

Meinen Eltern

SEKTION PHYSIK DER LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

**Experimente mit einer linearen Ionenkette
zur Realisierung eines
Quantencomputers**

Dissertation der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Volker Hans Ludsteck
aus Ludwigshafen am Rhein

München, den 6. Mai 2004

1. Gutachter: Prof. Dr. H. Walther

2. Gutachter:

Tag der mündlichen Prüfung:

Zusammenfassung

Die in dieser Arbeit dargelegten Ergebnisse befassen sich mit Experimenten, welche den $^{25}\text{Mg}^+$ - $^{115}\text{In}^+$ -Ionenfallen-Quantencomputer zum Endziel haben. Als logisches Schaltelement eines solchen Quantencomputers kommen sowohl die Cirac-Zoller- [1] als auch die Sørensen-Mølmer-Version [2, 3] eines CNOT^[1]-Gatters in Frage. In beiden Fällen müssen die Ionen durch Laserstrahlung gekühlt werden. Während das Cirac-Zoller-Gatter Grundzustandskühlung erfordert, wird beim Sørensen-Mølmer-Gatter lediglich der wesentlich einfacher zu erreichende Lamb-Dicke-Bereich benötigt. Nicht nur aus diesem Grunde wird das Sørensen-Mølmer-Gatter in dem beschriebenen Experiment favorisiert. Desweiteren kann damit auch während einer Quantenrechnung kontinuierlich gekühlt werden. Dies ist der Tatsache zuzuschreiben, daß zwei verschiedene Ionensorten für unterschiedliche Aufgaben verwendet werden, womit deren Vorzüge optimal miteinander kombiniert werden. Zur direkten Seitenband-Kühlung verwendet man $^{115}\text{In}^+$, mit dem in unserer Arbeitsgruppe bereits Grundzustandskühlung demonstriert worden ist [4]. Quanteninformation soll in den $^{25}\text{Mg}^+$ -Ionen gespeichert werden. Da beim Sørensen-Mølmer-Gatter, solange man sich im Lamb-Dicke-Bereich befindet, die Quantenrechnung nicht von der thermischen Bewegung der Ionen abhängen, kann der heterogene Ionenkristall durch die Indiumionen kontinuierlich gekühlt werden, ohne daß die in den $^{25}\text{Mg}^+$ -Ionen gespeicherte Quanteninformation dadurch beeinflusst wird. Dadurch kann die Dekohärenz der Schwingungsmoden minimiert, und die Anzahl möglicher Quantenoperationen maximiert werden.

Es wurde von Experimenten ausgegangen, welche lediglich die Speicherung und Dopplerkühlung von linearen $^{24}\text{Mg}^+$ -Ionenketten umfaßten [5], und deren Ziel es war, mittels Raman-Seitenband-Kühlung [5, 6] außerhalb des Lamb-Dicke-Limits [7] das Cirac-Zoller-Schema [1] zu realisieren.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde von Grunde auf ein neues Experiment geplant, aufgebaut und zahlreiche Versuche dazu durchgeführt. Es wurde ein völlig neuer, komplexer Vakuumrezipient entworfen und gebaut. Dieser Vakuumtopf erlaubt komplizierte Laserstrahlgeometrien, und sieht verschiedenartige Ramanlaserstrah-

^[1] *Controlled-NOT*

lenpaare und Objektive zur Einzelionenansprechung und Beobachtung vor. Im Inneren des Vakuumrezipienten wurde ein schwingungsgedämpfter Aufbau einer neuartigen, selbstjustierenden Ionenfallhalterung inklusive verbesserter Atomofenhalterung und zweier Elektronenkanonen in ein kompaktes Gesamtsystem integriert. Die Falle wurde für die Speicherung zweier Ionensorten optimiert. Es wurden weiterhin neue fokussierende Elektronenkanonen gebaut und getestet. Die Experimente wurden anfänglich mit der alten linearen Endkappenfalle und später mit der neuen Ionenfalle durchgeführt.

Mit der linearen Endkappenfalle wurden zuerst Mg^+ -Ionenkristalle erzeugt. Bei den Experimenten mit Indium konnten Mg^+ - In^+ -Wolken nachgewiesen werden, sowie sympathetische Kühlung von Indium durch die direkt lasergekühlten Magnesiumionen [8].

In der neuen Vierstabfalle wurden zuerst Experimente mit einem Sekundärelektronen-Vervielfacher bei Kühlung mit Puffergas durchgeführt, wobei Speicherung von Magnesiumionen sowie von Dunkelionen aus dem Restgas nachgewiesen werden konnte. Bei diesen Messungen wurde gleichzeitig die Falle charakterisiert. Es wurden Stabilitätsdiagramm, radiale und axiale Schwingungsfrequenzen gemessen.

Darüber hinaus wurden in der neuen Ionenfalle Magnesium-Ionenkristalle gespeichert, welche sowohl mit einem Photomultiplier als auch mit der Kamera nachgewiesen wurden. Die im Vergleich zur linearen Endkappenfalle wesentlich verbesserte Mikrobewegungskompensation demonstriert die Überlegenheit der automatischen Justage der neuen Ionenfalle.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Der Quantencomputer	9
1.1 Grundprinzipien der Quantenrechnung	9
1.2 Anforderungen für die Implementierung eines Quantencomputers . . .	11
1.3 Quantengatter	12
1.3.1 Das kalte Gatter	14
1.3.2 Quanteninformationsverarbeitung mit $^{25}\text{Mg}^+$	21
1.3.3 Sørensen-Mølmer-Gatter	22
1.3.3.1 Schnelles Sørensen-Mølmer-Gatter	24
1.3.3.2 Langsames Sørensen-Mølmer-Gatter	26
1.4 Quantenalgorithmen	29
2 Die lineare elektrische Quadrupolfalle	31
2.1 Dynamische Speicherung geladener Teilchen	33
2.2 Simultane Speicherung zweier Ionensorten	40
2.3 Axialer Einschluß	41
2.3.1 RF-Einschluß	41
2.3.2 Quadrupolspeicherring	42
2.3.3 Lineare RF-DC-Hybridfalle	42

3	Vierstabfalle mit 2 Ladezonen	45
3.1	Unzulänglichkeiten des alten Fallenaufbaus	45
3.1.1	Kontaktpotentiale	46
3.2	Anforderungen an eine lineare Ionenfalle	48
3.3	Fallengeometrie	49
3.3.1	Justage der Falle	54
3.4	Fallenelektrodenhalterung	54
3.5	Computersimulationen des Fallenpotentials	56
3.5.1	Radiales Fallenpotential	57
3.6	Ladeprozedur	57
4	Laserkühlung gespeicherter Ionen	63
4.1	Laserkühlung	63
4.2	Dopplerkühlung	65
4.3	Seitenbandkühlung	67
4.4	Raman-Seitenband-Kühlung	70
4.5	Grundzustandskühlung außerhalb des Lamb-Dicke-Limits	74
4.6	Sympathetische Kühlung eines heterogenen In^+ - Mg^+ -Kristalls	77
5	Heterogener Mg^+-In^+-Ionenkristall	79
5.1	Gleichgewichtspositionen der Ionen in der linearen Falle	80
5.2	Kleine Schwingungen	83
5.2.1	Ionen-Kristall in einer Dimension	84
5.2.2	2-Ionen-Kristall in einer Dimension	84
5.2.3	2-Ionen-Kristall in 3 Dimensionen	87
5.2.4	Ionenkristalle mit $N > 2$ Ionen	89
5.2.4.1	Der Fall $N = 3$	90
5.2.4.2	Eigenmoden für den Fall $N = 3$	91

5.2.4.3	Fall $N = 4$	92
5.3	Heizraten	94
5.4	Kühlraten bei sympathetischer Seitenbandkühlung von Indium	96
6	Experimenteller Aufbau	99
6.1	Fallenelektronik	99
6.2	Vakuumsystem	104
6.3	Fallenhalterung	106
6.4	Magnetfeldkompensation	111
6.5	Ionenerzeugung	115
6.5.1	Photoionisation	115
6.5.2	Elektronenstoßionisation	116
6.5.2.1	Atomofen	117
	Zwei Blenden	118
	Eine Blende	120
6.5.2.2	Elektronenkanonen	121
	Alte Elektronenkanone	122
	Neue Elektronenkanone	122
6.6	Lasersystem	125
6.6.1	Magnesium-Farbstofflaser und Frequenzverdopplung	127
6.6.2	Indium-Laser	129
6.6.2.1	Indium-Farbstofflaser	129
6.6.2.2	Frequenzverdopplung	130
6.7	Laserfokussierung in die Falle	131
6.8	Einzelionenansprache	133
6.8.1	Elektrooptischer Deflektor	133
6.8.2	Quadrupolfeldanordnung	134

6.8.3	Zahl auflösbarer Punkte	135
6.9	Optik	136
6.9.1	Nachweisoptik	136
6.9.2	Einzelionenansprechoptik	137
7	Experimentelle Ergebnisse	139
7.1	Messungen mit der linearen Endkappenfalle	139
7.1.1	Speicherung von $^{24}\text{Mg}^+$ -Kristallen	139
7.1.2	Speicherung von $^{115}\text{In}^+$ -Wolken	140
7.1.3	Gemeinsame Speicherung von $^{115}\text{In}^+$ - und $^{24}\text{Mg}^+$ -Wolken . . .	141
7.1.4	Sympathetische Kühlung von $^{115}\text{In}^+$ - und $^{24}\text{Mg}^+$	144
7.2	Channeltron-Messungen mit der Vierstabfalle	145
7.2.1	Axiale Oszillationsfrequenzen	147
7.3	Messungen mit der neuen Vierstabfalle	150
7.3.1	Fallenfrequenzen	151
7.3.1.1	Radiale Fallenfrequenzen	151
7.3.1.2	Axiale Fallenfrequenzen	153
7.3.2	Bestimmung der Offset-Spannung des a-Wertes	155
7.3.3	Speicherung von $^{24}\text{Mg}^+$ -Kristallen	157
7.3.4	Stabilitätsdiagramm	157
7.3.5	Mikrobewegungskompensation	160
	Ausblick	167
	A Magnesium	171
	B Indium	173

C	Shoralgorithmus	175
C.1	Beschreibung des Algorithmus	175
C.2	Bestimmung der Periode von F_N	177
D	Satz von Earnshaw	180
E	Euklidischer Algorithmus	182
F	Adiabatische Näherung	183
G	Berechnung des Matrixelements $\langle m e^{i\eta(a+a^\dagger)} n \rangle$	186
H	Herleitung der Formel $\langle n \rangle = \frac{5}{16} \left(\frac{\Gamma}{\omega_z} \right)^2$ bei Seitenbandkühlung	188
I	Stabilitätsdiagramm	190
I.1	Bestimmung der Eckpunkte des Stabilitätsdiagramms	190
J	Besselfunktionen	192
K	Thermodynamische Temperatur in lasergekühlten Ensembles	196
	Literaturverzeichnis	199
	Stichwortverzeichnis	219

Einleitung

Ἐν ἀρχῇ ἦν ὁ λόγος

Im Anfang war das Wort

Neues Testament (Johannes 1, Vers 1)

Wolfgang Paul schuf in den fünfziger Jahren mit seinem Ionenkäfig [9] die Grundlage zur Speicherung einzelner atomarer Teilchen. Der enorme Fortschritt bei der Entwicklung frequenzstabiler, durchstimmbarer Farbstofflaser in den siebziger Jahren ging einher mit der Entwicklung der Laserkühlung. Somit waren die Voraussetzungen dafür geschaffen worden, Quantenoperationen an einzelnen atomaren Teilchen durchführen zu können. Nachdem die Quantenmechanik bereits bis zum Ende der zwanziger Jahre von Bohr, Schrödinger und Heisenberg nahezu vollständig entwickelt war, konnten so die von ihnen gefundenen Gesetze an einzelnen Atomen mit hoher Präzision überprüft werden.

Ein sehr augenfälliger Unterschied zwischen der Welt der Quanten und der klassischen Welt ist die Möglichkeit zur Superposition. Dieses Konzept macht sich die fundamentale Speichereinheit der Quanteninformationsverarbeitung (QIV) das Quantenbit (Qubit) zunutze. Im Gegensatz zum Klassischen Bit, welches entweder den Wert 0 oder den Wert 1 repräsentiert, befindet sich das Qubit im allgemeinen in einer Überlagerung zweier quantenmechanischer Zustände. Dieser Tatsache verdankt

der Quantencomputer seine enorme Leistungsfähigkeit. Betrachtet man nämlich ein Register bestehend aus mehreren Qubits, so kann der binär repräsentierte Wert alle 2^n möglichen Werte gleichzeitig annehmen. Falls man sich dieses Register nun als Eingabewert eines Algorithmus vorstellt, so können alle 2^n möglichen Rechnungen parallel abgearbeitet werden. Dies ist unter dem Begriff Quantenparallelrechnen^[2] bekannt. Jedoch wurde erst 1994 ein Quantenalgorithmus, d.i. ein Algorithmus, welcher sich Qubits zunutze macht, gefunden, welcher ein Problem effektiver, also mit weniger Rechenschritten als ein klassischer Algorithmus lösen kann. Dies war der berühmte Shor-Algorithmus [10–12] zur Primzahlfaktorisation, was insbesondere für große Zahlen N wichtig ist. Zur Lösung benötigt der Algorithmus $O(L^3)$ Schritte, wobei L die Anzahl der zur Darstellung der Zahl N benötigten Bits ist. Die Rechendauer steigt also polynomial mit der Größe der Eingabe, ein äquivalenter klassischer Algorithmus zeigt dahingegen ein exponentielles Verhalten. Dies macht sich besonders bei großen Zahlen bemerkbar.

Die Nachricht von der Entdeckung eines solchen Algorithmus sorgte für großes Aufsehen. Denn sollte solch ein Algorithmus experimentell realisiert werden, könnte die Sicherheit von geheimen Informationen, insbesondere Daten im Internet höchst gefährdet sein, da die häufig verwendeten Public-Key-Kryptographieverfahren gerade auf der praktischen Unmöglichkeit der Primzahlzerlegung sehr großer Zahlen beruhen. Insbesondere in den USA wurde in der Folgezeit intensive Forschung auf diesem Gebiet betrieben.

Zur Demonstration der Rechenkraft des Quantencomputers sei hier ein Zahlenbeispiel angeführt. Wie bereits oben erwähnt ist die praktische Unmöglichkeit der Primzahlzerlegung großer Zahlen der Kern von Kryptographieverfahren wie z.B. der RSA^[3]-Verschlüsselungsmethode [13, 14]. Diese Methode der asymmetrischen Verschlüsselung ist bei Banken zum Schutz von Kundendaten weit verbreitet. Die Zeit

^[2] *engl.: Quantum Parallel Processing*

^[3] *Rivest-Shamir-Adleman*

zur Faktorisierung einer 129-stelligen Binärzahl mittels des RSA-Verfahrens ist bekannt unter der Bezeichnung RSA129. 1994 wurde dieser Code entschlüsselt. Man benötigte 5000 MIPS^[4]-Jahre an Computerrechenzeit, um diese 129-stellige Binärzahl in ihre 64- und 65-Bit-Primfaktoren zu zerlegen. Dazu brauchte man damals 1000 Workstations, die 8 Monate lang an dem Problem rechneten. Ein Quantencomputer mit einer Taktfrequenz von nur 100 MHz bräuchte dafür lediglich ein paar Sekunden^[5].

Der Quantencomputer wurde erstmalig Anfang der Achziger Jahre von Feynman [15] und Benioff [16–18] behandelt. Feynman legte dar, daß ein solcher Computer für die Simulation eines Quantensystems weit weniger Rechenaufwand benötigt als ein klassischer Computer. Deutsch entwickelte 1985 vom Church-Turing-Prinzip ausgehend eine Theorie des universellen Quantencomputers [19].

Die Verschränkung wird als essentieller Bestandteil der Quanteninformationstheorie auch in anderen Gebieten wie z.B. der Quantenkryptographie, der Quantenkommunikation und der Quantenteleportation benutzt. Die Quantenkryptographie versucht im Gegensatz zum Quantencomputer Geheimnisse sicherer zu machen, indem sie mit Hilfe von verschränkten Teilchen Information abhörsicher übertragen will.

Es wurden seit der Entdeckung des Shoralgorithmus zahlreiche Vorschläge gemacht, einen Quantencomputer zu realisieren. Darunter sind physikalische Systeme wie z.B. Quantendots [20, 21], Hohlraumresonator-QED-Systeme [22–24], Josephson-Kontakte in Supraleitern [25], Moleküle [26, 27], Bose-Einstein-Kondensate (BEC) [28], Optische Gitter [29–31], einzelnen Elektronen [32], Photonen (flying qubits) [33], mit Hilfe von Festkörper-basierter Kernspinresonanz [34, 35] und mit „flüssiger“ Kernspinresonanz [36, 37]. Ein sehr vielversprechendes Konzept bietet der 1995 von Cirac und Zoller vorgeschlagene Ionenfallen-Quantencomputer [1]. Als Quantenbitregister dient eine Kette in einer linearen Paulfalle gefangener, lasergekühlter Ionen, wobei das Qubit durch zwei atomare Energieniveaus repräsentiert wird. Als

^[4] *Million Instructions Per Second*

^[5] *Taktfrequenzen beim Ionenfallen-Quantencomputer lägen bei lediglich 1 MHz, so daß die Lösung ein paar Minuten in Anspruch nehmen würde.*

Kopplung dient die kollektive Oszillation der Ionen im harmonischen Speicherpotential der Falle. Ein großer Vorteil dieser Realisierungsmöglichkeit ist die Skalierbarkeit [38–40], d.h. man kann den Vorschlag auf beliebig viele Qubits ausdehnen.

Ein wesentliches Hindernis bei der experimentellen Realisierung eines Quantencomputers ist die Dekohärenz, d.i. die intrinsische Eigenschaft eines Quantensystems unter Einfluß der Umgebung die Kohärenz von Überlagerungszuständen zu verlieren. Dazu ist es notwendig, alle möglichen schädlichen Einflüsse der Umgebung auf die Ionenfalle bei der Quantenrechnung zu minimieren. Dazu gehört u.a., daß man Intensitätsschwankungen der Laserstrahlen so gut es geht zu vermeiden versucht, da diese Phasenfehler bei den Einzelqubitrotationen induzieren. Weiterhin sollten Stöße mit dem Hintergrundgas vermieden werden, da sonst Quanteninformation verloren gehen kann (zur Dekohärenz im allgemeinen siehe [41,42], für eine Messung allgemeiner Dekohärenz in einer Ionenfalle durch künstlich erzeugte Reservoirs siehe [43] und zu Beiträgen, die Dekohärenz in Ionenfallen aufgrund von fluktuierenden Fallenparametern behandeln siehe [44–47]). In gewissen Grenzen sind aber auch solche Fehler tolerierbar, da diese mit der Quantenfehlerkorrektur^[6] [48–51] korrigiert werden können. Dies kann auch für fehlerbehaftete Korrekturoperationen^[7] [52, 53] erreicht werden.

Allgemeine Quantenrechnungen im Hilbertraum der N Qubits können zerlegt werden in Abfolgen aus Einzelqubitrotationen und CNOT^[8]-Gattern zwischen beliebigen Qubits [54]. Beim Ionenfallen-Quantencomputer bestehen zwei unterschiedliche Konzepte, solche CNOT-Gatter zu realisieren. Die erste Methode basiert auf dem Vorschlag von Cirac-Zoller-Schema, welches der erste Vorschlag einer Realisierungsmöglichkeit in Ionenfallen war. Hierbei ist es notwendig die Ionenkette in der Falle bis in den quantenmechanischen Grundzustand der Bewegung zu kühlen. Dies ist jedoch experimentell äußerst schwer und konnte bisher nur für ein einzelnes Ion [55, 56], für zwei Ionen [4, 57, 58] und vier Ionen [59] realisiert werden.

[6] *engl.: quantum error correction*

[7] *engl.: fault-tolerant error correction*

[8] *Controlled-Not*

Zudem spielen die Heizraten in unterschiedlichen Fallen eine sehr entscheidende Rolle für die erreichbare Endtemperatur der Laserkühlung. In den letzten Jahren hat sich herauskristallisiert, daß die Heizraten in Fallen am geringsten sind, welche nicht zu kleine Elektrodenabstände besitzen und die außerdem noch sauber gehalten werden, indem beim Laden darauf geachtet wird, daß der Atomstrahl nicht auf die Elektroden trifft. Gemessene Heizraten liegen zwischen einem Schwingungsquant pro Sekunde und einem Schwingungsquant pro Millisekunde [60]. Aufgrund dieser Schwierigkeiten in der Praxis wurden Vorschläge zu Quantengattern mit heißen Ionen gemacht, d.h. mit Ionenketten, bei denen die Schwingung nicht bis in den Grundzustand gekühlt werden braucht [2, 3, 61–64].

Unter diesen Vorschlägen ist das Sørensen-Mølmer-Gatter sehr vielversprechend. Die Kühlung der Ionen muß dabei lediglich bis in den Lamb-Dicke-Bereich erfolgen, in dem die Ausdehnung der Grundzustandswellenfunktion der Ionen klein gegenüber der Wellenlänge des verwendeten Kühlübergangs ist. Solange diese Bedingung erfüllt ist, kann unabhängig von der thermischen Bewegung der Ionen Quantenrechnungen durchgeführt werden. Falls die Funktionen der Kühlung und der Speicherung von Quanteninformation von zwei unterschiedlichen Ionensorten übernommen werden, welche gemeinsam in der Falle gespeichert sind, kann man mit dem Sørensen-Mølmer-Gatter sogar kontinuierlich kühlen, während gleichzeitig Quantenrechnungen durchgeführt werden. Diese Idee soll mit dem in unserer Forschungsgruppe vorgeschlagenen Konzept des Mg^+ - In^+ -Quantencomputers realisiert werden.

Dabei wird eine heterogene Mg^+ - In^+ -Ionenkette in einer linearen Falle gespeichert. Durch Seitenbandkühlung mit den in der Kette gespeicherten Indiumionen werden durch die Coulombwechselwirkung auch die Magnesiumionen sympathetisch gekühlt, in denen Quanteninformation gespeichert werden kann. Durch die sympathetische Wechselwirkung werden die Vorteile der beiden Ionenspezies miteinander verbunden und gleichzeitig die Nachteile eliminiert. Das schlecht zu

kühlende Magnesiumion wird von Indium gekühlt und das schlechte Qubition Indium gibt die Aufgabe an das gute Qubition Magnesium weiter. Der größte Vorteil dieses Konzepts ist die Möglichkeit der kontinuierlichen Kühlung, wodurch die Dekohärenz der Oszillation stark verlangsamt werden kann. Somit werden auch lange Quantenrechnungen nicht mehr durch die Dekohärenz der Schwingungsmoden begrenzt.

Dennoch ist ein Quantencomputer, der in Sekundenbruchteilen lange Zahlen in Primfaktoren zerlegt, noch in weiter Ferne. Ein Quantencomputer konnte bisher lediglich die Zahl 15 in ihre Primfaktoren drei und fünf zerlegen [65]. Dies konnte überdies auch nur mit einem Kernspin-Quantencomputer erreicht werden, welcher 7 Qubits für diese Rechnung benutzte. Durch die weitentwickelten Kernspinmethoden sind diese Quantencomputern zur Zeit den Ionenfallen-Quantencomputern noch überlegen, sie können aber nicht auf deutlich mehr als zehn Qubits skaliert werden. Außerdem sind die im Kernspin-Quantencomputer verwendeten Zustände nicht rein [66]. Bei Ionenfallen-Quantencomputern konnten bisher nur CNOT-Gatter [67–70] oder ganz einfache Quantenalgorithmen wie der Deutsch-Josza-Algorithmus [71] realisiert werden. Da allerdings nur etwa 20-30 Quantenbits notwendig sind^[9], um bei der Primzahlenfaktorisierung heutige klassische Computer zu schlagen, scheint dies mit dem Ionenfallen-Quantencomputern realistischer als mit dem Kernspin-Quantencomputer. Dies könnte man mit langen Ionenketten erreichen. Da hierbei jedoch der Grenzfall starker Bindung nur schwer erreichbar und außerdem eine Vielzahl von Schwingungsmoden die Realisierung erschweren, wurden anderweitige Versuche unternommen diese Problem zu bewältigen. Eine Idee besteht darin, viele Quantenbits in einem Register zu speichern, jedoch immer nur mit jeweils zwei davon in einem Rechenregister zu rechnen. Dazu muß man die gewünschten Ionen aus dem Speicherregister in das Rechenregister übertragen. Eine genauere Beschreibung und erste erfolgreiche Vorversuche findet man in [38, 72].

^[9] Dies gilt jedoch leider nur für fehlerfreie Qubits. Bei Verwendung von Quantenfehlerkorrektur wird man also mehr Qubits benötigen.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt. Das erste Kapitel führt in die Quanteninformati-
onstheorie ein und behandelt anschließend zwei wichtige Quantengatter: das Cirac-
Zoller-Gatter und das Sørensen-Mølmer-Gatter. Kapitel 2 beschreibt die Speiche-
rung von Ionen in linearen Paulfallen, Kapitel 3 stellt die neu entwickelte Ionenfalle
zur Speicherung zweier unterschiedlicher Ionensorten vor. Das nächste Kapitel legt
die im Experiment relevanten Laserkühlverfahren dar. Die Eigenschaften von Mg^+ -
 In^+ -Ionenkristallen werden im fünften Kapitel erörtert. In Kapitel 6 und 7 wird
der im Rahmen dieser Arbeit aufgebaute experimentelle Aufbau beschrieben, und
die erzielten Ergebnisse präsentiert. Abschließend wird ein Ausblick auf zukünftige
Entwicklungen gegeben.

Kapitel 1

Der Quantencomputer



Niemand kommt als Weiser zur Welt

Die Weisheitslehren des Ptahhotep

5. Dynastie (2350 - 2310 v.Chr.)

1.1 Grundprinzipien der Quantenrechnung

Während beim klassischen Computer die fundamentale Speichereinheit - das Bit - entweder den Wert 0 oder 1 annehmen kann, existiert beim Quantencomputer eine allgemeinere Größe: das Quanten- oder Qubit. Es kann beliebige Superpositionen von 2 Basiszuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$ annehmen, lässt sich also folgendermaßen schreiben:

$$|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad a, b \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (1.1)$$

Hierbei stellen $|0\rangle$ und $|1\rangle$ ein Vollständiges Orthonormalsystem (VONS) in einem zweidimensionalen Hilbertraum dar.

Die zwei Zustände des klassischen Bits sind als Grenzfälle im Qubit enthalten. Für $a = 1$ und $b = 0$ ergibt sich $|0\rangle$ und für $a = 0$ und $b = 1$ entsprechend $|1\rangle$. In einem Qubit kann aber ebenfalls nur 1 Bit an Information gespeichert werden, da man bei einer Messung mit Wahrscheinlichkeit $|a|^2$ den Wert 0 und mit Wahrscheinlichkeit $|b|^2$ den Wert 1 erhält. Diese Aussage ist eine Schlußfolgerung aus dem Satz von Kholevo [73, 74], einem der ersten Sätze, der Quantentheorie und Informatik miteinander verband.

Kombiniert man mehrere Qubits zu einem Register der Länge n , erhält man als allgemeinsten Zustand eine Superposition aller 2^n möglichen Basiszustände $|a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0\rangle$ mit $a_k \in \{0, 1\}$ ($k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$), wobei die binäre Darstellung $|a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0\rangle$ auch als $|\sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot 2^k\rangle$ in Dezimalschreibweise notiert wird (z.B. $|1, 0, 1\rangle = |1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2\rangle = |5\rangle$):

$$|\Psi\rangle = \sum_{\bar{i} \in \{0,1\}^n} a_{\bar{i}} |\bar{i}\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i |i\rangle \quad (1.2)$$

Hier steht $\{0,1\}^n$ für alle Zeichenketten aus Nullen und Einsen der Länge n und \bar{i} für deren binäre und i für deren dezimale Darstellung.

Zur Durchführung von Berechnungen auf quantenmechanische Art und Weise ist es notwendig eine unitäre, d.h. auch reversible Evolution durchzuführen. Ansonsten würde das System Energie dissipieren und Information ginge verloren (siehe auch [17, 75]). Deshalb wird bei der Auswertung von Funktionen der Form

$$f : \{0, 1, 2, \dots, 2^m - 1\} \longrightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\} \quad n, m \in \mathbb{N} \quad (1.3)$$

auch die Eingabe in einem weiteren Register gespeichert. Im Falle $n \neq m$ existiert nämlich kein unitärer Operator, der aus einem m -dimensionalen Hilbertraum \mathbf{H}_1^m in einen anderen n -dimensionalen Hilbertraum \mathbf{H}_2^n abbilden könnte. Deshalb definiert man einen Operator U_f auf einem $(n+m)$ -dimensionalen Hilbertraum derart, daß die Abbildung

$$\mathbf{H}_1^m \otimes \mathbf{H}_2^n \ni |x\rangle |0\rangle \xrightarrow{U_f} |x\rangle |f(x)\rangle \quad (1.4)$$

unitär ist.

Man präpariert also eine beliebige Eingabe $|x\rangle$ im ersten Register, dessen Ergebnis $|f(x)\rangle$ nach der Rechnung im zweiten Register steht, während das erste unverändert geblieben

1.2. Anforderungen für die Implementierung eines Quantencomputers 11

ist.

