

Eindimensionale q -deformierte Quantenmechanik und Streuprobleme

*Dissertation der Fakultät für Physik der
Ludwig-Maximilians-Universität München*

vorgelegt von
Ralf Hinterding
aus Neuenkirchen

München, 31. Oktober 2000

- 1. Gutachter: Prof. Dr. Julius Wess**
- 2. Gutachter: Prof. Dr. Hans-Jürgen Schneider**

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Mai 2001

Zusammenfassung

Die Grundlage dieser Arbeit ist die q -deformierte Heisenberg-Algebra. Zuerst definieren wir diese Algebra, betrachten ihre Darstellungen und geben anschließend eine Einbettung der q -Heisenberg-Operatoren in die undeformierte Heisenberg-Algebra an. Die q -Heisenberg-Operatoren besitzen ein diskretes Spektrum. Diese sogenannten q -Gitter spielen eine wesentliche Rolle in dieser Arbeit.

Mit Hilfe eines algebraischen Kalküls betreiben wir q -deformierte Quantenmechanik und nichtabelsche Eichtheorie auf einer Unteralgebra der q -Heisenberg-Algebra, die von den Elementen x und x^{-1} erzeugt wird.

Wir betten ein freies q -Teilchen in den Ortsraum der undeformierten Quantenmechanik ein, untersuchen seine Eigenschaften und stellen es in Diagrammen graphisch dar. Ein solches Teilchen nimmt nur auf einem q -Gitter von Null verschiedene Werte an.

Wir verwenden das q -Teilchen als stationäres Streupotenzial für die Streuung einer ebenen Welle, und untersuchen den Reflexionskoeffizient nach Spuren der diskreten Struktur. Zum Schluss verwenden wir noch den Grundzustand des q -Oszillators als stationäres Streupotenzial und vergleichen den Reflexionskoeffizient der gestreuten Welle mit den entsprechenden Resultaten der undeformierten Quantenmechanik.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Die eindimensionale q-Heisenberg-Algebra	3
1.1 Algebra	3
1.2 Darstellungen	4
1.3 Einbettung in die undeformierte Heisenberg-Algebra	6
2 Ein algebraischer Kalkül	8
2.1 Die Ableitung	8
2.1.1 Leibnizregel	10
2.1.2 Algebra der Abbildungen	11
2.1.3 Das Differential	13
2.2 Das Integral	14
2.2.1 Das unbestimmte Integral	14
2.2.2 Das bestimmte Integral	15
2.3 Der Hilbertraum L_q^2	18
2.3.1 Die Basis von L_q^2	19
2.3.2 Der Faktorraum \mathcal{F}_q	20
2.4 Die Feldgleichungen	21
2.4.1 Schrödinger-Gleichung	22
2.4.2 Klein-Gordon-Gleichung	24
2.5 Das Variationsprinzip	25
2.5.1 Euler-Lagrange Gleichungen	25
2.5.2 Noether Theorem	26
2.5.3 Ladungserhaltung	27
2.6 Der q -Harmonische Oszillator	29
2.6.1 Das Modell	29
2.6.2 Das Spektrum	30
2.6.3 Die q -Fouriertransformation des Grundzustandes	33

3	Eichtheorie	38
3.1	Die Kovariante Ableitung	38
3.2	Leibnizregeln für Kovariante Ableitungen	44
3.3	Die Krümmung	45
3.4	Eichtheorie in der Einbettung	48
4	Das freie q-Teilchen	52
4.1	Die Eigenfunktionen	53
4.2	“Squeezing”	58
4.3	Die Selbstwechselwirkung	60
4.4	Anmerkungen zur Geometrie	61
5	Die Streuung an einem q-Teilchen	63
5.1	Quantenmechanik	63
5.1.1	Der Reflexionskoeffizient	66
5.1.2	Streuung an Deltafunktionen	67
5.1.3	Streuung an Gauß-Funktionen	69
5.2	Streuung an einem freien q -Teilchen	70
5.2.1	Das Streupotenzial	70
5.2.2	Die Wechselwirkung	72
5.2.3	Der Reflexionskoeffizient	73
5.2.4	Auswertung der Abbildungen	74
6	Streuung am q-Oszillator	81
6.1	Das Streupotenzial	81
6.2	Auswertung der Abbildungen	82
A	q-Hypergeometrische Funktionen	86
A.1	Allgemein	86
A.2	Die q -Exponentialfunktionen	88
A.3	Die q -trigonometrischen Funktionen	89
B	Die q-Fouriertransformation	91
B.1	Allgemein	91
B.2	Die Stufenfunktion auf dem Gitter	91
C	Transformationsverhalten	94
C.1	Der Tensor T	94
C.2	Der Tensor \mathcal{F}	94
	Literaturverzeichnis	96

Einleitung

Die Heisenbergschen Vertauschungsrelationen zwischen Orts- und Impulskoordinaten sind ein wesentlicher Bestandteil der Quantenmechanik und der Quantenfeldtheorie. Eine Konsequenz dieser Relationen ist die Nichtkommutativität des Phasenraumes. In diesem Sinn ist die Quantenmechanik eine Deformation der kommutativen klassischen Mechanik, wobei das Plancksche Wirkungsquantum \hbar die Rolle des Deformationsparameters einnimmt.

Analog zu dieser Vorgehensweise, kann man überlegen, ob nun die Deformation der quantenmechanischen Vertauschungsrelationen als eine weitere Verallgemeinerung von Nutzen sein könnte.

Die q -deformierte Quantenmechanik liefert mit einem neuen Parameter $q = e^{\hbar}$ eine solche Deformation der kanonischen Vertauschungsrelationen, die im Grenzübergang $q \rightarrow 1$ reproduziert werden. Die neuen Relationen, die sowohl die x, p Vertauschungsrelationen modifizieren als auch die Ortskoordinaten untereinander nicht mehr vertauschen lassen, hängen mit der Wirkung von Quantengruppen zusammen. Aber auch außerhalb der Theorie der Quantengruppen werden Deformationen der kanonischen Vertauschungsrelationen betrachtet [1].

Quantengruppen besitzen eine Hopfalgebrastruktur [2],[3] und sind eine Verallgemeinerung des Symmetriekonzeptes. Die Hopfalgebrastruktur ist wichtig für die Wirkung von Quantengruppen als Symmetriegruppen auf entsprechenden Räumen. Diese sogenannten Quantenräume, Komoduln der Quantengruppen, weisen die eben erwähnten nichtkommutativen Strukturen auf, die als Modifikation der üblichen kontinuierlichen Strukturen der Raum-Zeit von großem Interesse in Theorien jenseits des Standardmodells sind [4],[5],[6].

Ein Beispiel eines solchen Quantenraumes ist die Maninebene, die ein Komodul der Quantengruppe $SL_q(2)$ ist [7].

Ausgehend von den Relationen der Maninebene haben J. Schwenk und J. Wess eine q -deformierte Heisenberg-Algebra aufgestellt. Ein “toy model”, das wir im ersten Kapitel unserer Arbeit einführen. Wir geben Darstellungen dieser Algebra und eine Einbettung der q -Heisenberg-Algebra in die undeformierte Heisenberg-Algebra an. Die Eigenwerte des Orts- und des Impulsoperators sind diskret, sie sind proportional zu $\pm q^n$. Die gesamte q -Quantenmechanik findet auf diesem q -Gitter statt, das auch in der Darstellungstheorie anderer Quantengruppen auftaucht [8],[9].

Ausgehend von der q -Heisenberg-Algebra konstruieren wir im Kapitel 2 einen alge-

braischen Kalkül. Dazu definieren wir eine Unteralgebra, die so genannte Koordinatenalgebra, die von den Elementen x, x^{-1} erzeugt wird. Ihre Elemente nennen wir Felder. Aus der q -deformierten Vertauschungsrelation zwischen x und p definieren wir eine Ableitung, die auf die Koordinatenalgebra wirkt. Wir geben die Leibnizregel der Ableitung an und definieren ein Integral auf der Koordinatenalgebra als die Umkehrung der Ableitung. Mit Hilfe des Integrals geben wir der Koordinatenalgebra die zusätzliche Struktur eines Hilbertraums. Mit dieser Grundausrüstung betreiben wir dann Quantenmechanik. Am Ende des Kapitels betrachten wir den q -deformierten Harmonischen Oszillator im Rahmen unseres neuen Kalküls. Gegenüber anderen Untersuchungen des q -Oszillators [10],[11] ergeben sich keine neuen Resultate, aber einige Rechnungen, etwa die Berechnung des Grundzustandes in der Ortsbasis vereinfachen sich.

Im Kapitel 3 definieren wir eine nichtabelsche Eichtheorie auf der Koordinatenalgebra. Mit Hilfe eines Vielbeins führen wir eine kovariante Version der in Kapitel 2 definierten Ableitung ein. Wir zeigen, dass der Zusammenhang durch das Vielbein ausgedrückt werden kann und die kovariante Ableitung des Vielbeins verschwindet. Folgen wir der üblichen Definition der Torsion als der kovarianten Ableitung des Vielbeins [12], ist unser Zusammenhang torsionsfrei.

Zu der Koordinatenalgebra nehmen wir eine undeformierte Zeitrichtung hinzu und definieren eine Krümmung, die mit dem Kommutator der kovarianten Ableitungen zusammenhängt. Wir betten die verschiedenen Größen der Eichtheorie in die undeformierte Heisenberg-Algebra ein und zeigen, dass unser Krümmungstensor eine Funktion des üblichen Krümmungstensors ist.

In den letzten drei Kapiteln betrachten wir ausschließlich die Konsequenzen der q -Quantenmechanik, wenn sie im Phasenraum der undeformierten Quantenmechanik eingebettet ist.

Wir beginnen in Kapitel 4 mit dem freien q -Teilchen. Wir zeigen, dass es in Nullter Ordnung des Deformationsparameters $\hbar = \ln q$ einem undeformierten freien Teilchen entspricht. Die Terme höherer Ordnung beschreiben ein komplizierte Selbstwechselwirkung, die wir genauer untersuchen. Die Eigenfunktionen des freien q -Teilchens sind um den Ursprung lokalisiert und nur auf einem Unterraum des quantenmechanischen Ortsraumes von Null verschieden: auf dem q -Gitter $\pm q^n$. Die Lokalisierung der Zustände führt zu dem Effekt des "squeezing", der unter anderem in der Quantenoptik von Interesse ist [13]. Wir berechnen diesen energieabhängigen Effekt für verschiedene Werte des Deformationsparameters. Darüberhinaus stellen wir die Eigenfunktionen des freien q -Teilchens für verschiedene Energien und für verschiedene Werte von q graphisch dar.

In den Kapiteln 5 und 6 betrachten wir die Streuung einer ebenen Welle an einem freien q -Teilchen und an dem Grundzustand des q -deformierten Harmonischen Oszillators. Uns interessieren die Spuren, die die diskreten Strukturen der q -quantenmechanischen Größen in Streumustern hinterlassen. Dazu verwenden wir sie als stationäre Potenziale für eine gewöhnliche eindimensionale quantenmechanische Streuung, betrachten den Reflexionskoeffizienten der gestreuten Welle und werten ihn graphisch aus. Die qualitativen Aussagen, die wir machen, werden auch in höheren Dimensionen zutreffen, weil dort die gleiche Gitterstruktur auftritt.

Kapitel 1

Die eindimensionale q -Heisenberg-Algebra

In diesem einleitenden Kapitel definieren wir die eindimensionale q -deformierte Heisenberg-Algebra, wie sie von J. Schwenk und J. Wess in [14] eingeführt wurde. Ausgehend von Manins Überlegungen [15],[7] haben sie eine deformierte Heisenberg-Relation zwischen zwei hermiteschen Operatoren aufgestellt, die eine physikalische Interpretation von Ort und Impuls zulässt.

Im ersten Abschnitt werden wir dieses Modell einführen und danach die Darstellungen der Algebra kurz erläutern. Im letzten Abschnitt betrachten wir dann eine Darstellung der q -Heisenberg-Algebra durch die undeformierten Heisenberg-Operatoren, die wir an verschiedenen Stellen dieser Arbeit benötigen werden.

1.1 Algebra

Das Modell, das den Untersuchungen dieser Arbeit zugrunde liegt, lautet [14]:

$$\begin{aligned} q^{\frac{1}{2}}xp - q^{-\frac{1}{2}}px &= i\Lambda \\ \Lambda p &= qp\Lambda, \quad \Lambda x = q^{-1}x\Lambda \\ q &\in \mathbb{R}, \quad q > 1, \end{aligned} \tag{1.1}$$

mit den Konjugationseigenschaften

$$\bar{x} = x, \quad \bar{p} = p, \quad \bar{\Lambda} = \Lambda^{-1}. \tag{1.2}$$

Hier ist Λ^{-1} das Inverse Element zu Λ . Später benötigen wir noch das Inverse Element zu x . Deswegen erweitern wir die Algebra aus (1.1) um diese zwei Elemente:

$$x^{-1}x = xx^{-1} = 1, \quad \Lambda^{-1}\Lambda = \Lambda\Lambda^{-1} = 1, \tag{1.3}$$

und die Relationen, die für x^{-1} und Λ^{-1} aus (1.1) folgen. Wir betrachten also die assoziative \star -Algebra, die frei erzeugt wird von den Elementen $x, p, \Lambda, x^{-1}, \Lambda^{-1}$ und

ihren konjugierten Größen modulo dem Ideal, das von den Relationen (1.1), (1.2) und denen für x^{-1} und Λ^{-1} erzeugt wird.

Diese Algebra ist eine q -deformierte Variante der ursprünglichen Heisenberg-Algebra. Das Element Λ hat dort keine Entsprechung, für $q \rightarrow 1$ geht es in die Einheitsmatrix über. Hier wird es als zusätzliches unitäres Element benötigt, damit die Sternstruktur für x und p aus (1.2) mit den algebraischen Relationen konsistent ist [14].¹ Die Elemente x und p sollen als deformierte Orts- und Impulskoordinaten interpretiert werden. Als solche müssen sie auf der Ebene der Darstellungen wesentlich selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum sein, damit sich die übliche quantenmechanische Interpretation von Observablen² auf unseren Formalismus übertragen läßt. Deswegen führen wir schon auf der algebraischen Ebene die Sternstruktur ein.

Das Element p kann durch die anderen Elemente dargestellt werden. Zuerst bilden wir die zu (1.1) konjugierte Relation:

$$q^{\frac{1}{2}}px - q^{-\frac{1}{2}}xp = -i\Lambda^{-1}. \quad (1.4)$$

Addiert man diese Relation mit der ursprünglichen, kann man sie nach p auflösen. Mit der Definition

$$\lambda \equiv q - q^{-1} \quad (1.5)$$

finden wir

$$p = i\lambda^{-1}x^{-1}(q^{\frac{1}{2}}\Lambda - q^{-\frac{1}{2}}\Lambda^{-1}). \quad (1.6)$$

Die geordneten Monome in x und Λ bilden eine Basis der q -deformierten Heisenberg-Algebra:

$$x^m\Lambda^n, \quad m, n \in \mathbb{Z}. \quad (1.7)$$

Das bedeutet, die q -Heisenberg-Algebra besitzt die Poincaré-Birkhoff-Witt Eigenschaft. Im nächsten Abschnitt betrachten wir die

1.2 Darstellungen

der q -deformierten Heisenberg-Algebra. Sie wurden in [16] und [17] untersucht. Wir haben bereits erwähnt, dass uns hier nur die Darstellungen interessieren, in denen die hermiteschen Elemente x und p wesentlich selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum sind. Wir beginnen mit einer Darstellung, in der x diagonal ist. Die Eigenwerte lauten [17]:

$$\begin{aligned} x|n, \sigma\rangle^s &= \sigma sq^n|n, \sigma\rangle^s \\ n \in \mathbb{Z}, \quad \sigma &= \pm 1, \quad 1 \leq s < q. \end{aligned} \quad (1.8)$$

¹Analog zur gewöhnlichen Heisenberg-Algebra, die einen antihermiteschen Term auf der rechten Seite benötigt, wenn man fordert, dass Ort- und Impulskoordinate hermitesch sein sollen.

²Die Eigenwerte von Observablen müssen reell sein, und es muss eine Basis des Hilbertraumes aus Eigenvektoren existieren.

Der Parameter s charakterisiert die Darstellung. Die Eigenvektoren bilden eine orthonormale Basis eines Hilbertraums:

$${}^s\langle n', \sigma' | n, \sigma \rangle^s = \delta_{n,n'} \delta_{\sigma,\sigma'}. \quad (1.9)$$

Die Wirkung des Operators Λ in dieser Darstellung folgt sofort aus der Vertauschungsrelation mit x :

$$\Lambda |n, \sigma \rangle^s = |n + 1, \sigma \rangle^s. \quad (1.10)$$

Damit und mit (1.6) finden wir für die Wirkung von p :

$$p |n, \sigma \rangle^s = i\sigma \frac{q^{-n}}{s\lambda} \left(q^{-\frac{1}{2}} |n + 1, \sigma \rangle^s - q^{\frac{1}{2}} |n - 1, \sigma \rangle^s \right). \quad (1.11)$$

Der Operator p verbindet also x -Eigenzustände, die zwei Gitterpunkte auseinanderliegen, das ist der Grund, warum wir später immer zwischen geraden und ungeraden Gitterpunkten unterscheiden müssen. Das Vorzeichen σ läßt er wie Λ unverändert. Für festes σ erhalten wir somit eine irreduzible Darstellung der q -Heisenberg-Algebra, in der x ein wesentlich selbstadjungierter Operator, p hermitesch und Λ unitär ist. Allerdings soll auch p durch einen wesentlich selbstadjungierten Operator dargestellt werden. Ein Beweis, dass p in der Form von (1.11) nicht selbstadjungiert ist, findet man in [18]. Die Untersuchung hat gezeigt, dass man beide Vorzeichen von σ benötigt, um p zu diagonalisieren und die gesamte Algebra darzustellen [17]. Der Wechsel von der x -Basis in eine Basis, in der p diagonal ist, wird mit einer q -deformierten Fouriertransformation durchgeführt, die wir im Anhang B kurz erläutern. Die Eigenvektoren von p lauten dann:

$$|2\nu, \tau \rangle^s = \frac{N_q}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ \sigma=+,-}}^{\infty} q^{\nu+n} \left\{ \cos_q(q^{2(\nu+n)}) |2n, \sigma \rangle^s + i\tau\sigma \sin_q(q^{2(\nu+n)}) |2n + 1, \sigma \rangle^s \right\} \quad (1.12)$$

und

$$|2\nu + 1, \tau \rangle^s = \frac{N_q}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ \sigma=+,-}}^{\infty} q^{\nu+n} \left\{ \cos_q(q^{2(\nu+n)}) |2n - 1, \sigma \rangle^s + i\tau\sigma \sin_q(q^{2(\nu+n)}) |2n, \sigma \rangle^s \right\}. \quad (1.13)$$

In dieser Basis hat p die Eigenwerte

$$\begin{aligned} p |2\nu, \tau \rangle^s &= \tau \frac{q^{-\frac{1}{2}}}{s\lambda} q^{2\nu} |2\nu, \tau \rangle^s \\ p |2\nu + 1, \tau \rangle^s &= \tau \frac{q^{-\frac{1}{2}}}{s\lambda} q^{2\nu+1} |2\nu + 1, \tau \rangle^s. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Die Definition der hier verwendeten q -trigonometrischen Funktionen finden sich im Anhang A. Wir hätten natürlich auch mit einer Basis beginnen können, in der p diagonal ist, und dann die q -Fouriertransformation zur x -Basis machen können.³ Die beiden Spektren wären dann bis auf ein Vorzeichen identisch: mit $p \sim \sigma s q^n$ folgt für die Ortskomponente $x \sim -\tau \frac{q^{-\frac{1}{2}}}{s\lambda} q^\nu$. In jedem Fall erhalten wir für die beiden q -Heisenberg-Operatoren x und p ein unbeschränktes, diskretes Spektrum. Die Eigenwerte des Impuls- und des Ortsoperators der q -Heisenberg-Algebra sind also nicht mehr kontinuierlich, wie wir es von der gewöhnlichen Quantenmechanik kennen. In diesem Zusammenhang werden wir im Folgenden häufig von einem q -Gitter sprechen, auf dem die q -deformierte Physik lebt.

1.3 Einbettung in die undeformierte Heisenberg-Algebra

In diesem Abschnitt betrachten wir die Darstellung der q -deformierten Heisenberg-Algebra durch die Operatoren der undeformierten Heisenberg-Algebra \hat{x}, \hat{p} , die wir im Folgenden mit einem Hut versehen werden. Wir verwenden die Darstellung aus [19], übernehmen aber zur Herleitung der entsprechenden Relationen die Argumentation aus [18]. Die undeformierten Operatoren erfüllen die Heisenberg-Algebra

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i, \quad \bar{\hat{x}} = \hat{x}, \quad \bar{\hat{p}} = \hat{p}. \quad (1.15)$$

Wir führen einen weiteren Operator ein, der von einigem Nutzen sein wird:

$$\hat{z} = -\frac{i}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}), \quad \bar{\hat{z}} = -\hat{z}. \quad (1.16)$$

Wie man leicht nachrechnet, erfüllt dieser Operator folgende Vertauschungsrelationen:

$$\hat{x}\hat{z} = (\hat{z} + 1)\hat{x}, \quad \hat{p}\hat{z} = (\hat{z} - 1)\hat{p} \quad (1.17)$$

und

$$\hat{x}f(\hat{z}) = f(\hat{z} + 1)\hat{x}, \quad \hat{p}f(\hat{z}) = f(\hat{z} - 1)\hat{p}. \quad (1.18)$$

Damit findet man für die x, Λ Relationen der q -deformierten Heisenberg-Algebra (1.1) die Darstellung

$$x = \hat{x}, \quad \Lambda = q^{\hat{z}}. \quad (1.19)$$

Denn sie erfüllen die Relation

$$q^{\hat{z}}\hat{x} = q^{-1}\hat{x}q^{\hat{z}}. \quad (1.20)$$

Darüberhinaus erfüllen sie die geforderten Konjugationseigenschaften: x ist hermitesch und Λ ist unitär. Innerhalb der q -Heisenberg-Algebra kennen wir bereits den Ausdruck für das Element p in Abhängigkeit von x und Λ (1.6):

$$p = i\lambda^{-1}x^{-1}(q^{\frac{1}{2}}\Lambda - q^{-\frac{1}{2}}\Lambda^{-1}). \quad (1.21)$$

³Das ist auch die Vorgehensweise in [17].

Wir können also das Element p der q -Heisenberg-Algebra folgendermaßen durch die undeformierten Heisenberg Operatoren ausdrücken ($\hat{x} \neq 0$):

$$p = i\lambda^{-1}\hat{x}^{-1}(q^{\frac{1}{2}}q^{\hat{z}} - q^{-\frac{1}{2}}q^{-\hat{z}}). \quad (1.22)$$

Auch dieser Ausdruck erfüllt die gewünschte Konjugationseigenschaft $\bar{p} = p$. Für die Vertauschungsrelation mit x finden wir

$$\begin{aligned} xp &= i\lambda^{-1}\hat{x}^{-1}(q^{\frac{1}{2}}q^{\hat{z}} - q^{-\frac{1}{2}}q^{-\hat{z}})\hat{x} \\ &= q^{-1}i\lambda^{-1}\hat{x}^{-1}(q^{\frac{1}{2}}q^{\hat{z}} - q^{-\frac{1}{2}}q^{-\hat{z}})\hat{x} + i\lambda^{-1}\hat{x}^{-1}q^{\frac{1}{2}}(q - q^{-1})q^{\hat{z}}\hat{x} \\ &= q^{-1}px + iq^{-\frac{1}{2}}\Lambda. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Von der richtigen Vertauschungsrelation zwischen p und Λ überzeugt man sich mit (1.17) leicht. In [19] wird für p die folgende Darstellung angegeben:

$$p = \frac{[\hat{z} - \frac{1}{2}]}{\hat{z} - \frac{1}{2}}\hat{p}. \quad (1.24)$$

Diese Darstellung verwenden wir noch im Kapitel über das freie q -Teilchen. Wir zeigen, dass sie mit (1.22) identisch ist:

$$\begin{aligned} p &= \lambda^{-1} \left(q^{\hat{z}-\frac{1}{2}} - q^{-\hat{z}+\frac{1}{2}} \right) (-i\hat{p}\hat{x})^{-1}\hat{p} \\ &= i\lambda^{-1} \left(q^{\hat{z}-\frac{1}{2}} - q^{-\hat{z}+\frac{1}{2}} \right) \hat{x}^{-1} \\ &= i\lambda^{-1}\hat{x}^{-1}(q^{\frac{1}{2}}q^{\hat{z}} - q^{-\frac{1}{2}}q^{-\hat{z}}). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Damit haben wir eine Darstellung der q -Heisenberg-Algebra durch die Operatoren der undeformierten Heisenberg-Algebra:

$$\begin{aligned} x &= \hat{x} \\ \Lambda &= q^{\hat{z}} \\ p &= i\lambda^{-1}\hat{x}^{-1}(q^{\frac{1}{2}}q^{\hat{z}} - q^{-\frac{1}{2}}q^{-\hat{z}}). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Diese Darstellung ist nicht eindeutig. Es gibt viele weitere Möglichkeiten der Einbettung, vgl. etwa [20] und [11]. Die Ausdrücke für p und Λ liegen in der Einhüllenden der undeformierten Heisenberg-Algebra. Damit folgt die q -Heisenberg-Algebra einem allgemeinen Satz über q -deformierte Algebren, demzufolge solche Algebren in die Einhüllende der entsprechenden undeformierten Lie-Algebra eingebettet werden können [20].

Wir kennen die Darstellung der Heisenberg-Algebra durch lineare Operatoren auf L^2 , dem Hilbertraum der Quantenmechanik. Das bedeutet, wir können mit (1.26) auch die Wirkung der q -Heisenberg-Operatoren auf L^2 berechnen. Diese Wirkung legt die Definition eines Quotientenraums nahe, den wir in Kapitel 2.3.2 einführen werden.

Kapitel 2

Ein algebraischer Kalkül

Im vorhergehenden Kapitel haben wir die q -deformierte Heisenberg-Algebra eingeführt. Wir haben sie definiert als die von $x, p, \Lambda, x^{-1}, \Lambda^{-1}$ und deren konjugierten Elementen frei erzeugte assoziative Algebra über den komplexen Zahlen modulo dem von den algebraischen Relationen erzeugten Ideal. Wir wiederholen hier nur die Relationen

$$\begin{aligned} q^{\frac{1}{2}}xp - q^{-\frac{1}{2}}px &= i\Lambda \\ \Lambda p &= qp\Lambda, \quad \Lambda x = q^{-1}x\Lambda \\ q &\in \mathbb{R}, \quad q > 1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Jetzt betrachten wir die Unteralgebra, die von den Elementen x, x^{-1} erzeugt wird:

$$\mathcal{A}_x \equiv \mathbb{C}[[x, x^{-1}]]/\mathcal{R}, \tag{2.2}$$

wobei \mathcal{R} für die Relationen (1.3) zwischen x und x^{-1} steht. Diese Algebra nennen wir Koordinatenalgebra und die Elemente der Algebra Felder. Als Element $f(x) \in \mathcal{A}_x$ lassen wir neben Polynomen auch noch formale Potenzreihen in x, x^{-1} zu. Die übrigen Operatoren der q -Heisenberg-Algebra werden wir auf dieser Unteralgebra als Abbildungen darstellen. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden wir, soweit es geht, Quantenmechanik unter einem rein algebraischen Gesichtspunkt auf dieser Unteralgebra der q -deformierten Heisenberg-Algebra betreiben.

Ein Großteil dieses Kapitels basiert auf einer Zusammenarbeit mit Bianca Cerchiai, John Madore und Julius Wess [21] und der Vertiefung der Thematik in [18].

2.1 Die Ableitung

Um eine Dynamik auf der Algebra \mathcal{A}_x zu betrachten, benötigen wir als erstes eine Ableitung. Eine Ableitung auf der Koordinatenalgebra ist eine Abbildung von \mathcal{A}_x auf sich selbst, die eine Leibnizregel erfüllt. Eine solche werden wir mittels der Vertauschungsrelation (2.1) definieren. Analog zur gewöhnlichen Heisenberg-Algebra, in der \hat{p} durch $-i\partial_x$ dargestellt werden kann, versuchen wir aus der x, p Vertauschungsrelation eine

Ableitung mit Leibnizregel herzuleiten. Aufgrund dieser Relation gibt es für jedes Feld $f(x)$ Felder $g(x)$ und $h(x)$, so dass

$$pf(x) = g(x)p - iq^{\frac{1}{2}}h(x)\Lambda. \quad (2.3)$$

g und h sind eindeutig und können mit Hilfe der algebraischen Relationen (2.1) berechnet werden.

Aus der Gleichung (2.3) ergibt sich die Definition einer Ableitung nach x als die Abbildung

$$\nabla : \mathcal{A}_x \rightarrow \mathcal{A}_x, \quad \nabla f(x) = h(x). \quad (2.4)$$

Im nächsten Abschnitt werden wir eine verallgemeinerte Leibnizregel für diese Ableitung aufstellen. Mit vollständiger Induktion zeigt man die Wirkung dieser Ableitung auf die Monome $x^n, n \in \mathbb{Z}$, die eine Basis von \mathcal{A}_x bilden:

$$\nabla x^n = [n]x^{n-1}, \quad (2.5)$$

wobei $[n]$ die so genannte q -Zahl ist:

$$[n] \equiv \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}. \quad (2.6)$$

Die Wirkung (2.5) zeigt, dass x^{-1} nicht im Bild von ∇ liegt und der Kern dieser Abbildung die komplexen Zahlen sind:

$$\nabla c = 0, \quad c \in \mathbb{C}. \quad (2.7)$$

Aus den Vertauschungsrelationen der Felder mit den Operatoren Λ und Λ^{-1} folgt die Definition von zwei weiteren Abbildungen von \mathcal{A}_x nach \mathcal{A}_x , die wir mit L und L^{-1} bezeichnen. Die Relationen

$$\Lambda f(x) = j(x)\Lambda, \quad \Lambda^{-1}f(x) = k(x)\Lambda^{-1} \quad (2.8)$$

legen folgende Definition nahe:

$$Lf(x) = j(x), \quad L^{-1}f(x) = k(x). \quad (2.9)$$

Für die Wirkung auf die Monome finden wir

$$Lx^n = q^{-n}x^n, \quad L^{-1}x^n = q^n x^n. \quad (2.10)$$

Aus dieser Wirkung und aus (2.5) ergibt sich

$$L\nabla = q\nabla L. \quad (2.11)$$

Das bedeutet, dass ∇ und L als Abbildungen auf der Koordinatenalgebra \mathcal{A}_x eine Darstellung der von p und Λ erzeugten Algebra sind.

Definiert man noch x^{-1} durch Linksmultiplikation als Abbildung auf \mathcal{A}_x , dann sieht man, dass sich die Wirkung von ∇ auf die Felder folgendermaßen schreiben läßt:

$$\nabla = \frac{1}{q - q^{-1}} x^{-1}(L^{-1} - L). \quad (2.12)$$

Diese Relation werden wir in dem Abschnitt über die Algebra der Abbildungen noch einmal auf anderem Wege herleiten.

2.1.1 Leibnizregel

Damit die Abbildung ∇ eine Derivation wird, muss sie eine Leibnizregel erfüllen. Mit Hilfe von (2.12) und der Wirkung auf die Monome können wir eine verallgemeinerte Leibnizregel herleiten. Mit

$$x^{m+n} = x^m x^n \quad (2.13)$$

und (2.10) gilt für die Wirkung von L auf ein Produkt von Monomen:

$$(Lx^{m+n}) = (Lx^m)(Lx^n) \quad (2.14)$$

und analog für L^{-1} :

$$(L^{-1}x^{m+n}) = (L^{-1}x^m)(L^{-1}x^n). \quad (2.15)$$

Daraus folgt für ein allgemeines Produkt von Elementen aus \mathcal{A}_x :

$$Lfg = (Lf)(Lg) \quad (2.16)$$

und

$$L^{-1}fg = (L^{-1}f)(L^{-1}g). \quad (2.17)$$

Die Abbildungen x und x^{-1} erfüllen als multiplikative Abbildungen keine Leibnizregel. Für sie gilt:

$$\begin{aligned} xfg &= (xf)g \equiv f(xg) \\ x^{-1}fg &= (x^{-1}f)g \equiv f(x^{-1}g). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Mit dieser Information können wir jetzt eine Leibnizregel für ∇ berechnen:

$$\begin{aligned} \nabla fg &= \lambda^{-1}x^{-1}(L^{-1} - L)fg \\ &= \lambda^{-1}x^{-1}\left((L^{-1}f)(L^{-1}g) - (Lf)(Lg)\right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Durch eine andere Klammerung erhalten wir

$$\begin{aligned} \nabla fg &= \lambda^{-1}x^{-1}\left(((L^{-1} - L)f)(L^{-1}g) + (Lf)((L^{-1} - L)g)\right) \\ &= (\nabla f)(L^{-1}g) + (Lf)(\nabla g). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Aber es gibt eine weitere Möglichkeit zu Klammern:

$$\begin{aligned} \nabla fg &= \lambda^{-1}x^{-1}\left(((L^{-1} - L)f)(Lg) + (L^{-1}f)((L^{-1} - L)g)\right) \\ &= (\nabla f)(Lg) + (L^{-1}f)(\nabla g). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Damit erhalten wir zwei Leibnizregeln für ∇ , die jedoch wegen (2.18) identisch sind:

$$\begin{aligned} \nabla fg &= (\nabla f)(L^{-1}g) + (Lf)(\nabla g) \\ &= (\nabla f)(Lg) + (L^{-1}f)(\nabla g). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Diese zwei Leibnizregeln können wir verwenden, um eine q -deformierte Version des Greenschen Theorems herzuleiten. Wir berechnen die folgenden Ausdrücke mit jeweils einer der beiden Leibnizregeln:

$$\begin{aligned}\nabla\left((\nabla f)(L^{-1}g)\right) &= (\nabla^2 f)(g) + (L^{-1}\nabla f)(\nabla L^{-1}g) \\ \nabla\left((L^{-1}f)(\nabla g)\right) &= (\nabla L^{-1}f)(L^{-1}\nabla g) + (f)(\nabla^2 g).\end{aligned}\tag{2.23}$$

Subtrahieren wir diese beiden Gleichungen voneinander, so erhalten wir ein Greensches Theorem:

$$(\nabla^2 f)(g) - (f)(\nabla^2 g) = \nabla\left((\nabla f)(L^{-1}g) - (L^{-1}f)(\nabla g)\right).\tag{2.24}$$

Der einzige Unterschied zum ursprünglichen Greenschen Theorem ist das Auftreten der Abbildung L^{-1} , zu der es im undeforinierten Fall keine Entsprechung gibt.

Der Operator $\nabla^2 = \nabla\nabla$ verwendet eine Metrik, die hier identisch Eins ist. In Cerchiai *et al.* [22] haben wir im Rahmen eines geometrischen Formalismus noch weitere Möglichkeiten für die Metrik untersucht. Im Kapitel 4.4 gehen wir kurz auf die verschiedenen Metriken ein.

Die Leibnizregel für ∇ und die Wirkung der Abbildung L auf Produkte von Elementen aus \mathcal{A}_x können als Komultiplikationsregeln für ∇ und L aufgefasst werden, die wir im nächsten Abschnitt näher untersuchen werden.

2.1.2 Algebra der Abbildungen

Die Elemente x, x^{-1} der Algebra \mathcal{A}_x definieren durch Linksmultiplikation Abbildungen von \mathcal{A}_x nach \mathcal{A}_x . Schaut man sich die Wirkungen der Abbildungen x, ∇ und L auf \mathcal{A}_x an, kann man folgende Relationen zwischen ihnen herstellen:

$$\begin{aligned}q^{\frac{1}{2}}x\nabla - q^{-\frac{1}{2}}\nabla x &= -q^{-\frac{1}{2}}L \\ L\nabla &= q\nabla L, \quad Lx = q^{-1}xL.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Mit diesen Relationen bilden die Abbildungen x, ∇ und L eine Algebra, die mit der ursprünglichen q -Heisenberg-Algebra (2.1) über die Zuordnung

$$x \sim x, \quad -i\nabla \sim p, \quad q^{-\frac{1}{2}}L \sim \Lambda\tag{2.26}$$

verbunden ist. Es ist offensichtlich, dass diese Zuordnung ein Algebrhomomorphismus ist. Um eine Relation wie (2.12) nur in der Algebra zu berechnen, wenden wir den Algebrhomomorphismus auf (1.6) an und bekommen den Ausdruck

$$\nabla = \lambda^{-1}x^{-1}(L^{-1} - L).\tag{2.27}$$

Damit haben wir die Relation aus (2.12) wie angekündigt reproduziert.

Die Leibnizregeln für ∇ und L können als Komultiplikationsregeln für diese Elemente aufgefasst werden. Wir zeigen, dass die von den Elementen ∇, L erzeugte Unteralgebra A auch die Struktur einer Hopfalgebra trägt. Für Definitionen und tiefere

Zusammenhänge auf diesem Gebiet verweisen wir auf [3] und [2]. Wir definieren zuerst ein Koproduct $\Delta : A \rightarrow A$ auf den Basiselementen:

$$\begin{aligned}\Delta(\nabla) &= \nabla \otimes L + L^{-1} \otimes \nabla \\ \Delta(L) &= L \otimes L\end{aligned}\tag{2.28}$$

oder

$$\begin{aligned}\Delta(\nabla) &= \nabla \otimes L^{-1} + L \otimes \nabla \\ \Delta(L) &= L \otimes L.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Dies sind zwei verschiedene Koproducte, die zu unterschiedlichen Bialgebren führen. Nur für die Wirkung auf Felder sind die zwei identisch, und das Koproduct ist Kokommutativ. Man erkennt leicht, dass Δ ein Algebramorphismus ist und die Bedingung der Koassoziativität erfüllt:

$$(id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta.\tag{2.30}$$

Als Koeins $\epsilon : A \rightarrow \mathbb{C}$ und Antipode $S : A \rightarrow A$ finden wir

$$\begin{aligned}\epsilon(\nabla) &= 0 & S(\nabla) &= -q\nabla \\ \epsilon(L) &= 1 & S(L) &= L^{-1}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Der Algebramorphismus ϵ erfüllt die Eigenschaft der Koeins:

$$(\epsilon \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \epsilon) \circ \Delta = id,\tag{2.32}$$

die zusammen mit der Koassoziativität des Koproductes der Algebra A zusätzlich eine Koalgebrastruktur gibt und sie damit zu einer Bialgebra macht. Eine kurze Rechnung zeigt, dass die Abbildung S ein Antialgebramorphismus ist und die Antipodenbedingung

$$m \circ (S \otimes id) \circ \Delta = m \circ (id \otimes S) \circ \Delta = \eta\epsilon\tag{2.33}$$

erfüllt. Hier ist $m : A \otimes A \rightarrow A$ das Produkt und $\eta : \mathbb{C} \rightarrow A$ die Einheit der Algebra A .¹ Insgesamt ist also die von ∇, L erzeugte Unter algebra eine Hopf algebra. Damit hat natürlich auch die von p, Λ erzeugte Unter algebra der q -Heisenberg algebra eine Hopf algebrastruktur.

