Interpretierte Theorien und Reduktionen

Ulrich Albert

München 2008

Interpretierte Theorien und Reduktionen

Ulrich Albert

Dissertation
an der Fakultät für Philosophie, Wissenschaftstheorie und Religionswissenschaft
der Ludwig–Maximilians–Universität
München

vorgelegt von
Ulrich Albert
aus Penzberg

München, den 13. Februar 2008

Erstgutachter: Prof. Dr. C. U. Moulines
Zweitgutachter: Prof. Dr. G. Link
Tag der mündlichen Prüfung: 14. Februar 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

I Begriffsklärung 3

2 Interpretierte Sprachen... **5**
2.1 Theorien 5
2.2 Formalia 8

3 Reduktionen **23**
3.1 Wozu Reduktionen? 23
3.2 Vorarbeiten 26
3.3 Interpretierte Reduktionen 30

II Anwendung 39

4 Ontologie und Empirizität **41**

5 Elimination **47**
5.1 eliminative Reduktionen 47
5.2 Reduktionismus 49

6 Approximation **57**
6.1 Näherungen 57
6.2 Approximative Reduktionen 57
6.3 Wahrheitsähnlichkeit 59

III Ergebnisse 63

7 Zusammenfassung **65**

Literaturverzeichnis **67**

Kapitel 1

Einleitung

Reduktionen spielen in wissenschaftstheoretischen Fragestellungen eine wichtige Rolle. Historisch betrachtet wurden sie zuerst als ein willkommenes Mittel zur Vereinheitlichung wissenschaftlicher Theorien gesehen. Später wurden sie jedoch zunehmend negativ beurteilt, da sie reduzierte Theorien nachrangig erscheinen lassen. In der Auseinandersetzung mit der Reduktion rückten andere Beziehungen zwischen Theorien, wie die Supervenienz, in den Mittelpunkt der Betrachtung, die zu keiner Vorrangstellung einer der beteiligten Theorien führen sollten. Dennoch wird die Auseinandersetzung um die Reduzierbarkeit bestimmter wissenschaftlicher Ebenen aufeinander noch heute leidenschaftlich geführt. Dies zeigt, wie wichtig es ist, einen klares, gemeinsames Verständnis von Reduktionen zu entwickeln, um deren Konsequenzen untersuchen zu können. Ist eine reduzierte Theorie wirklich minderwertig? Lässt sie sich oder ihre Ontologie tatsächlich eliminieren? Welche Erklärungen werden durch eine Reduktion geliefert? Was ist die Rolle fundamentaler Theorien? All diese Fragestellungen lassen sich auf der Grundlage eines klaren Verständnisses von Reduktionen eingehend untersuchen. Es ist das Ziel dieser Arbeit dazu beizutragen.

Als erstes ist es dafür notwendig, einige Festlegungen zu treffen. So soll in dieser Arbeit eine Reduktion als eine Beziehung verstanden werden, die Theorien aufeinander zurückführt. Unter einer Theorie kann hier jedoch nicht eine deduktiv abgeschlossene Satzmenge wie in der Logik verstanden werden. Gerade für empirische Theorien stellt sich diese Auffassung als schlecht geeignet heraus, da einige empirische Aspekte nicht explizit in derjenigen formalen Sprache angegeben werden, in der die Axiome der Theorie formuliert sind. Daher werde ich die Begriffe einer interpretierten Sprache und einer interpretierten Theorie einführen. Diese sollen es erlauben, auch die impliziten Annahmen einer empirischen Theorie zu erfassen, ohne sie als Aussagen dieser Sprache explizit formulieren zu müssen.

Für solche Sprachen lassen sich dann weitere wichtige Eigenschaften im Hinblick auf Reduktionen formulieren. Letztere bedienen sich Übersetzungen zwischen den interpretierten Sprachen. Diese werde ich Brücken nennen, die sowohl die expliziten Aussagen als auch die impliziten Aspekte der Sprachen miteinander verknüpfen. Schon durch einfache Forderungen an diese Verknüpfungen lassen sich allgemeine Eigenschaften von Reduktionen herausarbeiten, die weitgehend mit dem intuitiven Verständnis in Einklang gebracht werden können. Darüberhinaus werde ich zeigen, dass mit Hilfe der gewählten Darstellung auch scheinbar gegensätzliche Auffassungen von Reduktionen vereinbart werden können.

Schließlich werde ich in dieser Arbeit untersuchen, welche Folgerungen sich aus der vorgestellten Auffassung für philosophische Debatten ergeben. Dabei werde ich zuerst den Zusammenhang von interpretierten Theorien und Reduktionen mit Ontologien und empirisch bestimmten Vorgängertheorien untersuchen. Dies erlaubt es, ontologische Reduktionen und Reduktionen empirischer Theorien als Spezialfälle der vorgestellten Auffassung von Reduktionen zu betrachten. Anschließend setze ich mich mit den eliminativen Forderungen auseinander, die auf Grund der Reduzierbarkeit bestimmter Theorien aufgestellt werden. Dabei untersuch ich insbesondere die Thesen eines globalen Reduktionismus. Zuletzt werde ich mich mit approximativen Reduktionen befassen, sowie dem Zusammenhang zwischen Reduktion und Wahrheitsähnlichkeit.

Insgesamt werde ich nicht versuchen, eine erschöpfende Darstellung der in der Literatur diskutierten Auffassungen von Theorien oder Reduktionen zu liefern. Vielmehr möchte ich einige Aspekte von Reduktionen herausarbeiten, für meine Auffassung nutzbar machen und daraus resultierende Konsequenzen und Argumente für philosophische Debatten entwickeln.

Teil I

Begriffsklärung

Kapitel 2

Interpretierte Sprachen und Theorien

2.1 Theorien in der Wissenschaftstheorie

In diesem Kapitel will ich die Begriffe „interpretierte Sprache“ und „interpretierte Theorie“ untersuchen und sie dabei zuerst in einem sehr breiten Sinn verstehen. Dieser soll alles umfassen, was Wissenschaftler zur Darstellung ihrer Arbeit benützen. In der Auseinandersetzung mit den verschiedenen, in der Wissenschaftstheorie üblichen, Auffassungen von Theorien will ich die wesentlichen Merkmale dieser Entitäten herausarbeiten, die mir dann im nächsten Kapitel als Grundlage für meine Formalisierung dienen.

Historisch gesehen sind lange Zeit andere Entitäten Gegenstand metatheoretischer Überlegungen gewesen. Vor allem die (Natur-) Gesetze sind zur Darstellung wissenschaftlicher Erkenntnisse genutzt worden. Die Darstellung durch Gesetze eignet sich insbesondere, um verschieden formulierte Erkenntnisse über einen Wirklichkeitsbereich voneinander zu unterscheiden. Oftmals aber erscheint der Unterschied in der Formulierung nicht wesentlich. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn sich aus den verschiedenen Axiomen dieselben Folgerungen ergeben. Damit ist es sogar möglich, die unterschiedlich formulierten Gesetze auseinander herzuleiten. Deshalb ist der Folgerungsbegriff der Sprache, in der die Gesetze formuliert werden, von besonderer Bedeutung.

Die moderne Logik macht diesen Folgerungs- oder Herleitungsbegriff in einer formalen Sprache explizit. Sie stellt Theorien, die als deduktiv abgeschlossene Satz- oder Formelmengen aufgefasst werden, in den Mittelpunkt ihrer Betrachtung. Der Herleitungsbegriff kann in einem formalen Kalkül erfasst werden. Damit kann verschiedenen Axiomatisierungen derselbe deduktive Abschluss zugeordnet werden. Insofern sind die Theorien unabhängig von der Formulierung jeweiliger Axiome. Diese so genannte *syntaktische* Auffassung von Theorien hat sich vor allem für die Diskussion formaler Theorien als Standardauffassung durchgesetzt.[1]

Zu der Sprache, in der die Aussagen der jeweiligen Theorien formuliert werden, kann

[1] Selbstverständlich werden in der formalen Logik auch semantische Folgerungsbegriffe untersucht. Deshalb ist die übliche, wissenschaftstheoretische Bezeichnung dieser Sichtweise als syntaktisch nicht ganz korrekt.

eine geeignete Semantik gewählt werden. In der mengentheoretischen Modelltheorie werden dabei Strukturen eines geeigneten Typs betrachtet. In ihnen können die Sätze ausgewertet werden. Damit lassen sich jeder Theorie die Klasse von Strukturen zuordnen, die alle Aussagen der Theorie erfüllen. Dadurch wird dann auch der formale Wahrheitsbegriff eingeführt. Eine Theorie kann diese Strukturen nur durch die Sätze unterscheiden, die ihr in der formalen Sprache zur Verfügung stehen. Sind in zwei Strukturen dieselben Sätze dieser Sprache wahr, so erfüllen diese auch dieselben Theorien. Damit kann eine Theorie unter anderem auch nicht zwischen Strukturen mit konkreter oder abstrakter Trägermenge unterscheiden.

Für die Beschreibung empirischer Theorien hat sich die syntaktische Sichtweise daher nicht durchsetzen können. Denn nach der syntaktischen Sichtweise dient eine Theorie zur Beschreibung aller Strukturen, die sie korrekt beschreibt. Bei empirischen Theorien wird aber in der Regel nicht die gesamte Beschreibung des intendierten Wirklichkeitsbereiches explizit angegeben. In der wissenschaftstheoretisch klassischen syntaktischen Sichtweise werden die deduktiv abgeschlossenen Satzmengen daher oft noch durch Hintergrundtheorien, Beschreibungen des Versuchsaufbaus oder der Angabe von Randbedingungen ergänzt. Viele dieser Beschreibungen lassen sich jedoch nicht in der eigentlichen formalen Sprache wiedergeben. Sie sind daher oft nur informell angegeben. Darüber hinaus gibt es auch formale Gründe, dass vollständige Beschreibungen des intendierten Anwendungsbereiches nicht möglich sind.[2] Daher wird in der so genannten *semantischen* Auffassung von Theorien dieser Anwendungsbereich in den Mittelpunkt der Betrachtung gerückt. Dabei werden die Modelle einer Theorie explizit angegeben. Durch welche Sätze sie beschrieben werden, wird gewöhnlich nur implizit angedeutet. Diese Darstellung von Theorien lässt es auch zu, gewisse paradigmatische Modelle heraus zugreifen, die von der Theorie beschrieben werden sollen. Sie ist ebenfalls unabhängig davon, wie die entsprechende Theorie axiomatisiert wird, da sie die Axiome nur implizit erfasst.

Andererseits leidet diese Auffassung an einem anderen Nachteil. Mit einer Klasse von Modellen ist üblicherweise eine Theorie verknüpft, die alle Aussagen enthält, die von allen Modellen erfüllt werden. Es gibt jedoch Entwicklungen in den Wissenschaften, die den Anwendungsbereich der Theorien nicht verändern, wohl aber ihre theoretische Behandlung. So beschreibt Maxwell das Wissen über magnetische und elektrische Phänomene seiner Zeit in einer neuen Sprache. Anschließend fügt er ein eigenes Gesetz hinzu. Dabei ändert sich der Anwendungsbereich nicht. Sowohl Maxwells als auch die zeitgenössische Vorgänger-Theorie elektromagnetischer Phänomene lassen sich auf alle damals bekannten elektrischen und magnetischen Phänomene anwenden. Sie unterscheiden sich nicht in ihrem Anwendungsbereich, sondern nur in ihren theoretischen Aussagen. Der Unterschied zwischen der reinen Reformulierung bekannter Gesetze und dem Hinzufügen des neuen Gesetzes lässt sich also nicht über den Anwendungsbereich und damit nicht in einer orthodox semantischen Sichtweise beschreiben.

Ein weiteres Problem, dass sich orthodox syntaktische und semantische Sichtweise teilen, ergibt sich daraus, dass sie nur schwer in der Lage sind, inkorrekte Theorien wiederzu-

[2] vgl. Sätze von Löwenheim/Skolem, Gödel'sche Unvollständigkeitssätze

geben. So werden der deduktiv abgeschlossenen Satzmenge alle Strukturen zugeordnet, die sie erfüllen. Soll sie auch auf Strukturen angewandt werden, die nicht alle Sätze erfüllen, so kann das gar nicht ausgedrückt werden. Analog kann die semantischen Sichtweise keine Beschreibungen berücksichtigen, die auch nur in einem Element ihrer Strukturklasse nicht wahr sind. Diese Fälle machen deutlich, dass sich sowohl die rein syntaktische als auch die rein semantische Sichtweise nur für korrekte Theorien eignet.

Eine Sonderstellung bei der Auffassung wissenschaftlicher Theorien nimmt der wissenschaftstheoretische Strukturalismus ein. In Balzer, Moulines und Sneed: *An Architectonic for Science* (1987) beschreibt er Theorien durch vielfältige Charakterisierungen. Mich interessieren hier jedoch vor allem die so genannten Theorieelemente, die sich am ehesten mit den bisherigen Auffassungen von Theorien vergleichen lassen. Vereinfacht betrachtet bestehen sie aus Mengen von intendierten Anwendungen, aktuellen und potentiellen Modellen. Die potentiellen Modelle sind dabei die Strukturen eines bestimmten Typs. Die aktuellen Modelle entsprechen denjenigen Strukturen, die eine bestimmte Menge von Aussagen der Sprache dieses Typs erfüllen. Durch die intendierten Anwendungen werden diejenigen Modelle aus den potentiellen Modellen herausgegriffen, die die betrachtete Theorie beschreiben soll. Damit ergibt sich wieder eine von der Axiomatisierung unabhängige Darstellung von Theorien, die aber auch diejenigen Aspekte erfassen kann, die nicht explizit in der formalen Sprache ausgedrückt werden. Darüber hinaus hat diese Auffassung gegenüber der orthodox semantischen Sichtweise den Vorteil, dass über die aktuellen Modelle angegeben werden kann, welche Aussagen von der Theorie vertreten werden. Dies ist insbesondere dann von Interesse, um Theorien zu vergleichen, die auch inkorrekte oder nicht alle korrekten Beschreibungen intendierter Anwendungen umfassen.

Durch die Angabe des Strukturtyps wird die formale Sprache aber nicht eindeutig festgelegt. So legen Balzer et al. Wert darauf, dass sie keine erststufige Sprache betrachten wollen. Dennoch geben sie nicht genau an, welchen Folgerungsbegriff sie verwenden wollen.[3] Kuipers führt daher einen strukturalistischen Folgerungsoperator ein, der diesen Mangel beheben soll.[4] Doch auch er charakterisiert ihn nicht wesentlich weiter.

Die strukturalistische Sichtweise ist insofern der semantischen Auffassung zuzuordnen, als sie die Sprache, in der die Theorie formuliert werden soll, nur implizit angibt. Dadurch mögen zwar die Sätze eindeutig festgelegt sein, die einer solchen Theorie in einer gegebenen Sprache zugeordnet werden. Unklar muss aber bleiben, welche dieser Sätze von der Theorie benützt werden, um alle diese Konsequenzen zu erzeugen. Unterschiede zwischen wissenschaftlichen Theorien, die sich weder in den intendierten Anwendungen noch in den aktuellen Modellen widerspiegeln, können daher nicht erfasst werden. Während also bei der Angabe der paradigmatischen Anwendungen Unterschiede ausgedrückt werden können, ist dies bei den Axiomatisierungen nicht möglich. Dies erscheint mir einseitig. Andererseits kann die strukturalistische Auffassung durchaus beschreiben, wenn sich die Axiomatisierungen in ihren Konsequenzen nicht unterscheiden. Mit der Angabe des strukturalistischen Folgerungsbegriffs lassen sich Klassen von Strukturen diejenigen Strukturen zuordnen, die

[3] s. Balzer, Moulines und Sneed: *An Architectonic for Science* (1987)
[4] Kuipers: *The Refined Structure ...* (1994)

dieselben Sätze der gewählten Sprache erfüllen. Damit können auch Theorieelemente identifiziert werden, deren intendierte Anwendungen dieselben Sätze erfüllen.

Explizit wird dieser Folgerungsoperator in der philosophischen Diskussion kaum wahrgenommen. Denn Folgerungen werden üblicherweise immer zwischen Sätzen betrachtet. Es gibt jedoch auch einige Formen des Schließens, die sich nicht unbedingt in der formalen Sprache ausdrücken lassen. So können üblicherweise Symmetrien nicht in der Sprache der beteiligten Theorien ausgedrückt werden. Bei Symmetrien handelt es sich ja um Isomorphismen, also bestimmten Abbildungen zwischen den Strukturen einer Theorie, die die Aussagen unverändert lassen, die von diesen Strukturen erfüllt werden. Dennoch begründen sie eine gewisse Form des Schließens. Fällt nämlich eine Struktur unter eine beliebige Theorie, so auch ihr Bild unter einem Isomorphismus. Damit kann jeder Strukturklasse ihr Abschluss unter den Isomorphismen einer bestimmten Symmetrie zugeordnet werden. Das liefert einen Folgerungsoperator, zumindest auf geeignet eingeschränkten Strukturklassen.

Auch aus der Kausalbeziehung lässt sich ein Folgerungsoperator gewinnen. Dazu muss zuerst ein Zusammenhang zwischen Ereignissen und den Strukturen einer Theorie hergestellt werden. Dies ist vor allem dann möglich, wenn in diesen Strukturen Ereignisse auftreten. Dann folgt eine Struktur kausal aus einer anderen, wenn alle Ereignisse der ersten von Ereignissen der zweiten Struktur verursacht werden. Selbst wenn die Kausalbeziehung eigentlich zwischen Ereignissen besteht, kann sie dann auch eine Folgerungsbeziehung zwischen den Anwendungen einer Theorie erzeugen.

Die hier kurz vorgestellten Auffassungen von Theorien zeigen, dass sich Theorien sowohl durch die Angabe geeigneter Aussagen als auch durch den Verweis auf ihre intendierten Anwendungen erfolgreich beschreiben lassen. Dabei erscheinen insbesondere für empirische Theorien beide Komponenten notwendig, um die wissenschaftliche Praxis nachzuvollziehen. Dann lassen sich auch die Fälle berücksichtigen, in denen wesentliche Aspekte der jeweiligen Theorie nicht in einer formalen Sprache explizit ausgedrückt werden.

2.2 Formale Darstellung

In diesem Kapitel möchte ich einen formalen Begriff von Theorien entwickeln, der den Ansprüchen des letzten Abschnitts genügt und daher geeignet ist, inkorrekte empirische Theorien zu erfassen. Dabei werde ich zuerst die üblichen formallogischen Begriffe einführen. Anschließend werde ich den formalen Rahmen für interpretierte Theorien liefern und dann aufzeigen, wie sich die üblichen Begriffe mit der neuen Terminologie beschreiben lassen.

Zuerst möchte ich die Darstellung von Theorien wiederholen, wie sie in der formalen Logik üblich sind. Dabei beschränke ich mich auf aussagenlogische Sprachen.[5]

Definition 1. $\mathsf{SK}_{\mathcal{L}}$ sei die Menge der *Satzkonstanten* (der Sprache $\mathcal{L}$). $\mathsf{Sent}_{\mathcal{L}}$ sei dann die Menge aller *Sätze* (von $\mathcal{L}$), wobei diese Sprache mit den Junktoren $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ sowie $\neg$

[5] Auf die Darstellung prädikatenlogischer Sprachen verzichte ich, da die Umformulierung prädikatenlogischer Theorien in die Darstellungsweise dieser Arbeit den Rahmen dieses Textes sprengen würde.

gebildet sei.

Von einigen Sätzen der Sprache kann auf andere geschlossen werden.

Definition 2. Die Menge $\mathsf{Ax}_{\mathcal{L}}$ enthalte genau die üblichen Axiome der klassischen Logik, die durch einen geeigneten Kalkül bestimmt seien. Die *deduktive Hülle* $\mathsf{Cn}_{\mathcal{L}}(\Sigma)$ einer beliebigen Menge $\Sigma \subseteq \mathsf{Sent}_{\mathcal{L}}$ sei dann die kleinste Menge, die Σ und $\mathsf{Ax}_{\mathcal{L}}$ umfasst und abgeschlossen unter Modus Ponens ist. Σ heißt *Theorie*, wenn sie gleich ihrer deduktiven Hülle ist. Ein Satz φ heißt *herleitbar* aus Σ ($\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$), falls φ aus $\mathsf{Cn}_{\mathcal{L}}(\Sigma)$ ist. Entsprechend ist ein Satz φ_1 aus einem Satz φ_2 *logisch herleitbar* ($\varphi_2 \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_1$), wenn φ_1 aus $\mathsf{Cn}_{\mathcal{L}}(\{\varphi_2\})$ ist. Zwei Sätze heißen *logisch äquivalent* ($\varphi_1 \equiv \varphi_2$), wenn sie sich gegenseitig logisch herleiten können. Ein Satz φ_1 heißt *herleitbar* aus einem Satz φ_2 *über der Satzmenge* Σ ($\Sigma, \varphi_2 \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_1$), wenn φ_1 aus $\mathsf{Cn}_{\mathcal{L}}(\{\varphi_2\} \cup \Sigma)$ ist. Entsprechend heißen zwei Sätze *äquivalent über der Satzmenge* Σ ($\varphi_1 \equiv_\Sigma \varphi_2$), wenn sie sich gegenseitig über der Satzmenge Σ herleiten können.

Die Relation der Herleitbarkeit auf den Sätzen besitzt die Eigenschaften einer Präordnung.

Definition 3. Sei M eine beliebige Menge und R eine zweistellige Relation darauf. Dann ist R eine *Präordnung*, falls R reflexiv und transitiv ist. Sei N eine beliebige Teilmenge von M. a_0 heißt *untere (obere) Schranke* von N in M, falls für alle a aus N gilt: $a_0 \,\mathrm{R}\, a$ ($a \,\mathrm{R}\, a_0$). a_0 heißt *Infimum (Supremum)* von N in M ($a_0 \inf_{\mathrm{R}} N$ bzw. $a_0 \sup_{\mathrm{R}} N$), falls a_0 untere (obere) Schranke von N ist, und für alle unteren (oberen) Schranken von N gilt: $a \,\mathrm{R}\, a_0$ ($a_0 \,\mathrm{R}\, a$).[6] a_1 ist ein *Komplement* von a_2 in M, falls jede untere Schranke von $\{a_1, a_2\}$ auch untere Schranke von M und jede obere Schranke von $\{a_1, a_2\}$ auch obere Schranke von M ist.

Bekanntlich lassen sich damit die algebraischen Eigenschaften bestimmter Sätzen ausdrücken.

Theorem 4. *$\vdash$ ist eine Präordnung auf Sent. Für alle Sätze φ, φ_1 und φ_2 ist $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ ein Infimum und $\varphi_1 \vee \varphi_2$ ein Supremum von $\{\varphi_1, \varphi_2\}$. $\neg\varphi$ ist ein Komplement von φ. Für alle Satzmengen Σ gilt das Deduktionstheorem:*

$$\Sigma \vdash \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \text{ gdw. } \Sigma, \varphi_1 \vdash \varphi_2 \tag{2.1}$$

Beweis. Die Eigenschaften des Infimums, Supremums bzw. Komplements ergeben sich unmittelbar aus den Regeln für Konjunktion, Disjunktion und Negation. Das Deduktionstheorem ist ein Standardtheorem der klassischen Logik. □

Die Herleitung führt zum abstrakten Begriff eines Folgerungsoperators.

[6] Für echte Ordnungen sind Infima und Suprema eindeutig bestimmt. In Verallgemeinerung des üblichen Gebrauchs auf Präordnungen lasse ich die Eindeutigkeitsbedingungen wegfallen.

Definition 5. Sei M eine beliebige Menge. Eine Abbildung ${}^*\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ heißt *Folgerungsoperator* auf $\mathcal{P}(M)$, falls für alle Teilmengen N, N_1 und N_2 die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$N \subseteq N^* \tag{2.2a}$$
$$N_1 \subseteq N_2 \Rightarrow N_1^* \subseteq N_2^* \tag{2.2b}$$
$$N^{**} \subseteq N^* \tag{2.2c}$$

So lässt sich zum Beispiel mit dem deduktiven Abschluss ein Folgerungsoperator bilden:

Theorem 6. *Die Abbildung* $\mathsf{Cn} : \mathcal{P}(\mathsf{Sent}) \to \mathcal{P}(\mathsf{Sent})$ *ist ein Folgerungsoperator auf* $\mathcal{P}(\mathsf{Sent})$.

Beweis. Standardergebnis der klassischen Aussagenlogik. □

Allgemein induziert umgekehrt ein Folgerungsoperator eine Präordnung auf der zu Grunde liegenden Menge.

Definition 7. Sei M eine beliebige Menge und * ein Folgerungsoperator auf $\mathcal{P}(M)$. Dann sei die zweistellige Relation $\sqsubseteq_*$ auf M definiert durch:

$$\text{Für alle } a_1 \text{ und } a_2 \text{ aus } M \text{ gelte: } a_1 \sqsubseteq_* a_2 :\Leftrightarrow a_2 \in \{a_1\}^* \tag{2.3}$$

Theorem 8. *Seien M und * wie zuvor. Dann ist $\sqsubseteq_*$ eine Präordnung auf M. Insbesondere ist* $\sqsubseteq_{\mathsf{Cn}} = \vdash$

Beweis. Wegen 2.2a folgt unmittelbar die Reflexivität, und wegen 2.2b, 2.2c sowie der Transitivität der Teilmengenbeziehung auch die Transitivität von $\sqsubseteq_*$. Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus den Definitionen. □

Neben den rein syntaktischen Begriffen, die ich bisher eingeführt habe, lässt sich zur klassischen Logik auch eine Semantik einführen.

Definition 9. Eine *(Wahrheitswert-) Belegung* β einer Sprache $\mathcal{L}$ ist eine Abbildung, die jeder Satzkonstanten aus $\mathsf{SK}_\mathcal{L}$ einen Wahrheitswert zuordnet. Eine *Auswertung* α (über einer Belegung β) ist eine Abbildung, die jedem Satz φ aus $\mathsf{Sent}_\mathcal{L}$ einen Wahrheitswert zuordnet, und dabei die üblichen Wahrheitsfunktionale der klassischen Logik berücksichtigt. $\mathsf{Aus}_\mathcal{L}$ sei die Menge aller Auswertungen einer Sprache $\mathcal{L}$, $\mathsf{Bel}_\mathcal{L}$ sei die Menge aller ihrer Belegungen.

Bekanntlich lassen sich Belegungen β eindeutig zu Auswertungen α_β fortsetzen und umgekehrt Auswertungen zu Belegungen einschränken. Ein Satz φ aus $\mathsf{Sent}_\mathcal{L}$ werde unter einer Belegung β genau dann *erfüllt* ($\beta \models_\mathcal{L} \varphi$), wenn α_β den Satz als wahr auswertet. Ein Satz φ *folgt* aus einer Satzmenge Σ ($\Sigma \models_\mathcal{L} \varphi$), wenn er von allen Belegungen erfüllt wird, unter denen alle Sätze aus Σ erfüllt werden. Die Abbildung $\mathsf{Mod} : \mathcal{P}(\mathsf{Sent}_\mathcal{L}) \to \mathcal{P}(\mathsf{Bel}_\mathcal{L}), \Sigma \mapsto \{\beta \in \mathsf{Bel}_\mathcal{L} \mid \forall \varphi \in \Sigma\colon\ \beta \models_\mathcal{L} \varphi\}$ ordnet jeder Satzmenge die Menge ihrer Modelle zu und umgekehrt $\mathsf{Th}\colon \mathcal{P}(\mathsf{Bel}_{\mathcal{L}}) \to \mathcal{P}(\mathsf{Sent}_{\mathcal{L}}), \Omega \mapsto \{\varphi \in \mathsf{Sent}_{\mathcal{L}} \mid \forall \beta \in \Omega\colon \beta \models_{\mathcal{L}} \varphi\}$ jeder Menge von Belegungen ihre Theorie.

Bei der klassischen Beschreibung von Theorien in der Logik wird insbesondere der Aufbau der Sätze bis zur letzten Einzelheit dargestellt. Dabei werden Unterschiede herausgestellt, die für den Folgerungsbegriff nicht von Interesse sind. So unterscheiden sich zum Beispiel $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ und $\neg(\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$ in ihrem syntaktischen Aufbau. Sie erhalten jedoch unter jeder Belegung dieselben Wahrheitswerte. Deshalb werde ich im folgenden eine Beschreibung von Theorien suchen, die auf diesen Unterschied nicht eingeht. Anstatt also anzugeben, wie zulässige Ausdrücke aus ihren Bestandteilen aufgebaut werden, werde ich nur abstrakt über Ausdrücke sprechen. Dabei will ich nur solche Eigenschaften von Ausdrücken berücksichtigen, die aus meiner Sicht für die Reduktionsproblematik von Bedeutung sind. Umgekehrt soll alles, was die vorgestellten Axiome erfüllt, als eine Sprache aufgefasst werden können. Mit solch einer axiomatischen Darstellung von Theorien werden auch viele ungewohnte Entitäten als interpretierte Sprachen aufgefasst. Die einzigen Bedingungen an solche Entitäten sind, dass sie den Axiomen gehorchen und als interpretierte Sprachen, Theorien usw. verstanden werden sollen.