Was passiert nun aber, wenn wir im ersten Register eine quantenmechanische Superposition aller 2^m Zustände präparieren ?

$$\left[\sum_{i=0}^{2^m-1} |i\rangle \right] |0\rangle \xrightarrow{U_f} \sum_{i=0}^{2^m-1} |i\rangle |f(i)\rangle = |0\rangle |f(0)\rangle + |1\rangle |f(1)\rangle + \dots + |2^m-1\rangle |f(2^m-1)\rangle \quad (1.5)$$

Mit nur einer einzigen Funktionsauswertung werden also alle 2^m Funktionswerte *gleichzeitig* berechnet. Diese Fähigkeit des Quantencomputers, mehrere Eingaben zu derselben Zeit zu bearbeiten ist unter dem Namen *Quantenparallelrechnen*^[1] geläufig. Der Nachteil daran ist jedoch, daß man mit nur einer Messung nicht alle Funktionswerte aus dem Register lesen kann. Denn bei Messung des Wertes x im ersten Register, nimmt das zweite Register den Wert $f(x)$ an, was den verschränkten Zustand in Gl. (1.5) zerstört. Anders gesagt : man erhält nur einen Funktionswert. Es ist jedoch durch geschickte Weiterverarbeitung des Zustands auf der rechten Seite von Gl. (1.5) möglich, eine globale Eigenschaft wie z.B. die Periodizität der Funktion f zu erhalten, was ein zentraler Schritt im Primzahlfaktorialisierungsalgorithmus von Shor [10] ist.

1.2 Anforderungen für die physikalische Implementierung eines Quantencomputers

Nach dieser Einführung soll jetzt geklärt werden, welche Anforderungen an die konkrete Umsetzung eines Quantencomputers gestellt werden müssen. Nachfolgende Darstellung orientiert sich an einer Veröffentlichung DiVincenzos [76].

Die fünf Anforderungen an einen Quantencomputer sind die folgenden:

1. Man muß ein skalierbares, physikalisches System zur Verfügung haben, welches wohldefinierte Qubits besitzt.
2. Man muß in der Lage sein, das System in einen definierten Ausgangszustand wie z.B. $|000\dots\rangle$ zu versetzen.

^[1] engl.: *Quantum Parallel Processing*

3. Das System muß eine lange Dekohärenzzeit aufweisen, welche viel länger als die Gatterzeit ist. D.h. das System muß sehr gut von der Umwelt isoliert sein.
4. Es muß für dieses System ein Satz von universellen Quantengattern existieren. D.h. es müssen Verknüpfungen zwischen den Qubits des Systems existieren, mit denen man im Hilbertraum aller Qubits jeden beliebigen Zustand erzeugen kann. Für den Ionenfallen-Quantencomputer sind dies z.B. das im nachfolgenden Kapitel vorgestellte CNOT-Gatter und Einzelqubitrotationen, welche durch folgenden Operator dargestellt werden können:

$$U(\alpha, \beta) = \alpha(|\downarrow\rangle\langle\downarrow| + |\uparrow\rangle\langle\uparrow|) + \beta(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| - |\downarrow\rangle\langle\uparrow|) \quad \text{mit } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (1.6)$$

wobei (\downarrow, \uparrow) für den unteren bzw. oberen Qubit-Zustand stehen.

Dieser Operator transformiert z.B. den unteren Qubit-Zustand in eine Superposition aus beiden Qubit-Zuständen:

$$U(\alpha, \beta) |\downarrow\rangle = \alpha |\downarrow\rangle + \beta |\uparrow\rangle. \quad (1.7)$$

5. Das Ergebnis einer Quantenrechnung muß mit hoher Effizienz ausgelesen werden können.

Im folgenden wird deutlich werden, daß alle Anforderungen vom Mg^+ - In^+ -Ionenfallen-Quantencomputer erfüllt werden.

1.3 Quantengatter

Jede klassische Computerrechnung kann als eine Abfolge von nur einer logischen (2-Bit)-Operation, der negierten UND-Verknüpfung (NAND = NOT AND) aufgebaut werden^[2]. Da das Qubit eine verallgemeinerte Größe ist, sollte man erwarten, daß dies beim Quantencomputer nicht mehr möglich ist. Tatsächlich braucht man eine weitere Operation, um beliebige Quantenrechnungen durchführen zu können. Dies sind beliebige Rotationen im 2-dimensionalen Hilbertraum eines einzelnen Qubits^[3] (siehe oben).

^[2] Dies kann auch mit der negierten Oder-Schaltung (NOR) bewerkstelligt werden.

^[3] Dies geschieht indem man Rabi-Oszillationen der notwendigen Dauer auf dem Übergang zwischen $|0\rangle$ und $|1\rangle$ treibt.

Deutsch [77] zeigte 1989, daß eine einfache Verallgemeinerung des klassischen Toffli-Gatters [78] (ein 3-Bit-Gatter), ausreicht, um ein universelles Quantengatter zu bilden. Ein solches universelles Gatter gestattet es, beliebige Operationen im Hilbertraum der N Qubits auszuführen.

Da in der klassischen Informatik keine reversiblen *universellen 2-Bit-Gatter* bekannt sind, dachte man lange Zeit, dies sei bei quantenmechanischen Gattern ebenfalls so, da diese ja reversibel sein müssen. Tatsächlich zeigte DiVincenzo [79] aber 1995, daß auch universelle 2-Bit-Quantengatter möglich sind. Lloyd und Deutsch zeigten wenig später sogar [80,81], daß fast jedes 2-Bit- oder n -Bit-Quantengatter ($n \geq 2$) universell ist. Ende 1995 wurde dann schließlich gezeigt, daß ein nichtuniverselles klassisches 2-Bit-Gatter, das sogenannte CNOT-Gatter (siehe unten), in Verbindung mit Quanten-1-Bit-Gattern (Einzelqubitrotationen) ebenfalls universell ist [54,81–83]. Diese letztgenannte Eigenschaft macht man sich bei einer experimentellen Implementierung eines Quantencomputers zu Nutze.

Ein experimentell realisierbares 2-Bit-Quanten-Gatter ist das *Quantum-Controlled-NOT-Gatter* (CNOT-Gatter). Dabei wird je nach Zustand eines Bits, des sogenannten Kontroll-Bits (control-bit), der Wert des anderen Bits, des Ziel-Bits (target-bit), geändert (siehe Tabelle 1.1). Der Operator des CNOT-Gatters wird mit $C_{1,2}$ bezeichnet, wobei der erste

Das Controlled-NOT-Gatter			
Eingabe		Ausgabe	
Kontroll-Qubit	Ziel-Qubit	Kontroll-Qubit	Ziel-Qubit
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	0

Tabelle 1.1: Wahrheitswerttabelle für das Controlled-NOT-Gatter.

Index die Position des Kontroll-Bits, der zweite diejenige des Ziel-Bits angibt. Die Wirkung des CNOT-Operators $C_{1,2}$ auf einen Basiszustand läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$C_{1,2} \left(|\varepsilon_1\rangle_{control} |\varepsilon_2\rangle_{target} \right) = |\varepsilon_1\rangle_{control} |\varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2\rangle_{target} \quad , \quad (1.8)$$

wobei $\varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2 := (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \text{ MOD } 2$ bezeichnet.

Wichtige Eigenschaften für Quantenrechnungen des CNOT-Gatters sind im nachfolgenden resümiert.

1. Das CNOT-Gatter führt eine Superposition von Zuständen im Kontroll-Qubit in einen verschränkten Zustand über.

$$(a|0\rangle_1 + b|1\rangle_1)|0\rangle_2 \longrightarrow a|0\rangle_1|0\rangle_2 + b|1\rangle_1|1\rangle_2 \quad (1.9)$$

Der Endzustand ist verschränkt, da er sich nicht als direktes Produkt der Einzelzustände von Teilchen 1 und 2 schreiben läßt.

2. Zweimalige Anwendung der CNOT-Transformation läßt jeden beliebigen Zustand unverändert. Die CNOT-Operation ist somit umkehrbar und ihr eigenes Inverses.

$$C_{1,2}^2 = C_{1,2}C_{1,2} = \mathbb{1} \quad C_{1,2}^{-1} = C_{1,2} \quad (1.10)$$

3. Das Vertauschen zweier Quantenzustände kann durch dreimalige Anwendung des CNOT-Gatter erzielt werden.

$$C_{1,2}C_{2,1}C_{1,2}|\varepsilon_1\rangle|\varepsilon_2\rangle = |\varepsilon_2\rangle|\varepsilon_1\rangle \quad (1.11)$$

für beliebige Zustände $|\varepsilon_1\rangle|\varepsilon_2\rangle$.

Neben zahlreichen Vorschlägen, einen Quantencomputer zu realisieren, z.B. NMR-Methoden, Quantendots oder Hohlraumresonator-QED (siehe Einleitung), sind die Voraussetzungen für eine Realisierung in einer Ionenfalle z.Z. wegen der möglichen Skalierbarkeit zu vielen Qubits, geringen Dekohärenz und relativ einfach zu realisierender Ansprechbarkeit der Ionen am günstigsten. Nachfolgende Vorschläge zu Quantengattern beschränken sich deshalb auf Implementierungen in Ionenfallen, nicht zuletzt deswegen, weil auch diese Arbeit sich ausschließlich mit Ionenfallen beschäftigt.

1.3.1 Das kalte Gatter

1995 schlugen Cirac und Zoller [1] vor, einen Quantencomputer in einer linearen Ionenfalle zu realisieren. Dabei bildet jedes Ion einer in dieser linearen Falle gespeicherten Ionenkette

ein Qubit, so daß die gesamte Kette ein Quantenregister repräsentiert. Dabei werden zwei Hyperfeingrundzustände eines Ions als Basiszustände des Qubits benutzt.

Das kalte Gatter [1] arbeitet im Bereich schwacher Anregung $\Omega \ll \omega_{osz}$ ^[4], und setzt Grundzustandskühlung mindestens einer Schwingungsmode der Ionenkette in einer linearen Ionenfalle (siehe Abb. 1.1) voraus.

Das Gatter besteht im Falle des linearen Ionenfallen-Quantencomputers aus einer Abfolge

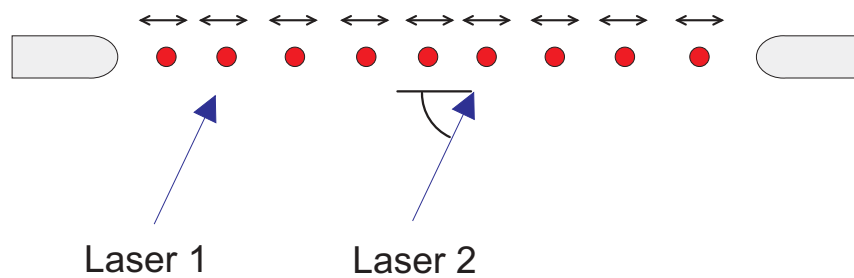


Abbildung 1.1: *CNOT-Gatter in einer linearen Ionenfalle*

von Laserpulsen, die nacheinander auf einzelne Ionen der Kette (siehe Kapitel 6.8.1, siehe Abb. 1.1) gerichtet werden und insgesamt ein CNOT-Gatter zwischen zwei solchen Ionen bewirken. Die Wechselwirkung zwischen zwei internen Zuständen zweier Ionen in der Falle wird mit Hilfe der Coulomb-Abstoßung der einfach positiv geladenen Ionen vermittelt. In Verbindung mit Einzelqubitrotationen, die ebenfalls mit nur einem Laserpuls auf einzelne Ionen realisiert werden, ist dieses Gatter universell für N Ionen in einer linearen Falle.

Das Gatter besteht aus drei Schritten. Die Wechselwirkung zwischen den zwei logisch zu verknüpfenden Ionenzuständen wird mittels Phononen, also Anregungen einer Schwingungsmode^[5] des Ionenkristalls vermittelt, die hier sozusagen als Quanten-Bus fungieren. Im ersten Schritt wird der interne atomare Qubit-Zustand des einen Ions - des Kontroll-Bits - auf diese Schwingungsmode übertragen. Der zweite Schritt führt ein CNOT-Gatter zwischen dem Bus-Qubit und dem internen Qubit-Zustand des anderen Ions, des Target-Bits, aus. Im letzten Schritt wird der ursprüngliche Zustand sowohl des Bus-Qubits als auch des Qubits von Ion 1 wiederhergestellt.

^[4] Ω : Rabi-Frequenz des betrachteten Übergangs, ω_{osz} : Oszillationsfrequenz der Ionen in der Falle

^[5] Meistens entweder Schwerpunktsmode oder Atmungsmode.

In expliziter Darstellung sehen die drei Schritte wie folgt aus:

Vor Beginn der Prozedur ist die Schwerpunkts-Mode des Ionenkristalls mittels Laserkühlung im Oszillationsgrundzustand $|0\rangle$ präpariert worden^[6].

Im *ersten* Schritt wird auf Ion 1 (Kontroll-Bit) ein π -Puls auf dem ersten roten Seitenband angewandt (Laserverstimmung $\delta = \omega_{\text{Laser}} - \omega_0 = -\omega_z$). Hierbei ist ω_0 die atomare Resonanzfrequenz des Qubitübergangs und ω_z die axiale Oszillationsfrequenz der Ionen in der linearen Falle. Die Zustände von Qubit und Bus transformieren sich dadurch wie folgt (siehe auch Abb. 1.2):

$$\begin{aligned} |e, 0\rangle &\longrightarrow |g, 1\rangle \\ |g, 0\rangle &\longrightarrow |g, 0\rangle \\ |g, 1\rangle \text{ und } |e, 1\rangle &\text{ sollten unbesetzt sein } \end{aligned} \quad (1.12)$$

wobei $|0\rangle$ und $|1\rangle$ Grund- und erster angeregter Zustand der gemeinsamen quantisierten Schwerpunktschwingung und $|g\rangle = |\downarrow\rangle$ und $|e\rangle = |\uparrow\rangle$ die internen atomaren Zustände, und zwar unterer und oberer Qubit-Zustand sind.

Um diese Übergänge mit einer kleinen Fehlerrate durchführen zu können, müssen die Schwingungsseitenbänder mit dem Laser aufgelöst werden können, d.h. die natürliche Linienbreite des Qubitübergangs Γ muß viel kleiner als die axiale Oszillationsfrequenz der Ionen sein $\Gamma \ll \omega_z$, bzw. im Fall von Raman-Übergängen: $\Gamma_{\text{eff}} \ll \omega_z$ (siehe Kapitel 4.4). Desweiteren muß man sich im Lamb-Dicke-Limit ($\eta = \sqrt{\frac{E_R}{\hbar\omega_z}} \ll 1$, $E_R = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$: Photonen-Rückstoßenergie) und im Grenzfall schwacher Anregung ($\Omega < \omega_z$) befinden. Dann sollten nur die oben genannten angestrebten Übergänge stattfinden.

Der Wechselwirkungsoperator im Fall eines Ions, das sich am Knoten einer stehenden Welle der Laserstrahlen befindet lautet im Wechselwirkungsbild explizit:

$$H'_W = -\frac{\hbar\Omega}{2\sqrt{N}} (|e\rangle_1 \langle g| \exp[i\eta(a e^{-i\omega_z t} + a^\dagger e^{i\omega_z t}) - i\Phi - i\delta t] + H.c.) \quad (1.13)$$

Mit $\eta \ll 1$ und $\delta = -\omega_z$ vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$H'_W = -\frac{\eta\hbar}{\sqrt{N}} \frac{\Omega}{2} (|e\rangle_1 \langle g| a e^{-i\Phi} + |g\rangle_1 \langle e| a^\dagger e^{i\Phi}). \quad (1.14)$$

^[6] Dies wird beim reinen Mg^+ -Kristall durch Doppler-Vorkühlung und anschließender Raman-Seitenband-Kühlung und beim Mg^+ - In^+ -Mischkristall durch reine Seitenbandkühlung erreicht. Siehe Kapitel 4.

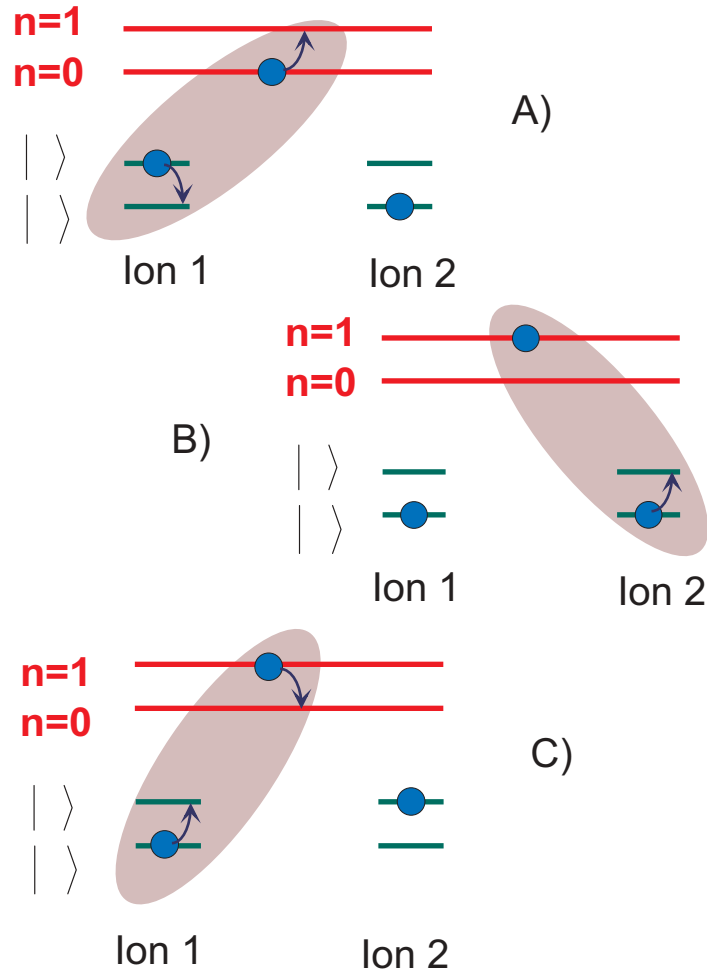


Abbildung 1.2: Die drei Schritte bei der Durchführung des CNOT-Gatters zwischen zwei Ionen nach [1]. A) Zustand von Ion 1 wird auf die Schwingungsmode projiziert. B) CNOT-Operation zwischen Schwingungsmode und Ion 2. C) Der ursprüngliche Zustand von Ion 1 und der Schwingungsmode wird wiederhergestellt.

Ω ist hierbei die Rabi-Frequenz, N die Anzahl der Ionen in der Falle, a und a^\dagger die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren der axialen Schwingungsmode, ω_z die axiale Schwingungsfrequenz, Φ die Phase des Lasers und $\eta = \sqrt{\frac{\hbar(k \cos \theta)^2}{2m\omega_z}}$ der Lamb-Dicke-Parameter, wobei θ den Winkel zwischen Laser und Fallachse bezeichnet. Dieser Hamiltonoperator beschreibt eine Jaynes-Cummings-Wechselwirkung zwischen dem Ion und einer Schwingungsmode und ist strenggenommen nur für $\left(\frac{\Omega\eta}{\sqrt{N}\omega_z}\right)^2 \ll 1$ gültig [84]. Im Unterschied zur Resonator-QED kann hier die Kopplungsstärke durch Veränderung des

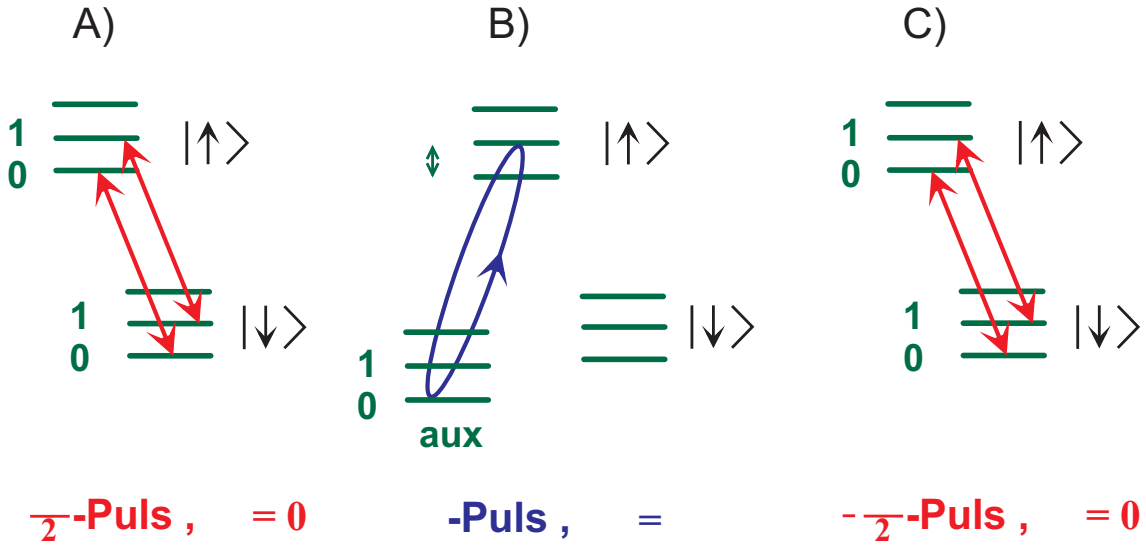


Abbildung 1.3: CNOT-Operation zwischen dem internen Zustand des Ions und der Schwingungsmode. Der Zustand der Schwingungsmode wirkt als Kontroll-Qubit.

effektiven Lamb-Dicke-Parameters modifiziert werden.

Der zu diesem Wechselwirkungsoperator zugehörige unitäre Operator lautet:

$$U = e^{-iH'_W t/\hbar} = \exp \left[-ik\pi/2 (|e\rangle_1 \langle g| a e^{-i\Phi} + H.c.) \right] , \quad (1.15)$$

wobei im letzten Schritt $t = \frac{k\pi}{\Omega\eta} \sqrt{N}$ für einen $k\pi$ -Puls eingesetzt wurde. Die Basiszustände (der Rechenbasis) verändern sich dann wie folgt:

$$|g\rangle_1 |1\rangle \longrightarrow \cos(k\pi/2) |g\rangle_1 |1\rangle - ie^{i\Phi} \sin(k\pi/2) |e\rangle_1 |0\rangle , \quad (1.16)$$

$$|e\rangle_1 |0\rangle \longrightarrow \cos(k\pi/2) |e\rangle_1 |0\rangle - ie^{-i\Phi} \sin(k\pi/2) |g\rangle_1 |1\rangle , \quad (1.17)$$

$$|g\rangle_1 |0\rangle \longrightarrow |g\rangle_1 |0\rangle . \quad (1.18)$$

Dies geht für $k=1$ in Gl. (1.12) über.

Im *zweiten* Schritt wird ein CNOT-Gatter zwischen Bus-Qubit und dem zweiten Ion ausgeführt. Dieser Schritt beinhaltet die eigentliche bedingte Dynamik. Die anderen beiden Schritte dienen lediglich zur Übertragung von Information zwischen Bus und erstem Ion. Dieser Schritt besteht aus drei Unterschritten. Der mittlere dieser Schritte ist hierbei wiederum der Entscheidende; man gibt einen 2π -Puls auf das erste *blaue* Seitenband zwischen

oberen Qubit-Niveau des zweiten Ions $|e\rangle_2 = |\uparrow\rangle_2$ und einem atomaren Hilfsniveau $|\text{aux}\rangle$ (Übergang $|e, 1\rangle \longleftrightarrow |\text{aux}, 0\rangle$). Dies bedingt eine Vorzeichenänderung der Wellenfunktion, wenn und nur wenn das Ion im Zustand $|e, 1\rangle_2$ ^[7] war, ansonsten, d.h. für den Zustand $|e, 0\rangle$, hat der Puls keine Wirkung. Damit hat man auf den Zustand $|\varepsilon_1\rangle |\varepsilon_2\rangle$, wobei ε_1 für den Zustand der Schwerpunktsmode $|n\rangle$ und ε_2 für den internen Zustand von Ion 2 ($|g\rangle_2$ oder $|e\rangle_2$) steht, ein Phasengatter angewandt (siehe auch [22]):

$$U_{\text{Phasengatter}} : |\varepsilon_1\rangle |\varepsilon_2\rangle \longrightarrow (-1)^{\varepsilon_1 \varepsilon_2} |\varepsilon_1\rangle |\varepsilon_2\rangle \quad (1.19)$$

Hierbei hat man zur Berechnung des Produkts $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ die Identifizierungen $|\varepsilon_1\rangle \in \{|g\rangle, |e\rangle\} \equiv \{|0\rangle, |1\rangle\}$ und $|\varepsilon_2\rangle \in \{|n\rangle; n = 0, 1\} \equiv \{|0\rangle, |1\rangle\}$ vorzunehmen. Mit diesem Phasengatter läßt sich jedoch auch ein CNOT-Gatter realisieren. Man braucht nur je einen $\pi/2$ -Puls vor und nach dem Phasengatter mit einer Phasendifferenz von π auf dem Träger (d.h. keine Verstimmung $\delta = 0$) des Qubit-Übergangs zu geben. Im letzten Schritt, nachdem das CNOT-Gatter zwischen Schwingungsmode und Ion 2 ausgeführt wurde, wird der erste Schritt wiederholt, d.h. man gibt einen π -Puls auf das erste rote Seitenband, was die Schwingungsmode wieder in den Grundzustand $|n = 0\rangle$ bringt und den internen Zustand von Ion 1 wiederherstellt.

Die drei Schritte ergeben insgesamt folgende Transformationen:

$$\begin{aligned} |g\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle &\longrightarrow |g\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle \\ |g\rangle_1 |e\rangle_2 |0\rangle &\longrightarrow |g\rangle_1 |e\rangle_2 |0\rangle \\ |e\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle &\longrightarrow |e\rangle_1 |e\rangle_2 |0\rangle \\ |e\rangle_1 |e\rangle_2 |0\rangle &\longrightarrow |e\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle \end{aligned} \quad (1.20)$$

Ion 1 entspricht dem Kontroll-Bit, Ion 2 dem davon abhängigen Ziel-Bit. Bemerkenswert hierbei ist, daß am Anfang und Ende des Gatters die Schwingungsmode im Grundzustand ist, wohingegen sie dies während der Rechnung nicht unbedingt ist. Eine einfache, anschauliche Beschreibung des Cirac-Zoller-Gatters ist mit dem Bloch-Vektor möglich. Dabei betrachtet man nur den entscheidenden Schritt, in dem ein CNOT-Gatter zwischen dem Quanten-Bus-Qubit und dem zweiten Ziel-Qubit durchgeführt wird. Desweiteren werden wir dies nur anhand eines Beispiels erläutern. Man kann sich einfach überlegen, daß für

^[7] Hier wird vorausgesetzt, daß alle anderen höheren Niveaus $|e, 2\rangle_2, |e, 3\rangle_2, \dots$ unbesetzt sind.

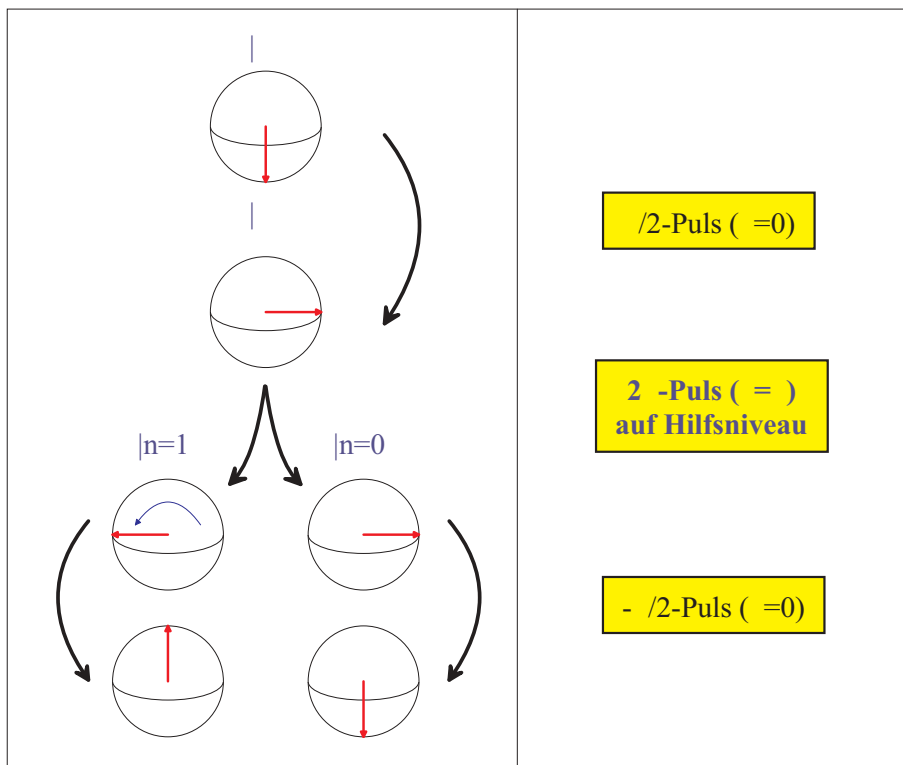


Abbildung 1.4: Schematische Darstellung des Cirac-Zoller-Gatters im Bloch-Vektor-Bild. Für Erläuterungen siehe Text.

alle anderen Möglichkeiten die Überlegung ebenfalls richtig ist.

