Bildungstheoretische und entwicklungsadäquate Grundlagen als Kriterien für die Gestaltung von Mathematikunterricht am Gymnasium

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der Philosophie

der Ludwig-Maximilians-Universität

München

vorgelegt von

Jutta Möhringer

aus München

München 2006

Referent:	Prof. DDr. Herbert Tschamler
Korreferent:	PD DDr. Elisabeth Zwick
Tag der mündlichen Prüfung:	07.07.2006

Inhaltsverzeichnis **Seite**

Vorwort

> *"Trotz der Bemühungen vieler Lehrer stellt sich die Mathematik für die meisten Schüler als undurchdringlicher und sinnleerer Formelwald dar. Auch wer im Abitur noch ganz gut ist, weiß nicht, was Mathe wirklich ist. Es wird ihm ein völlig falsches Bild suggeriert. Dass Mathematik mit Spaß, Neugier und Kreativität zu tun hat, kommt in der Schule nicht vor."*

Albrecht Beutelspacher

Als ich mich der Frage nach einem „anderen Mathematikunterricht“ wissenschaftlich nähern wollte, war ich äußerst dankbar, in Herrn Prof. DDr. Herbert Tschamler einen Doktorvater gefunden zu haben, der sich der Thematik mit großem Engagement gewidmet hat. Ich empfand die Betreuung stets als angenehm, da mir Herr Prof. DDr. Herbert Tschamler großen Freiraum bei der Gestaltung der Arbeit einräumte, sich auf meine Ideen einließ und trotzdem entscheidende Gedanken zu dieser Dissertation beitrug.

Ebenso gilt mein Dank Frau PD DDr. Elisabeth Zwick für die hilfreichen Gespräche während der Erstellung der Arbeit und die Bereitschaft, das Koreferat zu übernehmen.

Frau Jutta Bauer-Seibt und Herrn Wolfgang Seibt danke ich vielmals für die Arbeit des Korrekturlesens.

Zudem nutze ich gerne hier die Gelegenheit, meinen Eltern für all ihre Unterstützung und stete Begleitung auf meinem beruflichen und persönlichen Weg ganz herzlich zu danken.

Besonderer Dank jedoch gebührt meinem Mann, der die Erstellung meiner Dissertation mit vielen Gesprächen begleitet hat, mir Anregungen und Ermunterung zukommen ließ und mir durch die Betreuung unserer Töchter den nötigen zeitlichen Freiraum geschaffen hat.

München, im März 2006 Jutta Möhringer

Einleitung

„Wozu müssen wir denn das lernen?“

Welcher Mathematiklehrer hat diese Frage noch nicht aus einem Schülermund[1] gehört? Und wer war bei der Antwort nicht auch schon einmal verlegen? Mir ist diese Frage dann im Unterricht begegnet, wenn ich selbst alles andere als überzeugt war, dass das, was ich den Schülern „beibringen“ soll, sinnvoll ist. Was sollen Schüler eigentlich aus meiner Sicht als Lehrerin im Mathematikunterricht lernen?

Die Antwort auf diese Frage muss heißen: Das, was der Mensch für sein Leben in einer bestimmten Kultur und Gesellschaft braucht. Aber was braucht er? Darüber gehen die Meinungen auseinander. Diese Diskrepanz zeigt sich in dem Auseinanderklaffen zwischen den staatlich verordneten Lehrplänen und dem unbeweglichen Festhalten an traditionellen Unterrichtsinhalten und –formen auf der einen Seite und an dem von der Fachwelt geäußerten Unbehagen über den derzeitigen Mathematik-Unterrichtsbetrieb an unseren Schulen auf der anderen Seite.

Welches sind die Kriterien, die bei der Erstellung von Lehrplänen als Maßstab zur Anwendung kommen?

Zum Beispiel wurden für die Erstellung des aktuellen Lehrplans für die Gymnasien in Bayern (ab Klasse 8, also nicht für das G8) im März 2000 achtundachtzig Personen als Vertreter bedeutsamer gesellschaftlicher Gruppierungen im Rahmen einer zweitägigen Arbeitstagung angehört. Diese Vertreter repräsentierten Eltern, Schüler, Lehrer, Kirchen, Universität, Verbände, Wirtschaft, Fortbildungsinstitute, Kultusministerium und Ministerialbeauftragte. Die Anhörung sollte dazu dienen, aktuelle Trends als Hilfestellung am Beginn der Arbeit der Lehrplan-Kommission zu ermitteln.[2] Es liegt die Vermutung nahe, dass bei dem auf diese Weise entstandenen Lehrplan – und nicht nur bei diesem aktuellen – versucht wurde, einen Kompromiss zwischen allen gesellschaftlichen Gruppierungen zu erzielen und weniger die Frage zu verfolgen, welches die Kriterien sind, die als Maßstab für die Auswahl der verbindlichen Inhalte gelten.

Um Klärung zu schaffen und Möglichkeiten aufzuzeigen, wie Mathematikunterricht sowohl den Erfordernissen der Gesellschaft als auch dem Bedürfnis des Einzelnen nach Orientierungshilfe in der Welt gerecht werden kann, braucht es Kriterien, die als Entscheidungshilfe dienen.

[1] Ausschließlich wegen der einfacheren Lesbarkeit wird in der gesamten Arbeit die maskuline Form verwendet.

[2] vgl. Staatsministerium für Schulpädagogik und Bildungsforschung (Hrsg.), Anhörung zum Lehrplan für das Gymnasium 27./ 28. März 2000

Genau an diesem Punkt setzt die vorliegende Arbeit an: Sie hat einerseits zum Ziel, Kriterien zu erarbeiten, die zur Beurteilung der Ziele, Inhalte und Methoden von Mathematikunterricht dienen können. Andererseits wird versucht, konkret aufzuzeigen, wie Mathematikunterricht aussehen kann, der sich an diesen Kriterien orientiert.

In Verfolgung dieses Anliegens stellt sich sofort die zentrale Frage, welches denn die Kriterien sind, die als Leitfaden für die Unterrichtsgestaltung gelten sollen. Sind es die aktuellen Bedürfnisse von Wirtschaft und Gesellschaft? Wobei hier weiter gefragt werden müsste, welcher Wirtschaftsform und welcher Gesellschaftsordnung? Oder sollen Kulturtradierung und Kulturschaffung, wie E. Spranger sagt, Maßstab des Unterrichts sein?[3] Oder sind es „Hinführung zu Wissen“ und „Geltungsbindung“, wie M. Heitger[4] meint? Man könnte den Katalog an Vorschlägen beliebig fortsetzen, ohne eine Entscheidung treffen zu können, welchen der Vorzug gegeben werden soll. Mir scheint, dass die verschiedenen Kriterien sich in dem einen Begriff zusammenfassen lassen bzw. in ihm „aufgehoben“ sind: im Begriff der Bildung.

Ein weiterer zentraler Gesichtspunkt, an dem Unterricht ausgerichtet sein muss, ist m. E. der der psychischen und intellektuellen Entwicklung der Kinder, um sicher zu stellen, dass für das Verständnis auch die entwicklungsbedingten Voraussetzungen erfüllt sind.

Auch wenn mit dem Hinweis auf Bildung und Entwicklung als notwendige Orientierungsmaßstäbe nicht unbedingt neue Sichtweisen ausgesprochen sind, so erscheint es mir doch wichtig, sie bei der Frage um den „guten“ Unterricht wenigstens in Erinnerung zu rufen, da es – wie die Praxis zeigt – keineswegs selbstverständlich ist, dass das Unterrichtsgeschehen an diesen Maßstäben ausgerichtet wird.

Eine erste Annäherung an das Thema soll im **Kapitel 1** mittels eines Überblicks über den gegenwärtigen Diskussionsstand zur Problematik des vorherrschenden Unterrichts erfolgen. Dabei wird die Kritik zunächst am Unterricht im Allgemeinen aufgezeigt, um anschließend auf den Mathematikunterricht im Besonderen einzugehen. Hauptkritikpunkt ist der Frontalunterricht mit der fragend-entwickelnden Unterrichtsmethode, die zu wenige Schüler in den Unterrichtsprozess mit einbezieht und von Anfang an Lernwege, die nicht zum vorher abgesteckten Ziel führen, ausschließt. Daneben wird am Mathematikunterricht beklagt, dass die Einübung stereotyper Routinen und das Lernen von Regeln und Algorithmen dominiert, hingegen offene und anwendungsbezogene Aufgaben nur selten gestellt werden.

Da jedoch, wie kaum anders zu erwarten war, die Kritik am üblichen Unterrichtsgeschehen z.T. sehr heftig ausfällt, wäre es wenig hilfreich gewesen, bei dem vorwiegend negativen Bild stehen zu bleiben. Ich hielt es deshalb für wichtig, auch auf die

---

[3] vgl. Mühlbauer, K., Der Begriff Bildung in der Gegenwartspädagogik, St. Ottilien 1965

[4] Heitger, M., Der Lehrer als Pädagoge? In: Schirlbauer, A. (Hrsg.), Lehrer sind heute, Innsbruck und Wien 1991, S. 59

Veränderungs- und Verbesserungsvorschläge einzugehen, die derzeit innerhalb der Fachliteratur diskutiert werden. Stichworte in diesem Zusammenhang waren: neue Lernkultur, Verzicht auf Stofffülle zugunsten der Vermittlung von Schlüsselqualifikationen, neue Formen der Leistungsmessung und –bewertung, Vorschläge für alternative Unterrichtsgestaltung und –methodik.

Kapitel 2 setzt sich mit dem Thema Bildung und Bildungsziele im Rahmen der Bildungstradition auseinander. Hier bot sich an, sich zunächst einmal auf die „Klassiker" neuzeitlicher Bildungstheorie unter Zuhilfenahme aktueller Interpretationen zu beziehen. Aber auch innerhalb der neuzeitlichen Bildungstheoretiker musste eine Auswahl getroffen werden, da es unmöglich und auch im Hinblick auf die Intention dieser Arbeit nicht nötig war, die ganze Bandbreite der aktuellen Diskussion auszuloten bzw. Vollständigkeit anstreben zu wollen. Dass die Auswahl gerade auf W. v. Humboldt, J. F. Herbart und G. Kerschensteiner fiel, verdanke ich einem Hinweis G. Bucks, der in seiner Schrift „Rückwege aus der Entfremdung" von zwei in der Neuzeit vorherrschenden Bildungsmodellen spricht. Dabei kann J. F. Herbart als Repräsentant des einen, G. Kerschensteiner als Repräsentant des anderen und W. v. Humboldt als Vertreter beider Richtungen gesehen werden. Als weiterer, wenngleich eher formaler Grund kommt hinzu, dass J. F. Herbart und G. Kerschensteiner auch Mathematiker waren und dass W. v. Humboldts sprachwissenschaftliche und sprachphilosophische Studien auch einen Zugang zur Mathematik als Kalkülsprache eröffnen. Ein dritter Grund sei noch angeführt. „In den Anfängen einer Wissenschaft", sagt G. Buck, „ist alles noch einfacher und gröber, dafür aber in der Vereinfachung deutlicher und oft begrifflich schärfer gefasst." Die Vergegenwärtigung dieser Anfänge ist geeignet, „uns sehen zu lassen, dass die anfänglichen Fragen immer noch unsere eigenen Fragen sind."[5]

Nach Erarbeitung zentraler Gedanken der genannten Bildungstheoretiker werden Untersuchungen herangezogen, die sich speziell mit der Thematik Mathematik und Bildung befassen. Auch innerhalb dieser Fragestellung musste eine Auswahl getroffen werden. Sie erfolgte unter dem Gesichtspunkt einer systematischen Erarbeitung der Beziehung von Bildung und Mathematik. Drei aus meiner Sicht repräsentative Ansätze dieser Thematik finden sich bei A. Warzel, A. I. Wittenberg und H.W. Heymann. H. W. Heymann entwirft einen Mathematikunterricht, der unter Abgrenzung vom klassischen Bildungsbegriff allgemeinbildenden Charakter haben soll. A.I. Wittenbergs Ziel ist die Vermittlung charakteristischer Merkmale des Mathematischen im Unterricht auf der Grundlage exemplarischen Lernens. Bei A. Warzel schließlich steht die Frage im Vordergrund, wie die Selbstwerdung des Schülers im Sinne eines Bildungsprozesses gelingen kann.

[5] Buck, G., Rückwege aus der Entfremdung, München 1984, S. 135

Die Erarbeitung entwicklungspsychologischer Kriterien bildet den Inhalt des **3. Kapitels**. Dabei ergab sich wieder das Problem, aus der Fülle der verschiedenen Forschungsergebnisse die entsprechende Auswahl zu treffen. Ich beschränke mich in erster Linie auf die Erkenntnisse der Entstehung und Entwicklung des mathematischen Denkens beim Kind und die entwicklungsbedingten Besonderheiten der Adoleszenz. Auf dem Gebiet der Entwicklung des mathematischen Denkens gilt J. Piagets Theorie zur Entwicklung des kindlichen Denkens, insbesondere des mathematischen Denkens, bis heute als die wichtigste ihrer Art und bildet das Fundament für weitere Theorien. Seinen Erkenntnissen galt deshalb mein besonderes Augenmerk. Eine Weiterentwicklung dieser Erkenntnisse fand durch J. Bruner statt. Er maß vor allem dem Einfluss der Sprache und der Umwelt höheres Gewicht bei der Entwicklung des Denkens bei als sein Lehrer J. Piaget. Als dritte Autorität habe ich M. Montessori herangezogen, die von der Entwicklung des „mathematischen Geistes“ beim Kind spricht. Darüber hinaus schien mir ihr auf Ganzheitlichkeit, Selbsttätigkeit und individualisierenden Unterricht sowie ihr an der Idee der „Kosmischen Erziehung“ ausgerichtetes Bildungsverständnis für den Aufbau und die Gestaltung mathematischer Denk- und Verstehensprozesse von besonderer Bedeutung zu sein. Ihre Einsichten sollen deshalb ebenso zu Wort kommen wie die Erkenntnisse über die speziellen Probleme des Übergangs von der Kindheit zum Erwachsenenalter. Mit der Herausarbeitung einiger mir wichtig erscheinender Aspekte der von H. Fend ausführlich erörterten Problematik der Adoleszenz und ihrer speziellen Bedeutung für die Lernmotivation der Schüler schließt dieses Kapitel ab.

In **Kapitel 4** wird aus den in den beiden vorausgegangenen Kapiteln dargelegten bildungstheoretischen und entwicklungspsychologischen Grundlagen ein Resümee gezogen. Zunächst werden dabei W. v. Humboldts, J. F. Herbarts und G. Kerschensteiners Umsetzungsvorschläge ihrer Bildungstheorie in der Schulpraxis dargestellt. Ferner werden die Positionen A. Warzels, A.I. Wittenbergs und H.W. Heymanns vergleichend zusammengefasst. Ebenso erfolgt eine Zusammenschau der entwicklungspsychologischen Grundlagen. Schließlich soll am Endes dieses Kapitels versucht werden, eine Art Kriterienkatalog zu erstellen, der dem Bildungsauftrag der Schule und der Entwicklungsgemäßheit des Kindes gerecht wird und der als Maßstab für die Ziele, Inhalte und Methoden von Mathematikunterricht gelten kann. Das Aufstellen eines solchen Katalogs jedoch kann noch nicht ausreichend sein, muss doch die Ebene der noch sehr allgemein gehaltenen Forderungen verlassen und gezeigt werden, wie sich die Forderungen auf den konkreten Unterricht übertragen lassen. Dies soll im 5. Kapitel geschehen.

Das **5. Kapitel** kann als Versuch einer Vision eines bildenden Mathematikunterrichts gesehen werden. Anhand von Beispielen aus dem Unterrichtsfach Mathematik wird demonstriert, welche Inhalte und Methoden m. E. optimale Voraussetzungen dafür bieten, dass Bildungsprozesse stattfinden können. Die Beispiele, die jeweils inhaltlich und methodisch aufeinander abgestimmt sind, wurden unter den Gesichtspunkten der

Entwicklungsadäquatheit, des Lebensbezugs, der Ganzheitlichkeit und Verständnisorientierung ausgewählt. In diese übergeordneten Gesichtspunkte sind weitere bildungsrelevante Aspekte integriert, nämlich Freiheit, Selbsttätigkeit, Individualität und Eigenverantwortlichkeit. Sie wurden nur deshalb nicht gesondert behandelt, weil sie als immer wiederkehrende Elemente – zusammen mit den bereits genannten – das Unterrichtsgeschehen als Bildungsgeschehen herausstellen. Ich habe ausdrücklich auf den Versuch verzichtet, einen geschlossenen Lehrplan für den Mathematikunterricht entwerfen zu wollen, da dies der Unplanbarkeit und Individualität von Bildungsprozessen widersprechen würde.

Im **6. und letzten Kapitel** wird eine Zusammenfassung der Ergebnisse dieser Arbeit gegeben. Darüber hinaus wird die Frage aufgeworfen, welche Hindernisse beseitigt werden müssten, die der Realisierung eines an Bildung und Entwicklung orientierten Unterrichts im Wege stehen. Mit dem Versuch einer aus meiner Sicht durchaus plausiblen Antwort wird die Arbeit abgeschlossen.

Hauptteil I

1 Stand der Diskussion

Die internationalen Vergleichsstudien TIMSS (Third International Mathematics and Science Study) von 1995 und 1999 und PISA (Programme for International Student Assessment) aus dem Jahr 2000 samt Folgestudien haben wesentlich dazu beigetragen, dass die Qualität von Unterricht innerhalb der Diskussion um Schulentwicklung stärker in den Vordergrund getreten ist.

Dabei muss bedacht werden, dass sich die Aufgaben von PISA im Gegensatz zu TIMSS nicht an den Inhalten der Lehrpläne orientierten, sondern an den Anforderungen des Alltags. Das könnte begründen, weswegen die deutschen Schüler bei der Lösung mathematischer und naturwissenschaftlicher Aufgaben bei TIMSS im Mittelfeld und wenige Jahre später bei PISA deutlich darunter lagen.[6] Somit muss also nicht nur die bestehende Unterrichtspraxis auf ihre Qualität im Bezug auf die Umsetzung der Lehrplanziele überprüft werden, sondern auch diese Ziele selbst.

Jedoch unabhängig von diesen Leistungsvergleichsstudien mehrt sich Kritik am derzeitigen Unterricht, insbesondere am gymnasialen Unterricht von Seiten der Fachwelt und der Wirtschaft. Deren Erwartungen im Hinblick auf Kenntnisse, Kompetenzen und Einstellung der Abiturienten werde immer weniger erfüllt.[7]

Bei der Analyse von Unterricht werden in der gegenwärtigen Diskussion diverse Aspekte als defizitär dargestellt, eine Auswahl wird im Folgenden skizziert.

1.1 Kritik am bestehenden Unterricht

Verschiedene Autoren bemängeln vor allem den vorherrschenden Frontalunterricht und das darauf abgestimmte Notensystem. Beide behindern in starker Weise die intensive Auseinandersetzung der Schüler mit den Lerninhalten, da vor allem der Lehrer agiert und instruiert, den Stoff häufig fertig aufbereitet präsentiert und die Schüler kaum in die Erarbeitung mit einbezieht. Die Lerninhalte werden im Kurzzeitgedächtnis bis zur nächsten Prüfung abgespeichert und schnell wieder vergessen. Die Schüler sind zwar stark an Noten und Abschlüssen interessiert, nicht jedoch an den Lernin-

[6] vgl. Brügelmann, H., Heymann, H. W., PISA 2000: Befunde, Deutungen, Folgerungen, in: Pädagogik 3/2002, S. 40 – 43

[7] vgl. Kotter, K.-H., Thum, H. (Hrsg.), Unser Gymnasium auf dem Weg in die Zukunft – Schulentwicklung nach dem EFQM-Modell, München 2003, S. 7

halten, auf welchen diese Noten basieren. Die Behaltensquote dieser Lerninhalte ist dementsprechend niedrig.[8]

Ein anderer Kritikpunkt bezieht sich auf die Art und Weise der Vermittlung von Wissen. Hier werde zu wenig auf verständnisorientiertes und vernetztes Lernen geachtet. Dadurch nämlich könnte sog. intelligentes Wissen aufgebaut werden, das auf Transfer, Anwendung und flexibel nutzbares Wissen hin ausgerichtet ist. Insbesondere der Vermittlung von Lernkompetenzen, die dem Schüler die Fähigkeit verleihen soll, lebenslanges Lernen selbst zu organisieren, werde viel zu wenig Bedeutung beigemessen.[9]

Schließlich wird bemängelt, die Schule schaffe es nicht, dass Schüler in ihr selbstverständlich lernen, vielmehr bewirke sie Demotivation. Der Versuch, diese mangelnde Motivation durch „künstliche" Motivation bzw. Verführung zum Lernen zu ersetzen, scheitert häufig. Ein wesentlicher Grund dafür sei, dass Schülerinteressen nicht ausreichend mit einbezogen werden und eine Individualisierung des Unterrichts kaum stattfindet.[10]

Bewertung von Schülerleistungen

Ein weites Feld, das in der Literatur kritisch betrachtet wird, ist das der Benotung von Schülerleistungen. Die weitreichendste Kritik stellt die diagnostische Qualität des Lehrerurteils in Frage. Eine große Zahl wissenschaftlicher Untersuchungen habe gezeigt, dass die Bewertungen von Schülerleistungen die erforderlichen Gütekriterien der Objektivität, Validität und Reliabilität nicht erfüllen.[11] Dies ist um so problematischer, als Schülerbewertung innerhalb der Schule über Schülerkarrieren entscheidet und außerhalb der Schule einen enormen Einfluss auf die Ausbildungs- und Berufschancen und damit die Sozialstruktur ausübt.[12] Jedoch sollte nicht unerwähnt bleiben, dass Schüler die größten Befürworter von Noten sind, da sie diese beispielsweise für gerechter halten als Berichtszeugnisse. Auch Schulangst, ein oft verwende-

[8] vgl. Eckart, W., Den Lernalltag der Schüler verändern, in: unterrichten / erziehen Nr. 5/2001, S. 249.

[9] vgl. Kleinschmidt-Bräutigam, M., Qualitätsentwicklung – ein mehrdimensionaler Begriff, in: unterrichten / erziehen Nr.6/2002, S. 285

[10] vgl. Seitz, O., Motivierend: Schule ohne Motivation, in: unterrichten / erziehen Nr. 5/2001, S. 230

[11] Weiterhin weist schulische Leistungsmessung Besonderheiten auf, die mit mathematischen Regeln oder lernpsychologischen Erkenntnissen nicht in Einklang zu bringen sind, z. B. wird zur Berechnung einer Durchschnittsnote der Mittelwert aus nicht äquidistanten Einzelnoten gebildet oder es werden üblicherweise 40 % oder 50% als Schwelle zum Bestehen eines Tests zugrunde gelegt („ausreichend"), obwohl lernpsychologisch mindestens 65% des Gelernten für ein erfolgreiches Weiterlernen vorausgesetzt werden müssen. Vgl. Jürgens, E., Leistungsmessung und Leistungsbeurteilung, in: unterrichten / erziehen Nr.1/ 2001, S. 9 – 12

[12] vgl. Lüders, M., Dispositionsspielräume im Bereich der Schülerbeurteilung, in: Zeitschrift für Pädagogik, 47. Jg., 2001, Nr. 2, S. 217 - 218

tes Argument zur Einführung von Berichtszeugnissen, scheint nicht davon abzuhängen, ob Ziffern- oder Berichtszeugnisse vergeben werden.[13]

Unabhängig von dieser grundlegenden Kritik am Bewertungssystem wird innerhalb der bestehenden Benotungspraxis v.a. als problematisch angesehen, dass eine weitgehende Vermischung von Lern- und Leistungssituationen vorliegt. Diese führt nicht selten dazu, dass sich die Schüler in einer ständigen Prüfungssituation fühlen, die ein unbefangenes Lernen, das auch Fehler als Lernchancen zulässt und nicht als Minusleistung verbucht, enorm erschwert. Ferner wird in diesem Zusammenhang auch beklagt, dass bei der Beurteilung von Schülerleistungen eine reine Produktorientierung erfolgt, der Lernprozess mit seinen vielfältigen Komponenten, wie z. B. strategischen Fähigkeiten oder sozialen Kompetenzen hingegen keine Rolle spielt.[14]

Spezielle Kritik am Mathematikunterricht

Speziell den Mathematikunterricht betreffend bezieht sich die Kritik auf zwei Bereiche:

Standardisierte Aufgaben

Zum einen wird kritisiert, dass im bestehenden Unterricht die Durchführung mehr oder weniger stark standardisierter Rechnungen und Verfahren gegenüber der Vermittlung von Ideen und mathematischer Zusammenhänge überwiegen. Dieses Vorgehen wird auch durch die kurzschrittigen und scheinbar objektiven Leistungskontrollen begünstigt.[15]

Diese Beobachtung wird durch TIMSS insoweit bestätigt, als diese Leistungsvergleichsstudie gezeigt hat, dass deutsche Schüler bei einfachen, gelernten und nicht weit zurückliegenden Aufgaben überdurchschnittlich gut abschneiden, hingegen bei Aufgaben, die ungewohnte Überlegungen erfordern oder etwas länger zurückliegen, unter den Schnitt fallen.[16]

Fragend-entwickelnder Unterricht

Zum anderen wird bemängelt, dass der fragend-entwickelnde Unterricht in hohem Maße dominiere, wobei der Lehrer die Schüler schnell zu der Erreichung des jeweili-

[13] vgl. Jachmann, M., Tillmann, K.-J., Sind Noten gerechter als Ziffernzeugnisse? In: Pädagogik 9/2000, S.37 – 43

[14] vgl. Kleinschmidt-Bräutigam, M., Qualitätsentwicklung – ein mehrdimensionaler Begriff, in: unterrichten / erziehen Nr.6/2002, S. 286

[15] vgl. Danckwerts, R. u.a., Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe, Kultusministerkonferenz, Bonn 2000

[16] vgl. Blum, W., Qualitätsentwicklung im Mathematikunterricht – Eine Folge von TIMSS? In: Pädagogik 12/2000, S. 23

gen Stundenziels führen will, indem ausschließlich die Schülerantworten weiterverfolgt werden, die eben dieses Ergebnis direkt anstreben. Äußerst treffend wird diese Art von Unterricht immer wieder als „Osterhasenpädagogik“ bezeichnet, bei der der Lehrer den Lerngegenstand versteckt und die Schüler ihn finden müssen. Dabei agieren häufig nur wenige Schüler, die anderen warten mehr oder weniger passiv ab, bis das Ergebnis zum Abschreiben an der Tafel steht, da sie möglicherweise dem Tempo nicht folgen können oder gerade einem eigenen (durchaus fachlichen) Gedanken nachhängen. Dieses Verhalten wird zusätzlich dadurch forciert, dass die Herleitungsschritte für das Ergebnis in den meisten Fällen bei den anschließenden Übungssequenzen keinerlei Bedeutung mehr haben. Ein Großteil der Schüler ist somit in den Problemlösungsprozess aktiv kaum eingebunden. Ein weiterer gravierender Nachteil des fragend-entwickelnden Unterrichts besteht darin, dass die Vorstellung vermittelt wird, es gäbe nur einen möglichen oder „richtigen“ Lösungsweg. Umwege oder Sackgassen, ganz normale Prozesse bei der Lösungsfindung mathematischer Probleme, werden durch die systematische Ausfilterung der „falschen“ Antworten nicht zugelassen, könnten aber sehr erkenntnisreich sein.

1.2 Ansätze zur Verbesserung

Neben aller Kritik gibt es eine Vielzahl von Ansätzen zur Verbesserung der Unterrichtssituation in Deutschland, von denen ausgewählte Ansätze vorgestellt werden. Dabei soll die Betrachtung der Unterrichtsmethodik v.a. einen Schwerpunkt bilden.

Neue Lernkultur

Immer wieder ist in der wissenschaftlichen Literatur von einer „neuen Lernkultur“ die Rede. Diese wird so beschrieben, dass „herkömmliches Lernen mit einer eher passiven Haltung des Lernenden abgelöst wird durch ein Lernen, bei dem der Lernende eine aktive, eigenverantwortliche und kooperative Haltung an den Tag legt.“[17] „Der zentrale Zweck neuer Lernkultur muss deshalb sein, dass Schüler in der Schule lernen wollen (ja sogar darüber hinaus!) und dass sie deshalb in die Schule gehen (wollen).“[18] Diese neue Lernkultur ist geprägt durch Rücksichtnahme auf die Individualität der Lernenden, deren Interessen, spezielle Lernwege und Zeitbedürfnis. Das Eingehen auf die Interessen der Schüler spiegelt sich u.a. in der „Pflege einer Fragehaltung“[19] wider, da echte Fragen der Schüler deren Lerninteresse zum Ausdruck bringen. Wenn es gelingt, Schüler entsprechend ihrer Interessen arbeiten zu lassen, so wird das jeweilige Arbeitsergebnis für den Schüler wertvoll und nicht für Prüfungen o.ä. funktionalisiert. Vorgeschlagen wird ein Arbeiten, das in die individuelle Praxis des Schülers

[17] vgl. Eckart, W., Den Lernalltag der Schüler verändern, in: unterrichten / erziehen Nr. 5/2001, S.249

[18] vgl. Seitz, O., Motivierend: Schule ohne Motivation, in: unterrichten / erziehen Nr. 5/2001, S.230

[19] Ebenda, S. 230

umgesetzt werden kann. Ein hoher Grad an Individualisierung fordert selbstständiges und eigenverantwortliches Lernen. Neben diesen eher individuellen Arbeitsweisen darf aber auch teamorientiertes, kooperatives und soziales Lernen nicht außer Acht bleiben. Bewertungen sollen eher in Form von Rückmeldungen an den Schüler über seine Arbeit erfolgen als in herkömmlichen Tests. Getragen wird diese neue Lernkultur von einer Lehrkraft, die einen funktionalen Arbeitsprozess ermöglicht und durch ihr Vorbild motiviert.

Bei der Art der zu vermittelnden Inhalte spielt bei der neuen Lernkultur die sog. Lernkompetenz eine besondere Rolle. Sie setzt sich aus den vier Teilbereichen Personal-, Sozial-, Instrumental- und Inhaltskompetenz zusammen und ist die entscheidende Voraussetzung für lebenslanges Lernen. Da Spezialwissen immer schneller veraltet, ist es wichtig, den Schwerpunkt auf die Vermittlung von Lernkompetenz und von Basiswissen zu verlegen. Basiswissen wird dabei als „in die Tiefe gehendes, Verständnis erzeugendes Wissen“ [20] definiert.

Entscheidendes Gestaltungselement dieser neuen Lernkultur ist der Einsatz vielfältiger Methoden, vielfältiger Medien und die Nutzung vielfältiger Lernorte. Viele dieser Ideen gehen auf reformpädagogische Ansätze zurück, sind also nicht neu. Neu hingegen ist das Bestreben diese neue Lernkultur umfassend einzuführen und sich nicht mit einzelnen Pilotschulen zufrieden zu geben. Auch genügt es nicht, dass einzelne Stunden mit offenen Unterrichtsformen gehalten oder ein Projekt pro Schuljahr durchgeführt wird und ansonsten der traditionelle lehrerzentrierte Unterricht dominiert. Eine wichtige Voraussetzung für umfassendere Veränderungen ist ein anwendungsbezogenes Konzept zur Zusammenführung aller bisherigen Einzelanstrengungen, dementsprechende Lehrerfortbildungen und die Bereitstellung von Hilfsangeboten für die Lehrer. Auch die Schüler müssen gezielt auf die Anforderungen eines derartig veränderten Unterrichts herangeführt werden. Die skizzierte Unterrichtsentwicklung kann nur erfolgreich sein, wenn sie in den Rahmen der allgemeinen Schulentwicklung eingebettet ist und damit auch die gesamte Lehrerschaft, Eltern und die Öffentlichkeit erreicht.[21]

Als wichtige weitere Voraussetzung für die Entwicklung einer Lehr- und Lernkultur wird eine kompetente Lehrkraft betrachtet. Sachkompetenz, Methodenkompetenz und persönlichkeitsbedingte Merkmale sind erforderliche Qualitäten der Lehrkraft. Unter Sachkompetenz werden dabei v.a. Fachkenntnisse und entsprechende didaktische Fähigkeiten gesehen. Methodenkompetenz schließt die Fähigkeit ein, Lerninhalte möglichst optimal vermitteln zu können. Persönlichkeitsbedingte Merkmale schließlich sind emotionale Stabilität, ein positives Selbstkonzept, Flexibilität, verbale Intel-

[20] Kleinschmidt-Bräutigam, M., Qualitätsentwicklung – ein mehrdimensionaler Begriff, in: unterrichten / erziehen Nr.6/2002, S. 285

[21] vgl. Eckart, W., Den Lernalltag der Schüler verändern, in: unterrichten / erziehen Nr. 5/2001, S.249

ligenz und eine partnerschaftliche Einstellung gegenüber Schülern. Hinzu kommen unabdingbare Eigenschaften eines Erziehers, z. B. Kontaktbereitschaft, Verständnis und Toleranz, Wertschätzung, Vertrauen, Humor, Hilfsbereitschaft, Geduld, Gerechtigkeit und pädagogische Autorität. [22]

Als Konsequenz aus der Feststellung, dass der Lehrkraft eine entscheidende Schlüsselfunktion im Schul- und Unterrichtsentwicklungsprozess zukommt, wird vorgeschlagen, die Lehrerausbildung, insbesondere in der zweiten Phase der Ausbildung, zu ändern.[23] Wichtig sei dabei vor allem, dass möglichst viele Situationen tatsächlich von den angehenden Lehrern ausprobiert und anschließend mit dem Seminar reflektiert werden.

Vermittlung von Schlüsselqualifikationen

Mehr und mehr wird die Vermittlung von Schlüsselqualifikationen gefordert, wobei im Wesentlichen zwei Gründe angeführt werden: Zum einen sind Schlüsselqualifikationen notwendige Voraussetzung für die Schüler, um an einem sich ändernden Unterricht erfolgreich partizipieren zu können. Zum anderen werden Schlüsselqualifikationen als Vorbereitung auf die Arbeitswelt für wichtig erachtet.

Der Begriff „Schlüsselqualifikationen“ wurde 1974 von D. Mertens, dem damaligen Direktor des Instituts für Arbeitsmarkt- und Berufsforschung der Bundesanstalt für Arbeit kreiert. Als „Schlüsselqualifikationen“ werden solche Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten angesehen, welche nicht unmittelbaren und begrenzten Bezug zu bestimmten, disparaten praktischen Tätigkeiten erbringen, sondern vielmehr

- „die Eignung für eine große Zahl von Positionen und Funktionen als alternative Optionen zum gleichen Zeitpunkt und
- die Eignung für die Bewältigung einer Sequenz von (unvorhersehbaren) Änderungen von Anforderungen im Laufe des Lebens.“[24]

Da der Begriff bzw. das Konzept der Schlüsselqualifikationen ursprünglich für die Arbeitswelt gedacht war, ist zu überlegen, ob und wie eine Übertragung dieses Konzeptes auf die Schule geschehen soll. Ziel soll dabei sein, dass Schüler durch die Beherrschung von Schlüsselqualifikationen in die Lage versetzt werden, zukünftige, schnell aufkommende neue Inhalte selbsttätig erschließen und damit lebensbegleitend lernen zu können. Von den vielen Schlüsselqualifikationen werden im Wesentlichen die folgenden im Sinne eines möglichen Kataloges genannt: Denken in Zusammen-

---

[22] vgl. Fritsch, B., Die Entwicklung einer Lehr- und Lernkultur erfordert eine kompetente Lehrkraft, in: unterrichten / erziehen Nr. 5/ 2001, S. 254

[23] vgl. Jenchen, H.-J., Die Entwicklung einer Lehr- und Lernkultur erfordert eine kompetente Lehrkraft, in: unterrichten / erziehen Nr.5/ 2001, S. 233 - 241

[24] Mertens D., zitiert nach Honal, W., Bildung und Ansehen ohne Lernen, in: unterrichten / erziehen Nr. 3/ 2001, S. 154

hängen, Flexibilität, Kommunikationsfähigkeit, Kreativität, Problemlösefähigkeit, Selbstständigkeit, Transferfähigkeit und Zuverlässigkeit.[25]

Um diese Schlüsselqualifikationen erfolgreich vermitteln zu können, wird ein Unterricht gefordert, der von offenen Lernformen und komplexen Lernsituationen geprägt ist. Der Lehrer tritt in den Hintergrund, wird zum Begleiter und Berater, so dass ein möglichst großer Raum für die Schüler bleibt, um den eigenen Lernprozess zu gestalten. Übereinstimmend wird festgestellt, dass Schlüsselqualifikationen nicht für sich alleine, sondern im Zusammenhang mit konkretem Fachwissen vermittelt und erarbeitet werden müssen. Auch wird von mehreren Autoren vor einer Überbetonung der Vermittlung von Schlüsselqualifikationen gewarnt. O. Seitz drückt dies so aus: "Qualifikation fragt immer nach dem „Wofür", Bildung genügt sich selbst."[26]

Unterrichtsgestaltung/ Unterrichtsmethodik

Wie bereits in 1.1 dargestellt, wird in der fachwissenschaftlichen Literatur die methodische Monokultur in Form des Frontalunterrichts mit dem in weiten Teilen fragend-entwickelnden Unterrichtsstil als eine der Ursachen für die Probleme im deutschen Schulwesen betrachtet.

Methodenvielfalt hingegen ist aus mehreren Gründen für einen qualitätvollen Unterricht unablässig. So wirkt sich Methodenvielfalt bereits aufgrund der motivierenden Abwechslung von Arbeits- und Lernformenwechsel positiv auf Lehrer und Schüler aus. Da beim Lernen die Bandbreite vom einfachen Memorieren bis hin zum Lösen komplexer Problemstellungen reicht, müssen entsprechende Methoden eingesetzt werden, die die jeweilige Lernart optimal unterstützen. Gleiche Methoden würden auch ausschließlich gleiche oder ähnliche Lernniveaus bedienen und damit eine Einschränkung bei der Erfüllung der Lernziele bedeuten. Methodenvielfalt ist auch erforderlich, um den unterschiedlichen Begabungen und Lernstilen der Schüler gerecht zu werden und somit deren Potential optimal auszuschöpfen.

Der gesellschaftliche Wandel von einer Wissensgesellschaft hin zu einer Informationsgesellschaft macht erforderlich, dass Schüler sich verstärkt Kompetenzen aneignen müssen, die die Gewinnung und den Umgang mit Wissen ermöglichen. Dafür werden andere Unterrichtsmethoden benötigt als beispielsweise für das Aneignen von Faktenwissen.[27]

Von den Unterrichtsformen, die in der aktuellen Literatur immer wieder unter dem Stichwort „offene Unterrichtsformen" zu finden sind, werden im Folgenden die wichtigsten aufgelistet und kurz erklärt.

---

[25] vgl. Schelten, A., Schlüsselqualifikationen, in: unterrichten / erziehen Nr. 3/2001, S. 121

[26] Seitz, O., Employability – zum Nutzen von Qualifikationen und Kompetenzen, in: unterrichten / erziehen Nr. 3/2001, S. 120

[27] vgl. Terhart, E., Dimensionen des Methodenproblems im Unterricht, in: Pädagogik 2/2000, S. 32–34

Bei der **materialgeleiteten Freiarbeit** arbeiten die Schüler selbstständig mit didaktisch aufbereitetem Material, entweder um bereits Erlerntes zu üben und zu vertiefen oder um Neues zu erarbeiten. Das Material reicht von Erkenntnismaterial, das dem Schüler zur selbstständigen Wissensaneignung hilft, bis hin zu Übungsmaterial in Form von Arbeitskarteien oder Spielen. Die Organisationsform in der materialgeleiteten Freiarbeit reicht von der Einzel- über die Partnerarbeit bis zur Gruppenarbeit.

Beim **Lernzirkel** wird ein Themengebiet in mehrere, kleinere Teilgebiete aufgeteilt, welche jeweils an verschiedenen „Lernstationen" mit didaktisch aufbereitetem Material bearbeitet werden können. Im Normalfall arbeitet die ganze Klasse oder ein Großteil an diesem Themengebiet, jedoch nicht gleichzeitig an einem bestimmten Teilgebiet. Die Schüler können selbstständig arbeiten und Reihenfolge und Zeitbedarf für ihre Arbeit selbst bestimmen. Eine inhaltliche Variierung ist aber eher selten möglich.

Die Methode „**Lernen durch Lehren**" basiert auf der Idee, dass man Inhalte, die man vermitteln möchte, gut verstanden haben muss und bei der Weitergabe ein weiteres Mal reflektieren und durchdenken kann. Dies kann dadurch geschehen, dass Schüler in der Lehrerrolle einzelne Unterrichtselemente übernehmen, entweder mit einzelnen Schülern oder einer Gruppe, in Einzelfällen auch in der ganzen Klasse. Auch wenn zur Umsetzung dieser Methode im Mathematikunterricht die Anforderungen an die didaktischen Fähigkeiten der lehrenden Schüler relativ hoch sind, gibt es Möglichkeiten zum Einsatz.

Das **Gruppenpuzzle** ist eine Form des Gruppenunterrichts und läuft in zwei Phasen ab: in der Phase der Expertenrunde und in der Phase der Unterrichtsrunde. In der Expertenrunde erarbeiten sich die jeweiligen Gruppen selbstständig ein Themengebiet, wobei jeder Gruppe eine andere Thematik zugewiesen wird. Am Ende dieser Phase ist jeder Schüler „Experte" für das Thema dieser Gruppe. Für die zweite Phase werden neue Gruppen gebildet und zwar in der Art, dass in jeder Gruppe alle Themen durch je einen Experten vertreten sind. Jeder Schüler hat nun die Aufgabe, sein Gebiet den anderen Gruppenmitgliedern zu vermitteln. Das Gruppenpuzzle eignet sich vor allem für Unterrichtsinhalte, die klar strukturiert und so aufbereitet sind, dass sie vom Schüler gut vermittelt und aufgenommen werden können.

Beim **Unterrichtsprojekt** ist der Ausgangspunkt eine vom Lehrer oder von Schülern angestoßene Projektidee. Um diese Projektidee durchführen zu können, wird zunächst eine Projektplanung durchgeführt, die in einer nächsten Phase durchgeführt wird. Den Abschluss bildet die Präsentation der Ergebnisse. Die Schüler arbeiten während des Projektes häufig in Kleingruppen, aber auch Einzel- und Partnerarbeit ist denkbar.[28]

[28] vgl. Wiechmann, J. (Hrsg.), Zwölf Unterrichtsmethoden – Vielfalt für die Praxis, Weinheim 2002 und vgl. Möhringer, J. u.a., Freies Arbeiten am Gymnasium – Materialien mit Anregungen für die Durchführung im Fach Mathematik mit CD-Rom, Dillingen 3. völlig neu bearbeitete Auflage 2003

Verbesserungsvorschläge für den Mathematikunterricht

Zwar sind viele der allgemeinen Verbesserungsvorschläge auch für den Mathematikunterricht denkbar, trotzdem sollen im Folgenden einige weitere fachspezifische Anregungen dargestellt werden.

Unterrichtsmethodik

Das Prinzip der Freiarbeit wird als Möglichkeit gesehen, ein offenes Unterrichtskonzept relativ problemlos in den Regelunterricht zu integrieren. Dabei werden „Freiarbeitspläne" verteilt, auf denen die Lehrkraft ein zu absolvierendes Programm auflistet. Dieses Programm soll vom Schüler in einer festgelegten Anzahl von Unterrichtsstunden bearbeitet werden. Die einzelnen Arbeitsaufträge sind z. B. das Bearbeiten von Arbeitsblättern oder das Durchführen von mathematischen Spielen zu bestimmten Themen. Dadurch, dass die Schüler im Wesentlichen alleine oder in Kleingruppen arbeiten, wird eine Binnendifferenzierung und individuelles Arbeiten ermöglicht.[29]

Ähnlich wird auch der sog. Wochenplanunterricht praktiziert. Die Schüler haben die Möglichkeit, bei der Bearbeitung von Übungsaufgaben die Zeit für die Bearbeitung festzulegen, die Sozialform (z. B. Einzelarbeit oder Partnerarbeit) zu wählen und u. U. auch Wahlaufgaben (z. B. Knobelaufgaben oder Lernspiele) auszusuchen. Dies alles trägt wieder zu einer Binnendifferenzierung bei und eröffnet dem Lehrer – dadurch, dass alle Schüler selbst „beschäftigt" sind – Freiräume, sich mit einzelnen Schülern zu befassen oder zu beobachten.[30]

Als eine weitere Unterrichtsmethode, die das Selbstlernen im Mathematikunterricht fördern soll, wird der Einsatz von Lerntagebüchern vorgeschlagen. Dabei führt jeder Schüler ein persönliches Lerntagebuch oder eine Arbeitsgruppe führt zusammen ein solches, in das am Ende einer jeden Unterrichtsstunde mit eigenen Worten der Hauptinhalt der Stunde eingetragen wird. Diese Lerntagebücher enthalten Ergebnisse der Arbeit, aber auch Teilergebnisse und offene Fragen. In regelmäßigen Abständen werden die Lerntagebücher von der Lehrkraft eingesammelt und mit Hinweisen und Kommentaren versehen. Als Vorteile werden genannt, dass sich Schüler durch das Führen eines Tagebuchs verstärkt mit Mitschülern über mathematische Unterrichtsinhalte unterhalten, über Mathematik reflektieren müssen und somit merken, wo noch

---

[29] vgl. Glagow-Schicha, L., Anders lernen – anders leben in der Schule, Freiarbeit im Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I, in: unterrichten / erziehen Nr. 3/2003, S. 146 – 150

So begrüßenswert derartige Bemühungen zur Veränderung von Unterricht sind und sicherlich besser zu bewerten sind als der reine Frontalunterricht, so muss auch gesehen werden, dass diese Art des Unterrichts wenig mit der ursprünglichen Idee von Freiarbeit zu tun hat. Schon der Begriff des Freiarbeitsplans zeigt deutlich, dass die freie Wahl der Arbeit für den Schüler nicht oder nur sehr eingeschränkt gegeben ist.

[30] Garpow, L., Wochenplanunterricht im Mathematikunterricht der 6. Klasse, in: unterrichten/erziehen Nr. 3/2002, S. 134 – 137

Sczesny, Ch., Wochenplanarbeit im gymnasialen Mathematikunterricht, Übungen zum Rechnen mit rationalen Zahlen, in: unterrichten / erziehen Nr. 3/ 2002, S. 157 – 161

Probleme liegen, und auch die Möglichkeit haben, bei Krankheit oder vor Klassenarbeiten anhand von Lerntagebüchern den Stoff nachholen bzw. wiederholen können.[31]

Neue Wege im Mathematikunterricht – Mathematik konstruktivistisch begreifen und verstehen („MATHE-CON“) nennt sich ein Projekt, das sich zum Ziel gesetzt hat, den Unterricht so aufzubauen, dass er dem Prinzip des Konstruktivismus folgt und die Schüler Mathematik wirklich verstehen und nicht nur auswendig Gelerntes wiedergeben. Die Lehrer sind aufgerufen, den Unterricht so zu organisieren, dass die Schüler aktiv, konstruktiv und selbstständig lernen können, verknüpftes Wissen statt Einzelwissen im Vordergrund steht, genügend Freiräume in zeitlicher und inhaltlicher Hinsicht gegeben werden, Üben in intelligenten Formen statt in ständig wiederholender Weise stattfindet. Auch sozialem Lernen in kooperativen Lernformen soll Beachtung geschenkt werden.[32]

Unterrichtsinhalte

Anwendungsaufgaben, Modellierung, Sachsituation mathematisieren, Textaufgaben sind alles Schlagworte für den ähnlichen Inhalt. Immer wieder wird für den Mathematikunterricht gefordert, Mathematik verstärkt zur Lösung praktischer Probleme einzusetzen. Dabei lernen die Schüler die Realität in die Sprache der Mathematik zu übersetzen, eine Lösung zu ermitteln und dieses Ergebnis als Antwort auf die Fragestellung wieder in die Realität zu übertragen und zu interpretieren. Auf diese Weise könne Mathematikunterricht dazu beitragen, mathematische Zusammenhänge in der Lebenswirklichkeit zu entdecken und diese wiederum auf die Wirklichkeit anzuwenden.[33]

Qualitätssicherung

Wie kann die Qualitätsentwicklung gemessen werden bzw. woran kann sie sich orientieren? Qualitätsstandards sollen eine Messlatte für die Güte von Mathematikunterricht darstellen. Als weitreichendste Ausführung von Bildungsstandards sollen die der Kultusministerkonferenz (KMK) vorgestellt werden :

Die internationale PISA-Studie erstellte die Aufgaben so, dass zu deren Bearbeitung sog. „mathematische Kompetenzen“ beherrscht werden müssen. Die KMK griff dieses Konzept für eine eigene Grundlage zur Qualitätssicherung von Unterricht auf und entwickelte einen Katalog von mathematischen Kompetenzen, die als Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss gelten. Da sie Grundlage

---

[31] Heske, H., Lerntagebücher, in: mathematik lehren/ Heft 104, S. 14 – 17

[32] Gastager, A., Patry J.-L., Schwetz, H., Wissen und Handeln, Lehrerinnen und Lehrer verändern ihren Mathematikunterricht, in: BuE 53 (2000) 3, S. 271 - 286

[33] vgl. Lewe, H., Eine Sachsituation mathematisieren: Sau auf der Autobahn, in: unterrichten / erziehen Nr. 3/2002, S. 128 – 130

Hofe, R.v., Kleine, M., Grundvorstellungen als mentale Basis mathematischer Bildung, in: unterrichten / erziehen Nr. 3/2002, S. 123 – 127 für weitere Maßnahmen in der Unterrichtsentwicklung sind, sollen sie hier ausführlich wiedergegeben werden. Sie lauten wie folgt:[34]

(K 1) Mathematisch argumentieren
Dazu gehört:
- Fragen stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind („Gibt es …?“, „Wie verändert sich…?“, „Ist das immer so …?“) und Vermutungen begründet äußern,
- mathematische Argumentationen entwickeln (wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise),
- Lösungswege beschreiben und begründen.

(K 2) Probleme mathematisch lösen
Dazu gehört:
- vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten,
- geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und anwenden,
- die Plausibilität der Ergebnisse überprüfen sowie das Finden von Lösungsideen und die Lösungswege reflektieren.

(K 3) Mathematisch modellieren
Dazu gehört:
- den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen,
- in dem jeweiligen mathematischen Modell arbeiten,
- Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen.

(K 4) Mathematische Darstellungen verwenden
Dazu gehört:
- verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten und Situationen anwenden, interpretieren und unterscheiden,
- Beziehungen zwischen Darstellungsformen erkennen,
- unterschiedliche Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auswählen und zwischen ihnen wechseln.

(K 5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
Dazu gehört:
- mit Variablen, Termen, Gleichungen, Funktionen, Diagrammen, Tabellen arbeiten,
- symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt,
- Lösungs- und Kontrollverfahren ausführen,
- mathematische Werkzeuge (wie Formelsammlungen, Taschenrechner, Software) sinnvoll und verständig einsetzen.

(K 6) Kommunizieren
Dazu gehört:
- Überlegungen, Lösungswege bzw. Ergebnisse dokumentieren, verständlich darstellen und präsentieren, auch unter Nutzung geeigneter Medien,
- die Fachsprache adressatengerecht verwenden,
- Äußerungen von anderen und Texte zu mathematischen Inhalten verstehen und überprüfen.

Dieser Kompetenzenkatalog ist zum Beispiel Vorlage für die in Bayern eingeführten Jahrgangsstufentests insofern, als die dort gestellten Aufgaben so konzipiert sind, dass diese Kompetenzen zur Lösungserstellung vorausgesetzt werden. Diese zu Beginn der Jahrgangsstufe 8 und 10 landesweit durchgeführten Tests sollen der Qualitätssicherung dienen.

---

[34] Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.), Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss, München 2004

1.3 Resümee

Der Stand der Diskussion, der noch durch viele weitere ähnliche Vorschläge erweitert werden könnte, zeigt, dass die Aktivität vor allem an der Basis sehr hoch ist, dass es viele engagierte und kreative Lehrer gibt, die sich mit der unbefriedigenden Situation in der Schule nicht abfinden wollen und Ideen für die Praxis entwickeln und umzusetzen versuchen. Die Kritik am bestehenden Unterricht bezieht sich v.a. auf den nach wie vor dominierenden Frontalunterricht mit der Methode des fragend-entwickelnden Unterrichtsgesprächs mit all seinen Problemen und Defiziten. Dementsprechend befassen sich die Verbesserungsvorschläge mit Veränderungen in der Methodik des Unterrichts und – da diese im Mathematikunterricht eine dominante Rolle spielen – mit Aufgaben zur Beschäftigung, Aneignung, Übung und Festigung des Unterrichtsstoffs. Was aber können die vielen Verbesserungsvorschläge bewirken?

H. v. Hentig unterscheidet drei Arten von Reformansätzen: Verbessern, Verändern und Neu denken. Dabei lehnt er die Ansätze Verbessern und Verändern ab, da sie an alten Maßstäben festhalten und eher ein bestehendes System manifestieren:

> *„Aber – das ist meine These – nur wenn die Schule selber schon eine neue Funktion hat, kann sich das Bewusstsein davon durchsetzen. Die Schule ohne Notwendigkeit neu zu denken, fällt in das Verändern und Verbessern zurück, führt nicht nur nicht zum Wandel, sondern im Gegenteil durch Reparatur zur Bewahrung. Eben deshalb kann man die Schule ein Leben lang reformieren.“* [35]

Genau das geschieht aber gegenwärtig an unseren Schulen. Es gibt ein enormes Bemühen, die Freiräume, die die Schulaufsicht bietet, wahrzunehmen, indem man mit bescheidenen Veränderungen versucht, die Situation zu verbessern. Hat man erkannt, dass man nicht alle Schüler gleichschalten kann, versucht man durch Binnendifferenzierung Abhilfe zu schaffen, muss aber gleichzeitig feststellen, dass diese Form individuellen Unterrichtens nur selten über den Zeitraum von einer Schulstunde hinausgeht und schon gar nicht über die nächste Klassenarbeit. Da müssen spätestens wieder alle Schüler auf dem „gleichen Stand“ sein. Oder: Hat man das Problem, dass die Schüler das Gelernte nicht anwenden können, was sich bei PISA überdeutlich gezeigt hat, so wird eine neue Aufgabenkultur entwickelt, die sich speziell an den PISA-Aufgaben orientiert und diesen „Aufgabentyp“ übt. Ändert das wirklich das Problem, das im Unterricht im Allgemeinen und im Mathematikunterricht im Speziellen vorliegt?

Als ein Ergebnis von PISA wurde ermittelt, dass

- 45% aller deutschen 15-Jährigen keinerlei Interesse für Mathematik haben

[35] Hentig v. H., Die Schule neu denken. Eine Übung in pädagogischer Vernunft, Weinheim 2003, S.179

- 47% aller deutschen 15-Jährigen Angst vor Mathematik haben und sich große Sorgen um schlechte Noten in diesem Fach machen. Mädchen sind davon in besonderem Maße betroffen.[36]

Allein die Vorstellung, dass fast die Hälfte aller Schüler mit Angst im Klassenzimmer sitzt und allein die aus der Lernpsychologie längst bekannte Tatsache, dass Angst ein enormes Lernhemmnis darstellt, müssten alle am Mathematikunterricht Beteiligten veranlassen, dieses Problem zum vorrangigen Anliegen zu machen. Nicht nur die Einsicht, dass Angst zu geringerem Lernerfolg führt, müsste Motivation genug sein, Veränderungsmaßnahmen zu ergreifen, sondern auch die Achtung vor dem Kind und die Rücksicht auf seine psychische Gesundheit. Aber auch die Tatsache, dass mehr als die Hälfte der Schüler keinerlei Interesse am Mathematikunterricht hat und dementsprechend demotiviert ist, sollte so nicht hingenommen werden.

Bei allem, was an Veränderungen vorgeschlagen wird, sieht es so aus, dass man, um es bildlich zu sagen, ein Loch zu stopfen versucht, währenddessen sich ein neues auftut. Es entsteht der Eindruck, dass zwar für zahlreiche Einzelfragen Lösungsvorschläge erarbeitet werden, dass es aber, frei nach Goethe, fehlt am einig Band, das alle (Unterrichts-) Welt im Innersten zusammenhält.

Drei Haupthindernisse blockieren nach K. Lengnink und S. Prediger den mathematischen Lernprozess:

„Orientierungslosigkeit im Lernprozess“: Damit ist das Problem gemeint, dass auf Grund der deduktiven Vorgehensweise und des fragend-entwickelnden Unterrichtsstils mathematische Zusammenhänge nur unzureichend vermittelt werden. Dabei geht nicht nur der Beziehungsreichtum der mathematischen Inhalte verloren, sondern es wird auch der Eindruck der Beliebigkeit dieser Lerninhalte verstärkt.

„Fehlende Sinnbezüge und fehlende Verbindung zur Lebenswelt der Lernenden“: Geht der Bezug mathematischer Probleme zur Lebenswelt des Schülers verloren, bzw. wird ein solcher Bezug vom Lehrer gar nicht als wichtig erkannt, wird nicht nur der Lernprozess erheblich beeinträchtigt, sondern ist auch Mathematikverdrossenheit die Folge. Dabei wäre es relativ einfach, Gemeinsamkeiten zwischen mathematischen Problemlösungsprozessen und dem Alltagsdenken herzustellen.

„Die Objektivität des Fachs, in dem es nur richtig und falsch gibt und kein Platz für Individualität und Subjektivität bleibt“: Objektivität des Fachs und subjektive Lern- und Aneignungsstrategien scheinen unvereinbar zu sein. Lernpsychologisch betrachtet trägt jedoch gerade ein hoher Ich-Anteil erheblich zum Verständnisprozess bei.[37]

[36] vgl. PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.): PISA 2003 – Der Bildungsstandard der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs, Münster 2004, S. 203 ff.

[37] Lengnink, K., Prediger, S., Lebendiges Mathematiklernen, Der Blick der Themenzentrierten Interaktion auf die Mathematikdidaktik, in: BuE 54 (2001) 3, S. 340 ff.

Wie kann diesem Problem begegnet werden?

Der Versuch, einzelne methodisch-didaktische Korrekturen vorzunehmen, scheint schon deshalb wenig erfolgversprechend, weil er nur Teilprobleme zu kurieren vermag, aber keine „Heilung“ verspricht. Der von H. v. Hentig vorgeschlagene Weg, Schule neu zu denken, erscheint hingegen zu global, als dass er eine praktikable Lösung darstellen könnte. Denn wer Schule neu zu entwerfen fordert, müsste gleichzeitig die Zusammenhänge neu definieren, in die die Schule als soziale Institution eingebettet ist.

Wenn also Veränderungen angestrebt und gleichzeitig Radikallösungen vermieden werden sollen, erscheint es notwendig, zunächst einmal nach Kriterien zu suchen, die neben dem Grund notwendiger Veränderungen auch die Richtung aufzeigen können, in der die Veränderungen stattfinden sollen.

Sonst könnte eintreten, was schon I. Kant angemahnt hat: Pädagogik würde sonst „nie ein zusammenhängendes Bestreben werden, und eine Generation möchte niederreißen, was die andere schon aufgebaut hätte.“[38]

Die Frage, die uns also zuerst beschäftigen muss, ist die: Welche Prinzipien pädagogisch-unterrichtlichen Handelns können als Leitidee für die Gestaltung des Mathematikunterrichts dienen?

Die Begründung eines solchen Kriteriums kann nicht bloß pragmatischer, sondern muss von grundsätzlicher Natur sein, will man nicht nur Symptome kurieren.Vielmehr sollen die Symptome Anlass sein, eine Debatte anstoßen, um auf der Grundlage eines pädagogisch-anthropologischen Kriteriums Reformen einzuleiten. Dieses Gemeinsame kann nur deshalb eine pädagogische Kategorie sein, da der Adressat des Lehrens und das Subjekt des Lernens der Heranwachsende ist.

Pädagogik aber ist bekanntermaßen die Theorie, „die von dem Verhältnisse der älteren Generation zur jüngeren ausgehend sich die Frage stellt. Was will denn eigentlich die ältere Generation mit der jüngeren? Wie wird die Tätigkeit dem Zweck, wie das Resultat der Tätigkeit entsprechen?“[39].

Mit dieser Definition der Erziehung von F. Schleiermacher als einwirkender Tätigkeit der älteren Generation auf die jüngere sind zwei Kategorien implizit mit angesprochen, aus denen sich die Kriterien für die Gestaltung des Unterrichts ableiten lassen: **Entwicklung und Bildung**.

[38] Kant, I., Werke in zehn Bänden, hrsg. von W. Weischedel, Band 10, Darmstadt 1986, S. 704

[39] Schleiermacher, F., Theorie der Erziehung, in: Ausgewählte Pädagogische Schriften, besorgt v. E. Lichtenstein, Paderborn 1964, S. 38

Die Berücksichtigung des Entwicklungsgedankens ist erforderlich, weil das besondere Kennzeichen des Heranwachsenden gerade darin besteht, sich noch in einem unfertigen, auf Entfaltung ausgerichteten Zustand zu befinden.

Das Unterrichtsgeschehen vom Begriff der Bildung her zu betrachten ist notwendig, weil nur durch eine zentrale Kategorie, wie sie der Bildungsbegriff darstellt, alle „pädagogisch gemeinte(n) Hilfen, Maßnahmen, Handlungen und individuelle(n) Lernbemühungen begründbar und verantwortbar bleiben oder werden sollen“[40]. Auch wer einwendet, Bildung sei ein idealisierender oder historisch überholter Begriff, der weder den Erziehungs- und Schulalltag noch die modernen pädagogischen Aufgabenfelder unserer heutigen Gesellschaft begrifflich erfassen kann, muss jedoch zugestehen, dass die Frage nach der Bestimmung des Menschen immer wieder neu gestellt und neu beantwortet werden muss. Jede pädagogische Einzeltätigkeit, jedes Unterrichtsgeschehen muss sich dieser Sinnfrage stellen, sollen sie nicht zu einem sinnleeren Aktivismus oder Mechanismus verkommen. J. F. Herbart betont zu Recht: Der Zweck des Unterrichts ist die Bildung des Menschen.

Wenn nun die „Tätigkeit dem Zweck“, sprich: der Bildung, und das „Resultat“, sprich: der erwachsene mündige Mensch, „der Tätigkeit“ entsprechen sollen, so gilt es im Folgenden die wesentlichen Gesichtspunkte von Entwicklung und Bildung darzustellen, um aus ihnen die leitenden Ideen zu gewinnen, die das Unterrichtsgeschehen im Fach Mathematik bestimmen sollen.

Dabei soll schon an dieser Stelle vor einem Missverständnis gewarnt werden: Wenn hier Bildung zum Maßstab der Unterrichtsinhalte und der Unterrichtsgestaltung erhoben wird, so soll das nicht heißen, dass damit andere Aufgaben der Schule, wie z. B. die Vorbereitung der Schüler auf das Leben in Wirtschaft und Gesellschaft ignoriert oder außer Acht gelassen werden. Vielmehr besteht Bildung gerade darin, dass der Einzelne sein Leben in Beruf und Gesellschaft selbst bestimmen und verantwortlich gestalten kann. Das schließt selbstverständlich auch mit ein, sich nicht von Ideologien vereinnahmen zu lassen oder gegenüber Unrecht blind zu sein.

Von dem hier angedeuteten Bildungsverständnis wird im Folgenden ausführlicher die Rede sein.

[40] Klafki, W., Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik, Weinheim und Basel 1985, S. 13

2 Das neuzeitliche Bildungsverständnis – Kriterien für inhaltliche und methodische Gestaltung des Mathematikunterrichts

Es gibt kaum einen wissenschaftlichen Beitrag zur Veränderung und Verbesserung der Schul- und Unterrichtssituation, in dem nicht auf den Bildungsauftrag der Schule verwiesen wird. In amtlichen Lehrplänen lässt sich das genauso nachweisen wie in der pädagogisch-didaktischen Literatur.

So richtig die Bezugnahme auf Bildung ist, so wenig befriedigt ihre Begründung. Denn meistens bleibt es bei dem schlichten Hinweis auf den Bildungsauftrag der Schule bzw. den bildenden Charakter des Faches Mathematik, ohne dass eine hinreichende Begründung geliefert wird bzw. eine kritische Auseinandersetzung mit dem vorherrschenden Bildungsverständnis stattfindet. So bleibt das Thema Bildung meist der persönlichen Auslegung des Einzelnen oder der aktuellen Meinung des „main stream" überlassen.

Diese Arbeit geht in Übereinstimmung mit dem in der pädagogischen Tradition fest verankerten Grundkonsens davon aus, dass die Schule einen Bildungsauftrag zu erfüllen hat. Alle im Unterricht gelehrten Fächer haben dieser Grundüberzeugung sowohl hinsichtlich ihres Umfangs als auch hinsichtlich der Art ihrer Vermittlung zufolge der Idee der Bildung Rechnung zu tragen. Soll aber Bildung nicht bloß ein schmückendes Beiwort, sondern ein Merkmal für die Schule sein, das den Unterricht charakterisiert und das Schulgeschehen bestimmt, dann muss zunächst geklärt werden, was mit Bildung bezeichnet wird.

Nun lassen sich Bildungsfragen nicht losgelöst von gesellschaftlichen Fragen klären, so dass sich die Frage aufdrängt, ob Bildung lediglich der pädagogische Reflex auf gesellschaftliche Veränderungen ist. Wenn dem so wäre, dann wäre allerdings die Schule dem permanenten Druck ausgesetzt, den Lehr-Lern-Prozess jeweils den aktuellen gesellschaftlichen Erfordernissen anzupassen - was angesichts einer sich rasch wandelnden Gesellschaft einen ebenso raschen Wechsel schulischer Aufgabenfelder nach sich ziehen würde.

Betrachtet man jedoch das Verhältnis von Bildung und Gesellschaft unter dem Gesichtspunkt, dass die Bildungspraxis nicht als abhängige Variable der gesellschaftlichen Veränderungen, sondern als Teil gesellschaftlicher Prozesse und ihrer Veränderungen gesehen wird, dann kommt der Schule die Aufgabe zu, selbst gestaltend auf die Gesellschaft einzuwirken. Dies kann aber nur in der Weise geschehen, dass sie die heranwachsende Generation darauf vorbereitet und dazu befähigt, an diesem Gestaltungsprozess kritisch und konstruktiv mitwirken zu können. Hierfür ist Bildung eine unerlässliche Voraussetzung. Was aber ist Bildung? Sich des Bedeutungsgehalts dieses Begriffs immer wieder zu versichern, ist Aufgabe aller an der Bildungspraxis beteiligten Personen. Daher sollen im Folgenden Eckpunkte neuzeitlichen Bildungsverständnisses herausgearbeitet werden, die als leitende Gesichtspunkte der Unterrichtsgestaltung dienen können.

2.1 Ansätze neuzeitlicher Bildungstheorie

Die Rede vom neuzeitlichen Bildungsverständnis verweist auf eine zweifache Gestalt des Bildungsbegriffs, die, wie G. Buck in seinen Studien nachgewiesen hat[41], um 1800 ihre besondere Ausdifferenzierung erfahren hat. Die Rede ist von einem schon auf einer älteren Tradition beruhenden und von G. Buck so genannten „metaphysischen" Bildungsbegriff und einem im eigentlichen Sinn neuzeitlichen Bildungsverständnis, das er als „geschichtlich" und „ateleologisch" bezeichnet. Trotz ihrer Differenz liegen beiden Begriffsverständnissen zwei Motive zugrunde, die wegen ihrer sachlichen Zusammengehörigkeit Grundlage eines modernen, jedoch erst zu entwerfenden Bildungsbegriffs werden können.

Die unausgesprochene Voraussetzung des metaphysischen Bildungsbegriffs besteht in der Annahme, dass aller Bildung eine mit dem Wesen des Menschen gegebene Zielstrebigkeit menschlichen Werdens, eine „objektive Teleologie" innewohnt. W. v. Goethe hat den Gedanken einer keimhaften Präformation bzw. die Annahme eines „individuellen Werdensgesetzes" auf die prägnante Formel gebracht: „geprägte Form, die lebend sich entwickelt". Da geistiges Werden ausschließlich in Analogie zu biologischen Wachstumsprozessen gesehen wird, erhält Bildung die Bedeutung einer organischen Entfaltung präformierter Möglichkeiten.

Gestützt wird dieses Bildungsverständnis durch J. Fr. Blumenbachs biologische Kategorie des „Bildungstriebs" (nisus formativus)[42], womit er die Entwicklung des einzelnen Lebewesens im Sinne einer Kette von Neubildungen verstehbar machen und auf eine empirische Grundlage stellen wollte. Dieser Begriff fand eine rasche Aufnahme in die philosophische Anthropologie der damaligen Zeit und übte über diesen Weg eine starke Wirkung auf den Bildungsbegriff W. v. Goethes und des frühen W. v. Humboldts aus. Es ist zwar J. Fr. Blumenbachs Kategorie des Bildungstriebs zu verdanken, dass der Bildungsbegriff auf diese Weise eine Dynamisierung erfuhr. Trotz seiner Kritik an der Annahme präformierter Keime im Menschen ist es W. v. Goethe nicht gelungen, den organologischen Bildungsbegriff zu Gunsten eines geschichtlichen zu überwinden. Sowohl er als auch der frühe W. v. Humboldt hielten an der abgemilderten Vorstellung einer „Vorzeichnung" („Praedelineation") des geistigen Werdens des Menschen fest.

---

41 Buck, G., Rückwege aus der Entfremdung, Paderborn, München 1984, S. 13 – 27 und Buck G., Herbarts Grundlegung der Pädagogik, Heidelberg 1985, S. 86 – 101

42 Blumenbach, J.Fr., Über den Bildungstrieb, Göttingen 1791 vermerkt bei Buck G., Herbarts Grundlegung der Pädagogik, Heidelberg 1985, S. 90

Trotz der „neuhumanistischen Revolution des Bildungsbegriffs“, die ebenfalls um 1800 stattfand, konnte sich „der an die alte Teleologie anknüpfende Bildungsbegriff der Goethezeit und sein Modell der organischen Entfaltung gegebener Anlagen“[43] bis ins 20. Jahrhundert hinein durchsetzen. Mag sein, dass im Gefolge jenes organologischen Bildungsbegriffs jene Welt des Bildungs-Pluralismus entstehen konnte, in der die Einzelnen „unbeirrbar das werden, wozu sie bestimmt sind“, so dass diese Bildungswelt am Ende „so scheinhaft und unglaubwürdig (wird), dass sogar das Wort ‘Bildung’ funktionslos zu werden droht“[44]. So muss man dennoch dem teleologischen Bildungsverständnis, zumindest in seiner ursprünglichen Intention, zugute halten, dass in ihm ein für die Bildung des Menschen zentraler Gedanke aufbewahrt wurde, der ihn mit dem i. e. S. neuzeitlichen Bildungsbegriff verbindet: die freie Selbsttätigkeit.

Das i. e. S. neuzeitliche, ateleologisch-geschichtliche Bildungsverständnis hat vor allem in F. Schiller, J. G. Fichte, G. F. Hegel und J. F. Herbart seine stärksten Verfechter gefunden. F. Schiller verstand Bildung als Antwort auf eine geschichtliche Herausforderung, die lautete: Selbstentfremdung des Menschen. J. J. Rousseau hat dieses Kennzeichen der Neuzeit erstmals auf den Begriff gebracht, indem er die Geschichte der menschlichen Kultur-Erfindungen als Geschichte des Identitätsverlusts beschrieb. Seither wird die Idee der Identität zum „Telos“ allen Bildungsstrebens; Telos aber jetzt nicht mehr verstanden im Sinne einer mit der Natur des Menschen gegebenen objektiven Teleologie, sondern im Sinne eines geschichtlichen Entwurfs. Damit wird das ateleologisch-geschichtliche Identitätskonzept der Bildung zum eigentlichen Merkmal des (i.e.S.) neuzeitlichen Bildungsbegriffs. Während der teleologische Bildungsbegriff das Gelingen der Bildung „durch die Annahme einer übermenschlichen Instanz garantierte“, macht der geschichtliche Bildungsbegriff dieses Gelingen „von einer menschlich-endlichen Leistung abhängig“.[45]

Die volle Bedeutung dieser als historisch zu bezeichnenden Wende in der Geschichte des Bildungsbegriffs tritt in ihrer Tragweite erst in Erscheinung, wenn man die Folgen bedenkt, die mit dieser Wende verbunden sind: das Risiko des Scheiterns und der Bruch mit der Tradition. Die Möglichkeit des Misslingens wird zu ihrem ständigen Begleiter, aber auch zum Stachel, der zum unablässig bildenden Bemühen anspornt.

Die neue Konzeption „der Geschichtlichkeit und Offenheit des menschlichen Seins“ führt zu einer Neufassung der „Bildungsmöglichkeit und Bildungsbedürftigkeit dieses Seins“[46]. J. G. Fichte hat diese unbegrenzte Offenheit des Menschen dadurch zum Ausdruck gebracht, dass er dem vorherrschenden Bildungsverständnis seiner Zeit den Begriff der unbestimmten Bildsamkeit entgegensetzte. „Jedes Tier *ist,* was es ist: der Mensch allein ist ursprünglich gar nichts ... . Die Natur hat alle ihre Werke vollendet,

[43] Buck, G., Rückwege aus der Entfremdung, Paderborn, München 1984, S. 15f.

[44] Ebenda, S. 15

[45] Ebenda, S. 18

[46] Ebenda, S. 17

nur von dem Menschen zog sie die Hand ab, und übergab ihn gerade dadurch an sich selbst. Bildsamkeit als solche, ist der Charakter der Menschheit“[47]. J. F. Herbart schloss sich dieser Einsicht an und machte dieses Verständnis von Bildsamkeit zum Ausgangspunkt seiner ganzen Pädagogik.

Anhand dreier Repräsentanten wird im Folgenden das neuzeitliche Bildungsverständnis, das Grundlage und Voraussetzung der Bildungspraxis, also der Schul- und Unterrichtsgestaltung, insbesondere auch des Mathematikunterichts sein soll, entfaltet: W. v. Humboldt, J. F. Herbart und G. Kerschensteiner. Dabei kann J. F. Herbart als Repräsentant des rein geschichtlichen Bildungsverständnisses gelten. Bei G. Kerschensteiner ist noch sehr deutlich die Tradition des teleologischen Bildungsbegriffs erkennbar. W. v. Humboldts bildungstheoretischer Ansatz ist in seinem frühen Stadium noch dem teleologischen Verständnis zuzurechnen. Seine späteren Schriften aber zeigen sehr deutlich eine Hinwendung zum ateleologischen Bildungsbegriff. Da in beiden Begriffsversionen, dem metaphysischen und dem rein geschichtlichen ein, wie G. Buck nachgewiesen hat, gemeinsames Grundmotiv aufbewahrt ist, kann trotz der Differenz dieser drei Repräsentanten deren gemeinsames Anliegen zum leitenden Gesichtspunkt der Bildungspraxis gemacht werden. Das gemeinsame Grundmotiv kann vorläufig in dem Begriff zusammengefasst werden: Bildung als Aufgabe der Selbstbestimmung.

2.2 Drei Repräsentanten neuzeitlicher Bildungskonzeptionen

2.2.1 Bildung und Sprache: Das Bildungsverständnis bei Wilhelm von Humboldt (1767 – 1835)

W. v. Humboldt gehört zu den Begründern der neuzeitlichen Bildungstheorie, die die Bildungsaufgabe und das Bildungsziel in den Menschen selbst verlegt.

Diese in der Literatur unangefochtene Feststellung bedeutet jedoch nicht, dass innerhalb der Humboldtinterpretation auch Einigkeit über die Auslegung seiner Bildungstheorie bestünde. Die verschiedenen Lesarten weichen zum Teil weit voneinander ab, je nach Standpunkt der jeweiligen Interpretation. So hat etwa E. Spranger ein Humboldtbild entworfen, das noch ganz und gar dem neuhumanistischen Bildungsideal verpflichtet ist. Individualität, Totalität und Universalität sind nach E. Spranger die Wesensmerkmale des Humboldtschen Bildungsbegriffs, die in der Idee der Humanität ihre inhaltliche Zusammenfassung finden.

[47] Fichte, J. G., Sämtl. Werke Bd. III, S. 79f., zitiert nach Buck G., Herbarts Grundlegung der Pädagogik, Heidelberg 1985, S. 95

Es war vor allem die Sprangersche Version der Humboldtauslegung, die die Kritiker veranlasste, W. v. Humboldt ein idealistisches, der bloßen Innerlichkeit verpflichtetes Bildungsverständnis zu unterstellen.[48] Gerade die Abkoppelung der Bildung von den politischen Verhältnissen, so wird argumentiert, habe dazu beigetragen, dass die sog. Bildungselite den Entwicklungen und Zielsetzungen des Dritten Reichs unkritisch und zum Teil sogar sympathisierend gegenüberstand.[49]

Ein weiteres Missverständnis der Humboldt-Interpretation bezieht sich auf seinen „Kraft-Begriff und die Begriffe der Proportionalität des Höchsten und Ganzen“, die, wie D. Benner ausführt, „in Anlehnung an die Monadologie von G. W. Leibniz“ interpretiert wurden.[50] G. W. Leibniz hatte die ganze belebte Natur einschließlich die des Menschen als eine „nach einem 'inneren Prinzip' organisierte, 'mechanisch' nicht erklärbare ... Einheit (ge)fasst“.[51] Als Beleg wurde von den Interpreten, wie D. Benner nachweist, folgende Textstelle herangezogen:

> *„Der wahre Zwek des Menschen – nicht der, welchen die wechselnde Neigung, sondern welchen die ewig unveränderliche Vernunft ihm vorschreibt – ist die höchste und proportionirlichste Bildung seiner Kräfte zu einem Ganzen.“*[52]

Dieser Text wurde immer wieder so interpretiert, als verstünde W. v. Humboldt unter Kraft ein substantielles Vermögen und unter Bildung eine zu entfaltende „geprägte Form“. Jedoch bereits der Nachsatz der genannten Textstelle zeigt, dass dem nicht so ist:

> *„Zu dieser Bildung ist Freiheit die erste, und unerlassliche Bedingung. Allein ausser der Freiheit erfordert die Entwikkelung der menschlichen Kräfte noch etwas andres, obgleich mit der Freiheit eng verbundenes, Mannigfaltigkeit der Situationen. Auch der freieste und unabhängigste Mensch bildet sich minder aus.“*[53]

Wo „Freiheit der Kräfte“ und „Mannigfaltigkeit der Situationen“ die Voraussetzung für einen „hohen Grad der Bildung“[54] sind, würden einseitige und einschränkende

---

[48] vgl. Benner, D., Wilhelm von Humboldts Bildungstheorie, München 1990, S. 25

[49] vgl. Ebenda., S. 25 f.

[50] Ebenda, S. 48

[51] Ebenda, S. 48

[52] Humboldt, W. v., Werke in fünf Bänden, hrsg. v. A. Flitner und K. Giel, Darmstadt 1960

Im Folgenden wird, wenn nicht anders vermerkt, nach dieser Ausgabe zitiert unter Angabe des jeweiligen Bandes.

Hier Humboldt, W. v., Werke Band I, S. 64

[53] Ebenda, S. 64

[54] Ebenda, S. 58

Vergesellschaftungsformen die Aufgabe der Selbstbestimmung verhindern. Denn es soll ja keineswegs „der Mensch dem Bürger geopfert“[55] werden.

Daher meint W. v. Humboldt etwas anderes, wenn er von menschlicher Kraft spricht, nämlich Energie, Tat-Kraft bzw. Tätigkeit überhaupt, die sich nur in Freiheit entfalten und in mannigfachen Situationen bewähren kann. Erst als Handelnder gewinnt der Mensch seine besondere individuelle Größe:

Aus dem Gesagten geht hervor:[56]

1. W. v. Humboldts Aussage von der „höchsten und proportionirlichsten Bildung“ bedeutet keineswegs eine irgendwie geartete harmonische Menschenbildung.[57] Vielmehr besteht zwischen der höchsten und der proprotionierlichsten Ausbildung der Kräfte ein gegensätzliches Verhältnis von der Art: Je höher der Grad an Spezialisierung in einem Bereich ist, um so weniger ausgeprägt sind die übrigen Bereiche unseres Wissens und Könnens und umgekehrt. Daher ist es Aufgabe der Bildung, hier eine gewisse Ausgewogenheit herzustellen.

2. Was W. v. Humboldt unter „Kraft“ versteht, entspricht eher dem J. F. Herbartschen Begriff der Bildsamkeit. Dieser verweist auf die „energetische Struktur menschlicher Bildung“ , der zufolge Bildung eine unabschließbare Aufgabe darstellt. „Fortschreitende Bildung ist überhaupt nur möglich, weil wir nie endgültig mit uns identisch sind, sondern stets von neuem an unserer Bestimmung arbeiten können“[58]

3. Der Ausdruck „höchste Bildung“ meint nicht, dass es eine höchste Norm für die Bildung gibt, die dem Einzelnen vorzeichnet, wie er seine Bildungsaufgabe zu erfüllen habe. „Höchste Bildung“ und proportionierlichste Bildung“ verweisen m. E. auf ein Verhältnis innerhalb einer sich immer weiter ausdifferenzierenden Welt, in der der Einzelne gerade nicht mehr Spezialist auf allen Gebieten sein kann, also Allseitigkeit und Universalität nicht mehr zu erreichen vermag. Vielmehr muss die W. v. Humboldt´sche Aussage m. E. in der Weise gedeutet werden, die J. F. Herbart so beschrieben hat: „Alle müssen Liebhaber für alles, jeder muss Virtuose in einem Fach sein“.[59]

Die weitere Analyse der Grundstruktur der Bildung bei W. v. Humboldt muss sich der Frage nach der Bestimmung des Menschen widmen. Aus der Beantwortung dieser Frage lässt sich dann auch eine Antwort auf die Frage nach dem Ziel und dem Gang

---

[55] Ebenda S. 106

[56] vgl. zum Folgenden: Benner, D., Wilhelm von Humboldts Bildungstheorie, München 1990, S. 49 – 52

[57] Wobei W. v. Humboldt nicht immer sorgfältig zwischen „Kraft“ und „Kräfte“ unterscheidet.

[58] Benner, D., Wilhelm von Humboldts Bildungstheorie, München 1990, S. 52

[59] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften hrsg. von Walter Asmus, Band 2, Stuttgart 1982, S. 42

der Bildung finden. Bezug genommen wird zunächst auf ein Fragment W. v. Humboldts von 1797, das den Titel „Über den Geist der Menschheit“ trägt. W. v. Humboldt weilte zu diesem Zeitpunkt in Paris, wo wenige Jahre zuvor die Französische Revolution und die sich anschließende Schreckensherrschaft der Jakobiner begann, so dass die Frage nach der menschlichen Bestimmung nicht nur einen philosophischen, sondern auch einen erfahrungs- und erlebnismäßigen Hintergrund hatte.[60]

Die Frage, worin die Bestimmung des Menschen besteht, schließt die andere Frage mit ein, was als Maßstab und Richtschnur für die Beurteilung seiner Bestimmung gelten kann. W. v. Humboldts Antwort ist die: Die äußeren gesellschaftlichen Gegebenheiten sind zu „schwankend“, zu sehr von den Launen der Menschen bestimmt und zu stark den Ordnungsprinzipien der Natur entfremdet, als dass sie Maßstab sein könnten.[61] „Seitdem in einem der bedeutendsten und cultiviertesten Theile der Erde eine wirkliche Umkehrung aller Verhältnisse Statt gefunden hat“, gemeint ist die Französische Revolution, kann nach W. v. Humboldt das gesuchte und geforderte Regulativ „allein noch in unserm Innern“[62] gefunden werden.[63] Aber auch dort liegt es nicht einfach in der Weise gleichsam ausgebreitet vor, dass der Mensch sich seiner unmittelbar versichern könnte. Was als Konsequenz bleibt, mündet in eine zweifache Überlegung: Zum einen hat der Mensch keine andere Wahl, als den Grund seiner Bestimmung in sich selbst zu suchen, so dass man sagen kann, die Bestimmung des Menschen ist, sich selbst bestimmen zu müssen. Zum andern ist auch das Maß der Selbstbestimmung, da es weder als äußere noch als innere Norm betrachtet werden kann, nur vom Selbst des Menschen her zu erfragen und zu gewinnen.

Im Hinblick auf den Begriff und die Aufgabe der Bildung folgt daraus: Um sich selbst bestimmen zu können, bedarf der Mensch der Bildung. Sie setzt ihn in den Stand und gibt ihm das nötige Rüstzeug, um dieser Aufgabe gerecht zu werden. Weil Selbstbestimmung die Aufgabe aller ist, bedürfen auch alle der Bildung. Das Beurteilungskriterium für das Wie seiner Selbstbestimmung muss der Mensch ebenfalls aus sich selbst gewinnen. Auch dazu bedarf er der Bildung. Sie soll ihn dazu befähigen und ermächtigen. Nun kann jedoch niemand den Menschen zu seiner Selbstbestimmung befähigen, es sei denn der Mensch selbst. Damit wird Bildung zur (Selbst-) Ermöglichung seiner selbst.

---

[60] zum Folgenden vgl. Benner, D., Wilhelm von Humboldts Bildungstheorie, München 1990, S. 91 – 108

[61] vgl. Humboldt, W. v., Werke Band I, S. 506

[62] Ebenda, S. 506

[63] Die Aktualität seiner Frage nach den Beurteilungskriterien der menschlichen Bestimmung springt sofort in die Augen, wenn man an den sog. „Bildungsschock“ nach dem Ende der Naziherrschaft denkt, als das ganze Ausmaß der Barbarei sichtbar wurde, gegenüber der große Teile des sog. Bildungsbürgertums blind waren. Die Aktualität dieser Frage bleibt aber nicht auf besondere gesellschaftliche Vorkommnisse beschränkt. Sie ist von grundsätzlicher Bedeutung, weil sie in jeder Situation vom einzelnen Menschen und von der Allgemeinheit erneut gestellt werden muss.

Da Bildung die Aufgabe aller und nicht einiger weniger ist, muss auch das Maß der Bildung „auf alle Anwendung" finden können. Es muss „etwas Allgemeines seyn", ohne die „Verschiedenheit der Individuen" zu beeinträchtigen und ohne die „verschiedene(n) Naturen nach einem einzigen Muster" beurteilen zu wollen"[64]. Dieses Allgemeine bezeichnet W. v. Humboldt mit dem Begriff des „Geistes der Menschheit", womit er den Inbegriff dessen meint, was „eng und unmittelbar mit ... der Natur"[65] oder dem Wesen des Menschen verbunden ist. Bildung bezeichnet folglich die Selbstbildung der Person. Ihre von ihrem Wesen her aufgegebene Bestimmung heißt Selbstbestimmung.

Die Schule ist der Ort und die Institution, an dem und durch die der Schüler auf diese Aufgabe vorbereitet und befähigt werden soll. Die Bildung selbst kann sie nicht bewerkstelligen. Sie bleibt ein Werk des Schülers. Insofern hat die Schule nur eine hinsichtlich seiner Bildung propädeutische Funktion. Dennoch ist sie eine Stätte der Bildung, wenn es ihr gelingt, die maßgeblichen Grundlagen zu schaffen, ohne die Bildung nur schwer gelingen kann, und sofern ihre didaktischen Maßnahmen zur Selbsttätigkeit auffordern.

War bisher von der Bildung als (Selbst-)Ermächtigung zur Selbstbestimmung die Rede, so soll im Folgenden die sich daran anschließende Frage beantwortet werden, wie das Individuum seine Bestimmung durch bildende Tätigkeit erreichen kann. Diese Frage wird unter Bezugnahme auf ein anderes Fragment W. v. Humboldts erörtert, das er 1794 verfasst hat und das 1907 unter dem Titel „Theorie der Bildung des Menschen" erschienen ist. Hintergrund dieses Fragments war die Absicht W. v. Humboldts, ein „trefliches Werk" über die „verschiedenen Fächer menschlicher Erkenntniss" unter dem Gesichtspunkt ihrer „Vollständigkeit" und ihrer „Übersicht" zu schreiben[66]. Mit anderen Worten: er wollte zeigen, wie durch wissenschaftliche Erkenntnis nicht nur Wissen vermehrt, sondern auch Einsicht und Gesinnung vertieft werden können. Dazu aber ist es erforderlich, einen „höheren Standpunkt" einzunehmen, von dem aus sich die innere „Verbindung" der einzelnen Wissensgebiete und deren „eigentliche Natur" aufzeigen lässt[67]. Zu diesem anspruchsvollen Vorhaben ist es zwar nicht gekommen. Dennoch ist es W. v. Humboldt, gelungen zu zeigen, wie wir die „Aufgabe unsres Daseyns", nämlich die Selbstbestimmung, oder in den Worten W. v. Humboldts, „dem Begriff der Menschheit in unsrer Person" einen größtmöglichen „Inhalt" und eine höchstmögliche „Form" zu geben[68], erfüllen können.

Dass die Aufgabe der Selbstbestimmung nur durch die Tätigkeit des Denkens und Handelns und diese wieder nur „vermöge eines Dritten", nämlich des „Vorstellens und

---

[64] Ebenda, S. 507

[65] Ebenda, S. 506

[66] Ebenda, S. 234

[67] Ebenda, S. 234

[68] Ebenda, S. 235

Bearbeitens von ... Welt" möglich ist[69], war W. v. Humboldts bildungstheoretische Grundeinsicht. Zwei Fragen bedürfen dabei einer näheren Erklärung: Was meint der Begriff „Welt" und wie ist das Verhältnis von Mensch und Welt zu sehen?

Welt ist für W. v. Humboldt erstens alles, was „NichtMensch"[70] ist, d.h. die Natur und die vom Menschen hervorgebrachten Gegenstände und Errungenschaften , die wir als Kultur im weiten Sinn bezeichnen. Vorstellend und handelnd tätig sein bedeutet also, sich mittels Verstandestätigkeiten und herstellender Tätigkeiten mit den „Gegenständen" der Natur und Kultur auseinander zu setzen. „Welt" bedeutet für W. v. Humboldt zweitens alles, was „NichtIch" ist, d.h. die Welt der Mitmenschen. Auf diesen Aspekt der Welt geht W. v. Humboldt in dem genannten Fragment allerdings nicht näher ein, da seine ursprüngliche Absicht in der Erforschung der Wissenschaften lag. Sobald aber W. v. Humboldt die sprachliche Verfasstheit des Menschen zum Ausgangspunkt seiner Bildungstheorie wählt, etwa in seinen sprachphilosophischen und sprachvergleichenden Studien, konnte die Mitwelt nicht mehr ausgeklammert bleiben. Drittens bedeutet Welt das für den Menschen notwendig und ursprünglich Gegebene, ohne das sein Denken und Handeln gleichsam ins Leere laufen würden. Er ist zwar auf die Welt angewiesen, so wie alle Lebewesen auf sie angewiesen sind. Er ist aber darüber hinaus noch in ganz besonderer Weise auf sie angewiesen, da er nur durch sie erkennend und gestaltend seine Bestimmung finden und verwirklichen kann.

Damit ist die Frage nach dem Verhältnis von Mensch und Welt angesprochen, das für den Gang der Bildung von zentraler Bedeutung ist. Der Struktur nach ist dieses Verhältnis ein dialektisches. Mensch und Welt bedingen sich gegenseitig. So wie der Mensch der Welt bedarf, um überhaupt tätig sein zu können, so bedarf auch die Welt des Menschen, um zu der zu werden, die sie ist. Denn der Mensch ist es, der „selbst der leblosen Natur, die ihn umgiebt, das Gepräge seines Werthes sichtbar aufdrück(e)t", er ist es, der „seine Tugend und seine Kraft ... der Nachkommenschaft einhauch(e)t und der dafür sorgt, dass die „einmal erworbenen Vorzüge" fortdauern[71]. Da die Welt durch den Menschen ihren eignen Wert erhält, macht die von W. v. Humboldt geforderte „Verknüpfung unsres Ichs mit der Welt"[72] innerhalb des Selbstbestimmungsprozesses des Menschen erst einen Sinn. Nur deshalb kann er von der bildenden Wechselwirkung von Mensch und Welt sprechen. Weit entfernt, die Welt zum bloßen Stoff zu degradieren, dessen sich der Mensch beliebig bedienen kann, sieht W. v. Humboldt in der Auseinandersetzung mit ihr eine Möglichkeit ständiger Bereicherung. Denn so wie es das Bestreben des Menschen sein soll, „den Kreis seiner Erkenntniss und seiner Wirksamkeit zu erweitern", so soll es auch sein Streben

69 Ebenda, S. 235

70 Ebenda, S. 235

71 Ebenda, S. 236

72 Ebenda, S. 236

sein, „soviel Welt als möglich zu ergreifen, und so eng als er nur kann, mit sich zu verbinden“[73]:

> *„Bloss weil beides, sein Denken und sein Handeln nicht anders, als nur vermöge eines Dritten, nur vermöge des Vorstellens und des Bearbeitens von etwas möglich ist, dessen eigentlich unterscheidendes Merkmal es ist, NichtMensch, d.i. Welt zu seyn, sucht er soviel Welt, als möglich zu ergreifen, und so eng als er nur kann mit sich zu verbinden. Die letzte Aufgabe unseres Daseyns: dem Begriff der Menschheit in unsrer Person, sowohl während der Zeit unsres Lebens, als auch noch über dasselbe hinaus, durch die Spuren des lebendigen Wirkens, die wir zurücklassen, einen so grossen Inhalt, als möglich, zu verschaffen, diese Aufgabe löst sich allein durch die Verknüpfung unsres Ich mit der Welt zu der allgemeinsten, regesten und freiesten Wechselwirkung.“* [74]

Weder sollen wir die Welt uns, noch wir uns der Welt unterwerfen. B. Liebrucks drückt den Gedanken dieses Wechselspiels so aus: „Der Mensch muss immer die Welt menschlich, sich selbst weltlich machen.“[75]

Bildung verlangt also die notwendige Beschäftigung mit einem Gegenstand, weil unser Handeln einen solchen braucht, um überhaupt wirken zu können und weil uns unser Geist drängt, sich mit etwas außer uns, was nicht wir selbst sind, also etwas Fremden auseinander zu setzen. Wir wollen „etwas“ wissen, „etwas“ bewirken, „etwas“ hervorbringen usw. Alle genannten Tätigkeiten benötigen einen Gegenstand, der nicht die Tätigkeit selbst ist, sondern ihr, wenngleich nicht losgelöst von ihr, gegenübersteht. Weil der Gegenstand, auf den sich das Streben unseres Geistes richtet, unbegrenzt ist, muss er der Gegenstand schlechthin, nämlich Welt sein.

Es muss das Bestreben des Menschen sein, der äußeren Natur ein menschliches Antlitz und seiner inneren Natur welthafte Gesinnung zu geben, auf dass die Menschheit (nicht das Menschengeschlecht) sowohl in ihm als auch durch ihn sichtbar werde. Darin liegt für W. v. Humboldt das Geheimnis der Bildung. Unser Wissen bleibt tote Gedächtnismasse, wenn es nicht der schöpferischen Gestaltung und Umgestaltung des Menschen und seiner Erzeugnisse dient.[76] Unser Handeln verliert seinen sittlichen Charakter, wenn es den letzten Zweck des Menschen aus dem Auge verliert. Wenn W. v. Humboldt deshalb sagt, im Mittelpunkt aller besonderen Tätigkeiten stehe der Mensch, der ohne bestimmte Absicht seinem Wesen Wert und Dauer verschaffen will, so lässt sich dies nicht anders als „Hinweis auf die Einsamkeit und Ungeborgenheit des neuzeitlichen Menschen deuten, der seine Bestimmung keinem vorgegebenen Ordnungszusammenhang mehr zu entlehnen weiß, sondern die Erfahrung macht, dass

[73] Ebenda S. 235

[74] Ebenda, S. 235 f.

[75] Liebrucks, B., Sprache und Bewusstsein, Band 2, Frankfurt /M. 1965, S.26

[76] vgl. Ebenda, S. 30

er als das einzige frei gelassene Wesen der Schöpfung (Herder) gar keine Bestimmung an sich selbst hat, sondern seine Bestimmung finden und suchen muss."[77]

Bildung erhält damit den Charakter einer scheinbar entgegengesetzten, in sich aber doch aufeinander bezogenen doppelten Bewegung: die der Rezeptivität - durch das Ergreifen von Welt – und die der Spontaneität – durch das Gestalten der Welt. Beides aber weder in der Form kritikloser Anpassung an bestehende, historisch und gesellschaftlich bedingte Verhältnisse, noch in der Form willkürlichen, ohne Verantwortung für das Ganze unternommenen Eingreifens, sondern beides nach Maßgabe der „Weisheit und Tugend"[78]. Bildung erhält darüber hinaus den Charakter eines ganzheitlichen Geschehens. Denn die wechselseitige Verknüpfung von Ich und Welt kann nicht einseitig verstandesmäßig geschehen. Vielmehr muss sie mit „verschiedenen Werkzeugen" erfolgen: mit der Hand, mit den verschiedenen Fähigkeiten „des Verstandes", mit der „Einbildungskraft" und mit der „Anschauung der Sinne", nur so ist ein angemessener Umgang mit der „Mannigfaltigkeit"[79] der Welt denkbar.

