# q-Deformierte Superanalysis und Quantenliealgebren

Dissertation der Fakultät für Physik der
Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
**Alexander Schmidt**
aus München

München, den 04.April 2005

**1.Gutachter: Prof. Dr. Julius Wess**

**2.Gutachter: Prof. Dr. Martin Schottenloher**

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Juli 2005

**Zusammenfassung**

Die vorliegende Arbeit setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Im ersten Teil wird exemplarisch dargelegt, wie man $q$-deformierte Superräume konstruiert und darauf eine $q$-deformierte Superanalysis entwickeln kann. Dazu wird erst die Struktur des Superraumes an sich betrachtet, d.h. es werden die algebraischen Relationen zwischen den bosonischen und fermionischen Versionen für Koordinaten, Ableitungen und Differentiale angegeben. Danach werden die wichtigsten Elemente einer Superanalysis axiomatisch eingeführt und explizit berechnet, namentlich der Differentialkalkül, Integrale, Exponentiale, Translationen sowie die nur für deformierte Räume notwendigen Zopfprodukte.
Im zweiten Teil wird gezeigt, dass es möglich ist, die $q$-deformierten Symmetriealgebren von besonderem physikalischem Interesse, das sind die $U_q(su(2))$, $U_q(so(4))$ und die $q$-deformierte Lorentzalgebra, in weitgehender Analogie zum Undeformierten zu behandeln. Dazu wird der Begriff des $q$-Kommutators und der $q$-Liealgebra eingeführt. Auf diese Weise tritt die zum Undeformierten analoge Struktur der Quantenalgebren deutlich hervor, was bei der Konstruktion deformierter Quantenfeldtheorien hilfreich ist. Ergänzend werden noch die Casimiroperatoren angegeben und für verschiedene Darstellungen spezifiziert.

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Einleitung

Seit Menschengedenken gab es Versuche, die uns umgebende Natur mit all ihren Phänomenen zu erfassen, im besten Falle sogar zu verstehen. Verstehen heisst hier, dass man Erklärungsmuster für Naturphänomene angibt, die einem erlauben, auch Vorhersagen über zukünftige Ereignisse zu treffen. Beispiel hierfür ist etwa die Vorhersage einer Sonnenfinsternis oder, etwas moderner, was ereignet sich, wenn man in einem Teilchenbeschleuniger Elektronen kollidieren lässt.
Die Wissenschaft der Physik hat sich diesem Ziel verschrieben und beschäftigt sich, nach der aufgrund der wachsenden Komplexität notwendig gewordenen Abspaltung eigener Zweige (Biologie, Geologie, Astronomie...), mit der Suche nach den fundamentalen Gesetzen der Natur. Mit fundamental ist gemeint, dass sich im Prinzip alle Phänomene durch diese Gesetze beschreiben lassen. Dieser Erkenntnisprozess ist heutzutage sehr weit fortgeschritten. In der theoretischen Forschung ist es inzwischen unabdingbar, sich Gedanken über die Struktur von Raum und Zeit an sich zu machen. Es zeigt sich nämlich, dass man mit der bisherigen naiven Annahme eines Raum-Zeit-Kontinuums, wie sie ja auch der Alltagsvorstellung entspricht, ernsthafte Probleme bekommt. So ist es z.B. nicht mehr möglich, einen zur oben erwähnten Kollision von Elektronen analogen Prozess im Falle der Quantenteilchen der Schwerkraft, den sogenannten Gravitonen, zu berechnen; die Resultate sind physikalisch widersinnig. Da nun, wie wir seit Einstein wissen, die Gravitation aber Manifestation der Dynamik von Raum und Zeit ist, ist dies als ernster Hinweis auf etwaige Mängel des althergebrachten Raum-Zeit-Konzepts zu werten, eine konsistente Quantentheorie der Gravitation steht noch aus. Ein Grund für die sinnlosen Resultate könnte sein, dass die Begriffe der Kontinuumsmathematik so wie sie in der Physik verwendet werden, bei sehr kleinen Abständen versagen, bzw. mit „unsauberen“ mathematischen Konzepten wie der Dirac'schen Deltadis-

tribution und deren Quadrat gearbeitet werden muss. Eine Theorie, welche diese Schwierigkeiten überwindet, wäre hier sicher hilfreich.
Eine mögliche Lösung bietet die Idee der nichtkommutativen Räume. Die Beschreibung physikalischer Prozesse basiert dann auf Koordinaten, die nicht wie üblich reelle Zahlen sind, sondern Elemente einer abstrakten Algebra, welche unter der Operation der Multiplikation nicht mehr beliebig vetauschbar sind. Ein ähnliches Vorgehen ist in der Physik wohlbekannt: Die konsistente Beschreibung von Erscheinungen im mikroskopischen Bereich durch die Quantenmechanik machte die Ersetzung des klassischen Phasenraums durch die nichtkommutative Heisenbergalgebra notwendig. Damit war es z.B. möglich, die Ultraviolettkatastrophe bei der Schwarzkörperstrahlung zu vermeiden. Die Anwendung dieser Methode auf die Raumzeit selbst könnte helfen, zu einer funktionierenden Quantisierung der Gravitation zu kommen. Als Konsequenz hiervon erhält man dann kein Kontinuum, sondern eine Art Gitter von Raumzeitpunkten [1, 2, 3, 4] . Dies ist der erste von zwei entscheidenden Vorteilen einer nichtkommutativen Theorie. Durch die Gitterstruktur ergäbe sich in der Raum-Zeit eine kleinste Länge und die oben angesprochenen Probleme liessen sich damit vielleicht umgehen. [13]
Damit ergibt sich aber sofort ein weiteres Problem: Derartige Räume sind nicht mit den bekannten Symmetrien verträglich. Symmetrie meint hier die Invarianz eines physikalischen Systems, und damit auch die Invarianz der das System beschreibenden Gleichungen unter Symmetrietransformationen. Diese können z.B. Koordinatentransformationen darstellen (Raum-Zeit-Symmetrien wie z.B. Drehungen) oder innere Symmetrien, wie etwa die in der Teilchenphysik auftretende Eichinvarianz der Lagrangefunktion. Das Theorem von Noether stellt einen wichtigen Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen her. Die Bedeutung der Erhaltungssätze liegt darin, dass sie zu einer oft erheblichen Vereinfachung der zu lösenden Gleichungen führen.
Die mathematische Behandlung von Symmetrien erfolgt durch Liegruppen, die auf kommutativen, kontinuierlichen Räumen als Transformationsgruppen operieren. Wichtige Beispiele sind die Drehgruppe SO(3), die auf dem Euklidischen Raum operiert, sowie die Lorentzgruppe SL(2,$\mathbb{C}$). Diese Gruppen spiegeln durch ihre Operation auf physikalisch relevanten Räumen die Symmetrie wieder, indem sich ein System oder dessen beschreibende Gleichung unter Anwendung der Gruppentransformation nicht verändert.
Betrachtet man aber nun z.B. ein quadratisches Gitter, ist klar, dass es etwa die Rotationsinvarianz im Allgemeinen nicht respektiert, nur bei bestimmten Drehungen, wie z.B. um 90 Grad geht es in sich selbst über. Ebensowenig respektieren die

nichtkommutativen Räume diese Symmetrien.
Eine natürliche Verallgemeinerung des Symmetriekonzepts, die mit den nichtkommutativen Räumen zusammenpasst, liefert die Theorie der Quantengruppen. Diese bilden eine Erweiterung des Begriffs der Liegruppen und sind mathematisch als deformierte Hopfalgebren zu verstehen. Die Quantengruppen übernehmen dann die Rolle der Symmetriegruppen und die nichtkommutativen Räume, mathematisch jetzt Komoduln der zugehörigen Quantengruppe, die Rolle der Darstellungsräume, auf denen die Quantengruppen operieren. Hier tritt der zweite Vorteil der nichtkommutativen Theorie zutage: Die gesamte Physik der Räume und Symmetriegruppen folgt einem wohldefiniertem mathematischen Axiomensystem. Somit ergibt sich ein tragfähiges, weil mathematisch und axiomatisch sauber fundiertes Konzept, welches weitreichende Verallgemeinerungen der bestehenden physikalischen Theorien erlauben sollte. Entscheidend dabei ist, dass die Verallgemeinerung eine echte Erweiterung des Bestehenden ist, die keine neuen „mysteriösen" Elemente in die Theorie einführt, welche zwar zu kurzfristigen Erfolgen beitragen mögen, aber doch letztendlich versagen. Alle bisher bekannten physikalischen Tatsachen bleiben unangetastet, einzig die Mathematik wird auf eine neue und solidere Grundlage gestellt. Solider deshalb, weil sich aufgrund der rechnerischen Beherrschbarkeit der Raumzeit bei kleinen Abständen auch Singularitäten der jetzigen physikalischen Theorien mathematisch korrekt behandeln lassen sollten. Selbstverständlich ist dies eine Behauptung, die erst noch vollständig verifiziert werden muss. Einen kleinen Beitrag hierzu möchte die vorliegende Arbeit leisten.

Die Idee diskrete Raumstrukturen einzuführen hat eine lange Tradition. Einer der ersten, der mit diesem Gedanken spielte, war etwa Heisenberg [13]; der erste Versuch einer mathematischen Realisierung stammt von Snyder [14].
So ist es auch eines der Hauptanliegen dieser Arbeit zu zeigen, dass aus der undeformierten Physik bekannte Konzepte in die $q$-deformierte Physik übertragen werden können. Dabei beschränken wir uns auf zwei Aspekte: Die Superanalysis und $q$-deformierte Liealgebren. Die Analysis ist als Grundlage jedweder physikalischen Theorie unverzichtbar; ihre Reformulierung in einem deformierten Rahmen wurde für bosonische Koordinatenvariablen in [16, 17, 18, 19] untersucht. Hier behandeln wir analog den Fall von Grassmannvariablen, welche z.B. bei der Behandlung von Dirac-Feldern oder in der Supersymmetrie vonnöten sind.
Die Umformulierung der bekannten Symmetrie-Quantenalgebren in einen Rahmen, der den aus der klassischen Physik bekannten nachempfindet, stärkt einerseits das Vertrauen in das Funktionieren der neuen Sprache und ist andererseits später hilfreich, Begriffe wie Masse und Spin von Elementarteilchen auf Quantenräumen mit

Bedeutung zu belegen.

Im verbleibenden Teil der Einleitung wollen wir noch einige Erläuterungen zu Quantenräumen angeben. Die dieser Arbeit zugrunde liegende mathematische Struktur setzt sich aus zwei Bestandteilen zusammen: Einer deformierten Symmetriegruppe, der Quantengruppe, und einem Darstellungsraum, dem Quantenraum. Wie oben schon angedeutet sind Quantengruppen Hopfalgebren, d.h. Algebren mit den zusätzlichen Abbildungen Koprodukt $\Delta$, Antipode $S$ und Koeins $\varepsilon$. Einführungen in die Mathematik der Hopfalgebren finden sich z.B. in [5, 6, 8], weshalb hier nicht näher darauf eingegangen werden soll. Wir geben aber in Anhang A alle nötigen Relationen der verwendeten Quantengruppen an.
Quantenräume sind mathematisch betrachtet Komoduln zu Quantengruppen. Der für unsere Betrachtungen relevante Aspekt ist, dass sie als Räume mit nichtkommutativen Koordinaten aufgefasst werden können, d.h. für die Raumkoordinaten $X$ gilt

$$[X^i, X^j] \neq 0. \tag{1.1}$$

In Anhang B stellen wir die in dieser Arbeit verwendeten Räume zusammen mit ihren Koordinatenrelationen genauer vor. Desweiteren lassen sich auf Quantenräumen Differentialkalküle definieren [10, 11, 12]. Ein nichtkommutativer Differentialkalkül ist eine Verallgemeinerung der klassischen Beziehung zwischen Ableitungen und Koordinaten. Ein entscheidender Unterschied ist, dass im Nichtkommutativen zwei nichtäquivalente, kovariante Kalküle existieren. Einmal benutzt man die sogenannte $R$-Matrix, für den zweiten Kalkül deren Inverse $R^{-1}$:

$$\begin{aligned}
\partial^i X^j &= g^{ij} + k(\hat{R}^{-1})^{ij}{}_{kl} X^k \partial^l, \qquad k \in \mathbb{R}, \\
\hat{\partial}^i X^j &= g^{ij} + k^{-1}(\hat{R})^{ij}{}_{kl} X^k \hat{\partial}^l.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Dabei bezeichnet $g^{ij}$ die Metrik des entsprechenden Quantenraums. Die den Räumen zugeordneten Differentialkalküle besprechen wir ausführlich in Anhang C. Wie man an den beiden Formeln in (1.2) erkennen kann, bestimmt die $R$-Matrix zusammen mit ihrer Inversen, wie Objekte aus unterschiedlichen Algebren miteinander vertauschen. Von dieser zentralen Erkenntnis werden wir in der Arbeit vielfältigen Gebrauch machen.
Dies sind die wesentlichen Bestandteile um eine Analysis auf dem bosonischen Sektor zu definieren [15, 16, 17, 18, 19]. Völlig analog kann man für den antisymmetrischen bzw. fermionischen Sektor vorgehen und gelangt zu einer Superanalysis.

Darauf beruhen die Resultate dieser Arbeit.
Es sei noch darauf hingewiesen, dass die vorgestellten Betrachtungen sich auch den sehr abstrakten Überlegungen der Kategorientheorie unterordnen lassen, da die Gesamtheit aller Quanteräume einer vorgelegten Quantengruppensymmetrie eine sogenannte verzopfte Tensorkategorie bildet. Da wir jedoch aus physikalischer Sicht einen gesteigerten Wert auf Berechenbarkeit legen, werden wir die zugrundeliegende Axiomatik nicht weiter ausführen. Der interessierte Leser sei zu diesem Zweck auf die Darstellungen in [6, 8, 9] verwiesen.
Abschliessend sei bemerkt, dass wir $\lambda$ als Abkürzung für $q-q^{-1}$ und $\lambda_+$ für $q+q^{-1}$ verwenden.

# Kapitel 2

# Superanalysis auf Quantenräumen

In diesem Kapitel werden wir alle für die Superanalysis nötigen Konzepte am einfachsten Quantenraumbeispiel, der 2-dimensionalen Maninebene, ausführlich erläutern, um danach die Resultate der höherdimensionalen Räume zu präsentieren. Dabei gehen wir wie im Folgenden beschrieben vor. Zuerst werden die Vertauschungsrelationen der $q$-Grassmannvariablen angegeben, um dann mittels derselben den Begriff der Superzahl zu definieren. Als zweiten Schritt berechnen wir die Wirkungen der Symmetrieoperatoren und der Ableitungen auf $q$-deformierte Superzahlen. Desweiteren bestimmen wir die Hopfstruktur sämtlicher Quantenraumelemente, insbesondere jene der Koordinaten, Ableitungen und Differentiale. Die Hopfstruktur ist essentieller Bestandteil zur vollständigen Beherrschung der Struktur der Quantensuperräume, da mit ihrer Hilfe alle Vertauschungsrelationen komplett angebbar sind.
Als Umkehrung der fermionischen Ableitungen führen wir Superintegrale ein und zeigen, dass sie die wichtigsten an Integrale zu stellenden Eigenschaften erfüllen. Daran schliessen wir die Berechnung von Exponentialen und Translationen auf antisymmetrisierten Quantenräumen an. Jedoch fehlt noch ein für die Superanalysis auf Quantenräumen spezifisches Element. Während es im Kommutativen erlaubt ist, Funktionen aus unterschiedlichen Algebren einfach aneinander vorbeizutauschen, müssen wir beim Produkt von Funktionen nichtkommutierender Variabler die Verzopfung zwischen den Tensorfaktoren berücksichtigen. Dies führt auf die weiter unten erklärten Zopfprodukte zwischen Superzahlen.

## 2.1 2-Dimensionale Quantenebene

Die Maninebene selbst ist (in ihrer symmetrischen bzw. bosonischen Version) definiert über die folgende Relation zwischen den Koordinaten [25]:

$$X^1X^2 = qX^2X^1. \tag{2.1}$$

Eine genauere Erläuterung der Quantenebenen haben wir in Anhang A verlegt.
Um Superräume behandeln zu können, benötigen wir die antisymmetrische Version der Maninebene, sie lautet

$$\begin{aligned}(\theta^1)^2 &= (\theta^2)^2 = 0, \\ \theta^1\theta^2 &= -q^{-1}\theta^2\theta^1,\end{aligned} \tag{2.2}$$

wobei die $\theta^i$ die antisymmetrischen Koordinaten sind. Zur Herleitung dieser Relationen benutzt man den symmetrischen Projektor (siehe Anhang A). Man beachte, dass sich im klassischen Limes, d.h. $q \to 1$, die bekannten Relationen für die Grassmannkoordinaten ergeben.
Mit Hilfe dieser Relationen können wir Superzahlen im zweidimensionalen Quantenraum definieren. Analog zum undeformierten Fall stellen wir eine Superzahl durch[1]

$$f(\theta^1, \theta^2) = f' + f_1\theta^1 + f_2\theta^2 + f_{12}\theta^1\theta^2 \tag{2.3}$$

dar, wobei die $f$'s beliebige komplexe Zahlen sind. Desweiteren lässt sich das Produkt zweier Superzahlen bilden, es lautet ausgeschrieben

$$\begin{aligned}&(f\cdot g)(\theta^1, \theta^2) \\ = \;&(f\cdot g)' + (f\cdot g)_1\theta^1 + (f\cdot g)_2\theta^2 + (f\cdot g)_{12}\theta^1\theta^2,\end{aligned} \tag{2.4}$$

wobei

$$\begin{aligned}(f\cdot g)' &= f'g', \\ (f\cdot g)_i &= f_ig' + f'g_i, \quad i = 1,2, \\ (f\cdot g)_{12} &= f_1g_2 - qf_2g_1 + f'g_{12} + f_{12}g'.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Für die folgende Betrachtung der vollständigen Struktur der Quantensuperräume bezeichnen wir ganz allgemein Generatoren von Quantenräumen mit dem Buchstaben $h^i$, welcher stellvertretend für eines der folgenden Objekte steht:

[1] Im folgenden verwenden wir die Konvention, dass die Normalordnung, auf welche sich die Darstellung der Superzahl bezieht, stets durch die Reihenfolge gegeben ist, in der die Koordinaten im Funktionssymbol angeordnet sind (siehe auch Anhang D).

a) die bosonische Koordinate $X^i$,

b) die fermionische Koordinate $\theta^i$,

c) die Koordinatendifferentiale $\xi^i \equiv dX^i$ und $\eta^i \equiv d\theta^i$.

Dies erweist sich als geschickte Strategie, da viele Strukturen allgemein angegeben werden können und nur bestimmte Operatoren für die unterschiedlichen Koordinatentypen einzeln spezifiziert werden müssen.

Unter der Symmetriealgebra $U_q(su(2))$, (siehe Anhang A), transformieren sich die Koordinaten wie Spinoren [25], d.h.

$$\begin{aligned} T^+h^1 &= qh^1T^+ + q^{-1}h^2, \\ T^+h^2 &= q^{-1}h^2T^+, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} T^-h^1 &= qh^1T^-, \\ T^-h^2 &= q^{-1}h^2T^- + qh^1, \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \tau h^1 &= q^2h^1\tau, \\ \tau h^2 &= q^{-2}h^2\tau. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Kovariante Spinoren definieren wir mit der Spinormetrik [38]:

$$h_i = \varepsilon_{ij}h^j, \quad h^i = \varepsilon^{ij}h_j. \tag{2.9}$$

Konjugation führen wir in der folgenden Weise ein [25]:

$$\begin{aligned} \overline{h^i} &= \overline{h}_i = -\varepsilon_{ij}\overline{h}^j, \\ \overline{h_i} &= \overline{h}^i = -\varepsilon^{ij}\overline{h}_j. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Die kovarianten Spinoren $h_i$ erfüllen mit den Operatoren von (2.6- 2.8) abweichende Relationen, nämlich

$$\begin{aligned} T^+h_1 &= q^{-1}h_1T^+, \\ T^+h_2 &= qh_2T^+ - h_1, \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} T^-h_1 &= q^{-1}h_1T^- - h_2, \\ T^-h_2 &= qh_2T^-, \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} \tau h_1 &= q^{-2}h_1\tau, \\ \tau h_2 &= q^2h_2\tau. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Die Transformationen der konjugierten Spinoren $\bar{h}^i$ und $\bar{h}_i$ sind jedoch dieselben wie für $h^i$ und $h_i$. Nun sind wir in der Lage Operatordarstellungen zu berechnen, indem wir die Operatoren auf eine Basis aus normalgeordneten Monomen wirken lassen. Um dies zu erreichen, tauschen wir die Operatoren gemäß Gl.(2.6-2.8) nach rechts durch und wenden dann die Koeins an. Für die Darstellungen auf den Superzahlen finden wir dann wegen der Nilpotenz der antisymmetrischen Koordinaten ziemlich einfache Ausdrücke. Explizit lauten diese:

$$\begin{aligned} T^+ \triangleright f(\theta^1,\theta^2) &= q^{-1} f_1 \theta^2, \\ T^- \triangleright f(\theta^1,\theta^2) &= q f_2 \theta^1, \\ \tau \triangleright f(\theta^1,\theta^2) &= f(q^2\theta^1, q^{-2}\theta^2). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Leitet man nun die Rechtsdarstellungen her, indem man die Operatoren nach links durchtauscht, so stellt man fest, dass sich diese aus einfachen Transformationsregeln, wie sie auch im bosonischen Fall gelten [15], herleiten lassen:

$$\begin{aligned} f(\theta^1,\theta^2) \triangleleft T^\pm &\overset{i\leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow} -q^{\mp 3} T^\mp \triangleright f(\theta^1,\theta^2), \\ f(\theta^1,\theta^2) \triangleleft \tau &\overset{i\leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow} \tau \triangleright f(\theta^1,\theta^2). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Hierbei ist zu beachten, dass für das Symbol $\overset{i\leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow}$ gilt

$$\begin{gathered} \theta^1 \overset{i\leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow} \theta^2, \quad \theta^2 \overset{i\leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow} \theta^1, \quad \theta^1\theta^2 \overset{i\leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow} \theta^1\theta^2, \\ f' \leftrightarrow f', \quad f^i \leftrightarrow f^{i'}, \quad i = 1,2, \quad f_{12} \leftrightarrow f_{12}. \end{gathered} \tag{2.16}$$

Um die Darstellungen der Ableitungsoperatoren zu berechnen, benötigen wir die Vertauschungsrelationen derselben mit den Koordinaten. Diese wurden in Anhang C hergeleitet. Wir geben sie der Vollständigkeit halber noch einmal an, und zwar in den folgenden Versionen:

$$\begin{aligned} \partial_\theta^i \theta^j &= \varepsilon^{ij} - (\hat{R}^{-1})^{ij}{}_{kl}\theta^k \partial_\theta^l, \\ \theta^i \partial_\theta^j &= -q^{-1}\varepsilon^{ij} - (\hat{R})^{ij}{}_{kl}\partial_\theta^k \theta^l, \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_\theta^i \bar{\theta}^j &= q^{-1}\varepsilon^{ij} - (\hat{R})^{ij}{}_{kl}\bar{\theta}^k \bar{\partial}_\theta^l \\ \bar{\theta}^i \bar{\partial}_\theta^j &= -\varepsilon^{ij} - (\hat{R}^{-1})^{ij}{}_{kl}\bar{\partial}_\theta^k \bar{\theta}^l. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Schreibt man nun die Relationen (C.18) aus, ergibt sich

$$\partial_\theta^1 \theta^1 = -q^{-1}\theta^1 \partial_\theta^1, \tag{2.19}$$

$$
\begin{aligned}
\partial^1_\theta \theta^2 &= -q^{-\frac{1}{2}} - \theta^2 \partial^1_\theta, \\
\partial^2_\theta \theta^1 &= q^{\frac{1}{2}} - \theta^1 \partial^2_\theta + \lambda \theta^2 \partial^1_\theta, \\
\partial^2_\theta \theta^2 &= -q^{-1} \theta^2 \partial^2_\theta,
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta^1 \partial^1_\theta &= -q \partial^1_\theta \theta^1 \\
\theta^1 \partial^2_\theta &= q^{-3/2} - \partial^2_\theta \theta^1 - \lambda \partial^1_\theta \theta^2
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta^2 \partial^1_\theta &= -q^{-1/2} - \partial^1_\theta \theta^2 \\
\theta^2 \partial^2_\theta &= -q \partial^2_\theta \theta^2.
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

Für die weiteren Überlegungen führen wir die Grössen $\hat{\partial}^i_x = -q^3 \bar{\partial}^i_x$ und $\hat{\partial}^i_\theta = q \bar{\partial}^i_\theta$ ein. Mit ihrer Hilfe ergeben sich dann die entsprechenden Relationen für den konjugierten Kalkül leicht mittels der Substitutionen

$$
\varepsilon^{ij} \to -\varepsilon^{ij}, \quad \partial^i_\theta \to \hat{\partial}^{i'}_\theta, \quad \theta^i \to \bar{\theta}^{i'}, \quad q \to q^{-1}, \tag{2.23}
$$

wobei $i' \equiv 3 - i$. Die Darstellungen der Ableitungen auf Funktionen berechnet sich damit leicht zu

$$
\begin{aligned}
\partial^1_\theta \triangleright f(\theta^2, \theta^1) &= -q^{-\frac{1}{2}} f_2 - q^{-\frac{1}{2}} f_{21} \theta^1, \\
\partial^2_\theta \triangleright f(\theta^2, \theta^1) &= q^{\frac{1}{2}} f_1 - q^{-\frac{1}{2}} f_{21} \theta^2.
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

Bestimmt man analog die Rechtsdarstellungen sowie die jeweilige konjugierte Version, so stellt man fest, dass diese den Übergangsregeln

$$
\begin{aligned}
\hat{\partial}^i_\theta \,\bar{\triangleright}\, f(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2) &\overset{\substack{i \,\to\, i' \\ q \,\to\, 1/q}}{\longleftrightarrow} -\partial^{i'}_\theta \triangleright f(\theta^2, \theta^1), \\
f(\bar{\theta}^2, \bar{\theta}^1) \,\bar{\triangleleft}\, \hat{\partial}^i_\theta &\overset{\substack{i \,\to\, i' \\ q \,\to\, 1/q}}{\longleftrightarrow} -f(\theta^1, \theta^2) \triangleleft \partial^i_\theta,
\end{aligned} \tag{2.25}
$$

und

$$
\begin{aligned}
f(\theta^1, \theta^2) \triangleleft \partial^i_\theta &\overset{i \leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow} -\bar{\partial}^{i'}_\theta \,\bar{\triangleright}\, f(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2), \\
f(\bar{\theta}^2, \bar{\theta}^1) \,\bar{\triangleleft}\, \bar{\partial}^i_\theta &\overset{i \leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow} -\partial^{i'}_\theta \triangleright f(\theta^2, \theta^1),
\end{aligned} \tag{2.26}
$$

genügen. Das Symbol $\overset{\substack{i \,\to\, i' \\ q \,\to\, 1/q}}{\longleftrightarrow}$ beschreibt nun Substitutionen gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\theta^i &\to \bar{\theta}^{i'}, \quad \theta^1 \theta^2 \to \bar{\theta}^2 \bar{\theta}^1, \quad q \to q^{-1}, \\
f' &\to f', \quad f_1 \to f_2, \quad f_2 \to f_1, \quad f_{12} \to f_{21}.
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

Um einen Quantensuperraum vollständig verstanden zu haben, muss man alle möglichen Vertauschungsrelationen zwischen beliebigen Koordinaten angeben können. Ein entscheidendes Mittel hierfür ist die Hopfstruktur. Eine Hopfstruktur besteht aus der Angabe eines Koprodukts und einer Antipode für die jeweiligen Koordinaten. Mithilfe des Koprodukts lassen sich dann z.B. die Vertauschungsrelationen (C.18) mittels der Formel[2]

$$\partial^i h^j = (\partial^i_{(1)} \triangleright h^j)\partial^i_{(2)}. \tag{2.28}$$

auswerten. Dazu macht man einen Ansatz der Form

$$\Delta(\partial^i) = \partial^i \otimes 1 + (L_\partial)^i_j \otimes \partial^j. \tag{2.29}$$

Ziel ist es nun, die noch unbekannten Operatoren $(L_\partial)^i_j$, die aus Linearkombinationen der Symmetriegeneratoren bestehen, so zu bestimmen, dass sie die korrekten Vertauschungsrelationen ergeben. Unsere Aufgabe besteht also darin, zu untersuchen wie die einzelnen Hopfstrukturen der Ableitungen, Koordinaten und Differentiale aussehen, sowie zu zeigen, dass sie zu Vertauschungsrelationen führen, die untereinander alle konsistent sind.
Bestimmen wir zuerst einmal die für einen Superraum unabdingbaren Relationen zwischen fermionischen und bosonischen Koordinaten. Zunächst wissen wir, dass für die Koordinatendifferentiale $\xi^i = dX^i$ und $\eta^i = d\theta^i$ gelten muss [34]

$$S^{ij}{}_{kl}\xi^k\xi^l = 0, \tag{2.30}$$

sowie

$$A^{ij}{}_{kl}\eta^k\eta^l = 0, \tag{2.31}$$

wobei $S$ und $A$ $q$-deformierte Versionen des symmetrischen bzw. antisymmetrischen Projektors bezeichnen. Damit folgt mittels der Projektorzerlegung der R-Matrix (Anhang B) sofort:

$$\begin{aligned} \xi^i\xi^j &= -q(\hat{R})^{ij}{}_{kl}\xi^k\xi^l \\ \eta^i\eta^j &= q^{-1}(\hat{R}^{-1})^{ij}{}_{kl}\eta^k\eta^l. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Machen wir nun einen Ansatz der Form

$$X^i\xi^j = C^{ij}{}_{kl}\xi^k X^l \tag{2.33}$$

[2]Wir benutzen hier für das Koprodukt als Schreibweise die Sweedlernotation, d.h. $\Delta(h) = h_{(1)} \otimes h_{(2)}$.

für die gesuchten Relationen und wenden die äußere Ableitung $d$ darauf an, so ergibt sich unter Berücksichtigung von $d^2X = d\xi^i = 0$ sowie der Leibnizregel aus Anhang C:

$$\xi^i \xi^j = -C^{ij}{}_{kl} \xi^k \xi^l, \tag{2.34}$$

und durch Vergleich mit (2.32) das Ergebnis:

$$X^i \xi^j = q(\hat{R})^{ij}{}_{kl} \xi^k X^l. \tag{2.35}$$

Entscheidend ist nun die Forderung, dass die Grassmannvariablen $\theta^i$ die gleichen Vertauschungsrelationen erfüllen wie die Koordinatendifferentiale $dX^i$. Damit gilt insbesondere $S^{ij}{}_{kl}\theta^k\theta^l = 0$ bzw. $\theta^i\theta^j = -q(\hat{R})^{ij}{}_{kl}\theta^k\theta^l$ und $X^i\theta^j = q(\hat{R})^{ij}{}_{kl}\theta^k X^l$, was mit dem bekannten, klassischen Limes $[x^i, \theta^j] = 0$ konsistent ist. Explizit erhalten wir:

$$\begin{aligned} X^1\theta^1 &= q^2\theta^1 X^1, \\ X^1\theta^2 &= q\theta^2 X^1 + q\lambda\theta^1 X^2, \\ X^2\theta^1 &= q\theta^1 X^2, \\ X^2\theta^2 &= q^2\theta^2 X^2. \end{aligned} \tag{2.36}$$

In analoger Weise bestimmen sich die $\theta\eta$-Relationen mit dem Resultat

$$\theta^i \eta^j = q^{-1}(\hat{R})^{ij}{}_{kl} \eta^k \theta^l. \tag{2.37}$$

Durch Konjugation der obigen Identitäten erhält man mit einfacher Rechnung die Relationen

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^i \bar{\xi}^j &= -q^{-1}(\hat{R}^{-1})^{ij}{}_{kl} \bar{\xi}^k \bar{\xi}^l, \\ \bar{\eta}^i \bar{\eta}^j &= q(\hat{R}^{-1})^{ij}{}_{kl} \bar{\eta}^k \bar{\eta}^l, \\ \bar{X}^i \bar{\xi}^j &= q^{-1}(\hat{R}^{-1})^{ij}{}_{kl} \bar{\xi}^k \bar{X}^l, \\ \bar{\theta}^i \bar{\eta}^j &= q(\hat{R}^{-1})^{ij}{}_{kl} \bar{\eta}^k \bar{\theta}^l. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Wie bereits erwähnt, wollen wir die Hopfstruktur von Koordinaten, Ableitungen und Differentialen so bestimmen, dass diese die Relationen (C.18), (C.19), (2.32), (2.35) und (2.37) im Rahmen der Identität

$$hg \;=\; (h_{(1)} \triangleright g) h_{(2)} \tag{2.39}$$

bzw.

$$hg = g_{(2)}(h \triangleleft g_{(1)}) \tag{2.40}$$

generieren. Diese Formeln verlangen natürlich, dass die einzelnen Quantenräume aufeinander wirken. Bei diesen Wirkungen handelt es sich aber stets entweder um die Nullwirkung oder die reguläre Wirkung zwischen Koordinaten und Ableitungsalgebren. Betrachtet man nun die zu generierenden Relationen genauer, so stellt man fest, dass diese sich in zwei Klassen aufteilen lassen, und zwar je nachdem, ob die Vertauschung (bis auf eine Potenz in $q$) entweder durch die R-Matrix oder deren Inverse bestimmt ist. Wie sich unmittelbar nachprüfen lässt, werden die Relationen für den zweiten Fall durch die Hopfstruktur

$$\begin{aligned}\Delta(h^1) &= h^1 \otimes 1 + \Lambda(h)\tau^{-\frac{1}{4}} \otimes h^1, \\ \Delta(h^2) &= h^2 \otimes 1 + \Lambda(h)\tau^{\frac{1}{4}} \otimes h^2 - q\lambda\Lambda(h)\tau^{-\frac{1}{4}}T^+ \otimes h^1,\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}S(h^1) &= -\Lambda^{-1}(h)\tau^{\frac{1}{4}}h^1, \\ S(h^2) &= -\Lambda^{-1}(h)\tau^{-\frac{1}{4}}h^2 - q^2\lambda\Lambda^{-1}(h)\tau^{-\frac{1}{4}}T^+h^1,\end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\varepsilon(h^1) = \varepsilon(h^2) = 0 \tag{2.43}$$

geliefert, wobei die Variable $h$ für eine der folgenden Grössen steht:

$$h^i \in \{\partial_x^i, \partial_\theta^i, X^i, \theta^i, \xi^i, \eta^i\}. \tag{2.44}$$

Der unitäre Skalierungsoperator $\Lambda(h)$ ist jetzt verantwortlich für den konkreten Vorfaktor von $\hat{R}^{-1}$ und muss daher für die verschiedenen möglichen Objekte $h$ noch spezifiziert werden. Dies führen wir weiter unten durch. Für den verbleibenden Fall hingegen ergibt sich eine zweite Hopfstruktur mit

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}(h^1) &= h^1 \otimes 1 + \Lambda^{-1}(h)\tau^{\frac{1}{4}} \otimes h^1 + q^{-1}\lambda\Lambda^{-1}(h)\tau^{-\frac{1}{4}}T^- \otimes h^2, \\ \bar{\Delta}(h^2) &= h^2 \otimes 1 + \Lambda^{-1}(h)\tau^{-\frac{1}{4}} \otimes h^2,\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}\bar{S}(h^1) &= -\Lambda(h)\tau^{-\frac{1}{4}}h^1 + q^{-2}\lambda\Lambda(h)\tau^{-\frac{1}{4}}T^-h^2, \\ \bar{S}(h^2) &= -\Lambda(h)\tau^{\frac{1}{4}}h^2,\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\bar{\varepsilon}(h^1) = \bar{\varepsilon}(h^2) = 0. \tag{2.47}$$

Der Vollständigkeit halber sei darauf hingewiesen, dass beide Hopfstrukturen durch Konjugation gemäß [40, 39]

$$\overline{\Delta(h)} = \tau \circ \bar{\Delta}(\bar{h}), \quad \overline{S(h)} = \bar{S}(\bar{h}), \quad \overline{\varepsilon(h)} = \bar{\varepsilon}(\bar{h}), \tag{2.48}$$

ineinander übergeführt werden können, wobei $\tau$ an dieser Stelle den gewöhnlichen Twist der Tensorfaktoren im Koprodukt bezeichnet. Der Beweis von (2.48) kann durch direkte Rechnung unter Berücksichtigung der Konjugationseigenschaften von Symmetrie- und Quantenraumgeneratoren geführt werden.

Zur vollständigen Bestimmung fehlt noch, die Wirkungen der einzelnen Skalierungsoperatoren auf die verschiedenen Quantenraumgeneratoren zu bestimmen. Allerdings reichen die bisherigen Relationen nicht aus, um diese vollständig zu bestimmen. Vielmehr benötigen wir zusätzlich die Konsistenzbedingungen

$$hg = (h_{(1)} \triangleright g)h_{(2)} = g_{(\bar{2})}(h \triangleleft g_{(\bar{1})}) \tag{2.49}$$

und

$$gh = (g_{(\bar{1})} \triangleright h)g_{(\bar{2})} = h_{(2)}(g \triangleleft h_{(1)}), \tag{2.50}$$

wobei

$$\bar{\Delta}(g) \quad = \quad g_{(\bar{1})} \otimes g_{(\bar{2})}. \tag{2.51}$$

Deren Auswertung liefert dann zusammen mit den bereits bekannten Vertauschungsrelationen für die Skalierer die Spezifikationen

$$\Lambda(\partial_x^i) = \Lambda^{-\frac{3}{4}}, \quad \Lambda(X^i) = \Lambda^{\frac{3}{4}}, \quad \Lambda(\eta^i) = \Lambda^{-\frac{1}{4}} \tag{2.52}$$

und

$$\Lambda(\partial_\theta^i) = \tilde{\Lambda}, \quad \Lambda(\theta^i) = \tilde{\Lambda}^{-1}, \quad \Lambda(\xi^i) = \tilde{\Lambda}^{-1}, \tag{2.53}$$

zusammen mit den Relationen

$$\begin{aligned}
\Lambda X^i &= q^{-2} X^i \Lambda, \\
\Lambda \partial_x^i &= q^2 \partial_x^i \Lambda, \\
\Lambda \xi^i &= q^{-2} \xi^i \Lambda, \\
\Lambda \eta^i &= q^{\frac{2}{3}} \eta^i \Lambda, \\
\Lambda \theta^i &= q^{-2} \theta^i \Lambda, \\
\Lambda \partial_\theta^i &= q^2 \partial_\theta^i \Lambda,
\end{aligned} \tag{2.54}$$

und

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda} \theta^i &= -q^{-\frac{1}{2}} \theta^i \tilde{\Lambda}, \\
\tilde{\Lambda} \partial_\theta^i &= -q^{\frac{1}{2}} \partial_\theta^i \tilde{\Lambda},
\end{aligned} \tag{2.55}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}\eta^i &= q^{-\frac{1}{2}}\eta^i\tilde{\Lambda}, \\
\tilde{\Lambda}\xi^i &= -q^{-\frac{1}{2}}\xi^i\tilde{\Lambda}, \\
\tilde{\Lambda}X^i &= q^{\frac{3}{2}}X^i\tilde{\Lambda}, \\
\tilde{\Lambda}\partial_x^i &= q^{-\frac{3}{2}}\partial_x^i\tilde{\Lambda}.
\end{aligned}
$$

Nachdem nun die Operatordarstellungen erschöpfend behandelt wurden, und wir mithilfe der Koprodukte sämtliche Vertauschungsrelationen im Griff haben, wollen wir jetzt die restlichen notwendigen Betandteile einer q-deformierten Superanalysis inspizieren. Wenn man Ableitungen konsistent definiert hat, stellt sich natürlich sofort die Frage nach den entsprechenden Integralen. Hier gehen wir in exakter Analogie zum undeformierten Fall vor. Dort sind die Superintegrale nichts anderes als die Ableitungen. Entsprechend definieren wir als Integral

$$\int f(\theta^2,\theta^1)\ d_L^2\theta = (\partial_\theta)_1(\partial_\theta)_2 \triangleright f(\theta^2,\theta^1) = f_{21}. \tag{2.56}$$

Der Index $L$ am Mass-Symbol deutet an, dass dieses Integral zu den Linkswirkungen der unkonjugierten Ableitungen korrespondiert. Selbstverständlich existieren auch für die anderen Formen der partiellen Ableitungen entsprechende Versionen. Bevor wir uns diesen zuwenden, müssen wir aber noch prüfen, ob unser Integral die gleichen Eigenschaften hat, die auch im klassischen Fall gelten. Darunter gehören bekanntlich: Linearität, Normierung und Translationsinvarianz. Die Linearität ergibt sich trivialerweise aus der Tatsache, dass auch die Ableitung linear ist, die beiden anderen Eigenschaften folgen direkt durch Rechnung aus der Definition, es gilt nämlich

$$\int \theta^2\theta^1\ d_L^2\theta = 1, \qquad \int \theta^\alpha\ d_L^2\theta = \int d_L^2\theta = 0, \quad \alpha = 1,2,$$

und für den Fall von infinitesimalen Translationen

$$\int (\partial_\theta)_\alpha \triangleright f(\theta^2,\theta^1)\ d_L^2\theta = 0, \quad \alpha = 1,2.$$

Später in diesem Abschnitt werden wir auch eine deformierte Darstellung von endlichen Translationen finden, damit werden wir noch einmal die Invarianz unter endlichen Transformationen beweisen. Die $U_q(su(2))$-Invarianz der Integrale ist trivial, da diese zahlenwertig sind und somit Skalare darstellen. Man kann aber auch ganz formal die Invarianz zeigen, in dem man nachrechnet, dass $\int d_q^2\theta(h\triangleright f) = \varepsilon(h)\int d_q^2\theta f$ für alle $h \in U_q su(2)$ gilt.

Gehen wir von den konjugierten partiellen Ableitungen aus und bedenken, dass diese mit den unkonjugierten über (2.25, 2.26) in Zusammenhang stehen, so scheint es sinnvoll das entsprechende Superintegral durch

$$\int_{\bar{L}} f(\theta^1,\theta^2)\; d^2_{\bar{L}}\theta = (\hat{\partial}_\theta)_2(\hat{\partial}_\theta)_1 \bar{\triangleright} f(\theta^1,\theta^2) = f_{12} \tag{2.57}$$

festzulegen. Wir rechnen die Eigenschaften nach; Es gilt

$$\int_{\bar{L}} \theta^1\theta^2 d^2_{\bar{L}}\theta = 1, \qquad \int_{\bar{L}} \theta^\alpha d^2_{\bar{L}}\theta = \int_{\bar{L}} d^2_{\bar{L}}\theta = 0, \quad \alpha = 1,2, \tag{2.58}$$

und

$$\int_{\bar{L}} (\hat{\partial}_\theta)_\alpha \bar{\triangleright} f(\theta^1,\theta^2)\; d^2_{\bar{L}}\theta = 0, \quad \alpha = 1,2. \tag{2.59}$$

Jetzt fehlen nur noch die Rechtsversionen der Integrale. Auch hier nutzen wir wieder die entsprechenden Transformationsformeln, die uns schon von den Ableitungen bekannt sind, d.h. Gl.(2.25, 2.26). Damit definieren wir die Integrale über

$$\begin{aligned} \int d^2_R\theta\, f(\theta^1,\theta^2) &\equiv f(\theta^1,\theta^2) \triangleleft (\hat{\partial}_\theta)_2(\hat{\partial}_\theta)_1 = f_{12}, \\ \int d_{\bar{R}}\theta\, f(\theta^2,\theta^1) &= f(\theta^2,\theta^1) \bar{\triangleleft} (\partial_\theta)_1(\partial_\theta)_2 = f_{21}. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} \int d^2_R\theta\; \theta^1\theta^2 = 1, &\quad \int d^2_R\theta\; \theta^\alpha = \int d^2_R\theta = 0, \quad \alpha = 1,2, \\ \int d^2_{\bar{R}}\theta\; \theta^2\theta^1 = 1, &\quad \int d^2_{\bar{R}}\theta\; \theta^\alpha = \int d^2_{\bar{R}}\theta = 0, \quad \alpha = 1,2, \end{aligned} \tag{2.61}$$

und

$$\begin{aligned} \int d^2_R\theta\; f(\theta^1,\theta^2) \triangleleft \hat{\partial}^i_\theta &= 0, \quad i = 1,2, \\ \int d^2_{\bar{R}}\theta\; f(\theta^2,\theta^1) \bar{\triangleleft}\, \partial^i &= 0, \quad i = 1,2. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Schließlich kann man sich überlegen, dass die Rechts- und Linksintegrale unter Konjugation ineinander übergehen. Genauer haben wir

$$\begin{aligned} \overline{\int f(\theta^2,\theta^1)\; d^2_L\theta} &= -\int d^2_{\bar{R}}\theta\; \overline{f(\theta^2,\theta^1)}, \\ \overline{\int d^2\theta_R\; f(\theta^1,\theta^2)} &= -\int \overline{f(\theta^1,\theta^2)}\; d^2_{\bar{L}}\theta. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Diese Identitäten ergeben sich am einfachsten aus der Beobachtung, dass für die Ableitungen gilt

$$\begin{aligned} \overline{(\partial_\theta)_\alpha \triangleright f} &= \bar{f} \,\bar{\triangleleft}\, (\partial_\theta)^\alpha, \\ (\hat{\partial}_\theta)_\alpha \bar{\triangleright} f &= \bar{f} \triangleleft (\hat{\partial}_\theta)^\alpha. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Als nächsten Schritt beim Aufbau des Superkalküls werden wir q-deformierte Superexponentiale einführen. Dabei bedienen wir uns der in [19] angegebenen Möglichkeit. Danach kann man ein Exponential als Eigenfunktion der partiellen Ableitungen einführen, dass die Eigenschaften einer ebenen Welle widerspiegelt:

$$\partial^A \triangleright \exp(x \mid \partial) = \exp(x \mid \partial) \bullet \partial \tag{2.65}$$

Bei einer physikalischen ebenen Welle hat man analog $\partial_x e^{ikx} = ike^{ikx}$. Zu bedenken ist auch, dass die Taylorregeln, welche ja endliche Verschiebungen beschreiben, ebenfalls durch Exponentialfunktionen darstellbar sind. Exponentiert man im undeformierten Fall die Ableitungsoperatoren, welche ja infinitesimale Translationen darstellen, so ergeben sich die globalen Translationen. In den Ergänzungen zur Superanalysis weiter unten werden wir nachweisen, dass auch dieser wichtige Punkt von unserem Exponential erfüllt wird.

Das Exponential lässt sich ganz allgemein definieren als Abbildung [6]

$$\exp : \mathbb{C} \to B^* \otimes B, \quad \text{mit} \quad \exp = \sum_a f^a \otimes e_a, \tag{2.66}$$

wobei $B$ und $B^*$ zwei Algebren bezeichnen, deren jeweilige Basen $\{e_a\}$ in $B$ als auch $\{f_a\}$ in $B^*$ zueinander dual sind. Insbesondere ist das Exponential nichts anderes als die Dualisierung einer Abbildung

$$\langle , \rangle : B \otimes B^* \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \langle e_a, f^b \rangle = \delta_a^b, \tag{2.67}$$

welche auch als duale Paarung zwischen $B$ und $B^*$ bezeichnet wird. In [26] wurde gezeigt, dass eine derartige duale Paarung für Grasmannvariablen und dazugehörige partielle Ableitungen existiert, konkret gegeben durch

$$\langle , \rangle : \mathcal{M}_\partial \otimes \mathcal{M}_\theta \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \langle f(\underline{\partial}_\theta), g(\underline{\theta}) \rangle \equiv \varepsilon(f(\underline{\partial}_\theta) \triangleright g(\underline{\theta})). \tag{2.68}$$

Gemäß den unterschiedlichen Ableitungen gibt es wieder die Links-/Rechtsversion im konjugierten und unkonjugierten Fall, genauer die dualen Paarungen

$$\begin{aligned}
\langle f(\underline{\partial}_\theta), g(\underline{\theta})\rangle_{L,\bar{R}} &\equiv \varepsilon(f(\underline{\partial}_\theta) \triangleright g(\underline{\theta})), \\
\langle f(\underline{\hat{\partial}}_\theta), g(\underline{\theta})\rangle_{\bar{L},R} &\equiv \varepsilon(f(\underline{\hat{\partial}}_\theta) \bar{\triangleright} g(\underline{\theta})), \\
\langle f(\underline{\theta}), g(\underline{\partial}_\theta)\rangle_{L,\bar{R}} &\equiv \varepsilon(f(\underline{\theta}) \bar{\triangleleft} g(\underline{\partial}_\theta)), \\
\langle f(\underline{\theta}), g(\underline{\hat{\partial}}_\theta)\rangle_{\bar{L},R} &\equiv \varepsilon(f(\underline{\theta}) \triangleleft g(\underline{\hat{\partial}}_\theta)).
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Für die entsprechenden Exponentiale lassen sich dann die bekannten Übergangsregeln angeben (siehe unten). Wollen wir eine explizite Formel für das Exponential, müssen wir eine Basis für $\mathcal{M}_\partial$ bestimmen. Einsetzen in Gl.(2.66) liefert dann die Darstellung des Exponentials.
Mit der expliziten Form für die Wirkung der partiellen Ableitungen finden wir, dass die duale Paarung in der unkonjugierten Linksversion aus den nachstehenden nichtverschwindenden Ausdrücken besteht:

$$\langle(\partial_\theta)_2, \theta^2\rangle_{L,\bar{R}} = \langle(\partial_\theta)_1, \theta^1\rangle_{L,\bar{R}} = \langle(\partial_\theta)_1(\partial_\theta)_2, \theta^2\theta^1\rangle_{L,\bar{R}} = 1. \tag{2.70}$$

Aus diesen Formeln lassen sich die jeweils zueinander dualen Basiselemente ablesen. So sind wir in der Lage, die explizite Form des Superexponentials anzugeben:

$$\exp(\theta_{\bar{R}} \mid (\partial_\theta)_L) = 1 \otimes 1 + \theta^1 \otimes (\partial_\theta)_1 + \theta^2 \otimes (\partial_\theta)_2 + \theta^2\theta^1 \otimes (\partial_\theta)_1(\partial_\theta)_2. \tag{2.71}$$

Man beachte, dass in diesem Fall das deformierte Exponential identisch mit dem klassischen, nichtdeformierten ist. Nehmen wir den zweiten, sprich konjugierten Kalkül, lautet die duale Paarung

$$\langle(\hat{\partial}_\theta)_1, \theta^1\rangle_{\bar{L},R} = \langle(\hat{\partial}_\theta)_2, \theta^2\rangle_{\bar{L},R} = \langle(\hat{\partial}_\theta)_2(\hat{\partial}_\theta)_1, \theta^1\theta^2\rangle_{\bar{L},R} = 1, \tag{2.72}$$

was zu dem Exponential

$$\exp(\theta_R \mid (\partial_\theta)_{\bar{L}}) = 1 \otimes 1 + \theta^1 \otimes (\hat{\partial}_\theta)_1 + \theta^2 \otimes (\hat{\partial}_\theta)_2 + \theta^1\theta^2 \otimes (\hat{\partial}_\theta)_2(\hat{\partial}_\theta)_1 \tag{2.73}$$

führt. Wir sehen, dass zwischen den dualen Paarungen und Exponentialen folgende Korrespondenz besteht:

$$\langle\underline{\partial}_\theta, \underline{\theta}\rangle_{L,\bar{R}} \overset{\substack{\alpha\leftrightarrow\alpha' \\ q\leftrightarrow 1/q}}{\longleftrightarrow} \langle\underline{\hat{\partial}}_\theta, \underline{\theta}\rangle_{\bar{L},R}, \tag{2.74}$$

$$\exp(\theta_{\bar{R}} \mid (\partial_\theta)_L) \overset{\substack{\alpha\leftrightarrow\alpha' \\ q\leftrightarrow 1/q}}{\longleftrightarrow} \exp(\theta_R \mid (\partial_\theta)_{\bar{L}}), \tag{2.75}$$

wobei das Übersetzungssymbol $\overset{\substack{\alpha\leftrightarrow\alpha' \\ q\leftrightarrow 1/q}}{\longleftrightarrow}$ für eine Transformation der Form

$$\theta^\alpha \leftrightarrow \theta^{\alpha'}, \quad (\partial_\theta)_\alpha \leftrightarrow (\hat{\partial}_\theta)_{\alpha'}, \quad q \leftrightarrow q^{-1}. \tag{2.76}$$

mit $\alpha' \equiv 3 - \alpha$ steht.

