

Detektion von nichtlinearem Determinismus in synthetischen und realen Zeitserien

Dissertation
der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von

Rainer Sachs
aus Eggenfelden

München, 10. März 1999

1. Gutachter: Prof. Dr. G. E. Morfill
2. Gutachter: Prof. Dr. H. Lesch

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Juli 1999

Zusammenfassung

Die Theorie des deterministischen Chaos beeinflusst die Konzepte zur Behandlung von Zeitserien in vielen Bereichen der Wissenschaft. Deterministische chaotische Systeme zeichnen sich durch eine Vielfalt von Lösungen aus, die irregulär, aber nicht stochastisch sind. Bei der Analyse von Eigenschaften realer Systeme, die mit linearen stochastischen Methoden nicht adäquat beschreibbar sind, wie z.B. deterministisches aperiodisches Verhalten, bieten sich Verfahren aus der Theorie chaotischer Systeme an. Dabei sind die mathematischen Voraussetzungen zur Berechnung von Größen, die chaotisches Verhalten hinreichend charakterisieren, in der Realität meistens nicht gegeben, z.B. wegen der endlichen Auflösung bzw. Meßdauer oder wegen überlagertem Rauschen. Im Gegensatz dazu ist es jedoch möglich, den nichtlinearen Determinismus, die notwendige Eigenschaft chaotischer Systeme, auch dann noch zu detektieren und somit auf die Natur des zugrundeliegenden Systems zu schließen, wenn dieser nur schwach ausgeprägt ist. Der Nachweis dieser Eigenschaft in realen und synthetischen Zeitserien ist der Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Bei den hier untersuchten Systemen handelt es sich um die Intensitätsschwankungen eines FIR-Lasers, das Lorenz-System, den zeitlichen Verlauf der Sonnenfleckenzahl und die Dichte und Geschwindigkeit des Sonnenwindes.

Im theoretischen Teil dieser Arbeit werden zwei Analyseverfahren neu entwickelt. Die Methode der korrespondierenden Nachbarn basiert auf Konzepten der Informationstheorie und stellt eine Erweiterung der Kolmogorov-Sinai Entropie zweiter Ordnung dar. Damit kann die Vorhersagbarkeit eines Systems für beliebige Intervalle der Abtastrate beschrieben werden. Darüberhinaus erlaubt diese Methode die Abschätzung der Einbettungsdimension.

Das zweite neu eingeführte Verfahren charakterisiert die lokale Parallelität von Trajektorienabschnitten im Zustandsraum und läßt sich in Analogie zum Temperaturbegriff in der kinetischen Gastheorie interpretieren. Dieses Maß hat seinen Ursprung in der Diffusionskonstante der Fokker-Planck Gleichung und ist eine Erweiterung bekannter Verfahren in der nichtlinearen Zeitserienanalyse.

Der Nachweis von nichtlinearem Verhalten wird mit den neu entwickelten Verfahren und der als Referenz benutzten Methode der nichtlinearen Vorhersagefehler über Hypothesentests mit Surrogaten durchgeführt. Surrogate sind Realisationen stochastischer Prozesse, die die linearen Eigenschaften der zu untersuchenden Zeitserie, nicht aber deren möglichen nichtlinearen Anteil erhalten.

Die neuen Verfahren werden an den Referenzdatensätzen des Lasers und des Lorenz-Systems getestet. Die Leistungsfähigkeit der Algorithmen im Grenzfall schwacher Nichtlinearitäten wird an diesen Zeitserien durch künstliches Verrauschen demonstriert. Bei der Konstruktion der Surrogate für die Laserzeitserie über etablierte Verfahren wird erstmals ein Artefakt entdeckt: die Surrogate können entgegen der eigentlichen Intention doch nichtlineare Anteile enthalten. Dies führt bei Nichtbeachtung zu falschen Interpretationen der Ergebnisse aus einer Zeitserienanalyse mit Surrogaten.

Das Monatsmittel der Sonnenfleckenzahl zeigt signifikantes nichtlineares Verhalten. Mit speziellen Surrogaten wird gezeigt, daß auch über den 11-Jahres-Zyklus hinaus nichtlineare Korrelationen bestehen.

Erstmals konnten die in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren und Analysekonzepte auf Messungen des Sonnenwindes angewendet werden, die bisher nicht in dieser Qualität zur Verfügung standen. Der zeitlich hochaufgelöste und kontinuierliche Verlauf der Dichte und der Geschwindigkeit wurde mit dem Proton Monitor an Bord des *Solar and Helioscopic Observatory* gemessen. Im zeitlichen Dichteverlauf werden signifikante nichtlineare Eigenschaften detektiert. Dieses Ergebnis ist wesentlich für die Verbesserung von Vorhersagemodellen für den Sonnenwind, die bisher lediglich auf linearen Methoden basieren. Dagegen werden die Ergebnisse aus den Sonnenwindgeschwindigkeiten aufgrund spezieller Eigenschaften dieser Zeitserie als artifiziell in Frage gestellt. Nichtlineares Verhalten kann für diesen Datensatz nicht gesichert nachgewiesen werden. Die starken linearen Korrelationen führen insbesondere bei Berechnung der Korrelationssumme zur Abschätzung der Einbettungsdimension zu Ergebnissen, die nicht als Attraktordimension interpretiert werden können.

In vielen wissenschaftlichen Gebieten werden Systeme auf der Basis numerischer Analysen von Zeitserien oftmals vorschnell als deterministisch chaotisch charakterisiert. Eine Kernaussage dieser Arbeit ist, daß selbst die Überprüfung des für Chaos notwendigen nichtlinearen Determinismus sehr sorgfältig durchgeführt werden muß, um Fehlinterpretationen vorzubeugen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Informationstheorie	5
2.1	Information	5
2.1.1	Shannon-Information	5
2.1.2	Rényi-Informationen	9
2.1.3	Kodierungstheorie	10
2.2	Dimension	11
2.3	Additivität	12
2.4	H -Theorem	13
2.5	Mischende Systeme	14
2.5.1	Definition	14
2.5.2	Subadditivität	15
2.6	Berechnung	16
2.6.1	Partition	16
2.6.2	Invarianten	17
2.6.3	Überdeckung	20
2.6.4	Caveats	21
3	Einbettung dynamischer Systeme	25
3.1	Attraktor	25
3.2	Einbettungstheoreme	27

3.3	Dimension	29
3.4	Verzögerungszeit	30
4	Detektion von Determinismus	33
4.1	Fehler bei nichtlinearer Vorhersage	34
4.2	Korrespondierende Nachbarn	35
4.2.1	Resultat bei Gleichverteilung	37
4.2.2	Korrelationsentropie	41
4.2.3	Lokale KS-Entropie	43
4.3	Temperatur-Analogon	45
5	Surrogate	47
5.1	Motivation	47
5.2	Hypothesen Tests	49
5.2.1	Nullhypothesen	49
5.2.2	Testparameter	50
5.3	Statistischer Hintergrund	51
5.4	Realisierungen	52
5.4.1	Typische Realisierung	52
5.4.2	Eingeschränkte Realisierung	52
5.5	Methoden und Nullhypothesen	53
5.5.1	Gaußsches Rauschen	53
5.5.2	Permutation	53
5.5.3	Fourier-Methode	54
5.5.4	Amplitudentreue Fourier-Methode	55
5.5.5	Iterationsmethode	55
5.6	Fehlerquellen	56
6	Anwendungen	59
6.1	FIR-Laser	60

6.1.1	Nachweis nichtlinearer Eigenschaften	61
6.1.2	Artefakte bei Surrogaten	68
6.1.3	Einbettungsdimension	73
6.2	Lorenz-System	74
6.2.1	Beschreibung	74
6.2.2	Nachweis nichtlinearer Eigenschaften	74
6.3	Sonnenwind	80
6.3.1	Einführung	80
6.3.2	Der Proton Monitor	83
6.3.3	Beschreibung der Daten	85
6.3.4	Nachweis nichtlinearer Eigenschaften	87
6.4	Sonnenfleckenrelativzahl	96
6.4.1	Bisherige Analysen	96
6.4.2	Nachweis nichtlinearer Eigenschaften	99
6.4.3	Ergebnis	103
7	Zusammenfassung	107
A	Produktionstechnik: Innendrehen	113
B	Fokker-Planck Gleichung	117
B.1	Definitionen	117
B.2	Master-Gleichung	118
B.3	Herleitung	119
B.4	Interpretation	121
B.5	Beispiele	121
B.6	Dynamische Systeme	122
C	Zahl der Surrogate	125
C.1	Problem der Rechenzeit	125
C.2	Hypothesentests	126

Kapitel 1

Einleitung

„Die Welt ist nichtlinear.“ [11] Diese Aussage steht am Anfang eines Buches über die nichtlineare Analyse von Zeitserien. Das Zitat beschreibt die Situation, in der man sich häufig befindet, wenn man die in der Natur vorkommenden Systeme und Phänomene in ihrer Gesetzmäßigkeit beschreibt.

Auf der einen Seite werden die gut bekannten und in weiten Bereichen sehr erfolgreichen linearen Methoden (siehe z. B. [9]) als Vereinfachung der Realität nicht den ganzen Reichtum an Beobachtungen erfassen können. Nichtlineare Modelle auf der anderen Seite weisen Lösungen auf, die mit linearen Methoden nicht adäquat beschreibbar sind, wie z. B. aperiodisches Verhalten. Speziell für die interessante Klasse der chaotischen Systeme ist das Vorhandensein von Nichtlinearitäten aber eine notwendige Bedingung. Diese Modelle sind jedoch nicht immer analytisch beschreibbar.

Mit der Verfügbarkeit immer leistungsfähigerer Rechner steigen die Möglichkeiten, nichtlineare Modelle mit numerischen Verfahren zu beschreiben, wenn analytische Methoden nicht anwendbar sind. Die Entwicklung der Theorie zur Beschreibung nichtlinearer Systeme verlief in weiten Bereichen parallel mit der Steigerung der Geschwindigkeit von Rechnern. Als frühes Beispiel gilt die von E. N. Lorenz [66] durch numerische Experimente an einem Modell zur Beschreibung von Wetterphänomenen entdeckte Sensibilität in den Anfangsbedingungen, die für chaotische Systeme typisch ist.

Die numerische Beschreibung sogenannter komplexer Systeme¹ führt in vielen verschiedenen wissenschaftlichen Bereichen zu beachtlichen Erfolgen. Als

¹Es sei an dieser Stelle erwähnt, daß derzeit noch keine zufriedenstellende mathematische Definition des Begriffes *komplex* existiert. Im allgemeinen meint man damit Systeme, die nicht in Teilsysteme zerlegt werden können, ohne daß dabei charakteristische Eigenschaften verloren werden.

Beispiele für medizinische Anwendungen lassen sich eine Vielzahl von EKG-Analysen [27, 47, 46, 73, 95, 96] und Untersuchungen am menschlichen Gehirn [63, 84, 128] anführen. Darüberhinaus können biologische Phänomene wie beispielsweise die Evolution [102] mit Methoden der Komplexitätstheorie untersucht werden. Evolutionstheoretische Ansätze werden in umgekehrter Richtung in die Entwicklung von numerischen Optimierungsalgorithmen übernommen [5, 70, 79, 109].

Darüberhinaus gibt es nichtlineare Modelle zur Beschreibung des Verkehrsflusses [36, 55], von Finanzmärkten [10, 60, 61, 62, 81, 107], von soziologischen Phänomenen [4, 76] und von technischen Anwendungen [28, 71, 127].

Ein besonderes Gewicht bei der Untersuchung komplexer Systeme liegt auf der Extraktion von charakterisierenden Parametern aus gemessenen Datensätzen. Diese Messungen können z. B. Bilder oder Zeitserien sein, wobei ich mich in dieser Arbeit mit den letztgenannten befassen werde.

Es existiert eine Vielzahl von numerischen Verfahren zur nichtlinearen Zeitserienanalyse, siehe z. B. [48]. Während die meisten dieser Verfahren für Zeitserien, die aus synthetischen Modellen erhalten wurden, zuverlässige und interpretierbare Ergebnisse liefern, führen Analysen von Messungen realer Systeme leicht zu falschen Schlußfolgerungen: „Real data happens.“ [116].

Ein Hauptpunkt dieser Arbeit ist deswegen auch nicht die Berechnung von systembeschreibenden Größen, den *Invarianten*, aus den Zeitserien, sondern die Überprüfung der grundlegenden und notwendigen Eigenschaft chaotischer Systeme, die Detektion von nichtlinearem Determinismus. Die zu untersuchenden Zeitserien sind dabei sowohl künstlicher als auch realer Natur.

Dazu werden in Kapitel 2 erst die mathematischen Grundlagen der Informationstheorie vorgestellt. Ausgehend von den Arbeiten von Shannon und Weaver [105], die im allgemeinen als die Grundlage dieses Zweiges der Wissenschaft angesehen werden, wird der mathematische Formalismus erläutert. Dabei wird speziell auf die zugrundeliegenden Annahmen und Anwendungsgebiete der Theorie eingegangen. Die Verbindung zu dynamischen Systemen und deren Charakterisierung durch Größen aus der Informationstheorie sind ein weiterer wesentlicher Bestandteil dieses Abschnitts. Es werden Probleme bei der praktischen Berechnung der mathematischen Maße und deren Lösungsmöglichkeiten aufgezeigt.

Dynamische Systeme werden in Kapitel 3 formal eingeführt. Dabei wird unter anderem der Begriff des Attraktors, der in der Theorie dynamischer Systeme eine wesentliche Rolle spielt, erläutert. Die Analyse dynamischer Systeme beruht in dieser Arbeit auf der Konstruktion eines mehrdimensionalen

Zustandsraumes auf der Grundlage einer skalaren Zeitserie. Dieser künstliche Zustandsraum und der durch die kanonischen Variablen definierte echte Phasenraum sind in bestimmten Aspekten zueinander äquivalent. So besitzen beispielsweise die in Kapitel 3 vorgestellten Invarianten des Systems in beiden Räumen den gleichen Wert. Zuerst wird die mathematische Grundlage für diese Art der Rekonstruktion erklärt und das Konzept der verzögerten Koordinaten vorgestellt. Anschließend werden Methoden zur Bestimmung der Einbettungsparameter Dimension und Verzögerungszeit aufgezeigt.

Im nächsten Kapitel 4 werden die in dieser Arbeit verwendeten Verfahren zur Detektion von nichtlinearem Determinismus vorgestellt. Die Grundidee dieser Verfahren ist, die lokalen Eigenschaften des Systems im künstlichen Zustandsraum zu verwenden. Insbesondere die Eigenschaft, daß sich ähnliche Zustände zumindest für kurze Zeiten in ähnlicher Weise entwickeln, wird bei der Suche nach nichtlinearem Determinismus und Vorhersagen von Zeitserien ausgenutzt. Die Quantifizierung der Fehler bei nichtlinearer Vorhersage ist ein in der Literatur häufig verwendetes Verfahren (siehe z. B. [13, 108]), das in dieser Arbeit als Referenzmethode benutzt wird. Anschließend werden zwei neue Verfahren eingeführt: die Methode der korrespondierenden Nachbarn beschreibt die Vorhersagbarkeit, ohne wirklich Vorhersagen der Zeitserie zu machen. Es handelt sich dabei um eine Erweiterung der in Kapitel 2 vorgestellten Korrelationsentropie. Das Maß des Temperatur-Analogons leitet sich aus der Parallelität von benachbarten Trajektorien ab und hat seinen Ursprung in der Theorie stochastischer Systeme.

Wesentlich für den Nachweis von Nichtlinearität in Zeitserien ist die Verwendung von Surrogaten, die Kapitel 5 erklärt werden. Surrogat ist die Bezeichnung für Ersatzdaten, die auf der Grundlage vorhandener Zeitserien erzeugt werden und bestimmte Eigenschaften mit diesen gemein haben. Die Surrogate werden für statistische Hypothesentests benützt, um die Vereinbarkeit der gemessenen Zeitserie mit bestimmten Modellen zu zeigen oder zu widerlegen. Nach der Vorstellung der spezifischen Fragestellungen, die sich mit Surrogaten beantworten lassen, wird der statistische Hintergrund erläutert. Ein besonderer Schwerpunkt ist dabei der Formalismus des *Bootstrapping*, auf dem die Analyse mit Surrogaten basiert. Die verschiedenen Verfahren, mit denen Surrogate erzeugt werden können, werden ausführlich diskutiert. Die jeweils zugrundeliegenden Nullhypothesen über die Zeitserie werden dabei verdeutlicht und mögliche Fehlerquellen aufgezeigt.

Kapitel 6 enthält die Anwendung der in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellten Verfahren zum Nachweis von nichtlinearem Determinismus in Zeitserien. In dieser Arbeit werden sowohl Zeitserien aus mathematischen Modellen

wie aus realen Experimenten analysiert.

Der erste Datensatz stammt aus einer Sammlung von Zeitserien, die anlässlich eines Wettbewerbs über Zeitserienvorhersage im Jahre 1994 am Santa Fe Institut zusammengestellt wurde, und seither oft als Referenzzeitserie verwendet wurde. Es handelt sich dabei um gemessene Intensitätsschwankungen eines Infrarot-Lasers, dessen Nichtlinearität mit der Methode der korrespondierenden Nachbarn gezeigt wird. Die Zeitserie wird künstlich verrauscht, um die Leistungsfähigkeit der Nachweisalgorithmen im Grenzbereich schwacher Nichtlinearitäten zu testen. Im Rahmen dieser Analysen wird ein Artefakt bei der Erzeugung von Surrogaten mit bestimmten Verfahren entdeckt, das sich gravierend auf die numerische Bestimmung der Leistungsfähigkeit von Detektionsalgorithmen bei stark verrauschten Datensätzen auswirkt.

Bei der Analyse des Lorenz-Systems steht nicht die Berechnung der Systeminvarianten, sondern die Validierung der in Abschnitt 4 eingeführten Methoden an verrauschten nichtlinearen Zeitserien im Vordergrund.

Der beiden letzten Abschnitte des Kapitels 6 sind der Analyse gemessener Zeitserien aus dem Sonnensystem gewidmet. Eines der Experimente, das sich auf dem Satelliten SOHO befindet, ist der *Proton Monitor*, mit dem Messungen am Protonenanteil des Sonnenwindes durchgeführt werden. Neben der Teilchendichte werden die Geschwindigkeit und die Temperatur des Sonnenwindes bestimmt. In dieser Arbeit werden nichtlineare Verfahren auf den zeitlichen Verlauf der Dichte und der mittleren Geschwindigkeit angewendet. Dabei wird signifikantes nichtlineares Verhalten mit mehreren Verfahren in beiden Datensätzen nachgewiesen. Die Relevanz dieser Ergebnisse wird ausführlich diskutiert.

Die zeitliche Variation der Sonnenflecken-Aktivität ist ein bekannter Datensatz, der in der nichtlinearen Zeitserienanalyse häufig untersucht wird. In diesem letzten Abschnitt werden nichtlineare Eigenschaften an der Zeitserie der monatlichen Mittelwerte nachgewiesen. Neben den bekannten Surrogaten aus Abschnitt 5 wird eine zusätzliche Möglichkeit zur Erzeugung von Ersatzdaten eingeführt, die eine spezielle Eigenschaft des Originaldatensatzes beibehält.

In Kapitel 7 werden die Ergebnisse zusammengefaßt und ein Ausblick auf mögliche zukünftige Untersuchungen gegeben.

Kapitel 2

Informationstheorie

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Informationstheorie vorgestellt. Ausgehend von den Arbeiten von Shannon und Weaver [105], die im allgemeinen als die Grundlage dieses Zweiges der Wissenschaft angesehen werden, wird der mathematische Formalismus erläutert. Dabei wird speziell auf die zugrundeliegenden Annahmen und Anwendungsgebiete der Theorie eingegangen. Die Verbindung zu dynamischen Systemen und deren Charakterisierung durch Größen aus der Informationstheorie sind ein weiterer wesentlicher Bestandteil dieses Abschnitts. Die Probleme bei der Berechnung der mathematischen Maße in der Realität und deren Lösungsmöglichkeiten werden aufgezeigt.

2.1 Information

2.1.1 Shannon-Information

Ein System A bestehe aus N paarweise disjunkten Zuständen $\{x_i\}_{i=0}^{N-1}$, die mit den Wahrscheinlichkeiten $\{p_i\}_{i=0}^{N-1}$ auftreten. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist normiert: $\sum_{i=0}^{N-1} p_i = 1$. Die Shannon-Information für dieses System ist definiert als¹

$$I(A) = - \sum_i p_i \log p_i \quad (2.1)$$

Von allen möglichen Informationsmaßen (siehe Abschnitt 2.1.2) hat sie eine herausragende Rolle. Es ist das einzige Maß, das die folgenden Forderungen

¹In dieser Arbeit wird der Logarithmus zur Basis 2 verwendet, und man erhält somit *bit* als Einheit der Information.

an ein „Maß für Unsicherheit“ erfüllt [8, 56, 87, 105, 123], die durch den Satz der Khinchin-Axiome gegeben sind.

Axiom 2.1 Für ein System A mit Wahrscheinlichkeitsverteilung $\{p_i\}_{i=0}^{N-1}$ existiere ein Maß

$$I(A) = I_N(p_0, \dots, p_{N-1}) \quad (2.2)$$

Es gibt eine Zuordnung zwischen der Menge an Unsicherheit über einen Zustand x_i oder der benötigten Information zur eindeutigen Charakterisierung eines Einzelzustands einerseits und einem konkreten Zahlenwert andererseits, der nur von den Wahrscheinlichkeiten p_i abhängt. Die Unsicherheit besteht dabei bei einer erneuten, zukünftigen Messung am System A über das Meßergebnis, wenn die Verteilung der p_i bekannt ist. Die nach durchgeführter Messung erhaltene Information versteht man als die Menge an Unsicherheit, die durch die Messung beseitigt wurde.

Axiom 2.2 Die Funktion $I(A)$ sei stetig in den einzelnen p_i .

Axiom 2.3 Für Gleichverteilung nehme die Funktion $I(A)$ das Maximum an.

$$h(N) := I_N\left(\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N}\right) > I(A'), \quad (2.3)$$

wobei die Zustände von A' nicht gleichverteilt sind. Die Funktion $h(N)$ sei monoton zunehmend in N .

Die Unsicherheit über einen einzelnen Zustand ist am größten, wenn alle Zustände gleich wahrscheinlich sind. Je mehr Zustände es gibt, desto höher ist diese Unsicherheit.

Axiom 2.4 Die Funktion $I(A)$ ändere ihren Wert nicht, wenn ein zusätzlicher Zustand berücksichtigt wird, der mit Wahrscheinlichkeit $p_N = 0$ angenommen wird.

$$I_N(p_0, \dots, p_{N-1}) = I_{N+1}(p_0, \dots, p_{N-1}, 0) \quad (2.4)$$

Die Berücksichtigung des unmöglichen Ereignisses (oder eine beliebige Anzahl davon) ändert den Wert von $I(A)$ nicht.

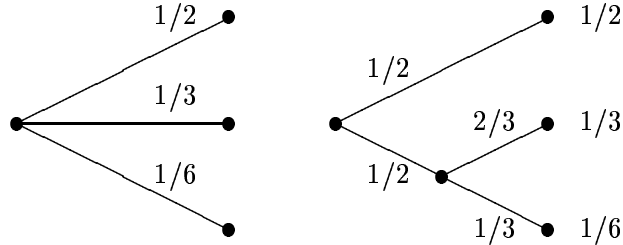


Abbildung 2.1: Illustration zu Axiom 2.5 (nach [105])

Axiom 2.5 *Bildet man aus zwei Einzelsystemen A mit $\{p_i\}$, $i = 0, \dots, N-1$ und B mit $\{p_j\}$, $j = 0, \dots, M-1$ ein Gesamtsystem $A \otimes B$ mit $\{p_{ij}\} = \{p_i p_{j|i}\}$, so gelte*

$$I(A \otimes B) = I(A) + \sum_i p_i I(B|i) \quad (2.5)$$

wobei $I(B|i)$ die bedingte Unsicherheit über einen Zustand in System B ist, wenn ein bestimmter Zustand i in A realisiert wurde.

Diese Forderung spiegelt den Sachverhalt wider, daß der Wert von I unabhängig vom Weg der Berechnung sein soll. In Abbildung 2.1 ist dies schematisch dargestellt. Die Bestimmung eines Zustands kann hier auf zwei Arten erfolgen. Die linke Seite illustriert die direkte Bestimmung, auf der rechten Seite ist die Bestimmung in zwei Schritte aufgeteilt. Gleichung (2.5) besagt nun, daß in diesem Fall

$$I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) = I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}I\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

gelten muß.

Für unabhängige Systeme folgt aus dem letzten Axiom die Additivität (siehe auch Abschnitt 2.3).

Die Herleitung der Shannonschen Formel (2.1) aus diesen Axiomen geht wie folgt:

Kombiniert man Axiom 2.3 mit Axiom 2.5, so erhält man

$$h(MN) = h(M) + h(N) \quad (2.6)$$

Diese Gleichung wird gelöst durch

$$h(k) = C \log k \quad (2.7)$$

Die Konstante C zeigt die Freiheit in der Wahl der Basis des Logarithmus und somit in der Wahl der Einheit, mit der Information gemessen wird. In dieser Arbeit wird *bit* verwendet. Der Beweis, daß die Lösung (2.7) eindeutig ist, findet sich beispielsweise in [105].

Gleichung (2.7) gilt ausdrücklich nur für Zustände gleicher Wahrscheinlichkeit [80]. Sie wurde erstmals von Hartley abgeleitet, um die Menge an Information zu beschreiben, die man braucht, um ein einzelnes Element aus einer Menge von k verschiedenen Elementen zu charakterisieren [87].

Um die Funktion $I(A)$ für Zustände mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, geht man folgendermaßen vor. Das Gesamtsystem aus N gleichwahrscheinlichen und verschiedenen Elementarzuständen wird in k disjunkte Untermengen aufgeteilt, die jeweils n_i Elementarzustände beinhalten. Den Untermengen werden die Wahrscheinlichkeiten

$$p_i = n_i / \sum_i n_i \quad (2.8)$$

zugewiesen. Ferner gilt die Normierungsbedingung

$$\sum_{i=0}^{k-1} n_i = N \quad (2.9)$$

Die Unsicherheit über einen Elementarzustand ist dann nach Gleichung (2.5) gleich der Summe aus der Unsicherheit über die entsprechende Untermenge und der mittleren Unsicherheit des Zustands innerhalb einer Untermenge [43].

$$\begin{aligned} h\left(\sum_i n_i\right) &= I_k(p_0, \dots, p_{k-1}) + \sum_i p_i h(n_i) \\ \log\left(\sum_i n_i\right) &= I_k(p_0, \dots, p_{k-1}) + \sum_i p_i \log n_i \\ \sum_i p_i \log\left(\sum_i n_i\right) &= I_k(p_0, \dots, p_{k-1}) + \sum_i p_i \log n_i \\ - \sum_i p_i (\log n_i - \log\left(\sum_i n_i\right)) &= I_k(p_0, \dots, p_{k-1}) \\ - \sum_i p_i \log p_i &= I_k(p_0, \dots, p_{k-1}) \end{aligned}$$

Die Herleitung zeigt streng genommen jedoch nur, daß die Form (2.1) eine notwendige Bedingung für Konsistenz der Aussagen ist [43], die ausgehend

von (2.1) gemacht werden. Allerdings äußerte Jaynes [42] die Vermutung, daß jede andere Form eines Maßes für Information schließlich zu Widersprüchen führen würde. Diese Vermutung wurde in [106] im Zusammenhang mit der Maximum Entropie Methode bewiesen.

2.1.2 Rényi-Informationen

Die verallgemeinerten oder Rényi-Informationen [87] sind definiert als

$$I^{(q)}(A) = \frac{1}{1-q} \log \sum_i p_i^q \quad q \in \mathbb{R}, q \neq 1 \quad (2.10)$$

Der Exponent q gibt die Gewichtung der einzelnen Summanden an. Da für $q < 0$ im Fall eines beliebigen $p_i \rightarrow 0$ die Rényi-Information divergiert, werden nur diejenigen $I^{(q)}$ mit positivem q als *echte* Informationsmaße betrachtet [87]. Je größer der Wert von q ist, desto stärker werden die wahrscheinlicheren Zustände gewichtet.

Im Grenzfall $q \rightarrow 1$ erhält man durch Anwendung der de l'Hospital-Regel die **Shannon-Information** (siehe auch 2.1.1)

$$I^{(1)}(A) = - \sum_i p_i \log p_i \quad (2.11)$$

Die **Hartley-Information** erhält man aus Gleichung (2.10) für den Fall $q = 0$ [64]. Die Hartley-Information ist der Logarithmus der Anzahl der besetzten Zustände von A :

$$I^{(0)}(A) = \log \#\{x_i | p_i \neq 0\} \quad (2.12)$$

Hierbei gilt $p_i^0 = 1$ für $p_i \neq 0$ und $p_i^0 := 0$ für $p_i = 0$. Die Häufigkeit der Besetzung der einzelnen Zustände bleibt dabei unberücksichtigt.

Allgemein gilt für Rényi-Informationen

$$0 \leq I^{(q)}(A) \leq \log N \quad q \geq 0 \quad (2.13)$$

und die Monotonieeigenschaft

$$I^{(q_1)}(A) \geq I^{(q_2)}(A) \quad \text{für } q_1 < q_2 \quad (2.14)$$

Die obere Schranke in (2.13) wird erreicht, wenn alle dem System zugänglichen Zustände gleich wahrscheinlich sind, also $p_i = 1/N, \forall i$. Die Informationen sind minimal, falls nur ein einziger Zustand möglich ist, $p_i = 1, p_{j \neq i} = 0$.

Die Information² ist ein statistisches Maß. Es ist somit sinnvoll, von der Information eines Ensembles von Zuständen zu sprechen. Informationsmaße erlauben Aussagen der Art: „Im Mittel erhält man bei der Messung eines Zustands des Systems die Information I.“

2.1.3 Kodierungstheorie

Obwohl die Rényi-Informationen das Axiom 2.5 nur für statistisch unabhängige Systeme erfüllen, d.h. $p_{ij} = p_i p_j$ (siehe auch Abschnitt 2.3), stellen sie — wie auch die Shannon-Information — sinnvolle Informationsmaße dar.

Sie können in der Kodierungstheorie auf folgende Weise als untere Schranke für den Kodierungsaufwand interpretiert werden.

Sei A eine Menge von N möglichen Zuständen $\{x_i\}_{i=0}^{N-1}$, die mit den Wahrscheinlichkeiten $\{p_i\}_{i=0}^{N-1}$ auftreten. Ferner sei D die Anzahl der Symbole, mit denen die x_i dargestellt werden sollen. Das (eindeutige) Kodierungsschema weise den x_i jeweils eine Symbolsequenz der Länge n_i zu. Für die Eineindeutigkeit gilt die Bedingung [12]

$$\sum_{i=0}^{N-1} D^{-n_i} \leq 1 \quad (2.15)$$

Nun stellt man eine Kostenfunktion ϕ auf, die den *Aufwand* der Kodierung als Funktion der Symbolsequenzlänge beschreibt. Die mittlere Länge der Kostenfunktion wird definiert als

$$L(\phi, N, \{x_i\}, \{p_i\}) := \phi^{-1} \left(\sum_{i=0}^{N-1} p_i \phi(n_i) \right) \quad (2.16)$$

Die Bezeichnung *Länge* wird gewählt, da man im Fall $\phi(x) = x$ aus Gleichung (2.16) die mittlere Wortlänge erhält

$$L(\phi, N, \{x_i\}, \{p_i\}) = \sum_{i=0}^{N-1} p_i n_i \quad (2.17)$$

In diesem Fall gilt die Ungleichung [12]

$$L(\phi, N, \{x_i\}, \{p_i\}) \geq \frac{I^{(1)}(A)}{\log D} \quad (2.18)$$

²Oftmals werden Informationen auch als Entropien oder Negentropien bezeichnet. Der Begriff Entropie wird in dieser Arbeit für Informationsdifferenzen (s. die Kolmogorov-Sinai Entropien in Abschnitt 2.6.2) verwendet.

Die mittlere Wortlänge kann also nicht kleiner als der Quotient aus der Shannon-Information und dem Logarithmus der Anzahl der Symbole werden. Die Kodierung, die die mittlere Wortlänge minimiert, wird als optimale Kodierung bezeichnet. Der Aufwand für die optimale Kodierung ist durch die Shannon-Information gegeben.

Für zwei unabhängige Systeme A und B gilt das Additivitätskriterium der mittleren Wortlängen

$$\begin{aligned} L(\phi, N + M, \{x_i + x_j\}, \{p_i p_j\}) = \\ L(\phi, N, \{x_i\}, \{p_i\}) + L(\phi, M, \{x_j\}, \{p_j\}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Man kann sich nun fragen, für welche anderen Kostenfunktionen ϕ die Beziehung (2.19) gilt. Es stellt sich heraus [2], daß dies nur für die einparametrische Klasse der Funktionen

$$\phi_\beta(x) = D^{\beta x} \quad -1 < \beta < \infty \quad (2.20)$$

erfüllt wird. Mit dieser Beziehung erhält man aus Gleichung (2.16) das sogenannte β -exponentielle Mittel. Im Grenzfall gilt

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} L(\phi_\beta, N, \{x_i\}, \{p_i\}) = L(\phi, N, \{x_i\}, \{p_i\}) \quad (2.21)$$

Für diese ϕ_β gilt dann eine (2.18) entsprechende Ungleichung für die Rényi-Informationen [12]

$$L(\phi_\beta, N, \{x_i\}, \{p_i\}) \geq \frac{I^{(q)}(A)}{\log D} \quad q = \frac{1}{\beta + 1} \quad (2.22)$$

2.2 Dimension

Ausgehend von den Rényi-Informationen werden die verallgemeinerten Dimensionen als

$$D^{(q)} = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I^{(q)}(\epsilon)}{\log \epsilon} \quad (2.23)$$

definiert. Sie beschreiben die Skalierung der Rényi-Informationen bei zunehmender Meßgenauigkeit im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$. Die Meßgenauigkeit entspricht der Größe der Elemente der Partition, auf der die Rényi-Informationen berechnet werden. Zwei verschiedene Arten von Partitionen werden in Abschnitt 2.6.1 vorgestellt.

Folgende Bezeichnungen sind für die verallgemeinerten Dimensionen üblich:

$D^{(0)}$ Kapazität, fraktale Dimension, *boxcounting* Dimension

$D^{(1)}$ Informationsdimension

$D^{(2)}$ Korrelationsdimension

Aus der Monotonieeigenschaft (2.14) der Rényi-Informationen folgt für die Dimensionen analog

$$D^{(q_1)} \geq D^{(q_2)} \quad \text{für } q_1 < q_2 \quad (2.24)$$

Dies ist der Grund dafür, daß die Korrelationsdimension $D^{(2)}$ als untere Grenze für die Kapazität $D^{(0)}$ verwendet werden kann.

2.3 Additivität

Die Additivität von Informationsmaßen ist in Zustandsräumen und auf (normierten) Wahrscheinlichkeitsverteilungen definiert. Seien A und B zwei (unabhängige) Systeme mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen p_i und p_j . Für die Zustände des zusammengesetzten Systems $A \otimes B$ gelten dann die Wahrscheinlichkeiten $p_{ij} = p_i p_j$. Daraus folgt für die Rényi-Informationen

$$I^{(q)}(A \otimes B) = I^{(q)}(A) + I^{(q)}(B) \quad \textit{additiv} \quad (2.25)$$

Subadditivität gilt für die Rényi-Informationen mit $q \in \{0, 1\}$, falls die Systeme A und B nicht unabhängig voneinander sind, also $p_{ij} = p_i p_{j|i} \neq p_i p_j$, somit

$$I^{(q)}(A \otimes B) \leq I^{(q)}(A) + I^{(q)}(B) \quad \textit{subadditiv} \quad (2.26)$$

Gleichheit gilt, wie oben erwähnt, nur dann, wenn A und B statistisch unabhängig sind.

Bei abhängigen Systemen bestehen zwischen den Einzelsystemen Korrelationen. Das Wissen über diese Korrelationen geht verloren, wenn man $A \otimes B$ in seine Komponenten aufteilt. Die Subadditivität spiegelt diesen Verlust wider.

Analog kann man sich die Information als die diskrete Anzahl der Elemente zweier Mengen A und B vorstellen. Sind diese Mengen nicht disjunkt, so ist die Anzahl der verschiedenen Elemente der Vereinigungsmenge $A \cup B$ kleiner als die Summe aller Elemente aus A und B .

Für die Korrelationsinformation $I^{(2)}$ gilt bei abhängigen Systemen mit $p_{ij} = p_i p_j |i$

$$I^{(2)}(A \otimes B) \geq I^{(2)}(A) + I^{(2)}(B) \quad (2.27)$$

Für diese Eigenschaft der Korrelationsinformation wird in der vorliegenden Arbeit die Bezeichnung *superadditiv* eingeführt.

2.4 *H*-Theorem

Betrachtet man ein zeitabhängiges System, so lassen sich neben den Zustandswahrscheinlichkeiten p_i auch Übergangswahrscheinlichkeiten vom Zustand x_i in den Zustand x_k angeben. Darauf aufbauend definiert man Übergangsraten $p_{i \rightarrow k}$ mit Dimension $[1/t]$ (vgl. auch Anhang B). Dabei gilt für reversible Prozesse $p_{i \rightarrow k} = p_{k \rightarrow i}$.

Allgemein kann man für die Änderung der Besetzungswahrscheinlichkeit eines Zustands i die folgende Bilanzgleichung aufstellen, wobei $\dot{p} = \partial p / \partial t$ als die übliche Notation der Ableitung nach der Zeit zu verstehen ist,

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \sum_k (p_{k \rightarrow i} p_k - p_{i \rightarrow k} p_i) \\ &= \sum_k p_{k \rightarrow i} (p_k - p_i) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Diese Beziehung wird auch als *Master-Gleichung* bezeichnet und setzt sich aus der Summe aller Übergänge *in* den Zustand i hinein abzüglich der Übergänge *aus* dem Zustand i heraus zusammen.

Somit gilt für die zeitliche Änderung der Shannon-Information (2.1), siehe z. B. [24]

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^{(1)}}{\partial t} &= - \sum_i (\dot{p}_i \log p_i + \dot{p}_i) \\ &= - \sum_i \dot{p}_i \log 2p_i \\ &= - \frac{1}{2} \left(\sum_i \dot{p}_i \log 2p_i + \sum_k \dot{p}_k \log 2p_k \right) \\ &= - \frac{1}{2} \left(\sum_{ik} p_{k \rightarrow i} (p_k - p_i) \log 2p_i + \sum_k p_{k \rightarrow i} (p_i - p_k) \log 2p_k \right) \\ &= - \frac{1}{2} \sum_{ik} p_{k \rightarrow i} p_k \left(1 - \frac{p_i}{p_k} \right) \log \frac{p_i}{p_k} \end{aligned}$$

Aus $p_{k \rightarrow i} \geq 0$, $p_k \geq 0$ und $(1-x) \log x \leq 0$ folgt daraus das H -Theorem

$$\frac{\partial I^{(1)}}{\partial t} \geq 0 \quad (2.29)$$

Ferner gilt für die Shannon-Information die Beziehung (2.13), sie ist insbesondere positiv. Aus (2.29) folgt, daß $I^{(1)}$ dem Maximum $\log N$ zustrebt. Dieses wird erreicht, wenn alle dem System zugänglichen Zustände mit gleicher Wahrscheinlichkeit besetzt sind.

2.5 Mischende Systeme

2.5.1 Definition

Ein dynamisches System $\dot{x} = \mathbf{f}(x)$ (siehe auch Abschnitt 3.1) wird als *mischend* bezeichnet, falls für zwei beliebige (μ -meßbare) Mengen E_0 und E_1 gilt [64]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(\mathbf{f}^{-t} E_1 \cap E_0) = \mu(E_0) \mu(E_1) \quad (2.30)$$

μ ist das auf der Menge A definierte, normierte Wahrscheinlichkeitsmaß. Es ordnet Teilmengen $E \subseteq A$ positive, reelle Zahlen zu, z. B. $\mu(E_0) = \int_{E_0} d\mu(x) = p_0$, $\mu(A) = 1$. Dieses (natürliche) Maß ist \mathbf{f}^t -invariant, es gilt für eine beliebige Teilmenge E

$$\mu(E) = \mu(\mathbf{f}^t E) \quad (2.31)$$

Das System nimmt *Mikrozustände* $x \in A$ an, wobei A die Menge aller dem System zugänglichen Zustände ist. E_0 und E_1 sind streng genommen Untermengen von A und somit meßbare Makrozustände.³

Die Gleichung (2.30) läßt sich so interpretieren: Die Wahrscheinlichkeit, daß sich das System zur Zeit $t + t_0$ im Zustand E_1 befindet und zugleich zur Zeit t_0 im Zustand E_0 war, ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von E_0 und E_1 . Beide Ereignisse sind statistisch unabhängig für genügend große t . Das System hat also seinen Anfangs(makro)zustand *vergessen*. Ein Mikrozustand x vergißt seine Vergangenheit wegen des Determinismus nicht.

Für mischende Systeme gilt: Mischende Systeme sind immer ergodisch, aber nicht umgekehrt.

³Die Elemente einer Partition \mathcal{P}_ϵ sind solche Makrozustände (vgl. Abschnitt 2.6.1).

Ergodizität liegt vor, wenn für eine beliebige (μ -meßbare) Funktion $\mathbf{g} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ für fast alle Anfangsbedingungen x_0 das Zeitmittel $\langle \mathbf{g} \rangle_t$ gleich dem Scharmittel $\langle \mathbf{g} \rangle_\mu$ ist. Für *fast alle* Anfangsbedingungen heißt für alle außer einer Menge von Punkten, die bezüglich μ eine Nullmenge bilden.

Das Zeitmittel berechnet sich nach

$$\langle \mathbf{g} \rangle_t \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{g}(\mathbf{f}^t x_0) dt \quad (2.32)$$

und das Scharmittel

$$\langle \mathbf{g} \rangle_\mu \equiv \int_A \mathbf{g}(x) d\mu \quad (2.33)$$

2.5.2 Subadditivität

Für mischende Systeme werden Zustände, die sich um ein genügend großes Zeitintervall unterscheiden, statistisch unabhängig, während sie für kleine τ statistisch abhängig voneinander sind. Die mischende Eigenschaft zeigt sich im Verhalten von subadditiven Maßen wie der Shannon-Information.

Dies wird folgendermaßen verständlich: Sei A ein System mit Zuständen x und sei B eine zeitlich $\mathbf{f}^{-\tau}$ -verschobene Kopie von A mit Zuständen $y = \mathbf{f}^{-\tau} x$. Dann gilt nach Gleichung (2.26) für Zeiten τ , bis zu denen statistische Abhängigkeiten zwischen A und B bestehen

$$I^{(1)}(A \otimes B) < I^{(1)}(A) + I^{(1)}(B) \quad (2.34)$$

und für größere τ

$$I^{(1)}(A \otimes B) = I^{(1)}(A) + I^{(1)}(B) \quad (2.35)$$

Dies ist auch genau die Aussage der Transinformation

$$M(B|A) = I^{(1)}(A) + I^{(1)}(B) - I^{(1)}(A \otimes B) \quad (2.36)$$

$$= \sum_{i,j} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{p_i p_j} \quad (2.37)$$

Beide Formulierungen der Transinformation sind äquivalent und können ineinander übergeführt werden. Die Transinformation (*mutual information*) beschreibt die Information, die man über System B erhält, unter der Bedingung, daß uns System A bekannt ist. Für (statistisch) unabhängige Systeme ist diese Information 0. Die Transinformation M fällt für mischende Systeme für zunehmende t vom maximal positiven Wert $I^{(1)}(A)$ bei $t = 0$ auf 0 ab.