Definition 10. Eine *interpretierte Sprache* $\mathcal{R}$ ist ein Tripel $\langle \mathsf{Str}_{\mathcal{R}}, \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}, \bullet_{\mathcal{R}} \rangle$, wobei $\mathsf{Str}_{\mathcal{R}}$ die Menge der *(abstrakten) Strukturen*, $\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}$ die Menge der *(abstrakten) Ausdrücke* und $\bullet_{\mathcal{R}}$ die *(abstrakte) Charakterisierung* ist, eine Relation auf $\mathsf{Str}_{\mathcal{R}} \times \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}$. Für $S \subseteq \mathsf{Str}_{\mathcal{R}}$ und $E \subseteq \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}$ sei die *Einschränkung* von $\mathcal{R}$ auf S und E ($\mathcal{R}\big|_{\langle S,E \rangle}$) gleich $\langle S, E, \bullet_{\mathcal{R}} \cap (S \times E) \rangle$. Eine interpretierte Sprache $\mathcal{S}$ heißt genau dann *Teilsprache* von $\mathcal{R}$, wenn Teilmengen S von $\mathsf{Str}_{\mathcal{R}}$ und E von $\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}$ existieren, so dass $\mathcal{S} = \mathcal{R}\big|_{\langle S,E \rangle}$.

Die Menge der Ausdrücke soll dabei alle sprachlichen Entitäten enthalten, die dazu dienen können, einen bestimmten Anschauungsbereich zu beschreiben. Wie dieser gegliedert ist, wird durch die Menge der Strukturen bestimmt. Die Charakterisierung gibt dann an, ob ein sprachlicher Ausdruck eine Struktur charakterisiert. Beispiele dafür werde ich in den folgenden Absätzen liefern. Zuvor jedoch führe ich noch einige Operatoren ein, die durch eine intendierte Sprache induziert werden.

Definition 11. Die Abbildungen $^{\blacktriangleright_{\mathcal{R}}}\colon \mathcal{P}(\mathsf{Str}_{\mathcal{R}}) \to \mathcal{P}(\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}})$ (gesprochen: „rechts“) und $^{\blacktriangleleft_{\mathcal{R}}}\colon \mathcal{P}(\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}) \to \mathcal{P}(\mathsf{Str}_{\mathcal{R}})$ (gesprochen: „links“) seien für alle $S \subseteq \mathsf{Str}_{\mathcal{R}}$ und $E \subseteq \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}$ definiert durch:

$$S^{\blacktriangleright_{\mathcal{R}}} := \{e \in \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}} \mid \forall s \in S\colon s \bullet e\} \tag{2.4a}$$

$$E^{\blacktriangleleft_{\mathcal{R}}} := \{s \in \mathsf{Str}_{\mathcal{R}} \mid \forall e \in E\colon s \bullet e\} \tag{2.4b}$$

Theorem 12. *Sei $\mathcal{R}$ eine interpretierte Sprache. Dann ist $\langle ^{\blacktriangleright_{\mathcal{R}}}, ^{\blacktriangleleft_{\mathcal{R}}} \rangle$ eine Galois-Verbindung.*

Beweis. Siehe Ganter und Wille: *Formale Begriffsanalyse* (1996). □

Definition 13. Seien M_1 und M_2 Mengen sowie ${}^{\triangleright}\colon \mathcal{P}(M_1) \to \mathcal{P}(M_2)$ und ${}^{\triangleleft}\colon \mathcal{P}(M_2) \to \mathcal{P}(M_1)$ Abbildungen. Dann heißt das Paar $\langle {}^{\triangleright}, {}^{\triangleleft} \rangle$ genau dann *Galois-Verbindung (von $\mathcal{P}(M_1)$ und $\mathcal{P}(M_2)$)*, wenn für alle $N_1 \subseteq M_1$ und $N_2 \subseteq M_2$ gilt:

$$N_1 \subseteq N_2^{\triangleleft} \text{ gdw. } N_2 \subseteq N_1^{\triangleright} \tag{2.5}$$

Theorem 14. *Seien M_1 und M_2 Mengen sowie ${}^{\triangleright}\colon \mathcal{P}(M_1) \to \mathcal{P}(M_2)$ und ${}^{\triangleleft}\colon \mathcal{P}(M_2) \to \mathcal{P}(M_1)$ Abbildungen, so dass $\langle {}^{\triangleright}, {}^{\triangleleft} \rangle$ eine Galois-Verbindung ist. Für alle $N_1, N_{1*} \subseteq M_1$ sowie $N_2, N_{2*} \subseteq M_2$ gilt:*

$$N_1 \subseteq N_{1*} \Rightarrow N_{1*}^{\triangleright} \subseteq N_1^{\triangleright} \tag{2.6a}$$

$$N_2 \subseteq N_{2*} \Rightarrow N_{2*}^{\triangleleft} \subseteq N_2^{\triangleleft} \tag{2.6b}$$

$$N_1 \subseteq N_1^{\triangleright\triangleleft} \tag{2.6c}$$

$$N_2 \subseteq N_2^{\triangleleft\triangleright} \tag{2.6d}$$

Umgekehrt ist jedes Paar $\langle {}^{\triangleright}, {}^{\triangleleft} \rangle$ geeigneter Abbildungen, das die obigen Bedingungen erfüllt, eine Galois-Verbindung.

Beweis. Siehe Ganter und Wille: *Formale Begriffsanalyse* (1996). □

Theorem 15. *Seien M_1 und M_2 Mengen, sowie ${}^{\triangleright}\colon \mathcal{P}(M_1) \to \mathcal{P}(M_2)$ und ${}^{\triangleleft}\colon \mathcal{P}(M_2) \to \mathcal{P}(M_1)$ Abbildungen, so dass $\langle {}^{\triangleright}, {}^{\triangleleft} \rangle$ eine Galois-Verbindung ist. Seien weiter $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{P}(M_1)$ und $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{P}(M_2)$. Dann gelten:*

$$\bigcap_{N_1 \in \mathcal{M}_1} N_1^{\triangleright} = \left(\bigcup_{N_1 \in \mathcal{M}_1} N_1 \right)^{\triangleright} \tag{2.7a}$$

$$\bigcap_{N_2 \in \mathcal{M}_2} N_2^{\triangleleft} = \left(\bigcup_{N_2 \in \mathcal{M}_2} N_2 \right)^{\triangleleft} \tag{2.7b}$$

Beweis. Siehe Ganter und Wille: *Formale Begriffsanalyse* (1996). □

Das Tupel $\langle \mathsf{Bel}_{\mathcal{L}}, \mathsf{Sent}_{\mathcal{L}}, \models_{\mathcal{L}} \rangle$, genannt $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^{\mathsf{AL}}$, dient als Paradigma für interpretierte Sprachen. Die Ausdrücke sind hier die Sätze. Sie stellen die verschiedenen Ausdrucksformen dar, die die formale Sprache zur Verfügung stellt. Sie dienen dazu, explizite Aussagen über die Belegungen zu machen. Diese können sich jedoch noch weiter unterscheiden, als sich mit den Ausdrücken angeben lässt. Betrachtet man nämlich prädikatenlogische Sprachen als Spezialfall aussagenlogischer Sprachen, so werden die Belegungen durch die semantische Interpretation der Sprache in geeigneten mengentheoretischen Strukturen erzeugt. Dabei gibt es elementar äquivalente Strukturen, die nicht identisch, ja nicht einmal isomorph zueinander sind. Daher spiegeln die mengentheoretischen Strukturen eine feinere Gliederung des gewählten Anschauungsbereiches, als es die Ausdrücke zu leisten im Stande wären. In diesem Fall bleibt also noch ein Aspekt der Systematisierung implizit, der durch die Sätze der gewählten prädikatenlogischen Sprache nicht explizit gemacht werden kann. Die Wahrheitsrelation verbindet alle Strukturen mit den Sätzen, die auf sie zutreffen. Dies erlaubt es, die Strukturen soweit zu charakterisieren, wie es die Sätze explizit können. Th ist die Abbildung $^{\blacktriangleright}$ und Mod ist die Abbildung $^{\blacktriangleleft}$ in der interpretierten Sprache $\mathcal{R}^{\mathsf{AL}}$.

In philosophischen Texten werden statt der mengentheoretischen Strukturen gerne mögliche Welten betrachtet. Auch in ihnen sind dann entsprechende Sätze wahr. Daher kann auch das Tripel $\mathcal{R}^{\mathsf{pos}}$, bestehend aus der Menge der möglichen Welten, der Menge aller Sätze einer geeigneten Sprache und der Wahrheitsrelation, als interpretierte Sprache aufgefasst werden. Die Abbildung $^{\blacktriangleright}$ ordnet hier einer Menge von möglichen Welten alle Sätze zu, die in allen diesen Welten wahr sind. Das Bild einer einzelnen möglichen Welt ist hier die Menge aller Sätze, die in dieser Welt wahr sind. Oft werden mögliche Welten sogar mit diesen Menge identifiziert. Umgekehrt ordnet $^{\blacktriangleleft}$ einer Satzmenge alle möglichen Welten zu, in der alle ihre Sätze erfüllt werden. Einem einzelnen Satz ordnet er damit die Menge aller möglichen Welten zu, in denen dieser Satz wahr ist. Dies wird üblicherweise mit der diesem Satz zugeordneten Proposition gleichgesetzt.

$\mathcal{R}^{\mathsf{AL}}$ ist gut geeignet, die aussagenlogischen Beziehungen zwischen Sätzen zu erfassen. Für die Betrachtung quantorenlogischer Beziehungen zwischen Formeln reicht es jedoch nicht aus, die Menge der Ausdrücke um die Formeln zu erweitern. Denn mengentheoretische Strukturen erfüllen Formeln genau dann, wenn sie ihren Allabschluss erfüllen. Daher würde eine solche interpretierte Sprache Formeln wie ihren Allabschluss behandeln. Jedoch kann ich im Rahmen dieser Arbeit nicht darauf eingehen, wie quantorenlogische Aspekte erfasst werden können.

Neben den modelltheoretisch motivierten interpretierten Sprachen ist es auch möglich, den syntaktischen Herleitbarkeitsbegriff einer formalen Sprache $\mathcal{L}$ in einer interpretierten Sprache $\mathcal{R}^{\mathsf{syn}}_{\mathcal{L}} = \left\langle \mathsf{Str}^{\mathsf{syn}}_{\mathcal{L}}, \mathsf{Exp}^{\mathsf{syn}}_{\mathcal{L}}, \bullet^{\mathsf{syn}}_{\mathcal{L}} \right\rangle$ zu erfassen. Dazu wähle ich für $\mathsf{Str}^{\mathsf{syn}}_{\mathcal{L}}$ die Menge aller Theorien und setze $\mathsf{Exp}^{\mathsf{syn}}_{\mathcal{L}}$ gleich $\mathsf{Sent}_{\mathcal{L}}$.[7] Die Charakterisierungsrelation $\bullet^{\mathsf{syn}}_{\mathcal{L}}$ sei dann dadurch definiert, dass für alle Theorien Σ und Sätze φ gelten soll:

$$\Sigma \bullet^{\mathsf{syn}}_{\mathcal{L}} \varphi \text{ gdw. } \varphi \in \Sigma \tag{2.8}$$

Neben diesen, eher von der syntaktischen Sichtweise motivierten, interpretierten Sprachen lassen sich mit dem strukturalistischen Folgerungsoperator auch interpretierte Sprachen konstruieren, die der semantischen Sichtweise zuzuordnen sind. Die interpretierte Sprache $\mathcal{R}^{\mathsf{sem}}$ besteht aus der Menge der potentiellen Modellen, der Menge der unter dem strukturalistischen Folgerungsoperator abgeschlossenen Teilmengen der potentiellen Modelle und der Elementschaftsrelation. Hier werden die Ausdrücke also durch die Menge der potentiellen Modelle dargestellt, in denen sie wahr sind. Damit entsprechen sie in etwa den Propositionen aus $\mathcal{R}^{\mathsf{pos}}$, wodurch ihr sprachlicher Charakter verdeutlicht wird.

Ein wichtiger Aspekt der hier verwendeten Beschreibung von Theorien ist, dass der Aufbau der Ausdrücke nicht explizit beschrieben wird. Ähnliches gilt für die Strukturen. Dies liegt daran, dass ich für Reduktionen von der Schreibweise absehen will. So soll zum Beispiel zwischen logisch äquivalenten Sätzen oder elementar äquivalenten Strukturen nicht unterschieden werden. Dies geschieht im Vertrauen darauf, dass die Sprache, in der eine

[7] Auf die Klassen/Mengen-Unterscheidung möchte ich hier nicht eingehen, da sie für die hier vorgestellten Konzepte nicht wesentlich ist.

wissenschaftliche Erkenntnis formuliert wird, keinen Einfluss auf ihren Inhalt hat. Es lässt sich aber leicht sehen, dass die verwendete Schreibweise großen Einfluss darauf hat, welche Erkenntnisse gewonnen werden. So erscheint es nahezu unmöglich, mit römischen Ziffern zu multiplizieren. Auf jeden Fall ist dazu eine Vielzahl besonderer Regeln notwendig. Andererseits braucht das Multiplizieren arabischer Ziffern nur wenige, einfach zu überschauende Regeln. Aussagen wie $2 * 3 = 6$ bzw. $II * III = VI$ sollten aber dasselbe ausdrücken. Weil ich aber hier nicht am Kontext der Entdeckung interessiert bin, scheint mir eine Vernachlässigung der hier dargestellten Unterschiede vertretbar.

Die interpretierten Sprachen erlauben es nun, interpretierte Theorien einzuführen.

Definition 16. Eine *interpretierte Theorie* $\mathcal{T}$ in einer interpretierten Sprache $\mathcal{R}$ ist ein Paar $\langle \mathsf{App}_{\mathcal{T}}, \mathsf{Desc}_{\mathcal{T}} \rangle$, wobei die Menge der *(abstrakten) Anwendungen* $\mathsf{App}_{\mathcal{T}} \subseteq \mathsf{Str}_{\mathcal{R}}$ und die Menge der *(abstrakten) Beschreibungen* $\mathsf{Desc}_{\mathcal{T}} \subseteq \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}$. Eine interpretierte Theorie $\mathcal{T}$ heißt *perfekt*, falls $\mathsf{App}_{\mathcal{T}}^{\blacktriangleright} = \mathsf{Desc}_{\mathcal{T}}$ und $\mathsf{Desc}_{\mathcal{T}}^{\blacktriangleleft} = \mathsf{App}_{\mathcal{T}}$. Sie heißt *korrekt*, falls $\mathsf{App}_{\mathcal{T}}^{\blacktriangleright} \subseteq \mathsf{Desc}_{\mathcal{T}}$ und $\mathsf{Desc}_{\mathcal{T}}^{\blacktriangleleft} \subseteq \mathsf{App}_{\mathcal{T}}$. Die interpretierte Theorie heißt *paradigmatisch (axiomatisch)*, falls $\mathsf{App}_{\mathcal{T}}^{\blacktriangleright} = \mathsf{Desc}_{\mathcal{T}}$ ($\mathsf{Desc}_{\mathcal{T}}^{\blacktriangleleft} = \mathsf{App}_{\mathcal{T}}$). Sie heißt *Theorie mit Standardmodell*, falls für ein geeignetes $s \in \mathsf{Str}_{\mathcal{R}}$ gilt $\mathsf{App}_{\mathcal{T}} = \{s\}$.

Eine Theorie ist also korrekt, wenn ihre Beschreibungen alle Anwendungen charakterisiert und umgekehrt. Dabei sind die beiden Bedingungen wegen 13 zueinander äquivalent. Weiter ist jede perfekte Theorie korrekt, paradigmatisch und axiomatisch. Umgekehrt ist eine paradigmatische und axiomatische Theorie perfekt.

In der modelltheoretisch bestimmten Sprache $\mathcal{R}^{\mathsf{AL}}$ kann den deduktiv abgeschlossenen Satzmengen Σ natürlicherweise das Paar $\langle \mathsf{Mod}(\Sigma), \Sigma \rangle = \mathcal{T}_{\Sigma}^{\mathsf{AL}}$ zugeordnet werden. Dabei handelt es sich offensichtlich um eine perfekte Theorie, da $\mathsf{Th}(\mathsf{Mod}(\Sigma)) = \mathsf{Cn}(\Sigma) = \Sigma$. Anders ausgedrückt handelt es sich bei den über Satzmengen bestimmten Theorien in dieser interpretierten Sprache immer um perfekte Theorien. Nicht alle formalen Theorien lassen sich angemessen auf diese Weise in interpretierte Theorien umwandeln. So soll zum Beispiel jede Arithmetik von ihrem Standardmodell, dem Modell der natürlichen Zahlen, erfüllt werden. Auch die Mengenlehre besitzt ein derartiges Standardmodell. Solchen Theorien lassen sich durch Angabe ihrer Axiome und des Standardmodells erfassen. In der zugehörigen interpretierten Sprache handelt es sich also um interpretierte Theorien mit Standardmodell. Darüber hinaus sind sie ebenfalls korrekt. In syntaktisch bestimmten Sprache $\mathcal{R}^{\mathsf{syn}}$ lassen sich beliebigen Theorien Σ die jeweiligen Paare $\langle \{\Sigma\}, \Sigma \rangle = \mathcal{T}_{\Sigma}^{\mathsf{syn}}$ zuordnen. Hier entspricht also generell einer formalen Theorie eine korrekte interpretierte Theorie mit Standardmodell.

Für empirische Theorien müssen aber auch inkorrekte Theorien betrachtet werden können. Denn oftmals werden empirische Theorien auf Strukturen angewandt, in denen nicht alle Beschreibungen zutreffen. Bei der Formalisierung können zum Beispiel Vernachlässigungen und Ungenauigkeiten in der Darstellung zu diesem Ergebnis führen.

Ein anderes Phänomen bei empirischen Theorien ist, dass sie nicht immer durch Angabe von Axiomen bestimmt werden. Oftmals wird auch eine Theorie gesucht (mit einer bestimmten Ausdrucksfähigkeit), die sich auf einen gegebenen Anwendungsbereich anwenden lässt. Solche Theorien sind in einer interpretierten Sprache paradigmatisch bestimmt.

So kann auch die Theorie aller Strukturen bestimmt werden, die sich ähnlich wie eine paradigmatische Struktur verhalten. Dabei hängt die Ähnlichkeit von der Art und Weise ab, wie dazu die Wirklichkeit gegliedert wird. Dies wird in interpretierten Sprachen durch die Menge der abstrakten Strukturen wiedergegeben.

In interpretierten Sprachen lassen sich leicht Folgerungsoperatoren einführen, entsprechend der Modellklassen- bzw. Theoriebildung.

Theorem 17. *Seien M_1 und M_2 Mengen, sowie ${}^{\triangleright}\colon \mathcal{P}(M_1) \to \mathcal{P}(M_2)$ und ${}^{\triangleleft}\colon \mathcal{P}(M_2) \to \mathcal{P}(M_1)$ Abbildungen, so dass $\langle {}^{\triangleright}, {}^{\triangleleft} \rangle$ eine Galois-Verbindung ist. Dann sind ${}^{\triangleright\triangleleft}\colon \mathcal{P}(M_1) \to \mathcal{P}(M_1)$ und ${}^{\triangleleft\triangleright}\colon \mathcal{P}(M_2) \to \mathcal{P}(M_2)$ Folgerungsoperatoren auf $\mathcal{P}(M_1)$ bzw. $\mathcal{P}(M_2)$.*

Beweis. Siehe Ganter und Wille: *Formale Begriffsanalyse* (1996). □

Definition 18. Seien $N_1 \subseteq M_1$, $N_2 \subseteq M_2$ und M_3 Mengen und $\mathrm{R}, \mathrm{R}_1 \subseteq M_1 \times M_2$ sowie $\mathrm{R}_2 \subseteq M_2 \times M_3$. Dann seien

$$\mathrm{R}[N_1] := \{m_2 \in M_2 \mid \exists m_1 \in N_1 \colon m_1 \,\mathrm{R}\, m_2\} \tag{2.9a}$$

$$\mathrm{R}^{-1}[N_2] := \{m_1 \in M_1 \mid \exists m_2 \in N_2 \colon m_1 \,\mathrm{R}\, m_2\} \tag{2.9b}$$

$$\mathbb{D}_{\mathrm{R}} := \mathrm{R}^{-1}[M_2] \tag{2.9c}$$

$$\mathbb{W}_{\mathrm{R}} := \mathrm{R}[M_1] \tag{2.9d}$$

$$\mathrm{R}_2 \circ \mathrm{R}_1 := \{\langle m_1, m_3 \rangle \in M_1 \times M_3 \mid \exists m_2 \in M_2 \colon m_1 \,\mathrm{R}_1\, m_2 \wedge m_2 \,\mathrm{R}_2\, m_3\} \tag{2.9e}$$

Theorem 19. *Seien $\mathcal{R}$ eine interpretierte Sprache, $\mathcal{S}$ eine Teilsprache davon und $S \subseteq \mathsf{Str}_{\mathcal{S}}$ sowie $E \subseteq \mathsf{Exp}_{\mathcal{S}}$. Dann gelten:*

$$S^{\blacktriangleright_{\mathcal{S}}} = S^{\blacktriangleright_{\mathcal{R}}} \cap \mathsf{Exp}_{\mathcal{S}} \tag{2.10a}$$

$$S^{\blacktriangleleft_{\mathcal{S}}} = S^{\blacktriangleleft_{\mathcal{R}}} \cap \mathsf{Str}_{\mathcal{S}} \tag{2.10b}$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus der Definition. □

Definition 20. Seien $\mathcal{R}$ eine interpretierte Sprache, $S \subseteq \mathsf{Str}_{\mathcal{R}}$ und $E \subseteq \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}$. Dann seien die von $\mathcal{R}$ *induzierten Folgerungsoperatoren* ${}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}}\colon \mathcal{P}\left(\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}\right) \to \mathcal{P}\left(\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}\right)$ und ${}^{\blacktriangleright\blacktriangleleft_{\mathcal{R}}}\colon \mathcal{P}(\mathsf{Str}_{\mathcal{R}}) \to \mathcal{P}(\mathsf{Str}_{\mathcal{R}})$ in $\mathcal{R}$ für alle $S \subseteq \mathsf{Str}_{\mathcal{R}}$ und $E \subseteq \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}$ definiert durch:

$$E^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}} := \left(E^{\blacktriangleleft_{\mathcal{R}}}\right)^{\blacktriangleright_{\mathcal{R}}} \tag{2.11a}$$

bzw.

$$S^{\blacktriangleright\blacktriangleleft_{\mathcal{R}}} := \left(S^{\blacktriangleright_{\mathcal{R}}}\right)^{\blacktriangleleft_{\mathcal{R}}} \tag{2.11b}$$

Theorem 21. *Seien $\mathcal{R}$ eine interpretierte Sprache, $\mathcal{S}$ eine interpretierte Teilsprache davon. Dann gelten für alle $S \subseteq \mathsf{Str}_\mathcal{R}$ und $E \subseteq \mathsf{Exp}_\mathcal{R}$:*

$$E^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_\mathcal{R}} \cap \mathsf{Exp}_\mathcal{S} \subseteq E^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_\mathcal{S}} \tag{2.12a}$$

$$S^{\blacktriangleright\blacktriangleleft_\mathcal{R}} \cap \mathsf{Str}_\mathcal{S} \subseteq S^{\blacktriangleright\blacktriangleleft_\mathcal{S}} \tag{2.12b}$$

$$\mathsf{Exp}_\mathcal{R} = \mathsf{Exp}_\mathcal{S} \Rightarrow S^{\blacktriangleright\blacktriangleleft_\mathcal{R}} \cap \mathsf{Str}_\mathcal{S} = S^{\blacktriangleright\blacktriangleleft_\mathcal{S}} \tag{2.12c}$$

$$\mathsf{Str}_\mathcal{R} = \mathsf{Str}_\mathcal{S} \Rightarrow E^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_\mathcal{R}} \cap \mathsf{Exp}_\mathcal{S} = E^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_\mathcal{S}} \tag{2.12d}$$

Beweis. Die Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus den Sätzen 19 und 14. □

Theorem 22. *Die Abbildungen $\mathsf{Mod} \circ \mathsf{Th}\colon \mathcal{P}(\mathsf{Bel}) \to \mathcal{P}(\mathsf{Bel})$ und $\mathsf{Th} \circ \mathsf{Mod}\colon \mathcal{P}(\mathsf{Sent}) \to \mathcal{P}(\mathsf{Sent})$ sind Folgerungsoperatoren auf $\mathcal{P}(\mathsf{Bel})$ bzw. $\mathcal{P}(\mathsf{Sent})$. Insbesondere ist $\mathsf{Th} \circ \mathsf{Mod} = \mathsf{Cn}$.*

Mit den vorgestellten Folgerungsoperatoren lassen sich nun weitere hilfreiche Relationen definieren.

