \sqcup_{\mathcal{A}} 1_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$.

<u>Beweis:</u> (1) Nach Definition von $0_{\mathcal{A}}$ gilt für alle $y \in \mathcal{A}_1 : \langle 0_{\mathcal{A}}, y \rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$; nach Definition der partiellen Ordnung gilt für alle $y \in \mathcal{A}_1 : \langle y, y \rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$; somit ist y obere Schranke von $\{ 0_{\mathcal{A}}, y \}$ in $\mathcal{A}$. Da für eine beliebige obere Schranke z von $\{0_{\mathcal{A}}, y\}$ in $\mathcal{A}$ gilt: $\langle y, z \rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$, ist y Supremum von $\{0_{\mathcal{A}}, y\}$ in $\mathcal{A}$.

(2) Analog die Beweise für die drei übrigen Identitäten.

Die Distributivität macht komplementäre zu BOOLEschen Verbänden.

3.1.21 <u>Definition</u>.-

$\mathcal{A}$ ist ein *BOOLEscher Verband*

gdw

(1) $\mathcal{A}$ ist ein komplementärer Verband &

(2) für alle $x, y, z \in \mathcal{A}_1$:

$$(x \sqcap_{\mathcal{A}} y) \sqcup_{\mathcal{A}} z = (x \sqcup_{\mathcal{A}} z) \sqcap_{\mathcal{A}} (y \sqcup_{\mathcal{A}} z) \ \&$$

$$(x \sqcup_{\mathcal{A}} y) \sqcap_{\mathcal{A}} z = (x \sqcap_{\mathcal{A}} z) \sqcup_{\mathcal{A}} (y \sqcap_{\mathcal{A}} z) \ \&$$

(3) $0_{\mathcal{A}} \neq 1_{\mathcal{A}}$.

Die Bedingung (2) in der Definition des BOOLEschen Verbandes stellt die Eindeutigkeit der Komplemente sicher; dazu der folgende Satz:

3.1.22 <u>Satz</u>.-

In einem BOOLEschen Verband $\mathcal{A}$ hat jedes $x \in \mathcal{A}_1$ genau ein Komplement in $\mathcal{A}$.

<u>Beweis:</u> Seien y und z Komplement von x in $\mathcal{A}$.

Dann gilt: $x \sqcup_{\mathcal{A}} y = x \sqcup_{\mathcal{A}} z = 1_{\mathcal{A}}$ & $x \sqcap_{\mathcal{A}} y = x \sqcap_{\mathcal{A}} z = 0_{\mathcal{A}}$.

Es ist $\qquad y = y \sqcup_{\mathcal{A}} 0_{\mathcal{A}}$

$$= y \sqcup_{\mathcal{A}} (x \sqcap_{\mathcal{A}} z)$$

$$= (x \sqcap_{\mathcal{A}} z) \sqcup_{\mathcal{A}} y$$

$$= (x \sqcup_{\mathcal{A}} y) \sqcap_{\mathcal{A}} (z \sqcup_{\mathcal{A}} y)$$

$$= 1_{\mathcal{A}} \sqcap_{\mathcal{A}} (z \sqcup_{\mathcal{A}} y)$$

$$= z \sqcup_{\mathcal{A}} y.$$

Analog dazu gewinnt man $z = z \sqcup_{\mathcal{A}} y$ und somit ist $y = z$.

Zur Bezeichnung des Komplements eines Elements eines BOOLEschen Verbandes wird eine 2-stellige Funktionskonstante eingeführt:

3.1.23 <u>Definition</u>.-

Wenn $\mathcal{A}$ BOOLEscher Verband ist und $x \in \mathcal{A}_1$, dann soll für alle $y \in \mathcal{A}_1$ gelten:

$x^{*\mathcal{A}} = y$

gdw

y ist Komplement von x in $\mathcal{A}$.

In Abschnitt 3.2 wird noch folgender Hilfssatz benötigt:

3.1.24 <u>Satz</u>.-

Wenn $\mathcal{A}$ BOOLEscher Verband ist, dann gilt für alle $x, y \in \mathcal{A}_1$:

$$x \sqcap_{\mathcal{A}} y^* = 0_{\mathcal{A}} \text{ gdw } x \leq_{\mathcal{A}} y.$$

<u>Beweis:</u> Angenommen $x \sqcap_{\mathcal{A}} y^* = 0_{\mathcal{A}}$.

Dann gilt: $x =$

$$x \sqcap_{\mathcal{A}} 1 = x \sqcap_{\mathcal{A}} (y \sqcup_{\mathcal{A}} y^*) = (x \sqcap_{\mathcal{A}} y) \sqcup_{\mathcal{A}} (x \sqcap_{\mathcal{A}} y^*) = (x \sqcap_{\mathcal{A}} y) \sqcup_{\mathcal{A}} 0_{\mathcal{A}}$$

$$= x \sqcap_{\mathcal{A}} y \leq_{\mathcal{A}} y.$$

Sei nun $x \leq_{\mathcal{A}} y$.

Dann folgt mit $x \leq_{\mathcal{A}} x$ und mit Satz 3.1.17(ii): $x \leq_{\mathcal{A}} x \sqcap_{\mathcal{A}} y$.

Weiterhin ist $x \sqcap_{\mathcal{A}} y \leq_{\mathcal{A}} x$.

Wegen der Antisymmetrie der Ordnungsrelation $\leq_{\mathcal{A}}$ folgt dann $x \sqcap_{\mathcal{A}} y = x$.

Dann gilt:

$$x \sqcap_{\mathcal{A}} y^* = (x \sqcap_{\mathcal{A}} y) \sqcap_{\mathcal{A}} y^* = x \sqcap_{\mathcal{A}} (y \sqcap_{\mathcal{A}} y^*) = x \sqcap_{\mathcal{A}} 0_{\mathcal{A}} = 0_{\mathcal{A}}. \qquad \square$$

Den zu 3.1.24 dualen Satz –

3.1.25 Satz.-

Wenn $\mathcal{A}$ BOOLEscher Verband ist, dann gilt für alle $x, y \in \mathcal{A}_1$:

$$x \sqcup_{\mathcal{A}} y^* = 1_{\mathcal{A}} \text{ gdw } y \leq_{\mathcal{A}} x.$$

– beweist man analog.

In 3.2 werden 'Filter' und 'Ultrafilter' als Untermengen der Individuenbereiche von BOOLEschen Verbänden definiert. Für das Łoš'sche Theorem benötigt man aber speziellere Filter. Um nun die Eigenschaften eines BOOLEschen Verbandes bei diesen Filtern zur Verfügung zu haben, wird gezeigt, dass $\mathbf{V}(\mathrm{I}) = \langle \mathrm{POT}(\mathrm{I}), \langle \subseteq_{\mathrm{POT(I)}} \rangle, \emptyset \rangle$ ein BOOLEscher Verband ist, wenn $\mathrm{I} \neq \emptyset$. Dazu die beiden Definitionen:

3.1.26 Definition.-

$$\subseteq_K = \{ p \mid \text{es gibt ein } A, B \in K, \text{ so dass } A \subseteq B \;\&\; p = \langle A, B \rangle \}.$$

3.1.27 Definition.-

Für alle I soll gelten:

$$\mathbf{V}(I) = \langle \mathrm{POT}(I), \langle \subseteq_{\mathrm{POT}(I)} \rangle, \emptyset \rangle.$$

3.1.28 Satz.-

Für alle $I \neq \emptyset$ gilt : $\mathbf{V}(I)$ *ist ein BOOLEscher Verband.*

Ferner gilt :

(1) wenn $A, B \subseteq I$, dann

$$A \sqcap_{\mathbf{V}(I)} B = A \cap B \textit{ und}$$

$$A \sqcup_{\mathbf{V}(I)} B = A \cup B \textit{ und}$$

$$A^{*\mathbf{V}(I)} = I \setminus A.$$

(2) $$1_{\mathbf{V}(I)} = I \textit{ und } 0_{\mathbf{V}(I)} = \emptyset.$$

Beweis: Sei I nichtleer und seien A, B, C $\in$ POT(I). Dann gilt:

$A \subseteq A$ und somit $\langle A,A \rangle \in \subseteq_{POT(I)}$ (Reflexivität);

$(A \subseteq B)$ & $(B \subseteq A) \Rightarrow A = B$ (Antisymmetrie);

$(((A \subseteq B)$ & $(B \subseteq C)) \Rightarrow (A \subseteq C))$ (Transitivität);

somit ist $\mathbf{V}$(I) eine partielle Ordnung.

Für alle A, B $\in$ POT(I) ist $A \cup B$ das Supremum von $\{A, B\}$; denn es gilt $A \subseteq A \cup B$ und $B \subseteq A \cup B$ und somit ist $A \cup B$ obere Schranke von $\{A, B\}$ in $\mathbf{V}$(I); weiterhin gibt es keine obere Schranke C von $\{A, B\}$ in $\mathbf{V}$(I) für die $A \subseteq C$, $B \subseteq C$ und $C \subset A \cup B$ gilt; also ist $A \cup B$ Supremum von $\{A, B\}$ in $\mathbf{V}$(I);

also ist $$A \cup B = A \sqcup_{\mathbf{V}(I)} B.$$

Analog der Beweis, dass $A \cap B$ Infimum von $\{A, B\}$ in $\mathbf{V}$(I) ist und dass

$$A \cap B = A \sqcap_{\mathbf{V}(I)} B.$$

Da somit für alle zweielementigen Mengen aus $\mathbf{V}(I)_1$ ein Supremum und ein Infimum existieren, ist $\mathbf{V}$(I) ein Verband.

I ist größtes Element von $\mathbf{V}$(I), denn für alle $A \in \mathbf{V}(I)_1$ gilt:

$$A \subseteq I \text{ und somit } \langle A, I \rangle \in \mathbf{V}(I)_2 \text{ ; und } I = 1_{\mathbf{V}(I)}.$$

$\emptyset$ ist kleinstes Element von $\mathbf{V}$(I), denn für alle $A \in \mathbf{V}(I)_1$ gilt:

$$\varnothing \subseteq A \text{ und somit } \langle \varnothing, A \rangle \in \mathbf{V}(I)_2 \text{ ; und } \varnothing = 0_{\mathbf{V}(I)}.$$

Zu jedem $A \in \mathbf{V}(I)_1$ existiert das Komplement A^* von A in $\mathbf{V}(I)$:

$$A^{*\mathbf{V}(I)} = I \setminus A;$$

also ist $\mathbf{V}(I)$ ein komplementärer Verband.

In $\mathbf{V}(I)$ gelten die beiden folgenden mengentheoretischen Theoreme:

für alle $A, B, C \in POT(I)$:

$$(1)\ (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \text{ und}$$

$$(2)\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Da I nichtleer ist, gilt: $1_{\mathbf{V}(I)} \neq 0_{\mathbf{V}(I)}$.

Damit ist gezeigt, dass $\mathbf{V}(I) = \langle\, POT(I), \langle \subseteq_{POT(I)} \rangle, \varnothing \,\rangle$ BOOLEscher Verband ist.

3.2 Filter und Ultrafilter

In *Abschnitt 3.2* werden verschiedene Filterbegriffe definiert. Ein *Filter* auf einem Booleschen Verband $\mathcal{B}$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{B}_1$, welche das größte Element $1_{\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}$ enthält, unter der Infimumbildung von Zweierklassen abgeschlossen ist und zu jedem Element x alle z mit $\langle x, z\rangle \in \mathcal{B}_{2,1}$ enthält. Von den verschiedenen betrachteten Varianten des Filterbegriffs ist der Begriff des *Ultrafilters* für spätere Zwecke besonders wichtig: ein *Ultrafilter* auf einem Booleschen Verband $\mathcal{B}$ ist ein Filter auf $\mathcal{B}$, der ein Element x genau dann enthält, wenn er das Komplement x^* von x in $\mathcal{B}$ nicht enthält. Für die Konstruktion von Ultrafiltern ist das *Ultrafiltertheorem* wichtig, welches besagt, dass es zu jeder Teilmenge E des Individuenbereichs eines Booleschen Verbandes $\mathcal{B}$, welche unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer ist, einen Ultrafilter auf $\mathcal{B}$ gibt, der E als Teilmenge enthält. Ferner wird bewiesen, dass es zu jeder unendlichen Menge I, deren Kardinalzahl $|I| = \alpha$ ist, einen α-regulären Filter auf $\mathbf{V}(I)$ gibt; dabei ist ein α-regulärer Filter auf $\mathbf{V}(I)$ ein echter Filter, d.h. $\neq$ POT(I), auf $\mathbf{V}(I)$, der eine Teilmenge E der Kardinalität α enthält, so dass jedes Element von I nur in endlich vielen Elementen von E enthalten ist.

3.2.1 <u>Definition</u>.-

F ist *Filter auf* $\mathcal{B}$

gdw

(1) $\mathcal{B}$ ist BOOLEscher Verband &

(2) $F \subseteq \mathcal{B}_1$ und $1_{\mathcal{B}} \in F$ &

(3) für alle $x, y, z \in \mathcal{B}_1 : x, y \in F \Rightarrow x \sqcap_{\mathcal{B}} y \in F$ &

(4) für alle $x, y, z \in \mathcal{B}_1 : (x \in F \;\&\; x \leq_{\mathcal{B}} z) \Rightarrow z \in F$.

Nach dieser Definition ist jeder Filter F nichtleer, da ja $1_{\mathcal{B}} \in F$.

3.2.2 <u>Definitionen</u>.-

F ist *Hauptfilter über* x *auf* $\mathcal{B}$ gdw $x \in \mathcal{B}_1 \;\&\; F = \{y \mid \langle x, y\rangle \in \mathcal{B}_{2,1}\}$.

F ist *Hauptfilter auf* $\mathcal{B}$ gdw $\exists x\,(F$ ist Hauptfilter über x auf $\mathcal{B})$.

3.2.3 <u>Satz</u>.-

Wenn $\mathcal{B}$ BOOLEscher Verband & $x \in \mathcal{B}_1$, dann ist der Hauptfilter über x auf $\mathcal{B}$ ein Filter auf $\mathcal{B}$.

<u>Beweis:</u> Sei $\mathcal{B}$ BOOLEscher Verband und sei $x \in \mathcal{B}_1$.

Sei $$F = \{ y \mid \langle x, y \rangle \in \mathcal{B}_{2,1} \}.$$

Dann ist $F \subseteq \mathcal{B}_1$, denn wenn $y \in F$, dann $\langle x, y \rangle \in \mathcal{B}_{2,1}$, dann $y \in \mathcal{B}_1$. Ferner ist $1_{\mathcal{B}} \in F$, denn es gilt

$$\forall z\, (z \in \mathcal{B}_1 \Rightarrow \langle z, 1_{\mathcal{B}} \rangle \in \mathcal{B}_{2,1}), \text{ also } \langle x, 1_{\mathcal{B}} \rangle \in \mathcal{B}_{2,1}, \text{ also } 1_{\mathcal{B}} \in F.$$

Weiterhin gilt: $\forall a \forall b\, (a, b \in F \Rightarrow \mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}\, \{a, b\} \in F)$.

Denn seien $a, b \in F$.

Dann $\langle x, a \rangle \in \mathcal{B}_{2,1}$ & $\langle x, b \rangle \in \mathcal{B}_{2,1}$. Dann $\langle x, \mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}\, \{a, b\} \rangle \in \mathcal{B}_{2,1}$.

Dann $\mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}\, (\{a, b\}) \in F$.

Schließlich gilt noch $\forall a \forall b\, (a \in F\ \&\ \langle a, b \rangle \in \mathcal{B}_{2,1} \Rightarrow b \in F)$.

Denn angenommen, $a \in F$ & $\langle a, b \rangle \in \mathcal{B}_{2,1}$. Dann $\langle x, a \rangle \in \mathcal{B}_{2,1}$ & $\langle a, b \rangle \in \mathcal{B}_{2,1}$. Dann mit Transitivität von $\mathcal{B}_{2,1}$: $\langle x, b \rangle \in \mathcal{B}_{2,1}$. Dann $b \in F$.

3.2.4 <u>Definition</u>.-

F ist *echter Filter auf* $\mathcal{B}$

gdw

F ist Filter auf $\mathcal{B}$ & $F \neq \mathcal{B}_1$.

Echte Filter existieren auf allen BOOLEschen Verbänden. Da $1_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}_1$ für alle BOOLEschen Verbände $\mathcal{B}$ gilt, ist z.B. $\{1_{\mathcal{B}}\}$ echter Filter auf $\mathcal{B}$.

3.2.5 Definition.-

E ist *in $\mathcal{B}$ unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer*

gdw

(1) $\mathcal{B}$ BOOLEscher Verband und $E \subseteq \mathcal{B}_1$ &

(2) $\forall X\, (\, X$ endl$\subseteq E$ & $X \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}(X) \neq 0_{\mathcal{B}})$.

3.2.6 Hilfssatz.-

Sei $\mathcal{B}$ BOOLEscher Verband, sei $E \subseteq \mathcal{B}_1$ und gelte:

$$\forall F\, \forall G\, (\, F \in E\ \&\ G \in E \Rightarrow \mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}(\{\, F, G\,\}) \neq 0_{\mathcal{B}} \&\ \mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}(\{\, F, G\,\}) \in E\,).$$

Dann ist E in $\mathcal{B}$ unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer.

Beweis : Sei X endl $\subseteq$ E und sei X $\neq \emptyset$. Dann

$$\exists n\, \exists e\, (\, n \in \mathbb{N}\ \&\ e \text{ ist Abzählung der Länge } n \text{ von X}\,).$$

Seien n und e so. Dann Ran(e) = X. Sei nun

$$\mathrm{M} = \{\, n \mid \forall \mathrm{e}\, (\, \mathrm{e} \text{ ist Abzählung der Länge } n\ \&\ \mathrm{Ran(e)} \subseteq \mathrm{E}$$

$$\&\ \mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}\, (\mathrm{Ran(e)}) \in \mathrm{E} \Rightarrow \mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}\, (\mathrm{Ran(e)}) \neq 0_{\mathcal{B}}\,)\,\}.$$

Nun wird durch $\mathbb{N}$-Induktion bewiesen, dass $\mathbb{N} \subseteq$ M.

I. B.: Da X $\neq \emptyset$ vorausgesetzt ist, ist e keine Abzählung der Länge 0 und 0 $\in$ M.

I. S.: Sei n $\in$ M $\cap$ $\mathbb{N}$. Sei e Abzählung der Länge n+1 und sei Ran(e) $\subseteq$ E.

Dann ist

$$\mathrm{e} = \mathrm{e} \restriction \mathrm{n} \cup \{(\mathrm{n}, \mathrm{e}_{\mathrm{n}})\}.$$

Ferner ist e $\restriction$ n Abzählung der Länge n & Ran(e $\restriction$ n) $\subseteq$ E. Dann folgt mit der Induktionsvoraussetzung: $\mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}\, (\mathrm{Ran(e} \restriction \mathrm{n})) \neq 0_{\mathcal{B}}\ \&\ \mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}\, (\mathrm{Ran(e} \restriction \mathrm{n})) \in \mathrm{E}$.

Nun ist

$$\mathrm{Ran(e)} = \mathrm{Ran(e} \restriction \mathrm{n}) \cup \{\mathrm{e}_{\mathrm{n}}\}.$$

Dann ist $\mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}\, (\, \mathrm{Ran(e)}\,) = \mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}(\, \mathrm{Ran(e} \restriction \mathrm{n}) \cup \{\mathrm{e}_{\mathrm{n}}\}\,)$

$$= \mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}\,(\,\{\mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}\,(\,\mathrm{Ran}(\,e \restriction n\,),\, e_n\}\,)\,) \neq 0_{\mathcal{B}}\,.$$

Und da $e_n \in E$, ist

$$\mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}\,(\{\mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}\,(\mathrm{Ran}(e \restriction n)),\, e_n\}) \in E.$$

Also ist $n + 1 \in M$ und $\mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}\,(X) \neq 0_{\mathcal{B}}$ folgt. □

3.2.7 Definition.-

E generiert den Filter F auf $\mathcal{B}$

gdw

(1) $\mathcal{B}$ BOOLEscher Verband und $E \subseteq \mathcal{B}_1$ &

(2) $F = \cap \{\, D \mid E \subseteq D \;\&\; D$ ist Filter auf $\mathcal{B}\}$.

3.2.8 Satz.-

Sei F Filter auf $\mathcal{B}$. Dann ist F der durch F generierte Filter auf $\mathcal{B}$.

Beweis: Sei F Filter auf $\mathcal{B}$.

Sei $x \in F$. Sei D Filter auf $\mathcal{B}$ & $F \subseteq D$. Dann ist $x \in D$. Also

$$x \in \bigcap \{\, D \mid D \text{ Filter auf } \mathcal{B} \;\&\; F \subseteq D \,\}.$$

Also ist x Element des durch F generierten Filters auf $\mathcal{B}$.

Sei nun x Element des durch F generierten Filters auf $\mathcal{B}$.

Dann

$$\forall D\,(D \text{ Filter auf } \mathcal{B} \;\&\; F \subseteq D \Rightarrow x \in D\,).$$

Dann $x \in F$. Insgesamt ist also F der durch F generierte Filter auf $\mathcal{B}$.

Mit dem nächsten Satz werden generierte Filter genauer charakterisiert.

3.2.9 Satz.-

Sei $\mathcal{B}$ BOOLEscher Verband, sei $E \subseteq \mathcal{B}_1$ *und sei* D *der von* E *generierte Filter auf* $\mathcal{B}$.

Dann gilt:

(1) *D ist Filter auf* $\mathcal{B}$.

(2) $D = \{ X \mid X \in \mathcal{B}_1 \;\&\; (X = 1_{\mathcal{B}} \text{ oder } \exists Y \text{ endl} \subseteq E \;\&\; \mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}(Y) \leq_{\mathcal{B}} X)\}$.

(3) D *ist echter Filter*

gdw E *in* $\mathcal{B}$ *unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer ist.*

Beweis: Sei $\mathcal{B}$ BOOLEscher Verband & $E \subseteq \mathcal{B}_1$ & D der von E generierte Filter auf $\mathcal{B}$.

(1) Es ist $D \subseteq \mathcal{B}_1$; denn wenn $X \in D$, dann gilt für alle D mit $E \subseteq D$ und D Filter auf $\mathcal{B}$, dass $X \in D$; nun ist $E \subseteq \mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_1$ Filter auf $\mathcal{B}$; also $X \in \mathcal{B}_1$. Also $D \subseteq \mathcal{B}_1$. Ferner ist $1_{\mathcal{B}} \in$ D. Denn wenn D Filter auf $\mathcal{B}$, dann ist $1_{\mathcal{B}} \in D$;

$$\text{also } \forall D\, (E \subseteq D \;\&\; D \text{ Filter auf } \mathcal{B} \Rightarrow 1_{\mathcal{B}} \in D);$$

$$\text{also } 1_{\mathcal{B}} \in D.$$

Sei weiter $X, Y \in D$, sei $E \subseteq D$ & D Filter auf $\mathcal{B}$; dann ist $X, Y \in D$,

$$\text{also ist } X \sqcap_{\mathcal{B}} Y \in D;$$

$$\text{also } \forall D\, (E \subseteq D \;\&\; D \text{ Filter auf } \mathcal{B} \Rightarrow X \sqcap_{\mathcal{B}} Y \in D);$$

$$\text{also } X \sqcap_{\mathcal{B}} Y \in D.$$

Sei schließlich $X \in D$ & $X \leq_{\mathcal{B}} Z \leq_{\mathcal{B}} 1_{\mathcal{B}}$. Sei $E \subseteq D$ & D Filter auf $\mathcal{B}$.

Dann ist $X \in D$; also ist $Z \in D$;

also gilt $\quad \forall D\, (E \subseteq D \;\&\; D \text{ Filter auf } \mathcal{B} \Rightarrow Z \in D);$

also ist $Z \in D$ und somit ist D Filter auf $\mathcal{B}$.

(2) Es ist $\quad D = \cap \{ \mathfrak{F} \mid E \subseteq \mathfrak{F} \;\&\; \mathfrak{F} \text{ Filter auf } \mathcal{B} \}$.

Sei $D' = \{ X \mid X \in \mathcal{B}_1 \;\&\; (X = 1_{\mathcal{B}} \text{ oder } \exists Y_1 , ..., Y_n (Y_1 , ..., Y_n \in E$

$$\& \; Y_1 \sqcap_{\mathcal{B}} ... \sqcap_{\mathcal{B}} Y_n \leq_{\mathcal{B}} X)) \}.$$

Beh.: $D = D'$.

Wir zeigen zunächst, dass $D \subseteq D'$.

Da $\forall \mathcal{F}\,(E \subseteq \mathcal{F}\ \&\ \mathcal{F}$ Filter auf $\mathcal{B} \Rightarrow D \subseteq \mathcal{F})$,

genügt es zu zeigen, dass $E \subseteq D'$ Filter auf $\mathcal{B}$.

Zunächst ist $E \subseteq D'$. Denn wenn $E_1 \in E$, dann ist $E_1 \in \mathcal{B}_1$, und es ist

$$E_1 \sqcap_{\mathcal{B}} E_1 \leq_{\mathcal{B}} E_1,$$

also $\exists Y_1, Y_2\,(Y_1, Y_2 \in E$ mit $Y_1 \sqcap_{\mathcal{B}} Y_2 \leq_{\mathcal{B}} E_1)$;

also ist $E_1 \in D'$; also ist $E \subseteq D'$.

Ferner ist D' Filter auf $\mathcal{B}$. Denn es ist $D' \subseteq \mathcal{B}_1$, da, wenn $X \in D'$, $X \in \mathcal{B}_1$. Weiter ist $1_{\mathcal{B}} \in D'$, denn es ist $1_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}_1\ \&\ 1_{\mathcal{B}} = 1_{\mathcal{B}}$, also ist $1_{\mathcal{B}} \in D'$.

Seien ferner $X, X' \in D'$; dann sind $X, X' \in \mathcal{B}_1$, und $X = 1_{\mathcal{B}}$

oder es gibt $Y_1, \ldots, Y_n \in E$ mit $Y_1 \sqcap_{\mathcal{B}} \ldots \sqcap_{\mathcal{B}} Y_n \leq_{\mathcal{B}} X$, und es ist $X' = 1_{\mathcal{B}}$

oder es gibt $Y'_1, \ldots, Y'_m \in E$ mit $Y'_1 \sqcap_{\mathcal{B}} \ldots \sqcap_{\mathcal{B}} Y'_m \leq_{\mathcal{B}} X'$.

Es sind also 4 Fälle zu unterscheiden:

1. Fall : $X = 1_{\mathcal{B}}$ und $X' = 1_{\mathcal{B}}$; dann $X \sqcap_{\mathcal{B}} X' = 1_{\mathcal{B}} \in D'$.

2. Fall : $X = 1_{\mathcal{B}}$ und es gibt ein $Y'_1, \ldots, Y'_m \in E$ mit $Y'_1 \sqcap_{\mathcal{B}} \ldots \sqcap_{\mathcal{B}} Y'_m \leq_{\mathcal{B}} X'$;

dann ist $X \sqcap_{\mathcal{B}} X' = X' \in D'$.

3. Fall : Analog zum 2. Fall mit $X' = 1_{\mathcal{B}}$.

4. Fall : Es gibt ein $Y_1, \ldots, Y_n \in E$ mit $Y_1 \sqcap_{\mathcal{B}} \ldots \sqcap_{\mathcal{B}} Y_n \leq_{\mathcal{B}} X$ und ein $Y'_1, \ldots, Y'_m \in E$ mit $Y'_1 \sqcap_{\mathcal{B}} \ldots \sqcap_{\mathcal{B}} Y'_m \leq_{\mathcal{B}} X'$; dann ist $X \sqcap_{\mathcal{B}} X' \in \mathcal{B}_1$ und es gibt ein $Y_1, \ldots, Y_n, Y'_1, \ldots, Y'_m \in E$ mit $Y_1 \sqcap_{\mathcal{B}} \ldots \sqcap_{B} Y'_m \leq_{\mathcal{B}} (X \sqcap_{\mathcal{B}} X')$;

also ist $(X \sqcap_{\mathcal{B}} X') \in D'$. Es ist also

$$\forall X, X'\,(X, X' \in D' \Rightarrow X \sqcap_{\mathcal{B}} X' \in D').$$

Sei schließlich noch $X \in D'\ \&\ X \leq_{\mathcal{B}} Z \leq_{\mathcal{B}} 1_{\mathcal{B}}$.

Dann ist $Z \in \mathcal{B}_1\ \&$

$$(Z = 1_{\mathcal{B}} \text{ oder } \exists Y_1, \ldots, Y_n (Y_1, \ldots, Y_n \in E \;\&\; Y_1 \sqcap_{\mathcal{B}} \ldots \sqcap_{\mathcal{B}} Y_n \leq_{\mathcal{B}} Z));$$

also ist $Z \in D'$.

Es ist also $\forall X, Z (X \in D' \;\&\; X \leq_{\mathcal{B}} Z \leq_{\mathcal{B}} 1_{\mathcal{B}} \Rightarrow Z \in D')$.

Insgesamt ist damit gezeigt, dass D' Filter auf $\mathcal{B}$ ist. Also ist $E \subseteq D'$ & D' Filter auf $\mathcal{B}$.

Also ist $D \subseteq D'$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $D' \subseteq D$.

Sei also $E \subseteq F$ & F Filter auf $\mathcal{B}$. Dann ist $D' \subseteq F$.

Denn sei $X \in D'$.

Dann ist $X \in \mathcal{B}_1$ &

$$(X = 1_{\mathcal{B}} \text{ oder } \exists Y_1, \ldots, Y_n (Y_1, \ldots, Y_n \in E \;\&\; Y_1 \sqcap_{\mathcal{B}} \ldots \sqcap_{\mathcal{B}} Y_n \leq_{\mathcal{B}} X));$$

wenn $X = 1_{\mathcal{B}}$, dann ist $X \in F$, da $1_{\mathcal{B}} \in F$;

wenn $Y_1, \ldots, Y_n \in E \;\&\; Y_1 \sqcap \ldots \sqcap Y_n \leq_{\mathcal{B}} X$, dann $Y_1, \ldots, Y_n \in F$, also ist

$Y_1 \sqcap_{\mathcal{B}} \ldots \sqcap_{\mathcal{B}} Y_n \in F$, und wegen $Y_1 \sqcap_{\mathcal{B}} \ldots \sqcap_{\mathcal{B}} Y_n \leq_{\mathcal{B}} X \leq_{\mathcal{B}} 1_{\mathcal{B}}$ gilt $X \in F$;

also gilt $\forall X (X \in D' \Rightarrow X \in F)$;

also ist $D' \subseteq F$.

Also gilt $\forall F (E \subseteq F \;\&\; F \text{ Filter auf } \mathcal{B} \Rightarrow D' \subseteq F)$.

Also ist $D' \subseteq D$. Und somit ist $D' = D$.

(3) Angenommen D echter Filter auf $\mathcal{B}$ und E ist unter endlichmaliger Schnittbildung leer. Dann gibt es ein $C \text{ endl} \subseteq E \;\&\; \mathrm{Inf}_{\mathcal{B}} (C) = 0_{\mathcal{B}}$. Da E den Filter D generiert, ist C endl $\subseteq D$; da nach (1) D Filter auf $\mathcal{B}$ ist, erhält man $\mathrm{Inf}_{\mathcal{B}} \in D$, also $0_{\mathcal{B}} \in D$; ferner gilt für alle $X \in \mathcal{B}_1$: $0_{\mathcal{B}} \leq_{\mathcal{B}} X$; da nun $0_{\mathcal{B}} \in D$ und D Filter auf $\mathcal{B}$ ist, gilt für alle $X \in \mathcal{B}_1$: $X \in D$ und somit ist $D = \mathcal{B}_1$ im Widerspruch zur Annahme, dass D echter Filter ist. Also, wenn D echter Filter auf $\mathcal{B}$ ist, dann ist E unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer.

Sei nun E unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer.

Nach (1) ist D Filter auf $\mathcal{B}$. Nach (2) gilt für alle $X \in D$:

$X = 1_{\mathcal{B}}$ oder $E_1 \sqcap \ldots \sqcap E_n \leq_{\mathcal{B}} X$ für $E_1, \ldots, E_n \in E$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Sei $X \in D$.

Wenn $X = 1_{\mathcal{B}}$, dann $X \neq 0_{\mathcal{B}}$, da $\mathcal{B}$ BOOLEscher Verband und daher $0_{\mathcal{B}} \neq 1_{\mathcal{B}}$.

Wenn $E_1 \sqcap \ldots \sqcap E_n \leq_{\mathcal{B}} X$, dann $X \neq 0_{\mathcal{B}}$, weil $E_1 \sqcap \ldots \sqcap E_n \neq 0_{\mathcal{B}}$, da E in $\mathcal{B}$ unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer ist.

Also ist $X \neq 0_{\mathcal{B}}$. Also $\quad \forall X\,(X \in D \Rightarrow X \neq 0_{\mathcal{B}})$.

Also $0_{\mathcal{B}} \notin D$. Da $0_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}_1$, ist $D \neq \mathcal{B}_1$. Also ist D echter Filter auf $\mathcal{B}$. □

3.2.10 <u>Satz</u>.-

Es sei F *Filter auf einem BOOLEschen Verband* $\mathcal{B}$. *Dann sind die drei folgenden Bedingungen äquivalent:*

(1) F *ist echter Filter.*

(2) $0_{\mathcal{B}} \notin F$.

(3) F *ist in* $\mathcal{B}$ *unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer.*

<u>Beweis:</u>

(1) ⇒ (2): Sei F echter Filter und gelte $0_{\mathcal{B}} \in F$. Dann sind alle $X \in \mathcal{B}_1$ Element von F, da ja $0_{\mathcal{B}} \leq_{\mathcal{B}} X$ für alle $X \in \mathcal{B}_1$ gilt, und somit ist $F = \mathcal{B}_1$ im Widerspruch zur Annahme.

(2) ⇒ (3): Wenn $0_{\mathcal{B}} \notin F$, dann ist $F \neq \mathcal{B}_1$ und somit ist F echter Filter und F ist der durch F generierte Filter auf $\mathcal{B}$. Dann ist nach 3.2.9 F unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer.

(3) ⇒ (1): Angenommen F ist in $\mathcal{B}$ unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer. Nach Voraussetzung ist $F \subseteq \mathcal{B}_1$ und F ist der von F generierte Filter auf $\mathcal{B}$. Dann ist F echter Filter auf $\mathcal{B}$ (3.2.9).

Als nächstes werden speziellere Filter definiert.

3.2.11 Definition.-

U ist ein *Ultrafilter auf* $\mathcal{B}$

gdw

(1) U ist ein Filter auf $\mathcal{B}$ &

(2) für alle $x \in \mathcal{B}_1 : x \in U$ gdw $x^{*^{\mathcal{B}}} \notin U$.

Bei Ultrafiltern entfällt die Unterscheidung in echte und unechte Ultrafilter, da Ultrafilter immer echte Filter sind.

3.2.12 Definition.-

U ist ein *Hauptultrafilter auf* $\mathcal{B}$

gdw

(1) U ist ein Hauptfilter auf $\mathcal{B}$ &

(2) U ist ein Ultrafilter auf $\mathcal{B}$.

Der folgende Satz dient zur weiteren Charakterisierung von Ultrafiltern.

3.2.13 Satz.-

Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

(1) U *ist ein Ultrafilter auf* $\mathcal{B}$.

(2) U *ist ein maximaler echter Filter auf* $\mathcal{B}$.

D. h. U ist ein echter Filter auf $\mathcal{B}$ und der einzige echte Filter auf $\mathcal{B}$, der U als Teilmenge enthält, ist U selbst.

<u>Beweis:</u> (1) $\Rightarrow$ (2): Angenommen (1). Dann ist U echter Filter, da ja $1_{\mathcal{B}} \in U$ und $(1_{\mathcal{B}})^{*}_{\mathcal{B}} = 0_{\mathcal{B}} \notin U$. F sei nun ein echter Filter auf $\mathcal{B}$ der U als Teilmenge enthält.

Es sei $x \in F$ und $x \notin U$, dann gilt $x^* \in U$, da U Ultrafilter, und $x^* \in F$, da $U \subseteq F$ vorausgesetzt ist, dann $0_{\mathcal{B}} = x \sqcap_{\mathcal{B}} x^* \in F$ im Widerspruch zur Annahme, dass F echter Filter ist.

D. h. es gibt kein $x \in F$ mit $x \notin U$. Daher ist $F \subseteq U$ & $F = U$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Angenommen, U ist maximaler echter Filter auf $\mathcal{B}$. Dann ist U Filter auf $\mathcal{B}$. Sei ferner $x \in \mathcal{B}_1$.

Dann nicht ($x \in U$ & $x^{*\mathcal{B}} \in U$);

denn wenn $x \in U$ & $x^{*\mathcal{B}} \in U$, dann $\mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}(\{ x, x^{*\mathcal{B}} \}) \in U$ und $\mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}(\{ x, x^{*\mathcal{B}} \}) = 0_{\mathcal{B}}$; dann $0_{\mathcal{B}} \in U$, im Widerspruch zu $0_{\mathcal{B}} \notin U$, da U echter Filter auf $\mathcal{B}$ ist. Also gilt:

$$x \in U \Rightarrow x^{*\mathcal{B}} \notin U.$$

Es ist nun noch zu beweisen, dass

$$x^{*\mathcal{B}} \notin U \Rightarrow x \in U.$$

Sei also $x^{*\mathcal{B}} \notin U$. Sei F der durch $U \cup \{x\}$ generierte Filter auf $\mathcal{B}$. Wir beweisen nun, dass $U \cup \{x\}$ in $\mathcal{B}$ unter endlichmaliger Schnittbildung nicht leer ist; denn dann folgt mit Theorem 3.2.9, dass F ein echter Filter ist, der $U \cup \{x\}$, also U als Teilklasse enthält, und es folgt mit der Annahme, dass U maximaler echter Filter ist, dass $F = U$, also wegen $U \cup \{x\} \subseteq F$, d. h. $x \in F$, $x \in U$.

Sei also Y endl $\subseteq U \cup \{x\}$. Es ist ($x \in Y$ or $x \notin Y$).

Wenn $x \notin Y$, dann ist Y endl $\subseteq U$, also $\mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}(Y) \in U$, also $\mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}(Y) \neq 0_{\mathcal{B}}$, da U ein echter Filter auf $\mathcal{B}$ ist.

Wenn $x \in Y$, dann ist $Y = (Y \setminus \{x\}) \cup \{x\}$,

dann $\mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}(Y) = \mathrm{Inf}((Y \setminus \{x\}) \cup \{x\}) = \mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}(\{ \mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}(Y \setminus \{x\}), x \})$

und $\mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}(Y \setminus \{x\}) \in U$. Wäre nun $\mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}(Y) = 0_{\mathcal{B}}$ dann würde

$$\mathrm{Inf}(Y \setminus \{x\}) \sqcap_{\mathcal{B}} x = 0_{\mathcal{B}}$$

gelten; und mit $x = (x^{*\mathcal{B}})^{*\mathcal{B}}$ und mit Satz 3.1.24 würde

$$\mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}(Y \setminus \{x\}) \leq_{\mathcal{B}} x^*$$

folgen und $x^* \in U$ im Widerspruch zur Annahme; und es folgt somit:

$$\mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}((Y \setminus \{x\}) \cup \{x\}) \neq 0_{\mathcal{B}}.$$

Und es ist bewiesen, dass $U \cup \{x\}$ in $\mathcal{B}$ unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer ist.

Und da $U \cup \{x\} \subseteq F$ und $F = U$, ist

$$x \in U, \text{ wenn } x^* \notin U.$$

Damit ist gezeigt, dass für alle $x \in \mathcal{B}_1$ gilt:

$$x \in U \Leftrightarrow x^* \notin U.$$

Somit ist U ein Ultrafilter.

Die Existenz von Ultrafiltern wird durch den übernächsten Satz — das Ultrafiltertheorem — belegt. Zuvor aber ein Hilfssatz für dieses Theorem:

3.2.14 Satz.-

Wenn $\mathcal{B}$ BOOLEscher Verband ist und wenn

$$C \subseteq \{ \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ echter Filter auf } \mathcal{B} \}$$

und wenn $\langle C, \langle \subseteq_C \rangle, \emptyset \rangle$ linear ist, dann ist $\bigcup C$ echter Filter auf $\mathcal{B}$.

Beweis: Seien die Voraussetzungen für $\mathcal{B}$ und C erfüllt. Dann gilt:

(1) $\bigcup C \subseteq \mathcal{B}_1$. Denn wenn $x \in \bigcup C$, dann $\exists \mathcal{F} (\mathcal{F} \in C \,\&\, x \in \mathcal{F})$. Sei $\mathcal{F}$ so. Dann $x \in \mathcal{F}$ & $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}_1$, also $x \in \mathcal{B}_1$.

(2) $1_{\mathcal{B}} \in \bigcup C$. Denn nach Voraussetzung ist $\langle C, \langle \subseteq_C \rangle, \emptyset \rangle$ linear, also $C \neq \emptyset$, also gibt es ein $\mathcal{F}$, so dass $\mathcal{F} \in C$. Sei $\mathcal{F} \in C$. Dann ist $\mathcal{F}$ Filter über $\mathcal{B}$. Dann $1_{\mathcal{B}} \in \mathcal{F}$. Also

$$\exists \mathcal{F} (\mathcal{F} \in C \,\&\, 1_{\mathcal{B}} \in \mathcal{F}).$$

Dann $1_{\mathcal{B}} \in \bigcup C$.

(3) $\forall x \forall y\, (x, y \in \bigcup C \Rightarrow \mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}(\{x, y\}) \in \bigcup C.$

Denn seien x, y $\in \bigcup C$.

Dann $\exists \mathcal{F}_1\, (\mathcal{F}_1 \in C\ \&\ x \in \mathcal{F}_1)$. Sei $\mathcal{F}_1$ so.

Ferner $\exists \mathcal{F}_2\, (\mathcal{F}_2 \in C\ \&\ y \in \mathcal{F}_2)$. Sei $\mathcal{F}_2$ so.

Nach Voraussetzung ist $\langle C, \langle \subseteq_C \rangle, \varnothing \rangle$ linear. Dann $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ oder $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$. Wenn $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, dann x, y $\in \mathcal{F}_2$, dann $\mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}(\{x, y\}) \in \mathcal{F}_2$, also $\mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}(\{x, y\}) \in \bigcup C$. Wenn $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$, dann x, y $\in \mathcal{F}_1$, dann $\mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}(\{x, y\}) \in \mathcal{F}_1$, dann $\mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}(\{x, y\}) \in \bigcup C$, also $\mathrm{Inf}_{\mathcal{B}}(\{x, y\}) \in \bigcup C$.

(4) $\forall x \forall z\, (x \in \bigcup C\ \&\ \langle x, z \rangle \in \mathcal{B}_{2,1} \Rightarrow z \in \bigcup C).$

Denn sei x $\in \bigcup C\ \&\ \langle$ x, z $\rangle \in \mathcal{B}_{2,1}$. Dann $\exists \mathcal{F}\, (\mathcal{F} \in C\ \&\ x \in \mathcal{F})$. Sei $\mathcal{F}$ so. Dann x $\in \mathcal{F}$ & $\langle$ x, z $\rangle \in \mathcal{B}_{2,1}$ und $\mathcal{F}$ ist ein Filter auf $\mathcal{B}$. Dann z $\in \mathcal{F}$. Dann z $\in \bigcup C$.

(5) Wenn C $\subseteq \{ \mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ echter Filter auf $\mathcal{B} \}$, dann $\bigcup C$ echter Filter auf $\mathcal{B}$.

Denn sei C $\subseteq \{ \mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ echter Filter auf $\mathcal{B} \}$. Angenommen $0_{\mathcal{B}} \in \bigcup C$. Dann $\exists \mathcal{F}\, (\mathcal{F} \in C\ \&\ 0_{\mathcal{B}} \in \mathcal{F})$. Sei $\mathcal{F}$ so. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{F}$ echter Filter auf $\mathcal{B}$. Dann $0_{\mathcal{B}} \notin \mathcal{F}$ im Widerspruch zu $0_{\mathcal{B}} \in \mathcal{F}$. Also $0_{\mathcal{B}} \notin \bigcup C$. Dann $\bigcup C$ echter Filter auf $\mathcal{B}$.

3.2.15 <u>Satz</u>.- (Ultrafiltertheorem)

Sei $\mathcal{B}$ BOOLEscher Verband, sei E $\subseteq \mathcal{B}_1$ und sei E in $\mathcal{B}$ unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer. Dann existiert ein Ultrafilter D auf $\mathcal{B}$ so dass E $\subseteq$ D.

<u>Beweis:</u> Sei $\mathcal{B}$ BOOLEscher Verband, sei E $\subseteq \mathcal{B}_1$ und sei E in $\mathcal{B}$ unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer. Sei F der von E auf $\mathcal{B}$ generierte Filter. Dann ist nach Satz 3.2.9 F echter Filter auf $\mathcal{B}$ & E $\subseteq$ F. Sei nun.

$$A = \{ \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ ist echter Filter auf } \mathcal{B}\ \&\ E \subseteq \mathcal{F} \}.$$

Dann ist A $\neq \varnothing$. Dann ist $\langle A, \langle \subseteq_A \rangle, \varnothing \rangle$ eine partielle Ordnung.

Sei C Kette in $\langle A, \langle \subseteq_A \rangle, \varnothing \rangle$.

Dann ist $C \subseteq A$ und $\langle A, \langle \subseteq_A \rangle, \emptyset \rangle$ ist linear geordnet. Dann folgt mit Satz 3.2.14:

$\bigcup C$ ist echter Filter auf $\mathcal{B}$, und des Weiteren gilt: $E \subseteq \bigcup C$.

Wir beweisen nun, dass $\bigcup C$ eine obere Schranke von C in $\langle A, \langle \subseteq_A \rangle \rangle$ ist.

Erstens ist $\langle A, \langle \subseteq_A \rangle, \emptyset \rangle$ eine partielle Ordnung & $\bigcup C \in A$ & $C \subseteq A$.

Zweitens gilt für alle $\mathcal{F} \in C$: $\langle \mathcal{F}, \bigcup C \rangle \in \subseteq_A$.

Das zeigt, dass alle linearen Teilklassen von A eine obere Schranke besitzen. Mit dem ZORNschen Lemma folgt dann, dass A wenigstens ein maximales Element besitzt. Sei D ein solches Element. Dann gilt: $E \subseteq D$ und D ist maximaler echter Filter auf $\mathcal{B}$. Denn sei D‘ echter Filter, so dass $D \subseteq D‘$, dann folgt $E \subseteq D‘$ und $D‘ \in A$ und $D‘ = D$. Mit Satz 3.2.13 folgt schließlich, dass D Ultrafilter auf $\mathcal{B}$ ist.

Für das Łošsche Theorem in Kapitel 3.3 benötigt man Filter, die von einer Menge I und nicht von einem BOOLEschen Verband ausgehen. Um für diese Filter den Anschluss an die vorhergehenden Begriffsbildungen herzustellen, dient der folgende Satz. Dabei soll darauf hingewiesen werden, dass in der Literatur meistens der Begriff 'F ist Filter auf I' definiert wird und nicht – so wie hier – 'F ist Filter auf $\mathcal{B}$' bzw. 'F ist Filter auf **V**(I)'. Diese Begriffe '... Filter auf I' und '... Filter auf **V**(I)' sind aber extensional äquivalent.

3.2.16 <u>Satz</u>.-

Für alle F und alle I gilt: *F ist Filter auf* $\mathbf{V}(I)$

gdw

(1) $I \neq \emptyset$, $F \subseteq \mathrm{POT}(I)$ und $I \in F$ &

(2) für alle X, Y $(X, Y \in F \Rightarrow X \cap Y \in F)$ &

(3) für alle X, Z $(((X \in F) \;\&\; (X \subseteq Z \subseteq I)) \Rightarrow Z \in F)$.

Beweis: Mit **V**(I) BOOLEscher Verband,

$$I = 1_{\mathbf{V}(I)}\ ,\ \varnothing = 0_{\mathbf{V}(I)}\ ,\ \cap = \sqcap_{\mathbf{V}(I)}\ \&\ \subseteq\ = \ \leq_{\mathbf{V}(I)}$$

offensichtlich.

Um weiter unten eine für die Messtheorie wichtige Folgerung aus dem Łoš'schen Theorem ziehen zu können, wird noch der Begriff des 'α - regulären Filters' benötigt; im Definiens kommt dabei der Ausdruck $|E|$ vor; mit $|E|$ wird die Kardinalität der Menge E bezeichnet.

3.2.17 Definition.-

D ist *α–regulärer Filter auf* ***V****(I)*

gdw

(1) α Kardinalzahl &

(2) D echter Filter auf **V**(I) &

(3) $\exists E \subseteq D\ \&\ |E| = \alpha\ \&\ \forall i\,(\, i \in I \Rightarrow \{\, e \mid e \in \mathrm{E}\ \&\ i \in e \,\}$ endl).

Die Existenz von α-regulären Filtern belegt:

3.2.18 Satz.-

Zu jeder Menge I mit unendlicher Kardinalität α gibt es einen α-regulären Ultrafilter auf **V** *(I).*

Beweis: Sei I unendliche Menge mit $|\mathrm{I}| = \alpha$.

Sei $\qquad \mathrm{J} = \{\, x \mid x \text{ endl} \subseteq \mathrm{I} \,\}$.

Dann gilt: $\qquad |\mathrm{I}| = |\mathrm{J}| = \alpha$.

Sei f eineindeutige Abbildung von I auf J.

Sei F Funktion auf I, so dass für alle $i \in$ I: F(i)= $\{ j \in \mathrm{I} \mid i \in \mathrm{f}(j) \}$, und sei $E = \mathrm{Ran}(F) = \{ F(i) \mid i \in I \}$.

Dann ist $E \subseteq \mathrm{POT}(I)$.

Des Weiteren ist F eineindeutig.

Denn seien i, j ∈ I, mit i ≠ j. Dann gibt es endliche Teilmengen von I, die i, aber nicht j, enthalten. Sei j* eine solche endliche Teilmenge von I. Dann gilt

$$f^{-1}(j^*) \in F(i) \;\&\; f^{-1}(j^*) \notin F(j);$$

und $F(i) \neq F(j)$ folgt.

F ist surjektiv, denn es ist E = Ran(F).

Dann $\forall e\,(e \in \mathrm{Ran}(F) \Rightarrow \exists i\,(i \in I \;\&\; e = F(i)))$.

F ist also eineindeutige, surjektive Abbildung von I nach E. Und es folgt:

$$|E| = |I| = \alpha.$$

Nun wird bewiesen, dass

$$\forall i\,(i \in I \Rightarrow \{ e \mid e \in E \;\&\; i \in e \} \text{ endl})$$

gilt. Sei dazu i ∈ I. Dann gilt aufgrund der Definition von F:

$$\forall k\,(k \in I \;\&\; i \in F(k) \Leftrightarrow k \in I \;\&\; k \in f(i)),$$

und $\{ k \mid k \in I \;\&\; i \in F(k) \} = \{ k \mid k \in I \;\&\; k \in f(i) \} = f(i)$ folgt.

Dann ist $F^* = F \restriction \{ k \mid k \in I \;\&\; i \in F(k) \}$

Bijektion von $\{ k \mid k \in I \;\&\; i \in F(k) \}$ nach $\{ e \mid e \in E \;\&\; i \in e \}$.

Denn erstens ist F* eineindeutig, da F eineindeutig. Zweitens gilt:

$$\forall e\,(e \in E \;\&\; i \in e \Rightarrow e \in \mathrm{Ran}(F^*)),$$

denn wenn $e \in E \;\&\; i \in e$, dann ist $F^{-1}(e) \in f(i) = \mathrm{Dom}(F^*)$.

Des Weiteren ist $\{ e \mid e \in E \;\&\; i \in e \}$ endlich,

da f(i) endlich ist. Somit gilt

$$\forall i\,(i \in I \Rightarrow \{ e \mid e \in E \;\&\; i \in e \} \text{ endl}).$$

Nun wird bewiesen, dass E in **V**(I) unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer ist (Def.

3.2.5). Dazu genügt es,

$$\forall X\,(\,X \text{ endl} \subseteq \mathrm{E} \Rightarrow \cap(X) \neq 0\,)$$ zu zeigen.

Sei X endl $\subseteq$ E.

Dann $\exists e\, \exists n\, (\, n \in \mathbb{N}\ \&\ e$ ist Abzählung der Länge n von X).

Seien e und n so. Dann ist also $\mathrm{X} = \{\mathrm{e}_i\}_{i \in \mathrm{n}}$. Dann gilt:

$$\forall i\,(\,i \in \mathrm{n} \Rightarrow \mathrm{F}(\mathrm{F}^{-1}(\mathrm{e}_i)) = \mathrm{e}_i\,).$$

Sei $$\mathrm{k} = \mathrm{f}^{-1}\,(\,\{\,\mathrm{F}^{-1}(\mathrm{e}_i)\,\}_{i \in \mathrm{n}}\,).$$

Dann ist $$\mathrm{f}(\mathrm{k}) = \{\,\mathrm{F}^{-1}(\mathrm{e}_i)\,\}_{i \in \mathrm{n}}\,.$$

Dann gilt $$\forall i\,(\,i \in \mathrm{n} \Rightarrow \mathrm{F}^{-1}(\mathrm{e}_i) \in \mathrm{f}(\mathrm{k})\,).$$

Dann gilt $$\forall i\,(\,i \in \mathrm{n} \Rightarrow \mathrm{k} \in \mathrm{F}(\mathrm{F}^{-1}(\mathrm{e}_i))\,),$$

also $$\forall i\,(\,i \in \mathrm{n} \Rightarrow \mathrm{k} \in \mathrm{e}_i\,),$$

also $$\mathrm{k} \in \cap\,(\,\{\,\mathrm{e}_i\,\}_{i \in \mathrm{n}}\,),$$

also $$\mathrm{k} \in \cap\,(\mathrm{X}).$$

Dann ist $\cap(\mathrm{X}) \neq 0$, also $$\mathrm{Inf}_{\mathbf{V}(\mathrm{I})}\,(\mathrm{X}) \neq 0_{\mathbf{V}(\mathrm{I})}\,.$$

Und E ist in $\mathbf{V}$(I) unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer. Nach dem Ultrafiltertheorem (3.2.15) ist dann E zu einem Ultrafilter auf $\mathbf{V}$(I) erweiterbar. Sei D so. Dann ist D Ultrafilter auf $\mathbf{V}$(I), $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{D}$, $|\mathrm{E}| = \alpha\ \&\ \forall i\,(\,i \in \mathrm{I} \Rightarrow \{\,e \mid e \in \mathrm{E}\ \&\ i \in e\,\}$ endl).

Damit werden die Bedingungen 2 und 3 von Definition 3.2.17 erfüllt. Und D ist α-regulärer Ultrafilter auf $\mathbf{V}$(I).

□

3.3 Das Theorem von Łoš

Im *Abschnitt 3.3* werden zunächst die Begriffe definiert, die für die Formulierung und den Beweis des Theorems von Łoš benötigt werden. - Eine *(homogene) Familie von Strukturen des Typs* μ ist eine nichtleere Funktion, deren Werte Strukturen vom Typ μ sind. - Wenn τ ein Term der mengentheoretischen Metasprache ist, dann ist das *verallgemeinerte Cartesische Produkt nach i aus I* von τ $\mathrm{CPr}_{i \in I}(\tau) = \{ f \mid f$ ist Funktion auf I & $\forall i\ (i \in I \Rightarrow f_i \in \tau)\}$. - Wenn F ein Filter auf $\mathbf{V}(I)$ ist, dann ist $\sim(F, I)$ die Klasse der 2-Tupel $\langle f, g\rangle$, so dass f, g Funktionen auf I sind und $\{ i \mid i \in I \;\&\; f(i) = g(i)\} \in F$ ist. $\sim(F, I)$ ist ein Äquivalenzprädikat zwischen Funktionen auf I. - Wenn $\mathcal{A}$ eine homogene Familie von Strukturen und F ein Filter auf $\mathbf{V}(\mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$ ist, dann ist $\approx(F, \mathcal{A}) = \sim(F, \mathrm{Dom}(\mathcal{A})) \upharpoonright \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1})$ ein Äquivalenzprädikat in $\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1})$. - Wenn $\mathcal{A}$ eine homogene Familie von Strukturen des Typs μ und F ein Filter auf $\mathbf{V}(\mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$ ist, dann ist *das reduzierte Prädikatprodukt nach i aus* $\mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ *der* $\mathcal{A}_{i,2,j}$ $(j \in \mathrm{Dom}(\mu_1))$ *in* $\mathcal{A}_{i,1}$ *modulo F*

$$\mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,2,j}, \mathcal{A}_{i,1}, F) = \{ t \mid t \text{ ist Folge der Länge } \mu_{1,j} \text{ in } \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1}) \;\&\; \{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \;\&\; \langle t_{k,i}\rangle_{k \in \{1, \ldots, \mu(1)(j)\}} \in \mathcal{A}_{i,2,j} \} \in F\}.$$

(Dies ist natürlich nicht die Definition des Begriffs des reduzierten Prädikatproduktes (für diese siehe Definitionsschema 3.3.8), sondern die Anwendung dieses Begriffs auf den Spezialfall, der in der Definition des Begriffs des reduzierten Produktes bzw. des quotierten reduzierten Produktes einer homogenen Familie von Strukturen modulo eines Filters verwendet wird (siehe unten)).

Nun stehen die Begriffe zur Verfügung, die in die Definition des Begriffs des *reduzierten Produktes einer homogenen Familie* $\mathcal{A}$ *von Strukturen des Typs* μ *modulo eines Filters F* eingehen:

$$\begin{aligned} &\mathrm{RPr}(\mathcal{A}, F) = \\ &\quad = \langle \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1}), \\ &\qquad \langle \mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,2,j}, \mathcal{A}_{i,1}, F)\rangle_{j \in \mathrm{Dom}(\mu(1))}, \\ &\qquad\quad \langle \langle \mathcal{A}_{i,3,k}\rangle_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} \rangle_{k \in \mu(2)} \rangle. \end{aligned}$$

Wenn $\mathcal{A}$ eine homogene Familie von Strukturen des Typs μ und F echter Filter auf $\mathbf{V}(\mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$ ist, dann ist $\mathrm{RPr}(\mathcal{A}, F)$ Struktur vom Typ μ.

Der nächste Schritt besteht grob gesprochen darin, die drei Glieder von $\mathrm{RPr}(\mathcal{A}, F)$ durch ihre Quotienten bzgl. der Äquivalenzrelation $\approx(F, \mathcal{A})$ zu ersetzen. Für das erste Glied ist dies:

$$\mathrm{Quot}(\approx(F, \mathcal{A})) = \{ [x]_{\approx(F, \mathcal{A})} \mid x \in \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1}) \}.$$

Für das zweite Glied ist dies:

$$\langle \mathrm{QRPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} (\mathcal{A}_{i,2,j}, \mathcal{A}_{i,1}, F) \rangle_{j \in \mathrm{Dom}(\mu(1))} =$$
$$= \langle \mathrm{QuotPräd}\,(\mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} (\mathcal{A}_{i,2,j}, \mathcal{A}_{i,1}, \mathrm{F})) \rangle_{j \in \mathrm{Dom}(\mu(1))}.$$

Für das dritte Glied ist dies:

$$\langle [\langle \mathcal{A}_{i,3,k} \rangle_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}]_{\approx(F,\mathcal{A})} \rangle_{k \in \mu(2)}.$$

Durch diese Ersetzung erhält man *das quotierte reduzierte Produkt von $\mathcal{A}$ modulo F:*

$$\mathrm{QRPr}\,(\mathcal{A}, F) =$$
$$= \langle \mathrm{Quot}(\approx(F, \mathcal{A})),$$
$$\langle \mathrm{QRPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} (\mathcal{A}_{i,2,j}, \mathcal{A}_{i,1}, F) \rangle_{j \in \mathrm{Dom}(\mu(1))},$$
$$\langle [\langle \mathcal{A}_{i,3,k} \rangle_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}]_{\approx(F,\mathcal{A})} \rangle_{k \in \mu(2)} \rangle.$$

Wenn $\mathcal{A}$ eine homogene Familie von Strukturen des Typs μ und F echter Filter auf $\mathbf{V}(\mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$ ist, dann ist QRPr $(\mathcal{A}, F)$ eine Struktur vom Typ μ.

Ist F ein Ultrafilter auf $\mathbf{V}(\mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$, dann heißt QRPr $(\mathcal{A}, F)$ das *Ultraprodukt von $\mathcal{A}$ modulo F.* Ist F ein Ultrafilter auf $\mathbf{V}(\mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$ und sind die Glieder der Familie $\mathcal{A}$ alle miteinander identisch, d.h. $\mathrm{Ran}(\mathcal{A})$ eine Einermenge, dann heißt QRPr *$(\mathcal{A}, F)$ die Ultrapotenz von $\mathcal{A}$ modulo F.*

Das *Theorem von Łoš* besagt nun grob gesprochen, dass ein Ultraprodukt QRPr $(\mathcal{A}, F)$ eine Formel ϕ genau dann erfüllt, wenn fast alle Faktoren des Ultraproduktes ϕ erfüllen. Die wegen der Bereitstellung der erforderlichen Belegungen etwas komplizierte genaue Formulierung des Theorems befindet sich auf Seite 116. Das Korollar des Theorems von Łoš für den Spezialfall der Ultrapotenzen ist einfacher und besagt: Wenn $\mathcal{S}$ eine Sprache erster Stufe vom Typ μ, $\mathcal{A}$ eine homogene Familie von Strukturen des Typs μ mit $\mathrm{Ran}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{B}\}$ und F Ultrafilter auf $\mathbf{V}(\mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$ ist, dann ist QRPr $(\mathcal{A}, F)$ elementar äquivalent $\mathcal{B}$ in $\mathcal{S}$, d.h. QRPr $(\mathcal{A}, F)$ erfüllt genau die Sätze von $\mathcal{S}$, die $\mathcal{B}$ erfüllt (S. 124).

Der Rest des Abschnitts 3.3 ist einer ersten wissenschaftstheoretisch relevanten Anwendung des Theorems von Łoš gewidmet, nämlich dem Beweis des Theorems, dass es zu jeder Struktur $\mathcal{A}$ mit unendlichem Individuenbereich $\mathcal{A}_1$ und jeder unendlichen Kardinalzahl α einen Ultrafilter U auf $\mathbf{V}(\alpha)$ gibt, so dass die Kardinalzahl des Individuenbereichs der Ultrapotenz QRPr $(\mathcal{A}, U)$ von $\mathcal{A}$ modulo U gleich $|\mathcal{A}_1|^{\alpha}$ ist. Wegen des Korollars zum Theorem von Łoš für den Spezialfall der Ultrapotenzen können allfällige Schwierigkeiten in wissenschaftstheoretischen Untersuchungen, die auf einer zu kleinen Kardinalzahl des Individuenbereichs einschlägiger Strukturen beruhen, durch den Übergang zu geeigneten Ultrapotenzen umgangen werden.

3.3.1. <u>Definition</u>.-

Für alle $\mathcal{A}$, μ: *$\mathcal{A}$ ist eine Familie von Strukturen vom Typ μ*

gdw

$\mathcal{A}$ ist nichtleere Funktion & $\forall i\,(\,i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A}_i$ ist Struktur vom Typ $\mu\,)$.

3.3.2. <u>Definition</u>.-

Für alle $\mathcal{A}$: *$\mathcal{A}$ ist eine homogene Familie von Strukturen*

gdw

es ein μ gibt, so dass $\mathcal{A}$ Familie von Strukturen vom Typ μ ist.

3.3.3. <u>Satz</u>.-

Zu jeder homogenen Familie $\mathcal{A}$ von Strukturen gibt es genau einen Typ μ.

3.3.4 <u>Definition</u>.-

Für alle $\mathcal{A}$: $\mathrm{typ}^*(\mathcal{A}) = \mathrm{typ}^\circ(\,\mathrm{Ran}(\mathcal{A})\,)$.

3.3.5 <u>Satz</u>.-

Für alle $\mathcal{A}$: Wenn $\mathcal{A}$ ist homogene Familie von Strukturen, dann gilt

$$\forall j\,(j \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathrm{typ}^*(\mathcal{A}) = \mathrm{typ}(\mathcal{A}_j)\,).$$

<u>Beweis:</u> Sei $\mathcal{A}$ homogene Familie von Strukturen. Dann gibt es ein μ, so dass $\mathcal{A}$ Familie von Strukturen des Typs μ ist. Sei μ so. Dann ist $\mathcal{A}$ nichtleere Funktion & und es gilt für alle $j \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$: $\mathcal{A}_j$ ist Struktur vom Typ μ .

Dann ist nach Definition 2.2.24 $\mathrm{Ran}(\mathcal{A})$ homogene Klasse von Strukturen des Typs μ.

Dann folgt mit 2.2.26, da u. a. $\mu \in \{\mathrm{typ}(\mathcal{B}\}_{\mathcal{B} \in \mathrm{Ran}(\mathcal{A})}\}$:

$$\mathrm{typ}^\circ(\mathrm{Ran}(\mathcal{A})) = \mu.$$

Und mit 3.3.4 folgt: $\text{typ}^*(\mathcal{A}) = \mu$.

Also gilt für alle $j \in \text{Dom}(\mathcal{A})$:

$$\text{typ}^*(\mathcal{A}) = \text{typ}(\mathcal{A}_j).$$

3.3.6. <u>Definitionsschema</u>.-

Wenn τ ein Term ist, dann soll die folgende Formel ein Axiom sein (das dann eine Definition ist):

$$\text{CPr}_{i \in I}(\tau) = \{ f \mid f \text{ ist Funktion auf } I \,\&\, \forall i \,(i \in I \Rightarrow f_i \in \tau) \}.$$

($\text{CPr}_{i \in I}(\tau)$ soll 'das Cartesische Produkt nach i aus I von τ' heißen.)

Für die weitere Konstruktion ist die folgende Prädikat wesentlich:

3.3.7. <u>Definition</u>.-

$\sim(F, I) = \{ p \mid$ es gibt ein f und ein g, so dass f, g Funktionen auf I sind &

$$p = \langle f, g \rangle \,\&\, \{ i \mid i \in I \,\&\, f(i) = g(i) \} \in F \}.$$

3.3.8 <u>Definitionsschema</u>.-

Wenn τ und α Terme sind, dann soll die folgende Formel ein Axiom sein (welches dann eine Definition ist):

$$\text{RPPr}_{i \in I}(\tau, \alpha, F) = \{ t \mid t \text{ ist Folge der Länge } \text{stz}^*(\langle \tau \rangle_{i \in I}) \text{ in } \text{CPr}_{i \in I}(\alpha)$$

$$\&\, \{ i \mid i \in I \,\&\, \langle t_{k,i} \rangle_{k \in \text{stz}^*(\langle \tau \rangle\, i \in I)} \in \tau \} \in F \}.$$

($\text{RPPr}_{i \in I}(\tau, \alpha, F)$ soll 'das reduzierte Prädikatprodukt nach i aus I der τ in α modulo F' heißen.)

Bevor nun gezeigt wird, dass $\text{CPr}_{i \in I}(\tau)$ durch $\sim(F, I)$ in Äquivalenzklassen eingeteilt wird, sollen kurz die Definitionen der einschlägigen mengentheoretischen Begriffe rekapituliert werden.

3.3.9 Definitionen.-

Für alle $R, \mathcal{A}$: R ist *Äquivalenzprädikat* in $\mathcal{A}$

gdw R ist 2-stelliges Prädikat in $\mathcal{A}$ & R ist symmetrisch in $\mathcal{A}$ & R ist transitiv in $\mathcal{A}$ & R ist reflexiv in A.

Für alle R: $[x]_R = \{y \mid \langle x, y\rangle \in R\}$.

($[x]_R$ ist die 'Äquivalenzklasse von x unter dem Prädikat R').

Für alle R: $\mathrm{Quot}(R) = \{ [x]_R \mid x \in \mathrm{fld}(R) \}$.

($\mathrm{Quot}(R)$ ist die 'Quotientenklasse des Prädikats R').

Für alle P, R: $\mathrm{QuotPräd}(P, R) = \{ u \mid \exists t\, (t \in P \,\&\, u = \langle [t_k]_R \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(t)}) \}$.

($\mathrm{QuotPräd}(P, R)$ ist 'das durch P induzierte Quotientenprädikat bzgl. des Prädikats R').

Für alle $R, \mathcal{A}$: $R[\![\mathcal{A} = \{ p \mid p \in R \,\&\, p \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \}$.

($R[\![\mathcal{A}$ ist 'die Totalbeschränkung des Prädikats R auf $\mathcal{A}$').

