

Ludwig-Maximilians-Universität München

ZUR DYNAMIK
RELATIVISTISCHER TEILCHEN
IN ASTROPHYSIKALISCHEN PLASMEN

Dissertation der Fakultät für Physik der
Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Rüdiger Schopper
aus Erding

München, den 10.5.2002

1. Gutachter: Prof. Dr. Harald Lesch
 2. Gutachter: Prof. Dr. Gregor Morfill
- Tag der mündlichen Prüfung: 25.7.2002

© Rüdiger Schopper 2002

Zusammenfassung

Mit der vorliegenden Arbeit wird die weltweit erste numerische Simulation eines selbstinduzierten freien Elektronen Lasers (FEL) vorgestellt. Zu ihrer Durchführung wurde ein massen- und energierhaltender „Particle in Cell Code“-(PIC) verwendet, der es erlaubt eine Region in einer Pulsarmagnetosphäre entsprechend der kinetischen Plasmatheorie zu behandeln und damit den dort agierenden FEL-Prozeß zu modellieren.

Zunächst wird die Existenz eines FEL-Szenarios in einer Pulsarmagnetosphäre motiviert und die physikalischen Parameter an einem solchen Ort dargelegt. Anschließend werden die für diese Arbeit relevanten Teile der relativistischen, kinetischen Plasmatheorie erarbeitet, soweit dies für das Verständnis des FEL notwendig ist.

Nach einer genauen Beschreibung der verwendeten, numerischen Verfahren werden die Ergebnisse aus der Simulation im Detail diskutiert. Dabei wird nicht nur auf das Anwachsen von elektrostatischen Langmuirwellen eingegangen, sondern auch die Energetik der beteiligten Plasmen und der emittierten Strahlung genau besprochen.

In der Simulation zeigen sich viele, bisher nur in theoretischen Arbeiten vorhergesagte Vorgänge, deren prognostiziertes Auftreten in der Natur nun noch stärker untermauert werden kann. Insgesamt bestätigen die Ergebnisse aus der Simulation auf eindrucksvolle Weise die Vorstellung, wie ein FEL-Prozeß in einer Pulsarmagnetosphäre ablaufen soll. Sowohl die Zeitskalen, als auch die emittierte Leistung und Frequenzen lassen sich gut mit den Erkenntnissen aus den Radiobeobachtungen von Pulsaren in Einklang bringen, was ein starkes Argument für den FEL als zugrundeliegenden, kohärenten Emissionsmechanismus bei Pulsaren ist.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	3
Inhalt	5
1 Einleitung	7
2 Freier Elektronen Laser und Pulsare	11
2.1 Allgemeines zu Pulsaren	12
2.2 Die Pulsarmagnetosphäre	13
2.3 Beobachtungen von Pulsaren	15
2.4 Der freie Elektronen Laser	19
3 Theoretische Grundlagen	21
3.1 Kinetische Theorie der Strahlinstabilität	22
3.2 Funktionsweise des Freien Elektronenlasers	27
4 Numerische Realisierung	33
4.1 Numerische Methoden	34
4.2 Normierung der physikalischen Größen	36
4.3 Maxwell-Gleichungen	37
4.4 Vlasogleichung	39
4.5 Die Stromdichte	43
4.6 Numerische Details der Simulation	45
5 Ergebnisse aus den Simulationen	49
5.1 Untersuchung des Phasenraums	50
5.2 Die Teilchendichte der Elektronen	56
5.3 Die Langmuirinstabilität	61
5.4 Energetik	64
5.5 Spektrum und Abstrahlcharakteristik	68
6 Diskussion der Ergebnisse	73
Danksagung	77
Tabellarischer Lebenslauf	78
Literaturverzeichnis	79

Kapitel 1

Einleitung

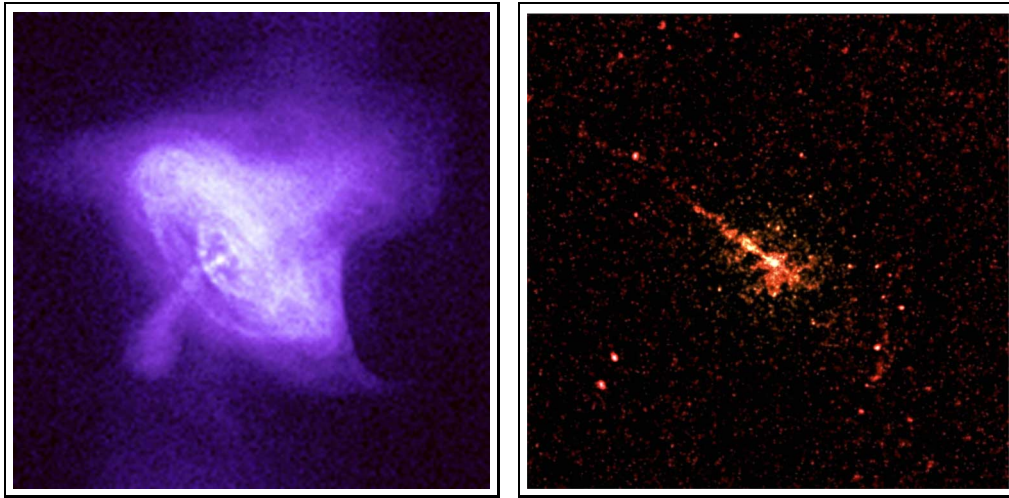


Abbildung 1.1: Nichtthermische Röntgenstrahlung des Krebs-Pulsars (links) und des extragalaktischen Jets von Centaurus A (rechts), beide Bilder aufgenommen mit dem Röntgensatelliten Chandra.

Warum ist der Nachthimmel dunkel? Eine im ersten Moment einfach zu beantwortende Frage. Je länger man jedoch darüber nachdenkt, desto komplizierter erscheint sie und desto schwieriger fällt ihre Beantwortung. Das sogenannte Olberzsche Paradoxon besagt: Wäre das Universum unendlich groß und gleichmäßig mit Sternen gefüllt, dann müßte der Himmel in allen Richtungen gleichmäßig hell erscheinen, da man, egal wohin man blickt, immer einen Stern findet, auf dessen Oberfläche man gerade schaut.

Die Beantwortung obiger Frage (siehe auch KIPPENHAHN (1995b)) und die Lösung für das Olberzsche Paradoxon führten direkt zur Untersuchung der Endlichkeit und der Expansion des Universums — zu dem „Woher kommen wir“ und zu dem „Wohin gehen wir“.

Gegenstand vorliegender Untersuchungen ist eher die umgekehrte Fragestellung: Wie entsteht die nichtthermische Strahlung, die man bei der Beobachtung von nahezu jedem astrophysikalischen Objekt finden kann? Beispiele für solche Beobachtungen sind u.a. so verschiedene Objekte wie aktive galaktische Kerne (AGN), extragalaktische Jets (siehe Abb. 1.1 rechts), Neutronensterne (siehe Abb. 1.1 links), Hauptreihensterne (z.B. Sonne) und sogar Kometen. Diese Fragestellung hängt sehr eng mit dem Entstehen von nichtthermischen Teilchenverteilungsfunktionen zusammen, d.h. mit der Existenz von geladenen Teilchen, die nicht durch eine thermische Maxwellverteilung beschrieben werden können.

Betrachtet man die Existenz von nichtthermischen Teilchenverteilungen als gegeben, so kann man die elementaren Emissionsprozesse untersuchen, die für die Umwandlung von Teilchenenergie in Strahlungsenergie verantwortlich sind. Dafür ist eine detaillierte Beschreibung eines Plasmas auf mikroskopischen Längen- und Zeitskalen notwendig, d.h. man muß sich mit der kinetischen Theorie eines Plasmas auseinandersetzen. Das soll unter anderem in Kapitel 3 geschehen, wo der sogenannte freie Elektronen Laser (FEL), ein kohärenter Emissionsmechanismus, näher beschrieben und die physikalischen Grundlagen erarbeitet werden sollen.

Die Untersuchung der Emissionsprozesse ist von großer Bedeutung für das Ver-

ständnis der Abläufe in astrophysikalischen Objekten. Da man weit entfernte Regionen nahezu ausschließlich¹ mittels elektromagnetischer Strahlung wahrnimmt, ist der Ursprung dieser Strahlung, der Emissionsprozeß, das Fenster zur Welt. Es entscheidet also die Physik in mikroskopisch kleinen Raumbereichen darüber, was überhaupt vom Universum beobachtet werden kann. Daraus folgt ein paradoxer Sachverhalt: Um die Beobachtungen von „astronomisch“ weit entfernten astrophysikalischen Objekten mit z.T. gigantischen Ausmaßen erklären zu können, muß man sich mit der zugrundeliegenden Mikrophysik auseinandersetzen, d.h. mit der Plasmaphysik am Entstehungsort der Strahlung und der von ihr transportierten Information. Dies widerspricht der physikalischen Intuition. Da man bei jeder Beobachtung nur eine endliche Auflösungsgenauigkeit erreichen kann und da die astrophysikalischen Objekte sehr weit entfernt sind, kann man nur grobe Details überhaupt auflösen, Details nämlich, die weit größer sind als die typischen Plasmaparameter, wie Elektrongyroradius r_{ce} , Debyelänge λ_D oder Elektronenskinlänge λ_{skin} , die die zugrundeliegende Plasmaphysik beherrschen. Naiv würde man sagen, daß eine grobe Betrachtungsweise ausreichend und sinnvoll sein sollte, bei der man nichtbeobachtbare, kleinskalige Effekte wegmittelt. Dies ist nur insoweit korrekt, als daß man nur sehen kann, was einem die mikroskopischen Emissionsmechanismen vermitteln. Da die Beobachtungsergebnisse von den Emissionsprozessen abhängig sind, ist eine Untersuchung der zugrundeliegenden Plasmaphysik nicht nur sinnvoll, sondern sogar zwingend erforderlich. Im Falle von thermischer Strahlung wird nicht mehr als die gemittelte Information transportiert, so daß in diesem Fall die grobe, makroskopische Betrachtungsweise richtig und die einzig mögliche ist. Doch schon einzelne Spektrallinien auf dem thermischen Hintergrund, seien es Emissions- oder Absorptionslinien, geben wertvolle Zusatzinformationen über den Entstehungsort, z.B. Druck, Gravitationsfeld oder Magnetfeld. Man kann sagen, je nichtthermischer die beobachtete Strahlung ist, desto mehr Information kann man daraus gewinnen, indem man die Mikrophysik der Strahlungsentstehung untersucht.

Oft ist die Beobachtung von nichtthermischer Strahlung als solches schon überraschend. Als Beispiele hierfür sein die zwei in Abbildung 1.1 gezeigten Objekte, der Krebs-Nebel und der Röntgenjet von Centaurus A, genannt. Der Jet von Centaurus A emittiert Röntgen-Synchrotron-Photonen, was auf eine Elektronenpopulation mit einer Energie von etwa 100 TeV schließen läßt, die entlang des gesamten Jets vorhanden sein muß. Allein aus der Existenz der Röntgenphotonen lassen sich weitreichende Überlegungen zu den physikalischen Vorgängen in extragalaktischen Jets anstellen, dies soll aber nicht Gegenstand dieser Arbeit sein. Der Pulsar im Krebs-Nebel in Abbildung 1.1 macht sich auch durch die Emission von Röntgen-Synchrotron-Photonen bemerkbar. Gerade bei Pulsaren findet sich aber noch eine Fülle anderer nichtthermischer Strahlungsarten und damit auch Emissionsprozessen. Daher ist es auch nicht verwunderlich, daß sie die astrophysikalischen Objekte sind, über die am meisten Details bekannt sind. Die wohl interessanteste Strahlungsart, die im Zusammenhang mit Pulsaren beobachtet wird, ist die kohärente Radiostrahlung hoher Helligkeitstemperatur, die sich mit dem sogenannten „freien Elektronen Laser“ (FEL)-Prozeß erklären läßt, der in dieser Arbeit genauer untersucht werden soll (vgl. Kapitel 2). Ziel ist die Durchführung einer numerische Simulation des FEL-Prozesses und die Darstellung der wesentlichen Vorgänge im Plasma.

¹Ausnahmen sind die Beobachtungen von kosmischer Strahlung, von Neutrinos und eventuell in Zukunft von Gravitationswellen, da es sich hierbei nicht um elektromagnetische Strahlung handelt.

Die Bedeutung des FEL als Plasmaeffekt geht weit über Pulsarmagnetosphären hinaus. Kohärente Radiostrahlung findet sich wie in BAKER ET AL. (1988) dargestellt bei den unterschiedlichsten astrophysikalischen Objekten. Dazu gehören neben nahgelegenen Quellen wie der Sonne oder der Jupitermagnetosphäre auch weit entfernte Objekte wie Quasare im Zentrum aktiver Galaxien und extragalaktische Jets von BL-LACs. Bei allen genannten Objekten stellt sich die Frage nach dem Ursprung der kohärenten Radiostrahlung und neben anderen Modellen stellt der FEL eine der diskutierten Alternativen dar. Speziell die nahen Quellen Sonne und Jupiter ermöglichen eine detaillierte Untersuchung des Emissionsgebiets und geben somit die Möglichkeit durch direkte Messungen die physikalischen Bedingungen am Emissionsort zu erhalten und so den Emissionsprozeß zu identifizieren, bzw. auszuschließen. Aufgrund seiner Relevanz und seiner breiten Anwendbarkeit auf die verschiedensten astrophysikalischen Kontexte wird der FEL-Prozeß in den Kapiteln 3–5 ganz allgemeingültig und ohne Spezialisierung auf Pulsarmagnetosphären behandelt. Dennoch werden für die verwendeten Parameter in der numerischen Simulation die in einer Pulsarmagnetosphäre angenommen, so daß die Ergebnisse direkt auf diese interessanten Objekte angewendet werden können.

Kapitel 2

Der freie Elektronen Laser in der Pulsarmagnetosphäre

Dieses Kapitel soll motivieren, warum der „Freie Elektronen Laser“ (FEL) für die Radioemission von Pulsaren eine Rolle spielen könnte. Dazu werden zunächst die allgemeinen Eigenschaften von Pulsaren kurz zusammengefaßt und anschließend die wesentlichen Parameter in der Pulsarmagnetosphäre zum Zwecke der späteren Verwendung angegeben. In Abschnitt 2.3 wird auf die Beobachtungen im Zusammenhang mit Pulsaren eingegangen. Insbesondere die Radiobeobachtungen, die hochgradig kohärente Emission zeigen, sollen hier erörtert werden. In Abschnitt 2.4 sind Experimente und andere Untersuchungen beschrieben, die es plausibel machen, den FEL als den verantwortlichen kohärenten Emissionsmechanismus bei Pulsaren zu betrachten.

2.1 Allgemeines zu Pulsaren

Die ersten Pulsare wurden vor 35 Jahren von Jocelyn Bell mit einem Radioteleskop entdeckt (HEWISH ET AL. (1968)), als extrem regelmäßige starke Radiopulse mit einer Periode von etwa 1 s gemessen wurden. Zuerst vermutete man daher einen instrumentellen oder terrestrischen Ursprung. Schnell fand man aber heraus, daß es sich um Signale aus dem Kosmos handelte. Als Erklärung für die gepulste Radiostrahlung schieden rotierende Hauptreihensterne und Weiße Zwerge aus, da diese bei den sehr kurzen Perioden von höchstens einigen Sekunden von den Zentrifugalkräften zerrissen würden. Auch wird die Periode von „normalen“ Sternen mit der Zeit kleiner, während sie bei Pulsaren sehr langsam wächst. Weitere Ideen zur Erklärung von Pulsaren, wie pulsierende Sternoberflächen, erwiesen sich ebenfalls als falsch, trotzdem gab diese Idee den „Pulsaren“ ihren Namen (siehe auch KIPPENHAHN (1995a)). Inzwischen besteht Einigkeit darüber, daß Pulsare kompakte Überreste von Supernova-Explosionen, sogenannte Neutronensterne sind. Während bei normalen Hauptreihensternen der thermische Druck den Stern gegen die Gravitationskraft stabil hält, ist es bei Weißen Zwergen der Fermidruck der Elektronen bzw. bei Neutronensternen der Fermidruck von Neutronen. In einem Neutronenstern ist die Fermienergie von Protonen (p) und Elektronen (e^-) so hoch, daß der inverse β -Zerfall $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ in Neutronen (n) und Elektronenneutrinos (ν_e) möglich wird. Diese Neutronen üben aufgrund des für Fermionen geltenden Paulischen Ausschließungsprinzips Druck aufeinander aus, der dem Neutronenstern seine Stabilität verleiht (RUDERMAN ET AL. (1998)). Neutronensterne, die als riesige Atomkerne angesehen werden können, stellen den letzten bekannten stabilen Zustand von Materie dar. Bei noch höheren Dichten gibt es keine Kraft mehr, die die Gravitationskraft kompensieren könnte und man spricht von einem sogenannten „Schwarzen Loch“. Genau genommen trifft die obige Beschreibung nur auf das Innere des Neutronensterns zu, da nur dort die genannten extremen Zustände auftreten. Deshalb geht man davon aus, daß ein Neutronenstern in seinem Inneren besagter riesiger Atomkern ist, auf dem verschiedene Schichten anderer exotischer Materie liegen, wie zum Beispiel eine „Weiße Zwerg“-Schicht. An der Oberfläche soll ein Neutronenstern einer Eisenkugel mit beweglichen Eisenkontinenten entsprechen, es gibt Beobachtungen, die durch Sternbeben erklärt werden können. Jedoch ist jede Aussage über die innere und äußere Struktur eines Neutronensterns bislang hauptsächlich Spekulation, da es noch nicht einmal eine allgemein anerkannte Zustandsgleichung für die Neutronensternmaterie gibt.

Trotzdem hat es die Beobachtung, vor allem diejenige der nichtthermischen

Strahlung, ermöglicht, eine erstaunliche Fülle von Informationen über Pulsare zu sammeln, die in diesem Kapitel kurz zur Übersicht aufgeführt werden soll. Hier und im Folgenden werden die Begriffe „Pulsar“ und „Neutronenstern“ synonym verwendet, obwohl tatsächlich, wie später gezeigt wird, nicht jeder Neutronenstern auch als Pulsar beobachtbar ist. Neutronensterne entstehen üblicherweise bei Supernova-Explosionen, bei der der Kern eines alten, massiven Sterns oder ein Weißer Zwerg zum Neutronenstern kollabiert, während die äußere Hülle und die Atmosphäre abgestoßen wird. Bei einem massiven Stern wird der Kollaps durch das Ende der Kernfusionsprozesse im Inneren des Sterns ausgelöst, da diese den für die Stabilität wichtigen thermischen Druck erzeugen. Nimmt er am Ende der Sternentwicklung ab, wird der Stern gravitativ instabil und das Innerste des Sterns fällt so lange ins Zentrum, bis die dort rapide anwachsende Dichte einen Fermidruck erzeugt, der den Kollaps stoppt. Das geschieht bei der mittleren Neutronensterndichte von $\sim 10^{18} \text{ kg/m}^3$. Diese Dichte wird erreicht, wenn der Kern mit etwa einer Sonnenmasse auf einen Radius der Größenordnung $\sim 10 \text{ km}$ zusammengepreßt ist, was auch der typische Neutronensternradius ist.

Neutronensterne besitzen typischerweise ein sehr großes Magnetfeld von $\sim 10^8 \text{ T}$ an der Oberfläche, und sie rotieren sehr schnell. Das kommt von der Erhaltung des Drehimpulses L und des eingefrorenen magnetischen Flusses $\Psi = BR^2$ während des Kollaps, bei dem der Stern mit seinem Magnetfeld $B_{\text{Stern}} \simeq 10^{-2} \text{ T}$ von einem Sternradius $R_{\text{Stern}} \simeq 10^9 \text{ m}$ auf einen Neutronensternradius $R_{\text{NS}} \simeq 10^4 \text{ m}$ komprimiert wird. Die Magnetfeldstruktur von Pulsaren wird in Abschnitt 2.2 genauer besprochen. Die bei Beobachtungen gemessenen Perioden der „normalen Pulsare“¹ reichen von 33 ms beim Krebs-Pulsar bis 8.5 s beim PSR J2144–3933 Pulsar (YOUNG ET AL. (1999)), wobei bei es rotationsgetriebenen Pulsaren den Zusammenhang $\tau = P/2\dot{P} \sim P^2/B^2$ zwischen der Periode P und dem Alter eines Pulsars gibt (τ ist die charakteristische Zeit der Abbremsung). Junge Pulsare besitzen noch eine hohe Rotationsenergie, die im Laufe der Zeit durch Strahlungsverluste abgebaut wird, so daß Pulsare mit fortschreitendem Alter langsamer werden.

2.2 Die Pulsarmagnetosphäre

Das sehr starke Magnetfeld \mathbf{B} des Pulsars bestimmt für kleine Entfernungen von der Oberfläche jede Plasmadynamik, das heißt, man kann durch das Plasma generierte \mathbf{B} -Felder und Teilchenbewegungen senkrecht zu \mathbf{B} vernachlässigen. Man spricht von der sogenannten Magnetosphäre des Pulsars. Die Struktur des Pulsarmagnetfeldes ist in sehr guter Näherung eine reine Dipolgeometrie. Höhere Momente werden zwar für spezielle Anwendungen diskutiert, konnten aber noch nicht nachgewiesen werden und sind höchstens nahe der Oberfläche bedeutsam. In Abbildung 2.1 ist schematisch dargestellt, wie man sich eine Pulsarmagnetosphäre vorstellt. So wie gezeigt, fallen im Allgemeinen die Rotations ($\mathbf{\Omega}$)- und die Dipolachse (\mathbf{D}) nicht zusammen, sondern sind gegeneinander geneigt. Ein dipolartiges Magnetfeld kann sich allerdings nur bis zum sogenannten Lichtzylinder erstrecken. Der Lichtzylinder ist definiert durch den Radius, an dem ein Teilchen, das mit dem Magnetfeld korotiert, die Lichtgeschwindigkeit erreichen würde. An dieser Stelle in der Magnetosphäre kann das Magnetfeld,

¹Im Gegensatz zu den sogenannten Millisekundenpulsaren, die wesentlich älter sind und durch Akkretion nachbeschleunigt wurden.

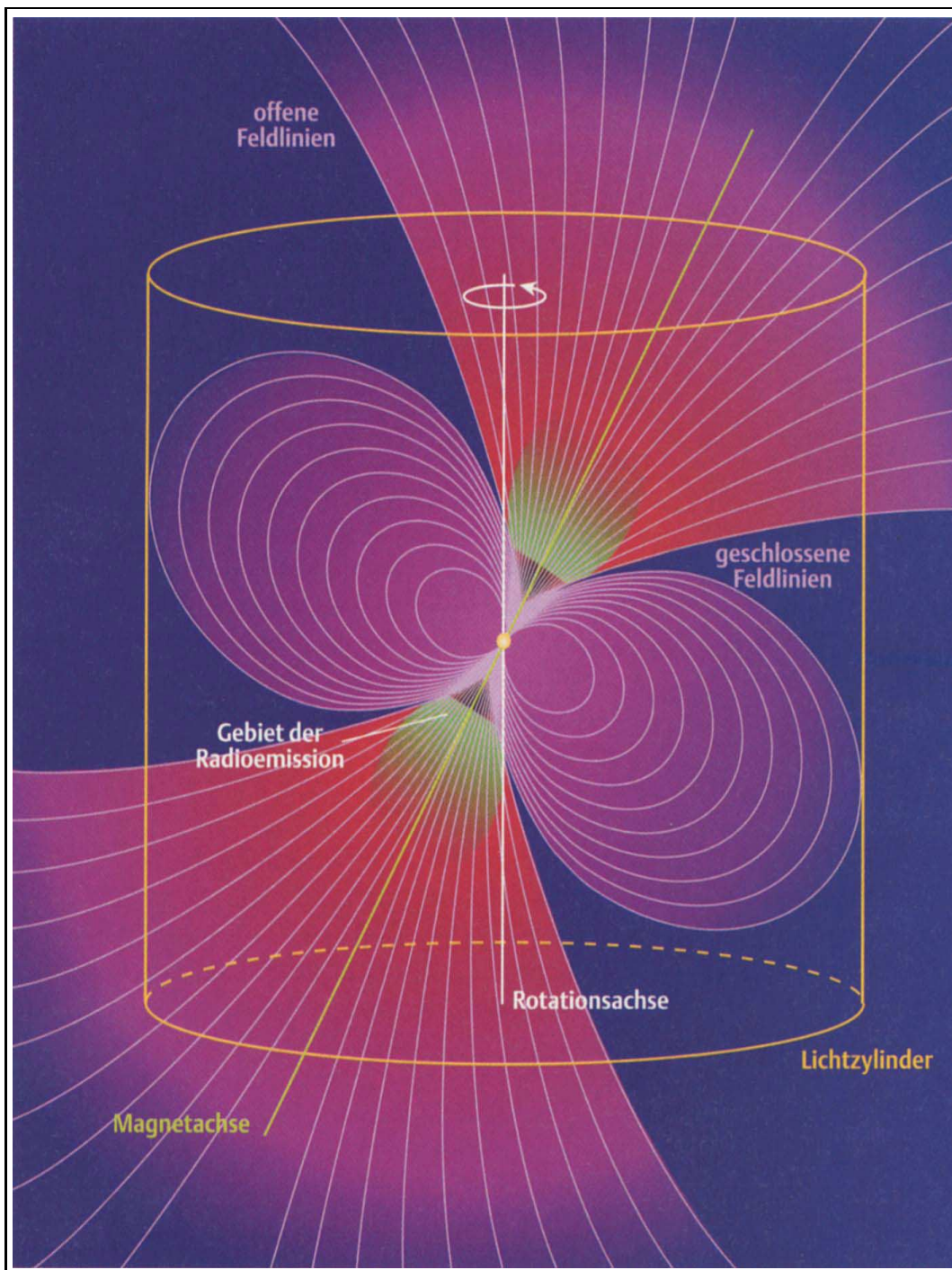


Abbildung 2.1: Schematische Zeichnung einer Pulsarmagnetosphäre entnommen aus KUNZL ET AL. (2000)

die Dipolstruktur nicht mehr aufrechterhalten, sondern es muß sich verbiegen, was auch in Abbildung 2.1 angedeutet ist. Daher kann man die magnetischen Feldlinien in zwei Kategorien einteilen, die sogenannten offenen und die geschlossenen. Als geschlossen werden diejenigen bezeichnet, die vollständig innerhalb des Lichtzylinders liegen und sich deshalb am Neutronenstern schließen, während die offenen Feldlinien den Lichtzylinder schneiden. Die Flächen auf der Neutronensternoberfläche, wo die offenen Feldlinien austreten, werden auch als Polkappen bezeichnet. Teilchen auf geschlossenen Feldlinien sind innerhalb der Magnetosphäre gefangen. Befinden sie sich dagegen auf einer offenen Feldlinie, so können sie durch den Lichtzylinder die Magnetosphäre verlassen.

Das rotierende Magnetfeld erzeugt durch Induktion eine Ladungstrennung im Neutronenstern, was zu einem den Neutronenstern umgebenden elektrischen Quadrupolfeld führt, welches dem magnetischen Dipolfeld überlagert ist. Mit dem idealen Ohmschen Gesetz

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (2.1)$$

für das Neutronensterninnere (Idealer Leiter) in Verbindung mit einer stetigen Fortsetzung der Tangentialkomponente des \mathbf{E} -Feldes im Außenraum folgt

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \Omega r_{\text{NS}} B_0^2 r^{-7} \cos^3 \theta, \quad (2.2)$$

wobei die Größen Ω , r_{NS} und B_0 für die Rotationsfrequenz, den Radius und das Oberflächenmagnetfeld des Neutronensterns stehen. r und θ sind der Abstand vom Neutronenstern in Einheiten von r_{NS} und der Azimutwinkel. Das elektrische Quadrupolfeld besitzt also eine dem Magnetfeld parallel gerichtete Komponente, die Elektronen aus der Neutronensternoberfläche herauszieht und beschleunigt. Da die elektrische Kraft die gravitative um Größenordnungen ($F_{\text{el}}/F_{\text{gr}} \sim 10^9$) übertrifft, füllt sich die Magnetosphäre mit einem Elektronenplasma. Die ortsabhängige Ladungsdichte $\rho_{\text{GJ}}(r, \theta)$, bei der das parallele Feld abgeschirmt ist ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$), wurde von GOLDREICH & JULIAN (1969) in einem analytischen, statischen Modell für den parallelen Rotator ($\boldsymbol{\Omega} \parallel \mathbf{D}$) abgeleitet:

$$\rho_{\text{GJ}} = \Omega B_0 \varepsilon_0 r^{-3} (1 - 3 \cos^2 \theta). \quad (2.3)$$

Diese Ladungsdichte wird folglich auch als Goldreich&Julian-Dichte bezeichnet. Eine Goldreich&Julian-Magnetosphäre ist auf den geschlossenen Feldlinien stabil gegen Störungen, auf den offenen Feldlinien dagegen können Ladungen aber den Lichtzylinder abfließen und die Goldreich&Julian-Bedingung verletzen. Daraus resultieren Ströme und Teilchenbeschleunigung, die Annahmen des analytischen Modells ($v = 0$) sind also nicht mehr erfüllt und die Goldreich&Julian-Lösung stimmt nur noch näherungsweise. Bei realen Pulsaren ist die Annahme eines statischen Systems überhaupt nicht mehr gerechtfertigt. Dennoch wird das Goldreich&Julian-Modell als Grundzustand betrachtet, auf dem sich die anderen komplizierten und völlig nichtstationären Prozesse abspielen.