Definition 23. Sei $\mathcal{R}$ eine interpretierte Sprache. Dann seien $\mathrel{\lhd\!\bullet}_\mathcal{R} \subseteq \mathsf{Str}_\mathcal{R} \times \mathsf{Str}_\mathcal{R}$ und $\mathrel{\diamond\!\bullet}_\mathcal{R} \subseteq \mathsf{Str}_\mathcal{R} \times \mathsf{Str}_\mathcal{R}$ sowie $\mathrel{\bullet\!\lhd}_\mathcal{R} \subseteq \mathsf{Exp}_\mathcal{R} \times \mathsf{Exp}_\mathcal{R}$ und $\mathrel{\bullet\!\diamond}_\mathcal{R} \subseteq \mathsf{Exp}_\mathcal{R} \times \mathsf{Exp}_\mathcal{R}$ für alle s_1, s_2 aus $\mathsf{Str}_\mathcal{R}$ und e_1, e_2 aus $\mathsf{Exp}_\mathcal{R}$ definiert durch

$$e_1 \mathrel{\bullet\!\lhd}_\mathcal{R} e_2 \Leftrightarrow \forall s \in \mathsf{Str}_\mathcal{R} : (s \bullet e_1 \Rightarrow s \bullet e_2) \tag{2.13a}$$

$$e_1 \mathrel{\bullet\!\diamond}_\mathcal{R} e_2 \Leftrightarrow \forall s \in \mathsf{Str}_\mathcal{R} : (s \bullet e_1 \Leftrightarrow s \bullet e_2) \tag{2.13b}$$

$$s_1 \mathrel{\lhd\!\bullet}_\mathcal{R} s_2 \Leftrightarrow \forall e \in \mathsf{Exp}_\mathcal{R} : (s_1 \bullet e \Rightarrow s_2 \bullet e) \tag{2.13c}$$

$$s_1 \mathrel{\diamond\!\bullet}_\mathcal{R} s_2 \Leftrightarrow \forall e \in \mathsf{Exp}_\mathcal{R} : (s_1 \bullet e \Leftrightarrow s_2 \bullet e) \tag{2.13d}$$

Theorem 24. *Seien $\mathcal{R}$ eine interpretierte Sprache und $\mathcal{S}$ eine Teilsprache davon. Dann gelten für alle s_1, s_2 und s_3 aus $\mathsf{Str}_\mathcal{S}$ sowie e_1, e_2 und e_3 aus $\mathsf{Exp}_\mathcal{S}$:*

$$e_1 \mathrel{\bullet\!\lhd}_\mathcal{S} e_1 \tag{2.14a}$$

$$e_1 \mathrel{\bullet\!\lhd}_\mathcal{S} e_2 \wedge e_2 \mathrel{\bullet\!\lhd}_\mathcal{S} e_3 \Rightarrow e_1 \mathrel{\bullet\!\lhd}_\mathcal{S} e_3 \tag{2.14b}$$

$$e_1 \mathrel{\bullet\!\lhd}_\mathcal{S} e_2 \Leftrightarrow \{e_1\}^{\blacktriangleleft_\mathcal{S}} \subseteq \{e_2\}^{\blacktriangleleft_\mathcal{S}} \tag{2.14c}$$

$$e_1 \mathrel{\bullet\!\lhd}_\mathcal{S} e_2 \Leftrightarrow e_2 \in \{e_1\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_\mathcal{S}} \tag{2.14d}$$

$$e_1 \mathrel{\bullet\!\lhd}_\mathcal{S} e_2 \Leftrightarrow \{e_2\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_\mathcal{S}} \subseteq \{e_1\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_\mathcal{S}} \tag{2.14e}$$

$$e_1 \mathrel{\bullet\!\lhd}_\mathcal{R} e_2 \Rightarrow e_1 \mathrel{\bullet\!\lhd}_\mathcal{S} e_2 \tag{2.14f}$$

$$e_1 \mathrel{\bullet\!\diamond}_\mathcal{S} e_2 \Leftrightarrow \left(e_1 \mathrel{\bullet\!\lhd}_\mathcal{S} e_2 \wedge e_2 \mathrel{\bullet\!\lhd}_\mathcal{S} e_1\right) \tag{2.14g}$$

$$e_1 \mathrel{\bullet\!\diamond}_\mathcal{S} e_1 \tag{2.14h}$$

$$e_1 \mathrel{\bullet\!\diamond}_\mathcal{S} e_2 \wedge e_2 \mathrel{\bullet\!\diamond}_\mathcal{S} e_3 \Rightarrow e_1 \mathrel{\bullet\!\diamond}_\mathcal{S} e_3 \tag{2.14i}$$

$$e_1 \mathrel{\bullet\!\diamond}_\mathcal{S} e_2 \Rightarrow e_2 \mathrel{\bullet\!\diamond}_\mathcal{S} e_1 \tag{2.14j}$$

$$e_1 \mathrel{\bullet\!\diamond}_\mathcal{R} e_2 \Rightarrow e_1 \mathrel{\bullet\!\diamond}_\mathcal{S} e_2 \tag{2.14k}$$

$$s_1 \lhd\!\bullet_{\mathcal{S}}\, s_1 \tag{2.14l}$$

$$s_1 \lhd\!\bullet_{\mathcal{S}}\, s_2 \wedge s_2 \lhd\!\bullet_{\mathcal{S}}\, s_3 \Rightarrow s_1 \lhd\!\bullet_{\mathcal{S}}\, s_3 \tag{2.14m}$$

$$s_1 \lhd\!\bullet_{\mathcal{S}}\, s_2 \Leftrightarrow \{s_1\}^{\blacktriangleright_{\mathcal{S}}} \subseteq \{s_2\}^{\blacktriangleright_{\mathcal{S}}} \tag{2.14n}$$

$$s_1 \lhd\!\bullet_{\mathcal{S}}\, s_2 \Leftrightarrow s_2 \in \{s_1\}^{\blacktriangleright\blacktriangleleft_{\mathcal{S}}} \tag{2.14o}$$

$$s_1 \lhd\!\bullet_{\mathcal{S}}\, s_2 \Leftrightarrow \{s_2\}^{\blacktriangleright\blacktriangleleft_{\mathcal{S}}} \subseteq \{s_1\}^{\blacktriangleright\blacktriangleleft_{\mathcal{S}}} \tag{2.14p}$$

$$s_1 \lhd\!\bullet_{\mathcal{R}}\, s_2 \Rightarrow s_1 \lhd\!\bullet_{\mathcal{S}}\, s_2 \tag{2.14q}$$

$$s_1 \diamond\!\bullet_{\mathcal{S}}\, s_2 \Leftrightarrow \big(s_1 \lhd\!\bullet_{\mathcal{S}}\, s_2 \wedge s_2 \lhd\!\bullet_{\mathcal{S}}\, s_1\big) \tag{2.14r}$$

$$s_1 \diamond\!\bullet_{\mathcal{S}}\, s_1 \tag{2.14s}$$

$$s_1 \diamond\!\bullet_{\mathcal{S}}\, s_2 \wedge s_2 \diamond\!\bullet_{\mathcal{S}}\, s_3 \Rightarrow s_1 \diamond\!\bullet_{\mathcal{S}}\, s_3 \tag{2.14t}$$

$$s_1 \diamond\!\bullet_{\mathcal{S}}\, s_2 \Rightarrow s_2 \diamond\!\bullet_{\mathcal{S}}\, s_1 \tag{2.14u}$$

$$s_1 \diamond\!\bullet_{\mathcal{R}}\, s_2 \Rightarrow s_1 \diamond\!\bullet_{\mathcal{S}}\, s_2 \tag{2.14v}$$

Beweis. trivial □

In $\mathcal{R}^{\mathsf{AL}}$ und $\mathcal{R}^{\mathsf{syn}}$ sind die neu eingeführten Beziehungen zwischen den Strukturen bzw. Ausdrücken alte Bekannte:

Theorem 25. *In $\mathcal{R}^{\mathsf{AL}}$ gilt für alle β_1, β_2 aus $\mathsf{Str}_{\mathcal{R}^{\mathsf{AL}}}$ und φ_1, φ_2 aus $\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}^{\mathsf{AL}}}$, dass $\beta_1 \lhd\!\bullet_{\mathcal{R}^{\mathsf{AL}}} \beta_2$ gdw. $\beta_1 = \beta_2$ und $\varphi_1 \bullet\!\lhd_{\mathcal{R}^{\mathsf{AL}}} \varphi_2$ gdw. $\varphi_1 \models \varphi_2$. Ebenso gilt in $\mathcal{R}^{\mathsf{syn}}$ für alle Σ_1, Σ_2 aus $\mathsf{Str}_{\mathcal{R}^{\mathsf{syn}}}$ und φ_1, φ_2 aus $\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}^{\mathsf{syn}}}$, dass $\Sigma_1 \lhd\!\bullet_{\mathcal{R}^{\mathsf{syn}}} \Sigma_2$ gdw. $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ und $\varphi_1 \bullet\!\lhd_{\mathcal{R}^{\mathsf{syn}}} \varphi_2$ gdw. $\varphi_1 \vdash \varphi_2$.*

Beweis. trivial □

Wird in der interpretierten Sprache $\mathcal{R}^{\mathsf{pos}}$ eine interpretierte Theorie gewählt, deren Anwendungen alle physikalisch möglichen Welten sind, dann wird dadurch genau der physikalisch notwendige Folgerungsbegriff induziert. Ähnliches gilt für andere Formen der Notwendigkeit.

Definition 26. Seien $\mathcal{R}$ eine interpretierte Sprache, $e_\wedge \in \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}$ und $E \subseteq \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}$. Dann heißt $e_\wedge$ genau dann die *Konjunktion* von E bezüglich $\mathcal{R}$ ($\mathsf{conj}_{\mathcal{R}}(E, e_\wedge)$), wenn gilt:

$$\{e_\wedge\}^{\blacktriangleleft_{\mathcal{R}}} = E^{\blacktriangleleft_{\mathcal{R}}} \tag{2.15}$$

Theorem 27. *Seien $\mathcal{R}$ eine interpretierte Sprache, $\mathcal{S}$ eine Teilsprache davon sowie $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \mathsf{Exp}_{\mathcal{S}}$. Dann gelten für alle e_1, e_2 aus $\mathsf{Exp}_{\mathcal{S}}$:*

$$\mathsf{conj}_{\mathcal{R}}(E_1, e_1) \Rightarrow \mathsf{conj}_{\mathcal{S}}(E_1, e_1) \tag{2.16a}$$

$$\mathsf{Str}_{\mathcal{S}} = \mathsf{Str}_{\mathcal{R}} \wedge \mathsf{conj}_{\mathcal{S}}(E_1, e_1) \Rightarrow \mathsf{conj}_{\mathcal{R}}(E_1, e_1) \tag{2.16b}$$

$$\mathsf{conj}_{\mathcal{S}}(E_1, e_1) \Rightarrow \big(\mathsf{conj}_{\mathcal{S}}(E_1, e_2) \Leftrightarrow e_1 \bullet\!\diamond_{\mathcal{S}}\, e_2\big) \tag{2.16c}$$

$$\mathsf{conj}_{\mathcal{S}}(E_1, e_1) \wedge \mathsf{conj}_{\mathcal{S}}(E_2, e_2) \Rightarrow e_2 \bullet\!\lhd_{\mathcal{S}}\, e_1 \tag{2.16d}$$

Beweis. Die ersten beiden Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus der Definition 26 und Satz 19. Zusammen mit der Definition 23 folgen dann die dritte und vierte Behauptung. □

Theorem 28. *Seien $\mathcal{R}$ eine interpretierte Sprache, $e_\wedge \in \mathsf{Exp}_\mathcal{R}$ und $E \subseteq \mathsf{Exp}_\mathcal{R}$ mit $\mathsf{conj}_\mathcal{R}(E, e_\wedge)$. Dann gelten:*

$$\forall e \in E\colon e_\wedge \bullet\!\!\lhd_\mathcal{R} e \tag{2.17a}$$

$$\forall e_* \in \mathsf{Exp}_\mathcal{R}\colon \big((\forall e \in E\colon e_* \bullet\!\!\lhd_\mathcal{R} e) \Rightarrow e_* \bullet\!\!\lhd_\mathcal{R} e_\wedge\big) \tag{2.17b}$$

Beweis. Seien e aus E und s aus $\mathsf{Str}_\mathcal{R}$ mit $s \bullet_\mathcal{R} e_\wedge$. Daraus folgen $s \in \{e_\wedge\}^{\blacktriangleleft_\mathcal{R}}$ und $s \in E^{\blacktriangleleft_\mathcal{R}}$. Dann gilt aber auch $s \bullet_\mathcal{R} e$, also insgesamt $e_\wedge \bullet\!\!\lhd_\mathcal{R} e$. Seien nun weiter e_* aus $\mathsf{Exp}_\mathcal{R}$ mit $e_* \bullet\!\!\lhd_\mathcal{R} e$ für alle e aus E und s aus $\mathsf{Str}_\mathcal{R}$ mit $s \bullet_\mathcal{R} e_*$. Dann gilt auch für alle e aus E, dass $s \bullet_\mathcal{R} e$. Damit aber $s \bullet_\mathcal{R} e_\wedge$, also schließlich $e_* \bullet\!\!\lhd_\mathcal{R} e_\wedge$. □

Eine Konjunktion ist also das Infimum bezüglich $\bullet\!\!\lhd_\mathcal{R}$ in $\mathsf{Exp}_\mathcal{R}$. Umgekehrt muss ein Infimum jedoch keine Konjunktion sein. Damit lässt sich leicht zeigen, dass in $\mathcal{R}^{\mathsf{AL}}$ bzw. $\mathcal{R}^{\mathsf{syn}}$ für alle Sätze φ_0, φ_1 und φ_2, dass $\mathsf{conj}\left(\{\varphi_1, \varphi_2\}, \varphi_0\right)$ gdw. $\varphi_0 \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

Definition 29. Seien $\mathcal{R}$ eine interpretierte Sprache, $e_\top$ aus $\mathsf{Exp}_\mathcal{R}$. $e_\top$ heißt genau dann *tautologisch* bezüglich $\mathcal{R}$ ($\mathsf{taut}_\mathcal{R}(e_\top)$), wenn $\mathsf{conj}_\mathcal{R}(\emptyset, e_\top)$.

Ein Ausdruck ist also genau dann tautologisch, wenn alles, was aus ihm folgt, bereits aus der leeren Menge folgt. Umgekehrt folgt er selber damit aus jedem beliebigen Ausdruck. Damit ist er in jedem Fall das Infimum der leeren Menge, oder das Top-Element bezüglich der Folgerungsordnung.

Theorem 30. *Seien $\mathcal{R}$ eine interpretierte Sprache und $\mathcal{S}$ eine Teilsprache davon. Dann gelten für alle e_1, e_2 aus $\mathsf{Exp}_\mathcal{S}$:*

$$\mathsf{taut}_\mathcal{R}(e_1) \Rightarrow \mathsf{taut}_\mathcal{S}(e_1) \tag{2.18a}$$

$$\mathsf{Str}_\mathcal{S} = \mathsf{Str}_\mathcal{R} \wedge \mathsf{taut}_\mathcal{S}(e_1) \Rightarrow \mathsf{taut}_\mathcal{R}(e_1) \tag{2.18b}$$

$$\mathsf{taut}_\mathcal{S}(e_1) \Rightarrow \big(\mathsf{taut}_\mathcal{S}(e_2) \Leftrightarrow e_1 \bullet\!\!\diamond_\mathcal{S} e_2\big) \tag{2.18c}$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 27. □

Definition 31. Seien $\mathcal{R}$ eine interpretierte Sprache, $e_\vee \in \mathsf{Exp}_\mathcal{R}$ und $E \subseteq \mathsf{Exp}_\mathcal{R}$. Dann heißt $e_\vee$ genau dann die *Disjunktion* von E bezüglich $\mathcal{R}$ ($\mathsf{disj}_\mathcal{R}(E, e_\vee)$), wenn gilt:

$$\{e_\vee\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_\mathcal{R}} = \bigcap_{e \in E} \{e\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_\mathcal{R}} \tag{2.19}$$

Theorem 32. *Seien $\mathcal{R}$ eine interpretierte Sprache, $e_\vee \in \mathsf{Exp}_\mathcal{R}$ und $E \subseteq \mathsf{Exp}_\mathcal{R}$. Dann gilt $\mathsf{disj}_\mathcal{R}(E, e_\vee)$ genau dann, wenn*

$$\forall e \in E\colon e \bullet\!\!\lhd_\mathcal{R} e_\vee \tag{2.20a}$$

$$\forall e_* \in \mathsf{Exp}_\mathcal{R}\colon \big((\forall e \in E\colon e \bullet\!\!\lhd_\mathcal{R} e_*) \Rightarrow e_\vee \bullet\!\!\lhd_\mathcal{R} e_*\big) \tag{2.20b}$$

Beweis. Sei zuerst $e_\vee$ die angegebene Disjunktion. Für alle e aus E gilt dann auch $\{e_\vee\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}} = \bigcap_{e\in E}\{e\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}} \subseteq \{e\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}}$. Wegen Satz 24 also $e \bullet\!\lhd_{\mathcal{R}} e_\vee$. Sei nun weiter e_* aus $\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}$ mit $e \bullet\!\lhd_{\mathcal{R}} e_*$ für alle e aus E, das heißt $\{e_*\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}} \subseteq \{e\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}}$. Dann gilt auch $\{e_*\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}} \subseteq \bigcap_{e\in E}\{e\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}} = \{e_\vee\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}}$ und damit $e_\vee \bullet\!\lhd_{\mathcal{R}} e_*$. Also ist $e_\vee$ auch das gewünschte Infimum.

Sei nun umgekehrt $e_\vee$ das angegebene Infimum. Für alle $e_* \in \{e_\vee\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}}$ und $e \in E$ folgt dann wegen Satz 24 $e_\vee \bullet\!\lhd_{\mathcal{R}} e_*$ und wegen 2.20a $e \bullet\!\lhd_{\mathcal{R}} e_\vee$, wegen der Transitivität 2.14 von $\bullet\!\lhd_{\mathcal{R}}$ also $e \bullet\!\lhd_{\mathcal{R}} e_*$ und damit wieder wegen Satz 24 $\{e_*\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}} \subseteq \{e\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}}$. Dann gilt aber auch $e_* \in \{e_*\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}} \subseteq \bigcap_{e\in E}\{e\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}}$ und damit $\{e_\vee\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}} \subseteq \bigcap_{e\in E}\{e\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}}$. Sei nun umgekehrt $e_* \in \bigcap_{e\in E}\{e\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}}$, das heißt für alle $e \in E$gilt $e_* \in \{e\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}}$oder $e \bullet\!\lhd_{\mathcal{R}} e_*$. Dann folgt wegen 2.20b $e_\vee \bullet\!\lhd_{\mathcal{R}} e_*$, also schon $e_* \in \{e_\vee\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}}$ und damit $\{e_\vee\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}} \supseteq \bigcap_{e\in E}\{e\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}}$. □

Damit ist die Disjunktion in jeder interpretierten Sprache das Infimum bezüglich $\bullet\!\lhd$ und umgekehrt. Sie stimmt damit noch mehr als die Konjunktion mit den üblichen algebraischen Definitionen für zusammengesetzte Ausdrücke oder Sätze überein. Insbesondere gilt in $\mathcal{R}^{\mathsf{AL}}$ und $\mathcal{R}^{\mathsf{syn}}$ für alle Sätze φ_0, φ_1 und φ_2, dass $\mathsf{disj}\left(\{\varphi_1,\varphi_2\},\varphi_0\right)$ gdw. $\varphi_0 \equiv \varphi_1 \vee \varphi_2$.

Theorem 33. *Seien $\mathcal{R}$ eine interpretierte Sprache, $\mathcal{S}$ eine Teilsprache davon sowie $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \mathsf{Exp}_{\mathcal{S}}$. Dann gelten für alle e_1, e_2 aus $\mathsf{Exp}_{\mathcal{S}}$:*

$$\mathsf{Str}_{\mathcal{S}} = \mathsf{Str}_{\mathcal{R}} \Rightarrow \big(\mathsf{disj}_{\mathcal{S}}(E_1,e_1) \Leftrightarrow \mathsf{disj}_{\mathcal{R}}(E_1,e_1)\big) \tag{2.21a}$$

$$\mathsf{disj}_{\mathcal{S}}(E_1,e_1) \Rightarrow \big(\mathsf{disj}_{\mathcal{S}}(E_1,e_2) \Leftrightarrow e_1 \bullet\!\diamond_{\mathcal{S}} e_2\big) \tag{2.21b}$$

$$\mathsf{disj}_{\mathcal{S}}(E_1,e_1) \wedge \mathsf{disj}_{\mathcal{S}}(E_2,e_2) \Rightarrow e_1 \bullet\!\lhd_{\mathcal{S}} e_2 \tag{2.21c}$$

Beweis. Die erste Behauptung ergibt sich mit 2.12 unmittelbar aus den Definitionen. Die weiteren Behauptungen folgen mit 2.14. □

Definition 34. Seien $\mathcal{R}$ eine interpretierte Sprache, $e_\perp$ aus $\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}$ und $E \subseteq \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}$. $e_\perp$ heißt genau dann *kontradiktorisch* bezüglich $\mathcal{R}$ ($\mathsf{cont}_{\mathcal{R}}(e_\perp)$), wenn $\mathsf{disj}_{\mathcal{R}}(\emptyset^{\blacktriangleright_{\mathcal{R}}}, e_\perp)$.

Unter Beachtung von $\emptyset^{\blacktriangleright_{\mathcal{R}}} = \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}$ folgen aus einem kontradiktorischen Ausdruck also alle anderen Ausdrücke. Gleichzeitig ist er natürlich das Supremum der leeren Menge bezüglich der Folgerungsrelation und damit ihr Bottom-Element. Damit werden aber in der algebraischen Logik die Widersprüche charakterisiert, insofern ist die Wahl der Bezeichnung gerechtfertigt. Insbesondere sind in $\mathcal{R}^{\mathsf{AL}}$ und $\mathcal{R}^{\mathsf{syn}}$ die kontradiktorischen Ausdrücke genau die kontradiktorischen Sätze.

Theorem 35. *Seien $\mathcal{R}$ eine interpretierte Sprache und $\mathcal{S}$ eine Teilsprache davon. Dann gelten für alle e_1, e_2 aus $\mathsf{Exp}_{\mathcal{S}}$:*

$$\mathsf{Str}_{\mathcal{S}} = \mathsf{Str}_{\mathcal{R}} \Rightarrow \big(\mathsf{cont}_{\mathcal{S}}(e_1) \Leftrightarrow \mathsf{cont}_{\mathcal{R}}(e_1)\big) \tag{2.22a}$$

$$\mathsf{cont}_{\mathcal{S}}(e_1) \Rightarrow \big(\mathsf{cont}_{\mathcal{S}}(e_2) \Leftrightarrow e_1 \bullet\!\diamond_{\mathcal{S}} e_2\big) \tag{2.22b}$$

Beweis. Die Behauptungen folgen unmittelbar aus der Definition 34 und dem Satz 33. □

Definition 36. Seien $\mathcal{R}$ eine interpretierte Sprache, e_1 und e_2 aus $\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}$. e_1 und e_2 sind genau dann *komplementär* bezüglich $\mathcal{R}$ ($\mathsf{komp}_{\mathcal{R}}(e_1, e_2)$), wenn gelten:

$$\{e_1\}^{\blacktriangleleft_{\mathcal{R}}} \cap \{e_2\}^{\blacktriangleleft_{\mathcal{R}}} = \emptyset^{\blacktriangleright\blacktriangleleft_{\mathcal{R}}} \tag{2.23a}$$

$$\{e_1\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}} \cap \{e_2\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}} = \emptyset^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}}} \tag{2.23b}$$

Gibt es die notwendigen Disjunktionen und Konjunktionen, so lassen sich komplementäre Ausdrücke einfacher bestimmen.

Theorem 37. *Seien $\mathcal{R}$ eine interpretierte Sprache, e_1, e_2, $e_\vee$ und $e_\wedge$ aus $\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}$ mit $\mathsf{conj}_{\mathcal{R}}(\{e_1, e_2\}, e_\wedge)$ und $\mathsf{disj}_{\mathcal{R}}(\{e_1, e_2\}, e_\vee)$. Dann gelten:*

$$\mathsf{komp}_{\mathcal{R}}(e_1, e_2) \Leftrightarrow \mathsf{cont}_{\mathcal{R}}(e_\wedge) \wedge \mathsf{taut}_{\mathcal{R}}(e_\vee) \tag{2.24}$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus den Definitionen 26, 31, 29, 34 und 36. □

Damit entsprechen komplementäre Ausdrücke solchen Sätzen, die durch Negation entsprechend der klassischen Logik auseinander hervorgegangen sind. Die kontradiktorischen und tautologischen Ausdrücke lassen sich also nutzen, um entsprechend der klassischen Logik die Negation einzuführen. Jedoch lassen sich komplementäre Ausdrücke auch definieren, wenn keine Tautologien oder Widersprüche in der interpretierten Sprache existieren. Insbesondere gilt in $\mathcal{R}^{\mathsf{AL}}$ und $\mathcal{R}^{\mathsf{syn}}$ für alle Sätze φ_1 und φ_2, dass $\mathsf{komp}\,(\varphi_1, \varphi_2)$ gdw. $\varphi_1 \equiv \neg\varphi_2$.

Theorem 38. *Seien $\mathcal{R}$ eine interpretierte Sprache und $\mathcal{S}$ eine Teilsprache davon. Dann gelten für alle e_1, e_2, e_3 und e_4 aus $\mathsf{Exp}_{\mathcal{S}}$:*

$$\mathsf{komp}_{\mathcal{S}}(e_1, e_2) \Leftrightarrow \mathsf{komp}_{\mathcal{S}}(e_2, e_1) \tag{2.25a}$$

$$\mathsf{Str}_{\mathcal{R}} = \mathsf{Str}_{\mathcal{S}} \wedge \mathsf{komp}_{\mathcal{R}}(e_1, e_2) \Rightarrow \mathsf{komp}_{\mathcal{S}}(e_1, e_2) \tag{2.25b}$$

Beweis. Die erste Behauptung gilt offensichtlich. Angenommen es gelte nun $\mathsf{komp}_{\mathcal{R}}(e_1, e_2)$ und $\mathsf{Str}_{\mathcal{R}} = \mathsf{Str}_{\mathcal{S}}$. Wegen der Sätze 2.10 und 21 folgt dann $\{e_1\}^{\blacktriangleleft_{\mathcal{S}}} \cap \{e_2\}^{\blacktriangleleft_{\mathcal{S}}} = \emptyset^{\blacktriangleright\blacktriangleleft_{\mathcal{S}}}$. Satz 21 führt ähnlich zu $\{e_1\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{S}}} \cap \{e_2\}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{S}}} = \emptyset^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{S}}}$, also insgesamt $\mathsf{komp}_{\mathcal{S}}(e_1, e_2)$. □

Definition 39. Seien $\mathcal{R}$ eine interpretierte Sprache, e_1, e_2 und $e_\to$ aus $\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}$. $e_\to$ ist genau dann die *Implikation* von e_1 auf e_2 bezüglich $\mathcal{R}$ ($\mathsf{imp}_{\mathcal{R}}(e_1, e_2, e_\to)$), wenn für alle e_0 aus $\mathsf{Str}_{\mathcal{R}}$ gilt:

$$s_0 \bullet_{\mathcal{R}} e_\to \Leftrightarrow \forall s(s \in \mathsf{Str}_{\mathcal{R}} \wedge s_0 \lhd\!\bullet_{\mathcal{R}} s \wedge s \bullet_{\mathcal{R}} e_1 \Rightarrow s \bullet_{\mathcal{R}} e_2) \tag{2.26}$$

Ein letzter Junktor, der oft in der algebraischen Logik definiert wird, ist die Implikation. Diese wird in der Regel mit dem Exponenten der Folgerungsordnung gleichgesetzt. Der folgende Satz zeigt, dass die obige Definition einem derartigen Vorgehen entspricht. Weiter gilt in $\mathcal{R}^{\mathsf{AL}}$ und $\mathcal{R}^{\mathsf{syn}}$ für alle Sätze φ_0, φ_1 und φ_2, dass $\mathsf{imp}_{(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_0)}$ gdw. $\varphi_0 \equiv \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$.

Theorem 40. *Sei $\mathcal{R}$ eine interpretierte Sprache. Seien weiter e_0, e_1, e_2, $e_\wedge$ und $e_\to$ aus $\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}$ mit $\mathsf{conj}_{\mathcal{R}}(\{e_0, e_1\}, e_\wedge)$ und $\mathsf{imp}_{\mathcal{R}}(e_1, e_2, e_\to)$. Dann gelten:*

$$e_\wedge \bullet\!\lhd_{\mathcal{R}} e_2 \Leftrightarrow e_0 \bullet\!\lhd_{\mathcal{R}} e_\to \tag{2.27}$$

Beweis. Wegen $\mathsf{conj}_{\mathcal{R}}(\{e_0, e_1\}, e_\wedge)$ gilt $e_\wedge \bullet\!\!\lhd_{\mathcal{R}} e_2$ genau dann, wenn für alle s aus $\mathsf{Str}_{\mathcal{R}}$, für die $s \bullet_{\mathcal{R}} e_0$ und $s \bullet_{\mathcal{R}} e_1$ gelten, auch $s \bullet_{\mathcal{R}} e_2$ gilt. Entsprechend gilt wegen $\mathsf{imp}_{\mathcal{R}}(e_1, e_2, e_\rightarrow)$ genau dann $e_0 \bullet\!\!\lhd_{\mathcal{R}} e_\rightarrow$, wenn für alle s, s' aus $\mathsf{Str}_{\mathcal{R}}$, für die $s' \bullet_{\mathcal{R}} e_0$, $s' \lhd\!\!\bullet_{\mathcal{R}} s$ und $s \bullet_{\mathcal{R}} e_1$ gelten, auch $s \bullet_{\mathcal{R}} e_2$ gilt. Angenommen es gelte nun $e_\wedge \bullet\!\!\lhd_{\mathcal{R}} e_2$ und seien s, s' aus $\mathsf{Str}_{\mathcal{R}}$ mit $s \bullet_{\mathcal{R}} e_1$, $s' \bullet_{\mathcal{R}} e_0$ und $s' \lhd\!\!\bullet_{\mathcal{R}} s$. Dann folgt aus den letzten beiden Voraussetzungen $s \bullet_{\mathcal{R}} e_0$, also mit den anderen Voraussetzungen $s \bullet_{\mathcal{R}} e_2$ und daher insgesamt $e_0 \bullet\!\!\lhd_{\mathcal{R}} e_\rightarrow$. Die umgekehrte Richtung ergibt sich durch Spezialisierung von s' auf s. $\square$

Damit ist gezeigt, dass interpretierte Sprachen geeignet sind, wesentliche aussagenlogische Konstruktionen nachzuvollziehen. Weiter führen sie die informellen Prinzipien der vorangegangenen Abschnitte formal aus. Denn interpretierte Sprachen erlauben es sowohl explizit über die verwendeten Ausdrücke als auch über die Wahl geeigneter Strukturen, die implizit den betrachteten Wirklichkeitsbereich gliedern, verschiedene Aspekte der Wirklichkeit wiederzugeben. Dabei lassen sich die Theorien nun innerhalb dieser interpretierten Sprachen sowohl durch Axiome als auch durch ausgewählte Anwendungen bestimmen. Die induzierten Folgerungsbegriffe geben sowohl die sprachlichen Argumentationsschritte, als auch die entsprechenden Beziehungen zwischen den gewählten Strukturen wieder. Weiter erlaubt es der gewählte Rahmen anzugeben, was unter einer korrekten Theorie zu verstehen ist. Insbesondere kann er auch inkorrekte Theorien auf natürliche Weise erfassen. Dabei kann immer der korrekte Anteil der Theorie bestimmt werden, also ihre korrekten Konsequenzen und korrekten Anwendungen.