Die zunehmende Unkenntnis über zukünftige Zustände eines mischenden Systems ist eine Folge der Subadditivität des Maßes, mit dem die Information eines Systems gemessen wird.

Hier soll noch angemerkt werden, daß das oftmals beobachtete oszillierende Verhalten der Transinformation nicht im Widerspruch zu den gerade gemachten Aussagen steht. Es gibt Systeme, für die bei bestimmten Werten von $\tau = \tau'$ größere Abhängigkeiten bestehen als für $\tau < \tau'$. Die Transinformation ist also nicht notwendigerweise streng monoton abnehmend. Sie ist nur durch $I^{(1)}(A)$ nach oben und 0 nach unten beschränkt.

Im Gegensatz zur Shannon-Information divergiert die Transinformation im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ nicht [35, 48].

2.6 Berechnung

2.6.1 Partition

Informationstheoretische Maße sind auf Wahrscheinlichkeitsverteilungen definiert, die auf Partitionen berechnet werden, wenn man das natürliche Maß μ nicht kennt. Eine Partition \mathcal{P}_ϵ ist eine Aufteilung der Menge A in disjunkte Teilmengen (Zellen oder *Boxen*) [64]

$$\mathcal{P}_\epsilon \equiv \{E_i(\epsilon)\}_{i=0}^{N(\epsilon)-1}, \quad \bigcup_{i=0}^{N(\epsilon)-1} E_i(\epsilon) \subseteq A, \quad E_i(\epsilon) \cap E_j(\epsilon) = \emptyset \quad \text{für } i \neq j \quad (2.38)$$

Der Schluß von der Partition zur Wahrscheinlichkeit μ geht bei kontinuierlichen Systemen dann über die Zeit t_{E_i} , die sich die Trajektorie in der entsprechenden Untermenge aufhält

$$\mu(E_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} t_{E_i}/T \quad (2.39)$$

Bei zeitdiskreten Systemen, die bei Zeitserien aufgrund des endlichen Zeitintervalls zwischen den einzelnen Meßwerten immer vorliegen, gilt

$$\mu(E_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} n_{E_i}/N \quad (2.40)$$

wobei n_{E_i} die Anzahl der gemessenen Werte in E_i ist.

Ausgezeichnete Arten von Partitionen sind die *homogene* und die *generierende* Partition.

1. Eine homogene Partition entsteht durch eine Zerlegung von A in Zellen E_i , die identische Größe haben.

Der berechnete Wert einer Größe wie beispielsweise der Shannon-Information ist dabei von der Wahl der Partition abhängig. Um das System partitionsunabhängig zu charakterisieren, berechnet man das Supremum über alle Partitionen \mathcal{P}_ϵ oder den Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$.

2. Eine generierende Partition wird im Gegensatz zu einer homogenen Partition von der Systemdynamik erzeugt und ist im Zustandsraum im allgemeinen inhomogen. Da bei der Generierung Zellgrenzen auf Zellgrenzen abgebildet werden, besteht Invarianz gegenüber der Systemdynamik.

Die auf einer generierenden Partition berechneten Maße spiegeln wirkliche Systemeigenschaften wider.

Die wichtigste Voraussetzung zur Erzeugung einer generierenden Partition — die Kenntnis der Systemdynamik — ist in der angewandten Zeitserienanalyse in den allermeisten Fällen jedoch nicht erfüllt.

Aus dem eben Gesagten läßt sich ableiten, daß man bei der Analyse realer Zeitserien mit homogenen Partitionen arbeiten wird. Für partitionsunabhängige Aussagen wird man nach Skalierungsverhalten der berechneten Maße suchen. Die homogene Partitionierung bietet durch die Freiheit in der Wahl von Form und Größe der einzelnen Partitionselemente den Vorteil, unterschiedliche Aspekte eines Systems zu untersuchen. Diese werden dann aber als Eigenschaften bezüglich der jeweiligen Partition und nicht als invariante Systemeigenschaften verstanden.

Für eine detaillierte Darstellung des Themenbereiches Partition wird auf [120] verwiesen.

2.6.2 Invarianten

Zur Charakterisierung eines dynamischen Systems ist man im allgemeinen an Größen interessiert, die nicht von der Wahl des Koordinatensystems oder der Partition abhängen. Diese Größen werden als *Invarianten* bezeichnet und beschreiben wahre Systemeigenschaften.

Bei den bereits erwähnten verallgemeinerten Dimensionen aus Abschnitt 2.2 handelt es sich um invariante Größen. Durch den Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ werden diese Größen unabhängig von der Wahl der Partition. Ferner sind Dimensionen auch invariant gegenüber stetig differenzierbaren Koordinatentransformationen [29].

Die Unabhängigkeit unter eindeutig umkehrbaren Koordinatentransformationen erlaubt die Berechnung der Invarianten über verzögerte Koordinaten (siehe Abschnitt 3).

Weitere Invarianten sind die Kolmogorov-Sinai Entropie und die Lyapunov-Exponenten, die im folgenden kurz vorgestellt werden.

Kolmogorov-Sinai Entropie

Ausgangspunkt der Definition sind die Rényi-Block-Informationen

$$I^{(q)}(m) = \frac{1}{1-q} \log \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} p_{i_1 i_2 \dots i_m}^q \quad (2.41)$$

wobei $p_{i_1 i_2 \dots i_m}$ die Wahrscheinlichkeit ist, daß sich das System zu einer beliebigen Zeit t im Zustand i_1 , zur Zeit $t + \tau$ im Zustand i_2 , etc., befindet.

Die verallgemeinerten Kolmogorov-Sinai Entropien (auch metrische Entropien) erhält man im Grenzwert (siehe [64, 48]) aus der Differenz der

$$h^{(q)} = \frac{1}{\tau} \sup_{\mathcal{P}_\epsilon} \lim_{m \rightarrow \infty} I^{(q)}(m+1) - I^{(q)}(m) \quad (2.42)$$

Streng genommen wird nur $h^{(1)}$ als Kolmogorov-Sinai Entropie bezeichnet.

Die KS-Entropie ist eine obere Grenze für die mittlere *neue* Information, die man mit jeder neuen Einzelmessung erhält, wenn man die vergangenen Zustände schon für lange Zeiten, im Prinzip für $t \rightarrow -\infty$, kennt. Die einzelnen Meßwerte sind die Elemente der Partition, die in der Praxis von der Meßvorrichtung (endliche Auflösung, numerische Genauigkeit) vorgegeben wird.

Für die KS-Entropie gilt

$$0 \leq h^{(q)} \leq \infty \quad (2.43)$$

Die untere Grenze erhält man für periodische, die obere für stochastische Prozesse. Ein endlicher Wert der KS-Entropie $h^{(1)}$ ist ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für chaotisches Verhalten [120].

In Kapitel 4.2 wird die Methode der korrespondierenden Nachbarn eingeführt werden. Dabei wird auch die theoretische Verbindung zu einer *lokalen* Version der KS-Entropie zweiter Ordnung $h^{(2)}$ gezeigt werden.

Lyapunov-Exponenten

Lyapunov-Exponenten sind reelle Zahlen, die die Stabilitätseigenschaften von Trajektorien in erster Ordnung beschreiben. Seien \vec{x}_i und \vec{x}_j zwei Punkte, die zur Zeit $t = t_0$ die Entfernung δ_0 voneinander haben. Für $t > t_0$ kann die zeitliche Änderung dieser Entfernung durch

$$\delta_t \approx \delta_0 \exp(\lambda(t - t_0)) \quad (2.44)$$

annähernd beschrieben werden. Dabei wird der Lyapunov-Exponent λ definiert als [64]

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\delta_t}{\delta_0} \quad (2.45)$$

Je nach Vorzeichen von λ unterscheidet man

$\lambda < 0$: stabiles

$\lambda > 0$: instabiles

Verhalten. Im Fall $\lambda = 0$ bezeichnet man das System als marginal stabil. Der Abstand der Trajektorien wird sich entsprechend verringert, vergrößert oder nicht verändert haben. Wenn ein dynamisches System durch k Freiheitsgrade beschrieben wird, dann erhält man entsprechend k Lyapunov-Exponenten für die einzelnen Richtungen.

Die Existenz mindestens eines positiven Lyapunov-Exponenten in einem beschränkten System⁴ ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für chaotisches Verhalten.

Die Summe aller Lyapunov-Exponenten ist in dissipativen Systemen kleiner Null, in konservativen gleich Null. Die Divergenz des Phasenflusses \mathbf{f} ist im ersten Fall negativ, im zweiten Fall identisch Null. Da bei zeitkontinuierlichen Systemen der Lyapunov-Exponent in Richtung der Trajektorie gleich Null ist, folgt daraus, daß chaotisches Verhalten nur in solchen Systemen mit mindestens drei Freiheitsgraden vorliegen kann.

Die Summe der positiven Lyapunov-Exponenten ist eine obere Schranke für die KS-Entropie

$$h^{(1)} \leq \sum_{i:\lambda_i>0} \lambda_i \quad (2.46)$$

Im Falle der Gleichheit heißt diese Gleichung *Pesin-Identität* [64]. Dies trifft jedoch nur zu, wenn das natürliche Maß μ in den instabilen Richtungen absolut stetig ist.⁵ Andernfalls überschätzt nach Ruelle die Summe der positiven

⁴Es gilt $\forall t: -\infty < x_t < \infty$

⁵Das Maß μ wird dann als *Sinai-Ruelle-Bowen-Maß* bezeichnet [19].

Lyapunov-Exponenten die metrische Entropie [19].

Es existieren verschiedene Verfahren zur Berechnung der Lyapunov-Exponenten aus Zeitserien [18, 26, 45, 59, 130], wobei die Unterschiede unter anderem darin bestehen, ob das gesamte Spektrum oder nur der maximale Exponent berechnet wird. Für eine Diskussion der Vor- und Nachteile verschiedener Verfahren wird auf [11, 48] verwiesen.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde der Lyapunov-Exponent einer Zeitserie aus Innendrehexperimenten (siehe Anhang A) berechnet. Die Analyse erfolgte nach dem Algorithmus von Eckmann *et al.* [18]. Der Wert dieses Exponenten ist $\lambda = 0.087 \pm 0.006$ bit je Zeitschritt [127].

2.6.3 Überdeckung

Bei der Berechnung von informationstheoretischen Maßen wird statt von Partitionen wegen der besseren Statistik oftmals von (nicht-disjunkten) *Überdeckungen* ausgegangen. Die einzelnen Zustände x_i bilden dabei die Mittelpunkte der Elemente der Überdeckung. Man spricht hierbei auch von *importance sampling* [48].

Im Grenzfall

$$\epsilon < \frac{1}{2} \min_{i,j} |x_i - x_j| \quad (2.47)$$

wird daraus wieder eine Partition, bei der jede Box allerdings nur einen Zustand enthält.⁶ Die Suche nach dem Supremum ist praktisch nicht durchführbar, außer man kennt die sogenannte generierende Partition, die das Supremum liefert.

Ist keine generierende Partition bekannt, so muß der Übergang $\epsilon \rightarrow 0$ durchgeführt werden. Praktisch gibt es jedoch keine realen Daten mit infinitesimaler Auflösung, so daß nach einem Bereich gesucht wird, in dem die Ergebnisse unabhängig von der Auflösung ϵ werden (Skaleninvarianz). Dann entspricht dieser Wert dem gesuchten Supremum [48, 8].

Bei der Verwendung von Überdeckungen ist es wesentlich, daß die Ergebnisse, die auf verschiedenen Skalen gewonnen werden, miteinander vergleichbar sind. Da die einzelnen Elemente überlappen, gilt im allgemeinen die Nor-

⁶Der Begriff *Zustand* wird oft zweideutig verwendet: sowohl der Mikrozustand x des Systems als auch der Makrozustand E , der durch die Partition gegeben ist, werden als Zustand bezeichnet. Es geht jedoch meist aus dem Kontext hervor, welche Art Zustand gemeint ist. Bei der angewandten Zeitserienanalyse hat man es allein durch die Meßgenauigkeit schon mit Makrozuständen zu tun.

mierungsbedingung (2.9) für die Anzahl der Mikrozustände in den Überdeckungselementen nicht mehr:

$$\sum_{i=0}^{k-1} n_i > N \quad (2.48)$$

Die Häufigkeitsverteilung als Approximation der Wahrscheinlichkeitsverteilung muß folglich über

$$p_i = \frac{n_i}{\sum_i n_i} \Rightarrow \sum_i p_i = 1 \quad (2.49)$$

normiert werden.

2.6.4 Caveats

Es wird bei der Berechnung von Invarianten selbst von der sehr einfachen KS-Entropie bzw. der Informationsdimension, die beide auf der Shannon-Information beruhen, und deren somit unproblematischer Implementierung, die im wesentlichen der Auswertung einer m -dimensionalen Häufigkeitsverteilung entspricht, dringend abgeraten. Wenn die Daten nicht in sehr großer Anzahl in extrem feiner Auflösung vorliegen, was bei realen Zeitserien fast nie der Fall ist, dann führen Randeffekte durch endliche Boxengrößen und mangelnde Besetzungsdichte in höherdimensionalen Räumen zu unbrauchbaren Ergebnissen (vgl. auch Abschnitt 4.2.1).

Zu geringe Besetzung der Partitionselemente führt dazu, daß der Schluß von einer relativen Häufigkeit der Zustände auf eine Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht zulässig ist.

Dieser Schluß wird im allgemeinen so begründet: Ein Experiment habe verschiedene mögliche Ergebnisse E_i . Dann ist die relative Häufigkeit des Auftretens von einem E_i gleich n_{E_i}/N , nachdem das Experiment N -mal wiederholt wurde und E_i genau n_{E_i} -mal aufgetreten ist. Die einzelnen Wiederholungen finden unter gleichen Bedingungen und statistisch unabhängig voneinander statt. Dann gilt

$$p_{E_i} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_{E_i}}{N} \quad (2.50)$$

für die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von E_i . Streng genommen ist dieser Schluß (siehe auch Gleichung (2.40)) bei dynamischen Systemen nicht richtig, weil die einzelnen Meßwerte nicht statistisch unabhängig sind, auch wenn sie bei chaotischen Systemen nur über einen kurzen Zeitraum vorhersagbar sind.

Im Grenzfall langer Beobachtungszeiten erwartet man aber, daß die relative Häufigkeit eines Ereignisses praktisch unabhängig von N wird [8].

Für die Klassifikation von Systemzuständen gibt es eine Vielzahl von Methoden, deren Hintergrund nicht notwendigerweise direkt in der Informationstheorie liegt und damit die Existenz einer stationären Wahrscheinlichkeitsverteilung erfordern würden, sondern die die physikalischen Natur des betrachteten Systems, z.B. den niedrigdimensionalen Determinismus, ausnützen.

Es werden bei der Klassifikation andere Zielsetzungen verfolgt als bei der Suche nach Systeminvarianten. Die Aussagen, die man bei der Klassifikation trifft, müssen deswegen auch nicht notwendigerweise informationstheoretisch interpretierbar sein. In den meisten Fällen sind derartige Interpretationen auch gar nicht möglich, weil z.B. die Grenzübergänge in der Realität nicht durchführbar sind oder — bei der Bestimmung der Dimensionalität des Systems — kein Skalierungsverhalten beobachtet wird.

Wie in Abschnitt 4.2.2 gezeigt werden wird, gibt es Verfahren, die vorhandenen Determinismus verwenden, um beispielsweise die Vorhersagbarkeit zu beschreiben, und gleichzeitig informationstheoretisch interpretierbar sind.

Insbesondere der Begriff *Information* führt leicht zu Mißverständnissen, indem das mathematische Konzept mit kontextabhängiger Information im Sinne von Bedeutung vermischt wird. Bereits Shannon und Weaver [104, 122] hegten die Befürchtung, daß die Verwendung von Wörtern wie *Information* oder *Redundanz* leicht zu einer Überbewertung des im Grunde streng mathematischen Formalismus führen kann. Die Gefahr von Fehlinterpretationen sahen sie als besonders groß an bei der Anwendung der von ihnen entwickelten Konzepte auf Bereiche der Wissenschaft, die außerhalb des ursprünglichen Anwendungsgebietes der Kommunikationstheorie liegen, wie beispielsweise auf die Psychologie oder die Wirtschaftswissenschaften.

Zur Veranschaulichung des Unterschieds zwischen mathematischer und kontextabhängiger Information kann das nachfolgende Beispiel dienen (Abbildung 2.2): eine Tankuhr A hat eine asymmetrische Einteilung mit $p_0 = 1/2$ und $p_{1,2} = 1/4$. Die Skizze veranschaulicht die Zuordnung der analogen Skala von *leer* bis *voll* auf die Partition \mathcal{P} . Die Länge der Elemente der Partition ist proportional zur jeweiligen Wahrscheinlichkeit p_i .

Die Shannon-Information von Tankuhr A ist 1.5 bit. Dieser Wert ist unabhängig von der Anordnung der Zustände. So hat beispielsweise Tankuhr B die gleiche Shannon-Information. Für den Fahrer wird es aber vor allem wichtig sein zu wissen, wann der Tank leer sein wird, und diese kontextabhängige Information bekommt er genauer mit Tankuhr B . Er wird also diese Einteilung

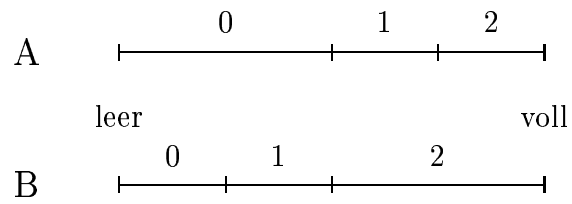


Abbildung 2.2: Illustration zur kontextabhängigen Information

lung vorziehen.

Betrachtet man die Einzelterme $I_i = -p_i \log p_i$ für System A , so gilt $I_{0,1,2} = 1/2$ bit. Wie oben ist jedoch für den Fahrer der Zustand 0 am wichtigsten, obwohl die einzelnen Terme I_i für alle Zustände den gleichen Wert haben.

Kapitel 3

Einbettung dynamischer Systeme

In diesem Abschnitt werden dynamische Systeme formal eingeführt und der Begriff des Attraktors erläutert.

Die Analyse dynamischer Systeme beruht in dieser Arbeit auf der Konstruktion eines mehrdimensionalen Zustandsraumes auf der Grundlage einer skalaren Zeitserie. Dieser künstliche Zustandsraum und der durch die kanonischen Variablen definierte echte Phasenraum sind bezüglich bestimmter Aspekte zueinander äquivalent. Die in Kapitel 2 vorgestellten Invarianten des Systems haben in beiden Räumen identische Werte.

Es wird die mathematische Grundlage für diese Art der Rekonstruktion erklärt und das Konzept der verzögerten Koordinaten vorgestellt. Ferner werden Methoden zur Bestimmung der Einbettungsparameter Dimension und Verzögerungszeit aufgezeigt.

3.1 Attraktor

Ein dynamisches System

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{f}(\vec{x}) \quad \text{kontinuierlich} \quad (3.1)$$

$$\vec{x}_{t+1} = \mathbf{f}(\vec{x}_t) \quad \text{diskret} \quad (3.2)$$

habe k Freiheitsgrade, d.h. \vec{x} habe k Koordinaten. Der momentane Zustand \vec{x}_t des Systems zur Zeit t wird durch einen Punkt in einem k -dimensionalen Raum charakterisiert. Die zeitliche Entwicklung zu bestimmten Anfangsbe-

dingungen \vec{x}_0 beschreibt eine Trajektorie in diesem Raum. Diese Entwicklung läßt sich in eine *transiente* und eine *asymptotische* Phase einteilen.

Die Menge der asymptotischen Zustände werde als $A \subseteq \mathbb{R}^k$ bezeichnet. A heißt *Attraktor* des Systems, wenn sich Anfangszustände $\vec{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^k$ nach einer möglichen transienten Phase auf $A \subset U$ entwickeln. Im Grenzfall gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{f}^t U = A \quad (3.3)$$

Dies ist streng genommen die Definition einer attraktiven Menge A , die nicht identisch mit dem Attraktor sein muß [19]. Da eine allgemein akzeptierte mathematische Definition des Begriffes *Attraktor* noch aussteht [64], kann man beispielsweise von der folgenden Arbeitsdefinition nach Eckmann und Ruelle [19] ausgehen:

Definition 3.1 *Ein Attraktor ist eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^k$, auf dem Punkte $\mathbf{f}^t \vec{x}$ für große Zeiten t zu liegen kommen.*

Einfache Beispiele für Attraktoren sind Fixpunkte, Grenzyklen periodischer Systeme oder quasiperiodische Attraktoren als Verallgemeinerung der periodischen Grenzyklen. Ein quasiperiodisches System kann man sich aus periodischen Systemen zusammengesetzt vorstellen, wobei die Frequenzen ω_i der beteiligten periodischen Systeme in keinem rationalen Zusammenhang miteinander stehen; es gibt keine verschwindende Linearkombination der einzelnen ω_i mit nichtverschwindenden ganzzahligen Koeffizienten. Die Menge der Zustände eines quasiperiodischen Systems beschreibt einen Torus, dessen Dimension gleich der Anzahl der ω_i ist.

In der nichtlinearen Dynamik sind jedoch besonders solche Systeme interessant, die sogenannte *seltsame* Attraktoren besitzen. Bei diesen Systemen liegt eine große Empfindlichkeit in den Anfangsbedingungen \vec{x}_0 der Trajektorien vor, so daß anfangs benachbarte Trajektorien mit der Zeit im Mittel exponentiell auseinander laufen. Es existiert also ein positiver Lyapunov-Exponent. Diese Systeme werden als *chaotisch* bezeichnet. Nach Abschnitt 2.6.2 muß der Zustandsraum eines dissipativen zeitkontinuierlichen chaotischen Systems (Gleichung (3.1) mehr als zwei Dimensionen aufweisen, da sich Trajektorien nicht überschneiden dürfen. Mit dem gleichen Argument kann man begründen, daß auch die Dimension des Attraktors größer als zwei sein muß.¹ Diese Dimension kann allerdings auch nichtganzzahlig sein. Diese Attraktoren werden als *Fraktale* bezeichnet (vgl. Abschnitt 2.2).

¹Dies gilt nicht für zeitdiskrete chaotische Systeme (3.2), die durchaus Attraktoren in weniger als zwei Dimensionen besitzen können, wie z. B. der Hénon-Attraktor [37].

Die Fraktalität eines Attraktors ist unabhängig von seiner Seltsamkeit. Beispielsweise existieren Systeme, die zwar chaotisch, aber nicht fraktal sind, wie *Arnold's cat map* [3], oder — umgekehrt — fraktal, aber nicht chaotisch, wie der Feigenbaum Attraktor [23]. Die Attraktoren der Systeme von Lorenz (Abschnitt 6.2) oder Hénon [37] sind sowohl chaotisch als auch fraktal.

3.2 Einbettungstheoreme

Bei der Durchführung einer Messung wird man im allgemeinen nicht exakt die k kanonischen Größen messen, sondern im Regelfall nur eine einzige Zeitserie x_t , die möglicherweise auch keine von diesen k sein wird. Die Messung ergebe eine skalare Zeitserie x_t , $t = 0, \dots, N - 1$ mit einem konstantem Zeitintervall Δt zwischen den einzelnen Meßwerten.

Nach Packard *et al.* [78] kann man aus der einen gemessenen Zeitserie mehrere voneinander unabhängige Zeitserien konstruieren, mit denen man das dynamische System (3.1) rekonstruieren kann, so daß A und A_{rec} topologisch äquivalent sind. Es wurde die Verwendung des Vektors $(x_t, \dot{x}_t, \ddot{x}_t, \dots)$ aus zeitlichen Ableitungen vorgeschlagen. Das Konzept von verzögerten Koordinaten $(x_t, x_{t-\tau}, x_{t-2\tau}, \dots)$ basiert danach auf einer Idee von D. Ruelle. Die Frage nach der Anzahl der zu verwendenden unabhängigen Zeitserien blieb zunächst unbeantwortet.

Takens [110] konnte eine Bedingung für die notwendige Anzahl von verzögerten (und aus Ableitungen gebildeten) Koordinaten zur Rekonstruktion des dynamischen Systems angeben. Im allgemeinen gibt es demnach eine Einbettung des dynamischen Systems (3.1) in einen künstlichen Zustandsraum, wenn die Anzahl der verwendeten Koordinaten mindestens

$$m > 2k \tag{3.4}$$

ist. Einbettungen im mathematischen Sinne sind eineindeutige Immersionen, also Abbildungen, die sowohl in den Punkten x als auch in den Tangenten Dx eineindeutig sind [92] (Abb. 3.1). Die Bezeichnung *künstlich* verweist darauf, daß es sich nicht um die kanonischen Variablen handelt.

Falls es sich bei dem untersuchten System um ein dissipatives chaotisches System handelt, kann der Attraktor $A \subset \mathbb{R}^k$ der möglichen Systemzustände eine nichtganzzahlige *boxcounting*-Dimension $D^{(0)} \leq k$ besitzen. Die Bedingung (3.4) gilt jedoch für ganzzahlige k .

Sauer *et al.* [92] verallgemeinerten die Bedingung von Takens auf die *box-*

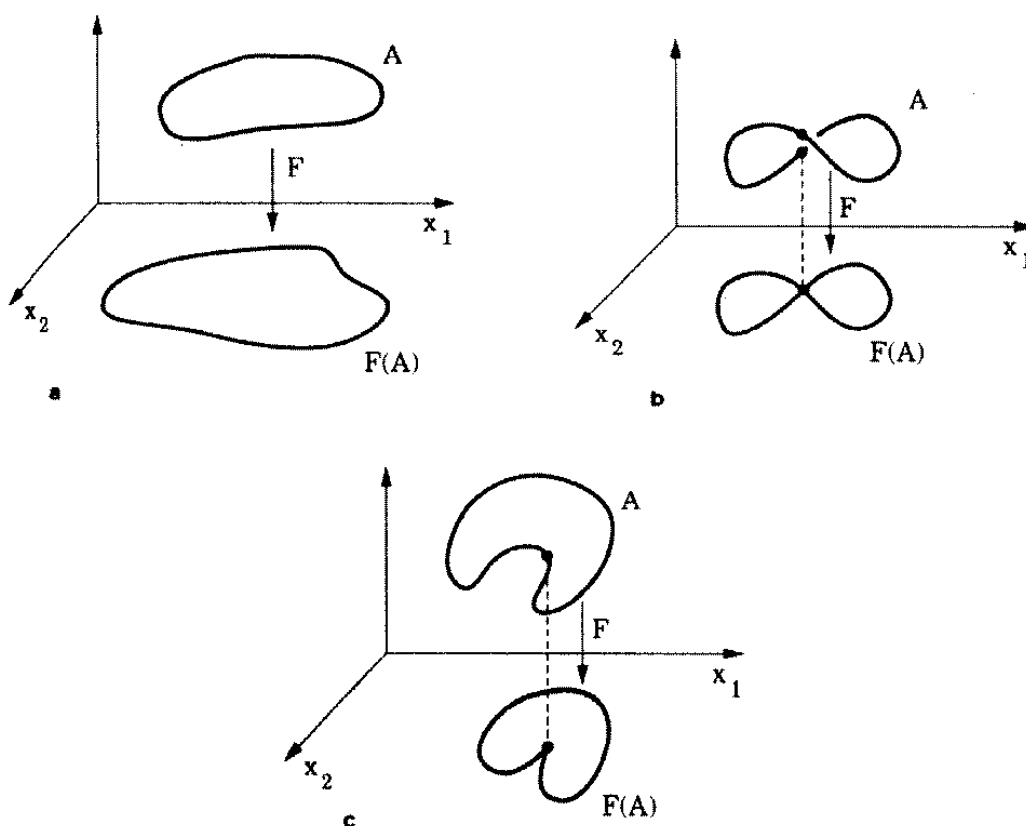


Abbildung 3.1: (a) Einbettung F von A in den \mathbb{R}^2 , (b) nichteindeutige Immersion, (c) eineindeutige Abbildung, die jedoch keine Immersion ist (aus [92])

counting-Dimension $D^{(0)}$

$$m > 2D^{(0)} \quad (3.5)$$

In der Praxis ergeben sich zwei Probleme: zum einen kennt man im allgemeinen weder die Anzahl der Freiheitsgrade noch die Dimension des Attraktors — man ist vielmehr daran interessiert, eben diese Eigenschaften oder andere das System charakterisierende Größen aus der Analyse einer Zeitserie zu erhalten; zum anderen gelten die oben erwähnten Bedingungen für die Einbettungsdimension im Grenzfall unendlich langer Zeitserien mit infinitesimaler Auflösung. Aufgrund des zuletzt genannten Problems spielt auch die Wahl der Verzögerungszeit τ in der Praxis eine wichtige Rolle, obwohl die Ergebnisse in der Theorie davon nicht abhängen.

Nachfolgend wird ein Überblick über einige häufig verwendete Methoden

zur Bestimmung von Einbettungsparametern gegeben. Eine ausführlichere Darstellung ist in der Literatur, z. B. [11, 48], zu finden.

3.3 Dimension

Eine direkte Bestimmung der *boxcounting*-Dimension besteht im wesentlichen aus der Auswertung einer m -dimensionalen Häufigkeitsverteilung im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ für zunehmende m . Dieser Ansatz ist jedoch nur für Daten vielversprechend, die in großer Anzahl und ausreichender Auflösung vorliegen [48] (vgl. auch die Abschnitte 2.6.4 und 4.2.1)

Eines der bekanntesten Verfahren zur Abschätzung der Einbettungsdimension beruht auf der Berechnung der Korrelationsdimension $D^{(2)}$ (siehe Abschnitt 2) nach Grassberger und Procaccia [32, 33, 34]. Die Korrelationssumme für eine Zeitserie \vec{x}_t , wobei die einzelnen \vec{x} aus verzögerten Koordinaten gebildet werden ist definiert als

$$C^{(2)}(\epsilon) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N-1} \Theta(\epsilon - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|) \quad (3.6)$$

mit der Heaviside-Funktion $\Theta(x) = 1$ für $x > 0$ und $\Theta(x) = 0$ für $x \leq 0$ und der Norm $\|\cdot\|$ in m Dimensionen. Gleichung (3.6) berechnet den Anteil von Punktpaaren im m -dimensionalen Raum, die sich näher als ϵ liegen. Aus numerischen Gründen wird oft der Maximumsnorm gegenüber der euklidischen Norm der Vorzug gegeben. Für praktische Berechnung wird diese Form noch modifiziert werden müssen, um Artefakte durch lineare Korrelationen auszuschließen [111]. Weitere Korrekturen sind für geringe Besetzungsdichten möglich [30].

Die Korrelationsdimension als untere Grenze der *boxcounting*-Dimension erhält man aus der Korrelationssumme im Grenzwert

$$D^{(2)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log C^{(2)}(\epsilon)}{\log \epsilon} \quad (3.7)$$

Bei der praktischen Berechnung wird man die Einbettungsdimension m sukzessive erhöhen und nach Plateaus in der $d^{(2)}(\epsilon)$ -Funktion suchen:

$$d^{(2)}(\epsilon) = \frac{d \log C^{(2)}(\epsilon)}{d \log \epsilon} \quad (3.8)$$

Diese Plateaus sollten ab einer bestimmten Einbettungsdimension unabhängig von m werden. In diesem Fall kann der Sättigungswert wegen der Be-

ziehung (2.24) als untere Schranke für die *boxcounting*-Dimension verwendet werden.

Während die Berechnung der Korrelationssumme numerisch einfach und stabil ist, erfordert die Interpretation der Ergebnisse als Dimensionsabschätzung des Attraktors viel Sorgfalt. Es sind Beispiele bekannt, daß lineare Korrelationen oder Nichtstationarität zu Konvergenz in der Korrelationssumme führen können [35, 77, 111, 112].

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Korrelationssumme für gemessene Zeitserien der Sonnenwindgeschwindigkeit (vgl. Abschnitt 6.3) berechnet. Die gefundene Konvergenz mit zunehmender Einbettungsdimension beruht in diesem Fall auf den langreichweitigen linearen Korrelationen. Es ist kein Plateau mehr vorhanden, wenn man linear korrelierte Punkte mit $\Delta t \approx t_c$ aus der Berechnung ausschließt. Die Wahl von t_c ergibt sich aus der Autokorrelationsfunktion (s. den folgenden Abschnitt 3.4).

Das Prinzip, das anderen betrachteten Verfahren zugrundeliegt, ist die Berechnung einer geeigneten Größe für zunehmende Einbettungsdimension und die Suche nach einem Bereich, ab dem diese Größe unabhängig von m wird.

Es existieren Ansätze, die die Ordnung der nächsten Nachbarn im Zustandsraum und deren Veränderung bei zunehmender Einbettungsdimension berücksichtigen. Die zugrundeliegende Idee ist, daß die Anzahl der *falschen* nächsten Nachbarn durch Projektionseffekte mit zunehmendem m abnimmt und einen Sättigungswert erreicht [1, 53, 54, 65].

In dieser Arbeit wird eine Methode vorgestellt, die die nächsten Nachbarn verwendet, um die Vorhersagbarkeit des Systems zu beschreiben (siehe Abschnitt 4.2). Dieses Verfahren kann auch zur Bestimmung von Einbettungsparametern verwendet werden: die Vorhersagbarkeit als Funktion von m wird bis zu einem konstanten Wert zunehmen, ab dem nur noch für die Vorhersage relevante Nachbarn existieren. Es handelt sich — ähnlich wie die im vorigen Absatz erwähnte Methode — um ein Verfahren, Projektionseffekte durch Erhöhung der Einbettungsdimension zu verringern.

3.4 Verzögerungszeit

Das einfachste Kriterium zur Abschätzung der Verzögerungszeit τ ist die Visualisierung der Zeitserie in einer speziellen Darstellung, die üblicherweise als *return map* oder *return plot* bezeichnet wird. Dabei wird beispielsweise auf der x -Achse x_t , $t = 0, \dots, N - 1 - \tau$ aufgetragen und auf der y -Achse

$x_{t-\tau}$, $t = \tau, \dots, N-1$. Durch Variation von τ kann man eventuell vorhandene Strukturen in x entfalten.

Die Entfaltung kann durch geometrische Kriterien wie den Füllfaktor [11] quantitativ beschrieben werden. Dieses Verfahren, wie auch die erst beschriebene naive Visualisierung, beruhen im wesentlichen auf der Autokorrelationsfunktion und deren Abfall als Funktion von τ . Die Autokorrelationsfunktion ist definiert als

$$\rho(\tau) = \frac{N}{N-\tau} \frac{\sum_{t=\tau}^{N-1} (x_t - \bar{x})(x_{t-\tau} - \bar{x})}{\sum_{t=0}^{N-1} (x_t - \bar{x})^2} \quad (3.9)$$

Für die Mittelwerte gilt die übliche Definition $\bar{x} = \sum_{t=0}^{N-1} x_t / N$.

Ferner wird noch die sogenannte zirkuläre Autokorrelationsfunktion definiert:

$$\rho_c(\tau) = \frac{\sum_{t=\tau}^{N-1} (x_t - \bar{x})(x_{t-\tau} - \bar{x}) + \sum_{t=0}^{\tau-1} (x_t - \bar{x})(x_{N-\tau+t} - \bar{x})}{\sum_{t=0}^{N-1} (x_t - \bar{x})^2} \quad (3.10)$$

Bei dieser Form der Autokorrelationsfunktion geht die implizite Annahme ein, daß die untersuchte Zeitserie periodisch fortgesetzt werden kann. Diese Annahme macht man auch bei linearen Verfahren wie der Fourieranalyse. Die zirkuläre Autokorrelationsfunktion wird in Abschnitt 5 noch einmal erwähnt werden.

Man wählt nun für die Verzögerungszeit den ersten Nulldurchgang von $\rho(\tau)$ oder den Wert, für den $\rho(\tau)$ (oder die Einhüllende) auf $1/e$ abgefallen ist. Die genaue Wahl von τ hängt dabei sowohl von der Form der Autokorrelationsfunktion als auch vom Zweck der Analyse ab. Der große Vorteil dieser Methode ist, daß man die Autokorrelationsfunktion meist sowieso berechnet, um einen Einblick in die linearen Eigenschaften der Zeitserie zu erhalten.

Der Hauptkritikpunkt in der Anwendung der Autokorrelationsfunktion in der nichtlinearen Zeitserienanalyse ist, daß es sich dabei um eine lineare Methode handelt [1]. Statt dessen wird von Fraser und Swinney [25] die Transinformation als Maß dafür vorgeschlagen, optimale Verzögerungszeiten zu bestimmen. Man definiert die Transinformation für verzögerte Koordinaten als [124] (siehe auch Abschnitt 2.5.2)

$$M(\tau) = \sum_{t=\tau}^{N-1} \sum_{t-\tau=0}^{N-1-\tau} p_{t,t-\tau} \log \frac{p_{t,t-\tau}}{p_t p_{t-\tau}} \quad (3.11)$$

wobei die Wahrscheinlichkeit p_t (bzw. $p_{t-\tau}$) aus der Besetzungsdichte des Elements der Partition, in dem x_t (bzw. $x_{t-\tau}$) liegt, bestimmt wird. Die

Wahrscheinlichkeit $p_{t,t-\tau}$ ist entsprechend die Besetzungsdichte in der zweidimensionalen Häufigkeitsverteilung von x_t und $x_{t-\tau}$.

In diesem Zusammenhang läßt sich die Transinformation als die Menge an Information interpretieren, die man im Mittel über x_t erhält, wenn man $x_{t-\tau}$ kennt. Das τ des ersten Minimums von $M(\tau)$ wird dann als Verzögerungszeit verwendet.

Mehrere Gründe sprechen aber auch gegen die Verwendung der Transinformation zur Abschätzung der Verzögerungszeit. So ist das Ergebnis partitionsabhängig, es wird nur in zwei Dimensionen berechnet und spiegelt deswegen nicht notwendigerweise wahre Systemeigenschaften wider.

Für eine Zusammenstellung weiterer Verfahren sei auf [11] verwiesen.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß es sinnvoll und einfach ist, Kriterien zur Bestimmung der Verzögerungszeit aus der Autokorrelationsfunktion abzuleiten. Man wird die Ergebnisse der nachfolgenden nichtlinearen Analyse in einem sinnvollen Intervall für verschiedene τ berechnen und sollte dabei keine gravierenden Veränderungen in den Ergebnissen feststellen, wenn es sich um eine geeignete Wahl von τ handelt.

Kapitel 4

Detektion von Determinismus

Das Ziel einer Zeitserienanalyse ist oftmals, nichtlineares Verhalten nachzuweisen. Die Grundidee vieler Verfahren ist, die lokalen¹ Eigenschaften des Systems im künstlichen Zustandsraum zu verwenden. Insbesondere die Eigenschaft, daß sich ähnliche Zustände zumindest für kurze Zeiten in ähnlicher Weise entwickeln, wird bei der Suche nach nichtlinearem Determinismus und Vorhersagen von Zeitserien ausgenützt. Bekannte Ansätze basieren dabei beispielsweise auf der Parallelität von Trajektorien im Phasenraum [51, 52] und Erweiterungen davon [121], der Nähe von Bildern und Urbildern [49] und der Beschreibung der Vorhersagbarkeit [108] mit nichtlinearen Methoden.

Die Methode der Fehler bei nichtlinearer Vorhersage wird als etabliertes Verfahren in dieser Arbeit als Referenz verwendet. In einem ersten Abschnitt wird diese Methode vorgestellt.

Bei der Methode der korrespondierenden Nachbarn handelt es sich um ein neu entwickeltes Verfahren, bei dem die Einfachheit der Berechnung und eine möglichst geringe Anzahl von Annahmen im Vordergrund stehen. Es wird gezeigt, daß sich dieses Maß unter bestimmten Bedingungen im Grenzfalle als Kolmogorov-Sinai Entropie zweiter Ordnung interpretieren läßt. In der allgemeinen Form stellt das Maß der korrespondierenden Nachbarn eine Erweiterung dieser Entropie dar.

Das ebenfalls neu vorgestellte Verfahren des Temperaturanalogons beruht auf der Quantifizierung der Parallelität von Trajektorien im künstlichen Zustandsraum über die Berechnung des mittleren Schwankungsquadrats lokaler Geschwindigkeitsvektoren. Diese Art der Berechnung findet sich ebenfalls bei

¹Die Bezeichnung *lokal* bezieht sich hier wie auch in den folgenden Abschnitten auf lokal im Zustandsraum.

der Bestimmung der Diffusionskonstante in der Fokker-Planck Gleichung.

Die in dieser Arbeit durchgeführten Analysen basieren alle auf der Verwendung von nächsten Nachbarn im mehrdimensionalen Zustandsraum. Um den numerischen Aufwand für die Suche nach benachbarten Punkten möglichst gering zu halten, wurden rechenzeit- und speicheroptimierte Algorithmen verwendet [31, 97].

4.1 Fehler bei nichtlinearer Vorhersage

Eine häufig verwendete Methode zur Detektion von nichtlinearem Verhalten ist die Beschreibung über Fehler bei nichtlinearer Vorhersage [13, 108].

$$\sigma_{\text{npe}}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{t=0}^{N-2} [x_{t+1} - F(x_t)]^2 \quad (4.1)$$

Die Funktion F ist eine lokale Approximation des Flusses \mathbf{f} des dynamischen Systems aus Gleichung (3.1).

Dabei wird F aus den nächsten Nachbarn im Zustandsraum konstruiert. Es gibt eine Vielzahl von Methoden, diese Funktion zu konstruieren, die mit verschiedenen Annahmen behaftet sind. Beispielsweise wird von Salvino *et al.* [91] eine Methode vorgeschlagen, bei der Vorhersagen mehr als einen Zeitschritt in die Zukunft gemacht werden und die Vergangenheit der nächsten Nachbarn mit eingeht.

In der Praxis wird jedoch meist ein lokal konstanter *Prädiktor* von t auf $t+1$ verwendet, weil hier möglichst wenig Annahmen über die Natur des dynamischen Systems gemacht werden müssen. Seien die nächsten Nachbarn von \vec{x}_t in einem m -dimensionalen euklidischen Raum mit einem Abstand kleiner ϵ durch \vec{y}_t^k , $k = 0, \dots, n(t) - 1$ gegeben. Der vorhergesagte Wert für x_{t+1} berechnet sich dann aus

$$F(x_t) = \frac{1}{n(t)} \sum_{k=0}^{n(t)-1} y_{t+1}^k \quad (4.2)$$

F ist der Mittelwert aus den entsprechenden Koordinaten der nächsten Nachbarn (Abb. 4.1)

Wegen der Verwendung von verzögerten Koordinaten kann in den Gleichungen (4.1) und (4.2) statt dem Vektor \vec{x} die skalare Größe x benützt werden. Andernfalls würden alle Terme in (4.1) nicht einmal, sondern m Mal auftauchen. Dies würde am Resultat im Prinzip nichts ändern, aber einen unnötigen numerischen Aufwand darstellen.

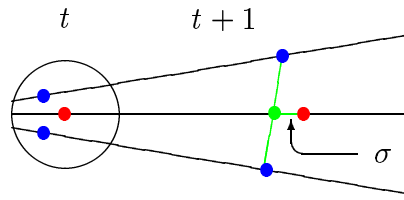


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung der Methode Fehler bei nichtlinearer Vorhersage

4.2 Korrespondierende Nachbarn

Im Gegensatz zu der im vorigen Abschnitt vorgestellten Methode werden nun keinerlei Annahmen über die Stärke des Einflusses von nächsten Nachbarn gemacht: in Gleichung (4.2) geht implizit ein, daß alle Nachbarn das gleiche Gewicht haben. In der nun vorgestellten Analyseverfahren bleibt auch der Abstand der Nachbarpunkte vom Referenzpunkt innerhalb einer ϵ -Umgebung unberücksichtigt. Da ein einfaches Maß entwickelt werden sollte, zählt nur die Tatsache, daß es sich um benachbarte Punkte handelt.