Für alle $\mathcal{A}, R$: $\mathcal{A}/R = \mathrm{Quot}(R[\![\mathcal{A})$.

($\mathcal{A}/R$ ist 'die Quotientenklasse des Prädikats R in $\mathcal{A}$').

3.3.10 Definition.-

Für alle $\mathcal{A}, F$: $\approx(F, \mathcal{A}) = \sim(F, \mathrm{Dom}(\mathcal{A}))\, [\![\, \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} (\mathcal{A}_{i,1})$.

3.3.11 Definitionsschema.-

Wenn τ und α Terme sind, dann soll die folgende Formel ein Axiom sein (welches dann eine Definition ist):

$$\mathrm{QRPPr}_{i \in I}(\,\tau, \alpha, F\,) = \mathrm{QuotPräd}(\,\mathrm{RPPr}_{i \in I}(\,\tau, \alpha, F\,), \sim\!(F, I) \llbracket\, \mathrm{CPr}_{i \in I}(\alpha)\,).$$

($\mathrm{QRPPr}_{i \in I}(\,\tau, \alpha, F\,)$ soll 'das Quotientenprädikat des reduzierten Prädikatprodukts nach i aus I der τ in α modulo F' heißen.)

3.3.12 Satz.-

Für alle $\mathcal{A}$, F: wenn $\mathcal{A}$ eine homogene Familie von Strukturen und F Filter auf $\mathbf{V}(\mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$ ist, dann ist $\approx\!(F, \mathcal{A})$ Äquivalenzprädikat in $\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1})$.

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ homogene Familie von Strukturen und sei F Filter auf $\mathbf{V}(\mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$. Sei $p \in \approx\!(F, \mathcal{A})$. Dann ist nach Definition 3.3.11a

$$p \in \sim\!(F, \mathrm{Dom}(\mathcal{A})\,) \llbracket\, \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1}).$$

Dann folgt mit 3.3.9:

$$p \in \sim\!(F, \mathrm{Dom}(\mathcal{A})\,) \;\&\; p \in \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1}) \otimes \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1}).$$

Dann gibt es Funktionen f, g auf $\mathrm{Dom}(\mathcal{A})$, so dass

$$p = \langle f, g\rangle \;\&\; \{\, i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \;\&\; f(i) = g(i)\,\} \in F \;\&\; f, g \in \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1}).$$

Dann ist p ein 2-Tupel, dann gilt: $\approx\!(F, \mathcal{A})$ ist Klasse von 2-Tupeln; somit ist $\approx\!(F, \mathcal{A})$ 2-stelliges Prädikat.

Da $\mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \in F$ gilt für alle $f \in \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1})$:

$$\langle f, f\rangle \in \approx\!(F, \mathcal{A}).$$

Des Weiteren gilt für alle $f, g \in \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1})$:

$$\langle f, g\rangle \in \approx\!(F, \mathcal{A}) \Leftrightarrow \langle g, f\rangle \in \approx\!(F, \mathcal{A});$$

das zeigt, dass $\approx(\mathrm{F}, \mathcal{A})$ symmetrisch in $\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1})$ ist.

Seien nun f, g und h $\in \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1})$ und gelte $\langle \mathrm{f}, \mathrm{g}\rangle, \langle \mathrm{g}, \mathrm{h}\rangle \in \approx(\mathrm{F}, \mathcal{A})$.

Dann folgt mit Filtereigenschaft (3) von Definition 3.2.1:

$$\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \ \&\ \mathrm{f}(i) = \mathrm{h}(i) \} \in \mathrm{F};$$

somit ist $\approx(\mathrm{F}, \mathcal{A})$ transitiv in $\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1})$.

Und es ist erwiesen, dass $\approx(\mathrm{F}, \mathcal{A})$ ein Äquivalenzprädikat in $\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1})$ ist.

Nun wird bewiesen, dass $\approx(F, I)$ bezüglich der reduzierten Prädikatprodukte eine Kongruenzrelation ist.

3.3.13 Satz.-

Für alle $\mathcal{A}, \mu, j, F$: wenn $\mathcal{A}$ Familie von Strukturen vom Typ μ und $j \in \mathrm{Dom}(\mu_1)$ und F Filter auf $\mathbf{V}(\mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$ ist, dann gilt für alle t, u:

$$\text{wenn } t \in \mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,2,j}, \mathcal{A}_{i,1}, F) \ \&\ u \text{ Folge der Länge } \mu_1(j)$$

$$\text{in } \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1}) \ \&\ \forall k\,(k \in \mathrm{Dom}(t) \Rightarrow (t_k, u_k) \in \approx(F, \mathcal{A}))$$

$$\text{dann } u \in \mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,2,j}, \mathcal{A}_{i,1}, F).$$

<u>Beweis :</u> Seien die Voraussetzungen erfüllt sei

$$\mathrm{t} \in \mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,2,\mathrm{j}}, \mathcal{A}_{i,1}, \mathrm{F}),$$

sei u Folge der Länge $\mu_1(\mathrm{j})$ in $\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1})$ und gelte für alle k:

$$k \in \mathrm{Dom}(\mathrm{t}) \Rightarrow (\mathrm{t}_k, \mathrm{u}_k) \in \approx(\mathrm{F}, \mathcal{A}).$$

Da $\langle \mathcal{A}_{i,2,\mathrm{j}} \rangle_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}$ eine homogene Familie von Prädikaten ist, gilt:

$$\mathrm{stz}^*(\langle \mathcal{A}_{i,2,\mathrm{j}} \rangle_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}) = \mu_{1,\mathrm{j}}\,.$$

Nun gilt:

$$\exists X\,(X \text{ ist Funktion auf } \{1, ..., \mu_{1,\mathrm{j}}\} \ \&\ \forall k\,(k \in \{1, ..., \mu_{1,\mathrm{j}}\} \Rightarrow$$

$$X_k = \{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \ \&\ \mathrm{t}_{k,i} = \mathrm{u}_{k,i} \})).$$

Sei X so.

Da $$t \in \mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\,(\mathcal{A}_{i,2,j}\,, \mathcal{A}_{i,1}\,, \mathrm{F}\,),$$

ist nach Definitionsschema 3.3.8

$$\mathrm{Y} = \{\, i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \;\&\; \langle\, \mathrm{t}_k(i)\,\rangle_{k \in \mathrm{Dom(t)}} \in \mathcal{A}_{i,2,j}\,\} \in \mathrm{F}.$$

Sei $$\mathrm{Z} = \{\, i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \;\&\; \langle\, \mathrm{u}_k(i)\,\rangle_{k \in \mathrm{Dom(u)}} \in \mathcal{A}_{i,2,j}\,\}.$$

Da F Filter auf **V**(Dom($\mathcal{A}$)) folgt:

$$\mathrm{X}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{X}_{\mu,1,j} \cap \mathrm{Y} \in \mathrm{F};$$

und da

$$\mathrm{X}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{X}_{\mu,1,j} \cap \mathrm{Y} \subseteq \mathrm{Z},$$

gilt wegen Filterreigenschaft(4) von Definition 3.2.1: Z $\in$ F.

Für u gilt also: u ist Folge der Länge $\mu_{1,j}$ in $\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\,(\mathcal{A}_{i,1}\,)$ und

$$\{\, i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \;\&\; \langle\, \mathrm{u}_k(i)\,\rangle_{k \in \mathrm{Dom(u)}} \in \mathcal{A}_{i,2,j}\,\} \in \mathrm{F}.$$

Und es folgt

$$\mathrm{u} \in \mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\,(\mathcal{A}_{i,2,j}\,, \mathcal{A}_{i,1}\,, \mathrm{F}\,).$$

Das gilt für alle $j \in \mathrm{Dom}(\mu_1)$.

Die Definitionsschemata 3.3.8 und 3.3.11 werden nun auf Modelle angewendet; es ergibt sich ein Begriff – RPr $(\mathcal{A}, F)$ – für das 'reduzierte Produkt von $\mathcal{A}$ modulo *F*' und einer – QRPr $(\mathcal{A}, F)$ – für das 'quotierte, reduzierte Produkt von $\mathcal{A}$ modulo *F*'.

3.3.14 <u>Definitionen</u>.-

Für alle $\mathcal{A}$ und alle *F:*

$$\mathrm{RPr}\,(\mathcal{A}, F) = \langle\, \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}\,(\mathcal{A})}\,(\mathcal{A}_{i,1})\,,\, \langle\, \mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\,(\mathcal{A}_{i,2,j}\,, \mathcal{A}_{i,1}\,, F\,)\,\rangle_{j \in \mathrm{Dom}(\,\mathrm{typ}^*(\mathcal{A})\,(1)\,)}\,,$$
$$\langle\, \langle\, \mathcal{A}_{i,3,k}\,\rangle_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\,\rangle_{k \in \mathrm{typ}^*(\mathcal{A})\,(2)}\,\rangle;$$

$$\mathrm{QRPr}\,(\mathcal{A}, F) \;=\; \langle\, \mathrm{Quot}(\approx(F, \mathcal{A})),\, \langle\, \mathrm{QRPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\,(\mathcal{A}_{i,2,j}\,, \mathcal{A}_{i,1}\,, F\,)\,\rangle_{j \in \mathrm{Dom}(\,\mathrm{typ}^*(\mathcal{A})\,(1)\,)}\,,$$
$$\langle\, [\,\langle\, \mathcal{A}_{i,3,k}\,\rangle_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\,]_{\approx(F, \mathcal{A})}\,\rangle_{k \in \mathrm{typ}^*(\mathcal{A})\,(2)}\,\rangle.$$

Im Theorem von Łoš geht es um einen Zusammenhang zwischen Formeln einer einstufigen, prädikatenlogischen Sprache S und bestimmten Strukturen. Daher muss nun nachgewiesen werden, dass die fraglichen Strukturen geeignete Modelle für die fraglichen Sprache sind. Dies belegen die nächsten beiden Sätze, die zeigen, dass sowohl ein quotiertes, reduziertes Produkt als auch ein reduziertes Produkt genauso wie die Ausgangsstrukturen geeignete Modelle für eine Sprache erster Stufe sind:

3.3.15 Satz.-

Wenn $\mathcal{A}$ Familie von Strukturen vom Typ μ und F echter Filter auf $\mathbf{V}$(Dom($\mathcal{A}$)) *ist, dann ist*

QRPr *($\mathcal{A}$, F) Struktur vom Typ μ.*

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ Familie von Strukturen vom Typ μ, sei F echter Filter auf $\mathbf{V}$(Dom($\mathcal{A}$)), sei $Q = \approx(F, \mathcal{A})$ und sei $\mathcal{B} = \text{QRPr}(\mathcal{A}, F)$.

Um die Aussage '$\mathcal{B}$ ist Struktur vom Typ μ' gemäß Definition 2.2.7 zu erweisen, sind die folgenden Beweisschritte zu gehen:

(A) $\mathcal{B}_1 \neq \emptyset$.

(B) $\mathcal{B}_2$ ist Funktion auf Dom(μ_1) &

$$\forall j\,(j \in \text{Dom}(\mu_1) \Rightarrow \mathcal{B}_{2,j} \text{ ist } \mu_{1,j}\text{- stelliges Prädikat in } \mathcal{B}_1).$$

(C) $\mathcal{B}_3$ ist Abbildung von μ_2 nach $\mathcal{B}_1$.

(D) $\mathcal{B}$ ist ein 3-Tupel, μ ist 2-Tupel und μ_1 ist Folge in $\mathbb{N}^+$.

Ad (A). Nach Definition 3.3.1 ist $\mathcal{A}$ nichtleere Funktion und es gilt

$$\forall i\,(i \in \text{Dom}(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A}_i \text{ ist Struktur vom Typ } \mu).$$

Dann gilt nach Definition 2.2.7:

$$\forall i\,(i \in \text{Dom}(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A}_{i,1} \neq 0);$$

also $$\forall i\,(i \in \text{Dom}(\mathcal{A}) \Rightarrow \exists a\; a \in \mathcal{A}_{i,1}).$$ Dann

$$\exists x\,(x \text{ ist Funktion auf Dom}(\mathcal{A}) \;\&\; \forall i\,(i \in \text{Dom}(\mathcal{A}) \Rightarrow x_i \in \mathcal{A}_{i,1})).$$

Dann $\exists x \; x \in \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1})$.

Sei x so. Dann ist $[x]_Q \in \mathrm{Quot}(Q)$,

denn $\mathrm{Quot}(Q) = \mathrm{Quot}(\approx(F, \mathcal{A})) = \mathrm{Quot}(\sim(F, \mathrm{Dom}(\mathcal{A}))\,[\![\, \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1})\,)$

$= \{ [x]_Q \mid x \in \mathrm{fld}(\sim(F, \mathrm{Dom}(\mathcal{A}))\,[\![\, \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1})\,)\,\}$.

Also gilt $\mathcal{B}_1 \neq \emptyset$.

Ad (B). Nach Definition 3.3.14 ist

$$\mathcal{B}_2 = \langle\, \mathrm{QRPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,2,j}, \mathcal{A}_{i,1}, F)\,\rangle_{j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{typ}^*(\mathcal{A})\,1)}.$$

Es ist $\mathcal{A}$ Familie von Strukturen des Typs μ. Dann ist nach Satz 3.3.3b $\mathrm{typ}^*(\mathcal{A}) = \mu$.

Also ist $\mathcal{B}_2$ eine Funktion auf $\mathrm{Dom}(\mu_1)$.

Nun ist $\forall j\,(j \in \mathrm{Dom}(\mu_1) \Rightarrow \mathcal{B}_{2,j}$ ist $\mu_{1,j}$ - stelliges Prädikat in $\mathcal{B}_1)$ zu zeigen.

Sei $j \in \mathrm{Dom}(\mu_1)$.

Dann gilt

$$\mathcal{B}_{2,j} = \mathrm{QRPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,2,j}, \mathcal{A}_{i,1}, F).$$

Nach Definitionsschema 3.3.11 gilt:

$$\mathrm{QRPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,2,j}, \mathcal{A}_{i,1}, F) =$$

$$\mathrm{QuotPräd}\,(\mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,2,j}, \mathcal{A}_{i,1}, F), \sim(F, \mathrm{Dom}(\mathcal{A}))\,[\![\, \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1})\,).$$

Und nach 3.3.9 gilt:

$$\mathrm{QuotPräd}\,(\mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,2,j}, \mathcal{A}_{i,1}, F), Q)$$

$$= \{ u \mid \exists t\,(t \in \mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,2,j}, \mathcal{A}_{i,1}, F)\ \&\ u = \langle [t_k]_Q \rangle_{k \in \mathrm{Dom}(t)})\,\}.$$

Sei nun $u \in \mathrm{QuotPräd}\,(\mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,2,j}, \mathcal{A}_{i,1}, F), Q)$;

dann gibt es ein $t \in \mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,2,j}, \mathcal{A}_{i,1}, F)$

so dass $u = \langle [t_k]_Q \rangle_{k \in \mu(1)(j)}$;

dann ist u eine Folge der Länge $\mu_{1,j}$ in Quot(Q); das zeigt, dass

$$\mathrm{QuotPräd}\,(\mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,2,j}, \mathcal{A}_{i,1}, F), Q)$$

ein $\mu_{1,j}$ - stelliges Prädikat in Quot(Q) ist. Also gilt für alle $j \in \mathrm{Dom}(\mu_1)$:

$\mathcal{B}_{2,j}$ ist ein $\mu_{1,j}$ - stelliges Prädikat in $\mathcal{B}_1$.

Ad (C). Es gilt:

$$\mathcal{B}_3 = \langle\ [\langle\ \mathcal{A}_{i,3,k}\ \rangle_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\ ]_{\approx(\mathrm{F},\mathcal{A})}\ \rangle_{k \in (\mathrm{typ}^*(\mathcal{A}))\,2}\ .$$

Nach Definition 3.3.4 ist $(\mathrm{typ}^*(\mathcal{A}))_2 = \bigcup(\ \{\mathrm{Dom}(\mathcal{A}_{i,3})\}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\ )$. Und da

$$\forall i\ (\ i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A}_{i,3} \text{ ist Abbildung von } \mu_2 \text{ nach } \mathcal{A}_{i,1}\ ) \qquad \text{gilt,}$$

ist $(\ \mathrm{typ}^*(\mathcal{A})\ )_2 = \bigcup\{\mu_2\}$. Und es folgt: $\mathrm{typ}^*(\mathcal{A})_2 = \mu_2$.

Sei nun $k \in \mu_2$. Dann gilt:

$$\mathcal{B}_{3,k} = [\ \langle\ \mathcal{A}_{i,3,k}\ \rangle_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\ ]_Q\ .$$

Dann ist $\mathcal{B}_{3,k} \in \mathrm{Quot}(Q) = \mathcal{B}_1$. Das zeigt, dass $\mathcal{B}_3$ Funktion von μ_2 nach $\mathcal{B}_1$ ist.

Ad (D). Offensichtlich gilt: $\mathcal{B}$ ist ein 3-Tupel, μ ist 2-Tupel und μ_1 ist Folge in $\mathbb{N}^+$.

□

3.3.16 <u>Satz</u>.-

Wenn $\mathcal{A}$ Familie von Strukturen vom Typ μ und F echter Filter auf **V**(Dom($\mathcal{A}$)) *ist, dann ist*

RPr *($\mathcal{A}$, F) Struktur vom Typ μ.*

<u>Beweis:</u> Sei $\mathcal{A}$ Familie von Strukturen vom Typ μ, sei F echter Filter auf **V**(Dom($\mathcal{A}$)) und sei

$$\mathcal{B} = \mathrm{RPr}\ (\mathcal{A}, \mathrm{F}).$$

Um die Aussage '$\mathcal{B}$ ist Struktur vom Typ μ' gemäß Definition 2.2.7 zu erweisen, sind die Aussagen (A) bis (D) wie im obigen Beweis zu zeigen.

Ad (A). Es gilt wie in 3.3.15: $\mathcal{B}_1 \neq \emptyset$.

Ad (B). Nach Definition 3.3.14 ist

$$\mathcal{B}_2 = \langle\ \mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\ (\mathcal{A}_{i,2,j}\ , \mathcal{A}_{i,1}\ , \mathrm{F}\ )\ \rangle_{j \in \mathrm{Dom}(\ \mathrm{typ}^*(\mathcal{A})\ 1\ )}\ .$$

Es ist nach Satz 3.3.5 $\mathcal{B}_2$ eine Funktion auf Dom(μ_1).

Nun ist $\quad \forall j\ (j \in \mathrm{Dom}(\mu_1) \Rightarrow \mathcal{B}_{2,j} \text{ ist } \mu_{1,j} \text{ - stelliges Prädikat in } \mathcal{B}_1\ ) \qquad$ zu zeigen.

Sei $j \in \mathrm{Dom}(\mu_1)$.

Dann gilt

$$\mathcal{B}_{2,j} = \mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\,(\mathcal{A}_{i,2,j}\,, \mathcal{A}_{i,1}\,, \mathrm{F}\,).$$

Nach Definitionsschema 3.3.8 gilt:

$$\mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\,(\mathcal{A}_{i,2,j}\,, \mathcal{A}_{i,1}\,, \mathrm{F}\,) =$$

$$\{\, t \mid t \text{ ist Folge der Länge } \mathrm{stz}^*(\langle \mathcal{A}_{i,2,j} \rangle_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}) \text{ in } \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom(A)}}\,(\mathcal{A}_{i,1})$$

$$\&\ \{\, i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})\ \&\ \langle \mathrm{t}_{k,i} \rangle_{k \in \mathrm{stz}^*(\langle \mathcal{A}, i, 2, j \rangle\, i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}))} \in \mathcal{A}_{i,2,j} \,\} \in F \,\}.$$

Sei nun $\mathrm{t} \in \mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\,(\mathcal{A}_{i,2,j}\,, \mathcal{A}_{i,1}\,, \mathrm{F}\,)$.

Dann ist t Folge der Länge $\mathrm{stz}^*(\langle \mathcal{A}_{i,2,j} \rangle_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})})$ in $\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom(A)}}\,(\mathcal{A}_{i,1})$.

Nun gilt: $\mathrm{stz}^*(\langle \mathcal{A}_{i,2,j} \rangle_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}) = \mu_{1,j}$;

und da endliche Folgen Tupel sind, ist t $\mu_{1,j}$ -stelliges Tupel in $\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom(A)}}\,(\mathcal{A}_{i,1})$.

Also gilt für alle $j \in \mathrm{Dom}(\mu_1)$:

$$\mathcal{B}_{2,j} \text{ ist ein } \mu_{1,j}\text{- stelliges Prädikat in } \mathcal{B}_1\,.$$

Ad (C). Es gilt: $\mathrm{typ}^*(\mathcal{A})_2 = \mu_2$.

Sei nun $\mathrm{k} \in \mu_2$. Dann gilt:

$$\mathcal{B}_{3,k} = \langle\, \mathcal{A}_{i,3,k} \,\rangle_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\,.$$

Dann ist $\mathcal{B}_{3,k} \in \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom(A)}}\,(\mathcal{A}_{i,1}) = \mathcal{B}_1$. Das zeigt, dass $\mathcal{B}_3$ Funktion von μ_2 nach $\mathcal{B}_1$ ist.

Ad (D). Offensichtlich gilt: $\mathcal{B}$ ist ein 3-Tupel, μ ist 2-Tupel und μ_1 ist Folge in $\mathbb{N}^+$.

□

Spezialfälle von Definition 3.3.14 erhält man, wenn der Filter F Ultrafilter ist und/oder wenn die Glieder der Familie $\mathcal{A}$ identisch sind. Ist F Ultrafilter auf **V**(Dom($\mathcal{A}$)), so nennt man QRPr($\mathcal{A}$, F) 'das **Ultraprodukt** von $\mathcal{A}$ modulo F'. Ist der Funktionswert für alle $i \in$ Dom($\mathcal{A}$) einer Familie $\mathcal{A}$ immer ein und dieselbe Struktur und ist F Ultrafilter, so nennt man QRPr($\mathcal{A}$, F) 'die **Ultrapotenz** von $\mathcal{A}$ modulo F'.

Auf die Frage, wie nun die einstufig formulierbaren Eigenschaften eines Ultraproduktes, mit den Eigenschaften der Faktoren zusammenhängen, die das Ultraprodukt konstituieren, gibt das Theorem von Łoš eine erschöpfende Antwort.

3.3.17 Satz.- (Das Theorem von Łoš).

Für alle S, $\mathcal{A}$, μ, F, ϕ, e, x, und y: Wenn S eine Sprache erster Stufe vom Typ μ ist, und $\mathcal{A}$ ist Familie von Strukturen vom Typ μ, und F ist Ultrafilter auf $\mathbf{V}(\mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$, *und* $\phi \in \mathrm{FML}_S$ *und*

$$e \text{ ist unendliche Folge in } \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,1}),$$

und
$$x = \langle [e_j]_{\approx(F,\mathcal{A})} \rangle_{j \in \mathbb{N}+}$$

und
$$y = \langle \langle e_{j,i} \rangle_{j \in \mathbb{N}+} \rangle_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})},$$

dann gilt:

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F) \models_{S,x} \phi$$

$$\text{gdw}$$

$$\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \;\&\; \mathcal{A}_i \models_{S,y(i)} \phi \} \in F.$$

Beweis: Seien die Voraussetzungen für S, $\mathcal{A}$, μ, F, ϕ, e, x, und y erfüllt. Sei $Q = \approx(F, \mathcal{A})$. Und sei $I = \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$. Dann ist x Belegung aus $\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F)$ und

$$\forall i\, (i \in I \Rightarrow y_i \text{ ist Belegung aus } \mathcal{A}_i).$$

Sei

$$M = \{ n \mid \forall\phi \forall e \forall x \forall y\, (\phi \in \mathrm{FML}_S \;\&\; \mathrm{grad}(\phi) = n \;\&$$

$$e \text{ ist unendliche Folge in } \mathrm{CPr}_{i \in I}(\mathcal{A}_{i,1}) \;\&$$

$$x = \langle [e_j]_Q \rangle_{j \in \mathbb{N}+} \;\&\; y = \langle \langle e_{j,i} \rangle_{j \in \mathbb{N}+} \rangle_{i \in I}$$

$$\Rightarrow \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F) \models_{S,x} \phi \text{ gdw } \{ i \mid i \in I \;\&\; \mathcal{A}_i \models_{S,y(i)} \phi \} \in F) \}.$$

Dann beweisen wir durch $\mathbb{N}$–Wertverlaufsinduktion

(*) $$\mathbb{N} \subseteq M.$$

Sei also $n \in \mathbb{N} \;\&\; \forall m\, (m < n \Rightarrow m \in M)$.

Seien $\phi \in \mathrm{FML}_S$ & $\mathrm{grad}(\phi) = n$ & e unendliche Folge in $\mathrm{CPr}_{i \in I}(\mathcal{A}_{i,1})$ &

$$x = \langle [e_j]_Q \rangle_{j \in \mathbb{N}+} \ \& \ y = \langle \langle e_{j,i} \rangle_{j \in \mathbb{N}+} \rangle_{i \in I} .$$

Nun sind zwei Fälle möglich:

<u>Fall 1:</u> n = 0. Dann ist ϕ Atomformel von $\mathbb{S}$. Dann sind zwei Fälle möglich:

<u>Fall 1.1:</u> $\exists a \exists b\, (a, b \in \mathrm{VAR}_S \cup \mathrm{INDK}_S \ \& \ \phi = (a =_S b)).$

Seien a, b so. Dann gilt:

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F) \models_{S,x} \phi$$

gdw $\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F) \models_{S,x} (a =_S b)$

gdw $\mathrm{val}_{S, \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F), x} (a) = \mathrm{val}_{S, \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F), x} (b)$

gdw $[\langle \mathrm{val}_{S, \mathcal{A}, i, y(i)} (a) \rangle_{i \in I}]_Q = [\langle \mathrm{val}_{S, \mathcal{A}, i, y(i)} (b) \rangle_{i \in I}]_Q$

gdw $(\langle \mathrm{val}_{S, \mathcal{A}, i, y(i)} (a) \rangle_{i \in I} , \langle \mathrm{val}_{S, \mathcal{A}, i, y(i)} (b) \rangle_{i \in I}) \in Q$

gdw $\{ i \mid i \in I \ \& \ \mathrm{val}_{S, \mathcal{A}, i, y(i)} (a) = \mathrm{val}_{S, \mathcal{A}, i, y(i)} (b) \} \in F$

gdw $\{ i \mid i \in I \ \& \ \mathcal{A}_i \models_{S, y(i)} (a =_S b) \} \in F$

gdw $\{ i \mid i \in I \ \& \ \mathcal{A}_i \models_{S, y(i)} \phi \} \in F.$

<u>Fall 1.2:</u> $\exists r \exists t\, (r \in \mathrm{Dom}(\mu_1) \ \& \ t$ ist Folge der Länge $\mu_{1,r}$ in

$$\mathrm{VAR}_S \cup \mathrm{INDK}_S \ \& \ \phi = {}^{S}P_r\, t_1 \ldots t_{\mu,1,r}).$$

Seien r und t so. Dann gilt:

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F) \models_{S,x} \phi$$

gdw $\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F) \models_{S,x} {}^{S}P_r\, t_1 \ldots t_{\mu,1,r}$

gdw $\langle \mathrm{val}_{S, \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F), x} (t_k) \rangle_{k \in \{1, \ldots, \mu, 1, r\}} \in \mathrm{QRPPr}_{i \in I}(\mathcal{A}_{i, 2, r} , \mathcal{A}_{i, 1} , F)$

gdw $\langle \mathrm{val}_{S, \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F), x} (t_k) \rangle_{k \in \{1, \ldots, \mu, 1, r\}} \in$

$$\mathrm{QuotPräd}\, (\mathrm{RPPr}_{i \in I}(\mathcal{A}_{i, 2, r} , \mathcal{A}_{i, 1} , F), Q)$$

gdw $\langle [\langle \mathrm{val}_{S, \mathcal{A}, i, y(i)} (t_k) \rangle_{i \in I}]_Q \rangle_{k \in \{1, \ldots, \mu, 1, r\}} \in$

$$\mathrm{QuotPräd}\, (\mathrm{RPPr}_{i \in I}(\mathcal{A}_{i, 2, r} , \mathcal{A}_{i, 1} , F), Q)$$

gdw $\langle \langle \mathrm{val}_{S, \mathcal{A}, i, y(i)} (t_k) \rangle_{i \in I} \rangle_{k \in \{ 1, \ldots, \mu, 1, r\}}$

$$\in \mathrm{RPPr}_{i \in I}(\mathcal{A}_{i, 2, r} , \mathcal{A}_{i, 1} , F)$$

gdw $\{ i \mid i \in \mathrm{I} \;\&\; \langle \mathrm{val}_{\mathrm{S}, \mathcal{A}, i, y(i)}(\mathrm{t}_k) \rangle_{k \in \{1, \ldots, \mu, 1, r\}} \in \mathcal{A}_{i, 2, r} \} \in \mathrm{F}$

gdw $\{ i \mid i \in \mathrm{I} \;\&\; \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S}, y(i)} {}^{\mathrm{S}}\mathrm{P}_r\, \mathrm{t}_1 \ldots \mathrm{t}_{\mu, 1, r} \} \in \mathrm{F}$

gdw $\{ i \mid i \in \mathrm{I} \;\&\; \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S}, y(i)} \phi \} \in \mathrm{F}$.

<u>Fall 2:</u> $n >_{\mathbb{N}} 0$. Dann ist $\mathrm{grad}_{\mathrm{S}}(\phi) >_{\mathbb{N}} 0$.

Dann sind drei Fälle möglich.

<u>Fall 2.1:</u> $\exists \psi (\psi \in \mathrm{FML}_{\mathrm{S}} \;\&\; \phi = \neg_{\mathrm{S}} \psi)$.

Sei ψ so. Dann ist $\mathrm{grad}_{\mathrm{S}}(\psi) <_{\mathbb{N}} n$. Dann folgt mit I. V. $\mathrm{grad}_{\mathrm{S}}(\psi) \in \mathrm{M}$. Dann gilt:

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{F}) \models_{\mathrm{S}, x} \psi \text{ gdw } \{ i \mid i \in \mathrm{I} \;\&\; \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S}, y(i)} \psi \} \in \mathrm{F}.$$

Dann gilt:

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{F}) \models_{\mathrm{S}, x} \phi$$

gdw $\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{F}) \models_{\mathrm{S}, x} \neg_{\mathrm{S}} \psi$

gdw nicht $\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{F}) \models_{\mathrm{S}, x} \psi$

(nach Induktionsvoraussetzung)

gdw nicht $\{ i \mid i \in \mathrm{I} \;\&\; \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S}, y(i)} \psi \} \in \mathrm{F}$

gdw $\mathrm{I} \setminus \{ i \mid i \in \mathrm{I} \;\&\; \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S}, y(i)} \psi \} \in \mathrm{F}$

(Ultrafiltereigenschaft von F)

gdw $\{ i \mid i \in \mathrm{I} \;\&\; \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S}, y(i)} \neg_{\mathrm{S}} \psi \} \in \mathrm{F}$

gdw $\{ i \mid i \in \mathrm{I} \;\&\; \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S}, y(i)} \phi \} \in \mathrm{F}$.

<u>Fall 2.2:</u> $\exists \psi \exists \delta (\psi, \delta \in \mathrm{FML}_{\mathrm{S}} \;\&\; \phi = (\psi \wedge_{\mathrm{S}} \delta))$.

Seien ψ und δ so. Dann ist $\mathrm{grad}_{\mathrm{S}}(\psi) <_{\mathbb{N}} n$ und $\mathrm{grad}_{\mathrm{S}}(\delta) <_{\mathbb{N}} n$. Dann ist nach I. V. $\mathrm{grad}_{\mathrm{S}}(\psi) \in \mathrm{M}$ und $\mathrm{grad}_{\mathrm{S}}(\delta) \in \mathrm{M}$. Dann gilt:

$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{F}) \models_{\mathrm{S}, x} \psi$ gdw $\{ i \mid i \in \mathrm{I} \;\&\; \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S}, y(i)} \psi \} \in \mathrm{F}$

& $\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{F}) \models_{\mathrm{S}, x} \delta$ gdw $\{ i \mid i \in \mathrm{I} \;\&\; \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S}, y(i)} \delta \} \in \mathrm{F}$.

Dann gilt: $\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{F}) \models_{\mathrm{S}, x} \phi$

gdw $\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{F}) \models_{\mathrm{S}, x} (\psi \wedge_{\mathrm{S}} \delta)$

gdw $\quad \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{F}) \models_{\mathrm{S},x} \psi \;\&\; \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{F}) \models_{\mathrm{S},x} \delta$

gdw $\quad \{\, i \mid i \in \mathrm{I} \;\&\; \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S},y(i)} \psi \,\} \in \mathrm{F}$

$\quad \& \; \{\, i \mid i \in \mathrm{I} \;\&\; \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S},y(i)} \delta \,\} \in \mathrm{F}$

gdw $\quad \{\, i \mid i \in \mathrm{I} \;\&\; \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S},y(i)} \psi \,\}$

$\quad \cap \{\, i \mid i \in \mathrm{I} \;\&\; \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S},y(i)} \delta \,\} \in \mathrm{F}$

gdw $\quad \{\, i \mid i \in \mathrm{I} \;\&\; \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S},y(i)} \psi \wedge_{\mathrm{S}} \delta \,\} \in \mathrm{F}$

gdw $\quad \{\, i \mid i \in \mathrm{I} \;\&\; \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S},y(i)} \phi \,\} \in \mathrm{F}.$

<u>Fall 2.3:</u> $\quad \exists \xi \exists \psi\, (\, \xi \in \mathrm{VAR}_{\mathrm{S}} \;\&\; \psi \in \mathrm{FML}_{\mathrm{S}} \;\&\; \phi = \exists_{\mathrm{S}}\, \xi\, \psi).$

Seien ξ und ψ so. Dann

$$\exists k\, (\, k \in \mathrm{Dom}({}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}) \;\&\; \xi = {}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_k).$$

Sei k so.

Dann ist $\phi = \exists^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_k\, \psi$ und es ist $\mathrm{grad}_{\mathrm{S}}(\psi) <_{\mathbb{N}} n$. Dann ist nach I. V. $\mathrm{grad}_{\mathrm{S}}(\psi) \in \mathrm{M}$.

Angenommen, $\quad \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{F}) \models_{\mathrm{S},x} \phi.$

Dann $\quad \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{F}) \models_{\mathrm{S},x} \exists^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_k\, \psi.$

Dann $\quad \exists z\, (\, z \in \mathrm{Quot}(\mathrm{Q}) \;\&\; \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{F}) \models_{\mathrm{S},x(k/z)} \psi\,).$

Sei z so.

Dann $\quad \exists t\, (\, t \in \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}(\mathcal{A}_{i,1}) \;\&\; z = [t]_{\mathrm{Q}}).$ Sei t so.

Dann $\quad \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{F}) \models_{\mathrm{S},x(k/[t]_{\mathrm{Q}})} \psi.$

Sei nun $e' = e(k/t)$, $x' = \langle\, [e'_j]_{\mathrm{Q}} \,\rangle_{j \in \mathbb{N}+}$ und $y' = \langle\, \langle\, e'_{j,i} \rangle_{j \in \mathbb{N}+} \rangle_{i \in \mathrm{I}}$.

Dann ist e' unendliche Folge in $\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}(\mathcal{A}_{i,1})$. Dann folgt mit I. V.:

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{F}) \models_{\mathrm{S},x'} \psi \text{ gdw } \{\, i \mid i \in \mathrm{I} \;\&\; \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S},y'(i)} \psi \,\} \in \mathrm{F}.$$

Nun ist
$$\begin{aligned} x' &= \langle\, [e'_j]_{\mathrm{Q}} \,\rangle_{j \in \mathbb{N}+} \\ &= \langle\, [e(k/t)_j]_{\mathrm{Q}} \,\rangle_{j \in \mathbb{N}+} \\ &= \langle\, [e_j]_{\mathrm{Q}} \,\rangle_{j \in \mathbb{N}+} (k/[t]_{\mathrm{Q}}) \\ &= x\, (k/[t]_{\mathrm{Q}}), \end{aligned}$$

und $$\begin{aligned} y' &= \langle \langle e'_{j,i} \rangle_{j \in \mathbb{N}+} \rangle_{i \in I} \\ &= \langle \langle e(k/t)_{j,i} \rangle_{j \in \mathbb{N}+} \rangle_{i \in I} \\ &= \langle \langle e_{j,i} \rangle_{j \in \mathbb{N}+} (k/t_i) \rangle_{i \in I} \\ &= \langle y_i (k/t_i) \rangle_{i \in I}. \end{aligned}$$

Dann gilt: $$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F) \models_{S, x(k/[t]Q)} \psi$$

gdw

$$\{ i \mid i \in I \,\&\, \mathcal{A}_i \models_{S, y(i)\,(k/t(i))} \psi \} \in F.$$

Dann ist $$\{ i \mid i \in I \,\&\, \mathcal{A}_i \models_{S, y(i)\,(k/t(i))} \psi \} \in F.$$

Nun ist $$\{ i \mid i \in I \,\&\, \mathcal{A}_i \models_{S, y(i)\,(k/t(i))} \psi \}$$ $$\subseteq \{ i \mid i \in I \,\&\, \mathcal{A}_i \models_{S, y(i)} \exists_S {}^S V_k\, \psi \}.$$

Denn sei $i \in \{ i \mid i \in I \,\&\, \mathcal{A}_i \models_{S, y(i)\,(k/t(i))} \psi \}$. Dann ist $i \in I$ und $t_i \in \mathcal{A}_{i,1}$ & $\mathcal{A}_i \models_{S, y(i)\,(k/t(i))} \psi$. Dann $\exists u\, (u \in \mathcal{A}_{i,1} \,\&\, \mathcal{A}_i \models_{S, y(i)\,(k/u)} \psi)$. Dann

$$\mathcal{A}_i \models_{S, y(i)} \exists_S {}^S V_k\, \psi.$$

Also ist $$i \in I \,\&\, \mathcal{A}_i \models_{S, y(i)} \exists_S {}^S V_k\, \psi.$$

Dann ist $$i \in \{ i \mid i \in I \,\&\, \mathcal{A}_i \models_{S, y(i)} \exists_S {}^S V_k\, \psi \}.$$

Nun ist F Filter auf $\mathbf{V}(\mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$. Dann ist

$$\{ i \mid i \in I \,\&\, \mathcal{A}_i \models_{S, y(i)} \exists_S {}^S V_k\, \psi \} \in F.$$

Dann ist $$\{ i \mid i \in I \,\&\, \mathcal{A}_i \models_{S, y(i)} \phi \} \in F.$$

Sei nun umgekehrt

$$\{ i \mid i \in I \,\&\, \mathcal{A}_i \models_{S, y(i)} \phi \} \in F.$$

Dann ist $$\{ i \mid i \in I \,\&\, \mathcal{A}_i \models_{S, y(i)} \exists_S {}^S V_k\, \psi \} \in F.$$

Sei $$i \in \{ i \mid i \in I \,\&\, \mathcal{A}_i \models_{S, y(i)} \exists_S {}^S V_k\, \psi \}.$$

Dann ist $i \in I \,\&\, \mathcal{A}_i \models_{S, y(i)} \exists_S {}^S V_k\, \psi$. Dann $\exists u\, (u \in \mathcal{A}_{i,1} \,\&\, \mathcal{A}_i \models_{S, y(i)(k/u)} \psi)$.

Also gilt $$\forall i\, \{ i \mid i \in I \,\&\, \mathcal{A}_i \models_{S, y(i)} \exists_S {}^S V_k\, \psi \}$$ $$\Rightarrow \exists u\, (u \in \mathcal{A}_{i,1} \,\&\, \mathcal{A}_i \models_{S, y(i)(k/u)} \psi)).$$

Dann folgt mit dem Auswahlaxiom:

$$\exists u\ (\ u \text{ ist Funktion auf } \{\ i \mid i \in \mathrm{I}\ \&\ \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S},\,y(i)} \exists_{\mathrm{S}}\ {}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_{\mathrm{k}}\ \psi\ \}$$

$$\&\ \forall i\ (\ i \in \mathrm{Dom}(u) \Rightarrow u_i \in \mathcal{A}_{i,\,1}\ \&\ \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S},\,y(i)\,(\mathrm{k}/u(i))}\ \psi\ )\ ).$$

Sei u so. Nach Voraussetzung gilt für alle i:

$$i \in \mathrm{I} \Rightarrow \exists a \text{ so dass } a \in \mathcal{A}_{i,\,1}\,.$$

Dann folgt mit dem Auswahlaxiom:

$$\exists a\ (\ a \text{ ist Funktion auf I } \&\ \forall i\ (\ i \in \mathrm{I} \Rightarrow a_i \in \mathcal{A}_{i,\,1}\ )\ ).$$

Sei a so. Dann gilt: $\exists m\ (\ m \text{ ist Funktion auf I } \&$

$$\forall i\ (\ i \in \mathrm{I}\ \&\ \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S},\,y(i)} \exists_{\mathrm{S}}\ {}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_{\mathrm{k}}\ \psi \Rightarrow m_i = \mathrm{u}_i\ )\ \&$$

$$\forall i\ (\ i \in \mathrm{I}\ \&\ \text{nicht}\ (\ \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S},\,y(i)} \exists_{\mathrm{S}}\ {}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_{\mathrm{k}}\ \psi\ ) \Rightarrow m_i = \mathrm{a}_i\ )\ ).$$

Sei m so. Dann ist $\mathrm{m} \in \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}\ (\mathcal{A}_{i,\,1})$. Dann gilt:

$$\{\ i \mid i \in \mathrm{I}\ \&\ \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S},\,y(i)} \exists_{\mathrm{S}}{}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_{\mathrm{k}}\ \psi\ \}$$

$$\subseteq \{\ i \mid i \in \mathrm{I}\ \&\ \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S},\,y(i)\,(\mathrm{k}/\mathrm{m}(i))}\ \psi\ \}.$$

Denn sei $\mathrm{i} \in \{\ i \mid i \in \mathrm{I}\ \&\ \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S},\,y(i)} \exists_{\mathrm{S}}\ {}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_{\mathrm{k}}\ \psi\ \}.$

Dann $\mathrm{i} \in \mathrm{I}\ \&\ \mathcal{A}_{\mathrm{i}} \models_{\mathrm{S},\,\mathrm{y(i)}} \exists_{\mathrm{S}}\ {}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_{\mathrm{k}}\ \psi.$

Dann ist $\mathrm{i} \in \mathrm{Dom(u)}$, also $\mathcal{A}_{\mathrm{i}} \models_{\mathrm{S},\,\mathrm{y(i)}\,(\mathrm{k}/\mathrm{u(i)})}\ \psi$, und $\mathrm{m}_{\mathrm{i}} = \mathrm{u}_{\mathrm{i}}$, also

$$\mathcal{A}_{\mathrm{i}} \models_{\mathrm{S},\,\mathrm{y(i)}\,(\mathrm{k}/\mathrm{m(i)})}\ \psi.$$

Also ist $\mathrm{i} \in \mathrm{I}\ \&\ \mathcal{A}_{\mathrm{i}} \models_{\mathrm{S},\,\mathrm{y(i)}\,(\mathrm{k}/\mathrm{m(i)})}\ \psi.$

Dann ist $\mathrm{i} \in\ \{\ i \in \mathrm{I}\ \&\ \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S},\,y(i)\,(\mathrm{k}/\mathrm{m}(i))}\ \psi\ \}.$

Nun ist nach Voraussetzung F Filter auf **V**(I) und nach Fallannahme ist

$$\{\ i \mid i \in \mathrm{I}\ \&\ \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S},\,y(i)} \exists_{\mathrm{S}}\ {}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_{\mathrm{k}}\ \psi\ \} \in \mathrm{F}.$$

Dann ist $\{\ i \mid i \in \mathrm{I}\ \&\ \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S},\,y(i)\,(\mathrm{k}/\mathrm{m}(i))}\ \psi\ \} \in \mathrm{F}.$

Ferner ist e(k/m) unendliche Folge in $\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}\ (\mathcal{A}_{i,\,1})$.

Sei weiter $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$. Dann ist

$$\mathrm{y}_{\mathrm{i}}\ (\mathrm{k}/\mathrm{m}_{\mathrm{i}}) = \langle\ \mathrm{e}_{j,\,\mathrm{i}}\ \rangle_{j \in \mathrm{N}+}\ (\mathrm{k}/\mathrm{m}_{\mathrm{i}}) = \langle\ \mathrm{e}\ (\mathrm{k}/\mathrm{m})_{j,\,\mathrm{i}}\ \rangle_{j \in \mathrm{N}+}\,.$$

Dann ist $\langle \langle e\ (k/m)_{j,i} \rangle_{j \in \mathbb{N}+} \rangle_{i \in I} = \langle y_i\ (k/m_i) \rangle_{i \in I}$.

Und es ist

$$x\ (k/[m]_Q)$$

$$= \langle [e_j]_Q \rangle_{j \in \mathbb{N}+} (k/[m]_Q) = \langle [e(k/m)_j]_Q \rangle_{j \in \mathbb{N}+}.$$

Dann folgt mit I. V.

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F) \models_{S, x(k/[m]Q)} \psi \text{ gdw } \{ i \mid i \in I \ \& \ \mathcal{A}_i \models_{S, y(i)(k/m(i))} \psi \} \in F.$$

Dann ist

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F) \models_{S, x\ (k/[m]Q)} \psi,$$

und es ist

$$[m]_Q \in \mathrm{Quot}(Q) = \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F)_1.$$

Dann

$$\exists u\ (u \in \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F)_1 \ \& \ \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F) \models_{S, x\ (k/u)} \psi.$$

Dann $\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F) \models_{S, x} \exists_S {}^S V_k\ \psi.$

Dann $\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F) \models_{S, x} \phi.$

Insgesamt gilt also im Fall 2.3:

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F) \models_{S, x} \phi \text{ gdw } \{ i \mid i \in I \ \& \ \mathcal{A}_i \models_{S, y(i)} \phi \} \in F.$$

Also gilt in allen Fällen:

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F) \models_{S, x} \phi \text{ gdw } \{ i \mid i \in I \ \& \ \mathcal{A}_i \models_{S, y(i)} \phi \} \in F.$$

Dann ist n ∈ M. Damit ist (*) durch ℕ–Wertverlaufsinduktion bewiesen und mit (*) und den am Anfang des Beweises gemachten Annahmen folgt sofort die Behauptung des zu beweisenden Theorems.

□

Wenn nun ϕ ein Satz von S ist, also eine Formel von S ohne freie Variablen, dann gilt als Spezialfall von 3.3.17:

3.3.18 Lemma.-

Wenn S Sprache erster Stufe vom Typ μ, $\mathcal{A}$ Familie von Strukturen vom Typ μ und F Ultrafilter auf **V**(Dom($\mathcal{A}$)) *ist, dann gilt für alle Sätze ϕ von S:*

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F) \models_S \phi \text{ gdw } \{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \;\&\; \mathcal{A}_i \models_S \phi \} \in F.$$

Wenn die Glieder einer Familie jeweils immer ein und diesselbe Struktur sind, dann ist diese Struktur einstufig äquivalent zur Ultrapotenz dieser Familie:

3.3.19 Korollar.-

Wenn S Sprache erster Stufe vom Typ μ, $\mathcal{A}$ Familie von Strukturen vom Typ μ, $\mathcal{B}$ Struktur vom Typ μ, so dass $\forall i\, (i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A}_i = \mathcal{B})$ *und F Ultrafilter auf* **V**(Dom($\mathcal{A}$)), *dann:*

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F) \equiv_S \mathcal{B}.$$

Beweis: Seien die Voraussetzungen erfüllt. Es ist zu beweisen, dass für alle Sätze ϕ von S gilt:

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F) \models_S \phi \text{ gdw } \mathcal{B} \models_S \phi.$$

Sei also ϕ Satz von S.

($\Leftarrow$) Gelte außerdem $\mathcal{B} \models \phi$.

Da für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ vorausgesetzt ist: $\mathcal{A}_i = \mathcal{B}$, folgt

$$\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \;\&\; \mathcal{A}_i \models \phi \} = \mathrm{Dom}(\mathcal{A});$$

da F Filter auf **V**(Dom($\mathcal{A}$)) ist Dom($\mathcal{A}$) $\in$ F; und mit 3.3.18 folgt:

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F) \models \phi.$$

($\Rightarrow$) Angenommen nun $\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F) \models \phi$.

Sei $$C = \{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \;\&\; \mathcal{A}_i \models \phi \}.$$

Mit 3.3.15 folgt C $\in$ F. Da nun F Ultrafilter auf **V**(Dom($\mathcal{A}$)) ist, ist F echter Filter; d.h. $\emptyset \notin$ F; also ist C $\neq \emptyset$, und da $\forall i\, (i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A}_i = \mathcal{B})$, gilt

$$\mathcal{B} \models \phi.$$

□

Damit ist bewiesen, dass eine Struktur zu einer Ultrapotenz einstufig äquivalent ist, zu der die Struktur die Faktoren bildet. Des Weiteren lässt sich eine sog. *kanonische Einbettung f* definieren, die die Ausgangsstruktur einstufig in die Ultrapotenz einbettet:

– *Für den folgenden Satz sei* Q *Abkürzung für den Mengenterm* $\approx(F, \mathcal{A})$ –

3.3.20 Satz.-

Sei $\mathbb{S}$ *Sprache erster Stufe. Sei* $\mathcal{A}$ *Modell für* $\mathbb{S}$. *Sei* I *nichtleere Menge. Sei* F *echter Ultrafilter auf* $\mathbf{V}(\mathrm{I})$. *Sei* f *Funktion auf* $\mathcal{A}_1$, *so dass*

$$\forall a\ (\ a \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow \mathrm{f}(a) = [\ \langle a\rangle_{i \in \mathrm{I}}\ ]_{\mathrm{Q}}\ ).$$

Dann ist f *einstufige Einbettung von* $\mathcal{A}$ *in* $\mathrm{QRPr}(\langle\mathcal{A}\rangle_{i \in \mathrm{I}}, \mathrm{F})$ *über* $\mathbb{S}$.

Beweis: Seien die Voraussetzungen erfüllt.

Nun gilt $\exists \mathcal{C}\ (\ \mathcal{C} \in \mathbf{S}(\mathrm{QRPr}(\langle\mathcal{A}\rangle_{i \in \mathrm{I}}, \mathrm{F}))\ \&\ \mathcal{C}_1 = \mathrm{Ran}(\mathrm{f})\ ).$

Sei $\mathcal{C}$ so.

Dann gilt:

$$\forall i\ (\ i \in \mu_1 \Rightarrow \mathcal{C}_{2,i} = \mathrm{QRPr}(\langle\mathcal{A}\rangle_{j \in \mathrm{I}}, \mathrm{F})_{2,i} \cap {}^{\{1,\ldots,\mu(1)(i)\}}\ \mathcal{C}_1\ );$$

und $$\forall i\ (\ i \in \mu_2 \Rightarrow \mathcal{C}_{3,i} = \mathrm{QRPr}(\langle\mathcal{A}\rangle_{j \in \mathrm{I}}, \mathrm{F})_{3,i}).$$

Als erstes wird bewiesen, dass f Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{C}$ ist ((A), (B), (C) und (D)). Dann wird gezeigt, dass $\mathcal{C}$ einstufiges Submodell von $\mathrm{QRPr}(\langle\mathcal{A}\rangle_{i \in \mathrm{I}}, \mathrm{F})$ in $\mathbb{S}$ ist

$$-\ \mathcal{C} \prec_{\mathbb{S}} \mathrm{QRPr}(\langle\mathcal{A}\rangle_{i \in \mathrm{I}}, \mathrm{F})\ -,$$

nach Definition 2.3.22 folgt daraus die Behauptung.

(A) f ist eineindeutig. Denn gelte f(a) = f(b), mit a, b $\in \mathcal{A}_1$. Dann:

$$\{\ i \mid i \in \mathrm{I}\ \&\ \langle \mathrm{a}\rangle_{i \in \mathrm{I}}\ (i) = \langle \mathrm{b}\rangle_{i \in \mathrm{I}}\ (i)\ \} \in \mathrm{F}.$$

Wenn nun a $\neq$ b, dann

$$\emptyset = \{\ i \mid i \in \mathrm{I}\ \&\ \langle \mathrm{a}\rangle_{i \in \mathrm{I}}\ (i) = \langle \mathrm{b}\rangle_{i \in \mathrm{I}}\ (i)\ \};$$

nun ist F aber echter Filter, d. h. $\emptyset \notin$ F und es folgt: a = b.

(B) Es ist $\forall j \forall a\, (j \in \mathrm{Dom}(\mu_1)\ \&\ a \in {}^{\{1,\ldots,\mu(1)(j)\}}\mathcal{A}_1 \Rightarrow$

$(a \in \mathcal{A}_{2,j} \Leftrightarrow \langle\, f(a_1), \ldots, f(a_{\mu(1)(j)})\,\rangle \in \mathcal{C}_{2,j}))$ zu zeigen.

Sei $j \in \mathrm{Dom}(\mu_1)$ und sei $a \in {}^{\{1,\ldots,\mu(1)(j)\}}\mathcal{A}_1$. Dann gilt:

$$a \in \mathcal{A}_{2,j}$$

$$\text{gdw } \langle\, a_1, \ldots, a_{\mu(1)(j)}\,\rangle \in \mathcal{A}_{2,j}$$

$$\text{gdw } \langle\, \langle a_1\rangle_{i\in I}, \ldots, \langle a_{\mu(1)(j)}\rangle_{i\in I}\,\rangle \in \mathrm{RPPr}_{i\in I}\,(\mathcal{A}_{2,j}, \mathcal{A}_1, F)$$

$$\text{gdw } \langle\, [\langle a_1\rangle_{i\in I}]_Q, \ldots, [\langle a_{\mu(1)(j)}\rangle_{i\in I}]_Q\,\rangle \in \mathrm{QRPPr}_{i\in I}\,(\mathcal{A}_{2,j}, \mathcal{A}_1, F)$$

$$\text{gdw } \langle\, [\langle a_1\rangle_{i\in I}]_Q, \ldots, [\langle a_{\mu(1)(j)}\rangle_{i\in I}]_Q\,\rangle \in \mathrm{QRPr}(\langle\mathcal{A}\rangle_{i\in I}, F)_{2,j} \qquad (*)$$

$$\text{gdw } \langle\, [\langle a_1\rangle_{i\in I}]_Q, \ldots, [\langle a_{\mu(1)(j)}\rangle_{i\in I}]_Q\,\rangle \in \mathcal{C}_{2,j} \qquad (**)$$

$$\text{gdw } \langle\, f(a_1), \ldots, f(a_{\mu(1)(j)})\,\rangle \in \mathcal{C}_{2,j}\,.$$

Der Übergang (*) ⇒ (**) gilt, da

$$[\langle a_1\rangle_{i\in I}]_Q, \ldots, [\langle a_{\mu(1)(j)}\rangle_{i\in I}]_Q \in \mathcal{C}_1\,.$$

(C) Es ist $\forall i\, (i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_3) \Rightarrow f(\mathcal{A}_{3,i}) = \mathcal{C}_{3,i})$ zu zeigen.

Sei $k \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_3)$. Dann:

$$f(\mathcal{A}_{3,k}) = [\,\langle\mathcal{A}_{3,k}\rangle_{i\in I}\,]_Q = \mathrm{QRPr}(\langle\mathcal{A}\rangle_{i\in I}, F)_{3,k}\,.$$

Nun ist $\mathcal{C}$ Substruktur von $\mathrm{QRPr}(\langle\mathcal{A}\rangle_{i\in I}, F)$. Dann folgt mit Definition 2.2.11:

$$\mathcal{C}_{3,k} = \mathrm{QRPr}(\langle\mathcal{A}\rangle_{i\in I}, F)_{3,k}\,.$$

Also ist $f(\mathcal{A}_{3,k}) = \mathcal{C}_{3,k}\,.$

(D) Es gilt $\mathcal{C}_1 = \mathrm{Ran}(f)$.

Somit ist f surjektiv, und es ist gezeigt, dass f Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{C}$ ist.

Es bleibt zu zeigen, dass: $\mathcal{C} \prec_S \mathrm{QRPr}(\langle\mathcal{A}\rangle_{i\in I}, F)$.

Sei dazu $\phi \in \mathrm{FML}_S$ & x Belegung aus $\mathcal{C}$. Dann gilt

$$\forall k\, (k \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow \exists a\, (a \in \mathcal{A}_1\ \&\ x_k = f(a)))\,.$$

Dann folgt mit dem Auswahlaxiom

$$\exists a\, (a \text{ ist Funktion auf } \mathbb{N}^+\ \&\ \forall k\, (k \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow a_k \in \mathcal{A}_1\ \&\ x_k = f(a_k)))\,.$$

Sei a so. Dann ist a Belegung aus $\mathcal{A}$.

Dann ist $$x = f \circ a.$$

Sei $$y = \langle a \rangle_{i \in I}.$$

Dann gilt: $$\mathrm{QRPr}(\langle \mathcal{A} \rangle_{i \in I}, F) \models_{S,x} \phi$$

(Theorem von Łoš)

$$\text{gdw } \{ i \mid i \in I \;\&\; \langle \mathcal{A} \rangle_{j \in I}(i) \models_{S, y(i)} \phi \} \in F$$

$$\text{gdw } \mathcal{A} \models_{S,a} \phi$$

(Satz 2.3.14)

$$\text{gdw } \mathcal{C} \models_{S, f \circ a} \phi$$

$$\text{gdw } \mathcal{C} \models_{S,x} \phi.$$

D. h.: $$\forall x \forall \phi \,(x \text{ Belegung aus } \mathcal{C} \;\&\; \phi \in \mathrm{FML}_S$$
$$\Rightarrow \mathcal{C} \models_{S,x} \phi \text{ gdw } \mathrm{QRPr}(\langle \mathcal{A} \rangle_{i \in I}, F) \models_{S,x} \phi).$$

Dann folgt mit den Definitionen 2.3.20 und 2.3.21:

$$\mathcal{C} \prec_S \mathrm{QRPr}(\langle \mathcal{A} \rangle_{i \in I}, F).$$

Damit ist gezeigt, dass f einstufige Einbettung von $\mathcal{C}$ in $\mathrm{QRPr}(\langle \mathcal{A} \rangle_{i \in I}, F)$ über S ist (Definition 2.3.22).

□

Nun zu Satz 3.3.23, der zuerst von Frayne, Morel & Scott (1962) bewiesen worden ist. Der Begriff des α–regulären Ultrafilters (Definition 3.2.17) wurde von Keisler (1964) eingeführt. Von 3.3.21 bis 3.3.24 wird von der Ordnungsrelation $\leq_O$ der Ordinalzahlen Gebrauch gemacht.

Für 3.3.23 benötigt man noch die folgenden zwei Hilfssätze:

3.3.21 Hilfssatz.-

Sei I *nichtleer; sei weiterhin* F *echter Filter auf* $\mathbf{V}$(I); *seien* A *und* B *Funktionen mit* Dom(A) = Dom(B) = I. *Wenn für alle* $i \in$ I *gilt* $|A_i| = |B_i|$, *dann folgt*

$$|\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}(A_i)/\sim(\mathrm{F}, \mathrm{I})| = |\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}(B_i)/\sim(\mathrm{F}, \mathrm{I})|.$$

Beweis: Sei I nichtleer und sei F echter Filter auf $\mathbf{V}$(I) und seien A und B Funktionen mit Dom(A) = Dom(B) = I. Sei für alle $i \in$ I $|A_i| = |B_i|$.

Sei weiterhin $\mathcal{A} = \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}(A_i)/\sim(\mathrm{F}, \mathrm{I})$ und

$$\mathcal{B} = \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}(B_i)/\sim(\mathrm{F}, \mathrm{I}).$$

Da $|A_i| \leq_O |B_i|$ für alle $i \in$ I, existiert für jedes $i \in$ I eine eineindeutige Funktion auf A_i mit Werten in B_i.

Sei α_i so eine eineindeutige Funktion auf A_i mit $\mathrm{Ran}(\alpha_i) \subseteq B_i$, für jedes $i \in$ I.

Nun wird eine eineindeutige Funktion ß auf $\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}(A_i)$ mit $\mathrm{Ran}(\beta) \subseteq \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}(B_i)$ definiert.

Sei dazu $f \in \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}(A_i)$ und sei

$$\beta(f) = \langle \alpha_i (f_i) \rangle_{i \in \mathrm{I}}.$$

Wenn $f, g \in \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}(A_i)$ mit $f \neq g$, dann gibt es ein $j \in$ I mit $f(j) \neq g(j)$; und da α_j eineindeutig ist, ist $\alpha_j (f_j) \neq \alpha_j (g_j)$ und $\beta(f) \neq \beta(g)$ und somit ist β eineindeutig.

Damit ist gezeigt, dass $|\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}(A_i)| \leq_O |\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}(B_i)|$.

Um zu zeigen, dass $|\mathcal{A}| \leq_O |\mathcal{B}|$ wird nun eine eineindeutige Funktion γ von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ definiert; sei dazu für alle $k \in \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}(A_i)$:

$$\gamma([k]_{\sim(\mathrm{F}, \mathrm{I})}) = [\beta(k)]_{\sim(\mathrm{F}, \mathrm{I})}.$$

Dann ist $[\beta(k)]_{\sim(\mathrm{F}, \mathrm{I})} \in \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}(B_i)/\sim(\mathrm{F}, \mathrm{I})$.

Es bleibt, die Eineindeutigkeit von γ zu zeigen.

Sei dazu $[x]_{\sim(\mathrm{F}, \mathrm{I})}, [y]_{\sim(\mathrm{F}, \mathrm{I})} \in \mathcal{A}$ und sei $[x]_{\sim(\mathrm{F}, \mathrm{I})} \neq [y]_{\sim(\mathrm{F}, \mathrm{I})}$. Dann gilt:

$$\{ i \mid i \in \mathrm{I} \ \& \ x_i = y_i \} \notin \mathrm{F};$$

weiterhin gilt

$$\{ i \mid i \in \mathrm{I} \ \& \ \beta(\mathrm{x})(i) = \beta(\mathrm{y})(i) \} \notin \mathrm{F};$$

d. h. $$(\beta(\mathrm{x}), \beta(\mathrm{y})) \notin \sim(\mathrm{F}, \mathrm{I});$$

und schließlich gilt:

$$\gamma([\mathrm{x}]_\sim) = [\beta(\mathrm{x})]_\sim \neq [\beta(\mathrm{y})]_\sim = \gamma([\mathrm{y}]_\sim);$$

damit ist die Eineindeutigkeit von γ gezeigt und es gilt:

$$|\mathcal{A}| \leq_{\mathrm{O}} |\mathcal{B}|.$$

Analog dazu lässt sich eine eineindeutige Funktion γ' von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{A}$ entwickeln, so dass man $$|\mathcal{B}| \leq_{\mathrm{O}} |\mathcal{A}|$$ erhält.

Mit dem Theorem von Schröder–Bernstein folgt dann:

$$|\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}(\mathrm{A}_i)/\sim(\mathrm{F}, \mathrm{I})| = |\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}(\mathrm{B}_i)/\sim(\mathrm{F}, \mathrm{I})|.$$

Es gilt folgende Spezialisierung von 3.3.21:

3.3.22 <u>Hilfssatz</u>.-

Sei I *nichtleer; sei weiterhin* F *echter Filter auf* $\mathbf{V}$(I); *seien* A *und* B *Mengen, für die gilt:* $|\mathrm{A}| = |\mathrm{B}|$,

dann folgt $$|\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}(\mathrm{A})/\sim(\mathrm{F}, \mathrm{I})| = |\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}(\mathrm{B})/\sim(\mathrm{F}, \mathrm{I})|.$$

3.3.23 <u>Satz</u>.-

Sei I *nichtleer, sei* F α- *regulärer Filter auf* $\mathbf{V}$(I) *und sei* $|\mathrm{I}| = \alpha$.

Wenn nun A *unendlich, dann gilt:*

$$|\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}(\mathrm{A})/\sim(\mathrm{F}, \mathrm{I})| = |\mathrm{A}|^{\alpha}.$$

<u>Beweis</u>: Seien die Voraussetzungen erfüllt. Sei Q = $\sim$(F, I).

Es wird gezeigt, dass

(i) $$|\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}(\mathrm{A})/\mathrm{Q}| \leq_{\mathrm{O}} |\mathrm{A}|^{\alpha}$$

und (ii) $$|\mathrm{A}|^{\alpha} \leq_{\mathrm{O}} |\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}(\mathrm{A})/\mathrm{Q}|;$$

mit dem Theorem von Schröder–Bernstein folgt dann:

$$|CPr_{i \in I}(A)/Q| = |A|^{\alpha}.$$

(i) Da $|I| = \alpha$ ist $|A|^{\alpha} = |A|^{|I|}$ und nach der Definition der Potenzbildung bei Kardinalzahlen gilt $$|A|^{|I|} = |{}^{I}A|.$$

Nun ist:

$${}^{I}A = \{ f \mid f \text{ Funktion auf } I \ \& \ \forall i\, (i \in I \Rightarrow f_i \in A)\} = CPr_{i \in I}(A).$$

Da F Filter auf $\mathbf{V}(I)$, ist Q Äquivalenzprädikat in $CPr_{i \in I}(A)$ (Satz 3.3.12). Es lässt sich eine Funktion γ auf ${}^{I}A$ definieren, so dass für alle $f \in CPr_{i \in I}(A)$ gilt:

$$\gamma(f) = [f]_Q \text{ mit } [f]_Q \in CPr_{i \in I}(A)/Q;$$

dann folgt aus der Surjektivität von γ:

$$|CPr_{i \in I}(A)/Q| \leq_O |{}^{I}A| = |A|^{\alpha}.$$

(ii) Da F α - regulärer Filter auf $\mathbf{V}(I)$ ist, existiert ein $E \subseteq F$ mit $|E| = \alpha$, so dass gemäß Def. 3.2.17 für alle $i \in I$ gilt:

$$\{ e \mid e \in E \ \& \ i \in e \} \text{ ist endlich.}$$

Sei E so und sei $$B = \{ x \mid x \text{ ist endliche Folge in } A \}.$$

Da A unendlich, ist $|A| = |B|$ und da F echter Filter auf $\mathbf{V}(I)$ gilt nach Hilfssatz 3.3.22:

$$|CPr_{i \in I}(A)/Q| = |CPr_{i \in I}(B)/Q|$$

und da weiterhin $|A|^{\alpha} = |A|^{|E|} = |{}^{E}A|$, genügt zum Beweis von (ii) die Angabe einer eineindeutigen Funktion γ von ${}^{E}A$ nach $CPr_{i \in I}(B)/Q$.

Sei nun g beliebiges Element aus ${}^{E}A$.

Da F α-regulärer Filter auf $\mathbf{V}(I)$ ist, gilt:

$$\forall i\, (i \in I \Rightarrow \{ e \mid e \in E \ \& \ i \in e \} \text{ ist endlich}).$$

Dann gilt:

$$\forall i\, (i \in I \Rightarrow \exists e\, \exists n\, (n \in \mathbb{N} \ \& \ e \text{ ist Abzählung der Länge } n \text{ von } \{ e \mid e \in E \ \& \ i \in e \})).$$

Dann folgt mit dem Auswahlaxiom:

$$\exists e\, \exists n\ (e,\ n \text{ sind Funktionen auf I } \&$$
$$\forall i\ (\ i \in \mathrm{I} \Rightarrow e_i \text{ ist Abzählung der Länge } n_i \text{ von } \{\ e \mid e \in \mathrm{E}\ \&\ i \in e\ \}\ )\ ).$$

Seien e und n so. Dann gilt:

$$\forall i\ (\ i \in \mathrm{I} \Rightarrow \forall j\ (j \in \{\ 1, ..., \mathrm{n}_i\ \} \Rightarrow \mathrm{e}_{i,j} \in \mathrm{E}\ \&\ i \in \mathrm{e}_{i,j}\ )\ ).$$

Nach obiger Annahme ist $g \in {}^{\mathrm{E}}\mathrm{A}$. Dann ist

$$\langle\ \mathrm{g}\ (\ \mathrm{e}_{i,j}\ )\ \rangle_{j \in \{\ 1, ..., \mathrm{n}(i)\ \}}\ (\ i \in \mathrm{I}\ )$$

eine endliche Folge von Elementen aus A und somit Element von B. Dann ist

$$\langle\ \langle\ \mathrm{g}\ (\ \mathrm{e}_{i,j}\ )\ \rangle_{j \in \{\ 1, ..., \mathrm{n}(i)\ \}}\ \rangle_{i \in \mathrm{I}} \in \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}\ (\mathrm{B}),$$

und daher $\qquad [\ \langle\ \langle\ \mathrm{g}\ (\ \mathrm{e}_{i,j}\ )\ \rangle_{j \in \{\ 1, ..., \mathrm{n}(i)\ \}}\ \rangle_{i \in \mathrm{I}}\ ]_{\mathrm{Q}} \in \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}\ (\mathrm{B})/\mathrm{Q},$

und dies gilt für jedes $g \in {}^{\mathrm{E}}\mathrm{A}$. Diese Überlegung zeigt, wie die gesuchte Abbildung γ von ${}^{\mathrm{E}}\mathrm{A}$ nach $\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}\ (\mathrm{B})/\mathrm{Q}$ eingeführt werden kann, nämlich:

$$\text{Sei } \gamma \text{ Funktion auf } {}^{\mathrm{E}}\mathrm{A}\ \&$$
$$\forall g\ (\ g \in {}^{\mathrm{E}}\mathrm{A} \Rightarrow \gamma(g) = [\ \langle\ \langle\ g\ (\ \mathrm{e}_{i,j}\ )\ \rangle_{j \in \{\ 1, ..., \mathrm{n}(i)\ \}}\ \rangle_{i \in \mathrm{I}}\ ]_{\mathrm{Q}}\ ).$$

Dann ist γ Abbildung von ${}^{\mathrm{E}}\mathrm{A}$ nach $\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}\ (\mathrm{B})/\mathrm{Q}$.