Wir betrachten also den Fall, daß das Ziel-Qubit im Zustand $|0\rangle$ ist und das Kontroll-Qubit entweder im Zustand $|0\rangle$ oder $|1\rangle$ sein darf. Nachdem der Zustand des Kontroll-Bits auf den Quantenbus projiziert wurde, befindet sich dasselbe entweder in $|n=0\rangle$ oder $|n=1\rangle$. Nun wird das dreistufige CNOT-Gatter zwischen dem Quanten-Bus-Qubit und dem Ziel-Qubit durchgeführt. Der $\pi/2$ -Puls auf dem Träger des Ziel-Qubits wirkt im Bloch-Vektor-Bild des Ziel-Qubits wie eine Verschiebung des Bloch-Vektors vom Südpol auf eine Stelle des Äquators (siehe Bild 1.4). Der Zustand des Ziel-Qubits ist also eine gleichgewichtete Superposition der beiden Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$. Der darauffolgende 2π -Puls auf dem blauen Seitenband eines atomaren Hilfsniveaus invertiert das Vorzeichen der zweiten Komponente dieser Superposition nur, falls der Quantenbus davor im Zustand $|n=1\rangle$ war. Ansonsten bleibt die Superposition unverändert (wie weiter oben bereits erläutert). Im ersten Fall wird der Bloch-Vektor also um den Nordpol um 180° gedreht und befindet sich danach

wieder auf dem Äquator, während bei $|n = 0\rangle$ der Bloch-Vektor unverändert bleibt. Der abschließende $-\pi/2$ -Puls auf dem Träger führt den Bloch-Vektor für den Fall $|n = 0\rangle$ wieder zurück zum Südpol, also zum Grundzustand, wohingegen im Fall $|n = 1\rangle$ der Bloch-Vektor nach dem Gatter zum Nordpol, also zum angeregten Quantenbit-Zustand zeigt. Dieses einfache Bild beschreibt also ebenfalls die bedingte Dynamik des Cirac-Zoller-Gatters.

1.3.2 Quanteninformationsverarbeitung mit $^{25}\text{Mg}^+$

Das Isotop $^{25}\text{Mg}^+$ stellt einen idealen Kandidaten für die Quanteninformationsverarbeitung dar. Das Termschema ist in Abbildung 1.5 zu sehen. Aufgrund des Kernspins von $I = 5/2$ erfährt der Grundzustand eine Hyperfeinaufspaltung von 1,79 GHz mit einer Lebensdauer des oberen Hyperfeinniveaus von mehr als 10^{12} s. Als Qubit-Zustände werden

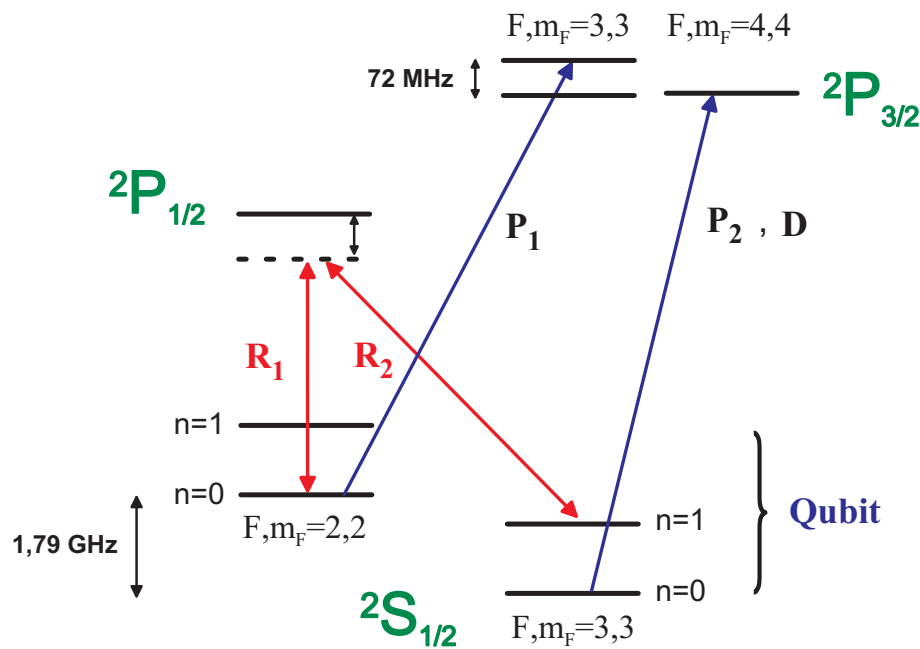


Abbildung 1.5: Termschema von $^{25}\text{Mg}^+$ mit den ersten beiden Vibrationsniveaus der Hyperfein-Grundzustände. Quanteninformation wird in den Qubit-Zuständen $^2S_{1/2}$ $F = 3, m_F = 3$ und $F = 2, m_F = 2$ gespeichert.

die Niveaus $(F, m_F) = (3, 3)$ und $(2, 2)$ verwendet. Die Kopplung dieser beiden Zustände mit der Schwingungsmode sowie Einzelqubit-Rotation erfolgen mit Hilfe stimulierter

Raman-Übergänge. Dazu werden die beiden Raman-Laser R_1 und R_2 mit den Laserfrequenzen ω_1 und ω_2 eingestrahlt. Die Verstimmung Δ zum Niveau $^2P_{3/2}$ beträgt mehrere 10 GHz. Bevor ein Gatter an den $^{25}\text{Mg}^+$ -Ionen durchgeführt werden kann, müssen die Ionen mit Hilfe der beiden zirkular polarisierten Laser P_1 und P_2 in den Hyperfeingrundzustand $F = 3, m_F = 3$ gepumpt werden, um einen definierten Ausgangszustand zu haben. Am Ende der Rechnung wird gemessen, ob sich das Ion im Hyperfeinzustand $F = 3, m_F = 3$ oder $F = 2, m_F = 2$ befindet. Dazu wird der zirkular polarisierte Laser D eingestrahlt. Aufgrund der großen Hyperfeinstrukturaufspaltung von 1,79 GHz, koppelt er nur an den Zustand $F = 3, m_F = 3$, der Zustand $F = 2, m_F = 2$ ist nichtresonant, wodurch ein zustandsselektives Auslesen möglich ist. Der Detektionsübergang von $^2S_{1/2}, F = 3, m_F = 3 \rightarrow ^2P_{3/2}, F = 4, m_F = 4$ ist darüberhinaus ein geschlossener Übergang^[8], so daß viele Fluoreszenzphotonen erzeugt werden können. Dadurch ist ein experimenteller Nachweis mit nahezu 100%-iger Wahrscheinlichkeit möglich.

Die eben beschriebenen Übergänge liegen alle bei einer Wellenlänge von 280 nm. Durch die beiden Laser P_1 und P_2 werden die $^{25}\text{Mg}^+$ -Ionen dopplergekühlt. Eine Kühlung bis in den Grundzustand, die für die Realisierung eines Cirac-Zoller-Gatters benötigt wird, ist dadurch nicht möglich. Der Grundzustand kann jedoch durch die Raman-Seitenband-Kühlung [6, 7] oder durch sympathetische Kühlung mit einer weiteren Ionensorte (siehe Kapitel 4.6) realisiert werden.

1.3.3 Sørensen-Mølmer-Gatter

Beim letztgenannten Gatter war es erforderlich, die Ionen in den Grundzustand wenigstens einer Schwingungsmode zu kühlen. Weil dies experimentell sehr anspruchsvoll ist, und bisher auch erst für bis zu zwei Ionen experimentell gelungen ist [4, 57, 58] (mit Hilfe von EIT^[9] siehe [85]), wäre es wünschenswert diese Restriktion aufzuheben oder zumindest abzuschwächen. Gemäß einem theoretischen Vorschlag von Sørensen und Mølmer [2, 86] ist dies möglich. Es wurde eine Realisierungsmöglichkeit vorgeschlagen, die es ermöglicht, in einer Ionenfalle ein Quantengatter zu betreiben ohne Notwendigkeit der Grundzustandkühlung. Solche Quantengatter nennt man auch heiße Gatter, da sie mit

^[8] *engl.: cycling transition*

^[9] *EIT: Electromagnetically Induced Transparency*

vergleichsweise heißen Ionen möglich sind. Vorschläge für weitere heiße Gatter findet man in [61, 63, 64, 87, 88]

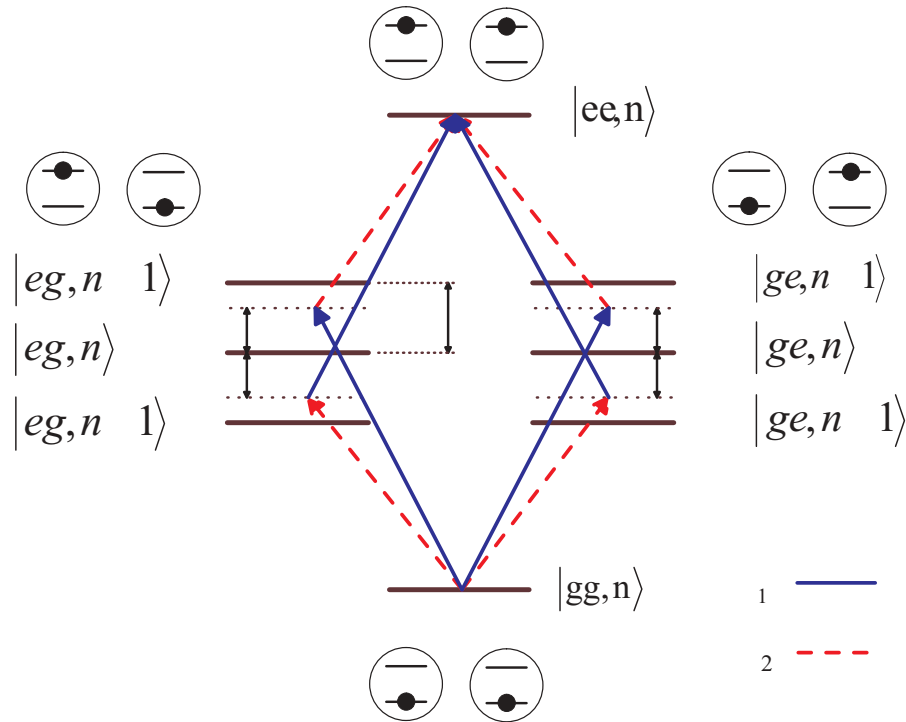


Abbildung 1.6: Niveauschema zweier Ionen beim Quantengatter nach Sørensen und Mølmer [2]. Beide Ionen werden gleichzeitig von zwei Lasern mit den Frequenzen ω_1 und ω_2 angeregt. Destruktive Interferenz der eingezeichneten 4 Pfade führt zu einer von der Vibrationsquantenzahl n unabhängigen Rabi-Frequenz von $|gg\rangle$ nach $|ee\rangle$.

Im Termschema beider Ionen werden zwei Laser unterschiedlicher Frequenz eingestrahlt, die auf beide Ionen fokussiert werden. Die eine (ω_1) ist unterhalb des ersten blauen Seitenbandes, die zweite (ω_2) oberhalb des ersten roten Seitenbandes gestimmt, so daß der Mittelwert beider Laserfrequenzen exakt dem Träger entspricht (siehe Abb. 1.6).

$$\omega_{1/2} = \omega_{eg} \pm \delta \quad (1.21)$$

Das Gatter kann in zwei unterschiedlichen Regimen betrieben werden. Der Fall des starken Feldes, mit dem man ein schnelles Gatter realisieren kann, ist theoretisch verwickelter.

Dieser soll als erstes behandelt werden. Danach ergibt sich der Fall des langsamen Gatters als einfacher Grenzfall mit niedriger Intensität.

1.3.3.1 Schnelles Sørensen-Mølmer-Gatter

Dies ist der allgemeine Fall des Gatters mit starke treibendem Feld. In beiden Fällen werden für beide Ionen gleiche Lamb-Dicke-Parameter $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ in der Lamb-Dicke-Näherung ($\eta \sqrt{n+1} \ll 1$) und gleiche Rabifrequenzen $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ vorausgesetzt. Weiterhin setzen wir $\hbar = 1$.

Für schwache Anregung $\Omega \ll \delta$ und Anregung nahe der Seitenbänder $\nu - \delta \ll \delta$ lautet der Hamilton-Operator im Wechselwirkungsbild:

$$H_{int} = \frac{i}{2} \eta \Omega \sum_{k=1}^2 \left(\sigma_+^{(k)} - \sigma_-^{(k)} \right) \cdot \left(a^\dagger e^{i(\nu-\delta)} + a e^{-i(\nu-\delta)} \right) \quad (1.22)$$

Die Bewegungsgleichung für den Propagator (im Wechselwirkungsbild) kann dann wie folgt geschrieben werden:

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t) = H_{int} U(t) \quad (1.23)$$

Unter Berücksichtigung der folgenden Beziehungen zwischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und Orts- und Impulsoperator und Pauli-Operatoren und Drehimpulsoperatoren

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^\dagger + a) \quad p = \frac{i}{\sqrt{2}} (a^\dagger - a) \quad J_y = \sum_{k=1}^2 \sigma_y^{(k)} \quad (1.24)$$

kann man den Propagator folgendermaßen schreiben:

$$U(t) = e^{-iA(t)J_y^2} e^{-iF(t)J_y x} e^{-iG(t)J_y p}, \quad (1.25)$$

wobei

$$\begin{aligned} F(t) &= -\frac{\sqrt{2}\eta\Omega}{\nu-\delta} \sin((\nu-\delta)t) \\ G(t) &= -\frac{\sqrt{2}\eta\Omega}{\nu-\delta} [1 - \cos((\nu-\delta)t)] \\ A(t) &= -\frac{\eta^2\Omega^2}{\nu-\delta} \left[t - \frac{1}{2(\nu-\delta)} \sin(2(\nu-\delta)t) \right] \end{aligned} \quad (1.26)$$

gilt. Im Phasenraum bewirkt der Propagator eine Verschiebung der Form

$$(x, p) \longrightarrow (x + J_y G(t), p - J_y F(t)) \quad (1.27)$$

in Verbindung mit einer Verschränkung der internen Zustände der Ionen. Im Phasenraum wird ein Kreis mit Radius $r = \sqrt{2} J_y \frac{\eta \Omega}{\nu - \delta}$ und Fläche $-A(t)$ beschrieben (siehe Abb. 1.7).

Für die korrekte Durchführung eines Gatters muss gewährleistet sein, daß man am Ende

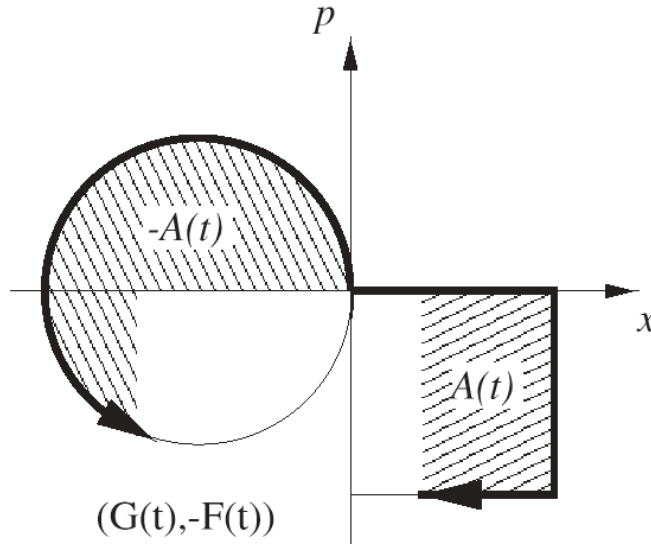


Abbildung 1.7: Durchlaufener Pfad im Phasenraum und die Funktion $A(t)$ im Vorschlag von Milburn [89] (rechteckig) und beim Sørensen-Mølmer-Gatter [2] (kreisförmig).

zum ursprünglichen Vibrationszustand zurückkehrt. Dies erreicht man, indem man die Parameter so wählt, daß $F(\tau) = G(\tau) = 0$, was

$$(\nu - \delta) \tau = M 2\pi \quad (1.28)$$

entspricht, wobei M eine ganze Zahl ist. Der Propagator vereinfacht sich dann zu $U(\tau) = e^{-iA(\tau)J_y^2}$. Einen maximal verschränkten Zustand $1/\sqrt{2}(|gg\rangle - i|ee\rangle)$ erreicht man, wenn man $A(\tau) = -\pi/2$ wählt. Dies wird durch folgende Bedingung erreicht:

$$\frac{\eta \Omega}{\nu - \delta} = \frac{1}{2\sqrt{M}}, \quad M \in \mathbb{N} \quad (1.29)$$

Die Zeit zur Durchführung eines solchen Gatters wäre dann durch

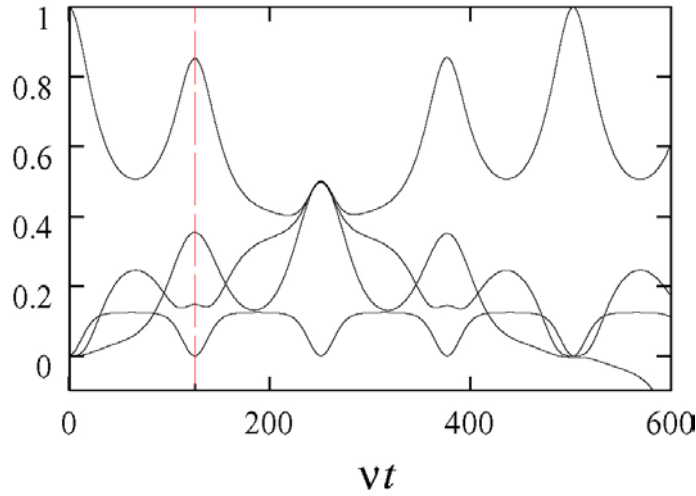


Abbildung 1.8: Zeitliche Entwicklung der Dichtematrixelemente für starkes Feld. Die erste Kurve von oben an der markierten Stelle bei circa $\nu t = 130$ stellt das Dichtematrixelement $\rho_{gg,gg}$ dar, die zweite den Imaginärteil von $\rho_{gg,ee}$, die dritte $\rho_{ee,ee}$ und die vierte den Realteil von $\rho_{gg,ee}$. Der maximal verschränkte Zustand ist zum Zeitpunkt $t \approx 250 \nu^{-1}$ erreicht. Die gewählten Parameter sind: $M = 2, \delta = 0,95 \nu, \eta = 0,1$ und $\Omega = 0,177 \nu$.

$$\tau_{\text{schnell}} = \frac{\pi}{\eta\Omega} \sqrt{M} \quad (1.30)$$

gegeben, was bei einer Rabi-Frequenz von $\Omega = 0,1 \nu$ und einem Lamb-Dicke-Parameter von $\eta = 0,1$ mit $\nu = 2\pi \cdot 500$ kHz und $M = 1$ einer Gatterzeit von $\tau = 100 \mu\text{s}$ entspräche.

Abb. 1.8 stellt die zeitliche Entwicklung der Dichtematrixelemente dar. Die oberste Kurve stellt die Besetzung des gemeinsamen Grundzustand $|gg\rangle$ dar. Man sieht, daß sie bei $t \approx 250 \nu^{-1}$ den Wert 0,5 erreicht, wo der verschränkte Zustand $1/\sqrt{2}(|gg\rangle - i|ee\rangle)$ erreicht wird.

1.3.3.2 Langsames Sørensen-Mølmer-Gatter

Die Bedingung für den Grenzfall schwacher Anregung ist $\eta\Omega \ll \nu - \delta$. Somit sind sowohl $F(t)$ als auch $G(t)$ für alle Zeiten vernachlässigbar klein und wegen $U(t) = e^{-iA(t)J_y^2}$ ist die interne Zustandsentwicklung unabhängig von der Oszillation der Ionen in der Falle, was letztendlich zu sinusförmigen Rabi-Oszillationen der internen Zustände führt (siehe Abb. 1.9).

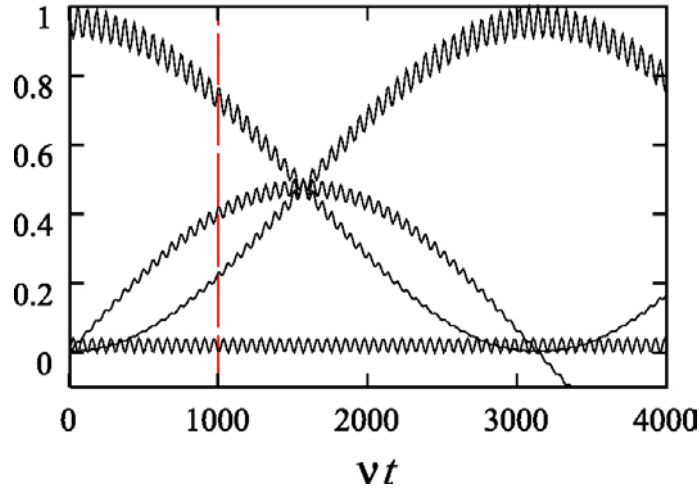


Abbildung 1.9: Zeitliche Entwicklung der Dichtematrixelemente für schwach treibendes Feld. Die erste Kurve von oben an der markierten Stelle bei $\nu t = 1000$ stellt das Dichtematrixelement $\rho_{gg,gg}$ dar, die zweite den Imaginärteil von $\rho_{gg,ee}$, die dritte $\rho_{ee,ee}$ und die vierte den Realteil von $\rho_{gg,ee}$. Der maximal verschränkte Zustand ist zum Zeitpunkt $t \approx 1600 \nu^{-1}$ erreicht. Die gewählten Parameter sind: $\delta = 0,9\nu$, $\eta = 0,1$ und $\Omega = 0,1\nu$. Die schwachen sinusförmigen Oszillationen sind Anzeichen der noch vorhandenen Verschränkung, da die Bedingung $\eta\Omega \ll \nu - \delta$ nicht sehr gut erfüllt ist.

Die Gatterzeit ergibt sich zu:

$$\tau_{\text{langsam}} = 2\pi M \frac{\nu - \delta}{(\eta\Omega)^2} \gg 2\pi M \frac{1}{\eta\Omega} = 2\sqrt{M} \tau_{\text{schnell}} \quad (1.31)$$

Dieser Fall kann auch mittels Störungstheorie zweiter Ordnung berechnet werden.

Falls sich beide Ionen im Grundzustand befinden, lauten die einzigen energieerhaltenden Übergänge:

$$|gg, n\rangle \longrightarrow (|eg, n \pm 1\rangle) \longrightarrow |ee, n\rangle \quad (1.32)$$

$$|gg, n\rangle \longrightarrow (|ge, n \pm 1\rangle) \longrightarrow |ee, n\rangle \quad , \quad (1.33)$$

wobei das mittlere, virtuelle Niveau unbesetzt bleibt, falls die Verstimmung zum nächsten realen Niveau groß genug gewählt wurde.

Setzt man wie beim schnellen Gatter gleiche Lamb-Dicke-Parameter $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ im Lamb-Dicke-Limit ($\eta \sqrt{n+1} \ll 1$) und gleiche Rabifrequenzen $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ voraus, ergibt sich folgende Übergangs-Rabifrequenz $\tilde{\Omega}$ zum Übergang $|gg\rangle \longleftrightarrow |ee\rangle$ (1.32/1.33), falls als

Zwischenzustände nur die Zustände $|eg, n + 1\rangle$ und $|ge, n - 1\rangle$ berücksichtigt werden:

$$\tilde{\Omega} = -\frac{(\Omega\eta)^2}{2(\nu - \delta)} \quad , \quad (1.34)$$

wobei $\delta = \omega_1 - \omega_{eg}$ die Verstimmung des ersten Lasers von der atomaren Resonanzfrequenz und ν die Oszillationsfrequenz der Ionen in der Falle ist. Es fällt auf, daß $\tilde{\Omega}$ nicht mehr von n abhängt. Dies kommt dadurch zustande, daß die Pfade aus den Gleichungen (1.32) und (1.33) destruktiv miteinander interferieren in einer solchen Weise, daß die Abhängigkeit der Schwingungsquantenzahl n herausfällt.

Dies ermöglicht es auch bei beliebiger, zeitabhängiger Besetzung der Oszillatorzustände Quantenrechnungen durchzuführen.

Die Evolution läßt sich also bis auf Phasenfaktoren folgendermaßen beschreiben:

$$\begin{aligned} |gg\rangle &\longrightarrow \cos\left(\frac{\tilde{\Omega}T}{2}\right)|gg\rangle + i\sin\left(\frac{\tilde{\Omega}T}{2}\right)|ee\rangle \\ |ee\rangle &\longrightarrow \cos\left(\frac{\tilde{\Omega}T}{2}\right)|ee\rangle + i\sin\left(\frac{\tilde{\Omega}T}{2}\right)|gg\rangle \\ |ge\rangle &\longrightarrow \cos\left(\frac{\tilde{\Omega}T}{2}\right)|ge\rangle - i\sin\left(\frac{\tilde{\Omega}T}{2}\right)|eg\rangle \\ |eg\rangle &\longrightarrow \cos\left(\frac{\tilde{\Omega}T}{2}\right)|eg\rangle - i\sin\left(\frac{\tilde{\Omega}T}{2}\right)|ge\rangle \end{aligned} \quad (1.35)$$

Ein CNOT-Gatter zwischen Ion 1 und 2 wird dann durch folgende 5 Schritte realisiert:

1. Verändere den Zustand $|g\rangle$ von Ion 1 in $|aux\rangle$
2. Verwende die Evolution von Gl. (1.35) mit $T = \pi/\tilde{\Omega}$
3. Vertausche die Zustände $|g\rangle$ und $|e\rangle$ bei Ion 1
4. Wiederhole Schritt 2
5. Vertausche $|g\rangle$ und $|aux\rangle$ bei Ion 1

Zusammen mit den bereits erwähnten Einzelqubitrotationen bildet das CNOT-Gatter ein universelles Gatter [54].

Ein Vorteil dieses Gatters ist, daß es möglich ist, gleichzeitig Rechnungen mit den Ionenpaaren (i,j) , und (k,l) durchzuführen. Dazu strahlt man einfach mit den Verstimmungen $\delta_{i,j}$ auf die Ionen i und j und mit $\delta_{k,l}$ auf die Ionen k und l .

Dieser Vorschlag kann auch dazu genutzt werden, Ionen gezielt zu verschränken, ohne die Ionen einzeln ansprechen zu müssen [3, 62]. Dies wurde im Jahr 2000 von der Gruppe um Wineland für 2 und 4 Ionen gezeigt [59]. Das Gatter ist in Kombination mit Einzelqubitrotationen einem CNOT-Gatter äquivalent.

Weitere kürzlich realisierte CNOT-Gatter mit Ionenfallen findet man in [68–70, 90].

1.4 Quantenalgorithmen

1994 stellte Shor erstmals Algorithmen vor, die bestimmte Probleme effizienter lösen können als jede klassische Turing-Maschine. Zum einen war das die Primzahlzerlegung großer Zahlen [10, 12] (siehe Anhang C), als auch das diskrete Logarithmus-Problem. Es gibt nicht viele solcher Quantenalgorithmen, die Probleme effizienter als ein klassischer Computer lösen können. Es gibt jedoch einige, welche eine gewisse beschleunigte Abarbeitung im Vergleich zum klassischen Algorithmus zulassen. Dies ist der Grover-Algorithmus zur schnellen Datenbanksuche [91], welcher eine quadratische Beschleunigung^[10] erfährt, während der Shoralgorithmus sogar eine exponentielle Beschleunigung vorweisen kann.

Daneben sei noch der Deutsch-Josza-Algorithmus [77, 92] erwähnt, bei dem man mit nur einem einzigen Blick entscheiden kann, ob die beiden Seiten einer (Quanten-)Münze identisch sind oder verschieden (experimentelle Realisierung in [71]).

^[10] *engl.: quadratic speed up*

Kapitel 2

Die lineare elektrische Quadrupolfalle

Ion Atrapado

Prisionero fugaz de las voluntades jurídicas de cien mentes
forjadas en sueños ilusos de luces, sombras y esperanza.
Huir intentas al no entender tan cruel pretensión humana.
Absorto te quedas por instinto, denominado tantas veces leyes.

Leonidas Villanueva

Gefangenes Ion

Gefangener, fliehend vor juristischem Willen hunderterköpfigem,
zusammengeschmiedet durch trügende Träume von Licht, Schatten und Hoffen.
Zu fliehn versuchst du, da du den menschlichen Anspruch, den grausamen, nicht verstehst.
Versunken bleibst du aus Instinkt, indem man wieder und wieder Gesetze benennt.

Übersetzung : Hans-Martin Gauger

In diesem Kapitel wird eine Abwandlung der idealen Paul-Falle, die lineare elektrische Quadrupolfalle behandelt. Sie besitzt wie die Paul-Falle hyperboloidförmige Elektroden (siehe Abb. 2.1a) und ist prinzipiell zur Speicherung von Ionen in der Praxis geeignet. Jedoch sind die hyperboloiden Elektroden in kleiner Dimensionierung schlecht herzustellen,

weshalb man auf andere Formen, wie zum Beispiel bei der linearen Endkappenfalle [5] oder der Vierstabfalle (siehe Kapitel 3) ausweicht.

Durch elektromagnetische Felder geeigneter Geometrie können auf atomare Teilchen Kräfte ausgeübt werden, welche eine dauerhafte Speicherung ermöglichen. Bei geladenen Teilchen, sprich zumeist Ionen, ist dies am einfachsten durch Einwirkung auf ihre elektrische Ladung möglich. Durch elektrostatische Felder kann allerdings keine Speicherung in drei Dimensionen erreicht werden. Dies ist die Aussage des Satzes von Earnshaw [93–95] (siehe Anhang D). Zusätzliche oszillierende, elektrische Felder oder statische Magnetfelder können das Problem lösen.

Überlagert man einem statischen, elektrischen Feld ein statisches Magnetfeld, so erhält man die sogenannte Penning-Falle [96]. Sie wird hauptsächlich zur Speicherung von Elektronen, Protonen oder sonstigen Ionen eingesetzt. Insbesondere wurden die (g-2)-Experimente zur Bestimmung des gyromagnetischen Verhältnis des Elektrons in einer Penning-Falle durchgeführt [97, 98].