Ein weiterer wichtiger Unterschied ist, daß bei der Methode der nichtlinearen Vorhersagefehler wirkliche *in-sample* Vorhersagen gemacht werden. Bei dem in diesem Abschnitt behandelten Verfahren werden keinerlei Vorhersagen gemacht, die — wie eben erwähnt — die Annahme eines Modells voraussetzen. Es wird allein die Möglichkeit der Vorhersage, also die Vorhersagbarkeit quantifiziert.

Ausgangspunkt der Analyse ist wieder eine Zeitserie von Vektoren aus verzögerten Koordinaten \vec{x}_t , $t = 0, \dots, N - (m - 1)\tau - 1$ in einem Raum mit euklidischer Metrik.

Dann werden für jeden Punkt \vec{x}_t die nächsten Nachbarn \vec{y}_t^k , $k = 0, \dots, n(t) - 1$ bestimmt, die näher als ϵ an \vec{x}_t liegen.

Als nächstes berechnet man die Differenzen $\|\vec{y}_{t+t_f}^k - \vec{x}_{t+t_f}\|$ und bestimmt die Anzahl $n(t + t_f)$ derjenigen Nachbarn $\vec{y}_{t+t_f}^k$, für die zur Zeit $t + t_f$ die Differenz kleiner als ϵ ist. Diese Punkte sind also nicht nur zur Zeit t nächste Nachbarn von \vec{x}_t , sondern auch zur Zeit $t + t_f$ nächste Nachbarn von \vec{x}_{t+t_f} .

Für ein dynamisches System, das sich nach deterministischen Regeln ent-

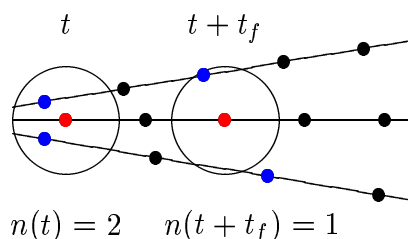


Abbildung 4.2: Schematische Darstellung der Methode der korrespondierenden Nachbarn

wickelt und nicht chaotisch ist, erwartet man, daß der Quotient

$$\eta(t, t_f) = \frac{n(t + t_f)}{n(t)} \quad (4.3)$$

den Wert 1 annimmt, während η für ein stochastisches System gegen 0 geht. Für ein chaotisches System sollte η als Funktion von t_f abnehmen.

In Abbildung 4.2 ist die Grundidee des vorgestellten Algorithmus für divergierende Trajektorien vereinfacht dargestellt.

Die Vorhersagbarkeit der Zeitserie wird dann als gewichtetes Mittel von $\eta(t, t_f)$ über die gesamte Zeitserie definiert:

$$H(t_f) = \sum_t p(t) \eta(t, t_f) \quad (4.4)$$

Die Wahrscheinlichkeiten $p(t) = n(t) / \sum_t n(t)$ werden über die Besetzungen der einzelnen Elemente der Überdeckung (vgl. Abschnitt 2.6.3) definiert. In dieser Summe werden nur diejenigen Elemente der Überdeckung, die mindestens einen Nachbarpunkt enthalten, berücksichtigt. Ferner wird bei der Abschätzung von $p(t)$ der Mittelpunkt des Überdeckungselements mitgezählt.

Um die Zeitserie über eine skalare Größe zu charakterisieren, wird die mittlere Vorhersagezeit MPT (*mean prediction time*) gemäß

$$\text{MPT} = \frac{1}{t_{f\max}} \sum_{t_f=1}^{t_{f\max}} H(t_f) \quad (4.5)$$

eingeführt. Wenn nicht anders erwähnt, wird als maximale Vorhersagezeit $t_{f\max} = N - (m - 1)\tau - 1$ verwendet.

In Abschnitt 3.3 wurde erwähnt, daß sich nichtlineare Maße auch durch lineare Korrelationen beeinflussen lassen, speziell gilt dies für die Korrelationssumme. In Abschnitt 4.2.2 wird gezeigt, daß zwischen der Methode der korrespondierenden Nachbarn und der Korrelationsentropie ein enger Zusammenhang besteht. Aus diesem Grund werden bei der praktischen Berechnung diejenigen Nachbarpunkte ausgenommen, deren zeitlicher Abstand vom Referenzpunkt kleiner als die Autokorrelationszeit t_{\min} ist.

4.2.1 Resultat bei Gleichverteilung

Der Quotient (4.3) ist für stochastische Prozesse nicht exakt Null, sondern hängt von der Auflösung ϵ der Partition bzw. der Überdeckung und der Verteilung der Werte der Zeitserie ab.

Für stochastische Prozesse mit einem gleichverteilten Wahrscheinlichkeitsspektrum wurde die mittlere Vorhersagezeit analytisch berechnet. Im wesentlichen müssen dabei zwei Fälle unterschieden werden.

Der mittlere Abstand zweier Punkte unter Gleichverteilung in m Dimensionen ist

$$\bar{\epsilon} = N^{-1/m} \quad (4.6)$$

Da in Gleichung (4.4) nur mindestens zweifach besetzte Elemente berücksichtigt werden – Mittelpunkt und ein Nachbarpunkt — hängt die Anzahl der Summanden von ϵ ab.

Fall 1 $\epsilon \gg \bar{\epsilon}$: Alle Elemente gehen in die Summe ein und man erhält für die mittlere Vorhersagezeit

$$\text{MPT} \approx \frac{\pi^{m/2}}{\frac{m}{2} \Gamma(\frac{m}{2})} \epsilon^m \quad (4.7)$$

In Abbildung 4.3 ist das Ergebnis aus 10 Simulationen und das theoretische Resultat dargestellt.

Fall 2 $\epsilon \lesssim \bar{\epsilon}$: Es werden Abweichungen auftreten, weil nicht mehr alle Elemente mindestens zwei Punkte enthalten werden und sich somit die Anzahl der Punkte reduzieren wird. Die Anzahl der Terme wurde mittels charakteristischer Funktionen über die kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung der

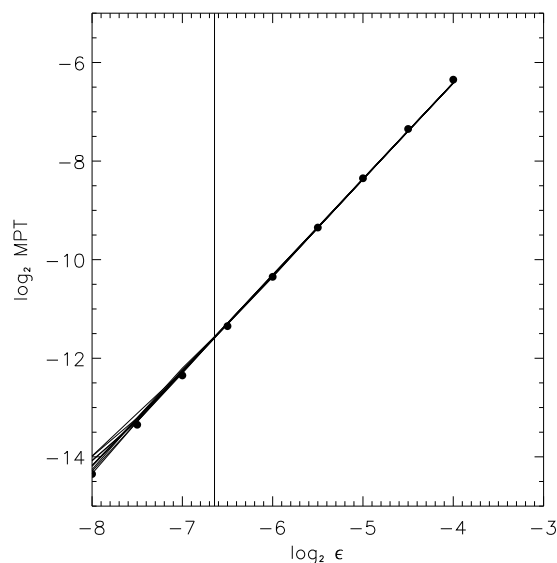


Abbildung 4.3: MPT als Funktion der Auflösung ϵ für 10 stochastische Zeitserien mit Gleichverteilung. $N = 10000$, $m = 2$, $\tau = 2$, $t_{f\max} = 1000$. Die senkrechte Linie ist bei $\epsilon = \bar{\epsilon}$. Die Punkte stellen das theoretische Ergebnis nach Gleichung (4.7) dar,

Abstände im m -dimensionalen euklidischen Raum berechnet.

$$N(\epsilon) = \frac{N}{2\pi} \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \frac{1}{it} (e^{ity} - e^{-it\epsilon^2}) \phi_{\epsilon^2}^m(t) dt \quad (4.8)$$

$$\phi_x(t) = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) e^{ixt} dx \quad (4.9)$$

$N(\epsilon)$ ist dabei die Anzahl der Punkte, die mindestens einen Nachbarn in einer Entfernung kleiner ϵ haben.

Auf eine numerische Auswertung dieses Integrals wurde im Rahmen dieser Arbeit nicht eingegangen. Im wesentlichen werden bei kleinen ϵ nur noch die stärker besetzten Gebiete berücksichtigt, was zu einer Erhöhung der Vorhersagbarkeit führt. Die Abweichung nach oben ist auch in Abbildung 4.3 zu sehen. Weitere Abweichungen sind möglich durch Randeffekte, vor allem bei höherdimensionalen Einbettungen, wenn der relative Anteil der Randzellen zunimmt.

Für nicht gleichverteilte Zeitserien wird das Ergebnis eine andere Form haben. Qualitativ finden sich jedoch keine großen Unterschiede, wie beispiels-

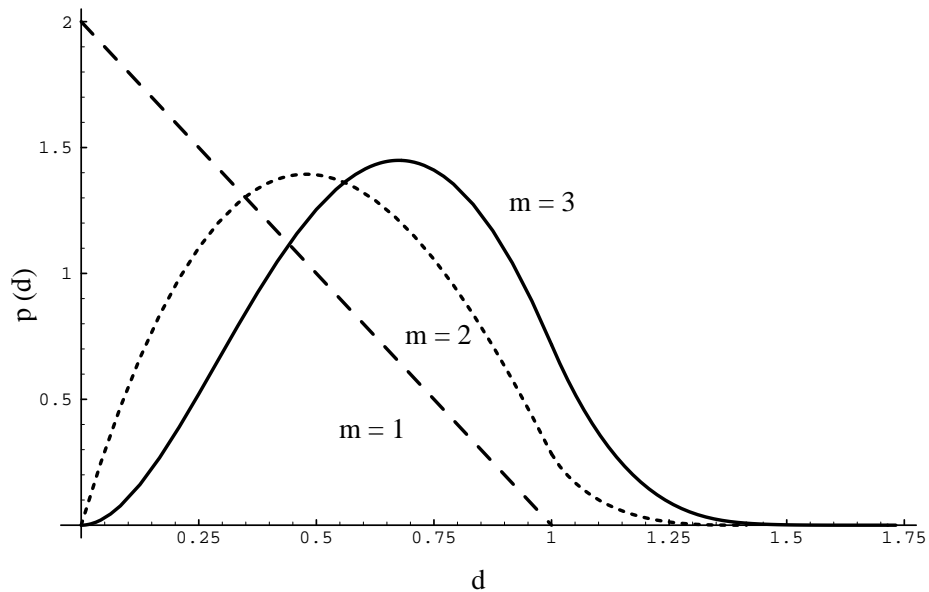


Abbildung 4.4: Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Abstand d zweier Punkte im euklidischen Raum bei Gleichverteilung der einzelnen Koordinaten in einer (gestrichelt), zwei (gepunktet) und drei (durchgezogen) Dimensionen.

weise in der Größenordnung der Vorhersagbarkeit.

Der Einfluß der Randbereiche läßt sich durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Abstände zweier Punkte im euklidischen Raum zeigen.

Für $m = 1, 2, 3$ wurde diese Wahrscheinlichkeitsverteilung abschnittsweise über Faltungsintegrale analytisch berechnet. Der Abstand d zweier Punkte \vec{x} und \vec{y} ist in der euklidischen (L^2) Metrik definiert als

$$d = \left(\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \quad (4.10)$$

Im eindimensionalen Fall hat die Wahrscheinlichkeitsverteilung die Form

$$p(d) = \begin{cases} 0 & d \leq 0 \\ 2(1-d) & 0 < d \leq 1 \\ 0 & 1 < d \end{cases} \quad (4.11)$$

Für $m = 2$ erhält man

$$p(d) = \begin{cases} 0 & d \leq 0 \\ 2d(\pi + d^2 - 4d) & 0 < d \leq 1 \\ 2d(-2 - d^2 + 4\sqrt{d^2 - 1} - 2 \arcsin(1 - \frac{2}{x^2})) & 1 < d \leq \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} < d \end{cases} \quad (4.12)$$

Im drei Dimensionen schließlich wird die Wahrscheinlichkeit der Abstände durch

$$p(d) = \begin{cases} 0 & d \leq 0 \\ 2d \left(2\pi d - 3\pi d^2 + 4d^3 - \frac{d^4}{2} \right) & 0 < d \leq 1 \\ 2d \left(-\frac{1}{2} + 3\pi - 4\pi d + 3d^2 + 3\pi d^2 + d^4 - 4\sqrt{-1 + d^2} - 8d^2\sqrt{-1 + d^2} + 2d^2 \arcsin\left(1 - \frac{2}{d^2}\right) - 4d^2 \arcsin\left(\frac{1}{d}\right) + 4d^2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{-1+d^2}}{d}\right) \right) & 1 < d \leq \sqrt{2} \\ 2d \left(-\frac{5}{2} - 3d^2 - \frac{d^4}{2} + 4d^2\sqrt{-2 + d^2} - 4\sqrt{\frac{-2+d^2}{(-1+d^2)^2}} + 4d^2\sqrt{\frac{-2+d^2}{(-1+d^2)^2}} - 2 \arcsin\left(1 - \frac{2}{-1+d^2}\right) - 2d^2 \arcsin\left(1 - \frac{2}{-1+d^2}\right) - 4d^2 \arctan\left(\frac{-3+d^2}{2\sqrt{-2+d^2}}\right) + 4d \arctan\left(\frac{\sqrt{-2+d^2}}{d(2-d^2)}\right) - 4 \arctan\left(\frac{\sqrt{\frac{-2+d^2}{(-1+d^2)^2}}(3-4d^2+d^4)}{2(-2+d^2)}\right) - 4d \arctan\left(\frac{\sqrt{\frac{-2+d^2}{(-1+d^2)^2}}(-1-d^2+3d^4-d^6)}{2d(-2+d^2)}\right) \right) & \sqrt{2} < d \leq \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} \leq d \end{cases} \quad (4.13)$$

beschrieben.

In Abbildung 4.4 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für diese drei Fälle dargestellt.

Im Gegensatz dazu gilt in unbegrenzten Intervallen, daß die Anzahl der Abstände d , die im wesentlichen gleich der Anzahl der Punktpaare ist, die den Abstand $d \dots d + dx$ voneinander haben, die folgenden Charakteristiken hat

$$m = 1 \quad p(d) \propto d^0$$

$$\begin{aligned} m = 2 & \quad p(d) \propto d^1 \\ m = 3 & \quad p(d) \propto d^2 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Ohne Randeﬀekte skaliert die Anzahl der Punktpaare in der Entfernung d mit der GröÙe der $(m-1)$ -dimensionalen Oberﬂäche. Die oben gefundenen signifikant anderen Formen der Wahrscheinlichkeitsverteilung beruhen also auf den Randeﬀekten durch die endliche GröÙe des Zustandsraumes beschränkter Systeme.

Daß Randeﬀekte die statistischen Schwankungen dominieren können, ist ein bekanntes Phänomen aus der Theorie der statistischen Punktprozesse [88].

Sei in einem orthogonalen, euklidischen, endlichen, m -dimensionalen Raum eine homogene Partition aus quadratischen Einheitszellen gegeben, wobei in jeder Dimension n Zellen vorliegen. Die Gesamtzahl aller Zellen ist folglich n^m . Werden als Randzellen N_0 diejenigen Zellen definiert, die weniger als 4 angrenzende Zellen haben, so gilt

$$N_0 = n^m - (n-2)^m \tag{4.15}$$

Diagonal aneinanderstoßende Zellen zählen dabei nicht als Nachbarzellen. Die relative Anzahl der Randzellen gehorcht dann näherungsweise der folgenden Beziehung

$$\frac{N_0}{N} \approx \frac{2m}{N^{1/m}} \tag{4.16}$$

Bereits in zwei oder mehr Dimensionen ist folglich der Fehler durch Randeﬀekte von mindestens der gleichen GröÙenordnung wie die statistischen Schwankungen.

In Abbildung 4.5 ist der Verlauf der relativen Anzahl von Randpunkten nach Gleichung (4.15) als Funktion der Anzahl der Zellen je Dimension für verschiedene Dimensionen dargestellt. Die Randeﬀekte im Fall $m = 2$ entsprechen dem Einfluß durch statistische Schwankungen nach dem zentralen Grenzwertsatz.

4.2.2 Korrelationsentropie

Die Kolmogorov-Sinai Entropie zweiter Ordnung $h^{(2)}$ wird auch als Korrelationsentropie bezeichnet, weil sie über die Korrelationssumme (3.6) berechnet werden kann [33]. Unter verschiedenen Annahmen kann der gewichtete Mittelwert der korrespondierenden Nachbarn (4.4) in Relation zu $h^{(2)}$ gebracht werden.

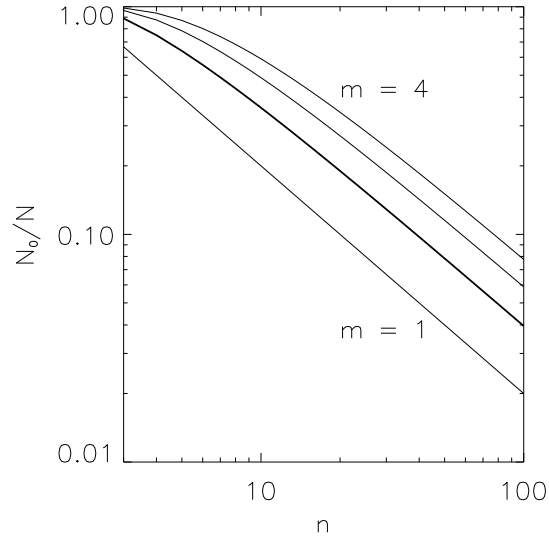


Abbildung 4.5: Die relative Anzahl der Randzellen nach Gleichung (4.15) für $m = 1, \dots, 4$ Dimensionen als Funktion der Anzahl n der Zellen je Dimension. Die hervorgehobene Kurve stellt den zweidimensionalen Fall dar.

Verwendet man den Mittelpunkt der Überdeckungselemente nicht bei der Abschätzung der Wahrscheinlichkeiten so gilt

$$H(t_f) = \frac{\sum_{t=0}^{N_{t_f}-1} n(t+t_f)}{\sum_{t=0}^{N_t-1} n(t)} \quad (4.17)$$

mit $N_t = N - (m-1)\tau$ und $N_{t_f} = N_t - t_f$. Unter Verwendung der Formel für die Korrelationssumme erhält man für die Maximumsnorm für Vorhersagezeiten $t_f = \tau, \dots, m\tau$

$$H(t_f) = \frac{N_{t_f}(N_{t_f}-1)C^{(2)}(m + \frac{t_f}{\tau}, \epsilon, \tau)}{N_t(N_t-1)C^{(2)}(m, \epsilon, \tau)} \quad (4.18)$$

Für den Fall $t_f = \tau$ folgt im Grenzfall

$$h^{(2)} = -\frac{1}{\tau} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \log \frac{N_t}{N_t - 2} H(t_f = \tau) \quad (4.19)$$

Das Maß der korrespondierenden Nachbarn stellt in diesem Sinne eine Erweiterung der Korrelationsentropie auf Zustände dar, die sowohl weiter als τ als auch nicht ganzzahlige Vielfache von τ in der Zukunft liegen.

Eine andere Erweiterung der Korrelationsentropie wurde in [17, 94] als ϵ -*information flow* eingeführt, die ebenfalls den Abfall der Korrelationssumme mit zunehmender Vorhersagezeit beschreibt. Dabei wurde im wesentlichen die Definition der KS-Entropie auf

$$h_p^{(q)} = \frac{1}{p\tau} \sup_{\mathcal{P}_\epsilon} \lim_{m \rightarrow \infty} I^{(q)}(m+p) - I^{(q)}(m) \quad (4.20)$$

erweitert und diese Gleichung als partitionsabhängige Größe über Korrelationssummen ausgewertet.

4.2.3 Lokale KS-Entropie

Ähnlich wie im vorherigen Abschnitt kann man den Bruchteil der korrespondierenden Nachbarn (4.3) als lokale Form der KS-Entropie $h^{(1)}$ auffassen.

Ausgehend von Gleichung (2.42) für die KS-Entropie wird eine partitions- und dimensionsabhängige Größe

$$h^{(1)}(m, \epsilon) = \frac{1}{\tau} (I^{(1)}(m+1, \epsilon) - I^{(1)}(m, \epsilon)) \quad (4.21)$$

definiert [115]. Für die Shannon-Information einer Partition \mathcal{P}_ϵ mit k Elementen gilt

$$I^{(1)}(m, \epsilon) = - \sum_{i=0}^{k-1} p_k \log p_k \quad (4.22)$$

Als Näherung für die Wahrscheinlichkeit p_k wird die Besetzungsdichte des jeweiligen Partitionselements verwendet. Unter Annahme der Ergodizität (siehe Abschnitt 2.5) kann man das Scharmittel über die Partitionselemente durch das Zeitmittel über die einzelnen Zustände ersetzen und erhält

$$I^{(1)}(m, \epsilon) = - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log p_{k(i)} \quad (4.23)$$

Hier steht $p_{k(i)}$ für die Wahrscheinlichkeit des Partitionselements, in dem sich das System zur Zeit i befindet. Macht man nun den Übergang von einer Partition auf eine Überdeckung mit den einzelnen Zuständen \vec{x}_i als Mittelpunkte der Überdeckungselemente, so gilt näherungsweise

$$p_{k(i)} \approx P(\vec{x}_i, \epsilon/2) \equiv P_i(m, \epsilon/2) \quad (4.24)$$

Die Wahrscheinlichkeit $P_i(m, \epsilon/2)$ errechnet sich dann aus der Anzahl der nächsten Nachbarn n_i von \vec{x}_i in einer m -dimensionalen Sphäre mit Radius

$\epsilon/2$. Für kleine Besetzungen existiert eine Korrektur [30]

$$\log P_i(m, \epsilon/2) = \Psi(n_i + 1) - \log N + \frac{(-1)^{n_i+1}}{n_i + 1} \quad (4.25)$$

mit der Digamma-Funktion

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x) \quad (4.26)$$

Die lokale Shannon-Information ist demnach

$$I_i^{(1)}(m, \epsilon) = -\log P_i(m, \epsilon/2) \quad (4.27)$$

und die lokale KS-Entropie [115]

$$h_i^{(1)}(m, \epsilon) = -\frac{1}{\Delta t} \log \frac{P_i(m+1, \epsilon/2)}{P_i(m, \epsilon/2)} \quad (4.28)$$

Mit Gleichung (4.3) erhält man daraus, wenn die Korrektur (4.25) nicht angewendet wird,

$$h_i^{(1)}(m, \epsilon) = -\frac{1}{\Delta t} \log \eta_{\epsilon/2}(i, \tau) \quad (4.29)$$

Die KS-Entropie beschreibt die Rate, mit der das System Information produziert. Somit können die lokalen Terme als Indikator dafür verwendet werden, wo im System Information produziert oder vernichtet wird. Diese Größen sind jedoch konstruktionsbedingt partitionsabhängig und stellen keine Systeminvarianten dar. Die Größe η kann jetzt also dahingehend interpretiert werden, daß im Falle hoher lokaler Vorhersagbarkeit — $\eta \lesssim 1$ — wenig Information produziert wird. Für stochastische Systeme mit beliebig geringer Vorhersagbarkeit (siehe Abschnitt 4.2.1) divergiert die lokale KS-Entropie wie erwartet.

Lokale Maße können für Analysen verwendet werden, bei denen man daran interessiert ist, die Verteilung der Vorhersagbarkeit oder der Informationsproduktion im Zustandsraum zu charakterisieren. Globale Maße bzw. skalare Größen kann man dann aus der Häufigkeitsverteilung der lokalen Maße erhalten, wie beispielsweise Mittelwert, Median, Standardabweichung. Diese Vorgehensweise wird oftmals bei der Klassifikation von verschiedenen Systemzuständen angewandt und die Teststatistik muß nicht notwendigerweise informationstheoretisch oder im Sinne von nichtlinearen Eigenschaften interpretierbar sein.

4.3 Temperatur-Analogen

In diesem Abschnitt wird eine weitere Möglichkeit, Determinismus in Zeitserien zu beschreiben, vorgestellt. Sie besteht aus einer Erweiterung einer von Kaplan und Glass [51, 52] vorgeschlagenen Methode, die die Parallelität von benachbarten Trajektorien als Maß für nichtlinearen Determinismus verwendet. Dabei wurden nur die Richtungen der Differenzvektoren

$$\vec{v}_i = \vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i \quad (4.30)$$

berücksichtigt, der Betrag der \vec{v}_i ging bei diesem Verfahren nicht ein.

Eine erste Weiterentwicklung dieser Methode ist in [121] beschrieben. Darin berechnen die Autoren das mittlere normierte Schwankungsquadrat der Differenzvektoren in einer ϵ -Umgebung jedes Punktes. Diese Größe wird als lokaler Translationsfehler (*translation error*) bezeichnet. Zur globalen Beschreibung der Zeitserie über eine skalare Größe wird der Median der Verteilung dieser lokalen Translationsfehler verwendet.

Das in dieser Arbeit verwendete Maß läßt sich als Analogon zur Temperatur interpretieren. Für die thermische Energie in einem Ensemble von Teilchen der Masse M gilt (siehe z. B. [89])²

$$kT = M \overline{(v - \bar{v})^2} \quad (4.31)$$

Die Größen \bar{v} sind das jeweilige Ensemblemittel. Dementsprechend wird als lokale Temperatur die Größe

$$T_i = \frac{p_i}{n(i) - 1} \left(\sum_{k=0}^{n(i)-1} (\vec{v}_i^k)^2 - \frac{1}{n(i)} \left(\sum_{k=0}^{n(i)-1} \vec{v}_i^k \right)^2 \right) \quad (4.32)$$

eingeführt. Die relative Häufigkeit p_i entspricht der aus Gleichung (4.4). Die Vektoren \vec{v}_i^k sind die Differenzvektoren der k nächsten Nachbarn mit $k = 0, \dots, n(i) - 1$ des Mittelpunkts des Überdeckungselements i .

Als diskriminierende Größe für Tests mit Surrogaten wird das Mittel der Verteilung der T_i verwendet. Die Statistik T ist demnach das gewichtete Mittel der Stichprobenstandardabweichung der Verteilung der Differenzvektoren, jeweils in einem Element der Überdeckung.

Die zugrundeliegende Idee ist, daß die lokale Temperatur für deterministische Prozesse geringer ist als für stochastische.

²Diese Beziehung gilt im eindimensionalen Fall; für m Dimensionen steht auf der linken Seite mkT .

Das mittlere Schwankungsquadrat von Geschwindigkeiten dient auch zur Berechnung des Diffusionskoeffizienten κ in der Fokker-Planck Gleichung (Gleichung (B.12) in Abschnitt B.3)

Kapitel 5

Surrogate

Bei der Zeitserienanalyse mit Surrogaten handelt es sich um statistische Hypothesentests, um die Vereinbarkeit der gemessenen Zeitserie mit bestimmten Modellen zu zeigen oder zu widerlegen.

In diesem Abschnitt wird zuerst die Problemstellung erklärt, die sich mit Surrogaten lösen läßt. Nach der Vorstellung des statistischen Formalismus des *Bootstrapping*, auf dem die Analyse mit Surrogaten basiert, werden unterschiedliche Verfahren zur Erzeugung der Surrogate erläutert. Dabei werden die jeweils geprüften Nullhypothesen und mögliche Fehlerquellen aufgezeigt.

5.1 Motivation

In der nichtlinearen Dynamik ist eine der am häufigsten gestellten Fragen an einen zu untersuchenden Datensatz, ob das zugrundeliegende System chaotischer Natur ist. Diese Frage ist aber oftmals nicht eindeutig zu beantworten (s. a. Kapitel 2), da die Größen, die das Vorliegen von Chaos hinreichend charakterisieren, in der Praxis selten zuverlässig zu berechnen sind.

Deswegen ist es vorteilhaft, zuerst die notwendigen Bedingungen für chaotisches Verhalten zu überprüfen. Nichtlinearität ist eine dieser Eigenschaften, die verhältnismäßig zuverlässig überprüfbar ist.

Man versucht dabei zu zeigen, daß der beobachtete Datensatz nicht von einem möglicherweise verrauschten, linearen Prozeß herrührt. Sowohl der Rauschanteil als auch mögliche Verzerrungen der Amplituden durch den Einfluß einer Meßfunktion können dabei nichtlineares Verhalten vortäuschen.

Da man meist nur einen einzelnen Datensatz, beispielsweise eine skalare

Zeitreihe x_t , $t = 0, \dots, N - 1$ vorliegen hat, konstruiert man sich aus diesen Daten eine Anzahl von Ersatzdatensätzen, sogenannte Surrogate x'_t , die bestimmte Eigenschaften mit den Originaldaten gemein haben, und weist nach, daß sich die Originaldaten signifikant von den Surrogaten unterscheiden. Speziell wird man dabei darauf achten, daß die Surrogate Realisationen eines linearen Prozesses, der möglicherweise von Rauschen überlagert wird, sind.

Die prinzipielle Vorgehensweise kann also folgendermaßen skizziert werden:

1. Berechnung einer geeigneten Größe T aus den Daten. Diese Teststatistik T ist sensitiv auf nichtlineares Verhalten und liefert einen skalaren Wert, z. B. den mittleren Fehler bei nichtlinearer Vorhersage (s. Abschnitt 4.1), die mittlere Vorhersagezeit (s. Abschnitt 4.2), die mittlere Temperatur im Sinne von Abschnitt 4.3 oder den maximalen Lyapunov-Exponenten.
2. Beantwortet der Wert T für sich schon die Frage nach Nichtlinearität? Können lineare Prozesse bereits ausgeschlossen werden, beispielsweise durch einen zweifelsfrei positiven Wert des maximalen Lyapunov-Exponenten?
3. Falls dies nicht zutrifft, ist das Spektrum der Werte für mögliche lineare Prozesse bekannt?
4. Falls nicht, wird T für eine Anzahl von Surrogaten, die mit einer bestimmten Nullhypothese verträglich sind, berechnet.
5. Ist der Wert von T der Originaldaten vereinbar mit dem erhaltenen Spektrum der Surrogate?
6. Falls dies zutrifft, sind die Daten eine Realisation eines linearen Zufallsprozesses. Falls dies nicht zutrifft, dann sind die Daten möglicherweise¹ nichtlinear.

¹Möglicherweise deswegen, weil durch den positiven Ausgang eines Hypothesentest lediglich eine Wahrscheinlichkeitsaussage gemacht werden kann (siehe auch Abschnitt 5.6).

5.2 Hypothesen Tests

5.2.1 Nullhypothesen

Der Zweck eines statistischen Hypothesentests ist die Quantifizierung einer Wahrscheinlichkeit, ob ein bestimmtes Ereignis (Zeitreihe) mit einer durch die Hypothese gegebenen Erklärung in Einklang steht oder nicht.

Im Rahmen dieser Arbeit wird es das Ziel sein, die Unverträglichkeit der Daten mit bestimmten Modellen zu zeigen. Speziell sollen lineare Prozesse zur Erklärung des vorliegenden Datensatzes ausgeschlossen werden.

Formal kann man die verschiedenen Arten von Hypothesen, die für die nicht-lineare Zeitserienanalyse in Frage kommen, wie folgt klassifizieren [115]:

Sei \mathcal{F} die Menge der möglichen Prozesse und $\mathcal{F}_{H_0} \subset \mathcal{F}$ eine Untermenge von Prozessen, die mit der Nullhypothese H_0 vereinbar sind.

Die Nullhypothese besagt nun, daß der Prozeß F , der den Daten zugrunde liegt, ein Element von \mathcal{F}_{H_0} ist.

Es können zwei Arten von Nullhypothesen unterschieden werden [90]

- Bei einer *einfachen* Nullhypothese wird ein einzelner Prozeß getestet. Die Anzahl der Elemente $\#\{\mathcal{F}_{H_0}\} = 1$.
- Bei einer *zusammengesetzten* Nullhypothese wird eine ganze Familie von Prozessen getestet. Hierbei ist die Anzahl $\#\{\mathcal{F}_{H_0}\} > 1$.

Ein Beispiel für eine einfache Nullhypothese ist: „Bei den Daten handelt es sich um statistisch unabhängige, Gaußsche Zufallszahlen GRN mit Mittelwert 0 und Standardabweichung 1.“ In diesem Fall ist $F = \text{GRN}(0, 1)$ und $\#\{\mathcal{F}_{H_0}\} = 1$.

Eine zusammengesetzte Nullhypothese ist analog, aber der Mittelwert μ und die Standardabweichung σ können beliebige Werte annehmen. Formal gilt nun: $F(\mu, \sigma) = \text{GRN}(\mu, \sigma)$ und $\#\{\mathcal{F}_{H_0}\} > 1$

In der Literatur werden die Größen, mit denen sich eine Familie von Prozessen parametrisieren läßt, im oben gegebenen Beispiel μ und σ , auch als *nuisance parameters* bezeichnet [115].

Im allgemeinen wird in der nichtlinearen Zeitserienanalyse die Nullhypothese zusammengesetzt sein, da man eine ganze Klasse von linearen Prozessen ausschließen und nicht für jedes einzelne Modell einen Hypothesentest durchführen will.

Entscheidung	Wirklichkeit	
	H_0 wahr	H_0 falsch
für H_0	richtig	Fehler 2. Art
gegen H_0	Fehler 1. Art	richtig

Tabelle 5.1: Mögliche Ereignisse und Bezeichnungen bei Hypothesentests (z. B. nach [90])

5.2.2 Testparameter

Bei statistischen Hypothesentests spielen zwei Testparameter eine wichtige Rolle.

- Die Größe α des Tests ist die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese zu verwerfen, obwohl sie richtig ist. Man nennt α auch den *Fehler 1. Art* oder die Rate der Falschpositiven.
- Die Macht β ist die Wahrscheinlichkeit dafür, die Nullhypothese abzulehnen, wenn sie falsch ist. Der komplementäre Wert $1 - \beta$ heißt auch *Fehler 2. Art*.

In Tabelle 5.1 werden die Zusammenhänge veranschaulicht.

In dieser Arbeit werden die Hypothesentests als einseitige Tests durchgeführt. Die verwendeten Teststatistiken machen Aussagen über die Vorhersagbarkeit mit nichtlinearen Algorithmen. Falls in den Daten nichtlinearer Determinismus vorliegt, so sollte diese Vorhersagbarkeit besser sein als bei den Surrogaten, die Realisierungen von linearen Zufallsprozessen sind.

Die Größe α ist ein Parameter, der durch die Anzahl der Surrogate vorgegeben wird. Verwendet man $k - 1$ Surrogate, so ist die Gesamtzahl der Zeitserien in einem Versuch gleich k und die Wahrscheinlichkeit, daß T_{dat} in einem einseitigen Test den kleinsten (oder größten) Wert hat, obwohl H_0 zutrifft, ist $1/k$. Diese Wahrscheinlichkeit ist genau der Fehler 1. Art. Für ein vorgegebenes α benötigt man $1/\alpha - 1$ Surrogate, z. B. $k = 9$ für $\alpha = 0.1$. Für einen zweiseitigen Test würde man demgemäß $1/(2\alpha) - 1$ Surrogate benötigen.

Die Macht β ist der prozentuale Anteil der richtig verworfenen H_0 bei einer Reihe von mehreren Versuchen.

5.3 Statistischer Hintergrund

Die Zeitserienanalyse mittels Surrogaten folgt einem Prinzip, das in der Statistik als *Bootstrapping* bekannt ist [22, 117].

Die ursprüngliche Zielsetzung in der Statistik war es, Konfidenzintervalle für eine statistische Größe T anzugeben, die anhand nur eines einzelnen vorliegenden Datensatzes berechnet wurde, wie z. B. der Kreuzkorrelationskoeffizient zwischen zwei Zahlenfolgen x und y .

Für die Angabe eines Fehlers ist die Kenntnis der Verteilung von T erforderlich, deren zweites zentrales Moment als Fehler angegeben werden kann. Man kann nun entweder bestimmte Annahmen, wie z. B. Normalverteilung von x und y , machen und die Verteilung von T analytisch berechnen oder versuchen, über Monte-Carlo Realisationen die empirische Verteilungsfunktion der gewünschten Größe T zu ermitteln. Die zweite Möglichkeit ist annahmefrei, erfordert jedoch einen wesentlich größeren numerischen Aufwand als die analytische Alternative:

... one might be willing to perform a billion operations to analyze 500 numbers.

B. Efron [21]

Das klassische *Bootstrapping* [21] besteht aus der Erzeugung von Ersatzdaten (Monte-Carlo Realisationen) durch das *Ziehen mit Zurücklegen* von N Werten aus den vorhandenen N Datenpunkten. Man berechnet T für viele ($\mathcal{O}(10^3)$) dieser Realisationen und definiert den Fehler als die Hälfte des Intervalls der zentralen 68% der erhaltenen empirischen Verteilung.

In der Anwendung auf Zeitserienanalyse wird *Bootstrapping* dazu verwendet, Modelle für gemessene Daten zu testen [117]. Ausgehend von den Daten wird ein bestimmtes Modell gewählt und die Größe T für viele Realisationen dieses Modells berechnet. Ist der Wert T_{dat} vereinbar mit der erhaltenen Verteilung von T , so wird das Modell akzeptiert. Im Zusammenhang der Zeitserienanalyse fand eine Erweiterung des Begriffes *Bootstrapping* auf Verfahren statt, bei denen die Ersatzdaten auch auf andere Weise als im Originalkontext geschildert erzeugt werden können, beispielsweise durch Realisationen eines ARMA-Modells mit unterschiedlichen Gaußschen Störungen (siehe auch Abschnitt 5.5.3).

Das Ziel bei allen Verfahren wie dem klassischen *Bootstrapping* oder der Zeitserienanalyse mit Surrogaten ist die Bestimmung der empirischen Verteilungsfunktion einer statistischen Größe T über Monte-Carlo Realisationen eines hypothetisch angenommenen zugrundeliegenden Modells.

5.4 Realisierungen

Bei der Erzeugung von Ersatzdaten geht man üblicherweise so vor, daß man ausgehend von der Nullhypothese ein Modell wählt, die Modellparameter anhand der Daten bestimmt und mit diesen die Surrogate erzeugt.

Man unterscheidet dabei zwischen typischen (*typical*) und eingeschränkten (*constrained*) Realisierungen des zugrundeliegenden Prozesses [115].

5.4.1 Typische Realisierung

Man wählt ein spezifisches $F \in \mathcal{F}_{H_0}$ und bestimmt die Parameter, z. B. für einen ARMA(n,m) Prozeß, aus den Daten. Dieses Modell verwendet man dann als Grundlage zur Erzeugung von Surrogaten. Bei endlicher Länge der Zeitserie wird die Bestimmung der Modellparameter aus den Surrogaten jedoch zu unterschiedlichen Werten führen.

Im Bild eines Urnenexperiments entspricht eine typische Realisierung dem *Ziehen mit Zurücklegen* mit einer aus den Daten ermittelten Häufigkeitsverteilung. Im Normalfall wird man nicht die identische Verteilung erhalten.

Aufgrund dieser möglichen Abweichungen in den Modellparametern oder wenn man zusammengesetzte Hypothesen testen möchte, muß die verwendete Statistik T verteilungsfrei (*pivotal*) sein [90, 115]. Die möglichen Werte von T müssen unabhängig von den Modellparametern sein.

Das klassische *Bootstrapping*-Verfahren beruht auf typischen Realisierungen und wäre ohne diese Abweichungen sinnlos (vgl. Abschnitt 5.3). Die Methode der typischen Realisierungen wird man vor allem bei der Bestimmung von Konfidenzintervallen von berechneten Größen wählen.

5.4.2 Eingeschränkte Realisierung

Im Gegensatz zu typischen Realisierungen, bei denen Abweichungen von den Modellparametern zugelassen werden, fordert man bei eingeschränkten Realisierungen, daß die Parameter exakt übereinstimmen. Die gewünschten Eigenschaften werden den Surrogaten direkt aufgeprägt. Wegen der exakten Übereinstimmung braucht die Teststatistik T nicht verteilungsfrei zu sein.

Im bereits oben erwähnten Beispiel des Urnenexperiments entspricht diese Vorgehensweise dem *Ziehen ohne Zurücklegen*. Die Häufigkeitsverteilung wird exakt reproduziert, nur die Reihenfolge der Ereignisse ändert sich.

Für Hypothesentests in der nichtlinearen Zeitserienanalyse ist diese Methode besser geeignet, da die verwendeten Teststatistiken relativ kompliziert und somit meist nicht verteilungsfrei sind. Ferner wird man im allgemeinen zusammengesetzte Nullhypothesen testen und sich nicht auf bestimmte Parameterwerte — beispielsweise eines ARMA-Modells — festlegen wollen.

Im folgenden werden Methoden vorgestellt, mit denen man Surrogate erzeugen kann, die in bestimmten Eigenschaften, die von der Wahl der Nullhypothese abhängen, exakt mit den Originaldaten übereinstimmen.

5.5 Methoden und Nullhypothesen

5.5.1 Gaußsches Rauschen

Die einfachste Nullhypothese ist von der Art „Bei den Daten handelt es sich um weißes Rauschen mit Gaußschem Amplitudenspektrum.“ Der zugrundeliegende Prozeß liefert also unabhängige und identisch verteilte Zufallszahlen (IID). Die Surrogate haben die Form

$$x'_t = \eta_t \tag{5.1}$$

Je nach Natur der vorliegenden Zeitserie, werden sich Daten und Surrogate gegebenenfalls auch in ihren linearen Eigenschaften leicht unterscheiden lassen.

5.5.2 Permutation

In diesem Fall ist die Nullhypothese, daß es sich bei den Daten um eine Folge von unkorrelierten Zufallszahlen mit einem nicht notwendigerweise Gaußschem Amplitudenspektrum handelt.

Dies ist beispielsweise der Fall, wenn eine Folge aus gaußverteilten Zufallszahlen durch eine möglicherweise nichtlineare, statische, monotone Meßfunktion h , die das Amplitudenspektrum bestimmt, gemessen wird.

$$x'_t = h(\eta_t) \tag{5.2}$$

Die Surrogate erhält man nun aus den Daten durch Permutation der Originalwerte. Diese *ingeschränkte* Realisierung entspricht im Bild eines Urnenexperiments dem *Ziehen ohne Zurücklegen*. Eine *typische* Realisierung wäre

Ziehen mit Zurücklegen, so daß im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ zwar das Amplitudenspektrum der Surrogate vom Original nicht mehr zu unterscheiden ist, für endliche N jedoch Abweichungen bestehen, die eine nicht-verteilungsfreie Teststatistik T beeinflussen können (vgl. Kapitel 5.4).

Durch Permutation werden auch alle eventuell vorhandenen linearen Korrelationen in den Daten zerstört. Dies ist dann deutlich an der Form der Autokorrelationsfunktion zu sehen. Daten und Surrogate können in diesem Fall auch mit linearen Methoden leicht voneinander unterschieden werden.

5.5.3 Fourier-Methode

Im Gegensatz zu Abschnitt 5.5.1, in dem die Surrogate Gaußsches weißes Rauschen waren, betrachtet man nun Gaußsches farbiges Rauschen als mögliche Erklärung der gemessenen Daten. Surrogate und Daten haben nun das gleiche Leistungsspektrum.

Somit entspricht die hier betrachtete Nullhypothese dem Fall, daß die Daten Produkt eines stationären, linearen Prozesses mit Gaußschen Zufallszahlen η_i als externe Störung sind. Diese Klasse von Prozessen wird durch ARMA(n,m) Modelle beschrieben.

$$x'_t = \sum_{i=1}^n a_i x'_{t-i} + \sum_{j=1}^m b_j \eta_{n-j} \quad (5.3)$$

Die a_i beschreiben den autoregressiven (AR) Teil des Prozesses. Sie legen fest, mit welchem Gewicht welche Werte der Zeitserie aus der Vergangenheit den gegenwärtigen Wert beeinflussen. Sie sind das lineare Gedächtnis des Prozesses. Durch die b_j wird der Wirkung der externen Störung η_j beschrieben. Die Abkürzung MA steht für *moving average*, den gleitenden Mittelwert. MA-Modelle werden auch als FIR (*finite impulse response*) bezeichnet, weil die Störung η_j nach m Zeitschritten keinen Einfluß mehr auf x_t hat. Im Gegensatz dazu beeinflußt eine Störung bei reinen AR-Modellen alle nachfolgenden Werte. Sie werden deshalb auch als IIR (*infinite impulse response*) Modelle bezeichnet. Dies folgt aus der Tatsache, daß ein endliches AR(n)-Modell als unendliches MA-Modell dargestellt werden kann [9, 124].