Es bleibt noch die Eineindeutigkeit von γ zu zeigen.

Angenommen also g, h $\in {}^{\mathrm{E}}\mathrm{A}$ und g $\neq$ h. Dann gibt es ein $e \in \mathrm{E}$, so dass g(e) $\neq$ h(e); sei e* so. Dann gilt für jedes $i \in$ e*: e* kommt in der endlichen Menge $\{\ e \mid e \in \mathrm{E}\ \&\ i \in e\ \}$ von Elementen aus E vor, die i enthalten. Dann gilt für alle $i \in$ e*: es gibt ein $j \in \{\ 1, ..., \mathrm{n}_i\ \}$ mit $\mathrm{e}^* = \mathrm{e}_{i,j}$. Dann gilt für alle $i \in$ e*: es gibt ein $j \in \{\ 1, ..., \mathrm{n}_i\ \}$ mit $\mathrm{g}(\mathrm{e}_{i,j}) \neq \mathrm{h}(\mathrm{e}_{i,j})$. Dann gilt für alle $i \in$ e*:

$$\langle\ \mathrm{g}(\mathrm{e}_{i,j})\ \rangle_{j \in \{\ 1, ..., \mathrm{n}(i)\ \}} \neq \langle\ \mathrm{h}(\mathrm{e}_{i,j})\ \rangle_{j \in \{\ 1, ..., \mathrm{n}(i)\ \}}\ .$$

Sei nun g' Funktion auf e* & $\forall i\ (\ i \in \mathrm{e}^* \Rightarrow \mathrm{g}'(i) = \langle\ \mathrm{g}(\mathrm{e}_{i,j})\ \rangle_{j \in \{\ 1, ..., \mathrm{n}(i)\ \}}$, und sei h' Funktion auf e* & $\forall i\ (\ i \in \mathrm{e}^* \Rightarrow \mathrm{h}'(i) = \langle\ \mathrm{h}(\mathrm{e}_{i,j})\ \rangle_{j \in \{\ 1, ..., \mathrm{n}(i)\ \}}$.

Dann gilt:

$$e^* \subseteq \{ i \mid i \in I \;\&\; g'(i) \neq h'(i) \}.$$

Da nun $e^* \in E$ & $E \subseteq F$, ist $e^* \in F$, und es folgt:

$$\{ i \mid i \in I \;\&\; g'(i) = h'(i) \} \notin F;$$

denn wäre

$$\{ i \mid i \in I \;\&\; g'(i) \neq h'(i) \} \in F \text{ und } \{ i \mid i \in I \;\&\; g'(i) = h'(i) \} \in F,$$

dann wäre

$$\emptyset = \{ i \mid i \in I \;\&\; g'(i) \neq h'(i) \} \cap \{ i \mid i \in I \;\&\; g'(i) = h'(i) \} \in F$$

im Widerspruch zur Annahme, dass F echter Filter auf $\mathbf{V}(I)$ ist. Somit ist $(g', h') \notin Q$ und

es folgt: $$\gamma(g) = [g']_Q \neq [h']_Q = \gamma(h).$$

Das zeigt, dass γ eineindeutige Funktion von ${}^{E}A$ nach $CPr_{i \in I}(B)/Q$ ist; und mit

$$|{}^{E}A| = |A|^{\alpha}$$

und $$|CPr_{i \in I}(A)/Q| = |CPr_{i \in I}(B)/Q|$$

folgt weiterhin $$|A|^{\alpha} \leq_O |CPr_{i \in I}(A)/Q|.$$

Und schließlich zeigt das Theorem von Schröder–Bernstein:

$$|A|^{\alpha} = |CPr_{i \in I}(A)/Q|.$$ □

Eine Anwendung dieses mengentheoretischen Beweises für Strukturen ergibt:

3.3.24 Korollar.-

Wenn $\mathcal{A}$ Struktur mit unendlichem Individuenbereich, dann hat $\mathcal{A}$ Ultrapotenzen beliebig hoher Kardinalität.

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ Struktur und sei $|\mathcal{A}_1| \geq_O \mathbb{N}$. Sei α unendliche Kardinalzahl. Dann ist $|\alpha| = \alpha$, also ist α Menge mit unendlicher Kardinalzahl. Mit 3.2.18 folgt:

$$\exists U \text{ (} U \text{ ist } \alpha\text{–regulärer Ultrafilter auf } \mathbf{V}(\alpha) \text{).}$$

Sei U so. Dann folgt mit 3.3.23:

$$|\ \mathrm{CPr}_{i \in \alpha}(\mathcal{A}_1) \ / \sim(\mathrm{U}, \alpha)\ | = |\ \mathcal{A}_1\ |^{\alpha}.$$

Dann ist

$$\alpha <_{\mathrm{O}} |\ \mathcal{A}_1\ |^{\alpha} = |\ \mathrm{CPr}_{i \in \alpha}(\mathcal{A}_1) \ / \sim(\mathrm{U}, \alpha)\ |.$$

Sei $\mathcal{B} = \mathrm{QRPr}(\langle \mathcal{A} \rangle_{i \in \alpha}, \mathrm{U}).$

Dann $\mathcal{B}_1 = (\mathrm{CPr}_{i \in \alpha}(\mathcal{A}_1) \ / \sim(\mathrm{U}, \alpha))$

und $|\mathcal{B}_1| = |(\mathrm{CPr}_{i \in \alpha}(\mathcal{A}_1) \ / \sim(\mathrm{U}, \alpha))|.$

Dann ist $\alpha <_{\mathrm{O}} |\ \mathcal{B}_1\ |,$

und $\mathrm{QRPr}(\langle \mathcal{A} \rangle_{i \in \alpha}, \mathrm{U})$ ist Ultrapotenz von $\mathcal{A}$.

Kapitel 4: Theoreme zur einstufigen Axiomatisierbarkeit und zur Reichweite einstufiger Sprachen

Im diesem Kapitel werden auf verschiedenen Wegen die Grenzen der Ausdrucksmöglichkeiten von Sprachen erster Stufe dargestellt. - Im Abschnitt 4.1 wird die Axiomatisierbarkeit vier verschiedener Arten von Modellklassen in einer Sprache erster Stufe untersucht, und zwar Axiomatisierbarkeit durch eine Klasse von Allsätzen, durch eine endliche Klasse von Allsätzen, durch eine Klasse von Sätzen und durch eine endliche Klasse von Sätzen; für jede dieser Satzklassen werden hinreichende und notwendige Bedingungen formuliert, die eine Klasse von Modellen erfüllen muss, um durch die jeweilige Satzklasse axiomatisierbar zu sein Zu diesen Bedingungen gehört u.a. Abgeschlossenheit der Modellklasse unter Ultraproduktbildung. - Im Abschnitt 4.2 werden Theoreme bewiesen, welche hinreichende und notwendige Bedingungen dafür formulieren, dass eine Theorie bestimmte Eigenschaften hat, z.B. widerspruchsfrei und endlich axiomatisierbar zu sein. Diese Bedingungen werden mit Hilfe von Filtern auf dem *Lindenbaum-Verband* der Sätze einer Sprache erster Stufe formuliert. - Im Abschnitt 4.3 wird mit den bisher bereitgestellten Mitteln bewiesen, dass der Begriff der endlichen Klasse nicht in einer Sprache erster Stufe ausgedrückt werden kann; ferner werden die Theoreme von Löwenheim-Skolem rein modelltheoretisch bewiesen.

4.1 Modelltheoretische Axiomatisierbarkeit

Im Abschnitt 4.1 werden Theoreme bewiesen, welche hinreichend und notwendige Bedingungen dafür formulieren, dass eine Klasse von Modellen für eine Sprache erster Stufe durch eine Klasse von Sätzen dieser Sprache *axiomatisiert* wird. Es werden vier verschiedene Axiomatisierbarkeitsbegriffe definiert, die sich durch die Art der Satzklassen unterscheiden.

Die historisch frühesten Ergebnisse (Tarski, 1954) wurden für den Fall erzielt, dass eine Klasse von Modellen durch eine Klasse von Allsätzen axiomatisiert wird. Die Definition dieses Begriffs lautet: eine Klasse K von Modellen für eine Sprache erster Stufe S ist *einstufig durch Allsätze axiomatisierbar in* S, wenn es eine nichtleere Klasse Σ von Allsätzen von S gibt, so dass genau die Elemente von K die Klasse Σ simultan erfüllen. Eine Klasse K von Modellen für eine Sprache erster Stufe S heißt *universelle Klasse für* S, wenn K in S einstufig durch Allsätze axiomatisierbar ist.

Das Theorem von Tarski gilt nur für Sprachen erster Stufe mit endlich vielen Prädikatkonstanten und null Individuenkonstanten und besagt (Theorem 4.1.9): Eine nichtleere Klasse K

von Modellen für eine Sprache erster Stufe *S*, welche nur endlich viele Prädikatkonstanten und null Individuenkonstanten enthält, ist eine universelle Klasse für *S* genau dann, wenn jedes Modell für *S*, dessen endliche Substrukturen jeweils isomorph in ein Element von *K* einbettbar sind, Element von *K* ist. Der Beweis dieses Theorems wird mit Hilfe einiger Hilfstheoreme geführt, die zuvor bewiesen werden.

Durch Verwendung der Ultraproduktkonstruktion lässt sich eine Verallgemeinerung des Theorems von Tarski für beliebige Sprachen erster Stufe beweisen (Theorem 4.1.12): eine Klasse *K* von für eine Sprache erster Stufe *S* ist eine universelle Klasse für *S* genau dann, wenn *K* unter Isomorphie, Substrukturbildung und Ultraproduktbildung abgeschlossen ist (siehe Definition 4.1.11). Der Beweis wird mit Hilfe der Diagramm-Methode geführt.

Ein zweiter Axiomatisierbarkeitsbegriff betrifft den Fall, dass eine Klasse von Modellen für eine Sprache erster Stufe durch eine *endliche Klasse von Allsätzen* axiomatisierbar ist: Eine Klasse *K* von Modellen für eine Sprache erster Stufe *S* ist *einstufig durch endlich viele Allsätze axiomatisierbar in S*, wenn es eine nichtleere endliche Klasse Σ von Allsätzen von *S* gibt, so dass genau die Elemente von *K* die Klasse Σ simultan erfüllen. Eine Klasse *K* von Modellen für eine Sprache erster Stufe *S* heißt *universelle Basisklasse für S*, wenn *K* in *S* einstufig durch endlich viele Allsätze axiomatisierbar ist.

Vaught hat 1954 das Pendant des Theorems von Tarski für universelle Basisklassen bewiesen (Theorem 4.1.10). Es lautet: Eine nichtleere Klasse *K* von Modellen für eine Sprache erster Stufe *S*, welche nur endlich viele Prädikatkonstanten und null Individuenkonstanten enthält, ist eine universelle Basisklasse für *S* genau dann, wenn es eine positive Zahl *n* gibt, so dass jedes Modell für *S*, dessen höchstens *n*-zahlige Substrukturen jeweils isomorph in ein Element von *K* einbettbar sind, Element von *K* ist.

Ein dritter Axiomatisierbarkeitsbegriff betrifft den Fall, dass eine Klasse von Modellen für eine Sprache erster Stufe durch irgendeine Klasse von Sätzen axiomatisierbar ist: Eine Klasse *K* von Modellen für eine Sprache erster Stufe *S* ist *einstufig axiomatisierbar in S*, wenn es eine nichtleere Klasse Σ von Allsätzen von *S* gibt, so dass genau die Elemente von *K* die Klasse Σ simultan erfüllen. Eine Klasse *K* von Modellen für eine Sprache erster Stufe *S* heißt *einstufige Klasse für S*, wenn *K* in *S* einstufig axiomatisierbar ist.

Das folgende Theorem liefert hinreichende und notwendige Bedingungen dafür, dass eine Klasse von Modellen für eine Sprache erster Stufe eine einstufige Klasse für *S* ist (Theorem 4.1.15): Eine Klasse *K* von Modellen für eine Sprache erster Stufe *S* ist eine einstufige Klasse für

S genau dann, wenn K in S unter einstufiger Äquivalenz und unter Ultraproduktbildung abgeschlossen ist. Der Beweis wird mit Hilfe einer Ultraproduktversion des modelltheoretischen Kompaktheitstheorems erstellt. (Siehe Theorem 4.1.13).

Der vierte Axiomatisierbarkeitsbegriff betrifft den Fall, dass eine Klasse von Modellen für eine Sprache erster Stufe durch eine beliebige endliche Klasse von Sätzen axiomatisierbar ist: Eine Klasse K von Modellen für eine Sprache erster Stufe S ist *einstufig endlich axiomatisierbar in* S, wenn es eine nichtleere endliche Klasse Σ von Sätzen von S gibt, so dass genau die Elemente von K die Klasse Σ simultan erfüllen. Eine Klasse K von Modellen für eine Sprache erster Stufe S heißt *einstufige Basisklasse für* S, wenn K in S einstufig endlich axiomatisierbar ist.

Für diesen Fall gibt das folgende Theorem hinreichende und notwendige Bedingungen an (Theorem 4.1.15): Eine Klasse K von Modellen für eine Sprache erster Stufe S ist eine einstufige Basisklasse für S genau dann, wenn K und das Komplement von K in $\mathbf{MOD}_S$ unter einstufiger Äquivalenz und unter Ultraproduktbildung abgeschlossen sind. Der Beweis wird mit Hilfe eines Korollars Kompaktheitstheorems geführt (Theorem 4.1.14).

4.1.1 Definitionen.-

K ist *einstufig* [, *durch endlich viele Allsätze*]
[, *durch Allsätze*]
[, *endlich*]
[ ]

axiomatisierbar in S

gdw

(1) S Sprache erster Stufe & $K \subseteq \mathbf{MOD}_S$ &

(2) es gibt ein Σ, so dass $\Sigma \neq \emptyset$ & $\Sigma \subseteq \mathrm{SATZ}_S$

[& Σ endlich & für alle $\phi \in \Sigma$: ϕ Allsatz von S]
[& für alle $\phi \in \Sigma$: ϕ Allsatz von S]
[& Σ endlich]
[ ]

& für alle $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \in K \Leftrightarrow \mathcal{A} \Vdash_S \Sigma$.

Zur Bezeichnung der vier eben definierten Arten von Modellklassen werden eigene Redeweisen eingeführt:

4.1.2 Definitionen.-

K ist eine *universelle Basisklasse* von $\mathcal{S}$
gdw
K durch endlich viele Allsätze einstufig in $\mathcal{S}$ axiomatisierbar ist.

K ist eine *universelle Klasse* von $\mathcal{S}$
gdw
K durch Allsätze einstufig axiomatisierbar in $\mathcal{S}$ ist.

K ist eine *einstufige Basisklasse* von $\mathcal{S}$
gdw
K einstufig, endlich in $\mathcal{S}$ axiomatisierbar ist.

K ist eine *einstufige Klasse* von $\mathcal{S}$
gdw
K einstufig in $\mathcal{S}$ axiomatisierbar ist.

Nun werden zwei Hilfstheoreme (4.1.4 und 4.1.5) bewiesen, auf die mehrfach Bezug genommen wird; sie zeigen, dass alle Submodelle [Erweiterungen] eines Modells $\mathcal{A}$ einen Allsatz [Existenzsatz] erfüllen, der von $\mathcal{A}$ erfüllt wird. Beim Beweis von 4.1.4 und 4.1.5 wird das folgende Hilfstheorem angezogen.

4.1.3 Hilfssatz.-

Sei S *Sprache erster Stufe, sei* $\mathcal{A}$ *Modell für* S, *sei* $\mathcal{B} \in \mathbf{S}(\mathcal{A})$, *sei* y *Belegung aus* $\mathcal{B}$. *Dann gilt für alle quantorenfreien Formeln* ϕ *von* S:

$$\mathcal{A} \models_{S,y} \phi \text{ gdw } \mathcal{B} \models_{S,y} \phi.$$

Beweis : Es werden die Voraussetzungen angenommen. Mit Formelinduktion wird nun bewiesen, dass $FML_S \subseteq \mathbf{M}$. Sei dazu:

$$\mathbf{M} = \{ \psi \mid (\psi \in FML_S \ \& \ \psi \text{ quantorenfrei}) \Rightarrow (\mathcal{A} \models_{S,y} \psi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models_{S,y} \psi) \}.$$

<u>Induktionsbasis:</u> Wenn ϕ Atomformel von S ist, dann gilt:

$$\mathcal{A} \models_{S,y} \phi \text{ gdw } \mathcal{B} \models_{S,y} \phi,$$

da y Belegung aus $\mathcal{B}$ und somit auch Belegung aus $\mathcal{A}$ ist, da $\mathcal{B} \in \mathbf{S}(\mathcal{A})$ und da für alle $j \in \mu_2$ gilt (Def. 2.2.11): $\mathcal{B}_{3,j} = \mathcal{A}_{3,j}$.

Somit sind alle Atomformeln von S Element von **M**.

<u>Induktionsschritt – Fall a:</u> Sei $\phi \in \mathbf{M}$.

Sei weiterhin $\neg_S \phi \in FML_S$ & $\neg_S \phi$ quantorenfrei.

Dann ist $\phi \in FML_S$ & ϕ quantorenfrei. Nach I. V. ist $\phi \in \mathbf{M}$. Dann gilt:

$$\mathcal{A} \models_{S,y} \phi \text{ gdw } \mathcal{B} \models_{S,y} \phi.$$

Also gilt: $\mathcal{A} \models_{S,y} \neg_S\phi \text{ gdw } \mathcal{B} \models_{S,y} \neg_S\phi.$

Also ist $\neg_S \phi \in \mathbf{M}$.

<u>Fall b:</u> Gelte $\phi, \psi \in \mathbf{M}$. Und sei $({}_S\, \phi \wedge_S \psi\,)_S \in FML_S$ & $({}_S\, \phi \wedge_S \psi\,)_S$ quantorenfrei.

Dann sind $\phi, \psi \in FML_S$ & ϕ, ψ quantorenfrei. Nun gilt nach I. V.: $\phi, \psi \in \mathbf{M}$.

Dann gilt: $\mathcal{A} \models_{S,y} \phi$ gdw $\mathcal{B} \models_{S,y} \phi$ & $\mathcal{A} \models_{S,y} \psi$ gdw $\mathcal{B} \models_{S,y} \psi$.

Und es folgt:

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} \models_{S,y} ({}_S\, \phi \wedge_S \psi\,)_S \\ \text{gdw } &\mathcal{A} \models_{S,y} \phi \text{ und } \mathcal{A} \models_{S,y} \psi \\ \text{gdw } &\mathcal{B} \models_{S,y} \phi \text{ und } \mathcal{B} \models_{S,y} \psi \\ \text{gdw } &\mathcal{B} \models_{S,y} ({}_S\, \phi \wedge_S \psi\,)_S . \end{aligned}$$

D. h. $({}_S\, \phi \wedge_S \psi\,)_S \in \mathbf{M}$, wenn $\phi, \psi \in \mathbf{M}$.

<u>Fall c:</u> Sei $\phi \in \mathbf{M}$ & $\upsilon \in VAR_S$. Dann ist $\exists \nu\, \phi$ nicht quantorenfrei, und $\exists \upsilon\, \phi \in \mathbf{M}$ folgt.

Somit ist $FML_S \subseteq \mathbf{M}$ und der Hilfssatz ist bewiesen.

4.1.4 Hilfssatz.-

Sei S Sprache erster Stufe, sei $\mathcal{A}$ Modell von S, sei ϕ Allsatz von S und sei k die Anzahl der in ϕ allquantifizierten Variablen.

Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $\mathcal{A} \models_S \phi$.

(ii) $\forall \mathcal{B}(\mathcal{B} \in \mathbf{S}(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \models_S \phi)$.

(iii) $\forall \mathcal{B}(\mathcal{B} \in \mathbf{S}_\omega(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \models_S \phi)$.

(iv) $\forall \mathcal{B}(\mathcal{B} \in \mathbf{S}_k(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \models_S \phi)$.

Beweis : Sei S Sprache erster Stufe, sei $\mathcal{A}$ Modell von S, sei ϕ Allsatz von S und sei k die Anzahl der allquantifizierten Variablen von ϕ.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Gelte $\mathcal{A} \models_S \phi$.

Da ϕ Allsatz ist, gibt es eine linkseindeutige Funktion i auf $\{ 1, ..., k \}$ mit Werten in $\mathbb{N}^+$,

so dass $$\phi = \neg_S \exists_S {}^S V_{i(1)} \dots \exists_S {}^S V_{i(k)} \psi$$

und ψ quantorenfreie Formel von S. Sei i so.

Dann gilt für alle Belegungen x aus $\mathcal{A}$ und alle $a_1, ..., a_k \in \mathcal{A}_1$:

$$\mathcal{A} \models_{S, x(i(1)/a(1)) \dots i(k)/a(k))} \neg_S \psi.$$

Sei nun $\mathcal{B} \in \mathbf{S}(\mathcal{A})$ und sei y beliebige Belegung aus $\mathcal{B}$.

Dann gilt für alle $b_1, ..., b_k \in \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{A}_1$:

$$\mathcal{A} \models_{S, y(i(1)/b(1)) \dots (i(k)/b(k))} \neg_S \psi.$$

Und mit 4.1.3 folgt: $$\mathcal{B} \models_{S, y(i(1)/b(1)) \dots (i(k)/b(k))} \neg_S \psi,$$

für alle $b_1, ..., b_k \in \mathcal{B}_1$.

Dann: $$\mathcal{B} \models_S \neg_S \exists_S {}^S V_{i(1)} \dots \exists_S {}^S V_{i(k)} \psi;$$

und es folgt schließlich:

$$\mathcal{B} \models_S \phi.$$

(ii) ⇒ (iii). Gelte nun $\forall\mathcal{B}\,(\mathcal{B} \in \mathbf{S}(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \models_S \phi\,)$.

Dann folgt wegen $\mathbf{S}_\omega(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{S}(\mathcal{A})$:

$$\forall\mathcal{B}\,(\mathcal{B} \in \mathbf{S}_\omega(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \models_S \phi\,).$$

(iii) ⇒ (iv). Wegen $\mathbf{S}_k(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{S}_\omega(\mathcal{A})$ folgt

$$\forall\mathcal{B}\,(\mathcal{B} \in \mathbf{S}_k(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \models_S \phi\,),$$

wenn $\forall\mathcal{B}\,(\mathcal{B} \in \mathbf{S}_\omega(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \models_S \phi\,)$

angenommen wird.

(iv) ⇒ (i). Gelte $\forall\mathcal{B}\,(\mathcal{B} \in \mathbf{S}_k(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \models_S \phi\,)$.

Sei b Abbildung von {1, ..., k} nach $\mathcal{A}_1$. Dann gibt es ein $\mathcal{B} \in \mathbf{S}_k(\mathcal{A})$, so dass Ran(b) $\subseteq \mathcal{B}_1$.

Sei $\mathcal{B}^*$ so. Da $\mathcal{B}^* \models_S \phi$, gilt für alle Belegungen y aus $\mathcal{B}^*$:

$$\mathcal{B}^* \models_{S,y(i(1)/b(1)) \ldots (i(k)/b(k))} \neg_S \psi.$$

Und $\mathcal{A} \models_{S,y(i(1)/b(1)) \ldots (i(k)/b(k))} \neg_S \psi$

folgt mit 4.1.3. Das gilt für alle k-elementigen Teilmengen von $\mathcal{A}_1$. Und es folgt:

$$\mathcal{A} \models_S \neg_S \exists_S{}^S V_{i(1)} \ldots \exists_S{}^S V_{i(k)}\ \psi;$$

d. h.: $\mathcal{A} \models_S \phi$.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

4.1.5 Hilfssatz.-

Sei S Sprache erster Stufe. Dann gilt für alle Modelle $\mathcal{A}$ von S und alle ***Existenzsätze*** ϕ *von S:*

$$\mathcal{A} \models_S \phi \Rightarrow \forall\mathcal{B}(\mathcal{A} \in \mathbf{S}(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B} \models_S \phi).$$

Beweis : Sei S Sprache erster Stufe; sei $\mathcal{A}$ Modell von S, sei ϕ Existenzsatz von S, sei k $\in$ $\mathbb{N}^+$ und sei i linkseindeutige Funktion auf { 1, ..., k } so dass

$$\phi = \exists^S V_{i(1)} \ldots \exists^S V_{i(k)}\ \psi.$$

Gelte nun: $\mathcal{A} \models_S \phi$.

Dann gibt es eine Belegung x aus $\mathcal{A}$ und Elemente $a_1, ..., a_k \in \mathcal{A}_1$, so dass

$$\mathcal{A} \models_{S, x(i(1)/a(1)) \ldots (i(k)/a(k))} \psi.$$

Seien x, a_1 , ..., a_k so.

Sei nun $\mathcal{B}$ Modell von S, so dass $\mathcal{A} \in \mathbf{S}(\mathcal{B})$. Dann ist x(i(1)/a(1)) ... (i(k)/a(k)) Belegung aus $\mathcal{B}$, ψ ist quantorenfreie Formel von S und mit Hilfssatz 4.1.3 folgt:

$$\mathcal{B} \models_{S, x(i(1)/a(1)) \ldots (i(k)/a(k))} \psi.$$

Und weiterhin folgt:

$$\mathcal{B} \models_{S} \phi.$$

Nun werden die Modellklassen algebraisch charakterisiert, die mit einstufigen Allsätzen axiomatisierbar sind. Tarski (1954) ist es erstmals gelungen, die Bedingungen für universelle Klassen zu finden (Satz 4.1.9). Im Anschluss daran konnte Vaught (1954) das Theorem von Tarski so umformulieren, dass damit die universellen Basisklassen gefasst werden konnten (Satz 4.1.10). Da Nichtaxiomatisierbarkeitsbeweise in der Messtheorie bisher mit Hilfe dieser Theoreme geführt worden sind (Scott & Suppes, 1958; Titiev, 1969; 1972; Luce, Krantz, Suppes & Tversky, 1991, Kapitel 21), werden diese Theoreme hier nochmals ausführlich aufgearbeitet. Allerdings wird für die universellen Klassen auch die modernere Ultraproduktversion angeführt; vor allem geschieht dies auch deshalb, weil die Formulierung nach Tarski nur für einstufige Sprachen gilt, die nur endlich viele Prädikatkonstanten und keine Funktionskonstanten und keine Individuenkonstanten aufweisen. Die Ultraproduktversion hingegen gilt für alle einstufigen Sprachen (Satz 4.1.12).

Die Modelle in den einstufigen Klassen und in den einstufigen Basisklassen werden nur mit Ultraproduktmethoden charakterisiert (Satz 4.1.15 (i) und (ii)).

Die nächsten beiden Sätze (Satz 4.1.6 und 4.1.7) sind zentral für das Theorem von Tarski. Sie gelten ebenfalls nur für Sprachen mit endlich vielen Prädikatkonstanten. Im Hilfssatz 4.1.6 wird gezeigt, dass man alle diejenigen Modelle mit einem Existenzsatz charakterisieren kann, in die ein vorgegebenes Modell mit endlichem Individuenbereich einbettbar ist.

4.1.6 Satz.-

Sei S *Sprache erster Stufe ohne Individuen- und mit nur endlich vielen Prädikatkonstanten; sei* $\mathcal{A}$ *Modell für* S, *sei* $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$ *und sei die Anzahl der Elemente von* $\mathcal{A}_1 = \mathrm{k}$. *Dann gibt es eine quantorenfreie Formel* α *von* S, *in der höchstens die Variablen* ${}^{\mathsf{S}}\mathrm{V}_1, \ldots, {}^{\mathsf{S}}\mathrm{V}_k$ *frei sind, und es gilt für alle Modelle* $\mathcal{B}$ *von* S:

$$\mathcal{B} \models_{\mathsf{S}} \exists_{\mathsf{S}}\, {}^{\mathsf{S}}\mathrm{V}_1 \ldots \exists_{\mathsf{S}}\, {}^{\mathsf{S}}\mathrm{V}_k\, \alpha \text{ gdw } \mathcal{A} \textit{ ist in } \mathcal{B} \textit{ einbettbar.}$$

D. h. : Die Klasse der Modelle von S *in die* $\mathcal{A}$ *einbettbar ist, ist eine einstufige Basisklasse.*

Beweis: Sei μ der Typ einer einstufigen Sprache S mit $\mathrm{Dom}(\mu_1)$ endlich und $\mu_2 = \emptyset$, sei $\mathcal{A}$ Modell von S und sei $|\mathcal{A}_1| = \mathrm{k}$. Dann gibt es ein k - Tupel a, das den Individuenbereich von $\mathcal{A}$ abzählt, so dass $a_i \in \mathcal{A}_1$ für alle $i \in \{ 1, \ldots, \mathrm{k} \}$.

Sei a so.

Es wird nun ein Existenzsatz von S konstruiert, der von $\mathcal{A}$ und von allen Modellen von S erfüllt wird, in die $\mathcal{A}$ einbettbar ist.

Dazu sei
$$\Phi = \{ \psi \mid \psi \in \mathrm{FML}_{\mathsf{S}} \;\&$$
$$[(\exists h, \exists j, \text{ so dass } 1 \leq_{\mathbb{N}} h, j \leq \mathrm{k} \;\&\; h \neq j \;\&\; \psi = \neg_{\mathsf{S}}{}^{\mathsf{S}}\mathrm{V}_h =_{\mathsf{S}} {}^{\mathsf{S}}\mathrm{V}_j)$$
$$\text{oder}$$
$$(\exists i, \exists r, \text{ so dass } i \in \mathrm{Dom}(\mu_1) \;\&\; r \text{ Funktion von } \{1, \ldots, \mu_1(i)\} \text{ nach } \{1, \ldots, \mathrm{k}\} \;\&$$
$$((\psi = {}^{\mathsf{S}}\mathrm{P}_i{}^{\mathsf{S}}\mathrm{V}_{r(1)} \ldots {}^{\mathsf{S}}\mathrm{V}_{r(\mu,1,i)} \;\&\; \langle \mathrm{a}_{r(1)}, \ldots, \mathrm{a}_{r(\mu,1,i)} \rangle \in \mathcal{A}_{2,i})$$
$$\text{oder}$$
$$(\psi = \neg_{\mathsf{S}}\, {}^{\mathsf{S}}\mathrm{P}_i\, {}^{\mathsf{S}}\mathrm{V}_{r(1)} \ldots {}^{\mathsf{S}}\mathrm{V}_{r(\mu,1,i)} \;\&\; \langle \mathrm{a}_{r(1)}, \ldots, \mathrm{a}_{r(\mu,1,i)} \rangle \notin \mathcal{A}_{2,i})))] \}.$$

Da vorausgesetzt ist, dass $\mathcal{A}_1$ nur k Individuen und S nur endlich viele Prädikatkonstanten enthält, ist auch Φ endlich. Und es gibt ein $m \in \mathbb{N}^+$ und ein ϕ, so dass ϕ Abzählung von Φ ist.

Seien m und ϕ so. Sei $\alpha = ({}_S\, \phi_1 \wedge_S \dots \wedge_S \phi_m)_S$.

Dann ist α quantorenfreie Formel von S, in der höchstens die Variablen ${}^S V_1, \dots, {}^S V_k$ frei sind.

Dann gilt für eine beliebige Belegung x aus $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \models_{S,\, x(1/a(1)) \dots (k/a(k))} ({}_S\, \phi_1 \wedge_S \dots \wedge_S \phi_m)_S\, ;$$

und gemäß der Definition des Erfülltheitsbegriffs erhält man:

$$\mathcal{A} \models_S \exists_S {}^S V_1 \dots \exists_S {}^S V_k\, ({}_S\, \phi_1 \wedge_S \dots \wedge_S \phi_m)_S\, .$$

Sei $$\psi = \exists_S {}^S V_1 \dots \exists_S {}^S V_k\, ({}_S\, \phi_1 \wedge_S \dots \wedge_S \phi_m)_S\, .$$

Also $$\psi = \exists_S {}^S V_1 \dots \exists_S {}^S V_k\, \alpha.$$

Nun wird für alle Modelle $\mathcal{B}$ von S folgendes Bikonditional gezeigt:

$\mathcal{A}$ ist in $\mathcal{B}$ einbettbar $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B} \models_S \psi$.

($\Rightarrow$) Sei also $\mathcal{B}$ Modell für S und sei $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ einbettbar.

Dann gibt es nach Lemma 2.2.22 ein $\mathcal{B}' \in \mathbf{S}(\mathcal{B})$, so dass $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}'$. Sei $\mathcal{B}'$ so. Und nach Def. 2.2.16 gibt es einen Isomorphismus f von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{B}'$. Sei f so.

Dann folgt mit dem Korollar 2.3.15 zum Isomorphiesatz 2.3.14:

$$\mathcal{B}' \models_S \psi.$$

Und da ψ Existenzsatz von S ist, folgt schließlich:

$$\mathcal{B} \models_S \psi.$$

($\Leftarrow$) Sei nun $\mathcal{B}$ Modell für S und gelte $\mathcal{B} \models_S \psi$.

Dann gilt für jede Belegung x aus $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} \models_{S,x} \exists_S {}^S V_1 \dots \exists_S {}^S V_k\, ({}_S\, \phi_1 \wedge_S \dots \wedge_S \phi_m)_S\, ;$$

folglich gibt es eine Abbildung *b* von { 1, ..., k } nach $\mathcal{B}_1$, so dass:

$$\mathcal{B} \models_{S,x(1/b(1)) \ldots (k/b(k))} ({}_S\, \phi_1 \wedge_S \ldots \wedge_S \phi_m)_S \,.$$

Sei b so & sei f Funktion auf $\mathcal{A}_1$ so dass $f(a_1) = b_1 \in \mathcal{B}_1 \ldots f(a_k) = b_k \in \mathcal{B}_1$.

Dann ist f eineindeutig; denn seien $i, j \in \{ 1, ..., k \}$ mit $i \neq j$; dann enthält Φ die Formel $\neg_S {}^SV_i =_S {}^SV_j$, da $a_i \neq a_j$; und da $\mathcal{B}$ alle Formeln aus Φ erfüllt, folgt: $b_i \neq b_j$. Und es gilt:

$$\forall i \forall j\, (\, i, j \in \{ 1, ..., k \} \,\&\, i \neq j \Rightarrow b_i \neq b_j).$$

Weiterhin ist f eine isomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$.

Denn sei $i \in \mathrm{Dom}(\mu_1)$, sei y Belegung aus $\mathcal{A}$, sei x Belegung aus $\mathcal{B}$ und sei r Funktion auf $\{1, ..., \mu_1(i)\}$, so dass $\mathrm{Ran}(r) \subseteq \{1, ..., k\}$. Dann gilt:

Wenn $\langle a_{r(1)}, ..., a_{r(\mu,1,i)} \rangle \in \mathcal{A}_{2,i}$,

dann $\mathcal{A} \models_{S,y(1/a(1)) \ldots (k/a(k))} {}^SP_i {}^SV_{r(1)} \ldots {}^SV_{r(\mu,1,i)}$,

dann ${}^SP_i {}^SV_{r(1)} \ldots {}^SV_{r(\mu,1,i))} \in \Phi$,

dann $\mathcal{B} \models_{S,x(1/b(1)) \ldots (k/b(k))} {}^SP_i {}^SV_{r(1)} \ldots {}^SV_{r(\mu,1,i)}$,

dann $\langle b_{r(1)}, ..., b_{r(\mu,1,i))} \rangle \in \mathcal{B}_{2,i}$,

dann $\langle f(a_{r(1)}), ..., f(a_{r(\mu,1,i)}) \rangle \in \mathcal{B}_{2,i}$.

Wenn nun: $\langle f(a_{r(1)}), ..., f(a_{r(\mu,1,i)} \rangle \in \mathcal{B}_{2,i}$,

dann $\langle b_{r(1)}, ..., b_{r(\mu,1,i)} \rangle \in \mathcal{B}_{2,i}$,

dann $\mathcal{B} \models_{S,x(1/b(1)) \ldots (k/b(k))} {}^SP_i {}^SV_{r(1)} \ldots {}^SV_{r(\mu,1,i)}$,

dann sind $r_1, ..., r_{\mu,1,i} \in \{ 1, ..., k \} = \mathrm{Dom}(a) = \mathrm{Dom}(b)$; dann gilt:

$$\langle a_{r(1)}, ..., a_{r(\mu,1,i)} \rangle \in \mathcal{A}_{2,i} \text{ oder } \langle a_{r(1)}, ..., a_{r(\mu,1,i)} \rangle \notin \mathcal{A}_{2,i} \,.$$

Wäre nun $\langle a_{r(1)}, ..., a_{r(\mu,1,i)} \rangle \notin \mathcal{A}_{2,i}$,

dann wäre $\neg_{S\ Spi} {}^SV_{r(1)} \ldots {}^SV_{r(\mu 1,i)} \in \Phi$,

und ein Widerspruch würde folgen, da $\mathcal{B} \models_S \psi$.

Somit folgt $\langle a_{r(1)}, ..., a_{r(\mu,1,i)} \rangle \in \mathcal{A}_{2,i}$, wenn $\langle f(a_{r(1)}), ..., f(a_{r(\mu,1,i)}) \rangle \in \mathcal{B}_{2,i}$.

Und es ist gezeigt, dass $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ isomorph einbettbar ist, wenn $\mathcal{B}$ ψ erfüllt.

D. h., dass K mit

$$K = \{ \mathcal{B} | \mathcal{B} \in \mathbf{MOD}_S \text{ \& es gibt eine Einbettung von } \mathcal{A} \text{ in } \mathcal{B} \}$$

einstufige Basisklasse ist; denn es gibt eine endliche Teilmenge $\{\psi\}$ von SATZ_S, so dass

für alle $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{B} \in K \Leftrightarrow \mathcal{B} \Vdash_S \{\psi\}$;

somit ist K einstufig, endlich axiomatisierbar.

4.1.7 Satz.-

Sei S Sprache erster Stufe ohne Individuen- und nur mit endlich vielen Prädikatkonstanten. Sei $\mathcal{A}$ Modell für S, sei $k \in \mathbb{N}$ und sei die Anzahl der Elemente von $\mathcal{A}_1 = k$. Dann gibt es eine quantorenfreie Formel α von S, in der höchstens die Variablen ${}^SV_1 \ldots {}^SV_k$ frei sind, und es gilt für alle Modelle $\mathcal{B}$ von S:

$$\mathcal{B} \models_S \neg_S \exists\, {}^SV_1 \ldots \exists\, {}^SV_k\, \alpha \text{ gdw } \mathcal{A} \textit{ ist nicht in } \mathcal{B} \textit{ einbettbar.}$$

D. h.: Die Klasse der Modelle von S in die $\mathcal{A}$ nicht einbettbar ist, ist eine universelle Basisklasse.

<u>Beweis:</u> Seien die Voraussetzungen erfüllt.

Nach Satz 4.1.6 gibt es dann eine quantorenfreie Formel α von S, in der höchstens die Variablen ${}^SV_1, \ldots, {}^SV_k$ frei sind, so dass für alle Modelle $\mathcal{B}$ von S gilt:

$$\mathcal{B} \models_S \exists^S V_1 \ldots \exists^S V_k\, \alpha \text{ gdw } \mathcal{A} \text{ ist in } \mathcal{B} \text{ einbettbar.}$$

Sei α so. Dann gilt:

$$\forall \mathcal{B} (\mathcal{B} \text{ Modell für S} \Rightarrow (\mathcal{B} \models_S \neg_S \exists^S V_1 \ldots \exists^S V_k\, \alpha \text{ gdw } \mathcal{A} \text{ ist nicht in } \mathcal{B} \text{ einbettbar}).$$

Sei $\psi = \neg_S \exists^S V_1 \ldots \exists^S V_k\, \alpha$.

Dann ist ψ nach Def. 2.1.18 Allsatz von S. D. h. weiterhin, dass K mit

$$K = \{ \mathcal{B} | \mathcal{B} \in \mathbf{MOD}_S \text{ \& es gibt keine Einbettung von } \mathcal{A} \text{ in } \mathcal{B} \}$$

eine universelle Basisklasse ist; denn es gibt eine endliche Teilmenge $\{\psi\}$ von SATZ_S, so dass ψ Allsatz von S ist und für K und für alle $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{B} \in K \Leftrightarrow \mathcal{B} \Vdash_S \{\psi\}$.

Um zu sehen, dass 4.1.6 und 4.1.7 nur für einstufige Sprachen mit endlich vielen Prädikatkonstanten gelten, wird nun kurz ein Gegenbeispiel in Anlehnung an Vaught (1954) dargestellt.

4.1.8 Hilfssatz.-

Es gibt Sprachen erster Stufe, für die 4.1.6 nicht gilt.

Beweis : Sei S Sprache erster Stufe mit abzählbar unendlich vielen einstelligen Prädikatkonstanten.

Sei $\mathcal{A}$ Modell für S, so dass $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset\}$ und gelte für alle

$$i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_2): \mathcal{A}_{2,i} = \{ \langle \emptyset \rangle \}.$$

Würde 4.1.6 für beliebige einstufige Sprachen gelten, gäbe es einen Existenzsatz von S, der von allen Modellen $\mathcal{B}$ von S erfüllt werden würde, in die $\mathcal{A}$ einbettbar ist.

Sei ψ so.

Dann würden in ψ nur endlich viele Prädikatkonstanten vorkommen, da alle Formeln von S von endlicher Länge sind; dann gäbe es eine natürliche Zahl m, so dass für alle i gelten würde

$$i \in \mathrm{Dom}(S_2) \Rightarrow (S_{2,i} \text{ kommt in } \psi \text{ vor} \Rightarrow i <_{\mathrm{N}} m).$$

Sei m so.

Sei weiterhin nun $\mathcal{A}^*$ Modell von S, so dass $\mathcal{A}^*_1 = \mathcal{A}_1$ und für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}_2)$ mit $i <_{\mathrm{N}}$ m

gelte $\mathcal{A}^*_{2,i} = \mathcal{A}_{2,i}$,

und für $i \geq_{\mathrm{N}}$ m gelte $\mathcal{A}^*_{2,i} = \emptyset$.

Dann würde $\mathcal{A}^*$ ψ erfüllen, aber $\mathcal{A}$ wäre nicht in $\mathcal{A}^*$ einbettbar, im Widerspruch zur Annahme der Gültigkeit von 4.1.5.

Das zeigt, dass Satz 4.1.6 nicht für beliebige, einstufige Sprachen gilt.

Der nächste Satz enthält die algebraische Charakterisierung von einstufigen Modellklassen, die mit einer Menge von Allsätzen axiomatisiert werden können. Er gilt nur für einstufige Sprachen mit endlich vielen Prädikat- und ohne Individuenkonstanten.

4.1.9 Satz.- (Tarski, 1954, S. 578, Th. 1.2)

Sei S *Sprache erster Stufe ohne Individuen- und nur mit endlich vielen Prädikatkonstanten. K sei eine nichtleere Klasse von Modellen von* S.

Dann sind die beiden folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) *K ist eine universelle Klasse.*

(ii) $\forall \mathcal{A}\,(\mathcal{A}$ *Modell für* $\mathsf{S}\ \&\ \mathbf{S}_\omega(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{II}(\mathbf{SS}(K)) \Rightarrow \mathcal{A} \in K)$.

Beweis: Sei S Sprache erster Stufe mit $\mathrm{Dom}(\mu_1)$ endlich, $\mu_2 = \varnothing$; sei $\mathrm{K} \subseteq \mathbf{MOD}_{\mathsf{S}}$ und sei $\mathrm{K} \neq \varnothing$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Angenommen (i). Dann gilt:

$$\exists \Sigma\,(\,\Sigma \neq \varnothing\ \&\ \Sigma \subseteq \mathrm{SATZ}_{\mathsf{S}}\ \&\ \forall \phi\,(\,\phi \in \Sigma \Rightarrow \phi \text{ Allsatz von } \mathsf{S}\,)$$
$$\&\ \forall \mathcal{A}\,(\mathcal{A} \in \mathrm{K} \Leftrightarrow \mathcal{A} \models\!\models_{\mathsf{S}} \Sigma)\,).$$

Sei Σ so. Weiterhin wird (nicht (ii)) angenommen.

Dann $\qquad \exists \mathcal{A}\,(\mathcal{A}\text{ Modell für } \mathsf{S}\ \&\ \mathbf{S}_\omega(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{II}(\mathbf{SS}(\mathrm{K}))\ \&\ \mathcal{A} \notin \mathrm{K}\,)$.

Sei $\mathcal{A}$ so.

Dann $\qquad \exists \phi\,(\,\phi \in \Sigma\ \&\ \text{nicht}\,(\mathcal{A} \models_{\mathsf{S}} \phi)\,)$.

Sei ϕ so.

Da $\mathbf{S}_\omega(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{S}(\mathcal{A})$, folgt:

$$\exists \mathcal{A}^*\,(\,\mathcal{A}^* \in \mathbf{S}_\omega(\mathcal{A})\ \&\ \text{nicht}\,(\,\mathcal{A}^* \models_{\mathsf{S}} \phi\,)\,).$$

Sei $\mathcal{A}^*$ so.

Dann ist $\mathcal{A}^* \in \mathbf{II}(\mathbf{SS}(\mathrm{K}))$.

Dann $\exists\mathcal{B}(\mathcal{B}\in \mathbf{SS}(\mathrm{K})\ \&\ \mathcal{A}^* \cong \mathcal{B})$. Sei $\mathcal{B}$ so.

Nach Voraussetzung gilt: $\forall\mathcal{A}(\mathcal{A}\in \mathrm{K} \Rightarrow \mathcal{A} \models_S \phi)$.

Dann folgt mit Theorem 4.1.4:

$$\forall\mathcal{A}(\mathcal{A}\in \mathbf{SS}(\mathrm{K}) \Rightarrow \mathcal{A} \models_S \phi).$$

Also $\mathcal{B} \models_S \phi\ \&\ \mathcal{A}^* \cong \mathcal{B}$.

Dann folgt mit Korollar 2.3.15:

$\mathcal{A}^* \models_S \phi$, im Widerspruch zu: (nicht $\mathcal{A}^* \models_S \phi$).

Also gilt (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Angenommen

$$\forall\mathcal{A}(\mathcal{A}\text{ Modell für } S\ \&\ \mathbf{S}_\omega(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{II}(\mathbf{SS}(\mathrm{K})) \Rightarrow \mathcal{A}\in \mathrm{K}).$$

Sei $\Sigma = \{\, \phi \mid \phi \text{ Allsatz von } S\ \&\ \forall\mathcal{A}(\mathcal{A}\in \mathrm{K} \Rightarrow \mathcal{A} \models_S \phi)\}$.

Dann ist $\Sigma \neq \emptyset$, da etwa der Allsatz $\neg_S \exists_S {}^S V_1 \neg_S {}^S V_1 = {}^S V_1$ Element von Σ ist; des Weiteren gilt offensichtlich:

$$\forall\phi(\phi\in\Sigma \Rightarrow \phi \text{ Allsatz von } S)$$

und $\forall\mathcal{A}(\mathcal{A}\in \mathrm{K} \Rightarrow \mathcal{A} \Vdash_S \Sigma)$.

Um zu zeigen, dass K eine universelle Klasse ist, bleibt

$$\forall\mathcal{A}(\mathcal{A} \Vdash_S \Sigma \Rightarrow \mathcal{A}\in \mathrm{K})$$

zu beweisen.

Sei dazu $\mathcal{A}$ Modell für S und gelte $\mathcal{A} \Vdash_S \Sigma$ und gelte $\mathcal{A} \in \mathrm{K}$ nicht.

Dann $\exists\mathcal{A}^*(\mathcal{A}^* \in \mathbf{S}_\omega(\mathcal{A})\ \&\ \mathcal{A}^* \notin \mathbf{II}(\mathbf{SS}(\mathrm{K})))$.

Sei $\mathcal{A}^*$ so. Dann ist $\mathcal{A}^*_1$ endlich. Dann folgt mit Satz 4.1.7:

$$\exists\psi(\psi \text{ ist Allsatz von } S\ \&\ \forall\mathcal{B}(\mathcal{B}\text{ Modell für } S \Rightarrow$$

$$\mathcal{B} \models_S \psi \Leftrightarrow \mathcal{A}^* \text{ ist nicht in } \mathcal{B} \text{ einbettbar})).$$

Sei ψ so.

Dann $$\forall \mathcal{B}(\mathcal{B} \in \mathbf{II}(\mathbf{SS}(\mathrm{K})) \Rightarrow \mathcal{B} \models_S \psi).$$

Nun gilt $\mathrm{K} \subseteq \mathbf{SS}(\mathrm{K})$ und $\mathrm{K} \subseteq \mathbf{II}(\mathrm{K})$ und es folgt.

$$\forall \mathcal{B}(\mathcal{B} \in \mathrm{K} \Rightarrow \mathcal{B} \models_S \psi).$$

Das zeigt, dass $\psi \in \Sigma$.

Nun gilt $\mathcal{A} \Vdash_S \Sigma$, im besonderen gilt $\mathcal{A} \models_S \psi$. D. h. das Submodell $\mathcal{A}^*$ von $\mathcal{A}$ ist nicht in $\mathcal{A}$ einbettbar, im Widerspruch zu Hilfssatz 2.2.20. Und es folgt schließlich:

$$\mathcal{A} \in \mathrm{K}, \text{ wenn } \mathcal{A} \Vdash_S \Sigma.$$

Und es ist bewiesen, dass K eine universelle Klasse ist, wenn (ii) gilt.

Wie schon bemerkt, gilt der Satz 4.1.9 von Tarski nur für einstufige Sprachen, die keine Funktions- und keine Individuenkonstanten vorsehen und nur endlich viele Prädikatkonstanten enthalten. Die Ultraproduktkonstruktion gestattet nun eine Verallgemeinerung, so dass die Beschränkung auf endlich viele Prädikatkonstanten entfallen kann (Theorem 4.1.12).

Da man in der Messtheorie an Strukturen interessiert ist, die mit endlich vielen Allsätzen axiomatisiert werden können, wird hier nun die von Vaught (1954) stammende Spezialisierung des Theorems von Tarski (4.1.9) bewiesen, die angibt, unter welchen Bedingungen eine Klasse von Modellen mit endlich vielen Allsätzen einer endlichen, einstufigen Sprache axiomatisierbar ist.

4.1.10 Satz.-

Sei $\mathcal{S}$ Sprache erster Stufe ohne Individuen- und nur mit endlich vielen Prädikatkonstanten. K sei eine nichtleere Klasse von Modellen von $\mathcal{S}$.

Dann sind die beiden folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) *K ist eine universelle Basisklasse.*

(ii) $\exists n\,(n \in \mathbb{N}^+ \;\&\; \forall \mathcal{A}\,(\mathcal{A}$ *Modell für* $\mathcal{S} \;\&\; \mathbf{S}_n(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{II}(\mathbf{SS}(K)) \Rightarrow \mathcal{A} \in K))$.

<u>Beweis:</u> Seien S und K wie vorausgesetzt.

(i) ⇒ (ii). Sei K eine universelle Basisklasse. Dann

$$\exists\Sigma(\ \Sigma \neq \emptyset \ \&\ \Sigma \text{endl} \subseteq \mathrm{SATZ}_S \ \&\ \forall\sigma(\ \sigma \in \Sigma \Rightarrow \sigma \text{ Allsatz von } S\ )\ \&$$
$$\forall\mathcal{A}(\mathcal{A} \in K \Leftrightarrow \mathcal{A} \Vdash_S \Sigma)\ ).$$

Sei Σ so. Dann gibt es einen Allsatz von S, der einer Konjunktion aller $\sigma \in \Sigma$ logisch äquivalent ist. Sei ϕ so. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}^+$, so dass m die Zahl der verschiedenen Variablen von ϕ angibt. Sei m so. Gelte nun (ii) nicht. Dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}^+$:

$$\exists\mathcal{A}(\ \mathcal{A} \text{ Modell für } S \ \&\ \mathbf{S}_n(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{II}(\mathbf{SS}(K))\ \&\ \mathcal{A} \notin K\ ).$$

Dann $\exists\mathcal{A}(\ \mathcal{A} \text{ Modell für } S \ \&\ \mathbf{S}_m(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{II}(\mathbf{SS}(K))\ \&\ \mathcal{A} \notin K\ ).$

Sei $\mathcal{A}$ so.

Dann $\exists\psi(\ \psi \in \Sigma \ \&\ \text{nicht}\ (\mathcal{A} \models_S \psi)\ ).$

Sei ψ so.

Dann folgt mit Hilfssatz 4.1.4:

$$\exists\mathcal{A}^*(\ \mathcal{A}^* \in \mathbf{S}_m(\mathcal{A})\ \&\ \text{nicht}\ (\mathcal{A}^* \models_S \psi)\ ).$$

Sei $\mathcal{A}^*$ so.

Dann ist $\mathcal{A}^* \in \mathbf{II}(\mathbf{SS}(K)).$

Dann $\exists\mathcal{B}(\ \mathcal{B} \in \mathbf{SS}(K)\ \&\ \mathcal{A}^* \cong \mathcal{B}).$

Sei $\mathcal{B}$ so.

Nach Voraussetzung gilt: $\forall\mathcal{A}(\mathcal{A} \in K \Rightarrow \mathcal{A} \Vdash_S \Sigma\ );$

dann gilt $\forall\mathcal{A}(\mathcal{A} \in K \Rightarrow \mathcal{A} \models_S \psi\ ).$

Dann folgt mit Theorem 4.1.4:

$$\forall\mathcal{B}(\ \mathcal{B} \in \mathbf{SS}(K) \Rightarrow \mathcal{B} \models_S \psi\ ).$$

Dann $\mathcal{B} \models_S \psi \ \&\ \mathcal{A}^* \cong \mathcal{B}.$

Dann folgt mit dem Korollar 2.3.15 zum Isomorphietheorem:

$$\mathcal{A}^* \models_S \psi,$$

im Widerspruch zu (nicht $\mathcal{A}^* \models_S \psi$) . Also gilt (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Angenommen

(*) $\exists n\,(\, n \in \mathbb{N}^+ \;\&\; \forall \mathcal{A}\,(\,\mathcal{A}$ Modell für S & $\mathbf{S}_n(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{II}(\mathbf{SS}(\mathrm{K})) \Rightarrow \mathcal{A} \in \mathrm{K}\,)\,)$.

Sei n so.

Sei $\Sigma = \{\, \phi \mid \exists \alpha\,(\, \alpha$ ist Formel von S in konjunktiver Normalform

& höchstens die Variablen ${}^S\mathrm{V}_1, \ldots, {}^S\mathrm{V}_n$ sind frei in α &

$\phi = \neg_S \exists_S {}^S\mathrm{V}_1 \ldots \exists_S {}^S\mathrm{V}_n\, \alpha \;\&\; \forall \mathcal{A}\,(\,\mathcal{A} \in \mathrm{K} \Rightarrow \mathcal{A} \models_S \phi\,)\,\}$.

Dann ist Σ nichtleer. Weiterhin ist Σ endlich, da S nur endlich viele Prädikatkonstanten hat und da in den Formeln von Σ nur endlich viele Variablen vorkommen.

Dann $\qquad \forall \phi\,(\, \phi \in \Sigma \Rightarrow \phi$ ist Allsatz von S).

Dann $\qquad \forall \mathcal{A}\,(\mathcal{A} \in \mathrm{K} \Rightarrow \mathcal{A} \models\!\models_S \Sigma\,)$.

Um zu zeigen, dass K eine universelle Basisklasse ist, bleibt zu zeigen:

$$\forall \mathcal{A}\,(\,\mathcal{A} \models\!\models_S \Sigma \Rightarrow \mathcal{A} \in \mathrm{K}\,).$$

Sei dazu $\mathcal{A}$ Modell von S, so dass $\mathcal{A} \models\!\models_S \Sigma$ gilt, und $\mathcal{A} \in \mathrm{K}$ nicht gilt.

Dann $\qquad$ nicht ($\mathbf{S}_n(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{II}(\mathbf{SS}(\mathrm{K}))$).

Dann $\qquad \exists \mathcal{A}^*\,(\,\mathcal{A}^* \in \mathbf{S}_n(\mathcal{A}) \;\&\; \mathcal{A}^* \notin \mathbf{II}(\mathbf{SS}(\mathrm{K}))\,)$.

Sei $\mathcal{A}^*$ so.

Dann ist $\mathcal{A}^*_1$ höchstens n-elementig und somit endlich. Dann folgt mit Satz 4.1.7:

$\exists \alpha\,(\, \alpha$ ist quantorenfreie Formel von S & $\forall \mathcal{B}(\, \mathcal{B}$ Modell für S

$\Rightarrow (\, \mathcal{B} \models_S \neg_S \exists_S {}^S\mathrm{V}_1 \ldots \exists_S {}^S\mathrm{V}_n\, \alpha \Leftrightarrow \mathcal{A}^*$ ist nicht in $\mathcal{B}$ einbettbar)).

Sei α so.

Nach Hilfssatz 2.3.29 gibt es eine quantorenfreie Formel α' von S in konjunktiver Normalform, so dass α' zu α logisch äquivalent ist und α' genau die Variablen von S frei enthält, die α frei enthält. Sei α' so.

Und sei: $\theta = \neg_S \exists_S {}^S V_1 \dots \exists_S {}^S V_n \alpha'$.

Da $\mathcal{A}^*$ zu keiner Struktur aus **SS**(K) isomorph ist, gilt:

$$\forall \mathcal{B}(\mathcal{B} \in \mathbf{II}(\mathbf{SS}(K)) \Rightarrow \mathcal{B} \models_S \theta).$$

Und da $K \subseteq \mathbf{SS}(K)$ und $K \subseteq \mathbf{II}(K)$, folgt:

$$\forall \mathcal{B}(\mathcal{B} \in K \Rightarrow \mathcal{B} \models_S \theta).$$

Nun ist der Kern von θ in konjunktiver Normalform und das Präfix von θ ist $\neg_S \exists_S {}^S V_1 \dots \exists_S {}^S V_n$ und weiterhin gilt $\forall \mathcal{A} (\mathcal{A} \in K \Rightarrow \mathcal{A} \models_S \theta)$, somit folgt für den Allsatz θ:

$$\theta \in \Sigma.$$

Und da $\mathcal{A} \Vdash_S \Sigma$

gilt im besonderen: $\mathcal{A} \models_S \theta$.

D. h., dass das n-elementige Submodell $\mathcal{A}^*$ von $\mathcal{A}$ nicht in $\mathcal{A}$ einbettbar ist. Damit ist gezeigt, dass die Annahme $\mathcal{A} \notin K$ zu einem Widerspruch führt. Und es gilt:

$$\mathcal{A} \in K, \text{ wenn } \mathcal{A} \Vdash_S \Sigma.$$

Somit gilt: $\forall \mathcal{A} (\mathcal{A} \in K \Leftrightarrow \mathcal{A} \Vdash_S \Sigma)$.

Und da Σ eine endliche Menge von Allsätzen von S ist, ist damit bewiesen, dass K eine universelle Basisklasse ist, wenn (ii) gilt.

□

Nun wird Theorem 4.1.12 bewiesen. Dieser Satz formuliert, für alle einstufigen Sprachen, die algebraischen Bedingungen, die eine Klasse von Strukturen zu erfüllen hat, um mit einer Menge von Allsätzen axiomatisiert werden zu können.

Zuvor müssen aber noch vier verschiedene Abschlussbedingungen für Klassen von Strukturen definiert werden.

4.1.11 Definitionen.-

K ist

(i) *unter Isomorphiebildung*

(ii) *unter Substrukturbildung*

(iii) *unter Ultraproduktbildung*

(iv) *unter einstufiger Äquivalenz*

abgeschlossen

gdw

$K \subseteq$ **STRUK** &

(i) $\forall \mathcal{A} \forall \mathcal{B} (\mathcal{A}, \mathcal{B} \in$ **STRUK** & $\exists f (f$ Einbettung von $\mathcal{B}$ in $\mathcal{A})$ &

& $\mathcal{A} \in K \Rightarrow \mathcal{B} \in K)$.

(ii) $\forall \mathcal{A} \forall \mathcal{B} (\mathcal{A}, \mathcal{B} \in$ **STRUK** & $\mathcal{A} \in K$ & $\mathcal{B} \in \mathbf{S}(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \in K)$.

(iii) $\forall \mathcal{A} \forall F (\mathcal{A}$ homogene Familie von Strukturen &

$\forall i (i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A}_i \in K)$ & F Ultrafilter auf $\mathbf{V}(\mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$

$\Rightarrow \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, F) \in K)$.

(iv) $\forall \mu \forall S (S$ Sprache erster Stufe des Typs $\mu \Rightarrow$

$\forall \mathcal{A} \forall \mathcal{B} (\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Modelle für S & $\mathcal{A} \in K$ & $\mathcal{A} \equiv_S \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} \in K)$.

4.1.12 Satz.-

Sei S Sprache erster Stufe; sei $K \subseteq$ $\mathbf{MOD}_S$. Dann sind die beiden folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) *K ist eine universelle Klasse.*

(ii) *K ist unter Isomorphie-, Substruktur- und Ultraproduktbildung abgeschlossen.*

Beweis : Sei S Sprache erster Stufe; sei μ der Typ von S und sei $K \subseteq \mathbf{MOD}_S$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Sei K universelle Klasse.

Dann gibt es eine Menge Σ von Allsätzen von S, so dass für alle Modelle $\mathcal{A}$ von S gilt:

$$\mathcal{A} \in \mathrm{K} \text{ gdw } \mathcal{A} \Vdash_S \Sigma.$$

Sei Σ so.

Sei $\mathcal{A} \in \mathrm{K}$, sei $\mathcal{B}$ Modell für S und sei f eine isomorphe Einbettung von $\mathcal{B}$ in $\mathcal{A}$.

Dann $$\exists \mathcal{A}' \, (\mathcal{A}' \in \mathbf{S}(\mathcal{A}) \; \& \; \mathcal{B} \cong \mathcal{A}').$$

Sei $\mathcal{A}'$ so. Da K eine universelle Klasse ist, enthält Σ nur Allsätze von S; da $\mathcal{A}' \in \mathbf{S}(\mathcal{A})$ und $\mathcal{A} \Vdash_S \Sigma$, ist $\mathcal{A}' \in \mathrm{K}$. Da $\mathcal{A}' \cong \mathcal{B}$, sind $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}$ einstufig äquivalent, und $\mathcal{B} \in \mathrm{K}$ folgt. Also ist K unter Isomorphiebildung abgeschlossen, wenn (1) gilt.

Sei $\mathcal{A} \in \mathrm{K}$ und sei $\mathcal{B} \in \mathbf{S}(\mathcal{A})$. Dann ist $\mathcal{B}$ isomorph in $\mathcal{A}$ einbettbar, und da K unter Isomorphiebildung abgeschlossen ist, ist $\mathcal{B} \in \mathrm{K}$; also ist K unter Substrukturbildung abgeschlossen.

Sei nun $\mathcal{A}$ eine Familie von Strukturen vom Typ μ und sei $\mathrm{Ran}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{K}$; sei weiterhin F Ultrafilter auf $\mathbf{V}(\mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$.

Sei $\sigma \in \Sigma$. Dann gilt für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$:

$$\mathcal{A}_i \models \sigma, \text{ da } \mathcal{A}_i \in \mathrm{K}.$$

Nun ist $\mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \in \mathrm{F}$, da F Filter auf $\mathbf{V}(\mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$ ist; und es folgt mit Satz 3.3.18:

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{F}) \models_S \sigma;$$

das gilt für alle $\sigma \in \Sigma$ und es folgt

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{F}) \Vdash_S \Sigma;$$

also ist $$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{F}) \in \mathrm{K}.$$

Das gilt für alle Familien $\mathcal{A}$ mit $\mathrm{Ran}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{K}$ und alle Ultrafilter F auf $\mathbf{V}(\mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$. Also ist K unter Ultraproduktbildung abgeschlossen, wenn K eine universelle Klasse ist.

(ii) $\Rightarrow$ (i).

Sei K unter Isomorphie-, Substruktur- und Ultraproduktbildung abgeschlossen. Sei

$$\Gamma = \{ \sigma \mid \sigma \text{ Allsatz von S} \; \& \; \forall \mathcal{A} \, (\mathcal{A} \in \mathrm{K} \Rightarrow \mathcal{A} \models_S \sigma) \}.$$

Dann ist $$\Gamma \neq \emptyset \;\&\; \Gamma \subseteq \mathrm{SATZ}_{\mathsf{S}}$$

$$\&\; \forall \sigma\,(\,\sigma \in \Gamma \Rightarrow \sigma \text{ ist Allsatz von } \mathsf{S}\,).$$

Ferner gilt $$\forall \mathcal{A}\,(\mathcal{A} \in \mathrm{K} \Rightarrow \mathcal{A} \Vdash_{\mathsf{S}} \Gamma\,).$$

Es bleibt noch zu zeigen: $$\forall \mathcal{A}\,(\mathcal{A} \Vdash_{\mathsf{S}} \Gamma \Rightarrow \mathcal{A} \in \mathrm{K}\,).$$

Gelte also $$\mathcal{A} \Vdash_{\mathsf{S}} \Gamma.$$

Beweisübersicht:

Es wird nun die einstufige Sprache S um $\mathcal{A}_1$ erweitert, so dass in der so erweiterten Sprache $\mathrm{sEL}_{\mathcal{A}(1)}(\mathsf{S})$ für alle Individuen von $\mathcal{A}_1$ Individuenkonstanten zur Verfügung stehen. In der Sprache $\mathrm{sEL}_{\mathcal{A}(1)}(\mathsf{S})$ wird dann das Diagramm von $\mathcal{A}$ gebildet. Weiterhin wird für jede endliche Teilmenge des Diagramms von $\mathcal{A}$ eine Struktur aus K festgelegt, die einen Existenzsatz von S erfüllt, der aus den Atomsätzen und den negierten Atomsätzen jener endlichen Teilmenge des Diagramms gebildet worden ist. Das Ultraprodukt der Familie dieser Strukturen aus K gehört dann nach Voraussetzung zu K. Anschließend wird eine Abbildung h von $\mathcal{A}$ in dieses Ultraprodukt definiert. Um dann mit dem Diagrammlemma folgern zu können, dass h isomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in dieses Ultraprodukt ist, wird bewiesen, dass das um h erweiterte Ultraprodukt das Diagramm von $\mathcal{A}$ über S simultan erfüllt.

Sei $$\mathsf{S}^* = \mathrm{sEL}_{\mathcal{A}(1)}(\mathsf{S}),$$

$$\mathcal{A}^* = \mathrm{CsEM}(\mathcal{A}).$$

Dann ist S^* eine Sprache erster Stufe des Typs $\langle \mu_1, \mu_2 \cup (\mathcal{A}_1 \times \{\mu_2\})\rangle$ und $\mathcal{A}^*$ ist eine Struktur desselben Typs. Also ist $\mathcal{A}^*$ Modell für S^*.

Es wird nun als erstes eine Familie $\mathcal{B}$ von Elementen aus K konstruiert, ferner ein Ultrafilter F, um das reduzierte Produkt dieser Familie $\mathcal{B}$ bzgl. F zu bilden.

Als Indexmenge der gesuchten Familie von Strukturen aus K wird die Klasse aller endlichen Teilmengen des Diagramms von $\mathcal{A}$ über S gewählt. Sei

$$I = \{ \Theta \mid \Theta \text{ ist endliche Teilklasse von Diagr}(\mathcal{A}, S) \text{ \& } \Theta \neq \emptyset \}.$$

Um nun die gesuchte Familie $\mathcal{B}$ von Elementen aus K als Funktion auf I konstruieren zu können, werden einige Funktionen auf I eingeführt.