Die eingeführten Konzepte für Linksableitungen lassen sich selbstverständlich wieder auf Rechtsableitungen übertragen. Die entsprechenden Beziehungen der dualen Paarungen für konjugierte und unkonjugierte Rechtsableitungen heissen

$$\begin{aligned}\langle\theta_1, \partial_\theta^1\rangle_{L,\bar{R}} = \langle\theta_2, \partial_\theta^2\rangle_{L,\bar{R}} = \langle\theta_1\theta_2, \partial_\theta^2\partial_\theta^1\rangle_{L,\bar{R}} = 1,\\ \langle\theta_1, \hat{\partial}_\theta^1\rangle_{\bar{L},R} = \langle\theta_2, \hat{\partial}_\theta^2\rangle_{\bar{L},R} = \langle\theta_2\theta_1, \hat{\partial}_\theta^1\hat{\partial}_\theta^2\rangle_{\bar{L},R} = 1,\end{aligned} \tag{2.77}$$

und korrespondieren zu den Exponentialen

$$\begin{aligned}\exp((\partial_\theta)_{\bar{R}} \mid \theta_L) &= 1\otimes 1 + \partial_\theta^1 \otimes \theta_1 + \partial_\theta^2 \otimes \theta_2 + \partial^2\partial^1 \otimes \theta_1\theta_2,\\ \exp((\partial_\theta)_R \mid \theta_{\bar{L}}) &= 1\otimes 1 + \hat{\partial}_\theta^1 \otimes \theta_1 + \hat{\partial}_\theta^2 \otimes \theta_2 + \hat{\partial}^1\hat{\partial}^2 \otimes \theta_2\theta_1.\end{aligned} \tag{2.78}$$

Die Umwandlungsformeln von Links- zu Rechtsobjekten lauten

$$\begin{aligned}\langle\underline{\theta}, \underline{\partial}_\theta\rangle_{L,\bar{R}} \overset{\alpha\leftrightarrow\alpha'}{\longleftrightarrow} \langle\underline{\partial}_\theta, \underline{\theta}\rangle_{L,\bar{R}}\ ,\\ \langle\underline{\theta}, \underline{\partial}_\theta\rangle_{\bar{L},R} \overset{\alpha\leftrightarrow\alpha'}{\longleftrightarrow} \langle\underline{\partial}_\theta, \underline{\theta}\rangle_{\bar{L},R}\ ,\end{aligned} \tag{2.79}$$

und für die Exponentiale selbst bekommen wir

$$\begin{aligned}\exp((\partial_\theta)_{\bar{R}} \mid \theta_L) &\overset{\alpha\leftrightarrow\alpha'}{\longleftrightarrow} \exp((\partial_\theta)_{\bar{R}} \mid (\partial_\theta)_L)\ ,\\ \exp((\partial_\theta)_R \mid \theta_{\bar{L}}) &\overset{\alpha\leftrightarrow\alpha'}{\longleftrightarrow} \exp((\partial_\theta)_R \mid (\partial_\theta)_{\bar{L}})\ ,\end{aligned} \tag{2.80}$$

wobei $\overset{\alpha\leftrightarrow\alpha'}{\longleftrightarrow}$ für eine der zwei nachstehenden Substitutionen steht

a) $(\partial_\theta)_\alpha \leftrightarrow \theta_\alpha, \quad \theta^\alpha \leftrightarrow \partial_\theta^\alpha\ ,$

b) $(\hat{\partial}_\theta)_\alpha \leftrightarrow \theta_\alpha, \quad \theta^\alpha \leftrightarrow \hat{\partial}^\alpha\ .$

Der nächste interessante Schritt besteht in der Einführung von Translationen. Infinitesimale Translationen als Wirkung einer Ableitung sind uns schon bei der Translationsinvarianz der Superintegrale begegnet. Bei der Translation eines Vektors haben wir es mit einer Abbildung

$$X \mapsto X + Y \tag{2.81}$$

zu tun. In Komponenten ausgeschrieben

$$X^A \mapsto X^A \otimes 1 + 1 \otimes Y^A\ . \tag{2.82}$$

Hier müssen wir wieder genau darauf achten, in welchem Tensorfaktor unsere Objekte leben. Bei einer allgemeinen Translation leben die Koordinaten des $Y$-Vektors in einem anderen Faktor als die des $X$-Vektors, und wir müssen daher das Braiding berücksichtigen. Im Kommutativen dürfen wir die Tensorfaktoren identifizieren und können schreiben:

$$X^A \mapsto X^A \otimes 1 + 1 \otimes Y^A = X^A \otimes 1 + Y^A \otimes 1 = X^A + Y^A \,. \tag{2.83}$$

Die erste Gleichheit benützt die Vertauschbarkeit von $1 \otimes Y^A$ und $Y^A \otimes 1$, was im Falle der Existenz eines Braidings nicht mehr gilt.

Unser translatierter Vektor soll natürlich dieselben Symmetrien und Relationen repektieren wie der Ausgangsvektor. Damit bietet sich das Koprodukt in der verzopften Hopfalgebra als q-deformierte Realisierung der Translationen an, da es offensichtlich die notwendigen Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{A}_q &\rightarrow \mathcal{A}_q \otimes \mathcal{A}_q \,, \\ \Delta(XY) &= \Delta(X)\Delta(Y) \,, \\ \Delta(T \triangleright X) &= \Delta(T) \triangleright \Delta(X) \,. \end{aligned}$$

Die erste Zeile ist genau die Abbildung in ein Tensorprodukt der Koordinatenalgebren, die zweite Gleichung sichert den Erhalt der Relationen in derselben und die dritte Gleichung schliesslich ist Ausdruck der Komoduleigenschaft, d.h., dass die Symmetrien erhalten bleiben. Um Translationen explizit zu realisieren, genügt es, für alle Monome ihr Koprodukt [6, 27, 28, 29, 30, 31] auszurechnen. Dazu betrachten wir das normale Koprodukt

$$\Delta_{\bar{L}}(\theta^\alpha) = \bar{\Delta}(\theta^\alpha) = \theta^\alpha \otimes 1 + (\mathcal{L}_{\bar{L}})^\alpha{}_\beta \otimes \theta^\beta \tag{2.84}$$

und definieren uns Links- als auch Rechtskoordinaten via

$$\theta_l^\alpha = \theta^\alpha \otimes 1, \quad \theta_r^\alpha = (\mathcal{L}_{\bar{L}})^\alpha{}_\beta \otimes \theta^\beta. \tag{2.85}$$

Unter Berücksichtigung der Vertauschungsregeln der Operatoren $(\mathcal{L}_{\bar{L}})^\alpha{}_\beta$ mit den $\theta^i$, lässt sich zeigen, dass für unsere Koprodukte gilt:

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{L}}(\theta^\alpha) &= \theta_l^\alpha + \theta_r^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \\ \Delta_{\bar{L}}(\theta^2\theta^1) &= \theta_l^2\theta_l^1 + \theta_l^2\theta_r^1 - q^{-1}\theta_l^1\theta_r^2 + \theta_r^2\theta_r^1. \end{aligned} \tag{2.86}$$

Daraus folgt dann für die allgemeine Translation von Superzahlen

$$\begin{aligned} f(\theta \underline{\oplus}_{\bar{L}} \psi) &= f' + f_1(\theta^1 + \psi^1) + f_2(\theta^2 + \psi^2) \\ &\quad + f_{21}(\theta^2\theta^1 + \theta^2\psi^1 - q^{-1}\theta^1\psi^2 + \psi^2\psi^1). \end{aligned} \tag{2.87}$$

Will man nun Translationen in die umgekehrte Richtung durchführen, muss man auf die Antipode zurückgreifen. Hier lässt man einfach die Operatoren in den Ausdrücken der Antipode

$$\begin{aligned} S_{\bar{L}}(\theta^\alpha) = \bar{S}(\theta^1) &= -\tilde{\Lambda}^{-1}\tau^{-1/4}\theta^1 + q^{-2}\lambda\tilde{\Lambda}^{-1}\tau^{-1/4}T^-\theta^2, \\ \bar{S}(\theta^2) &= \tilde{\Lambda}^{-1}\tau^{1/4}\theta^2 \end{aligned} \tag{2.88}$$

nach links wirken und erhält als Ergebnis:

$$\begin{aligned} &S_{\bar{L}}(\theta^\alpha) = -\theta^\alpha, \quad \alpha = 1,2\ , \\ &S_{\bar{L}}(\theta^2\theta^1) = q^{-2}\theta^2\theta^1\ . \end{aligned} \tag{2.89}$$

In der Tat erfüllen diese Ausdrücke zusammen mit (2.86) das Hopfalgebrenaxiom

$$(m \circ (S \otimes id) \circ \Delta)(F) = \varepsilon(F) = (m \circ (id \otimes S) \circ \Delta)(F), \tag{2.90}$$

wobei $m$ die Multiplikation in der zugrundeliegenden Algebra bezeichnet. Als Beispiel möge die folgende Rechnung dienen:

$$\begin{aligned} 1 \otimes S_{\bar{L}} \circ \Delta_{\bar{L}}(\theta^2\theta^1) &= \theta^2\theta^1 + \theta^2 S_{\bar{L}}(\theta^1) - q^{-1}\theta^1 S_{\bar{L}}(\theta^2) + S_{\bar{L}}(\theta^2\theta^1) \\ &= \theta^2\theta^1 - \theta^2\theta^1 + q^{-1}\theta^1\theta^2 + q^{-2}\theta^2\theta^1 = 0. \end{aligned} \tag{2.91}$$

Führen wir im Raum der Superzahlen die neue Operation

$$f(\underline{\ominus}_{\bar{L}}\theta) = f' - f_1\theta^1 - f_2\theta^2 + q^{-2}f_{21}\theta^2\theta^1 \tag{2.92}$$

ein, so können wir das Axiom (2.91) wie folgt formulieren:

$$f((\underline{\ominus}_{\bar{L}}\theta)\underline{\oplus}_{\bar{L}}\theta)) = f(\theta\underline{\oplus}_{\bar{L}}(\underline{\ominus}_{\bar{L}}\theta))) = f'. \tag{2.93}$$

Alle bisherigen Betrachtungen sind in analoger Weise für Rechtsstrukturen durchführbar, wobei die entsprechenden Hopfstrukturen gegeben sind durch

$$\Delta_{\bar{R}} \equiv \tau \circ \Delta_{\bar{L}}, \quad S_{\bar{R}} \equiv S_{\bar{L}}^{-1}. \tag{2.94}$$

Damit erhalten wir dann statt der obigen Ergebnisse[3]

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{R}}(\theta^\alpha) &= \theta_l^\alpha + \theta_r^\alpha, \quad \alpha = 1,2, \\ \Delta_{\bar{R}}(\theta^1\theta^2) &= \theta_l^1\theta_l^2 + \theta_l^1\theta_r^2 - q\theta_l^2\theta_r^1 + \theta_r^1\theta_r^2, \end{aligned} \tag{2.95}$$

[3]Rechts- und Linkskoordinaten sind nun definiert durch $\theta_l^\alpha = \theta^\beta \otimes (\mathcal{L}_{\bar{L}})^\alpha{}_\beta$ und $\theta_r^\alpha = 1 \otimes \theta^\alpha$.

und

$$\begin{aligned} S_{\bar{R}}(\theta^\alpha) &= -\theta^\alpha, \quad \alpha = 1,2, \\ S_{\bar{R}}(\theta^1\theta^2) &= q^2\theta^1\theta^2. \end{aligned} \tag{2.96}$$

Die daraus folgenden Operationen lauten dann für Superzahlen

$$\begin{aligned} f(\theta \underline{\oplus}_{\bar{R}} \psi) &= f' + f_1(\theta^1 + \psi^1) + f_2(\theta^2 + \psi^2) \\ &\quad + f_{21}(\theta^1\theta^2 + \theta^1\psi^2 - q\theta^2\psi^1 + \psi^1\psi^2), \\ f(\underline{\ominus}_{\bar{R}}\theta) &= f' - f_1\theta^1 - f_2\theta^2 + q^2 f_{12}\theta^1\theta^2. \end{aligned} \tag{2.97}$$

Analysieren wir als letzten Punkt die gewohnten Crossingsymmetrien der Translation. Wie sich direkt überprüfen lässt, gilt zwischen Rechts- und Links-Version

$$\Delta_{\bar{R}}, S_{\bar{R}}, \underline{\oplus}_{\bar{R}}, \underline{\ominus}_{\bar{R}} \overset{\alpha \leftrightarrow \alpha'}{\underset{}{\overset{q\leftrightarrow 1/q}{\longleftrightarrow}}} \Delta_{\bar{L}}, S_{\bar{L}}, \underline{\oplus}_{\bar{L}}, \underline{\ominus}_{\bar{L}}. \tag{2.98}$$

Die konjugierten Ausdrücke kann man mit den Transformationsformeln

$$\begin{aligned} &\Delta_L, S_L, \underline{\oplus}_L, \underline{\ominus}_L \overset{\alpha \leftrightarrow \alpha'}{\overset{q\leftrightarrow 1/q}{\longleftrightarrow}} \Delta_{\bar{L}}, S_{\bar{L}}, \underline{\oplus}_{\bar{L}}, \underline{\ominus}_{\bar{L}}, \\ &\Delta_R, S_R, \underline{\oplus}_R, \underline{\ominus}_R \overset{\alpha \leftrightarrow \alpha'}{\overset{q\leftrightarrow 1/q}{\longleftrightarrow}} \Delta_{\bar{R}}, S_{\bar{R}}, \underline{\oplus}_{\bar{R}}, \underline{\ominus}_{\bar{R}} \end{aligned} \tag{2.99}$$

ableiten. Die in Gl.(2.98, 2.100) auftretenden Symbole haben dieselbe Bedeutung wie schon oben erwähnt.

Als letztes wollen wir Formeln angeben, die es uns erlauben, eine Superzahl mit Elementen eines anderen Quantenraums zu vertauschen. Wir hatten bereits früher erwähnt, dass diese Relationen mit Hilfe des Koprodukts gewonnen werden können. In unserem Fall gilt nämlich

$$f(\underline{\theta})g = [(f(\underline{\theta}))_{(1)} \triangleright g](f(\underline{\theta}))_{(2)} \tag{2.100}$$

bzw.

$$gf(\underline{\theta}) = (f(\underline{\theta}))_{(2)}[g \triangleleft f(\underline{\theta})_{(1)}], \tag{2.101}$$

wobei g ein beliebiges Element aus einem anderen Quantenraum als $f(\underline{\theta})$ sei. Drücken wir in den obigen Formeln das Koprodukt der Superzahl unter Anwendung von (2.84) aus und berücksichtigen ausserdem $\theta^\alpha \triangleright g = g \triangleleft \theta^\alpha = 0$, so können wir die Vertauschungsrelationen zwischen $f(\underline{\theta})$ und g auch wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} f(\theta^2,\theta^1) \,\underline{\odot}_{L/\bar{L}}\, g &= g \otimes f' + (f_\alpha (\mathcal{L}_{L/\bar{L}})^\alpha{}_\beta \triangleright g) \otimes \theta^\beta \qquad (2.102)\\ &\quad + (f_{21} (\mathcal{L}_{L/\bar{L}})^2{}_\gamma (\mathcal{L}_{L/\bar{L}})^1{}_\delta \triangleright g) \otimes \theta^\gamma \theta^\delta, \\ g \,\underline{\odot}_{R/\bar{R}}\, f(\theta^2,\theta^1) &= f' \otimes g + \theta^\beta \otimes g \triangleleft (\mathcal{L}_{L/\bar{L}})^\alpha{}_\beta f_\alpha \\ &\quad + (g \triangleleft (\mathcal{L}_{L/\bar{L}})^2{}_\gamma (\mathcal{L}_{L/\bar{L}})^1{}_\delta) \otimes \theta^\gamma \theta^\delta, \end{aligned}$$

In den obigen Formeln wird über alle mehrfach auftretenden Indizes summiert. Nach Einsetzen der $\mathcal{L}$-Operatoren und Ordnen der Ergebnisse nach den Monomen im rechten Tensorfaktor ergibt sich allgemein ein Term der Form

$$f(\theta^2,\theta^1) \,\underline{\odot}_{L/\bar{L}}\, g = g \otimes f + \Sigma_{\underline{K}} ((O_f)^{\underline{K}}_{L/\bar{L}} \triangleright g) \otimes \theta^{\underline{K}}, \qquad (2.103)$$

$$g \,\underline{\odot}_{R/\bar{R}}\, f(\theta^2,\theta^1) = f' \otimes g + \Sigma_{\underline{K}} (g \triangleleft (O_f)^{\underline{K}}_{L/\bar{L}}) \otimes \theta^{\underline{K}}, \qquad (2.104)$$

Die Operatoren $O^i_f$ nehmen die folgende Form an

$$\begin{aligned} (O_f)^1_L &= \tilde{\Lambda}^3 \tau^{-1/4} (f_1 - q\lambda_2 T^+), \qquad (2.105)\\ (O_f)^2_L &= \tilde{\Lambda}^3 \tau^{1/4} f_2, \\ (O_f)^{21}_L &= \tilde{\Lambda}^6, \qquad (2.106) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (O_f)^1_{\hat{L}} &= \tilde{\Lambda}^{-3} \tau^{1/4} f_1, \qquad (2.107)\\ (O_f)^2_{\bar{L}} &= \tilde{\Lambda}^{-3} \tau^{-1/4} (f_2 + q^{-1} \lambda f_1 T^-), \\ (O_f)^{21}_{\bar{L}} &= \tilde{\Lambda}^{-6}. \qquad (2.108) \end{aligned}$$

Diese neuen Produkte bezeichnen wir als Zopfprodukte.

## 2.2 3-Dimensionaler q-deformierter Euklidischer Raum

Selbstverständlich übertragen sich alle Überlegungen des vorstehenden Abschnitts analog auf den Fall des 3-dimensionalen Euklidischen Raumes, weshalb wir uns im wesentlichen auf die Angabe der Ergebnisse beschränken können. Die notwendigen Grundlagen über Quantenräume finden sich in den Anhängen A bis C . Ebenfalls werden wir uns auf den Fall der antisymmetrischen Koordinaten und deren Differentiale beschränken; der bosonische Fall wurde ausführlich in [16, 17, 18, 19] abgehandelt.

Die Relationen der Grassmannkoordinaten sind bestimmt durch (Anhang B)

$$\theta^A\theta^B = -q^4(\hat{R})^{AB}_{CD}\theta^C\theta^D, \quad A, B, C \in \{+, 3, -\}. \tag{2.109}$$

Daraus folgen als unabhängige Relationen

$$\begin{aligned} (\theta^+)^2 &= (\theta^-)^2 = 0, \\ \theta^3\theta^3 &= \lambda\theta^+\theta^-, \\ \theta^+\theta^- &= -\theta^-\theta^+, \\ \theta^\pm\theta^3 &= -q^{\pm 2}\theta^3\theta^\pm. \end{aligned} \tag{2.110}$$

Damit kann man nun wieder das Produkt zweier Superzahlen der allgemeinen Form

$$\begin{aligned} & f(\theta^+, \theta^3, \theta^-) \\ = \;& f' + f_+\theta^+ + f_3\theta^3 + f_-\theta^- \\ + \;& f_{+3}\theta^+\theta^3 + f_{+-}\theta^+\theta^- + f_{3-}\theta^3\theta^- \\ + \;& f_{+3-}\theta^+\theta^3\theta^- \end{aligned} \tag{2.111}$$

wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} & (f\cdot g)(\theta^+, \theta^3, \theta^-) \\ = \;& (f\cdot g)' + (f\cdot g)_+\theta^+ + (f\cdot g)_3\theta^3 + (f\cdot g)_-\theta^- \\ + \;& (f\cdot g)_{+3}\theta^+\theta^3 + (f\cdot g)_{+-}\theta^+\theta^- + (f\cdot g)_{3-}\theta^3\theta^- \\ + \;& (f\cdot g)_{+3-}\theta^+\theta^3\theta^-, \end{aligned} \tag{2.112}$$

mit

$$\begin{aligned} (f\cdot g)' &= f'g', \\ (f\cdot g)_A &= f_Ag' + f'g_A, \quad A \in \{+, 3, -\}, \end{aligned} \tag{2.113}$$

$$\begin{aligned} (f\cdot g)_{+3} &= f_{+3}g' + f'g_{+3} + f_+g_3 - q^{-2}f_3g_+, \\ (f\cdot g)_{3-} &= f_{+-}g' + f'g_{+-} + f_3g_- - q^{-2}f_-g_3, \\ (f\cdot g)_{+-} &= f_{3-}g' + f'g_{3-} + f_+g_- - f_-g_+ + \lambda f_3g_3, \end{aligned} \tag{2.114}$$

$$\begin{aligned} (f\cdot g)_{+3-} &= f_{+3-}g' + f'g_{+3-} + f_+g_{3-} - q^{-2}f_3g_{+-} + q^{-2}f_-g_{+3} \\ &+ f_{+3}g_- - q^{-2}f_{+-}g_3 + q^{-2}f_{3-}g_+. \end{aligned} \tag{2.115}$$

Die antisymmetrisierten Koordinaten $\theta^A, A, B, C \in \{+, 3, -\}$, transformieren sich nun unter der Symmetriealgebra $U_q(su(2))$ im Gegensatz zum 2-dimensionalen Fall wie die Komponenten eines Vektors. Die entsprechenden Vertauschungsrelationen zwischen den Generatoren der $U_q(su(2))$ und den fermionischen Vektorkoordinaten lauten daher

$$\begin{aligned} L^+\theta^+ &= \theta^+ L^+, \\ L^+\theta^3 &= \theta^3 L^+ - q\theta^+\tau^{-\frac{1}{2}}, \\ L^+\theta^- &= \theta^- L^+ - \theta^3\tau^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{2.116}$$

$$\begin{aligned} L^-\theta^+ &= \theta^+ L^- + \theta^3\tau^{-\frac{1}{2}}, \\ L^-\theta^3 &= \theta^3 L^- + q^{-1}\theta^-\tau^{-\frac{1}{2}}, \\ L^-\theta^- &= \theta^- L^-, \end{aligned} \tag{2.117}$$

$$\begin{aligned} \tau^{-\frac{1}{2}}\theta^\pm &= q^{\pm 2}\theta^\pm\tau^{-\frac{1}{2}}, \\ \tau^{-\frac{1}{2}}\theta^3 &= \theta^3\tau^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.118}$$

Aus diesen Relationen lassen sich wieder die Operatordarstellungen der Symmetriegeneratoren herleiten, nämlich

$$\begin{aligned} & L^+ \triangleright f(\theta^+, \theta^3, \theta^-) \\ = \; & -qf_3\theta^+ - f_-\theta^3 - f_{+-}\theta^+\theta^3 - qf_{3-}\theta^+\theta^-, \end{aligned} \tag{2.119}$$

$$\begin{aligned} & L^- \triangleright f(\theta^+, \theta^3, \theta^-) \\ = \; & q^{-1}f_3\theta^- + f_+\theta^3 + qf_{+3}\theta^+\theta^- + q^{-2}f_{+-}\theta^3\theta^-, \end{aligned} \tag{2.120}$$

$$\begin{aligned} & \tau^{-1/2} \triangleright f(\theta^+, \theta^3, \theta^-) \\ = \; & f(q^2\theta^+, \theta^3, q^{-2}\theta^-). \end{aligned} \tag{2.121}$$

Der Zusammenhang mit den Rechtsdarstellungen ist nun gegeben durch

$$f(\theta^+, \theta^3, \theta^-) \triangleleft L^\pm \overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} L^\mp \triangleright f(\theta^+, \theta^3, \theta^-) \tag{2.122}$$

oder

$$f(\theta^+, \theta^3, \theta^-) \triangleleft \tau^{-1/2} = \tau^{-1/2} \triangleright f(q^{-2}\theta^+, \theta^3, q^2\theta^-), \tag{2.123}$$

mit

$$\begin{aligned} \theta^{i_1}\cdots\theta^{i_n} &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \theta^{\bar{i}_n}\cdots\theta^{\bar{i}_1}, \\ f_{i_1}\cdots f_{i_n} &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} f_{\bar{i}_1}\cdots f_{\bar{i}_n}, \\ f' &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} f', \end{aligned} \tag{2.124}$$

wobei wir einen konjugierten Index $\bar{A}$ eingeführt haben mit $\bar{A} = \overline{(+,3,-)} = (-,3,+)$.

Betrachten wir als nächstes den zugehörigen 3-dimensionalen Differentialkalkül, dessen Leibnizregeln lauten

$$\begin{aligned} \partial_\theta^A \theta^B &= g^{AB} - q^{-4}(\hat{R}^{-1})^{AB}_{CD}\theta^C\partial_\theta^D, &(2.125)\\ \hat{\partial}_\theta^A \theta^B &= g^{AB} - q^{4}(\hat{R})^{AB}_{CD}\theta^C\hat{\partial}_\theta^D &(2.126) \end{aligned}$$

Schreibt man diese explizit aus, so ergibt sich im ersten Fall

$$\begin{aligned} \partial_\theta^+ \theta^+ &= -q^{-4}\theta^+\partial_\theta^+, &(2.127)\\ \partial_\theta^+ \theta^3 &= -q^{-2}\theta^3\partial_\theta^+ + q^{-2}\lambda\lambda_+\theta^+\partial_\theta^3,\\ \partial_\theta^+ \theta^- &= -q - \theta^-\partial_\theta^+ + q^{-1}\lambda\lambda_+\theta^3\partial_\theta^3 - q^{-1}\lambda^2\lambda_+\theta^+\partial_\theta^-, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\theta^3 \theta^+ &= -q^{-2}\theta^+\partial_\theta^3, &(2.128)\\ \partial_\theta^3 \theta^3 &= 1 - q^{-2}\theta^3\partial_\theta^3 + q^{-1}\lambda\lambda_+\theta^+\partial_\theta^-,\\ \partial_\theta^3 \theta^- &= -q^{-2}\theta^-\partial_\theta^3 + q^{-2}\lambda\lambda_+\theta^3\partial_\theta^-, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\theta^- \theta^+ &= -q^{-1} - \theta^+\partial_\theta^-, &(2.129)\\ \partial_\theta^- \theta^3 &= -q^{-2}\theta^3\partial_\theta^-,\\ \partial_\theta^- \theta^- &= -q^{-4}\theta^-\partial_\theta^-. \end{aligned}$$

Die Leibnizregeln des konjugierten Kalküls folgen durch Anwendung der Substitutionen

$$\partial_\theta^A \to \hat{\partial}_\theta^{\bar{A}} = q^2\bar{\partial}_\theta{}^{\bar{A}}, \quad \theta^A \to \theta^{\bar{A}}, \quad q \to q^{-1} \tag{2.130}$$

auf die Gl. (2.127)-(2.129). Jetzt können wir wieder aus den Vertauschungsrelationen (2.127)-(2.129) die Wirkungen der fermionischen Ableitungen auf beliebige Superzahlen ermitteln. Die Ergebnisse sind

$$\begin{aligned} &\partial_\theta^+ \triangleright f(\theta^+,\theta^3,\theta^-) &(2.131)\\ =\ &-qf_- + q^{-3}f_{+-}\theta^+ + q^{-1}f_{3-}\theta^3 - q^{-5}f_{+3-}\theta^+\theta^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\partial_\theta^3 \triangleright f(\theta^+,\theta^3,\theta^-) &(2.132)\\ =\ &f_3 - q^{-2}f_{+3}\theta^+ + f_{3-}\theta^- - q^{-2}f_{+3-}\theta^+\theta^-, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\partial_\theta^- \triangleright f(\theta^+,\theta^3,\theta^-) &(2.133)\\ =\ &-q^{-1}f_+ - q^{-1}f_{+3}\theta^3 - q^{-1}f_{+-}\theta^- - q^{-1}f_{+3-}\theta^3\theta^-. \end{aligned}$$

Um zu den Rechtsdarstellungen sowie zu den jeweils konjugierten Versionen zu gelangen, bedient man sich der Transformationsformeln

$$\begin{aligned} \partial_\theta^A \triangleright f(\theta^+,\theta^3,\theta^-) &\overset{\substack{+\to -\\ q\to 1/q}}{\longleftrightarrow} \hat{\partial}_\theta^{\bar{A}} \,\bar{\triangleright}\, f(\bar{\theta}^-,\bar{\theta}^3,\bar{\theta}^+), \\ f(\bar{\theta}^+,\bar{\theta}^3,\bar{\theta}^-) \,\bar{\triangleleft}\, \partial_\theta^A &\overset{\substack{+\to -\\ q\to 1/q}}{\longleftrightarrow} f(\theta^-,\theta^3,\theta^+) \triangleleft \hat{\partial}_\theta^{\bar{A}} \end{aligned} \tag{2.134}$$

und

$$\begin{aligned} f(\bar{\theta}^+,\bar{\theta}^3,\bar{\theta}^-) \,\bar{\triangleleft}\, \partial_\theta^{\bar{A}} &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \partial_\theta^A \triangleright f(\theta^+,\theta^3,\theta^-), \\ f(\theta^-,\theta^3,\theta^+) \triangleleft \partial_\theta^{\bar{A}} &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \partial_\theta^A \,\bar{\triangleright}\, f(\bar{\theta}^-,\bar{\theta}^3,\bar{\theta}^+), \end{aligned} \tag{2.135}$$

wobei $\overset{\substack{+\to -\\ q\to 1/q}}{\longleftrightarrow}$ die Übersetzungsregel

$$\begin{aligned} \theta^{i_1}\cdots\theta^{i_n} &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \theta^{\bar{i_1}}\cdots\theta^{\bar{i_n}}, \\ f_{i_1}\cdots f_{i_n} &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} f_{\bar{i_1}}\cdots f_{\bar{i_n}}, \\ f' &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} f', \\ q &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} q^{-1} \end{aligned} \tag{2.136}$$

bedeutet.

Konzentrieren wir uns nun auf die Hopfstrukturen der verschiedenen Quantenräume. Wir geben wieder die allgemeine Form an, zuerst der unkonjugierte Fall mit

$$\begin{aligned} \Delta(h^-) &= h^-\otimes 1 + \Lambda(h)\tau^{-\frac{1}{2}}\otimes h^-, \\ \Delta(h^3) &= h^3\otimes 1 + \Lambda(h)\otimes h^3 + \lambda\lambda_+\Lambda(h)L^+\otimes h^-, \\ \Delta(h^+) &= h^+\otimes 1 + \Lambda(h)\tau^{\frac{1}{2}}\otimes h^+ + q\lambda\lambda_+\Lambda(h)\tau^{\frac{1}{2}}L^+\otimes h^3 \\ &+ q^2\lambda^2\lambda_+\Lambda(h)\tau^{\frac{1}{2}}(L^+)^2\otimes h^-, \end{aligned} \tag{2.137}$$

$$\begin{aligned} S(h^-) &= -\Lambda^{-1}(h)\tau^{\frac{1}{2}}h^-, \\ S(h^3) &= -\Lambda^{-1}(h)h^3 + q^2\lambda\lambda_+\Lambda^{-1}(h)\tau^{\frac{1}{2}}L^+h^-, \\ S(h^+) &= -\Lambda^{-1}(h)\tau^{-\frac{1}{2}}h^+ + q\lambda\lambda_+\Lambda^{-1}(h)L^+h^3 \\ &- q^4\lambda^2\lambda_+\Lambda^{-1}(h)\tau^{\frac{1}{2}}(L^+)^2h^-, \end{aligned} \tag{2.138}$$

$$\varepsilon(h^+) = \varepsilon(h^3) = \varepsilon(h^-) = 0; \tag{2.139}$$

und entsprechend die konjugierte Version mit

$$\bar{\Delta}(h^+) = h^+\otimes 1 + \Lambda^{-1}(h)\tau^{-\frac{1}{2}}\otimes h^+, \tag{2.140}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\Delta}(h^3) &= h^3 \otimes 1 + \Lambda^{-1}(h) \otimes h^3 + \lambda\lambda_+\Lambda^{-1}(h)L^- \otimes h^+, \\
\bar{\Delta}(h^-) &= h^- \otimes 1 + \Lambda^{-1}(h)\tau^{-\frac{1}{2}} \otimes h^- + q^{-1}\lambda\lambda_+\Lambda^{-1}(h)\tau^{\frac{1}{2}}L^- \otimes h^3 \\
&+ q^{-2}\lambda^2\lambda_+\Lambda^{-1}(h)\tau^{\frac{1}{2}}(L^-)^2 \otimes h^+,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{S}(h^+) &= -\Lambda(h)\tau^{\frac{1}{2}}h^+, \\
\bar{S}(h^3) &= -\Lambda(h)h^3 + q^{-2}\lambda\lambda_+\Lambda(h)\tau^{\frac{1}{2}}L^-h^+, \\
\bar{S}(h^-) &= -\Lambda(h)\tau^{-\frac{1}{2}}h^- + q^{-1}\lambda\lambda_+\Lambda(h)L^-h^3 \\
&- q^{-4}\lambda^2\lambda_+\Lambda(h)\tau^{\frac{1}{2}}(L^-)^2h^+,
\end{aligned} \tag{2.141}
$$

$$
\bar{\varepsilon}(h^+) = \bar{\varepsilon}(h^3) = \bar{\varepsilon}(h^-) = 0. \tag{2.142}
$$

$h$ steht wieder für eine der folgenden Variablen

$$
h^A \in \{\partial_x^A, \partial_\theta^A, X^A, \theta^A, \xi^A, \eta^A\}. \tag{2.143}
$$

Zur vollständigen Angabe der Hopfstruktur muss erneut der Skalierungsoperator $\Lambda$ spezifiziert werden. Dies hat in der nachstehenden Art zu geschehen:

$$
\Lambda(\partial_x^A) = \Lambda^{\frac{1}{2}}, \quad \Lambda(X^A) = \Lambda^{-\frac{1}{2}}, \quad \Lambda(\eta^A) = \Lambda^{\frac{1}{2}} \tag{2.144}
$$

und

$$
\Lambda(\partial_\theta^A) = \tilde{\Lambda}, \quad \Lambda(\theta^A) = \tilde{\Lambda}^{-1}, \quad \Lambda(\xi^A) = \tilde{\Lambda}^{-1}, \tag{2.145}
$$

wobei dann die Vertauschungsrelationen

$$
\begin{aligned}
\Lambda X^A &= q^4 X^A \Lambda, \\
\Lambda\partial_x^A &= q^{-4}\partial_x^A\Lambda, \\
\Lambda\xi^A &= q^4\xi^A\Lambda, \\
\Lambda\eta^A &= q^{-4}\eta^A\Lambda, \\
\Lambda\theta^A &= q^4\theta^A\Lambda, \\
\Lambda\partial_\theta^A &= q^{-4}\partial_\theta^A\Lambda
\end{aligned} \tag{2.146}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}\theta^A &= -q^{-2}\theta^A\tilde{\Lambda}, \\
\tilde{\Lambda}\partial_\theta^A &= -q^2\partial_\theta^A\tilde{\Lambda}, \\
\tilde{\Lambda}\eta^A &= q^{-2}\eta^A\tilde{\Lambda}, \\
\tilde{\Lambda}\xi^A &= -q^{-2}\xi^A\tilde{\Lambda}, \\
\tilde{\Lambda}X^A &= q^2X^A\tilde{\Lambda}, \\
\tilde{\Lambda}\partial_x^A &= q^{-2}\partial_x^A\tilde{\Lambda}
\end{aligned} \tag{2.147}
$$

gelten müssen.

Das Links- bzw. Rechtsintegral definieren wir als

$$\begin{aligned} \int f(\theta^+,\theta^3,\theta^-)\, d_L^3\theta &\equiv (\partial_\theta)_-(\partial_\theta)_3(\partial_\theta)_+ \triangleright f(\theta^+,\theta^3,\theta^-) = f_{+3-}, \\ \int d_R^3\,\theta f(\theta^+,\theta^3,\theta^-) &\equiv f(\theta^+,\theta^3,\theta^-) \triangleleft (\hat\partial_\theta)_+(\hat\partial_\theta)_3(\hat\partial_\theta)_- = f_{-3+}. \end{aligned} \tag{2.148}$$

Aus diesen Definitionen folgt wiederum

$$\int \theta^+\theta^3\theta^-\, d_L^3\theta = 1, \quad \int 1\, d_L^3\theta = 0, \quad \int \theta^A\, d_L^3\theta = 0, \quad A \in \{+,3,-\}, \tag{2.149}$$
$$\int \theta^+\theta^3\, d_L^3\theta = \int \theta^+\theta^-\, d_L^3\theta = \int \theta^3\theta^- d_L^3\theta = 0$$

und

$$\int d_R^3\theta\, \theta^-\theta^3\theta^+ = 1, \quad \int d_R^3\theta\, 1 \ = 0, \quad \int d_R^3\theta\, \theta^A = 0, \quad A \in \{+,3,-\}, \tag{2.150}$$
$$\int d_R^3\theta\, \theta^3\theta^+ = \int d_R^3\theta\, \theta^-\theta^+ = \int d_R^3\theta\, \theta^-\theta^3 = 0.$$

Damit ist die korrekte Normierung sichergestellt. Die Translationsinvarianz ist ebenfalls erfüllt, da gilt

$$\begin{aligned} \int (\partial_\theta)_A \triangleright f(\theta^+,\theta^3,\theta^-)\, d_L^3\theta &= 0, \quad A \in \{+,3,-\}, \\ \int d_R^3\theta f(\theta^-,\theta^3,\theta^+) \triangleleft (\hat\partial_\theta)_A &= 0. \end{aligned} \tag{2.151}$$

Die entsprechenden aus dem konjugierten Differentialkalkül folgenden Ausdrücke erhält man leicht durch Anwendung von

$$\begin{aligned} d_L^3\theta \leftrightarrow d_{\bar L}^3\theta, &\qquad d_R^3\theta \leftrightarrow d_{\bar R}^3\theta, \\ f(\theta^+,\theta^3,\theta^-) \ \leftrightarrow &\ \ f(\theta^-,\theta^3,\theta^+), \\ \theta^A \leftrightarrow \theta^{\bar A}, &\qquad (\partial_\theta)_A \leftrightarrow (\hat\partial_\theta)_{\bar A}, \\ \triangleright \leftrightarrow \bar\triangleright, &\qquad \triangleleft \leftrightarrow \bar\triangleleft. \end{aligned} \tag{2.152}$$

Zur Verdeutlichung dieser Regeln möge ein explizites Beispiel dienen:

$$\int (\partial_\theta)_+ \triangleright f(\theta^+,\theta^3,\theta^-)\, d_L^3\theta \leftrightarrow \int (\hat\partial_\theta)_- \,\bar\triangleright\, f(\theta^-,\theta^3,\theta^+)\, d_{\bar L}^3\theta. \tag{2.153}$$

Kommen wir als nächstes zu den Exponentialen. Von den dualen Paarungen

$$\begin{aligned}
&\langle(\partial_\theta)_-, \theta^-\rangle_{L,\bar{R}} = \langle(\partial_\theta)_3, \theta^3\rangle_{L,\bar{R}} = \langle(\partial_\theta)_+, \theta^+\rangle_{L,\bar{R}} = 1, \\
&\langle(\partial_\theta)_-(\partial_\theta)_3, \theta^3\theta^-\rangle_{L,\bar{R}} = 1, \quad \langle(\partial_\theta)_-(\partial_\theta)_+, \theta^+\theta^-\rangle_{L,\bar{R}} = 1, \\
&\langle(\partial_\theta)_3(\partial_\theta)_+, \theta^+\theta^3\rangle_{L,\bar{R}} = 1, \quad \langle(\partial_\theta)_-(\partial_\theta)_3(\partial_\theta)_+, \theta^+\theta^3\theta^-\rangle_{L,\bar{R}} = 1
\end{aligned} \tag{2.154}$$

lesen wir sofort das Exponential ab, nämlich

$$\begin{aligned}
\exp(\theta_{\bar{R}} \mid (\partial_\theta)_L) \;=\; & 1 \otimes 1 + \theta^+ \otimes (\partial_\theta)_+ + \theta^3 \otimes (\partial_\theta)_3 \\
& + \theta^- \otimes (\partial_\theta)_- + \theta^+\theta^3 \otimes (\partial_\theta)_-(\partial_\theta)_3 + \theta^+\theta^- \otimes (\partial_\theta)_-(\partial_\theta)_+ \\
& + \theta^3\theta^- \otimes (\partial_\theta)_-(\partial_\theta)_3 + \theta^+\theta^3\theta^- \otimes (\partial_\theta)_-(\partial_\theta)_3(\partial_\theta)_+.
\end{aligned} \tag{2.155}$$

Auch hier ist das Exponential, wie im 2-dimensionalen Fall, nicht deformiert, sondern entspricht exakt dem klassischen Gegenstück. In Analogie zur 2-dimensionalen Quantenebene finden wir für den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Paarungen und Exponentialen die Crossingsymmetrien

$$\begin{aligned}
\langle\underline{\hat{\partial}_\theta}, \underline{\theta}\rangle_{\bar{L},R} &\overset{+\leftrightarrow -}{\underset{}{\overset{q\leftrightarrow 1/q}{\longleftrightarrow}}} \langle\underline{\partial_\theta}, \theta\rangle_{L,\bar{R}}\,, \\
\langle\underline{\theta}, \underline{\hat{\partial}_\theta}\rangle_{\bar{L},R} &\overset{+\leftrightarrow -}{\underset{}{\overset{q\leftrightarrow 1/q}{\longleftrightarrow}}} \langle\underline{\theta}, \underline{\partial_\theta}\rangle_{L,\bar{R}}\,,
\end{aligned} \tag{2.156}$$

$$\begin{aligned}
\langle\underline{\hat{\partial}_\theta}, \underline{\theta}\rangle_{\bar{L},R} &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \langle\underline{\theta}, \underline{\hat{\partial}_\theta}\rangle_{\bar{L},R}\,, \\
\langle\underline{\partial_\theta}, \underline{\theta}\rangle_{L,\bar{R}} &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \langle\underline{\theta}, \underline{\partial_\theta}\rangle_{L,\bar{R}}
\end{aligned} \tag{2.157}$$

und

$$\begin{aligned}
\exp(\theta_R \mid (\hat{\partial}_\theta)_{\bar{L}}) &\overset{+\leftrightarrow -}{\overset{q\leftrightarrow 1/q}{\longleftrightarrow}} \exp(\theta_{\bar{R}} \mid (\partial_\theta)_L)\,, \\
\exp((\hat{\partial}_\theta)_R \mid \theta_{\bar{L}}) &\overset{+\leftrightarrow -}{\overset{q\leftrightarrow 1/q}{\longleftrightarrow}} \exp((\partial_\theta)_{\bar{R}} \mid \theta_L)\,,
\end{aligned} \tag{2.158}$$

$$\begin{aligned}
\exp(\theta_R \mid (\hat{\partial}_\theta)_{\bar{L}}) &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \exp((\hat{\partial}_\theta)_{\bar{R}} \mid \theta_{\bar{L}})\,, \\
\exp(\theta_{\bar{R}} \mid (\partial_\theta)_L) &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \exp((\partial_\theta)_{\bar{R}} \mid \theta_L).
\end{aligned} \tag{2.159}$$

Das Symbol $\overset{+\leftrightarrow -}{\overset{q\leftrightarrow 1/q}{\longleftrightarrow}}$ steht für

$$\begin{aligned}
&\theta^A \leftrightarrow \theta^{\bar{A}}, \quad \theta_A \leftrightarrow \theta_{\bar{A}}, \quad q \leftrightarrow q^{-1}, \\
&(\partial_\theta)^A \leftrightarrow (\hat{\partial}_\theta)^{\bar{A}}, \quad (\partial_\theta)_A \leftrightarrow (\hat{\partial}_\theta)_{\bar{A}},
\end{aligned} \tag{2.160}$$

wohingegen $\overset{+\leftrightarrow-}{\longleftrightarrow}$ wieder für eine der zwei folgenden Substitutionen steht:

$$\begin{aligned} \theta^A &\leftrightarrow \hat{\partial}^A, \quad \hat{\partial}_A \leftrightarrow \theta_A, \\ \theta^A &\leftrightarrow \partial^A, \quad \partial_A \leftrightarrow \theta_A. \end{aligned} \tag{2.161}$$

Wenden wir uns nun den q-Translationen von Superzahlen zu. Als erstes haben wir hierzu die Koprodukte der Basismonome zu berechnen. Diese sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \Delta_L(\theta^A) &= \theta_l^A + \theta_r^A, \quad A \in \{+,3,-\}, \\ \Delta_L(\theta^-\theta^3) &= \theta_l^-\theta_l^3 + \theta_l^-\theta_r^3 - q^2\theta_l^3\theta_r^- + \theta_r^-\theta_r^3, \\ \Delta_L(\theta^-\theta^+) &= \theta_l^-\theta_l^+ + \theta_l^-\theta_r^+ - q^4\theta_l^+\theta_r^- + \theta_r^-\theta_r^+, \\ \Delta_L(\theta^3\theta^+) &= \theta_l^3\theta_l^+ + \theta_l^3\theta_r^+ - q^2\theta_l^+\theta_r^3 + \theta_r^3\theta_r^+, \\ \Delta_L(\theta^-\theta^3\theta^+) &= \theta_l^-\theta_l^3\theta_l^+ + \theta_l^-\theta_l^3\theta_r^+ + q^6\theta_l^3\theta_l^+\theta_r^- - q^2\theta_l^-\theta_l^+\theta_r^3 \\ &\quad + \theta_l^-\theta_r^3\theta_r^+ - q^2\theta_l^3\theta_r^-\theta_r^+ + q^6\theta_l^+\theta_r^-\theta_r^3 + \theta_r^-\theta_r^3\theta_r^+. \end{aligned} \tag{2.162}$$

Die zugehörigen konsistenten Antipoden lauten dann

$$\begin{aligned} S_L(\theta^A) &= -\theta^A, \quad A \in \{+,3,-\}, \\ S_L(\theta^-\theta^3) &= q^4\theta^-\theta^3, \quad S_L(\theta^-\theta^+) = q^4\theta^-\theta^+, \\ S_L(\theta^3\theta^+) &= q^4\theta^3\theta^+, \quad S_L(\theta^-\theta^3\theta^+) = q^8\theta^-\theta^3\theta^+. \end{aligned} \tag{2.163}$$

Die Crossingsymmetrien zum Ermitteln der anderen Versionen sind

$$\begin{aligned} \Delta_L, S_L &\overset{+\leftrightarrow-}{\underset{}{\overset{q\leftrightarrow 1/q}{\longleftrightarrow}}} \Delta_{\bar{L}}, S_{\bar{L}}, \\ \Delta_R, S_R &\overset{+\leftrightarrow-}{\overset{q\leftrightarrow 1/q}{\longleftrightarrow}} \Delta_{\bar{R}}, S_{\bar{R}}\ , \end{aligned} \tag{2.164}$$

$$\begin{aligned} \Delta_L, S_L &\overset{+\leftrightarrow-}{\overset{q\leftrightarrow 1/q}{\longleftrightarrow}} \Delta_R, S_R\ , \\ \Delta_{\bar{L}}, S_{\bar{L}} &\overset{+\leftrightarrow-}{\overset{q\leftrightarrow 1/q}{\longleftrightarrow}} \Delta_{\bar{R}}, S_{\bar{R}}\ . \end{aligned} \tag{2.165}$$

Auf die Angabe der Operationen $\underline{\oplus}$ und $\underline{\ominus}$ für Superzahlen verzichten wir an dieser Stelle, da sie sich leicht aus den angegeben Resultaten herleiten lassen.

Wir beschließen dieses Unterkapitel wieder mit der Angabe der Zopfprodukte, auch diese sind nach exakt dem gleichen Schema zu ermitteln wie zuvor im 2-dimensionalen Fall besprochen. So erhalten wir für eine allgemeine Superzahl der Form

$$f(\underline{\theta}) = f' + f_{\underline{k}}\theta^{\underline{k}}, \tag{2.166}$$

wobei $\theta^{\underline{k}}$ Monome der Ordnung $\theta^+\theta^3\theta^-$ bezeichnet. Es gelten wie im zweidimensionalen Fall die allgemeinen Formeln

$$\begin{aligned} f(\theta^+,\theta^3,\theta^-)\,\underline{\odot}_{L/\bar{L}}\, g &= g\otimes f + \Sigma_{\underline{K}}((O_f)^{\underline{K}}_{L/\bar{L}} \triangleright g)\otimes\theta^{\underline{K}}, \\ g\,\underline{\odot}_{R/\bar{R}}\, f(\theta^+,\theta^3,\theta^-) &= f'\otimes g + \Sigma_{\underline{K}} g(\triangleleft (O_f)^{\underline{K}}_{L/\bar{L}}\otimes\theta^{\underline{K}}), \end{aligned} \tag{2.167}$$

diesmal allerdings mit den neuen Operatoren

$$\begin{aligned} (O_f)^+_L &= \tilde{\Lambda}^{-1}\tau^{1/2} f_+, \\ (O_f)^3_L &= \tilde{\Lambda}^{-1}(f_3 + q\lambda\lambda_+ f_+\tau^{1/2}L^+), \\ (O_f)^-_L &= \tilde{\Lambda}^{-1}(f_-\tau^{1/2}\lambda\lambda_+ f_3 L^+ + q^2\lambda\lambda_+ f_+\tau^{1/2}(L^+)^2), \end{aligned} \tag{2.168}$$

$$\begin{aligned} (O_f)^{+3}_L &= \tilde{\Lambda}^{-2}(\tau^{1/2} f_{+3}), \\ (O_f)^{+-}_L &= \tilde{\Lambda}^{-2}(f_{+-} + q^2\lambda\lambda_+ f_{+3}\tau^{1/2}L^+), \\ (O_f)^{3-}_L &= \tilde{\Lambda}^{-2}(f_{3-}\tau^{-1/2} - q^{-1}\lambda\lambda_+ f_{+-} \\ &\quad + q^2\lambda^2\lambda_+ f_{+3}\tau^{1/2}(L^+)^2), \end{aligned} \tag{2.169}$$

$$(O_f)^{+3-}_L = \tilde{\Lambda}^{-3} f_{+3-}, \tag{2.170}$$

sowie im konjugierten Fall

$$\begin{aligned} (O_f)^+_{\bar{L}} &= \tilde{\Lambda}(f_+\tau^{-1/2} + \lambda\lambda_+ f_3 L^- + q^{-2}\lambda^2\lambda_+\tau^{1/2}(L^-)^2), \\ (O_f)^3_{\bar{L}} &= \tilde{\Lambda}(f_3 + q^{-1}\lambda\lambda_+\tau^{1/2}L^-), \\ (O_f)^-_{\bar{L}} &= f_-\tilde{\Lambda}\tau^{-1/2}, \end{aligned} \tag{2.171}$$

$$\begin{aligned} (O_f)^{+3}_{\bar{L}} &= \tilde{\Lambda}^2(f_{+3}\tau^{-1/2} - q^{-1}\lambda\lambda_+ f_{+-}L^- \\ &\quad + q^{-2}\lambda\lambda_+ f_{3-}\tau^{1/2}(L^-)^2), \\ (O_f)^{+-}_{\bar{L}} &= \tilde{\Lambda}^2(f_{+-} + \lambda\lambda_+\tau^{1/2}L^- f_{3-}), \\ (O_f)^{3-}_{\bar{L}} &= \tilde{\Lambda}^2\tau^{1/2} f_{3-}, \end{aligned} \tag{2.172}$$

$$(O_f)^{+3-}_{\bar{L}} = \tilde{\Lambda}^3 f_{+3-}. \tag{2.173}$$

Damit sind die Zopfprodukte komplett bestimmt.