Man erhält diese FT-Surrogate dadurch, daß man die Daten nach Fourier transformiert, die Phasen der Fourierkoeffizienten randomisiert, und dann wieder rücktransformiert. Das Leistungsspektrum als Betragsquadrat der Fourierkoeffizienten bleibt erhalten, während die Werte im Ortsraum nun nach Gauß verteilt sind. Die Verteilung der Werte im Ortsraum oder auch

die Häufigkeitsverteilung der einzelnen x_i wird im folgenden als Amplitudenspektrum bezeichnet.

Das Leistungsspektrum legt über das Wiener-Khinchin Theorem die Autokorrelationsfunktion fest, die wiederum die linearen Eigenschaften eines ARMA-Prozesses bestimmt. Streng genommen bleibt bei Anwendung des FT-Algorithmus nur die zirkuläre Autokorrelationsfunktion unverändert [86, 115]. Dies liegt daran, daß die gebräuchlichen FFT-Routinen davon ausgehen, daß die (endliche) Zeitserie periodisch fortgesetzt werden kann (vgl. Abschnitt 3.4).

In diesem Szenario lassen sich Daten und Surrogate gegebenenfalls leicht durch Vergleich des Amplitudenspektrums voneinander unterscheiden. Nicht-lineare Statistiken können auch durch die geänderte Häufigkeitsverteilung im Zustandsraum beeinflußt werden.

5.5.4 Amplitudentreue Fourier-Methode

Nach Vorschlägen von Theiler *et al.* [113, 114] kann man das Problem des unterschiedlichen Amplitudenspektrums, wie es in Abschnitt 5.5.3 geschildert wurde, folgendermaßen umgehen.

Man erzeugt eine Folge von gaußverteilten Zufallszahlen y und ordnet die einzelnen Werte so um, daß sie dem Rang nach den Originaldaten x entsprechen, d. h. der maximale Wert hat in beiden Zeitserien den gleichen Index, ebenso der zweitgrößte, *etc.* Von dieser permutierten Folge y' erzeugt man sich gemäß Abschnitt 5.5.3 ein Surrogat y'' . Dann ordnet man die Daten x gemäß dem Rang von y'' . Das Surrogat x' ist somit eine Permutation von x , unter der Bedingung, daß das Leistungsspektrum möglichst erhalten bleibt. Im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ wird das Spektrum exakt erhalten [100].

Für die Surrogate gilt die Annahme

$$x'_t = h(s_t) \tag{5.4}$$

wobei s_t nach Gleichung (5.3) berechnet wird. Die Nullhypothese besagt also, daß es sich bei den Daten um einen verrauschten linearen Prozeß handelt, der durch eine Funktion h (siehe Abschnitt 5.5.2) gemessen wurde.

5.5.5 Iterationsmethode

Die in den folgenden Abschnitten der praktischen Analyse verwendeten Surrogate wurden fast ausschließlich nach einem Algorithmus von Schreiber und

Art der Surrogate	Amplitudenspektrum	Leistungsspektrum
GAUSS	Nein	Nein
PERM	Ja	Nein
FT	Nein	Ja
AAFT	Ja	Gut ($\mathcal{O}(10^{-2})$)
ITAAFT	Ja	Ja ($\mathcal{O}(10^{-4})$)

Tabelle 5.2: Gemeinsame Eigenschaften von Surrogaten und Daten bei unterschiedlichen Methoden. Die Größenordnungen in der letzten Spalte bei AAFT und ITAAFT schätzen den relativen Fehler in der Autokorrelationsfunktion bei `A.dat` (s. Abschnitt 6.1) ab.

Schmitz [100] erzeugt. Diese Methode basiert auf einer Erweiterung des unter Abschnitt 5.5.4 vorgestellten Verfahrens. Dabei wird die Anpassung des Leistungsspektrums und des Amplitudenspektrums so lange iteriert, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht wird. Diese läßt sich durch die relative Abweichung der Autokorrelationsfunktion der Surrogate von derjenigen der Originaldaten. Der relative Fehler wird definiert als

$$\sigma = \frac{\sum_{\tau} (\rho_c^{\text{dat}}(\tau) - \rho_c^{\text{sur}}(\tau))^2}{\sum_{\tau} (\rho_c^{\text{dat}}(\tau))^2} \quad (5.5)$$

Die Nullhypothese entspricht der aus Abschnitt 5.5.4.

In Tabelle 5.2 sind die Eigenschaften der Surrogate bei den verschiedenen Methoden zusammengestellt.

5.6 Fehlerquellen

Es ist wichtig zu bemerken, daß durch die Verwendung von Surrogaten zum Nachweis von Nichtlinearitäten auch im Falle der Ablehnung der Nullhypothese mathematisch streng genommen nichts bewiesen wurde. Es wurde lediglich gezeigt, daß es aufgrund der Abweichung von T_{dat} der Daten vom Spektrum der Surrogate unwahrscheinlich ist, daß die Daten von einem mit H_0 verträglichen Prozeß erzeugt wurden.

Die zusätzliche Angabe von σ -Intervallen, um die Stärke der Abweichung zu quantifizieren, ist gerechtfertigt, wenn das Spektrum von T_{sur} annähernd gaußförmig ist. Diese Bedingung ist nicht immer erfüllt.

Nachfolgend werden bekannte und im Rahmen dieser Arbeit erstmals entdeckte Fehlerquellen kurz aufgeführt.

- Oftmals können Daten und Surrogate schon durch einfache visuelle Inspektion unterschieden werden. In diesen Fällen ist es oftmals unnötig, aufwendige nichtlineare Verfahren zur Diskriminierung zu verwenden.
- Lineare Korrelationen haben oftmals starken Einfluß auf nichtlineare Teststatistiken. Besonders die häufig verwendete Korrelationssumme (siehe Abschnitt 3.3) ist in dieser Hinsicht anfällig [111].
- Nichtstationarität in den Daten kann dazu führen, daß sich Daten und Surrogate voneinander unterscheiden, weil Surrogate konstruktionsbedingt stationär sind. Prominent ist beispielsweise der Fall von nichtstationären stochastischen Zeitserien, die Nichtlinearität durch Konvergenz der Korrelationssumme vortäuschen [77]. Es gibt Ansätze zur Erzeugung von Surrogaten, die auch weitergehende Eigenschaften, wie z.B. die gleitende Varianz, erhalten (siehe [98, 99]). Diese werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit jedoch nicht angewandt.
- Die gebräuchlichen Routinen zur Fouriertransformation gehen davon aus, daß die Zeitserie periodisch fortgesetzt werden kann. Große Differenzen zwischen dem ersten und letzten Punkt der Zeitserie können zu artifiziellen Hochfrequenzanteilen im Fourierspektrum führen [113].
- Die Qualität der Surrogate sollte überprüft werden, um falsche Schlußfolgerungen zu vermeiden. Dies kann beispielsweise mit Surrogaten zweiter Ordnung, also Surrogaten von Surrogaten, durchgeführt werden. Zum einen kann so die Rate der Falschpositiven geeicht werden [116]. Zum anderen wird in Kapitel 6.1.2 ein Fall ausführlich diskutiert, daß auch die Macht β durch Artefakte bei der Erzeugung der Surrogate so beeinflußt werden kann, daß beispielsweise der Nachweis von nichtlinearem Verhalten selbst bei extrem stark verrauschten Daten noch möglich scheint.
- Als Teststatistik sollten verschiedene Algorithmen verwendet werden. Wenn es sich, wie bei den in Abschnitt 4 vorgestellten, um Ansätze unterschiedlicher Art handelt, besteht eine geringere Gefahr, daß die zu untersuchenden Zeitserien in allen Methoden ähnliche Artefakte hervorruft. Konsistenz in den Ergebnissen läßt den Schluß auf das Vorhandensein von Nichtlinearitäten leichter rechtfertigen.

Kapitel 6

Anwendungen

Dieses Kapitel enthält die Anwendung der in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellten Verfahren zum Nachweis von nichtlinearem Determinismus in Zeitserien. Es werden sowohl Zeitserien aus mathematischen Modellen wie aus Experimenten analysiert. Der Nachweis der Nichtlinearitäten wird über Hypothesentests mit verschiedenen Surrogaten geführt.

Die Laserdaten wurden vom Santa Fe Institut anlässlich eines Wettbewerbs in der Vorhersage von Zeitserien veröffentlicht. Es handelt sich um zeitliche Schwankungen in der Intensität eines Infrarot-Lasers. Im Rahmen des Nachweises von Nichtlinearitäten in der künstlich verrauschten Zeitserie wird ein bisher unbekanntes Artefakt bei der Erzeugung von Surrogaten mit bestimmten Verfahren entdeckt, das sich signifikant auf die Bestimmung der Leistungsfähigkeit von Detektionsalgorithmen auswirkt. Werden bei der Analyse Surrogate verwendet, die das Amplitudenspektrum und (nahezu) das Leistungsspektrum der Originaldaten besitzen, so lassen sich diese signifikant mit nichtlinearen Verfahren von ihren Surrogaten diskriminieren. Surrogate unterscheiden sich in diesem Fall von Surrogaten dieser Surrogate. Dieses Ergebnis wird im Detail untersucht.

Die Erprobung der in Abschnitt 4 eingeführten Methoden im Umfeld verrauschter nichtlinearer Zeitserien steht bei der Analyse des Lorenz-Systems im Vordergrund.

Der beiden letzten Abschnitte befassen sich mit gemessenen Zeitserien aus dem Sonnensystem. Es werden nichtlineare Eigenschaften in Datensätzen, die vom Proton Monitor auf dem Satelliten SOHO stammen, nachgewiesen. Die Verfahren aus Abschnitt 4 werden auf Messungen der Dichte und der Geschwindigkeit von Protonen angewendet, die bisher nicht in dieser zeitlichen

Auflösung zur Verfügung standen. Bei den in der Literatur veröffentlichten Untersuchungen [67, 68, 69] zur Existenz von nichtlinearem Determinismus im Sonnenwind kamen Surrogate zum Einsatz, die entweder das Amplitudenspektrum oder das Leistungsspektrum mit den Originaldaten gemein hatten. In dieser Arbeit werden erstmal Surrogate verwendet, die beide Aspekte berücksichtigen. Ferner wird anhand dieser stark linear korrelierten Daten das in Abschnitt 3.3 erwähnte Artefakt bei der Berechnung der Korrelationssumme und deren Interpretation als Attraktordimension demonstriert.

Zum Nachweis von nichtlinearen Eigenschaften in der Sonnenflecken-Aktivität werden die monatlichen Mittelwerte seit 1749 analysiert. Neben den bekannten Surrogaten aus Abschnitt 5 wird eine zusätzliche Variante eingeführt, die die spezielle Eigenschaft der Zeitasymmetrie der Originaldaten in den einzelnen Zyklen beibehält.

6.1 FIR-Laser

In diesem Abschnitt werden Intensitätsschwankungen eines NH_3 -FIR Lasers [40] untersucht. Diese Zeitserie war Teil eines vom Santa Fe Institut ausgeschriebenem Wettbewerbs über Zeitserienvorhersage [124].¹

Die Parameter wurden bei der Durchführung des Experiments so gewählt, daß die Intensitätsschwankungen bei diesem Laser annähernd durch das in Abschnitt 6.2 behandelte Lorenz-Modell beschrieben werden können [40]. Die gemessene Zeitserie entspricht in dieser Näherung der z -Komponente des Lorenz-Systems (Gleichung 6.2).

Der bei dem Experiment verwendete A/D-Wandler hat eine Auflösung von 8 bit, so daß die ganzzahligen Werte der Zeitserie zwischen 0 und 255 liegen.² Für den Wettbewerb stand ein Datensatz von 1000 Punkten zur Verfügung (`A.dat`). Nach Beendigung wurde der gesamte Datensatz von 25 000 Punkten (`A.full`) veröffentlicht, der zudem die doppelte Abtastrate von `A.dat` aufweist.

Die vorliegende Zeitserie zeigt periodische Schwankungen mit zunehmender Amplitude. Diese Oszillationen brechen bei Überschreiten eines kritischen Wertes zusammen, wobei sich Phase und die Startamplitude des folgenden

¹Unter `ftp://ftp.cs.colorado.edu/pub/Time-Series/SantaFe` sind die für den Wettbewerb ausgeschrieben Zeitserien erhältlich.

²Aus numerischen Gründen wird diese Zeitserie für die in dieser Arbeit durchgeführten Analysen auf das Intervall $[0,1]$ normiert. Auf den Wert von Invarianten hat diese Normierung keinen Einfluß (vgl. Abschnitt 2.6.2).

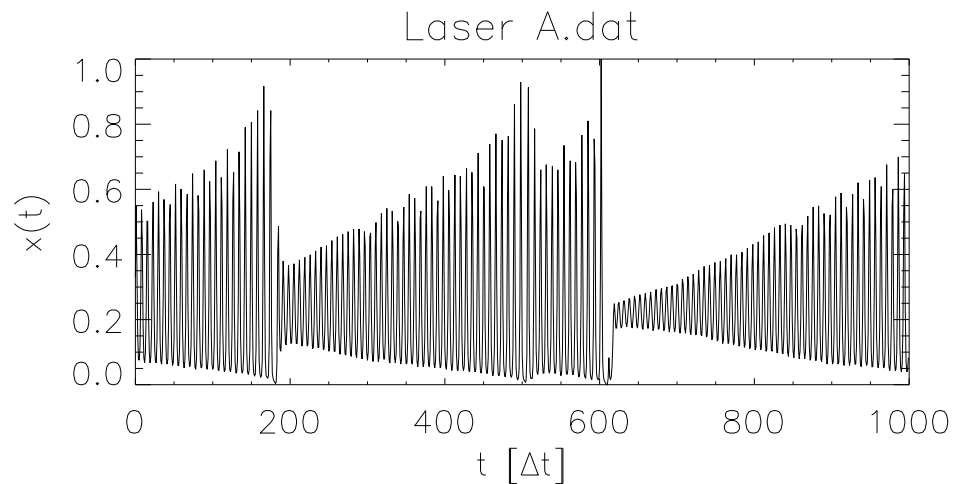


Abbildung 6.1: Der zeitliche Verlauf der Laserintensität `A.dat` normiert auf das Intervall $[0,1]$. Die Zeit t ist in Einheiten des Abtastintervalls ΔT gegeben. Die einzelnen Punkte sind in dieser Darstellung durch Linien verbunden.

Abschnitts regelmäßiger Oszillationen in nichttrivialer Weise ändern.

Abbildung 6.1 zeigt den Datensatz `A.dat`. Diese Zeitserie wird in der Literatur häufig als Referenzdatensatz verwendet, um neue Algorithmen an realen Systemen zu testen.

6.1.1 Nachweis nichtlinearer Eigenschaften

Korrespondierende Nachbarn

Mit der Methode der korrespondierenden Nachbarn wird die Vorhersagbarkeit als Funktion der Vorhersagezeit beschrieben. In Abbildung 6.2 (links) ist die Größe $H(t_f)$ aus Gleichung (4.4) für den Datensatz `A.full` und für ein AAF-T-Surrogat dargestellt. Die Parameter bei dieser Berechnung sind Einbettungsdimension $m = 5$, Verzögerungszeit $\tau = 3$ und Auflösung $\epsilon = 1/32$. Der minimale zeitliche Abstand $t_{\min} = 57$ wurde aus der Autokorrelationsfunktion ermittelt. Für diesen Wert ist die Einhüllende auf $1/e$ abgefallen.

Es ist deutlich zu sehen, daß die Vorhersagbarkeit für den Datensatz für einen größeren Bereich von t_f deutlich von Null verschieden ist, während sie für das Surrogat wie erwartet schnell auf Null abfällt. Die Fluktuationen für kleine t_f , die in beiden Fällen sichtbar sind, entstehen wenn die Bedingung

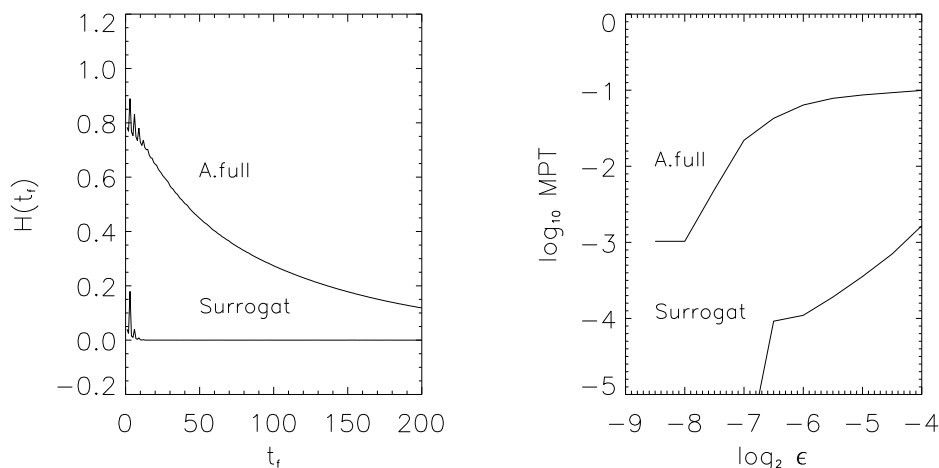


Abbildung 6.2: Links: Vorhersagbarkeit $H(t_f)$ für `A.full` und für ein Surrogat. Parameterwerte sind $m = 5$, $\tau = 3$, $t_{\min} = 57$ und $\epsilon = 1/32$.

Rechts: Die mittlere Vorhersagezeit MPT für diese beiden Zeitserien als Funktion der Auflösung ϵ . Die Unstetigkeiten bei kleinen Werten von ϵ beruhen auf der endlichen Auflösung der Zeitserie.

$t_f = d\tau$, $d = 1, \dots, m - 1$ erfüllt ist. Für diese Werte der Vorhersagezeit t_f gibt es übereinstimmende Koordinaten in den Vektoren aus verzögerten Koordinaten (vgl. auch Abschnitt 4.2.2) und die Vorhersagbarkeit ist größer.

Abbildung 6.2 (rechts) zeigt die gemittelte Vorhersagbarkeit MPT mit maximaler Vorhersagezeit $t_{f_{\max}} = 1000$ für verschiedene Auflösungen ϵ . Für einen weiten Bereich liegt die Vorhersagbarkeit für den Datensatz um zwei Größenordnungen über der des Surrogats.

An dieser Stelle ist anzumerken, daß ein Teil der Ergebnisse von Kaplan [50] auf den Einfluß von linearen Kurzzeitkorrelationen zurückzuführen sein dürfte. Es wurde in [50] gezeigt, daß das Maß zur Beschreibung von Determinismus, das in Abschnitt 4.3 kurz angesprochen wurde, für `A.dat` eine Erhöhung der Signifikanz für $\tau \approx 400$ aufweist. Dazu ist in Abbildung 6.3 die Vorhersagbarkeit für diesen Datensatz und der Einfluß linear korrelierter Punkte auf das Maß der korrespondierenden Nachbarn dargestellt. Die Parameter der Rechnung sind $m = 3$, $\tau = 2$ und $\epsilon = 1/32$. Im Fall $t_{\min} = 0$ erhält man um $t_f \approx 400 - 500$ eine erhöhte Vorhersagbarkeit, die im zweiten Fall für $t_{\min} = 33$ fast ganz verschwindet. Die zweite Spitze bei $t_f \approx 900$ entspricht dem doppelten dieses Intervalls. Aufgrund der endlichen Länge der Zeitserie

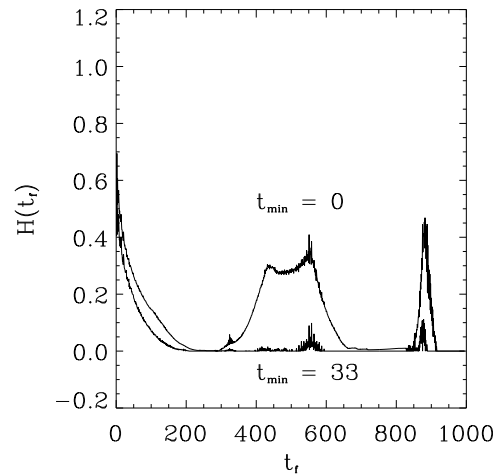


Abbildung 6.3: Vorhersagbarkeit $H(t_f)$ nach MPT von `A.dat` für $t_{\min} = 0$ und $t_{\min} = 33$. Die Beschränkung des Einflusses linear korrelierter Nachbarpunkte reduziert die Vorhersagbarkeit für $t_f \approx 400 - 500$ und $t_f \approx 900$ erheblich.

($N = 1000$) ist die zweite Spitze wesentlich schmaler. Die Wahl von t_{\min} beruht wie oben auf der Autokorrelationsfunktion, hier aufgrund der speziellen Form der Autokorrelationsfunktion auf dem Abfall der Einhüllenden. Der von Kaplan angesprochene Effekt kann aufgrund der vorliegenden Ergebnisse auf lineare Korrelationen zurückgeführt werden.

Verrauschte Daten

Die Diskrimination von unverrauschten Daten gegen Surrogate ist im vorliegenden Fall der Zeitserie `A.dat` nahezu trivial. In Abbildung 6.4 sind Datensatz und verschiedene Arten von Surrogaten dargestellt. Schon die visuelle Inspektion erlaubt eine eindeutige Diskriminierung. Auch die relativ einfache Teststatistik $T_{\text{rev}}(\tau) = \overline{(x_t - x_{t-\tau})^3}$ (siehe z.B. [101]), die die Zeitumkehrinvarianz beschreibt, führt zur Trennung.

Um die Trennschärfe der verschiedenen Algorithmen

- Korrespondierende Nachbarn (MPT)
- Fehler bei nichtlinearer Vorhersage (NPE)
- Temperaturanalogon (Thermo)

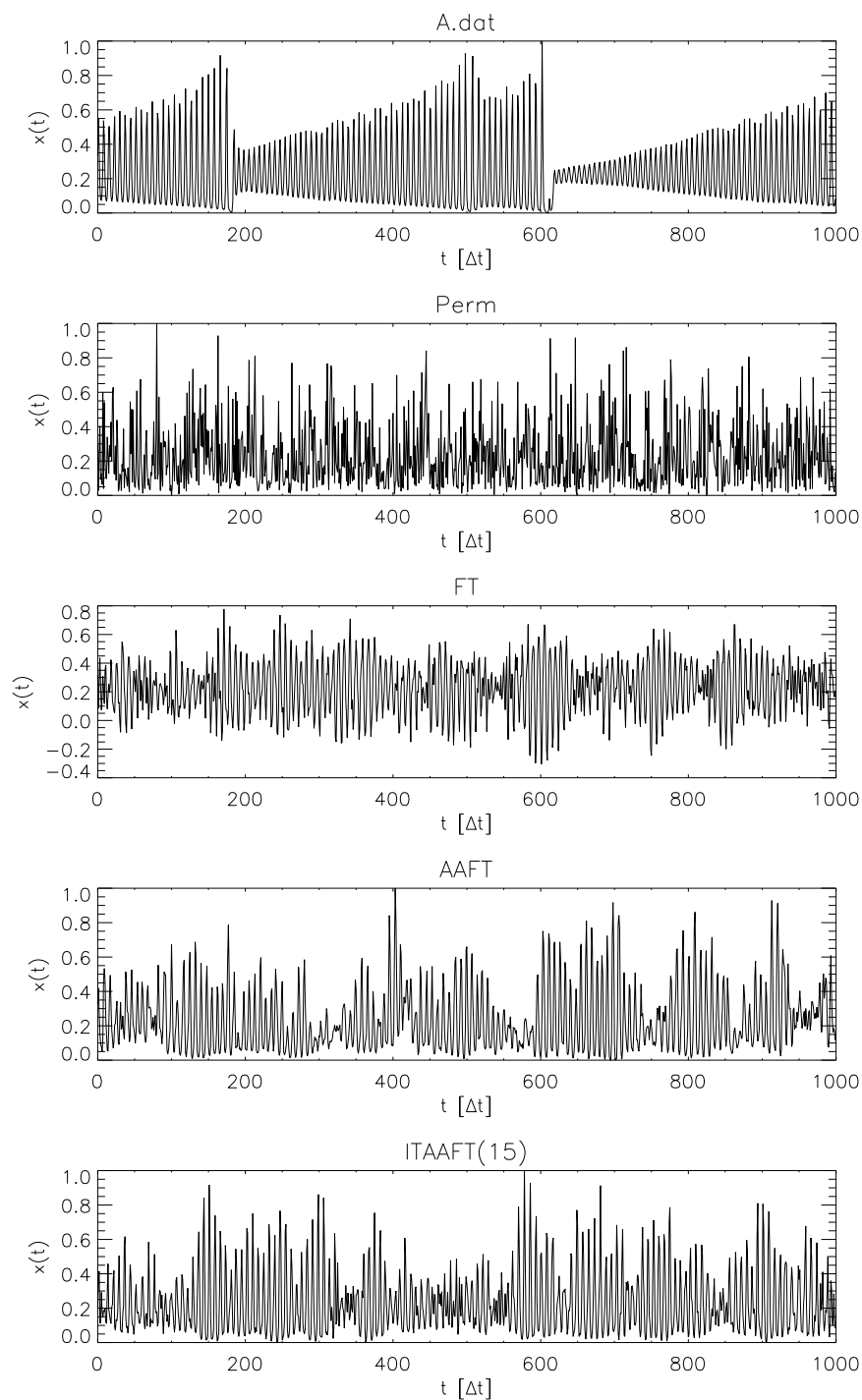


Abbildung 6.4: Die Laserzeitserie A.dat und verschiedene Surrogate: PERM, FT, AAFT, ITAAFT(15).

im Grenzbereich stark unterdrückter Nichtlinearitäten zu testen und die Diskriminationsraten zu vergleichen, wurde der Datensatz `A.dat` künstlich verrauscht. So wurden die Verfahren auf die Zeitserie

$$s_t = x_t + a \eta_t \quad (6.1)$$

angewendet, wobei hier das Rauschen η_t ein Surrogat von x ist. Bei der Verwendung von amplitudentreuen Surrogaten ist die Rauschamplitude a gleich dem reziproken Wert des Signal-zu-Rausch Verhältnisses $\text{SNR} = \sigma_x / \sigma_\eta$. Bei dieser Art Rauschen bleiben die linearen Eigenschaften von x erhalten; mit zunehmender Rauschamplitude a werden die Nichtlinearitäten immer mehr unterdrückt. Der Grund für diese Wahl des Rauschens liegt darin, daß die nichtlinearen Verfahren nicht durch Veränderungen in den linearen Eigenschaften bei Variation der Rauschamplitude beeinflusst werden sollten. Das Symbol ∞ in Tabelle 6.1 für den Wert der Rauschamplitude a ist so zu verstehen, daß der Grenzfall reinen Rauschens vorliegt.

In Abbildung 6.5 sind der verrauschte Datensatz ($a = 1.0, \eta = \text{FT}$) und fünf ITAAFT(15)-Surrogate gezeigt. Der wahre Datensatz ist der zweite von oben. In Abbildung 6.6 ist der relative Fehler nach Gleichung (5.5) in der Autokorrelationsfunktion dieser verrauschten Daten und iterierten Surrogaten dargestellt.

Es wurde gemäß den Ausführungen in Abschnitt 5.2 eine Reihe von Hypothesentests auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.1$ mit insgesamt 100 Realisationen von s_t durchgeführt.

Für die Parameter wurden sinnvolle *ad hoc* Annahmen gemacht. Jegliche Optimierung der Parameter für den Datensatz würde zu einer Verfälschung des Ergebnisses führen, wenn man nicht zusätzlich noch für jedes einzelne Surrogat optimiert. Dies würde einen für die Praxis nicht vertretbaren numerischen Aufwand darstellen. Es hat sich gezeigt, daß sich für einen weiten Bereich von Parametern die Ergebnisse von den hier vorgestellten nicht signifikant unterscheiden. Die hier verwendeten Werte sind $\epsilon = 1/16$, $m = 3$ und $\tau = 1$. Ferner wurde $t_{\min} = 17$ und $t_{f\max} = 10$ angenommen, um den Rechenaufwand für beide Methoden im selben Rahmen zu halten. Aus Abbildung 6.7 wird deutlich, daß größere Vorhersagezeiten nicht mehr signifikant zur mittleren Vorhersagezeit MPT beitragen, da der Bruchteil der korrespondierenden Nachbarn $H(t_f)$ nach Gleichung (4.4) für den mit einem FT-Surrogat der Amplitude $a = 1.0$ verrauschten Datensatz auf das Grundniveau abgefallen ist.

In Tabelle 6.1 sind die Ergebnisse für verschiedene Arten von Rauschen zusammengestellt. Zur Interpretation sind zuerst die folgenden Überlegungen

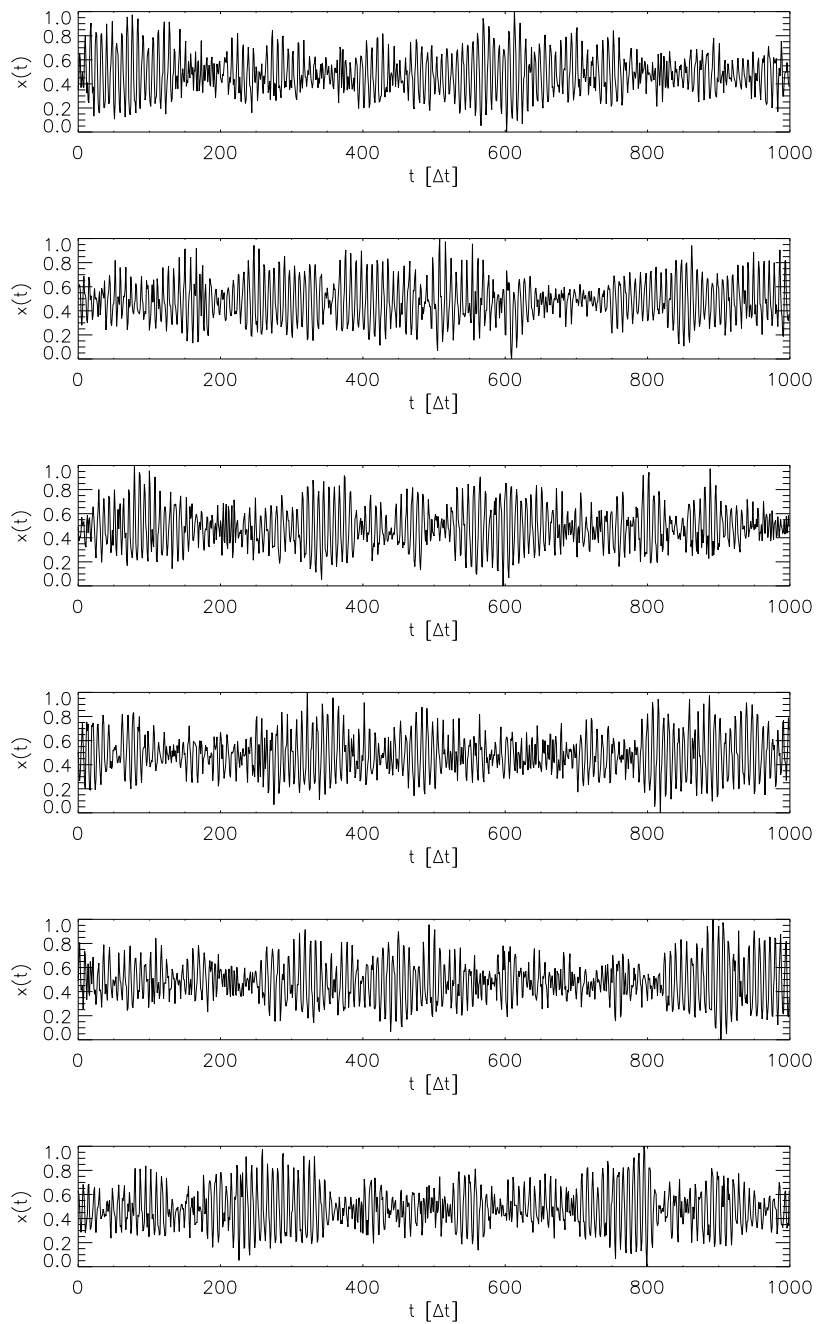


Abbildung 6.5: A.dat (2. von oben) mit FT-Rauschen ($a=1.0$) und fünf Surrogate der Art ITAAFT(15)

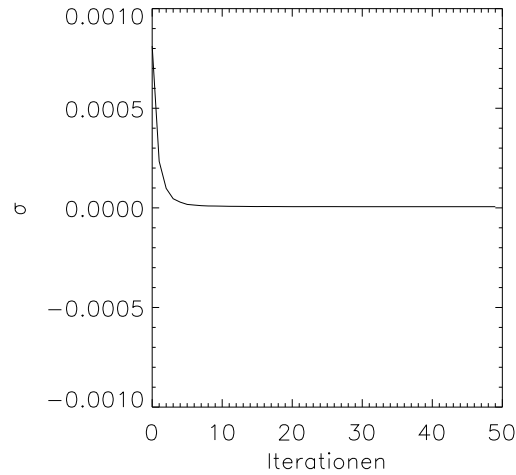


Abbildung 6.6: Der relative Fehler in der Autokorrelationsfunktion von ver-
rauschten `A.dat` ($a = 1.0, \eta = \text{FT}$) und ITAAFT-Surrogaten als Funktion der
Anzahl der Iterationen.

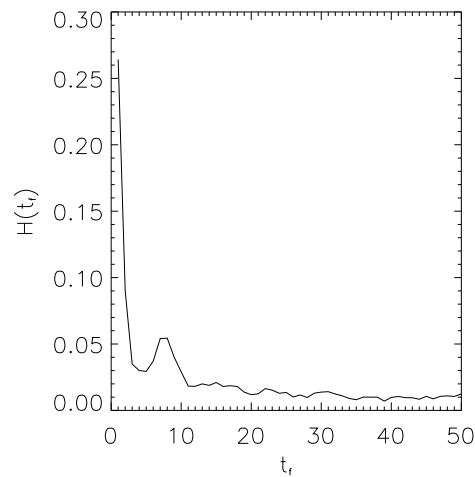


Abbildung 6.7: Die Vorhersagbarkeit für den mit einem FT-Surrogat der Am-
plitude $a = 1.0$ verrauschten Datensatz `A.dat`. Dargestellt ist Größe $H(t_f)$,
die den Bruchteil der korrespondierenden Nachbarn beschreibt, als Funktion
der Vorhersagezeit t_f . Als Parameter wurden $\epsilon = 1/16$, $m = 3$, $\tau = 1$ und
 $t_{\min} = 17$ gewählt.

wichtig. Im Grenzfall $a \rightarrow \infty$ gilt $s_t \rightarrow \eta_t$, weil der ursprüngliche Datensatz x vollständig unterdrückt wird. Es liegt ein reines Surrogat als Zeitserie vor. Man versucht in diesem Fall also im wesentlichen, ein Surrogat von dessen Surrogaten zu unterscheiden. Da beides Realisationen eines Zufallsprozesses sind, sollte dies dazu führen, daß der Bruchteil der erfolgreichen Detektionen β gegen die Größe des Tests α strebt: $\beta \rightarrow \alpha$.

Offensichtlich ist dies in den Fällen mit AAFT- und ITAAFT-Rauschen nicht gegeben. Im nächsten Abschnitt wird dieses Verhalten genauer untersucht werden.

Es wird ferner deutlich, daß die Methode der korrespondierenden Nachbarn bei den relevanten Fällen mit FT-Rauschen mit Rauschamplitude $a \in \{0.8, 1.0\}$ besser als die Methode der Fehler bei nichtlinearer Vorhersage abschneidet. Das Verfahren des Temperaturanalogons führt zu keiner sehr signifikanten Detektionsrate des verrauschten Datensatzes.

Die angegebenen Fehler (1σ -Intervalle) in Tabelle 6.1 und in den entsprechenden Tabellen in den folgenden Abschnitten basieren auf der Annahme, daß die Detektionsraten binomialverteilt sind.

Rauschen	Rauschamplitude a	Macht β für		
		NPE	MPT	Thermo
ITAAFT(50)	∞	0.69 ± 0.05	0.61 ± 0.05	0.31 ± 0.05
AAFT	∞	0.63 ± 0.05	0.33 ± 0.05	0.43 ± 0.05
FT	∞	0.09 ± 0.03	0.07 ± 0.03	0.03 ± 0.02
	0.8	0.87 ± 0.03	0.99 ± 0.01	0.32 ± 0.05
	1.0	0.64 ± 0.05	0.85 ± 0.03	0.26 ± 0.04

Tabelle 6.1: Die Macht β für die Verfahren NPE, MPT und Thermo für verschiedene Arten von Rauschen und Rauschamplituden, angewandt auf A.dat.

6.1.2 Artefakte bei Surrogaten

Wie im vorigen Abschnitt erwähnt wurde, treten bei manchen Arten von Surrogaten der Zeitserie A.dat Artefakte auf, die sich dahingehend äußern, daß sich Surrogate von ihren Surrogaten unterscheiden lassen. Bei den Methoden AAFT und ITAAFT erscheinen Surrogate 1. Ordnung weniger zufällig als Surrogate 2. Ordnung, obwohl es sich in beiden Fällen im Prinzip um Per-

Ordnung n	Macht β für NPE
1	0.72 ± 0.04
2	0.55 ± 0.05
3	0.40 ± 0.05
4	0.34 ± 0.05
5	0.33 ± 0.05
6	0.27 ± 0.04

Tabelle 6.2: Unterscheidung von ITAAFT(50)-Surrogaten unterschiedlicher Ordnung n von ihren Surrogaten

mutationen des Datensatzes unter größtmöglicher Beibehaltung der linearen Eigenschaften handelt.

Dieser Unterschied trat am deutlichsten bei der Methode der Fehler bei nicht-linearer Vorhersage unter Verwendung von ITAAFT Surrogaten auf. Aus diesem Grund wurden die hier vorgenommenen Analysen mit diesen Verfahren durchgeführt.

Die Verwendung von Surrogaten 2. Ordnung zur Kalibration der tatsächlichen Rate der Falschpositiven auf den nominellen Wert α wurde bereits in der Literatur vorgeschlagen [116]: Gegenstand der Analyse war dabei die zu niedrige Rate bei Verwendung von AR-Surrogaten, die im Gegensatz zu Fourier-basierten Algorithmen der Klasse der typischen Realisationen zuzurechnen sind (vgl. Abschnitt 5.4).

Ordnung der Surrogate

Für die folgende Tabelle wurden die Parameterwerte $m = 3$, $\tau = 1$, $\epsilon = 1/16$ und Surrogate der Art ITAAFT(50) verwendet. Auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.1$ wurden jeweils 500 Hypothesentests durchgeführt, bei denen versucht wurde, Surrogate der Ordnung n von Surrogaten der Ordnung $n + 1$ zu trennen.

Die Zahlenwerte spiegeln die Ergebnisse bei typischen Parameterwerten wider. Tests mit 100 Durchläufen in einem Intervall anderer Parameterwerte führten nicht zu signifikanten Abweichungen von den angegebenen Werten.

Eine Veränderung der Anzahl der Iterationen bei der Erzeugung von ITAAFT-Surrogaten resultierte in ähnlichen Ergebnissen und konnte das Auftreten

Simulation n	Macht β für NPE
1	0.63 ± 0.05
2	0.72 ± 0.04
3	0.74 ± 0.04
4	0.90 ± 0.03
5	0.10 ± 0.03
6	0.12 ± 0.03
7	0.12 ± 0.03

Tabelle 6.3: Die Größe β für die im Text beschriebenen Simulationen

des gefundenen unerwarteten Unterschieds zwischen Surrogaten verschiedener Ordnung nicht unterdrücken.

Reproduzierbarkeit mit anderen Zeitserien

In diesem Abschnitt wurde versucht, das vorher vorgestellte Verhalten bei Surrogaten von `A.dat` mit anderen ähnlichen Datensätzen zu reproduzieren: so wurden zum einen die Zeitserien des Lasers `A.dat` ($N = 1000$) und `A.full` ($N = 25000$) auf verschiedene Arten modifiziert; zum anderen wurde die am Anfang dieses Kapitels erwähnte Ähnlichkeit von `A.dat` zur z -Komponente des Lorenz-Systems benutzt und Untersuchungen mit verschiedenen Versionen dieser Zeitserie durchgeführt.

Die Ergebnisse aus den folgenden Simulationen sind in Tabelle 6.3 zusammenfassend dargestellt. An Anfang der Beschreibung steht der jeweils im Vordergrund stehende Aspekt der Simulation.

Die Parameter bei den Rechnungen sind $m = 3$, $\tau = 1$, $\epsilon = 1/16$, $\alpha = 0.1$. Es werden jeweils 100 Durchläufe des Hypothesentests ausgeführt. Die Anzahl der Iterationen bei der Erzeugung der Surrogate ist 50.

Simulation 1: Differenz zwischen ersten und letztem Punkt. Da bekannt ist, daß große Unterschiede in Anfangs- und Endpunkt einer Zeitserie zu artifiziellen Hochfrequenzanteilen im Leistungsspektrum der Surrogate führen [113, 114], wurde dieser Aspekt zuerst analysiert.³ Zwar liegt

³Fourierbasierte Surrogate jeder Ordnung haben konstruktionsbedingt keine künstlichen Sprünge zwischen Anfangs- und Endpunkt.

bei `A.dat` liegt kein Sprung vor, bei Verwendung der ersten 900 Punkte erhält man jedoch eine signifikante Differenz. Dies ruft aber an der Diskriminationsrate von Surrogaten erster gegen zweiter Ordnung keine wesentliche Veränderung hervor: $\beta = 0.63 \pm 0.05$.

Simulation 2: Abtastrate. Aus dem Datensatz `A.full` wurden die ersten 2048 Punkte ausgewählt. Dieser hat die doppelte Abtastrate von `A.dat`. Wie aus dem Wert von $\beta = 0.72 \pm 0.04$ ersichtlich ist, hat die Samplingrate der Zeitserie keinen Einfluß auf den Unterschied zwischen Surrogaten 1. und 2. Ordnung.

Simulation 3: Wahl des Zeitfensters. Es wurde ein Ausschnitt aus `A.full` ausgewählt, wobei nur jeder zweite Punkt verwendet wurde. Die Abtastrate entspricht so der von `A.dat`. Das Ergebnis zeigt jedoch, daß der Wert von β unabhängig von der Wahl des Ausschnitts ist. Die für dieses Ergebnis verwendete Zeitserie bestand aus den Punkten 92, 94, ..., 2138, also aus 1024 Werten.

Simulation 4: Länge der Zeitserie. Es wurde eine ausgedünnte Version von `A.full` mit einer resultierenden Gesamtlänge von 2048 Punkten verwendet. Damit läßt sich der Einfluß der Länge der Zeitserie unter Beibehaltung der Abtastrate von `A.dat` überprüfen. Das Ergebnis von $\beta = 0.90 \pm 0.03$ zeigt, daß die Diskriminationsmöglichkeit zwischen Surrogaten unterschiedlicher Ordnung mit zunehmender Anzahl von Datenpunkten zunimmt.

Simulation 5: Lineare Eigenschaften. Hier wurde die z -Komponente des Lorenz-Systems `Lor.z` mit Standardparametern (vgl. Abschnitt 6.2.1) verwendet. Die linearen Eigenschaften, die sich in der Autokorrelationsfunktion zeigen, sind denen von `A.dat` sehr ähnlich. Man erhält in diesem Fall die theoretisch erwartete Detektionsrate von $\beta = \alpha = 0.1$.