In unserem Fall wird die dynamische Speicherung mit inhomogenen, oszillierenden, elektrischen Feldern verwendet. Dabei wird während jeder Halbperiode des oszillierenden Feldes bezüglich des Fallenzentrums in bestimmten Raumrichtungen eine anziehende, in den übrigen Raumrichtungen eine abstoßende Kraft ausgeübt. In der nächsten Halbperiode kehrt sich diese Situation um. Aufgrund der Inhomogenität des Feldes heben sich die ausgeübten Kräfte nicht auf, sondern es ergibt sich vielmehr eine zum Fallenzentrum gerichtete, rüchtreibende Gesamtkraft. Paul hat dieses Speicherprinzip erstmals 1958 mit seiner *Paul-Falle* [9] in drei Dimensionen, sowie in zwei Dimensionen mit dem ebenso bedeutenden *Quadrupol-Massenfilter* [99] (QMF) umgesetzt. Beim QMF (siehe Abb. 2.1a) wird in axialer Richtung keine Kraft ausgeübt. Lediglich in radialer Richtung wird das Teilchen abhängig vom Verhältnis von Masse zu Ladung, aber unabhängig von Anfangsposition und -geschwindigkeit, fokussiert bzw. defokussiert. Da man mit den angelegten Gleich- und Wechselspannungen Teilchen, die durch den QMF fliegen, nach spezifischer Ladung selektieren kann, wurde die Bezeichnung Massenfilter geprägt.

2.1 Dynamische Speicherung geladener Teilchen

Eine *linear* mit dem Abstand zunehmende Kraft auf ein Teilchen, läßt sich allgemein durch ein Quadrupolpotential folgender Form erreichen.

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi(t) \cdot (ax^2 + by^2 + cz^2) \quad (2.1)$$

Durch geeignete Wahl der Parameter a, b und c kann sowohl ein zwei- als auch ein dreidimensionales Speicherpotential hergestellt werden. Im Fallenvolumen muß wegen Ladungsfreiheit die Laplacegleichung $\Delta\Psi = 0$ erfüllt sein, woraus sich $a + b + c = 0$ ergibt. Bei Wahl von $a = b > 0, c = -(a + b) = -2a < 0$ ergibt sich mit Hilfe eines oszillierenden elektrischen Feldes $\Psi(t)$ ein dreidimensionales Quadrupolfeld, wie es in der Paul-Falle realisiert ist [9].

Eine zweidimensionale Speicherung wie im QMF erreicht man mit $c = 0$ und $a = -b$ mit

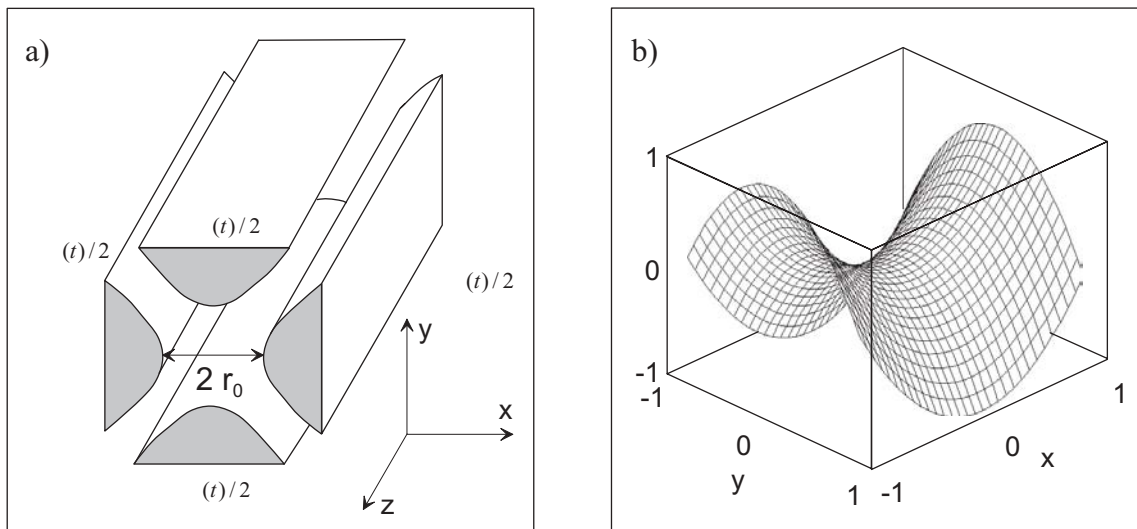


Abbildung 2.1: (a) Schnitt durch die Feldelektroden des linearen Quadrupol-Massenfilters (b) Potentialverlauf in beiden radialen Richtungen zum Zeitpunkt maximaler Potentialdifferenz.

$a \neq 0$. Wird die Ionenbewegung in der dritten Dimension (z) z.B. durch statische Felder begrenzt, so spricht man von einer *linearen Ionenfalle*.

Die zweidimensionale Speicherung kann z.B. mit vier Elektroden wie in Abb. 2.1a) erreicht werden. Jeweils gegenüberliegende Elektroden, die einen Abstand von $2r_0$ haben, befinden

sich auf jeweils gleichem Potential $\pm\psi(t)/2$ ($a = -b = 1/(2r_0^2)$). Die ideale Form der Elektroden entspricht zweischaligen Hyperboloiden. Wie bereits erwähnt sind solche Elektroden technisch schwierig herzustellen. Deshalb weicht man auf leichter anzufertigende, zylinderförmige Elektroden aus. Durch Multipolentwicklung des erzeugten Feldes kann der Anteil der anharmonischen Potentialterme ermittelt und durch geeignete Dimensionierung des Zylinderradius minimiert werden. Da das Teilchen jedoch im Experiment nach der Laserkühlung eine Schwingungsamplitude besitzt, welche wesentlich kleiner als r_0 ist, sind Multipolanteile höherer Ordnung vernachlässigbar, und die Annahme eines harmonischen Speicherfeldes in guter Näherung erfüllt.

Die zeitlich veränderliche Speicherspannung setzt sich aus einem Gleichspannungs- und einem Wechselspannungsanteil mit den jeweiligen Amplituden U_{DC} bzw. U_{RF} zusammen.

$$\Psi(t) = U_{DC} - U_{RF} \cos \Omega_{RF} t \quad (2.2)$$

U_{RF} liegt in unserem Experiment im Bereich von einigen 100 Volt, U_{DC} gewöhnlich unter 100 Volt, die Fallendimension r_0 liegt im Bereich eines Millimeters. Die Wechselspannung wird typischerweise im Radiofrequenzbereich von einigen MHz betrieben.

Hieraus ergeben sich unmittelbar die Bewegungsgleichungen für ein einzelnes Teilchen:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{e(U_{DC} - U_{RF} \cdot \cos \Omega t)}{r_0^2} x &= 0 \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{e(U_{DC} - U_{RF} \cdot \cos \Omega t)}{r_0^2} y &= 0 \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die Bewegung des Teilchens ist in der feldfreien z -Richtung frei. Die radiale Bewegung hängt jedoch in entscheidender Weise von den Parametern U_{DC} und U_{RF} bzw. a - und q -Wert ab (siehe unten).

Die Differentialgleichungen für die radialen Richtungen x und y sind wie erwartet entkoppelt.

Sie können mittels folgender dimensionsloser Parameter

$$a_x = -a_y = a := \frac{4 e U_{DC}}{m \Omega^2 r_0^2} \quad q_x = -q_y = q := \frac{2 e U_{RF}}{m \Omega^2 r_0^2} \quad \xi := \frac{1}{2} \Omega t \quad (2.4)$$

in die Mathiesche Differentialgleichung^[1] transformiert werden, welche in der mathematischen Literatur sehr gut untersucht ist [100–102].

$$\frac{d^2\rho}{d\xi^2} + (a - 2q \cos 2\xi) \rho = 0, \quad \rho \in \{x, y\} \quad (2.5)$$

Dies ist eine homogene, gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. D.h., falls man zwei linear unabhängige Lösungen gefunden hat, bildet eine Superposition beider eine allgemeine Lösung dazu. Die Mathiesche Differentialgleichung ist ein Spezialfall gewöhnlicher, linearer Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten. Nach dem Satz von Floquet gibt es zu solchen Differentialgleichungen eine Lösung der Form $e^{\mu\xi}P(\xi)$, wobei $P(\xi)$ eine periodische Funktion mit derselben Periode wie der Koeffizient der Differentialgleichung $a - 2q \cos 2\xi$, nämlich π , ist. Der charakteristische Exponent μ ist eine Konstante (bezüglich des Arguments ξ), welche nur von den Parametern a und q abhängt. Naturgemäß ist auch $e^{-\mu\xi}P(-\xi)$ eine Lösung zu Gl. (2.5), was man sich durch Einsetzen oder anhand der algebraischen Struktur der Differentialgleichung klarmachen kann. Diese beiden Lösungen sind im allgemeinen linear unabhängig und bilden ein Fundamentalsystem zu Gl. (2.5). Die einzige Ausnahme bildet der Fall, wenn $i\mu$ eine ganze Zahl ist. (siehe unten).

Da $P(\xi)$ eine π -periodische Funktion ist, läßt sie sich nach ihren Fourierkomponenten entwickeln.

$$P(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} \exp(2ni\xi) \quad (2.6)$$

Damit kann man die allgemeine Lösung der Mathieschen Differentialgleichung wie folgt schreiben:

$$\rho(\xi) = \Gamma e^{\mu\xi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} \exp(2ni\xi) + \Gamma' e^{-\mu\xi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} \exp(-2ni\xi), \quad \beta \notin i\mathbb{Z} \quad \beta = \Im\mu \quad (2.7)$$

Es sind also folgende Fälle für $\mu = \alpha + i\beta$ (β Säkularparameter) zu unterscheiden:

1. $\mathbb{R} \ni \alpha \neq 0$. Einer der Terme $e^{\mu\xi}$ oder $e^{-\mu\xi}$ wird über alle Grenzen wachsen. Die Lösung ist instabil.
2. $\alpha = 0$, $\beta \in \mathbb{Z}$. Diese Lösungen sind periodisch, aber instabil. Sie werden Mathiefunktionen gerader Ordnung genannt und bilden die Grenzen zwischen stabilen und

^[1] Benannt nach dem französischen Mathematiker Emile-Léonard Mathieu (1835-1900), ist sie ein Spezialfall der Hillschen Differentialgleichung.

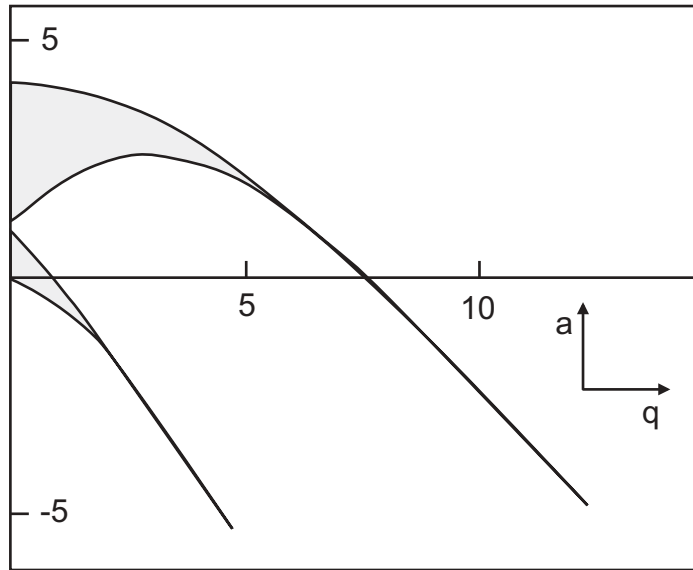


Abbildung 2.2: 1. und 2. Stabilitätsbereich der Mathieu'schen Differentialgleichung für $a_x = a$. Der Stabilitätsbereich ist symmetrisch bezüglich der a -Achse.

instabilen Regionen im Stabilitätsdiagramm. Diese Grenzen werden auch als charakteristische Kurven bezeichnet.

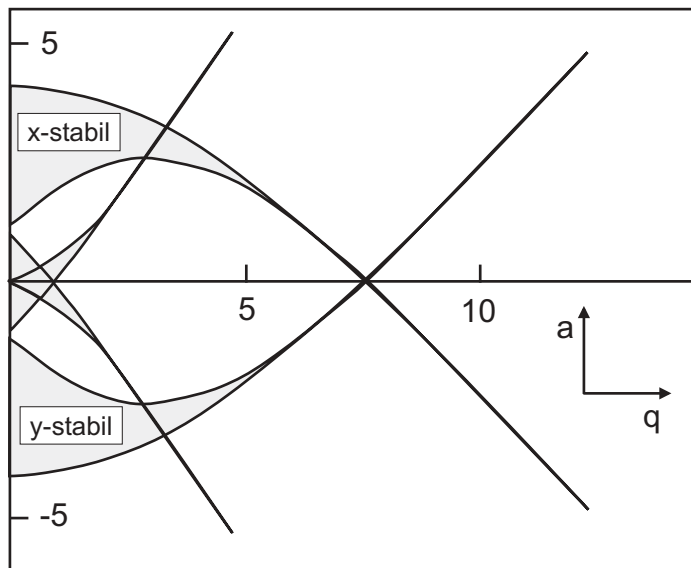


Abbildung 2.3: Stabilitätsdiagramm der Mathieu-Funktion. Die schraffierten Bereiche kennzeichnen die stabilen Lösungen in x - bzw. y -Richtung. Dort wo sich der x - und y -Bereich schneidet, ist radialer Einschluß der Teilchen möglich.

3. $\alpha = 0$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Diese Lösungen sind periodisch und stabil.

Aus der Bedingung $\alpha = 0$ ergibt sich folgender Ausdruck für stabile Lösungen:

$$\rho(\xi) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} \cos(2n + \beta) \xi + B \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} \sin(2n + \beta) \xi \quad (2.8)$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} \cos[(2n + \beta) \xi - \Phi] \quad \beta \notin i\mathbb{Z} \quad (2.9)$$

mit $\tan \Phi = B/A$.

Die Stabilität der Lösung hängt nur von den Parametern a und q ab, und ist vom Startpunkt und Anfangsgeschwindigkeit unabhängig. Trägt man die stabilen Bereiche in einem a, q -Diagramm auf, so erhält man Abb. 2.2. Das Stabilitätsdiagramm ist symmetrisch bezüglich der a -Achse, da die Differentialgleichung für $q \rightarrow -q$ bis auf eine Phasendifferenz von π mit der ursprünglichen übereinstimmt.

Da die Bewegung zweidimensional ist, die a - und q -Werte der x - und y -Richtung ent-

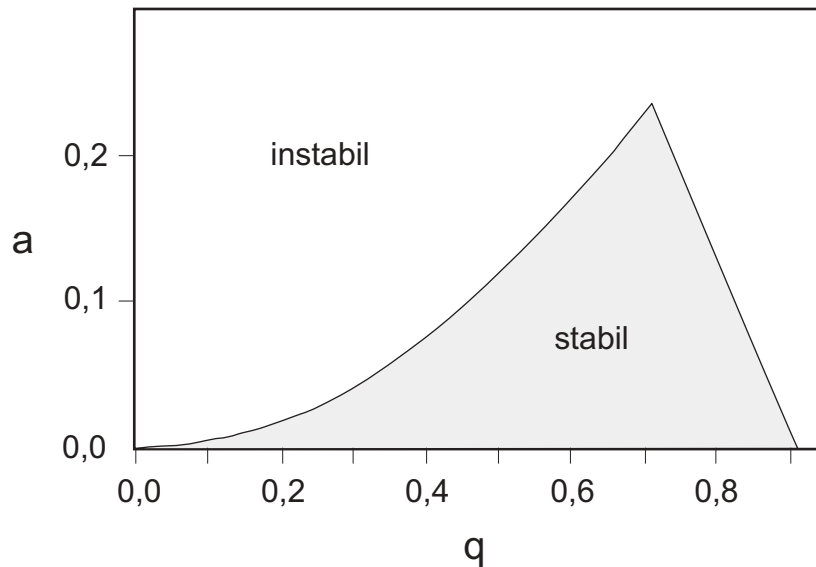


Abbildung 2.4: *Gemeinsamer niedrigster Stabilitätsbereich der beiden radialen Mathieuschen Differentialgleichungen für $a > 0$. Eine genaue Berechnung der Eckdaten dieses Diagrammes ist in Anhang I ausgeführt.*

gegengesetzt gleich groß sind (siehe Gl. (2.4)) und das Stabilitätsdiagramm symmetrisch bezüglich q ist, erhält man das y -Diagramm durch Spiegelung an der q -Achse und kann

nun die Stabilitätsbereiche für x und y in ein gemeinsames Diagramm einzeichnen. Stabile Lösungen der radialen Gesamtbewegung liegen dann in der Schnittmenge der Stabilitätsbereiche von x und y (siehe Abb. 2.3). Abb. 2.4 zeigt den niedrigsten Stabilitätsbereich in der Nähe des Ursprungs $(a, q) = (0, 0)$. Im Grenzfall $|q|, |a| \ll 1$, der sogenannten *adiabatischen Näherung* (siehe Anhang F), läßt sich Gl. (2.8) nach der Rücksubstitution von ξ auf t schreiben als

$$\rho_i(t) \approx \rho_{0i} \cos(\omega_{sec,i}t + \phi_{si}) \left(1 + \frac{q_i}{2} \cos(\Omega t)\right) \quad , \quad (2.10)$$

mit den radialen Säkularfrequenzen

$$\omega_{sec,i} = \frac{1}{2}\Omega\beta_i = \frac{1}{2}\Omega\sqrt{a_i + \frac{1}{2}q_i^2} \quad , \quad (2.11)$$

wobei der Index i = 1,2 für die x- bzw. y-Richtung steht. Die Lösung setzt sich aus einer niederfrequenten Oszillation des Ions bei der Säkularfrequenz ω_{sec} (Säkularbewegung) und einer hochfrequenten bei der Fallenantriebsfrequenz Ω (Mikrobewegung) zusammen.

$$\rho(t) = \bar{\rho} + \xi(t) \quad , \quad \xi(t) = -\xi_0 \cos \Omega t \quad (2.12)$$

Sucht man eine Lösung der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\rho} = F_\rho = eE_0 \cos \Omega t \quad , \quad (2.13)$$

so findet man, daß die Mikrobewegungsamplitude ξ_0 proportional zur Feldstärke ist:

$$\xi(t) = -\xi_0 \cos \Omega t \quad \xi_0 = \frac{eE_0}{m\Omega^2} \quad (2.14)$$

Ist das Teilchen einer inhomogenen Kraft ausgesetzt, so ist der zeitliche Mittelwert ungleich Null.

$$\bar{F} = \langle F_\rho(t) \rangle = \langle eE_0(\rho(t)) \cos \Omega t \rangle_{av} \neq 0 \quad (2.15)$$

Für kleine Schwingungen des Ions kann man das elektrische Feld um seine Ruheposition $\bar{\rho}$ entwickeln.

$$E_0(\rho) = E_0(\bar{\rho}) + [\partial E_0(\bar{\rho})/\partial \bar{\rho}] \xi \quad , \quad \left| [\partial E_0(\bar{\rho})/\partial \bar{\rho}] \xi_0 \right| \ll \left| E_0(\bar{\rho}) \right| \quad (2.16)$$

Falls man dies in Gl. (2.15) einsetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \bar{F}(\bar{\rho}) &= e \langle E_0(\bar{\rho}) \cos \Omega t + [\partial E_0(\bar{\rho})/\partial \bar{\rho}] \xi \cos \Omega t \rangle_{av} \\ &= e [\partial E_0(\bar{\rho})/\partial \bar{\rho}] \langle \xi \cos \Omega t \rangle_{av} \\ &= -e^2 [\partial E_0(\bar{\rho})/\partial \bar{\rho}] E_0(\bar{\rho}) / (2m\Omega^2) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Bei Mittelung über Zeiten größer als $1/\Omega$ kann man also die langsame Säkularbewegung des Ions mit einem Potential, dem sogenannten *Pseudopotential*, beschreiben:

$$\bar{F}(\bar{\rho}) = -e\partial\psi(\bar{\rho})/\partial\bar{\rho}, \quad \psi(\bar{\rho}) = e|E_0(\bar{\rho})|^2/(4m\Omega^2). \quad (2.18)$$

Dieses Pseudopotential hat für den Fall verschwindender Gleichspannung ($a = 0$) die Form

$$\psi(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{e|\vec{E}_0(\bar{x}, \bar{y})|^2}{4m\Omega^2} = \frac{e|\nabla\Phi|^2}{4m\Omega^2} \quad (2.19)$$

$$= \psi_0 \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{r_0^2}, \quad (2.20)$$

wobei die Potentialtiefe ψ_0 durch

$$\psi_0 = \frac{eU_{RF}^2}{4m\Omega^2 r_0^2} = \frac{1}{8} q U_{RF} \quad (2.21)$$

gegeben ist. Die Säkularfrequenz in diesem Pseudopotential ergibt sich zu:

$$\omega_{sec} = \sqrt{\frac{2e\psi_0}{mr_0^2}} = \sqrt{\frac{e^2 U_{RF}^2}{2m^2 \Omega^2 r_0^4}} = \frac{1}{\sqrt{8}} q \Omega \quad (2.22)$$

Wegen $U_{DC} = 0$ sind die Schwingungsfrequenzen in \bar{x} - und \bar{y} -Richtung entartet. Diese Entartung wird jedoch in Anwesenheit einer Gleichspannung aufgehoben. Für diesen allgemeineren Fall ($a \neq 0$) ergibt sich folgendes Pseudopotential:

$$\psi(\bar{x}, \bar{y}) = \psi_0 \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{r_0^2} + \frac{1}{2} U_{DC} \frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{r_0^2} \quad (2.23)$$

$$= \left(\Psi_0 + \frac{1}{2} U_{DC} \right) \frac{\bar{x}^2}{r_0^2} + \left(\Psi_0 - \frac{1}{2} U_{DC} \right) \frac{\bar{y}^2}{r_0^2} \quad (2.24)$$

Aus der Beziehung

$$e\psi(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{m}{2} \omega_{sec,x}^2 \bar{x}^2 + \frac{m}{2} \omega_{sec,y}^2 \bar{y}^2 \quad (2.25)$$

ergeben sich sofort die radialen Säkularfrequenzen für die jeweiligen Richtungen zu:

$$\omega_{sec}^{x/y} = \frac{2e}{m r_0^2} \left(\Psi_0 \pm \frac{1}{2} U_{DC} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{q^2}{2} \pm a} \right) \cdot \Omega \quad (2.26)$$

Man sieht, daß die sonst entarteten radialen Säkularfrequenzen bei Anwesenheit eines a -Wertes aufspalten (siehe auch Kapitel 7.3.2).

Diese adiabatische Näherung ist nur im Grenzfall $\omega_{sec} \ll \Omega$ gültig. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so drückt sich dies in einer Modifikation des charakteristischen Exponenten

μ , als auch im Auftreten von Frequenzen $k \cdot \Omega \pm \omega_{sec}$ mit $k \in \{2, 3, 4, \dots\}$ aus, während in der adiabatischen Näherung nur die Frequenzen ω_{sec} und $\Omega \pm \omega_{sec}$ auftreten. Um die relative Abweichung von der exakten Lösung unter 5% zu halten, muß für $a = 0$ der Parameterbereich für q auf $0 \leq q \leq 0.5$ beschränkt bleiben. Zu betonen ist, daß die aufgeführten Ergebnisse streng nur für einzelne, gespeicherte Ionen gelten. Bei mehreren Ionen treten Coulomb-Wechselwirkungen bzw. Raumladungseffekte auf, die in der hier dargelegten Theorie nicht berücksichtigt sind und zu einer Verkleinerung des Stabilitätsbereichs führen [103].

In realen Fällen muß berücksichtigt werden, daß man kein perfektes Quadrupolpotential erreichen kann. Dies hat zur Folge, daß man Kopplungen zwischen unterschiedlichen Eigenfrequenzen der Ionenbewegung bekommt und infolgedessen ein Verschwinden der Laserfluoreszenz bei bestimmten Betriebsspannungen der Falle. Dies kann im Rahmen des Modells der anharmonischen Schwingungen und durch RF-Heizung bei nichtlinearen Resonanzen erklärt werden [104, 105].

2.2 Simultane Speicherung zweier Ionensorten

Für die gleichzeitige Speicherung unterschiedlicher Ionensorten in einer Paul-Falle muß die Masseabhängigkeit der beiden Stabilitätsparameter a und q (Gleichung (2.4)) berücksichtigt werden. In Abbildung 2.5 sind die beiden theoretischen Stabilitätsdiagramme für $^{25}\text{Mg}^+$ und $^{115}\text{In}^+$ zu sehen.

Das Massenverhältnis der beiden Ionensorten beträgt 4,6. (Die angegebenen Gleich- und Wechsellspannungen sind unter der Annahme eines RF-Elektrodenabstandes von 0,55 mm bei der linearen Endkappenfalle berechnet.) Für die simultane Speicherung beider Ionensorten müssen die beiden Fallenspannungen U_{RF} und U_{DC} so gewählt werden, daß sie in der Schnittfläche beider Stabilitätsdiagramme liegen. Das sehr große Massenverhältnis von 4,6 stellt extreme Anforderungen an das Experiment (vgl. Kapitel 6).

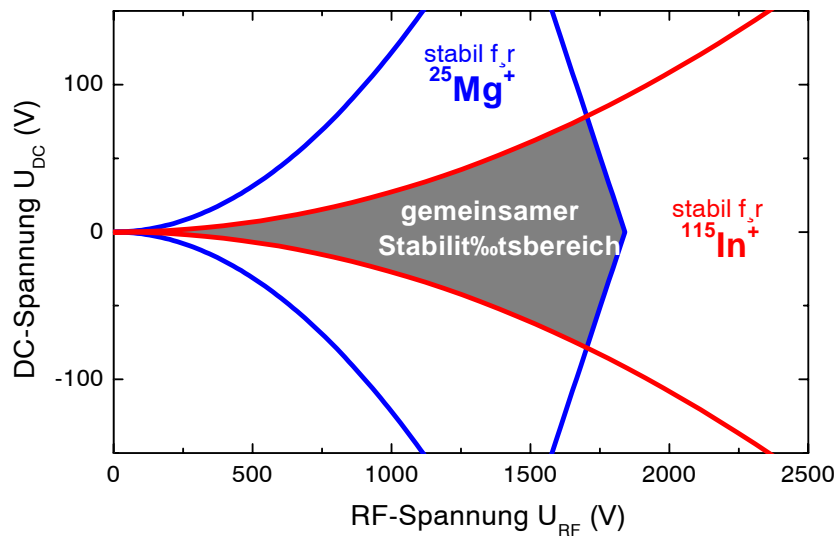


Abbildung 2.5: Stabilitätsdiagramm für $^{25}\text{Mg}^+$ - und $^{115}\text{In}^+$ -Ionen. Gemeinsame Speicherung ist nur im Schnittbereich beider Stabilitätsdiagramme möglich.

2.3 Axialer Einschluß

Das Fallenpotential ist symmetrisch bezüglich der Fallenachse. Die Bewegung der Ionen ist in dieser Richtung frei. Zur Realisierung einer Falle, die Ionen in 3 Dimensionen speichern kann, fehlt nun noch die Möglichkeit, die Ionen axial in ihrer Bewegung einzuschränken. Es gibt mehrere Möglichkeiten, dies zu erreichen.

2.3.1 RF-Einschluß

Verbindet man zwei gegenüberliegende Elektroden des QMF, wie in Abb. 2.6a) zu sehen, torusförmig miteinander, so wird das Teilchen im Inneren in axialer Richtung festgehalten. Der Einschluß-Mechanismus funktioniert hier axial ebenso wie beim QMF in radialer Richtung.

Der entscheidende Nachteil dieser Konstruktion ist jedoch die Tatsache, daß entlang der Fallenachse ständig Mikrobewegung auftritt, wodurch es zur RF-Heizung, d.h. zu einem Energietransfer aufgrund der Wechselfspannung in die Ionenbewegung [107], kommen kann.

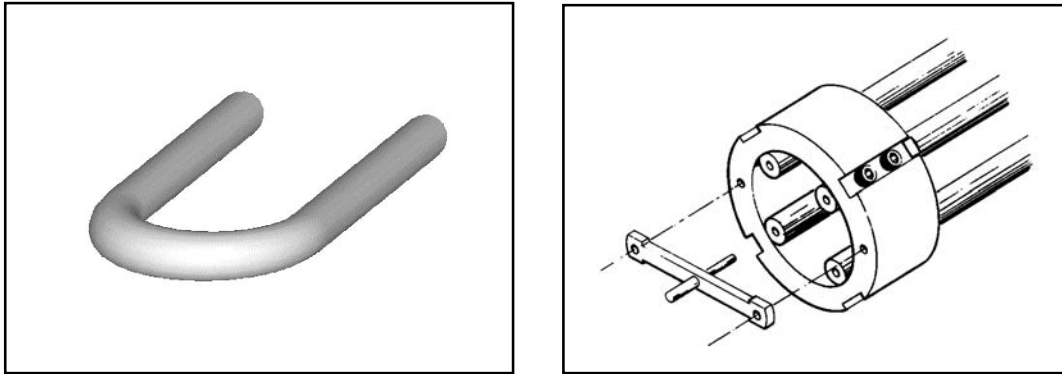


Abbildung 2.6: (a) RF-Einschluß durch torusförmigen Abschluß der beiden Stäbe; (b) Einschluß mit positiv geladener Nadel (Bild entnommen aus [106]).

Desweiteren ist eine hohe, axiale Schwingungsfrequenz nur schwer zu erreichen. Da diese aber zum Erreichen des Lamb-Dicke-Bereichs notwendig ist, muß man die Stablänge entlang der Achse verringern, so daß man letztendlich eine elliptische Falle [60, 108] erhält, welche nur einen feldfreien Punkt enthält. So kann nur noch ein Ion mikrobewegungsfrei gespeichert werden und man kann nicht mehr von einer linearen Ionenfalle sprechen.

2.3.2 Quadrupolspeicherring

Hier erreicht man es, die Ionen auf einem Kreis nahezu mikrobewegungsfrei zu speichern. Dazu stellt man sich den QMF zu einem Kreis gebogen vor. Aufgrund der Krümmung existiert zwar noch eine Restmikrobewegung tangential zum Kreisbogen, jedoch ist sie für genügend großen Kreisradius vernachlässigbar und ist somit als unproblematisch zu betrachten.

