Untersuchung nichtkommutativer Räume als Grundlage für physikalische Probleme

Dissertation der Fakultät für Physik der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Stefan Schraml
aus Abensberg

München, 11. Dezember 2000

1. Gutachter: Prof. Dr. Julius Wess
2. Gutachter: Prof. Dr. Hans-Jürgen Schneider

Tag der mündlichen Prüfung: 24. Juli 2001

Zusammenfassung

Aufgrund der in der Quantenfeldtheorie auftretenden Singularitäten und der Inkonsistenzen beim Versuch einer Quantisierung der Gravitation wird oft angenommen, dass die glatte kommutative Raumzeit-Struktur bei sehr kleinen Abständen, und entsprechend sehr hohen Energien, nichtkommutativ wird. In dieser Arbeit werden solche nichtkommutativen Strukturen untersucht. Explizit werden sie durch eine Algebra von nichtkommutierenden Koordinaten beschrieben, welche die Funktionenalgebra eines kommutativen Raums ersetzt.

Eine besondere Rolle spielen so genannte q-deformierte Quantenräume, da bei diesen nicht nur der Raum selbst nichtkommutativ wird, sondern die Symmetriegruppe des Raumes ebenfalls abgeändert wird. Auf diese Weise erhält man Quantengruppen. Im ersten Teil der Arbeit wird als spezielles Beispiel der q-deformierte dreidimensionale euklidische Raum studiert. Um die Darstellungen in einfacher Weise zu gewinnen, wird die den Raum definierende Algebra im Produkt zweier miteinander kommutierender Algebren realisiert. Weiter wird mit Hilfe dieser Zerlegung die nichtkommutative Algebra in die Algebra der Differenzialoperatoren auf dem kommutativen $\mathbb{R}^3$ eingebettet. Die Koordinatenalgebra wird dann noch um Impulsoperatoren erweitert, womit man eine q-deformierte Heisenbergalgebra erhält. Es werden Darstellungen dieser Algebra betrachtet; insbesondere wird sie auf der Koordinatenalgebra selbst realisiert, dies entspricht der Ortsdarstellung in der gewöhnlichen Quantenmechanik.

Eichtheorien bilden eine Möglichkeit, konkrete physikalische Modelle zu erhalten. Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich daher mit dem Versuch, Eichtheorien auf nichtkommutativen Räumen zu formulieren. Dazu wird zunächst das Konzept kovarianter Koordinaten und kovarianter Ableitungen eingeführt. Mit diesen können Tensoren konstruiert werden, die der Feldstärke in gewöhnlichen Eichtheorien entsprechen. Mit Hilfe dieser Tensoren erhält man eine Wirkung, welche eine Beschreibung der Dynamik der Eichfelder ermöglicht. Es stellt sich heraus, dass es möglich ist, Eichtheorien auf nichtkommutativen Räumen mit Eichtheorien auf kommutativen Räumen in Verbindung zu bringen (Seiberg-Witten-Abbildung). Dies wird insbesondere unter dem Gesichtspunkt vorgestellt, dass es damit möglich ist, einhüllenwertige Eichtheorien mit endlich vielen Eichfeldkomponenten und Eichparametern zu beschreiben.

Zur Konstruktion dieser Abbildung wird das Sternprodukt von Funktionen kommutierender Variabler benutzt. Es wird daher eine kurze Einführung in den Sternformalismus gegeben, und es werden auch einige nichtkommutative Strukturen als Beispiele behandelt.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung **3**

Inhaltsverzeichnis **5**

1 Einführung **7**

2 Euklidischer Quanten-Raum **13**

2.1 Definition der Algebra . . . 13
2.1.1 Koordinaten- und Drehimpulsalgebra . . . 13
2.1.2 $su_q(2)$, $su_q(1,1)$ und Koprodukt . . . 15
2.1.3 Algebrahomomorphismus $su_q(2) \to \mathbb{R}_q^3$ . . . 16
2.1.4 Die K-Algebra . . . 18
2.2 Hilbertraumdarstellungen . . . 19
2.2.1 Darstellungen der $su_q(2)$ (T-Algebra) . . . 19
2.2.2 Darstellungen der $su_q(1,1)$ (K-Algebra) . . . 22
2.2.3 Darstellung der gesamten TX-Algebra . . . 23
2.3 Basistransformation . . . 26
2.3.1 Diagonalisierung des Gesamtdrehimpulses . . . 26
2.3.2 Basistransformation . . . 28
2.4 Realisierung durch Differenzialoperatoren im $\mathbb{R}^3$ . . . 29
2.4.1 X- und t-Algebra . . . 29
2.4.2 K-Algebra . . . 32
2.4.3 Bahndrehimpuls . . . 35

3 *q*-deformierte Heisenbergalgebra **37**

3.1 Konstruktion . . . 37
3.1.1 Bedingungsgleichungen und deren Lösung . . . 37
3.1.2 Reelle Impulse und Heisenbergalgebra . . . 39
3.1.3 Identifizierung der Ableitungen . . . 40
3.2 Darstellungen der Heisenbergalgebra . . . 41
3.2.1 Hilbertraumdarstellungen . . . 41
3.2.2 Realisierung durch Differenzialoperatoren . . . 41
3.3 Realisierung der Heisenbergalgebra auf Feldern . . . 44
3.3.1 Definitionen: Felder und Wirkung der Operatoren . . . 44
3.3.2 Ergebnisse . . . 45
3.3.3 Leibnizregeln . . . 45

4 Sternformalismus **47**
4.1 Einführung in den $*$-Formalismus 47
4.1.1 Definition des $*$-Produkts 47
4.1.2 Allgemeine Überlegungen 49
4.2 Beispiele 50
4.2.1 Kanonische Struktur und Liealgebra-Struktur 50
4.2.2 Quantenraum-Strukturen 52

5 Eichtheorie **56**
5.1 Definition und Konzept 57
5.1.1 Eichtransformationen 57
5.1.2 Kovariante Koordinaten 58
5.1.3 Kovariante Ableitungen 59
5.1.4 Anmerkung zu nichtabelschen Eichtransformationen 63
5.2 Seiberg-Witten-Abbildung 63
5.2.1 Eichtheorie im $*$-Formalismus 64
5.2.2 Konstruktion 65
5.2.3 Konsistenzbedingung und Anmerkungen 67
5.3 Dynamik 69
5.4 Beispiele für Eichtheorien auf Quantenräumen 70
5.4.1 Maninebene 71
5.4.2 Dreidimensionaler Euklidischer Quantenraum 78

A Unterschiedliche Versionen der $su_q(2)$ **80**

B q-Funktionen **83**
B.1 q-Jacobi-Polynome 84

C Einige Algebrarelationen explizit **87**

D Explizite Realisierung auf Feldern **91**
D.1 Wirkung 91
D.2 Leibnizregeln 94

Literaturverzeichnis **96**

Danksagung **101**

Lebenslauf **102**

Kapitel 1

Einführung

1 Gegenstand dieser Arbeit sind nichtkommutative Räume. Es wird oft angenommen, dass die Struktur der Raumzeit bei sehr kleinen Abständen abgeändert werden muss [18, 73]. Ein wichtiger Hinweis in diese Richtung sind die Inkonsistenzen, welche beim Versuch einer Quantisierung der Gravitation auftreten. In der Entwicklung der modernen Physik, d.h. der Quantentheorie, musste der kommutative Phasenraum der klassischen Mechanik aufgegeben und durch eine nichtkommutative Struktur, die der Heisenbergalgebra, ersetzt werden, es ist daher naheliegend von der Annahme einer kommutativen Raumzeit abzurücken und zu untersuchen, welche physikalischen Phänomene eine nichtkommutative Raumzeit bedingt.

Zur Untersuchung nichtkommutativer Räume wird versucht, Prinzipien zu folgen, die sich beim Studium kommutativer Räume bewährt haben. So ist aus der Mathematik wohlbekannt [31, 60], dass lokalkompakte Mannigfaltigkeiten äquivalent durch ihre Funktionenalgebra beschrieben werden können. Und umgekehrt jeder kommutativen C^*-Algebra eine Mannigfaltigkeit entspricht, zu deren Funktionenalgebra sie isomorph ist. Daher ist es natürlich, nichtkommutative Räume durch eine nichtkommutative Algebra von Funktionen zu beschreiben. In der Physik sind jedoch nicht völlig allgemeine Strukturen [11] von Belang, vielmehr interessieren Räume, die gewisse weitere schöne Eigenschaften besitzen [52].

Eine wichtige Rolle spielen dabei die Symmetrien, die ein Raum besitzt. Dies zeigt sich z.B. darin, dass ihnen erhaltene Größen entsprechen [62]. Es erscheint daher sinnvoll, auch nichtkommutative Räume zusammen mit ihren Symmetriegruppen zu betrachten. Ist nun ein kommutativer Raum mit darauf wirkender Symmetriegruppe gegeben und wird dieser etwas abgeändert (also nichtkommutativ gemacht), wird gefordert, dass die auf den so erhaltenen nichtkommutativen Raum wirkende Symmetrie aus derjenigen des ursprünglichen Raumes ebenfalls durch eine kleine Änderung hervorgeht.

Nichtkommutative Stukturen, welche sich dann anbieten, sind so genannte Quantenräume, genauer q-deformierte Räume, auf die Quantengruppen wirken. Quantengruppen gehen aus den klassischen Gruppen durch eine Deformation hervor. Als Hopfalgebren besitzen sie eine wohlbekannte mathematische Struktur.

Die Eichtheorie hat sich in der theoretischen Hochenergiephysik, und dort besonders erfolgreich im Rahmen des Standardmodells, als eine solide Basis zur Formulierung konkreter Modelle erwiesen. Es liegt daher nahe, eine unter lokalen Eichtransformationen kovariante Dynamik zu fordern. Hier ist lokal im Sinne des nichtkommutativen Raumes zu verstehen, dass also die Eichparameter Funktionen nicht kommutierender Koordinaten sind.

In dieser Arbeit soll versucht werden, diesen Konzepten folgend, Beispiele von nichtkommutativen Räumen und Modellen darauf zu untersuchen. Entsprechend gliedert sie sich im Wesentlichen in zwei Teile.

2 Im ersten Teil, das sind Kapitel 2 und 3, wird der dreidimensionale q-deformierte euklidische Raum behandelt. Ausgangspunkt ist eine nichtkommutative Koordinatenalgebra, welche den „Raum“ definiert, und die zugehörige Symmetriestruktur, die q-deformierte Drehimpulsalgebra.

Um die Struktur des nichtkommutativen Raumes besser zu erfassen, werden zunächst Darstellungen dieser Algebra konstruiert. Da die Koordinaten nicht kommutieren, können nicht alle Koordinaten gleichzeitig diagonalisiert werden; zudem ist das Spektrum dieser Koordinaten diskret. Der Raum ist „quantisiert“, die Eigenwerte der diagonalen Operatoren, also die möglichen Messwerte der Koordinaten, veranschaulichen was von der glatten, kontinuierlichen Struktur des kommutativen Raumes noch übrigbleibt.

Darauf aufbauend wird die q-deformierte Algebra durch Differenzialoperatoren auf dem gewöhnlichen kommutativen dreidimensionalen euklidischen Raum realisiert. Die q-deformierte Algebra wird dadurch in die undeformierte Heisenbergalgebra eingebettet. Modelle, die auf der q-deformierten Algebra aufbauen können in dieser Art und Weise als komplizierte, nichtlokale quantenmechanische Modelle verstanden werden.[1]

Anschließend wird die Koordinatenalgebra durch Hinzufügen von Impulsoperatoren zu einer q-deformierten Heisenbergalgebra erweitert. Dies ermöglicht es, eine q-deformierte Quantenmechanik zu formulieren. Es stellt sich heraus, dass die Impulse durch die anderen Generatoren der Algebra ausgedrückt werden können. Die Darstellungen der q-Heisenbergalgebra können dadurch in einfacher Weise erhalten werden.

Der zweite Teil der Arbeit (Kapitel 4 und 5) beschäftigt sich mit dem Versuch, Eichtheorien auf nichtkommutativen Räumen zu formulieren. Die Vorgehensweise ist zunächst rein algebraisch. Eine Eichtransformation ist die Transformation eines Feldes, das ist ein Element der Algebra, unter der Wirkung eines von den nichtkommutativen Koordinaten abhängigen Elements der Eichgruppe.

Da die Eichparameter von den nichtkommutativen Koordinaten abhängen und somit im Allgemeinen nicht mit ihnen kommutieren, ist die Multiplikation eines Feldes mit einer Koordinate keine kovariante Operation. Um kovariante Koordinaten zu erhalten ist daher die Einführung eines Eichpotenzials notwendig. Damit ist es dann möglich, in Analogie zur üblichen Eichtheorie, einen (Feldstärke-/Krümmugs-) Tensor zu definieren.

Zur Formulierung einer Dynamik, und auch um im Limes verschwindenden Deformationsparameters den klassischen Grenzfall zu erhalten, müssen jedoch kovariante Ableitungen verwendet werden. Dazu ist es notwendig, die Koordinatenalgebra um

[1]Dies ist ein Beispiel dafür, wie ein äußeres Feld auch als Teil der Geometrie betrachtet werden kann [54]. Hier läßt sich eine Theorie mit einem komplizierten Potenzial auf einem kommutativen Raum als „freie“ Theorie in einer nichtkommutativen Geometrie auffassen. Weitere Beispiele sind die Metrik einerseits als Feld auf einem flachen Raum, andererseits als Geometrie eines gekrümmten Raums, und auch die nichtkommutativen Strukturen, wie sie in der Stringtheorie auftreten.

Ableitungen zu erweitern, welche dann kovariant gemacht werden müssen. Dies wird für den kanonischen Fall und, zum Teil, für die Quantenebenen-Struktur – zwei Beispiele nichtkommutativer Räume, siehe unten – durchgeführt.

Es zeigt sich, dass es möglich ist, einen Zusammenhang zwischen der Eichtheorie auf dem nichtkommutativen Raum und der Eichtheorie auf einem kommutativen Raum herzustellen. Um dies zu erreichen, wird in Kapitel 4 zunächst das so genannte Sternprodukt eingeführt:

Ist eine Mannigfaltigkeit mit Poissonstruktur gegeben, wird dazu das kommutative punktweise Produkt der Funktionenalgebra C^∞ auf der Mannigfaltigkeit durch ein nichtkommutatives $*$-Produkt ersetzt. Dieses ist gegeben durch eine Potenzreihe in einem formalen Parameter, wobei die Summanden bilineare Abbildungen von $C^\infty \times C^\infty$ nach C^∞ sind. Der $*$-Kommutator zweier Funktionen beginnt mit einem im formalen Parameter linearen Term, dabei ist der Koeffizient durch die Poissonklammer der beiden Funktionen gegeben. Ersetzen des formalen Parameters durch die Planckkonstante führt so in niedrigster Ordnung gerade zu den Heisenbergschen Vertauschungsrelationen; daher stammt auch der Name Deformationsquantisierung für das Sternprodukt.

Jetzt ist es möglich die Algebra, und damit auch die nichtkommutative Eichtheorie, mittels des $*$-Produkts auf einem kommutativen Raum mit abgeänderter Multiplikation, eben dem $*$-Produkt, zu realisieren. In der so erhaltenen Entwicklung im formalen Parameter (Deformationsparameter) kann die nichtkommutative Eichtheorie Ordnung für Ordnung durch die gewöhnliche Eichtheorie ausgedrückt werden. Umgekehrt kann dies so interpretiert werden, dass der nichtkommutative Raum ein Effekt der Eichtheorie ist.

3 Explizit werden in dieser Arbeit nichtkommutative Räume folgendermaßen beschrieben: Der Raum ist charakterisiert durch die von Elementen $\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^N$ – den Koordinaten – frei erzeugte Algebra modulo gewisser Relationen $\mathcal{R}$, welche von den Koordinaten $\hat{x}^i$ erfüllt werden:

$$\frac{\mathbb{C}[[\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^N]]}{\mathcal{R}}, \tag{1.1}$$

wobei formale Potenzreihen zugelassen werden. Dies ist eine rein algebraische Definition; Aussagen über die Topologie usw. werden nicht gemacht. Analytische Eigenschaften werden erst dann wichtig, wenn Darstellungen der Algebra betrachtet werden.

Typische Beispiele nichtkommutativer Raumstrukturen, welche in dieser Arbeit öfter auftauchen werden, sind:

Kanonische Struktur

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}, \qquad \theta^{ij} \in \mathbb{C}, \tag{1.2}$$

Liealgebra-Struktur

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i f^{ij}{}_k \hat{x}^k, \qquad f^{ij}{}_k \in \mathbb{C}, \tag{1.3}$$

Quantenebenen-Struktur

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i C^{ij}_{kl} \hat{x}^k \hat{x}^l, \qquad C^{ij}_{kl} \in \mathbb{C}. \tag{1.4}$$

Die kanonische Struktur ist aus der Quantenmechanik wohlbekannt; sie ist sicherlich die naheliegendste Abänderung eines kommutativen Raumes. In den letzten Jahren gab es auch in der Stringtheorie vielfältige Literatur zu dieser nichtkommutativen Struktur; dort werden D-Branes in einem konstanten Hintergrund B-Feld in dieser Weise nichtkommutativ [12, 20, 68, 71].

Liealgebren und Liegruppen spielen natürlich schon lange eine wichtige Rolle in Physik und Mathematik.

Quantenräume und damit verbunden Quantengruppen sind seit ungefähr 20 Jahren Gegenstand aktiver Forschung. Hier wird nicht nur die Raumstruktur deformiert, sondern gleichzeitig auch die auf den Raum wirkende Symmetriegruppe.

Eine wichtige Eigenschaft, die diese Beispiele besitzen, ist die so genannte Poincaré-Birkhoff-Witt Eigenschaft: Die von den Elementen $\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^N$ erzeugte freie Algebra $\mathcal{T} \equiv \mathbb{C}\langle \hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^N \rangle$ besitzt, assoziert mit ihrer natürlichen Graduierung $\mathcal{T}^k$ eine Filtrierung $\mathcal{T}^{(k)} \equiv \bigoplus_{l=0}^k \mathcal{T}^l$. Projektion auf die Quotientenalgebra $\mathcal{A} = \mathcal{T}/\mathcal{R}$ ergibt auch auf dieser eine Filtrierung:

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}^{(0)} \subset \mathcal{A}^{(1)} \subset \mathcal{A}^{(2)} \ldots \subset \mathcal{A}, \qquad \bigcup \mathcal{A}^{(l)} = \mathcal{A} \\ &\mathcal{A}^{(l)} \cdot \mathcal{A}^{(k)} \subset \mathcal{A}^{(l+k)}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

mit

$$a \in \mathcal{A}^{(l)} \quad \Longleftrightarrow \quad a \in \frac{\mathcal{T}^{(l)}}{\mathcal{R}}. \tag{1.6}$$

Die Poincaré-Birkhoff-Witt Eigenschaft besagt dann, dass die mit der Filtrierung assozierte graduierte Algebra

$$(\mathrm{Gr}(\mathcal{A}))^l \equiv \frac{\mathcal{A}^{(l)}}{\mathcal{A}^{(l-1)}} \tag{1.7}$$

isomorph zur symmetrischen Algebra ist. Der Name Poincaré-Birkhoff-Witt kommt aus der Theorie der Liealgebren bzw. deren Einhüllenden. Für einen Beweis dort siehe z.B. [17, 72].

Für physikalische Anwedungen ist es sinnvoll, zu fordern, dass die Algebren zusätzlich eine Konjugation besitzen, d.h. einen antilinearen involutiven Algebraautomorphismus. Die so erhaltenen reellen (also selbstadjungiert im algebraischen Sinne) Koordinaten sollten dann auf einem Hilbertraum durch selbstadjungierte Operatoren dargestellt werden.

4 Quantengruppen sind Deformationen der klassischen Gruppen in der Kategorie der Hopfalgebren. Als solche tragen sie eine Bialgebrastruktur und besitzen eine Antipode. Diese Strukturen sind aus der Darstellungstheorie motiviert, ein Grund weshalb solche Deformationen in der mathematischen Physik Interesse finden. Dass eine Algebra eine Bialgebra ist bedeutet, dass sie neben der Algebrastruktur eine Koalgebrastruktur, bestehend aus einem Koprodukt Δ und einer Koeins ε, besitzt und dass diese beiden Strukturen miteinander verträglich sind, also Δ und ε Algebrahomomorphismen sind. Genauer ist das Koprodukt eine Abbildung von der Algebra ins Tensorprodukt der Algebra mit sich selbst:

$$\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \qquad a \mapsto \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}, \tag{1.8}$$

wobei wir hier die Sweedler-Notation verwendet haben. Die Koeins ist eine Abbildung von der Algebra in den Grundkörper ($\mathbb{C}$):

$$\varepsilon : \mathcal{A} \to \mathbb{C}. \tag{1.9}$$

Die Bedingungen, die diese beiden Abbildungen erfüllen müssen, um eine Koalgebra zu definieren, sind

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta &= (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta \\ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \mathrm{id} &= (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Ein Koprodukt mit diesen Eigenschaften erlaubt es, aus dem Tensorprodukt zweier Darstellungsräume V, W wieder eine Darstellung der Algebra zu machen:

$$a(v \otimes w) = \sum a_{(1)} v \otimes a_{(2)} w, \qquad a \in \mathcal{A}, v \in V, w \in W. \tag{1.11}$$

Mit der Koeins ergibt sich vermöge

$$ak = \varepsilon(a)k, \qquad a \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{C} \tag{1.12}$$

sofort eine Darstellung der Algebra auf dem Grundkörper. Die Antipode

$$S : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \tag{1.13}$$

ist ein antilinearer Algebrahomomorphismus und muss

$$m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon = m \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta \tag{1.14}$$

erfüllen, um aus $(\mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ eine Hopfalgebra zu machen (hier stehen $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ und $\eta : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ für die Multiplikation und die Eins der Algebra $\mathcal{A}$). Sie entspricht der Inversenbildung bei einer Gruppe. Darstellungstheoretisch ermöglicht sie es, den Dualraum V^* eines Linksmoduls V der Algebra $\mathcal{A}$ wieder zu einem Linksmodul zu machen:

$$(af)(v) \equiv f(S(a)v), \qquad a \in \mathcal{A}, f \in V^*, v \in V. \tag{1.15}$$

Ausführliche Darstellungen dieser Begiffsbildungen und auch der Deformation von Gruppen sind zum Beispiel in den Artikeln [21, 23, 82] und in den Monografien [1, 42, 43, 51, 55, 75] zu finden.

Für Koalgebren gibt es die zum Begriff einer Darstellung einer Algebra duale Begriffsbildung von Kodarstellungen. Quantenräume sind nun Komoduln der deformierten Funktionenalgebra von Gruppen. Bzw., wenn die Einhüllende der zur Gruppe gehörenden Liealgebra deformiert wird, Moduln der deformierten Liealgebra. Die Räume, die so erhalten werden sind im Allgemeinen nichtkommutativ.

Im Falle q-deformierter Räume sind die Vertauschungsrelationen $\mathcal{R}$ quadratisch in den Erzeugenden $\hat{x}^i$. Sie können geschrieben werden als

$$\hat{x}^i \hat{x}^j = \hat{R}^{ij}_{kl} \hat{x}^k \hat{x}^l, \qquad \hat{R}^{ij}_{kl} \in \mathbb{C}. \tag{1.16}$$

Die $\hat{R}$-Matrix erfüllt die Yang-Baxter Gleichung. D.h. mit den Definitionen

$$\begin{aligned} \hat{R}_{12}{}^{i_1\, i_2\, i_3}_{j_1\, j_2\, j_3} &\equiv \hat{R}^{i_1\, i_2}_{j_1\, j_2}\, \delta^{i_3}_{j_3} \\ \hat{R}_{23}{}^{i_1\, i_2\, i_3}_{j_1\, j_2\, j_3} &\equiv \delta^{i_1}_{j_1}\, \hat{R}^{i_2\, i_3}_{j_2\, j_3} \end{aligned} \tag{1.17}$$

gilt

$$\hat{R}_{12}\, \hat{R}_{23}\, \hat{R}_{12} = \hat{R}_{23}\, \hat{R}_{12}\, \hat{R}_{23}. \tag{1.18}$$

Ist die Yang-Baxter Gleichung (1.18) erfüllt, so besitzt die Algebra (1.16) die Poincaré-Birkhoff-Witt Eigenschaft.

Kapitel 2

Euklidischer Quanten-Raum

In diesem Kapitel behandeln wir als spezielles Beispiel für nichtkommutative Räume den dreidimensionalen euklidischen Quantenraum, eine q-Deformation des kommutativen $\mathbb{R}^3$.

Weiter betrachten wir die Symmetriestruktur dieses nichtkommutativen Raumes. In unserem Fall ist dies $so_q(3)$[1], die q-Deformation der Einhüllenden der Liealgbra $so(3)$. Die Algebra des Quantenraums ist eine $so_q(3)$-(Links-)Modulalgebra. D.h. die Koordinatenalgebra bildet als Vektorraum einen (Links-)Modul der Symmetriealgebra und die Vertauschungsrelationen der Koordinaten sind mit der Wirkung $\triangleright$ der Symmetriealgebra verträglich:

$$T \triangleright (\hat{x}^i \hat{x}^j) = \sum (T_{(1)} \triangleright \hat{x}^i)(T_{(2)} \triangleright \hat{x}^j), \qquad T \triangleright 1 = \varepsilon(T)1. \tag{2.1}$$

Hier ist T ein Element der Symmetriealgebra, und wir verwenden wieder die Sweedler-Notation: $\Delta(T) = \sum T_{(1)} \otimes T_{(2)}$. Die Vertauschungsrelationen zwischen den Generatoren der Symmetrie und den Koordinaten sind dann gegeben durch [42, 55]:

$$T\hat{x}^i = \sum (T_{(1)} \triangleright \hat{x}^i) T_{(2)}. \tag{2.2}$$

Im Folgenden definieren wir zunächst die Algebra durch Angabe der Vertauschungsrelationen und behandeln danach ihre Darstellungen.

Die Darstellung in diesem Kapitel folgt im Wesentlichen den beiden Veröffentlichungen [10] und [70].

2.1 Definition der Algebra

2.1.1 Koordinaten- und Drehimpulsalgebra

Verwendet wird die Notation aus [50], in der die Generatoren der Algebra mit Großbuchstaben[2] X^A und T^A bezeichnet werden, wobei die Indizes A, B jeweils über

[1] Wir werden für die q-Deformation der Einhüllenden einer Liealgebra g durchgehend die Bezeichnung g_q statt (der korrekteren) $U_q(g)$ verwenden.

[2] Diese Notation wird nur für das spezielle Beispiel des $\mathbb{R}^3_q$ in den Kapiteln 2 und 3 benutzt. Im allgemeineren zweiten Teil der Arbeit verwenden wir die Bezeichnung $\hat{x}$ für nichtkommutierende Koordinaten.

$+,-,3$ laufen. In [48, 50] werden die Algebra und ihre Konstruktion eingehender diskutiert.

Wir beginnen mit dem euklidischen Quantenraum $\mathbb{R}^3_q$. Dieser wird von den drei Koordinaten X^+, X^-, X^3 erzeugt. Die Relationen sind:

$$\begin{aligned} X^3X^+ - q^2X^+X^3 &= 0 \\ X^3X^- - q^{-2}X^-X^3 &= 0 \\ X^-X^+ - X^+X^- &= \lambda X^3X^3, \qquad \lambda = q - q^{-1}, \quad q \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Für die Darstellungstheorie werden wir in dieser Arbeit $q > 1$ verwenden. Für $0 < q < 1$ erhält man äquivalente Ergebnisse, da die Algebren $\mathbb{R}^3_q$ und $\mathbb{R}^3_{q^{-1}}$ isomorph sind, vermöge $X^+ \mapsto X^-$, $X^3 \mapsto X^3$. Die Algebra (2.3) erlaubt eine Konjugation – daher der Name $\mathbb{R}^3_q$:

$$\overline{X^+} = -qX^-, \qquad \overline{X^3} = X^3. \tag{2.4}$$

Die deformierte Liealgebra $su_q(2) \simeq so_q(3)$ wird erzeugt von T^+, T^-, T^3 mit den Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} q^{-1}T^+T^- - qT^-T^+ &= T^3 \\ q^2T^3T^+ - q^{-2}T^+T^3 &= (q+q^{-1})T^+ \\ q^2T^-T^3 - q^{-2}T^3T^- &= (q+q^{-1})T^-. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Die Konjugation ist gegeben durch

$$\overline{T^+} = \frac{1}{q^2}T^-, \qquad \overline{T^3} = T^3. \tag{2.6}$$

Die Koordinaten X^A bilden eine Spin-1-Darstellung[3] der $su_q(2)$. Damit sind die Vertauschungsrelationen zwischen den T und den X

$$\begin{aligned} T^3X^3 &= X^3T^3 \\ T^3X^+ &= q^{-4}X^+T^3 + q^{-1}(1+q^{-2})X^+ \\ T^3X^- &= q^4X^-T^3 - q(1+q^2)X^- \\[1em] T^+X^3 &= X^3T^+ + q^{-2}\sqrt{1+q^2}X^+ \\ T^+X^+ &= q^{-2}X^+T^+ \\ T^+X^- &= q^2X^-T^+ + q^{-1}\sqrt{1+q^2}X^3 \\[1em] T^-X^3 &= X^3T^- + q\sqrt{1+q^2}X^- \\ T^-X^+ &= q^{-2}X^+T^- + \sqrt{1+q^2}X^3 \\ T^-X^- &= q^2X^-T^-. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Der q-deformierte Radius ist gegeben durch

$$\begin{aligned} R^2 &= X^3X^3 - qX^+X^- - q^{-1}X^-X^+ \\ &= q^2\overline{X^3}X^3 + (1+q^{-2})\overline{X^+}X^+. \end{aligned} \tag{2.8}$$

[3] Darstellungen der $su_q(2)$ werden z.B. in Abschnitt 2.2.1 behandelt.

Dieser ist zentral in der TX-Algebra, hermitesch ($\overline{R^2} = R^2$) und positiv. Wir erweitern die Algebra noch um $R = (R^2)^{\frac{1}{2}}$ und $R^{-1} = (R^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Der Casimiroperator der $su_q(2)$ ist

$$\vec{T}^2 = \frac{q^2}{\lambda^2}\tau^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\lambda^2}\tau^{-\frac{1}{2}} + \tau^{-\frac{1}{2}}T^+T^- - \frac{1+q^2}{\lambda^2}. \tag{2.9}$$

Hier haben wir

$$\tau = 1 - \lambda T^3 \tag{2.10}$$

eingeführt und die Algebra um $\tau^{\frac{1}{2}}$ und $\tau^{-\frac{1}{2}}$ erweitert. τ ist hermitesch ($\overline{\tau} = \tau$), seine Vertauschungsregeln mit den Elementen T^A und X^A folgen aus (2.5) und (2.7), wenn man dort T^3 durch τ ausdrückt ($T^3 = \lambda^{-1}(1-\tau)$):

$$\begin{aligned} \tau X^3 &= X^3\tau \\ \tau X^\pm &= q^{\mp 4}X^\pm\tau \\ \tau T^3 &= T^3\tau \\ \tau T^\pm &= q^{\mp 4}T^\pm\tau. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Im Limes $q \to 1$ erhält man aus den obigen Relationen den kommutativen euklidischen dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ (aus (2.3)) und die Liealgebra $su(2)$ (aus (2.5)) mit üblichen Radius (aus 2.8) und Casimiroperator (aus 2.9). τ besitzt kein klassisches Analogon, bzw. konvergiert gegen 1.

Für die Bestimmung der Darstellungen benötigen wir den Bahndrehimpuls [50]. Die Bahndrehimpulsoperatoren L^+, L^-, L^3 können durch die Algebraelemente T^A ausgedrückt werden, siehe Gleichung (A.12) im Anhang. Wir wollen als Einschränkung (Bahndrehimpulsbedingung)

$$L \circ X = L^3X^3 - qL^+X^- - q^{-1}L^-X^+ = 0 \tag{2.12}$$

fordern; siehe dazu auch [50], wo gezeigt wird, dass diese Relation innerhalb der q-Heisenbergalgebra gilt. Im Sinne der q-Metrik

$$g_{+-} = -q, \quad g_{-+} = -q^{-1}, \quad g_{33} = 1 \tag{2.13}$$

bedeutet die Bedingung (2.12), dass der Bahndrehimpuls orthogonal zu den Koordinaten ist. Dies ist analog zum undeformierten Fall, wo $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ ($\vec{p}$=Impuls) ist und das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{L}$ und $\vec{x}$ entsprechend verschwindet: $\vec{L} \cdot \vec{x} = 0$.

2.1.2 $su_q(2)$, $su_q(1,1)$ und Koprodukt

Die Relationen (2.5) definieren die Algebra der $sl_q(2)$. Wir wollen hier zwei reelle Formen dieser Algebra betrachten: die $su_q(2)$ und die $su_q(1,1)$. Mit T^A bezeichnen wir die $su_q(2)$-Generatoren, mit K^A die $su_q(1,1)$-Generatoren. Unterschiedlich sind dann die Konjugationseigenschaften:

$$\begin{array}{rcl} su_q(2) & : & \overline{T^3} = T^3, \quad \overline{T^+} = q^{-2}T^- \\ su_q(1,1) & : & \overline{K^3} = K^3, \quad \overline{K^+} = -q^{-2}K^- \end{array} \tag{2.14}$$

Die $sl_q(2)$ besitzt das folgende Koprodukt:

$$\begin{aligned} \Delta(T^3) &= T^3 \otimes 1 + \tau \otimes T^3 \\ \Delta(T^\pm) &= T^\pm \otimes 1 + \tau^{\frac{1}{2}} \otimes T^\pm, \end{aligned} \tag{2.15}$$

wobei τ durch die Beziehung (2.10) definiert ist und mit (2.15)

$$\Delta(\tau) = \tau \otimes \tau \tag{2.16}$$

folgt.

Mit dem Koprodukt wird das Tensorprodukt zweier Darstellungen wieder zu einer Darstellung. In Abschnitt 2.2 werden wir Darstellungen konstruieren, in denen τ diagonal ist. Die Eigenwerte von τ sind dann entweder alle positiv, alle negativ oder identisch Null. Falls τ in der ersten Darstellung (d.h. des ersten Tensorfaktors) negativ ist, ist die Komultiplikation (2.15) ungeeignet, da Δ dann zwar ein Homomorphismus, aber kein $*$-Homomorphismus ist, man also aus dem Tensorprodukt von $su_q(2)$- ($su_q(1,1)$-) Darstellungen nicht wieder eine $su_q(2)$- ($su_q(1,1)$-) Darstellung erhält. Dies liegt daran, dass dann $\tau^{\frac{1}{2}}$ in (2.15) anti-hermitesch ist.

Ist τ in der ersten Darstellung positiv, erhält man mit dem Koprodukt (2.15) aus dem Tensorprodukt zweier Darstellungen der T-Algebra (K-Algebra) wieder eine Darstellung der T-Algebra (K-Algebra), also insbesondere mit korrekter Konjugation. Wegen (2.16) ist dann τ in der Produktdarstellung postiv oder negativ, je nachdem ob τ in der zweiten Darstellung positiv oder negativ ist.

Für den Fall, dass τ in der ersten Darstellung negativ ist führen wir eine etwas abgeänderte Komultiplikation ein:

$$\begin{aligned} \Delta_\beta(T^3) &= T^3 \otimes 1 + \tau \otimes T^3 \\ \Delta_\beta(T^\pm) &= T^\pm \otimes 1 \pm (-\tau)^{\frac{1}{2}} \otimes T^\pm. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Wegen des Minuszeichens ist $(-\tau)^{\frac{1}{2}}$ dann hermitesch. Multipliziert man eine Darstellung der $T(K)$-Algebra mit einer Darstellung der $K(T)$-Algebra, erhält man durch das modifizierte Koprodukt eine Darstellung der $T(K)$-Algebra:

$$\begin{aligned} &T^3 \otimes 1 + \tau \otimes K^3 \\ &T^\pm \otimes 1 \pm (-\tau)^{\frac{1}{2}} \otimes K^\pm \end{aligned} \tag{2.18}$$

ist eine Darstellung der T-Algebra;

$$\begin{aligned} &K^3 \otimes 1 + \tau_k \otimes T^3 \\ &K^\pm \otimes 1 \pm (-\tau_k)^{\frac{1}{2}} \otimes T^\pm \end{aligned} \tag{2.19}$$

ist eine Darstellung der K-Algebra.

2.1.3 Algebrahomomorphismus $su_q(2) \to \mathbb{R}_q^3$

Es existiert ein Algebrahomomorphismus von der T-Algebra (2.5) in die X-Algebra (2.3) [8, 10, 29]. Dazu fassen wir die TX-Relationen (2.7) als inhomogene Gleichungen für die T auf. Wir bestimmen eine spezielle Lösung t dieses Gleichungssystems, die dann zum Algebrahomomorphismus führt:

$$\begin{aligned}
T^+ &\mapsto t^+ = -\frac{1}{\lambda q^3}\sqrt{1+q^2}X^+(X^3)^{-1} \\
T^- &\mapsto t^- = \frac{q^2}{\lambda}\sqrt{1+q^2}X^-(X^3)^{-1} \\
T^3 &\mapsto t^3 = \frac{1}{\lambda}\left(1+R^2(X^3)^{-2}\right),
\end{aligned} \tag{2.20}$$

wobei die Algebra um $(X^3)^{-1}$ erweitert wurde.

Mit (2.3) zeigt man, dass die Elemente t^A die T-Algebrarelationen (2.5) erfüllen. Ebenso gelten die TX-Vertauschungsrelationen für die t^A, so wurden sie ja konstruiert. Die X-Konjugationseigenschaften (2.4) führen dazu, dass die t^A die Konjugation (2.6) der $su_q(2)$ erfüllen:

$$\overline{t^+} = q^{-2}t^-, \qquad \overline{t^3} = t^3. \tag{2.21}$$

Man hat also einen $*$-Algebrahomomorphismus.

Aus den XX-Relationen (2.3) folgen neben (2.5) weitere Relationen für die t:

$$\tau_t = 1 - \lambda t^3 = -R^2(X^3)^{-2} \tag{2.22}$$

und

$$\begin{aligned}
t^+t^- &= -\frac{1}{\lambda^2}\left(1+q^2\tau_t\right) \\
t^-t^+ &= -\frac{1}{\lambda^2}\left(1+q^{-2}\tau_t\right).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Aus (2.22) liest man ab, dass τ_t negativ ist, da R^2 positiv und X^3 reell ist. Für den Casimiroperator (2.9) folgt

$$\vec{T}_t^2 = -\frac{1+q^2}{\lambda^2}. \tag{2.24}$$

Später werden wir sehen, dass dies die Darstellung der t-Algebra bereits vollständig festlegt.

Umgekehrt erlauben uns die Relationen (2.20), die Elemente XR^{-1} durch die Elemente t auszudrücken. Wegen $X^3R^{-1} = \pm\sqrt{(X^3)^2R^{-2}}$ ist das Vorzeichen nicht bestimmt:

$$\begin{aligned}
X^3R^{-1} &= \pm(-\tau_t)^{-\frac{1}{2}} \\
X^+R^{-1} &= \mp\frac{\lambda q^3}{\sqrt{1+q^2}}t^+(-\tau_t)^{-\frac{1}{2}} \\
X^-R^{-1} &= \pm\frac{\lambda}{q^2\sqrt{1+q^2}}t^-(-\tau_t)^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Aus einer Darstellung der t-Algebra (einer $su_q(2)$) erhalten wir damit sofort eine Darstellung des $\mathbb{R}_q^3$. Da immer die Kombination X^AR^{-1} auftritt, diskutieren wir hier sozusagen die Algebra einer deformierten 2-Sphäre.