Jedes Sich-Einlassen mit der Welt als notwendiger Akt der Bildung bedeutet zugleich Entfremdung. In ihrer Eigenschaft „NichtMensch" zu sein, ist die Welt etwas dem Menschen zugleich Fremdes und Unbekanntes. Deshalb hat der sich Bildende darauf zu achten, „dass er in dieser Entfremdung nicht sich selbst verliere"[80]. Der Gang der Bildung kommt - vorläufig - erst dann zu Ende, wenn und sofern die Rückkehr aus der Entfremdung gelingt. Das aber heißt, Mensch und Welt „einander ähnlicher (zu) machen"[81]. Die aus der Rückkehr wieder gewonnene Einheit des Ich wird zum Ausgangspunkt weiterer Bildungsprozesse.

Was W. v. Humboldt über die bildende Wechselwirkung von Mensch und Welt dargelegt hat, findet in den sprachphilosophischen Schriften erst seine volle Erklärung.

Die Sprache ist die große Vermittlerin. Sie ist die Bedingung, durch die eine Verknüpfung von Ich und Welt erst möglich wird. Sie ist das Organ des Denkens, denn ohne sie ist weder die Bildung des Begriffs noch ein Subjekt-Objekt-Bezug möglich. Die Funktion, die die Sprache bei der Hervorbringung des Gedankens ausübt, erfüllt sie auch in der zwischenmenschlichen Beziehung. Nur durch sie ist Verstehen und Verständigung möglich. Als ein „Mittleres" gehört sie notwendig „zweien". Als Übergehen zu anderen Subjekten ist sie dem ganzen menschlichen Geschlecht gemeinsam. In ihr ist das von früheren Generationen Gedachte und Hervorgebrachte aufbewahrt, so dass es auf spätere Geschlechter bildend einwirken kann. Obwohl Sprache allen gemeinsam ist und durch sie Verständigung erst möglich wird, gibt sie doch dem Ein-

---

[77] Benner, D., Wilhelm von Humboldts Bildungstheorie, München 1990, S. 98

[78] Humboldt, W.v., Werke Band 1, S. 236

[79] Ebenda, S. 237

[80] Ebenda, S. 237

[81] Ebenda, S. 237

zelnen erst seine wahre Individualität. Jeder spricht in seiner Sprache und seine Sprache. Dies führt dazu, dass er bisweilen unverstanden bleibt. So steckt in aller Verständigung immer zugleich die Möglichkeit des Nicht-verstanden-Werdens, woraus wieder das Streben nach Verständigung erwächst.

Hier zeigt sich der dreifache Vermittlungscharakter der Sprache:

Sie ist Vermittlerin von sinnhaften Zeichen und sinnhaltigen Gedanken. Sie ist Vermittlerin auch in dem Sinne, dass sie zwischen Welterfahrung und Selbsterfahrung vermittelt, indem die nur sprachlich sich artikulierende Vorstellung einen Gegenstand braucht, an dem sie sich zum Begriff formen kann. Sie ist schließlich noch in einem dritten Sinn Vermittlerin, sofern sie eine Verständigung von Ich und Du erst möglich macht.

Um die volle Bedeutung der Sprache für die Bildung des Menschen zu verstehen, ist auf zwei Aspekte zu verweisen, auf den ihres Wesens und auf den ihrer Wirkung.

Unter dem *Aspekt ihres Wesens* betrachtet, ist die Sprache Synthese von[82]

- Innerem und Äußerem
- Spontaneität und Rezeptivität
- Einheit und Verschiedenheit
- Subjektivität und Objektivität
- Individualität und Sozialität

Inneres und Äußeres

Die Sprache ist Einheit von Innerem und Äußerem, da sie im vernehmbaren Wort einen geistigen Inhalt mitteilt. „Die Thätigkeit der Sinne muss sich mit der inneren Handlung des Geistes synthetisch verbinden.“[83]

Spontaneität und Rezeptivität

„Sprache ist Einheit von Empfänglichkeit und Selbsttätigkeit“.[84]Jedes Wort, das wir sprechen, entnehmen wir einem Sprachschatz und bilden es doch zugleich selbsttätig.

Einheit und Verschiedenheit

Trotz der Vielheit von Einzelsprachen, W. v. Humboldt spricht von Nationalsprachen, haben alle Sprachen eine Gemeinsamkeit, nämlich dass sie Sprache sind. Diese Einheit hat ihren Grund nicht in einer anzunehmenden Ursprache, sondern „darin, dass jede Sprache irgend ein Element in sich trägt, das auch einer andren angehört,

---

[82] vgl. zum Folgenden Liebrucks, B., Sprache und Bewusstsein, Band 2, Frankfurt /M. 1965

[83] Humboldt, W. v., Bildung und Sprache, besorgt von C. Menze, Paderborn 1965², S. 91

[84] Liebrucks, B., Sprache und Bewusstsein, Band 2, Frankfurt /M. 1965, S. 23

und weil dies der Fall bei Allen ist, alle mittelbar durcheinander verändert und betroffen sind".[85]

Subjektivität und Objektivität

Jeder Gedanke, jede Vorstellung wird im gesprochenen oder auch nur stumm formulierten Wort zum Objekt.

> *„Denn indem in ihr (die Sprache, Anm.d.Verf.) das geistige Streben sich Bahn durch die Lippen bricht, kehrt das Erzeugniss desselben zum eigenen Ohr zurück. Die Vorstellung wird also in wirklich Objectivität hinüber versetzt, ohne darum der Subjectivität entzogen zu werden. Dies vermag nur die Sprache."*[86]

Wenn W. v. Humboldt den Prozess der Bildung als Weg der Entfremdung und Rückkehr aus dieser Entfremdung beschreibt, so zeigt er in seinen Sprachstudien, dass dieser Weg sprachlich vermittelt ist. „Die Sprache entfremdet und hebt die Entfremdung auf. Sie vergegenständlicht und entgegenständlicht zugleich."[87]

Individualität und Sozialität

Sprache bleibt nicht im Einzelnen, obwohl sie vom einzelnen Individuum erzeugt wird. Als versinnlichter Gedanke wendet sie sich an einen Hörenden und stiftet dadurch Gemeinschaft. So wie sie Vermittlerin von Mensch und Welt ist, so ist sie auch Vermittlerin von Mensch und Mensch. „Nur als sprachliches Individuum ist der Mensch Gemeinschaftswesen". „Sie ist es, die den Menschen zur Welt wie zu seiner Gesellschaft trägt".[88]

Schon zum „blossen Denken" bedarf der Mensch „eines dem Ich entsprechenden Du"[89] wie umgekehrt Sprache nur konstitutiv ist für das menschliche Dasein, wenn sie neben ihrem verbindenden Charakter zugleich „die Distanzierung der Individualitäten erhöht".[90]

Für das Verständnis des Menschen bedeutet dies, dass der Mensch nicht durch die Sprache Mensch wird, sondern „der Mensch *ist* (Hervorhebung durch die Verf.) ... Mensch durch Sprache"[91] In bildungstheoretischer Hinsicht heißt das, dass alle Bildung auf der sprachlichen Verfasstheit des Menschen aufbaut.

---

[85] Humboldt, W. v., Grundzüge des allgemeinen Sprachtypus, Gesammelte Schriften Band V, S. 391 zitiert nach Liebrucks, B., Sprache und Bewusstsein, Band 2, Frankfurt /M. 1965, S. 46

[86] Humboldt, W. v., Bildung und Sprache, besorgt von C. Menze, Paderborn 1965[2], S. 91

[87] Liebrucks, B., Sprache und Bewusstsein, Band 2, Frankfurt /M. 1965, S. 170

[88] Ebenda, S. 378 und S. 376

[89] Humboldt, W. v., Gesammelte Schriften Band VI, 1, S. 160 zitiert nach Liebrucks, B., Sprache und Bewusstsein, Band 2, Frankfurt /M. 1965, S. 377

[90] Liebrucks, B., Sprache und Bewusstsein, Band 2, Frankfurt /M. 1965, S. 378

[91] Humboldt, W. v., Werke Band 3, S.10 zitiert nach Liebrucks, B., Sprache und Bewusstsein, Band 2, Frankfurt /M. 1965, S. 378

Unter dem *Aspekt der Wirksamkeit* betrachtet, kommt der Sprache eine dreifache Funktion zu: Erstens ist sie Vermittlungsinstanz für das Verständnis. Insofern bedarf sie der „Bestimmtheit und Klarheit". Zweitens vermag sie der Empfindung Ausdruck zu verleihen, weshalb sie „der Stärke, der Zartheit und der Geschmeidigkeit" bedarf. Drittens regt sie „durch die Gestalt, die sie dem Gedanken ertheilt, zu neuen Gedanken und Gedankenverbindungen an", weshalb sie eines Geistes bedarf, der im Wort „sein Gepräge" zurücklässt.[92]

War bisher von der Sprache in erster Linie als Mittel der Bildung die Rede, so bedarf dieses Verständnis noch einer wesentlichen Ergänzung. „Die Sprache einer Nation", sagt W. v. Humboldt, ist „zugleich Massstab und Mittel ihrer Bildung".[93]

Wenn nun W. v. Humboldt die Sprache als Maßstab und Mittel der Bildung bezeichnet, so liegt der Nachdruck auf dem Wort *und*, denn die Sprache ist weder bloßes Mittel der gegenseitigen Verständigung noch ist sie ausschließliche Norm etwa in der Gestalt, dass einer *bestimmten* Sprache normierender Charakter zukäme. Dieser Hinweis erscheint angesichts des immer wiederkehrenden Versuchs, einer oder auch mehreren, auf jeden Fall aber ganz bestimmten Sprachen, z. B. Griechisch und Latein, einen besonders bildenden Charakter zuzuschreiben, äußerst wichtig. Sprache ist Mittel *und* Maßstab in der Weise, „dass ihr die eine Bedeutung nur vermittelt über die andere zukommt". [94]

D. Benner nimmt diese Aussage zum Anlass, um anhand einer längeren Textpassage diese zweifache Funktion der Sprache für die Bildung des Menschen herauszuarbeiten. Auf seine Interpretation wird im folgenden Bezug genommen.[95] Das Zitat selbst wird in mehreren kleinen Abschnitten wiedergegeben.

> *„Man nähert sich diesem ihrem Wesen aber, je mehr verschiedene Sprachen man genauer betrachtet, dadurch in das allgemeine Geschäft der Sprachbildung der gesammten Menschheit eindringend; je mehr man jede einzelne ... als den individuell bestimmten Ausdruck einer gewissen nationellen Charakterform zu erkennen bemüht ist."*[96]

Der Einzelsprache kommt also eine Vermittlerrolle der durch sie vertretenen Nation bzw. Kultur zu. Denn die jeweilige Landessprache enthält die für eine Nation wichtigen und notwendigen Erfahrungen. So drückt sich in der Differenziertheit der Aus-

[92] Humboldt, W. v., Bildung und Sprache, besorgt von C. Menze, Paderborn 1965[2], S. 84

[93] Humboldt, W. v., Werke Band 5, S. 115

[94] Benner, D., Wilhelm von Humboldts Bildungstheorie, München 1990, S. 122

[95] Ebenda, S. 122 ff.

[96] Humboldt, W. v., Werke Band 5, S. 122 f.

drucksweise die Bedeutung bestimmter Dinge oder Sachverhalte eines Landes aus.[97] So erscheint die Welt in jeder Sprache auf eine andere Weise.

> *„Wenn man diesen Weg richtig verfolgt, gelangt man indess freilich selbst über die Gränzen des blossen Sprachstudiums hinaus. Denn die Sprache ist überall Vermittlerin, erst zwischen der unendlichen und endlichen Natur, dann zwischen dem einen und anderen Individuum;“*

Hier betont W. v. Humboldt ebenfalls die Vermittlerrolle der Sprache, jedoch in einem umfassenderen Maße, nämlich zwischen der unendlichen und der endlichen Natur. Unter der unendlichen Natur versteht er im Sinne Kants die intelligible Welt, also die Welt, die nur durch den Intellekt, nicht aber sinnlich wahrnehmbar ist. Mit endlicher Natur ist die Welt gemeint, die sinnlich bzw. empirisch wahrnehmbar ist. Die Sprache lässt uns etwas wissen, was wir selbst nicht erfahren könnten, z. B. Situationen aus der Zeit vor unserer Geburt. Ebenso können wir Situationen der Zukunft gedanklich vorwegnehmen, z. B. die Gewissheit unseres Todes. Wie der Sprache eine Vermittlerfunktion zwischen endlicher und unendlicher Welt zukommt, so tritt sie auch zwischen Individuum und Individuum als vermittelnde Instanz auf, die Kommunikation erst ermöglicht. Das sprechende Subjekt wendet sich an ein hörendes; der Hörende muss, um zu verstehen, sich willentlich dem Sprecher zuwenden. Daher konnte W. v. Humboldt zurecht folgern:

> *„zugleich und durch denselben Act macht sie die Vereinigung möglich, und entsteht aus derselben;“*

W. v. Humboldt macht deutlich, dass die zweifache Vermittlerrolle, nämlich die zwischen endlicher und unendlicher Natur und die zwischen Individuen nicht in einem „zeitlichen Folgeverhältnis“[98] stehen, sondern beide gleich ursprünglich sind und sich zeitgleich abspielen. Denn eine „Aussage über etwas“[99] ist immer auch eine „Mitteilung von etwas“[100].

> *„nie liegt ihr ganzes Wesen in einem Einzelnen, sondern muss immer zugleich aus dem andern errathen, oder erahndet werden; sie lässt sich aber auch nicht aus beidem erklären, sondern ist (wie überall dasjenige, bei dem wahre Vermittlung Statt findet) etwas Eignes, Unbegreifliches, eben nur durch die Idee der Vereinigung des, für uns und unsre Vorstellungsart durchaus Geschiedenen Gegebenes, und nur innerhalb dieser Idee Befangenes. Ihre Betrachtung, die jedoch, um nicht chimärisch zu werden, von der ganz trocknen, sogar mechani-*

[97] In der Sprache der Khmer gibt es beispielsweise ein ganzes Bündel an Wörtern für „Reis“, weil es das wichtigste Grundnahrungsmittel ist und der überwiegende Bevölkerungsanteil Reisbauern sind. Ähnliches ist über den Begriff „weiß“ in der Sprache Eskimos bekannt.

[98] Benner, D., Wilhelm von Humboldts Bildungstheorie, München 1990, S. 126

[99] Ebenda, S. 127

[100] Ebenda, S. 127

> *schen Zergliederung des Körperlichen und mit Construierbaren in ihr anfangen muss, führt also bis in die letzten Tiefen der Menschheit."*

Hier wird noch einmal betont, dass die „Verständigungsdimension"[101] der Sprache und die „Weltvermittlungsdimension"[102] der Sprache gegenseitig aufeinander angewiesen sind. Sprache ist also Mittel und Maßstab der Bildung. Wäre sie nur Vermittlung zwischen endlicher und unendlicher Natur, so „wäre sie ein normativer Maßstab zur Bestimmung des Menschen"[103], da sie genau vorschriebe, was richtig und falsch ist. Wäre sie nur Vermittlerin zwischen Individuen, so wäre sie nur Kommunikationsmittel und damit auf eine technische Dimension reduziert. Durch ihre gegenseitige Bezogenheit aufeinander ist Sprache jedoch Maßstab und Mittel von Bildung statt „Norm und Werkzeug"[104]. Ebenso ist damit ausgeschlossen, dass eine Sprache ausschließlich als Kunstsprache konstruiert sein kann und als Weltsprache zum Einsatz kommen kann. Denn damit wäre die Möglichkeit genommen, die Vielfalt von Einzelsprachen und die damit verbundenen Wechselwirkungen von Mensch und Welt zu nutzen. Gäbe es nur eine Weltsprache, so wäre das ein enormer Verlust an Erfahrungen, Erinnerungen, Vertrautwerden mit Fremden oder Verfremden von Bekanntem.

> *„Man muss sich nur durchaus von der Idee losmachen, dass sie sich so von demjenigen, was sie bezeichnet, absondern lasse, wie z. B. der Name eines Menschen von seiner Person, und dass sie, gleich einem verabredeten Chiffre, ein Erzeugnis der Reflexion und der Übereinkunft, oder überhaupt das Werk der Menschen (wie man den Begriff in der Erfahrung nimmt) oder gar des Einzelnen sey."*

Man kann die Sprache als gesprochenes Wort nicht von der Welt, die sie ausdrückt, also von dem, wovon sie spricht, abspalten, und man kann sie auch nicht nur als ein Mittel sehen, die Welt darzustellen. Sprache ist Maßstab und Mittel der Bildung auch in dem Sinne, dass sie einerseits Voraussetzung für die Verständigung zwischen Menschen ist und dass sie als ein Ergebnis unserer Tätigkeit an der Welt gesehen wird.

> *„Als ein wahres unerklärliches Wunder bricht sie aus dem Munde einer Nation, und als nicht minder Stauneswerthes wenngleich täglich unter uns wiederholtes und mit Gleichgültigkeit übersehenes, aus dem Lallen jedes Kindes hervor und ist (um jetzt nicht der überirrdischen Verwandtschaft zu gedenken) die leuchtenste Spur und der sicherste Beweis, dass der Mensch nicht eine an sich abgesonderte Individualität besitzt, das Ich und Du nicht bloß sich wechselseitig fordernde, sondern wenn man bis zum Puncte der Trennung zurückgehen könnte,*

[101] Ebenda, S. 129

[102] Ebenda, S. 129

[103] Ebenda, S. 129

[104] Ebenda, S. 129

> *wahrhaft identische Begriffe sind, und dass es in diesem Sinn Kreise der Individualität giebt, von dem schwachen, hülfsbedürftigen, und hinfälligen Einzelnen hin bis zum uralten Stamme der Menschheit, weil sonst alles Verstehen bis in alle Ewigkeit hin unmöglich seyn würde."*

Es ist unmöglich, einen Ursprung von Sprache zu finden, da man nicht in einer Sprache hinter den Ursprung von Sprache zurückgehen kann. Alle Dokumente von Sprache belegen, dass von Anfang an die doppelte Vermittlungsfunktion von Sprache vorhanden war, nämlich Weltvermittlung und intersubjektive Vermittlung. Das ist ein weiterer Grund, weswegen ein Ursprung von Sprache nicht zu ermitteln ist. Für W. v. Humboldt ereignet sich der Ursprung von Sprache jeweils wieder neu bei jedem Sprechen. Dieser Ursprung ist gegenwärtig in jedem Sprechanlass, da sich in jedem Sprechakt die Weltaneignungs- und Mitteilungsfunktion der Sprache vollzieht und zeigt. Sprache und Sprachursprung finden gleichzeitig und immer wieder statt, da Sprache immer wieder neu erzeugt wird und sich immer wieder in seinen beiden Vermittlungsfunktionen zeigt. Dies bezeichnet W. v. Humboldt als „Wunder".

Blickt man nochmals auf den eingangs zitierten Satz zurück, wonach Sprache Maßstab und Mittel der Bildung ist, dann erhält die Aussage erst im Anschluss an die eben gemachten Ausführungen ihre volle Bedeutung. Mit jedem Sprechakt, ob ausgesprochen oder nur gedacht, wird der Mensch darauf hingewiesen, dass er Sprachwesen ist und als solches in einer Sprachgemeinschaft lebt. Sprache zeigt die Möglichkeit und die Notwendigkeit gegenseitiger (sprachlicher) Verwiesenheit aller Menschen untereinander auf. In diesem nicht hintergehbaren Faktum einer sprachlich vermittelten und sprachlich ermöglichten (Sprach-) Gemeinschaft liegt zugleich der Maßstab, wie wir als Sprachwesen miteinander zu verkehren und folglich uns entsprechend zu bilden haben.

Sprache und Mathematik

Ausgehend von W. v. Humboldts enger Verknüpfung von Bildung und Sprache, Sprachverständnis und Weltverständnis, von Sprache als etwas Normierendes und Genormtes, als etwas Hervorbringendes und Hervorgebrachtes sei es gestattet, auch einen Blick auf Mathematik und Sprache zu werfen. Denn wie Sprache ist auch Mathematik ein System von Zeichen und hat als solche die Funktion der Vermittlung von Ich und Welt, von Ich und Du. Für sie gilt sogar genau das, was W. v. Humboldt für die Sprache nicht für wünschenswert hält: sie ist Welteinheitssprache.

Als formalisiertes Sprachsystem entgeht die Mathematik dem Problem der Deutung, der Übersetzung, dem Missverständnis und der Mehrdeutigkeit. In der Sprache der Mathematik erscheint die (mathematische) Welt auf die gleiche Weise. Die Mathematik dient der Vermittlung von Mensch und Welt und ist die Basis für die Entdeckung und das Verständnis von Welt.

Auf der Mitteilungsebene hat sie grenzüberschreitenden und Verbindung stiftenden Charakter. Auf ihrer Inhaltsebene ist sie ein Wesensbestandteil der Bildung. Als Erzeugtes zählt sie zu den herausragenden Kulturgütern der Menschheit. Als schöpferische Tätigkeit ist sie der kreative Anteil am Bildungsgeschehen des einzelnen Menschen.

Mathematik war in der Welt von Anfang an da, womit eine weitere Parallele zur Sprache zu finden ist, denn nach W. v. Humboldts Sprachverständnis kann man keinen Ursprung von Sprache finden.

So steht Mathematik im Hinblick auf den Bildungsprozess gleichrangig neben der Sprache, ja sie ist als formalisierte Sprache Bedingung und Ausdruck der Wechselwirkung von Mensch und Welt.

Wendet man W. v. Humboldts Sprachtheorie auf die Mathematik als Sprache an und misst man ihr folglich die gleiche Bedeutung im Bildungsprozess zu, so hat das im Hinblick auf den Mathematikunterricht einige Konsequenzen:

- Mathematik kann nicht länger als „Übungswiese“ für logisches und abstraktes Denken betrachtet werden.
- Als ein mit der Welt selbst gegebenes und ihr innewohnendes Strukturprinzip trägt sie zum Verstehen und zur Sinnerschließung von Welt bei. Mathematikunterricht darf sich deshalb nicht auf das Erlernen und Anwenden mathematischer Formeln reduzieren.

2.2.2 Bildsamkeit und erziehender Unterricht – Der Bildungsbegriff bei Johann Friedrich Herbart (1776 – 1841)

Wie W. v. Humboldt gehört auch J. F. Herbart zu den Begründern neuzeitlichen Bildungsdenkens. Aber im Gegensatz zu W. v. Humboldt ist er einer der energischsten Vertreter eines rein geschichtlichen, ateleologischen Bildungsbegriffs.

J. F. Herbarts Bildungsbegriff soll anhand seiner Theorie der **Bildsamkeit** und seiner Theorie des **erziehenden Unterrichts** dargestellt werden.

In seinem „Umriss pädagogischer Vorlesungen“ (1835;1841) schreibt J. F. Herbart im §1: „Der Grundbegriff der Pädagogik ist die Bildsamkeit des Zöglings“.[105] In seiner „Allgemeinen Pädagogik aus dem Zweck der Erziehung abgeleitet“ (1806) schreibt er

[105] Herbart, J. F., Umriss pädagogischer Vorlesungen §1, in: Pädagogische Schriften, Band 1, hrsg. von F. Bartholomäi, 5. Auflage neu bearbeitet von E. Salwürk, Langensalza 1890^5, S. 281

in seiner Einleitung: „Ich gestehe ... keinen Begriff zu haben von Erziehung ohne Unterricht“[106].

Die folgende Grafik soll den Gang der Darstellung des Bildungsbegriffs verdeutlichen.

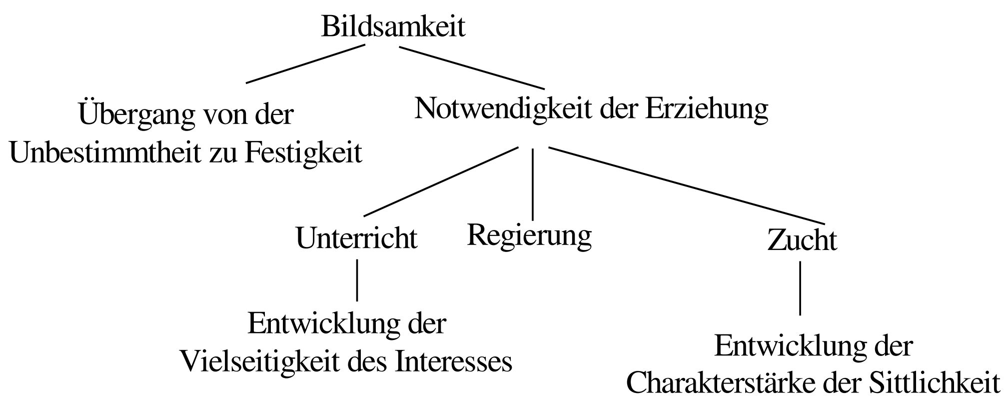


Abbildung 2.1: Grundstruktur des Bildungsbegriffs

2.2.2.1 Theorie der Bildsamkeit

In der Einleitung des Umrisses pädagogischer Vorlesungen erläutert J. F. Herbart seinen Bildsamkeitsbegriff in der Weise, dass er Bildsamkeit zwar allen Lebewesen zuschreibt, „Bildsamkeit des Willens zur Sittlichkeit“ aber nur dem Menschen.[107] Diese Bildsamkeit des Willens ist „ein Übergehen von der Unbestimmtheit zur Festigkeit“[108]. Als solche ist sie jedoch nicht unbegrenzt. Das zeigt die Erfahrung der individuellen Begrenztheit des Menschen und die Abhängigkeit des Einzelnen von den gesellschaftlichen Verhältnissen: „Die Unbestimmtheit des Kindes ist beschränkt durch dessen Individualität. Die Bestimmbarkeit durch Erziehung wird überdies beschränkt durch Umstände der Lage und der Zeit.“[109]

G. Buck beschreibt den J. F. Herbartschen Begriff der Bildsamkeit als prinzipielle Möglichkeit des Übergehens von einer anfänglichen Unbestimmtheit zu einer fortschreitenden Bestimmtheit, wobei allerdings nicht irgendeine fortschreitende Festig-

[106] Herbart, J. F., Allgemeinen Pädagogik aus dem Zweck der Erziehung abgeleitet in: Pädagogische Schriften, Band 2, hrsg. von W. Asmus, Stuttgart 1982, S. 22

[107] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften, Band 1, hrsg. von F. Bartholomäi, 5. Auflage neu bearbeitet von E. Salwürk, Langensalza 1890[5], S. 281

[108] Ebenda, S. 282

[109] Ebenda, S. 283

keit gemeint ist, sondern ein willentlich herbeigeführter Übergang von der noch nach allen Seiten hin offenen Unbestimmtheit zur Festigkeit des „sittlichen Charakters".[110]

Weil Bildsamkeit für J. F. Herbart ein Erfahrungs- und kein Vernunftbegriff ist, ist sie „etwas durchaus geschichtliches", so dass wir sie „immer nur in eins mit der schon geschehenden Geschichte der Bildung erfahren".[111] Es lässt sich nicht sagen, was Bildung an sich und vor ihrer geschichtlichen Entfaltung sei. Nur in ihren geschichtlichen Konkretisierungen zeigt sich ihr Wesen. Die Gangstruktur ist ihr charakteristisches Merkmal, was schon im Wort „Über-Gang" zum Ausdruck kommt. Der Gang selbst hat die Gestalt von Stufen, wobei die Reflexion auf die jeweils errungene Gestalt der Bildung einer bestimmten Stufe die Voraussetzung zu neuen Entwürfen bildet. „Die Natur sagt ... nicht, was sie vom Menschen wolle. Sie zeigt ihm bloß seine unendliche Bildsamkeit. Sie überlässt es ihm, ... zu erfinden, wie er seine Bildsamkeit zu behandeln habe".[112] Dies ist J. F. Herbarts Antwort auf die von ihm selbst gestellte rhetorische Frage: „Ist der Mensch ein solches Ding, das seine künftige Gestalt mit auf die Welt bringt oder nicht?"[113]

Nach G. Buck lassen sich am Begriff der Bildsamkeit drei Bedeutungsebenen unterscheiden:

- Das Übergehen von der Unbestimmtheit zur Festigkeit
- Das Übergehen als bloßer Wandel
- Das Übergehen in Abhängigkeit von der „pädagogischen Kausalität"

Das Übergehen von der Unbestimmtheit zur Festigkeit

Übergang zur Festigkeit kann zunächst einmal den Übergang von einem noch unverstandenen Sachverhalt oder einem unbegründeten Vorurteil zur Festigkeit einer sicheren Erkenntnis oder begründeten Ansicht bedeuten. Aber damit ist der Sinn des Herbartschen Bildsamkeitsbegriffs noch nicht hinreichend erfasst. Wenn J. F. Herbart von der „Bildsamkeit des Willens zur Sittlichkeit" spricht, dann zielt diese Aussage auf die Willensbildung des Kindes ab mit dem Ziel der „Charakterstärke der Sittlichkeit".

Vom Kind ist die Festigkeit des Willens noch nicht zu erwarten. Sie muss erst gebildet werden, wobei die Möglichkeit dazu bei jedem Kind vorhanden ist. Überhaupt muss man sich die „Natur" der Bildsamkeit nicht als feste Anlage denken, sondern als „ak-

[110] Die folgenden Ausführungen nehmen Bezug auf Buck G., Herbarts Grundlegung der Pädagogik, Heidelberg 1985

[111] Buck G., Herbarts Grundlegung der Pädagogik, Heidelberg 1985, Kapitel 2

[112] Herbart, J. F., Sämtliche Werke hrsg. von K. Kehrbach Band I, S. 130 zitiert nach G. Buck, Herbarts Grundlegung der Pädagogik, Heidelberg 1985, S. 71

[113] Herbart, J.F., Pädagogische Schriften Band 1, hrsg. von W. Asmus, Düsseldorf und München 1964, S. 134

tuales Vermögen“[114], das – wie bereits erwähnt – mit jeder erreichten Bildungsstufe zur erneuten Voraussetzung der nächsten wird. So wie es keine absolute, sondern nur relative Unbestimmtheit gibt, gibt es auch keine absolute Bestimmtheit, sondern nur eine, die sich im Übergang befindet. Das beste Beispiel für die stufenweise Gangstruktur der Bildung ist der Lernvorgang. Lernen knüpft immer an ein Vor-Wissen an. Neue Lerninhalte müssen sich auf dem Schüler bereits bekannte beziehen, so dass das Erlernte zur Basis und zum Ausgangspunkt für neues Wissen wird. „Apperzeption“ nennt J. F. Herbart diese Art der Aneignung.

Wie dieser „zu immer höheren Gestalten der Bildung fortschreitende Prozess“ gesteuert wird, ist die Frage des nächsten Abschnitts.[115]

Das Übergehen als bloßer Wandel

> *„Trägt der Mensch das Princip seiner Bildung in sich selbst, so wie in dem Keim die ganze Gestalt der Pflanze vorbereitet liegt?“*[116]

J. F. Herbart lehnt einen solchen Begriff der Bildsamkeit des Menschen ab, weil dieser allenfalls „auf seinen Körper zuträfe. Aber danach fragen wir nicht. Die Rede ist vom Geiste, vom Charakter, von dem Interesse, von der ganzen Sinnesart“.[117] Diese aber folgen nicht dem „Mechanismus“ des Instinkts, sondern dem Gesetz der „Vernunft“[118]. Die Annahme, dass der Mensch bildsam sei, besagt noch nicht, dass er auch die Gestalt seiner Bildung in sich trage. J. F. Herbart distanziert sich von der Vorstellung, dass der Mensch in Anlehnung an die Entwicklung eines Organismus bereits keimhaft das Prinzip seiner Bildung in sich trage. „Die Anlagen entwickeln sich langsam“, sagt er in seiner Allgemeinen Pädagogik; sie sind das Produkt „innere(r) Thätigkeit“. Und da „das Handeln den Charakter macht, so ist früheren Jahren von ihm (dem Zögling, Anm. d. Verf.) hauptsächlich nur dasjenige vorhanden, was innerlich strebt zur That; gleichsam das flüssige Wesen, aus welchem er sich in der Folge ... krüstallisieren wird“.[119] Der Erzieher kann also nicht davon ausgehen, dass dem Zög-

[114] G. Buck, Herbarts Grundlegung der Pädagogik, Heidelberg 1985, S. 78

[115] Ebenda, S. 86

[116] Herbart, J.F., Sämtliche Werke (Hgg. K. Kehrbach u. O. Flügel, Langensalza 1887, Band I, S. 305) zitiert nach G. Buck, Herbarts Grundlegung der Pädagogik, Heidelberg 1985, S. 86

[117] Herbart, J.F., Pädagogische Schriften Band 1, hrsg. von W. Asmus, Düsseldorf und München 1964, S. 134

[118] Ebenda, S. 135

[119] Herbart, J.F., Pädagogische Schriften Band 1 hrsg. von F. Bartholomäi, 5. Auflage neu bearbeitet von E. Salwürk, Langensalza 1890^5, S. 331

ling ein ursprünglicher „Bildungstrieb“ eigen ist, dessen Wirken er zwar begünstigen oder behindern, nicht aber grundlegend verändern kann.[120]

J. F. Herbarts Idee einer ursprünglichen nicht schon in ihrer Richtung bestimmten Bildsamkeit besagt, dass der Mensch seine „Form“ aus der geschichtlichen Welt empfangen muss. Aber eben deshalb, „weil der Mensch aufgrund seiner ursprünglichen Bestimmbarkeit so radikal geschichtlich, ein ‘Produkt’ der geschichtlichen Welt ist“[121], bedarf er „‘der Kunst, welche ihn erbaue, ihn konstruiere, damit er die *rechte* Form’ bekomme“.[122] Erst durch die Erziehung wird Bildung möglich. Aber dass diese Möglichkeit überhaupt besteht, hat der Mensch seiner ursprünglichen Bildsamkeit zu verdanken. Diese bezeichnet nicht die Fähigkeit der menschlichen Seele von sich aus zu werden, was er gemäß einem Bildungstrieb werden soll. Denn so wenig die Seele ein Organismus ist, so wenig entfaltet sie sich nach einem organologischen Prinzip.

Das Übergehen in Abhängigkeit von der „pädagogischen Kausalität“

Die im Begriff der Bildsamkeit implizite Vorstellung einer unbestimmten Offenheit der menschlichen Natur und die daraus folgende Notwendigkeit der Bildung als stufenhaftes Übergehen von der Unbestimmtheit zur Festigkeit wirft die Frage nach dem Verhältnis von selbstbestimmter Freiheit des Zöglings und dem erforderlichen Einwirken des Erziehers auf. J. F. Herbart nennt dieses Verhältnis das pädagogische „Causalverhältnis“, insofern der Erzieher „Ursache“ (Kausalität) der Bildung ist.[123]

J. F. Herbart bezeichnet die Erziehung als ein „Machen“, „Hervorbringen“, „Konstruieren“ durch andere. Damit weist er, wie G. Buck vermerkt[124], die Annahme einer „naturhaften Selbstentfaltung“ ebenso zurück, wie die einer ursprünglichen, also von Anfang an uneingeschränkt möglichen freien Selbstbestimmung. Dabei schließt er jedoch lediglich die ursprüngliche Selbstbestimmung aus, nicht aber die Selbstbestimmung überhaupt, denn diese ist ja Ziel der Erziehung. Wenn J. F. Herbart in einem Brief an Herrn von Steiger schreibt: „Erziehung würde Tyrannei sein, wenn sie nicht zur Freiheit führte“[125], so verdeutlicht er, dass er „unter pädagogischer Kausalität“ bzw. einem „Hervorbringen“ durch den Erzieher nichts anderes meint, als dem Heranwachsenden zur Selbstbestimmung zu verhelfen. Die Rede ist von der Hervor-

[120] Zum Begriff des „Bildungstriebes“ und seiner bildungstheoretischen Rezeption gegen Ende des 18. Jahrhunderts vgl. G. Buck, Herbarts Grundlegung der Pädagogik, Heidelberg 1985, S. 90ff.

[121] G. Buck, Herbarts Grundlegung der Pädagogik, Heidelberg 1985, S. 96

[122] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften, Band 1, hrsg. von W. Asmus, Düsseldorf und München 1964, S. 137

[123] Buck, G., Herbarts Grundlegung der Pädagogik, Heidelberg 1985, S. 102, Anmerkung 70

[124] Ebenda, S. 102

[125] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften, Band 2, hrsg. von F. Bartholomäi, 5. Auflage neu bearbeitet von E. Salwürk, Langensalza 1890[5], S. 16

bringung „eines durch Vernunft überhaupt ansprechbaren Willens, einer ... vorreflexiven Sittlichkeit.“[126]

Die Einwirkung des Erziehers hat den Charakter eines „Anstoßes“, einer Aufforderung zur Selbstbestimmung, die ohne die Bedingung der Bildsamkeit genauso unmöglich wäre wie ohne pädagogische Kausalität. Die Kausalität jedoch ist keine mechanische nach den Gesetzmäßigkeiten der physischen Natur erfolgende. Sonst wäre Erziehung Determination und der Zögling ein Machwerk des Erziehers. Die Kausalität, die J. F. Herbart meint, ist eine „geistige".[127]

Man kann diese Kausalität auch als „interaktiv“[128] bezeichnen, weil sie sich in Gestalt eines Appells, der von der Vernunft bestimmt ist, an den Willen des Zöglings wendet, um ihn zu freier und vernünftiger Selbstbestimmung zu veranlassen. Durch diesen Aufruf wird der Angerufene zwar determiniert, was J. F. Herbart durchaus zugibt.[129] Der Zögling bleibt aber dennoch in seiner Entscheidung frei, diesem Anruf Folge zu leisten oder nicht.[130] Was übrigens der Grund ist, weshalb es keine Garantie dafür gibt, ob die Tätigkeit des Erziehers erfolgreich ist oder nicht.

Die Freiheit, von der hier die Rede ist, ist die „Freiheit der Wahl, die wir alle in uns finden, welche wir als die schönste *Erscheinung*[131] unsrer selbst ehren und welche wir unter den andern Erscheinungen unsrer selbst hervorheben möchten – diese ist es gerade, welche der Erzieher zu bewirken und festzuhalten trachtet.“[132]

Wer diese Art der Kausalität als Nötigung bezeichnet, verkennt, dass „die Anerkennung des als gut Erkannten und die vernünftige Selbstnötigung des Willens ... mit Freiheit identisch sind.“[133] Die Bildung des Willens zur Sittlichkeit bleibt ein Werk unserer eigensten Tätigkeit.

Mit der Entfaltung der dreifachen Bedeutung des Bildsamkeitsbegriffs als Übergang von der Unbestimmtheit zur Festigkeit, als tätiges Übergehen von Stufe zu Stufe und als Bedingung der Möglichkeit für erzieherisches Eingreifen konnte auch das Bildungsverständnis J. F. Herbarts beleuchtet werden. Bildung, vom Grundbegriff der Bildsamkeit her betrachtet, ist die Selbstbestimmung des Menschen zum sittlichen

[126] G. Buck, Herbarts Grundlegung der Pädagogik, Heidelberg 1985, S. 103

[127] Herbart, J.F., Pädagogische Schriften, Band 1, hrsg. von W. Asmus, Düsseldorf und München 1964, S. 107

[128] Benner, D., Die Pädagogik Herbarts, Weinheim und München 1986, S. 71

[129] vgl. Herbart, J.F., Pädagogische Schriften, Band 1, hrsg. von W. Asmus, Düsseldorf und München 1964, S. 114

[130] vgl. R. Lauth, Von der Notwendigkeit einer transzendentalen Begründung der Pädagogik, in: Gestalt und Wirklichkeit, hrsg. von R. Mühlher und J. Fischl, Berlin 1967, S. 311

[131] J. F. Herbart spielt hier auf einen Begriff der Freiheit an, die der Erfahrung zugänglich ist und die nicht, wie die transzendentale außerhalb jeglicher Erfahrung liegt.

[132] Herbart, J. F., Pädagogischen Schriften, Band 1, hrsg. von O. Willmann und Th. Fritsch, 1913, S. 94

[133] G. Buck, Herbarts Grundlegung der Pädagogik, Heidelberg 1985, S. 108

Handeln. Als freie Tätigkeit entfaltet sie sich in Stufen und schafft mit jeder erreichten Stufe die Voraussetzung für ihren weiteren Weg. Durch Erziehung wird die Gangstruktur der Bildung veranlasst, das Hervorbringen der inneren Form aber ist das eigenste Werk des Zöglings. Bildung ist also weder organisches Werden, das sein Bildungsprinzip bereits in sich trägt, noch ist sie durch äußere Einwirkung unbeeinflussbar. Darin liegt die Notwendigkeit der Erziehung.

2.2.2.2 Theorie des erziehenden Unterrichts

Der zweite begriffliche Zugang zu J. F. Herbarts Bildungstheorie soll über seine Theorie des erziehenden Unterrichts erfolgen. Diese kann jedoch nicht isoliert vom Gesamtsystem seiner Pädagogik dargelegt werden, da es sich hier um ein äußerst kompliziertes Geflecht voneinander abhängiger Teile handelt. J. F. Herbart betont, dass das Ganze nur aus seinen Teilen und die Teile nur aus dem Ganzen begriffen werden können[134]. In welchem Verhältnis steht also der erziehende Unterricht zur Gesamtstruktur von Erziehung und Bildung?

„Regierung", „Unterricht" und „Zucht" als Hauptbegriffe des Erziehungssystems

„Regierung, Unterricht und Zucht, das sind demnach die drei Hauptbegriffe, nach welchen die ganze Erziehungslehre abzuhandeln ist", schreibt J. F. Herbart in seiner „Replik auf Jachmann's Rezension der 'Allgemeinen Pädagogik'"[135]. Was „Regierung" sei, so heißt es dort weiter, ist für den einfach zu verstehen, der mit Kindern umzugehen weiß. Weitaus größere Schwierigkeiten ergeben sich bei der Unterrichtslehre. Wer nämlich von Unterricht spricht, muss wissen, dass er zugleich von Erziehung reden muss. Denn, so schreibt J. F. Herbart in der Einleitung seiner „Allgemeinen Pädagogik": „Ich gestehe gleich hier, keinen Begriff zu haben von Erziehung ohne Unterricht, sowie ich rückwärts ... keinen Unterricht anerkenne, der nicht erzieht."[136] Von der „Zucht" wiederum, deren Zweck J. F. Herbart als „Charakterstärke der Sittlichkeit"[137] bezeichnet, sagt E. Geißler, dass sich hinter einer solchen Bestimmung „außerordentlich komplizierte Verhältnisse verbergen, die an die Grundfragen der Erziehung überhaupt heranreichen".[138]

Die drei Begriffe „Regierung", „Unterricht" und „Zucht" stehen nicht auf einer Stufe nebeneinander. Vielmehr stellt J. F. Herbart verschiedene Abhängigkeiten, aber auch

---

[134] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften hrsg. von W. Asmus, Band 2, Stuttgart 1982, S. 29

[135] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften hrsg. von W. Asmus, Band 2, Stuttgart 1982, S. 264

[136] Ebenda , S. 22

[137] Herbart, J. F., Umriss pädagogischer Vorlesungen §141, in: Pädagogische Schriften, Band 1, hrsg. von F. Bartholomäi, 5. Auflage neu bearbeitet von E. Salwürk, Langensalza 1890[5], S. 348

[138] Geißler, E., Herbarts Lehre vom erziehenden Unterricht, Heidelberg 1970, S. 182

Gemeinsamkeiten zwischen den Begriffen dar. So gehört „Regierung" nicht zu den Aufgaben der eigentlichen Erziehung, sondern nimmt eine Art Vorstufe auf dem Weg zur Erziehung ein. Die Begriffe „Unterricht" und „Regierung" unterscheiden sich wie „Bildung und Nicht-Bildung".[139] „Regierung" und „Zucht" ist miteinander gemeinsam, dass sie „unmittelbar auf das Gemüt" wirken[140]. Ähnliche Abgrenzungsprobleme bestehen zwischen „Unterricht" und „Zucht". Einerseits dient der „Unterricht" als Instrument der „Zucht", da J. F. Herbart keinen Unterricht anerkennt, der nicht erzieht. Andererseits wird „Zucht" zum Unterrichtsinhalt, sofern nur durch Vermittlung von Erkenntnissen einsichtiger Wille erreicht werden kann. Die wechselseitigen Abhängigkeiten der drei Erziehungsfaktoren beziehen sich auch auf die Verlaufsstruktur. Es ist nicht so, dass zuerst durch Unterricht Wissen vermittelt werden muss, um danach den Willen an diese Vorstellungsinhalte zu binden. „Bei näherem Zusehen", sagt E. Geißler, „fallen 'Unterricht' und 'Zucht' als zwei Seiten ein und derselben Sache zusammen".[141] So bilden also „Unterricht", „Zucht" und „Erziehung" ein „in sich vielfach verknüpftes Bündel von Problemen"[142], die nur analysiert werden können, wenn man das ganze Erziehungssystem im Auge behält.

Zur besseren Übersicht werden deshalb die beiden zentralen Fragenkomplexe des Herbart'schen Erziehungssystems an den Anfang gestellt[143]:

Wie kann der Verstand des Menschen so gebildet werden, dass er zu unverstellter Einsicht und unvoreingenommenen Erkenntnissen gelangt, um sachlich angemessen urteilen und daraus entsprechende Schlüsse ziehen zu können? Dieser Frage geht J. F. Herbart in seiner Theorie vom erziehenden Unterricht und von der Bildung eines vielseitigen Interesses nach.

Wie lässt sich der Wille des Menschen so entwickeln, dass er an die Einsichten des Verstandes anknüpfen und gemäß dieser Einsichten handeln kann? Diese Frage beantwortet J. F. Herbart mit seiner Lehre von der „Zucht" und der „Bildung der Charakterstärke der Sittlichkeit".

Da „Unterricht" und „Zucht" die beiden Hauptfaktoren der Erziehung sind, muss zuerst vom Zweck der Erziehung überhaupt die Rede sein. Die „Regierung" als erziehungspraktische Voraussetzung für das Gelingen von Unterricht und „Zucht" muss dann als nächste Frage angesprochen werden. Im Anschluss daran können dann die beiden Hauptfaktoren der Erziehung behandelt werden.

---

[139] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften hrsg. von W. Asmus, Band 2, Stuttgart 1982, S. 263

[140] Ebenda, S. 125

[141] Geißler, E., Herbarts Lehre vom erziehenden Unterricht, Heidelberg 1970, S. 89

[142] Ebenda, S. 90

[143] vgl. Geißler, E., Johann Friedrich Herbart, in: Scheuerl, H. (Hrsg.) Klassiker der Pädagogik I, München 1979, S. 239

Zweck der Erziehung überhaupt

„Soll es möglich sein, das Geschäft der Pädagogik als ein einziges Ganzes durchgreifend richtig zu durchdenken und planmäßig auszuführen, so muss es vorher möglich sein, die Aufgabe der Erziehung als eine einzige aufzufassen". Da „Moralität" der ganze Zweck des Menschen ist, so kann man auch „die eine und ganze Aufgabe der Erziehung in den Begriff Moralität fassen"[144]. Moralität oder Sittlichkeit, so schreibt J. F. Herbart an gleicher Stelle, ist der feste Wille des Individuums, sich unter einem allgemein verpflichtenden Gesetz zu wissen. Dabei ist nicht an eine materiale Sittlichkeit gedacht, die inhaltlich vorgibt, was zu tun sei, sondern an ein Willensverhältnis, das lediglich den Grund angibt, weshalb sittlich gehandelt werden soll. Kommen nun zu diesem „guten Willen" noch die „Kraft und Tat und Wirksamkeit jenes so bestimmten Willens" hinzu, sich gegen „entgegenarbeitende(n) Gemütsbewegungen" aufrecht zu erhalten, dann sprich J. F. Herbart von „Tugend". „Tugend ist der Name für das Ganze des pädagogischen Zwecks".[145]

Kommt dies einer Ethisierung der Erziehung gleich? Man muss sich hüten, sagt E. Geißler[146], Tugend im Sinne einer „bürgerlichen Ordentlichkeit" oder „Bravheit" zu verstehen. Tugend, sagt J. F. Herbart, „ist die in einer Person zur beharrlichen Wirklichkeit gediehene Idee der inneren Freiheit"[147]. J. F. Herbart nennt in seiner Allgemeinen Pädagogik auch noch andere sittliche Ideen, die der Einzelne mit seinem Willen verbinden muss, damit sittliches Wollen und Handeln Realität werden, so z. B. die Idee der Vollkommenheit, der Güte (Wohlwollen), des Rechts (Rechtlichkeit), der Billigkeit. An oberster Stelle des pädagogischen Zwecks aber steht die innere Freiheit. Folglich besteht die Hauptaufgabe der Erziehung darin, den Heranwachsenden zu befähigen, aus innerer Freiheit zu handeln. Was heißt „innere Freiheit"? J. F. Herbart nennt sie ein „Verhältnis" zwischen zwei Gliedern: Einsicht und Wille"[148]. Und noch genauer: „Von innerer Freiheit kann nicht die Rede sein, wo das Wollen nicht im Verhältnis zur Einsicht steht".[149] Damit zerfällt die Aufgabe der Erziehung in zwei Teile. Die Einsicht zu bilden, gehört in den Bereich des Unterrichts. Den Willen so zu bilden, dass er gemäß dieser Einsicht handeln kann, ist die Aufgabe der „Zucht". Beiden Aufgaben muss die „Regierung" vorangehen.

[144] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften, Band 1, hrsg. von W. Asmus, Düsseldorf und München 1964, S. 105

[145] Herbart, J. F., Umriss pädagogischer Vorlesungen § 8, in: Pädagogische Schriften, Band 1, hrsg. von F. Bartholomäi, 5. Auflage neu bearbeitet von E. Salwürk, Langensalza 1890[5], S. 285

[146] Geißler, E., Herbarts Lehre vom erziehenden Unterricht, Heidelberg 1970, S. 93

[147] Herbart, J. F., Umriss pädagogischer Vorlesungen § 8, in: Pädagogische Schriften, Band 1, hrsg. von F. Bartholomäi, 5. Auflage neu bearbeitet von E. Salwürk, Langensalza 1890[5], S. 285

[148] Ebenda, S. 285

[149] Herbart, J. F., Sämtliche Werke, hrsg. von K. Kehrbach u. O. Flügel, Langensalza 1887, Band 2, S. 410.) zitiert nach G. Buck, Herbarts Grundlegung der Pädagogik, Heidelberg 1985, S. 95

„Regierung“

Unter Kinderregierung versteht J. F. Herbart die „Unterwerfung“ des Kindes unter die „Gewalt“ des Erziehers[150]. Es handelt sich also um ein Herrschaftsverhältnis, das dazu dient, die „rohen Begehrungen“ des Kindes und die Keime „blinden Ungestüms“ in ihre Schranken zu weisen. Sie ist notwendig, weil ohne sie Erziehung ein vergebliches Bemühen wäre und auch der Unterricht ohne sie nicht in geordneten Bahnen laufen könnte: „Ruhe und Ordnung in den Stunden zu halten, jede Spur von Nichtachtung des Lehrers zu entfernen, ist Sache der Regierung“.[151] Aber wie weit darf die „Gewalt“ des Erziehers reichen, welchen Umfang dürfen die disziplinierenden Maßnahmen annehmen, um noch pädagogisch gerechtfertigt zu sein? „Regierung“ ist nur solange erlaubt, als sich beim Kind noch keine „Spuren eines echten Willens“[152] zeigen. Aber das letzte Zitat hat gezeigt, dass die „Regierung“ auch noch in den Unterricht hineinwirkt, und dass „Regierung“ durchaus nicht nur auf die Vorschulzeit begrenzt bleibt. Einerseits ist Kinderregierung überall dort gefordert, wo es gilt „Schaden“, „Streit“, „Kollision“ zu vermeiden. Andererseits ist ihre Aufgabe dann erledigt, wenn der Heranwachsende fähig ist, „sich (selbst) zu regieren“[153]. Weil hier mit fließenden Übergängen zu rechnen ist, soll sich der Erzieher stets bewusst sein, dass Maßnahmen, die ihm bei kleinen Kindern gute Dienste leisteten, bei den Größeren „schief“[154] wirken können. Deshalb gilt die Regel: „Drohungen“ nur in Notfällen und „Aufsicht“ nur mit Einschränkung; die „Autorität (soll) mit Liebe verbunden“ sein und Gehorsam soll nicht durch „militärische Strenge“[155] erzwungen werden. In der Regierung geht es letztlich nur darum, Ordnung zu schaffen und nicht darum, den Willen des Kindes zu unterdrücken. Von Kindern, die unter ständigem Druck heranwachsen, ist „keine Gewandtheit, keine Erfindungskraft, kein mutiges Wagen, kein zuversichtliches Auftreten“[156] zu erwarten.

Es wäre ein Fehler anzunehmen, „Regierung“ baue nur auf Disziplin auf. Wohlwollen ist das Fundament aller erziehenden Maßnahmen, „gleich, ob es sich dabei um ‘Regierung der Kinder’ handelt, um Methodenfragen des Unterrichts, um Interessenbildung, um Zucht ... . Alle pädagogischen Kontaktnahmen müssen auf dieses Ziel hin ausgerichtet werden, weil jede, ob disziplinierende, ob unterrichtliche, ob erzieherische Kommunikation ein von einem vorgängigen Wohlwollen des Kindes abhängiges ‘Of-

[150] Herbart, J.F., Pädagogische Schriften hrsg. von W. Asmus, Band 2, Stuttgart 1982, S. 31; vgl. auch zu folgendem S.31ff.

[151] Ebenda, S.132

[152] Ebenda, S.31

[153] Ebenda, S.31

[154] Ebenda, S.125

[155] Ebenda, S.34 f.

[156] Ebenda, S.33

fensein' voraussetzt. Ohne dieses Offensein gibt es keine Kommunikation, ohne Kommunikation keine Bildung"[157].

„Unterricht"

Kernstück der Erziehung ist der „Unterricht". Dem „Unterricht" kommt es zu, wie oben bereits gesagt wurde, Einsicht zu vermitteln. Einsicht verlangt die Erkenntnis der Welt in ihren materiellen, geistigen und sozialen Verhältnissen. Die genaue Kenntnis dieser Verhältnisse und ihrer Zusammenhänge bildet die Grundlage für das Handeln. Wie muss der „Unterricht" inhaltlich aufgebaut und methodisch gestaltet werden, damit er den Schüler zum mündigen Handeln befähigt? Nur ein erziehender „Unterricht" kann diese Aufgabe erfüllen. Denn in ihm wird nicht nur ein „Gedankenkreis" aufgebaut, der die zufälligen Erfahrungen des Heranwachsenden zu genauen und umfassenden Erkenntnissen erweitert, sondern es werden auch diese Erkenntnisse so eng mit dem moralischen Willen verknüpft, dass sie zum Fundament einsichtigen Handelns werden. Daher kann J. F. Herbart auch sagen: „Der Wert des Menschen liegt zwar nicht im Wissen, sondern im Wollen". Aber weil das Wollen „im Gedankenkreise" wurzelt[158], kommen dem Wissen und der Erkenntnis so große Bedeutung innerhalb der schulischen Bildung zu.

Was meint „erziehender Unterricht"? Der Ausdruck beinhaltet offensichtlich, dass durch Unterricht Erziehung stattfinden soll. Es muss gleich an dieser Stelle gesagt werden, dass J. F. Herbart nicht streng zwischen den Begriffen Erziehung und Bildung unterscheidet. Er hat wiederholt betont, der Zweck des Unterrichts sei Bildung. Wenn er daher vom „erziehenden" Unterricht spricht, so kann statt dessen auch vom bildenden Unterricht gesprochen werden.

Zwischen Erziehung und Unterricht besteht eine wechselseitige Abhängigkeit. J. F. Herbart unterscheidet nicht zwischen erziehenden und lehrenden Berufen, z. B. in dem Sinne, dass durch Erziehung Einstellungen und soziales Verhalten, durch Unterricht aber ausschließlich Wissen vermittelt wird. Sein erziehender Unterricht ist auch nicht so zu verstehen, als müsste der Lehrer gleichsam eine Doppelrolle ausüben, eine lehrende und eine erziehende, und als hätte er im Rahmen seiner unterrichtenden Tätigkeit von einer in die andere überzuwechseln. Erziehender Unterricht besagt, dass der Unterricht eine neue Qualität erhält, dass alles, was in ihm geschieht, unter dem Primat der Bildung steht. Durch „Erziehung ohne Unterricht" kann sich kein Charakter bilden, gelangt der Schüler nicht zu „innerer Festigkeit", kann er „seiner selbst nicht inne" werden[159], weil ihm das erforderliche Wissen und die nötige Denkkraft fehlen, die ihn die eigenen und die welthaften Verhältnisse durchschauen helfen.

---

[157] Geißler, E., Herbarts Lehre vom erziehenden Unterricht, Heidelberg 1970, S. 82f.

[158] Herbart, J.F., Umriss pädagogischer Vorlesungen § 58, in: Pädagogische Schriften Band 1 hrsg. von Bartholomäi, F., 5. Auflage neu bearbeitet von Salwürk, E. , Langensalza 1890^5, S. 304f.

[159] Herbart, J.F., Pädagogische Schriften hrsg. von Walter Asmus, Band 2, Stuttgart 1982, S. 23

„Erziehung durch Unterricht" hingegen betrachtet „als Unterricht" alles, was man dem Schüler „zum Gegenstand der Betrachtung macht", Wissensinhalte ebenso wie „menschliche Verhältnisse", sofern es ihm nicht als „Fragment", sondern als Teil des „großen Ganzen"[160] dargeboten wird. Alles einseitige, enzyklopädische, unverbundene, bloß auswendig gelernte Wissen, alles, das weder das Gemüt des Schülers anspricht noch ihn zum einsichtigen Handeln motiviert, widerspricht dem erziehenden Unterricht. Nicht von ungefähr spricht J. F. Herbart vom Gedanken-Kreis, um schon durch den Begriff „Kreis" auf den Zusammenhang des darzubietenden Unterrichtsstoffs hinzuweisen. Deshalb verlangt ein erziehender Unterricht vom Lehrer, dass er einen „großen und in seinen Teilen innigst verknüpften Gedankenkreis in die jugendliche Seele zu bringen weiß"[161]. Er fordert von ihm eine „Wissenschaft und Denkkraft..., welche die nahe Wirklichkeit als Fragment des großen Ganzen anzuschauen und darzustellen verstehe"[162]. Wie sich der Gedankenkreis des Schülers bestimme, „das ist dem Erzieher alles; denn aus Gedanken werden Empfindungen und daraus Grundsätze und Handlungsweisen"[163].

Nun setzt aber die Bildung des Gedankenkreises eine Theorie des Lehrplans voraus, die darüber befindet, welche Inhalte und in welchem Umfang diese gelehrt werden sollen.[164] J. F. Herbart argumentiert folgendermaßen: „Dem erziehenden Unterricht liegt alles an der geistigen Thätigkeit, die er veranlasst". Aber „wäre alle geistige Thätigkeit von einerlei Art, so wäre es gleichgültig, mit welchen Gegenständen der Unterricht die Jugend beschäftigte. ... Es ist also nicht der Willkür und Konvenienz zu überlassen, was gelehrt und gelernt werden solle".[165] Welches Wissen jedoch soll vermittelt werden? Enzyklopädisches Wissen scheidet schon deshalb aus, weil es angesichts der immer rascher zunehmenden Wissensvermehrung uneinholbar bleibt. Es scheidet darüber hinaus auch aus dem Grund aus, weil es kein zusammenhängendes Ganzes darstellt.

Wenn also nicht alle Inhalte gelehrt werden können, so bleibt als Ausweg die sog. formale Bildung, im Sinne der Übung oder Stärkung der inneren Kräfte, bzw. der Seelenvermögen. Was J. F. Herbart davon hält, hat er unmissverständlich zum Ausdruck gebracht, wenn er in seiner Antwort auf Jachmanns Rezension seiner ´Allgemeinen Pädagogik` sagt: Der Unterricht „kann nicht eingeteilt werden nach den auszubildenden Seelenvermögen; denn das sind Undinge, noch auch nach den zu lehrenden Wissenschaften (Wissensbereichen, Anm.der Verf.); denn die sind hier nur

160 Ebenda, S. 24f.

161 Ebenda, S. 28f.

162 Ebenda, S. 24

163 Ebenda, S. 23

164 vgl. Geißler, E., Johann Friedrich Herbart, in: Scheuerl, H. (Hrsg.) Klassiker der Pädagogik I, München 1979, S. 241

165 Herbart, J. F., Umriss pädagogischer Vorlesungen § 59 - 61, in: Pädagogische Schriften, Band 1 hrsg. von F. Bartholomäi, 5. Auflage neu bearbeitet von E. Salwürk, Langensalza 1890^5, S. 305ff.

Mittel zum Zweck, welche wie die Nahrungsmittel nach den Anlagen und Gelegenheiten müssen gebraucht und überall wie ein geschmeidiger Stoff nach den pädagogischen Absichten gestaltet werden".[166] In einer Theorie der formalen Bildung kommt den Unterrichtsinhalten nur noch die Funktion zu, geistige Grundkräfte zu trainieren;. z. B. durch Mathematik Training des logischen Denkvermögens; durch geschichtliche Fächer Training der Urteilskraft, durch musische Fächer Training des Geschmacksvermögens usw. Solche Transferleistungen mögen zwar innerhalb benachbarter Themenbereiche oder Fächer möglich sein, nicht aber jenseits benachbarter Gegenstandsbereiche. Denn „der Verstand der Grammatik bleibt in der Grammatik; der Verstand der Mathematik bleibt in der Mathematik; der Verstand jedes andern Faches muss sich in diesem andern Fache auf eigne Weise bilden. ... Weder Grammatik noch Mathematik noch Logik machen den Metaphysiker, obgleich er ohne Logik und Mathematik auch nicht von der Stelle kommt"[167].

„Wenn nun", so fragt J. F. Herbart, „der Erzieher sich auf formelle Bildung nicht verlassen kann, wenn überdies das bloße Material der Kenntnisse, sofern es auswendig gelernt wird, für sich allein keine persönliche Bildung gewährt, woran soll denn der Erzieher sich halten?".[168] Auf diese Frage hat J. F. Herbart eine erstaunliche und, wie E.Geißler bemerkt[169], kaum überbietbare Lösung vorgeschlagen, die er mit dem Begriff „vielseitiges Interesse" umschreibt. „Der letzte Endzweck des Unterrichts liegt zwar schon im Begriffe der Tugend. Allein das nähere Ziel, welches, um den Endzweck zu erreichen, dem Unterricht insbesondere muss gesteckt werden, lässt sich durch den Ausdruck: ´Vielseitigkeit des Interesses` , angeben"[170].

Das Zustandekommen des Interesses stellt sich J. F. Herbart kurz gesagt so vor: Durch Erfahrung und Umgang bilden sich im Heranwachsenden einzelne Vorstellungen, die im Gedächtnis abgespeichert werden und die sich durch hinzu kommende weitere Erfahrungen zu Anschauungen bzw. zu einem „ursprünglichen Gedankenkreise"[171] verbinden und das Gemüt in verschiedene Arten von Zuständen (Gemütszustände) versetzen. Richten sich diese noch relativ unklaren „Vorstellungsmassen" auf einen bestimmten Gegenstand und versucht der Heranwachsende „sein Gewusstes ... zu erweitern"[172], dann spricht J. F. Herbart von Interesse.

---

[166] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften, hrsg. von W. Asmus, Band 2, Stuttgart 1982, S.264

[167] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften, Band 1, hrsg. von W. Asmus, Düsseldorf und München 1964, S. 173f.

[168] Ebenda, S. 174

[169] Geißler, E., Johann Friedrich Herbart, in: Scheuerl, H. (Hrsg.) Klassiker der Pädagogik I, München 1979, S. 241

[170] Herbart, J. F., Umriss pädagogischer Vorlesungen § 62, in: Pädagogische Schriften, Band 1, hrsg. von F. Bartholomäi, 5. Auflage neu bearbeitet von E. Salwürk, Langensalza 1890[5], S. 306

[171] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften hrsg. von W. Asmus, Band 2, Stuttgart 1982, S. 208

[172] Herbart, J. F., Umriss pädagogischer Vorlesungen § 62, in: Pädagogische Schriften, Band 1, hrsg. von F. Bartholomäi, 5. Auflage neu bearbeitet von E. Salwürk, Langensalza 1890[5], S. 306f.

Vielseitigkeit des Interesses[173]

Interesse ist für J. F. Herbart gleichbedeutend mit Selbsttätigkeit. Diese soll vielseitig und „gleichschwebend“ sein. Vielseitig, um sowohl Einseitigkeit als auch Allseitigkeit zu vermeiden. „Gleichschwebend“, um nicht einer besonderen Interesserichtung den Vorzug zu geben. Also wird für den Bildungsgang zwar vielseitige, aber nicht richtungslose Selbsttätigkeit verlangt. Sie soll sich weder auf Belangloses richten noch sich wahllos allem Beliebigen zuwenden. Auf die Hinlenkung des Interesses auf das Wesentliche und Maßgebliche kommt es an.

Der Gegenstand des Interesses ist ein anderer als der des Begehrens. Begehrt wird, was man noch nicht besitzt. Das Interesse hingegen haftet am Gegenwärtigen. Es verweilt beim Gegenstand und schenkt ihm seine ungeteilte Aufmerksamkeit. Da sich das Interesse nicht auf alles Beliebige, sondern nur auf das für die Realisierung des Menschseins Wesentliche richten soll, nennt J. F. Herbart sechs Interesserichtungen, von denen sich drei auf die Erkenntnis und drei auf die menschliche Teilnahme beziehen. Wie er diese Richtungen im Einzelnen beschreibt, sei hier nicht weiter verfolgt.[174] Wichtig ist festzuhalten, worauf sich das Interesse beziehen und von welcher Art diese Beziehung sein soll. Im Schüler soll Interesse für die Gegenstände des Wissens und für den Bereich der „menschlichen Verhältnisse“[175] geweckt werden. Die Qualität dieser Hinwendung soll in der Fähigkeit bestehen, sich einer Sache ganz hinzugeben und, sofern sich das Interesse der Mitwelt zuwendet, Menschlichkeit zeigen. Hingabe verlangt geduldiges Verweilen, Bereitschaft, sich auf eine Sache einzulassen, ungeteilte Aufmerksamkeit und Geduld. Menschlichkeit verlangt Mitgefühl, Empathie und Achtung vor der Würde der menschlichen Person.

Obwohl vom Interesse gefordert wird, dass es vielseitig sei und in verschiedene Richtungen „auseinanderfahren“ soll, darf die Einheit nicht verloren gehen. Daher spricht J. F. Herbart nicht von den (Plural), sondern von dem (Singular) Interesse und seinen verschiedenen Richtungen. Die Vielseitigkeit braucht einen Bezugspunkt, damit das Ganze nicht verloren geht. Nicht möglichst viele Interessen sollen im Schüler geweckt werden, da sonst die Gefahr bestünde, dass sie unverbunden nebeneinander oder gar gegeneinander stehen. Gefordert ist das eine Interesse, das sich in gleicher Weise allen bereits genannten Bereichen zuwendet und mit gleicher Gründlichkeit alle behandelt. Gefordert ist aber auch die Synthese oder, wie J. F. Herbart

---

[173] vgl. zu Folgendem: Ballauff, Th. und Schaller, K., Pädagogik – Eine Geschichte der Bildung und Erziehung Band III, Freiburg/München, 1973, S. 84 – 95

[174] Auf der Erkenntnisseite ist es das „empirische“ (= auf das konkrete Einzelne bezogen), „spekulative“ (= auf das Ganze des Seienden bezogen) und „ästhetische“ (= auf das Schöne bezogen) Interesse; auf der Seite der menschlichen Teilnahme ist es das „sympathetische“ (= auf den einzelnen Menschen bezogen), „soziale“ (= auf die menschliche Gemeinschaft bezogen) und das „religiöse“ (= auf den letzten Ursprung bezogen) Interesse.

[175] Herbart, J.F., Umriss pädagogischer Vorlesungen § 38, in: Pädagogische Schriften, Band 1, hrsg. von F. Bartholomäi, 5. Auflage neu bearbeitet von E. Salwürk, Langensalza 1890[5], S. 294

sagt, die Sammlung, damit nicht „Flatterhaftigkeit" einkehrt und Entfremdung oder Selbstverlust den Bildungsgang zerstören. Nicht die selbstlose Hingabe an die Gegenstände gefährdet die Einheit der Person, sondern der bindungslose Umgang mit ihnen. Denn neben dem Weltbezug gehört auch der Selbstbezug zu den Grundmerkmalen der Bildung.

Für den Gang der Bildung ist deshalb der Wechsel von Vertiefung und Besinnung konstitutiv. Vertiefung besagt Hingabe an ein Anderes, oder wie J. F. Herbart sagt, sich „einzusenken" in die Situation eines anderen oder in eine Sache und dabei zu verweilen. Nicht auf alles und jeden muss sich der Schüler einlassen. Kriterium hierfür ist die „Würdigkeit". Nicht jeder Gegenstand ist würdig für die Bildung des Menschen. Da es offensichtlich im Hinblick auf die Bildung auch „unwürdige" Gegenstände gibt, muss die Vertiefung als Bildungsvorgang auch ein solches Ermessen lehren.[176]

Der Vertiefung korrespondiert die Besinnung. Besagt Vertiefung ein Sich-Einlassen auf etwas Anderes und hat damit einen Entfremdungsprozess zur Folge, so bedeutet Besinnung das Gegenteil davon, nämlich Sammlung, Rückkehr aus der Entfremdung und Identitätsfindung. Als Rück-Besinnung ist sie der Versuch, das Viele und Mannigfaltige im Bewusstsein zu einem einheitlichen Ganzen zu verbinden und damit die Einheit der Person herzustellen. „Persönlichkeit", sagt J. F. Herbart, „beruht auf der Einheit des Bewusstseins; auf der Sammlung, auf der Besinnung".[177] Das Ergebnis der Besinnung ist auf der „Seite des Sachlichen die Einheit des Gedankenkreises, das 'System', auf der subjektiven Seite die Einheit der Person."[178]

Vertiefung und Besinnung sind Merkmale des Bildungsvorgangs und keineswegs eine Unterrichtsmethode, wie die Herbartianer glaubten. Aufgabe der Schule ist es deshalb, „in diese Grundbewegung echten Lebens (und) wahrer Menschlichkeit" einzuweisen. Nicht indem sie Kenntnisse und Fertigkeiten vermittelt, bereitet die Schule auf das Leben vor, sondern „indem sie in die Grundstruktur des Lebens einweist". Nicht *für* das Leben, sondern *das* Leben selbst soll gelernt werden. Schule und Unterricht sind insofern „maßgeblich für das spätere Leben des Erwachsenen, weil der Schüler in ihnen lernt, was Leben heißt, nämlich eine Bewegung unermüdlich zu vollziehen, die jedem immer erneut sein personales Selbst und ein echtes Weltverhältnis gewährt".[179]

Daher hat der Unterricht nicht einseitige Neigungen zu fördern, sondern er muss vielseitiges und „gleichschwebendes" Interesse wecken. Er muss dazu beitragen, dass sich

---

[176] vgl. Ballauff, Th. und Schaller, K., Pädagogik – Eine Geschichte der Bildung und Erziehung Band III, Freiburg/ München, 1973, S. 88f.

[177] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften Band 2, hrsg. von W. Asmus, Stuttgart 1965, S. 51 ff.

[178] Ballauff, Th. und Schaller, K., Pädagogik – Eine Geschichte der Bildung und Erziehung Band III, Freiburg/ München, 1973, S. 90

[179] Ballauff, Th. und Schaller, K. , Pädagogik – Eine Geschichte der Bildung und Erziehung Band III, Freiburg/ München, 1973, S. 92

im Schüler ein geordneter Gedankenkreis bildet, dessen Einsichten den Willen des Einzelnen bestimmen. Wollen und Begehren allein führen noch nicht zum rechten Handeln. Dass aber der Wille durch Einsicht bestimmt werde, dazu bedarf es des erziehenden Unterrichts. Einsicht gewinnt der Schüler nicht durch Anhäufung von Kenntnissen, sondern durch Interesse für möglichst viele Weltinhalte. Nicht „Virtuosität“ wird vom Gebildeten erwartet. Es genügt, Fachmann auf einem Gebiet, aber aufgeschlossen für alle anderen zu sein:

„Alle müssen Liebhaber für alles, jeder muss Virtuose in einem Fache sein“.[180]

„Zucht“

Die zweite Säule innerhalb seines Systems der Erziehung nennt J. F. Herbart „Zucht“. Die „Regierung“ hat die Aufgabe, Kindern diszipliniertes Verhalten und gutes Benehmen beizubringen, der Unterricht soll Wissensinhalte vermitteln und den Gedankenkreis des Schülers bilden, die „Zucht“ schließlich soll auf den Willen des Zöglings einwirken, und zwar so, dass dieser von sich aus das Richtige will. Damit ist ein Problem aufgeworfen, das schon I. Kant als eines der schwierigsten bezeichnet hat[181] und hinter dem sich auch bei J. F. Herbart „mehrere außerordentlich komplizierte Verhältnisse verbergen“[182].

Bevor auf dieses Problem näher eingegangen wird, sei der uns heute äußerst problematisch erscheinende Begriff „Zucht“ geklärt. Nach heutigem Verständnis gehört Zucht zu den disziplinierenden Maßnahmen, die wir deshalb auch eher dem Begriff der „Regierung“ im Herbart'schen Sinn zuordnen würden. In der Tat weist J. F. Herbart selbst darauf hin, dass „Zucht“ und „Kinderregierung“ gewisse Gemeinsamkeiten aufweisen, nämlich dass die „Zucht“ ebenso wie die „Regierung“ „unmittelbar auf das Gemüt wirkt“. Das macht die Sache aber nur noch komplizierter. Denn im gleichen Atemzug bringt er den Aufgabenbereich der „Zucht“ in unmittelbare Nähe zu dem des Unterrichts. Beiden, sagt er, ist gemeinsam, „dass ihr Zweck Bildung ist“, weshalb man sich hüten solle, sie „mit der Regierung zu verwechseln“[183]. Was ist also mit „Zucht“ gemeint? „Unmittelbare Wirkung auf das Gemüt der Jugend, in der Absicht zu bilden, ist Zucht“, sagt J. F. Herbart[184]. Zucht ist „Charakterbildung“ sagt er an anderer Stelle, bzw. ist „Charakterstärke der Sittlichkeit“[185]. E. Geißler interpretiert den Begriff so: „Zucht“ ist „das pädagogische Verhältnis, in welchem dem Willen jene ... Beständigkeit verliehen wird, ohne die es in der Tat keine ‘Charakterstärke der

[180] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften hrsg. von W. Asmus, Band 2, Stuttgart 1982, S. 42

[181] Kant, I., Werke in zehn Bänden, hrsg. von W. Weischedel, Band 10, Darmstadt 1986, S. 711

[182] Geißler, E., Herbarts Lehre vom erziehenden Unterricht, Heidelberg 1970, S. 182

[183] Herbart, J. F., Allgemeine Pädagogik, in: Pädagogische Schriften hrsg. von W. Asmus, Band 2, Stuttgart 1982, S. 125

[184] Ebenda, S. 126

[185] Herbart, J. F., Umriss pädagogischer Vorlesungen § 141, in: Pädagogische Schriften, Band 1, hrsg. von F. Bartholomäi, 5. Auflage neu bearbeitet von E. Salwürk, Langensalza 1890[5], S. 348

Sittlichkeit' gäbe". Ihre Aufgabe sieht er also darin, dass sie im Heranwachsenden „jene Selbständigkeit vorbereiten soll, in der keine Erziehung und erst recht keine 'Regierung' mehr nötig sein wird".[186]

Damit ist nun zwar der Begriff „Zucht" so weit geklärt, dass ihm sein Ort und seine Funktion innerhalb des Herbart'schen Erziehungssystems zugewiesen werden kann, aber es bedarf noch einer Klärung des Problems, das I. Kant mit der Frage umschrieben hat: „Wie kultiviere ich Freiheit bei dem Zwange"[187] und das J. F. Herbart in dem Begriff der „pädagogischen Kausalität" zusammenfasst. Es geht also um die Frage: Wie lässt sich durch Fremdbestimmung (erzieherisches Einwirken) Selbstbestimmung (autonomes Urteilen und Handeln) erreichen? Handelt es sich hier nicht um eine „contradictio in se"? „Denn Kausalität bindet, legt fest, bestimmt, determiniert; Freiheit dagegen ist das genaue Gegenteil von alledem, so dass es problematisch sein muss, ob überhaupt Freiheit als Ziel einer doch immer auf Stabilisierung tendierenden Erziehung bezeichnet werden darf".[188]

Um in dieser Frage weiterzukommen, müssen noch weitere begriffliche Klärungen erfolgen. Die Aufgabe der „Zucht", sagt J. F. Herbart, ist die Bildung des Charakters. „Der Wille ist sein Sitz; die Art der Entschlossenheit des Willens bestimmt einen solchen oder einen andern Charakter".[189] Wie wird aus dem bloßen Willen ein entschlossener Wille? Durch Handeln, sagt J. F. Herbart. Denn „Handeln ist das Prinzip des Charakters"[190]. Nun entsprechen aber weder der bloße Wille noch das Handeln an sich noch der Charakter überhaupt der Gesamtaufgabe der Erziehung. Denn diese besteht in der Sittlichkeit oder „Tugend" als dem Namen „für das Ganze des pädagogischen Zwecks"[191]. Der Wille für sich genommen kann auch eine bloße „Anwandlung(en) der Laune und des Verlangens"[192] sein. Auch das bloße Handeln für sich genommen besagt noch nicht, ob es dem moralischen Urteil des sittlich Richtigen standhält oder nicht. Dasselbe gilt für den Charakter, da auch er nach den Motiven seines Wollens und Handelns befragt werden muss, um den Bedingungen der Sittlichkeit zu genügen; denn nicht der Charakter als solcher, sondern der sittliche Charakter ist das Ziel der „Zucht".

Um auf den Charakter einwirken zu können, muss zwischen einem objektiven und einem subjektiven Teil des Charakters unterschieden werden. Den objektiven Teil

---

[186] Geißler, E., Herbarts Lehre vom erziehenden Unterricht, Heidelberg 1970, S. 181

[187] Kant, I., Werke in zehn Bänden, hrsg. von W. Weischedel, Band 10, Darmstadt 1986, S. 711

[188] Geißler, E., Herbarts Lehre vom erziehenden Unterricht, Heidelberg 1970, S. 132

[189] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften hrsg. von W. Asmus, Band 2, Stuttgart 1982, S. 112

[190] Ebenda, S. 112

[191] Herbart, J. F., Umriss pädagogischer Vorlesungen § 8, in: Pädagogische Schriften, Band 1, hrsg. von F. Bartholomäi, 5. Auflage neu bearbeitet von E. Salwürk, Langensalza 1890[5] , S. 285

[192] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften hrsg. von W. Asmus, Band 2, Stuttgart 1982, S. 47

bezeichnet J. F. Herbart mit dem Ausdruck „Gedächtnis des Willens“[193], womit er die gleichsam in den Willen eingegrabenen Wirkungen zurückliegender Handlungen meint. Durch bereits vollzogene Entscheidungen und Handlungen entstehen im Menschen Motivationsstrukturen, die als „objektive“ Dispositionen alles künftige Verhalten einer Person beeinflussen. Als subjektiven Teil des Charakters bezeichnet J. F. Herbart die Fähigkeit des Subjekts, sich zu sich selbst zu verhalten, Grundsätze für künftiges Handeln zu entwerfen und die Richtung, in der sich der Charakter weiterentwickelt, beeinflussen zu können[194]. Denn im Reich des Willens gibt es keinen „Mechanismus“. Vielmehr reflektiert der Geist „sich und die Gegenstände seines Wollens“ und unterwirft sie einer „innern Zensur“[195]. So entsteht ein Verhältnis der Wechselwirkung zwischen dem objektiven und dem subjektiven Teil des Charakters: Vergangene Entscheidungen werden zur „Prädisposition“[196] für künftige Urteile und Handlungen, die ihrerseits wieder den objektiven Charakter („Gedächtnis des Willens“) beeinflussen. Da die zur Haltung gewordene Festigkeit des sittlichen Willens (objektiver Charakter) Ziel der Bildung ist, der Erzieher aber nur das „Subjektive der Persönlichkeit“[197] beeinflussen kann, bleibt zu klären, wie Charakterstärke der Sittlichkeit als Voraussetzung für ein sittlich motiviertes Handeln erreicht werden kann.

Dabei soll nochmals an die Grundstruktur des Bildungsprozesses erinnert werden. Durch Erkenntnis gelangt der Mensch zur Einsicht, durch Wollen zum Handeln. Der Weg zur Einsicht führt über die Bildung des Gedankenkreises. Der Weg zum Handeln führt über die Charakterbildung. Wissen ist notwendig für einsichtiges Wollen. Charakterstärke ist notwendig für entschlossenes Handeln. Durch Unterricht wird der Gedankenkreis aufgebaut, durch „Zucht“ der Charakter. Durch Vielseitigkeit des Interesses werden die Inhalte des Gedankenkreises erschlossen. Durch ästhetische Urteile wird der Heranwachsende zu autonomem sittlichen Handeln befähigt.

Dies ist der Ausgangspunkt, von dem aus die oben gestellte Frage zu beantworten ist: Wie kann der Heranwachsende dahin gebracht werden, von sich aus das Richtige zu wollen? J. F. Herbart schreibt:

> *„Machen, dass der Zögling sich selbst finde als wählend das Gute, als verwerfend das Böse: dies oder nichts ist die Charakterbildung! Diese Erhebung zur selbstbewussten Persönlichkeit soll ohne Zweifel im Gemüt des Zöglings selbst vorgehn und durch dessen eigne Tätigkeit vollzogen werden; es wäre Unsinn, wenn der Erzieher das eigentliche Wesen der Kraft dazu erschaffen und in die Seele eines andern hineinflößen wollte. Aber die schon vorhandene und ihrer Natur notwendig getreue Kraft in eine solche Lage zu setzen, dass sie jene Er-*

[193] Ebenda, S. 104

[194] Benner, D., Die Pädagogik Herbarts, Weinheim und München 1986, S. 129

[195] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften hrsg. von W. Asmus, Band 2, Stuttgart 1982, S. 105f.

[196] Benner, D., Die Pädagogik Herbarts, Weinheim und München 1986, S. 130

[197] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften hrsg. von W. Asmus, Band 2, Stuttgart 1982, S. 104

hebung unfehlbar und zuverlässig gewiss vollziehn müsse: das ist es, was sich der Erzieher als möglich denken, was er zu erreichen, zu treffen, zu ergründen, herbeizuführen, fortzuleiten als die große Aufgabe seiner Versuche ansehn muss"[198].

Dieses Zitat und auch die folgenden Ausführungen J. F. Herbarts machen deutlich, dass die Erziehung fördernd und lenkend auch und gerade dort eingreifen kann, wo in erster Linie Selbstbestimmung verlangt ist: „Machen, dass ...", also beizutragen, dass der Heranwachsende in der Lage ist, selbst zu beurteilen und zu entscheiden, von welchen Motiven sein Handeln geleitet wird, das ist „Charakterbildung". Aber die „Erhebung zur selbstbewussten Persönlichkeit" muss der Heranwachsende selbst vollziehen. Denn „der Sittliche gebietet sich selbst".[199] Aber, so fragt J. F. Herbart weiter: „Was gebietet er sich?".[200] Antworten darauf gibt es viele, sagt er. Wer sie aber unbefangen betrachtet, „erkennt die leere Stelle für leer". Diese Stelle muss insofern leer bleiben, als es außer dem formalen Begriff der Sittlichkeit keine materialen Inhalte gibt, die dem Menschen vorschreiben könnten, was er zu tun hat, oder mit den Worten J. F. Herbarts, es keinen „bestimmten Gegenstand des Befehls"[201] gibt, der dem Willen inhaltlich gebieten könnte; denn der „Befehl ist selbst Wille! Dies Wollen muss das ursprüngliche und erste sein", dem der „gehorchende Wille"[202] folgt.

Worin besteht diese ursprüngliche, nicht mehr hintergehbare gebietende Notwendigkeit? Sie kann weder „logischer" bzw. „theoretischer" Art sein, denn eine solche würde allenfalls den Verstand überzeugen, nicht aber das Gemüt. Ein bloß theoretisches Sollen „kühlt den Willen, sie treibt ihn nicht!"[203]. Ist das Gebietende eine äußere, aufgrund unabänderlicher Gegebenheiten sich ergebende Notwendigkeit? Auch sie scheidet aus. Denn Befehl fordert auf, aber er zwingt nicht. "Einen Befehl würdigen heißt nicht, sich nach dem Unabänderlichen bequemen"[204]. Soll das Gebietende eine „moralische Notwendigkeit"[205] sein? Selbst diese wird von J. F. Herbart nicht als die geforderte Notwendigkeit anerkannt, da von einem „ursprünglich Notwendigen" die Rede ist, das „erst dann ... sittlich notwendig werden wird, wenn es im Gegensatz gegen die Neigung den Gehorsam regiert"[206]. D. h. sittlich wird ein Handeln erst dann, wenn der gebietende und gehorchende Wille identisch sind. „Der Sittliche gebietet sich selbst"! „Aber nicht jeder Gehorsam gegen den ersten besten Befehl ist sittlich.

---

[198] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften hrsg. von W. Asmus, Band 1, Düsseldorf 1964, S. 108

[199] Ebenda, S. 108

[200] Ebenda, S. 108

[201] Ebenda, S. 109

[202] Ebenda, S. 109

[203] Ebenda, S. 109

[204] Ebenda, S. 110

[205] Ebenda, S. 110

[206] Ebenda, S. 110

Der Gehorchende muss den Befehl geprüft, gewählt, gewürdigt" haben[207]. Folglich kann nicht der Wille für sich genommen bestimmen, was unter dem Aspekt des Sittlichen zu tun ist, sondern das prüfende Urteil. „Der Sittliche gebietet sich also nicht selbst, indem er seinem Willen folgt, sondern indem er frei über seinen Willen urteilt und diesem Urteil folgt".[208]

Dieses Kriterium erfüllt die „ästhetische Notwendigkeit". „Diese charakterisiert sich dadurch, dass sie in lauter absoluten Urteilen ganz ohne Beweis spricht." Ästhetische Urteile sind „ursprüngliche" und „einfache Urteile"[209] über sinnlich und geistig wahrnehmbare „Verhältnisse". Als Beispiel nennt J. F. Herbart die Künste, etwa die Musik mit ihren „harmonischen Verhältnissen"[210]. Oder man denke an die Architektur und an die bildende Kunst mit ihren Proportionen, an die Malerei mit ihren Farbkompositionen u.s.w. Diese Beispiele sollen nur zeigen, wie aus der Wahrnehmung oder der bloßen Vorstellung von „einfachen ästhetischen Verhältnissen ... einfache Urteile über dieselben"[211] entstehen. Solche, weil „aus der Mitte des Gemüts" hervorbrechenden, „ursprünglichen" Urteile sind aus sich heraus einleuchtend oder evident und im Gegensatz zu „logisch auseinander abgeleitet(en)" Urteilen[212] „einfach". Was evident ist, bedarf keines Beweises und keiner Reflexion. Es leuchtet unmittelbar ein. Es erscheint dem, für den es evident ist als notwendig und absolut gültig. Ästhetische Urteile üben gleichsam einen „Zwang" über den Menschen aus (etwa gemäß der Lutherschen Aussage: Hier bin ich, hier stehe ich, ich kann nicht anders), so dass sich aus ihnen, sofern sie auf den eigenen Willen bezogen sind, im Laufe der Zeit das „Gewissen" bildet[213].

Was für die Geschmacksurteile über die Kunst gilt, die aus einer ästhetischen Notwendigkeit hervorgehen, gilt auch für Urteile über andere Verhältnisse, etwa für die über „andere Willen"[214] also über zwischenmenschliche Beziehungen oder über gegenständliche Verhältnisse. Immer geht „für jedes dieser Verhältnisse auch ein ursprüngliches, absolut unabhängiges ästhetisches Urteil von ganz eigentümlicher Beschaffenheit mit unmittelbarer Evidenz" hervor[215]. Evidente Urteile erfüllen also die geforderte Notwendigkeit, der wir aus Einsicht gehorchen können. Wenn solche Urteile über die verschiedenen Welt- und Personenverhältnisse zueinander in eine den „bestimmenden Ideen" der Sittlichkeit, wie „Rechtlichkeit, Güte, innere Freiheit"[216]

[207] Ebenda, S. 108
[208] Benner, D., Die Pädagogik Herbarts, Weinheim und München 1986, S. 76
[209] Herbart, J.F., Pädagogische Schriften, hrsg. von W. Asmus, Band 1, Düsseldorf 1964, S. 109f.
[210] Ebenda, S. 111
[211] Ebenda, S. 111
[212] Ebenda, S. 111
[213] Ebenda, S. 111
[214] Ebenda, S. 112
[215] Ebenda, S. 112
[216] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften, hrsg. von W. Asmus, Band 2, Stuttgart 1982, S. 111

entsprechenden Ordnung gebracht werden, dann entsteht daraus eine „Lebensordnung“[217], der jeder aus Einsicht und innerer Freiheit zustimmen kann. „Also, dass die Ideen des Rechten und Guten, in aller ihrer Schärfe und Reinheit die eigentlichen Gegenstände des Willens werden, dass ihnen gemäß sich der innerste reelle Gehalt des Charakters, der tiefe Kern der Persönlichkeit bestimme mit Hintansetzung aller andern Willkür, das und nichts minderes ist das Ziel der sittlichen Bildung“.[218]

Wie kann Evidenz erreicht werden? Als *unmittelbare* Einsicht kann sie nicht vermittelt werden. Deshalb ist die erste Bedingung die willentliche Zustimmung: „Das Gehorchende soll Wille sein und Wille bleiben“[219]. Nur wer einsehen *will*, wird auch einsehen können. Eine weitere Bedingung ist: „viel Verlangen wecken“, aber kein „zügelloses“[220]; Interesse fördern, aber nicht einseitiges, sondern vielseitiges; den Gedankenkreis erweitern, aber nicht durch Vielwisserei, „damit die freie Haltung des Gemüths nicht von der Weltklugheit, sondern von der reinen praktischen Überlegung das Gesetz empfange. Eine solche Darstellung der Welt, der ganzen Welt und aller bekannten Zeiten ... , diese möchte wohl mit Recht das Hauptgeschäft der Erziehung heißen“[221].

Damit schließt sich der Kreis des Bildungsgeschehens. Nimmt die Bildung ihren Ausgang vom Gesamtzweck des Menschen, nämlich der „Moralität“ oder wie wir heute sagen würden, der Mündigkeit, so kann man „als ersten Teil des pädagogischen Zwecks (die)‘Vielseitigkeit des Interesses’“[222] bezeichnen; denn sie ermöglicht die eigenverantwortliche und selbstbestimmte Teilhabe am öffentlichen Leben. Da aber „die Sittlichkeit einzig und allein in dem eignen Wollen nach richtiger Einsicht ihren Sitz hat“[223], so ist sittlich Bildung oder die Bildung eines sittlichen Charakters der zweite Teil des pädagogischen Zwecks. Richtet sich das Interesse auf die Erkenntnis des Mannigfaltigen und auf die Teilnahme am Leben der Gesellschaft, so findet die sittliche Bildung ihre Realisierung in der moralischen Beurteilung des Willens und in der „Wärme für das Gute“.

Abschließend sei noch auf einige psychologisch begründete Bedingungen hingewiesen, die J. F. Herbart für das Gelingen von „Regierung“, „Unterricht“ und „Zucht“ für erforderlich hält[224]:

---

[217] Herbart, J.F., Pädagogische Schriften, hrsg. von W. Asmus, Band 1, Düsseldorf 1964, S. 112

[218] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften, hrsg. von W. Asmus, Band 2, Stuttgart 1982, S. 43

[219] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften, hrsg. von W. Asmus, Band 1, Stuttgart 1982, S. 112

[220] Ebenda, S. 113

[221] Ebenda, S. 115

[222] Herbart, J. F.,Pädagogische Schriften, hrsg. von W. Asmus, Band 2, Stuttgart 1982, S. 42

[223] Ebenda, S. 42

[224] vgl. Geißler, E., Herbarts Lehre vom erziehenden Unterricht, Heidelberg 1970, S.177ff. und S.211ff.)

1. Die Atmosphäre des Wohlwollens im Lehrer-Schüler-Verhältnis. Verspürt der Schüler die wohltätige Absicht des Lehrers, so wird er dadurch nicht nur in seinem Selbstwertgefühl gestärkt, sondern er ist dadurch auch eher geneigt, den Weisungen des Lehrers zu gehorchen.

2. Handeln in Situationen: Vielseitigkeit des Interesses braucht vielfältige Gelegenheiten zum Handeln. Pädagogisch gestaltete und vorgeformte Situationen verhelfen dem Schüler zu einem Handeln ohne Zwang. Das einzig Zwingende ist der Sachzwang. Dadurch entsteht im Schüler ein Gefühl des Könnens, das ihn beflügelt, „bei der Sache" zu bleiben.

3. Bestätigende Erfolgserlebnisse: Unterricht darf niemals ausschließlich unter dem Aspekt der Stoffvermittlung gesehen werden. Wo Erfolgserlebnisse selten sind oder gar ausbleiben, versiegt auch die Lernmotivation.

4. „Stärke des sinnlichen Eindrucks"[225]. Je mehr Sinne angesprochen werden, um so stärker sind das „Aufmerken" und das „Merken"[226].

5. Selbsttätigkeit: Selbsttätigkeit ist nicht nur die Form, in der sich das Interesse am besten äußern kann - „Interesse ist Selbsttätigkeit"[227] - , sie lockt auch das Interesse hervor. Selbstständiges Lernen ist auch dann noch dem befohlenen Lernen vorzuziehen, wenn dadurch der Umfang des Gelernten geringer sein sollte. Denn durch Zwang wird die Motivation der Bildung zerstört. „Drei Zeilen eigener Arbeit sind besser als drei Seiten nach Vorschrift"[228].

2.2.3 Bildung und Arbeit: Der Bildungsbegriff bei Georg Kerschensteiner (1854 – 1932)

G. Kerschensteiner ist ein Vertreter der Reformpädagogik. Als Begründer der Arbeitsschule und der Berufsschule, sein sog. „Münchner Modell", hatte er große Anerkennung gefunden. Er war ein Mann „der Praxis", der schul- und bildungspraktisch gewirkt hat und auch seine Aufgabe darin sah, die Schule zu reformieren. Gegen Ende seiner Tätigkeit hat er versucht, seine praktischen Erfahrungen und Einsichten theoretisch zu begründen. Dieser Begründungsversuch ist „nicht frei von Postulaten, die manchmal sehr konstruiert harmonisierend erscheinen".[229] Dennoch sind sich auch die

[225] Herbart, J. F., Umriss pädagogischer Vorlesungen § 76, in: Pädagogische Schriften, Band 1, hrsg. von F. Bartholomäi, 5. Auflage neu bearbeitet von E. Salwürk, Langensalza 1890[5], S. 313,

[226] Herbart, J. F., Umriss pädagogischer Vorlesungen § 73, in: Pädagogische Schriften, Band 1, hrsg. von F. Bartholomäi, 5. Auflage neu bearbeitet von E. Salwürk, Langensalza 1890[5], S. 311

[227] Herbart, J. F., Umriss pädagogischer Vorlesungen § 71, in: Pädagogische Schriften, Band 1, hrsg. von F. Bartholomäi, 5. Auflage neu bearbeitet von E. Salwürk, Langensalza 1890[5], S. 311

[228] zitiert nach E. Geißler, Herbarts Lehre vom erziehenden Unterricht, Heidelberg 1970, S.179

[229] Tschamler, H., Georg Kerschensteiner, in: Gesamtschul-Informationen 19 (1988) 1-2 , S. 123

Kritiker seiner Theorie einig, dass an seinem reformpädagogischen Ansatz, insbesondere an seiner Idee der Arbeitsschule „keine neue Bemühung um die Frage der Bildung vorbeigehen“[230] kann.

Wiederholt betont G. Kerschensteiner: Wir sind nicht gebildet, weil wir „auf irgendeinem oder auch auf vielen Gebieten über reiches Wissen oder auch treffliches Können“ verfügen. „Sondern wir sind gebildet, weil in unserem Bewusstsein die Idee ‘Bildung’ ... Kern unseres geistigen Seins werden konnte.“[231]

Worin besteht die Idee seiner Bildung?

G. Kerschensteiner unterscheidet zwischen Bildung als Zustand und Bildung als Verfahren.

Im ersten Teil seiner „Theorie der Bildung“, in dem G. Kerschensteiner Bildung als Zustand beschreibt, unterscheidet er am Bildungsbegriff drei Seiten: die **axiologische**, die **teleologische** und die **psychologische** Seite.

Der **axiologische** Aspekt der Bildung bezieht sich auf die „sittlich autonome Persönlichkeit“, die er als Sinngefüge bezeichnet. Dieses Sinngefüge setzt sich aus objektiv geltenden Werten zusammen, wie z. B. Klarheit, Wahrheit, Vollendung, Schönheit, Harmonie, Gerechtigkeit, Güte usw., die in den Kulturgütern gegeben sind. Bildung ist demnach das Ergebnis eines Prozesses, der durch verschiedenste Kulturgüter, z. B. die Wissenschaften, Künste, Religionssysteme, Maschinen, Werkzeuge, Persönlichkeiten und Sitten ausgelöst wird und individuell organisiert werden muss.