2.3.3 Lineare RF-DC-Hybridfalle

Hier geschieht der Einschluß entlang der Achse durch rein elektrostatische Mittel, welches die effektivste Lösung zur axialen Speicherung einer Ionenkette ist. Damit ist es nämlich möglich, sowohl eine hinreichend große axiale Oszillationsfrequenz ω_z als auch eine mikrobewegungsfreie Speicherung der Ionen zu erreichen.

Eine Realisierungsmöglichkeit besteht darin, je eine elektrostatisch aufgeladene Nadel oder

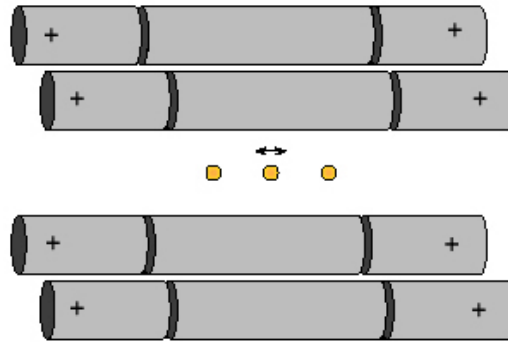


Abbildung 2.7: In 3 Teile segmentierte lineare RF-DC-Falle

je eine Ringelektrode an beiden Enden der Falle mittig anzubringen. Falls die Ladung der Nadel dasselbe Vorzeichen wie die der geladenen Ionen besitzt oder an der Elektrode eine positive Gleichspannung liegt, werden die Ionen am Entweichen gehindert und somit in der Fallenmitte gespeichert. (siehe Abb. 2.6b)

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die vier Elektroden des QMF in je drei Segmente zu unterteilen, an welche zusätzlich zur Wechselfspannung unterschiedliche Gleichspannungen gelegt werden können (siehe Abb. 2.7). Dabei müssen die äußeren auf ein höheres positives Potential gelegt werden, falls positive Ionen gespeichert werden sollen. Es entsteht dann in der Fallenmitte in axialer Richtung ein annähernd harmonisches Potential. Die axiale Oszillationsfrequenz der Ionen in diesem Potential kann durch Variation der Spannung der äußeren Elektroden einfach geregelt werden. Aufgrund der fehlenden axialen Mikrobewegung eignen sich solche Fallentypen besonders für hochauflösende Spektroskopie an mehreren Ionen, insbesondere für Frequenzstandards, da die Linienverbreiterung durch den Dopplereffekt geringer als z.B. in einer Paulfalle ist [109–111].

Quantitativ erhält man in diesem Fall ein statisches Potential der Form

$$\psi_{\text{statisch}} = kU_0 \left(z^2 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right) = \frac{m}{2e} \omega_z^2 \left(z^2 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right) \quad , \quad (2.27)$$

wobei U_0 die an den äußerern Elektroden anliegende Gleichspannung, k ein Geometriefaktor und

$$\omega_z = \sqrt{2keU_0/m} \quad (2.28)$$

die axiale Oszillationsfrequenz ist.

Durch das statische, axiale Potential erfährt das Pseudopotential in radialer Richtung eine Abschwächung. Somit ergibt sich das effektive radiale Potential letztendlich zu

$$\psi_{radial} = \frac{m}{2e} \left(\omega_r^2 - \frac{1}{2}\omega_z^2 \right) \cdot (x^2 + y^2) = \frac{m}{2e} (\omega_r')^2 \cdot (x^2 + y^2) \quad (2.29)$$

$$\text{mit} \quad \omega_r' = \sqrt{\omega_r^2 - \frac{1}{2}\omega_z^2} \quad , \quad (2.30)$$

wobei ω_r' die effektive, radiale Oszillationsfrequenz in Präsenz eines axialen, statischen Potentials ist.

Entlang der Achse erhält man folgendes Potential:

$$\psi_{axial} = \frac{m}{2e} \omega_z^2 z^2 \quad (2.31)$$

$$\text{mit} \quad \omega_z = \sqrt{2keU_0/m}. \quad (2.32)$$

Kapitel 3

Vierstabfalle mit 2 Ladezonen

Dieses Kapitel behandelt die im Experiment eingesetzte Ionenfalle, welche im Rahmen dieser Arbeit speziell für den Zweck, zwei verschiedene Ionensorten zu speichern, entwickelt und aufgebaut wurde. Zunächst soll dargelegt werden, warum die zuvor im Einsatz befindliche Falle den neuen Ansprüchen nicht mehr genügte, und welche Vorteile die neue Falle bietet. Daraufhin wird deren Geometrie und Speichereigenschaften im Detail beschrieben.

3.1 Unzulänglichkeiten des alten Fallenaufbaus

Die bisher verwendete lineare Endkappenfalle war nach dem Vorbild einer Endkappenfalle [112] 1996 im Rahmen der Doktorarbeit von Dr. Heinrich Baldauf gebaut worden [5]. Damals war das Ziel, den 1995 von Cirac und Zoller gemachten Vorschlag [1] einer in den Grundzustand gekühlten homogenen Ionenkette mittels Raman-Seitenband-Kühlung außerhalb des Lamb-Dicke-Bereichs zu verwirklichen [7]. Aufgrund der Schwierigkeiten der Raman-Seitenband-Kühlung von Magnesium-Kristallen änderte sich das Konzept des Experiments dahingehend, daß man es vorzog jetzt eine heterogene Ionenkette bestehend aus Indium und Magnesium zu verwenden, welche nur bis in den Lamb-Dicke-Bereiche gekühlt zu sein braucht [2, 3] (siehe auch Diskussion am Anfang von Kapitel 5).

Desweiteren war die Verfolgung dieses Ziels in der alten linearen Endkappenfalle ab einem bestimmten Punkt nicht mehr möglich, da Kontaktpotentiale der Magnesium- und Indium-Bedampfungen auf den Fallenelektroden (siehe Kapitel 3.1.1) das Fallenpotential

bei jedem Ladevorgang veränderten und von Tag zu Tag verschlechterten, so daß am Ende keine Speicherung mehr möglich war.

Es wurden im Rahmen dieser Arbeit 2 Maßnahmen getroffen, die eine stabile, zuverlässige Speicherung von Magnesium-Indium-Ionenkristallen ermöglichen sollten. Zum einen wurde die Kollimation der Atomstrahlen aller zu speichernden Ionensorten ($^{24}\text{Mg}^+$, $^{25}\text{Mg}^+$ und $^{115}\text{In}^+$) verbessert (siehe Kapitel 6.5.2.1), um so eine Verunreinigung der Fallenelektroden zu minimieren. Desweiteren wurde eine Ionenfalle entwickelt, die es ermöglichte, 2 verschiedene Ionensorten in örtlich getrennten Zonen zu laden, um sie dann in die Experimentierzone zu befördern, wo das eigentliche Experiment durchgeführt wird. Somit ist auch gewährleistet, daß die Experimentierzone frei von Kontaktpotentialen bleibt, und falls in den Ladezonen Kontaktpotentiale trotzdem nicht verhindert werden können^[1], diese von nur einer Metallsorte stammen und infolgedessen zeitlich konstant bleiben.

3.1.1 Kontaktpotentiale

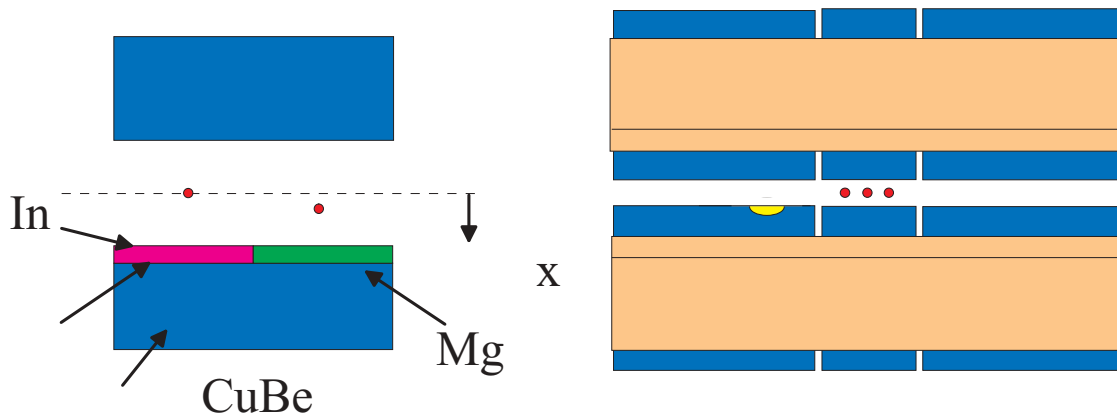


Abbildung 3.1: Darstellung der Kontaktpotentiale bei Bedampfung der Fallenelektroden mit zwei unterschiedlichen Metallen.

Die Kontaktpotentiale, welche insbesondere in Ionenfallenexperimenten mit 2 Ionensorten, aber auch schon bei Verwendung nur einer Ionenspezies, auftreten, rühren von den

^[1] Aufgrund nichtperfekter Kollimation der Atomstrahlen.

unterschiedlichen Austrittsarbeiten von Elektronen in Metallen her. Es gilt folgender Zusammenhang zwischen den Potentialen $\Phi_{i/j}$ in 2 sich berührenden Metallen und ihren Austrittsarbeiten $W_{i/j}$ [113].

$$-e(\Phi_i - \Phi_j) = W_i - W_j \quad (3.1)$$

Bedampft man nun eine Elektrode der Ionenfalle, welche z.B. wie in der Endkappenfalle aus Kupferberyllium gefertigt war, mit Magnesium, so wird das Potential auf der Oberfläche der Elektrode, welches idealerweise über die ganze Elektrode konstant sein sollte, an der bedampften Stelle um die Differenz der Austrittsarbeiten verschieden sein. Dies ist der Fall des zeitlich konstanten Kontaktpotentials, wenn man annimmt, daß sich die Bedampfung an der Oberfläche, nachdem der Ofen einige Mal betrieben wurde, nicht mehr merklich ändert, was man in der Praxis mit guter Näherung annehmen kann. Solche Kontaktpotentiale kann man mit Kompensationselektroden auszugleichen versuchen, um somit die Mikrobewegung der Ionen zu minimieren. Es hat sich im Experiment gezeigt, daß dies ohne weitere Schwierigkeiten realisiert werden konnte [5, 114].

Versucht man jedoch an derselben Stelle eine zweite Ionensorte, in unserem Fall Indium, zu speichern, kommt es unweigerlich zu unterschiedlichen Kontaktpotentialen, je nachdem welche Ionensorte zuletzt geladen wurde. Auf der Elektrode können alle möglichen Kombinationen von Kontaktpotentialen der 3 Metalle (siehe Tabelle 3.1) auftreten. Abb. 3.1 zeigt bei der linearen Endkappenfalle eine gekennzeichnete Stelle, an der typischerweise eine Bedampfung der Atome auftritt. Auf der linken Seite ist eine Position auf der Elektrode vergrößert dargestellt, wo alle 3 Atomsorten in Kontakt kommen. An einer solchen Magnesium-Indium-Grenzschicht wird die Ionenkette um circa

$$\Delta x = \frac{8e\Delta E}{mq^2\Omega^2} \approx 5\mu m \quad (3.2)$$

von der Achse gedrängt, was im Vergleich zum Abstand der Ionen in der Kette von typischerweise $10\mu m$ sehr groß ist. Nach einer Weile wird die ganze Laderegion ein vollkommen inhomogenes Potential aufweisen, so daß eine Speicherung sogar unmöglich wird.

Das Problem kann wie bereits oben erwähnt auch durch eine verbesserte Kollimation der Atomstrahlen bewältigt werden. Dies wird in Kapitel 6.5.2.1 diskutiert.

Metall	W / eV
Kupferberyllium CuBe	$\approx 4,40$
Magnesium Mg	3,64
Indium In	3,80

Tabelle 3.1: Austrittsarbeiten der 3 im Experiment verwendeten Metalle.

3.2 Anforderungen an eine lineare Ionenfalle

Bevor die für die Speicherung heterogener Ionenketten gebaute Vierstabfalle vorgestellt wird, möchte ich klären, welche generellen Anforderungen an eine lineare Ionenfalle gestellt werden müssen.

Da in der Falle eine Ionenkette zu speichern ist, deren Ionen einzeln angesprochen werden sollen, ist es unumgänglich, gewisse Forderungen an das von der Falle erzeugte Potential zu stellen.

1. Um Zick-Zack-Strukturen in der Ionenkette zu vermeiden und eine gute lineare Anordnung der einzelnen Ionen der Kette zu gewährleisten, muß die radiale Oszillationsfrequenz sehr viel größer als die axiale sein, d.h. $\omega_{radial} \gg \omega_{axial}$. Unerwünschte Zick-Zack-Moden würden eine Einzelionenansprache (siehe Kapitel 6.8.1) praktisch unmöglich machen. Numerische Rechnungen lieferten folgende maximale Ionenanzahl, die in der Falle mit den Oszillationsfrequenzen ω_{axial} und ω_{radial} gespeichert werden kann, ohne daß Zick-Zack-Strukturen auftreten [115–117].:

$$N_{max} = 0,58 \left(\frac{\omega_{radial}}{\omega_{axial}} \right)^{1,16}. \quad (3.3)$$

Für den Grenzfall $N \gg 1$ liefert ein annähernd analytisches Verfahren folgende Ungleichung für N [115]

$$\frac{\omega_{radial}}{\omega_{axial}} > 0,77 \frac{N}{\sqrt{\log N}}. \quad (3.4)$$

2. Eine weitere Anforderung an die Schwingungsfrequenzen ist zum Erreichen des LDL wichtig. Um in den Grundzustand des äußeren Potentials zu kühlen, kann man im Falle von Indium Seitenband- [4] und für Magnesium Raman-Seitenband-Kühlung [7] verwenden. In beiden Fällen ist ein kleiner Lamb-Dicke-Parameter $\eta = \sqrt{\frac{E_{recoil}}{\hbar\omega_{axial}}}$ von

Vorteil. Es ist deshalb wünschenswert möglichst große axiale Oszillationsfrequenzen ω_{axial} zu erzielen, was sich durch einen entsprechend steilen, axialen Einschluß erreichen läßt.

3. Eine Realisierung eines Quantengatters nach Cirac und Zoller [1] setzt voraus, daß man die Phase des Laserfeldes am Ort der Ionen experimentell exakt kontrollieren kann. Dazu und um eine Aufheizung der Ionen zu vermeiden, ist es zwingend notwendig, die Ionen mikrobewegungsfrei zu speichern. Dies ist in einer idealen linearen Falle axial auf jeden Fall gewährleistet, da aus Symmetriegründen in Richtung der Achse kein elektrisches Feld existiert. Radiale Mikrobewegungs-Restkomponenten können durch Elektroden, an denen eine zusätzliche Gleichspannung angelegt wird, minimiert werden. Solche Restmikrobewegung entsteht wie bereits oben angesprochen z.B. durch Streufelder, welche die Ionen von der RF-feldfreien Achse verdrängt und damit der Mikrobewegung aussetzt.
4. Desweiteren sollte die Geometrie der linearen Falle zur Anregung, Einzelionenansprache und zum Fluoreszenznachweis einen möglichst freien Zugang zum Fallenzentrum zulassen. Gleichzeitig sollte die Geometrie aber so gewählt sein, daß Multipolanteile höherer Ordnung möglichst gering sind, um eine ideale harmonische Speicherung zu gewährleisten und eventuelle Instabilitäten im Fallenpotential zu verhindern, die eine Speicherung unmöglich machen würden.

3.3 Fallengeometrie

Die ersten beiden im vorherigen Abschnitt aufgestellten Forderungen, hohe radiale und axiale Oszillationsfrequenzen, bedeuten im wesentlichen, daß die Fallenabmessungen relativ klein gewählt werden müssen. Wegen $\omega_{sec} = \frac{1}{\sqrt{8}} q \Omega$ wird die Säkularfrequenz bei Erhöhung der Fallenantriebsfrequenz und konstantem q -Wert steigen. Da aber $q \sim U_{RF}/(\Omega^2 r_0^2)$ ist und durch den Rand des Stabilitätsbereichs beschränkt ist, ist es bei Erhöhung von Ω notwendig, die Fallenspannung zu erhöhen oder die Fallendimension zu verkleinern. Da bei sehr großen Fallenspannungen Überschläge erfolgen, ist man gezwungen, die Falle klein zu bauen.

Da sich aber in den letzten Jahren herauskristallisiert hat, daß in zu kleinen Fallen mit

Elektrodenabständen von einigen $100 \mu\text{m}$ die Heizraten aufgrund von zeitlich fluktuierenden Streufeldern^[2] sehr groß sein können [60, 118], - außer falls die Elektroden während des ganzen Betriebs der Ionenfalle sehr sauber, d.i. ohne jegliche Bedampfung, gehalten werden können - haben wir uns entschlossen, eine etwas größere Falle als die alte lineare Endkappenfalle zu bauen. Unser Elektrodenabstand liegt in der Größenordnung von 1-2 mm. Um aber gleichzeitig einen großen Raumwinkel zur Beobachtung zu gewährleisten, muß man auf andere Geometrien als der beim idealen Massenfilter ausweichen.

Die neue Ionenfalle besitzt vier Stäbe, die ähnlich angeordnet sind wie die 4 Gleichspannungselektroden der alten Endkappenfalle. Diagonal gegenüberliegende Elektroden sind auf gleichem RF-Potential $\Psi(t)/2$ (Elektroden 2 und 3) und haben einen Abstand von $2 \text{ mm} = 2 r_0$. Die anderen 2 Elektroden sind im Vergleich dazu auf negativem Potential $-\Psi(t)/2$ (Elektroden 1 und 4) (siehe Abb. 3.3). Die Elektroden besitzen von der äußeren Kante einen Öffnungswinkel von 55° , welcher damit im Vergleich zur linearen Endkappenfalle noch weiter vergrößert wurde. Zum axialen Einschluß wurden die Elektroden folgendermaßen angeordnet. Jede der 4 RF-Elektroden wurde in 3 Teile segmentiert. Die Bezeichnung jeder Elektrode erfolgt zuerst durch die Nummer der Elektrode, also 1 bis 4 und dann die Angabe der Position, wobei L,M,R für links, Mitte, rechts stehen, so wie sie in Abb. 3.2 zu sehen sind. Die mittlere Elektrode der RF-Elektrode 3 wird also mit 3M bezeichnet. Eine vollständige Aufstellung aller Elektroden kann man Abb. 3.3 entnehmen. Die Länge der drei Elektroden beträgt 27,2 mm bei der langen, 19 mm bei der mittleren und 5 mm bei der kürzesten. Diagonal sich gegenüberliegende Elektroden sind entlang der Fallenachse (z-Richtung) identisch segmentiert. Bei sich in x- oder y-Richtung gegenüberliegenden Elektroden ist die Segmentierung entlang der z-Achse gespiegelt. Diese Anordnung erlaubt es, mit einer noch realisierbaren Anzahl von elektrischen Durchführungen, 2 getrennt steuerbare Ladezonen anzusprechen. Der Überlapp der langen Elektroden in der Fallenmitte beträgt 3 mm (siehe Abb. 3.2). Dies ist zugleich die innerste Speicherregion.

Zur kürzeren Notation werden die beiden mittellangen Elektroden auf der linken Seite (1L und 4L), welche die äußere Einschlußspannung bilden und im Experiment meistens auf demselben Potential liegen, mit 1l bezeichnet. Dementsprechend bezeichnet man die beiden rechten, mittellangen Elektroden (2R und 3R) mit 1r, die beiden linken, kurzen Elektroden mit 2l und die beiden rechten, kurzen Elektroden mit 2r. Diese beiden bilden die innere

^[2] *engl.: patch potentials*

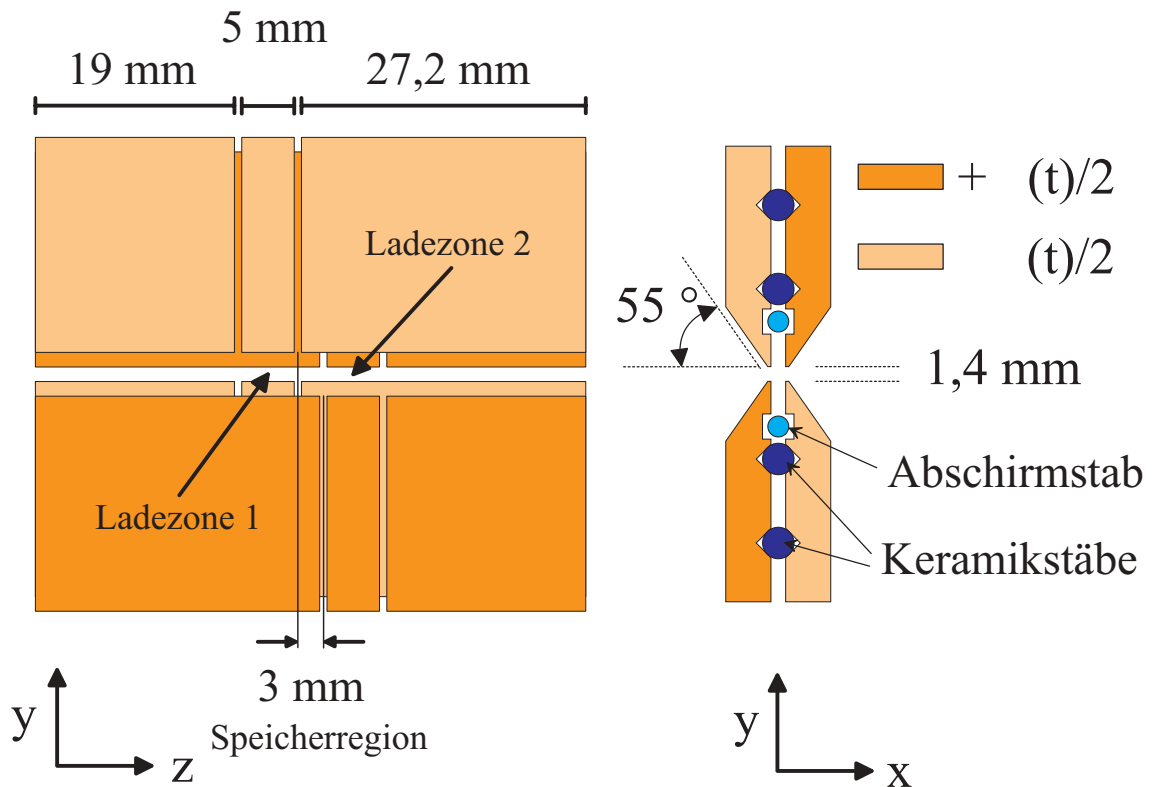


Abbildung 3.2: Schematische Zeichnung der Vierstabfalle. In der seitlichen Ansicht links erkennt man die Anordnung aller 12 Elektroden und die Länge derselben. Aus der räumlichen Anordnung ergibt sich eine linke und rechte Ladezone und eine Speicherregion in der Mitte mit einer Länge von 3 mm. In der rechten Abbildung ist ein Schnitt entlang der Fallenachse sowie die RF-Beschaltung der Elektroden zu sehen. Die 4 Keramikstäbe dienen dabei der Autojustage des x -Abstands der Elektroden. Die zwischen diesen Keramikstäben und der Fallenmitte befindlichen Stäbe aus nichtmagnetischen Stahl schirmen elektrische Felder von eventuell auf den Keramiken sitzenden Ladungen ab. Die angegebenen Koordinaten werden als das Fallensystem bezeichnet und ist nicht mit dem Laborsystem identisch (vgl. Orientierung der Falle im Vergleich zum Laborsystem (Kapitel 3.4 oder 6)).

Einschlußspannung. An die langen Elektroden 1R,2L,3L und 4R, welche in der Fallenmitte die Ionenkette umgeben, wird keine Spannung zum axialen Einschluß angelegt. Zusätzlich zu diesen Gleichspannungen kann noch ein a -Wert an unsere Falle angelegt werden. Dies geschieht folgendermaßen: Man addiert zu 2 sich diagonal gegenüber liegenden Elektroden den Wert $U_{DC}/2$, von den 2 anderen subtrahiert man $U_{DC}/2$. Diesen Gleichspannungsanteil kann man gemäß Formel (2.4) in den a -Wert umrechnen. Desweiteren wurde im

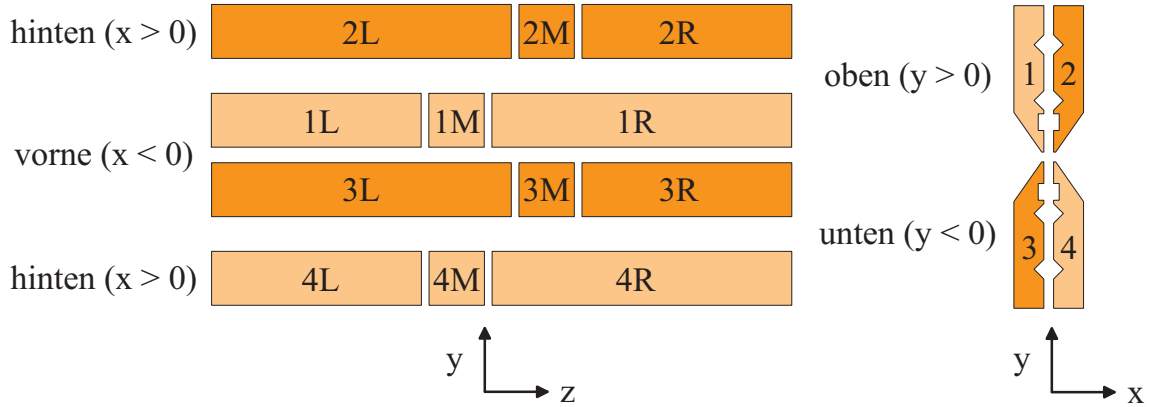


Abbildung 3.3: Illustration der Anordnung und Bezeichnung aller 12 Fallenelektroden sowohl in axialer als auch in radialer Richtung. Die beiden mit hinten bezeichneten Elektroden muß man sich hinter den beiden mit vorne bezeichneten Elektroden vorstellen. Zur besseren graphischen Darstellung wurde obige Darstellung gewählt.

Experient vorgesehen, daß eine horizontale und vertikale Verschiebespannung U_H bzw. U_V computergesteuert angelegt werden kann. Dies erweist sich insbesondere bei der Mikrobewegungskompensation als überaus hilfreich, da man so die Ionenkette in den mikrobewegungsfreien Fallenmittelpunkt verschieben kann, wo man Kristallisation erreichen kann. Eine schematische Zeichnung zur Beschaltung der U_H , U_V und U_{DC} -Werte kann man Abb. 3.4 entnehmen. Man kann sich einfach klarmachen, daß die positiv geladene Ionenkette bei Anlegen eines positiven U_H (U_V)-Wertes in die negative x -Richtung (negative y -Richtung) verschoben wird. Somit wird durch die Angabe des Quadrupels (1l,2l,2r,1r), der horizontalen und vertikalen Verschiebespannungen U_H und U_V sowie des a -Wertes bzw. U_{DC} der Gleichspannungsanteil an allen Fallenelektroden vollständig beschrieben. Mit der Angabe der RF-Spannungsamplitude U_{RF} bzw. des q -Wertes ist somit vollständig der RF- und DC-Anteil der Fallenspannungen angegeben. Im weiteren soll eine solche Angabe in der Form (1l,2l,2r,1r; U_{DC} oder a , U_{RF} oder q ; U_H, U_V) erfolgen, wobei der a - und q -Wert und die Verschiebespannungen nur angegeben werden, falls dies unbedingt notwendig ist. In realen Fallen werden anstatt der a - und q -Werte die a' - und q' -Werte angegeben. Diese sind wie folgt definiert:

$$a' = \frac{a}{L} \quad (3.5)$$

$$q' = \frac{q}{L} \quad (3.6)$$

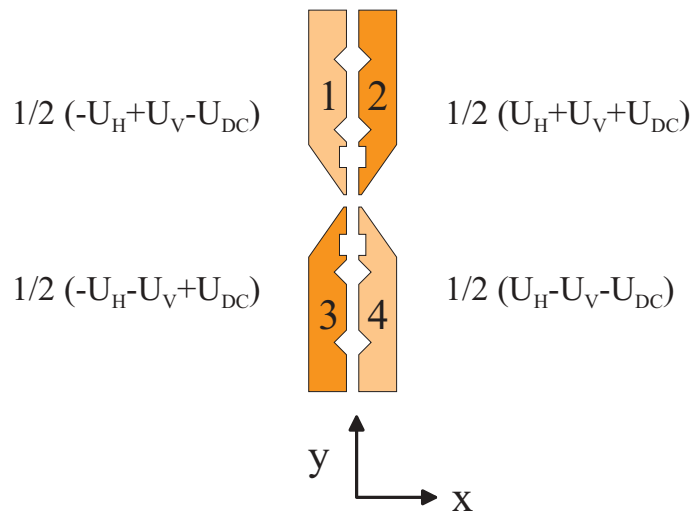


Abbildung 3.4: Illustration der Beschaltung der Gleichspannungen für den U_H , U_V und a - bzw. U_{DC} -Wert. Man beachte, daß U_H und U_V in der Fallenzentrum ein konstantes elektrisches Feld verursacht. U_{DC} hingegen legt ein Quadrupolfeld an.