2.1.4 Die $\boldsymbol{K}$-Algebra

Nachdem wir eine spezielle Lösung (2.20) der inhomogenen Gleichungen (2.7) bestimmt haben, betrachten wir jetzt für eine vollständige Lösung die homogenen Gleichungen. Dazu machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} T^{\pm} &= \Delta^{\pm} + t^{\pm} \\ T^{3} &= \Delta^{3} + t^{3}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Die Δ genügen dann dem homogenen Anteil der Gleichungen (2.7), also

$$\begin{aligned} X^{\pm}\Delta^{+} &= q^{\pm 2}\Delta^{+}X^{\pm} \\ X^{3}\Delta^{+} &= \Delta^{+}X^{3} \\ \\ X^{\pm}\Delta^{-} &= q^{\pm 2}\Delta^{-}X^{\pm} \\ X^{3}\Delta^{-} &= \Delta^{-}X^{3} \\ \\ X^{\pm}\Delta^{3} &= q^{\pm 4}\Delta^{3}X^{\pm} \\ X^{3}\Delta^{3} &= \Delta^{3}X^{3}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Das Element τ_t aus Gleichung (2.22) erfüllt wie τ die Vertauschungsrelationen (2.11) mit den X. Wir setzen

$$\begin{aligned} K^{\pm} &= \pm(-\tau_t)^{-\frac{1}{2}}\Delta^{\pm} \\ K^{3} &= (\tau_t)^{-1}\Delta^{3}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

was zur Folge hat, dass die K mit allen X und daher auch mit allen t kommutieren:

$$\begin{aligned} K^{A}X^{B} &= X^{B}K^{A} \\ K^{A}t^{B} &= t^{B}K^{A}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Damit führen (2.26) und (2.28) zusammen zu folgender Lösung des Gleichungssystems (2.7) für die T:

$$\begin{aligned} T^{\pm} &= t^{\pm} \pm (-\tau_t)^{\frac{1}{2}}K^{\pm} \\ T^{3} &= t^{3} + \tau_t K^{3}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Die K-Algebrarelationen bestimmt man hiermit aus den TT-Relationen (2.5):

$$\begin{aligned} q^{-1}K^{+}K^{-} - qK^{-}K^{+} &= K^{3} \\ q^{2}K^{3}K^{+} - q^{-2}K^{+}K^{3} &= (q+q^{-1})K^{+} \\ -q^{-2}K^{3}K^{-} + q^{2}K^{-}K^{3} &= (q+q^{-1})K^{-}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Aus der Konjugation der T folgt für die K:

$$\overline{K^{3}} = K^{3}, \qquad \overline{K^{+}} = -q^{-2}K^{-}. \tag{2.32}$$

Die K-Algebra ist also eine $su_q(1,1)$. Beziehung (2.30) zeigt, dass gerade die Situation (2.18) des Abschnitts 2.1.2 vorliegt.

Für den späteren Gebrauch wollen wir noch die Generatoren L^A (A.12) des Bahndrehimpulses durch die t und K ausdrücken:

$$\begin{aligned}
L^+ &= \frac{1}{q^2\sqrt{1+q^2}}\left\{(-\tau_t)^{-\frac{1}{2}}t^+ \otimes (-\tau_k)^{-\frac{1}{2}} + 1 \otimes (-\tau_k)^{-\frac{1}{2}}K^+\right\} \\
L^- &= -\frac{1}{q^3\sqrt{1+q^2}}\left\{(-\tau_t)^{-\frac{1}{2}}t^- \otimes (-\tau_k)^{-\frac{1}{2}} - 1 \otimes (-\tau_k)^{-\frac{1}{2}}K^-\right\} \\
L^3 &= \frac{\lambda}{q^3(1+q^2)}\left\{\frac{q^2}{\lambda^2}(-\tau_t)^{\frac{1}{2}} \otimes (-\tau_k)^{\frac{1}{2}}\right. \\
&\qquad + (-\tau_t)^{\frac{1}{2}} \otimes (-\tau_k)^{-\frac{1}{2}}\left(-K^+K^- + \frac{q^2}{\lambda^2}\right) \\
&\qquad - \frac{1+q^2}{\lambda^2}(-\tau_t)^{-\frac{1}{2}} \otimes (-\tau_k)^{-\frac{1}{2}} + t^- \otimes (-\tau_k)^{-\frac{1}{2}}K^+ \\
&\qquad \left. - q^2 t^+ \otimes (-\tau_k)^{-\frac{1}{2}}K^-\right\}. \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis erhält man, indem man in den Gleichungen (A.12) die Beziehung (2.30) verwendet.

2.2 Hilbertraumdarstellungen

Wir benutzen nun die oben erhaltene Realisierung der TX-Algebra im Produkt einer $su_q(2)$ und einer $su_q(1,1)$, um Darstellungen zu konstruieren. Zunächst betrachten wir allgemeine Darstellungen der Algebren $su_q(2)$ und $su_q(1,1)$. Mit den zusätzlichen Bedingungen (2.23) und (2.12) fixieren wir dann diejenigen Darstellungen, welche wir für die TX-Algebra benötigen.

2.2.1 Darstellungen der $su_q(2)$ (T-Algebra)

Wir konstruieren $*$-Darstellungen, in denen T^3 bzw. gleichbedeutend damit τ (2.10) diagonal ist. D.h. das hermitesche Element T^3 der Algebra soll durch einen (wesentlich) selbstadjungierten Operator im Hilbertraum dargestellt werden.

Die Basisvektoren, auf denen τ (und damit T^3) diagonal operiert bezeichnen wir mit $|m\rangle$. Diese sollen orthonormiert sein: $\langle m|\,n\rangle = \delta_{mn}$. Wegen (2.11) wird mit $|m\rangle$ auch $T^+|m\rangle$ ein Eigenzustand von τ sein, den wir mit $c_m|m+1\rangle$ bezeichnen:[4]

$$T^+|m\rangle = c_m|m+1\rangle. \qquad (2.34)$$

Mit (2.11) folgt dann, dass die Wirkung von τ auf die Basisvektoren $|m\rangle$ gegeben ist durch

$$\tau|m\rangle = \lambda d q^{-4m}|m\rangle, \qquad (2.35)$$

[4]Zur Vereinfachung der Notation, und wie in der physikalischen Literatur üblich, bezeichnen wir die einem Algebraelement T zugeordnete lineare Abbildung im Darstellungsraum ebenfalls mit T.

wobei wir d und m reell wählen, da dq^{-4m} reell sein muss, damit τ hermitesch ist. Aufgrund der Konjugation (2.14) folgt aus der Wirkung von T^+ (2.34) die Wirkung von T^-:

$$T^-|m\rangle = q^2 c^*_{m-1}|m-1\rangle. \tag{2.36}$$

Betrachten wir jetzt die T^+T^--Relation (2.5), finden wir folgende Rekursionsrelation für das Betragsquadrat der Koeffizienten c_m:

$$q c^*_{m-1} c_{m-1} - q^3 c^*_m c_m = \frac{1}{\lambda} - dq^{-4m}. \tag{2.37}$$

Diese hat die Lösung:

$$c^*_m c_m = \frac{1}{\lambda}\left\{ -\frac{1}{q^2\lambda} + \alpha\lambda q^{-2m} - \frac{d}{q^4} q^{-4m} \right\}. \tag{2.38}$$

Hier ist α ein durch die Rekursionsrelation nicht festgelegter reeller Parameter.

Wir wählen $q > 1$, $c^*_m c_m$ wird nach (2.38) also negativ für $m \to \infty$. Wegen $|c_m|^2 \geq 0$, muss es ein größtes m geben, welches wir mit $\overline{m}$ bezeichnen, so dass

$$c^*_{\overline{m}} c_{\overline{m}} = 0, \quad c^*_{\overline{m}-1} c_{\overline{m}-1} > 0. \tag{2.39}$$

Nach (2.34) gilt dann

$$T^+|\overline{m}\rangle = 0. \tag{2.40}$$

Formel (2.38) zeigt, dass $|c_m|^2$ eine quadratische Funktion in der Variablen q^{-2m} ist. Für $q^{-2m} \to 0$ (also für $m \to \infty$) ist diese negativ. Für $q^{-2m} \to \infty$ ($m \to -\infty$) ist die Funktion positiv oder negativ, je nach Vorzeichen von d. Soll unser Darstellungsraum überhaupt Zustände enthalten, muss die Funktion in einem gewissen Bereich der positiven Halbachse positiv sein, hat also zumindest eine Nullstelle bei $q^{-2\overline{m}}$. Damit lässt sich der Parameter α bestimmen:

$$\alpha = \frac{1}{\lambda}\left\{ \frac{1}{\lambda} q^{2(\overline{m}-1)} + dq^{-2(\overline{m}+2)} \right\}. \tag{2.41}$$

Mit diesem α erhält man für die Funktion (2.38) zwei Nullstellen,

$$q^{-2\overline{m}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\lambda d} q^{2(\overline{m}+1)}, \tag{2.42}$$

so dass gilt:

$$c^*_m c_m = -\frac{d}{\lambda q^4}\left(q^{-2m} - q^{-2\overline{m}}\right)\left(q^{-2m} - \frac{1}{\lambda d} q^{2(\overline{m}+1)}\right). \tag{2.43}$$

Für die Matrixelemente erhält man in Abhängigkeit der Parameter $\overline{m}$ und d bei entsprechender Phasenwahl

$$\begin{aligned}
T^3|m\rangle &= (\frac{1}{\lambda} - dq^{-4m})|m\rangle \\
T^+|m\rangle &= q^{-2}\sqrt{\frac{d}{\lambda}(q^{-2m} - q^{-2\overline{m}})\left(\frac{1}{\lambda d}q^{2(\overline{m}+1)} - q^{-2m}\right)}|m+1\rangle \\
T^-|m\rangle &= \sqrt{\frac{d}{\lambda}(q^{-2(m-1)} - q^{-2\overline{m}})\left(\frac{1}{\lambda d}q^{2(\overline{m}+1)} - q^{-2(m-1)}\right)}|m-1\rangle \\
\tau|m\rangle &= d\lambda q^{-4m}|m\rangle \\
\vec{T}^2 &= \frac{1}{\lambda^2\sqrt{\lambda d}}\left(q^{2(\overline{m}+1)} + \lambda d q^{-2\overline{m}}\right) - \frac{1+q^2}{\lambda^2}. \qquad (2.44)
\end{aligned}$$

Je nach Vorzeichen von d treten drei unterschiedliche Fälle auf:

$\underline{\boldsymbol{d>0}}$ Der Graph der Funktion $c_m^* c_m$ in Abhängigkeit von q^{-2m} ist eine nach unten geöffnete Parabel, also für $m \to -\infty$ negativ. Daher muss es ein kleinstes m geben, das wir $\underline{m}$ nennen, so dass $|\underline{m}\rangle \neq 0$ und $T^-|\underline{m}\rangle = 0$ ist, und demzufolge

$$c_{\underline{m}-1}^* c_{\underline{m}-1} = 0 \qquad (2.45)$$

gilt. Zusammen mit (2.43) ergibt dies für $\overline{m} > 0$

$$d = \frac{1}{\lambda}, \qquad \underline{m} = -\overline{m}. \qquad (2.46)$$

Die Anzahl der Zustände ist dann $n = 2\overline{m} + 1$, $\overline{m}$ muss also ganz- ober halbzahlig sein. Wir haben also die bekannten $2l+1$-dimensionalen ($l = \overline{m}$) Darstellungen der $so_q(3)$ gefunden.

$\underline{\boldsymbol{d=0}}$ Dann ist (2.38) eine lineare Funktion. Um eine positive Nullstelle zu erhalten muss α positiv sein. Aus (2.41) erhalten wir

$$\alpha = \frac{1}{q^2\lambda^2}q^{2\overline{m}}. \qquad (2.47)$$

Die Darstellungen sind unendlichdimensional und werden durch den Parameter $\overline{m}$, der beliebige Werte annehmen kann, charakterisiert. Jedoch ist τ in diesen Darstellungen identisch Null und kann nicht invertiert werden.

$\underline{\boldsymbol{d<0}}$ In diesem Fall ist die zweite Nullstelle in (2.42) negativ. Wir haben nur einen größten Wert $\overline{m}$ für m, der nicht eingeschränkt ist. Die Darstellung ist unendlichdimensional. Weiter hat τ nur negative Eigenwerte, $\tau^{\frac{1}{2}}$ und $\vec{T}^2$ sind also im Allgemeinen nicht reell. Aus (2.44) erhalten wir

$$\begin{aligned}
T^3|m\rangle &= (\frac{1}{\lambda} - dq^{-4m})|m\rangle \\
T^+|m\rangle &= q^{-2}\sqrt{-\frac{d}{\lambda}}\sqrt{(q^{-2m} - q^{-2\overline{m}})\left(q^{-2m} - \frac{1}{\lambda d}q^{2(\overline{m}+1)}\right)}|m+1\rangle \\
T^-|m\rangle &= \sqrt{-\frac{d}{\lambda}}\sqrt{(q^{-2(m-1)} - q^{-2\overline{m}})\left(q^{-2(m-1)} - \frac{1}{\lambda d}q^{2(\overline{m}+1)}\right)}|m-1\rangle \\
\tau|m\rangle &= d\lambda q^{-4m}|m\rangle. \qquad (2.48)
\end{aligned}$$

2.2.2 Darstellungen der $su_q(1,1)$ (K-Algebra)

Da sich die K- von der T-Algebra nur in ihrer Konjugation unterscheidet, können wir alle Resultate weiter verwenden, die nur von der algebraischen Struktur abhängen:

$$\begin{aligned} K^+|m\rangle &= \gamma_m|m\rangle \\ \tau_k|m\rangle &= \lambda d_k q^{-4m}|m\rangle. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Wir wählen d_k und m wieder reell. Aus der Konjugation (2.14) von K^+ folgt jetzt jedoch

$$K^-|m\rangle = -q^2\gamma^*_{m-1}|m-1\rangle \tag{2.50}$$

und damit die Rekursionsrelation

$$-q\gamma^*_{m-1}\gamma_{m-1} + q^3\gamma^*_m\gamma_m = \frac{1}{\lambda} - d_k q^{-4m}. \tag{2.51}$$

Diese hat als Lösung

$$\gamma^*_m\gamma_m = -\frac{1}{\lambda}\left\{-\frac{1}{q^2\lambda} + \alpha\lambda q^{-2m} - \frac{d_k}{q^4}q^{-4m}\right\}. \tag{2.52}$$

Im Gegensatz zu (2.38) ist diese Funktion für $m \to \infty$ positiv, es ergibt sich also hieraus keine Einschränkung an die möglichen Werte von m. Wir erhalten die Matrixelemente

$$\begin{aligned} K^3|m\rangle &= (\frac{1}{\lambda} - d_k q^{-4m})|m\rangle \\ K^+|m\rangle &= \sqrt{\gamma^*_m\gamma_m}|m+1\rangle \\ K^-|m\rangle &= -q^2\sqrt{\gamma^*_{m-1}\gamma_{m-1}}|m-1\rangle. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Alle Darstellungen sind unendlichdimensional. Betrachten wir (2.52) wieder als Funktion von q^{-2m}, wird diese Null, falls q^{-2m} einen der Werte

$$\frac{\lambda}{2d_k q^{-4}}\left\{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4d_k q^{-6}\lambda^{-3}}\right\} \tag{2.54}$$

annimmt. Wir unterscheiden wieder drei Fälle:

$\underline{\boldsymbol{d_k > 0}}$ Falls $\alpha < 2q^{-3}\sqrt{d_k\lambda^{-3}} \equiv \alpha_0$ ist, hat (2.52) keine positive Nullstelle. Der Wertebereich von m ist nicht eingeschränkt, d. h. m nimmt die Werte $m_0 + n$ mit $m_0 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ an.

Falls $\alpha > \alpha_0$ ist, gibt es zwei positive Nullstellen. Bezeichnen wir die zugehörigen m-Werte mit $\underline{m}$ und $\overline{m}$, so erhalten wir aus (2.52)

$$\gamma^*_m\gamma_m = \frac{1}{q^2\lambda^2 q^{-2\overline{m}}q^{-2\underline{m}}}(q^{-2m} - q^{-2\overline{m}})(q^{-2m} - q^{-2\underline{m}}). \tag{2.55}$$

Hieraus bestimmen sich die Parameter α und d_k, welche die Darstellung charakerisieren, zu

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{q^2}{\lambda}q^{2(\overline{m}+\underline{m})} \\ \alpha &= \frac{1}{q^2\lambda^2}(q^{2\underline{m}} + q^{2\overline{m}}). \end{aligned} \tag{2.56}$$

Wir finden zwei inäquivalente Darstellungen; eine mit

$$m \leq \overline{m}, \qquad m = \overline{m}, \overline{m} - 1, \overline{m} - 2, \dots , \tag{2.57}$$

und eine andere mit

$$m > \underline{m}, \qquad m = \underline{m} + 1, \underline{m} + 2, \dots . \tag{2.58}$$

$\underline{\boldsymbol{d_k = 0}}$ In diesem Fall wird (2.52) linear. Für $m \to \infty$ ist die Funktion positiv und für $m \to -\infty$ positiv oder negativ, je nach Vorzeichen von α. Ist $\alpha \leq 0$, so ist der Bereich von m nicht eingeschränkt: $m_0 + n$ mit $m_0 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$. Ist $\alpha > 0$, gibt es einen kleinsten Wert von m. Wie schon bei der $su_q(2)$ ist τ für $d = 0$ nicht invertierbar.

$\underline{\boldsymbol{d_k < 0}}$ Jetzt ist (2.52) negativ für $m \to -\infty$, wir erhalten einen kleinsten Wert für m:

$$q^{-2\underline{m}_k} = \frac{\lambda}{2|d_k|q^{-4}} \left\{ -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4|d_k|q^{-6}\lambda^{-3}} \right\}. \tag{2.59}$$

Für α sind alle Werte erlaubt, m nimmt die Werte

$$m > \underline{m}_k, \qquad m = \underline{m}_k + 1, \underline{m}_k + 2, \dots . \tag{2.60}$$

an.

2.2.3 Darstellung der gesamten $\boldsymbol{TX}$-Algebra

Kommen wir nun zur Darstellung der TX-Algebra aus Abschnitt 2.1.1. Zunächst die Koordinatenalgebra, d.h. der t-Algebra, welche eine $su_q(2)$ bildet. Aus Gleichung (2.22) folgt in der Notation des vorhergehenden Abschnitts $d < 0$. Ein Vergleich von $\vec{T}^2$ in (2.24) und in (2.44) zeigt,

$$\overline{m}_t = 0, \qquad d_t = -\frac{q^2}{\lambda}. \tag{2.61}$$

Damit erhalten wir aus (2.48)

$$\begin{aligned}
t^3|m_t\rangle &= \frac{1}{\lambda}\left(1 + q^2 q^{-4m_t}\right)|m_t\rangle \qquad\qquad m_t \leq 0 \\
t^+|m_t\rangle &= \frac{1}{\lambda q}\sqrt{q^{-4m_t} - 1}\,|m_t + 1\rangle \\
t^-|m_t\rangle &= \frac{q}{\lambda}\sqrt{q^{-4(m_t-1)} - 1}\,|m_t - 1\rangle.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Verwenden wir noch (2.25), finden wir

$$\begin{aligned}
X^3 R^{-1}|m_t\rangle &= \pm q^{2m_t - 1}|m_t\rangle \\
X^+ R^{-1}|m_t\rangle &= \mp\frac{q}{\sqrt{1+q^2}}\sqrt{1 - q^{4m_t}}\,|m_t + 1\rangle \\
X^- R^{-1}|m_t\rangle &= \pm\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}\sqrt{1 - q^{4(m_t-1)}}\,|m_t - 1\rangle.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Die beiden Vorzeichen führen zu inäquivalenten Darstellungen.

Nun zur K-Algebra. Wir stellen die zusätzliche Bedingung an die Darstellung der T-Algebra, dass sie in endlichdimensionale Darstellungen zerfällt. Dadurch können wir auch erwarten, dass wir im Grenzfall $q \to 1$ die endlichdimensionalen Darstellungen der $su(2)$ erhalten. Nach Abschnitt 2.2.1 muss τ also positive Eigenwerte haben ($d_T > 0$); nach (2.46) ist

$$d_T = \frac{1}{\lambda}. \tag{2.64}$$

Wegen $\tau = \tau_t \otimes \tau_k$ gilt

$$d_T = \lambda d_t d_k, \tag{2.65}$$

und somit ist mit (2.64) und (2.61)

$$d_k = -\frac{1}{\lambda q^2}. \tag{2.66}$$

Die Auswertung der Bahndrehimpulsbedingung (2.12) ergibt, dass für die K gelten muss:

$$K^+K^- = -\frac{1}{\lambda^2}\left(1 + q^2\tau_K\right). \tag{2.67}$$

Dies ist die gleiche Beziehung, wie sie auch von den t erfüllt wird (2.23). Verwenden wir nun (2.53) und (2.52), folgt $\alpha = 0$ und mit (2.59) $\underline{m_k} = -1$. Damit ist auch die Darstellung der K-Algebra fixiert:

$$\begin{aligned}
K^3|m_k\rangle &= \frac{1}{\lambda}\left(1 + q^{-2}q^{-4m_k}\right)|m_k\rangle \qquad\qquad m_k \geq 0 \\
K^+|m_k\rangle &= \frac{1}{q\lambda}\sqrt{1 - q^{-4(m_k+1)}}|m_k + 1\rangle \\
K^-|m_k\rangle &= -\frac{q}{\lambda}\sqrt{1 - q^{-4m_k}}|m_k - 1\rangle.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Für den Casimiroperator finden wir

$$\vec{T}_k^2 = -\frac{1 + q^2}{\lambda^2}. \tag{2.69}$$

Aus den Darstellungen der t (2.62) und der K (2.68) erhalten wir die Darstellung der Generatoren T des Drehimpulses mittels (2.30). Da die Bahndrehimpulsbedingung (2.12) erfüllt ist, bezeichnen wir diese Operatoren als Bahndrehimpulsoperatoren T_{orb}:

$$\begin{aligned}
T^3_{orb}|m_t, m_k\rangle &= \frac{1}{\lambda}\left(1 - q^{-4(m_t+m_k)}\right)|m_t, m_k\rangle \\
T^+_{orb}|m_t, m_k\rangle &= \frac{1}{\lambda q}\sqrt{q^{-4m_t} - 1}|m_t + 1, m_k\rangle \\
&\quad + \frac{1}{\lambda}q^{-2m_t}\sqrt{1 - q^{-4(m_k+1)}}|m_t, m_k + 1\rangle \\
T^-_{orb}|m_t, m_k\rangle &= \frac{q}{\lambda}\sqrt{q^{-4(m_t-1)} - 1}|m_t - 1, m_k\rangle \\
&\quad + \frac{q^2}{\lambda}q^{-2m_t}\sqrt{1 - q^{-4m_k}}|m_t, m_k - 1\rangle \\
\tau_{orb}|m_t, m_k\rangle &= q^{-4(m_t+m_k)}|m_t, m_k\rangle.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Die Zustände werden durchnummeriert mit

$$m_t = 0, -1, -2, \ldots \quad \text{und} \quad m_k = 0, 1, 2, \ldots \,. \tag{2.71}$$

Diese Darstellung wurde auch in [26] gefunden; dort wurde die Spin-0-Bedingung auf eine etwas andere Weise implementiert.

In (2.70) haben wir die Darstellung des Bahndrehimpulses T_{orb} entsprechend

$$\begin{aligned} T^3_{orb} &= t^3 \otimes 1 + \tau_t \otimes K^3 \\ T^\pm_{orb} &= t^\pm \otimes 1 \pm \sqrt{-\tau_t} \otimes K^\pm \end{aligned} \tag{2.72}$$

erhalten. Dazu können wir noch Spin addieren:

$$\begin{aligned} T^3 &= T^3_{orb} \otimes 1 + \tau_{orb} \otimes S^3 \\ T^\pm &= T^\pm_{orb} \otimes 1 + \sqrt{\tau_{orb}} \otimes S^\pm . \end{aligned} \tag{2.73}$$

Die Spinoperatoren S bilden eine beliebige endlichdimensionale Darstellung der T-Algebra.

Die Darstellung der X erhalten wir aus (2.63). Da der Radius zentral in der TX-Algebra ist, kann er ebenfalls diagonalisiert werden. Wir wählen als Basis des Darstellungsraums Zustände $|M, m_t, m_k\rangle$, so dass

$$R^2|M, m_t, m_k\rangle = q^{4M+2} r_0^2 |M, m_t, m_k\rangle \tag{2.74}$$

gilt. Hier kann M beliebige reelle Werte annehmen. Ist nur ein Wert zugelassen, hat man eine irreduzible Darstellung der TX-Algebra, nimmt M Werte in einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ an, erhält man eine reduzible Darstellung (natürlich vorausgesetzt, dass die Teilmenge mehr als einen Punkt enthält). In Kapitel 3 werden wir einen Skalierungsoperator $\Lambda^{\pm\frac{1}{2}}$ einführen, um eine q-deformierte Heisenbergalgebra erhalten zu können. Dieser erfüllt mit den Koordinaten die Vertauschungsrelationen $\Lambda^{\pm\frac{1}{2}} X^A = q^{\pm 2} X^A \Lambda^{\pm\frac{1}{2}}$, mit R^2 also die Relation

$$\Lambda^{\pm\frac{1}{2}} R^2 = q^{\pm 4} R^2 \Lambda^{\pm\frac{1}{2}} . \tag{2.75}$$

Für eine irreduzible Darstellung muss dann also $M \in \mathbb{Z}$ sein. r_0 ist ein beliebiger reeller Parameter, der die Darstellung charakterisiert. Wenn wir das Vorzeichen aus (2.62) in r_0 absorbieren, r_0 kann also positiv oder negativ sein, ist

$$X^3|M, m_t, m_k\rangle = q^{2(m_t+M)} r_0 |M, m_t, m_k\rangle . \tag{2.76}$$

Aus (2.70) und (2.76) sehen wir, dass wir die Zustände auch durch die Eigenwerte von X^3 und T^3_{orb} charakterisieren können:

$$\nu = m_t + M, \qquad m = m_t + m_k . \tag{2.77}$$

Damit finden wir

$$
\begin{aligned}
X^3|M,\nu,m\rangle &= q^{2\nu} r_0 |M,\nu,m\rangle \\
R^2|M,\nu,m\rangle &= q^{4M+2} r_0^2 |M,\nu,m\rangle \\
T^3_{orb}|M,\nu,m\rangle &= \frac{1}{\lambda}\left(1-q^{-4m}\right)|M,\nu,m\rangle \\
X^+|M,\nu,m\rangle &= -\frac{q^2 r_0}{\sqrt{1+q^2}}\sqrt{q^{4M}-q^{4\nu}}|M,\nu+1,m+1\rangle \\
X^-|M,\nu,m\rangle &= \frac{q r_0}{\sqrt{1+q^2}}\sqrt{q^{4M}-q^{4(\nu-1)}}|M,\nu-1,m-1\rangle \\
T^+_{orb}|M,\nu,m\rangle &= \frac{1}{q^2-1}\sqrt{q^{4(M-\nu)}-1}|M,\nu+1,m+1\rangle \\
&\quad +\frac{1}{\lambda}\sqrt{q^{4(M-\nu)}-q^{-4(m+1)}}|M,\nu,m+1\rangle \\
T^-_{orb}|M,\nu,m\rangle &= \frac{q^2}{q^2-1}\sqrt{q^{4(M-\nu+1)}-1}|M,\nu-1,m-1\rangle \\
&\quad +\frac{q^2}{\lambda}\sqrt{q^{4(M-\nu)}-q^{-4m}}|M,\nu,m-1\rangle \\
\nu \leq M, m \geq \nu - M. &
\end{aligned}
\tag{2.78}
$$

2.3 Basistransformation

In der Darstellung (2.70) der Bahndrehimpulsalgebra T_{orb} sind die Operatoren $\vec{T}_t^2$ und $\vec{T}_k^2$ diagonal. Wir wollen diese Darstellung in eine direkte Summe endlichdimensionaler irreduzibler Darstellungen zerlegen, so dass $\vec{T}^2_{orb}$ diagonal ist. Dazu verwenden wir die im Anhang B aufgeführten q-Jacobi-Polynome.

2.3.1 Diagonalisierung des Gesamtdrehimpulses

Da $d_T = \lambda d_t d_k = \frac{1}{\lambda} > 0$ ist (2.64), wissen wir, dass nach Gleichung (2.44) die Eigenwerte des Operators $\vec{T}^2_{orb}$ die Form $q[l][l+1]$ haben. Wir machen daher den Ansatz

$$
\begin{aligned}
|l,m\rangle &= \sum_{\substack{m_k\geq 0\\ m_t\leq 0}} c_{l,m}^{m_k,m_t}|m_t,m_k\rangle, \\
\vec{T}^2_{orb}|l,m\rangle &= q[l][l+1]|l,m\rangle.
\end{aligned}
\tag{2.79}
$$

Nach (2.77) ist $m = m_t + m_k$, woraus für die Koeffizienten

$$
c_{l,m}^{m_k,m_t} = c_{l,m}^{m_t}\delta_{m,m_t+m_k} \tag{2.80}
$$

folgt. Für die $c_{l,m}^{m_t}$ erhalten wir mit der Definition des Casimiroperators (2.9) und der Darstellung der T_{orb}-Algebra (2.44) aus (2.79) die Rekursionsrelation:

$$\begin{aligned}\left(q^{2l+2}+q^{-2l}-(q^2+1)q^{2(m+1)-4m_t}\right)c_{l,m}^{m_t} = \\ q^{2m+1}\Big(\sqrt{(q^{-4m_t}-1)(q^{-4m_t}-q^{-4m})}c_{l,m}^{m_t+1} \\ +\sqrt{(q^{4-4m_t}-1)(q^{4-4m_t}-q^{-4m})}c_{l,m}^{m_t-1}\Big)\,. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Vergleichen wir diese mit (B.20), der Differenzengleichung der $\widetilde{P}_l^m$, finden wir als Lösungen

$$c_{l,m}^{m_t} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-q^{-2}}}{q^{m+1-m_t}}\widetilde{P}_l^m(\pm q^{2(m_t-1)-2m}) & \text{für } m \geq 0 \\ \dfrac{\sqrt{1-q^{-2}}}{q^{1-m_t}}\widetilde{P}_l^{|m|}(\pm q^{2(m_t-1)}) & \text{für } m < 0 \end{cases} \tag{2.82}$$

Wir müssen die Fälle $m \geq 0$ und $m < 0$ unterscheiden, da $\widetilde{P}_l^m$ nur für $m \geq 0$ definiert ist. Das Vorzeichen $\pm$ wird durch (2.81) nicht festgelegt. In der Orthonormalitätsrelation (B.21) benötigen wir beide Vorzeichen, daher betrachten wir die direkte Summe zweier Darstellungen (2.44), so dass wir

$$\begin{aligned} |l,m\rangle &= \sum_{\sigma=\pm1}\sum_{m_t} c_{l,m}^{m_t,\sigma}|m_t, m-m_t,\sigma\rangle \\ c_{l,m}^{m_t,\sigma} &= \begin{cases} \sqrt{1-q^{-2}}q^{m_t-1-m}\widetilde{P}_l^m(\sigma q^{2(m_t-m-1)}) & \text{für } m \geq 0 \\ \sqrt{1-q^{-2}}q^{m_t-1}\widetilde{P}_l^{|m|}(\sigma q^{2(m_t-1)}) & \text{für } m < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.83}$$

erhalten.

Weiter ist $m_k \geq 0$, $m_t \leq 0$ und $m = m_t + m_k$, und somit muss sowohl $m_t \leq 0$ als auch $m_t \leq m$ erfüllt sein. Nimmt m_t den größten erlaubten Wert $\overline{m}_t$ an (also entweder 0 oder, falls m negativ ist, m), verschwindet in der Rekursionsrelation (2.81) der Koeffizient vor $c_{l,m}^{\overline{m}_t+1}$. Wir können $c_{l,m}^{\overline{m}_t+1}$ also gleich Null setzen, und aufgrund von (2.81) ist dann $c_{l,m}^{m_t} = 0$ für alle $m_t > \overline{m}_t$. Die Einschränkung $|m| \leq l$ ist ebenfalls konsistent mit (2.81).

Die Orthonormalitätsrelation für die q-Jacobi-Polynome (B.21) überträgt sich auf die Eigenfunktionen des Operators $\vec{T}^2_{orb}$:

$$\begin{aligned} \langle l,m|l',m'\rangle = \sum_{\sigma}\sum_{m_t} c_{l,m}^{m_t,\sigma}c_{l',m'}^{m_t,\sigma}\delta_{m,m'} \\ = \delta_{m,m'}q^{-1}\lambda\sum_{\sigma=\pm1}\sum_{m_t=-\infty}^{\min\{0,m\}} q^{2(m_t-1)-m-|m|} \\ \times\widetilde{P}_l^{|m|}(\sigma q^{2(m_t-1)-m-|m|})\widetilde{P}_{l'}^{|m|}(\sigma q^{2(m_t-1)-m-|m|}) \\ = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Um das für $m < 0$ zu sehen, muss man den Summationsindex m_t nach $m_t + m$ verschieben.

Das unterschiedliche Vorzeichen σ der Darstellungen soll auch zu einem unterschiedlichen Vorzeichen von r_0 führen, d.h.

$$X^3|M,m_t,m_k,\sigma\rangle = q^{2(m_t+M)}\sigma|r_0||M,m_t,m_k,\sigma\rangle. \tag{2.85}$$

Dann erhalten wir aus der Vollständigkeitsrelation der q-Jacobipolynome (B.22)

$$\begin{aligned}\delta_{\sigma,\sigma'}\delta_{m_t,m_t'} = q^{-1}\lambda\sum_{l=0}^{\infty} & q^{m_t+m_t'-2-m-|m|} \\ & \times\widetilde{P}_l^{|m|}(\sigma q^{2(m_t-1)-m-|m|})\widetilde{P}_l^{|m|}(\sigma' q^{2(m_t'-1)-m-|m|}),\end{aligned} \tag{2.86}$$

was gerade die Vollständigkeitsrelation für die Eigenzustände von $\vec{T}^2_{orb}$ ist. $\vec{T}^2_{orb}$ ist also ein (wesentlich) selbstadjungierter Operator [65] und die Basistransformation von $|m_t,m_k,\sigma\rangle$ nach $|l,m\rangle$ vermöge der $c^{m_t,\sigma}_{l,m}$ ist eine Isometrie.

2.3.2 Basistransformation

Der Radius wird von dieser Transformation nicht tangiert. Wir können die Basistransformation also auf die in (2.74) eingeführten Zustände, die zusätzlich durch den Radius charakterisiert werden, anwenden. Der Vollständigkeit halber wollen wir noch die Wirkung der Ortsoperatoren X^A und der Bahndrehimpulsoperatoren T^A_{orb} in der neuen Basis angeben:

$$\begin{aligned}
X^3|M,l,m\rangle &= r_0 q^{2M+m+1}\left\{\sqrt{\frac{[l+m+1][l-m+1]}{[2l+1][2l+3]}}|M,l+1,m\rangle\right.\\
&\qquad\left.+\sqrt{\frac{[l+m][l-m]}{[2l+1][2l-1]}}|M,l-1,m\rangle\right\}\\
X^+|M,l,m\rangle &= r_0 q^{2M+m+1}\left\{q^{-l}\sqrt{\frac{[l+m+1][l+m+2]}{[2][2l+1][2l+3]}}|M,l+1,m+1\rangle\right.\\
&\qquad\left.-q^{l+1}\sqrt{\frac{[l-m][l-m-1]}{[2][2l+1][2l-1]}}|M,l-1,m+1\rangle\right\}\\
X^-|M,l,m\rangle &= r_0 q^{2M+m+1}\left\{q^{l}\sqrt{\frac{[l-m+1][l-m+2]}{[2][2l+1][2l+3]}}|M,l+1,m-1\rangle\right.\\
&\qquad\left.-q^{-l-1}\sqrt{\frac{[l+m][l+m-1]}{[2][2l+1][2l-1]}}|M,l-1,m-1\rangle\right\}\\
\vec{T}^2_{orb}|M,l,m\rangle &= q[l][l+1]|M,l,m\rangle\\
T^3_{orb}|M,l,m\rangle &= q^{-2m}[2m]|M,l,m\rangle\\
T^+_{orb}|M,l,m\rangle &= q^{-m-\frac{3}{2}}\sqrt{[l+m+1][l-m]}\;|M,l,m+1\rangle\\
T^-_{orb}|M,l,m\rangle &= q^{-m+\frac{3}{2}}\sqrt{[l+m][l-m+1]}\;|M,l,m-1\rangle\\
\tau_{orb}|M,l,m\rangle &= q^{-4m}|M,l,m\rangle
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Dies kann natürlich auch direkt, unter Verwendung des Wigner-Eckart-Theorems, aus der TX-Algebra bestimmt werden [7, 69, 19].

In dieser Basis bedeutet (2.84) die Vollständigkeit und (2.86) die Orthonormiertheit der Eigenzustände des Operators X^3 [77].

2.4 Realisierung durch Differenzialoperatoren im $\mathbb{R}^3$

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass es möglich ist, die TX-Algebra durch auf $C^\infty(\mathbb{R}^3)$-Funktionen wirkende Differenzialoperatoren zu realisieren. Wir werden ein Ideal in $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ angeben, welches invariant unter der Wirkung der so erhaltenen Algebra von Differenzialoperatoren ist. Auf dem entsprechenden Quotientenraum führen wir ein Skalarprodukt ein und erhalten dadurch einen Hilbertraum, auf dem die TX-Algebra als $*$-Algebra realisiert ist.

Da man Differenzialoperatoren im $\mathbb{R}^3$ als Elemente der gewöhnlichen Heisenbergalgebra auffassen kann, drücken wir sozusagen die q-deformierten Operatoren durch undeformierte Operatoren aus. Dies sollte für alle Deformationen der Heisenbergalgebra möglich sein [64]. Insbesondere für die q-deformierte $su(2)$ wurde dies auch schon in [14, 15] erreicht. Legt man diese Interpretation zugrunde, können q-deformierte Operatoren als komplizierte nichtlokale Operatoren der undeformierten Heisenbergalgebra betrachtet werden [25, 69]. Ein spezielles Beispiel, bei dem diese Einbettung der deformierten in die undeformierte Algebra verwendet wird, um die Eichtheorie und die Streuung an einem „q-Teilchen“ zu untersuchen, findet man in [33].

Unsere Vorgehensweise wird die folgende sein: Wir gehen von den Matrixdarstellungen[5] aus und ersetzen dort Eigenwerte durch ihnen entsprechende Differenzialoperatoren. Dazu wird noch ein Operator multipliziert, der die Eigenzustände in der richtigen Weise ändert. Für die so erhaltenen Operatoren zeigen wir dann, dass sie (formal) die Relationen der deformierten Algebra erfüllen.

Weiterhin werden wir fordern, dass im Limes $q \to 1$ die richtigen Grenzwerte für die Operatoren, d.h. die gewöhnlichen Koordinaten und Bahndrehimpulsoperatoren des kommutativen $\mathbb{R}^3$, erhalten werden.

2.4.1 X- und t-Algebra

Wir beginnen mit der X-Algebra (2.3); über den Zusammenhang (2.20) der t- mit der X-Algebra erhalten wir damit auch die Realisierung der t durch Differenzialoperatoren. Wir werden Polarkoordinaten

$$(r, \theta, \varphi), \qquad \xi \equiv \cos\theta \tag{2.88}$$

verwenden.

Eine natürliche Identifikation ist

$$X^3 = r\xi = r\cos\theta, \tag{2.89}$$

woraus wir durch einen Vergleich mit (2.63) schließen, dass in den Matrixelementen q^{2m_t} durch $q\xi$ zu ersetzen ist.

Jetzt benötigen wir Operatoren, die der Änderung der Eigenzustände in den Matrixdarstellungen entsprechen. Da wir uns auf einer Kugeloberfläche befinden, betrifft

[5] Hierin unterscheiden wir uns von [70], wo direkt mit der Algebra begonnen wurde.

dies die θ- und die φ-Richtung. Für die φ-Richtung haben wir die Eigenzustände $e^{im\varphi}$ und die $\pm$-Komponente eines Spin-1-Operators bildet m auf $m \pm 1$ ab. D.h. es muss mit $e^{\pm i\varphi}$ multipliziert werden.