Die **teleologische** Seite weist auf den Weg hin, der zu dem Ziel der autonomen Persönlichkeit führt. Dabei unterscheidet G. Kerschensteiner wiederum zwei Seiten, die biologische und die soziologische. In der biologischen Seite knüpft die Wertbildung bei den natürlichen Begabungen und Neigungen an, die im optimalen Fall auch Ausgangslage zur Berufsbildung im Sinne einer ‚Berufung’ sind. Denn berufen wird man sich für die Tätigkeit am ehesten fühlen, für die man auch die entsprechende Begabung und Anlage hat. Diesen Beruf kann man dann auch am vollkommensten erfüllen. Dort stimmen die innere und die äußere Haltung am organischsten überein. So verstanden ist für G. Kerschensteiner „die Berufsbildung auch Pforte der Menschenbildung“[232], d.h. in dem Beruf, zu dem sich der Mensch berufen fühlt, kann er auch sein Menschsein am besten entfalten.

Zwar kann das Bildungsverfahren nicht von vornherein auf den Beruf ausgerichtet sein, doch soll es den Zögling in die Lage versetzen, seine Neigungen und Interessen herauszufinden, um diese dann auch vertiefen zu können. Dabei bezieht sich G. Ker-

---

[230] Klafki, W., Das pädagogische Problem des Elementaren und die Theorie der kategorialen Bildung, Weinheim und Berlin 1964[4], S. 211

[231] Kerschensteiner, G., Theorie der Bildung, Leipzig und Berlin 1931, S. 13

[232] Ebenda, S. 41

schensteiner auf J. W. v. Goethes Wilhelm Meister, der dem Schüler die Anweisung gab, herauszufinden, „wo seine Natur eigentlich hinstrebt“ und der, sobald er darüber Klarheit gewonnen hat, wissen müsse: „Eines wissen und ausüben gibt höhere Bildung als Halbheit im Hundertfältigen“.

Neben der biologischen gehört auch die soziologische Seite zum teleologischen Aspekt des Bildungsbegriffs. Denn die sittlich autonome Persönlichkeit erkennt die Notwendigkeit der Gemeinschaft als Kultur- und Wertgemeinschaft an und ist somit auch bereit, sich für diese Gemeinschaft einzusetzen. Jeder Mensch ist nach G. Kerschensteiner zur Verwirklichung des individuell erreichbaren geistigen Seins und zur Verwirklichung des Seins in der Gesellschaft berufen.

Die **psychologische** (oder formale) Seite schließlich bestimmt die notwendigen formalen Bedingungen unter denen die sittlich autonome Persönlichkeit erreichbar ist. G. Kerschensteiner bezeichnet diese Seite als formale Bildung, ohne einer sog. Kraft- oder Vermögensbildung das Wort zu reden. So könne man beispielsweise nicht erwarten, dass die Beschäftigung mit Mathematik logisches Denken auf allen weiteren Gebieten mitschult oder dass Mut im Sport auch schon moralischen Mut zur Folge hat. Andererseits kommt einem Schüler, der das genaue Beobachten im Biologieunterricht gelernt hat, dieses auch bei chemischen Versuchen zugute. Es kommt also darauf an, dass formale Bildung so gestaltet wird, dass sie im Dienste der Wertbildung steht und die einzelnen geistigen Akte in einem möglichst großen Sachzusammenhang stehen.

Die drei Seiten des Bildungsbegriffes müssen als Einheit gesehen werden, da sie miteinander verbunden sind. So ist der teleologische Aspekt eine Voraussetzung für den axiologischen und aus diesem folgt wiederum der psychologische. G. Kerschensteiner drückt dies so aus: „Die Wertbildung (axiologische Seite) gibt das höchste Ziel, die Berufsbildung den besten Weg und die Kraftbildung (psychologische Seite) die notwendige Sicherung der Bildung.“[233]

Bildung kann nur erfolgreich sein, wenn diese drei Bildungsgesichtspunkte optimal ineinandergreifen, wenn also erstens Neigungen und Interessen des Zöglings möglichst weit vermehrt und verzweigt werden, zweitens das Bildungsverfahren die Gesetze der Wertverzweigung und Wertorganisation zur Geltung bringt und wenn drittens der soziologische Gesichtspunkt hin zum Gemeinwohl ausgestaltet werden kann. Aus diesen drei Aspekten erwachsen drei Aufgaben für die Schule: Die erste Aufgabe besteht darin, den Schüler zu befähigen, einen Beruf so gut wie möglich auszuüben. Die zweite Aufgabe besteht darin, dem Schüler verständlich zu machen, dass sein Beruf nicht nur seinem Lebensunterhalt dient, sondern auch im Interesse des Staats

[233] Ebenda, S. 47

auszuüben ist. Drittens schließlich hat die Schule die Aufgabe, dem Schüler zu vermitteln, auch „an der Versittlichung des großen Gemeinwesens ... mitzuarbeiten“[234].

Steht im ersten Teil seiner Bildungstheorie der Wert im Zentrum der Betrachtung, so stellt G. Kerschensteiner im zweiten Teil das Interessensytem des Zöglings in den Mittelpunkt.[235] Er sieht in diesem zweiten Teil Bildung als Verfahren und betrachtet die an diesem Prozess Beteiligten: Den Zögling als pädagogisches Objekt der Bildung, die öffentlichen und geheimen Erzieher als pädagogisches Subjekt der Bildung und die Kultur- und Bildungsgüter als pädagogische Mittel.

Um diese drei Elemente des Bildungsverfahrens näher bestimmen zu können, befasst sich G. Kerschensteiner mit der Geistesentwicklung und der Bildsamkeit des Zöglings, mit der geistigen Struktur und Bildungswirkung der Bildungsgüter, mit der Verfassung des Erziehers und schließlich mit Prinzipien für das Bildungsverfahren, die sich aus dem Begriff der Bildung und den drei Faktoren des Bildungsverfahrens ergeben.

Das Bildungsobjekt oder der Zögling

Bildung als Verfahren hat den Sinn, „mit Hilfe der Kulturgüter dem Eigenwachstum des Geistes zu einer Wertgestalt zu verhelfen“. Wenn diese Werte vom Menschen gelebt werden, so wird einerseits die Individualität des Menschen mit seinen Interessen berücksichtigt werden und andererseits werden objektiv geltende Werte zum Ausdruck kommen müssen. Das Bildungsverfahren kann dabei lediglich die Bedingungen schaffen, dass der Mensch neben den Werten, die seinem Naturell entsprechen, auch den Drang verspürt, „unbedingt geltende“ Werte zu verwirklichen. Dabei spielen Vorbilder eine große Rolle, die das Kind zunächst als Spiegelbild übernehmen wird, dann aber in einem bewussten Akt zur Selbstbildung. „Alles Bildungsverfahren hat nur den einen Sinn, den Selbstbildungsprozess einzuleiten.“[236]

Im Verlauf der menschlichen Entwicklung wird das Kind zunächst rein triebhaft entsprechend seiner Wachstumsbedürfnisse handeln. Doch plötzlich, G. Kerschensteiner nennt diesen Moment den ersten großen Wendepunkt (mit ca. 2 Jahren), ist das Kind in der Lage, die Mittel seiner Umgebung dahingehend zu bewerten, welchen Nutzen sie bei der Erfüllung selber gewollter Zwecke haben. Damit entsteht das Interesse am Mittel, da der Mensch es zur Weiterentwicklung braucht. G. Kerschensteiner spricht von einer Wirkungskette: Ohne seelische Bedürfnisse keine spontanen Handlungen und keine Werterlebnisse, ohne Werterlebnisse keine Bewertungen, ohne Bewertun-

[234] vgl. Kerschensteiner, G., Produktive Arbeit und ihr Erziehungswert in: Reble, A. (Hrsg.) Die Arbeitsschule, Bad Heilbrunn 1963 (Klinkhardts Pädagogische Quellentexte), S. 41

[235] vgl. Tschamler, H., Georg Kerschensteiner, in: Gesamtschul-Informationen 19 (1988) 1-2 , S. 118

[236] Kerschensteiner, G., Theorie der Bildung, Leipzig und Berlin 1926, S. 252

gen keine Zwecke, ohne Zwecke keine Interessen. Oder kurz: Je stärker die Neigungen, desto größer das Interesse an etwas.

In dem Moment, in dem der Mensch den Wert des jeweiligen Kulturgutes erkennt, tritt das zweite große Ereignis in der Entwicklung des menschlichen Geistes ein, „das Erlebnis der unbedingt geltenden Werte". „Das autonome Gewissen ist erwacht" [237] und die „rechten" Interessen können sich voll entwickeln.

Der dritte Schritt in der Entwicklung des Interesses ist erreicht, wenn beim Jugendlichen „die Wendung zur Idee"[238] eintritt. Der Heranwachsende wendet sich nur noch den geistigen Akten zu, die ihm unbedingt geltende Werte vermitteln können. Die Ausbildung geistiger Interessen entsteht.

Diese drei Schritte können auch als Weg von der Fremdbestimmung zur Selbstbestimmung gesehen werden, auf dem zunächst die sinnlichen Werterlebnisse und dann die geistigen Werte vorherrschen.[239]

G. Kerschensteiner unterscheidet zwischen Triebinteressen und Reizinteressen. Dabei bezeichnet er das Triebinteresse als das echte Interesse, das nicht auf den Gegenstand (z. B. Sache, Person, Handlung, Eigenschaft, Idee, Begriff, Gedanke, Satz) wartet, der es erweckt, sondern das von sich aus den Gegenstand aufsucht. Reizinteressen hingegen sind Interessen, die aufgrund äußerer Reize entstehen, aber wieder verschwinden und nicht zur geistigen Entwicklung beitragen können. Das Reizinteresse ist von außen nach innen gerichtet, das Triebinteresse von innen nach außen und ruft Aktivität hervor.

Der Befürchtung, die Bevorzugung von Triebinteressen, die ja vor allem durch Anlagen und Neigungen entstehen könnte, zu Einseitigkeiten in der Interessensentwicklung führen, setzt G. Kerschensteiner entgegen, dass sich gerade bei Triebinteressen und der Beschäftigung mit den entsprechenden Gütern immer neue und weitere Interessen abzweigen. Als Beispiel nennt er eine Station in seiner Biografie: „Selbst mein Interesse für mathematische Studien war zum größten Teil von dem sozialen Motive (Zwecke) getragen, in der exaktesten aller Wissenschaften an der für mich besten Schulform der beste Lehrer zu werden."[240] Erst durch die Verfolgung dieses Interesses und die daraus resultierenden Entscheidungen kam G. Kerschensteiner zur Philosophie als einem Gebiet, das er in seiner Jugend gemieden hatte.

Entsprechend der Entwicklung des Interesses teilt G. Kerschensteiner die Entwicklung des Kindes bzw. Jugendlichen von der Geburt bis zum 24. Lebensjahr in vier Perioden ein:

[237] Ebenda, S. 267

[238] Ebenda, S. 268

[239] vgl. Tschamler, H., Georg Kerschensteiner, in: Gesamtschul-Informationen 19 (1988) 1-2, S. 121

[240] Kerschensteiner, G., Theorie der Bildung, Leipzig und Berlin 1926, S. 281

a. Periode der ersten Kindheit (Dressuralter): In dieser Zeit, im Durchschnitt bis zum zweiten Lebensalter, betätigt sich das Kind hauptsächlich impulsiv, meist mit Illusionsspielen und spontanen Sinnes- und Bewegungsspielen.

b. Periode der zweiten Kindheit (Spielalter): In dieser Zeit, die sich vom 3. bis zum 7. Lebensjahr erstreckt, setzt das Kind sich mehr und mehr Zwecke und wählt die entsprechenden Mittel aus. Die Interessen sind eher von kurzer Dauer.

c. Periode des eigentlichen Knaben- und Mädchenalters (Alter der egozentrisch gerichteten Arbeit): Der Beginn dieser Zeit liegt beim 8. Lebensjahr, das Ende zwischen dem 12. und 14. Lebensjahr. Sie ist geprägt durch eine zunehmend kritisch bewertende Haltung. Das Ende dieser Zeit fällt mit dem Aufkommen der Fähigkeit zusammen, Güter autonom bewerten zu können.

d. Periode des Jünglings- und Jungfrauenalters (Alter der sachlich gerichteten Arbeit): In dieser Zeit entwickelt sich eine zunehmend tolerante und sachliche Haltung und ein Interesse für Gemeinschaft, geistige Güter und die Ausbildung weiterer geistiger Interessen.

Die Bildungsmittel oder Kulturgüter

G. Kerschensteiner unterscheidet bei den Bildungsmitteln zwei Arten: die Naturgebilde (Sachen) und die Geistesgebilde (Güter). Die Geistesgebilde können im Menschen Erlebnisse mit geistigem Wert erzeugen, die Naturgebilde können im Menschen zu Erlebnissen mit sinnlichem Wert führen. Die geistigen und sinnlichen Werte wiederum existieren nicht für sich, sondern sind mit sog. Gegenständen, z. B. Dingen, Personen, Handlungen, Eigenschaften oder Vorstellungen verbunden.

Sinnliche Werte entspringen den Trieben des Menschen wie z. B. Lust oder Unlust, Annehmlichkeit oder Behaglichkeit. Die geistigen Werte sind z. B. Wahrheit, Klarheit oder Schönheit.

Nicht alle Werteigenschaften jedoch werden vom Objekt gleich erlebt, weshalb hier zwei Gruppen unterschieden werden müssen. Die eine Gruppe bildet die unbedingt und allgemein geltenden Werte, wie z. B. Wissenschaften, Kunstwerke, Religionssysteme: G. Kerschensteiner nennt sie „Kulturdinge“ und „Geistesgebilde“[241]. Sie wirken durch ihren Eigenwert. Die zweite Gruppe bildet die Werte, die nur in Verbindung mit einem individuellen Erlebnis verbunden sind, wie z. B. Maschinen, Wohnungen, Kleider, Zweckgemeinschaften.

Für die Bildung sind die Kulturgüter von besonderem Belang, da an ihnen die geistigen Werte haften. Diese Werte müssen durch Erlebnisse vermittelt werden, damit sie im Individuum lebendig werden. Es genügt also nicht, dass der Schüler um die Werte

[241] Ebenda, S. 322

weiß, er muss sie erleben. Deshalb kann eine Wissensschule keine Bildungsschule sein. Die Überzeugung, dass Werte erlebt werden müssen, verlangt, dass die Vermittlung aktiv, handelnd durch Betätigung geschehen muss. Wenn aber Erleben, Fühlen und Handeln wichtig ist, dann folgt daraus, dass Bildung an eine Schulform, z. B. das Gymnasium gebunden ist.[242]

Das Bildungssubjekt

G. Kerschensteiner nennt sechs Hauptprobleme, die in der Schule auftreten:

Das Typenproblem: die geistige Struktur der Schüler stimmt nicht mit der geistigen Struktur des Lehrplans überein. Das Problem der quantitativen Lehrplanforderung: durch die unterschiedliche Veranlagung der Schüler müssen mittlere Anforderungen gestellt werden. Das Problem des Entwicklungstempos: es erwächst aus dem unterschiedlichen Tempo der geistigen Entwicklung der Schüler. Das Klassen- und Fachlehrerproblem: optimal wäre ein Lehrer für alle Fächer. Das Konzentrationsproblem: es ergibt sich aus der Stofffülle. Und schließlich das Problem der Lebensnähe der Schule: die Inhalte sind nicht dem Erleben der Schüler angepasst. In seiner Konzeption der Arbeitsschule versucht er einige dieser Probleme zu lösen.

Auch wenn nicht alle gelöst werden können, so glaubt er doch wenigstens einige mit Hilfe seiner Idee der Arbeitsschule lösen zu können. Auf jeden Fall aber muss die Schule, will sie ihren Bildungsauftrag erfüllen, folgende Unterrichtsprinzipien beachten, die G. Kerschensteiner als „Richtlinien für das pädagogische Denken und Handeln“[243] betrachtet.

Prinzip der Totalität

Aus der Vorstellung, dass das Bildungsziel eines Menschen die sittlich-autonome Persönlichkeit ist, ergibt sich der Wunsch, dieses Ziel bis zu einem individuell möglichen Maximum zu erreichen. Dabei geht es einerseits um das Sittlich-Mögliche im Zögling selbst und um das Sittlich-Mögliche in der Gemeinschaft. Aus dem Grundprinzip der **Totalität** erwächst die Aufforderung an den Lehrer: „Lasse Deine pädagogischen Akte niemals nur durch die einzelne Erscheinung, sondern immer zugleich auch durch die jeweilige Gesamtverfassung der werdenden Persönlichkeit Deines Zöglings bestimmt sein.“[244]

Um Einseitigkeit, z. B. im Bereich der intellektuellen Leistung zu vermeiden, verlangt das Prinzip der Totalität die maximale Leistungsfähigkeit des ganzen Individuums.

---

242 vgl. Tschamler, H., Georg Kerschensteiner, in: Gesamtschul-Informationen 19 (1988) 1-2, S. 119

243 Kerschensteiner, G., Theorie der Bildung, Leipzig und Berlin 1926, S. 248

244 Ebenda, S. 412

„Zerstöre so wenig wie möglich das Vertrauen Deines Zöglings auf sich selbst und führe ihn gleichwohl zur schärfsten Kritik des eigenen Tuns“[245] lautet G. Kerschensteiners Ratschlag im Zusammenhang mit der Totalitätsforderung.

Prinzip der Aktualität

> *„Richte dein pädagogisches Tun stets so ein, dass das Wert- und Zwecksystem jeder Entwicklungsstufe zu seiner Befriedigung kommt, ohne dass dabei das zukünftig mögliche Wert- und Zwecksystem aus dem Auge gelassen wird.“*[246]

Diese Forderung stellt G. Kerschensteiner, um dem Prinzip der Aktualität bzw. der Rücksichtnahme Genüge zu tun. Gefordert ist also, vom Zögling genau das zu verlangen bzw. ihn genau mit dem zu versorgen, was seiner aktuellen geistigen Struktur entspricht. Groß ist die Gefahr, dass dem Erzieher zu stark das Endziel der Bildung präsent ist und Inhalte zu früh an den Zögling herangetragen werden, G. Kerschensteiner spricht in diesem Zusammenhang von der „Krankheit der Verfrühung“. Vielmehr soll das Bildungsverfahren so aufgebaut sein, dass es in psychologischer Entwicklung verläuft, d.h. am gegenwärtigen Entwicklungsstand des Zöglings anknüpft, ohne das Endziel der Bildung aus dem Auge zu verlieren. Beispielhaft nennt G. Kerschensteiner die literarische Erziehung, die auf das Sinngefüge des Entwicklungsalters aufbauen muss, d.h. für das Kindesalter Phantasiegebilde, für das Knabenalter Darstellungen handelnder Menschen, für die Adoleszenz stufenweise Epik, Dramen, Lyrik und später dann Themen zu Sitte, Sozialem und Staatsbürgertum.

Prinzip der Autorität

Für das Prinzip der Autorität formuliert G. Kerschensteiner drei Imperative. Der erste lautet: „Sorge für den heteronomen Gehorsam, solange Du das Bildungsverfahren nicht auf autonomen Gehorsam stützen kannst.“[247] Heteronom ist ein Gehorsam dann, wenn er durch Autoritäten erzwungen wird. Im Gegensatz dazu erfolgt autonomer Gehorsam durch Einsicht in den eines Gebots. Laut G. Kerschensteiner kann aber ein zunächst von außen erzwungener Gehorsam einen inneren Gehorsam nach sich ziehen. Die zweite Forderung des Autoritätsprinzips lautet: „Sorge für die Entwicklung des Autoritätsgefühls durch Pflege des Gefühls der Ehrfurcht vor den dinglichen wie vor allem vor den personalen Gütern.“ Motive für die Entstehung von Autoritätsgefühl sind nach G. Kerschensteiner anerzogenes Minderwertigkeitsbewusstsein, durch schenkende Liebe erweckte Gegenliebe und erzeugte Ehrfurcht vor Wertträgern. Da die Gegenliebe bei schwindender Liebe ebenfalls schwindet, ist sie als Grundlage nicht sehr verlässlich. Anerzogenes Minderwertigkeitsbewusstsein ist ohnehin von vornherein als unsittlich abzulehnen. So ist Ehrfurcht die sicherste Grundlage für das Autoritätsgefühl. Dabei setzt sich das Gefühl der Ehrfurcht aus drei Gefühlen zusam-

[245] Ebenda, S. 414

[246] Ebenda, S. 417

[247] Ebenda, S. 428

men: „Scheu vor der Größe und Macht eines Überragenden, das Gefühl der Bescheidenheit infolge Einsicht in die eigene mangelhafte Leistungsfähigkeit und das Gefühl der Bewunderung und Anerkennung einer Leistung, die uns selber unerreichbar ist.“[248] Dritte Aufgabe ist schließlich: „Stelle deinen Zögling so früh wie möglich in die Gliedschaft von Wertgemeinschaften und sorge damit für die Entwicklung jener Autoritätsgesinnung, die der Verwirklichung der Wertidee dient.“[249] G. Kerschensteiner weist dem Staat eine wichtige Ordnungsfunktion zu und hält es deshalb für wichtig, den Schüler zu einem positiven Verhältnis zum Staat zu bringen.

Prinzip der Freiheit

Das vierte Prinzip des Bildungsverfahrens ist das der Freiheit. Dabei meint G. Kerschensteiner unter Freiheit eine sog. „sittliche Freiheit“, die keine totale Willkür ist, sondern Selbstbestimmung im Rahmen bestehender Gesetze bzw. einer bestehenden Wertordnung. Voraussetzung beim Schüler ist ein Bewusstsein für die Werte und deren Ordnung: Dann heißt die Forderung für das Freiheitsprinzip: „Überlasse dem Zögling sobald wie möglich der Selbstbestimmung seines Tuns in einer weise ausgewählten Mannigfaltigkeit der Lebensverhältnisse.“[250] G. Kerschensteiner beklagt jedoch, dass in den Schulen noch immer das autoritative Lernen vorherrscht, insbesondere wenn es darum geht, große Mengen an Wissensstoff zu vermitteln. Das experimentelle Arbeiten hingegen, das dem Schüler helfen würde, Selbstständigkeit im Denken und Handeln zu entwickeln und ihn damit auf dem Weg zur sittlich-autonomen Persönlichkeit unterstützen würde, werde nur teilweise ermöglicht.

Prinzip der Aktivität

Als Kern des Bildungsprozesses bezeichnet G. Kerschensteiner die Tatsache, dass Bildung nicht nur durch Fremd-, sondern auch durch Selbstgestaltung des Zöglings geschieht. Es handelt sich also um einen höchst aktiven Prozess, der von außen in optimaler Weise unterstützt werden muss. Daraus ergibt sich die Forderung der **Aktivität**.

G. Kerschensteiner betrachtet Selbsttätigkeit unter zwei Gesichtpunkten: Einerseits als Aktivität des Zöglings während der Arbeit und andererseits als ständige Selbstkontrolle seines Werkes sowohl während als auch am Ende seines Arbeitsprozesses. Nicht beliebige Selbsttätigkeit ist also gemeint, bei der alles positiv eingestuft wird, was der Zögling selbstständig zuwege bringt, sondern jene Tätigkeit, die auch kritisch hinterfragt was geschieht. G. Kerschensteiner formuliert das folgendermaßen:

> *„Sorge, dass in aller Arbeit, die der freien Selbsttätigkeit des Zöglings gemäß seiner jeweiligen geistigen Struktur aus Bildungsabsichten zugebilligt werden*

[248] Ebenda, S. 425

[249] Ebenda, S. 434

[250] Ebenda, S. 443

> *kann oder zugemutet werden darf, nicht bloß der Arbeitsverlauf selbst, sondern auch das abgeschlossene Werk der sorgfältigen Selbstprüfung des Zöglings unterstellt wird, soweit es Form und Inhalt der Selbsttätigkeit möglich macht.“*[251]

Im Mathematikunterricht hat dieses Prinzip einen naturgemäßen Platz. Denn da das logische Schließen ein charakteristisches Merkmal mathematischen Arbeitens ist, muss der Schüler die zur Lösung eines mathematischen Problems aufgestellten Vermutungen fortlaufend zu verifizieren versuchen. Aber auch bei anderen Fächern muss Wert auf die Einhaltung dieses Prinzips gelegt werden, um nicht der Beliebigkeit Tür und Tor zu öffnen.

Prinzip der Sozialität

> *„Sorge auf allen Stufen der Entwicklung durch Einfügung des Zöglings in freiwillige Wertgemeinschaften, dass er nicht bloß durch sein Handeln zu seiner eigenen sittlichen Selbsterkenntnis kommt, sondern auch seine Selbsttätigkeit in den Dienst der Versittlichung der Gemeinschaft stellt.“*[252]

Mit dem Prinzip der **Sozialität** fordert G. Kerschensteiner eine Erziehung zu sozialem Handeln. Schüler sollen in Arbeitsgemeinschaften eingebunden werden, die einem gemeinsamen geistigen Zweck verpflichtet sind. Als Beispiele für derartige Wertgemeinschaften nennt er Organisationen, die Hilfsbedürftige unterstützen, religiöse Ausrichtung haben oder eine Wissenschaft pflegen. Die Arbeit in solchen Wertgemeinschaften führt den Schüler weiter auf dem Weg zur sittlichen Selbsterkenntnis und zur sittlich-autonomen Persönlichkeit. Damit wird auch sein Interesse geweckt, an der Versittlichung der Gemeinschaft mitzuarbeiten. G. Kerschensteiner betont immer wieder, dass sittliche Selbsterkenntnis nicht durch bloße Unterweisung erreicht werden kann, sondern eines verantwortungsvollen Handelns in der Gemeinschaft bedarf.

Prinzip der Individualität

Als ein weiteres Prinzip im Bildungsverfahren formuliert G. Kerschensteiner das der **Individualität**:

> *„Die individuelle geistige Struktur eines Kulturgutes und die individuelle Aktstruktur des Zöglings müssen sich ganz oder teilweise decken, wenn das Kulturgut Bildungsgut werden soll.“*[253]

G. Kerschensteiner weist jedem Kulturgut eine Eigenartigkeit und Einzigartigkeit zu, weil es durch und von eigen- und einzigartigen Individuen entstanden ist. Soll der Zögling dieses Kulturgut voll erfassen können, bedarf er dazu einer inneren Disposition. So kann nach G. Kerschensteiner beispielsweise nur jemand den tieferen Sinn

[251] Ebenda, S. 455 f.

[252] Ebenda, S. 462

[253] Ebenda, S. 474

einer Staatsverfassung verstehen, der auch einen Sinn für Gerechtigkeit besitzt. Wer zur Andacht nicht fähig ist, wird auch bei klassischer Musik nicht das letztlich mögliche Hochgefühl erleben können. Deshalb fordert G. Kerschensteiner:

> *„Den Schulen genügt vielfach das bloße Wissen um den Inhalt eines Bildungsgutes; aber mit dem bloßen Wissen ist es nicht getan. Das Bildungsgut, d.h. sein tiefster Sinngehalt muss im Zögling lebendig werden, seine Seele muss darin aufgehen, muss es gleichsam aus sich selbst erzeugen, rekonstruieren, neu gestalten, wenn es ein Gut für seine Bildung werden soll. Man fürchte nicht, dass das Ergebnis intensiver Beschäftigung mit einem Bildungsgut Einseitigkeit der Bildung zur Folge haben müsse. Je tiefer wir graben müssen bei einer geistigen Beschäftigung, desto mehr kommen wir in die Gebiete der anderen geistigen Arbeitsfelder von selbst, je nach den Fähigkeiten, welche die Form unseres Geistes bestimmen. Gerade beim tiefen Graben tauchen die Probleme auf, für welche die Mittel der Lösung gleichsam aus fremden Ländern importiert werden müssen. Dann ist es immer noch Zeit, solche Kenntnisse zu übermitteln, ohne dass man den Zögling durch eine zunächst ungewollte Schar von Bildungsgütern hindurchschleppt.“*[254]

Die Möglichkeit aber, dass der Sinngehalt eines Bildungsguts im Schüler lebendig wird, setzt voraus, dass individuell auf den Schüler eingegangen wird, d.h., dass er sich mit Inhalten beschäftigten darf, die ihn interessieren und seinen inneren Anlagen entsprechen. Die Bedenken, dass dies zu einer eingeschränkten Bildung führen könnte, verwirft G. Kerschensteiner mit dem Hinweis, dass auch durch die intensive Beschäftigung mit einer Sache viele weitere Inhalte berührt werden. Entscheidend ist also, dass man von einer inhaltlichen „Gleichschaltung“ der Schüler absieht und eine möglichst hohe Binnendifferenzierung zulässt.

Wie G. Kerschensteiner seine bildungstheoretischen Vorstellungen in die Praxis umsetzt, wird im 4. Kapitel ausgeführt.

[254] Ebenda, S. 478 f.

2.3 Mathematikunterricht unter Berücksichtigung modernen Bildungsdenkens

Im Folgenden werden weitere drei Positionen behandelt, die die Diskussion um ein modernes Bildungsverständnis aufgreifen und zu den Aufgaben des Mathematikunterrichts in Beziehung zu setzen suchen.

H. W. Heymann entwirft einen Mathematikunterricht auf der Basis eines von ihm erstellten Allgemeinbildungskonzepts. A.I. Wittenberg beschreibt den Beitrag der Mathematik zur Bildung und zeigt auf, wie ein solcher bildender Unterricht auf der Grundlage exemplarischen Lernens konkretisiert werden kann. Bei A. Warzel schließlich steht die Frage im Vordergrund, wie die Selbstwerdung des Schülers im Sinne eines Bildungsprozesses gelingen kann.

2.3.1 Reflexion und Bildung im Mathematikunterricht: Die Position von Arno Warzel

Arno Warzel geht der Frage nach, wie Unterricht und speziell Mathematikunterricht gestaltet werden muss, dass er einerseits wissenschaftsorientiert ist und zugleich als bildend bezeichnet werden kann. A. Warzel bezieht sich dabei auf Überlegungen Franz Fischers, der die Frage nach einem wissenschaftsorientierten und zugleich bildenden Unterricht bereits zu einem früheren Zeitpunkt und unter einem anderen Gesichtspunkt in seiner „Darstellung der Bildungskategorien im System der Wissenschaften“ bearbeitet hat. Bei aller gegebenen Kürze muss deshalb im Folgenden F. Fischers Grundanliegen erklärt werden. So sollen zunächst zentrale Gedanken der Bildungsphilosophie F. Fischers, insbesondere seine bildungskategoriale Didaktik dargestellt und erst im Anschluss daran die Folgerungen A. Warzels für die Didaktik der Mathematik ermittelt werden.

F. Fischer geht von einem Bildungsverständnis aus, das er als „eine Art Vermittlung von Sinngehalten versteht, die den Menschen hinsichtlich seiner Weise, sich zu verhalten – beziehungsweise sich verhalten zu können – verändern.“[255] Sofern aber die Vermittlung solcher Gehalte nur aus der unmittelbaren und nicht aus der reflektierten Erfahrung stammen, kann, so F. Fischer, diese Bildungsdefinition nur als vorläufig gelten.

Seiner Ansicht nach ergibt die Präsentation wissenschaftlicher Ableitungszusammenhänge, d.h. mit wissenschaftlicher Methodik erworbener Erkenntnisse und Inhalte noch keinen Bildungssinn, da diese nicht in der Lage ist, einen persönlichen Rückbe-

[255] Fischer, F., Darstellung der Bildungskategorien im System der Wissenschaften, Ratingen und Kastellaun 1975, S. 6 zitiert nach Warzel, A., Die bildungskategoriale Didaktik Franz Fischers in ihrem Spannungsverhältnis zu Fachdidaktik und Modelltheorie – mit besonderer Berücksichtigung der Fachdidaktik der Mathematik, Frankfurt 1983, S. 76

zug zu schaffen, der ja gerade für das Phänomen der Bildung vorausgesetzt werden muss.[256] Die Begründung der These, dass wissenschaftliche Ableitungszusammenhänge den Bildungssinn nicht schon per se mit einschließen, erfolgt durch die Darstellung des Affinitätsproblems, das besagt, dass sich Gemeintes von Gesagtem unterscheidet.

Aufgabe ist nun, herauszufinden, worin der Unterschied zwischen dem Gesagten und dem Gemeinten besteht.

Trotz des existierenden Affinitätsproblems können nach F. Fischers Meinung wissenschaftliche Ableitungszusammenhänge einen Bildungssinn ergeben, wenn „reflektierende Fragen" über die Bedingungen gestellt werden, unter denen die Erkenntnisse zustande kommen; mit anderen Worten: wenn Fragen gestellt werden, die Reflexionsprozesse über die Voraussetzungen und Bedingungen solcher Zusammenhänge auslösen. „Reflektierende Fragen" wenden das Denken auf die Voraussetzung des Gedachten zurück und können so den geforderten Selbstbezug herstellen. Ein Beispiel: Wenn Schüler die Exponentialfunktion und deren Eigenschaften kennenlernen, so bewegen sie sich dabei zunächst auf der Ebene der wissenschaftlichen Erkenntnis. Sobald sie aber angeregt werden, über die Sinnhaftigkeit dieses funktionalen Zusammenhangs und über Möglichkeiten der Entstehung dieser Funktion und ihrer Anwendung nachzudenken, transzendieren sie die rein objektive Wissensebene und beginnen als fragende Subjekte einen Bezug zu sich selbst herzustellen. Das ist die Nahtstelle, an der aus Erkenntniswissen Bildungswissen wird. Mit der reflektierenden Frage wird sozusagen eine Brücke hergestellt zwischen dem Selbst und der Welt. Auf diese Weise wird der Fragende selbst Teil der im Wissen erfassten Zusammenhänge. Er wird Subjekt seiner Bildung.

> *„Der Umstand, dass sich Fragen einstellen, und insbesondere, dass sich reflektierende Fragen einstellen, ermöglicht es erst, dass sich der Mensch zu dem bildet, was er ist."*[257]

Da sich jedoch die Reflexion auf alle möglichen Gegenstände oder Sachverhalte beziehen kann, sind diese Inhalte ein notwendiger, aber noch kein hinreichender Grund für die Ermöglichung von Bildung. Der Bildungsprozess kommt erst in Gang, wenn die Reflexion die Stufe des naiven Denkens verlässt und nicht nur nach dem Sinngehalt eines Gegenstandes, sondern wie F. Fischer sagt, nach dem „Sinn des Sinnes" fragt. Unter dem „Sinn den Sinnes" versteht F. Fischer die den Sinn vermittelnde Reflexion und erklärt diesen mit Hilfe von Beispielen aus der Pädagogik und der Theologie: Bei Ersterer ist der „Sinn" die pädagogische Wirklichkeit, die von der

[256] vgl. Warzel, A., Die bildungskategoriale Didaktik Franz Fischers in ihrem Spannungsverhältnis zu Fachdidaktik und Modelltheorie – mit besonderer Berücksichtigung der Fachdidaktik der Mathematik, Frankfurt 1983, S. 76

[257] Fischer, F., Darstellung der Bildungskategorien im System der Wissenschaften, Ratingen und Kastellaun 1975, S.21

Pädagogik zu reflektieren, zu analysieren, zu verstehen versucht wird. D.h. also, es wird, indem über die pädagogische Wirklichkeit reflektiert wird, der Sinn des Sinns zu ergründen versucht. Bei der Theologie korrespondiert der „Sinn“ mit dem Wort der Bibel, deren Sinn, also der „Sinn des Sinnes“ von der Theologie zu ergründen, zu deuten versucht wird. Der „Sinn des Sinnes“ wird also von einer Metaebene aus betrachtet und ergründet.

Dazu ein Beispiel: Ein Lehrer erklärt seinen Schülern den Erdmagnetismus. Er beschreibt das Gesetz des Magnetismus, sein Funktionieren und seine Wirkungsweise. Das wäre die erste Sinnebene. Die zweite Sinnebene (Sinn des Sinns) wird erreicht, indem über die Bedeutung des Erdmagnetismus für die Erdbewohner etc. reflektiert wird, z. B. über die Folgen, wenn es Erdmagnetismus nicht gäbe. Hier wird der Sinn des Sinns geradezu greifbar. Und die Schüler werden möglicherweise weiterfragen nach den Entstehungszusammenhängen dieses Faktums oder sie gelangen beim Weiterfragen auf ein allgemeines Ordnungsprinzip (Kosmos) oder sie entdecken das dialektische Prinzip von Fliehkraft und Anziehungskraft oder sie stoßen vielleicht sogar an die Grenzen des Erklärbaren überhaupt, indem sie staunend vor dem Wunder einer grenzenlosen Endlichkeit stehen.

Ein weiteres Beispiel aus der Pädagogik: Wenn etwa ein Lehrer einen Schüler lobt, weil er seine Aufgabe gut gemacht hat, so handelt es sich zunächst um ein alltägliches Geschehen, das analog auch in anderen Zusammenhängen stattfinden kann, wenn z. B. der Gast im Restaurant den guten Service durch ein Trinkgeld honoriert. Der Sinn des Sinns der pädagogischen Wirklichkeit wird erschlossen, wenn sich der Lehrer der pädagogischen Bedeutung seines Lobs bewusst wird. Diese freilich kann zwiespältig sein: Er kann durch sein Lob eine Motivationssteigerung beim Schüler bewirken, aber auch eine verstärkte Abhängigkeit der Schülerleistung vom Verhalten des Lehrers. Diese Einsicht nötigt ihn, nicht auf der zweiten Sinnebene stehen zu bleiben, sondern die Sinnfrage weiter voranzutreiben.

So gelangt F. Fischer über die bereits erwähnte Stufe des naiven Denkens hinaus zu weiteren Denkstufen, deren unterste das naive Denken und deren oberste das „Denken der Grenze“ darstellt. [258] Dazwischen liegen die Stufen des tranzendentalen und des dialektischen Denkens. Damit ist Folgendes gemeint: Das naive Denken betrachtet die Wirklichkeit als reines Faktum, das objektiv und unabhängig von unserem Bewusstsein gegeben ist. Für den naiv Denkenden zeigt sich die Realität als etwas dem erkennenden und wahrnehmenden Subjekt unmittelbar Gegebenes, das der Erfahrung uneingeschränkt zugänglich ist. Demgegenüber lehrt das transzendentale Denken, dass alles, was wir als faktisch gegeben bezeichnen, niemals die Sache selbst ist, sondern immer schon durch unser Bewusstsein mitkonstituiert ist.

[258] vgl. Warzel, A., Die bildungskategoriale Didaktik Franz Fischers in ihrem Spannungsverhältnis zu Fachdidaktik und Modelltheorie – mit besonderer Berücksichtigung der Fachdidaktik der Mathematik, Frankfurt 1983, S. 71

Der „Sinn des Sinnes", worunter F. Fischer die den Sinn vermittelnde Reflexion versteht,[259] erschließt sich erst auf der transzendentalen bzw. dialektischen Ebene. Das transzendentale Denken beruht auf der Einsicht, dass die Möglichkeit der Erkenntnis von Gegenständen an Bedingungen geknüpft ist, die unabhängig von aller Erfahrung im erkennenden Subjekt selbst begründet sind. Subjekt und Gegenstand stehen sich nicht als indifferente Gegensätze gegenüber. Vielmehr wird der Gegenstand erst durch die Leistungen des erkennenden Subjektes und damit durch den Akt des Erkennens zu einem erfahrbaren Gegenstand.

Neben der Bedingung, dass sich die reflektierenden Fragen am „Sinn des Sinnes" orientieren sollen, müssen weitere Voraussetzungen angenommen werden:

> *„Das Vermitteln ist somit Bildung nur, sofern es sich reflektierenderweise als Gewissensvermittlung vollzieht. Denn erst die Gewissensvermittlung bringt den einzelnen so zu einem Weltverständnis, dass er die Welt in ihrer eigentlichen Bedeutung, nämlich als Möglichkeit seiner selbst, begreift und diese verwirklichen kann."*[260]

Die reflektierenden Fragen müssen sich also an dem „Gewissen" orientieren. F. Fischer beschreibt das Gewissen als „Gewissheit einer praktischen Möglichkeit seiner selbst", das sich am „Sinn des Sinnes" orientiert. Gewissen hat also im Fischerschen Sinn keine moralische Bedeutung, sondern meint eine durch Einsicht gewonnene Gewissheit. D.h. jeder Einzelne muss sich darum bemühen, dass ihm die Inhalte einsichtig werden, er sie somit versteht und über sie Klarheit erlangt.

Befragt man verschiedene Wissensbereiche nach dem „Sinn des Sinnes", so kann man erkennen, dass jeder Wissensbereich eine eigene Sinnstruktur hat. Zusammengenommen ergibt sich damit ein System von Sinnreflexionen.

Diese durch Reflexion hervorgebrachte Sinnstruktur systematisiert F. Fischer mit Hilfe der von ihm genannten „Kategorien des Bildungssinns", an denen der Bildungsprozess Maß nehmen kann und soll.

> *„Bildungskategorien sind somit jene Sinnverhältnisse, gemäß denen die Reflexion empirischer Sinngehalte des ‚Stoffes' zum ‚Bildungsgut' dadurch vermittelt, dass sie den Sinn ihres Sinnes und damit ihren Gewissenssinn als die Möglichkeit, sich aus diesen Gehalten zu bestimmen, erschließt. Das System der Bildungskategorien entspricht demzufolge dem System des Gewissenssinnes."*[261]

F. Fischer stellt die große Bedeutung der Bildungstheorie für alle anderen Wissenschaften heraus. Da sich alle Wissenschaften in Vermittlungsvollzügen aufbauen, d.h. nur durch Vermittlung weitergegeben und weiterentwickelt werden können, hat die

[259] Fischer, F., Systematische Untersuchungen zum Affinitätsproblem, Diss. Wien 1956, S. 6

[260] Ebenda, S. 33

[261] Ebenda, S. 33

Bildungstheorie, die sich mit der Vermittlung von Inhalten beschäftigt, umfassenden und weitreichenden Charakter. Als reflexiv kann sie bezeichnet werden, da die Grundlagenüberlegung zur Bildungstheorie selbst ein Bildungsgeschehen ist.

Die Bildungskategorien gliedert F. Fischer in eine horizontale und eine vertikale Richtung, die jedoch als Gesamtkonstrukt gedacht sind und somit gemeinsam gesehen werden müssen. Die horizontale Gliederung erfolgt innerhalb einer jeden Wissenschaft und soll zeigen, wie der Bildungssinn stufenweise in der jeweiligen Wissenschaft erreicht werden kann. Die vertikale Gliederung stellt eine Hierarchie unter den Wissenschaften dar, wobei für die Vermittlung gilt, dass das in der nächst niedrigeren Stufe Gemeinte zum Gesagten in der nächst höheren Stufe wird.

Die Bildungskategorien sollen hier nur um des besseren Verständnisses für die nun folgende Erörterung der Arbeit von A. Warzel dargestellt werden, ohne dass auf sie näher eingegangen wird.

Horizontale Gliederung der Wissenschaften

1. Die vorausgesetzte unvermittelte Wirklichkeit
2. Das Unmittelbar – Allgemeine
3. Das Prädikativ – Allgemeine
4. Das Positiv – Allgemeine
5. Das Unmittelbar – Konkrete
6. Das Positiv – Konkrete

Vertikale Gliederung der Wissenschaften

1. Semantik, reine Wortlehre
2. Logik
3. Mathematik
4. Physik
5. Biologie
6. Psychologie
7. Soziologie
8. Geschichte
9. Jurisprudenz
10. Politikwissenschaft
11. Kunst
12. Theologie

Wie bereits erwähnt, dürfen die beiden Systeme der horizontalen und vertikalen Gliederung nicht voneinander losgelöst betrachtet werden. Alle Stufen zusammen bilden die Bedingungen der Möglichkeit von Bildung.

A. Warzel leitet aus der Bildungstheorie F. Fischers für den Mathematikunterricht bzw. die Mathematikdidaktik zwei wesentliche Grundsätze ab:

Zum einen reicht es für einen bildenden Unterricht nicht aus, wissenschaftliche Inhalte in einer bloßen Präsentation zu vermitteln. Es müssen reflektierende Fragen hinzukommen. Fragen, die nach den Bedingungen jener wissenschaftlichen Inhalte suchen und dabei bis an die Grenze des menschlichen Könnens in dieser Welt gehen.

Als einfaches Beispiel nennt A. Warzel eine Additionsaufgabe der Bruchrechnung. Man könnte die Frage nach der Gültigkeit des erzielten Ergebnisses mit den bewiesenen mathematischen Gesetzmäßigkeiten beantworten. Reflektierende Fragen könnten jedoch lauten:

Wie kann der Mensch „Ganzes" und „Teil" unterscheiden?

Soll der Mensch die Welt auf Maß und Zahl reduzieren?

Auf diese Weise kann eine Weltorientierung und der Aufbau des Gewissens (im Sinne F. Fischers) und damit Bildung erzielt werden.

Zum andern hält A. Warzel unter Bezugnahme auf die Bildungskategorien F. Fischers fächerübergreifende Elemente für einen bildenden Unterricht für unerlässlich. Speziell die Mathematik eignet sich in besonderer Weise, auf andere Fächer übertragen zu werden, weil sie viele Grundbegriffe wie Beweis, Definition, Prinzip usw. enthält, die von allgemeinerer Bedeutung sind und die auch in anderen Disziplinen gelten. Insbesondere auch die mathematische Modellierung mit der entsprechenden Hinterfragung macht nur Sinn, wenn der Bezug zu anderen Fächern und damit die „Originalseite" hinreichend bekannt ist. Somit bietet sich der Mathematikunterricht nicht nur für fächerübergreifenden Unterricht in besonderer Weise an, sondern ist auch nur in einer solchen Weise als bildend zu bezeichnen.

Ebenso ist auch die Mathematikdidaktik auf alle anderen Disziplinen bezogen und ermöglicht somit die Grenzen dieser anderen Fächer reflexiv zu erschließen.

A. Warzel überträgt das Prinzip der vertikalen Gliederung auf die Mathematik, indem er analog zu F. Fischers vertikalen Reflexionsketten eine vertikale Reflexionskette innerhalb der Mathematik bildet: Dabei geht er von dem Rechenbeispiel aus, bei dem die folgenden Produkte berechnet werden sollen: $8^{-3} \bullet 2^{-3} =$, $x^{-2} \bullet y^{-2} =$

Als Ergebnisse können $8^{-3} \bullet 2^{-3} = 16^{-3}$, $x^{-2} \bullet y^{-2} = (xy)^{-2}$ ermittelt werden.

Diese Lösung basiert auf dem Umgang mit den verwendeten Zahlen und Variablen und weiterhin auf dem zugrundeliegenden mathematischen Rechengesetz. Dieses Rechengesetz lautet in diesem Fall $a^u \bullet b^u = (ab)^u$, wobei a, b aus R, a, b ungleich 0 und u aus Z. Das Rechengesetz wiederum kann aufgrund des entsprechenden Beweises[262] angewendet werden. Der Beweis ist auf der Grundlage von Definitionen und bereits bewiesenen Regeln erbracht worden. Aber auch hierfür sind weitere

[262] Dieser Beweis findet sich z. B. bei Warzel, A., a.a.O., S. 151

Voraussetzungen, wie das Prinzip des mathematischen Definierens und das des Verknüpfens von Definitionen mit schon bekannten Gesetzen, notwendig. Im konkreten Beispiel sind hierfür das Permanenzprinzip, das Prinzip der Widerspruchsfreiheit, das der Vollständigkeit und Vereinfachung zu nennen. Diese ermöglichen die Übertragung des Potenzgesetzes von natürlichen Potenzen auf Potenzen mit ganzen Zahlen. Dem gehen erneut eingeführte und definierte Entitäten und Gesetzmäßigkeiten im vor der Erweiterung vorhandenen Zahlenbereich voraus. Auf ähnliche Weise können dann alle Erweiterungen des Rechnens und der Zahlenbereiche reflektiert werden, bis man bei den natürlichen Zahlen angelangt ist. Letzlich gelangt man zu undefinierten Grundbegriffen und Axiomen, die ein von den Prinzipien Unabhängigkeit und Widerspruchsfreiheit gekennzeichnetes System bilden.

Auch hier kann man über die Bedingungen der Möglichkeiten weiterreflektieren, beispielsweise über die Möglichkeiten der Logik oder sogar die generellen Fähigkeiten des Menschen zu denken. Damit käme ein biologisches, psychologisches oder soziologisches Element mit ins Spiel, so dass eine dem F. Fischerschen Aufbau der Wissenschaften ähnliche Hierarchie zu erkennen wäre. Es lässt sich also innerhalb einer Disziplin ebenso eine Reaktionskette aufstellen.

Als wichtige Erkenntnis ergibt sich aus dem aufgezeigten Beispiel, dass ein Mathematikunterricht, der durch schematisches Anwenden von Regeln gekennzeichnet ist und ohne Reflexion dieser Regeln geschieht, ohne Bildungssinn ist.

Die im Beispiel verwendeten Grundbegriffe wie Beweis, Gesetz, Prinzip wurden im Rahmen der Mathematik betrachtet, könnten aber ebenso mit gleichlautenden Begriffen in anderen Disziplinen in Verbindung gesetzt werden.

A. Warzel kritisiert die F. Fischersche Einordnung der Mathematik zwischen Logik und Physik in der vertikalen Gliederung der Wissenschaft und begründet dies wie folgt: Da die Logik Grundlage der mathematischen Denkprozesse ist und Mathematik wiederum in allen anderen Wissenschaften enthalten ist, ist die Mathematik auf alle anderen Disziplinen bezogen und somit nicht zwangsweise zwischen Logik und Physik anzusiedeln. Generell möchte A. Warzel die Bildungskategorien nicht hierarchisch geordnet sehen. Seiner Meinung nach sind sie in einer Ebene beispielsweise auf einem geschlossenen Kreis anzuordnen, so dass keine Rangfolge vorgegeben ist. Man kann über jede Disziplin in den Kreis gelangen und von dort aus auch zu jeder weiteren vordringen.

2.3.2 Denken und Erfahrung im Mathematikunterricht: Alexander I. Wittenberg

Ausgehend von der gymnasialen Bildung im Allgemeinen fragt A. I. Wittenberg nach dem konkreten Beitrag des Unterrichtsfaches Mathematik für die gymnasiale Bildung. Drei Aspekte hebt er dabei hervor: Den Beitrag der Mathematik zur allgemeinen Bildung, die Gestaltung des Mathematikunterrichts und die kulturelle Bedeutung der Mathematik generell.

> *„Dies also umfasst jene Leitidee des Gymnasiums: eine Verpflichtung auf Wahrheit, die sich einmal im drängenden Streben erfüllt, durch wertende Auslese die wesentlich ganze Wahrheit zu erreichen; zugleich aber auch darin, dass dem Schüler ein gültiges, eindringliches Erlebnis dieser Wahrheit und dessen, was Wahrheit ist, erschlossen wird; und die in der Praxis in konkrete und verpflichtende Bildungsziele übersetzt wird. Stundenpläne und Stoffprogramme sind Diener dieser letzteren und sind als solche immer wieder zur Rechenschaft zu ziehen."*[263]

> *„Wir sehen, dass der Bestimmung der Inhalte einer allgemeinen Bildung grundsätzlich das Bemühen um ein authentisches Bild unserer Welt zugrunde liegt;"*[264]

Für dieses authentische Bild unserer Welt muss jedes Unterrichtsfach den wesentlichen Beitrag herausarbeiten <u>und</u> den Unterricht so gestalten, dass der Schüler diese Inhalte auch tatsächlich erfassen kann.

In seinem Buch „Mathematik und Bildung" möchte A. I. Wittenberg beispielhaft den Beitrag des Unterrichtsfachs Mathematik für die erwähnte Leitidee des Gymnasiums darstellen. Er geht dabei von zwei Fragen aus:

1. Was hat Mathematik zu einer Bildung beizutragen?

Die Frage, was Mathematik zur Bildung betragen kann, beantwortet A. I. Wittenberg mit dem Hinweis auf zwei geistige Erfahrungen: Zum einen stellt die Mathematik eine Welt des reinen Denkens dar, die zwar anscheinend unserer schöpferischen rationalen Fantasie entspringt, aber in ihrer Bestimmtheit von uns nur entdeckt und nicht erschaffen werden muss. Den Prozess des Entdeckens der mathematischen Welt als Gedankengebäude betrachtet A. I. Wittenberg somit als Denkschulung.

Zum andern kann der Schüler, der sich mit Mathematik beschäftigt, die (mathematische) Gesetzmäßigkeit der Natur entdecken; Mathematik fungiert dabei als Instrument der Naturerkenntnis.

---

[263] Wittenberg, A. I., Bildung und Mathematik, Stuttgart 1963, S. 20

[264] Ebenda, S. 41

Worin aber nun der spezielle Beitrag der Mathematik zur allgemeinen Bildung liegt, beschreibt A. I. Wittenberg wie folgt:

> *„Die potentielle Bedeutung der Mathematik in der allgemeinen Bildung wird denn auch nicht nur durch die Einsichten bestimmt, welche uns diese Wissenschaft als solche vermittelt, sondern ebensosehr durch die eigenartige Begegnung mit dem Menschen und mit dessen geistigem Bemühen, zu der sie Anlass gibt. Die Beschäftigung mit Mathematik und mit dem, was Mathematik für die Menschheit bedeutet hat, führt uns zur Entdeckung von Antlitzen des Menschen – Antlitzen unserer selbst – ; und verwirklicht damit, im wahrsten Sinne des Wortes, humanistische Bildung.“*[265]

Mathematik kann die Erfahrung wissenschaftlichen Denkens leisten, weil sie sich innerhalb des eigenen Erfahrungsbereiches des Schülers zur Gänze erschließen kann. Es kann sozusagen eine kleiner Teilbereich der Mathematik herausgegriffen werden, den der Schüler ganz verstehen kann und an dem das Prinzip wissenschaftlichen mathematischen Denkens vollständig gezeigt und nachvollzogen oder sogar selbst durchgeführt werden kann.

Die zweite Frage, die sich A. I. Wittenberg stellt, lautet:

2. Wie ist der Unterricht zu erteilen, damit er Gewähr dafür bietet, dass jene Erfahrungen dem Schüler in der Praxis auch tatsächlich erschlossen werden?

> *„Die barbarischste Bildungslosigkeit kann aus genau den gleichen Unterrichtsfächern aufgebaut werden, an denen die kostbarste Bildung zustande kommen kann.“*[266]

A. I. Wittenberg spricht sich klar gegen einen Unterricht aus, der versucht, die universitäre Mathematik in die Schule in der Weise zu transferieren, dass die Kapitelüberschriften der Mathematikvorlesungsskripten in die Schulbücher übernommen werden. Dies kann nur zu einem oberflächlichen Unterricht führen, da Schüler nicht ausreichend in der Lage sind, die Charakteristika der modernen Mathematik – Allgemeinheit, axiomatische Begründung, formaler Aufbau und Strenge – in ihrem begrenzten Erfahrungsbereich zu begreifen. Diese Art des reduzierten universitären Unterrichts erwächst aus der Angst, Schüler in unserer „modernen“ Zeit an die Hochschulen zu entlassen, ohne sie mit der aktuellen Hochschulmathematik bereits bekannt gemacht zu haben.

Vielmehr muss der Unterricht so ausgerichtet sein, dass „an der lebendigen Wirklichkeit mathematischen Geschehens die charakteristischen Merkmale des Mathematischen abzulesen“[267] sind.

---

[265] Ebenda, S. 48f.

[266] Ebenda, S. 40

> *„Im Unterricht muss sich für den Schüler eine gültige Begegnung mit der Mathematik, mit deren Tragweite, mit deren Beziehungsreichtum, vollziehen; es muss ihm am Elementaren ein echtes Erlebnis dieser Wissenschaft erschlossen werden. Der Unterricht muss dem gerecht werden, was Mathematik wirklich ist.“*[268]

Was aber ist Mathematik wirklich? Wodurch wird sie charakterisiert?

Mathematik wird dadurch charakterisiert, dass die mathematischen Wahrheiten sich in unserer eigenen Vernunft erschließen und keiner externen Begründung bedürfen. Wir können sie durch logisches, vernünftiges Denken einsehen. All die Fragen, Begriffe und Methoden, die das Wesen der Mathematik als Wissenschaft ausmachen, können auf die beschriebene Weise erschlossen werden. Ziel des Unterrichts muss es deshalb sein, den ganzen Prozess logischen Denkens erfahren zu lassen, d.h. die Mathematik von Anfang an wieder entdecken, sie neu durchdenken zu lassen. Der genetische Unterricht ist laut A. I. Wittenberg eine geeignete Methode, dieses Neuentdecken zu ermöglichen.

A. I. Wittenberg stellt sich den Aufbau des Mathematikunterrichts wie folgt vor: Zuerst müssen Fragestellungen entwickelt werden, die eine Motivation für die Beschäftigung mit Mathematik bilden. Dann folgt die Auseinandersetzung mit diesen Fragestellungen. Der dabei zugrunde liegende Problemlösungsprozess kann in vielen Stufen mit wiederholten Rückschlägen und dem wiederkehrenden Aufkeimen von Lösungsideen verlaufen, bis schließlich eine in sich geschlossene Theorie gefunden wird. Diesen schöpferischen Vorgang muss der Schüler erfahren können, um einen Eindruck von der Wirklichkeit der Mathematik zu bekommen. Bei der geistigen Beschäftigung mit dem Gegenstand wird der Schüler immer sicherer und wird allmählich bestimmte Lösungsstrategien als zweckmäßig erkennen und sich eine Methodik für das systematische Beweisen erschließen. Das deduktive Vorgehen als Grundlage für das Beweisen und als natürliches Erkenntnismittel der Mathematik wird dem Schüler bei der Bearbeitung mathematischer Fragestellungen mehr und mehr vertraut werden. Im Laufe des Lösungsfindungsprozesses erlebt der Schüler, dass es sinnvoll und notwendig ist, neue Begriffe zu bilden und einzuführen und er wird erfahren können, dass Begriffsbildung nicht zwangsläufig und nicht willkürlich stattfindet. Auch dies ist eine wichtige Erkenntnis im Lernprozess mathematischen Arbeitens.

Wie kann solch ein genetischer Unterricht in der Praxis aussehen?

A. I. Wittenberg geht wie folgt vor: Der Unterrichtsstoff wird in sog. Themenkreise eingeteilt, von denen jeder ein abgerundetes, aus mathematischen Zusammenhängen aufgebautes Stoffgebiet darstellt. Die Themengebiete sollen aber so offen gewählt

[267] ebenda, S. 57

[268] ebenda, S. 50f.

sein, dass es auch möglich ist, an andere Themenkreise anknüpfen zu können. Ausgehend von einer einfachen Erkenntnis wird das Gebiet allmählich weiter entfaltet, bis es einen natürlichen Abschluss erreicht. Im Rückblick muss das Erarbeitete sich als klar strukturierter Bau darstellen. Wichtig ist, dass nichts mit in den Unterricht einbezogen werden soll, das nicht im geistigen Erfahrungsbereich des Schülers liegt. Trotzdem darf und soll der Unterricht über den Rand dieser abgerundeten Themenbereiche hinausweisen, was neue Motivation und Neugierde hervorrufen wird.

Ziel des Unterrichts ist es, dass der Schüler die Inhalte eines solchen Themenkreises mit seinen entsprechenden Fragestellungen und Zusammenhängen durchdrungen hat und diese auch wiedergeben kann, beispielsweise in Form eines Aufsatzes oder eines Referates. Um mathematische Probleme in dieser Form darstellen zu können, sind Hinleitungen und beweisende Schritte notwendig.

Am Beispiel der Geometrie beschreibt A. I. Wittenberg den Aufbau seines bislang theoretisch beschriebenen Unterrichts, da die Geometrie ein Themenfeld ist, das auch am Gymnasium in relativ abgerundeter und umfassender Weise bearbeitet werden kann. Dem Schüler bietet sich auf dem Gebiet der Geometrie die Möglichkeit, Mathematik von sehr einfachen bis hin zu tiefliegenden Erkenntnissen zu erleben.

A. I. Wittenberg stellt sehr ausführlich die Erarbeitung dreier Themenkreise zur Geometrie dar, nämlich „Einführung in die Geometrie“, „Flächenlehre“ und „Ähnlichkeit“. Im Folgenden werden Teile des Themenkreises „Einführung in die Geometrie“ dargestellt, wobei einzelne Passagen ähnlich detailliert, andere eher zusammenfassend wiedergegeben werden. Die Unterthemen in diesem Themenkreis lauten: Grundlagen, Dreiecke, Symmetrie, Ähnlichkeit und Messen.

Am Beginn der „Einführung in die Geometrie“ werden Zirkel und Lineal (ohne Maßeinteilung) gezeigt als die beiden Werkzeuge des Geometers. Zunächst kann thematisiert werden, weshalb gerade diese beiden einfachen Instrumente ausgewählt werden. Nun brauchen die Schüler ausreichend Zeit, um mit diesen beiden Werkzeugen experimentieren und entdecken zu können. Die Schüler sollen die Gebilde, die beim Zeichnen mit Lineal und Zirkel entstehen, immer daraufhin betrachten, ob Bemerkenswertes entsteht, ihr Sehen soll geschärft werden.

Anregende Leitfragen oder Arbeitsaufträge könnten sein:

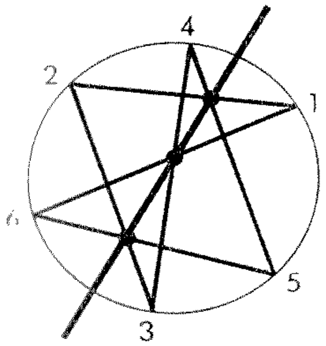
- In wie viele Gebiete können wir durch 1, 2 oder 3 gerade Linien unser Blatt einteilen?
- Gibt es eine Gesetzmäßigkeit?
- Was verändert sich, wenn die geraden Linien auch krumm sein dürfen oder gar Kreise verwendet werden?
- Erstelle Figuren! Einfache, komplizierte, regelmäßige, unregelmäßige Figuren!

- Beschreibe, was Regel- bzw. Unregelmäßigkeit ausmacht!

An dieser Stelle können Beispiele aus der Kunst oder Architektur gezeigt werden, z. B. maurische Ornamente oder Werke von Piet Mondrian.

Jetzt schon können beim Probieren viele Eigenschaften und Besonderheiten geometrischer Figuren entdeckt werden, z. B.

- Mittellinien im Dreieck schneiden sich immer in einem Punkt.
- der Kreisradius kann genau sechsmal auf dem Kreis abgetragen werden, womit regelmäßige Sechsecke konstruiert werden können.
- Beschreibt man in einen Kreis oder in ein Geradenpaar ein beliebiges Sechseck ein und nummeriert die Ecken, so erkennt man, dass die Schnittpunkte je zwei gegenüberliegender Seiten auf einer Linie liegen (siehe Abbildung[269]). Die ganze Klasse könnte eine Vielzahl von Konstruktionen erstellen, die alle – in verblüffender Weise – das gleiche geometrische Ergebnis liefern.



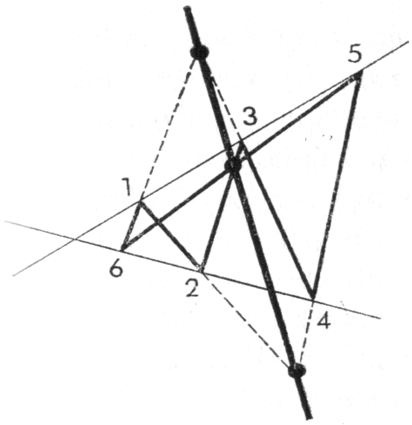


Abbildung 2.2: Geometrische Figur

Nach dieser einleitenden Phase der Entdeckung und Orientierung im Rahmen unmittelbarer Anschauung kann nun damit begonnen werden, erste Fachbegriffe einzuführen, die bislang noch gar nicht nötig waren und möglicherweise eher verwirrt hätten. Die Fachbegriffe sollen dazu dienen, die Ergebnisse zu ordnen und zu systematisieren. Dafür bieten sich die Dreiecke mit ihren unterschiedlichen Formen an.

Ein nächster Themenblock innerhalb des Themenbereichs „Einführung in die Geometrie“ könnte die Konstruktion von Dreiecken sein. Zu ihm kann mit der Leitfrage „Wie kann ich ein Dreieck genau nachzeichnen?“ hingeführt werden. Um diese Frage beantworten zu können, wird man zunächst das Problem der Winkelübertragung lösen müssen, was natürlicherweise die Betrachtung des Winkelbegriffs einschließt. „Auf wie viel grundlegend verschiedene Weisen kann ein Dreieck nachgezeichnet wer-

[269] ebenda, S. 77

den?“ ist eine Frage, die bei der Beantwortung zu den Kongruenzsätzen führt. Da die Schüler die Kongruenzsätze selbst entdecken sollen und mit Hilfe der Hinführung durch die genannten Fragen auch entdecken können, müssen sie an dieser Stelle auch nicht bewiesen werden. Die Durchführung eines formalen Beweises wäre nur dann sinnvoll, wenn ein Phänomen nicht unmittelbar nachzuvollziehen wäre, eben um einen Beweis als Erklärung zu haben.

Die Frage des Nachzeichnens eines gegebenen Dreiecks führt neben dem Thema der Kongruenzsätze zur Thematik der Spiegelung und Symmetrie. Leitfragen zur Symmetrie im Dreieck könnten folgendermaßen lauten:

- Worin bestehen diese Symmetrien?
- Wie viele solcher Symmetrien hat das gleichschenklige bzw. gleichseitige Dreieck?
- Worin besteht der Zusammenhang zwischen Regelmäßigkeit und Symmetrie im Dreieck?

Die für die Dreiecke untersuchten Bestimmungsarten und Regelmäßigkeiten können nun ebenso für Vierecke und weitere Vielecke erforscht werden. Auch die Anwendung der Symmetrie in Kunst, Musik usw. kann hier ihren Platz finden.

Als Überleitung zum nächsten Unterthema „Ähnlichkeit“ könnte der Arbeitsauftrag stehen, eine gegebene Figur im vergrößerten Maßstab – z. B. doppelt so groß – zu zeichnen. Dabei bietet sich an, zunächst mit Dreiecken zu beginnen und dann schwierigere Figuren zu vergrößern. Weitergeführt wird mit den Fragen:

- Was heißt es, dass zwei Figuren ähnlich sind?
- Wie kann man die Ähnlichkeit zweier Dreiecke überprüfen?
- Wie ändert sich die Fläche einer Figur, die ähnlich vergrößert wird?

Die Ähnlichkeitsbetrachtungen lassen erkennen, dass die Form eines Dreiecks durch die zahlenmäßigen Verhältnisse der Seiten bestimmt ist. Hier ist eine gute Gelegenheit, die musikalischen Harmonien, bei denen ganzzahlige Verhältnisse für den jeweiligen Klang bestimmend sind, hören und untersuchen zu lassen. Desweiteren führt Ähnlichkeit zu der Erkenntnis, dass zwei ähnliche Figuren ununterscheidbar sind, wenn kein unabhängiger Maßstab zur Verfügung steht. Das Konzept eines unabhängigen Maßstabs kann nahezu philosophische Überlegungen auslösen, z. B. die Frage, ob es möglich ist, das Universum im Maßstab 1:2 zu vergrößern. Ein dritter interessanter Aspekt, der sich bei der Betrachtung der Ähnlichkeit ergibt und viele Anknüpfungspunkte für eine Diskussion mit den Schülern bietet, ist die Möglichkeit der Kartographierung der Erde durch Aufteilung der Erdoberfläche in Dreiecke.

Abschließendes Kapitel des Themenbereichs „Einführung in die Geometrie“ ist „Messen“. Als bemerkenswert kann beim Messen herausgearbeitet werden, dass ein materieller Gegenstand benötigt wird, um für eine Längenmessung die entsprechende Anzahl an Einheiten angeben zu können. Für die Winkelmessung hingegen ist Vergleichbares nicht nötig, da die Einheit „Grad" als 1/360° des Vollwinkels definiert ist. Dieser Unterschied existiert jedoch nur, weil die Euklidische Geometrie in der Ebene vorausgesetzt wird. Auf einer Kugel könnte eine Längeneinheit ebenso als bestimmter Bruchteil eines Großkreises definiert werden. Von diesen ersten Überlegungen ausgehend wird die Messung von Flächen mit der Idee der Maßzahl thematisiert, wobei möglichst anschaulich vorgegangen werden soll.

Die bisherigen Ausführungen dieses ersten Themenkreiskapitels sollen genügen, um die Idee des genetischen Unterrichts, wie er A. I. Wittenberg vorschwebt, vorzustellen.

Methodisch misst A. I. Wittenberg innerhalb des genetischen Unterrichts den Unterrichtsgesprächen, der selbsttätigen Arbeit der Schüler und der Gruppenarbeit einen hohen Anteil bei. Frontalunterricht im Sinne von Lehrervorträgen tritt in den Hintergrund. Außerdem wird ein Epochenunterricht propagiert, in dem maximal vier Unterrichtsfächer pro Woche unterrichtet werden, also eine im Vergleich zum herkömmlichen Unterricht hohe Anzahl an zeitlich zusammenhängenden Unterrichtsstunden pro Fach. Das soll gewährleisten, dass Schüler und Lehrer ausreichend Zeit und Muße haben, ihre Gedanken gründlich auszuführen und zu vertiefen und nicht nach 45 Minuten abbrechen müssen, um dann möglicherweise erst wieder nach einem oder mehreren Tagen Pause einsteigen zu können. Weiterhin benötigt ein Unterricht ausreichenden Freiraum für die schöpferische Freiheit der Schüler, so dass der Lehrer nicht akribisch an einem Unterrichtskonzept hängen kann, was freilich nicht mit unvorbereitetem Unterricht verwechselt werden darf.

Neben allen didaktischen Überlegungen kann nach A. I. Wittenberg ein genetischer Unterricht nur gelingen, wenn ein Klima warmer mitmenschlicher Beziehung zwischen Lehrer und Schüler vorherrscht und auch Raum bleibt, um beispielsweise gemeinsam über mathematische Erkenntnisse staunen zu können.

2.3.3 Allgemeinbildung im Mathematikunterricht: Hans Werner Heymann

In seinem Buch „Allgemeinbildung und Mathematik" entwirft H. W. Heymann ein Konzept des Mathematikunterrichts, das die Defizite des gegenwärtig praktizierten Mathematikunterrichts vermeiden und gleichzeitig die Kriterien der Allgemeinbildung erfüllen soll. H. W. Heymann sieht in der negativen Einstellung vieler Schüler zur Mathematik eines der Hauptprobleme des gegenwärtigen Mathematikunterrichts. Diese ablehende Haltung sieht er vor allem dadurch verursacht, dass die Schüler Mathematik als schwieriges und schwer durchschaubares Fach erleben. Während schon W. v. Humboldt und viele andere den Wert der Mathematik gerade in der Schulung des Geistes sahen, registriert H. W. Heymann in der gegenwärtigen Situation einen erheblichen Bedeutungsverlust von Mathematik als Unterrichtsfach. Dieser Verlust wird noch dadurch verstärkt, dass zwar immer weitere Bereiche unserer Lebenswelt ohne das mathematische Wissen weniger hochspezialisierter Fachleute undenkbar sind, dass aber gleichzeitig die Bedeutung der Mathematik für unseren Lebensalltag zunehmend aus dem Bewusstsein der breiten Öffentlichkeit gerät. Obwohl Mathematik objektiv betrachtet eine große Relevanz für die kulturelle und technische Entwicklung unserer Gesellschaft besitzt, schwindet deren subjektive Akzeptanz beim einzelnen Menschen. Innerhalb der Schule wird die negative Einstellung zur Mathematik noch dadurch verstärkt, dass sie als Unterrichtsfach eine Selektionsfunktion erfüllt bzw. nur noch für diejenigen interessant zu sein scheint, die einen mathematischen Beruf ergreifen wollen.

Unabhängig von dieser negativen Befindlichkeit gegenüber dem Unterrichtsfach Mathematik kann deren Bedeutung als Wissenschaft für die heutige Zeit nicht hoch genug eingeschätzt werden. Daran kommt auch die Schule nicht vorbei, weshalb ihr an einer Neugestaltung zumindest aber an einer Umgestaltung dieses Fachs gelegen sein muss.

Für seine weiteren Überlegungen formuliert H. W. Heymann folgende Ausgangsthese:

> *„Der herkömmliche Mathematikunterricht an allgemeinbildenden Schulen wird weder absehbaren gesellschaftlichen Anforderungen noch den individuellen Bedürfnissen und Qualifikationsinteressen einer Mehrzahl der Heranwachsenden gerecht.“*[270]

Folglich sei zu überlegen, wie Mathematik im Unterricht so vermittelt werden könne, dass deren Bedeutung nicht nur erkannt, sondern auch erfahrbar wird. Da diese Frage eingebettet ist in die allgemeinere Frage, was und wie im Unterricht gelehrt werden soll, sucht H. W. Heymann ein anwendbares und fächerübergreifendes pädagogisches Kriterium, das als Kriterium für die Qualität des Unterrichts und als leitender Gesichtspunkt für die Lehrplangestaltung dienen kann. Dieses Kriterium glaubt er im Begriff Bildung bzw. Allgemeinbildung gefunden zu haben.

Beide Begriffe grenzt H. W. Heymann. folgendermaßen voneinander ab:

- „Bildung setzt eine Vorstellung vom Menschen, ein Menschenbild, ein Bildungs- oder Persönlichkeitsideal voraus: Wie ist der Mensch von Natur aus, oder wie sollte er sein?

  Allgemeinbildung ist offen für eine Vielzahl von Bildungs- oder Persönlichkeitsidealen, sie ist lediglich einem humanitären Minimalkonsens verpflichtet, wie er beispielsweise in den grundlegenden Menschenrechten beschrieben wird.

- Bildung bezeichnet ein (allgemein verbindlich nicht lösbares) anthropologisches und philosophisches Problem innerhalb unserer Kultur;

  Allgemeinbildung bezeichnet ein politisches und gesellschaftliches Problem, das praktisch gelöst werden muss.

[270] Heymann, H. W., Allgemeinbildung und Mathematik, Studien zur Schulpädagogik und Didaktik – Band 13, Weinheim und München 1996, S. 8

- Bildung ist „Kultur nach der Seite ihrer subjektiven Zueignung“ (Adorno);

  Allgemeinbildung ist Kultur nach der Seite ihrer sozialen Universalisierung.

- Bildung ist eine Aufgabe für den Einzelnen, beinhaltet einen Appell zur Selbstverwirklichung, zur individuellen Gestaltung des eigenen Lebensweges;

  Allgemeinbildung ist eine Aufgabe der Gesellschaft, die sie zu weiten Teilen an die Institution der Pflichtschule „delegiert“.

- Bildung ist eine emphatische Kategorie;

  Allgemeinbildung eine (vergleichsweise) pragmatische.“[271]

H. W. Heymann entwickelt ein Allgemeinbildungskonzept, das auf der Grundlage pragmatischer Zielsetzungen, gesellschaftlicher Erfordernisse und universal geltender Menschenrechte aufbaut und als ein von der Schule zu bewältigendes Aufgabenfeld realisiert werden soll. Die inhaltliche Struktur dieses Konzepts spiegelt sich in sieben Aufgaben der allgemeinbildenden Schule wider:

1. Lebensvorbereitung
2. Stiftung kultureller Kohärenz
3. Weltorientierung
4. Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch
5. Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft
6. Einüben in Verständigung und Kooperation
7. Stärkung des Schüler-Ichs

Diese sieben Aufgaben werden jeweils zunächst allgemein und fachunabhängig erläutert und anschließend wird der mögliche Beitrag des Faches Mathematik zur Erfüllung dieser Aufgaben aufgezeigt. Dabei setzt H. W. Heymann voraus, dass Mathematik als Unterrichtsfach keiner weiteren Legitimation bedarf. Deshalb beschränkt er sich auf die Auswahl der mathematischen Inhalte und will dabei nur die Inhalte gelehrt wissen, die sich für die Umsetzung der von ihm genannten sieben Aufgaben von Schule eignen. Im Gegensatz zu anderen Vertretern seines Faches geht er also nicht davon aus, dass bereits die Beschäftigung mit beliebigen mathematischen Inhalten allgemein bildet.

Zu 1: Lebensvorbereitung

Zur Erfüllung der Aufgabe „Lebensvorbereitung“ eignet sich nach H. W. Heymann die Vermittlung von Qualifikationen, die folgende Bedingungen erfüllen: Sie müssen für eine „normale Lebensführung unabdingbar sein, z. B. Lesen und Schreiben. Weiterhin sollten sie nicht automatisch z. B. in der Familie erlernbar sein, sondern einen

[271] Ebenda, S. 46

systematischen Unterricht benötigen, z. B. Fahrrad fahren, Spielregeln einhalten. Außerdem sollten sie sich nicht in einem zeitlich begrenzten Spezialkurs aneignen lassen wie z. B. Auto fahren. Schließlich sollten sie sich für einen systematischen öffentlichen Unterricht eignen, nicht z. B. die Qualifikation „liebevoller Umgang mit dem Partner".

Vor allem das erste Kriterium, dass nämlich die zu vermittelnde Qualifikation für eine normale Lebensführung notwendig sein muss, zeigt deutlich, dass sich die Auswahl von Qualifikationen immer wieder an den gesellschaftlichen Entwicklungen orientieren muss, da das, was lebensnotwendig ist, Veränderungen unterworfen ist. Beispielhaft seien einige formale und materiale Qualifikationen aufgeführt, die in den letzten Jahren an Bedeutung gewonnen haben: der Umgang mit technischen Hilfsmitteln wie Taschenrechner oder Computer: die Fähigkeit, sich Informationen zu besorgen oder die Fähigkeit, graphische Informationen zu interpretieren bzw. selbst zu gestalten.

Selbstverständlich sind die Fähigkeiten, Fertigkeiten und die Wissensinhalte, die im Unterricht vermittelt werden sollen, nicht für eine Lebensvorbereitung ausreichend. H. W. Heymann versteht sie deshalb in diesem Zusammenhang ausschließlich als Minimalforderung.

Welchen Beitrag zur Erfüllung der Aufgabe „Lebensvorbereitung" kann das Fach Mathematik leisten?

Welche mathematischen Inhalte benötigen Nicht-Mathematiker nach Abschluss ihrer beruflichen Ausbildung im Alltag? Um diese Frage zu klären, greift H. W. Heymann auf mehrere Untersuchungen zurück, die zusammenfassend folgendes Ergebnis an Inhalten liefern, auf die die Befragten ab und zu zurückgreifen (müssten):

<u>Arithmetischer Bereich</u>: Anzahlbestimmungen, Beherrschung der Grundrechenarten, Rechnen mit Größen, Kenntnis der wichtigsten Maßeinheiten, Durchführung einfacher Messungen, Rechnen mit Brüchen mit einfachen Nennern, Rechnen mit Dezimalbrüchen, Ausrechnen von Mittelwerten, Prozent- und Zinsrechnung, Dreisatz, Verwendung des Taschenrechners, Grundfertigkeiten im Überschlagen und Abschätzen.

<u>Geometrischer Bereich</u>: Kenntnis elementarer regelmäßiger Figuren (Kreis, Rechteck...) und Körper sowie elementarer geometrischer Beziehungen und Eigenschaften (Rechtwinkligkeit, Parallelität...), Fähigkeit zur Deutung und Anfertigung einfacher graphischer Darstellungen von Größen und Größenverhältnissen (Schaubilder, Diagramme, Karten), Koordinatensysteme.[272]

H. W. Heymann betrachtet zunächst den traditionellen Mathematikunterricht im Gymnasium und stellt fest, dass die dort gelehrten Inhalte weit über die oben genannten Inhalte hinausgehen, also nur ein relativ geringer Teil des Unterrichts diesbezüg-

[272] Ebenda, S. 136f.

lich der Lebensvorbereitung dient. Die genannten Inhalte sind in der Regel bis zum Ende der 7. Jahrgangsstufe eingeführt. Alles Weitere dient im Rahmen der Lebensvorbereitung den Schülern, die einen mathematikintensiven Beruf ergreifen wollen.

Was die im Unterricht angewendeten mathematischen Verfahren betrifft, wird großer Wert auf das Abarbeiten von Algorithmen eindeutig lösbarer Aufgaben gelegt, die häufig keinerlei Anwendungsbezug besitzen. Die Schüler üben rezeptartige Lösungsschemata mit geringer Variationsbreite oftmals ohne den mathematischen Hintergrund zu verstehen. Hingegen werden andere Basisqualifikationen wie Überschlagen und Abschätzen, Deutung und Anfertigung graphischer Darstellungen usw. nach H.W. Heymanns Ansicht stark vernachlässigt.

Vor allem in diesem Bereich wären also Ansatzpunkte für einen lebensvorbereitenden Mathematikunterricht. Ergänzen könnte man die Ansatzpunkte noch durch in jüngerer Zeit immer wichtiger werdende Fähigkeiten im Umgang mit statistischem Datenmaterial, mit der Übertragung von Sachverhalten in mathematische Modelle und mit dem Computer und Taschenrechner.

Zu 2: Stiftung kultureller Kohärenz

„Stiftung kultureller Kohärenz“ bezieht sich in H.W. Heymanns Konzept auf drei Aspekte: Erstens geht es um die Verständigung zwischen den Generationen, die nur gelingen kann, wenn es Verbindendes zwischen Jung und Alt gibt. Dazu gehören beispielsweise grundlegende Kulturtechniken, die es von der Schule zu vermitteln gilt, um Verbindendes zu schaffen bzw. zu erhalten. Zweitens sollen die Schüler durch die Schule in die Lage versetzt werden, sich eine reflektierte kulturelle Identität zu schaffen. H. W. Heymann zählt dazu die Fähigkeit, sich in der eigenen Kultur zurechtzufinden, diese Kultur kritisch zu hinterfragen sowie Toleranz vor anderen Kulturen zu zeigen. Der dritte Aspekt schließlich betrifft die Fortschreibung der Alltagskultur als Grundlage für das Zurechtfinden in der Gesellschaft. Diese letzte Aufgabe deckt sich inhaltlich in weiten Teilen mit den Forderungen zur Lebensvorbereitung.

Zur kulturellen Kohärenz kann der Mathematikunterricht beitragen, wenn durch die Inhalte eine generationenübergreifende Verbindung erzeugt wird. So erwarten Eltern, dass sie zumindest die Inhalte, die ihre Kinder in der Grundschulzeit lernen, verstehen können. Ein Negativbeispiel in diesem Zusammenhang stellt die Einführung der „Neuen Mathematik“, insbesondere der Mengenlehre am Ende der 60er Jahre dar, deren Scheitern möglicherweise auch darin begründet ist, dass zu viele Eltern (und Lehrer) diese radikale Änderung der Lehrpläne, deren Inhalte ihnen völlig fremd waren, nicht akzeptieren konnten. Der von H. W. Heymann aufgeführte Minimalkanon im arithmetischen und geometrischen Bereich bildet einen Grundstock an mathematischer Alltagskultur, der an die nachwachsende Generation weitergereicht werden und so zur Verbindung der Generationen beitragen kann. Trotz des berechtigten Interesses an Kontinuität und Tradition jedoch bedarf der Mathematikunterricht nach H.W.

Heymanns Meinung auch der Reformen und der Anpassung an den gesellschaftlichen Wandel.

Neben dem Aspekt der zeitlichen Kohärenz mit historischer Komponente kann der Mathematikunterricht auch dazu beitragen, eine Verbindung zwischen der Mathematik und der übrigen Kultur herzustellen. Ziel wäre es dabei, den Schülern die Universalität der Mathematik mit ihrer besonderen Art des Denkens und Problemlösens und ihrem immensen Einfluss auf die Kultur nahezubringen. Eine Möglichkeit der Umsetzung sieht H. W. Heymann im Einbringen solcher fundamentaler mathematischer Ideen in den Unterricht, die einen wesentlichen Einfluss auf die Entstehung und Fortentwicklung der Kultur haben und hatten. H. W. Heymann erstellt einen Katalog fundamentaler Ideen, die er z.T. von anderen Autoren übernimmt. Kriterien sind für ihn u.a. die Möglichkeit, die jeweiligen Inhalte auf verschieden hohen Niveaus zu behandeln. Zentrale Ideen sind für H.W. Heymann:

- Idee der Zahl
- Idee des Messens
- Idee des funktionalen Zusammenhangs
- Idee des räumlichen Strukturierens
- Idee des Algorithmus
- Idee des mathematischen Modellierens

Insbesondere die Idee des mathematischen Modellierens ist dazu geeignet, eine Verbindung zwischen der Mathematik und der übrigen Kultur zu schaffen.

Zu 3: Weltorientierung

Zur Aufgabe der „Weltorientierung“ gehört für H. W. Heymann der Aufbau eines differenzierten persönlichen Weltbildes mit einem entsprechenden Interpretations- und Urteilshorizont. Der Schüler soll also erkennen, dass es nicht nur eine gültige Wahrnehmung der Welt gibt, sondern konkurrierende Anschauungen, deren relative Gültigkeit respektiert und akzeptiert werden soll. Als Voraussetzung für das Gelingen von Weltorientierung muss ein Bezug zwischen dem Fach und der Lebenswelt des Schülers hergestellt werden. Speziell die Auseinandersetzung mit zentralen Zeit- und Weltproblemen wie z. B. der Frage des Umweltschutzes, dem globalen Armutsproblem, den Veränderungen durch technischen Fortschritt kann der Weltorientierung dienen.

Wenn der Mathematikunterricht zur Weltorientierung betragen will, muss er – wie jedes Unterrichtsfach – einen Bezug zwischen dem Fach und der Welt der Schüler herstellen. Das spezielle Problem bei der Mathematik äußert sich nach H. W. Heymann darin, dass die Mathematik zwar ein Teil unserer Welt ist, den es aber erst zu entdecken gilt. Einen Teil der Mathematik erleben Schüler unabhängig vom Schulunterricht. Dazu gehört die sog. mathematische Alltagskultur wie Zählen, Messen usw. Darüber hinaus gibt es aber einen beträchtlichen Teil der Mathematik, der nicht unmittelbar zu sehen ist, weil er beispielsweise in technischen Geräten verborgen ist, die der Benutzer ohne jegliches Verständnis für den mathematischen Hintergrund bedienen kann. Dieser indirekte Teil der Mathematik kann durch einen anwendungs- oder umweltorientierten Unterricht erschlossen werden und trägt nach H.W. Heymanns Dafürhalten ebenso zur Weltorientierung bei. Damit Mathematikunterricht jedoch zur Lebensvorbereitung und Weltorientierung betragen kann, muss der Schüler die Gelegenheit erhalten, Lerninhalte zu reflektieren und kritisch zu hinterfragen.

Für das konkrete Unterrichtsgeschehen bedeutet das bisher Gesagte: Ein Beitrag zur Weltorientierung kann dann gelingen, wenn Themen und Art der anwendungsorientierten Aufgaben sinnvoll ausgewählt und zusätzlich eine allgemeinbildende Unterrichtskultur gepflegt werden. Als anwendungsorientierte Aufgaben sind solche besonders geeignet, die mit einem ganzen Problembereich verknüpft sind. Als Beispiele für derartige Problemkomplexe nennt H. W. Heymann Bevölkerungswachstum oder Energieverbrauch. Bei der Bearbeitungsphase sollen zunächst Texte in diese Problematik einführen, die die nötigen Angaben für sinnvolle Modellierungsaufgaben liefern. Die ermittelte Lösung solcher Anwendungsaufgaben wird im Idealfall Anlass zu weiteren Fragen und Interpretationen geben. Was die allgemeinbildende Unterrichtskultur betrifft, so sollten ausreichend Spielraum für mehrere Varianten der Modellierung und mögliche Lösungswege gegeben sein. Ferner sollten die Schüler ausreichend Gelegenheit zu eigenem schöpferischen Tun erhalten sowie Raum für kritisches Hinterfragen und für Zweifel, die die Grenzen der Modellierung verdeutlichen.

Zu 4: Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch

Um die Schüler zu einem „kritischen Vernunftgebrauch“ anleiten zu können, dessen Ziel ist es, Voraussetzungen zur kognitiven Mündigkeit zu schaffen, sind mehrere Bedingungen nötig. So müssen Inhalte ausgewählt werden, die die Schüler als relevant empfinden und begreifen können. Ebenso müssen sie einen gewissen emotionalen Anregungsgehalt und Möglichkeiten zur Vernetzung bieten. Die geeigneten Inhalte reichen jedoch nicht aus, um die gewünschten Denkfähigkeiten zu erreichen, wenn nicht zusätzlich ein entsprechender, von Offenheit und Ermutigung geprägter Unterrichtsstil gepflegt wird. Offen bleibt jedoch für H.W. Heymann, vielleicht mehr als bei den bisher genannten anderen Zielen, ob trotz eines geeigneten Unterrichtsarrangements die Umsetzung dieser Aufgabe von Schule gelingt.

Der Mathematikunterricht kann zum Denkenlernen und kritischen Vernunftgebrauch beitragen, wenn bestimmte inhaltliche und methodische Voraussetzungen erfüllt werden. Da Denken ohne Inhalte nicht möglich ist, spielt die Auswahl der Inhalte für den Erfolg des Mathematikunterrichts eine entscheidende Rolle. Dabei ist wichtig, dass die Inhalte von den Schülern verstanden werden und dass nicht Zeitnot den Verstehensprozess behindert. Weiterhin kann Denken gefördert werden, wenn die Mathematik inhaltlich mit dem alltäglichen Leben mannigfach verzahnt und viele Assoziationen geknüpft werden können. Kritisches Denken als Voraussetzung für kritischen Vernunftgebrauch wird dadurch unterstützt, dass die Mathematik als Mittel eingesetzt wird, um subjektive Meinungen zu objektivieren und unbewiesene Argumente als bloße Behauptungen aufzudecken. Umgekehrt aber können bereits durchgeführte mathematische Modellierungen untersucht und kritisch reflektiert werden. Neben den inhaltlichen Anforderungen bedarf es, wie schon erwähnt, auch einer entsprechend anregenden Unterrichtskultur. Schüler müssen die Gelegenheit haben, eigene Denkleistungen zu äußern und diese auch als sozial positiv bewertet erleben. Ebenso muss ein Unterricht kultiviert werden, in dem nicht Standard-Lösungswege eingepaukt werden, sondern in dem auch dem Findungsprozess, der auch zu „Fehl"-Lösungen führen kann, entsprechendes Gewicht beigemessen wird.

Bei den drei folgenden und letzten Aufgaben der Schule innerhalb des Allgemeinbildungskonzeptes von H. W. Heymann („Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft", „Einüben in Verständigung und Kooperation" und „Stärkung des Schüler-Ichs") handelt es sich um sozialethische und personenbezogene Aufgaben, die zur Mathematik kaum einen inhaltlichen Bezug haben. Dies macht es für das Unterrichtsfach Mathematik nach H.W. Heymanns Ansicht schwerer als für andere Fächer, den allgemeinen erzieherischen Auftrag der Schule zu erfüllen, da im Falle der Mathematik Unterricht und Erziehung inhaltlich keine Einheit bilden. Trotzdem kann das Fach Mathematik seinen Beitrag zu den genannten Aufgaben leisten, wenn nicht primär der Frage nach den Inhalten und nach der Gestaltung des Unterrichts nachgegangen wird, sondern umgekehrt überlegt wird, wie fachliches Lernen gestaltet werden kann, um – relativ unabhängig von den Inhalten - „Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft", „Einüben in Verständigung und Kooperation" und „Stärkung des Schüler-Ichs" zu fördern. So werden auch hier die entsprechenden Aufgaben der Schule zunächst allgemein erläutert und dann jeweils im Anschluss H.W. Heymanns Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung dargelegt.

Zu 5: Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft

Unter Berufung auf E. Weniger, W. Klafki und andere Bildungstheoretiker, für die das verantwortungsvolle Handeln unverzichtbares Kennzeichen der Bildung war, nennt H. W. Heymann die „Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft" als notwendiges Aufgabenfeld allgemeinbildender Schulen. Nur wer gelernt hat, mit seinen erworbenen Kompetenzen verantwortungsvoll umzugehen, erfüllt die Kriterien der Allgemeinbildung. Für das Gelingen einer Erziehung zur Verantwortung ist ein überzeugendes Vorbild wichtige Voraussetzung. Der Schüler muss erfahren können, dass Wort und Tat übereinstimmen. Auch wenn die Realität leider zu oft ein anderes Bild zeigt, soll dies nicht dazu führen, sich dieser Aufgabe und diesem Anspruch zu entziehen.

Der Mathematikunterricht kann inhaltlich zum „verantwortungsvollen Handeln" beitragen, wenn Themen gewählt werden, die auch zum kritischen Vernunftgebrauch (siehe 4.) anleiten, da verantwortungsvolles Handeln kritisches Denken voraussetzt. Ferner sollte der Unterricht Gelegenheit bieten, dass Schüler Verantwortung im Rahmen selbstbestimmten Lernens übernehmen können. Dasselbe gilt für Gruppen- oder Partnerarbeit, bei der alle Beteiligten am jeweiligen Arbeitsergebnis Anteil haben. H. W. Heymann ist der Überzeugung, dass die Bemühungen im Bereich sozialen Lernens auch einen anderen Umgang mit der Mathematik nach sich ziehen und ein entsprechend verändertes Bild von Mathematik hinterlassen.

Zu 6: Einübung in Verständigung und Kooperation

„Einübung in Verständigung und Kooperation“ als wesentliche Komponente der Allgemeinbildung in einer Demokratie bedeutet für H. W. Heymann „ein interaktives Verhalten, das sowohl auf mitmenschliches Verstehen zielt als auch auf Interessenausgleich und Ermöglichung eines praktischen Miteinanders“.[273] Kooperation „ereignet sich, wenn gemeinsam auf ein Ziel hin gehandelt wird, über das man sich im Prinzip (ausdrücklich oder unausdrücklich) verständigt hat“.[274] Zwei Aspekte von Verständigung und Kooperation scheinen bei der Vorbereitung auf ein Leben in der Gesellschaft besonders wichtig: Einer ist die Verständigung und Kooperation zwischen Laien und Experten, da Entscheidungen häufig von wenigen Experten getroffen werden, jedoch eine Vielzahl von Nichtexperten betreffen. Je besser folglich die Verständigung zwischen diesen beiden Parteien funktioniert, um so erfolgreicher wird die Entscheidung umgesetzt werden können. Der zweite Aspekt bezieht sich auf die interkulturelle Verständigung und Kooperation, die bereits innerhalb der Schule aufgrund der multikulturellen Zusammensetzung der Klassen notwendig geworden ist und für das Leben als Erwachsener wichtig bleibt. Ein schwer zu lösender Konflikt bleibt: Zum einen soll Verständigung und Kooperation eingeübt werden, zum anderen herrscht aufgrund der Selektionsfunktion der Schule ein Klima, das den Lehrer in seinen Möglichkeiten, mit den Unzulänglichkeiten der Schüler verständnisvoll umzugehen, erheblich einschränkt.

Für die Förderung von Kooperation sind vor allem Arbeitsformen wie Gruppen- und Partnerarbeit hilfreich. Gegenseitige Verständigung wird aber auch dadurch gefördert, dass die Lehrkraft Mathematik in einer Weise präsentiert, die kritisches Hinterfragen von mathematischen Fragestellungen und Sachverhalten zulässt.

Zu 7: Stärkung des Schüler-Ichs

Ziel der „Stärkung des Schüler-Ichs“ ist die Schaffung von Voraussetzungen zur emotionalen Mündigkeit des Schülers. Dazu gehört der Aufbau von Selbstvertrauen, Selbstbewusstsein und einer Identität, die es ermöglicht, mit den eigenen Stärken und Schwächen sinnvoll umzugehen und die Umsetzung eigener Ziele und Wünsche realistisch anzugehen. Sowohl die Schule als Institution als auch jeder Lehrer können dazu betragen, Freiräume zur persönlichen Entwicklung und Entfaltung für die Schüler zu schaffen. Grundvoraussetzung dafür ist nach H.W. Heymanns Ansicht die Wahrnehmung eines jeden Schülers als Individuum mit seinen spezifischen Wünschen und Bedürfnissen. Leider erleben Schüler im Unterricht all zu häufig Bloßstellung und Entmutigung, wenn sie – womöglich noch an der Tafel vor allen Schülern – Fehler

[273] Ebenda S. 110

[274] Ebenda S. 110

machen. Werden jedoch Fehler als etwas Normales im Lernprozess zugelassen und wird Schülern Gelegenheit gegeben, aus ihren Fehlern zu lernen, so trägt dies ebenso zur Stärkung des Schüler-Ichs bei, wie das Bemühen, Lernprozesse möglichst individuell zu gestalten. Insgesamt kann ein Unterrichtsstil mit offenen Aufgabenstellungen und einer inhaltlichen Öffnung des Lehrplanstoffes, der Eigentätigkeit und Eigeninitiative, Fantasie und Kreativität fördert, entscheidend zur Bewältigung der Aufgabe „Stärkung des Schüler-Ichs“ beitragen.

Rückblickend entwickelt H. W. Heymann ein Konzept von Allgemeinbildung, das es ermöglichen soll, den Schüler auf ein Leben unter den gegebenen gesellschaftlichen Bedingungen vorzubereiten und seine persönliche Entfaltung zu fördern. Die sieben von ihm genannten Aufgaben sollen diesen Anspruch konkretisieren.