Sei $\Theta \in$ I. Dann

$$\{ a \mid a \in \mathcal{A}_1 \text{ \& } (a, \mathrm{AT}_S) \text{ Teilausdruck eines Elementes von } \Theta \} \text{ endl} \subseteq \mathcal{A}_1 .$$

Dann gilt

$$\forall\Theta (\Theta \in I \Rightarrow \exists a \, \exists m (m \in \mathbb{N} \text{ \& } a \text{ ist Abzählung der Länge } m \text{ von}$$

$$\{ a \mid a \in \mathcal{A}_1 \text{ \& } (a, \mathrm{AT}_S) \text{ ist Teilausdruck eines Elementes von } \Theta \})).$$

Dann folgt mit Auswahlaxiom

$$\exists a \, \exists m (a, m \text{ sind Funktionen auf I \&}$$

$$\forall\Theta (\Theta \in I \Rightarrow a_\Theta \text{ ist Abzählung der Länge } m_\Theta \text{ von}$$

$$\{ a \mid a \in \mathcal{A}_1 \text{ \& } (a, \mathrm{AT}_S) \text{ Teilausdruck eines Elementes von } \Theta \})).$$

Seien a, m so.

Ferner gilt:

$$\forall\Theta (\Theta \in I \Rightarrow \Theta \text{ endl} \subseteq \text{Diagr}(\mathcal{A}, S) \text{ \& } \Theta \neq 0).$$

Dann gilt

$$\forall\Theta (\Theta \in I \Rightarrow \exists \phi \, \exists r (\phi \text{ ist Abzählung der Länge } r \text{ von } \Theta)).$$

Dann folgt mit Auswahlaxiom

$$\exists \phi \, \exists r (\phi, r \text{ sind Funktionen auf I \&}$$

$$\forall\Theta (\Theta \in I \Rightarrow \phi_\Theta \text{ ist Abzählung der Länge } r_\Theta \text{ von } \Theta)).$$

Seien ϕ, r so.

Ferner gilt:

$$\exists \psi (\psi \text{ ist Funktion auf I \&}$$

$$\forall\Theta\,(\,\Theta \in \mathrm{I} \Rightarrow \psi_{\Theta} \text{ ist Funktion auf } \{\,1, ..., \mathrm{r}_{\Theta}\,\}\ \&$$

$$\forall j\,(j \in \{\,1, ..., \mathrm{r}_{\Theta}\,\} \Rightarrow$$

$$\psi_{\Theta,j} \text{ ist das Ergebnis der simultanen Substitution}$$

$$\text{der Variablen } {}^{S}\mathrm{V}_{1}\,, ..., {}^{S}\mathrm{V}_{m(\Theta)} \text{ von } S$$

$$\text{für die Konstanten } (\mathrm{a}_{\Theta,1}\,, \mathrm{AT}_{S}), ..., (\mathrm{a}_{\Theta,\,m(\Theta)}\,, \mathrm{AT}_{S}) \text{ in } \phi_{\Theta,j})\,)\,).$$

Sei ψ das Ergebnis der Substitution von resp. ${}^{S}\mathrm{V}_{1}, ..., {}^{S}\mathrm{V}_{m(\Theta)}$ für die INDK_{S} $(\mathrm{a}_{\Theta,1}, \mathrm{AT}_{S}), ..., (\mathrm{a}_{\Theta,\,m(\Theta)}, \mathrm{AT}_{S})$ in $\phi_{\Theta,j}$ (d. h. es wird erst ${}^{S}\mathrm{V}_{1}$ für $(\mathrm{a}_{\Theta,1}, \mathrm{AT}_{S})$, dann ${}^{S}\mathrm{V}_{2}$ für $(\mathrm{a}_{\Theta,2}, \mathrm{AT}_{S})$, ..., dann ${}^{S}\mathrm{V}_{m(\Theta)}$ für $(\mathrm{a}_{\Theta,\,m(\Theta)}, \mathrm{AT}_{S})$ substituiert.

Dann gilt $\quad \forall\Theta\ (\,\Theta \in \mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{Ran}(\psi_{\Theta}) \subseteq \mathrm{FML}_{S}\,).$

Ferner gilt

$$\exists\rho\,(\,\rho \text{ ist Funktion auf I } \&$$

$$\forall\Theta\,(\,\Theta \in \mathrm{I} \Rightarrow \rho_{\Theta} = \exists_{S}\,{}^{S}\mathrm{V}_{1} \ldots \exists_{S}\,{}^{S}\mathrm{V}_{m(\Theta)}\ \mathrm{Konj}_{S}\,(\psi_{\Theta})\,)\,),$$

wobei $\mathrm{Konj}_{S}(\psi_{\Theta})$ die Konjunktion der Glieder der Folge ψ_{Θ} bezeichnet.

Sei ρ so.

Nun gilt $\quad \forall\Theta\,(\,\Theta \in \mathrm{I} \Rightarrow \Theta \subseteq \mathrm{Diagr}(\mathcal{A}, S)\,).$

Dann folgt mit Def. 2.3.52

$$\forall\Theta\,(\,\Theta \in \mathrm{I} \Rightarrow \mathcal{A}^{*} \models_{S^{*}} \Theta).$$

Dann gilt

$$\forall\Theta\,(\,\Theta \in \mathrm{I} \Rightarrow \exists\mathfrak{z}\,(\,\mathfrak{z} \text{ ist eine Belegung aus } \mathcal{A}^{*}\ \&\ \mathcal{A}^{*} \models_{S^{*},\,\mathfrak{z}} \mathrm{Konj}_{S^{*}}\,(\phi_{\Theta})\,)\,).$$

Dann folgt mit dem Auswahlaxiom

$$\exists\mathfrak{z}\,(\,\mathfrak{z} \text{ ist eine Funktion auf I } \&$$

$$\forall\Theta\,(\,\Theta \in \mathrm{I} \Rightarrow \mathfrak{z}_{\Theta} \text{ Belegung aus } \mathcal{A}^{*}\ \&\ \mathcal{A}^{*} \models_{S^{*},\,\mathfrak{z}(\Theta)} \mathrm{Konj}_{S^{*}}\,(\phi_{\Theta})\,)\,).$$

Sei z so.

Sei ferner für jedes $\Theta \in \mathrm{I}$:

$$z^*_\Theta = z_\Theta(1/a_\Theta(1)) \dots (m_\Theta/a_\Theta(m_\Theta)).$$

Dann ist für jedes $\Theta \in I$ z^*_Θ eine Belegung aus $\mathcal{A}^*$ (und aus $\mathcal{A}$).

Dann folgt mit dem Überführungstheorem 2.3.18:

$$\forall\Theta\,(\,\Theta \in I \Rightarrow \mathcal{A}^* \models_{S^*,\,z^*(\Theta)} \mathrm{Konj}_S\,(\psi_\Theta)\,).$$

Dann gilt

$$\forall\Theta\,(\,\Theta \in I \Rightarrow \mathcal{A}^* \models_{S^*,\,z(\Theta)} \exists_S\,{}^S V_1 \dots \exists_S\,{}^S V_{m(\Theta)}\,\mathrm{Konj}_S\,(\psi_\Theta)\,).$$

Dann ist $\qquad \exists_S\,{}^S V_1 \dots \exists_S\,{}^S V_{m(\Theta)}\,\mathrm{Konj}_S\,(\psi_\Theta) \in \mathrm{SATZ}_S$,

und es folgt:

$$\forall\Theta\,(\,\Theta \in I \Rightarrow \mathcal{A} \models_{S,\,z(\Theta)} \exists_S\,{}^S V_1 \dots \exists_S\,{}^S V_{m(\Theta)}\,\mathrm{Konj}_S\,(\psi_\Theta)\,).$$

Dann gilt

$$\forall\Theta\,(\,\Theta \in I \Rightarrow \mathcal{A} \models_S\ \neg_S \forall_S\,{}^S V_1 \dots \forall_S\,{}^S V_{m(\Theta)}\,\neg_S\,\mathrm{Konj}_S\,(\psi_\Theta)\,).$$

Dann gilt

$$\forall\Theta\,(\,\Theta \in I \Rightarrow \text{nicht}\,(\mathcal{A} \models_S\ \forall_S\,{}^S V_1 \dots \forall_S\,{}^S V_{m(\Theta)}\,\neg_S\,\mathrm{Konj}_S\,(\psi_\Theta)\,)\,).$$

Nach Voraussetzung gilt $\quad \forall\psi\,(\,\psi \in \Gamma \Rightarrow \mathcal{A} \models_S \psi\,).$

Also gilt $\quad \forall\Theta\,(\,\Theta \in I \Rightarrow \forall_S\,{}^S V_1 \dots \forall_S\,{}^S V_{m(\Theta)}\,\neg_S\,\mathrm{Konj}_S\,(\psi_\Theta) \notin \Gamma\,).$

Dann gilt nach Einführung von Γ:

$$\forall\Theta\,(\,\Theta \in I \Rightarrow \exists\mathcal{B}\exists x\,(\,\mathcal{B} \in K\ \&\ x \text{ ist Belegung aus } \mathcal{B}\ \&$$
$$\text{nicht}\,(\,\mathcal{B} \models_{S,x}\ \forall_S\,{}^S V_1 \dots \forall_S\,{}^S V_{m(\Theta)}\,\neg_S\,\mathrm{Konj}_S\,(\psi_\Theta)\,)\,)\,).$$

Dann gilt: $\qquad \forall\Theta\,(\,\Theta \in I \Rightarrow$

$$\exists\mathcal{B}\exists x\,(\,\mathcal{B} \in K\ \&\ x \text{ ist Belegung aus } \mathcal{B}\ \&\ \mathcal{B} \models_{S,x} \mathrm{Konj}_S\,(\psi_\Theta)\,)\,).$$

Dann folgt mit dem Auswahlaxiom:

$$\exists\mathcal{B}\exists x\,(\,\mathcal{B}, x \text{ Funktionen auf } I\ \&\ \forall\Theta\,(\,\Theta \in I$$
$$\Rightarrow \mathcal{B}_\Theta \in K\ \&\ x_\Theta \text{ Belegung aus } \mathcal{B}_\Theta\ \&\ \mathcal{B}_\Theta \models_{S,\,x(\Theta)} \mathrm{Konj}_S\,(\psi_\Theta)\,)\,).$$

Seien $\mathcal{B}$, x so.

$\mathcal{B}$ ist eine homogene Familie von Strukturen aus K. Um zu dieser Familie ein reduziertes Ultraprodukt bilden zu können, wird ein geeigneter Ultrafilter benötigt, der als nächstes eingeführt wird.

Der gesuchte Ultrafilter muss eine Teilmenge des BOOLEschen Verbandes **V**(I) sein. Wir führen den Ultrafilter mit Hilfe des Ultrafiltertheorems 3.2.15 ein. Dazu wird eine Teilmenge von POT(I) angegeben werden, die unter endlichmaliger Schnittbildung in **V**(I) nicht leer ist. Nun gilt:

$$\exists M\,(\,M \text{ ist Funktion auf I } \&$$
$$\forall \Theta\,(\,\Theta \in \mathrm{I} \Rightarrow M_\Theta = \{\,\Omega \mid \Omega \in \mathrm{I}\ \&\ \Theta \subseteq \Omega\,\}\,)\,).$$

Sei M so.

Dann ist $\mathrm{Ran}(\mathrm{M}) \subseteq \mathrm{POT}(\mathrm{I}) = \mathbf{V}(\mathrm{I})_1$.

Seien ferner $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{Ran}(\mathrm{M})$. Dann

$$\exists \Theta \exists \Omega\,(\,\Theta, \Omega \in \mathrm{I}\ \&\ \mathrm{X} = \mathrm{M}_\Theta\ \&\ \mathrm{Y} = \mathrm{M}_\Omega).$$

Seien Θ, Ω so. Dann gilt:

$$\mathrm{Inf}_{\mathbf{V}(\mathrm{I})}(\{\mathrm{X}, \mathrm{Y}\}) =$$
$$= \mathrm{X} \cap \mathrm{Y}$$
$$= \mathrm{M}_\Theta \cap \mathrm{M}_\Omega\,.$$

Ferner ist

$$\Theta \subseteq \Theta \cup \Omega\ \&\ \Omega \subseteq \Theta \cup \Omega\ \&\ \ \Theta \cup \Omega \text{ endl} \subseteq \mathrm{Diagr}(\mathcal{A}, \mathrm{S})$$
$$\&\ \Theta \cup \Omega \in \mathrm{M}_\Theta\ \&\ \Theta \cup \Omega \in \mathrm{M}_\Omega\,,$$

also $$\Theta \cup \Omega \in \mathrm{M}_\Theta \cap \mathrm{M}_\Omega\,.$$

Also ist $$\mathrm{M}_\Theta \cap \mathrm{M}_\Omega \neq \emptyset,$$

also $$\mathrm{Inf}_{\mathbf{V}(\mathrm{I})}\,(\{\mathrm{X}, \mathrm{Y}\}) \neq 0_{\mathbf{V}(\mathrm{I})}\,.$$

Ferner ist $$\Theta \cup \Omega \text{ endl} \subseteq \mathrm{Diagr}(\mathcal{A}, \mathrm{S})\ \&\ \Theta \cup \Omega \neq \emptyset;$$

dann ist $\Theta \cup \Omega \in \mathrm{I} = \mathrm{Dom}(\mathrm{M})$,

und es gilt: $\mathrm{M}_{\Theta \cup \Omega} =$

$$= \{ H \mid H \text{ endl} \subseteq \mathrm{Diagr}(\mathcal{A}, \mathcal{S}) \ \&\ \Theta \cup \Omega \subseteq H \}$$

$$= \{ H \mid H \text{ endl} \subseteq \mathrm{Diagr}(\mathcal{A}, \mathcal{S}) \ \&\ \Theta \subseteq H \ \&\ \Omega \subseteq H \}$$

$$= \{ H \mid H \text{ endl} \subseteq \mathrm{Diagr}(\mathcal{A}, \mathcal{S}) \ \&\ \Theta \subseteq H \}$$

$$\cap \{ H \mid H \text{ endl} \subseteq \mathrm{Diagr}(\mathcal{A}, \mathcal{S}) \ \&\ \Omega \subseteq H \}$$

$$= \mathrm{M}_{\Theta} \cap \mathrm{M}_{\Omega} .$$

Also ist $\Theta \cup \Omega \in \mathrm{Dom}(\mathrm{M}) \ \&\ \mathrm{M}_{\Theta \cup \Omega} = \mathrm{M}_{\Theta} \cap \mathrm{M}_{\Omega}$;

dann ist $\mathrm{M}_{\Theta} \cap \mathrm{M}_{\Omega} \in \mathrm{Ran}(\mathrm{M})$,

also $\mathrm{Inf}_{\mathbf{V}(\mathrm{I})}(\{\mathrm{X}, \mathrm{Y}\}) \in \mathrm{Ran}(\mathrm{M})$.

Dann folgt mit Theorem 3.2.6, dass Ran(M) in **V**(I) unter endlichmaliger Schnittbildung nicht leer ist. Dann folgt mit dem Ultrafiltertheorem 3.2.15:

$$\exists F\, (\, F \text{ ist Ultrafilter auf } \mathbf{V}(\mathrm{I}) \ \&\ \mathrm{Ran}(\mathrm{M}) \subseteq F\,).$$

Sei F so.

Nun ist $\mathcal{B}$ eine homogene Familie von Strukturen aus K, F ein Ultrafilter auf **V**(I) = **V**(Dom($\mathcal{B}$)) und K nach Voraussetzung unter Ultraproduktbildung abgeschlossen; dann ist

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{B}, \mathrm{F}) \in \mathrm{K}.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ in QRPr($\mathcal{B}$, F) isomorph einbettbar ist, denn dann folgt mit der Voraussetzung, dass K unter isomorpher Einbettung abgeschlossen ist, dass $\mathcal{A} \in \mathrm{K}$. Um eine isomorphe Einbettung h von $\mathcal{A}$ in QRPr($\mathcal{B}$, F) einführen zu können, wird zunächst eine Abbildung von $\mathcal{A}_1$ nach $\mathrm{CPr}_{\Theta \in \mathrm{I}}(\mathcal{B}_{\Theta,1})$ eingeführt. Es gilt nämlich:

$$\exists g\, (\, g \text{ ist Funktion auf } \mathcal{A}_1 \ \&\ \forall u\, (\, u \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow g(u) \text{ ist Funktion auf I } \&$$

$$\&\ \forall \Theta\, (\, \Theta \in \mathrm{I} \ \&\ u \in \mathrm{Ran}(\mathrm{a}_{\Theta}) \Rightarrow g(u)_{\Theta} = \mathrm{x}_{\Theta}(\mathrm{a}_{\Theta}^{-1}(u))\,)\ \&$$

$$\&\ \forall \Theta\, (\, \Theta \in \mathrm{I} \ \&\ u \notin \mathrm{Ran}(\mathrm{a}_{\Theta}) \Rightarrow g(u)_{\Theta} = \mathrm{x}_{\Theta,1}\,)\,)\,).$$

Sei g so.

Mit Hilfe von g kann nun eine Abbildung von $\mathcal{A}_1$ nach QRPr($\mathcal{B}$, F)$_1$, also nach Quot($\approx$(F, $\mathcal{A}$)) eingeführt werden, denn es gilt:

$$\exists h\ (\ h \text{ ist eine Funktion auf } \mathcal{A}_1\ \&$$

$$\&\ \forall u\ (\ u \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow h(u) = [\ \mathrm{g(u)}\ ]_{\#}\ )\ );$$

wobei # den Term ($\approx$(F, $\mathcal{A}$)) abkürzt.

Sei h so.

Dann gilt:

(H$_1$) h ist eine Abbildung von $\mathcal{A}_1$ nach QRPr($\mathcal{B}$, F)$_1$.

Um nun mit dem Diagrammlemma schließen zu können, dass h eine isomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in QRPr($\mathcal{B}$, F) ist, muss noch bewiesen werden:

(H$_2$) $\mathrm{sEM_h}$ (QRPr($\mathcal{B}$, F)) $\Vdash_{S^*}$ Diagr($\mathcal{A}$, S).

Sei dazu $\mathcal{B}^* = \mathrm{sEM_h}$ (QRPr($\mathcal{B}$, F)).

Dann ist nach Theorem 2.3.51 $\mathcal{B}^*$ ein Modell für S* vom Typ $\langle \mu_1 , \mu_2 \cup (\mathcal{A}_1 \times \{\mu_2\})\rangle$.

Sei nun $\rho \in$ Diagr($\mathcal{A}$, S).

Dann sind zwei Fälle möglich:

<u>Fall 1:</u> Angenommen, ρ ist ein Atomsatz von S* &

$$\forall i\ (i \in \mu_2 \cup (\mathcal{A}_1 \times \{\mu_2\})\ \&\ {}^{S^*}\mathrm{K}_i \text{ Teilausdruck von } \rho \Rightarrow i \in (\mathcal{A}_1 \times \{\mu_2\})).$$

Dann $\exists j\ (j \in \mathrm{Dom}(\mu_1)\ \&\ \exists u_1 \ldots \exists u_{\mu,1,j}\ (\ u_1 , \ldots, u_{\mu,1,j} \in \mathcal{A}_1\ \&$

$$\&\ \rho = {}^{S}\mathrm{P}_j\ (u_1, \mathrm{AT_S}) \ldots (u(\mu_1(j)), \mathrm{AT_S})\ )\ )$$

oder

$$\exists u_1\ \exists u_2\ (\ u_1 , u_2 \in \mathcal{A}_1\ \&\ \rho = (u_1, \mathrm{AT_S}) =_S (u_2, \mathrm{AT_S})\ ).$$

<u>Fall 1.1:</u> Angenommen,

$$\exists j\ (j \in \mathrm{Dom}(\mu_1)\ \&\ \exists u_1 \ldots \exists u_{\mu,1,j}\ (\ u_1 , \ldots, u_{\mu,1,j} \in \mathcal{A}_1\ \&$$

$$\& \ \rho = {}^{S}P_{j}\,(u_1, AT_S) \ldots (u(\mu_1(j)), AT_S)\,)\,).$$

Seien j, $u_1, \ldots, u_{\mu,1,j}$ so.

Sei $$\Theta^* = \{\, {}^{S}P_j\,(u_1, AT_S) \ldots (u(\mu_1(j)), AT_S)\,\}.$$

Dann ist $\Theta^* \in I$.

Sei $\Omega \in M_{\Theta^*}$. Dann ist $\Omega \in I \ \& \ \Theta^* \subseteq \Omega$. Dann ist

$${}^{S}P_j\,(u_1, AT_S) \ldots (u(\mu_1(j)), AT_S) \in \Omega.$$

Dann ist $${}^{S}P_j\,(u_1, AT_S) \ldots (u(\mu_1(j)), AT_S) \in \mathrm{Ran}(\phi_\Omega).$$

Sei $$k = \phi_\Omega^{-1}\,(\, {}^{S}P_j\,(u_1, AT_S) \ldots (u(\mu_1(j)), AT_S)\,).$$

Dann ist $$\phi_{\Omega,k} = {}^{S}P_j\,(u_1, AT_S) \ldots (u(\mu_1(j)), AT_S).$$

Ferner gilt $$\forall i\,(\, i \in \{\, 1, \ldots, \mu_1(j)\,\} \Rightarrow u_i \in \mathrm{Ran}(a_\Omega)\,).$$

Dann gilt:

$$\forall i\,(\, i \in \{1, \ldots, \mu_1(j)\} \Rightarrow \exists l\,(\, l \in \{1, \ldots, m_\Omega\} \ \& \ u_i = a_{\Omega,l}\,)\,).$$

Dann folgt mit dem Auswahlaxiom:

$$\exists l\,(\, l \text{ ist eine Funktion auf } \{1, \ldots, \mu_1(j)\} \ \&$$

$$\& \ \forall i\,(\, i \in \{1, \ldots, \mu_1(j)\} \Rightarrow l_i \in \{1, \ldots, m_\Omega\} \ \& \ u_i = a_{\Omega,l(i)}\,)\,).$$

Sei l so.

Dann gilt: $\psi_{\Omega,k}$ = das Ergebnis der simultanen Substitution

der Variablen ${}^{S}V_1, \ldots, {}^{S}V_{m(\Omega)}$ von S

für die Konstanten $(a_{\Omega,1}, AT_S) \ldots (a_\Omega(m_\Omega), AT_S)$ in $\phi_{\Omega,k}$

= das Ergebnis der simultanen Substitution

der Variablen ${}^{S}V_1, \ldots, {}^{S}V_{m(\Omega)}$ von S

für die Konstanten $(a_{\Omega,1}, AT_S) \ldots (a_\Omega(m_\Omega), AT_S)$

in ${}^{S}P_j\,(a_\Omega(l(1)), AT_S) \ldots (a_\Omega\,(l(\mu_1(j))), AT_S)$

$$= {}^{S}P_j\, {}^{S}V_{l,1} \ldots {}^{S}V_{l(\mu,1,j)}\,.$$

Dann folgt mit der Einführung von $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}_\Omega \vdash_{S,\, x(\Omega)} {}^{S}P_j\, {}^{S}V_{1,1} \dots {}^{S}V_{1(\mu,1,j)}\,.$$

Dann ist $\qquad \langle\, x_\Omega(1_i)\, \rangle_{i \in \{1, \dots, \mu, 1, j\}} \in \mathcal{B}_{\Omega, 2, j}\,.$

Nun folgt mit der Einführung von g:

$$\forall i\, (\, i \in \{\, 1, \dots, \mu_1(j)\, \} \Rightarrow g(u_i)_\Omega = g(a_{\Omega, 1(i)})_\Omega = x_{\Omega, 1(i)}\,);$$

dann gilt: $\qquad \langle\, g(u_i)_\Omega\, \rangle_{i \in \{1, \dots, \mu, 1, j\}} \in \mathcal{B}_{\Omega, 2, j}\,.$

Also gilt:

$$\forall \Omega\, (\, \Omega \in M_{\Theta^*} \Rightarrow \Omega \in I \;\&\; \langle\, g(u_i)_\Omega\, \rangle_{i \in \{1, \dots, \mu, 1, j\}} \in \mathcal{B}_{\Omega, 2, j}\,).$$

Dann ist

$$M_{\Theta^*} \subseteq \{\, \Omega \mid \Omega \in I \;\&\; \langle\, g(u_i)_\Omega\, \rangle_{i \in \{1, \dots, \mu, 1, j\}} \in \mathcal{B}_{\Omega, 2, j}\, \} \subseteq I.$$

Ferner ist $M_{\Theta^*} \in F$; dann ist

$$\{\, \Omega \mid \Omega \in I \;\&\; \langle\, g(u_i)_\Omega\, \rangle_{i \in \{1, \dots, \mu, 1, j\}} \in \mathcal{B}_{\Omega, 2, j}\, \} \in F.$$

Nun ist $\langle\, g(u_i)\, \rangle_{i \in \{1, \dots, \mu, 1, j\}}$ eine Folge der Länge $\mu_1(j)$ in $CPr_{\Theta \in I}(\mathcal{B}_{\Theta, 1})$; dann folgt:

$$\langle\, g(u_i)\, \rangle_{i \in \{1, \dots, \mu, 1, j\}} \in RPPr_{\Theta \in I}\, (\mathcal{B}_{\Theta, 2, j}\,, \mathcal{B}_{\Theta, 1}\,, F).$$

Dann ist $\qquad \langle\, [g(u_i)]_\#\, \rangle_{i \in \{1, \dots, \mu, 1, j\}} \in QRPPr_{\Theta \in I}\, (\mathcal{B}_{\Theta, 2, j}\,, \mathcal{B}_{\Theta, 1}\,, F),$

wobei $\qquad \# = \sim\!(F, I)[\![CPr_{\Theta \in I}\, (\mathcal{B}_{\Theta, 1})$.

Dann ist $\qquad \langle\, h(u_i)\, \rangle_{i \in \{1, \dots, \mu, 1, j\}} \in QRPr(\mathcal{B}, F)_{2, j}\,.$

Dann folgt mit $\qquad QRPr(\mathcal{B}, F)_{2, j} = \mathcal{B}^*_{2, j}$

$$\langle\, h(u_i)\, \rangle_{i \in \{1, \dots, \mu, 1, j\}} \in \mathcal{B}^*_{2, j}\,.$$

Nun gilt $\qquad \forall i\, (\, i \in \{1, \dots, \mu_1(j)\} \Rightarrow h(u_i) = \mathcal{B}^*_{3, (u(i), \mu(2))}\,)$

und $\qquad \forall i\, (\, i \in \{1, \dots, \mu_1(j)\} \Rightarrow (u_i\,, AT_S) = S^*_{4, (u(i), \mu(2))}\,).$

Nun $\exists y\, y$ ist eine Belegung aus $\mathcal{B}^*$; sei y so. Dann gilt:

$$\forall i\, (\, i \in \{\, 1, \dots, \mu_1(j)\, \} \Rightarrow val_{S^*, \mathcal{B}^*, y}(\, \langle\, (u_i\,, AT_S)\, \rangle\,) = h(u_i)\,).$$

Also ist $\qquad \langle\, val_{S^*, \mathcal{B}^*, y}\, (\, \langle\, (u_i\,, AT_S)\, \rangle\,)\, \rangle_{i \in \{1, \dots, \mu, 1, j\}} \in \mathcal{B}^*_{2, j}\,.$

Dann gilt $\mathcal{B}^* \models_{S^*, y} {}^S P_j\, (u_1\,, AT_S) \ldots (u(\mu_1(j)), AT_S)$.

Also $\mathcal{B}^* \models_{S^*} {}^S P_j\, (u_1\,, AT_S) \ldots (u(\mu_1(j)), AT_S)$.

Also $sEM_h(QRPr(\mathcal{B}, F)) \models_{S^*} \rho$.

<u>Fall 1.2:</u> Angenommen,

$$\exists u_1\, \exists u_2\, (\, u_1, u_2 \in \mathcal{A}_1\ \&\ \rho = (u_1\,, AT_S) =_S (u_2\,, AT_S).$$

Seien u_1 , u_2 so.

Sei $\Theta^* = \{\, (u_1\,, AT_S) =_S (u_2\,, AT_S)\, \}$.

Dann ist $\Theta^* \in I$.

Sei $\Omega \in M_{\Theta^*}$. Dann ist $\Omega \in I\ \&\ \Theta^* \subseteq \Omega$. Dann ist

$$(u_1\,, AT_S) =_S (u_2\,, AT_S) \in \Omega.$$

Dann ist $(u_1\,, AT_S) =_S (u_2\,, AT_S) \in Ran(\phi_\Omega)$.

Sei $k = \phi_\Omega^{-1}(\, (u_1\,, AT_S) =_S (u_2\,, AT_S)\,)$.

Dann ist $\phi_{\Omega,\,k} = (u_1\,, AT_S) =_S (u_2\,, AT_S)$.

Ferner gilt $\forall i\, (\, i \in \{1, 2\} \Rightarrow u_i \in Ran(a_\Omega)\,)$.

Dann folgt mit dem Auswahlaxiom

$$\exists l\, (\, l \text{ ist eine Funktion auf } \{1, 2\}$$

$$\&\ \forall i\, (\, i \in \{1, 2\} \Rightarrow l_i \in \{1, \ldots, m_\Omega\}\ \&\ u_i = a_{\Omega,\, l(i)}\,)\,).$$

Sei l so.

Dann gilt:

$$\psi_{\Omega,\,k} = \text{das Ergebnis der simultanen Substitution}$$

$$\text{der Variablen } {}^S V_1\,, \ldots, {}^S V_{m(\Omega)} \text{ von } S$$

$$\text{für die Konstanten } (a_{\Omega,\,1}\,, AT_S) \ldots (a_\Omega(m_\Omega), AT_S) \text{ in } \phi_{\Omega,\,k}$$

$$= \text{das Ergebnis der simultanen Substitution}$$

$$\text{der Variablen } {}^S V_1\,, \ldots, {}^S V_{m(\Omega)} \text{ von } S$$

$$\text{für die Konstanten } (a_{\Omega,1}, AT_S) \ldots (a_\Omega(m_\Omega), AT_S)$$

$$\text{in } (a_\Omega(l(1)), AT_S) =_S (a_\Omega(l(2)), AT_S)$$

$$= {}^S V_{l(1)} =_S {}^S V_{l(2)} .$$

Dann folgt mit der Einführung von $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}_\Omega \models_{S, x(\Omega)} {}^S V_{l(1)} =_S {}^S V_{l(2)} .$$

Nun folgt mit der Einführung von g:

$$\forall i\, (\, i \in \{1, 2\} \Rightarrow g(u_i)_\Omega = g(a_{\Omega, l(i)})_\Omega = x_\Omega(l(i)\,);$$

dann gilt: $$g(u_1)_\Omega = g(u_2)_\Omega .$$

Also gilt:

$$\forall \Omega\, (\, \Omega \in M_{\Theta^*} \Rightarrow \Omega \in I \;\&\; g(u_1)_\Omega = g(u_2)_\Omega\,).$$

Dann ist $$M_{\Theta^*} \subseteq \{\, \Omega \mid \Omega \in I \;\&\; g(u_1)_\Omega = g(u_2)_\Omega \,\} \subseteq I.$$

Ferner ist $M_{\Theta^*} \in F$; dann ist

$$\{\, \Omega \mid \Omega \in I \;\&\; g(u_1)_\Omega = g(u_2)_\Omega \,\} \in F.$$

Dann folgt mit Def. 3.3.7:

$$(g(u_1), g(u_2)) \in {\sim}(F, I)[\mathrm{CPr}_{\Theta \in I}\, (\mathcal{B}_{\Theta,1}).$$

Dann $$[g(u_1)]_\# = [g(u_2)]_\# .$$

Dann ist $$h(u_1) = h(u_2).$$

Nun gilt $$\forall i\, (\, i \in \{1, 2\} \Rightarrow h(u_i) = \mathcal{B}^*_{3, (u(i), \mu(2))}\,)$$

und $$\forall i\, (\, i \in \{1, 2\} \Rightarrow (u_i, AT_S) = \mathcal{S}^*_{4, (u(i), \mu(2))}\,).$$

Nun $\exists y\, y$ ist eine Belegung aus $\mathcal{B}^*$; sei y so. Dann gilt:

$$\forall i\, (\, i \in \{1, 2\} \Rightarrow \mathrm{val}_{S^*, \mathcal{B}^*, y}\, (\langle\, (u_i, AT_S)\,\rangle\,) = h(u_i)\,).$$

Dann gilt $$\mathcal{B}^* \models_{S^*, y} (u_1, AT_S) =_S (u_2, AT_S).$$

Also $$\mathcal{B}^* \models_{S^*} (u_1, AT_S) =_S (u_2, AT_S).$$

Also $$\mathrm{sEM_h}(\mathrm{QRPr}(\mathcal{B}, F)) \models_{S^*} \rho.$$

Fall 2: Angenommen,

$$\exists \rho' \,(\, \rho' \text{ ist Atomsatz von } \mathrm{S}^* \;\&$$

$$\forall i\,(\, i \in \mu_2 \cup (\mathcal{A}_1 \times \{\mu_2\}) \;\&\; {}^{S*}K_i \text{ Teilausdruck von } \rho' \Rightarrow i \in (\mathcal{A}_1 \times \{\mu_2\})\,)$$

$$\&\; \rho = \neg_S\, \rho' \,).$$

Sei ρ' so. Dann

$$\exists j\,(j \in \mathrm{Dom}(\mu_1) \;\&\; \exists u_1 \ldots \exists u_{\mu,1,j}\,(\, u_1 , \ldots, u_{\mu,1,j} \in \mathcal{A}_1 \;\&$$

$$\&\; \rho' = {}^{S}P_j\,(u_1, AT_S) \ldots (u(\mu_1(j)), AT_S)\,)\,)$$

oder

$$\exists u_1\, \exists u_2\,(\, u_1 , u_2 \in \mathcal{A}_1 \;\&\; \rho' = (u_1, AT_S) =_S (u_2, AT_S)\,).$$

Fall 2.1: Angenommen,

$$\exists j\,(j \in \mathrm{Dom}(\mu_1) \;\&\; \exists u_1 \ldots \exists u_{\mu(1)\,(j)}\,(\, u_1 , \ldots, u_{\mu,1,j} \in \mathcal{A}_1 \;\&$$

$$\&\; \rho' = {}^{S}P_j\,(u_1, AT_S) \ldots (u(\mu_1(j)), AT_S)\,)\,)$$

Seien j, $u_1 , \ldots, u_{\mu,1,j}$ so.

Dann ist $\rho = \neg_S\, {}^{S}P_j\,(u_1, AT_S) \ldots (u(\mu_1(j)), AT_S)$.

Sei $\Omega^* = \{\, \neg_S\, {}^{S}P_j\,(u_1, AT_S) \ldots (u(\mu_1(j)), AT_S)\,\}$.

Dann ist $\Omega^* \in I$.

Sei $\Theta \in M_{\Omega^*}$. Dann ist $\Theta \in I \;\&\; \Omega^* \subseteq \Theta$.

Dann ist $\neg_S\, {}^{S}P_j\,(u_1, AT_S) \ldots (u(\mu_1(j)), AT_S) \in \Theta$.

Dann ist $\neg_S\, {}^{S}P_j\,(u_1, AT_S) \ldots (u(\mu_1(j)), AT_S) \in \mathrm{Ran}(\phi_\Theta)$.

Sei $k = \phi_\Theta^{-1}\,(\, \neg_S\, {}^{S}P_j\,(u_1, AT_S) \ldots (u(\mu_1(j)), AT_S)\,)$.

Dann ist $\phi_{\Theta,k} = \neg_S\, {}^{S}P_j\,(u_1, AT_S) \ldots (u(\mu_1(j)), AT_S)$.

Ferner gilt:

$$\forall i\,(\, i \in \{\, 1, \ldots, \mu_1(j)\,\} \Rightarrow u_i \in \mathrm{Ran}(a_\Theta)\,).$$

Dann gilt:

$$\forall i\,(\,i \in \{1, \ldots, \mu_1(j)\} \Rightarrow \exists l\,(\,l \in \{1, \ldots, m_\Theta\} \;\&\; u_i = a_{\Theta, l}\,)\,).$$

Dann folgt mit dem Auswahlaxiom:

$$\exists l\,(\,l \text{ ist eine Funktion auf } \{1, \ldots, \mu_1(j)\} \;\&$$

$$\& \;\forall i\,(\,i \in \{1, \ldots, \mu_1(j)\} \Rightarrow l_i \in \{1, \ldots, m_\Theta\} \;\&\; u_i = a_{\Theta, l(i)}\,)\,).$$

Sei l so.

Dann gilt:

$$\psi_{\Theta, k} = \text{das Ergebnis der simultanen Substitution}$$
$$\text{der Variablen } {}^{S}V_1, \ldots, {}^{S}V_{m(\Theta)} \text{ von } S$$
$$\text{für die Konstanten } (a_{\Theta, 1}, AT_S) \ldots (a_\Theta(m_\Theta), AT_S)$$
$$\text{in } \phi_{\Theta, k}\,;$$

$$\psi_{\Theta, k} = \text{das Ergebnis der simultanen Substitution}$$
$$\text{der Variablen } {}^{S}V_1, \ldots, {}^{S}V_{m(\Theta)} \text{ von } S$$
$$\text{für die Konstanten } (a_{\Theta, 1}, AT_S) \ldots (a_\Theta(m_\Theta), AT_S)$$
$$\text{in } \neg_S {}^{S}P_j\, (a_\Theta(l(1)), AT_S) \ldots (a_\Theta\,(l(\mu_1(j))), AT_S)$$
$$= \neg_S {}^{S}P_j\, {}^{S}V_{l(1)} \ldots {}^{S}V_{l(\mu(1)(j))}\,.$$

Dann folgt mit der Einführung von $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}_\Theta \models_{S, x(\Theta)} \neg_S {}^{S}P_j\, {}^{S}V_{l, 1} \ldots {}^{S}V_{l, \mu, 1, j}\,.$$

Dann ist $\quad \langle\, x_{\Theta, l(i)} \,\rangle_{i \in \{1, \ldots, \mu, 1, j\}} \notin \mathcal{B}_{\Theta, 2, j}\,.$

Nun folgt mit der Einführung von g:

$$\forall i\,(\,i \in \{\,1, \ldots, \mu_1(j)\,\} \Rightarrow g(u_i)_\Theta = g(a_{\Theta, l(i)})_\Theta = x_{\Theta, l(i)}\,);$$

dann ist $\quad \langle\, g(u_i)_\Theta \,\rangle_{i \in \{\,1, \ldots, \mu, 1, j\,\}} \notin \mathcal{B}_{\Theta, 2, j}\,.$

Also gilt:

$$\forall \Theta\,(\,\Theta \in M_{\Omega*} \Rightarrow \Theta \in I \;\&\; \langle\, g(u_i)_\Theta \,\rangle_{i \in \{\,1, \ldots, \mu, 1, j\,\}} \notin \mathcal{B}_{\Theta, 2, j}\,).$$

Also ist

$$M_{\Omega*} \subseteq \{ \Theta \mid \Theta \in I \;\&\; \langle g(u_i)_\Theta \rangle_{i \in \{1, \ldots, \mu, 1, j\}} \notin \mathcal{B}_{\Theta, 2, j} \} \subseteq I.$$

Ferner ist $M_{\Omega*} \in F$; dann ist

$$\{ \Theta \mid \Theta \in I \;\&\; \langle g(u_i)_\Theta \rangle_{i \in \{1, \ldots, \mu, 1, j\}} \notin \mathcal{B}_{\Theta, 2, j} \} \in F.$$

Nun ist

$$\{ \Theta \mid \Theta \in I \;\&\; \langle g(u_i)_\Theta \rangle_{i \in \{1, \ldots, \mu, 1, j\}} \notin \mathcal{B}_{\Theta, 2, j} \} =$$

$$= I \setminus \{ \Theta \mid \Theta \in I \;\&\; \langle g(u_i)_\Theta \rangle_{i \in \{1, \ldots, \mu, 1, j\}} \in \mathcal{B}_{\Theta, 2, j} \}$$

$$= \{ \Theta \mid \Theta \in I \;\&\; \langle g(u_i)_\Theta \rangle_{i \in \{1, \ldots, \mu, 1, j\}} \in \mathcal{B}_{\Theta, 2, j} \}^{*\mathbf{V}(I)},$$

und F ist ein Ultrafilter auf $\mathbf{V}(I)$; dann ist

$$\{ \Theta \mid \Theta \in I \;\&\; \langle g(u_i)_\Theta \rangle_{i \in \{1, \ldots, \mu, 1, j\}} \in \mathcal{B}_{\Theta, 2, j} \} \notin F.$$

Nun ist $\langle g(u_i) \rangle_{i \in \{1, \ldots, \mu, 1, j\}}$ eine Folge der Länge $\mu_1(j)$ in $CPr_{\Theta \in I}(\mathcal{B}_{\Theta, 1})$; dann folgt:

$$\langle g(u_i) \rangle_{i \in \{1, \ldots, \mu, 1, j\}} \notin RPPr_{\Theta \in I} (\mathcal{B}_{\Theta, 2, j}, \mathcal{B}_{\Theta, 1}, F).$$

Dann ist

$$\langle [g(u_i)]_\# \rangle_{i \in \{1, \ldots, \mu, 1, j\}} \notin QRPPr_{\Theta \in I} (\mathcal{B}_{\Theta, 2, j}, \mathcal{B}_{\Theta, 1}, F),$$

wobei $\# = {\sim}(F, I)[\![CPr_{\Theta \in I} (\mathcal{B}_{\Theta, 1})$.

Also ist $\langle h(u_i) \rangle_{i \in \{1, \ldots, \mu, 1, j\}} \notin RPr(\mathcal{B}, F)_{2, j}$.

Dann folgt mit $QRPr(\mathcal{B}, F)_{2, j} = \mathcal{B}^*_{2, j}$

$$\langle h(u_i) \rangle_{i \in \{1, \ldots, \mu, 1, j\}} \notin \mathcal{B}^*_{2, j}.$$

Dann folgt wie im Fall 1.1:

$$\langle val_{S^*, \mathcal{B}^*, z} (\langle (u_i, AT_S) \rangle) \rangle_{i \in \{1, \ldots, \mu, 1, j} \notin \mathcal{B}^*_{2, j}.$$

Dann gilt $\mathcal{B}^* \models_{S^*, z} \neg_S {}^S P_j (u_1, AT_S) \ldots (u(\mu_1(j)), AT_S)$.

Also $sEM_h(QRPr(\mathcal{B}, F)) \models_{S^*} \rho$.

Fall 2.2: Angenommen,

$$\exists u_1 \exists u_2 (u_1, u_2 \in \mathcal{A}_1 \;\&\; \rho' = (u_1, AT_S) =_S (u_2, AT_S)).$$

Seien u_1, u_2 so.

Dann ist $\rho = \neg_S (u_1 , AT_S) =_S (u_2 , AT_S)$.

Sei $\Theta^* = \{ \neg_S (u_1 , AT_S) =_S (u_2 , AT_S) \}$.

Dann ist $\Theta^* \in I$.

Sei $\Omega \in M_{\Theta^*}$. Dann ist $\Omega \in I$ & $\Theta^* \subseteq \Omega$. Dann ist

$$\neg_S (u_1 , AT_S) =_S (u_2 , AT_S) \in \Omega.$$

Dann ist $\neg_S (u_1 , AT_S) =_S (u_2 , AT_S) \in \mathrm{Ran}(\phi_\Omega)$.

Sei $k = \phi_\Omega^{-1}(\neg_S (u_1 , AT_S) =_S (u_2 , AT_S))$.

Dann ist $\phi_{\Omega, k} = \neg_S (u_1 , AT_S) =_S (u_2 , AT_S)$.

Ferner gilt $\forall i (i \in \{1, 2\} \Rightarrow u_i \in \mathrm{Ran}(a_\Omega))$.

Dann folgt mit dem Auswahlaxiom

$$\exists l (l \text{ ist eine Funktion auf } \{1, 2\}$$

$$\& \forall i (i \in \{1, 2\} \Rightarrow l_i \in \{1, ..., m_\Omega\} \ \& \ u_i = a_{\Omega, l(i)})).$$

Sei l so.

Dann soll $\psi_{\Omega, k}$ das Ergebnis der simultanen Substitution der Variablen ${}^SV_1 , ..., {}^SV_{m(\Omega)}$ von S für die Konstanten $(a_\Omega(1), AT_S) \dots (a_\Omega(m(\Omega)), AT_S)$ in $\phi_{\Omega, k}$ sein;

dann ist $\psi_{\Omega, k} = \neg_S ({}^SV_{l(1)} =_S {}^SV_{l(2)})$.

Dann folgt mit der Einführung von $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}_\Omega \vdash_{S, x(\Omega)} \neg_S ({}^SV_{l(1)} =_S {}^SV_{l(2)}).$$

Nun folgt mit der Einführung von g:

$$\forall i (i \in \{1, 2\} \Rightarrow g(u_i)_\Omega = g(a_{\Omega, l(i)})_\Omega = x_{\Omega, l(i)});$$

dann gilt: $g(u_1)_\Omega \neq g(u_2)_\Omega$.

Also gilt: $\forall \Omega (\Omega \in M_{\Theta^*} \Rightarrow \Omega \in I \ \& \ g(u_1)_\Omega \neq g(u_2)_\Omega)$.

Dann ist $M_{\Theta^*} \subseteq \{ \Omega \mid \Omega \in I \ \& \ g(u_1)_\Omega \neq g(u_2)_\Omega \} \subseteq I$.

Ferner ist $M_{\Theta^*} \in F$; dann ist

$$\{\,\Omega \mid \Omega \in \mathrm{I} \;\&\; \mathrm{g}(\mathrm{u}_1)_\Omega \neq \mathrm{g}(\mathrm{u}_2)_\Omega\,\} \in \mathrm{F}.$$

Dann folgt mit Def. 3.3.7:

$$(\mathrm{g}(\mathrm{u}_1), \mathrm{g}(\mathrm{u}_2)) \notin \sim(\mathrm{F}, \mathrm{I})[\![\mathrm{CPr}_{\Theta \in \mathrm{I}}\,(\mathcal{B}_{\Theta, 1}).$$

Dann $$[\mathrm{g}(\mathrm{u}_1)]_\# \neq [\mathrm{g}(\mathrm{u}_2)]_\#\,,$$

wobei $$\# = \sim(\mathrm{F}, \mathrm{I})[\![\mathrm{CPr}_{\Theta \in \mathrm{I}}\,(\mathrm{B}_{\Theta, 1}).$$

Dann ist $$\mathrm{h}(\mathrm{u}_1) \neq \mathrm{h}(\mathrm{u}_2).$$

Nun gilt $$\forall i\,(\,i \in \{1, 2\} \Rightarrow \mathrm{h}(\mathrm{u}_i) = \mathcal{B}^*_{3,\,(\mathrm{u}(i),\,\mu(2))}\,)$$

und $$\forall i\,(\,i \in \{1, 2\} \Rightarrow (\mathrm{u}_i\,, \mathrm{AT}_\mathcal{S}\,) = \mathcal{S}^*_{4,\,(\mathrm{u}(i),\,\mu(2))}\,).$$

Nun $\exists y\, y$ ist eine Belegung aus $\mathcal{B}^*$; sei y so. Dann gilt:

$$\forall i\,(\,i \in \{1, 2\} \Rightarrow \mathrm{val}_{\mathcal{S}^*, \mathcal{B}^*, \mathrm{y}}\,(\langle\,(\mathrm{u}_i\,, \mathrm{AT}_\mathcal{S})\,\rangle\,) = \mathrm{h}(\mathrm{u}_i)\,).$$

Dann gilt $$\mathcal{B}^* \models_{\mathcal{S}^*, \mathrm{y}} (\mathrm{u}_1\,, \mathrm{AT}_\mathcal{S}) \neq_\mathcal{S} (\mathrm{u}_2\,, \mathrm{AT}_\mathcal{S}).$$

Also $$\mathcal{B}^* \models_{\mathcal{S}^*} \neg_\mathcal{S}\,(\mathrm{u}_1\,, \mathrm{AT}_\mathcal{S}) =_\mathcal{S} (\mathrm{u}_2\,, \mathrm{AT}_\mathcal{S}).$$

Dann folgt wie im Fall 2.1:

$$\mathrm{sEM}_\mathrm{h}\,(\mathrm{QRPr}(\mathcal{B}, \mathrm{F})) \models_{\mathcal{S}^*} \rho.$$

Es gilt also in allen Fällen

$$\mathrm{sEM}_\mathrm{h}\,(\mathrm{QRPr}(\mathcal{B}, \mathrm{F})) \models_{\mathcal{S}^*} \rho.$$

Also gilt:

$$\forall \rho\,(\,\rho \in \mathrm{Diagr}(\mathcal{A}, \mathcal{S}) \Rightarrow \mathrm{sEM}_\mathrm{h}\,(\mathrm{QRPr}(\mathcal{B}, \mathrm{F})) \models_{\mathcal{S}^*} \rho\,).$$

Also $$\mathrm{sEM}_\mathrm{h}\,(\,\mathrm{QRPr}(\mathcal{B}, \mathrm{F})\,) \Vdash_{\mathcal{S}^*} \mathrm{Diagr}(\mathcal{A}, \mathcal{S}).$$

Nun kann das Diagramm-Lemma 2.3.54 angewendet werden und es folgt:

h ist isomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in QRPr($\mathcal{B}$, F).

Wie oben festgestellt, ist RPr($\mathcal{B}$, F) $\in$ K und nach Voraussetzung ist K unter isomorpher Einbettung abgeschlossen; dann ist $\mathcal{A} \in$ K. Also gilt:

$$\forall \mathcal{A}\,(\,\mathcal{A} \Vdash_\mathcal{S} \Gamma \Rightarrow \mathcal{A} \in \mathrm{K}\,):$$

Also gilt: $\forall\mathcal{A}\,(\,\mathcal{A} \in \mathrm{K} \Leftrightarrow \mathcal{A} \Vdash_{\mathrm{S}} \boldsymbol{\Gamma}\,)$,

und nach Konstruktion ist $\boldsymbol{\Gamma}$ eine Klasse von Allsätzen von S. Also ist K eine universelle Klasse.

□

Zum Abschluss dieses Kapitels werden die einstufigen Klassen und die einstufigen Basisklassen mit mengentheoreischen Mitteln charakterisiert; dazu wird das Kompaktheitstheorem benützt, das nun – in der Ultraproduktversion – für die Art von einstufigen Sprachen bewiesen wird, mit denen hier gearbeitet wird.

4.1.13 Kompaktheitstheorem / Endlichkeitssatz

Sei S *Sprache erster Stufe. Sei* **T** *Theorie von* S. *Sei* I *die Menge aller nichtleeren, endlichen Teilmengen von* **T** *und sei* $\mathcal{A}$ *Funktion auf* I, *so dass*

$$\forall i\,(\,i \in \mathrm{I} \Rightarrow \mathcal{A}_i \textit{ ist Modell für } \mathrm{S} \,\&\, \mathcal{A}_i \Vdash_{\mathrm{S}} i\,).$$

Dann gibt es einen Ultrafilter D auf $\mathbf{V}(\mathrm{I})$, *so dass*

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, D) \Vdash_{\mathrm{S}} \mathbf{T}.$$

Beweis: Es werden die Voraussetzungen angenommen. Dann gilt nach Def.2.3.33: $\mathrm{T} \subseteq \mathrm{SATZ}_{\mathrm{S}} \,\&\, \mathrm{T} \neq \varnothing$; und $\mathcal{A}$ mit $\mathrm{Dom}(\mathcal{A}) = \mathrm{I}$ ist eine homogene Familie von Strukturen (Def. 3.3.2).

Da $\mathbf{T} \neq \varnothing$ ist $\mathrm{I} \neq \varnothing$ und nach Satz 3.1.28 ist $\mathbf{V}(\mathrm{I})$ BOOLEscher Verband.

Sei nun M Funktion auf **T**, so dass:

$$\forall \tau\,(\,\tau \in \mathbf{T} \Rightarrow \mathrm{M}(\tau) = \{\,i \mid i \in \mathrm{I} \,\&\, \tau \in i\,\}.$$

Dann ist $\mathrm{Ran}(\mathrm{M}) \subseteq \mathrm{POT}(\mathrm{I}) = \mathbf{V}(\mathrm{I})_1$.

Um nun mit dem Ultrafiltertheorem auf die Existenz eines Ultrafilters auf I schließen zu können, der Ran(M) enthält, ist zu zeigen, dass Ran(M) in **V**(I) unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer ist (Def. 3.2.5).

Sei $\quad \mathrm{X}$ endl $\subseteq \mathrm{Ran(M)}\ \&\ \mathrm{X} \neq \emptyset$.

Dann $\quad \exists n\, \exists e\, (\, n \in \mathbb{N}^{+}\ \&\ e$ ist Abzählung der Länge n von X).

Seien n und e so. Dann

$$\mathrm{Ran(e)} = \mathrm{X}.$$

Nun gilt: $\quad \forall j\, (j \in \mathrm{Dom(e)} \Rightarrow \exists \tau\, (\, \tau \in \mathrm{T}\ \&\ \mathrm{M}(\tau) = \mathrm{e}_j \in \mathrm{X}\,)$.

Sei daher e* Folge auf Dom(e), so dass

$$\forall j\, (j \in \mathrm{Dom(e)} \Rightarrow \mathrm{e}^*(j) \in \mathrm{T}\ \&\ \mathrm{M}(\mathrm{e}^*(j)) = \mathrm{e}_j\,).$$

Dann $\quad \forall j\, (j\, \{\, 1, \ldots, \mathrm{n}\, \} \Rightarrow \{\, \mathrm{e}^*_1, \ldots, \mathrm{e}^*_\mathrm{n}\, \} \in \mathrm{e}(j)\,)$.

Und es folgt: $\quad \{\, \mathrm{e}^*_1, \ldots, \mathrm{e}^*_\mathrm{n}\, \} \in \mathrm{Inf}_{\mathbf{V}(\mathrm{I})}(\mathrm{X}) = \mathrm{e}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{e}_\mathrm{n}$.

Das zeigt, dass $\quad \mathrm{Inf}_{\mathbf{V}(\mathrm{I})} \neq \emptyset$,

und somit ist Ran(M) unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer.

Nach dem Ultrafiltertheorem (Satz 3.2.15) gibt es dann einen Ultrafilter auf **V**(I), der Ran(M) als Teilklasse enthält. Sei D ein solcher Ultrafilter.

Sei nun $\tau \in \mathrm{T}$.

Es gilt

$$\forall i\, (\, i \in \mathrm{I} \Rightarrow \mathcal{A}_i \Vdash_{\mathrm{S}} i\,).$$

Dann

$$\forall i\, (\, i \in \mathrm{I}\ \&\ \tau \in i \Rightarrow \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S}} \tau\,).$$

Und es folgt:

$$\mathrm{M}(\tau) = \{\, i \mid i \in \mathrm{I}\ \&\ \tau \in i\ \&\ \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S}} \tau\, \} \subseteq \{\, i \mid i \in \mathrm{I}\ \&\ \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S}} \tau\, \}.$$

Nun ist $\mathrm{M}(\tau) \in \mathrm{Ran(M)}$ und $\mathrm{Ran(M)} \subseteq \mathrm{D}$ und da D Filter, folgt:

$$\{\, i \mid i \in \mathrm{I}\ \&\ \mathcal{A}_i \models_{\mathrm{S}} \tau\, \} \in \mathrm{D}.$$

Und mit dem Lemma 3.3.15 zum Theorem von Łoš folgt weiterhin:

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{D}) \models_{\mathrm{S}} \tau.$$

Das gilt für alle $\tau \in \mathrm{T}$; und somit erfüllt QRPr($\mathcal{A}$, D) T simultan:

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, D) \Vdash_{\mathrm{S}} \mathrm{T}.$$

□

Für den Satz 4.1.15, der die einstufigen Klassen und die einstufigen Basisklassen mengentheoretisch – mit Ultraproduktmethoden – charakterisiert, wird ein weiteres Korollar des Kompaktheitstheorems benötigt:

4.1.14 Korollar.-

Sei S Sprache erster Stufe; seien Σ_1 und Σ_2 Theorien von S und gelte für alle $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \textit{ Modell für } \mathrm{S} \Rightarrow (\mathcal{A} \Vdash_{\mathrm{S}} \Sigma_1 \Leftrightarrow \textit{nicht } \mathcal{A} \Vdash_{\mathrm{S}} \Sigma_2).$$

Dann sind Σ_1 und Σ_2 jeweils endlich axiomatisierbare Theorien von S.

Beweis: Sei S Sprache erster Stufe, seien Σ_1 und Σ_2 jeweils Theorien von S und gelte:

$$\forall \mathcal{A} (\mathcal{A} \text{ Modell für } \mathrm{S} \Rightarrow (\mathcal{A} \Vdash_{\mathrm{S}} \Sigma_1 \Leftrightarrow \text{nicht } \mathcal{A} \Vdash_{\mathrm{S}} \Sigma_2)).$$

Dann ist $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ keine erfüllbare Theorie von S. Dann ist $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ keine endlich erfüllbare Theorie von S. D. h.:

$$\neg \forall \sigma (\sigma \text{ endl} \subseteq \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \Rightarrow \exists \mathcal{A} (\mathcal{A} \text{ Modell für } \mathrm{S} \;\&\; \mathcal{A} \Vdash_{\mathrm{S}} \sigma)).$$

Dann

$$\exists \sigma (\sigma \text{ endl} \subseteq \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \;\&\; \forall \mathcal{A} (\mathcal{A} \text{ Modell für } \mathrm{S} \Rightarrow \text{nicht } (\mathcal{A} \Vdash_{\mathrm{S}} \sigma))).$$

Sei σ^* so.

Dann ist σ^* nichtleer, denn die leere Satzmenge wird von allen Modellen von S erfüllt.

Dann gibt es endliche Teilmengen von Σ_1 und von Σ_2 – seien Σ_1^* und Σ_2^* so – so dass

$$\sigma^* = \Sigma_1^* \cup \Sigma_2^*$$

und $\Sigma_1^* \cup \Sigma_2^*$ ist nicht erfüllbare Theorie von S.

Sei nun $\mathcal{A}$ Modell von S, so dass: $\mathcal{A} \Vdash_S \Sigma_1^*$.

Dann nicht: $\mathcal{A} \Vdash_S \Sigma_2$.

Denn $\mathcal{A} \Vdash_S \Sigma_2$ würde $\mathcal{A} \Vdash_S \Sigma_2^*$ implizieren und $\mathcal{A} \Vdash_S \Sigma_1^* \cup \Sigma_2^*$ würde folgen, im Widerspruch zur Annahme, dass σ^* nicht erfüllbare Theorie von S ist.

Dann: $\mathcal{A} \Vdash_S \Sigma_1$.

Dann $\forall \mathcal{A}\,(\mathcal{A}\text{ Modell für S} \;\&\; \mathcal{A} \Vdash_S \Sigma_1^* \Rightarrow \mathcal{A} \Vdash_S \Sigma_1)$.

Nun gilt: $\forall \mathcal{A}\,(\mathcal{A}\text{ Modell für S} \;\&\; \mathcal{A} \Vdash_S \Sigma_1 \Rightarrow \mathcal{A} \Vdash_S \Sigma_1^*)$.

Dann $\forall \mathcal{A}\,(\mathcal{A}\text{ Modell für S} \Rightarrow (\mathcal{A} \Vdash_S \Sigma_1^* \Leftrightarrow \mathcal{A} \Vdash_S \Sigma_1))$.

Angenommen: $\sigma \in \mathrm{SATZ}_S$.

Dann gilt: $\sigma \in \{\sigma \mid \Sigma_1^* \Vdash_S \sigma\}$

gdw $\forall \mathcal{A}\,(\mathcal{A}\text{ Modell für S} \;\&\; \mathcal{A} \Vdash_S \Sigma_1^* \Rightarrow \mathcal{A} \models_S \sigma)$

gdw $\forall \mathcal{A}\,(\mathcal{A}\text{ Modell für S} \;\&\; \mathcal{A} \Vdash_S \Sigma_1 \Rightarrow \mathcal{A} \models_S \sigma)$

gdw $\sigma \in \{\sigma \mid \Sigma_1 \Vdash_S \sigma\}$.

Dann

$$\{\sigma \mid \sigma \in \mathrm{SATZ}_S \;\&\; \Sigma_1^* \Vdash_S \sigma\} = \{\sigma \mid \sigma \in \mathrm{SATZ}_S \;\&\; \Sigma_1 \Vdash_S \sigma\}.$$

Und es ist gezeigt, dass Σ_1 eine endlich axiomatisierbare Theorie von S ist, da Σ_1^* nur endlich viele Sätze / Axiome von S enthält (Def. 2.3.34). Entsprechend beweist man, dass Σ_2 auch eine endlich axiomatisierbare Theorie von S ist. □

Nun werden die Modellklassen charakterisiert, die durch beliebige oder durch endliche, einstufige Satzmengen axiomatisiert werden können.

4.1.15 Satz.-

Sei S *Sprache erster Stufe des Typs* μ *und sei* K $\subseteq$ $\mathbf{MOD}_S$. *Dann gilt:*

(i) K *ist* ***einstufige Klasse*** *von* S

gdw

K *in* S *unter einstufiger Äquivalenz und unter Ultraproduktbildung abgeschlossen ist.*

(ii) K *ist* ***einstufige Basisklasse*** *von* S

gdw

K *und das Komplement von* K *in* S *unter einstufiger Äquivalenz und unter Ultraproduktbildung abgeschlossen sind.*

Beweis: Sei S Sprache erster Stufe des Typs μ und sei K $\subseteq$ $\mathbf{MOD}_S$.

(i⇒) Sei K einstufige Klasse von Modellen von S.

Dann $\exists\Sigma$ (Σ ist Theorie von S & $\forall\mathcal{A}$ ($\mathcal{A} \in$ K $\Leftrightarrow \mathcal{A} \Vdash_S \Sigma$)).

Sei Σ so.

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Modelle von S und gelte $\mathcal{A} \in$ K und $\mathcal{A} \equiv_S \mathcal{B}$. Dann gilt $\mathcal{A} \Vdash_S \Sigma$ und da $\mathcal{A} \equiv_S \mathcal{B}$, gilt für $\mathcal{B}$: $\mathcal{B} \Vdash_S \Sigma$; und somit ist $\mathcal{B} \in$ K. Das zeigt, dass K unter einstufiger Äquivalenz abgeschlossen ist, wenn K eine einstufige Klasse ist.

Sei nun $\mathcal{A}$ eine Familie von Strukturen vom Typ μ so dass Ran($\mathcal{A}$) $\subseteq$ K; sei weiterhin F Ultrafilter auf $\mathbf{V}$(Dom($\mathcal{A}$)).

Sei $\sigma \in \Sigma$. Dann gilt für alle $i \in$ Dom($\mathcal{A}$):

$$\mathcal{A}_i \models_S \sigma, \text{ da } \mathcal{A}_i \in \mathrm{K}.$$

Nun ist Dom($\mathcal{A}$) $\in$ F, da F Filter auf $\mathbf{V}$(Dom($\mathcal{A}$)) ist; und es folgt mit Satz 3.3.18:

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A},\mathrm{F}) \models_S \sigma;$$

das gilt für alle $\sigma \in \Sigma$ und es folgt

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{F}) \Vdash_S \Sigma;$$

und $\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{F}) \in \mathrm{K}$.

Das gilt für alle Familien $\mathcal{A}$ mit $\mathrm{Ran}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{K}$ und alle Ultrafilter F auf $\mathbf{V}(\mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$. Also ist K unter Ultraproduktbildung abgeschlossen, wenn K eine einstufige Klasse ist.

(i⇐) Sei nun K eine Klasse von Modellen von S, die unter einstufiger Äquivalenz und unter Ultraproduktbildung abgeschlossen ist; sei

$$\Phi = \{ \phi \mid \phi \in \mathrm{SATZ_S} \;\&\; \forall\mathcal{A} (\mathcal{A} \in \mathrm{K} \Rightarrow \mathcal{A} \models_{\mathrm{S}} \phi) \}.$$

Dann gilt: $\forall\mathcal{A} (\mathcal{A} \in \mathrm{K} \Rightarrow \mathcal{A} \Vdash_{\mathrm{S}} \Phi)$.

Es bleibt zu zeigen, dass alle Modelle von S, die Φ simultan erfüllen, Element von K sind. Sei also $\mathcal{B}$ Modell von S und gelte:

$$\mathcal{B} \Vdash_{\mathrm{S}} \Phi.$$

Sei $\Sigma = \{ \phi \mid \phi \in \mathrm{SATZ_S} \;\&\; \mathcal{B} \models_{\mathrm{S}} \phi \}$.

Dann gilt: $\mathcal{B} \Vdash_{\mathrm{S}} \Sigma$.

Sei $\mathrm{I} = \{ i \mid i \text{ endl}\subseteq \Sigma \;\&\; i \neq \varnothing \}$.

Sei $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$.

Dann $\exists n\, \exists \sigma (n \in \mathbb{N}^+ \;\&\; \sigma \text{ Abzählung von I} \;\&\; \mathrm{Dom}(\sigma) = \{1, ..., n\})$.

Seien n und σ so.

Nun gibt es ein Modell aus K, das i erfüllt, da ansonsten alle Modelle in K folgenden Satz aus S erfüllen würden:

$$\neg_{\mathrm{S}}(\sigma_1 \wedge_{\mathrm{S}} ... \wedge_{\mathrm{S}} \sigma_n);$$

und $\neg_{\mathrm{S}}(\sigma_1 \wedge_{\mathrm{S}} ... \wedge_{\mathrm{S}} \sigma_n)$ wäre Element von Φ, und für $\mathcal{B}$ würde gelten:

$$\mathcal{B} \models_{\mathrm{S}} \neg_{\mathrm{S}}(\sigma_1 \wedge_{\mathrm{S}} ... \wedge_{\mathrm{S}} \sigma_n) \wedge_{\mathrm{S}} (\sigma_1 \wedge_{\mathrm{S}} ... \wedge_{\mathrm{S}} \sigma_n).$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass es für i ein Modell aus K gibt, das i erfüllt. Das gilt für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$.

Dann folgt mit Hilfe des Auswahlaxioms:

$$\exists \mathcal{A} \, (\mathcal{A} \text{ Funktion auf I} \,\&\, \forall i \, (i \in \mathrm{I} \Rightarrow \mathcal{A}_i \in \mathrm{K} \,\&\, \mathcal{A}_i \Vdash_S i \,) \,).$$

Sei $\mathcal{A}$ so.

Nun erfüllen Σ, I und $\mathcal{A}$ die Voraussetzungen für eine Anwendung des Kompaktheitstheorems; und es kann gefolgert werden:

$$\exists D \, (D \text{ Ultrafilter auf } \mathbf{V}(\mathrm{I}) \,\&\, \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, D) \Vdash_S \Sigma \,).$$

Sei D so.

Da alle Glieder $\mathcal{A}_i$ der Familie $\mathcal{A}$ aus K sind, und da K unter Ultraproduktbildung in S abgeschlossen ist, folgt:

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{D}) \in \mathrm{K}.$$

Sei nun $\sigma \in \mathrm{SATZ}_S$.

Gelte

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{D}) \models_S \sigma \,\&\, (\text{nicht } \mathcal{B} \models_S \sigma \,).$$

Dann folgt $\mathcal{B} \models_S \neg_S\sigma$ und $\neg_S\sigma \in \Sigma$ und

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{D}) \models_S \sigma \wedge_S \neg_S\sigma.$$

Aus der Annahme

$$\mathcal{B} \models_S \sigma \,\&\, (\text{nicht } \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{D}) \models_S \sigma \,)$$

folgt ebenfalls ein Widerspruch.

Also

$$\forall \sigma \, (\sigma \in \mathrm{SATZ}_S \Rightarrow (\mathcal{B} \models_S \sigma \Leftrightarrow \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{D}) \models_S \sigma \,) \,),$$

und mit Definition 2.3.19 folgt:

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{D}) \equiv_S \mathcal{B};$$

und da K unter einstufiger Äquivalenz abgeschlossen ist, folgt schließlich:

$$\mathcal{B} \in \mathrm{K}.$$

Somit gilt für alle Modelle $\mathcal{B}$ von S:

$$\mathcal{B} \Vdash_{S} \Phi \Leftrightarrow \mathcal{B} \in \mathrm{K}.$$

Das zeigt, dass K einstufige Klasse von Modellen von S ist, wenn K in S unter Ultraproduktbildung und bezüglich einstufiger Äquivalenz abgeschlossen ist.