Für die $\xi = \cos\theta$-Richtung führen wir den Operator

$$\mathcal{Z}_\xi = \frac{1}{2}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\xi}\xi\right) = \xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{2}. \tag{2.90}$$

ein. Er ist so gewählt, dass

$$\mathcal{Z}_\xi^* = -\mathcal{Z}_\xi \tag{2.91}$$

gilt, wenn er auf $L^2([0,1], d\xi)$-Funktionen wirkt, die im gemeinsamen Definitionsbereich von $\mathcal{Z}_\xi$ und $\mathcal{Z}_\xi^*$ liegen. Die Vertauschungsrelation mit ξ ist

$$[\mathcal{Z}_\xi, \xi] = \xi, \tag{2.92}$$

woraus

$$q^{\pm 2\mathcal{Z}_\xi}\xi = q^{\pm 2}\xi q^{\pm 2\mathcal{Z}_\xi} \tag{2.93}$$

folgt. Wegen (2.89) ist dann klar, dass wir $X^- \sim q^{+2\mathcal{Z}_\xi}$ und $X^+ \sim q^{-2\mathcal{Z}_\xi}$ wählen müssen, um die richtigen $X^\pm X^3$-Vertauschungsrelationen zu erhalten. Zur Abkürzung verwenden wir die Bezeichnung

$$\Lambda_\xi \equiv q^{2\mathcal{Z}_\xi}. \tag{2.94}$$

Wegen (2.91) ist der Differenzialoperator Λ_ξ formal unitär. Formal bedeutet hier, dass man sich um den Definitionsbereich nicht kümmert. Wendet man diesen Operator auf eine C^∞-Funktion an, ergibt sich

$$(\Lambda_\xi f)(\xi) = qf(q^2\xi). \tag{2.95}$$

Das sieht man am einfachsten, wenn man bedenkt, dass $\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\xi^n = n\xi^n$ ist

Ausgehend von (2.63) schließen wir damit auf

$$\begin{aligned} X^3 &= r\xi, \\ X^+ &= -re^{i\varphi}\sqrt{\frac{1-q^{-2}\xi^2}{1+q^{-2}}}\,\Lambda_\xi^{-1}, \\ X^- &= re^{-i\varphi}\sqrt{\frac{1-q^2\xi^2}{1+q^2}}\,\Lambda_\xi. \end{aligned} \tag{2.96}$$

Diese Differenzialoperatoren erfüllen die X-Algebra (2.3). Als Beispiel berechnen wir

$$\begin{aligned} X^-X^+ - X^+X^- &= -e^{-i\varphi}r\sqrt{\frac{1-q^2\xi^2}{1+q^2}}\,\Lambda_\xi q r e^{i\varphi}\sqrt{\frac{1-q^{-2}\xi^2}{1+q^2}}\,\Lambda_\xi^{-1} \\ &\quad + q r e^{i\varphi}\sqrt{\frac{1-q^{-2}\xi^2}{1+q^2}}\,\Lambda_\xi r e^{-i\varphi}\sqrt{\frac{1-q^2\xi^2}{1+q^2}}\,\Lambda_\xi \\ &= r^2\left(-\frac{1-q^2\xi^2}{q+q^{-1}} + \frac{1-q^{-2}\xi^2}{q+q^{-1}}\right) = r^2\frac{q^2-q^{-2}}{q+q^{-1}}\xi^2 \\ &= \lambda X^3X^3. \end{aligned} \tag{2.97}$$

Ebenso findet man $R^2 = X^3X^3 - qX^+X^- - q^{-1}X^-X^+ = r^2$.

Im Grenzfall $q \to 1$ erhalten wir aus (2.96) wegen $\lim_{q\to 1}\Lambda_\xi = 1$ und wegen $\lim_{q\to 1}\sqrt{1-q^2\cos^2\theta} = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \pm\sin\theta$

$$\begin{aligned} X^3 &\to r\cos\theta \\ X^+ &\to -\frac{1}{\sqrt{2}} r\sin\theta\, e^{i\varphi} \\ X^- &\to +\frac{1}{\sqrt{2}} r\sin\theta\, e^{-i\varphi}. \end{aligned} \tag{2.98}$$

Dies sind genau die Koordinaten des kommutativen euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$.

Verwenden wir jetzt den Algebrahomomorphismus (2.20) von der T-Algebra in die X-Algebra, finden wir für die t^A

$$\begin{aligned} t^3 &= \frac{1}{\lambda}(1+\xi^{-2}) \\ t^+ &= \frac{1}{\lambda} e^{i\varphi}\xi^{-1}\sqrt{1-q^{-2}\xi^2}\,\Lambda_\xi^{-1} \\ t^- &= \frac{1}{\lambda} e^{-i\varphi}\xi^{-1}\sqrt{1-q^2\xi^2}\,\Lambda_\xi. \end{aligned} \tag{2.99}$$

Formal erfüllen diese Operatoren zwar die Konjugation

$$\overline{t^+} = q^{-2}t^-, \qquad \overline{t^3} = t^3, \tag{2.100}$$

man kann jedoch nicht erwarten, dass es möglich ist, für die t einen gemeinsamen Definitionsbereich in L^2 so zu finden, dass

$$(t^+)^* = q^{-2}t^-, \qquad (t^3)^* = t^3 \tag{2.101}$$

gilt, wobei hier mit * die Konjugation linearer Operatoren im Hilbertraum L^2 gemeint ist, während $^-$ die algebraische Konjugation bezeichnet. Um das zu erreichen müssen wir einen geeigneten Hilbertraum verwenden.

Dies sieht man auch daran, dass X^3R^{-1} in der Darstellung (2.63) das Spektrum $q^{2m_t-1}, m_t \leq 0$ hat, während der entsprechende Operator $\xi = \cos\theta$ ein kontinuierliches Spektrum besitzt.

Um einen geeigneten Hilbertraum zu finden betrachten wir einen Faktorraum der C^∞-Funktionen, nämlich denjenigen, in dem die Funktionen durch ihre Funktionswerte an gewissen Punkten, eben gerade dem Spektrum von X^3R^{-1}, charakterisiert werden. Wir betrachten dazu den linearen Raum der C^∞-Funktionen auf dem Intervall $0 < \xi < 1$

$$\mathcal{F}_\xi = \{f(\xi) \mid f \in C^\infty((0,1))\} \tag{2.102}$$

und darin den Unterraum

$$\mathcal{I}_\xi = \{h \in C^\infty([0,1]) \mid h(\xi_{m_t}) = 0 \text{ für } \xi_{m_t} = q^{2m_t-1}, m_t \leq 0\}. \tag{2.103}$$

Unter punktweiser Multiplikation bilden diese beiden Räume Algebren, wobei $\mathcal{I}_\xi$ ein Ideal in $\mathcal{F}_\xi$ ist. Wir können daher den Faktorraum

$$\mathcal{H}_\xi \equiv \frac{\mathcal{F}_\xi}{\mathcal{I}_\xi}. \tag{2.104}$$

definieren.

Auf $\mathcal{H}_\xi$ hat t^3 wie gewünscht die Eigenwerte $\frac{1}{\lambda}(1+q^{-4m_t+2})$, die zugehörigen Eigenvektoren bezeichnen wir mit χ_{m_t}. Um zu sehen, dass die t^A auf $\mathcal{H}_\xi$ wohldefiniert sind, müssen wir noch zeigen, dass das Ideal $\mathcal{I}_\xi$ invariant unter der Wirkung von $t^\pm$ ist (für t^3 als Multiplikationsoperator ist das klar). Zunächst t^+:

$$\begin{aligned} t^+ f(\xi) &= \frac{e^{i\varphi}}{\lambda}\frac{1}{\xi}\sqrt{1-q^{-2}\xi^2}\;\Lambda_\xi^{-1} f(\xi) \\ &= \frac{e^{i\varphi}}{\lambda}\frac{1}{\xi}\sqrt{1-q^{-2}\xi^2}\;q^{-1} f(q^{-2}\xi). \end{aligned} \tag{2.105}$$

Falls $f \in \mathcal{I}_\xi$ ist, folgt auch $t^+ f \in \mathcal{I}_\xi$. Für t^- erhalten wir analog

$$t^- f(\xi) = \frac{e^{-i\varphi}}{\lambda}\frac{1}{\xi}\sqrt{1-q^2\xi^2}\;q f(q^2\xi). \tag{2.106}$$

Ist $\xi = q^{2m_t-1}$ mit $m_t < 0$ verschwindet $f(q^2\xi)$, falls $f \in \mathcal{I}_\xi$. Für $m_t = 0$ ist $\xi = q^{-1}$ und damit $\sqrt{1-q^2\xi^2} = 0$. Das Ideal $\mathcal{I}_\xi$ ist also auch unter der Wirkung von t^- invariant.

Nun definieren wir mittels eines Jackson-Integrals ein Skalarprodukt auf $\mathcal{H}_\xi$, bezüglich dem $(t^+)^* = q^{-2}t^-$ gilt:

$$(\psi,\phi) = \sum_{m_t=-\infty}^{0} \psi^*(\xi_{m_t})\phi(\xi_{m_t})q^{2m_t}, \quad \xi_{m_t} = q^{2m_t-1}. \tag{2.107}$$

Um den zu t^+ adjungierten Operator zu finden werten wir $(\psi, t^+\phi)$ aus, wobei wir den Summationsindex verschieben und die Summe erweitern, um $m_t = 0$ einzuschließen, wo der Summand ohnehin verschwindet:

$$\begin{aligned} (\psi, t^+\phi) &= \sum_{m_t=-\infty}^{0} q^{2m_t-1}\psi^*(\xi_{m_t})\frac{e^{i\varphi}}{\lambda}\frac{\sqrt{1-q^{-2}\xi_{m_t}^2}}{\xi_{m_t}}\;\phi(\xi_{m_t-1}) \\ &= \sum_{m_t=-\infty}^{-1} q^{2m_t+1}\psi^*(\xi_{m_t+1})\frac{e^{i\varphi}}{\lambda}\frac{\sqrt{1-q^{-2}\xi_{m_t+1}^2}}{\xi_{m_t+1}}\;\phi(\xi_{m_t}) \\ &= \sum_{m_t=-\infty}^{0}\left(\frac{e^{-i\varphi}}{\lambda}\frac{\sqrt{1-q^2\xi^2}}{\xi}q^{2\mathcal{Z}_\xi}\psi\right)^*(\xi_{m_t})\phi(\xi_{m_t})q^{2m_t-2} \\ &= \frac{1}{q^2}(t^-\psi,\phi). \end{aligned} \tag{2.108}$$

2.4.2 K-Algebra

Für die Realisierung der gesamten TX-Algebra durch Differenzialoperatoren brauchen wir jetzt noch die Operatoren K^A. Deren Matrixelemente sind durch (2.68) gegeben; wir müssen also wissen, mit welchem Differenzialoperator wir q^{-2m_k} identifizieren sollen. Dazu benutzen wir die Beziehung $\tau = \tau_t \otimes \tau_k$. τ_t kennen wir bereits:

$\tau_t = -R^2(X^3)^{-2} = -\xi^{-2}$. Um τ festzulegen fordern wir, dass wir im Limes $q \to 1$ den korrekten Grenzfall erhalten, d.h. wir fordern $T^3 \to -2i\frac{\partial}{\partial\varphi}$. Dies ist der Fall für

$$\tau \equiv q^{4i\frac{\partial}{\partial\varphi}}, \tag{2.109}$$

da dann gilt:

$$T^3 = \frac{1-\tau}{\lambda} = \frac{q^{2i\frac{\partial}{\partial\varphi}}\left(q^{-2i\frac{\partial}{\partial\varphi}} - q^{2i\frac{\partial}{\partial\varphi}}\right)}{q-q^{-1}} \longrightarrow -2i\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{2.110}$$

Daher können wir folgern

$$\tau_k = \tau_t^{-1}\tau = -\xi^2 q^{4i\frac{\partial}{\partial\varphi}} \equiv -\hat{\xi}^2, \tag{2.111}$$

wobei wir die Abkürzung

$$\hat{\xi} \equiv \xi q^{2i\frac{\partial}{\partial\varphi}} \tag{2.112}$$

eingeführt haben. Wir ersetzen also q^{-2m_k} durch $q\hat{\xi}$. Dieser Differenzialoperator kommutiert mit den Operatoren aus (2.99):

$$[\hat{\xi},\vec{t}\,] = 0, \quad [\hat{\xi},R] = 0, \quad [\hat{\xi},\vec{X}] = 0. \tag{2.113}$$

Wenn wir $\hat{\xi}$ zur Konstruktion der K verwenden, werden diese also mit den X und t vertauschen, wie es auch sein sollte.

Berücksichtigen wir noch $e^{\pm i\varphi}$, erhalten wir damit aus der Darstellung (2.68) der K-Algebra

$$\begin{aligned} K^3 &= \frac{1}{\lambda}(1+\hat{\xi}^2) \\ K^+ &= e^{i\varphi}\,\frac{e^{i\vartheta}}{q^2-1}\sqrt{1-q^{-2}\hat{\xi}^2} \\ K^- &= -e^{-i\varphi}\,\frac{q^2e^{-i\vartheta}}{q^2-1}\sqrt{1-q^2\hat{\xi}^2}. \end{aligned} \tag{2.114}$$

Hier haben wir eine zusätzlich Phase $e^{i\vartheta}$ eingeführt. Wir werden sehen, dass diese erst durch die Forderung eines existierenden Grenzwertes im Limes $q \to 1$ festgelegt wird.

Jetzt müssen wir wieder überprüfen, ob die Differenzialoperatoren in (2.114) auch wirklich die K-Algebra (2.31) erfüllen. Dazu merken wir an, dass

$$\hat{\xi}e^{i\varphi} = q^{-2}e^{i\varphi}\hat{\xi} \tag{2.115}$$

ist, woraus bereits $K^\pm\tau_k = q^{\mp 4}\tau_k K^\pm$ folgt. Somit muss noch die K^+K^--Relation verifiziert werden:

$$\begin{aligned} q^{-1}K^+K^- - qK^-K^+ &= -q^{-1}\frac{e^{i\vartheta}}{q\lambda}\sqrt{1-q^2\hat{\xi}^2}e^{i\varphi}\frac{qe^{-i\vartheta}}{\lambda}\sqrt{1-q^{-2}\hat{\xi}^2}e^{-i\varphi} \\ &\quad +q\frac{qe^{-i\vartheta}}{\lambda}\sqrt{1-q^{-2}\hat{\xi}^2}e^{-i\varphi}\frac{e^{i\vartheta}}{q\lambda}\sqrt{1-q^2\hat{\xi}^2}e^{i\varphi} \\ &= -\frac{1}{\lambda^2}\left(q^{-1}(1-q^2\hat{\xi}^2) - q(1-q^{-2}\hat{\xi}^2)\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}(1+\hat{\xi}^2) = K^3. \end{aligned} \tag{2.116}$$

Die Beziehung (2.67), die aus der Bahndrehimpulsbedingung folgt ist ebenfalls erfüllt.

Nachdem wir oben die Eigenfunktionen von ξ in $\mathcal{H}_\xi$ mit χ_{m_t} bezeichnet hatten:

$$\xi\chi_{m_t} = q^{2m_t-1}\chi_{m_t}, \quad m_t \leq 0, \tag{2.117}$$

sind die Eigenvektoren des Differenzialoperators $\hat{\xi} = \xi q^{2i\frac{\partial}{\partial\varphi}}$ von der Form $\chi_{m_t}e^{im\varphi}$:

$$\hat{\xi}\chi_{m_t}e^{im\varphi} = q^{2(m_t-m)-1}\chi_{m_t}e^{im\varphi}. \tag{2.118}$$

Diese sind auch Eigenvektoren von τ_k:

$$\tau_k\chi_{m_t}e^{im\varphi} = -q^{4(m_t-m)-2}\chi_{m_t}e^{im\varphi}. \tag{2.119}$$

Die Eigenwerte von τ_k sind $-q^{-4m_k-2}, m_k \geq 0$, siehe (2.68); damit erhalten wir

$$m = m_t + m_k, \qquad m_k \geq 0, \quad m_t \leq 0. \tag{2.120}$$

Um zu sehen, dass die Darstellung (2.114) der K durch Differenzialoperatoren mit der Bedingung $m_k \geq 0$ an die möglichen Eigenwerte verträglich ist, wenden wir K^- auf $\chi_{m_t}e^{im_t\varphi}$ an, was wegen $m = m_t + m_k$ gerade $m_k = 0$ entspricht:

$$\begin{aligned} K^-\chi_{m_t}e^{im_t\varphi} &= -q^2\frac{e^{-i\vartheta}}{q^2-1}\sqrt{1-q^{-2}\hat{\xi}^2}\,\chi_{m_t}e^{i(m_t-1)\varphi} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.121}$$

Hier haben wir (2.118) verwendet. Wir erhalten Null, wie es sein sollte.

Wegen (2.120) muss $m \geq m_t$ sein. Für einen bestimmten Eigenwert q^{2m_t-1} von ξ wird also die K-Algebra dargestellt auf Funktionen von φ, bei denen die Entwicklung in Fouriermoden bei $m = m_t$ abgeschnitten wird:

$$g(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=m_t}^{\infty}\widetilde{g}_m e^{im\varphi}. \tag{2.122}$$

Dass dies konsistent mit der Wirkung der K ist, zeigt für K^- gerade die Rechnung (2.121); für K^+ treten keine Schwierigkeiten auf, da dort m erhöht wird.

Verwenden wir für die Menge $\widetilde{\mathcal{F}}_\varphi$ von Funktionen $f(\varphi)$ als Produkt die Konvolution

$$(\widetilde{fg})_m = \widetilde{f}_m\widetilde{g}_m, \tag{2.123}$$

wobei hier $\widetilde{f}$ die Fouriertransformierte von f bezeichnet, dann bilden in dieser Algebra diejenigen Funktionen, für die $\widetilde{f}_m = 0$ für $m < m_t$ ist, ein Ideal

$$\mathcal{I}_\varphi^{m_t} \equiv \{f \in \widetilde{\mathcal{F}}_\varphi \mid \widetilde{f}_m = 0 \ \ \forall\, m < m_t\}. \tag{2.124}$$

Auf dem entsprechenden Faktorraum

$$\widetilde{\mathcal{H}}_\varphi^{m_t} \equiv \frac{\widetilde{\mathcal{F}}_\varphi}{\mathcal{I}_\varphi^{m_t}} \tag{2.125}$$

definieren wir als Skalarprodukt

$$(h,g) = \sum_{m=m_t}^{\infty} \widetilde{h}_m^* \widetilde{g}_m. \tag{2.126}$$

Bezüglich dieses Skalarproduktes erfüllen die K die Konjugation

$$(K^3)^* = K^3, \quad (K^+)^* = -q^{-2}K^-. \tag{2.127}$$

Beispielsweise ist

$$\begin{aligned}
(h, K^+g) &= \sum_{m=m_t}^{\infty} \widetilde{h}_m^* \frac{e^{i\vartheta}}{q\lambda}\sqrt{1-q^{2(m_t-(m+1))}}\widetilde{g}_{m+1} \\
&= \sum_{m=m_t+1}^{\infty} \widetilde{h}_{m-1}^* \frac{e^{i\vartheta}}{q\lambda}\sqrt{1-q^{2(m_t-m)}}\widetilde{g}_m \\
&= \sum_{m=m_t+1}^{\infty} \left(\frac{e^{-i\vartheta}}{q\lambda}\sqrt{1-q^{2(m_t-m)}}\widetilde{h}_{m-1}\right)^* \widetilde{g}_m \\
&= \sum_{m=m_t}^{\infty} -q^{-2}\left(-\frac{qe^{-i\vartheta}}{\lambda}\sqrt{1-q^{2(m_t-m)}}\widetilde{h}_{m-1}\right)^* \widetilde{g}_m \\
&= -q^{-2}(K^-h, g),
\end{aligned} \tag{2.128}$$

wobei wir wieder den Summationsindex verschoben haben, und anschlißend den Summanden für $m = m_t$, der Null ist, hinzunahmen.

Insgesamt haben wir jetzt also den Hilbertraum $\mathcal{H}_\xi \times \mathcal{H}_\varphi^{m_t}$ mit dem Skalarprodukt

$$(f,g) = \sum_{\substack{m_t=-\infty \\ \sigma=\pm 1}}^{0} \sum_{m=m_t}^{\infty} \widetilde{f}_m^*(\sigma q^{2m_t-1})\widetilde{g}_m(\sigma q^{2m_t-1}). \tag{2.129}$$

Das zusätzliche Vorzeichen σ haben wir hinzugenommen, da wir bereits wissen, dass dieses für einen selbstadjungierten Operator $\vec{T}_{orb}$ notwendig ist, siehe Abschnitt 2.3.1. Wir befinden uns auf einer Kugeloberfläche; die radiale Richtung werden wir im nächsten Kapitel in Abschnitt 3.2.2 hinzunehmen.

2.4.3 Bahndrehimpuls

Aus (2.30) erhalten wir jetzt in einfacher Weise den Bahndrehimpuls T_{orb}:

$$\begin{aligned}
\tau_{orb} &= q^{4i\frac{\partial}{\partial\varphi}} \\
T_{orb}^3 &= \frac{1}{\lambda}\left(1 - q^{4i\frac{\partial}{\partial\varphi}}\right) \\
T_{orb}^+ &= \frac{1}{\lambda}e^{i\varphi}\frac{1}{\xi}\sqrt{1-q^{-2}\xi^2}\,\Lambda_\xi^{-1} + \frac{1}{\xi}\frac{e^{i\vartheta}}{q^2-1}\sqrt{1-q^2\hat{\xi}^2}\,e^{i\varphi} \\
T_{orb}^- &= \frac{1}{\lambda}e^{-i\varphi}\frac{1}{\xi}\sqrt{1-q^2\xi^2}\,\Lambda_\xi + \frac{1}{\xi}\frac{e^{-i\vartheta}}{q^2-1}q^2\sqrt{1-q^{-2}\hat{\xi}^2}\,e^{-i\varphi} \\
\mathcal{Z}_\xi = \xi\frac{\partial}{\partial\xi}, &\quad \Lambda_\xi = q^{2\mathcal{Z}_\xi}, \quad \hat{\xi} = \xi q^{2i\frac{\partial}{\partial\varphi}}
\end{aligned} \tag{2.130}$$

Wir wollen den Grenzwert dieser Operatoren im Limes $q = e^h \to 1$ betrachten. Wie bereits erwähnt gilt

$$T^3_{orb} \to -2i \frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{2.131}$$

Für den Differenzialoperator T^+_{orb} haben wir

$$T^+_{orb} \to \frac{1}{2h}\frac{e^{i\varphi}}{\xi}\sqrt{1-q^{-2}\xi^2}e^{-2h(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{1}{2})} + e^{i\vartheta}\frac{1}{2h}\frac{e^{i\varphi}}{\xi}\sqrt{1-q^{-2}\xi^2 e^{4ih\frac{\partial}{\partial\varphi}}}. \tag{2.132}$$

Die beiden Summanden besitzten für sich genommen keinen Limes für $h \to 0$, was dem Nichtvorhandensein eines Limes für die Elemente t und K entspricht. Setzen wir jedoch $e^{i\vartheta} = -1$ heben sich die beiden singulären Anteile gegenseitig heraus; dann gilt:

$$\begin{aligned} T^+_{orb} &\to e^{i\varphi}\sqrt{1-\xi^2}\left\{-\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\xi}{1-q^2} i \frac{\partial}{\partial\varphi}\right\} \\ &\to e^{i\varphi}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\, i\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}. \end{aligned} \tag{2.133}$$

Für T^-_{orb} erhalten wir in gleicher Weise:

$$T^-_{orb} \to e^{-i\varphi}\left\{-\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\, i\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}. \tag{2.134}$$

Wir finden also genau die gewöhnlichen undeformierten Bahndrehimpulsoperatoren $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = -i\vec{r}\times\vec{\partial}_r$. Dass der Grenzwert überhaupt existiert, legt den Phasenfaktor auf $e^{i\vartheta} = -1$ fest. Ohne die Bedingung für $q \to 1$ den klassischen Grenzwert zu erhalten, gibt es mehrere Realisierungen der TX-Algebra durch Differenzialoperatoren.

Kapitel 3

q-deformierte Heisenbergalgebra

In Kapitel 2 haben wir die Koordinatenalgebra, also den Ortsraum, und deren Symmetriestruktur behandelt. Zu dieser Algebra sollen jetzt noch Impulsoperatoren hinzugefügt werden. Damit erhalten wir einen q-deformierten Phasenraum. Nachdem wir die Algebra konstruiert haben, werden wir sie durch Differenzialoperatoren im $\mathbb{R}^3$ und auch auf dem Ortsraum, also auf $\mathbb{R}_q^3$, realisieren.

3.1 Konstruktion der Impulsoperatoren und der Heisenbergalgebra

Wir wollen zunächst zu unserer Algebra der Koordinaten X und der Drehimpulse T Impulse hinzufügen, also eine Heisenbergalgebra konstruieren. Typischerweise versucht man dazu Ableitungen zu finden, die dann in Analogie zur gewöhnlichen Quantenmechanik mit den Impulsen in Verbindung gebracht werden ($p = -i\partial$). Für Quantenräume gibt es im Allgemeinen mehrere Differenzialkalküle. Im Falle des $\mathbb{R}_q^3$ gibt es zwei, die über die Konjugation verbunden werden können [50, 63]. Wir werden hier nicht direkt über den Differenzialkalkül gehen, sondern als Forderung eine Relation analog zu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ stellen, d.h. in unserem Fall $L^A = X^C p^B \varepsilon_{BC}{}^A$. Diese Gleichung versuchen wir innerhalb der Realisierung in $su_q(2) \otimes su_q(1,1)$ zu lösen. Als weitere Bedingung fordern wir, dass die p eine Vektordarstellung der T_{orb}-Algebra bilden. Auf diese Weise finden wir zwei Lösungen, gerade den zwei Differenzialkalkülen entsprechend. Diese werden durch Konjugation verbunden. Um reelle Impulse zu erhalten bilden wir eine Linearkombination der beiden Lösungen und führen einen Skalierungsoperator ein.

3.1.1 Bedingungsgleichungen und deren Lösung

Die Impulsoperatoren p^A sollen, wie auch die Koordinaten, zu einer Spin-1-Darstellung der Drehimpulsalgebra gehören. Das impliziert, dass sie mit den Drehimpulsoperatoren T die Vertauschungsrelationen (2.7) haben, mit den X^A durch die p^A ersetzt. Als zentrale Bedingung stellen wir, dass

$$X^C p^B \varepsilon_{BC}{}^A = L^A \tag{3.1}$$

gilt. Der q-deformierte ε-Tensor ist in Anhang C aufgeführt, Gleichung (C.2).

Die Bestimmungsgleichungen (2.7) und (3.1) werten wir jetzt in der Realisierung der TX-Algebra im Produkt $su_q(2) \otimes su_q(1,1)$ aus. D.h. wir verwenden X^A, L^A und T^A jeweils in der Form, die durch die Beziehungen (2.25), (2.33) und (2.72) gegeben sind. Für die Operatoren machen wir entsprechend den Ansatz

$$\begin{aligned} p^+ &= R^{-1} \sum_{\substack{i,j,k \\ i \geq 1}} C_{ijk} (t^+)^i (-\tau_t)^{\frac{j}{2}} \otimes (K^-)^{i-1} (-\tau_t)^{\frac{k}{2}} \\ &\qquad + D_{ijk} (t^-)^{i-1} (-\tau_t)^{\frac{j}{2}} \otimes (K^+)^i (-\tau_t)^{\frac{k}{2}}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Es ist ausreichend, einen der Operatoren p^A anzugeben, da man daraus die anderen mit Hilfe der TX-Relationen (2.7) erhalten kann. In diesen Ansatz haben wir bereits die gewünschte Vertauschungsrelation mit τ: $\tau p^+ = q^4 p^+ \tau$ einfließen lassen.

Aus den Bestimmungsgleichungen (3.1) und (2.7) erhält man ein System von Gleichungen für die Koeffizienten C_{ijk}, D_{ijk} und die entsprechenden Koeffizienten für p^3 und p^-. Für dieses Gleichungssystem findet man zwei Lösungen:

$$\begin{aligned} &\text{Lösung 1} \quad : \quad D_{1,-1,-1} = \frac{q^{-2}}{\sqrt{1+q^2}} \\ &\text{Lösung 2} \quad : \quad C_{1,0,-1} = q^{-2}\sqrt{1+q^2},\ C_{2,-1,-1} = -\frac{\lambda}{\sqrt{1+q^2}},\ D_{1,1,-1} = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}. \end{aligned}$$

Die restlichen Koeffizienten verschwinden jeweils. Ausgeschrieben sind die beiden Lösungen p_1^+, p_2^+ gegeben durch

$$\begin{aligned} p_1^+ &= \sigma R^{-1} \frac{q^{-2}}{\sqrt{1+q^2}} (-\tau_t)^{-\frac{1}{2}} \otimes K^+ (-\tau_k)^{-\frac{1}{2}} \\ p_2^+ &= \sigma R^{-1} \Big\{ q^{-2}\sqrt{1+q^2}\, t^+ \otimes (-\tau_k)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} (-\tau_t)^{\frac{1}{2}} \otimes K^+ (-\tau_k)^{-\frac{1}{2}} \\ &\qquad - \frac{\lambda^2}{\sqrt{1+q^2}} (t^+)^2 (-\tau_t)^{-\frac{1}{2}} \otimes K^+ (-\tau_k)^{-\frac{1}{2}} \Big\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Hier ist $\sigma = \pm 1$ und kommt von dem $\pm$ in Gleichung (2.25). Es gibt natürlich auch Lösungen des homogenen Teils

$$X^C p^B \varepsilon_{BC}{}^A = 0 \tag{3.4}$$

der Gleichung (3.1), insbesondere die Koordinaten X^A, deren Vertauschungsrelationen ja gerade durch $X^C X^B \varepsilon_{BC}{}^A = 0$ gegeben sind. Wir wollen uns hier auf die speziellen Lösungen (3.3) konzentrieren. Aufgrund der $su_q(2)$-Modul-Struktur (2.7) können alle Operatoren p_1^A, p_2^A berechnet werden.

Verwendet man die Konjugationseigenschaften (2.21) und (2.32) der t- und K-Algebra, findet man:

$$\begin{aligned} \overline{p_1^+} &= q^{-1} p_2^- \\ \overline{p_1^3} &= -q^{-2} p_2^3 \\ \overline{p_1^-} &= q^{-3} p_2^+. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Die beiden Lösungen p_1 und p_2 gehen also ineinander über.

3.1.2 Reelle Impulse und Heisenbergalgebra

Wir wollen jedoch reelle Impulse, d.h. die Impulsoperatoren P müssen die Konjugation

$$\overline{P^+} = -qP^-, \quad \overline{P^3} = P^3 \tag{3.6}$$

besitzen. Vergleichen wir dies mit (3.5), sehen wir, dass wir Linearkombinationen der p_1^A und p_2^A verwenden müssen, und dass wir zusätzlich einen Faktor q^2 benötigen. Zu diesem Zweck führen wir einen unitären Operator ein, der mit den t und den K kommutiert, mit R jedoch q^2-kommutiert. Um weiterhin im Einklang mit der Notation in [50] zu bleiben, bezeichnen wir diesen Operator mit $q^3\Lambda^{\frac{1}{2}}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\overline{q^3\Lambda^{\frac{1}{2}}} &= (q^3\Lambda^{\frac{1}{2}})^{-1}\\ \Lambda^{\frac{1}{2}}R &= q^2R\Lambda^{\frac{1}{2}}\\ [\Lambda^{\frac{1}{2}}, \vec{t}\,] &= [\Lambda^{\frac{1}{2}}, \vec{K}] = 0.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Damit definieren wir nun die Impulsoperatoren als

$$P^A \equiv \frac{iq}{2}\left(q^{-3}\Lambda^{-\frac{1}{2}}p_1^A + q^3\Lambda^{\frac{1}{2}}p_2^A\right). \tag{3.8}$$

Diese erfüllen die Konjugation (3.6) und bilden ein $su_q(2)$-Triplet. Die Vertauschungsrelationen untereinander sind durch

$$P^C P^B \varepsilon_{BC}{}^A = 0. \tag{3.9}$$

gegeben.

Explizit erhalten wir aus (3.8) die Impulsoperatoren zu

$$\begin{aligned}
P^3 &= \frac{\Lambda^{\frac{1}{2}}\sigma q R^{-1}}{2i\lambda}\left\{1\otimes(-\tau_k)^{-\frac{1}{2}} - q^2\lambda^2 t^+(\tau_t)^{-\frac{1}{2}}\otimes(-\tau_k)^{-\frac{1}{2}}K^-\right\}\\
&\quad+\frac{\Lambda^{-\frac{1}{2}}\sigma q^{-7}R^{-1}}{2i\lambda}\left\{-1\otimes(-\tau_k)^{-\frac{1}{2}} - q^{-2}\lambda^2 t^-(\tau_t)^{-\frac{1}{2}}\otimes(-\tau_k)^{-\frac{1}{2}}K^+\right\}\\
P^- &= \frac{\Lambda^{\frac{1}{2}}\sigma q R^{-1}}{2i\sqrt{1+q^2}}(-\tau_t)^{-\frac{1}{2}}\otimes(-\tau_k)^{-\frac{1}{2}}K^-\\
&\quad+\frac{\Lambda^{-\frac{1}{2}}\sigma q^{-9}R^{-1}}{2i\sqrt{1+q^2}}\Big\{-(1+q^2)t^-\otimes(-\tau_k)^{-\frac{1}{2}} + q^2(-\tau_t)^{\frac{1}{2}}\otimes(-\tau_k)^{-\frac{1}{2}}K^-\\
&\qquad-\frac{\lambda^2}{q^2}(t^-)^2(-\tau_t)^{-\frac{1}{2}}\otimes(-\tau_k)^{-\frac{1}{2}}K^+\Big\}\\
P^+ &= -\frac{\Lambda^{-\frac{1}{2}}\sigma q^{-6}R^{-1}}{2i\sqrt{1+q^2}}(-\tau_t)^{-\frac{1}{2}}\otimes(-\tau_k)^{-\frac{1}{2}}K^+\\
&\quad+\frac{\Lambda^{\frac{1}{2}}\sigma q^3R^{-1}}{2i\sqrt{1+q^2}}\Big\{-q(1+q^{-2})t^+\otimes(-\tau_k)^{-\frac{1}{2}} - q^{-1}(-\tau_t)^{\frac{1}{2}}\otimes(-\tau_k)^{-\frac{1}{2}}K^+\\
&\qquad+q^3\lambda^2(t^+)^2(-\tau_t)^{-\frac{1}{2}}\otimes(-\tau_k)^{-\frac{1}{2}}K^-\Big\}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Nach dem oben Gesagten ist die Algebra der P^A und der X^A natürlich schon bekannt aus [48, 50, 77]:

$$\begin{aligned} & P^A X^B - \hat{R}^{-1AB}{}_{CD} X^C P^D \\ = & -\frac{i}{2}\Lambda^{-1/2}\Big\{(1+q^{-6})g^{AB}W - (1-q^{-4})\varepsilon^{ABC}L_C\Big\} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Hier steht $\hat{R}$ für die $\hat{R}$-Matrix der $SO_q(3)$ (siehe Anhang C) und W ist gegeben durch

$$W \equiv q^3\lambda L^3 + \tau^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.12}$$

Für eine Möglichkeit die Ausdrücke (3.10) direkt aus der Heisenbergalgebra (3.11) zu erhalten, siehe ebenfalls Anhang C.

3.1.3 Identifizierung der Ableitungen

In [50] wurde der reelle Impuls folgendermaßen aus den Ableitungen gebildet:

$$P^A = -\frac{i}{2}\left(\partial^A - \overline{\partial}^A\right). \tag{3.13}$$

Berücksichtigen wir noch die dort gemachte Aussage über die nichtlineare Beziehung zwischen ∂ und $\overline{\partial}^A$, oder vergleichen wir die $X\partial$ bzw. $X\overline{\partial}$-Relationen ((C.8) bzw. (C.9)) im Anhang mit den Xp-Relationen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial^A &= -q^4\Lambda^{\frac{1}{2}}p_2^A \\ \overline{\partial}^A &= q^{-2}\Lambda^{-\frac{1}{2}}p_1^A. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Wir finden also eine Realisierung der Ableitungen $\partial, \overline{\partial}$ in der ΛtK-Algebra, vergleiche auch [8, 28]. Diese kann auf die ΛXT-Algebra übertragen werden. Z.B. erhält man aus (3.3) unter Verwendung von (2.25) und (2.72) direkt

$$p_1^+ = R^{-2}\left(\frac{X^3T^+}{q^2\sqrt{1+q^2}} + \frac{1}{q^3\lambda}X^+\right)\tau^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.15}$$

Die restlichen p erhält man hieraus am einfachsten mittels der TX-Relationen (2.7).

Um die Bahndrehimpulsbedingung $X \circ L = 0$ besser auswerten zu können, verwenden wir die Elemente L (A.12) statt der T. Die LX-Relationen sind im Anhang, Gleichung (C.5) aufgeführt.

$$\begin{aligned} p_1^+ &= \frac{1}{R^2}\left[q^{-2}X^3L^+ + \frac{1}{q^3\lambda}X^+\tau^{\frac{1}{2}}\right] \\ p_1^3 &= \frac{1}{R^2}\left[q^{-1}(1+q^{-2})X^-L^+ + \frac{1}{q^3\lambda}X^3\tau^{-\frac{1}{2}}\right] \\ p_1^- &= \frac{1}{R^2}\left[(1+q^{-2})X^-(X^3)^{-1}(qX^+L^- + q^{-1}X^-L^+) - X^3L^- + \frac{1}{q^3\lambda}X^-\tau^{-\frac{1}{2}}\right] \\ p_2^+ &= \frac{-1}{R^2}\left[(1+q^{-2})X^+(X^3)^{-1}(qX^+L^- + q^{-1}X^-L^+) - q^{-2}X^3L^+ + \frac{1}{q^5\lambda}X^+\tau^{-\frac{1}{2}}\right] \\ p_2^3 &= \frac{-1}{R^2}\left[(q+q^{-1})X^+L^- + \frac{1}{q^5\lambda}X^3\tau^{-\frac{1}{2}}\right] \\ p_2^- &= \frac{-1}{R^2}\left[X^3L^- + \frac{1}{q^5\lambda}X^-\tau^{-\frac{1}{2}}\right] \end{aligned} \tag{3.16}$$

3.2 Darstellungen der Heisenbergalgebra

Aufgrund der Realisierung (3.10) der Impulsoperatoren P innerhalb der ΛtK-Algebra ist es leicht, zusammen mit den Ergebnissen aus dem vorherigen Kapitel, Darstellungen der Heisenbergalgebra zu erhalten.

3.2.1 Hilbertraumdarstellungen

Eine entsprechende Basis haben wir bereits in Abschnitt 2.2, Gleichung (2.74) eingeführt. Die Basisvektoren sind charakterisiert durch die Eigenwerte der Operatoren R^2, τ_t, τ_k:

$$\begin{aligned} R^2|M, m_t, m_k\rangle &= q^{4M+2} r_0^2 |M, m_t, m_k\rangle \\ \tau_t|M, m_t, m_k\rangle &= -q^{-4m_t+2}|M, m_t, m_k\rangle \\ \tau_k|M, m_t, m_k\rangle &= -q^{-4m_k-2}|M, m_t, m_k\rangle. \end{aligned} \tag{3.17}$$

In Abschnitt 2.2 haben wir auch schon die Wirkung der Operatoren X und T_{orb} in dieser Basis angegeben. Das Skalarprodukt ist wie üblich definiert:

$$\langle M, m_t, m_k | M', m_t', m_k'\rangle = \delta_{M,M'} \delta_{m_t,m_t'} \delta_{m_k,m_k'}. \tag{3.18}$$

Aus (3.7) erhalten wir

$$\Lambda^{\frac{1}{2}}|M, m_t, m_k\rangle = q^{-3}|M-1, m_t, m_k\rangle, \tag{3.19}$$

wodurch $q^3\Lambda^{\frac{1}{2}}$ zu einen unitären Operator im Hilbertraum wird.

Durch Einsetzen der Darstellungen (2.62) und (2.68) der t- und der K-Algebra in die Relation (3.10) erhält man dann die Darstellung der Impulsoperatoren P. Da sich keine Terme zusammenfassen lassen, führen wir die recht länglichen Formeln hier nicht gesondert auf.