Hierbei ist L der Spannungsverlustfaktor (siehe Kapitel 3.5.1), welcher bei Vorhandensein eines nicht perfekten Quadrupolpotentials eingeführt werden muß. Er ist gegeben durch nachfolgenden Ausdruck:

$$L = \frac{U_{RF}}{2r_0^2 \cdot A_2} \quad (3.7)$$

Hierbei ist A_2 der quadratische Koeffizient der Potenzreihenentwicklung^[3] um das Fallenzentrum des Potentials in Richtung der bindenden Hauptachse zum Zeitpunkt $t = (2k + 1) \cdot \pi/\Omega$, d.h. maximaler bindender Stärke. L gibt also an um wieviel höher die Spannung U_{RF} sein muß, um im Fallenzentrum denselben Quadrupolanteil des Gesamtpotentials zu erhalten wie beim idealen Quadrupol-Massenfilter. Für das ideale Quadrupol-Massenfilter gilt $L = 1$ und die a' - und q' -Werte stellen lediglich Verallgemeinerungen der a - und q -Werte dar. Das Stabilitätsdiagramm, welches sich aus der Mathieu-Gleichung ergab, gilt mit denselben Werten für die a' - und q' -Werte. Aus einer Computersimulation erhält man den Wert $L = 1,30$.

^[3] Terme A_i mit i ungerade sind aus Symmetriegründen Null.

3.3.1 Justage der Falle

In der linearen Endkappenfalle bestand ein Problem darin, daß die Elektroden untereinander nicht sehr exakt justiert werden konnten. Dies führte zu einer axialen Mikrobewegung des Ionenkristalls [5], welche in diesem Falle nicht kompensierbar ist. Es konnte jedoch gezeigt werden, daß man durch Verwendung durchgehender Elektroden diese Schwierigkeiten umgehen kann [8]. Durch Verwendung kreisförmiger Elektroden an beiden Enden der linearen Endkappenfalle wurden jedoch nur extrem kleine axiale Schwingungsfrequenzen erzielt, so daß dieser Fallentyp zur Grundzustandkühlung einer linearen Magnesiumkette nicht geeignet ist.

Dieses Problem wurde mit der neuen Falle gelöst. Mit ihr ist es sowohl möglich, hohe axiale Fallenfrequenzen zu erzielen als auch durch ein neues Justageverfahren axiale Mikrobewegung zu vermeiden. Die verbesserte Justagemöglichkeit besteht in der Verwendung von hochpräzisen Keramikstäben^[4], welche zwischen den Elektroden als ultragenauer Abstandshalter den radialen Abstand sehr genau festlegt. Noch wichtiger dabei ist aber die durch die durchgehende Nut erzielte automatische axiale Justage der Elektroden, welche axiale Mikrobewegung verhindert.

Elektronenbeschuß durch die Elektronenkanone bei der Ladeprozedur kann dazu führen, daß elektrischen Ladungen auf den Keramikstäben sitzen. Die von diesen Ladungen herrührenden elektrischen Felder können durch die Elektroden hindurch das Speicherfeld in der Fallenmitte verzerren. Um dies zu vermeiden wurden zwischen Fallenmitte und Keramikstäben jeweils zwei aus nichtmagnetischen Stahl^[5] bestehende Metallstäbe angebracht, welche so mögliche Störfelder abschirmen.

3.4 Fallenelektrodenhalterung

Die Fallenelektroden werden folgendermaßen gehalten. Die vier in Kapitel 3.3 angesprochenen Keramikstäbe sowie die zwei Metallstäbe aus nichtmagnetischen Stahl werden an

^[4] *FRIATEC AG, Mannheim, Stäbe aus FRIALIT-DEGUSSIT F99,7; $\varnothing = (3 \pm 0,005) \text{ mm}$, Länge $L = (83 \pm 0,005) \text{ mm}$*

^[5] *Firma Goodfellow, Material: Stahl 1.4401, $\varnothing = 2 \text{ mm}$, Länge $L = 500 \text{ mm}$*

beiden Enden der Falle (in axialer Richtung) von 2 Haltern fest umschlossen. Die 2 Halter werden an den Punkten NF (Neue Falle) an die Stahlplatte aus Abb. 6.8 geschraubt, welche den ganzen Fallenaufbau trägt. Diese beiden Halter richten die Keramikstäbe so aus, daß die y-Achse der Falle um 18° aus der Vertikalen gedreht ist. Die beiden Stahlstäbe sind in den Halter so eingepaßt, daß elektrischer Kontakt besteht und somit die Stäbe auf Masse liegen. Bei der Fertigung der beiden Halter wurde auf höchste Präzision geachtet, da jegliche Ungenauigkeit in der Positionierung der Keramikstäbe sich unweigerlich auf die Position der Fallenelektroden auswirkt.

Jeder Halter besteht aus 2 VA-Teilen, wovon das größere an die Platte geschraubt wird,

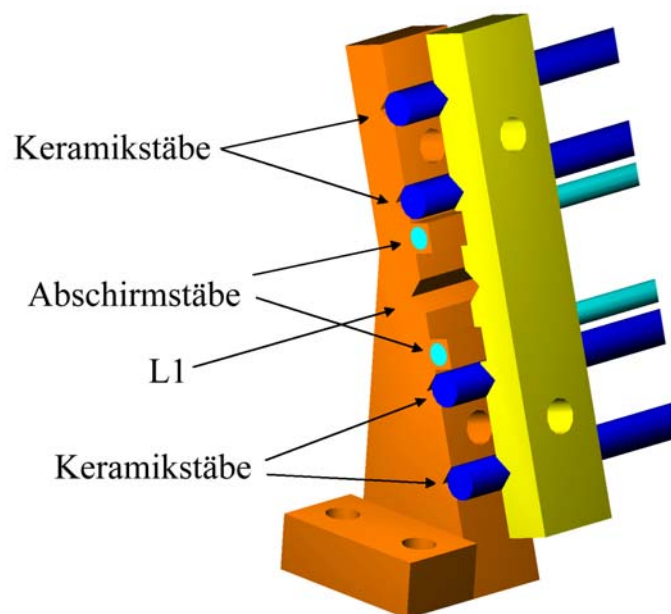


Abbildung 3.5: Eine der beiden Fallenelektrodenhalterungen mit den 4 Keramikstäben und den 2 Stahlstäben. Das linke grössere VA-Metallstück wird durch die 2 unteren Bohrungen an die in Kapitel 6 beschriebene Stahlplatte geschraubt. Die 4 Keramikstäbe werden in die 2 oberen und 2 unteren Nuten des linken VA-Stücks gelegt und mit der kleinen VA-Leiste mittels zweier Schrauben fixiert. Zur Illustration ist es aus der normalen Position heraus nach rechts verschoben. Die beiden Metallstäbe werden in die beiden Bohrungen im linken Metallstück eingepaßt. Am anderen Ende der Stäbe steht ein spiegelsymmetrisch zur x-y-Achse gebauter Halter. Die mittlere Nut ist identisch wie die anderen gefertigt, dient aber lediglich dazu, mehr Spielraum zur Justage des axialen Lasers (L1) zu haben.

und das kleinere zur Befestigung der Keramikstäbe an das größere geschraubt wird. Die

4 Keramikstäbe werden in 4 sehr exakt gefertigte Nuten gelegt und durch das kleine VA-Gegenstück fixiert. Dabei ist insbesondere auch der Abstand der Nuten untereinander äußerst wichtig, da er z.B. den y -Abstand der Elektrodenpaare festlegt. Die Stahlstäbe werden in die Bohrungen in beiden Halter eingepaßt.

Ausgehend von hier müssen nur noch die Elektroden an den Keramikstäben befestigt werden. Dies geschieht indem die Elektroden aneinander festgeschraubt werden. Dabei werden die Schrauben durch Keramikhülsen von den Elektrodenspannungen isoliert. Die mittleren und kurzen Elektroden besitzen dabei je eine Bohrung, durch die die Hülsen gesteckt werden, die langen Elektroden besitzen zwei. An den oberen 2 Keramikstäben werden 6 Elektroden befestigt, an den unteren Keramikstäben ebenfalls. Betrachtet man nur die oberen 6 Elektroden, so werden zuerst zwei Paare zu je 3 Elektroden lose zusammenschraubt. Dies sind die Elektroden 1M, 1L und 2L sowie 1R, 2M und 2R. Durch Metallscheiben präziser Dicke ($150 \mu\text{m}$) justiert man den Abstand der beiden kürzeren Elektroden, welche von der anderen Seite an die langen Elektroden geschraubt werden, während man auch auf exakten Abschluß der Elektroden am Fallenende achten muß. Diese beiden Pakete zu je 3 Elektroden werden dann zum Fallenmittelpunkt geschoben und mit weiteren 2 Metallscheiben justiert. Sodann werden die Schrauben festgezogen und die Metallscheiben entfernt. Die unteren 6 Elektroden werden ebenso justiert, wobei die gleiche axiale Justage der Elektroden durch massive Metallstücke garantiert wird.

3.5 Computersimulationen des Fallenpotentials

Zur theoretischen Bestimmung des Fallenpotentials wurde ein Computerprogramm^[6] verwendet, welches Differentialgleichungen unter Angabe von Randbedingungen löst. In diesem Fall ist dies die Laplace-Gleichung unter Angabe der Fallengeometrie und der Fallenspannungen (vgl. Kapitel 2.1). Dazu wurde im allgemeinen zuerst nur der Pseudopotentialanteil ausgerechnet. Dies geschieht indem man die Feldverteilung bei maximaler Amplitude des RF-Feldes - ohne Angabe der DC-Anteile - ausrechnen läßt. Mit Hilfe der Formel (2.19) berechnet man somit das Pseudopotential für jeden Punkt in der Falle. Um das Gesamtpotential für eine Konfiguration $(1l,2l,2r,1r;a',q')$ zu bestimmen, berechnet man nun in einer

^[6] *FlexPDE*

weiteren Simulation das Potential, welches anliegen würde, falls nur die DC-Werte unter Berücksichtigung des a' -Werts anliegen würden und überlagert das so erhaltene Potential mit dem Pseudopotential, welches man vorher für den gewünschten q' -Wert berechnet hat.

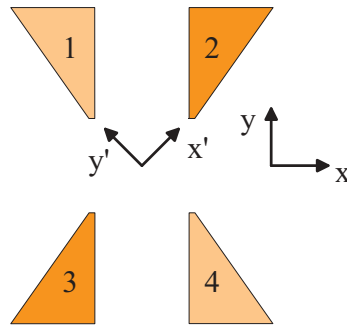


Abbildung 3.6: Koordinatensystem der Hauptachsen der Falle und des Fallensystem. Die Hauptachsen der Falle sind um 45° im mathematisch positiven Sinne relativ zum Fallensystem gedreht.

3.5.1 Radiales Fallenpotential

Die beiden radialen Hauptachsen verlaufen diagonal im Koordinatensystem der Falle^[7]. Die erste Hauptachse, x' genannt, verläuft unter 45° von der x -Achse von RF-Elektrode 3 zur Elektrode 2 hin. Die zweite Hauptachse, y' verläuft senkrecht dazu von Elektrode 4 zur Elektrode 1 hin (siehe Abb. 3.6).

Eine Simulation des radialen Fallenpotentials in der Fallenmitte für $q' = 0,337$ ist in Abb. 3.7 dargestellt. Theoretische Berechnungen sowohl radialer als auch axialer Schwingungsfrequenzen werden im Vergleich mit experimentellen Ergebnissen in Kapitel 7 präsentiert.

3.6 Ladeprozedur

Beim Laden der Falle, werden die Fallenspannungen auf $(10V, 0V, 0V, 10V; a', q')$ (siehe Abb. 3.8) gesetzt, wobei der a' - und q' -Wert innerhalb des Stabilitätsbereichs gewählt werden

^[7] Bei der linearen Endkappenfalle verliefen diese aufgrund unterschiedlicher RF-Beschaltung horizontal und vertikal.

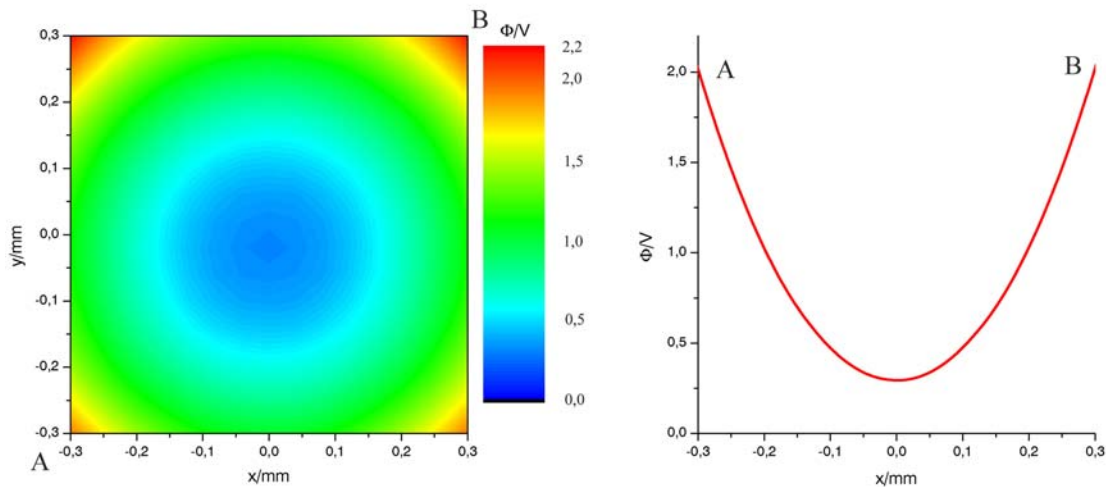


Abbildung 3.7: Simulation des radialen Fallenpotentials in der Fallenmitte mit $U_{RF} = 300$ V. Dies entspricht einem q' von 0,337. Dargestellt ist das entstehende Pseudopotential (links) und ein Schnitt (rechts) durch dieses entlang der Fallenhauptachse x' in Abhängigkeit der Koordinate des Laborsystems x . Das in der Fallenmitte in dieser Richtung entstandene Potential besitzt für Magnesium-Ionen eine Oszillationsfrequenz von $\omega_{\text{säkular}} = 2\pi \cdot 1,38$ MHz.

müssen. In der Abb. 3.8 des Fallenpotentials sieht man entlang der Fallenachse einen ca. 13,2 mm langen Potentialtopf. Hier werden in beiden Ladezonen, deren Mittelpunkte sich 3,2 mm entfernt vom Fallenzentrum auf beiden Seiten des Fallenzentrums befinden, Ionen geladen. Durch Anlegen eines negativen Potentials an die 4 mittleren M-Elektroden (z.B. (10,-2,-2,10)V) kann man es erreichen, daß sich an den beiden Ladepositionen jeweils Minima des axialen Potentials befinden (siehe Abb. 3.9). Somit kann eine vorzeitige Durchmischung der beiden verschiedenen Ionensorten vermieden werden.

Nach dem Heizen der jeweiligen Öfen (90 Sekunden für den Magnesium-Ofen und 30 Sekunden beim Indium-Ofen^[8]) und anschließender Ionisation durch die Elektronenkanone (30 Sekunden), werden die Werte auf (20,5,5,20)V hochgefahren (siehe Abb. 3.11 und 3.10). Dies geschieht indem zuerst die äußeren Spannungen 1l und 1r von 10 V auf 20 V erhöht werden und 1 Millisekunde später die inneren Spannungen 2l und 2r von 0 V auf 5 V gesetzt werden. Somit werden die sich im langen Fallentopf (oder in den beiden Fallentöpfen) befindlichen Ionen ins Fallenzentrum transferiert, und befinden sich dann

^[8] Falls beide Ionensorten gleichzeitig geladen werden, wird der den Indium-Ofen in den letzten 30 Sekunden der Magnesium-Ofen-Heizzeit angeschaltet.

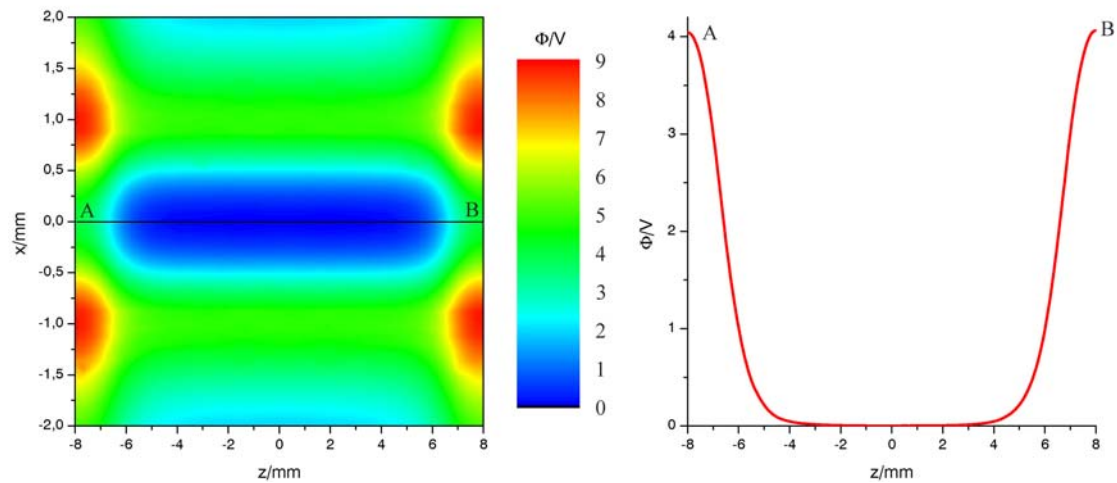


Abbildung 3.8: *Computersimulation des Fallenpotentials bei $(10V, 0V, 0V, 10V; a=0, q'=0,337)$, welches zum Laden verwendet wird. Auf der linken Seite ist das Gesamtpotential, welches sich aus dem Pseudopotentialanteil und dem Gleichspannungsanteil zusammensetzt, für einen Schnitt mit $y = 0$ mm geplottet. Auf der rechten Seite ist ein Schnitt entlang der Fallenachse z vom Punkt A zu Punkt B dargestellt. Es entsteht ein langer Fallentopf, der in der Fallennitte nicht harmonisch ist. Die beiden Ionensorten werden bei $z = \pm 3,2$ mm geladen.*

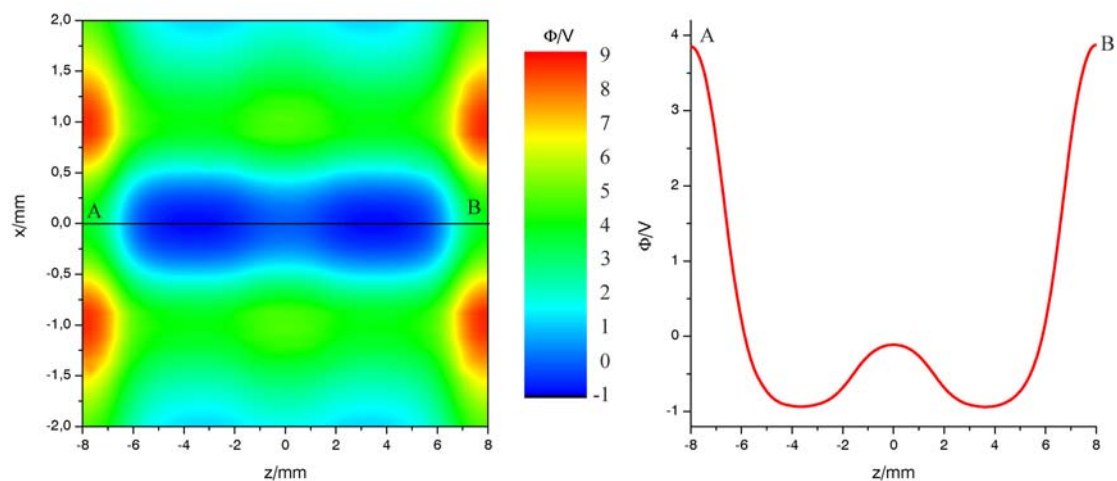


Abbildung 3.9: *Durch Anlegen eines negativen Potentials an die 4 mittleren M-Elektroden $(10V, -2V, -2V, 10V; a=0, q'=0,337)$ kann man es erreichen, daß auf beiden Seiten der Fallennitte auf der Fallenachse zwei Potentialtöpfe entstehen, in denen die beiden Ionensorten getrennt geladen werden können. Die Minima befinden sich in diesem Fall bei $z = \pm 3,65$ mm.*

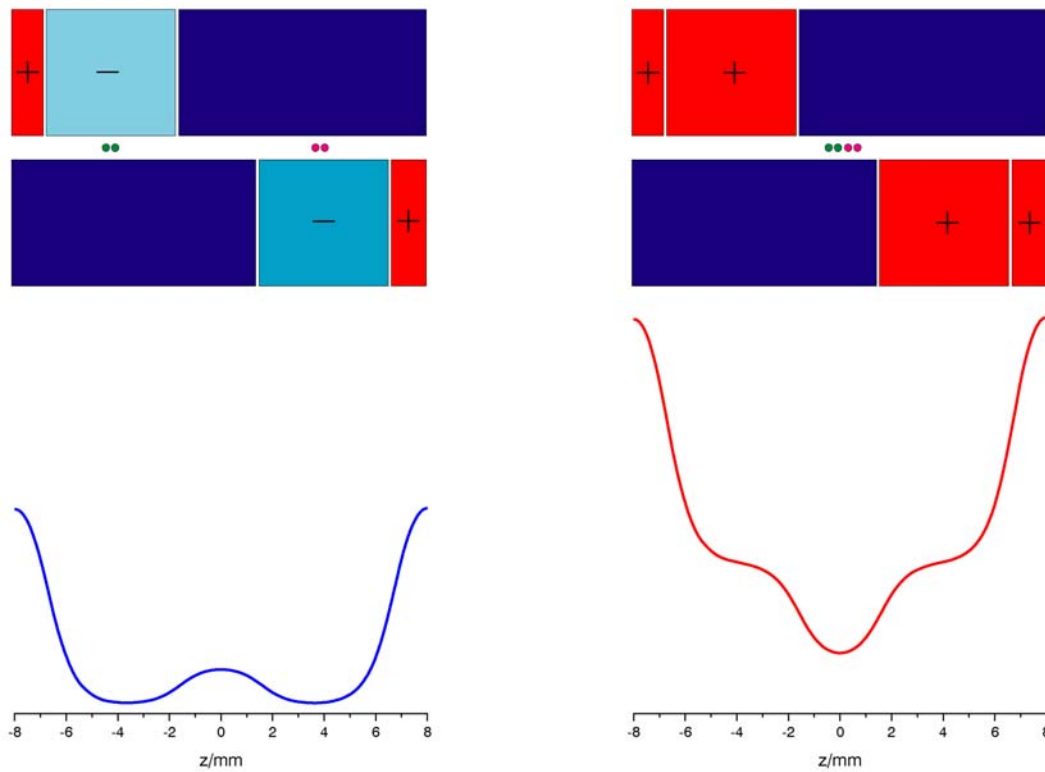


Abbildung 3.10: Beim Vorgang der Ladeprozedur wird im bei $(10V, -2V, -2V, 10V; a=0, q'=0,337)$ (links) Ionen in beiden Ladezonen geladen. Nach dem Erhöhen der Fallenspannungen auf $(20V, 5V, 5V, 20V; a=0, q'=0,337)$ sind beide Ionensorten in der Fallenmitte gespeichert (rechts). In der unteren Bildhälfte erkennt man den Verlauf des Fallenpotentials entlang der Fallachse in den jeweiligen Situationen.

in einem nur noch 3mm langen Speicherpotential. In der Fallenmitte bildet sich für Magnesium-Ionen ein harmonisches Potential mit einer Oszillationsfrequenz von 269 kHz.

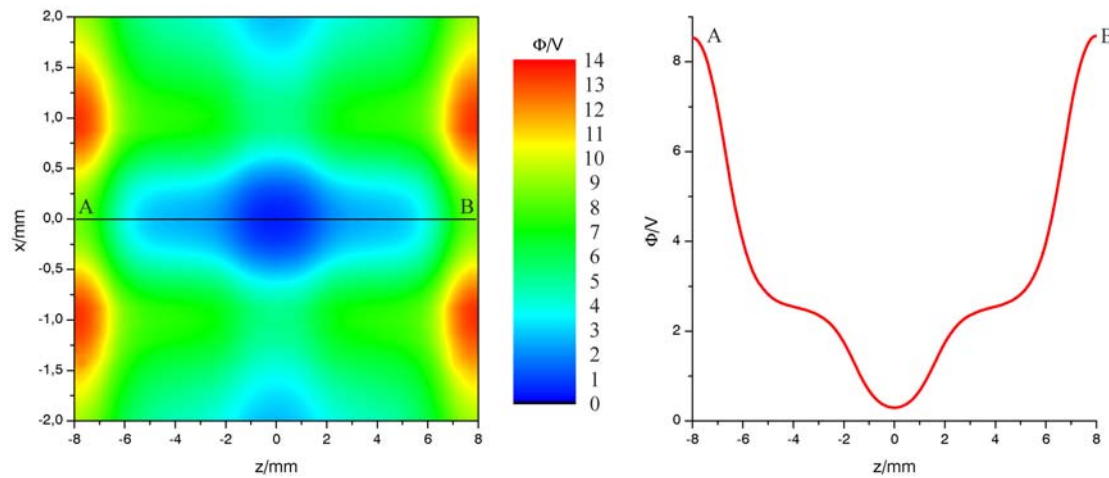


Abbildung 3.11: *Computersimulation des Fallenpotentials mit $(20V, 5V, 5V, 20V; a=0, q'=0,337)$. Dies ist das Fallenpotential, welches nach dem Hochfahren der äußeren Spannungen entsteht und zum Speichern benutzt wird. In der Mitte befindet sich ein harmonischer Potentialtopf mit einer axialen Oszillationsfrequenz für Magnesiumionen von $\omega_{axial} = 2\pi \cdot 269$ kHz. Eine vergrößerte Darstellung des Potentials des inneren Bereichs ist in Abb. 3.12 zu sehen.*

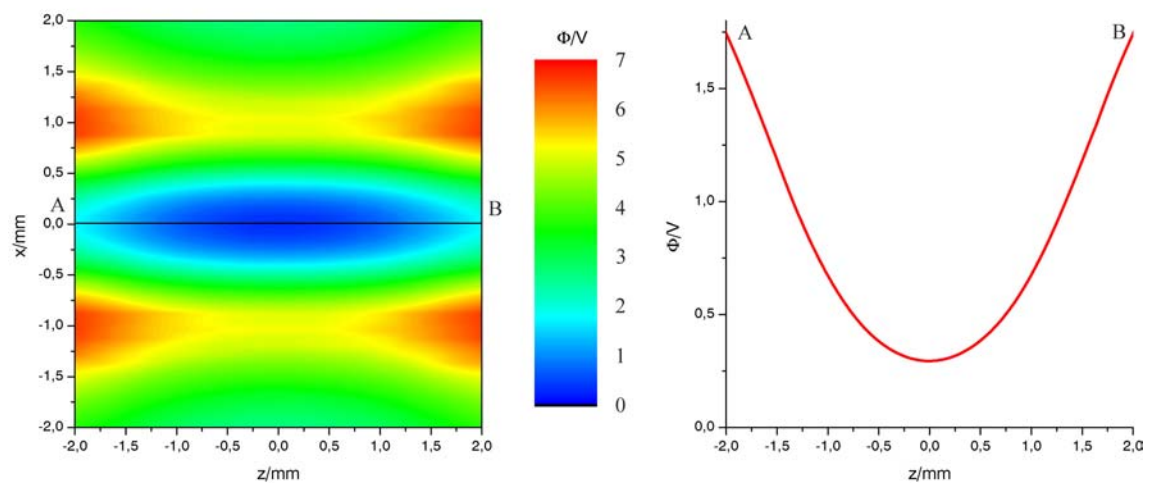


Abbildung 3.12: *Vergrößerte Darstellung des Fallenpotentials mit $(20V, 5V, 5V, 20V; a=0, q'=0,337)$.*

Kapitel 4

Laserkühlung gespeicherter Ionen

dixitque Deus fiat lux et facta est lux

Und Gott sprach: Es werde Licht! Und es ward Licht.

AT, Buch Genesis, Kap. 1, 3. Vers

Zur Realisierung der in Kapitel 1 vorgestellten Quantengatter werden verschiedene Laserkühlmethoden^[1] gebraucht, welche hier genauer beschrieben werden sollen.

4.1 Laserkühlung

Die Laserkühlung von Neutralatomen oder gespeicherten Ionen hat sich in den letzten Jahrzehnten als eines der aktivsten Gebiete der Atomphysik und Quantenoptik erwiesen. Dies hat sich zum einen in der Verleihung des Nobelpreises von 1997 an Chu [120], Cohen-Tannoudji [121] und Phillips [122] für Pionierarbeiten auf dem Gebiet der Laserkühlung, aber auch in der Verleihung des Nobelpreises 2001 an Ketterle [123], Cornell und Wieman [124] für Anwendung von Laserkühlmethoden bei der Erreichung [125, 126] von Bose-Einstein-Kondensation [127] widerspiegelt. Laserkühlung wurde bereits 1975 von Hänsch und Schawlow [128] zur Kühlung atomarer Gase und unabhängig davon von

^[1] *Ein exzellentes Buch über Laserkühlung ist [119].*

Wineland und Dehmelt [129] zur Kühlung gefangener Ionen vorgeschlagen. Durch die Entwicklung abstimmbarer, frequenzstabiler Farbstofflaser in den siebziger Jahren, konnte 1978 erstmals Doppler-Laserkühlung an einer Wolke gespeicherter Ionen nachgewiesen werden [130, 131]. Ionenkristalle wurden erstmals 1987 am MPQ erzeugt [132, 133], Seitenbandkühlung [55] erstmals 1989 demonstriert.

Auch bei Neutralatomen wurde Laserkühlung und Manipulation durch Lichtkräfte erfolgreich angewendet. So konnte bereits 1933 ein Atomstrahl mit einem transversalen Strahlungsfeld abgelenkt werden [134]. 1982 wurde ein Atomstrahl erstmals in seiner longitudinalen Bewegung gekühlt [135], und wenig später gelang die dreidimensionale Kühlung in einer sogenannten optischen Melasse [136]. Speicherung und Kühlung wurden kurz darauf in einer magneto-optischen Falle (MOT^[2]) gezeigt [137], welche sich als Standardwerkzeug zur Erzeugung ultrakalter Atome durchsetzte.