## 2.3 4-Dimensionaler q-deformierter Euklidischer Raum

Wie in Anhang B hergeleitet, unterliegen die Grassmann-Koordinaten für den 4-dimensionalen Euklidischen Raum den Vertauschungsrelationen

$$\theta^i\theta^j = -q(\hat{R})^{ij}_{kl}\theta^k\theta^l. \tag{2.174}$$

Daraus ergeben sich als unabhängige Relationen

$$\begin{aligned}
(\theta^i)^2 &= 0, \quad i = 1, \ldots, 4, \qquad (2.175)\\
\theta^1\theta^2 &= -q^{-1}\theta^2\theta^1,\\
\theta^1\theta^3 &= -q^{-1}\theta^3\theta^1,\\
\theta^2\theta^4 &= -q^{-1}\theta^4\theta^2,\\
\theta^3\theta^4 &= -q^{-1}\theta^3\theta^4,\\
\theta^1\theta^4 &= -\theta^4\theta^1,\\
\theta^2\theta^3 &= -\theta^3\theta^2 + \lambda\theta^1\theta.^4
\end{aligned}$$

Eine allgemeine Superzahl hat hier die Form

$$\begin{aligned}
& f(\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4) \qquad (2.176)\\
= \; & f' + \sum_{i=1}^{4} f_i\theta^i + \sum_{1\leq i_1<i_2\leq 4} f_{i_1i_2}\theta^{i_1}\theta^{i_2}\\
+ \; & \sum_{1\leq i_1<i_2<i_3\leq 4} f_{i_1i_2i_3}\theta^{i_1}\theta^{i_2}\theta^{i_3} + f_{1234}\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4.
\end{aligned}$$

Multiplizieren wir zwei Superzahlen, so erhalten wir als Ergebnis

$$\begin{aligned}
& (f\cdot g)(\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4) \qquad (2.177)\\
= \; & (f\cdot g)' + \sum_{i=1}^{4}(f\cdot g)_i\theta^i + \sum_{1\leq i_1<i_2\leq 4} (f\cdot g)_{i_1i_2}\theta^{i_1}\theta^{i_2}\\
+ \; & \sum_{1\leq i_1<i_2<i_3\leq 4} (f\cdot g)_{i_1i_2i_3}\theta^{i_1}\theta^{i_2}\theta^{i_3} + (f\cdot g)_{1234}\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4,
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)' &= f'g', \qquad (2.178)\\
(f\cdot g)_i &= f_ig' + f'g_i, \quad i = 1, \ldots, 4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f\cdot g)_{1j} &= f_{1j}g' + g_{1j}f' + f_1 g_j - q f_j g_1, \quad j=2,3, \\ (f\cdot g)_{j4} &= f_{j4}g' + g_{j4}f' + f_j g_4 - q f_4 g_j, \\ (f\cdot g)_{23} &= f_{23}g' + g_{23}f' + f_2 g_3 - f_3 g_2, \\ (f\cdot g)_{14} &= f_{14}g' + g'_{14} + f_1 g_4 - f_4 g_1 + \lambda f_3 g_2,\end{aligned} \tag{2.179}$$

$$\begin{aligned}(f\cdot g)_{123} &= f_{123}g' + g_{123}f' + f_1 g_{23} - q f_2 g_{13} + q f_3 g_{12} \\ &+ f_{12}g_3 - f_{13}g_2 + q^2 f_{23}g_1, \\ (f\cdot g)_{124} &= f_{124}g' + g_{124}f' + f_1 g_{24} - q f_2 g_{14} + q f_4 g_{12} \\ &+ f_{12}g_4 - q f_{14}g_2 - q\lambda f_{23}g_2 + q f_{24}g_1, \\ (f\cdot g)_{134} &= f_{134}g' + g_{134}f' + f_1 g_{34} + q f_3 g_{14} - q\lambda f_3 g_{23} + q f_4 g_{13} \\ &+ f_{13}g_4 - q f_{14}g_3 + q f_{34}g_1, \\ (f\cdot g)_{234} &= f_{234}g' + g_{234}f' + f_2 g_{34} - f_3 g_{24} + q^2 f_4 g_{23} \\ &+ f_{23}g_4 - q f_{24}g_3 + q f_{34}g_2,\end{aligned} \tag{2.180}$$

$$\begin{aligned}(f\cdot g)_{1234} &= f_{1234}g' + g_{1234}f' + f_1 g_{234} - q f_2 g_{134} + q f_3 g_{124} \\ &- q^2 f_4 g_{123} + f_{12}g_{34} - f_{13}g_{24} + q^2 f_{14}g_{23} + q^2 f_{23}g_{14} \\ &- q^2\lambda f_{23}g_{23} - q^2 f_{24}g_{13} + q^2 f_{34}g_{12} \\ &+ f_{123}g_4 - q f_{124}g_3 + q f_{134}g_2 - q^2 f_{234}g_1.\end{aligned} \tag{2.181}$$

Betrachten wir nun die zur Bestimmung der Operatordarstellungen notwendigen Relationen der Symmetriegeneratoren mit den antisymmetrischen Koordinaten $\theta^i$. Da aber die antisymmetrisierten Koordinaten mit den Generatoren der $U_q(so(4))$[4] genauso vertauschen wie die symmetrisierten Koordinaten, gilt insbesondere

$$\begin{aligned}L_1^+\theta^1 &= q\theta^1 L_1^+ - q^{-1}\theta^2, \\ L_1^+\theta^2 &= q^{-1}\theta^2 L_1^+, \\ L_1^+\theta^3 &= q\theta^3 L_1^+ + q^{-1}\theta^4, \\ L_1^+\theta^4 &= q^{-1}\theta^4 L_1^+,\end{aligned} \tag{2.182}$$

$$\begin{aligned}L_2^+\theta^1 &= q\theta^1 L_2^+ - q^{-1}\theta^3, \\ L_2^+\theta^2 &= q\theta^2 L_2^+ + q^{-1}\theta^4, \\ L_2^+\theta^3 &= q^{-1}\theta^3 L_2^+,\end{aligned} \tag{2.183}$$

[4] zur Definition der Algebra $U_q(so(4))$ siehe Anhang A

$$\begin{aligned} L_2^+\theta^4 &= q^{-1}\theta^4 L_2^+, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1^-\theta^1 &= q\theta^1 L_1^-, \\ L_1^-\theta^2 &= q^{-1}\theta^2 L_1^- - q\theta^1, \\ L_1^-\theta^3 &= q\theta^3 L_1^-, \\ L_1^-\theta^4 &= q^{-1}\theta^4 L_1^- + q\theta^3, \end{aligned} \tag{2.184}$$

$$\begin{aligned} L_2^-\theta^1 &= q\theta^1 L_2^-, \\ L_2^-\theta^2 &= q\theta^2 L_2^-, \\ L_2^-\theta^3 &= q^{-1}\theta^3 L_2^- - q\theta^1, \\ L_2^-\theta^4 &= q^{-1}\theta^4 L_2^- + q\theta^2, \end{aligned} \tag{2.185}$$

$$\begin{aligned} K_1\theta^1 &= q^{-1}\theta^1 K_1, \\ K_1\theta^2 &= q\theta^2 K_1, \\ K_1\theta^3 &= q^{-1}\theta^3 K_1, \\ K_1\theta^4 &= q\theta^4 K_1, \end{aligned} \tag{2.186}$$

$$\begin{aligned} K_2\theta^1 &= q^{-1}\theta^1 K_2, \\ K_2\theta^2 &= q^{-1}\theta^2 K_2, \\ K_2\theta^3 &= q\theta^3 K_2, \\ K_2\theta^4 &= q\theta^4 K_2. \end{aligned} \tag{2.187}$$

Wie zuvor in den niedrigdimensionaleren Räumen berechnen wir daraus die Linksdarstellungen mit den Resultaten

$$\begin{aligned} & L_1^+ \triangleright f(\theta^1,\theta^2,\theta^3,\theta^4) \\ = \;& -q^{-1}f_1\theta^2 + q^{-1}f_3\theta^4 \\ + \;& f_{13}\theta^1\theta^4 - q^{-1}f_{13}\theta^2\theta^3 \\ + \;& (q^{-2}f_{23} - q^{-1}f_{14})\theta^2\theta^4 \\ + \;& q^{-1}f_{123}\theta^1\theta^2\theta^4 - q^{-1}f_{134}\theta^2\theta^3\theta^4, \end{aligned} \tag{2.188}$$

$$\begin{aligned} & L_2^+ \triangleright f(\theta^1,\theta^2,\theta^3,\theta^4) \\ = \;& -q^{-1}f_1\theta^3 + q^{-1}f_2\theta^4 \\ + \;& q^{-2}f_{12}\theta^1\theta^4 + q^{1}f_{12}\theta^2\theta^3 \\ - \;& (q^{-1}f_{14} + f_{23})\theta^3\theta^4 \end{aligned} \tag{2.189}$$

$$
\begin{aligned}
- &\quad q^{-1} f_{123}\theta^1\theta^3\theta^4 + q^{-1} f_{124}\theta^2\theta^3\theta^4,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad L_1^- \triangleright f(\theta^1,\theta^2,\theta^3,\theta^4) \qquad (2.190)\\
= &\quad -q f_2\theta^1 + q f_4\theta^3\\
- &\quad q f_{24}\theta^1\theta^4 + f_{24}\theta^2\theta^3\\
+ &\quad q(q f_{14} - f_{23})\theta^1\theta^3\\
+ &\quad q f_{124}\theta^1\theta^2\theta^3 - q f_{234}\theta^1\theta^3\theta^4,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad L_2^- \triangleright f(\theta^1,\theta^2,\theta^3,\theta^4) \qquad (2.191)\\
= &\quad -q f_3\theta^1 + q f_4\theta^2\\
- &\quad q^{-1} f_{34}\theta^1\theta^4 - f_{34}\theta^2\theta^3\\
+ &\quad q^2(f_{14} + q f_{23})\theta^1\theta^2\\
- &\quad q f_{134}\theta^1\theta^2\theta^3 + q f_{234}\theta^1\theta^2\theta^4
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
K^1 \triangleright f(\theta^1,\theta^2,\theta^3,\theta^4) &= f(q^{-1}\theta^1, q\theta^2, q^{-1}\theta^3, q\theta^4), \qquad (2.192)\\
K^2 \triangleright f(\theta^1,\theta^2,\theta^3,\theta^4) &= f(q^{-1}\theta^1, q^{-1}\theta^2, q\theta^3, q\theta^4).
\end{aligned}
$$

Für die Rechtsdarstellungen kann man die Zuordnungen

$$
\begin{aligned}
&f(\theta^1,\theta^2,\theta^3,\theta^4) \triangleleft L_i^\pm \qquad (2.193)\\
\stackrel{i\leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow} &\quad q^{\mp 3} L_{i'}^\mp \triangleright f(\theta^1,\theta^2,\theta^3,\theta^4)
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
f(\theta^1,\theta^2,\theta^3,\theta^4) \triangleleft K^1 &= f(q\theta^1, q^{-1}\theta^2, q\theta^3, q^{-1}\theta^4), \qquad (2.194)\\
f(\theta^1,\theta^2,\theta^3,\theta^4) \triangleleft K^2 &= f(q\theta^1, q\theta^2, q^{-1}\theta^3, q^{-1}\theta^4)
\end{aligned}
$$

verwenden, wobei die Bedeutung des Symbols $\stackrel{i\leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow}$ gegeben ist durch

$$
\begin{aligned}
\theta^{i_1}\cdots\theta^{i_n} &\stackrel{i\leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow} \theta^{\bar{i_n}}\cdots\theta^{\bar{i_1}}, \qquad (2.195)\\
f_{i_1}\cdots f_{i_n} &\stackrel{i\leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow} f_{\bar{i_1}}\cdots f_{\bar{i_n}},\\
f' &\stackrel{i\leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow} f',
\end{aligned}
$$

und der konjugierte Index gegeben ist durch $\bar{A} = \overline{(1,2,3,4)} = (4,3,2,1)$ und $i' \equiv 5 - i$ gilt.

Für die Darstellungen der Ableitungen benötigen wir natürlich wieder die entsprechenden Leibnizregeln, gegeben durch die Formel

$$\begin{aligned} \partial_\theta^i \theta^j &= g^{ij} - q^{-1}(\hat{R}^{-1})^{kl}_{ij}\theta^k\partial_\theta^l, && (2.196)\\ \hat{\partial}_\theta^i \theta^j &= g^{ij} - q(\hat{R})^{kl}_{ij}\theta^k\hat{\partial}_\theta^l && (2.197)\end{aligned}$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \partial_\theta^1\theta^1 &= -q^{-2}\theta^1\partial_\theta^1, && (2.198)\\ \partial_\theta^1\theta^2 &= -q^{-1}\theta^2\partial_\theta^1,\\ \partial_\theta^1\theta^3 &= -q^{-1}\theta^3\partial_\theta^1,\\ \partial_\theta^1\theta^4 &= q^{-1} - \theta^4\partial_\theta^1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\theta^2\theta^1 &= -q^{-1}\theta^1\partial_\theta^2 + q^{-1}\lambda\theta^2\partial_\theta^1, && (2.199)\\ \partial_\theta^2\theta^2 &= -q^{-2}\theta^2\partial_\theta^2,\\ \partial_\theta^2\theta^3 &= 1 - \theta^3\partial_\theta^2 - \lambda\theta^4\partial_\theta^1,\\ \partial_\theta^2\theta^4 &= -q^{-1}\theta^4\partial_\theta^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\theta^3\theta^1 &= -q^{-1}\theta^1\partial_\theta^3 + q^{-1}\lambda\theta^3\partial_\theta^1, && (2.200)\\ \partial_\theta^3\theta^2 &= 1 - \theta^2\partial_\theta^3 - \lambda\theta^4\partial_\theta^1,\\ \partial_\theta^3\theta^3 &= -q^{-2}\theta^3\partial_\theta^3,\\ \partial_\theta^3\theta^4 &= -q^{-1}\theta^4\partial_\theta^3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\theta^4\theta^1 &= q - \theta^1\partial_\theta^4 - \lambda(\theta^2\partial_\theta^3 + \theta^3\partial_\theta^2 + \lambda\theta^4\partial_\theta^1),\\ \partial_\theta^4\theta^2 &= -q^{-1}\theta^2\partial_\theta^4 + q^{-1}\lambda\theta^4\partial_\theta^2,\\ \partial_\theta^4\theta^3 &= -q^{-1}\theta^3\partial_\theta^4 + q^{-1}\lambda\theta^4\partial_\theta^3,\\ \partial_\theta^4\theta^4 &= -q^{-2}\theta^4\partial_\theta^4,\end{aligned}$$

wobei wir mit den Substitutionen

$$\partial_\theta^i \to \hat{\partial}_\theta^{i'} = q^2(\bar{\partial}_\theta)^{i'}, \quad \theta^i \to \bar{\theta}^{i'}, \quad q \to q^{-1} \qquad (2.201)$$

die entsprechenden Relationen des konjugierten Kalküls erhalten. Damit folgt dann für die Darstellungen der Ableitungen nach analogem Vorgehen wie im letzten Abschnitt

$$\partial_\theta^1 \triangleright f(\theta^4,\theta^3,\theta^2,\theta^1) \qquad (2.202)$$

$$\begin{aligned}
&= q^{-1}f_4 + q^{-1}f_{41}\theta^1 + q^{-1}f_{42}\theta^2 + q^{-1}f_{43}\theta^3 \\
&+ q^{-1}f_{421}\theta^2\theta^1 + q^{-1}f_{432}\theta^3\theta^2 + q^{-1}f_{431}\theta^3\theta^1 \\
&+ q^{-1}f_{4321}\theta^3\theta^2\theta^1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\partial_\theta^2 \triangleright f(\theta^4, \theta^3, \theta^2, \theta^1) \\
&= f_3 + f_{31}\theta^1 + f_{32}\theta^2 - q^{-1}f_{43}\theta^4 \\
&+ f_{321}\theta^2\theta^1 - q^{-1}f_{431}\theta^4\theta^1 - q^{-1}f_{432}\theta^4\theta^2 \\
&- q^{-1}f_{4321}\theta^4\theta^2\theta^1,
\end{aligned} \tag{2.203}$$

$$\begin{aligned}
&\partial_\theta^3 \triangleright f(\theta^4, \theta^3, \theta^2, \theta^1) \\
&= f_2 + f_{21}\theta^1 - q^{-2}f_{32}\theta^3 - q^{-1}f_{42}\theta^4 \\
&- q^{-2}f_{321}\theta^3\theta^1 - q^{-1}f_{421}\theta^4\theta^1 + q^{-3}f_{432}\theta^4\theta^3 \\
&+ q^{-3}f_{4321}\theta^4\theta^3\theta^1,
\end{aligned} \tag{2.204}$$

$$\begin{aligned}
&\partial_\theta^4 \triangleright f(\theta^4, \theta^3, \theta^2, \theta^1) \\
&= qf_1 - f_{21}\theta^2 - f_{31}\theta^3 - q^{-1}(f_{41} - \lambda f_{32})\theta^4 \\
&+ q^{-1}f_{321}\theta^3\theta^2 + q^{-2}f_{421}\theta^4\theta^2 \\
&+ q^{-2}f_{431}\theta^4\theta^3 + q^{-1}\lambda f_{321}\theta^4\theta^1 + \\
&- q^{-3}f_{4321}\theta^4\theta^3\theta^2.
\end{aligned} \tag{2.205}$$

Die Übergangsregeln

$$\begin{aligned}
&\partial_\theta^i \triangleright f(\theta^4, \theta^3, \theta^2, \theta^1) \\
\overset{\substack{i \to i' \\ q \to 1/q}}{\longleftrightarrow}\ &\hat{\partial}_\theta^{i'} \,\bar{\triangleright}\, f(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2, \bar{\theta}^3, \bar{\theta}^4),
\end{aligned} \tag{2.206}$$

$$\begin{aligned}
&f(\bar{\theta}^4, \bar{\theta}^3, \bar{\theta}^2, \bar{\theta}^1) \,\bar{\triangleleft}\, \partial_\theta^i \\
\overset{\substack{i \to i' \\ q \to 1/q}}{\longleftrightarrow}\ &f(\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4) \triangleleft \hat{\partial}_\theta^{i'}
\end{aligned} \tag{2.207}$$

und

$$\begin{aligned}
&f(\bar{\theta}^4, \bar{\theta}^3, \bar{\theta}^2, \bar{\theta}^1) \,\bar{\triangleleft}\, \partial_\theta^{i'} \\
\overset{i \leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow}\ &\partial_\theta^i \triangleright f(\theta^4, \theta^3, \theta^2, \theta^1),
\end{aligned} \tag{2.208}$$

$$\begin{aligned}
&f(\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4) \triangleleft \partial_\theta^{i'} \\
\overset{i \leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow}\ &\hat{\partial}_\theta^i \,\bar{\triangleright}\, f(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2, \bar{\theta}^3, \bar{\theta}^4),
\end{aligned} \tag{2.209}$$

wobei $\overset{i \to i'}{\underset{}{\overset{q \to 1/q}{\longleftrightarrow}}}$ für

$$
\begin{aligned}
\theta^{i_1} \cdots \theta^{i_n} &\overset{i \leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow} \theta^{\bar{i_1}} \cdots \theta^{\bar{i_n}}, \\
f_{i_1} \cdots f_{i_n} &\overset{i \leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow} f_{\bar{i_1}} \cdots f_{\bar{i_n}}, \\
f' &\overset{i \leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow} f', \\
q &\overset{i \leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow} q^{-1}
\end{aligned}
\tag{2.210}
$$

steht, erlauben uns, die entsprechenden Rechts- bzw. konjugerten Versionen zu berechnen.

Wie bereits hinreichend bekannt, liegen den Leibnizregeln in 2.196 zwei Hopfstrukturen zugrunde. Für beliebige vierdimensionale Quantenräume lauten diese allgemein

$$
\begin{aligned}
\Delta(h^1) &= h^1 \otimes 1 + \Lambda(h) K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} \otimes h^1, \\
\Delta(h^2) &= h^2 \otimes 1 + \Lambda(h) K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} \otimes h^2 \\
&+ q\lambda\Lambda(h) K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_1^+ \otimes h^1, \\
\Delta(h^3) &= h^3 \otimes 1 + \Lambda(h) K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{-\frac{1}{2}} \otimes h^3 \\
&+ q\lambda\Lambda(h) K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_2^+ \otimes h^1, \\
\Delta(h^4) &= h^4 \otimes 1 + \Lambda(h) K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{-\frac{1}{2}} \otimes h^4 \\
&- q^2\lambda^2\Lambda(h) K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_1^+ L_2^+ \otimes h^1 \\
&- q\lambda\Lambda(h) K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_2^+ \otimes h^2 \\
&- q\lambda\Lambda(h) K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{-\frac{1}{2}} L_1^+ \otimes h^3,
\end{aligned}
\tag{2.211}
$$

$$
\begin{aligned}
S(h^1) &= -\Lambda^{-1}(h) K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{-\frac{1}{2}} h^1, \\
S(h^2) &= -\Lambda^{-1}(h) K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{-\frac{1}{2}} (h^2 - q^2\lambda L_1^+ h^1), \\
S(h^3) &= -\Lambda^{-1}(h) K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} (h^3 - q^2\lambda L_2^+ h^1), \\
S(h^4) &= -\Lambda^{-1}(h) K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} (h^4 + q^2\lambda(L_1^+ h^3 + L_2^+ h^2)) \\
&- q^4\lambda^2\Lambda^{-1}(h) K_1^{\frac{1}{2}} K_2^{\frac{1}{2}} L_1^+ L_2^+ h^1,
\end{aligned}
\tag{2.212}
$$

$$
\varepsilon(h^1) = \varepsilon(h^2) = \varepsilon(h^3) = \varepsilon(h^4) = 0 \tag{2.213}
$$

und in der konjugierten Version

$$
\bar{\Delta}(h^1) = h^1 \otimes 1 + \Lambda^{-1}(h) K_1^{-\frac{1}{2}} K_2^{-\frac{1}{2}} \otimes h^1 \tag{2.214}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad q^{-2}\lambda^2\Lambda^{-1}(h)K_1^{\frac{1}{2}}K_2^{\frac{1}{2}}L_1^- L_2^- \otimes h^4 \\
&- \quad q^{-1}\lambda\Lambda^{-1}(h)K_1^{\frac{1}{2}}K_2^{-\frac{1}{2}}L_1^- \otimes h^2 \\
&- \quad q^{-1}\lambda\Lambda^{-1}(h)K_1^{-\frac{1}{2}}K_2^{\frac{1}{2}}L_2^- \otimes h^3, \\
\bar{\Delta}(h^2) &= h^2 \otimes 1 + \Lambda^{-1}(h)K_1^{\frac{1}{2}}K_2^{-\frac{1}{2}} \otimes h^2 \\
&- \quad q^{-1}\lambda\Lambda^{-1}(h)K_1^{\frac{1}{2}}K_2^{\frac{1}{2}}L_2^- \otimes h^4, \\
\bar{\Delta}(h^3) &= h^3 \otimes 1 + \Lambda^{-1}(h)K_1^{-\frac{1}{2}}K_2^{\frac{1}{2}} \otimes h^3 \\
&+ \quad q^{-1}\lambda\Lambda^{-1}(h)K_1^{\frac{1}{2}}K_2^{\frac{1}{2}}L_1^- \otimes h^4, \\
\bar{\Delta}(h^4) &= h^4 \otimes 1 + \Lambda^{-1}(h)K_1^{\frac{1}{2}}K_2^{\frac{1}{2}} \otimes h^4,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{S}(h^1) &= -\Lambda(h)K_1^{\frac{1}{2}}K_2^{\frac{1}{2}}(h^1 + q^{-2}\lambda(L_1^- h^2 + L_2^- h^3)) \\
&+ \quad q^{-4}\lambda^2\Lambda(h)K_1^{\frac{1}{2}}K_2^{\frac{1}{2}}L_1^- L_2^- h^4, \\
\bar{S}(h^2) &= -\Lambda(h)K_1^{-\frac{1}{2}}K_2^{\frac{1}{2}}(h^2 - q^{-2}\lambda L_2^- h^4), \\
\bar{S}(h^3) &= -\Lambda(h)K_1^{-\frac{1}{2}}K_2^{\frac{1}{2}}(h^3 - q^{-2}\lambda L_1^- h^4), \\
\bar{S}(h^4) &= -\Lambda(h)K_1^{-\frac{1}{2}}K_2^{-\frac{1}{2}}h^4,
\end{aligned} \tag{2.215}
$$

$$
\bar{\varepsilon}(h^1) = \bar{\varepsilon}(h^2) = \bar{\varepsilon}(h^3) = \bar{\varepsilon}(h^4) = 0, \tag{2.216}
$$

wobei für die Ausprägung der Variablen $h$ gelten darf

$$
h^i \in \{\partial_x^i, \partial_\theta^i, X^i, \theta^i, \xi^i, \eta^i\}. \tag{2.217}
$$

Um mithilfe dieser Hopfstrukturen konsistente Vertauschungsrelationen generieren zu können muss für die Skalierer gelten

$$
\Lambda(\partial_x^i) = \Lambda^{\frac{1}{2}}, \quad \Lambda(X^i) = \Lambda^{-\frac{1}{2}}, \quad \Lambda(\eta^i) = \Lambda^{\frac{1}{2}} \tag{2.218}
$$

und

$$
\Lambda(\partial_\theta^i) = \tilde{\Lambda}^{-1}, \quad \Lambda(\theta^i) = \tilde{\Lambda}, \quad \Lambda(\xi^i) = \tilde{\Lambda}, \tag{2.219}
$$

wobei die Operatoren $\Lambda$ und $\tilde{\Lambda}$ die Relationen

$$
\begin{aligned}
\Lambda X^i &= q^2 X^i \Lambda, \\
\Lambda \partial_x^i &= q^{-2}\partial_x^i \Lambda, \\
\Lambda \xi^i &= q^2 \xi^i \Lambda, \\
\Lambda \eta^i &= q^2 \eta^i \Lambda, \\
\Lambda \theta^i &= q^2 \theta^i \Lambda, \\
\Lambda \partial_\theta^i &= q^{-2}\partial_\theta^i \Lambda
\end{aligned} \tag{2.220}
$$

als auch

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}\theta^i &= -q\theta^i\tilde{\Lambda}, \\
\tilde{\Lambda}\partial_\theta^i &= -q^{-1}\partial_\theta^i\tilde{\Lambda}, \\
\tilde{\Lambda}\eta^i &= q\eta^i\tilde{\Lambda}, \\
\tilde{\Lambda}\xi^i &= -q\xi^i\tilde{\Lambda}, \\
\tilde{\Lambda}X^i &= q^{-1}X^i\tilde{\Lambda}, \\
\tilde{\Lambda}\partial_x^i &= q\partial_x^i\tilde{\Lambda},
\end{aligned}
\tag{2.221}
$$

erfüllen.

Kommen wir nun wieder zu den Elementen einer Superanalysis über dem von den $\theta^i$ erzeugten Quantenraum. Die Integrale definieren wir über die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
&\int f(\theta^4,\theta^3,\theta^2,\theta^1)\ d_L^4\theta \\
\equiv\ &(\partial_\theta)_1(\partial_\theta)_2(\partial_\theta)_3(\partial_\theta)_4 \triangleright f(\theta^4,\theta^3,\theta^2,\theta^1) = f_{1234},
\end{aligned}
\tag{2.222}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int d_R^4\theta\, f(\theta^1,\theta^2,\theta^3,\theta^4) \\
\equiv\ &f(\theta^1,\theta^2,\theta^3,\theta^4) \triangleleft (\hat{\partial}_\theta)_4(\hat{\partial}_\theta)_3(\hat{\partial}_\theta)_3(\hat{\partial}_\theta)_2(\hat{\partial}_\theta)_1 = f_{4321}.
\end{aligned}
\tag{2.223}
$$

Mit Hilfe der in Gl.(2.202) explizit angegebenen Wirkungen der Ableitungen auf die Koordinaten verifiziert man wieder leicht

$$
\begin{aligned}
&\int \theta^4\theta^3\theta^2\theta^1\ d_L^4\theta = 1, \\
&\int \theta^i\ d_L^4\theta = 0, \quad i = 1,\dots,4,
\end{aligned}
\tag{2.224}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int \theta^4\theta^3\ d_L^4\theta = \int \theta^4\theta^2\ d_L^4\theta = \int \theta^4\theta^1\ d_L^4\theta \\
= &\int \theta^3\theta^2\ d_L^4\theta = \int \theta^3\theta^1\ d_L^4\theta = \int \theta^2\theta^1\ d_L^4\theta = 0,
\end{aligned}
\tag{2.225}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int \theta^4\theta^3\theta^2\ d_L^4\theta = \int \theta^4\theta^3\theta^1\ d_L^4\theta \\
= &\int \theta^4\theta^2\theta^1\ d_L^4\theta = \int \theta^3\theta^2\theta^1\ d_L^4\theta = 0
\end{aligned}
\tag{2.226}
$$

und

$$
\int d_R^4\theta\ \theta^1\theta^2\theta^3\theta^4 = 1
\tag{2.227}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int d^4_R\theta\, \theta^i = 0, \quad i = 1, \ldots, 4 \\
&\int d^4_R\theta\, \theta^1\theta^2 = \int d^4_R\theta\, \theta^1\theta^3 = \int d^4_R\theta\, \theta^1\theta^4 && (2.228) \\
= &\int d^4_R\theta\, \theta^2\theta^3 = \int d^4_R\theta\, \theta^2\theta^4 = \int d^4_R\theta\, \theta^3\theta^4 = 0, && (2.229) \\
&\int d^4_R\theta\, \theta^1\theta^2\theta^3 = \int d^4_R\theta\, \theta^1\theta^2\theta^4 \\
= &\int d^4_R\theta\, \theta^1\theta^3\theta^4 = \int d^4_R\theta\, \theta^2\theta^3\theta^4 = 0.
\end{aligned}
$$

Daraus ersehen wir die korrekte Normierung des Integrals. Ebenso bestätigt man

$$
\begin{aligned}
\int (\partial_\theta)_i \triangleright f(\theta^4, \theta^3, \theta^2, \theta^1) d^4_L\theta &= 0, \quad i = 1, \ldots, 4\,, && (2.230) \\
\int d^4_R\theta f(\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4) \triangleleft (\hat{\partial}_\theta)_i &= 0,
\end{aligned}
$$

was bekanntlich die Translationsinvarianz garantiert. Um zu den konjugierten Versionen der Integrale zu gelangen wendet man einfach die Transformationen

$$
\begin{aligned}
d^4_L\theta \leftrightarrow d^4_{\bar{L}}\theta, &\qquad d^4_R\theta \leftrightarrow d^4_{\bar{R}}\theta, \\
f(\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4) \;\leftrightarrow &\;\; f(\theta^4, \theta^3, \theta^2, \theta^1), \\
\theta^i \leftrightarrow \theta^{i'}, &\qquad (\partial_\theta)_i \leftrightarrow (\hat{\partial}_\theta)_{i'}, \quad i' \equiv i - 5, \\
\triangleright \leftrightarrow \bar{\triangleright}, &\qquad \triangleleft \leftrightarrow \bar{\triangleleft}
\end{aligned}
$$

auf alle oben angegebenen Identitäten an.

Um das Exponential zu bestimmen, müssen wir in der Ableitungs- und Koordinatenalgebra zwei zueinander duale Basen finden. Diese lesen wir aus den Paarungen

$$
\begin{aligned}
&\langle (\partial_\theta)_i, \theta^i \rangle_{L,\bar{R}} = 1, \quad i = 1 \ldots, 4 && (2.231) \\
&\langle (\partial_\theta)_1(\partial_\theta)_2, \theta^2\theta^1 \rangle_{L,\bar{R}} = \langle (\partial_\theta)_1(\partial_\theta)_3, \theta^3\theta^1 \rangle_{L,\bar{R}} \\
= &\langle (\partial_\theta)_1(\partial_\theta)_4, \theta^4\theta^1 \rangle_{L,\bar{R}} = \langle (\partial_\theta)_2(\partial_\theta)_3, \theta^3\theta^2 \rangle_{L,\bar{R}} \\
= &\langle (\partial_\theta)_2(\partial_\theta)_4, \theta^4\theta^2 \rangle_{L,\bar{R}} = \langle (\partial_\theta)_3(\partial_\theta)_4, \theta^4\theta^3 \rangle_{L,\bar{R}} \\
= &\langle (\partial_\theta)_1(\partial_\theta)_2(\partial_\theta)_3, \theta^3\theta^2\theta^1 \rangle_{L,\bar{R}} = \langle (\partial_\theta)_1(\partial_\theta)_2(\partial_\theta)_4, \theta^4\theta^2\theta^1 \rangle_{L,\bar{R}} \\
= &\langle (\partial_\theta)_1(\partial_\theta)_3(\partial_\theta)_4, \theta^4\theta^3\theta^1 \rangle_{L,\bar{R}} = \langle (\partial_\theta)_2(\partial_\theta)_3(\partial_\theta)_4, \theta^4\theta^3\theta^2 \rangle_{L,\bar{R}} \\
= &\langle (\partial_\theta)_1(\partial_\theta)_2(\partial_\theta)_3(\partial_\theta)_4, \theta^4\theta^3\theta^2\theta^1 \rangle_{L,\bar{R}} = 1
\end{aligned}
$$

ab. Für die explizite Form des Exponentials folgt dann sofort

$$\begin{aligned}
\exp(\theta_{\bar{R}} \mid (\partial_\theta)_L) &= 1 \otimes 1 + \theta^1 \otimes (\partial_\theta)_1 + \theta^2 \otimes (\partial_\theta)_2 \\
&+ \theta^3 \otimes (\partial_\theta)_3 + \theta^4 \otimes (\partial_\theta)_4 \\
&+ \theta^4\theta^3 \otimes (\partial_\theta)_3(\partial_\theta)_4 + \theta^4\theta^2 \otimes (\partial_\theta)_2(\partial_\theta)_4 \\
&+ \theta^4\theta^1 \otimes (\partial_\theta)_1(\partial_\theta)_4 + \theta^3\theta^1 \otimes (\partial_\theta)_1(\partial_\theta)_3 \\
&+ \theta^3\theta^1 \otimes (\partial_\theta)_1(\partial_\theta)_3 + \theta^2\theta^1 \otimes (\partial_\theta)_1(\partial_\theta)_2 \\
&+ \theta^4\theta^3\theta^2 \otimes (\partial_\theta)_2(\partial_\theta)_3(\partial_\theta)_4 + \theta^4\theta^3\theta^1 \otimes (\partial_\theta)_1(\partial_\theta)_3(\partial_\theta)_4 \\
&+ \theta^4\theta^2\theta^1 \otimes (\partial_\theta)_1(\partial_\theta)_2(\partial_\theta)_4 + \theta^3\theta^2\theta^1 \otimes (\partial_\theta)_1(\partial_\theta)_2(\partial_\theta)_3 \\
&+ \theta^4\theta^3\theta^2\theta^1 \otimes (\partial_\theta)_1(\partial_\theta)_2(\partial_\theta)_3(\partial_\theta)_4,
\end{aligned} \tag{2.232}$$

welches sich abermals als äquivalent zur undeformierten Version erweist. Die hier nicht notierten Versionen der anderen dualen Paarungen und der Exponentiale findet man mittels

$$\begin{aligned}
\langle \underline{\hat{\partial}}_\theta, \underline{\theta} \rangle_{\bar{L},R} &\overset{\substack{i \leftrightarrow i' \\ q \leftrightarrow 1/q}}{\longleftrightarrow} \langle \underline{\partial}_\theta, \theta \rangle_{L,\bar{R}} \,, \\
\langle \underline{\theta}, \underline{\hat{\partial}}_\theta \rangle_{\bar{L},R} &\overset{\substack{i \leftrightarrow i' \\ q \leftrightarrow 1/q}}{\longleftrightarrow} \langle \underline{\theta}, \underline{\partial}_\theta \rangle_{L,\bar{R}} \,,
\end{aligned} \tag{2.233}$$

$$\begin{aligned}
\langle \underline{\hat{\partial}}_\theta, \underline{\theta} \rangle_{\bar{L},R} &\overset{i \leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow} \langle \underline{\theta}, \underline{\hat{\partial}}_\theta \rangle_{\bar{L},R} \,, \\
\langle \underline{\partial}_\theta, \underline{\theta} \rangle_{L,\bar{R}} &\overset{i \leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow} \langle \underline{\theta}, \underline{\partial}_\theta \rangle_{L,\bar{R}} \,,
\end{aligned} \tag{2.234}$$

und

$$\begin{aligned}
\exp(\theta_R \mid (\hat{\partial}_\theta)_{\bar{L}}) &\overset{\substack{i \leftrightarrow i' \\ q \leftrightarrow 1/q}}{\longleftrightarrow} \exp(\theta_{\bar{R}} \mid (\partial_\theta)_L) \,, \\
\exp((\hat{\partial}_\theta)_R \mid \theta_{\bar{L}}) &\overset{\substack{i \leftrightarrow i' \\ q \leftrightarrow 1/q}}{\longleftrightarrow} \exp((\partial_\theta)_{\bar{R}} \mid \theta_L) \,,
\end{aligned} \tag{2.235}$$

$$\begin{aligned}
\exp(\theta_R \mid (\hat{\partial}_\theta)_{\bar{L}}) &\overset{i \leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow} \exp((\hat{\partial}_\theta)_{\bar{R}} \mid \theta_{\bar{L}}) \,, \\
\exp(\theta_R \mid (\partial_\theta)_L) &\overset{i \leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow} \exp((\partial_\theta)_{\bar{R}} \mid \theta_L),
\end{aligned} \tag{2.236}$$

wobei $\overset{\substack{i \leftrightarrow i' \\ q \leftrightarrow 1/q}}{\longleftrightarrow}$ für die Transformation

$$\begin{aligned}
&\theta^i \leftrightarrow \theta^{i'}, \quad \theta_i \leftrightarrow \theta_{i'}, \quad q \leftrightarrow q^{-1}, \\
&(\partial_\theta)^i \leftrightarrow (\hat{\partial}_\theta)^{i'}, \quad (\partial_\theta)_i \leftrightarrow (\hat{\partial}_\theta)_{i'}
\end{aligned} \tag{2.237}$$

steht, und $\overset{i\leftrightarrow i'}{\longleftrightarrow}$ eine der zwei folgenden Substitutionen bezeichnet

$$\begin{aligned} \theta^i \leftrightarrow \hat{\partial}^i, \quad \hat{\partial}_i \leftrightarrow \theta_i, \\ \theta^i \leftrightarrow \partial^i, \quad \partial_i \leftrightarrow \theta_i. \end{aligned} \tag{2.238}$$

Wie von uns bereits erläutert, ergeben sich die Grassmantranslationen in der q-deformierten Version aus den Koprodukten, für welche wir im Fall der Monome finden

$$\begin{aligned} \Delta_L(\theta^i) &= \theta^i_l + \theta^j_r, \quad i = 1, ..., 4, \\ \Delta_L(\theta^j\theta^k) &= \theta^j_l\theta^k_l + \theta^j_l\theta^k_r - q\theta^k_l\theta^j_r + \theta^j_r\theta^k_r\ , \\ \Delta_L(\theta^1\theta^4) &= \theta^1_l\theta^4_l + \theta^1_l\theta^4_r - q^2\theta^4_l\theta^1_r + \theta^1_r\theta^4_r\ , \\ \Delta_L(\theta^2\theta^3) &= \theta^2_l\theta^3_l + \theta^2_l\theta^3_r - q^2\theta^3_l\theta^2_r + \theta^2_r\theta^3_r \\ &\quad - q^2\lambda\theta^4_l\theta^1_r\ , \end{aligned} \tag{2.239}$$

$$\begin{aligned} \Delta_L(\theta^1\theta^2\theta^3) &= \theta^1_l\theta^2_l\theta^3_l + \theta^1_l\theta^2_l\theta^3_r - q^2\theta^1_l\theta^3_l\theta^2_r \\ &\quad + q^2\theta^2_l\theta^3_l\theta^1_r + \theta^1_l\theta^2_r\theta^3_r - q\theta^2_l\theta^1_r\theta^3_r \\ &\quad + q^3\theta^3_l\theta^1_r\theta^2_r + \theta^1_r\theta^2_r\theta^3_r - q^2\lambda\theta^1_l\theta^4_l\theta^1_r\ , \\ \Delta_L(\theta^1\theta^l\theta^4) &= \theta^1_l\theta^l_l\theta^4_l + \theta^1_l\theta^l_l\theta^4_r - q\theta^1_l\theta^4_l\theta^l_r \\ &\quad + q^3\theta^l_l\theta^4_l\theta^1_r - q\theta^l_l\theta^1_r\theta^4_r + q^3\theta^4_l\theta^1_r\theta^l_r \\ &\quad + \theta^1_l\theta^l_r\theta^4_r + \theta^1_r\theta^l_r\theta^4_r\ , \\ \Delta_L(\theta^2\theta^3\theta^4) &= \theta^2_l\theta^3_l\theta^4_l + \theta^2_l\theta^3_l\theta^4_r - q^2\theta^3_l\theta^2_r\theta^4_r \\ &\quad + q^2\theta^4_l\theta^2_r\theta^3_r + \theta^2_l\theta^3_r\theta^4_r - q\theta^2_l\theta^4_l\theta^3_r \\ &\quad + q^3\theta^3_l\theta^4_l\theta^2_r + \theta^2_r\theta^3_r\theta^4_r - q^2\lambda\theta^4_l\theta^1_r\theta^4_r\ , \end{aligned} \tag{2.240}$$

$$\begin{aligned} \Delta_L(\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4) &= \theta^1_l\theta^2_l\theta^3_l\theta^4_l + \theta^1_l\theta^2_l\theta^3_l\theta^4_r - q\theta^1_l\theta^2_l\theta^4_l\theta^3_r \\ &\quad + q^3\theta^1_l\theta^3_l\theta^4_l\theta^2_r - q^4\theta^2_l\theta^3_l\theta^4_l\theta^1_r + \theta^1_l\theta^2_l\theta^3_r\theta^4_r \\ &\quad - q^2\theta^1_l\theta^3_l\theta^2_r\theta^4_r + q^2\theta^1_l\theta^4_l\theta^2_r\theta^3_r + q^2\theta^2_l\theta^3_l\theta^1_r\theta^4_r \\ &\quad - q^4\theta^2_l\theta^4_l\theta^1_r\theta^3_r + q^6\theta^3_l\theta^4_l\theta^1_r\theta^2_r + \theta^1_l\theta^2_r\theta^3_r\theta^4_r \\ &\quad - q\theta^2_l\theta^1_r\theta^3_r\theta^4_r + q^3\theta^3_l\theta^1_r\theta^2_r\theta^4_r - q^4\theta^4_l\theta^1_r\theta^2_r\theta^3_r \\ &\quad + \theta^1_r\theta^2_r\theta^3_r\theta^4_r - q^2\lambda\theta^1_l\theta^4_l\theta^1_r\theta^4_r, \end{aligned} \tag{2.241}$$

wobei

$$l = 2, 3\,; \quad (j, k) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4)\}. \tag{2.242}$$

Die Antipoden bestimmen sich jetzt zu

$$\begin{aligned}
&S_L(\theta^i) = -\theta^i, \quad a = 1, \ldots, 4, \\
&S_L(\theta^i\theta^j) = q^2\theta^i\theta^j, \\
&S_L(\theta^i\theta^j\theta^l) = -q^6\theta^i\theta^j\theta^l \\
&S_L(\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4) = q^{12}\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4.
\end{aligned} \tag{2.243}$$

Die Formeln für die anderen Arten von Hopfstrukturen folgen dann aus

$$\begin{aligned}
&\Delta_L, S_L \overset{i\leftrightarrow i'}{\underset{}{\overset{q\leftrightarrow 1/q}{\longleftrightarrow}}} \Delta_{\bar{L}}, S_{\bar{L}}, \\
&\Delta_R, S_R \overset{i\leftrightarrow i'}{\overset{q\leftrightarrow 1/q}{\longleftrightarrow}} \Delta_{\bar{R}}, S_{\bar{R}},
\end{aligned} \tag{2.244}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta_L, S_L \overset{i\leftrightarrow i'}{\overset{q\leftrightarrow 1/q}{\longleftrightarrow}} \Delta_R, S_R, \\
&\Delta_{\bar{L}}, S_{\bar{L}} \overset{i\leftrightarrow i'}{\overset{q\leftrightarrow 1/q}{\longleftrightarrow}} \Delta_{\bar{R}}, S_{\bar{R}}.
\end{aligned} \tag{2.245}$$

Diese Ergebnisse lassen sich wieder leicht auf Superzahlen verallgemeinern.

Abschliessend geben wir noch das Zopfprodukt mit einer Superzahl an. Für dieses ergibt sich als allgemeiner Ausdruck

$$\begin{aligned}
f(\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4) \,\underline{\odot}_{L/\bar{L}}\, g &= g \otimes f + \Sigma_{\underline{K}}((O_f)^{\underline{K}}_{L/\bar{L}} \triangleright g) \otimes \theta^{\underline{K}}, \\
g \,\underline{\odot}_{R/\bar{R}}\, f(\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4) &= f' \otimes g + \Sigma_{\underline{K}} g(\triangleleft (O_f)^{\underline{K}}_{L/\bar{L}} \otimes \theta^{\underline{K}}),
\end{aligned} \tag{2.246}$$

wobei die hier eingeführten Operatoren spezifiziert sind durch

$$\begin{aligned}
(O_f)^1_L &= \tilde{\Lambda} K_1^{1/2} K_2^{1/2} (f_1 + q\lambda f_2 L_1^+ + q\lambda f_3 L_2^+ \\
&\quad - q^2\lambda^2 f_4 L_1^+ L_2^+), \\
(O_f)^2_L &= \tilde{\Lambda} K_1^{-1/2} K_2^{1/2} (f_2 - q\lambda f_4 L_2^+), \\
(O_f)^3_L &= \tilde{\Lambda} K_1^{1/2} K_2^{-1/2} (f_3 - q\lambda f_4 L_1^+), \\
(O_f)^4_L &= f_4 \tilde{\Lambda} K_1^{-1/2} K_2^{-1/2},
\end{aligned} \tag{2.247}$$

$$\begin{aligned}
(O_f)^{12}_L &= \tilde{\Lambda}^2 K_2 (f_{12} - q\lambda f_{14} L_2^+ - q^2\lambda f_{23} L_2^+ \\
&\quad - q\lambda^2 f_{34} (L_2^+)^2), \\
(O_f)^{13}_L &= \tilde{\Lambda}^2 K_1 (f_{13} - q\lambda f_{14} L_1^+ + \lambda f_{23} L_1^+ \\
&\quad - q\lambda^2 f_{24} (L_1^+)^2),
\end{aligned} \tag{2.248}$$

$$\begin{aligned}
(O_f)^{14}_L &= \tilde{\Lambda}^2(f_{14} - q^2\lambda f_{24}L_1^+ + \lambda f_{34}L_2^+),\\
(O_f)^{23}_L &= \tilde{\Lambda}^2(f_{23} - q\lambda f_{24}L_1^+ + q\lambda f_{34}L_2^+),\\
(O_f)^{24}_L &= f_{24}\tilde{\Lambda}^2K_1^{-1},\\
(O_f)^{34}_L &= f_{34}\tilde{\Lambda}^2K_2^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(O_f)^{123}_L &= \tilde{\Lambda}^3K_1^{1/2}K_2^{1/2}(f_{123} - q\lambda f_{124}L_1^+ - q\lambda f_{134}L_2^+ \\
&\quad + q^2\lambda^2 f_{234}L_1^+L_2^+),\\
(O_f)^{124}_L &= \tilde{\Lambda}^3K_1^{-1/2}K_2^{1/2}(f_{124} - q\lambda f_{234}L_2^+),\\
(O_f)^{134}_L &= \tilde{\Lambda}^3K_1^{1/2}K_2^{-1/2}(f_{134} + q\lambda f_{234}L_1^+),\\
(O_f)^{234}_L &= f_{234}\tilde{\Lambda}^3K_1^{-1/2}K_2^{-1/2},
\end{aligned} \tag{2.249}$$

$$(O_f)^{1234}_L = f_{1234}\tilde{\Lambda}^4 \tag{2.250}$$

und im konjugierten Fall durch

$$\begin{aligned}
(O_f)^{1}_{\bar{L}} &= \tilde{\Lambda}^{-1}f_1K_1^{-1/2}K_2^{-1/2},\\
(O_f)^{2}_{\bar{L}} &= \tilde{\Lambda}^{-1}K_1^{1/2}K_2^{-1/2}(f_2 - q^{-1}\lambda f_1L_1^-),\\
(O_f)^{3}_{\bar{L}} &= \tilde{\Lambda}^{-1}K_1^{-1/2}K_2^{1/2}(f_3 - q^{-1}\lambda f_1L_2^-),\\
(O_f)^{4}_{\bar{L}} &= \tilde{\Lambda}^{-1}K_1^{1/2}K_2^{1/2}(f_4 + q^{-1}\lambda f_3L_1^- - q^{-1}\lambda f_2L_2^- \\
&\quad - q^{-2}\lambda^2 f_1L_1^-L_2^-),
\end{aligned} \tag{2.251}$$

$$\begin{aligned}
(O_f)^{12}_{\bar{L}} &= f_{12}\tilde{\Lambda}^{-2}K_2^{-1},\\
(O_f)^{13}_{\bar{L}} &= f_{13}\tilde{\Lambda}^{-2}K_1^{-1},\\
(O_f)^{14}_{\bar{L}} &= \tilde{\Lambda}^{-2}(f_{14} + q^{-1}\lambda f_{13}L_1^- + q^{-3}\lambda f_{12}L_2^-),\\
(O_f)^{23}_{\bar{L}} &= \tilde{\Lambda}^{-2}(f_{23} - q^{-2}\lambda f_{13}L_1^- + q^{-2}\lambda f_{12}L_2^-),\\
(O_f)^{24}_{\bar{L}} &= \tilde{\Lambda}^{-2}K_1(f_{24} - \lambda f_{14}L_1^- - q^{-1}\lambda f_{23}L_1^- \\
&\quad - q^{-1}\lambda^2 f_{13}(L_1^-)^2),\\
(O_f)^{34}_{\bar{L}} &= \tilde{\Lambda}^{-2}K_2(f_{34} - \lambda f_{14}L_2^- - q\lambda f_{23}L_2^- \\
&\quad - q^{-1}\lambda^2 f_{12}(L_2^-)^2),
\end{aligned} \tag{2.252}$$

$$\begin{aligned}
(O_f)^{123}_{\bar{L}} &= f_{123}\tilde{\Lambda}^{-3}K_1^{-1/2}K_2^{-1/2},\\
(O_f)^{124}_{\bar{L}} &= \tilde{\Lambda}^{-3}K_1^{1/2}K_2^{-1/2}(f_{124} + q^{-1}\lambda f_{123}L_1^-),\\
(O_f)^{134}_{\bar{L}} &= \tilde{\Lambda}^{-3}K_1^{-1/2}K_2^{-1/2}(f_{134} - q^{-1}\lambda f_{123}L_2^-),\\
(O_f)^{234}_{\bar{L}} &= \tilde{\Lambda}^{-3}K_1^{1/2}K_2^{1/2}(f_{234} - q^{-1}\lambda f_{134}L_1^- + q^{-1}\lambda f_{124}L_2^-
\end{aligned} \tag{2.253}$$

$$
\begin{aligned}
& + q^{-2}\lambda^2 f_{123} L_1^- L_2^-), \\
(O_f)_{\bar{L}}^{1234} &= f_{1234}\tilde{\Lambda}^{-4}.
\end{aligned} \tag{2.254}
$$

## 2.4 q-deformierter Minkowskiraum

Der q-deformierte Minkowskiraum zeichnet sich durch zwei Besonderheiten aus: Zum einen ergibt sich aus seiner symmetrischen Version im klassischen Limes $q \to 1$ der physikalisch relevante Minkowskiraum, welcher als Background-Raumzeit in der speziellen Relativitätstheorie dient. Zum zweiten erweist er sich selbst im Falle der nilpotenten Grassmannvariablen als wesentlich komplizierter und rechenaufwendiger als die zuvor betrachteten Euklidischen Räume. Aber auch hier gelangt man mit Geduld immer zum Ziel, da er exakt derselben Axiomatik wie die anderen Quantenräume gehorcht.

Beginnen wir also zuerst wie üblich mit den Vertauschungsrelationen der Koordinaten, gegeben durch die Formel

$$
\theta^i\theta^j = -(\hat{R}_{II})^{ij}_{kl}\theta^k\theta^l, \tag{2.255}
$$

wobei $\hat{R}_{II}$ eine der zwei mögliche R-Matrizen der q-deformierten Lorentzalgebra bezeichnet [35]. Daraus ergeben sich als unabhängige Relationen

$$
\begin{aligned}
(\theta^\mu)^2 &= 0, \quad \mu \in \{+,-,0\}, \\
\theta^3\theta^\pm &= -q^{\mp 2}\theta^\pm\theta^3, \\
\theta^3\theta^3 &= \lambda\theta^+\theta^-, \\
\theta^+\theta^- &= -\theta^-\theta^+, \\
\theta^\pm\theta^0 + \theta^0\theta^\pm &= \pm q^{\mp 1}\lambda\theta^\pm\theta^3, \\
\theta^0\theta^3 + \theta^3\theta^0 &= \lambda\theta^+\theta^-.
\end{aligned} \tag{2.256}
$$

Statt der Koordinaten $\theta^0$ und $\theta^3$ erweist es sich in manchen Situationen als einfacher mit der Lichtkegelkoordinate $\theta^{3/0} := \theta^3 - \theta^0$ zu arbeiten. Diese steht mit den übrigen Koordinaten über die zusätzlichen Relationen

$$
\begin{aligned}
(\theta^{3/0})^2 &= 0, \\
\theta^\pm\theta^{3/0} &= -\theta^{3/0}\theta^\pm, \\
\theta^0\theta^{3/0} + \theta^{3/0}\theta^0 &= -\lambda\theta^+\theta^-, \\
\theta^\pm\theta^0 + q^{\pm 2}\theta^0\theta^\pm &= \pm q^{\pm 1}\lambda\theta^\pm\theta^{3/0}, \\
\theta^3\theta^{3/0} + \theta^{3/0}\theta^3 &= -\lambda\theta^+\theta^-
\end{aligned} \tag{2.257}
$$

in Beziehung. Damit ergibt sich für das Produkt zweier Superzahlen der Form

$$\begin{aligned} & f(\theta^+,\theta^3,\theta^0,\theta^-) \\ = \; & f' + f_+\theta^+ + f_0\theta^0 + f_3\theta^3 + f_-\theta^- \\ + \; & f_{+3}\theta^+\theta^3 + f_{+0}\theta^+\theta^0 + f_{+-}\theta^+\theta^- \\ + \; & f_{30}\theta^3\theta^0 + f_{3-}\theta^3\theta^- + f_{0-}\theta^0\theta^- \\ + \; & f_{+30}\theta^+\theta^3\theta^0 + f_{+3-}\theta^+\theta^3\theta^- + f_{+0-}\theta^+\theta^0\theta^- \\ + \; & f_{30-}\theta^3\theta^0\theta^- + f_{+30-}\theta^+\theta^3\theta^0\theta^- \end{aligned} \tag{2.258}$$

die Darstellung

$$\begin{aligned} & (f\cdot g)(\theta^+,\theta^3,\theta^0,\theta^-) \\ = \; & (f\cdot g)' + (f\cdot g)_+\theta^+ + (f\cdot g)_0\theta^0 \\ + \; & (f\cdot g)_3\theta^3 + (f\cdot g)_-\theta^- \\ + \; & (f\cdot g)_{+3}\theta^+\theta^3 + (f\cdot g)_{+0}\theta^+\theta^0 + (f\cdot g)_{+-}\theta^+\theta^- \\ + \; & (f\cdot g)_{30}\theta^3\theta^0 + (f\cdot g)_{3-}\theta^3\theta^- + (f\cdot g)_{0-}\theta^0\theta^- \\ + \; & (f\cdot g)_{+30}\theta^+\theta^3\theta^0 + (f\cdot g)_{+3-}\theta^+\theta^3\theta^- \\ + \; & (f\cdot g)_{+0-}\theta^+\theta^0\theta^- + (f\cdot g)_{30-}\theta^3\theta^0\theta^- \\ + \; & (f\cdot g)_{+30-}\theta^+\theta^3\theta^0\theta^-, \end{aligned} \tag{2.259}$$

mit

$$\begin{aligned} (f\cdot g)' &= f'g', \\ (f\cdot g)_\mu &= f_\mu g' + f'g_\mu, \quad \mu\in\{+,3,0,-\}, \end{aligned} \tag{2.260}$$

$$\begin{aligned} (f\cdot g)_{+0} &= f_{+0}g' + g_{+0}f' + f_+g_0 - f_0g_+, \\ (f\cdot g)_{30} &= f_{30}g' + g_{30}f' + f_3g_0 - f_0g_3, \\ (f\cdot g)_{0-} &= f_{0-}g' + g_{0-}f' + f_0g_- - f_-g_0, \\ (f\cdot g)_{+-} &= f_{+-}g' + g_{+-}f' + f_+g_- - f_-g_+ + \lambda f_3g_3 - \lambda f_0g_3, \\ (f\cdot g)_{+3} &= f_{+3}g' + g_{+3}f' + f_+g_3 - q^{-2}f_3g_+ - q^{-1}\lambda f_0g_+, \\ (f\cdot g)_{3-} &= f_{3-}g' + g_{3-}f' + f_3g_- - q^{-2}f_-g_3 - q^{-1}\lambda f_-g_0, \end{aligned} \tag{2.261}$$

$$\begin{aligned} (f\cdot g)_{+30} &= f_{+30}g' + g_{30}f' + f_+g_{30} - q^{-2}f_3g_{+0} \\ &+ f_0g_{+3} - q^{-1}\lambda f_0g_{+0} \\ &+ f_{+3}g_0 - f_{+0}g_3 + q^{-2}f_{30}g_+, \end{aligned} \tag{2.262}$$

$$
\begin{aligned}
(f\cdot g)_{30-} &= f_{30-}g' + g_{30-}f' + f_3 g_{0-} - f_0 g_{3-} + q^{-2} f_- g_{30} \\
&+ f_{30} g_- - f_{3-} g_0 + q^{-2} f_{0-} g_3 + q^{-1}\lambda f_{0-} g_0, \\
(f\cdot g)_{+0-} &= f_{+0-}g' + g_{+0-}f' + f_+ g_{0-} - f_0 g_{+-} - \lambda f_3 g_{30} \\
&+ f_- g_{+0} - \lambda f_0 g_{30} + f_{+0} g_- \\
&- f_{+-} g_0 + f_{0-} g_+ + \lambda f_{30} g_3, \\
(f\cdot g)_{+3-} &= f_{+3-}g' + g_{+3-}f' + f_+ g_{3-} - q^{-2} f_+ g_{3-} - q^{-2} f_- g_{+3} \\
&- -q^{-2} f_3 g_{+-} - q^{-1}\lambda f_0 g_{+-} - q^{-1}\lambda f_- g_{+0} \\
&- q^{-1}\lambda^2 f_3 g_{30} - q^{-1}\lambda^2 f_0 g_{30} \\
&+ f_{+3} g_- - q^{-2} f_{+-} g_3 + q^{-2} f_{3-} g_+ \\
&- q^{-2} f_{+-} g_3 - q^{-1}\lambda f_{+-} g_0 + q^{-1}\lambda f_{0-} g_+ \\
&+ q^{-1}\lambda(\lambda - q^{-1}) f_{30} g_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f\cdot g)_{+30-} &= f_{+30-}g' + g_{+30-}f' + f_+ g_{30-} - q^{-2} f_3 g_{+0-} + f_0 g_{+3-} \\
&- q^{-2} f_- g_{+30-} - q^{-1}\lambda f_0 g_{+0-} \\
&+ f_{+3} g_{0-} - f_{+0} g_{3-} + q^{-2} f_{+-} g_{30} + q^{-2} f_{30} g_{+-} \\
&- q^{-2} f_{3-} g_{+0} + q^{-2} f_{0-} g_{+3} + q^{-2}\lambda f_{30} g_{30} \\
&+ f_{+30} g_- - f_{+3-} g_0 + q^{-2} f_{+0-} g_3 \\
&- q^{-2} f_{30-} g_+ + q^{-1}\lambda f_{+0-} g_0.
\end{aligned}
\tag{2.263}
$$

Zur Bestimmung der Darstellung der Symmetriegeneratoren auf den Superzahlen benutzen wir die T-Form der Lorentzalgebra[5]. Da symmetrisierte und antisymmetrisierte Koordinaten mit den Lorentzgeneratoren die gleichen Vertauschungsrelationen erfüllen, erhalten wir in expliziter Form

$$
\begin{aligned}
T^+\theta^0 &= \theta^0 T^+, \\
T^+\theta^{3/0} &= \theta^{3/0} T^+ + q^{-\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\theta^+, \\
T^+\theta^+ &= q^{-2}\theta^+ T^+, \\
T^+\theta^- &= q^2\theta^- T^+ + q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\theta^3,
\end{aligned}
\tag{2.264}
$$

$$
\begin{aligned}
T^-\theta^0 &= \theta^0 T^-, \\
T^-\theta^{3/0} &= \theta^{3/0} T^- + q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\theta^-, \\
T^-\theta^- &= q^2\theta^- T^-,
\end{aligned}
\tag{2.265}
$$

[5]Die genaue Form der Lorentzalgebra in ihren verschiedenen für diese Arbeit relevanten Ausprägungen beschreiben wir in Anhang A

$$T^-\theta^+ = q^{-2}\theta^+T^- + q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\theta^3,$$

$$\begin{aligned}
\tau^3\theta^0 &= \theta^0\tau^3, \\
\tau^3\theta^{3/0} &= \theta^{3/0}\tau^3, \\
\tau^3\theta^+ &= q^{-4}\theta^+\tau^3, \\
\tau^3\theta^- &= q^4\theta^-\tau^3,
\end{aligned} \tag{2.266}$$

$$\begin{aligned}
T^2\theta^{3/0} &= q^{-1}\theta^{3/0}T^2, \\
T^2\theta^+ &= q\theta^+T^2, \\
T^2\theta^- &= q^{-1}\theta^-T^2 + q^{-\frac{3}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\theta^{3/0}\tau^1, \\
T^2\theta^3 &= q\theta^3T^2 - q\lambda_+^{-1}\lambda\theta^{3/0}T^2 + q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\theta^+\tau^1,
\end{aligned} \tag{2.267}$$

$$\begin{aligned}
S^1\theta^{3/0} &= q\theta^{3/0}S^1, \\
S^1\theta^- &= q\theta^-S^1, \\
S^1\theta^+ &= q^{-1}\theta^+S^1 - q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\theta^{3/0}\sigma^2, \\
S^1\theta^3 &= q^{-1}\theta^3S^1 + q^{-1}\lambda_+^{-1}\lambda\theta^{3/0}S^1 - q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\theta^-\sigma^2,
\end{aligned} \tag{2.268}$$

$$\begin{aligned}
\tau^1\theta^{3/0} &= q\theta^{3/0}\tau^1, \\
\tau^1\theta^- &= q^{-1}\theta^-\tau^1, \\
\tau^1\theta^+ &= q\theta^+\tau^1 - q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda^2\theta^{3/0}T^2, \\
\tau^1\theta^3 &= q^{-1}\theta^3\tau^1 + q^{-1}\lambda_+^{-1}\lambda\theta^{3/0}\tau^1 - q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda^2\theta^-T^2,
\end{aligned} \tag{2.269}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2\theta^{3/0} &= q^{-1}\theta^{3/0}\sigma^2, \\
\sigma^2\theta^+ &= q^{-1}\theta^+\sigma^2, \\
\sigma^2\theta^- &= q\theta^-\sigma^2 + q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda^2\theta^{3/0}S^1, \\
\sigma^2\theta^3 &= q\theta^3\sigma^2 - q\lambda_+^{-1}\lambda\theta^{3/0}\sigma^2 + q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda^2\theta^+S^1.
\end{aligned} \tag{2.270}$$

Mit diesen Relationen finden wir zuerst einmal für die Generatoren der $U_q(su(2))$-Unteralgebra die folgenden Wirkungen auf Superzahlen:

$$\begin{aligned}
& \tau^3 \triangleright f(\theta^+,\theta^3,\theta^0,\theta^-) \\
= \;& f(q^{-4}\theta^+, q^4\theta^-),
\end{aligned} \tag{2.271}$$

$$T^- \triangleright f(\theta^+,\theta^3,\theta^0,\theta^-) \tag{2.272}$$

$$\begin{aligned}
&= q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}} f_3\theta^- + q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}} f_{+3}\theta^+\theta^- \\
&+ q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}} f_{+0}\theta^3\theta^0 - q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}} f_{30}\theta^0\theta^- \\
&+ q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}} (f_{+-} + \lambda f_{30})\theta^3\theta^- \\
&- q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}} f_{3+0}\theta^+\theta^0\theta^- + q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}} f_{+0-}\theta^3\theta^0\theta^- \\
&+ q^{\frac{1}{2}}\lambda\lambda_+^{\frac{1}{2}} f_{+30}\theta^+\theta^3\theta^-,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T^+ \triangleright f(\theta^+, \theta^3, \theta^0, \theta^-) \\
&= q^{-\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}} f_3\theta^+ - q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}} f_{0-}\theta^3\theta^0 \\
&+ q^{-\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}} f_{30}\theta^+\theta^0 + q^{-\frac{5}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}} f_{+-}\theta^+\theta^3 \\
&+ \lambda_+^{\frac{1}{2}} (q^{\frac{1}{2}} f_{3-} + q^{-\frac{1}{2}}\lambda f_{0-})\theta^+\theta^- \\
&- q^{-\frac{5}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}} f_{+0-}\theta^+\theta^3\theta^0 + q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}} f_{30-}\theta^+\theta^0\theta^- \\
&- q^{-\frac{1}{2}}\lambda\lambda_+^{\frac{1}{2}} f_{30-}\theta^+\theta^3\theta^-.
\end{aligned} \tag{2.273}$$

Rechtsdarstellungen ergeben sich am einfachsten durch Anwendung der Transformationsregeln

$$\begin{aligned}
& f(\theta^+, \theta^0, \theta^3, \theta^-) \triangleleft T^{\pm} \\
\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow}\; & -q^{\mp 3} T^{\mp} \triangleright f(\theta^+, \theta^3, \theta^0, \theta^-)
\end{aligned} \tag{2.274}$$

oder der Identität

$$f(\theta^+, \theta^0, \theta^3, \theta^-) \triangleleft \tau = f(q^4\theta^+, q^{-4}\theta^-), \tag{2.275}$$

wobei das Symbol $\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow}$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
\theta^{i_1}\cdots\theta^{i_n} &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \theta^{\bar{i}_n}\cdots\theta^{\bar{i}_1}, \\
f_{i_1}\cdots f_{i_n} &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} f_{\bar{i}_1}\cdots f_{\bar{i}_n}, \\
f' &\overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} f',
\end{aligned} \tag{2.276}$$

mit dem konjugierten Index $\bar{A} = \overline{(+, 3, 3/0, 0, -)} = (-, 3, 3/0, 0, +)$.