Das Element x ist kein Element der Hopf algebra. Ein mit der Wirkung auf Felder konsistentes, koassoziatives Koproduct lautet:

$$\Delta(x) = a(1 \otimes x) + (1 - a)(x \otimes 1),\tag{2.34}$$

aber dafür läßt sich keine Koeins angeben. x andererseits als primitives Element zu betrachten, also $\Delta(x) = (x \otimes 1) + (1 \otimes x)$ zu setzen, ist nicht mit der Darstellung (2.18) vereinbar.

¹Zu der Definition der Hopf algebra gehört, dass die Abbildungen m und η Koalgebrahomomorphismen sind. Diese Bedingung ist automatisch erfüllt, wenn Δ und ϵ Algebramorphismen sind [2].

2.1.3 Das Differential

Das Differential oder die äußere Ableitung auf die Elemente der Koordinatenalgebra \mathcal{A}_x definieren wir folgendermaßen:

$$d = dx \nabla, \quad dx = (dx), \quad d^2 = 0. \quad (2.35)$$

Die zweite Definition regelt die Wirkung von d auf das Element x aus \mathcal{A}_x : sie ist gesättigt, es gibt keine weitere Wirkung nach rechts, es bleibt das Element dx , um das die Algebra \mathcal{A}_x erweitert werden muss.

Wir nehmen an, dass für x und dx eine Ordnungsrelation hergeleitet werden kann. Wenn das der Fall ist, existieren keine Formen höheren Grades. Aus der Definition von d folgt, dass die Leibnizregel für d von dieser Ordnungsrelation und der Leibnizregel für ∇ abhängt. Für den Fall, dass x und dx vertauschen, müssten die Leibnizregeln für d und ∇ identisch sein. Um die Ordnungsrelation und die Leibnizregel für d zu bekommen, betrachten wir wieder die Wirkung auf die Basiselemente von \mathcal{A}_x , die Monome:

$$dx^n = dx \nabla x^n = [n]dx x^{n-1}, \quad (2.36)$$

daraus folgt

$$dx^{m+n} = [m+n]dx x^{m+n-1}. \quad (2.37)$$

Um eine Leibnizregel herzuleiten, machen wir folgenden Ansatz:

$$dx^m x^n = dx^m (Ax^n) + (Bx^m)dx^n. \quad (2.38)$$

Hier sind A und B zwei Algebramorphismen von \mathcal{A}_x nach \mathcal{A}_x . Ein Vergleich von (2.37) und (2.38) ergibt

$$[m]dx x^{m-1}(Ax^n) + (Bx^m)[n]dx x^{n-1} = [m+n]dx x^{m+n-1}. \quad (2.39)$$

Wir sammeln die Terme mit dx auf der linken Seite:

$$dx \left([m+n]x^{m+n-1} - [m]x^{m-1}(Ax^n) \right) = [n](Bx^m)dx x^{n-1}. \quad (2.40)$$

Damit hieraus eine Vertauschungsrelation für dx und x werden kann, muss die linke Seite proportional zu $[n]$ sein. Das gelingt für $A = L$ oder $A = L^{-1}$. Zuerst betrachten wir den Fall $A = L^{-1}$, also $Ax^n = q^n x^n$, dann folgt aus (2.40) nach einer kurzen Umformung

$$dx x^m = q^m (Bx)^m dx. \quad (2.41)$$

Wenn wir $B = L^b$ mit $b \in \mathbb{Z}$ setzen, erhalten wir die folgende Vertauschungsrelation zwischen dx und x :

$$dx x = q^{1-b} x dx, \quad (2.42)$$

und der Ansatz (2.38) ergibt die Leibnizregel:

$$d(fg) = df(L^{-1}g) + (L^b f)dg \quad (2.43)$$

$$dx x = q^{1-b} x dx.$$

Ganz analog betrachten wir den Fall $A = L$ und erhalten eine weitere Menge von Leibnizregeln. Aus (2.40) bekommen wir jetzt

$$dx x^m = q^{-m}(Bx)^m dx \quad (2.44)$$

und damit die folgende Leibniz- und Vertauschungsregel:

$$\begin{aligned} d(fg) &= df(Lg) + (L^b f)dg \\ dx x &= q^{-1-b}x dx. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Es stehen also eine Vielzahl von Differentialkalkülen auf \mathcal{A}_x zur Verfügung. Eine besondere Wahl stellt $b = 1$ in (2.43) oder $b = -1$ in (2.45) dar. In beiden Fällen kommutieren dx und x , und die Leibnizregeln für d sind identisch mit denen für ∇ , so wie wir es zu Anfang behauptet haben.

2.2 Das Integral

In diesem Abschnitt werden wir ein Integral auf \mathcal{A}_x herleiten. Wir beginnen mit der Definition des unbestimmten Integrals als Umkehrabbildung der Ableitung ∇ (2.4). Danach untersuchen wir das bestimmte Integral, wofür wir eine Darstellung benötigen. Höherdimensionale q -Integrale auf Algebren findet man unter anderem in [23].

2.2.1 Das unbestimmte Integral

Wir wissen bereits, dass der Kern von ∇ die Konstanten sind und x^{-1} nicht im Bild dieser Abbildung² liegt. Wir definieren das Integral als die Umkehrabbildung von ∇ :

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{A}_x &\rightarrow \mathcal{A}_x \setminus x^{-1} \\ \int^x &\equiv \nabla^{-1} : \mathcal{A}_x \setminus x^{-1} \rightarrow \mathcal{A}_x. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Damit kann man die Wirkung des unbestimmten Integrals auf die Monome x^n direkt ablesen. Wir finden folgenden Ausdruck:

$$\int^x x^n = \frac{1}{[n+1]} x^{n+1} + c, \quad n \in \mathbb{Z}, n \neq -1, c \in \mathbb{C}. \quad (2.47)$$

Aus der Linearität der Abbildung folgt, dass alle Potenzreihen in x mit dieser Formel berechnet werden können. Einen expliziten Ausdruck für die inverse Abbildung zu ∇ liefert die Gleichung (2.12), die leicht invertiert werden kann:

$$\nabla^{-1} = (q - q^{-1}) \frac{1}{L^{-1} - L} x. \quad (2.48)$$

²Natürlich liegen auch alle Vielfachen von x^{-1} , also die Menge $\{\mathbb{C} \cdot x^{-1}\}$, nicht im Bild von ∇ .

Diese Abbildung ist auf $\mathcal{A}_x \setminus x^{-1}$ definiert. Wenden wir diese Abbildung auf x^n an, bekommen wir (2.47) mit $c = 0$:

$$\begin{aligned}\nabla^{-1}x^n &= (q - q^{-1}) \frac{1}{L^{-1} - L} x^{n+1} \\ &= \frac{q - q^{-1}}{q^{n+1} - q^{-n-1}} x^{n+1} \\ &= \frac{1}{[n+1]} x^{n+1}.\end{aligned}\tag{2.49}$$

Jetzt können wir die Abbildung ∇^{-1} auf jedes Feld $f(x) \in \mathcal{A}_x$ anwenden, das in der Entwicklung nach x^n keinen x^{-1} Term besitzt. Dazu schreiben wir den Bruch mit den Abbildungen L und L^{-1} mittels der geometrischen Reihe auf zwei verschiedene Weisen um:

$$\begin{aligned}\nabla^{-1}f(x) &= (q - q^{-1}) \sum_{\nu=0}^{\infty} L^{2\nu} Lx f(x) \\ &= -(q - q^{-1}) \sum_{\nu=0}^{\infty} L^{-2\nu} L^{-1}x f(x).\end{aligned}\tag{2.50}$$

Die Verwendung der Formeln hängt davon ab, welche der beiden Reihen konvergiert. Für $f(x) = x^m$, $m \geq 0$ konvergiert die erste Reihe, für $f(x) = x^m$, $m < -1$ die zweite Reihe, da $q > 1$ ist.

Durch die Definition des Integrals als die Umkehrabbildung der Ableitung folgt sofort der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int^x \nabla f = f + c.\tag{2.51}$$

Zusammen mit der Leibnizregel für ∇ kann man daraus eine Formel für die partielle Integration herleiten:

$$\begin{aligned}fg + c &= \int^x \nabla fg = \int^x (\nabla f)(L^{-1}g) + \int^x (Lf)(\nabla g) \\ fg + c &= \int^x \nabla fg = \int^x (\nabla f)(Lg) + \int^x (L^{-1}f)(\nabla g).\end{aligned}\tag{2.52}$$

2.2.2 Das bestimmte Integral

Bisher haben wir nur die abstrakte Definition eines Integrals als Umkehrabbildung der Ableitung auf \mathcal{A}_x (2.46). Um Integrationsgrenzen einzuführen, also ein bestimmtes Integral auszurechnen, müssen wir eine Darstellung der Algebra (2.1) wählen. Wir verwenden die Darstellung (1.8), in der x diagonal ist, mit $s = 1$ und $\sigma = +1$:

$$x|n, +\rangle = q^n |n, +\rangle.\tag{2.53}$$

Den Index für s lassen wir hier und im Folgenden weg. In dieser Darstellung definieren wir das bestimmte Integral als Matrixelement des unbestimmten Integrals:

$$\int_N^M f(x) = \langle +, M | \int^x f(x) | M, + \rangle - \langle +, N | \int^x f(x) | N, + \rangle. \quad (2.54)$$

Mit (2.51) folgt das Stokesche Theorem in einer Dimension:

$$\int_N^M \nabla f = \langle +, M | f | M, + \rangle - \langle +, N | f | N, + \rangle. \quad (2.55)$$

Für die Integration von Monomen sieht das Ergebnis in der Darstellung folgendermaßen aus:

$$\int_N^M x^n = \frac{1}{[n+1]} (q^{M(n+1)} - q^{N(n+1)}). \quad (2.56)$$

Dies kann verwendet werden, um beliebige Potenzreihen in x zu integrieren. Allerdings ist der Ausdruck für den Übergang zur Integration von $N \rightarrow -\infty$ bis $M \rightarrow \infty$ nicht geeignet³. Statt dessen betrachten wir ∇^{-1} in der Form (2.50) und bilden die entsprechenden Matrixelemente, zunächst das für die obere Grenze aus (2.54). Wir finden:

$$\begin{aligned} \langle +, M | \int^x f(x) | M, + \rangle &= \langle +, M | \nabla^{-1} f(x) | M, + \rangle \\ &= \lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} \langle +, M | L^{2\nu} Lx f(x) | M, + \rangle. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Der Operator L ist definiert als die Wirkung des q -Heisenberg-Operators Λ auf die Elemente von \mathcal{A}_x (2.9):

$$Lx^m = \Lambda x^m \Lambda^{-1}. \quad (2.58)$$

Die rechte Seite ist ein Element der q -Heisenberg-Algebra, das mittels der Vertauschungsrelationen umgerechnet werden kann und identisch ist mit dem auf der linken Seite, das ein Element der Unteralgebra \mathcal{A}_x ist. Wenden wir das auf (2.57) an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle +, M | \int^x f(x) | M, + \rangle &= \lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} \langle +, M | \Lambda^{2\nu} Lx f(x) \Lambda^{-2\nu} | M, + \rangle \\ &= \lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} \langle +, M - 2\nu | Lx f(x) | M - 2\nu, + \rangle. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Da Λ nur mit geraden Potenzen auf die Zustände wirkt, erscheint auch hier wieder eine Trennung der geraden und ungeraden Gitterpunkte notwendig. Eine solche Trennung ist uns bereits in der Darstellungstheorie in Abschnitt 1.2 begegnet.

³Da wir $\sigma = +$ gesetzt haben, befinden wir uns bislang nur auf der positiven Halbachse, und $N \rightarrow -\infty$ entspricht auf dem q -Gitter dem Ursprung.

Wir führen den Summationsindex $\mu \equiv M - 2\nu$ ein und unterscheiden im Folgenden zwischen geradem und ungeradem M :⁴

$$\langle +, 2M | \int^x f(x) | 2M, + \rangle = \lambda \sum_{\mu=-\infty}^M \langle +, 2\mu | Lx f(x) | 2\mu, + \rangle \quad (2.60)$$

$$\langle +, 2M + 1 | \int^x f(x) | 2M + 1, + \rangle = \lambda \sum_{\mu=-\infty}^M \langle +, 2\mu + 1 | Lx f(x) | 2\mu + 1, + \rangle.$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich für die untere Integrationsgrenze aus (2.54). Subtrahiert man sie voneinander, so findet man das bestimmte Integral aus (2.54) in der Form:

$$\int_{2N}^{2M} f(x) = \lambda \sum_{\mu=N+1}^M \langle +, 2\mu | Lx f(x) | 2\mu, + \rangle \quad (2.61)$$

$$\int_{2N+1}^{2M+1} f(x) = \lambda \sum_{\mu=N+1}^M \langle +, 2\mu + 1 | Lx f(x) | 2\mu + 1, + \rangle.$$

Setzt man in diesen Ausdruck für $f(x)$ wieder x^n ein, so erhält man (2.56) mit Hilfe der Summenformel der geometrischen Reihe. Der Grenzübergang $N \rightarrow -\infty$ und $M \rightarrow \infty$ kann - falls das Integral existiert - direkt abgelesen werden. Für das gerade Gitter lautet er

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = \lambda \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \langle +, 2\mu | Lx f(x) | 2\mu, + \rangle, \quad (2.62)$$

und für das ungerade Gitter ergibt sich die entsprechende Summe über die ungeraden Gitterpunkte. Ebenso kann man natürlich auch nur eine der Integrationsgrenzen von (2.61) gegen Unendlich gehen lassen.

Der Faktor x in dem Matrixelement sorgt für ein besseres Konvergenzverhalten an der Stelle $x = 0$.

Bisher haben wir nur $\sigma = +1$ betrachtet, also lediglich Integrale auf der positiven Halbachse untersucht. Der Fall $\sigma = -1$ wird völlig analog behandelt. Aus der Darstellungstheorie (Abschnitt 1.2) wissen wir, dass die beiden Fälle gleichzeitig behandelt werden müssen. Das Integral über das gesamte q -Gitter wird also eine Summe dieser beiden Integrale sein.

Falls beide Integrale für $\sigma = \pm 1$ existieren und ebenso die beiden Grenzwerte von (2.61), dann definieren wir das Integral über das gesamte q -Gitter als

$$\int f(x) = \frac{\lambda}{2} \sum_{\sigma=+1,-1} \sigma \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \langle \mu, \sigma | Lx f(x) | \mu, \sigma \rangle. \quad (2.63)$$

⁴Die Verwendung der anderen Reihe aus (2.50) für ∇^{-1} hätte hier lediglich die Summationsgrenzen verändert: $\mu \equiv M + 2\nu + 2$ würde von $M + 1$ bis Unendlich laufen.

Dies ist eine Riemannsche Summe und entspricht dem Jackson Integral für Funktionen auf dem q -Gitter [24]. Der Term x in dem Matrixelement wird in unserer Darstellung zu σq^μ und ist gerade das Maß des Jackson Integrals.⁵

Mit dem bestimmten Integral (2.61) können wir auch $f(x) = x^{-1}$ integrieren. Wir erhalten

$$\int_{2N}^{2M} \frac{1}{x} = \lambda(M - N). \quad (2.64)$$

Wir zeigen, dass dieser Ausdruck den gewünschten Grenzwert für $q \rightarrow 1$ hat. Setzt man $q = \exp(h)$ und definiert die Integrationsgrenzen $y = q^{2M}$ und $z = q^{2N}$, dann ist in erster Ordnung in h das Ergebnis identisch mit $\ln y - \ln z$.

2.3 Der Hilbertraum L_q^2

Mit Hilfe des Integrals aus (2.63) kann ein Skalarprodukt auf dem Raum der Felder, also auf der Algebra \mathcal{A}_x definiert werden. Das Skalarprodukt gibt dem Raum der Felder eine Hilbertraumstruktur, die wir im Folgenden mit L_q^2 bezeichnen werden.

Wir nehmen an, das Integral existiert auf dem gesamten Gitter⁶, und wir definieren für $\phi, \psi \in \mathcal{A}_x$:

$$(\phi, \psi) = \int \bar{\phi} \psi = \frac{\lambda}{2} \sum_{\substack{\mu=-\infty \\ \sigma=+1, -1}} \sigma \langle \sigma, \mu | Lx \bar{\phi} \psi | \mu, \sigma \rangle. \quad (2.65)$$

Für Felder, die im Unendlichen verschwinden, folgt aus dem Stokeschen Theorem (2.55)

$$\int \nabla(\bar{\phi} \psi) = 0. \quad (2.66)$$

Damit ergibt sich aus der Leibnizregel (2.22) eine Formel für die partielle Integration solcher Felder:

$$\begin{aligned} \int (\nabla \bar{\phi})(L^{-1} \psi) + \int (L \bar{\phi})(\nabla \psi) &= 0 \\ \int (\nabla \bar{\phi})(L \psi) + \int (L^{-1} \bar{\phi})(\nabla \psi) &= 0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Mit dem Greenschen Theorem (2.24) sehen wir, dass ∇^2 bezüglich unseres Skalarproduktes ein hermitescher Operator ist:

$$\int (\overline{\nabla^2 \phi}) \psi = \int \bar{\phi} (\nabla^2 \psi). \quad (2.68)$$

⁵Das σ erscheint im Integral, damit das Maß x die Symmetrieeigenschaft des Integranden nicht verändert.

⁶Das gesamte Gitter bedeutet gerade und ungerade Gitterpunkte sowie positives und negatives Halbgeritter ($\sigma = +1$ und $\sigma = -1$).

Aus der Leibnizregel und der Formel für die partielle Integration folgt noch eine weitere Konjugationseigenschaft in L_q^2 , und zwar indem man ∇ auf $(L\bar{\phi})(L\psi)$ anwendet und integriert:

$$\int (\overline{\nabla L\phi})\psi = - \int \bar{\phi}(\nabla L^{-1}\psi). \quad (2.69)$$

Der konjugierte Operator von ∇L^{-1} bezüglich des Skalarproduktes (2.65) ist $-\nabla L$.

2.3.1 Die Basis von L_q^2

Wir haben gesehen, dass ∇^2 ein hermitescher Operator in L_q^2 ist. Die im Anhang definierten q -trigonometrischen Funktionen $\cos_q(kx)$ und $\sin_q(kx)$ sind die Eigenfunktionen dieses Operators. Mit der in (A.22) angegebenen Differenzenrelation folgt

$$\begin{aligned} \nabla \cos_q(kx) &= \frac{1}{\lambda} x^{-1} (\cos_q(qkx) - \cos_q(q^{-1}kx)) \\ &= -\frac{q^{-1}}{\lambda} kL \sin_q(kx) \\ \nabla \sin_q(kx) &= \frac{q}{\lambda} kL^{-1} \cos_q(kx) \end{aligned} \quad (2.70)$$

und damit

$$\begin{aligned} \nabla^2 \cos_q(kx) &= -\frac{q^{-1}}{\lambda^2} k^2 \cos_q(kx) \\ \nabla^2 \sin_q(kx) &= -\frac{q}{\lambda^2} k^2 \sin_q(kx). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Die Funktionen $\cos_q(kx)$ und $\sin_q(kx)$ sind jedoch nur dann Elemente von L_q^2 , wenn kx eine gerade Potenz von q ist [18]. Daher müssen wir unseren Hilbertraum L_q^2 in vier Unterräume zerlegen, wenn wir diese Funktionen als Basis verwenden wollen:

$$L_q^2 = \mathcal{H}_{\sigma=+1}^{\mu \text{ even}} \oplus \mathcal{H}_{\sigma=+1}^{\mu \text{ odd}} \oplus \mathcal{H}_{\sigma=-1}^{\mu \text{ even}} \oplus \mathcal{H}_{\sigma=-1}^{\mu \text{ odd}}. \quad (2.72)$$

Wir betrachten zuerst den Unterraum $\mathcal{H}_{\sigma=+1}^{\mu \text{ even}}$. Mit dem Skalarprodukt aus (2.65) und der Orthogonalitätsrelation (A.20) ist leicht zu sehen, dass die Funktionen⁷

$$\phi_{2k+1}^{(+)}(x) = \tilde{N}_q q^k \cos_q(xq^{2k+1}) \quad (2.73)$$

mit

$$\nabla^2 \phi_{2k+1}^{(+)}(x) = -\frac{1}{\lambda^2} q^{4k+1} \phi_{2k+1}^{(+)}(x) \quad (2.74)$$

eine Orthonormalbasis für diesen Unterraum bilden, wobei \tilde{N}_q die leicht veränderte Normierungskonstante aus (A.19) ist:

$$\tilde{N}_q \equiv N_q \left(\frac{2q}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.75)$$

⁷Man beachte, dass der Operator L im Skalarprodukt das Gitter um q^{-1} verschiebt, daher erscheint im geraden Unterraum eine zusätzliche ungerade q -Potenz im Argument.

In dem Unterraum $\mathcal{H}_{\sigma=+1}^{\mu \text{ odd}}$ erhalten wir analog die Funktionen $\phi_{2k}^{(+)}(x)$ als Orthonormalbasis:

$$\phi_{2k}^{(+)}(x) = \tilde{N}_q q^k \cos_q(xq^{2k}) \quad (2.76)$$

mit

$$\nabla^2 \phi_{2k}^{(+)}(x) = -\frac{1}{\lambda^2} q^{4k-1} \phi_{2k}^{(+)}(x). \quad (2.77)$$

In den Unterräumen mit $\sigma = -1$ sind die Funktionen identisch. Da \cos_q und \sin_q unabhängige Vollständigkeitsrelationen erfüllen, ist die Menge der Eigenfunktionen von ∇^2 übervollständig. Die Funktionen $\sin_q(kx)$ bilden ebenso eine Orthonormalbasis der einzelnen Unterräume. Das zeigt, dass der Operator ∇^2 zwar hermitesch aber nicht selbstadjungiert ist. Selbstadjungierte Erweiterungen können jedoch analog zu dem Vorgehen in Kapitel 1 auf jedem Unterraum definiert werden.

2.3.2 Der Faktorraum \mathcal{F}_q

In dem Abschnitt 1.3 haben wir die Operatoren der q -Heisenberg-Algebra durch Elemente der undeformierten Heisenberg-Algebra dargestellt. Die Wirkung dieser eingebetteten Operatoren auf L^2 legt die Definition eines Faktorraumes nahe. Dieser Raum wurde in [18] von J. Wess eingeführt. Wir wiederholen der Vollständigkeit halber hier seine Konstruktion. Die Idee ist, die Funktionen, die auf einem reellen q -Gitter definiert sind, in den Raum der C^∞ -Funktionen einer reellen Variable einzubetten. Das gelingt dadurch, dass man diese Punktmenge als Faktorraum schreibt.

Wir betrachten die C^∞ -Funktionen $f(\hat{x})$ auf dem Gebiet $\hat{x} \in \mathbb{R}, \hat{x} \neq 0$. Sie bilden mit der punktweisen Multiplikation eine Algebra, die wir mit F bezeichnen. Die Menge der Funktionen $f(\hat{x})$, die auf $x = \pm x_0 q^\mu, \mu \in \mathbb{Z}$ verschwinden, bilden ein Ideal in F , da die Multiplikation mit einer beliebigen Funktion aus F diese Nullstellen nicht verändern und somit das Produkt wieder in dieser Menge liegt. Die Ideale werden mit $F_{\pm q^\mu}^{x_0}$ bezeichnet.

Jetzt definiert man den Faktorraum $\mathcal{F}_{x_0}^q$:

$$\mathcal{F}_{x_0}^q = F / (F_{+q^\mu}^{x_0} \cap F_{-q^\mu}^{x_0}). \quad (2.78)$$

Betrachtet man die Wirkung von $\Lambda = q^{\hat{z}}$ auf eine Funktion $f(\hat{x}) \in F$, dann findet man

$$(\Lambda f(\hat{x})) = q^{-\frac{1}{2}} q^{-\hat{x} \partial_{\hat{x}}} f(\hat{x}) = q^{-\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{q} \hat{x}\right). \quad (2.79)$$

Diese Relation läßt sich leicht mit der Wirkung des Operators $\hat{x} \partial_{\hat{x}}$ auf Monome berechnen: $\hat{x} \partial_{\hat{x}} x^n = n \hat{x}^n$. Andererseits gilt: $\Lambda f(\hat{x}) \Lambda^{-1} = f\left(\frac{1}{q} \hat{x}\right)$, was zu unserer in (2.26) aufgestellten Zuordnung $L \sim q^{\frac{1}{2}} \Lambda$ passt. An dieser Wirkung erkennt man, dass Λ die Ideale invariant läßt und somit auf dem Faktorraum wirkt. Dass x als Multiplikativer Operator die Ideale invariant läßt, ist offensichtlich. Der Operator p kann durch x und

Λ ausgedrückt werden (1.6) und wirkt somit ebenfalls auf dem Faktorraum. Für eine Funktion $f(\hat{x}) \in F$ gilt:

$$pf(\hat{x}) = i\lambda^{-1}\hat{x}^{-1} \left(f\left(\frac{1}{q}\hat{x}\right) - f(q\hat{x}) \right). \quad (2.80)$$

Damit haben wir eine Darstellung der Algebra (1.1) auf dem Faktorraum $\mathcal{F}_{x_0}^q$. Mit Hilfe des Jackson Integrals bekommt der Raum $\mathcal{F}_{x_0}^q$ die Struktur eines Hilbertraums. Man definiert ein Skalarprodukt analog zu (2.65):

$$(g, f) = \lambda \sum_{\substack{n=-\infty \\ \sigma=+1, -1}}^{\infty} q^n \bar{g}(\sigma x_0 q^n) f(\sigma x_0 q^n). \quad (2.81)$$

Es definiert eine Norm auf $\mathcal{F}_{x_0}^q$, weil das Skalarprodukt einer Funktion aus dem Ideal mit einer beliebigen Funktion aus F verschwindet. x, Λ, p sind jetzt lineare Operatoren auf diesem Hilbertraum. Der Operator x ist selbstadjungiert, da er in dieser Darstellung diagonal ist, und Λ ist unitär [18]. Betrachtet man die Wirkung von p (2.80) und die Differenzenrelation der q -trigonometrischen Funktionen (A.22), kann man folgende Eigenfunktionen konstruieren:

$$p \left(\cos_q(xq^{2\nu}) \mp iq^{-\frac{1}{2}} \sin_q(xq^{2\nu+1}) \right) = \pm \frac{q^{2\nu}}{\lambda q^{\frac{1}{2}}} \left(\cos_q(xq^{2\nu}) \mp iq^{-\frac{1}{2}} \sin_q(xq^{2\nu+1}) \right). \quad (2.82)$$

Allerdings liegen diese Funktionen nur dann im Hilbertraum, wenn der Faktorraum in vier Unterräume aufgeteilt wird: $\mathcal{F}_{\pm}^{2n}, \mathcal{F}_{\pm}^{2n+1}$. Eine Konstruktion, die analog ist zur Aufteilung des Hilbertraums im vorhergehenden Kapitel, und die hier funktioniert, indem das Ideal $F_{\pm q^\mu}^{x_0}$ entsprechend aufgeteilt wird. Dann liegen die angegebenen Funktionen in der Vereinigung des positiven geraden und des positiven ungeraden Unterrums [18].

2.4 Die Feldgleichungen

In diesem Abschnitt werden wir Feldgleichungen definieren, die die Zeitentwicklung der Felder bestimmen. Die Algebra der Felder hat in unserem Kalkül bereits die Struktur eines Hilbertraumes. Damit wird die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung eine Eigenwertgleichung auf dem Hilbertraum L_q^2 .

Bisher spielte die Zeit in unseren Betrachtungen keine Rolle. Wir erweitern also die Algebra der Felder \mathcal{A}_x um das zentrale Element t . Die Felder $\psi(x, t)$ hängen dann von x und t ab. Die Algebra bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_{x,t}$. Für t gilt: $\bar{t} = t$. Die Zeitvariable t in unserem Kalkül ist eine undeformierte Variable, also gilt für das Element t aus $\mathcal{A}_{x,t}$, dass es ein reelles und kontinuierliches Spektrum hat. An der Hilbertraumstruktur ändert die zentrale Erweiterung nichts. Ein Integral über die Algebra $\mathcal{A}_{x,t}$ setzt sich zusammen aus dem q -Integral über die Variable x und einem gewöhnlichen Riemannschen Integral über t , also über die reelle Achse.

Wir betrachten die Schrödinger- und die Klein-Gordon-Gleichung und zeigen, dass Kontinuitätsgleichungen für die Ladungsdichten der beiden Felder gelten.

2.4.1 Schrödinger-Gleichung

Wir beginnen mit der Schrödinger-Gleichung. Analog zur Quantenmechanik lautet sie in unserem Kalkül:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t) = \left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + V(x)\right)\psi(x, t) \quad (2.83)$$

mit

$$\psi \in \mathcal{A}_{x,t}, \quad V \in \mathcal{A}_x, \quad \bar{V} = V. \quad (2.84)$$

Da ∇^2 auf L_q^2 ein hermitescher Operator ist, findet man für die zu dieser Gleichung konjugierte Schrödinger-Gleichung:

$$-i\frac{\partial}{\partial t}\bar{\psi}(x, t) = \left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + V(x)\right)\bar{\psi}(x, t). \quad (2.85)$$

Mit diesen beiden Gleichungen zeigen wir, dass für die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho(x, t) = \bar{\psi}(x, t)\psi(x, t) \quad (2.86)$$

eine Kontinuitätsgleichung in der folgenden Form gilt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla j = 0. \quad (2.87)$$

Mit der Bewegungsgleichung aus (2.83) folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\psi}(x, t)\psi(x, t) = -\frac{1}{2mi}\left\{\bar{\psi}(\nabla^2\psi) - (\nabla^2\bar{\psi})\psi\right\}, \quad (2.88)$$

und mit dem Greenschen Theorem (2.24) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\bar{\psi}\psi &= -\frac{1}{2mi}\nabla\left\{(L^{-1}\bar{\psi})(\nabla\psi) - (\nabla\bar{\psi})(L^{-1}\psi)\right\} \\ &= -\frac{1}{2mi}\nabla L^{-1}\left\{\bar{\psi}(L\nabla\psi) - (L\nabla\bar{\psi})\psi\right\}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Daraus folgt für die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x, t)$ aus (2.87):

$$j(x, t) = \frac{1}{2mi}L^{-1}\left\{\bar{\psi}(L\nabla\psi) - (L\nabla\bar{\psi})\psi\right\}. \quad (2.90)$$

Sowohl die Wahrscheinlichkeits- als auch die Stromdichte sind Elemente aus der erweiterten Algebra der Felder:

$$\rho(x, t) \in \mathcal{A}_{x,t}, \quad j(x, t) \in \mathcal{A}_{x,t}. \quad (2.91)$$

Für die Interpretation als Wahrscheinlichkeiten müssen die Felder $\psi(x)$ auch Elemente des Hilbertraums L_q^2 sein, aber für die Herleitung der Kontinuitätsgleichung spielte das

noch keine Rolle. Im nächsten Abschnitt werden wir eine identische Kontinuitätsgleichung aus einem Variationsprinzip herleiten.

Für Felder, die im Unendlichen verschwinden, erhalten wir mit dem Stokeschen Theorem (2.55) eine globale Wahrscheinlichkeitserhaltung. Lokal erhalten wir mit dem bestimmten Integral Ausdrücke der Art:⁸

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{2N}^{2M} \bar{\psi} \psi = -\frac{1}{2mi} \left\{ L^{-1} (\bar{\psi} (L\nabla\psi) - (L\nabla\bar{\psi})\psi) \right\} \Big|_{2N}^{2M}. \quad (2.92)$$

Man beachte, dass der so genannte Geschwindigkeitsoperator proportional zu $L\nabla$ ist. Das ist hier wichtig, damit die Funktionen auf dem vorgegebenen Gitter bleiben. Wenn wir die Schrödinger-Gleichung separieren mit dem Ansatz

$$\psi(x, t) = \phi(t)U(x), \quad (2.93)$$

erhalten wir eine zeitunabhängige und eine zeitabhängige Gleichung:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \phi(t) &= E\phi(t) \\ \left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right) U(x) &= EU(x), \quad E \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Damit wir für die zeitunabhängige Gleichung eine quantenmechanisch sinnvolle Lösung $U(x)$ finden können, benötigen wir die Hilbertraumstruktur, mit der wir die Algebra \mathcal{A}_x im vorherigen Abschnitt versehen haben.

Stationäre Zustände

Wir kennen bereits die Lösungen $U(x) \in L_q^2$ für die freie, zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung:

$$-\frac{1}{2m} \nabla^2 U(x) = EU(x). \quad (2.95)$$

Es sind die Basisfunktionen von L_q^2 , die im vorigen Kapitel als Eigenfunktionen von ∇^2 eingeführt wurden. Als Beispiel betrachten wir die normierte Funktion $\phi_{2k+1}^{(+)}(x)$ (2.73):

$$\phi_{2k+1}^{(+)}(x) = \tilde{N}_q q^k \cos_q(xq^{2k+1}). \quad (2.96)$$

Der Energieeigenwert ist

$$E_{2k+1}^{(+)} = \frac{1}{2m\lambda^2} q^{4k+1}. \quad (2.97)$$

Als Eigenwert zu einem hermiteschen Operator ist E reell. Daher folgt aus der zeitabhängigen Gleichung (2.94), dass die zeitliche Änderung des stationären Zustandes nur durch einen Phasenfaktor gegeben ist, die Wahrscheinlichkeitsdichte also zeitunabhängig ist. In einer Dimension besagt die Kontinuitätsgleichung (2.87) für solche

⁸Die abkürzende Schreibweise auf der rechten Seite ist im Sinne von (2.55) zu verstehen.

Zustände, dass die Stromdichte konstant ist. Berechnen wir j aus (2.90) für unseren reellen Zustand (2.96) multipliziert mit einer zeitabhängigen Phase, sehen wir, dass dessen Stromdichte verschwindet. Insgesamt ist also die Bezeichnung 'stationärer Zustand' gerechtfertigt. Für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Zustandes $\phi_{2k+1}^{(+)}(x)$ in dem Intervall von q^{2N} bis q^{2M} finden wir:

$$\begin{aligned} \int_{2N}^{2M} \tilde{N}_q^2 q^{2k} \cos_q^2(xq^{2k+1}) &= 2N_q^2 q^{2k+1} \sum_{\mu=N+1}^M \langle 2\mu | Lx \cos_q^2(xq^{2k+1}) | 2\mu \rangle \\ &= 2N_q^2 q^{2k} \sum_{\mu=N+1}^M q^{2\mu} \cos_q^2(q^{2\mu+2k}). \end{aligned} \quad (2.98)$$

Die Tatsache, dass als Argumente von \cos_q nur gerade Potenzen von q auftauchen, sorgt für ein vernünftiges Verhalten der Summe. Wenn wir N und M sehr groß wählen, also ein Intervall betrachten, das weit vom Ursprung entfernt ist, geht wegen der starken Konvergenz von \cos_q die Aufenthaltswahrscheinlichkeit gegen Null.⁹ Die stationären Zustände liegen also um den Ursprung zentriert, und zwar je höher die Energie k desto näher liegen sie am Ursprung. Diese Eigenschaft, die sich auf das freie q -Teilchen überträgt, untersuchen wir genauer im Kapitel 4.

2.4.2 Klein-Gordon-Gleichung

Ganz analog zur Schrödinger-Gleichung können wir auch eine Klein-Gordon-Gleichung auf der erweiterten Algebra $\mathcal{A}_{x,t}$ definieren:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(x, t) - \nabla^2 \phi(x, t) + m^2 \phi(x, t) = 0 \quad (2.99)$$

mit $\phi(x, t) \in \mathcal{A}_{x,t}$. Für ein komplexes $\phi(x, t)$ finden wir die konjugierte Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\phi}(x, t) - \nabla^2 \bar{\phi}(x, t) + m^2 \bar{\phi}(x, t) = 0. \quad (2.100)$$

Multipliziert man die beiden Gleichungen jeweils mit dem konjugierten Feld und zieht sie von einander ab, dann findet man

$$\ddot{\bar{\phi}}\phi - \bar{\phi}\ddot{\phi} - (\nabla^2 \bar{\phi})\phi + \bar{\phi}\nabla^2 \phi = 0. \quad (2.101)$$

Mit der Leibnizregel für die Zeitableitung und dem Greenschen Theorem (2.24) erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t} (\dot{\bar{\phi}}\phi - \bar{\phi}\dot{\phi}) + \nabla \left(-(\nabla \bar{\phi})(L^{-1}\phi) + (L^{-1}\bar{\phi})(\nabla \phi) \right) = 0. \quad (2.102)$$

⁹Vgl. auch das Kapitel 4 und den Anhang A, in denen diese Funktionen eingehend behandelt werden.