Simulation 6: Schiefe des Amplitudenspektrums. Das Amplitudenspektrum von `A.dat` ist nicht symmetrisch wie das der Lorenz z -Komponente. Um den möglichen Einfluß der Asymmetrie zu untersuchen, wurde die Transformation $z' = z \exp(z)$ auf die Zeitserie angewandt, um eine vergleichbare Verteilung der Werte zu erhalten. Auch in diesem Fall konnten Surrogate unterschiedlicher Ordnung nicht unterschieden werden, $\beta = 0.12 \pm 0.03$.

Simulation 7: Auflösung. Die Zeitserie aus der vorherigen Simulation 6 wurde zusätzlich auf eine Auflösung von 8 bit digitalisiert, um den Laserdaten `A.dat` auch in dieser Hinsicht ähnlicher zu werden. Selbst diese zusätzliche Bedingung führt nicht dazu, daß sich Surrogate der z -Komponente des Lorenz-Systems, die eine unterschiedliche Ordnung aufweisen, mit der Methode der nichtlinearen Vorhersagefehler voneinander unterscheiden lassen.

Zusammenfassend erscheinen die folgenden Aussagen als Folgerungen aus den Untersuchungen in diesem Abschnitt plausibel. In Klammern ist die Nummer der entsprechenden Simulation aufgeführt.

- Es handelt sich nicht um bekannte Artefakte, wie Unterschiede zwischen Anfangs- und Endwert der Zeitserie (1,3).
- Der Einfluß der Abtastrate kann in diesem Rahmen ausgeschlossen werden (2,3).
- Eine Verlängerung der Zeitserie hat einen verstärkenden Einfluß zur Folge (4).
- Es sind nicht die starken linearen Korrelationen in der Zeitserie allein, die für den Effekt verantwortlich sind (5).
- Die Form des Wertespektrums ist nach den durchgeführten Analysen nicht ausschlaggebend (6).
- Die Auflösung ist im untersuchten Rahmen nicht der Grund für die beobachtete Unterscheidbarkeit der Surrogate (7).

Auch Kombinationen von verschiedenen Aspekten — wie Schiefe der Werteverteilung, Auflösung, lineare Eigenschaften — ließen eine Reproduktion des Effekts mit der Zeitserie `Lor.z` nicht zu.

Es handelt sich folglich um eine inhärente Eigenschaft der Laserzeitserie `A.dat` bzw. `A.full`. Signifikanten Einfluß zeigt die Länge des Datensatzes. Dies liegt vermutlich daran, daß Surrogate der Art `AAFT` und `ITAAFT` im Prinzip Permutationen der Zeitserie sind, wobei das Leistungsspektrum möglichst genau reproduziert wird. Je länger die Zeitserie ist, desto genauer wird das Fourierspektrum aufgelöst (Nyquist-Frequenz) und desto strikter sind die Nebenbedingungen bei der Permutation der Zeitserie.

Wird statt `A.dat` eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallszahlen verwendet, die das gleiche Leistungsspektrum besitzen, also ein FT-Surrogat, tritt der beobachtete Unterschied nicht auf.

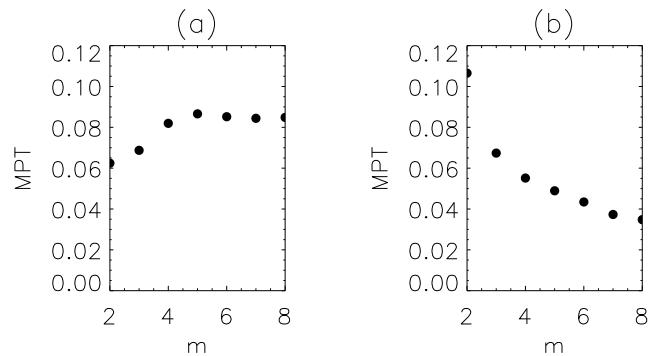


Abbildung 6.8: Abschätzung von Einbettungsdimension mit dem Verfahren der korrespondierenden Nachbarn. (a) zeigt die mittlere Vorhersagezeit als Funktion der Einbettungsdimension m für die Zeitserie A.full ($N = 25000$), (b) für A.dat ($N = 1000$).

6.1.3 Einbettungsdimension

Bei Verwendung des gesamten Datensatzes A.full kann mit dem Verfahren MPT die Einbettungsdimension abgeschätzt werden. Bei A.dat reicht die Anzahl der Punkte nicht aus, um bei höheren Einbettungsdimensionen relevante Ergebnisse zu erhalten, weil die Einflüsse durch Randeffekte zu stark werden (vgl. Abschnitt 4.2.1).

Abbildung 6.8 zeigt die mittlere Vorhersagezeit MPT für die Datensätze A.full und A.dat jeweils als Funktion der Einbettungsdimension m . Die Verzögerungszeiten sind ersten Fall $\tau = 3$, im zweiten $\tau = 1$.

Der rechte Teil zeigt den Verlauf von MPT für die kurze Zeitserie A.dat. Durch die geringe Anzahl von nur 1000 Datenpunkten ist das Sättigungsverhalten von A.full nicht zu beobachten und eine Bestimmung der Einbettungsdimension ist nicht möglich.

Wie bereits in Abschnitt 3.3 erläutert, beruht die Bestimmung der Einbettungsdimension mit der Methode der korrespondierenden Nachbarn auf der Reduzierung von falschen Nachbarn aufgrund von Projektionseffekte. Bei zu kleinen Dimensionen führen falsche Nachbarn zu schlechterem Vorhersageverhalten. Handelt es sich um eine gute Einbettung, dann wird MPT einen Sättigungswert erreichen. Im vorliegenden Beispiel wird dies bei etwa $m \approx 5$ erreicht. Dieser Wert wird auch in [50] als gute Wahl der Einbettungsdimension angegeben.

6.2 Lorenz-System

6.2.1 Beschreibung

Das Lorenz-System gehört zu den am häufigsten untersuchten Systemen in der nichtlinearen Dynamik. Die folgenden Gleichungen wurden von Lorenz [66] als Vereinfachung des Rayleigh-Bénard-Experiments aufgestellt

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{6.2}$$

Die in dieser Arbeit verwendeten Zeitserien wurden mit den Parameterwerten $\sigma = 16$, $b = 4$ und $r = 45.92$ berechnet. Zur numerischen Integration wurde ein Unterprogramm aus der NAG-Bibliothek verwendet, die auf dem Runge-Kutta Verfahren basiert. Der zeitliche Abstand zwischen den Punkten der Zeitserie ist $\Delta t = 0.08$. Die Punkte für $t \leq 1000$ wurden nicht verwendet, um Einflüsse durch das Einschwingverhalten auszuschließen. Die Länge der in diesem Abschnitt verwendeten Zeitserie beträgt 2048 Punkte.⁴

In Abbildung 6.9 wird ein Teil der in diesem Abschnitt verwendeten Zeitserie gezeigt. Die einzelnen Punkte sind in dieser Darstellung durch Linien verbunden. In der nächsten Abbildung 6.10 wird die gesamte Zeitserie über verzögerte Koordinaten mit $\tau = 1$ und $m = 3$ dargestellt. Die Ähnlichkeit dieser Struktur zur Form des Phasenraumbildes aus den kanonischen Variablen x , y und z nach Gleichung (6.2) in Abbildung 6.11 ist deutlich sichtbar.

6.2.2 Nachweis nichtlinearer Eigenschaften

In Abbildung 6.12 sind der zu untersuchende Datensatz und die nach den in Abschnitt 5.5 vorgestellten Methoden erzeugten Surrogate gezeigt. Wie bereits im vorigen Abschnitt 6.1.1 erwähnt wurde, ist die Unterscheidung der unverrauschten Daten von ihren Surrogaten oftmals trivial.

Im Grenzfall von verrauschten Datensätzen, wenn die nichtlinearen Eigenschaften stark unterdrückt werden, werden Unterschiede zwischen den einzelnen Verfahren deutlich.

⁴Die Länge wurde als Potenz von 2 gewählt, um die Rechenzeit bei den Fouriertransformationsroutinen, die zur Erzeugung der meisten Surrogate benötigt werden, möglichst gering zu halten.

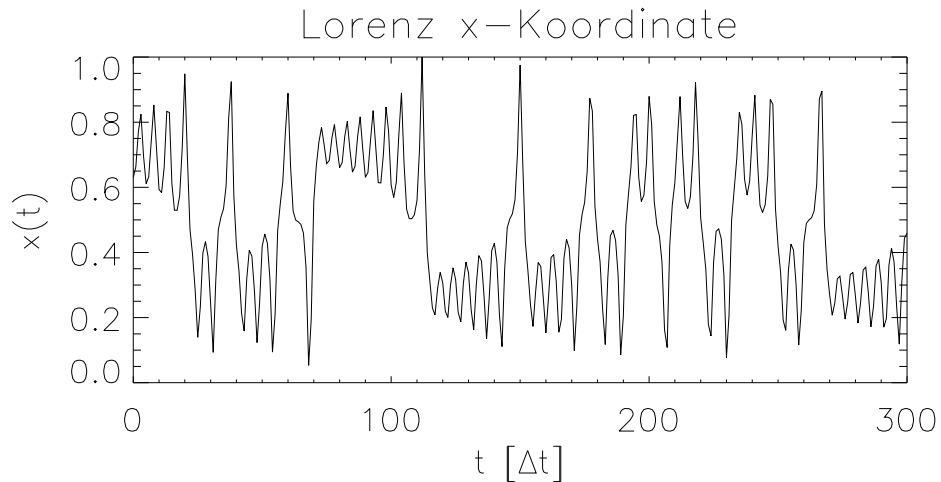


Abbildung 6.9: Ein Ausschnitt aus der x -Koordinate des Lorenz-Systems mit den im Text beschriebenen Parameterwerten. Die abgebildete Zeitserie wurde auf das Intervall $[0, 1]$ normiert.

Um die linearen Eigenschaften der Daten bei künstlicher Unterdrückung der Nichtlinearitäten zu erhalten, wurde als Rauschen ein Surrogat verwendet. Die untersuchten Zeitserien waren wie im vorigen Abschnitt bei der Analyse der Laserdaten

$$s_t = x_t + a \eta_t \quad (6.3)$$

mit dem Rauschen η der Rauschamplitude a .

Als erstes wurde ein Test auf Artefakte bei Surrogaten durchgeführt. Aus Abschnitt 6.1.2 ist bekannt, daß sich Surrogate unterschiedlicher Ordnung voneinander unterscheiden können. Die erste Zeile in Tabelle 6.4 zeigt jedoch das erwünschte Ergebnis: im Grenzfall reines Rauschens $a \rightarrow \infty$ geht die Detektionrate β gegen die Größe α .

In Tabelle 6.4 sind die Ergebnisse der Untersuchung zusammengefaßt. Wie bereits im vorigen Abschnitt wurde eine Reihe von Hypothesentests durchgeführt, bei denen jedesmal versucht wurde, einen verrauschten Datensatz von jeweils 9 Surrogaten zu unterscheiden. Die Größe des Tests ist $\alpha = 0.1$. Insgesamt wurden 100 Tests durchgeführt. Die angegebenen Zahlenwerte wurden für die Parameterwerte $m = 3$, $\epsilon = 1/16$ und $\tau = 1$ erhalten. Für das Verfahren der korrespondierenden Nachbarn wurde zusätzlich die maximale Vorhersagezeit $t_{f_{\max}} = 10$ und der minimale zeitliche Abstand $t_{\min} = 50$ gesetzt. Damit bleibt der numerische Aufwand für die verschiedenen Me-

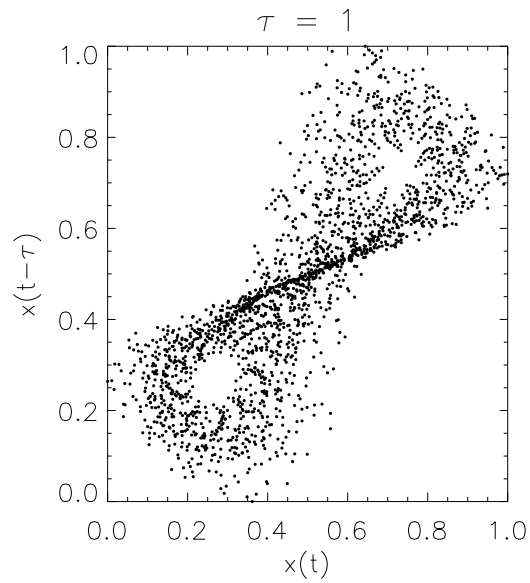


Abbildung 6.10: Die Darstellung der x -Komponente des Lorenz-Systems $\text{Lor. } x$ in verzögerten Koordinaten mit $\tau = 1$ in 2 Dimensionen.

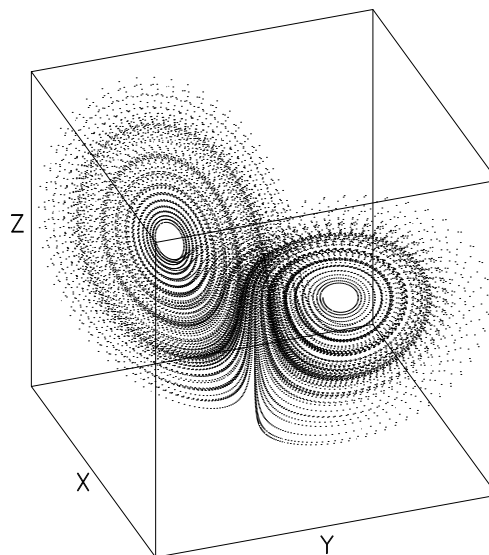


Abbildung 6.11: Das Lorenz-System nach Gleichung (6.2) mit den Parametern $\sigma = 16$, $b = 4$ und $r = 45.92$. Die Anzahl der Punkte ist 20000, die Integrationsschrittweite $\Delta t = 0.005$. Die Werte der einzelnen Koordinaten wurden normiert.

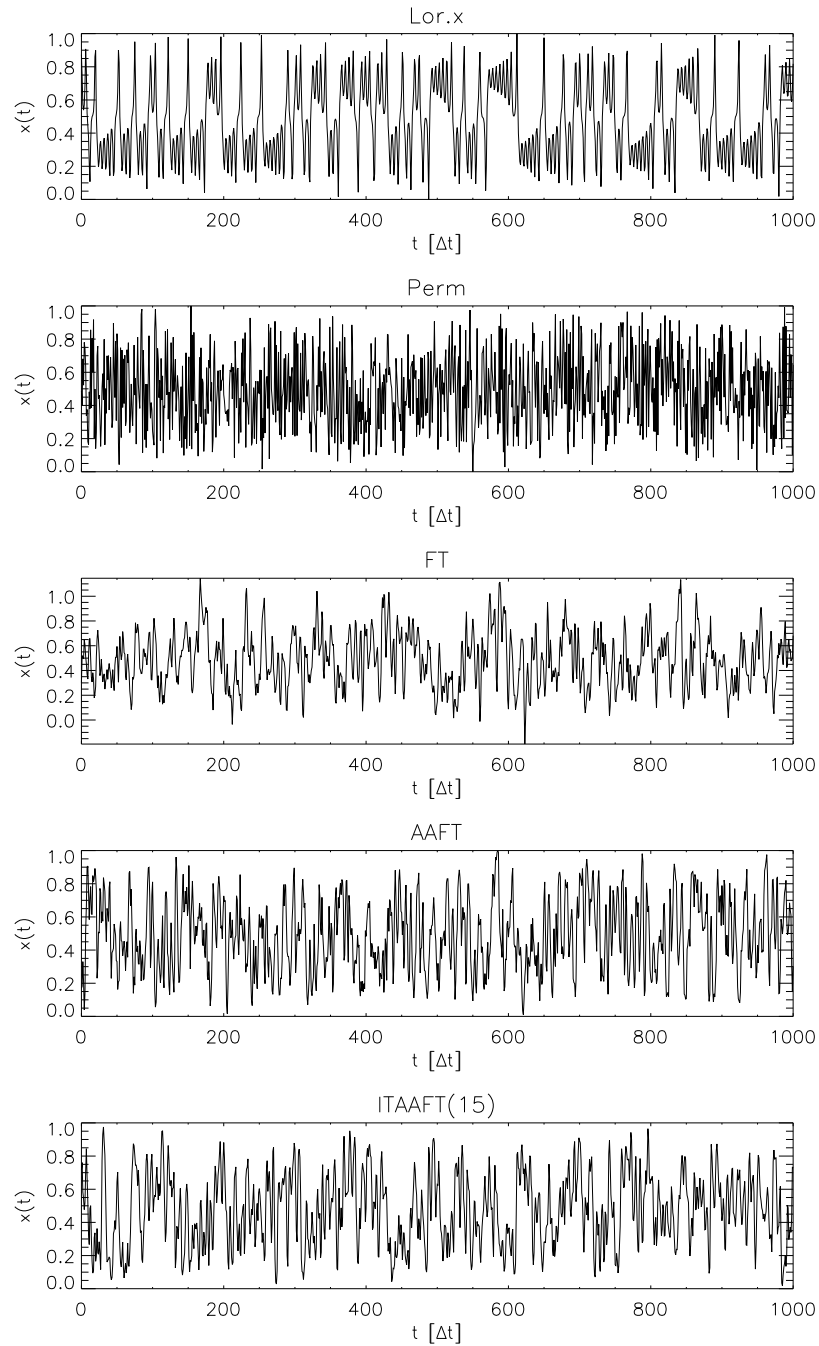


Abbildung 6.12: Ein Ausschnitt aus $\text{Lor.}x$ und verschiedene Surrogate: Perm , FT , AAFT , $\text{ITAAFT}(15)$).

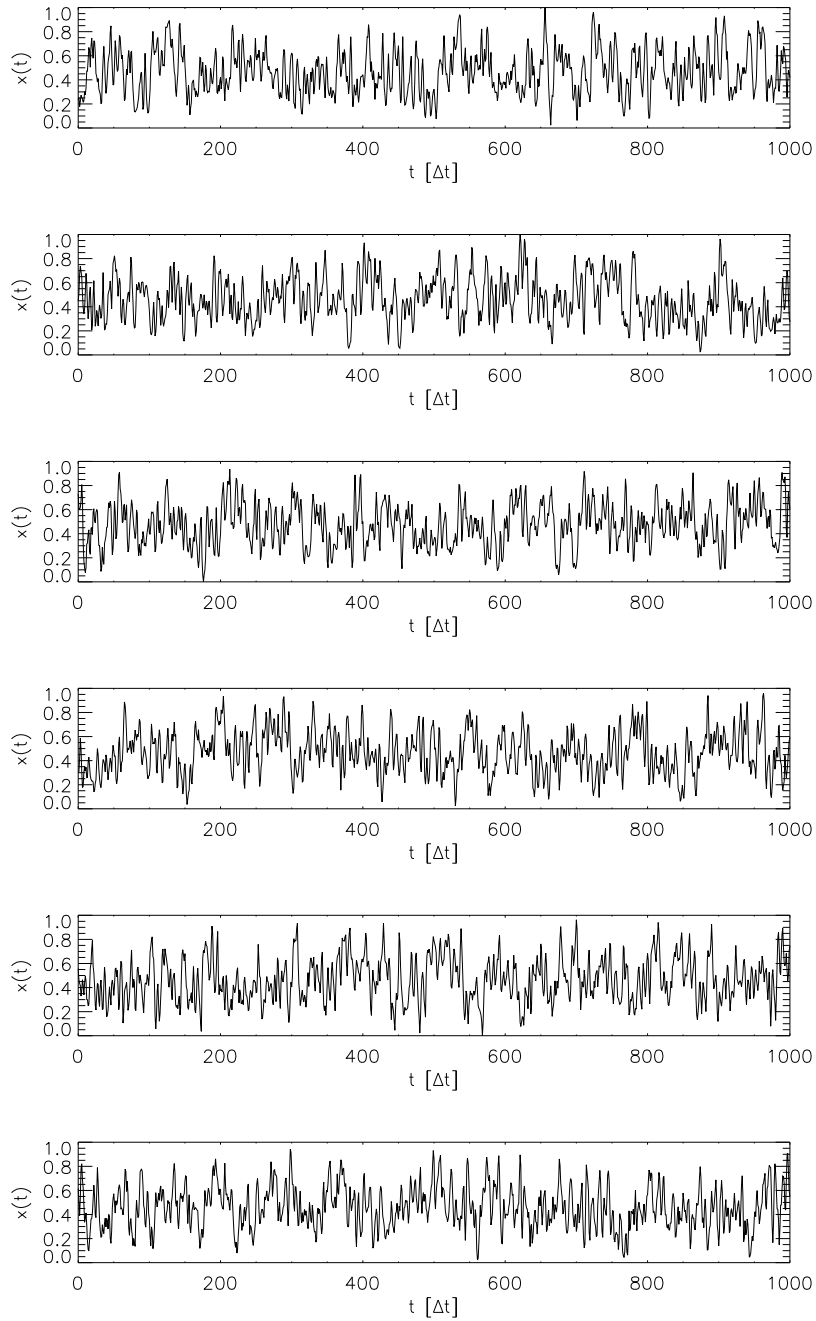


Abbildung 6.13: Der Datensatz *Lor. x* mit Rauschen ($\eta = \text{ITAAFT}(15)$), $a = 1.0$) und fünf *ITAAFT(15)*-Surrogate. Die verrauschte Zeitserie ist die zweite von unten.

Rauschamplitude	Macht β für		
	NPE	MPT	Thermo
∞	0.09 ± 0.03	0.09 ± 0.03	0.09 ± 0.03
0.8	0.96 ± 0.02	0.79 ± 0.04	0.38 ± 0.05
1.0	0.74 ± 0.04	0.36 ± 0.05	0.13 ± 0.03

Tabelle 6.4: Macht β für die Methoden NPE, MPT und Thermo, angewandt auf `Lor.x` Sachverhalt mit ITAAFT(15)-Rauschen verschiedener Rauschamplitude a .

thoden im gleichen Rahmen und mögliche Artefakte durch linear korrelierte Nachbarpunkte werden möglichst eliminiert (vgl. die Überlegungen zur Korrelationsdimension in Abschnitt 3.3).

Sowohl bei der Analyse der vorliegenden Zeitserie als auch bei `A.dat` hat sich diese Vorsichtsmaßnahme als unbegründet erwiesen, da der Ausschluß linear korrelierter Punkte Originaldaten und Surrogate gleichermaßen betrifft. Die Detektionsraten zeigen bei Variation von $t_{\min} = 0, \dots, 100$ keine signifikante Veränderung. Dieses Intervall liegt wesentlich über der Autokorrelationszeit der Zeitserie, für die gilt $\rho(t_c = 3) = 1/e$ und $\rho(t_c = 11) = 0$.

In einer der folgenden Anwendungen der Analyseverfahren auf Daten des Sonnenwindes (s. Abschnitt 6.3) führt der Ausschluß dazu, daß zu wenig Nachbarpunkte vorliegen und keine Diskrimination mehr möglich ist. Dieser Effekt tritt auf, wenn einzelne Bereiche des Zustandsraumes nur sehr selten besetzt sind. Im entsprechenden Abschnitt wird dieser Effekt noch einmal angesprochen werden.

In diesem Abschnitt wurden die drei Verfahren zum Nachweis von Nichtlinearitäten an dem mit Rauschen überlagerten Lorenz-System getestet. Die besten Ergebnisse erzielt man mit der Methode der nichtlinearen Vorhersagefehler, die bei Rauschamplituden von $a = 0.8$ noch 96% der Zeitserien richtig identifiziert. Das Verfahren der korrespondierenden Nachbarn erlaubt bei gleicher Rauschamplitude die Diskrimination von 79%, wohingegen das Temperaturanalogon mit $\beta = 38\%$ für die praktische Anwendung eher unzureichende Ergebnisse liefert.

6.3 Sonnenwind

6.3.1 Einführung

Der Sonnenwind ist ein Strom geladener Teilchen, der von der äußeren Sonnenatmosphäre — der Korona — in den interplanetaren Raum entweicht. Er besteht zu circa 96% aus Protonen und ungefähr 4% Heliumionen [118]. Das Verhältnis an schwereren Ionen, wie Sauerstoff, Neon, Silizium und Eisen zum Heliumanteil ist etwa 0.025 [41].

Der Übergang zwischen der Korona und dem Sonnenwind ist fließend, und zur Entstehung des Sonnenwindes tragen auch Prozesse in der Photosphäre bei. Aufnahmen der Korona sind nur bei Abdeckung der Sonnenscheibe, beispielsweise während einer totalen Sonnenfinsternis, möglich, da die Photosphäre circa 10^6 -mal heller als die äußere Sonnenatmosphäre ist. In Abbildung 6.14 ist die sehr bekannte Aufnahme der Sonnenfinsternis von Koutchmy *et al.* [57] im Juni 1973 gezeigt.

Das Licht der Korona setzt sich aus mehreren Komponenten zusammen. Zum einen handelt es sich um Streulicht von freien Elektronen (K-Korona) und Staubteilchen (F-Korona), zum anderen um Linienemissionen von Ionen (L-Korona). Das Verhältnis der Intensität der L-Korona zur Summe von K- und F-Korona beträgt etwa 1% [93]. Eine aktuelle Aufnahme der L-Korona ist in Abbildung 6.15 gezeigt, in der Bilder von verschiedenen Instrumenten auf dem Satelliten SOHO kombiniert wurden, um die Ähnlichkeit von Strukturen in unterschiedlichen Schichten der Sonnenatmosphäre zu untersuchen.⁵

Der Teilchenfluß von der Sonne wird gemäß den auftretenden Geschwindigkeiten in langsamen Sonnenwind mit $v < 400 \text{ km s}^{-1}$ und schnellen Sonnenwind mit $v > 600 \text{ km s}^{-1}$ eingeteilt. Weitere Unterscheidungsmerkmale sind die geringere Dichte und geringere Variabilität des schnellen Sonnenwindes im Vergleich mit dem langsamen Sonnenwind [103].

In beiden Abbildungen 6.14 und 6.15 sind deutliche Variationen der koronalen Eigenschaften in Abhängigkeit von der heliographischen Breite zu sehen. Die verschiedenen Zustände des Sonnenwindes lassen sich in ihrem Ursprung verschiedenen Bereichen zuordnen:

- Über den Polen befindet sich eine Zone mit radialen Strukturen geringer Leuchtkraft. Diese Zonen haben ihren Ursprung in den offenen Feldlinien des Sonnenmagnetfeldes, entlang derer die Materie in den interpla-

⁵Diese Abbildung stammt von <http://sohowww.estec.esa.nl/gallery/UVCS/>.

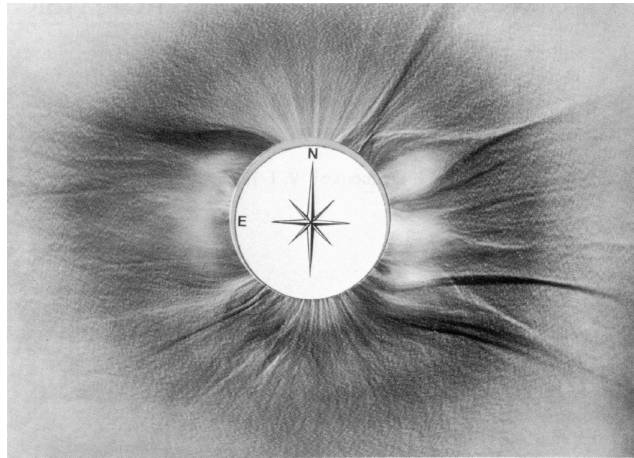


Abbildung 6.14: Die Sonnenkorona während der Sonnenfinsternis vom 30. Juni 1973. Diese Aufnahme wurde nachbearbeitet, um den Intensitätskontrast auf kleinen Skalen zu erhöhen (aus [57]).

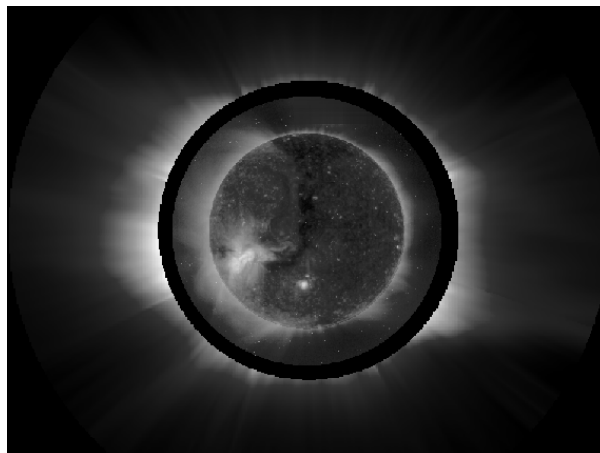


Abbildung 6.15: Die Abbildung zeigt außerhalb des schwarzen Rings die äußere Atmosphäre der Sonne im UV-Licht, das von Sauerstoffionen emittiert wird. Diese von der Sonne wegströmenden Ionen bilden einen Teil des (langsamen) Sonnenwindes. Innerhalb des schwarzen Rings ist die Sonnenscheibe im Licht von Eisenionen abgebildet. Durch die Kombination dieser Aufnahmen, die von den Experimenten UVCS (*Ultraviolet Coronagraph Spectrometer*) bzw. EIT (*Extreme ultraviolet Imaging Telescope*) an Bord des Satelliten SOHO stammen, lassen sich beispielsweise Strukturen durch die Sonnenkorona verfolgen.

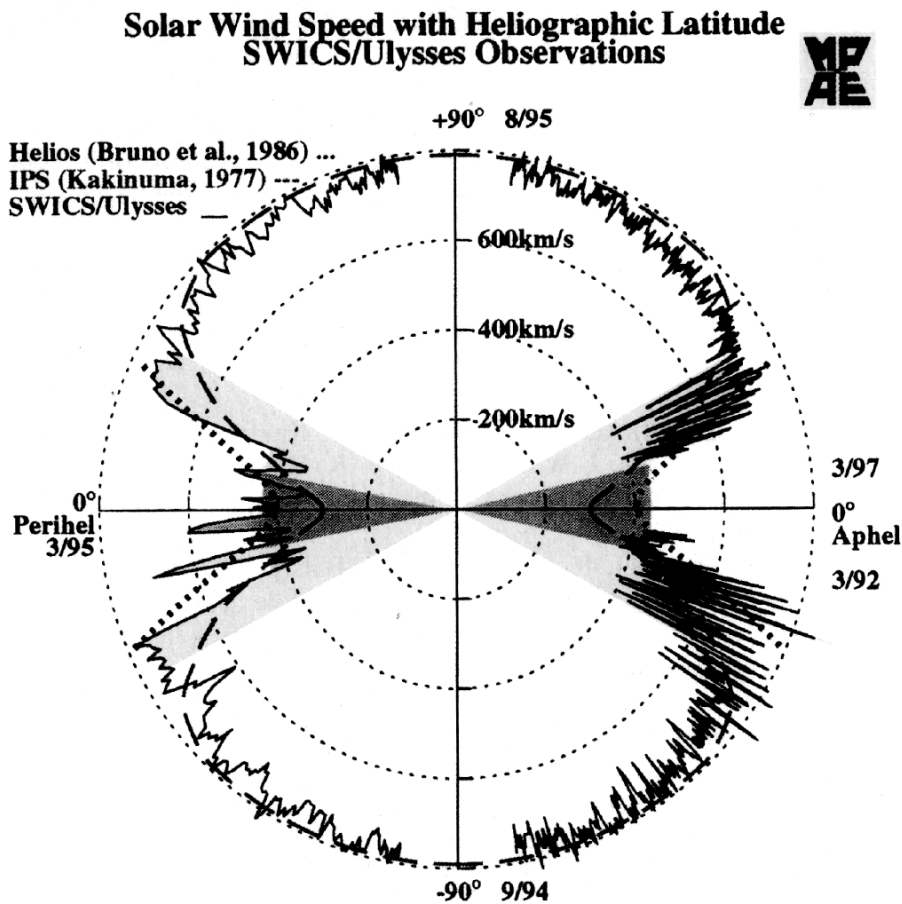


Abbildung 6.16: Die Geschwindigkeiten des Sonnenwinds, die in der Zeit vom März 1992 bis zum März 1997 von Ulysses auf dem ersten polaren Umlauf um die Sonne gewonnen wurden, in (heliomagnetischen) Polarkoordinaten. Die dunkelgrauen Sektoren markieren das Gebiet des langsamen Windes in der Nähe der Ekliptik. Die hellgrauen Gebiete sind das Übergangsgebiet zwischen langsamem und schnellem Sonnenwind. Die Dominanz des schnellen Sonnenwindes in höheren Breiten ist deutlich sichtbar (aus [129]).

netaren Raum entweichen kann. Diese Zonen werden auch als *koronale Löcher* bezeichnet und stellen das Entstehungsgebiet des schnellen Sonnenwindes dar. Zu Zeiten geringer solarer Aktivität, also während des Miniums der Sonnenfleckenrelativzahl (vgl. auch Abschnitt 6.4), weiten sich diese Bereiche in Richtung des Äquators aus [93].

- Die Struktur in den Breiten um $\pm 50^\circ$ wird durch die koronalen Streamer, die aufgrund ihrer Form auch *Helmetstreamer* genannt werden, dominiert. Der langsame Sonnenwind entsteht vermutlich in diesen Regionen durch Umstrukturierung des Magnetfeldes (Aufbrechen geschlossener Feldlinien). Auch das Herumströmen der Materie um die Streamer wird als Erklärung für den langsamen Sonnenwind erwogen [119]. Die genaue Herkunft und Art der Entstehung sind noch unbekannt [83, 103]. Speziell die Stärke der langsamen Komponente deutet darauf hin, daß sie nicht ausschließlich in der Nähe von koronalen Streamern entstehen kann [103].

Durch die Lage des vermutlichen Hauptherkunftsbereiches des langsamen Sonnenwindes in der Ekliptik des Sonnensystems wurde diese Komponente lange Zeit als Normalzustand des Sonnenwindes betrachtet. Durch Messungen des Satelliten Ulysses [6] außerhalb der Ekliptik konnte gezeigt werden, daß der schnelle Sonnenwind ab heliographischen Breiten von mehr als 20° dominiert (Abbildung 6.16). Wegen seiner geringen Variabilität scheint er sich im Gleichgewicht mit seinem Entstehungsgebiet zu befinden und sollte somit als Normalzustand angesehen werden [83].

6.3.2 Der Proton Monitor

Die in diesem Abschnitt analysierten Daten stammen von einem Experiment auf dem Satelliten SOHO (*Solar and Helioscopic Observatory*), der im Dezember 1995 als Gemeinschaftsprojekt der ESA und der NASA gestartet wurde. SOHO befindet sich seit dem Februar 1996 auf einer Umlaufbahn um den sogenannten L1-Punkt, an dem sich die auf den Satelliten wirkenden Gravitations- und Fliehkräfte aufheben. Dieser Punkt ist circa 1.5×10^6 km von der Erde entfernt. Aufgrund dieser Entfernung können Messungen an der Sonne durchgeführt werden, die nicht durch die Erde beeinträchtigt werden. Ferner können Veränderungen im Sonnenwind auf SOHO beobachtet werden, die sich erst ungefähr eine Stunde später auf der Erde auswirken können. Mögliche Störungen in der Magnetosphäre und deren Auswirkungen, beispielsweise auf die satellitengestützte Telekommunikation, sind so vorhersehbar, und es können eventuelle Gegenmaßnahmen eingeleitet werden.

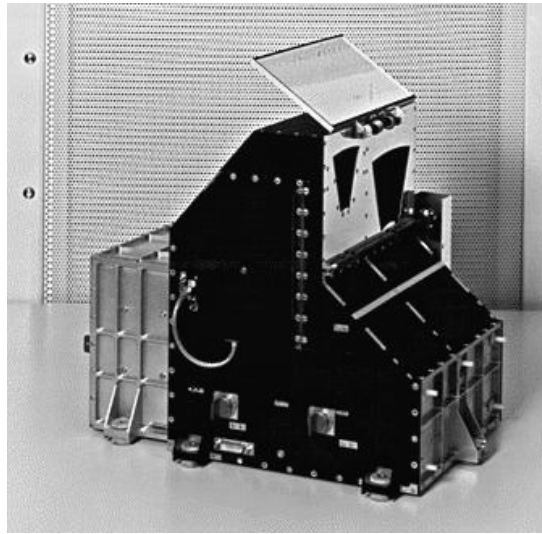


Abbildung 6.17: Das MTOF-Experiment mit den beiden sektorförmigen Einlaßöffnungen für das Hauptinstrument (rechts) und den Proton Monitor (links).

Die Experimente auf SOHO können im wesentlichen in drei Gruppen eingeteilt werden:

1. Seismologie der Sonne
2. Untersuchung der oberen Sonnenatmosphäre
3. *in situ* Messungen des Sonnenwindes

Eines der Sonnenwindexperimente auf SOHO ist CELIAS (*Charge, Element and Isotope Analysis System*) [39], das neben zwei Instrumenten zur Untersuchung der Zusammensetzung des Sonnenwindes – CTOF und MTOF (*Charge resp. Mass Time-Of-Flight*) — den Proton Monitor (PM) zur Untersuchung des H^+ -Anteils im Sonnenwind enthält.

Die Abbildung 6.17 zeigt das MTOF-Experiment mit den beiden sektorförmigen Einlaßöffnungen für das Hauptinstrument und den Proton Monitor.

Wie in der Abbildung ersichtlich, handelt es sich bei dem Proton Monitor um einen Teil des MTOF-Experiments. Denn es ist eine der Aufgabenstellungen an den Proton Monitor, durch die Messung von Geschwindigkeit und Temperatur des solaren Windes zur Interpretation der Daten von MTOF beizutragen. Weitere Zielsetzungen des Proton Monitors sind

- die Identifikation von verschiedenen Zuständen im solaren Wind,
- die Rückabbildung von charakteristischen Ereignissen im solaren Wind auf das Gebiet ihrer Entstehung
- und die Bereitstellung von zeitlich hochaufgelösten Daten in nahezu Echtzeit.

Die Fragestellung, die in diesem Abschnitt der vorliegenden Arbeit verfolgt wird, ist, ob es sich bei den gemessenen Zeitserien um Realisationen nichtlinearer Prozesse handelt oder ob lineare Verfahren wie die Fourieranalyse zur Beschreibung des Systems ausreichen.

Darüberhinaus soll im Hinblick auf zukünftige Anwendungen die Vorhersagbarkeit des Sonnenwindes anhand der zur Verfügung stehenden Zeitserien charakterisiert werden.

6.3.3 Beschreibung der Daten

In Rahmen dieser Arbeit wurden zwei synchron gemessene Zeitserien von je 1024 Punkten — die Geschwindigkeiten `Vel.dat` und die Dichten `Den.dat` — untersucht. Diese beiden Datensätze sind in Abbildung 6.18 gezeigt. Der zeitliche Abstand zwischen zwei Meßpunkten beträgt 300 s, Beginn der Zeitserie ist am 28. September 1996, um 17:40 UTC. Der Zeitraum von 1024 Meßpunkten entspricht etwa 85 Stunden. Die Sonne befand sich zu dieser Zeit in einem Minimum des Sonnenfleckenzklus und somit einer Phase geringer Aktivität. Es handelt sich bei den hier untersuchten Daten um eher langsamen Sonnenwind.

Die gemessenen Geschwindigkeiten `Vel.org` (Abbildung 6.18 oben) wurden linear korrigiert, um den in den Originaldaten deutlich sichtbaren Trend zu kompensieren. Die erste Komponente des Fourierspektrums wurde identisch Null gesetzt. Die so korrigierte Version der Zeitserie ist im unteren Teil der Abbildung 6.18 zu sehen.

Eine andere Möglichkeit zur Kompensation der Nichtstationarität wurde von Macek [67] angewandt. Es wurde ein Polynom zweiten Grades an die Daten angepaßt, und die Differenz zwischen Daten und Polynom zur weiteren Analyse benützt.

Von den gemessenen Zeitserien ist die Dichte die am zuverlässigsten bestimmte. Sowohl Geschwindigkeit als auch die Temperatur des Sonnenwindes werden aus der Geschwindigkeitsverteilung der Teilchen berechnet.

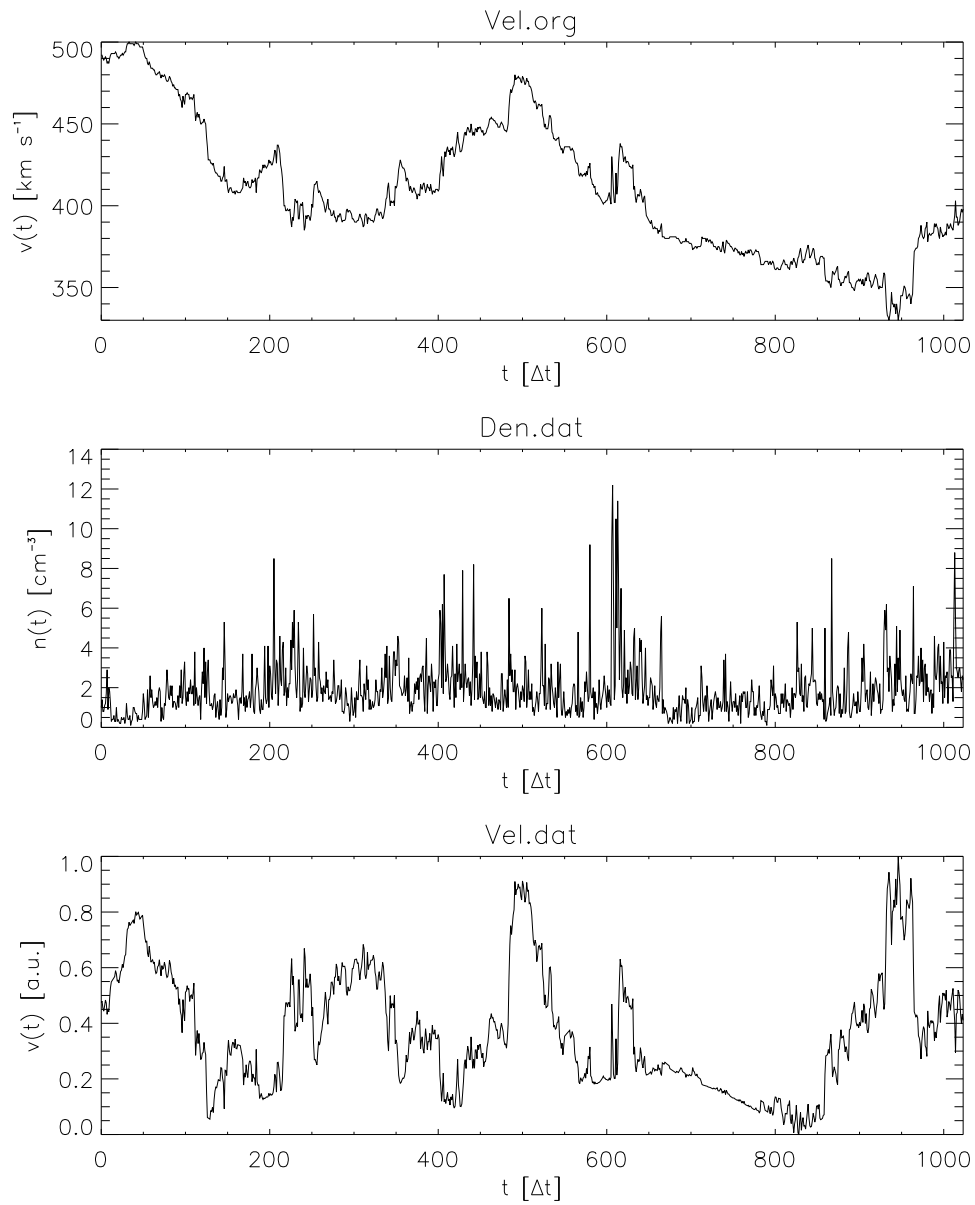


Abbildung 6.18: Die Abbildungen zeigen von oben nach unten die gemessenen Geschwindigkeiten `Vel.org`, die Dichte der Teilchen `Den.dat` und die korrigierten Geschwindigkeiten `Vel.dat`. Die Zeit t ist in Einheiten der Abtastrate $\Delta t = 300$ s gegeben.