2.3 Beobachtungen von Pulsaren

Pulsare sind bei Radioexperimenten entdeckt worden und auch heute noch werden die meisten Beobachtungen von Pulsaren in dem Frequenzbereich zwischen

100 MHz und 100 GHz gemacht. In der Zwischenzeit gelang es allerdings einige (Radio-)Pulsare routinemäßig mit optischen (BIGNAMI & CARAVEO (1996)), Röntgen (BECKER & TRUEMPER (1997)) und sogar Gammaquellen (KANBACH (1998)) zu identifizieren. Obwohl gerade die Korrelationen zwischen verschiedenen Wellenlängenbereichen wichtige Aussagen liefern, sind Beobachtungen im Radiobereich mit Abstand am detailreichsten. Bei der zeitlichen Auflösung, die ja gerade bei Pulsaren sehr wichtig ist, gehören Radiobeobachtungen zu den präzisesten Messungen, die bislang möglich sind. In Abbildung 2.2 ist der zeitliche Verlauf der Radiointensität exemplarisch für den Pulsar PSR B1133+16 gezeigt. Die Zeit ist in den Abbildungen als Drehwinkel des Pulsars gegeben. Allerdings erscheint nur ein kleiner Zeitbereich (Winkelbereich) um den Radiopuls herum, der Puls ist also sehr schmal. Im oberen Teil der Abbildung sind viele Einzelpulse des Pulsars dargestellt. Sie unterscheiden sich erheblich voneinander und besitzen eine reiche Feinstruktur. Manche Pulse fehlen sogar vollständig. Einige Perioden später setzt das Signal (oft mit erhöhter Intensität) wieder ein. Im unteren Teil der Abbildung 2.2 ist das gemittelte Pulsprofil gegeben. Das über einige 100 Perioden gemittelte Pulsprofil zeigt fast keine zeitliche Variabilität und hat bei jedem Pulsar eine andere charakteristische Form. Es stellt eine Art „Fingerabdruck“ eines Pulsars dar. Bei der offensichtlichen Ungleichmäßigkeit der Einzelpulse überrascht die Konstanz des mittleren Pulsprofils. Man geht deshalb davon aus, daß sich die Radioemission aus stochastisch verteilten, kleinskaligen Einzelemissionsprozessen zusammensetzt, die bei den Einzelpulsen die Substrukturen erzeugen. In ihrer Summe ergibt sich allerdings immer das mittlere Pulsprofil, das wahrscheinlich durch die Geometrie der Pulsarmagnetosphäre oder die Oberflächenstruktur des Neutronensterns gegeben ist. Die Geometrie der Magnetosphäre wird durch den Inklinationwinkel zwischen Ω und D , eventuellen Multipolfeldern und den Lichtzylinder (Periode) bestimmt. Man geht davon aus, daß die vom Pulsar emittierte Radiostrahlung nicht isotrop abgegeben wird, sondern in einem schmalen Raumwinkelbereich um die Dipolachse, nämlich dem Bereich der offenen Feldlinien entsteht. Durch die Rotation des Pulsars mit einem endlichen Inklinationwinkel kommt es wegen der anisotropen Abstrahlung in Richtung der offenen Feldlinien zum sogenannten „Leuchtturmeffekt“, das heißt, der Strahl von Radiophotonen überstreicht für verschiedene Zeiten verschiedene Raumbereiche. Ein Beobachter in der Nähe der Sichtlinie der Dipolachse sieht gepulste Radiostrahlung mit der Rotationsperiode des Pulsars. Nur Neutronensterne deren Strahlungskegel die Erde überstreichen, können überhaupt als Pulsare beobachtet werden. Deshalb stellen Pulsare auch nur eine kleine Untermenge aller Neutronensterne dar. Im Radiobereich beobachtbar sind außerdem nur die Neutronensterne, die eine genügend hohe Rotationsenergie besitzen und daher genügend Strahlungsleistung aufbringen können, so daß sie als nur 10 km große Eisenkugeln auch noch in tausenden von Lichtjahren Entfernung beobachtbar sind. Die Tatsache, daß so kleine Objekte über solch großen Entfernungen beobachtbar sind, impliziert immense Intensitäten an der Quelle der Strahlung und damit einen kohärenten Emissionsprozeß in der Pulsarmagnetosphäre.

Aus den Radiobeobachtungen (KIJAK & GIL (1997), KIJAK & GIL (1998) und BLASKIEWICZ ET AL. (1991)) folgt, daß die Radioemission im inneren Bereich der Pulsarmagnetosphäre erzeugt wird. Die Emissionsregion muß in einer Höhe von etwa 50 Pulsarradien über der Neutronensternoberfläche liegen (siehe hierzu auch Abbildung 2.3). In dem Bereich ist das Dipolfeld ($B(r) \sim r^{-3}$) bereits auf eine Stärke

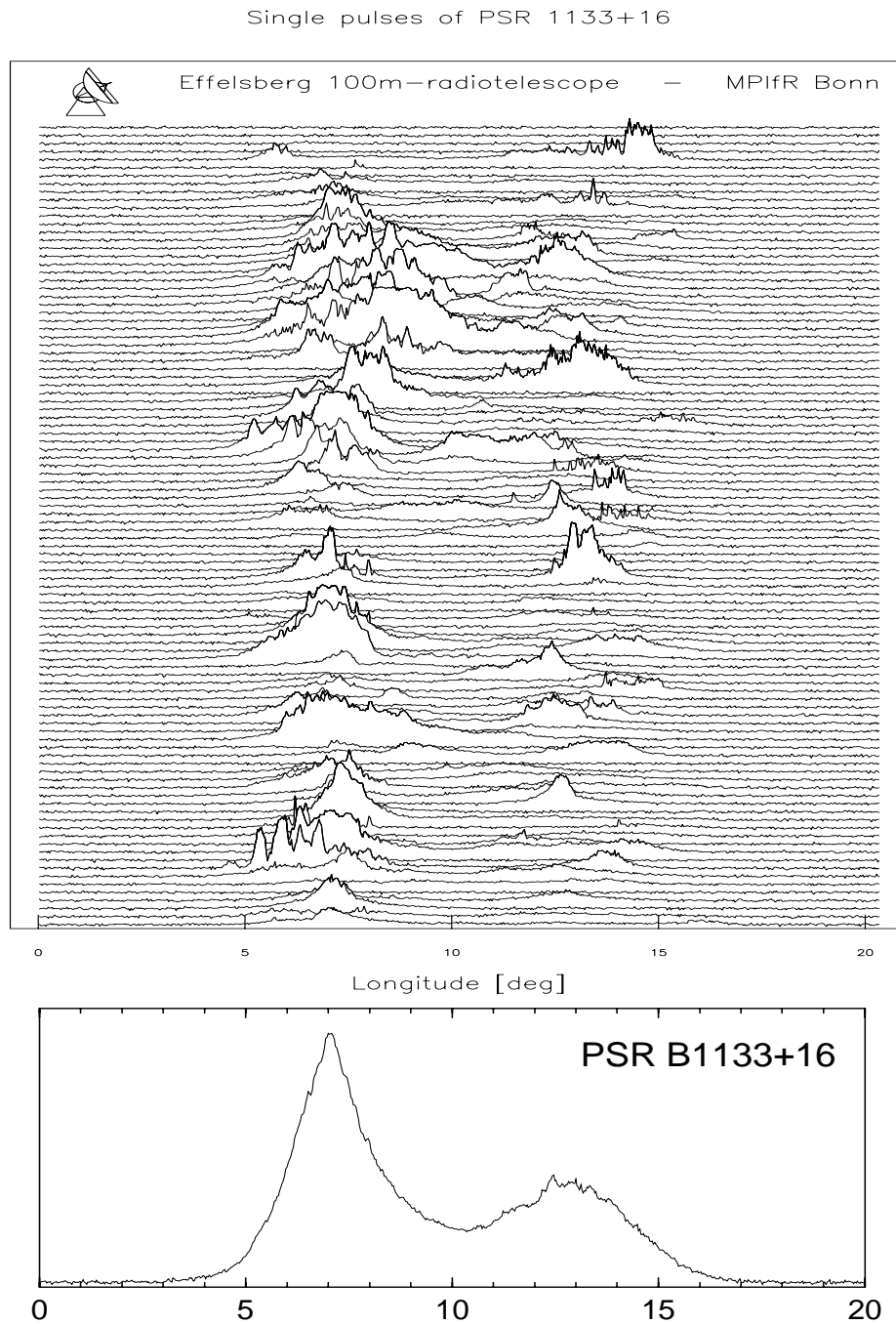


Abbildung 2.2: Beobachtungsdaten des Pulsars PSR B1133+16, KRAMER (1995). Oben sind einzelne Pulse im zeitlichen Verlauf zu sehen, unten das über viele Perioden gemittelte Pulsprofil, das zeitlich kaum variiert und ein Charakteristikum jedes einzelnen Pulsars ist. Im oberen Bild stellt jede Linie den Intensitätsverlauf während einer Periode des Pulsars dar.

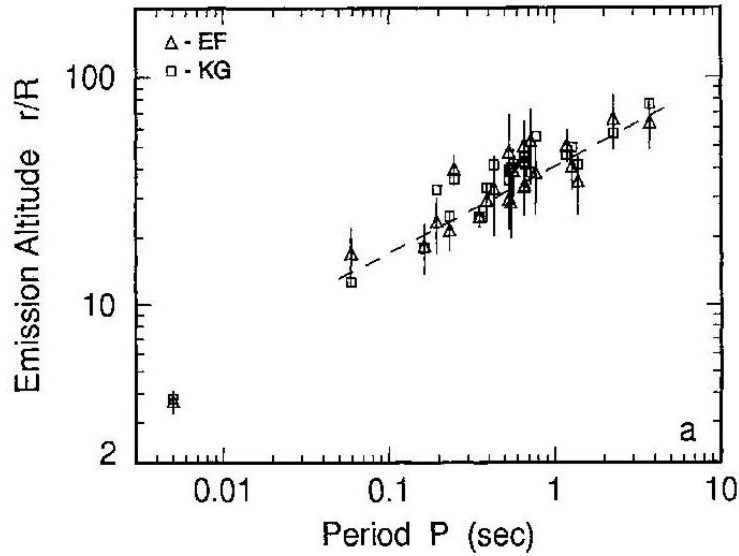


Abbildung 2.3: Dargestellt sind die gemessenen Emissionshöhen (in Einheiten der Pulsarradien R) der Radiostrahlung gegen die Periode der entsprechenden Pulsare. Zu sehen sind Emissionshöhen um 50 Pulsarradien, was etwa 500 km entspricht. Das Diagramm stammt aus KIJAK & GIL (1997).

von etwa 1000 T abgefallen und aus dem Goldreich&Julian-Modell ergibt sich eine Elektronenteilchendichte von ungefähr 10^{12} m^{-3} für einen Standardpulsar.

Die Energie für die Emission in allen Wellenlängenbereichen muß für die hier betrachteten isolierten Neutronensterne vom Pulsar selbst kommen, da er die einzige potentielle Energiequelle darstellt. In der Rotation des Neutronensterns mit seinem Trägheitsmoment von $\sim 10^{38} \text{ kg m}^2$ und einer Periode von beispielsweise einer Sekunde steckt eine Energie in der Größenordnung von $\sim 10^{38} \text{ J}$. Aufgrund dieser hohen Rotationsenergie E_{Rot} ist die Rotationsperiode von Pulsaren trotz der gewaltigen Energieverluste von $\sim 10^{25} \text{ W}$ (KUNZL (2001)) extrem stabil. Nur ein geringer Teil des gesamten Energieverlustes, kann in Form elektromagnetischer Strahlung gemessen werden. Der Anteil im Radiobereich liegt nur bei etwa 10^{-5} , bei Röntgen- und γ -Pulsaren können bis zu 10 % von \dot{E}_{Rot} in harte Strahlung umgesetzt werden. Löst man Radiopulse zeitlich immer besser auf, so zeigen sich immer mehr Substrukturen mit immer höherer Leistung. Manchmal findet man extrem kurze sehr intensive Ausbrüche (Mikropulse), so wie in Abbildung 2.4 am Beispiel des Krebs-Pulsars gezeigt. Extrem kurze zeitliche Strukturen ($\sim 10^{-8}$) weisen auf sehr kleine Emissionsregionen hin, die in Kombination mit hoher Leistung einen hochkohärenten Emissionsprozeß nahelegen. Berechnet man für einen Pulsar mit

$$T_{\text{B}} = \frac{F_{\nu} c^2}{2\pi k_{\text{B}} \nu^2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \quad (2.4)$$

die Helligkeitstemperatur T_{B} der Radiostrahlung, wobei F_{ν} , c , k_{B} , R und r für den beobachteten Radiofluß, die Lichtgeschwindigkeit, die Boltzmannkonstante, die Größe des Emissionsgebietes und die Entfernung vom Beobachter stehen, so erhält man sehr hohe Werte von bis zu 10^{25} K und in einzelnen Spezialfällen sogar 10^{31} K .

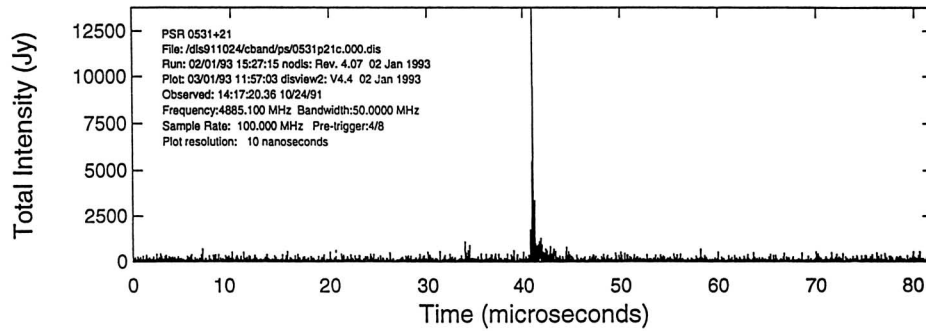


Abbildung 2.4: Messung von ultrakurzen Nanopulsen in der Radiofeinstruktur des Krebs-Pulsars. Entnommen aus HANKINS (2000).

T_B ist die äquivalente Temperatur, die dem beobachteten Strahlungsfluß in der Rayleigh–Jeans–Näherung entspräche, wenn es sich um optisch dicke thermische Strahlung ($h\nu \ll k_B T$) handelte. Für Radiostrahlung ist diese Näherung aufgrund ihrer geringen Frequenz eigentlich immer gerechtfertigt. Die Helligkeitstemperatur ist zwar eine künstliche Größe, falls es sich nicht um thermische Strahlung handelt, sie wird aber gerade in der Radioastronomie gerne verwendet, um ein Maß dafür zu haben, wie intensiv die beobachtete Strahlung ist. Im Falle von Pulsaren zeigt der extrem hohe Wert für T_B , daß die sehr intensive Emission kohärent sein muß. Man geht im Allgemeinen dann von Kohärenz aus, wenn die Helligkeitstemperatur einer selbstabsorbierenden Quelle die Grenze $\gamma m_e c^2 / k_B$ übersteigt. Dieses Limit entspricht der Temperatur der Elektronen in der Quelle und nichtkohärente Strahlung höherer Helligkeitstemperatur als das wird bereits in der Quelle reabsorbiert und kann deshalb die Quellregion nicht verlassen. Wie in KUNZL (2001) ausgeführt, ist eine solche Abschätzung für Pulsare aber nicht zulässig, da die Pulsarmagnetosphäre nicht selbstabsorbierend ist und somit der Strahlungsfluß mit dem Volumen der Quelle ansteigt. Wollte man jedoch $T_B = 10^{25}$ K mit einem inkohärenten Strahlungsprozeß erzeugen, so wäre die gesamte Pulsarmagnetosphäre bei weitem nicht ausreichend, um den beobachteten Fluß zu erzeugen. Dem widersprechen zusätzlich die wohldefinierten Emissionshöhen und die Substrukturen der Radioemission. Das Fazit ist die Existenz eines kohärenten Strahlungsprozesses (MELROSE (2000)) in der Pulsarmagnetosphäre in einer Höhe von etwa 50 Pulsarradien (KIJAK (2001)). Dafür wurde der sogenannte freie Elektronen Laser vorgeschlagen, der im nächsten Abschnitt kurz erläutert werden soll.

2.4 Der freie Elektronen Laser als Emissionsprozeß

Die Emission kohärenter Radiostrahlung durch Pulsare stellt erhebliche Herausforderungen an die Theorie des zugrundeliegenden Strahlungsmechanismus. Dementsprechend werden in diesem Zusammenhang in der Literatur eigentlich nur zwei verschiedene Möglichkeiten diskutiert. Das ist die sogenannte kohärente Krümmungsstrahlung und der FEL. Der FEL-Prozeß ist eindeutig der interessantere von den beiden (KUNZL (2001)), da er wesentlich weniger Voraussetzungen an die Pulsarmagnetosphäre stellt. Es konnte beispielsweise sehr schön gezeigt werden, daß für

die kohärenten Krümmungsstrahlung nur magnetische Feldlinien geeignet sind, die sehr schwach ($< 1/\gamma$) gekrümmt sind, was das strahlende Volumen weiter eingrenzt. Beim FEL gibt es auch Voraussetzungen, wie zum Beispiel die Existenz einer anisotropen Verteilungsfunktion der Elektronen, die jedoch gerade in Pulsarmagnetosphären leichter erfüllt werden, als diejenigen der kohärenten Krümmungsstrahlung. In LESCH ET AL. (1998) wird gezeigt, daß es aus Gründen der Energieerhaltung kaum möglich ist mit der kohärenten Krümmungsstrahlung den beobachteten Radiofluß zu erklären. Das FEL-Modell hat noch einen weiteren Vorteil. Es gibt nicht nur theoretische Arbeiten zu dem Thema (siehe u.a. HASEGAWA (1978), WEATHERALL (1988), WEATHERALL & BENFORD (1991)) sondern der FEL konnte auch in verschiedenen Laborexperimenten untersucht werden. Es handelt sich dabei selbstverständlich um deutlich andere Parameterbereiche (KATO ET AL. (1983), BENFORD (1992a), ANDO (1996), YOSHIKAWA ET AL. (1996)), als wie sie in einer Pulsarmagnetosphäre herrschen. Dennoch konnte so für den FEL-Prozeß nicht nur gezeigt werden, daß diese Art der kohärenten Emission auch in realen, nichtidealisierten Plasmen existiert, sondern die Experimente konnten auch mit den theoretischen Modellen verglichen werden um die zugrundeliegende Theorie zu verfeinern. Aus diesem Grund sind die Eigenschaften des FEL sehr gut bekannt, während im Gegensatz dazu die kohärenten Krümmungsstrahlung „nur“ ein theoretisches Modell ist.

Bei FEL-Laborexperimenten (siehe KATO ET AL. (1983), BENFORD (1992a), ANDO (1996), YOSHIKAWA ET AL. (1996)) wird ein relativistischer Elektronenstrahl auf ein möglichst homogenes Plasma in einer Plasmaröhre geschossen. Dabei beobachtet man eine breitbandige, kohärente Mikrowellenemission in Vorwärtsrichtung. Das Plasma stellt sich in einem weiten Parameterbereich optimal ein um die Strahlenergie möglichst effizient in Mikrowellenstrahlung umzuwandeln. Die entscheidende Größe für die emittierte Leistung ist hierbei nach BENFORD (1992a) das Verhältnis n_b/n_e der Strahlteilchendichte zur Plasmateilchendichte, wobei das Verhältnis den Wert 0.1 überschreiten muß, damit es zu einer breitbandigen Emission kommt. Der Lorentzfaktor des Elektronenstrahls bestimmt die zur Verfügung stehende freie Energie und liegt bei den Experimenten bei Werten von 2–3. In den Experimenten stellt die Kombination von hohen Lorentzfaktoren und hohen Strahldichten ein großes technisches Problem dar, was den interessantesten Parameterbereich schwer zugänglich macht. In astrophysikalischen Plasmen sind Verhältnisse n_b/n_e von bis zu 1 realisierbar und üblich, während die Lorentzfaktoren die Laborwerte um Größenordnungen übersteigen können. Die Bedeutung des FEL für astrophysikalische Plasmen wurde von LESCH (1989), LESCH & POHL (1992), BENFORD (1992b), LESCH (1995) und BENFORD & LESCH (1998) genauer untersucht. Speziell für die Erklärung der sogenannten Intraday-Variabilität bei aktiven galaktischen Kernen ist der FEL der überzeugendste Mechanismus.

Im nächsten Kapitel wird auf die dem FEL zugrundeliegende Theorie näher eingegangen. Dazu wird sowohl das Anregen von starken Langmuirwellen in einem Plasma als auch die Reaktion von relativistischen Elektronen in einem solch gestörten Plasma untersucht.

Kapitel 3

Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel wird zunächst der theoretische Hintergrund des Freien Elektronenlasers (FEL) genauer untersucht, bevor im nächsten Kapitel die numerische Realisierung gezeigt wird. Zur Theorie des FEL gehört nicht nur der eigentliche Emissionsprozeß, der in Abschnitt 3.2 dargestellt ist, sondern auch die Grundlagen der Strahlinstabilität (inversen Landaudämpfung) und die dafür nötige kinetische Beschreibung eines Plasmas.

Die Grundvoraussetzung für einen natürlich auftretenden FEL ist die Existenz einer anisotropen, nichtthermischen Elektronenverteilung (sog. „Beam-Verteilung“), bei der es zu einem positiven Impulsgradienten in der Verteilungsfunktion kommt, der in der Sprache der Laserphysik einer Besetzungsinversion entspricht. Eine solche Verteilung führt, wie in Abschnitt 3.1 gezeigt werden soll, zu einem exponentiellen Anwachsen von ausgewählten Langmuirwellen, deren Phasengeschwindigkeit einem Impuls in der Besetzungsinversion entspricht. Diese Langmuirwellen wirken mittels ihrer elektrostatischen elektrischen Felder auf die hochenergetischen Elektronen der Verteilung zurück und regen sie zur Emission von elektromagnetischer Strahlung an. Die Strahlung zeichnet sich im Allgemeinen durch Kohärenz aus, das heißt, viele Einzelstrahler, hier Elektronen, emittieren phasengekoppelt elektromagnetische Wellen. Das führt dazu, daß die gesamte Intensität I nicht wie bei inkohärenten Quellen linear von der Anzahl N der Einzelstrahler abhängt, sondern mit $I \sim N^{1+\alpha}$ ($\alpha \leq 1$) geht. Die Kohärenz ist der Grund für die hohe Effizienz dieses Emissionsprozesses.

3.1 Kinetische Theorie der Strahlinstabilität

Langmuirwellen sind hochfrequente elektrostatische Plasmawellen, die dadurch zustande kommen, daß die Elektronen im Plasma schnelle Schwingungen ausführen, denen die 2000 mal schwereren Ionen nicht folgen können. Eine Verschiebung von Elektronen führt zu einer von Null verschiedenen Raumladung, die gemäß der Poissongleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s q_s n_s \quad (3.1)$$

zu einem elektrostatischen Feld führt. ε_0 , ρ_q , q_s und n_s bezeichnen die Dielektrizitätskonstante des Vakuums, die Raumladungsdichte, die Ladung eines Teilchens der Sorte s und die Teilchendichte der entsprechenden Teilchensorte. Mit „elektrostatisch“ ist in diesem Zusammenhang nicht zeitunabhängig gemeint, sondern die Tatsache, daß das elektrische Feld seinen Ursprung in einer Raumladung hat und nicht von einer Rotation des Magnetfeldes herrührt. Aus $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$ folgt direkt $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} \neq 0$. Der elektrische Feldstärkevektor \mathbf{E} besitzt für Langmuirwellen also eine parallele Komponente zum Wellenzahlvektor \mathbf{k} und damit zur Ausbreitungsrichtung der Welle.

Zur Untersuchung der Langmuirwellen ist es eigentlich nicht unbedingt nötig, die kinetische Plasmatheorie zu bemühen. Eine Zweikomponentenbeschreibung wäre ausreichend, solange sich beide Komponenten in guter Näherung durch Maxwellverteilungen beschreiben lassen. In unserem Fall soll aber das Anwachsen der Langmuirwellen aufgrund einer nichtmaxwellischen Verteilungsfunktion untersucht werden, der sogenannten Strahlinstabilität, oder auch inversen Landaudämpfung, was eine kinetische Beschreibung, zumindest der Elektronenkomponente, zwingend erforderlich macht.

In der kinetischen Beschreibung eines Plasmas werden nicht nur gemittelte Plasmagrößen wie Dichte, Temperatur, Geschwindigkeit oder Stromdichte betrachtet, so wie in der Magnetohydrodynamik (MHD), sondern auch die Geschwindigkeitsverteilung im Plasma. Die entscheidende Größen des Plasmas sind hier die Verteilungsfunktionen oder Phasenraumdichten f jeder Teilchenkomponente (Elektronen, Ionen, ...) des Plasmas. Es handelt sich um Funktionen, die von sieben Variablen abhängen. Das sind die drei Komponenten des Ortsvektors \mathbf{r} , die drei Komponenten eines Impulsvektors \mathbf{p} und die Zeit t . Physikalische Bedeutung besitzt allerdings lediglich das Differential $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) dr^3 dp^3$. Es bezeichnet die Anzahl der Teilchen, die sich zur Zeit t im Phasenraumvolumenelement befinden, das von den sechsdimensionalen Vektoren (\mathbf{r}, \mathbf{p}) und $(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, \mathbf{p} + d\mathbf{p})$ aufgespannt¹ wird. Die statistischen Momente der Verteilungsfunktion entsprechen den gemittelten Plasmagrößen. So sind in der kinetischen Plasmatheorie die Teilchendichte n , die (Fluid-)geschwindigkeit \mathbf{V} und die Temperatur T durch

$$\begin{aligned} n(t, \mathbf{r}) &= \int f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) dp^3 \\ \mathbf{V}(t, \mathbf{r}) &= \int \mathbf{v}(\mathbf{p}) f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) dp^3 \\ k_B T(t, \mathbf{r}) &\sim \int \underbrace{E_{\text{kin}}(\mathbf{p})}_{\sim v(\mathbf{p})^2} f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) dp^3 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.2)$$

gegeben, wobei die Temperatur genau genommen nur für eine Maxwell'sche Verteilungsfunktion f^M (siehe Gl. 3.11) definiert ist und durch den allgemeingültigen Begriff innere Energie ersetzt werden sollte. Falls die Verteilungsfunktion für alle Zeiten und Orte näherungsweise maxwell'sch

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) \sim n(t, \mathbf{r}) \cdot f^M(\mathbf{p}, T(t, \mathbf{r})) \quad (3.3)$$

ist, so wie es z.B. bei einer hohen Stoßfrequenz zwischen den Teilchen zu erwarten ist, dann ist die kinetische Theorie äquivalent zur Fluidbeschreibung der MHD. Die MHD Beschreibung setzt also voraus, daß sich die Plasmakomponenten durch Maxwellverteilungen beschreiben lassen, also jeweils näherungsweise im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht sind.

In der kinetischen Theorie mit beliebigen Phasenraumdichten für die einzelnen Plasmakomponenten s wird die Entwicklung der Verteilungsfunktionen f_s durch die Boltzmann-Gleichung

$$\frac{df_s}{dt} = \frac{\partial f_s}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_c \quad (3.4)$$

begeben. Sie ist eine Transportgleichung, die die Dynamik des sechsdimensionalen „Phasenraumfluids“ beschreibt. Hier ist $\left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_c$ das Symbol für das sogenannte Boltzmannsche Stoßintegral, das die zeitliche Änderung der Verteilungsfunktion

¹Phasenraumpunkte $(\mathbf{r}^t, \mathbf{p}^t)$ für die gilt:

$$\begin{array}{lll} x^t \in [x, x + dx] & y^t \in [y, y + dy] & z^t \in [z, z + dz] \\ p_x^t \in [p_x, p_x + dp_x] & p_y^t \in [p_y, p_y + dp_y] & p_z^t \in [p_z, p_z + dp_z] . \end{array}$$

durch Teilchenstöße bezeichnet. Dieser Term garantiert bei entsprechender Größe, daß die Verteilungsfunktionen aller Komponenten maxwellsch sind, so daß unter Bildung der statistischen Momente aus den Boltzmann-Gleichungen die Gleichungen der MHD werden.

Da ausschließlich Plasmen im astrophysikalischen Kontext untersucht werden sollen, kann das Stoßintegral vernachlässigt werden. Die effektive Stoßfrequenz für Coulombstöße ν_c wird sehr klein für geringe Dichten und hohe Temperaturen, wie sie in astrophysikalischen Plasmen vorherrschen. In Verbindung mit den relativistischen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v}_s(\mathbf{p}) = \frac{1}{m_s} \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{1 + \left(\frac{p}{m_s c}\right)^2}} \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p})\end{aligned}\quad (3.5)$$

und der Lorentzkraft $\mathbf{F}_L = q_s(\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B})$ wird aus der Boltzmann-Gleichung 3.4 die Vlasovgleichung

$$\frac{df_s}{dt} = \frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} + q_s(\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}) \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (3.6)$$

die stoßfreie Plasmen beschreibt. q_s und v_s bezeichnet die Ladung und die Geschwindigkeit eines Teilchens der Teilchensorte s . Die elektromagnetischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} bestehen aus extern erzeugten Hintergrundfeldern, aus Feldern elektromagnetischer Wellen und aus den selbstkonsistenten Feldern, die durch die Ladungs- und Stromdichteverteilung

$$[\rho_q, \mathbf{j}] = \sum_s q_s \int [1, \mathbf{v}_s(\mathbf{p})] f_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3p = \sum_s q_s \langle [1, \mathbf{v}_s(\mathbf{p})] \rangle \quad (3.7)$$

erzeugt werden. Die dadurch entstehende Rückwirkung auf die Verteilungsfunktionen des Plasmas und damit auf das Plasma selbst ist die Ursache für die Ausbreitung von Langmuirwellen.

Im folgenden soll die Dispersionsrelation für Langmuirwellen im relativistischen Fall hergeleitet werden. Um die weitere Rechnung zu vereinfachen, soll ein verschwindendes Hintergrundmagnetfeld \mathbf{B} vorausgesetzt– und nur der eindimensionale Fall betrachtet werden. Eine solche Situation liegt beispielsweise vor, wenn ein starkes Magnetfeld die Teilchen in ihrer Senkrechtbewegung stark einschränkt, während sie sich parallel zum Feld frei bewegen können. In diesem Fall wird aus Gleichung 3.6

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial f_s}{\partial x} + q_s E \frac{\partial f_s}{\partial p} = 0. \quad (3.8)$$

Mithilfe dieser eindimensionalen Vlasovgleichung und dem Ampèreschen Gesetz

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.9)$$

das unter den oben genannten Bedingungen die Form

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{j}{\epsilon_0} \quad (3.10)$$

annimmt, können die Ausbreitungseigenschaften von Langmuirwellen untersucht werden. Zunächst kann eine weitere Vereinfachung gemacht werden. In Plasmen, in denen die dynamische Elektronenmasse γm_e sehr viel kleiner als die Ionenmasse m_i ist, was gleichbedeutend mit $T_e \ll m_i c^2 / k_B$ ist, können die leichten Elektronen sehr viel schneller auf Änderungen im elektrischen Feld reagieren als die Ionen. Aus diesem Grund dürfen die Ionen durch einen homogenen, statischen Hintergrund beschrieben werden, der von den schnell variierenden elektrostatischen Feldern nicht beeinflusst wird. In dieser Näherung ist die Verteilungsfunktion der Ionen durch die Maxwell–Boltzmann–Jüttner–Verteilung

$$f_i(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f^M = C \exp \left[-\frac{m_i c^2}{k_B T_i} \sqrt{1 + \left(\frac{p}{m_i c} \right)^2} \right] \quad (3.11)$$

gegeben, das relativistische Äquivalent zur Maxwell–Verteilung, das die Vlasovgleichung 3.6 unter der Bedingung $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}) \approx 0$ identisch erfüllt. Aus den Gleichungen 3.8 und 3.10 werden unter Berücksichtigung dieser Näherung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - eE \frac{\partial f}{\partial p} = 0 \quad (3.12)$$

und

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{e}{\varepsilon_0} \int v(p) f(t, x, p) dp. \quad (3.13)$$

Hier wurde anstelle von f_e und v_e direkt f und v verwendet. Die Ionen stellen einen homogenen positiven Ladungshintergrund dar, der zu träge ist um den hier betrachteten schnellen Variationen des elektrischen Feldes auf den relevanten Zeitskalen zu folgen.