Kapitel 3

Reduktionen

3.1 Wozu Reduktionen?

Reduktionen spielen in der analytischen Philosophie und Wissenschaftstheorie eine bedeutende Rolle. Beispielsweise werden sie von den Vertretern verschiedener Versionen des Physikalismus ebenso häufig bemüht, wie sich ihre Gegner daran versuchen, die Reduzierbarkeit zu widerlegen. Ziel dieses Kapitels ist, einige Vorstellungen herauszuarbeiten, die mit dem Begriff der Reduktion verknüpft werden. Dabei will ich keinen Überblick über die verschiedenen Ansichten zur Reduktion geben. Und noch viel weniger möchte ich eine erschöpfende Darstellung aller Debatten liefern, in denen Reduzierbarkeit eine Rolle spielt. Vielmehr werde ich einige Fälle herausgreifen, in denen auf Reduktionen Bezug genommen wird, und untersuchen, welche Anforderungen dabei an Reduktionen gestellt werden und welche Aufgaben sie dabei zu erfüllen haben.

Dazu möchte ich zunächst einige Beispiele herausgreifen, in denen gewisse Sorten von Objekten auf eine andere Sorte von Objekten zurückgeführt werden. So lassen sich Zahlen auf Mengen zurückführen, Gase auf sich gegenseitig stoßende, winzige Teilchen, mittelgroße Gegenstände auf Konglomerate von Molekülen oder Gesellschaften auf Gruppen von Menschen.[1] In vielen dieser Fälle wird das Vorliegen einer Reduktion als Begründung gegeben, eine Sorte von Objekten als eine andere Sorte von Objekten aufzufassen. Jedoch kann sich eine Reduktion nicht darin erschöpfen, nur die Objekte aufeinander zurückzuführen. Denn zum Beispiel können Farben auf bestimmte Schwingungsfrequenzen des Lichts zurückgeführt werden. Dabei werden Farben hier oft als Eigenschaften (von mittelgroßen Gegenständen) und Schwingungfrequenzen als Eigenschaften des Lichts aufgefasst. Damit wären hier Eigenschaften aufeinander zurückgeführt und das sollte ebenfalls auf Grund einer Reduktion gerechtfertigt werden. Umgekehrt gibt es Fälle, in denen die Objekte, die aufeinander zurückgeführt werden sollen, unverändert bleiben und dennoch werden einige

[1] In vielen dieser Fällen werden dabei größere auf kleinere Entitäten zurückgeführt oder aus ihnen zusammengesetzt. Das muss aber nicht sein. So können zum Beispiel Menschen als Produkte ihrer Umgebungen verstanden werden. Ob aber Umgebungen kleiner als Menschen sind, erscheint mir recht fraglich. Insgesamt unterscheiden sich die hier „naiv“ verwendeten Begriffe der Größe oder des Zusammensetzens sehr stark. Daher bleibt unklar, ob sie überhaupt auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden können.

ihrer Eigenschaften auf völlig unterschiedliche Weise beschrieben. So behandeln klassische Mechanik und Relativitätstheorie mittelgroße Gegenstände, jedoch beschreiben sie ihr Verhalten in Raum und Zeit auf schier unverträgliche Weise. Eine Reduktion muss also mehr leisten, als nur die Objekte aufeinander zurückzuführen. Diese Vorstellung ist dennoch weit verbreitet. Ich werde daher zunächst noch genauer darauf eingehen.

Denn was soll es eigentlich bedeuten, Objekte auf andere Objekte zurückzuführen? Die gängige Antwort ist, dass diese Reduktion die Ontologien der beteiligten Objekte miteinander verknüpft. Danach *sind* Zahlen (eigentlich) nichts anderes als bestimmte Mengen, Gase *sind* sich gegenseitig stoßende Teilchen usw. Dies erlaubt es, die ursprüngliche Sorte von Objekten aus der Ontologie zu eliminieren. Damit müssen sie diese Objekte in ontologischen Fragestellungen nicht mehr eigenständig behandelt werden. Daraus ergibt sich die Forderung, dass bei Vorliegen einer Reduktion die entsprechende Ontologie eliminiert werden sollte (Ockhamsches Rasiermesser).

Von dieser schwachen Form der Elimination, die das Sprechen über reduzierte Objekte „nur“ aus der ontologischen Debatte ausschließt, lässt sich eine starke Form unterscheiden. Diese brandmarkt die reduzierten Objekte als minderwertig (z.B. sekundär, unwissenschaftlich, irrational usw.). Sie ähneln danach Trugbildern, sind bestenfalls Konstruktionen oder Hilfsmittel und daher sollte es generell vermieden werden, von ihnen zu sprechen. Eine Reduktion die diese Forderung rechtfertigen kann, muss neben der ontologischen Debatte auch alle anderen Debatten berücksichtigen, in denen über die reduzierten Objekte geredet werden kann. Sie unterliegt damit wesentlich strengeren Anforderungen als ein Reduktionsbegriff, der die schwache ontologische Reduzierbarkeit des letzten Absatzes rechtfertigen soll. Daher ist zu erwarten, dass sie wesentlich seltener durchgeführt werden kann.

In den vorherigen Abschnitten wurde zwar eine Reduktion zwischen Objekten untersucht, dabei wurde aber immer wieder deutlich, dass dabei die Aussagen über diese Objekte eine wesentliche Rolle spielen. Üblicherweise vermitteln im metawissenschaftlichen Kontext Theorien diese Aussagen. Daher wird auch die Reduktion als eine intertheoretische Relation verstanden.[2] Sie soll also zwischen Zahlentheorie und Mengenlehre, thermodynamischen und kinetischen Theorien der Gase oder Farb- und Lichttheorien eine Beziehung herstellen. Derartige Reduktionen erlauben es dann, Aussagen der Quelltheorie als solche der Zieltheorie aufzufassen.[3]

Ähnlich wie zuvor entsteht aus diesem Verständnis der Reduktion die Forderung, Quelltheorien zu Gunsten der Zieltheorien zu eliminieren. Denn wenn alle Aussagen, die die Quelltheorie liefert, auch von der Zieltheorie geliefert werden können (z.B. mit Hilfe einer Übersetzung oder geeigneter Brückenprinzipien), dann erscheint es nicht mehr notwendig, die Quelltheorie eigenständig zu behandeln. Dazu ist es jedoch notwendig, dass die Aussagen der Zieltheorie die Übersetzungen von Aussage der Quellheorie umfasst. Gibt es

[2] Generell werde ich, wie in der Wissenschaftstheorie üblicherweise akzeptiert, Reduktion als intertheoretische Relation verstehen. Die beiden Theorien, die dadurch in Verbindung gesetzte werden, werde ich allgemein Quell bzw. Ziel-Theorie der Reduktion nennen.

[3] Damit lassen sich dann leicht Theorien unterscheiden, die dieselben Objekte unterschiedlich beschreiben. Außerdem lässt sich diese Art der Reduktion ebenso leicht auf Eigenschaften wie auf Objekte anwenden.

also eine eindeutige Theorie, zu Gunsten derer eine vorgegebene Theorie eliminiert werden kann, so muss die Reduktion sicher stellen, dass die Quelltheorie mittels der Übersetzung aus der Zieltheorie abgeleitet werden kann.[4]

Das folgende Beispiel macht jedoch deutlich, dass eine Reduktion noch weitere Aufgaben zu erfüllen hat, aus der sich zusätzliche Bedingungen für die Reduzierbarkeit zweier Theorien ergeben. So gibt es eine Formulierung der klassischen Mechanik, die die Bewegung von Partikeln unter Bezugnahme auf Ort und Impuls beschreibt. Weiter leisten die sogenannten kanonischen Transformationen eine Übersetzung von Orten in Impulse und umgekehrt, bei der die Theorie in sich selbst übergeht. Rein formal mag das als eine Reduktion gelten. Ontologisch ist sie jedoch sicherlich inadäquat. Denn üblicherweise besteht zwischen Orten und Impulsen wenigstens ein empirischer Unterschied. Wie lässt sich aber ausdrücken, dass hier keine Reduktion vorliegt? Da hier ontologische Behauptungen ins Spiel kommen, rücken die Ontologien der beteiligten Theorien in den Blickpunkt. Eine Reduktion muss daher hier nicht allein die Aussagen einer Theorie, sondern auch die beteiligten Ontologien geeignet ineinander überführen.

Auf die ontologischen Aspekte einer Reduktion möchte ich genauer eingehen. Neben der gerade behandelten Auffassung, dass eine Reduktion die Ontologien der beteiligten Theorien respektieren soll, gibt es auch die Auffassung, dass es für eine (ontologische) Reduktion ausreicht, nur die beteiligten Ontologien aufeinander zurückzuführen. Statt der Theorien selbst sollen nach dieser Auffassung also ihre ontologischen Verpflichtungen betrachtet werden. Dies ist weitgehend analog zur schwachen Form der Elimination von Objekten. Wieder spielen dann Reduktionen eine wichtige Rolle für grundlegende ontologische Fragen.

Unabhängig davon ist es eine weitere Aufgabe von Reduktionen, Argumentationen zu vereinheitlichen.[5] Dazu ist es notwendig, die Argumente der Quelltheorie mit entsprechenden Argumenten der Zieltheorie zu verbinden. Da die Quelltheorie möglicherweise nicht alle Aussagen der Zieltheorie liefert, lassen sich dann in der Zieltheorie Argumente entwickeln, die keinem Argument in der Quelltheorie entsprechen. Tritt das jedoch umgekehrt auf, liefert die Quelltheorie also Argumente, die die Zieltheorie nicht liefern kann, so liegt sicherlich keine Vereinheitlichung der Argumentationen vor. Daher sollten Reduktionen Argumente der Quelltheorie in entsprechende Argumente der Zieltheorie übertragen.

Die Hinzunahme weiterer Aussagen in der Ziel- verglichen mit der Quelltheorie kann auch noch anders gedeutet werden. Diese neuen Aussagen drücken ja Aspekte aus, die in der Quelltheorie nicht ausgedrückt worden sind. Aber die meisten wissenschaftlichen Theorien drücken nicht alle Aspekte aus, die für ihren angemessenen Gebrauch notwendig sind. So sind die ontologischen Verpflichtungen der Theorien meist nicht Bestandteil der von ihnen gelieferten Aussagen.[6] Andererseits sollten die Aussagen der Zieltheorie und ihre

[4]Umgekehrt reicht diese Bedingung allein in der Regel nicht aus, um die Eliminierbarkeit zu Gunsten einer einzigen Theorie zu ermöglichen. Denn es gibt oft mehrere Theorien, die diese Bedingung erfüllen. So gibt es für formale Theorien meist noch in derselben Sprache unterschiedliche echte Obertheorien.

[5]vgl. Link: *Reductionism as Resource–Conscious Reasoning* (2000)

[6]Quine vertritt hier bekanntlich eine andere Auffassung. Im vorangegangenen Beispiel mit Orten und Impulsen spielt die Ontologie jedoch eine andere Rolle. Sie beschreibt dabei Aspekte, die sich nicht in den Aussagen der Theorie wiederfinden lassen. Daher verdeutlicht das Beispiel, dass zumindest einige

ontologischen Verpflichtungen natürlich damit verträglich sein. Die zusätzlichen Aussagen können daher unter anderem ausdrücken, was implizit bereits in der Quelltheorie vorhanden ist. So kann sich aus der kinetischen Gastheorie das Zeitverhalten bestimmter Gase ergeben. In der thermodynamischen Aussage ist so etwas mangels Zeitbegriffs gar nicht möglich. Dennoch verhalten sich empirische Gase unabhängig davon, wie sie beschrieben werden. Daher liegt ihr Zeitverhalten schon dadurch fest, dass eine Theorie gewählt wird, die auf sie angewendet werden soll.

Generell hängen empirische Theorien eben auch davon ab, worauf sie angewendet werden sollen. Dabei bestimmt bereits die Weise, in der die Sprache die Welt gliedert den Bereich der Anwendungen mit.[7] Zu den Aussagen liefert eine Theorie daher auch Strukturen, auf die erstere angewandt werden können. Die Art und Weise, wie die Welt gegliedert wird, kann sich zwischen Quell- und Zieltheorie jedoch unterscheiden. Damit unterscheiden sich dann auch die Strukturen, die beiden Theorien zugeordnet werden. Eine Reduktion zwischen solchen Theorien muss daher auch zwischen den sich entsprechenden Strukturen eine Beziehung herstellen. Dadurch werden dann die Strukturen der Quelltheorie als solche der Zieltheorie aufgefasst. Die reduzierten Aussagen lassen sich damit auf einige Strukturen der Zieltheorie anwenden.

Eine jede Formalisierung von Reduktionen muss sich von den Folgerungen dieses Abschnitts leiten lassen. Daher werde ich im nächsten Abschnitt einige bekannte Vorschläge für das Verständnis des Reduktionsbegriffes darauf hin untersuchen.

3.2 Vorarbeiten

In den philosophischen Debatten werden verschiedene Ansätze zu Reduktionen verfolgt, selbst wenn Einigkeit besteht, dass es sich hierbei um intertheoretische Beziehungen handelt. In diesem Kapitel möchte ich einige der in der Diskussion entwickelten Reduktionskonzepte untersuchen, und daraus geeignete Prinzipien entwickeln, die sich für den von mir geeigneten Rahmen eignen, um Reduktionen zu charakterisieren. Zunächst werde ich zuerst auf verschiedene Ansätze eingehen, die Reduktionen explizit zu definieren versuchen. Dabei werde ich sowohl auf die klassischen, eher reduktionistisch motivierten Ansätze von Nagel und Suppes als auch auf den Ansatz von Fodor eingehen, der eher antireduktionistisch motiviert ist. Dabei lassen sich auch die verschiedenen Verständnisse von Theorien wiederfinden, die von gesetzesartigen über syntaktischen zu semantischen Sichtweisen reichen. Als Abschluss dieser Betrachtungen expliziter Reduktionsbeziehungen werde ich auf den strukturalistischen Ansatz eingehen, der viele Aspekte der angeführten Sichtweisen verbinden kann. Anschließend werde ich auf Versuche eingehen, die Reduktionsbeziehung axiomatisch zu bestimmen, wie sie von Niebergall und Polanski vorgelegt worden sind.

Bevor ich nun auf die der Darstellung des Reduktionsverständnisses von Fodor eingehe, möchte ich kurz zwei unterschiedliche Auffassungen von *ontologischer Reduktion* unter-

wissenschaftliche Theorien so dargestellt werden, dass ihre Ontologie nicht mit ihnen selbst zusammenfällt.

[7] Dies wird in der Prädikatenlogik zum Beispiel am Unterschied zwischen einer modelltheoretischen Auswertungssemantik und einer Bewertungssemantik deutlich.

scheiden. Nach der ersten, *schwachen* Auffassung müssen nur die Ontologien der beteiligten Theorien miteinander in Verbindung gebracht werden.[8] Ohne hier darauf einzugehen, wie die Ontologien von Theorien bestimmt werden können, ist es hierbei insbesondere also nicht nötig, die Aussagen der beiden Theorien auseinander ableiten zu können. Im schwachen Sinne liegt eine ontologische Reduktion eher vor als eine eigentliche Reduktion. Ein Beispiel wäre die Reduktion von Theorien der Konstruktion von Tischen auf Theorien von Molekülen, ohne dass dabei die Beziehung zwischen der makroskopischen Aussage und den mikroskopischen Gesetzen geklärt würde. Ausreichend wäre hier, dass Tische als geeignete Ansammlung von Molekülen verstanden werden können.[9] Demgegenüber versteht die *starke* Auffassung ontologische Reduktionen so, dass nicht nur die Aussagen der beteiligten Theorien auseinander herleitbar sind, sondern noch zusätzliche Bedingungen erfüllt sind, die auch die beteiligten Ontologien miteinander verknüpfen. Bekannt ist hier im abstrakten Bereich das Beispiel der Reduktion der Arithmetik auf Mengenlehre. Dabei wird zum Beispiel die Konstruktion der Zahlen nach von Neumann so verstanden, dass damit Zahlen als Mengen aufgefasst werden können.[10] Im vorliegenden Text werde ich, soweit nicht ausdrücklich anders angegeben, die starke Auffassung zu Grunde legen. Insbesondere werde ich zum Beispiel bei physikalischen Theorien solche Reduktionen als ontologisch auffassen, bei denen physikalische Größen in den verschiedenen Formulierungen geeignet miteinander in Verbindung gebracht werden; also zum Beispiel Impulse der klassischen Mechanik mit Impulsen der Quantenmechanik usw.

Insbesondere fallen viele Ansätze von Reduktionen, die Theorien durch ihre Gesetze bestimmen wollen, unter die ontologischen Reduktionen. Hier kann Fodor: *Special Sciences* (1971) als Beispiel dienen. Er betrachtet die Reduktion einer psychischen auf eine physische Ebene. Dabei verwendet er zur Formulierung der psychischen Ebene gewisse natürliche Arten. Ähnlich beschreibt er die physikalische Ebene durch natürliche Arten, die durch physikalische Gesetze miteinander in Beziehung gebracht werden. Werden nun statt der Objekte und Gesetze die entsprechenden Sprachen und Theorien betrachtet, so kann Fodor's Ansatz als eine intertheoretische Reduktion verstanden werden.

Für die Reduktion fordert er nun, dass die psychischen so in die physischen Begriffe übergeführt werden müssen, dass dabei die psychischen Gesetze in geeignete pysikalische Gesetze übergehen.[11] Eine weitere Forderung, die er in diesem Zusammenhang aufstellt, ist dass sich die physikalischen Kausalbeziehungen in psychischen Kausalbeziehungen widerspiegeln. Ohne hier auf das aus meiner Sicht problematische Konzept der Kausalität näher einzugehen, bleibt bei Fodor die Forderung, dass derartige Beziehungen beim Übergang von der psychischen auf die physikalische Ebene erhalten bleiben. So argumentiert er, dass die Reduktion scheitern müsse, weil die psychischen Aussagen keine strengen Gesetze

[8] vgl. vorangegangener Abschnitt

[9] Diese Sichtweise ist offensichtlich stark geprägt davon, Reduktionen als die Rückführung von Objekten (bzw. Eigenschaften) auf andere Objekte (oder Eigenschaften) zu verstehen.

[10] vgl. Ackermann: *Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie* (1940)

[11] Dabei versucht er zu zeigen, dass dies nicht möglich ist. Hier interessiert mich aber vor allem seine Auffassung von Reduktionen. Ob damit eine Reduktion des Psychischen auf das Physische gelingen kann, ist dafür nicht relevant.

liefern würde. Eine erfolgreiche Reduktion würde das aber voraussetzen.

Weiter verlangt er, dass sich die psychischen Gesetzmäßigkeiten mit Notwendigkeit aus den physikalischen Gesetzen ergeben müssten. Denn nur so könnten sie deren Gesetzescharakter erklären.

Die klassische Beschreibung von Reduktionen stammt von Nagel. Als Vertreter der syntaktischen Sichtweise von Theorien beschreibt er Theorien durch die Gesetze, Hintergrundtheorien und weitere immer informellere Bestandteile. Im Gegensatz zu Fodor fordert er jedoch keine Beschreibung durch natürliche Arten. Neben informellen Kriterien wie Einfachheit charakterisiert er das Vorliegen von Reduktion zwischen zwei Theorien durch folgende Bedingungen:

Nag1 Es existieren die sogenannten *Brückengesetze*, die die Begriffe der Quelltheorie mit denen der Zieltheorie verknüpfen.

Nag2 Die Gesetze der Quelltheorie lassen sich mit den Brückengesetzen aus der Zieltheorie ableiten.

Diese Ableitung soll gewährleisten, dass die Zieltheorie die Quelltheorie erklärt. Dabei orientiert sich Nagel am deduktiv-nomologischen Erklärungsbegriff von Hempel und Oppenheim, der Erklärung im Wesentlichen mit der Ableitung aus einer allgemeinen Theorie unter Berücksichtigung spezieller Randbedingungen gleichsetzt. Die allgemeine Theorie würde hier von der Zieltheorie geliefert, die Randbedingungen ergeben sich aus den Brückengesetzen. Da diese nur dazu dienen, die verschiedenen Begriffe miteinander in Beziehung zu bringen und günstigstenfalls Definitionen darstellen, entspricht dies der Intuition, dass die Zieltheorie mehr Aussagen umfasst als die Quelltheorie. Dies behauptet Nagel explizit für den Fall, dass sich die Begriffe der beteiligten Theorien nicht unterscheiden.

Als Vertreter der semantischen Sichtweise wählt Suppes einen anderen Ansatzpunkt zur Aussage von Reduktionen. So betrachtet er die Modelle der Zieltheorie. Aus diesen sollten sich dann die Modelle der Quelltheorie konstruieren lassen. Damit verknüpft ist die Vorstellung, dass sich durch die Auswahl geeigneter Wirklichkeitsbereiche einer umfassenden Theorie die speziellen Theorien als Spezialfälle ergeben sollten. Die speziellen Theorien werden dabei durch eine entsprechende Teilmenge der Modelle der umfassenden Theorie dargestellt. Jedes der Modelle der Quelltheorie sollte sich hierbei aus einem entsprechenden Modell der Zieltheorie konstruieren lassen. Umgekehrt muss diese also, bezogen auf die jeweilige Konstruktion mehr Modelle besitzen.

Sowohl die syntaktische als auch die vorgestellte semantische Sichtweise von Theorien behandeln in erster Linie korrekte Theorien (vgl. das vorangegange Kapitel). Insofern ist es nicht überraschend, dass dabei vor allem die exakte Reduktion im Mittelpunkt der Überlegungen steht. Demgegenüber gibt es aber in der wissenschaftlichen Praxis viele Fälle, in denen für die Reduktion Näherungen eine wesentliche Rolle spielen. Um diese Fälle auch beschreiben zu können, werden in den vorgestellten Ansätzen die Bedingungen an Reduktionen aufgeweicht. In einem oder anderem Sinn lassen sich dabei die Theorien nur mehr näherungsweise ableiten oder korrigieren. Dieser Zugang ist auch dem strukturalistischen

Ansatz zu eigen. Im Gegensatz zu den anderen Sichtweisen ist er aber in der Lage, auch inkorrekte Theorien zu erfassen. Ich werde mich im Folgenden vor allem mit der exakten Reduktion beschäftigen. Inwieweit damit auch approximative Reduktionen erfasst werden können, werde ich in einem späteren Kapitel untersuchen.

Es gibt in Balzer, Moulines und Sneed: *An Architectonic for Science* (1987) mehrere Definitionen für Reduktionen. Ich werde mich hier vor allem mit der direkten Reduktion beschäftigen. Diese liegt unter Vernachlässigung weiterer Bedingungen dann vor, wenn eine Relation zwischen den potentiellen Modellen der Zieltheorie und denen der Quelltheorie besteht, so dass die aktuellen Modelle der Zieltheorie modulo dieser Relation zu aktuellen Modellen der Quelltheorie und umgekehrt die intendierten Anwendungen der Quelltheorie zu solchen der Zieltheorie werden. Da die Einschränkung der aktuellen Modelle umgekehrt zu einer Verstärkung der zugeordneten Aussagen der Theorie führt, entspricht die Bedingung an die aktuellen Modelle der Ableitbarkeitsbedingung von Nagel. Die verwendete Relation übernimmt die Rolle der Konstruktion bei Suppes, entsprechend die Ausweitung der intendierten Anwendungen. Insofern vereinigt der strukturalistische Ansatz die syntaktische und semantische Sichtweise.

Für exakte Theorien sind bereits mehrfach Prinzipien für die Reduzierbarkeit vorgeschlagen worden.[12] Dabei soll eine Theorie Σ_1 genau dann auf eine andere Theorie Σ_2 reduzierbar sein ($\Sigma_1 \,\mathsf{red}\, \Sigma_2$), wenn eine Reduktion von Σ_1 auf Σ_2 existiert. Dafür fordert dann Polanski unter anderem folgende Eigenschaften:

A1 Wenn eine Theorie Σ_2 die Aussagen einer anderen Theorie Σ_1 enthält, so ist Σ_1 auf Σ_2 reduzierbar.

A2 Reduzierbarkeit ist transitiv.

A3 Wenn eine endlich axiomatisierbare Theorie auf Σ_1 auf eine Theorie Σ_2 reduzierbar ist, dann gibt es eine endlich axiomatisierbare Theorie Σ_2', die sich aus Σ_2 ableiten lässt und auf die Σ_1 reduzierbar ist.

A4 Wenn eine Theorie auf eine konsistente Theorie reduzierbar ist, so ist sie selbst konsistent.

Ohne auf die Diskussion in Polanski: *Theorienreduktion und Theorienäquivalenz* (2002) und weitere mögliche Axiome eingehen zu können, erscheinen mir die Postulate wenigstens für exakte Theorien in formalen Sprachen adäquat. Insbesondere kann ich hier nicht weiter klären, welche Rolle endliche Axiomatisierbarkeit und Konsistenz für nicht-formale Theorien spielen.

Eng verwandt mit diesen Axiomen sind die Forderungen, die in Niebergall: *On the Logic of Reducibility* (2000) entwickelt werden. Diese erweitern die Axiome (A1) bis (A4) um folgende Forderung:

[12] vgl. Polanski: *Theorienreduktion und Theorienäquivalenz*; Niebergall: *On the Logic of Reducibility* (2002; 2000)

A5 Wenn eine Theorie Σ_1 auf eine Theorie Σ_2 reduzierbar ist, und sich die Konsistenz von Σ_2 in einer geeigneten Metatheorie beweisen lässt, dann lässt sich auch die Konsistenz von Σ_1 in dieser Metatheorie beweisen.

Niebergall zeigt, dass für Theorien im Sinne der Logik eine derartige Charakterisierung von Reduzierbarkeit weitgehend mit Interpretierbarkeit zusammenfällt. Insofern ist es hier im Gegensatz zu den Axiomen von Polanski möglich nicht nur Rückschlüsse auf die Reduzierbarkeit sondern auch auf die verwendeten Reduktionen zu schließen. Allerdings bleibt wieder offen, wie sich diese Axiome auf nicht-formale Theorien anwenden lassen. Insbesondere lassen sich die Axiome A3 bis A5 nur schwer auf Sprachen ausweiten, die nicht den üblichen syntaktischen Aufbau logischer Sprachen folgen. Unter welchen Bedingungen ist eine informelle Theorie endlich axiomatisiert oder konsistent? Wie lässt sie sich von ihrer Metatheorie unterscheiden? Weil diese Fragen nur schwer zu beantworten sind, lassen sich die Axiome schlecht für nichtlogische Sprachen erweitern.

Insgesamt zeigen die vorgestellten Ansätze ein breites Spektrum von verschiedenen Anforderungen, die an Reduktionen zu stellen sind. Dabei scheint es zuerst so, als ob sich diese Ansätze nur schwer miteinander vereinbaren lassen. Jedoch liefert das in dieser Arbeit gewählte Verständnis von Theorien die Möglichkeit, die verschiedenen Forderungen in einem gemeinsamen Rahmen zu erfassen.

3.3 Reduktionen zwischen interpretierten Theorien

In diesem Abschnitt will ich den Begriff der Reduktion für die im letzten Abschnitt formal eingeführten interpretierten Theorien entwickeln. Dazu betrachte ich zwei interpretierte Theorien, die in unterschiedlichen interpretierten Sprachen formuliert sind. Um sie miteinander vergleichen zu können ist es notwendig, die beteiligten Ausdrücke und Anwendungen ineinander zu überführen. Dies sollen sogenannte Brücken leisten.[13] Eine Reduktion zwischen zwei Theorien besteht dann in einer Brücke, die die korrekten Anwendungen und die korrekten Aussagen der Quelltheorie in solche der Zieltheorie überführt. Existiert eine geeignete Brücke zwischen zwei Theorien, so soll die Quell- auf die Zieltheorie reduzierbar sein.