Wir finden also für die Größen

$$\rho(x, t) = \dot{\bar{\phi}}\phi - \bar{\phi}\dot{\phi}, \quad j(x, t) = L^{-1}\left(\bar{\phi}(L\nabla\phi) - (L\nabla\bar{\phi})\phi\right) \quad (2.103)$$

eine Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla j = 0. \quad (2.104)$$

Auch dieser Erhaltungssatz folgt aus einem Variationsprinzip, dem wir uns im nächsten Abschnitt zuwenden werden.

Die Interpretation der Klein-Gordon-Gleichung als eine relativistische Ein-Teilchen Gleichung in unserem Kalkül führt zu den gleichen Schwierigkeiten wie in der gewöhnlichen Quantenmechanik¹⁰. $\rho(x, t)$ kann keine Aufenthaltswahrscheinlichkeit sein, da es nicht positiv definit ist. Erst im Rahmen eines Variationsprinzipes und des daraus folgenden Noether-Theorems macht die Kontinuitätsgleichung Sinn als ein Erhaltungssatz für die Ladungsdichte und die Ladungsstromdichte.

2.5 Das Variationsprinzip

Mit Hilfe der Definition eines Integrals auf der Algebra der Felder (2.63) können wir ein Variationsprinzip formulieren. Eine Wirkung wird analog zur klassischen Feldtheorie als ein Integral über eine Lagrangedichte definiert. Die Lagrangedichte ist eine Funktion der Felder und ihrer Ableitungen. Wir haben bereits gesehen, dass die Ableitung ∇ die Basiselemente von L_q^2 aus dem Hilbertraum hinausführt (2.70). Deswegen verwenden wir als erste Ableitung den Operator ∇L^{-1} , dessen Konjugationseigenschaft wir bereits kennen (2.69). Unter der Annahme, dass eine Lagrangedichte existiert, ergibt sich die Wirkung

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}, \nabla L^{-1}\psi). \quad (2.105)$$

Wenn nicht extra gekennzeichnet erstrecken sich die Integrale über die Algebra der Felder im Folgenden von $-\infty$ bis ∞ im Sinne von (2.63).

2.5.1 Euler-Lagrange Gleichungen

Zur Herleitung der Euler-Lagrange Gleichungen nehmen wir an, dass die Wirkung invariant ist unter einer Variation der Felder:¹¹

$$\psi' = \psi + \delta\psi, \quad \delta\psi(t_1) = \delta\psi(t_2) = 0. \quad (2.106)$$

¹⁰Vgl dazu [25]. Der Versuch einer zweiten Quantisierung des q -deformierten Klein-Gordon-Feldes wurde in [26] unternommen.

¹¹Die Schritte zur Herleitung der Euler-Lagrange Gleichungen aus dem Variationsprinzip in unserem algebraischen Formalismus unterscheiden sich nicht von der herkömmlichen Herleitung wie etwa in [25].

Die Variation der Wirkung lautet:

$$\begin{aligned}
\delta W &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \delta \dot{\psi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla L^{-1} \psi} \delta \nabla L^{-1} \psi \right\} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \frac{\partial}{\partial t} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla L^{-1} \psi} \nabla L^{-1} \delta \psi \right\} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} - \nabla L \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla L^{-1} \psi} \right\} \delta \psi. \tag{2.107}
\end{aligned}$$

Da ψ und $\delta \psi$ im Unendlichen verschwinden und wegen der Bedingung in (2.106) fallen die Randterme weg. Wir wollen hier noch einmal an die Besonderheit des q -Gitters erinnern, dass die Integrationsgrenze $-\infty$ der Ursprung des Gitters ist, an dem die Felder natürlich nicht notwendigerweise verschwinden, vielmehr konvergiert das Integral an dieser Stelle wegen des Integrationsmaßes.

Die partielle Integration für ∇L^{-1} folgt aus der Leibnizregel für ∇ , wenn es auf $(Lf)(L^{-1}g)$ wirkt:

$$\nabla(Lf)(L^{-1}g) = (\nabla Lf)(g) + f(\nabla L^{-1}g). \tag{2.108}$$

Ein weiterer Grund, warum die Lagrangedichte nicht von $\nabla \psi$ abhängen sollte, liegt in der Leibnizregel für ∇ . Sie hinterlässe ein L in dem Term $\delta \psi$, und er könnte nicht mehr ausgeklammert werden. Das Prinzip der kleinsten Wirkung, dass also die Variation der Wirkung verschwindet ($\delta W = 0$), führt zu den Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} + \nabla L \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla L^{-1} \psi}. \tag{2.109}$$

2.5.2 Noether Theorem

In unserem Formalismus ist es auch möglich ein Noether-Theorem zu formulieren. Dazu betrachten wir Variationen der Felder, die die Wirkung invariant lassen. Wir untersuchen die Variation von ψ an einem Punkt:

$$\psi'(x) = \psi(x) + \Delta \psi(x), \tag{2.110}$$

die die Wirkung invariant lässt:

$$\Delta W = \int dt \int (\mathcal{L}' - \mathcal{L}) = 0. \tag{2.111}$$

Da es sich hier nur um die Variation der Feldkomponenten an einem Punkt handelt, sind die Integrationsvariablen auch unverändert. Wir entwickeln \mathcal{L}' bis zur ersten Ordnung in $\Delta \psi$:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \Delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \Delta \dot{\psi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla L^{-1} \psi} \Delta(\nabla L^{-1} \psi). \tag{2.112}$$

Daraus folgt

$$\Delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\Delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}\Delta\dot{\psi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla L^{-1}\psi}(\nabla L^{-1}\Delta\psi). \quad (2.113)$$

Die Forderung, dass (2.110) eine Symmetrietransformation der Wirkung ist, dass also die Wirkung invariant darunter ist, gilt auch für die Dichten, da die Integrationsgrenzen beliebig sind:

$$\Delta\mathcal{L} = 0. \quad (2.114)$$

Wenn wir die Euler-Lagrange Gleichung einsetzen, erhalten wir

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} + \nabla L\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla L^{-1}\psi}\right)\Delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}\Delta\dot{\psi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla L^{-1}\psi}(\nabla L^{-1}\Delta\psi) = 0. \quad (2.115)$$

Durch Anwenden der Leibnizregel für die partielle Zeitableitung und für ∇ (2.22) erhalten wir das Noether Theorem

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}\Delta\psi\right\} + \nabla\left\{\left(L\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla L^{-1}\psi}\right)(L^{-1}\Delta\psi)\right\} = 0. \quad (2.116)$$

2.5.3 Ladungserhaltung

In diesem Abschnitt wollen wir die aus der Schrödinger- und aus der Klein-Gordon-Gleichung resultierenden Kontinuitätsgleichungen (2.87) und (2.104) noch einmal mit Hilfe des Noether Theorems berechnen. Die Wirkung zur

Schrödinger-Gleichung

lautet:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \bar{\psi}\left(i\frac{\partial}{\partial t}\psi + \frac{1}{2m}\nabla^2\psi - V\psi\right). \quad (2.117)$$

Hier sind ψ und $\bar{\psi}$ unabhängige Felder. Die Variation dieser Wirkung nach $\bar{\psi}$ liefert die Schrödinger-Gleichung für ψ . Da ∇^2 ein hermitescher Operator ist und V reell, liefert die Variation nach ψ die konjugierte Schrödinger-Gleichung.

Wir können die Wirkung umschreiben, so dass sie nur von den Feldern und ihren ersten Ableitungen abhängt. Aus der Konjugationseigenschaft für ∇L^{-1} und der Identität $\nabla^2 = \nabla L L^{-1} \nabla$ folgt

$$\begin{aligned} \int \bar{\psi}\nabla^2\psi &= \int \bar{\psi}\nabla L L^{-1}\nabla\psi \\ &= -\frac{1}{q}\int(\nabla L^{-1}\bar{\psi})(\nabla L^{-1}\psi). \end{aligned} \quad (2.118)$$

Mit dieser Umformung ergibt sich folgende Wirkung für die Schrödinger-Gleichung:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \left\{ i\bar{\psi} \frac{\partial}{\partial t} \psi - \frac{1}{2mq} (\nabla L^{-1} \bar{\psi})(\nabla L^{-1} \psi) - \bar{\psi} V \psi \right\}. \quad (2.119)$$

Diese Wirkung ist invariant unter der infinitesimalen Phasentransformation

$$\psi' = e^{i\alpha} \psi, \quad \Delta \psi = i\alpha \psi, \quad \Delta \bar{\psi} = -i\alpha \bar{\psi}. \quad (2.120)$$

Aus dem Noether Theorem finden wir für die Ladungsdichte

$$\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \Delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} \Delta \bar{\psi} = -\alpha \bar{\psi} \psi, \quad (2.121)$$

und für die Stromdichte:

$$\begin{aligned} j &= \left(L \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla L^{-1} \psi} \right) (L^{-1} \Delta \psi) + \left(L \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla L^{-1} \bar{\psi}} \right) (L^{-1} \Delta \bar{\psi}) \\ &= -\frac{i\alpha}{2mq} \left\{ (L \nabla L^{-1} \bar{\psi})(L^{-1} \psi) - (L \nabla L^{-1} \psi)(L^{-1} \bar{\psi}) \right\} \\ &= \alpha \frac{1}{2im} \left\{ (\nabla \bar{\psi})(L^{-1} \psi) - (\nabla \psi)(L^{-1} \bar{\psi}) \right\} \\ &= -\alpha \frac{1}{2im} L^{-1} \left\{ \bar{\psi} (L \nabla \psi) - (L \nabla \bar{\psi}) \psi \right\}. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Bis auf den Faktor $-\alpha$ für die Ladung entspricht das den Definitionen aus (2.86) und (2.90)), wo wir die Kontinuitätsgleichung direkt hergeleitet haben. Die Wirkung für die

Klein-Gordon-Gleichung

lautet:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{\phi} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi \right) - \frac{1}{q} (\nabla L^{-1} \bar{\phi})(\nabla L^{-1} \phi) - m^2 \bar{\phi} \phi \right\}. \quad (2.123)$$

Man rechnet leicht nach, dass die Variation dieser Wirkung nach $\bar{\phi}$ die Klein-Gordon-Gleichung für ϕ (2.99) liefert und umgekehrt. Für die infinitesimale Phasentransformation

$$\phi' = e^{i\alpha} \phi, \quad \Delta \phi = i\alpha \phi, \quad \Delta \bar{\phi} = -i\alpha \bar{\phi}, \quad (2.124)$$

unter der die Wirkung invariant ist, erhalten wir die Ladungsdichte

$$\rho(x, t) = i\alpha (\bar{\phi} \dot{\phi} - \dot{\bar{\phi}} \phi) \quad (2.125)$$

und die Stromdichte

$$j(x, t) = i\alpha L^{-1} \left(\bar{\phi} (L \nabla \phi) - (L \nabla \bar{\phi}) \phi \right). \quad (2.126)$$

Diese beiden Ausdrücke sind bis auf den Term $i\alpha$ identisch mit den Größen aus der Kontinuitätsgleichung (2.102), die wir direkt aus der Klein-Gordon-Gleichung hergeleitet haben.

2.6 Der q -Harmonische Oszillator

In diesem Abschnitt wollen wir den q -deformierten harmonischen Oszillator als Beispiel in unserem Kalkül betrachten. Der q -harmonische Oszillator ist von A. Macfarlane [27] und L. Biedenharn [28] eingeführt worden. Wir halten uns bei der Untersuchung eng an die Betrachtungsweise in [10] und verweisen auch wiederholt auf diese Arbeit.

2.6.1 Das Modell

In [10] wurden ein bosonischer Erzeugungs- und Vernichtungsoperator durch Elemente des q -deformierten Phasenraums ausgedrückt. Beide waren somit selber Elemente der q -deformierten Heisenberg-Algebra:

$$\begin{aligned} a &= \alpha\Lambda^{-2} + \beta\Lambda^{-1}p \\ a^\dagger &= \bar{\alpha}\Lambda^2 + \bar{\beta}p\Lambda. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Im Rahmen unseres Kalküls betrachten wir Operatoren, die auf die Algebra \mathcal{A}_x wirken. Mit Hilfe der Abbildungen L und ∇ finden wir analog zu (2.127) für den Vernichtungs- und Erzeugungsoperator:

$$\begin{aligned} a &= \alpha q L^{-2} - i\beta q^{-\frac{1}{2}} \nabla L^{-1} \\ a^\dagger &= \bar{\alpha} q^{-1} L^2 - i\bar{\beta} q^{-\frac{1}{2}} \nabla L, \end{aligned} \quad (2.128)$$

wobei α und β komplexe Konstanten sind. In dieser Schreibweise sind a und a^\dagger zueinander konjugierte Operatoren auf der Algebra der Felder \mathcal{A}_x . Mit den Relationen aus (2.25) berechnet man die Vertauschungsrelation der Operatoren a und a^\dagger :

$$aa^\dagger - q^{-2}a^\dagger a = (1 - q^{-2})|\alpha|^2. \quad (2.129)$$

Mit der Normierung

$$|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 - q^{-2}}} \quad (2.130)$$

steht auf der rechten Seite eine Eins und damit wird a^\dagger zum Erzeugungs- und a zum Vernichtungsoperator.

In [10] wurde gezeigt, dass im Grenzübergang $q \rightarrow 1$ die Algebra des undeformierten harmonischen Oszillators reproduziert wird, die Konstante β mit der Masse und der Frequenz des Oszillators zusammenhängt: $\beta = i/\sqrt{2m\omega}$ und dass $\alpha/\beta \in \mathbb{R}$ ist. Diese Bedingung für den korrekten Grenzwert werden wir übernehmen. Es existiert eine allgemeinere Form der Oszillatoralgebra ($m \neq 0$):

$$\begin{aligned} a &= \alpha q^m L^{-2m} - i\beta q^{-\frac{1}{2}} \nabla L^{-m} \\ a^\dagger &= \bar{\alpha} q^{-m} L^{2m} - i\bar{\beta} q^{-\frac{1}{2}} \nabla L^m \end{aligned} \quad (2.131)$$

mit der Vertauschungsrelation:

$$aa^\dagger - q^{-2m}a^\dagger a = (1 - q^{-2m})|\alpha|^2. \quad (2.132)$$

Für $m > 0$ läßt sich die rechte Seite wieder auf Eins normieren, und a und a^\dagger spielen die Rollen des Vernichtungs- und des Erzeugungsoperators. Für $m < 0$ tauschen a und a^\dagger die Rollen, aber die Algebra ist identisch.

Wir betrachten im Folgenden nur den Fall $m = 1$. Der Hamilton Operator für den q -deformierten harmonischen Oszillator lautet mit den Operatoren aus (2.128):

$$H = a^\dagger a = |\alpha|^2 - i\bar{\alpha}\beta q^{\frac{1}{2}}\nabla L - i\alpha\bar{\beta}q^{\frac{1}{2}}\nabla L^{-1} - |\beta|^2\nabla^2 \quad (2.133)$$

und die Schrödinger-Gleichung:

$$i\partial_t\psi = H\psi = \left(-|\beta|^2\nabla^2 - i\bar{\alpha}\beta q^{\frac{1}{2}}\nabla L - i\alpha\bar{\beta}q^{\frac{1}{2}}\nabla L^{-1} + |\alpha|^2\right)\psi. \quad (2.134)$$

2.6.2 Das Spektrum

Jetzt wollen wir das Spektrum unseres q -deformierten Oszillators untersuchen. Wir beginnen mit dem Grundzustand. Der Hamilton Operator aus (2.133) ist ein positiver Operator. Also besitzt er einen niedrigsten Zustand, der sich wie üblich mit dem Vernichtungsoperator a definieren läßt:

$$a|0\rangle = 0. \quad (2.135)$$

Jetzt lösen wir diese Gleichung in der Ortsdarstellung. Dazu betrachten wir die zu dem Grundzustand $|0\rangle$ gehörende Grundzustandsfunktion $\psi_0(x) \in \mathcal{A}_x$ und erhalten die Differenzgleichung:

$$\alpha q L^{-2}\psi_0(x) = i\beta q^{-\frac{1}{2}}\nabla L^{-1}\psi_0(x). \quad (2.136)$$

Wir machen für $\psi_0(x)$ einen allgemeinen Ansatz mit einer q -deformierten Exponentialfunktion¹²:

$$\psi_0(x) = e_{q^{-2}}(ilx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ilx)^k}{(q^{-2}; q^{-2})_k}. \quad (2.137)$$

Setzen wir eine solche Funktion in die rechte Seite der Differenzgleichung aus (2.136) ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} i\beta q^{-\frac{1}{2}}\nabla L^{-1}e_{q^{-2}}(ilx) &= i\beta q^{-\frac{1}{2}}\nabla \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k(ilx)^k}{(q^{-2}; q^{-2})_k} \\ &= \frac{i\beta q^{-\frac{1}{2}}}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k(il)^k(q^k - q^{-k})}{(q^{-2}; q^{-2})_k} x^{k-1} \end{aligned}$$

¹²Im Anhang A.2 werden diese Funktionen näher erläutert.

$$\begin{aligned}
&= \frac{i\beta q^{-\frac{1}{2}}}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k+1} (il)^{k+1} q^{k+1} (1 - q^{-2(k+1)})}{(q^{-2}; q^{-2})_{k+1}} x^k \\
&= -\frac{l\beta q^{\frac{3}{2}}}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ilq^2 x)^k}{(q^{-2}; q^{-2})_k} \\
&= -\frac{l\beta q^{\frac{3}{2}}}{\lambda} e_{q^{-2}}(ilq^2 x)
\end{aligned} \tag{2.138}$$

und für die linke Seite finden wir:

$$\begin{aligned}
\alpha q L^{-2} e_{q^{-2}}(ilx) &= \alpha q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{2k} (ilx)^k}{(q^{-2}; q^{-2})_k} \\
&= \alpha q e_{q^{-2}}(ilq^2 x).
\end{aligned} \tag{2.139}$$

Setzt man beide Seiten gleich, ergibt sich für den Parameter l :

$$l = -\frac{\alpha \lambda}{q^{\frac{1}{2}} \beta}. \tag{2.140}$$

Insgesamt erhalten wir die Lösung zu (2.136):

$$\psi_0(x) = e_{q^{-2}} \left(-i \frac{\lambda \alpha}{q^{\frac{1}{2}} \beta} x \right). \tag{2.141}$$

Im nächsten Abschnitt zeigen wir, dass diese Funktion die q -Fouriertransformierte des Grundzustandes in der Impulsbasis ist, der in [10] angegeben wurde.

Aber zunächst untersuchen wir

Die Angeregten Zustände

unseres q -Oszillators. Wir folgen den Argumenten aus [10] und finden auch in unserem Kalkül q -deformierte Hermite-Polynome als Bestandteil des Spektrums. Aus der Definition des Grundzustandes

$$a|0\rangle = (\alpha q L^{-2} - i\beta q^{-\frac{1}{2}} \nabla L^{-1})|0\rangle = 0 \tag{2.142}$$

und dem Ausdruck (2.12) für ∇ können wir zwei Identitäten herleiten:

$$\begin{aligned}
\nabla|0\rangle &= -iq^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha}{\beta} L^{-1}|0\rangle \\
i \frac{\alpha}{q^{\frac{1}{2}} \beta} x|0\rangle &= \frac{1}{\lambda} (L^2 - 1)|0\rangle.
\end{aligned} \tag{2.143}$$

Damit berechnen wir aus der Gleichung

$$a^\dagger|0\rangle = (\bar{\alpha} q^{-1} L^2 - i\beta q^{-\frac{1}{2}} \nabla L)|0\rangle \tag{2.144}$$

den Ausdruck:

$$a^\dagger|0\rangle = \frac{i}{q^{\frac{1}{2}}\beta} x|0\rangle. \quad (2.145)$$

Der erste angeregte Zustand entsteht also durch Multiplikation eines Polynoms erster Ordnung in x . Dass das auch für die höheren Zustände des Spektrums mit Polynomen $H_n^{(q)}(x)$ gilt:

$$(a^\dagger)^n |0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n H_n^{(q)}\left(\frac{ix}{\sqrt{2}\beta}\right) |0\rangle, \quad (2.146)$$

zeigen wir analog zu [10] mit der Vertauschungsrelation von a^\dagger und ξ , wobei ξ eine dimensionslose Variable ist:

$$\xi \equiv \frac{i}{\sqrt{2}\beta} x. \quad (2.147)$$

Zur Berechnung der Vertauschungsrelation zwischen a^\dagger und ξ muss man die Relationen aus (2.25) verwenden und findet:¹³

$$a^\dagger \xi = q^{-2} \xi a^\dagger - \frac{q^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}. \quad (2.148)$$

Mit dieser Relation kann durch Induktion über n folgender Ausdruck bewiesen werden:¹⁴

$$\left((a^\dagger)^{n+1} - q^{-\frac{1}{2}} q^{-2n} \sqrt{2} \xi (a^\dagger)^n + q^{-n-1} [n] (a^\dagger)^{n-1} \right) |0\rangle = 0. \quad (2.149)$$

Beweis

Der Induktionsanfang $n = 0$ ist (2.145). Den Induktionsschritt machen wir von $n + 1$ nach $n + 2$:

$$\begin{aligned} 0 &= a^\dagger \left((a^\dagger)^{n+1} - q^{-\frac{1}{2}} q^{-2n} \sqrt{2} \xi (a^\dagger)^n + q^{-n-1} [n] (a^\dagger)^{n-1} \right) |0\rangle \\ &= \left((a^\dagger)^{n+2} - q^{-\frac{1}{2}} q^{-2n} \sqrt{2} \left(q^{-2} \xi a^\dagger - \frac{1}{\sqrt{2}} q^{-\frac{3}{2}} \right) (a^\dagger)^n + q^{-n-1} [n] (a^\dagger)^n \right) |0\rangle \\ &= \left((a^\dagger)^{n+2} - q^{-\frac{1}{2}} q^{-2(n+1)} \sqrt{2} \xi (a^\dagger)^{n+1} + \left(q^{-2(n+1)} + q^{-n-1} [n] \right) (a^\dagger)^n \right) |0\rangle \\ &= \left((a^\dagger)^{n+2} - q^{-\frac{1}{2}} q^{-2(n+1)} \sqrt{2} \xi (a^\dagger)^{n+1} + q^{-n-2} [n+1] (a^\dagger)^n \right) |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.150)$$

¹³In (2.26) haben wir einen Homomorphismus zwischen der Algebra der Abbildungen und der q -Heisenberg-Algebra angegeben. Daher ist es nicht verwunderlich, dass wir hier die gleichen Relationen finden wie in [10].

¹⁴Wir liefern hier die Rechnung, da sie in [10] nicht durchgeführt wurde.

Aus (2.149) erkennt man, dass $H_n^{(q)}(\xi)$ ein Polynom vom Grad n ist. Wir können in (2.149) die a^\dagger Terme durch die Polynome ersetzen und erhalten eine Rekursionsrelation für q -deformierte Hermite Polynome:

$$H_{n+1}^{(q)}(\xi) - q^{-\frac{1}{2}}q^{-2n}2\xi H_n^{(q)}(\xi) + 2q^{-n-1}[n]H_{n-1}^{(q)}(\xi) = 0. \quad (2.151)$$

Für $q \rightarrow 1$ geht diese Relation in die bekannte Rekursionsrelation für Hermite Polynome über. Diese q -deformierten Hermite Polynome, die wir bereits in [29] eingehend untersucht haben, sind ein Spezialfall der Al-Salam und Carlitz Polynome [30]. Für diese Polynome ist das Momentenproblem unbestimmt, das heißt, es gibt mehrere inäquivalente Orthogonalitätsmaße. Wenn wir also auf der Ebene der Darstellungstheorie Grundzustände in der Orts- und der Impulsbasis der q -Heisenberg-Algebra berechnen, ist es nicht automatisch klar, dass sie durch eine q -Fouriertransformation ineinander übergehen. Im nächsten Abschnitt werden wir die q -Fouriertransformation explizit berechnen.

Eine ausführliche Übersicht über die verschiedenen q -deformierten Polynome findet sich in [31] und [24].

Wir weisen darauf hin, dass die Variable x bzw. ξ , von der die q -Hermite Polynome abhängen, ein Element der q -Heisenberg-Algebra ist, und somit erst in einer Darstellung zu $\pm s q^n \in \mathbb{R}$ wird. Es handelt sich in der Darstellung also um Polynome mit einer diskreten Variable, sogenannte diskrete Polynome. In [31] und [24] werden auch q -Polynome behandelt, die von einer kontinuierlichen Variablen abhängen und bei denen nur die Fakultäten q -deformiert sind.

2.6.3 Die q -Fouriertransformation des Grundzustandes

Im Anhang B erläutern wir die in [32] eingeführte q -Fouriertransformation. Hier wollen wir sie auf den Grundzustand des q -Oszillators anwenden. Als Element der Algebra \mathcal{A}_x haben wir in unserem Kalkül den Grundzustand

$$\psi_0(x) = e_{q^{-2}} \left(-i \frac{\lambda\alpha}{q^{\frac{1}{2}}\beta} x \right) \quad (2.152)$$

gefunden. In [10] wurde der q -Oszillator in der Impulsbasis der q -Heisenberg-Algebra untersucht und darin der folgende Grundzustand angegeben:

$$|0\rangle^\sigma = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\sigma \frac{\alpha}{\beta} \right)^n q^{-\frac{1}{2}(n^2+n)} c_0 |n, \sigma\rangle. \quad (2.153)$$

Hier ist $\sigma = \pm$ und c_0 die Normierungskonstante. Dieser Grundzustand ist entartet ($\sigma = \pm$). Eine Entartung der Grundzustandsfunktion aus (2.152) wird erst in einer Darstellung sichtbar, weil wir zwischen geraden und ungeraden Gitterpunkten unterscheiden müssen. Wir setzen $\alpha/\beta = 1$. In [29] wurde eine symmetrische und eine antisymmetrischen Linearkombination dieser beiden Zustände konstruiert, die dann mit

$|0\rangle^g$ und $|0\rangle^u$ bezeichnet wurden, weil sie später im Ortsraum auf dem geraden bzw. ungeraden q -Gitter definiert sind. Dann wurde mit Hilfe der q -Fouriertransformation der Wechsel von der Impuls- in die Ortsbasis durchgeführt. Wir wollen jetzt zeigen, dass diese q -Fouriertransformation genau unsere Grundzustandsfunktion in der entsprechenden Ortsbasis¹⁵

$$x|\nu, \tau\rangle = -\tau \frac{q^\nu}{q^{\frac{1}{2}}\lambda} |\nu, \tau\rangle \quad (2.154)$$

reproduziert. In dieser Basis lautet unsere Grundzustandsfunktion:

$$\langle \nu, \tau | \psi_0(x) | \nu, \tau \rangle = e_{q^{-2}}(i\tau q^{-1} q^\nu). \quad (2.155)$$

Wir berechnen die Koeffizienten des Grundzustandes $|0\rangle^g$ in der Ortsbasis: $\langle 2\nu, \tau | 0 \rangle^g = g(\tau q^{2\nu})$. Wenn wir die positiven Koeffizienten aus der Impulsbasis (2.153) mit $f(q^l)$ bezeichnen, ergibt sich durch den Basiswechsel:

$$g(\tau q^{2\nu}) = \frac{N_q}{\sqrt{2}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{\nu+l} \left(f(q^{2l}) \cos_q(2(\nu+l)) + i\tau f(q^{2l+1}) \sin_q(2(\nu+l)) \right). \quad (2.156)$$

Jetzt setzen wir für die Funktionen \sin_q und \cos_q die Reihenentwicklung ein, die wir im Anhang A angegeben haben. Mit Hilfe der ebenfalls dort erwähnten Jacobi-Identität kann die Summe über l in ein unendliches Produkt verwandelt werden, das konstant ist:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{-2(l-n)^2} c_0 = \sum_{l'=-\infty}^{\infty} q^{-2l'^2} c_0 = c_0(q^{-4}, -q^{-2}, -q^{-2}; q^{-4})_\infty \equiv \tilde{c}_0. \quad (2.157)$$

Mit dieser Definition finden wir:

$$\begin{aligned} g(\tau q^{2\nu}) &= \frac{N_q}{\sqrt{2}} \tilde{c}_0 q^\nu \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{-2n}}{(q^{-2}; q^{-2})_{2n}} q^{4\nu n} \right. \\ &\quad \left. + i\tau \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{-(2n+1)}}{(q^{-2}; q^{-2})_{2n+1}} q^{2\nu(2n+1)} \right) \\ &= \frac{N_q}{\sqrt{2}} \tilde{c}_0 q^\nu e_{q^{-2}}(i\tau q^{-1} q^{2\nu}). \end{aligned} \quad (2.158)$$

Im letzten Schritt haben wir die Reihenentwicklung der q -Exponentialfunktion aus (2.137) verwendet. Wir finden also genau die in dem neuen Kalkül berechnete Grundzustandsfunktion dargestellt auf dem geraden Untergitter von (2.155). Für den Zustand

¹⁵Das ist die Basis, die man erhält, wenn man mit der Impulsbasis $p|n, \sigma\rangle = \sigma q^n |n, \sigma\rangle$ beginnt, und dann die q -Fouriertransformation zur Ortsbasis durchführt.

$|0\rangle^u$, bzw. für die Ortskomponente $\langle 2\nu + 1, \tau|0\rangle^u = g(\tau q^{2\nu+1})$, finden wir die folgende q -Fouriertransformation:¹⁶

$$g(\tau q^{2\nu+1}) = -\frac{N_q}{\sqrt{2}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{\nu+l} \left(f(q^{2l+1}) q \cos_q(2(\nu + l + 1)) + i\tau f(q^{2l}) \sin_q(2(\nu + l)) \right). \quad (2.159)$$

Nach Einsetzen der Reihen finden wir hier eine Summe, die wir mit der Indexverschiebung: $l \rightarrow l' = l - \frac{2n-1}{2} - \frac{1}{2}$ auf die Form der Jacobi-Identität bringen können:

$$\begin{aligned} \sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{-2(l-\frac{2n-1}{2})^2} c_0 &= \sum_{l'=-\infty}^{\infty} q^{-2(l'+\frac{1}{2})^2} c_0 \\ &= q^{-\frac{1}{2}} \sum_{l'=-\infty}^{\infty} q^{-2l'^2} q^{-2l'} c_0 \\ &= q^{-\frac{1}{2}} (q^{-4}, -q^{-4}, -1; q^{-4})_{\infty} c_0 \equiv q^{-\frac{1}{2}} c'_0. \end{aligned} \quad (2.160)$$

Damit ergibt sich aus (2.159) die Reihe:

$$\begin{aligned} g(\tau q^{2\nu+1}) &= -\frac{N_q}{\sqrt{2}} c'_0 q^{\nu} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(q^{-2}, q^{-2})_{2n}} q^{4\nu n} \right. \\ &\quad \left. + i\tau \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(q^{-2}, q^{-2})_{2n+1}} q^{2\nu(2n+1)} \right) \\ &= -\frac{N_q}{\sqrt{2}} c'_0 q^{\nu} e_{q^{-2}}(i\tau q^{-1} q^{2\nu+1}). \end{aligned} \quad (2.161)$$

Dies ist unsere Grundzustandsfunktion auf dem ungeraden Untergitter aus (2.155). Die Normierungskonstanten für die beiden Gitter sind verschieden.

Damit haben wir ein Beispiel für die von Koornwinder und Swarttouw in [32] eingeführte q -deformierte Fouriertransformation gefunden. Im Anhang B.2 werden wir noch die q -Fouriertransformierte der Stufenfunktion auf dem q -Gitter berechnen. Es ist uns mit Hilfe des neuen Kalküls gelungen, den Grundzustand des q -Oszillators in der Ortsbasis direkt zu berechnen und zu zeigen, dass er die q -Fouriertransformierte des Grundzustandes in der Impulsbasis ist.

Wir können die Grundzustandsfunktionen mit Hilfe von (A.13) noch durch eine andere q -deformierte Exponentialfunktion ausdrücken, die ebenfalls im Anhang A erläutert wird:

$$\begin{aligned} g(\tau q^{2\nu}) &= \frac{N_q}{\sqrt{2}} \tilde{c}_0 \frac{q^{\nu}}{E_{q^{-2}}(-i\tau q^{-1} q^{2\nu})} \\ g(\tau q^{2\nu+1}) &= -\frac{N_q}{\sqrt{2}} c'_0 \frac{q^{\nu}}{E_{q^{-2}}(-i\tau q^{-1} q^{2\nu+1})}. \end{aligned} \quad (2.162)$$

¹⁶Das negative Vorzeichen kommt durch die antisymmetrische Linearkombination zustande, durch die $|0\rangle^u$ definiert ist.

Die zwei Grundzustandsfunktionen, die wir in diesem Abschnitt als q -Fouriertransformierte der Grundzustände in der Impulsbasis hergeleitet haben, findet man auch in der mathematischen Literatur. Das in [31] angegebene Maß für die diskreten q -Hermite II Polynome kann durch zwei verschiedene Skalierungen und die Ersetzung $q \rightarrow q^{-2}$ jeweils in das Quadrat der beiden Grundzustandsfunktionen aus (2.162) überführt werden.

Zum Schluss wollen wir noch einige Bemerkungen über

Die Norm des Grundzustandes

anfügen. Wir wissen aus [32], dass die q -Fouriertransformation eine Isometrie ist. Da der Grundzustand $|0\rangle^g$ in der Impulsbasis (2.153) normiert ist, ist er also auch in der durch q -Fouriertransformation erreichten Ortsbasis normiert. Tatsächlich rechnet man, wenn für die Koeffizienten in der Ortsbasis $\langle 2\nu, \tau | 0 \rangle = g(\tau q^{2\nu})$ die Form von (2.156) verwendet wird, mit der Orthogonalitätsrelation der q -Trigonometrischen Funktionen aus (A.20) und (A.21) die Normierung leicht nach:

$$\begin{aligned} {}^g\langle 0|0\rangle^g &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau=\pm 1} {}^g\langle 0|\nu, \tau\rangle \langle \nu, \tau|0\rangle^g = 2 \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\langle 2\nu, \tau|0\rangle^g|^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(q^{2n})|^2 + |f(q^{2n+1})|^2 = 1, \end{aligned} \quad (2.163)$$

Andererseits wissen wir aber, wie wir diese Koeffizienten mit einer q -Exponentialfunktion schreiben können. Setzen wir also (2.162) in die obige Gleichung ein, erhalten wir eine Normierungsgleichung für diese q -Exponentialfunktion:

$$N_q^2 |\tilde{c}_0|^2 \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{q^{2\nu}}{E_{q^{-2}}(iq^{-1}q^{2\nu}) E_{q^{-2}}(-iq^{-1}q^{2\nu})} = 1. \quad (2.164)$$

Diese Gleichung kann auch aus der Orthonormalitätsrelation der diskreten q -Hermite II Polynome [31] hergeleitet werden.

Eine zu (2.164) analoge Relation gilt für die Grundzustandsfunktion auf dem ungeraden Gitter aus (2.162). Da dann über andere Funktionswerte summiert wird, ist es klar, dass eine andere Normierungskonstante benötigt wird. Aus der Produktschreibweise für die q -Exponentialfunktion (A.11):

$$E_{q^{-2}}(iq^{-1}q^{2\nu}) = (-iq^{-1}q^{2\nu}; q^{-2})_{\infty} \quad (2.165)$$

und der Formel aus (A.3):

$$(ix; q)_{\infty} (-ix; q)_{\infty} = (-x^2; q^2)_{\infty} \quad (2.166)$$

folgt eine kompakte Schreibweise für das Absolutquadrat der beiden Grundzustandsfunktionen:

$$|g(\tau q^{2\nu})|^2 = \frac{N_q^2}{2} |\tilde{c}_0|^2 \frac{q^{2\nu}}{E_{q^{-4}}(q^{-2}q^{4\nu})} \quad (2.167)$$

und

$$|g(\tau q^{2\nu+1})|^2 = \frac{N_q^2}{2} |c'_0|^2 \frac{q^{2\nu}}{E_{q^{-4}}(q^{4\nu})}. \quad (2.168)$$

In Kapitel 6 werden wir eine ebene Welle an dem Grundzustand des q -Oszillators streuen, indem wir das Absolutquadrat des Grundzustandes als stationäres Potenzial verwenden. Dort werden wir auch zeigen, dass dieses Absolutquadrat die Form einer Gauß-Funktion besitzt.

Kapitel 3

Eichtheorie

In diesem Kapitel wollen wir auf der Algebra der Felder $\mathcal{A}_{x,t}$ eine Eichtheorie definieren. Wir setzen voraus, dass die Felder ein wohl definiertes Verhalten unter einer Eichtransformation besitzen. Wir gehen hier analog zur Eichtheorie auf kommutativen Räumen vor (vgl. etwa [33]) und finden mit Hilfe eines Zusammenhangs und eines Vielbeins eine Kovariante Ableitung. Aus der Untersuchung ihrer algebraischen Eigenschaften folgt die Definition einer Krümmung.

Im letzten Teil des Kapitels betrachten wir die Eichtheorie auf dem Faktorraum. Mit Hilfe der Einbettung der q -Heisenberg-Algebra in den undeformierten Phasenraum beschreiben wir die vorher gefundenen Größen als Operatoren im quantenmechanischen Phasenraum.

Die hier dargestellten Betrachtungen stehen als eine Art Vorarbeit in Verbindung mit den höherdimensionalen Untersuchungen in [34] und sind zum Teil bereits in [21] veröffentlicht.

3.1 Die Kovariante Ableitung

Wir beginnen mit der Definition einer kovarianten Ableitung für die Felder aus $\mathcal{A}_{x,t}$. Wir nehmen an, dass die $\psi(x, t)$ eine Darstellung einer kompakten Eichgruppe¹ bilden und folgendermaßen transformieren:

$$\psi'(x, t) = e^{i\alpha(x,t)}\psi(x, t) \tag{3.1}$$

und analog das konjugierte Feld:

$$\bar{\psi}'(x, t) = \bar{\psi}(x, t)e^{-i\alpha(x,t)}. \tag{3.2}$$

¹Da wir nur kompakte Eichgruppen untersuchen, können wir annehmen, dass die Generatoren hermitesche Matrizen sind und die endlichen Transformationen durch unitäre Matrizen beschrieben werden können.