Die Wirkungen der verbleibenden Generatoren sind dann

$$\begin{aligned}
& \sigma^2 \triangleright f(\theta^+, \theta^3, \theta^{3/0}, \theta^-) \\
&= q^{-1} f_+\theta^+ + q f_-\theta^- + q f_3\theta^3 \\
&+ (q^{-1} f_{3/0} - q\lambda_+^{-1}\lambda f_3)\theta^{3/0}
\end{aligned} \tag{2.277}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad f_{+3}\theta^{+}\theta^{3} + f_{+-}\theta^{+}\theta^{-} + q^{2}f_{3-}\theta^{3}\theta^{-} \\
&+ \quad f_{3,3/0}\theta^{3}\theta^{3/0} + (f_{3/0,-} - q^{2}\lambda\lambda_{+}^{-1}f_{3-})\theta^{3/0}\theta^{-} \\
&+ \quad (q^{-2}f_{+,3/0} - \lambda\lambda_{+}^{-1}f_{+3})\theta^{+}\theta^{3/0} \\
&+ \quad q^{-1}f_{+3,3/0}\theta^{+}\theta^{3}\theta^{3/0} + qf_{+3-}\theta^{+}\theta^{3}\theta^{-} + qf_{3,3/0,-}\theta^{3}\theta^{3/0}\theta^{-} \\
&+ \quad (q^{-1}f_{+,3/0,-} - q\lambda\lambda_{+}^{-1}f_{+3-})\theta^{+}\theta^{3/0}\theta^{-} \\
&+ \quad f_{+3,3/0,-}\theta^{+}\theta^{3}\theta^{3/0}\theta^{-},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \quad\; \tau^{1} \triangleright f(\theta^{+},\theta^{3},\theta^{3/0},\theta^{-}) \qquad (2.278) \\
&= \quad q^{-1}f_{-}\theta^{-} + qf_{+}\theta^{+} + q^{-1}f_{3}\theta^{3} \\
&+ \quad (qf_{3/0} + q^{-1}\lambda_{+}^{-1}\lambda f_{3})\theta^{3/0} \\
&+ \quad f_{+3}\theta^{+}\theta^{3} + f_{+-}\theta^{+}\theta^{-} + q^{-2}f_{3-}\theta^{3}\theta^{-} \\
&+ \quad f_{3,3/0}\theta^{3}\theta^{3/0} + q^{2}(f_{+3/0} + \lambda\lambda_{+}^{-1}f_{+3})\theta^{+}\theta^{3/0} \\
&+ \quad (f_{3/0,-} + \lambda\lambda_{+}^{-1}f_{3-})\theta^{3/0}\theta^{-} \\
&+ \quad qf_{+3,3/0}\theta^{+}\theta^{3}\theta^{3/0} + q^{-1}f_{+3-}\theta^{+}\theta^{3}\theta^{-} + q^{-1}f_{3,3/0,-}\theta^{3}\theta^{3/0}\theta^{-} \\
&+ \quad (qf_{+,3/0,-} + \lambda\lambda_{+}^{-1}(2(\lambda+q) - q^{2})f_{+3-})\theta^{+}\theta^{3/0}\theta^{-} \\
&+ \quad f_{+3,3/0,-}\theta^{+}\theta^{3}\theta^{3/0}\theta^{-},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \quad\; S^{1} \triangleright f(\theta^{+},\theta^{3},\theta^{3/0},\theta^{-}) \qquad (2.279) \\
&= \quad -q^{-\frac{1}{2}}\lambda_{+}^{-\frac{1}{2}}f_{+}\theta^{3/0} - q^{\frac{1}{2}}\lambda_{+}^{-\frac{1}{2}}f_{3}\theta^{-} \\
&+ \quad q^{\frac{1}{2}}\lambda_{+}^{-\frac{1}{2}}f_{+3}\theta^{3}\theta^{3/0} + q^{-\frac{1}{2}}\lambda_{+}^{-\frac{1}{2}}(q\lambda - 1)f_{+3}\theta^{+}\theta^{-} \\
&+ \quad \lambda_{+}^{-\frac{1}{2}}(q^{-\frac{1}{2}}f_{3,3/0} - q^{\frac{1}{2}}f_{+-})\theta^{3/0}\theta^{-} \\
&+ \quad q^{\frac{3}{2}}\lambda_{+}^{-\frac{1}{2}}f_{+3-}\theta^{3}\theta^{3/0}\theta^{-} \\
&+ \quad q^{-\frac{3}{2}}\lambda_{+}^{-\frac{1}{2}}(1 - q\lambda)f_{+3,3/0}\theta^{+}\theta^{3/0}\theta^{-},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \quad\; T^{2} \triangleright f(\theta^{+},\theta^{3},\theta^{3/0},\theta^{-}) \qquad (2.280) \\
&= \quad q^{-\frac{3}{2}}\lambda_{+}^{-\frac{1}{2}}f_{-}\theta^{3/0} + q^{-\frac{1}{2}}\lambda_{+}^{-\frac{1}{2}}f_{3}\theta^{+} \\
&+ \quad q^{-\frac{1}{2}}\lambda_{+}^{-\frac{1}{2}}f_{3-}\theta^{3}\theta^{3/0} + q^{-\frac{3}{2}}\lambda_{+}^{-\frac{1}{2}}f_{3-}\theta^{+}\theta^{-} \\
&+ \quad \lambda_{+}^{-\frac{1}{2}}(q^{\frac{1}{2}}f_{3,3/0} + q^{-\frac{1}{2}}f_{+-})\theta^{+}\theta^{3/0} \\
&+ \quad q^{\frac{1}{2}}\lambda_{+}^{-\frac{1}{2}}f_{+3-}\theta^{+}\theta^{3}\theta^{3/0} \\
&+ \quad q^{-\frac{1}{2}}\lambda_{+}^{-\frac{1}{2}}f_{3,3/0,-}\theta^{+}\theta^{3/0}\theta^{-}.
\end{aligned}
$$

Hier stellt sich heraus, dass der einfachste Weg zur Bestimmung der Rechtsdarstellungen durch die Anwendung der Regel

$$S^{-1}(h) \triangleright f = f \triangleleft h, \tag{2.281}$$

gegeben ist, wobei die inversen Antipoden für die betreffenden Lorentzgeneratoren die folgende Form haben:

$$\begin{aligned} S^{-1}(T^2) &= -q^{-2}T^2(\tau^3)^{1/2}, \\ S^{-1}(S^1) &= -S^1(\tau^3)^{-1/2}, \\ S^{-1}(\tau^1) &= \sigma^2, \\ S^{-1}(\sigma^2) &= \tau^1. \end{aligned} \tag{2.282}$$

Auch für die Grassmannvariablen des Minkowskiraumes lässt sich ein Differentialkalkül angegeben. Die zugehörigen Leibnizregeln lauten

$$\begin{aligned} \partial_\theta^\mu \theta^\nu &= g^{\mu\nu} - q^{-1}(\hat{R}_{II}^{-1})^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\theta^\rho\partial_\theta^\sigma, \\ \hat{\partial}^\mu\theta^\nu &= g^{\mu\nu} - q(\hat{R}_{II}^{-1})^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\theta^\rho\hat{\partial}_\theta^\sigma, \end{aligned} \tag{2.283}$$

oder in expliziter Form für den unkonjugierten Kalkül

$$\begin{aligned} \partial_\theta^{3/0}\theta^{3/0} &= -q^2\theta^{3/0}\partial_\theta^{3/0}, \\ \partial_\theta^{3/0}\theta^+ &= -q^2\theta^+\partial_\theta^{3/0} - q\lambda\theta^{3/0}\partial_\theta^+, \\ \partial_\theta^{3/0}\theta^3 &= 1 - \theta^3\partial_\theta^{3/0} - \lambda\lambda_+^{-1}\theta^{3/0}\partial_\theta^{3/0} - \lambda\theta^-\partial_\theta^+, \\ \partial_\theta^{3/0}\theta^- &= -\theta^-\partial_\theta^{3/0}, \end{aligned} \tag{2.284}$$

$$\begin{aligned} \partial_\theta^+\theta^{3/0} &= -\theta^{3/0}\partial_\theta^+, \\ \partial_\theta^+\theta^+ &= -q^2\theta^+\partial_\theta^+, \\ \partial_\theta^+\theta^3 &= -q^2\theta^3\partial_\theta^+ + q^2\lambda\lambda_+^{-1}\theta^{3/0}\partial_\theta^+ + q^2\lambda\lambda_+^{-1}\theta^+\partial_\theta^{3/0}, \\ \partial_\theta^+\theta^- &= -q - \theta^-\partial_\theta^+ + q\lambda\lambda_+^{-1}\theta^{3/0}\partial_\theta^{3/0}, \end{aligned} \tag{2.285}$$

$$\begin{aligned} \partial_\theta^-\theta^{3/0} &= -q^2\theta^{3/0}\partial_\theta^- - q\lambda\theta^-\partial_\theta^{3/0}, \\ \partial_\theta^-\theta^+ &= -q^{-1} - \theta^+\partial_\theta^- - \lambda\theta^{3/0}\partial_\theta^0 - \lambda^2\theta^-\partial_\theta^+ \\ &- \lambda\theta^3\partial_\theta^{3/0} - q\lambda\lambda_+^{-1}\theta^{3/0}\partial_\theta^{3/0}, \\ \partial_\theta^-\theta^3 &= -\theta^3\partial_\theta^- - \lambda\lambda_+^{-1}\theta^{3/0}\partial_\theta^- - q\lambda\theta^-\partial_\theta^0 \\ &- \lambda\lambda_+^{-1}(q^2+2)\theta^-\partial_\theta^{3/0}, \\ \partial_\theta^-\theta^- &= -q^2\theta^-\partial_\theta^-, \end{aligned} \tag{2.286}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\theta^0 \theta^{3/0} &= 1 - \theta^{3/0}\partial_\theta^0 - \lambda\theta^-\partial_\theta^+ + q^2\lambda\lambda_+^{-1}\theta^{3/0}\partial_\theta^{3/0}, \\
\partial_\theta^0 \theta^+ &= -\theta^+\partial_\theta^0 - q\lambda\theta^3\partial_\theta^+ + q^2\lambda\lambda_+^{-1}\theta^{3/0}\partial_\theta^+ + q^2\lambda\lambda_+^{-1}\theta^+\partial_\theta^{3/0}, \\
\partial_\theta^0 \theta^3 &= -q^2\theta^3\partial_\theta^0 + q^2\lambda\lambda_+^{-1}\theta^{3/0}\partial_\theta^0 + q\lambda\lambda_+^{-1}\theta^+\partial_\theta^- - q\lambda\lambda_+^{-1}\theta^-\partial_\theta^+ \\
&+ \lambda\lambda_+^{-1}\theta^3\partial_\theta^{3/0} + q^2\lambda\lambda_+^{-1}\theta^{3/0}\partial_\theta^{3/0}, \\
\partial_\theta^0 \theta^- &= -q^2\theta^-\partial_\theta^0 - \lambda\lambda_+^{-1}\theta^-\partial_\theta^{3/0} + q^2\lambda\lambda_+^{-1}\theta^{3/0}\partial_\theta^-,
\end{aligned} \tag{2.287}$$

während die entsprechenden Identitäten des konjugierten Kalküls aus obigen Relationen durch Anwendung der Substitutionen

$$(\partial_\theta)^\mu \to (\hat{\partial}_\theta)^{\bar{\mu}} = q^{-2}(\bar{\partial}_\theta)^{\bar{\mu}}, \quad \theta^\mu \to \theta^{\bar{\mu}}, \quad q \to q^{-1} \tag{2.288}$$

folgen. Wie üblich, können wir damit die Wirkung der fermionischen Ableitungen auf die Superzahlen bestimmen. Im Minkowski-Fall lauten diese dann

$$\begin{aligned}
&\partial_\theta^+ \triangleright f(\theta^-, \theta^{3/0}, \theta^3, \theta^+) \\
=\;& -qf_- - qf_{-+}\theta^+ - qf_{-3} - q(f_{-,3/0} - \lambda\lambda_+^{-1}f_{-3})\theta^{3/0} \\
-\;& qf_{-3+}\theta^3\theta^+ - q(f_{-,3/0,+} - \lambda\lambda_+^{-1}f_{-3+})\theta^{3/0}\theta^+ \\
-\;& qf_{-,3/0,3}\theta^{3/0}\theta^3 - qf_{-,3/0,3+}\theta^{3/0}\theta^3\theta^+,
\end{aligned} \tag{2.289}$$

$$\begin{aligned}
&\partial_\theta^{3/0} \triangleright f(\theta^-, \theta^{3/0}, \theta^3, \theta^+) \\
=\;& f_3 + f_{3+}\theta^+ - q^2 f_{3/0,3}\theta^{3/0} - f_{-3}\theta^- \\
-\;& q^2 f_{3/0,3+}\theta^{3/0}\theta^+ - f_{-3+}\theta^-\theta^+ + q^2 f_{-,3/0,3}\theta^-\theta^{3/0} \\
+\;& q^2 f_{-,3/0,3+}\theta^-\theta^{3/0}\theta^+,
\end{aligned} \tag{2.290}$$

$$\begin{aligned}
&\partial_\theta^0 \triangleright f(\theta^-, \theta^{3/0}, \theta^3, \theta^+) \\
=\;& f_{3/0} + f_{3/0,3}\theta^3 + (f_{3/0,+} - f_{3+}\lambda\lambda_+^{-1})\theta^+ \\
-\;& (q^2 f_{-,3/0} + \lambda\lambda_+^{-1}f_{-3})\theta^- \\
-\;& q\lambda\lambda_+^{-1}(f_{-+} - qf_{3/0,3})\theta^{3/0} \\
+\;& f_{3/0,3+}\theta^3\theta^+ + q\lambda f_{3/0,3+}\theta^{3/0}\theta^+ - q^2 f_{-3,3/0,3}\theta^-\theta^3 \\
+\;& q\lambda\lambda_+^{-1}f_{-3+}\theta^{3/0}\theta^3 - q(qf_{-,3/0,+} - \lambda^2\lambda_+^{-1}f_{-3+})\theta^-\theta^+ \\
-\;& q^2 f_{-,3/0,3+}\theta^-\theta^3\theta^+ - q^2\lambda\lambda_+^{-1}f_{-,3/0,3+}\theta^-\theta^{3/0}\theta^+,
\end{aligned} \tag{2.291}$$

$$\begin{aligned}
&\partial_\theta^- \triangleright f(\theta^-, \theta^{3/0}, \theta^3, \theta^+) \\
=\;& -q^{-1}f_+ + q^{-1}f_{3+}\theta^3 + q(f_{+-} - \lambda f_{3/0,3})\theta^- \\
+\;& (qf_{3/0,+} + q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}f_{3+})\theta^{3/0}
\end{aligned} \tag{2.292}$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad q f_{3/0,3+}\theta^{3/0}\theta^{3} - q f_{-3+}\theta^{-}\theta^{3}\\
&- \quad q(q^{2} f_{-,3/0,+} + \lambda\lambda_{+}^{-1} f_{-3+})\theta^{-}\theta^{3/0}\\
&- \quad q\lambda f_{3/0,3+}\theta^{-}\theta^{+} + q^{3} f_{-,3/0,3+}\theta^{-}\theta^{3/0}\theta^{3}.
\end{aligned}
$$

Die Transformationsformeln zur Ermittlung aller anderen Arten von Darstellungen der fermionischen Ableitungen sind

$$
\begin{aligned}
& \partial_{\theta}^{\mu} \triangleright f(\theta^{-},\theta^{3/0},\theta^{3},\theta^{+}) \\
\stackrel{+\to -}{\stackrel{q\to 1/q}{\longleftrightarrow}} \quad & \hat{\partial}_{\theta}^{\bar{\mu}} \,\bar{\triangleright}\, f(\bar{\theta}^{+},\bar{\theta}^{3/0},\bar{\theta}^{3},\bar{\theta}^{-}),
\end{aligned}
\tag{2.293}
$$

$$
\begin{aligned}
& f(\bar{\theta}^{-},\bar{\theta}^{3},\bar{\theta}^{3/0},\bar{\theta}^{+}) \,\bar{\triangleleft}\, \partial_{\theta}^{\mu} \\
\stackrel{+\to -}{\stackrel{q\to 1/q}{\longleftrightarrow}} \quad & f(\theta^{+},\theta^{3},\theta^{3/0},\theta^{-}) \triangleleft \hat{\partial}_{\theta}^{\mu}
\end{aligned}
\tag{2.294}
$$

und

$$
\begin{aligned}
& f(\bar{\theta}^{-},\bar{\theta}^{3},\bar{\theta}^{3/0},\bar{\theta}^{+}) \,\bar{\triangleleft}\, \partial_{\theta}^{\bar{\mu}} \\
\stackrel{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \quad & \partial_{\theta}^{\mu} \triangleright f(\theta^{-},\theta^{3/0},\theta^{3},\theta^{+}),
\end{aligned}
\tag{2.295}
$$

$$
\begin{aligned}
& f(\theta^{+},\theta^{3},\theta^{3/0},\theta^{-}) \triangleleft \partial_{\theta}^{\mu} \\
\stackrel{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \quad & \partial_{\theta}^{\bar{\mu}} \,\bar{\triangleright}\, f(\bar{\theta}^{+},\bar{\theta}^{3/0},\bar{\theta}^{3},\bar{\theta}^{-})
\end{aligned}
\tag{2.296}
$$

wobei das Transformationssymbol $\stackrel{+\to -}{\stackrel{q\to 1/q}{\longleftrightarrow}}$ folgenden Übergang beschreibt:

$$
\begin{aligned}
\theta^{i_1}\cdots\theta^{i_n} &\stackrel{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \theta^{\bar{i}_1}\cdots\theta^{\bar{i}_n},\\
f_{i_1}\cdots f_{i_n} &\stackrel{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} f_{\bar{i}_1}\cdots f_{\bar{i}_n},\\
f' &\stackrel{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} f',\\
q &\stackrel{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} q^{-1}.
\end{aligned}
\tag{2.297}
$$

Widmen wir uns als nächstes den Hopfstrukturen der verschiedenen Minkowskiräume gebildet aus Koordinaten, Ableitungen oder Differentialen. In ihrer unkonjugierten Version lauten diese allgemein

$$
\begin{aligned}
\Delta(h^{3/0}) &= h^{3/0}\otimes 1 + \Lambda(h)\tau^{1}\otimes h^{3/0}\\
&\quad - q^{\frac{1}{2}}\lambda_{+}^{\frac{1}{2}}\lambda\Lambda(h)(\tau^{3})^{-\frac{1}{2}}S^{1}\otimes h^{+},\\
\Delta(h^{+}) &= h^{+}\otimes 1 + \Lambda^{\frac{1}{2}}(\tau^{3})^{-\frac{1}{2}}\sigma^{2}\otimes h^{+} - q^{\frac{3}{2}}\lambda_{+}^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda(h)T^{2}\otimes h^{3/0},\\
\Delta(h^{-}) &= h^{-}\otimes 1 + \Lambda(h)(\tau^{3})^{\frac{1}{2}}\tau^{1}\otimes h^{-} - q^{-\frac{1}{2}}\lambda_{+}^{\frac{1}{2}}\lambda\Lambda(h)S^{1}\otimes h^{0}
\end{aligned}
\tag{2.298}
$$

$$\begin{aligned}
& - \lambda^2\Lambda(h)(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}T^-S^1 \otimes h^+ \\
& + q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda(h)(\tau^1T^- - q^{-1}S^1) \otimes h^{3/0}, \\
\Delta(h^0) &= h^0 \otimes 1 + \Lambda(h)\sigma^2 \otimes h^0 - q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda(h)T^2(\tau^3)^{\frac{1}{2}} \otimes h^- \\
& + q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda(h)(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}(T^-\sigma^2 + qS^1) \otimes h^+ \\
& - \lambda_+^{-1}\Lambda(h)(\lambda^2T^-T^2 + q(\tau^1 - \sigma^2)) \otimes h^{3/0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(h^{3/0}) &= -\Lambda^{-1}(h)\sigma^2h^{3/0} - q^{-\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{-1}(h)S^1h^+, \qquad (2.299) \\
S(h^+) &= -\Lambda^{-1}(h)\tau^1(\tau^3)^{\frac{1}{2}}h^+ - q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{-1}(h)T^2(\tau^3)^{\frac{1}{2}}h^{3/0}, \\
S(h^-) &= -\Lambda^{-1}(h)\sigma^2(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}h^- - q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{-1}(h)(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}S^1h^0 \\
& + q^{-2}\lambda^2\Lambda^{-1}(h)(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}S^1T^-h^+ \\
& + q^{-\frac{5}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{-1}(h)(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}(\sigma^2T^- - q^3S^1)h^{3/0}, \\
S(h^0) &= -\Lambda^{-1}(h)\tau^1h^0 - q^{\frac{5}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{-1}(h)T^2h^- \\
& + q^{-\frac{3}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{-1}(h)(\tau^1T^- + qS^1)h^+ \\
& + \lambda_+^{-1}\Lambda^{-1}(h)(q(\sigma^2 - \tau^1) + \lambda^2T^2T^-)h^{3/0},
\end{aligned}$$

$$\varepsilon(h^{3/0}) = \varepsilon(h^+) = \varepsilon(h^-) = \varepsilon(h^0) = 0, \qquad (2.300)$$

während man für die konjugierte Version findet

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta}(h^{3/0}) &= h^{3/0} \otimes 1 + \Lambda^{-1}(h)(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}\sigma^2 \otimes h^{3/0} \qquad (2.301) \\
& - q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{-1}(h)T^2 \otimes h^-, \\
\bar{\Delta}(h^-) &= h^- \otimes 1 + \Lambda^{-1}(h)\tau^1 \otimes h^- - q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{-1}(h)(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}S^1 \otimes h^{3/0}, \\
\bar{\Delta}(h^+) &= h^+ \otimes 1 + \Lambda^{-1}(h)\sigma^2 \otimes h^+ - q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{-1}(h)T^2(\tau^3)^{\frac{1}{2}} \otimes h^0 \\
& - q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{-1}(h)(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}(T^+\sigma^2 + q\tau^3T^2) \otimes h^{3/0} \\
& + q^2\lambda^2\Lambda^{-1}(h)T^2T^+ \otimes h^-, \\
\bar{\Delta}(h^0) &= h^0 \otimes 1 + \Lambda^{-1}(h)(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}\tau^1 \otimes h^0 - q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{-1}(h)S^1 \otimes h^+ \\
& - q^{\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda^{-1}(h)(qT^+\tau^1 - T^2)) \otimes h^- \\
& + \lambda_+^{-1}\Lambda^{-1}(h)(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}(\lambda^2T^+S^1 + q^{-1}(\tau^3\tau^1 - \sigma^2)) \otimes h^{3/0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{S}(h^{3/0}) &= -\Lambda(h)\tau^1(\tau^3)^{\frac{1}{2}}h^{3/0} - q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\lambda\Lambda(h)T^2(\tau^3)^{\frac{1}{2}}h^-, \qquad (2.302) \\
\bar{S}(h^-) &= -\Lambda(h)\sigma^2h^- - q^{-\frac{3}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda(h)S^1h^{3/0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{S}(h^+) &= -\Lambda(h)\tau^1 h^+ - q^{\frac{5}{2}}\lambda_+^{\frac{1}{2}}\lambda\Lambda(h)T^2 h^0 \\
&- q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda(h)(q\tau^1 T^+ + T^2)h^{3/0} \\
&- q^4\lambda^2\Lambda(h)T^2T^+h^-, \\
\bar{S}(h^0) &= -\Lambda(h)(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}\sigma^2 h^0 - q^{-\frac{1}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda(h)(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}S^1 h^+ \\
&- q^{\frac{3}{2}}\lambda_+^{-\frac{1}{2}}\lambda\Lambda(h)(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}(\sigma^2 T^+ - q\tau^3 T^2)h^- \\
&- \lambda_+^{-1}\Lambda(h)(\tau^3)^{-\frac{1}{2}}(\lambda^2 T^+ S^1 + q(\sigma^2 - \tau^3\tau^1))h^{3/0}, \\
\bar{\varepsilon}(h^{3/0}) &= \bar{\varepsilon}(h^+) = \bar{\varepsilon}(h^-) = \bar{\varepsilon}(h^0) = 0,
\end{aligned} \tag{2.303}$$

mit

$$h^\mu \in \{\partial_x^\mu, \partial_\theta^\mu, X^\mu, \theta^\mu, \xi^\mu, \eta^\mu\}. \tag{2.304}$$

Die dazu notwendige Spezifizierung der Skalierer stellt sich dann wie folgt dar:

$$\Lambda(\partial_x^i) = \Lambda^{\frac{1}{2}}, \quad \Lambda(X^i) = \Lambda^{-\frac{1}{2}}, \quad \Lambda(\eta^i) = \Lambda^{-1} \tag{2.305}$$

oder

$$\Lambda(\partial_\theta^i) = \tilde{\Lambda}^{-1}, \quad \Lambda(\theta^i) = \tilde{\Lambda}, \quad \Lambda(\xi^i) = \tilde{\Lambda}, \tag{2.306}$$

falls die Operatoren $\Lambda$ und $\tilde{\Lambda}$ den Beziehungen

$$\begin{aligned}
\Lambda X^\mu &= q^{-2}X^\mu\Lambda, \\
\Lambda\partial_x^\mu &= q^2\partial_x^\mu\Lambda, \\
\Lambda\xi^\mu &= q^{-2}\xi^\mu\Lambda, \\
\Lambda\eta^\mu &= q^{-4}\eta^\mu\Lambda, \\
\Lambda\theta^\mu &= q^{-2}\theta^\mu\Lambda, \\
\Lambda\partial_\theta^\mu &= q^2\partial_\theta^\mu\Lambda,
\end{aligned} \tag{2.307}$$

als auch

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}\theta^\mu &= -q^{-1}\theta^\mu\tilde{\Lambda}, \\
\tilde{\Lambda}\partial_\theta^\mu &= -q\partial_\theta^\mu\tilde{\Lambda}, \\
\tilde{\Lambda}\eta^\mu &= q^2\eta^\mu\tilde{\Lambda}, \\
\tilde{\Lambda}\xi^\mu &= -q^{-1}\xi^\mu\tilde{\Lambda}, \\
\tilde{\Lambda}X^\mu &= q^{-1}X^\mu\tilde{\Lambda}, \\
\tilde{\Lambda}\partial_x^\mu &= q\partial_x^\mu\tilde{\Lambda}
\end{aligned} \tag{2.308}$$

gehorchen.

Nun wollen wir wieder die Elemente einer Superanalysis präsentieren. Wie im Fall der Euklidischen Räume und der Quantenebene definieren wir die Integrale über

$$\begin{aligned}
&\int f(\theta^-,\theta^{3/0},\theta^3,\theta^+)\ d_L^4\theta \qquad (2.309)\\
\equiv\ & -q^{-2}\partial_\theta^-\partial_\theta^0\partial_\theta^{3/0}\partial_\theta^+ \triangleright f(\theta^-,\theta^{3/0},\theta^3,\theta^+) = f_{-,3/0,3,+},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int d_R^4\theta f(\theta^-,\theta^{3/0},\theta^3,\theta^+) \qquad (2.310)\\
\equiv\ & -q^{-2} f(\theta^-,\theta^{3/0},\theta^3,\theta^+) \triangleleft \hat{\partial}_\theta^+\hat{\partial}_\theta^{3/0}\hat{\partial}_\theta^3\hat{\partial}_\theta^- = f_{-,3/0,3,+}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Wirkung der Ableitungen durch Vorfaktoren ergänzt, um die korrekte Normierung der Integrale zu garantieren. Mit der expliziten Form für die Wirkung der partiellen Ableitungen lässt sich dies leicht bestätigen. Insbesondere gilt wieder für alle Basismonome einer bestimmten Ordnung

$$\begin{aligned}
&\int \theta^-\theta^{3/0}\theta^3\theta^+\ d_L^4\theta = 1, \qquad (2.311)\\
&\int \theta^\mu\ d_L^4\theta = 0, \quad \mu\in\{+,3/0,3,-\},\\
&\int \theta^-\theta^+\ d_L^4\theta = \int \theta^-\theta^{3/0}\ d_L^4\theta = \int \theta^-\theta^3\ d_L^4\theta\\
=\ &\int \theta^3\theta^+\ d_L^4\theta = \int \theta^3\theta^{3/0}\ d_L^4\theta = \int \theta^{3/0}\theta^+\ d_L^4\theta = 0,\\
&\int \theta^-\theta^{3/0}\theta^3\ d_L^4\theta = \int \theta^-\theta^{3/0}\theta^+\ d_L^4\theta\\
=\ &\int \theta^-\theta^3\theta^+\ d_L^4\theta = \int \theta^{3/0}\theta^3\theta^+\ d_L^4\theta = 0,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\int d_R^4\theta\ \theta^-\theta^{3/0}\theta^3\theta^+ = 1, \qquad (2.312)\\
&\int d_R^4\theta\ \theta^\mu = 0, \quad \mu\in\{+,3/0,3,-\},
\end{aligned}$$

$$\int d_R^4\theta\ \theta^-\theta^+ = \int d_R^4\theta\ \theta^-\theta^{3/0} = \int d_R^4\theta\ \theta^-\theta^3 \qquad (2.313)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int d_R^4\theta\; \theta^3\theta^+ = \int d_R^4\theta\; \theta^3\theta^{3/0} = \int d_R^4\theta\; \theta^{3/0}\theta^+ = 0, \\
&\int d_R^4\theta\; \theta^-\theta^{3/0}\theta^3 = \int d_R^4\theta\; \theta^-\theta^{3/0}\theta^+ \\
&= \int d_R^4\theta\; \theta^-\theta^3\theta^+ = \int d_R^4\theta\; \theta^{3/0}\theta^3\theta^+ = 0.
\end{aligned} \tag{2.314}
$$

Die Translationsinvarianz ist ebenso erfüllt wegen

$$
\begin{aligned}
\int \partial_\theta^\mu \triangleright f(\theta^-\theta^{3/0}\theta^3\theta^+)\; d_L^4\theta &= 0, \quad \mu \in \{+,3,3/0,-\}, \\
\int d_R^4\theta f(\theta^+\theta^3\theta^{3/0}\theta^-) \triangleleft \partial_\theta^\mu &= 0.
\end{aligned} \tag{2.315}
$$

Wollen wir zum dazu konjugierten Kalkül übergehen, helfen uns jetzt die Substitutionen

$$
\begin{aligned}
d_L^4\theta \leftrightarrow d_{\bar{L}}^4\theta, &\qquad d_R^4\theta \leftrightarrow d_{\bar{R}}^4\theta, \\
f(\theta^-,\theta^3,\theta^{3/0},\theta^+) &\leftrightarrow f(\theta^+,\theta^3,\theta^{3/0},\theta^-), \\
f(\theta^-,\theta^{3/0},\theta^3,\theta^+) &\leftrightarrow f(\theta^+,\theta^{3/0},\theta^3,\theta^-), \\
\theta^\pm \leftrightarrow \theta^\mp, &\qquad (\partial_\theta)^\pm \leftrightarrow (\hat{\partial}_\theta)^\mp, \\
\triangleright \leftrightarrow \bar{\triangleright}, &\qquad \triangleleft \leftrightarrow \bar{\triangleleft}
\end{aligned} \tag{2.316}
$$

die entsprechenden Ausdrücke aus den obigen Identitäten zu erhalten.

Als nächsten Schritt beabsichtigen wir wieder die Grassmannexponentiale zu bestimmen, wofür die Kenntnis zweier dualer Basen erforderlich ist. Mit etwas Geschick kann man bestätigen, dass die in den folgenden Paarungen auftretenden Monome bis auf einen entsprechenden Vorfaktor tatsächlich duale Basen bilden.

$$
\begin{aligned}
&\langle \partial_\theta^+, \theta^- \rangle_{L,\bar{R}} = -q, \quad \langle \partial_\theta^{3/0}, \theta^3 \rangle_{L,\bar{R}} = 1, \\
&\langle \partial_\theta^0, \theta^{30} \rangle_{L,\bar{R}} = 1, \quad \langle \partial_\theta^-, \theta^+ \rangle_{L,\bar{R}} = -q^{-1}, \\
&\langle \partial_\theta^-\partial_\theta^+, \theta^-\theta^+ \rangle_{L,\bar{R}} = 1, \quad \langle \partial_\theta^0\partial_\theta^+, \theta^-\theta^{30} \rangle_{L,\bar{R}} = -q, \\
&\langle \partial_\theta^0\partial_\theta^+, \theta^-\theta^3 \rangle_{L,\bar{R}} = q\lambda\lambda_+^{-1}, \quad \langle \partial_\theta^{3/0}\partial_\theta^+, \theta^-\theta^3 \rangle_{L,\bar{R}} = -q, \\
&\langle \partial_\theta^-\partial_\theta^{3/0}, \theta^3\theta^+ \rangle_{L,\bar{R}} = -q^{-1}, \quad \langle \partial_\theta^0\partial_\theta^{3/0}, \theta^{30}\theta^3 \rangle_{L,\bar{R}} = -q^2, \\
&\langle \partial_\theta^-\partial_\theta^0, \theta^{30}\theta^+ \rangle_{L,\bar{R}} = -q^{-1}, \quad \langle \partial_\theta^-\partial_\theta^0, \theta^3\theta^+ \rangle_{L,\bar{R}} = q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}, \\
&\langle \partial_\theta^0\partial_\theta^{3/0}\partial_\theta^+, \theta^-\theta^{30}\theta^3 \rangle_{L,\bar{R}} = q^3, \quad \langle \partial_\theta^-\partial_\theta^{3/0}\partial_\theta^+, \theta^-\theta^3\theta^+ \rangle_{L,\bar{R}} = 1, \\
&\langle \partial_\theta^-\partial_\theta^0\partial_\theta^+, \theta^-\theta^3\theta^+ \rangle_{L,\bar{R}} = \lambda\lambda_+^{-1}, \quad \langle \partial_\theta^-\partial_\theta^0\partial_\theta^{3/0}, \theta^{30}\theta^3\theta^+ \rangle_{L,\bar{R}} = q,
\end{aligned} \tag{2.317}
$$

$$\langle \partial_\theta^- \partial_\theta^0 \partial_\theta^+ , \theta^- \theta^{30} \theta^+ \rangle_{L,\bar{R}} = 1,$$
$$\langle \partial_\theta^- \partial_\theta^{3/0} \partial_\theta^3 \partial_\theta^+ , \theta^- \theta^0 \theta^{30} \theta^+ \rangle_{L,\bar{R}} = -q^2.$$

Damit berechnet sich das Exponential zu

$$\begin{aligned}
\exp(\theta_{\bar{R}} \mid (\partial_\theta)_L) \;=\;& 1 \otimes 1 - q^{-1}\theta^- \otimes \partial_\theta^+ + \theta^3 \otimes \partial_\theta^{3/0} + \theta^{30} \otimes \partial_\theta^0 \\
& - q\theta^+ \otimes \partial_\theta^- + \theta^-\theta^+ \otimes \partial_\theta^- \partial_\theta^+ - q^{-1}\theta^-\theta^3 \otimes \partial_\theta^{3/0}\partial_\theta^+ \\
& - q\theta^3\theta^+ \otimes \partial_\theta^- \partial_\theta^{3/0} - q^{-2}\theta^{30}\theta^3 \otimes \partial_\theta^0 \partial_\theta^{3/0} \\
& + \frac{1}{2} q^{-2}\lambda_+ \theta^-\theta^0 \otimes \partial_\theta^0 \partial_\theta^+ + \frac{1}{2}\lambda_+ \theta^0\theta^+ \otimes \partial_\theta^- \partial_\theta^0 \\
& + q^{-3}\theta^-\theta^{30}\theta^3 \otimes \partial_\theta^0 \partial_\theta^{3/0} \partial_\theta^+ + \theta^-\theta^3\theta^+ \otimes \partial_\theta^- \partial_\theta^{3/0} \partial_\theta^+ \\
& + q^{-1}\theta^{30}\theta^3\theta^+ \otimes \partial_\theta^- \partial_\theta^0 \partial_\theta^{3/0} - \frac{1}{2} q^{-1}\lambda_+ \theta^-\theta^0\theta^+ \otimes \partial_\theta^- \partial_\theta^0 \partial_\theta^+ \\
& - q^2 \theta^-\theta^{30}\theta^3\theta^+ \otimes \partial_\theta^- \partial_\theta^0 \partial_\theta^{3/0} \partial_\theta^+ .
\end{aligned}$$

Man beachte, dass hier zum erstenmal ein echt q-deformierter Ausdruck für das Exponential vorliegt. Der Vollständigkeit halber geben wir noch die altbekannten Crossingsymmetrien für den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Paarungen und Exponentialen an:

$$\begin{aligned}
\langle \underline{\hat{\partial}}_\theta, \underline{\theta} \rangle_{\bar{L},R} & \overset{\substack{+\leftrightarrow - \\ q \leftrightarrow 1/q}}{\longleftrightarrow} \langle \underline{\partial}_\theta, \theta \rangle_{L,\bar{R}}\ , \\
\langle \underline{\theta}, \underline{\hat{\partial}}_\theta \rangle_{\bar{L},R} & \overset{\substack{+\leftrightarrow - \\ q \leftrightarrow 1/q}}{\longleftrightarrow} \langle \underline{\theta}, \underline{\partial}_\theta \rangle_{L,\bar{R}}\ ,
\end{aligned} \tag{2.318}$$

$$\begin{aligned}
\langle \underline{\hat{\partial}}_\theta, \underline{\theta} \rangle_{\bar{L},R} & \overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \langle \underline{\theta}, \underline{\hat{\partial}}_\theta \rangle_{\bar{L},R}\ , \\
\langle \underline{\partial}_\theta, \underline{\theta} \rangle_{L,\bar{R}} & \overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \langle \underline{\theta}, \underline{\partial}_\theta \rangle_{L,\bar{R}}
\end{aligned} \tag{2.319}$$

und

$$\begin{aligned}
\exp(\theta_R \mid (\hat{\partial}_\theta)_{\bar{L}}) & \overset{\substack{+\leftrightarrow - \\ q \leftrightarrow 1/q}}{\longleftrightarrow} \exp(\theta_{\bar{R}} \mid (\partial_\theta)_L)\ , \\
\exp((\hat{\partial}_\theta)_R \mid \theta_{\bar{L}}) & \overset{\substack{+\leftrightarrow - \\ q \leftrightarrow 1/q}}{\longleftrightarrow} \exp((\partial_\theta)_{\bar{R}} \mid \theta_L)\ ,
\end{aligned} \tag{2.320}$$

$$\begin{aligned}
\exp(\theta_R \mid (\hat{\partial}_\theta)_{\bar{L}}) & \overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \exp((\hat{\partial}_\theta)_{\bar{R}} \mid \theta_{\bar{L}})\ , \\
\exp(\theta_{\bar{R}} \mid (\partial_\theta)_L) & \overset{+\leftrightarrow -}{\longleftrightarrow} \exp((\partial_\theta)_{\bar{R}} \mid \theta_L).
\end{aligned} \tag{2.321}$$

Die Übergangssymbole sollen hierbei die gleiche Bedeutung wie in (2.160) und (2.161) haben.

Translationen werden bekanntlich durch das Koprodukt beschrieben. Nach Einführung von Links- und Rechtskoordinaten lauten diese im Fall einer Basis normalgeordneter Monome

$$\begin{aligned}
\Delta_L(\theta^\mu) &= \theta_l^\mu + \theta_r^\mu, \quad \mu \in \{+, 3/0, 0, -,\} && (2.322)\\
\Delta_L(\theta^+\theta^{3/0}) &= \theta_l^+\theta_l^{3/0} + \theta_l^+\theta_r^{3/0} - q^{-2}\theta_l^{3/0}\theta_r^+ + \theta_r^+\theta_r^{3/0},\\
\Delta_L(\theta^+\theta^0) &= \theta_l^+\theta_l^0 + \theta_l^+\theta_r^0 - \theta_l^0\theta_r^+ + \theta_r^+\theta_r^0\\
&\quad + \lambda\lambda_+^{-1}\theta_l^+\theta_r^{3/0} - q^{-2}\lambda\lambda_+^{-1}\theta_l^{3/0}\theta_r^+,\\
\Delta_L(\theta^+\theta^-) &= \theta_l^+\theta_l^- + \theta_l^+\theta_r^- - q^{-2}\theta_l^-\theta_r^+ + \theta_r^+\theta_r^-\\
&\quad + q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}\theta_l^{3/0}\theta_r^{3/0},\\
\Delta_L(\theta^{3/0}\theta^0) &= \theta_l^{3/0}\theta_l^0 + \theta_l^{3/0}\theta_r^0 - q^{-2}\theta_l^0\theta_r^{3/0} + \theta_r^{3/0}\theta_r^0\\
&\quad + \lambda\lambda_+^{-1}\theta_l^{3/0}\theta_r^{3/0} - q^{-2}\lambda\theta_l^-\theta_r^+,\\
\Delta_L(\theta^{3/0}\theta^-) &= \theta_l^{3/0}\theta_l^- + \theta_l^{3/0}\theta_r^- - q^{-2}\theta_l^-\theta_r^{3/0} + \theta_r^{3/0}\theta_r^-,\\
\Delta_L(\theta^0\theta^-) &= \theta_l^0\theta_l^- + \theta_l^0\theta_r^- - \theta_l^-\theta_r^0 + \theta_r^0\theta_r^-\\
&\quad + \lambda\lambda_+^{-1}\theta_l^{3/0}\theta_r^- - q^{-2}\lambda\lambda_+^{-1}\theta_l^-\theta_r^{3/0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_L(\theta^+\theta^{3/0}\theta^0) &= \theta_l^+\theta_l^{3/0}\theta_l^0 + \theta_l^+\theta_l^{3/0}\theta_r^0 - q^{-2}\theta_l^+\theta_l^0\theta_r^{3/0} + q^{-2}\theta_l^{3/0}\theta_l^0\theta_r^+ && (2.323)\\
&\quad + \theta_l^+\theta_r^{3/0}\theta_r^0 - q^{-2}\theta_l^{3/0}\theta_r^+\theta_r^0 + q^{-2}\theta_l^0\theta_r^+\theta_r^{3/0} + \theta_r^+\theta_r^{3/0}\theta_r^0\\
&\quad + q^{-1}\lambda\theta_l^+\theta_l^{3/0}\theta_r^{3/0} - q^{-2}\lambda\theta_l^+\theta_l^-\theta_r^+,\\
\Delta_L(\theta^+\theta^{3/0}\theta^-) &= \theta_l^+\theta_l^{3/0}\theta_l^- + \theta_l^+\theta_l^{3/0}\theta_r^- - q^{-2}\theta_l^+\theta_l^-\theta_r^{3/0} + q^{-4}\theta_l^{3/0}\theta_l^-\theta_r^+\\
&\quad + \theta_l^+\theta_r^{3/0}\theta_r^- - q^{-2}\theta_l^{3/0}\theta_r^+\theta_r^- + q^{-4}\theta_l^-\theta_r^+\theta_r^{3/0} + \theta_r^+\theta_r^{3/0}\theta_r^-,\\
\Delta_L(\theta^+\theta^0\theta^-) &= \theta_l^+\theta_l^0\theta_l^- + \theta_l^+\theta_l^0\theta_r^- - \theta_l^+\theta_l^-\theta_r^0 + q^{-2}\theta_l^0\theta_l^-\theta_r^+\\
&\quad + \theta_l^+\theta_r^0\theta_r^- - \theta_l^0\theta_r^+\theta_r^- + q^{-2}\theta_l^-\theta_r^+\theta_r^0 + \theta_r^+\theta_r^0\theta_r^-\\
&\quad + \lambda\lambda_+^{-1}\theta_l^+\theta_l^{3/0}\theta_r^- + q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}\theta_l^{3/0}\theta_l^0\theta_r^{3/0}\\
&\quad + q^{-4}\lambda\lambda_+^{-1}\theta_l^{3/0}\theta_l^-\theta_r^+ + q\lambda(q\lambda-2)\theta_l^+\theta_l^-\theta_r^{3/0}\\
&\quad + \lambda\lambda_+^{-1}\theta_l^+\theta_r^{3/0}\theta_r^- - 2q^{-2}\lambda\lambda_+^{-1}\theta_l^{3/0}\theta_r^+\theta_r^-\\
&\quad - q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}\theta_l^{3/0}\theta_r^{3/0}\theta_r^0 + q^{-4}\lambda\lambda_+^{-1}\theta_l^-\theta_r^+\theta_r^{3/0},\\
\Delta_L(\theta^{3/0}\theta^0\theta^-) &= \theta_l^{3/0}\theta_l^0\theta_l^- + q^{-4}\theta_l^0\theta_l^-\theta_r^{3/0} - \theta_l^{3/0}\theta_l^-\theta_r^0\\
&\quad - q^{-2}\theta_l^0\theta_r^{3/0}\theta_r^+ + q^{-2}\theta_l^-\theta_r^{3/0}\theta_r^0 + \theta_r^{3/0}\theta_r^0\theta_r^-\\
&\quad + q^{-3}\lambda\theta_l^{3/0}\theta_l^-\theta_r^{3/0} + q^{-2}\lambda\theta_l^-\theta_r^+\theta_r^-,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_L(\theta^+\theta^{3/0}\theta^0\theta^-) &= \theta_l^+\theta_l^{3/0}\theta_l^0\theta_l^- + \theta_l^+\theta_l^{3/0}\theta_l^0\theta_r^- - \theta_l^+\theta_l^{3/0}\theta_l^-\theta_r^0 && (2.324)\\
&\quad - q^{-4}\theta_l^{3/0}\theta_l^0\theta_l^-\theta_r^+ + q^{-4}\theta_l^+\theta_l^0\theta_l^-\theta_r^{3/0} + \theta_l^+\theta_l^{3/0}\theta_r^0\theta_r^-\\
&\quad - q^{-2}\theta_l^+\theta_l^0\theta_r^{3/0}\theta_r^- + q^{-2}\theta_l^+\theta_l^-\theta_r^{3/0}\theta_r^0 + q^{-2}\theta_l^{3/0}\theta_l^0\theta_r^+\theta_r^-
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- q^{-4}\theta_l^{3/0}\theta_l^-\theta_r^+\theta_r^0 + q^{-6}\theta_l^0\theta_l^-\theta_r^+\theta_r^{3/0} + \theta_l^+\theta_r^{3/0}\theta_r^0\theta_r^- \\
&- q^{-2}\theta_l^{3/0}\theta_r^+\theta_r^0\theta_r^- + q^{-2}\theta_l^0\theta_r^+\theta_r^{3/0}\theta_r^- + q^{-4}\theta_l^-\theta_r^+\theta_r^{3/0}\theta_r^0 \\
&+ \theta_r^+\theta_r^{3/0}\theta_r^0\theta_r^- - 3q^4\lambda\lambda_+^{-1}\theta_l^+\theta_l^{3/0}\theta_l^-\theta_r^0 \\
&+ q^{-2}\lambda\lambda_+^{-1}\theta_l^+\theta_l^{3/0}\theta_r^{3/0}\theta_r^- - q^{-2}\lambda\theta_l^+\theta_l^-\theta_r^+\theta_r^- \\
&- q^6\lambda\lambda_+^{-1}\theta_l^{3/0}\theta_l^-\theta_r^+\theta_r^{3/0} + q^{-2}\lambda\lambda_+^{-1}\theta_l^{3/0}\theta_r^+\theta_r^{3/0}\theta_r^-.
\end{aligned}
$$

Die entsprechenden Formeln für die korrespondierenden Antipoden ergeben sich zu

$$
\begin{aligned}
&S(\theta^\mu) = -\theta^\mu, \quad \mu \in \{+, 3/0, 0, -\} \\
&S(\theta^\mu\theta^\nu) = q^{-2}\theta^\mu\theta^\nu, \\
&S(\theta^\mu\theta^\nu\theta^\rho) = -q^{-6}\theta^\mu\theta^\nu\theta^\rho \\
&S(\theta^+\theta^{3/0}\theta^0\theta^-) = q^{-12}\theta^+\theta^{3/0}\theta^0\theta^-.
\end{aligned}
\tag{2.325}
$$

Hierbei ist es wichtig zu beachten, dass die Monome mit unspezifizierten Indizes sich immer auf solche mit der Normalordnung $\theta^+\theta^3\theta^{3/0}\theta^-$ beziehen. Die Crossing-symmetrien welche den Zusammenhang zwischen den unterschiedlichen Versionen für Koprodukt und Antipode regeln, lauten

$$
\begin{aligned}
&\Delta_L, S_L \overset{\substack{+\leftrightarrow - \\ q\leftrightarrow 1/q}}{\longleftrightarrow} \Delta_{\bar{L}}, S_{\bar{L}}, \\
&\Delta_R, S_R \overset{\substack{+\leftrightarrow - \\ q\leftrightarrow 1/q}}{\longleftrightarrow} \Delta_{\bar{R}}, S_{\bar{R}},
\end{aligned}
\tag{2.326}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta_L, S_L \overset{\substack{+\leftrightarrow - \\ q\leftrightarrow 1/q}}{\longleftrightarrow} \Delta_R, S_R, \\
&\Delta_{\bar{L}}, S_{\bar{L}} \overset{\substack{+\leftrightarrow - \\ q\leftrightarrow 1/q}}{\longleftrightarrow} \Delta_{\bar{R}}, S_{\bar{R}},
\end{aligned}
\tag{2.327}
$$

wobei die Übergangssymbole dieselbe Bedeutung haben wie im Fall der Paarungen und Exponentiale.