Die zentrale Rolle in der angesprochenen Vorgehensweise tragen dabei die Brücken. Es zeigt sich jedoch, dass in dem gewählten aussagenlogischen Rahmen eine vollständige Bestimmung aller relevanten Eigenschaften von Brücken nicht möglich ist. Dies liegt daran, dass hier als Leitidee die Erhaltung wichtiger Eigenschaften abstrakter Ausdrücke zur Bestimmung von Brücken dient. Mit der Betrachtung allein der Charakterisierungsrelation lassen sich jedoch nur aussagenlogische Eigenschaften der abstrakten Ausdrücke erfassen (vgl. voriges Kapitel). Daher führt der Erhalt dieser aussagenlogischen Eigenschaften für die klassische Logik bestenfalls zu Brücken, die Homomorphismen zwischen Bool'schen

[13] Die Benennenung knüpft an die Brückengesetze von Nagel an, im Gegensatz zu diesen handelt es sich aber im hier vorgestellten Rahmen nicht um Gesetze.

Algebren entsprechen. Es lassen sich aber bekanntlich zwischen beliebigen Bool'sche Algebren Homomorphismen finden. Dies entspricht hier, dass ohne weitere Einschränkung der Brücken jede korrekte Theorie auf jede korrekte Theorie reduzierbar wäre. Dies ist ein unerwünschtes Ergebnis. Daher betrachte ich nur geeignete Teilmengen derjenigen Brücken, die alle aussagenlogischen Eigenschaften von Aussagen erhalten.

Definition 41. Seien $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ interpretierte Sprachen. Dann sei $\mathcal{B} = \langle \mathcal{B}_{\mathsf{imp}}, \mathcal{B}_{\mathsf{exp}} \rangle$ genau dann eine *Brücke* von $\mathcal{R}_1$ nach $\mathcal{R}_2 (\mathcal{B}\colon \mathcal{R}_1 \upharpoonleft\!\downharpoonright \mathcal{R}_2)$, wenn $\mathcal{B}_{\mathsf{imp}} \subseteq \mathsf{Str}_{\mathcal{R}_2} \times \mathsf{Str}_{\mathcal{R}_1}$, $\mathcal{B}_{\mathsf{exp}} \subseteq \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_1} \times \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_2}$ und für alle s^1, s^1_1, s^1_2 aus $\mathsf{Str}_{\mathcal{R}_1}$, s^2, s^2_1, s^2_2 aus $\mathsf{Str}_{\mathcal{R}_2}$, e^1, e^1_1, e^1_2 aus $\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_1}$ sowie e^2, e^2_1, e^2_2 aus $\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_2}$ mit $s^2 \mathcal{B}_{\mathsf{imp}} s^1$, $s^2_1 \mathcal{B}_{\mathsf{imp}} s^1_1$, $s^2_2 \mathcal{B}_{\mathsf{imp}} s^1_2$, $e^1 \mathcal{B}_{\mathsf{exp}} e^2$, $e^1_1 \mathcal{B}_{\mathsf{exp}} e^2_1$ und $e^1_2 \mathcal{B}_{\mathsf{exp}} e^2_2$ gelten:[14]

$$\mathbb{D}_{\mathcal{B}_{\mathsf{imp}}} = \mathsf{Str}_{\mathcal{R}_2} \tag{3.1a}$$

$$\mathbb{D}_{\mathcal{B}_{\mathsf{exp}}} = \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_1} \tag{3.1b}$$

$$s_1 \bullet_1 e_1 \Leftrightarrow s_2 \bullet_2 e_2 \tag{3.1c}$$

$$\mathsf{conj}_{\mathcal{R}_1}(\{e^1_1, e^1_2\}, e^1) \Rightarrow \mathsf{conj}_{\mathcal{R}_2}(\{e^2_1, e^2_2\}, e^2) \tag{3.1d}$$

$$\mathsf{taut}_{\mathcal{R}_1}(e^1) \Rightarrow \mathsf{taut}_{\mathcal{R}_2}(e^2) \tag{3.1e}$$

$$\mathsf{disj}_{\mathcal{R}_1}(\{e^1_1, e^1_2\}, e^1) \Rightarrow \mathsf{disj}_{\mathcal{R}_2}(\{e^2_1, e^2_2\}, e^2) \tag{3.1f}$$

$$\mathsf{cont}_{\mathcal{R}_1}(e^1) \Rightarrow \mathsf{cont}_{\mathcal{R}_2}(e^2) \tag{3.1g}$$

$$\mathsf{imp}_{\mathcal{R}_1}(\{e^1_1, e^1_2\}, e^1) \Rightarrow \mathsf{imp}_{\mathcal{R}_2}(\{e^2_1, e^2_2\}, e^2) \tag{3.1h}$$

Eine Brücke heißt genau dann *zuverlässig*, wenn $\mathbb{W}_{\mathcal{B}_{\mathsf{imp}}} = \mathsf{Str}_{\mathcal{R}_1}$ und $\mathbb{W}_{\mathcal{B}_{\mathsf{exp}}} = \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_2}$.

Die gewählten Bedingungen stellen sicher, dass bei Brücken aussagenlogische Eigenschaften von Ausdrücken erhalten bleiben. Ähnlich ließe sich entsprechendes in der Gegenrichtung auch für die entsprechenden Strukturen fordern. Da dann aber zum Teil keine entsprechende Deutung vorliegt, habe ich hier darauf verzichtet. Für die weitere Diskussion werde ich sowieso vor allem auf die Eigenschaften von Ausdrücken Bezug nehmen. Darüberhinaus lassen sich die Erhaltungseigenschaften oft auch aus den ersten drei Bedingungen an Brücken herleiten. Insbesondere die dritte Bedingung wird im Falle von syntaktischen Interpretationen erfüllt sein.[15]

Definition 42. Seien $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ und $\mathcal{R}_3$ interpretierte Sprachen sowie $\mathcal{B}^{12} = \langle \mathcal{B}^{12}_{\mathsf{imp}}, \mathcal{B}^{12}_{\mathsf{exp}} \rangle$ und $\mathcal{B}^{23} = \langle \mathcal{B}^{23}_{\mathsf{imp}}, \mathcal{B}^{23}_{\mathsf{exp}} \rangle$ Brücken von $\mathcal{R}_1$ nach $\mathcal{R}_2$ beziehungsweise $\mathcal{R}_2$ nach $\mathcal{R}_3$. Dann sei die *Verkettung* $\mathcal{B}^{23} \circ \mathcal{B}^{12} := \langle \mathcal{B}^{12}_{\mathsf{imp}} \circ \mathcal{B}^{23}_{\mathsf{imp}}, \mathcal{B}^{23}_{\mathsf{exp}} \circ \mathcal{B}^{12}_{\mathsf{exp}} \rangle$.

Definition 43. Für beliebige interpretierte Sprachen $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ sei $\mathsf{zBr}\,(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ die Menge der *zulässigen Brücken* von $\mathcal{R}_1$ nach $\mathcal{R}_2$. Diese Mengen sollen nur Brücken enthalten und darüber hinaus für alle interpretierten Sprachen $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ und $\mathcal{R}_3$ sowie zuverlässigen

[14] Der Einfachheit halber betrachte ich hier nur endliche Disjunktionen und Konjunktionen. Jedoch lässt sich der Ansatz leicht auf unendliche Disjunktionen und Konjunktionen übertragen.

[15] Szczerba macht sie zum zentralen Charakteristikum von syntaktischen Interpretationen.

Brücken $\mathcal{B}^0$ von $\mathcal{R}_1$ nach $\mathcal{R}_2$ und zulässigen Brücken $\mathcal{B}^1$ von $\mathcal{R}_1$ nach $\mathcal{R}_2$ bzw. $\mathcal{B}^2$ von $\mathcal{R}_2$ nach $\mathcal{R}_3$ folgende Bedingungen erfüllen:

$$\mathcal{B}^0 \in \mathsf{zBr}\left(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\right) \tag{3.2a}$$
$$\mathcal{B}^2 \circ \mathcal{B}^1 \in \mathsf{zBr}\left(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_3\right) \tag{3.2b}$$

Die Menge der zulässigen Brücken umfasst also die zuverlässigen Brücken und ist unter Verknüpfungen abgeschlossen.

Theorem 44. *Seien $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ interpretierte Sprachen. Weiter sei $\left\langle \mathcal{B}_{\mathsf{imp}}, \mathcal{B}_{\mathsf{exp}} \right\rangle$ ein Paar von Relationen mit $\mathcal{B}_{\mathsf{imp}} \subseteq \mathsf{Str}_{\mathcal{R}_2} \times \mathsf{Str}_{\mathcal{R}_1}$, $\mathcal{B}_{\mathsf{exp}} \subseteq \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_1} \times \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_2}$ und für alle s^1 aus $\mathsf{Str}_{\mathcal{R}_1}$, s^2 aus $\mathsf{Str}_{\mathcal{R}_2}$, e^1 aus $\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_1}$ sowie e^2 aus $\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_2}$ mit $s^2 \mathcal{B}_{\mathsf{imp}} s^1$ und $e^1 \mathcal{B}_{\mathsf{exp}} e^2$ gelte:*

$$\mathbb{D}_{\mathcal{B}_{\mathsf{imp}}} = \mathsf{Str}_{\mathcal{R}_2} \tag{3.3a}$$
$$\mathbb{W}_{\mathcal{B}_{\mathsf{imp}}} = \mathsf{Str}_{\mathcal{R}_1} \tag{3.3b}$$
$$\mathbb{D}_{\mathcal{B}_{\mathsf{exp}}} = \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_1} \tag{3.3c}$$
$$\mathbb{W}_{\mathcal{B}_{\mathsf{exp}}} = \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_2} \tag{3.3d}$$
$$s^1 \bullet_1 e^1 \Leftrightarrow s^2 \bullet_2 e^2 \tag{3.3e}$$

Dann ist $\left\langle \mathcal{B}_{\mathsf{imp}}, \mathcal{B}_{\mathsf{exp}} \right\rangle$ eine zuverlässige Brücke von $\mathcal{R}_1$ nach $\mathcal{R}_2$. Insbesondere ist $\left\langle \mathsf{id}_{\mathsf{Str}_{\mathcal{R}}}, \mathsf{id}_{\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}} \right\rangle$ eine zuverlässige Brücke von $\mathcal{R}$ nach $\mathcal{R}$.

Beweis. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus den Voraussetzungen und Definitionen. Weiter ist $\mathsf{id}_{\mathsf{Str}_{\mathcal{R}}} = \{\langle s, s \rangle \mid s \in \mathsf{Str}_{\mathcal{R}}\}$ eine Teilmenge von $\mathsf{Str}_{\mathcal{R}} \times \mathsf{Str}_{\mathcal{R}}$, ebenso $\mathsf{id}_{\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}} \subseteq \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}} \times \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}}$. Die Zuverlässigkeit ergibt sich unmittelbar. □

Derartige Brücken setzen sich also aus Relationen zusammen, die Strukturen mit Strukturen und Ausdrücke mit Ausdrücken verbinden. Weiter stellen die ersten beiden Bedingungen von 3.3 sicher, dass zu jedem Ausdruck der Quell- ein Ausdruck der Zielsprache in Beziehung gesetzt wird. Was sich in der Quellsprache ausdrücken lässt, kann damit auch in der Zielsprache ausgedrückt werden. Umgekehrt werden die Zielstrukturen mit Quellstrukturen verknüpft. Die nächste Eigenschaft stellt sicher, dass die Verknüpften Entitäten sich gegenseitig entsprechen. Dazu dienen auch die weiteren Bedingungen, die sicherstellen, dass aussagenlogische Eigenschaften erhalten bleiben. Weiter lassen sich damit die folgenden Eigenschaften beweisen. Dabei seien im Folgenden $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ immer interpretierte Sprachen die über eine Brücke $\mathcal{B} = \left\langle \mathcal{B}_{\mathsf{imp}}, \mathcal{B}_{\mathsf{exp}} \right\rangle$ verbunden seien.

Theorem 45. *Seien $\mathcal{B}$ eine zuverlässige Brücke von $\mathcal{R}_1$ nach $\mathcal{R}_2$, sowie $S_1 \subseteq \mathsf{Str}_{\mathcal{R}_1}$, $S_2 \subseteq \mathsf{Str}_{\mathcal{R}_2}$, $E_1 \subseteq \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_1}$ und $E_2 \subseteq \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_2}$. Dann gelten:*

$$\mathcal{B}_{\mathsf{exp}}^{-1}\left[S_2^{\blacktriangleright\mathcal{R}_2}\right] = \mathcal{B}_{\mathsf{imp}}\left[S_2\right]^{\blacktriangleright\mathcal{R}_1} \tag{3.4a}$$

$$\mathcal{B}_{\mathsf{imp}}^{-1}\left[E_1^{\blacktriangleleft\mathcal{R}_1}\right] = \mathcal{B}_{\mathsf{exp}}\left[E_1\right]^{\blacktriangleleft\mathcal{R}_2} \tag{3.4b}$$

$$\mathcal{B}_{\mathsf{exp}}\left[S_1^{\blacktriangleright\mathcal{R}_1}\right] = \mathcal{B}_{\mathsf{imp}}^{-1}\left[S_1\right]^{\blacktriangleright\mathcal{R}_2} \tag{3.4c}$$

$$\mathcal{B}_{\mathsf{imp}}\left[E_2^{\blacktriangleleft\mathcal{R}_2}\right] = \mathcal{B}_{\mathsf{exp}}^{-1}\left[E_2\right]^{\blacktriangleleft\mathcal{R}_1} \tag{3.4d}$$

Beweis. Sei e_1 aus $\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_1}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
e_1 \in \mathcal{B}_{\mathsf{exp}}^{-1}\left[S_2^{\blacktriangleright\mathcal{R}_2}\right] &\Leftrightarrow \exists e_2(e_2 \in S_2^{\blacktriangleright\mathcal{R}_2} \wedge e_1\mathcal{B}_{\mathsf{exp}}e_2) \\
&\Leftrightarrow \exists e_2(\forall s_2(s_2 \in S_2 \Rightarrow s_2 \bullet e_2) \wedge e_1\mathcal{B}_{\mathsf{exp}}e_2) \\
&\Leftrightarrow \exists e_2(\forall s_1, s_2(s_2 \in S_2 \wedge s_2\mathcal{B}_{\mathsf{imp}}s_1 \Rightarrow s_2 \bullet e_2) \wedge e_1\mathcal{B}_{\mathsf{exp}}e_2) \\
&\Leftrightarrow \exists e_2(\forall s_1, s_2(s_2 \in S_2 \wedge s_2\mathcal{B}_{\mathsf{imp}}s_1 \Rightarrow s_1 \bullet e_1) \wedge e_1\mathcal{B}_{\mathsf{exp}}e_2) \\
&\Leftrightarrow \forall s_1(\exists s_2(s_2 \in S_2 \wedge s_2\mathcal{B}_{\mathsf{imp}}s_1) \Rightarrow s_1 \bullet e_1) \wedge \exists e_2(e_1\mathcal{B}_{\mathsf{exp}}e_2) \\
&\Leftrightarrow \forall s_1(s_1 \in \mathcal{B}_{\mathsf{imp}}\left[S_2\right] \Rightarrow s_1 \bullet e_1) \\
&\Leftrightarrow e_1 \in \mathcal{B}_{\mathsf{imp}}\left[S_2\right]^{\blacktriangleright\mathcal{R}_1}
\end{aligned}$$

Die übrigen Behauptungen folgen analog. □

Theorem 46. *Seien $\mathcal{B}$ eine zuverlässige Brücke von $\mathcal{R}_1$ nach $\mathcal{R}_2$, sowie $s_1 \in \mathsf{Str}_{\mathcal{R}_1}$, $s_2 \in \mathsf{Str}_{\mathcal{R}_2}$, $e_1 \in \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_1}$ und $e_2 \in \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_2}$ mit $s_2\mathcal{B}_{\mathsf{imp}}s_1$ und $e_1\mathcal{B}_{\mathsf{exp}}e_2$. Dann gelten:*

$$\{s_1\}^{\blacktriangleright\mathcal{R}_1} = \mathcal{B}_{\mathsf{imp}}\left[\{s_2\}\right]^{\blacktriangleright\mathcal{R}_1} \tag{3.5a}$$

$$\{e_1\}^{\blacktriangleleft\mathcal{R}_1} = \mathcal{B}_{\mathsf{exp}}^{-1}\left[\{e_2\}\right]^{\blacktriangleleft\mathcal{R}_1} \tag{3.5b}$$

$$\{s_2\}^{\blacktriangleright\mathcal{R}_2} = \mathcal{B}_{\mathsf{imp}}^{-1}\left[\{s_1\}\right]^{\blacktriangleright\mathcal{R}_2} \tag{3.5c}$$

$$\{e_2\}^{\blacktriangleleft\mathcal{R}_2} = \mathcal{B}_{\mathsf{exp}}\left[\{e_1\}\right]^{\blacktriangleleft\mathcal{R}_2} \tag{3.5d}$$

Beweis. Wegen $\{s_1\} \subseteq \mathcal{B}_{\mathsf{imp}}^{-1}\left[\{s_2\}\right]$ und 14 reicht es für die erste Behauptung $\{s_1\}^{\blacktriangleright\mathcal{R}_1} \subseteq \mathcal{B}_{\mathsf{imp}}^{-1}\left[\{s_2\}\right]^{\blacktriangleright\mathcal{R}_1}$ zu zeigen. Sei dazu e_1' aus $\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_1}$ beliebig. Dann sei weiter e_2' aus $\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_2}$ mit $e_1'\mathcal{B}_{\mathsf{exp}}e_2'$. Es gilt nun:

$$\begin{aligned}
e_1' \in \{s_1\}^{\blacktriangleright\mathcal{R}_1} &\Leftrightarrow s_1 \bullet e_1' \\
&\Leftrightarrow s_2 \bullet e_2' \\
&\Leftrightarrow \{e_2'\} \subseteq \{s_2\}^{\blacktriangleright\mathcal{R}_2} \\
&\Rightarrow \mathcal{B}_{\mathsf{exp}}\left[\{e_2'\}\right] \subseteq \mathcal{B}_{\mathsf{exp}}\left[\{s_2\}^{\blacktriangleright\mathcal{R}_2}\right] \\
&\Rightarrow e_1' \in \mathcal{B}_{\mathsf{imp}}^{-1}\left[\{s_2\}\right]^{\blacktriangleright\mathcal{R}_1}
\end{aligned}$$

Analog folgen die übrigen Behauptungen. □

Theorem 47. *Seien $\mathcal{B}$ eine zuverlässige Brücke von $\mathcal{R}_1$ nach $\mathcal{R}_2$, sowie $E_1 \subseteq \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_1}$, $E_2 \subseteq \mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_2}$, $S_1 \subseteq \mathsf{Str}_{\mathcal{R}_1}$ und $S_2 \subseteq \mathsf{Str}_{\mathcal{R}_2}$. Dann gelten:*

$$\mathcal{B}_{\mathsf{exp}}\left[E_1^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}_1}}\right] = \mathcal{B}_{\mathsf{exp}}\left[E_1\right]^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}_2}} \tag{3.6a}$$

$$\mathcal{B}_{\mathsf{exp}}^{-1}\left[E_2^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}_2}}\right] = \mathcal{B}_{\mathsf{exp}}^{-1}\left[E_2\right]^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}_1}} \tag{3.6b}$$

$$\mathcal{B}_{\mathsf{imp}}\left[S_2^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}_2}}\right] = \mathcal{B}_{\mathsf{imp}}\left[S_2\right]^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}_1}} \tag{3.6c}$$

$$\mathcal{B}_{\mathsf{imp}}^{-1}\left[S_1^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}_1}}\right] = \mathcal{B}_{\mathsf{imp}}^{-1}\left[S_1\right]^{\blacktriangleleft\blacktriangleright_{\mathcal{R}_2}} \tag{3.6d}$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus dem Satz 45. □

Theorem 48. *Seien $\mathcal{B}$ eine zuverlässige Brücke von $\mathcal{R}_1$ nach $\mathcal{R}_2$, sowie s_1, s_2 aus $\mathsf{Str}_{\mathcal{R}_2}$, e_1, e_2 aus $\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_1}$, s_1', s_2' aus $\mathsf{Str}_{\mathcal{R}_1}$ und e_1', e_2' aus $\mathsf{Exp}_{\mathcal{R}_2}$ mit $s_1\mathcal{B}_{\mathsf{imp}}s_1'$, $s_2\mathcal{B}_{\mathsf{imp}}s_2'$, $e_1\mathcal{B}_{\mathsf{exp}}e_1'$ und $e_2\mathcal{B}_{\mathsf{exp}}e_2'$. Dann gelten:*

$$e_1 \bullet\!\!\lhd_{\mathcal{R}_1} e_2 \Leftrightarrow e_1' \bullet\!\!\lhd_{\mathcal{R}_2} e_2' \tag{3.7a}$$

$$s_1 \lhd\!\!\bullet_{\mathcal{R}_1} s_2 \Leftrightarrow s_1' \lhd\!\!\bullet_{\mathcal{R}_2} s_2' \tag{3.7b}$$

Beweis. $e_1 \bullet\!\!\lhd_{\mathcal{R}_1} e_2 \Rightarrow e_1' \bullet\!\!\lhd_{\mathcal{R}_2} e_2'$ folgt unmittelbar aus den Sätzen 24, 45 und 46. Entsprechend folgt umgekehrt auch $e_1' \bullet\!\!\lhd_{\mathcal{R}_2} e_2' \Rightarrow e_1 \bullet\!\!\lhd_{\mathcal{R}_1} e_2$ und damit insgesamt die erste Behauptung. Analog ergibt sich die die zweite Behauptung. □

Folgt also ein Quellausdruck aus einem anderen, so gilt dies auch für den entsprechenden Ausdruck der Zieltheorie. Ein explizites Argument in der Quellsprache lässt sich daher auch in der Zielsprache wiederfinden. Sie lassen sich also von der Quellsprache auf die Zielsprache übertragen. Entsprechendes gilt für implizite Argumente, die ja durch die Beziehung zwischen den Strukturen erfasst werden. Durch diese Bedingung wird sichergestellt, dass keine neuen impliziten Argumente durch die Reduktion akzeptiert werden.

Theorem 49. *Seien $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ und $\mathcal{R}_3$ interpretierte Sprachen sowie $\mathcal{B}^{12}$ und $\mathcal{B}^{23}$ Brücken von $\mathcal{R}_1$ nach $\mathcal{R}_2$ beziehungsweise $\mathcal{R}_2$ nach $\mathcal{R}_3$. Dann ist die Verkettung $\mathcal{B}^{23} \circ \mathcal{B}^{12}$ eine Brücke von $\mathcal{R}_1$ nach $\mathcal{R}_3$. Sind $\mathcal{B}^{12}$ und $\mathcal{B}^{23}$ zuverlässig, so ist auch $\mathcal{B}^{23} \circ \mathcal{B}^{12}$ zuverlässig.*

Beweis. Folgt sofort aus den Definitionen 41 und 18. □

Definition 50. Seien $\mathcal{R}_1$und $\mathcal{R}_2$ interpretierte Sprachen und $\mathcal{B}$ eine Brücke von $\mathcal{R}_1$ nach $\mathcal{R}_2$. Dann seien $\mathcal{R}_1\lceil_{\mathcal{B}} := \mathcal{R}_1\big|_{\left\langle \mathbb{W}_{\mathcal{B}_{\mathsf{imp}}}, \mathbb{D}_{\mathcal{B}_{\mathsf{exp}}}\right\rangle}$ und $\mathcal{R}_2\lfloor_{\mathcal{B}} := \mathcal{R}_2\big|_{\left\langle \mathbb{D}_{\mathcal{B}_{\mathsf{imp}}}, \mathbb{W}_{\mathcal{B}_{\mathsf{exp}}}\right\rangle}$ die auf die Brücke $\mathcal{B}$ *eingeschränkten aktiven bzw. passiven Teilsprachen* von $\mathcal{R}_1$ bzw. $\mathcal{R}_2$.

Theorem 51. *Seien $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ interpretierte Sprachen sowie $\mathcal{B}$ eine Brücke von $\mathcal{R}_1$ nach $\mathcal{R}_2$. Dann ist $\mathcal{B}$ eine zuverlässige Brücke von $\mathcal{R}_1\lceil_{\mathcal{B}}$ nach $\mathcal{R}_2\lfloor_{\mathcal{B}}$.*

Beweis. Ergibt sich sofort aus den Definitionen 41 und 50. □

Die dritte der Bedingungen (3.1) ist in der Logik lange bekannt. Szczerba gibt sie für Funktionen an, die als syntaktische Interpretationen dienen sollen.[16] $\mathcal{B}_{\mathsf{exp}}$ wird dabei von der (syntaktischen) Interpretation, $\mathcal{B}_{\mathsf{imp}}$ von der zugehörigen Konstruktion auf den Modellen geliefert.

Bisher habe ich nur Brücken eingeführt, die die beteiligten interpretierten Sprachen verbinden. Nun möchte ich angeben, unter welchen Bedingungen sich zwei interpretierte Theorien aufeinander reduzieren lassen.

Definition 52. Seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Theorien in $\mathcal{R}_1$ bzw. $\mathcal{R}_2$. Dann sei eine zulässige Brücke $\mathcal{B}$ zwischen $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ genau dann eine *Reduktion* von $\mathcal{T}_1$ auf $\mathcal{T}_2$, wenn folgende Bedingungen gelten:

$$\mathcal{B}_{\mathsf{imp}}^{-1}\left[\mathsf{App}_1^{\blacktriangleright\blacktriangleleft} \cap \mathsf{Desc}_1^{\blacktriangleleft}\right] \subseteq \mathsf{App}_2^{\blacktriangleright\blacktriangleleft} \cap \mathsf{Desc}_2^{\blacktriangleleft} \tag{3.8a}$$

$$\mathsf{Desc}_1^{\blacktriangleleft\blacktriangleright} \cap \mathsf{App}_1^{\blacktriangleright} \subseteq \mathcal{B}_{\mathsf{exp}}^{-1}\left[\mathsf{Desc}_2^{\blacktriangleleft\blacktriangleright} \cap \mathsf{App}_2^{\blacktriangleright}\right] \tag{3.8b}$$

Wenn eine Reduktion von $\mathcal{T}_1$ auf $\mathcal{T}_2$ existiert, so heisst $\mathcal{T}_1$ auf $\mathcal{T}_2$ *reduzierbar*.

Bei $\mathsf{App}^{\blacktriangleright\blacktriangleleft} \cap \mathsf{Desc}^{\blacktriangleleft}$ handelt es sich um die *korrekten Anwendungen* und bei $\mathsf{Desc}^{\blacktriangleleft\blacktriangleright} \cap \mathsf{App}^{\blacktriangleright}$ um die *korrekten Konsequenzen* einer interpretierten Theorie. Damit lassen sich die Bedingung an die Reduzierbarkeit so verstehen, dass die Zieltheorie sowohl mehr korrekte Anwendungen als auch mehr korrekte Konsequenzen als die Quelltheorie haben muss. Dies entspricht den Forderungen der vorangegangenen Abschnitte.

Theorem 53. *Reduzierbarkeit ist transitiv und reflexiv.*

Beweis. Die Transitivität folgt unmittelbar aus der Existenz der Verkettung 43, die Reflexivität aus 44. □

Damit erfüllt die hier vorgestellte Version der Reduzierbarkeit das Axiom (A2). Um die übrigen Forderungen zu untersuchen, müssen zuerst die Begriffe Teiltheorie, Konsistenz und endliche Axiomatisierbarkeit für interpretierte Sprachen geklärt werden, da diese ursprünglich nur für formale Theorien vorliegen. Ähnlich ließen sich auch die Axiome von Niebergall für geeignete interpretierte Sprachen untersuchen. Dazu müsste jedoch zusätzlich der Begriff der beweisbaren relativen Konsistenz in den hier verwendeten Rahmen überführt werden. Wie dies durchgeführt werden kann, sprengt den Rahmen dieser Arbeit.

Die Axiome von Niebergall charakterisieren Reduzierbarkeit so, dass sie für einen weiten Bereich von Theorien mit einer Version der syntaktischen Interpretierbarkeit zusammenfällt. Dieser hat sich für prädikatenlogische Theorien als eine geeignete Formalisierung von

[16] Die Wahl von Relationen anstelle von Funktionen dient hier nur der größeren Allgemeinheit. Tatsächlich folgt aus den obigen Sätzen, dass Ausdrücke bzw. Strukturen, die unter $\bullet\!\!\diamond$ bzw. $\diamond\!\!\bullet$ zueinander äquivalent sind, nur mit zueinander äquivalenten Ausdrücken bzw. Strukturen in Beziehung stehen. Modulo der Äquivalenz sind die verwendeten Relationen also Funktionen.