Hier ist $\alpha(x, t)$ liealgebrawertig. Wenn T_l die Generatoren der kompakten Lie-Algebra sind, gilt:

$$\alpha(x, t) = \sum_l g \alpha_l(x, t) T_l. \quad (3.3)$$

Die Koeffizienten der Summe sind Elemente aus der Algebra der Felder:

$$\alpha_l(x, t) \in \mathcal{A}_{x,t}. \quad (3.4)$$

In einer bestimmten Darstellung der Eichgruppe ist $\alpha(x, t)$ also ein Element aus der Algebra $M_n(\mathcal{A}_{x,t})$ der darstellenden Matrizen mit Einträgen in $\mathcal{A}_{x,t}$.² Für den Fall einer abelschen Eichtheorie ist $\alpha(x, t)$ ein Element der Algebra der Felder. Die Konstante $g \in \mathbb{C}$ spielt die Rolle einer Kopplungskonstanten.

Die Transformationsbedingung für die kovariante Ableitung eines Feldes lautet:

$$(\mathcal{D}\psi)' = e^{i\alpha(x,t)} \mathcal{D}\psi. \quad (3.5)$$

Das ist die bekannte Bedingung, dass die Ableitung des Feldes transformieren soll wie das Feld selber. Ebenso lautet die Bedingung für die kovariante Ableitung des konjugierten Feldes:

$$(\overline{\mathcal{D}\psi})' = (\overline{\mathcal{D}\psi}) e^{-i\alpha(x,t)}. \quad (3.6)$$

Die kovariante Ableitung \mathcal{D} beinhaltet hier die kovariante Ableitung nach der Zeit- und der Ortskomponente: $\mathcal{D}_x, \mathcal{D}_t$. Für $g = 0$ muss die kovariante Ableitung mit der üblichen Ableitung identisch sein, also $\mathcal{D}_x = \nabla$ und $\mathcal{D}_t = \partial_t$.³

Für die kovariante Ableitung \mathcal{D}_x machen wir folgenden Ansatz mit einem Vielbein E , das hier in einer Dimension ein Einbein ist:

$$\mathcal{D}_x \psi = E(\nabla + \phi)\psi. \quad (3.7)$$

Das Vielbein E ist ein Feld. Wir haben den liealgebrawertigen Zusammenhang ϕ eingeführt. Für $g = 0$ muss ϕ verschwinden und E eine Einheitsmatrix sein.

Aus der Bedingung (3.5) wollen wir jetzt das Transformationsverhalten von E und ϕ unter Eichtransformationen bestimmen. Es soll gelten:

$$E'(\nabla + \phi') e^{i\alpha} \psi = e^{i\alpha} E(\nabla + \phi)\psi. \quad (3.8)$$

Für die Ableitung ∇ folgt aus der Leibnizregel (2.21) folgendes Verhalten:

$$\nabla \psi' = (\nabla e^{i\alpha})(L\psi) + (L^{-1} e^{i\alpha}) \nabla \psi. \quad (3.9)$$

²Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels werden wir die Indexschreibweise für die Transformationen verwenden und dadurch auch den Matrizencharakter von $\alpha(x, t)$ verdeutlichen. Vgl. auch [34].

³Um die kovariante Zeitableitung kümmern wir uns erst später. Da die Zeitvariable nicht deformiert ist, wird sich \mathcal{D}_t nicht von der üblichen Eichtheorie, wie etwa in [33], unterscheiden.

Setzen wir dies in die Bedingung (3.8) ein, erhalten wir eine Relation, aus der das Transformationsverhalten von E und ϕ hergeleitet werden kann:

$$\begin{aligned} E' ((\nabla e^{i\alpha})(L\psi) + (L^{-1}e^{i\alpha})(\nabla\psi) + \phi'e^{i\alpha}\psi) &= e^{i\alpha}E(\nabla + \phi)\psi \\ \Rightarrow (E'(\nabla e^{i\alpha})L + E'(L^{-1}e^{i\alpha})\nabla + E'\phi'e^{i\alpha})\psi &= (e^{i\alpha}E\nabla + e^{i\alpha}E\phi)\psi. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Durch den Vergleich der beiden Koeffizienten mit dem Term $(\nabla\psi)$, die sich aufheben müssen, finden wir zuerst das Transformationsverhalten von E :

$$E' = e^{i\alpha}E(L^{-1}e^{-i\alpha}). \quad (3.11)$$

Wir erinnern hier noch einmal an die Komultiplikation von L und L^{-1} , die dafür sorgt, dass

$$(L^{-1}e^{-i\alpha})(L^{-1}e^{i\alpha}) = L^{-1}(e^{-i\alpha}e^{i\alpha}) = L^{-1}1 = 1 \quad (3.12)$$

und das Analoge für L gilt.

Durch Einsetzen von (3.11) finden wir aus dem Vergleich der übrigen Koeffizienten in (3.10) folgende Relation:

$$e^{i\alpha}E(L^{-1}e^{-i\alpha})(\nabla e^{i\alpha})L + e^{i\alpha}E(L^{-1}e^{-i\alpha})\phi'e^{i\alpha} = e^{i\alpha}E\phi, \quad (3.13)$$

aus der wir ϕ' direkt berechnen können:

$$\phi' = (L^{-1}e^{i\alpha})\phi e^{-i\alpha} - (\nabla e^{i\alpha})L e^{-i\alpha}. \quad (3.14)$$

Da der letzte Term ohne Klammer ist, folgt aus der Komultiplikation von L , dass der Operator L noch weiter nach rechts wirkt, dass also ϕ L wertig ist:

$$\phi = g\varphi L. \quad (3.15)$$

Für das Transformationsverhalten von φ folgt dann aus (3.14):

$$g\varphi' = (L^{-1}e^{i\alpha})g\varphi(L e^{-i\alpha}) - (\nabla e^{i\alpha})(L e^{-i\alpha}). \quad (3.16)$$

Der Zusammenhang φ kann als eine Funktion von E ausgedrückt werden. Um das zu zeigen, leiten wir zuerst einen alternativen Ausdruck für die kovariante Ableitung her. Wir haben in unserem Kalkül im Kapitel 2 folgenden Ausdruck für ∇ gefunden (2.12):

$$\nabla = \frac{1}{\lambda}x^{-1}(L^{-1} - L). \quad (3.17)$$

Für die kovariante Ableitung \mathcal{D}_x werden wir jetzt einen analogen Ausdruck herleiten. Die Operatoren L und L^{-1} sind wegen ihrer Komultiplikation nicht kovariant:

$$L\psi' = (L e^{i\alpha})(L\psi), \quad L^{-1}\psi' = (L^{-1}e^{i\alpha})(L^{-1}\psi). \quad (3.18)$$

Wir müssen also kovariante Versionen von L und L^{-1} finden, die wir mit \mathcal{L} und \mathcal{L}^{-1} bezeichnen werden:⁴

$$(\mathcal{L}\psi)' = e^{i\alpha}\mathcal{L}\psi, \quad (\mathcal{L}^{-1}\psi)' = e^{i\alpha}\mathcal{L}^{-1}\psi \quad (3.19)$$

mit

$$\mathcal{L} = L, \quad \mathcal{L}^{-1} = L^{-1} \quad \text{für } g = 0. \quad (3.20)$$

Wir beginnen mit dem Ansatz

$$\mathcal{L} = \tilde{E}L, \quad \mathcal{L}^{-1} = EL^{-1} \quad (3.21)$$

mit einer neuen Version eines Vielbeins \tilde{E} . Dieser Ansatz erklärt sich aus den Tatsachen, dass erstens \mathcal{L} (\mathcal{L}^{-1}) proportional zu L (L^{-1}) sein sollte und dass zweitens in (3.18) der Term $(Le^{i\alpha})$ bzw. $(L^{-1}e^{i\alpha})$ verschwinden muss. Wie das passieren kann, wird in (3.12) erklärt. In dem Transformationsverhalten von E aus (3.11) erscheint gerade der zu $(L^{-1}e^{i\alpha})$ inverse Term. Wir berechnen direkt:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^{-1}\psi)' &= E'L^{-1}\psi' \\ &= e^{i\alpha}E(L^{-1}e^{-i\alpha})(L^{-1}e^{i\alpha})(L^{-1}\psi) \\ &= e^{i\alpha}E(L^{-1}\psi) \\ &= e^{i\alpha}(\mathcal{L}^{-1}\psi). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Der Ansatz führte uns also für \mathcal{L}^{-1} ans Ziel. Das Transformationsverhalten für \tilde{E} können wir aus (3.18) und (3.19) herleiten. Wir finden nach einer leichten Rechnung:

$$\tilde{E}' = e^{i\alpha}\tilde{E}(Le^{-i\alpha}). \quad (3.23)$$

Um den Zusammenhang zwischen dem Vielbein \tilde{E} und dem Vielbein E herzuleiten, schauen wir uns das Transformationsverhalten von E^{-1} an. Wir nehmen an, dass $(E^{-1})' = (E')^{-1}$, dann folgt

$$(E^{-1})' = (L^{-1}e^{i\alpha})E^{-1}e^{-i\alpha}. \quad (3.24)$$

Da sie das gleiche Transformationsverhalten besitzen, können wir \tilde{E} mit (LE^{-1}) identifizieren:

$$\tilde{E} = (LE^{-1}). \quad (3.25)$$

Insgesamt haben wir also:⁵

$$\mathcal{L} = LE^{-1}, \quad \mathcal{L}^{-1} = EL^{-1} \quad (3.26)$$

⁴Die Lagrangedichte aus Kapitel 2 haben wir auch mit \mathcal{L} bezeichnet, aber der unterschiedliche Kontext sollte Verwechslungen unmöglich machen.

⁵Wir hätten natürlich direkt \mathcal{L} schreiben können, wenn wir \mathcal{L}^{-1} haben. Aber das wäre nur das formale Inverse gewesen, dessen richtiges Transformationsverhalten wir in jedem Fall noch hätten prüfen müssen.

mit dem kovarianten Transformationsverhalten

$$\mathcal{L}' = e^{i\alpha} \mathcal{L} e^{-i\alpha}, \quad (\mathcal{L}^{-1})' = e^{i\alpha} \mathcal{L}^{-1} e^{-i\alpha}. \quad (3.27)$$

Jetzt können wir einen alternativen Ausdruck für die kovariante Ableitung aufstellen, indem wir in (3.17) jeden Operator durch seine kovariante Version ersetzen:

$$\mathcal{D}_x = \lambda^{-1} x^{-1} (\mathcal{L}^{-1} - \mathcal{L}). \quad (3.28)$$

x^{-1} transformiert nicht unter der Eichtransformation, weil es eine skalare Funktion aus \mathcal{A}_x ist (vgl. (3.41)). Gleichzeitig ist x^{-1} , und natürlich auch x , eine multiplikative Abbildung auf \mathcal{A}_x , deren Wirkung kovariant ist, weil x und x^{-1} mit α vertauschen. In höher dimensionalen nichtkommutativen Räumen ist eine solche multiplikative Wirkung nicht mehr kovariant, und es besteht die Notwendigkeit, kovariante Koordinaten einzuführen [34].

Aus (3.27) ist klar, dass der Operator aus (3.28) ein kovariantes Transformationsverhalten besitzt.

Wir wollten zeigen, dass der Zusammenhang ϕ durch das Vielbein E ausgedrückt werden kann. Dazu setzen wir für \mathcal{L} und \mathcal{L}^{-1} die Ausdrücke aus (3.26) ein und schreiben (3.28) so um, dass der gesamte Ausdruck mit (3.7) verglichen werden kann:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x &= \lambda^{-1} x^{-1} (EL^{-1} - LE^{-1}) \\ &= \lambda^{-1} x^{-1} (E(L^{-1} - L) + (E - (LE^{-1}))L) \\ &= E\nabla + \lambda^{-1} x^{-1} E (1 - E^{-1}(LE^{-1})) L. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Auch hier sehen wir, dass der Zusammenhang L wertig ist. Vergleichen wir das Resultat mit (3.7), finden wir für den Zusammenhang φ :

$$g\varphi = \lambda^{-1} x^{-1} (1 - E^{-1}(LE^{-1})). \quad (3.30)$$

Wir haben also gezeigt, dass der Zusammenhang φ als eine Funktion des Vielbeins E geschrieben werden kann. Da wir wissen, wie E^{-1} transformiert (3.24), können wir leicht überprüfen, ob dieser Ausdruck für φ das richtige Transformationsverhalten (3.16) besitzt:

$$\begin{aligned} g\varphi' &= \lambda^{-1} x^{-1} \left\{ 1 - (E^{-1})'(LE^{-1})' \right\} \\ &= \lambda^{-1} x^{-1} \left\{ 1 - (L^{-1}e^{i\alpha})E^{-1}e^{-i\alpha}(e^{i\alpha}(LE^{-1})(Le^{-i\alpha})) \right\} \\ &= (L^{-1}e^{i\alpha})\lambda^{-1} x^{-1} \left\{ (L^{-1}e^{-i\alpha})(Le^{i\alpha}) - E^{-1}(LE^{-1}) + 1 - 1 \right\} (Le^{-i\alpha}) \\ &= (L^{-1}e^{i\alpha})g\varphi(Le^{-i\alpha}) - \lambda^{-1} x^{-1} \left\{ (L^{-1}e^{i\alpha}) - (Le^{i\alpha}) \right\} (Le^{-i\alpha}) \\ &= (L^{-1}e^{i\alpha})g\varphi(Le^{-i\alpha}) - (\nabla e^{i\alpha})(Le^{-i\alpha}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dies entspricht genau dem in (3.16) hergeleiteten Transformationsverhalten von φ unter Eichtransformationen. Jetzt werden wir mit der neu gefundenen Form des Zusammenhangs und der kovarianten Ableitung zeigen, dass die kovariante Ableitung des

Vielbeins verschwindet: $\mathcal{D}_x E = 0$. Dazu beginnen wir mit einem Feld H , das wie E transformiert:

$$H' = e^{i\alpha} H (L^{-1} e^{-i\alpha}). \quad (3.32)$$

Wir untersuchen, wie \mathcal{L} und \mathcal{L}^{-1} auf H wirken. \mathcal{L} (\mathcal{L}^{-1}) ist die kovariante Wirkung von L (L^{-1}). Wie in der gewöhnlichen Eichtheorie sind kovariante Größen darstellungsabhängig. Wir kennen \mathcal{L} (\mathcal{L}^{-1}) bereits für die Wirkung auf Größen, die wie Vektoren transformieren: In (3.21) haben wir sie für die Wirkung auf ψ hergeleitet. Für die Wirkung auf H müssen wir wieder mit der Bedingung der Kovarianz⁶ beginnen:

$$(\mathcal{L}H)' = e^{i\alpha} (\mathcal{L}H) (L^{-1} e^{-i\alpha}). \quad (3.33)$$

Es ist klar, dass in \mathcal{L} die Wirkung von L enthalten sein soll, deswegen schauen wir uns zuerst an, wie LH transformiert:

$$(LH)' = LH' = (L e^{i\alpha}) (LH) e^{-i\alpha}. \quad (3.34)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem Transformationsverhalten von \tilde{E} (3.23) und E (3.11), dann findet man für $\mathcal{L}H$ folgenden Ausdruck, der wie (3.33) transformiert:

$$\mathcal{L}H = \tilde{E} (LH) E. \quad (3.35)$$

Eine analoge Überlegung liefert uns für die Wirkung von \mathcal{L}^{-1} auf H folgendes Resultat:

$$\mathcal{L}^{-1}H = E (L^{-1}H) (L^{-1}E^{-1}). \quad (3.36)$$

Insgesamt finden wir also

$$\mathcal{L}H = (L E^{-1}) (LH) E, \quad (3.37)$$

$$\mathcal{L}^{-1}H = E (L^{-1}H) (L^{-1}E^{-1}).$$

Setzen wir in diesen beiden Gleichungen für H das Vielbein E ein, deren Transformationsverhalten ja nach Definition identisch ist, dann sehen wir:

$$\mathcal{L}E = E, \quad \mathcal{L}^{-1}E = E. \quad (3.38)$$

Das bedeutet aber für die kovariante Ableitung in der Form von (3.28):

$$\mathcal{D}_x E = \lambda^{-1} x^{-1} (\mathcal{L}^{-1}E - \mathcal{L}E) = 0. \quad (3.39)$$

Wir haben also gezeigt, dass die kovariante Ableitung des Vielbeins verschwindet. In Eichtheorien auf kommutativen Räumen ist die kovariante Ableitung des Vielbeins die Torsion [12]. Wenn wir dieser Definition folgen, gilt also, dass unser Zusammenhang, der durch ein Vielbein ausgedrückt werden kann, torsionsfrei ist. Ob allerdings diese Definition für höherdimensionale Eichtheorien auf nichtkommutativen Räumen aufrechterhalten werden kann, ist nicht bekannt.

⁶Die Wirkung eines Operators ist kovariant, wenn sie das Transformationsverhalten einer Größe nicht ändert.

3.2 Leibnizregeln für Kovariante Ableitungen

In diesem Abschnitt wollen wir die Leibnizregeln für Kovariante Ableitungen herleiten. Wir müssen also untersuchen, wie \mathcal{L} , \mathcal{L}^{-1} und damit \mathcal{D}_x auf Produkte von verschiedenen Darstellungen der Eichgruppe wirken. Um diese verschiedenen Darstellungen zu unterscheiden, werden wir im Folgenden Indexschreibweise benutzen. $\alpha(x, t)$ ist jetzt also ein Element der darstellenden Matrizen der Eichgruppe. Die Eichtransformation eines Feldes ψ und des konjugierten Feldes $\bar{\psi}$ sehen dann so aus:

$$\psi'_\alpha = (e^{i\alpha})_\alpha^\beta \psi_\beta, \quad \bar{\psi}'^\alpha = \bar{\psi}^\beta (e^{-i\alpha})_\beta^\alpha. \quad (3.40)$$

Dies entspricht einer kovarianten und einer kontravarianten Darstellung, deren Produkt ein Skalar bildet, den wir noch untersuchen werden. Zuerst betrachten wir die Wirkung von \mathcal{L} auf das Produkt aus einem Feld ψ mit einem skalaren Feld⁷ f :

$$f' = f, \quad \mathcal{D}_x f = \nabla f, \quad \mathcal{L}f = Lf, \quad \mathcal{L}^{-1}f = L^{-1}f. \quad (3.41)$$

Für ein Produkt aus einem solchen skalaren Feld mit dem Feld ψ finden wir dann mit der Komultiplikationsregel für L :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}f\psi)_\alpha &= (LE^{-1})_\alpha^\beta (Lf\psi)_\beta = (Lf)(LE^{-1})_\alpha^\beta (L\psi)_\beta \\ &= \mathcal{L}f(\mathcal{L}\psi)_\alpha. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Als nächstes Beispiel betrachten wir das Produkt einer ko- und einer kontravarianten Darstellung, das ein Skalar ist:

$$\bar{\psi}'^\alpha \psi'_\alpha = \bar{\psi}^\alpha \psi_\alpha. \quad (3.43)$$

Für die Wirkung von \mathcal{L} auf diesen Skalar finden wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\bar{\psi}^\alpha \psi_\alpha) &= (L\bar{\psi}^\alpha \psi_\alpha) = (L\bar{\psi}^\alpha)(L\psi_\alpha) \\ &= (L\bar{\psi}^\gamma)(LE)_\gamma^\alpha (LE^{-1})_\alpha^\beta \psi_\beta \\ &= (\mathcal{L}\bar{\psi})^\alpha (\mathcal{L}\psi)_\alpha. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Hier haben wir die Wirkung von \mathcal{L} auf $\bar{\psi}$ benutzt:

$$(\mathcal{L}\bar{\psi})^\alpha = (L\bar{\psi}^\gamma)(LE)_\gamma^\alpha. \quad (3.45)$$

Dass diese Wirkung kovariant ist, läßt sich mit (3.11) und (3.40) leicht nachrechnen:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}\bar{\psi})'^\alpha &= (L\bar{\psi}^\delta)(Le^{-i\alpha})_\delta^\gamma (Le^{i\alpha})_\gamma^\beta (LE)_\beta^\sigma (e^{-i\alpha})_\sigma^\alpha \\ &= (L\bar{\psi}^\beta)(LE)_\beta^\sigma (e^{-i\alpha})_\sigma^\alpha \\ &= (\mathcal{L}\bar{\psi})^\beta (e^{-i\alpha})_\beta^\alpha. \end{aligned} \quad (3.46)$$

⁷Ein solches skalares Feld ist uns bereits als $f(x) = x^{-1}$ begegnet.

Bisher haben wir für \mathcal{L} in beiden Beispielen die gleiche Komultiplikationsregel gefunden wie für L (2.28). Angewendet auf ein Produkt zweier beliebiger Darstellungen finden wir das gleiche Resultat. Wir unterscheiden die zwei Darstellungen durch verschiedene Indizierung:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\psi\chi)_{\alpha a} &= (LE^{-1})_{\alpha}{}^{\beta}{}_{a}{}^b(L\psi_{\beta})(L\chi_b) \\ &= (LE^{-1})_{\alpha}{}^{\beta}{}_{(LE^{-1})_a}{}^b(L\psi)_{\beta}(L\chi)_b \\ &= (\mathcal{L}\psi)_{\alpha}(\mathcal{L}\chi)_b.\end{aligned}\tag{3.47}$$

Hier bezeichnet die Schreibweise $(LE^{-1})_{\alpha}{}^{\beta}{}_{a}{}^b$ die Wirkung von LE^{-1} auf dem Tensorraum der zwei Darstellungen.⁸

Damit haben wir also die Leibnizregel für die kovariante Version von L , die sich auch auf \mathcal{L}^{-1} verallgemeinern läßt:

$$\mathcal{L}^{-1}\psi_{\alpha}\chi_a = (\mathcal{L}^{-1}\psi)_{\alpha}(\mathcal{L}^{-1}\chi)_a.\tag{3.48}$$

Damit können wir die Leibnizregel für \mathcal{D}_x herleiten. Die gleichen Überlegungen, die in Abschnitt 2.1.1 mit dem Koprodukt von L und L^{-1} zu zwei Leibnizregeln für ∇ geführt haben (2.22), führen hier mit dem Koprodukt von \mathcal{L} und \mathcal{L}^{-1} zu zwei Leibnizregeln für \mathcal{D}_x :

$$\mathcal{D}_x(\psi\chi) = (\mathcal{D}_x\psi)(\mathcal{L}\chi) + (\mathcal{L}^{-1}\psi)(\mathcal{D}_x\chi)\tag{3.49}$$

und

$$\mathcal{D}_x(\psi\chi) = (\mathcal{D}_x\psi)(\mathcal{L}^{-1}\chi) + (\mathcal{L}\psi)(\mathcal{D}_x\chi).\tag{3.50}$$

3.3 Die Krümmung

Bisher haben wir die Zeitkoordinate ganz außer Acht gelassen. Für die Definition einer Krümmung in unserem zweidimensionalen Formalismus benötigen wir natürlich die kovarianten Ableitungen nach beiden Koordinaten. Daher führen wir zuerst die kovariante Zeitableitung ein.

Die Zeitkoordinate t ist in unserem Formalismus nicht deformiert und ein zentrales Element der erweiterten Algebra $\mathcal{A}_{x,t}$ ⁹. Zur Formulierung der kovarianten Zeitableitung \mathcal{D}_t werden wir den Argumenten der üblichen Eichtheorie [33] folgen. Die Eichtransformation aus (3.1) ist eine Transformation, die von x und t abhängt:

$$\psi'(x, t) = e^{i\alpha(x,t)}\psi(x, t).\tag{3.51}$$

Für die kovariante Zeitableitung machen wir dann folgenden Ansatz:

$$\mathcal{D}_t\psi = (\partial_t + \omega)\psi\tag{3.52}$$

⁸Vergleiche dazu auch die Ausführungen in [18].

⁹Siehe dazu Kapitel 2.4.

mit

$$\omega = \sum_l g\omega_l(x, t)T_l, \quad \omega_l(x, t) \in \mathcal{A}_{x,t}. \quad (3.53)$$

Das Transformationsverhalten von ω entspricht dem eines Eichfeldes einer Eichtheorie auf kommutativen Räumen. Für eine nichtabelsche Eichgruppe lautet es:

$$\omega' = e^{i\alpha}\omega e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}\partial_t e^{-i\alpha}. \quad (3.54)$$

Bevor wir den Kommutator der beiden kovarianten Ableitungen berechnen, wollen wir erst die algebraischen Relationen zwischen $\mathcal{L}, \mathcal{L}^{-1}$ und den kovarianten Ableitungen berechnen.

Wir berechnen diese Relationen als Vertauschungsrelationen zwischen Abbildungen auf $\mathcal{A}_{x,t}$. Mit Hilfe der im vorigen Abschnitt hergeleiteten Leibnizregeln können wir allerdings das Feld ψ , auf das die Relationen wirken, fallen lassen und erhalten somit rein algebraische Beziehungen. Für die kovariante Ableitung \mathcal{D}_x folgen aus der Form (3.28) sofort die Relationen

$$\mathcal{L}\mathcal{D}_x = q\mathcal{D}_x\mathcal{L}, \quad \mathcal{L}^{-1}\mathcal{D}_x = q^{-1}\mathcal{D}_x\mathcal{L}^{-1}. \quad (3.55)$$

Die Vertauschungsrelation von \mathcal{L} mit \mathcal{D}_t erfordert eine kleine Rechnung. Wir berechnen die Wirkung des Kommutators auf ψ :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}\mathcal{D}_t - \mathcal{D}_t\mathcal{L})\psi &= (LE^{-1})(\partial_t L\psi) + (LE^{-1})(L\omega)(L\psi) \\ &\quad - (\partial_t(LE^{-1}))(L\psi) - (LE^{-1})(\partial_t L\psi) - \omega(LE^{-1})(L\psi) \\ &= \left((LE^{-1})(L\partial_t E)(LE^{-1}) - \omega(LE^{-1}) + (LE^{-1})(L\omega) \right) (L\psi) \\ &= (LE^{-1})L \left((\partial_t E)E^{-1} - E(L^{-1}\omega)E^{-1} + \omega \right) \psi \\ &= \mathcal{L}T\psi \end{aligned} \quad (3.56)$$

mit der Definition

$$T \equiv (\partial_t E)E^{-1} - E(L^{-1}\omega)E^{-1} + \omega. \quad (3.57)$$

Der Grund für diese Definition ist die Tatsache, dass T unter Eichtransformationen wie ein Tensor transformiert:

$$T' = e^{i\alpha}T e^{-i\alpha}. \quad (3.58)$$

Das folgt direkt aus dem Transformationsverhalten von \mathcal{D}_t und \mathcal{L} , trotzdem werden wir es für die rechte Seite von (3.57) im Anhang C noch einmal nachrechnen, indem wir die Transformationsverhalten von E, E^{-1} und ω einsetzen.

Die Vertauschungsrelation zwischen \mathcal{D}_t und \mathcal{L}^{-1} wird genauso berechnet wie die zwischen \mathcal{D}_t und \mathcal{L} , die wir in (3.56) hergeleitet haben. Wir finden:

$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{D}_t - \mathcal{D}_t\mathcal{L}^{-1} = -T\mathcal{L}^{-1}. \quad (3.59)$$

Der Tensor T spielt auch in der Vertauschungsrelation von \mathcal{D}_t mit \mathcal{D}_x eine Rolle. Wir berechnen die Relation wieder mit der Wirkung des Kommutators auf ein Feld ψ :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_t\mathcal{D}_x - \mathcal{D}_x\mathcal{D}_t)\psi &= \left((\partial_t + \omega)E(\nabla + \phi) - E(\nabla + \phi)(\partial_t + \omega) \right)\psi \\
&= \partial_t(E\nabla\psi) + \partial_t(E\phi\psi) + \omega\mathcal{D}_x\psi - E(\nabla\partial_t\psi) \\
&\quad - E(\nabla\omega\psi) - E\phi(\partial_t\psi) - E\phi\omega\psi \\
&= \left((\partial_t E)E^{-1} - E(L^{-1}\omega)E^{-1} + \omega \right)\mathcal{D}_x\psi \\
&\quad + \left(E(\partial_t\phi) - E(\nabla\omega)L - E\phi\omega + E(L^{-1}\omega)\phi \right)\psi \\
&= T\mathcal{D}_x\psi + \mathcal{F}\mathcal{L}\psi.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Hier haben wir die folgenden Definitionen eingeführt:

$$\mathcal{F} \equiv EF(LE). \tag{3.61}$$

Wir erinnern uns daran, dass $\phi = g\varphi L$ ist, dann folgt für F :

$$F \equiv g\partial_t\varphi - (\nabla\omega) + (L^{-1}\omega)g\varphi - g\varphi(L\omega). \tag{3.62}$$

Der Grund für die Definition von \mathcal{F} ist wieder die Tatsache, dass es sich um einen Tensor handelt:

$$\mathcal{F}' = e^{i\alpha}\mathcal{F}e^{-i\alpha}. \tag{3.63}$$

Auch hier folgt das tensorielle Transformationsverhalten direkt aus dem entsprechenden Verhalten der anderen Größen aus (3.60). Im Anhang C werden wir diese Behauptung für die rechte Seite von (3.62) durch Einsetzen nachrechnen. Insgesamt haben wir also die folgenden algebraischen Beziehungen zwischen den verschiedenen kovarianten Größen hergeleitet:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\mathcal{D}_x &= q\mathcal{D}_x\mathcal{L}, & \mathcal{L}^{-1}\mathcal{D}_x &= q^{-1}\mathcal{D}_x\mathcal{L}^{-1} \\
\mathcal{L}\mathcal{D}_t - \mathcal{D}_t\mathcal{L} &= \mathcal{L}T \\
\mathcal{L}^{-1}\mathcal{D}_t - \mathcal{D}_t\mathcal{L}^{-1} &= -T\mathcal{L}^{-1} \\
\mathcal{D}_t\mathcal{D}_x - \mathcal{D}_x\mathcal{D}_t &= T\mathcal{D}_x + \mathcal{F}\mathcal{L}.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Im nächsten Abschnitt werden wir die verschiedenen kovarianten Größen durch die Phasenraumvariablen der Quantenmechanik ausdrücken. In der Einbettung werden wir erkennen, dass der Tensor T aus (3.57) der Krümmungstensor unserer Eichtheorie ist. Der Tensor \mathcal{F} , dessen Form in (3.62) eine gewisse Ähnlichkeit mit einem klassischen Feldstärketensor hat, kann durch T ausgedrückt werden [18]:

$$\mathcal{F}\mathcal{L} = \lambda^{-1}x^{-1}(\mathcal{L}T + T\mathcal{L}^{-1}). \tag{3.65}$$

3.4 Eichtheorie in der Einbettung

Mit der gleichen Einbettung, die wir im ersten Kapitel eingeführt und im Abschnitt 2.3.2 verwendet haben, können wir die verschiedenen kovarianten Größen als Funktionen der quantenmechanischen Phasenraumvariablen schreiben und somit eine Eichtheorie auf dem Faktorraum \mathcal{F}_q definieren. In [18] wurde das hauptsächlich für abelsche

Eichtheorien durchgeführt. Wir werden in diesem Abschnitt den allgemeineren Fall nichtabelscher Eichtheorien betrachten. Im Folgenden werden wir die Phasenraumvariablen der Quantenmechanik mit einem Hut versehen: \hat{x}, \hat{p} .

Wir beginnen mit einer Eichtransformation auf Wellenfunktionen $\psi(\hat{x}, t) \in L^2$, dem Hilbertraum der Quantenmechanik:

$$\begin{aligned}\psi'(\hat{x}, t) &= e^{i\alpha(\hat{x}, t)}\psi(\hat{x}, t), \\ \alpha(\hat{x}, t) &= g \sum_l \alpha_l(\hat{x}, t)T_l.\end{aligned}\tag{3.66}$$

Die T_l sind die Generatoren einer kompakten Lie-Algebra:

$$[T_i, T_j] = iC_{ij}^l T_l.\tag{3.67}$$

Eine solche Eichtransformation definiert auch eine Eichtransformation auf dem Faktorraum \mathcal{F}_q , also auf die Felder $\psi(x, t) \in \mathcal{A}_{x,t}$, die mittels der Darstellung (1.8) nur auf einem q -Gitter $\pm q^n \in \mathbb{R}$ definiert sind.

Wir kennen bereits die Größen x, Λ, p in der Einbettung. Jetzt konstruieren wir kovariante Versionen dieser Operatoren, die auf \mathcal{F}_q wirken und für $g = 0$ wieder in die bekannte Form übergehen.

Der Operator x ist kovariant und wirkt als multiplikativer Operator auf \mathcal{F}_q . Eine kovariante Version von Λ bekommen wir, wenn wir in (1.19) den kanonischen Impuls \hat{p} durch den kovarianten Impuls ersetzen:

$$\hat{p} \rightarrow \hat{p} - gA_1^l(\hat{x}, t)T_l.\tag{3.68}$$

Das Eichfeld $A_1^l T_l$ ¹⁰ transformiert, wie wir es aus der gewöhnlichen Eichtheorie [33] kennen:

$$A_1^l T_l = e^{i\alpha} A_1^l T_l e^{-i\alpha} - \frac{i}{g} e^{i\alpha} (\partial_t e^{-i\alpha}).\tag{3.69}$$

Für die kovariante Version von Λ finden wir also den Ausdruck:

$$\tilde{\Lambda} = q^{-i\hat{x}(\hat{p} - gA_1^l T_l) - \frac{1}{2}}.\tag{3.70}$$

Da der kovariante Impuls wie ein Tensor transformiert, gilt das auch für jede Potenz des kovarianten Impulses und daher auch für $\tilde{\Lambda}$:

$$\tilde{\Lambda}' = e^{i\alpha(\hat{x}, t)} \tilde{\Lambda} e^{-i\alpha(\hat{x}, t)}.\tag{3.71}$$

Damit ist klar, dass die Wirkung von $\tilde{\Lambda}$ kovariant ist:

$$\tilde{\Lambda}' \psi'(\hat{x}, t) = e^{i\alpha(\hat{x}, t)} \tilde{\Lambda} \psi(\hat{x}, t).\tag{3.72}$$

¹⁰Die Eichfelder haben zwei Komponenten: $A = (A_0, A_1)$, daher der Index 1. A_0 ist das Eichfeld der Zeitkomponente.

Aber wir wollen eine Eichtheorie auf dem Faktorraum, also muss $\tilde{\Lambda}$ auf \mathcal{F}_q wirken. Dazu muss es die Ideale $F_{\pm q^n}$ invariant lassen. Wir benutzen die Identität aus (3.26): $\mathcal{L} = LE^{-1}$ bzw. $\tilde{\Lambda} = \Lambda E^{-1}$, um E in der Einbettung auszudrücken.¹¹ Wir finden für E und E^{-1} in der Einbettung:

$$\begin{aligned} E^{-1} &= q^{i\hat{x}\hat{p}} q^{-i\hat{x}(\hat{p}-gA_1^l T_l)} \\ E &= q^{i\hat{x}(\hat{p}-gA_1^l T_l)} q^{-i\hat{x}\hat{p}}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Wir wissen bereits aus Kapitel 2.3.2, dass Λ auf dem Faktorraum wirkt. Wenn wir also zeigen können, dass das auch für E und E^{-1} gilt, dann folgt, dass auch $\tilde{\Lambda}$ auf \mathcal{F}_q wirkt.

Mit Hilfe der Baker-Campbell-Hausdorff Formel können wir zeigen, dass E ein Funktional von dem Eichfeld $A_1^l(\hat{x}, t)T_l$ und seiner Ortsableitungen ist. Im abelschen Fall [18] konnte dieses Funktional explizit angegeben werden. Das ist hier nicht möglich. Wir zeigen, dass die Ableitung $\hat{p} = -\partial_{\hat{x}}$ durch die Kommutatoren nur auf das Eichfeld $A_1^l(\hat{x}, t)T_l$, das wir in der Rechnung mit A abkürzen werden, wirkt, dass also E keine Wirkung von \hat{p} nach rechts mehr besitzt und somit die Ideale invariant läßt und auf \mathcal{F}_q wirkt.

Wir entnehmen aus [35] die Baker-Campbell-Hausdorff Formel und berechnen E bis zum vierten Term aus dieser Formel, um zu sehen, welche Terme auftreten. Es gilt:

$$e^X e^Y = e^{C(X,Y)}, \quad C(X,Y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(X,Y). \quad (3.74)$$

Mit den Definitionen $X = hx(\partial_x - igA)$ und $Y = -hx\partial_x$ finden wir für die c_n mit [35]:

$$\begin{aligned} c_1 &= X + Y = -ihgx A \\ c_2 &= \frac{1}{2}[X, Y] = -\frac{h^2}{2}x\partial_x(igxA) = -\frac{h^2}{2}ig(xA + x^2 A') \\ c_3 &= \frac{1}{6}[X - Y, \frac{1}{2}[X, Y]] = \frac{h^3}{12}[x(2\partial_x - igA), -ig(xA + x^2 A')] \\ &= \frac{h^3}{12} \left(-2(x\partial_x)^2(igxA) - ig^2 x^2 A^i A^j C_{ij}^l T_l - ig^2 x^3 A^i A^j C_{ij}^l T_l \right) \\ c_4 &= \frac{1}{48} \left(-[Y, [X, [X, Y]]] - [X, [Y, [X, Y]]] \right) \\ &= \frac{h^2}{24} \left(2[x\partial_x, [x\partial_x, c_2]] - [x\partial_x, [igxA, c_2]] - [igxA, [x\partial_x, c_2]] \right) \\ &= \frac{h^4}{48} \left(2(x\partial_x)^3(-igxA) - ig^2 3x^3 A^i A^j C_{ij}^l T_l \right. \\ &\quad \left. - ig^2 6x^3 A^i A^j C_{ij}^l T_l - ig^2 x^4 (A^i A'^j + A^i A''^j) C_{ij}^l T_l \right). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Wir sehen also, dass in dem Exponenten des Vielbeins E eine Reihe in h erscheint, die von dem Eichfeld A und seinen Ortsableitungen $A^{(n)}$ abhängt. Alle Terme sind linear

¹¹Die Einbettung gilt für die Algebra Elemente x, Λ, p und nicht für die Abbildungen x, L, ∇ , aber in der Einbettung gilt wieder der Zusammenhang (2.26).

in T_l . In allen weiteren Ausdrücken aus der BCH Formel ändert sich das nicht, da es sich immer um Kommutatoren handelt. Damit ist E wie schon im abelschen Fall ein Funktional von A und seinen Ableitungen und wirkt somit auf dem Faktorraum \mathcal{F}_q .