Zuletzt wollen wir wieder die Ausdrücke des Zopfprodukts mit einer Superzahl

$$
f(\theta^+, \theta^{3/0}, \theta^0, \theta^-) = f' + f_{\underline{k}}\theta^{\underline{k}},
\tag{2.328}
$$

angeben, wobei das Symbol $\theta^{\underline{k}}$ hier für ein Monom in der Normalordnung $\theta^+\theta^{3/0}\theta^0\theta^-$ steht. Das Zopfprodukt berechnet sich dann wie gewohnt über die Formeln

$$
\begin{aligned}
f(\theta^+, \theta^{3/0}, \theta^0, \theta^-) \,\underline{\odot}_{L/\bar{L}}\, g &= g \otimes f + \Sigma_{\underline{K}}((O_f)^{\underline{K}}_{L/\bar{L}} \triangleright g) \otimes \theta^{\underline{K}}, \\
g \,\underline{\odot}_{R/\bar{R}}\, f(\theta^+, \theta^{3/0}, \theta^0, \theta^-) &= f' \otimes g + \Sigma_{\underline{K}}(g \triangleleft (O_f)^{\underline{K}}_{L/\bar{L}}) \otimes \theta^{\underline{K}}.
\end{aligned}
\tag{2.329}
$$

Im unkonjugierten Fall benötigen wir dafür die Operatoren

$$\begin{aligned}
(O_f)^+_L &= \tilde\Lambda(\tau^3)^{-1/2}(f_+\sigma^2 - q^{1/2}\lambda\lambda_+^{1/2}f_{3/0}S^1 \\
&\quad - \lambda^2 f_- T^- S^1 + q^{1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2}f_0(T^-\sigma^2 + qS^1)), \\
(O_f)^{3/0}_L &= \tilde\Lambda(-q^{3/2}\lambda\lambda_+^{-1/2}f_+T^2 + f_{3/0}\tau^1 \\
&\quad - \lambda_+^{-1}f_0(\lambda^2T^-T^2 + q(\tau^1 - \sigma^2)) \\
&\quad + q^{-1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2}(\tau^1T^- - q^{-1}S^1)), \\
(O_f)^0_L &= \tilde\Lambda(f_0\sigma^2 - q^{-1/2}\lambda\lambda_+^{1/2}f_-S^1), \\
(O_f)^-_L &= \tilde\Lambda(\tau^3)^{1/2}(-q^{1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2}f_0T^2 + f_-\tau^1),
\end{aligned} \tag{2.330}$$

$$\begin{aligned}
(O_f)^{+,3/0}_L &= \tilde\Lambda^2(\tau^3)^{-1/2}(f_{+,3/0}(\tau^1\sigma^2 - q^2\lambda^2T^2S^1) \\
&\quad + \lambda_+^{-1}f_{+0}(-q^{-1}\tau^1\sigma^2 + q^{-1}(\sigma^2)^2 + q\lambda^2T^2S^1) \\
&\quad + \lambda^2\lambda_+^{-1}f_{+-}(q^{-1/2}T^-\tau^1\sigma^2 - q^{-3/2}S^1\sigma^2 - q^{3/2}\lambda T^-T^2S^1) \\
&\quad - \lambda\lambda_+^{-1}f_{3/0,0}(q^{-3/2}T^-\tau^1\sigma^2 + q^{-1/2}S^1\sigma^2 - q^{1/2}\lambda^2T^-T^2S^1) \\
&\quad + \lambda^2\lambda_+^{-1}f_{0-}(q(T^-)^2\tau^1\sigma^2 - q^{-2}(S^1)^2 - q^3\lambda^2(T^-)^2T^2S^1) \\
&\quad + q^{-1}\lambda^2 f_{3/0,-}(S^1)^2) \\
(O_f)^{+0}_L &= \tilde\Lambda^2(\tau^3)^{-1/2}(f_{+0}(\sigma^2)^2 + q^{-1/2}\lambda\lambda_+^{-1}f_{+-}S^1\sigma^2 \\
&\quad - q^{-1/2}\lambda\lambda_+^{-1}f_{3/0,0}S^1\sigma^2 + \lambda^2\lambda_+f_{3/0,-}(S^1)^2 \\
&\quad - q^{-1}\lambda^2f_{0-}(S^1)^2), \\
(O_f)^{+-}_L &= \tilde{\Lambda^2}(-q^{1/2}\lambda^2\lambda_+^{-1}f_{+0}T^2\sigma^2 + f_{+-}(\tau^1\sigma^2 - q\lambda^2T^2S^1) \\
&\quad + q\lambda^2f_{3/0,0}T^2S^1 - q^{-3/2}\lambda\lambda_+^{-1/2}f_{3/0,-}\tau^1S^1 \\
&\quad + q^{1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2}f_{0-}(T^-\tau^1\sigma^2 + q^{-2}\tau^1\sigma^2 - q^3\lambda^2T^-T^2S^1)), \\
(O_f)^{3/0,0}_L &= \tilde{\Lambda^2}(q\lambda^2f_{+-}T^2S^1 + f_{3/0,0}\tau^1\sigma^2 - q^{-1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2}f_{3/0,-}\tau^1S^1 \\
&\quad + q^{-1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2}f_{0-}(T^-\tau^1\sigma^2 + q^{-1}\tau^2S^1 + q^2\lambda^2T^-T^2S^1)), \\
(O_f)^{3/0,-}_L &= \tilde\Lambda^2(\tau^3)^{1/2}(q^6\lambda^2\lambda_+^{-1}f_{+0}(T^2)^2 - q^{-7/2}\lambda^4\lambda_+^{-1/2}f_{+-}T^2\tau^1 \\
&\quad - q^{9/2}\lambda^5\lambda_+^{-1/2}f_{3/0,0}T^2\tau^1 \\
&\quad + q^{-1}\lambda_+^{-1}f_{0-}(\tau^1\sigma^2 - (\tau^1)^2 - q^{-2}\lambda^2T^2S^1)), \\
(O_f)^{0-}_L &= \tilde\Lambda^2(\tau^3)^{-1/2}f_{0-}(\tau^1\sigma^2 - q^2\lambda^2T^2S^1),
\end{aligned} \tag{2.331}$$

$$\begin{aligned}
(O_f)^{+,3/0,0} &= \tilde\Lambda^3(\tau^3)^{-1/2}(f_{+,3/0,0}(\tau^1(\sigma^2)^2 - q^2\lambda^2T^2S^1\sigma^2) \\
&\quad + q^{-3/2}\lambda\lambda - +^{-1/2}f_{+,3/0,-}(q^3\lambda^2T^2(S^1)^2 - \tau^1S^1\sigma^2) \\
&\quad + q^{-1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2}f_{+0-}(q^4\lambda^2T^-T^2S^1\sigma^2 \\
&\quad - q^2T^-\tau^1(\sigma^2)^2 + q^3\lambda^2(\lambda^2+1)T^2(S^1)^2 + (\lambda_+ - q^3)\tau^1S^1\sigma^2)
\end{aligned} \tag{2.332}$$

$$
\begin{aligned}
& + \lambda^2 f_{3/0\,0-}(t^-\tau^1 S^1\sigma^2 - q^3\lambda^2 T^- T^2 (S^1)^2)), \\
(O_f)^{+,3/0,-}_L \;=\; & \tilde\Lambda^3 (q^{5/2}\lambda\lambda_+^{-1/2} f_{+,3/0,0}(q^2\lambda^2 (T^2)^2 S^1 - T^2\tau^1\sigma^2) \\
& + f_{+,3/0,-}((\tau^1)^2\sigma^2 - q^4\lambda^2 T^2\tau^1\sigma^2) \\
& + q f_{+0-}(-q^3\lambda^4\lambda_+^{-1} T^- (T^2)^2 S^1 - \lambda_+^1(\lambda^2+1)\tau^1\sigma^2(\sigma^2 - \tau^1) \\
& + q\lambda(\lambda + q^3) T^2 (q^2\tau^1 S^1 - S^1\sigma^2)) \\
& + q^{3/1}\lambda\lambda_+^{-1/2} f_{3/0,0-}(T^-\tau^1\sigma^2 - q^{-3}(\lambda_+ - q^3)\tau^1 S^1\sigma^2 \\
& + q^2\lambda^2 T^- T^2 \tau^1 S^1 - \lambda^2 T^2 (S^1)^2)), \\
(O_f)^{+0-}_L \;=\; & \tilde\Lambda^3 (f_{+0-}(\tau^1(\sigma^2)^2 - q^2\lambda^2\lambda_+^{-1} T^2 S^1\sigma^2) \\
& + f_{3/0,0,-}(-q^{-3/2}\lambda\lambda_+^{1/2}\tau^1 S^1\sigma^2 + q^{1/2}\lambda^2\lambda_+^{-1/2} T^2 (S^1)^2)), \\
(O_f)^{3/0,0-} \;=\; & \tilde\Lambda^3 (\tau^3)^{1/2} (q^{7/2}\lambda\lambda_+^{-1/2} f_{+0-}(q^2\lambda^2 (T^2)^2 S^1 - T^2\tau^1\sigma^2) \\
& + f_{3/0,0-}((\tau^1)^2\sigma^2 - q^4\lambda^2 T^2\tau^1 S^1)),
\end{aligned}
$$

$$
(O_f)^{+,3/0,0-}_L = f_{+,3/0,0-}\tilde\Lambda^4,
$$

während wir im konjugierten zurückgreifen auf

$$
\begin{aligned}
(O_f)^{+}_{\bar L} \;=\; & \tilde\Lambda^{-1}(f_+\sigma^2 - q^{-1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2} f_0 S^1), \qquad (2.333) \\
(O_f)^{3/0}_{\bar L} \;=\; & \tilde\Lambda^{-1}(\tau^3)^{-1/2}(-q^{1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2} f_+ (T^+\sigma^2 + q\tau^3 T^2) \\
& + f_{3/0}\sigma^2 + f_0(\lambda^2 T^+ S^1 + q^{-1}(\tau^3\tau^1 - \sigma^2)) \\
& - q^{1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2} f_- S^1), \\
(O_f)^{0}_{\bar L} \;=\; & \tilde\Lambda^{-1}(\tau^3)^{1/2}(-q^{1/2}\lambda\lambda_+^{1/2} f_+ T^2 + f_0(\tau^3)^{-1}\tau^1), \\
(O_f)^{-}_{\bar L} \;=\; & \tilde\Lambda^{-1}(q^2\lambda^2 f_+ T^2 T^+ - q^{3/2}\lambda\lambda_+^{1/2} T^2 \\
& - q^{1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2} f_0 (qT^+\tau^1 - T^2)) + f_-\tau^1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(O_f)^{+,3/0}_{\bar L} \;=\; & \tilde\Lambda^{-2}(\tau^3)^{-1/2}(f_{+,3/0}(\sigma^2)^2 \qquad (2.334) \\
& + q^{-1}\lambda_+^{-1} f_{+0}(-(\sigma^2)^2 + \tau^3\tau^1\sigma^2 - q^2\lambda^2\tau^3 T^2 S^1) \\
& - q^{1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2} f_{+-} S^1\sigma^2 + q^{-1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2} f_{3/0,0} S^1\sigma^2 \\
& + q^2\lambda^2\lambda_+^{-1} f_{0-}(S^1)^2)), \\
(O_f)^{+0}_{\bar L} \;=\; & \tilde\Lambda^{-2}(\tau^3)^{1/2} f_{+0}(\tau^1\sigma^2 - q^2\lambda^2 T^2 S^1)), \\
(O_f)^{+-}_{\bar L} \;=\; & \tilde\Lambda^{-2}(-q^{3/2}\lambda\lambda_+^{1/2} f_{+,3/0} \\
& + q^{1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2} f_{+0}(T^2\sigma^2 - T^+\tau^1\sigma^2 + T^+ T^2\tau^1) \\
& + f_{+-}\tau^1\sigma^2 - q\lambda^2 f_{3/0,0} T^2 S^1 - q^{3/2}\lambda\lambda_+^{-1/2} f_{0-}\tau^1 S^1), \\
(O_f)^{3/0,0}_{\bar L} \;=\; & \tilde\Lambda^{-2}(q^{1/2}\lambda\lambda_+^{1/2} f_{+,3/0} T^2\sigma^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ q^{-1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2} f_{+0}(-T^2\sigma^2 - q^3 T^+\tau^1\sigma^2 + q^5\lambda^2 T^+T^2S^1)\\
&- q\lambda^2 f_{+-}T^2S^1 + f_{3/0,0}(\tau^1\sigma^2 - q\lambda^3 T^2S^1)\\
&+ q^{-1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2} f_{0-}\tau^1 S^1),\\
(O_f)^{3/0,-}_{\bar{L}} \;=\;& \tilde{\Lambda}(\tau^3)^{1/2}(q^3\lambda^2 f_{+,3/0}(T^2)^2\\
&+ q^2\lambda^2\lambda_+^{-1} f_{+0}((T^2)^2 + (\tau^3)^{-1}(T^+)^2\tau^1\sigma^2 - q^2\lambda^2(\tau^3)^{-1}(T^+)^2T^2S^1)\\
&+ q^{1/2} f_{+-}(\lambda\lambda_+^{-1/2}(\tau^3)^{-1}T^+\tau^1\sigma^2 - qT^2\tau^1\\
&- q^2\lambda\lambda_+^{-1/2}T^2\tau^1 + q^3\lambda^3\lambda_+^{-1/2}(\tau^3)^{-1}T^+T^2S^1)\\
&+ q^{1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2} f_{3/0,0}(T^2\tau^1 - q(\tau^3)^{-1}T^+\tau^1\sigma^2 + q^3\lambda^2(\tau^3)^{-1}T^+T^2S^1))\\
&+ f_{3/0,-}(\tau^3)^{-1}(\tau^1\sigma^2 - q^2\lambda^2T^2S^1)\\
&+ q^{-1}\lambda_+^{-1} f_{0-}(\tau^3)^{-1}(\tau^1\sigma^2 + \tau^3(\tau^1)^2 + \lambda^2T^2S^1)),\\
(O_f)^{0-}_{\bar{L}} \;=\;& \tilde{\Lambda}^{-2}(\tau^3)^{1/2}(q^4\lambda^2\lambda_+ f_{+,3/0}(T^2)^2\\
&+ q^3\lambda^2 f_{+0}(T^2)^2 - q^{-5/2}\lambda\lambda_+^{1/2} f_{+-}T^2\tau^1\\
&+ q^{3/2}\lambda\lambda_+^{1/2} f_{3/0,0}T^2\tau^1 + f_{0-}(\tau^1)^2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(O_f)^{+,3/0,0}_{\bar{L}} \;=\;& \tilde{\Lambda}^{-3}(f_{+,3/0,0}(\tau^1(\sigma^2)^2 - q^2\lambda^2T^2S^1\sigma^2)), \qquad (2.335)\\
(O_f)^{+,3/0,-}_{\bar{L}} \;=\;& \tilde{\Lambda}^{-3}(q^{1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2} f_{+,3/0,0}(\tau^3T^2\tau^1\sigma^2 - qT^+\tau^1(\sigma^2)^2\\
&- q^2\lambda^2\tau^3(T^2)^2S^1 + q^3\lambda^2T^+T^2S^1\sigma^2)\\
&+ f_{+,3/0,-}\tau^1(\sigma^2)^2\\
&+ q\lambda_+^{-1} f_{+0-}(\tau^1(\sigma^2)^2 + q^{-2}\tau^3(\tau^1)^2\sigma^2\\
&+ \lambda^2(T^2S^1\sigma^2 - qT^+\tau^1S^1\sigma^2 - q^2\tau^3T^2\tau^1S^1\\
&+ q^3\lambda^2T^+T^2(S^1)^2))\\
&+ q^{3/2}\lambda\lambda_+^{-1/2} f_{3/0\,0-}(\tau^1S^1\sigma^2 - q^2\lambda^2T^2(S^1)^2),\\
(O_f)^{3/0,0-}_{\bar{L}} \;=\;& \tilde{\Lambda}^{-3}(q^4\lambda^2 f_{+,3/0,0}T^+T^2(q^2\lambda^2T^2S^1 - \tau^1\sigma^2)\\
&+ q^{1/2}\lambda\lambda_+^{1/2} f_{+,3/0,-}(T^2\tau^1\sigma^2 - q^2\lambda^2(T^2)^2S^1)\\
&+ q^{-1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2} f_{+0-}(T^2\tau^1\sigma^2 + q\tau^1S^1\sigma^2\\
&- q^3T^+(\tau^1)^2\sigma^2 + q^2(T^2)^2S^1 + q^{7/2}\lambda^2T^2(S^1)^2 + q^7\lambda^2T^+T^2\tau^1S^1)\\
&+ f_{3/0,0-}((\tau^1)^2\sigma^2 - q^4\lambda^2T^2\tau^1S^1)),\\
(O_f)^{+0-}_{\bar{L}} \;=\;& \tilde{\Lambda}^{-3}(\tau^3)^{1/2}(q^{3/2}\lambda\lambda_+^{1/2} f_{+,3/0\,0}(qT^2\tau^1\sigma^2 - q^3\lambda^2(T^2)^2S^1)\\
&+ f_{+0-}((\tau^1)^2\sigma^2 - q^4\lambda^2T^2\tau^1S^1)),
\end{aligned}
$$

$$
(O_f)^{+,3/0,0-}_{\bar{L}} = \tilde{\Lambda}^{-4} f_{+,3/0,0-}. \qquad (2.336)
$$

Abschließend sei bemerkt, dass diese Formeln durchaus von einer großen Komplexität gekennzeichnet sind. Ihr besonderer Wert zeigt sich jedoch erst bei ihrer Realisierung auf Computeralgebrasystemen, wo sie bei Kenntnis der Darstellungen für die Symmetriegeneratoren eine einfachere und zeitsparende Berechnung von Vertauschungsrelationen garantieren.

## 2.5 Ergänzungen zur Superanalysis

In diesem Abschnitt wollen wir aufzeigen, dass wir tatsächlich eine funktionierende Superanalysis konstruiert haben. Dazu betrachten wir einige interessante Punkte, die auch schön die Analogie zum undeformierten Fall aufzeigen. Zuerst einmal ist die Translationsinvarianz der Integrale in der lokalen Form gleichbedeutend mit den folgenden Regeln zur partiellen Integration:

$$\begin{aligned} \int f(\underline{\theta})\,[(\partial_\theta)_A \triangleright h(\underline{\theta})]\, d_L^n\theta &= \int [f(\underline{\theta}) \triangleleft (\partial_\theta)_A]\, h(\underline{\theta})\, d_L^n\theta, \\ \int d_R^n\theta\,[f(\underline{\theta}) \triangleleft (\partial_\theta)]\, h(\underline{\theta}_A) &= \int d_R^n\,\theta(f\underline{\theta})\,[(\partial_\theta)_A \triangleright h(\underline{\theta})]\,. \end{aligned} \tag{2.337}$$

Um dies einzusehen, muss man die Formeln

$$\begin{aligned} f(\partial \triangleright g) &= \partial_{(2)} \triangleright [(f \triangleleft \partial_{(1)})g], \\ (f \triangleleft \partial)g &= [f(\partial_{(1)} \triangleright g)] \triangleleft \partial_{(2)}, \end{aligned} \tag{2.338}$$

welche man mittels der Leibnizregeln beweist, auf die Integranden anwenden.

Ein nächster interessanter Punkt ist, dass die Integrale auch unter globalen Translationen invariant sind. Diese globale Translationsinvarianz kann man ausdrücken als

$$\begin{aligned} &(1 \otimes \int \,.\, d_L^n\theta) \circ f(\psi \underline{\oplus}_{\bar{R}} \theta) = (\int \,.\, d_L^n\theta \otimes 1) \circ f(\theta \underline{\oplus}_{\bar{R}} \psi) \\ &= \int f(\underline{\theta}) d_L^n\theta, \end{aligned} \tag{2.339}$$

$$\begin{aligned} &(1 \otimes \int d_R^n\theta \,.\,) f(\psi \underline{\oplus}_{\bar{L}} \theta) = (\int d_R^n\theta \,.\, \otimes 1) \circ f(\theta \underline{\oplus}_{\bar{L}} \psi) \\ &= \int d_R^n\theta f(\underline{\theta}). \end{aligned} \tag{2.340}$$

Diese Identitäten lassen sich direkt durch Einsetzen bestätigen. In [6] wird interessanterweise das Integral abstrakt über diese Eigenschaft definiert. Wir sind hier den umgekehrten Weg gegangen, indem wir das Integral durch eine operative Vorschrift konkret eingeführt haben und anschliessend die Translationsinvarianz bestätigen konnten.

Weiterhin stellt sich heraus, dass man mit den Exponentialen wieder globale Translationen erhält; man prüft durch Rechnung leicht nach, dass folgende Versionen der Taylorregel gelten [29]

$$\exp(\theta'_R \mid (\hat{\partial}_\theta)_{\bar{L}}) \triangleright f(\theta) = f(\theta' \underline{\oplus}_L \theta), \tag{2.341}$$

$$f(\theta) \,\bar{\triangleleft}\, \exp((\hat{\partial}_\theta)_R \mid \theta'_{\bar{L}}) = f(\theta \underline{\oplus}_{\bar{R}} \theta'). \tag{2.342}$$

Als letzten (aber für die Quantenfeldtheorie sehr wichtigen) Punkt zeigen wir noch die Möglichkeit der Konstruktion von (Super-)$\delta$-Distributionen auf. Wie immer in einer q-deformierten Analogie zum klassischen Fall fordern wir für die $\delta$-Distributionen

$$\begin{aligned}
\int f(\underline{\theta})\delta^n_{\bar{L}/L}(\underline{\theta})\, d^n_{\bar{L}/L}\theta &= \int \delta^n_{\bar{L}/L}(\underline{\theta}) f(\underline{\theta})\, d^n_{\bar{L}/L}\theta = f(\underline{\theta} = \underline{0}), \\
\int d^n_{\bar{R}/R}\theta\, f(\underline{\theta})\, \delta^n_{\bar{R}/R}(\underline{\theta}) &= \int d^n_{\bar{R}/R}\theta\, \delta^n_{\bar{R}/R}(\underline{\theta})\, f(\underline{\theta}) = f(\underline{\theta} = \underline{0}).
\end{aligned} \tag{2.343}$$

Diese Forderungen lassen sich dann in allen Quantenräumen erfüllen, wenn man die $\delta$-Distributionen in der nachstehenden Art und Weise definiert:

a) Quantenebene

$$\begin{aligned}
\delta^2_L(\underline{\theta}) &= \delta^2_{\bar{R}}(\underline{\theta}) = \theta^2\theta^1, \\
\delta^2_{\bar{L}}(\underline{\theta}) &= \delta^2_R(\underline{\theta}) = \theta^1\theta^2,
\end{aligned}$$

b) 3-dimensionaler Euklidischer Raum

$$\begin{aligned}
\delta^3_L(\underline{\theta}) &= \delta^3_{\bar{R}}(\underline{\theta}) = \theta^+\theta^3\theta^-, \\
\delta^3_{\bar{L}}(\underline{\theta}) &= \delta^3_R(\underline{\theta}) = \theta^-\theta^3\theta^+,
\end{aligned}$$

c) 4-dimensionaler Euklidischer Raum

$$\begin{aligned}
\delta^4_L(\underline{\theta}) &= \delta^4_{\bar{R}}(\underline{\theta}) = \theta^4\theta^3\theta^2\theta^1, \\
\delta^4_{\bar{L}}(\underline{\theta}) &= \delta^4_R(\underline{\theta}) = \theta^1\theta^2\theta^3\theta^4,
\end{aligned}$$

d) q-deformierter Minkowskiraum

$$\delta^4_L(\underline{\theta}) = \theta^- \theta^{3/0} \theta^3 \theta^+, \quad \delta^4_L(\underline{\theta}) = \theta^+ \theta^3 \theta^{3/0} \theta^+,$$
$$\delta^4_{\bar{L}}(\underline{\theta}) = \theta^+ \theta^{3/0} \theta^3 \theta^-, \quad \delta^4_{\bar{L}}(\underline{\theta}) = \theta^- \theta^3 \theta^{3/0} \theta^+.$$

Der Nachweis gelingt auch hier durch direkte Berechnung.

# Kapitel 3

# q-Deformierte Liealgebren

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der doch recht bemerkenswerten Tatsache auseinandersetzen, dass es möglich ist, die Quantenalgebren in einer Art und Weise darzustellen, die dem klassischen Fall weitgehend gleicht. Zu diesem Zweck werden wir die Form der Generatoren als Tensoroperatoren nutzen [20, 32]. Desweiteren verwenden wir in diesem Kapitel den Begriff des q-Kommutators, definiert über $[a, b]_q = a_{(1)} b S(a_{(2)})$. Dieser stellt also nichts anderes dar, als die Verallgemeinerung der adjungierten Wirkung auf Hopfalgebren. Im undeformierten Fall geht dieser q-Kommutator tatsächlich in den gewöhnlichen Kommutator über, was auch die Motivation für unsere Definition darstellt. Mittels der q-Kommutatoren lassen sich dann die Quantenalgebren wie im Klassischen als q-Liealgebren niederschreiben. Daran erkennt man sehr schön die Parallelen zwischen deformierter und undeformierter Struktur. Außerdem tritt der Symmetriecharakter der jeweiligen Elemente deutlicher hervor, was die Suche nach Objekten mit vorgegebenem Transformationsverhalten vereinfacht.

Die einzelnen Räume werden wie folgt abgehandelt: Zuerst geben wir die Formeln für die (definierende) Bahndrehimpulsdarstellung an, danach die Hopfstruktur und die Formeln der $q$-Kommutatoren explizit. Daraufhin geben wir, zuerst im Spinor-, dann im Vektorfall, die Matrixdarstellungen und die daraus folgenden cross product Relationen zwischen den Generatoren und Koordinaten an, sowie deren Umkehrungen. Als letztes folgt die explizite Form der $q$-Liealgebra und der Casimiroperatoren.

## 3.1 q-Liealgebra der dreidimensionalen Drehimpulse

### Bahndrehimpulsdarstellungen

Wir beginnen mit der Darstellung der Drehimpulsgeneratoren auf dem Differentialkalkül [20]:

$$L^A := \Lambda^{1/2} X^C \hat{\partial}^D \epsilon_{DC}{}^A. \tag{3.1}$$

$\varepsilon_{DC}{}^A$ ist ein q-Analogon des vollständig antisymmetrischen Tensors vom Rang drei [20] (siehe auch Anhang B). $\Lambda$ ist der bekannte Skalierungsoperator. Zur Erinnerung wiederholen wir seine Vertauschungsrelationen mit den Koordinaten und Ableitungen

$$\Lambda X^A = q^4 X^A \Lambda, \qquad \Lambda \hat{\partial}^A = q^{-4} \hat{\partial} \Lambda. \tag{3.2}$$

Explizit ausgeschrieben erhalten wir dann letztendlich

$$\begin{aligned} L^+ &= -q^{-1}\Lambda^{1/2} X^+ \hat{\partial}^3 + q^{-3}\Lambda^{1/2} X^3 \hat{\partial}^+, \\ L^3 &= -q^{-2}\Lambda^{1/2} X^+ \hat{\partial}^- + q^{-2}\Lambda^{1/2} X^- \hat{\partial}^+ - q^{-2}\lambda\Lambda^{1/2} X^3 \hat{\partial}^3, \\ L^- &= -q^{-1}\Lambda^{1/2} X^3 \hat{\partial}^- + q^{-3}\Lambda^{1/2} X^- \hat{\partial}^3. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Benutzen wir die Leibnizregeln der partiellen Ableitungen in der Form

$$X^A \hat{\partial}^B = g^{AB} + (R^{-1})^{AB}{}_{CD} \hat{\partial}^C X^D, \tag{3.4}$$

so können wir die Drehimpulse umschreiben in

$$L^A = -q^4 \Lambda^{1/2} \hat{\partial}^C X^D \epsilon_{DC}{}^A. \tag{3.5}$$

Diese Form unterscheidet sich von der vorhergehenden nur durch den Faktor $-q^4$ und die Vertauschung von $X$ mit $\hat{\partial}$, weshalb sich die Angabe der expliziten Form erübrigt.

Mit dem zweiten Differentialkalkül, der mit dem ersten (konjugierten) über die Umrechnung

$$\hat{\partial}^A = \Lambda^{-1}(\partial^A + q^3 \lambda X^A \partial^B \partial^C g_{BC}) \tag{3.6}$$

zusammenhängt [20], sind die Generatoren darstellbar durch

$$\begin{aligned} L^A &= q^4 \Lambda^{-1/2} X^C \partial^D \epsilon_{DC}{}^A \\ &= -\Lambda^{-1/2} \partial^C X^D \epsilon_{DC}{}^A. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Auch hier liest man die explizite Form sofort aus der oben angegebenen ab.

### Hopfstruktur und $q$-Kommutatoren

Wie bekannt, spannen die Generatoren $L^+, L^3$ und $L^-$ zusammen mit einem gruppenartigen Braidingoperator $\tau^{1/2}$ die Algebra $U_q(su(2))$ auf. Deren definierenden Relationen sind [20]

$$\begin{aligned} \tau^{1/2} L^{\pm} &= q^{\pm 2} L^{\pm} \tau^{1/2}, \\ \tau^{1/2} L^3 &= L^3 \tau^{1/2}, \\ L^- L^+ - L^+ L^- &= \tau^{-1/2} L^3. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Diese Algebra besitzt auß erdem eine Hopfstruktur. Für die Generatoren ist sie bestimmt durch [36]

$$\begin{aligned} \Delta(L^{\pm}) &= L^{\pm} \otimes \tau^{-1/2} + 1 \otimes L^{\pm}, \\ \Delta(L^3) &= L^3 \otimes \tau^{-1/2} + \tau^{1/2} \otimes L^3 \\ &\quad + \lambda \tau^{1/2} (q L^+ \otimes L^- + q^{-1} L^- \otimes L^+), \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} S(L^{\pm}) &= -L^{\pm} \tau^{1/2}, \\ S(L^3) &= -q^{-2} L^3 + \lambda \lambda_+ \tau^{1/2} L^+ L^-, \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} S^{-1}(L^{\pm}) &= -\tau^{1/2} L^{\pm}, \\ S^{-1}(L^3) &= -q^{-2} L^3 + \lambda \lambda_+ \tau^{1/2} L^+ L^-, \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\varepsilon(L^A) = 0. \tag{3.12}$$

Mit dieser Hopfstruktur lassen sich nun die q-Kommutatoren über die in der Einleitung motivierte Formel gemäß

$$\begin{aligned} [L^{ij}, V]_q &= L^{ij}_{(1)} V S(L^{ij}_{(2)}), \\ [V, L^{ij}]_q &= S^{-1}(L^{ij}_{(2)}) V L^{ij}_{(1)}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

berechnen, und zwar mit den Ergebnissen

$$\begin{aligned} [L^{\pm}, V]_q &= (L^{\pm} V - V L^{\pm}) \tau^{1/2}, \\ [L^3, V]_q &= L^3 V \tau^{1/2} - q^{-2} \tau^{1/2} V L^3 \\ &\quad - \lambda \tau^{1/2} (q^{-1} L^+ V \tau^{1/2} L^- + q L^- V \tau^{1/2} L^+) \\ &\quad + \lambda \lambda_+ \tau^{1/2} V \tau^{1/2} L^+ L^-. \end{aligned} \tag{3.14}$$

und

$$
\begin{aligned}
[V, L^{\pm}]_q &= \tau^{1/2}(VL^{\pm} - L^{\pm}V) \\
[V, L^3]_q &= \tau^{1/2}VL^3 - q^{-2}L^3V\tau^{1/2} \\
&\quad - \lambda\tau^{1/2}(q^{-1}L^+V\tau^{1/2}L^- + qL^-V\tau^{1/2}L^+) \\
&\quad + \lambda\lambda_+\tau^{1/2}L^+L^-V\tau^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Dabei steht $V$ für ein beliebiges Element aus einem Darstellungsraum der $U_q(su(2))$.

### Matrixdarstellungen und cross product Relationen

Richten wir nach diesen Definitionen unser Augenmerk nunmehr auf einige spezielle Darstellungen der Symmetriegeneratoren $L^+, L^3$ und $L^-$. Zuerst einmal erlauben uns die Formeln (3.1), (3.5) und (3.7) die Wirkung eines Generators auf dem Raum der Koordinatenfunktionen zu bestimmen, sobald wir die Wirkungen der zugehörigen Ableitungen kennen. Diese Arbeit wurde allerdings schon in [17] getan. Desweiteren ist es möglich, endlichdimensionale Darstellungen der Generatoren herzuleiten. Diese sogenannten Spindarstellungen sind für die $U_q(su(2))$ hinreichend bekannt [37, 9]. Im Fall der zweidimensionalen Spindarstellungen finden wir z.B.

$$
L^A \triangleright \theta^\alpha = (\sigma^A)^\alpha{}_\beta\, \theta^\beta, \quad \theta_\alpha \triangleleft L^A = \theta_\beta (\sigma^A)^\beta{}_\alpha
$$

mit

$$
\begin{aligned}
(\sigma^+)^\alpha{}_\beta &= -q^{1/2}\lambda_+^{-1/2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
(\sigma^-)^\alpha{}_\beta &= q^{-1/2}\lambda_+^{-1/2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
(\sigma^3)^\alpha{}_\beta &= \lambda_+^{-1}\begin{pmatrix} -q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Im Folgenden verwenden wir stets die Konvention, dass der obere Index die Spalten und entsprechend der untere Index die Zeilen der Matrix bezeichnet. Dass diese Matrizen tatsächlich eine Darstellung der $U_q(su(2))$ bilden, lässt sich leicht überprüfen, indem man sie anstelle der Generatoren in die Relation (3.8) einsetzt und diese unter Berücksichtigung der Darstellung von $\tau^{-1/2}$, nämlich

$$
(\tau^{-1/2})^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix},
\tag{3.17}
$$

und der gewöhnlichen Matrixmultiplikation auswertet. Bemerkenswerterweise stellt man zudem fest, dass die Matrizen der Rechtsdarstellungen exakt dieselben wie die der Linksdarstellungen sind, was unsere Konvention, für die Rechtsdarstellungen unten indizierte Spinoren zu verwenden, rechtfertigt. Setzt man schliesslich die obigen Resultate in die Identitäten

$$[L^A, V]_q = L^A \triangleright V, \quad [V, L^A]_q = V \triangleleft L^A \tag{3.18}$$

so bekommt man nach einfachem Umordnen der Terme die Vertauschungsrelationen von Symmetriegeneratoren und Spinorkoordinaten. Diese sind explizit gegeben durch

$$\begin{aligned} L^+\theta^1 &= \theta^1 L^+ - q^{1/2}\lambda_+^{-1/2}\theta^2\tau^{-1/2}, \\ L^+\theta^2 &= \theta^2 L^+, \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} L^3\theta^1 &= q\theta^1 L^3 - q^{-1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2}\theta^2 L^- - q\lambda_+^{-1}\theta^1\tau^{-1/2}, \\ L^3\theta^2 &= q^{-1}\theta^2 L^3 + q^{1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2}\theta^1 L^+ + q^{-1}\lambda_+^{-1}\theta^2\tau^{-1/2}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} L^-\theta^1 &= \theta^1 L^-, \\ L^-\theta^2 &= \theta^2 L^- + q^{-1/2}\lambda_+^{-1/2}\theta^1\tau^{-1/2} \end{aligned} \tag{3.21}$$

und als Umkehrung hiervon

$$\begin{aligned} \theta_1 L^+ &= L^+\theta_1, \\ \theta_2 L^+ &= L^+\theta_2 - q^{1/2}\lambda_+^{-1/2}\tau^{-1/2}\theta_1, \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} \theta_1 L^3 &= qL^3\theta_1 + q^{-1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2}L^+\theta_2 + q\lambda_+^{-1}\tau^{-1/2}\theta_1, \\ \theta_2 L^3 &= q^{-1}L^3\theta_2 - q^{1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2}L^-\theta_1 + q^{-1}\lambda_+^{-1}\tau^{-1/2}\theta_2, \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} \theta_1 L^- &= L^-\theta_1 + q^{-1/2}\lambda_+^{-1/2}\tau^{-1/2}\theta_2, \\ \theta_2 L^- &= L^-\theta_2. \end{aligned} \tag{3.24}$$

In gleicher Weise bestimmen wir die Vektordarstellungen der $U_q(su(2))$, gegeben durch

$$\begin{aligned} L^A \triangleright X^B &= \left(\tau^A\right)^C{}_D\, X^D, \\ X_B \triangleleft L^A &= X_C \left(\tau^A\right)^C{}_D, \end{aligned} \tag{3.25}$$

mit

$$\begin{aligned}
\left(\tau^{+}\right)^{B}{}_{C} &= \begin{pmatrix} 0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\left(\tau^{3}\right)^{B}{}_{C} &= \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -q \end{pmatrix}, \\
\left(\tau^{-}\right)^{B}{}_{C} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Dabei ist zu beachten, dass Spalten und Zeilen in der Reihenfolge $+, 3, -$ angeordnet sind. Der Nachweis der Darstellungseigenschaft gelingt wie im Fall der Spinordarstellungen, falls man wieder berücksichtigt:

$$(\tau^{-1/2})^{B}{}_{C} = \begin{pmatrix} q^{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-2} \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

Wir bemerken noch, dass die $\tau$-Matrizen und der q-deformierte $\varepsilon$-Tensor über die Beziehung

$$(\tau^{A})^{B}{}_{C} = q^{2}\varepsilon^{AB}{}_{C}. \tag{3.28}$$

zusammnenhängen. Mit demselben Vorgehen wie im Spinorfall finden wir für die Vertauschungsrelationen der Symmetriegeneratoren mit den Komponenten eines Vektoroperators

$$\begin{aligned}
L^{+}X^{+} &= X^{+}L^{+}, \\
L^{+}X^{3} &= X^{3}L^{+} - qX^{+}\tau^{-1/2}, \\
L^{+}X^{-} &= X^{-}L^{+} - X^{3}\tau^{-1/2},
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
L^{3}X^{\pm} &= q^{\mp 2}X^{+}L^{3} \pm q^{\mp 1}\lambda X^{3}L^{\pm} \pm q^{\mp 1}X^{\pm}\tau^{-1/2}, \\
L^{3}X^{3} &= X^{3}L^{3} + \lambda(X^{-}L^{+} - X^{+}L^{-}) - \lambda X^{3}\tau^{-1/2},
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
L^{-}X^{+} &= X^{+}L^{-} + X^{3}\tau^{-1/2}, \\
L^{-}X^{3} &= X^{3}L^{-} + q^{-1}X^{-}\tau^{-1/2}, \\
L^{-}X^{-} &= X^{-}L^{-}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

und

$$
\begin{aligned}
X_+L^+ &= L^+X_+ - q\tau^{-1/2}X_3, \\
X_3L^+ &= L^+X_3 - \tau^{-1/2}X_-, \\
X_-L^+ &= L^+X_-,
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

$$
\begin{aligned}
X_\pm L^3 &= q^{\mp 2}L^3X_\pm \mp \lambda L^\mp X^3 \pm q^\mp \tau^{-1/2}X_\pm, \\
X_3L^3 &= L^3X_3 + \lambda(q^{-1}L^+X^+ - qL^-X_-) - \lambda\tau^{-1/2}X_3,
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

$$
\begin{aligned}
X_+L^- &= L^-X_+, \\
X_3L^- &= L^-X_3 + \tau^{-1/2}X_+, \\
X_-L^- &= L^-X_- + q^{-1}\tau^{-1/2}X_3.
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

### $q$-Liealgebra und Casimiroperator

Als letzte interessante Darstellung wollen wir uns nun der adjungierten Darstellung der Liealgebra auf sich selbst zuwenden. Beachtet man, dass $L^A$, $A \in \{+, 3, -\}$, selbst Komponenten eines Vektoroperators sind, so lassen sich die Relationen in (3.8) auch schreiben als

$$
\begin{aligned}
[L^A, L^A]_q &= 0, \qquad A \in \{+, -\}, \\
[L^3, L^3]_q &= -\lambda L^3, \\
[L^\pm, L^3]_q &= \mp q^{\pm 1}L^\pm, \\
[L^\pm, L^\mp]_q &= \mp L^3.
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

Diese Ergebnis können wir noch kompakter formulieren als

$$
[L^A, L^B]_q = q^2\varepsilon^{ABC}g_{CD}L^D. \tag{3.36}
$$

Daraus ersehen wir, dass wir im klassischen Limes genau die bekannte Liealgebra $so(3)$, nämlich

$$
[L^A, L^B] = \varepsilon^{AB}{}_D L^D, \tag{3.37}
$$

erhalten, da der $q$-deformierte $\varepsilon$-Tensor in sein klassisches Pendant übergeht. Damit haben wir ein perfektes $q$-deformiertes Analogon zu den klassischen Liealgebren angegeben, was auch die Bezeichnungsweise $q$-Liealgebra rechtfertigt.

Der Vollständigkeit halber weisen wir noch darauf hin, dass man statt des Vektoroperators $L^A$ auch einen vollständig antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe, gegeben durch

$$M^{AB} = \varepsilon^{ABF} L_F, \tag{3.38}$$

verwenden kann [20]. Auch in diesem Fall gibt es natürlich drei unabhängige Komponenten, denn es gelten aufgrund der Antisymmetrie die Identitäten

$$\begin{aligned} M^{++} &= M^{--} = 0, \\ M^{3+} &= -q^{-2} M^{+3}, \\ M^{-+} &= -M^{+-}, \\ M^{33} &= \lambda M^{+-}, \\ M^{-3} &= -q^{-2} M^{3-}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Dies erlaubt es uns als unabhängige Generatoren

$$\begin{aligned} M^{+3} &= -q^{-1} L^{+}, \\ M^{+-} &= -q^{-2} L^{3}, \\ M^{3-} &= -q^{-1} L^{-} \end{aligned} \tag{3.40}$$

zu wählen.

Als letzten Bestandteil unserer $q$-Liealgebra konstruieren wir noch den Casimiroperator. Klassisch wie nichtkommutativ ist er gegeben durch den Ausdruck $L^2 = g_{\mu\nu} L^\mu L^\nu$ und ergibt wie erwartet den Wert null unter der adjungierten Wirkung der Generatoren $L^A$ gemäß der Formel $L^A \triangleright_{ad} L^2 = (L^A_{(1)} \triangleright_{ad} L^\mu)(L^A_{(2)} \triangleright_{ad} L^\nu)$. Im nichtkommutativen Fall lautet er ausgeschrieben

$$L^2 = -qL^+ L^- + L^3 L^3 - q^{-1} L^- L^+. \tag{3.41}$$

Verwendet man die adjungierten Wirkungen, die wir oben berechnet haben, so stellt man fest, dass auch hier der Operator $L^2$ eine Invariante unter der Wirkung der Generatoren ist, sowohl der Links-, als auch der Rechtswirkung.
Der Casimir kann natürlich auch mit den Tensorgeneratoren geschrieben werden und lautet dann $M^2 = M^{\mu\nu} M_{\mu\nu}$ oder wieder ausgeschrieben:

$$M^2 = q^{-1} M^{+3} M^{3-} - M^{+-} M^{+-} + q^{-3} M^{3-} M^{+3}. \tag{3.42}$$

Der Casimiroperator erfüllt, wie man z.B. auch mithilfe der Identitäten

$$\begin{aligned} [L^A, UV]_q &= [L^A_{(1)}, U]_q [L^A_{(2)}, V]_q, \\ [UV, L^A]_q &= [U, L^A_{(2)}]_q [V, L^A_{(1)}]_q, \end{aligned} \tag{3.43}$$

verifizieren kann, die notwendige Forderung

$$[L^A, C]_q = [C, L^A]_q = 0, \quad \text{für alle} \quad A \in \{+, 3, -\}\,. \tag{3.44}$$

Abschließend wollen wir für die verschiedenen zuvor behandelten Darstellungen den Casimiroperator spezifizieren. Dazu müssen wir lediglich die Darstellungen der Generatoren in den Ausdruck (3.41) einsetzen und erhalten so für die

a) Operatordarstellung

$$L^2 = -(X \circ X)(\partial \circ \partial) + q^2(X \circ \partial)(X \circ \partial) + q^{-2}X \circ \partial, \tag{3.45}$$

mit $U \circ V = g_{AB}U^A V^B$,

b) Spinordarstellung

$$L^2 = q^{-2}\lambda_+^{-2}[[3]]_{q^2}\mathbb{1}_{2\times 2}, \tag{3.46}$$

c) Vektordarstellung

$$L^2 = q^{-2}[[2]]_{q^4}\mathbb{1}_{3\times 3}. \tag{3.47}$$

Die antisymmetrischen q-Zahlen sind hierbei definiert durch

$$[[n]]_{q^a} = \frac{1 - q^{an}}{1 - q^a}. \tag{3.48}$$

## 3.2 q-Liealgebra der vierdimensionalen Drehimpulse

### Bahndrehimpulsdarstellungen

Widmen wir uns nun der 4-dimensionalen Drehimpulsalgebra. In Analogie zum klassischen Fall haben wir sechs unabhängige Generatoren (Anhang B), die wir mit

$$L^{12}, L^{13}, L^{14}, L^{23}, L^{24}, L^{34}. \tag{3.49}$$

bezeichnen wollen. Diese Generatoren können wieder als Teil eines total antisymmetrischen Tensors aufgefasst werden, wenn wir die Relationen

$$\begin{aligned}
L^{11} &= L^{22} = L^{33} = L^{44} = 0, \\
L^{21} &= -qL^{12}, \\
L^{31} &= -qL^{13}, \\
L^{41} &= -L^{14}, \\
L^{32} &= -L^{23} + \lambda L^{14}, \\
L^{42} &= -qL^{24}, \\
L^{43} &= -qL^{34}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

beachten. Diese sind eine unmittelbare Konsequenz der Identität

$$L^{ij} = -q(\hat{R})^{ij}{}_{kl}L^{kl}. \tag{3.51}$$

und können daher aus den Relationen 2.175 abgelesen werden. Die Darstellungen der Drehimpulsgeneratoren mit Hilfe der Differentialoperatoren sind gegeben durch [21]

$$\begin{aligned}
L^{ij} &:= -q^{-2}\lambda_+\Lambda^{1/2}(P_A)^{ij}{}_{kl}X^k\hat{\partial}^l \\
&= \lambda_+\Lambda^{-1/2}(P_A)^{ij}{}_{kl}\hat{\partial}^k X^l
\end{aligned} \tag{3.52}$$

oder

$$\begin{aligned}
L^{ij} &:= -\lambda_+\Lambda^{-1/2}(P_A)^{ij}{}_{kl}X^k\partial^l \\
&= q^{-2}\lambda_+\Lambda^{-1/2}(P_A)^{ij}{}_{kl}\partial^k X^l,
\end{aligned} \tag{3.53}$$

wobei $P_A$ wieder das q-Analogon des antisymmetrischen Projektors bedeutet (siehe Anhang B). $\Lambda$ ist ein Skalierer, für den diesmal gilt

$$\Lambda X^i = q^2 X^i \Lambda, \quad \Lambda\partial^i = q^{-2}\partial^i\Lambda. \tag{3.54}$$

Unter Berücksichtigung der expliziten Form von $P_A$ lauten die Darstellungen der unabhängigen Generatoren gemäß(3.52) beispielsweise

$$\begin{aligned}
L^{12} &= -\Lambda^{-1/2}(q^{-1}X^1\hat{\partial}^2 - X^2\hat{\partial}^1), \\
L^{13} &= -\Lambda^{-1/2}(q^{-1}X^1\hat{\partial}^3 - X^3\hat{\partial}^1), \\
L^{24} &= -\Lambda^{-1/2}(q^{-1}X^2\hat{\partial}^4 - X^4\hat{\partial}^2),
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
L^{34} &= -\Lambda^{-1/2}(q^{-1}X^3\hat{\partial}^4 - X^4\hat{\partial}^2), \\
L^{14} &= 2\lambda_+^{-1}\Lambda^{-1/2}(X^1\hat{\partial}^4 - X^4\hat{\partial}^1) \\
&\quad - \lambda\lambda_+^{-1}\Lambda^{-1/2}(X^2\hat{\partial}^3 + X^3\hat{\partial}^2), \\
L^{23} &= (q^2+q^{-2})\lambda_+^{-1}\Lambda^{-1/2}X^2\hat{\partial}^3 \\
&\quad - 2\lambda_+^{-1}\Lambda^{-1/2}X^3\hat{\partial}^2 + \lambda\lambda_+^{-1}\Lambda^{-1/2}(X^1\hat{\partial}^4 - X^4\hat{\partial}^1).
\end{aligned}$$

### Hopfstruktur und $q$-Kommutatoren

Zusätzlich zu den schon aus dem klassischen Grenzfall bekannten Operatoren der Drehimpulsalgebra müssen wir noch zwei gruppenartige Braidingoperatoren $K_i, i = 1,2$ berücksichtigen, die zusammen mit den Operatoren $L^{ij}, i < j$, die Algebra $U_q(so(4))$ aufspannen. Die nichttrivialen Vertauschungsrelationen sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
L^{14}L^{12} - L^{12}L^{14} &= -K_2L^{12}, \\
L^{14}L^{13} - L^{13}L^{14} &= -K_1L^{13}, \\
L^{23}L^{12} - L^{12}L^{23} &= -qK_2L^{12}, \\
L^{23}L^{13} - L^{13}L^{23} &= q^{-1}K_1L^{13}, \\
L^{24}L^{14} - L^{14}L^{24} &= -q^{-2}K_1L^{24}, \\
L^{34}L^{14} - L^{14}L^{34} &= -q^{-2}K_2L^{34}, \\
L^{24}L^{23} - L^{23}L^{24} &= q^{-3}K_1L^{24}, \\
L^{34}L^{23} - L^{23}L^{34} &= -q^{-1}K_2L^{34},
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
K_1L^{13} &= q^{-2}L^{13}K_1, \quad K_2L^{12} = q^{-2}L^{12}K_2, \\
K_1L^{24} &= q^2L^{24}K_1, \quad K_2L^{34} = q^2L^{34}K_2.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Zum weiteren Vorgehen benötigen wir abermals die Hopfstrukturen der Drehimpulsgeneratoren. Beachtet man, dass die Operatoren $K_i, i = 1,2$ gruppenartig sind, also

$$\Delta(K_i) = K_i \otimes K_i, \quad S(K_i) = K_i^{-1}, \quad \varepsilon(K_i) = 1. \tag{3.58}$$

erfüllen, so lässt sich bestätigen, dass im Fall der Generatoren $L^{ij}, i < j$ eine mit den Algebrarelationen verträgliche Hopfstruktur gegeben ist durch

$$\Delta(L^{12}) = L^{12} \otimes K_2 + 1 \otimes L^{12}, \tag{3.59}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta(L^{13}) &= L^{13}\otimes K_1 + 1\otimes L^{13},\\
\Delta(L^{24}) &= L^{24}\otimes K_1 + 1\otimes L^{24},\\
\Delta(L^{34}) &= L^{34}\otimes K_2 + 1\otimes L^{34},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta(L^{14}) &= q\lambda_+^{-1}L^{14}\otimes K_1 + q^{-1}\lambda_+^{-1}L^{14}\otimes K_2\\
&\quad + q\lambda_+^{-1}K_1^{-1}\otimes L^{14} + q^{-1}\lambda_+^{-1}K_2^{-1}\otimes L^{14}\\
&\quad - \lambda_+^{-1}L^{23}\otimes K_1 + \lambda_+^{-1}L^{23}\otimes K_2\\
&\quad - \lambda_+^{-1}K_1^{-1}\otimes L^{23} + \lambda_+^{-1}K_2^{-1}\otimes L^{23}\\
&\quad - q\lambda\lambda_+^{-1}L^{24}K_1^{-1}\otimes L^{13} - q\lambda\lambda_+^{-1}K_1^{-1}L^{13}\otimes L^{24}\\
&\quad - q\lambda\lambda_+^{-1}L^{34}K_2^{-1}\otimes L^{12} - q\lambda\lambda_+^{-1}K_2^{-1}L^{12}\otimes L^{34},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta(L^{23}) &= -\lambda_+^{-1}K_1^{-1}\otimes L^{14} + \lambda_+^{-1}K_2^{-1}\otimes L^{14}\\
&\quad - \lambda_+^{-1}L^{14}\otimes K_1 + \lambda_+^{-1}L^{14}\otimes K_2\\
&\quad + q^{-1}\lambda_+^{-1}L^{23}\otimes K_1 + q\lambda_+^{-1}L^{23}\otimes K_2\\
&\quad + q^{-1}\lambda_+^{-1}K_1^{-1}\otimes L^{23} + q\lambda_+^{-1}K_2^{-1}\otimes L^{23}\\
&\quad + \lambda\lambda_+^{-1}L^{24}K_1^{-1}\otimes L^{13} + \lambda\lambda_+^{-1}K_1^{-1}L^{13}\otimes L^{24}\\
&\quad - q^2\lambda\lambda_+^{-1}L^{34}K_2^{-1}\otimes L^{12} - q^2\lambda\lambda_+^{-1}K_2^{-1}L^{12}\otimes L^{34},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S(L^{12}) &= -L^{12}K_2^{-1},\\
S(L^{13}) &= -L^{13}K_1^{-1},\\
S(L^{24}) &= -L^{24}K_1^{-1},\\
S(L^{34}) &= -L^{34}K_2^{-1},\\
S(L^{14}) &= L^{14} - q^{-1}\lambda^{-1}((K_1+K_2) - (K_1^{-1}+K_2^{-1})),\\
S(L^{23}) &= L^{23} + q^{-1}\lambda^{-1}(q^{-1}(K_1-K_1^{-1}) - q(K_2-K_2^{-1})),
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{-1}(L^{12}) &= -K_2^{-1}L^{12},\\
S^{-1}(L^{13}) &= -K_1^{-1}L^{13},\\
S^{-1}(L^{24}) &= -K_1^{-1}L^{24},\\
S^{-1}(L^{34}) &= -K_2^{-1}L^{34},\\
S^{-1}(L^{14}) &= L^{14} + q^{-1}\lambda^{-1}((K_1^{-1}+K_2^{-1}) - (K_1+K_2)),\\
S^{-1}(L^{23}) &= L^{23} - q^{-1}\lambda^{-1}(q^{-1}(K_1^{-1}-K_1) - q(K_2^{-1}-K_2)),
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

$$\varepsilon(L^{ij}) \;=\; 0. \tag{3.62}$$

Wie schon im dreidimensionalen Fall erlaubt uns die Hopfstruktur, q-Kommutatoren einzuführen. Setzt man diese in die Formeln aus (3.13), so findet man als Links-kommutatoren

$$\begin{aligned}
[L^{12}, V]_q &= (L^{12}V - VL^{12})K_2^{-1}, \\
[L^{13}, V]_q &= (L^{13}V - VL^{13})K_1^{-1}, \\
[L^{24}, V]_q &= (L^{24}V - VL^{24})K_1^{-1}, \\
[L^{34}, V]_q &= (L^{34}V - VL^{34})K_2^{-1}, \\
[L^{14}, V]_q &= -q\lambda^{-1}(K_1^{-1}VK_1 + K_2^{-1}VK_2) \\
&\quad + q^{-1}\lambda^{-1}(K_1^{-1}VK_1^{-1} - K_2^{-1}VK_2^{-1}) \\
&\quad + \lambda_+^{-1}(K_2^{-1}VL^{23} + L^{23}VK_2^{-1} - K_1^{-1}VL^{23} + L^{23}VK_1^{-1}) \\
&\quad + q^{-1}\lambda_+^{-1}(K_2^{-1}VL^{14} + L^{14}VK_2^{-1}) \\
&\quad + q\lambda_+^{-1}(K_1^{-1}VL^{14} + L^{14}VK_1^{-1}) \\
&\quad + q\lambda\lambda_+^{-1}(K_1^{-1}L^{13}VL^{24}K_1^{-1} + K_2^{-1}L^{12}VL^{34}K_2^{-1}) \\
&\quad + q\lambda\lambda_+^{-1}(L^{24}K_1^{-1}VL^{13}K_1^{-1} + L^{34}K_2^{-1}VL^{12}K_2^{-1}), \\
[L^{23}, V]_q &= q\lambda_+^{-1}(K_2^{-1}VL^{23} + L^{23}VK_2^{-1}) \\
&\quad + q^{-1}\lambda_+^{-1}(K_1^{-1}VL^{23} + L^{23}VK_1^{-1}) \\
&\quad + \lambda_+^{-1}(L^{14}VK_2^{-1} + K_2^{-1}VL^{14} - L^{14}VK_1^{-1} - K_1^{-1}VL^{14}) \\
&\quad + \lambda^{-1}(K_2^{-1}VK_2 - K_2^{-1}VK_2^{-1}) \\
&\quad + q^{-2}\lambda^{-1}(K_1^{-1}VK_1 - K_1^{-1}VK_1^{-1}) \\
&\quad + \lambda\lambda_+^{-1}(q^2K_2^{-1}L^{12}VL^{34}K_2^{-1} + q^2L^{34}K_2^{-1}VL^{12}K_2^{-1}) \\
&\quad - \lambda\lambda_+^{-1}(K_1^{-1}L^{13}VL^{24}K_1^{-1} - L^{24}K_1^{-1}VL^{13}K_1^{-1}),
\end{aligned} \tag{3.63}$$

und entsprechend als Rechts-Kommutatoren

$$\begin{aligned}
[V, L^{12}]_q &= K_2^{-1}(VL^{12} - L^{12}V), \\
[V, L^{13}]_q &= K_1^{-1}(VL^{13} - L^{13}V), \\
[V, L^{24}]_q &= K_1^{-1}(VL^{24} - L^{24}V), \\
[V, L^{34}]_q &= K_2^{-1}(VL^{34} - L^{34}V), \\
[V, L^{14}]_q &= q\lambda_+^{-1}(L^{14}VK_1^{-1} + K_1^{-1}VL^{14}) \\
&\quad + q^{-1}\lambda_+^{-1}(L^{14}VK_2^{-1} + K_2^{-1}VL^{14})
\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$
\begin{aligned}
& + \lambda_+^{-1}(L^{23}VK_2^{-1} + K_2^{-1}VL^{23} - L^{23}VK_1^{-1} - K_1^{-1}VL^{23}) \\
& + q^{-1}\lambda^{-1}(K_1^{-1}VK_1^{-1} - K_1VK_1^{-1}) \\
& + q^{-1}\lambda^{-1}(K_2^{-1}VK_2^{-1} - K_2VK_2^{-1}) \\
& + q\lambda\lambda_+^{-1}(K_1^{-1}L^{13}VL^{24}K_1^{-1} + K_1^{-1}L^{24}VK_1^{-1}L^{13}) \\
& + q\lambda\lambda_+^{-1}(K_2^{-1}L^{34}VK_2^{-1}L^{12} + K_2^{-1}L^{12}VL^{34}K_2^{-1}), \\
[V, L^{23}]_q \;=\; & q\lambda_+^{-1}(L^{23}VK_2^{-1} + K_2^{-1}VL^{23}) \\
& + q^{-1}\lambda_+^{-1}(L^{23}VK_1^{-1} + K_1^{-1}VL^{23}) \\
& + \lambda_+^{-1}(L^{14}VK_2^{-1} + K_2^{-1}VL^{14} - L^{14}VK_1^{-1} - K_1^{-1}VL^{14}) \\
& + \lambda^{-1}(K_2^{-1}VK_2^{-1} - K_2VK_2^{-1}) \\
& + q^{-2}\lambda^{-1}(K_1VK_1^{-1} - K_1^{-1}VK_1^{-1}) \\
& + \lambda\lambda_+^{-1}(q^2K_2^{-1}L^{34}VK_2^{-1}L^{12} + K_2^{-1}L^{12}VL^{34}K_2^{-1}) \\
& - \lambda\lambda_+^{-1}(K_1^{-1}L^{13}VL^{24}K_1^{-1} - K_1^{-1}L^{24}VK_1^{-1}L^{13}).
\end{aligned}
$$

Auch hier bezeichnet $V$ ein beliebiges Element aus einem Darstellungsraum der $U_q(so(4))$.