Für die Durchführung einer linearen Stabilitätsanalyse wird für die Gleichungen 3.12 und 3.13 der Ansatz

$$\begin{aligned} f(t, x, p) &= n_e f_0(p) + f_1(t, x, p) + \dots ; \text{ mit } \|f_1\| \ll \|f_0\| \\ E(t, x) &= E_0(t, x) + E_1(t, x) + \dots ; \text{ mit } E_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

verwendet, wobei $\int f_0 dp = 1$ gelten soll. Dieser Ansatz setzt mit $E_0 = 0$ die Quasineutralität des Plasmas und mit $f_0 = f_0(p)$ ein homogenes Hintergrundelektronenplasma der Teilchendichte n_e voraus, das sollte zumindest lokal erfüllt sein. Mithilfe von 3.14 wird aus den Gleichungen 3.12 und 3.13 unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung in f_1 und E_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + v(p) \frac{\partial f_1}{\partial x} - eE_1 n_e \frac{df_0}{dp} &= 0 \\ \frac{\partial E_1}{\partial t} &= \frac{e}{\varepsilon_0} \int v(p) f_1 dp. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Für f_1 und E_1 werden wellenartige Lösungen $\sim \exp[i(kx - \omega t)]$ angesetzt, was zu den algebraischen Gleichungen

$$\begin{aligned} -i\omega f_1 + vik f_1 &= ik \left(v - \frac{\omega}{k} \right) f_1 = en_e E_1 \frac{df_0}{dp} \\ -i\omega E_1 &= \frac{e}{\varepsilon_0} \int v f_1 dp \end{aligned} \quad (3.16)$$

in ω und k führt. Durch Elimination von f_1 und E_1 ergibt sich die relativistische, implizite Dispersionsrelation für Langmuirwellen

$$1 = \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 \omega k} \int \frac{v \frac{df}{dp}}{v - \frac{\omega}{k}} dp, \quad (3.17)$$

wobei hier f für die Verteilungsfunktion des Hintergrundelektronenplasmas f_0 steht. Partielle Integration und die Normierung

$$\begin{aligned} v &\longrightarrow v/c \\ p &\longrightarrow p/m_e c \\ \omega &\longrightarrow \omega/\omega_{pe} \\ k &\longrightarrow c/\omega_{pe} k \\ f(p) &\longrightarrow m_e c f(p m_e c), \end{aligned} \quad (3.18)$$

mit $\omega_{pe}^2 := \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e}$ liefert die endgültige Form der Dispersionsrelation für Langmuirwellen

$$1 = \frac{1}{k^2} \int \frac{dv}{dp} \frac{f dp}{\left[v - \frac{\omega}{k}\right]^2}. \quad (3.19)$$

Im Falle von kalten, nichtrelativistischen Plasmen $v_{te} = \langle v \rangle \ll v_{ph} = \omega/k$ kann das Integral in Gleichung 3.19 analytisch ausgewertet werden, was zu der üblichen Dispersionsrelation

$$\omega^2 = 1 + \frac{3}{\mu} k^2 \quad (3.20)$$

mit $\mu = m_e c^2 / k_B T_e$ führt. Liegt die Phasengeschwindigkeit der Langmuirwellen $v_{ph} := \omega/k$ auf dem Träger der Hintergrundverteilungsfunktion f , so wird 3.19 nur von einer komplexen Frequenz $\omega = \omega_r + i\omega_i$ gelöst. Das heißt, daß es sich in dem Fall nach obigem Ansatz je nach Vorzeichen des Imaginärteils um exponentiell anwachsende oder gedämpfte Langmuirwellen handelt. Benutzt man die Plemelj-Formel

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{a - i\epsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{a} + i \delta(a) \quad (3.21)$$

für die Auswertung des Integrals in Gl. 3.17, so erhält man für die lineare Anwachsrate $\Gamma_{Lin} := \omega_i$ bei gleichen Näherungen und Normierungen den Ausdruck

$$\Gamma_{Lin} = \frac{\pi}{2k^2} [1 - v_{ph}^2]^{-\frac{3}{2}} \frac{df}{dp} \left(p = \frac{v_{ph}}{\sqrt{1 - v_{ph}^2}} \right) \sim \frac{1}{t_{Anw}}, \quad (3.22)$$

wobei t_{Anw} die typische Zeitskala beim Anwachsen oder der Dämpfung von Langmuirwellen darstellt. Gl. 3.22 ist nur für kleine Imaginärteile gültig, also für $\Gamma_{Lin} \ll \omega_r$, da dies die Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Plemelj-Formel ist. Im Allgemeinen ist Gl. 3.19 nicht analytisch auswertbar und muß für Spezialfälle numerisch behandelt werden.

Ein Effekt, der nur für relativistische Plasmen auftritt, ist die Reduzierung der Plasmafrequenz. Die Plasmafrequenz ist durch die Schwingungsfrequenz langwelliger Langmuirwellen definiert. Im Falle von nichtrelativistischen Plasmen, also wenn

für den größten Teil der Elektronen $p \ll m_e c$ gilt, ist die Plasmafrequenz durch $\omega(k=0) = \sqrt{\int \frac{dv}{dp} f dp} \approx 1$ gegeben. Gibt es allerdings eine signifikante relativistische Komponente unter den Elektronen, wie beim FEL, so wird $\int \frac{dv}{dp} f dp$ aufgrund des $\frac{dv}{dp}$ -Faktors kleiner als eins. Der relativistische Elektronenanteil hat eine erhöhte träge Masse und reagiert damit nur noch auf Störungen mit der verringerten Plasmafrequenz. Dies ist speziell beim FEL zu beachten, da wie der nächste Abschnitt zeigt, hier eine relativistische Elektronenkomponente zwingend erforderlich ist.

3.2 Grundsätzliche Funktionsweise des Freien Elektronenlasers FEL

Bei der technischen Realisierung eines Freien Elektronenlasers (FEL) im Labor läßt man einen hochrelativistischen Elektronenstrahl durch sogenannte Wigglerfelder fliegen, die die Teilchen auf gekrümmte Bahnen zwingen und durch die entsprechende Querschleunigung zur Emission von elektromagnetischer Strahlung veranlassen. Die Wigglerfelder bestehen aus einer Reihe von starken Magnetfeldern, die senkrecht zur Flugbahn der Elektronen angeordnet sind und wechselnde Polarität haben. Durch diese Anordnung bewegen sich die Strahlelektronen im Wiggler auf schlangenförmigen Bahnen. Bei entsprechend schwacher Krümmung der Bahn, kommt es zu stimulierter Emission von Synchrotronstrahlung durch die Teilchen.

In einer Pulsarmagnetosphäre muß allerdings eine andere Realisierung des FEL auftreten, da die Entstehung von fixierten magnetischen Wigglerfeldern kaum zu erklären ist. Hier spielen stehende Langmuirwellen im Hintergrundplasma die Rolle der Wigglerfelder.

Beim FEL in der Pulsarmagnetosphäre wie im Labor wird die freie Energie eines relativistischen Elektronenstrahls genutzt, um elektromagnetische Strahlung zu produzieren. Mit Elektronenstrahl ist hier keine räumliche Lokalisierung gemeint, sondern eine zweite nichtmaxwellsche Komponente in der Impulsverteilungsfunktion der Elektronen, wie sie in Abb. 3.1 zu sehen ist. Hier und im folgenden werden alle physikalischen Größen der maxwellschen Hintergrundverteilung bei $p = 0$ mit dem Index e (Elektronen) bezeichnet, während die des hochenergetischen Elektronenstrahls den Index b (Beam) erhalten. In Abb. 3.1 bezeichnen $n_{e/b}$, p_b und μ_e die Teilchendichten, den mittleren Impuls der Strahlelektronen und die thermische Breite der Hintergrundverteilung. Die Größe μ_b wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht eingezeichnet. Die niederenergetische Flanke eines solchen Elektronenstrahls stellt eine Besetzungsinversion dar, man findet bei höheren Energien (Impulsen) mehr Teilchen als bei geringeren Energien. Diese Besetzungsinversion ermöglicht erst die Anregung von Langmuirwellen durch den FEL, während die Gesamtenergie des Elektronenstrahls die Energiequelle für den FEL darstellt.

Der FEL-Prozeß läuft grob nach folgendem Schema ab: Ein relativistischer Elektronenstrahl breitet sich in einem Hintergrundplasma aus. Dadurch ergibt sich eine nichtmaxwellsche Verteilungsfunktion, die instabil gegenüber dem Anwachsen von Langmuirwellen ist. Eine erste Generation von Strahlelektronen verursacht also die Ausbildung von longitudinalen Langmuirwellen im Hintergrundplasma, deren elektrostatische Felder auf die nachfolgenden Elektronen des Strahls wie Wigglerfelder zurückwirken und diese zur Emission von kohärenter Strahlung anregen. In Abbildung 3.2 ist dieser Prozeß schematisch gezeigt. Langfristig erwartet man ein konti-

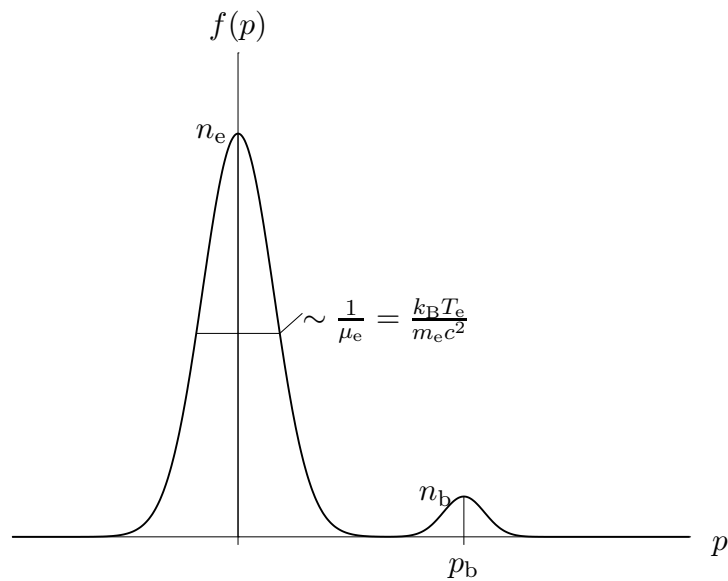


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung eines Elektronenstrahls im Phasenraum.

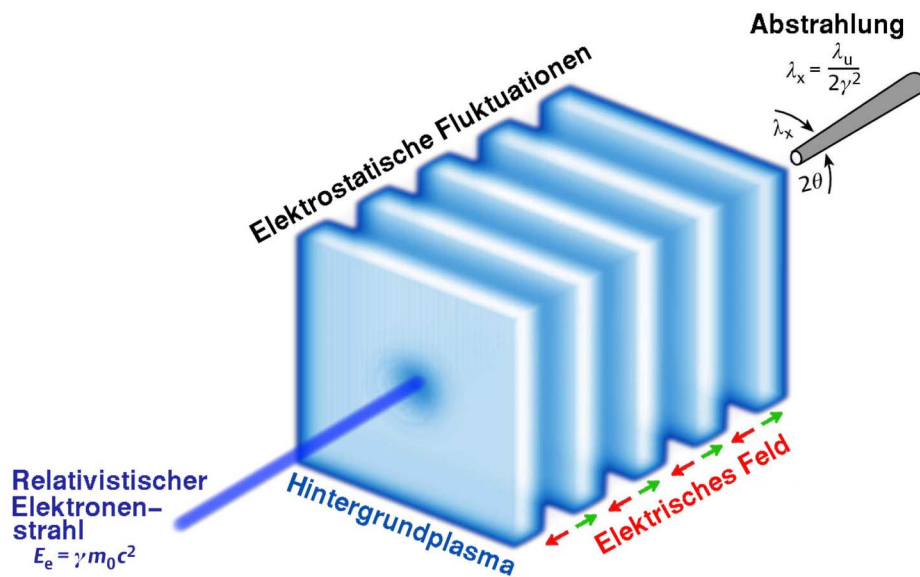


Abbildung 3.2: Schematische Zeichnung zur Wirkungsweise des Freien Elektronenlasers FEL

nuierliches Aufrechterhalten der Langmuirwellen unter gleichzeitiger kontinuierlicher Emission von Strahlung. Im Ruhesystem der Strahlelektronen erscheint die Frequenz der elektrostatischen Fluktuationen um den Faktor γ erhöht. $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, mit $\beta = v/c$, soll hier und im weiteren den Lorentzfaktor zwischen Ruhesystem des Hintergrundplasmas (Laborsystem) und dem Ruhesystem der Strahlelektronen (Beam-System) bezeichnen. Die im Beam-System um γ höherfrequenten elektrostatischen Felder wirken auf die Strahlelektronen und beschleunigen sie periodisch in longitudinaler Richtung, was zur Emission von Hertzscher Dipolstrahlung führt. Begibt man sich wieder zurück in das Laborsystem, so erscheint diese Strahlung aufgrund des relativistischen Leuchtturmeffekts stark in Vorwärtsrichtung verstärkt (relativistisches Beaming), wobei auch die emittierte Frequenz ein weiteres mal lorentzverschoben wird, so daß man näherungsweise von $\omega_{\text{rad}} \sim \gamma^2 \omega_{\text{pe}}$ ausgehen kann. In Abbildung 3.3 ist der richtungsabhängige Strahlungsfluß der Strahlung im Beam-System und im

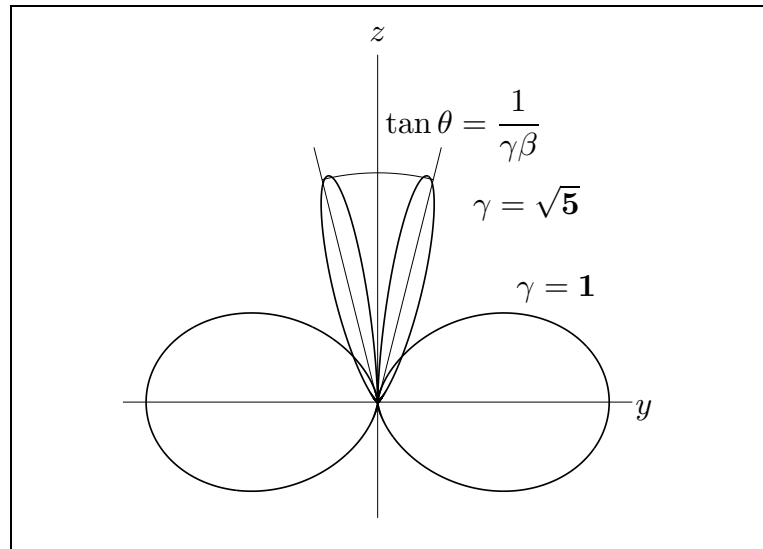


Abbildung 3.3: Abstrahlcharakteristik eines Hertzschen Dipols im Beam-System ($\gamma = 1$) und im Laborsystem ($\gamma = \sqrt{5}$). Der Abstand vom Ursprung gibt für jede Richtung die abgestrahlte Leistung pro Raumvolumenelement an. Die Leistung für $\gamma = \sqrt{5}$ wurde um den Faktor 10^4 verkleinert dargestellt.

Laborsystem für $\gamma = \sqrt{5}$ dargestellt. Diese stark in Vorwärtsrichtung gebündelte Strahlung ist kohärent, da viele Einzelstrahler, nämlich die Strahlelektronen, die gleichen Felder „sehen“ und dadurch in Phase emittieren. Der FEL ist für das Hintergrundplasma der effektivste Weg, die zugeführte freie Energie in elektromagnetische Strahlung umzuwandeln, so daß sie vom Entstehungsort wegpropagieren kann.

Im Folgenden soll die Frequenz und die abgestrahlte Leistung der Strahlung berechnet werden. Die Langmuirwellen im Laborsystem seien durch die Frequenz ω_0 und die Wellenzahl k_0 gegeben. Wegen der Lorentztransformation für Frequenz und

Wellenzahl

$$\begin{aligned}\omega' &= \gamma(\omega - vk_{\parallel}) \Leftrightarrow \omega = \gamma(\omega' + vk'_{\parallel}) \\ k'_{\parallel} &= \gamma\left(k_{\parallel} - \frac{v}{c^2}\omega\right) \Leftrightarrow k_{\parallel} = \gamma\left(k'_{\parallel} - \frac{v}{c^2}\omega'\right) \\ \mathbf{k}'_{\perp} &= \mathbf{k}_{\perp} \Leftrightarrow \mathbf{k}_{\perp} = \mathbf{k}'_{\perp}\end{aligned}\quad (3.23)$$

gilt dann für die Langmuirwellen im Beam-System

$$\begin{aligned}\omega'_0 &= \gamma(\omega_0 - vk_0) \\ k'_0 &= \gamma\left(k_0 - \frac{v}{c^2}\omega_0\right).\end{aligned}\quad (3.24)$$

Hier und im folgenden bezeichnen alle gestrichenen Variablen die jeweiligen Größen im Beam-System und die ungestrichenen die im Laborsystem. v und γ bezeichnen die Geschwindigkeit und den zugehörigen Lorentzfaktor zwischen den beiden Bezugssystemen, wie oben bereits erwähnt. In den Gleichungen 3.23 wird beim Wellenzahlvektor \mathbf{k} zwischen den Komponenten, die senkrecht zur Richtung von v stehen (\perp), und denjenigen, die in Richtung von v zeigen (\parallel), unterschieden. Die elektrische Feldstärke der Langmuirwellen ist in beiden Bezugssystemen identisch, da die Lorentztransformation die Parallelkomponente des elektrischen Feldes nicht ändert ($E'_{\parallel} = E_{\parallel}$). Dann ist das elektrische Feld im Beam-System

$$\mathbf{E}'(t', z') = \mathbf{e}_z E_0 e^{i(k'_0 z' - \omega'_0 t')}, \quad (3.25)$$

Hier wurde für die Longitudinalrichtung die z (z')-Achse gewählt, der feste Ort eines Beam-Elektrons soll $z' = 0$ sein, und es ergibt sich für das elektrische Feld am Ort dieses Teilchens

$$\mathbf{E}'(t', z' = 0) = \mathbf{e}_z E_0 e^{-i\omega'_0 t'}. \quad (3.26)$$

Das Elektron wird durch dieses elektrische Feld gezwungen, Schwingungen in Längsrichtung mit der Frequenz ω'_0 durchzuführen. Diese Schwingung mit ω'_0 zwingt das Elektron dazu, Hertzische Dipolstrahlung mit gleicher Frequenz zu emittieren. Da es sich hierbei um elektromagnetische Strahlung handelt, gilt $k' = \omega'/c = \omega'_0/c$. Um nun die Wellenzahl im Laborsystem zu berechnen, muß bei der Rücktransformation zwischen Parallel- und Senkrechtkomponente unterschieden werden:

$$\begin{aligned}k'_{\perp} &= k' \sin \theta' \\ k'_{\parallel} &= k' \cos \theta' \\ k_{\perp} &= k'_{\perp} = k' \sin \theta' \\ k_{\parallel} &= \gamma\left(k'_{\parallel} + \frac{v}{c^2}\omega'\right) = \gamma k' (\cos \theta' + \beta),\end{aligned}\quad (3.27)$$

wobei hier θ' für den Azimutwinkel von k' steht, bezogen auf die Richtung der Geschwindigkeit. Im Laborsystem ergibt sich für die Wellenzahl der emittierten Strahlung

$$\begin{aligned}k &= \sqrt{k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2} = k' \sqrt{\sin^2 \theta' + \gamma^2 (\cos \theta' + \beta)^2} \\ &= \gamma \left(\frac{\omega_0}{c} - \beta k_0\right) \sqrt{\sin^2 \theta' + \gamma^2 (\cos \theta' + \beta)^2}.\end{aligned}\quad (3.28)$$

In diesem Ausdruck steht allerdings noch immer θ' , der Azimutwinkel im Beam-System, der sich wie

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma (\cos \theta - \beta)} \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma (\cos \theta' + \beta)} \quad (3.29)$$

transformiert. Die allgemeine Umrechnung von 3.28 auf Azimutwinkel θ ist sehr langwierig und soll hier nicht gezeigt werden. Das Ergebnis dieser Umrechnung lautet

$$k = \gamma^2 \left(\frac{\omega_0}{c} - \beta k_0 \right) \left[1 + \beta \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta} \right]. \quad (3.30)$$

Durch das starke relativistische Beaming wird die emittierte Strahlung nur in kleine Raumbereiche abgestrahlt, das heißt, daß nur bestimmte Winkel θ überhaupt interessant sind. Nach RYBICKI & LIGHTMAN (1979) ist die in das Raumwinkelement $d\Omega'$ abgegebene Leistung dP' im Beam-System durch

$$\frac{dP'}{d\Omega'} = \frac{q^2 a'^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \sin^2 \theta' \quad (3.31)$$

gegeben. q bezeichnet hier die Ladung des Teilchens, das durch die Beschleunigung \mathbf{a}' zur Emission angeregt wird. Transformiert auf das Laborsystem unter der in unserem Fall gegebenen Bedingung $\mathbf{v} \parallel \mathbf{a}'$ ergibt sich (RYBICKI & LIGHTMAN (1979))

$$\frac{dP_{\parallel}}{d\Omega} = \frac{q^2 a_{\parallel}^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^6}. \quad (3.32)$$

Anhand von Gl. 3.32 kann leicht abgeleitet werden, daß für große Lorentzfaktoren $\gamma \gg 1$ die maximale Leistung näherungsweise in einem Kegel mit

$$\tan \theta_{\text{Max}} \approx \frac{1}{2\gamma\beta} \quad (3.33)$$

abgestrahlt wird (siehe auch Abb. 3.3). Je höher der Lorentzfaktor γ ist, desto kleiner wird der Winkelbereich um θ_{Max} , in den nennenswert Strahlung abgegeben wird. Dabei wird die in θ_{Max} -Richtung abgegebene Leistung gegenüber der reinen Dipolstrahlung ($\gamma = 1$, $\theta = \pi/2$) enorm verstärkt. Bei $\gamma = \sqrt{5}$ beträgt dieser Verstärkungsfaktor beispielsweise 10^4 .

Die Kohärenz beim FEL kommt, wie bereits erwähnt, von der Tatsache, daß viele Beam-Elektronen gemeinsam das gleiche elektrische Feld „sehen“ und dadurch ihre Energie phasenrichtig abstrahlen. Die Anzahl von Elektronen in einem bestimmten Raumvolumen ist eine Lorentzinvariante, so daß

$$N'_e = n'_e dV' = n_e dV = N_e \quad (3.34)$$

gilt. Die Ausdehnung des kohärent strahlenden Volumens ist größenordnungsmäßig gleich der Wellenlänge der Langmuirwellen, für die üblicherweise in groben Abschätzungen die Debye-Länge λ_D angenommen wird. Damit findet man für die Zahl der kohärent strahlenden Teilchen:

$$N_{\text{koh}} \sim n_b \lambda_D^3. \quad (3.35)$$

In der numerischen Simulation des FEL, die in den nächsten Abschnitten vorgeführt werden soll, sehen wir, daß das Kohärenzvolumen durchaus sehr viel größer als λ_D^3 sein kann.

Kapitel 4

Numerische Realisierung

In diesem Kapitel werden die numerischen Methoden die bei der Simulation des FEL benötigt werden genauer dargestellt. Zunächst werden in Abschnitt 4.1 die zwei unterschiedlichen Herangehensweisen an eine numerische kinetische Beschreibung eines Plasmas mit ihren Vor- und Nachteilen beschrieben. Die nachfolgenden Abschnitte 4.2, 4.3, 4.4 und 4.5 behandeln die Normierung und Diskretisierung der physikalischen Größen, mit deren Hilfe eine Implementierung der numerischen Verfahren erst möglich wird. Im letzten Abschnitt 4.6 wird auf die Realisierung der FEL-Simulation eingegangen und näher beschrieben.

4.1 Numerische Methoden der kinetischen Beschreibung eines Plasmas

Die Simulation des FEL erfordert, wie bereits in Abschnitt 3.1 gezeigt, eine kinetische Beschreibung des Plasmas. Dazu benötigt man eine relativistische Transportgleichung für jede Plasmakomponente, die die zeitliche Entwicklung für die jeweilige Komponente beschreibt. Im vorliegenden Fall soll die relativistische Vlasovgleichung 3.6 verwendet werden, da, wie bereits erwähnt, das Boltzmannsche Stoßintegral vernachlässigbar ist. Die zeitliche Entwicklung der in den Vlasovgleichungen vorkommenden elektromagnetischen Felder wird durch die Maxwellgleichungen beschrieben, die selbstkonsistent zusammen mit den Vlasovgleichungen numerisch gelöst werden. Das mathematische Problem wird also durch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_s}{\partial t} &= -\mathbf{v}_s \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} - \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}) \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{p}} \\
\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= c^2 \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} \\
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E} \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\nabla \cdot \mathbf{j} \\
\rho &= \sum_s \rho_s = \sum_s \int d^3 p q_s f_s \\
\mathbf{j} &= \sum_s \mathbf{j}_s = \sum_s \int d^3 p q_s \mathbf{v}_s f_s
\end{aligned} \tag{4.1}$$

und den Anfangsbedingungen ($t = t_0$)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4.2}$$

vollständig beschrieben. Die Poissongleichung (4.2, rechts) ist nur eine Anfangsbedingung, da sie implizit von der Kontinuitätsgleichung in Kombination mit dem Ampèreschen Gesetz erfüllt wird. Die Kontinuitätsgleichung in 4.1 ist eigentlich bereits mit der Vlasovgleichung gegeben, da sie aber explizit in der Simulation verwendet wird, wurde sie zusätzlich mit aufgeführt.

Um das Gleichungssystem 4.1 numerisch zu lösen, gibt es zwei gängige Ansätze. Im einen Fall (VL) werden die Vlasovgleichungen für eine gegebene Verteilungsfunktion direkt gelöst. Das heißt, man nutzt direkt die Tatsache, daß es sich um

Transportgleichungen handelt aus und propagiert die Phasenraumvolumenelemente des Plasmas. Allgemein gilt für die Vlasovgleichungen $f(t, \mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t)) = f(t + \delta t, \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, \mathbf{p} + \delta \mathbf{p}) = f(t + \delta t, \mathbf{r} + \mathbf{v}\delta t, \mathbf{p} + \mathbf{F}\delta t)$, was direkt aus der Massenerhaltung folgt. Dies kann beim VL-Ansatz, einer finite Differenzen Methode, verwendet werden, um eine numerische Abbildung $VL : f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) \longrightarrow f(t + \Delta t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ zu konstruieren, die der dynamischen Entwicklung der Verteilungsfunktion f möglichst genau entspricht. Dabei sind insbesondere Kriterien wie Massen- und Energieerhaltung zu beachten, was die Konstruktion einer numerischen Abbildung VL enorm erschwert (siehe hierzu RUHL (2000)). Im anderen Fall, beim sogenannten „Particle in Cell“ (PIC)-Ansatz, einer finite Elemente Methode, wird die Verteilungsfunktion f durch Werte auf einer Menge von diskreten variablen Stützstellen im Phasenraum definiert und dadurch approximiert. Wie sich zeigen wird, ist bei einem solchen Ansatz die zeitliche Entwicklung von f an einem festen Ort im Phasenraum entsprechend der Vlasovgleichung äquivalent zu einer Bewegung der Stützstellen im Phasenraum. Da diese Stützstellenbewegung durch die üblichen Bewegungsgleichungen für Teilchen beschrieben wird, werden sie auch als Quasiteilchen (**P**article) bezeichnet. Die elektromagnetischen Felder werden sowohl bei der PIC- als auch bei der VL-Methode auf einem Gitter gespeichert und gerechnet, was sozusagen die „Zellen“ (**C**ell) vorgibt, in denen sich die Quasiteilchen bei der PIC-Methode bewegen.

Die beiden Ansätze haben unterschiedliche Vor- und Nachteile. Der VL-Ansatz zeichnet sich durch ein sehr geringes Rauschen der makroskopischen Größen wie der Teilchen- oder der Stromdichte aus. Der entscheidende Nachteil ist der Computerspeicherbedarf. Bei der VL-Methode muß die gesamte Verteilungsfunktion auf einem Gitter gespeichert und gerechnet werden, insbesondere auch an Stellen im Phasenraum, an denen die Verteilungsfunktion null ist. Das heißt, daß je nach Problemstellung viel Rechenzeit und Computerspeicher für uninteressante Bereiche mit verschwindender Verteilungsfunktion verschwendet werden müssen. Bei der PIC-Methode bilden die Quasiteilchen die Phasenraumbewegung des Plasmas nach und sitzen daher bei geeigneter Wahl der Anfangsbedingungen automatisch auf den interessanten Bereichen des Phasenraums, d.h. auf dem Träger der Verteilungsfunktion. Es werden also beim PIC-Ansatz tatsächlich genau die Bereiche betrachtet, die für die Dynamik des Plasmas wichtig sind. Daher handelt es sich um ein sehr effizientes Verfahren, was die Verwendung der Computerressourcen angeht. Der wesentliche Nachteil beim PIC-Verfahren ist das höhere Rauschen, mit dem die Ergebnisse behaftet sind. Durch die Verwendung von Quasiteilchen wird ein Phasenraumvolumenelement je nach Anzahl der Quasiteilchen mitunter nur sehr dünn besetzt, was zu dem erhöhten Rauschen führt. Abhilfe kann durch Vergrößern der Quasiteilchenanzahl geschaffen werden, wobei sich dann der Rechenaufwand dem der VL-Methode nähert.

Aufgrund der höheren Effizienz soll ein PIC-Code für die Simulation eines FEL-Prozesses verwendet werden. Dafür wurde der von Dr. Hartmut Ruhl an der Technischen Universität Darmstadt entwickelte (siehe auch RUHL (2000)) PIC-Code verwendet. Er wurde für diese Arbeit um einen relativistischen Teilcheninjektor und verschiedene Diagnoseverfahren erweitert. Im Folgenden soll detailliert auf die Funktionsweise des Programms eingegangen werden, die zum Teil auch in BIRDSALL & LANGDON (1995) beschrieben wird.