In der Form von (3.73) können wir das Transformationsverhalten von E mit (3.69) leicht überprüfen:

$$\begin{aligned} E'(\hat{x}, t) &= q^{i\hat{x}(\hat{p}-gA^l(\hat{x},t)T_l)} q^{-i\hat{x}\hat{p}} \\ &= e^{i\alpha(\hat{x},t)} q^{i\hat{x}(\hat{p}-gA^l(\hat{x},t)T_l)} e^{-i\alpha(\hat{x},t)} q^{-i\hat{x}\hat{p}} \\ &= e^{i\alpha(\hat{x},t)} E(\hat{x}, t) e^{-i\alpha(q\hat{x},t)}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Das entspricht dem in (3.11) angegebenen Transformationsverhalten.

Mit der Definition eines kovarianten Λ in der Einbettung ist auch klar, wie man eine kovariante Version von p bekommt, die auf dem Faktorraum wirkt: Wir nehmen p in der Form von (1.6) und ersetzen Λ durch $\tilde{\Lambda}$. Wir bezeichnen das kovariante p mit \tilde{p} :

$$\tilde{p} = i\lambda^{-1}x^{-1}(q^{\frac{1}{2}}\tilde{\Lambda} - q^{-\frac{1}{2}}\tilde{\Lambda}^{-1}). \quad (3.77)$$

Dieser Ausdruck ist kovariant unter Eichtransformationen und wirkt auf \mathcal{F}_q . Damit haben wir die kovarianten Größen $\tilde{\Lambda}$, \tilde{p} und \mathcal{D}_t , die auf dem Faktorraum wirken und die für $g \rightarrow 0$ in Λ , p und ∂_t übergehen.

Wenn wir das Eichfeld als zweikomponentige Größe auffassen: $A = (A_0, A_1)$, können wir den Tensor T aus (3.57) durch diese beiden Komponenten ausdrücken. Wir setzen: $\omega = -igA_0$, damit lautet der Tensor T :

$$T = -E(\partial_t E^{-1}) - igA_0 + igE(L^{-1}A_0)E^{-1}. \quad (3.78)$$

Jetzt werden wir T in der Einbettung berechnen. Wir berechnen die Terme getrennt. Für den ersten Term erhalten wir:

$$\begin{aligned} E(\partial_t E^{-1}) &= q^{i\hat{x}(\hat{p}-gA_1)} \partial_t q^{-i\hat{x}(\hat{p}-gA_1)} \\ &= h[-ig\hat{x}A_1, \partial_t] + \frac{h^2}{2}[i\hat{x}(\hat{p}-gA_1), [-ig\hat{x}A_1, \partial_t]] \\ &\quad + \frac{h^3}{3}[i\hat{x}(\hat{p}-gA_1), [i\hat{x}(\hat{p}-gA_1), [-ig\hat{x}A_1, \partial_t]]] + \frac{h^4}{4}[\dots] \\ &= ihg\hat{x}\dot{A}_1 + \frac{h^2}{2}\left(\hat{x}\partial_{\hat{x}}(ig\hat{x}\dot{A}_1) + ig^2\hat{x}^2 A_1^i \dot{A}_1^j C_{ij}^l T_l\right) \\ &\quad + \frac{h^3}{3}\left((\hat{x}\partial_{\hat{x}})^2(ig\hat{x}\dot{A}_1) + i\hat{x}\partial_{\hat{x}}(g^2x^2 A_1^i \dot{A}_1^j) C_{ij}^l T_l + ig^2\hat{x}^2 A_1^i \partial_{\hat{x}}(\hat{x}\dot{A}_1^j) C_{ij}^l T_l\right. \\ &\quad \left.+ ig^3\hat{x}^3 A_1^l A_1^i \dot{A}_1^j C_{ij}^k C_{kl}^m T_m\right) + \frac{h^4}{4}[\dots] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} (\hat{x}\partial_{\hat{x}} - ig\hat{x}A_1^i T_i)^{n-1} (ig\hat{x}\dot{A}_1^l T_l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q^{\hat{x}\partial_{\hat{x}} - ig\hat{x}A_1^i T_i} - 1}{(\hat{x}\partial_{\hat{x}} - ig\hat{x}A_1^i T_i)} (ig\hat{x}\partial_t A_1^l T_l) \\
&= \frac{q^{-\frac{1}{2}\tilde{\Lambda}^{-1}} - 1}{(\hat{x}\partial_x - ig\hat{x}A_1^i T_i)} (ig\hat{x}\partial_t A_1^l T_l). \tag{3.79}
\end{aligned}$$

Die Wirkung der Lie-Algebra auf sich selbst geschieht wie üblich mit der adjungierten Wirkung: $T_i(T_l) = ad_{T_i}(T_l) = [T_i, T_l] = iC_{ij}^l T_j$. Für den letzten Term finden wir:¹²

$$\begin{aligned}
E(L^{-1}A_0)E^{-1} &= q^{i\hat{x}(\hat{p}-gA_1)} q^{-i\hat{x}\hat{p}} (\Lambda^{-1}A_0\Lambda) q^{i\hat{x}\hat{p}} q^{-i\hat{x}(\hat{p}-gA_1)} \\
&= q^{i\hat{x}(\hat{p}-gA_1)} A_0 q^{-i\hat{x}(\hat{p}-gA_1)} \\
&= A_0 + h[i\hat{x}(\hat{p} - gA_1), A_0] + \frac{h^2}{2} [i\hat{x}(\hat{p} - gA_1), [i\hat{x}(\hat{p} - gA_1), A_0]] \\
&\quad + \frac{h^3}{3!} [\dots] \\
&= A_0 + h(\hat{x}(\partial_{\hat{x}} A_0^l T_l) - ig\hat{x}A_1^i A_0^j C_{ij}^l T_l) + \frac{h^2}{2} \left((\hat{x}\partial_{\hat{x}})^2 A_0^l T_l \right. \\
&\quad \left. - ig\hat{x}(\partial_{\hat{x}} \hat{x} A_1^i A_0^j) C_{ij}^l T_l - ig\hat{x}^2 A_1^i (\partial_{\hat{x}} A_0^j) C_{ij}^l T_l \right. \\
&\quad \left. - (g\hat{x})^2 A_1^k A_1^i A_0^j C_{ij}^l C_{kl}^m T_m \right) + \frac{h^3}{3!} [\dots] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} (\hat{x}\partial_{\hat{x}} - ig\hat{x}A_1^i T_i)^n A_0^l T_l \\
&= q^{-\frac{1}{2}\tilde{\Lambda}^{-1}} A_0^l T_l. \tag{3.80}
\end{aligned}$$

In der ersten Zeile haben wir die Zuordnung $L^{-1}A_0 \sim \Lambda^{-1}A_0\Lambda$ verwendet, vgl. (2.58) und den Kommentar nach (2.79). Den Ausdruck in (3.80) fassen wir mit dem noch verbleibenden in (3.78) zusammen: $(q^{-\frac{1}{2}\tilde{\Lambda}^{-1}} - 1)igA_0^l T_l$, bringen ihn mit (3.79) auf einen gemeinsamen Nenner und addieren die beiden Terme. Insgesamt finden wir für T :

$$\begin{aligned}
T &= \frac{q^{-\frac{1}{2}\tilde{\Lambda}^{-1}} - 1}{(\hat{x}\partial_{\hat{x}} - ig\hat{x}A_1^l T_l)} \left(- (ig\hat{x}\partial_t A_1^l T_l) + (\hat{x}\partial_{\hat{x}} - ig\hat{x}A_1^i T_i)(igA_0^l T_l) \right) \\
&= \frac{q^{-\frac{1}{2}\tilde{\Lambda}^{-1}} - 1}{(\hat{x}\partial_{\hat{x}} - ig\hat{x}A_1^l T_l)} \hat{x} \left(ig(\partial_{\hat{x}} A_0^l - \partial_t A_1^l) T_l - g^2 A_0^l A_1^i [T_l, T_i] \right). \tag{3.81}
\end{aligned}$$

Damit ist der Tensor T eine Funktion des üblichen Krümmungstensors [33]

$$G_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} - [A_{\nu}, A_{\mu}] \tag{3.82}$$

und seiner kovarianten Ableitung nach \hat{x} . Die Größe in (3.81) ist die Komponente T_{10} des Antisymmetrischen Tensors T_{ij} , dessen Indizes über 0, 1 laufen.

¹²Hier verwenden wir die Zuordnung: $L^{-1}A_0 \sim \Lambda^{-1}A_0\Lambda$, vgl. (2.58) und die Bemerkung zu (2.79).

Kapitel 4

Das freie q -Teilchen

In diesem Kapitel betrachten wir das einfachste Beispiel einer q -deformierten Dynamik. Analog zur Quantenmechanik betrachten wir den Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2} p^2, \quad (4.1)$$

und bezeichnen das System als ein freies q -Teilchen. Uns interessiert hier vor allem das Verhalten eines solchen Teilchens, wenn es in den Ortsraum der Quantenmechanik eingebettet wird. In dem Kapitel 2.3.2 haben wir einen Algebramorphismus eingeführt zwischen der q -Heisenberg-Algebra und Operatoren im Quantenmechanischen Phasenraum, also Größen, die nur von \hat{x} und \hat{p} abhängen. In (1.24) haben wir für p folgenden Ausdruck angegeben:

$$p = \frac{[\hat{z} - \frac{1}{2}]}{\hat{z} - \frac{1}{2}} \hat{p} \quad (4.2)$$

mit der Definition

$$\hat{z} = -\frac{i}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}). \quad (4.3)$$

Für den Hamiltonoperator des freien q -Teilchens finden wir damit

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2} p^2 &= \frac{1}{2} \hat{p} \frac{[\hat{z} + \frac{1}{2}]}{\hat{z} + \frac{1}{2}} \frac{[\hat{z} - \frac{1}{2}]}{\hat{z} - \frac{1}{2}} \hat{p} \\ &= \frac{1}{2\lambda^2} \hat{p} \frac{q^{2\hat{z}} - q - q^{-1} + q^{-2\hat{z}}}{\hat{z}^2 - \frac{1}{4}} \hat{p} \\ &= \frac{2}{\lambda^2} \hat{p} \frac{q + q^{-1} - 2 \cos(h(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}))}{(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})^2 + 1} \hat{p}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Wenn man diesen Operator nach $q = e^h$ entwickelt, erhält man in Nullter Ordnung den Hamiltonoperator des undeformierten Teilchens und Korrekturen in höheren Ordnungen in h . Es liegt also die Interpretation nahe, dass das freie q -Teilchen ein freies Teilchen mit einer komplizierten Selbstwechselwirkung ist. Diese Wechselwirkung betrachten wir im Abschnitt 4.3.

Unser Hamiltonoperator enthält unendlich viele Ableitungen und ist daher nichtlokal. Der Grund, warum wir diesen Operator betrachten, liegt darin, dass wir trotz seiner Komplexität die Eigenfunktionen kennen. Der Formalismus der q -Heisenberg-Algebra und ihrer Darstellungen erlaubt uns, die Eigenfunktionen dieses quantenmechanischen Operators anzugeben, die ohne diesen Formalismus wohl kaum explizit konstruiert werden könnten.

4.1 Die Eigenfunktionen

Uns interessieren hier die Eigenfunktionen in der Ortsdarstellung der Quantenmechanik. In [19] wurde die Darstellung der x -Eigenzustände $|n, \sigma\rangle^s$ in der \hat{x} -Basis angegeben:

$$|n, \sigma\rangle^s = \int d\hat{x} q^{\frac{n}{2}} \delta(\hat{x} - s\sigma q^n) |\hat{x}\rangle. \quad (4.5)$$

Im ersten Kapitel haben wir den Basiswechsel der p -Eigenzustände $|\nu, \tau\rangle$ in diese Basis angegeben (1.12). Wenden wir darauf noch den Basiswechsel aus (4.5) an, dann erhalten wir die Eigenzustände von p im Ortsraum der Quantenmechanik. Für die geraden Zustände erhalten wir

$$\begin{aligned} |2\nu, \tau\rangle^s &= \frac{N_q}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ \sigma=\pm}} q^{\nu+n} \cos_q(q^{2(\nu+n)}) \int d\hat{x} q^n \delta(\hat{x} - s\sigma q^{2n}) |\hat{x}\rangle \\ &\quad + i\sigma\tau q^{\nu+n} \sin_q(q^{2(\nu+n)}) \int d\hat{x} q^{n+\frac{1}{2}} \delta(\hat{x} - s\sigma q^{2n+1}) |\hat{x}\rangle \\ &= \frac{N_q}{2} s^{-1} \sum_{\substack{n=-\infty \\ \sigma=\pm}} \int d\hat{x} \left(\sigma q^\nu \hat{x} \cos_q(q^{2(\nu+n)}) \delta(\hat{x} - s\sigma q^{2n}) \right. \\ &\quad \left. + i\tau q^{\nu-\frac{1}{2}} \hat{x} \sin_q(q^{2(\nu+n)}) \delta(\hat{x} - s\sigma q^{2n+1}) \right) |\hat{x}\rangle. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Jetzt gehen wir zur Ortsdarstellung über und nennen: $\langle \hat{x} | 2\nu, \tau \rangle^s = \Psi_{2\nu, \tau}^{(s)}(\hat{x})$ die Eigenfunktion von p im Ortsraum. Sie lautet:¹

$$\begin{aligned} \Psi_{2\nu, \tau}^{(s)}(\hat{x}) &= \frac{N_q}{2s} \sum_{\substack{n=-\infty \\ \sigma=+, -}} \hat{x} q^\nu \left\{ \sigma \cos_q(q^{2\nu} \frac{\sigma}{s} \hat{x}) \delta(\hat{x} - s\sigma q^{2n}) \right. \\ &\quad \left. + i\tau q^{-\frac{1}{2}} \sin_q(q^{2\nu} \frac{\sigma}{s} q^{-1} \hat{x}) \delta(\hat{x} - s\sigma q^{2n+1}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Für die ungeraden Zustände $|2\nu + 1, \tau\rangle^s$ erhalten wir durch eine analoge Rechnung weitere Eigenfunktionen zu p :

$$\Psi_{2\nu+1, \tau}^{(s)}(\hat{x}) = \frac{N_q}{2s} \sum_{\substack{n=-\infty \\ \sigma=\pm}} \hat{x} q^\nu \left\{ q^{\frac{1}{2}} \sigma \cos_q(q^{2\nu} \frac{\sigma}{s} q\hat{x}) \delta(\hat{x} - \sigma s q^{2n-1}) \right.$$

¹In [19] wurde aus den zwei Funktionen $\tau = \pm$ eine Linearkombination erstellt. Die resultierende Funktion war somit keine Eigenfunktion zu p mehr, aber zu $H = \frac{1}{2}p^2$.

$$\left. -i\tau \sin_q(q^{2\nu} \frac{\sigma}{s} \hat{x}) \delta(\hat{x} - \sigma s q^{2n}) \right\}. \quad (4.8)$$

Man beachte, dass als Argumente in den q -trigonometrischen Funktionen nur gerade Potenzen von q erscheinen, was ein vernünftiges Verhalten dieser Funktionen garantiert.

Diese Funktionen sind Eigenfunktionen zu unserem Hamiltonoperator des freien q -Teilchens $H = \frac{1}{2} p^2$ mit ν als Energiequantenzahl:

$$\begin{aligned} H\Psi_{2\nu,\tau}^{(s)}(\hat{x}) &= \frac{q^{4\nu}}{2s^2\lambda^2q} \Psi_{2\nu,\tau}^{(s)}(\hat{x}) \\ H\Psi_{2\nu+1,\tau}^{(s)}(\hat{x}) &= \frac{q^{4\nu+2}}{2s^2\lambda^2q} \Psi_{2\nu+1,\tau}^{(s)}(\hat{x}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Die Energie ist immer positiv, aber wir erinnern daran, dass die Energiequantenzahl $\nu \in \mathbb{Z}$ negativ werden kann. Die unendliche Summe von Deltafunktionen bewirkt, dass die Eigenfunktionen im Ortsraum der Quantenmechanik leben aber nur auf einem q -Gitter von Null verschiedene Werte annehmen. Die Dynamik des Hamiltonoperators aus (4.5) führt nicht vom q -Gitter weg.

Die Funktionen aus (4.7) und (4.8) sind keine Elemente des Hilbertraumes L^2 , sie sind auf eine Deltafunktion im s -Raum normiert. Die in ihnen enthaltenen Deltafunktionen trennen das gerade und das ungerade Gitter voneinander, da $1 \leq s < q$. Es treten keine gemischten Terme im Produkt auf. Die Produkte von Deltafunktionen unter dem Integral formen wir folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} \int d\hat{x} \delta(\hat{x} - \sigma s q^{2n}) \delta(\hat{x} - \sigma' s' q^{2m}) &= \int d\hat{x} \delta(\hat{x} - \sigma s q^{2n}) \delta(\sigma s q^{2n} - \sigma' s' q^{2m}) \\ &= \int d\hat{x} \delta(\hat{x} - \sigma s q^{2n}) \frac{1}{|\sigma q^{2n}|} \delta(s - s') \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{nm}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgende Orthonormalitätsrelation für die Eigenfunktionen:

$$\begin{aligned} \int d\hat{x} \Psi_{2\mu,\tau'}^{(s')*}(\hat{x}) \Psi_{2\nu,\tau}^{(s)}(\hat{x}) &= \int d\hat{x} \frac{N_q^2}{4s^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ \sigma=\pm}}^{\infty} \hat{x}^2 q^{\nu+\mu-2n} \left(\cos_q(q^{2(\mu+n)}) \times \right. \\ &\quad \left. \cos_q(q^{2(\nu+n)}) \delta(\hat{x} - \sigma s q^{2n}) + \tau\tau' q^{-2} \sin_q(q^{2(\mu+n)}) \times \right. \\ &\quad \left. \sin_q(q^{2(\nu+n)}) \delta(\hat{x} - \sigma s q^{2n+1}) \right) \delta(s - s') \\ &= \frac{N_q^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\mu+\nu+2n} \left(\cos_q(q^{2(\mu+n)}) \cos_q(q^{2(\nu+n)}) \right. \\ &\quad \left. + \tau\tau' \sin_q(q^{2(\mu+n)}) \sin_q(q^{2(\nu+n)}) \right) \delta(s - s') \\ &= \frac{N_q^2}{2} q^{\mu+\nu} \left(\frac{q^{-2\nu}}{N_q^2} \delta_{\mu\nu} + \tau\tau' \frac{q^{-2\nu}}{N_q^2} \delta_{\mu\nu} \right) \delta(s - s') \\ &= \delta_{\mu\nu} \delta_{\tau\tau'} \delta(s - s'). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Für die ungeraden Eigenfunktionen gelten analoge Relationen. In der vorletzten Zeile haben wir die Orthogonalitätsrelationen für \cos_q und \sin_q aus (A.20) und (A.21) verwendet. Wir wollen die Eigenfunktionen graphisch darstellen. In der Form von (4.8) mit der unendlichen Summe von Deltafunktionen ist das natürlich nicht möglich. Wir stellen sie in der Form dar, in der sie unter einem Integral erscheinen. Dort heben sich die Deltafunktionen mit dem Integral auf, und es bleibt eine Summe über die Gitterpunkte. Die Summanden sind die Funktionswerte, die wir graphisch darstellen. Auf diese Art gehen die Funktionen bzw. ihr Absolutquadrat auch in die Berechnung des Reflexionskoeffizienten im nächsten Kapitel ein, der in Bornscher Näherung mit einem Integral berechnet wird.

In den Abbildungen erscheinen also Ausdrücke der folgenden Form ($\sigma = s = 1$):

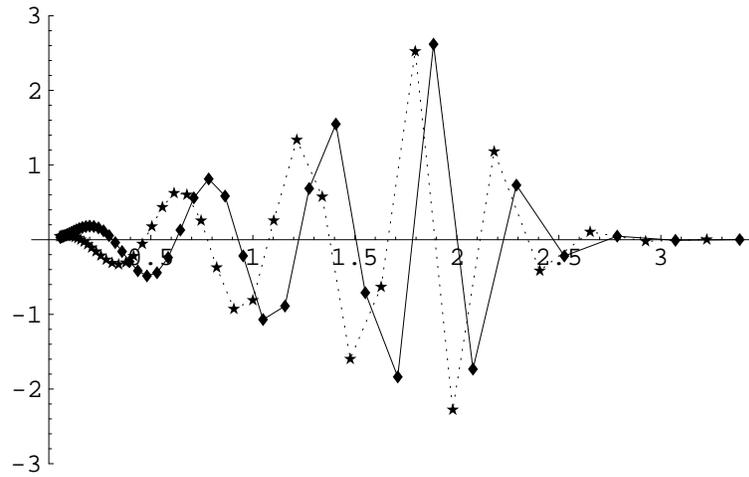
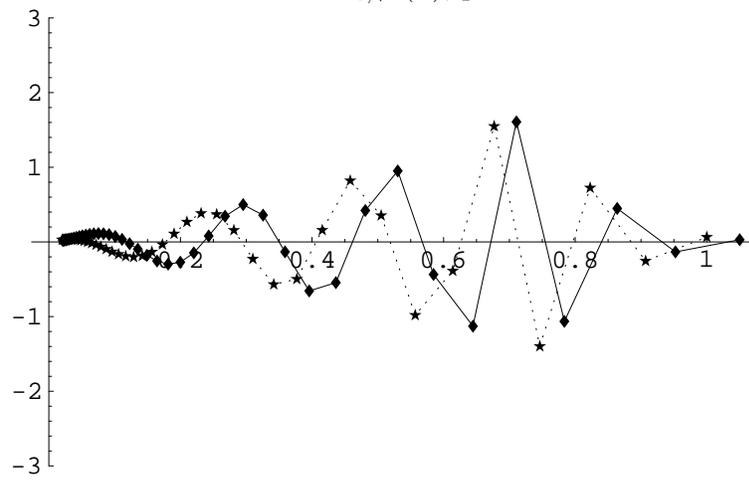
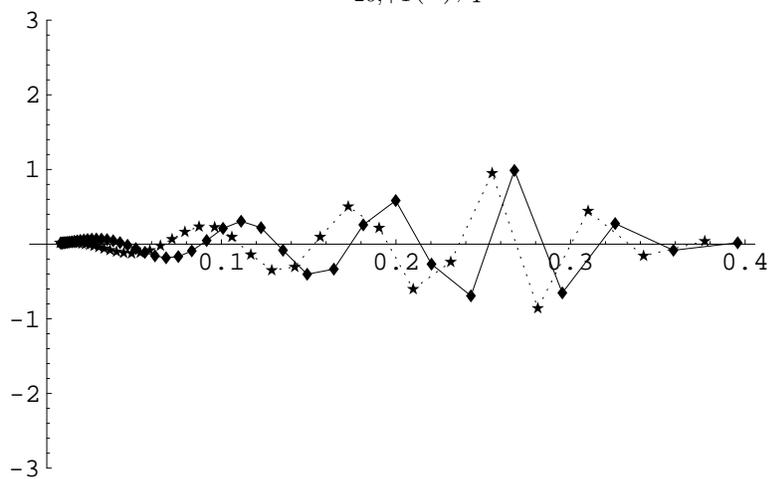
$$\Psi_{2\nu,\tau}(\hat{x}) = \begin{cases} \frac{N_q}{2} q^{2n+\nu} \cos_q(q^{2(\nu+n)}), & \hat{x} = q^{2n} \\ i\tau \frac{N_q}{2} q^{\frac{1}{2}} q^{2n+\nu} \sin_q(q^{2(\nu+n)}), & \hat{x} = q^{2n+1}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Diesen Ausdruck stellen wir jetzt für $\nu = 0, 10, 20$ und für $q = 1.05, 1.1, 1.5$ und $q = 2$ mit Hilfe von Mathematica ohne die Normierungskonstante graphisch dar. Die Mathematicaprogramme für die q -trigonometrischen Funktionen entnehmen wir [11]. Wir tragen Real- und Imaginärteil, die auf verschiedenen Gittern sitzen, auf derselben Achse auf und unterscheiden sie, indem wir die Funktionswerte auf dem ungeraden Gitter (Imaginärteil) mit einer durchgezogenen Linie und die Werte auf dem geraden Gitter (Realteil) mit einer gepunkteten Linie verbinden. Die Verbindung der Funktionswerte geschieht nur der besseren Übersicht wegen, sie hat keinerlei Bedeutung. Die Funktionen nehmen nur an den entsprechenden Punkten des q -Gitters Werte an. Wir betrachten nur das positive q -Gitter, da die Funktionswerte auf dem negativen Gitter sich nur um das Vorzeichen von denen auf dem positiven Gitter unterscheiden. Wir stellen die Funktionen in Abhängigkeit von $\hat{x} = q^n$ dar, der Nullpunkt entspricht also $q^{-\infty}$ auf der \hat{x} -Achse.

Die Eigenfunktionen zu verschiedenen ν und q , (Abb. S. 56, 57)

Wir erkennen, dass die Funktionen grundsätzlich sehr schnell gegen Null konvergieren. Das ist eine charakteristische Eigenschaft der q -trigonometrischen Funktionen, wenn sie von geraden q -Potenzen abhängen, für ungerade q -Potenzen werden die Oszillationen immer größer [18]. Für zunehmende Energie ν liegen die Funktionen näher am Ursprung. Ein solches Verhalten erkennt man bereits in dem Ausdruck (4.11): die Funktionen sind nur auf einem beschränkten Bereich wesentlich von Null verschieden; wenn ν (die Energie) größer wird, muss dementsprechend n (der Ort) kleiner werden, damit das Argument insgesamt in dem Bereich bleibt, auf dem die Funktionen wesentlich von Null verschieden sind.

Je größer der Wert von q wird, also je weiter er sich von Eins entfernt, umso weniger Gitterpunkte liegen in dem Bereich, auf dem die Funktionen nicht verschwinden, und umso weniger Schwingungen führen sie aus, bevor sie gegen Null gehen.

Abb. 4.1: $\Psi_{0,+1}(\hat{x}), q = 1.05$ Abb. 4.2: $\Psi_{20,+1}(\hat{x}), q = 1.05$ Abb. 4.3: $\Psi_{40,+1}(\hat{x}), q = 1.05$

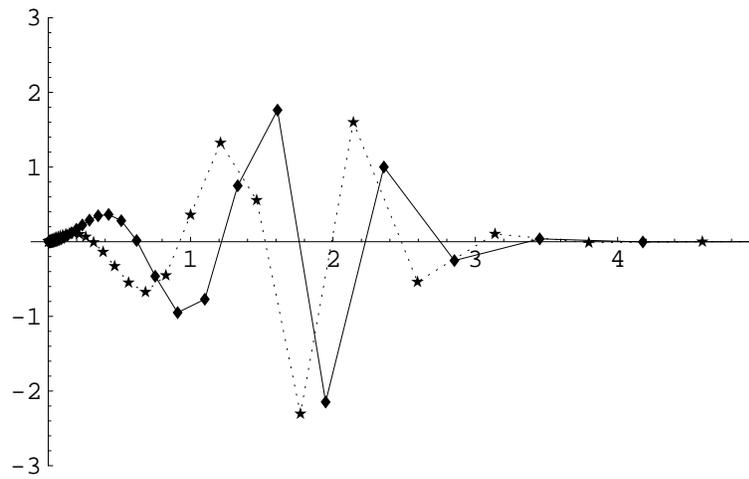


Abb. 4.4: $\Psi_{0,+1}(\hat{x}), q = 1.1$

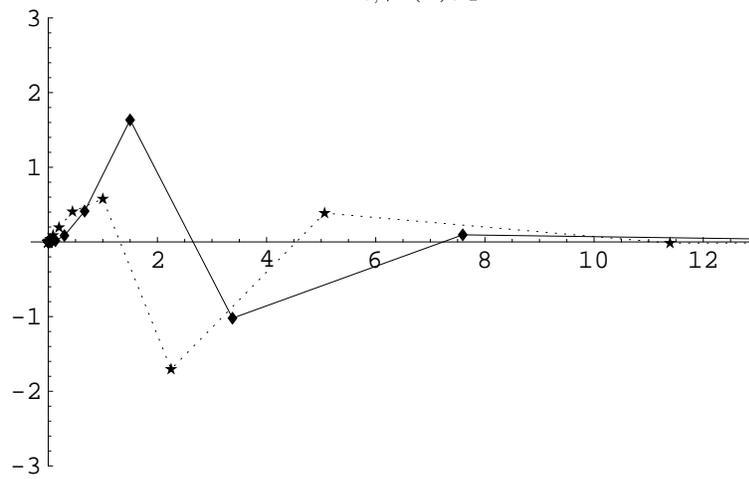


Abb. 4.5: $\Psi_{0,+1}(\hat{x}), q = 1.5$

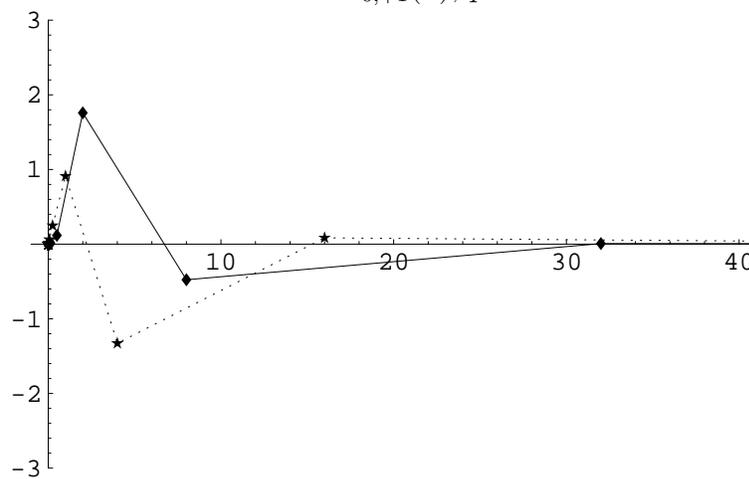


Abb. 4.6: $\Psi_{0,+1}(\hat{x}), q = 2$

Dass alle Funktionen bei $\hat{x} = 0$ verschwinden, liegt natürlich daran, dass in (4.11) die q -trigonometrischen Funktionen noch mit $\hat{x} = q^{2n}$ multipliziert werden. Ohne diesen Faktor geht die Funktion $\sin_q(q^{2n})$ für $n \rightarrow -\infty$ gegen Eins.

Für $q = 2$ ist das q -Teilchen nur noch auf etwa vier Gitterpunkten wesentlich von Null verschieden. Ausgehend von der ursprünglichen Philosophie, dass Quantengruppen durch den Parameter q charakterisierte, geringfügige Abweichungen der undeformierten Symmetriegruppen sein sollen, macht der Wert $q = 2$ nur noch wenig Sinn.

Allerdings kommen wir mit einer solchen diskreten Struktur in ein anderes Gebiet hinein, in dem das q -Teilchen von Interesse sein könnte: In Connes' Erweiterung des Standardmodells wird das Produkt aus einem Minkowski-Raum mit einer endlichen diskreten Menge, z.B. einem Raum aus zwei Punkten, betrachtet. Ein offenes Problem ist, eine endliche Quantengruppe als Symmetriegruppe dieser Menge anzugeben [5]. Ob und inwieweit ein q -Teilchen, als Darstellung der q -Heisenberg-Algebra, mit einem entsprechend großen q zur Beschreibung dieser Struktur dienen kann ist noch ungeklärt.

Wir erinnern noch einmal daran, dass wir in den Abbildungen nur das positive Gitter dargestellt haben, weil auf dem negativen Gitter die Funktionswerte bis auf das Vorzeichen identisch sind. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit, die wir in Kapitel 5 definieren (5.32) und für verschiedene ν und q graphisch darstellen, ist achsensymmetrisch. In [11] wurde gezeigt, dass die Propagation eines q -Teilchens eine Oszillation um den Ursprung ist.

4.2 “Squeezing”

Der Erwartungswert von \hat{x} verschwindet in diesen symmetrischen Zuständen. Damit ist der Erwartungswert von \hat{x}^2 gleich dem Quadrat der Varianz von \hat{x} : $(\Delta\hat{x})^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle$. Mit Hilfe der Normierungsrechnung (4.10) finden wir für das Quadrat der Varianz von \hat{x} in dem Zustand $\Psi_{2\nu,\tau}^{(s)}(\hat{x})$:

$$\begin{aligned}
(\Delta\hat{x})^2 &= \int d\hat{x} \frac{N_q^2}{4s^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ \sigma=+,-}}^{\infty} \hat{x}^4 q^{2\nu} q^{-2n} \left(\cos_q^2(q^{2(\nu+n)}) \delta(\hat{x} - s\sigma q^{2n}) \right. \\
&\quad \left. + q^{-2} \sin_q^2(q^{2(\nu+n)}) \delta(\hat{x} - s\sigma q^{2n+1}) \right) \\
&= \frac{N_q^2}{2} s^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2\nu} q^{6n} \left(\cos_q^2(q^{2(\nu+n)}) + q^2 \sin_q^2(q^{2(\nu+n)}) \right) \\
&= s^2 q^{-4\nu} \frac{N_q^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{6n} \left(\cos_q^2(q^{2n}) + q^2 \sin_q^2(q^{2n}) \right) \\
&\equiv s^2 q^{-4\nu} K^2.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Wir haben hier, wie bei der Definition des Absolutquadrates (5.31) in Kapitel 5, die Deltafunktion in Abhängigkeit von s weggelassen. Wegen der starken Konvergenz von

\cos_q und \sin_q , tragen zu der unendlichen Summe, die wir mit K^2 abgekürzt haben, nur endlich viele Terme bei. Mit Mathematica kann die Konstante K berechnet werden. Wir finden für verschiedene q die folgenden Werte:

$$K = \begin{cases} 1.450 \\ 1.487 \\ 1.803 \\ 2.236 \end{cases} \quad \text{für} \quad q = \begin{cases} 1.05 \\ 1.1 \\ 1.5 \\ 2.0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Für $s = 1$ und $\nu = 0$ entsprechen diese Werte schon der Varianz $\Delta\hat{x}$ in dem Zustand $\Psi_0(\hat{x})$. Für $\nu \neq 0$ erkennt man aus (4.12) leicht das Verhalten der Varianz von \hat{x} in Zuständen mit zu- oder abnehmender Energie.

Mit zunehmender Energie tritt der Effekt des "squeezing" auf: aus der Heisenbergschen Vertauschungsrelation der Quantenmechanik folgt die Unschärferelation

$$(\Delta\hat{x})(\Delta\hat{p}) \geq \frac{1}{2}, \quad (4.14)$$

die für alle Zustände gilt. Im Grundzustand des Harmonischen Oszillators und in kohärenten Zuständen wird das Minimum dieser Ungleichung angenommen. Man spricht von "squeezing", wenn die Varianz einer der beiden Komponenten in einem Zustand unterhalb der Vakuumvarianz liegt, z.B.:

$$(\Delta\hat{x}) < \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.15)$$

Ein solcher Effekt kann in der Quantenmechanik auftreten, ohne die Unschärferelation zu verletzen. Für bestimmte q -deformierte Heisenberg-Algebren kann der Effekt sogar gleichzeitig in beiden Komponenten auftreten, was in der undeformierten Quantenmechanik unmöglich ist [1]. Wir untersuchen hier den rein quantenmechanischen Effekt an Zuständen, die wir mit Hilfe der q -deformierten Quantenmechanik gefunden haben. Wenn wir $s = 1$ setzen, können wir direkt angeben, ab welcher Energie ν in den Zuständen $\Psi_{2\nu,\tau}(\hat{x})$ "squeezing" in der Ortskomponente auftritt. Wir berechnen also für verschiedene q dasjenige ν , ab dem die Ungleichung $(\Delta\hat{x}) = q^{-2\nu}K < 1/\sqrt{2}$ erfüllt ist:

$$\nu = \begin{cases} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{cases} \quad \text{für} \quad q = \begin{cases} 1.05 \\ 1.1 \\ 1.5 \\ 2.0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Aus den Abbildungen (4.1, 4.4, 4.5 und 4.6) erkennt man, dass die drei Funktionen für $\nu = 0$ und die verschiedenen q ungefähr gleich weit vom Ursprung entfernt zentriert sind. Die Tatsache, dass für größer werdendes q der Effekt bei kleinerem ν auftritt, liegt an dem exponentiellen Faktor $q^{-2\nu}$ in der Varianz.

Für kleiner werdende Energie ν und konstantem q , und insbesondere für $\nu < 0$, wird die Varianz immer größer. Das Teilchen entfernt sich also weiter vom Ursprung und ist weniger scharf lokalisiert.

Durch den Formalismus der q -deformierten Quantenmechanik haben wir Zustände konstruiert, die im Ortsraum der Quantenmechanik liegen, und in denen “squeezing” in der Ortskomponente auftritt. Für die Elemente der q -Heisenberg-Algebra wurde dieser Effekt z.B. in [11] und [36] eingehend untersucht.

4.3 Die Selbstwechselwirkung

Wir betrachten noch einmal den Hamiltonoperator des freien q -Teilchens (4.4):

$$H = \frac{1}{2} p^2 = \frac{2}{\lambda^2} \hat{p} \frac{q + q^{-1} - 2 \cos(h(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}))}{(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})^2 + 1} \hat{p}, \quad (4.17)$$

und ersetzen q durch e^h :

$$H = \frac{1}{\sinh^2(h)} \hat{p} \frac{\cosh(h) - \cos(h(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}))}{1 + (\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})^2} \hat{p}. \quad (4.18)$$

Wir entwickeln diesen Ausdruck bis zur vierten Ordnung in h und erhalten den folgenden hermiteschen Operator:

$$\begin{aligned} H = & \frac{\hat{p}^2}{2} - \left(\frac{h^2}{3} - \frac{h^4}{18} \right) \hat{p}^2 - \left(\frac{h^2}{6} - \frac{h^4}{18} \right) \hat{p}^2 \hat{x}^2 \hat{p}^2 \\ & + i \left(\frac{h^2}{12} - \frac{h^4}{36} \right) (\hat{p}^3 \hat{x} - \hat{x} \hat{p}^3). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Für $h = 0$ erhalten wir den Hamiltonoperator eines freien quantenmechanischen Teilchens mit der Masse $m = 1$. Die anderen Terme beschreiben eine komplizierte Selbstwechselwirkung mit der Kopplungskonstanten h . Diese Selbstwechselwirkung scheint eine Art spontaner Symmetriebrechung zu produzieren, da sie das quantenmechanische Teilchen auf ein q -Gitter zwingt, und somit die Translationsinvarianz bricht. Es existiert ein bevorzugtes Koordinatensystem im Zentrum der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des q -Teilchens.