3.2.2 Realisierung durch Differenzialoperatoren

Das Element R der Algebra realisieren wir durch den Multiplikationsoperator r, der auf Funktionen $f(r)$ wirkt. Zur Darstellung der gesamten q-Heisenbergalgebra durch Differenzialoperatoren, benötigen wir dann noch den Skalierungsoperator Λ. In Analogie zum Operator $\mathcal{Z}_\xi$ in Abschnitt 2.4.1 definieren wir

$$\mathcal{Z}_r = 2r\frac{\partial}{\partial r} + 3. \tag{3.20}$$

Dieser Operator ist wieder so gewählt, dass formal

$$\mathcal{Z}_r^* = -\mathcal{Z}_r \tag{3.21}$$

gilt. Damit realisieren wir dann den unitären Operator $q^3\Lambda^{\frac{1}{2}}$, vgl. [25, 69]:

$$q^3\Lambda^{\frac{1}{2}} \equiv q^{\mathcal{Z}_r}. \tag{3.22}$$

Dieser Differenzialoperator hat die Vertauschungsregel

$$\Lambda^{\frac{1}{2}} r = q^{-2} r \Lambda^{\frac{1}{2}} \tag{3.23}$$

mit dem Radius r, und wirkt auf C^∞-Funktionen durch

$$(\Lambda^{\frac{1}{2}} f)(r) = f(q^2 r). \tag{3.24}$$

Damit Λ ein unitärer Operator wird, und auch damit der Multiplikationsoperator r ein Spektrum entsprechend (3.17) hat, müssen wir wieder einen geeigneten Hilbertraum finden. Dazu gehen wir von der Menge $\mathcal{F}_r$ aller C^∞-Funktionen $f(r)$ aus: $\mathcal{F}_r \equiv C^\infty(\mathbb{R}_+)$. Dieser lineare Raum bildet eine Algebra unter punktweiser Multiplikation. Wir definieren ein Ideal in $\mathcal{F}_r$:

$$\mathcal{I}_r^{r_0} \equiv \{f \in \mathcal{F}_r \mid f(r_0 q^{2M+1}) = 0 \ \ \forall\, M \in \mathbb{Z}\}. \tag{3.25}$$

Dieses ist klarerweise invariant unter der Wirkung der Operatoren r und auch t und K aus Abschnitt 2.4. Aus (3.24) folgt die Invarianz unter Anwenden von $\Lambda^{\frac{1}{2}}$. Damit folgt, dass die Differenzialoperatoren auf dem Faktorraum

$$\mathcal{H}_r^{r_0} = \frac{\mathcal{F}_r}{\mathcal{I}_r^{r_0}}. \tag{3.26}$$

wohldefiniert sind.

Das Skalarprodukt auf diesem Raum definieren wir wieder als Jackson-Integral:[1]

$$(g, f) = \sum_{M=-\infty}^{\infty} q^{6M+3} g^*(q^{2M+1} r_0) f(q^{2M+1} r_0). \tag{3.27}$$

Es ist leicht zu sehen, dass $q^3 \Lambda^{\frac{1}{2}}$ mit dieser Definition unitär ist:

$$\begin{aligned}
(f, q^3 \Lambda^{\frac{1}{2}} g) &= \sum_M q^{6M+3} g^*(q^{2M+1} r_0) q^3 f(q^2 q^{2M+1} r_0) \\
&= \sum_M q^{6(M-1)+3} q^3 g^*(q^{2M-1} r_0) f(q^{2M+1} r_0) \\
&= (q^{-3} \Lambda^{-\frac{1}{2}} f, g),
\end{aligned} \tag{3.28}$$

wobei wir die Summation um 1 verschoben haben.

Der Operator r hat in $\mathcal{H}_r^{r_0}$ die Eigenwerte q^{2M+1}; die Eigenfunktionen dazu bezeichnen wir mit u_M:

$$r u_M = r_0 q^{2M+1} u_M. \tag{3.29}$$

Beziehen wir die Ergebnisse aus Abschnitt 2.4 mit ein, haben wir insgesamt den Raum $\mathcal{H}_r^{r_0} \times \mathcal{H}_\xi \times \mathcal{H}_\varphi^{m_t}$. Eine Basis bilden die gemeinsamen Eigenfunktionen $\psi_{M,m_t,m}$

[1] Dass hier q^{6M} im Summanden steht, und nicht wie man aus (B.5) ablesen würde q^{2M}, liegt daran, dass wir hier ein Integral über einen dreidimensionalen Raum haben, während es sich im Anhang B nur um ein eindimesionales Integral handelte.

der Operatoren r, ξ, T^3_{orb}:

$$\begin{aligned} \psi_{M,m_t,m} &= u_M \chi_{m_t} e^{im\varphi} \\ M &= -\infty \dots \infty \\ m_t &= -\infty \dots 0 \\ m &= m_t \dots \infty. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Das Skalarprodukt ist gegeben durch

$$\begin{aligned} (\phi, \psi) &= \sum_{M=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{m_t=-\infty \\ \sigma=\pm 1}}^{0} \sum_{m=m_t}^{\infty} q^{6M+3} q^{2m_t} \times \\ &\quad \times \widetilde{\phi}^*_m(q^{2M+1} r_0, \sigma q^{2m_t-1}) \widetilde{\psi}_m(q^{2M+1} r_0, \sigma q^{2m_t-1}). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Die Realsierung der Impulsoperatoren erhält man, indem man die Ausdrücke (3.22), (2.99) und (2.114) für Λ, t und K in (3.10) einsetzt:

$$\begin{aligned} P^3 &= \frac{\Lambda^{\frac{1}{2}} \sigma q}{2i\lambda r} \hat{\xi}^{-1} \left[1 + q e^{-i\vartheta} \sqrt{1 - q^{-2}\xi^2} \Lambda_\xi^{-1} \sqrt{1 - q^2 \hat{\xi}^2} \right] \\ &\quad - \frac{\Lambda^{-\frac{1}{2}} \sigma q^{-7}}{2i\lambda r} \hat{\xi}^{-1} \left[1 + q^{-1} e^{i\vartheta} \sqrt{1 - q^2 \xi^2} \Lambda_\xi \sqrt{1 - q^{-2} \hat{\xi}^2} \right] \\ P^- &= -\left(q^4 \Lambda^{\frac{1}{2}} \xi + q^{-4} \Lambda^{-\frac{1}{2}} \xi^{-1} \right) \frac{\sigma q^{-4} e^{-i\varphi} e^{-i\vartheta}}{2i\lambda r \sqrt{1+q^2}} \hat{\xi}^{-1} \sqrt{1 - q^2 \hat{\xi}^2} \\ &\quad - \frac{\Lambda^{-\frac{1}{2}} \sigma q^{-7} e^{-i\varphi}}{2i\lambda r \sqrt{1+q^2}} \xi^{-1} \hat{\xi}^{-1} \sqrt{1 - q^2 \xi} \Lambda_\xi \\ &\qquad \times \left((1+q^2) + \frac{e^{i\vartheta}}{q} \sqrt{1 - q^2 \xi}\, \Lambda_\xi \sqrt{1 - q^{-2} \hat{\xi}^2} \right) \\ P^+ &= -\left(q^4 \Lambda^{\frac{1}{2}} \xi^{-1} + q^{-4} \Lambda^{-\frac{1}{2}} \xi \right) \frac{\sigma q^{-1} e^{i\varphi} e^{i\vartheta}}{2i\lambda r \sqrt{1+q^2}} \hat{\xi}^{-1} \sqrt{1 - q^{-2} \hat{\xi}^2} \\ &\quad - \frac{\Lambda^{-\frac{1}{2}} \sigma q^4 e^{i\varphi}}{2i\lambda r \sqrt{1+q^2}} \xi^{-1} \hat{\xi}^{-1} \sqrt{1 - q^{-2} \xi} \Lambda_\xi^{-1} \\ &\qquad \times \left((1+q^2) + q^3 e^{i\vartheta} \sqrt{1 - q^{-2} \xi}\, \Lambda_\xi^{-1} \sqrt{1 - q^2 \hat{\xi}^2} \right) \end{aligned} \tag{3.32}$$

Betrachtet man den Limes $q \to 1$ dieser Differenzialoperatoren, findet man genau die klassischen Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_3 &= \xi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}(1 - \xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \partial_\pm &= \mp e^{\pm i\varphi} \left(\sqrt{1 - \xi^2} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\xi}{r} \sqrt{1 - \xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \pm \frac{i}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Damit der Grenzwert existiert, muss wieder $e^{i\vartheta} = -1$ gelten. Die Operatoren p_1^A, p_2^A, und damit auch die nicht reellen Ableitungen $\partial, \overline{\partial}$, sind in der Realisierung durch Differenzialoperatoren im Grenzfall $h \to 0$ singulär.

3.3 Realisierung der Heisenbergalgebra auf Feldern

Hat man den gewöhnlichen $\mathbb{R}^3$ mit den kommutierenden Koordinaten $x^1, \dots, x^N$ zusammen mit den ebenfalls kommutierenden Ableitungen $\partial_1, \dots, \partial_N$ gegeben, gilt die Leibnizregel

$$\partial_i x^j = \delta_i{}^j + x^j \partial_i; \tag{3.34}$$

dies ist eine Vertauschungsregel zwischen Koordinaten und Ableitungen. Ebenso hat man die Ableitungen als Abbildungen von Funktionen auf Funktionen gegeben:

$$f \mapsto (\partial_i f). \tag{3.35}$$

Dies kann man so auffassen, dass man die von den Koordinaten x^i und den Ableitungen ∂_i erzeugte Algebra auf der Funktionenalgebra des $\mathbb{R}^N$ darstellt (die x^i wirken einfach durch Multiplikation).

Der Zusammenhang zwischen der algebraischen Relation (3.34) und der Abbildung (3.35) wird hergestellt durch

$$(\partial_i f) = [\partial_i, f] = \partial_i f - f \partial_i. \tag{3.36}$$

Die Gleichung (3.36) kann so interpretiert werden: Man nehme ein Element f der Funktionenalgebra, multipliziere von links mit einer Ableitung, tausche diese mit Hilfe der Vertauschungsrelationen (3.34) nach ganz rechts durch und subtrahiere anschließend denjenigen Teil des so entstandenen Ausdrucks, der Ableitungen ganz rechts stehen hat um die Ableitung $(\partial_i f)$ der Funktion f zu erhalten. Genau dieses Verfahren führen wir in diesem Abschnitt für die q-deformierte Heisenbergalgebra durch.

3.3.1 Definitionen: Felder und Wirkung der Operatoren

Als Felder bezeichnen wir hier Elemente des dreidimensionalen euklidischen Quantenraums $\mathbb{R}^3_q$, also formale Potenzreihen in den Koordinaten X^A. Wir wollen die gesamte q-Heisenbergalgebra, bzw. deren Generatoren $X^A, L^A, \tau, P^A, \Lambda, \dots$ auf der Algebra der Felder realisieren. Für einen Generator G der Heisenbergalgebra bezeichnen wir die zugehörige Abbildung von Feldern auf Felder mit $\check{G}$. Wir gehen folgendermaßen vor: Ein Element $f(X)$ der Funktionenalgebra wird von links mit G multipliziert, anschließend werden die X alle nach ganz links durchgetauscht, was wegen der Poincaré-Birkhoff-Witt Eigenschaft konsistent möglich ist, und man erhält:

$$Gf(X) = g(X)E + h(X)D. \tag{3.37}$$

Hier sind $g(X)$ und $h(X)$ Felder, während E und D Ausdrücke sind, die kein X beinhalten, sich also aus $L^A, \tau, P^A, \Lambda, \dots$ zusammensetzen. Die Aufteilung in E und D ist folgendermaßen definiert: D enthält einen der Operatoren L^A, P^A, wohingegen E keinen dieser Operatoren enhält:

$$\begin{aligned} E &\sim \tau, \Lambda, \dots \\ D &\sim P^A, L^A. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Dies ist auch dadurch motiviert, dass P^A, L^A sozusagen Differenzialoperatoren sind, τ, Λ hingegen werden für $q \to 1$ zum Einheitsoperator.

Die Abbildung $\check{G}$ wird definiert als

$$\check{G}f(X) \equiv g(X). \tag{3.39}$$

Letztendlich wird die Aufteilung in $g(X)$ und $h(X)$ gerechtfertigt dadurch, dass die so erhaltenen Operatoren $\check{G}$ die q-Heisenbergalgebra darstellen; wie man am Schluss verifiziert.

Will man nicht die reelle q-Heisenbergalgebra realisieren, sondern die Algebra mit den partiellen Ableitungen ∂^A bzw. $\overline{\partial}^A$, definiert man die Abbildungen völlig analog, nur dass D jetzt statt P^A eine der Ableitungen ∂^A bzw. $\overline{\partial}^A$ enthalten muss, siehe auch [27].

3.3.2 Ergebnisse

Um konkrete Resultate zu erhalten, muss man eine Basis für die Felder wählen. Für uns heisst das, dass wir eine Ordnungsvorschrift vorgeben müssen. Eine Möglichkeit ist die Normalordnung: Erst alle X^+, dann die X^3 und am Schluss die X^-. Zur Abkürzung bezeichnen wir die entsprechenden Elemente mit Ψ^{n_+,n_3,n_-}, also:

$$\Psi^{n_+,n_3,n_-} \equiv (X^+)^{n_+}(X^3)^{n_3}(X^-)^{n_-}, \qquad \text{mit } n_+, n_- \in \mathbb{N}, n_3 \in \mathbb{Z}. \tag{3.40}$$

Für die weitere Durchführung des obigen Programms verwendet man die im Anhang C angegebenen Vertauschungsrelationen. Die Resultate sind ob ihrer Länge im Anhang D aufgeführt. Für die reellen Impulse P^A erweisen sich die Rechnungen als recht aufwändig – vgl. die komplizierten Ergebnisse (D.9).

Eine zweite Möglichkeit besteht darin, X^- zunächst nicht zu berücksichtigen, und Felder als Elemente der von $R^{\pm}$, $(X^3)^{\pm 1}$ und $(X^+)^{\pm 1}$ erzeugten Algebra zu betrachten (wir invertieren also X^+). Als Basis verwenden wir

$$\phi_N^{n_+,n_3} \equiv R^{2N}(X^+)^{n_+}(X^3)^{n_3}, \qquad \text{mit } 2N, n_+, n_3 \in \mathbb{Z}. \tag{3.41}$$

Ausgehend von $R^2 = X^3X^3 - qX^+X^- - q^{-1}X^-X^+ = q^{-2}X^3X^3 - (q+q^{-1})X^+X^-$ erhält man als Zusammenhang zwischen ψ in (3.40) und ϕ in (3.41):

$$X^- = \frac{1}{X^+}\frac{q^{-2}X^3X^3 - R^2}{q+q^{-1}}. \tag{3.42}$$

Damit erhält man auch unmittelbar die Realisierung von X^- auf $\phi_N^{n_+,n_3}$.

3.3.3 Leibnizregeln

Unsere Definition (3.37) hat genau die Form einer verallgemeinerten Leibnizregel. Definiert man die Abbildung, bzw. im Allgemeinen die Abbildungen, $\check{H}$ durch

$$\check{H} \equiv h(X), \tag{3.43}$$

und bezeichnet die E und D zugeordneten Abbildungen von Feldern auf Felder mit $\check{E}$ und $\check{D}$, hat man

$$\check{G}(fg) = (\check{G}f)(\check{E}g) + (\check{H}f)(\check{D}g). \tag{3.44}$$

Für den dreidimensionalen q-deformierten euklidischen Raum zeigt sich, dass die Abbildungen $\check{H}$ durch bereits in der q-Heisenbergalgebra vorhandene Operatoren ausgedrückt werden können.

Dies wollen wir an einem Beispiel veranschaulichen. Eine einfache Rechnung ergibt unter Verwendung von (C.8)

$$\begin{aligned}
\partial^3 \Psi^{n_+,n_3,n_-} &= q^{2n_++n_3-1}[n_3]_q \Psi^{n_+,n_3-1,n_-} + q^{2(n_++n_3+n_-)}\Psi^{n_+,n_3,n_-}\partial^3 \\
&\quad + q(1-q^4)\big\{q^{2(n_++n_3+n_-)-3}[n_-]_{q^2}\Psi^{n_+,n_3+1,n_--1} \\
&\qquad + q^{2n_++3n_3-3}[n_3]_q \Psi^{n_++1,n_3-1,n_-}\big\}\partial^-.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Daraus liest man ab

$$\check{\partial}^3 \Psi^{n_+,n_3,n_-} = q^{2n_++n_3-1}[n_3]_q \Psi^{n_+,n_3-1,n_-} \tag{3.46}$$

und unter Berücksichtigung von (D.2) und (D.5)

$$\begin{aligned}
\check{H}_3 \Psi^{n_+,n_3,n_-} &= q^{2(n_++n_3+n_-)}\Psi^{n_+,n_3,n_-} \\
&= \Lambda^{\frac{1}{2}}\Psi^{n_+,n_3,n_-} \\
\check{H}_- \Psi^{n_+,n_3,n_-} &= q(1-q^4)\big\{q^{2(n_++n_3+n_-)-3}[n_-]_{q^2}\Psi^{n_+,n_3+1,n_--1} \\
&\qquad + q^{2n_++3n_3-3}[n_3]_q \Psi^{n_++1,n_3-1,n_-}\big\} \\
&= q(1-q^4)\Lambda^{\frac{1}{2}} L^+ \Psi^{n_+,n_3,n_-}.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Also hat man die Leibnizregel

$$\begin{aligned}
\check{\partial}^3(fg) &= (\check{\partial}^3 f)g + (\check{H}_3 f)(\check{\partial}^3 g) + (\check{H}_- f)(\check{\partial}^- g) \\
&= (\check{\partial}^3 f)g + (\check{\Lambda}^{\frac{1}{2}} f)(\check{\partial}^3 g) + q(1-q^4)(\check{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\check{L}^+ f)(\check{\partial}^- g).
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Die expliziten Ergebnisse stehen wieder in Anhang D.

Kapitel 4

Sternformalismus

In diesem Kapitel wird eine Möglichkeit vorgestellt, nichtkommutative Algebren auf dem Raum der C^∞-Funktionen einer Mannigfaltigkeit zu realisieren, indem die kommutative punktweise Multiplikation von Funktionen durch ein nichtkommutatives Sternprodukt ersetzt wird. Dazu verwenden wir einen Vektorraumisomorphismus zwischen der nichtkommutativen und der kommutativen Algebra. Wir können damit Funktionen nichtkommutierender Koordinaten in Funktionen kommutierender Variabler übertragen. Dies wird es uns später ermöglichen, im nichtkommutativen Raum definierte physikalische Modelle auf den kommutativen Raum zu übertragen, wo sie einfacher interpretiert werden können. Insbesondere ist das für Felder der Fall.

Dieses Kapitel ging aus einer Zusammenarbeit mit Branislav Jurčo, Martin Schlichenmaier, Peter Schupp und Julius Wess hervor.

4.1 Einführung in den $*$-Formalismus

Bevor wir speziellere Beispiele betrachten, geben wir zunächst eine Definition des $*$-Produkts [80, 81, 59, 2, 45, 74, 32] an und stellen einige allgemeine Überlegungen an.

4.1.1 Definition des $*$-Produkts

Eine Poissonklammer, definiert auf dem Raum glatter Funktionen $C^\infty(M)$ einer Mannigfaltigkeit M, ist eine bilinere Abbildung $C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, so dass für alle $f, g, h \in C^\infty(M)$ die Beziehungen

- $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (Antisymmetrie),
- $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$ (Jacobiidentität) und
- $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$ (Derivationseigenschaft)

gelten. Gegeben ist eine Poissonklammer durch ein Poissonbivektorfeld θ, d.h. einen kontravarianten schiefsymmetrischen Tensor zweiter Stufe, auf der Mannigfaltigkeit M:

$$\{f, g\} = \theta(df, dg). \tag{4.1}$$

Die Jacobiidentität entspricht dann genau dem Verschwinden der Schoutenklammer $[\theta, \theta]_{\text{Schouten}} = 0$, siehe [61, 2]. In einem lokalen Koordinatensystem hat man

$$\theta = \theta^{ij} \partial_i \otimes \partial_j, \tag{4.2}$$

und damit

$$\{f, g\} = \theta^{ij} \partial_i f \partial_j g. \tag{4.3}$$

Die Antisymmetrie, und die Jacobiidentität bedeuten für die Koeffizientenfunktionen $\theta^{ij}(x)$:

$$\begin{aligned} &\theta^{ij} = -\theta^{ji} \quad \text{und} \\ &\theta^{ij} \partial_j \theta^{kl} + \theta^{kj} \partial_j \theta^{li} + \theta^{lj} \partial_j \theta^{ik} = 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{A}$ die Menge formaler Potenzreihen in ν mit Koeffizienten in $C^\infty(M)$: $\mathcal{A} \equiv C^\infty(M)[[\nu]]$. Das Sternprodukt definieren wir für Funktionen f, g in $C^\infty(M)$ durch

$$f * g = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^i C_i(f, g), \tag{4.5}$$

wobei hier die $C_i : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ bilineare Abbildungen sind. Diese Formel definiert ein $*$-Produkt $(\mathcal{A}, *)$ auf $\mathcal{A}$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) Die $\mathbb{C}[[\nu]]$-bilineare Fortsetzung $* : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ist assoziativ,

(b) $C_0(f, g) = fg$ (punktweise Multiplikation),

(c) $\frac{1}{\nu}[f \overset{*}{,} g] = -i\{f, g\} \bmod \nu$, mit $[f \overset{*}{,} g] = f * g - g * f$ (Sternkommutator).

(4.6)

Sind die C_i Bidifferenzialoperatoren (lokale Operatoren) spricht man von einem differenziellen Sternprodukt.

Eine weitere mögliche Bedingung an das $*$-Produkt ist die Parität:

$$C_k(f, g) = (-1)^k C_k(g, f). \tag{4.7}$$

Diese impliziert, dass im $*$-Kommutator nur ungerade Potenzen von ν auftauchen:

$$[f \overset{*}{,} g] = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \nu^{2i+1} C_{2i+1}(f, g), \tag{4.8}$$

und dass das $*$-Produkt zu erster Ordnung in ν durch die Poissonstruktur bestimmt wird:

$$f * g = fg + \frac{\nu}{2} \theta^{ij} \partial_i f \partial_j g + \mathcal{O}(\nu^2), \tag{4.9}$$

Die Existenz von $*$-Produkten auf allgemeinen Poissonmannigfaltigkeiten (M, θ) wurde von Kontsevich nachgewiesen [45]. Für spezielle Klassen von Poissonmannigfaltigkeiten war dies schon früher bekannt; z.B für symplektische Mannigfaltigkeiten [24], also Mannigfaltigkeiten, mit einer nichtentarteten geschlossenen 2-Form, wobei hier die Geschlossenheit der Form der Jacobiidentität entspricht.

4.1.2 Allgemeine Überlegungen

Für uns stellt sich die Frage, ob wir eine gegebene Algebra durch ein Sternprodukt realisieren können. Wir betrachten assoziative Algebren $\mathcal{A}_x$, die durch Angabe von Generatoren $\hat{x}^i$, $i = 1, \ldots, N$ und Relationen $\mathcal{R}$ definiert sind:

$$\mathcal{A}_x = \mathbb{C}[[\hat{x}^1, \ldots \hat{x}^N]]/\mathcal{R}. \tag{4.10}$$

Wir nehmen an, dass die Relationen von einem Deformationsparameter h abhängen, und dass die Koordinaten im Grenzfall eines verschwindenen Parameters h kommutieren:

$$\hat{x}^k \hat{x}^l = \hat{x}^l \hat{x}^k \quad \text{für} \quad h = 0. \tag{4.11}$$

Um ein $*$-Produkt zu konstruieren, assoziieren wir Funktionen der kommutierenden Variablen $x^1, \ldots, x^N$ mit Elementen der Algebra $\mathcal{A}_x$, eine Art Quantisierung. Diese Abbildung bezeichenen wir mit W. Damit definieren wir das $*$-Produkt durch

$$W[f * g] := W[f]W[g], \quad f, g \in C^\infty(M), \tag{4.12}$$

falls ein $f*g$ existiert, so dass diese Gleichung erfüllt wird. Das so erhaltene $*$-Produkt hängt im Allgemeinen von der Wahl der Abbildung W ab.

Durch diese Vorgehensweise erhalten wir ein $*$-Produkt im Sinne obiger Definition. Dazu „identifizieren“ wir den Deformationsparameter h der Algebra mit dem formalen Parameter ν. Die Bedingung (a) in (4.6) folgt aus der Assoziativität der Algebra, (b) ist erfüllt, da die Algebra $\mathcal{A}_x$ für $h \to 0$ kommutativ wird (4.11), und (c) definiert die Poissonklammer $\{,\}$. Für den $*$-Kommutator, der sich nach Definition aus dem Kommutator der assoziativen Algebra $\mathcal{A}_x$ herleitet, gilt:

$$\begin{gathered}
[f \overset{*}{,} g * h] = [f \overset{*}{,} g] * h + g * [f \overset{*}{,} g] \\
[f \overset{*}{,} [g \overset{*}{,} h]] + [g \overset{*}{,} [h \overset{*}{,} f]] + [h \overset{*}{,} [f \overset{*}{,} g]] = 0.
\end{gathered} \tag{4.13}$$

Werten wir diese Identitäten zur Ordnung h^1 aus, finden wir

$$\begin{gathered}
\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\} \\
\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.
\end{gathered} \tag{4.14}$$

Die Abbildung $\{,\}$ ist also tatsächlich eine Poissonklammer; die Antisymmetrie ist klar.

Wir betrachten Algebren, die die Poincaré-Birkhoff-Witt Eigenschaft besitzen. Für diese ist die Dimension des Untervektorraums homogener Polynome eines bestimmten Grades die gleiche wie im kommutativen Fall. Damit erhält man einen Vektorraumisomorphismus zwischen der nichtkommutativen Algebra und der entsprechenden kommutativen Algebra. Diesen kann man dazu benutzen, um Abbildungen auf der nichtkommutativen Algebra Abbildungen auf dem kommutativen Raum zuzuordnen, und umgekehrt. Übersetzt man die Multiplikation der nichtkommutativen Algebra in eine bilineare Abbildung auf der kommutativen Algebra, erhält man ein Sternprodukt. Das funktioniert natürlich auch mit anderen Abbildungen, z.B. mit Ableitungen oder Integralen. Ein konkretes Beispiel dazu werden wir in Abschnitt 5.4.1 sehen.

Explizit geht man so vor, dass man eine Ordnungsvorschrift für die Generatoren der Algebra angibt, z.B symmetrische Ordnung oder Normalordnung.[1] Dies führt dann zu folgender Korrespondenz zwischen Elementen der Algebra und Funktionen auf dem $\mathbb{R}^N$:

$$\hat{f} = \sum f_{i_1 \dots i_L} : \hat{x}^{i_1} \cdots \hat{x}^{i_L} : \quad \sim \quad f(z) = \sum f_{i_1 \dots i_L} x^{i_1} \cdots x^{i_L}, \tag{4.15}$$

wobei $f_{i_1 \dots i_L} \in \mathbb{C}$ und $::$ für die geordneten Polynome steht; also z.B. $: \hat{x}^i \hat{x}^j : = \frac{\hat{x}^i \hat{x}^j + \hat{x}^j \hat{x}^i}{2}$ im Falle der Weylordnung (Symmetrisierung) oder

$$: \hat{x}^i \hat{x}^j : = \begin{cases} \hat{x}^i \hat{x}^j & \text{falls } i \leq j \\ \hat{x}^j \hat{x}^i & \text{falls } j < i \end{cases} \tag{4.16}$$

für die Normalordnung. Dann ist

$$W(f(x,y)) = : f(\hat{x}, \hat{y}) : . \tag{4.17}$$

Für die von uns betrachteten Algebren ist es möglich, $*$-Produkte so zu konstruieren, dass sie die Paritätseigenschaft (4.7) besitzen. Wir bezeichnen die vom Parameter h abhängige Abbildung W von $C^\infty(M)$ in die Algebra, mit $W_{(\cdot,h)}$, wobei hier $\cdot$ für das Produkt der Algebra steht; $\cdot_{op}$ steht für das umgekehrte Produkt, also $a \cdot_{op} b = b \cdot a$. Weiter nehmen wir an, dass

$$W_{(\cdot_{op},h)} = W_{(\cdot,-h)} = W_{(\cdot,h)} \tag{4.18}$$

gilt, und dass die Algebra unter dem Austausch $(\cdot, h) \longrightarrow (\cdot_{op}, -h)$ invariant ist. Verwenden wir (4.18), erhalten wir aus $W[f] \cdot W[g] = \sum h^n W[C_n(f,g)]$

$$W[f] \cdot_{op} W[g] = \sum (-h)^n W[C_n(f,g)], \tag{4.19}$$

indem wir $(\cdot, h)$ durch $(\cdot_{op}, -h)$ ersetzen. Andererseits ist

$$W[f] \cdot_{op} W[g] = \sum h^n W[C_n(g,f)], \tag{4.20}$$

was direkt aus $g * f = \sum h^n C_n(g,f)$ folgt. Ein Vergleich zeigt

$$C_n(g,f) = (-1)^n C_n(f,g), \tag{4.21}$$

also gerade die Paritätseigenschaft (4.7).

4.2 Beispiele

4.2.1 Kanonische Struktur und Liealgebra-Struktur

Im Rahmen der kanonischen Quantisierung wurde von H. Weyl eine Vorschrift angegeben, Funktionen $f(x^i)$ kommutierender Variabler x^i ein Element einer nichtkommutativen Algebra zuzuordenen [80]. Dabei wird die Fouriertransformierte

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int d^n x \, e^{-ik_j x^j} f(x) \tag{4.22}$$

[1] Im Falle allgemeiner Algebren muss beachtet werden, dass man durch die Ordnungsvorschrift auch wirklich zu einer Basis gelangt. Dies kann mit Hilfe des Diamanten-Lemmas [4] entschieden werden. Sind die Vertauschungsrelationen durch eine $\hat{R}$-Matrix gegeben, führt jede beliebige Ordnungsvorschrift zu einer Basis.

der Funktion f benutzt, um den Operator W zu definieren:

$$W[f] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int d^n k \, e^{ik_j \hat{x}^j} \tilde{f}(k), \tag{4.23}$$

Dies entspricht dem Ersetzen der x^i in f durch die entsprechenden in $\hat{x}^i$ symmetrisierten Ausdrücke.

Wir betrachten das Produkt zweier solcher Operatoren:

$$W[f]W[g] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k d^n p \, e^{ik_i \hat{x}^i} e^{ip_j \hat{x}^j} \tilde{f}(k) \tilde{g}(p). \tag{4.24}$$

Um (4.12) auswerten zu können, müssen wir dies wieder in die Form (4.23) bringen. Dazu berechnen wir das Produkt der beiden Exponentialfunktionen mit Hilfe der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$e^A e^B = e^{\left\{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}([[A,B],B]-[[A,B],A])+\ldots\right\}}. \tag{4.25}$$

Kanonische Struktur

Für eine kanonisch nichtkommutative Struktur, d.h.

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}, \qquad \theta^{ij} \in \mathbb{C}, \tag{4.26}$$

finden wir

$$e^{ik_i \hat{x}^i} e^{ip_j \hat{x}^j} = e^{i(k_j+p_j)\hat{x}^j - \frac{i}{2}k_i p_j \theta^{ij}}. \tag{4.27}$$

Setzen wir dies in (4.24) ein, erhalten wir

$$W[f * g] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n \, k d^n p \; e^{i(k_j+p_j)\hat{x}^j - \frac{i}{2}k_i \theta^{ij} p_j} \tilde{f}(k) \tilde{g}(p) \tag{4.28}$$

und daraus mit (4.23) und (4.22)

$$\begin{aligned} f * g &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n \, k d^n p \; e^{i(k_j+p_j)x^j - \frac{i}{2}k_i \theta^{ij} p_j} \tilde{f}(k) \tilde{g}(p) \\ &= e^{\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \theta^{ij} \frac{\partial}{\partial y^j}} f(x) g(y) \Big|_{y \to x} . \end{aligned} \tag{4.29}$$

Das ist das bekannte Moyal-Weyl-Sternprodukt [59].

Liealgebra-Struktur

Als zweites Beispiel betrachten wir eine Liealgebra-Struktur:

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i f^{ij}{}_k \hat{x}^k, \qquad f^{ij}{}_k \in \mathbb{C}. \tag{4.30}$$

In diesem Fall erhalten wir das Produkt der beiden Exponentialfunktionen aus der Gruppenmultiplikation der zur Liealgebra gehörenden Gruppe:

$$e^{ik_i \hat{x}^i} e^{ip_j \hat{x}^j} = e^{iP_i(k,p)\hat{x}^i}. \tag{4.31}$$

Wobei hier $P_i(k,p)$ die Parameter des Gruppenelements sind, welches man durch Multiplikation der durch k und p parameterisierten Gruppenelemente erhält. Aus der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel wissen wir:

$$P_i(k,p) = k_i + p_i + \frac{1}{2}g_i(k,p) \tag{4.32}$$

und erhalten damit

$$\begin{aligned} f * g &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int d^n k d^n p \, e^{iP_i(k,p)x^i}\tilde{f}(k)\tilde{g}(p) \\ &= e^{\frac{i}{2}x^i g_i(i\frac{\partial}{\partial y}, i\frac{\partial}{\partial z})} f(y)g(z)\Big|_{\substack{y\to x \\ z\to x}} . \end{aligned} \tag{4.33}$$

Der Vollständigkeit halber und zum späteren Gebrauch geben wir die ersten Terme von $g_i(i\frac{\partial}{\partial y}, i\frac{\partial}{\partial z})$ an:

$$\begin{aligned} g_i\left(i\frac{\partial}{\partial y}, i\frac{\partial}{\partial z}\right) &= f^{jk}{}_i \frac{\partial}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial z^k} \\ &\quad - \frac{i}{6} f^{jk}{}_l f^{ml}{}_i \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial y^m}\frac{\partial}{\partial z^k} + \frac{\partial}{\partial z^j}\frac{\partial}{\partial z^m}\frac{\partial}{\partial y^k}\right) \\ &\quad + \frac{1}{24} f^{jk}{}_m f^{rm}{}_n f^{sn}{}_i \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial y^r}\frac{\partial}{\partial z^k}\frac{\partial}{\partial z^s} + \frac{\partial}{\partial z^j}\frac{\partial}{\partial z^r}\frac{\partial}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial y^s}\right) \\ &\quad + \ldots . \end{aligned} \tag{4.34}$$

4.2.2 Quantenraum-Strukturen

Maninebene

Bei den obigen beiden Beispielen haben wir jeweils Weylordnung benutzt. Für die Quantenebene [56, 57]

$$\hat{x}\hat{y} = q\hat{y}\hat{x}, \qquad q \in \mathbb{C} \tag{4.35}$$

verwenden wir eine Normalordnungvorschrift. Dabei sollen alle $\hat{x}$ vor allen $\hat{y}$ stehen. Zum Beispiel gilt für quadratische Ausdrücke:

$$:\hat{x}\hat{x}: = \hat{x}\hat{x}, \qquad :\hat{y}\hat{y}: = \hat{y}\hat{y}, \qquad :\hat{x}\hat{y}: = :\hat{y}\hat{x}: = \hat{x}\hat{y}. \tag{4.36}$$

Damit erhalten wir für Monome:

$$\begin{aligned} \hat{x}^{n_1}\hat{y}^{m_1}\hat{x}^{n_2}\hat{y}^{m_2} &= q^{-m_1 n_2}\hat{x}^{n_1+n_2}\hat{y}^{m_1+m_2} \qquad (4.37) \\ :\hat{x}^{n_1}\hat{y}^{m_1}::\hat{x}^{n_2}\hat{y}^{m_2}: &= q^{-m_1 n_2} :\hat{x}^{n_1+n_2}\hat{y}^{m_1+m_2}: \\ &= W\left(q^{-x'\frac{\partial}{\partial x'}y\frac{\partial}{\partial y}} x^{n_1}y^{m_1}x'^{n_2}y'^{m_2}\Big|_{\substack{x'\to x \\ y'\to y}}\right), \end{aligned}$$

und daraus

$$f * g = q^{-x'\frac{\partial}{\partial x'}y\frac{\partial}{\partial y}} f(x,y)g(x',y')\Big|_{\substack{x'\to x \\ y'\to y}} . \tag{4.38}$$

$GL_q(N)$ Quantenebenen

Für Strukturen der Art (4.35) ist es auch möglich, eine geschlossene Form für das $*$-Produkt mit einer symmetrischen Quantisierungsabbildung W anzugeben. Wir betrachten dazu allgemein $GL_q(N)$-kovariante Quantenebenen, die von Koordinaten $\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^N$ erzeugt werden mit den Relationen

$$\hat{x}^i \hat{x}^j = q \hat{x}^j \hat{x}^i, \quad i < j, \quad q \in \mathbb{C}. \tag{4.39}$$

Diese Algebra erfüllt die Paritätseigenschaft, d.h. werden q durch q^{-1} und $\cdot$ durch $\cdot_{op}$ ersetzt, erhält man dieselbe Algebra.

Das $*$-Produkt ist gegeben durch [41]

$$f * g = e^{-\frac{h}{2}\left(\sum_{i<j} y^i \frac{\partial}{\partial y^i} x^j \frac{\partial}{\partial x^j} - x^i \frac{\partial}{\partial x^i} y^j \frac{\partial}{\partial y^j}\right)} f(x) g(y)\Big|_{y \to x}, \tag{4.40}$$

mit $h = \ln q$ als Deformationsparameter. Eine einfache Rechnung (wenn man für $f = x^i$ und für $g = x^j$ setzt) zeigt, dass dieses $*$-Produkt die Algebra (4.39) realisiert: $x^i * x^j = q x^j * x^i$, $i < j$. Wir rechnen die Assoziativität dieses $*$-Produktes explizit nach:

$$\begin{aligned} f * (g * h) &= \left[e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j} \sigma_{ij} x^i \frac{\partial}{\partial x^i} w^j \frac{\partial}{\partial w^j}} \left[e^{\frac{1}{2}\sum_{k,l} \sigma_{kl} y^k \frac{\partial}{\partial y^k} z^l \frac{\partial}{\partial z^l}} f(x) g(y) h(z) \right]_{\substack{z \to w \\ y \to w}} \right]_{w \to x} \\ &= e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j} \sigma_{ij} x^i \frac{\partial}{\partial x^i} y^j \frac{\partial}{\partial y^j}} e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j} \sigma_{ij} x^i \frac{\partial}{\partial x^i} z^j \frac{\partial}{\partial z^j}} \\ &\quad \times e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j} \sigma_{ij} y^i \frac{\partial}{\partial y^i} z^j \frac{\partial}{\partial z^j}} f(x) g(y) h(z)\Big|_{z \to x, y \to x}. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Hier haben wir im zweiten Schritt

$$(w\partial_w)^l f(w,w) = [(x\partial_x + y\partial_y)^l f(x,y)]_{y \to w, x \to w}. \tag{4.42}$$

benutzt. Der Ausdruck (4.41) ist symmetrisch in x, y und z, was die Assoziativität $f * (g * h) = (f * g) * h$ impliziert.

Aus dem $*$-Produkt (4.40) finden wir die Poissonklammer

$$\{f, g\} = \sum_{i<j} \left(x^i \partial_i f x^j \partial_j g - x^i \partial_i g x^j \partial_j f \right). \tag{4.43}$$

Es kann gezeigt werden, dass das durch (4.40) definierte $*$-Produkt zu einer symmetrischen Ordnungsvorschrift korrespondiert. Jedoch ist für ein Monom der Ordnung k der Nenner nicht $k!$ wie für die Weylordnung. Beispielsweise hat man für Binome

$$W[x^i x^j] = \frac{\hat{x}^i \hat{x}^j + \hat{x}^j \hat{x}^i}{q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}}. \tag{4.44}$$

Diese Abbildung W erfüllt die Bedingung (4.18). Das $*$-Produkt besitzt daher die Paritätseigenschaft, was man natürlich auch direkt sehen kann, wenn man den Exponenten in (4.40) expandiert.

Euklidische Quantenräume (Poissonstrukturen)

Als weiteres Beispiel betrachten wir Quantenräume, die kovariant unter der Wirkung der Quantengruppe $SO_q(N)$ sind. Das $*$-Produkt für diese Räume vollständig auszurechnen erweist sich als recht aufwändig. Wir wollen aber zumindest das $*$-Produkt zweier Koordinaten und die Poissonstruktur angeben.