4.2 Normierung der physikalischen Größen

In dem verwendeten PIC-Code werden alle physikalischen Größen in normierter Form verwendet, was die implementierten Formeln deutlich vereinfacht. Da der Code ursprünglich ausschließlich für die Simulation von Laser-Plasma-Wechselwirkungen verwendet wurde, werden alle Größen mit Hilfe von drei frei wählbaren Parametern normiert. Es handelt sich um eine Frequenz ω , meist die der Laserwelle, ein elektrisches Feld E_0 , das im allgemeinen mit der Amplitude der Laserwelle übereinstimmt und eine Ladung Q , für die die Elementarladung e gewählt wird. In unserem Fall, wo es keine Laserwelle gibt, haben ω und E_0 keine besondere physikalische Bedeutung und können somit beliebige Werte haben, sollten jedoch in der Nähe der tatsächlich auftretenden Frequenzen und Feldern liegen, so daß bei numerisch höchster Genauigkeit gerechnet wird. Unter Verwendung von

$$\begin{aligned} t &= t'/\omega, & \mathbf{E} &= E_0 \cdot \mathbf{E}', & \mathbf{r} &= c/\omega \cdot \mathbf{r}', \\ \mathbf{B} &= B_0 \cdot \mathbf{B}', & \mathbf{j}_s &= j_0 \cdot \mathbf{j}'_s, & \rho_s &= \rho_0 \cdot \rho'_s, \\ \mathbf{p}_s &= m_s c \cdot \mathbf{p}', & \mathbf{v}_s &= c \cdot \mathbf{v}'_s, & f_s &= f_{0s} \cdot f'_s, \\ q_s &= Q \cdot q'_s, \end{aligned} \quad (4.3)$$

wobei die normierten Größen durch Striche gekennzeichnet wurden, führt die Normierung der Maxwellgleichungen und der Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} &= \nabla' \times \mathbf{B}' - \mathbf{j} \\ \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} &= -\nabla' \times \mathbf{E}' \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t'} &= -\nabla' \cdot \mathbf{j}' \end{aligned} \quad (4.4)$$

auf die Normierungskonstanten

$$B_0 = E_0/c, \quad j_0 = \varepsilon_0 \omega E_0, \quad \rho_0 = \varepsilon_0 \omega B_0. \quad (4.5)$$

Die Normierung der Vlasovgleichungen führt zu

$$\frac{\partial f'_s}{\partial t'} = -\mathbf{v}'_s \frac{\partial f'_s}{\partial \mathbf{r}'} - q'_s \eta_s [\mathbf{E}' + \mathbf{v}'_s \times \mathbf{B}'] \frac{\partial f'_s}{\partial \mathbf{p}'} \quad (4.6)$$

und

$$\rho'_s = q'_s \int d^3 p' f'_s, \quad \mathbf{j}'_s = q'_s \int d^3 p' \mathbf{v}'_s f'_s, \quad (4.7)$$

wobei sich die Normierungskonstanten

$$\eta_s = \frac{QE_0}{\omega m_s c} \quad \text{und} \quad f_{0s} = \frac{\varepsilon_0 \omega E_0}{Q m_s^3 c^4} \quad (4.8)$$

ergeben (siehe auch RUHL (2000)). Da im Folgenden ausschließlich normierte Größen vorkommen, entfallen von nun ab die Normierstriche wieder.

4.3 Maxwell–Gleichungen

In diesem Abschnitt soll die verwendete Diskretisierung und das Integrationsverfahren für die Maxwellgleichungen gezeigt werden. Ausgangspunkt dafür sind die Gleichungen in Komponentenschreibweise für das elektrische Feld

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial t} &= \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) - j_x \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) - j_y \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) - j_z,\end{aligned}\tag{4.9}$$

für das Magnetfeld

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_x}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)\end{aligned}\tag{4.10}$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial j_x}{\partial x} - \frac{\partial j_y}{\partial y} - \frac{\partial j_z}{\partial z}.\tag{4.11}$$

Alle diese Gleichungen sind mit Hilfe des „Leapfrog“-Verfahrens diskretisiert. Dabei werden die Ableitungen der entsprechenden Größen ϕ auf dem numerischen Gitter nach dem Schema

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x = j \cdot \Delta x) \longrightarrow \frac{\phi((j + \frac{1}{2}) \cdot \Delta x) - \phi((j - \frac{1}{2}) \cdot \Delta x)}{\Delta x} =: \frac{\phi_{j+1/2} - \phi_{j-1/2}}{\Delta x}\tag{4.12}$$

nachgebildet, wobei ϕ hier eine allgemeine, von x abhängige Funktion und Δx die Gitterweite in x -Richtung bezeichnet. Mit dieser Diskretisierung wird aus den Max-

wellgleichungen und der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{(E_x)_{j,k,l}^{n+\frac{1}{2}} - (E_x)_{j,k,l}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{(B_z)_{j,k+\frac{1}{2},l}^n - (B_z)_{j,k-\frac{1}{2},l}^n}{\Delta y} - \frac{(B_y)_{j,k,l+\frac{1}{2}}^n - (B_y)_{j,k,l-\frac{1}{2}}^n}{\Delta z} - (j_x)_{j,k,l}^n \quad (4.13)$$

$$\frac{(E_y)_{j,k,l}^{n+\frac{1}{2}} - (E_y)_{j,k,l}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{(B_x)_{j,k,l+\frac{1}{2}}^n - (B_x)_{j,k,l-\frac{1}{2}}^n}{\Delta z} - \frac{(B_z)_{j+\frac{1}{2},k,l}^n - (B_z)_{j-\frac{1}{2},k,l}^n}{\Delta x} - (j_y)_{j,k,l}^n \quad (4.14)$$

$$\frac{(E_z)_{j,k,l}^{n+\frac{1}{2}} - (E_z)_{j,k,l}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{(B_y)_{j+\frac{1}{2},k,l}^n - (B_y)_{j-\frac{1}{2},k,l}^n}{\Delta x} - \frac{(B_x)_{j,k+\frac{1}{2},l}^n - (B_x)_{j,k-\frac{1}{2},l}^n}{\Delta y} - (j_z)_{j,k,l}^n \quad (4.15)$$

$$\frac{(B_x)_{j,k,l}^{n+\frac{1}{2}} - (B_x)_{j,k,l}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{(E_z)_{j,k+\frac{1}{2},l}^n - (E_z)_{j,k-\frac{1}{2},l}^n}{\Delta y} + \frac{(E_y)_{j,k,l+\frac{1}{2}}^n - (E_y)_{j,k,l-\frac{1}{2}}^n}{\Delta z} \quad (4.16)$$

$$\frac{(B_y)_{j,k,l}^{n+\frac{1}{2}} - (B_y)_{j,k,l}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{(E_x)_{j,k,l+\frac{1}{2}}^n - (E_x)_{j,k,l-\frac{1}{2}}^n}{\Delta z} + \frac{(E_z)_{j+\frac{1}{2},k,l}^n - (E_z)_{j-\frac{1}{2},k,l}^n}{\Delta x} \quad (4.17)$$

$$\frac{(B_z)_{j,k,l}^{n+\frac{1}{2}} - (B_z)_{j,k,l}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{(E_y)_{j+\frac{1}{2},k,l}^n - (E_y)_{j-\frac{1}{2},k,l}^n}{\Delta x} + \frac{(E_x)_{j,k+\frac{1}{2},l}^n - (E_x)_{j,k-\frac{1}{2},l}^n}{\Delta y} \quad (4.18)$$

$$\frac{\rho_{j,k,l}^{n+\frac{1}{2}} - \rho_{j,k,l}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{(j_x)_{j+\frac{1}{2},k,l}^n - (j_x)_{j-\frac{1}{2},k,l}^n}{\Delta x} - \frac{(j_y)_{j,k+\frac{1}{2},l}^n - (j_y)_{j,k-\frac{1}{2},l}^n}{\Delta y} - \frac{(j_z)_{j,k,l+\frac{1}{2}}^n - (j_z)_{j,k,l-\frac{1}{2}}^n}{\Delta z} \quad (4.19)$$

Hier und im Folgenden gilt für die Gitterbeschreibung jeder Feldkomponente ϕ die Abkürzung $\phi_{j,k,l}^n = \phi(t = n \cdot \Delta t, x = j \cdot \Delta x, y = k \cdot \Delta y, z = l \cdot \Delta z)$. Die Gleichungen 4.13–4.19 enthalten noch Größen, die nicht bekannt sind. Die rechten Seiten der Gleichungen verwenden Feldkomponenten auf halbzahligen Ortsgitterstellen und ganzzahligen Zeitgitterstellen, während die linken Seiten der Gleichungen nur Feldkomponenten auf ganzzahligen Ortsgitterstellen und halbzahligen Zeitgitterstellen liefern. Durch eine Verschiebung der Gitter der einzelnen Feldkomponenten erhält man ein Schema, das ausschließlich bekannte Größen miteinander verknüpft. Verwendet man die Gitterverschiebungen

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}')_{j,k,l}^{n+\frac{1}{2}} &:= \left((E_x)_{j+\frac{1}{2},k,l}^{n+\frac{1}{2}}, (E_y)_{j,k+\frac{1}{2},l}^{n+\frac{1}{2}}, (E_z)_{j,k,l+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ (\mathbf{B}')_{j,k,l}^n &:= \left((B_x)_{j,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}^n, (B_y)_{j+\frac{1}{2},k,l+\frac{1}{2}}^n, (B_z)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2},l}^n \right) \\ (\mathbf{j}')_{j,k,l}^{n+1} &:= \left((j_x)_{j+\frac{1}{2},k,l}^{n+1}, (j_y)_{j,k+\frac{1}{2},l}^{n+1}, (j_z)_{j,k,l+\frac{1}{2}}^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

und setzt sie in die Gleichungen 4.13–4.19 ein, so entstehen konsistente, diskretisierte Gleichungen

$$\frac{(E'_x)_{j,k,l}^{n+\frac{1}{2}} - (E'_x)_{j,k,l}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{(B'_z)_{j,k,l}^n - (B'_z)_{j,k-1,l}^n}{\Delta y} - \frac{(B'_y)_{j,k,l}^n - (B'_y)_{j,k,l-1}^n}{\Delta z} - (j'_x)_{j,k,l}^n \quad (4.21)$$

$$\frac{(E'_y)_{j,k,l}^{n+\frac{1}{2}} - (E'_y)_{j,k,l}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{(B'_x)_{j,k,l}^n - (B'_x)_{j,k,l-1}^n}{\Delta z} - \frac{(B'_z)_{j,k,l}^n - (B'_z)_{j-1,k,l}^n}{\Delta x} - (j'_y)_{j,k,l}^n \quad (4.22)$$

$$\frac{(E'_z)_{j,k,l}^{n+\frac{1}{2}} - (E'_z)_{j,k,l}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{(B'_y)_{j,k,l}^n - (B'_y)_{j-1,k,l}^n}{\Delta x} - \frac{(B'_x)_{j,k,l}^n - (B'_x)_{j,k-1,l}^n}{\Delta y} - (j'_z)_{j,k,l}^n \quad (4.23)$$

$$\frac{(B'_x)_{j,k,l}^{n+1} - (B'_x)_{j,k,l}^n}{\Delta t} = \frac{(E'_z)_{j,k+1,l}^{n+\frac{1}{2}} - (E'_z)_{j,k,l}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} - \frac{(E'_y)_{j,k,l+1}^{n+\frac{1}{2}} - (E'_y)_{j,k,l}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} \quad (4.24)$$

$$\frac{(B'_y)_{j,k,l}^{n+1} - (B'_y)_{j,k,l}^n}{\Delta t} = \frac{(E'_x)_{j,k,l+1}^{n+\frac{1}{2}} - (E'_x)_{j,k,l}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} - \frac{(E'_z)_{j+1,k,l}^{n+\frac{1}{2}} - (E'_z)_{j,k,l}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \quad (4.25)$$

$$\frac{(B'_z)_{j,k,l}^{n+1} - (B'_z)_{j,k,l}^n}{\Delta t} = \frac{(E'_y)_{j+1,k,l}^{n+\frac{1}{2}} - (E'_y)_{j,k,l}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \frac{(E'_x)_{j,k+1,l}^{n+\frac{1}{2}} - (E'_x)_{j,k,l}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} \quad (4.26)$$

$$\frac{\rho_{j,k,l}^{n+\frac{3}{2}} - \rho_{j,k,l}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{(j'_x)_{j,k,l}^{n+1} - (j'_x)_{j-1,k,l}^{n+1}}{\Delta x} - \frac{(j'_y)_{j,k,l}^{n+1} - (j'_y)_{j,k-1,l}^{n+1}}{\Delta y} - \frac{(j'_z)_{j,k,l}^{n+1} - (j'_z)_{j,k,l-1}^{n+1}}{\Delta z}, \quad (4.27)$$

die nun ausschließlich aus bekannten oder ausrechenbaren Größen bestehen. Es ist allerdings anzumerken, daß nun aufgrund der Gitterverschiebungen die einzelnen Komponenten nicht mehr zu gleichen Zeiten oder am gleichen Ort bekannt sind, sondern jede Komponente ihr eigenes Gittersystem hat. Der entscheidende Vorteil dieses Gittersystems ist die Möglichkeit, auf speicherintensive Hilfsfelder verzichten zu können.

4.4 Vlasovgleichung

Die Vlasovgleichung wird, wie bereits oben erwähnt, mit Hilfe der PIC-Methode integriert. Dazu wird die Verteilungsfunktion f_s jeder Teilchensorte mit dem Ansatz

$$f_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = C_s \sum_{i=1}^{N_s} \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i(t)) \eta(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i(t)) \quad (4.28)$$

genähert. N_s ist hier die frei wählbare Anzahl der Quasiteilchen (Stützstellen) der Sorte s . N_s ist der entscheidende Parameter für die Güte der Approximation und gibt

an wie präzise der Verlauf der nachgebildeten Verteilungsfunktion aufgelöst werden kann. Der Normierungsfaktor C_s ist durch

$$C_s = \frac{1}{N_s} \int d^3r d^3p f_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (4.29)$$

den Quotienten aus der tatsächlichen, physikalischen Anzahl der realen Teilchen und der Anzahl der Quasiteilchen, gegeben. Die Größen ϕ und η sind die Formfaktoren im Orts- und Impulsraum, die die Verteilungsfunktion beschreiben, die ein Quasiteilchen repräsentiert. Spätestens an dieser Stelle wird klar, warum auf den Begriff *Quasiteilchen* unbedingt Wert gelegt werden muß. Sie haben im Gegensatz zu physikalischen Elementarteilchen eine räumliche und eventuell sogar eine impulsartige Ausdehnung, was keine physikalische Entsprechung hat. Der Begriff Quasiteilchen ist immer nur als ein Synonym für Stützstellen der Approximation zu verstehen. Erst weiter unten soll gezeigt werden, daß sich diese künstlichen Hilfskonstrukte tatsächlich wie eine Art von Teilchen verhalten und deshalb abgekürzt als Quasiteilchen bezeichnet werden.

In dem verwendeten PIC-Code sind die Formfaktoren durch

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) &= S(x, x_i) \cdot S(y, y_i) \cdot S(z, z_i) \\ \eta(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i) &= \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) \end{aligned}$$

mit

$$S(x, x_i) = \begin{cases} 1 - \left| \frac{x - x_i}{\Delta x} \right| & , x_i - \Delta x \leq x \leq x_i + \Delta x \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (4.30)$$

definiert, wobei δ die Diracsche Delta-Distribution ist. Der Impuls der Quasiteilchen ist in unserem Fall also scharf definiert, während die Position durch ausgedehnte, dreieckige Formfaktoren der Breite $2 \cdot \Delta x/y/z$ beschrieben wird, die in Abb. 4.1 skizziert sind.

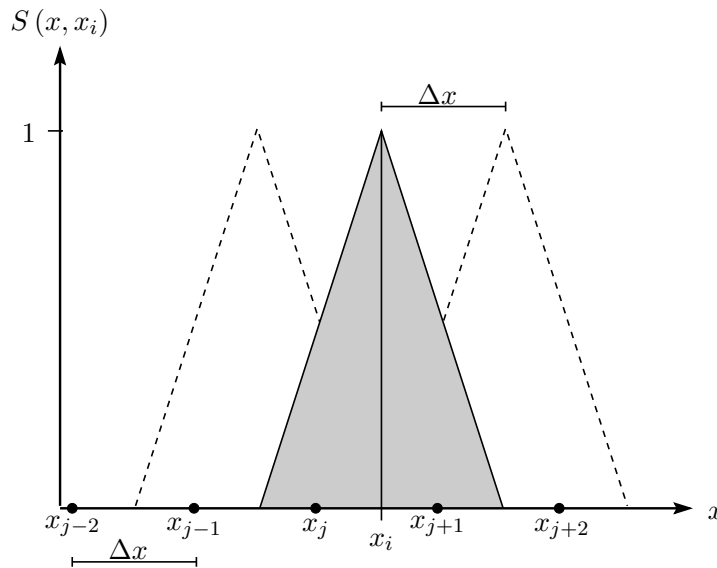


Abbildung 4.1: Darstellung der eindimensionalen räumlichen Formfaktoren

Da die ideale, inkompressible Vlasovgleichung als Transportgleichung das Phasenraumvolumen erhält ($\frac{d}{dt} \int f d\Phi = \int d\Phi \frac{df}{dt} = 0$), gilt für Verteilungsfunktionen f_s , die durch die Vlasovgleichung beschrieben werden, der einfache Zusammenhang

$$f_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_s(t + dt, \mathbf{r} + \mathbf{v}dt, \mathbf{p} + \mathbf{F}dt), \quad (4.31)$$

was nichts anderes heißt, als daß die Charakteristiken der Vlasovgleichung durch die Bewegungsgleichungen der zugehörigen (physikalischen) Teilchen gegeben sind. Durch eine einfache Transformation wird aus Gl. 4.31

$$f_s(t + dt, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_s(t, \mathbf{r} - \mathbf{v}dt, \mathbf{p} - \mathbf{F}dt), \quad (4.32)$$

was in Zusammenhang mit Gl. 4.28 zu

$$f_s(t + dt, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = C_s \sum_i \phi(\mathbf{r} - \mathbf{v}dt, \mathbf{r}_i) \eta(\mathbf{p} - \mathbf{F}dt, \mathbf{p}_i) \quad (4.33)$$

führt. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften der verwendeten Formfaktoren ist dies äquivalent zu

$$f_s(t + dt, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = C_s \sum_i \phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i dt) \eta(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i + \mathbf{F}_i dt), \quad (4.34)$$

was ein effizientes Integrationsschema für die Vlasovgleichungen gibt. Gleichung 4.34 drückt die zeitliche Entwicklung der Verteilungsfunktion f_s an einem festen Ort im Phasenraum (\mathbf{r}, \mathbf{p}) durch eine Bewegung der Quasiteilchen im Phasenraum aus. Die Bewegung der Quasiteilchen wird dabei von den normalen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i \quad \text{und} \quad \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i \quad (4.35)$$

für physikalische Teilchen der Sorte s beschrieben. Obwohl sich die Quasiteilchen wie physikalische Teilchen verhalten, ist immer zu beachten, daß sie aufgrund der räumlichen Ausdehnung durch die Formfaktoren keinen realen Teilchen entsprechen. Gleichung 4.34 bringt eine enorme numerische Vereinfachung mit sich, indem sie eine siebendimensionale, partielle Differentialgleichung erster Ordnung umwandelt in das System gewöhnlicher Differentialgleichungen 4.35.

Für die Kraft \mathbf{F}_i ist wie in Gl. 4.6 die normierte Lorentzkraft $q_s \eta_s [\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}]$ zu benutzen. Das verwendete Integrationsschema lautet dann wie folgt:

Als erstes wird im Ort ein Integrationsschritt erster Ordnung mit der Schrittweite $\frac{\Delta t}{2}$ (die Indizes i werden weggelassen)

$$\mathbf{r} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) = \mathbf{r}(t) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_s(t) \quad (4.36)$$

durchgeführt, der uns die Position des Quasiteilchens zur Zeit $t + \frac{1}{2}$ liefert und damit die Möglichkeit, die Felder am Ort des Quasiteilchens zu interpolieren. Im zweiten Schritt wird nun mit den interpolierten Feldwerten ein ganzer Zeitschritt

$$\mathbf{p}(t + \Delta t) = \mathbf{p}(t) + \Delta t q_s \eta_s \left[\mathbf{E} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) + \mathbf{v}_s \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \times \mathbf{B} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \right] \quad (4.37)$$

von zweiter Ordnung im Impuls gemacht. Mit der Kenntnis von $\mathbf{p}(t + \Delta t)$ kann man nun noch drittens einen halben Zeitschritt

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{v}(t + \Delta t) \quad (4.38)$$

in der Teilchenposition machen, wobei unter Verwendung von dem jetzt bekannten $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ die zwei halben Schritte in der Position zusammen wieder von zweiter Ordnung sind. Das kann sehr einfach gezeigt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t + \Delta t) &= \mathbf{r}(t) + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{v}(t) + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{v}(t + \Delta t) = \Delta t \left[\frac{\mathbf{v}(t) + \mathbf{v}(t + \Delta t)}{2} \right] \\ \mathbf{r}(t + \Delta t) &= \Delta t \mathbf{v}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \mathcal{O}(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Der Impulsschritt in Gleichung 4.37 wird in mehrere Einzelschritte zerlegt. Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &=: \mathbf{p}^- - \frac{\Delta t}{2}q_s\eta_s \mathbf{E}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ \mathbf{p}(t + \Delta t) &=: \mathbf{p}^+ + \frac{\Delta t}{2}q_s\eta_s \mathbf{E}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

für die beiden Hilfsgrößen \mathbf{p}^+ und \mathbf{p}^- wird aus Gl. 4.37

$$\mathbf{p}^- - \mathbf{p}^+ = -q_s\eta_s\Delta t \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (4.41)$$

wobei

$$\mathbf{v} = \frac{\frac{1}{2}(\mathbf{p}^+ + \mathbf{p}^-)}{\sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}(\mathbf{p}^+ + \mathbf{p}^-)\right]^2}} \quad (4.42)$$

ist. Mit Hilfe der Größe

$$\boldsymbol{\tau} := \frac{1}{2} \frac{q_s\eta_s\Delta t \mathbf{B}}{\sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}(\mathbf{p}^+ + \mathbf{p}^-)\right]^2}} \quad (4.43)$$

kann man Gl. 4.41 als eine Drehung des Impulses $\mathbf{p}^+ = \mathbf{T} \mathbf{p}^-$, mit der Drehmatrix \mathbf{T} , schreiben. In Komponentenschreibweise ergibt sich

$$\begin{pmatrix} p_x^+ \\ p_y^+ \\ p_z^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\tau_x^2-\tau_y^2-\tau_z^2}{1+\tau^2} & \frac{2\tau_x\tau_y+2\tau_z}{1+\tau^2} & \frac{2\tau_x\tau_z-2\tau_y}{1+\tau^2} \\ \frac{2\tau_x\tau_y-2\tau_z}{1+\tau^2} & \frac{1-\tau_x^2+\tau_y^2-\tau_z^2}{1+\tau^2} & \frac{2\tau_y\tau_z+2\tau_x}{1+\tau^2} \\ \frac{2\tau_x\tau_z+2\tau_y}{1+\tau^2} & \frac{2\tau_y\tau_z-2\tau_x}{1+\tau^2} & \frac{1-\tau_x^2-\tau_y^2+\tau_z^2}{1+\tau^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x^- \\ p_y^- \\ p_z^- \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

Die zeitliche Entwicklung der Quasiteilchen wird also durch die drei Einzelschritte

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^- &= \mathbf{p}(t) + \frac{\Delta t}{2}q_s\eta_s \mathbf{E}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ \mathbf{p}^+ &= \mathbf{T}(\mathbf{B}, \mathbf{p}) \mathbf{p}^- \\ \mathbf{p}(t + \Delta t) &= \mathbf{p}^+ + \frac{\Delta t}{2}q_s\eta_s \mathbf{E}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

beschrieben. Alle Operationen in Gl. 4.45 sind von zweiter Ordnung, mit Ausnahme der Approximation $\frac{\mathbf{p}^+ + \mathbf{p}^-}{2} \approx \mathbf{p}(t + \frac{\Delta t}{2}) \approx \mathbf{p}(t)$, welche nur von erster Ordnung ist.

4.5 Die Stromdichte

Wie aus den Maxwellgleichungen 4.9 hervorgeht, ist die Stromdichte \mathbf{j} die entscheidende Größe für die Rückkopplung der Quasiteilchen bzw. der Verteilungsfunktion auf die elektromagnetischen Felder. Da die Ladungsdichte ρ in den Maxwellgleichungen dank der Kontinuitätsgleichung 4.11 keine Rolle spielt, kann auf eine numerisch aufwendige Lösung der elliptischen Poissongleichung verzichtet werden. Voraussetzung dafür ist allerdings eine strikte Massenerhaltung bei der Berechnung der Stromdichte. Die Kontinuitätsgleichung wird nun benutzt, um aus der Änderung der Ladungsdichte ρ , die durch die Quasiteilchen gegeben ist, die in den Maxwellgleichungen benötigte Stromdichte \mathbf{j} massenerhaltend zu berechnen. Die Ladungsdichte ist dabei nach Gl. 4.28 durch die Summe über alle Formfaktoren $\phi_{j,k,l}(\mathbf{r}_i) = \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)$ gegeben, wobei, um die weiteren Ausführungen zu vereinfachen alles, auf ein Quasiteilchen bezogen werden soll. Dies bedeutet, es ist immer noch die Summe über alle Quasiteilchen und -sorten zu bilden. Die Ladungsdichte eines Quasiteilchens ist dann

$$\begin{aligned} \rho_{j,k,l}^{n+\frac{1}{2}} &= q_s C_s \phi_{j,k,l} \left(\mathbf{r}_i^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &\text{bzw.} \\ \rho_{j,k,l}^{n+\frac{3}{2}} &= q_s C_s \phi_{j,k,l} \left(\mathbf{r}_i^{n+\frac{3}{2}} \right) = q_s C_s \phi_{j,k,l} \left(\mathbf{r}_i^{n+\frac{1}{2}} + \delta \mathbf{r}_i \right). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Die Stromdichte \mathbf{j} soll mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung aus der bekannten zeitlichen Änderung der Ladungsdichte berechnet werden. Dazu wird die diskretisierte Kontinuitätsgleichung 4.19 für die einzelnen Komponenten von \mathbf{j} zerlegt

$$\begin{aligned} (j_x)_{j+\frac{1}{2},k,l}^{n+1} &= (j_x)_{j-\frac{1}{2},k,l}^{n+1} - \frac{\Delta x}{\Delta t} q_s C_s (W_x)_{j,k,l}^{n+1} \\ (j_y)_{j+\frac{1}{2},k,l}^{n+1} &= (j_y)_{j-\frac{1}{2},k,l}^{n+1} - \frac{\Delta y}{\Delta t} q_s C_s (W_y)_{j,k,l}^{n+1} \\ (j_z)_{j+\frac{1}{2},k,l}^{n+1} &= (j_z)_{j-\frac{1}{2},k,l}^{n+1} - \frac{\Delta z}{\Delta t} q_s C_s (W_z)_{j,k,l}^{n+1} \end{aligned} \quad (4.47)$$

und damit der Gewichtungsfaktor \mathbf{W} eingeführt. Aus 4.19 und der Definition von \mathbf{W} folgt unmittelbar der Zusammenhang

$$(W_x)_{j,k,l}^{n+1} + (W_y)_{j,k,l}^{n+1} + (W_z)_{j,k,l}^{n+1} = \phi_{j,k,l} \left(\mathbf{r}_i^{n+\frac{1}{2}} + \delta \mathbf{r}_i \right) - \phi_{j,k,l} \left(\mathbf{r}_i^{n+\frac{1}{2}} \right). \quad (4.48)$$

Für die massenerhaltende Berechnung von \mathbf{j} wird die Änderung des Formfaktors ϕ während eines Zeitschritts in acht Elementaränderungen zerlegt, mit deren Hilfe der Gewichtungsfaktor \mathbf{W} ausgedrückt und somit auch berechnet werden kann. Im Folgenden werden die Abkürzungen

$$\phi_{j,k,l} \left(\mathbf{r}_i^{n+\frac{1}{2}} + \delta \mathbf{r}_i \right) \longrightarrow \phi(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \mathbf{W}_{j,k,l}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{W} \quad (4.49)$$

verwendet. Die Zerlegung von ϕ in acht Elementaränderungen ist formal durch

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) &= \alpha_1 \phi(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) + \alpha_2 \phi(x + \delta x, y + \delta y, z) \\ &\quad + \alpha_3 \phi(x + \delta x, y, z + \delta z) \quad + \alpha_4 \phi(x, y + \delta y, z + \delta z) \\ &\quad + \alpha_5 \phi(x + \delta x, y, z) \quad + \alpha_6 \phi(x, y + \delta y, z) \\ &\quad + \alpha_7 \phi(x, y, z + \delta z) \quad + \alpha_8 \phi(x, y, z) \end{aligned} \quad (4.50)$$

gegeben, wobei Gl. 4.48 nahelegt, daß sich auch \mathbf{W} durch geeignete Gewichtung der Einzelverschiebungen darstellen läßt. Es lassen sich verschiedene, bestimmende Kriterien für den Zusammenhang zwischen den Elementarverschiebungen und dem Gewichtungsfaktor aufstellen. Zum Einen muß $W_x = 0$ gelten, falls $\delta x = 0$, da dann kein Strom in x -Richtung fließen kann (y - und z -Richtung analog). Des weiteren gilt $W_x = W_y$, falls $\delta x = \delta y$. Dies folgt aus $\phi(x, y, z) = \phi(y, x, z)$, der Wegunabhängigkeit der Änderung in ϕ . Das gilt natürlich auch analog für (x, z) - und (y, z) -Paare. Schließlich liefert auch die Normierung $\sum_{j,k,l} \phi_{j,k,l} = 1$ eine Bedingung, so daß der Gewichtungsfaktor \mathbf{W} aus den Formfaktoren ϕ berechnet werden kann. Der Zusammenhang ist gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
W_x = & \frac{1}{3} \phi(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) + \frac{1}{6} \phi(x + \delta x, y + \delta y, z) \\
& + \frac{1}{6} \phi(x + \delta x, y, z + \delta z) - \frac{1}{3} \phi(x, y + \delta y, z + \delta z) \\
& + \frac{1}{3} \phi(x + \delta x, y, z) - \frac{1}{6} \phi(x, y + \delta y, z) \\
& - \frac{1}{6} \phi(x, y, z + \delta z) - \frac{1}{3} \phi(x, y, z), \tag{4.51}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_y = & \frac{1}{3} \phi(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) + \frac{1}{6} \phi(x + \delta x, y + \delta y, z) \\
& - \frac{1}{3} \phi(x + \delta x, y, z + \delta z) + \frac{1}{6} \phi(x, y + \delta y, z + \delta z) \\
& - \frac{1}{6} \phi(x + \delta x, y, z) + \frac{1}{3} \phi(x, y + \delta y, z) \\
& - \frac{1}{6} \phi(x, y, z + \delta z) - \frac{1}{3} \phi(x, y, z) \tag{4.52}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
W_z = & \frac{1}{3} \phi(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) - \frac{1}{3} \phi(x + \delta x, y + \delta y, z) \\
& + \frac{1}{6} \phi(x + \delta x, y, z + \delta z) + \frac{1}{6} \phi(x, y + \delta y, z + \delta z) \\
& - \frac{1}{6} \phi(x + \delta x, y, z) - \frac{1}{6} \phi(x, y + \delta y, z) \\
& + \frac{1}{3} \phi(x, y, z + \delta z) - \frac{1}{3} \phi(x, y, z). \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Auf diese Weise wird im PIC-Code aus der Änderung der Formfaktoren während eines Zeitschritts der Gewichtungsfaktor \mathbf{W} und damit wiederum mit Hilfe von Gl. 4.47 die entsprechende Stromdichte berechnet.

Im verwendeten PIC-Code sind also die Dynamik der elektromagnetischen Felder (Abschnitt 4.3), die Dynamik des Plasmas (Abschnitt 4.4), die Wirkungen der Felder auf das Plasma (Abschnitt 4.4) und auch die Rückwirkungen des Plasmas auf die Felder (Abschnitt 4.5) selbstkonsistent¹ berücksichtigt.