(ii⇒) Sei K einstufige Basisklasse.

Dann ist K eine einstufige Klasse und K ist unter einstufiger Äquivalenz und unter Ultraproduktbildung abgeschlossen.

Dann

$$\exists \Sigma (\Sigma \text{ endl} \subseteq \mathrm{SATZ}_S \,\&\, \Sigma \neq \emptyset \,\&\, \forall \mathcal{A} (\mathcal{A} \in \mathrm{K} \Leftrightarrow \mathcal{A} \Vdash_{S} \Sigma)).$$

Sei Σ so. Dann

$$\exists n \, \exists \sigma (n \in \mathbb{N}^+ \,\&\, \sigma \text{ Abzählung von } \Sigma \,\&\, \mathrm{Dom}(\sigma) = \{1, ..., n\}).$$

Seien n und σ so.

Dann $\quad \forall \mathcal{A} (\mathcal{A} \in \mathrm{K} \Leftrightarrow \mathcal{A} \models_S \mathrm{Konj}_S (\sigma)),$

wobei $\mathrm{Konj}_S (\sigma)$ die Konjunktion der Glieder der Abzählung σ bezeichne.

Nun gilt $\quad \forall \mathcal{B} (\mathcal{B} \in \mathbf{MOD}_S \setminus \mathrm{K} \Rightarrow \mathcal{B} \models_S \neg_S \mathrm{Konj}_S (\sigma)).$

Und es folgt

$$\exists \Sigma (\Sigma \text{ endl} \subseteq \mathrm{SATZ}_S \,\&\, \Sigma \neq \emptyset \,\&\, \forall \mathcal{A} (\mathcal{A} \in \mathbf{MOD}_S \setminus \mathrm{K} \Leftrightarrow \mathcal{A} \Vdash_{S} \Sigma)).$$

Damit ist gezeigt, dass das Komplement von K eine einstufige Basisklasse ist; und es gilt: $\mathbf{MOD}_S \setminus \mathrm{K}$ ist unter einstufiger Äquivalenz und unter Ultraproduktbildung abgeschlossen.

(ii⇐) Sei K' = $\mathbf{MOD}_S \setminus \mathrm{K}$ und seien K und K' jeweils unter Ultraproduktbildung und unter einstufiger Äquivalenz abgeschlossen.

Dann sind K und K' einstufige Klassen von Modellen von S. Dann

$$\exists \Sigma_1 (\Sigma_1 \neq \emptyset \,\&\, \Sigma_1 \subseteq \mathrm{SATZ}_S \,\&\, \forall \mathcal{A} (\mathcal{A} \in \mathrm{K} \Leftrightarrow \mathcal{A} \Vdash_{S} \Sigma_1))$$

und

$$\exists \Sigma_2 (\Sigma_2 \neq \emptyset \,\&\, \Sigma_2 \subseteq \mathrm{SATZ}_S \,\&\, \forall \mathcal{A} (\mathcal{A} \in \mathrm{K}' \Leftrightarrow \mathcal{A} \Vdash_{S} \Sigma_2)).$$

Seien Σ_1 und Σ_2 so.

Nun gilt

$$\forall\mathcal{A}\,(\mathcal{A}\in \mathbf{MOD}_S \Rightarrow (\mathcal{A}\in K \text{ oder } \mathcal{A}\in K') \;\&\; \text{nicht}\,(\mathcal{A}\in K \;\&\; \mathcal{A}\in K')).$$

Dann

$$\forall\mathcal{A}\,(\mathcal{A}\in \mathbf{MOD}_S \Rightarrow (\mathcal{A} \Vdash_S \Sigma_1 \Leftrightarrow \text{nicht}\,\mathcal{A} \Vdash_S \Sigma_2)).$$

Dann folgt mit Korollar 4.1.14, dass Σ_1 und Σ_2 endlich axiomatisierbare Theorien von S sind, woraus folgt, dass K und K' einstufige Basisklassen von S sind.

□

4.2 Lindenbaum-Verband und endliche Axiomatisierbarkeit

In diesem Abschnitt werden hinreichende und notwendige Bedingungen dafür bewiesen, dass Theorien, d.h. nichtleere Klassen von Sätzen einer Sprache erster Stufe, bestimmte Eigenschaften wie z.B. Widerspruchsfreiheit oder Vollständigkeit haben. Die Bedingungen bestehen darin, dass die über eine Äquivalenzkassenbildung gewonnene Folgerungsmenge der Theorie eine bestimmte Art von Filter über dem Lindenbaumschen Verband der Sprache ist.

Zunächst wird der Begriff des Lindenbaum-Verbandes einer Sprache erster Stufe definiert. Dazu wird zunächst definiert: $\simeq_S = \{ \langle \phi, \psi \rangle \mid \phi, \psi \in \mathrm{FML}_S \;\&\; \Vdash_S \phi \leftrightarrow_S \psi \}$. $\simeq_S$ ist für jede Sprache erster Stufe S eine Äquivalenzrelation mit $\mathrm{fld}(\simeq_S) = \mathrm{FML}_S$. Dann wird auf $\mathrm{Quot}(\simeq_S)$ ein 2-stelliges Prädikat $\sqsubseteq_S$ definiert: $\sqsubseteq_S = \{ \langle [\phi]_{\simeq S}, [\psi]_{\simeq S} \rangle \mid \phi, \psi \in \mathrm{FML}_S \;\&\; \Vdash_S \phi \rightarrow_S \psi \}$. Dann wird der *Lindenbaum-Verband der Sprache S* definiert:

$$\mathbf{BA}_S = \langle \mathrm{Quot}(\simeq_S), \langle \sqsubseteq_S \rangle, \emptyset \rangle.$$

$\mathbf{BA}_S$ ist ein Boolescher Verband. In den folgenden Theoremen wird nur eine Substruktur von $\mathbf{BA}_S$ verwendet, nämlich

$$\mathbf{BA}_S^0 = \langle \mathrm{Quot}(\simeq_S [\![\mathrm{SATZ}_S), \langle \sqsubseteq_S \rangle, \emptyset \rangle.$$

$\mathbf{BA}_S^0$ ist ein Boolescher Verband. Ferner wird noch der Begriff der *Menge der Äquivalenzklassen der Sätze von S, die logische Folgerung einer Theorie T von S sind:*

$$\mathrm{D}_S(T) = \{ [\phi]_{\simeq S} \mid \phi \in \mathrm{SATZ}_S \;\&\; T \Vdash_S \phi \}.$$

definiert. Mit den vorstehend eingeführten Begriffen werden vier Theoreme bewiesen, die notwendige und hinreichende Bedingungen für grundlegende Eigenschaften von Theorien einer Sprache erster Stufe formulieren. Das erste Theorem lautet:

T ist widerspruchsfreie Theorie von S gdw $\mathrm{D}_S(T)$ ist echter Filter auf $\mathbf{BA}_S^0$.

Das zweite Theorem lautet:

T ist widerspruchsfreie und endlich axiomatisierbare Theorie von S
gdw $\mathrm{D}_S(T)$ ist echter Hauptfilter auf $\mathbf{BA}_S^0$.

Das dritte Theorem lautet:

T ist vollständige Theorie von S gdw $\mathrm{D}_S(T)$ ist Ultrafilter auf $\mathbf{BA}_S^0$.

Das vierte Theorem lautet:

T ist vollständige und endlich axiomatisierbare Theorie von S
gdw $\mathrm{D}_S(T)$ ist Hauptultrafilter auf $\mathbf{BA}_S^0$.

Auf FML_S wird als erstes ein Äquivalenzprädikat $\simeq_S$ definiert:

4.2.1. Definition.-

$\simeq_S = \{ \langle \phi, \psi \rangle \mid \phi, \psi \in FML_S \;\&\; \Vdash_S \phi \leftrightarrow_S \psi \}$.

Dann gilt der folgende Hilfssatz:

4.2.2. Satz.-

Wenn S *Sprache erster Stufe ist, dann ist* $\simeq_S$ *Äquivalenzprädikat* in FML_S .

Beweis: Sei S Sprache erster Stufe und seien $\phi, \chi\ \psi \in FML_S$.

Dann gilt: $\Vdash_S \phi \rightarrow_S \phi \;\&\; \Vdash_S \phi \rightarrow_S \phi$,

und mit der Regel der Bikonditionaleinführung folgt:

$$\Vdash_S \phi \leftrightarrow_S \phi,$$

d. h.: $\phi \simeq_S \phi$;

somit ist $\simeq_S$ reflexiv.

Sei $\phi \simeq_S \chi$.

Dann gilt $\Vdash \phi \leftrightarrow_S \chi$

und mit der Regel der Symmetrie des Bikonditional folgt:

$$\Vdash \chi \leftrightarrow_S \phi$$

und es gilt $\chi \simeq_S \phi$ und $\simeq_S$ ist symmetrisch.

Angenommen $\phi \simeq_S \chi \;\&\; \chi \simeq_S \psi$,

dann gilt $\Vdash \phi \leftrightarrow_S \chi \;\&\; \Vdash \chi \leftrightarrow_S \psi$;

dann folgt mit der Regel der Transitivität des Bikonditionals:

$$\Vdash \phi \leftrightarrow_S \psi;$$

weiterhin folgt $\phi \simeq_S \psi$ und $\simeq_S$ ist transitiv. □

Somit teilt $\simeq_S$ die Menge FML_S in Äquivalenzklassen ein. Dann gilt gemäß Def. 3.3.9.:

4.2.3 Satz.-

$$[\phi]_{\simeq S} \quad = \quad \{\, \psi \mid \langle \phi, \psi \rangle \in \simeq_S \,\}.$$

$$FML_S/\simeq_S \quad = \quad \{\, [\phi]_{\simeq S} \mid \phi \in FML_S \,\}.$$

Da es im vorliegenden Abschnitt 4.2 nur um eine Äquivalenzrelation – $\simeq_S$ – geht, wird in den Beweisen der Index öfters weggelassen, es wird also $[\phi]$ für $[\phi]_{\simeq S}$ geschrieben.

Definition 4.2.1 liefert nun zusammen mit der Theorie der Äquivalenzrelationen folgenden Satz:

4.2.4. Satz.-

Wenn S *eine Sprache erster Stufe ist, dann gilt für alle* ϕ, $\psi \in FML_S$:

a) $$[\phi]_{\simeq S} = [\psi]_{\simeq S} \Leftrightarrow \Vdash_S \phi \leftrightarrow_S \psi \qquad \&$$

b) $$\phi \in [\phi]_{\simeq S}\,.$$

Auf $FML_S/\simeq_S$ wird ein Ordnungsprädikat $\sqsubseteq_S$ definiert:

4.2.5. Definition.-

$$\sqsubseteq_S = \{\, \langle\, [\phi]_{\simeq S}\,,\ [\psi]_{\simeq S} \,\rangle \mid \phi, \psi \in FML_S \;\&\; \Vdash_S \phi \rightarrow_S \psi \,\}.$$

Im vorliegenden Abschnitt 4.2 wird statt $\langle\, x, y \,\rangle \in \sqsubseteq_S$ auch die Schreibweise $x \sqsubseteq_S y$ verwendet. Der nächste Satz zeigt die Wohldefiniertheit von $\sqsubseteq_S$:

4.2.6. Satz.-

Wenn S *Sprache erster Stufe, dann gilt für alle* ϕ, ϕ', ψ *und* $\psi' \in FML_S$:

$$(\, \phi \simeq_S \phi' \,\&\, \psi \simeq_S \psi' \,) \Rightarrow (\, [\phi]_{\simeq S} \sqsubseteq_S [\psi]_{\simeq S} \Leftrightarrow [\phi']_{\simeq S} \sqsubseteq_S [\psi']_{\simeq S} \,).$$

Beweis: Sei S Sprache erster Stufe, seien ϕ, ϕ', ψ und $\psi' \in FML_S$, gelte

$$(\phi \simeq_S \phi' \;\&\; \psi \simeq_S \psi')$$

und sei weiterhin $[\phi]_{\simeq S} \sqsubseteq_S [\psi]_{\simeq S}$.

Dann $\Vdash_S \phi \rightarrow_S \psi$.

Da $\phi \simeq_S \phi'$, folgt mit Definition 4.2.1 und mit Bikonditionalabschwächung $\Vdash_S \phi' \rightarrow_S \phi$; und mit dem hypothetischen Syllogismus folgt

$$\Vdash_S \phi' \rightarrow_S \psi.$$

Da $\psi \simeq_S \psi'$ angenommen ist, gilt $\Vdash_S \psi \rightarrow_S \psi'$ und man erhält

$$\Vdash_S \phi' \rightarrow \psi'.$$

Also $[\phi']_{\simeq S} \sqsubseteq_S [\psi']_{\simeq S}$.

Entsprechend zeigt man, dass $[\phi]_{\simeq S} \sqsubseteq_S [\psi]_{\simeq S}$ aus $[\phi']_{\simeq S} \sqsubseteq_S [\psi']_{\simeq S}$ folgt.

Es sei nun für alle S

4.2.7. Definition.-

$$\mathbf{BA}_S = \langle\, FML_S/\simeq_S, \langle \sqsubseteq_S \rangle, \varnothing \,\rangle.$$

Die Struktur $\mathbf{BA}_S$ trägt einen eigenen Namen; sie wurde nach dem polnischen Logiker Adolf Lindenbaum benannt; man nennt $\mathbf{BA}_S$ den 'Lindenbaum – Verband der Sprache S'.

Es gelten die zwei folgenden Sätze:

4.2.8 Satz.-

Wenn S eine Sprache erster Stufe ist, dann gilt für alle ϕ:

(a) $$[\phi]_{\simeq S} \in (\mathbf{BA}_S)_1 \leftrightarrow \phi \in FML_S.$$

(b) *Des Weiteren ist $\mathbf{BA}_S$ eine partielle Ordnung.*

Beweis: Sei S Sprache erster Stufe.

(a) Sei $[\phi]_{\approx S} \in (\mathbf{BA}_S)_1$.

Dann ist $[\phi]_{\approx S} \in \{ [\phi]_{\approx S} \mid \phi \in FML_S \}$und $\phi \in FML_S$ folgt.

Sei nun $\phi \in FML_S$.

Es gilt $\phi \approx_S \phi$. Dann ist $\phi \in [\phi]_S$. Nach Satz. 4.2.3 ist $[\phi]_{\approx S} \in FML_S/\approx_S$.

Und da $$FML_S/\approx_S = (\mathbf{BA}_S)_1 ,$$

folgt $[\phi]_{\approx S} \in (\mathbf{BA}_S)_1$.

(b) Sei $[\phi]_{\approx S} \in (\mathbf{BA}_S)_1$. Dann: $\phi \in FML_S$. Dann gilt $\Vdash_S \phi \rightarrow_S \phi$. Dann $[\phi] \sqsubseteq_S [\phi]$. Also ist $\sqsubseteq_S$ reflexiv in $FML_S/\approx_S$.

Sei nun $[\phi], [\psi] \in (\mathbf{BA}_S)_1$ und gelte $[\phi] \sqsubseteq [\psi]$ und $[\psi] \sqsubseteq [\phi]$.

Dann: $\Vdash \phi \leftrightarrow_S \psi$ und $[\phi] = [\psi]$ folgt. Also ist $\sqsubseteq_S$ antisymmetrisch in $FML_S/\approx_S$.

Seien nun $[\phi], [\psi], [\lambda] \in (\mathbf{BA}_S)_1$ und gelte $[\phi] \sqsubseteq [\psi]$ und $[\psi] \sqsubseteq [\lambda]$.

Dann folgt $\Vdash \phi \rightarrow_S \lambda$ und somit $[\phi] \sqsubseteq [\lambda]$. Also ist $\sqsubseteq_S$ transitiv in $FML_S/\approx_S$.

Das zeigt, dass $(\mathbf{BA}_S)_1$ eine partielle Ordnung ist.

4.2.9 Satz.-

Wenn S eine Sprache erster Stufe ist, dann ist $\mathbf{BA}_S$ *ein BOOLEscher Verband.*

Beweis: Sei S Sprache erster Stufe.

Um den Satz zu beweisen ist zu zeigen, dass

(a) alle zweielementigen Teilmengen von $(\mathbf{BA}_S)_1$ ein Supremum und ein Infimum besitzen (Def. 3.1.15), dass

(b) $\mathbf{BA}_S$ ein größtes – $1_{\mathbf{BA}(S)}$ – und ein kleinstes – $0_{\mathbf{BA}(S)}$ – Element besitzt, dass

(c) jedes Element von $(\mathbf{BA}_S)_1$ ein Komplement hat (Def. 3.1.18 und 3.1.19), dass

(d) die Infimumbildung distributiv bezüglich der Supremumsbildung ist und umgekehrt, und dass

(e) $1_{\mathbf{BA(S)}} \neq 0_{\mathbf{BA(S)}}$.

Zu (a): Seien $[\phi], [\psi] \in (\mathbf{BA}_S)_1$.

Es gelten für alle ϕ, $\psi \in \mathrm{FML}_S$ die beiden Tautologien:

$$\Vdash_S \phi \rightarrow_S (\phi \vee_S \psi)$$

und $$\Vdash_S \psi \rightarrow_S (\phi \vee_S \psi);$$

und es folgt: $[\phi] \sqsubseteq_S [(\phi \vee_S \psi)]$ und $[\psi] \sqsubseteq_S [(\phi \vee_S \psi)]$.

Somit ist $[(\phi \vee_S \psi)]$ obere Schranke von $\{ [\phi], [\psi] \}$ in $\mathbf{BA}_S$.

Sei $[\xi]$ beliebige obere Schranke von $\{ [\phi], [\psi] \}$ in $\mathbf{BA}_S$.

Dann gilt $[\phi] \sqsubseteq_S [\xi]$ und $[\psi] \sqsubseteq_S [\xi]$. Dann folgt u. a. mit Def. 4.2.5:

$$\Vdash_S \phi \rightarrow_S \xi \text{ und } \Vdash_S \psi \rightarrow_S \xi.$$

Mit der Tautologie

$$\Vdash_S (\phi \rightarrow_S \xi) \rightarrow_S ((\psi \rightarrow_S \xi) \rightarrow_S ((\phi \vee_S \psi) \rightarrow_S \xi))$$

und zweimaligem modus ponens erhält man

$$\Vdash_S (\phi \vee_S \psi) \rightarrow_S \xi;$$

d. h. $[(\phi \vee_S \psi)] \sqsubseteq [\xi]$; und somit ist $[(\phi \vee_S \psi)]$ Supremum von $\{[\phi], [\psi]\}$ in $\mathbf{BA}_S$ und es gilt:

$$\mathrm{Sup}_{\mathbf{BA(S)}}\{ [\phi]_{\sim S} , [\psi]_{\sim S} \} = [\phi]_{\sim S} \sqcup_{\mathbf{BA(S)}} [\psi]_{\sim S} = [\phi \vee_S \psi]_{\sim S} .$$

Der Beweis, dass $[(\phi \wedge_S \psi)]$ Infimum von $\{[\phi], [\psi]\}$ in $\mathbf{BA}_S$ ist, erfolgt entsprechend mit Hilfe der drei Tautologien:

$$\Vdash_S (\phi \wedge_S \psi) \rightarrow_S \phi,$$

$$\Vdash_S (\phi \wedge_S \psi) \rightarrow_S \psi \text{ und}$$

$$\Vdash_S (\xi \rightarrow_S \phi) \rightarrow_S ((\xi \rightarrow_S \psi) \rightarrow_S (\xi \rightarrow_S (\phi \wedge_S \psi))).$$

Damit ist gezeigt, dass es zu allen zweielementigen Teilmengen von $(\mathbf{BA}_S)_1$ ein Supremum und ein Infimum aus $(\mathbf{BA}_S)_1$ gibt; somit ist $\mathbf{BA}_S$ ein Verband.

Zu (b): Für alle Modelle $\mathcal{A}$ von S, alle Belegungen x aus $\mathcal{A}$ und alle $\phi \in \mathrm{FML}_S$ gilt:

$$\mathcal{A} \models_{S,x} \phi \rightarrow_S \exists_S {}^S V_1 ({}^S V_1 =_S {}^S V_1)$$

und

$$\mathcal{A} \models_{S,x} \neg_S \exists_S {}^S V_1 ({}^S V_1 =_S {}^S V_1) \rightarrow_S \phi;$$

und man erhält:

$$\Vdash_S \phi \rightarrow_S \exists_S {}^S V_1 ({}^S V_1 =_S {}^S V_1)$$

und $$\Vdash_S \neg_S \exists^S V_1 ({}^S V_1 =_S {}^S V_1) \rightarrow_S \phi.$$

U. a. mit Def. 4.2.5 folgt für alle $[\phi] \in (\mathbf{BA}_S)_1$:

$$[\phi] \sqsubseteq_S [\exists_S {}^S V_1 ({}^S V_1 =_S {}^S V_1)]_{\approx S}$$

und $$[\neg_S \exists_S {}^S V_1 ({}^S V_1 =_S {}^S V_1)]_{\approx S} \sqsubseteq_S [\phi].$$

Es gibt also ein x und ein $y \in (\mathbf{BA}_S)_1$, so dass für alle $[\phi] \in (\mathbf{BA}_S)_1$:

$$[\phi] \sqsubseteq_S x \text{ und } y \sqsubseteq_S [\phi]$$ gilt;

somit ist $[\exists_S {}^S V_1 ({}^S V_1 =_S {}^S V_1)]_{\approx S}$ größtes und $[\neg_S \exists_S {}^S V_1 ({}^S V_1 =_S {}^S V_1)]_{\approx S}$ kleinstes Element von $\mathbf{BA}_S$. D. h.

$$1_{\mathbf{BA}(S)} = [\exists_S {}^S V_1 ({}^S V_1 =_S {}^S V_1)]_{\approx S} \quad \&$$

$$0_{\mathbf{BA}(S)} = [\neg_S \exists {}^S V_1 ({}^S V_1 =_S {}^S V_1)]_{\approx S} .$$

Zu (c): Um nachzuweisen, dass $\mathbf{BA}_S$ ein komplementärer Verband ist, ist

$$\forall x (x \in (\mathbf{BA}_S)_1 \Rightarrow \exists y (y \in (\mathbf{BA}_S)_1 \;\&\; x \sqcap_{\mathbf{BA}(S)} y = 0_{\mathbf{BA}(S)} \;\&\; x \sqcup_{\mathbf{BA}(S)} y = 1_{\mathbf{BA}(S)}))$$

zu zeigen.

Sei $[\phi] \in (\mathbf{BA}_S)_1$. Dann gilt:

$$[\phi] \sqsubseteq_S 1_{\mathbf{BA}(S)} , [\neg_S \phi] \sqsubseteq_S 1_{\mathbf{BA}(S)} , 0_{\mathbf{BA}(S)} \sqsubseteq_S [\phi] \text{ und } 0_{\mathbf{BA}(S)} \sqsubseteq_S [\neg_S \phi];$$

d. h. $1_{\mathbf{BA}(S)}$ ist obere und $0_{\mathbf{BA}(S)}$ untere Schranke von $\{ [\phi], [\neg\phi] \}$ in $\mathbf{BA}_S$. Es bleibt zu zeigen, dass $1_{\mathbf{BA}(S)}$ Supremum und $0_{\mathbf{BA}(S)}$ Infimum von $\{[\phi], [\neg\phi]\}$ in $\mathbf{BA}_S$ ist.

Sei also $[\xi] \in (\mathbf{BA}_S)_1$ obere Schranke von $\{ [\phi], [\neg\phi] \}$ in $\mathbf{BA}_S$

Dann gilt $[\phi] \sqsubseteq_S [\xi]$ und $[\neg\phi] \sqsubseteq_S [\xi]$; und

$$\Vdash_S \phi \rightarrow_S \xi \text{ und } \Vdash_S \neg\phi \rightarrow_S \xi;$$

mit Hilfe der Tautologie

$$\Vdash_S (\phi \rightarrow_S \xi) \rightarrow_S ((\neg\phi \rightarrow_S \xi) \rightarrow_S ((\phi \vee_S \neg\phi) \rightarrow_S \xi))$$

und mit zweimaligem modus ponens folgt dann

$$\Vdash_S (\phi \vee_S \neg\phi) \rightarrow_S \xi.$$

Nun ist $(\phi \vee_S \neg\phi) \in 1_{\mathbf{BA}(S)}$. Denn für alle Modelle $\mathcal{A}$ von S und alle Belegungen x aus $\mathcal{A}$ und alle $\phi \in \mathrm{FML}_S$ gilt:

$$\mathcal{A} \models_{S,x} (\phi \vee_S \neg\phi) \Leftrightarrow_S \exists_S {}^S\mathrm{V}_1 \, ({}^S\mathrm{V}_1 =_S {}^S\mathrm{V}_1).$$

Dann folgt mit Definition 4.2.1:

$$(\phi \vee_S \neg\phi) \simeq_S \exists_S {}^S\mathrm{V}_1 \, ({}^S\mathrm{V}_1 =_S {}^S\mathrm{V}_1).$$

Dann $(\phi \vee_S \neg\phi) \in [\, \exists_S {}^S\mathrm{V}_1 \, ({}^S\mathrm{V}_1 =_S {}^S\mathrm{V}_1)\,]_{\simeq S} = 1_{\mathbf{BA}(S)}$.

Dann $1_{\mathbf{BA}(S)} \sqsubseteq_S [\xi]$.

Das zeigt, dass $1_{\mathbf{BA}(S)}$ Supremum von $\{\, [\phi], [\neg\phi] \,\}$ in $\mathbf{BA}_S$ ist:

$$1_{\mathbf{BA}(S)} = [\phi] \sqcup_{\mathbf{BA}(S)} [\neg\phi].$$

Analog der Beweis, dass $0_{\mathbf{BA}(S)} = [\phi] \sqcap_{\mathbf{BA}(S)} [\neg\phi]$.

Und mit Definition 3.1.23 folgt:

$$(\, [\phi]_{\simeq S} \,)^{*\mathbf{BA}(S)} = [\neg_S \, \phi]_{\simeq S}\,.$$

Somit gilt: In $\mathbf{BA}_S$ gibt es zu jedem $[\phi] \in (\mathbf{BA}_S)_1$ ein Element aus $(\mathbf{BA}_S)_1$, das Komplement von $[\phi]$ in $\mathbf{BA}_S$ ist; d. h., dass der Verband $\mathbf{BA}_S$, der ein größtes und ein kleinstes Element aufweist, ein komplementärer Verband ist (Definition 3.1.19).

Zu (d):Es bleibt zu zeigen, dass die Supremums- und die Infimumbildung distributiv sind. Seien dazu $[\phi]$, $[\psi]$ und $[\lambda] \in (\mathbf{BA}_S)_1$. Dann gilt für alle $x \in (\mathbf{BA}_S)_1$:

$$x \in (\, [\phi] \sqcup_{\mathbf{BA}(S)} [\psi] \,) \sqcap_{\mathbf{BA}(S)} [\lambda]$$

$$\Leftrightarrow x \in [\, \phi \vee_S \psi \,] \sqcap [\lambda]$$

$$\Leftrightarrow x \in [\, (\phi \vee_S \psi) \wedge_S \lambda \,] \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow x \in [\, (\phi \wedge_S \lambda) \vee_S (\psi \wedge_S \lambda) \,] \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow x \in [\, (\phi \wedge_S \lambda) \,] \sqcup [\, (\psi \wedge_S \lambda) \,]$$

$$\Leftrightarrow x \in (\, [\phi] \sqcap_{\mathbf{BA(S)}} [\lambda] \,) \sqcup_{\mathbf{BA(S)}} (\, [\psi] \sqcap_{\mathbf{BA(S)}} [\lambda] \,);$$

die Übergänge von (*) nach (**) liefert folgende Tautologie:

$$\Vdash_S ((\phi \vee_S \psi) \wedge_S \lambda) \leftrightarrow_S ((\phi \wedge_S \lambda) \vee_S (\psi \vee_S \lambda)),$$

die zeigt, dass $\quad [(\phi \vee_S \psi) \wedge_S \lambda] = [(\phi \wedge_S \lambda) \vee_S (\psi \vee_S \lambda)].$

Somit folgt:

$$(\, [\phi] \sqcup_{\mathbf{BA(S)}} [\psi] \,) \sqcap_{\mathbf{BA(S)}} [\lambda] = (\, [\phi] \sqcap_{\mathbf{BA(S)}} [\lambda] \,) \sqcup_{\mathbf{BA(S)}} (\, [\psi] \sqcap_{\mathbf{BA(S)}} [\lambda] \,).$$

Entsprechend wird

$$(\, [\phi] \sqcap_{\mathbf{BA(S)}} [\psi] \,) \sqcup_{\mathbf{BA(S)}} [\lambda] = (\, [\phi] \sqcup_{\mathbf{BA(S)}} [\lambda] \,) \sqcap_{\mathbf{BA(S)}} (\, [\psi] \sqcup_{\mathbf{BA(S)}} [\lambda] \,)$$

bewiesen, und die Distributivität der Supremums- und der Infimumbildung in $\mathbf{BA}_S$ ist damit gezeigt.

Zu (e): Da die Individuenbereiche aller Modelle von S nichtleer sind, gilt somit nicht:

$$\Vdash_S \exists_S {}^S V_1 \, ({}^S V_1 =_S {}^S V_1) \rightarrow_S \neg_S \exists_S {}^S V_1 \, ({}^S V_1 =_S {}^S V_1).$$

Dann nicht $\quad \exists_S {}^S V_1 \, ({}^S V_1 =_S {}^S V_1) \approx_S \neg_S \exists_S {}^S V_1 \, ({}^S V_1 =_S {}^S V_1).$

Dann $\quad [\, \exists_S {}^S V_1 \, ({}^S V_1 =_S {}^S V_1) \,]_{\approx S} \neq [\, \neg_S \exists_S {}^S V_1 \, ({}^S V_1 =_S {}^S V_1) \,]_{\approx S}.$

Und $\quad 1_{\mathbf{BA(S)}} \neq 0_{\mathbf{BA(S)}} \quad$ folgt.

Damit ist bewiesen, dass $\mathbf{BA}_S$ ein BOOLEscher Verband ist.

Für die folgenden Theoreme, die widerspruchsfreie, endlich axiomatisierbare und vollständige Theorien mit Hilfe von Filterbegriffen charakterisieren, ist eine spezielle Unterstruktur von $\mathbf{BA}_S$ wichtig:

4.2.10 Definition.-

$$\mathbf{BA}_S{}^0 = \langle \text{SATZ}_S / \simeq_S , \sqsubseteq_S , \varnothing \rangle.$$

Der Bereich von $\mathbf{BA}_S{}^0$ sind die Äquivalenzklassen der Formeln von S, die 0 freie Variablen enthalten; $(\mathbf{BA}_S{}^0)_1$ sind also die Äquivalenzklassen der Sätze von S unter dem Äquivalenzprädikat $\simeq_S$. Der Beweis, dass $\mathbf{BA}_S{}^0$ ein BOOLEscher Verband ist, verläuft analog zu den Sätzen 4.2.8 und 4.2.9.

Für den Rest von Abschnitt 4.2 sei nun T eine Theorie von S; d. h. gemäß Def. 2.3.33:

$$\varnothing \neq T \subseteq \text{SATZ}_S .$$

Zur Formulierung der Sätze wird folgende Definition benötigt:

4.2.11 Definition.-

$$D_S(T) = \{ [\phi]_{\simeq S} \mid \phi \in \text{SATZ}_S \;\&\; T \Vdash_S \phi \}.$$

$D_S(T)$ ist also die Menge der Äquivalenzklassen der Sätze von S, die logische Folgerungen von T sind. Mit Hilfe dieser Definition können die folgenden vier Sätze formuliert und bewiesen werden.

4.2.12 Satz.-

Sei S *Sprache erster Stufe; und sei* T *Theorie von* S, *dann gilt:*

T *ist widerspruchsfreie Theorie von* S

gdw

$D_S(T)$ *echter Filter auf* $\mathbf{BA}_S{}^0$ *ist.*

Beweis: Sei S Sprache erster Stufe und sei T Theorie von S.

(⇒) Sei T widerspruchsfrei.

Da $\mathbf{BA}_S{}^0$ ein BOOLEscher Verband ist, wird Filterbedingung (1) von Definition 3.2.1 erfüllt. Da T widerspruchsfrei, existiert ein $\phi \in SATZ_S$ (Definition 2.3.36), so dass nicht gilt

$$T \Vdash \phi;$$

d. h.: $$[\phi] \notin D_S(T),$$

und somit ist $$D_S(T) \neq SATZ_S/\simeq_S = (\mathbf{BA}_S{}^0)_1 \, .$$

Ferner ist $D_S(T) \subseteq (\mathbf{BA}_S{}^0)_1$ und wegen

$$T \Vdash_S \exists_S {}^S V_1 \, {}^S V_1 =_S {}^S V_1 \, ,$$

gilt Filtereigenschaft (2): $$1_{\mathbf{BA(S)(0)}} \in D_S(T).$$

Seien nun $[\phi], [\psi] \in D_S(T)$.

Dann gilt: $$T \Vdash_S \phi \text{ und } T \Vdash_S \psi;$$

und es folgt: $$T \Vdash_S (\phi \wedge_S \psi),$$

und $$[(\phi \wedge_S \psi)] \in D_S(T);$$

und da $$[(\phi \wedge_S \psi)] = [\phi] \sqcap_{\mathbf{BA(S)(0)}} [\psi]$$

erfüllt $D_S(T)$ Filtereigenschaft 3 von Definition 3.2.1.

Sei nun $[\phi] \in D_S(T)$, sei $[\psi] \in (\mathbf{BA}_S{}^0)_1$ und gelte $[\phi] \sqsubseteq_S [\psi]$.

Dann $$\Vdash_S \phi \rightarrow_S \psi,$$

und mit $$T \Vdash_S \phi$$

folgt $$T \Vdash_S \psi,$$

und $$[\psi] \in D_S(T) \qquad \text{(Filtereigenschaft 4).}$$

Wegen $D_S(T) \neq SATZ_S/\simeq_S$ ist $D_S(T)$ echter Filter auf $\mathbf{BA}_S{}^0$ (Definition 3.2.4).

(¬ ⇒ ¬) Sei nun T widersprüchlich.

Dann gibt es keinen Satz ϕ von S, so dass $T \Vdash_S \phi$ nicht gilt.

Dann $\forall \phi\, (\, \phi \in \mathrm{SATZ}_S \Rightarrow [\phi] \in D_S(T)\,)$.

D. h.: $D_S(T) = (\mathbf{BA}_S{}^0)_1 = \mathrm{SATZ}_S/\approx_S$,

und $D_S(T)$ ist kein echter Filter auf $\mathbf{BA}_S{}^0$. □

Satz 4.2.12 impliziert den folgenden Hilfssatz:

4.2.13 Hilfssatz.-

Wenn S eine Sprache erster Stufe ist, dann gilt für alle ϕ:

$$\phi \in \mathrm{SATZ}_S \Rightarrow (\ \{\phi\}\ \textit{widerspruchsfrei in}\ S \Leftrightarrow [\phi]_{\approx S} \neq 0_{\mathbf{BA}\,(S)(0)}\ ).$$

Beweis : Sei S Sprache erster Stufe und sei $\phi \in \mathrm{SATZ}_S$.

Sei $\{\phi\}$ widerspruchsfrei in S. Dann ist $D_S(\{\phi\})$ echter Filter auf $\mathbf{BA}_S{}^0$; weiterhin ist

$$[\phi] \in D_S(\{\phi\}),\ \text{da}\ \{\phi\} \Vdash_S \phi.$$

Und da echte Filter auf einem BOOLEschen Verband **BA** das Element $0_{\mathbf{BA}}$ nicht enthalten (Satz 3.2.10), folgt:

$$[\phi]_{\approx S} \neq 0_{\mathbf{BA}\,(S)(0)}\ .$$

Sei nun $\{\phi\}$ nicht widerspruchsfrei in S. Dann gilt für alle $\psi \in \mathrm{SATZ}_S$:

$$\{\phi\} \Vdash_S \psi;$$

und mit dem Deduktionstheorem folgt:

$$\Vdash \phi \rightarrow_S \psi.$$

Und für $\psi = \neg_S \exists\, {}^S V_1\, (\, {}^S V_1 =_S {}^S V_1\,)$

gilt: $\Vdash \psi \rightarrow_S \phi;$

und man erhält $[\phi] \sqsubseteq_S 0_{\mathbf{BA}\,(S)(0)}$ und $0_{\mathbf{BA}\,(S)(0)} \sqsubseteq_S [\phi]$; und wegen der Antisymmetrie des Ordnungsprädikats $\sqsubseteq_S$ folgt: $[\phi]_{\approx S} = 0_{\mathbf{BA}\,(S)(0)}$.

4.2.14 Satz.-

Sei S *Sprache erster Stufe und sei* T *Theorie von* S; *dann gilt:*

T *ist widerspruchsfreie und endlich axiomatisierbare Theorie von* S

gdw

$D_S(T)$ *echter Hauptfilter auf* $\mathbf{BA}_S{}^0$ *ist.*

Beweis: Sei S Sprache erster Stufe und sei T Theorie von S.

(⇒) Sei T widerspruchsfrei und endlich axiomatisierbar in S. Dann ist $D_S(T)$ echter Filter auf $\mathbf{BA}_S{}^0$. Um die Hauptfiltereigenschaft von $D_S(T)$ zu erweisen, ist

$$\exists x\, (\, x \in (\mathbf{BA}_S{}^0)_1 \;\&\; \forall y\, (\, y \in D_S(T) \Rightarrow x \sqsubseteq_S y\,)\,) \qquad \text{zu zeigen.}$$

Nun ist T endlich axiomatisierbare Theorie von S. Dann folgt mit Hilfssatz 2.3.35:

$$\exists \delta\, (\, \delta \in \mathrm{SATZ}_S \;\&$$
$$\{\, \psi \mid \psi \in \mathrm{SATZ}_S \;\&\; T \Vdash_S \psi \,\} = \{\, \psi \mid \psi \in \mathrm{SATZ}_S \;\&\; \{\delta\} \Vdash_S \psi \,\}\,).$$

Sei δ so. Dann

$$\{\, \psi \mid \psi \in \mathrm{SATZ}_S \;\&\; T \Vdash_S \psi \,\} = \{\, \psi \mid \psi \in \mathrm{SATZ}_S \;\&\; \{\delta\} \Vdash_S \psi \,\}.$$

Und es folgt:

$$\begin{aligned} D_S(T) &= \{\, [\psi]_{\approx S} \mid \psi \in \mathrm{SATZ}_S \;\&\; T \Vdash_S \psi \,\} \\ &= \{\, [\psi]_{\approx S} \mid \psi \in \mathrm{SATZ}_S \;\&\; \{\delta\} \Vdash_S \psi \,\} \\ &= \{\, [\psi]_{\approx S} \mid \psi \in \mathrm{SATZ}_S \;\&\; \Vdash_S \delta \rightarrow_S \psi \,\} \\ &= \{\, [\psi]_{\approx S} \mid \psi \in \mathrm{SATZ}_S \;\&\; [\delta]_{\approx S} \sqsubseteq_S [\psi]_{\approx S} \,\}. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass $D_S(T)$ echter Hauptfilter auf $\mathbf{BA}_S{}^0$ ist.

(⇐) Sei nun $D_S(T)$ echter Hauptfilter auf $\mathbf{BA}_S{}^0$.

Dann folgt mit Definition 3.2.2:

$$\exists x\, (\, x \in (\mathbf{BA}_S{}^0)_1 \;\&\; D_S(T) \text{ ist echter Hauptfilter über } x \text{ auf } \mathbf{BA}_S{}^0\,).$$

Sei x so. Dann gibt es ein $\delta \in \mathrm{SATZ}_S$ so dass x = $[\delta]$. Sei δ so.

Dann gilt für alle $[\psi] \in (\mathbf{BA}_S{}^0)_1$:

$$[\psi] \in D_S(T) \ \& \ [\delta] \in D_S(T) \Rightarrow [\delta] \sqsubseteq_S [\psi].$$

Dann
$$\{ [\phi] \mid \phi \in SATZ_S \ \& \ T \Vdash_S \phi \}$$
$$= D_S(T)$$
$$= \{ [\phi] \mid \phi \in SATZ_S \ \& \ [\delta] \sqsubseteq_S [\phi] \}$$
$$= \{ [\phi] \mid \phi \in SATZ_S \ \& \ \Vdash \delta \rightarrow_S \phi \}$$
$$= \{ [\phi] \mid \phi \in SATZ_S \ \& \ \{\delta\} \Vdash_S \phi \}.$$

Somit gilt:

$$\{ [\phi] \mid \phi \in SATZ_S \ \& \ T \Vdash_S \phi \} = \{ [\phi] \mid \phi \in SATZ_S \ \& \ \{\delta\} \Vdash_S \phi \}.$$

Und da $\delta \in SATZ_S$, folgt mit Definition 2.3.34, dass T endlich axiomatisierbar in S ist.

4.2.15 Satz.-

Sei S Sprache erster Stufe und sei T Theorie von S; dann gilt:

$$T \textit{ ist vollständige Theorie von } S \Leftrightarrow D_S(T) \textit{ Ultrafilter auf } \mathbf{BA}_S{}^0 \textit{ ist.}$$

Beweis: Sei S Sprache erster Stufe und sei T Theorie von S.

($\Rightarrow$) Sei T vollständige Theorie von S.

Dann ist nach Def. 2.3.41 T widerspruchsfreie Theorie in S und für alle $\phi \in SATZ_S$ gilt:

$$T \Vdash_S \phi \text{ oder } T \Vdash_S \neg\phi;$$

und da T widerspruchsfrei ist, gilt für alle $\phi \in SATZ_S$:

$$T \Vdash_S \phi \text{ gdw nicht } T \Vdash_S \neg\phi.$$

Weiterhin ist $D_S(T)$ echter Filter auf $\mathbf{BA}_S{}^0$, da T widerspruchsfrei. Es bleibt, die Ultrafilter-eigenschaft von $D_S(T)$ zu zeigen.

Sei nun $[\phi] \in (\mathbf{BA}_S{}^0)_1$.

Da
$$[\phi]_{\approx S}{}^{*\mathbf{BA}(S)(0)} = [\neg_S\phi]_{\approx S} ,$$

und da für alle $\phi \in SATZ_S$ gilt:

$$T \Vdash_S \phi \text{ gdw nicht } T \Vdash_S \neg\phi,$$

folgt für $[\phi]$: $[\phi] \in D_S(T)$ gdw $[\neg\phi] \notin D_S(T)$.

Und es ist für alle $[\phi] \in (\mathbf{BA}_S{}^0)_1$ gezeigt:

$$[\phi] \in D_S(T) \text{ gdw } [\phi]^* \notin D_S(T);$$

und der echte Filter $D_S(T)$ ist Ultrafilter auf $\mathbf{BA}_S{}^0$.

($\Leftarrow$) Sei $D_S(T)$ Ultrafilter auf $\mathbf{BA}_S{}^0$.

Dann ist T widerspruchsfreie Theorie von S. Dann gilt für alle $[\phi] \in (\mathbf{BA}_S{}^0)_1$:

$$[\phi] \in D_S(T) \text{ gdw } [\phi]^* \notin D_S(T).$$

Sei nun $\phi \in SATZ_S$.

Gelte $T \Vdash_S \phi$. Dann ist $[\phi] \in D_S(T)$ und $[\phi]^* \notin D_S(T)$; und da $[\neg\phi] = [\phi]^*$, ist $[\neg\phi] \notin D_S(T)$ und nicht gilt: $T \Vdash_S \neg\phi$.

Gelte nun nicht $T \Vdash_S \neg\phi$. Dann ist $[\neg\phi] \notin D_S(T)$ und wegen der Ultrafiltereigenschaft ist $[\phi] \in D_S(T)$ und $T \Vdash_S \phi$ folgt.

Somit gilt für alle $\phi \in SATZ_S$:

$$T \Vdash_S \phi \text{ gdw nicht } T \Vdash_S \neg\phi.$$

Das zeigt, dass T vollständige Theorie von S ist, wenn $D_S(T)$ Ultrafilter auf $\mathbf{BA}_S{}^0$ ist.

□

4.2.16 Satz.-

Sei S Sprache erster Stufe und sei T Theorie von S. Dann gilt:

T *ist vollständige und endlich axiomatisierbare Theorie von* S

gdw

$D_S(T)$ *Hauptultrafilter auf* $\mathbf{BA}_S{}^0$ *ist.*

Beweis: Mit Satz 4.2.14 und 4.2.15.

4.3 Aspekte der Reichweite einstufiger Sprachen

In diesem Abschnitt werden bekannte modelltheoretische Theoreme mit den bisher bereitgestellten Mitteln formuliert und rein modelltheoretisch bewiesen: Erstens, das Theorem, dass die Klasse der endlichen Modelle für eine Sprache S erster Stufe nicht in S axiomatisierbar ist, wohl aber für jedes $n \in \mathbb{N}^+$ die Klasse der n-zahligen Modelle für S. Zweitens das Theorem von Löwenheim-Skolem abwärts und drittens des Theorem von Löwenheim-Skolem aufwärts.

4.3.1 <u>Definitionen</u>.-

Sei S Sprache erster Stufe.

(i) Dann soll für alle $n \in \mathbb{N}^+$ $\exists_S^{\geq n}$ Abkürzung für den folgenden Satz von S sein:

$$\exists_S{}^S V_1 \ldots \exists_S{}^S V_n \,(\neg_S{}^S V_1 = {}^S V_2 \wedge_S \ldots \wedge_S \neg_S{}^S V_1 = {}^S V_n$$

$$\wedge_S \neg_S{}^S V_2 = {}^S V_3 \wedge_S \ldots \wedge_S \neg_S{}^S V_{n-1} = {}^S V_n).$$

(ii) *Und für alle $n \in \mathbb{N}^+$ soll $\exists_S !n$ Abkürzung sein für:*

$$\exists_S^{\geq n} \wedge_S \neg_S \exists_S^{\geq n+1} .$$

4.3.2 <u>Satz</u>.-

Sei S *Sprache erster Stufe. Dann ist die Klasse* K *mit*

$$\mathrm{K} = \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \textit{ Modell für } S \;\&\; \mathcal{A}_1 \textit{ endlich} \}$$

keine einstufige Klasse von S.

<u>Beweis:</u> Sei S Sprache erster Stufe. Gelte das Korollar nicht.

Dann

$$\exists \Gamma (\Gamma \text{ ist eine Theorie von } S \;\&\; \forall \mathcal{A} (\mathcal{A} \text{ Modell für } S \Rightarrow$$

$$(\mathcal{A} \Vdash_S \Gamma \Leftrightarrow \mathcal{A}_1 \text{ ist endlich}))).$$

Sei Γ so.

Sei $$\Lambda = \Gamma \cup \{ \exists_S^{\geq n} \mid n \in \mathbb{N}^+ \}.$$

Dann gilt $$\Lambda \subseteq \mathrm{SATZ}_S ,$$

und Λ ist eine Theorie von S.

Sei $\mathrm{I} = \{ \varLambda^* \mid \varLambda^* \neq \emptyset \;\&\; \varLambda^* \text{ endl} \subseteq \Lambda \}$.

Dann gilt:

(*) $\forall \varLambda^* (\varLambda^* \in \mathrm{I} \Rightarrow \exists \mathcal{A} (\mathcal{A} \in \mathbf{MOD}_S \;\&\; \mathcal{A} \Vdash_S \varLambda^*))$.

Denn sei $\Lambda^* \in \mathrm{I}$ und sei $\mathrm{T} = \{ n \mid n \in \mathbb{N}^+ \;\&\; \exists_S{}^{\geq n} \in \Lambda^* \}$.

Sei $\mathrm{m} = 1$, wenn $\mathrm{T} = \emptyset$ und sei $\mathrm{m} = \max(\mathrm{T})$, wenn $\mathrm{T} \neq \emptyset$.

Sei $\mathcal{A}$ Funktion auf $\{1, 2, 3\}$, so dass

$\mathcal{A}_1 = \{ i \mid i \in \mathbb{N}^+ \;\&\; i \leq_{\mathbb{N}} \mathrm{m} \}$;

$\mathcal{A}_2$ ist Funktion auf $\mathrm{Dom}(\mu_1)$ &

$\forall i (i \in \mathrm{Dom}(\mu_1) \Rightarrow \mathcal{A}_{2,i}$ ist $\mu_{1,i}$ - stelliges Prädikat in m;

$\mathcal{A}_3$ ist Abbildung von μ_2 nach m.

Dann gilt $\mathcal{A} \Vdash_S \Lambda^*$.

Und es folgt:

$$\exists \mathcal{A} (\mathcal{A} \text{ ist Funktion auf I} \;\&\; \forall \varLambda^* (\varLambda^* \in \mathrm{I}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(\varLambda^*) \text{ ist Modell für } S \;\&\; \mathcal{A}(\varLambda^*) \Vdash_S \varLambda^*)).$$

Sei $\mathcal{A}$ so. Dann erfüllen Λ, I und $\mathcal{A}$ das Antezedens des Kompaktheitstheorems, und es kann geschlossen werden:

$$\exists D (D \text{ Ultrafilter auf } \mathbf{V}(\mathrm{I}) \;\&\; \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, D) \Vdash_S \Lambda).$$

Sei D so. Dann ist $\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{D})_1$ endlich, da

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{D}) \Vdash_S \Gamma.$$

Andererseits ist $\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{D})_1$ unendlich, da

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{D}) \Vdash_S \{ \exists_S{}^{\geq n} \mid n \in \mathbb{N}^+ \}.$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass

$$\mathrm{K} = \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ Modell für } S \;\&\; \mathcal{A}_1 \text{ endlich} \}$$

keine einstufige Klasse von S ist. □

Allerdings ist die Klasse der Modelle einer einstufigen Sprache, die alle genau n Elemente besitzen, mit $n \in \mathbb{N}^+$, eine einstufige Basisklasse:

4.3.3 Lemma.-

Sei S *Sprache erster Stufe und sei* $n \in \mathbb{N}^+$.

Dann ist K mit

$$K = \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ Modell für } S \ \& \ |\mathcal{A}_1| = n \}$$

eine einstufige Basisklasse von S.

Beweis: Sei S Sprache erster Stufe und sei $n \in \mathbb{N}^+$.

Sei $\mathcal{A}$ Modell für S. Dann gilt:

$$\mathcal{A} \in K \Leftrightarrow \mathcal{A} \Vdash_S \{\exists! \, n\}.$$

Daraus folgt: $\exists \Sigma (\Sigma \neq \emptyset \ \& \ \Sigma \subseteq \text{SATZ}_S \ \& \ \Sigma \text{ endlich } \&$

$$\forall \mathcal{A} (\mathcal{A} \in K \Leftrightarrow \mathcal{A} \Vdash_S \{\exists! \, n\})).$$

Das zeigt gemäß Definition 4.1.1, dass K einstufig, endlich axiomatisierbar in S ist. Somit ist K eine einstufige Basisklasse (Definition 4.1.2).

Nun zu den Theoremen von Löwenheim und Skolem und einem dazugehörigem Korollar – für Sprachen erster Stufe. Verbal vergröbernd lässt sich sagen, dass es zu jeder Menge von Sätzen einer einstufigen Sprache S, die von einem Modell $\mathcal{A}$ mit unendlichem Individuenbereich erfüllt wird, es ein einstufiges Submodell zu $\mathcal{A}$ gibt, dessen Individuenbereich die Kardinalität von FML_S nicht überschreitet (abwärts). Aufwärts gilt, dass es zu einer Menge von Sätzen von S Modelle beliebig hoher Kardinalität gibt, wenn diese Menge ein Modell mit unendlichem Individuenbereich besitzt.

4.3.4 <u>Theorem von Löwenheim und Skolem (abwärts)</u>.-

Sei $\mathcal{S}$ *Sprache erster Stufe. Sei* $\mathcal{B}$ *Modell für* $\mathcal{S}$. *Sei* $\mathfrak{m}$ *Kardinalzahl, so dass* $|\mathrm{FML}_\mathcal{S}| \leq_\mathrm{O} \mathfrak{m} \leq_\mathrm{O} |\mathcal{B}_1|$ *und sei* $\mathrm{C} \subseteq \mathcal{B}_1$, *so dass* $|\mathrm{C}| \leq_\mathrm{O} \mathfrak{m}$.

Dann gibt es ein einstufiges Submodell $\mathcal{A}$ *von* $\mathcal{B}$, *so dass* $\mathrm{C} \subseteq \mathcal{A}_1$ *und* $|\mathcal{A}_1| =_\mathrm{O} \mathfrak{m}$.

<u>Beweis:</u> Seien die Voraussetzungen erfüllt. Und sei μ der Typ von $\mathcal{S}$.

Eine Formulierung des Auswahlaxioms lautet:

$$\forall A\, \exists F\, (\, F \text{ Funktion auf } \{\, B \mid B \subseteq A \;\&\; B \neq \emptyset \,\}$$
$$\&\; \forall B\, (\, B \in \mathrm{Dom}(F) \Rightarrow F(B) \in B\,)\,).$$

Sei $\mathcal{W}$ eine solche Auswahlfunktion auf $\mathcal{B}_1$.

Es gilt: $\exists C'(\,\mathrm{C} \subseteq C' \;\&\; |C'| =_\mathrm{O} \mathfrak{m} \;\&\; C' \subseteq \mathcal{B}_1\,)$. Sei C' so.

Da $\mathrm{FML}_\mathcal{S} \neq \emptyset$ & $|\mathrm{C}'| =_\mathrm{O} \mathfrak{m}$, ist $\mathrm{C}' \neq \emptyset$; und da $\mathrm{C}' \subseteq \mathcal{B}_1$, ist $\mathrm{C}' \in \mathrm{Dom}(\mathcal{W})$ und $\mathcal{W}(\mathrm{C}') \in \mathrm{C}'$.

Sei für den Rest des Beweises $\mathrm{d} = \mathcal{W}(\mathrm{C}')$.

Nun gilt:

$$\exists D\, (\, D \text{ ist Funktion auf } \mathbb{N} \;\&$$
$$D_0 = \mathrm{C}' \;\&$$
$$\forall m\, (\, m \in \mathbb{N} \Rightarrow D_{m+1} = D_m \cup \{\, b \mid \exists \phi\, \exists k\, \exists x\, (\, \phi \in \mathrm{FML}_\mathcal{S} \;\&\; k \in \mathbb{N}^+$$
$$\&\; x \text{ ist Funktion auf } \mathbb{N}^+ \;\&\; \forall j\, (\, j \in \mathbb{N}^+ \;\&\; {}^\mathcal{S}\mathrm{V}_j \text{ kommt in } \phi \text{ nicht vor} \Rightarrow x_j = \mathrm{d}\,)$$
$$\&\; \mathrm{Ran}(x) \text{ endl} \subseteq \mathrm{D}_m \;\&\; \mathcal{B} \models_{\mathcal{S},x} \exists_\mathcal{S}\, {}^\mathcal{S}\mathrm{V}_k\, \phi$$
$$\&\; b = \{\, \mathcal{W}\, (\, \{\, a \mid a \in \mathcal{B}_1 \;\&\; \mathcal{B} \models_{\mathcal{S},\, x(k/a)} \phi \,\}\,)\,)\,\}.$$

Sei D so.

Im Folgenden wird mit $\mathbb{N}$-Induktion bewiesen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|\mathrm{D}_n| =_\mathrm{O} \mathfrak{m}.$$

Sei dazu

$$\mathbf{M} = \{\, n \mid n \in \mathbb{N} \;\&\; |\mathrm{D}_n| =_\mathrm{O} \mathfrak{m} \,\}.$$

Induktionsbasis: Nach Voraussetzung gilt $|\mathrm{D}_0| =_{\mathrm{O}} \mathfrak{m}$.

Also ist $0 \in \mathbf{M}$.

Induktionsschritt:

Sei nun $\mathrm{n} \in \mathbf{M}$.

Dann gilt: $|\mathrm{D}_{\mathrm{n}}| =_{\mathrm{O}} \mathfrak{m}$.

Es ist $|\{ F \mid F \text{ endl} \subseteq \mathrm{D}_{\mathrm{n}} \}| =_{\mathrm{O}} |\mathrm{D}_{\mathrm{n}}| =_{\mathrm{O}} \mathfrak{m}$.

Und da $|\mathrm{FML}_{\mathrm{S}}| \leq_{\mathrm{O}} \mathfrak{m}$ gilt:

$$|\{ F \mid F \text{ endl} \subseteq \mathrm{D}_{\mathrm{n}} \}| \bullet |\mathrm{FML}_{\mathrm{S}}| \bullet \aleph_0 = \mathfrak{m}.$$

Sei Λ Abkürzung für den folgenden Mengenterm:

$$\{ b \mid \exists \phi \exists k \exists x (\phi \in \mathrm{FML}_{\mathrm{S}} \ \& \ k \in \mathbb{N}^+$$

$$\& \ x \text{ ist Funktion auf } \mathbb{N}^+ \ \& \ \forall j \, (j \in \mathbb{N}^+ \ \& \ {}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_j \text{ kommt in } \phi \text{ nicht vor} \Rightarrow x_j = \mathrm{d})$$

$$\& \ \mathrm{Ran}(x) \text{ endl} \subseteq \mathrm{D}_m \ \& \ \mathcal{B} \models_{\mathrm{S},x} \exists_{\mathrm{S}} {}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_k \, \phi$$

$$\& \ b = \{ \mathcal{W} (\{ a \mid a \in \mathcal{B}_1 \ \& \ \mathcal{B} \models_{\mathrm{S},x(k/a)} \phi \})) \}.$$

Dann gilt:

$$\mathrm{D}_{\mathrm{n}+1} = \mathrm{D}_{\mathrm{n}} \cup \Lambda.$$

Um eine Abschätzung für die Kardinalität von Λ zu bekommen, wird die Existenz einer eineindeutigen Abbildung f von

$$\Lambda \text{ nach } \mathrm{CPr}_{i \in \{1,2,3\}}(\langle \{ F \mid F \text{ endl} \subseteq \mathrm{D}_{\mathrm{n}} \}, \mathrm{FML}_{\mathrm{S}}, \mathbb{N} \rangle_i).$$

gezeigt. Mit

$$|\{ F \mid F \text{ endl} \subseteq \mathrm{D}_{\mathrm{n}} \}| \bullet |\mathrm{FML}_{\mathrm{S}}| \bullet \aleph_0 =_{\mathrm{O}} \mathfrak{m}$$

folgt dann: $|\Lambda| \leq_{\mathrm{O}} \mathfrak{m}$.

Nun gilt

$$\forall b \, (b \in \Lambda \Rightarrow \exists \phi \exists k \exists x (\ \phi \in \mathrm{FML}_{\mathrm{S}} \ \& \ k \in \mathbb{N}^+$$

$$\& \ x \text{ ist Funktion auf } \mathbb{N}^+ \ \& \ \forall j \, (j \in \mathbb{N}^+ \ \& \ {}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_j \text{ kommt in } \phi \text{ nicht vor} \Rightarrow x_j = \mathrm{d})$$

$$\& \ \mathrm{Ran}(x) \text{ endl} \subseteq \mathrm{D_n} \ \& \ \mathcal{B} \models_{\mathrm{S},x} \exists_{\mathrm{S}} {}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_k \ \phi$$

$$\& \ b = \{ \mathcal{W} (\{ a \mid a \in \mathcal{B}_1 \ \& \ \mathcal{B} \models_{\mathrm{S},x(k/a)} \phi \}))).$$

Dann folgt durch dreimalige Anwendung des Auswahlaxioms:

$$\exists \phi \, \exists k \, \exists x \, (\, \phi, k, x \text{ sind Funktionen auf } \Lambda \ \&$$

$$\forall b \, (\, b \in \Lambda \Rightarrow \phi_b \in \mathrm{FML_S} \ \& \ k_b \in \mathbb{N}^+ \ \& \ x_b \text{ ist Funktion auf } \mathbb{N}^+ \ \&$$

$$\forall j \, (j \in \mathbb{N}^+ \ \& \ {}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_j \text{ kommt in } \phi_b \text{ nicht vor} \Rightarrow (x_b)_j = \mathrm{d} \,) \ \&$$

$$\mathrm{Ran}(x_b) \text{ endl} \subseteq \mathrm{D_n} \ \& \ \mathcal{B} \models_{\mathrm{S},x(b)} \exists_{\mathrm{S}} {}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_{k(b)} \ \phi_b \ \&$$

$$b = \mathcal{W} (\{ a \mid a \in \mathcal{B}_1 \ \& \ \mathcal{B} \models_{\mathrm{S},x(b)(k(b)/a)} \phi_b \}))).$$

Seien ϕ, k, x so.

Ferner gilt:

$$\exists f \, (f \text{ ist Funktion auf } \Lambda \ \&$$

$$\forall b \, (\, b \in \Lambda \Rightarrow f(b) = \langle \, \mathrm{Ran}(x_b), \phi_b, k_b \rangle)).$$

Sei f so.

Dann ist f Abbildung von Λ nach $\mathrm{CPr}_{i \in \{1,2,3\}} (\langle \{ F \mid F \text{ endl} \subseteq \mathrm{D_n} \}, \mathrm{FML_S}, \mathbb{N}^+ \rangle_i)$.

Gelte nun: b, c $\in \Lambda$ so dass b $\neq$ c.

Dann ist $\phi_b \neq \phi_c$ oder $\mathrm{Ran}(x_b) \neq \mathrm{Ran}(x_c)$ oder $k_b \neq k_c$; denn

$$\phi_b = \phi_c \ \& \ \mathrm{Ran}(x_b) = \mathrm{Ran}(x_c) \ \& \ k_b = k_c \ \& \ f(b) = f(c)$$

würde zu dem Widerspruch führen:

$\mathcal{W}$ ist keine Funktion.

Somit gilt:

$$\forall b \, \forall c \, (\, b, c \in \Lambda \ \& \ b \neq c \Rightarrow f(b) \neq f(c) \,).$$

Das zeigt die Eineindeutigkeit von f. Und es gilt: $|\Lambda| \leq_{\mathrm{O}} \mathfrak{m}$.

Und es folgt:

$$|\mathrm{D}_{n+1}| =_{\mathrm{O}} |\mathrm{D_n}| + |\Lambda| =_{\mathrm{O}} \mathfrak{m}.$$

D. h.: n + 1 $\in$ **M**, wenn n $\in$ **M**. Und $\mathbb{N} \subseteq \mathbf{M}$ ist erwiesen.

Der Induktionsbeweis diente dazu, die Kardinalität der Vereinigungsmenge

$$\mathrm{A} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathrm{D}_m$$

zu kriegen. Es gilt:

$$|\mathrm{A}| =_{\mathrm{O}} \aleph_0 \bullet \mathfrak{m} =_{\mathrm{O}} \mathfrak{m}.$$

Sei nun

$$\mathcal{A} = \langle \mathrm{A}, \langle \mathcal{B}_{2,i} \cap^{\{1, \dots, \mu(1)(i)\}} \mathrm{A} \rangle_{i \in \mathrm{Dom}(\mu(1))}, \mathcal{B}_3 \rangle.$$

Dann gilt $|\mathcal{A}_1| =_{\mathrm{O}} |\mathrm{A}| =_{\mathrm{O}} \mathfrak{m}.$

Des Weiteren ist $\mathcal{A} \in \mathbf{S}(\mathcal{B})$. Hierfür ist insbesondere zu beweisen:

$\mathcal{A}$ ist Struktur vom Typ μ.

Und hierfür ist u. a. zu beweisen:

$$\forall i\, (i \in \mu_2 \Rightarrow \mathcal{A}_{3,i} \in \mathcal{A}_1).$$

Wegen $\mathcal{B}_3 = \mathcal{A}_3$ genügt es, zu beweisen:

$$\forall i\, (i \in \mu_2 \Rightarrow \mathcal{B}_{3,i} \in \mathrm{D}_1).$$

Sei also $\mathrm{i} \in \mu_2$.

Nun ist zu beweisen:

(*) $\exists \phi\, \exists k\, \exists x\, (\phi \in \mathrm{FML}_{\mathrm{S}}\ \&\ k \in \mathbb{N}^+\ \&\ x$ ist Funktion auf $\mathbb{N}^+\ \&$

$\forall j\, (j \in \mathbb{N}^+\ \&\ {}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_j$ kommt in ϕ nicht vor $\Rightarrow x_j = \mathrm{d}\,)\ \&$

$\mathrm{Ran}(x)$ endl$\subseteq \mathrm{D}_0\ \&\ \mathcal{B} \models_{\mathrm{S},x} \exists_{\mathrm{S}}\, {}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_k\, \phi\ \&$

$\mathcal{B}_{3,\mathrm{i}} = \mathcal{W}(\{ a \mid a \in \mathcal{B}_1\ \&\ \mathcal{B} \models_{\mathrm{S},x(k/a)} \phi \})).$

Z. B. zeigt $\phi' = ({}_{\mathrm{S}}\, {}^{\mathrm{S}}\mathrm{V}_1 =_{\mathrm{S}} {}^{\mathrm{S}}\mathrm{K}_{\mathrm{i}}\,)_{\mathrm{S}}$,

$\mathrm{k}' = 1$

und x' Funktion auf $\mathbb{N}^+\ \&\ \forall j\, (j \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow \mathrm{x}'_j = \mathrm{d}\,)$

die Gültigkeit von (*).

Und es folgt:

$$\mathcal{B}_{3,i} = \mathcal{W}(\{ a \mid a \in \mathcal{B}_1 \,\&\, \mathcal{B} \models_{S, x'(k'/a)} \phi' \}) \in D_1 .$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ einstufiges Submodell von $\mathcal{B}$ in S ist.

Dazu ist gemäß Lemma 2.3.23

$$\forall \phi \forall k \forall x \,(\phi \in FML_S \,\&\, k \in \mathbb{N}^+ \,\&\, x \text{ Belegung aus } \mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B} \models_{S,x} \exists_S {}^S V_k \,\phi$$

$$\Rightarrow \exists a\, (a \in \mathcal{A}_1 \,\&\, \mathcal{B} \models_{S, x(k/a)} \phi)$$

zu zeigen.

Sei also $\phi \in FML_S$, sei $k \in \mathbb{N}^+$, sei x Belegung aus $\mathcal{A}$ und gelte:

$$\mathcal{B} \models_{S,x} \exists_S {}^S V_k \,\phi.$$

Es ist nun $\exists a\, (a \in \mathcal{A}_1 \,\&\, \mathcal{B} \models_{S, x(k/a)} \phi)$

zu beweisen; wobei $\mathcal{A}_1 = \cup\, (Ran(D)).$

Es gilt: $\exists y\, (y$ ist Funktion auf $\mathbb{N}^+$ &

$$\forall j\, (j \in \mathbb{N}^+ \,\&\, {}^S V_j \text{ kommt in } \phi \text{ vor} \Rightarrow y_j = x_j) \,\&$$

$$\forall j\, (j \in \mathbb{N}^+ \,\&\, {}^S V_j \text{ kommt nicht in } \phi \text{ vor} \Rightarrow y_j = d)).$$

Sei y so.

Dann gilt:

$$Ran(y) \subseteq \{d\} \cup \{ x_j \mid {}^S V_j \text{ kommt in } \phi \text{ vor} \} \,\&\, Ran(y) \text{ endlich.}$$

Nun gilt: $Ran(y) \text{ endl} \subseteq \mathcal{A}_1 = \bigcup(Ran(D))$

und man erhält: $\forall c\, (c \in Ran(y) \Rightarrow \exists m\, (m \in \mathbb{N}^+ \,\&\, c \in D_m)).$

Mithilfe des Auswahlaxioms wird gefolgert:

$$\exists m\, (m \text{ ist Funktion auf } Ran(y) \,\&$$

$$\forall c\, (c \in Ran(y) \Rightarrow m(c) \in \mathbb{N}^+ \,\&\, c \in D_{m(c)})).$$

Sei m so.

Dann ist $\{m_c\}_{c \in Ran(y)} \text{ endl} \subseteq \mathbb{N}^+$ und es folgt:

$$\exists c' (c' \in \mathrm{Ran}(y) \;\&\; \forall c (c \in \mathrm{Ran}(y) \Rightarrow m_c \leq_{\mathbb{N}} m_{c'})).$$

Sei c' so.

Da D kumulativ ist, gilt:

$$\forall c (c \in \mathrm{Ran}(y) \Rightarrow D_{m(c)} \subseteq D_{m(c')}).$$

Dann $\forall c (c \in \mathrm{Ran}(y) \Rightarrow c \in D_{m(c')})$.

Also $\mathrm{Ran}(y)$ endl $\subseteq D_{m(c')}$.