Ein solcher Phasenübergang bedürfte einer hohen Energiedichte und könnte nur unterhalb von ca. 10^{-17}cm auftreten, da man diese Strukturen bisher in Teilchenbeschleunigern nicht entdeckt hat.² Das bedeutet für unsere Zustände $\Psi_{\nu,\tau}(\hat{x})$, dass die Energie ν nicht beliebig klein werden kann, da die Zustände sich mit abnehmender Energie immer weiter vom Ursprung des q -Gitters entfernen.

Darüberhinaus sorgt die Selbstwechselwirkung noch für die Eigenschaft, die wir im vorhergehenden Abschnitt untersucht haben: die Tatsache, dass das freie q -Teilchen um den Ursprung konzentriert ist, die dazu führt, dass ab einer bestimmten Energie das sogenannte “squeezing” auftritt.

²Diese Auflösung erhält man in etwa, wenn man die maximale Leistung heutiger Beschleuniger von etwa 2 TeV in eine Wellenlänge umrechnet [37].

Zum Vergleich wollen wir ein Beispiel aus der Optik angeben, bei dem dieser Effekt ebenfalls auftritt. Man betrachtet ein Mach-Zehnder Interferometer, das in einem Arm ein nichtlineares Kerr-Medium enthält und in dem anderen Arm eine Phasenverschiebung verursacht. Schickt man nun einen kohärenten Zustand durch diesen Versuchsaufbau, dann tritt im Zustand hinter dem Interferometer “squeezing” in Bezug auf die Amplitude auf. Das bedeutet, dass die Varianz der Photonenzahl unterhalb und die Varianz der Phase oberhalb des Vakuumwertes liegen [38],[13]. Der Wechselwirkungsoperator, der in einem nichtlinearen Kerr-Medium wirksam ist, lautet [13]:

$$H_I = \chi(\hat{a}^\dagger)^2(\hat{a})^2. \quad (4.20)$$

Hier sind \hat{a}^\dagger und \hat{a} die üblichen Auf- und Absteigeoperatoren des undeforinierten Oszillators, und χ hängt mit der Suszeptibilität des Kerr-Mediums zusammen. Auch andere Ausdrücke in Abhängigkeit von \hat{a} und \hat{a}^\dagger verursachen als Wechselwirkung “squeezing”, wie z.B. [38]:

$$H_I = \chi(\hat{a}^\dagger)^2 + \bar{\chi}(\hat{a})^2. \quad (4.21)$$

Man sieht, dass in der Selbstwechselwirkung des freien q -Teilchens (4.19) in der Ordnung h^2 und h^4 bis auf konstante Faktoren die gleichen Terme in \hat{x} und \hat{p} erscheinen. Wenn wir z.B. den Term $\hat{p}^2\hat{x}^2\hat{p}^2$ durch die Operatoren \hat{a} und \hat{a}^\dagger ausdrücken, finden wir:

$$\begin{aligned} \hat{p}^2\hat{x}^2\hat{p}^2 = & \frac{1}{8} \left(\hat{a}^6 - (\hat{a}^\dagger)^6 - 7\hat{a}^4 + 9(\hat{a}^\dagger)^4 + \hat{a}^2 - 21(\hat{a}^\dagger)^2 \right. \\ & + 6(\hat{a}^\dagger)^5\hat{a} - 11(\hat{a}^\dagger)^4\hat{a}^2 - 28(\hat{a}^\dagger)^3\hat{a} + 8(\hat{a}^\dagger)^3\hat{a}^3 \\ & \left. + 28(\hat{a}^\dagger)^2\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2\hat{a}^4 + 34\hat{a}^\dagger\hat{a} - 4\hat{a}^\dagger\hat{a}^3 - 2\hat{a}^\dagger\hat{a}^5 + 5 \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Wir erkennen also, dass der Operator des Kerr-Mediums sehr häufig vorkommt und somit eine wesentliche Rolle spielt bei der Selbstwechselwirkung des freien q -Teilchens. Aber auch die Operatoren aus (4.21) kommen vor und tragen zum “squeezing” bei.

Durch den Vergleich mit der Optik wissen wir also, welche Terme für das “squeezing” verantwortlich sind. Ausgehend von der Darstellungstheorie der q -deformierten Heisenberg-Algebra haben wir Zustände gefunden, die eine Eigenschaft aufweisen, die in ähnlicher Form in der Optik von Interesse ist.

In einem allgemeineren Ansatz wurde dieser Berührungspunkt zwischen verschiedenen deformierten Heisenberg-Algebren und der Optik unter anderem in [1] untersucht.

4.4 Anmerkungen zur Geometrie

Die Darstellungstheorie der q -Heisenberg-Algebra liefert für den Ortsoperator als Eigenwerte das q -Gitter $\pm q^n \in \mathbb{R}$. Diese Menge reeller Zahlen wollen wir \mathbb{R}_q^1 nennen. In [22] haben wir die Geometrie dieser deformierten reellen Achse genauer untersucht. Der dort verwendete Formalismus stammt im Wesentlichen von John Madore [4]. Als

lokale, bis auf die Normierung eindeutige Metrik für \mathbb{R}_q^1 haben wir dort den folgenden Ausdruck gefunden:

$$g^{11} = g(dx \otimes dx) = (q\Lambda x)^2. \quad (4.23)$$

Untersucht man mit dieser Metrik das q -Gitter, findet man einen konstanten Abstand zwischen den Gitterpunkten über die gesamte reelle Achse. Ohne die Bedingung der Lokalität existiert noch die Metrik

$$g^{11} = g(dx \otimes dx) = 1. \quad (4.24)$$

Das ist die Metrik, die wir in dieser Arbeit implizit verwendet haben. Mit dieser Metrik wächst der Abstand der Gitterpunkte exponentiell auf der positiven reellen Achse und der Ursprung ist Häufungspunkt des Gitters [22].

Ein Hinweis auf eine Metrik der Form (4.23) ist uns bereits bei der Definition des Skalarproduktes auf \mathcal{A}_x begegnet (2.65). Dort erscheint die Größe Lx als Integrationsmaß.

Wenn wir eine Dynamik auf unserem Gitter $\pm q^n$ untersuchen, etwa mit einer zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung, benötigen wir an jedem Gitterpunkt eine Zeitkoordinate. Da die Zeit in unserem Formalismus undeformiert ist, gilt $t \in \mathbb{R}$. Insgesamt erhalten wir also die Menge $\mathbb{R}_q^1 \otimes \mathbb{R}^1$ als Raum, auf dem die eindimensionale q -Quantenmechanik stattfindet.

Graphisch dargestellt ergibt diese Menge eine reelle Achse, an deren Punkten $\pm q^n$ sich jeweils eine reelle Achse befindet. Diese Anordnung kann als Ausgangspunkt dienen, die Geometrie der q -deformierten Heisenberg-Algebra mit den Methoden von Connes und Moscovici [5],[39] zu untersuchen. Dazu müsste man $\mathbb{R}_q^1 \otimes \mathbb{R}^1$ als Foliationsauffassung und versuchen, ein zu dieser Foliations gehörendes Spektraltripel zu konstruieren. Diese Untersuchungen sind weiterhin Bestandteil der Forschung.

Eine andere Möglichkeit, die u.a. von Olaf Richter *et al.* untersucht wird, ist der Versuch, aus der q -Heisenberg-Algebra eine Foliations auf algebraischem Wege herzuleiten. Dazu muss die q -Heisenberg-Algebra, die eine $*$ -Algebra ist (vgl. Kapitel 1), zuerst in eine C^* -Algebra überführt werden. Dann muss man versuchen, für jedes q ein Gruppoid zu finden, so dass die q -Heisenberg-Algebra gerade dessen C^* -Algebra ist. In einem letzten Schritt müsste man dieses Gruppoid als Holonomiegruppoid einer geeigneten Foliations realisieren.

Es wäre interessant zu sehen, welcher Zusammenhang zwischen einer solcherart konstruierten Foliations und unserer Menge $\mathbb{R}_q^1 \otimes \mathbb{R}^1$ besteht, die wir durch die Darstellungstheorie der q -Heisenberg-Algebra erhalten haben.

Kapitel 5

Die Streuung an einem q -Teilchen

Im vorhergehenden Kapitel haben wir das sogenannte freie q -Teilchen eingehend untersucht. Wir haben gesehen, dass die Wellenfunktionen zu verschiedenen Energien im quantenmechanischen Ortsraum auf einem q -Gitter definiert sind. Ob solche diskreten Raumstrukturen in der Natur realisiert werden, ist unbekannt, und ebenso der Mechanismus des Phasenüberganges, mit dem man zu diesen Gitterstrukturen gelangen könnte. Was uns hier interessiert, sind die Spuren, die solche diskreten Strukturen in Streuexperimenten hinterlassen. Da wir nur die eindimensionale Streuung betrachten, werden wir keine Vorhersagen für zukünftige Experimente geben. Als qualitative Aussagen allerdings werden unsere Resultate auch für zukünftige, höherdimensionale Streuversuche von Nutzen sein, da dieselben q -Gitterstrukturen auch in höherdimensionalen Quantenräumen auftauchen [9],[8].

In diesem Kapitel werden wir eine ebene Welle an einem freien q -Teilchen streuen, indem wir dessen Wahrscheinlichkeitsdichte, die wir noch definieren werden, als stationäres Potenzial für eine eindimensionale, quantenmechanische Streuung verwenden werden. Wir werden den Reflexionskoeffizienten der einlaufenden Welle in Bornscher Näherung untersuchen.

Wir betrachten zuerst zwei Beispiele aus der nichtrelativistischen Quantenmechanik, mit denen wir die Resultate der q -Streuung später vergleichen werden.

5.1 Quantenmechanik

Wir untersuchen die quantenmechanische Streuung einer nichtrelativistischen ebenen Welle an einem Potenzial, das aus Deltafunktionen gebildet wird, und an einem, das aus Gauß-Funktionen besteht. Dazu betrachten wir die Schrödinger-Gleichung mit den entsprechenden zeitunabhängigen Störtermen für die potenzielle Energie. Da wir die Lösung im Falle des q -Teilchens nur störungstheoretisch berechnen können, werden wir auch hier bei den undeformierten quantenmechanischen Problemen Störungstheorie mit Hilfe der Greenschen Funktion durchführen. Die Verwendung der Greenschen Funktionen in der Streutheorie ist in fast allen Standardwerken der Quantenmecha-

nik zu finden, z.B. in [40]. Wir betrachten also zuerst die Greensche Funktion der allgemeinen, inhomogenen, stationären Schrödinger-Gleichung. Die Gleichung für die verschiedenen Beispiele lautet:

$$(E - H_0)\phi(x) = V(x)\phi(x). \quad (5.1)$$

H_0 ist hier der Hamiltonoperator des freien, nichtrelativistischen Teilchen: $H_0 = p^2/2m$. Hier und im gesamten Abschnitt 5.1 unterschlagen wir die Hüte auf den Phasenraumvariablen x, p , da keine Verwechslung möglich ist. Um die Gleichung (5.1) störungstheoretisch zu lösen, fassen wir sie als inhomogene Differenzialgleichung auf und bestimmen zunächst eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:¹

$$(k_E^2 + \nabla^2)\phi(x) = \delta(x - x'), \quad k_E^2 = 2mE. \quad (5.2)$$

Die Greensche Funktion zu dieser Gleichung ist

$$G(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{\exp(ik'(x - x'))}{k_E^2 - k'^2}. \quad (5.3)$$

Das Integral kann mit Hilfe des Residuensatzes berechnet werden. Dabei muss man den Integrationsweg um die Pole $\pm k_E$ so deformieren, dass die Lösung die richtigen Randbedingungen erfüllt. Wir betrachten eine von links einfallende ebene Welle $\phi_{in}(x) = \exp(ikx)$, das bedeutet für $x \rightarrow \infty$ darf es ebenso nur einen solchen Anteil geben, also keine von rechts einlaufende Welle. Mit dieser Randbedingung ergibt sich der folgende Integrationsweg in der komplexen k -Ebene:

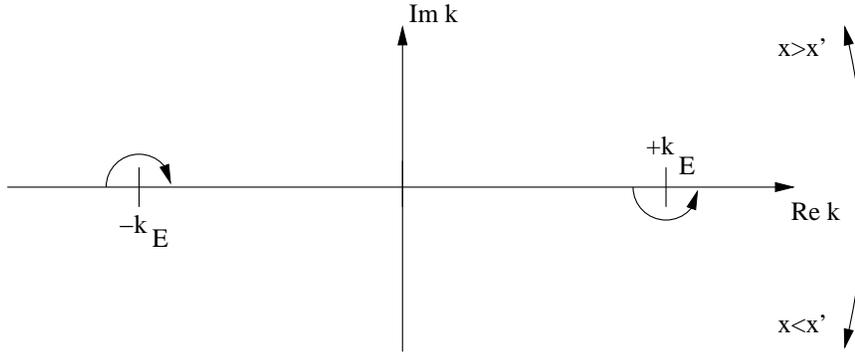


Abb. 5.1: Integrationsweg

Damit ergibt die Integration mit Hilfe des Residuensatzes

$$G(x - x') = -\frac{i}{2} \frac{\exp(ik_E(x - x'))}{k_E} \quad x > x' \quad (5.4)$$

$$G(x - x') = \frac{i}{2} \frac{\exp(-ik_E(x - x'))}{k_E} \quad x < x'.$$

¹ In dieser Form ist der Term $2m$ auf der rechten Seite in das Potenzial $V(x)$ absorbiert worden.

Diese Greens-Funktionen sind eine spezielle Lösung der Gleichung (5.2). Die allgemeine Lösung der Gleichung (5.1) ist nun die Summe aus einer speziellen Lösung der inhomogenen und aus der Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung:

$$\phi(x) = \phi_{in}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x-x')V(x')\phi(x'). \quad (5.5)$$

Aus dieser Integralgleichung erhält man durch Rekursion die Störreihe. Von dieser Reihe betrachten wir nur die Bornsche Näherung. Dazu ersetzen wir auf der rechten Seite $\phi(x)$ durch $\phi_{in}(x) = \exp(ikx)$. Einsetzen der Greenschen Funktion liefert die Lösung bis zur ersten Ordnung:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_{in}(x) + \phi^{(1)}(x) \\ &= \phi_{in}(x) - \frac{i \exp(ik_E x)}{2 k_E} \int_{-\infty}^x dx' V(x') \\ &\quad + \frac{i \exp(-ik_E x)}{2 k_E} \int_x^{\infty} dx' \exp(i2k_E x') V(x'). \end{aligned} \quad (5.6)$$

In dieser Form erkennt man leicht, dass der Beitrag der ersten Ordnung Störungstheorie die Fourierkomponente des Potentials bezüglich des Impulsübertrags ist. Das erste Integral ist der Anteil der transmittierten Welle, also verschwindet der Impulsübertrag. Das zweite Integral liefert einen Beitrag zur reflektierten Welle, für die der Impulsübertrag $2k_E$ ist. Dass sich die Impulse der ein- und ausfallenden Wellen zu Null und $2k_E$ addieren, liegt natürlich daran, dass wir hier den eindimensionalen Fall der elastischen Streuung untersuchen, also $k_E = \pm k$.

Im Gegensatz zum dreidimensionalen Fall ist die Bornsche Näherung in einer Dimension für $k_E \rightarrow 0$ nicht gültig, was wegen des Terms $1/k_E$ in der Greens-Funktion offensichtlich ist, da in diesem Limes der erste Korrekturterm $\phi^{(1)}(x)$ divergiert.² Das bedeutet wir betrachten hier einfallende Teilchen mit hoher Energie. Für den Vergleich mit dem q -Teilchen ist das natürlich sinnvoll, weil wir dort in jedem Fall hohe Energien benötigen, um die kleine Ausdehnung des q -Teilchens überhaupt aufzulösen.³ Allerdings handelt es sich bei unserer Untersuchung um rein qualitative Aussagen.

Für Probleme der Quantenmechanik, die man exakt lösen kann, wie etwa die Streuung an einem kastenförmigen Potenzial, entspricht die Bornsche Näherung der Entwicklung der exakten Lösung nach V_0 , der Höhe des Potentials, unter der Nebenbedingung $|V_0 a| \ll 1$, wobei a die Ausdehnung des Potentials ist.

Insbesondere muss also auch hier die Bedingung $E > V_0$ erfüllt sein, also die Situation eines einlaufendes Teilchens mit hoher Energie vorliegen.

²Für allgemeinere Aussagen über den Gültigkeitsbereich der Bornschen Näherung in einer Dimension vergleiche Landau/Lifschitz Quantenmechanik [41].

³Vergleiche das Kapitel über das freie q -Teilchen.

5.1.1 Der Reflexionskoeffizient

In den folgenden quantenmechanischen Beispielen und der Streuung an q -Teilchen werden wir jeweils den Reflexionskoeffizienten genauer betrachten. Deswegen stellen wir an dieser Stelle noch einige allgemeine Überlegungen zur Berechnung des Reflexionskoeffizienten an.

Die Lösung einer Schrödinger-Gleichung mit einem Potenzialterm im Ursprung der Ausdehnung $2a$ hat die asymptotische Form

$$\phi(x) = \begin{cases} A \exp(ikx) + B \exp(-ikx) & x < -a \\ F \exp(ikx) + G \exp(-ikx) & x > a. \end{cases} \quad (5.7)$$

Wir untersuchen den Fall einer von links einfallenden Welle, das bedeutet wir setzen im folgenden $G = 0$. Die Koeffizienten hängen durch die so genannte Streumatrix oder S-Matrix miteinander zusammen:

$$\begin{pmatrix} B \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Hierbei handelt es sich natürlich um die Streumatrix in elementarster Form. Aus der Kontinuitätsgleichung für stationäre Zustände in einer Dimension folgt, dass die Wahrscheinlichkeitsstromdichte konstant ist. Also ist die Stromdichte links vom Potenzial ebenso groß wie rechts davon. Daraus folgt

$$|A|^2 - |B|^2 = |F|^2. \quad (5.9)$$

Aus dieser Wahrscheinlichkeitserhaltung folgt auch die Unitarität der S-Matrix.⁴ Der Reflexionskoeffizient ist das Verhältnis des reflektierten zum einlaufenden Strom:

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = |S_{11}|^2. \quad (5.10)$$

Wir werden den Koeffizienten der einlaufenden Welle normieren: $|A|^2 = 1$, damit wird $R = |B|^2$. Normalerweise berechnet man die verschiedenen Koeffizienten durch Stetigkeitsbedingungen in $\pm a$. Wir untersuchen wegen des Vergleichs mit dem q -deformierten Fall nur die erste Ordnung Störungstheorie. Wir haben die Lösung in der Bornschen Näherung bereits ausgerechnet. Diese Lösung (5.6) interessiert uns hier nur in dem Bereich $x < -a$, weil wir den Reflexionskoeffizienten suchen. Für $x < -a$ verschwindet das erste Integral, weil über den Bereich, auf dem das Potenzial von Null verschieden ist, nicht integriert wird, es bleibt:

$$\phi(x) \stackrel{x < -a}{=} \phi_{in}(x) + \frac{i \exp(-ik_E x)}{2k_E} \int_x^\infty dx' \exp(i2k_E x') V(x'). \quad (5.11)$$

⁴Diese Herleitung findet man z.B. in E. Merzbacher, Quantum Mechanics [40].

Da das Potenzial jenseits von $-a$ verschwindet, können wir den Integrationsbereich über die ganze reelle Achse ausdehnen. Ein Vergleich mit der asymptotischen Form (5.7) liefert den Koeffizienten B :

$$B(k_E) = \frac{i}{2k_E} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \exp(i2k_E x') V(x'). \quad (5.12)$$

Diesen Ausdruck werden wir an verschiedenen Beispielen untersuchen. Wir wollen noch einmal darauf hinweisen, dass der Ausdruck für $k_E \rightarrow 0$ keinen Sinn macht, weil er dann divergiert. Wir werden im folgenden in verschiedenen Diagrammen den Koeffizienten als Funktion von k_E ohne den Term $i/2k_E$ zeigen, um eine genauere Darstellung der charakteristischen Merkmale zu erzielen, und diesen Ausdruck mit $f(k_E)$ bezeichnen. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir k_E durch k ersetzen, da klar ist, dass es sich hierbei um den Impuls des gestreuten Teilchens handelt, der betragsmäßig identisch ist mit dem Impuls der einlaufenden Welle. In den Diagrammen handelt es sich also um die Größe

$$f(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \exp(i2kx') V(x') \quad (5.13)$$

bzw. deren Absolutquadrat, das folgendermaßen mit dem Reflexionskoeffizient zusammenhängt:

$$R = |B|^2 = \frac{1}{4k^2} |f(k)|^2. \quad (5.14)$$

5.1.2 Streuung an Deltafunktionen

Wir haben bereits gesehen, dass die Eigenfunktion des q -Teilchens auf einem Gitter definiert ist, was im quantenmechanischen Ortsraum durch Deltafunktionen zum Ausdruck kommt. Daher wollen wir zuerst untersuchen, was in der Quantenmechanik bei der Streuung an Deltafunktionen passiert. Dazu betrachten wir Potenziale, die aus einer einzelnen Diracschen Deltafunktion und aus mehreren symmetrisch um den Ursprung verteilten Deltafunktionen bestehen. Wir beginnen mit dem

Potenzial einer Deltafunktion.

Wenn wir in (5.12) für die potenzielle Energie $V(x)$ eine Diracsche Deltafunktion $\delta(x)$ einsetzen, erhalten wir für den Koeffizienten B :

$$B = \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \exp(i2kx') \delta(x'). \quad (5.15)$$

Die Fouriertransformierte der Deltafunktion ist aber eine Konstante, also bleibt für $f(k)$ nur

$$f(k) = 1. \quad (5.16)$$

Der Reflexionskoeffizient, zur Erinnerung: $R = |B|^2$, nimmt also für wachsendes k monoton ab. Betrachten wir ein

Potenzial zweier Deltafunktionen,

treten, wie man es erwartet, Resonanzen auf. Nehmen wir etwa folgende potenzielle Energie:

$$V(x) = \delta(x - 2) + \delta(x + 2), \quad (5.17)$$

also ein symmetrisches Paar von Deltafunktionen, dann erhalten wir für den Ausdruck $f(k)$:

$$\begin{aligned} f(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \exp(i2kx') \left(\delta(x' - 2) + \delta(x' + 2) \right) \\ &= \exp(4ik) + \exp(-4ik) = 2 \cos(4k). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Wir erhalten eine Schwingung, also Resonanzen, deren Kreisfrequenz $\omega = 4$ mit der Lage der Deltafunktionen in Beziehung steht. Da wir die Fourierkomponente bezüglich $2k$ bilden, ist die Kreisfrequenz ω identisch mit dem Abstand der Deltafunktionen. Wären die Deltafunktionen nicht achsensymmetrisch angeordnet, erhielte man noch eine zusätzliche Phase. Die Resonanzen entstehen nur, falls zwei Deltafunktionen vorhanden sind, eine einzelne liefert nur einen Phasenfaktor, dessen Absolutquadrat wieder eine Konstante ist. Der Reflexionskoeffizient

$$B = \frac{1}{k^2} \cos^2(4k) \quad (5.19)$$

ist somit eine Funktion mit periodischen Nullstellen und einer monoton fallenden Einhüllenden ($1/k^2$). Die periodischen Nullstellen und Maxima liegen bei

$$k_0^{(n)} = \frac{2n-1}{8} \pi, \quad k_{max}^{(n)} = \frac{n}{4} \pi, \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (5.20)$$

Jetzt betrachten wir noch ein

Potenzial aus vier Deltafunktionen.

Wir untersuchen eine Anordnung aus zwei symmetrischen Paaren von Deltafunktionen mit kleinem Abstand voneinander:

$$V(x) = \delta(x - 2) + \delta(x - 1.8) + \delta(x + 1.8) + \delta(x + 2). \quad (5.21)$$

Die Fouriertransformierte dieses Ausdrucks ist

$$\begin{aligned} f(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \exp(i2kx') \left(\delta(x' - 2) + \delta(x' - 1.8) \right. \\ &\quad \left. + \delta(x' + 1.8) + \delta(x' + 2) \right) \\ &= 2 \cos(3.6k) + 2 \cos(4k). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Wir erhalten zwei Schwingungen, die gleichgewichtet sind. Ihre Überlagerung ergibt eine Schwingung mit der mittleren Kreisfrequenz $\omega = 3.8$. In Abb. 5.2, wo wir $|f(k)|^2/4$ graphisch dargestellt haben, kann man das mit der Relation zwischen der n ten Nullstelle und der Frequenz nachprüfen:

$$k_0^{(n)} = \frac{2n-1}{2\omega} \pi. \quad (5.23)$$

Darüberhinaus erkennt man noch eine zweite, kleinere Frequenz: die Schwebungsfrequenz. Berechnen wir mit (5.23) die Kreisfrequenz der Schwebung, finden wir: $\omega \approx 0.2$. Das entspricht dem Abstand der beiden symmetrischen Paare von Deltafunktionen.

Bezüglich der Streuung an Deltafunktionen können wir folgendes Muster festhalten: Jede Deltafunktion liefert eine Phase, zwei Deltafunktionen liefern einen Cosinus, dessen Kreisfrequenz von dem Abstand der beiden Deltafunktionen abhängt, und eine Summe über mehrere Cosinus-Funktionen mit verschiedenen Frequenzen liefert ein Schwebungsbild, das umso komplizierter wird, je mehr Frequenzen, also Deltafunktionen, beitragen. Ein solches Bild werden wir auch bei der Streuung an q -Teilchen sehen, da das q -Teilchen in der quantenmechanischen Ortsdarstellung aus einer Summe von Deltafunktionen besteht (Vgl. Kapitel 4).

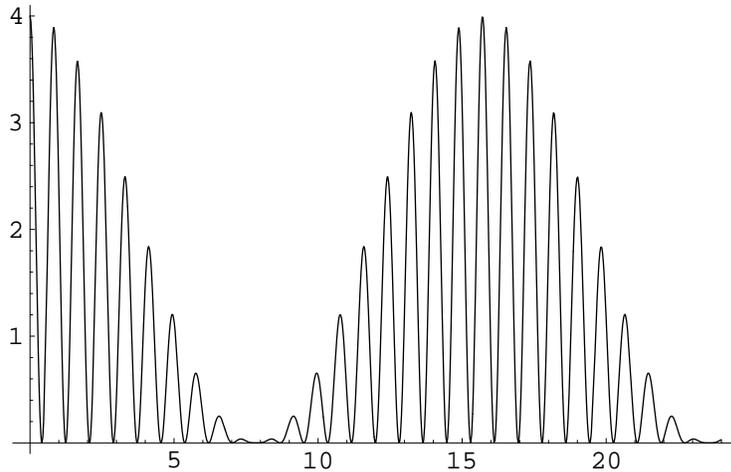


Abb. 5.2: $|f(k)|^2/4$

5.1.3 Streuung an Gauß-Funktionen

In Kapitel 6 werden wir eine ebene Welle an dem Grundzustand des q -Oszillators streuen. Dieser Grundzustand ist die q -Fouriertransformierte des Grundzustandes aus (2.153), von dem in [10] gezeigt wurde, dass er im Grenzwert $q \rightarrow 1$ in den Grundzustand des undeformierten Oszillators übergeht. Deswegen betrachten wir an dieser Stelle die Streuung einer ebenen Welle an einem solchen undeformierten Grundzustand.

Darüberhinaus untersuchen wir hier noch die Streuung an einem Potenzial, das aus zwei Gauß-Funktionen besteht. Betrachtet man nämlich die Einhüllende des Absolutquadrates der Wellenfunktion des freien q -Teilchens (Abb. 5.5), erkennt man eine gewisse Ähnlichkeit mit einer Funktion aus zwei symmetrischen Gauß-Funktionen.

Zunächst betrachten wir die Streuung an dem Grundzustand des undeformierten Oszillators:

$$V(x) = \exp(-x^2). \quad (5.24)$$

Wir verwenden hier das Absolutquadrat der Grundzustandsfunktion bis auf Normierungskonstanten. Das Resultat für $f(k)$ folgt direkt:

$$\begin{aligned} f(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \exp(i2kx') \exp(-x'^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-k^2). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Der Reflexionskoeffizient in Bornscher Näherung ist also wieder eine Gaußkurve multipliziert mit dem Faktor $1/4k^2$. Es treten keine Resonanzen auf.

Als nächstes betrachten wir ein Potenzial, das aus zwei symmetrischen Gauß-Funktionen besteht (Abb.5.3):

$$V(x) = \exp(-(x-2)^2) + \exp(-(x+2)^2). \quad (5.26)$$

Setzen wir dieses Potenzial in (5.15) ein, dann erhalten wir für $f(k)$:

$$\begin{aligned} f(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \exp(i2kx') (\exp(-(x'-2)^2) + \exp(-(x'+2)^2)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-k^2) (\exp(4ik) + \exp(-4ik)) \\ &= \sqrt{2} \exp(-k^2) \cos(4k). \end{aligned} \quad (5.27)$$

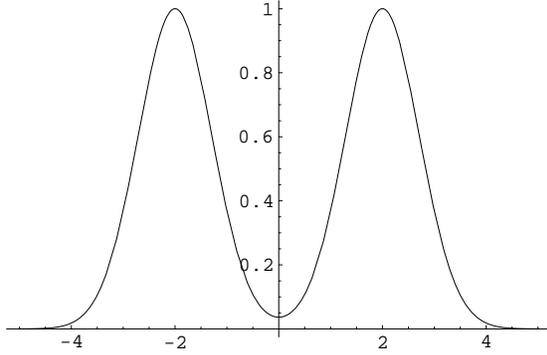
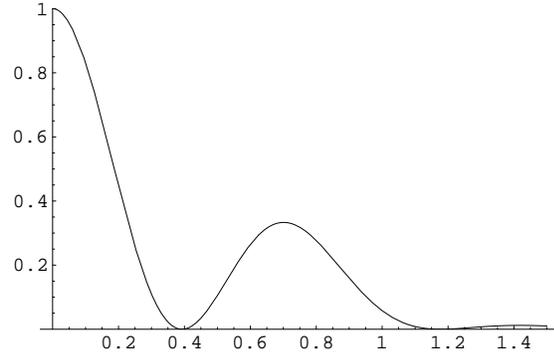
Im Reflexionskoeffizienten erscheint eine Schwingung mit der gleichen Kreisfrequenz wie bei der Streuung an zwei Deltafunktionen und eine starke Dämpfung wegen der zusätzlichen Gauß-Funktion. Schwebungen treten nicht auf.

Die Abbildungen 5.3 und 5.4 auf Seite 71 zeigen das Potenzial $V(x)$ und $|f(k)|^2/2$, den Reflexionskoeffizienten bis auf den Faktor $1/2k^2$.

5.2 Streuung an einem freien q -Teilchen

5.2.1 Das Streupotenzial

Im vorhergehenden Kapitel haben wir ausführlich das freie q -Teilchen behandelt. Wir werden hier seine Wahrscheinlichkeitsdichte, also das Absolutquadrat der Wellenfunktion betrachten und es als stationäres Potenzial benutzen, an dem wir dann, wie in den

Abb. 5.3: $V(x)$ Abb. 5.4: $|f(k)|^2/4$

Beispielen aus der Quantenmechanik, eine ebene Welle elastisch streuen. Da die Wellenfunktion des q -Teilchens eine stationäre Lösung der freien Schrödinger-Gleichung ist, ist die Wahrscheinlichkeitsdichte und damit unser Streupotenzial ein zeitunabhängiger Ausdruck. Die Reaktionen des Streupotenzials auf die Streuung, sowohl elastische als auch inelastische betrachten wir hier nicht.

Wir untersuchen den Reflexionskoeffizienten der gestreuten Welle in erster Ordnung Störungstheorie für verschiedene Energien des Streupotenzials und für verschiedene Werte von q . Die Wellenfunktion für das freie q -Teilchen eingebettet im Ortsraum der Quantenmechanik lautete (4.6):⁵

$$\Psi_{2\nu,\tau}^{(s)}(\hat{x}) = \frac{N_q}{2s} \sum_{\substack{n=-\infty \\ \sigma=+,-}}^{\infty} \hat{x}q^\nu \left\{ \sigma \cos_q\left(q^{2\nu} \frac{\sigma}{s} \hat{x}\right) \delta(\hat{x} - s\sigma q^{2n}) + i\tau q^{-\frac{1}{2}} \sin_q\left(q^{2\nu} \frac{\sigma}{qs} \hat{x}\right) \delta(\hat{x} - s\sigma q^{2n+1}) \right\}. \quad (5.28)$$

Sie sind Eigenfunktionen des Operators p der q -Heisenberg-Algebra und dementsprechend zu dem Hamiltonoperator $H = p^2/2$, den wir für das freie q -Teilchen angesetzt haben. Wir werden im Folgenden $s = 1$ setzen und nur diese geraden Eigenfunktionen als Streupotenziale verwenden. Der Energieeigenwert für diese Funktionen lautet:

$$H\Psi_{2\nu,\tau}(\hat{x}) = \frac{q^{4\nu}}{2\lambda^2 q} \Psi_{2\nu,\tau}(\hat{x}). \quad (5.29)$$

Die Quantenzahl ν bestimmt die Energie des q -Teilchens. Wir haben bereits die Normierung dieser Funktionen berechnet (4.10). Aus dieser Berechnung entnehmen wir jetzt die Definition des Streupotenzials. Wir schreiben das Absolutquadrat

$$\rho_\nu(\hat{x}) \equiv \Psi_{\nu,\tau}^*(\hat{x})\Psi_{\nu,\tau}(\hat{x}) \quad (5.30)$$

⁵Jetzt verwenden wir wieder unsere übliche Notation, um zwischen q -Heisenberg und undeformierten Heisenberg-Operatoren zu unterscheiden, und versehen die undeformierten mit einem Hut.

und definieren diesen Ausdruck als den Integranden aus der Normierung (4.10) ohne die Deltafunktion im s -Raum:

$$\rho_{2\nu}(\hat{x}) = \frac{N_q^2}{4} \sum_{\substack{n=-\infty \\ \sigma=+,-}}^{\infty} \hat{x}^2 q^{2\nu-2n} \left(\cos_q^2(q^{2(\nu+n)}) \delta(\hat{x} - \sigma q^{2n}) + q^{-2} \sin_q^2(q^{2(\nu+n)}) \delta(\hat{x} - \sigma q^{2n+1}) \right). \quad (5.31)$$

Wenn wir in diesem Ausdruck für \hat{x} die durch die Deltafunktionen vorgegebenen Werte einsetzen, erhalten wir

$$\rho_{2\nu}(\hat{x}) = \frac{N_q^2}{4} \sum_{\substack{n=-\infty \\ \sigma=+,-}}^{\infty} q^{2\nu+2n} \left\{ \cos_q^2(q^{2(\nu+n)}) \delta(\hat{x} - \sigma q^{2n}) + \sin_q^2(q^{2(\nu+n)}) \delta(\hat{x} - \sigma q^{2n+1}) \right\}. \quad (5.32)$$

Diese Funktion ist symmetrisch in n und ν . Wenn wir also die Energie ν vergrößern, werden diejenigen n , die zur Summe beitragen kleiner, d.h. das q -Teilchen wandert weiter zum Ursprung, aber die Funktionswerte bleiben gleich. Die Gesamtaufenthaltswahrscheinlichkeit bleibt konstant, sie ist mit der Normierung der Eigenfunktionen (4.10) auf Eins normiert. Wir werden die Wahrscheinlichkeitsdichte für verschiedene Werte von q und ν graphisch darstellen, wobei wir als Funktionswerte die Werte nehmen, mit denen die Deltafunktionen in der Summe gewichtet sind, so wie wir es auch bei dem q -Teilchen in Kapitel 4 gemacht haben (4.11).

5.2.2 Die Wechselwirkung

Die Funktion aus (5.32), die nur auf einem q -Gitter von Null verschiedene Werte annimmt, werden wir jetzt als stationäres Streupotenzial für eine ebene Welle benutzen. Die ebene Welle steht für einen massiven Spin-Null Teilchenstrom, also etwa ein Mesonfeld. Wir setzen eine 4-Punkt Wechselwirkung an, die auch in erster Ordnung Störungstheorie Energie- und Impulserhaltung garantiert.⁶ Unser Ansatz für einen Wechselwirkungsterm in der Lagrangedichte für das System aus q -Teilchen und Mesonfeld lautet somit

$$\mathcal{L}_I \sim \Psi_{\nu,\tau}^*(\hat{x}) \Psi_{\nu,\tau}(\hat{x}) \phi^*(\hat{x}) \phi(\hat{x}). \quad (5.33)$$

Für die Wechselwirkung zwischen dem freien q -Teilchen und einer ebenen Welle benötigen wir die Deltafunktionen, die wir durch die Einbettung des q -Teilchens erhalten haben. Die Deltafunktionen definieren das Produkt zwischen den beiden Funktionen auch außerhalb des q -Gitters $\pm q^n$, wo das freie q -Teilchen ursprünglich überhaupt nicht

⁶Bei einer Wechselwirkung wie $j_\mu A^\mu$ aus der QED zwischen Teilchenstrom und Eichfeld ist die erste Ordnung Störungstheorie ein unphysikalischer Prozess, da Energie und Impuls nicht erhalten sind [25].

definiert ist. Wie bereits erwähnt untersuchen wir hier die elastische Streuung an einem stationären Potenzial. Die stationäre Schrödinger-Gleichung für das Mesonfeld lautet:

$$(E - H_0)\phi(\hat{x}) = \Psi_{\nu,\tau}^*(\hat{x})\Psi_{\nu,\tau}(\hat{x})\phi(\hat{x}). \quad (5.34)$$

Die rechte Seite ist die Variation des Termes \mathcal{L}_I aus der Lagrangedichte (5.33) nach $\phi^*(\hat{x})$. H_0 ist der nichtrelativistische Hamiltonoperator des freien Mesonfeldes. Diese Gleichung ist von der Form her identisch mit (5.1). Wir können also direkt die Resultate übernehmen.