1988 wurden von Phillips unerwartete Sub-Doppler-Temperaturen beobachtet [138], welche kurz darauf von Dalibard und Cohen-Tannoudji durch die Polarisations-Gradienten-Kühlung theoretisch erklärt werden konnten [139, 140]. Daraufhin folgte eine rasante Entwicklung neuer Kühlverfahren, die das Erreichen immer tieferer Temperaturlimits wie z.B. der Photonrückstoßgrenze^[3] ermöglichten. Hier seien nur die Raman-Kühlung [6] und das VSCPT^[4]-Kühlen [141] angeführt.

Nach diesem historischen Rückblick wollen wir uns nun der Laserkühlung gespeicherter Atome insbesondere gespeicherter Ionen widmen.

Vor der eigentlichen Behandlung der Laserkühlung sei für die Problematik einem Ensemble lasergekühlter Teilchen eine Temperatur zuzuweisen auf Anhang K verwiesen.

^[2] *Magneto-Optical Trap*

^[3] *Die Temperatur der Photonrückstoßgrenze T_R wird bestimmt durch die Gleichheit der thermischen Energie und der Energie eines Photonrückstoßes: $k_B T_R = E_R = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, wobei $\hbar k = \frac{h}{\lambda} = p_R$ der Rückstoßimpuls der Emission eines Photons der Wellenlänge λ auf das Atom der Masse m ist. Werte der Rückstoßgrenze reichen von einigen 100 Nanokelvin für Alkalimetalle bis zu einigen Mikrokkelvin für Helium.*

^[4] *Velocity Selective Coherent Population Trapping*

In Paul-Fallen gespeicherte Ionen besitzen unmittelbar nach dem Ladevorgang eine kinetische Energie, die dem Pseudopotential am Ort der Ionisation entspricht und typischerweise einige eV beträgt, was einer Temperatur von einigen 10000 K entspricht^[5]. Während bei freien Teilchen alle sechs Raumrichtungen gekühlt werden müssen, ist dies für Teilchen, die in allen drei Raumdimensionen gefangen sind, nicht der Fall, da die Teilchen in allen Richtungen oszillieren. Während für freie Teilchen mindestens vier Laserstrahlen notwendig sind, benötigt man für gefangene Teilchen nur einen einzigen Laserstrahl, welcher allerdings mit allen drei Hauptachsen der Falle nichtverschwindende Komponenten besitzen muß, um die Teilchen in drei Dimensionen zu kühlen. Doppler-Laserkühlung reduziert die Temperatur in Sekundenbruchteilen um 7 Größenordnungen auf ca. 1 mK.

Wir betrachten Laserkühlung, bei der ein monochromatischer Laser auf einen atomaren Übergang der Frequenz ω_A eingestrahlt wird. Dabei sind zwei Parameterbereiche zu unterscheiden: die starke und die schwache Bindung, entsprechend dem Verhältnis von Fallenoszillationsfrequenz ω_{sec} und Linienbreite des verwendeten atomaren Übergangs Γ .

4.2 Dopplerkühlung

Im Grenzfall schwacher Bindung ist die Oszillationsfrequenz des Ions in der Falle sehr viel kleiner als die Linienbreite des atomaren Übergangs $\omega_{sec} \ll \Gamma$. Emission und Absorption finden praktisch zur selben Oszillationsphase des Ions statt.

Im Ruhesystem des Teilchens erscheint das Licht frequenzmoduliert. Das Absorptionsspektrum besteht aus dem Träger bei ω_A und Bewegungsseitenbändern bei $\omega_A \pm n \omega_{sec}$ mit $n \in \mathbb{N}$, die jedoch wegen $\Gamma \gg \omega_{sec}$ vollständig überlappen.^[6]

^[5] $1 \text{ eV} \simeq k_B \cdot 11603 \text{ K}$

^[6] Dies kann man sich wie folgt klarmachen: Da das gefangene Teilchen in der Falle oszilliert: $x = a \cdot \sin(\omega_{sec}t)$ kann man das elektrische Feld des einfallenden Lasers wie folgt schreiben: $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega_L t)} = \vec{E}_0 e^{-i\omega_L t} e^{ika \sin(\omega_{sec}t)} = \vec{E}_0 e^{-i\omega_L t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega_{sec}t} J_n(ka) = \vec{E}_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega_L - n\omega_{sec})t} J_n(M)$. $M = ka = \frac{2\pi a}{\lambda}$ wird der Modulationsindex genannt. Man sieht, daß das Atom ein Spektrum sieht, das aus dem Träger bei ω_L und Seitenbändern bei $\omega_L \pm n \omega_{sec}$ mit $n \in \mathbb{N}$ besteht, wobei die Intensitäten der Seitenbänder proportional zu $J_n^2(ka)$ sind, wobei J_n die Besselfunktion erster Gattung n -ter Ordnung ist. Das Emissionsspektrum des Atoms, das

Hier kann man die Laserkühlung der Ionen analog zur Laserkühlung freier Teilchen beschreiben. Der Wirkungsquerschnitt ist dem freier Teilchen gleichzusetzen.

Der Kühlmechanismus beruht darauf, daß das Ion aufgrund der Oszillation in der Falle bei bestimmten periodisch wiederkehrenden Zeitpunkten mit dem rotverstimmtten Lichtfeld durch den Dopplereffekt in Resonanz gebracht wird. Daraufhin wird ein Lichtquant absorbiert, dessen Impuls auf das Ion übergeht. Da Bewegungsrichtung des Ions und Impuls des Photons entgegengesetzt sind, wird das Ion abgebremst, verliert kinetische Energie und wird somit gekühlt. Anschließend emittiert das Ion spontan ein Photon, dessen Emissionsverteilung isotrop ist. Es wird also im Mittel kein Impuls auf das Ion übertragen, so daß man naiverweise erwarten könnte, daß das Ion bis $T = 0$ gekühlt wird. Mit der Spontanemission ist jedoch ein Heizmechanismus verbunden, der darin besteht, daß das Ion aufgrund der zufälligen Richtung der Spontanemission eine Diffusion im Impulsraum ausführt, was eine Aufheizung des Ions zur Folge hat. Durch das Wechselspiel von Kühlkraft und diffusiver Aufheizung stellt sich eine Gleichgewichtstemperatur T ein, die gegeben ist durch [142]:

$$k_B T = \frac{\hbar\Gamma}{4} \frac{1 + \frac{I}{I_{sat}} + \left(\frac{2\Delta\omega}{\Gamma}\right)^2}{\frac{2|\Delta\omega|}{\Gamma}} = \frac{\hbar\Gamma}{4} \left(\frac{\Gamma}{2|\Delta\omega|} (1+p) + \frac{2|\Delta\omega|}{\Gamma} \right) \quad , \quad (4.1)$$

wobei $p = \frac{I}{I_{sat}}$ der Sättigungsparameter und $\Delta\omega = \omega_{Laser} - \omega_A$ die Verstimmung des Lasers von der atomaren Resonanzfrequenz ω_A ist.

Für eine Verstimmung von $\Delta\omega = -\frac{\Gamma}{2}\sqrt{1+p}$ ergibt sich ein Minimum der erreichbaren Endtemperatur. Im Grenzfall kleiner Laserintensitäten $I \ll I_{sat}$ ($p \ll 1$) wird bei einer Laserverstimmung von $\Delta\omega = -\frac{\Gamma}{2}$ die Doppler-Kühlgrenze, die sogenannte Dopplertemperatur $T_{Doppler}$ erreicht. Sie ist gegeben durch

$$T_{Doppler} = \frac{\hbar\Gamma}{2k_B} \quad (4.2)$$

Falls man die Parameter des im Experiment verwendeten $^{24}\text{Mg}^+$ -Ions, gekühlt auf dem Übergang $3^2\text{S}_{\frac{1}{2}} \rightarrow 3^2\text{P}_{\frac{3}{2}}$ ($\Gamma = 2\pi \cdot 42,7\text{MHz}$) in Gl. (4.2) einsetzt, erhält man eine Dopplertemperatur $T_{Doppler} \simeq 1\text{mK}$, was bei einer axialen Säkularfrequenz von $\omega_z/2\pi =$

von einem Beobachter im Labor betrachtet wird, hat prinzipiell denselben Charakter, wobei jede Komponente bei $\omega_A \pm n\omega_{sec}$ die natürliche Linienbreite Γ besitzt.

560 kHz einer mittleren Besetzungszahl der axialen harmonischen Oszillatorzustände in der Falle von ca. $\langle n \rangle = 35$ entspricht.

4.3 Seitenbandkühlung

Die Seitenbandkühlung ist der zur Dopplerkühlung konträre Grenzfall der starken Bindung, in dem die Bewegungsseitenbänder spektral aufgelöst sind. Es gilt also $\Gamma \ll \omega_{sec}$. Sie wurde erstmals 1989 mit Hilfe des schmalbandigen, Dipol-verbotenen $2^2S_{\frac{1}{2}} \rightarrow 3^2P_{\frac{5}{2}}$ -Übergangs eines einzelnen gefangenen $^{198}\text{Hg}^+$ -Ions realisiert [55].

Um diesen Grenzfall auf einem Dipol-erlaubten Übergang zu realisieren^[7], kann man eine sehr steile Falle oder eine sehr schwach erlaubten Dipolübergang benutzen. Beide Herangehensweisen wurden realisiert [4, 143]. Abb. 4.1 zeigt das Absorptionsspektrum bei Seitenbandkühlung.

Seitenbandkühlung kann man als Anti-Stokes-Raman-Streuung des Pseudomoleküls bestehend aus Ion und Ionenfalle verstehen. Dabei stimmt man die Laserfrequenz auf das k -te rote Seitenband, d.h. $\Delta\omega = -k \omega_{sec}$. Dadurch werden Übergänge $|g, n\rangle \rightarrow |e, n - k\rangle$ getrieben. Bei der darauffolgenden Spontanemission des Ions zurück in den Grundzustand $|e\rangle$ kann es im allgemeinen seine Schwingungsenergie erhöhen, erniedrigen oder nicht ändern; die mittlere Änderung ist aber gleich der Rückstoßenergie $E_R = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Falls E_R kleiner als $k \cdot \hbar\omega_{sec}$ ist, setzt Kühlung ein.

Im Fall der Seitenbandkühlung auf dem ersten Seitenband (siehe Abb. 4.2) werden Übergänge $|g, n + 1\rangle \rightarrow |e, n\rangle$ induziert. Anfänglich wird dem Ion pro Kühlzyklus die Energie $\hbar\omega_{sec}$ entzogen, so daß die Kühlleistung gegeben ist durch das Produkt aus Streurate und Laserverstimmung. Mit fortschreitender Kühlung werden die äußeren Seitenbänder schwächer. Die Stärke eines Seitenbands ist proportional zu $J_n^2(M)$. Mit fortschreitender Kühlung wird die Schwingungsamplitude a und somit ebenfalls $M = \frac{2\pi a}{\lambda}$ immer kleiner. Da außer J_0 alle Besselfunktionen $J_n(x)$ für $x \rightarrow 0$ gegen Null gehen [102, 144] (siehe auch Anhang J), verschwinden im Lamb-Dicke-Limit, d.h. falls $\eta = \frac{2\pi a}{\lambda} \ll 1$ gilt, alle Seitenbänder und nur der Träger bleibt bestehen. Falls lediglich $\eta < 1$, aber $\eta^2 \ll 1$ gilt,

^[7] Eine weitere Methode, diesen Bereich zu erreichen besteht in der Raman-Seitenband-Kühlung [6, 56] (siehe auch Kapitel 4.4).

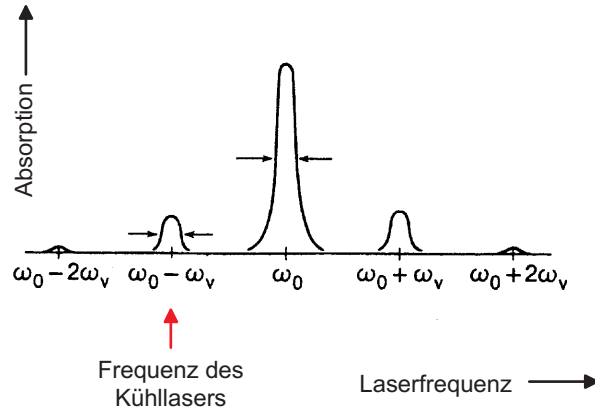


Abbildung 4.1: Absorptionsspektrum eines einzelnen Ions in einem harmonischen Potential der Frequenz $\omega_v = \omega_{sec}$. Es wird vorausgesetzt, daß die Oszillationsfrequenz des Ions im harmonischen Potential ω_v sehr viel größer als die Linienbreite des Kühlübergangs Γ ist: $\omega_v \gg \Gamma$. Weiterhin soll sich das Ion im Lamb-Dicke-Limit befinden, d.h. seine Schwingungsamplitude a ist viel kleiner als die Wellenlänge λ des Kühllasers. Deshalb ist die Intensität der Seitenbänder klein im Vergleich zum Träger bei ω_A . Maximale Kühlleistung erreicht man mit einem schmalbandigem Laser (Linienbreite kleiner als Γ), dessen Frequenz auf $\omega_A - \omega_v$ abgestimmt ist.

besteht das Spektrum im wesentlichen aus dem Träger S_0 bei ω_A und den beiden ersten Seitenbändern $S_{\pm 1}$ bei $\omega_A \pm \omega_{sec}$. Für die relativen Amplituden des Trägers und der beiden Seitenbänder gilt dann:

$$S_0 = 1 \quad (4.3)$$

$$S_{-1} = \eta^2 \langle n \rangle \quad (4.4)$$

$$S_1 = \eta^2 (\langle n \rangle + 1) \quad (4.5)$$

Aus dem Verhältnis des blauen zum roten Seitenbandes kann direkt die mittlere Besetzung der Oszillatorniveaus $\langle n \rangle$ berechnet werden. Dies entspricht unter Voraussetzung einer thermischen Verteilung (siehe auch Anhang K) einer Temperatur von

$$T = \frac{\hbar\omega}{k_B \ln(1 + \langle n \rangle^{-1})}. \quad (4.6)$$

Diejenigen Prozesse, welche verhindern, daß man bis auf $T = 0$ kühlen kann, sind in diesem Fall die nichtresonanten Anregungen des Trägers oder des ersten blauen Seitenbandes, da nur in diesem Fall Spontanemission in ein höheres Schwingungsniveau erfolgen kann. Bei

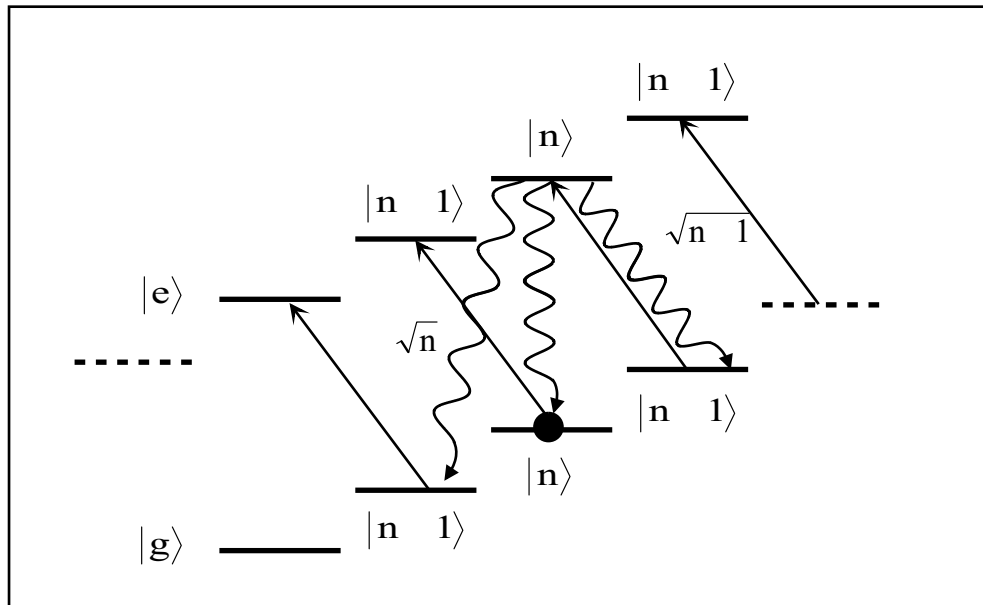


Abbildung 4.2: Prinzip der Seitenbandkühlung auf dem ersten roten Seitenband. Dargestellt sind der Grundzustand $|g\rangle$ und der angeregte Zustand $|e\rangle$ mit den jeweiligen Schwingungsniveaus $|n\rangle$. Mit einem rotverstimmt Laser ($\Delta\omega_{\text{Laser}} = -\omega_{\text{sec}}$) werden im Lamb-Dicke-Limit fast ausschließlich Übergänge $|g, n+1\rangle \rightarrow |e, n\rangle$ getrieben. Nachfolgende Spontanemission verteilt die Population auf die Zustände $|g, n\rangle$, $|g, n \pm 1\rangle$, und zwar am wahrscheinlichsten auf den Zustand $|g, n\rangle$, so daß gegenüber dem Ausgangszustand $|g, n+1\rangle$ Schwingungsquanten entzogen wurden, und so eine Kühlung erzielt werden konnte.

niedrigen Temperaturen kommt diesen Heizprozessen eine immer größere Bedeutung zu, da das untere Seitenband für $n = 0$ verschwindet.

Nach Erreichen des thermischen Gleichgewichts ist die mittlere Besetzungszahl der Oszillatorzustände gegeben durch [130, 145] (Zur Herleitung dieser Formel siehe auch Anhang H.)

$$\langle n \rangle = \frac{5}{16} \left(\frac{\Gamma}{\omega_{\text{sec}}} \right)^2 \ll 1. \quad (4.7)$$

Das Ion befindet sich nun die meiste Zeit im quantenmechanischen Grundzustand $|n = 0\rangle$ des Potentials.

Man erkennt, daß es günstig ist, Übergänge kleiner Linienbreite zu verwenden, da man dann keine so großen Säkularfrequenzen zu erreichen braucht, d.h. die Ionenfalle nicht so steil vorsehen muß, was mitunter sehr wünschenswert ist.

Dies machen wir uns im Experiment zunutze, indem wir zur Kühlung Indiumionen ver-

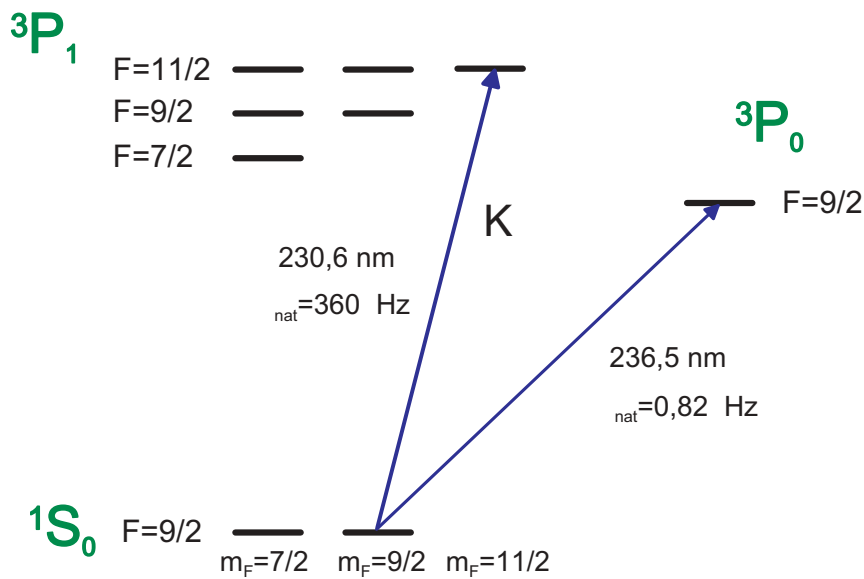


Abbildung 4.3: Niveauschema von Indium. Zur Kühlung wird der σ_+ -polarisierte Laser K benutzt, welcher den Übergang $5s^2\ ^1S_0 \rightarrow 5p\ ^3P_1$ treibt. Der Übergang $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ stellt einen günstigen Kandidaten zur Realisierung eines Frequenzstandards dar.

wenden. Diese werden auf dem Übergang $5s^2\ ^1S_0 \rightarrow 5p\ ^3P_1$ (siehe Abb. 4.3) mit einer natürlichen Linienbreite von $\Gamma/2\pi = 360$ kHz getrieben. Somit kann mit sehr einfachen Mitteln in herkömmlichen Ionenfallen mit Oszillationsfrequenzen um 1 MHz der Bereich starker Bindung erreicht werden. Grundzustandskühlung von einem bzw. zwei Indiumionen konnte bereits in unserer Arbeitsgruppe gezeigt werden [4, 146, 147]. Die Seitenbandkühlung im Falle eines heterogenen $\text{Mg}^+\text{-In}^+$ -Kristall ist ähnlich zum hier Beschriebenen (siehe auch Kapitel 5).

Am Rande sei noch erwähnt, daß der $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ Übergang mit einer Linienbreite von 0,82 Hz ein idealer Kandidat für die Realisierung eines Frequenzstandards darstellt [148, 149].

4.4 Raman-Seitenband-Kühlung

Nicht alle Ionen weisen metastabile Niveaus auf, die mit Lasern angeregt werden können. In diesem Fall, z.B. Kühlung eines reinen $^{25}\text{Mg}^+$ -Kristalls, ist man gezwungen,

Raman-Übergänge zu benutzen, um den Grenzfall starker Bindung^[8] $\Gamma_{\text{eff}} < \omega_{\text{osz}}$ zu erreichen. Dies sind 2-Photonen-Übergänge, bei denen andere Auswahlregeln als bei Einphotonen-Dipolübergängen gelten. Deshalb kann man auch Übergänge zwischen Hyperfeinstruktur- ($^{25}\text{Mg}^+$, $I \neq 0$, siehe Abb. 4.4) oder Zeemanniveaus ($^{24}\text{Mg}^+$, $I=0$) derselben Mannigfaltigkeit treiben. Die effektive Linienbreite Γ_{eff} ist experimentell regulierbar und kann äußerst schmal eingestellt werden.

Der Übergang wird über ein drittes, virtuelles Niveau getrieben, welches um Δ von einem

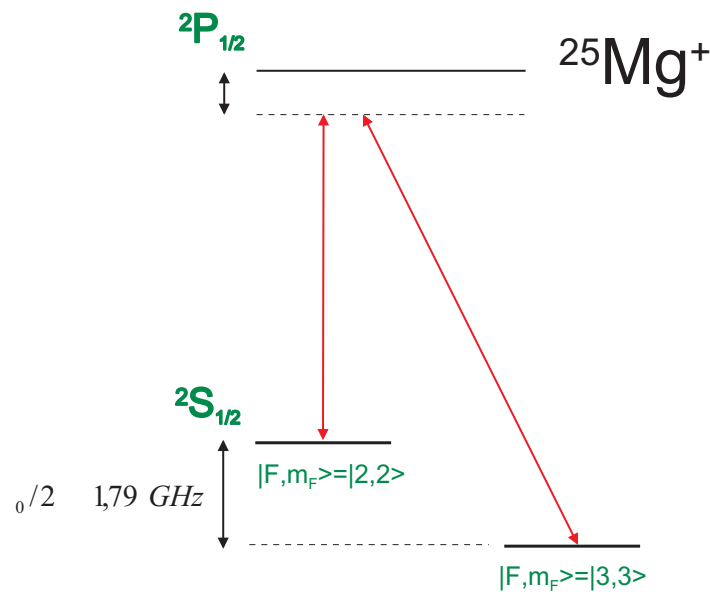


Abbildung 4.4: Stimulierter Ramanübergang bei $^{25}\text{Mg}^+$. Durch Einstrahlung der zwei Laserfrequenzen ω_1 und ω_2 wird ein 2-Photonen-Übergang über ein virtuelles Niveau getrieben, welches um Δ unter dem $2P_{1/2}$ -Niveau liegt. Dadurch ist es möglich eine äußerst kleine Linienbreite zu erreichen. Die Differenzfrequenz der beiden Laserstrahlen beträgt $\omega_2 - \omega_1 = \omega_0$, so daß der Übergang $2P_{1/2} |F, m_F\rangle = |3, 3\rangle \rightarrow |2, 2\rangle$ resonant getrieben wird.

P-Zustand verstimmt ist. Durch die große Verstimmung Δ bleibt das reale Niveau in guter Näherung unbesetzt. Im nachfolgenden betrachten wir nur den Fall des $^{25}\text{Mg}^+$ mit Hyperfeinstruktur.

Da sich diese Übergangsfrequenzen im Mikrowellenbereich befinden und die spontane Emissionswahrscheinlichkeit proportional zu $\omega^3 \sim \frac{1}{\lambda^3}$ variiert, sind die entsprechenden

[8] engl.: strong confinement limit

Lebensdauern äußerst lange, was für zuverlässige Quantenrechnungen unerlässlich ist.

Beide Ramanstrahlen werden aus einem einzigen Laser gewonnen. Nach der Aufspaltung des Strahls, wird einem Strahl mit Hilfe eines Akusto-Optischen-Modulators (AOM) die Hälfte der Differenzfrequenz $\omega_1 - \omega_2$ aufgeprägt. Da die Laserfrequenz erst nach dem AOM frequenzverdoppelt wird, ergibt sich die gewünschte Differenz $\omega_1 - \omega_2$ zwischen den beiden Strahlen. Die Hälfte der Hyperfeinaufspaltung $\omega_0/2 = 2\pi \cdot 0,89$ GHz ist mit kommerziellen AOM's noch realisierbar.

Die Ramankühlung hat den Vorteil, daß die Ramanstrahlen optischen Laserfrequenzen entsprechen, welche - im Gegensatz zur Einphotonenmethode - nicht im besonderen Maße frequenzstabilisiert sein müssen, da für den 2-Photonenübergang nur die Energiedifferenz der Photonen eingeht, welche am AOM sehr exakt eingestellt werden kann. Ein weiterer Vorteil ist, daß man die effektive Linienbreite sowohl durch die Pulslänge als auch die Verstimmung Δ vom dritten virtuellen Zwischenniveau experimentell steuern kann.

Die Kühlung erfolgt in diesem Schema (siehe Abb. 4.5) durch eine Abfolge zweier Raman-Übergänge. Zuerst erfolgt ein stimulierter Ramanübergang auf dem ersten roten Seitenband (siehe Abb. 4.5a) vom Grundzustand $|1\rangle$ über ein virtuelles Zwischenniveau $|0\rangle$ in das obere Hyperfeinniveau $|2\rangle$, wobei dem Ion ein Schwingungsquant entzogen wurde. Danach wird das Elektron in den Grundzustand zurückgepumpt, da ansonsten aufgrund der extrem langen Lebensdauer des oberen Hyperfeinniveaus kein spontaner Übergang ins untere Hyperfeinniveau erfolgt. Dies geschieht mittels eines spontanen Ramanübergangs (siehe Abb. 4.5b), der im quantenmechanischen Mittel die Schwingungsquantenzahl nicht ändert, falls man sich im Lamb-Dicke-Limit ($\eta^2 = \frac{E_R}{\hbar\omega_z} \ll 1 \Leftrightarrow E_R \ll \hbar\omega_z$) befindet. Das nächste Unterkapitel behandelt den Fall außerhalb des Lamb-Dicke-Limits. Somit wurde dem System ein Schwingungsquant entzogen und es damit gekühlt. Durch mehrmalige Wiederholung dieser Pulssequenz kann Grundzustandkühlung einer Schwingungsmode erreicht werden. Falls mehrere Moden, insbesondere axiale und radiale Schwerpunktsmoden, gekühlt werden sollen, muß die Verstimmung der Modenfrequenz entsprechend angepaßt werden.

Die Differenzfrequenz $\omega_1 - \omega_2$ der Ramanstrahlen beträgt gerade $\omega_0 - \omega_{osz}$, ist also auf das erste rote Seitenband gestimmt. Beide Ramanstrahlen sind um Δ gegenüber dem oberen

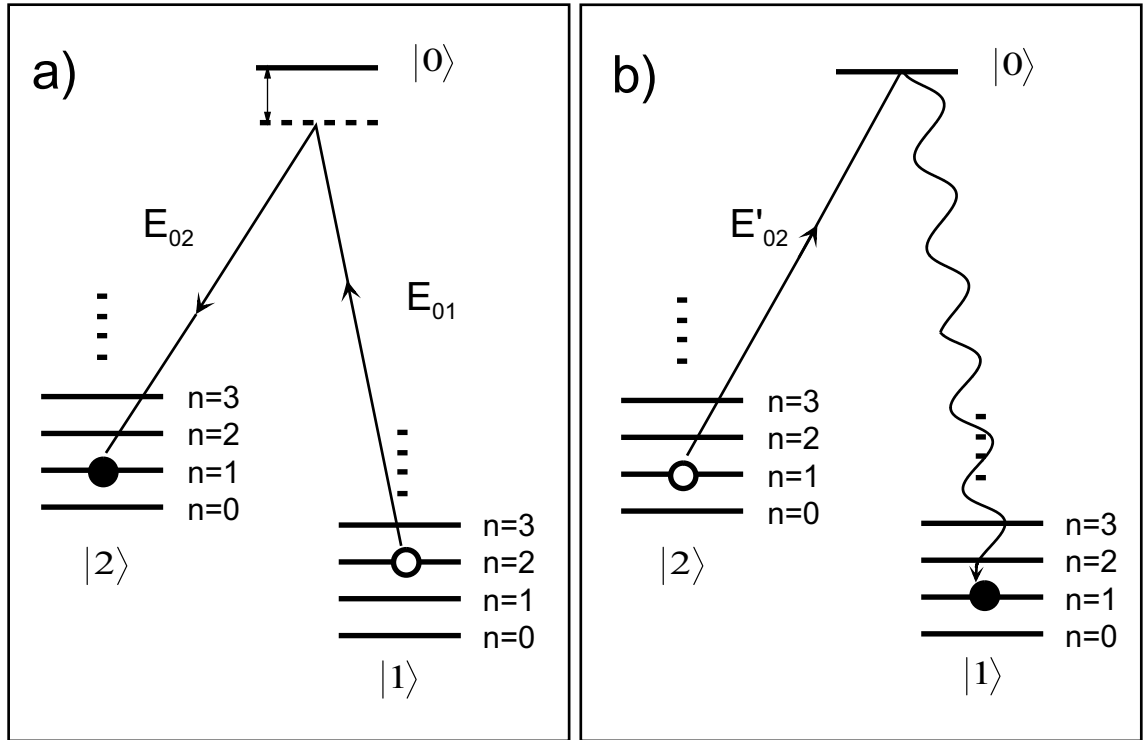


Abbildung 4.5: Raman-Seitenband-Kühlung: a) Stimulierter Raman-Übergang auf dem ersten roten Schwingungsseitenband $\delta = -\omega_z$. b) Spontaner Raman-Übergang, der den internen Zustand des Ions in den Ausgangszustand zurückführt. Für kleine η ändert sich dabei die Schwingungsquantenzahl nicht.