¹In einer Mean-Field Näherung der Felder

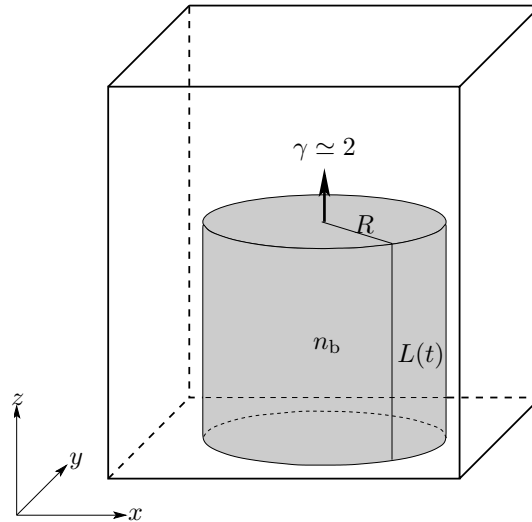


Abbildung 4.2: Schematische Darstellung des numerischen Rechengebietes

4.6 Numerische Details der Simulation

Für die Simulation des FEL wird in ein homogenes Elektronenplasma ein relativistischer ($\gamma = \sqrt{5}$) Elektronenstrahl eingeschossen. In Abbildung 4.2 ist die Situation schematisch dargestellt. Das ruhende, homogene Hintergrundplasma ist in der Skizze durchsichtig dargestellt, während das in z -Richtung, mit $\gamma\beta = 2$ eindringende Beam-Plasma grau schattiert wurde. R bezeichnet in der Abbildung den Radius des Elektronenstrahls in x - y -Richtung und $L(t)$ die Strecke in z -Richtung, die der Beam zum Zeitpunkt t bereits im Rechengebiet zurückgelegt hat. Sowohl die Teilchendichte des Hintergrunds n_e , als auch die Beam-Teilchendichte n_b beträgt 10^{12} m^{-3} . Die jeweiligen Temperaturen T_e und T_b entsprechen einer mittleren Elektronenenergie von 100 eV. Das elektromagnetische Feld im Simulationsbereich (Box) ist Null, mit Ausnahme der z -Komponente des Magnetfelds B_z , das zu Beginn der Simulation überall homogen auf 0.1 T gesetzt wird, um ein starkes Führfeld zu simulieren. Die Werte all dieser Größen sind durch die entsprechenden Plasmamparameter in der Magnetosphäre eines Pulsars motiviert, die in Kapitel 2 genauer erläutert wurden.

Es gibt in der Simulation drei verschiedene Randbedingungen. Zum einen ist die Fläche, an der die Beam-Elektronen eindringen (unten in Abb. 4.2), zu nennen. Sie ist offen für Plasma und Felder in beide Richtungen, und zusätzlich fließt relativistisches Plasma ein. Plasma, das diesen Rand von innen nach außen überquert, geht verloren. Der zweite offene Rand ist an der gegenüberliegenden Seite der Box (oben in Abb. 4.2), wo jedoch kein Materieeinfluß stattfindet. Die restlichen Ränder (links, rechts, hinten und vorne in Abb. 4.2) sind mit periodischen Randbedingungen ausgestattet. Das heißt, daß Plasma und Felder, die die Box an einer der „periodischen“ Flächen verlassen, auf der gegenüberliegenden Fläche wieder erscheinen. Dies ist äquivalent mit einer unendlichen Anzahl von aneinandergelassenen, identischen Boxen, in denen absolut der gleiche physikalische Vorgang abläuft. Die periodischen Randbedingungen sind die unphysikalischsten und die physikalischsten Randbedingungen gleichzeitig. Einerseits ist es unphysikalisch, anzunehmen, daß

sich in unendlich vielen benachbarten Gebieten genau die gleichen physikalischen Vorgänge abspielen können, andererseits gibt es bei diesen Randbedingungen eigentlich keinen physikalischen Rand. Weder die Teilchen noch die Felder werden von dem numerischen, periodischen Rand beeinflusst, da sich die Position des Randes in den zu lösenden, numerischen Gleichungen durch nichts auszeichnet. Lediglich für die Felder ergibt sich eine Einschränkung, es können nur noch Felder mit einer Periodizität realisiert werden, die mit der Ausdehnung des Rechengebiets korrespondiert. Bei einer geeigneten Wahl der Boxgrößen L_x , L_y stellt dies jedoch keine wesentliche Einschränkung dar. Geeignet heißt in diesem Zusammenhang, daß die größte zu erwartende Wellenlänge kleiner als die Boxausdehnung in der entsprechenden Richtung ist.

Für die Simulation des FEL wurde ein numerisches Gitter mit $80 \times 80 \times 200$ Gitterpunkten gewählt, was bei einer physikalischen Boxgröße von $100 \text{ m} \times 100 \text{ m} \times 250 \text{ m}$ einer Auflösung von $\delta x = \delta y = \delta z = 1,25 \text{ m}$ entspricht. Die kleinste darstellbare und damit simulierbare Wellenlänge λ_{Min} beträgt dann $2,5 \text{ m}$, was gleich der halben Wellenlänge der zu erwartenden Radiostrahlung ist. Die am schnellsten anwachsende Langmuirmode hat für unseren speziellen Fall eine Wellenlänge λ_{Lang} von $30,03 \text{ m}$, damit passen mehr als acht vollständige Wellenlängen in die Box. Das gewährleistet eine saubere Beschreibung des Anwachsens der Langmuirinstabilität in der Anfangsphase der Simulation. Diese vom System bevorzugte, d.h. am schnellsten anwachsende $30,03 \text{ m}$ -Welle wird bereits bei der Anfangskonfiguration näherungsweise vorgegeben, so daß das System keine Rechenzeit mit der „Suche“ nach der richtigen Mode verschwendet. Im Vorfeld der eigentlichen Simulation wurden mehrere eindimensionalen Testrechnungen mit verschiedenen vorgegebenen, gegenüber der bevorzugten Mode leicht versetzten Wellen gemacht. Die Tests zeigten, daß sich eine vorgegebene Welle lediglich auf den Zeitpunkt auswirkt, an dem das exponentielle Anwachsen einsetzt, nicht jedoch auf die Anwachsrate, die absolute Stärke und vor allem nicht auf die Wellenlänge der dominierenden Langmuirmode. Damit wurde gezeigt, daß man bei der Simulation dem System mit der Anfangskonfiguration einen „Tip“ für die bevorzugte Mode geben darf, ohne daß man die Dynamik der Langmuirinstabilität nennenswert beeinflusst. Dies gilt jedoch nur für sehr kleine vorgegebene Störungen, wie sie ausnahmslos benutzt wurden. In Abbildung 4.3 ist die verwendete Anfangskonfiguration des Plasmas schematisch als eindimensionales Phasenraumdiagramm dargestellt. Die grau schattierten Flächen zeigen, wo im Phasenraum Plasma zu finden ist. Jedes mit Elektronen besetzte Phasenraumvolumenelement ist in diesem Diagramm gemäß seines Ortes z und seines Impulses p_z in z -Richtung aufgetragen. Phasenraumelemente in der positiven Impulshalbebene haben eine positive Geschwindigkeit und umgekehrt. Die zugehörigen Geschwindigkeiten sind in Abb. 4.3 an der Ordinate als Pfeile angetragen. Die endliche Dicke in Impulsrichtung der besetzten Bereiche ist eine Ausprägung der thermischen Breite der Maxwellverteilung, d.h. verschiedene Elektronen am gleichen Ort haben aufgrund der endlichen Temperatur verschiedene Impulse, so daß es im Phasenraumdiagramm zu einer Verschmierung in Impulsrichtung kommt. Das Hintergrundplasma in der Simulation ist durch die der Abszisse nahegelegenen besetzten Phasenraumelemente dargestellt. Der Elektronenstrahl ist in der Anfangskonfiguration nicht vorhanden, wurde aber in Abb. 4.3 künstlich für einen fortgeschritteneren Zeitpunkt der Simulation eingezeichnet, damit der Ablauf der Simulation klarer wird. Er ist in dem Diagramm links oben, bei $\gamma\beta = 2$ zu sehen. Auch der Elektronenstrahl besitzt eine thermische Breite.

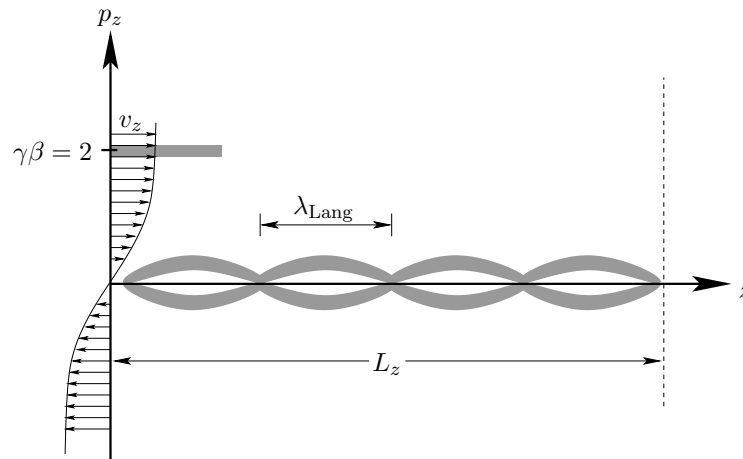


Abbildung 4.3: Phasenraum des Plasmas zu Beginn der Simulation. Die vorgegebene Mode im Hintergrundplasma ist aus Gründen der Übersichtlichkeit stark überhöht dargestellt. Der Beam ist zur Illustration für einen späteren Zeitpunkt eingezeichnet.

Dem Hintergrundplasma wird die bevorzugte Langmuirmode, wie schon erläutert, bereits zu Beginn aufgeprägt. Dazu wird jedem Elektron abhängig von seinem Ort ein zusätzlicher Impuls in Richtung des longitudinalen (z -Richtung) Magnetfeldes gegeben, so daß in Summe eine Bewegung entsteht, die die bevorzugte Mode vorgibt. Es ist zu beachten, daß diese Impulsstörung des Hintergrundplasmas weder eine von Null abweichende Raumladungsdichte, noch eine von Null abweichende Stromdichte vorgibt. Es werden also an jedem Ort z gleich viele Elektronen eingesetzt, und die Verteilungsfunktion der Elektronen ist bezüglich der Abszisse spiegelsymmetrisch, so daß sich an jedem Ort genauso viele Elektronen in positiver z -Richtung bewegen, wie in negativer z -Richtung. In Abb. 4.3 ist diese Struktur im Hintergrundplasma zur besseren Sichtbarkeit extrem überhöht dargestellt. In richtigen Phasenraumdiagrammen aus der Simulation, wie sie im nächsten Kapitel 5 gezeigt werden, ist diese Struktur kaum zu sehen. Sie geht in der thermischen Breite des Hintergrundplasmas fast vollständig unter (siehe auch 5.1).

Kapitel 5

Ergebnisse aus den Simulationen

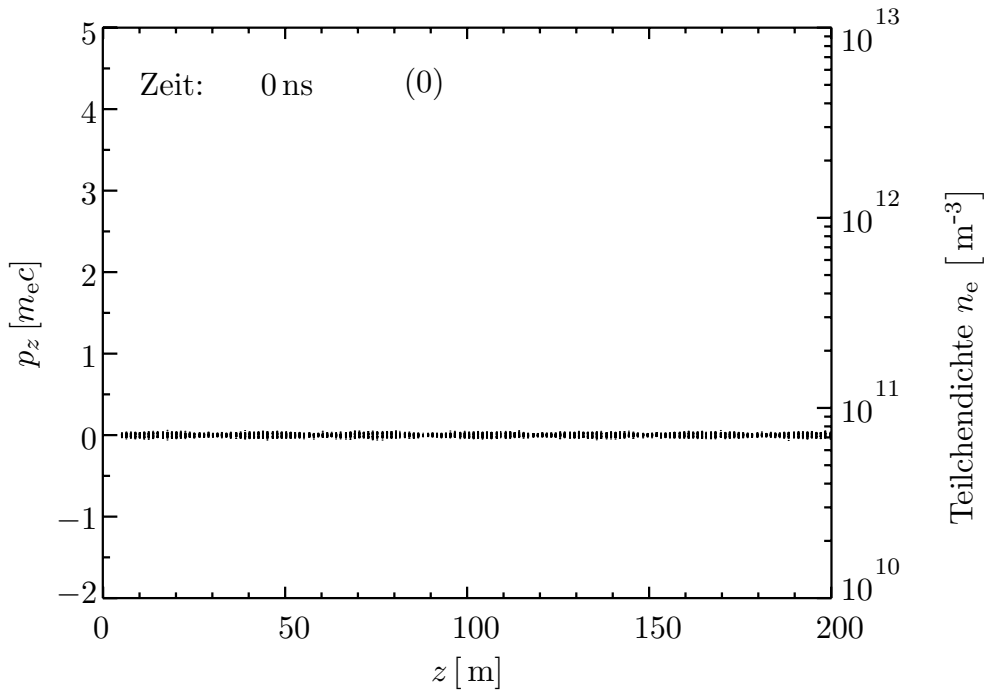


Abbildung 5.1: p_z - z -Phasenraum zu Beginn der Simulation.

In diesem Kapitel werden die Resultate aus der numerischen Simulation des FEL-Prozeß dargestellt. Dabei wird genauer auf den Phasenraum der Elektronenkomponente eingegangen, der eine Fülle von Informationen liefert. Es werden die entstehenden Dichtefluktuationen und das damit zusammenhängende Anwachsen der Langmuirwellen im Detail untersucht. Schließlich folgt eine Beschreibung der Produktion, der Energetik und des Spektrums der entstehenden elektromagnetischer Strahlung.

5.1 Untersuchung des Phasenraums

Zunächst ist das exponentielle Anwachsen der Langmuirinstabilität wie in Kapitel 3 dargestellt zu untersuchen, dann wird genauer auf die Energetik und die Abstrahlcharakteristik eingegangen, und schließlich wird ein Spektrum der beim FEL emittierten elektromagnetischen Strahlung berechnet.

Das exponentielle Anwachsen der Langmuirinstabilität wird im Phasenraum der Quasiteilchen bzw. des Plasmas untersucht. In Abb. 5.1 ist der Phasenraum des Plasmas in longitudinaler Richtung dargestellt. Diese Abbildung korrespondiert mit der schematischen Zeichnung 4.3. Hier werden jedoch keine Phasenraumvolumenelemente dargestellt, sondern direkt die Quasiteilchen als Punkte eingetragen. Also gibt die Dichte der Punkte den Wert der Verteilungsfunktion wieder. Es ist allerdings darauf hinzuweisen, daß sich die Punkte vieler verschiedener Teilchen überdecken können, so daß die Punktdichte nur ein ungefährender, ungenauer und eventuell irreführender Maßstab für die Stärke der Verteilungsfunktion ist. Trotzdem gibt diese Art der Phasenraumdarstellung eine sehr filigrane Vorstellung vom Phasenraum des Plasmas

und soll deshalb in dieser Arbeit verwendet werden. In 5.1 und allen weiteren Abbildungen des Phasenraumes ist nur ein kleiner Bruchteil ($1/50$) aller zur Rechnung verwendeten Teilchen gezeichnet, da sonst keine Strukturen mehr erkennbar wären. Links oben ist sowohl die zugehörige Zeit in Nanosekunden, als auch der entsprechende Zeitschritt der Simulation in Klammern angegeben. Auf der Ordinate findet sich der momentane Impuls der Quasiteilchen in z -Richtung, während auf der Abszisse der Ort in z -Richtung angetragen ist. Bei späteren Zeitschritten ist zusätzlich die Teilchendichte $n_e(x = 50 \text{ m}, y = 50 \text{ m}, z)$ mit einer durchgehenden Kurve eingezeichnet, deren Wert durch die Achse auf der rechten Seite gegeben ist. Wie bereits erwähnt, fehlt in 5.1 noch der Elektronenstrahl, der erst einen Zeitschritt später eingekoppelt wird. Um $p_z = 0$ herum sieht man das Hintergrundplasma mit der sehr schwach ausgeprägten, überlagerten Mode, die vorgegeben wird. Die Quasiteilchen im Hintergrundplasma sind in Form von vertikalen Strichen angeordnet, da die Teilchen zu Beginn auf dem Gitter des Feldes eingesetzt werden. Dies ist notwendig, um bei gegebener Gesamtanzahl von Quasiteilchen die gewünschte Verteilungsfunktion möglichst präzise zu modellieren. Nach wenigen Zeitschritten verschwindet dieses numerische Artefakt vollständig aufgrund der Phasenraumischung, die während der folgenden Zeitschritte die Quasiteilchen im Phasenraum verschmiert.

Zu einem späteren Zeitpunkt, wie in Abb. 5.2 oben, sind im Hintergrundplasma keine numerischen Strichartefakte mehr auszumachen. Im Elektronenstrahl hingegen bleiben die vertikalen Striche während der gesamten Simulationen sichtbar, da die Quasiteilchen des Strahls mit einem Gammafaktor von etwa zwei bereits relativistisch sind und deshalb näherungsweise alle die gleiche Geschwindigkeit von $v_b = c \cdot \sqrt{1 - 1/\gamma^2} = 0.89c$ haben. Erst mit Anwachsen der Instabilität verschmiert auch der Elektronenstrahl. Trotz der scheinbaren Unstetigkeit des vom Beam besetzten Phasenraumvolumens ist die Teilchendichte, die in Abb. 5.2 oben zum ersten Mal mit eingezeichnet ist, sehr glatt. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die Quasiteilchen bzw. Formfaktoren tatsächlich eine räumliche Ausdehnung haben, die beim Einsetzen der Quasiteilchen berücksichtigt wird.

Die vorgegebene Modenstruktur ist in Abb. 5.2 oben immer noch zu sehen, sie ist allerdings noch nicht signifikant angewachsen. Es scheint, daß von dem hindurchlaufenden Elektronenstrahl keine Wirkung auf das Hintergrundplasma ausgeübt wird, obwohl der Kopf das Rechengebiet bereits halb durchquert hat. Deutlich sichtbar ist allerdings eine thermische Verbreiterung des Elektronenstrahls, die bereits eine Wechselwirkung mit Energieumsatz andeutet.

Gänzlich anders sieht es in Abb. 5.2 unten aus. Der Elektronenstrahl, der die Box bei diesem 300. Zeitschritt beinahe durchquert hat, besitzt nun eine erheblich größere thermische Breite. Im Hintergrund hat ein deutliches Anwachsen der vorgegebenen Mode stattgefunden, wobei die elektrischen Felder der Mode schon erheblichen Einfluß auf die relativistischen Beam-Elektronen haben. Der Elektronenstrahl zeigt bereits eine starke Variation im Impuls der Elektronen, die sich aber im weiteren zeitlichen Verlauf der Simulation noch intensiviert. Nur 25 Zeitschritte weiter, wie in Abb. 5.3 oben gezeigt, verlieren schon einige der Strahlelektronen ihre gesamte kinetische Energie. Die Phasenraumvolumenelemente des Elektronenstrahls mischen sich mit denen des Hintergrundplasmas. In der weiteren Entwicklung, die in Abb. 5.3 unten dargestellt ist, wird der Unterschied zwischen Strahl- und Hintergrundelektronen fast vollständig aufgehoben. Die Strahlelektronen werden teilweise bis zum Stillstand abgebremst, während sich ein Teil der (ehemaligen) Hintergrundelektronen starker

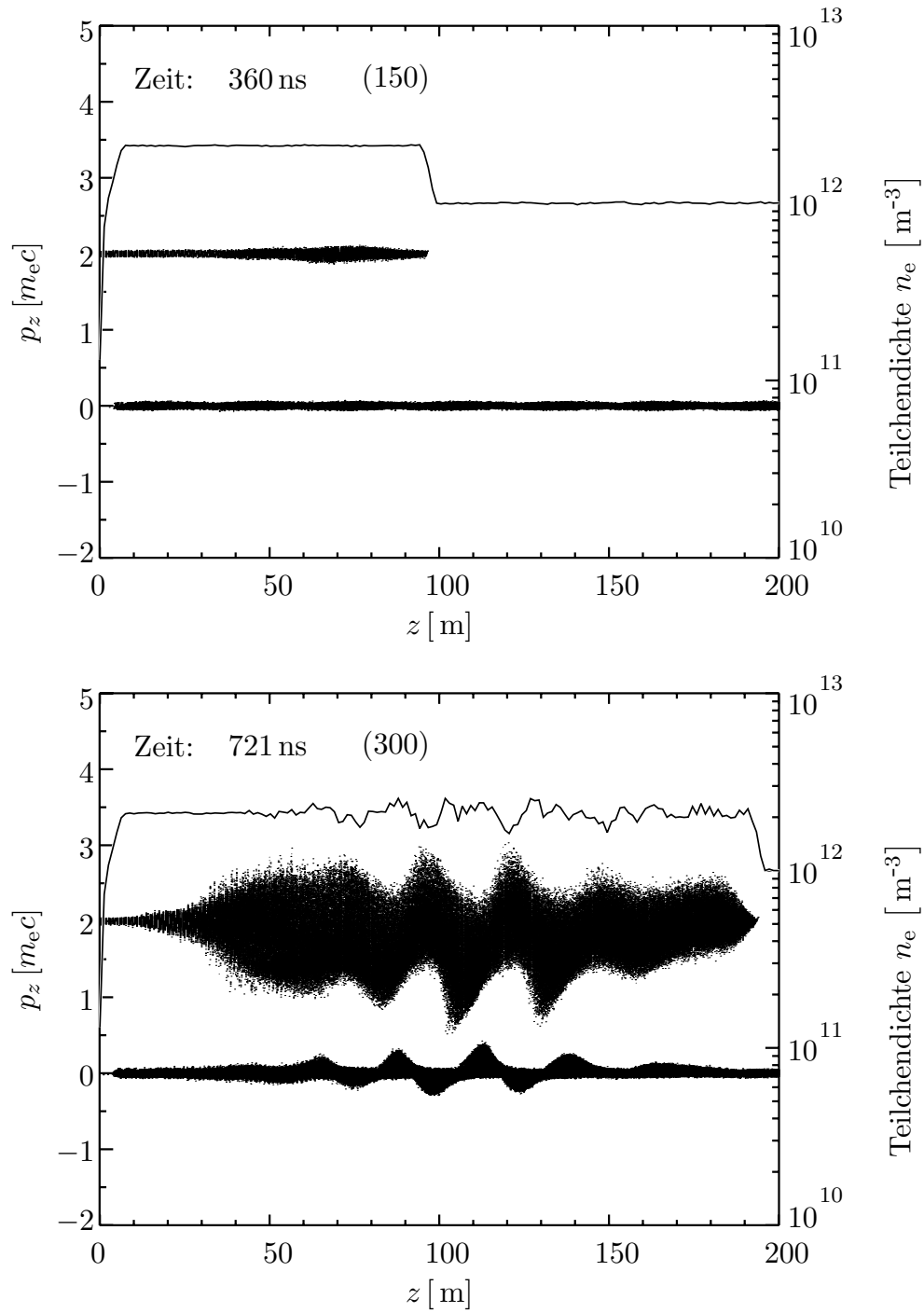


Abbildung 5.2: p_z - z -Phasenraum zum Zeitschritt 150 (oben) und 300 (unten).

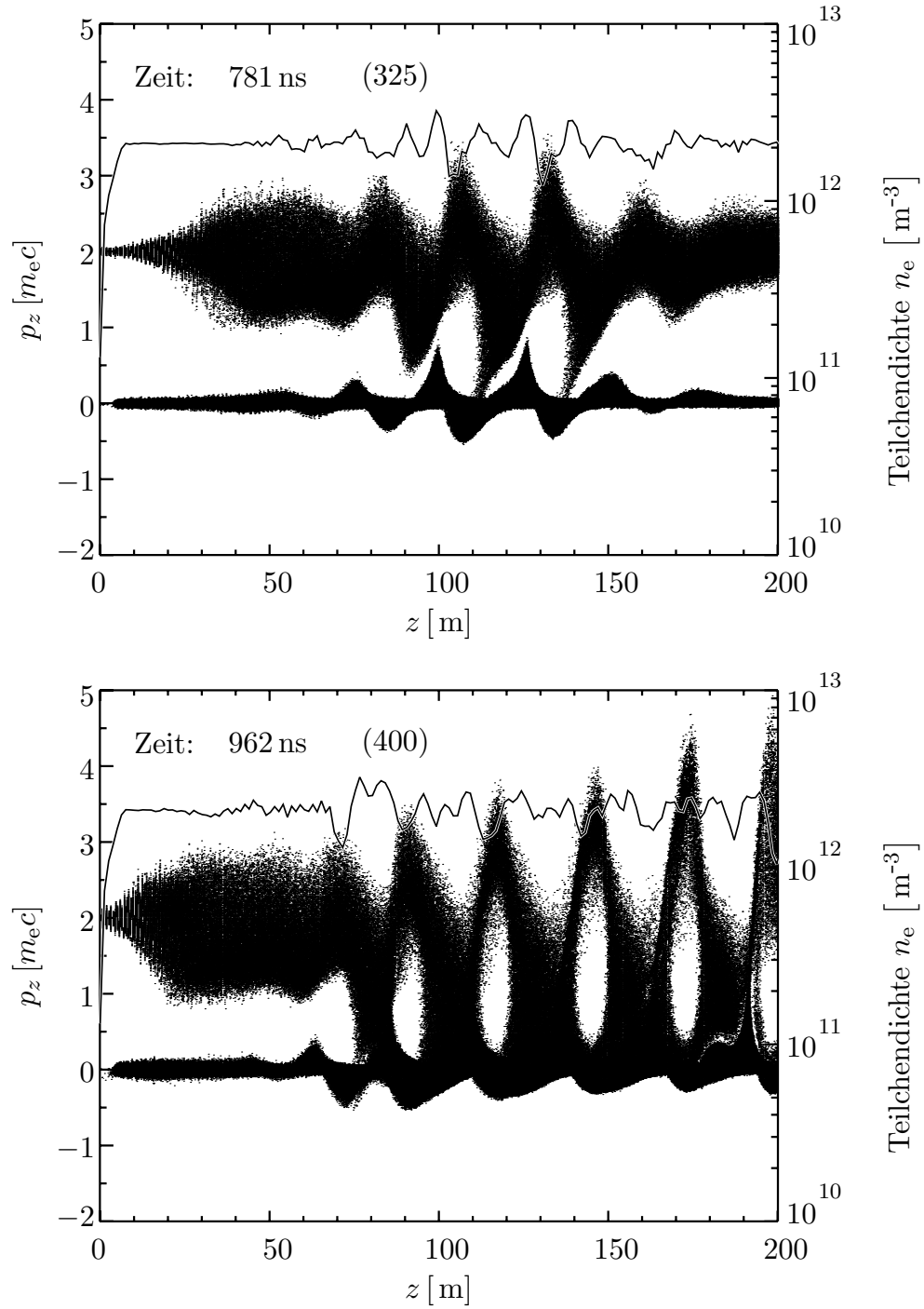


Abbildung 5.3: p_z - z -Phasenraum zum Zeitschritt 325 (oben) und 400 (unten).

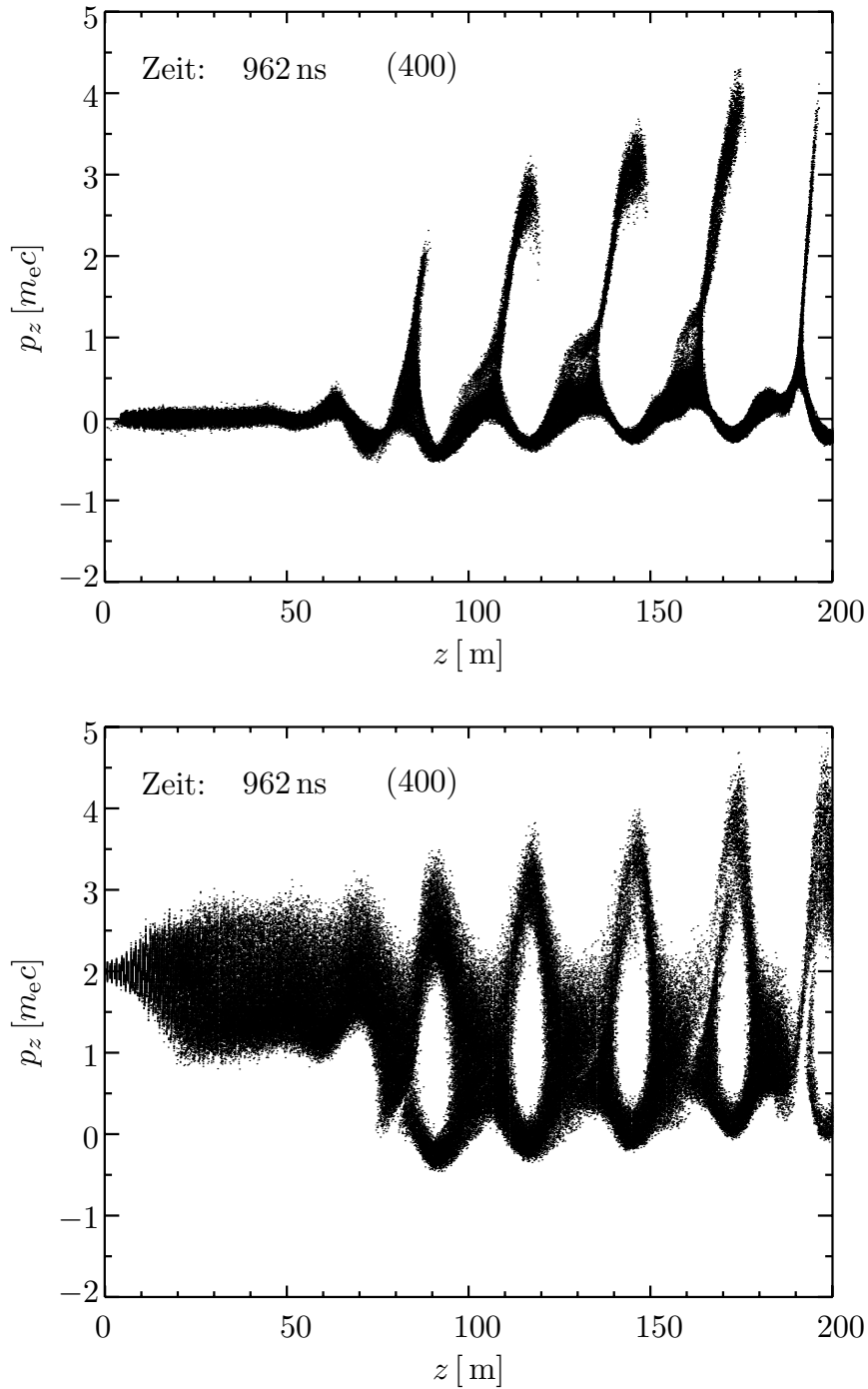


Abbildung 5.4: p_z - z -Phasenraum der Hintergrundelektronen (oben) und der Strahlelektronen (unten).