Dazu definieren wir für einen N-dimensionalen Raum n durch $N = 2n$ falls N gerade ist, und durch $N = 2n + 1$ falls N ungerade ist. Weiterhin verwenden wir die Notation $i' = N+1-i$ für $i = 1, \ldots, N$. Die Vertauschungrelationen der Koordinaten $\hat{x}^1, \ldots \hat{x}^N$ sind dann gegeben durch [23, 42]

$$\begin{aligned} \hat{x}^i\hat{x}^j &= q\hat{x}^j\hat{x}^i, & i < j, i \neq j' \\ \hat{x}^{i'}\hat{x}^i - \hat{x}^i\hat{x}^{i'} &= \lambda \sum_{i<j\leq n} q^{j-i-1}\hat{x}^j\hat{x}^{j'}, & i < i' \end{aligned} \tag{4.45}$$

falls N gerade ist und

$$\begin{aligned} \hat{x}^i\hat{x}^j &= q\hat{x}^j\hat{x}^i, & i < j, i \neq j' \\ \hat{x}^{i'}\hat{x}^i - \hat{x}^i\hat{x}^{i'} &= q^{n-i}(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})(\hat{x}^{n+1})^2 + \lambda \sum_{i<j\leq n} q^{j-i-1}\hat{x}^j\hat{x}^{j'}, & i < i' \end{aligned} \tag{4.46}$$

falls N ungerade ist. Die Algebra besitzt die Paritätseigenschaft.

Wir verwenden Weylordnung und setzen voraus, dass

$$\frac{x^i * x^j + x^j * x^i}{2} = x^i x^j, \tag{4.47}$$

gilt. Setzt man dann an

$$x^i * x^j = \sum C_{rs} \frac{x^r * x^s + x^s * x^r}{2} = \sum C_{rs} x^s x^r \tag{4.48}$$

und berücksichtigt, dass die x^i mit dem $*$-Produkt die Relationen (4.45) bzw. (4.46) erfüllen müssen, erhält man ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten C_{rs}, aus dessen Lösung man das $*$-Produkt zweier Koordinaten erhält:

$$\begin{aligned} x^i * x^j &= q^{\frac{1}{2}} x^i x^j, & i < j, i \neq j' \\ x^i * x^{i'} &= x^i x^{i'} - \frac{\lambda}{2} \sum_{i<j\leq n} \left(\frac{q+q^{-1}}{2}\right)^{j-i-1} x^j x^{j'}, & i < i', \end{aligned} \tag{4.49}$$

und falls N ungerade ist zusätzlich

$$x^n * x^{n+2} = x^n x^{n+2} - \frac{1}{2}(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})(x^{n+1})^2. \tag{4.50}$$

Daraus finden wir den Poissonbivektor

$$\begin{aligned} &\sum_{i<j, i\neq j'} x^i x^j (\partial_i \otimes \partial_j - \partial_j \otimes \partial_i) - \sum_{i<j\leq n} x^j x^{j'} (\partial_i \otimes \partial_{i'} - \partial_{i'} \otimes \partial_i) \\ &\qquad - (x^{n+1})^2 (\partial_n \otimes \partial_{n+2} - \partial_{n+2} \otimes \partial_n), \end{aligned} \tag{4.51}$$

wobei der Term in der zweiten Zeile nur für N ungerade auftritt.

q-Minkowski-Raum

Zuletzt betrachten wir noch den q-deformierten Minkowski-Raum [6, 49, 50]. Die Koordinatenalgebra wird erzeugt von den vier Generatoren $\hat{x}^0, \hat{x}^3, \hat{x}^+, \hat{x}^-$, welche die folgenden Relationen erfüllen:

$$\begin{aligned} \hat{x}^0\hat{x}^A &= \hat{x}^A\hat{x}^0 \\ \hat{x}^3\hat{x}^+ - q^2\hat{x}^+\hat{x}^3 &= -q\lambda\hat{x}^0\hat{x}^+ \\ \hat{x}^-\hat{x}^3 - q^2\hat{x}^3\hat{x}^- &= -q\lambda\hat{x}^0\hat{x}^- \\ \hat{x}^-\hat{x}^+ - \hat{x}^+\hat{x}^- &= \lambda\hat{x}^3\hat{x}^3 - \lambda\hat{x}^0\hat{x}^3. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Wir geben das $*$-Produkt zweier Koordinaten und die zugehörige Poissonstruktur an. Dazu verwenden wir wieder Weylordnung. Wir finden ($a = 0, 3, +, -,\ A = 3, +, -$)

$$\begin{aligned} x^a * x^a &= x^a x^a \\ x^0 * x^A &= x^0 x^A \\ x^3 * x^+ &= \frac{1}{q+q^{-1}}(2qx^3x^+ - \lambda x^0x^+) \\ x^3 * x^- &= \frac{1}{q+q^{-1}}(2q^{-1}x^3x^- + \lambda x^0x^-) \\ x^+ * x^- &= x^+x^- + \frac{\lambda}{2}(x^0x^3 - x^3x^3) \end{aligned} \tag{4.53}$$

und daraus den Poissonbivektor

$$\begin{aligned} 2(x^3 - x^0)x^+(\partial_3 \otimes \partial_+ - \partial_+ \otimes \partial_3) - 2(x^3 - x^0)x^-(\partial_3 \otimes \partial_- - \partial_- \otimes \partial_3) \\ -2(x^3 - x^0)x^3(\partial_+ \otimes \partial_- - \partial_- \otimes \partial_+). \end{aligned} \tag{4.54}$$

Euklidischer Quantenraum $\mathbb{R}_q^3$

Da die Vektorraumbasis mit normalgeordneten Koordinaten X^+, X^3, X^- schwer zu handhaben ist, ist man versucht, die bereits in Abschnitt 3.3 als Basis für Felder verwendeten Ausdrücke $R^{2N}(X^+)^{n_+}(x^3)^{n_3}$, zu benutzen. Man betrachtet also Funktionen $f(r, x^+, x^3)$. Da

$$X^3X^+ = q^2X^+X^3 \tag{4.55}$$

ist, erhält man durch einen Vergleich mit (4.35) aus (4.38) sofort

$$f * g = q^{2x^3\frac{\partial}{\partial x^3}y^+\frac{\partial}{\partial y^+}} f(x)g(y)\Big|_{y\to x}. \tag{4.56}$$

Und daraus für die Poissonklammer

$$\{f, g\} = 2x^3x^+(\partial_3 f\partial_+ g - \partial_+ f\partial_3 g). \tag{4.57}$$

Die Poissonstruktur ist entartet; Kugeloberflächen sind symplektische Blätter im $\mathbb{R}^3$. Dies spiegelt das in Kapitel 2 gewonnene Bild des $\mathbb{R}_q^3$ wider.

Kapitel 5

Eichtheorie

Dieses Kapitel ist dem Versuch der Formulierung von Eichtheorien auf nichtkommutativen Räumen gewidmet. Wir werden ähnlich wie in der gewöhnlichen Eichtheorie auf kommutativen Räumen vorgehen: Felder transformieren unter Eichtransformationen. Abbildungen von Feldern auf Felder müssen kovariant sein, um in einer eichinvarianten Formulierung physikalischer Modelle verwendet werden zu können. Dies macht die Einführung von Eichpotenzialen notwendig. Damit werden Tensoren definiert, die die Konstruktion einer eichinvarianten Wirkung erlauben und somit eine Beschreibung der Dynamik des Eichfeldes ermöglichen.

In der hier vorgestellten Vorgehensweise mit kovarianten Koordinaten werden keine Differenzialformen benötigt. Es muss also kein Differenzialkalkül, der im Allgemeinen für nichtkommutative Algebren auch nicht eindeutig ist, auf der Algebra konstruiert werden. Eine verständliche Einführung in die Eichtheorie auf nichtkommutativen Räumen unter Verwendung von Differenzialformen findet man beispielsweise in [52].

Es stellt sich heraus, dass es möglich ist, Eichtheorien auf nichtkommutativen Räumen mit Eichtheorien auf kommutativen Räumen in Verbindung zu bringen. Dazu wird die so genannte Seiberg-Witten-Abbildung [70] verwendet, die wir im Abschnitt 5.2, vor allem unter dem Gesichtspunkt konstruieren werden, dass sie die Behandlung einer einhüllenwertigen Eichtheorie mit endlich vielen Eichfeldkomponenten ermöglicht, obwohl die Einhüllende einer Liealgebra unendlichdimensional ist.

Für diese Konstruktion findet das im vorhergehenden Kapitel dargestellte $*$-Produkt Verwendung. Die Eichtheorie wird dazu zunächst in den Sternformalismus übersetzt, und anschließend eine Entwicklung im Deformationsparameter durchgeführt. Die Seiberg-Witten-Abbildung wird dann Ordnung für Ordnung so bestimmt, dass eine gewöhnliche Eichtransformation auf dem kommutativen Raum zu einer Eichtransformation auf dem nichtkommutativen Raum führt. Damit wird eine Äquivalenz zwischen den Eichtheorien hergestellt.

Im Fall der eindimensionalen q-deformierten Heisenbergalgebra wurde in [78, 33, 9] auf direktem Weg ein Zusammenhang zwischen kommutativer und nichtkommutativer Eichtheorie konstruiert. Der Zugang dort beruht darauf, dass sich die Eichgruppe nicht ändert, da ja eine Koordinate mit sich selbst kommutiert. Für mehrere nichtkommutative Koordinaten ändert sich jedoch die Eichgruppe, diesem Umstand trägt die Konstruktion der Seiberg-Witten-Abbildung gerade Rechnung.

Statt „Eichtheorie (-transformation, -feld, -parameter) auf einem nichtkommutativen Raum" werden wir oft einfach die Bezeichnung „nichtkommutative Eichtheorie (-transformation, -feld, -parameter)" gebrauchen. Mit „nichtabelsch" benennen wir, wie üblich, eine Eichtheorie mit einer nichtabelschen Eichgruppe.

Der Inhalt der Abschnitte 5.1 bis 5.3 dieses Kapitels ist zum größten Teil bereits in den Artikeln [53] und [37] veröffentlicht.

5.1 Definition und Konzept

5.1.1 Eichtransformationen

Wir betrachten infinitesimale Eichtransformationen. Der Transformationsparameter $\hat{\alpha}$ ist von den nichtkommutativen Koordinaten $\hat{x}^i$ abhängig: $\hat{\alpha}(\hat{x}) \in \mathcal{A}_x$.[1] Die Objekte, die unter Eichtransformationen transformieren bezeichnen wir als Felder, sie sind Elemente der Algebra:

$$\hat{\psi}(\hat{x}) = \hat{\psi}(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^N) \in \mathcal{A}_x. \tag{5.1}$$

Wir nehmen an, dass die infinitesimale Änderung $\delta\hat{\psi}$ eines Feldes $\hat{\psi}$ in der Form

$$\delta\hat{\psi}(\hat{x}) = i\hat{\alpha}(\hat{x})\hat{\psi}(\hat{x}); \qquad \hat{\alpha}(\hat{x}),\ \hat{\psi}(\hat{x}) \in \mathcal{A}_x \tag{5.2}$$

geschrieben werden kann.

Die Transformation (5.2) entspricht einer abelschen Eichtransformation, da $\hat{\alpha}(\hat{x})$ ein Element der Algebra ist. Gehört $\hat{\alpha}(\hat{x})$ zu einer Algebra von Matrizen mit Einträgen in $\mathcal{A}_x$, entspricht dies einer nichtabelschen Eichtransformation.

Genauer: Für nichtabelsche Eichtransformationen nehmen wir an, dass die Felder $\hat{\psi}$ zu einer Darstellung einer Liealgebra

$$[T^a, T^b] = i f^{ab}{}_c T^c \tag{5.3}$$

gehören, also z.B. in einer Matrixdarstellung Spaltenvektoren mit Einträgen in $\mathcal{A}_x$ sind. Die Eichparameter sind dann Elemente der von den Koordinaten $\hat{x}^i$ und den Generatoren T^a erzeugten Algebra $\mathcal{A}_{x,T}$, wobei die $\hat{x}^i$ mit den T^a kommutieren. Die Generatoren T^a wirken vermöge der Darstellung auf $\hat{\psi}$:

$$\delta\hat{\psi}(\hat{x}) = i\hat{\alpha}(\hat{x}, T)\hat{\psi}(\hat{x}); \qquad \hat{\alpha}(\hat{x}, T) \in \mathcal{A}_{x,T};\ \hat{\psi}(\hat{x}),\, \delta\hat{\psi}(\hat{x}) \in \mathcal{A}_x. \tag{5.4}$$

Besitzt die Algebra $\mathcal{A}_x$ eine Konjugation, können damit noch zusätzliche Bedingungen an die Eichtransformationen gestellt werden. Fordert man z.B., dass $\hat{\alpha}$ hermitesch ist

$$\overline{\hat{\alpha}(\hat{x})} = \hat{\alpha}(\hat{x}), \tag{5.5}$$

erhält man eine unitäre Eichgruppe.

[1]Da wir später die Eichtheorie im $*$-Formalismus formulieren werden, und dort die Eichparamter und die Felder Funktionen kommutierender Variabler sind, gebrauchen wir hier generell die Notation mit Hüten $\hat{f}$ für Elemente nichtkommutativer Algebren $\hat{f} \in \mathcal{A}_x$. Die entsprechenden Größen im $*$-Formalismus tragen dieselbe Bezeichnung, aber ohne Hut.

5.1.2 Kovariante Koordinaten

Die Koordinaten $\hat{x}^i$ sind invariant unter Eichtransformationen (nur Felder transformieren!):

$$\delta\hat{x}^i = 0. \tag{5.6}$$

Dann ist die Linksmultiplikation eines Feldes mit einer Koordinate keine kovariante Operation. D.h. $\hat{x}^i\hat{\psi}$ transformiert sich nicht wie das Feld $\hat{\psi}$ (5.2), da ja im Allgemeinen $\hat{x}^i$ nicht mit $\hat{\alpha}(\hat{x})$ kommutiert:

$$\delta(\hat{x}^i\hat{\psi}) = \hat{x}^i\hat{\alpha}(\hat{x})\hat{\psi} \neq \hat{\alpha}(\hat{x})\hat{x}^i\hat{\psi}. \tag{5.7}$$

In der Eichtheorie auf kommutativen Räumen besitzt die Ableitung eines Feldes ein nichtkovariantes Transformationsverhalten, dort führt man kovariante Ableitungen ein, welche man mit Hilfe eines Eichpotenzials konstruiert. Analog dazu führen wir kovariante Koordinaten $\hat{X}^i$ ein, für die

$$\delta(\hat{X}^i\hat{\psi}) = i\hat{\alpha}\hat{X}^i\hat{\psi} \tag{5.8}$$

gelten soll, was mit

$$\delta(\hat{X}^i\hat{\psi}) = (\delta\hat{X}^i)\hat{\psi} + \hat{X}^i(\delta\hat{\psi}) \tag{5.9}$$

wegen der Eichtransformation (5.2) des Feldes $\hat{\psi}$

$$\delta(\hat{X}^i) = i[\hat{\alpha}, \hat{X}^i] \tag{5.10}$$

impliziert. Für die kovarianten Koordinaten $\hat{X}^i$ machen wir einen Ansatz mit einem Eichpotenzial $\hat{A}^i(\hat{x})$:

$$\hat{X}^i = \hat{x}^i + \hat{A}^i(\hat{x}), \qquad \hat{A}^i(\hat{x}) \in \mathcal{A}_x. \tag{5.11}$$

Das Eichpotenzial ist im Falle einer nichtabelschen Eichtheorie eine Matrix. Die Variation des Eichpotenzials erhalten wir aus (5.10):

$$\delta\hat{A}^i = i[\hat{\alpha}, \hat{A}^i] - i[\hat{x}^i, \hat{\alpha}]. \tag{5.12}$$

Indem man in den Vertauschungsrelationen $\mathcal{R}$ die Koordinaten $\hat{x}^i$ durch die entsprechenden kovarianten Koordinaten $\hat{X}^i$ ersetzt, kann man Tensoren definieren, die der Krümmung/Feldstärke in der gewöhnlichen Eichtheorie entsprechen. Sind die Vertauschungsrelationen beispielsweise in der Form

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}(\hat{x}^i) \tag{5.13}$$

gegeben, definieren wir[2]

$$\hat{T}^{ij} \equiv [\hat{X}^i, \hat{X}^j] - i\theta^{ij}(\hat{X}^i). \tag{5.14}$$

[2]Natürlich transformiert jedes beliebige Produkt kovarianter Koordinaten entsprechend (5.18). Jedoch wird mit unserer Definition der Tensor T^{ij} im Falle verschwindender Kopplungskonstante Null. Die Kopplungskonstante g steckt bei uns im Eichparameter und im Eichfeld; führt man sie explizit ein, hat man $g\hat{\alpha}$ und $g\hat{A}$ statt $\hat{\alpha}$ und $\hat{A}$.

Um dies zu veranschaulichen, geben wir für unsere drei Beispiele nichtkommutativer Strukturen den Tensor jeweils explizit an:

Kanonische Struktur:

$$\hat{T}^{ij} = [\hat{X}^i, \hat{X}^j] - i\theta^{ij}, \tag{5.15}$$

Liealgebra-Struktur:[3]

$$\hat{T}^{ij} = [\hat{X}^i, \hat{X}^j] - i f^{ij}{}_k \hat{X}^k, \tag{5.16}$$

Quantenraum:

$$\hat{T}^{ij} = \hat{X}^i \hat{X}^j - q^{-1} \hat{R}^{ij}{}_{kl} \hat{X}^k \hat{X}^l. \tag{5.17}$$

Aus dem Transformationsverhalten (5.10) der kovarianten Koordinaten folgt unmittelbar

$$\delta\hat{T}^{ij} = i[\hat{\alpha}, \hat{T}^{ij}], \tag{5.18}$$

da mit $\delta\hat{A} = i[\hat{\alpha}, \hat{A}]$ und $\delta\hat{B} = i[\hat{\alpha}, \hat{B}]$ auch $\delta(\hat{A}\hat{B}) = i[\hat{\alpha}, \hat{A}\hat{B}]$ ist.

5.1.3 Kovariante Ableitungen

Um eine Dynamik zu formulieren, benötigt man Ableitungen, die man dann für die Formulierung eichinvarianter Theorien kovariant machen muss. Wir wollen Ableitungen in rein algebraischer Weise einführen [79, 83, 42]. Dazu erweitern wir die nichtkommutative Algebra in konsistenter Weise, d.h. es dürfen keine neuen Relationen für die Koordinaten auftreten, um Ableitungen, so dass eine verallgemeinerte Leibnizregel erfüllt wird:

$$\hat{\partial}_i \hat{x}^j = \delta_i^j + d_{ic}^{jl} \hat{x}^c \hat{\partial}_l. \tag{5.19}$$

Die Koeffizienten $d_{ic}^{jl} \in \mathbb{C}$ müssen so bestimmt werden, dass die Konsistenzbedingung erfüllt ist.

Aus den Vertauschungsrelationen zwischen den Koordinaten $\hat{x}^i$ und den Ableitungen $\hat{\partial}_j$ gewinnen wir folgendermaßen eine Realisierung der Algebra der Ableitungen auf der Algebra $\mathcal{A}_x$ der Koordinaten.[4] Wir nehmen ein Element der Koordinatenalgebra $\hat{f} \in \mathcal{A}_x$, multiplizieren es von links mit einer partiellen Ableitung und tauschen diese Ableitung und eventuell auftretende weitere Ableitungen dann ganz nach rechts durch. So erhalten wir

$$\hat{\partial}_i \hat{f} = \hat{g}_i + \sum_j \hat{h}_{ij} \hat{\partial}_j. \tag{5.20}$$

Für Quantenräume ist dies immer konsistent möglich, denn deren Vertauschungsrelationen für die Ableitungen und Koordinaten werden durch eine $\hat{R}$-Matrix, die die

[3] Für diesen Fall, der in dieser Arbeit kaum behandelt wird, siehe insbesondere die Arbeiten [16, 22, 52, 34].

[4] Siehe hierzu auch Abschnitt 3.3.

Yang-Baxter-Gleichung erfüllt, vermittelt. Wir definieren dann die beiden Abbildungen

$$\check{\partial}_i, \check{O}_i{}^j : \mathcal{A}_x \longrightarrow \mathcal{A}_x \tag{5.21}$$

analog zu Abschnitt 3.3.1 durch

$$\begin{aligned} \check{\partial}_i \hat{f} &\equiv \hat{g}_i \\ \check{O}_i{}^j \hat{f} &\equiv \hat{h}_{ij}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Damit erhält man eine Darstellung der Algebra der Ableitungen auf den Funktionen, d.h. Elementen der Algebra $\mathcal{A}_x$. Das Element $\check{\partial}_i \hat{f}$ entspricht dann der Ableitung der Funktion $\hat{f}$. Die Abbildungen $\check{O}_i{}^j$ entsprechen in diesem Bilde einer Verschiebung bzw. Rotation der Funktion.

Aus (5.20) und (5.22) erhält man unmittelbar folgende Leibnizregel [79]:

$$\check{\partial}_i(\hat{f}\hat{g}) = (\check{\partial}_i \hat{f})\hat{g} + (\check{O}_i{}^j \hat{f})(\check{\partial}_j \hat{g}). \tag{5.23}$$

Wendet man dies auf das Produkt dreier Funktionen, $\hat{f}, \hat{g}, \hat{h} \in \mathcal{A}_x$ an, erhält man aus der Assoziativität $\hat{f}\hat{g}\hat{h} = (\hat{f}\hat{g})\hat{h} = \hat{f}(\hat{g}\hat{h})$

$$\check{O}_i{}^j(\hat{f}\hat{g}) = \check{O}_i{}^k(\hat{f})\check{O}_k{}^j(\hat{g}). \tag{5.24}$$

Kanonische Struktur

Für die kanonische Struktur müssen die $d^{jl}_{i\sigma}$ so gewählt werden, dass

$$\begin{aligned} 0 = \hat{\partial}_l \left\{ [\hat{x}^i, \hat{x}^j] - i\theta^{ij} \right\} &= \delta^i_l \hat{x}^j - \delta^j_l \hat{x}^i + d^{ij}_{lm}\hat{x}^m - d^{ji}_{lm}\hat{x}^m \\ &\quad + \hat{x}^m \hat{x}^b \left\{ d^{ic}_{lm} d^{ja}_{cb} - d^{jc}_{lm} d^{ia}_{cl} \right\} \hat{\partial}_a - i\theta^{ij}\hat{\partial}_l \end{aligned} \tag{5.25}$$

ist, ohne neue Relationen für die $\hat{x}^i$ einzuführen. Das ist der Fall für

$$d^{jl}_{ic} = \delta^j_c \delta^l_i, \tag{5.26}$$

woraus man

$$\hat{\partial}_l \hat{x}^i = \delta^i_l + \hat{x}^i \hat{\partial}_l \tag{5.27}$$

erhält. Die partiellen Ableitungen $\check{\partial}_l$ im Sinne obiger Definition sind dann gegeben durch

$$\check{\partial}_l \hat{f} \equiv [\hat{\partial}_l, \hat{f}], \tag{5.28}$$

und man hat die übliche Leibnizregel[5]

$$\check{\partial}(\hat{f}\hat{g}) = (\check{\partial}\hat{f})\hat{g} + \hat{f}(\check{\partial}\hat{g}). \tag{5.29}$$

[5] In obiger Notation ist also $\check{O}_i{}^j = \delta_i{}^j$, vgl. (5.23).

Der Ausdruck

$$\hat{x}^a - i\theta^{al}\hat{\partial}_l \tag{5.30}$$

kommutiert mit allen Koordinaten $\hat{x}^i$ und Ableitungen $\hat{\partial}_i$. Es ist möglich, die Algebra durch das von diesem Ausdruck erzeugte Ideal zu dividieren. Dann gilt

$$\hat{x}^a - i\theta^{al}\hat{\partial}_l = 0 \tag{5.31}$$

in der Algebra. Falls θ^{ij} invertierbar ist: $\theta^{-1}_{li}\theta^{ij} = \delta^j_l$ bedeutet dies, dass wir die Ableitungen durch die Koordinaten ausdrücken können:[6]

$$\hat{\partial}_l = -i\theta^{-1}_{li}\hat{x}^i. \tag{5.32}$$

Die Ableitungen kommutieren dann nicht, es gilt vielmehr

$$[\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j] = -i\theta^{-1}_{ij}. \tag{5.33}$$

Vermöge der Beziehung (5.32) erhält man in einfacher Weise kovariante Ableitungen:

$$\hat{\mathcal{D}}_l = -i\theta^{-1}_{li}\hat{X}^i = (\hat{\partial}_l - i\theta^{-1}_{li}\hat{A}^i) \equiv (\hat{\partial}_l - i\hat{V}_l), \tag{5.34}$$

wobei wir als Bezeichung für das Eichfeld der Ableitungen $\hat{V}_l = \theta^{-1}_{li}\hat{A}^i$ eingeführt haben. Als Feldstärketensor definieren wir dann (das i ist eine gebräuchliche Konvention, da dann mit hermiteschem Eichfeld $\hat{A}$ auch der Feldstärketensor $\hat{F}$ hermitesch ist)

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{ij} &= i\left([\hat{\mathcal{D}}_i, \hat{\mathcal{D}}_j] - i\theta^{-1}_{ij}\right) \\
&= [\hat{\partial}_i, \hat{V}_j] - [\hat{\partial}_j, \hat{V}_i] - i[\hat{V}_i, \hat{V}_j] \\
&= -i\theta^{-1}_{il}\theta^{-1}_{jc}([\hat{x}^l, \hat{A}^c] - [\hat{x}^c, \hat{A}^l] + [\hat{A}^l, \hat{A}^c]) \\
&= -i\theta^{-1}_{il}\theta^{-1}_{jc}\hat{T}^{lc}.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Man erhält dadurch also keinen neuen, von dem in Abschnitt 5.1.2 definierten unabhängigen, Tensor.

Mit dem Eichfeld $\hat{V}_l = \theta^{-1}_{li}\hat{A}^i$ können die kovarianten Koordinaten geschrieben werden als

$$\hat{X}^j = \hat{x}^j + \theta^{ji}\hat{V}_i. \tag{5.36}$$

Dieser Ausdruck tritt in der Stringtheorie im Zusammenhang mit nichtkommutativer Yang-Mills-Theorie als Koordinatentransformation auf [13, 35, 38].

[6]Dies ist ähnlich wie im Fall der reellen Impulse der q-deformierten Heisenbergalgebra, siehe Abschnitt 3.1.2. Dort wurden die Impulsoperatoren durch die Koordinaten, durch die Drehimpuloperatoren und den Skalierungsoperator ausgedrückt. Man wird also hoffen, daß für nichtkommutative Algebren die Eichtheorie mit kovarianten Ableitungen auf die Eichtheorie mit kovarianten Koordinaten zurückgeführt werden kann. Dass also insbesondere auch die mit den kovarianten Ableitungen verbundenen Tensoren aus denjenigen der kovarianten Koordinaten aufgebaut werden können.

Quantenraum-Struktur

Für Quantenebenen (1.16) ist es ebenfalls möglich, die Algebra um Ableitungen zu erweitern [79, 42, 78]. In diesem Fall muss die Matrix d aus dem Ansatz (5.19) die Yang-Baxter-Gleichung (1.18) erfüllen. Entsprechend ist eine natürliche Lösung für die Koeffizienten d_{ic}^{jl} durch die $\hat{R}$-Matrix, bzw. deren Inverses $\hat{R}^{-1}$, gegeben. Ein Beispiel findet man im Anhang, Gleichungen (C.6) und (C.7).

Versucht man nun kovariante Ableitungen zu bilden, findet man, dass es aufgrund der Leibnizregel (5.23) nicht möglich ist mit Eichfeldern $\hat{V}_k$ alleine auszukommen. Dies kommt daher, dass in der Leibnizregel zu einer Ableitung $\check{\partial}_k$ auch andere Ableitungen $\check{\partial}_l$, $l \neq k$ auftreten und die Operatoren $\check{O}_i{}^k$ zu einer Verschiebung der Funktionen führen. Um diesen Effekt zu kompensieren, führen wir als zusätzliches Feld das Vielbein $\hat{E}_i{}^k$ ein, dieses soll invertierbar sein. Wir machen also den Ansatz

$$\hat{\mathcal{D}}_i = \hat{E}_i{}^k(\check{\partial}_k - i\hat{V}_k) \tag{5.37}$$

für die kovarianten Ableitungen, und verwenden weiterhin die Notation $\hat{V}_k$ für das Eichvektorfeld der kovarianten Ableitungen. Die Variation dieses Ausdrucks unter infinitesimalen Eichtransformationen ist

$$\delta\hat{\mathcal{D}}_i = (\delta\hat{E}_i{}^k)(\check{\partial}_k - i\hat{V}_k) - i\hat{E}_i{}^k(\delta\hat{V}_k). \tag{5.38}$$

Andererseits impliziert die Bedingung der Kovarianz

$$\begin{aligned} \delta\hat{\mathcal{D}}_i &= i[\hat{\alpha}, \hat{\mathcal{D}}_i] \\ &= i\hat{\alpha}\hat{E}_i{}^k(\check{\partial}_k - i\hat{V}_k) - i\hat{E}_i{}^k\left[(\check{\partial}_k\hat{\alpha}) + (\check{O}_k{}^l\hat{\alpha})\check{\partial}_l - i\hat{V}_k\hat{\alpha}\right]. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke gleich und sammelt die Terme, die proportional zu ∂_j sind, erhält man für das Transformationsverhalten des Vielbeins

$$\delta\hat{E}_i{}^j = i\hat{\alpha}\hat{E}_i{}^j - i\hat{E}_i{}^k(\check{O}_k{}^j\hat{\alpha}). \tag{5.40}$$

Verwendet man dies in (5.38) erhält man die Bedingung

$$\left(i\hat{\alpha}\hat{E}_i{}^k - i\hat{E}_i{}^k(\check{O}_l{}^k\hat{\alpha})\right)\hat{V}_k + \hat{E}_i{}^k\delta\hat{V}_k = i\hat{\alpha}\hat{E}_i{}^k\hat{V}_k + \hat{E}_i{}^k\left((\check{\partial}_k\hat{\alpha}) - i\hat{V}_k\hat{\alpha}\right) \tag{5.41}$$

an die Variation $\delta\hat{V}_k$ des Eichfeldes. Wenn, wie vorausgesetzt, das Vielbein $\hat{E}_i{}^k$ invertierbar ist folgt damit:

$$\delta\hat{V}_k = i(\check{O}_k{}^l\hat{\alpha})\hat{V}_l - i\hat{V}_k\hat{\alpha} + (\check{\partial}_k\hat{\alpha}). \tag{5.42}$$

Hier tritt sozusagen ein „getwisteter“ Kommutator von $\hat{\alpha}$ und $\hat{V}_k$ auf $((\check{O}_k{}^l\hat{\alpha})\hat{V}_l - \hat{V}_k\hat{\alpha})$. Dies wird dadurch kompensiert, dass auch das Vielbein unter Eichtransformationen transformiert (5.40). Insgesamt erhält man damit kovariante Ableitungen, die wieder mit einem Kommutator transformieren ($\delta\hat{\mathcal{D}}_i = i[\hat{\alpha}, \hat{\mathcal{D}}_i]$).

Als spezielles Beispiel behandeln wir in Abschnitt 5.4.1 die Maninebene ausführlich.

5.1.4 Anmerkung zu nichtabelschen Eichtransformationen

Im Falle nichtabelscher Eichtransformationen sind der Eichparameter $\hat{\alpha}$ und das Eichfeld $\hat{A}$ matrixwertig (5.4), (5.12). In einer geeigneten Basis für die Matrizen kann man schreiben $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_r T^r$ und $\hat{A} = \hat{A}_r T^r$, mit $\hat{\alpha}_r, \hat{A}_r \in \mathcal{A}_x$. Betrachten wir nun den homogenen Anteil der Variation (5.12) des Eichfeldes unter Eichtransformationen:

$$[\hat{\alpha}, \hat{A}] = \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_r \hat{A}_s + \hat{A}_s \hat{\alpha}_r)[T^r, T^s] + \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_r \hat{A}_s - \hat{A}_s \hat{\alpha}_r)\{T^r, T^s\}. \qquad (5.43)$$

Da die Algebra $\mathcal{A}_x$ nichtkommutativ ist, wird der zweite Term auf der rechten Seite nicht verschwinden. Es ist daher nicht möglich $\hat{\alpha}$ und $\hat{A}$ Liealgebra-wertig zu wählen, sondern $\hat{\alpha}$ und $\hat{A}$ liegen in der Einhüllenden der Liealgebra. Die Einhüllende ist jedoch unendlichdimensional, das Eichfeld hat also unendlichviele Komponentenfelder. Eine solche Theorie mit unendlichvielen Feldern ist nicht sehr einladend. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, wie es trotzdem möglich ist eine nichtabelsche Eichtheorie auf einem nichtkommutativen Raum mit endlich vielen Komponentenfeldern zu beschreiben.

Im Allgemeinen ist nicht klar, welche mit (5.12) verträgliche Bedingungen an die Matrizen T^r gestellt werden können. Falls die Algebra $\mathcal{A}_x$ eine Konjugation besitzt und alle Koordinaten reell sind

$$(\hat{x}^i)^* = \hat{x}^i, \qquad (5.44)$$

ist es möglich die Matrizen T^r hermitesch zu wählen:

$$T^{r\dagger} = T^r. \qquad (5.45)$$

Dann ist α reell:

$$\hat{\alpha}(\hat{x}) = \hat{\alpha}_r(\hat{x}) T^r = \hat{\alpha}^*(\hat{x}), \qquad (\hat{\alpha}_r(\hat{x}))^* = \hat{\alpha}_r(\hat{x}) \qquad (5.46)$$

und für den Kommutator $[\hat{\alpha}, \hat{A}]$ gilt

$$([\hat{\alpha}, \hat{A}])^* = -[\hat{\alpha}, \hat{A}]. \qquad (5.47)$$

Aus (5.12) folgt damit, dass mit $\hat{\alpha}$ und $\hat{A}$ auch $\delta\hat{A}$ hermitesch sein wird. Falls die T^r eine Basis für die hermiteschen Matrizen bilden, ist eine konsistente Eichtheorie möglich. Sind die T^r Matrizen der Dimension $n \times n$, erhält man so eine $U(n)$-Eichtheorie. Es ist jedoch nicht möglich, Spurlosigkeit zu fordern, da der Antikommutator $\{T^r, T^s\}$ für spurlose Matrizen T^r, T^s im Allgemeinen eine nicht verschwindende Spur hat.

In der Formulierung der Eichtheorie im $*$-Formalismus (siehe unten) sind Bedingungen Ordnung für Ordnung im Expansionsparameter möglich; siehe [5] im Falle der $SO(n)$ und der $Sp(n)$.

5.2 Seiberg-Witten-Abbildung

In diesem Abschnitt wollen wir eine von Seiberg und Witten [71] gefundene Möglichkeit vorstellen, eine Eichtheorie auf einem nichtkommutativen Raum mit einer Eichtheorie auf einem kommutativen Raum in Verbindung zu bringen. Dazu werden wir zunächst die nichtkommutative Eichtheorie im $*$-Formalismus beschreiben und anschließend eine Entwicklung im Deformationsparameter durchführen. Die Verbindung zwischen den Eichtheorien wird formuliert dadurch, dass das nichtkommutative Eichfeld A und der nichtkommutative Eichparameter α Funktionen des Eichfeldes a^1 und des Eichparameters α^1 der Eichtheorie auf einem kommutativen Raum und deren Ableitungen sind:

$$\begin{aligned} A &= A(a^1, \partial a^1, \partial\partial a^1, \dots) \\ \alpha &= \alpha(\alpha^1, \partial\alpha^1, \partial\alpha^1, \dots, a^1, \partial a^1, \partial\partial a^1, \dots). \end{aligned} \tag{5.48}$$

Und zwar so, dass eine gewöhnliche Eichtransformation des Felds a^1 über diese funktionale Abhängigkeit gerade die nichtkommutative Eichtransformation des Feldes A impliziert:

$$A(a^1 + \delta_{\alpha^1} a^1) - A(a^1) = \delta_{\alpha(a^1,\alpha^1)} A(a^1). \tag{5.49}$$

Wir fassen dies so auf, dass es dadurch möglich ist, ein einhüllendenwertiges Eichfeld zu konstruieren, dessen unendlich viele Komponenten nur vom Liealgebrawertigen Anteil, also den endlich vielen Feldern a^1, abhängen.

5.2.1 Eichtheorie im $*$-Formalismus

Wir behandeln nichtabelsche Eichtheorien, wir haben also sowohl nichtkommutative Koordinaten $\hat{x}^\mu$, $\mu = 1, \dots N$, als auch Generatoren T^j, $j = 1 \dots L$ der Eichgruppe, wobei alle $\hat{x}^\mu$ mit allen T^j vertauschen. Für eine einheitliche Beschreibung behandeln wir beide nichtkommutativen Strukturen im $*$-Formalismus. D.h. wir haben ein $*$-Produkt bezüglich der $N + L$ kommutierenden Variablen x^μ, t^a, $\mu = 1, \dots N$, $a = 1 \dots L$. Für konkrete Rechnungen beschränken wir uns auf den Fall einer kanonisch nichtkommutativen Struktur; siehe jedoch Abschnitt 5.4.1. In diesem Fall erhält man das $*$-Produkt indem man die beiden $*$-Produkte (4.29) und (4.33) kombiniert:

$$(f * g)(z) = e^{\frac{i}{2}\left(\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x''^\nu} + t^a g_a(i\frac{\partial}{\partial t'}, i\frac{\partial}{\partial t''})\right)} f(x', t') g(x'', t'')\Big|_{\substack{x' \to x, x'' \to x \\ t' \to t, t'' \to t}}. \tag{5.50}$$

Da die $\hat{x}^\mu$ mit den T^j kommutieren, ist es problemlos möglich, die beiden Exponentialfunktionen zusammenzufassen.

Die Eichtheorie im $*$-Formalismus zu formulieren, heisst, alle Felder als Funktionen kommutierender Variabler, aufzufassen, jedoch statt des punktweisen Produkts das $*$-Produkt zu verwenden. Eine infinitesimale Eichtransformation schreibt sich dann

$$\delta\psi(x) = i\alpha(x) * \psi(x). \tag{5.51}$$

Aus der Formel (5.12) für das Eichfeld wird

$$\delta A^\nu = -i[x^\nu \overset{*}{,} \alpha] + i[\alpha \overset{*}{,} A^\nu]. \tag{5.52}$$

Der erste Term dieser Variation ergibt

$$-i[x^\nu \overset{*}{,} \alpha] = \theta^{\nu\rho}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\alpha, \tag{5.53}$$

was die Definition

$$A^{\nu} = \theta^{\nu\rho} V_{\rho} \tag{5.54}$$

nahelegt. Das Vektorfeld V_{ρ} ist gerade das in (5.34) eingeführte Eichfeld für die kovarianten Ableitungen. Sein Transformationsverhalten ergibt sich aus (5.52) zu

$$\delta V_{\rho} = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \alpha + i[\alpha \stackrel{*}{,} V_{\rho}]. \tag{5.55}$$

Hier wird die Analogie zum Transformationsverhalten eines gewöhnlichen Eichpotenzials deutlich. Die Variation des Eichfeldes ist gegeben durch die Ableitung des Eichparameters plus den Kommutator von Eichparameter und Eichfeld, nur dass hier der $*$-Kommutator genommen werden muss.