Während seine Vorschläge für die inhaltliche und methodische Unterrichtsgestaltung weitgehend nachvollziehbar sind, scheint mir der Begründungszusammenhang seiner Allgemeinbildungskonzeption problematisch. Er versucht die Begriffe Allgemeinbildung und Bildung zu unterscheiden und begründet dies folgendermaßen:

> *„Nur vor dem Hintergrund einer solchen Unterscheidung lässt sich klären, in welchem Verhältnis ‘Bildung’ als Gestaltung einer individuellen Biographie zum institutionell vermittelten Angebot einer schulischen ‘Allgemeinbildung’ steht.“*[275]

> *„Nach allen bislang angestellten Überlegungen zur Begriffsgeschichte und zum gegenwärtigen Sprachgebrauch liegt es nahe, Bildung als Leitidee und Kriterium dem anthropologischen, Allgemeinbildung hingegen dem schulpädagogischen Grundproblem zuzuordnen.“* [276]

Etwas vereinfacht sieht er Bildung als das, was „den Menschen zum Menschen macht“[277] und Allgemeinbildung als das, was „den Heranwachsenden durch die öffentlichen Schulen vermittelt werden sollte.“[278] Nach einer Auseinandersetzung um die Unterscheidung und Abgrenzung der beiden Begriffe entscheidet er sich dann für den Begriff der „Allgemeinbildung“ als Leitkriterium für sein Konzept von zeitgemäßem Mathematikunterricht, was mir zweifelhaft erscheint.

Mit dieser Unterscheidung zeichnet H. W. Heymann ein Bild, nach dem Allgemeinbildung Aufgabe der Gesellschaft und Schule ist, Bildung hingegen Aufgabe des einzelnen Menschen. Zum einen wird dadurch die Schule um eines ihrer wesentlichen Begründungskriterien gebracht. Muss nicht Schule in ganz entschiedener Weise den

[275] Heymann, H. W., Allgemeinbildung und Mathematik, Weinheim 1996, S. 29

[276] Ebenda, S. 43

[277] Ebenda, S. 43

[278] Ebenda., S. 43

Anspruch haben, einen Beitrag zu leisten und Bedingungen für die Möglichkeit zu schaffen, den „Menschen zum Menschen" zu machen? Ist Schule nicht eine Institution, die sowohl durch die Vermittlung bestimmter Wissensinhalte und Kompetenzen als auch durch die Art der Vermittlung Bildungsprozesse initiieren und fördern soll? Zum andern wird der Schüler aufgespalten in ein Individuum, dessen Bildungsaufgabe seiner freien Entscheidung überlassen bleibt und in ein Individuum, das der Pflicht zu allgemeiner Bildung unterworfen ist.

Wenn H. W. Heymann auf der einen Seite in einem Atemzug von Bildung bzw. Allgemeinbildung spricht, dann verwischt er die von ihm selbst aufgelisteten Unterscheidungsmerkmale und macht die Abgrenzung überflüssig. Auf der anderen Seite aber hält H. W. Heymann eine Unterscheidung für wünschenswert, bei der er im Allgemeinbildungsbegriff stärker die Seite der Gesellschaft betont bzw. die Allgemeinbildung als Angebot betrachtet, Schülern die Möglichkeit von Bildung im Sinne der Menschwerdung zu eröffnen[279]. Wenn H. W. Heymann betont, dass es nicht möglich ist, Bildung weder „produzieren oder gar erzwingen"[280] zu können, dann erhebt sich für den Leser der Verdacht, dass sich hinter H.W. Heymanns Allgemeinbildungsbegriff die unausgesprochene Vorstellung verbirgt, Allgemeinbildung lässt sich aneignen, Bildung nicht.[281] Wäre es anders, wäre die Unterscheidung dieser beiden Begriffe überflüssig. Ist dem aber so, dann aber wäre dieser Begriff ein Synonym für das Erlernen von Wissensinhalten, Kompetenzen und Fähigkeiten und hätte somit mit dem klassischen Bildungsbegriff und insbesondere mit der „allgemeinen Menschenbildung" im Sinne W. v. Humboldts wenig gemeinsam.

[279] Ebenda, S. 46

[280] Ebenda, S. 43

[281] siehe auch Lengnink, K. und Peschek, W., Das Verhältnis von Alltagsdenken und mathematischem Denken als Inhalt mathematischer Bildung, in: Lengnink, K., Prediger, S. Siebel, F. (Hrsg.), Mathematik und Mensch, Darmstadt 2001, S. 67

3 Grunderkenntnisse für einen entwicklungsadäquaten Unterricht

„Unterrichten ist letzten Endes ein Versuch, das Heranwachsen zu fördern und zu formen. Wer ein Unterrichtssystem für junge Menschen entwirft, wäre also unbedacht, wenn er außer Acht ließe, was über das Heranwachsen bekannt ist, über seine Zwänge und über seine Möglichkeiten."[282]

Unterricht, so wie er in dieser Arbeit entworfen werden soll, ist schülerorientiert, d.h. er richtet sich an den Bildungs- und Entwicklungsaufgaben des Schülers aus. Ein solcher Unterricht bedarf neben der Besinnung auf die bildungstheoretischen Voraussetzungen auch der Berücksichtigung der entwicklungstheoretischen Erkenntnisse. Waren die bildungstheoretischen Voraussetzungen Inhalt des vorhergehenden Kapitels, so sollen im Folgenden grundlegende entwicklungstheoretische Erkenntnisse dargelegt und Schlussfolgerungen für den Unterricht, insbesondere für den Mathematikunterricht daraus gezogen werden. Zwei Bereiche der kindlichen Entwicklung sind in diesem Zusammenhang von besonderem Interesse: einmal die Entwicklung des Denkens, speziell des mathematischen Denkens, und zweitens die entwicklungsabhängige Lernmotivation des Schülers, die wiederum die Voraussetzung für Anstrengungsbereitschaft, Durchhaltevermögen und schulisches Wohlbefinden ist.[283]

3.1 Entwicklung des mathematischen Denkens: Jean Piaget

J. Piaget (1896 – 1980) kann als Begründer der genetischen Psychologie und Erkenntnistheorie bezeichnet werden. Mit seinen Arbeiten wollte J. Piaget eine Antwort auf die Frage nach dem Aufbau der Erkenntnis geben. Eine kurze Darstellung seines Werkes gibt Th. Kesselring.[284] Auf Grund seiner Forschungsarbeiten über den Aufbau des logischen Denkens beim Kinde kommt J. Piaget zur Überzeugung, dass dieses sich schrittweise nach eigenen Gesetzen aufbaut und dass es sich im Laufe des Lebens in Form charakteristischer Stadien weiterentwickelt. Ein wesentlicher erkenntnistheoretischer Beitrag J. Piagets besteht darin, nachgewiesen zu haben, dass das Kind spezifische Denkformen entwickelt, die sich von denen des Erwachsenen gänzlich unterscheiden. Seine Theorie der Denkentwicklung hat bis heute grundlegende Bedeutung,

[282] Bruner, J., Entwurf einer Unterrichtstheorie, Berlin 1971, S. 8

[283] vgl. Fend, H., Der Umgang mit Schule in der Adoleszenz, Aufbau und Verlust von Lernmotivation, Selbstachtung und Empathie, Entwicklungspsychologie der Adoleszenz in der Moderne, Band IV, Bern 1997

[284] Kesselring, T., Jean Piaget, München 1988

wenngleich aufgrund neuerer Untersuchungen verschiedene Details in Frage gestellt werden. Insbesondere mussten die bestimmten Denkstadien zugeordneten Altersangaben korrigiert werden (siehe 3.1.3).

Die Denkentwicklung bzw. die Entwicklung der Intelligenz nimmt nach J. Piaget ihren Ausgang mit der Auseinandersetzung des Menschen mit der Umwelt. Der Mensch hat mit dem Ziel des Überlebens den angeborenen Drang, sein Bild von der Umwelt mit seinen Umwelterfahrungen zur Deckung, oder wie sich J. Piaget ausdrückt, in ein Gleichgewicht zu bringen (Äquilibration). Dieses Bestreben erfolgt mit Hilfe zweier angeborener Funktionen: die nach innen gerichtete Organisation und die nach außen gerichtete Adaption. Die Organisation ordnet und strukturiert die individuellen Erfahrungen und ermöglicht so ein Bild der Wirklichkeit. Unter Adaption versteht J. Piaget das Verlangen des Menschen, seine Vorstellungen, Bestrebungen und Bedürfnisse mit der Umwelt in Einklang zu bringen. Dieser Vorgang geschieht auf zweifache, sich ergänzende Weise. Zum einen greift der Mensch in die Umwelt in der Weise ein, dass er sie seinen bereits vorhandenen Denk- und Verhaltensmustern anpasst. Er passt die Umwelt sich an – Assimilation. Damit verfestigt sich das bereits bestehende Bild der Wirklichkeit. Kommt es jedoch zu Erfahrungen, die nicht zu dem bestehenden Bild der Wirklichkeit passen, versucht der Mensch zum anderen, die Denk- und Verhaltensmuster modifiziert anzuwenden oder neue zu bilden und diese einzusetzen. Er passt sich der Umwelt an – Akkomodation.

Der Begriff der Äquilibration wird zur Grundlage seiner Stufen- bzw. Stadienlehre der kognitiven Entwicklung: Das Grobgerüst sei hier kurz erwähnt. Auf spezielle Details bezüglich des mathematischen Denkens wird später eingegangen.

1. Sensomotorisches Stadium (0-2 Jahre): Erwerb von sensomotorischer Koordination, praktischer Intelligenz und Objektpermanenz;

2. Präoperationales Stadium (2-7 Jahre): Erwerb des Vorstellungs- und Sprechvermögens;

3. Konkret-operationales Stadium (7-11 Jahre): das Kind kann in Gedanken mit konkreten Objekten oder ihren Vorstellungen operieren;

4. Formal-operationales Stadium (12-16 Jahre): Erwerb der Fähigkeit zum logischen Schließen und Operationen auf andere Operationen anzuwenden (Transferfähigkeit).

Aus der Äquilibrationstheorie leitet J. Piaget die These ab, dass Denken aus Handeln hervorgeht bzw. dass Denken vorgestelltes oder verinnerlichtes Handeln ist. Der Mensch braucht die Intelligenz im Sinne einer Denkleistung als strategisches Hilfsmittel zur aktiven Konstruktion der Wirklichkeit. J. Piaget verwendet in diesem Zusammenhang den Begriff der Operation, die eine nach innen gerichtete Tätigkeit ist. In ihrer ursprünglichen Form ist diese Tätigkeit ein reales Handeln. Zur Operation wird die Tätigkeit erst ab einer fortgeschritteneren Entwicklung der Intelligenz und ab der

Fähigkeit sich sprachlich mitzuteilen. Wenn ein Kind beispielsweise zu einer Menge von Bausteinen einen weiteren Stein dazu legt oder einen Stein wegnimmt, so ist die Bewegung mit der Hand die Handlung, der ganze Vorgang mit der Intention des Dazulegens bzw. Wegnehmens die Operation.

Die Handlung wird somit zur Basis der Intelligenz oder wie J. Piaget sagt: Die Intelligenz entspringt der Handlung.[285] Da Handlungen mit Sinnen und Motorik zusammenhängen, ist die Sensomotorik Grundlage für alle höheren Funktionen des Menschen. „Das ist eine allgemeine und fundamentale Tatsache, die die Erziehung nicht außer Acht lassen darf.“[286]

Wenn gesagt wurde, dass konkrete Handlungen Voraussetzung für Operationen und diese wiederum Voraussetzung für Erkenntnisse sind, so muss diese Aussage spezifiziert werden. J. Piaget unterscheidet nämlich drei Grundformen der Erkenntnis: Einmal das angeborene Wissen, dessen Prototyp der Instinkt ist; zweitens die Erkenntnis der äußeren Welt, die durch Lernprozesse in Abhängigkeit von der Umwelt erfolgt, und schließlich die logisch-mathematische Erkenntnis, die das Ergebnis abstrakter Denkvorgänge ist. [287]

Da es in dieser Arbeit in erster Linie um die Vermittlung mathematischer Inhalte bzw. mathematischer Denkprozesse geht, sei im Folgenden auf zwei wichtige Aspekte der Denkentwicklung des Kindes eingegangen:

Die <u>Entwicklung des räumlichen Denkens</u> – als Grundlage für das Verständnis von Geometrie – sowie die <u>Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kind</u> – als Voraussetzung für das Verständnis der Arithmetik.

3.1.1 Entwicklung des räumlichen Denkens

Bei der **Entwicklung des räumlichen Denkens** wird deutlich, was J. Piaget unter der „Konstruktion“ von Begriffen und Operationen versteht. Schritt für Schritt muss sich das Kind die Raumvorstellung erarbeiten und die im Raum vorliegenden Beziehungen innerlich aufbauen. Das Kind lernt diese Vorstellung also nicht passiv durch Wahrnehmung, sondern konstruiert die entsprechenden Beziehungen aktiv durch handelnden Umgang mit Gegenständen im Raum: durch sensomotorische Aktionen. Jede Stufe, die es dabei hinaufsteigen muss, ist von einer bestimmten geometrischen Vorstellung gekennzeichnet. Dazu folgendes Beispiel:

> *„Wenn wir dem vierjährigen Kind eine durchsichtige Flasche mit einer dunklen Flüssigkeit schräg vor die Augen halten, so ‘empfängt’ es keineswegs die Vor-*

[285] Piaget, J. Theorien und Methoden der modernen Erziehung, Frankfurt M. 1994, S. 31

[286] Piaget, J., Theorien und Methoden der modernen Erziehung, Frankfurt/ M. 1994, S. 36

[287] vgl. Piaget, J., Weisheit und Illusionen der Philosophie, Frankfurt 1974, S. 375

stellung des horizontalen Wasserspiegels. Aufgefordert, das Wasser in der Flasche zu zeichnen, wird es wahrscheinlich einen unförmigen Klumpen von einem dunklen Etwas in die Flasche malen: „Saft in der Flasche". In der Folge erkennt das Kind zuerst die Beziehung des Wasserspiegels zur nächsten Umgebung. Es zeichnet den Wasserspiegel, entsprechend seiner Beobachtung in der Normallage, auch im schrägen Glas parallel zur Grundfläche (der Flasche, Anm. der Verf.). Erst in einem dritten Schritt konstruiert es die Beziehung des Wasserspiegels zum Tisch und zum Boden und gewinnt damit jenen Begriff der Waagerechten, den viele als eine 'unmittelbare Anschauung' angesehen haben."[288]

Die Fähigkeit, sich etwas vorzustellen, beginnt sich beim Kind etwa im Alter von zwei Jahren zu entwickeln. J. Piaget machte zusammen mit B. Inhelder die fundamentale Entdeckung, dass der kindliche Raum zunächst durch grundlegende <u>topologische</u> Erfahrungen wie Nachbarschaft, Trennung, Umhüllung und Reihenfolge erfasst wird. Erst wesentlich später, mit ca. 5 Jahren ist das Kind in der Lage, Eigenschaften wahrzunehmen, die in der <u>euklidischen</u> Geometrie von Bedeutung sind, wie z. B. Längen, Winkelmaße usw. Die Beziehungen „vertikal" und „horizontal" sowie die Verwendung eines Koordinatensystems zur Wahrnehmung des Raumes ist erst im Alter von 8 bis 9 Jahren abgeschlossen. Das Koordinatensystem ist aber das Grundgerüst für das euklidische Gesamtsystem. Die Größenkonstanz erreicht sogar erst im Alter von 9 bis 10 Jahren sein endgültiges Niveau. Mit 10 bis 12 Jahren, wenn Kinder bzw. Jugendliche das Stadium der formalen Operationen erreicht haben, sind sie schließlich auch in der Lage, Perspektiven zu differenzieren und zu koordinieren. Erst im Alter von 12 Jahren beispielsweise wird der Volumenbegriff beherrscht und kann vom Oberflächenbegriff unterschieden werden.

Die Konstruktion der räumlichen Relationen spielt sich grundsätzlich auf zwei verschiedenen Ebenen ab: Die eine Ebene ist die der <u>Wahrnehmung</u>, die andere die der <u>Vorstellung</u>. Wenn Kinder bestimmte Dinge oder auch Relationen wahrnehmen können, bedeutet das noch lange nicht, dass sie sich diese Dinge oder Relationen auch vorstellen können.

Die Wahrnehmung von Gegenständen geschieht durch unmittelbaren Kontakt mit ihnen. Die Vorstellung hingegen verlangt die Fähigkeit, momentan nicht vorhandene Gegenstände im Geist vor sich zu sehen. Sowohl die Konstruktion des <u>wahrgenommenen Raumes</u> wie auch die des <u>vorgestellten Raumes</u> geschieht jeweils in drei zeitlich aufeinander folgenden Schritten: Zunächst werden topologische Zusammenhänge erfasst, dann projektive und schließlich metrische. Zwischen Raumwahrnehmung und bildhafter Raumvorstellung können Monate oder sogar Jahre vergehen. Damit das Kind den Raum sowohl von der Wahrnehmung als auch von der Vorstellung her in-

[288] Aebli, H., Vorwort in: Piaget, J., Inhelder, B., Gesammelte Werke Band 6, Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde, Stuttgart 1999, S. 12

nerlich „konstruieren“ kann, ist es von größter Bedeutung, dass das Kind sensomotorische Erfahrungen im Raum macht, z. B. durch Bewegung im Raum oder durch Greifen oder Operieren von räumlichen Gegenständen.

Im Folgenden sollen die drei Arten der Geometrie und ihre Zuordnung zur altersgemäßen Entwicklung des räumlichen Denkens näher charakterisiert werden: Dabei sei nicht verschwiegen, dass J. Piaget äußerst umfangreiche Versuche unternommen und auf umfassende Weise beschrieben hat, es aber weitgehend dem Leser überlässt, daraus eine systematische Zusammenschau zu erstellen.[289]

Die erste Stufe in der Entwicklung des räumlichen Denkens ist durch eine Geometrie gekennzeichnet, die ihre Beziehungen **topologisch** betrachtet. J. Piagets Versuchsergebnisse zeigen, dass folgende elementare räumliche Relationen als erstes wahrgenommen und später auch vorgestellt werden können:

<u>Benachbartsein</u>, d.h. die Nähe von Elementen in einem bestimmten Feld.

<u>Trennung</u>: Benachbarte Elemente können sich gegenseitig durchdringen oder teilweise ineinander übergehen. Obwohl diese Elemente miteinander verbundenen sind, sind sie im Geiste voneinander zu unterscheiden, d.h sie sind zu trennen.

<u>Reihenfolge</u> oder <u>räumliche Aufeinanderfolge</u>: Beispiel dafür sind tägliche Abläufe im Alltag eines Kindes, die es in Beziehung bringen kann, z. B. das Zubettgeh-Ritual.

<u>Umschlossensein</u> oder <u>Umgebensein:</u> Dieses Umschlossensein kann eindimensional sein, z. B. bei Elementen einer Kette; zweidimensional, wenn z. B. die Nase vom Rest eines gezeichneten Gesichts umschlossen ist und dreidimensional, z. B. wenn ein Gegenstand von einer Schachtel umgeben ist.

<u>Kontinuität</u> (Stetigkeit): Ununterbrochene Linien und Flächen.

Alle diese Relationen sind „innere Eigenschaften“ einer Figur, geben also noch keine Position von Gegenständen im Raum an. Perspektiven oder Koordinatenachsen spielen in diesem topologischen Raum noch keine Rolle.

Die zweite Stufe des räumlichen Denkens findet im **projektiven Raum** statt. Im Gegensatz zum topologischen Raum, in dem nur die elementaren Relationen zwischen Gegenständen im Raum erfasst werden, wird im projektiven Raum auch die Lage der Gegenstände zueinander nach den Gesetzen von Perspektive und Projektion betrachtet. Im projektiven Raum werden die Gegenstände nicht mehr in sich selbst betrachtet, sondern bezüglich eines Blickwinkels. Die Vorstellung einer Gerade setzt bereits einen projektiven Raum voraus, da sich eine Gerade topologisch nicht von einer einfachen Linie unterscheidet. Der Übergang von den topologischen Relationen zu den

[289] Piaget, J., Inhelder, B., Gesammelte Werke Band 6, Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde, Stuttgart 1999

projektiven findet statt, sobald die Kinder die Idee des Bildwinkels und die Handlung des „Peilens“ verstanden haben. Auffallend ist bei den Versuchen zur Gerade, dass die Kinder deutlich früher die Gerade wahrnehmen können, z. B. sehen, dass das vorliegende Objekt keine Gerade ist, als selbst eine zeichnen oder anderweitig darstellen können. Im Alter von 8 bis 9 Jahren verwenden die Kinder schließlich systematisch die Perspektive beim spontanen Zeichnen und können Formveränderungen durch Perspektivenwechsel auch darstellen. Dass sich diese Fähigkeit erst relativ spät einstellt, liegt daran, dass die Perspektive die Herstellung einer Beziehung zwischen dem Gegenstand und dem Blickwinkel der Person voraussetzt. Die Wahrnehmung des eigenen Blickwinkels jedoch setzt voraus, dass es auch andere Blickwinkel gibt, die mit dem eigenen Blickwinkel in Beziehung stehen und koordiniert werden müssen. Es ist also zur Erarbeitung der Perspektive – im Gegensatz zu topologischen Relationen – eine Gesamtkonstruktion notwendig, die es ermöglicht, Beziehungen zwischen Blickwinkeln nach einem Koordinatensystem zu erstellen. Die notwendigen Operationen leisten in diesem Fall die Zusammenfügung einzelner wahrgenommener Gegebenheiten zu einem Gesamtgefüge.

Die dritte Stufe der Entwicklung des räumlichen Denkens findet im **euklidischen Raum** statt, der sich durch die metrische Komponente, d.h. die Konstanz der Größen und Formen, von den beiden bisher betrachteten Räumen unterscheidet. Um diesen Raum erfassen zu können, müssen die Kinder eine Gesamtkonstruktion der Koordinatensysteme und perspektivischen Koordinierungen bilden können, da jede metrische Relation und jede Entfernung zu einem Koordinatengesamtsystem gehört. J. Piaget stellte fest, dass die Eigenschaften Parallelität, Proportionen und Ähnlichkeiten den Übergang zwischen den projektiven und euklidischen Begriffen in der Entwicklung des räumlichen Denkens bilden. In der Konstruktion von Koordinatensystemen ist der Übergang zu der Gesamtstrukturierung des euklidischen Raumes schließlich geleistet.

Mit den Begriffen Geraden und Parallelen werden Richtungen zueinander in Beziehung gesetzt, was einen ersten Schritt auf dem Weg zur Bildung von Koordinatensystemen darstellt. Mit dem Begriff der Ähnlichkeit wird die Fähigkeit ausgebildet, Winkelgrößen konstant zu behalten. Der nächste Schritt ist dann das Lernen des Maßbegriffes.

Zusammenfassend können die drei beschriebenen Räume wie folgt charakterisiert werden: Im topologischen Raum geht es um die **Analyse der Gegenstände**. Im projektiven Raum geht es um die **Koordinierung der Gegenstände** in Bezug auf bestimmte Blickwinkel. Im euklidischen Raum schließlich geht es um die **Koordinierung zwischen den Gegenständen** als solche, was zur Konstruktion der Koordinatensysteme führt.

Die folgende Graphik stellt dies noch einmal dar:[290]

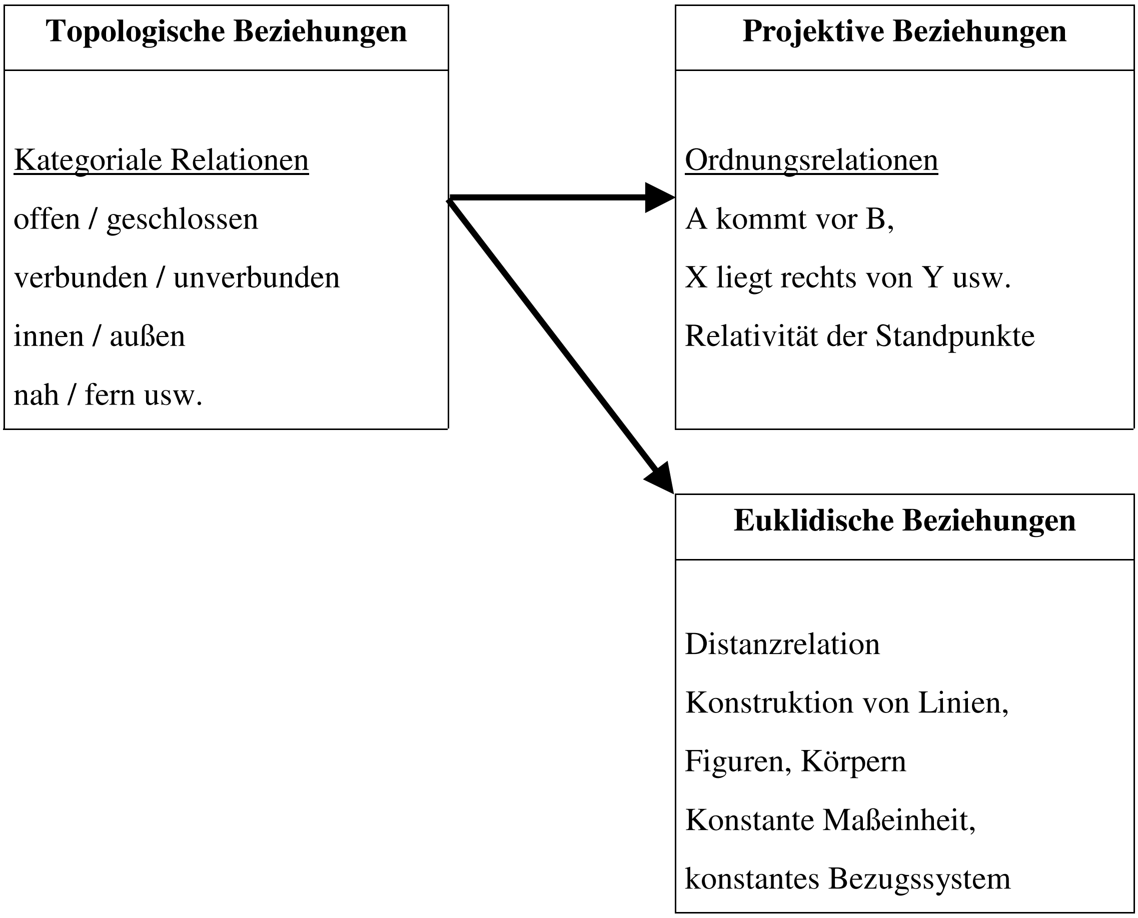


Abbildung 3.1: Entwicklung des Raumkonzeptes nach J. Piaget

3.1.2 Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kind

Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kind erschließt J. Piaget aus den logischen Operationen der Klassen- und Reihenbildung (Subsumption und Seriation).[291] Die Operationen wiederum entwickeln sich aus der praktischen Tätigkeit heraus. Das bedeutet:

> *„Der Aufbau der ganzen Zahlen vollzieht sich beim Kind mit der Aneinanderreihung und Abgrenzung in Klassen. Man darf nämlich nicht glauben, ein Kind besitze die Zahl schon deshalb, weil es verbal zählen gelernt hat; die zahlenmä-*

[290] nach zur Oeveste, H., Kognitive Entwicklung im Vor- und Grundschulalter, Göttingen 1987, S. 43

[291] vgl. Piaget, J., Szeminska, A., Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde, Stuttgart 1972

> *ßige Schätzung bleibt in Wirklichkeit lange mit der räumlichen Anordnung der Elemente verbunden."*[292]

Natürliche Zahlen beinhalten zwei Aspekte: Den Aspekt der Ordinalzahl und den der Kardinalzahl. Die Ordinalzahl (der Erste, der Zweite, der Dritte...) gibt die Rangordnung oder Reihenfolge eines Elementes in einer Menge an und die Kardinalzahl (Eins, Zwei, Drei, ...) gibt die Anzahl der Elemente in einer Menge an.

Bevor das Kind eine Vorstellung von Zahlen und damit von nummerischem Denken entwickeln kann, muss es in der Lage sein, die Invarianz der Anzahl bei veränderter Anordnung zu erkennen und dazu in Klassen und Relationen denken können (Klassifikation und Seriation): Legt man einem Kind, das jünger als 5 – 6 Jahre ist, beispielsweise eine Reihe von Kastanien auf den Tisch und eine zweite Reihe dazu, bei der die Anzahl der Kastanien gleich ist, die Reihe aber im Vergleich zur ersten in die Länge gezogen wurde, so werden Kinder dieses Alters behaupten, dass die zweite Reihe mehr Kastanien enthält. Selbst nachdem die Kinder die beiden Reihen abgezählt und das gleiche Zahlenergebnis erhalten haben, zeigen sie sich ungläubig. Die Kinder sind zwar in der Lage, die Zahlenreihe aufzusagen und auch eins zu eins Gegenständen zuzuordnen, trotzdem verbinden sie noch keine konstante Menge mit den jeweiligen Zahlennamen. Die verwendeten Zahlennamen haben noch keine operatorische Bedeutung. [293]

Um beide Aspekte (Ordinal- und Kardinalzahl) der natürlichen Zahlen erfassen zu können, müssen die Kinder nach J. Piaget drei Arten von Operationen bewältigen. Die erste erforderliche Operation ist die **Aufreihung von Gegenständen**, d.h. das Kind muss in der Lage sein, die Elemente in eine Ordnung zu bringen, das erste, das zweite, das dritte Element usw., es muss also nach J. Piaget eine asymmetrische Relationsbildung $a < b < c < d$ durchgeführt werden. Dies kann z. B. durch Bildung einer Treppe mit verschieden langen Stäben oder anderen geeigneten Dingen gezeigt werden.

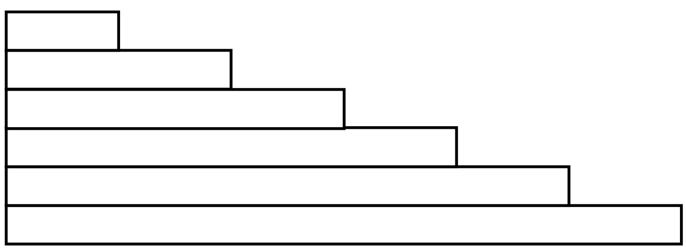


Abbildung 3.2: Treppenbildung

Die zweite notwendige Operation ist die der **Mengeneinschachtelung oder Mengeninklusion**. Damit ist gemeint, dass man beim Zählen eine Reihe von aufeinander-

---

[292] Piaget, J., Inhelder, B., Die Psychologie des Kindes, Stuttgart 1979, S. 78

[293] vgl. Piaget, J., Szeminska, A., Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde, Stuttgart 1972

folgenden Mengen bildet. So repräsentiert die Zahl „Fünf“ eine Menge mit fünf Elementen, die zugleich die Menge mit vier Elementen, mit drei Elementen, mit zwei Elementen und mit einem Element beinhaltet. Die dritte Operation, die zur Erfassung des Zahlbegriffs nötig ist, ist die **Eins-zu-Eins-Korrespondenz**. Damit ist gemeint, dass das Kind beim Zählen jedem Gegenstand genau eine Zahl im Sinne einer Ordnungszahl zuordnen kann.

Durch diese Vorgehensweise wird wiederum eine Reihenfolge gebildet. Werden diese Operationen vom Kind beherrscht, was durchschnittlich im Alter von 5-6 Jahren der Fall ist, ist es auch in der Lage, Rechenoperationen (Addition und Subtraktion) bei natürlichen Zahlen durchzuführen. Dabei wird das Kind anfangs noch mit gegenständlichen Hilfsmitteln arbeiten, wodurch zum Ausdruck kommt, dass noch die Vorstellung einer Menge zum Rechnen benötigt wird und die abstrakte Zahl alleine nicht ausreicht. Die Unendlichkeit der Menge der natürlichen Zahlen bzw. die Tatsache, dass man immer weiter zählen kann, begreifen Kinder erst mit ca. 10-12 Jahren, nämlich dann, wenn sie die Stufe der formalen und abstrakten Operationen erreicht haben.[294]

3.1.3 Nachfolgeuntersuchungen

Wie bereits erwähnt, wurde J. Piagets Theorie teils mehr teils weniger heftig kritisiert und deren wissenschaftliche Haltbarkeit in Frage gestellt. Dabei konzentrierte sich die Kritik auf zwei Bereiche: Ein Kritikpunkt war die methodische Vorgehensweise seiner Forschung. Insbesondere wurde ihm die zu geringe Stichprobe der Versuchspersonen zum Vorwurf gemacht. Ein weiterer Kritikpunkt bezieht sich auf seine Einteilung der kognitiven Entwicklung in Stadien und Stufen.

Zur Überprüfung der Ergebnisse J. Piagets wurden an der Universität Hamburg in den Jahren zwischen 1978 und 1982 Nachfolgeuntersuchungen durchgeführt. Diese Untersuchungen schlossen auch die Entwicklung des räumlichen Denkens bei Kindern und Jugendlichen ein. Um eine methodisch abgesichertere Basis der Ergebnisse zu gewährleisten, wurde die Stichprobe auf 120 Kinder im Alter von 4 – 11 Jahre ausgeweitet, die Versuchsanordnung war zum Teil dieselbe wie bei J. Piaget, zum Teil wurde sie geringfügig modifiziert.[295]

> *„Die Ergebnisse der Entwicklungstypenanalyse der Einzelkonzepte zeigen übereinstimmend, wenn man vom Zeitkonzept absieht, dass es gelingt, verschiedene Entwicklungskonfigurationen bestimmten Altersklassen zuzuordnen. Damit lässt*

[294] vgl. Kesselring, T., Jean Piaget, München 1988

[295] vgl. Franke, M., Didaktik der Geometrie, Heidelberg 2000

sich der Piagetsche Ansatz einer Stufentheorie der kognitiven Entwicklung prinzipiell empirisch rechtfertigen."[296]

Zusammengefasst zeigten die Untersuchungen, bezogen auf das räumliche Denken, folgendes Ergebnis: Bis zum Alter von 5 Jahren verstehen Kinder ausschließlich topologische Relationen. Ab dem 6. Lebensjahr sind Kinder, wie auch J. Piaget feststellte, in der Lage, einfache euklidische Relationen zu begreifen. Ebenso wurde bestätigt, dass Kinder ab 7 Jahren einfache projektive Beziehungen erfassen können. Das Verständnis für komplexe euklidische Relationen wird in dieser Studie später als es J. Piaget angibt, nämlich erst im Alter von 9 Jahren, nachgewiesen, das Verständnis für multiple projektive Relationen erst mit 10 Jahren. Zwischen dem Verstehen einfacher und dem Verstehen schwierigerer räumlicher Operationen liegt eine Zeitspanne von bis zu drei Jahren.[297]

Die Altersangaben besagen nur, dass Kinder ab einem bestimmten Alter **fähig** sind, bestimmte Beziehungen zu erfassen. Sie besagen aber nicht, dass die Schüler komplexere Beziehungen tatsächlich begreifen, ohne zuvor die einfacheren erfasst zu haben. Bevor euklidische Beziehungen gelehrt werden, muss sichergestellt sein, dass zuvor, in welcher Schulart auch immer, topologische Beziehungen verstanden wurden.

Zweifellos gibt es berechtigte Kritik an J. Piagets Forschungsergebnissen und –methodik und. Diese betrifft jedoch nur unwesentlich die Entwicklung des geometrischen Denkens.

Weitere Forschungen haben jedoch gezeigt, dass gewisse Grundannahmen J. Piagets ergänzungsbedürftig sind, z. B. die Annahme, dass die geistige Entwicklung des Kindes ausschließlich von der Entwicklung des Denkvermögens abhängt. Heute weiß man, dass auch das bereits erworbene Wissen einen wesentlichen Einfluss auf die kognitive Entwicklung des Kindes hat und die Verbesserung des Gedächtnisses eine große Bedeutung für die weitere Entwicklung des Verständnisses der Welt darstellt. Darauf wird im Anschluss an dieses Kapitel näher eingegangen.[298]

Es bleibt festzuhalten, dass J. Piagets Theorie bis heute die **wichtigste Theorie der geistigen Entwicklung** im Kindes- und Jugendalter ist. Insbesondere für die Entwicklung des geometrischen Denkens bilden seine Ergebnisse ein wertvolles Fundament, nicht nur für weitere Forschungen, sondern auch für die Praxis. Daraus lassen sich einige Schlussfolgerungen für den Unterricht ziehen:[299]

[296] zur Oeveste, H., Kognitive Entwicklung im Vor- und Grundschulalter, Göttingen 1987, S. 134
[297] zur Oeveste, H., Kognitive Entwicklung im Vor- und Grundschulalter, Göttingen 1987, S. 105
[298] vgl. Anderson, J. R., Kognitive Psychologie, Heidelberg 1989
[299] vgl. für das Folgende: Franke, M., Didaktik der Geometrie, Heidelberg 2000

Die Erkenntnisse J. Piagets dürfen bei der Auswahl der Inhalte und damit bei der Erstellung der Lehrpläne nicht weiter unberücksichtigt bleiben. Damit kann sichergestellt werden, dass die Schüler entsprechend ihres entwicklungspsycholgischen Standes gefördert und weder über- noch unterfordert werden. Das wiederum ist eine wichtige Bedingung für eine möglichst hohe Motivation im Lernprozess.

J. Piaget wies nach, dass das Denken von Kindern anders abläuft als das Denken von Erwachsenen. Dessen muss sich jeder Lehrer bei der Erstellung seiner Unterrichtskonzepte und bei der Gestaltung des Unterrichts selbst gewahr sein.

Wie bereits erwähnt, versteht sich J. Piaget als Konstruktivist, d.h. seine Theorie beruht darauf, dass die Kinder sich ihre Erkenntnisse auf aktive Weise Schritt für Schritt erarbeiten, sich ihre Erkenntnisse „konstruieren". Deshalb muss Unterricht so gestaltet werden, dass das Kind selbst aktiv sein kann und statt in die geistige Passivität gedrängt zu werden, eigenständig denken lernt.

3.2 Denkentwicklung und Umwelt: Jerome Bruner

J. Bruner lieferte unter ausdrücklicher Bezugnahme auf den handlungtheoretisch-konstruktivistischen Ansatz J. Piagets wichtige Beiträge auf dem Gebiet der Lern- und Denkentwicklung. J. Bruner geht jedoch davon aus, dass sich die Denkentwicklung nicht in zeitlich abgestuften Stadien vollzieht, sondern zeitgleich auf verschiedenen Darstellungsebenen. Ein weiterer Unterschied zu J. Piaget besteht darin, dass er nicht nur die **Wahrnehmung** und **Handlung**, sondern auch die **Sprache** als weitere gleichberechtigte Säule geistiger Entwicklung ansieht. Das ist auch der Grund dafür, weshalb J. Bruner dem Einfluss der sozialen und kulturellen Umwelt, ohne den die Entwicklung von Sprache nicht möglich ist, weit mehr Bedeutung beimisst als J. Piaget. Wahrnehmung und Handlung hingegen entwickeln sich primär durch Reifungsprozesse und benötigen weniger den äußeren Einfluss. So fokussiert J. Bruners Entwicklungstheorie viel stärker auf Umwelt und Erziehung, als dies bei anderen entwicklungstheoretischen Ansätzen – insbesondere auch bei J. Piaget – der Fall ist.

J. Bruner knüpft an die Assimilationstheorie von J. Piaget an, gemäß der das Kind dadurch Lernfortschritte macht, dass es mit seinen gewohnten Verhaltensmustern plötzlich auf Widerspruch stößt und deshalb nach neuen Wegen suchen muss. J. Bruner unterscheidet sich jedoch dadurch von J. Piaget, dass er den Auslöser für Verhaltensänderungen und damit für Entwicklungsfortschritte nicht in zufällig auftretenden Widersprüchen sieht, sondern darin, dass das Kind Sachverhalte auf verschiedene Arten dargestellt bekommt und sich dabei Widersprüche ergeben. Z. B. wenn das Kind zur eigenen Wahrnehmung noch sprachliche Erläuterungen durch Erwachsene erhält, die es nicht in Einklang mit dem Wahrgenommenen bringen kann. Diese Diskrepanz ist eine Motivation für die Entwicklung des Kindes.[300] Als Beispiel für diese Beobachtung sei folgender Versuch J. Bruners erwähnt: Ähnlich wie J. Piaget führte J. Bruner Experimente zur Invarianz von Flüssigkeiten bei 5- bis 6-Jährigen Kindern durch. Gießt man eine bestimmte Menge einer Flüssigkeit von einem hohen, schmalen, in ein niedrigeres, breiteres Glas um, so geben Kinder dieses Alters eine Veränderung der Flüssigkeitsmenge an. Schirmt man aber in einem Folgeversuch das breitere Gefäß gegen die irritierende Wahrnehmung eines niedrigeren Wasserspiegels ab, so gaben die meisten Kinder an, dass die Wassermenge gleichbliebe und viele hielten an diesem Ergebnis fest, wenn in einem weiteren Versuch der Schirm entfernt wurde. J. Bruner interpretierte das Anbringen des Schirmes als sprachlich-symbolische Darstellung, die die Kinder beim Vergleich mit der bloßen Anschauung in einen Konflikt brachte und zur intellektuellen Fortentwicklung führte.

Wie vergegenwärtigen sich Kinder die Umwelterfahrungen, die für J. Bruner von so entscheidender Bedeutung sind?

Seine Theorie der kognitiven Entwicklung basiert auf der Grundannahme, dass es drei Darstellungsebenen gibt, auf denen dem Kind Inhalte repräsentiert werden:

> *„Zuerst kennt das Kind seine Umwelt hauptsächlich durch die gewohnheitsmäßigen Handlungen, die es braucht, um sich mit ihr auseinander zu setzen. Mit der Zeit kommt dazu eine Methode der Darstellung in Bildern, die relativ unabhängig vom Handeln ist. Allmählich kommt dann eine neue und wirksame Methode hinzu, die sowohl Handlung wie Bild in die Sprache übersetzt, woraus sich ein drittes Darstellungssystem ergibt. Jede dieser drei Darstellungsmethoden, die handlungsmäßige, die bildhafte und die symbolische, hat ihre eigene Art, Vorgänge zu repräsentieren.“*[301]

Die erste Darstellungsebene bezeichnet J. Bruner als die **enaktive.** Sie meint das Erfassen von Sachverhalten durch Handlungen mit konkretem Material. Am Beginn des menschlichen Lebens ist zunächst nur die enaktive Darstellungsebene relevant, da das Kind seine Umwelt hauptsächlich durch die Auseinandersetzung mit gewohnheitsmäßigen Handlungen kennenlernt. In dieser Phase setzt sich das Kind damit auseinander, die „räumliche Welt des Sehens zur sequentiellen Welt des Handelns in Beziehung zu setzen und später die Welt der Wahrnehmung und der Vorstellungsbilder von der Handlung zu befreien“[302]. Bei der Beschreibung dieser Phase stützt sich J. Bruner u.a. auf Beobachtungen J. Piagets:

> *„Lucienne befindet sich mit 6 Monaten allein in ihrem Stubenwagen. Sie ergreift den Stoff, der die Wände bedeckt, und schaut dabei zu, was sie tut. Sie zieht die Falten an sich. Aber diese entwischen ihr immer wieder. Dann führt sie jeweils*

[300] vgl. Bruner, J., Olver, R., Greenfield, P., Studien zur kognitiven Entwicklung, Stuttgart 1971

[301] Ebenda, S. 21

[302] Ebenda, S. 44

die geschlossene und zusammengepresste Hand vor ihre Augen und öffnet sie sorgfältig. Sie betrachtet die Finger aufmerksam und beginnt von neuem. Dies tut sie zehnmal. Es genügt ihr also, einen Gegenstand, in der Hoffnung, ihn zu erfassen, berührt zu haben, damit sie ihn als in ihrer Hand existierend versteht, obschon sie ihn nicht fühlt. Ein solches Verhalten zeigt ebenso wie das vorangehende, dass das Kind den Objekten, die es ergriffen hat, eine Art taktile Permanenz zuschreibt".[303]

Lucienne erwartet also, das Tuch wieder in der Hand zu sehen, wenn sie diese schließt und öffnet. Wahrnehmung und Handlung sind folglich noch nicht voneinander getrennt, da das Kind noch kein autonomes äußeres Bezugssystem besitzt, das diese Trennung vornehmen könnte.

Die zweite Darstellungsebene nennt er **ikonisch**. Sie beinhaltet das Erfassen von Sachverhalten durch Bilder (auch „innere Bilder" im Sinne von anschaulichen Vorstellungen) und Diagramme. In dieser Phase wird das Kind in die Lage versetzt, Bilder und räumliche Schemata, welche relativ unabhängig von der Handlung sind, darzustellen. Das kindliche Denken in Bildern ist dadurch gekennzeichnet, dass zum einen die Trennung zwischen dem Kind und seiner Umwelt vollzogen ist, zum andern jedoch noch keine Übereinstimmung zwischen Vorstellung und tatsächlichem Begegnen stattfindet. Wenn es gelingt, das innere und das äußere Bild in Übereinstimmung zu bringen, ist das Kind fähig, Ideen und Prinzipien zu verstehen, die über die Anschauung hinausgehen, z. B. Invarianzen von Flüssigkeiten bei verschiedenen Gefäßen.

Die dritte Darstellungsebene schließlich bezeichnet er als die **symbolische**. Auf dieser Ebene werden die Sachverhalte durch sprachliche Mitteilung oder durch Symbole erfasst. Jedem Menschen ist eine Art von „symbolischer Tätigkeit angeboren, die sich durch Akkulturation schrittweise in verschiedene Systeme spezialisiert"[304]. Eine Form der Spezialisierung ist die Sprache. Aber auch Bilder oder motorische Fertigkeiten können symbolischen Charakter haben.

Was sind die Kennzeichen eines solchen symbolischen Systems und wie funktioniert es?

J. Bruner nennt einige Eigenschaften für ein symbolisches System: Am Beispiel der Sprache sollen diese Eigenschaften dargestellt werden.

Symbolfunktion: Darunter versteht J. Bruner die Tatsache, dass alle Dinge Namen haben, diese Namen aber willkürlich gewählt sind und nur im Kontext verstanden werden können.

[303] Ebenda, S. 34

[304] Ebenda, S. 55

Kategorialität: Sie besagt, dass das Kind für bestimmte Klassen Begriffe benutzt, hinter denen sich bestimmte Gesetzmäßigkeiten verbergen. So kann es vorkommen, dass Kinder zu allen Tieren „Wauwau“ oder zu allem, was sich bewegt, „Auto“ sagen.

Grammatikalität: Das heißt, dass Sprache grammatikalischen Regeln gehorcht. Alle Sprachen werden in Sätzen mit mindestens drei grundlegenden Strukturen gebildet: Die erste Regel verlangt für einen grammatikalisch korrekten Satz Subjekt, Prädikat, Objekt. Die zweite Regel besagt, dass Modifikationen der ersten Regel gebildet werden können. Die dritte Regel schließlich sagt aus, dass Sätze in allen Sprachen transformierbar sind, z. B. in Fragen oder in Passivformen.

Effektive Produktivität: Damit ist gemeint, dass die Sprache auch Gedankenexperimente zulässt, ohne dass Experimente real durchgeführt werden müssen.

> *„Was bei der Sprache als einem spezialisierten Ausdruck der symbolischen Aktivität auffällt, ist die Tatsache, dass sie in einer Hinsicht, im syntaktischen Bereich, ihre Reife sehr früh erwirbt. Die syntaktische Reife eines fünfjährigen Kindes scheint in keinem Verhältnis zu seinen Fähigkeiten in anderen Bereichen zu stehen. Es kann seine Worte und Sätze unter rascher und sicherer Anwendung von hochabstrakten Regeln bilden, aber es kann die Dinge, welche die Wörter und Sätze ausdrücken, nicht in entsprechender Weise organisieren. Diese Asymmetrie spiegelt sich in den semantischen Aktivitäten des Kindes wider, in denen sein Wissen von den Bedeutungen der Worte und den empirischen Implikationen seiner Sätze für viele Jahre kindlich bleibt, wenn auch die Syntax vollständig entwickelt ist.“*[305]

Das Kind ist also bis ins Erwachsenenalter hinein von den bildlichen und handlungsmäßigen Formen der Darstellung abhängig.

Die Entwicklung des Denkens wird laut J. Bruner durch eine fortwährende Verbesserung der Wechselwirkung zwischen den genannten Darstellungsebenen, der enaktiven, der ikonischen und der symbolischen, verstanden. Der Beteiligung der Sprache kommt in dem Prozess der Wechselwirkung eine wesentliche Bedeutung zu. Dabei verändert sich der Gebrauch der Sprache in einer für die gesamte Entwicklung typischen Weise:

> *„Das sehr junge Kind gebraucht die Sprache fast nur wie eine Weiterführung des Hinzeigens. In letzter Zeit angestellte Studien haben ergeben, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Wort am Anfang der sprachlichen Laufbahn eines Kindes verwendet wird, sehr viel größer ist, wenn der angesprochene Gegenstand entweder zur Hand ist oder sich in direkter Sicht befindet. Es kommt nur ganz allmählich dazu, dass Wörter verwendet werden, die sich auf nichtgegenwärtige Sachen beziehen sollen, und es dauert noch viel länger, bis*

[305] Ebenda, S. 74

> *Wörter mit solchem entfernten Bezugsgegenstand durch den umgestalteten Apparat an Grammatik so zurechtgemacht werden, dass sie mithelfen können, geistige Probleme zu lösen.“*[306]

Jede der drei Darstellungsmethoden Handeln, Anschauen und Sprechen prägt das geistige Leben des Menschen auf den verschiedensten Altersstufen. Die Koordination zwischen den Darstellungsmethoden ist ein Hauptmerkmal des intellektuellen Lebens des Erwachsenen. Lernen besteht für Bruner also ganz wesentlich in der Fähigkeit, von einem Repräsentationsmodus in den anderen transferieren zu können, also sprachlich abstrakte Zusammenhänge zu veranschaulichen, Anschauungen in Handlungen und umgekehrt Handlungen in Anschauungen zu übersetzen.

Wenn also der Mensch im Erkenntnisprozess einen Beziehungszusammenhang zwischen der äußeren und inneren Welt **handelnd, anschauend** und **symbolisierend** herstellt, so ist auch die Annahme sinnvoll, dass unser Wissen entsprechend in dieser dreifachen Weise repräsentiert wird:

- durch eine Anzahl von Handlungen, durch die ein bestimmtes Ziel erreicht werden soll (*enaktive Repräsentation),* z. B. Reparieren eines Fahrrads, Spielen eines Instruments,
- durch Bilder, die etwas versinnbildlichen, ohne es zu definieren (*ikonische Repräsentation)*; z. B. eine Landkarte, auf der die Bodenschätze Afrikas eingetragen sind
- durch eine Folge von Zeichen, die einem symbolischen System entstammen, in dem nach bestimmten Regeln Sätze formuliert und transformiert werden (*symbolische Repräsentation);* z. B. die Schrift, mathematische Formeln.

J. Bruner beschreibt diesen Sachverhalt folgendermaßen:

> *„Jeder Wissensbereich (oder jede Problemstellung innerhalb eines solchen Wissensbereichs) kann auf dreifache Art dargeboten werden: durch eine Zahl von Handlungen, die geeignet sind, ein bestimmtes Ziel zu erreichen (enaktive Repräsentation), durch eine Reihe zusammenfassender Bilder oder Graphiken, die eine bestimmte Konzeption versinnbildlichen, ohne sie ganz zu definieren (ikonische Repräsentation), und durch eine Folge symbolischer oder logischer Lehrsätze, die einem symbolischen System entstammen, in dem nach Regeln oder Gesetzen Sätze formuliert und transformiert werden (symbolische Repräsentation). Diese Unterscheidung kann am besten verdeutlicht werden an Hand einer Waage, denn wir werden später sehen, wie man ein solches Gerät verwenden kann, um Kindern quadratische Funktionen beizubringen.*
>
> *Schon ein kleines Kind kann nach dem Prinzip der Balkenwaage handeln; es zeigt dies dadurch, dass es sich auf einer Wippe richtig verhält. Es weiß, dass es*

[306] Bruner, J., Entwurf einer Unterrichtstheorie, Berlin 1974, S. 20

sich weiter nach außen setzen muss, damit die Wippe auf seiner Seite nach unten geht. Ein etwas älteres Kind kann sich das Funktionieren der Balkenwaage entweder an einem Modell klar machen, an dem man Ringe anhängen und ausbalancieren kann, oder an einer Zeichnung. Das „Bild" der Balkenwaage kann in verschiedener Weise auf das Wesentliche beschränkt werden, so dass immer mehr irrelevante Details wegfallen, wie bei einer Schemazeichnung in einem Physikbuch für Anfänger. Schließlich kann eine Balkenwaage einfach sprachlich beschrieben werden, ohne Zuhilfenahme von Zeichnungen oder sogar noch besser mathematisch mit Hilfe des Newtonschen Gesetzes über das Trägheitsmoment. Selbstverständlich sind Handlungen, Bilder und Symbole als Ausdrucksmittel verschieden schwierig und verschieden brauchbar je nach dem Alter, den Vorkenntnissen oder dem Lernstil der Schüler. Außerdem ist ein juristisches Problem wohl schwerlich bildhaft darzustellen, für Geographie dagegen bietet sich die bildliche Darstellung an. Viele Fachbereiche, wie beispielsweise die Mathematik, haben beide Möglichkeiten der Darstellung."[307]

Beispiele für die Anwendung des als sog. EIS (**e**naktiv – **i**konisch – **s**ymbolisch) – Prinzip in die Mathematikdidaktik eingegangenen Unterrichtsverfahrens gibt es reichlich.[308] So kann die Addition der Zahlen 3 und 5 durch konkretes Tun mit Gegenständen (z. B. Stiften) eingeführt werden. Anschließend werden dann die insgesamt 8 Stifte bildlich an die Tafel gezeichnet und schließlich mit den Symbolen 3 + 5 = 8 notiert.

J. Bruners Modell der drei Repräsentationsmethoden darf nicht so verstanden werden, dass diese auf drei voneinander losgelösten Ebenen stehen. Vielmehr ist begriffliches Denken nach J. Bruner dann erreicht, wenn sich die sprachliche Darstellung mit der handlungsgebundenen und bildhaften verbindet. Von der anderen Seite betrachtet, wird das Kind, sobald es Erfahrungen begrifflich erfassen kann, auch befähigt, diese Erfahrungen inhaltlich zu erweitern, indem es weitere Bedeutungen des Begriffs mit einbezieht.[309]

Die Einführung der Sprache als wesentlichen Faktor im Prozess der geistigen Entwicklung des Kindes ist schon deshalb besonders interessant, weil bei allen Lehr- und Lernprozessen die Sprache eine zentrale Rolle spielt und auch die Verstehensvorgänge an Sprache gebunden sind. Daher ist es notwendig, den Zusammenhang von Sprache und Mathematik noch stärker zu reflektieren, als dies in der gegenwärtigen Literatur geschieht. Deshalb ist dieser Thematik im II. Hauptteil ein eigenes Kapitel gewidmet.

---

[307] Ebenda, S. 49

[308] vgl. Hafenbrak, B., Einführung in die Mathematikdidaktik (Vorlesungsskript), o.O. 2004

[309] vgl. Maier, H., Schweiger, F., Mathematik und Sprache – Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht, Wien 1999, S. 85

3.3 Der mathematische Geist beim Kind: Maria Montessori

> *„Da der menschliche Geist ein mathematischer und philosophischer ist, trachten wir danach, in angemessenem Verhältnis den Geist des Kindes zu Mathematik und Philosophie zu führen."*[310]

Es mag auf den ersten Blick befremdlich erscheinen, wenn im Rahmen dieser Arbeit auch auf die Reformpädagogik M. Montessoris eingegangen wird, zumal sie nicht im strengen Sinn wissenschaftlich geforscht hat. Wenn ihr entwicklungspädagogischer Ansatz dennoch hier dargelegt wird, so hat das mehrere Gründe.

Erstens hat M. Montessori eine Erziehungstheorie entwickelt, die auf den von ihr empirisch gewonnenen Erkenntnissen zur Entwicklung des Kindes aufbaut. Wer erziehen will, sagt sie, muss die Entwicklung des Kindes kennen. Zweitens gehört sie zu den wenigen Pädagogen, die nicht nur eine Theorie entwickelt, sondern auch sehr konkrete Vorschläge für deren Umsetzung in die Erziehungs- und Unterrichtspraxis unterbreitet haben. Drittens liegt ihr entwicklungspsychologischer Ansatz, auch wenn er nicht bis zu einer letzten wissenschaftlichen Ausarbeitung gelangt ist, in enger geistiger Nähe zur Theorie der geistigen Entwicklung von J. Piaget, der ein Zeitgenosse von ihr war, aber unabhängig von ihm arbeitete. Viertens hat ihre Pädagogik nicht nur weltweit Anerkennung gefunden, sondern auch eine weltweit praktische Umsetzung erfahren, so dass in den nach ihrer Methode arbeitenden Schulen konkret veranschaulicht wird, wie Unterricht auch anders und trotzdem erfolgreich sein kann. Fünftens sieht M. Montessori die Mathematik als <u>Mittel zur geistigen Entwicklung</u>, indem dieses Fach zu präzisem Denken und Arbeiten hinführt und eine <u>notwendige Bildungsgrundlage</u> darstellt, die u.a. hilft, mathematische Alltagsprobleme zu lösen, um damit die den Menschen umgebende Welt besser erfassen und sich in ihr orientieren zu können. Der Mathematik misst M. Montessori einen großen Einfluss auf die Persönlichkeitsentwicklung des Menschen bei.

3.3.1 Entwicklungspsychologische Voraussetzungen

Die entwicklungspsychologischen Erkenntnisse M. Montessoris beruhen auf intensiven Beobachtungen von Kindern. Angeregt durch Erkenntnisse aus der Tierforschung, es handelte sich vor allem um Entdeckungen des Biologen De Vries, machte M. Montessori die höchstmoderne Entdeckung, dass die entwicklungsbedingten Lernvorgänge bei Kindern in aufeinanderfolgenden sog. „sensiblen Perioden" stattfinden. Diesen Vorgang hat sie so beschrieben:

> *„Es handelt sich um besondere Empfänglichkeiten, die in der Entwicklung, das heißt im Kindesalter der Lebewesen auftreten. Sie sind von vorübergehender*

[310] Montessori, M., „Kosmische Erziehung", Freiburg 1988, S. 126

> *Dauer und dienen nur dazu, dem Wesen die Erwerbung einer bestimmten Fähigkeit zu ermöglichen. Sobald dies geschehen ist, klingt die betreffende Empfänglichkeit wieder ab."*[311]

Die Besonderheit solcher Empfänglichkeitsperioden besteht also darin, dass es für den Erwerb von Fähigkeiten und Fertigkeiten eines inneren Impulses bedarf und dass dieser Impuls zeitlich begrenzt ist. Man spricht in der heutigen Psychologie auch von sog. Zeitfenstern. Kennzeichen der sensiblen Phase ist die selektive Wahrnehmung, die für das Kind wichtige Dinge ins Blickfeld rückt. Dies zeigt sich durch ein besonderes Interesse des Kindes an bestimmten Dingen oder Tätigkeiten. Das Merkmal der selektiven Wahrnehmung hat M. Montessori so beschrieben:

> *„Die innere Empfänglichkeit bestimmt, was aus der Vielfalt der Umwelt jeweils aufgenommen werden soll".* Es ist, *„als ob ein Lichtstrahl von ihr ausginge, der nur bestimmte Gegenstände erhellt, andere hingegen im Dunkel lässt. Die ganze Wahrnehmungswelt des Kindes beschränkt sich dann mit einem Male auf diesen einen hell erleuchteten Bezirk."*[312]

Damit aber sind die Merkmale solcher Empfänglichkeitsphasen noch nicht vollständig beschrieben. Zwei weitere kommen noch hinzu. Zum einen das Merkmal der „Leichtigkeit". Die Aneignung von Kenntnissen und Fertigkeiten fällt in dieser Zeit besonders leicht, Anstrengungsbereitschaft und Lernmotivation sind sehr hoch. M. Montessori konnte beobachten, dass Kinder in dieser Zeit mit Begeisterung und Freude lernen, sie spricht deshalb auch von „Eroberung"[313], weil der Lernvorgang ohne große Willensanstrengung erfolgt.

Zum anderen ist die geistige Entwicklung des Kindes gleichsam durch die Kehrseite der sensiblen Phase gekennzeichnet. Ist die Uhr der Empfänglichkeit nämlich abgelaufen, „können weitere Errungenschaften nur ... mit Aufwand von Willenskraft, mit Mühe und Anstrengung gemacht werden." Es ist, sagt M. Montessori, als ob sich ein „Schleier der Gleichgültigkeit und Müdigkeit"[314] über die kindliche Wissbegier und den kindlichen Lerneifer ausbreiten würde. Jeder Lernvorgang, der nach Beendigung der sensiblen Phase erfolgt oder erzwungen wird, verlangt einen erhöhten Kraftaufwand, fordert Überwindung und ist nicht selten von einer inneren Abwehrhaltung begleitet. Das hat natürlich, wie leicht einzusehen ist, höchst prekäre Folgen für institutionalisierte Lernprozesse, da hier der Lernstoff von allen Schülern in festgelegten Zeiträumen angeeignet werden muss.

---

[311] Montessori, M., Kinder sind anders, Stuttgart 1996[11], S. 47

[312] Montessori, M., Kinder sind anders, Stuttgart 1996[11], S. 52
Man darf sich an der bildhaften Beschreibung dieses Phänomens nicht stören. Die Entdeckung war zu senationell und zu neu für M. Montessori, als dass sie schon über das entsprechende begriffliche Instrumentarium hätte verfügen können.

[313] Montessori, M., Kinder sind anders, Stuttgart 1996[11], S. 50

[314] Ebenda, S. 50

M. Montessori unterscheidet drei große Entwicklungsphasen im Leben eines Kindes bzw. Jugendlichen:[315]

1. 0 – 6 Jahre, wobei diese nochmals in zwei Teilperioden (0 – 3 und 3 – 6 Jahre) aufgeteilt ist. Die erste Teilphase ist durch die Entwicklung von Bewegung, Sprache und Ordnung dominiert, die zweite Teilphase durch Entwicklung des Bewusstseins, die Vervollkommnung der Sinnesentwicklung und Sensibilität für soziales Zusammenleben.
2. 6 – 12 Jahre: Diese Phase ist geprägt durch die Erweiterung des Aktionsbereiches des Kindes und den Übergang des kindlichen Geistes zur Abstraktion. Vor allem die Vorstellungskraft kann sich in dieser Periode besonders gut entwickeln. Auch die Entstehung moralischen Bewusstseins liegt in dieser Zeit.
3. 12 – 18 Jahre: Während die zweite Phase eher durch Stabilität gekennzeichnet ist, sind die Kinder und Jugendlichen in der dritten Phase eher labil. Sensibilitäten liegen in dieser Zeit vor allem in den Bedürfnissen, Schutz und Geborgenheit zu finden, die eigene Rolle in der Gesellschaft zu begreifen und eine Stärkung des Selbstvertrauens zu erfahren.

Diese Einteilung soll dem Erwachsenen nur als Orientierungshilfe dienen. Wichtig bleibt vor allem die Beobachtung des Kindes und Jugendlichen, um die jeweilige sensible Phase erkennen und darauf eingehen und damit eine bestmögliche Entwicklung fördern zu können.

Ein weiterer Aspekt ihrer Entwicklungstheorie ist die Erkenntnis, dass der menschliche Geist zwei Eigenschaften hat, das **Vorstellungsvermögen (Imagination)** und das **Abstraktionsvermögen (Abstraktion)**.

Die **Imagination** ist durch die Fähigkeit geprägt, sich etwas unabhängig vom Gegenstand vorzustellen, sie ist schöpferisch und durch Spontaneität gekennzeichnet, führt aber auch zu Illusionen und uferloser Phantasie. Letzteres bezeichnet M. Montessori als „zügelloses Schweifen der Phantasie in Bildern von Licht, Farben, Klängen, Eindrücken“[316], das es zu verhindern gilt, da es nicht zu schöpferischen Leistungen führt.

Die **Abstraktion** hingegen ist „genau begrenzt“[317], ist ein Präzisionsorgan und eine Ordnungskraft, ein Schema, in das sich alle Wahrnehmungen und Vorstellungen einordnen lassen. Es ist die Fähigkeit, die den Menschen umgebende Umwelt zu systematisieren und zu kategorisieren.

Beide Eigenschaften sind für den Aufbau des menschlichen Geistes erforderlich und beide Eigenschaften ergänzen sich gegenseitig, was am Beispiel der Sprache leicht

---

[315] vgl. für die folgende Einteilung: Montessori, M., Das kreative Kind, Freiburg 1972, S. 16ff.

[316] Montessori, M., Schule des Kindes, Freiburg 1976, S. 230

[317] Montessori, M., Das kreative Kind, Freiburg 1972, S. 164

plausibel zu machen ist. Das Alphabet und die grammatikalischen Regeln entspringen der Fähigkeit zu Abstraktion und sind beide begrenzt. Sie ermöglichen aber auch, eine nahezu unzählige Menge Wörter und Sätze bilden zu können, wozu es wiederum der Imagination bedarf.

> *„Geben wir diesem Teil des Geistes, der sich durch die Exaktheit aufbaut (Abstraktion, Anm. d. V.), einen Namen und nennen ihn „mathematischen Geist". Der Begriff stammt von dem französischen Philosophen, Physiker und Mathematiker Pascal. Er behauptete, dass die Form des menschlichen Geistes eine mathematische sei; das Abschätzen der exakten Dinge führt zum Wissen und zum Fortschritt."*[318]

Dieser mathematische Geist zeigt sich, sobald das Kind beginnt, zu vergleichen, zu zählen, zu ordnen oder zu messen.

Wie können Imagination und Abstraktion (mathematischer Geist) so gefördert werden, dass sie zu schöpferischen Leistungen führen?

Mit seiner Fähigkeit der Imagination läuft der Mensch laut M. Montessori Gefahr, sich von der Wirklichkeit zu entfernen. Deshalb ist es ein Ziel ihrer Pädagogik, die Imagination an die Wirklichkeit zu binden, die Fliehkraft der Phantasie, die ja für die Kreativität unentbehrlich ist, gleichsam auf die Erde zurückzulenken. Wodurch kann das geschehen? M. Montessori sieht in den *Sinnen* die Basis für die Eigenschaften des Geistes.[319]

> *„Die Schöpfung durch die Einbildungskraft stützt sich nicht nur vage auf die Sinne ..., sondern sie ist eine ganz an die Wirklichkeit gebundene Gestaltung. Je mehr sie sich an die Formen der geschaffenen äußeren Welt hält, umso höher ist der Wert ihrer inneren Schöpfung."*[320]

Also müssen die Sinne erzogen und geschult werden, was mit Hilfe des von M. Montessori entwickelten Sinnesmaterials erreicht werden soll.

Zugleich kann über die Erziehung und Schulung der Sinne auch die andere Eigenschaft des Geistes, nämlich das Abstraktionsvermögen, gefördert werden. Diese Erkenntnis M. Montessoris ist fürs erste betrachtet um so überraschender, als die Sinne und die Sinneserfahrungen ja genau das Gegenteil von dem sind, was die Abstraktion leistet. Da aber das Material mittels dessen die Sinne geschult werden auf Grund der Isolierung einzelner Eigenschaften bereits Abstraktionen der Wirklichkeit sind, sind sie ein hervorragendes Instrument, den abstrahierenden Geist zu fördern.

---

[318] Ebenda, S. 165

[319] vgl. Montessori, M., Schule des Kindes, Freiburg 1976, S. 227;

[320] Ebenda, S. 232

Deshalb kann M. Montessori mit Recht „das Material zur Erziehung der Sinne materialisierte Abstraktionen nennen oder grundlegendes mathematisches Material".[321] Und sie konkretisiert diese Aussage mit dem Hinweis:

> *„Bei unseren kleinen Kindern hat sich der mathematische Geist auf eine besondere und spontane Weise geäußert. Wenn wir sie die präzise Exaktheit beim Arbeiten lehrten, schien gerade diese Präzision sie zu interessieren. ... Es besteht kein Zweifel, dass dieses Material (das Sinnesmaterial, Anm. d. V.) nicht nur als Schlüssel zur Erforschung der Umgebung, sondern auch als Mittel zur Entwicklung des mathematischen Geistes betrachtet werden muss."*[322]

3.3.2 Das Sinnesmaterial als mathematisches Material

Wie ist die Wirkungsweise des Sinnesmaterials zu verstehen und auf welche Weise wird sie erreicht?

Zunächst wird durch die Sinnesschulung die Wahrnehmung erweitert. Dadurch wird auch wieder die Entwicklung der Intelligenz gefördert, denn wer mehr und genauer wahrnimmt, der sieht und erlebt mehr, er hat einen größeren Erfahrungshorizont und schult auf diesem Wege exaktes und genaues Denken. Dass die Entwicklung der Intelligenz in engem Zusammenhang mit der Sensomotorik des Kindes steht, wurde ebenso von J. Piaget u.a. gesehen und wird auch in der aktuellen Entwicklungspsychologie und Pädagogik als selbstverständlich betrachtet.

Die zweite und zugleich wichtigste Wirkungsweise der Sinnesschulung sieht M. Montessori darin, in die vom Kind gewonnenen und gehäuften, aber noch konfus vorhandenen Eindrücke Ordnung und Klarheit zu bringen. Daraus leitet sie auch die Beschaffenheit der Sinnesmaterialien ab: Sie sind nach bestimmten Eigenschaften geordnet, wie z. B. Form, Maß, Klang, Zustand von Rauheit, Gewicht, Temperatur usw. Es sind also gleichartige Gegenstände, die über die gleiche Haupteigenschaft verfügen, jedoch in – möglichst mathematisch festgelegten – Abstufungen. Minimum und Maximum bilden die Grenzen und lassen die Unterschiede deutlich werden. Die Tatsache, dass nur eine Eigenschaft dominant ist (Isolierung der Eigenschaften) verhindert eine Ablenkung und der Prozess der Ordnung des kindlichen Geistes wird noch verstärkt.[323]

Darüber hinaus hat das Sinnesmaterial weitere Eigenschaften: Wenn möglich, soll im Material eine Fehlerkontrolle eingebaut sein, damit das Kind selbstständig arbeiten kann und – um Fehler zu vermeiden – lernt, mit immer höherer Genauigkeit zu verfahren. Ferner sollen die Gegenstände ästhetisch, anziehend sein und Aufforderungs-

[321] Montessori, M., Das kreative Kind, Freiburg 1972, S. 166

[322] Ebenda, S. 165

[323] vgl. Ebenda, S. 114 f.

charakter haben. So werden die Kinder einerseits zur Arbeit mit den Materialien und andererseits zu einem pfleglichen Umgang mit den Gegenständen animiert. Aktivität ist ein weiteres Merkmal des Sinnesmaterials. Die Materialien müssen sich für den Umgang mit ihnen eignen. Nur dann wird das Kind anhaltendes Interesse an ihnen haben. Schließlich hält M. Montessori die mengenmäßige Begrenzung der Materialien für notwendig. Das Kind soll nicht im Material ersticken und Ordnung in seinen Geist bringen.

Als Beispiel für das Sinnesmaterial und seinen spezifischen Charakter als mathematisches Material und als „materialisierte Abstraktion" soll der Umgang mit den „Roten Stangen" und dessen Wirkungsweise beschrieben werden:

Abbildung 3.3: Rote Stangen[324]

Bei den roten Stangen handelt es sich um 10 Holzstangen quadratischen Querschnitts von 2,5 cm Seitenlänge. Sie weisen jeweils einen Längenunterschied von 10 cm auf, wobei die kürzeste 10 cm und die längste 100 cm misst. Aufgabe der Kinder ist es nun, die auf einem Teppich liegenden vermischten Stangen der Länge nach wie Orgelpfeifen aufzureihen. Hat das Kind das geschafft, wird es sie wieder auseinandernehmen, mischen und sie wieder geordnet aufreihen. Bevor das Kind mit den Stangen arbeitet, wird ihm die Umgangsweise damit von der Erzieherin demonstriert. Nachdem das Kind die Stangen zunächst ungeordnet auf den Teppich gelegt hat, nimmt die Erzieherin die längste Stange, streicht mit der Hand die ganze Länge der Stange ab und legt sie gesondert auf den Teppich. Sie greift die nächstkürzere Stange, streicht diese ebenfalls ab und legt sie linksbündig unter die längste. So verfährt sie mit allen weiteren acht Stangen. Am Ende fährt die Erzieherin die linksbündige Kante entlang, um einen Anfangswert für den Längenvergleich zu liefern. Nun fährt die Erzieherin die treppenförmige Linie an der rechten Seite entlang, um die Abstufungen zu unterstreichen. Als Abschluss der Übung nimmt die Erzieherin die 10 cm lange Stange und zeigt, dass deren Länge den Längenunterschied zwischen zwei anderen Stangen darstellt. Nun ist das Kind aufgefordert, nach dem Mischen der Stangen durch die Erzieherin die Übung durchzuführen.

[324] www.lernspielundspass.de (2005)

Was geschieht bei dieser Übung?

Zunächst wird der visuelle Sinn trainiert, denn die Kinder müssen Unterschiede der Dimension Länge erkennen. Das Kind lernt Ordnungsstrukturen zu erkennen und zu bilden, in diesem Fall die Ordnungsstruktur der Reihenbildungen. Das Kind muss seine Bewegungen koordinieren, da es bei diesen großen Gegenständen erforderlich ist, dass das Kind seinen ganzen Körper bewegt, um die Stangen in die jeweils richtige Position zu bringen. Die Begriffe „kurz“ und „lang“ mit den jeweiligen Komperativ- und Superlativformen können eingeführt oder vertieft werden. Das Entlangstreichen an den Stangen stellt einen sensomotorischen Reiz dar und schult ein Gefühl für die Dimension Länge. Ein weiteres Ziel dieses Sinnesmaterials ist die Vorbereitung auf den Umgang mit Zahlen. Es kann bis 10 gezählt werden; es kann addiert und subtrahiert werden, es können Ergänzungsaufgaben durchgeführt werden; es können Nachfolger und Vorgänger bestimmt bzw. ein Gefühl für diese Eigenschaften entwickelt werden. Die einzelnen Stangen können als „Maßstab“ verwendet werden, um Gegenstände in der Umgebung miteinander zu vergleichen.

Alle Sinnesmaterialien sind so aufgebaut, dass sie mindestens eine Grundoperation des ordnenden Denkens, d.h. des Klassifizierens vertreten. Beispiele dafür sind Kontrastbildung, Paarbildung oder das Ordnen von Abstufungen. Die roten Stangen vertreten die letztgenannte Kategorie. Der Aufbau von Denk- und Ordnungsstrukturen erfolgt in drei Schritten und unterstützt die Entwicklung logischen Denkens:

1. Unterscheiden von Eigenschaften, denn „der erste Schritt des Verstandes ist die Unterscheidung“[325]
2. Wahrgenommene Unterschiede klassifizieren, d.h. Merkmale feststellen, ordnen und benennen.
3. Relationen bilden, d.h. Merkmale in Beziehung setzen.

Betrachtet man, wie M. Montessori mit Hilfe des Sinnesmaterials die Entwicklung des mathematischen Geistes fördert, so wird deutlich, dass sie der Mathematik einen hohen Stellenwert in der Lebenswelt des Kindes von Beginn an beimisst und Mathematikunterricht nicht erst im Schulalter für relevant hält.

> *„Der Verstand analysiert den Gegenstand, zieht eine bestimmte Eigenschaft heraus und fasst auf deren Grundlage eine Reihe von Gegenständen zusammen, indem er sie unter dem gleichen Gesichtspunkt verbindet. Wenn diese Fähigkeiten der Auswahl einzelner Eigenschaften eines Gegenstandes nicht erworben wird, ist die Assoziation aufgrund der Ähnlichkeit, die Synthese und jede höhere Verstandesarbeit unmöglich.“*[326]

---

[325] Montessori, M., Schule des Kindes, Freiburg 1976, S. 187

[326] Ebenda, S. 197

Seriation und Subsumption, Synthese und Analyse sind die Fähigkeiten des Verstandes, die in der Mathematik eine fundamentale Bedeutung haben und zunächst mit Hilfe des Sinnesmaterials, später mit Hilfe des mathematischen Materials gefördert werden können.[327]

3.3.3 Umsetzung im Mathematikunterricht

Neben allen Erkenntnissen über die Entwicklung des Geistes und die Möglichkeiten der Förderung mit Hilfe des „Materials" sieht M. Montessori auch, dass bei der Umsetzung im Unterricht die Psychologie des Kindes eine fundamentale Rolle spielt. So gibt sie beispielsweise ihrem „Arbeitsbuch Geometrie" den Zusatz „Psycho-Geometrie", womit sie zum Ausdruck bringen will, dass dieser Lehrgang zur Geometrie auf der Basis der Psychologie des Kindes konzipiert ist. Sie schreibt:

> *„Die Lehrer sind jedoch bestrebt, das kindliche Denken schnell zur Abstraktion zu führen. Denn sonst ginge der eigentliche Sinn des Unterrichtens verloren, den Verstand auf die Ebene des abstrakten Denkens zu erheben.*
>
> *Der Weg, der hierbei beschritten wird, ist allein auf die Beurteilung des Lehrers gestützt. Er ist es, der bestimmt, was einfach und was schwierig ist, was und wie unterrichtet werden muss. Und wenn er schließlich vom Einfachen und Konkreten zu abstrakten Kombinationen von Zahlen und Zeichen gekommen ist, glaubt er, zur* Intelligenz *des Kindes durchgedrungen zu sein und diese gelenkt zu haben.*
>
> *Aber wie oft irrt der Lehrer sich! Nur in Ausnahmefällen hat er in den Geist des Kindes eindringen können. Meist waren die Anstrengungen der Lehrkraft völlig fruchtlos, weil er es nicht geschafft hat, das Kind zu interessieren. Die angestrengte Abstraktion war fast immer die erzwungene Antwort aus einem unter Druck gesetzten Gedächtnis. Die Worte* Schwierigkeit, Klippe, Hindernis *werden für ein beklagenswertes Versagen im Unterrichten elementarer Mathematik benutzt, obwohl Mathematik eine der ersten Stufen zur Kultur ist....*
>
> *Das Lernen ist einer wesentlichen Bedingung unterworfen, nämlich, dass der Schüler Wissen erwerben* will, *dass er* Aufmerksamkeit *aufbringen kann – für was auch immer – wenn es ihn nur* interessiert. *Seine* geistige Aktivität *ist die unentbehrliche Bedingung für ein Gelingen. Alles, was langweilt, entmutigt oder unterbricht, wird zu einem Hindernis, das durch keine logische Vorbereitung des Unterrichts überwunden werden kann. Was man also unterscheiden muss, sind die notwendigen Voraussetzungen, um spontane Aktivität des Individuums zu entwickeln, die Kunst, Freude und Begeisterung für die Arbeit zu wecken.*

[327] vgl. Tschamler, H., Unveröffentlichtes Manuskript eines Schulkonzeptes für ein Montessori-Gymnasium, München 2000, S. 16

> *Das* Interesse*, das die spontane Aktivität steuert, ist der wahre psychologische Schlüssel.“*[328]

Wie jedoch kann der Lehrer es schaffen, das Interesse des Schülers zu wecken und ihn damit zu der nötigen Anstrengung zu motivieren, die nötig ist, um zu begreifen und aufzunehmen?

Als erste Voraussetzung für einen Unterricht, der sich am Interesse des Schülers orientiert, nennt M. Montessori die Beachtung der sensiblen Phasen.

> *„Das Kind handelt also mit Begeisterung, mit aktivem Interesse, in Übereinstimmung mit seinen sensiblen Phasen.“*[329]

Sobald in einer sensiblen Phase ein „Kulturerwerb“ stattgefunden hat, so kann darauf die weitere Entwicklung aufbauen. Die Muttersprache beispielsweise kann nur in einer bestimmten Zeit im Kindesalter erworben werden und darauf aufbauend kann sie sich dann ein ganzes Leben lang weiterentwickeln. Mit dem schon Vorhandenen kann sich Neues verbinden und so kann entsprechend der geistigen Entwicklung des Kindes ein Netz von Wissen entstehen. Je nach den persönlichen Interessen – M. Montessori spricht von Sensibilitäten – wird sich das neue Wissen um diesen Kern von Interessen gruppieren.

> *„Das Kind bleibt bei seiner Wahl mit einer unbeirrbaren Ausdauer. Dies ist so klar, dass der Lehrer gegen die Neigungen des Kindes ankämpfen muss, wenn er es zwingt, seinen eigenen Vorstellungen zu folgen ... . Das Kind lernt jedoch auf seine Art durch spontane Auswahl, Wiederholung einer Übung und durch gleichzeitige sinnenhafte und motorische Aktivität, welche die sensible und psychische Aktivität begleitet.“*[330]

Der Unterricht soll dazu dienen, dem Kind die unübersichtliche Welt, die es ja erforschen muss, in begrenzterer und greifbarer Form näher zu bringen. Die Methode für den Unterricht bezeichnet M. Montessori als einen Unterricht „von der Peripherie“ aus. Sie unterscheidet zwischen „Zentrum“ und „Peripherie“. Zentrum ist der innerste Kern des Menschen, der gewissermaßen ein Geheimnis ist und all das umfasst, was nicht durch die Sinne erfasst werden kann, also z. B. Reflexion, Konklusion oder Analysen. Die Peripherie hingegen ist der Bereich der Erfahrung durch die Sinne. Der Austausch zwischen Zentrum und Umwelt erfolgt durch die Peripherie, durch die Sinne und die Bewegung. Durch die Peripherie nimmt das Individuum Reize auf und handelt. Für die Praxis bedeutet das, dass versucht werden muss, die Peripherie z. B. durch das Angebot didaktischer Materialien anzusprechen. Mit Hilfe solcher Materia-

[328] Montessori – Vereinigung e.V., APS Projectgroep Montessori (Hrsg.), Arbeitsbuch Geometrie, Köln und Utrecht 1996, S. 4

[329] Ebenda S. 5

[330] Ebenda S. 6

lien wird das Kind dann angeregt, zu arbeiten, zu reflektieren, zu schlussfolgern usw. und damit zum Zentrum vorzudringen. Gibt man jedoch fertige Lösungen oder genaue Erklärungen zu den vom Kind bearbeiteten Problemen, wird es diese nicht wirklich durchdringen können.

Im Unterricht muss man also auf die „peripheren Äußerungen“ der Kinder achten und dem Zentrum die Freiheit lassen, die es zu seiner Entwicklung braucht. Nicht der Lehrer gibt den seiner Meinung nach „geraden Weg“ zum Lernen vor, sondern das Kind.

> *„Statt auf das Fassungsvermögen des Verstandes oder die Mechanismen des Geistes zu setzen, um feststehende Tatsachen auf das Denkvermögen des Schülers zu übertragen, bieten wir seiner Peripherie, die in Kontakt mit der Umgebung steht, die Mittel an, die sich für die spontane Übung des Geistes eignen.“*[331]

In späteren Schriften macht M. Montessori noch genauere Aussagen über das, was sie unter Zentrum versteht und vervollständigt so ihren Ansatz. Entscheidend jedoch ist der Gedanke, dass dem Kind Freiheit für seine Entwicklung gewährt werden soll, statt ihm einen vorgedachten und vorgegebenen Weg aufzuoktroyieren.

Ein weiterer Grundsatz ihres Unterrichts ist das Verstehen des Menschen als Ganzheit.

> *„Menschen, die keinen Kopf haben, aber Hände, und Menschen, die einen Kopf, aber keine Hände haben, sind in der modernen Gesellschaft in gleicher Weise fehl am Platze.“*[332]

Damit ist also zum einen gemeint, dass der ganze Mensch, wie J. H. Pestalozzi sagt, mit Hand, Herz und Kopf am Lernen beteiligt ist. Die Hand, die den ganzen Körper mit allen seinen Sinnen repräsentiert und Werkzeug und Grundlage der Intelligenzentwicklung ist. Als Organ des Geistes befähigt sie uns zum Handeln und macht den Menschen zu einem Kultur schaffenden Wesen. Das Herz, das für die Emotionalität und Begeisterung, aber auch für das Gefühl der Mitmenschlichkeit, der Güte und der Herzenswärme steht, begleitet und beflügelt die Tätigkeit des Verstandes und des Willens und trägt nach M. Montessori in hohem Maße zum Lernerfolg bei. Zum andern ist aber auch gemeint, dass Zusammenhänge beim Lernen erfasst werden und nicht nur Einzelheiten gelernt werden.

> *„Dies ist ein wesentlicher Erziehungsgrundsatz: Einzelheiten lehren bedeutet Verwirrung stiften. Die Beziehungen unter den Dingen herstellen bedeutet Erkenntnisse vermitteln.“*[333]

[331] Ebenda, S. 9

[332] Montessori, M., „Kosmische Erziehung“, Freiburg 1988, S. 131

[333] Ebenda, S. 126

Ferner ist für M. Montessori die „Freie Arbeit“ im Unterricht von zentraler Bedeutung. Diese Art von Unterricht ermöglicht den Schülern die Beschäftigung mit einer nach entsprechendem Interesse frei gewählten Arbeit im Rahmen einer vom Lehrer gestalteten „vorbereiteten Umgebung“. Aktivität und Freiheit sind die beiden entscheidenden Voraussetzungen dafür, dass das Kind sich in seine Arbeit versenken und so zu höchster Konzentration kommen kann. Sie wird von M. Montessori Polarisation der Aufmerksamkeit genannt.

3.3.4 Der Umgang mit Jugendlichen in der Schule

M. Montessori erkannte, dass das Kind mit dem 12. Lebensjahr einen Lebensabschnitt, sie nennt ihn einen „geschlossenen Zyklus“[334], abschließt, um in eine neue Phase einzutreten, die durch neue und andere Bedürfnisse gekennzeichnet ist. Ein solches Bedürfnis ist das Verlangen, während seiner empfindlichen Periode des physischen Übergangs beschützt zu werden. Das zweite neue Bedürfnis ist die Fähigkeit, in den Stand versetzt zu werden, seine Rolle in der Gesellschaft zu erkennen und spielen zu können. M. Montessori spezifiziert nun noch weiter, wie die Personalität der Jugendlichen unter diesen neuen Bedingungen gefördert werden muss:

Der Mensch braucht einen <u>starken Charakter</u>, einen <u>schnellen Verstand</u>, <u>moralische Erziehung</u> und <u>praktische Fähigkeiten.</u> Dabei lehnt M. Montessori eine strenge Spezialisierung ab, da sie dem Menschen möglicherweise die Fähigkeit zu schneller Anpassungsfähigkeit nehmen könnte.

Die Schule ist nach M. Montessoris Überzeugung nicht in der Lage, mit den Jugendlichen adäquat umzugehen. Jugendliche dieses Alters wollen nicht mehr freiwillig arbeiten und ermüden schnell.

Deshalb schlägt M. Montessori einen ganz neuen Weg für diese Altersstufe vor:

> *„Während der schwierigen Periode der Reifezeit ist es wünschenswert, das Kind fern von seinem gewohnten Milieu, seiner Familie, auf dem Land leben zu lassen, in einer ruhigen Umgebung, im Schoße der Natur.“*[335]

Dort sollten die Jugendlichen in einem familiären Haus leben, das von einem Ehepaar geleitet wird. Sie sollten ein Gasthaus, ein Geschäft und einen Bauernhof betreiben. Diese Infrastruktur soll dann Fundament für die Arbeit und das Studium darstellen. Der genaue Lehrplan dafür muss sich durch die Erfahrung während der Arbeit ganz natürlich aufbauen und wurde deshalb nicht von M. Montessori vorgegeben.

---

[334] Montessori, M., „Kosmische Erziehung“, Freiburg 1988, S. 128

[335] Ebenda, S. 139

Wichtig ist ihr dabei, dem Jugendlichen „genügend Freiheit" zu lassen, dass er „nach einer individuellen Initiative"[336] handeln kann. Trotzdem muss es Grenzen und Regeln geben, die in der gesamten Einrichtung gelten müssen, damit das „individuelle Handeln fruchtbar ist"[337]. Dabei darf aber nicht der Eindruck entstehen, dass die Jugendlichen sich nicht selbst disziplinieren könnten und müssten.

Das inhaltliche Programm umreißt M. Montessori nur sehr grob: Es muss Sachkompetenz, sittliche Kompetenz und soziale Kompetenz erworben werden. Zur Erfüllung dieser Aufgaben nennt sie beispielhaft jeweils drei Unterrichtsfächer. [338] Als erstes nennt sie künstlerische Fächer, wie Musik, Sprache und bildnerische Arbeit. Als zweites schlägt sie moralische Erziehung, Mathematik und Sprachen vor. Dazu schreibt sie:

> *„Die „Schöpferin" Bildung, bestimmt zur eigentlichen Grundlegung der Personalität, teilt sich in drei Zweige: in die moralische Erziehung, die Mathematik und die Sprachen ... . Die Mathematik: Heute ist die menschliche Intelligenz keine natürliche mehr, sondern eine mathematische Intelligenz; und ohne mathematische Erziehung kann man unmöglich den Fortschritt unserer Epoche begreifen noch daran teilnehmen. Ein Geist ohne mathematische Bildung ist heute dem Menschen zu vergleichen, der das Alphabet nicht kannte zu der Zeit, als alles aus der literarischen Bildung hervorging. Schon im Naturzustand ist der menschliche Geist ein mathematischer: Er tendiert zur Genauigkeit, zum Maß und zum Vergleich. Er ist fähig, in bestimmten Grenzen zahlreiche „Wirkungen" zu begreifen, die die Natur den Menschen darbietet, während sie ihm die Welt der „Ursachen" verbirgt."* [339]

Als dritten Bereich nennt sie das „Studium der Erde und der lebenden Natur", das Studium der Fächer Physik und Chemie und schließlich der Geschichte der Menschheit.

Welche Methoden stellt sich M. Montessori bei der Umsetzung der genannten Inhalte vor?

Sie lässt alle Methoden zu, die beim Schüler das größtmögliche Interesse erwecken und ihm die Möglichkeit geben, „alleine zu arbeiten, selbst seine Erfahrungen zu machen und die erlauben, die Studien mit dem praktischen Leben abzuwechseln".[340] Sie würde den Schülern einen Anreiz zum Lernen geben, indem sie die Bildungsin-

---

[336] Ebenda, S. 145

[337] Ebenda, S. 145

[338] vgl. Montessori-Landesverband Bayern (Hrsg.), Schulkonzept der Montessori-Schulen im Montessori-Landesverband Bayern, München 2001

[339] Montessori, M., „Kosmische Erziehung" – Die Stellung des Menschen im Kosmos, Menschliche Potentialität und Erziehung, Von der Kindheit zur Jugend, Freiburg 1988, S. 150

[340] Ebenda, S. 154

halte höherer Schulen auf gut sichtbare Tafeln schreibt, die Schüler jedoch nicht ausdrücklich verpflichtet, diese Inhalte zu lernen.

M. Montessori lässt also die Wahl der Methode weitgehend offen, nur das Ziel, nämlich das Interesse des Schülers zu wecken, wird klar festgelegt. Das lässt den beteiligten Lehrern viel Freiraum in der Umsetzung, setzt aber auch ein hohes Maß an Eigeninitiative voraus. Welche Konsequenzen aus der Entwicklungstheorie M. Montessoris für die konkrete Unterrichtspraxis zu ziehen sind, wird im Kapitel 5 behandelt.

3.4 Adoleszenz und Lernmotivation: Helmut Fend

„Der richtige Weg beginnt mit der Aufmerksamkeit für die Jugend."

Sokrates (um 470 – 399 v.Chr.)

Ging es im ersten Teil dieses Kapitels um die Entwicklung des Denkens als entwicklungsbedingte Voraussetzung für erfolgreichen Mathematikunterricht, so wird im Folgenden eine weitere entwicklungsbedingte Voraussetzung für das genannte Ziel betrachtet, nämlich die Lernmotivation in der Adoleszenz.

Die Übergangszeit von der Kindheit zur Adoleszenz stellt innerhalb der Jahre, in denen das Kind bzw. der Jugendliche schulpflichtig ist, die tiefgreifendste Veränderung der Persönlichkeitsentwicklung dar. Die jungen Menschen müssen verschiedene Entwicklungsaufgaben erfüllen, deren Bewältigung weitreichende Folgen für das weitere Leben haben kann. H. Fend arbeitet die folgenden Entwicklungsaufgaben für die Jugendlichen in dieser Zeit heraus: Den Körper bewohnen lernen, Umgang mit Sexualität lernen, Umbau der sozialen Beziehungen, Umgang mit der Schule, Berufswahl, Bildung, Identitätsarbeit und die Persönlichkeitsentwicklung.[341] Nicht bei allen diesen Entwicklungsaufgaben kann die Schule den Schülern unterstützend beistehen, aber sie könnte es mehr, als es tatsächlich passiert.

Im Folgenden soll vor allem der Aspekt der Lernmotivation der Schüler herausgegriffen werden, da er für den Mathematikunterricht von großem Belang ist.

Die Veränderungen in der Pubertät wirken sich in hohem Maße negativ auf die Lernmotivation der Schüler und damit den schulischen Erfolg aus. Wenn somit die Berücksichtigung entwicklungspsychologisch bedingter Veränderungen für einen erfolgreichen Mathematikunterricht eine wichtige Rolle spielt, so ist es notwendig, diese Veränderungen näher ins Auge zu fassen.

In der klassischen Entwicklungspsychologie besteht kein Zweifel, dass beim Übergang von der Kindheit in die Adoleszenz die Leistungsbereitschaft einen Rückgang

[341] Fend, H., Entwicklungspsychologie des Jugendalters, Augsburg 2000

erlebt. H. Fend[342] nennt mehrere Studien aus Deutschland und den USA, die diesen Leistungseinbruch bestätigen.[343] Die Ergebnisse einer dieser Studien seien herausgegriffen: R. Pekrun stellte für die Jahrgangsstufen 5 bis 9 verschiedene Komponenten der Lernmotivation fest, nämlich die intrinsische Motivation, die Kompetenzmotivation, die Leistungsmotivation, die soziale Motivation und die Motivation, sich anzustrengen. Bei allen Komponenten der Motivation, mit Ausnahme der Leistungsmotivation, war in der Phase der Pubertät ein Motivationsrückgang zu verzeichnen. Dies bedeutet, dass Erfolg bzw. Misserfolg weiterhin Motivationsquellen für das Lernen darstellen, dass aber Interesse am Lernen insgesamt und die Anstrengungsbereitschaft für das Lernen stark abnehmen.

Wie ist dieser Motivationsverlust zu erklären?

H. Fend nennt drei Hauptgründe:

1. Die Bedeutung der Peergroup wächst in dieser Zeit stark an und auch der Druck, der von Gleichaltrigen ausgeht. Der Wunsch des Jugendlichen in dieser Zeit dazuzugehören und nicht anders zu sein, kann dazu führen, dass das Interesse an persönlichem Leistungserfolg zurückgeht.

2. Die Phase ist entwicklungsbedingt auch geprägt durch eine Veränderung der Interessen und Bedürfnisse. Die körperliche Entwicklung mit dem Erwachen sexueller Interessen kann die Aufmerksamkeit der Jugendlichen so absorbieren, dass schulische Belange und Erfordernisse in den Hintergrund geraten.

3. Das Bedürfnis der Jugendlichen nach Unabhängigkeit und Abnabelung von ihren Eltern hin zu Selbstständigkeit und Selbstbestimmung wächst in dieser Zeit stark an. Das sinkende Interesse an schulischen Belangen sehen Eltern jedoch häufig mit Sorge und versuchen Einfluss auf das Arbeitsverhalten des Jugendlichen zu nehmen. Gerade dies aber lehnen die Heranwachsenden in ihrem Prozess der Verselbstständigung ab und bringen dies dadurch zum Ausdruck, dass sie sich von Schule und Lernen betont abwenden.

---

[342] Fend, H., Der Umgang mit Schule in der Adoleszenz, Aufbau und Verlust von Lernmotivation, Selbstachtung und Empathie, Entwicklungspsychologie der Adoleszenz in der Moderne, Band IV, Bern 1997

[343] Pekrun, R., Facets of Adolescents' Academic Motivation: A Longitudinal Expectancy-Value Approach, in: M.L. Maehr & P.R. Pintrich (Eds.), Motivation and Adolescent Development (Advances in Motivationand Achievement Vol. 8, Greenwich JAI Press 1993, S.139 – 189

Eccles, J.S., Lord, S., Midgley, C., What are we doing to early adolescents? The impact of educational contexts on early adolescents. Special Issue: Development and education across adolescents. American Journal of Education, 99(4), 1991, S. 521 – 542

Eccles, J.S., Lord, S., Midgley, C., Changes in academic motivation and self-perception during early adolescence, in: Raymond Motemayor, Gerald R. Adams & Thomas P. Gullotta (Eds.), From childhood to adolescence: A transitional period?, Advances in adolescent development: An annual book series (Vol. 2), Newbury Park: Sage Publications 1990, S.134 – 155

Nicht alle Jugendlichen entwickeln die genannten Bedürfnisse, Wünsche und Vorstellungen in gleicher Intensität, weshalb die Reduzierung der Leistungsbereitschaft auch von Fall zu Fall sehr unterschiedlich ausgeprägt sein kann.

Nun lassen sich aber die dargelegten Ergebnisse nicht verallgemeinern. Es gibt Schüler, die auch in der Zeit der Pubertät leistungsstabil bleiben oder – in seltenen Fällen – sogar ihre Leistungen noch steigern können. Wie lässst sich dieses überraschende Ergebnis erklären? Ein entscheidender Faktor scheint zu sein, wie gut es gelingt, in der Zeit vor der Pubertät, Lernhaltungen zu erzeugen. Denn der Grad der Anstrengungsbereitschaft ist ein sich selbst stabilisierender Faktor der Persönlichkeit, der auch über die Zeit der Pubertät relativ stabil bleibt, wenngleich möglicherweise nicht auf gleich hohem Niveau. Die entscheidende Frage ist also, wovon eine positive Lernhaltung abhängt.