5.2.3 Der Reflexionskoeffizient

Um aus (5.34) den Reflexionskoeffizienten der gestreuten Welle in erster Ordnung Störungstheorie zu bekommen, machen wir den gleichen Ansatz mit einer Greenschen Funktion wie bei (5.1). Dieser Ansatz führt auch hier zu der Fourierkomponente des Störpotenzials bezüglich des Impulsübertrages $2k$ als Beitrag in erster Ordnung zur gestreuten Welle, den wir mit $f_\nu(k)$ bezeichnen werden, um die Abhängigkeit von der Energie des Streupotenzials zu verdeutlichen:

$$f_\nu(k) = \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{x} \rho_\nu(\hat{x}) \exp(2ik\hat{x}). \quad (5.35)$$

Das Potenzial geht in die Berechnung des Reflexionskoeffizienten nur über ein Integral ein, das sich mit den Deltafunktionen aufheben wird. Deswegen haben wir in allen Abbildungen des q -Teilchens in Kapitel 4 und in denen des Potenzials $\rho_\nu(\hat{x})$, die auf den nächsten Seiten folgen, die Vorfaktoren der Deltafunktionen als Funktionswerte behandelt. Die Größe $f_\nu(k)$ aus (5.35) wird für $k \rightarrow \pm\infty$ nicht verschwinden, da $\rho_\nu(\hat{x})$ nicht die Dirichlet-Bedingung erfüllt, wie es die Konvergenz von Fourierintegralen erfordert [42]. Das ist klar, weil auch schon eine einzelne Deltafunktion diese Bedingung nicht erfüllt.⁷

Zwischen der Größe $f_\nu(k)$ und dem Reflexionskoeffizienten gilt die gleiche Beziehung wie in (5.14):

$$R = |B|^2 = \frac{1}{4k^2} |f_\nu(k)|^2. \quad (5.36)$$

Insbesondere wird also der Reflexionskoeffizient für große k verschwinden. Wir setzen für $\rho_\nu(\hat{x})$ den Ausdruck (5.32) ein und erhalten

$$f_{2\nu}(k) = \frac{N_q^2}{4} \sum_{\substack{n=-\infty \\ \sigma=+,-}}^{\infty} \left\{ q^{2\nu+2n} \cos_q^2(q^{2(\nu+n)}) \exp(2ik\sigma q^{2n}) \right. \\ \left. + q^{2\nu+2n} \sin_q^2(q^{2(\nu+n)}) \exp(2ik\sigma q^{2n+1}) \right\}$$

⁷ Wie wir bereits in (5.16) angemerkt haben, ist die Fouriertransformierte der Deltafunktion eine Konstante.

$$\begin{aligned}
&= \frac{N_q^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2\nu+2n} \left\{ \cos_q^2(q^{2(\nu+n)}) \cos(2kq^{2n}) \right. \\
&\quad \left. + \sin_q^2(q^{2(\nu+n)}) \cos(2kq^{2n+1}) \right\}. \tag{5.37}
\end{aligned}$$

Diese Summe von Produkten aus trigonometrischen und q -trigonometrischen Funktionen ist als Funktion von k analytisch nicht mehr zu vereinfachen. Wegen der schnellen Konvergenz von \sin_q und \cos_q ⁸ ist sie aber numerisch zu bewältigen, da nur eine endliche Anzahl von Summanden wesentlich von Null verschieden ist. Wir werden im weiteren Verlauf des Kapitels $|f_{2\nu}(k)|^2$ zu verschiedenen ν und q in Diagrammen auswerten, also die Abhängigkeit des Reflexionskoeffizienten von der Energie des Streuzentrums und vom Deformationsparameter untersuchen.

5.2.4 Auswertung der Abbildungen

Wir beginnen mit dem Fall

$\nu = 0$ und $q = 1.05$ (Abb. Seite 78).

Die Abbildungen (5.5), (5.6) und (5.7) zeigen das Streupotenzial $\rho_0(\hat{x})$ bis auf die Normierungskonstante und den Ausdruck $|f_0(k)|^2$ über zwei verschiedene Bereiche von k . Das Streupotenzial nimmt lediglich auf einem q -Gitter von Null verschiedene Werte an, wir haben die Funktionswerte auf den Gitterpunkten nur der Deutlichkeit wegen verbunden. Wir erinnern noch einmal daran, dass $|f_\nu(k)|^2$ multipliziert mit $1/4k^2$ der Reflexionskoeffizient in Bornscher Näherung ist. Bei den dargestellten Ausdrücken $|f_\nu(k)|^2$ handelt es sich um eine Summe über Cosinusfunktionen mit verschiedenen Frequenzen und Gewichtungen. Die Gewichtungen sind durch die Funktionswerte der q -trigonometrischen Funktionen gegeben, die in Abb. 5.5 dargestellt sind.

Das Verhalten des Reflexionskoeffizienten in dem Bereich $0 < k < 10$ aus Abb. 5.7 ist vergleichbar mit dem aus Abb. 5.4, der Streuung an einer doppelten Gauß-Funktion. Dort traten Resonanzen auf, und die Einhüllende fiel monoton. Für größere k jedoch (Abb. 5.6) sieht man, dass die Einhüllende nicht monoton fällt, vielmehr erkennt man ein Verhalten, das an Schwebungen erinnert.

Zu dieser Schwebung trägt eine Vielzahl von Frequenzen bei, was zu einer starken Auslöschung führt. Die beitragenden Frequenzen hängen von der Lage und der Gewichtung der Deltafunktionen ab. Diese beiden Faktoren sind in Abb. 5.5 dargestellt: die x -Komponente ist die Lage, die y -Komponente die Gewichtung. Aus einer solchen Überlagerung von Frequenzen ergibt sich eine durchschnittliche Frequenz, die in Abb. 5.7 als Schwingungsfrequenz zu erkennen ist, und ein unregelmäßiges Verhalten der Amplitude.

⁸Vgl. Anhang A und das Kapitel 4.

Wir verwenden den Zusammenhang zwischen der n ten Nullstelle und der Kreisfrequenz ω aus (5.23), um die Schwingungsfrequenz zu berechnen:

$$k_0^{(n)} = \frac{2n-1}{2\omega} \pi. \quad (5.38)$$

Aus der Abbildung 5.7 entnehmen wir: $k_0^{(2)} \approx 1.3$. Damit ergibt sich

$$\omega \approx 3.62 \quad (5.39)$$

als Schwingungsfrequenz. Da unser Streupotenzial achsensymmetrisch ist und wir die Fouriertransformierte bezüglich $2k$ gebildet haben, erwarten wir zu dieser Kreisfrequenz ein symmetrisches Streuzentrum bei $x \approx \pm 1.81$. Die Koordinaten der beiden Maximalwerte aus Abb. 5.5, die Mathematica uns liefert, lauten:⁹ (1.80, 3.55), (1.89, 3.64). Wir sehen also, dass die durchschnittliche Frequenz einem Beitrag aus dem Bereich der Maxima entspricht. Das Verhalten der Amplitude, also die Schwebung, ist so unregelmäßig, dass man nicht von einer Schwebungsfrequenz sprechen kann. Man kann nur eine quantitative Aussage machen, wie sich dieses Verhalten ändert für verschiedene ν und q .

Jetzt betrachten wir den Reflexionskoeffizienten in Abhängigkeit von der

Variation von ν (Abb. Seite 79)

und halten $q = 1.05$ konstant. Wir stellen jeweils $|f_{2\nu}(k)|^2$ über k für $\nu = -10, 10, 20$ und $\nu = 30$ dar. Das Streupotenzial $\rho_\nu(\hat{x})$ stellen wir für $\nu = -10$ und $\nu = 20$ ohne Normierungskonstante dar. Die Verbindung der Funktionswerte auf den Gitterpunkten ist auch hier nur der Übersichtlichkeit wegen geschehen. Wir erkennen in den Abb. 5.5, 5.8 und 5.9, dass sich die Funktionswerte des Streupotenzials für unterschiedliches ν nicht ändern (vgl. (5.32)). Aber wir weisen darauf hin, dass in allen drei Abbildungen der Maßstab der \hat{x} -Achse ein anderer ist: die Maxima der Wahrscheinlichkeitsdichte liegen für größer werdendes ν immer näher am Ursprung und dadurch wird der Abstand der Gitterpunkte $\pm q^n$, auf denen die Wahrscheinlichkeitsdichte des q -Teilchens von Null verschiedene Werte annimmt, immer kleiner.

Beide Veränderungen zeigen ihre Konsequenzen im Reflexionskoeffizient, bzw. in der Größe $|f_{2\nu}(k)|^2$. Für steigendes ν wird die Schwingungsfrequenz, die man in den Abb. 5.10, 5.11 und 5.12 erkennt, kleiner, da der Abstand der achsensymmetrischen Deltafunktionen im Streupotenzial kleiner wird.

Legt man eine Einhüllende über die Schwingung in Abb. 5.10 und vergleicht diese mit einer Einhüllenden in Abb. 5.6, erkennt man, dass ihre Formen fast identisch sind, was an der unveränderten Gewichtung der beitragenden Frequenzen liegt. Ein Unterschied der beiden Einhüllenden ist das Auftreten des ersten Maximums: in Abb.

⁹Diese Werte sind auf die zweite Stelle gekürzt.

5.6 erkennt man eine kleinere Schwebungsfrequenz¹⁰. Diese kleinere Schwebungsfrequenz hat ihren Ursprung offenbar darin, dass in Abb. 5.5 der Abstand benachbarter Deltafunktionen kleiner ist.

Insgesamt zeigen die Abbildungen, dass ein von der Form her gleichbleibendes Schwebungsmuster umso weiter nach aussen läuft, bzw. gestreckt ist, umso näher das dazugehörige Streuzentrum am Ursprung liegt.

Zum Schluss untersuchen wir das Verhalten des Reflexionskoeffizienten unter der

Variation von q (Abb. Seite 80).

Dazu betrachten wir $|f_0(k)|^2$ für $q = 1.1$, $q = 1.5$ und $q = 2$ und stellen auch das Streupotenzial $\rho_0(\hat{x})$ ohne Normierungskonstante für diese drei Werte von q dar.

Je weiter q sich von dem Wert Eins entfernt, umso weniger Gitterpunkte liegen in dem Bereich, auf dem das Streupotenzial wesentlich von Null verschieden ist (vgl. Kapitel 4). Für die Streuung bedeutet das, dass weniger Deltafunktionen beitragen. Der Ausdruck $|f_0(k)|^2$ setzt sich dementsprechend aus weniger Frequenzen zusammen. Das führt zu dem in den Abb. 5.16 und 5.17 sichtbaren Effekt der weniger starken Auslöschung und der stärkeren Ausprägung von Schwebungen. Die Schwebungen bleiben allerdings weiterhin unregelmäßig.

Für $q = 2$ ändert sich die Situation grundlegend. Alle $|f_\nu(k)|^2$, die wir in Diagrammen bisher dargestellt haben, ließen eine Schwingung und eine unregelmäßige Schwebung der Amplitude erkennen. In Abb. 5.18 erkennt man ein regelmäßiges, resonantes Streubild. Es gibt eine Hintergrundschwingung, deren Amplitude eine regelmäßige Schwebung ausführt, und stark ausgeprägte Resonanzpeaks bei $k \approx 3, 2n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Für den Fall $q = 2$ tragen nur noch etwa vier Streuzentren zur Streuung bei (Abb. 5.15).

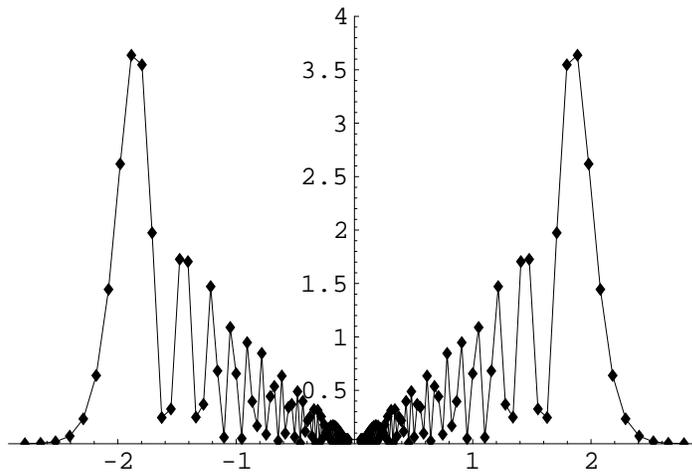
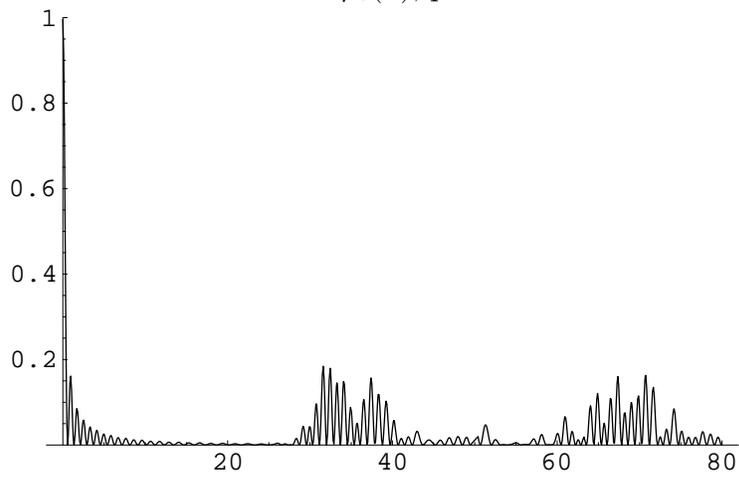
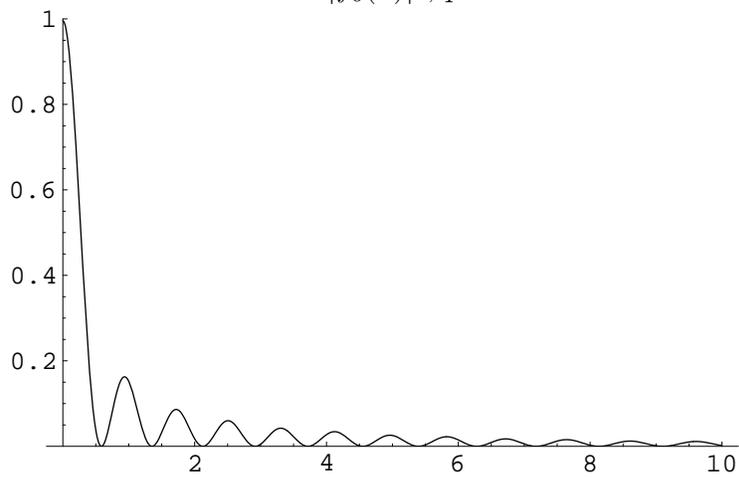
Zusammenfassung und Ausblick

Das freie q -Teilchen ist ein Teilchen, das durch einen Prozess der Symmetriebrechung aufgrund einer hohen Energiedichte, dessen Mechanismen noch unbekannt sind, auf einem q -Gitter lebt und streng lokalisiert ist. Unsere eindimensionalen, elastischen Streuversuche an einem solchen Teilchen sind natürlich nur erste Schritte in die Richtung, Spuren einer diskreten Raum-Zeit aufzuspüren. Die Eigenfunktionen zu dem q -deformierten dreidimensionalen Hamiltonoperator $H = \frac{1}{2}P \circ P$ bestehen in der Ortsdarstellung der Quantenmechanik aus den undeformierten Kugelflächenfunktionen und einem Radialteil, der auf dem gleichen q -Gitter definiert ist wie die eindimensionalen Eigenfunktionen [9]. Die Spuren des q -Gitters, die wir in den Reflexionskoeffizienten gefunden haben, werden also auch bei einer dreidimensionalen Streuung zu erkennen sein.

¹⁰Wir beschränken uns bei der Interpretation der Schwebung auf ihr erstes Maximum, weil dieses relativ klar auszumachen ist. Insgesamt sind die Schwebungen, die die Einhüllenden in Abb. 5.6 und 5.10 ausbilden, zu unregelmäßig, als dass man von einer Schwebungsfrequenz für den gesamten dargestellten Bereich von k sprechen könnte.

In unserer Untersuchung ist die Wechselwirkung zwischen dem einfallenden Teilchenstrom und dem q -Teilchen nur ein erster Ansatz. Darüberhinaus ist die Einbettung der q -Heisenberg-Algebra in die undeformierte Heisenberg-Algebra nicht eindeutig (vgl. Abschnitt 1.3). Unsere Betrachtungen sind also rein qualitativer Natur. Die Wertebereiche der Parameter q und s konnten durch sie nicht weiter eingeschränkt werden. Die Hoffnung ist, dass die Untersuchung von Eichtheorien auf höherdimensionalen nicht-kommutativen Räumen, die zur Zeit aus verschiedenen Perspektiven von großem Interesse sind [34],[6], [43], zu einer natürlichen Definition einer Wechselwirkung führen wird. Mit einer solchen Wechselwirkung wäre es sinnvoll, Streuquerschnitte von inelastischen Streuprozessen zu berechnen, die als Vorhersagen für kommende Beschleunigerexperimente dienen könnten.

In Kapitel 4 haben wir gesehen, dass der Hamilton-Operator des freien q -Teilchens für $q \rightarrow 1$ in den Hamiltonoperator des undeformierten freien Teilchens der Quantenmechanik übergeht. Ein solches Teilchen ist nicht lokalisiert und insofern als Streupotenzial sinnlos. Für dieses Kapitel fehlt uns also eine direkte Vergleichsmöglichkeit mit der undeformierten Quantenmechanik. Deswegen betrachten wir im letzten Kapitel noch die Streuung am Grundzustand des q -definierten Oszillators, dessen Grenzwert für $q \rightarrow 1$ der Grundzustand des undeformierten Oszillators ist [10].

Abb. 5.5: $\rho_0(\hat{x}), q = 1.05$ Abb. 5.6: $|f_0(k)|^2, q = 1.05$ Abb. 5.7: $|f_0(k)|^2, q = 1.05$

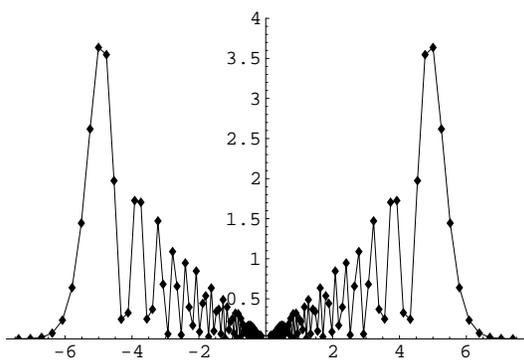


Abb. 5.8: $\rho_{-20}(\hat{x})$

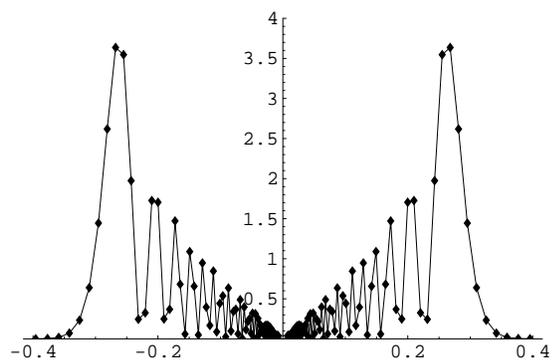


Abb. 5.9: $\rho_{40}(\hat{x})$

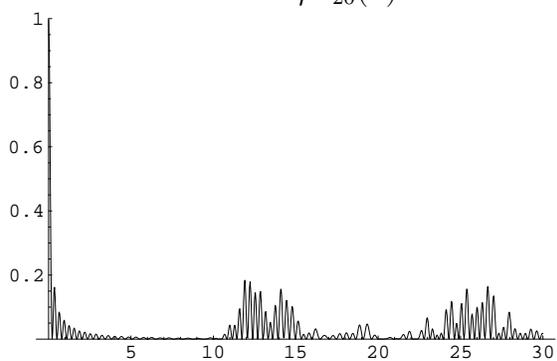


Abb. 5.10: $|f_{-20}(k)|^2$

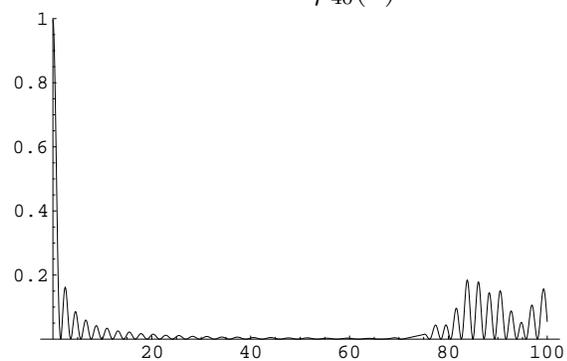


Abb. 5.11: $|f_{20}(k)|^2$

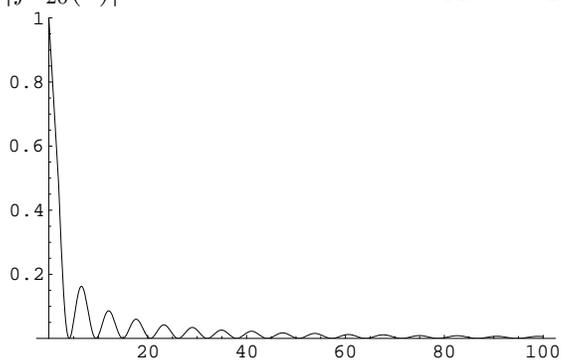
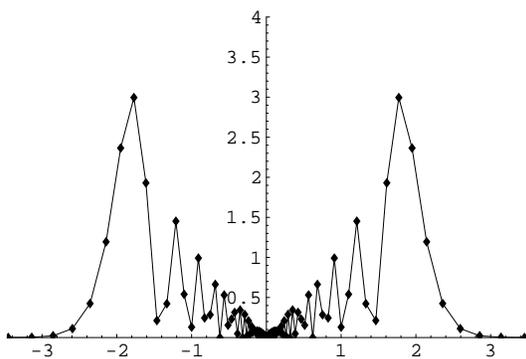
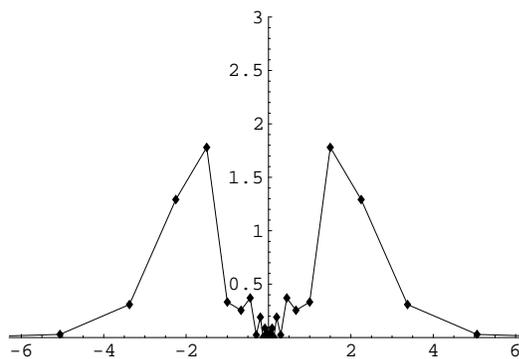
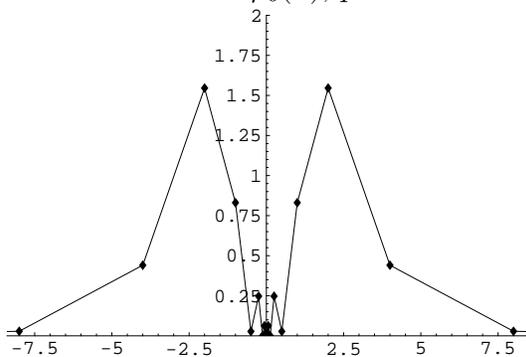
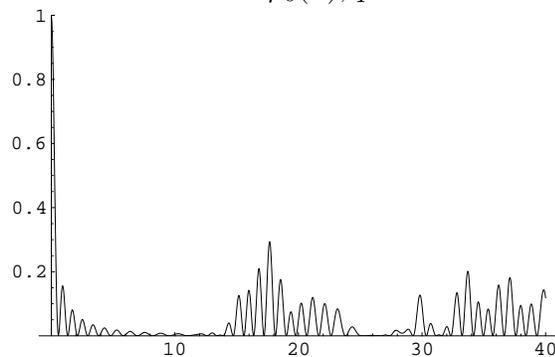
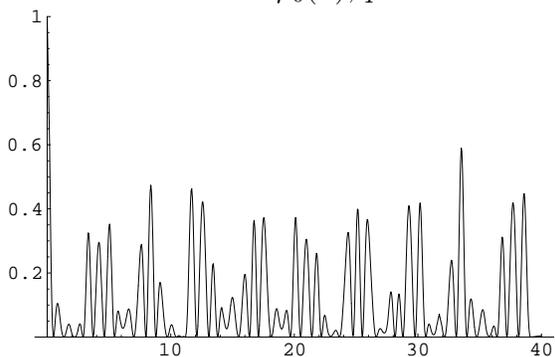
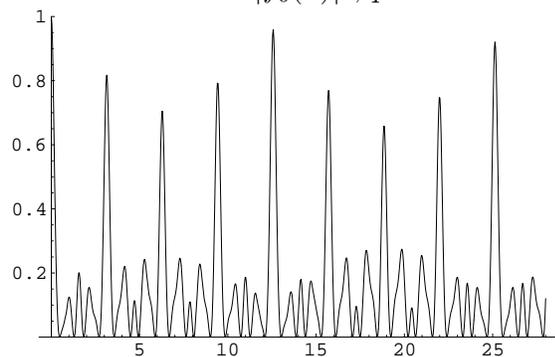


Abb. 5.12: $|f_{40}(k)|^2$

Abb. 5.13: $\rho_0(\hat{x}), q = 1.1$ Abb. 5.14: $\rho_0(\hat{x}), q = 1.5$ Abb. 5.15: $\rho_0(\hat{x}), q = 2$ Abb. 5.16: $|f_0(k)|^2, q = 1.1$ Abb. 5.17: $|f_0(k)|^2, q = 1.5$ Abb. 5.18: $|f_0(k)|^2, q = 2$

Kapitel 6

Streuung am q -Oszillator

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Streuung einer ebenen Welle an dem Grundzustand des q -deformierten Harmonischen Oszillators. Die Vorgehensweise ist hier analog zu der Streuung im vorhergehenden Abschnitt, nur dass wir hier ein anderes Streupotenzial verwenden.

6.1 Das Streupotenzial

Zuerst schreiben wir den Grundzustand des q -Oszillators, den wir in (2.162) angegeben haben, in Abhängigkeit der quantenmechanischen Ortsvariable \hat{x} . Dazu verwenden wir die Darstellung der q -deformierten x -Eigenzustände $|n, \sigma\rangle^s$ in der \hat{x} -Basis:

$$|n, \sigma\rangle^s = \int d\hat{x} q^{\frac{n}{2}} \delta(\hat{x} - s\sigma q^n) |\hat{x}\rangle. \quad (6.1)$$

Der Grundzustand des q -Oszillators lautet (2.162):

$$|0\rangle = \frac{N_q}{\sqrt{2}} \tilde{c}_0 \sum_{\substack{n=-\infty \\ \sigma=+,-}}^{\infty} \frac{q^n}{E_{q^{-2}}(-i\sigma q^{-1} q^{2n})} |2n, \sigma\rangle. \quad (6.2)$$

Damit finden wir für die Grundzustandsfunktion des q -Oszillators in der Ortsdarstellung den folgenden Ausdruck:

$$\psi_0(\hat{x}) = \frac{N_q}{s\sqrt{2}} \tilde{c}_0 \sum_{\substack{n=-\infty \\ \sigma=+,-}}^{\infty} \frac{\sigma \hat{x}}{E_{q^{-2}}(-i\sigma q^{-1} \hat{x}/s)} \delta(\hat{x} - s\sigma q^{2n}). \quad (6.3)$$

Als Streupotenzial verwenden wir das Absolutquadrat dieser Funktion, also die Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Eine analoge Überlegung wie zu dem Absolutquadrat des freien q -Teilchens liefert uns hier:

$$\rho_0(\hat{x}) \equiv \psi_0(\hat{x})^* \psi_0(\hat{x}) = \frac{N_q^2}{2} |\tilde{c}_0|^2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ \sigma=+,-}}^{\infty} \frac{q^{2n}}{E_{q^{-4}}(q^{-2} q^{4n})} \delta(\hat{x} - \sigma q^{2n}). \quad (6.4)$$

Wir haben die Deltafunktion im s -Raum weggelassen und $s = 1$ gesetzt. Das Quadrat der q -Exponentialfunktion haben wir aus (2.167) entnommen. Den Ausdruck $\rho_0(\hat{x})$ werden wir für drei verschiedene Werte von q ohne die Normierungskonstante graphisch darstellen (6.1, 6.2, 6.3), indem wir die Vorfaktoren der Deltafunktionen als Funktionswerte verwenden. Wir erinnern daran, dass dieses Potenzial wegen der Relation aus (2.164) auf Eins normiert ist.

Wir betrachten die Schrödinger-Gleichung aus (5.34) mit $\rho_0(\hat{x})$ als Potenzialterm. Analog zu Kapitel 5 führt uns die Berechnung des Reflexionskoeffizienten zu der Größe:

$$f(k) = \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{x} \rho_0(\hat{x}) \exp(2ik\hat{x}), \quad (6.5)$$

die mit dem Reflexionskoeffizienten auf die bereits bekannte Weise verbunden ist (5.36). Wenn wir (6.4) hier einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(k) &= \frac{N_q^2}{2} |\tilde{c}_0|^2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ \sigma=+,-}}^{\infty} \frac{q^{2n}}{E_{q^{-4}}(q^{-2}q^{4n})} \exp(2ik\sigma q^{2n}) \\ &= N_q^2 |\tilde{c}_0|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{2n}}{E_{q^{-4}}(q^{-2}q^{4n})} \cos(2kq^{2n}). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Als Funktion von k werden wir diese Reihe mit Hilfe von Mathematica graphisch auswerten. Wie schon in (5.37) handelt es sich um eine Überlagerung von Cosinusfunktionen mit verschiedenen Frequenzen und Gewichtungen. In den Abbildungen 6.4, 6.5 und 6.6 stellen wir $|f(k)|^2$ für verschiedene Werte von q dar.

6.2 Auswertung der Abbildungen

Die Abbildungen 6.1, 6.2 und 6.3 zeigen die Gewichtungen der überlagerten Frequenzen für verschiedene Werte von q (1.05, 1.1, 1.2). Es sind q -deformierte Exponentialfunktionen multipliziert mit q^{2n} in Abhängigkeit von q^{2n} . In der letzten Abbildung haben wir die Funktionswerte verbunden. Man erkennt, dass diese Funktionen nur auf einem endlichen Gebiet wesentlich von Null verschieden sind. Daher hat die Reihe aus (6.6) ein gutes Konvergenzverhalten. Je weiter q sich von Eins entfernt, umso weniger Gitterpunkte liegen in diesem Bereich. Das bedeutet, wie schon im Kapitel 5, dass für größere q weniger Streuzentren zum Reflexionskoeffizienten beitragen.

Die q -Exponentialfunktion hat die gleiche Form wie eine undeformierte Gauß-Funktion, allerdings nimmt sie nur auf einem q -Gitter von Null verschiedene Werte an. Dass sie für $\hat{x} = q^{2n} \rightarrow 0$ verschwindet, liegt an dem Vorfaktor q^{2n} . Dieser Vorfaktor stammt aus der q -Fouriertransformation und aus der quantenmechanischen Ortsdarstellung (6.1). Ohne diesen Faktor wäre $f(k)$ nicht konvergent.

Der Grundzustand des q -Oszillators, der hier als stationäres Streupotenzial dient, ist die q -Fouriertransformierte des Grundzustandes aus [10]. Dieser geht, wie dort gezeigt wurde, für $q \rightarrow 1$ in den Grundzustand des undeformierten Oszillators über. Die

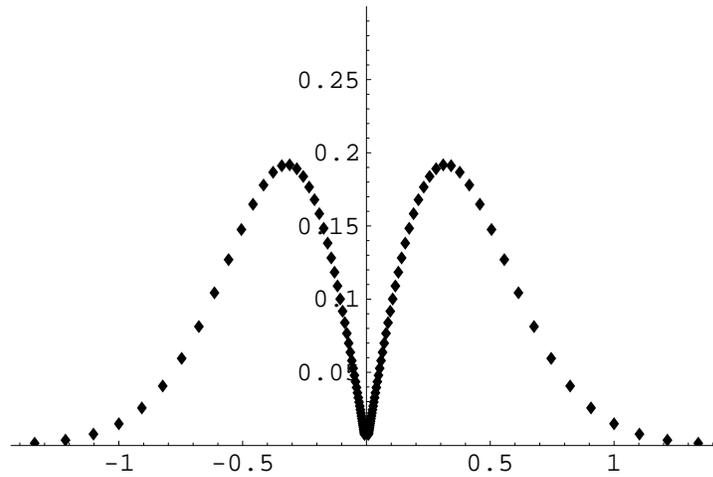
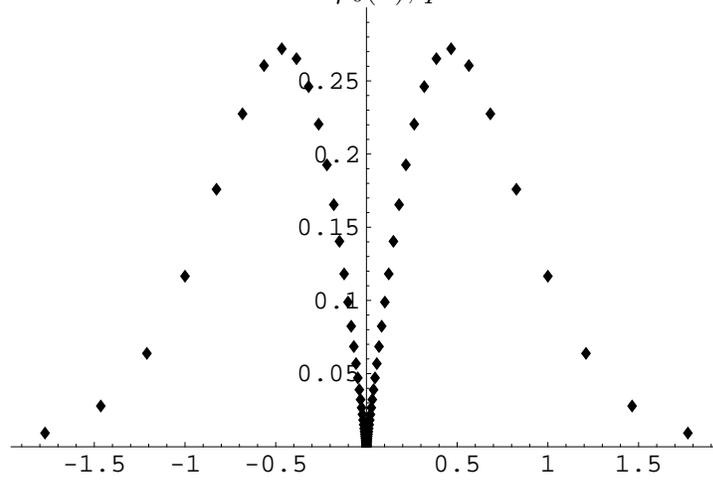
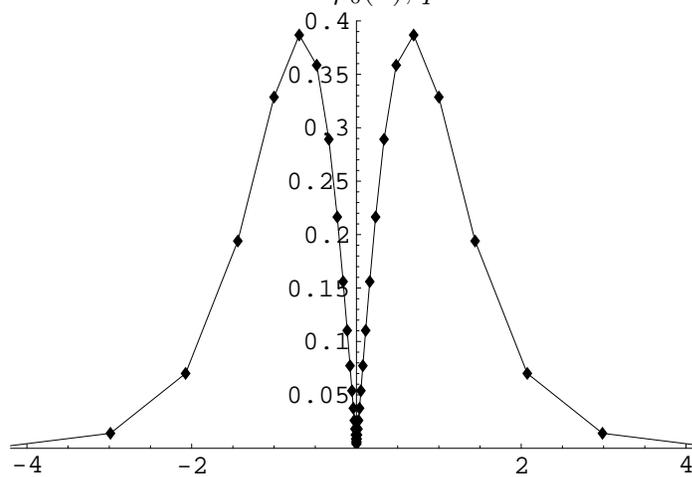
Streuung an einer undeformierten Gauß-Funktion hat in (5.25) für den Ausdruck $f(k)$ wieder eine Gauß-Funktion ergeben.

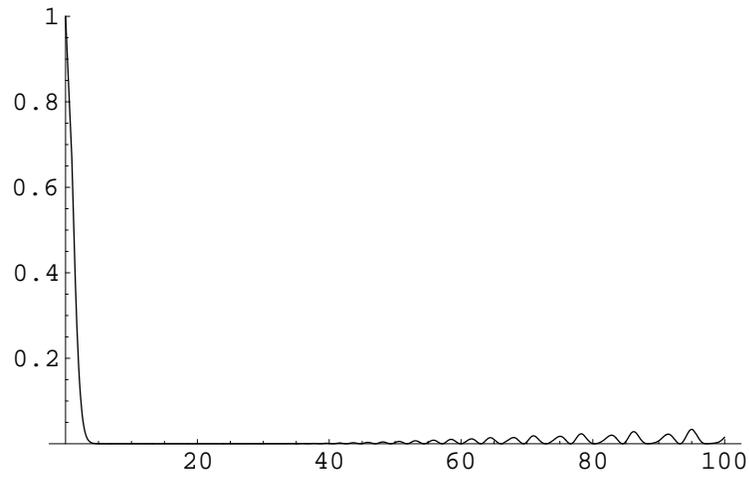
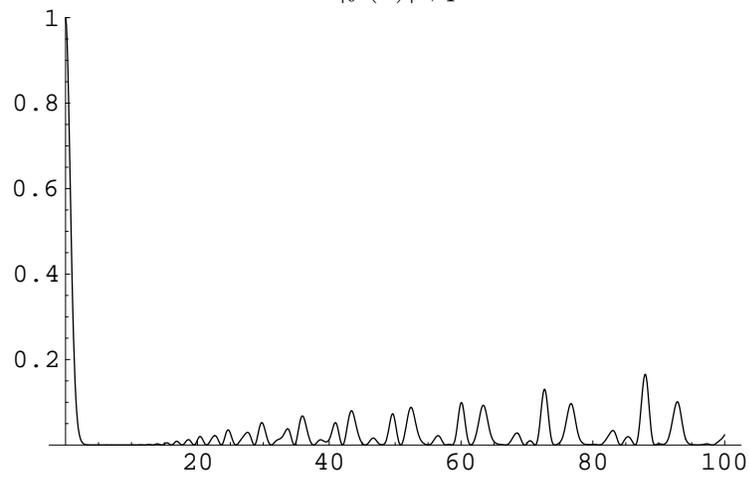
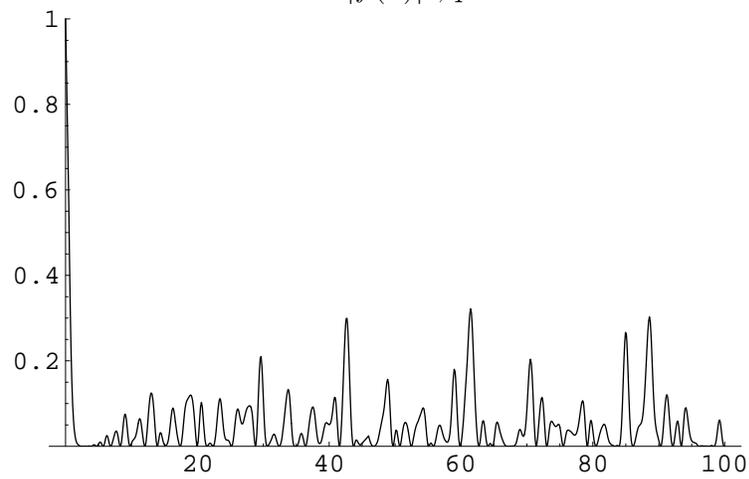
In den Abbildungen 6.4, 6.5 und 6.6 finden wir für einen gewissen Bereich von k , der für größer werdendes q kleiner wird, die Form einer Gauß-Funktion wieder. Je näher q an Eins liegt, desto mehr Frequenzen tragen zu $f(k)$ bei, die eine starke Auslöschung ergeben. In Abb. 6.4 ($q = 1.05$) erkennen wir erst für $k > 40$ eine unregelmäßige Schwingung mit sehr kleiner Amplitude, die vom Verhalten der Streuung an einer undeformierten Gaußkurve abweicht.