5.2.2 Konstruktion

Wir entwickeln nun (5.55) im Deformationsparameter θ. D.h. wir enwickeln das $*$-Produkt und auch den Transformationsparameter α und das Eichfeld V_{ρ} in θ. Für das $*$-Produkt erhalten wir aus (5.50)

$$\begin{aligned} f * g &= \left\{ 1 + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \theta^{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} + \dots \right\} f(x,t') \circledast g(x',t'')\Big|_{\substack{x' \to x \\ t' \to t, t'' \to t}} \\ f(x,t') \circledast g(x',t'') &= e^{\frac{i}{2} t^a g_a (i \frac{\partial}{\partial t'}, i \frac{\partial}{\partial t''})} f(x,t') g(x',t''). \end{aligned} \tag{5.56}$$

Wir machen den Ansatz, dass α und V_{ρ} zu nullter Ordnung in θ linear in den, den Generatoren T^a zugeordneten, Symbolen t^a sind:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_a^1 t^a + \mathcal{O}(\theta), \\ V_{\rho} &= a_{\rho,a}^1 t^a + \mathcal{O}(\theta). \end{aligned} \tag{5.57}$$

Die Gleichung (5.55) wird dann zu niedrigster Ordnung in θ erfüllt, falls

$$\delta a_{\rho,a}^1 = \frac{\partial \alpha_a^1}{\partial x^{\rho}} - f^{bc}{}_a \alpha_b^1 a_{\rho,c}^1 \tag{5.58}$$

ist. Das ist das Transformationsverhalten eines gewöhnlichen nichtabelschen Eichfeldes $a_{\rho,a}^1$ auf einem kommutativen Raum; dieses Ergebnis konnte man erwarten, da für $\theta = 0$ (5.55) die gewöhnliche klassische Eichtransformation eines Eichfeldes ist. Wie bereits oben (Abschnitt 5.1.4) angemerkt, ist es nicht möglich, mit in t linearen α und V, was Liealgebra-wertigen Größen entspräche, auszukommen. Dies drückt sich dergestalt aus, dass die Variation (5.55) des Eichfeldes mit dem in θ konstanten Anteil der Ausdrücke (5.57) zu erster Ordnung in θ einen in t quadratischen Term erhält:

$$\delta V_{\rho} = \theta^{\nu\mu} \partial_{\nu} \alpha_a^1 \partial_{\mu} a_{\rho,b}^1 t^a t^b + \dots . \tag{5.59}$$

Um dies zu kompensieren, müssen α und V_{ρ} auch in θ lineare und in t quadratische Anteile enthalten, wir machen also den erweiterten Ansatz

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_a^1 t^a + \alpha_{ab}^2 t^a t^b + \dots \\ V_{\rho} &= a_{\rho,a}^1 t^a + a_{\rho,ab}^2 t^a t^b + \dots , \end{aligned} \tag{5.60}$$

wobei α^2_{ab} und $a^2_{\rho,ab}$ proportional zu θ sein sollen. Auswertung von (5.55) zur Ordnung θ ergibt die folgende Bedingung an α^2 und a^2

$$\begin{aligned} \delta a^2_{\rho,ab} t^a t^b &= \partial_\rho \alpha^2_{ab} t^a t^b - \theta^{\nu\mu} \partial_\nu \alpha^1_a \partial_\mu a^1_{\rho,b} t^a t^b \\ &\quad -2 f^{bc}{}_a \left\{ \alpha^1_b a^2_{\rho,cd} + \alpha^2_{bd} a^1_{\rho,c} \right\} t^d t^a. \end{aligned} \tag{5.61}$$

α^2 und a^2 sind nun als Funktionen von α^1 und a^1 und deren Ableitungen so zu bestimmen, dass diese Gleichung erfüllt wird, wobei das δ auf der linken Seite eine klassische Eichtransformation (5.58) ist. Als Lösung findet man [71, 53, 37]

$$\begin{aligned} \alpha^2_{ab} t^a t^b &= \frac{1}{2} \theta^{\nu\mu} \partial_\nu \alpha^1_a a^1_{\mu,b} t^a t^b \\ a^2_{\rho,ab} t^a t^b &= -\frac{1}{2} \theta^{\nu\mu} a^1_{\nu,a} (\partial_\mu a^1_{\rho,b} + F^1_{\mu\rho,b}) t^a t^b. \end{aligned} \tag{5.62}$$

mit dem klassischen Feldstärketensor

$$F^1_{\nu\mu,b} = \partial_\nu a^1_{\mu,b} - \partial_\mu a^1_{\nu,b} + f^{cd}{}_b a^1_{\nu,c} a^1_{\mu,d}. \tag{5.63}$$

Dieses Ergebnis können wir noch etwas verallgemeinern: Falls für nicht konstantes θ mit gegebenem $*$-Produkt der $*$-Kommutator keine in θ quadratischen Terme enthält ($[f \overset{*}{,} g] = \theta^{ij}(x) \partial_i f \partial_j g + \mathcal{O}(\theta^3)$, siehe dazu auch Abschnitt 4.1.2), gilt [53]

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha^1_a t^a + \frac{1}{2} \theta^{\nu\mu} \partial_\nu \alpha^1_a a^1_{\mu,b} t^a t^b + \mathcal{O}(\theta^2) \qquad (5.64) \\ A^\nu &= \theta^{\nu\mu} a^1_{\mu,a} t^a - \frac{1}{2} \theta^{\sigma\mu} a^1_{\sigma,a} \left(\partial_\mu (\theta^{\nu\rho} a^1_{\rho,b}) + \theta^{\nu\rho} F^1_{\mu\rho,b} \right) t^a t^b + \mathcal{O}(\theta^2). \end{aligned}$$

In diese Klasse fallen die in Abschnitt 4.2.2 behandelten $*$-Produkte für $GL_q(N)$- und $SO_q(N)$-kovariante Quantenräume und auch das $*$-Produkt (4.33) für die Liealgebra-Struktur. Z.B. gilt für letztere

$$\theta^{\mu\nu} = f^{\mu\nu}{}_m x^m. \tag{5.65}$$

und für die Maninebene

$$\theta^{\mu\nu} = -ihxy \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \ln q. \tag{5.66}$$

Fährt man in dieser Weise mit der Entwicklung in θ fort, erhält man

$$\alpha = \sum_n \alpha^n, \quad V = \sum_n a^n, \tag{5.67}$$

wobei α^n und a^n jeweils von der Ordnung $(n-1)$ in θ, Polynome n-ten Grades in t und Funktionen von α^1 und a^1 sind. Dies ist konsistent mit der Variation des Eichfeldes (5.55), da der Kommutator $[\alpha, A]$ den Grad in den t um eins reduziert.

Vermöge dieser Konstruktion ist eine nichtkommutative Eichtransformation also durch $\alpha^1(x)$ und $a^1_\rho(x)$ bestimmt. Die klassische nichtabelsche Eichtransformation δ_{α^1} von $a^1_\rho(x)$ induziert über die Seiberg-Witten-Abbildung die nichtkommutative nichtabelsche Eichtransformation mit Parameter $\alpha(\alpha^1, a^1_\rho)$. Für die kovarianten Koordinaten heißt das:

$$\delta_{\alpha^1} X^\nu = i[\alpha(\alpha^1, a^1_\rho) \overset{*}{,} X^\nu], \tag{5.68}$$

und für Felder bietet es sich an, entsprechend zu definieren:

$$\delta_{\alpha^1} \psi = i\alpha(\alpha^1, a^1_\rho) * \psi. \tag{5.69}$$

5.2.3 Konsistenzbedingung und Anmerkungen

Der Kommutator zweier infinitesimaler Eichtransformationen mit beliebigen einhüllendenwertigen Eichparametern α und β ist gegeben durch

$$\delta_\alpha \delta_\beta - \delta_\beta \delta_\alpha = \delta_{i(\beta * \alpha - \alpha * \beta)}. \tag{5.70}$$

Dies ist leicht zu sehen, wenn man sich daran erinnert, dass die Eichtransformationen nur auf Felder wirken. Die Gleichung ist jedoch auch richtig für die eingeschränkten einhüllenwertigen Transformationen, die man aus α^1 mittels der Seiberg-Witten-Abbildung erhält:

$$\delta_{\alpha^1} \delta_{\beta^1} - \delta_{\beta^1} \delta_{\alpha^1} = \delta_{i(\beta * \alpha - \alpha * \beta)^1}, \tag{5.71}$$

wobei hier $\alpha = \alpha(\alpha^1, a^1)$ und $\beta = \beta(\beta^1, a^1)$ ist. Dies ist genau das Kompositionsgesetz von gewöhnlichen Liealgebra-wertigen Eichtransformationen. Die Gleichung (5.71) kann als eine Strukturgleichung an die einhüllendenwertige Eichtransformation, die man über die Seiberg-Witten-Abbildung erhält, verstanden werden.

Wir wollen diese Bedingung hier explizit zu erster Ordnung in θ nachrechnen. Die Eichparameter α, β sind

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha^1_a t^a + \frac{1}{2}\theta^{\nu\mu}\partial_\nu \alpha^1_a a^1_{\mu,b} t^a t^b + \mathcal{O}(\theta^2) \\ \beta &= \beta^1_a t^a + \frac{1}{2}\theta^{\nu\mu}\partial_\nu \beta^1_a a^1_{\mu,b} t^a t^b + \mathcal{O}(\theta^2). \end{aligned} \tag{5.72}$$

Den $*$-Kommutator $[\alpha \overset{*}{,} \beta]$ erhält man mit dem $*$-Produkt (5.56):

$$\begin{aligned} [\alpha \overset{*}{,} \beta] &= i\alpha^1_a \beta^1_b f^{ab}{}_c t^c \\ &\quad + \theta^{\nu\mu}\Big\{ \frac{i}{2}\partial_\nu(\alpha^1_a \beta^1_b f^{ab}{}_d) a_{\mu,c} + i\partial_\nu \alpha^1_d \partial_\mu \beta^1_c \\ &\qquad + \frac{i}{2}(\alpha^1_a \partial_\nu \beta^1_d - \beta^1_a \partial_\nu \alpha^1_d) a^1_{\mu,b} f^{ab}{}_c \Big\} t^d t^c + \mathcal{O}(\theta^2). \end{aligned} \tag{5.73}$$

Aus der Definition (5.69) der eingeschränkten einhüllendenwertigen Eichtransformation eines Feldes ψ finden wir:

$$\begin{aligned} \delta_{\beta^1}\delta_{\alpha^1}\psi &= \delta_{\beta^1}\big(i\alpha(\alpha^1, a^1) * \psi\big) \\ &= i\big(\delta_{\beta^1}\alpha(\alpha^1, a^1)\big) * \psi - \alpha(\alpha^1, a^1) * \beta(\beta^1, a^1) * \psi, \end{aligned} \tag{5.74}$$

wobei wir zwei Terme erhalten, da ja $\alpha(\alpha^1, a^1)$ vom klassischen Eichfeld a^1 abhängt und somit unter der δ_{β^1} transformiert:

$$\delta_{\beta^1}\alpha(\alpha^1, a^1_\mu) = \frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \alpha^1_a (\partial_\sigma \beta^1_b - f^{cd}{}_b \beta^1_c a^1_{\sigma,d}) t^d t^b. \tag{5.75}$$

Für den Kommutator zweier infinitesimaler Eichtransformationen finden wir damit insgesamt

$$(\delta_{\beta^1}\delta_{\alpha^1} - \delta_{\alpha^1}\delta_{\beta^1})\psi = -(\alpha * \beta - \beta * \alpha) * \psi + i((\delta_{\beta^1}\alpha) - (\delta_{\alpha^1}\beta)) * \psi. \tag{5.76}$$

Verwenden wir (5.73) und (5.75), können wir für $\delta_{\beta^1}\delta_{\alpha^1} - \delta_{\alpha^1}\delta_{\beta^1}$ den folgenden Ausdruck angeben:

$$\begin{aligned} \delta_{\beta^1}\delta_{\alpha^1} - \delta_{\alpha^1}\delta_{\beta^1} &= i(\delta_{\beta^1}\alpha - \delta_{\alpha^1}\beta) - [\alpha \stackrel{*}{,} \beta] \\ &= -\left(i\alpha^1_a\beta^1_b f^{ab}{}_c t^c + \frac{1}{2}\theta^{\nu\mu}\partial_\nu(i\alpha^1_a\beta^1_b f^{ab}{}_d)a^1_{\mu,c}t^d t^c\right) \\ &\quad +\mathcal{O}(\theta^2). \end{aligned} \tag{5.77}$$

Nehmen wir den in θ konstanten und in t linearen Anteil von $[\alpha \stackrel{*}{,} \beta]$:

$$[\alpha \stackrel{*}{,} \beta] = i\alpha^1_a\beta^1_b f^{ab}{}_c t^c + \dots \tag{5.78}$$

erhalten wir daraus genau die Formel (5.71). Man bleibt also im Raum der eingeschränkten einhüllendenwertigen Eichtransformationen, wenn man den Kommutator zweier infinitesimaler Eichtransformationen berechnet.

Definieren wir Λ als die Abbildung, die einem Eichparameter α^1 der kommutativen Eichtheorie mittels der Seiberg-Witten-Abbildung (5.64) einen Eichparameter der nichtkommutativen Eichtheorie zuordnet, also $\Lambda(\alpha^1_c) \equiv \alpha(\alpha^1_c, a^1_{\mu,b})$, haben wir als Konsistenzbedingung

$$\begin{aligned} \Lambda(i\alpha^1_a\beta^1_b f^{ab}_c) &= \Lambda(\alpha^1_c) * \Lambda(\beta^1_c) - \Lambda(\beta^1_c) * \Lambda(\alpha^1_c) \\ &\quad -i\left(\delta_{\beta^1}\Lambda(\alpha^1_c) - \delta_{\alpha^1}\Lambda(\beta^1_c)\right), \end{aligned} \tag{5.79}$$

wenn wir die Formeln (5.71), (5.76) und (5.78) zusammenfassen.

Die Existenz der Seiberg-Witten-Abbildung zu allen Ordnungen wurde im Rahmen der Deformationsquantisierung gezeigt [38, 39, 40]. Die Eichpotenziale werden dort als Koordinatentransformation $x^\nu \mapsto x^\nu + A^\nu$ interpretiert. Für den Fall einer nichtabelschen nichtkommutativen Eichtheorie wird dabei die so genannte „formality map“ [45] verwendet. Für uns bedeutet dies, dass der Ansatz, die Rekursion Ordnung für Ordnung in θ direkt zu lösen, zumindest im Prinzip konsistente Resultate liefern sollte.

Aus den mit t^a geschriebenen Ausdrücken gewinnt man die entsprechenden einhüllendenwertigen Ausdrücke, indem man sich an unsere Ordnungsvorschrift erinnert (Symmetrisierung), also gilt z.B.

$$t^l \sim T^l, \qquad t^l t^d \sim \frac{1}{2}\{T^l T^d + T^d T^l\}. \tag{5.80}$$

Für den Fall eines konstanten θ berechnen wir noch den Feldstärketensor

$$F_{\kappa\lambda} = \partial_\kappa V_\lambda - \partial_\lambda V_\kappa - iV_\kappa * V_\lambda + iV_\lambda * V_\kappa. \tag{5.81}$$

unter Verwendung der Seiberg-Witten-Abbildung. Wir verwenden den mit den kovarianten Ableitungen definierten Tensor (5.35), da dieser für die Dynamik wichtig ist und im Grenzfall $\theta \to 0$ die klassische Feldstärke ergibt:

$$\begin{aligned} F_{\kappa\lambda} &= -i\theta^{-1}_{\kappa\rho}\theta^{-1}_{\lambda\sigma}T^{\rho\sigma} & (5.82) \\ &= F^1_{\kappa\lambda,a}t^a + \theta^{\mu\nu}\Big\{F^1_{\kappa\mu,a}F^1_{\lambda\nu,b} - \frac{1}{2}a^1_{\mu,a}\left(2\partial_\nu F^1_{\kappa\lambda,b} + a^1_{\nu,c}F^1_{\kappa\lambda,d}f^{cd}{}_b\right)\Big\}t^a t^b. \end{aligned}$$

Aufgrund der Konstruktion der Seiberg-Witten-Abbildung entspricht eine klassiche Eichtransformation (5.58) des Feldstärketensors $F_{\kappa\lambda}$ einer nichtkommutativen Eichtransformation:

$$\delta_{\alpha^1} F_{\kappa\lambda} = i[\alpha \stackrel{*}{,} F_{\kappa\lambda}]. \tag{5.83}$$

5.3 Dynamik

In diesem Abschnitt wollen wir anhand des Beispiels der kanonischen Struktur zeigen, wie man mit Hilfe der Seiberg-Witten-Abbildung und des $*$-Produkts eine eichinvariante Wirkung konstruieren kann. Für die Definition der Wirkung benötigen wir ein Integral über die Algebra, welches insbesondere die Spureigenschaft besitzt, also unter zyklischen Vertauschungen invariant ist. Im Falle der kanonisch nichtkommutativen Struktur ist dies einfach das gewöhnliche Integral über die mit einem Algebraelement assoziierte Funktion kommutierender Variabler (siehe Kapitel 4). Ist also $\hat{f} \in \mathcal{A}_x$ gegeben, definieren wir mittels der entsprechenden Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\int \hat{f} = \int d^N x \; f(x). \tag{5.84}$$

Die zyklische Eigenschaft (oder Spureigenschaft)

$$\int \hat{f}\hat{g} = \int \hat{g}\hat{f} \tag{5.85}$$

bedeutet mit dieser Definition:

$$\int d^N x \; f * g = \int d^N x \; g * f. \tag{5.86}$$

Um dies zu sehen, verwenden wir die Darstellung des $*$-Produkts im Impulsraum (4.29):

$$\begin{aligned} \int d^N x \, f * g &= \int d^N x \, \frac{1}{(2\pi)^N} \int d^N k \, d^N p \; e^{i(k_j+p_j)x^j - \frac{i}{2}k_i\theta^{ij}p_j} \tilde{f}(k)\tilde{g}(p) \\ &= \int d^N k \, d^N p \; \delta(k+p) e^{-\frac{i}{2}k_i\theta^{ij}p_j} \tilde{f}(k)\tilde{g}(p) \\ &= \int d^N p \, \tilde{f}(p)\tilde{g}(-p) \\ &= \int d^N x \, f(x)g(x), \end{aligned} \tag{5.87}$$

wobei wir die Antisymmetrie von θ^{ij} verwendet haben.

Transformiert nun ein Feld unter Eichtransformationen wie ein Tensor:

$$\delta\hat{L} = i[\hat{\alpha}, \hat{L}], \tag{5.88}$$

ist aufgrund der Spureigenschaft die Größe (Tr = Spur über die Generatoren der Eichgruppe)

$$W = \int \mathrm{Tr} \; \hat{L} \tag{5.89}$$

eichinvariant:

$$\delta W = 0. \tag{5.90}$$

Damit können eichinvariante Wirkungen konstruiert werden. Ein Beispiel ist das Analogon der Yang-Mills-Wirkung:

$$W = \frac{1}{4} \int \mathrm{Tr}\ (\hat{F}_{\kappa\lambda} \hat{F}^{\kappa\lambda}), \tag{5.91}$$

wobei hier $\hat{F}_{\kappa\lambda}$ die nichtkommutative Feldstärke ist, und wir annehmen, dass wir auf dem kommutativen Raum eine Metrik zu Heben der Indizes haben.

Verwenden wir jetzt die Feldstärke (5.82), welche wir vermöge der Seiberg-Witten-Abbildung erhalten haben, und die Definition des Integrals (5.84), finden wir eine Wirkung auf dem kommutativen Raum, die invariant unter gewöhnlichen Eichtransformationen (5.58) ist. Zu nullter Ordnung in θ ergibt dies die klassische Yang-Mills-Wirkung, jedoch hat man Korrekturen in höherer Ordnung in θ, die neue Kopplungen enthalten. Betrachten wir z.B. eine $su(M)$-Eichtheorie; dann sind die darstellenden Matrizen der Generatoren, die wir ebenfalls mit T^a bezeichnen, hermitesch und spurlos. Ihre Normierung kann so gewählt werden, dass

$$\mathrm{Tr}\ \left(T^a T^b\right) = 2\delta^{ab} \tag{5.92}$$

ist. In einer n-dimensionale Darstellung, gilt für den Antikommutator

$$\{T^a, T^b\} = d^{abc} T^c + \frac{1}{n} \delta^{ab}, \tag{5.93}$$

wobei die Koeffizienten $d^{abc} \in \mathbb{C}$ total symmetrisch in den Indizes abc sind. Wenn man berücksichtigt, dass die Generatoren der Eichgruppe immer total symmetrisiert auftreten, siehe (5.80), ergibt sich damit die Wirkung zu

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int d^N x\ F_{\kappa\lambda,a} F^{\kappa\lambda}{}_a \\ &\quad + F^{\kappa\lambda}{}_a \theta^{\mu\nu} \left\{ F_{\kappa\lambda,b} F_{\kappa\lambda,c} - \frac{1}{2} a_{\mu,b} \left(2\partial_\nu F_{\kappa\lambda,c} + a_{\nu,e} F_{\kappa\lambda,d} f^{ed}{}_c \right) \right\} d^{abc} \\ &\quad + \mathcal{O}(\theta^2). \end{aligned} \tag{5.94}$$

Für die zweidimensionale Spin-$\frac{1}{2}$-Darstellung der $su(2)$ gilt: $d^{abc} = 0$. In diesem Fall hat man also keine Korrekturen erster Ordnung in θ zur klassischen Yang-Mills-Wirkung.

5.4 Beispiele für Eichtheorien auf Quantenräumen

Für Quantenebenen sind konkrete Rechnungen im Allgemeinen wesentlich aufwändiger als im Fall der der kanonischen Struktur. Wir wollen jedoch zumindest für die einfachsten Beispiele zeigen, dass das in diesem Kapitel skizzierte Programm durchführbar ist.

Zunächst bilden wir für die Maninebene kovariante Ableitungen. Die so erhaltene Eichtheorie übersetzen wir in den $*$-Formalismus. Wir konstruieren damit wieder eine Abbildung zwischen kommutativer und nichtkommutativer Eichtheorie, à la Seiberg-Witten.

Für den euklidischen Quantenraum $\mathbb{R}^3_q$ wollen wir im Abschnitt 5.4.2 zumindest zeigen, wie man kovariante Koordinaten und Drehimpulsoperatoren erhält. Damit können dann kovariante Impulsoperatoren konstruiert werden. Dies veranschaulicht die Idee, dass man für nichtkommutative Algebren die Eichtheorie auf die kovarianten Koordinaten zurückführen kann.

5.4.1 Maninebene

Definition der Algebra

Die Maninebene ist ein zweidimensionaler Quantenraum, dessen Funktionenalgebra von den Koordinaten $\hat{x}^1$ und $\hat{x}^2$ mit der Relation

$$\hat{x}^1\hat{x}^2 = q\hat{x}^2\hat{x}^1 \tag{5.95}$$

erzeugt wird, siehe auch (4.35). Diese und alle noch folgenden Algebrarelationen und ihre Herleitung können z.B. in [78, 79] gefunden werden. Dort findet man auch die abstrakte Form, geschrieben mit der $\hat{R}$-Matrix. Eine ähnliche, mathematische exaktere Behandlung, des Folgenden, abgesehen von der Eichtheorie, findet man in [67].

Die zugehörigen Ableitungen $\hat{\partial}_1$ und $\hat{\partial}_2$ erfüllen

$$\hat{\partial}_1\hat{\partial}_2 = \frac{1}{q}\hat{\partial}_2\hat{\partial}_1; \tag{5.96}$$

und für die $\hat{\partial}\hat{x}$-Vertauschungsrelationen findet man

$$\begin{aligned}
\hat{\partial}_1\hat{x}^1 &= 1 + q^2\hat{x}^1\hat{\partial}_1 + q\lambda\hat{x}^2\hat{\partial}_2 \\
\hat{\partial}_1\hat{x}^2 &= q\hat{x}^2\hat{\partial}_1 \\
\hat{\partial}_2\hat{x}^1 &= q\hat{x}^1\hat{\partial}_2 \\
\hat{\partial}_2\hat{x}^2 &= 1 + q^2\hat{x}^2\hat{\partial}_2.
\end{aligned} \tag{5.97}$$

All diese Relationen sind kovariant unter der Wirkung der $su_q(2)$ (A.5), wobei die Wirkung durch die folgenden Vertauschungsrelationen zwischen den $\hat{x}^i$ und den T^A gegeben ist:

$$\begin{aligned}
T^3\hat{x}^1 &= q^2\hat{x}^1T^3 - q\hat{x}^1 \\
T^3\hat{x}^2 &= q^{-2}\hat{x}^2T^3 + q^{-1}\hat{x}^2 \\
T^+\hat{x}^1 &= q\hat{x}^1T^+ + q^{-1}\hat{x}^2 \\
T^+\hat{x}^2 &= q^{-1}\hat{x}^2T^+ \\
T^-\hat{x}^1 &= q\hat{x}^1T^- \\
T^-\hat{x}^2 &= q^{-1}\hat{x}^2T^- + q\hat{x}^1.
\end{aligned} \tag{5.98}$$

Diese besagen, dass die zweidimensionale Quantenebene eine Spin-$\frac{1}{2}$-Darstellung der $su_q(2)$ bildet, mit $|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \sim \hat{x}^1$, $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \sim \hat{x}^2$. Für die Ableitungen können entsprechende Formeln angegeben werden.

Realisierung auf Feldern und Leibnizregel

In völliger Analogie zur dreidimensionalen q-Heisenbergalgebra (siehe Abschnitt 3.3) können wir auch die Algebra der Maninebene auf Feldern, also Elementen der von $\hat{x}^1, \hat{x}^2$ erzeugten Funktionenalgebra, realisieren. Es ergibt sich das folgende Bild:[7]

Wirkung der Ableitungen:

$$\begin{aligned} \check{\partial}_1\left((\hat{x}^1)^n(\hat{x}^2)^m\right) &= q^{n+2m-1}[n]_q(\hat{x}^1)^{n-1}(\hat{x}^2)^m \\ \check{\partial}_2\left((\hat{x}^1)^n(\hat{x}^2)^m\right) &= q^{n+m-1}[m]_q(\hat{x}^1)^{n}(\hat{x}^2)^{m-1} \end{aligned} \tag{5.99}$$

Leibnizregel:

$$\begin{aligned} \check{\partial}_1(\hat{f}\hat{g}) &= (\check{\partial}_1\hat{f})\hat{g} + (\check{G}_1\hat{f})(\check{\partial}_1\hat{g}) + (\check{H}\hat{f})(\check{\partial}_2\hat{g}) \\ \check{\partial}_1(\hat{f}\hat{g}) &= (\check{\partial}_1\hat{f})\hat{g} + (\check{G}_2\hat{f})(\check{\partial}_2\hat{g}) \end{aligned} \tag{5.100}$$

mit

$$\begin{aligned} \check{G}_1\left((\hat{x}^1)^n(\hat{x}^2)^m\right) &= q^{2n+m}(\hat{x}^1)^n(\hat{x}^2)^m \\ \check{G}_2\left((\hat{x}^1)^n(\hat{x}^2)^m\right) &= q^{n+2m}(\hat{x}^1)^n(\hat{x}^2)^m \\ \check{H}\left((\hat{x}^1)^n(\hat{x}^2)^m\right) &= \lambda q^{n+2m}[n]_q(\hat{x}^1)^{n-1}(\hat{x}^2)^{m+1} \end{aligned} \tag{5.101}$$

$\check{G}_1$ und $\check{G}_2$ skalieren die Funktionen, $\check{H}$ beinhaltet zusätzlich eine Rotation. In der Notation von Abschnitt 5.1.3 ist

$$\check{O}_1{}^1 = \check{G}_1, \quad \check{O}_2{}^2 = \check{G}_2, \quad \check{O}_1{}^2 = \check{H}, \quad \check{O}_2{}^1 = 0. \tag{5.102}$$

Die von den Operatoren $\check{\partial}_1, \check{\partial}_2, \check{G}_1, \check{G}_2, \check{H}$ gebildete Algebra ist

$$\begin{aligned} &\check{\partial}_1\check{\partial}_2 = q^{-1}\check{\partial}_2\check{\partial}_1, \\ &\check{G}_1\check{G}_2 = \check{G}_2\check{G}_1, \quad \check{H}\check{G}_1 = q\check{G}_1\check{H}, \quad \check{H}\check{G}_2 = q^{-1}\check{G}_2\check{H}, \\ &\check{G}_1\check{\partial}_1 = q^{-2}\check{\partial}_1\check{G}_1, \quad \check{G}_2\check{\partial}_1 = q^{-1}\check{\partial}_1\check{G}_2, \quad \check{H}\check{\partial}_1 = q^{-2}\check{\partial}_1\check{H}, \\ &\check{G}_1\check{\partial}_2 = q^{-1}\check{\partial}_2\check{G}_1, \quad \check{G}_2\check{\partial}_2 = q^{-2}\check{\partial}_2\check{G}_2, \quad \check{H}\check{\partial}_2 = q^{-1}\check{\partial}_2\check{H} - q^{-1}\lambda\check{\partial}_1\check{G}_2. \end{aligned} \tag{5.103}$$

Kovariante Ableitungen

Dem in Abschnitt 5.1.3 Gesagten zufolge ist es für Quantenraum-Strukturen notwendig, ein Vielbein $\hat{E}_i{}^k$ einzuführen. Wir machen daher den Ansatz:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}_1 &= \hat{E}_1{}^1(\check{\partial}_1 - i\hat{V}_1) + \hat{E}_1{}^2(\check{\partial}_2 - i\hat{V}_2) \\ \hat{\mathcal{D}}_2 &= \hat{E}_2{}^2(\check{\partial}_2 - i\hat{V}_2), \end{aligned} \tag{5.104}$$

wobei wir anmerken, dass es aufgrund des Transformationsverhaltens (5.40) des Vielbeins konsistent möglich ist, $\hat{E}_2{}^1 \equiv 0$ zu setzen, wenn wie bei uns $\check{O}_2{}^1 = 0$ ist.

[7] Wir verwenden die Notation aus Abschnitt 3.3.1, in der die zu einem Algebraelement $\hat{a}$ gehörende Abbildung von Feldern auf Felder mit $\check{a}$ bezeichnet wird.

Für unser Beispiel der zweidimensionalen Quantenebene wollen wir die Formeln (5.40) und (5.42) für die Variation von Vielbein und Eichfeld unter infinitesimalen Eichtransformationen explizit ausschreiben:

$$\begin{aligned}
\delta \hat{E}_1{}^1 &= i\hat{\alpha}\hat{E}_1{}^1 - i\hat{E}_1{}^1(\check{G}_1\hat{\alpha}) \\
\delta \hat{E}_1{}^2 &= i\hat{\alpha}\hat{E}_1{}^2 - i\hat{E}_1{}^2(\check{G}_2\hat{\alpha}) - i\hat{E}_1{}^1(\check{H}\hat{\alpha}) \\
\delta \hat{E}_2{}^2 &= i\hat{\alpha}\hat{E}_2{}^2 - i\hat{E}_2{}^2(\check{G}_2\hat{\alpha}) \\
\delta \hat{V}_1 &= i(\check{G}_1\hat{\alpha})\hat{V}_1 - i\hat{V}_1\hat{\alpha} + (\check{\partial}_1\hat{\alpha}) + i(\check{H}\hat{\alpha})\hat{V}_2 \\
\delta \hat{V}_2 &= i(\check{G}_2\hat{\alpha})\hat{V}_2 - i\hat{V}_2\hat{\alpha} + (\check{\partial}_2\hat{\alpha}).
\end{aligned} \tag{5.105}$$

Feldstärke-Tensor

Naheliegend ist es natürlich, den Tensor über den Ausdruck

$$\hat{\mathcal{D}}_1\hat{\mathcal{D}}_2 - q^{-1}\hat{\mathcal{D}}_2\hat{\mathcal{D}}_1 \tag{5.106}$$

zu definieren. Eine konkrete Rechnung zeigt jedoch, dass dieser eine recht komplizierte und unübersichtliche Struktur aufweist, siehe unten.

Wir versuchen daher zunächst direkt, einen Tensor zu konstruieren. Dabei fordern wir, dass dieser die ersten Ableitungen des Eichfeldes $\hat{V}$ enthält und eine ähnliche Struktur wie der Ausdruck (5.106) aufweist, d.h. wir starten mit

$$\check{\partial}_1\hat{V}_2 - q^{-1}\check{\partial}_2\hat{V}_1 + \,?. \tag{5.107}$$

Wobei die zusätzlichen Terme die Struktur eines Kommutators der Eichfelder beinhalten, in den sie ja für $q \to 1$ übergehen müssen. Durch Ausprobieren findet man schnell den Ausdruck

$$\hat{F}' \equiv \check{\partial}_1\hat{V}_2 - q^{-1}\check{\partial}_2\hat{V}_1 + i(\check{G}_1\hat{V}_2)\hat{V}_1 + i(\check{H}\hat{V}_2)\hat{V}_2 - iq^{-1}(\check{G}_2\hat{V}_1)\hat{V}_2, \tag{5.108}$$

der homogen transformiert, d.h. ohne Ableitungen des Eichparameters:

$$\delta\hat{F}' = i(\check{G}_1\check{G}_2\hat{\alpha})\hat{F}' - i\hat{F}'\hat{\alpha}. \tag{5.109}$$

Verwenden wir jetzt noch das Vielbein, finden wir die beiden Tensoren

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{12} &= \hat{E}_1{}^1(\check{G}_1\hat{E}_2{}^2)\hat{F}' \\
\hat{F}_{21} &= \hat{E}_2{}^2(\check{G}_2\hat{E}_1{}^1)\hat{F}'.
\end{aligned} \tag{5.110}$$

Kommen wir nun zu den Vertauschungsrelationen der kovarianten Ableitungen, also (5.106), aus denen wir typischerweise die Tensoren erhalten sollten. Wir berechnen

$$\hat{\mathcal{D}}_2\hat{\mathcal{D}}_1 = q\hat{T}_{12}\,\hat{\mathcal{D}}_1\hat{\mathcal{D}}_2 + \hat{T}_{22}\,\hat{\mathcal{D}}_2\hat{\mathcal{D}}_2 + \hat{T}_1\,\hat{\mathcal{D}}_1 + \hat{T}_2\,\hat{\mathcal{D}}_2 + \hat{F}_{21}, \tag{5.111}$$

wobei die einzelnen Tensoren folgendermaßen gegeben sind: $\hat{F}_{21}$ ist einer der beiden bereits direkt aus dem Eichfeld konstruierten Tensoren (5.110). Für $\hat{T}_{12}$ und $\hat{T}_{22}$ finden wir

$$\hat{T}_{12} = \hat{E}_2{}^2(\check{G}_2\hat{E}_1{}^1)(\check{G}_1(\hat{E}_2{}^2)^{-1})(\hat{E}_1{}^1)^{-1} \tag{5.112}$$

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{22} &= \hat{E}_2{}^2(\check{G}_2\hat{E}_1{}^2)(\check{G}_2(\hat{E}_2{}^2)^{-1})(\hat{E}_2{}^2)^{-1} \\
&\quad -q\hat{E}_2{}^2(\check{G}_2\hat{E}_1{}^1)\left[(\check{G}_1(\hat{E}_2{}^2)^{-1})(\hat{E}_1{}^1)^{-1}\hat{E}_1{}^2(\hat{E}_2{}^2)^{-1} - (\check{H}(\hat{E}_2{}^2)^{-1})(\hat{E}_2{}^2)^{-1}\right].
\end{aligned}$$

Der Tensor $\hat{T}_{12}$ ist invertierbar:

$$\hat{T}_{12}^{-1} = \hat{E}_1{}^1(\check{G}_1\hat{E}_2{}^2)(\check{G}_2(E_1{}^1)^{-1})(E_2{}^2)^{-1}; \tag{5.113}$$

er verbindet die beiden Tensoren $\hat{F}_{12}$ und $\hat{F}_{21}$:

$$\hat{F}_{21} = \hat{T}_{12}\hat{F}_{12}. \tag{5.114}$$

Für $\hat{T}_1$ und $\hat{T}_2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\hat{T}_1 &= -i\hat{E}_2{}^2\hat{V}_2 + \hat{E}_2{}^2(\check{\partial}_2\hat{E}_1{}^1)(\hat{E}_1{}^1)^{-1} + iq\hat{E}_2{}^2(\check{G}_2\hat{E}_1{}^1)(\check{G}_1\hat{V}_2)(\hat{E}_1{}^1)^{-1} \qquad (5.115)\\
\hat{T}_2 &= \hat{E}_2{}^2(\check{\partial}_2\hat{E}_1{}^2)(\hat{E}_2{}^2)^{-1} - \hat{E}_2{}^2(\check{\partial}_2\hat{E}_1{}^1)(\hat{E}_1{}^1)^{-1}\hat{E}_1{}^2(\hat{E}_2{}^2)^{-1}\\
&\quad + \hat{E}_2{}^2(\check{G}_2\hat{E}_1{}^2)\left[(\check{\partial}_2(\hat{E}_2{}^2)^{-1}) + i(\check{G}_2(\hat{E}_2{}^2)^{-1})\hat{V}_2\right]\\
&\quad + q\hat{E}_2{}^2(\check{G}_2\hat{E}_1{}^1)\Big[(\check{\partial}_1(\hat{E}_2{}^2)^{-1}) + i(\check{G}_1(\hat{E}_2{}^2)^{-1})\hat{V}_1 - iq^{-1}(\check{G}_2V_1)(\hat{E}_2{}^2)^{-1}\\
&\qquad - i(\check{G}_1\hat{V}_2)(\hat{E}_1{}^1)^{-1}\hat{E}_1{}^2(\hat{E}_2{}^2)^{-1} + i(\check{H}(\hat{E}_2{}^2)^{-1})\hat{V}_2 + i(\check{H}\hat{V}_2)(\hat{E}_2{}^2)^{-1}\Big].
\end{aligned}$$

Hier bekommen wir das Problem, dass die Tensoren, die ja zur Konstruktion einer eichinvarianten Wirkung verwendet werden, nicht nur das Eichfeld $\hat{V}$ enthalten, sondern auch das Vielbein $\hat{E}$. Und dass dieses auch an das Eichfeld koppelt, wir also ein weiteres dynamisches Feld einführen müssten. Um dies zu vermeiden, konstruieren wir im Folgenden eine Abbildung à la Seiberg-Witten. In unserem Fall werden wir sowohl das Eichfeld, als auch das Vielbein durch ein gewöhnliches Eichfeld auf dem kommutativen Raum ausdrücken. Dadurch ist es dann möglich mit diesem dynamischen Feld auszukommen.

$*$-Formalismus

Wir wollen wieder, ähnlich wie für die kanonische Struktur im Abschnitt 5.2, eine Abbildung zwischen nichtkommutativer und kommutativer Eichtheorie finden. Dazu übertragen wir zunächst die Ableitungen $\check{\partial}_1, \check{\partial}_2$ und die Operatoren $\check{G}_1, \check{G}_2, \check{H}$ in den $*$-Formalismus.

Aus Abschnitt 4.2 kennen wir bereits das Sternprodukt (4.38) für die Maninebene, falls man eine Normalordnungsvorschrift verwendet:

$$\begin{aligned}
f * g &= q^{-y^1\frac{\partial}{\partial y^1}x^2\frac{\partial}{\partial x^2}} f(x^1,x^2)g(y^1,y^2)\Big|_{\substack{y^1\to x^1\\ y^2\to x^2}}\\
&= fg - hx^1x^2\partial_2 f\partial_1 g + \mathcal{O}(h^2). \qquad (5.116)
\end{aligned}$$

Da wir die Wirkung der Operatoren in einer Basis mit normalgeordneten Monomen kennen (5.99) und (5.101), können wir auch leicht eine $*$-Wirkung dieser Operatoren angeben, d.h. wir realisieren die Operatoren durch Differenzialoperatoren im $\mathbb{R}^2$. Ausgehend von einer Abbildung $\check{O}$ von Feldern auf Felder, setzen wir

$$W(O * f) = \check{O}W(f), \tag{5.117}$$

um die $*$-Wirkung $O*$ zu erhalten, wobei hier W wieder für die Quantisierungsabbildung steht, vgl. Kapitel 4. Außerdem sollen $x^1, x^2, \partial_1, \partial_2$ die gewöhnlichen Koordinaten und Ableitungen des $\mathbb{R}^2$ sein. Damit finden wir

$$\begin{aligned}
\partial_1 * f &= \frac{1}{\lambda x^1} q^{2x^2\partial_2 - 1}(q^{2x^1\partial_1} - 1)\, f \\
&= (\partial_1 + h(x^1\partial_1 + 2x^2\partial_2)\partial_1) f + \ldots \\
\partial_2 * f &= \frac{1}{\lambda x^2} q^{x^1\partial_1 - 1}(q^{2x^2\partial_2} - 1)\, f \\
&= (\partial_2 + h(x^1\partial_1 + x^2\partial_2)\partial_2) f + \ldots \\
G_1 * f &= q^{2x^1\partial_1 + x^2\partial_2}\, f \\
&= (1 + h(2x^1\partial_1 + x^2\partial_2)) f + \ldots \\
G_2 * f &= q^{x^1\partial_1 + 2x^2\partial_2}\, f \\
&= (1 + h(x^1\partial_1 + 2x^2\partial_2)) f + \ldots \\
H * f &= \frac{x^2}{x^1} q^{2x^2\partial_2}(q^{2x^1\partial_1} - 1)\, f \\
&= h 2x^2\partial_1 f + \ldots .
\end{aligned} \tag{5.118}$$

Diese Differenzialoperatoren erfüllen die Algebra (5.103). Hier erkennt man auch das erwartete Verhalten im Limes $h = \ln q \to 0$: Man erhält die gewöhnlichen Ableitungen des $\mathbb{R}^2$.