Dazu können grundsätzlich personale und kontextuelle Faktoren in Frage kommen, wobei hier eher die kontextuellen Faktoren von Interesse sind, denn diese sind möglicherweise durch pädagogische Einflüsse veränderbar. Dabei sind als Beeinflussungsquellen zunächst das Elternhaus, die Schule mit der Qualität des Schüler-Lehrer-Verhältnisses und die Altersgruppe innerhalb der Schule zu nennen. Ein gutes Verhältnis zu den Eltern, die Wahrnehmung einer hilfreichen Lehrerschaft, selbst die Wahrnehmung, dass die Schule viel verlangt, und eine leistungspositive Haltung unter den Mitschülern wirken sich positiv auf eine stabile Leistungsorientierung aus.

Aufgabe der Schule wäre es also, auf die genannten entwicklungsbedingten Veränderungen der kindlichen Lernbereitschaft einzugehen, ein wohlwollendes Verhältnis zwischen Lehrer und Schüler herzustellen, die Interessen der Schüler zu berücksichtigen und die Unterrichtsmethoden diesen Interessen anzupassen.

<u>Hauptteil II</u>

4 Resümee und Systematisierung der Kriterien eines an Bildung und Entwicklung orientierten Mathematikunterrichts

4.1 Die Vermittlungsproblematik von Theorie und Praxis

Die bisherigen Überlegungen verfolgten die Intention, eine Basis zu erarbeiten, die die Grundlage eines bildenden und an der Entwicklung eines Kindes orientierten Mathematikunterrichts schaffen sollte. Im Anschluss daran geht es nun darum, den Schritt von den theoretischen Überlegungen zur praktischen Durchführung zu gehen. Die Frage lautet: Wie soll ein Mathematikunterricht aussehen, der an die erarbeiteten Eckpunkte der dargelegten bildungs- und entwicklungstheoretischen Entwürfe anknüpft?

Noch bevor diese Frage erörtert wird, muss auf die Vermittlungsproblematik von Theorie und Praxis selbst eingegangen werden.

Wie sieht der Übergang von der Theorie zur Praxis aus? Kann sich die Unterrichtspraxis auf ein Handlungswissen stützen, das ihr die genannten Theorien zur Verfügung stellt? Oder darf sie sogar auf Handlungsanleitungen hoffen, die sie den Theorien entnehmen kann?

Mit diesen Fragen wird das Problem des Theorie-Praxis-Verhältnisses angesprochen, das von grundsätzlicher Natur ist und das insbesondere ein Problem der Handlungswissenschaften darstellt. Die Gründe der Vermittlungsproblematik liegen **erstens** im Wesen der Theorie und Praxis selbst.

Jede Praxis bewegt sich in einem konkreten, geschichtlich und gesellschaftlich bedingten Rahmen. Sie lebt aus Situationen, aus aktuellen Anlässen, aus konkreten Erwartungen. Sie reagiert auf Herausforderungen und Probleme ihrer Zeit. Der praktisch Handelnde muss tätig werden, auch wenn Widersprüche sein Verhalten bestimmen. Er kann weder warten, bis eine theoretische Lösung sich abzeichnet, noch kann er durch passives Verhalten den Widersprüchen entgehen.

Während die Praxis an Situationen gebunden ist, die den Handelnden zu ständigen Entscheidungen zwingen, hat auch die Tauglichkeit der Theorie ihre grundsätzlichen Grenzen. Die Theorie zielt auf das Allgemeine, deren Sätze den einzelnen und konkreten Fall außer Acht lassen. Sie ist situationsenthoben und erfasst die Realität nie in ihrer vollen Bandbreite.

Zweitens liegen die Gründe für das Vermittlungsproblem von Theorie-Praxis in den Funktionen, die der Theorie zugewiesen werden.[344] Geht die Theorie der Praxis voraus und hat sie deshalb vorwiegend prognostizierende und die Praxis anleitende Funktionen zu erfüllen? Oder geht die Praxis der Theorie voraus und hat die Theorie folglich die Funktion, die Praxis zu reflektieren und zu korrigieren? Innerhalb der Pädagogik wird diese Frage kontrovers diskutiert.

So weist z. B. die empirisch-analytische Pädagogik der Theorie die Aufgabe zu, allgemeine Gesetze aufzustellen, die pädagogische Handlungsabläufe vorhersagbar machen.

Gemäß der Position der hermeneutisch-dialektischen Pädagogik geht die Theorie nicht der Praxis, sondern die Praxis der Theorie voraus. Sie kann von der Theorie nicht eingeholt werden. Eine Vermittlung von Theorie und Praxis findet ausschließlich durch den in Situationen handelnden Erzieher selbst statt. Der Theorie kommt lediglich die Aufgabe zu,

- durch kritische Situationsanalyse erzieherische Entscheidungen erleichtern zu helfen, ohne diese dem Erzieher abzunehmen;
- durch Sinndeutung des erzieherischen Gesamtanliegens alles konkrete pädagogische Handeln auf dieses eine Anliegen, das im Begriff der Bildung beschlossen liegt, hinzulenken;
- durch Theoriekritik die pädagogische Praxis verbessern zu helfen.

Einen jüngsten Vermittlungsversuch von Theorie und Praxis hat A. v. Pronczynsky unter Bezugnahme auf den aristotelischen Poiesisbegriff unternommen. Demzufolge kommt der Theorie die Aufgabe zu, Lernvorgänge als Prozesse der Selbst-Hervorbringung von Wissen und Können begreifbar zu machen.

Welcher Position man auch immer den Vorzug geben mag, eines scheint sicher zu sein: Von der Theorie sind keine unmittelbar anwendbaren Erkenntnisse zu erwarten. Gerade die beiden letzten Positionen innerhalb der Theorie-Praxis-Diskussion haben aber gezeigt, dass die Kluft zwischen Theorie und Praxis nicht unüberbrückbar ist. Lediglich auf den Versuch einer Eins-zu-Eins-Übertragung muss verzichtet werden. Sehr wohl aber bietet die Bildungstheorie die Möglichkeit, Kriterien zu erarbeiten, die das Unterrichtsgeschehen leiten können. In Anlehnung an D. Benner können diese als „regulative Prinzipien“ bezeichnet werden[345], die zwei Aufgaben zu erfüllen haben: Zum einen sollen sie den Gang der pädagogischen Praxis leiten. Zum andern stellen sie gleichsam Standorte dar, von denen aus die Praxis beurteilt werden kann.

---

[344] vgl. Tschamler, H., Wissenschaftstheorie, München 1996, S. 107-119.

[345] Benner, D., Allgemeine Pädagogik, Weinheim und München 1987, S. 73ff.

Diese regulativen Prinzipien werden im Folgenden in drei Schritten erarbeitet: Erstens soll gezeigt werden, welche Schlüsse die genannten Bildungstheoretiker selbst aus ihren bildungstheoretischen Überlegungen auf die Gestaltung des Schulwesens bzw. den Mathematikunterricht gezogen haben. In einem zweiten Schritt wird ein Resümee aus den mathematikdidaktischen Positionen und den entwicklungspsychologischen Grundlagen gezogen. In einem dritten Schritt werden die erarbeiteten regulativen Prinzipien in Form einer Matrix zusammengefasst und kurz erläutert.

4.2 Die Konsequenzen aus den Bildungstheorien W. v. Humboldts, J. F. Herbarts und G. Kerschensteiners für die Gestaltung des Unterrichts

Im Folgenden soll gezeigt werden, welche Konsequenzen W. v. Humboldt, J. F. Herbart und G. Kerschensteiner selbst für den Aufbau und die Gestaltung des Unterrichts aus ihren bildungstheoretischen Überlegungen gezogen haben. Es ist ja nicht selbstverständlich, dass Theoretiker auch konkrete Vorschläge für die Praxis erarbeiten. Insofern handelt es sich um einen Glücksfall, dass von den genannten Klassikern auch praktische Gestaltungspläne überliefert sind. Auch wenn deren schulpolitische Reformvorschläge für diese Arbeit weniger bedeutsam sind, verdienen ihre unterrichtspraktischen Vorschläge besondere Aufmerksamkeit.

W. v. Humboldts schulpraktische Vorschläge

Als zeitweiser Direktor der neu eingerichteten „Sektion für Cultus und Unterricht“ konnte er unmittelbar Einfluss auf die preußische Schulreform nehmen, so dass zu erwarten ist, dass seine Bildungstheorie in seinen Reformvorschlägen eine konkrete Umsetzung erfahren hat. Diese Vorschläge finden sich skizzenhaft in seinem Königsberger und Litauischen Schulplan von 1809, auf die hier Bezug genommen wird. Auch wenn diese beiden Schulpläne den Anschein erwecken, vorwiegend schulorganisatorische Reformen im Auge zu haben, so sind sie doch sowohl in ihrem Gesamtaufbau als auch in ihren Einzelbestimmungen ein einzigartiger Beleg für die Umsetzung seiner bildungstheoretischen Vorstellungen. In ihnen wird deutlich, dass W. v. Humboldt institutionell absichern wollte, was für ihn unverzichtbarer Bestandteil der Bildung ist: Den Heranwachsenden für das Leben, nicht aber für einen bestimmten Beruf zu qualifizieren.

W. v. Humboldt verwendet für diesen Teil der Bildung, der durch die Schule vermittelt werden soll, den Begriff „Allgemeinbildung“. Dabei besagt der Begriff „allgemein“ erstens das Gegenteil von berufsvorbereitend und zweitens das Gegenteil von elitär. Denn da Bildung die Aufgabe jedes Einzelnen ist, muss der allgemeinbildende Unterricht jeden Menschen auf diese Aufgabe vorbereiten, darf also nicht einem kleinen Kreis vorbehalten sein. Da Bildung ferner „den Menschen überhaupt“[346], d. h. den Menschen in seinem Menschsein betrifft, darf der allgemeinbildende Unterricht nicht die Zurichtung auf einen bestimmten Beruf verfolgen. „Dieser gesamte Unterricht“, sagt W. v. Humboldt, „kennt daher auch nur Ein und dasselbe Fundament. Denn der gemeinste Tagelöhner, und der am feinsten Ausgebildete muss in seinem Gemüth ursprünglich gleich gestimmt werden, wenn jener nicht unter der Menschenwürde roh, und dieser nicht unter der Menschenkraft sentimental, chimärisch, und verschroben werden soll“.[347]

W. v. Humboldts Konzept einer institutionalisierten Allgemeinbildung sieht „drei Stadien des Unterrichts“ vor: den „Elementarunterricht“ – er entspricht in etwa unserer heutigen (sechsklassigen) Grundschule; den „Schulunterricht“ – er ist weitgehend identisch mit unserem Gymnasium; den „Universitätsunterricht“ – er kommt dem Aufbau eines Universitätsstudiums gleich. Für alle drei Stadien gilt, dass sie keine unmittelbare Berufsvorbereitung anstreben. Ihre Aufgabe besteht vielmehr darin, die Schüler sowohl auf das jeweils nächst höhere Stadium allgemeiner Bildung vorzubereiten als auch diejenigen, die aus der Schule ausscheiden und „unmittelbar ins Leben übergehen“[348] so zu qualifizieren, dass sie für dieses Leben auch tatsächlich vorbereitet sind, also entweder eine berufsspezifische Weiterbildung aufnehmen oder unmittelbar einen Beruf nach freier Wahl ergreifen können.

Im Elementarunterricht sollen die Schüler die grundlegenden Kulturtechniken des Lesens, Schreibens und Rechnens erwerben, was allein schon aufgrund eines damals noch weit verbreiteten Analphabetentums eine dringende Notwendigkeit war.[349] Schon an dieser kurzen Aufgabenbeschreibung des Elementarunterrichts ist deutlich erkennbar, wie W. v. Humboldt seine Bildungskriterien zum allgemeinen Maßstab des Unterrichts macht:

- Keine vorzeitige Festlegung des Schülers auf besondere berufliche und fachspezifische Aufgaben;
- Die Vermittlung allgemeiner Grundkenntnisse und -fertigkeiten soll nur soweit erfolgen, als der Schüler dadurch befähigt wird, in freier Selbstbestimmung selbstständig einen Beruf oder eine Berufsausbildung zu ergreifen. Spezialistentum soll

[346] Humboldt, W. v., Der Litauische Schulplan in: Bildung und Sprache besorgt von C. Menze, Paderborn 1965, S. 112

[347] Ebenda, S. 112

[348] Humboldt, W. v., Der Königsberger Schulplan, in: Bildung und Sprache, besorgt von C. Menze, Paderborn 1965, S. 102

[349] Interessant ist die Bemerkung W. v. Humboldts: „Die Sprach-, Zahl- und Maß-Verhältnisse“ sollen so vermittelt werden, dass „die Art des Bezeichneten gleichgültig ist“ (Ebenda, S. 102). Damit ist gemeint, dass die Lektüre mit deren Hilfe Lesen gelernt wird, irrelevant ist, also nicht die Bibel oder der Katechismus verwendet werden müssen, was damals durchaus üblich war.

ebenso vermieden werden wie eine übermäßige Anhäufung von Wissensstoff. Wenn man aber, und zwar „mit Recht, noch andern Unterricht, geographischen, geschichtlichen, naturhistorischen hinzufügt“, dann soll dies nur geschehen, um die geistigen Kräfte „durch mannigfaltigere Anwendung mehr zu üben“ und um den Schülern, die „unmittelbar ins Leben übergehen“ ein entsprechendes Basiswissen zu vermitteln[350].

- Die Aneignung allgemeiner Kompetenzen vollzieht sich immer in Wechselwirkung mit der Welt, d. h. über einzelne und konkrete Inhalte und Personen. Das Spannungsverhältnis von Allgemeinem und Besonderem ist nicht durch Vermittlung von allgemeiner und beruflicher Bildung zu lösen. Die Vermittlung soll vielmehr in der Weise stattfinden, dass die Allgemeinbildung Voraussetzung der Spezialbildung ist.

Was für den Elementarunterricht gilt, gilt auch für den Gymnasial- oder „Schulunterricht“. Auch ihm kommt die zweifache Aufgabe zu: auf das nächst höhere Stadium allgemeiner Bildung und auf das Leben in der Gesellschaft vorzubereiten.

> *„Der Zweck des Schulunterrichts ist die Übung der Fähigkeiten, und die Erwerbung der Kenntnisse, ohne welche wissenschaftliche Einsicht und Kunstfertigkeit unmöglich ist. Beide sollen durch ihn vorbereitet; der junge Mensch soll in Stand gesetzt werden, den Stoff, an welchen sich alles eigne Schaffen immer anschließen muss, theils schon jetzt wirklich zu sammeln, theils künftig nach Gefallen sammeln zu können, und die intellectuell-mechanischen Kräfte auszubilden. Er ist also auf doppelte Weise, einmal mit dem Lernen selbst, dann mit dem Lernen des Lernens beschäftigt“.*[351]

Was das **Lernen** betrifft, so sind damit zugleich die Lerninhalte angesprochen bzw. die „Wahl des Stoffs, da jede Form nur an einem Stoff geübt werden kann“.[352] Die Lerninhalte sollen so gewählt werden, dass sie dem Wesen des Menschen entsprechen, d.h. „auf die Hauptfunktionen seines Wesens“[353] bezogen sind. Die Wesensmerkmale des Menschen sind Sprachlichkeit, Geschichtlichkeit und (mathematische) Denkfähigkeit, wozu das Ordnen, Vergleichen, Klassifizieren, Analysieren, Synthetisieren, Konkludieren etc. gehört. Folglich gliedert sich der allgemeine Schulunterricht in die Fächer Sprache, Geschichte und Mathematik. Diese Fächer sollen in dem Umfang gelehrt werden, dass erstens ein Weiterrücken in ein nächst höheres allgemein-

[350] Ebenda, S. 102; In der vorindustriellen Zeit mit einer überwiegenden Agrarstruktur war es durchaus keine Seltenheit, dass schon nach Abschluss der Elementarbildung ein Übergang ins Berufsleben stattfand.

[351] Ebenda S. 102

[352] Humboldt, W. v., Der Litauische Schulplan in: Bildung und Sprache besorgt von C. Menze, Paderborn 1965, S. 113

[353] Ebenda, S. 113

bildendes Stadium und zweitens „die Bildung des Gemüths"[354] ermöglicht wird. Gemüt wird von W. v. Humboldt verstanden als Zusammentreffen von (Wissens-) Stoff und (Denk-) Form, als Einheit von Mittel und Zweck. Der Unterrichtsgegenstand ist also „immer so zu behandeln, wie er am meisten und besten auf das Gemüth zurückwirkt"[355]; also Geschichte in der Weise, dass der Schüler befähigt wird, geschichtliche Zusammenhänge zu erfassen; Mathematik in der Weise, dass er in der Lage ist, mathematisch zu denken, also, wie bereits erwähnt, ordnen, analysieren, zusammenfassen, schlussfolgern usw. kann; Sprache in dem Umfang, dass es einem Schüler gelingt, „mit eigener Anstrengung, und mit dem Gebrauche der vorhandenen Hülfsmittel jeden Schriftsteller, insoweit er wirklich verständlich ist, mit Sicherheit zu verstehen, und sich in jede gegebene Sprache ... leicht und schnell hinein zu studiren".[356] Aus heutiger Erkenntnis müsste man ergänzen, dass er fähig ist, mit andern sprachlich kommunizieren zu können, also nicht nur die Schriftsprache beherrschen.

Neben dem Erlernen von Inhalten kommt dem „Schulunterricht" noch eine zweite Aufgabe zu: das **Lernen zu lernen**. Allgemeinbildender Unterricht verlangt nicht, den Lernstoff bis in seine äußersten Verästelungen auszudehnen oder wie dies im „Universitätsunterricht" geschieht, ihn nach allen Richtungen hin zu erforschen. Der Schüler soll vielmehr so weit geführt werden, „dass er nun für sich selbst zu lernen im Stande ist" [357]. Hat er gelernt, worauf es beim Erlernen der Sprache ankommt, hat er begriffen, geschichtliche Ereignisse in ihren Zusammenhängen zu verstehen, ist ihm klar geworden, wie mathematische Problemstellungen bearbeitet und gelöst werden können, dann hat der allgemeinbildende Unterricht sein Ziel erreicht. Denn dieser soll den Schüler nur bis zu dem Punkt führen, „wo es unnütz seyn würde, ihn noch ferner an einen Lehrer und eigentlichen Unterricht zu binden, er macht ihn nach und nach vom Lehrer frei, bringt ihm aber alles bei, was ein Lehrer beibringen kann".[358] Macht der „Elementarunterricht den Lehrer erst möglich", sagt W. v. Humboldt, weil nur der Lehrer die grundlegende Vermittlungsaufgabe zu leisten imstande ist, „so wird er durch den Schulunterricht entbehrlich"[359], weil nun der Schüler in die Lage versetzt worden ist, sich selbst zu bilden. Die Allgemeinbildung endet, weil sie den Schüler befähigt hat, seine Bildung selbst in die Hand zu nehmen.

[354] Ebenda S. 113

[355] Ebenda S. 113

[356] Humboldt, W. v., Der Königsberger Schulplan, in: Bildung und Sprache, besorgt von C. Menze, Paderborn 1965, S. 102

[357] Humboldt, W. v., Der Litauische Schulplan in: Bildung und Sprache besorgt von C. Menze, Paderborn 1965, S. 114

[358] Ebenda, S. 114

[359] Humboldt, W. v., Der Königsberger Schulplan, in: Bildung und Sprache, besorgt von C. Menze, Paderborn 1965, S. 102

Jetzt ist der Übergang zur Universität möglich. Denn dort ist der „Universitätslehrer nicht mehr Lehrer, der Studirende nicht mehr Lernender, sondern dieser forscht selbst, und der Professor leitet seine Forschung und unterstützt ihn darin“.[360]

J. F. Herbarts unterrichtspraktische Vorschläge

Als langjähriges Mitglied und zeitweise auch als Direktor der von der Unterrichtssektion zu ihrer Beratung eingesetzten sog. wissenschaftlichen Deputation hatte J. F. Herbart Gelegenheit genug, auf die preußische Schulreform Einfluss zu nehmen. Wie W. v. Humboldt vertrat er die Ansicht, dass der Einfluss des Staates auf die in erster Linie pädagogischen Aufgaben der Schule möglichst eng zu begrenzen sei. Besonders skeptisch äußert er sich über die Intentionen des Staates, mit der Schule andere Zwecke zu verbinden als es die pädagogische Zielsetzung erlaubt. Anstatt nämlich „jeden nur für sich selbst (zu) bilden“ und die „verschiedenen Individualitäten“ aufs beste zu fördern, sucht die staatliche Schule „eine immer feinere und genauere Unterscheidung dessen, was jeder werde leisten können und worauf deshalb seine besondere Bildung solle gerichtet werden.“[361] Eben diese auf Brauchbarkeit gerichtete Ausbildung veranlasse die Heranwachsenden, „ihr Erlerntes zu Markte (zu) bringen, um es so teuer als möglich zu verkaufen.“[362]

Worin die Aufgaben einer rechten Erziehung in der Schule bestehen, hat J. F. Herbart in seinen „Pädagogischen Briefen“ (1832) in Konfrontation zur Schulrealität nochmals dargelegt.

Er anerkennt zwar die „Fülle“ und den „Glanz“ der wissenschaftlichen Leistungen des gymnasialen Unterrichts, zweifelt aber an dessen bildenden Charakter: Was nützt „strenge Schuldisziplin, ... wenn ein junger Mensch Auswege findet und sich ... schadlos zu halten weiß“? Was nützt ein strenger Lehrplan, „wenn Lust und Talent ihn (den Schüler, Anm.d.Verf.) schneller nach andern Richtungen treibt“? Was nützt ein auf alle Schüler gleichmäßig abgestimmter Unterricht, wenn „Mittelmäßige Köpfe ... lange Zeit mechanisch“ ausführen, „was man von ihnen verlangt; sie werden gelobt, erfreuen sich schöner Zeugnisse, wissen aber den gesammelten Vorrat nicht zu brauchen und verlieren ihn, sobald sie dürfen. Nicht geringe Täuschung haftet an der Summe des Wissens, die jährlich von den Schulen ausgeht; nicht wenig davon verfliegt schon in den Universitätsjahren wie leere Spreu“. Was nützt Lehrern die „Summe von Beobachtungen der mannigfaltigsten Schüler“, wenn sich ihre Beobachtungen

---

[360] Ebenda, S. 103

[361] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften, Band 1, hrsg. von W. Asmus, Düsseldorf und München 1964, S. 145

[362] Ebenda, S. 145

nur „auf Disziplin und Lernen" beziehen und nur „mit seltener Ausnahme" auf Schüler, die ihr „Inneres willig öffnen".[363]

> *„Die Verschiedenheit der Individuen liegt tiefer*" als dass man sie alle möglichst gleich behandeln könnte. *„Der Erzieher vergleicht seinen Zögling nicht mit andern, er vergleicht ihn mit sich selbst. Er vergleicht das, was der junge Mensch wird, mit dem, was derselbe vermutlich werden konnte. Er ist mit keinem zufrieden, der hinter sich selbst zurückbleibt, welcher so viel wird, als man vermutlich von ihm erwarten durfte."*[364]

So wenig wie die „Disziplin schon Charakterbildung" und der bloße „Unterricht schon Erziehung" ist, sagt J. F. Herbart, so wenig kann die Schule als ein Geschäft betrachtet werden, das „ohne Berücksichtigung der Individuen mit Vorteil könnte betrieben werden".[365]

Weil der Unterricht nur dann zur Ermöglichung der Bildung beitragen kann, wenn er die Individualität des Schülers berücksichtigt und fördert, kann auch ein bloß ergebnisorientierter Unterricht nicht der Maßstab eines bildenden Unterrichts sein. Nur die „genaue Kenntnis der menschlichen Natur" und die „Durchforschung aller Verhältnisse des mannigfaltigen Wissens zu den verschiedenen Interessen des Menschen" sind die Bedingungen, „unter denen die Charakterbildung, insbesondere die sittliche Charakterbildung" gelingen kann.[366]

J. F. Herbarts Kritik am bestehenden Schulwesen zwingt ihn zu der Frage, wie eine Lösung aussehen könnte, wenn auf der einen Seite eine Rückkehr zum alten Hauslehrer-Unterricht nicht mehr in Betracht zu ziehen ist, die Mängel der staatlichen Schule aber so deutlich hervortreten, dass der eigentlich Zweck, nämlich Bildung, nicht erreicht werden kann.

> *„Ich habe oft und seit Jahren darüber nachgedacht", sagt er, „was für ein Standpunkt das sein müsste, auf den ein geübter ausgebildeter Erzieher nach überstandenen Lehrjahren sich sollte stellen können, um ganz seiner Kunst zu leben ... Was für eine Lage, in welcher die feine Behandlung der Individuen nicht durch große Haufen von Knaben erdrückt, die Benutzung eines mannigfaltigen Wissens nicht durch vorgeschriebene Lehrpläne beschränkt, aber die Vielwisserei, welche man den Hauslehrern anzumuten pflegt, erlassen und für*

[363] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften, Band 2, hrsg. von W. Asmus, Stuttgart 1965 (2. unver. Auflage 1992), S. 166 f.

[364] Ebenda, S. 168

[365] Ebenda, S. 168

[366] Herbart, J.F., Pädagogische Schriften Band 1, hrsg. von W. Asmus, Düsseldorf und München 1964, S. 147

> *gründliches Studium einzelner Fächer durch gelehrte Kenner dieser Fächer gehörig gesorgt würde.“* [367]

Als Lösung schwebt J. F. Herbart ein „mittleres Verhältnis“ vor zwischen einem Hauslehrer, der dem privaten Raum der Familie und dem Schulmann, der der Öffentlichkeit angehört. Diese Zwischenlösung könnte nach seinem Ermessen eine kommunale Einrichtung sein, die nach Art einer Gemeinschaftspraxis mehrerer Ärzte organisiert ist. So wie der Arzt in die Häuser zu gehen pflegt, um Kranke zu heilen, so könnten auch die Lehrer in die Häuser gehen, um „Beschäftigungen und Studien“ anzuordnen oder „Gesprächsstunden halten und die schriftlichen Übungen leiten, von den Wissenschaften aber das meiste den öffentlichen Schulen überlassen.“[368]

Es ist hier nicht der Ort, über die Praktikabilität und Effektivität einer solchen Art von schulischer Einrichtung zu diskutieren. Was aber dennoch Beachtung verdient, ist das Anliegen J. F. Herbarts, die Schule in erster Linie als Ort der Erziehung und Bildung junger Menschen zu betrachten und erst in zweiter Linie als Ausbildungsstätte, um Schüler für ihren Beruf tauglich zu machen. Ferner muss hervorgehoben werden, dass J. F. Herbart mehr Wert auf die Förderung des Interesses und der Begabungen des einzelnen Schülers legt als auf die Hervorbringung möglichst vieler „mittelmäßiger Köpfe“.

Neben seinen Ausführungen zur Gestaltung von Schule und Unterricht allgemein hat J. F. Herbart auch über „den pädagogischen Gebrauch“[369] einzelner Fächer, so auch des Faches Mathematik, geschrieben. Der Mathematik, „der Priesterin der Deutlichkeit und Klarheit“[370], weist J. F. Herbart einen hohen pägdagogischen Wert zu, er bezeichnet sie sogar als „unentbehrlich für Anfang, Mitte und Ende“ [371] eines Unterrichts, der die Bildung des Schülers zum Ziel hat.

Am Anfang, also in den „frühen Kinderjahren“, so sagt er, muss Mathematik mit den Inhalten des Zählens und Messens als „Gymnastik der Denkkraft“ gesehen und geübt werden. „Nie wird etwas werden aus dem Gebrauch der Integralrechnung für Jünglinge, wenn nicht der Knabe seine Elementarübungen wohl inne hatte.“[372] Diese Übung muss in der Mitte weitergeführt werden, hinzu kommen Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und niedere Algebra. Ferner aber auch die Anwendung der Mathematik in

[367] Ebenda, S. 150

[368] Ebenda, S. 151

[369] Herbart, J. F., Pädagogische Schriften, Band 1, hrsg. von W. Asmus, Düsseldorf und München 1964, S. 83

[370] Ebenda, S. 92

[371] Ebenda, S. 92

[372] Ebenda, S. 90f.

Physik, Kunst, Technik und vor allem in der Naturlehre, deren „unentbehrliche Gehilfin“ die Mathematik ist. Tief begeistert ruft J. F. Herbart die Lehrer auf:

> *„Enthüllt ihm die Wunder der Analysis, lehrt ihn, wie der einförmige Fortschritt der Abszisse alle die Beugungen, Spitzen und Knoten der mannigfaltigen Kurven so sicher und strenge beherrscht, wie behutsam die rasche Hyperbel an ihrer Asymptote fortschießt, um sie bei ewiger Annäherung doch nie zu berühren, wie selbst der unendlich kleine Krümmungswinkel, der aller Zahl, allem Maß sich entzieht, dennoch der vergleichenden Rechnung und Bestimmung nicht entgehen kann! Lehrt ihn diese Wunder begreifen! Er sehe und finde es selbst, wie alle diese Größenbegriffe ineinanderhängen und auseinander hervorgehn. Er entdecke sie in der Natur und werde nun gewahr, dass alle jene sonderbaren Kurven nur zu Symbolen dienen für das Heer der Bewegungen und Veränderungen, die in der Wirklichkeit unter seinen Augen vorgehn.“* [373]

Die Mathematik soll dem Schüler dazu dienen, dass er das Wunderwerk der Natur selbst entdecken kann, kleinste Veränderungen genau beobachten lernt und für die Gesetze in der Natur sensibilisiert wird, damit er der Natur ehrfürchtig begegnen könne.

„Am Ende“ des Schulunterrichts steht die Philosophie, die J. F. Herbart sogar als Vollenderin der Bildung bezeichnet. Die Philosophie braucht jedoch die Mathematik und speziell die höhere Analysis, um ihre „Gefahren“ abzuwenden. Worin liegt die Gefahr in der Philosophie für J. F. Herbart? Die Philosophie, so meint er, betrachtet allgemeine Begriffe in der Regel losgelöst von ihrem Zusammenhang und isoliert von ihrer Anwendung. Das biete den Vorteil, dass der jeweilige Begriff an Bestimmtheit und Deutlichkeit gewinnt, jedoch verschwinden damit auch die Grenzen, die dem Begriff zu eigen seien. Begriffe isoliert zu betrachten, könne in der Mathematik niemals Methode sein, vergisst der Mathematiker doch nie, dass „das Differential seinem Integral notwendig angehört.“[374]

G. Kerschensteiners Idee der Arbeitsschule

Haben W. v. Humboldt und J. F. Herbart zuerst die Bildungstheorie entwickelt und im Anschluss daran die Umsetzungsvorschläge für den Unterricht gemacht, so liegt der Fall bei G. Kerschensteiner anders. Er konzipierte seine Bildungstheorie nicht als Ausgangspunkt für seine praktische Tätigkeit, sondern im Rückblick auf seine Erfahrung als Schulreformer und Stadtschulrat. Er selbst begründet dies so, dass er in den

[373] Ebenda, S.90

[374] Ebenda, S.89

Anfangsjahres seiner Amtsführung nicht ausreichend Zeit gefunden habe, um seine Erkenntnisse theoretisch zu vertiefen.[375]

Wenn hier die Vorschläge G. Kerschensteiners zur Gestaltung von Schule und Unterricht aufgegriffen werden, so bedeutet das nicht, seine Ideen unmittelbar zu übernehmen. Dazu blieb er als Schulreformer zu sehr seiner Zeit verhaftet, die den Beruf noch als Berufung und den Staat als Kultur- und Wertgemeinschaft verstanden hat. Was aber für uns zu lernen bleibt, ist Folgendes: „die Bildung des Menschen darf nicht in einer lebensfernen, esoterischen Geistigkeit gründen, sondern muss in den konkreten Bedingungen seiner Existenz ansetzen und ihn zu vertiefter Einsicht in den Sinn seines Lebens führen."[376] Unter diesem Gesichtspunkt besitzen seine schulpraktischen Ausführungen nach wie vor hohe Aktualität.

Nach seiner Ausbildung zum Volksschullehrer arbeitet G. Kerschensteiner zunächst in diesem Beruf, gewinnt aber in dieser Tätigkeit – bedingt durch die unzureichende praxisferne Vorbereitung – keine Erfüllung und quittiert den Dienst wieder. Er holt das Abitur nach, studiert Mathematik und Naturwissenschaften und arbeitet mehrere Jahre an verschiedenen Gymnasien Bayerns, wodurch er einen guten Einblick in die vorherrschende Schulsituation gewinnt. 1895 wird er zum Stadtschulrat Münchens gewählt, was der Ausgangspunkt für seine weitreichenden reformerischen Aktivitäten, insbesondere die Einführung der Berufsschulpflicht auf der Grundlage der Arbeitsschulidee war.[377] Aber auch die Volksschule und das Gymnasium wurden durch seine Reformen nachhaltig verändert. Insgesamt liegt der Schwerpunkt seiner schulreformerischen Aktivitäten auf der Abkehr von der von ihm sog. „Buchschule", in der Wissen eingepaukt wird, hin zur Umsetzung der „aktiven Schule", der „Arbeitsschule". Experimentelles Lernen mit dem Grundsatz des „learning by doing" (J. Dewey) stellt für ihn die schnellste und nachhaltigste Methode des Lernens dar. Dabei rückt er – gemäß dem reformpädagogischen Ansatz der „Pädagogik vom Kinde aus" – den Schüler in den Mittelpunkt des Interesses. Dessen Begabungen, seien sie praktischer oder theoretischer Natur, gilt es zu fördern auf dem Weg zu einer sittlich autonomen Persönlichkeit.

Wie bereits bei W. v. Humboldt und J. F. Herbart soll im Folgenden gezeigt werden, wie G. Kerschensteiner selbst sich eine Unterrichtspraxis vorstellt, die gemäß seinen „Bildungsaxiomen" gestaltet ist.[378]

G. Kerschensteiner ist der Überzeugung, dass die Schule eine Bildungsinstitution sein muss. Das Wesen der Bildung eines Menschen jedoch sieht er in der „widerspruchslo-

[375] vgl. Kerschensteiner, G., Theorie der Bildung, Leipzig 1931³

[376] Wehle, G., in : Georg Kerschensteiner, Berufsbildung und Berufsschule, Ausgewählte pädagogische Schriften Band I, Paderborn 1966, S. 199

[377] vgl. Tschamler, H., Georg Kerschensteiner, in: Gesamtschul-Informationen 19 (1988) 1-2, S. 109

[378] Zu den folgenden Ausführungen siehe Tschamler, H., Georg Kerschensteiner, in: Gesamtschul-Informationen 19 (1988) 1-2, S. 111 f.

sen Entwicklung aller Seiten seiner individuellen Psyche zur größtmöglichen Leistungsfähigkeit im Geiste der Kulturwerte.“[379] Es geht ihm um die „Wesensformung des ganzen Menschen, nicht Unterrichtetheit oder Allgemeinbildung, nicht Funktionsschulung oder Formalbildung.“ [380] Diese Wesensformung geschieht durch Vermittlung von Werten, wie z. B. Klarheit, Wahrheit, Vollendung, Schönheit, Harmonie, Gerechtigkeit, Güte usw., die in Kulturgütern gegeben sind. Diese Kulturgüter oder geistigen Güter wiederum sind Wissenschaften, Kunstwerke, Sitten, Gebräuche, Maschinen, Werkzeuge, Persönlichkeiten usw. , die zu vermitteln Ziel der Schule sein muss. Dieser Vermittlungsauftrag kann von der Schule erfüllt werden, wenn der Unterricht den, bereits im Kapitel 2 ausführlich erläuterten, sieben Prinzipien (dem Individualitätsprinzip, dem Aktualitätsprinzip, dem Totalitätsprinzip, dem Aktivitätsprinzip, dem Sozialitätsprinzip, dem Autoritätsprinzip und dem Freiheitsprinzip) gehorcht.

Grundlage seiner Arbeitsschulidee ist die Überzeugung G. Kerschensteiners, dass die wichtigste Aufgabe für alle Schularten, für die Volksschule ebenso wie für das Gymnasium und die Berufsschule in der „Berufsbildung“ bzw. in der Vorbereitung auf den Beruf liegt.[381] Als Begründung verweist er auf das Verständnis des Menschen, der nur im Beruf, den er als Berufung versteht, seine Lebenserfüllung finden könne. Die Umsetzung dieser Idee bestand zunächst darin, die Schulen mit Schulküchen, Laboratorien, Werkstätten, Schulgärten, Aquarien und Terrarien auszustatten, um den Schülern manuelle Tätigkeiten zu ermöglichen. Die Notwendigkeit für die Einführung von praktischen Arbeiten resultiert aus der entwicklungspsychologischen Erkenntnis G. Kerschensteiners, dass zwischen dem 3. und 14. Lebensjahr die körperliche und manuelle Entwicklung der geistigen vorausgeht. Wenn Schulen, so argumentierte er, sowohl auf geistige als auch auf manuelle Berufe vorbereiten sollen, so müssen auch manuelle Tätigkeiten in den Schulen durchgeführt werden.[382] G. Kerschensteiner fordert auch, dass der Unterricht dem Prinzip der Individualisierung folgen muss und die unterschiedlichen manuellen <u>und</u> geistigen Begabungen zu berücksichtigen hat.

So wenig wie es G. Kerschensteiner bei der Vorbereitung auf manuelle Berufe darum geht, die Schüler ausschließlich in die dafür erforderlichen Arbeitsprozesse einzuführen, so wenig will er bei der Vorbereitung auf geistige Berufe ausschließlich die hierfür erforderlichen Kenntnisse vermitteln. Vielmehr sollen die Schüler unabhänig davon, welchen Beruf sie später ergreifen, durch manuelle Tätigkeiten Sachlichkeit, Genauigkeit und Präzision erlernen. Der Zweck solcher Tätigkeiten liegt also in der

---

[379] Kerschensteiner, G., Die aus dem Wesen der Bildung sich ergebenden Forderungen für die Gestaltung der Schultypen und ihrer Lehrpläne, in: Sonderabdruck des Bundes für Schulreform, II. Deutscher Kongress für Jugendbildung und Jugendkunde, Leipzig 1913, S. 24

[380] Kerschensteiner, G., Die Bildungswerte von Mathematik und Naturwissenschaften, in: Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, Hannover 1930 (36. Jg./ No.7), S. 211

[381] vgl. Kerschensteiner, G., Der Begriff der Arbeitsschule in: Reble, A. (Hrsg.), Die Arbeitsschule, Bad Heilbrunn 1963 (Klinkhardts Pädagogische Quellentexte), S. 31

[382] Ebenda, S. 32

„Gestaltung der Organe, die für die Ausbildung des Berufes notwendig sind".[383] G. Kerschensteiner erhofft sich davon, dass diese Arbeitsmethoden auch auf manuelle Arbeiten anderer Gebiete übertragbar sind.[384] Außerdem tragen diese Tugenden auch zur Sittlichkeit bei. „Führt dieses manuelle Tun zwar noch nicht zu irgendeinem handwerklichen Beruf, so erfüllt es doch bereits in seiner Tätigkeit die Grundthese, die G. Kerschensteiner auch in der Auseinandersetzung mit Eduard Spranger für das gesamte Schulsystem sieht: Die Priorität der Berufsbildung vor der Allgemeinbildung oder, anders ausgedrückt, Allgemeinbildung als lebenslange Aufgabe wird grundgelegt in der Berufsausbildung."[385]

Ein weiterer Aspekt, der bei der Umsetzung der Arbeitsschule deutlich hervortritt, ist die Selbsttätigkeit. G. Kerschensteiner unterscheidet zwischen Wissen und Können, das rezeptiv erworben wird und solchem, das durch eigene Erfahrung „errungen" wird. Wenngleich er beide Arbeitsweisen für notwendig erachtet, so gibt er doch dem „Erfahrungswissen" den Vorzug.[386] Besonders im Kindesalter will der Mensch aktiv sein. Diesem Interesse muss die Schule nachgehen. Sie muss ermöglichen, dass der Schüler praktische Erfahrungen sammeln, selbst beobachten und entdecken, forschen und erkunden kann. Auf der Basis dieses praktischen Interesses erhält auch die Arbeit in den Laboratorien, Schulküchen und Werkstätten ihren Sinn. Die Schüler sollen möglichst selbsttätig die Experimente durchführen und nicht nur das ausführen, was der Lehrer ihnen vorgibt.[387] G. Kerschensteiners Begriff der Selbsttätigkeit heißt jedoch nicht, dass der Schüler lediglich aus sich heraus zu einer Tätigkeit gedrängt wird, wie dies H. Paffrath glaubt. Vielmehr muss zur Spontaneität auch noch die Reflexivität hinzukommen, weshalb der Schüler die Fragen „Was habe ich getan und wie habe ich es getan?" und „Warum habe ich es getan?"[388]selbstkritisch zu beantworten hat.

Wenn die Schule einen Bildungsauftrag hat, so muss auch die Frage beantwortet werden, welches der spezifische Beitrag ist, den die Mathematik zur Bildung leisten kann oder mit den Worten G. Kerschensteiners, welche Werte durch Mathematik vermittelt werden können. Als Mathematiker und Naturwissenschaftler hat G. Kerschensteiner sich in besonderer Weise mit diesen Fächern beschäftigt und sie auch unter dem Aspekt der Bildung betrachtet. Er weist der Mathematik einen „außerordentlich gro-

---

383 vgl. Ebenda, S. 33

384 Diese Übertragbarkeit scheint ihm auf geistigen Arbeitsgebieten hingegen weniger gesichert. Beispielsweise glaubt G. Kerschensteiner nicht, dass durch Mathematik erworbene logische Denkfähigkeit „rücksichtslos" auf andere Gebiete übertragen werden können.

385 vgl. Tschamler, H., Georg Kerschensteiner, in: Gesamtschul-Informationen 19 (1988) 1-2, S. 114

386 vgl. Kerschensteiner, G., Produktive Arbeit und ihr Erziehungswert, in: Reble, A. (Hrsg.), Die Arbeitsschule, Bad Heilbrunn 1963 (Klinkhardts Pädagogische Quellentexte), S. 42

387 vgl. Paffrath, H., Georg Kerschensteiners Idee der Arbeitsschule – Impulse für die Schule heute, in: Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus und Landeshauptstadt München (Hrsg.), Stuttgart 1984, S. 67 – 93

388 vgl. Kerschensteiner, G., Der Begriff der Arbeitsschule, in: Reble, A. (Hrsg.), Die Arbeitsschule, Bad Heilbrunn 1963 (Klinkhardts Pädagogische Quellentexte), S. 38

ßen Wertsinn“[389] bei, können doch durch die Beschäftigung mit diesem Fach die Werte der Klarheit, der Wahrheit und der Vollendung in besonderer Weise erlebt werden. Jedoch geschieht dies nicht automatisch, der Unterricht muss entsprechend gestaltet werden. „Man kann ... den Unterricht in Mathematik und Physik derart ledern gestalten, dass vom Schüler sehr viele Unwerte aber kein einziger Wert erlebt wird.“[390] Seine Vorgehensweise ist dabei, im Schüler zunächst „geistiges Unbehagen“ auszulösen und ihn dann zu unterstützen, sich aus diesem unwohlen Zustand zu befreien.

Das Problem des mathematischen Unterrichts seiner Zeit sieht G. Kerschensteiner

> *„ ... in der Art seiner Aufgaben, vor allem ihrer Spitzfindigkeiten und ihrer Weltfremdheit. Die Isolation des Betriebes der Mathematik unserer höheren Schulen von allem übrigen Leben, von aller praktischen Tätigkeit, ja selbst von allem übrigen Unterricht des Schülers ist heute noch eine der unerfreulichsten Eigenschaften dieses Unterrichts.“* [391]

Folgendes Beispiel macht den Missstand deutlich:[392]

> *„Die siebzehn Maurer, die bereits im achtzehnten Jahrhundert schon bei täglich elfstündiger Arbeitszeit vierundzwanzig Tage brauchten, um eine Mauer auszuführen, die vierunddreißig Meter lang, sieben Meter hoch und eineinhalb Meter dick ist, werden auch im zwanzigsten Jahrhundert immer noch gefragt, wie viele Stunden sie im Tag arbeiten müssten, wenn sie eine Mauer von neunundzwanzig Meter Länge, elf Meter Höhe und zwei Meter Dicke in dreiunddreißig Tagen fertigstellen sollen. Wenn Sie irgend eine Aufgabensammlung für lineare Gleichungen aufschlagen, so fließen darin immer noch die bekannten zwei Röhren, von denen die erste um zehn Minuten weniger braucht, um einen gewissen Behälter zu füllen, als die zweite um ihn zu leeren, woran dann die praktisch so ungemein wichtige Frage geknüpft ist, in welcher Zeit die erste Röhre ein Drittel des Behälters füllt, falls bei gleichzeitiger Öffnung beider Röhren in zweiundsiebzig Minuten zwei Fünftel des Behälters gefüllt werden. Nichts drückt schlagender die ganze Isolation des Unterrichts vom Leben, den absoluten Verzicht auf sinngemäße Aufgaben und praktische Ausbildung der Vorstellungskraft aus, als diese und ähnliche Aufgaben, die zu hunderten wie Bettwanzen in allen*

---

[389] Kerschensteiner, G., Die Bildungswerte von Mathematik und Naturwissenschaften, in: Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, Hannover 1930 (36. Jg./ No.7), S. 212

[390] Ebenda, S. 212

[391] Kerschensteiner, G., Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht, in: Süddeutsche Monatshefte, 1910, S. 258

[392] Erschreckend ist, dass dieser Missstand auch fast hundert Jahre nach G. Kerschensteiner in unseren Schulen zu finden ist.

> *Übungsbüchern seit hundertfünfzig Jahren sich eingenistet haben und die ewig ein Autor vom andern abschreibt."*[393]

G. Kerschensteiner plädiert im Gegensatz dazu für einen lebensnahen Mathematikunterricht mit anwendungsorientierten Aufgaben und fächerübergreifenden Themen. Als Beispiel für anwendungsorientierte Aufgaben nennt er solche, die in der Lebenswelt des Schülers angesiedelt sind, etwa Vermessungsaufgaben im Geometrieunterricht.

G. Kerschensteiner weiß sich mit J. W. v. Goethe in der Feststellung einig: „Eines recht wissen und ausüben gibt höhere Bildung, als Halbheit im Hundertfältigen":

> *„Viele unserer Lehrbücher, fast alle unsre Aufgabensammlungen, fast alle unsre Handbücher für Schülerübungen und vor allem die Gestaltung aller unserer Lehrpläne sind für mich nichts anderes als das Eingeständnis: wir begnügen uns mit möglichst vielen Kenntnis- und Erkenntniswerten und verzichten auf die Erziehungswerte. Lasciate ogni speranza! (Lasst alle Hoffnung fahren!)"*[394]

> *„Nur eine radikale Abkehr von dem Enzyklopädismus, der unseren Unterricht heute beherrscht, von der Seuche des Überblicks, an der alle Schulen kranken, kann den Unterricht zu einem wertvollen Erziehungsfaktor machen."*[395]

Als die beiden wichtigsten Bildungs- bzw. Erziehungswerte des Mathematikunterrichts nennt er **die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens und die Erziehung zu funktionalem Denken**. Später, in seiner „Theorie der Bildung", bezeichnet er die Übung im logischen Denken als das wichtigste Erziehungsziel, subsumiert aber das funktionale Denken als Spezialfall des logischen Denkens unter dieses. Da die Mathematik ein in sich völlig logisch aufgebautes Gedankengebäude ist, ist sie die Wissenschaft mit dem höchsten Maß an eindeutigen Begriffen und an Schlüssigkeit objektivierter Sachverhalte. In dieser Wissenschaft gelingt es folglich am besten, den Schüler zu zwingen, dieser Logik und Schlüssigkeit zu folgen und mit der Gewissheit, ein theoretisch gültiges Ziel erreichen zu können, ihn bis zu diesem Ziel zu führen.

Als Ziel für den mathematischen Unterricht sieht G. Kerschensteiner „die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung der uns umgebenden Welt der Erscheinungen zur möglichsten Entwicklung zu bringen".[396]

---

[393] Kerschensteiner, G., Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht, in: Süddeutsche Monatshefte, 1910, S. 257

[394] Kerschensteiner, G., Wesen und Wert des naturwissenschaftlichen Unterrichts, München 1959, S. 186

[395] Ebenda, S. 187

[396] Kerschensteiner, G., Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht, in: Süddeutsche Monatshefte, 1910, S. 257

Das kann geschehen, wenn der Unterricht an die Vorstellungswelt der Schüler anknüpft, einen Bezug zu der Lebenswelt der Schüler herstellt, bedeutungsloses Spezialwissen ausklammert und Zusammenhänge und Vernetzungen deutlich macht. Zwei Aspekte sind für das Verständnis von Mathematik von grundlegender Bedeutung: Die intensive Aneignung bestimmter Grundbegriffe und die Entwicklung eines räumlichen Vorstellungsvermögens. Daran schließt sich die weitere Aufgabe an, die erlernten Inhalte immer wieder in den entsprechenden größeren inhaltlichen Zusammenhang zu stellen, d.h. mit einem „einheitlichen Band“ zu umschlingen. Als wichtigstes Band sieht G. Kerschensteiner den Funktionsbegriff und das damit verbundene funktionale Denken. G. Kerschensteiner bezeichnet dieses funktionale Denken als eine der wertvollsten Eigenschaften eines gebildeten Menschen. Denn die Welt steckt voller Gesetzmäßigkeiten, die in funktionale Zusammenhänge gestellt werden können und vom Menschen erkannt werden müssen, um sich in der Welt zurechtfinden zu können.

Zusammenfassend kann man festhalten: Ausgehend von dem Gedanken, dass Bildung der Gestaltung und Sinngebung des konkreten Lebens dient, führt G. Kerschensteiner den Begriff der Arbeitsschule ein. Diese ist für ihn nicht eine Schulform neben anderen, sondern ein Bildungsprinzip. Als solches dient es zwar der Vorbereitung auf den Beruf, jedoch nicht im Sinne einer spezifischen berufsbildenden Maßnahme, sondern im Sinne des Erwerbs grundlegender Haltungen und der Vemittlung geistiger Werte. Dem Mathematikunterricht weist er dabei eine besondere Stellung zu, da Mathematik die „exakteste“ aller Wissenschaften ist.

4.3 Eine Zusammenschau der Positionen H. W. Heymanns, A. I. Wittenbergs und F. Fischers/ A. Warzels zu dem Thema Mathematik und Bildung

H. W. Heymann entwickelt ein Konzept, in dem schulische Allgemeinbildung einerseits den Schüler auf ein Leben unter den gegebenen gesellschaftlichen Bedingungen vorbereitet und andererseits seine persönliche Entfaltung zulässt und fördert. Er sieht Allgemeinbildung als Bedingung der Möglichkeit individueller Bildung, wobei es dem Schüler überlassen bleibt, dieses Angebot anzunehmen oder nicht. Die sieben Aufgaben der Schule (Lebensvorbereitung, Stiftung kultureller Kohärenz, Weltorientierung, Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch, Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft, Einüben in Verständigung und Kooperation, Stärkung des Schüler-Ichs) konkretisieren Allgemeinbildung als einen Qualitätsanspruch, an dem sich der Unterricht messen lassen muss.

Sowohl die Auswahl der Inhalte als auch die Art der Durchführung des Mathematikunterrichts entscheiden darüber, ob dieser dem Qualitätsanspruch „Allgemeinbildung“ genügen kann oder nicht.

Da die Mathematik kein streng hierarchisches System ist, gibt es mehrere Möglichkeiten der Auswahl und Anordnung von Inhalten. Dies ermöglicht, dass die genannten Aufgaben Kriterium für die Auswahl und Anordnung der Inhalte sind.

Was die Durchführung des Unterrichts betrifft, hängt dessen Erfolg nach H. W. Heymann von der Unterrichtskultur ab, zu der neben dem didaktischen und methodischen Vorgehen auch die Unterrichtsatmosphäre gehört.

H. W. Heymann verweist auf das Problem der Stoffauswahl im Mathematikunterricht, die durch die Dominanz stereotyper Lösungswege bestimmt ist, ohne dass die Schüler den mathematischen Hintergrund verstanden haben. Ferner fordert er, dass nicht alle Inhalte gleich intensiv behandelt werden sollen, sondern v.a. jene Inhalte bevorzugt werden sollen, die von den Schülern später benötigt werden. Offen bleibt bei H. W. Heymann, welchen Stellenwert er jenen mathematischen Inhalten zuweist, die über das mathematische Grundwissen hinausgehen und dem Schüler einen Einblick in die „höhere Mathematik“ geben könnten.

Zentraler Gedanke bei A. I. Wittenberg ist die Forderung, „echte Erfahrung der Mathematik“ zu vermitteln. Dazu ist seiner Meinung nach notwendig, dass abgeschlossene mathematische Gebiete von den Schülern bearbeitet bzw. „wiederentdeckt“ werden, die auch im Rahmen ihres geistigen Erfahrungshorizonts verstanden werden können.

Ausgangspunkt sind sog. motivierende Fragestellungen für die einzelnen Themenbereiche. Diese werden dann methodisch und begrifflich erarbeitet, so dass der Schüler einen Überblick über die Zusammenhänge der entsprechenden Inhalte erhält. Als weitere Merkmale seines methodischen Vorgehens sind zu nennen:

1. Der Weg vom Einzelfall aus und dann zur Systematisierung übergeht und
2. Die Verwendung der Muttersprache hat Vorrang vor der Fachsprache.

A. I. Wittenberg betont immer wieder die Notwendigkeit, bedeutsame und grundlegende mathematische Inhalte mit den Schülern zu erarbeiten und sich nicht in komplizierte Einzelheiten zu verlieren. Entscheidend ist dabei der Prozess der Erarbeitung und erst nachrangig das Ergebnis.

Ein besonderes Anliegen A. I. Wittenbergs ist die konsequente Auswahl des Stoffs im Sinne von Themenkreisen, die es den Schülern ermöglicht, wissenschaftliche Prozesse mathematischer Vorgehensweisen zu erleben und zu durchdringen. Nicht aus dem Zusammenhang gerissene Einzelheiten tragen nach seiner Überzeugung zum Verständnis bei, sondern nur der Bezug zu dem jeweiligen übergeordneten Thema.

Weitgehend offen bleibt bei A. I. Wittenberg jedoch, wie die erwähnten Unterrichtsmethoden tatsächlich angewendet werden sollen; er beschränkt sich im Wesentlichen auf die Beschreibung des didaktischen Aufbaus. Ebenso wird die Idee des fächerübergreifenden Unterrichts nur andeutungsweise aufgegriffen. Wenngleich er die Dringlichkeit einer fächerübergreifenden Unterrichtspraxis hervorhebt, enthalten seine Ausführungen hierüber nur wenig konkrete Hinweise.

A. Warzel stützt sich bei der Auswahl der Unterrichtsinhalte und der Gestaltung des Mathematikunterrichts auf F. Fischers Bildungskategorien. Diese besagen, dass Bildungsprozesse an Bedingungen geknüpft sind, die zusammengenommen eine horizontal und vertikal gegliederte Struktur ergeben, die wiederum als Grundlage des Lehr- und Lernprozesses dient. A. Warzel ist jedoch von diesem Strukturschema nicht voll überzeugt, da er die Bildungskategorien nicht hierarchisch geordnet sehen will. Seiner Meinung nach sind sie in einer Ebene beispielsweise auf einem geschlossenen Kreis anzuordnen, so dass keine Rangfolge vorgegeben ist. Man kann über jede Disziplin in den Kreis gelangen und von dort aus auch zu jeder weiteren vordringen.

A. Warzels unterrichtstheoretisches Resümee im Hinblick auf einen bildenden Mathematikunterricht lässt zwei Schwerpunkte erkennen:

Zum einen fordert er die mathematischen Inhalte so zu erarbeiten, dass durch wiederholtes und gezieltes Hinterfragen des Stoffs Reflexionsprozesse in Gang kommen. Erst auf diese Weise entsteht ein subjektiver Bezug zwischen Schüler und Stoff, der möglicherweise Betroffenheit und Staunen, vielleicht aber auch Anreize für weiteres Fragen auslösen kann. Jedenfalls wird Bildung erst dann ermöglicht, wenn die Stoffaneignung eine persönliche Veränderung der Weltsicht, eine Erweiterung des individuellen Wissens- und Erfahrungshorizonts, ein „Gewissens"erlebnis (im Sinne F. Fischers) und letztendlich eine Wertsteigerung der autonom sittlichen Persönlichkeit (im Sinne G. Kerschensteiners) auslöst.

Die Aufforderung zum reflektierenden Fragen und die Einsicht, dass die bloße Präsentation wissenschaftlicher Erkenntnisse nicht ausreicht, um Bildungsprozesse in Gang zu bringen, verlangen einen Unterricht, der jedem Schüler gestattet, den vom Lehrer dargebotenen Stoff auch kritisch zu hinterfragen. Mit anderen Worten: Kritik des Schülers an den Lerninhalten ist nicht als lästige Störung des Unterrichtsverlaufs zu betrachten, sondern als willkommener Anlass zu sehen, um Reflexions- und damit Bildungsprozesse in Gang zu setzen.

Zum andern betont A. Warzel die Wichtigkeit des fächerübergreifenden Aspekts im Mathematikunterricht, weil er dadurch einen weiteren Aspekt der Bildung realisiert sieht: die Herstellung von Sinnzusammenhängen. Isoliertes Einzel- oder Fachwissen begünstigt zwar Spezialisierung, nicht aber Bildung. Bildung verlangt neben dem Selbstbezug auch den Weltbezug und zwar in dem Sinne, dass eine Vorstellung vom Ganzen, von der Welt in unserem Bewusstsein lebendig ist. Das wiederum bedeutet: Zusammenhänge erkennen, Verknüpfungen mit anderen Wissensbereichen herstellen, sich fürs Ganze aufgeschlossen zeigen, Vielseitigkeit des Interesses (im Sinne J. F. Herbarts) fördern.

Wer diesen Bildungsaspekt ernst nimmt und seinen Unterricht danach gestaltet, wird nicht nur für jeden Hinweis dankbar sein, den Schüler aus ihrer Lebens-, Erfahrungs- und Wissenswelt mit einbringen. Er wird auch sicher sein dürfen, dass er interessierte Schüler hat.

Betrachtet man alle drei Positionen gemeinsam, so könnte man sie im Sinne eines Drei-Stufenmodells interpretieren:

- Was soll der Schüler wissen und können? (H. W. Heymann)
- Wie soll der Schüler zum Wissen gelangen und wie tief soll er dabei vordringen? (A. I.Wittenberg)
- Wodurch kann die Selbstwerdung des Schülers im Sinne eines Bildungsprozesses gelingen? (A.Warzel)

4.4 Zusammenfassung entwicklungspsychologischer Grundlagen

Zentrales Thema bei M. Montessori und J. Piaget ist die Entwicklung des Kindes. Beide gelangen vor allem durch intensive und gezielte Beobachtungen im Umgang mit Kindern zu ihren Erkenntnissen. Beide ließen sich auch durch Beobachtungen aus der Biologie leiten. M. Montessori erklärt z. B. die sensiblen Phasen beim Kind unter Hinweis auf ähnliche Beobachtungen bei einer bestimmten Raupenart. J. Piaget ist ebenfalls der Biologie stark zugeneigt, beschäftigte er sich doch schon in früher Jugendzeit mit der Beobachtung von Tieren. Beide sehen in der Methode der Beobachtung eine der wichtigsten Tätigkeiten des Lehrers.[397]

Während M. Montessori ihr erworbenes Wissen vor allem für die stete Weiterentwicklung ihrer Pädagogik und die Umsetzung in die Praxis in Kindergarten und Schule verwendete, gab J. Piaget nur vereinzelt Anregungen für die Anwendung seiner Theorie. Sein Anliegen bestand darin, die geistige Entwicklung von Kindern möglichst genau zu erforschen.

M. Montessori und J. Piaget kommen in wesentlichen Punkten ihrer empirischen Beobachtungen zu gleichen Ergebnissen, wenngleich dies nicht unmittelbar aus ihren Niederschriften zu erkennen ist. Einige ihrer Übereinstimmungen, die auch für die Umsetzung im Unterricht von Belang sind, sollen im Folgenden dargestellt werden:

Eine der fundamentalen Schlüsselerlebnisse M. Montessoris ist die Beobachtung eines Phänomens, das sie die „Polarisation der Aufmerksamkeit" nennt. Entgegen der bis

[397] Für die folgenden Ausführungen siehe auch Tschamler, H., Die Entwicklung des Kindes, Ein Vergleich zwischen Maria Montessori und Jean Piaget, in: Materialgeleitetes Lernen – Elemente der Montessori-Pädagogik in der Regelschule, München 1991, S. 55 ff.

dahin weit verbreiteten Auffassung, dass Kinder sich nur kurze Zeit einer Tätigkeit widmen können, machte sie die Feststellung, dass Kinder bei entsprechend günstigen Rahmenbedingungen zu langanhaltender höchster Konzentration fähig sind. Voraussetzung für das Eintreten dieses Phänomens ist, dass dem Kind die Freiheit gewährt wird, seinen Interessen gemäß zu arbeiten. Ist die Arbeit beendet, tritt ein weiterer erstaunlicher Effekt ein: Das Kind wird durch eine solche Arbeit geradezu verwandelt. „Jedesmal, wenn eine solche Polarisation der Aufmerksamkeit stattfand, begann sich das Kind vollständig zu verändern.“[398]

J. Piaget beschreibt in seiner Äquilibrationstheorie ein ähnliches Phänomen. Durch die Erfahrungen in der Welt finden im Kind Akkommodations- oder Assimilationprozesse statt, die es in einer Weise verändern, dass eine Weiterentwicklung möglich wird.

Auf dieser Erkenntnis basiert J. Piagets Stufen- bzw. Stadienlehre der kognitiven Entwicklung, wobei er davon ausgeht, dass bestimmte Entwicklungsschritte des Kindes zu bestimmten Zeiten eintreten. Auch wenn J. Piaget der Bedeutung des Vorwissens nicht ausreichend Beachtung geschenkt hat, so bleibt die grundsätzliche Aussagekraft der Stufen- bzw. Stadienlehre bis heute unwiderlegt.

Auch M. Montessori hält an der Vorstellung zeitlich aufeinander folgender Entwicklungsperioden fest. Sie geht davon aus, dass es in der Entwicklung des Menschen sog. sensible Phasen gibt. Sie versteht darunter Zeiten, in denen das Kind für das Erlernen bestimmter Fähigkeiten und Fertigkeiten besonders empfänglich ist. Ist der Zeitabschnitt vorüber, so ist die Aufnahme bestimmter Lerninhalte wesentlich erschwert, wenn nicht sogar unmöglich. Überzeugendstes Beispiel der Existenz sensibler Phasen ist der Spracherwerb, der nur bis zum Alter von ca. zehn Jahren so möglich ist, dass das Kind die Muttersprache akzentfrei und perfekt lernen kann.

Besondere Übereinstimmung in den Theorien M. Montessoris und J. Piagets ist auf dem Gebiet der Sensomotorik zu finden. Bewegung und Sinneserfahrung bilden für beide eine notwendige Voraussetzung für die geistige Entwicklung. „Die geistige Entwicklung kann und muss durch die Bewegung unterstützt werden.”[399] Für J. Piaget hat das logische Denken eines Menschen seine Wurzeln in den sog. Koordinationen von Handlungen, die bereits vor der Entwicklung der Sprache vorhanden sind. Aus diesen Koordinationen von Handlungen entstehen in der psychischen Entwicklung mentale Operationen und mit ihnen logische Strukturen. Durch die sensomotorische Intelligenz kann das Kind die Welt strukturieren.

Wenn nach J. Piagets Theorie der Denkentwicklung die Vorstellung z. B. räumlicher Beziehungen vom Kind Schritt für Schritt aufgebaut, d.h. konstruiert wird, so hat dies auch Konsequenzen für die Umsetzung im Unterricht: Auch grundlegende und

[398] Montessori, M., Schule des Kindes, Freiburg 1976, S. 70

[399] Montessori, M., Das kreative Kind, Freiburg 1984. S. 129

scheinbar einfache Begriffe bedürfen eines sorgfältigen und schrittweisen Aufbaus, der insbesondere durch das aktive Handeln des Schülers erzielt werden kann.

Dieses aktive Handeln fordert auch M. Montessori immer wieder und stellt mit ihrem Material den Kindern Gegenstände bereit, die es neugierig machen und die Aktivität des Kindes herausfordern sollen. Das Kind will und soll nicht nur rezeptiv sein und passiv aufnehmen, sondern es ist auch initiativ und spontan. In dem Material, das M. Montessori entwickelt hat, spiegeln sich auch Erkenntnisse J. Piagets wider. So müssen die Kinder bei der Arbeit z. B. mit den „Roten Stangen”, den „Numerischen Stangen” und der „Braunen Treppe” eine sog. Treppenbildung durchführen, d. h. sie müssen die Elemente in eine Ordnung bringen (das erste, das zweite, das dritte usw. Element). Es muss also im Sinne J. Piagets eine asymmetrische Relationsbildung $a < b < c < d$ durchgeführt werden. Diese Operation ist als erster Schritt bei der Entwicklung bzw. Erarbeitung des Zahlbegriffs erforderlich.

M. Montessoris und J. Piagets Theorie der geistigen Entwicklung basiert auf einer allgemeinen Handlungstheorie, die den Menschen und die Umwelt durch eine aktive Auseinandersetzung miteinander verbindet. Das hat für die unterrichtliche Praxis zur Folge, dass der Lehrer erkennen muss, welche fördernden Hilfen und Hilfsmittel das Kind gemäß seinem aktuellen Entwicklungsstand braucht, um sich optimal weiter entwickeln zu können.

4.5 Leitlinien der Unterrichtsgestaltung

Das zentrale Anliegen dieser Arbeit kann mit der Frage umschrieben werden: Wie soll und kann der Mathematikunterricht inhaltlich und methodisch so gestaltet werden, dass er den Kriterien der Bildung und der Entwicklungsadäquatheit entspricht? Diese Frage beinhaltet einen Zukunfts- oder Zielaspekt und einen Gegenwarts- oder Situationsaspekt:

Im Hinblick auf die Zukunft des Schülers als eines erwachsenen und mündigen Mitglieds der Gesellschaft muss die Frage so gestellt werden: Wie kann der Mathematikunterricht so gestaltet werden, dass er zusammen mit anderen Fächern

1. das nötige Wissen vermittelt, wodurch der Schüler befähigt wird, sachlich begründet urteilen und aufgrund solcher Urteile Entscheidungen treffen und verantwortlich handeln zu können;
2. die Heranwachsenden in die Lage versetzt, als Mündige und verantwortlich Handelnde am Leben der Gemeinschaft kritisch und konstruktiv teilnehmen zu können.

Im Hinblick auf die gegenwärtige Situation des Schülers lautet die Frage: Wie kann und muss der Unterricht gestaltet werden, damit er

1. dem jeweiligen Stand der psychischen und geistigen Entwicklung des einzelnen Schülers adäquat ist und der Schüler
2. das, was er lernt als sinnvoll und seinen Interessen und Bedürfnissen entsprechend erfahren kann.

Um diesem Anspruch genügen zu können, mussten zuerst die bildungs- und entwicklungstheoretischen Grundlagen wenigstens nach ihren Hauptgesichtspunkten erarbeitet werden, um daraus Kriterien für die Gestaltung der Bildungspraxis ableiten zu können. Diese sollen im Folgenden in Gestalt einer graphischen Darstellung aufgezeigt werden. Weshalb gerade diese Form der Darstellung gewählt wurde, hat mit dem Verhältnis der Kriterien zueinander zu tun. Die Matrix ist nämlich in besonderer Weise geeignet,

1. das Wechselverhältnis von Inhalt und Methode, von Bildungszielen und Bildungsprozessen, von der Darbietung des Stoffs durch die Lehrperson und der Verarbeitung des Stoffs durch den Schüler zum Ausdruck zu bringen;
2. deutlich zu machen, dass in jeder Unterrichtseinheit möglichst alle verschiedenen Aspekte berücksichtigt werden sollen.

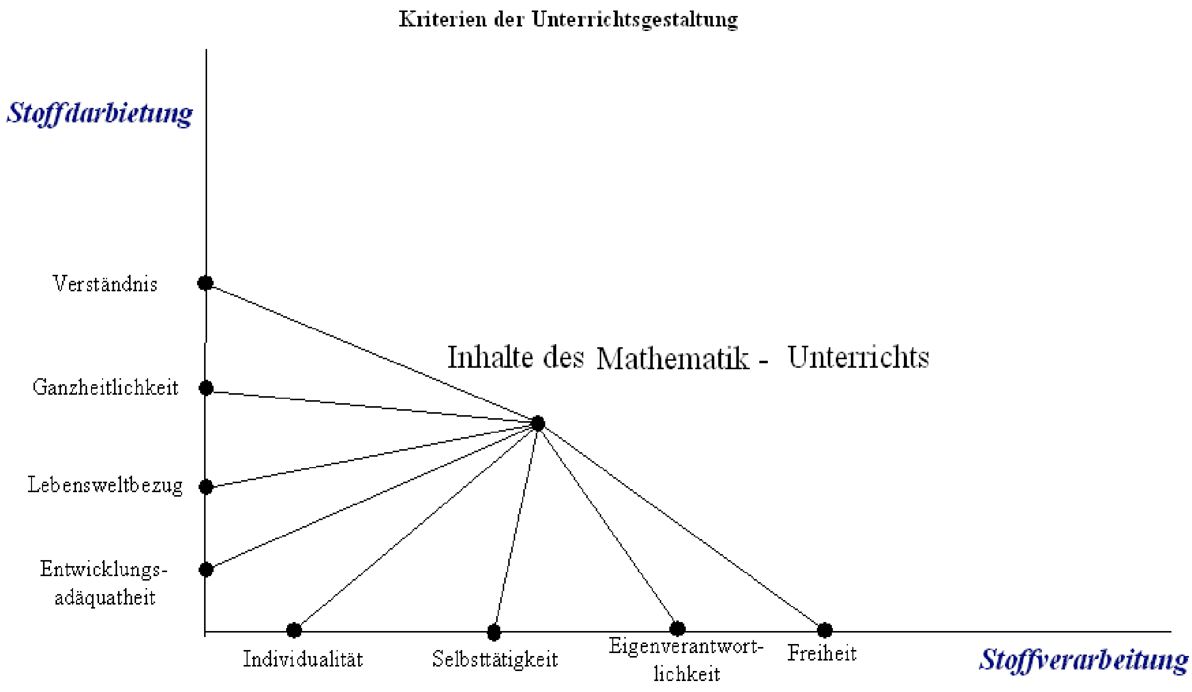


Abbildung 4.1: Matrix zur Darstellung der Kriterien für Unterrichtsgestaltung

Die Matrix stellt dabei weder ein abgeschlossenes System dar noch erhebt sie Anspruch auf Vollständigkeit. Vielmehr sind sowohl nach der vertikalen als auch nach der horizontalen Ausdehnung hin Ergänzungen denkbar. Dennoch werden die genannten Kriterien als notwendig und für die Unterrichtspraxis praktikabel erachtet, wenn Bildung nicht als frei schwebende, dem Unterrichtsalltag enthobene Idee verstanden werden soll bzw. wenn es dem Leser dieser Arbeit nicht ergehen soll, wie einem Kollegen namens J. Grell, der nach intensiver Lektüre der Schriften M. Heitgers resigniert feststellt:

> *„Ich habe den Eindruck, dass Marian Heitger es gut mit uns Lehrern meint ... . Aber ich verstehe nicht, wie ich den 'Vollzug von Geltungsbindung' praktisch vollziehen soll. Ja, ich habe nicht einmal die geringste Ahnung, was Heitger mit Geltungsbindung – oder mit Hinführung zum Wissen – eigentlich meint. Mir bleibt nur das dumpfe Gefühl, dass er nicht mit mir zufrieden wäre, wenn ich ihm sagte, dass ich ganz gern ein Lehrer sein möchte, der es versteht, seine Schüler zum Wissen hinzuführen, und zwar so effektiv und effizient wie möglich."*[400]

[400] Grell, J., Direktes Unterrichten, in: Wiechmann, J. (Hrsg.), Zwölf Unterrichtsmethoden – Vielfalt für die Praxis, Weinheim 2002, S. 36

5 Aspekte einer an entwicklungsadäquaten und bildungstheoretischen Gesichtspunkten orientierten Lehrplan- und Unterrichtsgestaltung des Faches Mathematik (Schwerpunkt Gymnasium)

Die Berücksichtigung der für den Bildungsprozess relevanten Wirkfaktoren, nämlich Verständnis, Ganzheitlichkeit, Lebensweltbezug und Entwicklungsadäquatheit darf nicht so verstanden werden, dass die einzelnen Aspekte isoliert in den Unterricht eingebracht werden. Vielmehr ist anzustreben, dass der Unterricht möglichst viele dieser Elemente gleichzeitig beinhaltet. Zu jeder Zeit muss sich der gesamte Lehr- und Lernprozess an entwicklungsadäquaten Voraussetzungen orientieren, soll möglichst viele Verknüpfungen zu Themen innerhalb des Faches oder zu anderen Fächern herstellen, ferner einen Bezug zur Lebenswelt der Schüler aufzeigen und schließlich auch immer auf Verständnis hin ausgerichtet sein.

Rein aus begrifflichen und theoretischen Gründen werden hier nach Kapiteln getrennt die einzelnen Strukturmerkmale gesondert vorgetragen. In der Praxis müssen sie eine Einheit darstellen. Das Gleiche gilt für die Merkmale der Stoffverarbeitung, nämlich Freiheit, Individualität, Selbsttätigkeit und Eigenverantwortlichkeit.

Im Bezug auf die Darstellung der Beispiele muss ebenfalls vor einem Missverständnis gewarnt werden: Mit der Bearbeitung der Fibonaccizahlen beispielsweise, um die es im Kapitel 5.5 geht, soll nicht Ganzheitlichkeit „vermittelt" und mit der Einführung von „textlichen Eigenproduktionen" nicht Verständnis erzeugt werden. Vielmehr kann an diesen Beispielen der betrachtete Aspekt besonders anschaulich gezeigt werden.

Unterricht, wie er in dieser Arbeit verstanden und postuliert wird, muss aber immer ein Zusammenspiel aus allen acht angesprochenen Merkmalen und den Unterrichtsinhalten sein, was auch die graphische Darstellung in der Matrix deutlich machen soll.

5.1 Grundsätzliche Vorüberlegungen zum Schulfach Mathematik

In Kapitel 4 wurde versucht, aufbauend auf die bildungstheoretischen und entwicklungspsychologischen Grundlagen, Bedingungen herauszustellen, die Bildungsprozesse in der Schule und speziell im Mathematikunterricht ermöglichen können.

Sie alle müssen zusammenwirken und auf die gewünschten mathematischen Unterrichtsinhalte angewendet werden. Aber um welche mathematischen Unterrichtsinhalte soll es dabei gehen und wie können diese Inhalte konkret vermittelt werden?

Einerseits kann Mathematik völlig unabhängig von der Realität und Erfahrung gesehen werden, ist sie doch ein Gedankengebäude. Die Mathematik ist eine Welt des reinen Denkens, die unserer schöpferischen rationalen Fantasie entspringt (A. I. Wittenberg).

Andererseits existiert die Mathematik bereits und muss gar nicht erschaffen, sondern nur von uns entdeckt werden. So ist es nicht möglich, sich mit der Welt auseinanderzusetzen, ohne auf Mathematik zu stoßen. Der Mensch braucht Strukturen und Ordnung, er muss abstrahieren und klassifizieren können, um sich in der Welt orientieren zu können. Damit löst sich der vermeintliche Widerspruch auf, dass Mathematik nur ein dem menschlichen Denken entsprungenes Konstrukt darstellt, das als freischwebendes Gebilde aller Wirklichkeit enthoben ist. Von Anfang an benötigt das Kind in seiner Entwicklung mathematische Denkweisen. Es muss im Rahmen seiner Entwicklung eine enorme Abstraktionsleistung vollbringen, wenn es beispielsweise mit verschiedensten Abbildungen von Mäusen oder Abbildungsausschnitten von Mäusen in Bilderbüchern oder anderen Darstellungen den Begriff „Maus“ verknüpfen soll. Offensichtlich ist das Kind in der Lage, aus allen Abbildungen die Merkmale herauszufiltern, die das Charakteristikum der Maus darstellen und sie von Katze, Bär und sonstigen Tieren unterscheiden. Das Kind muss ordnen, klassifizieren, vergleichen, Unterschiede wahrnehmen und betreibt damit bereits Mathematik. Mathematik ist dem Menschen also nichts Fremdes, nichts Künstliches, was er mit Eintritt in die Schule mühsam und losgelöst von aller Realität lernen muss. Der „mathematische Geist“ wirkt bereits vom ersten Lebensalter an (M. Montessori). Erst mit Hilfe der Mathematik kann der Mensch die Welt erfassen. Die Mathematik ist dem Menschen zutiefst zu eigen und Grundlage für seine Entwicklung und Orientierung im Leben. Dieser enge Bezug der Mathematik zur Welt macht deutlich, dass Mathematik eine Disziplin ist, der im Bildungsprozess eine herausragende Bedeutung zukommt. Mathematik ist ein Fach, in dem die Auseinandersetzung mit der Welt in besonders natürlicher und grundlegender Weise geschehen kann.

J. Piaget geht davon aus, dass das Kind im Laufe seiner Entwicklung die mathematischen Denkformen selbst „konstruiert“, d.h. Schritt für Schritt aufbaut. Wie das geschieht, wurde am Beispiel der Entwicklung der Raumvorstellung und des Zahlbegriffs in Kapitel 3.1.2 gezeigt. Da sich das Kind die verschiedenen Schritte in der Entwicklung des mathematischen Denkens selbst konstruieren muss, wird klar, dass dies nur in aktiver Auseinandersetzung des Kindes mit dem jeweiligen Lerngegenstand geschehen kann. Auch grundlegende und scheinbar einfache Begriffe bedürfen eines sorgfältigen und schrittweisen Aufbaus, der insbesondere durch das aktive Handeln des Schülers erzielt werden kann. Diese Feststellung ist für die Gestaltung des Mathematikunterrichts von fundamentaler Bedeutung.

So wie das Kind, ontogenetisch betrachtet, in der Entwicklung mathematischen Denkens und speziell bei der Entwicklung des Zahlbegriffs einen Baustein nach dem anderen aufeinander stellt, so zeigt sich auch, phylogenetisch betrachtet, die Entstehung der Zahl und deren Anwendungen als Folge einzelner Schritte. In ihren Anfängen diente die Mathematik, vornehmlich das Rechnen mit Zahlen, als Konstrukt zur Lösung von Lebensproblemen. So sind uns z. B. Zahlen aus der Steinzeit in Form von eingeritzten Strichen auf Knochen überliefert, die bereits 35.000 Jahre v. Chr. vermutlich als Kalenderstöcke benutzt wurden, um Mondphasen berechnen zu können. Diese besonderen Zeiten waren aus religiösen aber auch aus praktischen Motiven heraus wichtig, da in der Regel die Vollmondzeiten auch nachts gute Sichtbedingungen schufen. Astronomische Forschungen hatten großen Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik. Aber auch Problemstellungen aus Handel und Verwaltung waren Triebfeder für die Weiterentwicklung der Mathematik. Zunächst gab es die ganzen Zahlen, später kamen Brüche und irrationale Zahlen hinzu.[401] Diese wenigen Hinweise auf die Entstehung und Verwendung der Mathematik sollen beispielhaft die Analogie phylogenetischer und ontogenetischer Entwicklungsprozesse andeuten.

Wie die Mathematik entstehungsgeschichtlich betrachtet von einfachen Rechenarten ausgehend zu immer komplexeren Konstruktionen vordrang, so versucht auch der Mathematikunterricht auf einfachen Rechenkonstrukten aufbauend zu immer anspruchsvolleren Denkgebilden zu kommen. Diese entwicklungslogische Vorgehensweise spiegelt sich auch in den Lehrplänen für Mathematik wider, wenngleich hier keine linearen Entsprechungen zu erwarten und auch nicht sinnvoll sind. So wurde beispielsweise die Null in der Mathematikgeschichte erst relativ spät eingeführt, in der Schulmathematik jedoch ist sie vom Schulbeginn an in den Zahlenraum mit integriert.

Die klassischen Themengebiete in der Mathematik als Wissensbereiche sind die Algebra und die Geometrie, in geringerem Umfang auch die Stochastik. Diese drei wesentlichen Teilgebiete finden sich auch in den Lehrplänen für den Mathematikunterricht des Gymnasiums:

Algebra und Analysis:	Zahlenbereiche mit Eigenschaften und Rechenregeln und Rechengesetzen, Alltagsgrößen und Größenordnungen, Funktionsbegriff, Diagramme, Terme und ihre Umformungen, Gleichungslehre, Differential- und Integralrechnung
Geometrie:	Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens; ebene und räumliche Grundformen; Lagebeziehungen, Flächen- und Rauminhalte.
Stochastik:	Erfassen des Zufalls in Modellen, Wahrscheinlichkeitsbegriff, statistische Daten[402]

[401] Mankiewicz, R., Zeitreise Mathematik, London 2000

[402] Staatsministerium für Unterricht und Kultus (Hrsg.), Lehrplan für das Gymnasium in Bayern, Mathematik 2003

Diese Inhalte bilden den Grundstock mathematischen Wissens, was durchaus plausibel und unproblematisch erscheint.

Eine genauere Betrachtung der lehrplanmäßig festgeschriebenen Inhalte des Faches Mathematik zeigt jedoch, dass der Lehrplan einige Widersprüche bzw. didaktisch schwer einlösbare Forderungen enthält.

Erstens schreiben die Pläne für die einzelnen Jahrgangsstufen exakt vor, welche Inhalte wann zu erlernen sind. Lediglich die Reihenfolge der Behandlung des Stoffes innerhalb der Schuljahre kann von der Lehrkraft festgelegt werden. Die Konsequenzen liegen auf der Hand: Unabhängig davon, ob die Schüler dem Unterricht folgen können und den Stoff verstanden haben, muss im Plan weiter verfahren werden. Mit der jahrgangsweisen Festlegung des Stoffes wird zum einen suggeriert, dass die mathematischen Inhalte einem strengen hierarchischen Aufbau folgen, was so nicht zutrifft. Darauf wird an späterer Stelle noch einmal eingegangen.

Ein weiteres Problem sehe ich darin, dass der Lehrplan die Behandlung einer enormen Stofffülle, insbesondere auch von Faktenwissen vorsieht. Dies hat zur Folge, dass über weite Strecken hinweg der schnellste Weg der Erarbeitung gewählt werden muss, nämlich der Lehrervortrag im Frontalunterricht mit straff gelenkten Übungsphasen. Der Anspruch, dieser Stofffülle gerecht zu werden, ist bei allem Bemühen in der Realität jedoch ohnehin nicht einlösbar. Ferner bleibt zu wenig Zeit für problemlösende Aufgaben, da diese in ihrer zeitlichen Planung schwer zu kalkulieren sind und somit einen Unsicherheitsfaktor darstellen, auf den man zugunsten der Bearbeitung von Aufgaben mit stereotypen Lösungswegen weitgehend verzichtet. Dabei wären gerade diese Problemlösungs- und Anwendungsaufgaben für ein tieferes Verständnis von Mathematik von besonderer Wichtigkeit. Um das Problem der Stofffülle zu verdeutlichen, sei auf einen Auszug aus dem ausführlichen Lehrplan der 7. Jahrgangsstufe im Anhang (Seite A-1 ff.) verwiesen.

Um diese Problematik der Stofffülle aufzulösen, wurde die Idee des „Exemplarischen Lernens“ entwickelt. Der Kürze halber beziehe ich mich hier auf A. I. Wittenberg, der die einschlägige Literatur zum Thema „Exemplarisches Lernen“ bereits abgehandelt und auf die Mathematik bezogen hat. Er sagt, dass an jedem einzelnen „Themenkreis“ die ganze Mathematik dargelegt und verstanden werden könne. In jedem Themenkreis könne die Charakteristik der Mathematik mit ihren Fragen, Begriffen und Methoden, mit ihren fachspezifischen Verfahrensweisen, mit der Besonderheit, dass sich die mathematischen Wahrheiten in unserer eigenen Vernunft erschließen und keiner externen Begründung bedürfen, begriffen werden. Mathematik kann diese Erfahrung, an einem kleinen Teil das Ganze bzw. das Prinzip verstehen zu können, leisten, wenn dieser Teil ganz im geistigen Erfahrungsbereich des Schülers liegt und er ihn vollständig durchdringen kann.

Damit ist das Problem der Stofffülle deutlich entschärft, wenngleich die Problematik der jahrgangsweisen Festschreibung auch beim exemplarischen Unterricht erhalten bleibt.

Mathematik ist kein streng hierarchisches System, bei dem jeder weitere Lernschritt einen anderen notwendig voraussetzt.[403] Zum Beispiel können Teile der Geometrie prinzipiell unabhängig von der Algebra entwickelt werden, was nicht ausschließt, dass es zum besseren Verständnis wichtig ist, Verweisungszusammenhänge herzustellen. Die nichthierarchische Struktur der Mathematik lässt zu, dass die einzelnen Bundesländer verschiedene Lehrplaninhalte aufweisen, wie in der Praxis zu sehen ist.

Das ist kein Mangel, sondern kann als Vorteil betrachtet werden, der es erlaubt, viele Möglichkeiten der Auswahl und Anordnung von Inhalten zuzulassen, je nachdem, welche Ziele im Unterricht verfolgt werden. Darüber hinaus ist es gar nicht nötig, dass alle Gebiete erfasst werden müssen, um mathematische Bildung zu ermöglichen. „Vollständigkeit" ist hierfür kein erforderliches Kriterium. Abgesehen davon ist es auch gar nicht einlösbar.

Der Vorteil, der sich aus dieser nichthierarchischen Struktur und ihrer relativen Offenheit ergibt, enthält die Chance eines offenen Unterrichts im Fach Mathematik. Dies könnte dem Schüler gestatten, seinen eigenen Lernweg mit der Wahl der Inhalte und eigener Arbeitseinteilung zu gehen. So wäre es denkbar, dass ein Schüler für einzelne Gebiete besonderes Interesse zeigt und in seiner Wissbegier weit über das hinausgeht, was der Lehrplan vorsieht. Um dennoch im Rahmen seines Zeitbudgets zu bleiben, könnte er dann andere Gebiete nicht oder nur oberflächlich bearbeiten. Es könnte aber auch bedeuten, dass ein Schüler den Einstieg in ein Gebiet über eine ganz andere Seite vornimmt, als es im Aufbau des Lehrplanes vorgesehen ist, und von dort aus den weiteren Lernweg wählt. Dies setzt allerdings eine Unterrichtsform voraus, die die Formen des herkömmlichen Unterrichts sprengt. Davon wird im nächsten Kapitel noch genauer die Rede sein.

Um Missverständnissen vorzugreifen, muss betont werden, dass die Wahlmöglichkeit durch den Schüler nicht Beliebigkeit bedeuten kann, aber auch nicht, auf gewisse Grundkenntnisse verzichten zu können. Wonach muss sich dann die Auswahl der mathematischen Inhalte als unabdingbarer Teil richten?

Die Frage, ob der Mathematik an sich, d.h. als reines Wissensgebiet, bildende Wirkung zukommt, muss genauso verneint werden wie die Frage, ob Mathematik in besonderer Weise geeignet sei, spezielle Denkfähigkeit und Denkformen, etwa das logische Denken fördern könne. Die noch immer diskutierte Frage nach dem Verhältnis von Bildungsobjektivismus (der Bildungswert richtet sich nach der Art der Inhalte) und Bildungsformalismus (die Inhalte des Wissens als Mittel zur Bildung) hat schon J.

[403] vgl. Heymann, H.W., Allgemeinbildung und Mathematikunterricht, Weinheim 1996

F. Herbart entschieden, wenn er sowohl die eine als auch die andere Richtung als „Unding“ bezeichnet.

Kein Vorstellen, Denken, Urteilen, Entscheiden ohne dass diese geistigen Tätigkeiten auf Weltinhalte bezogen wären. Keine Wissensinhalte, die losgelöst vom denkenden, vorstellenden Subjekt bilden könnten. Deshalb erübrigt sich die Frage, ob es Wissensinhalte gibt, die mehr bilden als andere oder Inhalte, die gar nicht bilden. Es erübrigt sich auch die Frage, ob bzw. welche mathematischen Inhalte mit den allgemeinen Bildungszielen vereinbar sind. Oder noch spezifischer: Ob Mathematikunterricht der unmittelbaren Vorbereitung auf das außermathematische Alltagsdenken und Alltagshandeln dienen könne und solle.[404]

Bildung als notwendige und nur vom Einzelnen zu leistende Aufgabe der Verknüpfung von Ich und Welt, von Sprechakten und Sprechinhalten, von Charakterbildung und vielseitiger Wissensbildung, von Wissen und Gewissen, die ihre Bewährung im Alltagshandeln, im Beruf und in der Teilhabe am gesellschaftlichen Leben findet, setzt immer Aneignung, Verstehen und Anwendung von Wissen voraus. Sie lässt es aber offen, mit welchen Inhalten sich das Individuum auseinandersetzt.

Aus rein bildungstheoretischer Sicht lässt es sich nicht an Inhalten festmachen, ob diese für das sich bildende Individuum bildungsrelevant sind oder nicht. Es gibt auch keine Hierarchie von Wissens- oder Praxisfeldern, gemäß welcher der eine Bereich von höherem Bildungswert sei als der andere.[405] Etwa in der Weise, dass die anschauende, denkende oder politische Tätigkeit ein höheres Bildungsgut darstellt als die handwerkliche.

Bezogen auf den Schulunterricht bedeutet das jedoch nicht, dass die Unterrichtsfächer und deren spezifische Inhalte beliebig wären. Denn „wäre alle geistige Tätigkeit von einerlei Art, so wäre es gleichgültig, mit welchen Gegenständen der Unterricht die Jugend beschäftigte.“[406] Welche Inhalte vermittelt werden sollen und in welchem Umfang sie vermittelt werden sollen, hängt m. E. nach von zwei wesentlichen Kriterien ab:

1. Vom Primat der Sittlichkeit
2. Von der „Menschlichen Gesamtpraxis“[407], innerhalb der die berufliche Tätigkeit eine wichtige Rolle spielt.

[404] vgl. Lengnink, K.,Peschek, W., Das Verhältnis von Alltagsdenken und mathematischem Denken als Inhalt mathematischer Bildung, in: Lengnink, K., Prediger, S. Siebel, F. (Hrsg.), Mathematik und Mensch, Darmstadt 2001, S. 65 - 82

[405] vgl. Benner, D., Allgemeine Pädagogik, Weinheim 1987, S. 95 ff.

[406] Herbart, J. F., Umriss pädagogischer Vorlesungen § 60, in: Pädagogische Schriften, Band 1, hrsg. von F. Bartholomäi, 5. Auflage neu bearbeitet von E. Salwürk, Langensalza 1890[5], S. 306

[407] Benner, D., Allgemeine Pädagogik, Weinheim 1987, S. 25 ff.

Damit aber die Vermittlung und Aneignung Bildungsprozesse in Gang bringen können, müssen die zu vermittelnden Inhalte den „regulativen Prinzipien“[408] entsprechen, wie dies die Matrix verdeutlicht.

Sofern die Auswahl des Unterrichtsstoffs auch unter dem Gesichtspunkt beruflicher „Brauchbarkeit“ erfolgt, unterliegt sie dem Kriterium der Bildungsintention. D.h. Unterricht bereitet nur soweit auf den Beruf vor, als er dem Einzelnen die Möglichkeit verschafft, unter der Vielzahl möglicher Berufe frei wählen zu können. Wenn Selbstbestimmung als wesentliches Bildungskriterium reale Möglichkeit werden soll, dann gilt das auch für den Sektor der Berufswahl.

Insofern setzt das Kriterium der Bildung doch wieder das Maß für Unterichtsgestaltung und Unterrichtsinhalte. Aber dieser Maßstab kann weder determinierend sein – was ein Widerspruch in sich wäre – noch kann er den Rahmen so eng fassen, dass er den Entscheidungsspielraum der Einzelnen faktisch auf Null reduziert, wie es beispielsweise bei der reinen Fachausbildung der Fall sein könnte. Stoffauswahl und Stoffumfang bestimmen sich somit nach Maßgabe der gesellschaftlichen Teilhabe, zu der auch der Beruf zählt, und nach Maßgabe der Ermöglichung weiterführender Bildungsgänge.

Unter dem Anspruch der allgemeinen Menschenbildung (W. v. Humboldt) ist es Aufgabe der Schule, den Schüler sowohl auf ein gesellschaftlich verantwortungsvolles Handeln und Leben als auch auf ein mögliches Studium vorzubereiten.

Zur Erfüllung der ersten Aufgabe muss der Mensch über Wissen verfügen, sonst kann er nicht verantwortlich handeln, sonst kann er nicht beurteilen und entscheiden, sonst kann er seinen Willen nicht durch Einsicht steuern, wie es J. F. Herbart fordert. Bezogen auf die mathematischen Inhalte bedeutet das, dass er das Wissen braucht, das er in seinem Leben benötigt. Dieser mathematische „Gedankenkreis“, um mit J. F. Herbart zu sprechen, wird umso umfassender und tiefer sein müssen, je umfassender der verantwortungs- und fachspezifische Entscheidungsbereich ist, für den Schüler vorbereitet werden sollen. Das wird auch davon abhängen, ob der Schüler einen mathematischen oder nicht-mathematischen Beruf ergreifen wird.

Im ersten Fall ist die Auswahl leichter zu fassen, da man sich an den Voraussetzungen orientieren kann, die die Universitäten oder andere Ausbildungsstätten mathematischer Berufe zur Aufnahme eines Studiums oder einer anderen Ausbildung vorgeben. Da der Schüler aber möglicherweise erst zu einem relativ späten Zeitpunkt entscheidet, dass er einen mathematischen Beruf ergreifen wird, muss ihm in jedem Fall die Möglichkeit gegeben werden, bei ausreichendem Interesse, bis in die Sphären der Mathematik vorzudringen, die er für seine Berufsausbildung braucht.

[408] Ebenda, S.73 ff.

Im zweiten Fall ist es schwieriger, da die Bandbreite des mathematischen Wissens, das der Schüler irgendwann in seinem Leben brauchen wird, je nach Berufswahl und Wirkungskreis sehr unterschiedlich groß sein wird. So leuchtet ein, dass die Schule zwar dem Schüler die Möglichkeit einräumen kann und muss, einen repräsentativen Grundstock für durchschnittlich benötigtes mathematisches Wissen zu erarbeiten. Jedoch muss die Schule den Schüler auch zu vielseitigem Interesse im Sinne J. F. Herbarts befähigen, was ihn in die Lage bringt, lebenslang zu lernen und Verstandenes auf neue, analoge Fälle übertragen zu können. H. W. Heymann wertete verschiedene Untersuchungen aus, die einen durchaus plausiblen Katalog von mathematischen Inhalten ergaben, die mathematisches Alltagswissen darstellen. Diese Auflistung ist auszugsweise bereits in Kapitel 2.3.4 enthalten.

Im Folgenden soll ein denkbarer Rahmen des Schulfaches Mathematik in Anlehnung an den existierenden Lehrplan mit seinen klassischen Disziplinen Geometrie und Algebra skizziert werden. Dabei soll es weder um Vollständigkeit noch um einen stringenten Aufbau der Unterrichtsinhalte gehen. Es soll lediglich gezeigt werden, wie dieser Basisbestand mit seinen Verflechtungen und zugrundeliegenden Denkweisen aufgebaut werden könnte. Die tatsächliche Auswahl der Inhalte muss sich dann an den Kriterien für einen an Bildung ausgerichteten Unterricht orientieren.

Wie bereits beispielhaft bei der Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kind dargelegt, kommt, den Erkenntnissen J. Piagets folgend, den beiden Operationen der Klassifikation und Seriation im gesamten Entwicklungsprozess mathematischen Denkens eine grundlegende Bedeutung zu. Sie sind von „prototypischem Charakter“[409] für die konkreten Operationen. Auch M. Montessori betont die Fähigkeit zur Klassifikation und Kategorisierung als Basis für den Aufbau des Verstandes. Diese Fähigkeiten sind auch Voraussetzungen für Analyse, Assoziation und Synthese, die fundamentalen Denkweisen in der Mathematik.

Bereits im Kleinkind-, Vorschul- und Grundschulalter können und müssen diese Denkweisen mit geeigneten Hilfsmitteln und Lernarrangements, die auch die Motorik mit einbeziehen, geschult und aufgebaut werden. Sie helfen den Kindern, Ordnungsstrukturen und -schemata aufzubauen, die sie zur Orientierung in der Welt benötigen.

Beim Eintritt ins Gymnasium kann mit Algebra und Geometrie als zwei „Fächern“ zweigleisig verfahren werden, wobei so oft und so früh wie möglich Verknüpfungen zwischen den beiden innermathematischen Disziplinen hergestellt werden sollen. Verbunden sind aber alle mathematischen Inhalte durch ihre spezifischen Denkhandlungen, die es immer wieder zu betonen und üben gilt, wie z. B. vergleichen, zusam-

[409] zur Oeveste, H., Kognitive Entwicklung im Vor- und Gundschulalter – Eine Revision der Theorie Piagets, Göttingen 1987, S. 30

menfassen, ordnen, klassifizieren, verallgemeinern, konkretisieren, analysieren, charakterisieren, konkludieren, synthetisieren.