Es gilt $\mathcal{B} \models_{S, x} \exists_S {}^S V_k\, \phi$,

x ist Belegung aus $\mathcal{A}$ und somit aus $\mathcal{B}$, da $\mathcal{A} \in \mathbf{S}(\mathcal{B})$,

y ist Belegung aus $\mathcal{B}$, da u. a. $d \in \mathcal{B}_1$

und x und y ordnen den Variablen die in ϕ frei vorkommen die gleichen Individuen aus $\mathcal{B}_1$ zu.

Dann folgt mit dem Koinzidenztheorem (2.3.11):

$$\mathcal{B} \models_{S, y} \exists_S {}^S V_k\, \phi.$$

Dann gilt: $\exists a (a \in \mathcal{B}_1 \;\&\; \mathcal{B} \models_{S, y(k/a)} \phi)$,

dann ist $\{ a \in \mathcal{B}_1 \mid \mathcal{B} \models_{S, y(k/a)} \phi \} \subseteq \mathcal{B}_1$;

dann $\{ a \in \mathcal{B}_1 \mid \mathcal{B} \models_{S, y(k/a)} \phi \} \in \mathrm{Dom}(\mathcal{W})$;

dann

$$\exists b (b \in \mathcal{B}_1 \;\&\; b = \mathcal{W} \{ a \in \mathcal{B}_1 \mid \mathcal{B} \models_{S, y(k/a)} \phi \}).$$

Sei b so.

Dann gilt $\mathcal{B} \models_{S, y(k/b)} \phi$.

Nun gilt: $\phi \in \mathrm{FML}_S \;\&\; k \in \mathbb{N}^+ \;\&$ y ist Funktion auf $\mathbb{N}^+ \;\&$

$\forall j (j \in \mathbb{N}^+ \;\&\; {}^S V_j$ kommt nicht in ϕ vor $\Rightarrow y_j = d) \;\&$

$\mathrm{Ran}(y)$ endl$\subseteq D_{m(c')} \;\&\; \mathcal{B} \models_{S, y} \exists_S {}^S V_k\, \phi \;\&$

$b = \mathcal{W} (\{ a \mid a \in \mathcal{B}_1 \;\&\; \mathcal{B} \models_{S, y(k/a)} \phi \}$.

Dann folgt gemäß den Festlegungen für D:

$$b \in D_{m(c')+1}\,.$$

D. h.: $b \in \mathcal{A}_1 = \bigcup \mathrm{Ran}(D)$.

Und da x und y hinsichtlich der Belegung der in ϕ vorkommenden Variablen übereinstimmen, folgt schließlich

$$\exists a\,(\,a \in \mathcal{A}_1 \,\&\, \mathcal{B} \models_{S,\,x(k/a)} \phi\,).$$

Und $\mathcal{A} \prec_S \mathcal{B}$

ist bewiesen. □

Der nächste Satz zeigt, dass eine widerspruchsfreie Satzmenge einer abzählbaren, einstufigen Sprache, die ein unendliches Modell besitzt, auch ein abzählbares Modell hat.

4.3.5 Satz.-

Sei S Sprache erster Stufe, so dass $\mathrm{Dom}(S_4)$ abzählbar. Sei Σ eine Menge von Sätzen von S. Dann gilt:

$$\exists \mathcal{B}(\,\mathcal{B}\text{Modell für } S \,\&\, \mathcal{B} \Vdash_S \Sigma\,)$$

$$\Rightarrow \exists \mathcal{A}\,(\mathcal{A}\,\text{Modell für } S \,\&\, \mathcal{A} \Vdash_S \Sigma \,\&\, |\mathcal{A}_1| \leq_O |\mathrm{FML}_S|\,).$$

Beweis: Seien die Voraussetzungen erfüllt und sei $\mathcal{B}$ Modell für S, so dass: $\mathcal{B} \Vdash_S \Sigma$.

Es gilt: $|\mathrm{FML}_S|$ abzählbar & $|\Sigma| \leq_O |\mathrm{FML}_S|$.

Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall a: $\mathcal{B}_1$ endlich.

Dann gilt: $|\mathcal{B}_1| <_O |\mathrm{FML}_S|$.

Fall b: $\mathcal{B}_1$ unendlich.

Sei also $|\mathrm{FML}_S| \leq_O |\mathcal{B}_1|$.

Dann gilt:

$$\exists g\,(g \text{ ist eineindeutige Abbildung von } \mathrm{FML_S} \text{ nach/in } \mathcal{B}_1).$$

(Chang und Keisler, 1990[3], S. 587).

Sei g so.

Dann gilt: $\mathrm{Ran}(g) \subseteq \mathcal{B}_1 \;\&\; |\mathrm{Ran}(g)| =_O |\mathrm{FML_S}|$.

Mit $C = \mathrm{Ran}(g) \;\&\; \mathfrak{m} =_O \mathrm{FML_S}$

folgt aus dem Theorem von Löwenheim und Skolem (abwärts):

$$\exists\mathcal{A}\,(\mathcal{A} \prec_S \mathcal{B} \;\&\; C \subseteq \mathcal{A}_1 \;\&\; |\mathcal{A}_1| =_O \mathfrak{m}).$$

Sei $\mathcal{A}$ so.

Dann gilt: $\forall\phi\,(\phi \in \Sigma \Rightarrow \mathcal{A} \models_S \phi)$.

Und $\mathcal{A}$ erfüllt Σ simultan:

$$\mathcal{A} \Vdash_{FS} \Sigma \;\&\; |\mathcal{A}_1| \leq_O |\mathrm{FML_S}|.$$

4.3.6 <u>Theorem von Löwenheim und Skolem – aufwärts</u>.-

Sei S Sprache erster Stufe. Sei $\mathfrak{m}$ unendliche Kardinalzahl, so dass $|\mathrm{FML_S}| \leq_O \mathfrak{m}$. Sei $\mathcal{A}$ Modell für S mit unendlichem Individuenbereich so dass $|\mathcal{A}_1| \leq_O \mathfrak{m}$. Dann gibt es eine einstufige Erweiterung $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$, so dass $|\mathcal{B}_1| =_O \mathfrak{m}$.

<u>Beweis:</u> Seien die Voraussetzungen erfüllt.

Sei $I = \{\, i \mid i \text{ endl} \subseteq \mathfrak{m} \,\}$.

Dann gilt $|I| =_O \mathfrak{m}$.

Dann gibt es nach Satz 3.2.18 einen $\mathfrak{m}$-regulären Ultrafilter auf **V**(I). Sei F so.

Dann folgt u. a. mit Satz 3.3.23:

$$\mathfrak{m} <_O |\mathcal{A}_1|^{\mathfrak{m}} =_O |\mathrm{CPr}_{i\in I}(\mathcal{A}_1) \,/\, \sim(F, I)\,[\![\mathrm{CPr}_{i\in I}(\mathcal{A}_1)]\!]\,|.$$

Sei - aus typographischen Gründen - $Q = \sim(F, I)\,[\![\mathrm{CPr}_{i\in I}(\mathcal{A}_1)]\!]$.

Sei f Funktion auf $\mathcal{A}_1$, so dass

$$\forall a\,(\,a \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow \mathrm{f}(a) = [\,\langle \mathrm{a} \rangle_{i \in \mathrm{I}}\,]_{\mathrm{Q}}\,).$$

Nun ist F echter Ultrafilter auf **V**(I) und mit Satz 3.3.20 folgt, dass f eine einstufige Einbettung von $\mathcal{A}$ in RPr($\langle \mathcal{A} \rangle_{i \in \mathrm{I}}$, F) über S ist.

Und nach Satz 2.3.24 gilt:

$$\exists \mathcal{C}\, \exists g\, (\mathcal{A} \prec_{\mathrm{S}} \mathcal{C}\ \&\ \mathrm{f} \subseteq g\ \&$$

$$g \text{ ist Isomorphismus von } \mathcal{C} \text{ auf } \mathrm{QRPr}(\langle \mathcal{A} \rangle_{i \in \mathrm{I}}, \mathrm{F})\,).$$

Seien $\mathcal{C}$ und g so.

Nun gilt: $\mathfrak{m} <_{\mathrm{O}} |\mathcal{C}_1|$,

$|\mathcal{A}_1| \leq_{\mathrm{O}} \mathfrak{m}$

und $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{C}_1$.

Mit dem Theorem von Löwenheim und Skolem – abwärts – folgt:

$$\exists \mathcal{B}(\,\mathcal{B} \prec_{\mathrm{S}} \mathcal{C}\ \&\ |\mathcal{B}_1| =_{\mathrm{O}} \mathfrak{m}\ \&\ \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{B}_1\,).$$

Sei $\mathcal{B}$ so.

Dann beweist man ohne Mühe, dass $\mathcal{A}$ einstufiges Submodell von $\mathcal{B}$ über S ist.

Kapitel 5: Ultraproduktkonstruktion und Messtheorie

In diesem Kapitel wird das Arsenal der in den vorangehenden Kapiteln bereitgestellten Begriffen, Theoreme und Methoden dazu verwendet, einige neue Ergebnisse oder auf neue Art bewiesene Ergebnisse, die für die Messtheorie einschlägig sind, zu erzielen. Im Abschnitt 5.1 wird bewiesen, dass weder die Klasse der positiven, eingeschränkt lösbaren und in den Standardsequenzen Archimedischen Konkatstrukturen (PKS) in einer Sprache erster Stufe axiomatisierbar ist (Theorem 5.1.16 mit 5.1.11), noch die Klasse der Dedekind-vollständigen Konkatstrukturen (Theorem 5.1.18 mit 5.1.17). Im Abschnitt 5.2 werden verschiedene Begriffe der Metrisierbarkeit einer Klasse von Strukturen definiert, die sich aber alle als nicht adäquat erweisen. Abschnitt 5.3 enthält einen Ausblick auf zukünftige Forschungsaufgaben im Rahmen der Messtheorie.

5.1 Nichtaxiomatisierbarkeitsbeweise

Im Abschnitt 5.1 wird nach einigen historischen und methodologischen Vorbemerkungen der in der Literatur übliche Begriff der Konkatenationsstruktur definiert: Eine *Konkatenationsstruktur* $\mathcal{A}$ ist eine Struktur vom Typ $\langle\langle 2, 3\rangle, \emptyset\rangle$, so dass $\langle \mathcal{A}_1, \langle \mathcal{A}_{2,1}\rangle, \emptyset\rangle$ eine schwache Ordnung und $\mathcal{A}_{2,2}$ eine nichtleere zweistellige Operation in $\mathcal{A}_1$ ist, die die Axiome der lokalen Definierbarkeit und *Monotonie* erfüllt. Gegen die Notwendigkeit des Axioms der lokalen Definierbarkeit wird vorgetragen, dass diese auf dem Irrtum beruhe, dass eine Funktion erst dann als definiert gelten kann, wenn allen Argumenttupeln auch empirisch-operativ tatsächlich ein Wert zugewiesen werden kann. Deshalb wird dieses Axiom fallen gelassen und zur Unterscheidung der Begriff der *Konkatstruktur* eingeführt: Eine *Konkatstruktur* $\mathcal{A}$ ist eine Struktur vom Typ $\langle\langle 2, 3\rangle, \emptyset\rangle$, so dass $\langle \mathcal{A}_1, \langle \mathcal{A}_{2,1}\rangle, \emptyset\rangle$ eine schwache Ordnung und $\mathcal{A}_{2,2}$ eine abgeschlossene zweistellige Operation in $\mathcal{A}_1$ ist, die die Axiome der Monotonie erfüllt.

$\mathcal{A}_{2,2}$ – die *Konkatenationsoperation* von $\mathcal{A}$ – ist eine zweistellige Operation. Für die Formulierung des *Archimedischen Axioms* wird für jedes $n \in \mathbb{N}^+$ eine n-stellige Konkatenationsoperation benötigt. Dazu wird für jede Konkatstruktur $\mathcal{A}$ und für jedes $a \in \mathcal{A}_1$ eine Funktion $C_{\mathcal{A},a}$ $\mathbb{N}^+$-rekursiv definiert, so dass $C_{\mathcal{A},a}(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}^+$ die n-fache Konkatenation von a ist (Definition 5.1.4).

Im nächsten Schritt werden verschiedene Spezialisierungen des Begriffs der Konkatstruktur definiert: *Dedekind-vollständige Konkatstruktur, positive Konkatstruktur, assoziative Konkatstruktur, in den Standardsequenzen Archimedische Konkatstruktur* (Definition 5.1.5). Mit diesen Begriffen wird der Begriff der *positiven Konkatstruktur - PKS* - definiert: eine PKS ist eine positive, eingeschränkt lösbare und in den Standardsequenzen Archimedische Konkatstruktur.

Um beweisen zu können, dass die Klasse der PKS in keiner Sprache erster Stufe einstufig axiomatisierbar ist, wird eine spezielle Struktur $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}^+, \langle \mathring{\leq}_{\mathbb{N}+}, \mathring{+}_{\mathbb{N}+} \rangle, \emptyset \rangle$ definiert. $\mathfrak{N}$ ist eine PKS. Weiterhin wird eine Familie $\mathcal{N} = \langle \mathfrak{N} \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ definiert. $\mathcal{N}$ ist eine homogene Familie von Strukturen des Typs $\langle\langle 2, 3\rangle, \emptyset\rangle$. Das wesentliche Hilfstheorem für den Beweis, dass die Klasse der PKS nicht einstufig axiomatisierbar ist, besagt: Es gibt einen Ultrafilter U auf $\mathbf{V}(\mathrm{Dom}(\mathcal{N}))$, so dass QRPr($\mathcal{N}$, U) nicht Archimedisch in den Standardsequenzen ist (Theorem 5.1.11). Dieses Theorem erfordert seinerseits vier Hilfstheoreme (Theoreme 5.1.12, ..., 5.1.15). Mit Theorem 5.1.11 folgt dann sofort Theorem 5.1.16: Für jede Sprache erster Stufe $\mathcal{S}$ des Typs $\langle\langle 2, 3\rangle, \emptyset\rangle$ gilt: die Klasse der PKS ist nicht in $\mathcal{S}$ einstufig axiomatisierbar.

Mit den bisher in diesem Abschnitt eingeführten Mitteln wird anschließend bewiesen, dass auch die Klasse der Dedekind-vollständigen Konkatstrukturen in keiner Sprache erster Stufe des Typs $\langle\langle 2, 3\rangle, \emptyset\rangle$ einstufig axiomatisierbar ist (Theorem 5.1.18). Der Beweis wird mit Hilfstheorem 5.1.17 geführt, welches besagt, dass es in der Klasse der Dedekind-vollständigen Konkatstrukturen eine Familie von Strukturen gibt, nämlich $\mathcal{N}$, und einen Ultrafilter U, so dass die Ultrapotenz QRPr ($\mathcal{N}$, U) von $\mathcal{N}$ modulo U nicht Dedekind-vollständig ist. Dieser Beweis ist neu, daher wird das Umfeld des Axioms für Dedekind Vollständigkeit kursorisch, nicht systematisch, erkundet; es geht dabei um Bezüge, die dieses Axiom zu den reellen Zahlen, zur Messtheorie allgemein, zu Repräsentationstheoremen, zu Eindeutigkeitstheoremen und zur Homogenität und zu Theoremen zur Bedeutsamkeit (meaningfulness) hat.

Dass die Klasse der PKS nicht einstufig axiomatisierbar ist, ist insofern trivial, als das Definiens dieser Klasse von Strukturen das Archimedische Axiom enthält, von dem man weiß, dass es nicht einstufig formulierbar ist; allerdings ist uns hierfür kein allgemeines Theorem bekannt. Von Robinson (1951; 1963) stammt der Beweis, dass der Begriff des 'Archimedisch angeordneten Körpers' nicht einstufig axiomatisierbar ist; und ein Theorem von Narens (1974a, S. 377) zeigt die **Unabhängigkeit** des Archimedischen Axioms von einstufigen Axiomensätzen und er folgert: "the following theorem shows that in all interesting situations Archimedean axioms are not derivable from axioms expressible in *L(G)*", wobei *L(G)* eine einstufige Sprache bezeichnet. Nun gilt der Beweis von Robinson für einstufige Sprache des Typs $\mu_1 = \langle 2, 3, 3\rangle$ einerseits und andererseits gilt unser Beweis für einstufige Sprachen des Typs $\mu = \langle\langle 2, 3\rangle, \emptyset\rangle$. U. E. ist dieser Beweis direkter und durchsichtiger als der von Narens, des Weiteren wird in ihm erstmals das Metatheorem 4.1.15 für messtheoretische Zwecke eingesetzt; aus diesen eher didaktischen Motiven wird in 5.1 bewiesen, dass der Begriff der PKS nicht einstufig axiomatisierbar ist.

Diese Aussage ist allerdings vor dem folgenden Hintergrund zu sehen: Suppes schlägt 1957 im Kapitel 12 vor, Theorien durch die Definition eines mengentheoretischen Prädikats zu axiomatisieren, weil "... the same standards of clarity and precision may be achieved in axiomatizing complicated theories within set theory as are achieved by axiomatizing relatively simple theories in first-order logic." (S. 249). Hierfür wäre eine allgemeine Wissenschaftsprache zu schaffen, deren Vorteile und Vorgehensweise beim Aufbau Suppes so schildert (S. 250): "Any ambiguities concerning what is already a part of the general set-theoretical framework we assume can in principle be completely eliminated by an axiomatic development of set theory. The properties of general operations on sets are developed first. Then the natural numbers are constructed, followed by the real numbers and the systematic development of classical mathematics. This much can be accomplished by roughly a thousand theorems and five or six hundred definitions. Definition 601, say, could define the predicate 'is a probability space'. Any use of classical mathematics in this definition or in proofs of theorems about probability spaces could then be explicitly and completely justified by reference to the appropriate preceding theorems and definitions." (S. 250). Und in einer Fußnote fügt er an: "A group of contemporary mathematicians writing under the collective pseudonym 'Bourbaki' are indeed pursuing such a systematic development of the whole of mathematics."

In der Wissenschaftstheorie ist der Vorschlag, Theorien durch Definitionen mengentheoretischer Prädikate zu definieren, aufgenommen und weiterentwickelt worden; für diese sog. strukturalistische Theorien- und Wissenschaftsauffassung nennt Suppes (2002, S. 34) die Grundlagenarbeiten von Sneed (1971), Stegmüller (1973, 1979), Moulines (1975, 1976), Moulines und Sneed (1979) und Balzer (1978). Insbesondere hat Hinst (1996) eine mengentheoretisch begründete Sprache der "... fundamental parts of the structuralist theory of empirical theories ..." (S. 233) entwickelt.

Nun ist es fraglich, ob in einer allgemeinen Wissenschaftssprache der Begriff 'Einstufigkeit' überhaupt vorkommt und wenn ja wie er definiert werden würde. Welche Bedeutung dann die Aussage 'die Klasse der PKS ist nicht einstufig axiomatisierbar' hätte, ist unklar. Dieser Hintergrund hat vermutlich die Autoren – Luce, Krantz, Suppes und Tversky – des dritten Bandes der *Foundations of Measurement* im 21. Kapitel über *Axiomatization* bei der Diskussion des Archimedischen Axioms zu folgender Bemerkung veranlasst (S. 248): "The statement that the Archimedean Axiom cannot be formulated in elementary logic must be carefully qualified. It is true only when variables range over the objects in the Domain of the relation structures that are the intended models of the elementary theory. ...

If we take axiomatic set theory as our elementary theory [e. g. Zermelo-Fraenkel set theory as formulated in Suppes (1960 / 1972)], then all of the definitions of measurement structures in earlier chapters of this volume and of volume I can easily be cast as elementary definitions satisfying the canons of definition laid down in Section 21.3.1, and the part of each definition that formulates the Archimedean Axiom stays within this elementary framework. Explicit discussion of this set-theoretical approach to axiomatization is to be found in Suppes (1957, Chap. 12).

The taking of set theory as our standard theory is really the foundation of the mathematical developments in our earlier chapters. Nonetheless, the axiomatic structure of various theories of measurement is illuminated if we view each theory as an independent elementary theory and not as characterized by a definition within set theory. Valuable insights into the structure of theories of measurement can be gained by looking at them as elementary theories, but that point of view is not necessary for general purposes."

Die Relevanz axiomatischer Untersuchungen wird im Kapitel 21 des dritten Bandes der *Foundations of Measurement* von Luce, Krantz, Suppes und Tversky (1990) angedeutet. Dort wird auch diskutiert, welchen Stellenwert die beiden Axiome – für Dedekind-Vollständigkeit und für Archimedizität – in der messtheoretischen Heuristik einnehmen. Einerseits soll vermieden werden, dass messtheoretische Axiomensysteme zu kategorischen Theorien führen, andererseits werden für die Abbildbarkeit von Strukturen in den reellen Zahlen gewisse Vollständigkeitsbedingungen benötigt.

Als Erstes wird der Begriff der **Konkatenationsstruktur** definiert. Um diesen Begriff möglichst unverändert aus dem Lehrbuch über *Foundations of Measurement III* (Luce, Krantz, Suppes & Tversky, 1989, S. 26) übernehmen zu können, werden noch ein paar Verabredungen getroffen. Zentraler Bestandteil der folgenden Definition 5.1.2 ist eine zweistellige Konkatenationsoperation ... $\circ_{\mathcal{A}}$ ... . Dabei ist die Definition 5.1.1(a) im Zusammenhang mit den Definitionen 2.2.5 und 2.2.6 zu sehen.

Den typographischen Gepflogenheiten der *Foundations*, wonach Quasi- und schwache Ordnungen mit dem Symbol '$\preceq$' bezeichnet werden, und partielle und totale Ordnungen mit '$\leq$', wird hier nicht gefolgt. Der Zusammenhang macht jeweils klar, um welche Ordnungsrelation es sich handelt.

5.1.1 Definitionen.-

(a) $\forall\mathcal{A}\,\forall x\,\forall y\,(\,(x \circ_{\mathcal{A}} y) = (x \bullet_{\mathcal{A},2,2}\, y)\,)$.

(b) $\forall\mathcal{A}\,\forall x\,\forall y\,(\,x \leq_{\mathcal{A}} y$ gdw $\langle x, y\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}\,)$.

(c) $\forall\mathcal{A}\,\forall x\,\forall y\,(\,x <_{\mathcal{A}} y$ gdw $\langle x, y\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}\ \&\ \langle y, x\rangle \notin \mathcal{A}_{2,1}\,)$.

(d) $\forall\mathcal{A}\,\forall x\,\forall y\,(\,x \sim_{\mathcal{A}} y$ gdw $\langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}\,)$.

5.1.2 Definition.-

$\mathcal{A}$ ist eine ***Konkatenationsstruktur***

gdw

(1) $\mathcal{A}$ ist eine Struktur des Typs $\langle \langle 2, 3\rangle, \emptyset \rangle$, so dass $\langle \mathcal{A}_1, \langle \mathcal{A}_{2,1} \rangle, \emptyset \rangle$ eine schwache Ordnung und $\mathcal{A}_{2,2}$ eine nichtleere, zweistellige Operation in $\mathcal{A}_1$ ist &

(2) (lokale Definierbarkeit:)

$$\forall a\,\forall b\,\forall c\,\forall d\,(\,a, b, c, d \in \mathcal{A}_1\ \&\ \langle a, b\rangle \in \mathrm{dom}(\mathcal{A}_{2,2})\ \&\ \langle c, a\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}\ \&\ \langle d, b\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$$
$$\Rightarrow \langle c, d\rangle \in \mathrm{dom}(\mathcal{A}_{2,2})\,) \qquad \&$$

(3) (Monotonie:)

$$\forall a\,\forall b\,\forall c\,(\,a, b, c \in \mathcal{A}_1\ \&\ \langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle \in \mathrm{dom}(\mathcal{A}_{2,2})$$
$$\Rightarrow (\,\langle a, b\rangle \in \mathcal{A}_{2,1} \Leftrightarrow \langle (a \circ_{\mathcal{A}} c), (b \circ_{\mathcal{A}} c)\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}\,)\,) \qquad \&$$
$$\forall a\,\forall b\,\forall c\,(\,a, b, c \in \mathcal{A}_1\ \&\ \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle \in \mathrm{dom}(\mathcal{A}_{2,2})$$
$$\Rightarrow (\,\langle a, b\rangle \in \mathcal{A}_{2,1} \Leftrightarrow \langle (c \circ_{\mathcal{A}} a), (c \circ_{\mathcal{A}} b)\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}\,)\,).$$

Die zentrale Aufgabe bei der Definition des Begriffs 'Konkatenationsstruktur' ist die Formulierung einer sog. Konkatenationsoperation. Das Standardbeispiel hierzu ist die Längenmessung. Bei dieser Messung ist es möglich, die betrachteten Einzelindividuen zu konkatenieren, um so ihr gemeinsames Ausmaß der fraglichen Eigenschaft (hier: Länge) festzustellen. Die entsprechende Handlung besteht darin, bei einzelnen Holzstäben etwa den ersten an einen Vergleichsgegenstand anzulegen, an das Ende des ersten Stabes legt man den Anfang des zweiten und liest ab, ob die so konkatenierten Gegenstände den Vergleichsgegenstand in der Länge überschreiten oder nicht. Die analoge Operation in der Massenmessung besteht darin, zu konkatenierende Gegenstände zusammen in die Waagschale auf einer Seite einer Balkenwaage zu legen, um dann zu beobachten, ob die beiden so konkatenierten Gegenstände schwerer sind als ein Vergleichsgegenstand in der anderen Waagschale der Balkenwaage. In den Sozialwissenschaften hat man kaum solche Verfahren. Z. B. ist es schwer zu sehen, wie man die Intelligenz von mehreren Personen (für Messzwecke) konkatenieren soll; aus ersichtlichen Gründen ist das gemeinsame Bearbeiten eines Intelligenztests hierfür keine Lösung. In der Entscheidungstheorie gibt es allerdings Verfahren, um z. B. das Risikoverhalten von Individuen und Gruppen zu messen und vorherzusagen, die messtheoretisch begründet sind. Unseres Wissens hält man diese Ansätze aber noch nicht für wissenschaftlich zufriedenstellend.

Da diese Konkatenationshandlungen nicht beliebig ausführbar sind, wird in der Definition des Begriffs 'Konkatenationsstruktur' gefordert, dass diese Operationen nur für Elemente einer Teilmenge des cartesischen Produktes des Individuenbereichs der Struktur durchführbar sind. In Band I der *Foundations of Measurement* (Krantz et al., 1971, S. 81-82) wird explizit dieser Standpunkt eingenommen. Unseres Erachtens ist es aber nicht notwendig, Funktionen nur dann als definiert anzusehen, wenn für jedes Argument aus dem Definitionsbereich einer Funktion der dazugehörige Wert tatsächlich – operational – ermittelt werden kann. Z. B. ist die Entfernung von der Erde zum Mond bekannt, oder die Masse der Sonne oder die Zahl der Lichtjahre, die das Zentrums der Milchstraße von der Erde entfernt ist; ebenso sind Größenverhältnisse im Kleinen bekannt / erforscht: wie weit etwa im Wasserstoffatom die Elektronen vom Atomkern entfernt sind usw.

Daher werden wir im Folgenden nur den Begriff einer **Konkatstruktur** betrachten, dessen Definiens die Abgeschlossenheit der Konkatenationsoperation fordert:

5.1.3 Definition.-

$\mathcal{A}$ ist eine ***Konkatstruktur***

gdw

(1) $\mathcal{A}$ ist eine Struktur des Typs $\langle \langle 2, 3\rangle, \varnothing \rangle$, so dass $\langle \mathcal{A}_1 , \langle \mathcal{A}_{2,1} \rangle, \varnothing \rangle$ eine schwache Ordnung und $\mathcal{A}_{2,2}$ eine abgeschlossene, zweistellige Operation in $\mathcal{A}_1$ ist &

(2) (Monotonie:)

$$\forall a \forall b \forall c\, (a, b, c \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow (\langle a, b \rangle \in \mathcal{A}_{2,1} \Leftrightarrow \langle (a \circ_{\mathcal{A}} c), (b \circ_{\mathcal{A}} c) \rangle \in \mathcal{A}_{2,1}))$$ &

$$\forall a \forall b \forall c\, (a, b, c \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow (\langle a, b \rangle \in \mathcal{A}_{2,1} \Leftrightarrow \langle (c \circ_{\mathcal{A}} a), (c \circ_{\mathcal{A}} b) \rangle \in \mathcal{A}_{2,1})).$$

Die Klasse der Konkatstrukturen enthält eine Reihe von Spezialfällen. In den *Foundations of Measurement Vol. III* (Luce *et al.,* S. 26-27) werden Eigenschaften definiert, die Klassen von Unterstrukturen festlegen. Davon werden hier aber nur die Eigenschaften definiert, die für den weiteren Argumentationsgang in diesem Abschnitt 5.1 benötigt werden.

Für die Definition des Archimedischen Axioms bedarf es einer rekursiven Definition der n-fachen Verknüpfung eines Elementes mit sich selbst. Dabei ist zu beachten, dass bei Konkatenationsstrukturen der Fall $(a \circ_{\mathcal{A}} a) \circ_{\mathcal{A}} a \neq a \circ_{\mathcal{A}} (a \circ_{\mathcal{A}} a)$ zugelassen ist. Um typographisch darauf aufmerksam zu machen, unterscheiden Luce *et al.* zwischen der Notation na (aus Band 1 der *Foundations* und der dortigen **assoziativen** Konkatenationsoperation) und $a(n)$ bei den hier zu definierenden Standardsequenzen; die Konkatenation eines Elementes zu einer Sequenz von bereits konkatenierten Elementen erfolgt von rechts, um das Axiom für eingeschränkte Lösbarkeit anwenden zu können. Die Standardsequenz für ein Element a aus dem Individuenbereich einer Konkatenationsstruktur enthält so die Elemente a, $a \circ_{\mathcal{A}} a$, $(a \circ_{\mathcal{A}} a) \circ_{\mathcal{A}} a$, $((a \circ_{\mathcal{A}} a) \circ_{\mathcal{A}} a) \circ_{\mathcal{A}} a \ldots$. Im Folgenden wird nun eine Funktion C rekursiv definiert, die für das Definiens des Begriffs einer in den Standardsequenzen Archimedischen Konkatstruktur benötigt wird.

5.1.4 Definition.-

C ist eine Funktion auf $\{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A}$ ist eine Konkatstruktur $\}$ &

$\forall \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ ist eine Konkatstruktur $\Rightarrow$ $C_{\mathcal{A}}$ ist eine Funktion auf $\mathcal{A}_1$ &

$\forall a$ ($a \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow C_{\mathcal{A},a}$ ist eine Funktion auf $\mathbb{N}^+$ &

(i) $$C_{\mathcal{A},a}(1) = a \;\&$$

(ii) $$\forall n \,(n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow C_{\mathcal{A},a}(n+1) = (C_{\mathcal{A},a}(n) \circ_{\mathcal{A}} a)))).$$

In 5.1.5 werden nun Eigenschaften von Konkatstrukturen definiert.

5.1.5 Definitionen.-

Sei $\mathcal{A}$ eine Konkatstruktur. Dann soll gelten:

$\mathcal{A}$ ist eine ***Dedekind-vollständige Konkatstruktur***

gdw

$$\forall X \,(\varnothing \neq X \subseteq \mathcal{A}_1 \;\&\; X \text{ hat eine obere Schranke in } \langle \mathcal{A}_1 , \langle \mathcal{A}_{2,1} \rangle, \varnothing \rangle \Rightarrow$$

$$\exists x \,(x \text{ ist Supremum von } X \text{ in } \langle \mathcal{A}_1 , \langle \mathcal{A}_{2,1} \rangle, \varnothing \rangle)).$$

$\mathcal{A}$ ist eine ***positive Konkatstruktur***

gdw

$$\forall a \forall b \,(a, b \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow a <_{\mathcal{A}} (a \circ_{\mathcal{A}} b) \;\&\; b <_{\mathcal{A}} (a \circ_{\mathcal{A}} b)).$$

$\mathcal{A}$ ist eine ***eingeschränkt-lösbare Konkatstruktur***

gdw

$$\forall a \forall b \,(a, b \in \mathcal{A}_1 \;\&\; b <_{\mathcal{A}} a \Rightarrow \exists c \,(c \in \mathcal{A}_1 \;\&\; b <_{\mathcal{A}} (b \circ_{\mathcal{A}} c) \leq_{\mathcal{A}} a)).$$

$\mathcal{A}$ ist eine ***assoziative Konkatstruktur***

gdw

$$\forall a \forall b \forall c \,(a, b, c \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow (a \circ_{\mathcal{A}} b) \circ_{\mathcal{A}} c) \sim_{\mathcal{A}} (a \circ_{\mathcal{A}} (b \circ_{\mathcal{A}} c)).$$

$\mathcal{A}$ ist eine ***in den Standardsequenzen Archimedische Konkatstruktur***

gdw

$$\forall a \forall b \,(a, b \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow \exists n \,(n \in \mathbb{N}^+ \,\&\, b \leq_{\mathcal{A}} \mathrm{C}_{\mathcal{A}, a}(n))).$$

Luce *et al.*, (Ss. 33-37) sind gezwungen, drei Versionen des Archimedischen Axioms zu formulieren: in idempotenten Strukturen (Luce *et al.*, S. 26) etwa wird das Archimedische Axiom mit sog. Differenzensequenzen gefasst; außerdem definiert Narens (1985, S. 150) eine dritte Version: reguläre Sequenzen.

Nun wird der Begriff einer '**PKS**' – positive Konkatstruktur – festgelegt. Er lehnt sich an den Begriff einer PCS an. PCS steht für 'positive concatenation structure'; 'positive concatenation structures' wurden ursprünglich von Narens und Luce (1976) eingeführt. Im Laufe der Weiterentwicklung des messtheoretischen Begriffsapparates hat es sich aber als zweckmäßig herausgestellt, diesen Begriff so zu definieren wie in Luce et al. S. 38 geschehen; und um Verwechselungen zu vermeiden wurde dafür das Akronym 'PCS' eingeführt; siehe auch die Fußnote hierzu in Luce *et al.* auf S. 37.

5.1.6 <u>Definitionen</u>.-

(i) $\mathcal{A}$ ist eine ***PKS***

gdw

$\mathcal{A}$ eine positive, eingeschränkt lösbare und in den Standardsequenzen Archimedische Konkatstruktur ist.

(ii) $\mathcal{A}$ ist eine ***extensive Konkatstruktur***

gdw $\mathcal{A}$ ist eine assoziative PKS ist.

Es wird jetzt bewiesen, dass die Klasse der PKS einstufig nicht axiomatisierbar ist. Dazu wird aus dieser Klasse eine einzelne Struktur mit bekannten Eigenschaften gewählt. Für die folgenden Definitionen wird vorausgesetzt, dass die mengentheoretisch begründete 2-stellige Prädikatkonstante $\leq_N$ zur Bezeichnung der Kleiner-gleich-Beziehung der natürlichen Zahlen und die zweistellige Additionsoperation $+_N$ auf den natürlichen Zahlen bereits zur Verfügung stehen.

5.1.7 <u>Definitionen</u>.-

$\mathring{\leq}_N \quad = \quad \{ t \mid t \text{ ist ein 2-Tupel in } \mathbb{N}^+ \ \& \ t_1 \leq_N t_2 \}.$

$\mathring{<}_N \quad = \quad \{ t \mid t \text{ ist ein 2-Tupel in } \mathbb{N}^+ \ \& \ t_1 <_N t_2 \}.$

$\mathring{+}_N \quad = \quad \{ t \mid t \text{ ist ein 3-Tupel in } \mathbb{N}^+ \ \& \ t_1 +_N t_2 = t_3 \}.$

$\mathfrak{N} \quad = \quad \langle \mathrm{N}^+, \langle \mathring{\leq}_{N+} , \mathring{+}_{N+} \rangle, \varnothing \rangle.$

Dann gilt:

5.1.8 <u>Hilfssatz</u>.-

$\mathfrak{N}$ ist eine PKS, $\mathfrak{N}$ ist Dedekind-vollständig & $\mathrm{typ}(\mathfrak{N}) = \langle \langle 2, 3 \rangle, \varnothing \rangle$.

<u>Beweis:</u> $\mathfrak{N}$ ist Konkatstruktur. Denn es gilt nach Definition 2.2.8:

$$\mathrm{typ}(\mathfrak{N}) = \langle \langle \mathrm{stz}(\mathfrak{N}_{2,j} \rangle_{j \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{N}, 2)} , \mathrm{Dom}(\mathfrak{N}_3) \rangle.$$

Und da nach 2.2.3(r) für alle P gilt:

$$\mathrm{stz}(P) = \mathrm{Dom}(\bigcup (P));$$

und da $\mathring{\leq}_{N+}$ Klasse von 2-Tupeln und $\mathring{+}_{N+}$ Klasse von 3-Tupeln und da $\mathrm{Dom}(\varnothing) = \varnothing$, ist

$$\mathrm{typ}(\mathfrak{N}) = \langle \langle 2, 3 \rangle, \varnothing \rangle.$$

Des Weiteren ist $\langle \mathbb{N}^+, \langle \mathring{\leq}_{N+} \rangle, \varnothing \rangle$ eine schwache Ordnung (Definition 3.1.2).

Denn es gilt

$$\forall a \, (a \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow a \mathring{\leq}_{N+} a) \qquad \&$$

$$\forall a \forall b \forall c \, (a, b, c \in \mathbb{N}^+ \; \& \; a \mathring{\leq}_{N+} b \; \& \; b \mathring{\leq}_{N+} c \Rightarrow a \mathring{\leq}_{N+} c) \qquad \&$$

$$\forall a \forall b \, (a, b \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow a \mathring{\leq}_{N+} b \text{ or } b \mathring{\leq}_{N+} a).$$

Darüber hinaus gilt:

$\langle \mathbb{N}^+, \langle \mathring{\leq}_{N+} \rangle, \varnothing \rangle$ ist eine partielle Ordnung, denn es gilt

$$\forall a \forall b \, (a, b \in \mathbb{N}^+ \; \& \; a \mathring{\leq}_{N+} b \; \& \; b \mathring{\leq}_{N+} a \Rightarrow a = b).$$

Weiterhin ist $\mathring{+}_{N+}$ zweistellige Operation in $\mathbb{N}^+$. Denn $\mathring{+}_{N+}$ ist rechtseindeutiges, dreistelliges Prädikat in $\mathbb{N}^+$. Und da

$$\forall a \forall b \, (a, b \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow \langle a, b \rangle \in \mathrm{dom}(\mathring{+}_{N+})) \qquad \text{gilt,}$$

ist $\mathring{+}_{N+}$ zweistellige, abgeschlossene Operation in $\mathbb{N}^+$.

Außerdem gilt:

$$\forall a \forall b \forall c \, (a, b, c \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow (\langle a, b \rangle \in \mathring{\leq}_{N+} \Leftrightarrow \langle (a \circ_{\mathfrak{N}} c), (b \circ_{\mathfrak{N}} c) \rangle \in \mathring{\leq}_{N+})) \qquad \&$$

$$\forall a \forall b \forall c \, (a, b, c \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow (\langle a, b \rangle \in \mathring{\leq}_{N+} \Leftrightarrow \langle (c \circ_{\mathfrak{N}} a), (c \circ_{\mathfrak{N}} b) \rangle \in \mathring{\leq}_{N+})).$$

Also ist $\mathfrak{N}$ Konkatstruktur.

$\mathfrak{N}$ ist positiv, denn für alle $a, b \in \mathbb{N}^+$ gilt:

$$a <_{\mathfrak{N}} a \circ_{\mathfrak{N}} b \; \& \; b <_{\mathfrak{N}} a \circ_{\mathfrak{N}} b,$$

da u. a. $\qquad \langle a, b, \mathring{+}_{N+} [\langle a, b \rangle] \rangle \in \mathfrak{N}_{2,2}$.

$\mathfrak{N}$ ist eingeschränkt lösbar, denn es gilt:

$$\forall a \forall b \, (a, b \in \mathbb{N}^+ \; \& \; b <_{\mathfrak{N}} a \Rightarrow \exists c \, (c \in \mathbb{N}^+ \; \& \; b <_{\mathfrak{N}} (b \circ_{\mathfrak{N}} c) \leq_{\mathfrak{N}} a)).$$

$\mathfrak{N}$ ist Archimedisch in den Standardsequenzen, da $\mathfrak{N}$ den folgenden Satz erfüllt:

$$\forall a \forall b \, (a, b \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow \exists n \, (n \in \mathbb{N}^+ \; \& \; b \leq_{\mathfrak{N}} \mathrm{C}_{\mathfrak{N}, a} (n))).$$

Also ist $\mathfrak{N}$ eine PKS.

Des Weiteren gilt

$$\forall X\,(\,\varnothing \neq X \subseteq \mathbb{N}^{+}\ \&\ X \text{ hat eine obere Schranke in } \langle\, \mathfrak{N}_1\,, \langle\, \mathfrak{N}_{2,1}\,\rangle, \varnothing\,\rangle \Rightarrow$$

$$\exists x\,(\,x \text{ ist Supremum von } X \text{ in } \langle\, \mathfrak{N}_1\,, \langle\, \mathfrak{N}_{2,1}\,\rangle, \varnothing\,\rangle\,).$$

D. h.: $\mathfrak{N}$ ist Dedekind-vollständige Konkatstruktur.

5.1.9 Definition.-

$\mathcal{N} = \langle \mathfrak{N} \rangle_{i \in \mathbb{N}}$.

5.1.10 Hilfssatz.-

$\mathcal{N}$ ist eine homogene Familie von Strukturen & typ*($\mathcal{N}$) = typ($\mathfrak{N}$) = $\langle\, \langle\, 2, 3\,\rangle, \varnothing\,\rangle$

& Ran($\mathcal{N}$) $\subseteq \{\, \mathcal{A} \mid \mathcal{A}$ ist eine PKS & $\mathcal{A}$ ist Dedekind-vollständig $\}$.

Beweis: Es gilt: $\mathcal{N}$ ist eine Familie von Strukturen des Typs $\langle\, \langle\, 2, 3\,\rangle, \varnothing\,\rangle$. Dann ist nach Definition 3.3.2 $\mathcal{N}$ eine homogene Familie von Strukturen. Und mit Satz 3.3.5 folgt:

$$\text{typ*}(\mathcal{N}) = \langle\, \langle\, 2, 3\,\rangle, \varnothing\,\rangle.$$

Und da Ran($\mathcal{N}$) = $\{\mathfrak{N}\}$, folgt mit Hilfssatz 5.1.8:

$$\text{Ran}(\mathcal{N}) \subseteq \{\, \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ ist eine PKS } \&\ \mathcal{A} \text{ ist Dedekind-vollständig }\}.$$

Mit Hilfe der Familie $\mathcal{N}$ diskreter Strukturen lässt sich nun zeigen, dass die Klasse der PKS nicht einstufig axiomatisierbar ist. Um das zu erweisen, wird eine Ultrapotenz von $\mathcal{N}$ gebildet; von dieser Ultrapotenz wird unter Anwendung eines Diagonalargumentes – wie es von Robinson (1951) benutzt wurde, um die Existenz nicht-Archimedischer Ringe zu belegen – gezeigt, dass sie in den Standardsequenzen nicht-Archimedisch ist, somit ist die Klasse der PKS unter Ultraproduktbildung nicht abgeschlossen; was hinwiederum eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Nicht-axiomatisierbarkeit der Klasse der PKS in einer einstufigen Sprache ist.

5.1.11 Satz.-

Es gibt einen Ultrafilter U auf $\mathbf{V}(\mathrm{Dom}(\mathcal{N}))$, so dass $\mathrm{QRPr}(\mathcal{N}, U)$ nicht-Archimedisch in den Standardsequenzen ist.

Beweis: Es gilt:

$$\exists U\,(\,U \text{ ist Ultrafilter auf dem BOOLEschen Verband } \mathbf{V}(\mathbb{N})\,);$$

denn sei $$E = \{\, X \mid X \subseteq \mathbb{N} \;\&\; (\mathbb{N} \setminus X) \text{ endlich} \,\},$$

und seien $$F, G \in E,$$

dann gilt $$F \neq \emptyset \;\&\; G \neq \emptyset,$$

denn $\mathbb{N} \setminus \emptyset$ ist nicht endlich;

dann ist $$\mathbb{N} \setminus (\, F \cap G \,) = (\mathbb{N} \setminus F) \cup (\, \mathbb{N} \setminus G) \qquad \text{endlich, und}$$

$$F \cap G = \mathrm{Inf}_{\mathbf{V}(\mathbb{N})}\,(\{F, G\}) \in E$$

folgt; weiterhin gilt:

$$\mathrm{Inf}_{\mathbf{V}(\mathbb{N})}\,(\{F, G\}) \neq 0_{\mathbf{V}(\mathbb{N})}\,,$$

da $$\emptyset \notin E \;\&\; \mathrm{Inf}_{\mathbf{V}(\mathbb{N})}\,(\{F, G\}) \in E;$$

das zeigt, dass

$$\forall F \,\forall G\,(\, F, G \in E \Rightarrow \mathrm{Inf}_{\mathbf{V}(\mathbb{N})}\,(\{F, G\}) \neq 0_{\mathbf{V}(\mathbb{N})} \;\&\; \mathrm{Inf}_{\mathbf{V}(\mathbb{N})}\,(\{F, G\}) \in E\,)$$

gilt; und mit $\mathbf{V}(\mathbb{N})$ BOOLEscher Verband und $E \subseteq \mathbf{V}(\mathbb{N})_1$ folgt mit Hilfssatz 3.2.6: E ist in $\mathbf{V}(\mathbb{N})$ unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer; und mit dem Ultrafiltertheorem (3.2.15) folgt, dass es einen Ultrafilter U auf $\mathbf{V}(\mathbb{N})$ gibt, der E enthält.

Sei U so.

Nun ist $\mathrm{QRPr}(\mathcal{N}, U)$ mit

$$\mathrm{QRPr}\,(\mathcal{N}, U) = \langle\, \mathrm{Quot}(\approx(U, \mathcal{N})),$$
$$\langle\, \mathrm{QRPPr}_{i \in \mathbb{N}}(\mathcal{N}_{i,2,j}\,, \mathcal{N}_{i,1}\,, U\,)\,\rangle_{j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{typ}^*(\mathcal{N}(1)))}\,, \emptyset\,\rangle$$

eine Ultrapotenz von $\mathcal{N}$ modulo U.

Es wird bewiesen, dass QRPr($\mathcal{N}$, U) das Archimedische Axiom (5.1.5) nicht erfüllt.

Es gilt $\quad \langle 1\rangle_{i\in\mathrm{N}}, \langle i+1\rangle_{i\in\mathrm{N}} \in \mathrm{CPr}_{i\in\mathrm{N}}(\mathcal{N}_{i,1})$.

Und für alle $n \in \mathbb{N}^+$ gilt:

$$\{j \mid j\in\mathbb{N} \,\&\, \langle\, \langle i+1\rangle_{i\in\mathrm{N}}(j), \langle \mathrm{C}_{\mathfrak{N},1}(n)\rangle_{i\in\mathrm{N}}(j)\,\rangle \in \mathring{\leq}_{\mathrm{N}+}\} \text{ endl} \subseteq \mathbb{N}.$$

Ferner gilt für alle $n \in \mathbb{N}^+$:

$$\{j \mid j\in\mathbb{N} \,\&\, \langle\, \langle i+1\rangle_{i\in\mathrm{N}}(j), \langle \mathrm{C}_{\mathfrak{N},1}(n)\rangle_{i\in\mathrm{N}}(j)\,\rangle \in \mathring{\leq}_{\mathrm{N}+}\}$$

$$= \mathbb{N} \setminus \{j \mid j\in\mathbb{N} \,\&\, \langle\, \langle i+1\rangle_{i\in\mathrm{N}}(j), \langle \mathrm{C}_{\mathfrak{N},1}(n)\rangle_{i\in\mathrm{N}}(j)\,\rangle \notin \mathring{\leq}_{\mathrm{N}+}\};$$

also $\quad \mathbb{N} \setminus \{j \mid j\in\mathbb{N} \,\&\, \langle\, \langle i+1\rangle_{i\in\mathrm{N}}(j), \langle \mathrm{C}_{\mathfrak{N},1}(n)\rangle_{i\in\mathrm{N}}(j)\,\rangle \notin \mathring{\leq}_{\mathrm{N}+}\} \text{ endl} \subseteq \mathbb{N}$;

also $\quad \{j \mid j\in\mathbb{N} \,\&\, \langle\, \langle i+1\rangle_{i\in\mathrm{N}}(j), \langle \mathrm{C}_{\mathfrak{N},1}(n)\rangle_{i\in\mathrm{N}}(j)\,\rangle \notin \mathring{\leq}_{\mathrm{N}+}\} \in \mathrm{E} \subseteq \mathrm{U}$;

also $\quad \{j \mid j\in\mathbb{N} \,\&\, \langle\, \langle i+1\rangle_{i\in\mathrm{N}}(j), \langle \mathrm{C}_{\mathfrak{N},1}(n)\rangle_{i\in\mathrm{N}}(j)\,\rangle \in \mathring{\leq}_{\mathrm{N}+}\} \notin \mathrm{U}$.

Nun ist $\langle\, \langle i+1\rangle_{i\in\mathrm{N}}, \langle \mathrm{C}_{\mathfrak{N},1}(n)\rangle_{i\in\mathrm{N}}\,\rangle$ Folge der Länge 2 in $\mathrm{CPr}_{i\in\mathrm{N}}(\mathcal{N}_{i,1})$

$$\&\ \{j \mid j\in\mathbb{N} \,\&\, \langle\, \langle i+1\rangle_{i\in\mathrm{N}}(j), \langle \mathrm{C}_{\mathfrak{N},1}(n)\rangle_{i\in\mathrm{N}}(j)\,\rangle \in \mathcal{N}_{j,2,1}\} \notin \mathrm{U}.$$

Daher gilt nach Definitionsschema 3.3.8:

$$\langle\, \langle i+1\rangle_{i\in\mathrm{N}}, \langle \mathrm{C}_{\mathfrak{N},1}(n)\rangle_{i\in\mathrm{N}}\,\rangle \notin \mathrm{RPPr}_{i\in\mathrm{N}}(\mathcal{N}_{i,2,1}, \mathcal{N}_{i,1}, \mathrm{U}).$$

Es gilt:

$$\mathrm{QRPPr}_{i\in\mathrm{N}}(\mathcal{N}_{i,2,1}, \mathcal{N}_{i,1}, \mathrm{U}) \text{ ist 2-stelliges Prädikat in } \mathrm{Fld}(\approx(\mathrm{U},\mathcal{N}))$$

$$\&\ \langle\, [\langle i+1\rangle_{i\in\mathrm{N}}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}, [\langle \mathrm{C}_{\mathfrak{N},1}(n)\rangle_{i\in\mathrm{N}}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}\,\rangle \text{ ist 2-Tupel in } \mathrm{Quot}(\approx(\mathrm{U},\mathcal{N}))$$

$$\&\ \langle\, \langle i+1\rangle_{i\in\mathrm{N}}, \langle \mathrm{C}_{\mathfrak{N},1}(n)\rangle_{i\in\mathrm{N}}\,\rangle \notin \mathrm{RPPr}_{i\in\mathrm{N}}(\mathcal{N}_{i,2,1}, \mathcal{N}_{i,1}, \mathrm{U})$$

$$\&\ \langle i+1\rangle_{i\in\mathrm{N}} \in [\langle i+1\rangle_{i\in\mathrm{N}}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})} \ \&\ \langle \mathrm{C}_{\mathfrak{N},1}(n)\rangle_{i\in\mathrm{N}} \in [\langle \mathrm{C}_{\mathfrak{N},1}(n)\rangle_{i\in\mathrm{N}}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}.$$

Unter Anwendung der Definitionen 3.3.9 folgt dann:

$$\langle\, [\langle i+1\rangle_{i\in\mathrm{N}}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}, [\langle \mathrm{C}_{\mathfrak{N},1}(n)\rangle_{i\in\mathrm{N}}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}\,\rangle$$

$$\notin \mathrm{QuotPräd}\,(\mathrm{RPPr}_{i\in\mathrm{N}}(\mathcal{N}_{i,2,1}, \mathcal{N}_{i,1}, \mathrm{U}), \approx(\mathrm{U},\mathcal{N})).$$

Und mit dem Definitionsschema 3.3.11 folgt:

$$\langle\, [\langle i+1\rangle_{i\in\mathrm{N}}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}, [\langle \mathrm{C}_{\mathfrak{N},1}(n)\rangle_{i\in\mathrm{N}}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}\,\rangle$$

$$\notin \mathrm{QRPPr}_{i \in \mathbb{N}} (\mathcal{N}_{i,2,1}, \mathcal{N}_{i,1}, \mathrm{U}).$$

Und mit Hilfssatz 5.1.12 folgt:

$$[\langle \mathrm{C}_{\mathfrak{N},1} (n) \rangle_{i \in \mathbb{N}}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})} = \mathrm{C}_{\mathrm{QRPr}(\mathcal{N},\mathrm{U}),[\langle 1 \rangle i \in \mathbb{N}] \approx(\mathrm{U},\mathcal{N})} (n).$$

Und somit gilt:

$$\langle [\langle i+1 \rangle_{i \in \mathbb{N}}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}, \mathrm{C}_{\mathrm{QRPr}(\mathcal{N},\mathrm{U}),[\langle 1 \rangle i \in \mathbb{N}] \approx(\mathrm{U},\mathcal{N})} (n) \rangle$$

$$\notin \mathrm{QRPPr}_{i \in \mathbb{N}} (\mathcal{N}_{i,2,1}, \mathcal{N}_{i,1}, \mathrm{U}).$$

Und da $\quad \mathrm{QRPPr}_{i \in \mathbb{N}} (\mathcal{N}_{i,2,1}, \mathcal{N}_{i,1}, \mathrm{U}) = \mathrm{QRPr}(\mathcal{N}, \mathrm{U})_{2,1}$,

gilt für alle $n \in \mathbb{N}^+$:

$$\text{nicht } [\langle i+1 \rangle_{i \in \mathbb{N}}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})} \leq_{\mathrm{QRPr}(\mathcal{N},\mathrm{U})} \mathrm{C}_{\mathrm{QRPr}(\mathcal{N},\mathrm{U}),[\langle 1 \rangle i \in \mathbb{N}] \approx(\mathrm{U},\mathcal{N})} (n).$$

Und es folgt schließlich:

$$\exists a \, \exists b \, (a, b \in \mathrm{QRPr}(\mathcal{N}, \mathrm{U})_1 \;\&\; \forall n \, (n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow \text{nicht } a \leq_{\mathrm{QRPr}(\mathcal{N},\mathrm{U})} \mathrm{C}_{\mathrm{QRPr}(\mathcal{N},\mathrm{U}),b} (n)).$$

Somit ist gezeigt, dass QRPr($\mathcal{N}$, U) nicht-Archimedisch in den Standardsequenzen ist.

5.1.12 Hilfssatz.-

Für alle $\mathcal{A}$, alle U und alle a:

Wenn $\mathcal{A}$ Konkatstruktur & U Ultrafilter auf $\mathbf{V}(\mathbb{N})$ & $a \in \mathcal{A}_1$ dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}^+$:

$$[\langle \mathrm{C}_{\mathcal{A},a} (n) \rangle_{j \in \mathbb{N}}]_{\approx(U,\langle \mathcal{A} \rangle i \in \mathbb{N})}$$

$$=$$

$$\mathrm{C}_{\mathrm{QRPr}(\langle \mathcal{A} \rangle i \in \mathbb{N}, U),[\langle a \rangle i \in \mathbb{N}] \approx(U,\langle \mathcal{A} \rangle i \in \mathbb{N})} (n).$$

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ Konkatstruktur, sei U Ultrafilter auf $\mathbf{V}(\mathbb{N})$, sei a $\in \mathcal{A}_1$ und sei

$\mathrm{Q} = \approx(\mathrm{U}, \langle \mathcal{A} \rangle_{i \in \mathbb{N}})$. Es gilt für die Induktionsbasis n = 1:

$$[\langle \mathrm{C}_{\mathcal{A},\mathrm{a}} (1) \rangle_{i \in \mathbb{N}}]_{\mathrm{Q}} = \mathrm{C}_{\mathrm{QRPr}(\langle \mathcal{A} \rangle i \in \mathbb{N},\mathrm{U}),[\langle \mathrm{a} \rangle i \in \mathbb{N}]\mathrm{Q}} (1);$$

denn $\quad \mathrm{C}_{\mathcal{A},\mathrm{a}} (1) = \mathrm{a}$

und $\quad \mathrm{C}_{\mathrm{QRPr}(\langle \mathcal{A} \rangle i \in \mathbb{N},\mathrm{U}),[\langle \mathrm{a} \rangle i \in \mathbb{N}]\mathrm{Q}} (1) = [\langle \mathrm{a} \rangle_{i \in \mathbb{N}}]_{\mathrm{Q}}$.

Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und gelte die Induktionsvoraussetzung:

$$[\langle C_{\mathcal{A},a}(n)\rangle_{i\in\mathbb{N}}]_Q = C_{QRPr(\langle\mathcal{A}\rangle i\in\mathbb{N},U),[\langle a\rangle i\in\mathbb{N}]Q}(n).$$

Es gilt $\quad x \in [\langle C_{\mathcal{A},a}(n+1)\rangle_{j\in\mathbb{N}}]_Q$

gdw $\quad \{ i \mid i\in\mathbb{N}\ \&\ \langle C_{\mathcal{A},a}(n+1)\rangle_{j\in\mathbb{N}}(i) = x_i \} \in U$

gdw $\quad \{ i\in\mathbb{N} \mid \langle\langle C_{\mathcal{A},a}(n)\rangle_{j\in\mathbb{N}}(i), \langle C_{\mathcal{A},a}(1)\rangle_{j\in\mathbb{N}}(i), x_i\rangle \in \mathcal{A}_{i,2,2} \} \in U$

gdw $\quad \langle\langle C_{\mathcal{A},a}(n)\rangle_{j\in\mathbb{N}}, \langle C_{\mathcal{A},a}(1)\rangle_{j\in\mathbb{N}}, x\rangle \in RPPr_{i\in\mathbb{N}}(\mathcal{A}_{i,2,2}, \mathcal{A}_{i,1}, U)$

gdw $\quad \langle [\langle C_{\mathcal{A},a}(n)\rangle_{j\in\mathbb{N}}]_Q, [\langle C_{\mathcal{A},a}(1)\rangle_{j\in\mathbb{N}}]_Q, [x]_Q\rangle$

$$\in QRPPr_{i\in\mathbb{N}}(\mathcal{A}_{i,2,2}, \mathcal{A}_{i,1}, U)$$

gdw $\quad \langle C_{QRPr(\langle\mathcal{A}\rangle i\in\mathbb{N},U),[\langle a\rangle i\in\mathbb{N}]Q}(n), [\langle C_{\mathcal{A},a}(1)\rangle_{j\in\mathbb{N}}]_Q, [x]_Q\rangle$

$$\in QRPPr_{i\in\mathbb{N}}(\mathcal{A}_{i,2,2}, \mathcal{A}_{i,1}, U)$$

gdw $\quad [x]_Q = C_{QRPr(\langle\mathcal{A}\rangle i\in\mathbb{N},U),[\langle a\rangle i\in\mathbb{N}]Q}(n+1)$

gdw $\quad x \in C_{QRPr(\langle\mathcal{A}\rangle i\in\mathbb{N},U),[\langle a\rangle i\in\mathbb{N}]Q}(n+1).$

Im Hilfssatz 5.1.12 wird bei der Anwendung von Definition 5.1.4 von Hilfstheorem 5.1.14 Gebrauch gemacht, zu dem 5.1.13 vorbereitend ist.

5.1.13 <u>Hilfssatz</u>.-

Für alle $\mathcal{A}$ und alle *U:*

Wenn $\mathcal{A}$ homogene Familie von Konkatstrukturen und wenn *U* Ultrafilter auf **V**(Dom($\mathcal{A}$))

dann ist RPr($\mathcal{A}$, *U*) eine Struktur des Typs $\langle\langle 2, 3\rangle, \varnothing\rangle$ und

$$\langle RPr(\mathcal{A}, U)_1, \langle RPr(\mathcal{A}, U)_{2,1}\rangle, \varnothing\rangle$$

ist eine schwache Ordnung.

<u>Beweis:</u> Seien die Voraussetzungen erfüllt.

Dann ist $\mathcal{A}$ Familie von Strukturen des Typs $\langle\langle 2, 3\rangle, \varnothing\rangle$ und da U echter Filter auf

$\mathbf{V}(\mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$ ist, folgt mit Satz 3.3.16: $\mathrm{RPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})$ ist Struktur vom Typ $\langle\langle 2, 3\rangle, \varnothing\rangle$.

$\mathrm{RPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,1}$ ist eine schwache Ordnung.

Denn seien $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} \mathcal{A}_{i,1}$ dann gilt für alle i:

$$i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \Rightarrow \langle \mathrm{x}_i , \mathrm{x}_i \rangle \in \mathcal{A}_{i,2,1} ,$$

da $\mathcal{A}_{i,2,1}$ für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ reflexiv in $\mathcal{A}_{i,1}$ ist. Und da $\mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \in \mathrm{U}$, ist

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle \in \mathrm{RPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,1} .$$

Gelte nun $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle \notin \mathrm{RPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,1}$; dann

$$\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \;\&\; \langle \mathrm{x}_i , \mathrm{y}_i \rangle \in \mathcal{A}_{i,2,1} \} \notin \mathrm{U};$$

dann
$$\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \;\&\; \langle \mathrm{x}_i , \mathrm{y}_i \rangle \notin \mathcal{A}_{i,2,1} \} \in \mathrm{U},$$

da U Ultrafilter; und mit der Linearität der Konkatstrukturen der Familie $\mathcal{A}$ folgt:

$$\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \;\&\; \langle \mathrm{y}_i , \mathrm{x}_i \rangle \in \mathcal{A}_{i,2,1} \} \in \mathrm{U};$$

somit ist $\mathrm{RPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,1}$ linear in $\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} \mathcal{A}_{i,1}$.

Gelte $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle, \langle \mathrm{y}, \mathrm{z}\rangle \in \mathrm{RPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,1}$; dann:

$$\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \;\&\; \langle \mathrm{x}_i , \mathrm{y}_i \rangle \in \mathcal{A}_{i,2,1} \} \in \mathrm{U} \qquad \text{und}$$

$$\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \;\&\; \langle \mathrm{y}_i , \mathrm{z}_i \rangle \in \mathcal{A}_{i,2,1} \} \in \mathrm{U} \qquad \text{und}$$

$$\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \;\&\; \langle \mathrm{x}_i , \mathrm{z}_i \rangle \in \mathcal{A}_{i,2,1} \} \in \mathrm{U} \qquad \text{folgt;}$$

also ist $\mathrm{RPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,1}$ transitiv in $\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\mathcal{A}_{i,1}$.

Also ist $\langle \mathrm{RPr}(\mathcal{A}, U)_1 , \langle \mathrm{RPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,1}\rangle, \varnothing \rangle$ eine schwache Ordnung.

5.1.14 Hilfssatz.-

Für alle $\mathcal{A}$ und alle U:

Wenn $\mathcal{A}$ homogene Familie von Konkatstrukturen und wenn U Ultrafilter auf $\mathbf{V}(\mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$

dann ist $\qquad \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, U)$

eine Konkatstruktur.

Beweis: Seien die Voraussetzungen erfüllt.

(1) Dann folgt mit Satz 3.3.15: QRPr($\mathcal{A}$, U) ist Struktur vom Typ $\langle \langle 2, 3\rangle, \emptyset \rangle$.

Sei Q = $\approx$(U, $\mathcal{A}$).

$\langle$ QRPr($\mathcal{A}$, U)$_1$, $\langle$ QRPr($\mathcal{A}$, U)$_{2,1}$ $\rangle$, $\emptyset$ $\rangle$ ist schwache Ordnung.

Denn seien $[x]_Q$, $[y]_Q$, $[z]_Q \in$ Quot(Q);

es gilt: $\langle x, x\rangle \in \mathrm{RPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,1}$

und es folgt $\langle [x]_Q , [x]_Q \rangle \in \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,1}$;

gelte $\langle [x]_Q , [y]_Q \rangle \notin \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,1}$;

dann gilt $\langle x, y\rangle \notin \mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} (\mathcal{A}_{i,2,1} , \mathcal{A}_{i,1} , \mathrm{U})$

gdw $\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \ \&\ \langle x_i , y_i \rangle \in \mathcal{A}_{i,2,1} \} \notin \mathrm{U}$

gdw $\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \ \&\ \langle x_i , y_i \rangle \notin \mathcal{A}_{i,2,1} \} \in \mathrm{U}$

gdw $\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \ \&\ \langle y_i , x_i \rangle \in \mathcal{A}_{i,2,1} \} \in \mathrm{U}$

gdw $\langle y, x\rangle \in \mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} (\mathcal{A}_{i,2,1} , \mathcal{A}_{i,1} , \mathrm{U})$

gdw $\langle [y]_Q , [x]_Q \rangle \in \mathrm{QuotPräd}(\mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} (\mathcal{A}_{i,2,1} , \mathcal{A}_{i,1} , \mathrm{U}), \mathrm{Q})$

gdw $\langle [y]_Q , [x]_Q \rangle \in \mathrm{QRPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} (\mathcal{A}_{i,2,1} , \mathcal{A}_{i,1} , \mathrm{U})$;

somit ist QRPr($\mathcal{A}$, U)$_{2,1}$ linear in Quot(Q).

Gelte

$\langle [x]_Q , [y]_Q \rangle \in \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,1}$ und $\langle [y]_Q , [z]_Q \rangle \in \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,1}$;

dann gilt

$$\exists X_1 \exists X_2 (X_1 , X_2 \in \mathrm{U}\ \&$$
$$X_1 = \{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \ \&\ \langle x_i , y_i \rangle \in \mathcal{A}_{i,2,1} \}\ \&$$
$$X_2 = \{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \ \&\ \langle y_i , z_i \rangle \in \mathcal{A}_{i,2,1} \});$$

seien X_1 und X_2 so;

dann ist wegen Filtereigenschaft (3) in Definition 3.2.1

$$X_1 \cap X_2 \in \mathrm{U};$$

dann $\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \mathbin{\&} \langle x_i , z_i \rangle \in \mathcal{A}_{i,2,1} \} \in \mathrm{U}$

gdw $\langle x, z \rangle \in \mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} (\mathcal{A}_{i,2,1} , \mathcal{A}_{i,1} , \mathrm{U})$

gdw $\langle [x]_Q , [z]_Q \rangle \in \mathrm{QRPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} (\mathcal{A}_{i,2,1} , \mathcal{A}_{i,1} , \mathrm{U})$;

somit ist $\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,1}$ transitiv in Quot(Q).

Also ist $\langle \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_1 , \langle \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,1} \rangle, \varnothing \rangle$ schwache Ordnung.

Wenn nun für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ gilt:

$$\mathcal{A}_{i,2,1} \text{ ist antisymmetrisch in } \mathcal{A}_{i,1} ,$$

dann ist $\langle \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_1 , \langle \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,1} \rangle, \varnothing \rangle$ partielle Ordnung.

Denn seien $[x]_Q , [y]_Q \in \mathrm{Quot(Q)}$ und gelte:

$\langle [x]_Q , [y]_Q \rangle \in \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,1}$ &

$\langle [y]_Q , [x]_Q \rangle \in \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,1}$.

Dann folgt: $\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \mathbin{\&} \langle x_i , y_i \rangle \in \mathcal{A}_{i,2,1} \} \in \mathrm{U}$ &

$\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \mathbin{\&} \langle y_i , x_i \rangle \in \mathcal{A}_{i,2,1} \} \in \mathrm{U}$;

und $\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \mathbin{\&} x_i = y_i \} \in \mathrm{U}$;

D. h.: $[x]_Q = [y]_Q$.

Nun wird bewiesen, dass $\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,2}$ eine abgeschlossene, zweistellige Operation in $\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_1$ ist. D. h. $\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,2}$ ist dreistelliges, rechtseindeutiges Prädikat in Quot(Q) & $\forall t\,(t$ ist 2-Tupel & $\mathrm{Ran}(t) \subseteq \mathrm{Quot(Q)} \Rightarrow t \in \mathrm{dom}(\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,2}))$.

Wiederum nach Satz 3.3.15 gilt:

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,2} \text{ ist dreistelliges Prädikat in Quot(Q).}$$

Seien $[x]_Q , [y]_Q , [z]_Q , [z']_Q \in \mathrm{Quot(Q)}$ und gelte:

$\langle [x]_Q , [y]_Q , [z]_Q \rangle \in \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,2}$ &

$\langle [x]_Q , [y]_Q , [z']_Q \rangle \in \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, \mathrm{U})_{2,2}$.