6.3.4 Nachweis nichtlinearer Eigenschaften

Zur Analyse mit den in Abschnitt 4 vorgestellten Verfahren wurden Surrogate der Art ITAAFT(20) verwendet. Die relativen Fehler in der Autokorrelationsfunktion erreichten den Sättigungswert nach ungefähr 15 Iterationen. Die Abbildungen 6.19 und 6.21 zeigen die Zeitserien der Dichte `Den.dat` und der Geschwindigkeiten `Vel.dat` mit jeweils vier ITAAFT(20) Surrogaten. Für beide Zeitserien existieren keine augenscheinlichen Unterschiede zu den Surrogaten.

Polygiannakis und Moussas [85] führen nichtlineare Untersuchungen an Magnetfeldschwankungen im Sonnenwind mit FT-Surrogaten durch. Wie in Abschnitt 5.5 erläutert wurde, ist diese einfache Art der Surrogate eine gute Wahl, wenn die Verteilung der Werte in der Zeitserie annähernd einer Gaußverteilung entspricht. Andernfalls sind Abweichungen in den Teststatistiken zu erwarten. In der angegebenen Veröffentlichung sind weder die Zeitserien, noch die Surrogate abgebildet, so daß eine Beurteilung dieses Sachverhalts nicht möglich ist. Der explizite Nachweis nicht nur nichtlinearen, sondern chaotischen Verhaltens über einen positiven und endlichen Wert der Kolmogorov-Sinai Entropie erscheint jedoch zweifelhaft.

Die Nichtlinearitäten in den hier untersuchten Zeitserien wurden in einer Serie von Hypothesentest mit unterschiedlichen Verfahren nachgewiesen. Die Größe eines Hypothesentests betrug $\alpha = 0.1$. Für die in den Tabellen 6.5 und 6.7 angegebenen Werte für die Macht β wurden jeweils 200 Durchläufe ausgeführt. Wie schon in den vorhergegangenen Abschnitten berechnet sich β aus dem prozentualen Anteil der erfolgreichen Detektionen der Zeitserie gegen jeweils 9 Surrogate.

Besonders bei der Analyse der unkorrigierten Geschwindigkeiten `Vel.org` spielt die deutlich sichtbare Nichtstationarität eine gewichtige Rolle bei der Verwendung von Surrogaten. Die hohen Detektionsraten, $\beta = 1$ für einen weiten Bereich von Parametern, ist hier allein auf diesen Umstand zurückzuführen. Diese Zeitserie wurde in der weiteren Analyse nicht mehr berücksichtigt.

Dichtezeitserie `Den.dat`

In Tabelle 6.5 ist das Endergebnis der Analyse zusammengefaßt. Die Parameter bei der Berechnung wurden in angemessenen Bereichen variiert; die in der Tabelle angegebenen Werte für die Diskriminationsrate zeigen in diesem Bereich keine Veränderungen, die auf mögliche Artefakte hindeuten.

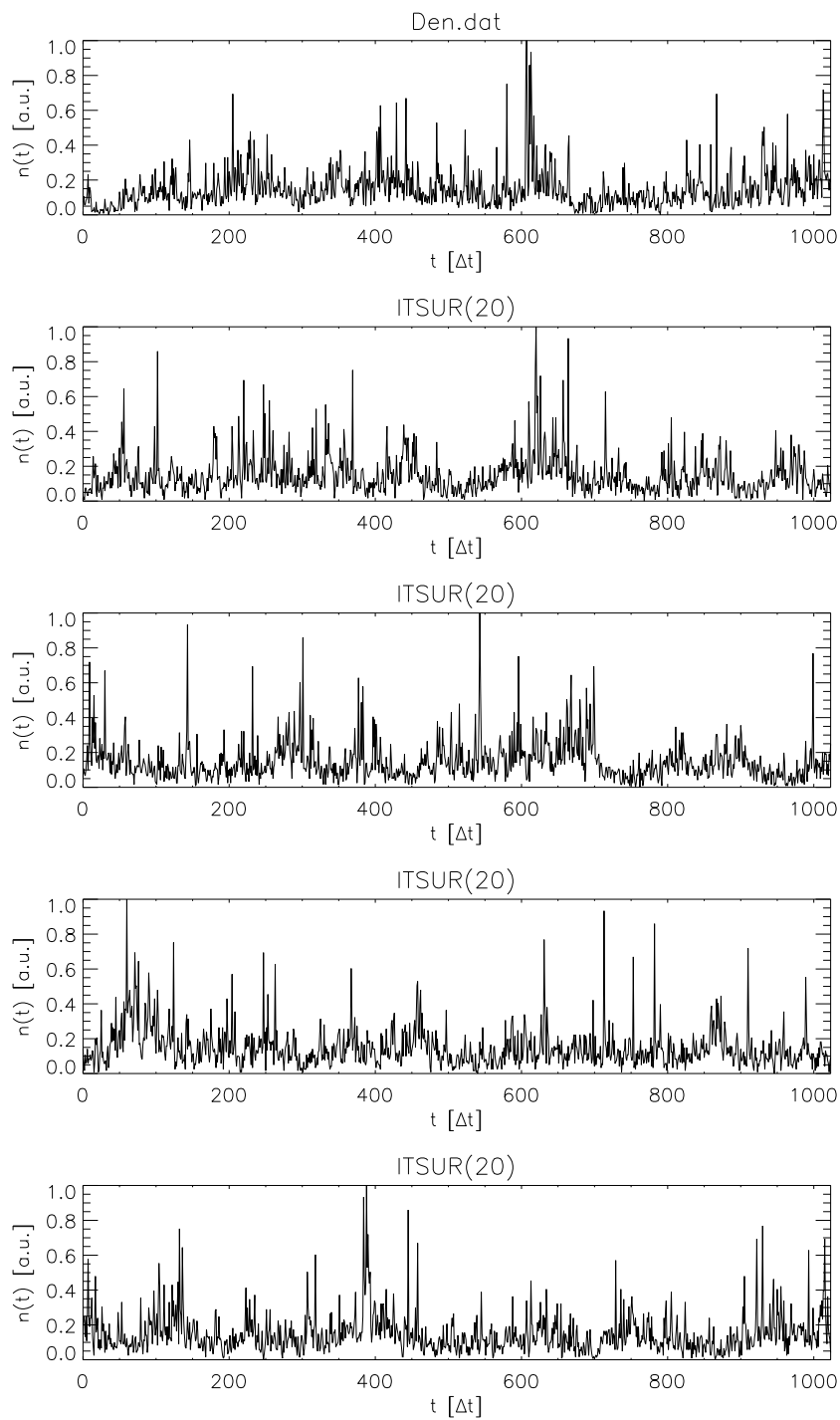


Abbildung 6.19: Dichtezeitserie Den.dat (oben) und vier ITAAFT(20)-Surrogate

Methode	m	τ	$\log_2 \epsilon$	β
NPE	3	4	-4	0.95 ± 0.02
MPT	3	3	-5	0.97 ± 0.02
Thermo	2	3	-2	0.45 ± 0.05

Tabelle 6.5: Detektionsraten β für die Zeitserie `Den.dat` mit den Verfahren MPT, NPE und Thermo

Für das Verfahren der korrespondierenden Nachbarn wurde hier eine maximale Vorhersagezeit von $t_{f\max} = 1$ verwendet. Der Grund dafür liegt in der spezifischen Fragestellung nach Nichtlinearitäten auf kurzen Zeitskalen. Die Zeitserien haben eine zeitliche Auflösung von 5 Minuten, wohingegen die meisten bisher zur Verfügung stehenden Datensätze nur stündliche Werte enthielten.

Bei Verwendung von $t_{f\max} = 12$ wird die Vorhersagbarkeit über einen Zeitraum bis zu einer Stunde gemittelt. Die Detektionsrate mit den in der Tabelle aufgeführten Parameterwerten ist in diesem Fall $\beta = 0.62 \pm 0.04$. Eine Variation der Parameter im gleichen Bereich wie vorher liefert durchgehend geringere Detektionsraten im Bereich von $0.4 \lesssim \beta \lesssim 0.8$. Im Vergleich dazu liegen die Werte für β bei $t_{f\max} = 1$ zwischen 0.6 und 1.0, größtenteils über 0.9.

Im Gegensatz zu MPT erhält man bei der Methode der nichtlinearen Vorhersagefehler eine signifikante Detektionsrate bei geringeren Auflösungen, jedoch bei gleichen Einbettungsdimensionen $m \approx 3, 4$ und $\tau = 3, 4, 5$. Insgesamt zeigt die Detektionsrate eine größere Schwankungsbreite in Abhängigkeit der Parameter, sie liegt im Bereich $0.4 \lesssim \beta \lesssim 1$.

Die Methode des Temperaturanalogons zeigt wider Erwarten eine wenngleich nicht sehr signifikante, so doch bessere Ergebnisse als die aus den vorangegangenen Abschnitten mit den künstlich verrauschten Zeitserien `A.dat` und `Lor.x`. Das Ergebnis mit diesem Verfahren bestärkt die positive Detektion von nichtlinearem Verhalten, die sowohl mit NPE als auch MPT erhalten wurde.

Zeitreihe	t_c [Δt]	$\rho(t_c) = 1/e$ $\rho(t_c) = 0$
Vel.dat	42	78
Den.dat	2	49

Tabelle 6.6: Charakteristische Zeitskalen t_c in Einheiten der Abtastrate Δt aus dem Abfall der Autokorrelationsfunktionen für die Zeitserien `Vel.dat` und `Den.dat`.

Geschwindigkeitszeitserie `Vel.dat`

In Abbildung 6.21 sind neben den Geschwindigkeiten `Vel.dat` vier Surrogate der Art ITAAFT(20) gezeigt. Obwohl der relative Fehler in der Autokorrelationsfunktion bei diesen Surrogaten in der Größenordnung von $\mathcal{O}(10^{-6})$ liegt, sind bei visueller Inspektion Unterschiede sichtbar. Die Originalzeitserie erscheint im Verlauf glatter als die Surrogate. Dieser hochfrequente Anteil in den Ersatzdaten wird durch die abrupten Sprünge in den Originaldaten verursacht.⁶ Diskontinuitäten führen bei der Fourieranalyse zu einem breiten Frequenzspektrum. Bei der Rücktransformation nach der Randomisierung der Phasen addieren sich die hochfrequenten Schwingungen nicht mehr zu lokalisierten Stufen, sondern liefern einen über die Zeitserie verteilten Beitrag. Es handelt sich um einen Effekt analog dem, der bei der Erzeugung von Surrogaten auftritt, wenn sich Anfangs- und Endpunkt der Zeitserie stark voneinander unterscheiden (vgl. auch Abschnitt 5.6).

Bei der Analyse der linearen Eigenschaften der Geschwindigkeiten ist der sehr viel langsamere Abfall der Autokorrelationsfunktion auffallend, wenn man sie mit den Dichten vergleicht. In Tabelle 6.6 sind die verschiedenen charakteristischen Zeiten der Autokorrelationsfunktionen von Dichten und Geschwindigkeiten zusammengefaßt. Die Autokorrelationsfunktion der Dichte fällt am Anfang sehr stark ab und erreicht bei $t_c \approx 5$ ein niedriges Niveau, der Nulldurchgang tritt erst relativ spät bei $t_c = 49$ auf. Im Gegensatz dazu zeigt die Autokorrelationsfunktion von `Vel.dat` einen gleichmäßig flachen Abfall.

Der von Macek [67] berechnete Wert von $D^{(2)} \approx 3.7$ für die Korrelationsdimension, der aus der Untersuchung von HELIOS Sonnenwinddaten erhalten

⁶Bei Verwendung von AAFT-Surrogaten ist dieser Eindruck erwartungsgemäß noch deutlicher.

Method	m	τ	$\log_2 \epsilon$	β
NPE	3	75	-4	0.73 ± 0.04
MPT	3	75	-4	1.0
Thermo	3	75	-4	0.98 ± 0.01

Tabelle 6.7: Detektionsraten β für die Zeitserie `Vel.dat` mit den Verfahren NPE, MPT und Thermo.

wurde, scheint möglicherweise durch diese linearen Korrelationen verursacht worden zu sein. Vergleichsrechnungen zur Korrelationsdimension mit den in dieser Arbeit untersuchten Geschwindigkeitsdaten ergaben, daß ein angedeuteter Sättigungsbereich in der Steigung der Korrelationsdimension gänzlich verschwindet, wenn Nachbarpunkte mit einem zeitlichen Abstand von der Größenordnung der Korrelationszeit t_c aus der Analyse ausgeschlossen werden. In [67] wurde $t_{\min} = 6 - 7$ verwendet, ein Wert, der im Vergleich mit der vom Autor angegebenen Autokorrelationszeit von $t_c \approx 250$ (in Einheiten der Abtastrate Δt) zu klein erscheint. In Abbildung 6.20 sind die mit der Zeitserie der Geschwindigkeiten erhaltenen Ergebnisse für die Korrelationssumme dargestellt. Aus dieser Abbildung geht hervor, daß der möglicherweise gefundene Sättigungsbereich im unteren Teil von Abbildung 6.20 durch lineare Kurzzeitkorrelationen verursacht wird. Werden linear korrelierte Punkte aus der Analyse ausgenommen, so ist kein Plateau mehr vorhanden. Die Wahl von $t_{\min} = 100$ basiert auf der Autokorrelationsfunktion, die bei $t_c = 78$ den ersten Nulldurchgang aufweist (vgl. auch Tabelle 6.6).

Die von Macek und Obojska [68, 69] zum Nachweis von Nichtlinearitäten benutzten Surrogate waren von der Art PERM und FT, so daß entweder die Häufigkeitsverteilung der Werte oder das Leistungsspektrum erhalten blieben und nicht beide Eigenschaften gleichzeitig, wie bei den in dieser Arbeit benutzten AAFT oder ITAAFT-Surrogaten. In diesen Fällen sind Unterschiede der Surrogate zur gemessenen Zeitserie, die mit nichtlinearen Verfahren über nicht verteilungsfreien Statistiken detektiert werden (vgl. Abschnitt 5.4), zu erwarten, zumal die Werteverteilung explizit als nicht gaußförmig charakterisiert wurde.

Der in Tabelle 6.7 angegebene Wert für die Methode der korrespondierenden Nachbarn wurde für die maximale Vorhersagezeit $t_{f\max} = 1$ berechnet. Das gleiche Ergebnis erhält man auch für $t_{f\max} = 12$. Ferner ist die Detektionsrate praktisch konstant $\beta = 1$ für einen weiten Bereich von $m = 2, \dots, 5$ und

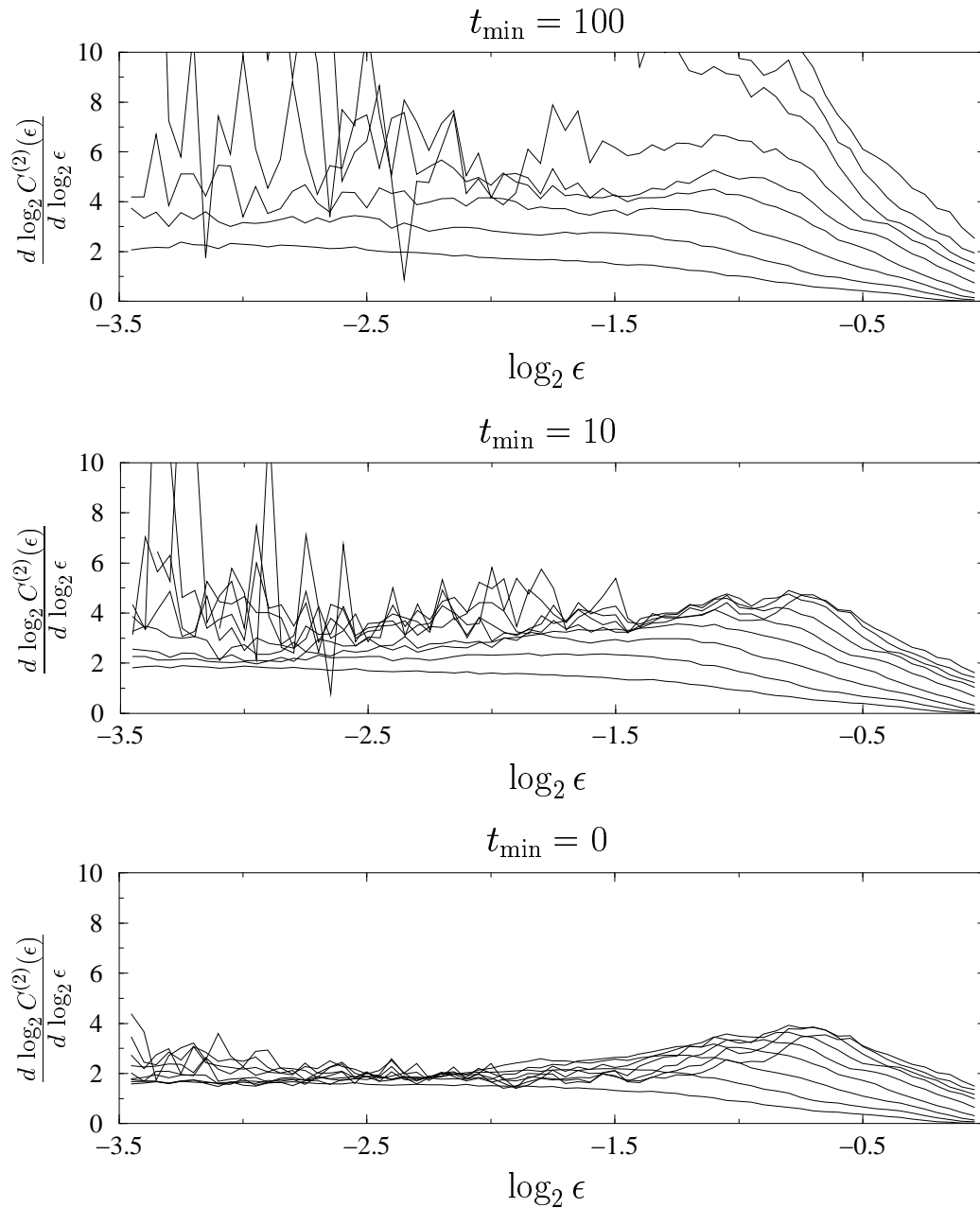


Abbildung 6.20: Die Steigung der Korrelationssumme nach Gleichung (3.8) als Funktion der Auflösung ϵ für die Geschwindigkeitszeitserie. In der unteren Abbildung werden alle nächsten Nachbarn berücksichtigt: $t_{\min} = 0$. Für die anderen Abbildungen wurden linear korrelierte nächste Nachbarn ausgeschlossen: $t_{\min} = 10$ bzw. 100 .

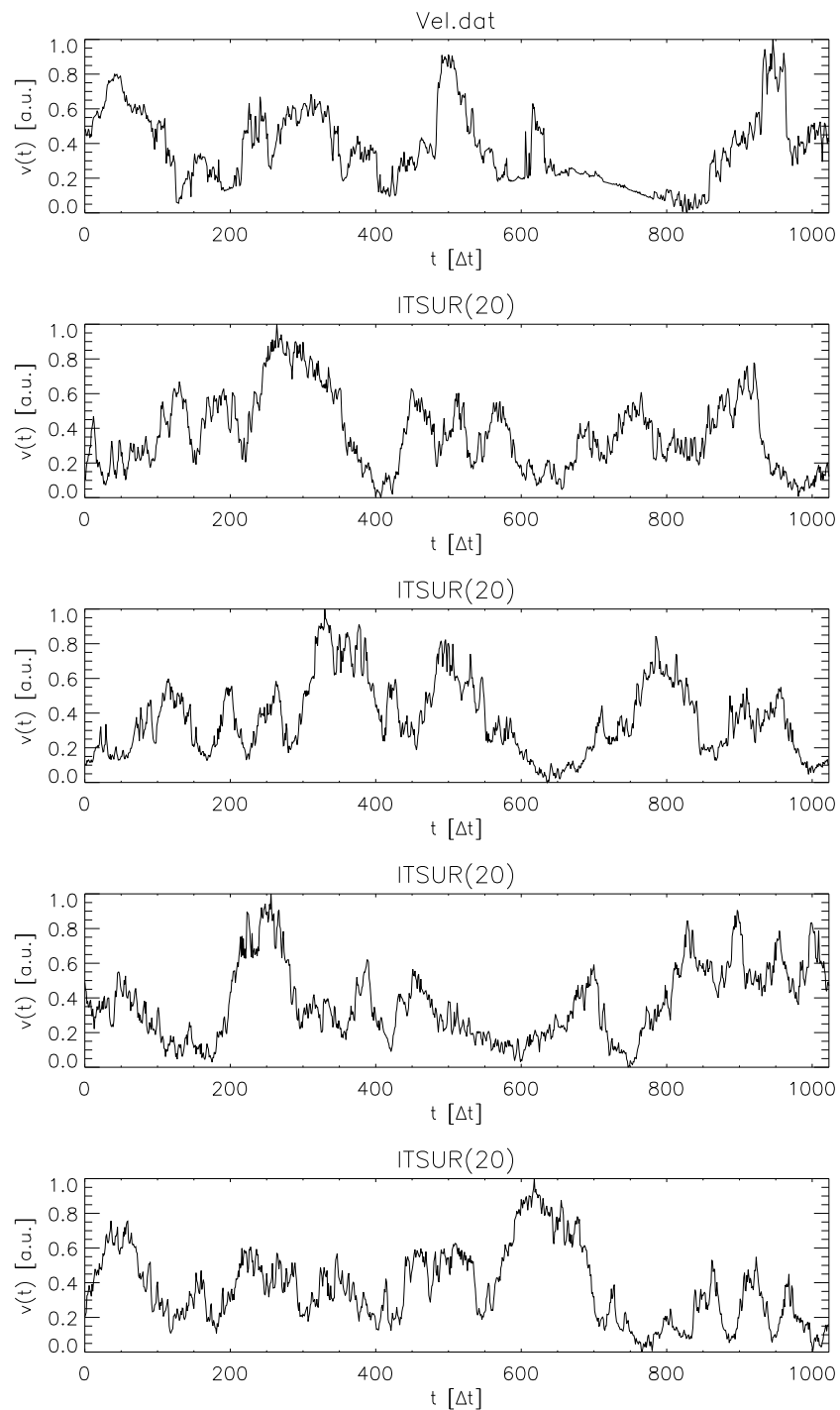


Abbildung 6.21: Die korrigierten und normierten Geschwindigkeiten `Vel.dat` (oben) und vier ITAAFT(20)-Surrogate

$\log_2 \epsilon = -3, \dots, -5$.

Diese Konstanz ist bei NPE nicht zu beobachten. Die Detektionsraten sind allgemein geringer und nur in einem engen Bereich um die in der Tabelle angegebenen Parameterwerte signifikant.

Bei beiden Verfahren führt der Ausschluß von linear korrelierten Punkten zu starken Schwankungen in den Detektionsraten. Bei hohen Einbettungsdimensionen $m = 4, 5$ und feinen Auflösungen $\log_2 \epsilon \lesssim -4$ findet man keine ausreichende Anzahl nichtlinear korrelierter Nachbarpunkte, um die Vorhersagbarkeit mit nichtlinearen Verfahren zu beschreiben.

Das Verfahren des Temperaturanalogons führt bei diesem Datensatz ebenso zu sehr signifikanten Ergebnissen. Diese lassen sich wie schon in der Diskussion der Ergebnisse mit MPT durch den sichtlich glatteren Verlauf der Zeitserie `Vel.dat` im Vergleich mit den Surrogaten erklären.

Offenbar treten bei der Analyse der Geschwindigkeitszeitserie `Vel.dat` zwei Probleme auf, die trotz hoher Detektionsraten einen gesicherten Nachweis von Nichtlinearitäten über Surrogattests nicht erlauben:

- Der visuelle Vergleich der Zeitserie mit den Surrogaten offenbart den glatteren Verlauf der Originaldaten. Durch abrupte Sprünge in der Zeitserie erhalten die Surrogate einen über die gesamte Zeitserie verteilten Beitrag hochfrequenter Schwingungen.
- Werden zeitlich nahe Nachbarpunkte mit $\delta t = \mathcal{O}(t_c)$ von der Analyse ausgenommen, so sind keine statistisch relevanten Aussagen über die nichtlineare Vorhersagbarkeit mehr möglich. Die anfangs erwähnte Nichtstationarität in der Geschwindigkeitszeitserie führt auch bei den korrigierten Daten dazu, daß der dem System zugängliche Bereich des Zustandsraumes nur ungenügend aufgefüllt wird. Anstelle die Eigenschaften des vermuteten Attraktors über räumlich benachbarte aber zeitlich entfernte Punkte zu beschreiben, werden nur einzelne Trajektorien charakterisiert, die aus sowohl räumlich als auch zeitlich nahen Punkten bestehen.

Ergebnis

Die Dichtezeitserie `Den.dat` hat signifikante Nichtlinearitäten auf kurzen Zeitskalen. Die linearen Korrelationen spielen keine große Rolle, eine Tatsache, die auch aus der Autokorrelationsfunktion ersichtlich ist. Zur Untersuchung der nichtlinearen Vorhersagbarkeit auf Stundenskala wurde die Größe

MPT über 12 Zeitschritte gemittelt. Die Dichtedaten können auch auf dieser Zeitskala von Surrogaten unterschieden werden, die Detektionsrate ist jedoch geringer als bei Vorhersagen über 5 Minuten.

Die nichtlinearen Eigenschaften auf Minutenskala wurden mit drei unterschiedlichen Verfahren nachgewiesen, wobei die Methode der korrespondierenden Nachbarn die signifikantesten und bezüglich Parametervariation stabilsten Ergebnisse lieferte.

Ein Ziel der Analyse war die Beschreibung des Sonnenwindes über die nichtlineare Vorhersagbarkeit. Dies konnte mit der Methode der korrespondierenden Nachbarn erfüllt werden. Es wurde gezeigt, daß Vorhersagen mit nichtlinearen Verfahren über Zeitskalen von bis zu einer Stunde möglich sind, die linearen Methoden überlegen sind.

Bei der Analyse der Geschwindigkeiten erhält man auf den ersten Blick unzweifelhafte Detektion von nichtlinearem deterministischem Verhalten. Die weitere Untersuchung zeigt jedoch, daß es sich jedoch um Artefakte handelt, die — wie auch im vorigen Abschnitt erläutert — vor allem in der Nichtstationarität der Daten begründet liegt, was dazu führt, daß das System nicht genügend oft in gleiche Bereiche des Zustandsraum wiederkehrt, wobei die Wiederkehrzeit wesentlich länger als die lineare Korrelationszeit t_c ist. Ein Zeichen der Nichtstationarität sind auch die deutlich sichtbaren Sprünge, die den weniger glatten Verlauf bei den Surrogaten verursachen.

Zukünftige Analysen an den gemessenen Geschwindigkeiten des Sonnenwindes sollten darauf abzielen, die Hintergründe und Ursachen der Nichtstationarität zu untersuchen. Dadurch könnte diese kompensiert werden ohne die hier und in der Literatur durchgeführten technischen Korrekturen.

Als weitere Anwendung der hier verwendeten Verfahren bietet sich beispielsweise die Analyse von Kalibrationsdaten des Detektors an, um dessen möglicherweise nichtlinearen Einfluß auf die Dichte- und Geschwindigkeitsmessungen zu berücksichtigen.

6.4 Sonnenfleckenrelativzahl

Der zeitliche Verlauf der Sonnenfleckenrelativzahl wurde in der Zeitserienanalyse vielfach untersucht. Dieser Datensatz wurde einerseits zur Überprüfung von Modellen verwendet, andererseits als Referenzdatensatz zur Erprobung neuer Algorithmen eingesetzt.

Monatliche Werte für die Sonnenfleckenrelativzahlen liegen seit dem Januar 1749 vor. Im folgenden wird diese Zeitserie als *mssn* (*monthly sunspot numbers*) bezeichnet. Die relative Zahl der Sonnenflecken (*Wolf's number*) ist definiert als

$$s := k(10g + f) \quad (6.4)$$

wobei g die Anzahl der Gruppen von Sonnenflecken und f die Anzahl der einzelnen Sonnenflecken ist. Der Wichtungsfaktor k beschreibt die Güte der einzelnen Beobachtungsstationen und macht die Messungen miteinander vergleichbar [118].

Die in dieser Arbeit untersuchte Zeitserie endet im April 1998, und besteht somit aus 2992 Werten.⁷ In Abb. 6.22 (oben) ist der bekannte 11-Jahreszyklus deutlich zu sehen. Dieser Zyklus hat eine große Schwankungsbreite von 7 bis 17 Jahren, wobei die Höhe der Maxima mit der Intervalllänge korreliert [118]. Ferner existieren diesem Zyklus überlagerte Periodizitäten, deren Längen und physikalische Natur umstritten sind [20]. In Abschnitt 6.4.3 wird auf dieses Problem noch einmal eingegangen.

6.4.1 Bisherige Analysen

In diesem Abschnitt wird ein Überblick über bereits durchgeführte nichtlineare Analysen der Sonnenflecken-Aktivität gegeben, die mit der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchung in Zusammenhang stehen.

Die Zeitserie der täglichen Sonnenfleckenrelativzahl von 1878 – 1945 wurde von Morfill *et al.* [72] analysiert. Dabei stand die Erprobung und der Vergleich der Anwendbarkeit verschiedener Modelle im Vordergrund. Es wurde nicht der tatsächliche Wert, sondern der gleitende Mittelwert über einen Zeitraum von 12 Tagen verwendet. Die Güte des jeweiligen Modells wurde über nichtlineare Verfahren, wie beispielsweise die Korrelationssumme, bestimmt. Die statistischen Größen, jeweils berechnet auf Modell- und Originalzeitserie, sollte sich nicht signifikant voneinander unterscheiden. Ein stochastisches, lineares Modell im Sinne von Abschnitt 5.5.3 wurde als wenig wahrscheinlich

⁷Diese Zeitserie ist erhältlich über <http://www.oma.be/KSB-ORB/SIDC/index.html>

verworfen. Als aussichtsreicher Ansatz stellte sich ein Modell heraus, das im wesentlichen auf dem Lorenz-System basiert und mit Rauschen überlagert wurde.

In einer Analyse der (weit häufiger verwendeten) jährlichen Mittelwerte der Relativzahl der Sonnenflecken gelangte Casdagli [14] zu dem Schluß, daß nichtlineares Verhalten mit Sicherheit vorliegt. Daß es sich dabei jedoch um niedrigdimensionalen Determinismus handele, sei zweifelhaft. Vielmehr sei es wahrscheinlich, daß die Anzahl der Freiheitsgrade zwar hoch sei, sich aber genügend deterministische Signaturen finden, die durch ein niedrigdimensionales, stochastisches nichtlineares Modell beschrieben werden können.

Kurths und Ruzmaikin [58] machten Vorhersagen der jährlichen Zeitserie mit den Einbettungsparametern $m = 3, 4$ und $\tau = 2, \dots, 5$ Jahre. Wesentlich mehr Eingabewerte verwendeten Weigend *et al.* [125], die die gleiche Zeitserie mit einem neuronalen Netz mit 12 Input-Neuronen vorherzusagen versuchten. Dies entspricht im Mittel etwas mehr als einer Zykluslänge und somit einem ähnlichen Zeitintervall wie das von Kurths und Ruzmaikin benutzte.

Eine der ersten Anwendungen von Surrogaten auf reale Probleme findet man bei Theiler *et al.* [113]. Dabei wurde die jährliche Zeitserie gegen AAFT-Surrogate (vgl. Abschnitt 5.5.4) mittels Fehlern bei nichtlinearer Vorhersage und Dimensionsabschätzungen zu unterscheiden versucht. Während bei den Vorhersagefehlern eine Detektion auf einem 5σ -Niveau erhalten wurde, führte die Anwendung von Dimensionsalgorithmen zu keiner signifikanten Detektion.

Die monatliche Zeitserie wurde von Mundt *et al.* [74] untersucht. Dabei wurde vor der nichtlinearen Analyse ein linearer Tiefpaß-Filter verwendet. Die Autoren finden eine Autokorrelationszeit von $t_c = 38$ Monaten, bei der die AKF erstmal auf Null abfällt. Die Skalierung der Ergebnisse war am besten mit einer Verzögerungszeit von $\tau = 10$ Monaten. Die Dimensionsanalyse lieferte ein von Mundt *et al.* selbst in Frage gestelltes Ergebnis von $D^{(2)} = 2.3$. Sie gaben deswegen ferner eine realistischere Abschätzung der Korrelationsdimension von $2 < D^{(2)} < 3$. Der Einfluß des Filters auf dieses Ergebnis wurde auch von den Autoren angesprochen, jedoch nicht geklärt. Ferner zeigt die lange Autokorrelationszeit über ungefähr drei Jahre, daß der Einfluß linearer Korrelationen nicht unterschätzt werden darf. Die Korrektur des Algorithmus zur Berechnung der Korrelationsdimension nach Theiler [111], die mögliche Artefakte durch lineare Korrelationen weitgehend ausschließt, wurde nicht angewendet.

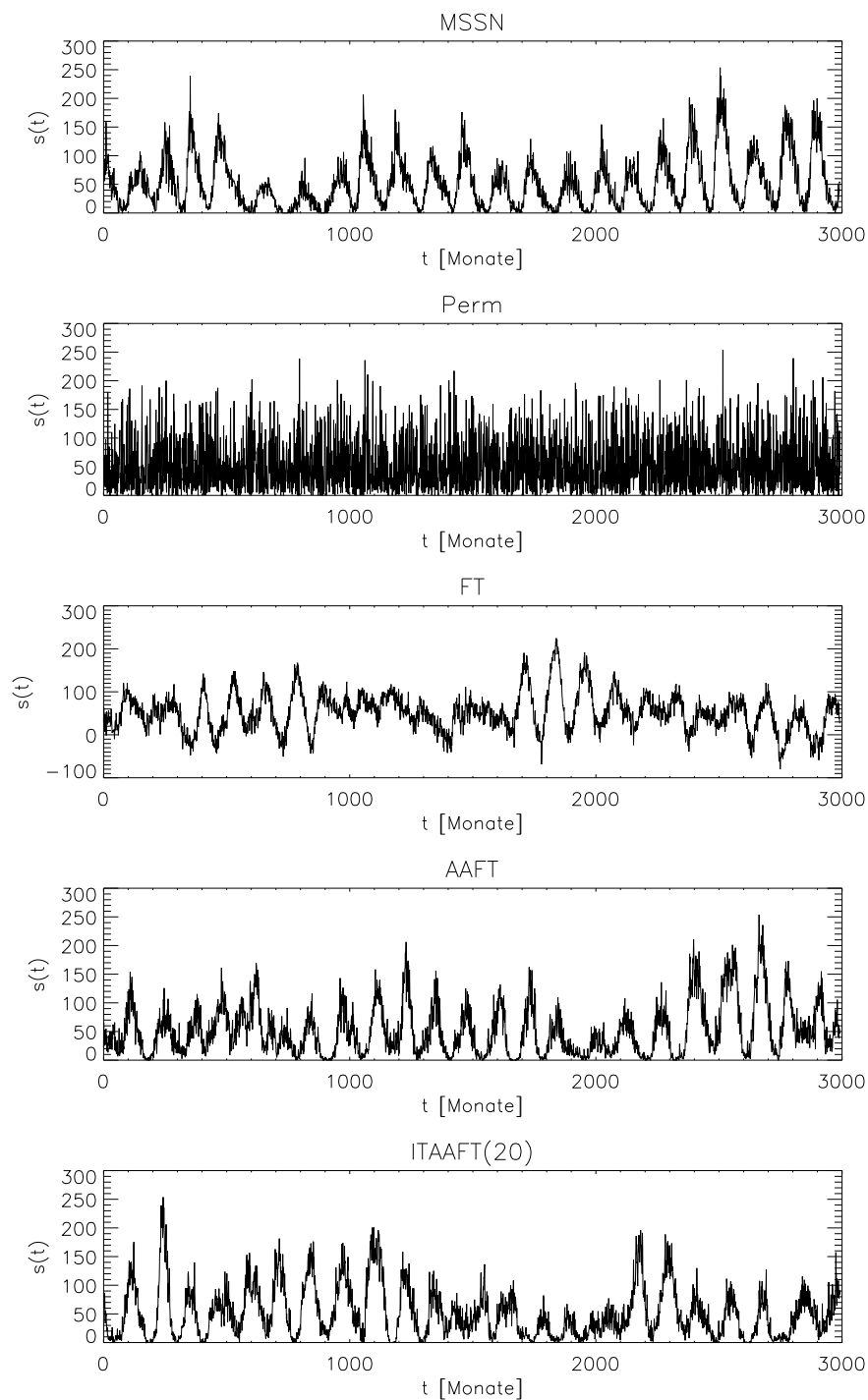


Abbildung 6.22: Sonnenfleckenrelativzahl (oben) und vier verschiedene Surrogate: PERM, FT, AAFT, ITAAFT(20) (von oben nach unten)

6.4.2 Nachweis nichtlinearer Eigenschaften

Wie bereits in den vorhergehenden Abschnitten werden zuerst die verschiedenen Surrogate für diesen Datensatz miteinander verglichen. In Abb. 6.22 sind die vier Möglichkeiten aus Abschnitt 5 illustriert.

Einfache Permutationen können auf den ersten Blick von den Originaldaten unterschieden werden. Diese Art von Surrogaten kann nur dann vielversprechend verwendet werden, wenn es sich um linear völlig unkorrelierte Daten handelt. Andernfalls werden auch die starken Unterschiede in den linearen Eigenschaften zu 100% Diskrimination führen.

Auffälligste Eigenschaft der FT Surrogate sind die negativen Werte, die im Originaldatensatz nicht auftreten können. Ferner zeigt auch die Häufigkeitsverteilung der Werte signifikante Abweichungen vom Original. Wie schon in Abschnitt 5.5.3 betont wurde, eignet sich diese Art von Surrogaten für Daten mit nicht-weißem Leistungsspektrum und gaußverteiletem Wertespektrum.

Die beiden Surrogat-Varianten AAFT und ITAAFT unterscheiden sich im Gegensatz zu den vorher erwähnten nicht so offensichtlich von den Originaldaten. Speziell bei ITAAFT-Surrogaten werden die linearen Eigenschaften sehr gut beibehalten. Die Abbildung 6.23 zeigt die Autokorrelationsfunktionen der Sonnenflecken und 100 ITAAFT(20)-Surrogaten. Trotzdem bestehen auch hier Abweichungen, die zu signifikanten Detektionsraten führen werden. Neben augenscheinlichen *Unregelmäßigkeiten* in der Abfolge der Zyklen spielt auch die später noch genauer betrachtete Asymmetrie der einzelnen Zyklen eine Rolle.

Die Abbildung 6.24 veranschaulicht den relativen Fehler in der Autokorrelationsfunktion zwischen ITAAFT-Surrogaten und *mssn* als Funktion der Iterationen. Wie die Kurve zeigt, wird der Sättigungsbereich ab etwa 10 Iterationen erreicht.

Der Nachweis von nichtlinearen Eigenschaften wurde über eine Serie von Hypothesentests mit ITAAFT(20)-Surrogaten durchgeführt. Die Größe des Tests ist $\alpha = 0.1$, die Originaldaten wurden jeweils gegen 9 Surrogate getestet. Das Verhältnis von erfolgreichen Detektionen zur Anzahl der Versuche — die Macht β des Tests — ist für verschiedene Surrogat-Arten und Verfahren in Tabelle 6.8 zusammengestellt. Neben den in Abschnitt 5 vorgestellten Surrogaten wurde hier eine weitere Art der Ersatzdaten verwendet. Die Motivation dafür und die Vorgehensweise werden weiter unten erläutert.

Die angegebenen Werte in Tabelle 6.8 für β zeigen keine signifikante Veränderung, wenn die Parameterwerte in einem sinnvollen Bereich variiert werden.

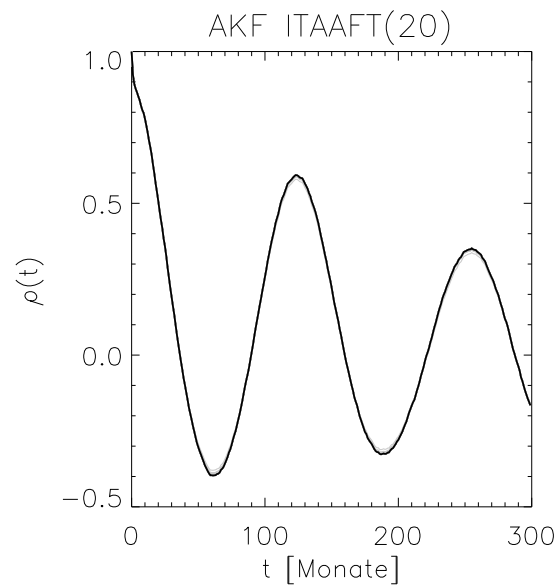


Abbildung 6.23: Die Autokorrelationsfunktion der Zeitserie *mssn* (schwarz) und von 100 ITAAFT(20) Surrogaten (grau)

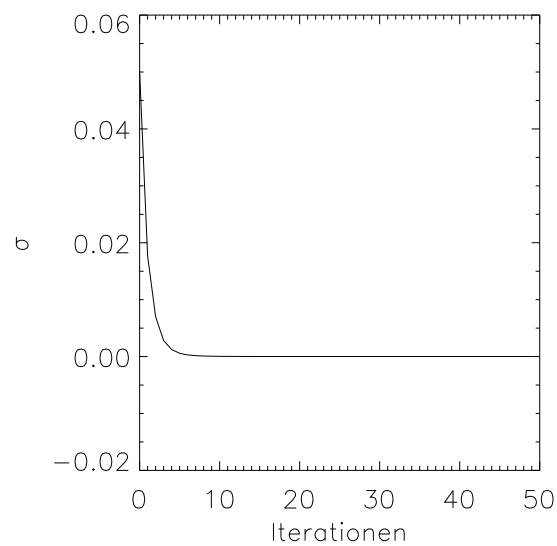


Abbildung 6.24: Der relative Fehler in der Autokorrelationsfunktion nach Gleichung (5.5) von *mssn* und ITAAFT-Surrogaten als Funktion der Anzahl der Iterationen.

Surrogat	NPE	MPT
PERM	1.0	1.0
FT	0.88 ± 0.03	0.99 ± 0.01
AAFT	1.0	1.0
ITAAFT	0.68 ± 0.05	0.61 ± 0.05
RA	0.02 ± 0.01	0.93 ± 0.03

Tabelle 6.8: Detektionsraten von `mssn` gegen verschiedene Surrogate für die Verfahren NPE und MPT.

In den gezeigten Fällen wurden als Parameterwerte $m = 4$, $\tau = 30$ und $\epsilon = 1/8$ gewählt.

Der Ausschluß von linear korrelierten nächsten Nachbarn über einen geforderten zeitlichen Mindestabstand t_{\min} , der im Abschnitt über die Korrelationssumme (3.3) schon angesprochen wurde, liefert in diesem Fall eine Erhöhung der Diskriminationsrate auf $\beta \approx 0.9$. Dies liegt daran, daß die Vorhersagbarkeit der Surrogate ausschließlich auf ihren linearen Eigenschaften beruht. Der Ausschluß der linear korrelierten Nachbarn führt sowohl bei den Originaldaten als auch bei den Surrogaten zu einer Verschlechterung der Vorhersagbarkeit, wobei dieser Effekt bei den Surrogaten überwiegt und der Unterschied in der diskriminierenden Statistik zunimmt. Bei stark nichtstationären Zeitserien, wie beispielsweise der Geschwindigkeit des Sonnenwindes im vorangegangenen Abschnitt 6.3.4, kann der Ausschluß von zu vielen Punkten auch zu statistisch nicht relevanten Ergebnissen führen.