### Matrixdarstellungen und cross product Relationen

**Spinordarstellungen** Betrachten wir nun die Spinor- und die Vektordarstellungen der Generatoren $L^{ij}$. Hier müssen wir analog zum klassischen Fall zwischen zwei Sätzen von Spinordarstellungen unterscheiden, nämlich der $(1/2, 0)$ und der $(0, 1/2)$-Darstellung. Explizit haben wir

$$
\begin{aligned}
L^{ij} \triangleright \theta^\alpha &= \left(\sigma^{ij}\right)^\alpha{}_\beta \theta^\beta, \quad L^{ij} \triangleright \tilde\theta^\alpha = \left(\tilde\sigma^{ij}\right)^\alpha{}_\beta \tilde\theta^\beta \\
\theta_\alpha \triangleleft L^{ij} &= \theta_\beta \left(\sigma^{ij}\right)^\beta{}_\alpha, \quad \tilde\theta_\alpha \triangleleft L^{ij} = \tilde\theta_\beta \left(\tilde\sigma^{ij}\right)^\beta{}_\alpha.
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

mit den entsprechenden Matrizen

$$
\begin{aligned}
\left(\sigma^{13}\right)^\alpha{}_\beta &= \begin{pmatrix} 0 & -q^{-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \left(\sigma^{14}\right)^\alpha{}_\beta = \lambda_+^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & q^{-2} \end{pmatrix}, \\
\left(\sigma^{24}\right)^\alpha{}_\beta &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -q^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \left(\sigma^{23}\right)^\alpha{}_\beta = \lambda_+^{-1} \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & -q^{-3} \end{pmatrix} \\
\left(\sigma^{34}\right)^\alpha{}_\beta &= 0, \quad \left(\sigma^{12}\right)^\alpha{}_\beta = 0.
\end{aligned}
$$

Die Matrizen mit der Tilde erhält man am einfachsten aus den ungetildeten über die Beziehungen

$$
(\sigma^{12})^\alpha{}_\beta = (\tilde\sigma^{13})^\alpha{}_\beta, \quad (\sigma^{13})^\alpha{}_\beta = (\tilde\sigma^{12})^\alpha{}_\beta, \tag{3.66}
$$

$$
\begin{aligned}
(\sigma^{14})^\alpha{}_\beta &= (\tilde{\sigma}^{14})^\alpha{}_\beta, \quad (\sigma^{23})^\alpha{}_\beta = -q^2(\tilde{\sigma}^{23})^\alpha{}_\beta, \\
(\sigma^{24})^\alpha{}_\beta &= (\tilde{\sigma}^{34})^\alpha{}_\beta, \quad (\sigma^{34})^\alpha{}_\beta = (\tilde{\sigma}^{24})^\alpha{}_\beta.
\end{aligned}
$$

Die Darstellungseigenschaft dieser Matrizen weist man wieder durch Einsetzen in die Identitäten aus (3.56, 3.57) nach, wobei zu beachten gilt, dass

$$
(K_1)^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}, \quad (\tilde{K}_2)^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}, \tag{3.67}
$$

$$
(\tilde{K}_1)^\alpha{}_\beta = (K_2)^\alpha{}_\beta = \mathbb{1} \tag{3.68}
$$

Setzen wir nun diese Darstellungen zusammen mit den Ausdrücken (3.63) und (3.64) in

$$
\begin{aligned}
\left[L^{ij}, \theta^\alpha\right]_q &= (\sigma_L^{ij})^\alpha{}_\beta \theta^\beta, \\
\left[\theta^\alpha, L^{ij}\right]_q &= \theta_\beta (\sigma_R^{ij})^\beta{}_\alpha,
\end{aligned} \tag{3.69}
$$

ein, ergeben sich die Vertauschungsrelationen zwischen den $L^{ij}$'s und den Spinorkomponenten zu

$$
\begin{aligned}
L^{13}\theta^2 &= \theta^2 L^{13} - q^{-2}\theta^1 K_1, \\
L^{24}\theta^1 &= \theta^1 L^{24} - q^{-1}\theta^2 K_1, \\
L^{14}\theta^1 &= (q^2+q^{-1})\lambda_+^{-1}\theta^1 L^{14} - (q-1)\lambda_+^{-1}\theta^1 L^{23} \\
&\quad + q\lambda\lambda_+^{-1}\theta^2 L^{13} - \lambda_+^{-1}\theta^1 K_1, \\
L^{14}\theta^2 &= (q^{-1}+1)\lambda_+^{-1}\theta^2 L^{14} + (q^{-1}-1)\lambda_+^{-1}\theta^2 L^{23} \\
&\quad + \lambda\lambda_+^{-1}\theta^1 L^{24} + q^{-2}\lambda_+^{-1}\theta^2 K_1, \\
L^{23}\theta^1 &= (q+1)\lambda_+^{-1}\theta^1 L^{23} - (q-1)\lambda_+^{-1}\theta^1 L^{14} \\
&\quad + \lambda\lambda_+^{-1}\theta^2 L^{13} + q^{-1}\lambda_+^{-1}\theta^1 K_1, \\
L^{23}\theta^2 &= (q^{-2}+q)\lambda_+^{-1}\theta^2 L^{23} + (1-q^{-1})\lambda_+^{-1}\theta^2 L^{14} \\
&\quad - q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}\theta^1 L^{24} - q^{-3}\lambda_+^{-1}\theta^2 K_1.
\end{aligned} \tag{3.70}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta_1 L^{13} &= L^{13}\theta_1 - q^{-2}K_1\theta_2, \\
\theta_2 L^{24} &= L^{24}\theta_2 - q^{-1}K_1\theta_1, \\
\theta_1 L^{14} &= (q^2+q^{-1})\lambda_+^{-1}L^{14}\theta_1 - (q-1)\lambda_+^{-1}L^{23}\theta_1 \\
&\quad + \lambda\lambda_+^{-1}L^{24}\theta_2 - \lambda_+^{-1}K_1\theta_1, \\
\theta_2 L^{14} &= (q^{-1}+1)\lambda_+^{-1}L^{14}\theta_2 + (1-q^{-1})\lambda_+^{-1}L^{23}\theta_2
\end{aligned} \tag{3.71}
$$

$$
\begin{aligned}
& \quad + q\lambda\lambda_+^{-1}L^{13}\theta_1 + q^{-2}\lambda_+^{-1}K_1\theta_2, \\
\theta_1 L^{23} &= (q+1)\lambda_+^{-1}L^{23}\theta_1 - (q-1)\lambda_+^{-1}L^{14}\theta_1 \\
& \quad - q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}L^{24}\theta_2 + q^{-1}\lambda_+^{-1}K_1\theta_1, \\
\theta_2 L^{23} &= (q+q^{-2})\lambda_+^{-1}L^{23}\theta_2 + (1-q^{-1})\lambda_+^{-1}L^{14}\theta_2 \\
& \quad - \lambda\lambda_+^{-1}L^{13}\theta_1 - q^{-3}\lambda_+^{-1}K_1\theta_2.
\end{aligned}
$$

Zwei Bemerkungen: Zum einen haben wir wieder für die Rechtsdarstellung und die entsprechenden Relationen die Indizes unten positioniert, was den Vorteil mit sich bringt, dass die Rechtsmatrizen mit den Linksmatrizen identisch sind. Zum anderen haben wir uns der Kürze wegen darauf beschränkt, ausschliesslich die nichttrivialen Vertauschungsrelationen hinzuschreiben, da alle anderen Vertauschungen einfach kommutativ sind.
Führt man dasselbe Vorgehen mit den getildeten Koordinaten aus, ergibt sich in entsprechender Weise

$$
\begin{aligned}
L^{12}\tilde\theta^2 &= \tilde\theta^2 L^{12} - q^{-2}\tilde\theta^1 K_2, \\
L^{34}\tilde\theta^1 &= \tilde\theta^1 L^{34} - q^{-1}\tilde\theta^2 K_2, \\
L^{14}\tilde\theta^1 &= (q+1)\lambda_+^{-1}\tilde\theta^1 L^{14} + (q-1)\lambda_+^{-1}\tilde\theta^1 L^{23} \\
& \quad + q\lambda\lambda_+^{-1}\tilde\theta^2 L^{12} - \lambda_+^{-1}\tilde\theta^1 K_2, \\
L^{14}\tilde\theta^2 &= (q^{-2}+q)\lambda_+^{-1}\tilde\theta^2 L^{12} + (q^{-1}-1)\lambda_+^{-1}\tilde\theta^2 L^{23} \\
& \quad + \lambda\lambda_+^{-1}\tilde\theta^1 L^{34} + q^{-2}\lambda_+^{-1}\tilde\theta^2 K_2, \\
L^{23}\tilde\theta^1 &= (q^{-1}+q^2)\lambda_+^{-1}\tilde\theta^1 L^{23} + (q-1)\lambda_+^{-1}\tilde\theta^1 L^{14} \\
& \quad - q^2\lambda\lambda_+^{-1}\tilde\theta^2 L^{12} - q\lambda_+^{-1}K_2, \\
L^{23}\tilde\theta^2 &= (q^{-1}+1)\lambda_+^{-1}\tilde\theta^2 L^{23} + (q^{-1}-1)\lambda_+^{-1}\tilde\theta^2 L^{14} \\
& \quad + q\lambda\lambda_+^{-1}\tilde\theta^1 L^{34} + q^{-1}\lambda_+^{-1}\tilde\theta^2 K_2.
\end{aligned}
\tag{3.72}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde\theta_1 L^{12} &= L^{12}\tilde\theta_1 - q^{-2}K_2\tilde\theta_2, \\
\tilde\theta_2 L^{34} &= L^{34}\tilde\theta_2 - q^{-1}K_2\tilde\theta_1, \\
\tilde\theta_1 L^{14} &= (q+1)\lambda_+^{-1}L^{14}\tilde\theta_1 + (q-1)\lambda_+^{-1}L^{23}\tilde\theta_1 \\
& \quad + \lambda\lambda_+^{-1}L^{34}\tilde\theta_2 - \lambda_+^{-1}K_2\tilde\theta_1, \\
\tilde\theta_2 L^{14} &= (q+q^{-2})\lambda_+^{-1}L^{14}\tilde\theta_2 + (q^{-1}-1)\lambda_+^{-1}L^{23}\tilde\theta_2 \\
& \quad + q\lambda\lambda_+^{-1}L^{12}\tilde\theta_1 + q^{-2}\lambda_+^{-1}K_2\tilde\theta_2, \\
\tilde\theta_1 L^{23} &= (q^2+q^{-1})\lambda_+^{-1}L^{23}\tilde\theta_1 + (q-1)\lambda_+^{-1}L^{14}\tilde\theta_1 \\
& \quad + \lambda\lambda_+^{-1}L^{34}\tilde\theta_2 - q\lambda_+^{-1}K_2\tilde\theta_1,
\end{aligned}
\tag{3.73}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\theta}_2 L^{23} &= (1+q^{-1})\lambda_+^{-1} L^{23}\tilde{\theta}_2 + (q^{-1}-1)\lambda_+^{-1} L^{14}\tilde{\theta}_2 \\
&\quad + q^2\lambda\lambda_+^{-1} L^{12}\tilde{\theta}_1 + q^{-1}\lambda_+^{-1} K_2\tilde{\theta}_2.
\end{aligned}
$$

**Vektordarstellungen** Kommen wir zur Vektordarstellung der unabhängigen Generatoren $L^{ij}$, gegeben durch

$$
\begin{aligned}
L^{ij} \triangleright X^k &= \left(\tau^{ij}\right)^k{}_m X^m, \\
X_k \triangleleft L^{ij} &= X_m \left(\tau^{ij}\right)^m{}_k,
\end{aligned}
\tag{3.74}
$$

zusammen mit den Darstellungsmatrizen

$$
\begin{aligned}
\left(\tau^{12}\right)^k{}_m &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -q^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\left(\tau^{13}\right)^k{}_m &= \begin{pmatrix} 0 & -q^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\left(\tau^{24}\right)^k{}_m &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \\
\left(\tau^{34}\right)^k{}_m &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\left(\tau^{14}\right)^k{}_m &= \lambda_+^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-1}\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q^{-1}\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2q^{-2} \end{pmatrix}, \\
\left(\tau^{23}\right)^k{}_m &= \lambda_+^{-1} \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-3}(q^4+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-2}\lambda \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3.75}
$$

Für den Nachweis, dass diese Matrizen die Identitäten in (3.56, 3.57) erfüllen, benötigt man noch, dass für die Vektordarstellung der $K_i, i = 1, 2$ gilt

$$(K_1)^k{}_m = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-1} & \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \quad (K_2)^k{}_m = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}. \tag{3.76}$$

Mit diesen Darstellungen und der Identität

$$[L^{ij}, X^k]_q = (\tau^{ij})^k{}_l X^l, \tag{3.77}$$

findet man schließlich die Kommutationsrelationen

$$\begin{aligned} L^{12}X^1 &= X^1L^{12}, & L^{13}X^1 &= X^1L^{13}, \\ L^{12}X^2 &= X^2L^{12}, & L^{13}X^2 &= X^2L^{13} - q^{-2}X^1K_1, \\ L^{12}X^3 &= X^3L^{12} - q^{-2}X^1K_2, & L^{13}X^3 &= X^3L^{13}, \\ L^{12}X^4 &= X^4L^{12} + q^{-2}X^2K_2, & L^{13}X^4 &= X^4L^{13} + q^{-2}X^3K_1, \\ \\ L^{24}X^1 &= X^1L^{24} - q^{-1}X^2K_1, & L^{34}X^1 &= X^1L^{34} - q^{-1}X^3K_2, \\ L^{24}X^1 &= X^1L^{24}, & L^{34}X^1 &= X^1L^{34} + q^{-1}X^4K_2, \\ L^{24}X^1 &= X^1L^{24} + q^{-1}X^4K_1, & L^{34}X^1 &= X^1L^{34}, \\ L^{24}X^1 &= X^1L^{24}, & L^{34}X^1 &= X^1L^{34}, \end{aligned} \tag{3.78}$$

und

$$\begin{aligned} L^{14}X^1 &= qX^1L^{14} - \lambda_+^{-1}X^1(K_1 + K_2) \\ &\quad + q\lambda\lambda_+^{-1}(X^2L^{23} + X^3L^{12}), \\ L^{14}X^2 &= 2\lambda_+^{-1}X^2L^{14} + \lambda_+^{-1}X^2(q^2K_1 - K_2) + \lambda\lambda_+^{-1}X^2L^{23}, \\ &\quad + \lambda\lambda_+^{-1}(X^1L^{24} - qX^4L^{12}), \\ L^{14}X^3 &= q^2(q^4+1)\lambda_+^{-1}X^3L^{14} + \lambda_+^{-1}(q^2K_2 - K_1) \\ &\quad - \lambda\lambda_+^{-1}X^3L^{23} + \lambda\lambda_+^{-1}(X^1L^{34} - qX^4L^{13}), \\ L^{14}X^4 &= q^{-1}X^4L^{14} + q^{-2}\lambda_+^{-1}X^4(K_1 + K_2) \\ &\quad - \lambda\lambda_+^{-1}(X^2L^{34} + X^3L^{24}), \end{aligned} \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned} L^{23}X^1 &= qX^1L^{23} + \lambda_+^{-1}X^1(q^{-1}K_1 - qK_2) \\ &\quad - \lambda\lambda_+^{-1}(X^2L^{13} - q^2X^3L^{12}), \\ L^{23}X^2 &= q^{-2}(q^4+1)X^2L^{23} - \lambda_+^{-1}X^2(q^{-3}K_1 + qK_2) \end{aligned} \tag{3.80}$$

$$
\begin{aligned}
& - q^2\lambda X^4 L^{12} - \lambda\lambda_+^{-1}(q^{-1}X^1L^{24} + X^2L^{14}), \\
L^{23}X^3 &= 2\lambda_+^{-1}X^3L^{23} + q^{-1}\lambda_+^{-1}X^3(K_1+K_2) \\
& - \lambda\lambda_+^{-1}X^3L^{14} + \lambda\lambda_+^{-1}(qX^1L^{34} + X^4L^{13}), \\
L^{23}X^4 &= q^{-1}X^4L^{23} - q^{-1}\lambda_+^{-1}X^4(q^{-2}K_1 - K_2) \\
& - \lambda\lambda_+^{-1}(qx^2L^{34} - q^{-1}X^3L^{24}).
\end{aligned}
$$

Mit der Rechtsversion von Gl.(3.77), d.h.

$$[X_k, L^{ij}]_q = X_l(\tau^{ij})^l{}_k \tag{3.81}$$

erhalten wir analog

$$
\begin{aligned}
X_1L^{12} &= L^{12}X_1 - q^{-2}K_2X_3, & X_1L^{13} &= L^{13}X_1 - q^{-2}K_1X_2, \\
X_2L^{12} &= L^{12}X_2 + q^{-2}K_2X_4, & X_2L^{13} &= X_2L^{13}, \\
X_3L^{12} &= L^{12}X_3, & X_3L^{13} &= L^{13}X_3 + q^{-2}K_1X_4, \\
X_4L^{12} &= L^{12}X_4, & X_4L^{13} &= L^{13}X_4, \\
\\
X_1L^{24} &= L^{24}X_1, & X_1L^{34} &= L^{34}X_1, \\
X_2L^{24} &= L^{24}X_2 - q^{-1}K_1X_1, & X_2L^{34} &= L^{34}X_2, \\
X_3L^{24} &= L^{24}X_3, & X_3L^{34} &= L^{34}X_4 - q^{-1}K_2X_1, \\
X_4L^{24} &= L^{24}X_4 + q^{-1}K_1X_3, & X_4L^{34} &= L^{34}X_4 + q^{-1}K_2X_2,
\end{aligned}
\tag{3.82}
$$

und

$$
\begin{aligned}
X_1L^{14} &= qL^{14}X_1 - \lambda_+^{-1}(K_1+K_2)X_1 \\
& + \lambda\lambda_+^{-1}(L^{24}X_2 + L^{34}X_3), \\
X_2L^{14} &= 2\lambda_+^{-1}X_2L^{14} + \lambda_+^{-1}(q^{-2}K_1 - K_2)X_2 \\
& + \lambda\lambda_+^{-1}L^{23}X_2 + \lambda\lambda_+^{-1}(L^{34}X_4 + qL^{13}X_1), \\
X_3L^{14} &= q^{-2}(q^4+1)\lambda_+^{-1}L^{14}X_3 + \lambda_+^{-1}(q^{-2}K_2 - K_1)X_3 \\
& - \lambda\lambda_+^{-1}L^{23}X_3 + \lambda\lambda_+^{-1}(qL^{12}X_1 + L^{24}X_4), \\
X_4L^{14} &= q^{-1}L^{14}X_4 + q^{-2}\lambda_+^{-1}(K_1+K_2)X_4 \\
& - q\lambda\lambda_+^{-1}(L^{12}X_2 + L^{13}X_3),
\end{aligned}
\tag{3.83}
$$

$$
\begin{aligned}
X_1L^{23} &= qL^{23}X_1 + q^{-1}\lambda_+^{-1}(K_1 - q^2K_2)X_1 \\
& + \lambda\lambda_+^{-1}(qL^{34}X_3 - q^{-1}L^{24}X_2), \\
X_2L^{23} &= q^{-2}(q^4+1)L^{23}X_2 - \lambda_+^{-1}(q^{-3}K_1 + qK_2)X_3
\end{aligned}
\tag{3.84}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \lambda\lambda_+^{-1} L^{14} X_2 - \lambda\lambda_+^{-1}(L^{13} X_1 + q L^{34} X_4), \\
X_3 L^{23} &= 2\lambda_+^{-1} X_3 L^{23} + q^{-1}\lambda_+^{-1}(K_1 + K_2) X_3 \\
& + \lambda\lambda_+^{-1} L^{14} X_3 + \lambda\lambda_+^{-1}(q^2 L^{12} X_1 + q^{-1} L^{24} X_4), \\
X_4 L^{23} &= q^{-1} X_4 L^{23} + q^{-1}\lambda_+^{-1}(K_2 - q^{-2} K_1) X_4 \\
& + \lambda\lambda_+^{-1}(L^{13} X_3 - q^2 L^{12} X_2).
\end{aligned}
$$

### $q$-Liealgebra und Casimiroperatoren

Zur Bestimmung der $q$-Liealgebra lassen wir wieder die Generatoren, welche ja wie erwähnt ihrerseits Komponenten eines antisymmetrischen Tensors zweiter Stufe sind, auf sich selbst wirken und setzen die Resultate gleich den $q$-Kommutatoren. Konkret lässt man die Symmetriegeneratoren auf ein Produkt zweier antisymmetrisierter Koordinaten wirken und liest aus dem Ergebnis die adjungierte Darstellung der Symmetriegeneratoren auf sich selbst ab, d.h.

$$
\begin{aligned}
L^{ij} \triangleright \theta^k \theta^l &= ((L^{ij})_{(1)} \triangleright \theta^k)((L^{ij})_{(2)} \triangleright \theta^l) = \Sigma_{\mu\nu}(a^{ij})_{\mu\nu}\theta^\mu\theta^\nu \qquad (3.85) \\
&\Rightarrow L^{ij} \triangleright L^{kl} = \Sigma_{\mu\nu}(a^{ij})_{\mu\nu} L^{\mu\nu}.
\end{aligned}
$$

Das ergibt dann

$$
\begin{aligned}
[L^{12}, L^{14}]_q &= q^{-2} L^{12}, \qquad (3.86) \\
[L^{12}, L^{23}]_q &= q^{-1} L^{12}, \\
[L^{12}, L^{34}]_q &= -q^{-2} L^{23} - q^{-3} L^{14},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[L^{13}, L^{14}]_q &= q^{-2} L^{13}, \qquad (3.87) \\
[L^{13}, L^{23}]_q &= -q^{-3} L^{13}, \\
[L^{13}, L^{24}]_q &= q^{-2} L^{23} - q^{-1} L^{14},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[L^{14}, L^{12}]_q &= -L^{12}, \qquad (3.88) \\
[L^{14}, L^{13}]_q &= -L^{13}, \\
[L^{14}, L^{14}]_q &= -q^{-1}\lambda L^{14}, \\
[L^{14}, L^{23}]_q &= -q^{-1}\lambda L^{23}, \\
[L^{14}, L^{24}]_q &= q^{-2} L^{24}, \\
[L^{14}, L^{34}]_q &= q^{-2} L^{34},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
[L^{23}, L^{12}]_q &= -qL^{12}, \\
[L^{23}, L^{13}]_q &= q^{-1}L^{13}, \\
[L^{23}, L^{14}]_q &= -q^{-1}\lambda L^{23}, \\
[L^{23}, L^{23}]_q &= -q^{-1}\lambda L^{14} - q^{-1}\lambda^2 L^{23}, \\
[L^{23}, L^{24}]_q &= -q^{-3}L^{24}, \\
[L^{23}, L^{34}]_q &= q^{-1}L^{34},
\end{aligned} \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned}
[L^{24}, L^{13}]_q &= -q^{-2}L^{23} + q^{-1}L^{14}, \\
[L^{24}, L^{14}]_q &= -L^{24}, \\
[L^{24}, L^{23}]_q &= q^{-1}L^{24},
\end{aligned} \tag{3.90}$$

$$\begin{aligned}
[L^{34}, L^{12}]_q &= q^{-2}L^{23} + q^{-3}L^{14}, \\
[L^{34}, L^{14}]_q &= -L^{34}, \\
[L^{34}, L^{23}]_q &= -qL^{34}
\end{aligned} \tag{3.91}$$

als adjungierte Darstellung der $L^{ij}$'s. Auch hier gilt: Schreibt man die q-Kommutatoren mit Hilfe von Gl.(3.63 )aus und setzt die Spinor- oder Vektormatrizen aus Gl.(3.66, 3.75) ein, so erfüllen diese die Relationen der obigen q-Liealgebra. Im klassischen Limes $q \to 1$ ergibt sich die bekannte Liealgebra von $so(4)$.

Zum Abschluss des vierdimensionalen Raums betrachten wir noch die Casimiroperatoren. Hiervon gibt es zwei Stück, von denen der erste gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
C_1 &= g_{ik}g_{jm}L^{ij}L^{km} \\
&= 2L^{23}L^{23} + \lambda_+(L^{12}L^{34} + L^{13}L^{24}) + q^2\lambda_+(L^{24}L^{13} + L^{34}L^{12}) \\
&\quad + (q^2 + q^{-2})L^{14}L^{14} - \lambda(L^{14}L^{23} + L^{23}L^{14}),
\end{aligned} \tag{3.92}$$

während für den zweiten gilt

$$\begin{aligned}
C_2 &= \varepsilon_{ijkl}L^{ij}L^{kl} = q^2\lambda_+^2(L^{14}L^{23} + L^{23}L^{14}) + q^2\lambda_+^2(L^{12}L^{34} - L^{13}L^{24}) \\
&\quad + q^4\lambda_+^2(L^{34}L^{12} - L^{24}L^{13}) - q^2\lambda\lambda_+^2 L^{14}L^{14}.
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Dabei bezeichnet $\varepsilon_{ijkl}$ die q-deformierte Version des 4-dimensionalen $\varepsilon$-Tensors (siehe Anhang B). Spezifizieren wir die Casimirs wieder für die unterschiedlichen Darstellungen, so ergibt sich für die

a) Operatordarstellung

$$C_1 = 2q^{-2}(X \circ X)(\partial \circ \partial) + 2q^2(X \circ \partial)(X \circ \partial) \tag{3.94}$$

$$
\begin{aligned}
& + 2q^{-1}\lambda_+ X \circ \partial, \\
C_2 &= 0,
\end{aligned}
$$

b) Spinordarstellung

$$
\begin{aligned}
C_1 &= [[3]]_{q^{-4}} \mathbb{1}_{2\times 2}, \\
C_2 &= q[[3]]_{q^4} \lambda_+ \mathbb{1}_{2\times 2},
\end{aligned}
\tag{3.95}
$$

c) Vektordarstellung

$$
\begin{aligned}
C_1 &= 2[[3]]_{q^{-4}} \mathbb{1}_{3\times 3}, \\
C_2 &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.96}
$$

## 3.3 q-Liealgebra zur Lorentzalgebra

Bei der Analyse der $q$-Liealgebrenstruktur erweist sich der Fall der $q$-Lorentzalgebra als besonders aufwendig in der Berechnung. Aus diesem Grund wurden alle hierzu nötigen Rechnungen mit Hilfe des Mathematik-Kalkulationsprogrammes Mathematica ausgeführt. Die Überlegungen sind strukturell jedoch die gleichen wie im Fall der 4-dimensionalen Drehimpulsalgebra.

#### Bahndrehimpulsdarstellungen

Folgen wir aber zunächst unserem bewährten Programm. Wie im klassischen Fall gehen wir von sechs unabhängigen Generatoren aus, die wir mit

$$
V^{+3}, V^{+0}, V^{+-}, V^{30}, V^{3-}, V^{0-}
\tag{3.97}
$$

bezeichnen. Da diese Teil der Komponenten eines antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe sind, ergeben sich die verbleibenden Komponenten unter Berücksichtigung von Gl.(2.256) zu

$$
\begin{aligned}
V^{++} &= V^{00} = V^{--} = 0, & V^{-3} &= -q^{-2}V^{3-}, \\
V^{3+} &= -q^{-2}V^{+3}, & V^{0+} &= q^{-1}\lambda V^{+3} - V^{+0}, \\
V^{-+} &= -V^{+-}, & V^{03} &= \lambda V^{+-} - V^{30}, \\
V^{33} &= \lambda V^{+-}, & V^{-0} &= q^{-1}\lambda V^{3-} - V^{0-}.
\end{aligned}
$$

Die Realisierung der Operatoren auf dem Differentialkalkül ist gegeben durch [20]:

$$
\begin{aligned}
V^{\mu\nu} &= \Lambda^{1/2}(P_A)^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} X^\rho \hat{\partial}^\sigma \\
&= -q^{-2}\Lambda^{1/2}(P_A)^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \hat{\partial}^\rho X^\sigma
\end{aligned}
\tag{3.98}
$$

oder

$$\begin{aligned} V^{\mu\nu} &= q^{-2}\Lambda^{-1/2}(P_A)^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}X^\rho\partial^\sigma \\ &= -\Lambda^{-1/2}(P_A)^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\partial^\rho X^\sigma, \end{aligned} \tag{3.99}$$

wobei hier der Skalierer die Relationen

$$\Lambda X^\mu = q^{-2}X^\mu\Lambda, \quad \Lambda\partial^\mu = q^2\partial^\mu\Lambda$$

erfüllt. Als explizites Beispiel genüge

$$\begin{aligned} V^{+3} &= 2q^2\lambda_+^{-2}X^+\hat\partial^3 - 2\lambda_+^{-2}X^3\hat\partial^+ \\ &\quad - q\lambda\lambda_+^{-2}(X^+\hat\partial^0 + X^0\hat\partial^+), \\ V^{+0} &= 2\lambda_+^{-2}X^1\hat\partial^0 - q^{-2}(q^4+1)\lambda_+^{-2}X^0\hat\partial^+ \\ &\quad + \lambda\lambda_+^{-2}(qX^+\hat\partial^3 - q^{-1}X^3\hat\partial^+), \\ V^{+-} &= 2\lambda_+^{-2}(\lambda^2+1)X^+\hat\partial^- - 2\lambda_+^{-2}X^-\hat\partial^+ \\ &\quad - \lambda\lambda_+^{-2}(X^3\hat\partial^0 + X^0\hat\partial^3), \\ V^{30} &= 2\lambda_+^{-2}X^3\hat\partial^0 - q^{-2}(q^4+1)\lambda_+^{-2}X^0\hat\partial^3 \\ &\quad + \lambda\lambda_+^{-2}(\lambda^2+1)(X^+\hat\partial^- - X^-\hat\partial^+), \\ V^{3-} &= 2q^2\lambda_+^{-2}X^3\hat\partial^- - 2\lambda_+^{-2}X^-\hat\partial^3 \\ &\quad - q\lambda\lambda_+^{-2}(X^0\hat\partial^- + X^-\hat\partial^0), \\ V^{0-} &= 2\lambda_+^{-2}X^0\hat\partial^- - q^{-2}(q^4+1)\lambda_+^{-2}X^-\hat\partial^0 \\ &\quad - \lambda\lambda_+^{-2}(qX^3\hat\partial^- - q^{-1}X^-\hat\partial^3). \end{aligned} \tag{3.100}$$

### Hopfstruktur und $q$-Kommutatoren

In der Arbeit [32] wurde gezeigt, dass die Generatoren $V^{\mu\nu}$ zusammen mit zwei Braidingoperatoren $U^1$ und $U^2$ die $q$-deformierte Lorentzalgebra aufspannen. Nun gibt es aber auch eine andere Form der Lorentzalgebra, ebenfalls beschrieben in [32] und in [20], die sogenannte $R/S$-Form der Algebra. Diese Form der Algebra ist explizit in Anhang A angegeben. Für das Folgende werden wir öfter auf diese Form zurückgreifen, da dann die Resultate überschaubarer sind. Der zur $R/S$-Form gehörige Satz von Generatoren hängt mit den $V^{\mu\nu}$'s zusammen über

$$\begin{aligned} R^+ &= q^{-1}\lambda_+^{-1}(V^{+0} - V^{+3}), \\ R^3 &= q^{-1}\lambda_+^{-1}(V^{30} - qV^{+-}), \\ R^- &= q^{-1}\lambda_+^{-1}(q^{-2}V^{3-} + V^{0-}), \end{aligned} \tag{3.101}$$

$$\begin{aligned} S^+ &= q^{-1}\lambda_+^{-1}(V^{+0} + q^{-2}V^{+3}), \\ S^3 &= q^{-1}\lambda_+^{-1}(V^{30} + q^{-1}V^{+-}), \\ S^- &= q^{-1}\lambda_+^{-1}(V^{3-} - V^{0-}), \end{aligned} \tag{3.102}$$

$$\begin{aligned} L^+ &= q^{-2}(q^{-2}\rho + q^2\sigma + q\lambda_+U^2)V^{+3} \\ &\quad + q^{-2}(\rho - q^2\sigma - q\lambda_+U^2)V^{+0}, \\ L^- &= q^{-2}(-q^{-2}\sigma - q^{-2}\rho + q^{-1}\lambda_+U^1)V^{3-} \\ &\quad + q^{-2}(q^{-2}\rho - \sigma - q^{-1}\lambda_+U^1)V^{0-}. \end{aligned} \tag{3.103}$$

Mit diesen neuen Kombinationen lassen sich nun die Koprodukte der $V^{\mu\nu}$'s wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} \Delta(V^{+3}) &= -\, q^2\sigma\otimes R^+ + q^2R^+\otimes\rho \\ &\quad -\, q^2\tau^{1/2}R^+\otimes\tau^{1/2}\rho + q^2\tau^{1/2}\sigma\otimes\tau^{1/2}R^+ \\ &\quad -\, q^3\lambda_+^{-1}\tau^{1/2}\sigma L^+\otimes\sigma - q^3\lambda_+^{-1}\tau^{1/2}\sigma\otimes\tau^{1/2}\sigma L^+ \\ &\quad +\, q^7\lambda^2\lambda_+^2\tau^{1/2}R^+\otimes\tau^{1/2}S^-L^+ + q^9\lambda^2\lambda_+^2\tau^{1/2}R^+L^+\otimes S^+, \end{aligned} \tag{3.104}$$

$$\begin{aligned} \Delta(V^{+0}) &= \sigma\otimes R^+ - R^+\otimes\rho \\ &\quad -\, q^2\tau^{1/2}R^+\otimes\tau^{1/2}\rho + q^2\tau^{1/2}\sigma\otimes\tau^{1/2}R^+ \\ &\quad -\, q^3\lambda_+^{-1}\tau^{1/2}\sigma L^+\otimes\sigma - q^3\lambda_+^{-1}\tau^{1/2}\sigma\otimes\tau^{1/2}\sigma L^+ \\ &\quad +\, q^7\lambda^2\lambda_+^2\tau^{1/2}R^+\otimes\tau^{1/2}S^-L^+ + q^9\lambda^2\lambda_+^2\tau^{1/2}R^+L^+\otimes S^+, \end{aligned} \tag{3.105}$$

$$\begin{aligned} \Delta(V^{30}) &= -\, R^3\otimes\rho + \tau^{1/2}\sigma\otimes R^3 \\ &\quad +\, q^2S^3\otimes\sigma - q^2\tau^{1/2}\rho\otimes S^3 \\ &\quad +\, q^3\lambda\lambda_+S^-\otimes R^+ - q^3\lambda^2\lambda_+R^+\otimes S^- \\ &\quad -\, q^3\lambda\lambda_+\tau^{1/2}R^+\otimes R^- - q^2\lambda\tau^{1/2}\sigma L^-\otimes R^+ \\ &\quad +\, q^3\lambda\lambda_+\tau^{1/2}S^-\otimes S^+ + q^6\lambda\tau^{1/2}\rho L^+\otimes S^-, \end{aligned} \tag{3.106}$$

$$\begin{aligned} \Delta(V^{+-}) &= qR^3\otimes\rho - q\tau^{1/2}\sigma\otimes R^3 \\ &\quad +\, qS^3\otimes\sigma - q\tau^{1/2}\rho\otimes S^3 \\ &\quad -\, q^4\lambda\lambda_+S^-\otimes R^+ - q^2\lambda^2\lambda_+R^+\otimes S^- \\ &\quad +\, q^4\lambda\lambda_+\tau^{1/2}R^+\otimes R^- + q^3\lambda\tau^{1/2}\sigma L^-\otimes R^+ \end{aligned} \tag{3.107}$$

$$+ q^2\lambda\lambda_+\tau^{1/2}S^-\otimes S^+ + q^5\lambda\tau^{1/2}\rho L^+\otimes S^-,$$

$$\begin{aligned}\Delta(V^{3-}) &= q^2S^-\otimes\sigma - q^2\rho\otimes S^- \\ &- q^2\tau^{1/2}S^-\otimes\tau^{1/2}\sigma + q^2\tau^{1/2}\rho\otimes\tau^{1/2}S^- \\ &- q^3\lambda_+^{-1}\tau^{1/2}\rho L^-\otimes\rho - q^3\lambda_+^{-1}\tau^{1/2}\rho\otimes\tau^{1/2}\rho L^- \\ &+ q^5\lambda^2\lambda_+^2\tau^{1/2}S^-L^-\otimes R^+ + q^7\lambda^2\lambda_+^2\tau^{1/2}S^-\otimes\tau^{1/2}R^+L^-,\end{aligned} \tag{3.108}$$

$$\begin{aligned}\Delta(V^{0-}) &= -S^-\otimes\sigma + \rho\otimes S^- \\ &- q^2\tau^{1/2}S^-\otimes\tau^{1/2}\sigma + q^2\tau^{1/2}\rho\otimes\tau^{1/2}S^- \\ &- q^3\lambda_+^{-1}\tau^{1/2}\rho L^-\otimes\rho - q^3\lambda_+^{-1}\tau^{1/2}\rho\otimes\tau^{1/2}\rho L^- \\ &+ q^5\lambda^2\lambda_+^2\tau^{1/2}S^-L^-\otimes R^+ + q^7\lambda^2\lambda_+^2\tau^{1/2}S^-\otimes\tau^{1/2}R^+L^-.\end{aligned} \tag{3.109}$$

Hierzu zwei Bemerkungen: Zusätzlich zu den Generatoren $R$ und $S$ haben wir wie in [32] geschehen noch die Operatoren $\tau^{1/2}$ als auch $L^+$ und $L^-$ eingeführt. Diese bilden zusammen eine $U_q(su(2))$-Unteralgebra der Lorentzalgebra, was der klassischen Situation entspricht, bei der die dreidimensionalen Drehimpulsgeneratoren ebenfalls eine Unteralgebra der Lorentzalgebra aufspannen.
Desweiteren haben wir noch die Abkürzungen $\rho$ und $\sigma$ eingeführt:

$$\rho = q^2\lambda\lambda_+R^3 + U^1, \quad \sigma = q^2\lambda\lambda_+S^3 - U^2. \tag{3.110}$$

Um die $q$-Kommutatoren auszuwerten, genügt es, neben den Koprodukten der der $V^{\mu\nu}$'s noch folgende Antipoden zu kennen:

$$\begin{aligned}S(R^+) &= -q^2\tau^{1/2}R^+, \\ S(R^3) &= -q^{-2}\lambda^{-1}\lambda_+^{-1}(U^1+\tau^{1/2})\sigma, \\ S(R^-) &= -S^- - q^{-1}\lambda_+^{-1}\tau^{1/2}L^-\sigma,\end{aligned} \tag{3.111}$$

$$\begin{aligned}S(S^+) &= -R^+ - q^3\lambda_+^{-1}\tau^{1/2}L^+\rho, \\ S(S^3) &= q^{-2}\lambda^{-1}\lambda_+^{-1}(U^2-\tau^{1/2}\rho), \\ S(S^-) &= -q^{-2}\tau^{1/2}S^-,\end{aligned} \tag{3.112}$$

$$S(U^i) = U^i, \quad i=1,2 \tag{3.113}$$

$$\begin{aligned}S(\rho) &= -\tau^{1/2}\sigma, \\ S(\sigma) &= -\tau^{1/2}\rho.\end{aligned} \tag{3.114}$$

Ebenso bestätigen wir aber auch deren Inverse, nämlich

$$\begin{aligned} S^{-1}(R^+) &= -q^{-2}R^+\tau^{1/2}, \\ S^{-1}(R^3) &= -q^{-2}\lambda^{-1}\lambda_+^{-1}(U^1+\tau^{1/2})\sigma, \\ S^{-1}(R^-) &= -q^2S^- - q^{-1}\lambda_+^{-1}\tau^{1/2}L^-\sigma, \end{aligned} \tag{3.115}$$

$$\begin{aligned} S^{-1}(S^+) &= -q^{-2}R^+ - q^{-1}\lambda_+^{-1}L^+\rho\tau^{1/2}, \\ S^{-1}(S^3) &= q^{-2}\lambda^{-1}\lambda_+^{-1}(U^2-\tau^{1/2}\rho), \\ S^{-1}(S^-) &= -q^2S^-\tau^{1/2}, \end{aligned} \tag{3.116}$$

$$S^{-1}(U^i) = U^i, \quad i=1,2 \tag{3.117}$$

$$\begin{aligned} S^{-1}(\rho) &= -\tau^{1/2}\sigma, \\ S^{-1}(\sigma) &= -\tau^{1/2}\rho. \end{aligned} \tag{3.118}$$

Die Antipoden der $L$-Generatoren haben wir bereits in Kapitel 3.1. aufgeführt. Nun sind wir in der Lage die $q$-Kommutatoren der $V^{\mu\nu}$'s anzugeben. Insbesondere erhalten wir für deren Linksversionen

$$\begin{aligned} [V^{+3},V]_q &= q^3\lambda_+^{-1}\tau^{1/2}\sigma(L^+V-VL^+)\tau^{1/2}\rho \\ &\quad + q^7\lambda^2\lambda_+^2\tau^{1/2}R^+(VL^+-L^+V)\tau^{1/2}S^- \\ &\quad + q^2(q^2\sigma V\tau^{1/2}R^+ - \tau^{1/2}\sigma VR^+) \\ &\quad + q^2(\tau^{1/2}R^+V\sigma - R^+V\tau^{1/2}\sigma), \end{aligned} \tag{3.119}$$

$$\begin{aligned} [V^{+0},V]_q &= q^3\lambda_+^{-1}\tau^{1/2}\sigma(L^+V-VL^+)\tau^{1/2}\rho \\ &\quad + q^7\lambda^2\lambda_+^2\tau^{1/2}R^+(VL^+-L^+V)\tau^{1/2}S^- \\ &\quad - q^2(\sigma V\tau^{1/2}R^+ + \tau^{1/2}\sigma VR^+) \\ &\quad + q^2\tau^{1/2}R^+V\sigma + R^+V\tau^{1/2}\sigma, \end{aligned} \tag{3.120}$$

$$\begin{aligned} [V^{+-},V]_q &= -\, q^3(R^3V\tau^{1/2}\sigma + S^3V\tau^{1/2}\rho) \\ &\quad + q^{-1}\lambda^{-1}\lambda_+^{-1}\tau^{1/2}(\sigma V(U^1+\tau^{1/2}\sigma) - \rho V(U^2-\tau^{1/2}\rho)) \\ &\quad - q^3\lambda\tau^{1/2}(\rho L^+V\tau^{1/2}S^- + q^2S^-V\tau^{1/2}L^+\rho) \\ &\quad - q^3\lambda\tau^{1/2}(q^2\sigma L^-V\tau^{1/2}R^+ + R^+V\tau^{1/2}L^-\sigma) \\ &\quad + q^4\lambda\lambda_+(q^2S^-V\tau^{1/2}R^+ - \tau^{1/2}R^+VS^-) \end{aligned} \tag{3.121}$$

$$+ \lambda\lambda_+(R^+V\tau^{1/2}S^- - q^2\tau^{1/2}S^-VR^+),$$

$$\begin{aligned}[V^{30}, V]_q = {} & R^3V\tau^{1/2}\sigma - q^2S^3V\tau^{1/2}\rho \\ & - q^{-2}\lambda^{-1}\lambda_+^{-1}\tau^{1/2}(\sigma V(U^1 + \tau^{1/2}\sigma)) + q^2\rho V(U^2 - \tau^{1/2}\rho) \\ & - q^4\lambda\tau^{1/2}(\rho L^+V\tau^{1/2}S^- + q^2S^-V\tau^{1/2}L^+\rho) \\ & + q^2\lambda\tau^{1/2}(q^2\sigma L^-V\tau^{1/2}R^+ + R^+V\tau^{1/2}L^-\sigma) \\ & + q^3\lambda\lambda_+(q^2S^-V\tau^{1/2}R^+ - \tau^{1/2}R^+VS^-) \\ & + q\lambda\lambda_+(R^+V\tau^{1/2}S^- - q^2\tau^{1/2}S^-VR^+),\end{aligned} \tag{3.122}$$

$$\begin{aligned}[V^{3-}, V]_q = {} & \rho V\tau^{1/2}S^- - q^2\tau^{1/2}\rho VS^- \\ & + q^2(\tau^{1/2}S^-V\rho - S^-V\tau^{1/2}\rho) \\ & + q^3\lambda_+\tau^{1/2}\rho(L^-V - VL^-)\tau^{1/2}\sigma \\ & + q^7\lambda^2\lambda_+^2\tau^{1/2}S^-(VL^- - L^-V)\tau^{1/2}R^+,\end{aligned} \tag{3.123}$$

$$\begin{aligned}[V^{0-}, V]_q = {} & - q^{-2}\rho V\tau^{1/2}S^- - q^2\tau^{1/2}\rho VS^- \\ & + q^2\tau^{1/2}S^-V\rho - S^-V\tau^{1/2}\rho) \\ & + q^3\lambda_+\tau^{1/2}\rho(L^-V - VL^-)\tau^{1/2}\sigma \\ & + q^7\lambda^2\lambda_+^2\tau^{1/2}S^-(VL^- - L^-V)\tau^{1/2}R^+,\end{aligned} \tag{3.124}$$

und analog für die korrespondierenden Rechtsversionen:

$$\begin{aligned}[V, V^{+3}]_q = {} & q^2\sigma V\tau^{1/2}R^+ - q^2\sigma\tau^{1/2}VR^+ \\ & - R^+V\tau^{1/2}\sigma + R^+\tau^{1/2}V\sigma \\ & + q^3\lambda_+^{-1}(\rho V\tau^{1/2}\sigma L^+ - L^+\rho V\tau^{1/2}\sigma) \\ & + q^9\lambda^2\lambda_+^2\tau^{1/2}(L^+S^-V\tau^{1/2}R^+ - S^-V\tau^{1/2}R^+L^+),\end{aligned} \tag{3.125}$$

$$\begin{aligned}[V, V^{+0}]_q = {} & q^2\sigma V\tau^{1/2}R^+ + \sigma\tau^{1/2}VR^+ \\ & - R^+V\tau^{1/2}\sigma - q^{-2}R^+\tau^{1/2}V\sigma \\ & + q^3\lambda_+^{-1}(\rho V\tau^{1/2}\sigma L^+ - L^+\rho V\tau^{1/2}\sigma) \\ & + q^9\lambda^2\lambda_+^2\tau^{1/2}(L^+S^-V\tau^{1/2}R^+ - S^-V\tau^{1/2}R^+L^+),\end{aligned} \tag{3.126}$$

$$\begin{aligned}[V, V^{+-}]_q = {} & - q(\rho\tau^{1/2}VS^3 + \sigma\tau^{1/2}VR^3) \\ & + q^{-1}\lambda^{-1}\lambda_+^{-1}((U^2 - \rho\tau^{1/2})V\tau^{1/2}\rho + (U^1 + \sigma\tau^{1/2})V\tau^{1/2}\sigma)\end{aligned} \tag{3.127}$$

$$
\begin{aligned}
&+ q^3\lambda(\tau^{1/2}L^+\rho V\tau^{1/2}S^- + q^4S^-\tau^{1/2}V\tau^{1/2}\rho L^+)\\
&- q\lambda(q^4\tau^{1/2}L^-\sigma V\tau^{1/2}R^+ - R^+\tau^{1/2}V\tau^{1/2}\sigma L^-)\\
&+ \lambda\lambda_+(q^4S^-\tau^{1/2}VR^+ - R^+V\tau^{1/2}S^-)\\
&+ q^2\lambda\lambda_+(R^+\tau^{1/2}VS^- - q^4S^-V\tau^{1/2}R^+),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[V,V^{30}]_q \;=\; &\sigma\tau^{1/2}VR^3 - q^2\rho\tau^{1/2}VS^3 \qquad (3.128)\\
&- q^{-2}\lambda^{-1}\lambda_+^{-1}((U^1+\sigma\tau^{1/2})V\tau^{1/2}\sigma - q^2(U^2-\rho\tau^{1/2})V\tau^{1/2}\rho)\\
&+ \lambda(R^+\tau^{1/2}V\tau^{1/2}\sigma L^- + q^4\tau^{1/2}L^-\sigma V\tau^{1/2}R+)\\
&- q^2\lambda(L^+\rho\tau^{1/2}V\tau^{1/2}S^- + q^6S^-\tau^{1/2}V\tau^{1/2}\rho L^+\\
&- q\lambda\lambda_+(R^+V\tau^{1/2}S^- + R^+\tau^{1/2}VS^-)\\
&+ q^5\lambda\lambda_+(S^-V\tau^{1/2}R+ +S^-\tau^{1/2}VR^+),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[V,V^{3-}]_q \;=\; &- q^2\rho\tau^{1/2}VS^- + q^2\rho V\tau^{1/2}S^- \qquad (3.129)\\
&- q^4S^-V\tau^{1/2}\rho + q^4S^-\tau^{1/2}V\rho\\
&+ q^3\lambda_+^{-1}(\sigma\tau^{1/2}V\tau^{1/2}\rho L^- - \tau^{1/2}L^-\sigma V\tau^{1/2}\rho)\\
&+ q^4\lambda^2\lambda_+^2(q\tau^{1/2}L^-R^+V\tau^{1/2}S^- - q^{-1}R^+\tau^{1/2}V\tau^{1/2}S^-L^-),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[V,V^{0-}]_q \;=\; &\rho\tau^{1/2}VS^- + q^2\rho V\tau^{1/2}S^- \qquad (3.130)\\
&- q^4S^-V\tau^{1/2}\rho - q^2S^-\tau^{1/2}V\rho\\
&+ q^3\lambda_+^{-1}(\sigma\tau^{1/2}V\tau^{1/2}\rho L^- - \tau^{1/2}L^-\sigma V\tau^{1/2}\rho)\\
&+ q^4\lambda^2\lambda_+^2(q\tau^{1/2}L^-R^+V\tau^{1/2}S^- - q^{-1}R^+\tau^{1/2}V\tau^{1/2}S^-L^-).
\end{aligned}
$$

V steht hier wieder für ein beliebiges Element eines Darstellungsraumes der Lorentzalgebra.