Jetzt können wir die gesamte Eichtheorie im $*$-Formalismus formulieren. D.h. $\alpha, E_i{}^k, V_k$ sind Potenzreihen im Parameter $h = \ln q$, wobei die Koeffizienten Funktionen im $\mathbb{R}^2$ sind. Ein Feld $\psi(x^1, x^2)$ transformiert unter Eichtransformationen also folgendermaßen:

$$\delta_{\alpha(x)}\psi(x) = i\alpha(x) * \psi(x), \tag{5.119}$$

hier kann man natürlich genauso wie in den Abschnitten 5.1, 5.2 auch wieder nichtabelsche Eichtheorien implementieren. Die Variation von Vielbein $E_i{}^k(x)$ und Eichfeld $V_k(x)$ ist dann entsprechend:

$$\begin{aligned}
\delta E_1{}^1 &= i\alpha * E_1{}^1 - iE_1{}^1 * (G_1 * \alpha) \\
\delta E_1{}^2 &= i\alpha * E_1{}^2 - iE_2{}^2 * (G_2 * \alpha) - iE_1{}^1 * (H * \alpha) \\
\delta E_2{}^2 &= i\alpha * E_2{}^2 - iE_2{}^2 * (G_2 * \alpha) \\
\delta V_1 &= i(G_1 * \alpha) * V_1 - iV_1 * \alpha + (\partial_1 * \alpha) + i(H * \alpha) * V_2 \\
\delta V_2 &= i(G_2 * \alpha) * V_2 - iV_2 * \alpha + (\partial_2 * \alpha).
\end{aligned} \tag{5.120}$$

Abbildung zwischen nichtkommutativer und kommutativer Eichtheorie

Wir versuchen das Vielbein $E_i{}^k$ und das Eichfeld V_k als Funktionen des kommutativen Eichfeldes und dessen Ableitungen auszudrücken, und außerdem den Eichparameter α als Funktion des kommutativen Eichparameters und Eichfeldes, sowie deren Ableitungen:

$$\begin{aligned} E_i{}^k &= E_i{}^k(a^1, \partial a^1, \partial\partial a^1, \dots) \\ V_k &= V_k(a^1, \partial a^1, \partial\partial a^1, \dots) \\ \alpha &= \alpha(\alpha^1, \partial\alpha^1, \partial\partial\alpha^1, \dots, a^1, \partial a^1, \partial\partial a^1, \dots). \end{aligned} \tag{5.121}$$

Und zwar so, dass eine klassische Eichtranformation des Feldes a^1 ($\delta a^1_{i,a} = \partial_i \alpha^1_a - f^{bc}{}_a \alpha^1_b a^1_{i,c}$) über diese funktionale Abhängigkeit die nichtkommutative Eichtransformation (5.120) impliziert. Wir betrachten wieder nichtabelsche Eichtheorien.

Wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned} E_i{}^k &= \delta_i{}^k + h\varepsilon_i{}^k + \mathcal{O}(h^2) \\ V_k &= a^1_{k,a} T^a + h\Gamma_k + \mathcal{O}(h^2) \\ \alpha &= \alpha^1_a T^a + h\alpha^2 + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned} \tag{5.122}$$

Nun entwickeln wir die Bedingungsgleichungen (5.120) in h, wobei wir die Formel (5.118) verwenden. Zu nullter Ordnung in h finden wir das gewöhnliche Transformationsverhalten eines Eichpotenzials auf dem kommutativen Raum:

$$\delta a^1_{i,a} = \partial_i \alpha^1_a - f^{bc}{}_a \alpha^1_b a^1_{i,c}. \tag{5.123}$$

Zu erster Ordnung in h erhalten wir als Bedingungsgleichungen für das Vielbein

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_1{}^1 &= i\alpha^1_a (2x^1 a^1_{1,b} + x^2 a^1_{2,b}) f^{ab}{}_c T^c - i(2x^1 \partial_1 \alpha^1_a + x^2 \partial_2 \alpha^1_a) T^a \\ \delta\varepsilon_1{}^2 &= i2x^2 \alpha^1_a a^1_{1,b} f^{ab}{}_c T^c - i2x^2 \partial_1 \alpha^1_a T^a \\ \delta\varepsilon_2{}^2 &= i\alpha^1_a (x^1 a^1_{1,b} + 2x^2 a^1_{2,b}) f^{ab}{}_c T^c - i(x^1 \partial_1 \alpha^1_a + 2x^2 \partial_2 \alpha^1_a) T^a. \end{aligned} \tag{5.124}$$

Hieraus kann die Lösung direkt abgelesen werden:

$$\begin{aligned} E_1{}^1 &= 1 - ih(2x^1 a^1_{1,a} + x^2 a^1_{2,a}) T^a + \mathcal{O}(h^2) \\ E_1{}^2 &= -ih2x^2 a^1_{1,a} T^a + \mathcal{O}(h^2) \\ E_2{}^2 &= 1 - ih(x^1 a^1_{1,a} + 2x^2 a^1_{2,a}) T^a + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned} \tag{5.125}$$

Für Γ_1, Γ_2 und α^2 findet man die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_1 &= \Big\{ - ix^1 x^2 \partial_2 \alpha^1_a \partial_1 a^1_{1,b} + ix^1 x^2 \partial_2 a^1_{1,a} \partial_1 \alpha^1_b \\ &\qquad + i(2x^1 \partial_1 + x^2 \partial_2) \alpha^1_a a^1_{a,b} + i2x^2 \partial_1 \alpha^1_a a^1_{2,b} \Big\} T^a T^b \\ &\quad + (2x^2 \partial_2 + x^1 \partial_1) \partial_1 \alpha^1_a T^a \\ &\quad + \partial_1 \alpha^2 + i[\alpha^1_a T^a, \Gamma_1] + i[\alpha^2, a^1_{1,a} T^a] \\ \delta\Gamma_2 &= \Big\{ - ix^1 x^2 \partial_2 \alpha^1_a \partial_1 a^1_{2,b} + ix^1 x^2 \partial_2 a^1_{2,a} \partial_1 \alpha^1_b \\ &\qquad + i(x^1 \partial_1 + 2x^2 \partial_2) \alpha^1_a a^1_{2,b} \Big\} T^a T^b \\ &\quad + (x^1 \partial_1 + x^2 \partial_2) \partial_2 \alpha^1_a T^a \\ &\quad + \partial_2 \alpha^2 + i[\alpha^1_a T^a, \Gamma_2] + i[\alpha^2, a^1_{2,a} T^a]. \end{aligned} \tag{5.126}$$

Diese werden gelöst durch

$$\alpha^2 = \frac{i}{2} x^1 x^2 \left[\partial_2 \alpha^1_a a^1_{1,b} - \partial_1 \alpha^1_b a^1_{2,a}\right] T^a T^b \tag{5.127}$$

und

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= (2x^2\partial_2 + x^1\partial_1) a^1_{1,a} T^a - \frac{1}{2} x^2 a^1_{1,a} a^1_{2,b} f^{ab}{}_c T^c \\
&\quad + \Big\{ i x^1 x^2 \Big[-F_{12,a} a^1_{1,b} + \frac{1}{2}\partial_1 a^1_{2,a} a^1_{1,b} + \frac{1}{2} a^1_{1,c} a^1_{2,d} a^1_{1,b} f^{cd}{}_a - \frac{1}{2}\partial_1 a^1_{1,b} a^1_{2,a} \Big] \\
&\qquad + i\frac{3}{2} x^2 a^1_{1,a} a^1_{2,b} + i x^1 a^1_{1,a} a^1_{1,b} \Big\} T^a T^b \\
\Gamma_2 &= (x^1\partial_1 + x^2\partial_2) a^1_{2,a} T^a \\
&\quad + \Big\{ i x^1 x^2 \Big[-a^1_{2,a} F_{12,b} - \frac{1}{2} a^1_{2,a} \partial_2 a^1_{1,b} + \frac{1}{2} a^1_{1,f} a^1_{2,e} a^1_{2,a} f^{fe}{}_b + \frac{1}{2} a^1_{1,b} \partial_2 a^1_{2,a} \Big] \\
&\qquad + \frac{i}{2} x^1 a^1_{1,b} a^1_{2,a} + i x^2 a^1_{2,a} a^1_{2,b} \Big\} T^a T^b.
\end{aligned} \tag{5.128}$$

Mit (5.127) erfüllt α aus (5.122) wieder die Konsistenzbedingung (5.71).

Es ist also auch in diesem Fall möglich, eine Art Seiberg-Witten-Abbildung zu finden, welche die nichtkommutative mit der kommutativen Eichtheorie in Verbindung bringt. Dass es immer möglich zu sein scheint, eine solche Abbildung zu finden, deutet auf einen geometrischen Grund für die Existenz der Seiberg-Witten-Abbildung hin.

Integral

Für die Maninebene ist es ebenfalls möglich ein Integral anzugeben, welches die Spureigenschaft besitzt. Ist f die einem Algebraelement $\hat{f}$ zugeordnete Funktion kommutierender Variabler, definieren wir:

$$\int \hat{f} \equiv \int \frac{dx^1\, dx^2}{x^1 x^2}\, f(x^1, x^2). \tag{5.129}$$

Wir rechnen $\int f * g = \int g * f$ wieder explizit nach:

$$\int f * g = \int \frac{dx^1\, dx^2}{x^1 x^2} dy^1\, dy^2\, \delta(x^1 - y^1)\delta(x^2 - y^2) e^{-hx^2 \frac{\partial}{\partial x^2} y^1 \frac{\partial}{\partial y^1}} f(x) g(y). \tag{5.130}$$

Wir betrachten zunächst nur den Ausdruck mit dem Operator aus dem Exponenten:

$$\int \frac{dx^1\, dx^2}{x^1 x^2} dy^1\, dy^2\, \delta(x^1 - y^1)\delta(x^2 - y^2) x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} y^1 \frac{\partial}{\partial y^1} f(x) g(y). \tag{5.131}$$

Partielle Integration liefert:

$$\int dx^1\, dx^2\, dy^1\, dy^2\, \frac{\partial}{\partial y^1}\delta(x^1 - y^1) \frac{\partial}{\partial x^2}\delta(x^2 - y^2) f(x) g(y). \tag{5.132}$$

Verwenden wir jetzt $\partial_x\delta(x-y) = -\partial_y\delta(x-y)$, und integrieren erneut partiell, erhalten wir

$$\int \frac{dy^1\,dy^2}{y^1y^2} dx^1\,dx^2\;\delta(x^1-y^1)\delta(x^2-y^2)y^2\frac{\partial}{\partial y^2}x^1\frac{\partial}{\partial x^1}g(y)f(x) \tag{5.133}$$

und damit, wenn man in einer Expansion von (5.130) diese Schritte mehrfach hintereinander ausführt,

$$\int f*g = \int \frac{dy^1\,dy^2}{y^1y^2}\; g*f = \int g*f. \tag{5.134}$$

5.4.2 Dreidimensionaler Euklidischer Quantenraum

Ausgehend von den Ableitungen ∂ bzw. $\overline{\partial}$ könnte man hier das gleiche Programm durchführen wie für die Maninebene. Da die Leibnizregeln (D.17) und (D.18) denen der Maninebene (5.100) sehr ähnlich sind, und wir den Fall der Maninebene bereits ausführlich behandelt haben, betrachten wir hier nicht die aus (C.6) und (C.7) erhaltenen kovarianten Ableitungen.

Vielmehr wollen wir in diesem Abschnitt nur kurz zeigen, wie man kovariante Koordinaten X^A und kovariante Bahndrehimpuloperatoren L^A mit einem gemeisamen Vielbein und Eichpotenzial erhalten kann. Dies kann dann als Ausgangspunkt für kovariante Impulsoperatoren $P = P(X, L, \Lambda)$ (C.12) dienen.

Kovariante Drehimpulsoperatoren

Wir betrachten zunächst die Bahndrehimpulsoperatoren L^A, genauer die drei Operatoren L^+, L^- und $\tau^{-\frac{1}{2}}$. Aus dem Koprodukt (A.15) der L-Algebra erhalten wir

$$\begin{aligned}
\check{\tau}^{-\frac{1}{2}}(\hat{f}\hat{g}) &= (\check{\tau}^{-\frac{1}{2}}\hat{f})(\check{\tau}^{-\frac{1}{2}}\hat{g}) \\
\check{L}^{\pm}(\hat{f}\hat{g}) &= (\check{L}^{\pm}\hat{f})(\check{\tau}^{-\frac{1}{2}}\hat{g}) + \hat{f}(\check{L}^{\pm}\hat{g}).
\end{aligned} \tag{5.135}$$

Für die kovarianten Operatoren, die wir mit $\widetilde{L}^{\pm}$ und $\widetilde{\tau}^{-\frac{1}{2}}$ bezeichenen, machen wir einen Ansatz mit Vielbein $\hat{E}$ und Eichfeld $\hat{A}$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\tau}^{-\frac{1}{2}} &= \hat{E}(\check{\tau}^{-\frac{1}{2}} + \hat{A}^3) \\
\widetilde{L}^{\pm} &= \hat{E}^{\pm}(\check{L}^{\pm} + \hat{A}^{\pm}) + \hat{E}_3^{\pm}(\check{\tau}^{-\frac{1}{2}} + \hat{A}^3).
\end{aligned} \tag{5.136}$$

Dies sollen kovariante Operatoren unter Eichtransformationen sein, d.h. es muss gelten

$$\delta\widetilde{\tau}^{-\frac{1}{2}} = i[\hat{\alpha}, \widetilde{\tau}^{-\frac{1}{2}}], \qquad \text{und} \qquad \delta\widetilde{L}^{\pm} = i[\hat{\alpha}, \widetilde{L}^{\pm}]. \tag{5.137}$$

Eine kurze Rechnung zeigt, dass dies erfüllt ist, falls das Vielbein entsprechend

$$\begin{aligned}
\delta\hat{E} &= i\hat{\alpha}\hat{E} - i\hat{E}(\check{\tau}^{-\frac{1}{2}}\hat{\alpha}) \\
\delta\hat{E}^{\pm} &= i\hat{\alpha}\hat{E}^{\pm} - i\hat{E}^{\pm}\hat{\alpha} \\
\delta\hat{E}_3^{\pm} &= i\hat{\alpha}\hat{E}_3^{\pm} - i\hat{E}_3^{\pm}(\check{\tau}^{-\frac{1}{2}}\hat{\alpha}) - i\hat{E}^{\pm}(\check{L}^{\pm}\hat{\alpha})
\end{aligned} \tag{5.138}$$

transformiert, und falls für das Eichfeld gilt:

$$\begin{aligned}\delta\hat{A}^3 &= i(\check{\tau}^{-\frac{1}{2}}\hat{\alpha})\hat{A}^3 - i\hat{A}^3\hat{\alpha}\\ \delta\hat{A}^\pm &= i\hat{\alpha}\hat{A}^\pm - i\hat{A}^\pm\hat{\alpha} + i(\check{L}^\pm\hat{\alpha})\hat{A}^3.\end{aligned} \tag{5.139}$$

Es ist möglich, das Eichfeld $\hat{A}$ durch das Vielbein $\hat{E}$ auszudrücken, so dass die infinitesimale Variation (5.139) des Feldes $\hat{A}$ aus derjenigen des Vielbeins (5.138) folgt:

$$\begin{aligned}\hat{A}^3 &= \hat{E}^{-1}\\ \hat{A}^\pm &= -(\hat{E}^\pm)^{-1}\hat{E}_3^\pm\hat{E}^{-1}.\end{aligned} \tag{5.140}$$

Man kommt also mit dem Vielbein alleine aus.

Kovariante Koordinaten

Wir betrachten die Koordinaten X^A jetzt als Operatoren auf Feldern und vergessen ihre natürliche Rechtswirkung durch Multiplikation auf Felder. Vergleichen wir jetzt die Wirkung[8]

$$\begin{aligned}\check{X}^3(\hat{f}\hat{g}) &= (\check{\tau}^{-\frac{1}{2}}\hat{f})(\check{X}^3\hat{g})\\ \check{X}^\pm(\hat{f}\hat{g}) &= (-\lambda q^3\check{L}^\pm\hat{f})(\check{X}^3\hat{g}) + (\hat{f})(\check{X}^\pm\hat{g})\end{aligned} \tag{5.141}$$

von $\check{X}^\pm, \check{X}^3$ auf Produkte von Feldern mit derjenigen von $\check{L}^\pm$, $\check{\tau}^{-\frac{1}{2}}$ (5.135), sehen wir, dass der wesentliche Unterschied ein $-q^3\lambda$ ist, wenn man $\check{X}^3$ durch $\check{\tau}^{-\frac{1}{2}}$ ersetzt. Mit dieser Beobachtung erhalten wir sofort kovariante Koordinaten:

$$\begin{aligned}\widetilde{X}^3 &= \hat{E}(\check{X}^3 + \hat{A}^3)\\ \widetilde{X}^\pm &= \hat{E}^\pm(\check{X}^\pm - q^3\lambda\hat{A}^\pm) + \hat{E}_3^\pm(\check{X}^3 + \hat{A}^3).\end{aligned} \tag{5.142}$$

Feldstärke-Tensor

Zum Schluss berechnen wir noch eine der Vertauschungsrelationen zwischen den kovarianten Drehimpulsoperatoren, um Tensoren zu erhalten. Dies soll als Beispiel dafür dienen, wie die Identifizierung (5.140) zur Vereinfachung der Struktur führt (man vergleiche etwa mit (5.111)). Wir betrachten die $\widetilde{\tau}^{-\frac{1}{2}}\widetilde{L}^\pm$-Relation:

$$\widetilde{\tau}^{-\frac{1}{2}}\widetilde{L}^\pm = \hat{T}^\pm\,\widetilde{\tau}^{-\frac{1}{2}}\widetilde{L}^\pm + \hat{F}^\pm\,\widetilde{\tau}^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\tau}^{-\frac{1}{2}} + (1-\hat{T}^\pm)\widetilde{L}^\pm - 2\hat{F}^\pm\widetilde{\tau}^{-\frac{1}{2}} + \hat{F}^\pm. \tag{5.143}$$

Die beiden Tensoren $\hat{T}^\pm$ und $\hat{F}^\pm$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\hat{T}^\pm &= q^{\pm 2}\hat{E}(\check{\tau}^{-\frac{1}{2}}\hat{E}^\pm)\hat{E}^{-1}(\hat{E}^\pm)^{-1}\\ \hat{F}^\pm &= q^{\pm 2}\hat{E}(\check{\tau}^{-\frac{1}{2}}\hat{E}^\pm)\left[(\check{L}^\pm\hat{E}^{-1})\hat{E}^{-1} - \hat{E}^{-1}(\hat{E}^\pm)^{-1}\hat{E}_3^\pm\hat{E}^{-1}\right]\\ &\quad + \hat{E}(\check{\tau}^{-\frac{1}{2}}\hat{E}_3^\pm)(\check{\tau}^{-\frac{1}{2}}\hat{E}^{-1})\hat{E}^{-1}.\end{aligned} \tag{5.144}$$

$\hat{T}^\pm$ ist wieder invertierbar. Man erhält also im Wesentlichn zwei unabhängige Tensoren. Verwendete man die Relation (5.140) nicht, erhielte man voneinander unabhängige Tensoren als Koeffizienten der kovarianten Operatoren in den Vertauschungsrelationen.

[8]Hieraus folgt übrigens für den in der Transformation (5.12) des Eichfeldes auftretenden Kommutator unmittelbar $[X^3, \hat{f}] = (1 - \check{\tau}^{\frac{1}{2}})\check{X}^3\hat{f}$ und $[X^\pm, \hat{f}] = -q^3\lambda\check{X}^3\check{\tau}^{\frac{1}{2}}\check{L}^\pm\hat{f}$.

Anhang A

Unterschiedliche Versionen der $su_q(2)$

Wir machen einige Anmerkungen zu den verschiedenen Formen der q-deformierten $U(su(2))$, die in dieser Arbeit auftreten. In der mathematischen Literatur [42, 43, 51, 36] wird oft die folgende EFK-Form der $U_q(sl(2))$ benutzt, die Algebra wird erzeugt von E, F, K, K^{-1} mit den Relationen:

$$\begin{aligned} KE &= q^2 EK \\ KF &= q^{-2} FK \\ EF - FE &= \frac{K - K^{-1}}{\lambda}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Die Hopfalgebrastruktur ist gegeben durch die Komultiplikation

$$\begin{aligned} \Delta(E) &= 1 \otimes E + E \otimes K \\ \Delta(E) &= K^{-1} \otimes F + F \otimes 1 \\ \Delta(K^{\pm 1}) &= K^{\pm 1} \otimes K^{\pm 1}, \end{aligned} \tag{A.2}$$

die Koeins

$$\varepsilon(E) = \varepsilon(F) = 0, \qquad \varepsilon(K) = \varepsilon(K^{-1}) = 1 \tag{A.3}$$

und die Antipode

$$S(E) = -EK^{-1}, \qquad S(F) = -KF, \qquad S(K^{\pm 1}) = K^{\mp 1}. \tag{A.4}$$

Wir haben die $U_q(sl(2))$ in Kapitel 2 in der folgenden Form eingeführt: Generatoren T^+, T^-, T^3, mit den Relationen

$$\begin{aligned} q^{-1} T^+ T^- - q T^- T^+ &= T^3 \\ q^2 T^3 T^+ - q^{-2} T^+ T^3 &= (q + q^{-1}) T^+ \\ q^2 T^- T^3 - q^{-2} T^3 T^- &= (q + q^{-1}) T^-. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Diese hängt mit dem so genannten $3D$-Differenzialkalkül auf der q-deformierten Gruppe $SU_q(2)$ zusammen, vgl. [42, 83]. Eine zweite Form der T-Algebra ist durch Generatoren $T^+, T^3, \tau^{\frac{1}{2}}, \tau^{-\frac{1}{2}}$ und Relationen

$$\begin{aligned} q^{-1}T^+T^- - qT^-T^+ &= \frac{1-\tau}{\lambda} \\ \tau^{\frac{1}{2}}T^\pm &= q^{\mp 2}T^\pm\tau^{\frac{1}{2}} \\ \tau^{-\frac{1}{2}}T^\pm &= q^{\pm 2}T^\pm\tau^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{A.6}$$

definiert. Diese beiden Algebren hängen über $T^3 = \frac{1-\tau}{\lambda}$ zusammen. Die Beziehung zur EFK-Form wird hergestellt durch

$$T^+ = q^{-\frac{1}{2}}K^{-1}E, \qquad T^- = q^{\frac{3}{2}}F, \qquad \tau^{\frac{1}{2}} = K^{-1}. \tag{A.7}$$

Daraus erhält man aus der Komultiplikation (A.2), der Koeins (A.3) und der Antipode (A.4) die entsprechenden Abbildungen für die T-Algebren:

$$\begin{aligned} \Delta(T^3) &= T^3 \otimes 1 + \tau \otimes T^3 \\ \Delta(T^+) &= T^+ \otimes 1 + \tau^{\frac{1}{2}} \otimes T^+ \\ \Delta(T^-) &= T^- \otimes 1 + \tau^{\frac{1}{2}} \otimes T^- \\ \Delta(\tau^{\pm\frac{1}{2}}) &= \tau^{\pm\frac{1}{2}} \otimes \tau^{\pm\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\varepsilon(T^+) = \varepsilon(T^-) = 0, \qquad \varepsilon(\tau^{\pm\frac{1}{2}}) = 1 \tag{A.9}$$

$$S(T^\pm) = -\tau^{-\frac{1}{2}}T^\pm, \qquad S(\tau) = \tau^{-1} \tag{A.10}$$

Wir verwenden auch die so genannte L-Algebra [50, 48]

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{BA}{}^{C}L^AL^B = -q^2WL^C \\ &L^AW = WL^A. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Der Bezug zur T-Algebra wird hergestellt durch

$$\begin{aligned} L^+ &= \frac{1}{q^2\sqrt{1+q^2}}\tau^{-\frac{1}{2}}T^+ \\ L^- &= -\frac{1}{q^3\sqrt{1+q^2}}\tau^{-\frac{1}{2}}T^- \\ L^3 &= q^3\tau^{\frac{1}{2}}(L^+L^- - L^-L^+) \\ &= \frac{1}{q^2(1-q^2)}\left(\tau^{-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{\lambda^2}{1+q^2}\vec{T}^2\right). \end{aligned} \tag{A.12}$$

Hier hängt τ mit W und L^3 durch die Beziehung

$$W = q^3\lambda L^3 + \tau^{-\frac{1}{2}} \tag{A.13}$$

zusammen. Die Elemente L^+, L^- und $\tau^{-\frac{1}{2}}$ bilden eine Algebra:

$$\begin{aligned}
\tau^{-\frac{1}{2}}L^+ &= q^2L^+\tau^{-\frac{1}{2}} \\
\tau^{-\frac{1}{2}}L^- &= q^{-2}\tau^{-\frac{1}{2}} \\
qL^+L^- &- \frac{1}{q}L^-L^+ = \frac{\tau^{-1}-1}{q^4(1-q^4)}.
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Mittels (A.12) erhält man aus (A.8), (A.9) und (A.10) für die L-Algebra

$$\begin{aligned}
\Delta(L^+) &= L^+\otimes\tau^{-\frac{1}{2}} + 1\otimes L^+ \qquad \text{(A.15)} \\
\Delta(L^-) &= L^-\otimes\tau^{-\frac{1}{2}} + 1\otimes L^- \\
\Delta(L^3) &= L^3\otimes\tau^{-\frac{1}{2}} + \tau^{\frac{1}{2}}\otimes L^3 - q^3\lambda\Big(q\tau^{\frac{1}{2}}L^+\otimes L^- + q^{-1}\tau^{\frac{1}{2}}L^-\otimes L^+\Big)
\end{aligned}$$

$$\varepsilon(L^+) = \varepsilon(L^-) = \varepsilon(L^3) = 0 \tag{A.16}$$

$$S(L^+) = -L^+\tau^{\frac{1}{2}}, \qquad S(L^-) = -L^-\tau^{\frac{1}{2}}. \tag{A.17}$$

Die Vertauschungsrelationen zwischen den T^A und den L^A sind diejenigen, die man für eine Spin-1-Darstellung erwartet, also die gleichen wie bei den X^A (2.7).

Eine reelle Form der $U_q(sl(2))$ ist die $U_q(su(2))$. Diese wird durch die Konjugation

$$\overline{E} = FK, \qquad \overline{F} = K^{-1}E, \qquad \overline{K} = K \tag{A.18}$$

für die EFK-Form, bzw.

$$\overline{T^+} = \frac{1}{q^2}T^-, \qquad \overline{T^-} = q^2T^+, \qquad \overline{T^3} = T^3 \tag{A.19}$$

für die die erste Form der T-Algebra, definiert. Betrachtet man nun diese Konjugation genauer, erkennt man, dass die beiden Algebren (EFK, bzw T-Algebra) verschiedene Klassen von $*$-Darstellungen besitzen, da für die T-Algebra nur $\tau = 1 - \lambda T^3$ hermitesch sein muss, für die EFK-Algebra jedoch auch $\tau^{\pm\frac{1}{2}} = K^{\mp 1}$. Für die EFK-Algebra treten nur die endlichdimensionalen Darstellungen aus Abschnitt 2.2.1 auf.

Anhang B

q-Funktionen

In diesem Anhang definieren wir die im Kapitel 2 verwendeten q-Funktionen und geben einige Beziehungen für sie an, die wir ebenfalls benötigen. Für eine ausführliche Definition und Behandlung dieser Funktionen siehe [30, 44, 46].

Wir verwenden die folgende Notation für die so genannten symmetrischen q-Zahlen und q-Fakultäten:

$$[a] = \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}} \xrightarrow{q \to 1} a, \quad [a]! = \prod_{k=1}^{a} [k] \xrightarrow{q \to 1} a!. \tag{B.1}$$

Damit definert man in Analogie zum undeformierten Fall die q-Binomialkoeffizienten als:

$$\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] = \begin{cases} \frac{[n]!}{[k]![n-k]!} & \text{für } n \geq k, \\ 0 & \text{für } n < k \text{ or } n, k < 0, \end{cases} \tag{B.2}$$

woraus man im Grenzfall natürlich die gewöhnlichen Binomialkoeffizienten erhält: $\lim_{q \to 1} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \binom{n}{k}$. Die „unsymmetrischen“ Versionen dieser Objekte sind (q-Zahl)

$$\frac{1 - q^a}{1 - q} \xrightarrow{q \to 1} a \tag{B.3}$$

und (q-verschobene Fakultät, bzw. Pochammer-Symbol)

$$\begin{aligned} (a; q)_k &= \prod_{n=0}^{k-1} (1 - aq^n), \\ (a_1, a_2, \dots, a_i; q)_k &= \prod_{m=1}^{i} (a_m; q)_k. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Weiterhin definieren wir das Jackson-Integral für $q > 1$:

$$\int_0^a d_{q^{-1}} x \, f(x) = (1 - q^{-1}) \sum_{\nu=0}^{\infty} a q^{-\nu} f(a q^{-\nu}). \tag{B.5}$$

Das Jackson-Integral ist einer Riemannschen Summe vergleichbar. Falls die Funktion f stetig auf dem Intervall $[0,a]$ ist, gilt

$$\lim_{q\downarrow 1}\int_0^a d_{q^{-1}}x\, f(x) = \int_0^a dx\, f(x). \tag{B.6}$$

Wir verwenden jetzt die obigen Definitionen, um die q-hypergeometrischen Funktionen [30, 44] einzuführen, wobei wir diese mit der Basis q^{-1} definieren damit die Funktionen für $q>1$ wohldefiniert sind:

$$\begin{aligned} &{}_r\phi_s\left(\begin{matrix} a_1,\dots,a_r \\ b_1,\dots,b_s \end{matrix}\,\middle|\, q^{-1};x\right) = \\ &\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1,\dots,a_r;q^{-1})_k}{(b_1,\dots,b_s;q^{-1})_k}(-1)^{(1+s-r)k}q^{-\frac{1}{2}(1+s-r)k(k-1)}\frac{x^k}{(q^{-1};q^{-1})_k}. \end{aligned} \tag{B.7}$$

Diese Funktion spielt für die q-speziellen Funktionen eine ähnliche Rolle wie die Hypergeometrische Reihe für die Theorie der klassichen speziellen Funktionen.

B.1 q-Jacobi-Polynome

Wir benötigen die grossen q-Jacobi-Polynome [46, 44]

$$P_l(x;a,b,c;q^{-1}) = {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^l, abq^{-(l+1)}, x \\ aq^{-1}, cq^{-1} \end{matrix}\,\middle|\, q^{-1};q^{-1}\right), \tag{B.8}$$

und hiervon wiederum den Spezialfall:

$$\begin{aligned} &P_l^m(x) \equiv P_{l-m}(x;q^{-2m},q^{-2m},-q^{-2m};q^{-2}) = \\ &\sum_{k=0}^{l-m}(-1)^k\frac{q^{-k(m+1)}(x;q^{-2})_k}{(-q^{-2(m+1)};q^{-2})_k}\begin{bmatrix} l-m \\ k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l+m+k \\ k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m+k \\ k \end{bmatrix}^{-1}, \qquad m\geq 0 \end{aligned} \tag{B.9}$$

Aufgrund des Faktors $\left[\begin{smallmatrix} l-m \\ k \end{smallmatrix}\right]$ der für $k>l-m$ verschwindet, läuft die Summe über k in (B.9) nur bis $l-m$ und die $P_l^m(x)$ sind Polynome der Ordnung $l-m$ in x. Wegen desselben Faktors verschwinden die Polynome P_l^m falls nicht die Bedingung $m\leq l$ erfüllt ist:

$$P_l^m(x) = 0 \qquad \text{für} \qquad l<m. \tag{B.10}$$

Außerdem muss $m>0$ gelten, da die Polynome ansonsten wegen des Ausdrucks $(q^{-2(m-1)};q^{-2})_k$ im Nenner, der für negatives m verschwindet, nicht wohldefiniert sind.

$$\begin{aligned} &P_0^0(x) = 1, && P_1^0(x) = x, \\ &P_2^0(x) = \frac{1}{q[2]}([3]x^2-q^{-2}), && P_3^0(x) = \frac{x}{q^5[2]}([5]q^2x^2-[3]), \\ &P_1^1(x) = 1, && P_2^1(x) = x, \\ &P_3^1(x) = \frac{1}{q^5[4]}(q^4[5]x^2-1). \end{aligned} \tag{B.11}$$

Die wesentlichen Eigenschaften [46, 44] dieser Polynome, die wir verwenden werden sind eine Rekusionsrelation bezüglich l:

$$xq^m[2l+1]P_l^m(x) = q^l[l+m+1]P_{l+1}^m(x) + q^{-l-1}[l-m]P_{l-1}^m(x), \tag{B.12}$$

eine q-Differenzengleichung:

$$\begin{aligned}\left(q^{-1-2m}(q^{2l+1}+q^{-2l-1})x^2 - q^{-4(m+1)}(q^2+1)\right) P_l^m(x) = \\ q^{-2(2m+1)}(x^2-1)P_l^m(xq^{-2}) + (x^2-q^{-4(m+1)})P_l^m(xq^2).\end{aligned} \tag{B.13}$$

und eine Orthonormalitätsrelation:

$$\int_{-q^{-2(m+1)}}^{q^{-2(m+1)}} d_{q^{-2}}x \; w_l^m(x)w_{l'}^m(x)P_l^m(x)P_{l'}^m(x) = \delta_{l,l'}. \tag{B.14}$$

Wobei die Gewichtsfunktion w_l^m definiert ist durch

$$\begin{aligned} w_l^m(x) \;\; &\equiv \;\; q^{-\frac{1}{2}(l^2+l+2lm-3m^2+m+3)}\sqrt{\frac{\left(q^{-4(m+1)};q^{-4}\right)_\infty}{\left(q^{-4},q^{-4(m+1)-2};q^{-4}\right)_\infty\left(-q^{-2};q^{-2}\right)_\infty}} \\ &\times\sqrt{(x^2q^{4m};q^{-4})_m}\sqrt{\frac{(q^{-2};q^{-2})_{l-m}}{(q^{-2(2m+1)};q^{-2})_{l-m}}}\sqrt{\frac{[2m+1]}{2[2l+1]}}\;. \end{aligned} \tag{B.15}$$

Die großen q-Jacobi-Polynome sind genau diejenigen Polynome, die bezüglich des Maßes, das sich aus dem Jacksonintegrals und der Gewichtsfunktion $w_l^m(x)$ ergibt, orthonormiert sind [46].

Für Rechnungen sind die folgenden Eigenschaften der Gewichtsfunktion hilfreich:

$$\begin{aligned} w_l^m(xq^{-2}) &= w_l^m(x)\sqrt{\frac{(1-x^2)}{(1-x^2q^{4m})}} \\ w_{l-1}^m(x) &= w_l^m(x)q^l\sqrt{\frac{[l+m][2l+1]}{[l-m][2l-1]}}. \end{aligned} \tag{B.16}$$

Wir absorbieren die Gewichtsfunktion w_l^m in die Definition der Funktion

$$\widetilde{P}_l^m(x) \equiv w_l^m(x)P_l^m(x). \tag{B.17}$$

Diese sind, je nachdem ob $l-m$ gerade oder ungerade ist, gerade oder ungerade Funktionen:

$$\widetilde{P}_l^m(-x) = (-1)^{l-m}\widetilde{P}_l^m(x). \tag{B.18}$$

Falls $m=0$ ist sind die großen q-Jacobi-Polynome gerade die großen q-Legendre-Polynome, aus denen man für $q\to 1$ die gewöhnlichen Legendre-Polynome erhält. Aus den Polynomen P_l^m erhält man im Grenzfall die Jacobi-Polynome, die so normiert sind, dass $P_l^m(1)=1$ gilt.

Aus der Rekursionsrelation (B.12) und der Differenzengleichung (B.13) erhält man unter Verwendung von (B.16) die Beziehungen

$$xq^{m+1}\widetilde{P}_l^m(x) = \sqrt{\frac{[l-m+1][l+m+1]}{[2l+1][2l+3]}}\,\widetilde{P}_{l+1}^m(x) + \sqrt{\frac{[l+m][l-m]}{[2l+1][2l-1]}}\,\widetilde{P}_{l-1}^m(x) \tag{B.19}$$

und

$$\begin{aligned}\left((q^{2l+1}+q^{-2l-1})\frac{x^2}{q} - (q^2+1)q^{-2(m+2)}\right)\widetilde{P}_l^m(x) = \\ q^{-2(m+1)}\sqrt{(x^2-1)(x^2q^{4m}-1)}\,\widetilde{P}_l^m(xq^{-2}) \\ +\sqrt{(x^2-q^{-4(m+1)+1})(x^2-q^{-4})}\,\widetilde{P}_l^m(xq^2).\end{aligned} \tag{B.20}$$

Verwendet man noch die Defintion (B.5) des Jacksonintegrals in der Orthonormalitätsbesziehung (B.14) hat man

$$\sum_{\sigma=\pm 1}\sum_{n=-\infty}^{0} q^{2(n-m-1)}\widetilde{P}_l^m(\sigma q^{2(n-m-1)})\widetilde{P}_{l'}^m(\sigma q^{2(n-m-1)}) = (1-q^{-2})^{-1}\delta_{l,l'}. \tag{B.21}$$

Damit hat man einen Satz orthogonaler Funktionen; stellt sich noch die Frage nach der Vollständigkeit. Diese sieht man so [3]: Stetige Funktionen sind vollständig im L^2-Raum eines Maßes auf einem beschränkten Intervall [76, 66]. Nach dem Approximationssatz von Weierstrass sind auf einem beschränkten Intervall Polynome dicht bezüglich der Supremumsnorm im Raum der stetigen Funktionen. Insgesamt hat man also [76]: Ein System orthogonaler Polynome bezüglich eines Maßes mit Träger in einem beschränkten Intervall, ist im entsprechenden L^2-Raum vollständig. Das kann man auf die q-Jacobipolynome anwenden. Für uns bedeutet dies:

$$\sum_{l=0}^{\infty} q^{\nu+\nu'-2}\widetilde{P}_l^{|m|}(\sigma q^{2(\nu-1)})\widetilde{P}_l^{|m|}(\sigma' q^{2(\nu'-1)}) = (1-q^{-2})^{-1}\delta_{\nu,\nu'}\delta_{\sigma,\sigma'}. \tag{B.22}$$

Anhang C

Einige Algebrarelationen explizit

Ausgangspunkt aller Konstruktionen im Zusammenhang mit dem dreidimensionalen q-deformierten euklidischen Raum ist die $\hat{R}$-Matrix der $SO_q(3)$:

	++	−−	+3	3+	3−	−3	+−	3 3	−+
++	1	0	0	0	0	0	0	0	0
−−	0	1	0	0	0	0	0	0	0
+3	0	0	0	q^{-2}	0	0	0	0	0
3+	0	0	q^{-2}	$1-q^{-4}$	0	0	0	0	0
3−	0	0	0	0	0	q^{-2}	0	0	0
−3	0	0	0	0	q^{-2}	$1-q^{-4}$	0	0	0
+−	0	0	0	0	0	0	0	0	q^{-4}
3 3	0	0	0	0	0	0	0	q^{-2}	$\frac{(1-q^{-4})}{q}$
−+	0	0	0	0	0	0	q^{-4}	$\frac{(1-q^{-4})}{q}$	$\lambda\frac{(1-q^{-4})}{q}$

Diese findet man z.B. in [50]. Dort findet man auch weitergehende Referenzen und eine Herleitung der nun folgenden Vertauschungsrelationen.