Die in Abschnitt 6.1.2 angesprochenen Artefakte bei der Detektion von Nichtlinearitäten mit Surrogaten treten bei der Analyse der Sonnenfleckenrelativzahl nicht auf. Es wurde versucht, ITAAFT(20)-Surrogate erster und zweiter Ordnung mit den in Tabelle 6.8 angegebenen Verfahren und Parametern zu unterscheiden. Für NPE wurde $\beta = 0.14 \pm 0.03$ erhalten. Das Resultat bei der Anwendung von MPT ist $\beta = 0.05 \pm 0.02$.

Die Ergebnisse in der letzten Zeile von Tabelle 6.8 wurde mit Surrogaten der Art RA (*rearrange*) erhalten, die eine spezielle Eigenschaft der Originaldaten aufweisen. Bei diesen Surrogaten handelt es sich um Permutationen der einzelnen Zyklen. Die zeitliche Asymmetrie innerhalb eines Zyklus — der Anstieg ist steiler als der Abfall — bleibt dabei erhalten, die möglichen Korrelationen, die über einen Zyklus hinaus bestehen, werden jedoch zerstört. Mit dieser Art von Surrogaten wird der Tatsache Rechnung getragen, daß es

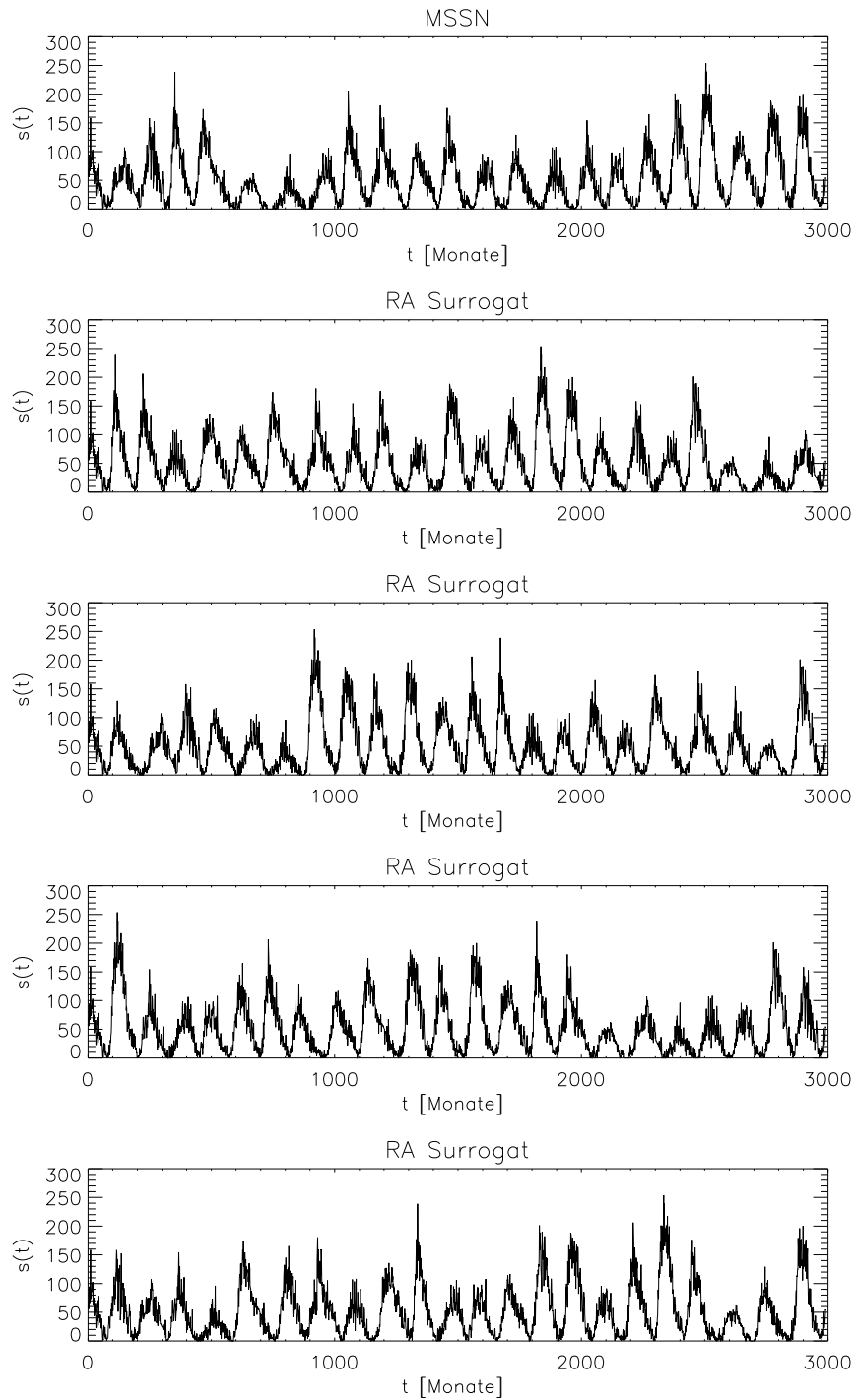


Abbildung 6.25: Sonnenfleckenrelativzahl (oben) und vier RA-Surrogate

selbst mit ITAAFT-Surrogaten nicht möglich ist, diese Zyklusasymmetrie zu erhalten. Die Tatsache, daß die Surrogate diese nicht aufweisen, kann beispielsweise mit der in Abschnitt 6.1.1 erwähnten Zeitumkehrstatistik leicht ausgenützt werden. Die mit diesen Surrogaten überprüfte Nullhypothese ist, daß zwar innerhalb eines Zyklus Nichtlinearitäten bestehen, die einzelnen Zyklen jedoch unabhängig voneinander aufeinander folgen.

Für die Analyse wurde die gesamte Zeitserie an 23 Punkten im Bereich der Minima geteilt, und die 22 erhaltenen kompletten Zyklen permutiert. In Abb. 6.25 sind die Zeitserie `mssn` und vier RA-Surrogate dargestellt. Während globale Charakteristika, wie beispielsweise das *Kleine Maunder-Minimum*⁸ um 1800–1820 [20] — in Abbildung 6.25 liegt dieses im Intervall $600 \lesssim t \lesssim 900$ —, nicht wiedergegeben werden, zeigen die Surrogate die typische Zyklusasymmetrie der Originaldaten.

Während die Methode der Fehler bei nichtlinearer Vorhersage NPE keine Diskrimination erlaubt, führt das Verfahren der korrespondierenden Nachbarn MPT zu der erwarteten signifikanten Trennung von Daten und RA-Surrogaten (siehe Tabelle 6.8).

In den Abbildungen 6.23 und 6.26 ist die Autokorrelationsfunktion der Originaldaten und von ITAAFT(20) bzw. RA-Surrogaten gezeigt. Während im ersten Fall die Autokorrelationsfunktionen wie erwartet nahezu deckungsgleich sind, bestehen für RA-Surrogate deutlich sichtbare Abweichungen. Durch das Permutieren der einzelnen Zyklen sind alle Korrelationen, die über einen Zyklus hinaus bestehen, zerstört worden, also sowohl nichtlineare, wie auch lineare, was sich in der Autokorrelationsfunktion widerspiegelt.

6.4.3 Ergebnis

Die verwendeten statistischen Größen zur Diskrimination sind sensitiv auf Änderungen des Amplituden- und des Leistungsspektrums. Dies unterstreicht erneut die Wichtigkeit, gute Surrogate zu verwenden. Andernfalls werden leicht die falschen Folgerungen aus den Ergebnissen gezogen.

Die sehr hohe Signifikanz von nichtlinearem Verhalten aus früheren Analysen (vor allem [113]) erscheint bei Verwendung von ungefilterten monatlichen Werten im Licht der vorliegenden Ergebnisse fraglich. Es handelt sich jedoch immer noch mit hoher Wahrscheinlichkeit um ein nichtlineares System. Innerhalb eines Zyklus bestehen ausreichend nichtlineare Korrelationen, die

⁸Das eigentliche *Maunder-Minimum* liegt zwischen 1645 und 1715 und bezeichnet eine außerordentliche Ruhephase in der Sonnenaktivität [20].

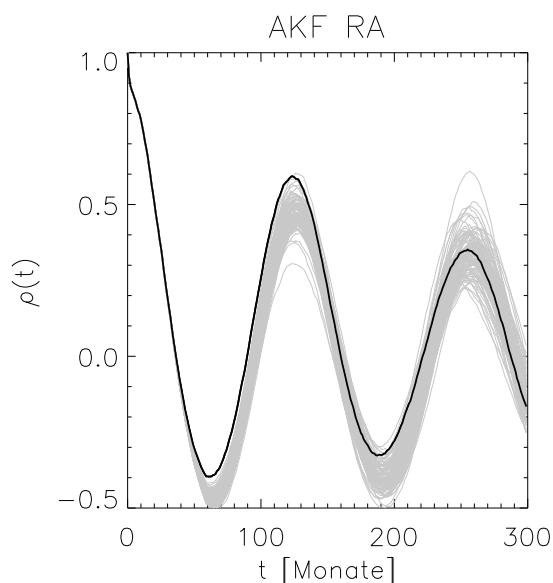


Abbildung 6.26: Die Autokorrelationsfunktion der Zeitserie *mssn* (schwarz) und von 100 RA Surrogaten (grau)

mit einem auf niedrigdimensionalem Determinismus basierenden Algorithmus ausgewertet werden können.

Die Untersuchung von RA-Surrogaten mit der Methode der korrespondierenden Nachbarn zeigt, daß auch über eine Zykluslänge hinaus nichtlineare Korrelationen bestehen. Dieses Ergebnis ist zum einen mit visueller Inspektion der Zeitserie und den Surrogaten in Abbildung 6.25 in Einklang, da globale Charakteristika wie beispielsweise das kleine Maunder-Minimum nicht korrekt wiedergegeben werden. Zum anderen ist bekannt, daß neben dem 11-Jahres Zyklus weitere Periodizitäten in der Sonnenfleckenrelativzahl existieren, wie der nach Gleissberg benannte Zyklus mit einer Periode von etwa 80 Jahren. Die exakte Periodendauer ist jedoch umstritten [20]. In [7] wird versucht, die langreichweitigen Variationen als Produkt eines Zufallsprozesses zu erklären. Die hier durchgeführte Analyse zeigt, daß diese Erklärung nicht zutreffend ist.

Das Verfahren mit den nichtlinearen Vorhersagefehlern führte in diesem Fall zu keiner Diskrimination.

Die hohen Diskriminationsraten von MPT könnten auf den ersten Blick auf die Abweichungen in der Autokorrelationsfunktion zurückzuführen sein. Dagegen spricht allerdings, daß auch NPE höhere Diskriminationsraten liefern

sollte, wenn sich Daten und Surrogate in ihren linearen Eigenschaften unterscheiden, wie z.B. bei PERM-Surrogaten oder — mit weniger drastischen Abweichungen — bei Aaft-Surrogaten (vgl. Tabelle 6.8 und die Überlegungen im Abschnitt 5.5).

Die Frage, ob es sich bei dem nichtlinearen Sonnenfleckenzyklus zusätzlich um ein niedrigdimensionales System handelt, läßt sich nicht mit zufriedenstellender Sicherheit beantworten. Für ein derartiges System würde man wesentlich höhere Werte für die Macht β erwarten. Als mögliche Erklärung bieten sich zwei Alternativen an: zum einen könnte intrinsisches Rauschen den vorliegenden niedrigdimensionalen Determinismus unterdrücken, zum anderen könnte es sich um ein hochdimensionales System handeln. Mit den bisher durchgeführten Analysen läßt sich eine diesbezügliche Entscheidung noch nicht treffen.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Die Modellbildung auf der Grundlage von Daten, die an realen Systemen gemessen werden, ist eine wesentliche Zielsetzung in der Physik. Dabei ist es von großer Bedeutung zu entscheiden, ob einer irregulären Zeitserie

- ein deterministischer, nichtlinearer und eventuell chaotischer Prozeß,
- ein linearer, stochastischer Prozeß
- oder eine Mischung aus beiden

zugrundeliegt. Messungen an realen Systemen sind im allgemeinen mit Rauschen behaftet, was eine Entscheidung zwischen diesen Alternativen erschweren kann. Rauschen bezeichnet dabei den Teil der Daten, der keine Systemeigenschaften widerspiegelt. Dieser Teil kann sowohl vom System als auch vom Meßvorgang stammen.

Die Berechnung von Größen, die chaotisches Verhalten hinreichend charakterisieren, ist somit oftmals nicht zuverlässig möglich. Sowohl das Rauschen als auch praktische Aspekte wie endliche Länge der Zeitserie und endliche Auflösung stellen limitierende Faktoren dar; sollen diese Größen als systemcharakterisierende Invarianten verstanden werden, deren Wert unabhängig von eineindeutigen Koordinatentransformationen ist, so müssen Grenzwertbetrachtungen durchgeführt werden, die in der Realität meistens nicht möglich sind.

Bei den in dieser Arbeit untersuchten Systemen wurde große Sorgfalt darauf verwendet, die für chaotisches Verhalten notwendige Bedingung der Nichtlinearität nachzuweisen oder zu widerlegen. Sowohl bei den hier neu vorgestellten Methoden zur Detektion von nichtlinearem Verhalten als auch bei

der als Referenzverfahren verwendeten Methode der nichtlinearen Vorhersagefehler ist das Berechnen von Grenzwerten nicht notwendig. Die *goldene Methode* existiert sehr wahrscheinlich nicht. Übereinstimmende Resultate bei Anwendung verschiedener Verfahren — speziell auf Zeitserien von realen Systemen, wie beispielsweise die Sonnenwinddichte — erhöhen die Sicherheit der Detektion von nichtlinearem Verhalten.

Bei der Methode der korrespondierenden Nachbarn handelt es sich um ein hier neu entwickeltes nichtlineares Verfahren zur Analyse von Zeitserien, das die Vorhersagbarkeit über die Ähnlichkeit von Trajektorienabschnitten beschreibt. Im Vordergrund der Entwicklung standen dabei die Einfachheit der Berechnung und die Interpretierbarkeit bei der Anwendung auf dynamische Systeme. Das Maß der korrespondierenden Nachbarn ergibt unter bestimmten Bedingungen im Grenzfall die Kolmogorov-Sinai Entropie zweiter Ordnung, die auch als Korrelationsentropie bezeichnet wird. Es stellt somit eine Erweiterung der Korrelationsentropie von Zeitserien dar, bei der die Vorhersagezeit nicht auf die Verzögerungszeit τ beschränkt ist, sondern beliebige Vielfache der Abtastrate berücksichtigt werden.

Die Vorhersagbarkeit errechnet sich dabei über das Verhältnis von absoluten und bedingten Aufenthaltswahrscheinlichkeiten im künstlichen Zustandsraum. Das analytisch berechnete Verhalten dieser statistischen Größe für Zufallsprozesse steht in Übereinstimmung mit dem aus Simulationen erhaltenen Ergebnis. In diesem Kontext wurde der starke Einfluß von Randeffekten auf statistische Größen, die auf Zustandswahrscheinlichkeiten beruhen, gezeigt.

Als lokale Größe aufgefaßt, liefert der Bruchteil der korrespondierenden Nachbarn die lokale Kolmogorov-Sinai Entropie erster Ordnung, die die Verteilung der Vorhersagbarkeit im Zustandsraum beschreibt. Diese Größe ist im allgemeinen nicht invariant, sondern abhängig von der Partition, die der Berechnung zugrundeliegt.

Ein weiteres neues Verfahren zum Nachweis nichtlinearen Verhaltens ist die Methode des Temperatur-Analogons. Dieses Maß charakterisiert die Parallelität von benachbarten Trajektorien im Zustandsraum und hat in der Theorie stochastischer Prozesse seine Entsprechung in der Diffusionskonstante der Fokker-Planck Gleichung. Diese Methode ist eine Erweiterung bestehender Verfahren [51, 52, 121], die zusätzlich zur Richtung auch den Betrag der Differenzvektoren und die lokale Dichte des Zustandsraumes berücksichtigt.

Der zeitliche Verlauf von Intensitätsschwankungen eines FIR-Lasers wird in dieser Arbeit als Referenzdatensatz für ein reales System verwendet. An diesem Datensatz wurden verschiedene Aspekte der Methode der korrespondierenden Nachbarn demonstriert. Unter anderem wurde die Skalierung dieses

Maßes mit der Auflösung der Überdeckung untersucht und die Anwendung der Methode zur Abschätzung der Einbettungsdimension demonstriert.

Da unterschiedliche Diskriminationsalgorithmen zu signifikanter Abgrenzung gegenüber linearen, stochastischen Prozessen führen, wurde die Laserzeitserie künstlich verwechselt. Um die linearen Eigenschaften möglichst unverändert zu lassen, wurde ein Surrogat als Rauschen verwendet und mit unterschiedlicher Gewichtung auf die Originaldaten addiert. Die Leistungsfähigkeit der Detektionsalgorithmen wurde über Hypothesentests mit Surrogaten aus der Macht β bestimmt. Die Methode der korrespondierenden Nachbarn lieferte für diesen Datensatz die besten Ergebnisse. Die Detektionsrate, die mit dem Verfahren des Temperaturanalogons erhalten wurde, lag um einen Faktor 3 über dem theoretisch erwarteten Ergebnis für einen linearen Datensatz, jedoch ebenfalls um etwa einen Faktor 3 unter dem Ergebnis, das mit der Methode der korrespondierenden Nachbarn erhalten wurde.

Bei der Analyse dieser Zeitserie wurde erstmals ein Artefakt entdeckt, das zu Unterschieden von Surrogaten unterschiedlicher Ordnung führt. Die Surrogate der Laserdaten konnten signifikant von Surrogaten dieser Surrogate getrennt werden. Speziell bei der empirischen Bestimmung der Diskriminationsfähigkeit von nichtlinearen Algorithmen im Grenzbereich schwacher Nichtlinearitäten führt dieses Artefakt zu falschen Schlußfolgerungen. Darüberhinaus folgt bei der Analyse von realen Zeitserien die fälschliche Akzeptanz der Nullhypothese, daß es sich bei den Daten um die Realisation eines linearen, verwechselten Zufallsprozesses handelt, wenn die Surrogate artifizielle Nichtlinearitäten enthalten. Bei den weiteren Anwendungsbeispielen wurde die Qualität der Surrogate diesbezüglich überprüft. Bei keinem der hier behandelten Systeme trat dieses Artefakt nochmals auf.

Der Einfluß der Stärke der Nichtlinearitäten auf die Detektionsalgorithmen wurde am Lorenz-System untersucht, das künstlich mit farbigem Rauschen überlagert wurde. Die besten Ergebnisse erhielt man mit der Methode der nichtlinearen Vorhersagefehler. Das Verfahren der korrespondierenden Nachbarn lieferte gute Detektionsraten, während bei Verwendung des Temperaturanalogons bei einem Signal-zu-Rausch Verhältnis von $\text{SNR} = 1$ keine Diskrimination mehr möglich war.

Die Analyse des Sonnenwindes wurde mit zwei synchron gemessenen Zeitserien — der Dichte und der Geschwindigkeit — durchgeführt. Die Messungen stammen vom Proton Monitor, einem Experiment an Bord des Satelliten SOHO. Erst die Verfügbarkeit kontinuierlicher und zeitlich hochaufgelöster Daten machte die Analyse dieses Systems mit den zum Teil in dieser Arbeit erstmals angewandten nichtlinearen Verfahren möglich. Tests auf nicht-

linearen Determinismus in diesem System mit Surrogaten, die sowohl das Amplituden- als auch das Leistungsspektrum erhalten, sind bisher in der Literatur nicht berücksichtigt.

Die Zeitserie der Dichtefluktuationen enthält signifikante Nichtlinearitäten, die das Kurzzeitverhalten auf Minutenskalen prägen. Die Methode der korrespondierenden Nachbarn ermöglichte ferner eine Untersuchung der Vorhersagbarkeit als Funktion der Vorhersagezeit. Bei Mittelung der Vorhersagbarkeit über einen Zeitraum von einer Stunde nahm die Signifikanz der Detektionsraten ab. Nichtlineare Korrelationen scheinen nur über kurze Zeiten signifikanten Einfluß zu haben. Auf diesen Zeitskalen sind die Daten mit nichtlinearen Verfahren besser als mit linearen vorhersagbar. Bei Variation der Parameterwerte erwies sich das Verfahren der korrespondierenden Nachbarn robuster als die Methode der nichtlinearen Vorhersagefehler und des Temperaturanalogons.

Die Geschwindigkeiten des Sonnenwindes unterscheiden sich sehr signifikant von ihren Surrogaten. Dieses Ergebnis wurde jedoch als artifiziell in Frage gestellt. Der unetwige Verlauf des Datensatzes und die starke Nichtstationarität auf langen Zeitskalen führten zu nicht verlässlichen Ergebnissen. Speziell der in der Literatur [67] veröffentlichte Wert für die Attraktordimension erscheint in Anbetracht der vorliegenden Resultate zweifelhaft. Eine Analyse dieser Zeitserie über die Korrelationssumme zeigte, daß der in diesem System gefundene Skalierungsbereich von den linearen Korrelationen herrührt.

Der zeitliche Verlauf der Sonnenfleckenrelativzahl ist in der Literatur gut dokumentiert. Die nichtlinearen Eigenschaften des Monatsmittels konnten mit verschiedenen Surrogaten nachgewiesen werden. Ferner wurde mit der Methode der korrespondierenden Nachbarn die Nullhypothese verworfen, daß es sich bei der Sonnenfleckenrelativzahl um eine zufällige Abfolge nichtlinearer Einzelzyklen handelt. Es bestehen auch zwischen den einzelnen Zyklen nichtlineare Korrelationen.

Die durchgeführten Analysen von synthetischen und realen Systemen zeigten, daß selbst die Überprüfung der Nichtlinearität, der notwendigen Eigenschaft für chaotisches Verhalten, sehr aufwendig und anfällig für Fehlinterpretationen ist. Aus diesem Blickwinkel erscheint insbesondere die zuverlässige Berechnung von Invarianten an realen Datensätzen als sehr problematisch.

Zukünftige methodische Entwicklungen zielen auf das Zusammenfassen der hier neu eingeführten Analyseverfahren, etwa in Form einer Fokker-Planck Gleichung (vgl. Anhang B). Die Kombination der nach dieser Arbeit gut verstandenen Maße läßt auf neue Erkenntnisse in der Analyse nichtlinearer und komplexer Systeme hoffen.

In den kommenden Analysen des Sonnenwindes sollten zunächst zwei Ziele verfolgt werden: Zum einen soll der Ursprung der Nichtstationarität in den Sonnenwindgeschwindigkeiten ergründet werden. Es sollte damit möglich sein, durch weniger technische Korrekturen zuverlässige Ergebnisse aus der Analyse mit nichtlinearen Verfahren zu gewinnen. Zum anderen soll ein nichtlineares Modell zur Vorhersage der Dichte des Sonnenwindes über kurze Zeitskalen entwickelt werden.

Anhang A

Produktionstechnik: Innendrehen

Mechanische Systeme, wie sie in der Produktionstechnik zum Einsatz kommen, weisen häufig eine komplizierte Eigendynamik auf (siehe z.B. [1, 71]). Diese Eigenschaft beruht auf nichtlinearen Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Komponenten des Systems, wie sie insbesondere unter Einwirkung von Reibung, der Kopplung schwingender Massen und der Umformung oder Strömung von Materialien unter Einwirkung externer Anregung auftreten. Die Folge dieser nichtlinearen Wechselwirkungen ist eine komplizierte Systemdynamik, die sich in weiten Regionen des Systemparameterraums sowohl als irreguläres als auch schwierig zu kontrollierendes Prozeßverhalten ausdrückt.

Das hier untersuchte System des Innendrehens ist eine Variante der klassischen Verfahren zur Oberflächenbearbeitung rotationssymmetrischer Werkstücke, bei der Material von der Innenseite — beispielsweise eines Hohlzylinders — abgetragen wird. Diese Methode wird unter anderem bei der Oberflächenveredelung von Lagerschalen im Automobilbau eingesetzt. Dabei dreht sich das zu bearbeitende Werkstück mit hoher Umdrehungszahl um die Symmetrieachse, während die Schneidwerkzeuge feststehen. Dieses System neigt aufgrund des Einsatzes lang auskragender schlanker Werkzeuge mit kleinem Durchmesser sehr schnell zu instabilem Verhalten [28]. Dies zeigt sich im Auftreten von Ratterschwingungen, die sich negativ auf die Oberflächengüte der bearbeiteten Werkstücke auswirken.

Abhängig von den Systemparametern wie Rotationsgeschwindigkeit, Vorschubgeschwindigkeit und Schnitttiefe treten verschiedene Systemzustände auf. Im Extremfall kann es zum Bruch des Werkzeugs kommen.

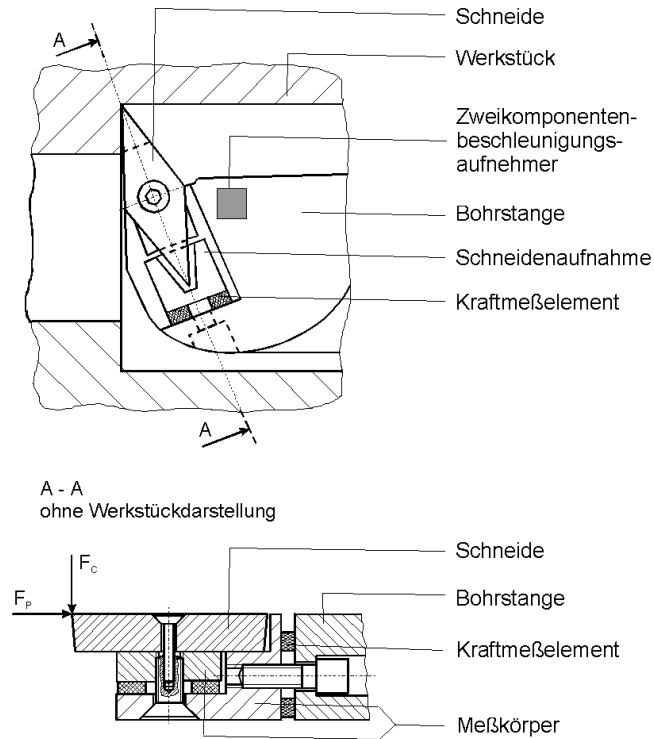


Abbildung A.1: Prinzipskizze der Kraftmessung an der Drehmeißelspitze in der Schnittdarstellung (aus [126]). Im unteren Teil ist die Kraft in Passivrichtung F_p eingezeichnet.

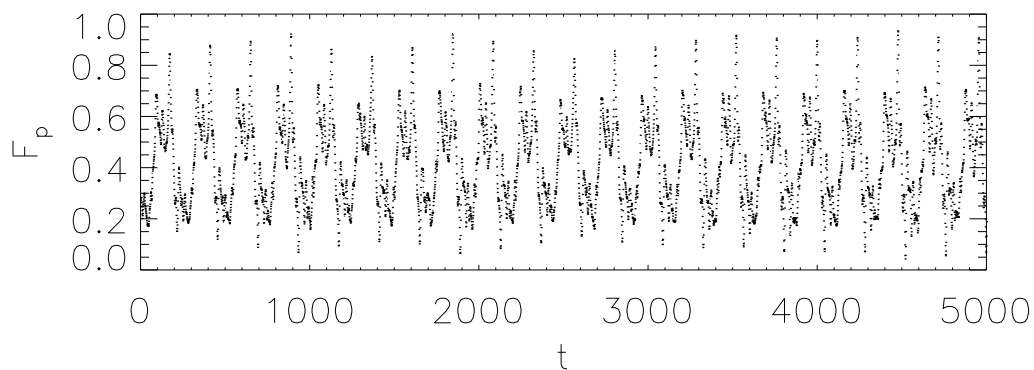


Abbildung A.2: Die ersten 5000 Werte der Zeitserie F_p der gemessenen Kraft senkrecht zur Werkstückoberfläche.

In Abbildung A.1 ist der Prozeß des Innendrehens mit den verwendeten Sensoren zur Messung der auftretenden Kräfte schematisch dargestellt. Mit diesem Aufbau können die Kräfte, die auf das Werkzeug in Vorschub-, Schnitt- und Passivrichtung wirken, bestimmt werden.

Im Rahmen einer Pilotstudie mit dem Institut für spanende Fertigung in Dortmund wurde der maximale Lyapunov-Exponent der in Abbildung A.2 gezeigten Zeitserie berechnet (siehe Abschnitt 2.6.2 und [127]). Es handelt sich bei diesen Daten um die (normierte) Kraft in Passivrichtung F_p . Dies ist die Kraftkomponente, die auf den Drehmeißel senkrecht zur bearbeiteten Oberfläche wirkt (vgl. auch Abbildung A.1 unten). Die Zeitserie besteht aus 105 000 Datenpunkten, der zeitliche Abstand zwischen den Werten $\Delta t = 0.01425$ ms.

Bei dem Werkstück handelt es sich um einen Hohlzylinder aus einer Aluminiumlegierung (AlMgSi 0.7) der Länge 250 mm, mit einem Außendurchmesser von 100 mm und einem Innendurchmesser von 60 mm.

Die Prozeßparameter im vorliegenden Versuch waren

- Rotationsgeschwindigkeit $\omega = 20.1$ Hz
- Vorschubgeschwindigkeit $v_f = 0.05$ mm/U
- Schnittgeschwindigkeit $v_c = 232$ m/min
- Schnitttiefe $a_p = 0.25$ mm

Für die Berechnung des maximalen Lyapunov-Exponenten wurde der Algorithmus aus [18] verwendet. Dabei wurden die Einbettungsparameter, der minimal zulässige Abstand der Nachbarpunkte, die maximale Anzahl der zu berücksichtigenden Nachbarpunkte und Abtastrate der Zeitserie durch Ausdünnung variiert. Das angegebene Ergebnis von $\lambda = 0.087 \pm 0.006$ bit je Zeitschritt wurde aus einem Plateau abgeleitet, auf dem sich der Wert von λ bei Veränderung der Parameter nicht mehr änderte.

Anhang B

Fokker-Planck Gleichung

In diesem Abschnitt wird ein Überblick über die Herleitung und den Anwendungsbereich der Fokker-Planck Gleichung gegeben. Dabei werden zuerst die wesentlichen Begriffe erklärt und die Annahmen, die in die Fokker-Planck Gleichung eingehen, verdeutlicht. Es werden Möglichkeiten der Verwendung dieser Gleichung zur Beschreibung dynamischer Systeme im Zustandsraum aufgezeigt.

B.1 Definitionen

Wahrscheinlichkeiten

Gegeben sei eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x, t)$, die kontinuierlich in Raum und Zeit ist. Die Wahrscheinlichkeit, einen Zustand zur Zeit t im Intervall $[x, x + dx[$ zu finden, ist demnach $p(x, t) dx$.

Aufbauend auf der Wahrscheinlichkeitsverteilung werden folgende Größen definiert:

- *Übergangswahrscheinlichkeit* $p_2(x_2, t_2|x_1, t_1)$

Die Zustandswahrscheinlichkeit $p(x_2, t_2)$ folgt aus den Übergangswahrscheinlichkeiten durch Multiplikation mit $p(x_1, t_1)$ und Integration über x_1

$$p(x_2, t_2) = \int p_2(x_2, t_2|x_1, t_1)p(x_1, t_1) dx_1 \quad (\text{B.1})$$

- Die *Übergangsrates* $w(x_2, x_1, t)$ ist die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit.

Markov-Prozeß

Der bei der Herleitung zugrunde liegende stochastische Prozeß ist ein *Markov-Prozeß*, d. h. der zukünftige Zustand wird nur vom gegenwärtigen Zustand bestimmt. Weiter in der Vergangenheit liegende Zustände haben keinen Einfluß auf den nächsten Zustand.

$$p_n(x_{n-1}, t_{n-1} | x_{n-2}, t_{n-2}; \dots; x_0, t_0) = p_2(x_{n-1}, t_{n-1} | x_{n-2}, t_{n-2}) \quad (\text{B.2})$$

Für Markov-Prozesse muß die *Chapman-Kolmogorov* Gleichung erfüllt sein

$$p_2(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int p_2(x_3, t_3 | x_2, t_2) p_2(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2 \quad (\text{B.3})$$

B.2 Master-Gleichung

Für kleine Zeitintervalle τ läßt sich die Übergangswahrscheinlichkeit eines Markov-Prozesses schreiben als [38]

$$p_2(x, t + \tau | x'', t) = [1 - a(x, t)\tau] \delta(x - x'') + \tau w(x, x'', t) + \mathcal{O}(\tau^2) \quad (\text{B.4})$$

Dies läßt sich folgendermaßen interpretieren: Nach jedem beliebig kleinen Zeitintervall besteht die Möglichkeit, daß der Zustand x'' in den Zustand x übergeht oder nicht, wobei der Übergang mit zunehmendem τ immer wahrscheinlicher wird.

Aus Normierungsgründen $\int p_2(x, t + \tau | x'', t) dx = 1$ folgt

$$a(x'', t) = \int w(x, x'', t) dx \quad (\text{B.5})$$

Mit der Chapman-Kolmogorov Bedingung (B.3) liefert diese Beziehung die *Master-Gleichung* für Übergangswahrscheinlichkeiten $p_2(x, t | x', t')$ und nach Integration über x' folgt für die Zustandswahrscheinlichkeiten

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \int w(x, x', t) p(x', t) dx' - \int w(x', x, t) p(x, t) dx' \quad (\text{B.6})$$

Für weitere Details finden sich beispielsweise in [38]. Die Master-Gleichung führt in Verbindung mit der Definition der Shannon-Information zur Auszeichnung einer Zeitrichtung. Man erhält in diesem Fall das *H-Theorem* (vgl. Abschnitt 2.4).

B.3 Herleitung

Kramers-Moyal Vorwärts-Entwicklung

Zunächst gilt für kleine Zeiten τ die folgende Beziehung für die Zustandswahrscheinlichkeit $p(x, t + \tau)$, wenn sich das System zur Zeit t im Zustand x' befunden hat

$$p(x, t + \tau) = \int p_2(x, t + \tau | x', t) p(x', t) dx' \quad (\text{B.7})$$

Nun läßt sich der Integrand mit $x' = x - \Delta$ nach Taylor entwickeln [89]

$$\begin{aligned} p_2(x, t + \tau | x', t) p(x', t) &= p_2(x - \Delta + \Delta, t + \tau | x - \Delta, t) p(x - \Delta, t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Delta^n \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^n p(x + \Delta, t + \tau | x, t) p(x, t) \end{aligned}$$

Aus (B.7) und Integration über Δ erhält man für die zeitliche Änderung der Besetzung

$$\begin{aligned} p(x, t + \tau) - p(x, t) &\approx \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \tau + \mathcal{O}(\tau^2) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \left(M^{(n)}(x, t, \tau) / n! \right) p(x, t) \end{aligned}$$

wobei die Momente definiert sind als

$$M^{(n)}(x, t, \tau) = \int (x' - x)^n p_2(x', t + \tau | x, t) dx' \quad (\text{B.8})$$

Es wird nun angenommen, daß die Momente nach τ entwickelt werden können

$$M^{(n)}(x, t, \tau) / n! = D^{(n)}(x, t) \tau + \mathcal{O}(\tau^2) \quad (\text{B.9})$$

Für $\tau = 0$ gilt $p_2(x, t | x', t) = \delta(x - x')$, was zu verschwindenden Momenten in (B.8) führt: Es gibt folglich keine Terme proportional zu τ^0 . Werden nur die linearen Terme in τ berücksichtigt, so erhält man die *Kramers-Moyal Vorwärts-Entwicklung* [89]

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n D^{(n)}(x, t) p(x, t) \quad (\text{B.10})$$

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß eine *lineare* Entwicklung der Momente in τ von den Übergangswahrscheinlichkeiten in Gleichung (B.7) auf Gleichung (B.10) führt.

Theorem von Pawula

Bisher ist noch offen, wieviele Momente $D^{(n)}$ in der Kramers-Moyal Entwicklung berücksichtigt werden müssen. Das Theorem von Pawula besagt, daß die Entwicklung entweder nach dem ersten oder zweiten Term abbricht und alle anderen Terme verschwinden, oder alle (unendlich vielen) Terme zur Entwicklung beitragen [89].

Eindimensionaler Fall

Werden nur die ersten beiden Momente in (B.10) berücksichtigt, so erhält man die Fokker-Planck Gleichung

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(D^{(1)}(x, t)p(x, t) \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D^{(2)}(x, t)p(x, t) \right) \quad (\text{B.11})$$

Dabei wird $D^{(1)}$ als Driftkoeffizient bezeichnet, $D^{(2)}$ als Diffusionskoeffizient. Die Entwicklung der Momente in (B.9) und der Abbruch nach dem zweiten Moment ist äquivalent zu dem folgenden Satz von Forderungen an die Übergangswahrscheinlichkeiten [38]

$$\begin{aligned} \int (x' - x)p_2(x', t + \tau|x, t) dx' &= D^{(1)}(x, t)\tau + \mathcal{O}(\tau^2) \\ \int (x' - x)^2 p_2(x', t + \tau|x, t) dx' &= 2D^{(2)}(x, t)\tau + \mathcal{O}(\tau^2) \\ \int (x' - x)^n p_2(x', t + \tau|x, t) dx' &= \mathcal{O}(\tau^2) \quad n > 2 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Die Fokker-Planck Gleichung folgt demnach aus der Entwicklung der Übergangswahrscheinlichkeiten. Diese Entwicklung ist von erster Ordnung in der Zeit und von zweiter Ordnung im Ort.

Mehrdimensionaler Fall

Die Herleitung für mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen $p(\vec{x}, t)$ (siehe auch [16]) ist beispielsweise möglich über die Verallgemeinerung der Definition (B.8) der Momente in

$$\begin{aligned} M_i^{(1)}(\vec{x}, t, \tau) &= \int (\vec{x}' - \vec{x})_i p_2(\vec{x}', t + \tau|\vec{x}, t) d\vec{x}' \\ M_{ij}^{(2)}(\vec{x}, t, \tau) &= \int (\vec{x}' - \vec{x})_i (\vec{x}' - \vec{x})_j p_2(\vec{x}', t + \tau|\vec{x}, t) d\vec{x}' \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Man erhält dann die mehrdimensionale Fokker-Planck Gleichung

$$\frac{\partial p(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i^{(1)}(\vec{x}, t) p(\vec{x}, t) \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(D_{ij}^{(2)}(\vec{x}, t) p(\vec{x}, t) \right) \quad (\text{B.14})$$

wobei die Summenkonvention, daß über gleiche Indizes summiert wird, benutzt wurde.

B.4 Interpretation

Ausgangspunkt der Herleitung ist Gleichung (B.7), die Zustands- mit Übergangswahrscheinlichkeiten verbindet. Sofern die Übergangswahrscheinlichkeiten die Bedingungen (B.12) erfüllen, ist die Fokker-Planck Gleichung eine gültige Beschreibung der zeitlichen Entwicklung einer in Raum und Zeit kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Es besteht die Möglichkeit, Gleichung (B.7) nicht für Zustands- und Übergangswahrscheinlichkeiten, sondern — kleine τ angenommen — für eine beliebige Funktion

$$F(x, t + \tau) = \int G(x, t + \tau | x', t) F(x', t) dx' \quad (\text{B.15})$$

aufzustellen. Der Propagator $G(x, t | x', t')$ übernimmt dabei formal die Rolle der Übergangswahrscheinlichkeiten. Dabei muß jedoch gewährleistet sein, daß die Entwicklungen in Zeit und Ort in gleicher Weise durchgeführt werden können. Ferner müssen für diese Funktionen die Bedingungen (B.12) gelten, um die Momente in eine Gleichung äquivalent zu (B.11) einführen zu können. Die Voraussetzung dafür ist die Kenntnis des Propagators $G(x, t | x', t')$, da andernfalls die Momente nicht berechnet werden können.

In speziellen Fällen können die Ausdrücke für die Momente übernommen werden, selbst wenn $F(x, t)$ selbst keine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist. Dann wird jedoch auch die resultierende Gleichung eine andere Form als (B.11) haben (siehe z.B. [44]).

B.5 Beispiele

Deterministisches System

Im Grenzfall streng deterministischer Systeme (vgl. auch Abschnitt 3.1)

$$\dot{x} = \mathbf{f}(x) \quad (\text{B.16})$$

gilt für die Übergangswahrscheinlichkeit

$$p_2(x', t + \tau | x, t) = \delta(x' - x(t + \tau)) \quad (\text{B.17})$$

Es folgt somit aus (B.12) für die Momente

$$\begin{aligned} \int (x' - x) p_2(x', t + \tau | x, t) dx' &= \mathbf{f}(x(t))\tau + \mathcal{O}(\tau^2) \\ \int (x' - x)^n p_2(x', t + \tau | x, t) dx' &= \mathcal{O}(\tau^2) \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

und die Fokker-Planck Gleichung geht in die bekannte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{f}(x)p(x, t)) \quad (\text{B.18})$$

über. Der Diffusionskoeffizient ist in der linearen Entwicklung verschwunden.

Diffusionsprozeß

In diesem Fall verschwindet der Driftterm in Gleichung (B.11) und man erhält

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (D^{(2)}(x, t)p(x, t)) \quad (\text{B.19})$$

Im Falle $D^{(2)}(x, t) = D = \text{const}$ wird (B.19) gelöst durch die Wärmeleitungsgleichung [16]

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (\text{B.20})$$

B.6 Dynamische Systeme

Es existieren Ansätze zur Beschreibung von dynamischen Systemen mit der Fokker-Planck Gleichung. Ein thermodynamischer Formalismus ist beispielsweise in [75] zu finden. Dabei wird die Verbindung von irreversibler Thermodynamik und der Entwicklung dynamischer Systeme im Phasenraum untersucht. *Entwicklung* meint dabei die zeitliche Entwicklung des gesamten Systems, also der gesamten Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x, t)$ aller Anfangszustände $x \in U$ zum asymptotischen Endzustand $x \in A \subset U$ (vgl. Abschnitt 3.1). Im Endzustand befindet sich das System im Gleichgewicht.

Im Gegensatz zu dieser globalen Beschreibung ist es auch möglich, die lokale Entwicklung einzelner Systemzustände in der asymptotischen Phase zu beschreiben. In Abschnitt 4.2.3 wurde die Herleitung einer lokalen Version der Shannon-Information demonstriert (Gleichung 4.27).

Setzt man im Sinne von Abschnitt B.4 für $F(x, t) = -\log p(x, t)$ erhält man aus Gleichung (B.11) die folgende Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(D^{(1)}(x, t) F(x, t) \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D^{(2)}(x, t) F(x, t) \right) \\ &\quad + \frac{D^{(2)}(x, t)}{p(x, t)^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} p(x, t) \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Sie entspricht im wesentlichen Gleichung (B.11) mit einem Zusatzterm auf der rechten Seite, der von $p(x, t)$ und dem Gradienten abhängig ist.

Für rauschfreie deterministische Systeme nach Gleichung B.16 ist der Diffusionskoeffizient $D^{(2)}(x, t)$ identisch Null und sowohl der Diffusions- als auch der Zusatzterm verschwinden. Besitzt das System eine stochastische Komponente (Rauschen), so ist auch ein Beitrag von diesen Termen zu erwarten.

Die in Abschnitt 4.3 vorgestellte Methode zur Beschreibung von Zeitserien in künstlichen Zustandsräumen über eine der Temperatur analoge Größe basiert auf der Quantifizierung dieser stochastischen Komponente. Sie wird wie der Diffusionskoeffizient $D^{(2)}(x, t)$ nach Gleichung (B.12) über das mittlere Schwankungsquadrat der Geschwindigkeiten (4.30) berechnet.

Anhang C

Zahl der Surrogate

C.1 Problem der Rechenzeit

Eine interessante Fragestellung bei der Durchführung von Surrogattests ist das Problem der benötigten Rechenzeit, da man von vorneherein nicht weiß, wie viele Surrogate tatsächlich erzeugt werden müssen, und wie oft folglich die Teststatistik T berechnet werden muß.