Reduzierbarkeit erwiesen. Ebenso möchte ich zeigen, dass der von mir vorgestellte Begriff der Reduzierbarkeit für gewisse interpretierte Theorien mit dem Begriff der Interpretierbarkeit zusammenhängt. Werden nämlich nur die Sätze prädikatenlogischer Sprachen betrachtet, so lassen sich diese als Spezialfälle von $\mathcal{R}^{\mathsf{syn}}$ auffassen. Seien nun Σ_1 und Σ_2 prädikatenlogische Theorien in den Sprachen $\mathcal{L}_1$ bzw. $\mathcal{L}_2$ sowie f eine syntaktische Interpretation von Σ_1 in Σ_2. Sei weiter $g\colon \mathsf{Theo}_{\mathcal{L}_2} \to \mathsf{Theo}_{\mathcal{L}_1}, \Sigma \mapsto f^{-1}[\Sigma]$. Dann ist $\langle g, f\rangle$ eine Brücke von $\mathcal{R}_1^{\mathsf{syn}}$ nach $\mathcal{R}_2^{\mathsf{syn}}$. Ist $\langle g, f\rangle$ eine zulässige Brücke, so ist es auch eine Reduktion von $\langle\{\Sigma_1\}, \Sigma_1\rangle$ auf $\langle\{\Sigma_2\}, \Sigma_2\rangle$. Ob umgekehrt auch jeder zulässigen Brücke von $\mathcal{R}_1^{\mathsf{syn}}$ nach $\mathcal{R}_2^{\mathsf{syn}}$ eine Interpretation von Σ_1 in Σ_2 entspricht, kann ohne genauere Bestimmung zulässiger Brücken nicht entschieden werden.

Vielen Vorschlägen, Reduzierbarkeit zu verstehen, ist gemein, dass sie auch Theorien aufeinander reduzieren lassen, bei denen dies nicht erwünscht ist. (vgl. z.B. Niebergall: *Structuralism, Model Theory and Reduction* (2001)) Andererseits ist oftmals diskutiert worden, dass Interpretierbarkeit diesen Mangel nicht besitzt. Die Überlegungen des letzten Absatzes legen jedoch nahe, dass für den Bereich formaler prädikatenlogischer Sprachen der hier vorgestellte Reduktionsbegriff mit Interpretierbarkeit eng verwandt ist (vgl. auch Jacobs: *Categorical Logic* (1991)). Damit erscheint wenigstens für den Bereich formaler Theorien der vorgeschlagene Begriff adäquat. Inwiefern er dies auch für empirische Theorien zu leisten im Stande ist, werde ich im nächsten Kapitel genauer untersuchen.

Die bisherigen Bedingungen an zulässige Brücken sind noch sehr allgemein gefasst. Im Folgenden werde ich weitere Forderungen angeben, um weitere Ergebnisse erzielen zu können.

Axiom 54. *Zu zwei interpretierten Theorien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ gibt es eine Theorie $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$, auf die beide Theorien reduzierbar sind. Weiter gibt es zu jeder Theorie $\mathcal{T}$ auch eine korrekte Theorie $\tilde{\mathcal{T}}$, die sie reduziert. Also gibt es eine korrekte Theorie, die $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ reduziert. Eine solche Theorie nenne ich* Kombination $\mathcal{T}_1 \tilde{\times} \mathcal{T}_2$ *von $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$.*

Definition 55. Seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ interpretierte Theorien. Dann seien sie genau dann *äquivalent*, wenn eine zuverlässige Brücke $\mathcal{B}$ existiert, so dass gelten:

$$\mathcal{B}_{\mathsf{imp}}^{-1}\left[\mathsf{App}_1^{\blacktriangleright\blacktriangleleft}\right] = \mathsf{App}_2^{\blacktriangleright\blacktriangleleft} \tag{3.9a}$$

$$\mathsf{Desc}_1^{\blacktriangleleft\blacktriangleright} = \mathcal{B}_{\mathsf{exp}}^{-1}\left[\mathsf{Desc}_2^{\blacktriangleleft\blacktriangleright}\right] \tag{3.9b}$$

Offensichtlich ist die angegebene Relation eine Äquivalenzrelation, die Reduzierbarkeit impliziert. Jedoch sollen die zulässigen Reduktionen so gewählt werden, dass gilt:

Axiom 56. *Es gibt korrekte Theorien, die nicht äquivalent zueinander sind.*

Darüber hinaus fordere ich noch das folgende Axiom:

Axiom 57. *Seien $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ korrekte Theorien, so dass $\mathcal{T}_1$ nicht äquivalent zu $\mathcal{T}_2$, dann sind auch $\mathcal{T}_0 \times \mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_0 \times \mathcal{T}_2$ nicht äquivalent.*

Es ergibt sich ein wichtiges Lemma:

Lemma 58. *Unter den Vorraussetzungen des vorhergenden Axioms existieren korrekte Theorien $\mathcal{T}_0 \tilde{\times} \mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_0 \tilde{\times} \mathcal{T}_2$ die nicht äquivalent zueinander sind und $\mathcal{T}_0$ sowie $\mathcal{T}_1$ bzw. $\mathcal{T}_2$ reduzieren können.*

Teil II

Anwendung

Kapitel 4

spezielle Reduktionen: Ontologie und Empirizität

Reduktionen spielen insbesondere bei Fragen der Ontologie eine herausragende Rolle. Daher rücken ontologische Reduktionen in den Mittelpunkt der Betrachtung. Im vorliegenden Rahmen habe ich bisher nur allgemeine Reduktionen interpretierter Theorien behandelt. Jetzt werde ich genauer auf speziellere Fälle von Reduktionen wie den ontologischen Reduktionen eingehen.

Zum einen gibt es die Auffassung, dass selbst in Fällen, in denen sich die betrachteten Theorien nicht aufeinander reduzieren lassen, eine ontologische Reduktion möglich ist. So sind bisher Reduktionen weitreichender Theorien unserer alltäglichen Erfahrungen auf Quantentheorien kaum gelungen. Dennoch wird in philosophischen Kontexten gerne davon ausgegangen, dass dies im Prinzip möglich sei. Weiter wird als Beleg dafür gerne eine Beschreibung makroskopischer Gegenstände als Konglomerat von atomaren Teilchen angeführt. Damit lassen sich aber in der Regel die Behauptungen über alltägliche Erfahrungen nicht ableiten. Vielmehr scheinen nur die ontologischen Beschreibungen ineinander übergeführt zu werden. In diesem Text werde ich solche Beschreibungen als ontologische Theorien auffassen und Reduktionen dazwischen untersuchen. Dieser Fall der ontologischen Reduktion entspricht einer schwachen ontologischen Reduktion. (vgl. voriges Kapitel)

Eine andere Auffassung ergibt sich, falls nicht die Theorien alleine, sondern zusammen mit vorgegebenen Ontologien betrachtet werden. Ich werde im Laufe dieses Abschnitts diesen Zusammenhang zwischen Theorien und ihren Ontologien genauer untersuchen. Durch eine Reduktion kann die Quelltheorie mit der Zielontologie ausgestattet werden. Dadurch erhält die Quelltheorie zwei Ontologien. Sind diese miteinander verträglich, so spreche ich von einer schwachen ontologischen Reduktion.

Schließlich gibt es vor allem in den empirischen Wissenschaften den Fall, dass ein Teil der in einer Theorie verwendeten Begriffe durch vortheoretische Erfahrungen festgelegt ist. Um dies in dem hier gewählten Rahmen wiedergeben zu können, fasse ich diese in einer (empirischen) Vortheorie zusammen, die sowohl auf die Quell- als auch auf die Zieltheorie reduziert wird. So sollen zum Beispiel bei einer Reduktion physikalischer Raumzeit-Theorien Aussagen über Orte in Aussagen über Orte überführt werden. Wird nun eine geeignete empirische Raum-Theorie gewählt, so kann sowohl für die Quell- als auch die Zieltheorie eine geeignete Reduktion ausgewählt werden, die die diesen Ortsaussagen entsprechenden Quell- und Zielsätze bestimmt. Eine empirisch adäquate Reduktion wird dann diese Ortsaussagen ineinander überführen. Reduktionen, die zwischen Theorien mit empirischen Vortheorien durchgeführt werden, nenne ich empirische Reduktionen.

Im Folgenden untersuche ich zuerst die genaueren Beziehungen zwischen Theorien und ihren Ontologien, um dann auf die ontologischen Reduktionen einzugehen. Anschließend setze ich mich mit den empirischen Theorien und ihren Reduktionen auseinander.

Wie soll also in dem gewählten Rahmen die Ontologie einer Theorie verstanden werden? Zuerst hat es den Anschein, dass die Ontologie einer Theorie durch die Wahl der interpretierten Sprache und insbesondere der (intendierten) Anwendungen festgelegt wird. Jedoch wird unter einer Ontologie oft mehr verstanden, als sich in der gewählten Sprache ausdrücken lässt. So unterscheidet sich zum Beispiel eine Ontologie, die auf Ereignissen und Prozessen aufbaut, und eine Ontologie, die sich auf Dinge und Eigenschaften aufbaut, für eine bestimmte Theorie nicht dadurch, welche Aussagen letztere macht, und worauf sie sich anwenden lässt. Unter Umständen spricht die Theorie gar nicht direkt von Dingen, Eigenschaften, Ereignissen oder Prozessen. Deshalb eignet sich die interpretierte Sprache der eigentlichen Theorie nicht immer, um auch die Ontologie zu fassen. Vielmehr ist es günstiger, die Ontologie in einer eigenen interpretierten Sprache auszudrücken. Darin kann sie dann durch die Wahl einer geeigneten Theorie wiedergegeben werden. Nach dieser Auffassung stellt also die Ontologie selbst eine Theorie dar.

Welches aber ist das Verhältnis der Ontologie zur Theorie? Bei Quine lässt sich diese Aussage relativ einfach beantworten. Danach bestimmt die Theorie selbst genau wovon sie handelt. Es gibt genau die Objekte, die die Theorie fordert, und die Eigenschaften der Objekte werden genau von der gewählten Theorie festgelegt. In dem hier gewählten Rahmen bedeutet das, dass die Theorie mit ihrer Ontologie zusammenfällt.

Es gibt jedoch noch andere Auffassungen, wie eine ontologische Theorie bestimmt werden kann. So soll zum Beispiel die Interpretation von Zahlentheorie auf Mengenlehre eine ontologische Reduktion darstellen. Dadurch werden Aussagen über Zahlen als Aussagen über (spezielle) Mengen aufgefasst. Damit scheinen Zahlen (eigentlich) Mengen zu sein. Die Mengenlehre gibt also in dieser Situation die Ontologie der Zahlentheorie vor. Dies lässt sich zumindest für formale Theorien verallgemeinern. Danach wäre die Ontologie einer formalen Theorie durch die Reduktion auf eine geeignete ontologische Theorie gegeben. Offensichtlich stellt die Auffassung von Quine einen Spezialfall dieser Auffassung dar. Daher werde ich im Folgenden nur auf den allgemeineren Ansatz eingehen.

Dabei soll die Ontologie einer Theorie die allgemeinsten Eigenschaften der Entitäten wiedergeben. Im gewählten Rahmen hieße das, dass nur solche Aussagen Teil der Ontologie sein können, die in allen Anwendungen zutreffen. Im syntaktischen Kontext würde das bedeuten, dass die Ontologie durch die Logik bestimmt wäre. Diese ontologische Theorie wäre jedoch viel zu unspezifisch. Insbesondere für die Betrachtung von Spezialontologien wäre dies unangemessen. Sollen diese also in derselben interpretierten Sprache wie die Theorie selbst formuliert werden, so wären ihre intendierten Anwendungen auch die der ontologischen Theorie. Dementsprechend wären die Aussagen, die durch diese intendierten

Anwendungen bestimmt werden, die Aussagen der ontologischen Theorie. Also ergäbe sich die ontologische Theorie als die von den intendierten Anwendungen einer Theorie erzeugte Theorie. Dies ist zumindest für Spezialontologien die geeignete Wahl.

Andererseits habe ich bereits darauf hingewiesen, dass für umfassende Ontologien in der Regel eine andere interpretierte Sprache als der vorliegende gewählt werden muss. Dann müssen aber die Anwendungen und Aussagen der beiden Sprachen miteinander in Beziehung gesetzt werden. Dabei legen die Reduktionen formaler Theorien nahe, dass die Anwendungssprache in die ontologische Sprache übersetzt werden muss. Für interpretierte Sprachen entspricht das den Brücken. Dabei werden gewöhnlich verschiedenen Begriffen derselbe ontologische Status zugesprochen. Zum Beispiel lassen sich Tische, Stühle oder ähnliches als Dinge auffassen. Dies unterstützt die Übersetzung der Anwendungssprache in die ontologische Sprache.

Insgesamt zeigt die obige Untersuchung, dass es günstig ist, bei der Untersuchung der Ontologie einer Theorie diese explizit zu machen. Dies geschieht durch die Angabe einer ontologischen Theorie, die in einer Sprache formuliert ist, in die sich die Anwendungssprache übersetzen lässt. Zusammen erhält man dann eine Theorie mit einer Ontologie mittels einer Brücke. Ist diese Brücke trivial, und die ontologische Theorie gleich der Anwendungstheorie, so spreche ich von einer ontologisch neutralen Theorie. Diese entsprechen der Quine'schen Auffassung von Ontologien und lassen sich für beliebige Anwendungstheorien bilden. Solche ontologieerweiterten Theorien haben den Vorteil, dass sie die ontologischen Verpflichtungen explizit aufzeigen. Darüberhinaus lassen sie es auch zu, verschiedene Auffassungen von Ontologien zu erfassen.

Definition 59. Eine *ontologieerweiterte Theorie* ist ein Tripel $\langle \mathcal{T}, \mathcal{B}, \mathcal{T}_0 \rangle$, aus interpretierten Theorien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}_0$, wobei $\mathcal{T}$ mittels $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{T}_0$ reduzierbar ist.

Im Folgenden werde ich immer davon ausgehen, dass die angegebene Brücke nicht nur die Sprachen ineinander überführt, sondern die Anwendungstheorie auf die ontologische Theorie sogar reduziert. Dies ist mit dem Beispiel der Reduktion von Zahlentheorie auf Mengenlehre verträglich, nicht jedoch mit vielen Auffassungen von Ontologie, die der Anwendungstheorie noch die Freiheit lassen, spezielle, von der Ontologie unabhängige Aussagen zu machen. Um auch diese Fälle in den gewählten Rahmen einbinden zu können, werde ich in solchen Fällen eine ontologische Sprache wählen, die sowohl die Begriffe der ontologischen als auch der Anwendungstheorie umfasst. Als ontologische Theorie werde ich dabei die eigentliche ontologische Theorie erweitert um die Anwendungstheorie und den Aussagen über die Beziehungen zwischen Anwendungs- und ontologischen Begriffen verstehen.

Nachdem ich nun die Rolle der Ontologie als einer Theorie bestimmt habe, auf die sich die Anwendungstheorie reduzieren lässt, wende ich mich jetzt ihrem Auftreten in Reduktionen zu. Sind nämlich zwei ontologieerweiterte Theorien gegeben, so lassen sich zuerst Reduktionen zwischen diesen ontologischen Theorien betrachten. Da sich Reduktionen jedoch verketten lassen (vgl. voriges Kapitel) ergibt sich damit insgesamt eine Reduktion der Quellanwendungstheorie auf die ontologische Zieltheorie. Dadurch kann letztere als eine

Ontologie der ersteren angesehen werden. Dies stellt den Fall der schwachen ontologischen Reduktion in der Darstellungsweise dieses Textes dar.

Definition 60. Eine *schwache ontologische Reduktion* einer ontologieerweiterten Theorie $\langle \mathcal{T}, \mathcal{B}, \mathcal{T}_0 \rangle$ auf eine ontologieerweiterte Theorie $\langle \mathcal{T}', \mathcal{B}', \mathcal{T}_0' \rangle$ ist eine Reduktion von $\mathcal{T}$ auf $\mathcal{T}'$.

Sind nun ähnlich wie im letzten Abschnitt zwei Theorien mit ihren Ontologien gegeben, wobei bereits eine Reduktion der Quellontologie in die Zielontologie vorgegeben ist, so lassen sich diejenigen Reduktionen der Theorien auszeichnen, die mit dieser Reduktion der Ontologien verträglich sind. Unter allen möglichen Überführungen der Quellbegriffe in die Zielbegriffe sind nämlich diejenigen besonders geeignet, bei denen die Reduktion der Quelltheorie auf die Zielontologie unabhängig davon ist, ob zuerst die Theorie auf ihre Ontologie und dann anschließend auf die Zielontologie reduziert wird, oder zuerst die Quelltheorie in die Zieltheorie überführt wird, und dann auf die Zielontologie reduziert wird.

Definition 61. Eine *starke ontologische Reduktion* einer ontologieerweiterten Theorie $\langle \mathcal{T}^*, \mathcal{B}^*, \mathcal{T}_0^* \rangle$ auf eine ontologieerweiterte Theorie $\langle \mathcal{T}', \mathcal{B}', \mathcal{T}_0' \rangle$ ist ein Paar $\langle \mathcal{B}, \mathcal{B}^0 \rangle$ von zulässigen Brücken von $\mathcal{T}^*$ auf $\mathcal{T}'$ beziehungsweise $\mathcal{T}_0^*$ auf $\mathcal{T}_0'$, so dass $\mathcal{B}^0 \circ \mathcal{B}^* = \mathcal{B}' \circ \mathcal{B}$.

Ist schließlich eine Theorie ohne Ontologie gegeben, so stellt jede Reduktion eine Ontologie bereit. Dies steht im Einklang mit dem allgemeinen Bild ontologieerweiterter Theorien.

Ontologische Reduktionen können also mit Erweiterung von Theorien um Ontologien behandelt werden. Während die schwache ontologische Reduktion einfach die beteiligten Ontologien reduziert, muss die starke ontologische Reduktion zusätzlich eine Verträglichkeitsforderung erfüllen. Ähnlich kann auch die Empirizität von Teilen interpretierter Sprachen behandelt werden.

Zurückgehend auf die logischen Empiristen ist in der Wissenschaftstheorie die Unterscheidung zwischen empirischen und theoretischen Begriffen üblich. Dabei wurde schnell erkannt, dass diese Unterscheidung nicht absolut verstanden werden kann. Vielmehr ist sie abhängig von der betrachteten Sprache oder Theorie (vgl. Balzer: *Theoretical Terms* (1996)). Dabei werden die empirischen Begriffe üblicherweise durch die Festlegung einer empirischen Teilsprache ausgezeichnet.

Unklar bleibt bei dieser Art der Festlegung jedoch, wie die empirische Teilsprache identifiziert werden kann, ohne sie als weiteren Bestandteil einer Theorie willkürlich anzugeben. Als Kriterium für die Festlegung der theoretischen Teilsprache wird üblicherweise die Unabhängigkeit von Vorgängertheorien angegeben. Die Bestimmung der Vorgängertheorien kann jedoch nicht allein auf Grund der betrachteten Theorie erfolgen. Vielmehr sind die angegebenen Merkmale einer Vorgängertheorie derselben Kritik wie die willkürliche Auswahl von theoretischen oder empirischen Teilsprachen ausgesetzt.

Darüber hinaus ist die übliche Festlegung empirischer Begriffe sehr stark am verwendeten Vokabular orientiert. Eine Aussage wäre demnach genau dann empirisch, wenn sie alleine im empirischen Vokabular formuliert werden kann. Ansonsten wäre sie theoretisch.

Damit werden jedoch Instanzen von logischen Tautologien empirisch beziehungsweise theoretisch, je nachdem, in welchem Vokabular sie formuliert werden. Jedoch erscheint es viel naheliegender, logische Tautologien einheitlich entweder als theoretische oder empirische Aussagen aufzufassen, da sie unabhängig von Erfahrung und Vorgängertheorien gültig sind.

Aus den beiden angegebenen Gründen erscheinen mir einige Änderungen an der klassischen Unterscheidung empirisch/theoretisch nötig. Zum einen möchte ich zwischen Theorien unterscheiden, die ihre Aussagen in empirische und theoretische teilen, und solchen, die das nicht tun. Dies erreiche ich, indem ich im ersten Fall explizit die empirische Teiltheorie angebe. Zum anderen werde ich über empirische oder theoretische Aussagen einer Theorie sprechen, ohne mich auf entsprechende Begriffe oder das verwendete Vokabular zu stützen. Dabei verstehe ich eben genau die von der empirischen Theorie vertretenen Aussagen als empirisch.

Ein Beispiel für eine derartige Theorie wären die Sätze eines Beobachtungsprotokolls eines wissenschaftlichen Experimentes. Dabei möchte ich sie als in einer formalen Sprache formuliert auffassen, und die Beschreibung der wesentlichen Eigenschaften des Versuchs durch die Wahl geeigneter abstrakter Strukturen festgelegt. Die Aussagen der verwendeten Theorie würden sich jedoch von diesen unterscheiden. Da sich die beobachteten Sätze auch aus der eigentlichen Theorie, also den Gesetzen und Randbedingungen, herleiten lassen, muss die empirische Teiltheorie auf die eigentliche Theorie reduziert werden. Dabei vermittelt eine Brücke die notwendigen Übersetzungen.

Definition 62. Eine *empirische Theorie* ist ein Tripel $\langle \mathcal{T}_{\mathsf{emp}}, \mathcal{B}, \mathcal{T}_{\mathsf{ges}} \rangle$, aus interpretierten Theorien $\mathcal{T}_{\mathsf{emp}}$ und $\mathcal{T}_{\mathsf{ges}}$, wobei die empirische Teiltheorie $\mathcal{T}_{\mathsf{emp}}$ mittels $\mathcal{B}$ auf die empirische Gesamttheorie $\mathcal{T}_{\mathsf{ges}}$ reduzierbar ist.

Andererseits lässt sich leicht der Zusammenhang zur empirischen Gesamttheorie herstellen. Die Sätze der angegebenen Beobachtungstheorie lassen sich in geeignete Aussagen der Gesamtsprache übersetzen. Dabei sollten sie sich dann aus den Sätzen der empirischen Theorie herleiten lassen.Weiter sollte die Gesamttheorie (modulo der Übersetzung) mehr intendierte Anwendungen als die Beobachtungstheorie besitzen. Diese besitzt oft nur eine, oder in Fällen statistisch unscharfer Aussagen nur wenige intendierte Anwendungen, nämlich den oder die Versuche, Beobachtungsszenarien, die sie eben beschreiben soll.

Die Beziehung zwischen den beiden Theorien lässt sich damit idealisiert als Reduktion wiedergeben. Denn dort werden eben Aussagen und Strukturen so ineinander übergeführt, dass sich die Aussagen der Quell- aus der Zieltheorie herleiten lassen und die Zieltheorie mehr intendierte Anwendungen als die Quelltheorie besitzt. In dem betrachteten Fall ist also die Beobachtungstheorie die Quell- und die allgemeine empirische Theorie Zieltheorie. Gegebenenfalls muss die allgemeine empirische Theorie um geeignete Anfangs- oder Randbedingungen ergänzt werden. Damit ist also die Beobachtungstheorie auf die (modifizierte) Gesamttheorie reduzierbar. Deren empirischer Charakter wird dabei von der Beobachtungstheorie bestimmt.

Nun lassen sich auch Aussagen auf ihren empirischen Gehalt hin untersuchen. Dabei ist eine Aussage eben genau dann empirisch, wenn sie sich als Bild einer Aussage der empirischen Teiltheorie ergibt. In dem gerade angeführten Beispiel sind also genau die

Aussagen empirisch, die sich aus der Beobachtungstheorie ergeben. Dies entspricht genau der gewünschten Vorstellung.

Sind nun zwei empirische Theorien gegeben, so stellt sich wieder die Frage, was geeignete Reduktionen zwischen ihnen sind. Betrachten wir zuerst den Spezialfall, dass beide Theorien dieselben empirischen Teiltheorien besitzen. Dann sind jene Reduktionen ausgezeichnet, die verknüpft mit der Reduktion der empirischen Teiltheorie auf die Quellgesamttheorie die Reduktion der empirischen Teiltheorie auf die Zielgesamttheorie entsprechen. Diese Reduktionen lassen die empirischen Teiltheorien invariant, ich nenne sie daher empirisch neutrale Reduktionen.

Im allgemeinen Fall müssen auch die empirische Quellteiltheorie reduziert werden. Eine empirische Reduktion zwischen empirischen Theorien besteht daher aus einem Paar von Reduktionen zwischen den empirischen Teil- beziehungsweise Gesamttheorien, bei dem die Reihenfolge der Verknüpfung der beteiligten Reduktionen egal ist. Insgesamt entsteht nur eine Reduktion von empirischer Quellteiltheorie auf die Zielgesamttheorie.

Definition 63. Eine *empirische Reduktion* einer empirischen Theorie $\langle \mathcal{T}_{\mathsf{emp}}, \mathcal{B}, \mathcal{T}_{\mathsf{ges}} \rangle$ auf eine empirische Theorie $\left\langle \mathcal{T}'_{\mathsf{emp}}, \mathcal{B}', \mathcal{T}'_{\mathsf{ges}} \right\rangle$, ist ein Paar von Brücken $\langle \mathcal{B}^{\mathsf{emp}}, \mathcal{B}^{\mathsf{ges}} \rangle$ von $\mathcal{T}_{\mathsf{emp}}$ auf $\mathcal{T}'_{\mathsf{emp}}$ beziehungsweise $\mathcal{T}_{\mathsf{ges}}$ auf $\mathcal{T}'_{\mathsf{ges}}$, so dass $\mathcal{B}^{\mathsf{ges}} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B}' \circ \mathcal{B}^{\mathsf{emp}}$.

Rein formal entsprechen sich also ontologische und empirische Theorien bzw. Reduktionen. Während aber bei ontologischen Theorien die Quelltheorie die „eigentliche“ Theorie ist und die Zieltheorie eine ontologische Zugabe, so ist bei empirischen Theorien die Zieltheorie die „eigentliche“ Theorie und die Quelltheorie eine empirische Zugabe. Insgesamt lassen sich also wesentliche Eigenschaften von Ontologie, Empirizität und deren Reduktionen durch den hier vorgestellten Rahmen erfassen.

Kapitel 5

Reduktion und Elimination

5.1 eliminative Reduktionen

In diesem Kapitel möchte ich untersuchen, in wie weit sich Reduktionen mit eliminativen Forderungen vereinbaren lassen. Dabei werde ich zuerst die Elimination von Ontologien untersuchen. Anschließend werde ich Eindeutigkeitskriterien für die Elimination einführen und begründen, um schließlich die Probleme aufzuzeigen, zu denen sie führen. Insgesamt lehne ich Forderungen, die Zieltheorie als grundlegender oder epistemisch bevorzugt zu behandeln ebenso ab, wie Forderungen nach der Elimination oder den abhängigen Status der Quelltheorie.

Die erste Beobachtung knüpft sich an die Tatsache, dass Reduzierbarkeit hier als reflexive Relation eingeführt wird. Dies ist unverträglich damit, dass die Quell- zu Gunsten der Zieltheorie eliminiert werden sollte. Denn da jede Theorie auf sich selbst reduzierbar ist, lässt sich wenigstens in diesen Fällen der Forderung nach Elimination kein Sinn abgewinnen. Die geeignete Beziehung für die Forderung nach eliminativer Reduktion kann daher höchstens die strikte Reduzierbarkeit sein.[1] In diesem Abschnitt werde ich diese Beziehung untersuchen.

Weiter werde ich nur den Fall der Elimination von Theorien betrachten. Die Elimination von Objekten behandle ich als Spezialfall der Elimination geeigneter Ontologien. Diese erfasse ich durch ontologische Theorien. Entsprechend sind hier also ontologische Reduktionen zu betrachten (vgl. Kap voriges Kapitel). Diese beeinhalten eine reduktive Beziehung zwischen den beteiligten Ontologien. Diese soll die Elimination der Quellontologie auf die entsprechende Zielontologie sicherstellen. Ermöglicht das Bestehen einer Reduktion zwischen Quell- und Zieltheorie also die Elimination der ersteren, so ermöglicht eine ontologische Reduktion die Elimination der Quell- auf die Zielontologie. Die Elimination von Ontologien erscheint also als ein Spezialfall der Elimination von Theorien und muss daher nicht gesondert behandelt werden.