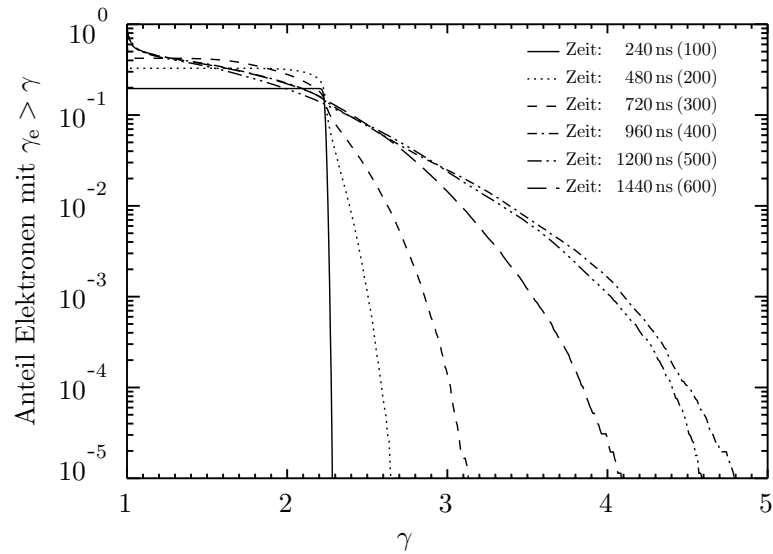


Abbildung 5.5: Quotient zwischen Anzahl der Elektronen mit einem Gammafaktor größer als γ und der Gesamtanzahl der Elektronen zum Zeitschritt 400.

Beschleunigung ausgesetzt sieht, so daß physikalisch eine Unterscheidung unmöglich wird. In der Simulation ist allerdings für jedes Quasiteilchen die Information seiner ursprünglichen Herkunft gespeichert, so daß auch bei völliger Durchmischung für jedes Teilchen dessen Herkunft zweifelsfrei festgestellt werden kann. Die Abbildungen 5.4 oben und unten zeigen wieder den Phasenraum bei Zeitschritt 400, jedoch unterschieden nach Teilchen, die ursprünglich im Strahl (5.4 unten)–, bzw. im Hintergrund (5.4 oben) zu finden waren.

Die Beschleunigung auf Gammafaktoren von > 4 ist nur auf einen sehr kleinen Bruchteil $\lesssim 4 \cdot 10^{-4}$, siehe auch Abb. 5.5) der beteiligten Teilchen beschränkt. Wie in Abb. 5.4 oben deutlich zu erkennen ist, werden nur Teilchen an sehr charakteristischen Orten und ganz bestimmten Impulsen stark beschleunigt. Es handelt sich hierbei um resonante Teilchenbeschleunigung, d.h. die Elektronen ausgewählter Teilchenpopulationen „reiten“ auf angeregten elektrostatischen Wellen. Damit diese Form der Teilchenbeschleunigung höhere Energien produziert, muß die Geschwindigkeit der zu beschleunigenden Teilchen möglichst identisch mit der Phasengeschwindigkeit der Welle sein. Dies erklärt den geringen Anteil an hochenergetischen ($\gamma > 2$) Elektronen. Der überwiegende Anteil von Elektronen (86 %) ist in einem Bereich mit $\gamma < 1.1$ zu finden.

In Abbildung 5.4 unten zeigt sich die in Abschnitt 3.2, Seite 29 theoretisch beschriebene, longitudinale, periodische Bewegung der Strahlelektronen, die letztendlich der Grund für die elektromagnetische Abstrahlung ist. Transformiert man die Situation in Abbildung 5.4 unten in das Ruhesystem der Strahlelektronen ($V_{\text{Trans}} \sim 0.87c$), so ergibt sich eine (quasi-) periodische Longitudinalbewegung, die die bereits beschriebene Hertzsche Dipolstrahlung produziert.

Es sei noch auf die Stärke der Teilchendichtefluktuationen in Abb. 5.2 unten hingewiesen. Dabei handelt es sich um relative Schwankungen von bis zu $\sim 30\%$,

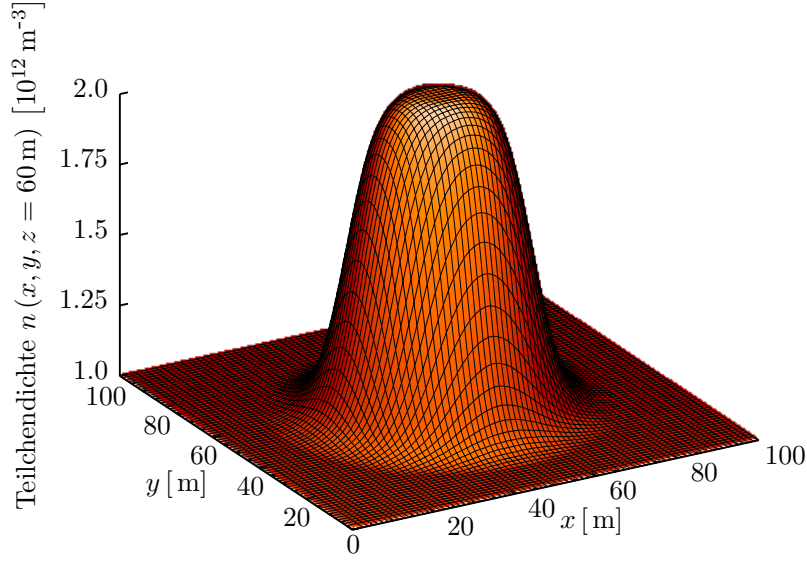


Abbildung 5.6: Profil der Teilchendichte n in x - y -Richtung. Die Erhebung in der Mitte ist der Elektronenstrahl, der Rest ist mit Hintergrundplasma gefüllt

bezogen auf die Gesamtteilchendichte $n_e + n_b = 2 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3}$. Schon nach 300 Zeitschritten sind also die angeregten Langmuirwellen bereits weit jenseits des linearen Anwachsereichs, für den in der theoretischen Behandlung der Langmuirinstabilität mit der Näherung $\delta n_e/n_e \ll 1$ gerechnet wird. Die in dieser Simulation nachgebildete Situation entwickelt sich innerhalb kürzester Zeit ($\lesssim 720 \text{ ns}$) zu einem Beispiel aus dem Bereich starke Langmuirturbulenz in starken Magnetfeldern mit $\omega_{ce} \gg \omega_{pe}$ (siehe auch PELLETIER ET AL. (1988)).

5.2 Die Teilchendichte der Elektronen

Mit den im Ort eindimensionalen Phasenraumdarstellungen sind die Dichtefluktuationen nur schlecht zu veranschaulichen. Deshalb soll an dieser Stelle kurz die dreidimensionale Struktur der Teilchendichte der Elektronen in ihrem zeitlichen Verlauf untersucht werden. Hier ist eine Unterscheidung von Strahl- und Hintergrundelektronen nicht möglich, da nur die Gesamtteilchendichte $n = n_e + n_b$ verfügbar ist. Das heißt, jede Veränderung in n kann sowohl im Strahl, als auch im Hintergrund stattfinden. In Abbildung 5.6 ist das Profil des Elektronenstrahls in x - y -Richtung gezeigt. Der Übergang von Beam zu Hintergrund ist fließend, damit die „Kante“ vom numerischen Gitter in Kombination mit den Formfaktoren sauber aufgelöst wird. Der funktionale Zusammenhang lautet

$$n_b(r) = \frac{10^{12} \text{ m}^{-3}}{1 + \exp\left[\frac{r-R}{\Delta R}\right]}, \quad (5.1)$$

wobei $r = \sqrt{(x-50\text{ m})^2 + (y-50\text{ m})^2}$ der Abstand von der Mitte der Box ist. $R = 20 \text{ m}$ und $\Delta R = 3 \text{ m}$ stehen für den (Halbwerts-)Radius des Strahls und für

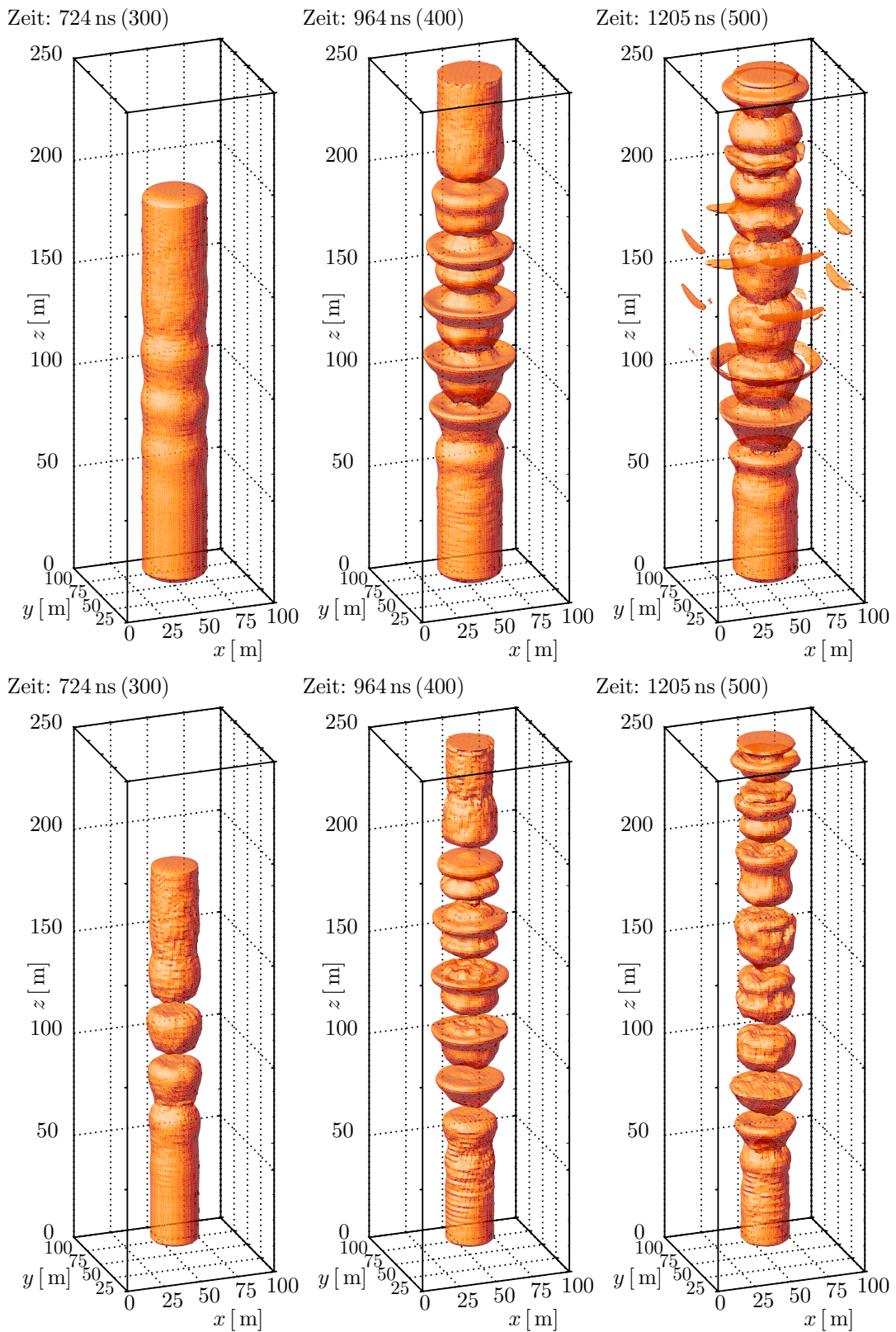


Abbildung 5.7: Dreidimensionale Konturdarstellung der Teilchendichte. Von links nach rechts sind für die Zeitschritte 300, 400 und 500 jeweils die Flächen gezeichnet, an denen die Teilchendichten $n_e = 1.5 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3}$ (oben), bzw. $n_e = 1.9 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3}$ (unten) überschritten werden.

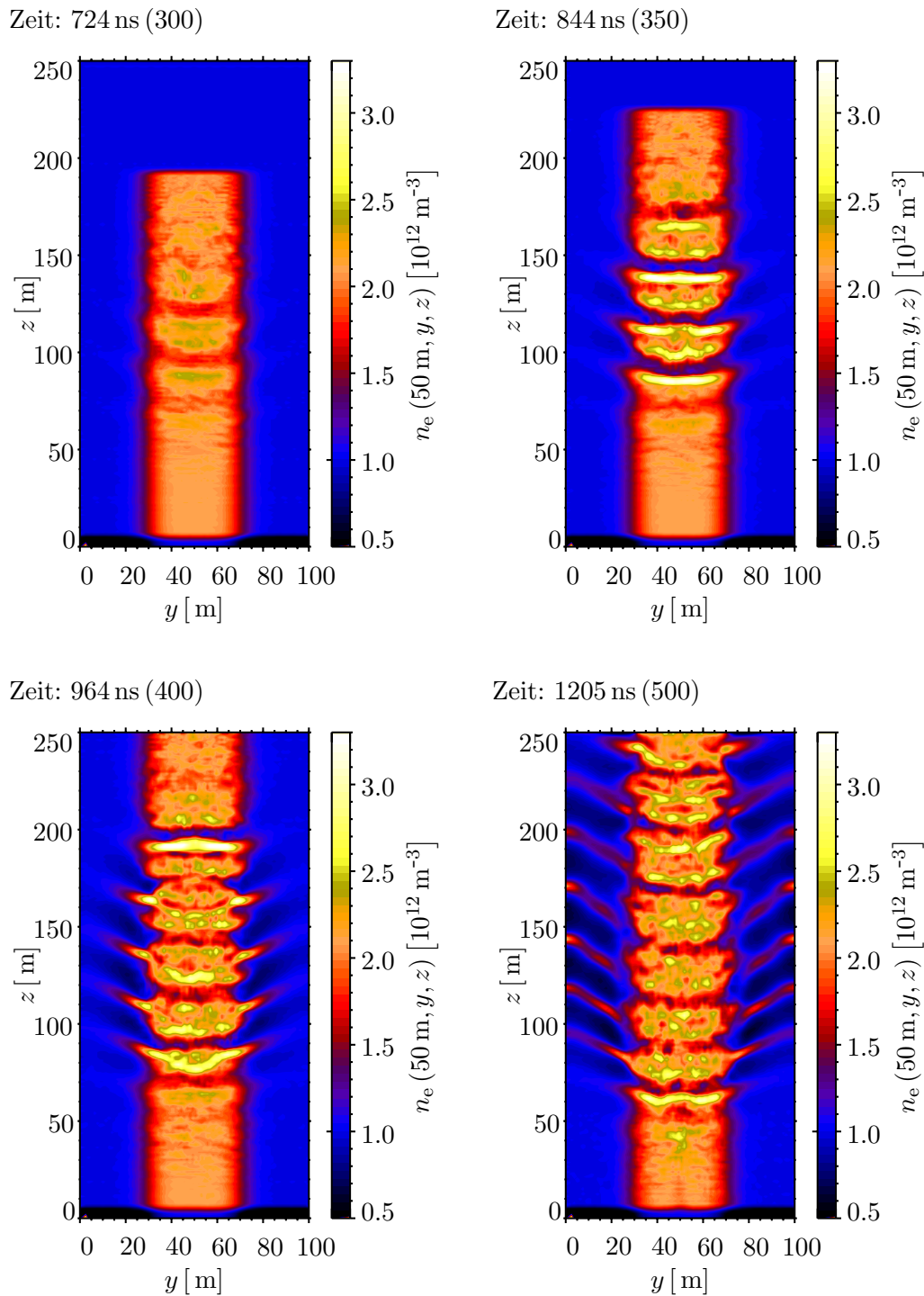


Abbildung 5.8: Zweidimensionale Konturdarstellung des Teilchendichte für die Zeitschritte 300, 350, 400 und 500. Die Teilchendichte ist in der Schnittebene durch das Zentrum der Box ($x = 50 \text{ m}$) gezeichnet.

die Dicke der Übergangsschicht. In den sechs Abbildungen 5.7 auf Seite 57 ist der zeitliche und räumliche Verlauf der Teilchendichte der Elektronen dargestellt. Es handelt sich jeweils um eine dreidimensionale Konturfläche von n_e . In den oberen drei Abbildungen ist es der Wert $n_e = 1.5 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3}$, in den unteren drei der Wert $n_e = 1.9 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3}$, den die Teilchendichte an der Konturfläche überschreitet. Sowohl oben als auch unten sind die Zeitschritte 300, 400 und 500 von rechts nach links gezeigt. Die Verformungen, die der dargestellte Elektronenstrahl in den Abbildungen 5.7 scheinbar erleidet sind auf Erhöhung der Dichte außerhalb des Beam-Radius und auf Absenkung der Dichte innerhalb des Beam-Radius zurückzuführen. Tatsächlich können sich die Quasiteilchen dank des starken Führfeldes kaum in x - y -Richtung bewegen. Die Verformung der Konturfläche gibt also die räumliche Struktur der Langmuirwellen wieder. Die schirmartige Struktur, die besonders in den Diagrammen oben-mitte und oben-rechts zu erkennen ist, ist auf resonant beschleunigte Elektronen im Hintergrundplasma zurückzuführen. Vor allem in den unteren Diagrammen kann das Zerfallen des Elektronenstrahls in einzelne sogenannte „Pfannkuchen“ beobachtet werden, die im zeitlichen Verlauf sehr stabil über die Hintergrundstruktur laufen. Sie sind die Ursache für die Kohärenz der entstehenden Strahlung, da alle Elektronen eines „Pfannkuchens“ etwa das gleiche elektrostatische Feld spüren und daher in Phase strahlen. Alle Darstellungen in den Abbildungen 5.7 zeigen, daß die Verteilung Teilchendichte näherungsweise rotationssymmetrisch um das Zentrum bei $(x, y) = (50, 50) \text{ m}$ ist. Abweichungen von der Rotationssymmetrie stammen ausschließlich von der thermischen Breite der Verteilungsfunktion für Elektronenstrahl und Hintergrund. Dank dieser symmetrischen Anordnung ist es möglich die weiteren Untersuchungen mit zweidimensionalen Schnitten durch das Zentrum der Box durchzuführen, ohne daß wesentliche Details verlorengehen. Die verwendete Schnittebene ist $x = 50 \text{ m}$. In den Abbildungen 5.8 auf Seite 58 ist die Teilchendichte n_e in dieser Ebene für die Zeitschritte 300, 350, 400 und 500 dargestellt. Schön zu sehen ist das Anwachsen der bevorzugten Langmuirmode nicht nur in Raumbereichen, die vom Elektronenstrahl durchdrungen werden, sondern in der gesamten Box, wobei es natürlich aufgrund der unterschiedlichen Plasmafrequenzen zu unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten kommt. Zu beachten ist die enorme Stärke der Dichteschwankungen von maximal etwa $\pm 50\%$ bezogen auf die Ruhedichte im Beam mit $n = 2 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3}$. Die Stellen mit den stärksten Gradienten in der Elektronendichte sind zugleich die, an denen das stärkste elektrostatische Feld entsteht und die, an denen die Emission der FEL Strahlung stattfindet. Interessanterweise geht aus den Abbildungen 5.8 deutlich hervor, daß diese Emissionszonen mit fortschreitender Zeit bei immer kleineren Werten von z auftauchen. Dies ist umso überraschender, als daß sich die Strukturen mit etwa 80% der Beam-Geschwindigkeit in positiver z -Richtung bewegen. Es wird also die Information über das Auftreten der Langmuirinstabilität entgegen der Beam-Ausbreitungsrichtung transportiert, so daß nachfolgende Strahlelektronen früher und früher die starken Störungen in der Teilchendichte bemerken und damit auch schneller nach dem Eintritt in die Box emittieren.

Die Verlagerung der Emissionsregion zu immer kleineren z -Bereichen kann auch sehr gut in den Abbildungen 5.9 beobachtet werden. Zunächst entstehen die starken Langmuirwellen im Zentrum der Box bei etwa $z = 100 \text{ m}$, die sich im weiteren Verlauf vor allem nach vorne, aber auch nach hinten ausbreiten. Oben in Abbildung 5.9 ist die Entwicklung am Rand des Beams dargestellt, unten die genau im Zentrum. Es zeigt sich, daß auch im Hintergrundplasma außerhalb der Beam-Region Lang-

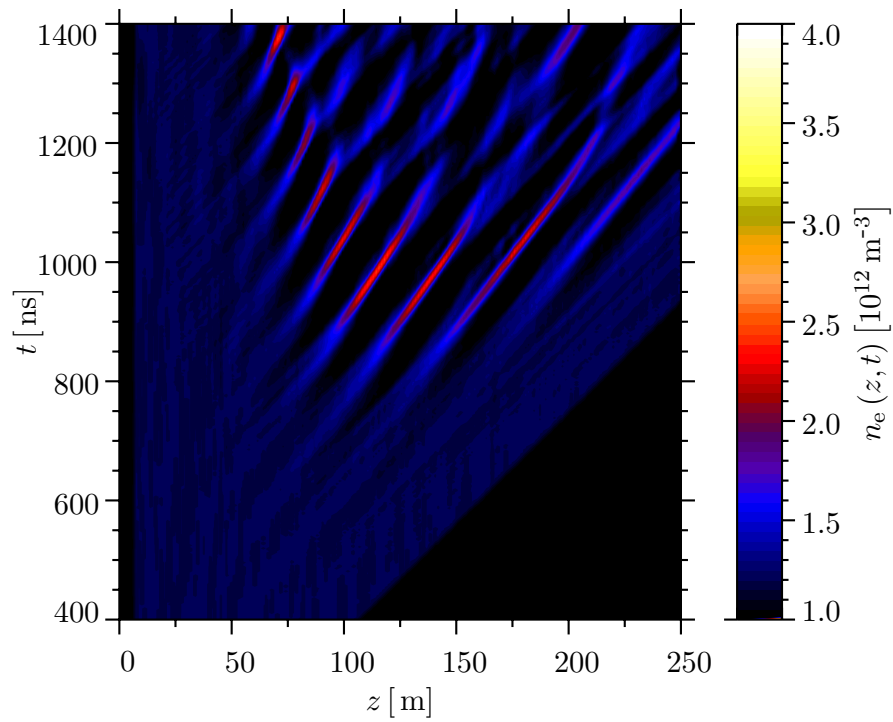
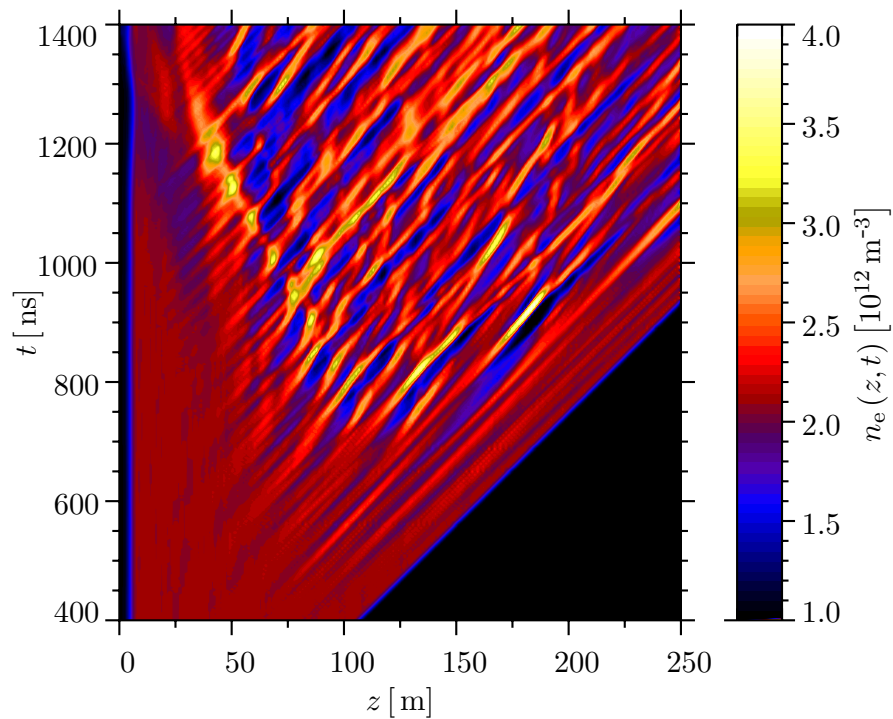
$(x, y) = (50, 25)$ m $(x, y) = (50, 50)$ m

Abbildung 5.9: Zeitliche Entwicklung der Teilchendichte $n_e(z, t)$. Gezeigt ist ein Schnitt entlang des Beam-Randes (oben) und einer genau in der Mitte des Beams (unten).

muirwellen angeregt werden, deren zeitlicher Verlauf mit den im Beam angeregten Wellen korrespondiert. In den Abbildungen 5.9 entspricht die Neigung der Strukturen einer Geschwindigkeit $v = \frac{dz}{dt}$. Daher kann man in den Abbildungen deutlich sehen, daß sich die entstehende Langmuirstruktur tatsächlich mit einer kleineren Gruppengeschwindigkeit ausbreitet, als die Strahlelektronen. Das ist eine zentrale Voraussetzung für die Entstehung eines FEL, da dessen Effizienz stark von der Differenz zwischen der Gruppengeschwindigkeit $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ der Langmuirwellen und der Geschwindigkeit der Beamelektronen abhängt (Gl. 3.30). Zudem geht aus den Abbildungen hervor, daß sich die Gruppengeschwindigkeit der Langmuirwellen im Zeitverlauf reduziert. Vor allem in der linken Abbildung ist eine deutliche Krümmung nach oben und damit eine Verringerung der Geschwindigkeiten zu sehen. Im rechten Bild ist dieser Effekt sehr viel schlechter zu sehen, da zu viele verschiedene Moden überlagert sind.

5.3 Die Langmuirinstabilität

Das zeitliche Anwachsen der Langmuirmoden läßt sich am besten durch Betrachtung der Fouriertransformierten der longitudinalen, elektrischen Feldkomponente \tilde{E}_z untersuchen. In den Abbildungen 5.10 ist das Betragsquadrat dieser Größe für verschiedene Wellenzahlvektoren $(0, 0, k_z)$, der Vorwärtsrichtung, gegen die Zeit aufgetragen. Physikalisch entspricht die Größe $\varepsilon_0 \left| \tilde{E}_z(\mathbf{k}) \right|^2$ mit der Dielektrizitätskonstanten ε_0 der elektrostatischen Energie, die im Wellenzahlbereich $[\mathbf{k}, \mathbf{k} + \delta\mathbf{k}]$ gespeichert ist. Durch die ausschließliche Verwendung der z -Komponente des elektrischen Feldes werden Langmuirwellen ausgewählt, die sich in Richtung des Magnetfeldes und des Elektronenstrahls ausbreiten. In den Abbildungen 5.10 wurden aus Gründen der besseren Darstellbarkeit Werte, die kleiner als 10^{-9} J m^3 sind, auf genau diesen Wert gesetzt. In diesen Abbildungen sieht man ebenfalls für kleine Zeiten ($t \lesssim 500 \text{ ns}$) ausschließlich die äußerst schwache ($\sim 3 \cdot 10^{-9} \text{ J m}^3$) künstlich vorgegebene Langmuirmode mit einer Wellenzahl k_z von 0.21 m^{-1} periodisch erscheinen und verschwinden. Diese Periodizität kommt daher, daß keine reine Langmuirmode als Anfangsstörung gewählt wurde. Wie oben beschrieben, mußte aus numerischen Gründen sowohl die Stromdichte als auch die Ladungsdichte am Anfang der Simulation verschwinden. Das macht die Verwendung einer richtigen Langmuirmode unmöglich und läßt lediglich eine langmuirähnliche, zeitlich variable Mode mit der richtigen Längenskala zu. Neben der Erfüllung von numerischen und physikalischen Zwängen hat das den angenehmen Nebeneffekt, daß sich das System tatsächlich die richtige Mode suchen muß und keine Gefahr besteht, daß man sich selbst die gewünschte Lösung vorgibt. In den Abbildungen 5.10 zeigt sich nun auch deutlich, daß diese vorgegebene, theoretisch berechnete und „am schnellsten“ anwachsende Mode unter den simulierten, sehr viel weniger idealisierten Bedingungen nicht die vom System bevorzugte Mode ist. Die schnellste Mode, die dadurch im zeitlichen Verlauf auch am meisten Energie erhält, liegt unter den simulierten Bedingungen bei einem k_z von etwa 0.25 m^{-1} .

An dieser Stelle wird klar, daß das Vorgeben einer künstlichen Mode keinen nennenswerten Einfluß auf den Verlauf der Simulation hat. Einerseits ist die Energie dieser Mode zu Beginn verglichen mit den Energien im weiteren Verlauf völlig vernachlässigbar. Andererseits zeigt sich hier, daß das System noch nicht einmal mit der vorgegebenen Mode „zufrieden“ ist, sondern eine Welle bevorzugt, die zwar in der

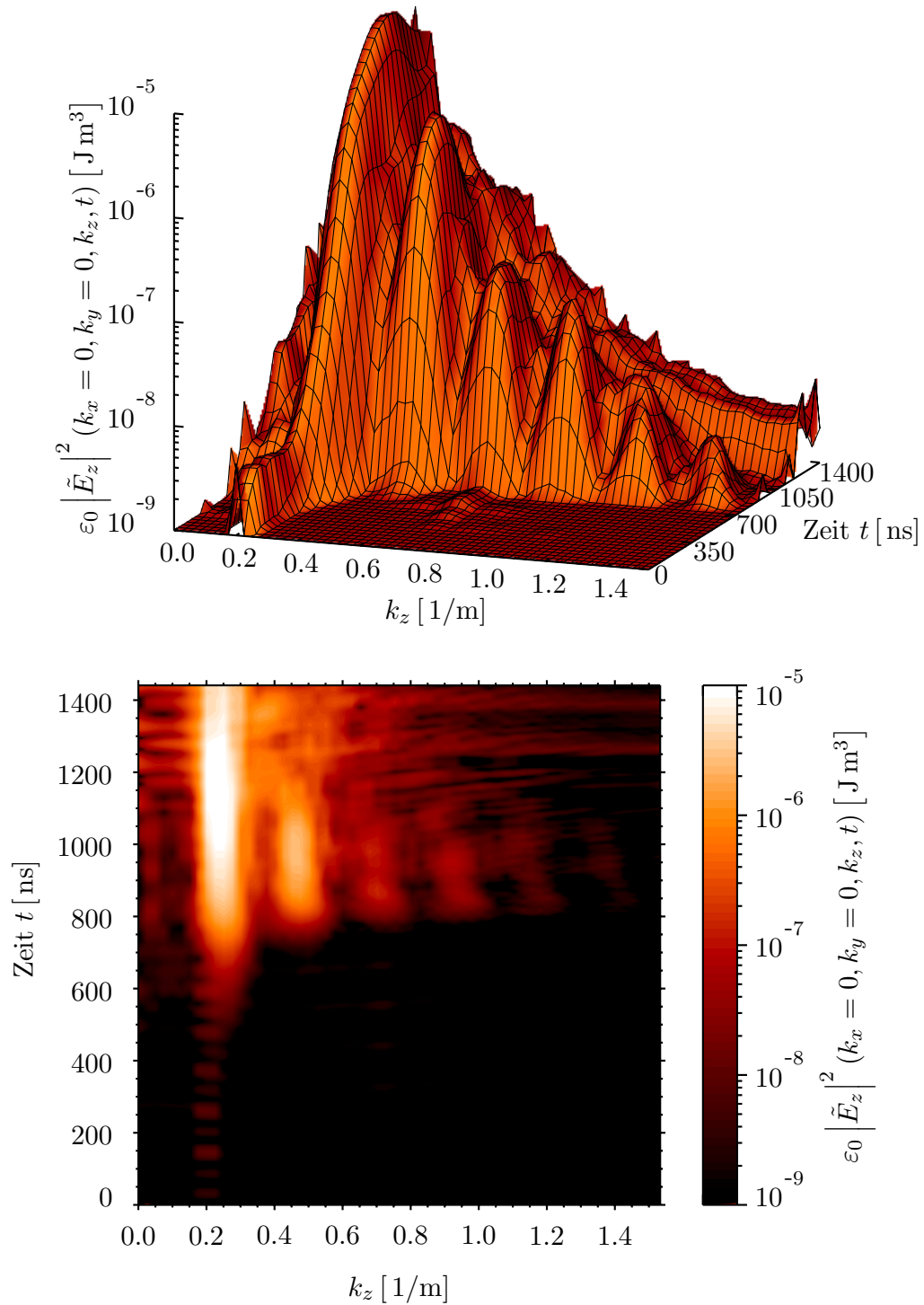


Abbildung 5.10: Die zeitliche Entwicklung der elektrostatischen Energie in den Langmuirmoden.