Der Grund für diese Unkenntnis liegt in der Art der Durchführung des einseitigen Hypothesentests. In jedem einzelnen Durchlauf sind maximal $n = 1/\alpha$ Zeitserien zu analysieren. Dabei wird in jedem Fall die Teststatistik T_{dat} für den Originaldatensatz errechnet. Für die darauffolgende Berechnung der Teststatistik T_{sur} an den $(n - 1)$ Surrogaten gilt: erhält man $T_{\text{sur}} > T_{\text{dat}}$, beispielsweise für die mittlere Vorhersagezeit, so ist in diesem speziellen Durchlauf die Vorhersagbarkeit des Surrogats höher als die der Originalzeitserie, der Durchlauf wird abgebrochen und als Fehler gewertet. Die Macht β des Tests ergibt sich nach allen N Durchläufen aus der Anzahl der fehlerhaften Durchläufe $\beta = 1 - \#\{\text{Fehler}\}/N$.

Falls sich der Datensatz signifikant von den Surrogaten unterscheidet ($\beta = 1$), so muß die Teststatistik auf allen Nn Datensätzen berechnet werden. In diesem Fall benötigt die Analyse am meisten Rechenzeit, nämlich $t_{\text{ges}} = Nnt$.

Der andere Extremfall tritt ein, wenn sich Surrogate und Originaldaten mit der statistischen Größe T nicht voneinander unterscheiden lassen. Wie in Abschnitt 5 erläutert wurde, strebt die Macht β in diesem Fall gegen die Größe α . Es stellt sich also in diesem Fall die Frage, wie viele Surrogate im Mittel in jedem Durchlauf berechnet werden müssen, um daraus eine Abschätzung für die minimale Gesamtzeit der Analyse zu erhalten.

C.2 Hypothesentests

Einzelner Hypothesentest

Der Wert der Teststatistik T_{dat} ist *a priori* unbekannt, wobei gilt $T_{\text{dat}} \in \mathbb{R}$. Die Größe des Tests sei α , die Anzahl aller Datensätze in einem Durchlauf also $n = 1/\alpha$, die Anzahl der Surrogate entsprechend $n' = n - 1$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß T_{sur} kleiner ist als T_{dat} , sei $p = p(T_{\text{sur}} < T_{\text{dat}})$ und $p(T_{\text{sur}} > T_{\text{dat}}) = 1 - p$.¹ Die Wahrscheinlichkeiten P für die Anzahl k der Surrogate, die benötigt werden, bis der Fehler $T_{\text{sur}} > T_{\text{dat}}$ auftritt, sind gegeben durch

$$\begin{aligned} P(k=2) &= (1-p) \\ P(k=3) &= (1-p)p \\ P(k=4) &= (1-p)p^2 \\ &\vdots \\ P(k=n') &= (1-p)p^{n'-1} + pp^{n'-1} = p^{n'-1} \end{aligned}$$

In der letzten Zeile wird berücksichtigt, daß bei Erreichen der maximal möglichen Anzahl von Surrogaten dieser Durchlauf in jedem Fall abgebrochen wird, egal ob $T_{\text{sur}}(n') > T_{\text{dat}}$ oder $T_{\text{sur}}(n') < T_{\text{dat}}$ gilt.²

Für den Fall $n' = 1$ gilt für die mittlere Anzahl \bar{n}'_i in Durchlauf i der triviale Fall $\bar{n}'_i(p) \equiv 1$.

In den anderen Fällen gilt

$$\bar{n}'_i(p) = \sum_{k=1}^{n'-1} k(1-p)p^{n'-1} + np^{n'-1} \quad (\text{C.1})$$

Dies ist eine geometrische Reihe, und unter Verwendung der Summenformel erhält man

$$\bar{n}'_i(p) = \frac{p^{n'} - 1}{p - 1} \quad (\text{C.2})$$

Die Wahrscheinlichkeit p ist ein Indikator für die Lage von T_{dat} auf der Wahrscheinlichkeitsskala. Liegt T_{dat} am unteren Ende, so geht p gegen 0 , da es in

¹Wenn man davon ausgeht, daß T kontinuierlich in \mathbb{R} ist, tritt der Fall $T_{\text{sur}} = T_{\text{dat}}$ mit der Wahrscheinlichkeit 0 auf.

²Für die Anzahl der fehlerhaften Durchläufe ist diese Unterscheidung schon von Bedeutung.

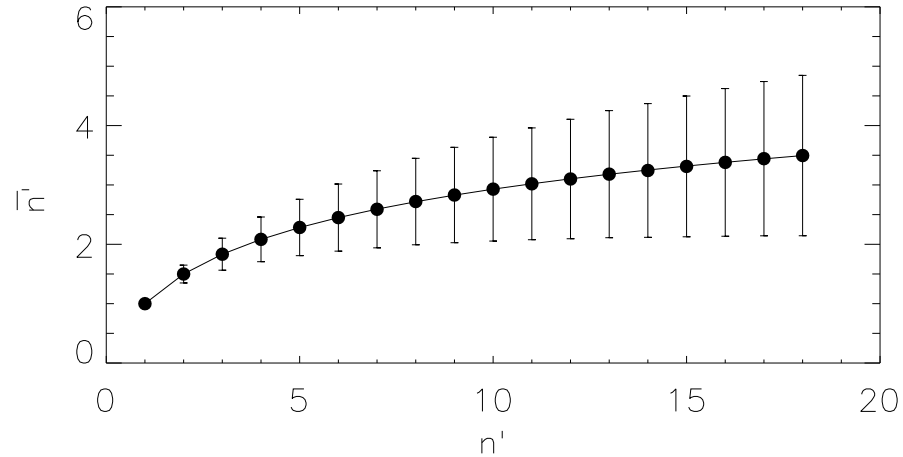


Abbildung C.1: Verlauf von \bar{n}' gemäß Gleichung (C.4) als Funktion von n' . Die durchgezogene Linie ist das Ergebnis nach Gleichung (C.4), die Fehlerbalken sind 3σ -Intervalle der Mittelwertes für $N = 100$ nach Gleichung (C.6). Die Punkte stammen aus einer Simulationsrechnung.

diesem Fall unwahrscheinlicher ist, daß das Ereignis $T_{\text{sur}} < T_{\text{dat}}$ eintritt. In diesem Fall geht $\bar{n}'_i(p \rightarrow 0) \rightarrow 1$, man braucht also nur ein einziges Surrogat, um den Abbruch dieses Durchlaufs zu ermöglichen.

Für $p = 1$ ist Gleichung (C.2) nicht definiert, der Grenzwert kann über die Regel von de l'Hospital berechnet werden

$$\lim_{p \rightarrow 1} \bar{n}'_i(p) = n' \quad (\text{C.3})$$

Mehr Hypothesentests

Die oben abgeleitete Beziehung (C.2) gilt für ein spezifisches p in einer einzelnen Realisation. Die Lage von T_{dat} relativ zu den übrigen T_{sur} wird in verschiedenen Durchläufen zufällig sein, so daß sich der Erwartungswert \bar{n}' aus der Integration der Gleichung (C.2) über alle p ergibt. Dabei integriert man zweckmäßigerweise die dieser Gleichung zugrundeliegende geometrische Reihe. Der Integrand ist somit auch für $p = 1$ definiert. Das Ergebnis der Integration ist

$$\bar{n}' = \int_0^1 \bar{n}'_i(p) dp$$

$$= \sum_{k=1}^{n'-1} \frac{1}{k} \quad (\text{C.4})$$

Die Abbildung C.1 zeigt den Erwartungswert der benötigten Surrogate $\overline{n'}$ in einem Durchlauf als Funktion von n' . Dabei beschreibt die durchgezogene Linie den Verlauf nach Gleichung (C.4) und die Punkte das Ergebnis einer numerischen Simulation mit normalverteilten Zufallszahlen und 10^6 Durchläufen. Wie die Herleitung zeigt, ist das Ergebnis von der Form der zugrundeliegenden Verteilung unabhängig.

Die analoge Berechnung für $\overline{n'^2}$ führt auf

$$\overline{n'^2} = 2n' - \overline{n'} \quad (\text{C.5})$$

Die Varianz ergibt sich somit einfach zu

$$\sigma_{n'}^2 = \overline{n'^2} - \overline{n'}^2 \quad (\text{C.6})$$

Die Balken in Abbildung C.1 beschreiben den Fehler als die dreifache Standardabweichung des Mittelwerts

$$\sigma_N = \sigma_{n'} / \sqrt{N} \quad (\text{C.7})$$

für $N = 100$.

In einer konkreten Anwendung ergaben sich beispielsweise die folgenden Zeiten. Für $\beta = 0.11$ betrug die Gesamtrechenzeit $t_{\text{ges}} \approx 14770$ s. Die Testparameter waren $N = 100$ und $\alpha = 0.1$. Die Berechnung eines einzelnen Datensatzes mit dem gleichen Programm dauerte für diesen konkreten Fall etwa 33.6 s. Die Anzahl der benötigten Surrogate in einem Durchlauf war demnach $n' \approx 3.4$. Dies liegt innerhalb der Fehlergrenzen des statistisch erwarteten Wertes, denn nach Gleichung (C.4) und (C.6) gilt $\overline{n'} = 2.8 \pm 0.8$.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Illustration zu Axiom 2.5 (nach [105])	7
2.2	Illustration zur kontextabhängigen Information	23
3.1	(a) Einbettung F von A in den \mathbb{R}^2 , (b) nichteindeutige Immersion, (c) eindeutige Abbildung, die jedoch keine Immersion ist (aus [92])	28
4.1	Schematische Darstellung der Methode Fehler bei nichtlinearer Vorhersage	35
4.2	Schematische Darstellung der Methode der korrespondierenden Nachbarn	36
4.3	MPT als Funktion der Auflösung ϵ für 10 stochastische Zeitserien mit Gleichverteilung. $N = 10000$, $m = 2$, $\tau = 2$, $t_{f\max} = 1000$. Die senkrechte Linie ist bei $\epsilon = \bar{\epsilon}$. Die Punkte stellen das theoretische Ergebnis nach Gleichung (4.7) dar,	38
4.4	Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Abstand d zweier Punkte im euklidischen Raum bei Gleichverteilung der einzelnen Koordinaten in einer (gestrichelt), zwei (gepunktet) und drei (durchgezogen) Dimensionen.	39
4.5	Die relative Anzahl der Randzellen nach Gleichung (4.15) für $m = 1, \dots, 4$ Dimensionen als Funktion der Anzahl n der Zellen je Dimension. Die hervorgehobene Kurve stellt den zweidimensionalen Fall dar.	42
6.1	Der zeitliche Verlauf der Laserintensität A.dat normiert auf das Intervall $[0,1]$. Die Zeit t ist in Einheiten des Abtastintervalls ΔT gegeben. Die einzelnen Punkte sind in dieser Darstellung durch Linien verbunden.	61

- 6.2 Links: Vorhersagbarkeit $H(t_f)$ für **A.full** und für ein Surrogat. Parameterwerte sind $m = 5$, $\tau = 3$, $t_{\min} = 57$ und $\epsilon = 1/32$.
Rechts: Die mittlere Vorhersagezeit MPT für diese beiden Zeitserien als Funktion der Auflösung ϵ . Die Unstetigkeiten bei kleinen Werten von ϵ beruhen auf der endlichen Auflösung der Zeitserie. 62
- 6.3 Vorhersagbarkeit $H(t_f)$ nach MPT von **A.dat** für $t_{\min} = 0$ und $t_{\min} = 33$. Die Beschränkung des Einflusses linear korrelierter Nachbarpunkte reduziert die Vorhersagbarkeit für $t_f \approx 400 - 500$ und $t_f \approx 900$ erheblich. 63
- 6.4 Die Laserzeitserie **A.dat** und verschiedene Surrogate: PERM, FT, AAFT, ITAAFT(15). 64
- 6.5 **A.dat** (2. von oben) mit FT-Rauschen ($a=1.0$) und fünf Surrogate der Art ITAAFT(15) 66
- 6.6 Der relative Fehler in der Autokorrelationsfunktion von veräuschten **A.dat** ($a = 1.0, \eta = \text{FT}$) und ITAAFT-Surrogaten als Funktion der Anzahl der Iterationen. 67
- 6.7 Die Vorhersagbarkeit für den mit einem FT-Surrogat der Amplitude $a = 1.0$ veräuschten Datensatz **A.dat**. Dargestellt ist Größe $H(t_f)$, die den Bruchteil der korrespondierenden Nachbarn beschreibt, als Funktion der Vorhersagezeit t_f . Als Parameter wurden $\epsilon = 1/16$, $m = 3$, $\tau = 1$ und $t_{\min} = 17$ gewählt. 67
- 6.8 Abschätzung von Einbettungsdimension mit dem Verfahren der korrespondierenden Nachbarn. (a) zeigt die mittlere Vorhersagezeit als Funktion der Einbettungsdimension m für die Zeitserie **A.full** ($N = 25000$), (b) für **A.dat** ($N = 1000$). 73
- 6.9 Ein Ausschnitt aus der x -Koordinate des Lorenz-Systems mit den im Text beschriebenen Parameterwerten. Die abgebildete Zeitserie wurde auf das Intervall $[0, 1]$ normiert. 75
- 6.10 Die Darstellung der x -Komponente des Lorenz-Systems **Lor.x** in verzögerten Koordinaten mit $\tau = 1$ in 2 Dimensionen. 76
- 6.11 Das Lorenz-System nach Gleichung (6.2) mit den Parametern $\sigma = 16$, $b = 4$ und $r = 45.92$. Die Anzahl der Punkte ist 20000, die Integrationschrittweite $\Delta t = 0.005$. Die Werte der einzelnen Koordinaten wurden normiert. 76

- 6.12 Ein Ausschnitt aus `Lor.x` und verschiedene Surrogate: `PERM`, `FT`, `AAFT`, `ITAAFT(15)`. 77
- 6.13 Der Datensatz `Lor.x` mit Rauschen ($\eta = \text{ITAAFT}(15)$, $a = 1.0$) und fünf `ITAAFT(15)`-Surrogate. Die verrauschte Zeitserie ist die zweite von unten. 78
- 6.14 Die Sonnenkorona während der Sonnenfinsternis vom 30. Juni 1973. Diese Aufnahme wurde nachbearbeitet, um den Intensitätskontrast auf kleinen Skalen zu erhöhen (aus [57]). 81
- 6.15 Die Abbildung zeigt außerhalb des schwarzen Rings die äußere Atmosphäre der Sonne im UV-Licht, das von Sauerstoffionen emittiert wird. Diese von der Sonne wegströmenden Ionen bilden einen Teil des (langsamen) Sonnenwindes. Innerhalb des schwarzen Rings ist die Sonnenscheibe im Licht von Eisenionen abgebildet. Durch die Kombination dieser Aufnahmen, die von den Experimenten *UVCS (Ultraviolet Coronagraph Spectrometer)* bzw. *EIT (Extreme ultraviolet Imaging Telescope)* an Bord des Satelliten SOHO stammen, lassen sich beispielsweise Strukturen durch die Sonnenkorona verfolgen. 81
- 6.16 Die Geschwindigkeiten des Sonnenwinds, die in der Zeit vom März 1992 bis zum März 1997 von Ulysses auf dem ersten polaren Umlauf um die Sonne gewonnen wurden, in (heliomagnetischen) Polarkoordinaten. Die dunkelgrauen Sektoren markieren das Gebiet des langsamen Windes in der Nähe der Ekliptik. Die hellgrauen Gebiete sind das Übergangsbereich zwischen langsamem und schnellem Sonnenwind. Die Dominanz des schnellen Sonnenwindes in höheren Breiten ist deutlich sichtbar (aus [129]). 82
- 6.17 Das MTOF-Experiment mit den beiden sektorförmigen Einlaßöffnungen für das Hauptinstrument (rechts) und den Proton Monitor (links). 84
- 6.18 Die Abbildungen zeigen von oben nach unten die gemessenen Geschwindigkeiten `Vel.org`, die Dichte der Teilchen `Den.dat` und die korrigierten Geschwindigkeiten `Vel.dat`. Die Zeit t ist in Einheiten der Abtastrate $\Delta t = 300$ s gegeben. 86
- 6.19 Dichtezeitserie `Den.dat` (oben) und vier `ITAAFT(20)`-Surrogate 88

6.20	Die Steigung der Korrelationssumme nach Gleichung (3.8) als Funktion der Auflösung ϵ für die Geschwindigkeitszeitserie. In der unteren Abbildung werden alle nächsten Nachbarn berücksichtigt: $t_{\min} = 0$. Für die anderen Abbildungen wurden linear korrelierte nächste Nachbarn ausgeschlossen: $t_{\min} = 10$ bzw. 100.	92
6.21	Die korrigierten und normierten Geschwindigkeiten <code>Vel.dat</code> (oben) und vier ITAAFT(20)-Surrogate	93
6.22	Sonnenfleckenrelativzahl (oben) und vier verschiedene Surrogate: <code>PERM</code> , <code>FT</code> , <code>AAFT</code> , <code>ITAAFT(20)</code> (von oben nach unten) . . .	98
6.23	Die Autokorrelationsfunktion der Zeitserie <code>mssn</code> (schwarz) und von 100 ITAAFT(20) Surrogaten (grau)	100
6.24	Der relative Fehler in der Autokorrelationsfunktion nach Gleichung (5.5) von <code>mssn</code> und ITAAFT-Surrogaten als Funktion der Anzahl der Iterationen.	100
6.25	Sonnenfleckenrelativzahl (oben) und vier RA-Surrogate	102
6.26	Die Autokorrelationsfunktion der Zeitserie <code>mssn</code> (schwarz) und von 100 RA Surrogaten (grau)	104
A.1	Prinzipskizze der Kraftmessung an der Drehmeißelspitze in der Schnittdarstellung (aus [126]). Im unteren Teil ist die Kraft in Passivrichtung F_p eingezeichnet.	114
A.2	Die ersten 5000 Werte der Zeitserie F_p der gemessenen Kraft senkrecht zur Werkstückoberfläche.	114
C.1	Verlauf von $\overline{n'}$ gemäß Gleichung (C.4) als Funktion von n' . Die durchgezogene Linie ist das Ergebnis nach Gleichung (C.4), die Fehlerbalken sind 3σ -Intervalle der Mittelwertes für $N = 100$ nach Gleichung (C.6). Die Punkte stammen aus einer Simulationsrechnung.	127

Tabellenverzeichnis

5.1	Mögliche Ereignisse und Bezeichnungen bei Hypothesentests (z. B. nach [90])	50
5.2	Gemeinsame Eigenschaften von Surrogaten und Daten bei unterschiedlichen Methoden. Die Größenordnungen in der letzten Spalte bei AAFT und ITAAFT schätzen den relativen Fehler in der Autokorrelationsfunktion bei A.dat (s. Abschnitt 6.1) ab.	56
6.1	Die Macht β für die Verfahren NPE, MPT und Thermo für verschiedene Arten von Rauschen und Rauschamplituden, angewandt auf A.dat.	68
6.2	Unterscheidung von ITAAFT(50)-Surrogaten unterschiedlicher Ordnung n von ihren Surrogaten	69
6.3	Die Größe β für die im Text beschriebenen Simulationen . . .	70
6.4	Macht β für die Methoden NPE, MPT und Thermo, angewandt auf Lor.x Sachverhalt mit ITAAFT(15)-Rauschen verschiedener Rauschamplitude a	79
6.5	Detektionsraten β für die Zeitserie Den.dat mit den Verfahren MPT, NPE und Thermo	89
6.6	Charakteristische Zeitskalen t_c in Einheiten der Abtastrate Δt aus dem Abfall der Autokorrelationsfunktionen für die Zeitserien Vel.dat und Den.dat.	90
6.7	Detektionsraten β für die Zeitserie Vel.dat mit den Verfahren NPE, MPT und Thermo.	91
6.8	Detektionsraten von mssn gegen verschiedene Surrogate für die Verfahren NPE und MPT.	101

Literaturverzeichnis

- [1] Henry D. I. Abarbanel, *Analysis of observed chaotic data*, Springer, 1996.
- [2] J. Aczél und Z. Daróczy, *On measures of information and their characterizations*, Academic Press, New York, 1975.
- [3] V. I. Arnold und A. Avez, *Ergodic problems of classical mechanics*, Addison-Wesley, Redwood City, USA, 1989.
- [4] W. Brian Arthur, *Bounded rationality and inductive behavior (the El Farol problem)*, *American Economic Review* **84** (1994), 406–411.
- [5] Thomas Bäck, *Evolutionary algorithms in theory and practice*, Oxford University Press, 1996.
- [6] Aaron Barnes, Paul R. Gazis und John L. Phillips, *Constraints on solar wind acceleration mechanisms from Ulysses plasma observations: the first polar pass*, *Geophys. Res. Lett.* **22** (1995), Nr. 23, 3309–3311.
- [7] J. A. Barnes, H. H. Sargent III und P. V. Tyron, *Sunspot cycle simulation using random noise*, In Pepin et al. [82], pp. 159–163.
- [8] Christian Beck und Friedrich Schlögl, *Thermodynamics of chaotic systems*, Cambridge nonlinear science series, Bd. 4, Cambridge University Press, 1993.
- [9] George P. A. Box und Gwilym M. Jenkins, *Time series analysis*, Holden-Day, San Francisco, 1976.
- [10] William A. Brock und Pedro J.F. de Lima, *Nonlinear time series, complexity theory, and finance*, SFI working paper 95-09-077, 1995.
- [11] Thorsten Buzug, *Analyse chaotischer Systeme*, BI, Mannheim, 1994.

-
- [12] L. L. Campbell, *Definition of entropy by means of a coding problem*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **6** (1966), 113–118.
- [13] Martin Casdagli, *Nonlinear prediction of chaotic time series*, Phys. D **35** (1989), 335–356.
- [14] ———, *Chaos and deterministic versus stochastic and non-linear modeling*, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B **54** (1991), Nr. 2, 303–328.
- [15] Martin Casdagli und Stephen Eubank (Hrsg.), *Nonlinear modeling and forecasting*, Santa Fe Institute studies in the sciences of complexity, Bd. XII, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1992.
- [16] S. Chandrasekhar, *Stochastic problems in physics and astronomy*, Rev. Mod. Phys. **15** (1943), Nr. 1, 1–89.
- [17] Gustavo Deco, Christian Schittenkopf und Bernd Schürmann, *Determining the information flow of dynamical systems from continuous probability distributions*, Phys. Rev. Lett. **78** (1997), Nr. 12, 2345–2348.
- [18] J.-P. Eckmann, S. Ollifson Kamphorst, D. Ruelle und S. Ciliberto, *Lyapunov exponents from time series*, Phys. Rev. A **34** (1986), Nr. 6, 4971–4979.
- [19] J.-P. Eckmann und D. Ruelle, *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, Rev. Mod. Phys. **57** (1985), Nr. 3, 617–655.
- [20] John A. Eddy, *The historical record of solar activity*, In Pepin et al. [82], pp. 119–134.
- [21] Bradley Efron, *Computers and the theory of statistics: Thinking the unthinkable*, SIAM Rev. **21** (1979), Nr. 4, 460–480.
- [22] ———, *The jackknife, the bootstrap and other resampling plans*, SIAM, Philadelphia, 1982.
- [23] Mitchell J. Feigenbaum, *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*, J. Statist. Phys. **19** (1978), Nr. 1, 25–52.
- [24] Thorsten Fließbach, *Statistische Physik*, BI, Mannheim, 1993.
- [25] Andrew M. Fraser und Harry L. Swinney, *Independent coordinates for strange attractors from mutual information*, Phys. Rev. A **33** (1986), Nr. 2, 1134–1140.

- [26] Karlheinz Geist, Ulrich Parlitz und Werner Lauterborn, *Comparison of different methods for computing Lyapunov exponents*, Progr. Theoret. Phys. **83** (1990), Nr. 5, 875–893.
- [27] R. B. Govindan, K. Narayanan und M. S. Gopinathan, *On the evidence of deterministic chaos in ECG: Surrogate and predictability analysis*, Chaos **8** (1998), Nr. 2, 495–502.
- [28] Igor Grabec, *Chaos generated by the cutting process*, Phys. Lett. A **117** (1986), Nr. 8, 384–386.
- [29] Peter Grassberger, *Generalized dimensions of strange attractors*, Phys. Lett. A **97** (1983), Nr. 6, 227–230.
- [30] ———, *Finite sample corrections to entropy and dimension estimates*, Phys. Lett. A **128** (1988), Nr. 6,7, 369–373.
- [31] ———, *An optimized box-assisted algorithm for fractal dimensions*, Phys. Lett. A **148** (1990), Nr. 1,2, 63–68.
- [32] Peter Grassberger und Itamar Procaccia, *Characterization of strange attractors*, Phys. Rev. Lett. **50** (1983), Nr. 5, 346–349.
- [33] ———, *Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal*, Phys. Rev. A **28** (1983), Nr. 4, 2591–2593.
- [34] ———, *Measuring the strangeness of strange attractors*, Phys. D **9** (1983), 189–208.
- [35] Peter Grassberger, Thomas Schreiber und Carsten Schaffrath, *Nonlinear time sequence analysis*, Int. J. Bifurcation and Chaos **1** (1991), Nr. 3, 521–547.
- [36] Dirk Helbing, *Fundamentals of traffic flow*, Phys. Rev. E **55** (1997), Nr. 3, 3735–3738.
- [37] M. Hénon, *A two-dimensional mapping with a strange attractor*, Commun. Math. Phys. **50** (1976), 69–77.
- [38] Josef Honerkamp, *Stochastische dynamische Systeme*, VCH, Weinheim, 1990.
- [39] D. Hovestadt *et al.*, *CELIAS — charge, element and isotope analysis system for SOHO*, Solar Physics **162** (1995), 441–481.

- [40] Udo Hübner, Carl-Otto Weiss, Neal Broadus Abraham und Dingyuan Tang, *Lorenz-like chaos in NH₃-FIR lasers*, In Weigend und Gershenfeld [124], pp. 73–104.
- [41] Fred Ipavich *et al.*, *Solar wind measurement with SOHO: the CE-LIAS/MTOF proton monitor*, J. Geophys. Res. **103** (1998), Nr. A8, 17205–17213.
- [42] Edwin T. Jaynes, *Information theory and statistical mechanics*, Phys. Rev. **106** (1957), Nr. 4, 620–630.
- [43] ———, *Probability theory*, anonymous ftp://bayes.wustl.edu, 1996.
- [44] Frank C. Jones, *The history of cosmic rays in a dynamical halo: a retrodictive probability approach*, ApJ **222** (1978), 1097–1103.
- [45] Holger Kantz, *A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series*, Phys. Lett. A **185** (1994), 77–87.
- [46] Holger Kantz und Thomas Schreiber, *The human ECG — nonlinear deterministic versus stochastic aspects*, chao-dyn/9807002.
- [47] ———, *Dimension estimates and physiological data*, Chaos **5** (1995), Nr. 1, 143–154.
- [48] ———, *Nonlinear time series analysis*, Cambridge University Press, 1997.
- [49] Daniel T. Kaplan, *Exceptional events as evidence for determinism*, Phys. D **73** (1994), 38–48.
- [50] ———, *A geometrical statistic for detecting deterministic dynamics*, In Weigend und Gershenfeld [124], pp. 415–428.
- [51] Daniel T. Kaplan und Leon Glass, *Direct test for determinism in a time series*, Phys. Rev. Lett. **68** (1992), Nr. 4, 427–430.
- [52] ———, *Coarse-grained embeddings of time series: random walks, gaussian random processes and deterministic chaos*, Phys. D **64** (1993), 431–454.
- [53] Matthew B. Kennel, Reggie Brown und Henry D. I. Abarbanel, *Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction*, Phys. Rev. A **45** (1992), Nr. 6, 3403–3411.

- [54] Matthew B. Kennel und Steven Isabelle, *Method to distinguish possible chaos from colored noise and to determine embedding parameters*, Phys. Rev. A **46** (1992), Nr. 6, 3111–3118.
- [55] B. S. Kerner und H. Rehborn, *Experimental properties of complexity in traffic flow*, Phys. Rev. E **53** (1996), Nr. 5, R4275–R4278.
- [56] A. I. Khinchin, *The mathematical foundations of information theory*, Dover, New York, 1957.
- [57] S. Koutchmy, P. Lamy, G. Stellmacher, O. Koutchmy, N. I. Dzubenko, V. I. Ivanchuk, O. S. Popov, G. A. Rubo und S. K. Vsekhsvjatsky, *Photometrical analysis of the June 30, 1973 solar corona*, A & A **69** (1978), 35–42.
- [58] J. Kurths und A. A. Ruzmaikin, *On forecasting the sunspot numbers*, Solar Physics **126** (1990), 407–410.
- [59] Dejian Lai und Guanrong Chen, *Computing the distribution of the Lyapunov exponent from time series: the one-dimensional case study*, Int. J. Bifurcation and Chaos **5** (1995), Nr. 6, 1721–1726.
- [60] Laurent Laloux, Marc Potters, Rama Cont, Jean-Pierre Aguilar und Jean-Philippe Bouchaud, *Are financial crashes predictable?*, cond-math/9804111, 1998.
- [61] Blake LeBaron, *Nonlinear forecasts for the S & P stock index*, In Casdagli und Eubank [15], pp. 381–392.
- [62] ———, *Chaos and nonlinear forecastability in economics and finance*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **348** (1994), 397–404.
- [63] Klaus Lehnertz und Christian E. Elger, *Can epileptic seizures be predicted? Evidence from nonlinear time series analysis of brain electrical activity*, Phys. Rev. Lett. **80** (1998), Nr. 22, 5019–5022.
- [64] Roland W. Leven, Bernd-Peter Koch und Bernd Pompe, *Chaos in dissipativen Systemen*, Akademie Verlag, 1994.
- [65] W. Liebert, K. Pawelzik und H. G. Schuster, *Optimal embeddings of chaotic attractors from topological considerations*, Europhys. Lett. **14** (1991), Nr. 6, 521–526.
- [66] Edward N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmos. Sci. **20** (1963), 130–141.

- [67] Wiesław M. Macek, *Testing for an attractor in the solar wind flow*, Phys. D **122** (1998), 254–264.
- [68] Wiesław M. Macek und Lidia Obojska, *Fractal analysis of the solar wind flow in the inner heliosphere*, Chaos, Solitons & Fractals **8** (1997), 1601–1607.
- [69] ———, *Testing for nonlinearity in the solar wind flow*, Chaos, Solitons & Fractals **9** (1998), 221–229.
- [70] Melanie Mitchell, *An introduction to genetic algorithms*, Complex Adaptive Systems, MIT, 1996.
- [71] Francis C. Moon (Hrsg.), *Dynamics and chaos in manufacturing processes*, Wiley Series in Nonlinear Science, John Wiley & Sons, New York, 1998.
- [72] G. Morfill, H. Scheingraber, W. Voges und C. Sonett, *Sunspot variations: deterministic, stochastic or chaotic?*, The Sun in Time (C. Sonett, M. S. Giampapa und M. S. Mathhews, Hrsg.), Univ. of Arizona Press, 1991, pp. 30–58.
- [73] Gregor Morfill und Georg Schmidt, *Komplexitätsanalyse in der Kardiologie*, Physikalische Blätter **50** (1994), 156–160.
- [74] Michael D. Mundt, W. Bruce Maguire II und Robert R. P. Chase, *Chaos in the sunspot cycle: Analysis and prediction*, J. Geophys. Res. **96** (1991), Nr. A2, 1705–1716.
- [75] G. Nicolis und D. Daems, *Probabilistic and thermodynamic aspects of dynamical systems*, Chaos **8** (1998), Nr. 2, 311–320.
- [76] Th. M. Nieuwenhuizen, *The marriage problem and the fate of bachelors*, Phys. A **252** (1998), 178–198.
- [77] A. R. Osborne und A. Provenzale, *Finite correlation dimension for stochastic systems with power-law spectra*, Phys. D **35** (1989), 357–381.
- [78] N. H. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer und R. S. Shaw, *Geometry from a time series*, Phys. Rev. Lett. **45** (1980), Nr. 9, 712–716.
- [79] Norman H. Packard, *A genetic learning algorithm for the analysis of complex data*, Complex Systems **4** (1990), 543–572.

-
- [80] T. Padmanabhan, *Statistical mechanics*, Vorlesung IUCAA, 1995.
- [81] R. G. Palmer, W. Brian Arthur, John H. Holland, Blake LeBaron und Paul Tayler, *Artificial economic life: a simple model of a stockmarket*, Phys. D **75** (1994), 264–274.
- [82] R. O. Pepin, J. A. Eddy und R. B. Merrill (Hrsg.), *The ancient sun*, Pergamon Press, New York, 1980.
- [83] Hardi Peter, *Mehrflüßigkeitsmodelle der unteren Sonnenatmosphäre und Schlußfolgerungen für den Sonnenwind*, Dissertation, Max-Planck-Institut für Aeronomie, 1996.
- [84] Laurent Pezard, Jacques Martinerie, Johannes Müller-Gerking, Francisco J. Varela und Bernard Renault, *Entropy quantification of human brain spatio-temporal dynamics*, Phys. D **96** (1996), 344–354.
- [85] J. M. Polygiannakis und X. Moussas, *On experimental evidence of chaotic dynamics over short time scales in solar wind and cometary data using nonlinear prediction techniques*, Solar Physics **151** (1994), 341–350.
- [86] Dean Prichard und James Theiler, *Generating surrogate data for time series with several simultaneously measured variables*, Phys. Rev. Lett. **73** (1994), Nr. 7, 951–954.
- [87] Alfréd Rényi, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.
- [88] Brian D. Ripley, *Statistical inference for spatial processes*, Cambridge Univ. Press, 1988.
- [89] Hannes Risken, *The Fokker-Planck Equation*, Springer Series in Synergetics, Springer, Berlin, 1984.
- [90] Lothar Sachs, *Statistische Auswertungsmethoden*, 3. Aufl., Springer, Berlin, 1972.
- [91] Liming M. Salvino, Robert Cawley, Celso Grebogi und James A. Yorke, *Predictability in time series*, Phys. Lett. A **209** (1995), 327–332.
- [92] Tim Sauer, James A. Yorke und Martin Casdagli, *Embedology*, J. Statist. Phys. **65** (1991), Nr. 3/4, 579–616.

- [93] Helmut Scheffler und Hans Elsässer, *Physik der Sterne und der Sonne*, BI, Mannheim, 1974.
- [94] Christian Schittenkopf und Gustavo Deco, *Identification of deterministic chaos by an information-theoretic measure of the sensitive dependence on the initial conditions*, Phys. D **110** (1997), 173–181.
- [95] Georg Schmidt und Gregor Morfill, *Complexity diagnostics in cardiology: fundamental considerations*, PACE **17** (1994), 1174–1177.
- [96] ———, *Complexity diagnostics in cardiology: Methods*, PACE **17** (1994), 2336–2341.
- [97] Thomas Schreiber, *Efficient neighbor searching in nonlinear time series analysis*, Int. J. Bifurcation and Chaos **5** (1995), 349–358.
- [98] ———, *Constrained randomization of time series data*, Phys. Rev. Lett. **80** (1997), Nr. 10, 2105–2108.
- [99] Thomas Schreiber und Andreas Schmitz, *Constrained randomization of time series for hypothesis testing*, chao-dyn/9805013.
- [100] ———, *Improved surrogate data for nonlinearity tests*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996), Nr. 4, 635–638.
- [101] ———, *On the discrimination power of measurements for nonlinearity in a time series*, Phys. Rev. E **55** (1997), 5443.
- [102] Peter Schuster, *How does complexity arise in evolution*, Complexity **2** (1996), Nr. 1, 22–30.
- [103] Rainer Schwenn, *Large-scale structure of the interplanetary medium*, Physics of the inner heliosphere (Rainer Schwenn und Eckart Marsch, Hrsg.), Physics and chemistry in space, Bd. 20, Springer, 1990, pp. 99–181.
- [104] Claude E. Shannon, *The bandwagon*, IRE Trans. **IT-2** (1956), Nr. 1, 3.
- [105] Claude E. Shannon und Warren Weaver, *The mathematical theory of communication*, Univ. of Illinois Press, 1949.
- [106] John E. Shore und Rodney W. Johnson, *Axiomatic derivation of the principle of maximum entropy and the principle of minimum cross-entropy*, IEEE Trans. Inf. Theory **26** (1980), Nr. 1, 26–37.

- [107] Martin Shubik, *Time and money*, SFI working paper 96-03-013, 1996.
- [108] George Sugihara und Robert M. May, *Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series*, *Nature* **344** (1990), 743–741.
- [109] George G. Szpiro, *Forecasting chaotic time series with genetic algorithms*, *Phys. Rev. E* **55** (1997), Nr. 3, 2557–2568.
- [110] Floris Takens, *Detecting strange attractors in turbulence*, *Lecture notes in Mathematics*, Bd. 898, Springer, 1981, pp. 366–381.
- [111] James Theiler, *Spurious dimensions from correlation algorithms applied to limited time-series data*, *Phys. Rev. Lett.* **34** (1986), Nr. 3, 2427–2432.
- [112] ———, *Some comments on the correlation dimension of $1/f^\alpha$ noise*, *Phys. Lett. A* **155** (1991), Nr. 8/9, 480–492.
- [113] James Theiler, Stephen Eubank, André Longtin, Bryan Galdrikian und J. Doyne Farmer, *Testing for nonlinearity in time series: the method of surrogate data*, *Phys. D* **58** (1992), 77–94.
- [114] James Theiler, Bryan Galdrikian, André Longtin, Stephen Eubank und J. Doyne Farmer, *Using surrogate data to detect nonlinearity in time series*, In Casdagli und Eubank [15].
- [115] James Theiler und Dean Prichard, *Constrained-realization Monte-Carlo method for hypothesis testing*, *Phys. D* **94** (1996), 221–235.
- [116] ———, *Using “surrogate surrogate data” to calibrate the actual rate of false positives in tests for nonlinearity in time series*, *Fields Institute Communications* **11** (1997), 99–113.
- [117] Ruey S. Tsay, *Model checking via parametric bootstraps in time series analysis*, *Appl. Statist.* **41** (1992), Nr. 1, 1–15.
- [118] Hans-Heinrich Voigt, *Abriß der Astronomie*, 4. Aufl., BI, Mannheim, 1988.
- [119] Rudolf von Steiger, *Das neue Bild der Sonne*, *Spatium* (1998), Nr. 2, 3–17, Vortrag für den Verein Pro ISSI.
- [120] Renate Wackerbauer, *Komplexitätsmaße: Klassifikation und Anwendung auf dynamische Systeme*, Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität, München, 1995.

- [121] Richard Wayland, David Bromley, Douglas Pickett und Anthony Passamante, *Recognizing determinism in a time series*, Phys. Rev. Lett. **70** (1993), Nr. 5, 580–582.
- [122] Warren Weaver, *Science and complexity*, American Scientist **36** (1968), 536–544.
- [123] Alfred Wehrl, *General properties of entropy*, Rev. Mod. Phys. **50** (1978), Nr. 2, 221–260.
- [124] Andreas S. Weigend und Neil A. Gershenfeld (Hrsg.), *Time series prediction*, Santa Fe Institute studies in the sciences of complexity, Bd. XV, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1994.
- [125] Andreas S. Weigend, Bernardo A. Huberman und David E. Rumelhart, *Predicting sunspots and exchange rates with connectionist networks*, In Casdagli und Eubank [15].
- [126] K. Weinert, G. Morfill und U. Feudel, *Einsatz der Methoden der nicht-linearen Dynamik zu Modellierung des Innendrehprozesses*, Projektantrag im Rahmen der Schwerpunktprogramms der Volkswagenstiftung: *Untersuchungen nichtlinear-dynamischer Effekte in produktionstechnischen Systemen*, 1997.
- [127] Klaus Weinert, Jörn Mehnen, Rainer Sachs und Herbert Scheingraber, *Nonlinear analysis of interior diameter turning experiments*, Production Engineering, Bd. 4, Annals of the German Academic Society for Production Engineering, Nr. 2, WGP, 1997, pp. 55–60.
- [128] G. Widman, K. Lehnertz und C. E. Elger, *Spatial distribution of neuronal complexity loss in neocortical lesional epilepsies*, eingereicht bei Epilepsia, 199803143.
- [129] J. Woch, W. I. Axford, U. Mall, B. Wilken, S. Livi, J. Geiss, G. Gloeckler und R. J. Forsyth, *SWICS/Ulysses observations: The three-dimensional structure of the heliosphere in the declining/minimum phase of the solar cycle*, Geophys. Res. Lett. **24** (1997), Nr. 22, 2885–2888.
- [130] Alan Wolf, Jack B. Swift, Harry L. Swinney und John A. Vastano, *Determining Lyapunov exponents from a time series*, Phys. D **16** (1985), 285–317.

Danke

An dieser Stelle möchte ich all denjenigen danken, die auf verschiedenste Weise zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben:

- ▷ Prof. Dr. Gregor Morfill für die zahlreichen, anregenden Diskussionen und sein kontinuierliches und reges Interesse an meiner Arbeit
- ▷ Dr. Wolfram Bunk für die gute und fruchtbare Zusammenarbeit und seine wertvollen Beiträge, die oftmals weit über die rein fachlichen Aspekte hinausgingen
- ▷ Dr. Harald Kucharek für die Anregung der Sonnenwind-Analysen und seine unverzichtbaren Hilfestellungen bei der Durchführung und Interpretation der Ergebnisse
- ▷ Dr. Renate Wackerbauer, die ich jederzeit zu allen Belangen meiner Arbeit fragen konnte und die nie um hilfreiche Antworten verlegen war
- ▷ Dr. Herbert Scheingraber für sein Interesse und die Unterstützung bei den ingenieurwissenschaftlichen Fragestellungen
- ▷ Dr. Harald Atmanspacher für die wertvollen Beiträge im Bereich der Informationstheorie
- ▷ Thomas Aschenbrenner, René Pompl und Dr. Christoph Räth für die gute Kooperation und angenehme Atmosphäre bei gemeinsamen Projekten, Mittagessen, Diskussionen sportlicher Leistungen, ...
- ▷ Michael Cremer, Dr. Doris Neumann, Thomas Reiprich und Dr. Peter Schücker für die gemeinsamen Tage in wechselnden Containern, in denen man durch das Klima auch fachübergreifend zusammengeschweißt wird
- ▷ Rainer Sigl und Dr. Ferdinand Jamitzky für ihre Unterstützung bei jeglichen Problemen mit dem Computer
- ▷ Hansjörg Maurer und Matthias Kessler, stellvertretend für alle Freunde, die nicht in unmittelbarer fachlicher Verbindung zu dieser Arbeit stehen, für die gemeinsamen Erlebnisse und ihre hervorragende Unterstützung in arbeitsreichen Phasen
- ▷ meinen Eltern dafür, daß sie es mir ermöglicht haben, mein Studium (meist) nach meinen Vorstellungen zu realisieren, und meinen Geschwistern dafür, daß sie immer an mich geglaubt haben, auch wenn ich das nicht mehr hören konnte :)
- ▷ meiner Freundin Susanne für ihre Rücksichtnahme und ihr Verständnis, wenn mich gelegentlich alles aufregt hat, und dafür, daß sie meine Sicht der Dinge wieder zurechtgerückt hat, wenn ich mich zu weit von der Realität entfernte habe.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Geburtsdatum: 04.09.1968
Geburtsort: 84307 Eggenfelden
Familienstand: ledig

Schulbildung

1975 – 1979 Grundschule Eggenfelden
1979 – 1988 Carl-von-Closen-Gymnasium Eggenfelden-Gern
29.06.88 Allgemeine Hochschulreife
07/88–09/89 Grundwehrdienst in Bad Reichenhall

Studium

10/89 – 12/95 Studium der Allgemeinen Physik an der Technischen Universität München.
Diplomarbeit in Kosmologie bei Prof. J. V. Narlikar in Pune, Indien.
11/94 – 09/95 Fellowship am Inter-University Centre for Astronomy and Astrophysics, Pune, Indien
03.12.95 Diplomzeugnis der Technischen Universität München

Promotion

11/95 Beginn der Promotion am Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik in Garching