Dann gilt $\langle [x]_Q , [y]_Q , [z]_Q \rangle \in \mathrm{QRPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} (\mathcal{A}_{i,2,2} , \mathcal{A}_{i,1} , \mathrm{U})$

gdw $\langle [x]_Q , [y]_Q , [z]_Q \rangle \in \mathrm{QuotPräd}(\mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,2,2} , \mathcal{A}_{i,1} , U), Q)$

gdw $\langle x , y, z \rangle \in \mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} (\mathcal{A}_{i,2,2} , \mathcal{A}_{i,1} , U)$

gdw $\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \ \&\ \langle x_i , y_i , z_i \rangle \in \mathcal{A}_{i,2,2} \} \in U$

gdw $\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \ \&\ \langle x_j \circ_{\mathcal{A},j} y_j \rangle_{j \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} (i) = z_i \} \in U.$

Ebenso gilt: $\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \ \&\ \langle x_j \circ_{\mathcal{A},j} y_j \rangle_{j \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} (i) = z'_i \} \in U.$

Da U Filter, ist $\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \ \&\ \langle x_j \circ_{\mathcal{A},j} y_j \rangle_{j \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} (i) = z_i \}$

$$\cap$$

$$\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \ \&\ \langle x_j \circ_{\mathcal{A},j} y_j \rangle_{j \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} (i) = z'_i \} \in U.$$

Und es folgt: $\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \ \&\ z_i = z'_i \} \in U,$

d. h. weiterhin: $[z]_Q = [z']_Q ,$

und es ist erwiesen, dass $\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, U)_{2,2}$ rechtseindeutiges, dreistelliges Prädikat in Quot(Q) ist. Und mit den Definitionen 2.2.3 (k) und (o) folgt:

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, U)_{2,2} \text{ ist zweistellige Operation in Quot(Q),}$$

deren Abgeschlossenheit noch gezeigt werden muss.

Seien $[x]_Q , [y]_Q \in \mathrm{Quot}(Q)$.

Dann ist $x, y \in \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} \mathcal{A}_{i,1}$.

Dann gilt $\forall i \, (i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \Rightarrow \exists z \, (z \in \mathcal{A}_{i,1} \ \&\ z = x_i \circ_{\mathcal{A},i} y_i)),$

da für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ $\mathcal{A}_i$ eine Konkatstruktur ist, und somit $\mathcal{A}_{i,2,2}$ zweistellige, abgeschlossene Operation in $\mathcal{A}_{i,1}$ ist. Dann folgt mit Auswahlaxiom:

$\exists z \, (z \text{ ist Funktion auf } \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \ \&\ \forall i \, (i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \Rightarrow z_i \in \mathcal{A}_{i,1} \ \&\ \langle x_i , y_i , z_i \rangle \in \mathcal{A}_{i,2,2})).$

Und es folgt

$$\exists z \, (z \in \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} \mathcal{A}_{i,1} \ \&\ \forall i \, (i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \Rightarrow \langle x_i , y_i , z_i \rangle \in \mathcal{A}_{i,2,2})).$$

Sei z so. Und da $\mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \in U$ folgt weiterhin:

$$\langle [x]_Q , [y]_Q , [z]_Q \rangle \in \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, U)_{2,2} .$$

Es gilt also

$$\forall t\,(\,t\text{ 2-Tupel } \&\ t_1\,,\, t_2 \in \mathrm{QRPr}(\mathcal{A},\mathrm{U})_1 \Rightarrow t \in \mathrm{dom}(\mathrm{QRPr}(\mathcal{A},\mathrm{U})_{2,2}\,), \qquad \text{da}$$

$$\mathrm{dom}(\mathrm{QRPr}(\mathcal{A},\mathrm{U})_{2,2}\,) = \{\, t \mid t \text{ ist 2-Tupel } \&\ \exists z\, t^\frown\langle z\rangle \in \mathrm{QRPr}(\mathcal{A},\mathrm{U})_{2,2}\,\}.$$

Das zeigt nach Definition 2.2.3 (p) die Abgeschlossenheit der Operation $\mathrm{QRPr}(\mathcal{A},\mathrm{U})_{2,2}$.

(2) (Monotonie) Seien $[\mathrm{x}]_{\mathrm{Q}}\,,\,[\mathrm{y}]_{\mathrm{Q}}\,,\,[\mathrm{z}]_{\mathrm{Q}} \in \mathrm{Quot(Q)}$.

Dann gilt $\quad \langle [\mathrm{x}]_{\mathrm{Q}}\,,\,[\mathrm{y}]_{\mathrm{Q}}\rangle \in \mathrm{QRPr}(\mathcal{A},\mathrm{U})_{2,1}$

gdw $\quad \langle [\mathrm{x}]_{\mathrm{Q}}\,,\,[\mathrm{y}]_{\mathrm{Q}}\rangle \in \mathrm{QRPPr}_{i\in\mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\,(\mathcal{A}_{i,2,1}\,,\mathcal{A}_{i,1}\,,\mathrm{U})$

gdw $\quad \langle [\mathrm{x}]_{\mathrm{Q}}\,,\,[\mathrm{y}]_{\mathrm{Q}}\rangle \in \mathrm{QuotPräd}\,(\,\mathrm{RPPr}_{i\in\mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\,(\mathcal{A}_{i,2,1}\,,\mathcal{A}_{i,1}\,,\mathrm{U}\,),\,\mathrm{Q}\,)$

gdw $\quad \langle \mathrm{x}\,,\,\mathrm{y}\rangle \in \mathrm{RPPr}_{i\in\mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\,(\mathcal{A}_{i,2,1}\,,\mathcal{A}_{i,1}\,,\mathrm{U}\,)$

gdw $\quad \{\, i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})\ \&\ \langle\, \mathrm{x}_i\,,\,\mathrm{y}_i\,\rangle \in \mathcal{A}_{i,2,1}\,\} \in \mathrm{U}$

gdw $\quad \{\, i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})\ \&\ \langle\, (\mathrm{x}_i \circ_{\mathcal{A},i} \mathrm{z}_i),\,(\mathrm{y}_i \circ_{\mathcal{A},i} \mathrm{z}_i)\,\rangle \in \mathcal{A}_{i,2,1}\,\} \in \mathrm{U}$

gdw $\quad \langle\, \langle\, \mathrm{x}_i \circ_{\mathcal{A},i} \mathrm{z}_i\,\rangle_{i\in\mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\,,\,\langle\, \mathrm{y}_i \circ_{\mathcal{A},i} \mathrm{z}_i\,\rangle_{i\in\mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\,\rangle$

$\qquad \in \mathrm{RPPr}_{i\in\mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,2,1}\,,\mathcal{A}_{i,1}\,,\mathrm{U})$

gdw $\quad \langle\, [\langle\, \mathrm{x}_i \circ_{\mathcal{A},i} \mathrm{z}_i\,\rangle_{i\in\mathrm{Dom}(\mathcal{A})}]_{\mathrm{Q}}\,,\,[\langle\, \mathrm{y}_i \circ_{\mathcal{A},i} \mathrm{z}_i\,\rangle_{i\in\mathrm{Dom}(\mathcal{A})}]_{\mathrm{Q}}\,\rangle$ *

$\qquad \in \mathrm{QuotPräd}\,(\,\mathrm{RPPr}_{i\in\mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\,(\mathcal{A}_{i,2,1}\,,\mathcal{A}_{i,1}\,,\mathrm{U}\,),\,\mathrm{Q}\,)$

gdw $\quad \langle\, (\,[\mathrm{x}]_{\mathrm{Q}} \circ_{\mathrm{QRPr}(\mathcal{A},\mathrm{U})} [\mathrm{z}]_{\mathrm{Q}}\,),\,(\,[\mathrm{y}]_{\mathrm{Q}} \circ_{\mathrm{QRPr}(\mathcal{A},\mathrm{U})} [\mathrm{z}]_{\mathrm{Q}})\,\rangle \in \mathrm{QRPr}(\mathcal{A},\mathrm{U})_{2,1}$. **

* gdw ** *folgt u. a. aus dem folgenden Hilfssatz 5.1.15.*

Ebenso beweist man $\quad \langle\, [\mathrm{x}]_{\mathrm{Q}}\,,\,[\mathrm{y}]_{\mathrm{Q}}\,\rangle \in \mathrm{QRPr}(\mathcal{A},\mathrm{U})_{2,1}$

gdw $\langle\, (\,[\mathrm{z}]_{\mathrm{Q}} \circ_{\mathrm{QRPr}(\mathcal{A},\mathrm{U})} [\mathrm{x}]_{\mathrm{Q}}\,),\,(\,[\mathrm{z}]_{\mathrm{Q}} \circ_{\mathrm{QRPr}(\mathcal{A},\mathrm{U})} [\mathrm{y}]_{\mathrm{Q}})\,\rangle \in \mathrm{QRPr}(\mathcal{A},\mathrm{U})_{2,1}$.

5.1.15 Hilfssatz.-

Für alle $\mathcal{A}$, U, x, y: Wenn $\mathcal{A}$ homogene Familie von Konkatstrukturen & U Ultrafilter auf $\mathbf{V}(\mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$ & $x, y \in \mathrm{CPr}_{i\in\mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\,(\mathcal{A}_{i,1})$, dann gilt:

$$[\,\langle\, x_i \circ_{\mathcal{A},i} y_i\,\rangle_{i\in\mathrm{Dom}(\mathcal{A})}\,]_{\approx(U,\mathcal{A})} = [\,x\,]_{\approx(U,\mathcal{A})} \circ_{\mathrm{QRPr}(\mathcal{A},U)} [\,y\,]_{\approx(U,\mathcal{A})}\,.$$

<u>Beweis:</u> Es werden die Voraussetzungen angenommen.

Es gilt: $$z \in [\langle x_i \circ_{\mathcal{A},i} y_i \rangle_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}]_{\approx(U,\mathcal{A})}$$

gdw $$\langle \langle x_i \circ_{\mathcal{A},i} y_i \rangle_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}, z \rangle \in \approx(U,\mathcal{A})$$

gdw $$\langle \langle x_i \circ_{\mathcal{A},i} y_i \rangle_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}, z \rangle \in \sim(U, \mathrm{Dom}(\mathcal{A})) \ \&$$

$$\langle \langle x_i \circ_{\mathcal{A},i} y_i \rangle_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}, z \rangle \in \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} (\mathcal{A}_{i,1}) \otimes \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} (\mathcal{A}_{i,1})$$

gdw $$\{ j \mid j \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \ \& \ \langle x_i \circ_{\mathcal{A},i} y_i \rangle_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} (j) = z_j \} \in U$$

gdw $$\{ i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \ \& \ \langle x_i, y_i, z_i \rangle \in \mathcal{A}_{i,2,2} \} \in U$$

gdw $$\langle x, y, z \rangle \in \mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} (\mathcal{A}_{i,2,2}, \mathcal{A}_{i,1}, U)$$

gdw $$\langle [x]_{\approx(U,\mathcal{A})}, [y]_{\approx(U,\mathcal{A})}, [z]_{\approx(U,\mathcal{A})} \rangle$$

$$\in \mathrm{QuotPräd}(\mathrm{RPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})}(\mathcal{A}_{i,2,2}, \mathcal{A}_{i,1}, U), \approx(U,\mathcal{A}))$$

gdw $$\langle [x]_{\approx(U,\mathcal{A})}, [y]_{\approx(U,\mathcal{A})}, [z]_{\approx(U,\mathcal{A})} \rangle$$

$$\in \mathrm{QRPPr}_{i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})} (\mathcal{A}_{i,2,2}, \mathcal{A}_{i,1}, U)$$

gdw $$\langle [x]_{\approx(U,\mathcal{A})}, [y]_{\approx(U,\mathcal{A})}, [z]_{\approx(U,\mathcal{A})} \rangle \in \mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, U)_{2,2}$$

gdw $$[z]_{\approx(U,\mathcal{A})} = [x]_{\approx(U,\mathcal{A})} \circ_{\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, U)} [y]_{\approx(U,\mathcal{A})}$$

gdw $$z \in [x]_{\approx(U,\mathcal{A})} \circ_{\mathrm{QRPr}(\mathcal{A}, U)} [y]_{\approx(U,\mathcal{A})} .$$

Aus Satz 5.1.11 folgt:

5.1.16 <u>Satz</u>.-

Sei S Sprache erster Stufe vom Typ $\langle \langle 2, 3 \rangle, \varnothing \rangle$; sei K die Klasse der PKS. Dann ist K in S nicht einstufig axiomatisierbar.

<u>Beweis:</u> Die Klasse K ist in S unter Ultraproduktbildung nicht abgeschlossen. Nach Satz 4.1.15(i) ist dann K keine einstufige Klasse von S und somit (Def. 4.1.2) auch nicht einstufig axiomatisierbar in S.

Im Folgenden wird nun bewiesen, dass auch die Klasse der **Dedekind-vollständigen Konkatstrukturen** nicht einstufig axiomatisierbar ist. (Für den Rest dieses Abschnitts wird 'Dedekind-Vollständigkeit' mit 'DED' abgekürzt.) Ein solcher Beweis ist insofern nicht überraschend, als man dem Axiom für DED seine Zweistufigkeit "ansieht"; denn es macht Aussagen über Teilmengen einer geordneten Struktur (Definition 5.1.5). Barwise (1977, S. 13) betont ausdrücklich, dass dieses Axiom das einzige zweistufige Axiom ist, in der Menge der Axiome, die die reellen Zahlen – bis auf Isomorphie – charakterisieren. Auch Narens (1985) weist wiederholt auf diese Zweistufigkeit hin; und auf den Seiten 315-316 deutet er eine Beweismöglichkeit an: "Let $\mathcal{Re} = \langle Re, +, \cdot, \geq \rangle$ be the ordered field of the real numbers. Let $\mathcal{L}$ be an appropriate countable first-order language for $\mathcal{Re}$ and Γ be the set of true sentences about $\mathcal{Re}$ in $\mathcal{L}$. Then by the downward Löwenheim-Skolem theorem, Γ has a countable model, i. e. there is a relational structure $\mathcal{Re}' = \langle Re', +', \cdot', \geq' \rangle$ that is a substructure of $\mathcal{Re}$ and is such that each sentence of Γ is true about $\mathcal{Re}'$. In particular, the set of sentences of $\mathcal{L}$ that say $\mathcal{Re}$ is an ordered field are in Γ. Now it is well known that each Dedekind complete ordered field is isomorphic to the reals and therefore is uncountable. Thus $\mathcal{Re}'$ is not Dedekind complete, i. e. "Dedekind completeness" cannot be defined in $\mathcal{L}$. In fact, the same argument shows that "Dedekind completeness" cannot be defined in any countable first-order language $\mathcal{L}'$ that contains $\mathcal{L}$."

Man könnte nun naiv spekulieren, ob DED in anderen Zusammenhängen nicht doch einstufig axiomatisierbar ist; in Analogie zu der Tatsache, dass 'Endlichkeit' zwar nicht einstufig axiomatisierbar ist (Satz 4.3.2), aber der Begriff 'endlicher Körper' ist rekursiv axiomatisierbar (Ax, 1968, nach Keisler, 1977, S. 51). Daher wird der Empfehlung von Dedekind gefolgt, dessen Namen das fragliche Axiom in der messtheoretischen Literatur trägt, und der in seinem berühmten Aufsatz "Was sind und was sollen die Zahlen?" (1888) im ersten Satz des Vorwortes gefordert hat: "Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden." Weiterhin wird versucht, mit ein paar kursorischen Anmerkungen die Relevanz des Axioms für die Messtheorie anzudeuten. Die Beispiele, auf die Bezug genommen wird, stammen dabei hauptsächlich aus drei Lehrbüchern. Erstens und zweitens dem ersten und dem dritten Band des Standardwerkes *"Foundations of Measurement"* Band I von Krantz, Luce, Suppes und Tversky (1971) und Band III von Luce, Krantz, Suppes und Tversky (1990). Und drittens dem Lehrbuch von Narens (1985) *"Abstract Measurement Theory"*.

Metaphorisch lässt sich sagen, dass das Axiom für **DED** verantwortlich ist für die Singularität der **reellen Zahlen**. Denn die einstufigen Axiome (und deren Folgerungen), die ausdrücken, dass $\langle \mathbb{R} \langle +. \cdot \rangle \rangle$ ein Körper ist und dass $\leq_R$ eine lineare Anordnung auf $\mathbb{R}$ ist, die mit Addition und Multiplikation verträglich ist, sind mit den Axiomen und den Folgerungen der Theorie der reell-abgeschlossenen Körper (RLC) identisch (Rabin, 1977, S. 610). Wobei sich die Axiomensätze, mit denen die Theorie der reell-abgeschlossenen (angeordneten) Körper formuliert wird, leicht unterscheiden können. Die Formulierung von Chang und Keisler (1990, S. 41) und die von Rabin (1977, S. 609) sind hierfür ein Beispiel. Nun ist die Theorie RLC vollständig$_1$ (im Sinne von Definition 2.3.41) und entscheidbar, aber nicht kategorisch in irgendeiner Kardinalität (Rabin, S. 609). Die einstufige Theorie der reellen Zahlen ist somit auch vollständig$_1$ und entscheidbar, nimmt man aber das Axiom für DED hinzu, so führt das – unter anderem – dazu, dass alle Modelle dieser Theorie isomorph sind (Mainzer, S. 42). Wobei es für die Formulierung der Vollständigkeit$_2$ (der reellen Zahlen) äquivalente Formulierungen gibt. Für die Messtheorie ist dabei wichtig, dass DED äquivalent ist zu (Archimedizität und der Eigenschaft, dass alle Cauchyfolgen konvergieren) (Mainzer, S. 40). Vollständigkeit$_2$ in diesem Sinne drückt Hilbert (1900, S. 183) so aus: "Es ist nicht möglich, dem System der Zahlen ein anderes System von Dingen hinzuzufügen, so daß auch in dem durch Zusammensetzung entstehenden Systeme die Axiome ... sämtlich erfüllt sind; oder kurz: die Zahlen bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicher Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist."

Die Meinung der Autoren der *"Foundations of Measurement"* zur Frage, welche Rolle **DED** in der **allgemeinen Messtheorie** einnehmen soll, wird deutlich im Kapitel 21 des dritten Bandes über *"Axiomatization"* ausgedrückt. Hier argumentieren sie dafür, kategorische Theorien zu vermeiden. S. 247: "The reason for this attitude in the theory of measurement is apparent: diverse empirical applications are intended, and it would be surprising if different applications led to isomorphic models of the theory. The same attitude is strikingly evident in physics. The theory of mechanics or any other branch of physics, is applicable to physical situations that have quite different and boundary conditions. Unless the object of physics is to create the one true model of the entire universe, categoricity of a physical theory is a defect, not a virtue." Diese Haltung ist vermutlich einer der Gründe, warum die Autoren im ersten Band der *"Foundations"* Hölders (1901) System für extensive Größen nicht übernehmen, sondern einen eigenen Axiomensatz entwerfen. Hölders Axiom VII ist äquivalent zu DED, wie Hölder selber angibt (S. 12) und "consequently, it can be proved that any two models of his axioms for extensive measurement are isomorphic" (Luce *et al.*, S. 247). Das Bestreben, in der Messtheorie kategorische Theorien zu vermeiden zieht nun die Wichtigkeit des Archimedischen Axioms nach sich; denn Luce *et al.* (S. 248) argumentieren im Kapitel über Axiomatisierung weiter: "So the situation is this. To characterize the real numbers we need an axiom of completeness, which implies *the* Archimedean axiom for real numbers but is not implied by it ... . But such a strong completeness axiom is not appropriate for measurement structures because we do not want the theory to be categorical. In general, diverse models are required for divers applications. On the other hand, some axiom, which we are unable to formulate in elementary logic, is required for proof that infinite structures of a given class can be embedded in the system of real numbers. *The* Archimedean axiom plays this role very well. There is, of course, no unique Archimedean axiom, as the various examples in Volume I demonstrate, but the thrust of all variations is the same; consequently, we shall continue to speak of *the* Archimedean axiom".

Es werden nun noch einige globale Einschätzungen des Axioms für DED zitiert, bevor in den nächsten Absätzen konkretere Zusammenhänge angeführt werden, in denen dieses Axiom benützt wird.

Auf Seite 33 des dritten Bandes der *'Foundations"* wird eine Eigenschaft dieses Axioms angeführt: "... its function is to force the structure to be representable by a whole real interval rather than by a ragged set of real numbers. As such, it is invariably an idealization; for instance, in the gambling example, we assumed that amounts of money are indefinitely divisible in order to obtain a mixture operation in which Dedekind completeness is satisfied. This idealization leads to a far simpler mathematical structure and thus facilitates other investigations."

Die längste Textstelle in Narens (1985) in der er über DED redet (S. 146): " ... *Dedekind completeness* is a useful and powerful condition. However, from a measurement-theoretic viewpoint, *Dedekind completeness* is a very strong and perhaps unwarranted condition. This is because measurement theory is concerned with empirical processes and their idealizations, and since by their nature, empirical processes are finite, their idealizations should be potentially infinite, or, from one point of view, at most denumerable infinite. But as we have seen in Section 2, Dedekind completeness and reasonable density conditions yield ordered sets of order type θ, which be Theorem 2.2 are isomorphic to $\langle Re^{+}, \geq \rangle$, i. e. Dedekind completeness usually implies the existence of uncountable sets. Nevertheless, Dedekind completeness is routinely invoked in the descriptions of empirical situations, and apparently without ill consequences."

Um nun auf etwas konkretere Zusammenhänge einzugehen, so hat das Axiom für DED bei gewissen Axiomatisierungsbemühungen eine Art Leitfunktion: DED wird einerseits als zu stark angesehen, als nicht adäquat für empirische Messsituationen; daher wird DED nicht im Definiens bei Definitionen gefordert, mit denen Strukturen benannt und festgelegt werden, deren Abbildbarkeit dann in einem Repräsentationssatz behauptet und gezeigt wird. Andererseits möchte man aber formale Ziel- / Bildstrukturen haben, die Dedekind-vollständig sind, "... to achieve measurement onto real intervals, to permit use of standard mathematical machinery, for example, functional or differential equations" (Luce *et al.,* S. 48). So gilt es, schwächere Bedingungen zu finden, die Einbettbarkeit in Dedekind-vollständigen Strukturen ermöglichen, "... much as the rationals are embeddable in the reals ..." (Luce *et al.,* S. 49). Narens (1985, Ss. 147-155) definiert Bedingungen, unter denen total geordnete positive Konkatenationsstrukturen (definiert im Sinne von Narens S. 73) erweiterbar sind zu Dedekind-vollständigen, total geordneten, positiven Konkatenationsstrukturen, in die die Ausgangsstruktur ordnungsdicht einbettbar ist (Theorem 13.1 auf S. 153). Ein analoges Verfahren konzipieren Luce et al. im Abschnitt 19.4 (Ss. 48-56) für PCSs; wobei sich die beiden Verfahren unterscheiden, schon weil die beiden Begriffe 'positive Konkatenationsstruktur' bei Narens und 'PCS' bei Luce et al. verschieden definiert sind.

Einen etwas anderen Charakter besitzt das Axiom für DED bei der Betrachtung von **Eindeutigkeitsfragen.** Hier hat Narens (1981a, 1981b) gezeigt, dass der Begriff der Eindeutigkeit einer Zuordnung von formalen Gegenständen in zwei Teilbegriffe aufzuspalten ist: dem der Homogenität und dem der Eindeutigkeit (uniqueness). Der Skalentyp einer Struktur $\mathcal{A}$ wird nun so definiert, indem man ganze Zahlen *M, N* angibt und formuliert, dass eine Struktur $\mathcal{A}$ vom Skalentyp *(M, N)* ist, wenn der höchste Grad der Homogenität von $\mathcal{A}$ *M* und der niedrigste Grad der Eindeutigkeit *N* ist (Luce *et al.,* S. 116). Erkenntnisse über Homogenität und Eindeutigkeit einer Klasse von Strukturen liefert die Untersuchung der Automorphismengruppe der Strukturklasse. Und eine wichtige Eigenschaft dieser Funktionenklasse der Automorphismen ist die Erfüllung oder Nichterfüllung der DED. Nun sind die Individuen einer Automorphismengruppe spezielle Funktionen; und zwar isomorphe Einbettungen einer Struktur $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$; darauf bezieht sich die Anmutung, dass diese Individuen sich von den Individuen einer zu repräsentierenden Struktur unterscheiden; was das begrifflich bedeutet, bedarf einer eigenen Untersuchung.

Nun kommen zu den Eigenschaften der zu repräsentierenden Strukturen noch die – nur teilweise verschiedenen – Eigenschaften ihrer Automorphismengruppen hinzu und die Befunde, die die logischen Abhängigkeiten zwischen diesen Eigenschaften betreffen sind reichhaltig, so dass sich diese Ergebnisse schwerlich zusammenfassen lassen, daher soll die Wichtigkeit des Axioms für DED bei Untersuchungen zur Eindeutigkeit und zu Skalenfragen durch ein Zitat belegt werden: "the question of which structures can be Dedekind completed without altering the scale type is of great importance" (Luce *et al.,* S. 121).

Zum Problem **DED und Bedeutsamkeitstheoreme (meaningfulness)** ist hauptsächlich auf Abschnitt 14 im 2. Kapitel im Lehrtext von Narens (1985) über *"Abstract Measurement Theory"* und auf Kapitel 21in Luce *et al.* über *"Invariance and Meaningfulness"* zu verweisen. Narens definiert und diskutiert drei verschiedene Begriffe für Bedeutsamkeit. Vor allem zeigt sich dabei, dass die wissenschaftstheoretische Bedeutsamkeit der Bedeutsamkeitstheoreme weit mehr umfasst als die Eigenschaft, Schnittstelle zur Interferenzstatistik zu sein. Der Stellenwert des Axioms für DED wird dabei u. a. von Narens darin gesehen (S. 156): "Since there are strong connections between automorphisms of a qualitative structure and these standard meaningfulness concepts, certain theorems about Dedekind completions of qualitative structures have important meaningfulness ramifications ...".

5.1.17 Theorem.-

Für alle K: Wenn K die Klasse der Dedekind-vollständigen Konkatstrukturen ist, dann gibt es eine Familie von Strukturen aus K, deren Ultrapotenz nicht Dedekind-vollständig ist.

Beweis: Sei K die Klasse der Dedekind-vollständigen Konkatstrukturen. Seien $\mathfrak{R}$ und $\mathcal{N}$ wie in den Definitionen 5.1.7 und 5.1.9 festgelegt. Dann folgt mit Hilfssatz 5.1.10, dass $\mathcal{N}$ eine Familie von Strukturen aus K ist.

Sei $$\mathrm{E} = \{ X \mid X \subseteq \mathbb{N} \;\&\; (\mathbb{N} \setminus X) \text{ endlich} \}.$$

Dann beweist man wie im Beweis für Satz 5.1.11:

$$\mathrm{E} = \mathbf{V}(\mathbb{N})_1 \;\&\; \mathrm{E} \text{ ist in } \mathbf{V}(\mathbb{N}) \text{ unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer.}$$

Dann folgt mit dem Ultrafiltertheorem 3.2.15:

$$\exists U\, (\, U \text{ ist Ultrafilter auf dem BOOLEschen Verband } \mathbf{V}(\mathbb{N}) \;\&\; \mathrm{E} \subseteq U\,).$$

Sei U so.

Nun ist $\mathfrak{R}$ Konkatstruktur, U ist Ultrafilter auf $\mathbf{V}(\mathbb{N})$ und QRPr($\mathcal{N}$, U) ist Ultrapotenz der Familie $\mathcal{N}$ modulo U. Dann folgt mit Satz 5.1.14:

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{N}, \mathrm{U}) \text{ ist Konkatstruktur.}$$

Es bleibt zu zeigen, dass QRPr($\mathcal{N}$, U) Dedekind-unvollständig und somit nicht Element von K ist. Dies geschieht, indem von der nichtleeren, echten Teilklasse

$$\{\, [\, \langle a \rangle_{i \in \mathbb{N}} \,]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})} \,\}_{a \in \mathbb{N}+} \text{ von } \mathrm{Quot}(\approx(\mathrm{U},\mathcal{N}))$$

gezeigt wird, dass sie kein Supremum in

$$\langle \mathrm{Quot}(\, \approx(\mathrm{U},\mathcal{N})\,),\, \langle \mathrm{QRPPr}_{i \in \mathbb{N}}\, (\mathring{\lesssim}_{\mathbb{N}+}\,, \mathbb{N}^{+}, \mathrm{U})\,\rangle, \varnothing \,\rangle \qquad \text{besitzt.}$$

Es gilt

$$\exists x\,(\,x \in \mathrm{Quot}(\,\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})\,)\ \&\ x \text{ ist obere Schranke von } \{\,[\,\langle a\,\rangle_{i\in\mathbb{N}}\,]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}\,\}_{a\in\mathbb{N}+} \text{ in}$$

$$\langle \mathrm{Quot}(\,\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})\,), \langle \mathrm{QRPPr}_{i\in\mathbb{N}}\,(\overset{\circ}{\leq}_{\mathbb{N}+}, \mathbb{N}^+, \mathrm{U})\,\rangle, \varnothing\,\rangle\,).$$

Denn z. B. ist $[\,\langle\, i\,\rangle_{i\in\mathbb{N}}\,]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}$ eine solche obere Schranke; denn für ein beliebiges $a \in \mathbb{N}^+$

gilt: $\langle\,[\,\langle a\,\rangle_{i\in\mathbb{N}}\,]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}\,, [\,\langle\, i\,\rangle_{i\in\mathbb{N}}\,]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}\,\rangle \in \mathrm{QRPPr}_{i\in\mathbb{N}}\,(\overset{\circ}{\leq}_{\mathbb{N}+}, \mathbb{N}^+, \mathrm{U})$,

da für $\langle a\,\rangle_{i\in\mathbb{N}} \in [\,\langle a\,\rangle_{i\in\mathbb{N}}\,]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}$

und für $\langle\, i\,\rangle_{i\in\mathbb{N}} \in [\,\langle\, i\,\rangle_{i\in\mathbb{N}}\,]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}$ gilt:

$$\{j \mid j\in\mathbb{N}\ \&\ \langle\,\langle\, a\,\rangle_{i\in\mathbb{N}}\,(j), \langle\, i\,\rangle_{i\in\mathbb{N}}\,(j)\,\rangle \in \overset{\circ}{\leq}_{\mathbb{N}+}\,\} \in \mathrm{U},$$ weil

$$\{j \mid j\in\mathbb{N}\ \&\ \langle\,\langle\, a\,\rangle_{i\in\mathbb{N}}\,(j), \langle\, i\,\rangle_{i\in\mathbb{N}}\,(j)\,\rangle \in \overset{\circ}{\leq}_{\mathbb{N}+}\,\} \in \mathrm{E} \subseteq \mathrm{U}.$$

Nun wird indirekt bewiesen, dass gilt:

$$\text{nicht } \exists y\,(\,y \text{ ist Supremum für } \{\,[\,\langle a\,\rangle_{i\in\mathbb{N}}\,]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}\,\}_{a\in\mathbb{N}+} \text{ in}$$

$$\langle \mathrm{Quot}(\,\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})\,), \langle \mathrm{QRPPr}_{i\in\mathbb{N}}\,(\overset{\circ}{\leq}_{\mathbb{N}+}, \mathbb{N}^+, \mathrm{U})\,\rangle, \varnothing\,\rangle\,).$$

Angenommen, $\exists y\,(\,y$ ist Supremum für $\{\,[\,\langle a\,\rangle_{i\in\mathbb{N}}\,]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}\,\}_{a\in\mathbb{N}+}$ in

$$\langle \mathrm{Quot}(\,\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})\,), \langle \mathrm{QRPPr}_{i\in\mathbb{N}}\,(\overset{\circ}{\leq}_{\mathbb{N}+}, \mathbb{N}^+, \mathrm{U})\,\rangle, \varnothing\,\rangle\,).$$

Sei y so.

Dann ist y obere Schranke von $\{\,[\,\langle a\,\rangle_{i\in\mathbb{N}}\,]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}\,\}_{a\in\mathbb{N}+}$ in

$$\langle \mathrm{Quot}(\,\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})\,), \langle \mathrm{QRPPr}_{i\in\mathbb{N}}\,(\overset{\circ}{\leq}_{\mathbb{N}+}, \mathbb{N}^+, \mathrm{U})\,\rangle, \varnothing\,\rangle\,).$$

Dann ist $\mathrm{y} \in \mathrm{Quot}\,(\approx(\mathrm{U},\mathcal{N}))$.

Dann $\exists x\,(\,x \in \mathrm{CPr}_{i\in\mathbb{N}}\,(\mathbb{N}^+)\ \&\ \mathrm{y} = [x]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}\,)$.

Sei x so.

Nun gilt: $\exists h\,(h$ ist Funktion auf $\mathbb{N}$ &

$$\forall i\,(\,i\in\mathbb{N}\ \&\ \mathrm{x}_i >_{\mathbb{N}} 1 \Rightarrow h_i = \mathrm{x}_i \dot{-}_{\mathbb{N}} 1\,)\ \&$$

$$\forall i\,(\,i\in\mathbb{N}\ \&\ \mathrm{x}_i = 1 \Rightarrow h_i = \mathrm{x}_i)\,).$$

Sei h so.

Um zu zeigen, dass y nicht Supremum von $\{ [\langle a \rangle_{i\in\mathbb{N}}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})} \}_{a\in\mathbb{N}+}$ in QRPr($\mathcal{N}$, U) ist, werden die beiden Behauptungen (A) und (B) bewiesen:

(A) $[\mathrm{h}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}$ ist obere Schranke von $\{ [\langle a \rangle_{i\in\mathbb{N}}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})} \}_{a\in\mathbb{N}+}$ in QRPr($\mathcal{N}$, U).

(B) $\langle \mathrm{y}, [\mathrm{h}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})} \rangle \notin \mathrm{QRPr}(\mathcal{N}, \mathrm{U})_{2,1}$.

Zu (A) wird nun

$$\forall a\,(a \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow \langle [\langle a \rangle_{i\in\mathbb{N}}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}, [\mathrm{h}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})} \rangle \in \mathrm{QRPPr}_{i\in\mathbb{N}}\,(\mathring{\lesssim}_{\mathbb{N}+}, \mathbb{N}^+, \mathrm{U})\,)$$

bewiesen.

Sei a $\in \mathbb{N}^+$. Dann ist a $+_{\mathbb{N}}$ 1 $\in \mathbb{N}^+$.

Es ist $[\mathrm{x}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}$ obere Schranke von $\{ [\langle a \rangle_{i\in\mathbb{N}}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})} \}_{a\in\mathbb{N}+}$ in

$$\langle \mathrm{Quot}(\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})), \langle \mathrm{QRPPr}_{i\in\mathbb{N}}\,(\mathring{\lesssim}_{\mathbb{N}+}, \mathbb{N}^+, \mathrm{U}) \rangle, \varnothing \rangle).$$

Dann ist $\langle [\langle \mathrm{a}+1 \rangle_{i\in\mathbb{N}}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}, [\mathrm{x}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})} \rangle \in \mathrm{QRPPr}_{i\in\mathbb{N}}\,(\mathring{\lesssim}_{\mathbb{N}+}, \mathbb{N}^+, \mathrm{U})$;

dann $\{ j \mid j\in\mathbb{N} \;\&\; \langle \langle \mathrm{a}+1 \rangle_{i\in\mathbb{N}}(j), \mathrm{x}_j \rangle \in \mathring{\lesssim}_{\mathbb{N}+} \} \in \mathrm{U}$.

Nun gilt
$$\{ j \mid j\in\mathbb{N} \;\&\; \langle \langle \mathrm{a}+1 \rangle_{i\in\mathbb{N}}(j), \mathrm{x}_j \rangle \in \mathring{\lesssim}_{\mathbb{N}+} \} \subseteq$$
$$\subseteq \{ j \mid j\in\mathbb{N} \;\&\; \langle \langle \mathrm{a} \rangle_{i\in\mathbb{N}}(j), \mathrm{h}_j \rangle \in \mathring{\lesssim}_{\mathbb{N}+} \}.$$

Denn es gilt:

$$\{ j \mid j\in\mathbb{N} \;\&\; \mathrm{x}_j = 1 \;\&\; \langle \langle \mathrm{a}+1 \rangle_{i\in\mathbb{N}}(j), \mathrm{x}_j \rangle \in \mathring{\lesssim}_{\mathbb{N}+} \} = \varnothing \qquad \&$$
$$\{ j \mid j\in\mathbb{N} \;\&\; 1 <_{\mathbb{N}} \mathrm{x}_j \;\&\; \langle \langle \mathrm{a}+1 \rangle_{i\in\mathbb{N}}(j), \mathrm{x}_j \rangle \in \mathring{\lesssim}_{\mathbb{N}+} \} \subseteq$$
$$\subseteq \{ j \mid j\in\mathbb{N} \;\&\; \langle \langle \mathrm{a} \rangle_{i\in\mathbb{N}}(j), \mathrm{h}_j \rangle \in \mathring{\lesssim}_{\mathbb{N}+} \}.$$

Und da $\{ j \mid j\in\mathbb{N} \;\&\; \langle \langle \mathrm{a}+1 \rangle_{i\in\mathbb{N}}(j), \mathrm{x}_j \rangle \in \mathring{\lesssim}_{\mathbb{N}+} \} \in \mathrm{U}$,

folgt mit Filtereigenschaft 3.2.1 (4):

$$\{ j \mid j\in\mathbb{N} \;\&\; \langle \langle \mathrm{a} \rangle_{i\in\mathbb{N}}(j), \mathrm{h}_j \rangle \in \mathring{\lesssim}_{\mathbb{N}+} \} \in \mathrm{U}.$$

Dann $\langle [\langle a \rangle_{i\in\mathbb{N}}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})}, [\mathrm{h}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})} \rangle \in \mathrm{QRPPr}_{i\in\mathbb{N}}\,(\mathring{\lesssim}_{\mathbb{N}+}, \mathbb{N}^+, \mathrm{U})$),

und Behauptung (A) ist bewiesen.

Nun wird (B) indirekt bewiesen.

Angenommen $\langle\, y, [h]_{\approx(U,\mathcal{N})} \rangle \in \mathrm{QRPr}(\mathcal{N}, U)_{2,1}$.

Dann gilt $\langle\, [x]_{\approx(U,\mathcal{N})}, [h]_{\approx(U,\mathcal{N})} \rangle \in \mathrm{QRPr}(\mathcal{N}, U)_{2,1}$;

dann $\{\, i \mid i \in \mathbb{N} \;\&\; \langle x_i, h_i \rangle \in \mathring{\leq}_{\mathbb{N}+} \} \in U$.

Es gilt $\{\, i \mid i \in \mathbb{N} \;\&\; x_i \neq 1 \,\} \in U$.

Denn wenn $\{\, i \mid i \in \mathbb{N} \;\&\; x_i = 1 \,\} \in U$,

dann würde es ein $a \in \mathbb{N}^+$ geben, so dass

$$\{\, i \mid i \in \mathbb{N} \;\&\; \langle x_i, \langle a \rangle_{j \in \mathbb{N}}\,(i) \rangle \in \mathring{\leq}_{\mathbb{N}+} \} \in U.$$

Sei a so.

Dann würde

$$\langle\, [x]_{\approx(U,\mathcal{N})}, [\langle a \rangle_{j \in \mathbb{N}}\,]_{\approx(U,\mathcal{N})} \rangle \in \mathrm{QRPPr}_{i \in \mathbb{N}}\,(\mathring{\leq}_{\mathbb{N}+}, \mathbb{N}^+, U)$$

folgen, im Widerspruch zur Annahme:

$$[x]_{\approx(U,\mathcal{N})} \text{ obere Schranke von } \{\, [\,\langle a \rangle_{i \in \mathbb{N}}\,]_{\approx(U,\mathcal{N})} \}_{a \in \mathbb{N}+} \text{ in}$$

$$\langle \mathrm{Quot}(\approx(U,\mathcal{N})), \langle \mathrm{QRPPr}_{i \in \mathbb{N}}\,(\mathring{\leq}_{\mathbb{N}+}, \mathbb{N}^+, U) \rangle, \varnothing \rangle.$$

Also gilt $\{\, i \mid i \in \mathbb{N} \;\&\; x_i \neq 1 \,\} \in U$.

Und mit $\{\, i \mid i \in \mathbb{N} \;\&\; \langle x_i, h_i \rangle \in \mathring{\leq}_{\mathbb{N}+} \} \in U$

folgt $\{\, i \mid i \in \mathbb{N} \;\&\; \langle x_i, h_i \rangle \in \mathring{\leq}_{\mathbb{N}+} \;\&\; x_i \neq 1 \,\} \in U$.

D. h. $\{\, i \mid i \in \mathbb{N} \;\&\; \langle x_i, x_i -_{\mathbb{N}} 1 \rangle \in \mathring{\leq}_{\mathbb{N}+} \;\&\; x_i \neq 1 \,\} \in U$.

Nun gilt aber $\{\, i \mid i \in \mathbb{N} \;\&\; \langle x_i, x_i -_{\mathbb{N}} 1 \rangle \in \mathring{\leq}_{\mathbb{N}+} \;\&\; x_i \neq 1 \,\} = \varnothing$,

und es folgt $\varnothing \in U$.

U ist aber Ultrafilter auf $\mathbf{V}(\mathbb{N})$, also maximaler echter Filter (3.2.13). Für diese Art Filter

gilt nach 3.2.10: $0_{\mathbf{V}(\mathbb{N})} \notin U$.

Und mit Satz 3.2.16 folgt: $\varnothing \notin U$.

Damit ist ein Widerspruch zu $\varnothing \in U$ abgeleitet.

Somit gilt $\langle\, y, [h]_{\approx(U,\mathcal{N})} \rangle \in \mathrm{QRPr}(\mathcal{N}, U)_{2,1}$ nicht und y ist nicht Supremum von $\{ [\langle a \rangle_{i \in \mathrm{N}}]_{\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})} \}_{a \in \mathrm{N}+}$ in

$$\langle \mathrm{Quot}(\approx(\mathrm{U},\mathcal{N})), \langle \mathrm{QRPPr}_{i \in \mathrm{N}} (\mathring{\leq}_{\mathrm{N}+} , \mathrm{N}^{+}, \mathrm{U}) \rangle, \varnothing \rangle).$$

Und es ist gezeigt, dass $\mathrm{QRPr}(\mathcal{N}, \mathrm{U})$ Konkatstruktur ist, die nicht Dedekind-vollständig ist und somit nicht in K ist, wenn K die Klasse der Dedekind-vollständigen Konkatstrukturen ist.

□

Daraus folgt:

5.1.18 Satz.-

Sei S Sprache erster Stufe vom Typ $\mu = \langle \langle 2, 3 \rangle, \varnothing \rangle$; sei K die Klasse der Dedekind-vollständigen Konkatstrukturen.

Dann ist K in S nicht einstufig axiomatisierbar.

Beweis: Die Klasse K ist in S unter Ultraproduktbildung nicht abgeschlossen. Nach Satz 4.1.15(i) ist dann K keine einstufige Klasse von S und somit (Definition 4.1.2) auch nicht einstufig axiomatisierbar in S.

5.2 Zum Begriff der Metrisierbarkeit

Abschnitt 5.2 enthält Untersuchungen zum Begriff der Metrisierbarkeit. Ausgangspunkt dieser Untersuchungen ist eine Definition des Begriffs *Klasse metrisierbarer$_1$ Strukturen* im Anschluss an eine entsprechende Definition in Luce et al. *Foundations of Measurement III*. Die Definition lautet (Definition 5.2.1):

K ist eine Klasse metrisierbarer$_1$ Strukturen

gdw (1) K ist eine homogene Klasse von Strukturen & $\mathbf{II}(K) \subseteq K$ &

(2) $\exists \mathcal{R}($ $\mathcal{R}$ numerische Struktur vom Typ typ°(K) &

$\forall \mathcal{A}\,(\mathcal{A} \in K \Rightarrow \mathcal{A}$ ist in $\mathcal{R}$ homomorph einbettbar)).

Diese Definition ist nicht adäquat. Dies wird mit einem Gegenbeispiel gezeigt (Definition 5.2.2 und Theorem 5.2.3). Um die Definition zu verbessern, wird im Anschluss an einen Vorschlag von Suppes ein allgemeiner Repräsentationsbegriff definiert (Definition 5.2.4), als Spezialfall davon ein Begriff *Klasse metrisierbarer$_{1a}$ Strukturen,* dessen Definiens logisch vereinfacht, und schließlich der Begriff *Klasse metisierbarer$_2$ Strukturen* definiert (Definition 5.2.7):

K ist eine Klasse metrisierbarer$_2$ Strukturen

gdw

(1) K ist homogene Klasse von Strukturen & $\mathbf{II}(K) \subseteq K$ &

(2) $\forall \mathcal{A}\,(\mathcal{A} \in K \Rightarrow \exists \mathcal{R}($ $\mathcal{R}$ ist numerische Struktur & $\mathcal{A}$ ist in $\mathcal{R}$ homomorph einbettbar)).

Auch diese Definition ist nicht adäquat. Zur Begründung wird am Beispiel einer sehr einfachen lexikographischen Ordnung, welche eine strikte totale Ordnung ist, bewiesen, dass die Klasse der strikten totalen Ordnungen keine metrisierbare$_2$ Klasse von Strukturen ist (Defintionen und Sätze von 5.2.8 bis 5.2.17). Dagegen ist die Klasse der strikten totalen Ordnungen mit abzählbarem Bereich metrisierbar, wie schon Cantor bewiesen hat.

In der vorliegenden Arbeit wird eine andere Option weiterverfolgt, nämlich als homomorphe Bilder Ultrapotenzen einer numerischen Struktur zu verwenden. Nach Theorem 3.3.24 kann man dadurch Strukturen beliebig hoher Kardinalität erzeugen. In Verfolgung dieser Idee wird eine weitere Definition des Begriffs der Metrisierbarkeit vorgeschlagen (Definition 5.2.20):

K ist eine in einer Ultrapotenz einer numerischen Struktur metrisierbare Klasse von Strukturen

gdw

(1) K ist eine homogene Klasse von Strukturen & $\mathbf{II}(K) \subseteq K$ &

b) $\forall \mathcal{A}\,(\mathcal{A} \in K \Rightarrow \exists \mathcal{R} \exists I \exists U\,($ $\mathcal{R}$ ist numerische Struktur des Typs typ°(K) & U ist Ultrafilter in $\mathbf{V}(I)$ & $\mathcal{A}$ ist in $\mathrm{QRPr}(\langle \mathcal{R} \rangle_{i \in I}, U)$ homomorph einbettbar)).

Auch diese Definition ist wohl nicht adäquat. Zur Begründung wird ein Trivialisierungstheorem bewiesen, welches besagt, dass die Klasse *aller* Strukturen $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_3 = \emptyset$ eine in einer Ultrapotenz einer numerischen Struktur metrisierbare Klasse von Strukturen ist (Theorem 5.2.24).

Nachdem im ersten Band der *Foundations of Measurement* von Krantz, Luce, Suppes & Tversky (1971) ausdrücklich auf eine Definition des Begriffs der Mess- / Metrisierbarkeit (s. u.) verzichtet wurde (S. 13), wird im dritten Band von Luce, Krantz, Suppes & Tversky (1990, S. 225) an die einschlägige Argumentation in Suppes (1957, S. 263 und S. 265) und die Definition von Scott & Suppes (1958) angeknüpft und es wird festgelegt, was unter einer Klasse von messbaren Strukturen verstanden werden soll:

> "DEFINITION 1. *Let L be an elementary language. Then a nonempty class K of models of L is a class of measurement structures (with respect to L) iff*
>
> (i) *K is closed under isomorphism, i. e., if $\mathfrak{A}$ is in K and $\mathfrak{A}'$ is isomorphic to $\mathfrak{A}$, then $\mathfrak{A}'$ is in K; and*
>
> (ii) *there is a numerical model $\mathfrak{R}$ of L, i. e., a model of L whose domain is the set of real numbers, such that all models in K are homomorphically embedable in $\mathfrak{R}$.*"
>
> Luce et al., 1990, S. 225.

Angepasst an die vorliegende, mengentheoretische Sprache, und mit dem Index 1 versehen, ohne Bezugnahme auf die Sprache, da in der vorliegenden Arbeit Strukturen einen Typ haben, lautet die Definition folgendermaßen:

5.2.1 Definition.-

K ist eine Klasse metrisierbarer$_1$ Strukturen

gdw

(1) *K ist eine homogene Klasse von Strukturen* & $\mathbf{II}(K) \subseteq K$ &

(2) $\exists \mathcal{R}$($\mathcal{R}$ *numerische Struktur vom Typ* $typ^{\circ}(K)$ &

$\forall \mathcal{A}\,(\mathcal{A} \in K \Rightarrow \mathcal{A}$ *ist in* $\mathcal{R}$ *homomorph einbettbar*)).

Die Definition 5.2.1 ist ein Beispiel für eine gewisse Uneinheitlichkeit im Umgang mit wissenschaftstheoretischen Begriffen. U. a. beim Gebrauch der Begriffe ‘Messung’ und ‘Metrisierung’. Stegmüller (1970, Teil A, S. 46) schreibt hierzu:

> “Die Einführung eines quantitativen Begriffs für einen Bereich von Objekten wird auch als Metrisierung bezeichnet. Von der Metrisierung ist die *Messung* zu unterscheiden, worunter man den *empirischen Prozeß der Bestimmung eines Größenwertes* versteht. Messungen können erst vorgenommen werden, wenn bereits eine Metrisierung vorliegt. Leider bezeichnen viele Autoren das, was wir Metrisierung nennen, als Messung. Es ist nicht verwunderlich, dass bei einer derartigen irreführenden Terminologie leicht Begriffsverwirrungen entstanden sind.”

Wir halten die Definition 5.2.1 für inadäquat, denn sie fordert, dass es **ein** numerisches Modell gibt, in das **alle** zu metrisierenden Strukturen homomorph einbettbar sind. Wir zeigen dies mit Hilfe von einfache Ordnungsstrukturen auf den natürlichen Zahlen. Nur für diesen Satz 5.2.3 sollen die folgenden Individuenkonstanten so definiert sein:

5.2.2 <u>Definitionen</u>.-

$\mathcal{A}* = \langle \mathbb{N}, \langle \mathring{\leq}_{\mathbb{N}} \rangle, \{(\varnothing, 0)\} \rangle$;

$\mathcal{B}* = \langle \mathbb{N}, \langle \mathring{<}_{\mathbb{N}} \rangle, \{(\varnothing, 0)\} \rangle$;

$K* = \mathbf{I}(\mathcal{A}*) \cup \mathbf{I}(\mathcal{B}*)$.

5.2.3 <u>Satz</u>.-

K* ist keine Klasse metrisierbarer$_1$ Strukturen.

Beweis: K* eine homogene Klasse von Strukturen des Typs $\langle\langle 2\rangle, \{\emptyset\}\rangle$ und es gilt

$$\mathbf{II}(K^*) \subseteq K^*.$$

Angenommen, K* ist metrisierbar$_1$.

Dann $\exists \mathcal{R}(\ \mathcal{R}$ numerische Struktur &

& $\forall \mathcal{A}\ (\mathcal{A} \in K^* \Rightarrow \exists h\ (\ h$ ist homomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{R})\ )\ )$.

Sei $\mathcal{R}$ so.

Dann gilt $\exists h\ (\ h$ ist homomorphe Einbettung von $\mathcal{A}^*$ in $\mathcal{R}\ )$.

Sei h so.

Weiterhin gilt $\exists h\ (\ h$ ist homomorphe Einbettung von $\mathcal{B}^*$ in $\mathcal{R}\ )$.

Sei h' so.

Dann gilt

$$\forall x\, \forall y\ (\ x, y \in \mathcal{A}^*_1 \Rightarrow (\ \langle x, y\rangle \in \mathcal{A}^*_{2,1} \Leftrightarrow \langle h(x), h(y)\rangle \in \mathcal{R}_{2,1}\ )\ )\ \&$$

$$\forall x\, \forall y\ (\ x, y \in \mathcal{B}^*_1 \Rightarrow (\ \langle x, y\rangle \in \mathcal{B}^*_{2,1} \Leftrightarrow \langle h'(x), h'(y)\rangle \in \mathcal{R}_{2,1}\ )\ ).$$

Dann folgt mit

$$0 \in \mathcal{A}^*_1\ \&\ 0 \in \mathcal{B}^*_1\ \&\ \langle 0, 0\rangle \in \mathcal{A}^*_{2,1}\ \&\ \langle 0, 0\rangle \notin \mathcal{B}^*_{2,1} :$$

$$\langle h(0), h(0)\rangle \in \mathcal{R}_{2,1}\ \&\ \langle h'(0), h'(0)\rangle \notin \mathcal{R}_{2,1}\ .$$

Nun folgt mit

$$\mathcal{A}^*_3\ (\emptyset) = 0\ \&\ \mathcal{B}^*_3\ (\emptyset) = 0\ \&\ h(\mathcal{A}^*_3\ (\emptyset)) = \mathcal{R}_3(\emptyset)\ \&\ h'(\mathcal{B}^*_3\ (\emptyset)) = \mathcal{R}_3(\emptyset) :$$

$$h(0) = h'(0).$$

Also gilt $\langle h(0), h(0)\rangle \in \mathcal{R}_{2,1}\ \&\ \langle h(0), h(0)\rangle \notin \mathcal{R}_{2,1}\ .$

Also ist K* nicht metrisierbar$_1$.

Satz 5.2.3 zeigt also, dass selbst diskrete Ordnungsrelationen nicht metrisierbar$_1$ sind. Da man aber solche Ordnungsstrukturen vom Metrisierungsprozess nicht ausschließen will, ist das Definiens der Definition des Metrisierbarkeitsbegriffs entsprechend abzuändern. Um Anhaltspunkte für eine Weiterentwicklung der Definition 5.2.1 zu gewinnen, soll nun die Leitidee für diese Definition zitiert werden, die Suppes (2002, S. 57) so formuliert: "More precisely, let $\mathfrak{M}$ be the set of all models of a theory, and let $\mathfrak{B}$ be some distinguished subset of $\mathfrak{M}$. A representation theorem for $\mathfrak{M}$ with respect to $\mathfrak{B}$ would consist of the assertion that given any model M in $\mathfrak{M}$ there exists a model in $\mathfrak{B}$ isomorphic to M. In other words, from the standpoint of the theory every possible variation of model is exemplified within the restricted set $\mathfrak{B}$. It should be apparent that a trivial representation theorem could always be proved by taking $\mathfrak{B} = \mathfrak{M}$. A representation theorem is just as interesting as the intuitive significance of the class $\mathfrak{B}$ of models and no more so. An example of a simple and beautiful representation theorem is Cayley's theorem that every group is isomorphic to a group of transformations" .

Diese Festlegungen lassen sich wie folgt präzisieren:

5.2.4 <u>Definitionen</u>.-

a) Für alle $\mathcal{M}$, $\mathcal{B}$: $\mathcal{M}$ ist in $\mathcal{B}$ repräsentierbar genau dann wenn gilt:

(1) $\mathcal{M}$ ist eine homogene Klasse von Strukturen & $\mathbf{II}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ & $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$ &

(2) $\forall M\,(M \in \mathcal{M} \Rightarrow \exists B\,(B \in \mathcal{B}$ & M isomorph einbettbar in B)).

b) Für alle $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}$ ist repräsentierbare Klasse von Strukturen genau dann, wenn gilt:

(1) $\mathcal{M}$ ist eine homogene Klasse von Strukturen & $\mathbf{II}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ &

(2) $\exists \mathcal{B}\,(\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$ & $\forall M\,(M \in \mathcal{M} \Rightarrow$

$\exists B\,(B \in \mathcal{B}$ & M isomorph einbettbar in B)).

In 5.2.4 a) wird eine zweistellige und in 5.2.4 b) eine einstellige Prädikatkonstante definiert. Da im Folgenden die verschiedenen Metrisierungsbegriffe immer als einstellige Prädikatkonstanten definiert werden, und da Metrisierbarkeit ein Spezialfall von Repräsentierbarkeit ist, nehmen wir Definition 5.2.4 b) als Vorlage und definieren:

5.2.5 Definition.-

Für alle *K*: *K* ist eine Klasse metrisierbarer$_{1a}$ Strukturen

genau dann wenn gilt:

(a) *K* ist homogene Klasse von Strukturen & $\mathbf{II}(K) \subseteq K$ &

(b) $\exists \mathfrak{R}$ ($\mathfrak{R}$ ist eine homogene Klasse von Strukturen des Typs typ$^{\circ}(K)$ &

$\forall R$ ($R \in \mathfrak{R} \Rightarrow R$ ist numerische Struktur) &

$\forall \mathcal{A}$ ($\mathcal{A} \in K \Rightarrow \exists R$ ($R \in \mathfrak{R}$ & $\mathcal{A}$ homomorph einbettbar in R))).

Definition 5.2.5 unterscheidet sich im Teil (b) wesentlich von Definition 5.2.4 b) (2). Die Bedingung '$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$' wird so abgeändert, dass nicht mehr die Zugehörigkeit der numerischen Strukturen zur Klasse K – der zu metrisierenden Klasse – verlangt wird; diese Abtrennung der Klasse $\mathfrak{R}$ von der Klasse K ist mehrfach in der messtheoretischen Literatur gefordert worden; außerdem wird für alle Strukturen in $\mathfrak{R}$ festgelegt, dass sie numerische Strukturen sind, das heißt nach Definition 2.2.10, dass deren Individuenbereich von den reellen Zahlen gebildet wird. Stegmüller (1970, Teil A, S. 2) weist ausdrücklich darauf hin, dass die Verwendung der reellen Zahlen durch theoretische Überlegungen erzwungen wird. Die Forderung '*M* isomorph einbettbar in *B*' wird abgeschwächt zu '$\mathcal{A}$ homomorph einbettbar in *R*'; damit wird der Tatsache Rechnung getragen, dass verschiedenen Gegenständen die gleiche Quantität einer zu metrisierenden Größe zukommen kann; sie sind etwa gleichlang oder gleichschwer.

Nun gilt

5.2.6 Satz.-

Für alle K: Wenn K eine Klasse von homogenen Strukturen ist & $\mathbf{II}(K) \subseteq K$, dann sind die beiden folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $\forall \mathcal{A}(\mathcal{A} \in K \Rightarrow \exists \mathcal{R}(\mathcal{R}$ ist numerische Struktur & $\mathcal{A}$ ist in $\mathcal{R}$ homomorph einbettbar)).

(ii) $\exists \mathfrak{R}(\mathfrak{R}$ ist eine homogene Klasse von Strukturen des Typs typ°(K) & $\forall \mathcal{R}(\mathcal{R} \in \mathfrak{R} \Rightarrow \mathcal{R}$ numerische Struktur) & $\forall \mathcal{A}(\mathcal{A} \in K \Rightarrow \exists \mathcal{R}(\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ & $\mathcal{A}$ homomorph einbettbar in $\mathcal{R}$))).

Beweis: Sei K eine homogene Klasse von Strukturen und gelte $\mathbf{II}$(K) $\subseteq$ K.

Angenommen (i). Dann folgt mit dem Auswahlaxiom:

$\exists F$ (F ist Funktion auf K & $\forall \mathcal{A}(\mathcal{A} \in$ K $\Rightarrow F(\mathcal{A})$ ist numerische Struktur & $\mathcal{A}$ homomorph einbettbar in $F(\mathcal{A})$)).

Sei F so. Dann gilt:

Ran(F) ist homogene Klasse von Strukturen des Typs typ°(K) &

$\forall \mathcal{R}(\mathcal{R} \in$ Ran(F) $\Rightarrow \mathcal{R}_1 = \mathbb{R}$) &

$\forall \mathcal{A}(\mathcal{A} \in$ K $\Rightarrow \exists \mathcal{R}(\mathcal{R} \in$ Ran(F) & $\mathcal{A}$ homomorph einbettbar in $\mathcal{R}$)).

Dann gilt

$\exists \mathfrak{R}(\mathfrak{R}$ ist eine homogene Klasse von Strukturen des Typs typ°(K) &

$\forall \mathcal{R}(\mathcal{R} \in \mathfrak{R} \Rightarrow \mathcal{R}$ numerische Struktur)

& $\forall \mathcal{A}(\mathcal{A} \in K \Rightarrow \exists \mathcal{R}(\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ & $\mathcal{A}$ homomorph einbettbar in $\mathcal{R}$))).

Gelte nun (ii).

Sei $\mathfrak{R}$ so.

Angenommen $\mathcal{A} \in$ K.

Dann $\exists \mathcal{R}(\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ & $\mathcal{A}$ homomorph einbettbar in $\mathcal{R}$).

Dann

$\exists \mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ ist numerische Struktur & $\mathcal{A}$ homomorph einbettbar in $\mathcal{R}$).

Also gilt $\forall \mathcal{A}$ ($\mathcal{A} \in$ K $\Rightarrow \exists \mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ ist numerische Struktur

& $\mathcal{A}$ homomorph einbettbar in $\mathcal{R}$)).

Satz 5.2.6 ist Anlass, den Metrisierbarkeitsbegriff$_2$ so zu formulieren, dass er dem der Definition 5.2.5 zwar logisch äquivalent ist, aber eine andere Abfolge der Quantoren in Bedingung (b) aufweist, die u. E. angemessener ist.

5.2.7 Definition.-

Für alle *K*: *K* ist eine Klasse metrisierbarer$_2$ Strukturen

genau dann wenn gilt:

(a) *K* ist homogene Klasse von Strukturen & $\mathbf{II}(K) \subseteq K$ &

(b) $\forall \mathcal{A}$ ($\mathcal{A} \in K \Rightarrow \exists \mathcal{R}$($\mathcal{R}$ ist numerische Struktur &

$\mathcal{A}$ ist in $\mathcal{R}$ homomorph einbettbar)).

Nun wird gezeigt, dass auch dieser Begriff noch Defekte aufweist, denn es gibt Strukturen, die für die aktuelle Forschung relevant sind, aber nicht das Definiens der Definition 5.2.7 erfüllen. Lexikographische Ordnungen sind ein Beispiel hierfür. Diese Ordnungen sind spezielle Totalordnungen. Sie sind für die Ökonometrie von Belang; wobei die Probleme mit der Metrisierung bei der Repräsentation von lexikographisch geordneten Wahrscheinlichkeitsräumen entstehen, die unendliche viele Punkte / Ereignisse / Individuen enthalten.

Um das zu zeigen, wird nun der Begriff der 'lexikographischen Ordnung' definiert, dann wird bewiesen, dass lexikographische Ordnungen von strikten, totalen Ordnungen auch strikte, totale Ordnungen sind. [Bei der Betrachtung von totalen / linearen Ordnungen kann man zwischen den reflexiven und den irreflexiven Ordnungen wählen; wir legen uns, wie inzwischen üblich, auf die strikten, also irreflexiven totalen Ordnungen fest.] Daran schließt sich der Beweis – Satz 5.2.10 – an, dass alle homomorphen Einbettungen von strikten, totalen Ordnungen isomorphe Einbettungen sind. Anschließend werden für das Weitere benötigte Individuenkonstanten für die mengentheoretische Metasprache definiert und es werden ein paar Definitionen und Hilfssätze aus dem Lehrbuch von Enderton (1977) angeführt, die für den in Satz 5.2.17erforderlichen Umgang mit reellen Zahlen hilfreich sind. Anschließend wird dieser Satz aus Krantz et al. (Kapitel 2) bewiesen und eine Verallgemeinerung dieses Satzes wird vermutet. Der Satz 5.2.17 besagt, dass nicht alle lexikographischen Ordnungen isomorph in $\langle \mathbb{R}, \langle <_{\mathbb{R}} \rangle, \varnothing \rangle$ einbettbar sind.

5.2.8 Definition.-

Lex ist eine Funktion auf $\{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A}$ ist Struktur vom Typ $\langle\langle 2\rangle, \varnothing\rangle \}$ & $\forall \mathcal{A} (\mathcal{A} \in \mathrm{Dom(Lex)}$

$\Rightarrow \mathrm{Lex}_{\mathcal{A}} = \{ \langle p, q \rangle \mid \exists w \exists x \exists y \exists z (w, x, y, z \in \mathcal{A}_1$ & $p = \langle w, x \rangle$ & $q = \langle y, z \rangle$

& $((\langle w, y \rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$ & $w \neq y)$ oder $(w = y$ & $\langle x, z \rangle \in \mathcal{A}_{2,1})))\})$.

Es gilt folgender

5.2.9 Hilfssatz.-

Für alle $\mathcal{A}$: Wenn $\mathcal{A}$ strikte, totale Ordnung ist, dann ist $\mathcal{A}'$ mit

$\mathcal{A}' = \langle \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_1, \langle \mathrm{Lex}_{\mathcal{A}} \rangle, \varnothing \rangle$ strikte, totale Ordnung.

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ strikte, totale Ordnung. Es ist zu zeigen, dass $\mathrm{Lex}_{\mathcal{A}}$ transitiv, irreflexiv, asymmetrisch und konnex in $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_1$ ist (Definition 3.1.2 (8)).

Seien $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_1$. Dann gilt

$\exists u \exists v \exists w \exists x \exists y \exists z (u, v, w, x, y, z \in \mathcal{A}_1$ & $p_1 = \langle u, v\rangle$ & $p_2 = \langle w, x\rangle$ & $p_3 = \langle y, z\rangle)$.

Seien u, v, w, x, y und z so.

Gelte nun $\langle p_1, p_2\rangle, \langle p_2, p_3\rangle \in Lex_{\mathcal{A}}$.

Dann folgt aus $\langle p_1, p_2 \rangle \in Lex_{\mathcal{A}}$ gemäß Definition 5.2.8:

$$(\langle u, w\rangle \in \mathcal{A}_{2,1} \ \&\ u \neq w) \text{ oder } (u = w \ \&\ \langle v, x\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}).$$

Und aus $\langle p_2, p_3\rangle \in Lex_{\mathcal{A}}$ folgt:

$$(\langle w, y\rangle \in \mathcal{A}_{2,1} \ \&\ w \neq y) \text{ oder } (w = y \ \&\ \langle x, z\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}).$$

Gelte (<u>Fall 1</u>): $\langle u, w\rangle \in \mathcal{A}_{2,1} \ \&\ u \neq w$

und $\langle w, y\rangle \in \mathcal{A}_{2,1} \ \&\ w \neq y$.

Dann folgt $\langle u, y\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$,

und da $\mathcal{A}_{2,1}$ irreflexiv in $\mathcal{A}_1$ ist folgt weiterhin $u \neq y$;

dann $(\langle u, y\rangle \in \mathcal{A}_{2,1} \ \&\ u \neq y) \text{ oder } (u = y \ \&\ \langle v, z\rangle \in \mathcal{A}_{2,1})$,

also $\langle p_1, p_3\rangle \in Lex_{\mathcal{A}}$.

Gelte (Fall 2): $\langle u, w\rangle \in \mathcal{A}_{2,1} \ \&\ u \neq w$

und $w = y \ \&\ \langle x, z\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$.

Dann folgt $\langle u, y\rangle \in \mathcal{A}_{2,1} \ \&\ u \neq y$;

dann $(\langle u, y\rangle \in \mathcal{A}_{2,1} \ \&\ u \neq y) \text{ oder } (u = y \ \&\ \langle v, z\rangle \in \mathcal{A}_{2,1})$.

Gelte (<u>Fall 3</u>) $u = w \ \&\ \langle v, x\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$

und $\langle w, y\rangle \in \mathcal{A}_{2,1} \ \&\ w \neq y$.

Dann folgt $\langle u, y\rangle \in \mathcal{A}_{2,1} \ \&\ u \neq y$,

und es folgt schließlich

$$(\langle u, y\rangle \in \mathcal{A}_{2,1} \ \&\ u \neq y) \text{ oder } (u = y \ \&\ \langle v, z\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}).$$

Gelte (<u>Fall 4</u>) $u = w \ \&\ \langle v, x\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$

und $w = y \ \&\ \langle x, z\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$.

Dann $u = y \ \&\ \langle v, z\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$,

und $(\langle u, y\rangle \in \mathcal{A}_{2,1} \ \&\ u \neq y) \text{ oder } (u = y \ \&\ \langle v, z\rangle \in \mathcal{A}_{2,1})$ folgt.

Somit ist $\mathrm{Lex}_{\mathcal{A}}$ transitiv in $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_1$.

Angenommen nun $p \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_1$ und $\langle p, p\rangle \in \mathrm{Lex}_{\mathcal{A}}$.

Seien $x, y \in \mathcal{A}_1$ so dass $p = \langle x, y\rangle$.