Zunächst zur Algebra (siehe Abbildung 5.1): Ausgehend von den natürlichen Zahlen gibt es die Möglichkeit, Folgen natürlicher Zahlen und deren Gesetzmäßigkeiten zu untersuchen. Damit ergibt sich zwangsweise die Thematisierung der Unendlichkeit mit all ihren Facetten. Aber auch die sukzessive Zahlenbereichserweiterung zu den ganzen, rationalen, reellen und sogar komplexen Zahlen mit den entsprechenden Rechengesetzen und Operationen und der Bildung von Termen stellt einen gängigen Weg im Anschluss an die Behandlung der natürlichen Zahlen dar. An die rationalen Zahlen schließt sich gut das Thema um Verhältnisse an, die reellen Zahlen bieten den Übergang zur Thematik der Unendlichkeit und zu ausgewählten irrationalen Zahlen wie Pi und e. Die Zahl Pi führt unmittelbar zur Trigonometrie, wobei es möglich wird, mit Hilfe der Reihen zu den Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen zu gelangen und damit den Einstieg in die Funktionenlehre zu finden.

Über die Terme kann man jedoch auch direkt zu Gleichungen übergehen, die sich dann in lineare, quadratische etc. Gleichungen ausdifferenzieren und deren graphische Lösungsverfahren einen schnellen Zugriff zur Geometrie ermöglichen. Unmittelbar an die Gleichungen schließen sich die Ungleichungen an. Mit der Hinzunahme der Polynome gelangt man zu den Funktionen.

In der Geometrie ist es – aufgrund entwicklungspsycholgischer Überlegungen (siehe Kapitel 5.3) – erwägenswert, mit topologischen Fragestellungen zu beginnen, die dann in euklidische Problemstellungen übergeführt werden können. Dort bietet sich die Möglichkeit, entweder mit dem Themenkomplex Symmetrie zu beginnen und von dort, mit der Betrachtung besonders symmetrischer Gebilde (z. B. Kreis) zu geometrischen Abbildungen (Drehung, Verschiebung, Spiegelung) zu kommen. An die schlösse sich mit der Abbildung allgemeinerer geometrischer Formen die Behandlung geometrischer Figuren (Punkt, Gerade, Dreieck, Viereck, Vieleck) an. Man könnte aber auch umgekehrt verfahren und direkt mit den Geometrischen Formen beginnen und Abbildungen auf diese anwenden, um dann zur Symmetrie zu gelangen. Bei den Geraden ist ein Übergang zur Algebra möglich, indem diese unter dem Gesichtspunkt der Berechnung von Steigung, Schnittpunkten usw. bearbeitet werden. Dazu ist es notwendig, lineare Gleichungen zu thematisieren, was wiederum Anknüpfungspunkte für lineare Ungleichungen bietet und auch zu quadratischen Gleichungen bzw. Parabeln weiterleiten kann.

Aber auch die Dreiecks -und Viereckslehre mit den Fundamentalsätzen von Pythagoras, dem Höhen- und Kathetensatz, Flächenberechnungen und –verwandlungen können die enge Verbindung zwischen Algebra und Geometrie darstellen. Kongruenz und Ähnlichkeit sind zwei grundlegende Eigenschaften in der Geometrie, wobei letztere als Verbindungselement zur Trigonometrie gesehen werden kann, hat sie doch die Beziehungen zwischen Winkeln und Strecken zum Inhalt. Von der Trigonometrie aus wäre es über die Kombination mit den Reihen möglich, zu den Exponential- und Logarithmusfunktionen zu kommen und über diesen Weg weiter zur Funktionenlehre. Die Trigonometrie bietet ferner den Anschluss an die sphärische Trigonometrie, die Geometrie auf der Kugel, womit ein weiterer Zusammenhang zwischen der Geometrie und der Algebra gezeigt werden kann.

Die Erweiterung der Betrachtungen in die dritte Dimension leitet zu den Körpern über, welche vielfältige geometrische, aber auch algebraische Fragestellungen aufwerfen (z. B. Umfang, Fläche, Volumen) und über die Frage nach extremen Flächen, Volumen usw. kann man direkt zur Differential- und Integralrechnung gelangen. Die Verbindungen zur Funktionenlehre in der Algebra liegen hier auf der Hand. Die Behandlung funktionaler und – zur Abgrenzung – nicht-funktionaler Zusammenhänge verschiedenster Arten finden hier ihren Platz. Aber auch die Berechnung von Kegelschnitten im Rahmen des Themas Körper führt zu Parabeln, Ellipsen und Hyperbeln und damit ebenso zu den Funktionen.

Es könnten nahezu beliebig viele weitere Wege durch die Schulmathematik gefunden werden, was zeigt, dass man nicht von einem streng hierarchischen Aufbau der Mathematik sprechen kann. Selbstverständlich braucht es bestimmte Voraussetzungen, um bestimmte andere Inhalte bearbeiten zu können, aber das bedeutet nicht, dass man gewissermaßen auf Vorrat sog. Grundwissen anhäufen muss. Es wäre auch denkbar, die benötigten Kenntnisse erst dann zu lernen, wenn sie auch wirklich gebraucht werden.

> *„Dann ist es immer noch Zeit, solche Kenntnisse zu übermitteln, ohne dass man den Zögling durch eine zunächst ungewollte Schar von Bildungsgütern hindurchschleppt."*[410]

---

[410] G. Kerschensteiner, Theorie der Bildung, Leipzig und Berlin 1931, S. 478 f.

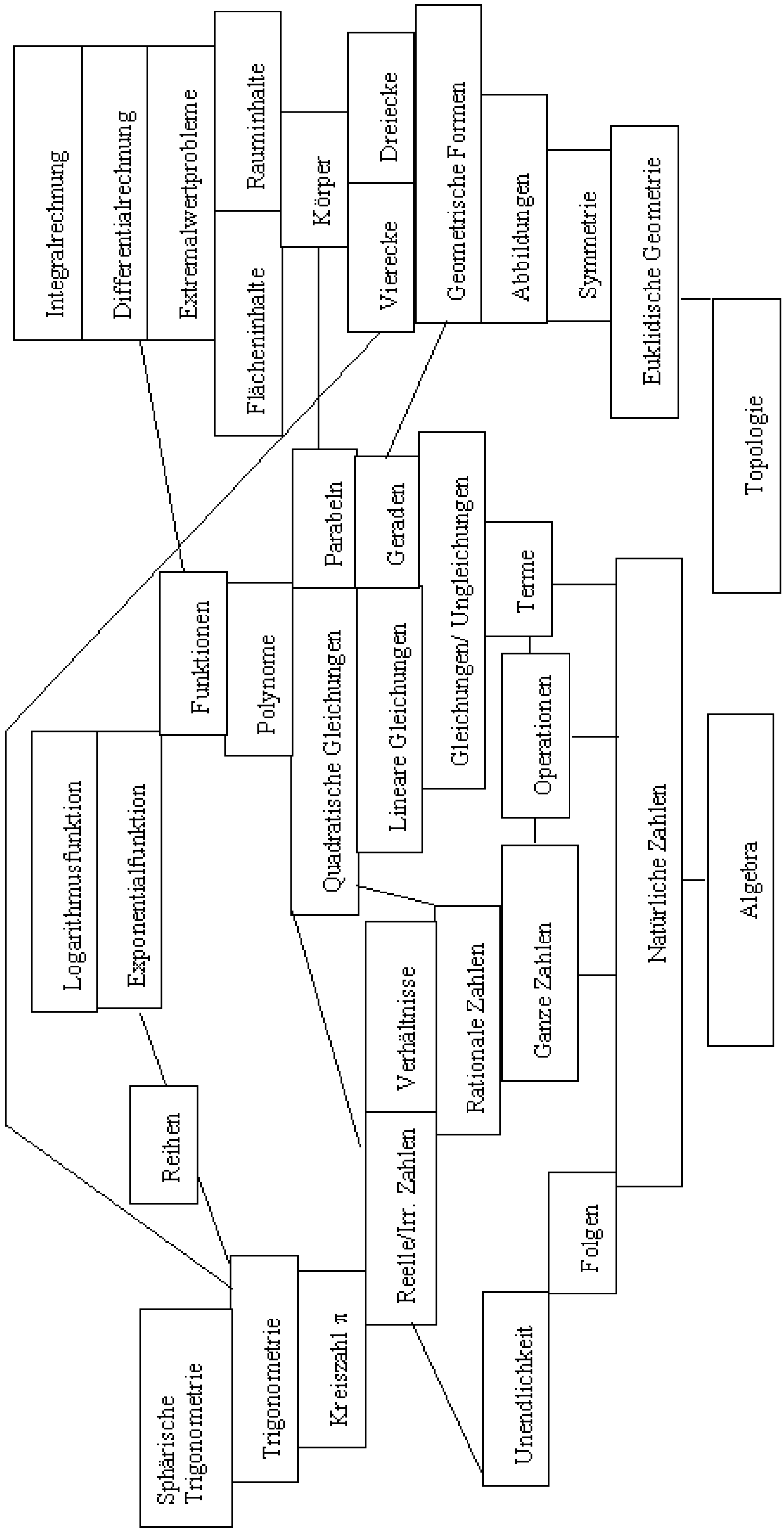


Abbildung 5.1: Strukturgitter zentraler (schul-)mathematischer Inhalte

Nachdem dieses Kapitel sich vor allem den Inhalten von Mathematikunterricht gewidmet hat, versucht das nächste Kapitel eine Antwort darauf zu geben, wie ein Unterricht methodisch aussehen könnte, der die gewünschte inhaltliche Offenheit ermöglicht und die Stoffmenge flexibler handhabt.

5.2 *Regulative Prinzipien der Unterrichtsgestaltung: Individualität, Selbsttätigkeit, Eigenverantwortlichkeit und Freiheit*

Ausgangspunkt ist die folgende konkrete Situation, mit der sich der Mathematiklehrer als Fachlehrer einer 5. Klasse zu Beginn des Schuljahres konfrontiert sieht. Für ca. 30 Schüler, die dem Mathematiklehrer im Regelfall unbekannt sind und aus den verschiedensten Grundschulen in die 5. Jahrgangsstufe des Gymnasiums kommen, soll ein Mathematikunterricht gehalten werden. Den Einstieg in das 5. Schuljahr könnte ein Klassenprojekt bilden, das sich mit „Mathematik und Natur" beschäftigt. Dieses Unterrichtsbeispiel wird im Kapitel 5.5 genauer beschrieben.

An dieser Stelle ist nur wichtig, dass ein Projektergebnis die Fibonacci-Zahlen sind, eine Folge natürlicher Zahlen, bei der sich die Folgenglieder durch $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, wobei $n \geq 1$ und $n \in N$, $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$ berechnen lassen. Blumen und andere Pflanzen bilden die Grundlage für die „Forschungen". Dieses Projekt bindet, ohne auf irgendwelche Voraussetzungen aus der Grundschule Rücksicht nehmen zu müssen, alle Schüler in ein Thema ein, das an ein Naturphänomen anknüpft, zu dem jeder Schüler problemlos Zugang hat. Während der Projektphase hat der Lehrer bereits Zeit, die einzelnen Schüler mit ihrem Leistungsstand, ihrer Arbeitsweise und ihren Interessen kennenzulernen. Er kann sich mit einzelnen Projektgruppen zusammensetzen, Hilfestellungen und Anregungen zur Arbeit geben, aber auch beobachten und Auffälliges dokumentieren. Dieses Projekt bildet die Ausgangslage, von der aus im Anschluss oder bereits parallel zur Projektarbeit weiterführende Themen bearbeitet werden können, die thematisch an die Inhalte des Projekts anschließen.

Das Projekt „Mathematik und Natur" lässt sich inhaltlich in das Thema „Natürliche Zahlen" einbetten, denn ausschließlich diese Zahlen kommen vor. Für alle an die Ergebnisse des Projektes anknüpfende Themen (vgl. Abbildung 5.1) hält der Lehrer im Sinne einer „vorbereiteten Umgebung" Materialien und Informationen bereit, die den Schülern dazu verhelfen, möglichst selbsttätig und aktiv den Stoff zu erarbeiten. Damit steckt er einen inhaltlichen Rahmen, indem die Schüler sich sinnvollerweise bewegen können, weil sie die Voraussetzungen zur Erarbeitung der bereitgestellten Themen erfüllen. Es würden also im Wesentlichen Unterrichtsmaterialien zu Zahlenfolgen, Termen, natürlichen Zahlen und Symmetrie im Klassenzimmer bereit liegen, die den Schüler motivieren können, diese Themengebiete zu erarbeiten. Es können aber auch andere Themen bearbeitet werden, wenn der Schüler die benötigten fachlichen Voraussetzungen mitbringt. Gelingt es dem Lehrer, solche Materialien auszuwählen, die nicht ein im klassischen Sinn „didaktisches Material“ sind, das dem Lehrer als Darbietungshilfe für den Unterricht dient, sondern „Erarbeitungs- und Erkenntnismaterial“, das dem Schüler zur selbstständigen Wissensaneignung und zu Verständnis verhilft, so wird nicht nur der Schüler ein Stück weit unabhängig vom Lehrer, sondern auch der Lehrer vom Schüler. Der Lehrer kann sich zurücknehmen und, ohne die Klasse zu vernachlässigen, eher auf einzelne Schüler eingehen, indem er schwächere unterstützt und stärkere fördert. Disziplinprobleme werden den Unterricht weniger stark belasten, da die Schüler in ihre Arbeiten vertieft sind und nicht gelangweilt nach störenden Aktivitäten suchen. Das soll jedoch nicht heißen, dass dieses Material nicht durch einen Vortrag oder eine Einführung durch den Lehrer ergänzt werden kann. Dieser Vortrag kann insbesondere dann sinnvoll sein, wenn die Inhalte sehr abstrakt sind oder das vorhandene Material nicht ausreichend ist.

Bezogen auf das beschriebene Themenbeispiel der Fibonacci-Folge besteht für die Schüler die Möglichkeit, sich mit anderen Zahlen-Folgen auseinanderzusetzen, dabei ein Gefühl aufzubauen und Ideen für die verschiedensten Gesetzmäßigkeiten zu entwickeln, nach denen Folgen aufgebaut sind. Gleichzeitig eröffnet sich das Problem der Unendlichkeit, das auf vielerlei verschiedene Arten thematisiert und veranschaulicht werden kann. Möglicherweise interessiert sich eine ganze Gruppe für diesen Themenstrang und es wird in Form von Gruppenarbeit weiter fortgeschritten. Vielleicht aber vertieft sich nur ein Schüler in diese Thematik und hat trotzdem die Freiheit, Zeit und Unterstützung des Lehrers, um seinem Interesse nachgehen zu können.

Eine zweite Möglichkeit zur Weiterarbeit bestünde darin, sich mit natürlichen Zahlen und deren Eigenschaften zu beschäftigen und von dort über Operationen, die auf natürliche Zahlen angewendet werden können, zu den Termen zu gelangen oder direkt von den natürlichen Zahlen weitere Zahlenbereiche zu erschließen.

Es könnte aber als dritte Möglichkeit die Darstellung der Folge als Term Anlass geben, das Thema Terme aufzugreifen und von dort zu Gleichungen und Ungleichungen und deren Anwendungen zu kommen.

Symmetrie böte den Einstieg in den vierten Themenstrang, der primär geometrisch geprägt ist, und könnte aus dem Interesse, sich die Form der Blumen, an denen die „Fibonacci-Zahlen“ entdeckt wurden, genauer mathematisch zu betrachten. Daran schlössen sich die Abbildungen an, für die symmetrische Figuren einen besonderen Stellenwert haben.

Auf die beschriebene Weise arbeiten sich die Schüler von Thema zu Thema vorwärts, können Querverbindungen – insbesondere zwischen Geometrie und Algebra – zu bereits behandelten oder neuen Themen aufsuchen und entdecken und können so Schritt für Schritt ihr Verständnis und Wissen von Mathematik und der Welt aufbauen und ergänzen.

Ein solcher Unterricht setzt selbstverständlich eine veränderte Lehrerrolle voraus. Der Lehrer ist nicht mehr der, der von der ersten bis zur letzten Minute der Unterrichtszeit als Vortragender oder Arbeitsaufträge Erteilender dominiert. Er ist vielmehr der Moderator, der beobachtet und im Hintergrund wirkt und von dort aus unterstützt, wo der Schüler seine Hilfe oder Anregung benötigt. Und solch ein Unterricht baut auch darauf auf, dass der Lehrer dem Schüler zutraut, selbsttätig zu arbeiten und sich den Stoff zu eigen zu machen. Der Schüler muss spüren, dass seine Vorschläge, Beiträge und seine Art zu lernen nicht nur dem Vorspiel dienen, bis der Lehrer dann das Heft in die Hand nimmt und die Ergebnisse perfekt und ohne Umwege präsentiert, darauf wartend, vom Schüler übernommen und bestenfalls noch angewendet zu werden. Die Arbeit des Schülers muss das Hauptwerk sein, das vom Lehrer vorbereitet, gelenkt und ergänzt werden kann.

Vier Hauptprinzipien kennzeichnen einen derartigen Unterricht und sollen nun einzeln beschrieben werden:

Selbsttätigkeit (Aktivität)

Das sowohl entwicklungs- und lernpsychologisch, wie auch bildungstheoretisch begründete Prinzip des selbsttätigen Lernens macht in schulpraktischer Sicht einen Unterricht erforderlich, in dem der Schüler aktiv sein kann.

Aus dem Wort Selbsttätigkeit abgeleitet ist damit zweierlei gemeint: Zum einen soll der Schüler <u>selbst</u> agieren und handeln, sei es geistig oder manuell und nicht ausschließlich nachmachen und nachvollziehen. Zum anderen betont es die <u>Tätig</u>keit des Schülers, d.h. nicht nur rezeptiv zu sein und passiv aufzunehmen, sondern initiativ und spontan zu sein. Bereits H. Freudenthal betonte die Wichtigkeit, Mathematik als Tätigkeit und nicht als Fertigprodukt zu lehren.[411] Aktives Handeln kann bedeuten, zu erarbeiten, strukturieren, recherchieren, diskutieren, problematisieren, dokumentieren, gestalten, präsentieren, archivieren, praktisch anwenden u.a..[412]

Natürlich meint Selbsttätigkeit des Schülers nicht, dass der Lehrer überflüssig wird, er muss vielmehr den Rahmen setzen, in dem der Schüler selbsttätig arbeiten kann. Der Lehrer wird Anregungen geben und Hilfestellung im Arbeitsprozess leisten, er stellt Informationsmaterial oder ausgesprochenes Lernmaterial zur Verfügung. Diese Rolle kommt dem Lehrer deshalb zu, weil er das Fachwissen und den Überblick über den Lernstoff hat und einschätzen kann, ob der Schüler einen bestimmten Inhalt bewältigen können wird, weil er das Wissen über den didaktisch sinnvollen Aufbau be-

[411] vgl. Lengnink, K., Prediger, S., Mathematisches Denken in der Linearen Algebra in: ZDM 2000/4, S. 111 - 122

[412] Klippert, H., Motivation durch Methodentraining – Anregung zur Förderung einer neuen Lernkultur, in: Smolka, D. (Hrsg.), Schülermotivation – Konzepte und Anregungen für die Praxis, Neuwied 2004, S. 135

stimmter Themen hat, weil er dazu beitragen kann, für den Lernprozess nötige Informationen zu beschaffen.

Außerdem kommt ihm die wichtige Funktion des Beobachtens zu. Dabei kann er sehen, wo ein Schüler Unterstützung, Ermunterung oder Anregung braucht, auf welchem Stand ein Schüler steht, wo seine Stärken und Schwächen liegen, wo sinnvollerweise weitergearbeitet werden soll. Denn es reicht nicht aus, dass die Schüler irgendwie aktiv sind und dieses Prinzip zum Selbstzweck verkommt oder bloßen Motivationszwecken dient. Es geht nicht um blinden Aktivismus. Die Aktivität der Schüler muss mit einem sinnvollen Ziel verknüpft werden, das Lehrer und Schüler gemeinsam verfolgen wollen.[413]

Eigenverantwortlichkeit

Weil der Schüler für seinen Bildungsprozess allein verantwortlich ist, ihn nur selbst vollziehen kann, muss die Schule einen Rahmen bieten, der dem Schüler diese Verantwortung nicht wieder entzieht. Vielmehr ist es Aufgabe des Lehrers, den Schüler in der Verantwortungsübernahme und Gestaltung des Lernprozesses zu unterstützen. Außerdem belegen Erkenntnisse der Lernpsychologie, dass schneller, gründlicher, mit einer höheren Motivation und auch Behaltensrate gelernt wird, wenn der Lernende seinen Lernprozess in höherem Grade selbst gestalten darf, weswegen die Schule an der Förderung von Eigenverantwortlichkeit des Schülers größtes Interesse haben muss.[414]

Eigenverantwortlichkeit setzt Selbsttätigkeit voraus, denn nur wer fähig ist, selbst aktiv zu werden und aktiv zu sein, kann auch selbstständig entscheiden und damit Verantwortung übernehmen. Eigenverantwortliches Arbeiten aber kann sich nur entwickeln, wenn die Schüler ausreichenden Freiraum in der Gestaltung ihres Lernprozesses haben. Dann werden sie lernen, ihren Lernprozess selbstständig in die Hand zu nehmen und zu organisieren und auch entscheiden können, wann sie Hilfe von außen (durch Mitschüler, Lehrer oder Dritte) benötigen.

Eigenverantwortlichkeit darf aber nicht so verstanden werden, den Schüler sich selbst zu überlassen. Vielmehr muss der Schüler zunächst Hilfestellungen und methodische Anleitung erhalten, um sich die Zeit selbst einteilen, um Inhalte selbst auswählen, Lernwege selbst festlegen und seine Arbeit kontrollieren sowie den ganzen Lernprozess reflektieren zu können. Den Schüler darin zu unterweisen, ihm die nötigen Arbeitstechniken und –methoden zu vermitteln, ihm zu helfen, das „Lernen zu lernen“, bleibt Aufgabe und Verantwortungsbereich des Lehrers.

---

413 vgl. Jank, W., Meyer, H., Didaktische Modelle, Berlin 2003

414 Seitz 1992, S. 71 zitiert nach Heintz, G., in: Leuders, T. (Hrsg.), Mathematikdidaktik, Berlin 2003, S. 246

Ein erster Schritt zur Eigenverantwortlichkeit ist die selbstverantwortliche Einteilung der Zeit, was nicht möglich ist, wenn – wie im gegenwärtigen Schulsystem – ein fester 45-Minuten-Takt vorgegeben ist und der Schüler seine Arbeit nicht vollständig erledigen kann, sondern abbrechen muss und vielleicht erst Tage später wieder weiterarbeiten kann. M. Montessori beschreibt die Situation eines solchen „getakteten" Unterrichts wie folgt:

> *„Und in dieser geistigen Hetze läuft diese schwierige Periode des menschlichen Lebens ab. Man beschränkt sich darauf, Wissensstoff zu vermitteln, viel Wissensstoff, eine Menge Gegenstände zu berühren, aber alle mit der gleichen Oberflächlichkeit."*[415]

Geeignetes Lernmaterial ist eine weitere Voraussetzung, um eigenverantwortliches Lernen zu ermöglichen. Nur wenn das Lernmaterial so beschaffen ist, dass der Schüler – u.U. nach einer Einweisung durch einen Schüler oder den Lehrer – selbstständig damit arbeiten kann und darüber hinaus auch die Möglichkeit besteht, weitere Informationen über entsprechende Literatur und das Internet zu beschaffen, kann er auch planen und entscheiden, welche Lernwege er einschlagen und wie er sie gehen will.

Ferner muss der Schüler befähigt werden und die Möglichkeit erhalten, seinen Lernprozess reflektieren zu können, um festzustellen, ob der eingeschlagene Weg erfolgreich ist oder etwa die Richtung oder Vorgehensweise korrigiert werden muss. Dazu muss auch die Möglichkeit zur Selbstkontrolle gegeben sein, die idealer Weise in das Arbeitsmaterial integriert ist. So wird der Schüler unabhängig vom Urteil des Lehrers und muss seine eigenen Schlüsse ziehen und verfolgen. Spürt der Schüler, dass er wirklich verantwortlich für seine Arbeit und seine Bildung ist, so wird er sich auch dieser Verantwortung stellen. Merkt er hingegen, dass der Lehrer immer wieder zu insistieren versucht, weil er dem Schüler nicht zutraut, die Verantwortung tragen zu können, so wird sich der Schüler nicht mit vollem Ernst engagieren. Das Problem bleibt beim Lehrer.

Individualität

So, wie jedes einzelne Kind den Aufbau der Zahl durch Eigentätigkeit und Aktivität selbst konstruiert und Schritt für Schritt leistet und so, wie in der Menschheitsgeschichte die Entwicklung der Mathematik stattgefunden hat, aufbauend sich entfaltet hat, so muss auch dem Schüler die Möglichkeit gegeben werden, sich „<u>seine</u> Mathematik" aufbauend, konstruierend und entdeckend anzueignen.

Das Prinzip der Individualität differenziert sich nach verschiedenen Seiten hin: Zum einen ist es eng verknüpft mit dem Prinzip der Eigenverantwortlichkeit, da erst die Möglichkeit, individuelle Wege gehen zu dürfen, dem Schüler ermöglicht, auch über die Wahl der Wege zu entscheiden und Verantwortung tragen zu können.

---

[415] Montessori, M., Kosmische Erziehung, Freiburg 1988, S. 133

Zum anderen zeigt sich die Notwendigkeit individualisierenden Unterrichts in der Tatsache sensibler Phasen (M. Montessori), in denen Schüler für bestimmte Lernschritte besonders empfänglich sind und in denen sie diese Lerninhalte auch am besten erlernen können. Diese Zeitfenster – wie sie in der modernen Entwicklungspsychologie bezeichnet werden – zeigen sich dadurch, dass die Schüler ein besonderes Bedürfnis erkennen lassen, sich mit bestimmten Inhalten oder Situationen zu beschäftigen. Da diese sensiblen Phasen bei jedem Kind zu unterschiedlichen Zeiten auftreten können, erzwingen sie geradezu individuelles Lernen zu ermöglichen. Erhalten die Schüler gemäß ihrer sensiblen Phasen die Möglichkeit, sich die Zeit selbst einzuteilen, sich das Thema zu wählen und auch die Vorgehensweise und Intensität zu bestimmen, mit der sie sich in das neue Gebiet vertiefen ohne mit anderen Schülern „gleichgeschaltet" zu werden, so werden Neugierde geweckt, Begeisterung erzeugt und Ermüdungserscheinungen auf ein Minimum reduziert und somit optimale Voraussetzungen für Lernerfolg geschaffen.

Individualität drückt sich auch in der unterschiedlichen Leistungsfähigkeit der Schüler aus, die einen binnendifferenzierten Unterricht erfordert. Damit ist es möglich, dass jeder Schüler die Chance erhält, in seinem Lernprozess gemäß seinen Begabungen, seinem Leistungsvermögen und seinem Arbeitstempo unterstützt und gefördert zu werden, ohne – wie bei einer „Gleichschaltung" der ganzen Klasse – unterfordert oder überfordert zu werden. Trotzdem wird es so sein, dass sich auch unterschiedlich begabte Schüler beim Arbeiten zusammentun; der Stärkere kann dem Schwächeren helfen und Unklarheiten beseitigen, was im Sinne der Methode „Lernen durch Lehren" für beide Schüler gewinnbringend sein kann.

In der Realität wird sich Individualität nicht so zeigen, dass jeder Schüler ständig alleine und an einem jeweils anderen Thema arbeitet, das entspräche weder dem sozialen Bedürfnis von Schülern, mit anderen etwas zu tun, noch der Wahrscheinlichkeit, mit der sensible Phasen und Interesse bei Schülern ähnlichen Alters auftreten und Anstöße durch den Lehrer aufgenommen werden. Mit dieser Erkenntnis reduzieren sich auch die Bedenken, der Lehrer könne einen individualisierten Unterricht organisatorisch und inhaltlich nicht bewältigen, wenngleich nicht verhehlt werden soll, dass ein solcher Unterricht ein großes Engagement bei der Erstellung und Beschaffung von Unterrichtsmaterial sowie großes organisatorisches Geschick und pädagogischen Takt des Lehrers erforderlich macht. Auch wird eine Kooperation unter den Lehrern einer Fachschaft, aber auch über die jeweilige Schule hinaus, notwendig werden. Bei allen organisatorischen Schwierigkeiten, die auftauchen werden, muss man sich dennoch immer wieder vergegenwärtigen:

Unabhängig davon, ob Individualität als Ausgangspunkt der Erziehung zu betrachten sei, wie dies in Anlehnung an moderne Persönlichkeitstheorien zu geschehen hat oder ob Individualität als Ziel der Erziehung zu betrachten sei, wie dies J. F. Herbart formuliert[416], die unterrichtspraktische Aufgabe bleibt die gleiche: Der Schüler muss als Individuum wahrgenommen und gefördert werden.

Freiheit

Für einen Unterricht, in dem Eigenverantwortlichkeit, Individualität und Selbsttätigkeit ermöglicht werden sollen, ist es von entscheidender Bedeutung, dass den Schülern ein ausreichendes Maß an Freiheit gewährt wird. Allein arbeiten zu können, ohne dass sich der Lehrer ständig in das Geschehen einmischt, selbst über Lerninhalte, Lernmethoden und Lerntempo entscheiden zu können, gibt dem Schüler die Möglichkeit, zu einer tiefen Konzentration zu kommen, die auch seine Lernmotivation und Lernfreude beflügeln wird.

Doch auch hier muss klargestellt werden, dass das Gewähren von Freiheit nicht mit Laisser-faire oder Beliebigkeit verwechselt werden darf. Nur wenn das Kind in der Lage ist, mit der gegebenen Freiheit sinnvoll umzugehen, wird es daraus auch den größtmöglichen Gewinn ziehen. Deshalb ist es notwendig, dass die Schüler Schritt für Schritt an die Möglichkeit, bestimmte Wahlentscheidungen treffen zu können, herangeführt werden. Der Lehrer muss genau beobachten und erkennen, welche Schritte bei dem jeweiligen Schüler gegangen werden müssen, damit er auf seinem Weg zu freiheitlichem Arbeiten nicht alleine gelassen bleibt und dadurch haltlos wird, aber auch nicht unnötig behindert und dadurch demotiviert wird.

Auch ist eine solche Freiheit schon von der Sache her nicht ohne Grenzen: Die vorbereitete Umgebung bildet bereits inhaltliche Grenzen, da nur ein bestimmtes Lernangebot zur Verfügung steht. Die Materialien sind in der Regel nur einmal vorhanden, so dass eine Absprache mit anderen Schülern erforderlich ist und auch die freie Einteilung der Zeit ist organisatorischen Grenzen unterworfen.

Diese vier beschriebenen Merkmale bestimmen das methodische Vorgehen im Unterricht. Insofern ist es nicht mehr wichtig, nach einzelnen Unterrichtsmethoden zu differenzieren oder die sog. „Methodenvielfalt“ zu postulieren. Der Unterricht ist als Freiarbeit im Sinne M. Montessoris organisiert, was alle weiteren Unterrichtsmethoden beinhaltet, die dem Schüler ermöglichen, interessengesteuert und ohne Zeitdruck aktiv arbeiten, entdecken, üben, sich mit der Welt auseinandersetzen zu können. Dabei hat der interessante Lehrervortrag genauso seinen Platz wie ein Lernzirkel oder das Schülerexperiment. Entscheidend ist, ob die jeweilige Methode dazu beitragen kann, Bedingungen für die Möglichkeit von Bildung zu arrangieren.

[416] Geißler, E., Herbarts Lehre vom erziehenden Unterricht, Heidelberg 1970, S. 131

5.3 Entwicklungsadäquater Aspekt und deren Konsequenzen für den Unterricht

Folgende entwicklungsadäquate Aspekte sollen betrachtet werden:

1. Geistige Entwicklung, speziell des mathematischen Denkens
2. Entwicklung in der Zeit der Pubertät mit ihren besonderen Ausprägungen

5.3.1 Anfangsunterricht in Geometrie am Gymnasium in Bezug auf die kognitive Entwicklung

Den Erkenntnissen J. Piagets zufolge erfolgt die Entwicklung des räumlichen Denkens bei Kindern, wie in Kapitel 3 aufgezeigt, so, dass diese zuerst topologische Eigenschaften wahrnehmen, erkennen und darstellen können und danach nicht-topologische. So wird die Entfernung zweier Punkte erst deutlich später wahrgenommen als beispielsweise die Eigenschaft „innen“ oder „außen“.

Obwohl J. Piaget selbst wenig Vorschläge zur Umsetzung seiner Erkenntnisse in die schulische Praxis macht, findet man zur Thematik der Entwicklung des räumlichen Denkens gleich mehrere Hinweise.

> *„Die Vorstellung der Geraden setzt also den projektiven oder den euklidischen Raum voraus. Diese Vorstellung ist alles andere als elementar, obwohl die gängigen Geometriebücher anderer Meinung sind. Diese Bücher wissen ebensowenig von den psychogenetischen Tatsachen wie von der axiomatischen Struktur ihrer eigenen Disziplin.“*[417]

J. Piaget kritisiert also, dass der übliche Einstieg in die Geometrie über die Behandlung der Gerade erfolgt, die aber bereits das Verständnis des euklidischen Raum benötigt.

> *„Selbstverständlich gibt es noch einen anderen Grund, der für eine besonders sorgfältige Untersuchung der Raumentwicklung spricht: Jede nicht zu oberflächliche psychologische Forschung auf diesem Gebiet kann praktisch angewandt werden. Der Geometrieunterricht würde sehr viel gewinnen, wenn er sich an die spontane Entwicklung der Begriffe anpasste. Das gilt um so mehr deshalb, weil – man ahnt es bereits – diese Entwicklung mit der Konstruktion der Mathematik viel näher verwandt ist als die meisten sogenannten ‘elementaren’ Lehrbücher. Es ist gesagt worden, man müsste die Kantorsche Menschlehre in der Grundschule unterrichten. Unserer Meinung nach gilt beinahe dasselbe für die Elemente der Topologie.“*[418]

---

[417] Piaget, J., Gesammelte Werke Band 6, Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde, Stuttgart 1999, S. 189

[418] Piaget, J., Inhelder, B. u.a., Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde, Stuttgart 1971, S. 15f.

J. Piaget spricht sich also klar für einen Anfangsunterricht in Geometrie aus, der seinen didaktischen Aufbau an der kindlichen Entwicklung der Raumvorstellung ausrichtet.

Dabei ist unerheblich, in welchem Alter und an welcher Schulart dieser Anfangsunterricht in Geometrie erfolgt. Findet er in der Grundschule statt, so empfiehlt es sich dort mit der Topologie zu beginnen, findet er aber erst im Gymnasium statt, so muss dort mit topolgogischen Fragestellungen begonnen werden.

> *„Dass die Rolle des Reifeprozesses begrenzt ist, lässt sich schon folgendermaßen beweisen: Die Entwicklungsstadien, die wir beschrieben haben, laufen zwar stets in der gleichen Reihenfolge ab, ... sie entsprechen aber keineswegs absolut gegebenen Altersstufen. Vielmehr kann man Beschleunigungen oder Verzögerungen ... beobachten.“*[419]

Um die Stufenlehre J. Piagets in ihrer vollen Bedeutung für den Aufbau (Konstruktion!) der Intelligenz zu erfassen, ist es hilfreich, den Stufenaufbau nicht von unten, sondern von der obersten Stufe aus zu betrachten. Dann nämlich wird sich erst richtig zeigen, dass die jeweils höhere Entwicklungsstufe die jeweils niedrigere zur Grundlage und Voraussetzung hat. Es wird darüber hinaus auch klar, dass die höhere Stufe nicht eine notwendige Folge der vorausgehenden ist, sondern dass auf das Niveau der höheren Stufe nur gelangt, wer auch die Anforderungen der vorhergehenden Stufe beherrscht. Unter diesem Gesichtspunkt wird auch leichter verständlich, weshalb die Verhaltens- und Denkschemata der höheren Stufe nicht etwas völlig Neues darstellen, sondern dass in ihnen die erworbenen Fähigkeiten früherer Stufen erhalten bleiben. Nur wer genügend sensomotorische Erfahrungen machen und damit seine praktische Intelligenz aufbauen konnte, wird auch zu formal-abstrakten Denkoperationen fähig sein. Ohne konkreten Erfahrungshintergrund ist formales Denken nicht möglich. Für den Aufbau mathematischen Denkens gilt dasselbe. Ohne topologische Beziehungen denken zu können, fällt es dem Schüler schwer, euklidische Eigenschaften zu erfassen.

Übrigens nehmen auch andere Disziplinen den Verlauf der kindlichen Entwicklung als Anregung für den didaktischen Aufbau. So orientiert man sich beim Fremdsprachenunterricht daran, wie ein Kind die Muttersprache lernt. Anfangs wird beispielsweise auf die Verwendung verschiedener Zeiten oder komplizierter Satzstrukturen verzichtet. Auch versucht man mehr und mehr „natürliche“ Konversationssituationen zu simulieren, in denen sich auch das kleine Kind beim Erwerb der Muttersprache befindet.

[419] Piaget, J., Theorien und Methoden der modernen Erziehung, Frankfurt/M. 1994, S. 37

5.3.1.1 Gegenwärtige Situation im Geometrieunterricht in Grundschule und am Beginn des Gymnasiums

Speziell auf den Geometrieunterricht zu Beginn des Gymnasiums bezogen, wäre es dementsprechend zu empfehlen, dass zunächst topologische Fragestellungen betrachtet werden und später der Übergang zur euklidischen Geometrie erarbeitet wird. Damit wird sichergestellt, dass die Schüler die entwicklungsbedingten Voraussetzungen zur Wahrnehmung und Vorstellung der gefragten geometrischen Problemstellungen und Aufgaben mitbringen.

Wie sieht die Realität an unseren Schulen in diesem Punkt aus?

Auszug aus dem Lehrplan der 5. Jahrgangsstufe am Gymnasium (Bayern)[420]

Inhalte, die sich auf die Geometrie beziehen, sind fett/kursiv gedruckt. Kapitel ohne geometrische Inhalte sind nicht abgedruckt.

Der Mathematikunterricht des ersten Jahres am Gymnasium knüpft an die Inhalte und Methoden der Grundschule an, er vertieft, systematisiert und erweitert die dort erworbenen Kenntnisse und Fähigkeiten. Natürliche Neugier, Wissbegierde und hohe Leistungsbereitschaft der Kinder werden durch die Vielfalt an Themen und durch einen spielerischen, entdeckenden Zugang aufgegriffen. Durch den Anwendungsbezug der betrachteten Fragestellungen wird den Kindern deutlich, dass Mathematik überall in ihrem Alltag vorkommt. Insbesondere bei der ***handlungsorientierten Erarbeitung von Zusammenhängen in der Geometrie*** wird die Freude der Kinder am kreativen Tun gestärkt. Darüber hinaus wird ihnen bewusst, wie wichtig eine sorgfältige und genaue Arbeitsweise ist.

Während des gesamten Schuljahrs beschäftigen sich die Schüler intensiv mit Zahlen und entwickeln dabei ein Gefühl für Größenordnungen; sie erweitern und vertiefen ihr Wissen über Größen und über ***grundlegende Elemente der Geometrie***. Daneben üben sie, einfache Zusammenhänge in eigenen Worten sowie mit ***geometrischen*** oder arithmetischen ***Fachbegriffen*** auszudrücken. Ausgehend von ihnen bereits aus dem Alltag bekannten Beispielen für negative Zahlen lernen die Kinder auf altersgemäße, anschauliche Weise die Menge der ganzen Zahlen kennen. Nach und nach gewinnen sie Sicherheit im Umgang mit ihnen und erwerben so die Grundlagen für ein kumulatives Weiterentwickeln und Vertiefen der Arithmetik in den folgenden Schuljahren.

In der Jahrgangsstufe 5 erwerben die Schüler folgendes **Grundwissen**:

- Sie können mit ganzen Zahlen in den Grundrechenarten rechnen, Größenordnungen erkennen und abschätzen.
- Sie erkennen die Struktur einfacher Terme.
- ***Sie können Winkel und Grundfiguren (auch im Koordinatensystem) mit Hilfe des Geodreiecks zeichnen.***

[420] http://isb.contentserv.net/3.1/g8.de/index.php?StoryID=26333

- ***Sie sind in der Lage, Eigenschaften geometrischer Figuren und Körper zu erkennen und zu beschreiben.***
- Sie gehen sicher mit im Alltag verwendeten Größen (insbesondere Geld, Länge, Masse, Zeit) um, z. T. auch in Kommaschreibweise.
- Sie können die Grundlagen der Flächenmessung anwenden.
- Sie finden Lösungswege bei Sachaufgaben und können ihr Vorgehen beschreiben.

M 5.2 Weiterentwicklung geometrischer Grundvorstellungen (ca. 17 Std.)

Die Grundschulkenntnisse über geometrische Grundfiguren und Körper werden erweitert und vertieft. Zugang zu diesem Gebiet der Mathematik finden die Schüler durch eigene Aktivitäten, vor allem durch das Anfertigen von Zeichnungen und Modellen. Dabei entwickeln sich ihre Raumvorstellung und ihr Formempfinden weiter. Hierbei bieten sich z. B. achsensymmetrische Figuren an, wie sie bereits aus der Grundschule bekannt sind. Den Kindern wird bewusst, dass sie geometrische Grundelemente in ihrem Umfeld wiederfinden können, und sie üben, geometrische Sachverhalte in Worten auszudrücken.

Zeichnen geometrischer Figuren, Bauen einfacher Modelle; Grundbegriffe, Grundfiguren und Körper

Umgehen mit Geodreieck und Zirkel, u. a. Zeichnen und Messen von Winkeln (bis 360°), Erkennen und Überprüfen rechter Winkel, zueinander parallele bzw. senkrechte Geraden

Koordinatensystem

einfache achsensymmetrische Figuren

Übersicht über die *vier Themen* des Geometrie-Unterrichts der Grundschule

Raumerfahrung und Raumvorstellung (Jahrgangsstufen 1 mit 4):

> ***einfache Grundrisszeichnungen, Pläne, Skizzen, Maßstab (z. B. 1:2; 1:10; 1:50; 1:100)***

Flächen- und Körperformen (Jahrgangsstufen 1 mit 4):

> ***Viereck, Dreieck, Kreis, Rechteck, Quadrat; Figuren und Ornamente; Parkettierungen***
>
> ***Würfel, Quader, Kugel; Zusammenhang zwischen Quader und seinem Netz; räumlich dargestellte Gegenstände***
>
> ***Zylinder, Pyramide, Kegel; Dreiecksprisma als zusätzlicher, nicht verbindlicher Lerninhalt für leistungsstärkere Schüler***

Symmetrie (Jahrgangsstufen 3 und 4):

> ***Figuren beschreiben und erstellen***
>
> ***Achsensymmetrie, einfache Figuren nach Vorschrift drehen bzw. verschieben***

Geometrische Figuren zeichnen (Jahrgangsstufen 3 und 4)

> ***Linien und Strecken zeichnen, abmessen; dabei z. B. parallele und senkrechte Geraden zeichnen, rechte Winkel herstellen, Winkel am Zeichendreieck entdecken***
>
> ***Zeichnen mit Zeichendreieck und Zirkel (Muster entwerfen, z. B. über Symmetrien nachdenken)***

Wenngleich der Begriff „topologisch“ nicht im Lernplan vorkommt, so lassen doch einige Formulierungen die Behandlung topologischer Eigenschaften oder Fragestellungen zu. So ist beispielsweise von der „handlungsorientierten Erarbeitung von Zusammenhängen in der Geometrie“, von „Eigenschaften geometrischer Figuren und Körper“ oder von „grundlegenden Elementen der Geometrie“ die Rede. Oder wenn als Lernziel formuliert wird, dass die Schüler „ihre Raumvorstellung und ihr Formempfinden“ weiterentwickeln sollen, dann kann dies durchaus so interpretiert werden, dass topologische Inhalte und Fragestellungen zu behandeln sind.

Wie aber wird der Lehrplan in die Realität umgesetzt? Anhand einiger Lehrbücher zur 5. Jahrgangsstufe soll dies gezeigt werden:

1. Delta 5, Mathematik für Gymnasien

Bei diesem Lehrbuch beginnt das Kapitel „Geometrische Grundbegriffe“ mit Hinweisen auf Euklid und das von ihm verfasste Werk „Elemente“ mit der Euklidischen Geometrie. Darauf bauen auch die Unterkapitel mit Themen geometrische Körper und Figuren, Geraden und Strecken, aufeinander senkrechte und zueinander parallele Geraden, optische Täuschungen, Zeichnen und Messen von Winkeln, das Koordinatensystem, Zeichnen von Kreisen und achsensymmetrische Figuren auf.

2. Mathematik 5 – Algebra und Geometrie

Dieses Unterrichtswerk beginnt mit der Einführung des Koordinatensystems und legt sich damit ebenfalls auf die Euklidische Geometrie fest. Das bestätigen auch die nachfolgenden Kapitel zu den im Lehrplan genannten Stoffinhalten.

3. Mathematik anschaulich 5

Auch dieses Lehrwerk beginnt mit dem Koordinatensystem und dem Umgang mit Lineal und Zirkel, also mit Grundlagen der Euklidischen Geometrie. Auch die weiteren Kapitel weichen davon nicht ab.

4. Fokus Mathematik Jahrgangsstufe 5

Körper und deren Netze bilden den Einstieg in das Thema geometrische Grundbegriffe, wobei die Verwendung des Geodreiecks und Lineals erläutert wird. Somit ist ebenfalls stillschweigend die Euklidische Geometrie zugrundegelegt.

5. LS 5 – Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium

Das fünfte Lehrbuch schließlich beginnt ebenfalls mit den Körpern und schließt dann Geraden und Abstände an. Topologische Fragestellungen werden nicht thematisiert.

Zusammengefasst hat keiner der Lehrbuchautorinnen und –autoren die Formulierungen des Lehrplanes so interpretiert, dass topologische Fragestellungen und Eigenschaften gemeint sein könnten. Andererseits wird aber auch – abgesehen vom zuerst besprochenen Werk – kein Hinweis auf die Einschränkung hin zur Euklidischen Geometrie gegeben.

5.3.1.2 Anschauliche Topologie[421] im geometrischen Anfangsunterricht

Neben den genannten entwicklungsadäquaten Bedingungen bietet Topologie im Anfangsunterricht gegenüber anderen geometrischen Gebieten den Vorzug, dass räumliches Vorstellungsvermögen und Abstraktionsfähigkeit von Anfang an geschult werden, da wenige begriffliche Voraussetzungen geschaffen werden müssen, um mit den Schülern bereits interessante und anspruchsvolle Fragestellungen sowohl in der Ebene als auch im Raum bearbeiten zu können. Da die Schüler noch nicht „metrisch verbildet" sind, d.h. metrische Eigenschaften geometrischer Gebilde noch nicht thematisiert wurden und damit in der Wahrnehmung auch nicht dominant sind, fällt es den Schülern nicht so schwer, sich auf topologische Fragestellungen einzulassen.

Ein weiterer Vorteil dieses didaktischen Aufbaus besteht darin, dass sich die topologischen Inhalte gut eignen, experimentell von Schülern erarbeitet oder nachvollzogen zu werden. Somit werden Motivation und Eigenaktivität der Schüler in optimaler Weise unterstützt. Offene Unterrichtsmethoden können gewinnbringend eingesetzt werden. Lernen mit möglichst vielen Sinnen kann, ohne künstlich zu wirken, umgesetzt werden. Zudem gibt es eine große Anzahl anwendungsorientierter Beispiele, die den Schülern deutlich machen, dass Mathematik mit ihrer Lebenswelt verbunden ist, ja aus ihr entstanden ist.

Die Schüler arbeiten an topologischen Fragestellungen weniger mit relativ starren Lösungswegen und gespeichertem Faktenwissen, sondern beweglicher und spontaner als im herkömmlichen Geometrieunterricht.[422]

Die Themen der Euklidischen Geometrie erfordern in weit höherem Maße die Demonstration durch die Lehrkraft an der Tafel oder durch andere Medien und sind deshalb für eine selbsttätige Erarbeitung durch den Schüler bedingt geeignet. Allzu oft

---

[421] Die Bezeichnung „anschauliche Topologie" wird üblicherweise in Abgrenzung zur mengentheoretischen Topologie gewählt (vgl. Studeny, G., Topologiekurs in der Oberstufe, München 1978, S. 3).

[422] vgl. Baldus, D., Rosebrock, S., Eine topologische Unterrichtseinheit für die S I, in: Mathematik in der Schule 31 (1993) 12, S. 648 – 655.

kann nur auf diese Weise die Lage oder das genaue metrische Aussehen einer geometrischen Figur erklärt werden.

Topologische Eigenschaften und Fragestellungen

Anschauliche Topologie im geometrischen Anfangsunterricht eignet sich nicht für einen lehrgangsmäßigen Aufbau. Vielmehr können einzelne, eher geschlossene topologische Fragestellungen anhand von Aufgabenbeispielen bearbeitet werden. Die verwendeten Begriffe sollen und können dabei nicht mengentheoretisch definiert, sondern durch anschauliche Umschreibungen eingeführt und erklärt werden. Die Topologie wird als die geometrische Disziplin verstanden, die Eigenschaften untersucht, die bei stetigen Deformationen invariant bleiben.[423] In diesem Sinne ist eine für die Topologie charakteristische Betrachtungsweise die Untersuchung von Figuren auf ihre Zusammenhangsverhältnisse.

Topologische Begriffe

Als Einstieg in die Thematik könnten geometrische Eigenschaften betrachtet werden, die als topologisch oder als nicht-topologisch bezeichnet werden können, wobei Eigenschaften eines geometrischen Gebildes als topologisch bezeichnet werden sollen, falls sie bei einer elastischen Verzerrung (z. B. durch ein Gummituch oder Fensterleder) erhalten bleiben.[424]

Beispiele für topologische Eigenschaften wären: Das Innere (Äußere) einer geschlossenen Kurve; Zahl der Gebiete, in welche die Ebene durch eine Kurve geteilt wird; der Rand (die Begrenzung eines Gebietes); Zusammenhang von Gebieten usw. Die Veranschaulichung und Überprüfung dieser Eigenschaften gelingt leicht mit Hilfe von Schnüren, Gummibändern und Gummitüchern.

Als nicht-topologisch werden Eigenschaften bezeichnet, die bei Verzerrung mit einem Gummituch verloren gehen: Der Abstand zweier Punkte; geometrische Figuren, wie Dreieck, Quadrat, Kreis.

Haben die Schüler noch wenig Erfahrung mit Euklidischer Geometrie, so ist es an dieser Stelle nicht sinnvoll, nicht-topologische Eigenschaften zu thematisieren, da es eher zur Verwirrung beitragen könnte bzw. erforderlich machen würden, weitere Begriffe wie z. B. Winkel, Dreieck, Viereck usw. einzuführen.

---

[423] Weidig, Ingo, Topologische Fragen in der geometrischen Propädeutik, in: Der Mathematikunterricht 1970/1, S. 5 – 17.

[424] Griesel, H., Die Neue Mathematik für Lehrer und Studenten, Band 1, Hannover 1977[5], S. 287

Bereits nach Einführung dieser Begriffe und Sensibilisierung, was topologische Eigenschaften sind, können eine Reihe interessanter topologischer Probleme gelöst werden:

Das **<u>Vierfarbenproblem</u>** als Problem zusammenhängender Gebiete:

Der englische Mathematiker Francis Guthrie war im Jahre 1852 mit der Aufgabe beschäftigt, eine Karte mit den englischen Grafschaften farblich zu gestalten. Dabei versuchte er, möglichst wenig verschiedene Farben zu verwenden. Jedoch sollten benachbarte Länder farblich unterscheidbar sein.

Abbildung 5.2: Landkarte Englands [425]

Schüler könnten die Aufgabe erhalten, eine politische Landkarte Deutschlands mit den entsprechenden Vorgaben einzufärben. Auch mit drei Farben könnten sie es probieren. Das Vierfarben-Problem ist historisch sehr interessant, da es, obwohl schon sehr alt, erst in den 70er Jahren des 20. Jahrhunderts (mit Hilfe des Computers) gelöst wurde, d.h. bewiesen wurde, dass vier Farben immer ausreichend sind.

Das **<u>Königsberger Brückenproblem</u>** als Problem zusammenhängender Gebiete:
Das Bild zeigt die Stadt Königsberg zur Zeit Leonhard Eulers mit dem Fluss Pregel und sieben Brücken, die über den Fluss führten. Ist es möglich, einen Rundweg zu finden, auf dem alle sieben Brücken der Stadt genau einmal überquert werden und man wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt? Leonhard Euler bewies im Jahre 1736, dass es keinen solchen Rundweg geben kann.[426]

---

[425] http://intern.csg-germering.de/faecher/mathe/mathe/4FP/index.html (2005)

[426] http://intern.csg-germering.de/faecher/mathe/mathe/Koenigsb/index.htm (2005)

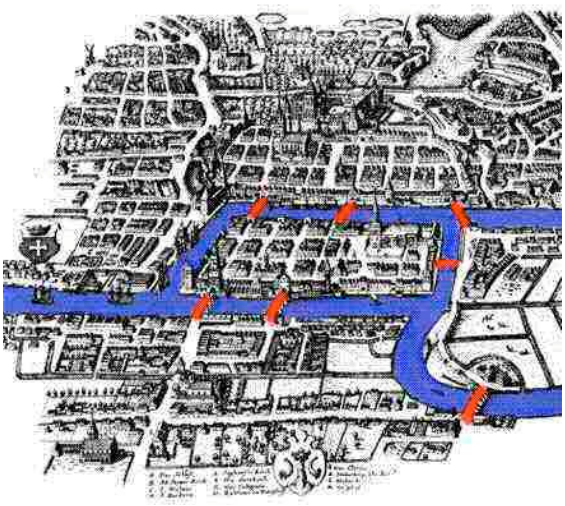


Abbildung 5.3: Königsberg[427]

Da es nicht auf die genaue Lage der Brücken ankommt, sondern nur darauf, welche Brücken welche Inseln miteinander verbinden, handelt es sich um ein topologisches Problem. Man kann obige Zeichnung auch schematisch so darstellen, dass die Ufer als Punkte (Knoten) dargestellt werden, die mit Wegen (Kanten) verbunden sind.

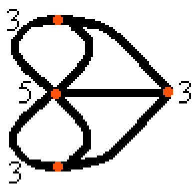


Abbildung 5.4: Knotengraphik

Die Knotendarstellung von Leonhard Euler zeigte, dass es dann möglich wäre, einen Rundweg zu finden, wenn es an keinem der Knoten eine ungerade Anzahl an Wegen gäbe oder an genau zwei Knoten. Da es jedoch bei diesem Beispiel zu allen vier Knoten eine ungerade Anzahl an Wegen gibt, ist der gesuchte Rundweg nicht möglich.[428]

Die Schüler haben bei diesem Beispiel die Möglichkeit, durch Veränderung der Anzahl von Brücken, das Problem zu variieren und bei der Lösungsfindung empirisch vorzugehen. Die Überlegungen zum Königsberger Brückenproblem könnten zu der Fragestellung überleiten, ob bestimmte Bilder in einem Zug zeichenbar sind oder nicht.

[427] http://intern.csg-germering.de/faecher/mathe/mathe/Koenigsb/index.htm (2005)

[428] vgl. www.wikipedia.org

Beispiel hierfür ist das sog. „Haus des Nikolaus“, das man eben in einem Zug zeichnen kann, weil es genau zwei Knoten gibt, an denen es eine ungerade Anzahl an Kanten gibt und alle anderen Knoten eine gerade Anzahl an Kanten besitzen.

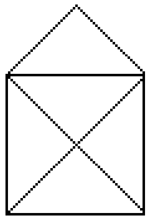


Abbildung 5.5: Haus des Nikolaus

Diese Fragestellungen sind sehr geeignet, um Schüler experimentieren, selbst Gesetzmäßigkeiten festzustellen und Figuren erfinden zu lassen. Alleine, mit einem Partner oder in der Gruppe können verschiedene Zeichenobjekte erfunden und untersucht werden. Die Schüler werden mehr und mehr versuchen, bei der Analyse der Gebilde systematisch vorzugehen, um nicht doppelt zu arbeiten oder Möglichkeiten zu vergessen. Dabei werden ganz automatisch mathematische Verfahrensweisen erfahrbar gemacht und geübt. Die Schüler werden merken, dass in dem Prozess der Lösungsfindung auch Irrwege gegangen werden können, die aber trotzdem weiterhelfen und neue Ideen bringen können.

Auch die Eulersche Formel, dass die Anzahl der Ecken – Anzahl der Kanten + Anzahl der Flächen immer 2 ergibt, kann in diesem Zusammenhang entdeckt und auf weitere Beispiele (auch im Raum) angewendet werden.

Das **Möbius'sche Band** als Gebilde Raum

Der Leipziger Mathematiker August Ferdinand Möbius entdeckte 1858 dieses Band als zweidimensionale Fläche, die nur eine Seite hat. Außerdem hat es nur eine Kante.

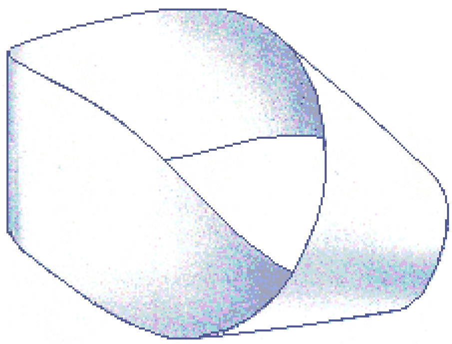


Abbildung 5.6: Möbiusband[429]

[429] http://www.creativepuzzels.nl/spel/speel1/speel2/moebius.htm (2005)

Das Möbiusband kann Ausgangspunkt für viele interessante Fragestellungen sein und bietet die Möglichkeit zu experimentellen Untersuchungen.
Zum einen kann das Band selbst leicht aus Papier hergestellt werden, so dass die Schüler damit arbeiten können. Färbt man die Innen- und die Außenseite des Bandes mit zwei verschiedenen Farben ein, so stellt man fest, dass sich die beiden Farben auf einer Seite (der einzigen) treffen. Oder man beginnt mit einer Farbe und stellt fest, dass man das Band, ohne auf die „andere" Seite zu wechseln, zum Schluss ganz eingefärbt hat. Ferner stößt man auf interessante Ergebnisse, wenn man das Band längs der Mittellinie aufschneidet oder längs von zwei zur Mittellinie parallelen Linien aufschneidet. Im ersten Fall entsteht ein Ring, der einmal verdrillt ist, im zweiten Fall entstehen ein Möbiusband und ein zweifach verdrillter Ring mit zwei Seiten und zwei Rändern.[430]
Als weitere Experimentierfelder könnten folgende Varianten des Möbiusbandes dienen: Man könnte Bänder untersuchen, die mehr als eine Halbdrehung haben, man könnte mehrere Bänder ineinander verschlingen oder mehrere Schnitte durchführen. Bei all den Untersuchungen ist es wichtig, dass die Schüler lernen, systematisch vorzugehen und auch entsprechende Aufzeichnungen zu machen, so dass Gesetzmäßigkeiten erkannt werden können. Neben den topologischen Fragestellungen rund um das Möbiusband bietet es sich an, fächerübergreifende Themen in Kunst, Informatik und Geschichte einzubringen.

Diese genannten Beispiele topologischer Probleme könnten beliebig durch weitere interessante und für Schüler geeignete Aufgaben erweitert werden. Insbesondere finden sich viele Themenstellungen aus der Knotentheorie als Rätsel in diversen Sammlungen für Denksportaufgaben und mathematische Spielereien. Wie bereits erwähnt, ist die anschauliche Topologie nicht für einen hierarchisch lehrbuchmäßigen Aufbau geeignet, sondern kann eher durch mehr oder minder unabhängig voneinander bestehende Probleme und Problemchen vermittelt und erfasst werden. Dies muss sich aber nicht als Nachteil erweisen. So ist es auf diese Weise möglich, dass Schüler immer wieder den Einstieg zur Lösung in ein neues Problem wagen können, ohne an möglicherweise fehlendem Vorwissen zu scheitern. Ferner ermöglicht dieses Vorgehen ein interessengesteuertes Arbeiten im Sinne der gewünschten Individualisierung, bei dem die Schüler an den Problemen arbeiten können, von denen sie sich angesprochen fühlen.

[430] vgl. Langdon, N., Snape, C., Mathematische Schatzkiste, Stuttgart 1997, und www.wikipedia.org

<u>Übergang zur Euklidischen Geometrie</u>

So wie entwicklungspsychologisch zuerst topologische Eigenschaften vom Kind realisiert werden können und danach das nötige Verständnis für metrische Fragestellungen entsteht, so kann auch der didaktische Aufbau der Anfangsgeometrie gestaltet werden.

Nach Behandlung topologischer Begriffe und Probleme kann der Übergang zu Fragestellungen der Euklidischen Geometrie angebahnt werden. So könnte man die Frage verfolgen, wie eine Linie, dargestellt durch ein Gummiband, zu einer geraden Linie (Gerade im euklidischen Sinne) werden könnte. Man könnte das Gummiband spannen und mittels Stecknadeln fixieren. Mathematisch betrachtet verankert man sie damit im Koordinatensystem. Damit wird klar, dass es nunmehr um metrische Fragen von Abstand und Maß geht, die im Koordinatensystem festgelegt sind.

Ein Vergleich von Geometrie unter topologischen Gesichtspunkten und euklidischer Axiomatik mit der Betrachtung von Vor- und Nachteilen und verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten verdeutlicht den Schülern, dass die gleiche Realität auf verschiedene Art und Weise betrachtet und dargestellt werden kann, aber mit unterschiedlichen Zielsetzungen. Ebenso kann man andere Systeme betrachten, die die gleiche Realität darstellen, wie z. B. verschiedene Zahlensysteme (Dual- und Dezimalsystem), und durch die unterschiedliche Darstellung unterschiedliche Aufgabenstellungen erfüllen können.

5.3.2 Mathematikunterricht in der Pubertät

„Die Pubertät ist einerseits unausweichlich, andererseits unausstehlich.“

Erhard Blanck (*1942), deutscher Schriftsteller und Maler

„Die Jugend des Geistes ist ewig, und die Ewigkeit ist die Jugend!“

Jean Paul (1763 - 1825), deutscher Dichter

Diese beiden Zitate sollen beispielhaft ausdrücken, dass der Pubertät in unserer Gesellschaft nahezu ausschließlich negative Charakteristika zugeschrieben werden, der Jugend hingegen weitgehend positive. Diese Haltung ist auch in der Schule zu spüren. „Das sind jetzt eben die schwierigen Jahre“, hört man Lehrer und Eltern gleichermaßen am Elternsprechtag sagen, Psychologen sprechen vom „bekannten schulischen Leistungsknick oder Leistungsabfall in der Pubertät“. Dabei wird selten bedacht, dass Schüler, die morgens im Unterricht eine „Null-Bock-Haltung“ an den Tag legen, am Nachmittag erstaunliche Leistungen in der Freizeit vollbringen. Sie treiben mit hoher Anstrengungsbereitschaft Sport und bestreiten Wettkämpfe, sie gründen Musikbands und üben mit Ausdauer auf ihren Musikinstrumenten, sie bringen sich in politischen oder sozial engagierten Gruppierungen ein, um nur einige Beispiele zu nennen. Dabei soll nicht verschwiegen werden, dass es auch Schüler gibt, die weder in der Schule noch in der Freizeit Leistungsbereitschaft zeigen, sondern sich aus Sicht der Erwachsenen mit weitgehend „fragwürdigen" Dingen befassen.

Warum besteht diese Diskrepanz und wie reagiert die Schule auf diesen „bekannten Leistungsabfall" und die Lernunlust der überwiegenden Anzahl von Schülern? Immerhin fallen mindestens drei Schuljahre in diese Zeit der Pubertät.

Da die abfallende Schulmotivation häufig mit dem Eintritt in die Pubertät beginnt, betrachten die Entwicklungspsychologen die abfallende Leistungsbereitschaft als entwicklungsbedingt und somit ist diese Reaktion für die Jugendlichen in diesem Alter kaum vermeidbar. Als Ursachen der sinkenden Lernmotivation in der Schule gibt H. Fend, wie in Kapitel 3.5 bereits genauer dargestellt, den wachsenden Einfluss der Peergroup, das starke Bedürfnis nach Unabhängigkeit von Eltern und Autoritäten und das Erwachen sexueller Interessen an. Nun soll es um Ansätze im Umgang mit diesem Phänomen gehen.

Die derzeitige schulische Realität scheint für diese Entwicklungsphase kein wirkliches pädagogisches Konzept zu haben. Nachdem die entsprechenden Schulklassen als disziplinär schwierig gelten, werden sie mit Lehrern bedacht, die als durchsetzungsstark gelten und es mit Frontalunterricht und straffer Führung schaffen, einen „geordneten" Unterricht zu halten. Oder aber, es herrscht Chaos im Unterricht und kurz vor den schriftlichen Arbeiten Panik und kurzfristiges Pauken, in der Hoffnung, wenigstens das Klassenziel zu erreichen. Nicht selten ist zum Halbjahr bei 50% oder mehr Schülern dieser Jahrgangsstufen die Erreichung des Klassenzieles gefährdet oder sogar sehr gefährdet und auch die Zahl der Schüler, die dann am Ende das Klassenziel nicht erreichen, ist in diesen Jahrgangsstufen prozentual am höchsten.

Offensichtlich brauchen Jugendliche in der Pubertät andere Arrangements für das Lernen und Arbeiten, als sie gegenwärtig in der Schule angeboten werden.

„Defensiv" bezeichnet K. Holzkamp ein Lernen, zu dem Schüler durch die Handlungsweisen der Schule mehr oder weniger gezwungen werden.[431] Das gewünschte Gegenteil wäre ein Lernen, das der Schüler will, weil er mehr über die Welt erfahren will und deshalb durch Lernen einen persönlichen Gewinn erwartet. Ein solches „expansives" Lernen kann nur geschehen, wenn dem Schüler eine ausreichende Entscheidungfreiheit bleibt, die Lernfelder zu suchen, die ihm für die Lebensbewältigung relevant erscheinen. „Die Bereitschaft zur Anstrengung, zum Durchhalten, zur Überwindung von Lernbarrieren etc. wird gespeist durch die angestrebte Wirkung, mehr als vorher über die Welt zu wissen ..."[432]

---

[431] Holzkamp, K., Lernen, Subjektwissenschaftliche Grundlegung, Frankfurt/ M. 1995, S. 445

[432] Jürgens, E., Schülermotivation – Zur Selbstwirksamkeit von Lernmotivation, in: Schmolka, D. (Hrsg.), Schülermotivation – Konzepte und Anregungen für die Praxis, München 2004, S. 17

Dieser Wunsch nach expansivem Lernen wird gerade in der Zeit der Pubertät zunehmend wichtig, wenn Jugendliche stärker reflektieren können und sich mehr und mehr Gedanken über sich und ihre Rolle in der Welt machen und auch darüber, was sie brauchen können, um die gewünschte Rolle erfüllen zu können. Nimmt man den Wunsch ernst, dass Schüler Verantwortung über ihr Lernen übernehmen wollen, und niemand könnte ihnen diese Verantwortung abnehmen, so ist auch klar, dass man Lernen nicht in starre Lehrpläne packen kann. Es wäre Zufall, würden sich die Lerninteressen der Schüler mit den Lerngegenständen der Lehrpläne decken.

> *„Es kommt nicht darauf an, welche Arbeit das Kind auswählt, wichtig ist, es widmet sich ihr mit Ausdauer. Denn der Wert liegt nicht in der Arbeit an sich, sondern in der Arbeit als Mittel zum Aufbau des inneren Menschen.“*[433]

Auch M. Montessori betont mit ihrer Idee des „Erdkinderplanes“ (siehe Kapitel 3.4.4), dass Jugendliche ihre Lerninhalte weitgehend selbst bestimmen können müssen und dass sie Freiheit brauchen, ihre eigenen Interessen auszubilden.

Wie kann die methodische Umsetzung in der heutigen Zeit geschehen?

G. Meisterjahn-Knebel nennt als Unterrichtsformen, die das montessorische Prinzip „Freiheit“ insbesondere in der Zeit der Pubertät in unseren Schulen verwirklichen können: Freiarbeit, Projektarbeit, Planspiel, Schülerfirma und Praktikum.[434]

Freiarbeit darf dabei nicht nur als Organisationsform verstanden werden, in der Schüler eigenverantwortlich lernen sollen. Freiarbeit wird in Regelschulen häufig so praktiziert, dass die Schüler ein Wochenplanpensum abarbeiten, bei dem sie die Reihenfolge der Aufgabenbearbeitung und die Zeiteinteilung selbst bestimmen dürfen. Bei der „Freien Wahl der Arbeit“ im Sinne M. Montessoris geht es jedoch um Formen der Selbsttätigkeit, die den Schülern die Möglichkeit der allseitigen Entfaltung in einer ihrem Entwicklungsstand angepassten vorbereiteten Umgebung geben. Wie eine Freiarbeit im Sinne M. Montessoris am Gymnasium aussehen könnte, ist im Kapitel 5.2 ausführlich beschrieben worden.

Projektarbeit, so sie nicht als bloße Gruppenarbeit mit einer engen Aufgabenstellung verstanden wird, ist eine Unterrichtsform, bei der Jugendliche gute Voraussetzungen für ein altersgemäßes Lernen finden. Ihr Bedürfnis nach Gruppenzugehörigkeit und sozialen Erfahrungen wird durch Arbeiten in der Gruppe und Auftreten als Gruppe bei der Präsentation der Projektergebnisse berücksichtigt. Die Möglichkeit und das Erfordernis selbstständigen Arbeitens kommt ihrem Wunsch nach Unabhängigkeit und Abgrenzung von Autoritäten entgegen. Lässt man die Schüler bei der Wahl der Inhalte

[433] Montessori, M., Schule des Kindes. Montessori-Erziehung in der Grundschule, hrsg. von P. Oswald und G. Schulz-Benesch, Freiburg , Basel und Wien 1976, S. 170 vgl. auch ebenda, S. 89f.

vgl. auch ebenda, S. 89f.

[434] vgl. Meisterjahn-Knebel, G., Montessori-Pädagogik in der weiterführenden Schule – Der „Erdkinderplan“ in der Praxis, Freiburg 2003

mitentscheiden oder selbst entscheiden, so wird ihr Bedürfnis berücksichtigt, eigenen Fragestellungen und Interessen nachzugehen.

Das Planspiel eignet sich m.E. nicht so sehr für die Zeit der Pubertät, da der Spielcharakter eine künstliche Situation darstellt und nicht den wirklichen Realitätsbezug schaffen kann.

Hingegen stellt die Gründung einer Schülerfirma eine ausgezeichnete Möglichkeit dar, Jugendliche zu großem Engagement zu motivieren. Meine eigenen Erfahrungen mit der Betreuung einer Schülerfirma sollen deshalb im Folgenden geschildert werden:

Im Rahmen eines Wahlkurses „Betriebswirtschaftliches Praktikum" gründeten elf Schüler am Gymnasium Wiesentheid im Schuljahr 1998/99 das Unternehmen C.O.P.'s, Cooperation of Parties. Die rechtlichen Rahmenbedingungen dafür lieferte das Institut der deutschen Wirtschaft in Köln mit seinem Projekt JUNIOR (Junge Unternehmer initiieren – organisieren – realisieren).

Voraussetzung für die Teilnahme bei JUNIOR war eine erfolgversprechende Geschäftsidee, die bei C.O.P.'s in der professionellen Organisation von Großparties für Schüler von Schülern bestand, was sich später als tatsächliche Marktlücke herausstellte. Dafür verkaufte jeder „Unternehmer" 5 Aktien à 15 DM an risikofreudige Aktionäre, so dass ein Startkapital von 990 DM als wirtschaftliche Grundlage zustande kam.

Die Arbeit im Unternehmen erfolgte nach genauen Vorgaben. So teilten sich die Miniunternehmer nach Interesse und Vorkenntnissen in die vier Abteilungen Verwaltung, Finanzen, Technik und Marketing ein, in denen sie selbstständig die Aufgaben verteilten und durchführten. Natürlich gab es bei den Tätigkeitsfeldern auch Überschneidungen, die Absprachen unter den Abteilungen nötig machten. Nach vielen arbeitsreichen Wochen der Vorarbeit war es am 15. Januar 1999 so weit: Die Steigerwaldhalle in Wiesentheid wurde für die erste „B: free" - Party geöffnet. Auf zwei Ebenen wurden verschiedene Musikrichtungen gespielt, so dass ausgelassen getanzt werden konnte. Auch für das leibliche Wohl war gesorgt. Die Besucherzahlen überstiegen die kühnsten Erwartungen, der Einlass musste zeitweise sogar gestoppt werden.

Auch der betriebswirtschaftliche Erfolg mit mehr als 23.000 DM Umsatz war überwältigend. Allerdings waren wir nun nahe an der von JUNIOR erlaubten Umsatzgrenze, deren Überschreiten das Institut der deutschen Wirtschaft in Köln umsatzsteuerpflichtig gemacht hätte. So war klar, dass es keine weitere „B: free" – Party mehr geben konnte und das Unternehmen vorzeitig aufgelöst werden musste. Der Gewinn betrug 12.786,75 DM und wurde nach Beschluss der Aktionärsversammlung zu 70 % an die Jungunternehmer und zu 30% an die Aktionäre ausgeschüttet. Das bedeutete für die Aktionäre eine Dividende von mehr als 350%! Der Artikel in der „Main Post" vom 18.05.99 über die Hauptversammlung der Aktionäre trug die Überschrift „Der Traum aller Konzerne“.

Um der sozialen und gesellschaftlichen Verantwortung eines Unternehmens gerecht zu werden, wurde ein Spendenfonds eingerichtet, der mit 1000 DM von den Jungunternehmern gespeist wurde. Viele Aktionäre spendeten ebenfalls, so dass insgesamt 2000 DM an eine Hilfsorganisation für Kosovoflüchtlinge übergeben werden konnten.

Beeindruckend war für mich nicht so sehr der finanzielle Erfolg als vielmehr die Begeisterung und das Engagement, mit dem die Schüler ihre Ziele verfolgten. Die Arbeitszeit allein am Tag der Party betrug mehr als 20 Stunden ohne Unterbrechung! Die Verantwortung eines „richtigen“ Unternehmers zu tragen, der auch Geld verlieren kann, spornte die Schüler zu äußerst sorgfältigem Arbeiten an, bei dem Zeit keine Rolle mehr zu spielen schien.

Auch wenn dieses Projekt mehr auf die wirtschaftlichen Unterrichtsinhalte und weniger auf die mathematischen abgestimmt war, so kann es doch auch als ein Beispiel für mathematische Projektarbeit dienen. Denn schließlich waren doch immerhin Prozent- und Zinsrechnungen gefragt, aber auch betriebswirtschaftliche Kalkulationsrechnungen, die mit Excel-Programmen erzeugt wurden. Es mussten Pläne gezeichnet werden, für die Maßstabsberechnungen benötigt wurden, Überschlagsrechnungen zum Verbrauch von Getränken und Speisen durchgeführt werden, um nur einige weitere mathematische Inhalte zu benennen.

Außerdem muss, bei aller Zustimmung zu dem grundsätzlich als Fachunterricht organisierten Unterricht, dazu ermutigt werden, gerade in der Zeit der Adoleszenz Unterricht so zu gestalten, dass die Interessen der Schüler bedient werden und auf diese Weise eine intensive Auseinandersetzung mit den Inhalten erzielt wird. Um auf das Beispiel der Zins- und Prozentrechnung zurückzukommen: Wie viele Abiturienten sind nicht in der Lage, einfachste Prozentrechnungen korrekt zu lösen, obwohl sie weit über diese mathematische Wissensstufe hinausgekommen sein müssten. Vielleicht beherrschen sie die Prozentrechnung deshalb nicht, weil sie sie nie wirklich anwenden mussten?

Neben der Projektarbeit als einer Unterrichtsform, die besonders geeignet erscheint, entwicklungsbedingte Lernprobleme aufzufangen, gilt es noch weitere Prinzipien zu berücksichtigen. Besonders wichtig ist der für alle Unterrichts- und Lernprozesse gültige Grundsatz der Beachtung der Interessen der Schüler. Gerade in der sensiblen Phase der Umorientierung und Umstrukturierung der eigenen Identität ändern sich auch die Interessen der Heranwachsenden, die der Lehrer gerade auch in seiner Funktion als Erzieher bedienen muss. Dabei erscheint mir ein Hinweis von besonderer Bedeutung zu sein: Der Lehrer bleibt auch in seiner Erziehungsfunktion Lehrer. D.h. er arbeitet mit den Mitteln, die dem Unterricht zur Verfügung stehen. Der Unterricht wirkt nicht, wie J. F. Herbart sagt, unmittelbar auf das Gemüt. Dafür böte ihm auch der Schüler während dieser Entwicklungsphase wenig Gelegenheit. Der Unterricht wirkt über ein Drittes. Das sind die Unterrichtsgegenstände. Wenn diese nämlich den inneren Bedürfnissen des Schülers entsprechen, wie dies im interessegeleiteten Unterricht der Fall ist, ist der Unterrichtende Erzieher und Lehrer in einem: Er unterrichtet, indem er Wissen vermittelt, Erkennen und Denken fördert. Er erzieht, indem er durch einen, den Schüler interessierenden Gegenstand auf das Gemüt des Schülers einwirkt. Im oben dargestellten Beispiel der Schülerfirma kommt dies in der Begeisterung der Schüler und in ihrem hohen, freiwilligen Arbeitseinsatz zum Ausdruck.

> *„Wenn du mit anderen ein Schiff bauen willst, so beginne nicht, mit ihnen Holz zu sammeln, sondern erwecke in ihnen die Sehnsucht nach dem großen, weiten Meer."*
>
> Antoine de Saint-Exupery

5.4 Lebensweltlicher Aspekt

5.4.1 Der Begriff Lebenswelt

Nach H.-G. Gadamer ist „die Lebenswelt die transzendentale Bedingung für die Erkenntnis schlechthin ... . Denn alle Wissenschaften haben ihr Fundament in der Lebenswelt, aus der heraus sie erst entstehen und ihren Bestand haben."[435]

Unter Anknüpfung an die Lebensweltanalyse von A. Schütz betrachtet J. Habermas das verständigungsorientierte kommunikative Handeln als stets eingebettet in eine Lebenswelt, die den gemeinsamen Kommunikations- und Interpretationsrahmen zur Verständigung von Sprecher und Hörer darstellt. Die Lebenswelt ist gleichsam „der Horizont, in dem sich die kommunikativ Handelnden 'immer schon' bewegen".[436] Mit diesem „immer schon" soll zum Ausdruck gebracht werden, dass die Lebenswelt zum einen ein „Reservoir von Selbstverständlichkeiten oder unerschütterlichen Überzeugungen"[437] darstellt, das sich aus nicht hinterfragten Erfahrungen und nicht problematisierten Wissensbeständen aufbaut. Zum andern ist damit gesagt, dass die Kommunikationsteilnehmer die Welt, in der sie kommunikativ handelnd miteinander interagieren, inhaltlich bereits „vorinterpretiert"[438] vorfinden. Nach A. Schütz und T. Luckmann baut sich die Lebenswelt „aus Sedimentierungen ehemals aktueller situationsgebundener Erfahrungen auf. Umgekehrt fügt sich jede aktuelle Erfahrung je nach

[435] Tschamler, H., Wissenschaftstheorie – Eine Einführung für Pädagogen, München 1996³, S. 45

[436] Habermas, J., Theorie des kommunikativen Handelns, Band II, Frankfurt 1987, S. 182

[437] Ebenda, S. 188

[438] Ebenda, S. 191

ihrer im Wissensvorrat angelegten Typik und Relevanz in den Erlebnisablauf und in die Biographie ein."[439]

In jeder Vorstellung und in jedem Denkakt sind aus der Lebenswelt stammende Interessen eingewoben, die die Erkenntnisse des Menschen leiten und bestimmen. Deshalb spricht J. Habermas auch von „erkenntnisleitenden Interessen"[440], die eine reine, von der Erfahrungs- und Erlebniswelt des Subjekts völlig losgelöste Erkenntnis nicht zulassen. Das gilt auch für wissenschaftliche Erkenntnisse, die ebenfalls mit Lebensweltprozessen verwoben sind und deren Inhalte nur unter Aufdeckung dieser Prozesse verstehbar werden. Wenn also Verständigung gelingen soll, müssen sich die Kommunikationsteilnehmer auf eine von ihnen gemeinsam geteilte Lebenswelt beziehen können. Andernfalls ist Kommunikation von vornherein zum Scheitern verurteilt.

Lebenswelt hat sowohl eine allgemein-objektive als auch eine individuell-subjektive Seite. Von ihrem objektiven Charakter her gesehen ist sie das Ergebnis gesellschaftlich und kulturell bedingter Wertvorstellungen und Erfahrungen, das den Mitgliedern einer Kommunikationsgemeinschaft gemeinsam ist. Von ihrer subjektiven Seite her betrachtet ist sie das Resultat biographiebedingter Lebenserfahrungen und Erlebnisabläufe, die von Mensch zu Mensch verschieden sind. In ihrer objektiven Allgemeinheit ist die Lebenswelt Bedingung jeglicher Erfahrung. Als subjektive Erlebnis- und Erfahrungswelt ist sie der für jedes Individuum spezifische Hintergrund jeder sprachlichen und interaktiven Äußerung. Sowohl in ihrer allgemeinen als auch in ihrer individuell-besonderen Horizontstruktur ist die Lebenswelt nicht nur Grund der Ermöglichung von Verständigung, sondern auch deren Grenze. Die Verständigung reicht so weit, wie sich der gemeinschaftlich geteilte Horizont der Lebenswelt erstreckt. Sie erreicht ihre Grenze dort, wo auch die Grenzen einer gemeinsamen Lebenswelt liegen: „Die Grenzen der Lebenswelt lassen sich nicht transzendieren."[441]

Was besagen diese Hinweise für das Unterrichtsgeschehen?

Eines ist klar: Wenn Erkenntnisprozesse in Lebenszusammenhänge eingebettet und Lebenszusammenhänge Interessenszusammenhänge sind[442], wenn ferner die Lebenswelt die nicht hintergehbare Voraussetzung für verständigungsorientiertes Handeln bedeutet, dann muss dieser Zusammenhang auch für die Lehrer-Schüler-Interaktion gelten, denn das Unterrichtsgeschehen ist ein kommunikatives Geschehen.

---

[439] Schütz, A., Luckmann, Th., Strukturen der Lebenswelt, Frankfurt 1979, S. 133 zitiert nach Habermas, J., Theorie des kommunikativen Handelns, Band II, Frankfurt 1987, S. 195

[440] vgl. Habermas, J., Erkenntnis und Interesse, Frankfurt 1973, S. 242

[441] Habermas, J., Theorie des kommunikativen Handelns, Band II, Frankfurt 1987, S. 201

[442] Habermas, J., Erkenntnis und Interesse, Frankfurt 1973, S. 260

Will der Lehrer[443], der die an Verständigung orientierte Interaktion eröffnet und in Gang hält, sicher sein, dass die durch Sprache vermittelten Unterrichtsinhalte vom Schüler angenommen und verstanden werden, so kann er seine Vermittlungsbemühungen nicht losgelöst und ohne jeden Bezug zur Lebenswelt des Schülers vornehmen. Sein Unterricht wäre (lebens-)weltfremd und würde auf Verständnislosigkeit der Kommunikationsteilnehmer stoßen. Aber auch der Schüler muss als Kommunikationspartner davon ausgehen können, dass sein Erkenntnisinteresse auch beim Lehrer auf Interesse stößt, wenn er auf Verständigung hoffen will. Da aber die Interessen des Schülers und die Intentionen des Lehrers einem möglicherweise unterschiedlichen Lebenszusammenhang angehören, so müssen sich beide Interaktionspartner immer wieder gegenseitig dieser ihrer Lebenswelt versichern, wenn Verständigung gelingen soll.

Es erscheint an dieser Stelle wichtig, zu betonen, dass Unterricht als <u>inter</u>aktives Geschehen und nicht als einseitige, vom Lehrer zum Schüler verlaufende Aktion verstanden wird. D.h. auch der Schüler muss als Interaktionspartner sein Interesse geltend machen können, damit ihm die Sinnzusammenhänge der verschiedenen Wissensinhalte erschlossen werden. Konkret heißt das, dass der Schüler den Bedeutungszusammenhang der Lerninhalte erfragen und hinterfragen darf. Damit erhält der Schüler die Möglichkeit, in aufbauenden Reflexionsschritten eine tiefere Sinnerschließung zu erfahren, Welt verstehen zu lernen, was genau Ziel und Idee der Bildung ist.

Es muss jedoch noch auf ein Problem hingewiesen werden. Der Lehrer kann nicht davon ausgehen, dass das Niveau der lebensweltlichen Hintergrundüberzeugungen und des Hintergrundwissens dem der Erwachsenenwelt entspricht. Aufgrund des noch geringeren Erfahrungshorizonts und eines noch eingeschränkten Weltbildes kann der Schüler noch nicht in vollem Umfang als mündiges Mitglied an der Lebenswelt der Erwachsenen partizipieren und deshalb auch noch nicht am Verständigungsprozess der Mitglieder der Kommunikationsgemeinschaft teilhaben. Er muss dazu erst befähigt werden. Gerade deshalb bedarf es der Erziehung und Bildung.

Einen Bezug zur Lebenswelt des Schülers herstellen beinhaltet daher zum einen die Herstellung eines Bezugs zur individuell-besonderen Lebenswelt des Schülers, zum andern die Befähigung des Schülers, als mündiges Mitglied an der gemeinsamen Lebenswelt kommunikativ Handelnder aktiv teilhaben zu können.

Bezogen auf den Mathematikunterricht bedeutet das also:

Damit die Schüler die Lebenswelt verstehen und kennenlernen können, müssen sie Mathematik betreiben, denn sie ist Teil der Lebenswelt. Umgekehrt aber kann Mathematik nur dann verstehbar gemacht werden, wenn die Vermittlung an die individu-

[443] Das soll nicht heißen, dass nicht auch der Schüler Gespräche eröffnen kann und dies sogar erwünscht ist. In der Regel jedoch wird es der Lehrer sein.

ell-besondere Lebenswelt des Schülers anknüpft. Beide Aspekte sollen im Folgenden genauer erläutert werden.

Mathematik ist ein über Jahrtausende entwickeltes Kulturgut. Als reine Wissenschaft zeichnet sie sich durch die Gewissheit ihrer Erkenntnisse aus und in ihrer Anwendung hat die Mathematik nahezu alle Bereiche des (modernen) Lebens erreicht.

So wie das Erlernen des Alphabets die Voraussetzung ist für das Verständnis des gesprochenen und geschriebenen Wortes, so ist die Mathematik Voraussetzung für das Verständnis der Welt.

> *„Ohne mathematische Erziehung kann man unmöglich den Fortschritt unserer Epoche begreifen noch daran teilnehmen.“* [444]

M. Montessori vergleicht mathematische Bildung mit dem Lernen des Alphabets und sieht mathematische Bildung als Voraussetzung für das Verständnis der Welt in unserer Zeit. Sie betrachtet mathematische Bildung also als grundlegend für das Aufwachsen des Kindes in der es umgebenden Welt.

Trotzdem wird die immense Bedeutung dieser Disziplin für die Entwicklung von Gesellschaft und Kultur von der Allgemeinheit, aber auch insbesondere von der Schülerschaft, nicht annähernd erkannt und geschätzt. Ein Grund dafür mag sein, dass sich die Mathematik unter der Oberfläche präsentiert, d.h. im täglichen Leben kaum zu erkennen ist. Man sieht sie nicht im Telefon oder im Fernsehapparat, die man täglich benutzt. Es ist sogar so, dass die Vereinfachung der Bedienung durch den Benutzer nur durch einen intensiveren Einsatz an Mathematik erreicht wird. Je mehr mathematische Kompetenz also in einen Gebrauchsgegenstand eingeht, um so weniger muss der Endverbraucher bei Benutzung dieses Gegenstandes mathematische Fähigkeiten an den Tag legen.[445]

Ein weiterer Grund dafür, dass das gängige Bild von Mathematik seiner tatsächlichen Bedeutung nicht gerecht wird, liegt darin, dass im traditionellen Mathematikunterricht nach wie vor das Lernen von Regeln und Algorithmen und das stereotype Anwenden dieser in Form von Übungsaufgaben dominiert. Hingegen müsste das Bild der Mathematik in der Schule der Vielfalt und Bedeutung in unserem Leben Rechnung tragen. Möglicherweise ginge für manch einen Schüler der Charakter des Fremden und Ungeliebten an Mathematik in dem Augenblick verloren, indem dem Schüler bewusst wird, dass Mathematik unseren gesamten Lebensalltag durchdringt.

[444] Montessori, M., „Kosmische Erziehung“ – Die Stellung des Menschen im Kosmos, Menschliche Potentialität und Erziehung, Von der Kindheit zur Jugend, Freiburg 1988, S. 150

[445] vgl. Köhler, H., Sich ein Bild davon machen!, in: Arbeitskreis Mathematik und Bildung – Gesellschaft für Didaktik und Mathematik (Hrsg.), Mathematik – unsichtbar, doch allgegenwärtig, Eichstätt 2002

Wie aber kann dies geschehen? Wie können Schüler die Universalität der Mathematik im Mathematikunterricht erfahren?

J. Bruner brachte den Begriff der „Fundamentalen Ideen“ im Zusammenhang mit der Verbesserung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts auf. Er hatte die Vorstellung, dass jedes Unterrichtsfach sich diese Ideen zu Leitlinien im didaktischen Aufbau der Vermittlung der jeweiligen Disziplin machen könnte. Beispiele für solche Ideen sind die Idee der Zahl, die Idee des Dezimalsystems, die Idee des Messens, die Idee der funktionalen Zusammenhänge, die Idee des Algorithmus, die der mathematischen Modellierung, um nur einige zu nennen. Wenn Schüler den Inhalt und die Bedeutung der fundamentalen Ideen eines Faches verstanden haben, dann können sie daran anknüpfend, weitere, neue Inhalte besser verstehen und behalten. Es bildet sich gleichsam ein Netz, in dem alle Inhalte eingeordnet und strukturell miteinander verbunden sind. Dadurch bleiben die Einzelheiten besser im Gedächtnis, weil man, wenn man Gelerntes wieder abrufen will, immer wieder auf die zentralen Ideen zurückgreifen und von dort zu weiteren Inhalten gelangen kann.[446]

Macht man also diese fundamentalen Ideen im Mathematikunterricht zum Thema, so bietet man den Schülern die Möglichkeit, den Anteil der Mathematik an der Entwicklung der Kultur in der Menschheitsgeschichte zu begreifen und man bietet den Rahmen für ein Grundgerüst, auf dem viele weitere Themen der Mathematik aufbauen können.[447]

Am Beispiel der Modellierung soll nun aufgezeigt werden, wie Mathematikunterricht an der subjektiven Lebenswelt anknüpfen kann und die Lebenswelt auch verstehbar zu machen versucht.

5.4.2 Modellierung als Beispiel für Lebensweltbezug

„Mathematisierung“ oder „Modellierung“ stellt die zentrale Idee der Mathematik dar, die am umfassendsten die Entwicklung menschlicher Kultur geprägt hat, da sie zum Inhalt hat, reelle Situationen und Fragestellungen mit Methoden der Mathematik zu lösen und damit alle Anwendungsbereiche der Mathematik einschließt. Modellierung im Mathematikunterricht zu behandeln bietet demnach die Möglichkeit, die Entwicklung kulturell-zivilisatorischer Errungenschaften verstehbar zu machen und einen unmittelbaren Lebens- und Weltbezug herzustellen, denn es werden ausdrücklich Beziehungen zwischen der Mathematik und der Welt thematisiert. Am überzeugendsten wird es gelingen, eine Brücke zwischen der Mathematik und der Welt um sie herum zu bauen, wenn die Modellierungsinhalte so gewählt werden, dass der Schwer-

[446] Klika, M., Zentrale Ideen – echte Hilfen, in: mathematik lehren Heft 119, 2002, S. 4 – 7

[447] vgl. Heymann, H. W., Allgemeinbildung und Mathematikunterricht, Weinheim 1996

punkt der Problemstellungen auf realistischen und authentischen Fragestellungen liegt.

Modellierung stellt innerhalb der Mathematikdidaktik eine zunehmend beachtete Möglichkeit dar, mannigfaltige Unterrichtsziele zu erreichen. Neben dem Ziel, Lebensweltbezug im Mathematikunterricht zu schaffen, kann das Modellieren als Thema im Mathematikunterricht dazu beitragen, weitere Ziele zu erfüllen. Im Einzelnen werden die Ziele wie folgt klassifiziert:

Modellierungen sollen den Schülern

- Kompetenzen zum Anwenden von Mathematik in einfachen und komplexen unbekannten Situationen vermitteln (methodologische Ziele)
- helfen, aus dem Unterricht bekannte Umweltsituationen zu verstehen und zu bewältigen (pragmatische Ziele)
- helfen, eine aufgeschlossene Einstellung gegenüber dem Mathematikunterricht zu entwickeln und das Behalten und Verstehen von mathematischen Inhalten unterstützen (lernpsychologische Ziele)
- heuristische Strategien, Problemlöse- und Argumentationsfähigkeiten sowie kreatives Verhalten vermitteln (pädagogische Ziele)
- ein ausgewogenes Bild von Mathematik als Wissenschaft und ihre Bedeutung für unsere Kultur und Gesellschaft zeigen (kulturbezogene Ziele).[448]

Folgt man der 1973 von Herbert Stachowiak entwickelten allgemeinen Modelltheorie, so ist ein Modell durch drei Eigenschaften charakterisiert:

1. Abbildung. Ein Modell ist immer das Abbild von Etwas, eine Repräsentation eines Originals. Dabei können die Originale bereits Modelle sein.

2. Verkürzung. Ein Modell erfasst nicht alle Attribute des Originals, sondern nur diejenigen, die dem Modellersteller bzw. Modelnutzer bedeutungsvoll erscheinen.

3. Pragmatismus. Ein Modell ist einem Original nicht von sich aus zugeordnet. Die Zuordnung wird durch die Fragen *Für wen?*, *Warum?* und *Wozu?* relativiert. Ein Modell wird vom Modellersteller bzw. Modellnutzer innerhalb einer bestimmten Zeitspanne und zu einem bestimmten Zweck für ein Original eingesetzt. Das Modell wird somit interpretiert.

[448] Maaß, K., Modellieren im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I, JMD 26 (2005) H. 2, S. 114 – 142

Ein Modell zeichnet sich durch Abstraktion aus, also die gezielte Vernachlässigung bestimmter Merkmale, um die für den Modellersteller oder den Modellierungszweck wesentlichen Modelleigenschaften hervorzuheben.[449]

Spezifiziert man das Modellieren auf die mathematische Grundbildung, so versteht man unter dem Prozess des **Modellierens das Lösen einer anwendungsbezogenen Aufgabe**. Innerhalb dieses Prozesses werden folgende Arbeitsschritte vollzogen: Mathematisieren, Verarbeiten, Interpretieren und Validieren. [450]

Beim Mathematisieren geht es darum, eine problemhaltige Situation in ein mathematisches Modell zu übersetzen. Das kann je nach Inhalt in Form von Skizzen oder Plänen oder bereits in konkreten algebraischen Gleichungen geschehen. Die Schwierigkeit dieses ersten Schrittes besteht darin, das u. U. nicht klar ist, welcher Lösungsansatz zum Ziel führen wird. Unter Verarbeiten versteht man die Durchführung des mathematischen Verarbeitungsprozesses, z. B. durch eine algorithmische Vorgehensweise oder durch begriffliches Arbeiten. Ist eine Lösung gewonnen, so muss diese interpretiert und mit der Ausgangslage wieder in Verbindung gebracht werden. Beim letzten Schritt, dem Validieren, ist zu überprüfen, ob das gewählte Modell für das Problem richtig gewählt war oder eine Anpassung stattfinden muss.[451]

Natürlich werden täglich anwendungsbezogene Aufgaben im Mathematikunterricht gelöst. Trotzdem vermitteln sie den Schülern nicht annähernd den Eindruck, dass die Lösungsfindung etwas mit der Idee der Modellierung zu tun hat. Ein Grund liegt darin, dass diese Aufgaben häufig ergebnisorientiert angelegt sind, d.h. sie sind so konstruiert, dass ein bestimmtes Ergebnis als Folge eines bestimmten Rechenweges herauskommt. Zunächst wird zwar durch die Aufgabenstellung – häufig mit Lebensweltbezug – die Aufmerksamkeit der Schüler erreicht, jedoch wird dann die Problemstellung nur auf den mathematisch-inhaltlichen Aspekt, der vermittelt werden soll, eingeengt. Alle Schülerantworten, die im fragend-entwickelnden Unterricht nicht in die anvisierte Richtung der Lehrkraft gehen, werden übergangen oder als falsch zurückgewiesen, so dass am Ende der Kontext der Problemstellung nicht mehr umfassend beachtet, sondern nur noch auf seine mathematische Substanz hin untersucht und bearbeitet werden muss.