Betrachten wir also den Fall, dass eine Quell- auf eine Zieltheorie strikt reduzierbar

[1] Eine Theorie T_1 sei genau dann *strikt reduzierbar* auf eine Theorie T_2, wenn T_1 auf T_2 reduzierbar ist und nicht umgekehrt.

ist. Ist dann die Quell- zu Gunsten der Zieltheorie eliminierbar? Warum eigentlich sollte sie eliminierbar sein? So umfasst die Zieltheorie (modulo der Übersetzung) alle korrekten Aussagen und Anwendungen der Quelltheorie. Deshalb erscheint es zunächst unnötig, diese in der Quelltheorie noch einmal gesondert aufzuführen. Was aber passiert, wenn es verschiedene Brücken gibt, die eine Reduktion der Quell- in die Zieltheorie vermitteln können? Dann kann es passieren, dass eine Aussage der Quellsprache mit verschiedenen Brücken in verschiedene Aussagen der Zielsprache übersetzt wird. Ähnliches gilt für die Anwendungen. Daher ist es dann umgekehrt nicht eindeutig, welche Aussage der Quellsprache gewissen Aussagen der Zielsprache entsprechen. Deshalb lassen sich in solchen Fällen die Argumente der Zielsprache nicht eindeutig auf die Quellsprache übertragen. Es mag also für manche Aussagen der Quellsprache unklar sein, ob sie von der Zieltheorie vertreten werden. Zur Klärung deren Wahrheitsgehalt ist also die Quellsprache und die verwendete Brücke weiter notwendig. Es lässt sich damit allein auf Grund der Reduzierbarkeit die Elimination der Quelltheorie nicht rechtfertigen.

Die reine Reduzierbarkeit reicht für die Elimination der Quelltheorie also nicht aus. Dafür müssen noch weitere Bedingungen an die Beziehung zwischen den beteiligten Theorien erfüllt werden. Ich werde hier aber keine umfassenden Untersuchung von Eliminationsbedingungen durchführen. Dazu gehört aber auf alle Fälle, dass die eliminierende Theorie gewisse Eindeutigkeitsbedingungen erfüllt. So habe ich im letzten Abschnitt untersucht, warum das Fehlen einer eindeutigen Brücke die Eliminierbarkeit in Frage stellt. Daraus lässt sich die Folgerung ableiten, dass es eine eindeutige Übersetzung der Quell- in die Zielsprache geben muss. Im folgenden Absatz werde ich eine ähnliche Überlegung vorstellen, die den Fall mehrerer konkurrierender Kandidaten für die Zieltheorie untersucht.

Es kann nämlich sein, dass sich eine Theorie auf zwei verschiedene Theorien reduzieren lässt. Man denke an die klassischen Mechanik, die sich sowohl auf die Relativitätstheorie als auch auf die Quantenmechanik reduzieren lassen mag. Die zweifach reduzierbare Theorie würde also Aussagen enthalten, die sich auf beide Zieltheorien übertragen lassen. Damit würde sie gewisse Aspekte beider Theorien zusammen erfassen. Diese Vereinheitlichung gäbe ihr einen bevorzugten Status vor beiden Zieltheorien. Nun kann man argumentieren, dass dies direkt gegen die Eliminierbarkeit einer solch zwiespältig reduzierbarer Theorie spräche, und diese auf Grund ihres vereinigenden Charakters bevorzugt sei (vgl. Cartwright: *The Dappled World* (1999)). Dies greift aber zu kurz. Es könnte nämlich sein, dass diese beiden wohl unverträglichen Theorien auf eine dritte Theorie gemeinsam reduzierbar seien, welche dann der eigentliche Kandidat für die Elimination wäre. Dies führt jedoch zum Problem des Reduktionismus, das ich in den nächsten Abschnitten behandeln werde.

Insgesamt bleibt festzuhalten, dass die Idee der Reduktion von Theorien als Erweiterung des Anwendungsbereiches und Ausweitung des Anwendungsgebietes nicht zur Elimination der Quell- zu Gunsten der Zieltheorie ausreicht. Dafür müssen wohl noch weitere Bedingungen erfüllt werden, auf die ich in dieser Arbeit nicht näher eingehen kann. Ebenso erscheint es auf Grund der vorgestellten Überlegungen fraglich, ob durch eine Reduktion die Quelltheorie herabgewürdigt wird. Vielmehr gibt es in den antireduktionistischen Texten viele Argumente, die die Bedeutung von reduzierten Theorien herausstellen. Daraus kann aber nicht auf ihre Nicht-Reduzierbarkeit im hier gewählten Sinn geschlossen werden.

5.2 Beiträge zur Reduktionismus-Debatte

Im Allgemeinen lässt sich ein globaler Reduktionismus durch die folgende These wiedergeben:

Behauptung 64. Alle Theorien sind auf eine Theorie reduzierbar.

Diese Formulierung kann jedoch bestenfalls als Schlagwort dienen. So würde hier die Forderung aufgestellt, dass auch empirisch inkorrekte Theorien reduziert werden können müssen. Dies ist jedoch eine zu starke Forderung, da für den Reduktionismus vor allem die empirisch korrekten Theorien interessant sind. So sollte es nicht nur eine fundamentale Theorie geben, diese sollte auch empirisch korrekt sein. Weiter sollte sie sich auch dadurch auszeichnen, dass sie hinreichend eindeutig bestimmt werden kann. Damit lässt sich der Reduktionismus folgendermaßen präzisieren:

Definition 65. Eine empirische Theorie ist genau dann *fundamental*, wenn sie empirisch korrekt ist und alle empirisch korrekten Theorien reduzieren kann.

Eine reduktionistische Position fordert dann:

Behauptung 66 (Starker Fundamentalismus). Für den betrachteten Bereich von Theorien gilt:

- Es gibt (wenigstens) eine fundamentale Theorie.
- Alle fundamentalen Theorien sind empirisch äquivalent.

Während die Existenzbedingung des Reduktionismus vertraut ist, erscheint die Eindeutigkeitsbedingung eher selten. Sie erscheint aber natürlich, denn die verschiedenen fundamentalen Theorien sind ja in der Lage, alle empirisch korrekten Theorien zu reduzieren, also insbesondere reduzieren sie sich gegenseitig. Sollen sie dennoch nicht empirisch äquivalent sein, so muss dafür weiter argumentiert werden. Darüberhinaus würde in diesem Fall eine fundamentale Theorie ihren hervorgehobenen empirischen Status verlieren. Gäbe es nämlich mehrere empirisch inäquivalente fundamentale Theorien, so bedarf es weiterer Kriterien, eine unter ihnen auszuzeichnen. Die stärkere Forderung nach einer völligen Äquivalenz oder gar der Identität aller fundamentalen Theorien erscheint mir jedoch nicht ausreichend begründet. Ich werde im Folgenden auch zeigen, dass sie nicht mit der Existenzbedingung verträglich ist. Daher unterscheide ich zwischen einem *schwachen Fundamentalismus*, der nur die Existenzbehauptung fundamentaler Theorien unterstützt, und einem *starken Fundamentalismus*, der darüber hinaus auch noch die empirische Äquivalenz fundamentaler Theorien fordert. Die folgende Diskussion wird sich nur mit dem starken Fundamentalismus befassen.

Aus der Transitivität der Reduzierbarkeit, dem Theorem über die Existenz der Kombination und der Definition einer fundamentalen Theorie folgt:

Theorem 67. *Beliebige Theorien sind auf eine fundamentale Theorie reduzierbar.*

Beweis. Sei T eine beliebige empirische Theorie und T^0 eine fundamentale empirische Theorie. Dann ist ihre Kombination $T^0 \tilde{\times} T$ nach Korollar (54) eine empirisch korrekte Theorie. Daher ist sie nach Definition (65) selbst auf T^0 reduzierbar. Aber T ist ebenfalls auf $T^0 \tilde{\times} T$ reduzierbar nach Korollar (54). Wegen der Transitivität der Reduzierbarkeit aus Theorem (53) lässt sich daher T ebenfalls auf T^0 reduzieren. Insgesamt sind damit beliebige Theorien auf T^0 reduzierbar. □

Aus der Existenz einer korrigierten Theorie und der Transitivität folgt aber umgekehrt:

Theorem 68. *Wenn eine Theorie existiert, die alle Theorien reduzieren kann, so gibt es eine fundamentale Theorie*

Beweis. Sei T^0 eine Theorie, die alle Theorien reduzieren kann. Dann existiert nach Axiom (54) eine empirisch korrekte Theorie $\tilde{T}^0$, auf die T^0 reduzierbar ist. Da T^0 alle Theorien reduzieren kann, kann sie insbesondere alle empirisch korrekten Theorien reduzieren. Wegen der Transitivität der Reduzierbarkeit nach Theorem (53) sind damit alle empirisch korrekten Theorien auf $\tilde{T}^0$ reduzierbar. Insgesamt ist $\tilde{T}^0$ eine fundamentale Theorie. □

Damit ergibt sich insgesamt das überraschende Resultat:

Korollar 69. *Eine fundamentale Theorie existiert genau dann, wenn eine Theorie existiert, die alle Theorien reduzieren kann.*

Die Frage, ob eine Theorie existiert, die alle Theorien reduziert, hängt nicht mehr davon ab, welche Theorien empirisch korrekt sind. Damit kann allein aus der Untersuchung des Raums aller Theorien und des gewählten Reduktionsbegriffes entschieden werden, ob eine fundamentale Theorie existiert. Insbesondere ist deren Existenz unabhängig davon, welche Theorien tatsächlich vertreten, empirisch bestätigt oder widerlegt worden sind. Weiter kann auf diese rein begriffliche Fragestellung sogar eine fundamentale Theorie angegeben werden. So ist ja die Korrektur einer Theorie, die alle Theorien reduzieren kann, eine fundamentale Theorie. Welches eine solche Theorie ist, kann damit allein an Hand der gewählten Begriffe bestimmt werden. Die Frage nach der Existenz einer fundamentalen Theorie ist insofern nicht mehr empirisch.

Wegen der Eindeutigkeitsbedingung müssen dann alle fundamentalen Theorien zueinander empirisch äquivalent sein. Es ist jedoch möglich, nichtäquivalente fundamentale Theorien zu konstruieren.

Theorem 70. *Wenn es fundamentale Theorien gibt, so gibt es (wenigstens) zwei, die nicht äquivalent zueinander sind.*

Beweis. Sei T^0 eine fundamentale Theorie. Nach Axiom (56) gibt es Theorien T^1 und T^2, die nicht äquivalent zueinander sind. Wegen des Korollars (58) sind dann $T^0 \tilde{\times} T^1$ und $T^0 \tilde{\times} T^2$ ebenfalls nicht äquivalent. Andererseits sind diese Theorien fundamental, da sie empirisch korrekt sind und T^0 reduzieren können. Wegen der Transitivität der Reduzierbarkeit nach Theorem (53) können sie daher alle empirisch korrekten Theorien reduzieren. □

Damit gibt es also nach den Forderungen des Reduktionismus fundamentale Theorien, die nicht äquivalent sind. Andererseits müssen sie auf Grund der Eindeutigkeitsbedingung empirisch äquivalent sein. Sie lassen sich empirisch daher nicht unterscheiden, obwohl sie nicht äquivalent sind. Damit führt der Reduktionismus zu folgender Form der empirischen Ununterscheidbarkeit:[2]

Behauptung 71 (Empirische Ununterscheidbarkeit). Es gibt empirisch äquivalente Theorien, die nicht äquivalent sind.

Bevor ich nun die Konsequenzen der vorgestellten Resultate diskutiere, werde ich zunächst Konsequenzen der Gegenposition untersuchen.

Ich werde den Antireduktionismus als eine reine Gegenposition zum Reduktionismus begreifen. Wie es dafür üblich ist, erkennt sie damit die Begrifflichkeiten der Ausgangsposition an. Das bedeutet, dass auch der Antireduktionismus Reduktionen als einen wichtigen Bestandteil wissenschaftlicher Konzeptbildung versteht. Insbesondere werde ich hier eine Position betrachten, die dasselbe Verständnis von Theorien und Reduktionen besitzt, wie ich sie bisher eingeführt habe.

Der globale Antireduktionismus äußert sich dann in der These:

Behauptung 72 (Globaler Antireduktionismus). Es gibt keine fundamentale Theorie.

Rein logisch wäre eine Negation reduktionistischer Thesen auch durch die Leugnung der Eindeutigkeitsbedingung für fundamentale Theorien möglich. Jedoch tritt diese Form des Antireduktionismus selten auf. Dies mag zum einen daran liegen, dass die Leugnung der Eindeutigkeitsbedingung zu schwach erscheint, oder daran, dass die Eindeutigkeitsbedingung für fundamentale Theorien akzeptiert wird. Im Folgenden werde ich mich auf die Betrachtung eines Antireduktionismus beschränken, der die Existenzbedingung fundamentaler Theorien angreift.

Wieder werde ich mich nicht mit speziellen Antireduktionismen befassen. Im vorgegebenen Rahmen würden derartige Positionen behaupten, dass z.B. eine bestimmte psychologische Theorie nicht auf eine eine physiologische Theorie reduzierbar sei. Derartige Nichtreduzierbarkeit lässt sich auch an zahlreichen Beispielen nachweisen. Oft wird solch ein Nichtreduzierbarkeitsergebnis daher als ein Argument für einen globalen Antireduktionismus verstanden. Dabei wird jedoch übersehen, dass solche Ergebnisse auch von einem Reduktionisten akzeptiert werden. So würde kaum jemand erwarten, dass sich eine komplexe Theorie elementarer physikalischer Wechselwirkungen auf die Theorie des zulässigen Verhaltens im Straßenverkehr reduzieren lässt, wie sie sich aus der Straßenverkehrsordnung ergibt. Für die reduktionistische Debatte bedeutet ein derartiges Nichtreduzierbarkeitsresultat nur, dass eine bestimmte Theorie nicht fundamental ist.

Für ein globales Antireduktionismusargument ist es jedoch notwendig, Theorien anzugeben, die nicht auf eine gemeinsame Basistheorie reduziert werden können. Dazu könnten zum Beispiel eine Fülle bekannter Theorien aufgezählt werden, die so unterschiedlich sind, dass eine gemeinsame Basistheorie für sie unmöglich erscheint. Gegebenenfalls lassen sich dafür auch prinzipielle Argumente anführen. Wird dabei jedoch auf einen Bereich von

[2] Diese Formulierung geht auf eine Anregung von Marek Polanski zurück.

Theorien Bezug genommen, der endlich ist, so steht dies im Widerspruch zu Axiom (54). Die Endlichkeit könnte entstehen, weil nur tatsächlich vertretene empirische Theorien oder Basistheorien aus endlich vielen Bereichen angeführt werden. In vielen Fällen bleibt die Aufzählung zumindest so vage, dass unklar ist, um wieviele unverträgliche Theorien es sich dabei handelt. Falls es jedoch nur endlich viele dieser Theorien sind, so kann die Behauptung der Unverträglichkeit für den vorgestellten Reduktionismusbegriff nicht aufrecht erhalten werden.[3]

Damit ist eine antireduktionistische Position verpflichtet, die folgende These zu rechtfertigen:[4]

Behauptung 73. Es gibt unendlich viele Theorien, die sich nicht alle auf eine gemeinsame Zieltheorie reduzieren lassen.

Im Folgenden untersuche ich nun die Konsequenzen der antireduktionistischen These (72).[5]

Theorem 74. *Falls keine fundamentale Theorie existiert, gibt es unendlich viele empirisch korrekte Theorien, die sich nicht auf eine gemeinsame Basistheorie reduzieren lassen.*

Beweis. Wegen des Axioms (54) lassen sich endlich viele Theorien immer schrittweise auf eine gemeinsame, empirisch korrekte Basisheorie reduzieren. □

Auf den ersten Blick mag dies dem Antireduktionisten eine willkommene Konsequenz sein, da es seiner Anschauung von der Vielfältigkeit menschlicher Erfahrung entspricht.

Jedoch lassen sich daraus auch Argumente entwickeln, die einem Antireduktionismus widersprechen. So scheint es äußerst schwierig, einen Nachweis für die antireduktionistische These zu führen. Wenn nicht allgemeine begriffliche Überlegungen dieses Ergebnis liefern, so müssen dazu unendlich viele empirisch korrekte Theorien angeführt werden. Das aber scheint nur im Prinzip oder als Ergebnis einer unendlichen wissenschaftlichen Entwicklung möglich. Zu einem konkreten historischen Zeitpunkt scheinen aber bestenfalls endlich viele empirisch korrekte Theorien verfügbar. Mit ihnen lässt sich ein Antireduktionismus aber nicht begründen, wie ich bereits ausgeführt habe.

Weiter werden Menschen oft als endliche Wesen beschrieben. Dies führt dazu, dass sie nur endliche Sprachen erlernen können. Es liegt nahe, diese Endlichkeit auch auf Theorien auszuweiten. Demnach können Menschen nur endlich viele Theorien erlernen und wiedergeben. Sie sind also nicht in der Lage, so viele Theorien zu beherrschen, dass es keine fundamentale Theorie dafür gibt. Sollte die Gesamtheit ihrer Erfahrung nicht endlich sein,

---

[3] Die Verwendung von Reduktionsbegriffen, die von der Gegenseite nicht geteilt werden, ist in der Antireduktionismus-Debatte weit verbreitet. Ich werde aber weiter die einheitlich eingeführten Begriffe verwenden, um vergleichbare Positionen zu untersuchen.

[4] Werden auch abzählbare Kombinationen zugelassen, wie es sie für abzählbare Sprachen gibt, so kann das vorgelegte Argument auf abzählbar viele Theorien ausgedehnt werden. Entsprechendes gilt für höhere Mächtigkeiten, falls die entsprechenden Kombinationen existieren.

[5] Eine triviale Folgerung daraus ist, dass alle fundamentalen Theorien zueinander empirisch äquivalent sind. Damit lassen sich vom Antireduktionisten nicht beide reduktionistischen Thesen gleichzeitig ablehnen.

so könnten sie dann aber auch keine Theorie entwickeln, die diese Erfahrung vollständig beschreibt.

Andererseits können sie auch nur endlich viele Theorien wiedergeben. Da es bisher nur endlich viele Menschen gegeben hat, diese aber nur endlich viele Theorien vertreten haben, müssen auch alle Theorien, die die Erfahrungen von Menschen korrekt beschreiben und geäußert worden sind, von endlicher Anzahl sein. Damit gibt es aber auch eine Theorie, auf die sich alle diese Erfahrungsberichte reduzieren lassen. Dies trifft insbesondere auf intersubjektivierbare Erfahrungsberichte zu. Anders ausgedrückt gibt es eine Theorie, die den Bereich der intersubjektivierbaren Erfahrung reduziert. Dies ist aber eine reduktionistische These.

Soll nun eine antireduktionistische These vertreten werden, so kann sie sich damit nicht auf den Bereich der intersubjektivierbaren Erfahrung beziehen. Vielmehr muss sie sich auf einen Bereich beziehen, der nur durch unendlich viele Theorien beschrieben werden kann. Dies könnte zum Beispiel der Bereich der subjektiven menschlichen Erfahrung sein. Eine antireduktionistische These würde dann behaupten, dass die subjektive menschliche Erfahrung nicht vollständig wiedergegeben werden kann. Eine andere Möglichkeit für einen derartigen Bereich liegt im Objektiven. Damit müsste sich ein Antireduktionist jedoch auf die Existenz einer objektiven Realität verpflichten.

In diesem Abschnitt habe ich mich für die Resultate (69), (70) und (74) im Wesentlichen allein auf das Axiom (54) und das Lemma (58) gestützt. Entsprechende oder ähnliche Eigenschaften besitzen jedoch die meisten der vorgeschlagenen allgemeinen Reduktionsbegriffe. Daher sind die vorgelegten Ergebnisse auch für andere Reduktionsbegriffe erzielbar und unabhängig von der hier gewählten Darstellungsweise.

Insbesondere ergibt Theorem (69), dass eine fundamentale Theorie genau dann existiert, wenn es eine Theorie gibt, die alle Theorien reduzieren kann. Ob es letztere aber gibt, ist eine begriffliche und keine empirische Frage. Daher lässt sich die Frage nach der Gültigkeit reduktionistischer Thesen allein begrifflich entscheiden. Könnte z.B. gezeigt werden, dass eine rein formale Theorie wie die Mengenlehre in der Lage ist, alle Theorien zu reduzieren, so wäre damit auch sichergestellt, dass es eine fundamentale, und damit empirisch korrekte Theorie gibt. Üblicherweise wird die Frage nach dem Reduktionismus jedoch so verstanden, dass sie davon abhängt, welche Theorien empirisch korrekt sind. Ein globaler Physikalismus geht ja davon aus, dass die fundamentale physikalische Theorie noch entwickelt werden muss und davon abhängt, welche physikalischen Theorien korrekt sind.

Weiter ergibt sich nach Theorem (70), dass es nichtäquivalente fundamentale Theorien gibt, die aber nach der Auffassung des Reduktionismus empirisch äquivalent sein sollen. Damit würde der hier vorgestellte (starke) Reduktionismus eine These der empirischen Ununterscheidbarkeit zur Folge haben. In diesem Fall kann keine dieser fundamentalen Theorien als eine ausgezeichnete Ontologie dienen. Deshalb müssen weitere Kriterien angegeben werden, um eine grundlegende Ontologie auszuzeichnen. Ist die Suche nach einer fundamentalen Theorie dadurch motiviert, eine grundlegende Ontologie zu bestimmen, so ist dieser Ansatz verfehlt. Damit entfällt eine wichtige Motivation für den Reduktionismus. Umgekehrt liefert der Reduktionismus ein Argument für empirische Ununterscheidbarkeit.

Andererseits zeigt das Theorem (74) dass sich ein Antireduktionismus immer auf unendlich viele Theorien beziehen muss. Damit scheiden für die antireduktionistische These diejenigen Bereiche aus, die durch endlich viele Theorien beschrieben werden können. Dies lässt sich zum Beispiel vom Bereich des von Menschen Erlernbaren oder Wiedergebbaren behaupten. Damit kann sich ein Antireduktionismus nicht auf den Bereich des Intersubjektiven beschränken, der ja selbst ein Teil dessen sein muss, was jemals von Menschen wiedergegeben worden ist. Da es also nach dieser Ansicht nur endlich viele intersubjektive Theorien geben kann, lassen sich diese alle auf eine gemeinsame Quelltheorie reduzieren. Daher verpflichtet sich der vorgestellte Reduktionsbegriff unter solchen Endlichkeitsannahmen zu einem intersubjektiven Reduktionismus. Bezieht sich der Antireduktionismus nun auf das von einem Menschen subjektiv Erfahrene, so bedeutet das aber, dass niemand seine Erfahrungen vollständig wiedergeben kann. Bezieht sich der Antireduktionismus auf den Bereich des Objektiven, so wird dessen Existenz zugestanden. Damit folgt aus dieser Position eine Form des Realismus.

Diese Konsequenzen zeigen, dass sowohl anti- als auch reduktionistische Positionen unerwartete Folgen haben können. Da sich insbesondere die Debatte um die Existenz fundamentaler Theorien begrifflich entscheiden lässt, sind fundamentale Theorien für empirische Fragestellungen wenig hilfreich. Das bedeutet nicht, dass sich aus der (Nicht-) Reduzierbarkeit von Theorien keine Erkenntnisse erzielen ließen. Es rückt jedoch die Frage in den Mittelpunkt, welche Theorien überhaupt mit Hilfe welcher Brücken aufeinander reduzierbar sind, und welche Konsequenzen sich daraus ergeben. So erscheint mir die Frage durchaus aufschlußreich, ob und wie sich eine bestimmte psychologische Theorie auf eine bestimmte physiologische Theorie reduzieren lässt. Ob sich jedoch diese, zusammen mit allen anderen, auf eine gemeinsame fundamentale Theorie reduzieren lassen, ist weniger von Bedeutung. Umgekehrt stellt sich aber die Frage, was eigentlich erreicht ist, wenn eine Theorie sich auf eine andere oder gar auf eine fundamentale Theorie reduzieren lässt.

Historisch sind Reduktionismen oft von Eliminativismen begleitet worden. So sollten durch erfolgreiche Reduktionen die Gesetze, Begriffe, Objekte oder Ontologien der reduzierten Theorie überflüssig oder wenigstens abhängig von denen der reduzierenden Theorie werden. Wenigstens sollten die reduzierten Theorien ihre Eigenständigkeit verlieren. Dies sollte sich insbesondere in der Verteilung von Forschungsmitteln auswirken. Dies lässt sich alles mit dem hier verwendeten Begriff der Theorienreduktion nur schwer vereinbaren, wie ich bereits im ersten Abschnitt dieses Kapitels gezeigt habe.

Andererseits liefert gerade die Existenz nichtäquivalenter fundamentaler Theorien einen Beleg dafür, dass die hier benutzte Reduktion keine Elimination zugunsten einer einzigen Theorie zulassen. Dazu müssen nämlich unabhängig von der Reduzierbarkeitsbeziehung weitere Kriterien für die Auswahl dieser ausgezeichneten Theorie angeführt werden. Insofern inäquivalente Theorien mit unterschiedlichen Ontologien verknüpft sind, lässt sich also mit der Reduzierbarkeitsbeziehung allein keine grundlegende Ontologie auszeichnen. Der hier verwendete Reduktionsbegriff kann damit die Bevorzugung der reduzierenden Ontologie nicht mit der Existenz einer allgemeinen Basisontologie rechtfertigen.

Obwohl die Untersuchung von Reduktion oft mit dem Wunsch nach der Elimination bestimmter Aspekte von Theorien verknüpft wird, erscheint sie im Lichte der hier vorgestellten Resultate dafür eher ungeeignet. Eine andere Motivation, Theorien aufeinander zu reduzieren, wird von dem Wunsch geliefert, Argumente der einen Theorie in der anderen nutzbar zu machen. Dies erscheint mit den erzielten Ergebnissen viel besser verträglich.[6] Eine genauere Untersuchung zeigt jedoch, dass diese Übertragung in beiden Richtungen möglich ist. Damit hängt es vom verfolgten Ziel ab, welche der an der Reduktion beteiligten Theorien bevorzugt wird. Ein genereller Eliminativismus lässt sich damit also nicht begründen. Hingegen lassen sich übertragene Argumente in jedem Fall nutzbar machen. Sei es zur Erweiterung der beteiligten Theorien, zur Gewinnung neuer Erkenntnisse oder zur Überprüfung der Reduzierbarkeit.

Der verwendete Reduktionsbegriff mag der Kritik von beiden Seiten der Reduktionismus-Debatte ausgesetzt sein. So könnte ein Reduktionist bereits die Aufgabe des eliminativen Gedankens als eine Ablehnung seines Reduktionismus verstehen. Umgekehrt könnte der Antireduktionist argumentieren, dass mit der Existenz der Kombination beliebiger Theorien bereits eine reduktionistische Haltung eingenommen wird. Tatsächlich ist der hier verwendete Begriff von Reduktion mit den angesprochenen Einwänden nicht verträglich. Dies stellt meiner Ansicht nach jedoch keinen Mangel des verwendeten Reduktionsbegriffes dar. Vielmehr macht es eine Schwäche der Reduktionismus-Debatte deutlich. Darin werden nämlich meist von den Vertretern der jeweiligen Seite Begriffe von Reduktion verwendet, die von der Gegenposition von vornherein abgelehnt werden müssen. Dagegen hat die hier vorgestellte Methode den Vorteil, dass nur auf allgemein herausgearbeitete Eigenschaften eines generellen Reduktionskonzeptes Bezug genommen wird, ohne bereits eine bestimmte wissenschaftstheoretische Position bezüglich des Reduktionismus zu vertreten. Da die vorgestellten Argumente nur auf wenigen Voraussetzungen beruhen, lassen sie sich auch leicht auf andere Reduktionskonzepte übertragen. Es reicht daher nicht, die hier gewählte Darstellung anzugreifen, die hier nur dazu dient, die Argumente zu präzisieren. Viele andere Reduktionsbegriffe haben ähnliche Folgen. Zumindest trägt nach meiner Auffassung ein Gegner der vorgestellten Resultate die Argumentationslast. Weiter will ich hier auch nicht behaupten, dass sich alle Fälle von Reduktion wie angegeben verhalten oder verhalten sollten. Die Behauptung ist vielmehr, dass sich wesentliche Fälle in dem gewählten Rahmen darstellen lassen und sich daher die vorgestellten Ergebnisse anwenden lassen.

[6] Die Übertragbarkeit von Argumenten zu gewährleisten ist vor allem eine Aufgabe, die die Konstruktionen leisten müssen. Da ich sie hier nicht näher charakterisiert habe, muss die Übertragbarkeit von Argumenten weitgehend unbelegt bleiben.

Kapitel 6

Reduktion und Approximation

6.1 Näherungen von Theorien

In diesem Kapitel setze ich mich mit approximativen Übergängen zwischen Theorien auseinander. Zuerst werde ich den Fall approximativer Reduktionen betrachten, da in den meisten Fällen, in denen eine Reduktion angestrebt wird, diese nur unter gewissen Vernachlässigungen gelingt. Daher ist es eine wichtige Frage, wie im vorgestellten Ansatz derartige Fälle von Reduktionen behandelt werden. Es stellt sich heraus, dass sie nicht von den exakten Reduktionen unterschieden werden müssen. Dies werde ich mit einem Fallbeispiel untermauern.