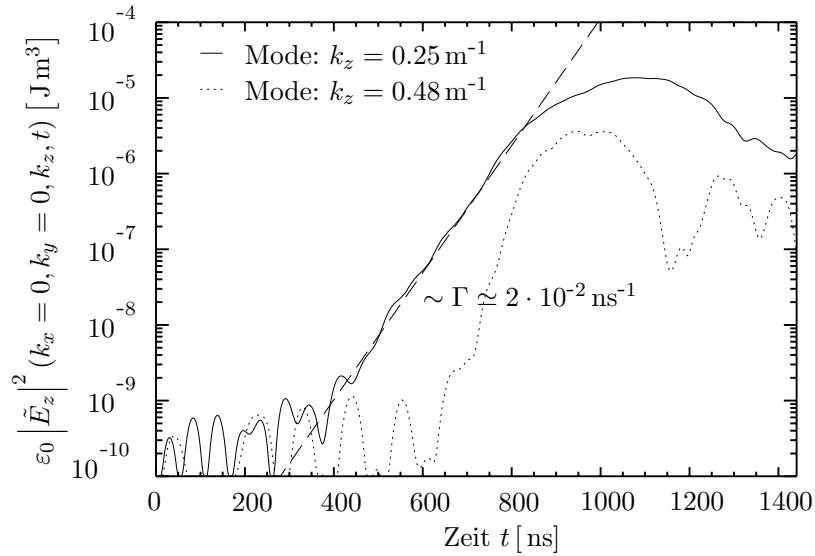


Abbildung 5.11: Die zeitliche Entwicklung und die lineare Anwachsrate Γ der elektrostatischen Energie in der am schnellsten anwachsenden Langmuirmode mit $k_z = 0.25 \text{ m}^{-1}$ und in der ersten sekundären Mode mit $k_z = 0.48 \text{ m}^{-1}$

Nähe liegt, aber doch verschieden ist. Trotzdem ist das Vorgeben der Anfangsmode wichtig. Aus der Theorie der Langmuirinstabilität folgt, daß Langmuirmoden nur anwachsen nicht jedoch generiert werden. Das heißt, daß es, mathematisch betrachtet, nicht zu einem Anwachsen kommen kann, sofern nicht schon eine von Null verschiedene Menge an Energie in der Mode vorhanden ist. Physikalisch gesehen ist immer in jeder Mode eine verschwindend kleine Menge an Energie vorhanden, und auch in numerischen Simulationen kommt es aufgrund von thermischen Fluktuationen zu einem automatischen Anwachsen. Die vorgegebene Mode erhöht lediglich in einem Wellenzahlbereich nahe der bevorzugten Mode die Energie, so daß die Simulation schneller zur eigentlich interessanten Dynamik kommt.

In den Abbildungen 5.10 zeigt sich noch ein wohlbekanntes plasmaphysikalisches Phänomen auf eindrucksvolle Weise und zwar die Umverteilung von Energie auf andere Plasmaanregungen über nichtlineare Welle–Welle–Wechselwirkungen. Da die Stärke diese Wechselwirkungen quadratisch oder noch höherer Ordnung in der Wellenenergie der beteiligten Wellen ist, spielen diese Prozesse erst eine Rolle, wenn eine Mode eine gewisse kritische Energie überschreitet. In der Simulation ist anschaulich dargestellt, daß zunächst nur die bevorzugte Mode anwächst. Ab einer Energie von ca. 10^{-7} J m^3 bzw. ab $t \sim 700 \text{ ns}$ verliert die Mode über nichtlineare Wechselwirkungen Energie an Moden höherer Wellenzahl.

In Abbildung 5.11 ist exemplarisch der Zeitverlauf für zwei Moden dargestellt. Die Mode mit $k_z = 0.25 \text{ m}^{-1}$ ist, wie bereits beschrieben, die bevorzugte Mode, während die mit 0.48 m^{-1} die stärkste durch Welle–Welle–Wechselwirkungen entstehende Mode ist. Zusätzlich zum zeitlichen Verlauf ist für die bevorzugte Mode in Abbildung 5.11 noch die lineare Anwachsphase ($\sim \exp \Gamma \cdot t$) durch eine Gerade angedeutet. Während dieses exponentiellen Anwachsens beträgt die lineare Anwachs-

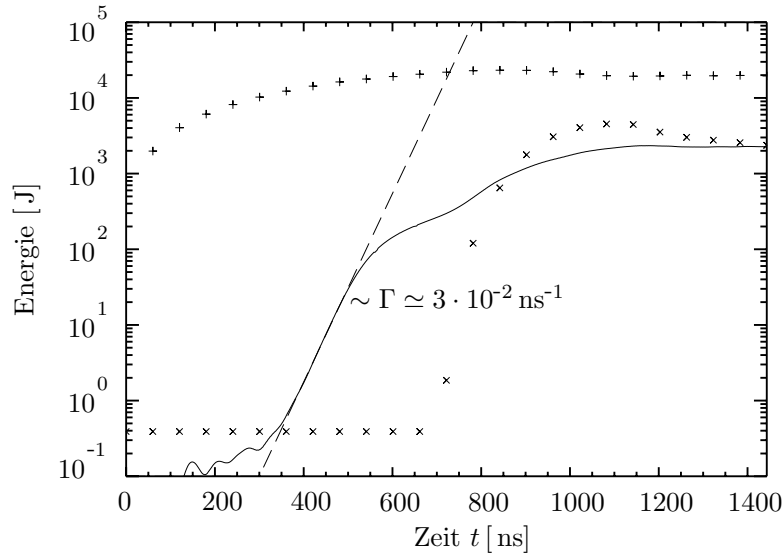


Abbildung 5.12: Die zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie der Beam-Elektronen (+), der Hintergrundelektronen (×) und der in der gesamten Box gespeicherten elektromagnetischen Feldenergie (Kurve). Die gestrichelte Linie deutet auch hier die lineare Anwachphase mit der linearen Anwachsrate Γ an.

rate Γ etwa $2 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$. Das bedeutet, daß sich die Energie in der Mode innerhalb von 400 ns um den Faktor 10^3 erhöht. Zwischen Minimum und Maximum steigert sich die Wellenenergie insgesamt sogar um fünf Größenordnungen. Bei etwa 800 ns und 10^{-5} J m^3 wird die bevorzugte Mode nichtlinear und sättigt, indem die Energie in andere Kanäle umverteilt wird.

Gegen Ende der Simulation ($t \gtrsim 1100 \text{ ns}$) nimmt die Energie in der Hauptmode sogar wieder ab. Die nichtlineare Sättigung korrespondiert genau mit dem Erscheinen der Moden höherer Ordnung. Das System wehrt sich gegen das explosive Einbringen von Energie in einem sehr schmalen räumlichen Frequenzband durch die in Abbildung 5.11 dargestellte Umverteilung im k -Raum. Die gezeigte stärkste sekundäre Mode erleidet selbst auch wieder eine nichtlineare Sättigung für Energien größer als 10^{-7} J m^3 und einen anschließenden Energieverlust, genauso wie alle anderen Moden, die stark genug werden, um an nichtlinearen Prozessen teilzunehmen.

5.4 Energetik

Völlig vernachlässigt wurde bei dieser Betrachtung, daß es im Plasma auch noch viele andere Kanäle gibt, die Energie aufnehmen können. In diesem Zusammenhang sei nicht nur an elektromagnetische Wellen gedacht, sondern auch an Langmuirwellen, deren Ausbreitungsrichtung nicht mit der des Magnetfeldes übereinstimmt. Bei Betrachtung der gesamten elektromagnetischen inklusive der elektrostatischen Energie aller Langmuirmoden ist auch vor allem ihr Vergleich mit der eigentlichen Energiequelle, d.h., dem Elektronenstrahl, wichtig. In Abbildung 5.12 ist sowohl die gesamte elektromagnetische Energie U_{EM} in der numerischen Box (durchgezogene

Linie), als auch die kinetische Energie der Beam-Elektronen U_{Beam} (+ Symbole) und der Hintergrundelektronen U_{Elek} (\times Symbole) gegen die Zeit aufgetragen. Die elektromagnetische Energie wird mit

$$U_{\text{EM}}(t) = \int \varepsilon_0 \left[E^2(t, \mathbf{r}) + c^2 B'^2(t, \mathbf{r}) \right] d^3r \quad (5.2)$$

bestimmt, wobei die Volumenintegration über das gesamte Rechengebiet ausgeführt wird. Hierbei ist zu beachten, daß das magnetische Führfeld von 0.1 T in 5.2 nicht berücksichtigt wird, da es bereits zu Beginn der Simulation vorgegeben war und bis zum Ende erhalten bleibt. Es stammt ja aus den äußeren Bedingungen in der Pulsarmagnetosphäre, die sich auf den relevanten Zeitskalen der Simulation überhaupt nicht ändern. Bei der Berechnung der Energie tritt das Führfeld lediglich als ein riesiger Offset in Erscheinung, welcher keine weitere Bedeutung für die Interpretation hat. Anstelle von \mathbf{B} wird also $\mathbf{B}' = \mathbf{B} - (0, 0, 0.1) \text{ T}$ verwendet, so daß nur Abweichungen vom Hintergrundfeld relevant sind. Die gesamte, im Rechengebiet vorhandene kinetische Energie der Beam-Elektronen ist durch

$$\begin{aligned} U_{\text{Beam}}(t) &= m_e c^2 \langle \gamma_{\text{Beam}} - 1 \rangle(t) n_b V_{\text{Beam}}(t) \\ U_{\text{Elek}}(t) &= m_e c^2 \langle \gamma_{\text{Elek}} - 1 \rangle(t) n_e V_{\text{Box}}(t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

gegeben. $\langle \gamma_{\text{Beam}/\text{Elek}} \rangle$ bezeichnet den über alle Beam-/Hintergrundelektronen gemittelten Lorentzfaktor, von dem der Lorentzfaktor für ruhende Elektronen ($\gamma = 1$) abgezogen wird. V_{Beam} steht in Gleichung 5.3 für das zur Zeit t vom Elektronenstrahl eingenommene Volumen, so daß $n_b V_{\text{Beam}} = n_b \pi R^2 L(t)$ die gesamte Anzahl der in der Box vorhandenen, physikalischen Beam-Elektronen ist. $n_b = 10^{12} \text{ m}^{-3}$, $R \simeq 20 \text{ m}$ und $L(t) \leq 250 \text{ m}$ bezeichnen die Teilchendichte im Beam, den Radius des Elektronenstrahls in x - y -Richtung und die Strecke in z -Richtung, die der Beam zum Zeitpunkt t bereits im Rechengebiet zurückgelegt hat (siehe hierzu auch Abbildung 4.2). Die Größen $n_e = 10^{12} \text{ m}^{-3}$ und $V_{\text{Box}} = 2.5 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ sind die Hintergrundteilchendichte und das Volumen des Rechengebietes, das ja vollständig von Hintergrundelektronen ausgefüllt ist.

Zu Beginn steigt die kinetische Teilchenenergie des Beams in Abb. 5.12 zunächst stark an. Das ist darauf zurückzuführen, daß sich bei näherungsweise konstanter mittlerer Teilchenenergie das Volumen des Strahls bis auf den Maximalwert von $7.9 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ erhöht. Dann bleibt die Teilchenenergie bei einem Wert von etwa $2 \cdot 10^4 \text{ J}$ fast konstant, bis gegen Ende der Simulation die Teilchenenergie wieder aufgrund von Strahlungsverlusten absinkt. Die Energie im elektromagnetischen Feld erreicht selbst im Maximum nur etwa 12% der Teilchenenergie, während die Hintergrundelektronen maximal 20% der Beam-Energie auf sich vereinen. Ein Großteil der injizierten Energie verläßt das Rechengebiet und dissipiert als kinetische Energie des Elektronenstrahls. U_{EM} zeigt ein ähnliches Verhalten wie die Energie in der bevorzugten Mode. Nach einer kurzen Einschwingphase bei sehr kleiner Energie wächst U_{EM} exponentiell um fast drei Größenordnungen an, um dann unter einem schwächeren Anwachsen von einer Größenordnung bei etwa $2 \cdot 10^3 \text{ J}$ zu sättigen. Die lineare Anwachsrate von $\sim 3 \cdot 10^{-2} \text{ ns}^{-1}$ ist größer als die der schnellsten Mode, aber in der gleichen Größenordnung.

Wichtiger noch als die in der Box gespeicherte Gesamtenergie ist der Energieumsatz, d.h. der Energiefluß in das Rechengebiet in Form von kinetischer Teilchenenergie und der Energieverlust in Form von kinetischer und elektromagnetischer Energie.

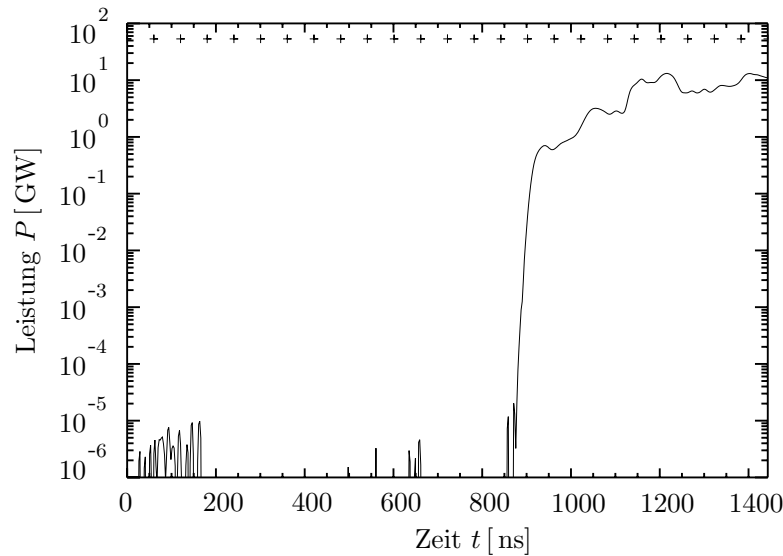


Abbildung 5.13: In die Box als kinetische Energie der Strahlelektronen eingebrachte Leistung P_{Beam} (+) und die in Form von elektromagnetischen Wellen abgestrahlte Leistung P_{EM} (Kurve), d.h. über die $z = 250$ -m-Fläche integrierter Poyntingfluß, gegen die Zeit.

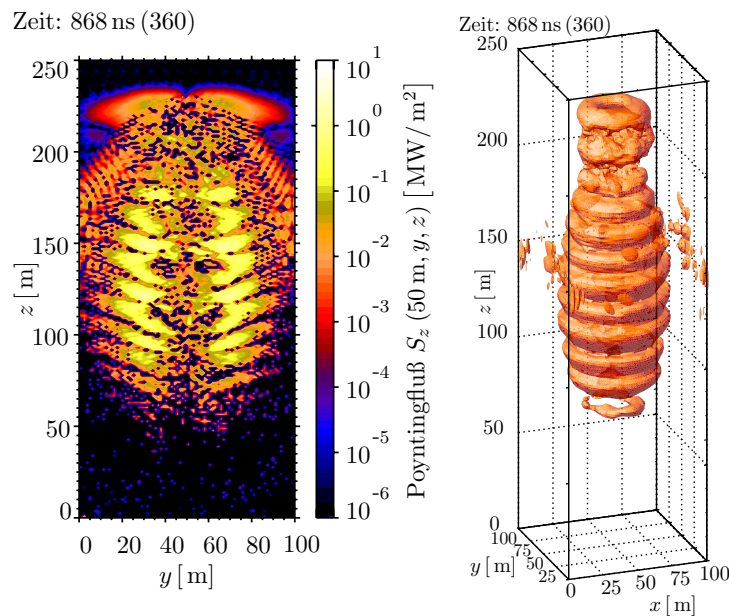


Abbildung 5.14: Zwei- und dreidimensionale Konturdarstellung der z -Komponente des Poyntingflusses für den Zeitschritt 360. Der Poyntingfluß ist in der linken Abbildung für die Schnittebene ($x = 50$ m) durch das Zentrum der Box gezeichnet. In der rechten Abbildung ist die dreidimensionale Konturfläche für den Wert 25 kW/m^2 dargestellt.

Es ist also ein Vergleich zwischen dem Energieeintrag und dem abgestrahlten Poyntingfluß

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (5.4)$$

nötig. Die bei $z = 0$ m pro Fläche und Zeit injizierte Energie $\Phi_{\text{kin}}^{\text{inj}}$ ist während der gesamten Simulation konstant und durch

$$\Phi_{\text{kin}}^{\text{inj}} = n_b \langle \gamma_{\text{Beam}} v_z \rangle m_e c^2 = 4.25 \cdot 10^7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (5.5)$$

gegeben. Mit einem Beam-Querschnitt von $\pi R^2 = 1257 \text{ m}^2$ ergibt sich ein Energieeintrag von $P_{\text{Beam}} = 5.34 \cdot 10^{10} \text{ W}$ an der Stirnseite des Rechengebiets. Die elektromagnetische Energieabstrahlung in positiver z -Richtung (Vorwärtsrichtung) entspricht dem über den Boxquerschnitt integrierten Poyntingfluß $P_{\text{EM}} = \int S_z dx dy$ bei $z = 250$ m. Diese zwei Größen sind in Abbildung 5.13 dargestellt, wobei die (+)-Symbole die konstante Leistung P_{Beam} angeben und die durchgezogene Kurve den zeitlichen Verlauf der Energieabstrahlung. Auch in diesem Diagramm ist wieder der „Einschwingvorgang“ für Zeiten $t < 200$ ns zu sehen und auch hier ist dessen relative Stärke, gemessen an der weiteren Entwicklung, völlig vernachlässigbar. Erst sehr spät, bei etwas über 850 ns beginnt das System, nennenswert elektromagnetische Strahlung abzugeben. Dieser Zeitpunkt ist definiert durch den tatsächlichen Zeitpunkt der Emission der Strahlung irgendwo in dem Rechengebiet und der Lichtlaufzeit vom Emissionsgebiet zum oberen Rand, an dem die austretende Energie „gemessen“ wird. Bei 850 ns steigt die Emission innerhalb von 100 ns von einem Wert $P_{\text{EM}} < 1 \text{ kW}$ auf mehr als 1 GW. Im weiteren Verlauf steigt die Strahlungsleistung noch weiter an und nähert sich dem Energieeintrag. Gegen Ende der Simulation strahlt das simulierte Plasma im Rechengebiet mit einer Leistung von etwa 10 GW. In Abbildung 5.14 links ist für die z -Komponente des Poyntingflusses ein Schnitt bei $x = 50$ m durch das Rechengebiet gezeigt und rechts eine dreidimensionale Konturfläche für den Wert 25 kW/m^2 . Der Zeitschritt stimmt in etwa mit dem starken Anstieg im Poyntingfluß überein. In den Abbildungen 5.14 ist ganz oben ($z \simeq 225$ m) die kegelartige Abstrahlung die man aus Gleichung 3.32 erwartet schön zu sehen. Es zeigen sich zwei diskrete Maxima im Poyntingfluß links und rechts vom Zentrum des Elektronenstrahls (5.14 links), die unter Berücksichtigung der Symmetrie einen Schnitt durch einen Torus (5.14 rechts) darstellen. Dies ist äquivalent zu einer kegelförmigen Abstrahlcharakteristik. Auch der zu späteren Zeiten erzeugte Poyntingfluß, der weiter unten in den Abbildungen 5.14 zu sehen ist, zeigt die aus der FEL-Theorie vorhergesagte Kegelform. Aus den beiden Diagrammen geht auch die Pulsdauer der FEL-Strahlung hervor. Die Zonen mit hohem Poyntingfluß und damit hoher elektromagnetischer Strahlung haben etwa eine Dicke von 10 m, was einer Einzelpulsdauer von ungefähr 33 ns entspricht. Die kegelförmige Abstrahlcharakteristik ist nochmal in den Abbildungen 5.15 genauer gezeigt. Zu sehen ist die zweidimensionale Struktur der z -Komponente des Poyntingflusses, die bei $z = 250$ m und $t = 1133$ ns in Abhängigkeit von der x - y -Koordinate gezeigt ist. Deutlich zu sehen ist die Ringstruktur, die bei einer zylindersymmetrischen Abstrahlung zu erwarten ist. Die zwei Ringe (Kegel), mit unterschiedlichen Radien (10 m und 25 m) und unterschiedlichen Intensitäten (0.9 MW/m^2 und 0.2 MW/m^2) kommen durch verschiedene Emissionshöhen der entsprechenden Strahlung im Rechengebiet zustande. Bei Betrachtung des zeitlichen Verlaufs ist eine Entwicklung von kleinen

zu großen Radien zu beobachten, was der bereits besprochenen Verschiebung zu kleinen Emissionshöhen entspricht. Eine weitere Ursache für die Variation der Radien und Intensitäten liegt in der Veränderung des Lorentzfaktors der Strahlelektronen. Der Öffnungswinkel der Abstrahlung ist wie in Gleichung 3.33 durch

$$\tan \theta_{\text{Max}} \approx \frac{1}{2\gamma_b \beta_b} \quad (5.6)$$

gegeben, so daß eine Variation des Lorentzfaktors (siehe auch Abb. 5.4 unten) auch eine starke Änderung des Öffnungswinkels des Kegel verursacht. Durch diese und andere Effekte ist die Simulation auch nicht direkt mit der sauberen idealisierten Theorie vergleichbar.

5.5 Spektrum und Abstrahlcharakteristik

Schließlich soll noch das emittierte Spektrum untersucht werden, wobei allerdings zu beachten ist, daß eine völlige Trennung der elektromagnetischen Felder in Licht-, Langmuir- und sonstige Anteile so wie in einem realen, physikalischen System unmöglich ist. In der Simulation sind alle Äste der Plasmadispersionsrelation besetzt, was zu einem Gemisch von Moden mit Überlagerungen, Schwebungen und Auslöschung von elektromagnetischen Feldern einhergeht. Um nun doch wenigstens eine Vorstellung des Spektrums der emittierten Strahlung zu erhalten, soll die FEL-Strahlung weitestgehend aus den Feldern extrahiert werden. Dazu ist eine einfache, aber unanschauliche Transformation nötig, die in der Abbildung 5.16 skizziert und im folgenden erläutert ist.

Um das Spektrum der Strahlung untersuchen zu können soll die Fouriertransformierte $\tilde{E}_\perp(\omega, \mathbf{k})$ von $E_\perp(t, \mathbf{r})$ gebildet und auf Kugelkoordinaten $(\omega, k, \phi, \theta)$ transformiert werden. E_\perp soll das elektrische Feld bezeichnen, das senkrecht auf einem Wellenzahlvektor \mathbf{k} steht. Dabei wird ausgenutzt, daß die FEL-Strahlung linear polarisiert ist. Die Polarisationsrichtung der Strahlung ist in Kugelkoordinaten durch den Einheitsvektor \mathbf{e}_θ gegeben, so daß E_\perp tatsächlich durch

$$E_\perp = \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{E} = E_x \cos \phi \cos \theta + E_y \sin \phi \cos \theta - E_z \sin \theta \quad (5.7)$$

gegeben ist. Dabei sind die Kugelkoordinaten (ϕ, θ) hier durch die Ausbreitungsrichtung der Welle gegeben, also durch die Richtung des betrachteten Wellenzahlvektors \mathbf{k}

$$\mathbf{k} = k \mathbf{e}_k = k \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

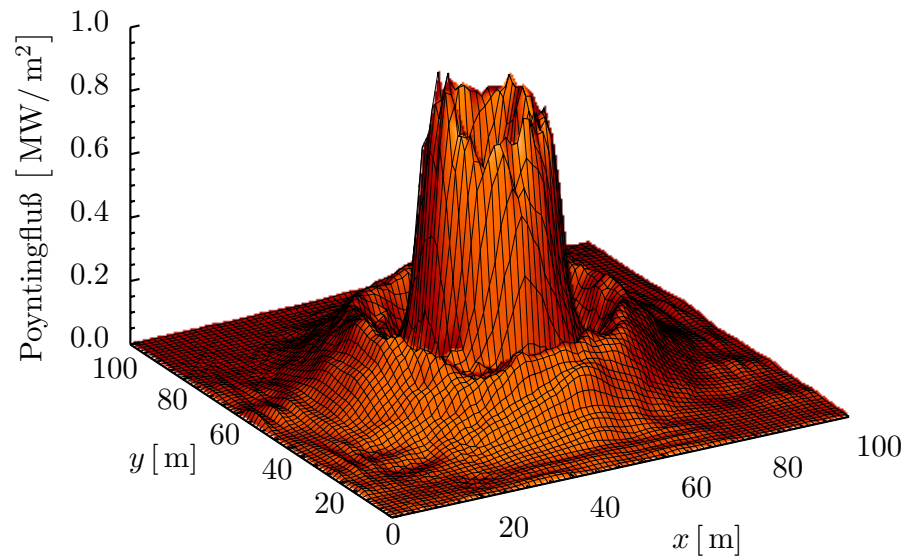
Dank der linearen Eigenschaften der Fouriertransformation ist es leicht möglich die Transformierte von \tilde{E}_\perp zu berechnen. Sie ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\perp(\omega, k, \phi, \theta) &= \tilde{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{k}(k, \phi, \theta)) \cdot \mathbf{e}_\theta = \tilde{E}_x(\omega, k \mathbf{e}_k) \cos \phi \cos \theta \\ &+ \tilde{E}_y(\omega, k \mathbf{e}_k) \sin \phi \cos \theta - \tilde{E}_z(\omega, k \mathbf{e}_k) \sin \theta, \end{aligned} \quad (5.9)$$

wobei die Größen $\tilde{E}_{x/y/z}(\omega, k \mathbf{e}_k)$ für die Fouriertransformierten der einzelnen Feldkomponenten stehen, die an den Stellen $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_k$ interpoliert wurden.

Da die zu erwartende Strahlung weitestgehend symmetrisch um die Beam-Achse ist, wird noch über alle Winkel ϕ gemittelt, so daß als Resultat das Betragsquadrat

Zeit: 1133 ns (470)



Zeit: 1133 ns (470)

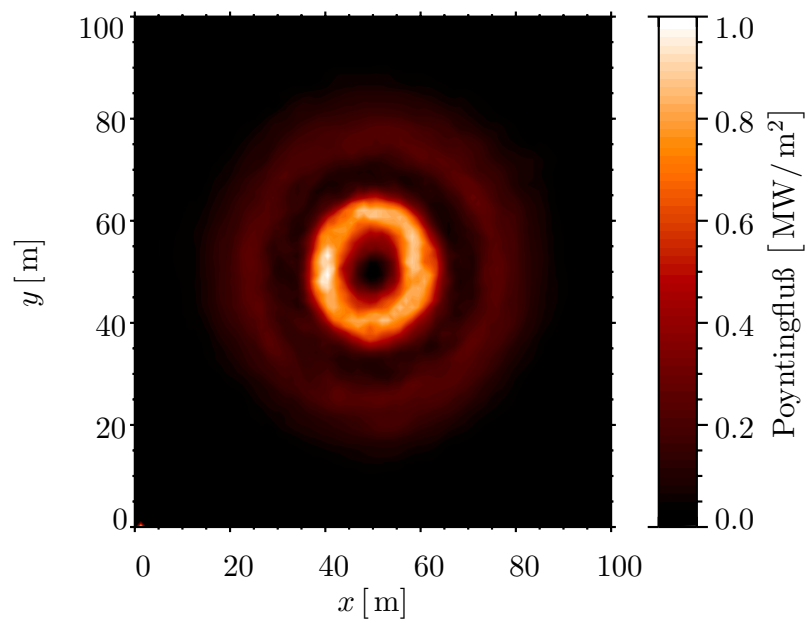


Abbildung 5.15: Abstrahlcharakteristik des Poyntingflusses am Rand der Box bei $z = 250$ m und dem Zeitschritt 470.

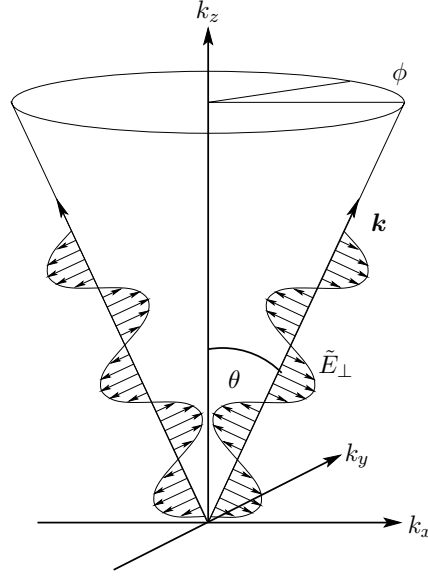


Abbildung 5.16: Schematische Darstellung zur Transformation der Fouriertransformierten des elektrischen Feldes \tilde{E}_\perp auf Kugelkoordinaten.

der Größe $\tilde{E}_\perp(\omega, k, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{E}_\perp(\omega, k, \phi, \theta) d\phi$ betrachtet werden soll. Es entspricht einer mittleren Modenenergie pro ω -, k - und θ -Intervall, die in den Abbildungen 5.17 dargestellt ist. Dabei ist nur eine relative Stärke angegeben, d.h. die Größe wurde auf das Intervall $[0, 1]$ skaliert. ω und k sind in Einheiten der Plasmafrequenz $\omega_{pe} = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e} \int \frac{dv}{dp} f dp} = 5.85 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$, bzw. in Einheiten von ω_{pe}/c gegeben, wobei die Teilchendichte $n = n_e + n_b = 2 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3}$, der mittlere Lorentzfaktor $\gamma = 2.24$ für den Elektronenstrahl und die Normierung von Gl. 3.18 für $\int \frac{dv}{dp} f dp$ benutzt wurde. Beide Werte kommen aus der Theorie und sind nur eine Näherung an die Verhältnisse in der Simulation, bei der die Teilchendichte enormen Schwankungen unterworfen ist und die tatsächliche Verteilungsfunktion f überhaupt nicht bekannt ist.