Um Modellierung zu demonstrieren, müsste jedoch das reelle Problem im Vordergrund stehen und das spezifische Ergebnis und der entsprechende Rechenweg müssten sich als Folge des Problems ergeben. Mathematik soll als Werkzeug zum Erfassen von Phänomenen der realen Welt dienen und nicht umgekehrt.

---

[449] vgl., Stachowiak, H., Modell, in: Handlexikon zur Wissenschaftstheorie, hrsg. von H. Seiffert, G. Radnitzky, München 1989

[450] vgl. Baptist, P., Ulm, V., Stufen mathematischer Kompetenz nach PISA, Bayreuth 2002

[451] Ebenda, S. 3 f.

„Echte“ Modellierungsaufgaben werden im Unterricht nur selten bearbeitet. Ursachen sind z. B. der 45-Minuten-Takt, der hohe Schwierigkeitsgrad derartiger Aufgaben, die Unkalkulierbarkeit bei der Lösung von Modellierungsproblemen, die Unsicherheit der Lehrkräfte. Dass Modellierung im Unterricht aber auch unter den gegebenen Rahmenbedingungen erfolgreich sein kann, zeigen Studien, die auf nachvollziehbare Weise konkrete Unterrichtsreihen vorstellen und evaluieren.[452]

Da die wenigsten Schüler bereits über Modellierungserfahrungen verfügen, ist es für das Gelingen in der Praxis wichtig, den ersten Einstieg in das Modellieren mit kurzen Unterrichtseinheiten zu versuchen. Auch ist es ratsam, anfangs Aufgaben zu wählen, die sich nicht zu stark von herkömmlichen Aufgaben unterscheiden. Mit der Zeit können die Aufgaben geöffnet werden, so dass die Schüler möglichst viele Modellierungsentscheidungen selbst fällen können. Denn das ist das Neue: Die Schüler müssen bestimmte Annahmen treffen, die für das weitere Bearbeiten der Aufgabe Konsequenzen haben.

Bemerkenswert ist auch, dass sich viele realistische Probleme eignen, auf verschiedenen Niveaus, z. B. in verschiedenen Jahrgangsstufen bearbeitet zu werden. So z. B. die Frage „Wie viele Menschen stecken in einem 20 km langen Stau?“. Eine solche Fragestellung könnte für eine Hilfsorganisation interessant sein, die Decken und warmen Tee für im Winter in Stau geratene Autofahrer bereitstellen will. Somit bieten sich Modellierungsaufgaben zur Binnendifferenzierung an.[453]

Methodisch-organisatorisch wird bei den Modellierungsaufgaben die Gruppenarbeit vorherrschen, die sich mit Gesprächen und Diskussionen im Plenum abwechselt. Die Gruppenarbeit ermöglicht eine natürliche Form der Binnendifferenzierung und damit die Chance auf verschiedenen Niveaus zu arbeiten. Sind die Schüler beim Modellieren bereits etwas fortgeschrittener, so lässt die Projektmethode den Schülern noch größeren Spielraum für die Einteilung der Zeit und die Auswahl der Lösungswege.

Im Folgenden werden einige Beispiele für Modellierungsaufgaben unterschiedlichen Niveaus aufgelistet. Für die weitere Beschreibung der Durchführung dieser Aufgaben sei auf die angegebene Literatur verwiesen.

- Rasiert man(n) in 18 Monaten ein Fußballfeld? (5. –6. Jahrgangsstufe)[454]. Dieser Untertitel einer Zeitungsannonce, die ein Rasenfußballfeld zeigt und einen Mann, der mit einem Rasierapparat der Fa. Braun das Gras zu schneiden versucht, brachte einen Mathematiklehrer auf die Idee, dieser Frage mit seinen Schülern nachzugehen.

---

[452] vgl. Maaß, K., Modellieren im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I, JMD 26 (2005) H. 2, S. 114 – 142

[453] vgl. Maaß, K., Stau – eine Aufgabe für alle Jahrgänge! PM Heft 3 / Juni 2005/ 47. Jg., S. 8 – 13

[454] vgl. Laakmann, H., Werbung in der Mathematik, PM Heft 3 / Juni 2005/ 47. Jg., S. 14 – 18

- Inwieweit kann das in Stuttgart-Waldhausen benötigte Brauchwasser durch Sonnenkollektoren auf den Dächern erwärmt werden? (8. Jahrgangsstufe)[455]
- Ein Versicherungsunternehmen plant zur Erweiterung seiner Produktpalette die Einführung einer privaten Krankenversicherung. Dazu sollen die Monatsbeiträge für Frauen und Männer ab 21 Jahren berechnet werden.[456]

Eine spezielle Form des Modellierens sind die sog. **Fermi-Aufgaben**. Der Name dieser Fragestellungen geht auf den Physiker und Nobelpreisträger Enrico Fermi zurück. „Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?“ Fragen wie diese pflegte E. Fermi seinen Studenten zu stellen.

Das Charakteristische an den Fermi-Aufgaben besteht darin, dass es keine Standardlösung gibt und es auch nicht wichtig ist, die exakte Lösung dieser Aufgabe zu ermitteln. E. Fermi wollte zeigen, dass man von verschiedenen Voraussetzungen ausgehen und trotzdem Schätzungen erhalten kann, die der Realität erstaunlich nahe kommen. Das liegt daran, dass man manchmal zu hoch geschätzte Annahmen trifft und manchmal zu niedrig geschätzte Voraussetzungen festlegt und sich Fehler bei den verschiedenen Annahmen im Endergebnis häufig wieder aufheben.

Wie könnte die Frage nach der Anzahl der Klavierstimmer gelöst werden?

Folgende Annahmen, eine Mischung aus Fakten und Vermutungen, werden getroffen, die auch Lexika und anderen Informationsquellen entnommen werden können:

Einwohner in Chicago: 3 Mio.
Durchschnittsfamilie: 4 Personen, jede dritte Familie hat ein Klavier.
Damit ergeben sich 250.000 Klaviere in der Stadt.
Jedes Klavier wird im 5-Jahres-Turnus gestimmt, d.h. pro Jahr 50.000 Klaviere
Ein Klavierstimmer kann am Tag ca. 4 Klaviere stimmen, bei 250 Arbeitstagen pro Jahr sind das 1000 Klaviere im Jahr.
Also muss es ca. 50 Klavierstimmer geben.[457]

Zur Bearbeitung von Fermi-Aufgaben werden vom Schüler folgende Fähigkeiten verlangt:

- heuristische Strategien: Fragen stellen
- Alltagswissen benutzen
- mit großen Zahlen arbeiten
- Umrechnen von Größen

---

[455] vgl. Maaß, K., Modellieren im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I, JMD 26 (2005) H. 2, S. 114 – 142

[456] vgl. http://www.math.uni-hamburg.de/home/struckmeier/Modellierung/schulen/emgy

[457] vgl. http://www.stauff.de/matgesch/dateien/schaetzen.htm

- Überschlagsrechnen, geschicktes Rechnen
- Unklarheit verkraften, also auch bei vagen Angaben weiterarbeiten
- Ergebnisse überprüfen und bewerten
- Kontroll- und Bewertungsstrategien anwenden[458]

Fermi-Aufgaben können unterschiedlichsten Charakter haben, was die folgenden Beispiele zeigen sollen. Günstig ist es jedoch, wenn das Ergebnis anhand von Branchenbüchern o.ä. verifiziert werden kann.

> Wie viele Zahnärzte gibt es in München?
>
> Wie hoch ist der Trinkwasserverbrauch pro Tag in unserer Schule?
>
> Wie oft kommt das Wort „und“ in der geschriebenen und wie oft in der gesprochenen Sprache vor?

Für den Einsatz in der Schule ist es wichtig, dass die Fragestellungen so ausgewählt werden, dass den Schülern einsichtig wird, welchen Sinn die Beantwortung hat und sich daran weitere reflektierende Fragen anschließen können. So wird die Frage nach der Anzahl der Zahnärzte z. B. für Firmen interessant sein, die Zahnärzte beliefern. Das Problem des Trinkwasserverbrauchs wird möglicherweise zu weiterführenden Fragen in Richtung Ressourcen- und Umweltschutz oder auch Vergleichsrechnungen des gleichen Problems in einem „Dritte-Welt-Land“ motivieren. Das zuletzt aufgeführte Problem zur Anzahlbestimmung des Wortes „und“ ist weniger praktischer Natur, könnte aber die Schüler anregen, weiterführende sprachtheoretische Fragen zu untersuchen.

Modellbildung ist ein besonders anschauliches Beispiel für Mathematikunterricht, der zum Ziel hat, die Kriterien für einen an Bildung orientierten Unterricht zu erfüllen: Modellierung kann in besonderer Weise dazu beitragen, die Auseinandersetzung mit der Welt, in der die Schüler leben, immer wieder anzuregen, da sie versucht, die Welt abzubilden, zu erfassen und mathematisch habhaft zu machen. Bei der Modellbildung ist es unumgänglich, fächerübergreifend vorzugehen, da die Realität nicht in Fächer eingeteilt ist und somit automatisch beim Lösen anwendungsorientierter Aufgaben Grenzen des Faches überschritten werden. Ferner kann Modellierung einen besonderen Beitrag zum Verständnis der Welt leisten, da sie Probleme der Realität und Lebenswelt so bearbeiten kann, dass diese Fragestellungen verständlich werden, dass Entscheidungs- und Beurteilungshilfen entwickelt werden und Lösungen den Schülern plausibel und anwendungsfähig erscheinen. Eine sorgfältige Mathematisierung kann dazu beitragen, Sensibilisierung zu schaffen und echte Entscheidungshilfen für den Umgang mit dem Problem im Alltag zu geben, z. B. für die Frage, ob man beim Um-

[458] Leuders, T., Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II, Berlin 2001

springen der Farbe Grün auf Rot bei der Ampel mit dem Auto bremsen und anhalten oder Gas geben und weiterfahren soll.[459]

5.5 Ganzheitlicher Aspekt

Wie kann ganzheitliches Lernen im Mathematikunterricht geschehen?

Widerspricht ganzheitliches Lernen im Mathematikunterricht nicht der Vorstellung, dass Mathematik reine Denkschulung ist und umso wertvoller ist, je abstrakter sie sich darstellt? Und muss deshalb nicht insbesondere die sog. höhere Mathematik, die ja überwiegend aus abstrakten Inhalten besteht, nicht auch ausschließlich kognitiv vermittelt werden?

Diese Vorstellung ist sehr alt, was die folgende unter Mathematikern verbreitete Anekdote illustrieren soll: Der griechische Mathematiker Archimedes (287 – 212 v. Chr.) hatte per Wägungstest mit einem Zylinder festgestellt, dass das Kugelvolumen $4/3\pi r^3$ beträgt. Streng beweisen konnte er es jedoch noch nicht. Als er diese Erkenntnis in der Akademie vorstellen wollte, stand ein Zuhörer auf und beantragte, Archimedes des Hauses zu verweisen, da er die Mathematik mit Materie beschmutzt habe.

Dieser Ansicht widerspricht schon unsere alltägliche Erfahrung, die uns zeigt, dass auch abstrakte Vorstellungen über die Sinne vermittelt sind. So ist der mathematische Begriff „Menge“ nicht vorstellbar, ohne mehrere Gegenstände jemals wahrgenommen zu haben.

Woran ist im Einzelnen zu denken, wenn Ganzheitlichkeit als Unterrichtsprinzip gefordert wird? Zum Begriff Ganzheit bzw. ganzheitliches Lernen sollen hier drei Aspekte betrachtet werden:

- das Verhältnis von Sinnen und Intellekt: Lernen mit allen Sinnen
- das Verhältnis von Handeln und Intelligenz: Sensomotorik
- das Verhältnis von Einzelnem und Ganzen: Vernetztes Denken

Lernen mit allen Sinnen

Da intellektuelle Entwicklung bei den Sinnen ihren Ausgang nimmt, sind vielfältige Sinneserfahrungen Grundlage jeglichen Lernens. Wie bereits im Kapitel 3.1 angesprochen, ist nach J. Piaget die erste Intelligenz die „sensomotorische Intelligenz“. Sie

[459] Haas, N., Winter, H., Ohne Modellbildung kein Verständnis, in: Der Mathematikunterricht, 09/1997, Heft 43(5), S. 14 – 29

ist rein praktischer Natur und benützt als Mittel „einzig die Wahrnehmungen und die Bewegungen, ... ohne bereits zu Vorstellungen oder zum Denken fähig zu sein.“[460]

Es bedurfte eines langen Weges innerhalb der Unterrichtspädagogik, der bis heute noch nicht zu seinem Ende gekommen zu sein scheint, ehe sich diese Erkenntnis durchzusetzen begann. Einer der Gründe dürfte in dem Verständnis des Leib-Seele-Verhältnisses gelegen haben, das als teils empirisch erlebbare, teils als ontologisch begründete Beziehung zwischen einem beseelten Leib und einer den Körper belebenden und lenkenden geistigen Seele definiert wird.[461] Die in der Besonderheit dieses Verhältnisses liegende Schwierigkeit, Leib und Geist als Einheit denken zu müssen, führte im Verlauf der Geschichte immer wieder zu dualistischen Interpretationen, mit denen meist eine Abwertung alles Leiblichen und eine Höherwertung alles Geistigen einherging. Da die Sinne dem Leib, der Intellekt aber dem Geist zugeordnet wurden, fielen auch die Sinne einer Geringschätzung zum Opfer. Dies hatte auch Folgen für das Lernverständnis. Da das Sehen den Augen, das Hören den Ohren, das Lernen aber dem Intellekt zugesprochen wurde, schenkte man den Sinnen keine oder nur geringe Beachtung.

J. A. Comenius (1592 - 1670) war einer der ersten und bedeutendsten Erziehergestalten, die zu Beginn der Neuzeit auf die Bedeutung der Sinne für die Vermittlung von Lerninhalten hingewiesen hat. In seiner „Großen Unterrichtslehre“ betont er die Wichtigkeit der Aktivierung der Sinne sowohl für den Vorgang des Einprägens in das Gedächtnis als auch für die Entwicklung klarer Vorstellungen.

> *„Denn die Dinge prägen sich zuerst unmittelbar den Sinnen ein, dann erst, durch Vermittlung der Sinne, der Erkenntnis.“*
>
> *„Wenn also beabsichtigt wird, den Schülern eine wahre und zuverlässige Kenntnis der Dinge einzupflanzen, so ist durchaus dahin zu streben, dass wir alles durch eigene Anschauung und durch Vorzeigen der wirklichen Dinge lehren.“* J. A. Comenius formuliert daraus *„die goldene Regel für alle Lehrenden: Alles soll soviel als möglich den Sinnen vorgeführt werden, nämlich das Sichtbare dem Gesicht, das Hörbare dem Gehör, das Riechbare dem Geruch, das Schmeckbare dem Geschmack, das Fühlbare dem Gefühl; und wenn etwas mit mehreren Sinnen zugleich erfasst werden kann, so soll es mehreren zugleich bekannt gemacht werden.“* J. A. Comenius begründet seine goldene Regel zum einen erkenntnistheoretisch: *„Nichts befindet sich in unserer Erkenntnis, was nicht zuvor in einem Sinn gewesen wäre“*. Zum anderen empirisch: *„der sinnlichen Erkenntnis (wird) an sich Glauben geschenkt“, „fremdem Zeugnis hingegen zu glauben, dazu dürfte sich einer niemals überreden lassen“.* [462]

[460] Piaget, J., Theorien und Methoden der modernen Erziehung, Frankfurt 1994, S.32

[461] vgl. Brugger, W. , Philosophisches Wörterbuch, Freiburg, Basel und Wien 1992, S. 219

[462] Comenius, J. A., Didactica magna oder Große Unterrichtslehre, Paderborn 1918, S. 178 f.

In der Spätaufklärung war es vor allem J.J. Rousseau (1712 - 1778), der zu einer Neubewertung der Sinne beigetragen und auf deren Bedeutung für die Erziehung und Unterweisung des Kindes aufmerksam gemacht hat. Auf seine Gedanken sei hier kurz verwiesen, nicht um einer historischen Würdigung willen, sondern weil seine Aussagen bis heute nichts an Aktualität verloren haben.

Wenn ein Kind den Raum erkundet, schreibt er im zweiten Buch seines „Emile", und die sinnlichen Eigenschaften der Dinge erforscht, dann geschieht dies, um „die sinnlich wahrnehmbaren Beziehungen der Dinge zu sich selbst kennen(zu)lernen". Denn

> *„da das menschliche Begriffsvermögen alles durch die Sinne empfängt, ist die erste Vernunft des Menschen eine sinnliche Vernunft; sie dient zur Grundlage der intellektuellen Vernunft. Unsere ersten Philosophielehrer sind unsere Füße, unsere Hände, unsere Augen ... . Zum Denkenlernen gehört also, dass unsere Glieder, unsere Sinne und unsere Organe geübt werden, weil sie die Werkzeuge unserer Intelligenz sind ... . Also, weit entfernt davon, dass die wirkliche Vernunft des Menschen sich unabhängig vom Leib entwickelt, ist es die gute körperliche Verfassung, die die geistigen Akte leicht und sicher macht."*[463]

Da die Sinne das Werkzeug des Geistes sind und der Geist in seinen Tätigkeiten um so sicherer wird, je geübter die Sinne sind, muss der Ausbildung der Sinne Vorrang vor aller geistigen Bildung eingeräumt werden. Die Sinneserfahrungen durch Bücher ersetzen zu wollen, schreibt er weiter, „heißt nicht, uns denken lehren, sondern ... es heißt, uns lehren, viel zu glauben und wenig zu wissen"[464].

Diese Hinweise leiten unmittelbar dazu über, das Zusammenwirken von Wahrnehmen, Erleben und Denken noch etwas eingehender zu betrachten. Die Sinne sind das Tor zur Welt. Ohne sie kommt kein Kontakt weder zur Umwelt noch zur Mitwelt zustande. Sie bilden die Brücke zwischen Innen und Außen, zwischen Subjekt und Objekt. Über die Sinne nehmen wir die Umwelt wahr. Durch die Sinne, insbesondere die Hand, gestalten wir sie. Obwohl die sensorischen Reize über Rezeptoren aufgenommen und an das Gehirn weitergeleitet werden, handelt es sich bei der Wahrnehmung nicht um einen rein rezeptiven und vorwiegend passiven, sondern um einen im höchsten Maße spontanen, auf Eigentätigkeit beruhenden Vorgang. Und obwohl für die Sinnesempfindungen die Sinnesorgane zuständig sind, wird durch sie die Wirklichkeit nicht einfach fotografisch abgebildet, sondern kommt das in unserer Vorstellung präsente Bild eines wahrgenommenen Gegenstandes oder Ereignisses nur durch eine ganze Reihe verschiedener geistiger Aktivitäten zustande.

Nach allem, was wir aus der Neurologie und Wahrnehmungspsychologie wissen, ist die Wahrnehmung nie ein rein neurophysiologischer Prozess. So sprechen wir z. B.

[463] Rousseau J. J., Emile oder Über die Erziehung, Stuttgart 1965, S. 275 f.

[464] Ebenda, S. 276

nicht von einem kleinen, runden, roten, süß schmeckenden Objekt mit einem langen Stiel, sondern von der Kirsche. D. h. die Sinneseindrücke - meist sind mehrere Sinnesorgane gleichzeitig beteiligt - werden durch Vergleich und Kombination mit früheren, im Gedächtnis gespeicherten Erfahrungen zu einem sinnvollen Ganzen, in diesem Beispiel „Kirsche“ verknüpft.[465]

Neue Erfahrungen werden durch Vergleich mit bereits vorhandenen Erfahrungen bewertet und tragen als solche zur Selektion und Bewertung weiterer Informationen bei. So kommt es, dass angenehme bzw. unangenehme Erfahrungen mitbestimmen, was und wie etwas wahrgenommen und gelernt wird. Im Zwischenhirn, dem sog. Thalamus, ankommende Sinneswahrnehmungen werden mit Gefühlen der Freude, der Angst, der Lust oder des Schmerzes ausgestattet, die wieder darüber entscheiden, was wir im Gedächtnis behalten. Aufgrund dieser Verknüpfungen kann „die Bedeutung geeigneter Emotionen oder eines Erfolgserlebnisses beim Lernvorgang gar nicht überschätzt werden.“[466]

Neben den abgespeicherten Erfahrungen, den positiven oder negativen Bewertungen dieser Erfahrungen und den sie begleitenden Emotionen entscheidet auch die Aufmerksamkeit des Wahrnehmenden darüber mit, was und wieviel wahrgenommen wird. So ist unsere Wahrnehmungsbereitschaft gering, wenn wir müde oder von Reizen übersättigt sind. Erst aus dem Zusammenspiel von Sinneswahrnehmung, Erinnerung, Bewertung, emotionaler Einfärbung und Aufmerksamkeit einerseits, von Organisation, Selektion, Beurteilung und Reflexion andererseits wird verstehbar, was ganzheitliches Lernen bedeutet.

Deshalb macht die Rede von der „sinnlichen Vernunft“ (J. J. Rousseau) durchaus Sinn. Denken und sinnliche Wahrnehmung sind untrennbar miteinander verbunden. So wie kein Gefühl für sich allein existiert, so existiert auch kein Gedanke für sich allein.

> *„Jeder Versuch, den Geist isoliert zu betrachten, befreit ihn also nicht etwa, sondern verstümmelt ihn, weil man damit ... seine lebendige Grundlage verleugnet und ihm so seine eigentlichen Entfaltungsmöglichkeiten entzieht.“*[467]

Ganzheitlicher Unterricht ist eine Synthese aus Erfahrung und Denken. Je vielfältiger und reichhaltiger unsere Erfahrungen, umso differenzierter unser Denken. Je geschulter unser Reflexionsvermögen, umso intensiver unsere Wahrnehmungen. Die emotionale Intelligenz bestimmt die kognitive und die kognitive Intelligenz die emotionale. Nicht was gelernt wird, entscheidet in erster Linie über unsere intellektuelle Kompetenz, sondern wie gelernt wird.

---

[465] vgl. Zimmer, R., Handbuch der Sinneswahrnehmung, Freiburg, Basel, Wien 1995, S. 42 ff.

[466] Vester, F., Denken, Lernen, Vergessen, München 2006, S. 21

[467] Vester, F., Denken, Lernen, Vergessen, München 2006, S. 121

Wenn optische, haptische, motorische und emotionale Elemente mit der Darbietung von Lerninhalten gekoppelt werden, wird der Lernstoff leichter verstanden und auch besser im Gehirn verankert, als wenn er nur in abstrakten Begriffen angeboten wird.

> *„Zum wirklichen Verstehen und Begreifen gehören ... alle sinnlichen Wahrnehmungen, gehört unser Sehen und Fühlen, unsere bildhafte Vorstellung und gehört die Enttäuschung und das Erfolgserlebnis, die Erwartung, Versuch und Irrtum, Zufälle und Fehler (wie gesagt, beim Lernen sind Fehler kein Versagen, sondern Orientierungshilfen!), kurz, gehört der ganze Organismus. Nur er kann wirklich 'erleben' und damit das Erlebte in den gesamten Beziehungen seiner Zellen verankern. Erst das ist dann wirkliches Lernen.“*[468]

Sensomotorik

Betrachtet man Ganzheit unter dem weiteren Gesichtspunkt, dass die äußeren und inneren Aktivitäten des Kindes beim Aufbau kognitiver Strukturen eine, wenn nicht sogar die zentrale Rolle spielen, dann wird ein ganzheitlicher Unterricht in besonderer Weise darauf zu achten haben, wie die spontane Aktivität des Schülers für das Lerngeschehen gebührend genützt werden kann.

J. Piaget hat überzeugend nachgewiesen, „dass die Intelligenz dem Handeln entspringt“. Dabei versteht er unter Handlung nicht nur ein äußerlich wahrnehmbares Verhalten. „Auch in ihren höher gearteten Äußerungen, wo sie nur noch dank den Mitteln des Denkens funktioniert, besteht die Intelligenz immer noch darin, Handlungen zu vollziehen und zu koordinieren, allerdings in einer verinnerlichten und überlegenden Form“. Diese verinnerlichten Handlungen bleiben jedoch als „Transformationsprozesse“ nach wie vor „echte Handlungen“.[469]

Es ist für diesen Zusammenhang nicht erforderlich, die Entwicklung der Operationen, „die von den ersten sensomotorischen Aktionen bis zu den abstraktesten Operationen führt“[470], nachzuzeichnen. Wichtiger ist, den Strukturzusammenhang von Erkennen und Handeln aufzuzeigen, da sich daraus interessante Hinweise auf einen aktiven Unterricht ergeben.

Wie kann ein Unterricht so gestaltet werden, dass die der geistigen Entwicklung inhärente spontane Aktivität des Kindes zur Triebfeder des Lernens wird?

Hier sind zunächst zwei Missverständnisse auszuräumen. Zum einen ist die aktive Unterrichtsmethode nicht identisch mit anschaulichen Unterrichtsmethoden. Diese betrachten nämlich die Erkenntnis als eine bildhafte Kopie der Realität, während sie in

---

[468] Vester, F., Denken, Lernen, Vergessen, München 2006, S. 191 f.

[469] Piaget, J., Theorien und Methoden der modernen Erziehung, Frankfurt 1994, S. 31

[470] Ebenda, S. 31

Wirklichkeit ein Vorgang operativer Transformationsprozesse ist, durch die Objekte oder Ereignisse verändert und neuen Operationssystemen eingegliedert werden. Zum andern muss die Aktivität des Schülers nicht in jedem Fall in konkreten Aktionen bestehen. Auf höherer Entwicklungsstufe kann sich das Erkennen und Begreifen durchaus auf innerliche und abstrakte Aktionen des Überlegens und Reflektierens beschränken. Folglich „liefern die anschaulichen Methoden den Schülern letztlich nicht mehr als bildhafte Vorstellungen, sei es von Objekten oder Vorgängen selbst, sei es vom Resultat möglicher Operationen, jedoch ohne zu einer tatsächlichen Realisierung dieser letzteren zu führen“. So wie es einen „Verbalismus des Wortes“ gibt, gibt es auch einen „‘Verbalismus’ des Bildes“, der aber den „elementaren Primat der spontanen Aktivität und des persönlichen oder autonomen Entdeckens des Wirklichen“ übersieht. Kurz gesagt: „Bild, Film und audiovisuelle Verfahren, die uns heute von jeder modern sein wollenden Pädagogik bis zum Überdruss angepriesen werden“, sind zwar wertvolle Hilfsmittel, können aber nicht die operative Aktivität des Schülers ersetzen.[471]

Im Gegensatz zu einer bloß figurativen Abbildung der Wirklichkeit wendet sich der handlungsorientierte Unterricht an die echte Aktivität des Schülers. Zwar arbeiten die Schüler auch im herkömmlichen Unterricht, aber meist nur auf Druck des Lehrers, der sie, wie man so schön sagt, „zur Arbeit anhält“. „Echte Aktivität“ meint hingegen ein auf „Bedürfnissen und persönlichem Interesse beruhende(s) spontane(s) Arbeiten“.[472] Um dabei aber nicht missverstanden zu werden, verweist J. Piaget auf Claparède, der sagt: aktiver Unterricht fordere nicht, dass die Kinder alles tun sollten, was sie wollen; er verlangt vielmehr, „dass sie das wollen, was sie tun; dass sie manipulieren, nicht dass sie manipuliert werden“. Das Interesse ist mit anderen Worten der „Faktor, der aus einer Reaktion einen echten Akt macht“ und der „einzige Angelpunkt, um den sich das ganze System drehen muss“.[473]

Es wäre also ein Irrtum zu glauben, dass mit der didaktisch aufbereiteten Vermittlung des Unterrichtsstoffs auch die Mittel zu dessen Verarbeitung mitgeliefert werden. Wissen und Kenntnisse werden nicht dadurch erworben, dass man sie dem Gedächtnis einprägt, sondern dass der Schüler den vermittelten Stoff in der Weise verarbeitet, dass er ihn rekonstruiert und ihn gleichsam wieder neu entdeckt. Da dieser Vorgang zugleich ein Prozess der Assimilation ist, findet mit der „Einverleibung“ auch eine Umgestaltung statt. Erst wenn dieser Transformationsprozess stattfindet, kann nach J. Piaget von einer Erkenntnis und einem Verständnis gesprochen werden.

[471] Ebenda, S.65 f.

[472] Ebenda, S.125

[473] o. A. zitiert bei Piaget, J., Theorien und Methoden der modernen Erziehung, Frankfurt 1994, S. 125

Vernetztes Denken

Bisher wurde der Begriff Ganzheit unter dem Aspekt des Verhältnisses von Sinnen und Intellekt sowie des Verhältnisses von Handeln und Intelligenz betrachtet. Nun soll noch ein weiterer Gesichtspunkt zur Sprache kommen, der die Fähigkeit betrifft, Zusammenhänge erkennen und in Zusammenhängen denken zu können. Mit F. Vester kann man diese Fähigkeit als „vernetztes Denken" bezeichnen. Diese Fähigkeit ist notwendig, sagt er, weil die uns umgebende Wirklichkeit „nirgendwo fachspezifisch, sondern ... bereits in ihren kleinsten Entitäten multidisziplinär und damit auch nur so richtig zu erfassen"[474] sei. Deshalb verhindere das realitätsfremde Eintrichtern von Wissensstoff an unseren Schulen eine weitere Verarbeitung des Stoffes im Kontakt mit der Realität. Auf diese Weise werde Lernen unter Verzicht auf die Mitwirkung wesentlicher Gehirnpartien zum bloßen Merken.[475]

In ähnlicher Weise argumentiert W. Klafki, wenn er in seinen „Thesen zu einer zeitgemäßen Bildungskonzeption" die Fähigkeit vernetzten Denkens für dringend erforderlich hält.

> *„Die Betonung dieser Fähigkeit ergibt sich zwingend aus neueren Zeit- und Gesellschaftsanalysen, die jene vielseitigen Verflechtungen herausgearbeitet haben, die heute, im Zeitalter hochentwickelter Technik und ihrer möglichen Folgen sowie der damit verbundenen politischen und ökonomischen Wirkungszusammenhänge - zugespitzt formuliert - 'alles mit allem' verknüpfen".*[476]

Angesichts der Wechselwirkungszusammenhänge, so argumentiert W. Klafki weiter, von Energieverbrauch und Klimaveränderung, von Konsumverhalten und Umweltzerstörung, der Entwicklungsdiskrepanz zwischen Erster und Dritter Welt, um nur einige globale Probleme anzusprechen, werde deutlich, wie unzureichend und folgenblind unsere Lehrplan- und Unterrichtsgestaltung sei.

> *„Die alte reformpädagogische Forderung nach nicht nur gelegentlichen fächerübergreifenden Veranstaltungen oder Hinweisen, sondern nach einer prinzipiellen Neustrukturierung des Verhältnisses von fachspezifischen Kursen und Lehrgängen einerseits und fächerübergreifenden Problemstellungen andererseits ... erhält von jenen vorher skizzierten Einsichten ein ganz neues Gewicht".*[477]

---

474 Vester, F., Leitmotiv vernetztes Denken, München 1993, S. 121

475 Vester, F., Leitmotiv vernetztes Denken, München 1993, S. 121

476 Klafki, W., Zukunft der Gesellschaft – Zukunft der Bildung, in: Achs, O. u.a., Lernen für die Zukunft, Wien und München 1990, S. 122

477 Klafki, W., Zukunft der Gesellschaft – Zukunft der Bildung, in: Achs, O. u.a., Lernen für die Zukunft, Wien und München 1990, S. 122

Wie umgekehrt sie auch „unsere bisherigen Versäumnisse, vernetzend zu denken und unser Handeln dementsprechend zu orientieren“ in ein umso deutlicheres Licht rückt.[478] M. Montessori hat diesen Sachverhalt auf die prägnante Formel gebracht:

> *„Einzelheiten lehren bedeutet Verwirrung stiften. Die Beziehungen unter den Dingen herstellen bedeutet Erkenntnisse vermitteln.“*[479]

Die folgenden Beispiele aus dem Fach Mathematik sollen zeigen, wie eine Vernetzung fachspezifischer Teilbereiche innerhalb der Mathematik, aber auch mit anderen Fächern, möglich ist. Sie sollen aber auch zeigen, wie Handeln und „sinnliche Vernunft“ als zentrale Elemente des Lernprozesses den Mathematikunterricht gestalten und durchdringen können. Leitender Gesichtspunkt aber bleibt die Bildung des Schülers. Zentrales Anliegen der Bildung ist der Selbstbezug des Menschen, also die Fähigkeit, die Welt-Inhalte zu sich in Beziehung zu bringen. Dass dies nur ganzheitlich, d.h. nicht durch Ausschließung, sondern durch Einbeziehung aller Teile zu einem Ganzen und nur unter Entfaltung aller menschlichen Kräfte, also auch der Sinne und der Hand, geschehen kann, macht den Unterricht erst zu einem bildenden Unterricht.

Zu allen drei Aspekten, nämlich Lernen mit allen Sinnen, Sensomotorik und vernetztes Denken sollen im folgenden Unterrichtsbeispiel dargestellt werden.

5.5.1 Lernen mit „Kopf, Herz und Hand“

Beim ersten Beispiel geht es um das Thema „Fibonacci-Zahlen“, die in der Natur eine große Rolle zu spielen scheinen und auf dem Weg des entdeckenden Lernens unter Einbeziehung vieler Sinne erarbeitet werden können. Das zweite Beispiel stellt das Experiment vor, das auf praktisch handelnde Art und Weise Unterrichtsinhalte vermitteln soll.

Fibonacci-Zahlen

> *„Mathematik ist das Alphabet, mit dessen Hilfe Gott das Universum beschrieben hat.“*
>
> Galileo Galilei

Die Natur, die uns umgibt, steckt voller mathematischer Phänomene, regelmäßiger und unregelmäßiger Art. Einerseits braucht das Universum eine enorme Flexibilität und Anpassungsfähigkeit für seine komplexe Entwicklung, andererseits scheint diese Entwicklung strengen mathematischen Gesetzen zu folgen. Es gibt eine Mischung aus Einheit und Vielfalt, aus Mustern und Nicht-Mustern, die die spannende Frage aufwirft, welche Mechanismen dieser Mischung zugrunde liegen. Die Mathematik ver-

[478] Ebenda, S. 122

[479] Montessori, M., Kosmische Erziehung, Freiburg 1988, S. 126

sucht, diese Frage zu beantworten und Konzepte zu finden, die hinter den Phänomenen stecken.[480]

> *„Denn der Mensch sieht sich bald als Natur, wenn er nur erst Natur überhaupt kennt. Es ist aber niemand aufgelegt, in die strenge Gesetzmäßigkeit der Natur sich hineinzudenken, dem nicht die strenge Disziplin der Mathematik zugleich mit ihren Aufschlüssen zuteil ward.“*[481]

Leonardo von Pisa, auch Fibonacci (Sohn des Bonacci), war ein Mathematiker, der im Jahre 1202 in seinem Buch „Liber abaci“ ein Rätsel gestellt hat, dessen Lösung auf eine Zahlenfolge hinausläuft. Interessanterweise begegnet uns diese Zahlenfolge auf Schritt und Tritt in der Natur.

Das Rätsel lautet: Betrachtet wird eine Population von Kaninchen. Jedes Kaninchenpaar bekommt jeden Monat ein Paar Junge. Diese Jungen sind ab dem 2. Monat geschlechtsreif und bekommen wieder pro Monat ein Paar Junge. Wie viele Kaninchenpaare gibt es nach n Monaten?

Monat n	1	2	3	4	5 ...	n+2
Anzahl der vorhandenen Kaninchen f_n	1	1	2	3	5...	$f_{n+1} + f_n$

Die Anzahl der Kaninchenpaare in Abhängigkeit der Anzahl der Monate lautet also:

$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, wobei $n \geq 1$ und $n \in N$, $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$

f_n ist also die Anzahl der Kaninchenpaare, die im n-ten Monat leben.

Diese Folge von Zahlen 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,... wird Fibonacci-Folge genannt, die einzelnen Zahlen Fibonacci-Zahlen. Jede Zahl in der Folge ergibt sich aus der Summe der beiden vorherigen Zahlen.

Im Folgenden werden einige Beispiele für das Auftreten der Fibonacci-Zahlen in der Natur genannt:

Wachstumsspiralen nennt man das Auftreten von spiralförmigen Linien, die sich auf vielen Pflanzen finden (siehe Abbildung 5.7). Dabei verlaufen pro Gebilde zwei Wachstumsspiralen, eine im Uhrzeigersinn, die andere gegen den Uhrzeigersinn. Auffällig sind derartige Verläufe bei Kiefernzapfen, auf der Ananas, beim Samenstand der Sonnenblume und bei vielen weiteren Pflanzen. Zählt man die Anzahl dieser Wachstumsspiralen beider Richtungen, so ergeben sich zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen.

---

[480] vgl. Stewart, I., Das Rätsel der Schneeflocke – Die Mathematik der Natur, Heidelberg 2002

[481] Herbart, J. F., in: Pädagogische Grundschriften hrsg. von Walter Asmus, Band 1, Düsseldorf und München 1964, S. 120

Aber auch die Anzahl von Blütenblättern scheinen dem Gesetz der Fibonacci-Folgen zu gehorchen: Lilien haben beispielsweise 3 Blütenblätter, Butterblumen 5, Rittersporne 8, Ringelblumen 13, Astern 21, Gänseblümchen und Sonnenblumen normalerweise 34, 55 oder 89, einige große Sonnenblumenarten sogar 144.[482]

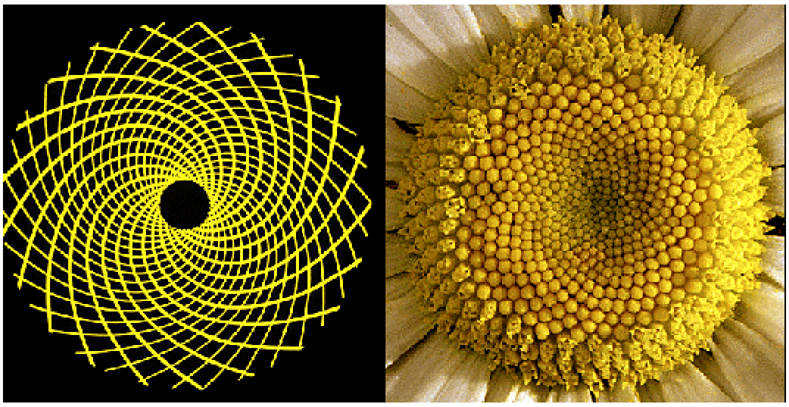


Abbildung 5.7: Sonnenblume[483]

Dieses Unterrichtsthema würde sich als Einstieg in den Mathematikunterricht am Gymnasium eignen. Die Schüler brauchen ausschließlich die natürlichen Zahlen als Voraussetzung zu kennen. Zunächst können verschiedenste, von Schülern gesammelte und vom Lehrer ergänzte Blüten, Früchte und Pflanzen z.B. in Gruppenarbeit untersucht werden. Zuerst muss eine Bestandsaufnahme durchgeführt werden, bei der die Schüler die Unterschiede der Pflanzen erkennen, anschließend eine Klassifizierung vornehmen und die Ergebnisse in Beziehung zueinander setzen können. Möglicherweise werden erste Vermutungen geäußert, die zu weiteren Nachforschungen führen, um schließlich die These zu begründen, dass nur bestimmte Zahlen auftauchen.

Die Natur bietet den Rahmen, der es ermöglicht, viele Sinne beim Forschen mit den Pflanzen anzusprechen. Augen, Nase und Hände nehmen Form, Farbe und Geruch der Pflanzen auf und regen die Schüler an, Gesetzmäßigkeiten zu suchen. Liegt ein Zusammenhang zwischen Farbe, Form, Geruch und Anzahl der Blätter vor?

Bei dieser Tätigkeit werden bereits fundamentale mathematische Denk- und Vorgehensweisen angewendet und geschult. Es muss verglichen, geordnet, kategorisiert und systematisiert werden. Der inhaltliche mathematische Hintergrund, dass all die vorkommenden Zahlen die Fibonacci-Folge bilden, kann entweder von den Schülern

[482] vgl. Stewart, I., Das Rätsel der Schneeflocke – Die Mathematik der Natur, Heidelberg 2002

Die Idee der Anordnung der Spiralen findet sich nicht nur in der Natur, sondern auch in der Architektur wieder. So ist das Treppenhaus im Schloss Chambord, das angeblich von Leonardo da Vinci entworfen wurde, mit einem doppelten Umlauf gebaut, so dass Auf- und Abgang voneinander getrennt sind. Auch moderne Parkhäuser machen von dieser Idee Gebrauch und bauen die Auf- und die Abfahrt so, dass sich die Auffahrenden bzw. Abfahrenden nicht in die Quere kommen können (vgl. Gallin,P., Ruf, U., Sprache und Mathematik in der Schule, Zürich 1993³)

[483] http://www.entwurfsforschung.de/Strukturfor/bilder/Sonnenblume.gif (2005)

selbsttätig erarbeitet werden, in dem z. B. das Kaninchenrätsel gelöst wird, oder vom Lehrer erläutert werden.

Wie zu Beginn des Kapitels 5.2 bereits erwähnt, bieten die Fibonacci-Folgen zahlreiche Anknüpfungsmöglichkeiten für weitere mathematische Themen. Aber auch fachübergreifend bildet diese Zahlenfolge die Grundlage für interessante Themen beispielsweise in der Kunst und Architektur im Zusammenhang mit dem goldenen Schnitt, in der Biologie und in der Literatur. Entscheidend ist, dass die Schüler immer wieder möglichst ganzheitlich erfahren können, dass Mathematik etwas mit der sie umgebenden Welt zu tun hat und dazu beitragen kann, sich darin zu orientieren und sie verständlicher zu machen.

Experiment als geeignetes Mittel für Ganzheitlichkeit

Der Begriff „Experiment“ macht bereits deutlich, dass es nicht nur darum geht, bestimmte Inhalte zu vermitteln, sondern den Schüler mit Kopf, Herz und Hand arbeiten und mathematische Zusammenhänge entdecken zu lassen.

Das mathematische Thema, das in den Experimenten erfahrbar gemacht werden soll, lautet „Proportionen“ [484].

Mischen und Abgleichen von Farbtönen

Die Idee dieses Experiments besteht darin, in Anlehnung an die internationale Standard-Farbtabellen eigene Farbtabellen mit dem Ziel zu erstellen, genau diese Farben immer wieder erzeugen zu können. Mit Hilfe von Farbpulver der drei Grundfarben Rot, Blau und Gelb, einem Löffel und Wasser können die verschiedensten Farben hergestellt werden. Wichtig ist, dass die genauen Anteile der jeweils verwendeten Farbtöne dokumentiert werden. In der Farbtabelle könnten die Mischungsverhältnisse so dargestellt werden, dass unter die gemischten Farbflächen die beteiligten Grundfarben als Farbpunkte oder Farbkästchen gemalt werden, z. B. 2 Kästchen Rot, 1 Kästchen Blau, 3 Kästchen Gelb, was dem Mischungsverhältnis 2 : 1 : 3 entspräche.

Das Experiment könnte um die kombinatorische Fragestellung erweitert werden, wie viele mögliche Farbtöne es bei vorgegebener Löffelanzahl verschiedener Farben gibt.

Musik mit Wasser und Luft

Zur Veranschaulichung von Verhältnissen kann mit einfachen Mitteln eine Flaschenorgel gebaut werden. Bei dem Experiment geht man davon aus, dass in jeder Tonart das Frequenzverhältnis der Töne für ein bestimmtes Intervall gleich ist. So werden mehrere gleich große Flaschen beliebigen Volumens, jedoch zumindest in

[484] vgl. Vordermann, C., Spannendes aus der Welt der Mathematik, München 2000

einem Flaschenteil mit zylindrischer Form, mit Wasser gefüllt. Die erste Flasche wird z. B. zu 1/5, die zweite zu 2/5 usw. bis zu 5/5 gefüllt, die Teilstriche können mit dem Lineal ermittelt werden. Töne werden erzeugt, indem man auf die Flaschen mit einem Schlegel anschlägt oder über die Flaschenöffnungen hinweg bläst.

Wasser gefrieren lassen

Bekanntermaßen dehnt sich Wasser aus, wenn es kälter als + 4° C wird. Das ist auch der Grund dafür, dass Eisbrocken auf dem Wasser schwimmen. In welchem Verhältnis Wasser sich ausdehnt, ist die Fragestellung für dieses Experiment. In einer Plastikflasche, die mit einer mm-Skala versehen ist, wird gefärbtes Wasser zum Gefrieren gebracht. Der Ausgangspegelstand könnte bei 10 cm liegen. Die Frage lautet: Wie hoch ist die relative Änderung des Volumens?

Experimente im Mathematikunterricht ermöglichen große methodische Freiheit, da sie als Gruppenarbeiten, als Einzel- oder Partnerarbeiten oder auch als Klassenprojekt durchgeführt werden können. Selbstverständlich sollen die Schüler ermuntert werden, die Fragestellungen zu variieren, eigene Fragen zu stellen und durch Experimente zu beantworten.

5.5.2 Fächerübergreifendes Lernen

Analyse, d.h. das Zerlegen in die Einzelheiten und Synthese, d.h. die Verbindung von Einzelteilen zu einem Ganzen sind die beiden Verfahren, die beim Material M. Montessoris angewendet werden, z. B. wird der Rosa Turm zerlegt in die einzelnen zehn Würfel und anschließend wieder aufgebaut. Dies sind auch die Möglichkeiten im Mathematikunterricht, einerseits im Sinne einer Analyse die Bestandteile des mathematischen Fundaments, die Details kennenzulernen und andererseits durch Synthese einen Gesamtzusammenhang des Faches zu erhalten. Durch die Synthese soll gewissermaßen ein ganzheitlicher Überblick über das Fach Mathematik erzielt werden, der die Mathematik nicht mehr nur als Aneinanderreihung algebraischer oder geometrischer Inhalte sieht, sondern als eine diese Inhalte transformierende und transzendierende Synthese. Damit kann Mathematik als eine Einheit aufgefasst werden, die nicht mehr in Einzelposten zerfällt. So wie dieses Vorgehen der Analyse und Synthese für jedes einzelne innermathematische Fach möglich ist, so kann auch das Fach Mathematik als Detail und der ganze Fächerkanon als das Ganze aufgefasst werden. Dieser gesamte Vorgang wird von F. Vester als vernetztes Denken bezeichnet.

Im Folgenden sollen Unterrichtsbeispiele sowohl für die Verknüpfung innermathematischer Disziplinen als auch für Verbindungen zwischen Mathematik und nichtmathematischen Disziplinen dargestellt werden.

> *„Je tiefer man sich in ein Fach versenkt, desto notwendiger lösen sich die Wände des Faches von selber auf, und man erreicht die kommunizierende, die hu-*

manisierende Tiefe, in welcher wir als ganze Menschen wurzeln, und so berührt, erschüttert, verwandelt und also gebildet werden.“[485]

5.5.2.1 Verknüpfung innermathematischer Disziplinen

Analysis, Algebra, Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung sind üblicherweise die Disziplinen, die im Mathematikunterricht eine Rolle spielen. Sind sie in der Grundschule und am Beginn des Gymnasiums noch zu einem Fach Mathematik zusammengefasst, so beginnt i. d. R. ab der 7. Klasse des Gymnasiums – gemäß der universitären Mathematik – eine Aufspaltung in die Fächer Geometrie und Algebra mit getrennten Stunden im Stundenplan und getrennten Schulbüchern. In der Oberstufe wird dann die Wahrscheinlichkeitsrechnung als weiteres Fach hinzugenommen. Mit dieser „räumlichen“ Trennung der beiden Disziplinen wird es auch schwieriger, inhaltliche Verbindungen herzustellen oder zu entdecken, da auch in den Schülerköpfen die Gefahr einer Separierung der beiden Fächer besteht. Häufig könnten aber erkannte Verbindungen zwischen den beiden Disziplinen stark zum Verständnis des jeweiligen Themas beitragen. Z. B. wäre es sinnvoll, die Quadratzahlen dann lernen zu lassen, wenn auch der Flächeninhalt von Quadraten besprochen wird, die Quadratzahlen immer wieder auftauchen und auch das Wort Quadratzahl einleuchtet.

Der Trinomische Würfel

Der „Trinomische Würfel“ ist ein Beispiel für ein Unterrichtsmaterial, das Arithmetik und Geometrie verbindet, aber auch dem Bereich der Entwicklung der senomotorischen Intelligenz zuzuordnen ist.

J. Piaget hat dazu eine interessante Beobachtung gemacht:

„Wenn man z. B. das Behalten einer bestimmten Anordnung von Würfeln bei verschiedenen Gruppen von Kindern vergleicht, bei denen diese Anordnung:
a. einfach betrachtet oder wahrgenommen,
b. vom Kind selbst nachgebaut oder
c. von einem Erwachsenen unter den Augen des Kindes aufgebaut wurde,
stellt man das weitaus beste Erinnerungsvermögen für den Fall b fest”.[486]

[485] Wagenschein, M., Zur Klärung des Unterrichtsprinzips des exemplarischen Lernens, in : Gerner, B. (Hrsg.), Das exemplarische Prinzip, Darmstadt 1972, zitiert nach Warzel, A., Grundaktivitäten als Brücke von allgemeinen Lernzielen des Mathematikunterrichts zu Fachinhalten, in: mathematik lehren / Heft 56, S. 58 - 66

[486] Piaget, J., Theorien und Methoden der modernen Erziehung, Frankfurt/M. 1994, S. 36

Abbildung 5.8: Trinomischer Würfel[487]

Der Trinomische Würfel ist – wie in Abbildung 5.8 zu sehen – in einem würfelförmigen Holzkasten aufbewahrt, der zwei aufklappbare Seitenwände hat. Der Trinomische Würfel besteht aus drei kleineren Würfeln und 24 Quadern. Der Deckel gibt eine Orientierungshilfe zum Aufbau des Würfels.

<u>Die Maße der einzelnen Würfel und Quader</u>:

Größter Würfel: Seitenlänge a (Farbe Rot)

Mittelgroßer Würfel: Seitenlänge b (Farbe Blau)

Kleinster Würfel: Seitenlänge c (Farbe Gelb)

Quadertyp 1: Seitenlängen a, a, b (3 mal vorhanden), Volumen a^2b

Quadertyp 2: Seitenlängen a, b, b (3 mal vorhanden), Volumen ab^2

Quadertyp 3: Seitenlängen a, b, c (6 mal vorhanden), Volumen abc

Quadertyp 4: Seitenlängen a, c, c (3 mal vorhanden), Volumen ac^2

Quadertyp 5: Seitenlängen b, c, c (3 mal vorhanden), Volumen bc^2

Quadertyp 6: Seitenlängen b, b, c (3 mal vorhanden), Volumen b^2c

Bei den Quadern sind alle quadratischen Flächen farbig gehalten und zwar Quadrate mit der Seitenlänge a in Rot, mit der Seitenlänge b in Blau, mit der Seitenlänge c in Gelb. Alle nichtquadratischen Flächen sind schwarz.

---

[487] http://www.montessori-shop.de/bilder/b__1103563127.jpg (2005)

Zusammengenommen bilden alle Teile einen Kubus mit der Seitenlänge a + b + c und für das Volumen dieses Kubus gilt:

$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3\ a^2b + 3\ ab^2 + 3\ ac^2 + 3\ bc^2 + 3\ b^2c + 6abc$

Damit wird die Verbindung von Algebra und Geometrie bereits sehr deutlich. Der algebraische Term $(a + b + c)^3$ stellt den rechnerischen Ausdruck zur Berechnung des Volumens eines Würfels mit der Seitenlänge a + b + c dar. Die einzelnen Termglieder können ebenfalls als rechnerisches Äquivalent zu dem Volumen kleinerer Würfel und Quader aufgefasst werden, deren Seitenlängen a, b, c oder Kombinationen daraus sind. Durch die Farbgebung wird auch klar, woraus sich die einzelnen Termglieder zusammensetzen. Dem Schüler wird auf diese Weise einfach vor Augen gehalten: Ein quadratischer Ausdruck bildet eine Fläche, ein kubischer Ausdruck bildet einen Würfel. Werden drei Summenglieder mit der Potenz drei potenziert, so müssen 3^3 = 27 Termglieder entstehen. Denn die räumliche Darstellung verlangt 27 Teile, um den Würfel zu füllen.

Der Einsatz im Unterricht und die Demonstration durch die Lehrkraft oder Erzieherin kann so geschehen: Zunächst werden die Ebenen des Würfels nacheinander abgebaut und die einzelnen geometrischen Körper werden nach Farbe und Art geordnet aufgestellt. Der Wiederaufbau des Kubus beginnt mit dem größten, dem roten Würfel, der in der Ecke mit den geschlossenen Seiten des Holzkastens gestellt wird. Anschließend werden die beiden größeren Quader, die rote quadratische Seiten haben, direkt an den roten Würfel herangerückt. Die beiden kleineren Quader, die ebenfalls rote quadratische Seiten haben, werden an die größeren (Rot an Rot) angelegt. In die Mitte der Grundfläche wird nun der größere der blauschwarzen Quader mit der blauen Fläche nach oben gelegt. An die beiden schwarzen Flächen dieses Quaders werden zwei reinschwarze Quader angelegt. Als letzter Stein dieser ersten Ebene wird ein großer gelbschwarzer Quader gelegt. Diese ausgefüllte Ebene zeigt das gleiche Farbmuster, das auch auf dem Kastendeckel zu sehen ist.[488] Die beiden weiteren Ebenen werden analog aufgebaut.

Der Würfelkasten dient gleichzeitig als Fehlerkontrolle: Kann der Kastendeckel problemlos geschlossen werden, hat der Schüler richtig gearbeitet.

[488] vgl. Lippert, H., Müller, A., Montessori-Handbuch, Marktbreit 1995

Das Computer-Programm GeoGebra

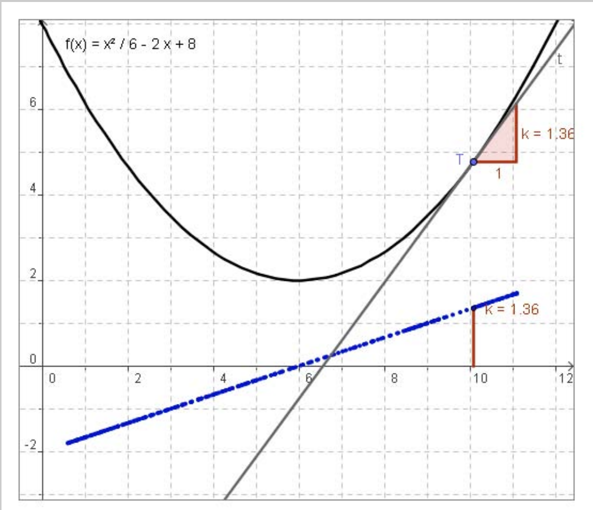
Ein weiteres Beispiel zur Verbindung innermathematischer Disziplinen ganz anderer Art stellt die Software GeoGebra dar, die Geometrie, Algebra und Analysis verbindet. Die Bildschirmoberfläche ist mit zwei Fenstern so gestaltet, dass in dem einen der geometrische Sachverhalt, im zweiten Fenster das algebraische Pendant erscheint.

Die Schüler können zum einen geometrische Konstruktionen bestehend aus Punkten, Vektoren, Geraden und Kegelschnitten mit Hilfe der Maus kreieren und durch „Herumwandernlassen“ dynamisch verändern. Zum andern können auch Koordinaten und algebraische Gleichungen eingegeben werden, die dann in geometrische Gebilde verwandelt werden. Außerdem enthält das Programm zahlreiche Rechenfunktionen, wie Integralbildung, Nullstellenberechnung oder Bestimmung von Extrema.[489]

Dynamisches Arbeitsblatt zur Differentialrechnung:

Steigung und Ableitung einer Funktion

Im Folgenden siehst du die Funktion $f(x) = x^2/6 - 2x + 8$ und ihre Tangente t zusammen mit dem Steigungsdreieck. Die Steigung k der Tangente ist außerdem nochmals von der x-Achse aus abgetragen.



1. Ziehe den Punkt T mit der Maus. Dabei wird die Spur der Steigung gezeichnet und es entsteht der Graph der Steigungsfunktion. Welche Art von Funktion ist diese Steigungsfunktion?
2. Berechne die erste Ableitung der Funktion f in deinem Heft.
3. Doppelklicke auf die Zeichnung, gib die Gleichung der ersten Ableitung in die Eingabezeile ein und drücke die Enter-Taste. Wähle den "Bewegen Modus" und ziehe nochmals den Punkt T mit der Maus. Was fällt dir auf?

Abbildung 5.9 Arbeitsblatt

[489] Hohenwarter, M., GeoGebra oder Was Formeln mit Zeichnungen zu tun haben – Neue Mathematik Software für SchülerInnen, in: NEON 02/2003, S. 43 und www.GoeGebra.com

Die blau dargestellte Gerade ist erst entstanden, als der Punkt T mit der Maus entlang des Funktionsgraphen der Funktion $f(x) = x^2/6 - 2x + 8$ geführt wurde.

Öffnet man das Algebrafenster, so ist der folgende Bildschirm zu sehen:

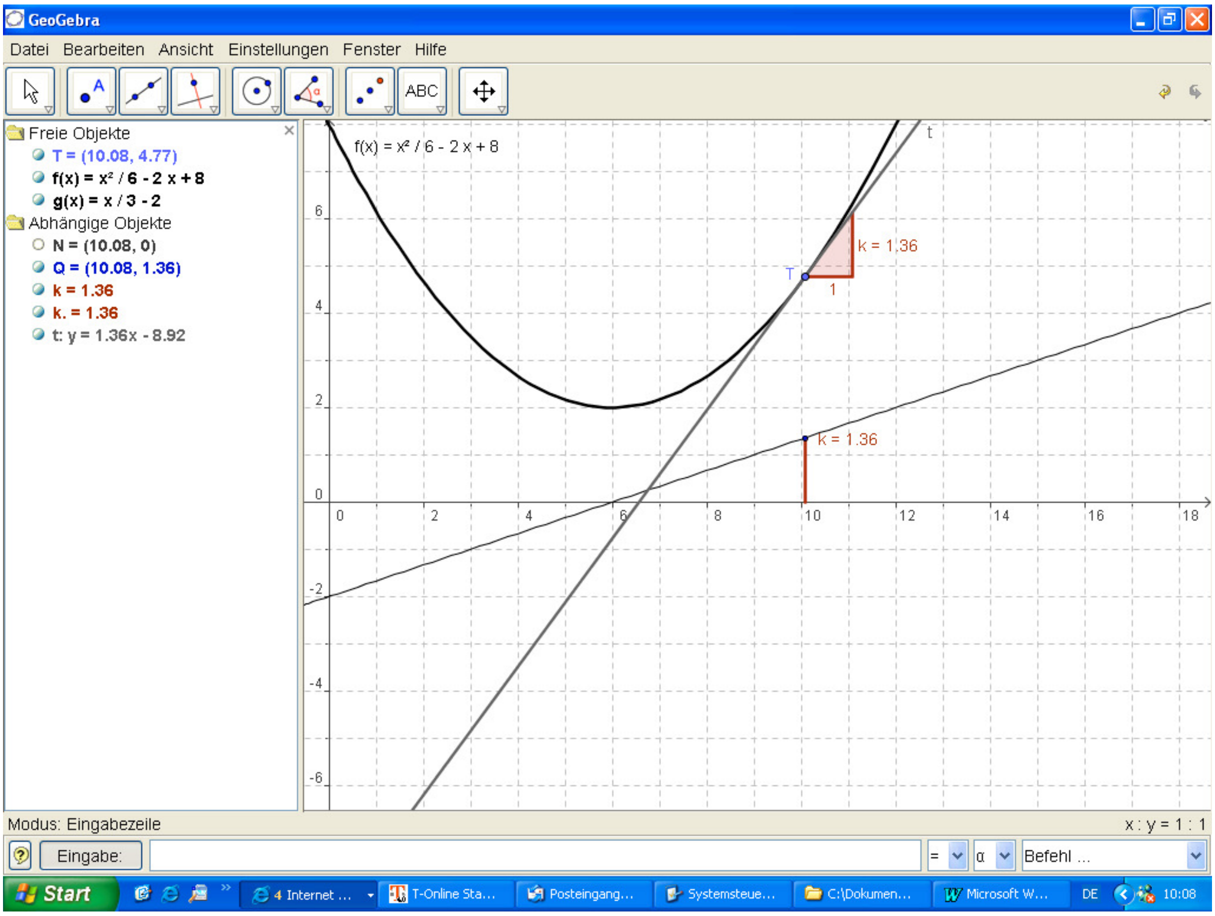


Abbildung 5.10: Ansicht von Algebra- und Geometriefenster

Werden in einem Fenster Änderungen vorgenommen, z. B. hier der Punkt T verschoben, wird diese Veränderung sofort im anderen Fenster angezeigt.

Wenngleich die vorgegebenen Arbeitsblätter eine enge Führung vorgeben, ist es trotzdem möglich, die Schüler auch frei experimentieren und entdecken zu lassen. Durch die benutzerfreundliche Oberfläche, bei der Koordinaten und Terme in der üblichen Schulnotation eingegeben werden können, ist es den Schülern leicht möglich auszuprobieren. Beispielsweise könnten durch Eingabe einer Kreisgleichung und einer Geradengleichung mögliche Schnittpunkte ausgerechnet und die Gebilde graphisch dargestellt werden. Die Gerade kann aber anschließend so verschoben werden, dass sie wahlweise zur Passante, Tangente oder Sekante wird. Und immer wieder werden die neuen Koordinaten der evtl. Schnittpunkte sofort mit angegeben. Nun könnte es so weitergehen, dass der Schüler die algebraische Gleichung durch Eingabe eines anderen Steigungsfaktors verändert und postwendend die Reaktion im Geometriefenster sehen kann.[490]

Im Internet sind mit Hilfe von Geogebra bereits viele Arbeitseinheiten zu den verschiedensten mathematischen Themengebieten in allen Jahrgangsstufen abrufbar, die jederzeit auf die eigenen Bedürfnisse angepasst werden können. Voraussetzung für einen gewinnbringenden Einsatz dieser Software im Unterricht ist selbstverständlich ein Computerraum mit ausreichend vielen und funktionierenden Rechnern.

5.5.2.2 Verbindungen von Mathematik mit anderen Fächern

In der Literatur gibt es bereits viele überzeugende Beispiele zum fächerverbindenden bzw. fächerübergreifenden Unterricht, die häufig als Projektunterricht konzipiert sind. Das Internet beispielsweise stellt einen riesigen Fundus an fächerverbindenden und fächerübergreifenden Unterrichtsbeispielen bereit.[491]

Die inhaltliche Herangehensweise geschieht auf zwei Weisen:

Im einen Fall steht ein Thema im Zentrum, das von einem einzelnen Fach nicht hinreichend bearbeitet werden kann, z. B. Energie, Wasser, Versicherung. Das Thema wird dann von den verschiedenen Seiten in den entsprechenden Fächern beleuchtet und bearbeitet. Wünschenswert ist, wenn die Fachlehrer der beteiligten Unterrichtsfächer das Projekt in Kooperation durchführen.

Im anderen Fall steht das Fach Mathematik mit einem fachspezifischen Thema im Mittelpunkt. Die mathematischen Erkenntnisse sollen auf andere Disziplinen übertragen und angewendet werden. Auf diese Weise werden Zusammenhänge zwischen der Mathematik und anderen Fächern, vornehmlich der Physik, Wirtschaft, Biologie und Chemie gezeigt.

Im Folgenden werden zwei fächerübergreifende Unterrichtsbeispiele geschildert: Das erste hat Pyramiden zum Thema, ist als Lernzirkel konzipiert und verbindet zunächst die beiden Fächer Mathematik und Kunst bzw. Kunstgeschichte, kann aber durch weitere Fächer ergänzt werden. Dieser Lernzirkel wurde mehrfach im Unterricht eingesetzt und ist mittlerweile in verschiedenen weiterentwickelten Versionen vorhanden.

Das zweite Unterrichtsbeispiel verbindet ebenfalls die Mathematik mit anderen Fächern. Das verbindende Element der beteiligten Fächer ist in diesem Fall nicht ein Thema, sondern die Zeit, d.h. der geschichtliche Aspekt des jeweiligen Inhaltes. Es

[490] Ebenda, S. 43

[491] Genauere Literaturangaben von Henn, H. W., Mathematik und „der Rest der Welt“ – Fachübergreifende Aktivitäten in Deutschland, in: ZDM 98/4, S. 119 – 124

handelt sich um ein Unterrichtsmaterial[492] für die materialgeleitete Freiarbeit und ist bereits in Teilen an mehreren Schulen mit Erfolg erprobt worden.

Material zur Pyramide[493]

Bei dem Material zum Thema „Pyramide" handelt es sich um einen Lernzirkel, der – aufgeteilt in 10 Lernstationen – verschiedene Teilaspekte des Themas aufgreift und für die Selbsterarbeitung durch den Schüler didaktisch aufbereitet darstellt. Jede Station beinhaltet schriftliche Ausarbeitungen, aus denen der Schüler Lernimpulse für den Einsatz der Körpermodelle und für die Bearbeitung der Aufgaben erhält. Es handelt sich also nicht um ein im klassischen Sinn „didaktisches Material", das dem Lehrer als Darbietungshilfe für seinen Fachunterricht dient, sondern um ein „Erarbeitungs- und Erkenntnismaterial", das dem Schüler zur selbstständigen Wissensaneignung verhilft.

An einer Station können die Schüler aus sog. Klickies, das sind verschiedene geometrische Figuren, die variantenreich zusammengesteckt werden können, Modelle von Pyramiden und anderern Körpern bauen. Dabei können sie experimentell erfahren, was geometrisch möglich ist und was nicht. Sie können z. B. feststellen, dass man aus Sechsecken keinen Körper bauen kann und werden motiviert, für diese praktische Feststellung die theoretische Begründung zu finden. An einer anderen Station sollen die Schüler praktisch ausprobieren, welche Netze einer Pyramide zugrunde liegen und welche Voraussetzungen dabei gelten müssen. Auch sind bereits fertige Modelle in den Lernzirkel integriert, die der Veranschaulichung von Eigenschaften der Pyramide dienen und den Schülern helfen können, diese Besonderheiten zu erkennen und zu verstehen.

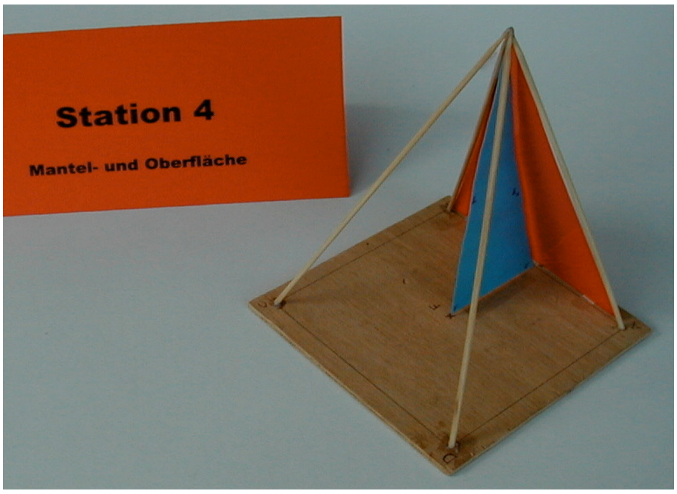


Abbildung 5.11: Pyramidenmodell zur Berechnung von Mantel- und Oberfläche

---

492 Erstellt von J. Möhringer unter Mitwirkung von M. Nather und R. Fuchs. Vertrieb der CD-Rom im Selbstvertrieb.

493 Erstellt von J. Möhringer, veröffentlicht in: Akademie für Lehrerfortbildung und Personalführung (Hrsg.): Freies Arbeiten am Gymnasium – Materialien mit Anregungen für die Durchführung im Fach Mathematik mit CD-Rom, Dillingen 3. völlig neu bearbeitete Auflage 2003

Der Lernzirkel ist so aufgebaut, dass mit vier verschiedenen Stationen begonnen werden kann, nämlich mit Station 1, 2, 5 und 7. Somit ist gewährleistet, dass mehrere Schüler gleichzeitig mit der Bearbeitung des Lernzirkels beginnen können. Für alle anderen Stationen ist Station 1 Voraussetzung, für Station 9 zusätzlich Station 8. Station 10 ist als abschließende Übungsphase geplant.

<u>Stationen mit Kurzbeschreibung des Inhalts</u> (Weitere Abbildungen im Anhang)

Station 1 Grundlagen – Begriffe	Mit Hilfe von zwei Modellen soll die Definition der Pyramide veranschaulicht werden. Außerdem werden die Begriffe für die verschiedenen Bestimmungsgrößen vermittelt.
Station 2 Regelmäßige Pyramiden	Kennenlernen der Sonderform der regelmäßigen Pyramide und als weiterer Spezialfall das Tetraeder. Diese sollen nachgebaut und auch gezeichnet werden.
Station 3 Berechnung der Höhe	Die Höhe einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche soll aus der Länge der Seitenkante und einer Grundkante berechnet werden.
Station 4 Mantel- und Oberfläche	Aus der Höhe einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche und der Länge der Seitenkante soll die Oberfläche der Pyramide berechnet werden.
Station 5 Winkel im Raum	Der Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene und der Winkel zwischen zwei Ebenen soll am Beispiel der Pyramide veranschaulicht werden.
Station 6 Pyramidennetze	Die Bedingungen an ein Pyramidennetz und die Konstruktion von Netzen sollen erlernt werden.
Station 7 Platonische Körper	Kennenlernen der Bauweise, Eigenschaften und Namen der fünf Platonischen Körper.
Station 8 Das Prinzip von Cavalieri	Mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips soll die Erkenntnis gewonnen werden, dass Pyramiden mit gleicher Grundfläche und Höhe dasselbe Volumen haben.
Station 9 Das Volumen der Pyramide	Anhand eines Modells soll die Berechnung des Volumens von Pyramiden erarbeitet und angewendet werden.

Station 10 Aufgabenkartei	Eine Aufgabe über ein pyramidenförmiges Hotel wiederholt viele Aufgabenstellungen der Stationen 1-9; zusätzlich zum Üben eine beliebig erweiterungsfähige Aufgabenkartei.

Tabelle 5.1: Stationen des Lernzirkels Pyramide

Das Kriterium der Ganzheitlichkeit wird bei dem Lernzirkel in der Weise umzusetzen versucht, dass möglichst viele Sinne angesprochen werden, dass konstruiert und gebaut werden kann und damit Be-greifen möglich wird. Ferner bieten sich Brücken zu anderen Fächern an, sei es zur Geschichte, Kunst oder Architektur mit der Behandlung der antiken Pyramiden, z. B. in Ägypten.

Fächerübergreifende Geschichtstafel

Das vorliegende Material besteht aus fünf Wandplatten, einer Themenspalte und drei Boxen zur Aufbewahrung von Texttafeln. Am oberen Rand der Wandplatten sind fünf Geschichtsepochen zwischen 400 und 1700 n.Chr., vom frühen Mittelalter bis zur frühen Neuzeit eingetragen (Zeitleiste). Auf der linken Seite sind acht Themenbereiche aufgelistet: Politik, Wirtschaft/Gesellschaft, Religion, Literatur, Kunst, Musik, Wissenschaft/Technik, Entdeckungen und Mathematik (Themenspalte).

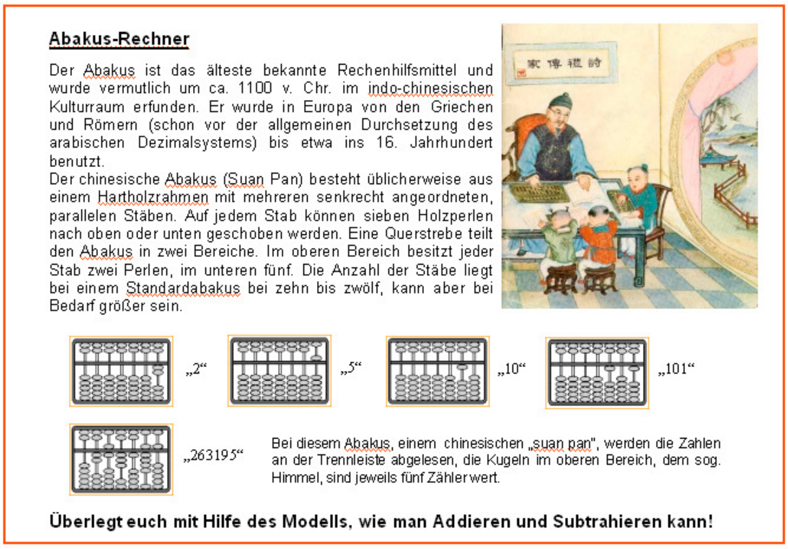


Abbildung 5.12: Beispiel für eine Themenkarte aus der Mathematik

Auf 135 Karteikarten ist in Text und Bild der Lernstoff festgehalten. Er ist nach den genannten zeitlichen Epochen und Themen gegliedert und nach dem Grad der Bedeutsamkeit unterteilt. Dabei symbolisieren die Farben Blau, Rot und Grün die jeweiligen Bedeutungsgrade. Lerninhalte, die z. B. blau umrandet sind, sollen als grundlegender Wissensbestand von jedem Schüler gewusst werden, weil sie für die jeweilige Epoche von zentraler Bedeutung sind. Texte mit roter bzw. grüner Umrandung liefern zusätzliche Informationen und tragen zu einer differenzierteren Sicht der historischen Epoche bei. Zur besseren Übersicht und leichteren Handhabung für Lehrer und Schüler werden die Karteikarten der jeweils gleichen Farbe (40 an der Zahl) in einem gesonderten Behälter aufbewahrt. Als Kontrolle für die zeitlich und thematisch richtige Zuordnung der Karteikarten dienen Signaturen, die auf der Rückseite der Karten verzeichnet sind. Die Texttafeln haften selbstklebend an der Pinnwand und können beliebig oft ausgetauscht werden.

Eine Schemazeichnung des Unterrichtsmaterials ist im Anhang abgebildet. Ebenso sind dort mehrere Themenkarten in Originalgröße eingefügt.

Das Material ist so konzipiert, dass sich die Schüler den Wissensstoff selbstständig aneignen können. Für die richtige Zuordnung der historischen Daten innerhalb der Matrix müssen die Texte mehrmals gelesen und miteinander verglichen werden. Dadurch lernen die Schüler den Stoff auf entdeckende Weise. Sie können den Vorgang beliebig oft wiederholen, die Wahl der Vorgehensweise selbst bestimmen, die Themen nach ihren eigenen Interessen auswählen und unabhängig vom Lehrer arbeiten.

Auch dieses Unterichtsmaterial ist ein „Erarbeitungs- und Erkenntnismaterial“, das dem Schüler zur selbstständigen Wissensaneignung verhilft. Ergänzungen und Vertiefungen des Lernstoffs können von den Schülern mit Hilfe von Nachschlagewerken oder über das Internet vorgenommen werden.

Es wurde großer Wert darauf gelegt, Lerninhalte in einem überschaubaren Zusammenhang und fächerübergreifend darzustellen. Die Schüler sollen erkennen, dass mathematische, politische, wirtschaftliche, gesellschaftliche, naturwissenschaftlich-technische, literatur-, religions-, musik- und kunstgeschichtliche Ereignisse Ausdruck des sozialen und kulturellen Lebens einer Gesellschaft sind und das Empfinden und Denken einer Epoche widerspiegeln. Sie sollen erfahren, dass der Gang der Geschichte auch eine Folge unvorhersehbarer Schicksalsschläge (z. B. Seuchen, Naturkatastrophen u.ä.), aber auch individueller Machtinteressen oder bahnbrechender Entdeckungen und Erfindungen ist.

Schülern soll deutlich werden, dass jede Epoche ihr eigenes „Gesicht“ hat, das erst in der Zusammenschau möglichst vieler „Gesichts“-Punkte zum Vorschein kommt. Lehrer aller Fächer werden unschwer weitere zahlreiche Gelegenheiten finden, an das vorgelegte Material anzuknüpfen oder es zeitlich zu erweitern.

Da die Lerninhalte in der Form zunehmender Spezifizierung angeboten werden, ist eine differenzierte Form der Wissensaneignung möglich. Die erste Stufe (blau umrandete Texte) verweist auf das Grund- oder Allgemeinwissen, über das jeder Schüler verfügen soll. Die nächste Stufe (rot umrandete Texte) bringt zusätzliche Detailkenntnisse. Dasselbe gilt für die dritte Stufe (grün umrandete Texte). Wissbegierige Schüler werden von sich aus nach umfassenderem Wissen streben und keinen „weißen Fleck" auf der Geschichtstafel dulden. Schwächere oder weniger interessierte Schüler mögen sich dagegen mit dem Grundwissen begnügen, ohne dass ihnen die Möglichkeit genommen ist, einen Überblick über das Ganze zu gewinnen (wenn z. B. alle Karteikarten vollständig an der Pinnwand angebracht sind). Dadurch erlaubt das Material, den Unterrichtsverlauf durch individualisiertes Lernen zu differenzieren.

Ästhetik wird hier im ursprünglichen Sinn als „sinnliche Wahrnehmung" verstanden. Es wurde versucht, das Material in der Weise zu gestalten, dass möglichst viele Sinne angesprochen und die Schüler zum tätigen Handeln animiert werden: Die Karteikarten müssen in die Hand genommen, gelesen, an die Pinnwand geheftet und wieder abgenommen werden. Bild- und Hörbeispiele sorgen für Anschaulichkeit und Abwechslung in der Aneignung der Wissensinhalte. Schwierigere Sachverhalte werden in einer verständlichen Sprache dargelegt. Möglichst kurz gefasste Texte verhindern vorzeitige Ermüdungserscheinungen. Auf eine ansprechende Gestaltung der Karteikarten wurde Wert gelegt. Das gesamte Material soll Aufforderungscharakter besitzen.

Indem der gesamte Lernstoff übersichtlich und schön geordnet vom Schüler angeschaut und zu einem gewissen Teil sogar als „sein" Werk betrachtet werden kann, gewinnt er eine Vorstellung über die zeitliche Einordnung geschichtlicher Ereignisse und kann sie umso leichter seinem Gedächtnis auch visuell einprägen.

Wie bereits erwähnt, handelt es sich bei dem Material um ein sog. „Erarbeitungs- bzw. Erkenntnismaterial", d.h. die Schüler können sich den Wissensstoff mit dessen Hilfe selbstständig aneignen. Dafür ist allerdings eine Fehlerkontrolle unerlässlich. Auf der Rückseite jeder Texttafel befindet sich eine Signatur, die die richtige Einordnung auf der Zeitleiste exakt bestimmen lässt.

Da die Geschichtstafel problemlos ab- und wieder neu aufgebaut werden kann, ist das Material zur Wiederholung und Vertiefung des Lernstoffs bestens geeignet. Ebenso ist es für Einzel-, Partner- und Gruppenarbeit einsetzbar.

Auch Mathematik in der Weise erfahren zu dürfen, stellt für den Schüler eine Möglichkeit dar, Zusammenhänge als Ganzes wahrnehmen zu können.

5.6 Verständnisorientierter Aspekt

"Ich weiß nicht, was mit den Leuten ist: sie lernen nicht durch Verstehen; sie lernen irgendwie anders – durch Auswendiglernen oder so. Ihr Wissen ist so leicht zu erschüttern!"

Richard Feynman, Nobelpreisträger für Physik

5.6.1 Der Begriff Verstehen

Mathematik scheint die Schülerschaft in zwei Hälften zu teilen: Die, die Mathematik lieben, und die, die sie hassen. Die erste Gruppe scheint die Phänomene und deren Erklärungen zu verstehen, für die zweite Gruppe sind sie wie Bücher mit sieben Siegeln.

Auch in anderen Zusammenhängen mit Mathematik kann eine dialektische Struktur festgestellt werden: Mathematik ist einerseits das reine Gedankengebäude und andererseits tief in der Welt verwurzelt und nur auf Entdeckung wartend. Mathematik ist eindeutig und klar, durch ihr Verborgensein in der Welt wirkt sie aber auch rätselhaft und geheimnisvoll. Mathematik ist also einerseits von der Realität losgelöst und doch eng mit ihr verbunden. Diese Feststellung wirft zwei Fragen auf:

Was bedeutet Verstehen in der Mathematik, dass solche Gegensätze und scheinbare Widersprüche formuliert werden können?[494] Und wie muss der Mathematikunterricht gestaltet werden, dass seine Inhalte verständlich werden?

Dass der zu lehrende Stoff auch vom Schüler verstanden werden soll, ist ein Grundaxiom jeglichen Lernprozesses, das keiner näheren Begründung bedarf. Schwieriger ist die Beantwortung der Frage, wann sich Lehrende und Lernende sicher sein können, dass das Gelehrte bzw. Gelernte tatsächlich verstanden ist. Prüfungen, so wird allgemein argumentiert, seien das geeignete Instrument der Kontrolle, um festzustellen, ob der Schüler „seinen Stoff“ tatsächlich beherrscht. Aber was beherrscht der Schüler wirklich, wenn er die Prüfung bestanden hat? Hat er verstanden, wovon er in der Prüfung Zeugnis gibt? Diese Frage führt zunächst einmal zu dem dahinter liegenden tieferen Problem des Verstehens überhaupt. Was ist gemeint, wenn wir sagen, wir haben etwas verstanden?

Nach lexikalischem Befund meint Verstehen in seiner allgemeinen Bedeutung das Erfassen von Sinn[495]. Den Vorgang des Erfassens von Sinn kann man in Anlehnung an F. Schleiermacher in mehrere Stufen einteilen:[496]

[494] vgl. Hefendehl-Hebeker, L., Mathematik erleben zwischen Faszination und Fremdheit, in: mathematik lehren Heft 86, Februar 1998, S. 4 – 7

[495] vgl. Brugger, W., Philosophisches Wörterbuch, Freiburg, Basel und Wien 1975 (Nachdruck 1992), S. 435

[496] vgl. Grondin, J., Einführung in die philosophische Hermeneutik, Darmstadt 1991, S. 83 – 99

Die erste Stufe ist das Verstehen eines (sinnfälligen Zeichens) als Zeichen. Die zweite Stufe des Verstehens ist das Erfassen des mit dem Zeichen Gemeinten. Hier richtet sich das Verstehen auf den im Zeichen sich ausdrückenden Gedanken. Da sich auf dieser Stufe aber leicht Missverständnisse oder Unvollständigkeiten im Sinnerfassen einschleichen können, ist nach F. Schleiermacher noch ein dritter Schritt im Verstehensvorgang erforderlich. F. Schleiermacher bezeichnet diese dritte Stufe unter Bezugnahme auf das geschriebene Wort als die Kunst, „zwischen den Zeilen lesen" zu können.[497] Gemeint ist der für das Verständnis eines Textes oder Sachverhalts notwendige Schritt, eine einzelne Äußerung aus dem Ganzen eines größeren Zusammenhangs heraus zu verstehen. Erst durch den Einblick in das Ganze, aus dem das Einzelne hervorgeht, kann der Vernehmende einigermaßen sicher sein, den Sinn einer Sache, die eine mathematische Problemstellung genauso sein kann wie ein geschriebener oder gesprochener Text, verstanden zu haben.

An diesen Gedanken knüpft W. Dilthey an, wenn er von einer verstehenden Psychologie erwartet, dass sie von dem Ganzen des Lebenszusammenhangs ausgeht, der im „Erleben ... unmittelbar gegeben" ist.[498] Verstehen ist für W. Dilthey ein Vorgang, der von außen nach innen führt, vom Ausdruck zum unmittelbaren Erleben. Wenn er sagt, „die Geisteswissenschaften beruhen auf dem Verhältnis von Erlebnis, Ausdruck und Verstehen"[499], dann will er damit sagen, dass ein geäußerter Gedanke im gedanklichen Nacherleben verstehbar wird. War bei F. Schleiermacher das tiefere Verstehen an die Einbettung des Einzelnen in einen umfassenderen Zusammenhang gebunden, so kommt bei W. Dilthey noch ein weiterer Gedanke hinzu, dass nämlich das Verstehen an das Erleben gebunden ist.

Eine weitere Überlegung bringt H.-G. Gadamer mit dem Begriff der „Anwendung" ins Spiel.[500] Die bisherige Verstehensdiskussion war davon ausgegangen, dass der Verstehensvorgang seinen vorläufigen Abschluss erreicht hat, wenn ein fremder Sinngehalt, sei es geistig-rational, sei es erlebnismäßig erfasst worden ist. Eine Anwendung des Verstandenen geschah allenfalls nachträglich. So etwa in der Rechtswissenschaft, indem das Gesetz auf den Einzelfall angewandt wird, oder in der Mathematik, wenn ein bewiesenes Verfahren zur Berechnung eines physikalischen Phänomens angewandt wird. Für H.-G. Gadamer hingegen ist Anwendung nicht eine Folge, sondern das Ziel des Verstehens oder besser gesagt, Verstehen und Anwendung fallen zusammen:

---

[497] Schleiermacher, F., Hermeneutik und Kritik hsrg. von M. Frank, Frankfurt 1977, zitiert nach Grondin, J., a.a.O., S. 97

[498] Dilthey, W., Schriften zur Pädagogik, Paderborn 1971, S. 144

[499] Ebenda, S. 290

[500] vgl. zum Folgenden: Grondin, J. Einführung in die philosophische Hermeneutik, Darmstadt 1991, S. 149 ff.

„Verstehen heißt dann so viel wie einen Sinn auf unsere Situation, unsere Fragen anzuwenden. Es gibt nicht zunächst ein reines, objektives Sinnverstehen, das dann in der Anwendung auf unsere Frage besondere Bedeutsamkeit erlangte. Wir nehmen uns schon mit in jedes Verstehen hinein, und zwar so, dass für H.-G. Gadamer Verstehen und Anwenden zusammenfallen.“[501]

Das lässt sich gerade am Mathematikunterricht gut veranschaulichen. Wenn ein Schüler einen mathematischen Themenkomplex nicht versteht, obwohl er ihn aufgrund seiner intellektuellen Entwicklung „verstehen“ könnte, so liegt das daran, dass ihm dieser Stoff nichts zu sagen hat bzw. dass er mit ihm nichts anzufangen weiß. Für das Verstehen ist der Selbstbezug oder das Betroffensein konstitutiv. Verstehen ist die Antwort auf unsere Fragen. „Etwas verstehen heißt etwas auf uns so angewandt haben, dass wir in ihm eine Antwort auf unsere Fragen entdecken“.[502] Das bedeutet, dass der Verstehensvorgang kein rein reproduktiver, sondern ein produktiver Prozess ist und dass vom Schüler Verstehen nur erwartet werden kann, wenn er als Fragender ernst genommen wird.

Jede echte Schülerfrage, die auf Verständnis abzielt, erwartet vom Lehrer nicht eine Antwort im Sinne einer fertigen Lösung. Vielmehr erwartet der Schüler, dass ihm der zu erarbeitende Themenkomplex so präsentiert wird, dass er in ihm eine Antwort auf seine Frage erkennen kann.

Ein Lehrer, der um Verstehen bemüht ist, beabsichtigt nicht, die Fragen der Schüler auszuschalten, sondern vielmehr zum Fragen zu ermutigen, damit die unterrichtlichen Inhalte „umso deutlicher auf sie antworten können“. Deshalb ist das Verstehen nicht so sehr das Erfassen eines geistigen Sinngehalts als vielmehr „der Vorzug eines Gesprächs“[503]. „Denn die Dialektik von Frage und Antwort“, sagt H.-G. Gadamer, „lässt das Verhältnis des Verstehens als ein Wechselverhältnis von der Art eines Gespräches erscheinen“.[504]

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass der Verstehensbegriff als Erfassen von Sinnzusammenhängen einen dreifachen Bedeutungsgehalt aufweist, der im Verstehensprozess als Stufenfolge betrachtet werden kann.

- Verstehen muss die niedrigen Stufen des Erfassens eines Zeichens als Zeichen und des Begreifens des mit dem Zeichen Gemeinten überschreiten und in den umfassenderen Zusammenhang des unmittelbar Gegebenen vordringen, um den tieferen Sinn einer Äußerung verinnerlichen zu können.

[501] Ebenda, S. 149

[502] Ebenda, S. 151

[503] Ebenda, S. 151

[504] Gadamer, H.-G., Wahrheit und Methode, Tübingen 1960, S. 359

- Verstehen ist im Erleben verankert. Der Zusammenhang von Erleben und Verstehen kommt in dem Begriff „Aha-Erlebnis“ zum Ausdruck. Dem Verstehenden wird ein zuvor unklarer oder unverstandener Sachverhalt klar, was sich im Erlebnis bestätigt. Oder anders ausgedrückt: Im Verstehen wird nacherlebt, was sich im Ausdruck, d.h. im geäußerten Gedanken zu erkennen gibt. Die Bewegung von außen nach innen ist das besondere Kennzeichen des Verstehensvorgangs bei W. Dilthey. Das Verstehens-Erleben kommt einer unmittelbaren Gewissheit gleich.
- Gegenüber dieser „Gewissheit“ erhebt H.-G. Gadamer gewisse Bedenken: Zwar hält auch er am Gedanken des Selbstbezugs fest, dieser jedoch besteht für ihn nicht in einem inneren Erleben, sondern im Vollzug eines „Gesprächs“ von Frage und Antwort. „Anwenden“ wird zum Schlüsselbegriff des Verstehens. Etwas so anwenden, dass wir in ihm eine Antwort auf unsere Fragen entdecken, heißt Verstehen. Die Fragehaltung und die subjektive Betroffenheit bestimmen, ob etwas und wie etwas verstanden wird.

Um Verstehen im Mathematikunterricht zu fördern, sind mannigfaltige didaktische Konzepte entstanden, von denen hier eines beispielhaft herausgegriffen und detaillierter erläutert werden soll. Es geht um den Ansatz, Verstehen im Mathematikunterricht durch Sprachförderung zu ermöglichen.[505]

5.6.2 Die Bedeutung der Sprache für das Verständnis von Mathematik

„Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: Redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.“

Johann Wolfgang von Goethe

Sprache kann als ein Medium des Lehrens und Lernens auch von Mathematik betrachtet werden, da Sprache generell eine Vermittlungsfunktion zwischen dem Menschen und der Welt einnimmt. „Denn das Eigentliche des menschlichen Geistes zeigt

[505] Weitere Ansätze sind beispielsweise die Methode des „Natürlichen Lernens“ in Anlehnung an C. Freinet; die Idee, Verlaufseigenschaften von Verstehen zu benennen und jeweils an diese methodisch anzuknüpfen (vgl. Bruder, R., Verlaufseigenschaften des Denkens im Mathematikunterricht erkennen und fördern, in: mathematik lehren Heft 56, S. 20 – 22 und 55 – 56), verschiedene Verstehensvorgänge zu definieren und jeweils einen adäquaten Zugang, entsprechende Sichtweise und richtige Bedeutungszuschreibungen zu gestalten (vgl. Hefendehl-Hebecker, L., Verständigung über Mathematik im Unterricht, in: Mathematik und Mensch, hrsg. von Lengnink, K., Prediger, S., Siebel, K., Darmstadt 2001, S. 99 – 110), gemäß dem Ansatz der multiplen Intelligenzen möglichst viele Intelligenzen durch Stimulation möglichst vieler Sinne anzusprechen (vgl. Gardner, H., Der ungeschulte Kopf – Wie Kinder denken, Stuttgart 1994), Verständnis durch Modellbildung (vgl. Winter, H., Haas, N., Ohne Modellbilden kein Verständnis, in: Der Mathematikunterricht, 09/1997, Heft 43(5), S. 14 - 29)

sich erst in und durch die Sprache selbst, und es gibt kein Verstehen und Erkennen ohne die Sprache."[506]

Im Folgenden soll dargestellt werden, wie sprachliche Aktivitäten das Lernen und damit auch das Verstehen von Mathematik fördern können.

H. Maier und F. Schweiger teilen die mathematischen Inhalte, die von den Schülern erlernt werden sollen, in mathematisches Wissen (Begriffe und Kenntnisse) und mathematische Fähigkeiten ein.[507] Zu den Begriffen gehören beispielsweise „Bruchzahlen", „Term", „Höhe" u.v.m. Bei den Kenntnissen geht es um Lehrsätze und Verfahren, wie z. B. das Lösen von Gleichungen oder das Beweisen von Behauptungen.

Wie bereits an früherer Stelle erwähnt, wird der traditionelle Mathematikunterricht nach wie vor durch das unreflektierte Lernen von Regeln und Algorithmen und das stereotype Anwenden dieser Gesetzmäßigkeiten dominiert. Damit wird das mathematische Wissen der Schüler leicht auf eine „reproduzierbare sprachliche Speicherleistung"[508] reduziert. Vielmehr ist wirkliches Verstehen wünschenswert, wozu zwei inhaltliche Dimensionen gehören: Die eine Dimension (modale Dimension) von Verstehen befähigt den Schüler, jederzeit einen Bezug zwischen der Darstellung des Wissens in Zeichen oder Worten und konkreten Objekten des Wissens herstellen zu können. Bezogen auf den Begriff Bruchzahl würde das bedeuten, dass der Schüler beim Lesen des Zeichens $\frac{1}{3}$ wissen muss, dass diese Bruchzahl durch die Division von 1 und 3 gebildet werden kann. Es geht um die Art und Weise, wie etwas erzeugt wird.

Die andere Dimension (mentale Dimension) erfordert mehr. Um sie erfasst zu haben, muss der Schüler z. B. charakteristische Merkmale des Begriffs wissen und passende Beispiele bzw. Gegenbeispiele finden können, Beziehungen zu den anderen Begriffen oder Verfahren herstellen und diese anwenden können.

Verstehen in beiden Dimensionen kann nur bei theoretischen Begriffen und theoretischem Wissen stattfinden, da empirische Begriffe in der Regel zu eng gefasst sind und somit nicht ausreichend abstrahierbar und generalisierbar sind. So wird beispielweise ein auf der Basis von Bildvorstellungen erworbener empirischer Begriff von „Trapez"nicht ausreichen, um z. B. auch ein Quadrat oder ein Parallelogramm als Trapez identifizieren zu können. Trotzdem hat die Visualisierung durch Modelle oder Zeichnungen einen wichtigen Platz in der Vermittlung mathematischer Begriffe.

Soll Vermittlung von Mathematik nicht in „Fertigbauweise" (M. Wagenschein) erfolgen, so muss zu dem Wissen über Begriffe, Sätze und Verfahren die Schulung

---

[506] Tschamler, H., Sprache und Bildung, in: F. Stippel, Aspekte der Bildung, Donauwörth 1966, S. 85

[507] Maier, H., Schweiger, F., Mathematik und Sprache – Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht, Wien 1999, S. 74

[508] Ebenda, S. 75

mathematischer Grundfähigkeiten hinzukommen. Diese sind z. B. das Definieren mathematischer Begriffe, das Klassifizieren, das Ordnen, Systematisieren und Strukturieren mathematischer Objekte und Beziehungen, das Analysieren und Unterscheiden verschiedener mathematischer Fälle, das Synthetisieren und Verknüpfen, das Transformieren, das Kombinieren.[509] Diese Fähigkeiten werden im Mathematikunterricht üblicherweise durch das Lösen von "Aufgaben mit Problemcharakter"[510] angeregt.

An dieser Stelle muss aber auch darauf hingewiesen werden, dass zwischen den beiden Bereichen "Wissen" und "Fähigkeiten" Wechselwirkungen bestehen. So können mathematische Fähigkeiten nicht im Sinne einer rein formalen Bildung ohne Wissen erlernt werden und auch Begriffe, Sätze und Verfahren werden erst deutlich und verstehbar, wenn sie mit Hilfe mathematischer Fähigkeiten bearbeitet und angewendet werden.

Um Sprache so einsetzen zu können, dass Verstehensprozesse unterstützt werden, ist es zunächst nötig, die Rolle von Sprache beim Aufbau mathematischen Wissens und mathematischer Fähigkeiten zu untersuchen.

Lernen und insbesondere Mathematiklernen wurde immer wieder als Lernen auf verschiedenen Stufen, vom Konkreten und Anschaulichen hin zum Abstrakten und Begrifflichen (Sprache) gesehen und auf dieser Vorstellung von Lernen bauen diverse didaktische Modelle auf (Abstraktionsstufenmethodik). Jedoch konnte in verschiedenen Untersuchungen gezeigt werden, dass Schüler die einzelnen Stufen als in sich abgeschlossene Lernbereiche begreifen und nicht als Teile eines Ganzen. Dies gibt Anlass dazu, den „didaktischen Ort"[511] der Sprache neu bestimmen zu wollen.

> *„Die sprachliche Darstellung in ihrer verbalen wie schriftlichen Form darf nicht als isolierte Stufe gesehen und behandelt werden, sondern muss sich von Beginn des Lernprozesses an mit den Darstellungen in konkreten und zeichnerischen Modellen verbinden. ... Wichtig sind daher von Anfang an Aufgaben, in denen die Schüler anschauliche Darstellungen in sprachliche überführen... ."*[512]

Wünschenswert ist, dass der Transfer während des ganzen Lernprozesses nicht nur vom Anschaulichen zum Abstrakten, sondern auch umgekehrt gelingt. Ferner ist es wichtig, dass der einmal verstandene Begriff sich nicht vom Konkreten ablöst, sondern es dem Schüler immer wieder möglich ist, eine Verbindung zwischen Abstraktem und Konkretem z. B. in Form von Anwendungen herzustellen.