### Matrixdarstellungen und cross product Relationen

Widmen wir uns als nächstes den Spindarstellungen. Physikalisch interessant sind hier vor allem die Spinordarstellung und die Vektordarstellung. Von ersterer Darstellung existieren wieder zwei nichtäquivalente Versionen, die $(1/2,0)-$ und die $(0,1/2)-$Darstellung. Die Vektordarstellung ist dann die $(1/2,1/2)$-Darstellung. Eine systematische Behandlung aller Darstellungen der $q$-Lorentzalgebra findet sich in [33].

**Spinordarstellungen** Beginnen wir mit der Spinordarstellung, für die gilt

$$\begin{aligned} V^{\mu\nu} \triangleright \theta^\alpha &= (\sigma_L^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta\, \theta^\beta, \quad V^{\mu\nu} \triangleright \bar{\theta}^\alpha = (\tilde{\sigma}_L^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta\, \bar{\theta}^\beta, \\ \theta_\alpha \triangleleft V^{\mu\nu} &= \theta_\beta\, (\sigma_R^{\mu\nu})^\beta{}_\alpha\,, \quad \bar{\theta}_\alpha \triangleleft V^{\mu\nu} = \bar{\theta}_\beta\, (\tilde{\sigma}_R^{\mu\nu})^\beta{}_\alpha\,, \end{aligned} \tag{3.131}$$

wobei die Spinmatrizen gegeben sind durch

$$\begin{aligned} (\sigma_L^{+3})^\alpha{}_\beta &= -q^{1/2}\lambda_+^{-3/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ (\sigma_L^{+0})^\alpha{}_\beta &= -q^{-3/2}\lambda_+^{-3/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ (\sigma_L^{+-})^\alpha{}_\beta &= \lambda_+^{-2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & q^{-2} \end{pmatrix}, \\ (\sigma_L^{30})^\alpha{}_\beta &= \lambda_+^{-2} \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & -q^{-3} \end{pmatrix}, \\ (\sigma_L^{3-})^\alpha{}_\beta &= q^{-1/2}\lambda_+^{-3/2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (\sigma_L^{0-})^\alpha{}_\beta &= q^{-1/2}\lambda_+^{-3/2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.132}$$

zusammen mit den Beziehungen

$$(\sigma_L^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta = (\sigma_R^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta, \quad (\tilde{\sigma}_L^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta = (\tilde{\sigma}_R^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta, \tag{3.133}$$

und

$$\begin{aligned} (\sigma^{+3})^\alpha{}_\beta &= (\tilde{\sigma}^{+3})^\alpha{}_\beta, \\ (\sigma^{+-})^\alpha{}_\beta &= (\tilde{\sigma}^{+-})^\alpha{}_\beta, \\ (\sigma^{3-})^\alpha{}_\beta &= (\tilde{\sigma}^{3-})^\alpha{}_\beta, \\ (\sigma^{+0})^\alpha{}_\beta &= -q^{-2}(\tilde{\sigma}^{+0})^\alpha{}_\beta, \\ (\sigma^{30})^\alpha{}_\beta &= -q^{-2}(\tilde{\sigma}^{30})^\alpha{}_\beta, \\ (\sigma^{0-})^\alpha{}_\beta &= -q^{-2}(\tilde{\sigma}^{0-})^\alpha{}_\beta. \end{aligned} \tag{3.134}$$

Dass diese Matrizen auch wirklich Darstellungen der $V^{\mu\nu}$'s beschreiben, überprüft man am besten durch das folgende Vorgehen. Zuerst setzt man diese Matrizen in die Ausdrücke (3.101-3.102) ein. Anschließend bestätigt man, dass die so entstandenen Darstellungen der R- und S-Generatoren tatsächlich die Relationen der Lorentzalgebra in der R/S-Form erfüllen, falls man für die Braidingoperatoren $U^1$ und $U^2$ setzt:

$$-\, q^4(q^4+1)^{-1}\lambda_+(U^1)^\alpha{}_\beta = -(U^2)^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta \tag{3.135}$$

und

$$- q^4(q^4+1)^{-1}\lambda_+(\tilde{U}^2)^\alpha{}_\beta = -(\tilde{U}^1)^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta \tag{3.136}$$

Mit den bisherigen Ergebnissen lässt sich die allgemeine Form der Vertauschungsrelationen zwischen Lorentzgeneratoren und Spinoren, nämlich

$$\begin{aligned} [V^{\mu\nu},\theta^\alpha]_q &= (\sigma_L^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta\theta^\beta, \quad [V^{\mu\nu},\tilde{\theta}^\alpha]_q = (\tilde{\sigma}_L^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta\bar{\theta}^\beta, \\ [\theta_\alpha,V^{\mu\nu}]_q &= \theta_\beta(\sigma_R^{\mu\nu})^\beta{}_\alpha, \quad [\bar{\theta}_\alpha,V^{\mu\nu}]_q = \tilde{\theta}_\beta(\tilde{\sigma}_R^{\mu\nu})^\beta{}_\alpha \end{aligned} \tag{3.137}$$

ausschreiben als

$$\begin{aligned} V^{+3}\theta^1 &= (q+1)\lambda_+^{-1}\theta^1V^{+3} + (q^2-q)\lambda_+^{-1}\theta^1V^{+0} \\ &\quad - q^{1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2}\theta^2(V^{+-}+qV^{30}) + q^{1/2}\lambda_+^{-3/2}\theta^2\rho, \\ V^{+3}\theta^2 &= (q+q^{-2})\lambda_+^{-1}\theta^2V^{+3} + (1-q)\lambda_+^{-1}\theta^2V^{+0}, \end{aligned} \tag{3.138}$$

$$\begin{aligned} V^{+0}\theta^1 &= (q^2+q^{-1})\lambda_+^{-1}\theta^1V^{+0} + (1-q^{-1})\lambda_+^{-1}\theta^1V^{+3} \\ &\quad - q^{1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2}\theta^2(V^{+-}+qV^{30}) - q^{-3/2}\lambda_+^{-3/2}\theta^2\rho, \\ V^{+0}\theta^2 &= (1+q^{-1})\lambda_+^{-1}\theta^2V^{+0} + (q^{-2}-q^{-1})\lambda_+^{-1}\theta^2V^{+3}, \end{aligned} \tag{3.139}$$

$$\begin{aligned} V^{+-}\theta^1 &= q^{-1}(2q^2+\lambda_+)\lambda_+^{-1}\theta^1V^{+-} + q^{-1}(q-1)^2\lambda_+^{-2}\theta^1V^{30} \\ &\quad + q^{1/2}(\lambda_+-1)\lambda\lambda_+^{-3/2}\theta^2V^{0-} - q^{-3/2}(q^2\lambda_++1)\lambda\lambda_+^{-3/2}\theta^2V^{3-} \\ &\quad + \lambda_+^{-2}\theta^1U^1, \\ V^{+-}\theta^2 &= q^{-1}(2q^2+\lambda_+)\lambda_+^{-1}\theta^2V^{+-} + q^{-1}(q-1)^2\lambda_+^{-2}\theta^2V^{30} \\ &\quad + q^{-1/2}\lambda\lambda_+^{-3/2}\theta^1(V^{+0}-V^{+3}) - q^{-2}\lambda_+^{-2}\theta^2U^1, \end{aligned} \tag{3.140}$$

$$\begin{aligned} V^{30}\theta^1 &= q^{-1}(q^2\lambda_++2)\lambda_+^{-1}\theta^1V^{30} + q\lambda^2\lambda_+^{-2}\theta^1V^{+-} \\ &\quad + q^{-1/2}(1+q^2\lambda_+)\lambda\lambda_+^{-3/2}\theta^2V^{+0} \\ &\quad + q^{-5/2}(1-q^4\lambda\lambda_+)\lambda\lambda_+^{-3/2}\theta^2V^{3-} \\ &\quad - q^{-1}\lambda_+^{-2}\theta^1U^1, \\ V^{30}\theta^2 &= q^{-1}(q^2\lambda_++2)\lambda_+^{-1}\theta^2V^{30} + q\lambda^2\lambda_+^{-2}\theta^2V^{+-} \\ &\quad + q^{-3/2}\lambda\lambda_+^{-3/2}\theta^1(V^{+0}-V^{+3}) + q^{-3}\lambda_+^{-2}\theta^2U^1, \end{aligned} \tag{3.141}$$

$$V^{3-}\theta^1 = (q^{-1}+1)\lambda_+^{-1}\theta^1V^{3-} + (q-1)\lambda_+^{-1}\theta^2V^{0-}, \tag{3.142}$$

$$V^{3-}\theta^2 = (q^2+q^{-1})\lambda_+^{-1}\theta^2 V^{3-} - (q^2-q)\lambda_+^{-1}\theta^2 V^{0-} - q^{-1/2}\lambda_+^{-3/2}\theta^1\rho,$$

$$\begin{aligned} V^{0-}\theta^1 &= (q+q^{-2})\lambda_+^{-1}\theta^1 V^{0-} + (q^{-1}-q^{-2})\lambda_+^{-1}\theta^1 V^{3-}, \\ V^{0-}\theta^2 &= (q+1)\lambda_+^{-1}\theta^2 V^{0-} + (q^{-1}-1)\lambda_+^{-1}\theta^2 V^{3-} - q^{-1/2}\lambda_+^{-3/2}\theta^2\rho. \end{aligned} \tag{3.143}$$

und ebenso im Fall der konjugierten Spinoren

$$\begin{aligned} V^{+3}\bar\theta^1 &= (q+q^{-1})\lambda_+^{-1}\bar\theta^1 V^{+3} + (q-1)\lambda_+^{-1}\bar\theta^1 V^{+0} \\ &\quad - q^{1/2}\lambda_+^{-3/2}\bar\theta^2\sigma, \\ V^{+3}\bar\theta^2 &= (q^2+q^{-1})\lambda_+^{-1}\bar\theta^2 V^{+3} - (q^2-q)\lambda_+^{-1}\bar\theta^2 V^{+0}, \end{aligned} \tag{3.144}$$

$$\begin{aligned} V^{+0}\bar\theta^1 &= (q+q^{-2})\lambda_+^{-1}\bar\theta^1 V^{+0} + (q^{-1}-q^{-2})\lambda_+^{-1}\bar\theta^1 V^{+3} \\ &\quad - q^{1/2}\lambda_+^{-3/2}\bar\theta^2\sigma, \\ V^{+0}\bar\theta^2 &= (q+1)\lambda_+^{-1}\bar\theta^2 V^{+0} - (1-q^{-1})\lambda_+^{-1}\bar\theta^2 V^{+3}, \end{aligned} \tag{3.145}$$

$$\begin{aligned} V^{+-}\bar\theta^1 &= q^{-1}(2+q^2\lambda_+)\lambda_+^{-2}\bar\theta^1 V^{+-} - q^{-1}(q-1)^2\lambda_+^{-2}\bar\theta^1 V^{30} \\ &\quad + q^{1/2}\lambda\lambda_+^{-3/2}\bar\theta^2(V^{0-}-V^{3-}) + \lambda_+^{-2}\bar\theta^1 U^2, \\ V^{+-}\bar\theta^2 &= q^{-1}(2+q^2\lambda_+)\lambda_+^{-2}\bar\theta^2 V^{+-} + q^{-1}(q-1)^2\lambda_+^{-2}\bar\theta^2 V^{30} \\ &\quad + q^{-1/2}\lambda\lambda_+^{-3/2}\bar\theta^1(V^{+3}-V^{+0}) - q^{-2}\lambda_+^{-2}\bar\theta^2 U^1, \end{aligned} \tag{3.146}$$

$$\begin{aligned} V^{30}\bar\theta^1 &= q^{-1}(2+q^2\lambda_+)\lambda_+^{-2}\bar\theta^1 V^3 + q^{-1}(q-1)^2\lambda_+^{-2}\bar\theta^1 V^{+-} \\ &\quad + q^{-1}(1-q^4\lambda_+)\lambda\lambda_+^{-3/2}\bar\theta^2 V^{3-} \\ &\quad + q^{-1/2}(1+q^2\lambda_+)\lambda\lambda_+^{-3/2}\bar\theta^2 V^{0-} - q^{-1}\lambda_+^{-2}\bar\theta^1 U^1, \\ V^{30}\bar\theta^2 &= q^{-1}(2+q^2\lambda_+)\lambda_+^{-2}\bar\theta^2 V^{30} + q^{-1}(q-1)^2\lambda_+^{-2}\bar\theta^2 V^{+-} \\ &\quad + q^{-3/2}\lambda\lambda_+^{-3/2}\bar\theta^1(V^{+0}-V^{+3}) + q^{-2}\lambda_+^{-2}\bar\theta^2 U^1, \end{aligned} \tag{3.147}$$

$$\begin{aligned} V^{3-}\bar\theta^1 &= (q^{-1}+1)\lambda_+^{-1}\bar\theta^1 V^{3-} + (q-1)\lambda_+^{-1}\bar\theta^1 V^{0-}, \\ V^{3-}\bar\theta^2 &= (q^2+q^{-1})\lambda_+^{-1}\bar\theta^2 V^{3-} - (q^2-q)\lambda_+^{-1}\bar\theta^2 V^{0-} \\ &\quad - q^{-1/2}\lambda_+^{-3/2}\bar\theta^1\rho, \end{aligned} \tag{3.148}$$

$$\begin{aligned} V^{0-}\bar\theta^1 &= (q+q^{-2})\lambda_+^{-1}\bar\theta^1 V^{0-} + (q^{-1}-q^{-2})\lambda_+^{-1}\bar\theta^1 V^{3-}, \\ V^{0-}\bar\theta^2 &= (q+1)\lambda_+^{-1}\bar\theta^2 V^{0-} - (1-q^{-1})\lambda_+^{-1}\bar\theta^2 V^{3-} \\ &\quad - q^{-1/2}\lambda_+^{-3/2}\bar\theta^1\rho. \end{aligned} \tag{3.149}$$

Die Rechtsversionen bzw. Umkehrungen der obigen Relationen lauten dann im Fall der unkonjugierten Spinoren:

$$\begin{aligned}
\theta_1 V^{+3} &= (q+1)\lambda_+^{-1} V^{+3}\theta_1 + (q^2-q)\lambda_+^{-1} V^{+0}\theta_1 \ , \\
\theta_2 V^{+3} &= (q+q^{-2})\lambda_+^{-1} V^{+3}\theta_2 - (q-1)\lambda_+^{-1} V^{+0}\theta_2 \\
&\quad - q^{1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2}(V^{+-}+qV^{30})\theta_1 + q^{1/2}\lambda_+^{-3/2}\rho\theta_1 \ ,
\end{aligned} \tag{3.150}$$

$$\begin{aligned}
\theta_1 V^{+0} &= (q+q^{-2})\lambda_+^{-1} V^{+0}\theta_1 + (1-q^{-1})\lambda_+^{-1} V^{+3}\theta_1 \ , \\
\theta_2 V^{+0} &= (1+q^{-1})\lambda_+^{-1} V^{+0}\theta_2 - (q^{-1}-q^{-2})\lambda_+^{-1} V^{+3}\theta_2 \\
&\quad - q^{1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2}(V^{+-}+qV^{30})\theta_1 - q^{-3/2}\lambda_+^{-3/2}\rho\theta_1 \ ,
\end{aligned} \tag{3.151}$$

$$\begin{aligned}
\theta_1 V^{+-} &= q^{-1}(q^4+1+\lambda_+)\lambda_+^{-2} V^{+-}\theta_1 \\
&\quad - q^{-2}(q^4+1-q^2\lambda_+)\lambda_+^{-2} V^{30}\theta_1 \\
&\quad + q^{-1/2}\lambda\lambda_+^{-3/2}(V^{+3}-V^{+0})\theta_2 \\
&\quad + q^{-1}\lambda\lambda_+^{-2}\rho\theta_1 + q^{-2}\lambda_+^{-2} U^1\theta_1, \\
\theta_2 V^{+-} &= q^{-1}(q^4+1+\lambda_+)\lambda_+^{-2} V^{+-}\theta_2 \\
&\quad - q^{-2}(q^4+1-q^2\lambda_+)\lambda_+^{-2} V^{30}\theta_2 \\
&\quad - q^{-3/2}(q^2\lambda_+ +1)\lambda\lambda_+^{-3/2} V^{3-}\theta_1 \\
&\quad - q^{1/2}(\lambda_+ -1)\lambda\lambda_+^{-3/2} V^{0-}\theta_1 \\
&\quad + q^{-1}\lambda\lambda_+^{-2}\rho\theta_2 - \lambda_+^{-2} U^1\theta_2,
\end{aligned} \tag{3.152}$$

$$\begin{aligned}
\theta_1 V^{30} &= q^{-3}(q^4+1+q^4\lambda_+)\lambda_+^{-2} V^{30}\theta_1 \\
&\quad - q^{-2}(q^4+1-q^2\lambda_+)\lambda_+^{-2} V^{+-}\theta_1 \\
&\quad + q^{-3/2}\lambda\lambda_+^{-3/2}(V^{+0}-V^{+3})\theta_2 \\
&\quad - q^{-2}\lambda\lambda_+^{-2}\rho\theta_1 - q^{-3}\lambda_+^{-2} U^1\theta_1 \ , \\
\theta_2 V^{30} &= q^{-3}(q^4+1+q^4\lambda_+)\lambda_+^{-2} V^{30}\theta_2 \\
&\quad - q^{-2}(q^4+1-q^2\lambda_+)\lambda_+^{-2} V^{+-}\theta_2 \\
&\quad + q^{-1/2}(q^2\lambda_+ -2)\lambda\lambda_+^{-3/2} V^{0-}\theta_1 \\
&\quad + q^{-5/2}(1-q^4\lambda_+)\lambda\lambda_+^{-3/2} V^{3-}\theta_1 \\
&\quad - q^{-2}\lambda\lambda_+^{-2}\rho\theta_2 + q^{-1}\lambda_+^{-2} U^1\theta_2 \ ,
\end{aligned} \tag{3.153}$$

$$\theta_1 V^{3-} = (1+q^{-1})\lambda_+^{-1} V^{3-}\theta_1 + (q-1)\lambda_+^{-1} V^{0-}\theta_1 \tag{3.154}$$

$$
\begin{aligned}
& - q^{-1/2}\lambda_+^{-3/2}\rho\theta_2 \ , \\
\theta_2 V^{3-} &= q^{-1}(q^3+1)\lambda_+^{-1}V^{3-}\theta_2 - (q^2-q)\lambda_+^{-1}V^{0-}\theta_2 \ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta_1 V^{0-} &= q^{-2}(q^3+1)\lambda_+^{-1}V^{0-}\theta_1 + q^{-2}(q-1)\lambda_+^{-1}V^{3-}\theta_1 \\
& - q^{-1/2}\lambda_+^{-3/2}\rho\theta_2, \\
\theta_2 V^{0-} &= (q+1)\lambda_+^{-1}V^{0-}\theta_2 - (1-q^{-1})V^{3-}\theta_2 \ ,
\end{aligned} \tag{3.155}
$$

und analog im Fall der konjugierten Spinoren:

$$
\begin{aligned}
\bar\theta_1 V^{+3} &= (q^{-1}+1)\lambda_+^{-1}V^{+3}\bar\theta_1 + (q-1)\lambda_+^{-1}V^{+0}\bar\theta_1 \ , \\
\bar\theta_2 V^{+3} &= q^{-1}(q^3+1)\lambda_+^{-1}V^{+3}\bar\theta_2 - (1-q^{-1})\lambda_+^{-1}V^{+0}\bar\theta_2 \\
& - q^{1/2}\lambda_+^{-3/2}\sigma\bar\theta_1 \ ,
\end{aligned} \tag{3.156}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar\theta_1 V^{+0} &= q^{-2}(q^3+1)\lambda_+^{-1}V^{+0}\bar\theta_1 + (q^{-1}-q^{-2})\lambda_+^{-1}V^{+3}\bar\theta_1 \ , \\
\bar\theta_2 V^{+0} &= (q^{-1}-q^{-2})\lambda_+^{-1}V^{+0}\bar\theta_1 + (q+1)\lambda_+^{-1}V^{+0}\bar\theta_2 \\
& - q^{1/2}\lambda_+^{-3/2}\sigma\bar\theta_1 \ ,
\end{aligned} \tag{3.157}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar\theta_1 V^{+-} &= q^{-3}(q^4+1+q^4\lambda_+)\lambda_+^{-2}V^{+-}\bar\theta_1 \\
& + q^{-1}(q-1)^2(\lambda_+ +1)\lambda_+^{-2}V^{30}\bar\theta_1 \\
& + (q^2\lambda_+ +1)q^{-5/2}\lambda\lambda_+^{-3/2}V^{+3}\bar\theta_2 \\
& + q^{-1/2}(1-\lambda_+)\lambda\lambda_+^{-3/2}V^{+0}\bar\theta_2 \\
& - q^{-1}\lambda\lambda_+^{-2}\sigma\bar\theta_1 + q^{-2}\lambda_+^{-2}U^2\bar\theta_1 \ , \\
\bar\theta_2 V^{+-} &= q^{-3}(q^4+1+q^4\lambda_+)\lambda_+^{-2}V^{+-}\bar\theta_2 \\
& + q^{-1}(q-1)^2(\lambda_+ +1)\lambda_+^{-2}V^{30}\bar\theta_2 \\
& + q^{1/2}\lambda\lambda_+^{-3/2}(V^{0-}-V^{3-})\bar\theta_1 \\
& - q^{-1}\lambda\lambda_+^{-2}\sigma\bar\theta_2 - \lambda_+^{-2}U^2\bar\theta_2 \ ,
\end{aligned} \tag{3.158}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar\theta_1 V^{30} &= q^{-1}(q^4+1+q^4\lambda_+)\lambda_+^{-2}V^{30}\bar\theta_1 \\
& + q^{-1}(q-1)^2(\lambda_+ +1)\lambda_+^{-2}V^{+-}\bar\theta_1 \\
& + q^{-3/2}(1-\lambda_+)\lambda\lambda_+^{-3/2}V^{+3}\bar\theta_2 \\
& + q^{-3/2}(q^2+\lambda_+)\lambda\lambda_+^{-3/2}V^{+0}\bar\theta_2 \\
& - \lambda\lambda_+^{-2}\sigma\bar\theta_1 + q^{-1}\lambda_+^{-2}U^2\bar\theta_1 \ , \\
\bar\theta_2 V^{30} &= q^{-1}(q^4+1+q^4\lambda_+)\lambda_+^{-2}V^{30}\bar\theta_2
\end{aligned} \tag{3.159}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ q^{-1}(q-1)^2(\lambda_+ + 1)\lambda_+^{-2} V^{+-}\bar\theta_2 \\
&+ q^{3/2}\lambda\lambda_+^{-3/2}(V^{0-} - V^{3-}\bar\theta_1) \\
&- \lambda\lambda_+^{-2}\sigma\bar\theta_2 - q\lambda_+^{-2}U^2\bar\theta_2 \,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar\theta_1 V^{3-} &= (q+1)\lambda_+^{-1}V^{3-}\bar\theta_1 + (q^2-q)\lambda_+^{-1}V^{0-}\bar\theta_1 \\
&\quad + q^{1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2}(qV^{+-} - V^{30})\bar\theta_2 + q^{-1/2}\lambda_+^{-3/2}\sigma\bar\theta_2 \,, \\
\bar\theta_2 V^{3-} &= q^{-2}(q^3+1)\lambda_+^{-1}V^{3-}\bar\theta_2 - (q-1)\lambda_+^{-1}V^{0-}\bar\theta_2 \,,
\end{aligned} \tag{3.160}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar\theta_1 V^{0-} &= q^{-1}(q^3+1)\lambda_+^{-1}V^{0-}\bar\theta_1 + (1-q^{-1})\lambda_+^{-1}V^{3-}\bar\theta_1 \\
&\quad + q^{1/2}\lambda\lambda_+^{-1/2}(qV^{+-} - V^{30})\bar\theta_2 - q^{-5/2}\lambda_+^{-3/2}\sigma\bar\theta_2 \,, \\
\bar\theta_2 V^{0-} &= (q+q^{-1})\lambda_+^{-1}V^{0-}\bar\theta_2 - (q^{-1}-q^{-2})\lambda_+^{-1}V^{3-}\bar\theta_2 \,.
\end{aligned} \tag{3.161}
$$

wie man leicht durch Einsetzen nachrechnet:).

**Vektordarstellungen** Als nächstes wollen wir uns der Vektordarstellung der $V^{\mu\nu}$'s zuwenden, gegeben durch

$$
V^{\mu\nu} \triangleright X^\rho = (\tau^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma \, X^\sigma, \quad X_\rho \triangleleft V^{\mu\nu} = X_\sigma (\tau^{\mu\nu})^\sigma{}_\rho, \tag{3.162}
$$

und den entsprechenden Matrizen

$$
\begin{aligned}
(\tau^{+3})^\rho{}_\sigma &= q^{-2}\lambda_+^{-2}\begin{pmatrix} 0 & -2q^3 & -q^2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2q^2 \\ 0 & 0 & 0 & -q^3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
(\tau^{+0})^\rho{}_\sigma &= q^{-2}\lambda_+^{-2}\begin{pmatrix} 0 & -q^2\lambda & 2q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -(q^4+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
(\tau^{+-})^\rho{}_\sigma &= q^{-2}\lambda_+^{-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2q\lambda & -q\lambda & 0 \\ 0 & q\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2q^2 \end{pmatrix}, \\
(\tau^{30})^\rho{}_\sigma &= q^{-2}\lambda_+^{-2}\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q\lambda^2 & 2q & 0 \\ 0 & q^{-1}(q^4+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^2\lambda \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.163}
$$

$$
\begin{aligned}
(\tau^{3-})^{\rho}{}_{\sigma} &= q^{-2}\lambda_+^{-2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2q^2 & 0 & 0 & \\ -q\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2q & -q^2\lambda & 0 \end{pmatrix}, \\
(\tau^{0-})^{\rho}{}_{\sigma} &= q^{-2}\lambda_+^{-2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ q\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -q^{-1}(q^4+1) & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Selbstverständlich gilt auch hier wieder mit unserer Indexkonvention, dass Rechtsmatrizen gleich Linksmatrizen sind. Dabei sei darauf hingewiesen, dass die Spalten und Zeilen obiger Matrizen in der Reihenfolge +,3,0,- angeordnet sind. Zum Nachweis der Darstellungseigenschaft der Matrizen setzen wir diese in Gl.(3.101-3.103) ein und erhalten auf diese Weise

$$R^+ = q^{-2}\lambda_+^{-2}\begin{pmatrix} 0 & q & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.164}$$

$$R^3 = q^{-2}\lambda_+^{-2}\begin{pmatrix} -q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & q & 0 \\ 0 & q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \tag{3.165}$$

$$R^- = q^{-2}\lambda_+^{-2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -q^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-1} & q & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.166}$$

$$S^+ = q^{-2}\lambda_+^{-2}\begin{pmatrix} 0 & -q & q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -q^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.167}$$

$$S^3 = q^{-2}\lambda_+^{-2}\begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & q^{-1} & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q \end{pmatrix}, \tag{3.168}$$

$$S^- = q^{-2}\lambda_+^{-2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1} & q^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.169}$$

$$\tag{3.170}$$

Berücksichtigen wir außerdem

$$
\begin{aligned}
U^1 = U^2 = &= -q^{-2}(q^4+1)\lambda_+^{-1}\mathbb{1} &(3.171)\\
\tau^{\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} q^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix}, &(3.172)\\
L^+ &= \begin{pmatrix} 0 & q^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, &(3.173)\\
L^- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-4} & 0 & 0 \end{pmatrix}, &(3.174)
\end{aligned}
$$

so lässt sich grundsätzlich nachrechnen, dass die Matrizen die Relationen der Lorentzalgebra in der R/S-Form (Anhang A) erfüllen.

Als nächstes geben wir die explizite, bedauerlicherweise etwas längliche Form von

$$[V^{\mu\nu}, X^\rho]_q = (\tau^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma X^\sigma \tag{3.175}$$

und

$$[X_\sigma, V^{\mu\nu}]_q = X_\sigma (\tau^{\mu\nu})^\sigma{}_\rho \tag{3.176}$$

an. Die erste Relation ergibt unter Verwendung der expliziten Form des $q$-Kommutators sowie der Vektordarstellung die Vertauschungen

$$
\begin{aligned}
V^{+3}X^+ &= q^{-2}(q^4+1)\lambda_+^{-1}X^+V^{+3} - q\lambda\lambda_+^{-1}X^+V^{+0}, &(3.177)\\
V^{+3}X^3 &= 2\lambda_+^{-1}X^3V^{+3} - q\lambda X^+V^{+-}\\
&\quad + q\lambda\lambda_+^{-1}(X^0V^{+3} - X^+V^{30})\\
&\quad + q\lambda_+^{-2}X^+(U^1+U^2),\\
V^{+3}X^0 &= q^{-2}(q^4+1)\lambda_+^{-1}X^0V^{+3} + q\lambda\lambda_+^{-1}X^3V^{+3}\\
&\quad - q^2\lambda\lambda_+^{-1}X^+V^{+-} + q\lambda_+^{-2}X^+U^1 - q^{-1}\lambda_+^{-2}X^+U^2,\\
V^{+3}X^- &= 2\lambda_+^{-1}X^-V^{+3} - 2q\lambda\lambda_+^{-1}X^3V^{+-}\\
&\quad + q\lambda\lambda_+^{-1}(X^0V^{+-} - X^-V^{+0})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& - q^2\lambda\lambda_+^{-1}X^3V^{30} - q^2\lambda^2\lambda_+^{-1}X^+V^{0-} \\
& +\lambda_+^{-2}(X^3 - X^0)U^1 + \lambda_+^{-2}(X^3 + q^2X^0)U^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V^{+0}X^+ &= 2\lambda_+^{-1}X^+V^{+0} - q\lambda\lambda_+^{-1}X^+V^{+3}, \\
V^{+0}X^3 &= 2\lambda_+^{-1}X^3V^{+0} - \lambda\lambda_+^{-1}X^+V^{+3} \\
&\quad - 2q\lambda\lambda_+^{-1}X^+V^{30} + q\lambda\lambda_+^{-1}X^0V^{+0} \\
&\quad - q\lambda_+^{-2}X^+(U^1 + U^2), \\
V^{+0}X^0 &= q^{-2}\lambda_+^{-1}(q^4+1)X^0V^{+0} - q\lambda\lambda_+^{-1}X^+V^{30} \\
&\quad + q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}X^3V^{+0} - q^{-1}\lambda_+^{-2}X^+(U^1 + U^2), \\
V^{+0}X^- &= q^{-2}\lambda_+^{-1}(q^4+1)X^-V^{+0} - q\lambda X^3V^{30} \\
&\quad + \lambda\lambda_+^{-1}X^0V^{30} + q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}X^-V^{+3} - q\lambda\lambda_+^{-1}X^3V^{+-} \\
&\quad + q^2\lambda^2\lambda_+^{-1}X^+(V^{0-} + V^{3-}) + q^{-2}\lambda_+^{-2}(X^0 - X^3)U^1 \\
&\quad + \lambda_+^{-2}X^3U^2 + q^2\lambda_+^{-2}X^0U^2,
\end{aligned}
\tag{3.178}
$$

$$
\begin{aligned}
V^{+-}X^+ &= 2\lambda_+^{-1}X^+V^{+-} + q^{-1}\lambda X^3V^{+3} \\
&\quad - \lambda\lambda_+^{-1}X^3V^{+0} - q^{-2}\lambda\lambda_+^{-1}X^0V^{+3} \\
&\quad - q^{-2}\lambda_+^{-2}X^+(U^1 + U^2), \\
V^{+-}X^3 &= (2-\lambda^2)\lambda_+^{-1}X^3V^{+-} - \lambda X^+V^{3-} \\
&\quad + q\lambda\lambda_+^{-1}X^+V^{+0} + 2q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}X^-V^{+3} \\
&\quad - q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}X^-V^{+0} + \lambda^2\lambda_+^{-1}X^0V^{+-} \\
&\quad q^{-1}\lambda\lambda_+^{-2}(X^3 + X^0)U^1 + q^{-1}\lambda\lambda_+^{-2}X^3U^2 - \lambda_+^{-2}X^0U^2, \\
V^{+-}X^0 &= q^{-2}(q^4+1)\lambda_+^{-1}X^0V^{+-} - \lambda^2\lambda_+^{-1}X^3V^{+-} \\
&\quad + q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}(X^-V^{+3} - X^+V^{3-}) \\
&\quad + \lambda_+^{-2}X^3U^1 - q^{-2}\lambda_+^{-2}X^3U^2, \\
V^{+-}X^- &= 2\lambda_+^{-1}X^-V^{+-} - 2\lambda\lambda_+^{-1}X^3V^{3-} \\
&\quad + \lambda\lambda_+^{-1}(X^3V^{0-} + X^0V^{3-}) + \lambda_+^{-2}X^-(U^1 + U^2),
\end{aligned}
\tag{3.179}
$$

$$
\begin{aligned}
V^{30}X^+ &= 2\lambda_+^{-1}X^+V^{30} - q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}(X^0V^{+0} + X^3V^{+3}) \\
&\quad + 2q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}X^3V^{+0} + q^{-2}\lambda_+^{-2}X^+(U^1 - U^2), \\
V^{30}X^3 &= (2-\lambda^2)\lambda_+^{-1}X^3V^{30} + q\lambda X^+V^{0-} + q^{-1}\lambda X^-V^{+0} \\
&\quad - q^{-3}\lambda\lambda_+^{-1}(-q + q^{-2}\lambda_+)X^+V^{3-} - q^{-2}\lambda\lambda_+^{-1}X^-V^{+3}
\end{aligned}
\tag{3.180}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \lambda^2\lambda_+^{-1}X^0V^{30} - q^{-2}\lambda\lambda_+^{-2}X^3U^1 - q^{-3}\lambda_+^{-2}X^0U^1 \\
& + \lambda\lambda_+^{-2}X^3U^2 - q\lambda_+^{-2}X^0U^2, \\
V^{30}X^0 \;=\;& q^{-2}(q^4+1)\lambda_+^{-1}X^0V^{30} + \lambda\lambda_+^{-1}(X^+V^{0-} + X^-V^{+0}) \\
& - q^{-1}\lambda^2\lambda_+^{-1}X^+V^{3-} - \lambda^2\lambda_+^{-1}X^3V^{30} \\
& - q^{-1}\lambda_+^{-2}X^3(U^1+U^2), \\
V^{30}X^- \;=\;& 2\lambda_+^{-1}X^-V^{30} - \lambda\lambda_+^{-1}(q+\lambda)X^3V^{3-} \\
& - q\lambda\lambda_+^{-1}X^0V^{0-} + 2q\lambda\lambda_+^{-1}X^3V^{0-} + \lambda^2\lambda_+^{-1}X^0V^{3-} \\
& - q^{-1}\lambda_+^{2}X^-U^1 + q\lambda_+^{-2}X^-U^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V^{3-}X^+ \;=\;& q^{-2}(q^4+1)\lambda_+^{-1}X^+V^{3-} \\
& - q\lambda\lambda_+^{-1}(X^0V^{+-} - X^+V^{0-}) \\
& + 2q\lambda\lambda_+^{-1}X^3V^{+-} + \lambda^2\lambda_+^{-1}X^-(V^{+3} - V^{+0}) \\
& - \lambda_+^{-2}X^3U^1 - q^{-2}\lambda_+^{-2}X^0U^1 + \lambda_+^{-2}(X^0 - X^3)U^2, \\
V^{3-}X^3 \;=\;& 2\lambda_+^{-1}X^3V^{3-} + q\lambda X^-V^{+-} \\
& - q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}X^0V^{3-} - q\lambda\lambda_+^{-1}X^-V^{30} \\
& - q^{-1}\lambda_+^{-2}X^-(U^1+U^2), \\
V^{3-}X^0 \;=\;& q^{-2}(q^4+1)\lambda_+^{-1}X^0V^{3-} - q\lambda\lambda_+^{-1}X^3V^{3-} \\
& + \lambda\lambda_+^{-1}X^-V^{+-} + q\lambda_+^{-2}X^-U^1 - q^{-1}\lambda_+^{-2}X^-U^2, \\
V^{3-}X^- \;=\;& 2\lambda_+^{-1}X^-V^{3-} + q\lambda\lambda_+^{-1}X^-V^{0-},
\end{aligned}
\tag{3.181}
$$

$$
\begin{aligned}
V^{0-}X^+ \;=\;& 2\lambda_+^{-1}X^+V^{0-} + \lambda\lambda_+^{-1}(q+\lambda)X^3V^{+-} \\
& - 2\lambda\lambda_+^{-1}X^3V^{30} - q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}X + V^{3-} + \lambda\lambda_+^{-1}X^0V^{30} \\
& + \lambda^2\lambda_+^{-1}(X^-V^{+3} - X^-V^{+0} - X^0V^{+-}) \\
& - \lambda_+^{-2}X^3U^1 - q^{-2}\lambda_+^{-2}X^0U^1 + q^{-2}\lambda_+^{-2}(X^3 - X^0)U^2, \\
V^{0-}X^3 \;=\;& 2\lambda_+^{-1}X^3V^{0-} - \lambda X^-V^{30} \\
& + q^{-3}\lambda\lambda_+^{-1}(q - q^{-2}\lambda_+)V^{+-} - q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}X^0V^{0-} \\
& - q^{-1}\lambda_+^{-2}X^-U^1 + q^{-2}\lambda_+^{-2}X^-U^2, \\
V^{0-}X^0 \;=\;& q^{-2}(q^4+1)\lambda_+^{-1}X^0V^{0-} - q\lambda\lambda_+^{-1}X^3V^{0-} \\
& - q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}X^-V^{30} + q^{-1}\lambda^2\lambda_+^{-1}X^-V^{+-} \\
& + q\lambda_+^{-2}X^-U^1 + q^{-2}\lambda_+^{-2}X^-U^2, \\
V^{0-}X^- \;=\;& q^{-2}(q^4+1)\lambda_+^{-1}X^-V^{0-} + q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}X^-V^{3-}.
\end{aligned}
\tag{3.182}
$$

Wollen wir stattdessen die Umkehrung, um eine Vektorkomponente nach links zu tauschen, ergibt sich

$$\begin{aligned}
X_+V^{+3} &= q^{-2}(q^4+1)\lambda_+^{-1}V^{+3}X_+ - q\lambda V^{+-}X_3 \\
&\quad - q\lambda\lambda_+^{-1}(V^{30}X_3 + V^{+0}X_+) - q^2\lambda\lambda_+^{-1}V^{+-}X_0 \\
&\quad + q^2\lambda^2\lambda_+^{-1}(V^{3-}X_- - V^{0-}X_-) \\
&\quad + q\lambda_+^{-2}U^1(X_3+X_0) + q\lambda_+^{-2}U^2X_3 - q^{-1}\lambda_+^{-2}U^2X_0 \ , \\
X_3V^{+3} &= 2\lambda_+^{-1}V^{+3}X_3 - 2q\lambda\lambda_+^{-1}V^{+-}X_- \\
&\quad + q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}V^{+3}X_0 - q^2\lambda\lambda_+^{-1}V^{30}X_- + \lambda_+^{-2}(U^1+U^2)X_- \ , \\
X_0V^{+3} &= q^{-2}(q^4+1)\lambda_+^{-1}V^{+3}X_0 + q\lambda\lambda_+^{-1}(V^{+3}X_3 - V^{+-}X_-) \\
&\quad - \lambda_+^{-2}U^1X_- + q^2\lambda_+^{-2}U^2X_- \ , \\
X_-V^{+3} &= 2\lambda_+^{-1}V^{+3}X_- + q\lambda\lambda_+^{-1}V^{+0}X_- \ ,
\end{aligned} \tag{3.183}$$

$$\begin{aligned}
X_+V^{+0} &= 2\lambda_+^{-1}V^{+0}X_+ - \lambda\lambda_+^{-1}V^{+-}X_3 \\
&\quad - q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}V^{+3}X_+ - 2q\lambda\lambda_+^{-1}V^{30}X_3 - q\lambda\lambda_+^{-1}V^{30}X_0 \\
&\quad + q^2\lambda^2\lambda_+^{-2}(V^{3-}+V^{0-})X_- - q^{-1}\lambda_+^{-2}U^1(X_3+X_0) \\
&\quad + q\lambda_+^{-2}U^2X_3 - q^{-1}\lambda_+^{-2}U^2X_0 \ , \\
X_3V^{+0} &= 2\lambda_+^{-1}V^{+0}X_3 - q\lambda V^{30}X_- \\
&\quad + q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}V^{+0}X_0 - q\lambda\lambda_+^{-1}V^{+-}X_- \\
&\quad - q^{-2}\lambda_+^{-2}U^1X_- + \lambda_+^{-2}U^2X_- \ , \\
X_0V^{+0} &= q^{-2}(q^4+1)\lambda_+^{-1}V^{+0}X_0 + \lambda\lambda_+^{-1}V^{30}X_- \\
&\quad + q\lambda\lambda_+^{-1}V^{+0}X_3 + q^{-2}\lambda_+^{-2}U^1X_- + q^2\lambda_+^{-2}U^2X_- \ , \\
X_-V^{+0} &= q^{-2}(q^4+1)\lambda_+^{-1}X_-V^{+0} + q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}V^{+3}X_- \ ,
\end{aligned} \tag{3.184}$$

$$\begin{aligned}
X_+V^{+-} &= 2\lambda_+^{-1}V^{+-}X_+ - \lambda V^{3-}X_3 \\
&\quad - q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}V^{3-}X_0 + q\lambda\lambda_+^{-1}V^{0-}X_3 \\
&\quad - q^{-2}\lambda_+^{-2}(U^1+U^2)X_+ \ , \\
X_3V^{+-} &= (2-\lambda^2)\lambda_+^{-1}V^{+-}X_3 + q^{-1}\lambda V^{+3}X_+ \\
&\quad - \lambda\lambda_+^{-1}V^{+0}X_+ + \lambda\lambda_+^{-1}V^{0-}X_- - 2\lambda\lambda_+^{-1}V^{3-}X_- \\
&\quad - \lambda^2\lambda_+^{-1}V^{+-}X_0 + q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}U^1X_3 + \lambda_+^{-2}U^1X_0 \\
&\quad + q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}U^2X_3 - q^{-2}\lambda_+^{-2}U^2X_0 \ , \\
X_0V^{+-} &= q^{-2}(q^4+1)\lambda_+^{-1}V^{+-}X_0 - q^2\lambda\lambda_+^{-1}V^{+3}X_+
\end{aligned} \tag{3.185}$$

$$
\begin{aligned}
&& & + \lambda\lambda_+^{-1}V^{3-}X_- + \lambda^2\lambda_+^{-1}V^{+-}X_3 \\
&& & + q^{-2}\lambda_+^{-2}U^1X_3 - \lambda_+^{-2}U^2X_3\ , \\
X_-V^{+-} &=& & 2\lambda_+^{-1}V^{+-}X_- + 2q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}V^{+3}X_3 \\
&& & + q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}(V^{+3}X_0 - V^{+0}X_3) + \lambda_+^{-2}(U^1 + U^2)X_-\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_+V^{30} &=& & 2\lambda_+^{-1}V^{30}X_+ + q^{-3}\lambda\lambda_+^{-1}(q - q^{-2}\lambda_+)V^{3-}X_3 \\
&& & + q\lambda V^{0-}X_3 + \lambda\lambda_+^{-1}V^{0-}X_0 - q^{-1}\lambda^2\lambda_+^{-1}V^{3-}X_0 \\
&& & + q^{-2}\lambda_+^{-2}U^1X_+ - q^{-1}\lambda_+^{-2}U^2X_+\ , \\
X_3V^{30} &=& & (2-\lambda^2)\lambda_+^{-1}V^{30}X_3 - (q+\lambda)\lambda\lambda_+^{-1}V^{3-}X_- \\
&& & - q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}V^{+3}X_+ + 2q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}V^{+0}X_+ \\
&& & + 2q\lambda\lambda_+^{-1}V^{0-}X_+ - \lambda^2\lambda_+V^{30}X_0 \\
&& & - q^{-2}\lambda\lambda_+^{-1}U^1X_3 + q^{-1}\lambda_+^{-2}U^1X_0 \\
&& & + \lambda\lambda_+^{-2}U^2X_3 - q^{-1}\lambda_+^{-2}U^2X_0\ , \\
X_0V^{30} &=& & q^{-2}(q^4+1)V^{30}X_0 - q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}V^{+0}X_+ \\
&& & - q\lambda\lambda_+^{-1}V^{0-}X_- + \lambda^2\lambda_+^{-1}(V^{30}X_3 + V^{3-}X_-) \\
&& & - q^{-3}\lambda_+^{-2}U^1X_3 - q\lambda_+^{-2}U^2X_3\ , \\
X_-V^{30} &=& & 2\lambda_+^{-1}X_-V^{30} + q^{-1}\lambda V^{+0}X_3 \\
&& & - q^{-2}\lambda\lambda_+^{-1}V^{+3}X_3 + \lambda\lambda_+^{-1}V^{+0}X_0 \\
&& & - q^{-1}\lambda_+^{-2}U^1X_- + q\lambda_+^{-2}U^2X_-\ ,
\end{aligned}
\tag{3.186}
$$

$$
\begin{aligned}
X_+V^{3-} &=& & q^{-2}(q^4+1)V^{3-}X_+ - q\lambda\lambda_+^{-1}V^{0-}X_+\ , \\
X_3V^{3-} &=& & 2\lambda_+^{-1}V^{3-}X_3 + 2q\lambda\lambda_+^{-1}V^{+-}X_+ \\
&& & - \lambda\lambda_+^{-1}V^{30}X_+ - q\lambda\lambda_+^{-1}V^{3-}X_0 \\
&& & - \lambda_+^{-2}(U^1 + U^2)X_+\ , \\
X_0V^{3-} &=& & q^{-2}(q^4+1)\lambda_+^{-1}V^{3-}X_0 - q\lambda\lambda_+^{-1}V^{+-}X_+ \\
&& & - q^1\lambda\lambda_+^{-1}V^{3-}X_3 - q^{-2}\lambda_+^{-2}U^1X_+ + \lambda_+^{-2}U^2X_+\ , \\
X_-V^{3-} &=& & 2\lambda_+^{-1}V^{3-}X_- + q\lambda V^{+-}X_3 \\
&& & \lambda\lambda_+^{-1}V^{+-}X_0 + q\lambda\lambda_+^{-1}(V^{0-}X_- - V^{30}X_3) \\
&& & + \lambda^2\lambda_+^{-1}(V^{+3} - V^{+0})X_+ \\
&& & + q\lambda_+^{-2}U^1X_0 - q^{-1}\lambda_+^{-2}U^1X_3 - q^{-1}\lambda_+^{-2}U^2(X_3 + X_0)\ ,
\end{aligned}
\tag{3.187}
$$

$$
\begin{aligned}
X_+V^{0-} &= 2\lambda_+^{-1}V^{0-}X_+ - q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}V^{3-}X_+ \,, \\
X_3V^{0-} &= 2\lambda_+^{-1}V^{0-}X_3 + \lambda(q+\lambda)\lambda_+^{-1}V^{+-}X_+ \\
&\quad - 2\lambda\lambda_+^{-1}V^{0-}X_3 - q\lambda\lambda_+^{-1}V^{0-}X_0 \\
&\quad - \lambda_+^{-2}U^1X_+ + q^{-2}\lambda_+^{-2}U^2X_+ \,, \\
X_0V^{0-} &= q^{-2}(q^4+1)\lambda_+^{-1}V^{0-}X_0 + \lambda\lambda_+^{-1}V^{30}X_+ \\
&\quad - q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}V^{0-}X_3 - \lambda^2\lambda_+^{-1}V^{+-}X_+ \\
&\quad - q^{-2}\lambda_+^{-2}(U^1+U^2)X_+ \,, \\
X_-V^{0-} &= q^{-2}(q^4+1)\lambda_+^{-1}V^{0-}X_- - \lambda V^{30}X_3 \\
&\quad + q^{-3}\lambda\lambda_+^{-1}(-q+q^{-2}\lambda_+)V^{+-}X_3 \\
&\quad + q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}(V^{3-}X_- - V^{30}X_0) \\
&\quad + q^{-1}\lambda^2\lambda_+^{-1}V^{+-}X_0 + \lambda^2\lambda_+^{-1}(V^{+3} - V^{+0})X_+ \\
&\quad - q^{-1}\lambda_+^{-2}U^1X_3 + q\lambda_+^{-2}U^1X_0 + q^{-2}\lambda_+^{-2}U^2(X_3+X_0) \,.
\end{aligned}
\tag{3.188}
$$

wie man durch Einsetzen in Gl.(3.177-3.182) nachrechnet.

### $q$-Liealgebra und Casimiroperatoren

Die adjungierte Darstellung berechnet sich wie im vorhergehenden Abschnitt dargelegt. Wir geben als Ergebnis wieder nur die nichttrivialen Resultate an, d.h. für alle anderen $q$-Kommutatoren wird die rechte Seite null:

$$
\begin{aligned}
[V^{+3}, V^{+-}]_q &= -\lambda_+^{-1}V^{+3}, \\
[V^{+3}, V^{30}]_q &= -q\lambda_+^{-1}V^{+0}, \\
[V^{+3}, V^{3-}]_q &= -q\lambda_+^{-1}V^{+-}, \\
[V^{+3}, V^{0-}]_q &= \lambda_+^{-1}(V^{30} - \lambda V^{+-}),
\end{aligned}
\tag{3.189}
$$

$$
\begin{aligned}
[V^{+0}, V^{+-}]_q &= -\lambda_+^{-1}V^{+0}, \\
[V^{+0}, V^{30}]_q &= -\lambda_+^{-1}(q^{-1}V^{+3} + \lambda V^{+0}), \\
[V^{+0}, V^{3-}]_q &= -\lambda_+^{-1}V^{30}, \\
[V^{+0}, V^{0-}]_q &= q^{-1}\lambda_+^{-1}V^{+-},
\end{aligned}
\tag{3.190}
$$

$$
\begin{aligned}
[V^{+-}, V^{+3}]_q &= q^{-2}\lambda_+^{-1}V^{+3}, \\
[V^{+-}, V^{+0}]_q &= q^{-2}\lambda_+^{-1}V^{+0}, \\
[V^{+-}, V^{+-}]_q &= -q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}V^{+-},
\end{aligned}
\tag{3.191}
$$

$$
\begin{aligned}
[V^{+-}, V^{30}]_q &= -q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}V^{30}, \\
[V^{+-}, V^{3-}]_q &= -\lambda_+^{-1}V^{3-}, \\
[V^{+-}, V^{0-}]_q &= -\lambda_+^{-1}V^{0-},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[V^{30}, V^{+3}]_q &= q^{-1}\lambda_+^{-1}V^{+0}, \\
[V^{30}, V^{+0}]_q &= q^{-3}\lambda_+^{-1}(V^{+3} + q\lambda V^{+0}), \\
[V^{30}, V^{+-}]_q &= -q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}V^{30}, \\
[V^{30}, V^{30}]_q &= -q^{-1}\lambda\lambda_+^{-1}(V^{+-} + \lambda V^{30}), \\
[V^{30}, V^{3-}]_q &= \lambda_+^{-1}(qV^{0-} + \lambda V^{3-}), \\
[V^{30}, V^{0-}]_q &= q^{-1}\lambda_+^{-1}V^{3-},
\end{aligned}
\tag{3.192}
$$

$$
\begin{aligned}
[V^{3-}, V^{+3}]_q &= q\lambda_+^{-1}V^{+-}, \\
[V^{3-}, V^{+0}]_q &= \lambda_+^{-1}V^{30} \\
[V^{3-}, V^{+-}]_q &= q^{-2}\lambda_+^{-1}V^{3-}, \\
[V^{3-}, V^{30}]_q &= -q^{-1}\lambda_+^{-1}(V^{0-} - q^{-1}\lambda V^{3-}),
\end{aligned}
\tag{3.193}
$$

$$
\begin{aligned}
[V^{0-}, V^{+3}]_q &= -\lambda_+^{-1}(V^{30} - \lambda V^{+-}), \\
[V^{0-}, V^{+0}]_q &= -q^{-1}\lambda_+^{-1}V^{+-}, \\
[V^{0-}, V^{+-}]_q &= q^{-2}\lambda_+^{-1}V^{0-}, \\
[V^{0-}, V^{30}]_q &= -q^{-3}\lambda_+^{-1}V^{3-}.
\end{aligned}
\tag{3.194}
$$

Auch hier kann man die oben angegebenen Darstellungsmatrizen in die expliziten Ausdrücke für die $q$-Kommutatoren einsetzen und verifizieren, dass diese im Rahmen der gewöhnlichen Matrixmultiplikation die rechte Seite ergeben. Ebenso ergibt sich im Limes $q \to 1$ die undeformierte Minkowskialgebra.