Anschließend werde ich mit Theorien befassen, die nur näherungsweise als wahr angesehen werden können. Dies ist deshalb von Bedeutung, da die meisten empirischen Theorien darunter fallen. Üblicherweise werden sie als mehr oder weniger ähnlich zu einer wahren Theorie behandelt. Ich werde hier den Begriff der Wahrheitsähnlichkeit auf einen Spezialfall der Reduzierbarkeit zurückführen.

6.2 Approximative Reduktionen

In vielen Fälle, in denen eine Reduktion durchgeführt werden soll, gelingt dies, indem geringe Unterschiede zwischen der reduzierten Theorie und der eigentlichen Quelltheorie der Reduktion vernachlässigt werden. So lassen sich die Kepler'schen Gesetze der Planetenbewegung aus dem Newton'schen Gravitationsgesetz unter der Annahme herleiten, dass die Sonne im Gravitationszentrum des Planetensystems ruht. Aber auch die Sonne bewegt sich um dieses Zentrum, selbst wenn es immer im Inneren der Sonne bleibt. Das Ruhen der Sonne ist damit nur näherungsweise unter der Vernachlässigung dieser Bewegung richtig, genau genommen jedoch falsch.

Um dennoch die übliche Herleitung der Kepler'schen aus den Newton'schen Gesetze als eine Reduktion auffassen zu können, scheint es notwendig, den Begriff der exakten Reduktion aufzuweichen. Die reduzierte Theorie soll danach nur noch unter Vernachlässigung geeigneter Aspekte der Quelltheorie einer Reduktion entsprechen.

In den in der Literatur diskutierten Vorschlägen ist es jedoch oft unklar, welche Vernachlässigungen noch akzeptiert werden können. Meist wird dazu ein willkürlich festgelegter Ähnlichkeitsmaßstab gewählt, der dann für bestimmte Spezialfälle angemessen ist. Jedoch fehlt dabei oft eine allgemeine Rechtfertigung für die Festlegung dieses Maßstabes für die Reduktion beliebiger Theorien.

Bei der hier eingeführten Auffassung von Theorien ist eine derartiger Ähnlichkeitsmaßstab nicht nötig. Vielmehr werden approximative Reduktionen bereits durch die vorgestellten Reduktionen erfasst. Dies wird daran deutlich, dass für die Reduktion nur die korrekten Anteile der Theorie verglichen werden. Trifft eine Aussage der Theorie in ihrem Anwendungsbereich nur näherungsweise zu, so trifft sie genau genommen nicht in allen Anwendungen zu. Die Theorie ist dann inkorrekt und insbesondere zählt die betrachtete Aussage nicht zu den korrekten Aussagen der Theorie. Da aber nur diese bei Reduktionen verglichen werden, müssen nur näherungsweise richtige Aussagen nicht berücksichtigt werden.

Darüber hinaus ist es selbst im Fall exakter formaler Theorien oft nicht notwendig, zusätzliche Annahmen zur Herleitung einer reduzierten Theorie einzuführen, obwohl es zuerst den Anschein haben mag. Ich möchte dazu die Reduktion der Fallgesetze nach Galileo auf die Newton'sche Gravitationsmechanik betrachten. Üblicherweise wird das als eine approximative Reduktion aufgefasst, die nur in der Nähe der Erdoberfläche gültig sei. Ich werde jedoch zeigen, dass es mit einer geeigneten Übersetzung die Bedingungen einer exakte Reduktion erfüllt. Dazu werde ich die beiden Theorien naiv formalisieren und eine syntaktische Interpretation der Fallgesetze in die Gravitationstheorie angeben. Wie im dritten Kapitel bereits ausgeführt, ergibt sich dadurch eine exakte Reduktion im Sinne des hier vertretenen Ansatzes.

Definition 75 (Theorie der Gallilei'schen Fallbeschleunigung)**.** Sei $\vec{x}$ die Ortsfunktion eines Teilchens, also eine Abbildung, die jedem Zeitpunkt einen Ort zuordnet. Weiter $\vec{g}$ ein konstanter Beschleunigungsvektor, die sogenannte Erdbeschleunigung. Die Theorie der Fallbeschleunigung Σ_{FB} sei dann der deduktive Abschluss einer geeigneten Theorie der reellen Analysis zusammen mit der Gleichung:

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{g} \qquad\qquad (t \text{ beliebiger Zeitpunkt}) \tag{6.1}$$

Hierbei gehe ich davon aus, dass die Menge der Zeitpunkte aus einem beschränkten Intervall auf den reellen Zahlen und der Ortsraum aus dem $\mathbb{R}^3$ bestehen. Unter denselben Annahmen lässt sich dann eine vereinfachte Version der Newton'schen Gravitationsmechanik wie folgt einführen.

Definition 76 (Theorie der Newton'schen Gravitationsmechanik)**.** Seien $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ die Ortsfunktionen zweier Teilchen, also Abbildungen, die jedem Zeitpunkt einen Ort zuordnen. Weiter seien m_1, m_2 und G positive reelle Konstanten, wobei m_1 und m_2 die Massen der beteiligten Teilchen und G die sogenannte Gravitationskonstante seien. Schließlich sei t_0 ein konstanter Zeitpunkt. Die Gravitationstheorie Σ_{GT} sei dann der deduktive Abschluss einer geeigneten Theorie der reellen Analysis zusammen mit den folgenden Formeln:

$$\vec{x}_1(t) \neq \vec{x}_2(t) \qquad (t \text{ beliebiger Zeitpunkt}) \tag{6.2a}$$

$$\ddot{\vec{x}}_1(t) = G \cdot m_2 \frac{\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)}{|\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)|^3} \qquad (t \text{ beliebiger Zeitpunkt}) \tag{6.2b}$$

$$\ddot{\vec{x}}_2(t) = G \cdot m_1 \frac{\vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t)}{|\vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t)|^3} \qquad (t \text{ beliebiger Zeitpunkt}) \tag{6.2c}$$

Seien nun $\mathcal{L}_{\mathsf{FB}}$ bzw. $\mathcal{L}_{\mathsf{GT}}$ die Sprachen, in der Σ_{GT} bzw. Σ_{FB} formuliert sind. Dann gibt es eine syntaktische Interpretation, die $\vec{g}$ in $G \cdot m_2 \frac{\vec{x}_2(t_0) - \vec{x}_1(t_0)}{|\vec{x}_2(t_0) - \vec{x}_1(t_0)|^3}$ und die Formel $\vec{x}(t)$ in $\vec{x}_1(t_0) + (t - t_0)\dot{\vec{x}}_1(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)\ddot{\vec{x}}_1(t_0)$ überführt. Aus der Analysis lässt sich dann sofort zeigen, dass dadurch Σ_{FB} in Σ_{GT} interpretiert wird.

Damit lässt sich die Theorie der Fallbeschleunigung exakt auf die Gravitationstheorie reduzieren. Da viele Näherungen über ähnliche Reihenentwicklungen durchgeführt werden, lässt sich die am Fallbeispiel vorgeführte Methode auf viele approximative Reduktionen übertragen.

Werden jedoch ontologische interpretierte Theorien betrachtet, so stellt sich das Beispiel etwas anders dar. Nehmen wir also an, wir hätten eine gemeinsame Ontologie beider Theorien. Dann sollten gewisse Aussagen über die beteiligten Ortsfunktionen auf dieselben ontologischen Theorien überführt werden. Die gewählte Interpretation würde aber nicht alle Ortsaussagen der Quelltheorie in die entsprechenden Ortsaussagen der Zieltheorie übersetzen. Vielmehr liegt nahe, dass diese Interpretation die gewählte Ontologie nicht respektiert. Damit handelt es sich im Fallbeispiel nicht um eine starke ontologische Reduktion. Ist diese jedoch erforderlich, so kann die gewählte Interpretation nur dann akzeptiert werden, wenn sie wenigstens für den Bereich der Anwendungen der Quelltheorie die Ontologie respektiert.

Bei einer approximativen Reduktion zwischen formalen Theorien handelt es sich also um eine Reduktion, die keine starke ontologische Reduktion ist. Die Näherung spiegelt sich dabei darin wieder, dass erst eine Beschränkung der interpretierten Quellsprache auf die Anwendungen der Quelltheorie zu einer ontologischen Reduktion führt.

6.3 Wahrheitsähnlichkeit

Empirische Theorien gelten üblicherweise nur als annähernd korrekt. Dies liegt daran, dass jede Theorie bei hinreichender Genauigkeit selbst in ihrem Anwendungsbereich widerlegt werden kann. Wird der strenge wissenschaftliche Maßstab angelegt, dass keine falschen Theorien vertreten werden dürfen, so müssten damit exakte empirische Theorien abgelehnt werden. Um dies zu vermeiden, ist es notwendig, eine Rechtfertigung für derartige nur näherungsweise korrekte Theorien anzugeben.

Dies wird dadurch erschwert, dass es keinen unmittelbaren epistemischen Zugang zur Wahrheit zu geben scheint. Gäbe es ihn, so könnten auch empirisch vollständig korrekte

Theorien vertreten werden. Dies widerspricht aber der gerade formulierten Erfahrung. Damit ist eine Rechtfertung näherungsweise korrekter empirischer Theorien nicht durch die Angabe einer wahren Theorie möglich. Es bedarf eines davon unabhängigen Begriffs der Wahrheitsähnlichkeit.

Dieser sollte Wissenschaftler in die Lage versetzen, aus verschiedenen konkurrierenden Theorien die geeignetere auszuwählen. Dabei sollte bei diesem Verfahren die wissenschaftliche Erkenntnis zu wahren Theorien fortschreiten. Damit ließe sich dann diese Methode wissenschaftstheoretisch rechtfertigen, da sie zu immer besseren Theorien führen würde.

Im Folgenden möchte ich zunächst einige Vorschläge vorstellen, einen derartigen (Prä-)Ordnungsbegriff von Ähnlichkeit zur Wahrheit einzuführen, der nicht unmittelbar auf wahre Theorien Bezug nimmt. Anschließend werde ich die Ansätze von Popper, Niiniluoto und Kuipers kritisieren, um dann Wahrheitsähnlichkeit auf Reduktionen zurückzuführen. Zuletzt werde ich zeigen, dass dieser Ansatz wesentliche Forderungen an Wahrheitsähnlichkeit erfüllt.

Zuerst wird der Begriff der Wahrheitsähnlichkeit in Popper: *Growth of Scientific Knowledge* (1962) eingeführt. Dort werden Theorien als deduktiv abgeschlossene Satzmengen aufgefasst. Danach ist eine solche Theorien Σ genau dann *wahrheitsähnlicher* als eine Theorie Θ ($\Sigma \sqsupseteq_{\mathrm{P}} \Theta$), wenn es die folgenden Bedingungen erfüllt:

($\mathrm{W1}_{\mathrm{K}}$) Alle wahren Konsequenzen der Theorie Θ sind auch wahre Konsequenzen der Theorie Σ.

($\mathrm{W2}_{\mathrm{K}}$) Alle falschen Konsequenzen der Theorie Σ sind auch falsche Konsequenzen der Theorie Θ.

Dabei sind die wahren Konsequenzen einer Theorie genau der Schnitt dieser Theorie mit einer vorgegebenen wahren (und daher maximal konsistenten) Theorie, die falschen Konsequenzen sind der Schnitt mit ihrem Komplement. Dieser Ansatz nimmt also explizit auf eine wahre Theorie Bezug und verfehlt damit eine der Motivationen für die Einführung der Wahrheitsähnlichkeit.

Deshalb wurde der Begriff in Niiniluoto: *Truthlikeness* (1987) auf völlig andere Weise wiederbelebt. Niiniluoto beschreibt Theorien dort als Mengen von "linguistic counterparts" von möglichen Welten, welche ich der Einfachheit halber mit Anwendungen identifizieren werde. Für solche Anwendungen definiert Niiniluoto nun eine Metrik, die er auch auf Theorien überträgt. Dann erklärt er, dass eine Theorie Σ genau dann wahrheitsähnlicher als eine Theorie Θ ist ($\Sigma \sqsupseteq_{\mathrm{N}} \Theta$), wenn der Abstand von Σ zur perfekten Theorie geringer ist, als der von Θ zur perfekten Theorie. Dabei lässt sich seine Wahl des Ähnlichkeitsbegriffes durch die folgenden Prinzipien motivieren:

($\mathrm{W1}_{\mathrm{A}}$) Alle falschen Anwendungen der Theorie Σ sind auch falsche Anwendungen der Theorie Θ.

($\mathrm{W2}_{\mathrm{A}}$) Alle wahren Anwendungen der Theorie Θ sind auch wahre Anwendungen der Theorie Σ.

Entsprechend zum Ansatz von Popper sind die wahren Anwendungen einer Theorie der Schnitt dieser Theorie mit der vorgegebenen perfekten Theorie und die falschen Konsequenzen der Schnitt mit ihrem Komplement. Dieser Ansatz nimmt also ebenfalls explizit auf eine wahre Theorie Bezug und verfehlt damit dieselbe Motivationen für die Einführung der Wahrheitsähnlichkeit.

Mit der strukturalistischen Theorieauffassung greift schließlich Kuipers das Thema auf. In Kuipers: *The Dual Foundation ...* (1997) stattet er die Menge der potentiellen Modelle mit einer zusätzlichen Relation aus, die es ihm erlaubt, die Ähnlichkeit von Modellen festzustellen. Diese Relation überträgt er dann auf Theorien und erklärt eine Theorie Σ wahrheitsähnlicher als eine Theorie Θ ($\Sigma \sqsupseteq_{\mathrm{K}} \Theta$) genau dann, wenn Σ ähnlicher zur perfekten Theorie ist als Θ. Dabei orientiert er sich bei der Wahl seines Ähnlichkeitsbegriff an den Forderungen ($\mathrm{W1_K}$) und ($\mathrm{W2_A}$).[1] Auch er folgt seinen Vorläufern und gibt mit der ausgewählten perfekten Theorie die angesprochene Motivation auf.

Mit den hier vorgestellten Begriffen können zuerst die Prinzipien, die den verschiedenen Auffassungen von Wahrheitsähnlichkeit zu Grunde liegen gedeutet werden. So lassen sich die wahren Konsequenzen als die korrekten Aussagen und die wahren Anwendungen als die korrekten Anwendungen identifizieren.

Definition 77. Seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ interpretierte Theorien derselben interpretierten Sprache $\mathcal{R}$. Dann ist $\mathcal{T}_1$ genau dann *wahrheitsähnlicher* als $\mathcal{T}_2$ ($\mathcal{T}_1 \sqsupseteq_{\mathcal{R}} \mathcal{T}_2$), wenn eine zuverlässige Brücke existiert, die $\mathcal{T}_1$ auf $\mathcal{T}_2$ reduziert.

Die Forderungen 3.8 entsprechen dann den Bedingungen ($\mathrm{W1_K}$) und ($\mathrm{W2_A}$).

Wenn nun $\mathcal{T}_2$ eine perfekte Theorie ist und $\mathcal{T}_1 \sqsupseteq_{\mathcal{R}} \mathcal{T}_2$, dann ist auch $\mathcal{T}_1$ perfekt. Dies folgt unmittelbar aus der Definition einer zuverlässigen Brücke. Damit kann eine Theorie, die nicht perfekt ist, niemals wahrheitsähnlicher als eine perfekte Theorie sein. Sind nun $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ korrekte Theorien und $\mathcal{T}_1 \sqsupseteq_{\mathcal{R}} \mathcal{T}_2$, so sind (modulo der Übersetzung) alle Aussagen von $\mathcal{T}_2$ auch Aussagen von $\mathcal{T}_1$und ebenso alle Anwendungen von $\mathcal{T}_2$ auch Anwendungen von $\mathcal{T}_1$. Bei der Auswahl immer wahrheitsähnlicher Theorien würden diese beiden Eigenschaften einen Fortschritt auf eine perfekte Theorie hin ergeben.

Da bei dem Vergleich über die Reduzierbarkeit nur die korrekten Anteile der Theorie verglichen werden, lassen sich viele Theorien vergleichen, so auch korrekte und inkorrekte untereinander. Damit lässt sich Wahrheitsähnlichkeit auf einen weiten Bereich von Theorien anwenden. Es bleibt aber offen, ob sich beliebige Theorien miteinander vergleichen lassen. Ob Wahrheitsähnlichkeit konnex ist, hängt nämlich wesentlich davon ab, welche (zuverlässigen) Brücken zur Verfügung stehen. Insgesamt reichen die vorhandenen Brücken aber aus, um einfachen Trivialisierungsresultaten zu entgehen.

Der so gewählte Begriff der Wahrheitsähnlichkeit ist auch mit dem eingeführten Begriff der Äquivalenz von Theorien verträglich. Es lässt sich nämlich leicht zeigen, dass äquivalente Theorien gleich wahrheitsähnlich sind. Dies entspricht der Intuition.

Damit kann Wahrheitsähnlichkeit als Spezialfall der Reduzierbarkeit verstanden werden. Dieses Verfahren gibt viele Intuitionen über Wahrheitsähnlichkeit angemessen wieder.

[1] Hierzu müssen Modelle mit Anwendungen identifiziert werden.

Darüber hinaus nimmt es nicht unmittelbar auf eine wahre Theorie Bezug und zeigt sich darin den in der Literatur bekannten Vorschlägen überlegen. Umgekehrt motiviert dieser Ansatz erneut, dass sich mit dem gewählten Reduktionsbegriff auch approximative Übergänge erfassen lassen.

Teil III

Ergebnisse

Kapitel 7

Zusammenfassung

In den vorangegangen Kapiteln habe ich den Begriff der Reduktion zwischen interpretierten Theorien eingeführt. Anschließend habe ich Konsequenzen der vorgestellten Auffassung von Reduktion in philosophischen Debatten untersucht. Dabei habe ich die folgenden Ergebnisse erzielt:

- Durch die getrennte Angabe der Aussagen und Anwendungen einer Theorie lassen sich sowohl korrekte als auch inkorrekte Theorien adäquat erfassen, die nicht notwendigerweise alle Aspekte explizit durch ihren Aussagen ausdrücken. Weiter lassen sich dadurch die widerstrebenden Intuitionen vereinen, nach denen bei einer Reduktion sowohl die Aussagen verschärft als auch ihr Anwendungsbereich ausgedehnt werden soll.

- Die Ontologie einer Theorie kann selbst als Theorie aufgefasst werden, auf die sich die eigentliche Theorie reduzieren lässt. Eine schwache ontologische Reduktion ergibt sich dann als eine Reduktion der Ontologie, hingegen ergibt sich eine starke ontologische Reduktion als eine Reduktion der eigentlichen Theorie, die die beteiligten Ontologien respektiert.

- Der empirischen Anteil einer Theorie lässt sich explizit durch eine Vorgängertheorie erfassen, die sich auf die eigentliche Theorie reduzieren lässt. Die empirischen Aussagen ergeben sich dann als die Bilder der Aussagen der Vorgängertheorie unter der gewählten Übersetzung.

- Allein mit der Reduktion einer Theorie auf eine andere lässt sich weder eine Elimination der reduzierten Theorie noch ihrer Ontologie rechtfertigen. Vielmehr können durch die Reduktion Argumente der beteiligten interpretierten Sprachen in die jeweils andere übertragen werden.

- Ein globaler Reduktionismus führt zu einer Form der These der empirischen Ununterscheidbarkeit. Umgekehrt lässt sich ein Antireduktionismus nur mit unendlich vielen unvereinbaren Theorien erreichen.

- Approximative Reduktionen können als Spezialfälle exakter Reduktionen betrachtet werden. Die Näherung kann durch die Nichtbeachtung der ontologischen Randbedingungen einer Theorie wiedergegeben werden.

- Wahrheitsähnlichkeit kann als Reduzierbarkeit innerhalb derselben interpretierten Sprache mittels umkehrbarer Übersetzungen verstanden werden. Dabei ergibt sich der Näherungsaspekt durch den approximativen Charakter des vorgestellten Reduktionsverständnisses.

Literaturverzeichnis

ACKERMANN, WILHELM. Zur widerspruchsfreiheit der zahlentheorie. *Mathematische Annalen*, **116**; (1940) Seiten 162–194.

ADAMS, E. The foundation of rigid body mechanics and the derivation of its laws from those of particle mechanics. In Henkin et al. (1959) (1959) .

BALZER, WOLFGANG. Theoretical terms: Recent developments. In Balzer und Moulines (1996) (1996) .

BALZER, WOLFGANG, MOULINES, C. ULISES (Hg.). *Structuralist Theory of Science*. de Gruyter, Berlin, New York (1996).

BALZER, WOLFGANG, PEARCE, D., SCHMIDT, H.-J. (Hg.). *Reduction in Science: Structure, Examples, Philosophical Problems*. Reidel, Dordrecht (1984).

BALZER, WOLFGANG, MOULINES, C. ULISES, SNEED, JOSEPH D. The structure of empirical science: Local and global. In Barcan Marcus et al. (1986), Seiten 291–306 (1986) Seiten 291–306.

BALZER, WOLFGANG, MOULINES, C. ULISES, SNEED, JOSEPH D. *An Architectonic for Science: The Structuralist Program*. Reidel, Dordrecht (1987).

BALZER, WOLFGANG, MOULINES, C. ULISES, SNEED, JOSEPH (Hg.). *Structuralist Knowledge Representation - Paradigmatic Examples*. Rodopi, Amsterdam (2000).

BARCAN MARCUS, RUTH, DORN, GEORG J. W., PAUL, WEINGARTNER (Hg.). *Logic, Methodology and Philosophy of Science VII*, Band 114 von *Studies in Logic and the Foundation of Mathematics*. North-Kolland, Amsterdam (1986).

BONEVAC, DANIEL A. *Reduction in the Abstract Sciences*. Hackett, Indianapolis (1982).

BUTTS, ROBERT E., HINTIKKA, JAAKKO (Hg.). *Logic, Foundations of Mathematics and Computability Theory*. Reidel, Dordrecht (1977). Held at the University of Western Ontario, London, Ont., 27 August-2 September 1975, The University of Western Ontario Series in Philosophy and Science, Vol. 9.

Cartwright, Nancy. *The Dappled World. A Study of the Boudaries of Science.* Cambridge University Press, Cambridge (1999).

Eberle, Rolf A. Replacing one theory by another under preservation of a given feature. *Philosophy of Science*, **38**; (1971) Seiten 486–501.

Fodor, Jerry. Special sciences (or the disunity of science as a working hypothesis). *Synthese*, **28**; (1971) Seiten 97–115.

Ganter, Bernhard, Wille, Rudolf. *Formale Begriffsanalyse. Mathematische Grundlagen.* Springer, Berlin (1996).

Gurevich, Yuri, Shelah, Saharon. On the strength of the interpretation method. *Journal of Symbolic Logic*, **54** (2); (1989) Seiten 305–323.

Hempel, Carl G. Problems and changes in the empiricist criterion of meaning. *Revue Internationale de Philosophie*, **11**; (1950) Seiten 41–63.

Hempel, Carl G., Oppenheim, Paul. Studies in the logic of explanation. *Philosophy of Science*, **15**; (1948) Seiten 135–175.

Henkin, Leo, Suppes, Patrick, Tarski, Alfred (Hg.). *The Axiomatic Method With Special Reference to Geometry and Physicx.* North-Holland, Amsterdam (1959).

Hooker, Clifford A. Towards a general theory of reduction. part I. historical and scientific setting. *Dialogue. Canadian Philosophical Review*, **20** (1); (1981a) Seiten 38–60.

Hooker, Clifford A. Towards a general theory of reduction. part II. identity in reduction. *Dialogue. Canadian Philosophical Review*, **20** (2); (1981b) Seiten 201–235.

Jacobs, Bart. *Categorical Logic and Type Theory*, Band 141 von *Studies in Logic and the Foundation of Mathematics.* North-Kolland, Amsterdam (1991).

Kemeny, John G., Oppenheim, Paul. On reduction. *Philosophical Studies*, **7**; (1956) Seiten 6–19.

Kuipers, Theo A. F. The refined structure of theories. In Kuokkanen (1994) (1994) Seiten 3–24.

Kuipers, Theo A. F. The dual foundation of qualitative truth approximation. *Erkenntnis*, **47** (2); (1997) Seiten 145–192. With a comment by Thomas Mormann and a reply by the author.

Kuokkanen, Martti (Hg.). *Idealization VII: Structuralism, Idealization and Approximation*, Band 42 von *Poznań Studies in the Philosophy of the Sciences and Humanities.* Rodopi, Atlanta (1994).

Link, Godehard. Reductionism as resource–conscious reasoning. *Erkenntnis*, **53**.

Mayr, Dieter. Investigations of the concept of reduction I. *Erkenntnis*, **10**; (1976) Seiten 275–294.

Mayr, Dieter. Investigations of the concept of reduction II. *Erkenntnis*, **16**; (1981) Seiten 109–129.

Montague, Richard. Interpretability in terms of models. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Proceedings. Series A. Mathematical Sciences*, **27**; (1965) Seiten 467–476.

Mycielski, Jan. A lattice of interpretability types of theories. *Journal of Symbolic Logic*, **42** (2); (1977) Seiten 297–305.

Nagel, Ernest. *The Structure of Science: Problems in the Logic of Scientific Explanation.* Hartcourt, Brace and World, New York (1961).

Niebergall, Karl-Georg. On the logic of reducibility: Axioms and examples. *Erkenntnis*, **53**; (2000) Seiten 27–61.

Niebergall, Karl-Georg. Structuralism, model theory and reduction. *Synthese*, Seiten 1–28.

Niiniluoto, Ilkka. *Truthlikeness.* Kluwer, Dordrecht (1987).

Polanski, Marek. *Zur logischen Analyse von Theorienreduktion und Theorienäquivalenz.* Dissertation, Universität München (2002).

Popper, Karl R. *Conjectures and Refutations, The Growth of Scientific Knowledge.* Basic Books, New York (1962).

Popper, Karl R. *Objective Knowledge: An Evolutionary Approach.* Clarendon, Oxford (1972).

Rival, Ivan (Hg.). *Ordered Sets*, Band 83 von *Series C — Mathematical and Physical Sciences.* NATO Advanced Study Institute, Reidel, Dordrecht (1982).

Schaffner, Kenneth F. Approaches to reduction. *Philosophy of Science*, **34**; (1967) Seiten 137–147.

Suppes, Patrick. *Introduction to Logic.* Princeton (1957).

Szczerba, Lesław W. Interpretability of elementary theories. In Butts und Hintikka (1977), Seiten 129–145 (1977) Seiten 129–145. Held at the University of Western Ontario, London, Ont., 27 August-2 September 1975, The University of Western Ontario Series in Philosophy and Science, Vol. 9.

SZCZERBA, LESŁAW W. Interpretations with parameters. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **26**; (1980) Seiten 35–39.

TARSKI, ALFRED. *Undecidable Theories*. Studies in Logic and the Foundation of Mathematics. North-Kolland, Amsterdam (1953a).

TARSKI, ALFRED. A general method in proofs of undecidability. In Tarski (1953a) (1953b) Seiten 1–35.

WILLE, RUDOLF. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts. In Rival (1982), Seiten 445–470 (1982) Seiten 445–470.

ZICKWOLFF, MONIKA. *Rule Exploration: First Order Logic in Formal Concept Analysis*. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt (1991).

Lebenslauf

Ulrich Albert

19. März 1971	Geburt in Penzberg
9/81 - 7/87	Besuch des Gymnasiums Penzberg
9/87 - 7/90	Besuch des Gymnasiums Bad Tölz
WS 1990 - SS 1996	Ludwig-Maximilians-Universität München, Studium der Physik
SS 1997 - WS 1999	Ludwig-Maximilians-Universität München, Promotionsstudium der Logik und Wissenschaftstheorie, Philosphie und Physik
5/00 - 9/02	Stipendiat am DFG-Graduiertenkolleg „Sprache, Information, Logik“, Prof. Link
SS 2002 - SS 2004	Leitung von Tutorien zu den Veranstaltungen Wissenschaftstheorie I bis IV, bzw. Logik I
14. Februar 2005	Disputation
2/05 - 2/07	Referendariat für das Lehramt an Gymnasien, Oskar-von-Miller-Gymnasium München
6. August 2005	Heirat mit Sonja Müller
seit 9/07	Lehrer am Auersperg-Gymnasium, Passau-Freudenhain