Zusammenhängend mit der $SO_q(3)$ hat man die Tensoren

$$g_{33} = 1, \quad g_{+-} = -q, \quad g_{-+} = -\frac{1}{q} \tag{C.1}$$

und

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{333} = 1 - q^2, \quad \varepsilon_{3+-} = q, \quad \varepsilon_{3-+} = -q \\ &\varepsilon_{+3-} = -q^{-1}, \quad \varepsilon_{+-3} = q \\ &\varepsilon_{-3+} = q^3, \quad \varepsilon_{-+3} = -q, \end{aligned} \tag{C.2}$$

d.h. die Metrik und den ε-Tensor.

Die Vertauschungsrelationen zwischen den Impulsen und den Koordinaten sind

$$P^A X^B - \hat{R}^{-1AB}{}_{CD} X^C P^D = -\frac{i}{2}\Lambda^{-\frac{1}{2}}\big\{(1+q^{-6})g^{AB}W - (1-q^{-4})\epsilon^{ABC}L_C\big\}, \tag{C.3}$$

hier ist $W = q^3\lambda L^3 + \tau^{-\frac{1}{2}}$, siehe Anhang A. Eine komplette Liste der definierenden Relationen der q-Heisenbergalgebra, also der von Λ, X, P, L, W erzeugten Algebra, findet man wieder in [50]. Ausgeschrieben hat man

$$\begin{aligned}
&P^3X^3 - q^2X^3P^3 + q^5(1-q^{-4})X^+P^- \\
&\quad = -\frac{i}{2}\Lambda^{-\frac{1}{2}}\big\{(1+q^{-6})W - (1-q^{-4})(1-q^2)L^3\big\} \\
&P^3X^+ - q^2X^+P^3 = \frac{i}{2}\Lambda^{-\frac{1}{2}}(1-q^{-4})L^+ \\
&P^3X^- - q^2X^-P^3 - (1-q^4)X^3P^- = -\frac{i}{2}\Lambda^{-\frac{1}{2}}q^2(1-q^{-4})L^- \\
&P^+X^+ - X^+P^+ = 0 \\
&P^+X^- - q^4X^-P^+ - q^6(1-q^{-2})(1-q^{-4})X^+P^- + q^5(1-q^{-4})X^3P^3 \\
&\quad = \frac{i}{2}\Lambda^{-\frac{1}{2}}\big\{q(1+q^{-6})W - q(1-q^{-4})L^3\big\} \\
&P^+X^3 - q^2X^3P^+ - (1-q^4)X^+P^3 = -\frac{i}{2}\Lambda^{-\frac{1}{2}}q^2(1-q^{-4})L^+ \\
&P^-X^- - X^-P^- = 0 \\
&P^-X^+ - q^4X^+P^- = \frac{i}{2}\Lambda^{-\frac{1}{2}}\big\{\frac{1}{q}(1+q^{-6})W + q(1-q^{-4})L^3\big\} \\
&P^-X^3 - q^2X^3P^- = \frac{i}{2}\Lambda^{-\frac{1}{2}}(1-q^{-4})L^-
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Die Vertauschungsrelationen zwischen den Bahndrehimpulsoperatoren L und den Koordinaten X sind

$$\begin{aligned}
\tau^{-\frac{1}{2}}X^{\pm} &= q^{\pm 2}X^{\pm}\tau^{-\frac{1}{2}} \\[1ex]
L^+X^+ &= X^+L^+ \\
L^+X^3 &= X^3L^+ + q^{-2}X^+\tau^{-\frac{1}{2}} \\
L^+X^- &= X^-L^+ + q^{-3}X^3\tau^{-\frac{1}{2}} \\[1ex]
L^-X^+ &= X^+L^- - q^{-3}X^3\tau^{-\frac{1}{2}} \\
L^-X^3 &= X^3L^- - q^{-4}X^-\tau^{-\frac{1}{2}} \\
L^-X^- &= X^-L^-.
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Der Quantenraum $\mathbb{R}^3_q$ besitzt zwei $SO_q(3)$-kovariante Differenzialkalküle ∂ und $\overline{\partial}$. Für den ersten sind die Vertauschungsrelationen mit den X gegeben durch

$$\partial^A X^B = g^{AB} + \hat{R}^{-1AB}{}_{CD}X^C\partial^D. \tag{C.6}$$

Für die zweite Version der Ableitungen gilt

$$\overline{\partial}^A X^B = -\frac{1}{q^6}g^{AB} + \hat{R}^{-1AB}{}_{CD}X^C\overline{\partial}^D. \tag{C.7}$$

Explizit hat man:

$$
\begin{aligned}
\partial^+ X^+ &= X^+\partial^+ \\
\partial^+ X^3 &= q^2 X^3\partial^+ + (1-q^4)X^+\partial^3 \\
\partial^+ X^- &= -q + q^4 X^-\partial^+ + q^6(1-q^{-2})(1-q^{-4})X^+\partial^- - q^5(1-q^{-4})X^3\partial^3 \\
\partial^3 X^+ &= q^2 X^+\partial^3 \\
\partial^3 X^3 &= 1 + q^2 X^3\partial^3 - q^5(1-q^{-4})X^+\partial^- \\
\partial^3 X^- &= q^2 X^-\partial^3 + (1-q^4)X^3\partial^- \\
\partial^- X^+ &= -\frac{1}{q} + q^4 X^+\partial^- \\
\partial^- X^3 &= q^2 X^3\partial^- \\
\partial^- X^- &= X^-\partial^- \qquad \text{(C.8)}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\overline{\partial}^+ X^+ &= X^+\overline{\partial}^+ \\
\overline{\partial}^+ X^3 &= q^{-2} X^3\overline{\partial}^+ \\
\overline{\partial}^+ X^- &= \frac{1}{q^5} + q^{-4} X^-\overline{\partial}^+ \\
\overline{\partial}^3 X^+ &= q^{-2} X^+\overline{\partial}^3 + (1-q^{-4})X^3\overline{\partial}^+ \\
\overline{\partial}^3 X^3 &= -\frac{1}{q^6} + q^{-2} X^3\overline{\partial}^3 + \frac{1}{q}(1-q^{-4})X^-\overline{\partial}^+ \\
\overline{\partial}^3 X^- &= q^{-2} X^-\overline{\partial}^3 \\
\overline{\partial}^- X^+ &= \frac{1}{q^7} + q^{-4} X^+\overline{\partial}^- + \frac{1}{q}(1-q^{-4})X^3\overline{\partial}^3 + (1-q^{-2})(1-q^{-4})X^-\overline{\partial}^+ \\
\overline{\partial}^- X^3 &= q^{-2} X^3\overline{\partial}^- + (1-q^{-4})X^-\overline{\partial}^3 \\
\overline{\partial}^- X^- &= X^-\overline{\partial}^- \qquad \text{(C.9)}
\end{aligned}
$$

Die Vertauschungsrelationen (C.4) bilden zusammen mit den dazu konjugierten Relationen ein System von Gleichungen, welches nach den P aufgelöst werden kann. Um den Konjugierten Relationen zu bekommen verwendet man (2.4), (3.6) und (3.7). Als Lösung erhält man

$$
\begin{aligned}
2i\lambda(q^3+q^{-3})X\circ X P^3 &= A_{X\tau} - A_{XL} \\
2i\lambda(q^3+q^{-3})X\circ X X^3 P^- &= q^{-2}X^-\left(A_{X\tau} - A_{XL}\right) + q^{-1}A_{X\circ X}L^- \\
2i\lambda(q^3+q^{-3})X\circ X X^3 P^+ &= q^{2}X^+\left(A_{X\tau} - A_{XL}\right) - qA_{X\circ X}L^+, \qquad \text{(C.10)}
\end{aligned}
$$

wobei die folgende Notation verwendet wurde:

$$
\begin{aligned}
A_{XL} &:= (1-q^{-4})\left(q^{-1}\Lambda^{\frac{1}{2}} + q\Lambda^{-\frac{1}{2}}\right)\left(q^{-2}X^-L^+ - q^6X^+L^-\right) \\
&\quad -q^2(1-q^{-4})\left(q^{-4}\Lambda^{\frac{1}{2}} - q^4\Lambda^{-\frac{1}{2}}\right)X^3L^3 \\
A_{X\tau} &:= (1+q^{-6})\left(q^{-2}\Lambda^{\frac{1}{2}} - q^2\Lambda^{-\frac{1}{2}}\right)X^3\tau^{-\frac{1}{2}} \\
A_{X\circ X} &:= \lambda(q^3+q^{-3})X\circ X\left(q\Lambda^{\frac{1}{2}} + q^{-1}\Lambda^{-\frac{1}{2}}\right). \qquad \text{(C.11)}
\end{aligned}
$$

Anwenden der Bahndrehimpulsbedingung $X^3L^3 - qX^+L^- - q^{-1}X^-L^+ = 0$, die innerhalb der q-Heisenbergalgebra gilt [50], führt zu

$$\begin{aligned} 2iq^3\lambda X\circ XP^3 &= A_3 \\ 2iq^3\lambda X\circ XX^3P^- &= A_- \\ 2iq^3\lambda X\circ XX^3P^+ &= A_+. \end{aligned} \tag{C.12}$$

mit

$$\begin{aligned} A_3 &= (q^{-2}\Lambda^{\frac{1}{2}} - q^2\Lambda^{-\frac{1}{2}})X^3\tau^{-\frac{1}{2}} - q(q^4-1)(\Lambda^{-\frac{1}{2}}X^-L^+ - \Lambda^{\frac{1}{2}}X^+L^-) \\ A_- &= q^{-2}(q^{-4}\Lambda^{\frac{1}{2}} - q^4\Lambda^{-\frac{1}{2}})X^-X^3\tau^{-\frac{1}{2}} - q^3\lambda(q+q^{-1})\Lambda^{-\frac{1}{2}}X^-X^-L^+ \\ &\quad +q\lambda\Lambda^{\frac{1}{2}}X^3X^3L^- + q^5\lambda\Lambda^{-\frac{1}{2}}X\circ XL^- \\ A_+ &= q^2(q^{-4}\Lambda^{\frac{1}{2}} - q^4\Lambda^{-\frac{1}{2}})X^+X^3\tau^{-\frac{1}{2}} + q^3\lambda(q+q^{-1})\Lambda^{\frac{1}{2}}X^+X^+L^- \\ &\quad -q^5\lambda\Lambda^{-\frac{1}{2}}X^3X^3L^+ - q\lambda\Lambda^{\frac{1}{2}}X\circ XL^+. \end{aligned} \tag{C.13}$$

Diese Realisierung der P in der ΛXL-Algebra wurde auch in [58] auf etwas anderem Wege gefunden. Verwenden wir jetzt noch (2.25) und (2.33) erhalten wir wieder die in Kapitel 3 konstruierte Realisierung (3.10) der P durch die t und K.

Anhang D

Explizite Formeln für die Realisierung der q-Heisenbergalgebra auf Feldern

D.1 Wirkung

In diesem Anhang listen wir die expliziten Formeln für die Wirkung der q-deformierten Heisenbergalgebra auf. Die Definitionen dazu findet man in Abschnitt 3.3. Zuerst verwenden wir als Basis für die Felder

$$\Psi^{n_+,n_3,n_-} := (X^+)^{n_+}(X^3)^{n_3}(X^-)^{n_-}. \tag{D.1}$$

Damit finden wir für die einzelnen Generatoren:
Skalierungsoperator:

$$\check{\Lambda}^{\pm\frac{1}{2}}\Psi^{n_+,n_3,n_-} = q^{\pm 2(n_+ + n_3 + n_-)}\Psi^{n_+,n_3,n_-} \tag{D.2}$$

Koordinaten:

$$\begin{aligned}
\check{X}^+\Psi^{n_+,n_3,n_-} &= \Psi^{n_++1,n_3,n_-} \\
\check{X}^3\Psi^{n_+,n_3,n_-} &= q^{2n_+}\Psi^{n_+,n_3+1,n_-} \\
\check{X}^-\Psi^{n_+,n_3,n_-} &= q^{2n_3}\Psi^{n_+,n_3,n_-+1} + \lambda q^{2(n_+-1)}[n_+]_{q^2}\Psi^{n_+-1,n_3+2,n_-} \\
X\check{\circ}X\Psi^{n_+,n_3,n_-} &= q^{-2}\Psi^{n_+,n_3+2,n_-} - (q+q^{-1})q^{2n_3}\Psi^{n_++1,n_3,n_-+1}
\end{aligned} \tag{D.3}$$

Drehimpulsoperatoren:

$$\begin{aligned}
\check{T}^3\Psi^{n_+,n_3,n_-} &= \frac{1}{q-q^{-1}}(1-q^{4n_- - 4n_+})\Psi^{n_+,n_3,n_-} \\
\check{T}^+\Psi^{n_+,n_3,n_-} &= q^{2n_- - 2n_+}[n_-]_{q^2}q^{-3}\sqrt{1+q^2}\Psi^{n_+,n_3+1,n_--1} \\
&\quad + q^{n_3-2n_+}[n_3]_q q^{-3}\sqrt{1+q^2}\Psi^{n_++1,n_3-1,n_-} \\
\check{T}^-\Psi^{n_+,n_3,n_-} &= q^{n_3-2n_+}[n_3]_q\sqrt{1+q^2}\Psi^{n_+,n_3-1,n_-+1} \\
&\quad + [n_+]_{q^2}\sqrt{1+q^2}\Psi^{n_+-1,n_3+1,n_-} \\
\check{\tau}^{-\frac{1}{2}}\Psi^{n_+,n_3,n_-} &= q^{2n_+-2n_-}\Psi^{n_+,n_3,n_-}
\end{aligned} \tag{D.4}$$

Bahndrehimpuls:

$$\begin{aligned}
\check{L}^+\Psi^{n_+,n_3,n_-} &= [n_-]_{q^2}q^{-3}\Psi^{n_+,n_3+1,n_--1} \\
&\quad +q^{n_3-2n_-}[n_3]_q q^{-3}\Psi^{n_++1,n_3-1,n_-} \\
\check{L}^-\Psi^{n_+,n_3,n_-} &= -q^{n_3-2n_-}[n_3]_q q^{-5}\Psi^{n_+,n_3-1,n_-+1} \\
&\quad -q^{2n_+-2n_-}[n_+]_{q^2}q^{-5}\Psi^{n_+-1,n_3+1,n_-}
\end{aligned} \tag{D.5}$$

Ableitungen, erste Version (C.6):

$$\begin{aligned}
\check{\partial}^-\Psi^{n_+,n_3,n_-} &= -q^{2n_+-3}[n_+]_{q^2}\Psi^{n_+-1,n_3,n_-} \\
\check{\partial}^3\Psi^{n_+,n_3,n_-} &= q^{2n_++n_3-1}[n_3]_q\Psi^{n_+,n_3-1,n_-} \\
\check{\partial}^+\Psi^{n_+,n_3,n_-} &= -q^{2n_3+2n_--1}[n_-]_{q^2}\Psi^{n_+,n_3,n_--1} \\
&\quad -\lambda q^{2n_3-2}[n_3]_q[n_3-1]_q\Psi^{n_++1,n_3-2,n_-}
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Ableitungen, zweite Version (C.7):

$$\begin{aligned}
\check{\bar{\partial}}^+\Psi^{n_+,n_3,n_-} &= q^{-2n_3-2n_--3}[n_-]_{q^2}\Psi^{n_+,n_3,n_--1} \\
\check{\bar{\partial}}^3\Psi^{n_+,n_3,n_-} &= -q^{-2n_+-n_3-4n_--5}[n_3]_q\Psi^{n_+,n_3-1,n_-} \\
&\quad +(1-q^{-4})[n_+]_{q^2}[n_-]_{q^2}q^{-2n_3-2n_--3}\Psi^{n_+-1,n_3+1,n_--1} \\
\check{\bar{\partial}}^-\Psi^{n_+,n_3,n_-} &= q^{-2n_+}[n_+]_{q^2}\Big\{q^{-4n_--5}\big(-q^2-q^{-2}+q^{-2n_3}(1+q^{-2})\big) \\
&\qquad +q^{-3}\Big\}\Psi^{n_+-1,n_3,n_-} \\
&\quad -\lambda q^{-4n_+-4n_--8}[n_3]_q[n_3-1]_q\Psi^{n_+,n_3-2,n_-+1} \\
&\quad +\lambda^2(q+q^{-1})q^{-2n_3-2n_--7}[n_+]_{q^2}[n_+-1]_{q^2}[n_-]_{q^2}\Psi^{n_+-2,n_3+2,n_--1}
\end{aligned} \tag{D.7}$$

Für die Impulsoperatoren P^A findet man entweder unter Verwendung von

$$P^A = -\frac{i}{2}(\partial^A - \bar{\partial}^A) \tag{D.8}$$

oder auch direkt aus der PX-Algebra (C.3):

$$\begin{aligned}
\check{P}^+\psi^{n_+,n_3,n_-} &= \frac{i}{2}(q^{2n_3+2n_--1}+q^{-2n_3-2n_--3})[n_-]_{q^2}\psi^{n_+,n_3,n_--1} \\
&\quad +\frac{i}{2}\lambda q^{2n_3-2}[n_3]_q[n_3-1]_q\psi^{n_++1,n_3-2,n_-} \\
\check{P}^3\psi^{n_+,n_3,n_-} &= -\frac{i}{2}q^{-2n_--3}(q^{2n_++2n_-+n_3+2}+q^{-2n_+-2n_--n_3-2})[n_3]_q\psi^{n_+,n_3-1,n_-} \\
&\quad +\frac{i}{2}\lambda(q+q^{-1})q^{-2n_3-2n_--5}[n_+]_{q^2}[n_-]_{q^2}\psi^{n_+-1,n_3+1,n_--1} \\
\check{P}^-\psi^{n_+,n_3,n_-} &= \frac{i}{2}[n_+]_{q^2}q^{-3}\Big\{q^{2n_+}+q^{-2n_+} \\
&\qquad +q^{-2n_+-4n_--2}\big(q^{-2n_3-1}(q+q^{-1})-q^2-q^{-2}\big)\Big\}\psi^{n_+-1,n_3,n_-} \\
&\quad -\frac{i}{2}\lambda q^{-4n_+-4n_--8}[n_3]_q[n_3-1]_q\psi^{n_+,n_3-2,n_-+1} \\
&\quad +\frac{i}{2}\lambda^2(q+q^{-1})q^{-2n_3-2n_--7}[n_+]_{q^2}[n_+-1]_{q^2}[n_-]_{q^2}\psi^{n_+-2,n_3+2,n_--1}
\end{aligned} \tag{D.9}$$

Zweite Möglichkeit für die Beschreibung der Felder:

$$\phi_N^{n_+,n_3} := (X\circ X)^N (X^+)^{n_+} (X^3)^{n_3} \tag{D.10}$$

Skalierungoperator:

$$\check{\Lambda}^{\pm\frac{1}{2}}\phi_N^{n_+,n_3} = q^{\pm 2(2N+n_++n_3)}\phi_N^{n_+,n_3} \tag{D.11}$$

Koordinaten:

$$\begin{aligned}
\check{X}^+\phi_N^{n_+,n_3} &= \phi_N^{n_++1,n_3}\\
\check{X}^3\phi_N^{n_+,n_3} &= q^{2n_+}\phi_N^{n_+,n_3+1}\\
\check{X}^-\phi_N^{n_+,n_3} &= \frac{1}{q+q^{-1}}\left(q^{4n_+-2}\phi_N^{n_+-1,n_3+2} - \phi_{N+1}^{n_+-1,n_3}\right)\\
X\check{\circ}X\phi_N^{n_+,n_3} &= \phi_{N+1}^{n_+,n_3}
\end{aligned} \tag{D.12}$$

Drehimpulsoperatoren:

$$\begin{aligned}
\check{T}^3\phi_N^{n_+,n_3} &= \frac{1}{\lambda}(1-q^{-4n_+})\phi_N^{n_+,n_3}\\
\check{T}^+\phi_N^{n_+,n_3} &= q^{n_3-2n_+-3}[n_3]_q\sqrt{1+q^2}\phi_N^{n_++1,n_3-1}\\
\check{T}^-\phi_N^{n_+,n_3} &= \frac{q}{\sqrt{1+q^2}}q^{-n_+-n_3}[n_++n_3]_q\phi_N^{n_+-1,n_3+1}\\
&\quad -\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}q^{-2n_+-n_3+3}[n_3]_q\phi_{N+1}^{n_+-1,n_3-1}\\
\check{\tau}^{-\frac{1}{2}}\phi_N^{n_+,n_3} &= q^{2n_+}\phi_N^{n_+,n_3}
\end{aligned} \tag{D.13}$$

Bahndrehimpuls:

$$\begin{aligned}
\check{L}^+\phi_N^{n_+,n_3} &= q^{n_3-3}[n_3]_q\phi_N^{n_++1,n_3-1} \qquad (D.14)\\
\check{L}^-\phi_N^{n_+,n_3} &= \frac{q^{-5}}{q^2-q^{-2}}(q^{-2n_3}-q^{4n_+})\phi_N^{n_+-1,n_3+1} + [n_3]_q\frac{q^{-n_3-3}}{q+q^{-1}}\phi_{N+1}^{n_+-1,n_3-1}
\end{aligned}$$

Die Wirkung der Impulsoperatoren P^A gewinnt man jetzt am einfachsten, indem man die Beziehungen

$$\begin{aligned}
&P^C X\circ X = q^4 X\circ X P^C - \frac{i}{2}\Lambda^{-\frac{1}{2}}(1+q^{-2})(q^2+q^{-2})\{X^C W + q\lambda\varepsilon^{CTS}X_S L_T\}\\
&P^C(X\circ X)^N(X^+)^{n_+}(X^3)^{n_3} = q^{4N}(X\circ X)^N P^C(X^+)^{n_+}(X^3)^{n_3} \qquad (D.15)\\
&\qquad -\frac{i}{2}q^{-1}[4N]_q(X\circ X)^{N-1}\Lambda^{-\frac{1}{2}}\{X^C W + q\lambda\varepsilon^{CTS}X_S L_T\}(X^+)^{n_+}(X^3)^{n_3},
\end{aligned}$$

die direkt aus den PX-Relationen (C.3) folgen, und die bereits erhaltenen Ergebnisse verwendet:

$$
\begin{aligned}
\check{P}^3\phi_N^{n_+,n_3} &= -\frac{i}{2}q^{-3}(q^{2n_++n_3+2+4N}+q^{-2n_+-n_3-2-4N})[n_3]_q\phi_N^{n_+,n_3-1} \\
&\quad -\frac{i}{2}q^{-3}[4N]_q q^{2n_+}\phi_{N-1}^{n_+,n_3+1} \\
\check{P}^+\phi_N^{n_+,n_3} &= \frac{i}{2}q^{4N+2n_3-2}\lambda[n_3]_q[n_3-1]_q\phi_N^{n_++1,n_3-2} \\
&\quad -\frac{i}{2}[4N]_q q^{-3}\phi_{N-1}^{n_++1,n_3} \\
\check{P}^-\phi_N^{n_+,n_3} &= \frac{i}{2}\frac{1}{q+q^{-1}}\Big\{q^{-2n_3-4}[4N+4n_++2n_3+1]_q \\
&\qquad -q^{-4N-n_3-5}(q[n_3+1]_q+q^{-2}[n_3]_q)\Big\}\phi_N^{n_+-1,n_3} \\
&\quad +\frac{i}{2}\frac{\lambda}{q+q^{-1}}q^{-4N-4n_+-2n_3-4}[n_3]_q[n_3-1]_q\phi_{N+1}^{n_+-1,n_3-2} \\
&\quad -\frac{i}{2}\frac{[4N]_q}{q+q^{-1}}q^{4n_+-5}\phi_{N-1}^{n_+-1,n_3+2}
\end{aligned}
\tag{D.16}
$$

D.2 Leibnizregeln

Für die Ableitungen, und auch für die Koordinaten lassen sich aus den obigen Rechnungen, siehe dazu Abschnitt 3.3.3, Leibnizregeln ableiten.

Ableitungen erste Version (C.6):

$$
\begin{aligned}
\check{\partial}^-(fg) &= (\check{\partial}^-f)g+(\check{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\check{\tau}^{-\frac{1}{2}}f)(\check{\partial}^-g) \\
\check{\partial}^3(fg) &= (\check{\partial}^3f)g+(\check{\Lambda}^{\frac{1}{2}}f)(\check{\partial}^3g) \\
&\quad +q(1-q^4)(\check{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\check{L}^+f)(\check{\partial}^-g) \\
\check{\partial}^+(fg) &= (\check{\partial}^+f)g+(\check{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\check{\tau}^{\frac{1}{2}}f)(\check{\partial}^+g) \\
&\quad +(1-q^4)(\check{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\check{L}^+\check{\tau}^{\frac{1}{2}}f)(\check{\partial}^3g) \\
&\quad -q^2\lambda(1-q^4)(\check{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\check{L}^+\check{L}^+\check{\tau}^{\frac{1}{2}}f)(\check{\partial}^-g)
\end{aligned}
\tag{D.17}
$$

Ableitungen zweite Version (C.7):

$$
\begin{aligned}
\check{\bar{\partial}}^+(fg) &= (\check{\bar{\partial}}^+f)g+(\check{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\check{\tau}^{-\frac{1}{2}}f)(\check{\bar{\partial}}^+g) \\
\check{\bar{\partial}}^3(fg) &= (\check{\bar{\partial}}^3f)g+(\check{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}f)(\check{\bar{\partial}}^3g) \\
&\quad +q(1-q^4)(\check{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\check{L}^-f)(\check{\bar{\partial}}^+g) \\
\check{\bar{\partial}}^-(fg) &= (\check{\bar{\partial}}^-f)g+(\check{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\check{\tau}^{\frac{1}{2}}f)(\check{\bar{\partial}}^-g) \\
&\quad +q^2(1-q^4)(\check{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\check{L}^-\check{\tau}^{\frac{1}{2}}f)(\check{\bar{\partial}}^3g) \\
&\quad -q^6\lambda(1-q^4)(\check{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\check{L}^-\check{L}^-\check{\tau}^{\frac{1}{2}}f)(\check{\bar{\partial}}^+g)
\end{aligned}
\tag{D.18}
$$

Koordinaten:

$$
\check{X}^3(fg) = (\check{\tau}^{-\frac{1}{2}}f)(\check{X}^3g) \tag{D.19}
$$

$$
\check{X}^\pm(fg) = (-\lambda q^3\check{L}^\pm f)(\check{X}^3g)+(f)(\check{X}^\pm g) \tag{D.20}
$$

Für die Drehimpulsoperatoren erhält man die Wirkung auf Produkte natürlich aus dem Koprodukt, siehe Anhang A; z.B.

$$\begin{aligned} \check{\tau}^{-\frac{1}{2}}(fg) &= (\check{\tau}^{-\frac{1}{2}}f)(\check{\tau}^{-\frac{1}{2}}g) \\ \check{L}^{\pm}(fg) &= (\check{L}^{\pm}f)(\check{\tau}^{-\frac{1}{2}}g) + f(\check{L}^{\pm}g). \end{aligned} \tag{D.21}$$

Literaturverzeichnis

[1] E. Abe, *Hopf Algebras*, Benjamin, 1969.

[2] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures*, Annals Phys. **111** (1978) 61.

[3] Ch. Berg, T.H. Koornwinder, *private Mitteilung*.

[4] G.M. Bergman, *The diamond lemma for ring theory*, Adv. Math. **29** (1978) 178.

[5] L. Bonora, M. Schnabl, M.M. Sheikh-Jabbari, A. Tomasiello, *Noncommutative SO(n) and Sp(n) gauge theories*, hep-th/0006091.

[6] U. Carow-Watamura, M. Schlieker, M. Scholl, S. Watamura, *Tensor Representation Of The Quantum Group Sl-Q(2,C) And Quantum Minkowski Space*, Z. Phys. **C48** (1990) 159.

[7] B.L. Cerchiai, *Hilbert space representaions of a q-deformed Minkowski algebra*, Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität München, Dezember 1997

[8] B.L. Cerchiai, G. Fiore, J. Madore, *Geometrical Tools for Quantum Euclidean Spaces*, math.qa/0002007.

[9] B. L. Cerchiai, R. Hinterding, J. Madore, J. Wess, *A Calculus Based on a q-deformed Heisenberg Algebra*, Eur. Phys. J. **C8** (1999) 547, math.qa/9809160.

[10] B.L. Cerchiai, J. Madore, S. Schraml, J. Wess, *Structure of the Three-dimensional Quantum Euclidean Space*, Eur. Phys. J. **C16** (2000) 169, math.qa/0004011.

[11] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1994.

[12] A. Connes, M. Douglas, A. Schwarz, *Noncommutative Geometry and Matrix Theory: Compactification on Tori*, JHEP **02** (1998) 003, hep-th/9711162.

[13] L. Cornalba, *D-brane physics and noncommutative Yang-Mills theory*, hep-th/9909081.

[14] T.L. Curtright, G.I. Ghandour, C.K. Zachos, *Quantum Algebra Deforming Maps, Clebsch-Gordan Coefficients, Coproducts, U and R Matrices*, J. Math. Phys. **32** (1991) 676.

[15] T.L. Curtright, C.K. Zachos, *Deforming Maps For Quantum Algebras*, Phys. Lett. **B243** (1990) 237.

[16] A. Dimakis, J. Madore, *Differential calculi and linear connections*, J. Math. Phys. **37** (1996) 4647.

[17] J. Dixmier, *Enveloping Algebras*, North-Holland Math. Library 14, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1977.

[18] S. Doplicher, K. Fredenhagen, J.E. Roberts, *The Quantum structure of space-time at the Planck scale and quantum fields*, Commun. Math. Phys. **172** (1995) 187.

[19] B.D. Dörfel, Non-commutative Euclidean structures in compact spaces, hep-th/9907136.

[20] M.R. Douglas, C. Hull, *D-brans and the noncommutative torus*, JHEP **9802** (1998) 008, hep-th/99711165.

[21] V.G. Drinfel'd, *Quantum Groups*, Proc. ICM, Berkeley 1987.

[22] M. Dubois-Violette, R. Kerner, J. Madore, *Gauge bosons in a noncommutative geometry*, Phys. Lett. **B217** (1989) 485.

[23] L.D. Faddeev, N.Y. Reshetikhin, L.A. Takhtajan, *Quantization Of Lie Groups And Lie Algebras*, Lengingrad Math. J. **1** (1990) 193.

[24] B.V. Fedosov, *A simple geometrical construction of deformation quantization*, J. Diff. Geom. **40** (1994) 213.

[25] M. Fichtmüller, A. Lorek, J. Wess, *q-Deformed phase space and its lattice structure*. Z. Phys. C **71**, (1996) 533.

[26] G. Fiore, *The Euclidean Hopf Algebra $U_q(E^N)$ and its fundamental Hilbert Space Representations*, J. Math. Phys. **36** (1995) 4363.

[27] G. Fiore, *q-Euclidean Covariant Quantum Mechanics on $\mathbf{R}_q^N$: Isotropic Harmonic Oscillator and Free Particle*, Dissertation, Sissa-ISAS, Trieste, 1994

[28] G. Fiore, J. Madore, *The Geometry of the Quantum Euclidean Space*, math.QA/9904027.

[29] G. Fiore, H. Steinacker, J. Wess, *Unbraiding the braided tensor product*, math.QA/0007174.

[30] G. Gasper, M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **35**, Cambridge University Press, Cambridge, 1990

[31] I.M. Gelfand, M.A. Naimark, *On the Embedding of normed Rings into the Ring of Operators in Hilbert Space*, Mat. Sb. **12** (1943) 193.

[32] S. Gutt, *Variations on deformation quantization*, math.DG/0003107.

[33] R. Hinterding, *Eindimensionale q-deformierte Quantenmechanik und Streuprobleme*, Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität München, Oktober 2000.

[34] J. Hoppe, *Diffeomorphism Groups, Quantization And $SU(\infty)$*, Int. J. Mod. Phys. **A4** (1989) 5235.

[35] N. Ishibashi, *A relation between commutative and noncommutative descriptions of D-branes*, hep-th/9909176.

[36] M. Jimbo, *A q-Difference Analog of $U(g)$ and the Yang-Baxter Equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985) 63.

[37] B. Jurčo, S. Schraml, P. Schupp, J. Wess, *Enveloping algebra valued gauge transformations for non-Abelian gauge groups on non-commutative spaces*, Eur. Phys. J. **C17** (2000) 521, hep-th/0006246.

[38] B. Jurčo, P. Schupp, *Noncommutative Yang-Mills from equivalence of star products*, Eur. Phys. J. **C14** (2000) 367, hep-th/0001032.

[39] B. Jurčo, P. Schupp, J. Wess, *Noncommutative gauge theory for Poisson manifolds*, Nucl. Phys. **B584** (2000) 784, hep-th/0005005.

[40] B. Jurčo, P. Schupp, J. Wess, *Nonabelian noncommutative gauge fields*, in Vorbereitung; *Nonabelian noncommutative gauge fields and Seiberg-Witten map*, in Vorbereitung.

[41] B. Jurčo, P. Schupp, *private Mitteilung*.

[42] A.U. Klimyk, K. Schmüdgen, *Quantum Groups and Their Representations*, Springer Verlag, Berlin, 1998.

[43] Ch. Kassel, *Quantum Groups*, Springer Verlag, New York, 1995.

[44] R. Koekoek, R.F. Swarttouw, *The Askey-Scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*, Report-no OP-SF 20 Feb 1996, math.CA/9602214.

[45] M. Kontsevitch, *Deformation quantization of Poisson manifolds, I*, q-alg/9709040.

[46] T.H. Koornwinder, *Compact Quantum Groups and q-special functions*, in 'Representations of Lie Groups and Quantum Groups', V. Baldoni, M. A. Picardello (Eds.), Pitman Research Notes in Math. Series **311**: 46–128, Longman scientific & Technical, 1994

[47] T.H. Koornwinder, R.F. Swarttouw, *On the q-analogous of the Fourier and Hankel transforms*, Trans. Am. Math. Soc. **333** (1992) 445.

[48] A. Lorek, *q-deformierte Quantenmechanik und induzierte Wechselwirkungen*, Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität München, Mai 1995

[49] A. Lorek, W. B. Schmidke, J. Wess, *$SU_q(2)$ covariant R matrices for reducible representations*, Lett. Math. Phys. **31** (1994) 279.

[50] A. Lorek, W. Weich, J. Wess, *Non-commutative Euclidean and Minkowski Structures*, Z.Phys. **C 76**: 375–386, (1997).

[51] G. Lusztig, *Introduction to Quantum Groups*, Birkhaeuser, Boston, 1993.

[52] J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications*, Cambridge University Press, 1999.

[53] J. Madore, S. Schraml, P. Schupp, J. Wess, *Gauge theory on noncommutative spaces*, Eur. Phys. J. **C16** (2000) 161, hep-th/0001203.

[54] J. Madore, S. Schraml, P. Schupp, J. Wess, *External fields as intrinsic geometry*, hep-th/0009230.

[55] S. Majid, *Foundations of Quantum Group Theory*, Cambridge University Press, 1995.

[56] Yu.I. Manin, *Quantum Groups and non-commutative Geometry*, Montreal University CRM-1561, 1988.

[57] Yu.I. Manin, *Multiparametric Quantum Deformation of the General Linear Supergroup*, Comm. Math. Phys. **123** (1989) 163.

[58] L. Möller, *Dynamik im Quantenraum der $SO_q(3)$*, Diplomarbeit, Universität München, (2000)

[59] J.E. Moyal, *Quantum mechanics as a statistical theory*, Proc. Cambridge Phil. Soc **45** (1949) 99.

[60] G.J. Murphy, *C^*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, 1990.

[61] A. Nijenhuis, Indag. Math. **17** (1955) 390.

[62] E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttinger, Math-phys. Klasse, (1918) 235

[63] O. Ogievetsky, B. Zumino, *Reality in the differential calculus on q Euclidean spaces*, Lett. Math. Phys. **25** (1992) 121, hep-th/9205003.

[64] M. Pillin, On the deformability of Heisenberg algebras, Commun. Math. Phys. **180** (1996) 23, q-alg/9508014.

[65] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern Mathematical Physics I, II*, Academic Press, New York and London 1972.

[66] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, Series in Higher Mathematics, 3rd. edition, 1987.

[67] K. Schmüdgen, *On the Quantum Quarter Plane and the Real Quantum Plane*, math.OA/0005225.

[68] V. Schomerus, *D-branes and deformation quantization*, JHEP **9906** (1999) 030, hep-th/9903205.

[69] S. Schraml, *Dreidimensionale q-deformierte Quantenmechanik*, Diplomarbeit, Universität München, (1998)

[70] S. Schraml, J. Wess, *Realization of the Three-dimensional Quantum Euclidean Space by Differential Operators*, Eur. Phys. J. **C17** (2000) 353, math.qa/0006179.

[71] N. Seiberg, E. Witten, *String theory and noncommutative geometry*, JHEP **9909** (1999) 032, hep-th/9908142.

[72] J.-P. Serre, *Lie Algebras and Lie Groups*, Lecture Notes in Math. 1500, Springer Verlag, 1992.

[73] H. Snyder, *Quantized space-time*, Phys. Rev. **71** (1947) 38.

[74] D. Sternheimer, *Deformation Quantization: Twenty Years After*, math/9809056.

[75] M.E. Sweedler, *Hopf Algebras*, W. A. Benjamin, New York, 1969.

[76] G. Szegö, *Orthogonal polynomials*, American Mathematical Society, Colloquium Publications **23**, Providence, Rhode Island, 1975.

[77] W. Weich, *The Hilbert space representations for $SO_q(3)$ symmetric quantum mechanics*, hep-th/9404029.

[78] J. Wess, *q-deformed Heisenberg Algebras*, in H. Gausterer, H. Grosse and L. Pittner, eds., Proceedings of the 38. Internationale Universitätswochen für Kern- und Teilchenphysik, no. 543 in Lect. Notes in Phys., Springer-Verlag, 2000, Schladming, January 1999, math-ph/9910013.

[79] J. Wess, B. Zumino, *Covariant differential calculus on the quatum hyperplane*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **18B** (1991) 302.

[80] H. Weyl, *Quantenmechanik und Gruppentheorie*, Z. Physik 1 (1927); *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Hirzel Verlag, Leipzig (1928).

[81] E.P. Wigner, Quantum corrections for thermodynamic equilibrium, Phys. Rev. **40** (1932) 749.

[82] S.L. Woronowicz, *Compact Matrix Pseudogroups*, Commun. Math. Phys. **111** (1987) 613.

[83] S.L. Woronowicz, *Differential Calculus on Compact Matrix Pseudoproups (Quantum Groups)*, Commun. Math. Phys. **122** (1989) 125.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben.

Insbesondere danke ich Herrn Prof. Dr. Julius Wess für die interessante Themenstellung auf einem aktuellen Forschungsgebiet der mathematischen Physik und für zahlreiche Hilfestellungen bei konkreten Problemen.

Weiter möchte ich mich bei allen Mitarbeitern, Doktoranden, Diplomanden und Gästen des Instituts für die gute Arbeitsatmosphäre bedanken. Besonders danke ich Bianca Letizia Cerchiai, Branislav Jurčo, John Madore und Peter Schupp für die fruchtbare Zusammenarbeit und Christian Blohmann, Ralf Hinterding, Olaf Richter, Emanuel Scheidegger und Harold Steinacker für zahllose Diskussionen und Gespräche. Bei Monika Kürzinger bedanke ich mich für ihre Hilfe in organisatorischen Dingen.

Herrn Prof. Dr. Hans-Jürgen Schneider danke ich für die Übernahme des Korreferats.

Der Ludwig-Maximilans-Universität, dem Max-Planck-Institut für Physik und der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die finanzielle Unterstützung meiner Promotion.

Ein besonderer Dank gilt auch meinen Eltern, denen ich diese Dissertation widme.

Lebenslauf

20.7.1972	Geburt in Abensberg
1978–1984	Volksschule Erbendorf
1984–1988	Realschule Kemnath
1988–1990	Fachoberschule Weiden
Juni 1990	Fachabitur
Juli 1990 –Juni 1991	Wehrdienst, Burglengenfeld
1991–1992	Studium des Fachs Physikalische Technik an der Fachhochschule München
Sept. 1992	Vordiplom an der Fachhochschule München
1992–1998	Studium der Physik an der Ludwig-Maximilians-Universität München
Mai 1995	Vordiplom an der Universität München
Juli 1998	Diplom zum Thema „Dreidimensionale q-deformierte Quantenmechanik“
Sept. 1998 –Dez. 2000	Promotion in Physik an der Ludwig-Maximilians-Universität München und am Max-Planck-Institut für Physik München