Dann folgt $(\langle x, x\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}\ \&\ x \neq x)$ oder $(x = x\ \&\ \langle y, y\rangle \in \mathcal{A}_{2,1})$;

und da $\mathcal{A}_{2,1}$ irreflexiv in $\mathcal{A}_1$ ist, ist $\langle x, x\rangle \notin \mathcal{A}_{2,1}\ \&\ \langle y, y\rangle \notin \mathcal{A}_{2,1}$, und es folgt für alle

$p \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_1$: $\langle p, p \rangle \notin \mathrm{Lex}_{\mathcal{A}}$.

Das zeigt die Irreflexivität von $\mathrm{Lex}_{\mathcal{A}}$.

Seien nun $p_1, p_2 \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_1$ und gelte: $\langle p_1, p_2\rangle \in \mathrm{Lex}_{\mathcal{A}}$.

Dann führt die Annahme $\langle p_2, p_1\rangle \in \mathrm{Lex}_{\mathcal{A}}$ zu einem Widerspruch;

denn es würde wegen der Transitivität von $\mathrm{Lex}_{\mathcal{A}}$ in $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_1$

$\langle p_1, p_1\rangle \in \mathrm{Lex}_{\mathcal{A}}$ folgen;

$\mathrm{Lex}_{\mathcal{A}}$ ist aber irreflexiv in $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_1$; und somit ist $\mathrm{Lex}_{\mathcal{A}}$ asymmetrisch.

Seien nun $p_1, p_2 \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_1$ und seien $u, v, w, x \in \mathcal{A}_1$, so dass $p_1 = \langle u, v\rangle$ und $p_2 = \langle w, x\rangle$.

Um die Konnektivität von $\mathrm{Lex}_{\mathcal{A}}$ zu erweisen, zeigen wir, dass

$\langle p_1, p_2\rangle \in \mathrm{Lex}_{\mathcal{A}}$ oder $\langle p_2, p_1\rangle \in \mathrm{Lex}_{\mathcal{A}}$ oder $p_1 = p_2$ gilt.

Da $\mathcal{A}_{2,1}$ konnex in $\mathcal{A}_1$ ist, gilt $\langle u, w\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$ oder $\langle w, u\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$ oder $u = w$.

<u>Fall 1:</u> $\langle u, w\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$. Dann folgt $\langle p_1, p_2\rangle \in \mathrm{Lex}_{\mathcal{A}}$.

<u>Fall 2:</u> $\langle w, u\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$. Dann folgt $\langle p_2, p_1\rangle \in \mathrm{Lex}_{\mathcal{A}}$.

<u>Fall 3:</u> $u = w$.

<u>Fall 3a:</u> $\langle v, x\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$. Dann folgt $\langle p_1, p_2\rangle \in \mathrm{Lex}_{\mathcal{A}}$.

<u>Fall 3b:</u> $\langle x, v\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$. Dann folgt $\langle p_2, p_1\rangle \in \mathrm{Lex}_{\mathcal{A}}$.

<u>Fall 3c:</u> $x = v$. Dann folgt $p_1 = p_2$.

Damit ist gezeigt, dass die lexikographischen Ordnungen von strikten, totalen Ordnungen auch strikte, totale Ordnungen sind.

5.2.10 Theorem.-

Für alle $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$: Wenn $\mathcal{A}$ strikte, totale Ordnung ist und wenn $\mathcal{B}$ Struktur vom Typ typ($\mathcal{A}$) ist, dann sind alle homomorphen Einbettungen von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ isomorphe Einbettungen.

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ strikte, total Ordnung, und sei $\mathcal{B}$ Struktur vom Typ typ($\mathcal{A}$).

Dann folgt mit Definition 3.1.2 und mit Satz 2.2.9:

$$\text{typ}(\mathcal{B}) = \langle\langle 2\rangle, \emptyset\rangle.$$

Sei f homomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ und seien a, b $\in \mathcal{A}_1$, mit a $\neq$ b.

Dann ist $\langle a, b\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$ oder $\langle b, a\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$.

Gelte $\langle a, b\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$.

Dann folgt $\langle f(a), f(b)\rangle \in \mathcal{B}_{2,1}$.

Weiterhin folgt $f(a) \neq f(b)$.

Denn wäre $f(a) = f(b)$,

dann würde $\langle f(b), f(a)\rangle \in \mathcal{B}_{2,1}$ gelten,

und $\langle b, a\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$ würde folgen,

und $\mathcal{A}_{2,1}$ wäre nicht asymmetrisch in $\mathcal{A}_1$.

Der Fall $\langle b, a\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$ wird analog behandelt.

Also sind alle homomorphen Einbettungen von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ eineindeutig, d. h. es sind isomorphe Einbettungen.

Verabredung: Im Rest dieses Abschnitts wird die Menge der rationalen Zahlen mit Q bezeichnet. Mit '$<_Q$' wird die Kleiner-Beziehung, mit '$\leq_Q$' wird die Kleiner-Gleich-Beziehung zwischen rationalen Zahlen bezeichnet. Entsprechend werden '$<_{\mathbb{R}}$', '$\leq_{\mathbb{R}}$' für die reellen Zahlen verwendet.

5.2.11 <u>Definitionen</u>.-

$\mathring{<}_{\mathrm{Q}} \quad = \quad \{\, t \mid t \text{ ist ein 2-Tupel in Q } \& \ t_1 <_{\mathrm{Q}} t_2 \,\}.$

$\mathring{<}_{\mathbb{R}} \quad = \quad \{\, t \mid t \text{ ist ein 2-Tupel in } \mathbb{R} \ \& \ t_1 <_{\mathbb{R}} t_2 \,\}.$

$\mathring{\leq}_{\mathbb{R}} \quad = \quad \{\, t \mid t \text{ ist ein 2-Tupel in } \mathbb{R} \ \& \ t_1 \leq_{\mathbb{R}} t_2 \,\}.$

$\mathfrak{R} \quad = \quad \langle\, \mathbb{R}, \langle\, \mathring{<}_{\mathbb{R}} \,\rangle, \varnothing \,\rangle.$

Für 5.2.16 wird die Definition eines *Dedekindschen Schnittes* benötigt; wir übernehmen diese Definition aus Enderton (1977, S. 113):

5.2.12 <u>Definition</u>.-

Für alle x: x ist ein Dedekindscher Schnitt / eine reelle Zahl

gdw

(a) $x \subset \mathrm{Q} \ \& \ x \neq \varnothing$.

(b) $\forall q\, \forall r\, (\, q \in x \ \& \ r <_{\mathrm{Q}} q \Rightarrow r \in x\,)$.

(c) $\forall y\, (\, y \in x \Rightarrow \exists z\, (\, z \in x \ \& \ y <_{\mathrm{Q}} z\,)\,)$.

5.2.13 <u>Satz</u> (Enderton, S. 113).-

$\langle\, \mathbb{R}, \langle\, \mathring{<}_{\mathbb{R}} \,\rangle, \varnothing \,\rangle$ ist strikte, totale Ordnung.

5.2.14 <u>Satz</u> (Enderton, S. 119).-

Sei E Funktion auf Q, so dass für alle $r \in \mathrm{Q}$ gilt:

$$\mathrm{E}(r) = \{\, q \mid q \in \mathrm{Q} \ \& \ q <_{\mathrm{Q}} r \,\}.$$

Dann ist E eineindeutige Funktion von Q nach $\mathbb{R}$ und für alle $r, s \in \mathrm{Q}$ gilt:

$$r <_{\mathrm{Q}} s \Leftrightarrow \mathrm{E}(r) <_{\mathbb{R}} \mathrm{E}(s).$$

5.2.15 <u>Satz</u> (Enderton, S. 121).-

Sei E eineindeutige Funktion von Q nach $\mathbb{R}$ gemäß Satz 5.2.4c. Dann gilt:

$$\forall x \forall y\, (\, x, y \in \mathbb{R}\ \&\ x <_{\mathbb{R}} y \ \Rightarrow \exists r\, (\, r \in \mathrm{Q}\ \&\ x <_{\mathbb{R}} \mathrm{E}(r) <_{\mathbb{R}} y\,).$$

Für den weiteren Argumentationsgang benötigen wir die folgende Vermutung, für die wir allerdings keinen Beweis sehen. Daher beweisen wir in Satz 5.2.17 nur eine Spezialisierung der folgenden Vermutung; 5.2.17 ist schon im Kapitel 2 der *Foundations of Measurement I* gezeigt worden.

5.2.16 <u>Vermutung</u>.-

Wenn $\mathcal{A} = \langle\, \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}, \langle\, \mathrm{Lex}_{\mathfrak{R}}\, \rangle, \varnothing\, \rangle$ und wenn $\mathcal{B}$ Struktur vom Typ typ($\mathcal{A}$) ist, so dass $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathbb{R}$, dann gibt es keine isomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$.

5.2.17 <u>Satz</u>.-

Wenn $\mathcal{A} = \langle\, \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}, \langle\, \mathrm{Lex}_{\mathfrak{R}}\, \rangle, \varnothing\, \rangle$, dann gibt es keine isomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathfrak{R}$ (Definition 5.2.11).

<u>Beweis:</u> Sei $\mathcal{A}$ wie vorausgesetzt. Da $\mathfrak{R}$ strikte, totale Ordnung, folgt mit Satz 5.2.9: $\mathcal{A}$ ist strikte, totale Ordnung.

Sei ϕ isomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$.

Sei $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$.

Dann gilt für $\langle\, \mathrm{x}, 0\, \rangle, \langle\, \mathrm{x}, 1\, \rangle \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$:

$$\langle\, \langle \mathrm{x}, 0 \rangle, \langle \mathrm{x}, 1 \rangle\, \rangle \in \mathrm{Lex}_{\mathfrak{R}}\,.$$

Und es folgt: $\langle \phi(\langle \mathrm{x}, 0 \rangle), \phi(\langle \mathrm{x}, 1 \rangle) \rangle \in \mathring{<}_{\mathbb{R}}\,.$

Da $\langle\, \mathrm{x}, 0\, \rangle \neq \langle\, \mathrm{x}, 1\, \rangle$,

und da ϕ isomorphe Einbettung, ist

$$\phi(\langle x, 0\rangle) \neq \phi(\langle x, 1\rangle).$$

Sei nun E Funktion auf Q, so dass für alle $r \in Q$ gilt:

$$E(r) = \{ q \mid q \in Q \;\&\; q <_Q r \}.$$

Dann ist E eineindeutige Funktion von Q nach $\mathbb{R}$ (Satz 5.2.4c).

Und da $\qquad \langle \phi(\langle x, 0\rangle), \phi(\langle x, 1\rangle)\rangle \in \mathring{<}_{\mathbb{R}}$

und $\qquad \phi(\langle x, 0\rangle) \neq \phi(\langle x, 1\rangle)$

folgt mit Satz 5.2.15:

$$\exists r\,(\, r \in Q \;\&\; \phi(\langle x, 0\rangle) <_{\mathbb{R}} E(r) <_{\mathbb{R}} \phi\,(\langle x, 1\rangle)\,).$$

Das gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

Somit kann mit Hilfe des Auswahlaxioms auf $\mathbb{R}$ eine Funktion σ definiert werden, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sigma(x) \in Q \;\&\; \phi(\langle x, 0\rangle) <_{\mathbb{R}} E(\sigma(x)) <_{\mathbb{R}} \phi(\langle x, 1\rangle).$$

Sei σ so.

Dann ist $\mathrm{Ran}(\sigma) \subseteq Q$. Des Weiteren ist σ eineindeutig.

Denn seien $x, x' \in \mathbb{R}$ mit $x \neq x'$. Dann ist $x <_{\mathbb{R}} x'$ oder $x' <_{\mathbb{R}} x$. Angenommen $x <_{\mathbb{R}} x'$.

Dann gilt $\qquad \phi(\langle x, 0\rangle) <_{\mathbb{R}} E(\sigma(x)) <_{\mathbb{R}} \phi(\langle x, 1\rangle)$

und $\qquad \phi(\langle x', 0\rangle) <_{\mathbb{R}} E(\sigma(x')) <_{\mathbb{R}} \phi(\langle x', 1\rangle).$

Und da $\qquad \langle\, \phi(\langle x, 1\rangle), \phi(\langle x', 0\rangle)\,\rangle \in \mathring{<}_{\mathbb{R}}$,

folgt $\qquad \phi(\langle x, 1\rangle) <_{\mathbb{R}} \phi(\langle x', 0\rangle).$

Und da $<_{\mathbb{R}}$ strikt und transitiv in $\mathbb{R}$ ist, folgt.

$$E(\sigma(x)) \neq E(\sigma(x')).$$

Dann gilt wegen der Eineindeutigkeit von E:

$$(\sigma(x)) \neq (\sigma(x')).$$

Und σ ist eineindeutig.

Der Fall x' $<_{\mathbb{R}}$ x wird analog behandelt.

Da aber die rationalen Zahlen abzählbar sind und die reellen überabzählbar, gibt es die Funktion σ nicht und somit auch nicht den Isomorphismus ϕ. □

Vermutung 5.2.16 macht zusammen mit Theorem 5.2.10 folgende weitere Vermutung plausibel:

5.2.18 <u>Vermutung</u>.-

Sei $K = \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A}$ ist strikte, totale Ordnung $\}$.

Dann ist K keine Klasse metrisierbarer$_2$ Strukturen.

<u>Beweisidee:</u> $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}, \langle \mathrm{Lex}_{\mathfrak{R}} \rangle, \varnothing \rangle$ ist strikte, totale Ordnung; also $\mathcal{A} \in K$. Nun gibt es gemäß Vermutung 5.2.16 keine Struktur $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathbb{R}$ in die $\mathcal{A}$ isomorph einbettbar ist. Und da nach Theorem 5.2.10 alle homomorphen Einbettungen von totalen Ordnungen isomorphe Einbettungen sind, gibt es für $\mathcal{A}$ auch keine homomorphe Einbettung. Somit ist K keine Klasse von metrisierbaren$_2$ Strukturen.

Bewiesen ist nur der Satz

5.2.19 <u>Satz</u>.-

Es sind nicht alle strikten, totalen Ordnungen in $\mathfrak{R}$ homomorph einbettbar.

Eine hinreichende Bedingung für die Metrisierbarkeit$_2$ strikter, totaler Ordnungen besteht in der Beschränkung der Kardinalität der zu metrisierenden Strukturen auf abzählbare Bereiche (Cantor; 1895). Krantz, Luce, Suppes und Tversky (1971) haben im 2. Kapitel der *Foundations of Measurement I* einen entsprechenden Repräsentationssatz bewiesen.

Man kann aber auch den Begriff der Metrisierbarkeit so verändern, dass auch allgemeine lexikographische Ordnungen metrisierbar sind: Da im Abschnitt 3.3 (Korollar 3.3.24) gezeigt worden ist, dass man von Strukturen mit unendlichem Individuenbereich Ultrapotenzen von beliebig hoher Kardinalität bilden kann, unter Beibehaltung der einstufigen Eigenschaften der Ausgangsstruktur, und da in Ultrapotenzen der reellen Zahlen ebenso Analysis betrieben werden kann wie in den reellen Zahlen selbst (Robinson, 1963; 1974), bietet sich an, den Metrisierbarkeitsbegriff so zu verallgemeinern:

5.2.20 Definition.-

Für alle *K*: *K ist eine in einer Ultrapotenz einer numerischen Struktur homomorph metrisierbare Klasse von Strukturen*

genau dann, wenn gilt:

a) *K* ist eine homogene Klasse von Strukturen &

b) $\forall \mathcal{A} (\mathcal{A} \in K \Rightarrow \exists \mathcal{R} \exists I \exists U ($ $\mathcal{R}$ ist numerische Struktur des Typs $\mathrm{typ}^{\circ}(K)$ &

U ist Ultrafilter in $\mathbf{V}(I)$ & $\mathcal{A}$ ist in $\mathrm{QRPr}(\langle \mathcal{R} \rangle_{i \in I}, U)$ homomorph einbettbar)).

Gemäß dieser Definition sind **alle** strikten, totalen Ordnungen metrisierbar (s. u.). Dazu wird im Folgenden bewiesen, dass alle strikten, totalen Ordnungen sogar isomorph in eine Ultrapotenz der reellen Zahlen eingebettet werden können. Der Beweis wird in Analogie zu einem Beweis von Narens (1985, S. 258) konstruiert, in dem er zeigte, dass alle schwachen Ordnungen homomorph in eine Ultrapotenz der reellen Zahlen einbettbar sind:

5.2.21. Satz.-

Für alle $\mathcal{A}$: wenn $\mathcal{A}$ ist eine strikte totale Ordnung,

dann $\exists U$ (U ist Ultrafilter in $\mathbf{V}(\{ \delta \mid \delta \text{ endl} \subseteq \mathcal{A}_1 \;\&\; \delta \neq \varnothing \})$

& $\mathcal{A}$ ist homomorph einbettbar in $\mathrm{QRPr}(\langle \mathfrak{R} \rangle_{\delta \in \{ \delta \mid \delta \text{ endl} \subseteq \mathcal{A}_1 \,\&\, \delta \neq \varnothing \}}, U)$).

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ strikte, totale Ordnung. Sei

$$\Delta = \{\ \delta \mid \varnothing \neq \delta \ \text{endl}\subseteq \mathcal{A}_1 \ \}.$$

Dann ist $\Delta \subseteq \mathrm{POT}(\mathcal{A}_1)$.

Es gilt $\exists f\,(f$ ist Funktion auf $\mathcal{A}_1$ & und für alle $x \in \mathcal{A}_1$ ist

$$f(x) = \{\ \delta \mid \ \delta \in \Delta \ \& \ x \in \delta \ \}\ ).$$

Sei f so.

Da $\mathcal{A}_1 \neq \varnothing$, ist auch $\Delta \neq \varnothing$. Und mit Satz 3.1.28 folgt:

$$\mathbf{V}(\Delta) = \langle \mathrm{POT}(\Delta), \langle \subseteq_{\mathrm{POT}(\Delta)} \rangle, \varnothing \rangle$$

ist BOOLEscher Verband.

Es gilt: $\mathrm{Ran(f)} \subseteq \mathrm{POT}(\Delta)$.

Weiterhin ist Ran(f) unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer, denn sei $n \in \mathbb{N}^+$ und sei a Funktion auf $\{1, ..., n\}$, so dass $\forall i\ (\ i \in \{1, ..., n\} \Rightarrow a_i \in \mathcal{A}_1\ )$, dann ist Ran(a) endl$\subseteq \mathcal{A}_1$;

dann gilt $\mathrm{Ran(a)} \in \mathrm{f}(a_1) \cap ... \cap \mathrm{f}(a_n)$;

und da $\mathbf{V}(\Delta)$ BOOLEscher Verband und $\mathrm{Ran(f)} \subseteq \mathbf{V}(\Delta)_1$ und da

$$\forall X\ (\ X \ \text{endl}\subseteq \mathrm{Ran(f)} \ \& \ X \neq \varnothing \Rightarrow \mathrm{Inf}_{\mathbf{V}(\Delta)}\ (X) \neq 0_{\mathbf{V}(\Delta)}\ ) \qquad \text{gilt,}$$

folgt mit Definition 3.2.5 , dass Ran(f) unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer ist; somit folgt mit dem Ultrafiltertheorem 3.2.15:

$$\exists U\ (\ U \ \text{Ultrafilter auf } \mathbf{V}(\Delta) \ \& \ \mathrm{Ran(f)} \subseteq U\ ).$$

Sei U so.

Sei $\mathcal{R} = \langle \mathfrak{R} \rangle_{\delta \in \Delta}$.

Dann ist $\mathcal{R}$ eine homogene Familie von Strukturen des Typs $\langle \langle 2 \rangle, \varnothing \rangle$. Dann ergibt eine Anwendung von Definition 3.3.14:

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{R}, \mathrm{U}) = \langle \ \mathrm{Quot}(\ \approx(\mathrm{U}, \mathcal{R})\ ), \langle \ \mathrm{QRPPr}_{\delta \in \Delta}\ (\ \dot{<}_{\mathbb{R}}\ , \mathbb{R}, \mathrm{U}\ )\ \rangle, \varnothing \ \rangle;$$

und $\mathrm{QRPr}(\mathcal{R}, \mathrm{U})$ ist Ultrapotenz von $\mathcal{R}$ modulo U.

Dann folgt mit 3.3.15: QRPr($\mathcal{R}$, U) ist Struktur des Typs $\langle\langle 2\rangle, \varnothing\rangle$.

Es gilt:

$$\forall\delta\,(\,\delta\in\Delta\Rightarrow\langle\,\delta, \langle\,\mathcal{A}_{2,1}\cap{}^{\{1,2\}}\delta\,\rangle, \varnothing\,\rangle\text{ ist endliche, strikte, totale Ordnung });$$

weiterhin gilt:

$$\exists\phi\,(\,\phi\text{ Funktion auf }\Delta\ \&\ \forall\delta\,(\,\delta\in\Delta\Rightarrow\phi_\delta\text{ ist isomorphe Einbettung von}$$
$$\langle\,\delta, \langle\,\mathcal{A}_{2,1}\cap{}^{\{1,2\}}\delta\,\rangle, \varnothing\,\rangle\text{ in }\mathfrak{R}\,)\,).$$

Sei ϕ so.

Es gilt $\exists E\,(\,E\text{ Funktion auf }\mathcal{A}_1\ \&\ \forall x\,(\,x\in\mathcal{A}_1\Rightarrow E_x\text{ Funktion auf }\Delta$

$$\&\ \forall\delta\,(\,\delta\in\Delta\ \&\ x\in\delta\Rightarrow E_{x,\delta}=\phi_\delta(x)\,)$$
$$\&\ \forall\delta\,(\,\delta\in\Delta\ \&\ x\notin\delta\Rightarrow E_{x,\delta}=\varnothing\,)\,)\,).$$

Sei E so.

Dann gilt für alle $x\in\mathcal{A}_1$: $\quad E_x\in\mathrm{CPr}_{\delta\in\Delta}(\mathbb{R})$.

Nun ist $\mathcal{R}$ homogene Familie von Strukturen und U ist Filter auf $\mathbf{V}(\Delta)$, mit $\Delta=\mathrm{Dom}(\mathcal{R})$;

dann ist nach Satz 3.3.12 $\approx$(U, $\mathcal{R}$) Äquivalenzprädikat in $\mathrm{CPr}_{\delta\in\Delta}(\mathbb{R})$.

Des Weiteren gilt für alle $x\in\mathcal{A}_1$:

$$[\,E_x\,]_{\approx(U,\mathcal{R})}\in\mathrm{Quot}(\,\approx(U,\mathcal{R})\,).$$

Es wird nun gezeigt, dass die Funktion

$$\langle\,[\,E_x\,]_{\approx(U,\mathcal{R})}\,\rangle_{x\in\mathcal{A},1}$$

eine homomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in QRPr($\mathcal{R}$, U) ist.

Um dies zu erweisen, ist für alle $m, n\in\mathcal{A}_1$ folgendes Bikonditional zu beweisen:

$$m<_{\mathcal{A}}n\text{ gdw }\langle\,[\,E_m\,]_{\approx(U,\mathcal{R})}, [\,E_n\,]_{\approx(U,\mathcal{R})}\,\rangle\in\mathrm{QRPr}\,(\mathcal{R}, U)_{2,1}.$$

Seien m, n $\in\mathcal{A}_1$.

Da f(m), f(n) $\in$ Ran(f) und Ran(f) $\subseteq$ U ist, gilt: f(m), f(n) $\in$ U. Und da U Filter ist, folgt

$$f(m)\cap f(n)\in U;$$

also ist $\{ \delta \mid \delta \in \Delta \ \&\ m \in \delta \ \&\ n \in \delta \} \in U.$

Dann gilt $m <_{\mathcal{A}} n$

gdw $\langle m, n\rangle \in \mathcal{A}_{2,1}$

gdw $\{ \delta \mid \delta \in \Delta \ \&\ m \in \delta \ \&\ n \in \delta \ \&\ \langle m, n\rangle \in \mathcal{A}_{2,1} \cap^{\{1,2\}} \delta \} \in U$

gdw $\{ \delta \mid \delta \in \Delta \ \&\ m \in \delta \ \&\ n \in \delta \ \&\ \phi_\delta(m) \mathrel{\dot{<}_{\mathbb{R}}} \phi_\delta(n) \} \in U$

gdw $\{ \delta \mid \delta \in \Delta \ \&\ m \in \delta \ \&\ n \in \delta \ \&\ E_m(\delta) \mathrel{\dot{<}_{\mathbb{R}}} E_n(\delta) \} \in U$

gdw $\langle E_m , E_n\rangle \in \mathrm{RPPr}_{\delta \in \Delta} (\dot{<}_{\mathbb{R}} , \mathbb{R} , U)$

gdw $\langle [E_m]_{\approx(U, \mathcal{R})} , [E_n]_{\approx(U, \mathcal{R})} \rangle \in$

$\mathrm{QuotPräd} (\mathrm{RPPr}_{\delta \in \Delta} (\dot{<}_{\mathbb{R}} , \mathbb{R} , U), \approx(U, \mathcal{R}))$

gdw $\langle [E_m]_{\approx(U, \mathcal{R})} , [E_n]_{\approx(U, \mathcal{R})} \rangle \in \mathrm{QRPPr}_{\delta \in \Delta}(\dot{<}_{\mathbb{R}} , \mathbb{R} , U)$

gdw $\langle [E_m]_{\approx(U, \mathcal{R})} , [E_n]_{\approx(U, \mathcal{R})} \rangle \in \mathrm{QRPr}(\mathcal{R}, U)_{2,1}$.

Damit ist gezeigt, dass $\langle [E_x]_{\approx(U, \mathcal{R})}\rangle_{x \in \mathcal{A},1}$ ein homomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in QRPr($\mathcal{R}$, U) ist.

Nun wird noch die Eineindeutigkeit dieser homomorphen Einbettung nachgewiesen. Seien dazu m, n $\in \mathcal{A}_1$ und gelte m $\neq$ n.

Da f(m) $\cap$ f(n) $\in$ U gilt:

$$\{ \delta \mid \delta \in \Delta \ \&\ m \in \delta \ \&\ n \in \delta \ \&\ \phi_\delta (m) \neq \phi_\delta (n) \} \in U.$$

Dann $\{ \delta \mid \delta \in \Delta \ \&\ m \in \delta \ \&\ n \in \delta \ \&\ E_m(\delta) \neq E_n(\delta) \} \in U.$

Und $[E_m]_{\approx(U, \mathcal{R})} \neq [E_n]_{\approx(U, \mathcal{R})}$ folgt.

Damit ist die Linkseindeutigkeit von $\langle [E_x]_{\approx(U, \mathcal{R})} \rangle_{x \in \mathcal{A},1}$ bewiesen und die homomorphe ist eine isomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in QRPr($\mathcal{R}$, U).

□

Mithilfe von Definition 5.2.20 und von Satz 5.2.21 kann man nun beweisen:

5.2.22 <u>Satz</u>.-

$\{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A}$ strikte, totale Ordnung $\}$ ist eine Klasse von Strukturen, die alle mit Hilfe einer Ultrapotenz einer numerischen Struktur homomorph metrisierbar sind.

<u>Beweis:</u> Es gilt

$$\text{typ}^{\circ}(\{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ strikte, totale Ordnung } \}) = \langle\langle 2\rangle, \varnothing\rangle.$$

Somit ist $\{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A}$ strikte, totale Ordnung $\}$ homogene Klasse von Strukturen.

Sei nun $\mathcal{A}$ strikte, totale Ordnung. Dann gibt es gemäß Satz 5.2.21 einen Ultrafilter U auf $\langle \text{POT}(\{ \delta \mid \varnothing \neq \delta \text{ endl} \subseteq \mathcal{A}_1 \}), \langle \subseteq_{\text{POT}(\{ \delta \mid \varnothing \neq \delta \text{ endl} \subseteq \mathcal{A},1 \})} \rangle, \varnothing \rangle$. Weiterhin gibt es eine numerische Struktur $\mathfrak{R}$, so dass $\mathcal{A}$ in $\text{QRPr}(\langle \mathfrak{R} \rangle_{\delta \in \{ \delta \mid \varnothing \neq \delta \text{ endl} \subseteq \mathcal{A},1 \}}, \text{U})$ isomorph und damit homomorph einbettbar ist.

Dann folgt mit Definition 5.2.20: alle Strukturen aus $\{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A}$ strikte, totale Ordnung $\}$ sind in einer Ultrapotenz einer numerischen Struktur homomorph metrisierbar.

Bei der Konstruktion in Satz 5.2.21 ist von den eigentlichen Axiomen für die strikte, totale Ordnung kein Gebrauch gemacht worden; offensichtlich kann man den Beweis verallgemeinern, und behaupten – Trivialisierungstheorem –, dass man jede Struktur in ein Ultraprodukt homomorph, ja sogar isomorph einbetten kann, dessen Faktoren Strukturen sind, deren Individuenbereich die Klasse der reellen Zahlen ist. Somit sind alle homogenen Klassen von Strukturen metrisierbare Klassen.

Dazu die beiden folgenden Sätze:

5.2.23 <u>Hilfssatz für Trivialisierungstheorem</u>.-

Für alle $\mathcal{B}, \mu$: wenn $\mathcal{B}$ ist Struktur vom Typ μ & $\mu_2 = \varnothing$ & $\mathcal{B}_1$ ist endlich, dann $\exists \mathcal{R}(\mathcal{R}$ ist numerische Struktur vom Typ μ & $\mathcal{B}$ ist homomorph einbettbar in $\mathcal{R}$).

Beweis: Sei $\mathcal{B}$ Struktur vom Typ μ mit $\mu_2 = \emptyset$.

Es gilt $\exists n\,(n \in \mathbb{N}^+ \,\&\, n = |\mathcal{B}_1|)$. Sei n so.

Es gilt $\exists a\,(a$ ist Abzählung von $\mathcal{B}_1)$. Sei a so.

Sei $\mathcal{R}$ 3-Tupel, so dass $\mathcal{R}_1 = \mathrm{Dom}(a)$,

$\mathcal{R}_2$ sei Funktion auf $\mathrm{Dom}(\mu_1)$, so dass $\forall i\,(i \in \mathrm{Dom}(\mu_1) \Rightarrow$

$\mathcal{R}_{2,i} = \{\, t \mid \exists b \in \mathcal{B}_{2,j} \,\&\, t = \langle a^{-1}(b_1), \ldots, a^{-1}(b_{\mu(1)(i)}) \rangle \,\}\,)$,

und $\mathcal{R}_3 = \emptyset$.

Dann ist a^{-1} isomorphe Einbettung von $\mathcal{B}$ in $\mathcal{R}$.

Denn es gilt für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mu_1)$ und alle $b \in {}^{\{1,\ldots,\mu(1)(i)\}}\mathcal{B}_1$:

$$b \in \mathcal{B}_{2,i}$$

gdw

$$\langle a^{-1}(b_1), \ldots, a^{-1}(b_{\mu(1)(i)}) \rangle \in \mathcal{R}_{2,i}\,.$$

Und da $\mathrm{Dom}(a) \subset \mathbb{R}$, ist $\mathcal{R}$ numerische Struktur; weiterhin gilt: $\mathrm{typ}(\mathcal{R}) = \mu$.

5.2.24 Trivialisierungstheorem.-

Für alle $\mathcal{A}, \mu$: wenn $\mathcal{A}$ ist eine Struktur vom Typ μ & $\mu_2 = \emptyset$, dann

$\exists U \exists \mathcal{R}(\, U$ ist Ultrafilter auf $\mathbf{V}(\{\, i \mid i \text{ endl} \subseteq \mathcal{A}_1 \,\&\, i \neq \emptyset \,\})$ & $\mathcal{R}$ ist Funktion auf $\{\, i \mid i \text{ endl} \subseteq \mathcal{A}_1 \,\&\, i \neq \emptyset \,\}$ & $\forall i\,(i \in \mathrm{Dom}(\mathcal{R}) \Rightarrow \mathcal{R}_i$ ist numerische Struktur des Typs $\mu\,)$ & $\mathcal{A}$ ist homomorph einbettbar in $\mathrm{QRPr}(\mathcal{R}, U)\,)$.

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ Struktur des Typs μ & $\mu_2 = \emptyset$.

Sei $$\mathrm{I} = \{\, i \mid i \text{ endl} \subseteq \mathcal{A}_1 \,\&\, i \neq \emptyset \,\}.$$

Da $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$, ist auch $\mathrm{I} \neq \emptyset$. Und mit Satz 3.1.28 folgt:

$$\mathbf{V}(\mathrm{I}) = \langle \mathrm{POT}(\mathrm{I}), \langle \subseteq_{\mathrm{POT}(\mathrm{I})} \rangle, \emptyset \rangle$$

ist BOOLEscher Verband.

Es gilt $\exists f\,(f$ ist Funktion auf $\mathcal{A}_1$ & und für alle $x \in \mathcal{A}_1$ ist

$$f(x) = \{\, i \mid i \in \mathrm{I} \;\&\; x \in i \,\}\,).$$

Sei f so. Es gilt: $\mathrm{Ran}(f) \subseteq \mathrm{POT}(\mathrm{I})$.

Weiterhin ist Ran(f) unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer, denn sei $n \in \mathbb{N}^+$ und sei a Funktion auf $\{1, ..., n\}$, so dass $\forall i\,(\, i \in \{1, ..., n\} \Rightarrow a_i \in \mathcal{A}_1\,)$, dann ist Ran(a) endl$\subseteq \mathcal{A}_1$;

dann gilt $\mathrm{Ran}(a) \in f(a_1) \cap ... \cap f(a_n)$;

und da $\mathbf{V}(\mathrm{I})$ BOOLEscher Verband und $\mathrm{Ran}(f) \subseteq \mathbf{V}(\mathrm{I})_1$ und da

$$\forall X\,(\, X \text{ endl}\subseteq \mathrm{Ran}(f) \;\&\; X \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{Inf}_{\mathbf{V}(\mathrm{I})}\,(X) \neq 0_{\mathbf{V}(\mathrm{I})}\,) \qquad \text{gilt,}$$

folgt mit Definition 3.2.5 , dass Ran(f) unter endlichmaliger Schnittbildung nichtleer ist; und es folgt mit dem Ultrafiltertheorem 3.2.15:

$$\exists U\,(\, U \text{ Ultrafilter auf } \mathbf{V}(\mathrm{I}) \;\&\; \mathrm{Ran}(f) \subseteq U\,).$$

Sei U so.

Es gilt $\exists \mathcal{B}(\, \mathcal{B}$ ist Funktion auf I &

$$\forall i\,(\, i \in \mathrm{I} \Rightarrow \mathcal{B}_i = \langle\, i, \langle\, \mathcal{A}_{2,j} \cap {}^{\{1, ..., \mu(1)(j)\}} i \,\rangle_{j \in \mathrm{Dom}(\mu(1))}\,, \emptyset \,\rangle\,)\,).$$

Sei $\mathcal{B}$ so. Dann ist $\mathcal{B}$ eine homogene Familie von Strukturen des Typs μ.

Es gilt $\exists \mathcal{R}(\, \mathcal{R}$ ist Funktion auf I & $\forall i\,(\, i \in \mathrm{I} \Rightarrow$

$\mathcal{R}_i$ ist numerische Struktur vom Typ μ & $\mathcal{B}_i$ ist in $\mathcal{R}_i$ homomorph einbettbar)).

Denn gemäß Hilfssatz 5.2.11 gibt es zu jedem $i \in \mathrm{I}$ eine Struktur $\mathcal{R}$ mit $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathbb{R}$ in die $\mathcal{B}_i$ homomorph eingebettet werden kann; und mit Hilfe des Auswahlaxioms lässt sich für jedes $i \in \mathrm{I}$ ein solches $\mathcal{R}_i$ festlegen.

Sei $\mathcal{R}$ so.

Dann ist $\mathcal{R}$ eine homogene Familie von Strukturen des Typs μ. Dann ergibt eine Anwendung von Definition 3.3.14:

$$\mathrm{QRPr}(\mathcal{R}, U) \text{ ist Ultraprodukt von } \mathcal{R} \text{ modulo } U.$$

Dann folgt mit 3.3.15: QRPr($\mathcal{R}$, U) ist Struktur des Typs μ.

Es gilt $$\exists h\,(\,h \text{ ist Funktion auf I } \&\ \forall i\,(\,i \in \mathrm{I} \Rightarrow$$

$$h_i \text{ ist homomorphe Einbettung von } \mathcal{B}_i \text{ in } \mathcal{R}_i\,).$$

Sei h so.

Es gilt $$\exists E\,(\,E \text{ Funktion auf } \mathcal{A}_1 \ \&\ \forall x\,(\,x \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow E_x \text{ Funktion auf I}$$

$$\&\ \forall i\,(\,i \in \mathrm{I} \ \&\ x \in i \Rightarrow E_{x,i} = \mathrm{h}_i\,(x)\,)$$

$$\&\ \forall i\,(\,i \in \mathrm{I} \ \&\ x \notin i \Rightarrow E_{x,i} = 1\,)\,)\,).$$

Sei E so.

Dann gilt für alle $x \in \mathcal{A}_1$: $\mathrm{E}_x \in \mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}(\mathcal{R}_{i,1})$.

Nun ist $\mathcal{R}$ homogene Familie von Strukturen und U ist Filter auf $\mathbf{V}$(I), mit I = Dom($\mathcal{R}$); dann ist nach Satz 3.3.11b $\approx$(U, $\mathcal{R}$) Äquivalenzprädikat in $\mathrm{CPr}_{i \in \mathrm{I}}\,(\mathcal{R}_{i,1})$.

Des Weiteren gilt für alle $x \in \mathcal{A}_1$:

$$[\,\mathrm{E}_x\,]_{\approx(\mathrm{U},\,\mathcal{R})} \in \mathrm{Quot}(\,\approx(\mathrm{U},\,\mathcal{R})\,).$$

Es wird nun gezeigt, dass die Funktion

$$\langle\,[\,\mathrm{E}_x\,]_{\approx(\mathrm{U},\,\mathcal{R})}\,\rangle_{x \in \mathcal{A}(1)}$$

ein homomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in QRPr($\mathcal{R}$, U) ist. Sei dazu $\mathrm{H} = \langle\,[\,\mathrm{E}_x\,]_{\approx(\mathrm{U},\,\mathcal{R})}\,\rangle_{x \in \mathcal{A}(1)}$.

Um zu zeigen, dass H der gesuchte Homomorphismus ist, ist u. a. für alle $j \in \mathrm{Dom}(\mu_1)$ und alle $b \in {}^{\{1,\ldots,\mu(1)(j)\}}\mathcal{A}_1$ folgendes Bikonditional zu beweisen:

$$b \in \mathcal{A}_{2,j} \text{ gdw } \langle\,\mathrm{H}(b_1), \ldots, \mathrm{H}(b_{\mu(1)(j)})\,\rangle \in \mathrm{QRPr}\,(\mathcal{R}, \mathrm{U})_{2,j}.$$

Sei $\mathrm{j} \in \mathrm{Dom}(\mu_1)$ und sei $\mathrm{b} \in {}^{\{1,\ldots,\mu(1)(\mathrm{j})\}}\mathcal{A}_1$.

Da $\mathrm{f}(\mathrm{b}_1), \ldots, \mathrm{f}(\mathrm{b}_{\mu(1)(\mathrm{j})}) \in \mathrm{Ran}(\mathrm{f})$ und $\mathrm{Ran}(\mathrm{f}) \subseteq \mathrm{U}$, ist $\mathrm{f}(\mathrm{b}_1), \ldots, \mathrm{f}(\mathrm{b}_{\mu(1)(\mathrm{j})}) \in \mathrm{U}$. Und da U Filter ist,

folgt $$\mathrm{f}(\mathrm{b}_1) \cap \ldots \cap \mathrm{f}(\mathrm{b}_{\mu(1)(\mathrm{j})}) \in \mathrm{U};$$

also ist $$\{\,i \mid i \in \mathrm{I} \ \&\ \mathrm{b}_1 \in i, \ldots, \mathrm{b}_{\mu(1)(\mathrm{j})} \in i\,\} \in \mathrm{U}.$$

Dann gilt $$\mathrm{b} \in \mathcal{A}_{2,\mathrm{j}}$$

gdw $\langle b_1, ..., b_{\mu(1)(j)} \rangle \in \mathcal{A}_{2,j}$

gdw

$$\{ i \mid i \in I \;\&\; b_1 \in i \;\&\; ... \;\&\; b_{\mu(1)(j)} \in i \;\&\; \langle b_1, ..., b_{\mu(1)(j)} \rangle \in \mathcal{A}_{2,j} \cap {}^{\{1,...,\mu(1)(j)\}}i \} \in U$$

gdw

$$\{ i \mid i \in I \;\&\; b_1 \in i \;\&\; ... \;\&\; b_{\mu(1)(j)} \in i \;\&\; \langle h_i(b_1), ..., h_i(b(_{\mu(1)(j)}) \rangle \in \mathcal{R}_{i,2,j} \} \in U$$

gdw $\langle h_i(b_1), ..., h_i(b_{\mu(1)(j)}) \rangle \in RPPr_{i \in I}(\mathcal{R}_{i,2,j}, \mathcal{R}_{i,1}, U)$

gdw $\langle E(b_1)_i, ..., E(b_{\mu(1)(j)})_i \rangle \in RPPr_{i \in I}(\mathcal{R}_{i,2,j}, \mathcal{R}_{i,1}, U)$

gdw $\langle [E(b_1)]_{\approx(U,\mathcal{R})}, ..., [E(b_{\mu(1)(j)})]_{\approx(U,\mathcal{R})} \rangle$

$\in \text{QuotPräd}(RPPr_{i \in I}(\mathcal{R}_{i,2,j}, \mathcal{R}_{i,1}, U), \approx(U, \mathcal{R}))$

gdw $\langle [E(b_1)]_{\approx(U,\mathcal{R})}, ..., [E(b_{\mu(1)(j)})]_{\approx(U,\mathcal{R})} \rangle$

$\in QRPPr_{i \in I}(\mathcal{R}_{i,2,j}, \mathcal{R}_{i,1}, U)$

gdw $\langle [E(b_1)]_{\approx(U,\mathcal{R})}, ..., [E(b_{\mu(1)(j)})]_{\approx(U,\mathcal{R})} \rangle \in QRPr(\mathcal{R}, U)_{2,j}$

gdw $\langle H(b_1), ..., H(b_{\mu(1)(j)}) \rangle \in QRPr(\mathcal{R}, U)_{2,j}$.

Das zeigt, dass H ein Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach QRPr($\mathcal{R}$, U) ist. Nun wird noch dessen Linkseindeutigkeit nachgewiesen; seien dazu m, n $\in \mathcal{A}_1$ und gelte m $\neq$ n.

Da $f(m) \cap f(n) \in U$, folgt:

$$\{ i \mid i \in I \;\&\; m \in i \;\&\; n \in i \;\&\; h_i(m) \neq h_i(n) \} \in U$$

gdw $\{ i \mid i \in I \;\&\; m \in i \;\&\; n \in i \;\&\; E(m)_i \neq E(n)_i \} \in U$

gdw $[E_m]_{\approx(U,\mathcal{R})} \neq [E_n]_{\approx(U,\mathcal{R})}$

gdw $H(m) \neq H(n)$.

Damit ist gezeigt, dass es zu allen Modellen $\mathcal{A}$ des Typs μ mit $\mu_2 = \emptyset$ einen Ultrafilter *U* auf der Menge *I* der endlichen Teilmengen von $\mathcal{A}_1$ und eine Familie von numerischen Strukturen $\mathcal{R}$ gibt, so dass $\mathcal{A}$ isomorph in ein Ultraprodukt der $\mathcal{R}$ über *U* modulo der Indexmenge *I* eingebettet werden kann. □

D. h. dass der in 5.2.20 formulierte Metrisierungsbegriff zu weit ist. Denn man sieht, wie der obige Beweis – in Anlehnung an den Beweis für Theorem 4.1.12 – ergänzt werden muss, um zu folgern: Zu allen Strukturen eines Typs μ mit nichtleerem Individuenbereich gibt es eine numerische Struktur dieses Typs, so dass die Ausgangsstruktur in ein Ultraprodukt der numerischen Struktur isomorph eingebettet werden kann; d.h. alle Strukturen mit nichtleerem Individuenbereich sind metrisierbar im Sinne von Definition 5.2.20; d.h. weiterhin, dass in 5.2.20 eine "Alleigenschaft" formuliert worden ist, die wenig hilfreich ist für den Aufbau des messtheoretischen Begriffsinventars.

Wir schließen nun diesen Abschnitt mit ein paar Zitaten aus messtheoretischen Grundlagenarbeiten, in denen Intuitionen formuliert werden, von deren Formalisierung eine Weiterentwicklung des Metrisierungsbegriffs zu erwarten ist.

Suppes (1957, S. 263): "When a theory is not categorical, an important problem is to discover if an interesting subset of models for the theory may be found such that any model for the theory is isomorphic to some member of this subset." 2002 drückt Suppes (S. 57) diese Idee so aus: "A certain class of models of a theory, distinguished for some intuitively clear conceptual reason, is shown to exemplify within isomorphism every model of the theory."

In Suppes & Zinnes (1963) wird dieses Problem auch erwähnt. Es wird verlangt, dass das numerische Modell, das Zahlen als Bildpunkte für die zu messenden Entitäten enthält, geeignet gewählt ("appropriately chosen" S. 8) sein soll. Vermutlich wegen der Fülle verschiedenartiger empirischer Situationen, in denen Metrisierungsverfahren eingesetzt werden, wird weiter argumentiert: "A complete or precise categorization of the intuitively desirable relations is unfortunately somewhat elusive" (S. 8).

Narens (1985, S. 157) argumentiert so: "Basically, the various definitions of meaningfulness attempt to define a class of relations that have empirical significance. Now for quantitative $\mathcal{R}$-meaningfulness for $\mathcal{X}$ [dem empirischen Relativ] to have empirical significance, the numerical structure $\mathcal{R}$ must relate in an interesting way with the empirical structure $\mathcal{X}$, and I see no reason why this should automatically be the case".

5.3 Ausblick

In diesem Abschnitt werden drei verschiedene Problembereiche angesprochen, deren Bearbeitung eine Weiterentwicklung der Messtheorie versprechen.

Der **erste** Problembereich betrifft Fragen der Metrisierung endlicher Strukturen, d.h. Strukturen mit endlichem Individuenbereich.

Der **zweite** Problembereich betrifft Probleme die dadurch entstehen, dass kategorische Strukturen und Klassen von Strukturen nicht metrisierbar sein sollen.

Der **dritte** Problembereich betrifft die Entwicklung geeigneter Fragment der Mathematik für die Formulierung physikalischer und allgemein empirischer Theorien, wodurch eventuell Probleme der Messtheorie einer Lösung zugeführt werden können.

Diese Ausführungen stützen sich hauptsächlich auf Zitate aus der z. T. neueren Literatur zur Messtheorie.

(1) Sowohl in Scott & Suppes (1958) als auch in Luce et al. (1990) und in Suppes (2002) werden in Argumentationsgängen sog. "finitary classes of measurement" betrachtet; man möchte empirische Strukturen einbetten, die einen endlichen Individuenbereich haben. Das hat nicht nur mit der schlichten Tatsache zu tun, dass nur endlich viele Messprozesse jeweils durchgeführt werden können, sondern auch mit der spezifischen Definition des Begriffs der "Metrisierbarkeit". Andererseits wird argumentiert (Suppes, 2002, S. 118, Fußnote): "Given this finiteness, some numerical representation can be constructed in a more or less arbitrary manner, which will be of little if any scientific interest. Only those, reflecting some actual procedures of measurement, perhaps somewhat idealized, will be of some interest." Dementsprechend werden in den formalen Untersuchungen einzelner Mess- / Metrisierungstheorien Strukturen mit unendlichem Individuenbereich betrachtet. Insbesondere ist dies der Fall bei der Untersuchung der Automorphismengruppen spezieller Klassen von Konkatenationsstrukturen. Begründet wird diese Vorgehen öfters damit, dass die "Mathematik einfacher wird".

U. E. könnte hier eine Rekonstruktion des Verfahrens des Übergangs von endlichen zu immer größeren endlichen und dann zu unendlichen Strukturen verständnisfördernd sein. Wir denken hier an eine Arbeit von Narens (1974b), in der er theoretisch zeigte, wie Strukturen, die

Axiomensätze erfüllen, immer weniger "Möglichkeiten" für die Zuordnung numerischer Werte lassen, sobald diese Strukturen an Umfang zunehmen. Empirisch konnte diese Idee schon 1966 von Shepard im Rahmen des Verfahrens der multidimensionalen Skalierung demonstriert werden. Wobei allerdings der Witz bei Shepard darin bestand, dass er von qualitativen Daten ausging; er erhob eine Rangreihe von Distanzen zwischen Punkten (Entfernung von A nach R ist größer als Entfernung von C nach K usw.); und mit steigender Punktzahl stimmte mit immer höherer Genauigkeit die von Programmen errechnete numerische Konfiguration zur Lösung des Ungleichungssystems mit der Ausgangskonfiguration überein, der die Daten / Ungleichungen entnommen worden waren. Hier sehen wir ein Beispiel für den Übergang von qualitativen Beobachtungen zu quantitativen Aussagen; Shepard betitelte seine Arbeit entsprechend: "Metric Structure in Ordinal Data". Und in einer späteren Arbeit (Shepard, 1980, S. 398, Endnote 17) erklärte er sich diesen Vorgang so: "The paradoxical possibility of recovering quantitative structure from merely qualitative data is connected with the circumstance that the number of pairs of points and hence the number of ordinal constraints on their distances increases approximately as the square of the number of to-be-estimated quantitative coordinates of the points. Methods taking advantage of this circumstance are called "nonmetric" because they use only ordinal properties of the input. However, the output can achieve great metric precision and is always metric in the sense that it satisfies the distance axioms."

(2) Neben empirischen Gegebenheiten wirken auch formale auf die Entwicklung von Mess-/Metrisierungstheorien ein. Unter der Maßgabe, kategorische (Luce et al. S. 247) und vollständige (Narens, 1985, S. 321) Theorien zu vermeiden, bleibt zu untersuchen, ob vorgelegte Theorien diese Eigenschaften besitzen, oder nicht. Zum Beispiel zeigt Narens (1985, S. 158), dass Erweiterungen von total geordneten positiven Konkatenationsstrukturen, die diese zu Dedekind vollständigen, total geordneten, positiven Konkatenationsstrukturen machen, eindeutig sind. Hier stellt sich ebenso die

Frage nach Kategorizität und Vollständigkeit wie bei anderen Theorien, die Spezialisierungen des Axiomensatzes für reell-abgeschlossene (geordnete) Körper sind, da diese Theorie rekursiv axiomatisierbar und vollständig und somit entscheidbar ist.

(3) Ein Weg, um zu Weiterentwicklungen der messtheoretischen Begriffsapparatur zu kommen, den auch die vorliegende Arbeit u. a. beschreitet, besteht darin, das logische-mathematische Umfeld, in dem sich messtheoretische Begründungen vollziehen, so einzurichten, damit manche Einzelprobleme gelöst werden oder gar nicht erst auftreten. Dementsprechend weisen Suppes & Chuaqui (1993, S. 2) darauf hin, dass in den Forschungsarbeiten (nicht nur) der Physik nur eine ganz bestimmte Mathematik verwendet wird: "The natural foundational question that arises about the discrepancy between the way mathematics is ordinarily done in theoretical physics and the way it is built up from a foundational standpoint in any of the standard modern views, raises the question of wether it might be possible to construct quite directly a rigorous foundation that reflects very closely a large part of this standard practice in theoretical physics. ... On the other hand, we think it is possible to give a foundational formulation of the differential and integral calculus and differential equations that corresponds to much of the mathematical practice in theoretical physics." Die Rationale ist also so, dass man die benötigten Theoreme der Mathematik betrachtet und dann einen Kalkül bildet, der es gestattet, diese Theorem herzuleiten. Suppes & Chuaqui (1993, S. 3) kommen so zu den folgenden Forderungen an den zu bildenden Kalkül: "... the foundational approach we develop here has the following features: (i) the underlying logic is positive: there is no use of negation; we adopt Hilbert's positive propositional calculus; (ii) the formulation is a free-variable one with no use of quantifiers; (iii) we use infinitesimals in an elementary way drawn from nonstandard analysis, but the account here is axiomatically self-contained and deliberately elementary in spirit." In Sommer & Suppes (1996) wird dieser Ansatz vereinfacht, weiterentwickelt und mit

einem Namen belegt, der Kalkül heißt Elementary Recursive Nonstandard Analysis (ERNA). Es wird ein Widerspruchsfreiheitsbeweis mit finiten Mitteln geführt, (S. 73) "... in particular, we will show that *PRA*, the system of primitive recursive arithmetic, which is generally recognized as capturing Hilbert's notion of finitary, proves the consistency of ERNA. From the consistency proof we can extract a constructive method for obtaining finite approximations of models of nonstandard analysis. We present an isomorphism theorem for models that are finite substructures of infinite models." Weiterentwickelt wird der Kalkül u. a. durch die Einführung einer eingeschränkten Form der Definition durch Rekursion; mit der vollen Definition wäre der Widerspruchsfreiheitsbeweis nicht mit finiten Mitteln zu führen (S. 74). [In Thiel (1995a) findet sich eine Darlegung des finiten Standpunktes unter Zuhilfenahme der Kriterien von Herbrand.] Der ganze Ansatz kann mit dem programmatischen Titel der Arbeit von Sommer & Suppes (1997) gekennzeichnet werden: "Dispensing with the Continuum". Ein empirisches Argument für diesen Standpunkt sehen die Autoren (Sommer & Suppes, 1996, S. 75) u. a. darin, "... that no experiments can distinguish between any physical quantities, even space and time, being continuous or discrete at a fine enough level. Philosophically, we can say that the continuum may be real for Platonists, but it can nowhere be unequivocally identified in the real world of physical experiments." Dieser konstruktivistische Standpunkt ist vereinbar mit der umfassenderen Auffassung der Erlanger (und Konstanzer) Schule des Konstruktivismus wie sie im Handbuchartikel (Stichwort: *Konstruktivismus*) von Thiel (1995b, S. 452) formuliert worden ist, und die einleuchtet: "Allgemein gilt auch für diese bislang stärkste Erweiterung des selbstgesetzten Aufgabenbereichs des Konstruktivismus *[Übertragung konstruktivistischer Betrachtungen und Regelungen auf den Bereich von Moral und Werturteilen]*, dass das Ziel ein von unstrittigen Verhältnissen der ↑Lebenswelt ausgehender, methodisch einwandfreier und nachvollziehbarer Weg zu menschlichem Handeln und Reden in komplexeren Bereichen der kulturellen Welt, insbesondere der wissenschaftlichen, technischen und politischen Praxis ist, deren faktisch vorfindliche Elemente es mit Hilfe konstruktiver ↑Sprachkritik, Zweck-Mittel-Diskussionen usw., soweit dies überhaupt möglich ist, begreifend und rechtfertigend zu 'rekonstruieren' gilt (...). Die Forderung, auch in diesen Bereichen Begründungen und insbesondere ↑Rechtfertigungen schrittweise methodisch aufzubauen (↑Prinzip der pragmatischen Ordnung), sie argumentativ zu vertreten und ihrerseits begründeten Revisionen offenzuhalten, und somit die Gemeinsamkeit von Orientierungen in allen Bereichen menschlichen Zusammenlebens effektiv mit Mitteln der Vernunft allein herzustellen, bildet die Brücke zu den Ursprüngen des Konstruktivismus in der Grundlagendiskussion der exakten Wissenschaften."

6: Zusammenfassung

Es ist in dieser Arbeit der Begriff 'Sprache erster Stufe' definiert worden, zusammen mit anderen Begriffen aus Mengentheorie, elementarer Algebra, Modelltheorie und Logik. Die alle dem Zweck dienen, mit ihnen auf der Metaebene arbeiten zu können (Kapitel 2).

Weiterhin wurde die Ultraproduktkonstruktion ausführlich dargestellt und wesentliche Begriffe, auf denen diese Konstruktion ruht, wurden rekapituliert (BOOLEscher Verband; Filter und Ultrafilter). Das zentrale Łoš'sche Theorem, in dem sich u. a. der Wert dieser Konstruktion zeigt, wurde mit den bereit gestellten Mitteln bewiesen. (Kapitel 3).

In Kapitel 4.1 wurden die Metatheoreme dargestellt, die Aussagen über die Axiomatisierbarkeit von Modellklassen machen – unter Zuhilfenahme der Ultraproduktkonstruktion. In 4.2 wurden die Folgerungsmengen von einstufigen, widerspruchsfreien Theorien, die endlich axiomatisierbar und/oder vollständig sind, mit Filterbegriffen charakterisiert. 4.3 widmet sich Aspekten der Reichweite einstufiger Sprachen. Des Weiteren werden hier die Theoreme von Löwenheim und Skolem bewiesen.

Kapitel 5 enthält Ergebnisse. In 5.1 wird mit präzisen Mitteln nachgewiesen, dass bestimmte Strukturen – positive und Dedekind-vollständige Konkatenationsstrukturen – nicht mit einer einstufigen Satzmenge axiomatisierbar sind.

In 5.2 wird eine Möglichkeit diskutiert, den Begriff 'Metrisierbarkeit' zu verallgemeinern. Es wird gezeigt, dass es eine untere Grenzen (zu eng) und obere Grenzen (zu weit) für diesen Begriff gibt. Da nach den Theoremen von Löwenheim und Skolem einstufige Axiomensätze, die ein unendliches Modell haben, Modelle mit beliebig hoher Kardinalität aufweisen, sind die reellen Zahlen als homomorphe Bilder nur für Teilklassen von metrisierbaren Strukturen tauglich. Wie eine Ultrapotenz der reellen Zahlen dieses Problem lösen könnte, wird für strikte, totale Ordnungen gezeigt; wobei alle einstufigen Sätze die von den reellen Zahlen erfüllt werden auch von einer Ultrapotenz der reellen Zahlen erfüllt werden und umgekehrt. Alle strikten, totalen Ordnungen sind metrisierbar, wenn man für 'Metrisierbarkeit' den verallgemeinerten Begriff ansetzt. Dieser Metrisierbarkeitsbegriff lässt sich so verallgemeinern, dass er zu einem sog. Trivialisierungstheorem führt; demgemäß sich alle Strukturklassen von einstufigen Axiomensätzen metrisierbar.

Abschnitt 5.3 weist auf Problembereiche hin, in denen weiter Arbeit zu leisten sein wird. Insbesondere sind hier u. E. die Neuentwicklungen wichtig, die sich unter der Überschrift 'Für Anwendungen geeignete Fragmente der Mathematik' zusammenfassen lassen.

7: Literaturverzeichnis

AX, J. The elementary theory of finite fields. *Ann. of Math.;* 1968, Vol. 88; Ss. 239-271.

BALZER, W. *Empirische Geormetrie und Raum-Zeit-Theorie in mengentheoretischer Darstellung.* Königstein im Taunus, 1978.

BALZER, W. & MOULINES, C. U. *Structuralist Theory of Science.* Berlin, New York; 1996.

BELL, J. L. & SLOMSON, A. B. *Models and Ultraproducts.* Amsterdam, Oxford; 1974.

CANTOR, G. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Math. Ann.,* 1895, Vol. 46, Ss. 481-512.

CHANG, C. C. & KEISLER, H. J. *Model Theory.* Amsterdam, New York, Oxford; 1990 (dritte Ausgabe).

COOMBS, C. H., DAWES, R. M. & TVERSKY, A. *Mathematical Psychology.* Englewood Cliffs, New Jersey; 1970.

DEDEKIND, R. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig, 1888.

ENDERTON, H. B. *Elements of Set Theory.* Boston, San Diego, New York, London, Sydney, Tokyo, Toronto; 1977.

FRAYNE, T. E., MOREL, A. C. & SCOTT, D. S. Reduced direct products. *Fund. Math.* 1962; Vol. 51; Ss. 195-228.

HILBERT, D. Über den Zahlbegriff. *Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung,* 8. Bd., 1900, Ss. 180-184.

HINST, P. A Rigorous Set Theoretical Foundation of the Structuralist Approach. In: W. BALZER & C. U. MOULINES (Hrsg.) *Structuralist Theory of Science.* Ss. 233-264; Berlin, New York; 1996.

HÖLDER, O. (1901). Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-*

Physische Klasse, Vol. 53, Ss. 1-64.

KEISLER, H. J. On cardinalities of ultraproducts. *Bull. Am. Math. Soc.*, 1964; Vol. 70; Ss. 644-647.

KEISLER, H. J. Fundamentals of model theory. In: Barwise, J. (Ed.), *Handbook of mathematical logic* (Ss. 47-103). Amsterdam; 1977.

KRANTZ, D. H., LUCE, R. D., SUPPES, P. & TVERSKY, A.: *Foundations of Measurement I.* New York and London; 1971.

LEHMANN, G. *Modell- und rekursionstheoretische Grundlagen der Psychologie.* Berlin, Heidelberg, New York; 1985.

ŁOŠ. L. Quelques remarques, theoremes et problemes sur les classes definissables d'algebres. In: SKOLEM Th. et al. (Hrsg.), *Mathematical interpretations of formal systems,* Amsterdam; 1955, Ss. 98-113.

LUCE, R. D., KRANTZ, D. H., SUPPES, P. & TVERSKY, A.: *Foundations of Measurement. III.* New York und London; 1990.

LUCE, R. D. & NARENS, L. Symmetry, scale types, and generalizations of classical physical Measurementment. *J. of Math. Psychol.* 1983, Vol. 27, Ss. 44-85.

LUCE, R. D. & NARENS, L. Classification of concatenation structures according to scale type. *J. of Math. Psychology*; 1985, Vol. 29, Ss. 1-72.

MAINZER; K. Reelle Zahlen. In: Ebbinghaus, H.-D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Neukirch, J., Prestel, A., & Remmert, R. (Hg.), *Zahlen.* Ss. 23-44; Berlin, Heidelberg, New York; 1988.

MONK, J. D. *Mathematical Logic.* New York, Heidelberg, Berlin; 1976.

MOULINES, C. U. A logical reconstruction of classical equilibrium thermodynamics. *Erkenntnis,* 1975, 9, Ss. 101-130.

MOULINES, C. U. Approximate application of empirical theories: A general explication.

Erkenntnis, 1976, 10, Ss. 201-227.

MOULINES, C. U. & SNEED, J. D. Suppes' philosophy of physics. In: R. J. BOGDAN (Hrsg.), *Patrick Suppes*, Dordrecht, 1979.

NARENS, L. Measurement without Archimedean Axioms. *Phil. of Science*; 1974a; 41, Ss. 374-393.

NARENS, L. Minimal Conditions for additive Measurement and qualitative Probability. *J. of Math. Psychol.;* 1974b; 11; Ss. 404-430.

NARENS, L. A general theory of ratio scalability with remarks about the measurement-theoretic concept of meaningfulness. *Theory and Decision*, 1981a, Vol. 13, Ss. 1-70.

NARENS, L. On the Scales of Measurement. *J. of Math. Psychology*; 1981b, Vol. 24, Ss. 249-275.

NARENS, L. *Abstract Measurement Theory.* Cambridge (Mass.) & London; 1985.

NARENS, L. & LUCE, R.D. Measurement: The Theory of numerical Assignments. *Psychol. Bull.* 1976; 99; Ss. 166-180.

PFANZAGL, J. *Die axiomatischen Grundlagen einer allgemeinen Theorie des Messens.* Würzburg; 1959.

PFANZAGL, J. *Theory of measurement.* New York; 1968.

RABIN, M. O. Decidable theories. In: Barwise, J. (Ed.), *Handbook of mathematical logic* (Ss. 595-630). Amsterdam; 1977.

RICHTER, M. K. Rational Choice. in: CHIPMAN, J. S. et al. *Preferences, Utility and Demand.* New York, Chicago, San Francisco, Atlanta; 1971, Ss. 29-58.

ROBINSON, A. *On the Metamathematics of Algebra.* Amsterdam; 1951.

ROBINSON, A. *Introduction to Model Theory and the Metamathematics of Algebra.* Amsterdam; 1963.

ROBINSON, A. *Nonstandard Analysis.* Amsterdam, London; 1974.

SCOTT, D. & SUPPES, P. Foundational aspects of theories of measurement. *J. of Symbolic Logic,* 1958, 23, Ss. 113-128.

SHEPARD, R. N. Metric Structures in Ordinal Data. *J. of Math. Psychology,* 1966, Ss. 287-315.

SHEPARD, R. N. Multidimensional Scaling, Tree-Fitting, and Clustering. *Science,*1980, Ss. 390-398.

SIMPSON, *Subsystems of Second Order Arithmetic.* Berlin, Heidelberg, New York; 1999.

SKALA, H. J. *Non-Archimedean Utility Theory.* Dordrecht; 1975.

SNEED, J. D. *The Logical Structure of Mathematical Physics.* Dordrecht; 1971, 1979^2.

SOMMER, R. & SUPPES, P. Finite Models of Elementary Recursive Nonstandard Analysis. *Notas de la Sociedad Matemática de Chile,* 1996, Vol. 15, Ss. 783-802.

SOMMER, R. & SUPPES, P. Dispensing with the Continuum. *J. of Math. Psychology,* 1997, Vol. 41, Ss. 3-10.

STEGMÜLLER, W. *Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und analytischen Philosophie*; Band II, Teil A, B, C. Berlin, Heidelberg und New York; 1970.

STEGMÜLLER, W. *The structuralist view of theories: A possible analogue of the Bourbaki programme in physical science.* Berlin, Heidelberg und New York; 1979.

STEVENS, S. S. On the Theory of Scales of Measurement. *Science*; 1946, Vol. 103, Ss. 677-680.

STEVENS, S. S. Measurement, Psychophysics and Utility. In: CHURCHMAN, C. W. & RATOOSH, P. (Hrsg.): *Measurement: Definition and Theories.* New York; 1959, Ss. 18-63.

SUPPES, P. *Introduction to LOGIC.* New York, Cincinnati, Toronto, London, Melbourne. 1957.

SUPPES, P. *Representation and Invariance of Scientific Structures.* Stanford, 2002.

SUPPES, P. & CHUAQUI, R. A Finitary Consistent Free-Variable Positive Fragment Of Infinitesimal Analysis. In: *Proceedings, IX Latin Latin American Symposium on Mathematical Logic, Universitat Nacional del Sur, Bahia Blanca, Argentina,* 1993. Notas de Logica Mathematica, Vol. 38, Ss. 1-59.

SUPPES, P. & ZINNES, J. L. Basic measurement theory. In: LUCE, R. D., BUSH, R. R. & GALANTER, E. (Hrsg.), *Handbook of Mathematical Psychology. Vol 1.* New York, 1963, Ss. 1-76.

TARSKI, A. Contributions to the theory of models. I, II. *Indagationes Mathematicae*, 1954, 16, Ss. 572-588.

THIEL, Ch. *Philosophie und Mathematik.* Darmstadt, 1995a.

THIEL, Ch. Konstruktivismus. In: MITTELSTRASS, J. (Hg.) *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie.* Stuttgart, Weimar, 1995b, Ss. 449-453.

TITIEV, R. J. *Some model-theoretic results in measurement theory.* Los Angeles, 1969.

TITIEV, R. J. Measurement Structures in Classes that are not universally axiomatizable. *J. of Math. Psychol.* 1972; 9; Ss. 200-205.

VAUGHT, R. L. Remarks on Universal Classes of Relational Systems. *Indagationes Mathematicae*, 1954, 16, Ss. 589-591.

WAERDEN, B. L. van der, *Algebra I.* Berlin, Heidelberg, New York, 1971[8].

8: Namensverzeichnis

9: Verzeichnis der Definitionen

10: Symbolverzeichnis

11: Lebenslauf

14. 04. 1944	Geburt in Münchberg Vater: Christian Hegner (Dipl. Braumeister); Mutter: Frieda Hegner – geb. Ott – (Hausfrau).
1950 – 1964	5 Jahre Volksschul- und 9 Jahre Oberrealschulbesuch in Münchberg.
1964	Abitur.
1968	Vordiplom in Psychologie an der Universität Erlangen-Nürnberg.
1972	Hauptdiplom in Psychologie an der TH Darmstadt; Schwerpunkt mathematische Psychologie.
1973	Wissenschaftliche Hilfskraft am Psychologischen Institut der TH Darmstadt.
1974 – 1976	Programmierarbeit am MPI für Psychiatrie in München und freiberufliche Legasthenikdertherapie in einer psychologischen Beratungspraxis in München.
Ab Okt. 1976	Wissenschaftlicher Angestellter am Sozialwissenschaftlichen Institut der Bundeswehr (bis 1994 in München ab 1995 in Strausberg).
Seit 1984	Wissenschaftlicher Rat am Sozialwissenschaftlichen Institut der Bundeswehr.
Seit 1989	Wissenschaftlicher Oberrat am Sozialwissenschaftlichen Institut der Bundeswehr.