Zum Abschluss betrachten wir wieder die Casimiroperatoren zusammen mit den jeweiligen Spezifikationen durch die Darstellungen. Als Casimirs findet man die zwei Operatoren

$$
\begin{aligned}
C^1 &= \eta_{ik}\eta_{jm}V^{ij}V^{km} = 2V^{30}V^{30} + (q^2 + q^{-2})V^{+-}V^{+-} \\
&\quad + 2(qV^{+0}V^{0-} - q^{-1}V^{+3}V^{3-} - q^{-3}V^{3-}V^{3+}) \\
&\quad - \lambda(V^{+3}V^{0-} + V^{+0}V^{3-} + V^{+-}V^{30} + V^{30}V^{+-}) \\
&\quad - q^{-2}\lambda(V^{3-}V^{+0} + V^{0-}V^{+3}), \\
C^2 &= \varepsilon_{ijkl}V^{ij}V^{kl} = (3 + q^{-4} - 2q^{-3}\lambda)(V^{+3}V^{0-} - V^{+0}V^{3-})
\end{aligned}
\tag{3.195}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (3 + q^{-4} - 2q^{-3})(V^{+-}V^{30} + V^{30}V^{+-}) \\
&+ q^{-6}(3q^4 + 1 - 2q\lambda)(V^{0-}V^{+3} - V^{3-}V^{+0}) \\
&- q^{-2}\lambda(2q^2 + 2q\lambda + \lambda\lambda_+)V^{+-}V^{+-}.
\end{aligned}
$$

wobei $\eta_{ij}$ und $\varepsilon_{ijkl}$ wieder die entsprechenden Deformationen der Metrik und des Epsilontensors bezeichnen (siehe Anhang B). Die Spezifikationen ergeben für die

a) Operatordarstellung

$$
\begin{aligned}
C^1 &= 2q\lambda_+^{-2}(X \circ X)(\partial \circ \partial) + 2q^{-2}\lambda_+^{-2}(X \circ \partial)(X \circ \partial) \\
&\quad + 2q\lambda_+^{-1}X \circ \partial, \qquad (3.196)\\
C^2 &= 0, \qquad (3.197)
\end{aligned}
$$

b) Spinordarstellung

$$
\begin{aligned}
C^1 &= [[3]]_{q^{-4}}\lambda_+^{-2}\mathbb{1}_{2\times 2}, \qquad (3.198)\\
C^2 &= [[3]]_{q^4}(q^4 + 3 + 2q^3\lambda)\mathbb{1}_{2\times 2}, \qquad (3.199)
\end{aligned}
$$

c) Vektordarstellung

$$
\begin{aligned}
C^1 &= 2[[3]]_{q^{-4}}\lambda_+^{-2}\mathbb{1}_{3\times 3}, \qquad (3.200)\\
C^2 &= 0. \qquad (3.201)
\end{aligned}
$$

Es ist doch bemerkenswert, welch einfacher Ausdruck sich z.B. bei der Operatordarstellung ergibt, wenn man bedenkt, dass der Berechnung doch die langwierigen Relationen zwischen Koordinaten und partiellen Ableitungen zugrunde liegen und sehr viele Vertauschungen durchgeführt werden müssen, um das Resultat zu erhalten. Solche Ergebnisse nähren die Hoffnung, dass es auch weiterhin gelingt, die klassische Quantenfeldtheorie komplett zu $q$-deformieren, und zwar in (fast) völliger Analogie zur bekannten Theorie.

## 3.4 Ausblick

Die in den vorstehenden Abschnitten präsentierte Form der Quantensymmetriegruppen als $q$-Liealgebren eignet sich gut zur Untersuchung von Erweiterungen derselben. So bietet sich als nächster natürlicher Schritt an, zuerst einmal die Impulsgeneratoren $P^\alpha$ hinzuzufügen, um die $q$-deformierte Poincaréalgebra in derselben Art und Weise darzustellen. Auch deren Casimiroperator, der Pauli-Lubanski-Vektor, lässt sich möglicherweise mithilfe der Minkowski-Generatoren $V^{\mu\nu}$ und der

Impulse sowie des $q$-deformierten Epsilontensors analog zur klassischen Form angeben. (Der zweite Casimiroperator, das Impulsquadrat $P^\alpha P_\alpha$ ist trivialerweise nach Konstruktion eine Invariante.)
Als nächsten interessanten Schritt könnte man sich dann der Konstruktion einer $q$-defomierten Super-Poincaréalgebra durch Hinzufügen von Spinorgeneratoren widmen. Aufschlussreich wäre es zu sehen, ob die aus dem undeformierten Fall bekannte Form der Algebra zwischen Spinoren und Impulsen, schematisch durch die Kommutatorrelationen

$$\begin{aligned} \{Q,\bar{Q}\} &\sim \sigma_\alpha P^\alpha, \\ \{Q,Q\} &= \{\bar{Q},\bar{Q}\} = 0, \\ [P,Q] &= [P,\bar{Q}] = 0 \end{aligned} \tag{3.202}$$

gegeben, im deformierten Fall erhalten bleibt, oder ob sich Zusatzterme proportional zu $\lambda$ ergeben. Auch für diese Algebra kann man dann wieder versuchen Casimiroperatoren, wie etwa den Super-Spinoperator, in der bekannten Form zu finden.

# Anhang A

# Quantenalgebren

Die hier vorgestellten Quantenalgebren sind die q-deformierten Analoga der bekannten Liealgebren zu den physikalisch interessanten Liegruppen. Für die Quantenräume bedeutet dies, dass die Koordinaten kovariant unter der Wirkung dieser Algebren sein müssen. Die dem q-deformierten Euklidischen Raum in drei Dimensionen zugrundeliegende Quantenraumalgebra $U_q(su_2)$ wird erzeugt von den Generatoren $L^+$, $L^-$ und $\tau^{1/2}$, die folgenden Relationen genügen [20]:

$$\begin{aligned} \tau^{-1/2}L^{\pm} &= q^{\pm 2}L^{\pm}\tau^{-1/2}, \\ qL^+L^- - q^{-1}L^-L^+ &= q\lambda^{-1}\lambda_+^{-1}(1-\tau^{-1}). \end{aligned} \tag{A.1}$$

Für die mit den Algebrarelationen verträgliche Konjugation gilt

$$\overline{L^{\pm}} = -q^{\pm 1}L^{\pm}, \quad \overline{\tau^{-1/2}} = \tau.^{-1/2} \tag{A.2}$$

Die Hopfstruktur der Generatoren $L^{\pm}$ und $\tau$ lautet

$$\begin{aligned} \Delta(L^{\pm}) &= L^{\pm}\otimes\tau^{-1/2} + 1\otimes L^{\pm}, \\ \Delta(\tau^{-1/2}) &= \tau^{-1/2}\otimes\tau^{-1/2}, \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned} S(L^{\pm}) &= -L^{\pm}\tau^{1/2}, \\ S(\tau^{-1/2}) &= \tau^{1/2}, \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(L^{\pm}) &= 0, \\ \varepsilon(\tau^{-1/2}) &= 1. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Als nächstes betrachten wir die Quantenalgebra $U_q(so_4)$ [21], die als Algebra isomorph zum Tensorprodukt zweier $U_q(su_2)$-Algebren ist,

$$U_q(so_4) \cong U_q(su_2)\otimes U_q(su_2). \tag{A.6}$$

Sie wird damit aufgespannt von zwei miteinander kommutierenden Sätzen von $U_q(su_2)$-Generatoren, nämlich $L_i^{\pm}$, $K_i$, $i = 1, 2$. Deren Relationen lauten ausgeschrieben

$$\begin{aligned} q^{-1}L_i^+L_i^- - qL_i^-L_i^+ &= \lambda^{-1}(1 - K_i^{-1}), \\ L_i^{\pm}K_i &= q^{\mp 2}K_iL_i^{\pm}, \qquad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{A.7}$$

wobei Generatoren mit unterschiedlichen Indizes immer vertauschen. Die Konjugation ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \overline{L_i^{\pm}} &= q^{\mp 2}L_i^{\mp}, \\ \overline{K_i} &= K_i, \qquad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Für die Hopfstruktur findet man

$$\begin{aligned} \Delta(K_i) &= K_i \otimes K_i, \\ \Delta(L_i^{\pm}) &= L_i^{\pm} \otimes 1 + K_i^{-1} \otimes L_i^{\pm}, \end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned} S(K_i) &= K_i^{-1}, \\ S(L_i) &= -K_iL_i^{\pm}, \end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(K_i) &= 0, \\ \varepsilon(L_i^{\pm}) &= 0. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Im dritten Kapitel verwenden wir Tensorgeneratoren als Algebraerzeugende, wobei der Zusammenhang mit den obigen Operatoren ist:

$$\begin{aligned} L^{12} &= q^{-2}K_2L_2^+, \quad L^{13} = q^{-2}K_1L_1^- \\ L^{24} &= q^{-1}K_1L_1^+, \quad L^{34} = q^{-1}K_2L_2^+ \end{aligned} \tag{A.12}$$

Die fehlenden zwei Operatoren bestimmen sich aus den oberen vier mittels:

$$\begin{aligned} L^{14} &= \lambda_+^1(L^{24}K_1^{-1}L^{13} - q^4L^{13}K_1^{-1}L^{24} \\ &\quad +L^{34}K_2^{-1}L^{12} - q^4L^{12}K_2^{-1}L^{34}), \\ L^{23} &= \lambda_+^{-1}(-q^{-1}L^{24}K_1^{-1}L^{13} + q^3L^{13}K_1^{-1}L^{24} \\ &\quad +qL^{34}K_2^{-1}L^{12} - q^5L^{12}K_2^{-1}L^{34}). \end{aligned} \tag{A.13}$$

Als letztes geben wir die $q$-deformierte Lorentzalgebra an in der Form, die wir zur Bestimmung der Darstellungen verwendet haben [22], [23], [24]:

$$\tau^1T^+ = T^+\tau^1 + \lambda T^2, \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
\tau^1 T^- &= q^{-2} T^- \tau^1 - \lambda S^1, \\
\tau^1 T^2 &= q^2 T^2 \tau^1, \\
\tau^1 S^1 &= S^1 \tau^1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 T^+ &= T^+ \sigma^2 - q^2 \lambda \tau^3 T^2, \\
\sigma^2 T^- &= q^2 T^- \sigma^2 + q^2 \lambda S^1, \\
\sigma^2 T^2 &= q^{-2} T^2 \sigma^2, \\
\sigma^2 S^1 &= S^1 \sigma^2,
\end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
T^+ T^2 &= q^{-2} T^2 T^+, \\
T^- T^2 &= T^2 T^- + \lambda^{-1}(\sigma^2 - \tau^1), \\
T^+ S^1 &= q^2 S^1 T^+ + \lambda^{-1}(\tau^3 \tau^1 - \sigma^2), \\
T^- S^1 &= S^1 T^-, \\
T^+ T^- &= q^2 T^- T^+ + q \lambda^{-1}(1 - \tau^3), \\
T^2 S^1 &= S^1 T^2,
\end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
\tau^1 \sigma^2 &= \sigma^2 \tau^1 + q \lambda^3 T^2 S^1, \\
\tau^3 \tau^1 &= \tau^1 \tau^3, \\
\tau^3 \sigma^2 &= \sigma^2 \tau^3, \\
\tau^3 T^\pm &= q^{\mp 4} T^\pm \tau^3, \\
\tau^3 T^2 &= q^{-4} T^2 \tau^3, \\
\tau^3 S^1 &= q^4 S^1 \tau^3.
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Hopfstruktur und Konjugation der $U_q(su_2)$-Generatoren $T^+$, $T^-$ und $\tau^3$ haben wir bereits angegeben. Die Hopfstruktur der verbleibenden Lorentzgeneratoren ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\Delta(\tau^1) &= \tau^1 \otimes \tau^1 + \lambda^2 S^1 (\tau^3)^{-1/2} \otimes T^2, \\
\Delta(\sigma^2) &= \sigma^2 \otimes \sigma^2 + \lambda^2 T^2 (\tau^3)^{1/2} \otimes S^1, \\
\Delta(T^2) &= T^2 \otimes \tau^1 + (\tau^3)^{-1/2} \sigma^2 \otimes T^2, \\
\Delta(S^1) &= S^1 \otimes \sigma^1 + (\tau^3)^{1/2} \tau^1 \otimes S^1,
\end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}
S(T^2) &= -q^2 (\tau^3)^{1/2} T^2, \\
S(S^1) &= -(\tau^3)^{-1/2} S^1, \\
S(\tau^1) &= \sigma^2,
\end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned} S(\sigma^2) &= \tau^1, \\ \\ \varepsilon(\tau^1) &= \varepsilon(\sigma^2) = 1, \\ \varepsilon(T^2) &= \varepsilon(S^1) = 0. \end{aligned} \tag{A.20}$$

Die im dritten Kapitel verwendete Form der Lorentzalgebra beruht auf der $R/S$-Form der Algebra, ihre Relationen sind gegeben durch [32]:

$$\begin{aligned} R^3R^+ - q^2R^+R^3 &= q^{-1}\lambda_+^{-1}U^1R^+ \\ R^-R^3 - q^2R^3R^- &= q^{-1}\lambda_+^{-1}U^1R^- \\ qR^-R^+ - qR^+R^- - q\lambda R^3R^3 &= q^{-1}\lambda_+^{-1}U^1R^3 \end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned} S^3S^+ - q^2S^+S^3 &= q^{-1}\lambda_+^{-1}U^2S^+ \\ S^-S^3 - q^2S^3S^- &= q^{-1}\lambda_+^{-1}U^2S^- \\ qS^-S^+ - qS^+S^- - q\lambda S^3S^3 &= q^{-1}\lambda_+^{-1}U^2S^3 \end{aligned} \tag{A.22}$$

$$\begin{aligned} R^+S^+ &= q^2S^+R^+ \\ R^+S^3 &= S^3R^+ \\ R^+S^- &= q^{-2}S^-R^+ \\ R^3S^+ &= \lambda\lambda_+S^3R^+ \\ R^3S^3 &= S^3R^3 + q^{-1}\lambda\lambda_+ \\ R^3S^- &= S^-R^3 \\ R^-S^+ &= q^{-2}S^+R^- + q^{-1}\lambda^2\lambda_+S^-R^+ + q^{-1}\lambda\lambda_+S^3R^3 \\ R^-S^3 &= S^3R^- + \lambda\lambda_+S^-R^3 \\ R^-S^- &= q^2S^-R^- \end{aligned} \tag{A.23}$$

# Anhang B

# Quantenräume

Als Quantenräume bezeichnet man Komoduln von Hopfalgebren [25]. Solche Quantenräume lassen sich mit Hilfe von R-Matrizen konstruieren. Diese beschreiben nämlich eine Abbildung auf dem Tensorprodukt zweier Vektordarstellungen der zugrundeliegenden Hopfalgebra. Dieses Tensorprodukt läßt sich aber mittels

$$T_1 \otimes T_1 = T_2 \oplus T_{(1,1)} \oplus T_0 \tag{B.1}$$

ausreduzieren. $T_2$ ist hier die vollständig symmetrische Darstellung, $T_{(1,1)}$ die vollständig antisymmetrische Darstellung und $T_0$ schließlich die triviale eindimensionale Darstellung. Zu jeder dieser irreduziblen Darstellungen gehört somit ein unter der Wirkung der Hopfalgebra invarianter Unterraum. Die Forderung nach Kovarianz verlangt, daß die durch die R-Matrix beschriebene Abbildung die zugehörigen Unterräume in sich überführt. Dies gewährleistet jedoch deren Projektorzerlegung

$$\hat{R} = \alpha_+ P_+ + \alpha_- P_- + \alpha_0 P_0, \tag{B.2}$$

, wobei $\alpha_+$, $\alpha_-$, und $\alpha_0$ die Eigenwerte der R-Matrix bezeichnen. Die invarianten Darstellungsräume bilden aber auch Koordinatenalgebren, deren Relationen sich aus der Kenntnis der zugehörigen Projektoren ergeben. Wir wollen kurz skizzieren, wie man aus der R-Matrix diese Projektoren bestimmen kann.

Dazu gehen wir erneut von der Zerlegung (B.2) aus. Man kann sich nun leicht davon überzeugen, daß die Projektoren durch folgende Formeln ausgedrückt werden können:

$$\begin{aligned} P_+ &= \frac{(\hat{R} - \alpha_- I)(\hat{R} - \alpha_0 I)}{(\alpha_+ - \alpha_-)(\alpha_+ - \alpha_0)}, \qquad \text{(B.3)} \\ P_- &= \frac{(\hat{R} - \alpha_+ I)(\hat{R} - \alpha_0 I)}{(\alpha_- - \alpha +)(\alpha_- - \alpha_0)}, \end{aligned}$$

$$P_0 = \frac{(\hat{R} - \alpha_+ I)(\hat{R} - \alpha_- I)}{(\alpha_0 - \alpha_+)(\alpha_0 - \alpha_-)}.$$

Der Projektor $P_-$ bestimmt über

$$(P_-)^{ij}_{kl} X^k X^l = 0 \tag{B.4}$$

die Relationen für die Algebra der Koordinaten, während die Algebra der Formen durch die Relationen

$$\begin{aligned} (P_+)^{ij}_{kl} dx^k dx^l &= 0, \\ (P_0)^{ij}_{kl} dx^k dx^l &= 0 \end{aligned} \tag{B.5}$$

festgelegt wird. Die Metrik der Koordinatenalgebra lässt sich schliesslich aus dem Projektor $P_0$ mittels

$$(P_0)^{ij}_{kl} = \frac{1}{g^{mn} g_{mn}} g^{ij} g_{kl} \tag{B.6}$$

ablesen. Die konkreten Formen der R-Matrizen der drei- und vierdimensionalen Quanteräume finden sich z.B. in [15].

Wenden wir uns nun den für unsere Zwecke konkret benötigten Beispielen zu. Im Falle der zweidimensionalen Quantenebene hat die R-Matrix eine Zerlegung in nur zwei Projektoren, den Symmetrisierer und den Antisymmetrisierer [25]:

$$\hat{R} = qS - q^{-1} A \tag{B.7}$$

Die konkrete Form der R-Matrix der Maninebene findet man in [25]. Die Grassmannkoordinaten $\theta^i$ gehorchen denselben Vertauschungsrelationen wie die Formen, nämlich

$$S^{ij}{}_{kl} \theta^k \theta^l = 0. \tag{B.8}$$

Man verifiziert als Ergebnis

$$\begin{aligned} (\theta^1)^2 &= (\theta^2)^2 = 0, \\ \theta^1 \theta^2 &= -q^{-1} \theta^2 \theta^1. \end{aligned} \tag{B.9}$$

Die nichtverschwindenden Elemente der zugehörigen Metrik lauten

$$\varepsilon^{12} = -q^{-1/2}, \quad \varepsilon^{21} = q^{1/2} \tag{B.10}$$

und

$$\varepsilon_{ij} = -\varepsilon^{ij}. \tag{B.11}$$

Mit der Metrik können wir Indizes heben und senken über

$$h_i = \varepsilon_{ij} h^j, \quad h^i = \varepsilon^{ij} h_j. \tag{B.12}$$

Konjugation definieren wir in der folgenden Weise:

$$\begin{aligned} \overline{h^i} \equiv \overline{h}_i &= -\varepsilon_{ij} \overline{h}^j, & \text{(B.13)} \\ \overline{h_i} \equiv \overline{h}_i &= -\varepsilon^{ij} \overline{h}_j. & \text{(B.14)} \end{aligned}$$

Im Fall des dreidimensionalen Euklidischen Raumes lautet die Projektorzerlegung der R-Matrix

$$\hat{R} = P_+ - q^{-4} P_- + q^{-6} P_0. \tag{B.15}$$

Die Relationen der Grassmannkoordinaten lauten

$$\theta^A \theta^B = -q^4 \hat{R}^{AB}_{CD} \theta^C \theta^D, \tag{B.16}$$

oder explizit ausgeschrieben

$$\begin{aligned} (\theta^+)^2 &= (\theta^-)^2 = 0, & \text{(B.17)} \\ \theta^3 \theta^3 &= \lambda \theta^+ \theta^-, \\ \theta^+ \theta^- &= -\theta^- \theta^+, \\ \theta^\pm \theta^3 &= -q^{\pm 2} \theta^3 \theta^\pm. \end{aligned}$$

Die nichtverschwindenden Elemente der zugehörigen Metrik lauten

$$g^{+-} = -q, \quad g^{33} = 1, \quad g^{-+} = -q^{-1} \tag{B.18}$$

sowie

$$g_{+-} = -q, \quad g_{33} = 1, \quad g_{-+} = -q^{-1} \tag{B.19}$$

wobei

$$g^{AB} g_{BC} = \delta^A_C. \tag{B.20}$$

Damit lassen sich kovariante und kontravariante Koordinaten gemäß

$$\theta^A = g^{AB} \theta_B, \quad \theta_A = g_{AB} \theta^B \tag{B.21}$$

ineinander überführen. Die Relationen der Koordinatenalgebra sind außerdem verträglich mit der Konjugation

$$\overline{\theta^A} = \overline{\theta}_A = \theta_A. \tag{B.22}$$

Bei der Angabe der Drehimpulsdarstellung, Gl.(3.1), und der Quantenliealgebra, Gl.(3.36), haben wir eine $q$-deformierte Version des antisymmetrischen $\varepsilon$-Tensors verwendet. Dieser ist definiert über die Gleichung

$$\theta^A\theta^B\theta^C =: \varepsilon^{ABC}\theta^+\theta^3\theta^-. \tag{B.23}$$

Die konkreten Werte sind

$$\begin{aligned} \varepsilon^{+3-} &= 1, \quad \varepsilon^{+-3} = -q^{-2}, \\ \varepsilon^{3+-} &= -q^{-2}, \quad \varepsilon^{3-+} = q^{-2}, \\ \varepsilon^{-+3} &= q^{-2}, \quad \varepsilon^{-3+} = -q^{-4}, \\ \varepsilon^{333} &= -q^{-2}\lambda. \end{aligned} \tag{B.24}$$

Der unten indizierte Epsilontensor berechnet sich über

$$\varepsilon_{ABC} = g_{AD}g_{BE}g_{CF}\varepsilon^{DEF} \tag{B.25}$$

Für den q-deformierten Euklidischen Raum in vier Dimensionen lautet die Projektorzerlegung der R-Matrix

$$\hat{R} = qP_+ - q^{-1}P_- + q^{-3}P_0 \tag{B.26}$$

weshalb für die Relationen der Koordinatenalgebra gilt:

$$\theta^i\theta^j = -q(\hat{R})^{ij}_{kl}\theta^k\theta^l, \tag{B.27}$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{aligned} (\theta^i)^2 &= 0, \quad i = 1, \dots, 4, \\ \theta^1\theta^2 &= -q^{-1}\theta^2\theta^1, \\ \theta^1\theta^3 &= -q^{-1}\theta^3\theta^1, \\ \theta^2\theta^4 &= -q^{-1}\theta^4\theta^2, \\ \theta^3\theta^4 &= -q^{-1}\theta^3\theta^4, \\ \theta^1\theta^4 &= -\theta^4\theta^1, \\ \theta^2\theta^3 &= -\theta^3\theta^2 + \lambda\theta^1\theta^4. \end{aligned} \tag{B.28}$$

Die nichtverschwindenden Elemente der Metrik sind

$$g^{14} = q^{-1}, \quad g^{23} = g^{32} = 1, \quad g^{41} = q, \tag{B.29}$$

wobei wieder gilt

$$g^{ij} = g_{ij}, \quad g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j. \tag{B.30}$$

Die Relationen (B.21) und (B.22) gelten auch auf dem vierdimensionalen q-deformierten Euklidischen Raum. Der vierdimensionale $\varepsilon$-Tensor ist definiert über

$$\theta^i \theta^j \theta^k \theta^l =: \varepsilon^{ijkl} \theta^1 \theta^2 \theta^3 \theta^4 \tag{B.31}$$

Eplizit ausgeschrieben

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{1234} &= 1 & \varepsilon^{3124} &= q \\
\varepsilon^{1243} &= -q & \varepsilon^{3142} &= -q^2 \\
\varepsilon^{1324} &= -1 & \varepsilon^{3214} &= -q^2 \\
\varepsilon^{1342} &= q & \varepsilon^{3241} &= q^2 \\
\varepsilon^{1423} &= q^2 & \varepsilon^{3412} &= q^2 \\
\varepsilon^{1432} &= -q^2 & \varepsilon^{3421} &= -q^3 \\
\\
\varepsilon^{2134} &= -q & \varepsilon^{4123} &= -q^2 \\
\varepsilon^{2143} &= q^2 & \varepsilon^{4132} &= q^2 \\
\varepsilon^{2314} &= q^2 & \varepsilon^{4213} &= q^3 \\
\varepsilon^{2341} &= -q^2 & \varepsilon^{4231} &= -q^4 \\
\varepsilon^{2413} &= -q^2 & \varepsilon^{4312} &= -q^3 \\
\varepsilon^{2431} &= q^3 & \varepsilon^{4321} &= q^4
\end{aligned} \tag{B.32}$$

Komponenten, die im klassischen Fall zu null werden, sind

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{2323} &= q^2 \lambda \\
\varepsilon^{3232} &= -q^2 \lambda
\end{aligned} \tag{B.33}$$

Der unten indizierte Epsilontensor berechnet sich über

$$\varepsilon_{ijkl} = g_{im} g_{jn} g_{kp} g_{lq} \varepsilon^{qpnm}. \tag{B.34}$$

Für die Koordinatenalgebra des q-deformierten Minkowski Raumes findet man

$$\theta^i \theta^j = -(\hat{R}_{II})^{ij}_{kl} \theta^k \theta^l, \tag{B.35}$$

welche auf die unabhängigen Relationen

$$(\theta^\mu)^2 \;=\; 0, \quad \mu \in \{+, -, 0\} \tag{B.36}$$

$$\begin{aligned}
\theta^3\theta^\pm &= -q^{\mp 2}\theta^\pm\theta^3, \\
\theta^3\theta^3 &= \lambda\theta^+\theta^-, \\
\theta^+\theta^- &= -\theta^-\theta^+, \\
\theta^\pm\theta^0 + \theta^0\theta^\pm &= \pm q^{\mp 1}\lambda\theta^\pm\theta^3, \\
\theta^0\theta^3 + \theta^3\theta^0 &= \lambda\theta^+\theta^-.
\end{aligned}$$

führt. Statt der Koordinaten $\theta^0$ und $\theta^3$ erweist es sich in manchen Situationen als einfacher mit der Lichtkegelkoordinate $\theta^{3/0} := \theta^3 - \theta^0$ zu arbeiten. Diese steht mit den übrigen Koordinaten über die zusätzlichen Relationen

$$\begin{aligned}
(\theta^{3/0})^2 &= 0, \\
\theta^\pm\theta^{3/0} &= -\theta^{3/0}\theta^\pm, \\
\theta^0\theta^{3/0} + \theta^{3/0}\theta^0 &= -\lambda\theta^+\theta^-, \\
\theta^\pm\theta^0 + q^{\pm 2}\theta^0\theta^\pm &= \pm q^{\pm 1}\lambda\theta^\pm\theta^{3/0}, \\
\theta^3\theta^{3/0} + \theta^{3/0}\theta^3 &= -\lambda\theta^+\theta^-.
\end{aligned} \tag{B.37}$$

Für die nichtverschwindenden Elemente der Metrik gilt

$$g^{00} = -1, \quad g^{33} = 1, \quad g^{+-} = -q, \quad g^{-+} = -q^{-1}. \tag{B.38}$$

Die Relationen (B.21) und (B.30) behalten weiterhin ihre Gültigkeit. Der $\varepsilon$-Tensor für den Minkowskiraum ist definiert über

$$\theta^i\theta^j\theta^k\theta^l = \varepsilon^{ijkl}\theta^+\theta^3\theta^0\theta^-, \tag{B.39}$$

mit den expliziten Komponenten

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{+30-} &= 1 & \varepsilon^{0+3-} &= 1 \\
\varepsilon^{+3-0} &= -1 & \varepsilon^{0+-3} &= -q^{-2} \\
\varepsilon^{+03-} &= -1 & \varepsilon^{03+-} &= -q^{-2} \\
\varepsilon^{+0-3} &= q^{-2} & \varepsilon^{03-+} &= q^{-2} \\
\varepsilon^{+-30} &= q^{-2} & \varepsilon^{0-+3} &= q^{-2} \\
\varepsilon^{+-03} &= -q^{-2} & \varepsilon^{0-3+} &= -q^{-4} \\
\\
\varepsilon^{3+0-} &= -q^{-2} & \varepsilon^{-+30} &= -q^{-2} \\
\varepsilon^{3+-0} &= q^{-2} & \varepsilon^{-+03} &= q^{-2} \\
\varepsilon^{30+-} &= q^{-2} & \varepsilon^{-3+0} &= q^{-4} \\
\varepsilon^{30-+} &= -q^{-2} & \varepsilon^{-30+} &= -q^{-4} \\
\varepsilon^{3-+0} &= -q^{-2} & \varepsilon^{-0+3} &= -q^{-2} \\
\varepsilon^{3-0+} &= q^{-2} & \varepsilon^{-03+} &= q^{-4}.
\end{aligned} \tag{B.40}$$

Im Klassischen verschwindende Komponenten sind

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{+0-0} &= q^{-1}\lambda & \varepsilon^{0+0-} &= -q^{-1}\lambda \\
\varepsilon^{3330} &= q^{-2}\lambda & \varepsilon^{0333} &= -q^{-2}\lambda \\
\varepsilon^{3303} &= -q^{-2}\lambda & \varepsilon^{0303} &= -q^{-2}\lambda \\
\varepsilon^{3033} &= q^{-2}\lambda & \varepsilon^{0-0+} &= -q^{-3}\lambda \\
\varepsilon^{3030} &= q^{-2}\lambda & \varepsilon^{-0+0} &= q^{-3}\lambda
\end{aligned} \tag{B.41}$$

Der unten indizierte Espilontensor ergibt sich ebenfalls aus Gl.(B.34).

# Anhang C

# Differentialkalküle

Zu jedem Quantenraum einer gegebenen Quantengruppe kann man einen kovarianten Differentialkalkül konstruieren. Genauer gesagt existieren stets zwei solcher Kalküle, die jeweils der R-Matrix und ihrer Inversen zugeordnet werden können. Dementsprechend gehen beide Kalküle unter Konjugation ineinander über. Wir wollen nun kurz skizzieren, wie man zu einer vorgegebenen R-Matrix den zugehörigen Kalkül konstruieren kann, und zwar im Falle der Grassmanwertigen Koordinaten und den zugehörigen Ableitungen.

Zu Beginn unserer Betrachtungen steht das totale Differential $d$, welches einer undeformierten Leibnizregel folgt [7]:

$$d(fg) = (df)g + (-1)^{|f|} f(dg). \tag{C.1}$$

Dabei ist $|f| = 0$, falls $f$ eine bosonische und $|f| = 1$, falls $f$ eine fermionische Koordinate ist. Das Differential hat dabei die Eigenschaft

$$d^2 = 0. \tag{C.2}$$

Wir führen nun die fermionischen Differentiale $\eta^i \equiv d\theta^i$ ein, die $q$-kommutieren sollen [34], d.h.

$$\begin{aligned} (P_-)^{ij}{}_{kl}\eta^k\eta^l &= 0, && \text{(C.3)} \\ (P_0)^{ij}{}_{kl}\eta^k\eta^l &= 0. && \text{(C.4)} \end{aligned}$$

Verwenden wir die Tatsache, dass die Summe über alle Projektoren die Eins ergibt, so folgt

$$\begin{aligned} \eta^i\eta^j &= (P_0 + P_+ + P_-)^{ij}_{kl}\eta^k\eta^l && \text{(C.5)} \\ &= (P_+)^{ij}_{kl}\eta^k\eta^l = (\alpha_+)^{-1}(\hat{R})^{ij}_{kl}\eta^k\eta^l. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir für den konjugierten Kalkül

$$\begin{aligned} \bar{\eta}^i \bar{\eta}^j &= (P_0 + P_+ + P_-)^{ij}_{kl} \bar{\eta}^k \bar{\eta}^l \\ &= (P_+)^{ij}_{kl} \bar{\eta}^k \bar{\eta}^l = \alpha_+ (\hat{R}^{-1})^{ij}_{kl} \bar{\eta}^k \bar{\eta}^l. \end{aligned} \tag{C.6}$$

Um die Vertauschungsrelationen zwischen Differentialen und Koordinaten zu finden, macht man den Ansatz

$$\theta^i \eta^j = C^{ij}_{kl} \eta^k \theta^l. \tag{C.7}$$

Wendet man auf beide Seiten dieser Gleichung das äußere Differential an, so findet man durch Vergleich mit den obigen Relationen die gesuchte Matrix. Es gilt dann

$$\theta^i \eta^j = (\alpha_+)^{-1} (\hat{R})^{ij}_{kl} \eta^k \theta^l. \tag{C.8}$$

Wiederholt man dieses Vorgehen für den konjugierten Kalkül, erhält man

$$\theta^i \bar{\eta}^j = \alpha_- (\hat{R}^{-1})^{ij}_{kl} \bar{\eta}^k \theta^l. \tag{C.9}$$

Wir führen nun partielle Ableitungen ein, indem wir für das totale Differential schreiben

$$d = \eta^i \partial_i. \tag{C.10}$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Relation

$$d\theta^A . = \eta^A . + \theta^A d\ . \tag{C.11}$$

ein und vertauscht mit Hilfe von (C.8) alle Differentiale nach links, so gewinnt man schließlich die Vertauschungsregeln

$$\partial_i \theta^j = \delta^j_i - (\alpha_+)^{-1} (\hat{R})^{jk}_{il} \theta^l \partial_k. \tag{C.12}$$

Die Differentiale können aber auch unter Verwendung der Relationen (C.9) vertauscht werden. In diesem Fall ergeben sich die Vertauschungsregeln für den zweiten Differentialkalkül mit

$$\hat{\partial}_i \theta^j = \delta^j_i - \alpha_+ (\hat{R}^{-1})^{jk}_{il} \theta^l \hat{\partial}_k. \tag{C.13}$$

Abschliessend sei bemerkt, dass die partiellen Ableitungen die gleichen algebraischen Eigenschaften aufweisen wie die Koordinaten, d.h. sie spannen einen Quantenraum mit den gleichen Relationen auf. Ausserdem lassen sich mittels der Metrik kontravariante Ableitungen einführen, indem man vereinbart

$$\partial^i = g^{ij} \partial_j, \quad \hat{\partial}^i = g^{ij} \hat{\partial}_j. \tag{C.14}$$

Damit lassen sich leicht die Vertauschungrelationen der kontravarianten Ableitungen mit den Koordinaten berechnen. Man muss hierzu allerdings berücksichtigt, dass für den dreidimensionalen Euklidischen Raum

$$\begin{aligned} g^{AB}(\hat{R})^{CD}_{BE}g_{DF} &= q^{-4}(\hat{R}^{-1})^{AC}_{EF}, \\ g^{AB}(\hat{R}^{-1})^{CD}_{BE}g_{DF} &= q^{4}(\hat{R})^{AC}_{EF}, \end{aligned} \tag{C.15}$$

für den vierdimensionalen Euklidischen Raum

$$\begin{aligned} g^{ij}(\hat{R})^{kl}_{jm}g_{ln} &= (\hat{R}^{-1})^{ik}_{mn}, \\ g^{ij}(\hat{R}^{-1})^{kl}_{jm}g_{ln} &= (\hat{R})^{ik}_{mn} \end{aligned} \tag{C.16}$$

und schließlich für den q-deformierten Minkowski-Raum

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}(\hat{R})^{\sigma\alpha}_{\nu\rho}g_{\alpha\beta} &= q^{-2}(\hat{R}^{-1})^{\mu\sigma}_{\rho\beta}, \\ g^{\mu\nu}(\hat{R}^{-1})^{\sigma\alpha}_{\nu\rho}g_{\alpha\beta} &= q^{2}(\hat{R})^{\mu\sigma}_{\rho\beta} \end{aligned} \tag{C.17}$$

gilt. Führt man das angegebene Verfahren in den einzelnen Räumen durch, so erhält man als Ergebnis für die Quantenebene

$$\begin{aligned} \partial^i_\theta\theta^j &= \varepsilon^{ij} - (\hat{R}^{-1})^{ij}{}_{kl}\theta^k\partial^l_\theta, \\ \bar{\partial}^i_\theta\theta^j &= -q^{-1}\varepsilon^{ij} - (\hat{R})^{ij}{}_{kl}\theta^k\bar{\partial}^l_\theta, \end{aligned} \tag{C.18}$$

für den dreidimensionalen deformierten Euklidischen Raum

$$\begin{aligned} \partial^A_\theta\theta^B &= g^{AB} - q^{-4}(\hat{R}^{-1})^{AB}_{CD}\theta^C\partial^D_\theta, \\ \hat{\partial}^A_\theta\theta^B &= g^{AB} - q^{4}(\hat{R})^{AB}_{CD}\theta^C\hat{\partial}^D_\theta, \end{aligned} \tag{C.19}$$

für den vierdimensionalen deformierten Euklidischen Raum

$$\begin{aligned} \partial^i_\theta\theta^j &= g^{ij} - q^{-1}(\hat{R}^{-1})^{kl}_{ij}\theta^k\partial^l_\theta, \\ \hat{\partial}^i_\theta\theta^j &= g^{ij} - q(\hat{R})^{kl}_{ij}\theta^k\hat{\partial}^l_\theta, \end{aligned} \tag{C.20}$$

sowie für den q-Minkowskiraum

$$\begin{aligned} \partial^\mu_\theta\theta^\nu &= g^{\mu\nu} - q^{-1}(\hat{R}^{-1}_{II})^{\mu\nu}_{\rho\sigma}\theta^\rho\partial^\sigma_\theta, \\ \hat{\partial}^\mu\theta^\nu &= g^{\mu\nu} - q(\hat{R}^{-1}_{II})^{\mu\nu}_{\rho\sigma}\theta^\rho(\hat{\partial}_\theta)^\sigma. \end{aligned} \tag{C.21}$$

# Anhang D

# Darstellungen von Superzahlen

In manchen Fällen erweist es sich als notwendig oder sinnvoll mit Formeln zu arbeiten, die auf der umgekehrten Normalordnung der Monome beruhen. Dazu geben wir hier für die betrachteten Quantenräume einige Umrechnungsformeln an.

1. **2-dimensionaler Euklidischer Raum**

$$\begin{aligned} & f' + f_1\theta^1 + f_2\theta^2 + f_{12}\theta^1\theta^2 \\ = \; & \tilde{f}' + \tilde{f}_1\theta^1 + \tilde{f}_2\theta^2 + \tilde{f}_{21}\theta^2\theta^1 \end{aligned} \tag{D.1}$$

wobei

$$\tilde{f}' = f', \quad \tilde{f}_1 = f_1, \quad \tilde{f}_2 = f_2, \quad \tilde{f}_{21} = -q^{-1} f_{12}. \tag{D.2}$$

2. **3-dimensionaler Euklidischer Raum**

$$\begin{aligned} & f' + f_+\theta^+ + f_3\theta^3 + f_-\theta^- \\ & +f_{+3}\theta^+\theta^3 + f_{+-}\theta^+\theta^- + f_{3-}\theta^3\theta^- \\ & +f_{+3-}\theta^+\theta^3\theta^- \\ = \; & \tilde{f}' + \tilde{f}_+\theta^+ + \tilde{f}_3\theta^3 + \tilde{f}_-\theta^- \\ & +\tilde{f}_{3+}\theta^3\theta^+ + \tilde{f}_{-+}\theta^-\theta^+ + \tilde{f}_{-3}\theta^-\theta^3 \\ & +\tilde{f}_{-3+}\theta^-\theta^3\theta^+, \end{aligned} \tag{D.3}$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{f}' &= f', \quad \tilde{f}_A = f_A, \quad A \in \{+, 3, -\} \\ \tilde{f}_{-+} &= -f_{+-}, \quad \tilde{f}_{3+} = -q^2 f_{+3}, \quad \tilde{f}_{-3} = -q^2 f_{3-}, \\ \tilde{f}_{-3+} &= -q^4 f_{+3-}. \end{aligned} \tag{D.4}$$

3. **4-dimensionaler Euklidischer Raum**

$$\begin{aligned} & f' + \sum_{i=1}^{4} f_i \theta^i + \sum_{1\leq i_1<i_2\leq 4} f_{i_1 i_2}\theta^{i_1}\theta^{i_2} \\ & + \sum_{1\leq i_1<i_2<i_3\leq 4} f_{i_1 i_2 i_3}\theta^{i_1}\theta^{i_2}\theta^{i_3} + f_{1234}\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4 \\ = \; & \tilde{f}' + \sum_{i=1}^{4} \tilde{f}_i \theta^i + \sum_{1\leq i_2<i_1\leq 4} \tilde{f}_{i_1 i_2}\theta^{i_1}\theta^{i_2} \\ & + \sum_{1\leq i_3<i_2<i_1\leq 4} \tilde{f}_{i_1 i_2 i_3}\theta^{i_1}\theta^{i_2}\theta^{i_3} + \tilde{f}_{4321}\theta^4\theta^3\theta^2\theta^1, \end{aligned} \tag{D.5}$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{f}' &= f', \quad \tilde{f}_i = f_i, \quad i = 1,\ldots,4, \\ \tilde{f}_{21} &= -q^{-1}f_{12}, \quad \tilde{f}_{31} = -q^{-1}f_{13}, \\ \tilde{f}_{41} &= -f_{14} - \lambda f_{23}, \quad \tilde{f}_{32} = -f_{23}, \\ \tilde{f}_{42} &= -q^{-1}f_{24}, \quad \tilde{f}_{43} = -q^{-1}f_{34}, \\ \tilde{f}_{321} &= -q^{-2}f_{123}, \quad \tilde{f}_{421} = -q^{-2}f_{124}, \\ \tilde{f}_{431} &= -q^{-2}f_{134}, \quad \tilde{f}_{432} = -q^{-2}f_{234}, \\ \tilde{f}_{4321} &= q^{-4}f_{1234}. \end{aligned} \tag{D.6}$$

4. **Minkowski Raum**

$$\begin{aligned} & f' + f_+\theta^+ + f_{3/0}\theta^{3/0} + f_3\theta^3 + f_-\theta^- \\ & + f_{+3/0}\theta^+\theta^{3/0} + f_{+3}\theta^+\theta^3 + f_{+-}\theta^+\theta^- \\ & + f_{3/0,3}\theta^{3/0}\theta^3 + f_{3-}\theta^3\theta^- + f_{3/0,3}\theta^{3/0}\theta^3 + f_{3/0,-}\theta^{3/0}\theta^- \\ & + f_{+,3/0,3}\theta^+\theta^{3/0}\theta^3 + f_{+3-}\theta^+\theta^3\theta^- + f_{+,3/0,-}\theta^+\theta^{3/0}\theta^- \\ & + f_{3/0,3-}\theta^{3/0}\theta^3\theta^- + f_{+3/0,3-}\theta^+\theta^{3/0}\theta^3\theta^- \\ = \; & \tilde{f}' + \tilde{f}_+\theta^+ + \tilde{f}_{3/0}\theta^{3/0} + \tilde{f}_3\theta^3 + \tilde{f}_-\theta^- \\ & + \tilde{f}_{3/0,+}\theta^{3/0}\theta^+ + \tilde{f}_{3+}\theta^3\theta^+ + \tilde{f}_{-+}\theta^-\theta^+ \\ & + \tilde{f}_{3,3/0}\theta^3\theta^{3/0} + \tilde{f}_{-3}\theta^-\theta^3 + \tilde{f}_{-,3/0}\theta^-\theta^{3/0} \\ & + \tilde{f}_{3,3/0,+}\theta^3\theta^{3/0}\theta^+ + \tilde{f}_{-3+}\theta^-\theta^3\theta^+ + \tilde{f}_{-,3/0+}\theta^-\theta^{3/0}\theta^+ \\ & + \tilde{f}_{-3,3/0}\theta^-\theta^3\theta^{3/0} + \tilde{f}_{-3,3/0,+}\theta^-\theta^3\theta^{3/0}\theta^+, \end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{f}' = f', \quad \tilde{f}_\mu = f_\mu, \quad \mu \in \{+, 3/0, 3, -\}, \tag{D.7}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}_{+3} &= -q^{-2} f_{3+}, \quad \tilde{f}_{+,3/0} = -f_{3/0,+}, \\
\tilde{f}_{+-} &= -f_{-+} + \lambda f_{3/0,3}, \quad \tilde{f}_{3,3/0} = -f_{3/0,3}, \\
\tilde{f}_{3-} &= -q^{-2} f_{-3}, \quad \tilde{f}_{3/0,-} = -f_{-,3/0}, 20 \\
\tilde{f}_{+3,3/0} &= -q^{2} f_{3/0,3+}, \quad \tilde{f}_{+3-} = -q^{-4} f_{-3+}, \\
\tilde{f}_{+,3/0,-} &= -f_{-,3/0,+}, \quad \tilde{f}_{3,3/0,-} = -q^{-2} f_{-,3/0,3}, \\
\tilde{f}_{+3,3/0,-} &= q^{-4} f_{-,3/0,3+}.
\end{aligned}
$$

# Literaturverzeichnis


[1] M. Fichtenmüller, A. Lorek, J. Wess, *q-deformed Phase Space and its Lattice Structure,* Z.Phys. C**71** (1996) 533, hep-th/9511106.

[2] J. Wess , *q-Deformed phase space and its lattice structure,* Int. J. Mod. Phys. A**12** (1997) 4997.

[3] B.L. Cerchiai, J. Wess, *q-Deformed Minkowski Space based on a q-Lorentz Algebra,* Eur. Phys. J. C**5** (1998) 553, math.QA/9801104.

[4] B.L. Cerchiai, *Hilbert space representations of a q-deformed Minkowski algebra,* Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians-Univerität München (1997)

[5] Ch.Kassel, *Quantum Groups*, Springer (1995).

[6] S. Majid, *Foundations of Quantum Group Theory,* University Press, Cambridge (1995).

[7] A. Connes, *Non-Commutative Geometry*, Academic Press, New York (1994).

[8] M. Chaichian, A.P. Demichev, *Introduction to Quantum Groups*, World Scientific, Singapore (1996).

[9] A. Klimyk, K. Schmüdgen, *Quantum groups and their Representations,* Springer Verlag, Berlin(1997).

[10] J. Wess, B. Zumino, *Covariant differential calculus on the quantum hyperplane,* Nucl. Phys. B. Suppl. **18** (1991) 302-312.

[11] U. Carow-Watamura, M. Schlieker, S. Watamura, $SO_q(N)$*-covariant differential calculus on quantum space and deformation of Schrödinger equation,* Z. Phys. C**49** (1991) 439-446.

[12] X.C. Song, *Covariant differential calculus on quantum minkowski space and q-analog of Dirac equation,* Z. Phys. C**55** (1992) 417.

[13] W. Heisenberg, *Über die in der Theorie der Elementarteilchen auftretende universelle Länge,* Ann. Phys. **32** (1938) 20.

[14] H.S. Snyder, *Quantized space-time*, Phys. Rev. **71** (1947) 38.

[15] H. Wachter, *Elemente einer q-Analysis für physikalisch relevante Quantenräume,* Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München, Fakultät für Physik (2004).

[16] H. Wachter, M. Wohlgenannt, *$*$-Products on quantum spaces,* Eur. Phys. J. C**23** (2002) 761-767, hep-th/0103120.

[17] C. Bauer, H. Wachter, *Operator representations on quantum spaces,* Eur. Phys. J. C**31** (2003) 261-275, math-ph/0201023.

[18] H. Wachter, *q-Integration on quantum spaces,* Eur. Phys. J. C**32** (2004) 281-297, hep-th/0206083.

[19] H. Wachter, *q-Exponentials on quantum spaces*, Eur. Phys. J. C**37** (2004) 379-389, hep-th/0401113.

[20] A. Lorek, W. Weich, J. Wess, *Non Commutative Euclidean and Minkowski Structures,* Z. Phys. C**76** (1997) 375, q-alg/9702025.

[21] H. Ocampo, *$SO_q(4)$ quantum mechanics*, Z. Phys. C**70** (1996) 525.

[22] W.B. Schmidke, J. Wess, B. Zumino, *A q-deformed Lorentz Algebra in Minkowski phase space,* Z. Phys. C**52** (1991) 471.

[23] O. Ogievetsky, W.B. Schmidke, J. Wess, B. Zumino, *Six generator q-deformed Lorentz algebra,* Lett. Math. Phys. **23** (1991) 233.

[24] O. Ogievetsky, W.B. Schmidke, J. Wess, B. Zumino, *q-Deformed Poincaré Algebra,* Commun. Math. Phys. **150** (1992) 495.

[25] J. Wess, *q-deformed Heisenberg Algebras*, in H. Gausterer, H. Grosse and L.Pittner, eds., Proceedings of the 38. Internationale Universitätswochen für Kern- und Teilchen physik, no. 543 in Lect. Notes in Phys., Springer -Verlag, Schladming (2000), math-phy/9910013.

[26] S. Majid, *Introduction to Braided Geometry and q-Minkowski Space,* preprint (1994), hep-th/9410241.

[27] H. Wachter, *q-Translations on quantum spaces,* hep-th/0410205.

[28] S. Majid, *Braided momentum in the q-Poincaré group,* J. Mat. Phys. **34** (1993) 2045-2058.

[29] S. Majid, *Free braided differential calculus, braided binomial theorem and the braided exponential map,* J. Mat. Phys. **34** (1993) 4843-4856.

[30] S. Majid, *Quantum and braided linear algebra,* J. Mat. Phys. **34** (1993) 1176-1196.

[31] U. Meyer, *q-Lorentz group and braided coaddition on q-Minkowski space,* Commun. Math. Phys **168** (1995) 249-264.

[32] M. Rohregger, J. Wess, *q-deformed Lorentz algebra in Minkowski phase space,* Eur.Phys.J. C**7** (1999) 177.

[33] C. Blohmann, *Spin Representations of the q-Poincare Algebra,* Ph.D.thesis, Ludwig-Maximilians-Universität München, Fakultät für Physik (2001).

[34] M.C. Witt, *Deformierter Superraum und Diskussion zu einer deformierten Supersymmetriealgebra,* Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München, Fakultät für Physik (1998).

[35] A. Lorek, W.B. Schmidke, J. Wess, $SU_q(2)$*-covariant* $\hat{R}$*-Matrices for Reducible Representations,* Lett.Math.Phys. **31** (1994) 279.

[36] A. Lorek, *q-Deformierte Quantenmechanik und induzierte Wechselwirkungen,* Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München, Fakultät für Physik (1995).

[37] L.C. Biedenharn, M.A. Lohe, *Quantum group symmetry and q-Tensor Algebras,* World Scientific, Singapore (1995).

[38] M. Schliecker, W. Scholl, *Spinor calculus for quantum groups,* Z. Phys. C**52** (1991) 471-476.

[39] S. Majid, $*$*-structures on braided spaces,* J. Math. Phys. **36** (1995) 4436-3339

[40] S. Majid, *Quasi-*$*$*-structure on q-Poincaré algebras,* J. Geom. Phys. **22** (1997) 14-58

## Danksagung

Diese Dissertation und die zugrundeliegende Forschungsarbeit konnte nur Dank der Unterstützung vieler mir wohlgesonnener Menschen zustandekommen.

So bin ich allen voran meinem Doktorvater Herrn Prof. Julius Wess zu Dank verpflichtet. Er hat mir ermöglicht in seiner Gruppe zu arbeiten, ohne mich jedoch irgendwelchen Zwängen zu unterwerfen. Nur so konnte ich mich den mir persönlich besonders interessant erscheinenden Aspekten der nichtkommutativen Geometrie widmen. Nicht zuletzt habe ich ihm auch mein Stipendium im Graduiertenkolleg zu verdanken.
Besonderer Dank gebührt Herrn Prof. Zeidler vom Max-Planck-Institut in Leipzig. Er war es, der meinen Kollegen, Dr. Hartmut Wachter, und mich in einer für uns schwierigen Zeit die ideelle als auch finanzielle Unterstützung gab, die wir so dringend benötigten. Seine spezielle Annerkennung unserer Arbeit kann nicht genug gewürdigt werden.
Herrn Prof. Schottenloher danke ich für die Bereitschaft, diese Arbeit zu begutachten.

Unter allen meinen Kollegen bin ich Herrn Dr. Hartmut Wachter am meisten zu Dank verpflichtet. Er weckte in mir die Faszination für das in dieser Arbeit behandelte Teilgebiet und wurde mir in den letzten zwei Jahren zum wertvollen Kollegen, ohne dessen Rat und Tat ich oft nicht weitergewußt hätte.
Herr Dr. Fabian Bachmaier lehrte mich in unermüdlicher Geduld das Computerprogramm Mathematica; damit habe ich viele Resultate indirekt seiner Hilfe zu verdanken.
Allen anderen Kollegen wie Wolfgang Behr, Florian Koch, Frank Meyer und Dzo Mikulovic, um nur einige zu nennen, danke ich für die hilfsbereite und menschliche Lehrstuhlathmosphäre.

Auch allen meinen Freunden und Bekannten gebührt für Unterstützung jeglicher Art in den letzten Jahren herzlicher Dank. Stellvertretend möchte ich hier meinen lieben Freunden Anne, David, Ina, Julian sowie dem Tattenbach-Stammtisch und der X-Girlie-Gang die gebührende Annerkennung zollen.

Ein fröhliches Heim war mir in dieser Zeit die WG mit Ina, Wolf und Torte.

Der tiefste Dank gehört jedoch meiner Familie und ganz besonders meinen Eltern. Sie haben mich immer in jeder Art und Weise unterstützt; nur so gelang es mir, diese Arbeit zu einem erfolgreichen Ende zu führen.

# Lebenslauf

| | |
|---|---|
| 11.04.1974 | geboren in München als Sohn von Paul und Roswitha Schmidt, geborene Bastian |
| 1981-1985 | Besuch der Grundschule in München |
| 1985-1994 | Besuch des Wittelsbacher Gymnasiums München |
| Juli 1994 | Abitur |
| 01.10.1994 | Militärdienst bei der Luftwaffe |
| 30.09.1995 | Entlassung als Hauptgefreiter |
| 1995-2001 | Studium der Physik an der LMU München |
| 06.02.2001 | Diplom, Note „sehr gut“ |
| 2001-2003 | Stipendiat im Graduiertenkolleg „Mathematik im Bereich ihrer Wechselwirkung mit der Physik“ |
| Mai 2003 | Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der LMU bis März 2004 |
| 01.09 2004 | Stipendiat am Max-Planck-Institut „Mathematik in den Naturwissenschaften“ in Leipzig |