In der linken Abbildung zeigt sich, wie zu erwarten war, eine starke Abhängigkeit der Emission vom Abstrahlwinkel θ . Gerade bei hohen Wellenzahlen k und damit bei hohen Energien ist ein scharfes Maximum im Abstrahlwinkel zu beobachten. Bei $k = 5.05$, dem Wert, der über die Dispersionsrelation von Licht im Plasma $\omega^2 = 1 + k^2$ mit dem $\omega = 5.15$ Wert korrespondiert, ist das Abstrahlmaximum bei $\theta \simeq 0.25$ zu finden, was gut mit einem theoretischen Wert von $\theta_{\text{Max}} \simeq 0.28$ übereinstimmt. Die Abstrahlcharakteristik in unserer Simulation, die auch in Abbildung 5.18 nochmal separat gezeigt ist, stimmt also tatsächlich mit der überein, die aus der Theorie des FEL zu erwarten war (siehe auch Abb. 3.3 zum Vergleich). \tilde{E}_\perp besteht, wie bereits erwähnt, keineswegs ausschließlich aus dem Feld elektromagnetischer Strahlung, sondern stellt eine Überlagerung mit anderen Ästen der Dispersionsrelation dar. Gerade bei hohen ω sollte aber der Anteil anderer Äste gering sein, was auch die gute Übereinstimmung mit der Theorie des FEL nahelegt. Betrachtet man aber kleine Werte von k (bei festem $\omega = 5.15$), so kann es sich nicht mehr um elektromagnetische Strahlung handeln, da diese Werte nicht mehr der Dispersionsrelation für Licht genügen. Hier wird die θ -Abhängigkeit sehr viel

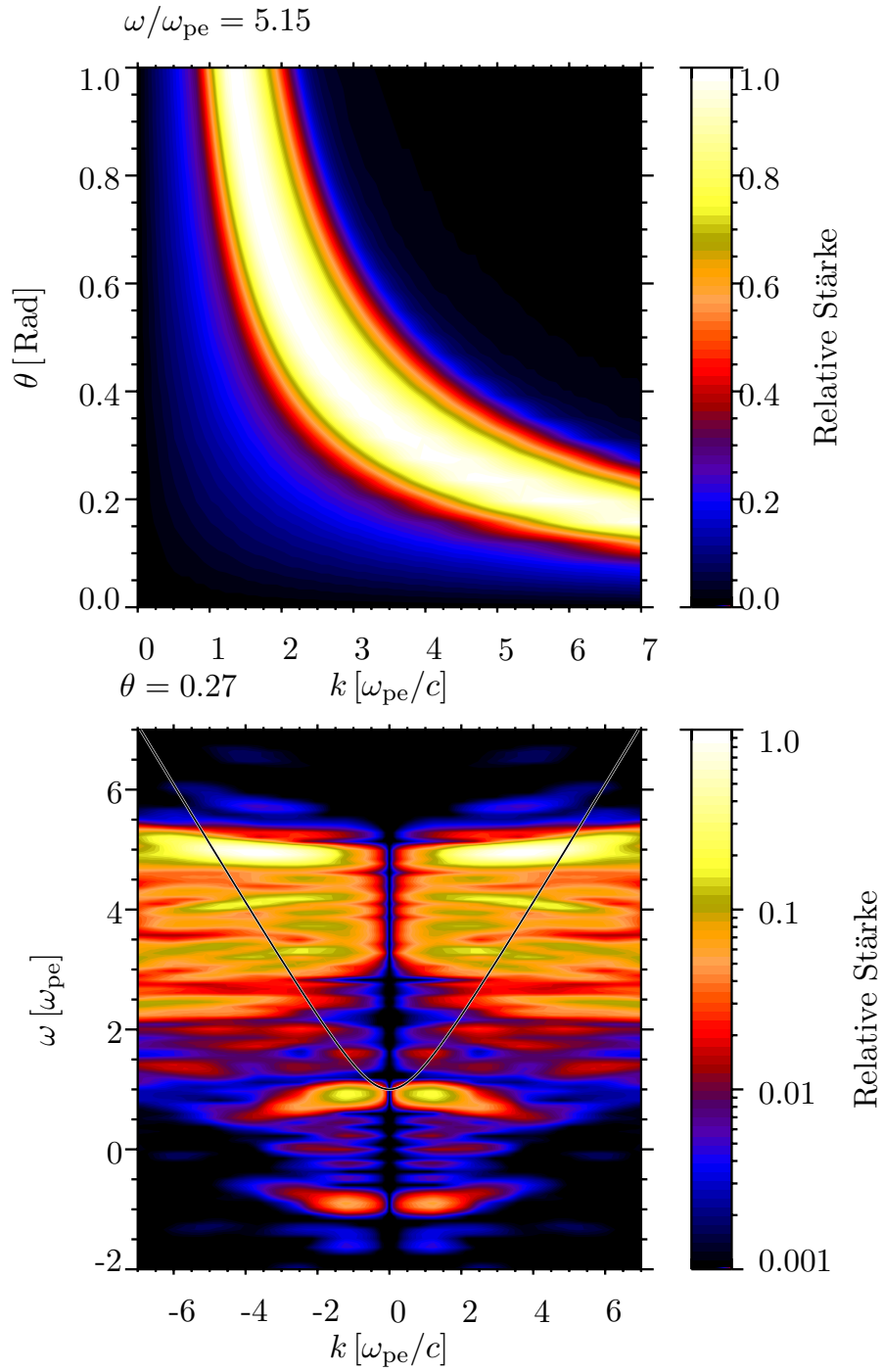


Abbildung 5.17: Dispersionsrelation in Form von $|\tilde{E}_\perp(\omega, k, \theta)|^2$ skaliert auf $[0, 1]$. Oben ist für eine feste Frequenz ω die Verteilung der Modenstärke in Abhängigkeit der Abstrahlrichtung θ und der Wellenzahl k dargestellt. Unten ist die Verteilung für ein festes θ ($\simeq \theta_{Max}$) in Abhängigkeit von k und ω gezeigt. Die Kurve gibt den Verlauf der Dispersionsrelation von Licht in einem Plasma wieder.

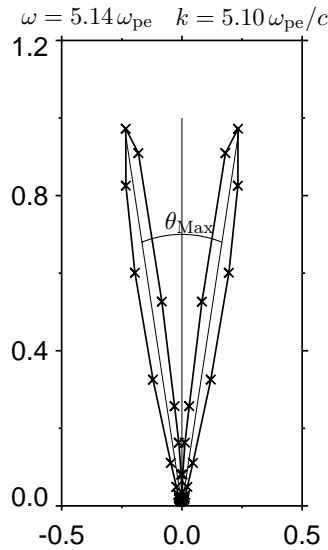


Abbildung 5.18: Polardiagramm der auf eins normierten Abstrahlcharakteristik für die mit $\omega = 5.14\omega_{pe}$ und $k = 5.10\omega_{pe}/c$ emittierten elektromagnetischen Wellen. Die linke Hälfte ist durch Spiegelung an der Achse entstanden. $\theta_{Max} \simeq 0.28$ gibt den theoretisch zu erwartenden Öffnungswinkel an, innerhalb dessen der überwiegende Anteil der Strahlung abgegeben wird. Er entspricht dem Winkel $\theta' = \pi$ im mitbewegten Bezugssystem.

schwächer als bei hohen k -Werten.

In der Abbildung 5.17 unten ist die ω - k -Ebene für den festen Abstrahlwinkel $\theta = 0.27$ dargestellt. Zur Veranschaulichung ist auch der elektromagnetische Ast der Dispersionsrelation als Kurve eingezeichnet. Aus der Abbildung geht hervor, daß das Maximum der elektromagnetischen Abstrahlung bei einer Frequenz von etwa $\omega \simeq 5$ liegt, aber auch bei 4.2 und 3.6 sind scharfe Maxima zu finden (logarithmische Skala!). Die zwei lokalen Maxima bei $\omega \simeq 1$ und $k \simeq \pm 1.2$ gehen auf Langmuirwellen zurück, auf deren Dispersionsrelation sie liegen ($\omega^2 \simeq 1$).

Mit Hilfe der verwendeten numerischen Methoden konnte nicht nur das Anwachsen von Langmuirwellen, sondern auch die Emission der kohärenten Radiostrahlung im Detail untersucht werden. Im nächsten Kapitel folgt eine Diskussion dieser Ergebnisse.

Kapitel 6

Diskussion der Ergebnisse

Ziel dieser Arbeit war die Durchführung der weltweit ersten numerischen Simulation eines freien Elektronen Lasers (FEL) in einer Pulsarmagnetosphäre unter Benutzung eines PIC-Codes, der es erlaubt, kinetische Plasmaprozesse numerisch zu behandeln. Die Bedeutung des FEL geht, wie in Abschnitt 2.4 dargelegt, weit über die Anwendung auf Pulsare hinaus. Dennoch wurde für die Simulation dieser Parameterbereich gewählt, da einerseits die Simulation einen direkten Bezug zu realen astrophysikalischen Objekten haben sollte, und da andererseits in einer Pulsarmagnetosphäre in gewisser Weise die optimalen Bedingungen für einen FEL herrschen. Wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, kann die Beobachtung der intensiven, kohärenten Radiostrahlung von Pulsaren eigentlich nur mit dem Emissionsprozeß FEL erklärt werden, dessen Eigenschaften nicht nur zu den Beobachtungen passen, sondern auch durch die Theorie und Laborexperimente gut verstanden ist. Pulsare sind daher die astrophysikalischen Objekte, bei denen die geringsten Zweifel am Auftreten des FEL bestehen. Gleichzeitig sind die physikalischen Parameter in einer Pulsarmagnetosphäre aus den Beobachtungen bestens bekannt, und die Zweistromverteilung der Elektronen, die für den FEL zwingend erforderlich ist (siehe auch Abschnitt 3.1), tritt in einer Pulsarmagnetosphäre ganz natürlich und regelmäßig auf. Vor allem das enorm starke magnetische Hintergrundfeld von etwa 1000 T in einer Pulsarmagnetosphäre ist optimal für einen FEL. Es schränkt die transversalen Freiheitsgrade der beteiligten Teilchen sehr ein, so daß es sich um eine quasi eindimensionale Dynamik der Elektronen in Longitudinalrichtung handelt. Dadurch ist es möglich, die in Abschnitt 3.1 gezeigte wesentlich vereinfachte, eindimensionale Behandlung der zugrundeliegenden kinetischen Theorie der Langmuirwellen zu benutzen, was auch die numerische Realisierung deutlich erleichtert. In physikalischer Hinsicht wirkt sich das Magnetfeld zwar indirekt aber wesentlich auf die Effizienz des FEL aus. Wie in Abschnitt 3.2 gezeigt, hängt die Intensität der durch die Beamelektronen emittierten, elektromagnetischen Strahlung vom Beschleunigungsfeld, also von der Amplitude des longitudinalen, elektrostatischen Feldes der angeregten Langmuirwellen ab. Dieses beschleunigende Wigglerfeld wird bei Langmuirwellen von Raumladungen erzeugt. Bei einem zu schwachen magnetische Hintergrundfeld, also im dreidimensionalen Fall, haben die Elektronen die Möglichkeit seitwärts, d.h. senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Langmuirwelle, zu entkommen. Das verringert die Raumladung und dämpft damit die entsprechende Langmuirwelle. Im eindimensionalen Fall, mit einem starken Hintergrundfeld, so wie in einer Pulsarmagnetosphäre, sind die Transversalbewegungen sehr eingeschränkt, so daß sich beim Anwachsen der Langmuirwellen viel größere Gradienten in der Raumladung und damit viel intensivere elektrostatische, longitudinale Wigglerfelder ausbilden können als im dreidimensionalen Fall. Damit ist eine höhere Effizienz des Emissionsprozesses möglich. Nachdem die Pulsare über die stärksten bekannten Magnetfelder verfügen, ist es nicht verwunderlich, daß gerade die kohärente Radiostrahlung von Pulsaren am deutlichsten auf einen FEL-Prozeß hindeutet.

In Kapitel 5 wurden die numerischen Ergebnisse der PIC-Simulation der FEL dargestellt. Es zeigt sich im wesentlichen der im Kapitel 3 (Theorie des FEL) beschriebene Ablauf. Zunächst dringt der eingeschossene Elektronenstrahl, wie in Abb. 5.2 (Phasenraum) dargestellt, scheinbar ungehindert in das Hintergrundplasma ein, während bereits die noch nicht sichtbaren Langmuirwellen verstärkt werden. In den anschließenden Abbildungen 5.3 ist die Anregung von Langmuirwellen, deren elektrostatischen Felder von extrem großen Dichteschwankungen im Elektro-

nenplasma getragen werden (Abb. 5.8), klar zu erkennen. Die dabei beobachtete Anwachsrate (Abb. 5.11) von $\Gamma \approx 2 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$ stimmt bemerkenswert gut mit dem aus MELROSE & GEDALIN (1999) (Gl. 37) theoretisch zu erwartenden Wert von $\sim 2.2 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$ überein. Die verbleibende Abweichung ist auf die zwingend notwendige Idealisierung der analytischen Rechnung zurückzuführen, in der z.B. nicht berücksichtigt werden kann, daß sich die Plasmakomponenten während des Anwachsens der Langmuirwellen aufheizen, und sich so die Anwachsrate verringert. Im weiteren Verlauf dienen die entstehenden elektrostatischen Felder als Wigglerfelder für die Beamelektronen, was gerade in Abb. 5.4 (unten) sehr deutlich wird. Die Beamelektronen reagieren auf die Wigglerfelder, indem sie quasiperiodische Longitudinalschwingungen ausführen, die sich in der Abbildung als Ringstrukturen bemerkbar machen. Durch die erzwungenen Schwingungen werden sie zur stimulierten Emission von Radiostrahlung angeregt, wie vor allem Abb. 5.14 (Poyntingfluß), aber auch die Abbildungen 5.13 (Gesamtleistung), 5.15 (Poyntingprofil) und 5.17 (Dispersionsrelation) zeigen. Gerade aus der Darstellung der räumlichen Struktur des Poyntingflusses in Abb. 5.14 in Verbindung mit der Struktur der Dichteschwankungen in Abb. 5.8 folgt, daß die höchsten Poyntingflüsse genau an den Positionen entstehen, an denen die höchsten Dichtegradienten und damit die stärksten elektrostatischen Felder auftreten. Auch die extreme Beschleunigung der Beamelektronen, die in der Phasenraumdarstellung Abb. 5.4 (unten) an vertikalen Strukturen offenkundig ist, legt den FEL Emissionsmechanismus nahe, der im Abschnitt 3.2 zur Funktionsweise des FEL beschrieben ist. Es zeigt sich also auch in der numerischen Simulation der theoretische Ablauf, obwohl hier wesentlich weniger stark idealisiert werden mußte.

Es konnte also in der Simulation der Ablauf bestätigt werden, der in analytischen Rechnungen theoretisch vorhergesagt wurde. Darüber hinaus konnten noch einige zusätzliche Erkenntnisse gewonnen werden. So zeigte sich in der Simulation, daß sich die räumliche Positionen der Emissionszonen im zeitlichen Verlauf zu immer kleineren Höhen (z -Werten), also entgegen der Bewegungsrichtung des Elektronenstrahls, verschieben. Die anfängliche Emissionshöhe bestimmt sich aus der Zeit, die die angeregten Langmuirwellen brauchen, um relevante Stärken zu erreichen. Nachdem aber die volle Langmuirturbulenz eingesetzt hat, breitet sich die Information von der Existenz einer starken Störung auch entgegen der Strahlrichtung aus, und ermöglicht so ein immer früheres Emittieren von Strahlung. Man könnte davon sprechen, daß die Pulsarmagnetosphäre von oben her „abbrennt“, solange, bis weiter unten keine günstigen Bedingungen für den FEL mehr herrschen, bzw. bis der Elektronenstrahl wieder abreißt. Ein weiterer Punkt, in dem die Simulation über die analytische Theorie hinausgeht, ist das gemessene Kohärenzvolumen im Beam. Üblicherweise wird für die Anzahl von kohärent strahlenden Beamelektronen N_{koh} der Ansatz $N_{\text{koh}} \sim \lambda_{\text{D}}^3 \cdot n_{\text{b}}$, mit der Debyelänge λ_{D} verwendet, was bei den verwendeten Parametern etwa $\lambda_{\text{D}} = \sqrt{\varepsilon_0 k_{\text{B}} T_{\text{b}} / n_{\text{b}} e^2} \simeq 7 \text{ cm}$ beträgt. Das maximal mögliche Kohärenzvolumen ist durch die halbe Wellenlänge der Radiostrahlung, also etwa $\lambda/2 = \pi/k \simeq 3 \text{ m}$ gegeben. In der Simulation (Abb. 5.8) zeigt sich deutlich, daß der Elektronenstrahl Strukturen auf einer Skala von 5 m–2 m ausbildet, so daß das Kohärenzvolumen deutlich größer ist, als in analytischen Rechnungen angenommen. Schließlich zeigt die Simulation, daß das die Hintergrundelektronenkomponente tatsächlich durch abgebremste Strahlelektronen ergänzt wird. Die Feldstärke der entstehenden Wigglerfelder ist hoch genug, um Beamelektronen bis zum Stillstand abzubremsen, so daß hier die einfache Erklärung für die Existenz des Elektronen-

hintergrunds klar bestätigt wird.

Auch in Bezug zu den Pulsarbeobachtungen liefert die Simulation gute Resultate. Der in Abb. 5.13 gezeigte zeitliche Verlauf der emittierten Strahlungsleistung gibt einen Hinweis auf elementare Zeitskalen des FEL in einer Pulsarmagnetosphäre. Die abgestrahlte Leistung steigt innerhalb von einigen 10 ns auf einen Wert von etwa 1 GW. Dies entspricht der beobachteten typischen Zeitskala bei den Nanopulsen (Abb. 2.4). Der FEL-Prozeß liefert also bei der Abstrahlung von Radiowellen eine vergleichbar kurze Zeitskala, wie bei Beobachtungen gemessen wird. Das legt die Vermutung nahe, daß es sich bei den Nanopulsen eventuell um die Beobachtung von einzelnen, elementaren FEL Ereignissen handelt, die aus noch zu klärenden Gründen nur selten direkt beobachtet werden können.

Die in der Simulation ermittelte maximale Frequenz von $\sim 5\omega_{pe}$ der abgestrahlten Radiowellen Abb. 5.17 stimmt sehr gut mit dem theoretisch erwarteten Wert von $\gamma^2\omega_{pe}$ überein. Vor allem aber die in Abb. 5.18 gezeigte Abstrahlcharakteristik läßt keinen anderen Schluß mehr zu, als daß die in der Simulation erzeugte Strahlung genau so entsteht, wie es im Kapitel 3 und in den theoretischen Arbeiten zum FEL beschrieben wurde. Der Vergleich mit der analytischen Charakteristik der Dipolstrahlung in Abb. 3.3 zeigt eine augenscheinliche und überraschende Übereinstimmung, die zweifelsfrei nachweist, daß es sich bei der FEL Strahlung tatsächlich um lorentztransformierte Hertzsche Dipolstrahlung handelt.

In der vorliegenden Arbeit konnte also nicht nur gezeigt werden, daß der FEL-Prozeß durchaus als zugrundeliegender Emissionsmechanismus der kohärenten Radiostrahlung von Pulsaren in Frage kommt, sondern auch bestätigt werden, daß der FEL tatsächlich wie in der Theorie prognostiziert abläuft. Alle in analytischen Rechnungen angenommenen Abläufe konnten verifiziert werden. Darüber hinaus konnten noch einige zusätzliche Details erklärt bzw. entdeckt werden, die nur mit Hilfe von numerischen Methoden untersuchbar sind.

Danksagung

Ich möchte mich in erster Linie bei meinem Doktorvater Prof. Dr. Harald Lesch bedanken. Die Zusammenarbeit mit ihm während meiner Promotion war außerordentlich fruchtbar und angenehm. Angefüllt mit interessanten fachlichen und weniger fachlichen Diskussionen verging die Zeit leider wie im Flug. Harald war mir in dieser Zeit mehr ein Freund als ein Doktorvater, und er beschäftigte sich während der gesamten Zeit fast genauso intensiv wie ich selbst mit meinen Untersuchungen, so daß er immer genau dann helfen konnte, wenn es nötig war und mir ansonsten freie Hand geben konnte. An dieser Stelle nochmal vielen Dank für alles.

Des weiteren möchte ich mich bei Dr. Dr. habil. Hartmut Ruhl bedanken, der mir für meine Untersuchungen, ohne mit der Wimper zu zucken, seinen in mühsamer Arbeit über Jahre hinweg entwickelten PIC-Code einfach so überließ. In stundenlanger Arbeit erklärte er mir die Funktionsweise des Programms, ohne das die vorliegende Arbeit unmöglich durchzuführen gewesen wäre. Hartmut hat wesentlichen Anteil an der Entstehung dieser Arbeit, und dafür möchte ich ihm an dieser Stelle nochmal danken.

Mein besonderer Dank gilt auch Dr. Guido Birk, der bei größeren Problemen geholfen hat. Er ließ mal kurz seine eigene Arbeit, im wahrsten Sinne des Wortes, stehen und liegen, um sich mal kurz mit mir eine Woche lang eines Problems anzunehmen, dessen Lösung mir allein sehr viel schwerer gefallen wäre. Guido war immer zur Stelle, wenn er den Eindruck hatte, er könnte helfen, wofür ich mich auch ausdrücklich bedanken möchte.

Des weiteren gilt mein Dank allen anderen Kollegen und ehemaligen Kollegen der Kampfgruppe Lesch, die entscheidend an der angenehmen Arbeitsatmosphäre und der guten Zusammenarbeit beteiligt waren. Insbesondere möchte ich mich bei Dr. Thomas Kunzl bedanken, den Meister der Zahlen, Fakten und Pulsare, der sich nicht nur bereitwillig als Taschenrechner¹ und Wissensdatenbank mißbrauchen ließ, sondern der mir auch zunächst detailliert die Pulsare erklärte und anschließend die schlimmsten Fehler in dieser Arbeit beseitigte. Dipl. Phys. Christian Konz und Dr. Dr. habil. Heinz Wiechen möchte ich danken, daß sie in den Jahren der Zusammenarbeit immer halfen, wo es ging, und in den zahlreichen Diskussionen wertvolle Anregungen gaben.

Schließlich möchte ich mich auch bei meinen Eltern und meiner Lebensgefährtin Dr. Ilona Babbel bedanken. Sie konnten zwar fachlich nichts zu dieser Arbeit beitragen, aber sie haben mich jahre- und jahrzehntelang unterstützt und haben auf diese Weise einen entscheidenden Beitrag zu dieser Arbeit geleistet. Obwohl mich diese Arbeit teilweise sehr in Anspruch nahm, unterstützten sie mich während meiner gesamten bisherigen wissenschaftlichen Laufbahn und dafür bedanke ich mich an dieser Stelle.

¹ „Dieser Taschenrechner!“

Tabellarischer Lebenslauf

Name:

Rüdiger Schopper

Geburtsdatum:

13.10.1971

Geburtsort:

Erding

Familienstand:

ledig

Werdegang:

1.9.1978 – 31.7.1982	Grundschule am Lodererplatz Erding
1.9.1982 – 30.6.1991	Gymnasium Erding
1.7.1991 – 30.6.1992	Grundwehrdienst in München
1.7.1992 – 30.9.1992	Soldat auf Monate in München
1.10.1992 – 31.12.1997	Physikstudium an der LMU München
1.10.1994 – 31.12.1997	Werkstudent bei der GSF in München
1.1.1998 – 28.2.2002	Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universitätssternwarte München
1.11.1998 – 30.4.1999	Unterbrechung der Promotion für einen Forschungsaufenthalt am Geophysical In- stitute der University of Alaska Fairbanks, in Fairbanks, AK, USA
1.5.1999 – 28.2.2002	Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universitätssternwarte München
seit 1.3.2002	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Max Planck Institut für extraterrestrische Phy- sik
Mai 2002	Promotion an der Universitätssternwarte München

Literaturverzeichnis

ANDO (1996)

Ando, e. a., (1996), Microwave Power Emission from a Beam-Plasma System, *Physical Society of Japan*, 65(8):2518–2521.

BAKER ET AL. (1988)

Baker, D. N., Borovsky, J. E., Benford, G. und Eilek, J., (1988), The collective emission of electromagnetic waves from astrophysical jets, *The Astrophysical Journal*, 326:110–124.

BECKER & TRUEMPER (1997)

Becker, W. und Truemper, J., (1997), The X-ray luminosity of rotation-powered neutron stars., *Astronomy and Astrophysics*, 326:682–691.

BENFORD (1992a)

Benford, G., (1992), Broadband Microwave Generation by Beam-Plasma Turbulence, *IEEE Transactions on Plasma Science*, 20(3).

BENFORD (1992b)

Benford, G., (1992), Collective emission from rapidly variable quasars, *The Astrophysical Journal*, 391:L59–L62.

BENFORD & LESCH (1998)

Benford, G. und Lesch, H., (1998), Coherent emission and the escape of high brightness temperature radiation in active galactic nuclei, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 301:414–418.

BIGNAMI & CARAVEO (1996)

Bignami, G. F. und Caraveo, P. A., (1996), Geminga: Its Phenomenology, Its Fraternity, and Its Physics, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 34:331–382.

BIRDSALL & LANGDON (1995)

Birdsall, C. und Langdon, A., (1995), *Plasma Physics via Computer Simulation*, McGraw–Hill Book Company.

BLASKIEWICZ ET AL. (1991)

Blaskiewicz, M., Cordes, J. und Wassermann, L., (1991), A relativistic model of pulsar polarization, *The Astrophysical Journal*, 370:643.

GOLDREICH & JULIAN (1969)

Goldreich, P. und Julian, W., (1969), Pulsar Electrodynamics, *The Astrophysical Journal*, 157:318.

HANKINS (2000)

Hankins, T. H., (2000), Giant Pulses from the Crab Pulsar, In Kramer, M., Wex, N. und Wielebinski, Hrsg., *Pulsar Astronomy — 2000 and Beyond*, Bd. 202 von *ASP Conference Series*.

HASEGAWA (1978)

Hasegawa, A., (1978), Free Electron Laser, *The Bell System Technical Journal*, 57(8):3069–3089.

HEWISH ET AL. (1968)

Hewish, A., Bell, J., Pilkington, J., Scott, P. und Collins, R., (1968), *Nature*, 217:709.

KANBACH (1998)

Kanbach, G., (1998), High-energy gamma-ray emission of young pulsars, *Memorie della Societa Astronomica Italiana*, 69:857+.

KATO ET AL. (1983)

Kato, K. G., Benford, G. und Tzach, D., (1983), Detailed spectra of high-power broadband microwave radiation from interactions of relativistic electron beams with weakly magnetized plasmas, *Physics of Fluids*, 26(12):3636–3649.

KIJAK (2001)

Kijak, J., (2001), Emission altitudes in young and old radio pulsars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 323:537–541.

KIJAK & GIL (1997)

Kijak, J. und Gil, J., (1997), Radio emission altitudes in pulsar magnetospheres, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 288:631.

KIJAK & GIL (1998)

Kijak, J. und Gil, J., (1998), Radio emission regions in pulsars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 299:855.

KIPPENHAHN (1995b)

Kippenhahn, R., (1995), *Abenteuer Weltall*, Kap. 13, 221–236.

KIPPENHAHN (1995a)

Kippenhahn, R., (1995), *Abenteuer Weltall*, Kap. 6, 114–127.

KRAMER (1995)

Kramer, M., (1995), *Coherent and incoherent radiation processes in pulsars*, Ph.d. dissertation, Universität Bonn.

KUNZL (2001)

Kunzl, T., (2001), *Coherent and incoherent radiation processes in pulsars*, Ph.d. dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität München.

KUNZL ET AL. (2000)

Kunzl, T., Jessner, A. und Lesch, H., (2000), Gleichschritt im All, *Sterne und Weltraum*, 39(11):936–944.

LESCH (1989)

Lesch, H., (1989), Observable Consequences of Langmuir Turbulence in Active Galactic Nuclei, *IEEE Transactions on Plasma Science*, 17(2):252–258.

LESCH (1995)

Lesch, H., (1995), *Jets from Stars and Galactic Nuclei*, Kap. Coherent Radiation in Active Galactic Nuclei, 41–56, Springer, Berlin.

LESCH ET AL. (1998)

Lesch, H., Jessner, A., Kramer, M. und Kunzl, T., (1998), On the possibility of curvature radiation from radio pulsars, *Astronomy and Astrophysics*, 332:L21–L24.

LESCH & POHL (1992)

Lesch, H. und Pohl, M., (1992), A possible explanation for intraday variability in active galactic nuclei, *Astronomy and Astrophysics*, 254:29–38.

MELROSE & GEDALIN (1999)

Melrose, D. und Gedalin, M., (1999), Relativistic Plasma Emission and Pulsar radio Emission: A Critique, *The Astrophysical Journal*, 521:351–361.

MELROSE (2000)

Melrose, D. B., (2000), The status of Pulsar Emission Theory, In Kramer, M., Wex, N. und Wielebinski, R., Hrsg., *Pulsar Astronomy – 2000 and Beyond*, Bd. 202 von *ASP Conference Series*.

PELLETIER ET AL. (1988)

Pelletier, G., Sol, H. und Asseo, E., (1988), Magnetized Langmuir wave packets excited by a strong beam–plasma interaction, *Physical Review A*, 38(5):2552–2563.

RUDERMAN ET AL. (1998)

Ruderman, M., Zhu, T. und Chen, K., (1998), Neutron Star Magnetic Field Evolution, Crust Movement, and Glitches: Erratum, *The Astrophysical Journal*, 502:1027.

RUHL (2000)

Ruhl, H., (2000), *Collective Super-Intense Laser-Plasma interaction*, Habilitationsschrift, Technische Universität Darmstadt.

RYBICKI & LIGHTMAN (1979)

Rybicki, G. und Lightman, A., (1979), *Radiative processes in astrophysics*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

WEATHERALL (1988)

Weatherall, J. C., (1988), Electron-Beam Radiation in a Strongly Turbulent Plasma, *Physical Review Letters*, 60(13):1302–1305.

WEATHERALL & BENFORD (1991)

Weatherall, J. C. und Benford, G., (1991), Coherent radiation from energetic electron streams via collisionless bremsstrahlung in strong plasma turbulence, *The Astrophysical Journal*, 378:543–549.

YOSHIKAWA ET AL. (1996)

Yoshikawa, M., Masuzaki, M., Ando, R. und Kamada, K., (1996), Correlation

between High-Power Broadband Microwave Radiation and Strong Langmuir Turbulence in an Intense Relativistic Electron Beam-Plasma System, *Physical Society of Japan*, 65(7):2081–2086.

YOUNG ET AL. (1999)

Young, M., Manchester, R. und Johnston, S., (1999), A radio pulsar with an 8.5-second period that challenges emission models, *Nature*, 400:848–849.