---

[509] Ebenda, S. 76

[510] Ebenda, S. 94

[511] Ebenda, S. 87

[512] Ebenda, S. 87

Dass Sprache für den Begriffsaufbau in der Mathematik ein große Bedeutung hat, wird insbesondere dann offensichtlich, wenn Begriffe erlernt werden sollen, die weder visualisiert noch durch Handlungserfahrungen vermittelt werden können. Beispiele dafür sind „Term“, „Variable“ oder „irrationale Zahl“. Sind weder konkrete noch zeichnerische Modelle vorhanden, so ist es Aufgabe des Lehrers, dem Schüler durch sprachliche Darstellung eine Vermittlung der Begriffsbedeutungen zu ermöglichen. Vermittlung bedeutet in diesem Fall nicht, dass – wenn die sprachliche Erklärung nur gut genug ist – der Schüler den Begriff auch versteht. Im Sinne eines konstruktivistischen Ansatzes, den H. Maier und F. Schweiger vertreten, bleibt es immer noch Aufgabe des Schülers, sich das Wissen selbst zu konstruieren, der Lehrer kann nur die Bedingungen der Möglichkeit von Wissensaneignung schaffen. Diese mögliche Unvollkommenheit von Vermittlungsprozessen birgt aber auch wieder die Chance, dass z. B. Rückfragen gestellt werden und die Kommunikation zwischen Schüler und Lehrer, aber auch zwischen Schüler und Schüler in Gang bleibt.

Wissenskonstruktion ist sogar durch ausschließlich sprachliche Vermittlung möglich, setzt jedoch voraus, dass sie bereits bekannte Begriffe benutzt. So kann beispielsweise der Begriff „Teilermenge“ erklärt werden, wenn die Begriffe „Teiler“ und „Menge“ verstanden wurden. H. Aebli spricht dabei von Begriffspyramiden, die vom Schüler aufgebaut werden.[513] Dass dies kein passiver Prozess ist, drückt H. Aebli so aus: „Der Angeleitete muss jeden Schritt der Konstruktion nachvollziehen, die Elemente aus seinem Wissen abrufen, sie in die rechte Beziehung setzen, sonst kommt es nicht zum Begriff“.[514]

Neben der Bedeutung für den Begriffsaufbau in der Mathematik nimmt Sprache auch eine immense Rolle bei der Vermittlung mathematischer Fähigkeiten wahr, da Aufgaben, die diese Fähigkeiten fördern sollen, überwiegend in Textform vorliegen.

Der Prozess des Problemlösens als mathematische Fähigkeit wird üblicherweise als Ablauf von Stufen verstanden, die sich, fasst man verschiedene Ansätze zusammen, in drei Stufen einteilen lassen: Problemerfassung, Lösungsvermutungen anstellen bzw. Lösungspläne entwerfen, Lösungsrealisierung und Eignungsprüfung der Lösung.[515]

Was den sprachlichen Aspekt des Problemlösens betrifft, so leuchtet unmittelbar ein, dass der Aufgabentext verstanden werden muss, damit der Schüler das Problem voll erfassen kann, bevor die Phase der Problemlösung angegangen wird. Für diese zweite Phase der Problemlösung kann sich „eine sprachliche Begleitung des Prozesses der

[513] Ebenda, S. 92 f.

[514] Aelbi, H., Denken: Das Ordnen des Tuns; Bd.2. Stuttgart 1981, S. 99 zitiert nach Maier, H., Schweiger, F., Mathematik und Sprache – Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht, Wien 1999, S. 93

[515] Maier, H., Schweiger, F., Mathematik und Sprache – Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht, Wien 1999, S. 95

Lösungsfindung für diesen als äußerst förderlich erweisen.“[516] Ein Grund dafür ist, dass eine sprachliche Ausführung durch den Schüler das kreative Denken fördern und auch die Eignung der Lösungsidee besser kontrolliert werden kann, da der Denkprozess „künstlich“ verlangsamt wird. Auch für die Lösungsdarstellung, d.h. zur Beschreibung des Lösungsweges braucht der Schüler sprachliche Fähigkeiten. Dabei wird auch deutlich, dass der Schüler selbst sprachlich tätig werden muss, denn „in jedem Fall ist selbstständiges und adäquates sprachliches Formulieren unter angemessener Verwendung fachsprachlicher Mittel gefordert.“[517]

Nachdem dargestellt wurde, was im Mathematikunterricht gelernt und verstanden werden muss, und welche Bedeutung die Sprache dabei hat, so geht es im Weiteren darum, wie Sprache im Mathematikunterricht gefördert werden kann, um Verstehensprozesse zu optimieren.

Es wurde bereits mehrfach angemerkt, dass der in der Praxis vorherrschende sog. „fragend-entwickelnde“ Unterricht, der in der Hoffnung an den Schulen eingeführt wurde, Schüler an der Erarbeitung des Stoffes aktiv mitarbeiten und mitdenken zu lassen, diese Erwartungen bei weitem nicht erfüllen kann. Aufgrund auch eigener Forschungsarbeiten zum Thema des „fragend-entwickelnden“ Unterrichts kommt H. Maier zu dem Ergebnis:

> *„Insgesamt nimmt der einzelne Schüler an einem zeitlich recht ausgedehnten Gespräch teil, in dem er von ständigen Störungen begleitet, teilweise verwirrende und ermüdende sprachliche Botschaften empfängt. Aus all diesen Gründen scheint es für ihn schwierig zu sein, auf der Basis des „fragend-entwickelnden“ Unterrichts jenes Wissen und jenes Verstehen aufzubauen, dessen Erarbeitung dieser bezwecken soll.“*[518]

Insbesondere ist der „fragend-entwickelnde“ Unterricht, obwohl dort viel gesprochen wird, nicht geeignet, die für das Verstehen von mathematischen Inhalten notwendige Sprachförderung anzustoßen. Folglich müssen andere Unterrichtsformen zum Einsatz kommen, um Sprachverstehen und sprachliche Produktivität zu fördern.

Auf welche Weise kann dies geschehen?

H. Maier und F. Schweiger unterscheiden drei „Allgemeine Ziele der Sprachförderung“:

- Sprachverstehen: Sinnentnehmendes Lesen und Zuhören
- Sprachproduktion: Mündliches als auch schriftliches sprachliches Aktivwerden

---

[516] Ebenda, S. 105

[517] Ebenda, S. 107

[518] Ebenda, S. 149

- Übergang von verbaler zu schriftlicher Darstellung und umgekehrt:[519] Zum einen müssen mathematische Gedanken schriftlich und mündlich ausgedrückt werden, zum andern müssen aber auch mathematische Texte in einem Prozess der „Enkodierung“ in gesprochene Sprache überführt werden.

Textliche Eigenproduktion durch den Schüler

Ich möchte mich hier auf den Aspekt der Sprachproduktion beschränken und dabei auf die Förderung der Sprachproduktivität durch textliche Eigenproduktion eingehen, da diese sich für einen individualisierten und durch Aktivität geprägten Unterricht, wie er in dieser Arbeit favorisiert wird, in besonderem Maße eignet und notwendig ist.

> *„Individualisierung ohne Aufbau einer schriftlichen Sprachkompetenz, die es dem Lernenden erlaubt, seine im Moment verfügbare Sprache als Medium des Lernens selbstständig zu nutzen, ist undenkbar.“*[520]

P. Gallin und U. Ruf haben die Idee der textlichen Eigenproduktion zu einem fundamentalen Standbein ihres Unterrichts gemacht.

Die folgende Tabelle[521] stellt herkömmlichen Unterricht und einen Unterricht gegenüber, der von den „singulären“[522] Welten der Schüler ausgeht und bei ihnen verschiedenste Verarbeitungsprozesse in Gang setzt.

[519] Ebenda, S. 165

[520] Gallin, P., Ruf, U., Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik; Band 1: Austausch unter Ungleichen, Seelze-Velber 1998

[521] Gallin, P., Ruf, U., Sprache und Mathematik in der Schule, Zürich 1993³, S. 166

[522] Ebenda, S. 166

Merkmale eines Unterrichts

der Fachsprachen und Wissensvermittlung ins Zentrum stellt	der Kernideen und individuelle Lernwege ins Zentrum stellt
Abholen Wecken der Aufmerksamkeit Motivieren für Stoffaufnahmen	**Vorschau als Herausforderung** Präsentation der Kernidee des Lehrers Singuläre Optik als Impuls
Stoffvermittlung Zielorientierte Führung durch segmentiertes Stoffgebiet Kleine Schritte im Gleichtakt - Unterrichtsgespräch - Tafelbild - Schulbuch (Theorie- und Reinheft)	**Wirkung** Sichern des individuellen Standorts: Testen, Modifizieren oder Ersetzen der Kernidee Divergierende Reaktionen - dokumentieren - reflektieren - sortieren (Schutt und Humus als Rohstoffe)
Üben Repetieren, Einprägen, Automatisieren Vermittelte Muster übernehmen (Serien, Arbeitshefte, Arbeitsblätter)	**Erkunden und Spuren sichern** Ausdifferenzierung ausgewählter Kernideen Lernen auf eigenen Wegen (Singuläre Wege und Irrwege dokumentieren)
Prüfen Ermittlung von Abweichungen Hindernisse überwinden (Testaufgaben)	**Verarbeiten und Gestalten** Nachvollziehbare Darstellung des Begriffenen Erkanntes und Erfahrenes anderen zeigen (adressatenbezogene Texte)
Verbessern Fehler eliminieren Anpassung an die Norm (Reinschrift)	**Rückschau und Regularisierung** Formalisierung von Verhalten und Wissen Erkanntes sichern, Angrenzendes ausmachen (individuelle Formelsammlung, Algorithmen)

Tabelle 5.2: Herkömmlicher versus dialogisierender Unterricht

In dem Unterricht, den der Mathematiklehrer P. Gallin und der Deutschlehrer U. Ruf gemeinsam gestalten, schreiben die Schüler Texte, sog. „Reisetagebücher" zu Themen, die durch „Kernideen"[523] vom Lehrer (das ist der Regelfall) oder vom Schüler eingeleitet werden. In Anlehnung an H.-G. Gadamer, wonach nur der Wissen haben

[523] Ebenda, S. 33

kann, der Fragen hat, weil mit den Fragen das Verstehen beginnt[524], müssen Kernideen so beschaffen sein,

> *„dass sie in der singulären Welt der Schülerin oder des Schülers Fragen wecken, welche die Aufmerksamkeit auf ein bestimmtes Sachgebiet des Unterrichts lenken.“*[525]

P. Gallin und U. Ruf geben drei Merkmale für Kernideen an:

Biographischer Aspekt (ICH): Eine Kernidee ist subjektiv gefärbt und soll meinem Gegenüber klar mitteilen, was für mich „der Witz der Sache“ eines komplexen Sachverhaltes ist.

Wirkungsaspekt (DU): Kernideen sollen den Partner herausfordern, den Stoff für sich selbst zu erarbeiten. Sie sollen einen Rahmen bieten, „ohne die Eigentätigkeit einzuschränken“.

Sachaspekt (WIR): Kernfragen erfassen ein Stoffgebiet schemenhaft, in dem sie einen Schwerpunkt herausstellen und den „Auftakt zum Lernen auf eigenen Wegen“ bilden.[526]

Beispiele für solche Kernideen sind:

- „Fremde Zahlensysteme muss man zählend erkunden.“[527] (Vergleich verschiedener Zahlsysteme)
- „Wieviel Erde braucht der Mensch?“[528] (Flächenmessung)
- „Geteilt durch einhalb gibt mehr.“[529] (Bruchrechnung)

Kernideen sind ein „Instrument“[530] für dialogisches Lernen. Darunter verstehen P. Gallin und U. Ruf ein Unterrichtskonzept, das im Gegensatz zum „Instruktionskonzept“ gesehen werden muss. Bei letzterem wird der Stoff so vom Lehrer aufbereitet, dass die Schüler die Lerninhalte Schritt für Schritt und alle gleich schnell lernen können. Beim dialogischen Lernen hingegen soll jeder Schüler „einen persönlichen Dialog mit der Sache aufnehmen“[531] und sich wie ein Forscher verhalten. Ausgehend von

---

[524] vgl. Gadamer, H.-G., Wahrheit und Methode, Tübingen 1960, S. 347 f.

[525] Gallin, P., Ruf, U., Sprache und Mathematik in der Schule, Zürich 1993³, S. 37

[526] Gallin, P., Ruf, U., Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik; Band 2: Spuren legen – Spuren lesen, Seelze-Velber 1998, S. 29

[527] Gallin, P., Ruf, U., Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik; Band 1: Austausch unter Ungleichen, Seelze-Velber 1998, S. 243

[528] Gallin, P., Ruf, U., Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik; Band 2: Spuren legen – Spuren lesen, Seelze-Velber 1998, S. 36

[529] Ebenda, S. 26

[530] Ebenda, S. 20

[531] Gallin, P., Ruf, U., Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik; Band 1: Austausch unter Ungleichen, Seelze-Velber 1998, S. 49

einer Kernidee arbeiten die Schüler an einem Arbeitsauftrag, der nicht nur einen Lösungsweg zulässt und dazu führt, dass der „Funke“[532] zum Schüler überspringt, dass er sich die Kernidee zu eigen macht und beginnt, seinen eigenen Weg in der „Auseinandersetzung mit der Sache“[533] zu gehen und diese schriftlich in den „Reisetagebüchern“ zu fixieren. Bei den „Reisetagebüchern“ geht es nicht primär um die Lösung, sondern um den Lösungsweg, der vom Schüler Schritt für Schritt erarbeitet und dargestellt wird und vom Lehrer immer wieder schriftlich und mündlich kommentiert wird.

> *„Die Sprache hat in all diesen Fällen die Aufgabe, den Prozess des Verstehens zu aktivieren und die gewonnenen Einsichten zu festigen. Auf diese Weise nimmt mit der Sachkompetenz auch die Sprachkompetenz zu.“*[534]

Damit die „Reisetagebücher“ als methodisches Instrument erfolgreich sind, muss den Schülern eine gewisse Struktur in der Vorgehensweise gegeben werden. Dazu werden folgende Orientierungsfragen gestellt:[535]

Wann habe ich den Eintrag gemacht? (Datum)
Womit befassen wir uns? (Thema)
Was muss ich tun? (Auftrag)
Wozu machen wir das? (Motive)
Welchen Weg beschreite ich bei der Lösung des Auftrags? (Persönliche Auseinandersetzung mit dem Thema)
Wo stehe ich jetzt? (Rückblick)
Wer kann mir weiterhelfen? (Rückmeldung)

Das Anlegen eines „Reisetagebuchs“, also das Dokumentieren des eigenen Lernweges, soll den Schülern helfen, ihre Gedanken zu fixieren, kreativ zu werden und den Überblick über das neue Stoffgebiet zu gewinnen.

> *„Beim Schreiben verlangsamen und klären sich die Gefühle und Gedanken, nehmen Gestalt an und fordern zur Stellungnahme heraus. Wer schreibt, übernimmt in besonderer Weise Verantwortung für seine Position und öffnet sich der Kritik.“*[536]

Im Folgenden soll beispielhaft ein Unterricht des dialogischen Lernens mit dem Schwerpunkt der textlichen Eigenproduktion in Form von „Reisetagebüchern“ zu der Kernidee „Fremde Zahlensysteme muss man zählend erkunden“ dargestellt werden.

---

[532] Gallin,P., Ruf, U., Sprache und Mathematik in der Schule, Zürich 1993³, S. 38

[533] Ebenda, S. 38

[534] Gallin, R., Ruf, U. , Sitta, 1995 zitiert nach Hettrich, M., www.dialogisches-lernen.de

[535] Gallin, P., Ruf, U., Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik; Band 1: Austausch unter Ungleichen, Seelze-Velber 1998, S. 64

[536] Ebenda, S. 55

Der Unterricht ist so konzipiert, dass in der Regel alle Schüler am gleichen Thema arbeiten, das ihnen gemeinsam vorgestellt wird. Dann aber arbeitet jeder auf seinem eigenen Lernweg und dokumentiert diesen im „Reisetagebuch“.[537]

Das Lernplanthema dieses Beispiels für die 7. Jahrgangsstufe ist „Das Dezimalsystem als eines unter anderen möglichen Stellenwertsystemen erleben“. Der verantwortliche Mathematiklehrer wollte nicht den üblichen Weg der Stoffbehandlung gehen, nämlich die Vermittlung von Algorithmen mit Unterstützung von didaktischem Material (z. B. Multibasen[538]). Es besteht dabei die Gefahr, dass die Schüler trotz Beherrschung der Rechentechnik die Idee, die hinter der Entwicklung von Zahlensystemen steht, nicht begreifen.

Vielmehr sollte die Erfahrung des Zählens, die beim Aufbau des Zahlbegriffs gemacht wird, ermöglicht werden. Damit war die Kernidee geboren: „Fremde Zahlensysteme muss man zählend erkunden.“ Zählen kann durch Zähler wie sie in Autos, an Tanksäulen usw. vorhanden sind, simuliert werden. Ein einfaches Modell eines Zählers wurde zunächst vom Mathematiklehrer gebastelt, indem mehrere Papierstreifen um eine Kartonrolle gelegt wurden, jeder Streifen repräsentierte eine Stelle und auf jeder Zahl waren die für das jeweilige Zahlensystem erforderlichen Ziffern aufgemalt (siehe Abbildung).

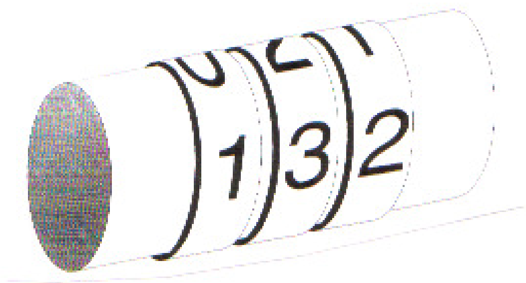


Abbildung 5.13: Zählermodell aus Karton[539]

[537] Denkbar wäre aber auch, dass nur einzelne Schüler an einem gemeinsamen Thema arbeiten.

[538] Multibasen sind ein Material aus Holzwürfeln, das es für jedes Zahlensystem gibt. Es besteht z. B. im Vierersystem aus einzelnen Würfeln, die die 1. Stelle repräsentieren, aus Viererstangen, die die 2. Stelle repräsentieren, aus 16-er-Platten, die die 3. Stelle repräsentieren, aus 64-er-Würfeln, die die 4. Stelle repräsentieren. Dann geht es weiter mit Würfelstangen, Würfelplatten, Würfelwürfeln usw. So kann beispielsweise die Zahl 231 im Vierersystem durch einen kleinen Würfel, drei Viererstangen und zwei 16-er-Platten dargestellt werden. Zur Umrechnung vom Vierer- ins Zehnersystem addiert man alle Würfel und erhält in diesem Beispiel die Zahl 43 im Zehnersystem. Will man vom Zehner- ins Vierersystem umrechnen, so nimmt man sich zunächst so viele Würfelchen, wie die Zehnerzahl angibt und ersetzt diese, in unserem Beispiel durch so viele 16-er-Platten wie möglich, die übrigen durch so viele 4-er-Stangen wie möglich und die restlichen bilden schließlich die Einerstelle.

[539] Gallin, P., Ruf, U., Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik; Band 1: Austausch unter Ungleichen, Seelze-Velber 1998, S. 245

Eine ähnliche Idee hatte die Autorin zum Thema „Zahlensysteme“ entwickelt, welche durch ein Holzmodell umgesetzt wurde, bei dem die Schüler gleichzeitig in mehreren Zahlensystemen zählen können.

Abbildung 5.14: Zählermodell für mehere Zahlensysteme aus Holz

Dieses Zählsystem besteht aus mehreren Zeilen in Form von Stangen. Die erste Stange ist mit zweiseitigen Täfelchen bestückt, deren eine Seite mit „0“, die andere Seite mit „1“ bezeichnet ist, den Ziffern des Zweiersystems. Auf der zweiten Stange stecken dreiseitige Täfelchen mit der Aufschrift „0“, „1“, „2“, den Ziffern des Dreiersystems. Die dritte und die vierte Zeile repräsentieren das Vierer- bzw. Zehnersystem. Zu Beginn zeigen alle Zeilen „0“ an. Soll mit diesem Zählwerk gezählt werden, müssen die einzelnen Scheiben mit jedem Zählschritt um eine Drehstellung im Uhrzeigersinn gedreht werden. Alle Zeilen zeigen nach dem ersten Zählschritt „1“ an. Schon beim zweiten Zählschritt wird klar, dass beim Zweiersystem bereits die höchste Ziffer angezeigt wird und zum Weiterzählen die nächste (links liegende) Stelle benötigt wird. Die Zeile lautet also nach dem zweiten Zählschritt: 10, 2, 2, 2. Nach dem dritten Zählschritt: 11,10,3,3. Analog wird weiter verfahren.

Durch den direkten Vergleich mehrerer Zahlensysteme auf diesem einen Rahmen wird deutlich, worin die Unterschiede, aber auch Gemeinsamkeiten der einzelnen Systeme liegen. Die Basis als Zahl wird durch die Form der „Zählräder“ geometrisch dargestellt (z. B. Dreieck für das Dreiersystem, Quadrat für das Vierersystem) und auf diese Weise wird der Zusammenhang zwischen der Anzahl der vorhandenen Ziffern in einem System und dessen Basis verdeutlicht. Auch Vor- und Nachteile verschiedener Systeme können erkannt und benannt werden.

Zurück zum Kartonmodell und dem damit verbundenen Unterrichtsbeispiel:

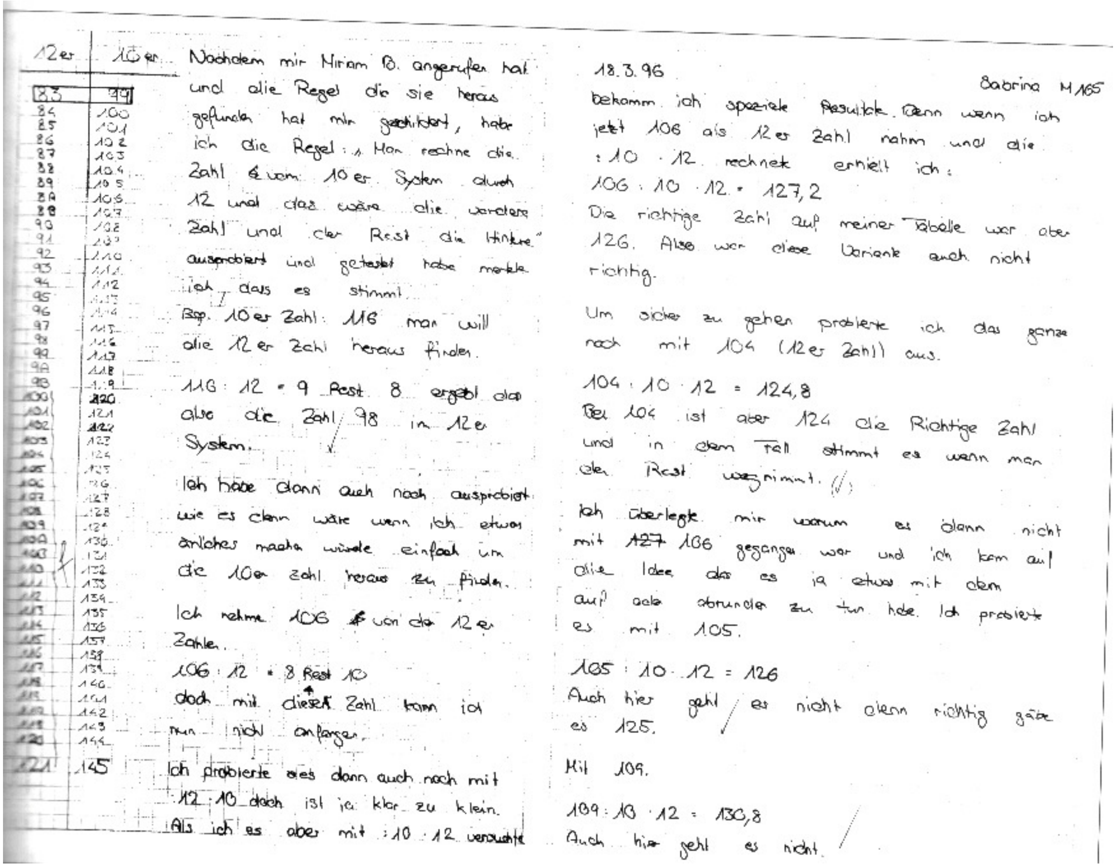
Dieses Modell, ein Modell für die Kernidee, eröffnete den Unterricht zu der Themeneinheit und löste bereits eine intensive Diskussion aus. Wie viele Ziffern braucht man wofür? Wie weit kommt man im Zweiersystem, wenn man beide Hände zu Hilfe nimmt?

Nach dieser Einstiegsphase erhielten die Schüler den Auftrag, sich einen Zähler für ein Zwölfersystem vorzustellen, das in unserer Kultur z. B. noch bei der Zeiteinteilung zu finden ist. Nach Klärung einiger Fragen bekamen die Schüler folgende Aufgaben, die jeder Schüler für sich bearbeitet und Lösungsweg und Ergebnis in seinem „Reisetagebuch" schriftlich dokumentiert.

1. *Stelle dir einen dreistelligen Zähler für das Zwölfersystem vor. Wie soll man die Streifen beschriften?*
2. *Zähle gleichzeitig im Zwölfer- und im Zehnersystem. Stelle die beiden Zahlenfolgen nebeneinander. Erkennst du eine Regelmäßigkeit?*
3. *Zähle im Zwölfersystem lückenlos von der Zahl 99 im Zehnersystem bis zur Zahl 145 im Zehnersystem. Stelle die beiden Zahlenfolgen nebeneinander. Wie könnte man direkt von einem System ins andere umrechnen, ohne in der Liste nachzusehen?* [540]

Für die Beantwortung der dritten Frage schreibt eine Schülerin den folgenden Hefteintrag (siehe Abbbildung):

[540] vgl. Gallin, P., Ruf, U., Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik; Band 1: Austausch unter Ungleichen, Seelze-Velber 1998, S. 246.



12er	10er
83	99
84	100
85	101
86	102
87	103
88	104
89	105
8A	106
8B	107
90	108
91	109
92	110
93	111
94	112
95	113
96	114
97	115
98	116
99	117
9A	118
9B	119
100	120
101	121
102	122
103	123
104	124
105	125
106	126
107	127
108	128
109	129
10A	130
10B	131
110	132
111	133
112	134
113	135
114	136
115	137
116	138
117	139
118	140
119	141
[illegible]	142
[illegible]	143
120	144
121	145

Nachdem mir Miriam B. angerufen hat und die Regel die sie heraus gefunden hat mir geschildert, habe ich die Regel: „Man rechne die Zahl vom 10er System durch 12 und das wäre die vordere Zahl und der Rest die Hintere" ausprobiert und getestet habe merkte ich, dass es stimmt.

Bsp. 10er Zahl: 116 man will die 12er Zahl heraus finden.

116 : 12 = 9 Rest 8 ergebt das also die Zahl 98 im 12er System.

Ich habe dann auch noch ausprobiert wie es dann wäre wenn ich etwas änliches machen würde einfach um die 10er Zahl heraus zu finden.

Ich nehme 106 von den 12er Zahlen.

106 : 12 = 8 Rest 10

doch mit dieser Zahl kann ich nun nicht anfangen.

Ich probierte es dann auch noch mit ·12 : 10 doch ist ja klar zu klein. Als ich es aber mit : 10 · 12 versuchte

18.3.96

Sabrina M 165

bekamm ich speziele Resultate. Denn wenn ich jetzt 106 als 12er Zahl nahm und die : 10 · 12 rechnete erhielt ich:

106 : 10 · 12 = 127,2

Die richtige Zahl auf meiner Tabelle war aber 126. Also war diese Variante auch nicht richtig.

Um sicher zu gehen probierte ich das ganze noch mit 104 (12er Zahl) aus.

104 : 10 · 12 = 124,8

Bei 104 ist aber 124 die Richtige Zahl und in dem Fall stimmt es wenn man den Rest wegnimmt.

Ich überlegte mir warum es dann nicht mit ~~127~~ 106 gegangen war und ich kam auf die Idee das es ja etwas mit dem auf oder abrunden zu tun habe. Ich probierte es mit 105.

105 : 10 · 12 = 126

Auch hier geht es nicht denn richtig gäbe es 125.

Mit 109.

109 : 10 · 12 = 130,8

Auch hier geht es nicht.

Abbildung 5.15 Eintrag in einem Reisetagebuch[541]

Die Gedanken sind durch die schriftliche Fixierung gut nachvollziehbar. Bis zur Zahl $9B_{12}$ rechnet die Schülerin korrekt um, dann fährt sie mit 100_{12} anstatt mit $A0_{12}$ fort.

Und sie probiert eine Regel aus, die bei der Umrechnung von der Zehnerzahl 116 in die Zwölferzahl 98 stimmt, nicht jedoch umgekehrt anwendbar ist.

Zu den weiteren Ausführungen dieser Schülerin wird auf die angegebene Literatur verwiesen. Jedoch möchte ich noch bemerken, dass die Schülerin im Verlauf ihrer weiteren Arbeit eine Umrechnungsregel, die nur für einige Spezialfälle gilt, nämlich für Vielfache von 12, verwendet und dabei – mit Hilfe des Lehrers – auf höchst interessante und kaum glaubliche Gesetzmäßigkeiten stößt.

Abschließend soll festgehalten werden, dass dem Zusammenhang zwischen Sprache und Denken bei der Beschäftigung mit Mathematik ein hoher Stellenwert eingeräumt wird. Und da Denken wiederum in einer Beziehung zum Verstehen und Verständnis

[541] Ebenda, S. 247

steht, kommt der Sprache große Bedeutung zu. Damit ist es auch wichtig, der Förderung von Sprache im Mathematikunterricht breiten Raum zu geben.

Textliche Eigenproduktion, z. B. in Form von „Reisetagebüchern“ bieten gute Möglichkeiten, Sprachförderung und damit auch Denkförderung im Unterricht zu praktizieren. Die schriftliche Fixierung ermöglicht einen individualisierenden Unterricht, in dem die Schüler die Intensität der Auseinandersetzung mit dem Stoff und auch den Lernweg weitgehend selbst festlegen können. Außerdem hat der Lehrer die Chance, mit den Schülern in einen intensiven Dialog zu treten. Das kann Schüler dazu motivieren, bestimmte Teile zu überarbeiten oder an durch den Lehrer gekennzeichneten Stellen weiterzuarbeiten. Wichtig ist dabei, dass nicht die Defizitperspektive eingenommen wird, sondern den Qualitäten eines Schülertextes nachgegangen wird. Dann entsteht der nötige Forschergeist und das Selbstvertrauen, eigenen Ideen und Lösungswegen nachzugehen.

6 Abschließende und weiterführende Gedanken

Ein Rückblick auf die bildungstheoretischen Überlegungen zeigt, dass Bildung in erster Linie als Prozess bzw. Aufgabe zu verstehen ist, die in erster Linie vom einzelnen Individuum zu erfüllen ist, aber die Unterstützung anderer braucht. Bildung ist nicht etwas, das in den Gegenständen oder einzelnen Wissensbereichen enthalten ist, so dass man sagen könnte, dass der Schüler mit der Aneignung sog. Bildungsinhalte auch gebildet ist.

Bildung ist auch nichts Quantitatives. Deshalb ist es falsch zu glauben, dass der, der möglichst viel oder vielerei weiß und kann oder über eine Art von enzyklopädischem Wissen verfügt, als gebildet gilt. Bildung ist auch keine Frage geistigen Vermögens, das mit Hilfe beliebiger Inhalte geschult, erweitert oder gefördert werden könnte. Darum ist es irreführend zu behaupten, dass der, der logisch denken gelernt hat und über schnelles Auffassungs- und Abstraktionsvermögen verfügt, ein gebildeter Mensch ist. Am allerwenigsten jedoch hat Bildung mit guten Umgangsformen, Kunstbeflissenheit, sicherem Auftreten und Sprachgewandtheit zu tun, so dass sich der als gebildet bezeichnen könnte, der über weltmännisches Verhalten verfügt.

Dennoch kann nicht in Abrede gestellt werden, dass Bildung durchaus auch mit solidem Sachverstand, fundiertem Wissen, logischem Denkvermögen, Fähigkeit des Vernunftgebrauchs, verantwortungsbewusstem Verhalten und rücksichtsvollem Umgang mit Dingen und Menschen zu tun hat. Daraus wird schon ersichtlich, dass es nicht genügt, Bildung mit dem Begriff des Allgemeinen, also mit Allgemeinbildung zu umschreiben. Bildung ist keine Eigenschaft neben anderen Eigenschaften, sie ist nichts Erlernbares in dem Sinne, dass wir sie durch Kenntnisse und Fertigkeiten erwerben könnten. Bildung hat etwas mit dem Menschen selbst oder besser gesagt mit dem Menschsein als solchem zu tun oder wie W. v. Humboldt sagt, mit der „Menschheit".

Der Schüler und Heranwachsende darf bei diesem Prozess der Selbstgestaltung mit der Unterstützung des Lehrers rechnen, weshalb der Unterricht nach J. F. Herbart nicht bloß Wissen vermitteln, sondern erziehend sein muss. Erziehend in dem Sinne, dass die „Bildung der Charakterstärke der Sittlichkeit" als dem obersten Zweck der Erziehung nicht aus dem Auge verloren wird. Der Schüler muss auch davon ausgehen dürfen, dass der Lehrer über so viel „pädagogischen Takt" verfügt, dass er der ihm gemäßen individuellen Förderung sicher sein kann.

Es bleibt also festzuhalten: Bildung als ein vom Subjekt selbst zu leistender Prozess der Selbstformung hat zum Ziel, sich selbst zur tätigen und verantwortungsbewussten Auseinandersetzung mit der Welt – der dinglich-materiellen, der politisch-wirtschaftlich-gesellschaftlichen und der kulturell-sittlich-religiösen Welt zu befähigen. Dabei darf aber nicht übersehen werden, dass dieser Prozess an Bedingungen geknüpft ist, die herzustellen Aufgabe von Erziehung und Schule ist. Hier zeigt sich der Auftrag der Schule, alles erdenklich Mögliche zu tun, um Bildungsprozesse der Schüler in Gang zu bringen und aufrecht zu erhalten. Wie dies geschehen kann, sollte im fünften Kapitel gezeigt werden.

Dabei war es nicht Intention der Arbeit, den Versuch zu unternehmen, einen geschlossenen Lehrplan für Mathematik zu erstellen.

Zum einen nämlich würde ein solcher Lehrplan einer Vorstellung von Unterricht widersprechen, die die Aktivität des Schülers fördern und ihm die Freiheit lassen will, seinen Lernprozess selbst zu gestalten Für einen möglichen Lehrplan wäre es also wichtig, große Offenheit zuzulassen. Denn nur so kann der Lehrer sich von den Interessen der Schüler leiten lassen. In diesem Punkt kommt dem Lehrer die Mathematik als Fach sehr entgegen. Denn die Mathematik ist kein streng hierarchisches System. Es gibt viele Möglichkeiten der Auswahl und Anordnung von Inhalten, so dass die gewünschten Ziele des Unterrichts Kriterium für die Auswahl und Anordnung des Stoffs sein können.

Zum andern ist es auch nicht nötig, kleinschrittige Lehrplanziele mit festgelegten Inhalten vorzugeben: Hat ein Schüler einmal „sein“ Thema gefunden bzw. wurde in ihm das Interesse für einen bestimmten Inhalt geweckt, so ist er bereit, sich das nötige „mathematische Handwerkszeug“, durchaus in kompakter Lehrgangsform, anzueignen, um die Problemstellung lösen zu können.

> *„Wenn es dem Kind gelingt, dieses tiefe Interesse für irgendeine der Sachen zu empfinden, die wir ihm ... darbieten, interessiert es sich danach für alle Gegenstände. Es beginnt Aktivitäten zu entwickeln, als handelte es sich um einen Naturvorgang. Ist der Anfang einmal gemacht, führt er zu einer permanenten Steigerung, die von selbst stattfindet. Es ist jedoch keine langsame, stufenweise Steigerung ..., sondern hat eher den Charakter einer „Explosion“. “*[542]

Daher bestand das Anliegen dieser Arbeit darin, eine Lehrplansystematik zu erarbeiten, in die weitere Inhalte eingeordnet werden können. Dazu war es nötig, Kriterien zu erarbeiten, die einen systematischen Aufbau der Lehrplaninhalte ermöglichen und begründen ließen.

Es wäre ein Leichtes gewesen, viele weitere geeignete Beispiele zu mathematischen Themengebieten zu liefern. Jedoch sollte nur beispielhaft gezeigt werden, wie die einzelnen Kategorien inhaltlich belegt werden können.

---

[542] Montessori, M., Schule des Kindes, Hrsg. von P. Oswald und G. Schulz-Benesch, Freiburg, Basel und Wien 1976, S. 89

Ein Unterricht, der Offenheit gegenüber den Interessen des Schülers und den Stoffplänen zulässt, bringt allerdings die Schwierigkeit mit sich, dass der Bildungsprozess nicht mehr kalkulierbar bleibt und damit auch im Bezug auf festgelegte Ziele nicht mehr kontrollierbar ist. Die Lehrer können nicht mehr so leicht von Eltern, der Schulaufsicht und der Öffentlichkeit zur Rechenschaft gezogen werden. Nach all dem, was gesagt wurde, ist das auch kein Nachteil für den Schüler. Denn wo die Interessen den Lernvorgang leiten, ist Wissen nicht nur angeeignet, sondern auch verstanden. Auf lange Sicht kann nur so Bildung geschehen. Darf der Schüler eigentätig sein, wird dem Unterricht am Ende ein größerer Erfolg beschieden sein.[543]

Außerdem braucht solch ein Unterricht eine andere Unterrichtskultur und- organisation als sie gegenwärtig anzutreffen ist. Der Frontalunterricht ist für die Lehrkräfte, aber auch für die Schüler risikoarm und, so seltsam das auch klingen mag, auch bequem. Es ist leichter, einen stringenten Lehrgang durchzuziehen als sich auf einen Unterricht einzulassen, dessen Verlauf nicht mehr plan- und vorhersehbar ist. Auch für den Schüler ist es bequemer, sich „berieseln" zu lassen, als sich auf ein Lernen einzulassen, das über Umwege führen und in Sackgassen münden kann und das vor allem Eigentätigkeit fordert. Aber solch ein Lernvorgang würde viel eher die Vorgehensweise der „echten Mathematik" widerspiegeln, in der verworfen, wiederholt, versucht, neu probiert wird und in der Umwege eher Normalität als die Ausnahme sind. Dafür hat die Geschichte der Mathematik viele Beispiele bereit. Ein solcher Unterricht jedoch würde zwar Unsicherheit und Unruhe in die Schulen bringen, aber auch Aufbruch und Lebendigkeit. Wäre das nicht ein erstrebenswertes Ziel?

Die Unzufriedenheit mit der aktuellen Schulsituation ist groß und immer wieder werden ähnliche Erkenntnisse über notwendige Veränderungen geäußert und entsprechende Forderungen an den Mathematikunterricht gestellt. Trotzdem gelingt es nicht oder nicht hinreichend, diese in die Praxis umzusetzen.

Obwohl seit Jahrzehnten im Bereich Problemlöseprozesse und Anwendungen im Mathematikunterricht geforscht wird und deren Einsatz im Mathematikunterricht für unerlässlich gehalten wird, hält sich der traditionelle Unterricht mit dem Schwerpunkt auf der Einübung stereotyper Routinen und dem Lernen von Regeln und Algorithmen.

Es gibt viele überzeugende Einzelbeispiele für „guten" Unterricht, die bestens aufbereitet und teilweise sogar kostenlos verfügbar sind, und trotzdem sind es Einzelkämpfer unter den Lehrern, die an den Schulen versuchen, einige dieser Ideen umzusetzen. Eine Vielzahl von Vorschlägen ist bereits vorhanden und trotzdem schafft es die Schule als Institution nicht, diese Vorschläge in die Praxis zu bringen. Welch eine Verschwendung von Ressourcen und Konservierung von Missständen!

[543] vgl. Köhler, H., Eigentätigkeit, in: Arbeitskreis Mathematik und Bildung (Hrsg.), Mathe, ja bitte – Wege zu einem anderen Unterricht, Eichstätt 1998, S. 33 - 38

Obwohl nach amtlichen Lehrplänen Schüler so gefördert werden sollen,

„dass sie

1. *sich unter Berücksichtigung ihrer individuellen Lernmöglichkeiten und Erfahrung ganzheitlich in ihrer Persönlichkeit entwickeln können,*
2. *grundlegende Fähigkeiten, Kenntnisse und Fertigkeiten in Inhalt und Form erwerben, die sie befähigen, sich in ihrer Lebenswelt handelnd zu orientieren,*
3. *über kindgemäß offenen Lernformen zu selbstständigem Denken, Lernen und Arbeiten geführt werden, wobei Lernfreude, Leistungs- und Anstrengungsbereitschaft erhalten und weiterentwickelt werden sollen“*[544]

und obwohl ebenfalls in Lehrplänen fächerverbindender Unterricht mit Projekten vorgeschlagen, Ganzheitlichkeit postuliert, Methodenvielfalt verordnet und sog. überfachliche Kompetenzen vermittelt werden sollen, bleibt der schulische Alltag – von wenigen Ausnahmen abgesehen – hinter diesen Forderungen weit zurück.[545] Frontalunterricht und das Einpauken reproduzierbaren Wissens dominiert nach wie vor hinter verschlossenen Klassenzimmertüren.

Woran könnte das liegen?

„Das brauchst du nicht lernen, das kommt nicht in der Schulaufgabe dran!“, „Das lassen wir weg, das ist nicht verpflichtender Stoff im Abitur!“, „Projekte kann ich auch noch nach Notenschluss durchführen.“

Immer wieder hört man diese Aussagen und sie sind aus Sicht der Schüler und Lehrer verständlich. Das Zentralabitur schwebt wie ein Damoklesschwert über allen Schülern und Lehrern, die für die Vorbereitung darauf verantwortlich sind. Keiner kann ihm auf dem Weg zur Allgemeinen Hochschulreife (in Bayern und einigen anderen Bundesländern) entrinnen. Und alles, was auf diesem Weg stört oder überflüssig erscheint, wird folglich weggelassen.

Es gibt aber auch diese Beobachtung:

---

[544] Verordnung über den Bildungsgang der Schule im Land Brandenburg, zitiert nach Garpow, L., Wochenplanunterricht im Mathematikunterricht der 6. Klasse, in: unterrichten/erziehen Nr. 3/2002, S. 134 – 137.

[545] vgl. Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (Hrsg.), Lehrplan für das Gymnasium in Bayern 2004

Nach dem schlechten Abschneiden deutscher Schüler bei der TIMSS begannen in allen Bundesländern mehr oder weniger intensive Reformen, um solch eine als Blamage empfundene Situation nicht wieder zu erleben. Auf der Ebene der Bund-Länder-Kommission (BLK) wurde der SINUS-Modellversuch „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“ ins Leben gerufen. Drei wichtige Forderungen waren dabei: "Aufgabenkultur", "Kumulatives Lernen" und "Eigenverantwortliches Arbeiten". Über Multiplikatoren wurden neue Aufgabentypen mit mehr Anwendungsorientierung und ohne starre Lösungsschemata in die Schulen gebracht. Diese neuen Aufgaben ähneln sehr den Aufgaben, die bei TIMSS gestellt wurden. Die zweite Maßnahme war – in Anlehnung an die Siegerländer – eine Entwicklung von Qualitätssicherungsmaßnahmen, die sich in Bayern in Form von sog. Jahrgangsstufentests niederschlagen. Bei den Jahrgangsstufenstests werden bayernweit zum gleichen Zeitpunkt alle Schüler einer bestimmten Jahrgangsstufe in einem bestimmten Fach getestet, in Mathematik am Gymnasium derzeit in der 8. und 10. Jahrgangsstufe. Auch diese Aufgaben ähneln den Aufgaben, die bei TIMSS oder PISA gestellt werden. Man orientiert sich also an den Testfragen und zwingt auf diese Weise die Lehrer, den Unterricht so zu gestalten, dass solche Typen von Aufgaben in Zukunft besser gelöst werden können.
Tatsächlich brachte PISA 2003 gegenüber PISA 2000 eine Verbesserung der Leistungen, wenngleich diese vermutlich eher auf eine gewisse Sensibilisierung und Motivation bei der Bearbeitung der Testaufgaben als auf die eingeleiteten Maßnahmen zurückzuführen sind. Offensichtlich aber verspricht man sich einen größtmöglichen Erfolg, wenn man an den Prüfungen ansetzt in der Erwartung, dass der Unterricht dann auch so umgestaltet wird, dass die Schüler auf die Prüfungen bestmöglich vorbereitet sind.
Geht man davon aus, dass Abschlussprüfungen an der Schule zum Übertritt in die Hochschule berechtigen, so muss man m. E. bei den Tests ansetzen, um Veränderungen im Unterricht herbeizuführen. Es genügt also nicht, Lehrpläne umzuschreiben und Lehrer weiterzubilden, um erwünschte Veränderungen herbeizuführen. Es müssen auch die grundsätzlichen Rahmenbedingungen so verändert werden, dass alle am Bildungsprozess Beteiligten die Veränderungen umsetzen können. Wenn der Lehrplan zwar einerseits z. B. fächerübergreifendes Arbeiten oder Gruppenarbeit vorschreibt, die Stofffülle enzyklopädischen Wissens aber nahezu unverändert hoch bleibt und dieses Faktenwissen für die Abschlussprüfungen von größerer Bedeutung ist als die Gruppenarbeit oder fächerübergreifende Zusammenhänge, so ist nicht verwunderlich, dass die Schulsituation unverändert unbefriedigend bleibt.

Ein erster Schritt, die alt gewohnten Unterrichtsformen aufzubrechen, bestünde möglicherweise in einer Änderung der Prüfungsordnung. Dies könnte zumindest das Eine bewirken, dass Freiräume im Unterricht geschaffen würden, die andere Lehr- und Lernformen zuließen. Vorschläge für weitere Veränderungen gibt es genug. Dennoch bleibt die Crux bestehen, dass Änderungen innerhalb eines bestehenden Systems dieses nur weiter festigt.

Gibt es wirklich keinen Ausweg? Fast scheint dem so zu sein. Die um sich greifende Resignation vieler und zumeist der engagiertesten Lehrer scheint diese Ansicht zu bestätigen. Aber dennoch darf es bei diesem Fazit nicht bleiben. Es wäre diese Arbeit keine pädagogische, wenn es nicht gelänge, wenigstens ansatzweise eine Lösung aufzuzeigen. Denn der Pädagoge muss, wenn schon nicht Optimist, so doch wenigstens Realist, keinesfalls aber Pessimist sein. Deshalb sei nochmals auf die Beispiele in Kapitel 5 verwiesen, die ja erstens keineswegs erdacht, sondern allesamt erprobt sind, und die zweitens als Exempel für die Möglichkeit einer Umsetzung der genannten regulativen Prinzipien zu verstehen sind.

Ich halte es in der Tat nicht für erforderlich, „Schule neu denken" zu müssen. Die Geschichte zeigt, dass Neues meist aus Altem hervorgeht. Weshalb sollte es daher nicht möglich sein, bei relativ geringen Änderungen der Rahmenbedingungen, Mathematik so zu lehren, dass sie entwicklungsadäquat vermittelt wird, einen Bezug zur Lebenswelt des Schülers herstellt, den ganzen Menschen anspricht und Verstehen ermöglicht? Weshalb sollte ferner keine Chance bestehen, dass der Schüler die mathematischen Inhalte so verarbeiten kann, dass sein individueller Lernstil und sein individuelles Lerntempo berücksichtigt, dass er selbsttätig und nach Maßgabe seiner Neigungen und Interessen sich den Stoff so aneignen kann, dass er für die Lernorganisation und den Lernumfang selbst verantwortlich ist und dass ihm der nötige Freiraum eingeräumt wird, durch den er die Chance erhält, die Lerninhalte auf seine Weise und nach seinen Interessen und Neigungen sich anzueignen?

Die hier vorgetragenen Unterrichtskriterien sind keine kurzlebigen Neuheiten, sondern Gemeingut einer bewährten Bildungstradition. Nur muss man nicht gleich erwarten, dass durch sie ein „Volk" von mathematisch Gebildeten heranwachsen wird. Aber vielleicht wäre auf diese Weise wenigstens zu verhindern, dass ein „Volk" von mathematisch Ungebildeten Jahr für Jahr die Schule verlässt.

Es muss ja nicht für alle gelten, was W. v. Goethe sagt: „Mit Mathematikern ist kein heiteres Verhältnis zu gewinnen."

Literaturverzeichnis

AEBLI, H., Zwölf Grundformen des Lehrens – Eine allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage, Stuttgart 1993[7]

AIGNER, M., BEHRENDS, E. (HRSG.), Alles Mathematik – Von Pythagoras zum CD-Player, Berlin 2002²

ANDERSON, J. R., Kognitive Psychologie, Heidelberg 1989

ARBEITSKREIS MATHEMATIK UND BILDUNG (HRSG.), Mathe, ja bitte – Wege zu einem anderen Unterricht, Eichstätt 1998

ARBEITSKREIS MATHEMATIK UND BILDUNG (HRSG.), Mathematik – unsichtbar, doch allgegenwärtig, Eichstätt 2002

ARNOLD, K.-H., Beurteilungskompetenz, in: unterrichten/ erziehen Nr. 1/ 2001, S.12–18

BAPTIST, P., ULM, V., Stufen mathematischer Kompetenz nach PISA, Bayreuth 2002

BALDUS, D., ROSEBROCK, S., Eine topologische Unterrichtseinheit für die S I, in: Mathematik in der Schule 31 (1993) 12, S. 648 – 655

BALLAUFF, TH. UND SCHALLER, K. , Pädagogik – Eine Geschichte der Bildung und Erziehung, Band III, Freiburg und München 1973

BARTH, F., OSSIANDER, K., Mathematik anschaulich 5, München 2003

BAYERISCHES STAATSMINISTERIUM FÜR UNTERRICHT UND KULTUS (Hrsg.), Lehrplan für das Gymnasium in Bayern, Mathematik, München 2003

BAYERISCHES STAATSMINISTERIUM FÜR UNTERRICHT UND KULTUS (Hrsg.), Lehrplan für das Gymnasium in Bayern Mathematik, München 2004

BECKMANN, A., Fächerübergreifender Mathematikunterricht, Teil 1: Ein Modell, Ziele und fachspezifische Diskussion, Hildesheim 2003

BECKMANN, A., Fächerübergreifender Mathematikunterricht, Teil 3: Mathematikunterricht in Kooperation mit dem Fach Deutsch, Hildesheim 2003

BENNER, D., Allgemeine Pädagogik, Weinheim 1987

BENNER, D., Wilhelm von Humboldts Bildungstheorie, München 1990

BENNER, D., Die Pädagogik Herbarts, Weinheim und München 1986

BLUM, W., Qualitätsentwicklung im Mathematikunterricht – Eine Folge von TIMSS? in: Pädagogik 12/2000, S. 23

BOHL, TH., Prozessbeurteilung durch Unterrichtsbeobachtung, in: unterrichten/ erziehen Nr.1/ 2001, S. 25 - 29

BOHL, T., BROSZAR, K., GRUNDER, H.-U., Auf dem Weg zu einer veränderten Leistungsbeurteilung, in: Pädagogisches Forum: ue Nr. 2/2003, S. 70 – 73

BRÜGELMANN, H., HEYMANN, H. W., PISA 2000: Befunde, Deutungen, Folgerungen, in: Pädagogik 3/2002, S. 40 – 43

BRUDER, R., Verlaufseigenschaften des Denkens im Mathematikunterricht erkennen und fördern, in: mathematik lehren, Heft 56, S. 20 – 56

BRUGGER, W. , Philosophisches Wörterbuch, Freiburg, Basel und Wien 1992

BRUNER, J., Entwurf einer Unterrichtstheorie, Berlin 1974

BRUNER, J., Relevanz der Erziehung, Ravensburg 1971

BRUNER, J., OLVER, R., GREENFIELD, P., Studien zur kognitiven Entwicklung, Stuttgart 1971

BRUNNENMEIER, A., Fokus Mathematik Jahrgangsstufe 5, Berlin 2003

BUCK, G., Rückwege aus der Entfremdung, Paderborn und München 1984

BUCK, G., Herbarts Grundlegung der Pädagogik, Heidelberg 1985

COMENIUS, J.A., Didactica Magna oder Große Unterrichtslehre, Paderborn 1918

DANCKWERTS, R. u.a.: Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe, Kultusministerkonferenz, Bonn 2000

DILTHEY, W., Schriften zur Pädagogik, Paderborn 1971

ECKART, W., Den Lernalltag der Schüler verändern, in: unterrichten/ erziehen Nr. 5/2001, S.248 – 252

ECKERT, E., Zu Maria Montessoris Auffassung vom „mathematischen Geist“ oder über den Zahlensinn von Kindern, in: Das Kind, Heft 37, 2005, S. 16 – 28

EISENTRAUT, F., SCHÄTZ, U., Delta 5, Mathematik für Gymnasien, Bamberg 2003

FEND, H., Entwicklungspsychologie des Jugendalters, Augsburg 2000

FEND, H., Der Umgang mit Schule in der Adoleszenz, Aufbau und Verlust von Lernmotivation, Selbstachtung und Empathie, Entwicklungspsychologie der Adoleszenz in der Moderne, Band IV, Bern 1997

FISCHER, F., Darstellung der Bildungskategorien im System der Wissenschaften, Ratingen und Kastellaun 1975

FISCHER, F., Systematische Untersuchungen zum Affinitätsproblem, Diss.Wien 1956

FRANKE, M., Didaktik der Geometrie, Heidelberg 2000

FRITSCH, B., Die Entwicklung einer Lehr- und Lernkultur erfordert eine kompetente Lehrkraft, in: unterrichten / erziehen Nr. 5/ 2001, S. 253 – 258

GADAMER, H.-G., Wahrheit und Methode, Tübingen 1960

GALLIN, P., RUF, U., Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik, Band 1, Austausch unter Ungleichen, Seelze-Velber 1998

GALLIN, P., RUF, U., Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik, Band 2, Spuren legen – Spuren lesen, Seelze-Velber 1998

GALLIN,P., RUF, U., Sprache und Mathematik in der Schule, Zürich 1993³

GARDNER, H., Der ungeschulte Kopf – Wie Kinder denken, Stuttgart 1994

GARDNER, M. , LOYD, S., Mathematische Rätsel und Spiele, Denksportaufgaben für kluge Köpfe, Köln 2003

GARPOW, L., Wochenplanunterricht im Mathematikunterricht der 6. Klasse, in: unterrichten/erziehen Nr. 3/2002, S. 134 – 137

GASTAGER, A., PATRY J.-L., SCHWETZ, H., Wissen und Handeln, Lehrerinnen und Lehrer verändern ihren Mathematikunterricht, in: BuE 53 (2000) 3, S. 271 - 286

GEISSLER, E., Johann Friedrich Herbart, in: Scheuerl, H. (Hrsg.), Klassiker der Pädagogik I, München 1979

GEISSLER, E., Herbarts Lehre vom erziehenden Unterricht , Heidelberg 1970

GESSNER, E., Mehr Evaluation, mehr Verbindlichkeit, mehr Lernkultur, in: Pädagogik 9/2002, S.50–53

GLAGOW-SCHICHA, L., Anders lernen – anders leben in der Schule, Freiarbeit im Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I, in: unterrichten/ erziehen Nr. 3/2003, S. 146 – 150

GRELL, J., Direktes Unterrichten, in: Wiechmann, J. (Hrsg.), Zwölf Unterrichtsmethoden – Vielfalt für die Praxis, Weinheim 2002

GRIESEL, H., Die Neue Mathematik für Lehrer und Studenten, Band 1, Hannover 1977⁵

GRONDIN, J., Einführung in die philosophische Hermeneutik, Darmstadt 1991

GROOTHOFF, H.-H., HERRMANN, U., (Hrsg.), Wilhelm Dilthey, Schriften zur Pädagogik, Paderborn 1971

HAAS, N., WINTER, H., Ohne Modellbildung kein Verständnis, in: Der Mathematikunterricht, 09/1997, Heft 43(5), S. 14 – 29

HEFENDEHL-HEBEKER, L., Mathematik erleben zwischen Faszination und Fremdheit, in: mathematik lehren Heft 86, Februar 1998, S. 4 – 7

HEFENDEHL -HEBECKER, L, Verständigung über Mathematik im Unterricht, in: Mathematik und Mensch hrsg. von Lengnink, K., Prediger, S., Siebel, K., Darmstadt 2001, S. 99 – 110

HEINEMANN, K.-H., Vom Wiegen wird das Schwein nicht fett – aber es verändert sich, in: Pädagogik 6/00, S. 48 – 51

HEINTZ, G., in: Leuders, T. (Hrsg.), Mathematikdidaktik, Berlin 2003

HEITGER, M, Der Lehrer als Pädagoge?, in: Schirlbauer, A. (Hrsg.), Lehrer sein heute, Innsbruck und Wien 1991

HENN, H.W., Mathematik und „der Rest der Welt" – Fachübergreifende Aktivitäten in Deutschland, in: ZDM 98/ 4, S. 119 – 124

V. HENTIG, H., Die Schule neu denken, Eine Übung in pädagogischer Vernunft, Weinheim 2003

V. HENTIG, H., Bildung, Weinheim 1996

HEYMANN, H.W., Allgemeinbildung und Mathematik, Studien zur Schulpädagogik und Didaktik – Band 13, München und Weinheim 1996

HERBART, J. F., Pädagogische Schriften Band 1, hrsg. von Asmus, W. , Düsseldorf und München 1964

HERBART, J. F., Pädagogische Schriften Band 2, hrsg. von Asmus, W. , Stuttgart 1965 2. unver. Auflage 1992

V. HOFE, R., KLEINE, M., Grundvorstellungen als mentale Basis mathematischer Bildung, in: unterrichten/ erziehen Nr. 3/2002, S. 123 – 127

HOHENWARTER, M., GeoGebra oder Was Formeln mit Zeichnungen zu tun haben – Neue Mathematik Software für SchülerInnen, in: NEON 02/2003, S. 43

HOLZKAMP, K., Lernen, Subjektwissenschaftliche Grundlegung, Frankfurt/ M. 1995

HONAL, W. (Hrsg.): Handwörterbuch der Schulleitung, Landsberg/ L. 13. Lfg. 1991

V. HUMBOLDT, W., Bildung und Sprache, besorgt von C. Menze, Paderborn 1965^2

V. HUMBOLDT, W., Werke in fünf Bänden, Band I, hrsg. v A. Flitner und K. Giel, Darmstadt 1960

HUMBOLDT, W. V., Werke in fünf Bänden, Band V, hrsg. v. A. Flitner und K. Giel, Darmstadt 2002²

IGL, J. (Hrsg.); Fächerübergreifendes Arbeiten im Mathematikunterricht, Rheinfelden und Berlin 1995

JACHMANN, M., TILLMANN, K.-J., Sind Noten gerechter als Ziffernzeugnisse? in: Pädagogik 9/2000, S. 37 – 43

JANK, W., MEYER, H., Didaktische Modelle, Berlin 2003[6]

JENCHEN, H.-J., Die Entwicklung einer Lehr- und Lernkultur erfordert eine kompetente Lehrkraft, in: unterrichten/ erziehen Nr.5/ 2001, S.233 – 241

JÜRGENS, E., Leistungsmessung und Leistungsbeurteilung, in: unterrichten/ erziehen Nr.1/ 2001, S. 9–12

JÜRGENS, E., Schülermotivation – Zur Selbstwirksamkeit von Lernmotivation, in: Schmolka, D. (Hrsg.), Schülermotivation – Konzepte und Anregungen für die Praxis, München 2004

KANT, I., Werke in zehn Bänden, hrsg. v. W. Weischedel, Darmstadt 1986

KERSCHENSTEINER, G., Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht, in: Süddeutsche Monatshefte 1910

KERSCHENSTEINER, G., Die aus dem Wesen der Bildung sich ergebenden Forderungen für die Gestaltung der Schultypen und ihrer Lehrpläne, in: Sonderabdruck des Bundes für Schulreform, II. Deutscher Kongress für Jugendbildung und Jugendkunde, Leipzig 1913, S. 23 – 32

KERSCHENSTEINER, G., Die Bildungswerte von Mathematik und Naturwissenschaften, in: Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, Hannover 1930 (36. Jg./ No.7), S. 211 – 218

KERSCHENSTEINER, G., Theorie der Bildung, Leipzig und Berlin 1931

KERSCHENSTEINER, G., Wesen und Wert des naturwissenschaftlichen Unterrichts, München 1959

KERSCHENSTEINER, G., Produktive Arbeit und ihr Erziehungswert, in: Reble, A. (Hrsg.), Die Arbeitsschule, Bad Heilbrunn 1963

KESSELRING, T., Jean Piaget, München 1988

KLAFKI, W., Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik, Weinheim und Basel 1985

KLAFKI, W., Zukunft der Gesellschaft – Zukunft der Bildung, in: Achs, O. u.a. Lernen für die Zukunft, Wien und München 1990

KLEINSCHMIDT – BRÄUTIGAM, M., Qualitätsentwicklung – ein mehrdimensionaler Begriff, in: unterrichten/ erziehen Nr.6/2002, S.285 – 286

KLIKA, M., Zentrale Ideen – echte Hilfen, in: mathematik lehren, Heft 119, 2002, S. 4-7

KLIPPERT, H., Motivation durch Methodentraining – Anregung zur Förderung einer neuen Lernkultur, in: Smolka, D. (Hrsg.), Schülermotivation – Konzepte und Anregungen für die Praxis, Neuwied 2004

KLIPPERT, H., Methodentraining – Übungsbausteine für den Unterricht, München und Weinheim 1998[8]

KÖHLER, H., Eigentätigkeit, in: Arbeitskreis Mathematik und Bildung (Hrsg.), Mathe, ja bitte – Wege zu einem anderen Unterricht, Eichstätt 1998, S. 33 - 38

KÖHLER, H., Sich ein Bild davon machen!, in: Arbeitskreis Mathematik und Bildung und Gesellschaft für Didaktik und Mathematik (Hrsg.), Mathematik – unsichtbar, doch allgegenwärtig, Eichstätt 2002

KOOPS, CH., LASKE, J., Alternative Leistungsbewertung im Projektunterricht, in: Pädagogisches Forum: ue Nr. 2 /2003, S. 85 – 87

KOTTER, K.-H., THUM, H. (Hrsg.), Unser Gymnasium auf dem Weg in die Zukunft – Schulentwicklung nach dem EFQM-Modell, München 2003

KROMREY, H., Evaluierung und Evaluationsforschung: Begriffe, Modelle und Methoden, in: Psychologie in Erziehung und Unterricht 2003, 50, S.11–26

LAAKMANN, H., Werbung in der Mathematik, PM Heft 3 / Juni 2005/ 47. Jg., S. 14 – 18

LANGDON, N., SNAPE, C., Mathematische Schatzkiste, Stuttgart 1997

LAUTH, R., Von der Notwendigkeit einer transzendentalen Begründung der Pädagogik, in: Gestalt und Wirklichkeit, hrsg. von Mühlher, R. und Fischl, J., Berlin 1967

LENGNINK, K., PREDIGER, S., Mathematisches Denken in der Linearen Algebra, in: ZDM 2000/4, S.111-122

LENGNINK, K., PESCHEK, W., Das Verhältnis von Alltagsdenken und mathematischem Denken als Inhalt mathematischer Bildung, in: Lengnink, K., Prediger, S. Siebel, F. (Hrsg.), Mathematik und Mensch, Darmstadt 2001, S. 65 - 82

Lengnink, K., Prediger, S., Lebendiges Mathematiklernen, Der Blick der Themenzentrierten Interaktion auf die Mathematikdidaktik, in: BuE 54 (2001) 3, S. 340

Lengnink, K., Prediger, S. Siebel, F. (Hrsg.), Mathematik und Mensch, Darmstadt 2001

Lengnink, K., Prediger, S. Siebel, F. (Hrsg.), Mathematik und Kommunikation, Darmstadt 2002

Lengnink, K., Situative Vorstellungswelten von Lernenden und mathematische Grundvorstellungen, Auf dem Weg zu mathematischer Mündigkeit, Darmstadt 2003

Lengnink, K., Siebel, F. (Hrsg.), Mathematik, Präsentieren, Reflektieren, Beurteilen, Darmstadt 2005

Leuders, T. (Hrsg.), Mathematik Didaktik, Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II, Berlin 2003

Leuders, T., Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II, Berlin 2001

Lewe, H., Eine Sachsituation mathematisieren: Sau auf der Autobahn, in: unterrichten/erziehen Nr. 3/2002, S. 128 – 130

Liebrucks, B., Sprache und Bewusstsein, Band 2, Frankfurt /M. 1965

Lippert, H., **Müller, A**., Montessori-Handbuch, Marktbreit 1995

Ludwig, M., Projekte im Mathematikunterricht des Gymnasiums, Hildesheim 1998

Ludwig, M., Raumgeometrie mit Kopf, Herz, Hand und Maus, Antrittsvortrag an der PH Weingarten, Weingarten 1993

Lüders, M., Dispositionsspielräume im Bereich der Schülerbeurteilung, in: Zeitschrift für Pädagogik, 47. Jg., 2001, Nr. 2, S. 217 – 234

Maass, K., Modellieren im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I, in: JMD 26 (2005) H. 2, S.114 – 142

Maass, K., Stau – eine Aufgabe für alle Jahrgänge! in: PM Heft 3 / Juni 2005/ 47. Jg., S. 8 – 13

Maier, H., Schweiger, F., Mathematik und Sprache – Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht, Wien 1999

Mankiewicz, R., Zeitreise Mathematik, London 2000

Meisterjahn-Knebel, G., Montessori-Pädagogik in der weiterführenden Schule – Der „Erdkinderplan“ in der Praxis, Freiburg 2003

MEYER, H., Unterrichtsmethoden I: Theorieband, Berlin 2003[10]

MEYER, H., Unterrichtsmethoden II: Praxisband, Berlin 2005[11]

MONTESSORI, M., Das kreative Kind, Freiburg 1972

MONTESSORI, M., „Kosmische Erziehung“ – Die Stellung des Menschen im Kosmos, Menschliche Potentialität und Erziehung, Von der Kindheit zur Jugend, Freiburg 1988

MONTESSORI, M., Schule des Kindes, hrsg. von P. Oswald und G. Schulz-Benesch, Freiburg, Basel und Wien 1976

MONTESSORI, M., Kinder sind anders, Stuttgart 1996[11]

MONTESSORI, M., Kosmische Erziehung, Freiburg 1988

MONTESSORI – VEREINIGUNG E.V., APS PROJECTGROEP MONTESSORI (HRSG.), Arbeitsbuch Geometrie, Köln und Utrecht 1996

MÜHLBAUER, K., Der Begriff Bildung in der Gegenwartspädagogik, St. Ottilien 1965

ZUR OEVESTE, H., Kognitive Entwicklung im Vor- und Grundschulalter, Göttingen 1987

PAFFRATH, H., Georg Kerschensteiners Idee der Arbeitsschule – Impulse für die Schule heute in: Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus und Landeshauptstadt München (Hrsg.), Stuttgart 1984, S.67– 93

PEKRUN, R., Facets of Adolescents’ Academic Motivation: A Longitudinal Expectancy-Value Approach, in: M.L. Maehr & P.R.: Pintrich (Eds.), Motivation and Adolescent Development (Advances in Motivation and Achievement (Vol. 8), Greenwich: JAI Press 1993

PIAGET, J., Einführung in die genetische Erkenntnistheorie, Frankfurt 1973

PIAGET, J., Theorien und Methoden der modernen Erziehung, Frankfurt 1994

PIAGET, J., Weisheit und Illusionen der Philosophie, Frankfurt 1974

PIAGET, J., INHELDER, B., Gesammelte Werke Band 6, Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde, Stuttgart 1999

PIAGET, J., INHELDER, B., Die Psychologie des Kindes, Stuttgart 1979

PIAGET, J., SZEMINSKA, A., Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde, Stuttgart 1972

PIAGET, J., Die Entwicklung des Erkennens I, Das mathematische Denken, Stuttgart 1972

RIECK, B., Mathematik 5 – Algebra und Geometrie, München 2003

RÖTTEL, K., Mathematik nützlich und schön vor 500 Jahren und heute, Eichstätt 2002

ROUSSAU, J.-J., Emile oder Über die Erziehung, Stuttgart 1965

SCZESNY, CH., Wochenplanarbeit im gymnasialen Mathematikunterricht, Übungen zum Rechnen mit rationalen Zahlen, in: unterrichten und erziehen Nr. 3/ 2002, S. 157 – 161

SCHELTEN, A., Schlüsselqualifikationen, in: unterrichten/ erziehen Nr. 3/2001, S.121–123

SCHLEIERMACHER, F., Theorie der Erziehung, in: Ausgewählte pädagogische Schriften, besorgt von E. Lichtenstein, Paderborn 1964

SCHLEIERMACHER, F., Hermeneutik und Kritik, hrsg. von M. Frank, Frankfurt 1977

SCHMID, A., WEIDIG, I., LS 5 – Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium, Ausgabe Bayern, Stuttgart 2003

SCHMOLKA,D. (Hrsg.), Schülermotivation – Konzepte und Anregungen für die Praxis, München 2004

SCHREMPF, R., Rubrics, in: Pädagogik 9/ 2002, S. 40 – 43

SCHULZE, H., Lernentwicklungsberichte in der Hauptschule, in: unterrichten/ erziehen Nr. 1/ 2001, S. 29–34

SCHUSTER, M., Vom Urteil zum dialogischen Feed-back, in: Pädagogisches Forum: ue Nr. 2 / 2003, S. 88–91

SEITZ, O., Employability – zum Nutzen von Qualifikationen und Kompetenzen, in: unterrichten/ erziehen Nr. 3/2001, S. 118 – 120

SEITZ, O., Motivierend: Schule ohne Motivation, in: unterrichten/ erziehen Nr. 5/2001, S. 229 –232

SEKRETARIAT DER STÄNDIGEN KONFERENZ DER KULTUSMINISTER DER LÄNDER IN DER BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND (Hrsg.), Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss, München 2004

SPRANGER, E., Wilhelm von Humboldt und die Humanitätsidee, Berlin 1909

SPRANGER, E., Wilhelm von Humboldt und die Reform des Bildungswesens, Berlin 1910

STAATSINSTITUT FÜR SCHULPÄDAGOGIK UND BILDUNGSFORSCHUNG (Hrsg.), Anhörung zum Lehrplan für das Gymnasium 27./ 28. März 2000, München 2000

STANDOP, J., Schule braucht einen pädagogischen Leistungsbegriff, in: unterrichten/ erziehen Nr.1/ 2001, S. 6 – 9

STEWART, I., Das Rätsel der Schneeflocke – Die Mathematik der Natur, Heidelberg 2002

STUDENY, G. Topologiekurs in der Oberstufe, München 1978

TERHART, E., Dimensionen des Methodenproblems im Unterricht, in: Pädagogik 2/2000, S. 32 – 34

TSCHAMLER, H., Sprache und Bildung, in: F. Stippel, Aspekte der Bildung, Donauwörth 1966, S. 84 – 95

TSCHAMLER, H , Georg Kerschensteiner, in: Gesamtschul-Informationen 19 (1988) 1-2, S. 107 – 123

TSCHAMLER, H., Die Entwicklung des Kindes, Ein Vergleich zwischen Maria Montessori und Jean Piaget, in: Materialgeleitetes Lernen – Elemente der Montessori-Pädagogik in der Regelschule, München 1991

TSCHAMLER, H., Wissenschaftstheorie – Eine Einführung für Pädagogen, München 1996[3]

TSCHAMLER, H., Unveröffentlichtes Manuskript eines Schulkonzeptes für ein Montessori-Gymnasium, München 2000

TSCHAMLER, H., Verstehen wie die Hand denkt, in: Die Hand denkt, Dokumentation der Fachtagung 2003 des BeA vom 13. –14. März 2003, Zentraler Vertrieb des Diakonischen Werkes der EKD, S. 25 – 45, Stuttgart 2003

VIERLINGER, R., Die „Direkte Leistungsvorlage“ (Portfolio) als Alternative zur Notengebung, in: unterrichten/ erziehen Nr. 1/ 2001, S. 19 – 21

VORDERMANN, C., Spannendes aus der Welt der Mathematik, München 2000

WAGENER, M., Zur Wechselwirkung von verbaler Beurteilung und Unterrichtsgestaltung in der Grundschule, in: unterrichten/ erziehen Nr. 1/ 2001, S. 42 – 43

WARZEL, A., Die bildungskategoriale Didaktik Franz Fischers in ihrem Spannungsverhältnis zu Fachdidaktik und Modelltheorie – mit besonderer Berücksichtigung der Fachdidaktik der Mathematik, Frankfurt 1983

WARZEL, A., Grundaktivitäten als Brücke von allgemeinen Lernzielen des Mathematikunterrichts zu Fachinhalten, in: mathematik lehren /Heft 56, S. 58 – 66

WEHLE, G., Georg Kerschensteiner, Berufsbildung und Berufsschule, Ausgewählte pädagogische Schriften Band I, Paderborn 1966

WEIDIG, I., Topologische Fragen in der geometrischen Propädeutik, in: Der Mathematikunterricht 1970/1, S. 5 – 17

WILHELM, T., Georg Kerschensteiner, in: Scheuerl, H. (Hrsg.), Klassiker der Pädagogik I, München 1979

WINTER, H., Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht, Braunschweig 1989

WITTENBERG, A.I., Bildung und Mathematik, Stuttgart 1963

ZIMMER, R., Handbuch der Sinneswahrnehmung, Freiburg, Basel und Wien 1995

Abbildungs- und Tabellenverzeichnis

A. Anhang

Lehrplan 7. Jahrgangsstufe[546]

M 7.1 Figurengeometrie: vom Zeichnen und Beschreiben zum Konstruieren und Begründen

Bei der Erzeugung symmetrischer Figuren lernen die Schüler das mathematisch wie kulturhistorisch bedeutsame Prinzip der Konstruktion mit Zirkel und Lineal kennen. Sie lernen geometrische Phänomene allmählich differenzierter zu analysieren sowie folgerichtig zu argumentieren und zu begründen. Eine abstraktere Denkweise ergänzt nach und nach ihren bisher anschaulich und intuitiv geprägten Wissenserwerb.

M 7.1.1 Achsen- und punktsymmetrische Figuren (ca. 12 Std.)

Anhand von Figuren aus ihrer Erfahrungswelt erkennen die Schüler die Achsen- und Punktsymmetrie als natürliches Gestaltungsprinzip. Sie verwenden aus der Anschauung gewonnene Fundamentalsätze zur Begründung der ersten Grundkonstruktionen. Anhand der Vielfalt der Vierecke erschließt sich ihnen die Symmetrie als ein Ordnungsprinzip.

Achsensymmetrie: Eigenschaften, Konstruktion von Spiegelpunkt und Achse [→ NT 7.1.1]

Mittelsenkrechte, Lot; Winkelhalbierende

Punktsymmetrie: Eigenschaften, Konstruktion von Spiegelpunkt und Zentrum

Übersicht über symmetrische Vierecke

M 7.1.2 Winkelbetrachtungen an Figuren (ca. 8 Std.)

Die Schüler entdecken die wesentlichen Zusammenhänge an Geradenkreuzungen bzw. Doppelkreuzungen mit parallelen Geraden und beschäftigen sich mit Winkelsummensätzen. Dabei wird ihnen auch der Unterschied zwischen Fundamentalsätzen und daraus abgeleiteten Sätzen deutlich gemacht.

Geradenkreuzung: Scheitel- und Nebenwinkel; Doppelkreuzung: Stufen- und Wechselwinkel

Innenwinkelsumme beim Dreieck und beim Viereck

M 7.2 Auf dem Weg von der Zahl zur Funktion

[546] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (Hrsg.), Lehrplan für das Gymnasium in Bayern, Mathematik 2003

Die Verwendung von Variablen beispielsweise in einfachen Formeln aus der Geometrie ist den Jugendlichen bereits bekannt. Sie befassen sich nun mit Termen, systematisieren ihre Vorkenntnisse und sammeln erste Erfahrungen mit funktionalen Zusammenhängen.

M 7.2.1 Term und Zahl (ca. 6 Std.)

Die Schüler erkennen, dass Sachverhalte bei Verwendung von Variablen kurz und treffend beschrieben werden können. Damit wird der bisher verwendete Termbegriff erweitert. Bei Termwertberechnungen wiederholen und vertiefen sie ihre Kenntnisse und Fertigkeiten im Rechnen mit rationalen Zahlen.

Termbegriff, Berechnen von Termwerten

M 7.2.2 Term und Abhängigkeit (ca. 6 Std.)

Bei der Beschäftigung mit unterschiedlichsten funktionalen Abhängigkeiten erfahren die Schüler, wie diese mit Termen beschrieben werden können. Sie diskutieren daraus resultierende Fragestellungen und bereiten so den Funktionsbegriff vor. Unter anderem erkennen sie, dass zu jeder zulässigen Einsetzung genau ein Termwert gehört.

Aufstellen und Interpretieren von Termen

Argumentieren mit Hilfe von Termen, Veranschaulichen ausgewählter Terme

M 7.3 Terme und Gleichungen

Beim Diskutieren von Abhängigkeiten und Begründen von Sachverhalten stellen die Schüler fest, dass das Umformen von Termen bzw. das Lösen von Gleichungen nötig ist. Im Sinne kumulativen Lernens üben sie die grundlegenden Techniken ein, die sie im weiteren Verlauf des Schuljahrs und in den nachfolgenden Jahrgangsstufen vertiefen.

M 7.3.1 Umformen von Termen (ca. 16 Std.)

Beispielsweise beim unterschiedlichen Vorgehen zur Gewinnung der Flächenformel des Trapezes zeigt sich, dass Terme zielgerichtet, also abhängig vom jeweiligen Kontext, umgeformt werden müssen. Die Schüler lernen, auf der Grundlage der Rechengesetze für rationale Zahlen Terme angemessener Komplexität in äquivalente Terme umzuwandeln. Dabei wird je nach Zielsetzung zusammengefasst, ausmultipliziert und in einfachen Fällen auch faktorisiert. Durch intensives Üben wird ein Fundament algebraischer Fertigkeiten gelegt.

Zusammenfassen der Rechengesetze für rationale Zahlen

Umformen von Produkten, Potenzen mit natürlichen Exponenten

Umformen von Summen, Klammerregeln, Multiplizieren von Summen

M 7.3.2 Lösen von Gleichungen (ca. 9 Std.)

Das Mathematisieren von Sachzusammenhängen führt häufig zu linearen Gleichungen mit einer Variablen [→ NT 7.1]. Die Schüler gewinnen Verständnis für das systematische Lösen dieser Gleichungen und lernen, einen Lösungsalgorithmus sicher anzuwenden. Dabei wird ihnen bewusst, dass sie die durch das Kalkül gewonnene Lösung kritisch reflektieren müssen.

Begriff der linearen Gleichung mit einer Variablen

Aufstellen und Lösen solcher Gleichungen

M 7.4 Mathematik im Alltag: Daten, Diagramme und Prozentrechnung (ca. 11 Std.)

Die Schüler werten Daten aus Zufallsexperimenten oder statistischen Erhebungen graphisch und rechnerisch aus. Das Analysieren von Diagrammen [→ D 7.1] fördert ihre Fähigkeit, Sachverhalte zu beurteilen. Sie wiederholen dabei den Begriff der relativen Häufigkeit und die Grundlagen des Prozentrechnens. Durch Beschäftigung mit Fragestellungen, die eine Veränderung des Grundwerts erfordern, vertiefen die Schüler ihre Kenntnisse aus Jahrgangsstufe 6.

Auswerten von Daten (auch arithmetisches Mittel)

Wiederholen und Vertiefen des Prozentrechnens

M 7.5 Figurengeometrie: das Dreieck als Grundfigur

Häufig lassen sich reale Objekte gut mit geradlinig begrenzten geometrischen Figuren darstellen, deren Untersuchung unmittelbar auf Dreiecke als Grundbausteine führt. Daher beschäftigen sich die Schüler unter verschiedenen Gesichtspunkten weiter mit der Grundfigur Dreieck. Um geometrische Zusammenhänge auch experimentell zu erschließen, nutzen die Schüler dynamische Geometriesoftware als interaktives Werkzeug und knüpfen dabei an die aus Natur und Technik (Schwerpunkt Informatik) bekannte objektorientierte Sichtweise an.

M 7.5.1 Kongruenz (ca. 6 Std.)

Die Frage, wann zwei Dreiecke deckungsgleich sind, führt die Schüler zur eindeutigen Konstruierbarkeit eines Dreiecks aus gegebenen Seiten oder Winkeln. Sie lernen davon ausgehend die Kongruenzsätze kennen, die als Fundamentalsätze verwendet werden.

Begriff der Kongruenz von Figuren

Kongruenzsätze für Dreiecke und grundlegende Konstruktionen

M 7.5.2 Besondere Dreiecke (ca. 14 Std.)

Durch Kongruenz- oder Symmetrieüberlegungen erfassen die Schüler die Eigenschaften des gleichschenkligen und des gleichseitigen Dreiecks. Am Beispiel des Satzes von Thales können sie erfahren, wie es dynamische Geometriesoftware erleichtern kann, Vermutungen aufzustellen. Sie verstehen den Beweis des Satzes von Thales sowie den seiner Umkehrung. Sie erkennen, dass sich neue Möglichkeiten für Konstruktionen eröffnen.

gleichschenkliges und gleichseitiges Dreieck

rechtwinkliges Dreieck, Satz des Thales; Konstruktion von Kreistangenten

M 7.5.3 Konstruktionen (ca. 12 Std.)

Beim Konstruieren von Dreiecken und Vierecken werden Einfallsreichtum und geistige Wendigkeit der Schüler entwickelt. Wesentliches Ziel ist außerdem die Fähigkeit, Konstruktionsabläufe zu planen und zu dokumentieren. Fragen der Konstruierbarkeit und Lösungsvielfalt bei Variation der Bestimmungsstücke untersuchen die Schüler z. B. mit Hilfe von dynamischer Geometriesoftware. Zur Abrundung ihrer Geometriekenntnisse setzen sie ihre erworbenen Fähigkeiten bei anwendungsbezogenen Aufgabenstellungen ein.

Wiederholung von Höhe, Winkelhalbierender und Mittelsenkrechter; Umkreis

Konstruktion von Dreiecken und Vierecken auch in Sachzusammenhängen

M 7.6 Vertiefen der Algebra (ca. 12 Std.)

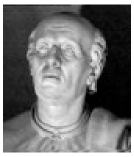
Die Schüler mathematisieren erneut Sachzusammenhänge durch Terme oder Gleichungen. Dabei wählen sie die der jeweiligen Problemstellung angemessene Strategie, erkennen Sinn und Nutzen der bereits erlernten Techniken und vertiefen diese in vielfältigen Anwendungen. Um flexibel einsetzbare Grundlagen zu entwickeln, steht vor allem die Verknüpfung der verschiedenen erlernten Kenntnisse und Methoden im Vordergrund. Die Schüler verbessern ihre Fähigkeit, mit Hilfe von Termen zu argumentieren und Zusammenhänge zu verbalisieren. Dabei wiederholen und vertiefen sie gezielt den Umgang mit den bisher bekannten Größen und deren Einheiten.

	400 – 1000 Frühmittelalter	1000 – 1300 Hochmittelalter	1300 – 1500 Spätmittelalter	1500 – 1600 frühe Neuzeit	1600 – 1700
Politik					
Literatur					
Musik		A_2 B_2 C_2			
Kunst					
Religion				A_4 B_4 C_4	
Technik/ Wissenschaft					
Wirtschaft/ Gesellschaft					
Entdeckungen					
Mathematik					

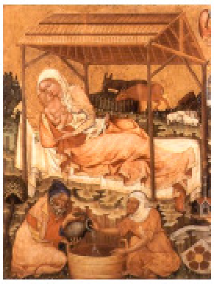
Abbildung A-1: Übersicht und Systemtatik der Bezeichnungen

Entdeckung und Begründung der Zentralperspektive

Wie kann man den dreidimensionalen Raum möglichst wirklichkeitsgetreu auf einer zweidimensionalen Bildfläche darstellen? Diese Frage beantwortete Filippo Brunelleschi, ein italienischer Bildhauer und Architekt, indem er die Gesetze der linearen Zentralperspektive entdeckte und begründete. Unter Zentralperspektive versteht man eine **geometrische Konstruktion**, bei der alle Orthogonalen (die in den rückwärtigen Raum verlaufenden Linien) auf einen einzigen zentralen Fluchtpunkt zulaufen.



Gemälde von den Meistern von Hohenfurth von 1350 **ohne Anwendung der Zentralperspektive**. Auf uns wirkt es ein wenig schief. Die wichtigen Elemente wurden groß, weniger wichtige klein dargestellt.



Das Gemälde „Schlüsselübergabe" von Perugino ist **mit Konstruktion der Zentralperspektive** gemalt. Der Fluchtpunkt liegt in der Mitte der Tür.

Grundregeln der Perspektive

1. Alle senkrechten Linien in der Wirklichkeit bleiben auch senkrecht in der Zeichnung.
2. Alle raumbildenden waagerechten parallelen Linien in der Wirklichkeit verlaufen in der Zeichnung zu dem Fluchtpunkt auf der Horizontlinie.
3. Linien, die in der Abbildungsebene liegen, erscheinen in wahrer Länge, Linien hinter der Abbildungsebene erscheinen verkürzt, Linien vor der Abbildungsebene erscheinen verlängert.

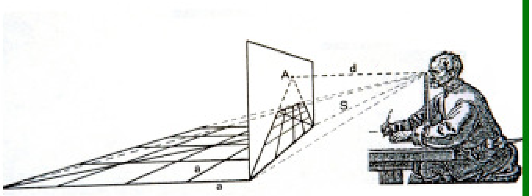


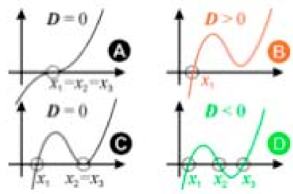
Abbildung A-2: Beispielkarte zum Thema "Zentralperspektive" (Mathematik)

Cardanische Formeln

Gerolamo Cardano war ein Arzt und Mathematiker.
Als Mathematiker hat er wichtige Entdeckungen auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der komplexen Zahlen gemacht. Seine Kenntnisse über die Wahrscheinlichkeitstheorie hielt er zunächst zurück, um sich damit beim Glücksspiel Geld zu verdienen.
In seinem Buch *Ars magna de Regulis Algebraicis*, gibt er als erster Methoden zur expliziten Lösung von Gleichungen dritten und vierten Grades an (Cardanische Formeln). Jedoch schuf er sich damit einen großen Feind. Denn schon vorher hatte der Lehrer Tartaglia die Lösungen einer großen Klasse von kubischen Gleichungen entdeckt, sie aber für sich behalten, um gegen Bezahlung entsprechende Probleme zu lösen. Cardanons Formeln jedoch waren allgemeiner Art, da sie alle kubischen Gleichungen umfassten.
Trotzdem wurde er von Tartaglia des Diebstahls und des Meineids bezichtigt – denn Cardano hatte geschworen, das Geheimnis der kubischen Gleichungen niemals zu verraten. Tartaglia sammelte Anschuldigungen gegen Cardano, die zusammen mit anderen Anklagen dazu führten, dass Cardano in die Keller der Inquisition geworfen wurde. Nur der Erzbischof von Schottland, den er früher geheilt hatte, erreichte, dass man ihn wieder freiließ.
Danach ging Cardano nach Rom, wo er im Ärztekolleg Aufnahme fand und dort bis zu seinem Tode wirkte. Er brüstete sich damit, dass er seinen eigenen Tod bis auf die Stunde genau voraussagen könne. Als die Stunde seines vorausgesagten Todes gekommen war, musste er peinlich berührt feststellen, dass er sich bester Gesundheit erfreute. Da er seinen eigenen Fehler nicht eingestehen wollte, beging er Selbstmord.

Die allgemeine Gleichung dritten Grades $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit den reellen Zahlen a, b, c, d, wobei $a \neq 0$ kann durch Division durch a und Substitution $y = x + \frac{b}{3a}$ in die Form $y^3 + py + q = 0$ gebracht werden. Es sei $D = 4p^3 + 27q^2$ die Diskriminanten der linken Seite.
Das Lösungsverhalten hängt nun entscheidend vom Vorzeichen der Diskriminante ab:

- **$D > 0$: Es gibt genau eine reelle Lösung und zwei echt komplexe Lösungen (B).**
- **$D = 0$: Es gibt entweder eine doppelte reelle Lösung und eine einfache reelle Lösung (C) oder eine dreifache reelle Lösung (A).**
- **$D < 0$: Es gibt drei verschiedene reelle Lösungen (D).**



Leite die Cardanischen Formeln her!

Abbildung A-3: Beispielkarte zum Thema "Cardanische Formeln" (Mathematik)

Der schwarze Tod

Die Pestepidemie, die von 1348 bis 1352 wütete, raffte mehr als ein Viertel der Bevölkerung Europas dahin. Die Pest war äußerst ansteckend und entvölkerte Dörfer und Städte.
Die Toten wurden in Massengräbern, oft ohne Särge bestattet. Manchmal überlebten nicht genügend Menschen, und die Toten blieben liegen und verwesten.

Opfer der Beulenpest
Diese Miniatur aus der Toggenburger Bibel (14. Jahrhundert) zeigt ein an der Beulenpest erkranktes Paar. Die typischen Symptome der Beulenpest sind dicke Beulen am ganzen Körper, hohe Temperatur, starke Gelenkschmerzen und Erbrechen; die meisten Erkrankten starben innerhalb einer Woche nach Ausbruch der Krankheit. Die Person im Bildhintergrund scheint für das kranke Paar zu beten.

Ein Pestarzt mit einer ledernen Gesichtsmaske, die vor Ansteckung schützen sollte.

Abbildung A-4: Beispielkarte zum Thema "Pest" (Gesellschaft)

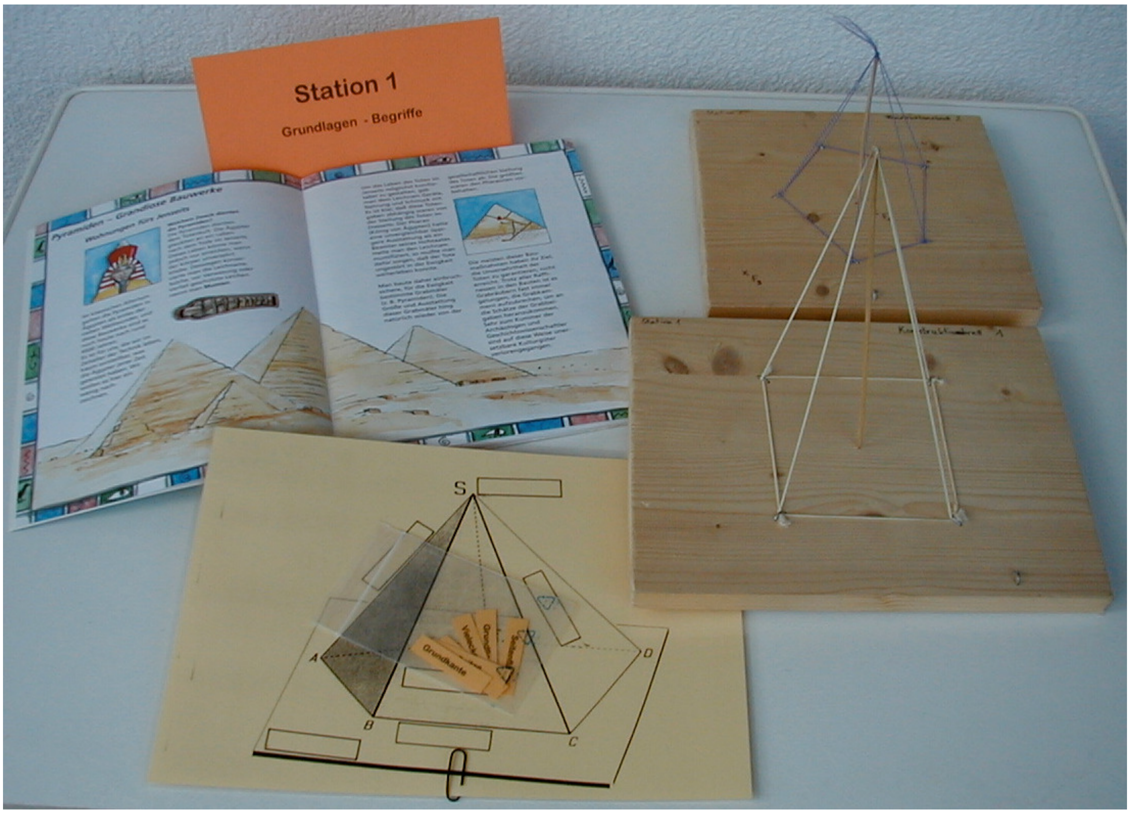


Abbildung A-5: Gummimodell zur Begriffsbildung und Informationen zur Geschichte

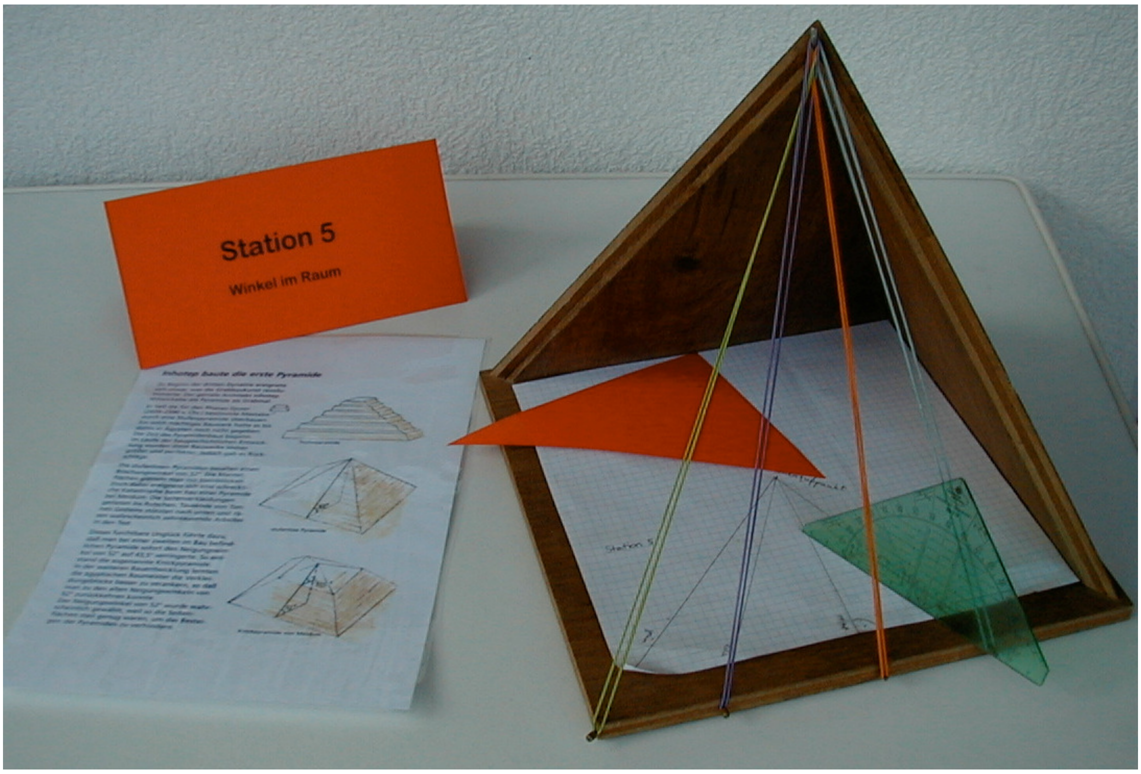


Abbildung A-6: Pyramidenmodell und Hinweise zu Pyramiden in Ägypten

Abbildung A-7: Modell zum Prinzip des Cavalieri

Lebenslauf

Jutta Möhringer

Geboren am 05. Dezember 1967 in Würzburg

2004 – 2006	Promotionsstudiengang an der LMU München Hauptfach: Pädagogik Nebenfach: Didaktik der Mathematik Nebenfach: Psychologie
seit 09/2003	Studienrätin (Staatsdienst) in Mutterschutz bzw. Elternzeit
03/2002 – 08/2003	Schulleiterin am Montessori-Gymnasium Biberkor, Berg
08/2000 – 02/2002	Entwicklungshelferin am Vocational Training Center in Battambang, Kambodscha
02/1995 – 07/2000	Studienrätin für Mathematik, Wirtschaft- und Rechtslehre, Sport am Gymnasium Wiesentheid
1993 – 1995	Referendariat am Rupprecht-Gymnasium und Max-Josef-Stift München in den Fächern Mathematik, Wirtschafts- und Rechtslehre und Sport mit 2. Staatsexamen
1989 – 1993	Studium Sport für das Lehramt an Gymnasien an der TU München mit 1. Staatsexamen
1986 – 1992	Studium Mathematik und Wirtschaftswissenschaften für das Lehramt an Gymnasien an der Ludwig-Maximilians-Universität München mit 1. Staatsexamen
1986 – 1987	Studium der Mathematik und Informatik an der TU Darmstadt
1977 – 1986	Besuch des Gymnasiums (Mathematisch-Naturwissenschaftlicher Zweig) Wiesentheid mit Abiturprüfung
1974 – 1977	Besuch der Nikolaus Fey Grundschule Wiesentheid