In Abb. 6.5 und 6.6 ist $q = 1.1$ und 1.2 , und die entsprechenden Streupotenziale enthalten weniger Gitterpunkte, was zu einer weniger starken Auslöschung der überlagerten Frequenzen führt. Die unregelmäßige Schwingung setzt bei kleineren Werten für k ein: für $q = 1.1$ bei $k \approx 15$ und für $q = 1.2$ bei $k \approx 5$. Die Amplitude wird größer und ebenfalls zunehmend unregelmäßiger, ohne dass man allerdings von einer Schwebung sprechen kann.

Es sei noch einmal daran erinnert, dass der Reflexionskoeffizient $R = |f(k)|^2/4k^2$ ist und die Bornschen Näherung in einer Dimension für $k \rightarrow 0$ keinen Sinn macht.

Insgesamt erkennt man für wachsendes q die zunehmende Abweichung von dem Reflexionskoeffizienten einer ebenen Welle, die an einem Potenzial in Form einer undeformierten Gaußkurve gestreut wurde (5.25).

Abb. 6.1: $\rho_0(\hat{x}), q = 1.05$ Abb. 6.2: $\rho_0(\hat{x}), q = 1.1$ Abb. 6.3: $\rho_0(\hat{x}), q = 1.2$

Abb. 6.4: $|f(k)|^2, q = 1.05$ Abb. 6.5: $|f(k)|^2, q = 1.1$ Abb. 6.6: $|f(k)|^2, q = 1.2$

Anhang A

q -Hypergeometrische Funktionen

A.1 Allgemein

Die q -hypergeometrischen Funktionen ${}_r\phi_s$ sind eine Verallgemeinerung der hypergeometrischen Funktionen. Man erhält sie, indem man die gewöhnlichen Fakultäten durch sogenannte q -verschobene Fakultäten ersetzt:

$$(a; q)_k \equiv \prod_{j=0}^{k-1} (1 - aq^j), \quad (a; q)_0 \equiv 1,$$
$$(a; q)_\infty \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} (a; q)_k. \quad (\text{A.1})$$

Der Zusammenhang der q -Fakultäten zu den üblichen Fakultäten ist der folgende:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{(q^a; q)_k}{(1 - q)^k} = (a)_k \equiv a(a + 1) \cdots (a + k - 1). \quad (\text{A.2})$$

Die $(a)_k$ sind die Pochhammer-Symbole, es gilt: $(1)_k = k!$. Hier gilt wie im größten Teil der mathematischen Literatur $0 < q < 1$ und $a \in \mathbb{R}$. Wir geben in diesem Abschnitt einige Definitionen aus dieser Literatur an, im Wesentlichen aus [24], [32] und [31]. Da in der Physik und auch in dieser Arbeit $q > 1$ gilt, verwenden wir diese Definitionen mit der Ersetzung: $q \rightarrow q^{-2}$. Wir geben noch einige Eigenschaften der q -Fakultät an, die wir bei Umrechnungen benötigen:

$$\begin{aligned} (1; q)_k &= 0, & (0; q)_k &= 1 \\ (a; q)_{2n} &= (a; q^2)_n (aq; q^2)_n \\ (a; q)_n &= \frac{(q; q)_\infty}{(aq^n; q)_\infty} \\ (q; q)_{2n+1} &= (1 - q)(q^2; q)_{2n} \\ (a; q)_\infty &= (a; q^2)_\infty (aq; q^2)_\infty \\ (a^2; q^2)_\infty &= (a; q)_\infty (-a; q)_\infty. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Eine weitere wichtige Identität, die wir in Kapitel 2.6.3 benötigen, ist das Jacobische Dreierprodukt, das wir in dieser Form aus dem Anhang II aus [24] entnehmen:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} z^k = (q^2, -zq, -q/z; q^2)_{\infty}. \quad (\text{A.4})$$

In den q -hypergeometrischen Funktionen wird noch folgende abkürzende Schreibweise für ein Produkt von mehreren q -Fakultäten benutzt:

$$(a_1, a_2, \dots, a_r; q)_k \equiv (a_1; q)_k (a_2; q)_k \cdots (a_r; q)_k. \quad (\text{A.5})$$

Mit dieser Schreibweise werden die allgemeinen q -hypergeometrischen Funktionen folgendermaßen definiert:

$${}_r\phi_s[a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_s; q, z] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1, \dots, a_r; q)_k ((-1)^k q^{k(k-1)/2})^{s-r+1}}{(b_1, \dots, b_s; q)_k (q; q)_k} z^k. \quad (\text{A.6})$$

Für den Konvergenzradius ρ dieser Funktionen gilt [24]:

$$\rho = \begin{cases} \infty & \text{für } r - s < 1 \\ 1 & \text{für } r - s = 1 \\ 0 & \text{für } r - s > 1. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Im klassischen Limes konvergieren die q -hypergeometrischen Funktionen gegen die hypergeometrischen Funktionen ${}_rF_s^1$, deren Koeffizienten aus den in A.2 erwähnten Pochhammer-Symbolen bestehen.

Die Funktionen ${}_1\phi_1$ erfüllen eine Orthonormalitätsrelation, aus der später die Orthonormalität der q -trigonometrischen Funktionen folgt. Diese Relation entnehmen wir aus [32]:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{k+n} \frac{(z^2; q)_{\infty}}{(q; q)_{\infty}} {}_1\phi_1[0; z^2; q, q^{n+k+1}] \\ & \times z^{k+m} \frac{(z^2; q)_{\infty}}{(q; q)_{\infty}} {}_1\phi_1[0; z^2; q, q^{m+k+1}] = \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Mit Hilfe dieser allgemeinen q -hypergeometrischen Funktionen kann man nun einige spezielle q -Funktionen definieren, die im Limes $q \rightarrow 1$ alle gegen ihr hypergeometrisches Analogon konvergieren. Da dies das einzige Kriterium für die Bezeichnung ist, gibt es natürlich mehrere q -Versionen einer Funktion.

¹Diese Bezeichnung geht auf Gauß zurück, der 1812 die Reihe ${}_2F_1(a, b; c; z)$ betrachtete und sie damals mit $F(a, b, c, z)$ bezeichnete. Heine untersuchte dreißig Jahre später eine q -deformierte Version dieser Reihe und nannte sie $\phi(a, b, c, q, z)$. Daraus wurde dann die allgemeinere Bezeichnung ${}_r\phi_s$ und die Definition in A.6 [24].

Die q -Bessel Funktionen

kommen zwar in dieser Arbeit nicht explizit vor, aber sie erfüllen eine Summationsregel, die wir im Anhang B verwenden. Aus [32], wo auch der Grenzübergang $q \rightarrow 1$ in die üblichen Bessel Funktionen nachvollzogen wird, entnehmen wir die Definition

$$J_\alpha(z; q^2) \equiv z^\alpha \frac{(q^{2\alpha+2}; q^2)_\infty}{(q^2; q^2)_\infty} {}_1\phi_1[0; q^{2\alpha+2}; q^2, q^2 z^2] \quad (\text{A.9})$$

und die Summationsregel

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k(-\gamma+1)} J_\alpha(q^{m+k}; q^2) J_\beta(q^{n+k}; q^2) \\ &= \begin{cases} q^{n\beta} q^{m(\gamma-\beta-1)} \frac{(q^{\alpha-\beta+\gamma+1}, q^{2\beta+2}; q^2)_\infty}{(q^{\alpha+\beta-\gamma+1}, q^2; q^2)_\infty} \\ \quad \times {}_2\phi_1[q^{\beta-\alpha-\gamma+1}, q^{\alpha+\beta-\gamma+1}; q^{2\beta+2}; q^2, q^{2n-2m+\alpha-\beta+\gamma+1}], \\ q^{m\alpha} q^{n(\gamma-\alpha-1)} \frac{(q^{\beta-\alpha+\gamma+1}, q^{2\alpha+2}; q^2)_\infty}{(q^{\alpha+\beta-\gamma+1}, q^2; q^2)_\infty} \\ \quad \times {}_2\phi_1[q^{\alpha-\beta-\gamma+1}, q^{\alpha+\beta-\gamma+1}; q^{2\alpha+2}; q^2, q^{2m-2n+\beta-\alpha+\gamma+1}]. \end{cases} \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

A.2 Die q -Exponentialfunktionen

Weitere wichtige Funktionen, die mit den allgemeinen q -hypergeometrischen Funktionen definiert werden können, sind die q -deformierten Exponentialfunktionen. Aus dem q -Binomialtheorem [24] folgen zwei natürliche Definitionen für eine q -deformierte Version der Exponentialfunktion:

$$e_q(z) \equiv {}_1\phi_0(0; -; q, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q; q)_n} = \frac{1}{(z; q)_\infty}, \quad |z| < 1 \quad (\text{A.11})$$

und

$$E_q(z) \equiv {}_0\phi_0(-; -; q, -z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(q; q)_n} z^n = (-z; q)_\infty. \quad (\text{A.12})$$

In der Produktschreibweise, die aus dem q -Binomialtheorem folgt, erkennt man sofort die folgende Relation:

$$e_q(z) E_q(-z) = 1. \quad (\text{A.13})$$

Der Grenzübergang zur undeformierten Exponentialfunktion wird mit der folgenden Skalierung durchgeführt:

$$\lim_{q \rightarrow 1} = e_q(z(1-q)) = \lim_{q \rightarrow 1} E_q(z(1-q)) = e^z. \quad (\text{A.14})$$

A.3 Die q -trigonometrischen Funktionen

Auch für die q -deformierten trigonometrischen Funktionen gibt es verschiedene Möglichkeiten der Definition. In [24] werden sie analog zu den undeformierten Funktionen aus einer Linearkombination der beiden q -Exponentialfunktionen definiert. Wir verwenden jedoch die Definition aus [32], wo diese Funktionen direkt aus den ${}_1\phi_1$ definiert wurden, weil sie für eine q -deformierte Fouriertransformation benötigt wurden, die im Wesentlichen auf der Relation (A.7) beruht. Wir schreiben die Definitionen aus [32] direkt mit $q \rightarrow q^{-2}$ um und finden:

$$\begin{aligned}\cos_q(z) &\equiv {}_1\phi_1(0; q^{-2}; q^{-4}, q^{-4}z^2) \\ &= \frac{1}{N_q} z^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(z; q^{-4}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{-2k(k+1)}}{(q^{-2}; q^{-2})_{2k}} z^{2k}\end{aligned}\tag{A.15}$$

und

$$\begin{aligned}\sin_q(z) &\equiv (1 - q^{-2})^{-1} z {}_1\phi_1(0; q^{-6}; q^{-4}, q^{-4}z^2) \\ &= \frac{1}{N_q} z^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(z; q^{-4}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{-2k(k+1)}}{(q^{-2}; q^{-2})_{2k+1}} z^{2k+1}.\end{aligned}\tag{A.16}$$

N_q ist eine Normierungskonstante:

$$N_q = \frac{(q^{-2}; q^{-4})}{(q^{-4}; q^{-4})}.\tag{A.17}$$

Diese Funktionen werden in der Darstellungstheorie der q -Heisenbergalgebra verwendet [17]. Aus der Relation (A.8) folgt durch die Ersetzung $z = q^{-1}$ und $q \rightarrow q^{-4}$ eine Orthonormalitäts- und Vollständigkeitsrelation für $\cos_q(z)$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{-2k} \cos_q(q^{-2(n+k)}) \cos_q(q^{-2(m+k)}) = \frac{1}{N_q^2} q^{2n} \delta_{nm}\tag{A.18}$$

und durch die Ersetzung $z = q^{-6}$ und $q \rightarrow q^{-4}$ die analogen Relationen für $\sin_q(z)$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{-2k} \sin_q(q^{-2(n+k)}) \sin_q(q^{-2(m+k)}) = \frac{1}{N_q^2} q^{2n} \delta_{nm}.\tag{A.19}$$

Die Relationen (A.20) und (A.21) zeigen, dass sowohl \cos_q als auch \sin_q eine orthogonale und vollständige Menge von Funktionen bilden. Die beiden Summen konvergieren

nur, wenn über das gerade Gitter summiert wird. Auf dem ungeraden Untergitter q^{2k+1} oszillieren die Funktionen immer stärker für $k \rightarrow \infty$, während gleichzeitig die Nullstellen der beiden Funktionen für $k \rightarrow \infty$ gegen die Gitterpunkte q^{2k} konvergieren [18]. Das ist der Grund, warum wir bei den Darstellungen immer wieder zwischen geradem und ungeradem Gitter unterscheiden müssen. In den Abbildungen (4.1) bis (4.5) sieht man die Funktionen in Abhängigkeit von q^{2k} und noch mit q^{2k} multipliziert. Man erkennt, dass sie für große k sehr schnell gegen Null konvergieren.

In [32] wurden Differenzenrelationen für die beiden Funktionen hergeleitet, die einer q -Ableitung entsprechen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z}[\cos_q(z) - \cos_q(q^{-2}z)] &= -q^{-2} \sin_q(q^{-2}z) \\ \frac{1}{z}[\sin_q(z) - \sin_q(q^{-2}z)] &= \cos_q(z). \end{aligned} \tag{A.20}$$

Hier liegt der Grund, warum wir im Vergleich zu [32] $q \rightarrow q^{-2}$ ersetzt haben und nicht $q \rightarrow q^{-1}$. Damit die Wirkung des q -Heisenberg-Operators p in der Darstellung (1.11) und dementsprechend die Wirkung der Abbildung ∇ aus (2.12) mit dieser Differenzenrelation verglichen werden kann, musste q durch q^{-2} ersetzt werden.

Daraus folgen dann die Relationen (2.70) und (2.71) für ∇ und die Tatsache, dass die q -trigonometrischen Funktionen die Eigenfunktionen zu ∇^2 sind. Auch bei der Verwendung dieser Funktionen in der q -Fouriertheorie als Übergangsfunktionen zwischen der x - und der p -Basis wird diese Differenzenrelation benutzt und somit die Ersetzung $q \rightarrow q^{-2}$ notwendig.

Anhang B

Die q -Fouriertransformation

B.1 Allgemein

In [32] wurde eine q -deformierte Fouriertransformation eingeführt, die wir in dieser Arbeit an mehreren Stellen verwenden. Ausgehend von der Relation A.8 führt Koornwinder ein Paar von Transformationen ein, das unter unserer Reskalierung $q \rightarrow q^{-2}$ folgende Form annimmt:

$$\begin{aligned} g(q^{-2n}) &= N_q \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{-2k} \cos_q(q^{-2(k+n)}) f(q^{-2k}) \\ f(q^{-2k}) &= N_q \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{-2n} \cos_q(q^{-2(k+n)}) g(q^{-2n}). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Die gleichen Relationen gelten, wenn wir \cos_q durch \sin_q ersetzen. Die Transformation stellt eine Isometrie dar:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{-2k} |f(q^{-2k})|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{-2n} |g(q^{-2n})|^2. \quad (\text{B.2})$$

In der Darstellungstheorie der q -Heisenberg-Algebra wird die q -Fouriertransformation verwendet, um Basiswechsel von der x -in die p -Basis und umgekehrt zu generieren.

B.2 Die Stufenfunktion auf dem Gitter

An dieser Stelle wollen wir noch ein weiteres Beispiel für die Anwendung der q -Fouriertransformation angeben. Wir berechnen sie für die Stufenfunktion auf dem q -Gitter. Diese Funktion haben wir zwar in dieser Arbeit nicht verwendet, aber sie wird in zukünftigen Untersuchungen sicherlich von Nutzen sein. Wir definieren die Stufenfunktion:

$$\Theta(q^{2n} - q^{2M}) \equiv \begin{cases} 1 & , n \leq M \\ 0 & , n > M. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Jetzt berechnen wir die q -Fouriertransformierte dieser Funktion, die wir mit einem Tilde kennzeichnen:

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}(q^{2k} - q^{2M}) &= N_q \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n} \cos_q(q^{2(k+n)}) \Theta(q^{2n} - q^{2M}) \\ &= N_q \sum_{n=-\infty}^M q^{2n} \cos_q(q^{2(k+n)}).\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

Wir berechnen diese Summe mit Hilfe des in Kapitel 2.2.2 eingeführten Integrals. Mit (2.61) finden wir:

$$\int_{-\infty}^{2M+1} h(x) = \lambda \sum_{\mu=-\infty}^M \langle 2\mu + 1 | Lxh(x) | 2\mu + 1 \rangle \quad (\text{B.5})$$

$$= \lambda \sum_{\mu=-\infty}^M q^{2\mu} h(q^{2\mu}). \quad (\text{B.6})$$

Daraus folgt für $\tilde{\Theta}$:

$$\tilde{\Theta}(q^{2k} - q^{2M}) = \frac{N_q}{\lambda} \int_{-\infty}^{2M+1} \cos_q(q^{2k}x). \quad (\text{B.7})$$

Aus (2.70) wissen wir, dass wir \cos_q als q -Ableitung von \sin_q schreiben können. Dann ergibt sich mit Anwendung des Stokesschen Theorems (2.55):

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}(q^{2k} - q^{2M}) &= N_q \int_{-\infty}^{2M+1} q^{-2k} \nabla L \sin_q(q^{2k}x) \\ &= N_q q^{-2k} L \sin_q(q^{2k}q^{2M+1}) \\ &= N_q q^{-2k} \sin_q(q^{2(k+M)}).\end{aligned}\quad (\text{B.8})$$

Wir erhalten also eine \sin_q Funktion als q -Fouriertransformation der Stufenfunktion auf dem Gitter.

Die andere Richtung der q -Fouriertransformation kann ebenfalls explizit berechnet werden. Wir definieren die Umkehrtransformation:

$$\begin{aligned}g(q^{2n}) &= N_q \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{2k} \cos_q(q^{2(k+n)}) \tilde{\Theta}(q^{2k} - q^{2M}) \\ &= N_q^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos_q(q^{2(k+n)}) \sin_q(q^{2(k+M)}).\end{aligned}\quad (\text{B.9})$$

Wenn wir in der Summe \cos_q und \sin_q mit (A.17) und (A.18) als q -Bessel Funktionen schreiben, können wir sie auf die Form der Summationsregel aus (A.10) bringen:

$$g(q^{2n}) = q^{M+n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{-2k} J_{-\frac{1}{2}}(q^{2(n-k)}; q^{-4}) J_{\frac{1}{2}}(q^{2(M-k)}; q^{-4}). \quad (\text{B.10})$$

Wir ersetzen in (A.10) q durch q^{-2} und für die verschiedenen Parameter: $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 0$, $m = -n$ und $n = -M$. Mit diesen Ersetzungen geht (A.10) genau in die Summe von (B.10) über und wir benutzen die rechte Seite von (A.10) um $g(q^{2n})$ zu berechnen:

$$g(q^{2n}) = q^{M+n} \begin{cases} q^{M-3n} \frac{(1, q^{-6}; q^{-4})_{\infty}}{(q^{-2}, q^{-4}; q^{-4})_{\infty}} {}_2\Phi_1(q^{-4}, q^{-2}; q^{-6}; q^{-4}, q^{-4(n-M)}) \\ q^{-(M+n)} \frac{(q^{-4}, q^{-2}; q^{-4})_{\infty}}{(q^{-2}, q^{-4}; q^{-4})_{\infty}} {}_2\Phi_1(1, q^{-2}; q^{-2}; q^{-4}, q^{-4(M-n+1)}). \end{cases}$$

Der obere Ausdruck ist wegen der Eins in dem Produkt identisch Null. Der untere Ausdruck hat eine Eins im Argument von ${}_2\phi_1$ und ist deswegen - und weil der Vorfaktor gleich Eins ist - identisch eins. Die Bedingung für n und M bekommt man durch den Konvergenzradius, der für ${}_2\phi_1$ Eins ist. Wir erhalten insgesamt:

$$g(q^{2n}) = \begin{cases} 0 & , n > M \\ 1 & , n \leq M. \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Dies ist wieder die Stufenfunktion, die wir in (B.3) definiert haben.

Anhang C

Transformationsverhalten

C.1 Der Tensor T

In Kapitel 3.3 haben wir behauptet, dass die Größe T :

$$T = (\partial_t E)E^{-1} - E(L^{-1}\omega)E^{-1} + \omega \quad (\text{C.1})$$

unter Eichtransformationen wie ein Tensor transformiert:

$$T' = e^{i\alpha} T e^{-i\alpha}. \quad (\text{C.2})$$

Wir kennen das Transformationsverhalten von E (3.11), E^{-1} (3.24) und ω (3.54) und können die Behauptung durch Einsetzen beweisen:

$$\begin{aligned} T' &= (\partial_t E')(E^{-1})' - E'(L^{-1}\omega')(E^{-1})' + \omega' \\ &= (\partial_t e^{i\alpha} E(L^{-1}e^{-i\alpha}))(L^{-1}e^{i\alpha})E^{-1}e^{-i\alpha} \\ &\quad - e^{i\alpha} E(L^{-1}e^{-i\alpha})(L^{-1}(e^{i\alpha}\omega e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}\partial_t e^{-i\alpha}))(L^{-1}e^{i\alpha})E^{-1}e^{-i\alpha} \\ &\quad + e^{i\alpha}\omega e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}\partial_t e^{-i\alpha} \\ &= (\partial_t e^{i\alpha})e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}(\partial_t E)E^{-1}e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}E(\partial_t L^{-1}e^{-i\alpha})(L^{-1}e^{i\alpha})E^{-1}e^{-i\alpha} \\ &\quad - e^{i\alpha}E(L^{-1}\omega)E^{-1}e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}E(L^{-1}\partial_t e^{-i\alpha})(L^{-1}e^{i\alpha})E^{-1}e^{-i\alpha} \\ &\quad + e^{i\alpha}\omega e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}\partial_t e^{-i\alpha} \\ &= e^{i\alpha}(\partial_t E)E^{-1}e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}E(L^{-1}\omega)E^{-1}e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}\omega e^{-i\alpha} \\ &= e^{i\alpha} T e^{-i\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Damit haben wir gezeigt, dass T ein Tensor ist.

C.2 Der Tensor \mathcal{F}

Im Kapitel 3.2 haben wir die Größe \mathcal{F} definiert:

$$\mathcal{F} = EF(LE) \quad (\text{C.4})$$

mit:

$$F = g\partial_t\varphi - (\nabla\omega) + (L^{-1}\omega)g\varphi - g\varphi(L\omega). \quad (\text{C.5})$$

Wir haben in (3.63) behauptet, dass \mathcal{F} ein Tensor ist, das wollen wir hier nachrechnen. Da wir wissen, dass \mathcal{L} tensoriell transformiert, reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{F}\mathcal{L} = EFL$ ein Tensor ist. Wir rechnen die Transformationseigenschaft nach, indem wir die verschiedenen transformierten Größen einsetzen, deren Transformationsverhalten wir im Kapitel 3 hergeleitet haben: (3.11), (3.16) und (3.54). Bei der Umrechnung einiger Terme benutzen wir zwei Identitäten, die aus der Leibnizregel für ∇ (2.21) und aus der für ∂_t folgen:

$$(\nabla e^{i\alpha})(Le^{-i\alpha}) = -(L^{-1}e^{i\alpha})(\nabla e^{-i\alpha}) \quad (\text{C.6})$$

und

$$e^{i\alpha}(\partial_t e^{-i\alpha}) = -(\partial_t e^{i\alpha})e^{-i\alpha}. \quad (\text{C.7})$$

Mit diesen beiden Regeln und den verschiedenen transformierten Größen finden wir:

$$\begin{aligned} E'F'L &= e^{i\alpha}E(L^{-1}e^{-i\alpha}) \left[\partial_t \left((L^{-1}e^{i\alpha})g\varphi(Le^{-i\alpha}) - (\nabla e^{i\alpha})(Le^{-i\alpha}) \right) \right. \\ &\quad - \nabla (e^{i\alpha}\omega e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}\partial_t e^{-i\alpha}) \\ &\quad + (L^{-1}(e^{i\alpha}\omega e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}\partial_t e^{-i\alpha})) \left((L^{-1}e^{i\alpha})g\varphi(Le^{-i\alpha}) - (\nabla e^{i\alpha})(Le^{-i\alpha}) \right) \\ &\quad \left. - \left((L^{-1}e^{i\alpha})g\varphi(Le^{-i\alpha}) - (\nabla e^{i\alpha})(Le^{-i\alpha}) \right) (L(e^{i\alpha}\omega e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}\partial_t e^{-i\alpha})) \right] L \\ &= e^{i\alpha}E(L^{-1}e^{-i\alpha}) \left[(\partial_t L^{-1}e^{i\alpha})g\varphi(Le^{-i\alpha}) + (L^{-1}e^{i\alpha})g\partial_t\varphi(Le^{-i\alpha}) \right. \\ &\quad + (L^{-1}e^{i\alpha})g\varphi(\partial_t Le^{-i\alpha}) - (\partial_t \nabla e^{i\alpha})(Le^{-i\alpha}) - (\nabla e^{i\alpha})(\partial_t Le^{-i\alpha}) \\ &\quad - (\nabla e^{i\alpha})(L\omega)(Le^{-i\alpha}) - (L^{-1}e^{i\alpha})(\nabla\omega)(Le^{-i\alpha}) - (L^{-1}e^{i\alpha})(L^{-1}\omega)(\nabla e^{-i\alpha}) \\ &\quad + (\nabla \partial_t e^{i\alpha})(Le^{-i\alpha}) + (L^{-1}\partial_t e^{i\alpha})(\nabla e^{-i\alpha}) \\ &\quad + (L^{-1}e^{i\alpha})(L^{-1}\omega)g\varphi(Le^{-i\alpha}) + (L^{-1}e^{i\alpha})(L^{-1}\omega)(\nabla e^{-i\alpha}) \\ &\quad - (L^{-1}\partial_t e^{i\alpha})g\varphi(Le^{-i\alpha}) - (L^{-1}\partial_t e^{i\alpha})(\nabla e^{-i\alpha}) \\ &\quad - (L^{-1}e^{i\alpha})g\varphi(L\omega)(Le^{-i\alpha}) - (L^{-1}e^{i\alpha})g\varphi(L\partial_t e^{-i\alpha}) \\ &\quad \left. + (\nabla e^{i\alpha})(L\omega)(Le^{-i\alpha}) + (\nabla e^{i\alpha})(L\partial_t e^{-i\alpha}) \right] L. \end{aligned}$$

Man erkennt, dass die allermeisten Terme sich gegenseitig aufheben. Insgesamt bleiben folgende Ausdrücke zurück:

$$\begin{aligned} E'F'L &= \left[e^{i\alpha}Eg(\partial_t\varphi)(Le^{-i\alpha}) - e^{i\alpha}E(\nabla\omega)(Le^{-i\alpha}) \right. \\ &\quad \left. + e^{i\alpha}E(L^{-1}\omega)g\varphi(Le^{-i\alpha}) - e^{i\alpha}Eg\varphi(L\omega)(Le^{-i\alpha}) \right] L \\ &= e^{i\alpha}EF(Le^{-i\alpha})L \\ &= e^{i\alpha}EFLe^{-i\alpha}. \quad (\text{C.8}) \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass EFL wie ein Tensor transformiert. Wegen der Identität

$$EFL = EFL E E^{-1} = EF(LE)LE^{-1} = EF(LE)\mathcal{L} \quad (\text{C.9})$$

und der Kovarianz von \mathcal{L} folgt, dass auch $\mathcal{F} = EF(LE)$ wie ein Tensor transformiert:

$$\mathcal{F}' = e^{i\alpha} \mathcal{F} e^{-i\alpha}. \quad (\text{C.10})$$

Insgesamt haben wir somit die ursprüngliche Behauptung (3.63) bewiesen.

Literaturverzeichnis

- [1] A. Solomon, “A characteristic functional for deformed photon phenomenology”, *Physics Letters A* **196** (1994) 29–34.
- [2] M. Sweedler, *Hopf Algebras*. Benjamin, New York, 1969.
- [3] A. Klimyk und K. Schmüdgen, *Quantum Groups and Their Representation*. Springer Verlag, 1997.
- [4] J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2nd ed., 1999.
- [5] A. Connes, *Noncommutative Geometry*. Academic Press, 1994.
- [6] N. Seiberg und E. Witten, “String theory and noncommutative geometry”, *JHEP* **09** (1999) 032.
- [7] Y. Manin, “Quantum groups and noncommutative geometry.” preprint, Montreal University CRM-1561, 1988.
- [8] B. Cerchiai, *Hilbert Space Representations of a q -deformed Minkowski algebra*. Dissertation, LMU München, 1997.
- [9] S. Schramel, “Dreidimensionale q -deformierte Quantenmechanik”, Diplomarbeit, LMU München, 1998.
- [10] A. Lorek, A. Ruffing und J. Wess, “A q -Deformation of the Harmonic Oscillator”, *Z. Phys. C* **74** (1997) 369–378.
- [11] J. Seifert, *q -deformierte Ein-Teilchen Quantenmechanik*. Dissertation, LMU München, 1996.
- [12] J. Bagger und J. Wess, “Introduction to gauge theory”, in *Gauge theories in high energy physics*, M. Gaillard und R. Stora, eds., Les Houches, Session XXXVII, 1981. North-Holland, 1983.
- [13] A. Wilson-Gordon, V. Buzek und P. Knight, “Statistical and phase properties of displaced Kerr states”, *Physical Review A* **44** (1991).

- [14] J. Schwenk und J. Wess, “A q -deformed quantum mechanical toy model”, *Physics Letters B* **291** (1992) 273–277.
- [15] Y. Manin, “Notes on quantum groups and quantum De Rham complexes.” Bonn Preprint MPI/91-60, 1991.
- [16] K. Schmüdgen, “Operator Representations of a q -deformed Heisenberg Algebra”, *Eur. Phys. J. C* **5** (1998) 553–566.
- [17] A. Hebecker, S. Schreckenberger, J. Schwenk, W. Weich und J. Wess, “Representations of a q -deformed Heisenberg Algebra”, *Z. Phys. C* **64** (1994) 355–359.
- [18] J. Wess, “ q -deformed Heisenberg Algebras”, in *Proceedings of the 38. Internationale Universitätswochen für Kern- und Teilchenphysik*, H. Gausterer, H. Grosse und L. Pittner, eds., no. 543. Lecture Notes in Phys., Springer Verlag, 2000.
- [19] M. Fichtmüller, A. Lorek und J. Wess, “ q -deformed Phase Space and its Lattice Structure”, *Z. Phys. C* **71** (1996) 533–538.
- [20] T. Curtright und C. Zachos, “Deforming maps for quantum algebras”, *Phys. Lett. B* **243** (1990).
- [21] B. Cerchiai, R. Hinterding, J. Madore und J. Wess, “A calculus based on a q -deformed Heisenberg algebra”, *Eur. Phys. J. C* **8** (1999) 547–558.
- [22] B. Cerchiai, R. Hinterding, J. Madore und J. Wess, “The geometry of a q -deformed phase space”, *Eur. Phys. J. C* **8** (1999) 533–546.
- [23] A. Kempf und S. Majid, “Algebraic q integration and fourier theory on quantum and braided spaces”, *J. Math. Phys.* **35** (1994) 6802–6837.
- [24] G. Gasper und M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series*. Cambridge University Press, 1990.
- [25] F. Mandl und G. Shaw, *Quantum Field Theory*. John Wiley and Sons, 1984.
- [26] F. Würtenberger, “Zweite Quantisierung der q -deformierten Klein-Gordon-Gleichung.” Diplomarbeit, Dezember 1999, LMU München.
- [27] A. Macfarlane, “On q -analogues of the quantum harmonic oscillator and quantum group $SU(2)_q$ ”, *J. Phys A* **22** (1989) 4581.
- [28] L. Biedenharn, “The quantum group $SU_q(2)$ and a q -analogue of the boson operators”, *J. Phys. A* **22** (1989).
- [29] R. Hinterding und J. Wess, “ q -Hermite Polynomials in q -Quantum Mechanics”, *Eur. Phys. J. C* **6** (1998) 183–186.

- [30] W. Al-Salam und L. Carlitz, “Some orthogonal q -polynomials”, *Math. Nachrichten* **30**, 47-61 (1965).
- [31] R. Koekoek und R. Swarttouw, “The Askey-Scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q -analogue”, *Delft University of Technology, Reports of the Faculty of Technical Mathematics and Informatics*, no. 94-05 (1994).
- [32] T. H. Koornwinder und R. F. Swarttouw, “On q -analogues of the fourier and hankel transforms”, *Trans. AMS* **333** (1992) 445–461.
- [33] S. Pokorski, *Gauge Field Theories*. Cambridge University Press, 1987.
- [34] J. Madore, S. Schraml, P. Schupp und J. Wess, “Gauge theory on noncommutative spaces”, *Eur. Phys. J. C* **16** (2000) 161–167.
- [35] Varadarajan, *Lie Groups, Lie Algebras and their representations*. Prentice Hall, 1974.
- [36] A. Kempf, “Quantum groups and quantum field theory with nonzero minimal uncertainties in positions and momenta”, *Czech. J. Phys.* **44** (1994) 1041–1048.
- [37] P. D. Group, “Review of particle physics”, *Eur. Phys. J. C* **15** (2000) 1–878.
- [38] M. Kitagawa und Y. Yamamoto, “Number-phase minimum-uncertainty state with reduced number uncertainty in a kerr nonlinear interferometer”, *Physical Review A* **34** (1986).
- [39] A. Connes und H. Moscovici, “Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem”, *Comm. Math. Phys.* **198** (1998) 199–246.
- [40] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*. John Wiley, New York, 1961.
- [41] L. Landau und E. Lifschitz, *Quantenmechanik*. Akademie-Verlag, Berlin, 1966.
- [42] I. Sneddon, *Fourier Transforms*. McGraw-Hill, 1951.
- [43] S. Cho, R. Hinterding, J. Madore und H. Steinacker, “Finite field theory on Non-commutative Geometries”, *Int. J. Mod. Phys. D* **9** (2000) 161.

Danksagung

Zuerst möchte ich Herrn Julius Wess danken, für die Aufnahme an seinem Institut und die kontinuierliche Zusammenarbeit, aus der viele Impulse und Resultate für die vorliegende Arbeit erwachsen sind. Besonderen Dank schulde ich ihm für die Unterstützung meiner Theateraktivitäten.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Schneider für die freundliche Übernahme des Zweitgutachtens.

John Madore, Bianca Cerchiali, Stefan Schraml und Harold Steinacker danke ich für die kollegiale Zusammenarbeit über den gesamten Zeitraum meiner Promotion und noch einmal Stefan Schramel für die Durchsicht der Arbeit. Darüberhinaus danke ich John Madore für seine Gastfreundschaft bei mehreren Aufenthalten in Paris, und die unzähligen Diskussionen, auch und insbesondere die über nichtphysikalische Themen.

Allen Mitarbeitern des Institutes danke ich für die freundliche und offene Atmosphäre. Monika Kürzinger, Carola Reinke und Rosita Jurgeleit schulde ich zusätzlich Dank für die Hilfe in administrativen Dingen an der Universität und am Max-Planck-Institut für Physik, dem ich für die finanzielle Unterstützung danke.

Meinen Eltern danke ich für die - nicht nur finanzielle - Hilfe während meines für sie so unverständlichen Studiums.

Mein größter Dank gilt Judith Grindel: für das Korrekturlesen der Arbeit und unendlich mehr für Rückhalt und Unterstützung in vielen Jahren. Ihr widme ich diese Arbeit, obwohl ich vermute, dass eine solche Widmung weniger ihr zum Dank als vielmehr der Arbeit zur Ehre gereicht.

Lebenslauf

18. August 1970 geboren in 48485 Neuenkirchen
- Juni 1990 Allgemeine Hochschulreife am Arnold-Janssen-Gymnasium in Neuenkirchen
- Juli 1990 – Juli 1991 Wehrdienst
- Oktober 1991 –
– September 1993 Physikstudium an der Westfälischen-Wilhelms-Universität in Münster, Abschluß: Vordiplom
- Oktober 1993 –
– Juli 1994 Physikstudium am Imperial College in London
Abschluß: Imperial College International Diploma
- Oktober 1994 –
– Mai 1997 Studium der Physik und Philosophie an der Ludwig-Maximilians-Universität in München,
Abschluß: Physik Diplom, Titel der
Diplomarbeit: q -deformierte Hermite Polynome
- Juli 1997 –
– September 2000 Promotionsstelle am Max-Planck-Institut für
Physik bei Prof. Julius Wess
- Oktober 1999 Inszenierung von *Fernando Krapp hat mir diesen Brief geschrieben* von Tankred Dorst am Institut für Theaterwissenschaft, LMU München
- Mai 2000 Regieassistentz am Bayerischen Staatsschauspiel in der Produktion *Die Kleinbürgerhochzeit* von Bert Brecht, Regie: André Wilms