Übergangsniveau $|0\rangle$ verstimmt, wobei Δ folgender Bedingung genügen muß:

$$\Delta \gg \frac{\pi\Gamma}{2|\Delta k_z|z_0 n^{1/2}} \quad (4.8)$$

mit $\Delta k_z = k_{2z} - k_{1z}$ und $z_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2Nm\omega_z}}$ ($N \cdot m =$ Gesamtmasse der Ionenkette), der Ausdehnung der Grundzustandwellenfunktion.

Diese Bedingung garantiert, daß der obere Zustand $|0\rangle$ nahezu unbesetzt bleibt, was für die korrekte Durchführung von Quantencomputeroperationen unerlässlich ist, da nur die beiden unteren Zustände das Quantenbit kodieren. Unter dieser Voraussetzung kann das Niveau $|0\rangle$ adiabatisch eliminiert [150–152] werden, d.h. man betrachtet dann den Übergang als einen effektiven 2-Niveau-Übergang mit einer Übergangsrabifrequenz $\Omega_{n-1,n}$ zwischen den Niveaus $|1\rangle$ und $|2\rangle$:

$$\Omega_{n-1,n} = \frac{-g_{01}^* g_{02}}{\Delta} \langle n-1 | e^{i\eta z(a+a^\dagger)} | n \rangle \quad (4.9)$$

$$\approx \frac{-ig_{01}^*g_{02}}{\Delta}\Delta k_z z_0 \sqrt{n} \quad \text{für } \eta \ll 1 \quad , \quad (4.10)$$

wobei g_{01} und g_{02} die Rabi-Frequenzen für die resonanten Übergänge von $|1\rangle$ bzw. $|2\rangle$ nach $|0\rangle$ sind.

$$g_{0i} = -\frac{\vec{\mu}_{0i}\mathbf{E}_i}{2\hbar} \quad (4.11)$$

Bei Einstrahlung der beiden Laserfelder erfahren die Niveaus $|1\rangle$ und $|2\rangle$ AC-Stark-Verschiebungen. Bei der experimentellen Durchführung ist deshalb die Differenz der Verschiebungen $\frac{|g_{01}|^2}{\Delta} - \frac{|g_{02}|^2}{\Delta}$ bei der Abstimmung der Ramanstrahlen auf das erste Seitenband zu berücksichtigen.

Bisher wurde angenommen, daß der stimulierte Ramanübergang von $|1, n\rangle$ nach $|2, n-1\rangle$ mit 100 %-iger Wahrscheinlichkeit erfolgt. Da sich das Ion aber nach der Dopplerkühlung nicht in einem Oszillatoreigenzustand $|n\rangle$, sondern vielmehr in einer thermischen Mischung befindet und wegen der Anhängigkeit des Matrixelements aus Gl. 4.9 von der Schwingungsquantenzahl n , wird dieser Populationstransfer keine Effizienz von 100 % besitzen. Dennoch wird das Ion in den Grundzustand $|1, n=0\rangle$ gekühlt. Bei bestimmten Pulslängen und Pulsintensitäten kann es allerdings vorkommen, daß ein bestimmter Zustand einen 2π -Puls bzw. Vielfache davon ausführt. Ein solcher Zustand wird "trapping-state" genannt, weil die Population darin gefangen ist. Um auch diesen Zustand in den Grundzustand zu kühlen, kann man breitbandige Pulse, Pulse auf unterschiedlichen Seitenbändern oder Pulse mit wechselnden Intensitäten benutzen.

4.5 Grundzustandskühlung außerhalb des Lamb-Dicke-Limits

Bei linearen Fallen ist die Bindung in axialer Richtung sehr viel schwächer als in radialer. Dies hat zur Folge, daß i.a. der effektive, axiale Lamb-Dicke-Parameter, der zur Beschreibung des spontanen Raman-Überganges verwendet wird^[9] größer als Eins ist: $\eta_{\text{eff}} = \sqrt{n} \cdot \eta > 1$, d.h. man befindet sich außerhalb des Lamb-Dicke-Limits.

^[9] Es gilt: $\langle n - |l| | e^{i\vec{k}\vec{x}} | n \rangle \approx i^{|l|} J_{|l|} [2\sqrt{n}(kx_0)]$, mit der Besselfunktion l -ter Ordnung J_l und der räumlichen Ausdehnung des Grundzustands x_0 . Beim Rückpumpprozess sind hauptsächlich Über-

Genau dies ist bei der alten linearen Endkappenfalle von Dr. Baldauf [5] ($\eta_z = 0,41$; $\eta_{radial} = 0,18$; $\langle n \rangle_{Doppler} \approx 35$) der Fall gewesen. Der Rückstoß der spontanen Emission ist also nicht mehr vernachlässigbar klein, so daß sich die Population nach einer solchen Spontanemission vom Zustand $|e, n\rangle$ auf die Zustände $|g, n \pm i\rangle$ mit $i \in \{0, 1, 2, \dots, \hat{\eta}_{eff}^2\}$ verteilen wird, wobei $\hat{\eta}_{eff}^2$ die kleinste ganze Zahl größer als η_{eff}^2 ist.

Trotz dieser Schwierigkeiten existiert aber dennoch eine Möglichkeit in den Grundzustand

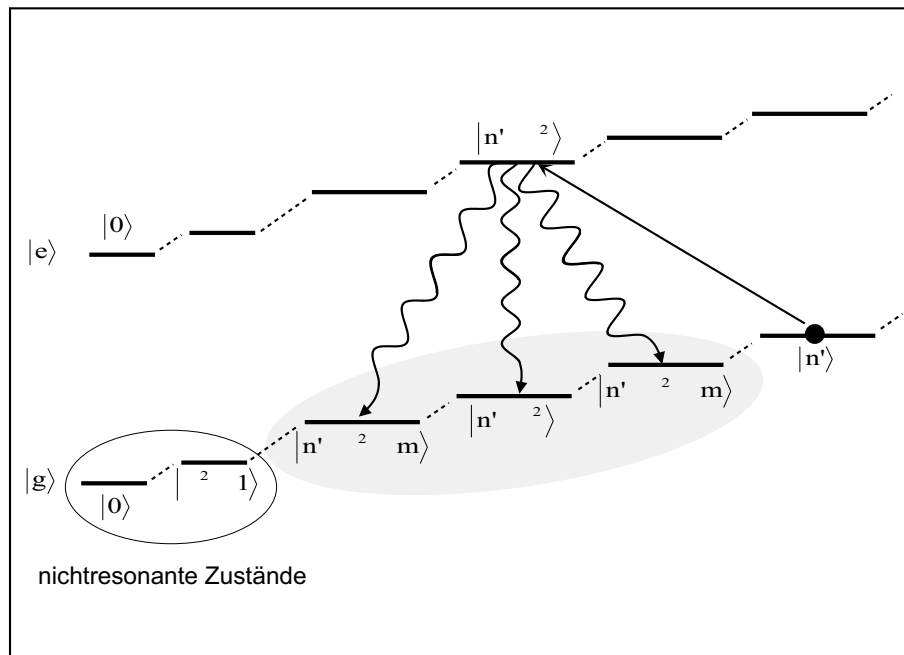


Abbildung 4.6: Grundzustandskühlung außerhalb des Lamb-Dicke-Regimes. Im ersten Schritt werden dem Ion durch einen stark rotverstimten Laser $\delta = -\eta^2\omega_{osz}$ so viele Schwingungsquanten entzogen, daß dieser Kühlprozeß gegenüber dem Heizprozeß (graue Fläche) bei der nachfolgenden spontanen Emission überwiegt. Nach mehreren Zyklen befindet sich das Ion in den Zuständen $|g, 0\rangle \dots |g, \eta^2 - 1\rangle$, die nicht mehr an das Lichtfeld an koppeln.

zu kühlen. Die Vorgehensweise lautet wie folgt [7] (siehe auch Abb. 4.6): Man wiederholt mehrmals eine Abfolge von 2 Laserpulsen folgender Art:

1. Der erste Puls schränkt die Population auf solche Niveaus $|g, n\rangle$ ein, deren Schwingungsquantenzahl n kleiner als $\hat{\eta}_{eff}^2$ ist, also mit $n \leq \eta_{eff}^2$. Dies wird erreicht, in-

gänge mit $l = 0$ erwünscht. Da J_0 bei Null ein Maximum hat, muß $2 \cdot \sqrt{n}kx_0 \equiv 2 \cdot \eta_{eff} \ll 1$ gelten.

dem man den Laser auf das $\hat{\eta}_{\text{eff}}^2$ -te Seitenband stimmt. Dadurch werden Übergänge $|g, n + \hat{\eta}_{\text{eff}}^2\rangle \rightarrow |e, n\rangle$ getrieben, woraufhin Spontanemission die Population von $|e, n\rangle$ auf die Zustände $|g, n + m\rangle$, $-\eta_{\text{eff}}^2 \leq m \leq \eta_{\text{eff}}^2$ verteilt. Es wird also bei jedem Absorption-Emissions-Vorgang dem System etwas Energie entzogen. Am Ende verbleibt die Besetzung in den Zuständen $|g, n\rangle$ mit $n \leq \eta_{\text{eff}}^2$, da diese nicht mehr an das Laserfeld koppeln, also Dunkelzustände sind.

2. Der zweite Puls hat die Aufgabe, die im ersten Schritt erreichte Besetzungsverteilung, welche auf die untersten η_{eff}^2 Schwingungsniveaus beschränkt ist, in den Grundzustand zu pumpen. Dies wird im allgemeinen so geschehen, daß man die Oszillatorzustände $|g, i\rangle$ mit $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$ entvölkert, während man den Grundzustand $|g, 0\rangle$ unangetastet läßt. Bei jedem Durchlauf wird so die Besetzung des Grundzustands erhöht, während der Rest der Besetzung aufgrund des großen Lamb-Dicke-Parameters wieder über die im ersten Schritt erzeugte Barriere von $|g, \eta^2\rangle$ geheizt wird. Dieser Anteil wird aber bei Wiederholung von Schritt 1 wieder dorthin zurückgebracht.

Man hat zwei Möglichkeiten, um Schritt 2 zu realisieren: erstens indem man Rabipulse anwendet, die den Grundzustand um 2π bzw. Vielfache davon, rotiert oder zweitens man strahlt auf dem ersten roten Seitenband ein (dann ist $|g, 0\rangle$ dunkel). Wir wollen uns auf den letzteren Fall konzentrieren.

Es sei hier noch angemerkt, daß das vorgeschlagene zweistufige Kühlverfahren für $\eta < 3$ im Hinblick auf die Grundzustandskühlung sehr vielversprechende (numerische) Ergebnisse liefert; bei größeren η schwindet jedoch dessen Effizienz drastisch^[10]. Es zeigte sich, daß mehrstufige Kühschemata mit zum Teil blauverstimmtten Laserpulsen das Problem beheben.

G. Morigi et al. zeigten in [7], daß für $\eta \leq 3$ Grundzustandskühlung auf solche Art und Weise erreicht werden kann.

Kürzlich wurde ebenfalls von Morigi eine interessante Studie zur Laserkühlung von 2 und mehreren Ionen außerhalb des Lamb-Dicke-Limit veröffentlicht [153].

^[10] Der Grund für diesen Abfall hängt mit den Franck-Condon-Koeffizienten $|\langle n - k_0 | e^{i k_L x} | n \rangle|^2$ zusammen, welcher für $k_0 \simeq 0$ und große η exponentiell klein wird. Der auf rote Seitenbänder gestimmte Laserpuls verliert demnach seine Effizienz.

4.6 Sympathetische Kühlung eines heterogenen In^+ - Mg^+ -Kristalls

Ausgangspunkt der nachfolgenden Diskussion ist der experimentelle Aufwand, einen reinen Magnesium-Kristall in den Grundzustand zu kühlen. Dazu ist Raman-Seitenband-Kühlung [5,6] notwendig. Wie bereits in Kapitel 4.4 erläutert, ist dazu eine komplizierte Abfolge von Pump- und Rückpump-Raman-Laserpulsen notwendig. Falls man sich nicht im Lamb-Dicke-Limit befindet, sind, wie in Kapitel 4.5 bereits diskutiert, weitere Schritte notwendig, um Grundzustandskühlung zu erreichen [7]. Diese Schritte bestehen in weiteren Pulssequenzen, so daß die Kühlprozedur noch komplizierter wird, während man gegen eine konstante Heizrate ankämpft. All dies schien experimentell sehr aufwendig und schwer realisierbar. Deshalb erschien es opportun, die Vorteile der beiden Ionensorten Magnesium und Indium zu vereinen, um so ein einfaches und elegantes Kühlschema zu realisieren.

Die Idee besteht darin, die eine Ionensorte - in unserem Falle Indium - ausschließlich zum Kühlen zu verwenden, wohingegen man die andere, zu kühlende Ionensorte, nur zum Rechnen, d.h. als CPU des Quantencomputers benutzen will. Diese Art des indirekten Kühlens eines Atoms durch ein weiteres, direkt gekühltes Atom nennt man sympathetische oder mitfühlende Kühlung. Es gibt eine Reihe von Gründen, die es sinnvoll erscheinen lassen dieses Hilfsmittel zu nutzen. Zum einen wird die Anzahl direkt kühlbarer Atome durch die Verfügbarkeit von durchstimmbaren, schmalbandigen Laserquellen bestimmt aber auch durch fundamentalere Probleme wie komplizierte Niveaustrukturen (wie z.B. in Molekülen) oder gar das Fehlen einer optischen Struktur (wie in Protonen oder negativen Ionen).

Sympathetische Kühlung wurde erstmals 1980 an gespeicherten Magnesium-Ionen nachgewiesen [154], welche durch die langreichweitige Coulomb-Kraft thermalisieren. Jedoch gelang eine Messung der Temperatur und der örtlichen Verteilung von sympathetisch gekühlten Ionen erst 1986 in einer Penning-Falle [155]. Ebenfalls in einer Penning-Falle konnten Protonen als auch Antiprotonen durch kalte Elektronen sympathetisch gekühlt werden [156,157].

Für Neutralatome kann z.B. kryogen gekühltes Helium mit einer Temperatur unter 1 K als Kühlmedium agieren [158]. Erst kürzlich ist die sympathetische Kühlung hier in den Bereich der ultrakalten Atome vorgestossen [123,159–165]. Dabei wurde Quantenentartung von Bosonen als auch Fermionen durch Thermalisierung zwischen Atomen derselben Spezies in unterschiedlichen internen Zuständen [159, 160], zwischen Isotopen derselben Spezies [161–163] und auch zwischen Atomen unterschiedlicher Spezies [123, 164, 165] erreicht.

Für Ionenfallen gab es in letzter Zeit viele Vorschläge und Realisierungen sympathetischer Kühlung [166–172]. Ebenso wie im Falle der Neutralatome wurde sympathetische Kühlung zwischen verschiedenen Ionen ein und derselben Ionensorte einer linearen Ionenkette [166], zwischen verschiedenen Isotopen desselben Elements [8, 169, 170], aber auch zwischen unterschiedlichen Elementen [167, 168] und auch mit Molekülen [173, 174] experimentell nachgewiesen. Für theoretische Vorschläge und Abhandlungen über dieses Thema siehe [171, 172].

Kapitel 5

Heterogener Mg^+ - In^+ -Ionenkristall

duo cum faciunt idem, non est idem

Wenn zwei dasselbe tun, so ist es nicht dasselbe.

Terenz Adelphoi 5, 3

Ausgangspunkt der nachfolgenden Diskussion sind die experimentellen Schwierigkeiten, die bei der Grundzustandskühlung eines reinen Magnesium-Kristall auftreten. Dazu ist Raman-Seitenband-Kühlung [5, 6] notwendig. Falls man sich nicht im Lamb-Dicke-Limit befindet, sind weitere Schritte notwendig, um Grundzustandskühlung zu erreichen [7]. Dies war das ursprüngliche Konzept der Vorgängerversion des hier vorgestellten Experiments [5]. Aufgrund der Schwierigkeiten der Raman-Seitenband-Kühlung von Magnesium-Kristallen erschien es opportun, die im nachfolgenden vorgestellten Vorteile der beiden Ionensorten Magnesium und Indium zu vereinen.

Magnesium ist aufgrund seiner internen Energieniveaustuktur ein idealer Kandidat für ein Quantenbit. Indium ist aufgrund seines schmalen Kühlübergangs ein idealer Kandidat für die direkte Seitenbandkühlung. Das Magnesium soll dabei sympathetisch, in unserem Fall durch die Coulombwechselwirkung, von Indium gekühlt werden.

Dieses Kapitel diskutiert wichtige Eigenschaften und Effekte, die im Zusammenhang mit der Speicherung und Kühlung zweier Ionensorten in einer Falle auftreten. Dies sind unter anderem die veränderten Schwingungsfrequenzen, Heiz- und Kühlraten im Vergleich zu

dem Fall einer homogenen Ionenkette.

Zuerst werden Schwingungsfrequenzen von Ionenkristallen bestimmt, die in einer linearen Ionenfalle auftreten, falls man darin - wie oben angesprochen - zwei Ionensorten unterschiedlicher Masse, wie z.B. Magnesium- und Indiumionen gefangen hält. Dies ist insbesondere für die in Kapitel 4.6 behandelte sympathetische Seitenbandkühlung von Magnesium durch Indium im Mg⁺-In⁺-Quantencomputer wichtig, da die entzogene Energie pro Kühlzyklus proportional zu $\hbar\omega_z$, also gerade der axialen Schwingungsfrequenz des Kristalls ist.

5.1 Gleichgewichtspositionen der Ionen in der linearen Falle

Vor der Behandlung der Schwingungsfrequenzen solcher Ionenkristalle, müssen noch die Gleichgewichtspositionen der Ionen im Kristall entlang der Fallenachse berechnet werden, da um diese Punkte herum die Entwicklung der potentiellen Energie V des Ionenkristalls bis zur harmonischen Näherung stattfindet. Das Potential V hat dabei in 3 Dimensionen für einfach ionisierte Ionen folgendes Aussehen:

$$V = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left[\omega_x^2 x_i(t)^2 + \omega_y^2 y_i(t)^2 \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_0 z_i(t)^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^N \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}_i(t) - \vec{x}_j(t)|} \quad , \quad (5.1)$$

wobei ω_x und ω_y die radialen Säkularfrequenzen (vgl. Gl. (2.26) und Gl. (2.30)) und ω_z die axiale Schwingungsfrequenz ist, die vom elektrostatischen Einschluß herrührt (vgl. Gl. (2.28)). Somit beschreibt die erste Summe auf der rechten Seite das harmonische Fallenpotential in radialer Richtung, die zweite das Fallenpotential in axialer Richtung. Die dritte Summe beschreibt die Coulombabstoßung der einzelnen Ionen untereinander. Die radialen Säkularfrequenzen und die axiale Oszillationsfrequenz sind von ihrer Art her vollkommen unterschiedlich. Abgesehen davon, daß der physikalische Ursprung völlig unterschiedlich ist - während die axiale Oszillationsfrequenz statisch ist, macht die Definition der Säkularfrequenz nur im Zeitmittel auf Zeitskalen länger als der Periode der Fallenantriebsfrequenz

einen Sinn - sind auch die Massenabhängigkeiten verschieden. Bei der axialen Schwingungsfrequenz hängt das Produkt von Masse und dem Quadrat der Schwingungsfrequenz

$$m_i \omega_z^2 = a_0 \quad (5.2)$$

nicht von der Masse ab (vgl. Gl. (2.28)) und ist gleich der Konstanten a_0 , wohingegen das entsprechende Produkt bei den radialen Komponenten sehr wohl massenabhängig ist (vgl. Gl. (2.22))

$$m_i \omega_{sec}^2 \stackrel{a=0}{=} \frac{e^2 U_{RF}^2}{2 \Omega^2 r_0^4} \cdot \frac{1}{m_i} \quad (5.3)$$

Somit gilt:

$$\omega_{sec} \propto \frac{1}{m_i} \quad (5.4)$$

$$\omega_z \propto \sqrt{\frac{1}{m_i}} \quad (5.5)$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x_i} \right]_{x_i=x_i^{(0)}} = 0 \quad (5.6)$$

folgen durch Lösen des Gleichungssystems (5.6) die Gleichgewichtspositionen $x_i^{(0)}$.

Da von einer linearen Kette ausgegangen wird ($\omega_{radial} \gg \omega_{axial}$), kann man die Gleichgewichtspositionen in radialer Richtung gleich Null setzen:

$$x_i^{(0)} = y_i^{(0)} = 0 \quad (5.7)$$

Das Problem hat sich nun auf die axiale Richtung, d.h. auf eine Dimension reduziert. Falls man nun eine Skalenlänge ℓ durch

$$\ell^3 := \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_i \omega_{axial}^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \quad (5.8)$$

und die dimensionslosen Gleichgewichtspositionen $u_i := \frac{z_i^{(0)}}{\ell}$ definiert, kann Gl. (5.6) folgendermaßen als System N gekoppelter algebraischer Gleichungen geschrieben werden:

$$u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{(u_i - u_j)^2} + \sum_{j=i+1}^N \frac{1}{(u_i - u_j)^2} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (5.9)$$

Für $N = 2$ und $N = 3$ können diese Gleichungen analytisch gelöst werden :

$$N = 2 : \quad u_1 = -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \quad u_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (5.10)$$

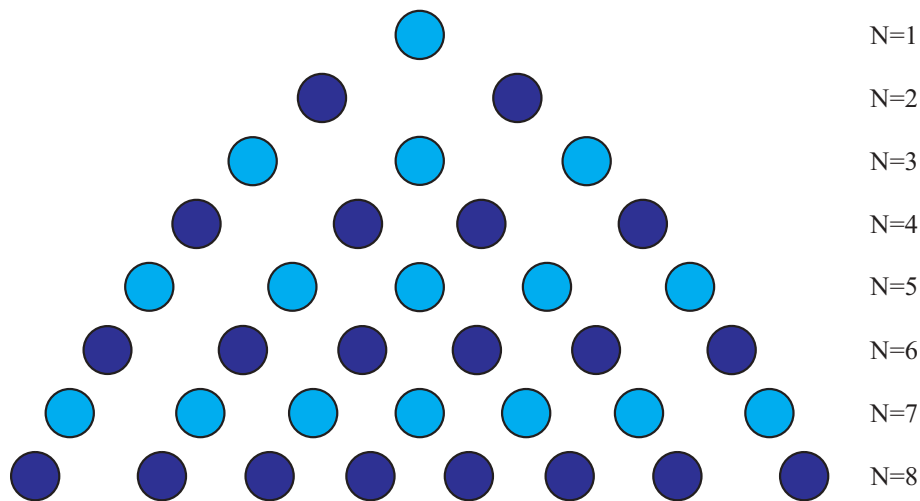
$$N = 3 : \quad u_1 = -\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \quad u_2 = 0 \quad u_3 = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (5.11)$$

N	skalierte Gleichgewichtsposition u_i										
1	0										
2	-0.630		0.630								
3	-1.077		0	1.077							
4	-1.437		-0.454		0.454		1.437				
5	-1.743		-0.822		0	0.822		1.743			
6	-2.012		-1.136		-0.370		0.370		1.136	2.012	
7	-2.254		-1.413		-0.687		0	0.687		1.413	2.254
8	-2.476	-1.662	-0.967	-0.318	0.318	0.967	1.662	2.476			

Tabelle 5.1: *Skalierte Gleichgewichtspositionen von 1 – 8-Ionen.*

Für größere Werte von N wird es notwendig, sie numerisch zu lösen [84,115]. Die Lösungen für zwei bis acht Ionen sind in Tabelle 5.1 aufgeführt.

Hierbei sei noch angemerkt, daß die axialen Gleichgewichtspositionen nicht von der Masse

Abbildung 5.1: *Illustration der axialen Gleichgewichtspositionen von Ionenkristallen mit bis zu 8 einfach ionisierten Ionen.*

der Ionen abhängen, sondern lediglich von der Ladung bzw. elektrostatischen Abstoßung. Tabelle 5.1 gilt also für beliebige gemischte Ionenkristalle einfach ionisierter Ionen in einer linearen Falle. Dies ist deshalb der Fall, da das axiale Potential nur von der an die

Elektroden angelegten Spannung abhängt.

5.2 Kleine Schwingungen

Die Behandlung des Problems erfolgt in der sogenannten harmonischen Näherung des Coulombpotentials, welche für kleine Schwingungen des Kristalls, d.h. insbesondere für Temperaturen wie sie bei Dopplerkühlung erreicht werden gültig ist. Das Problem ist äquivalent zum Problem der kleinen Schwingungen, wie es in jeder Anfängervorlesung über theoretische Mechanik behandelt wird. Es besteht darin, die Eigenwerte Ω_α^2 (und somit auch die Schwingungsfrequenz der Ionen Ω_α) und Eigenvektoren \vec{b}_α zu folgender verallgemeinerten Eigenwertgleichung zu finden.

$$K \cdot \vec{b}_\alpha = \Omega_\alpha^2 M \cdot \vec{b}_\alpha \quad \text{mit} \quad \vec{b}_\alpha \neq 0, \alpha \in \{1, 2, \dots, 3N\} \quad , \quad (5.12)$$

wobei

$$M = \text{diag}(m_i) = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

die Massenmatrix ist, bei der m_i die Masse des Ions an der Position \vec{x}_i und K eine Matrix bestehend aus den zweiten Ableitungen der potentiellen Energie V ist.

$$K = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_3} & \cdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_3} & \cdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Der Index α kann $3N$ Werte annehmen, da ein Ionenkristall in 3 Dimensionen $3N$ Eigenschwingungen mit den Frequenzen Ω_α ausführen kann. Die Eigenwerte Ω_α^2 sind reell, falls K hermitesch ist. Sind sie darüber hinaus alle größer als Null, falls also

$$\Omega_\alpha^2 > 0 \quad \forall \alpha \quad (5.15)$$

gilt, ist eine stabile Speicherung der Ionen gegeben.

5.2.1 Ionen-Kristall in einer Dimension

Beschränkt man sich auf eine Dimension läuft α nur noch von 1 bis N. Da die Ionen bei Dopplertemperatur nur noch kleine Schwingungen um ihre Gleichgewichtspositionen ausführen, kann die Ionenposition entlang der Fallachse geschrieben werden als $z_i(t) = z_i^{(0)} + q_i(t)$. Falls man massengewichtete Koordinaten durch $q'_i = \sqrt{m_i}q_i$ einführt, kann Gl. (5.12) umgeschrieben werden zu:

$$K' \vec{b}_\alpha = \Omega_\alpha^2 \vec{b}_\alpha \quad \text{für } \alpha \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (5.16)$$

wobei die Matrixelemente von K' nun gegeben sind durch

$$V'_{ij} = \frac{1}{\sqrt{m_i m_j}} V_{ij} \quad (5.17)$$

und \vec{b}_α die neuen Eigenvektoren des transformierten Problems sind.

In dieser Form beschreibt man ein System von N nichtgekoppelten harmonischen Oszillatoren mit Frequenzen Ω_α . Nach Quantisierung der harmonischen Oszillatoren und Rücktransformation zu den ursprünglichen Koordinaten, können die ursprünglichen Koordinaten nun in der quantisierten Form geschrieben werden als:

$$q_i = \frac{1}{m_i} \left(b'_{\alpha i} \right)^{-1} \sqrt{\frac{\hbar}{2\Omega_\alpha}} (a_\alpha + a_\alpha^\dagger) \quad (5.18)$$

5.2.2 2-Ionen-Kristall in einer Dimension

Als einfachster Fall wird zuerst ein eindimensionaler linearer 2-Ionen-Kristall behandelt, der entlang der z-Achse angeordnet sein soll. Die Massen der Ionen seien m_1 und m_2 .

Da man nichttriviale Eigenvektoren zu Gl. (5.12) sucht, wurde für diesen Fall die Gleichung in eine Determinantenbeziehung folgender Art umgeformt:

$$\det (K - \Omega^2 \cdot M) = 0 \quad (5.19)$$




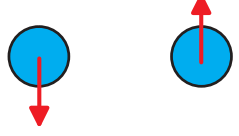
Frequenz	Schwingungsmoden	Bezeichnung
axial COM		Schwerpunkts-Mode
stretch		Atmungs-Mode
radial COM		radiale Schwerpunkts-Mode
rz rocking		"Rocking"-Mode

Abbildung 5.2: Oszillationsmoden und dazugehörige Frequenzen eines 2-Ionen-Kristalls mit Ionen gleicher Masse $m_1 = m_2$.

Die Elemente der K-Matrix lauten für diesen Fall:

$$\begin{aligned}
 V_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} V(z_1, \dots, z_N) \Big|_{\{z_i^{(0)} = \ell u_i\}} \\
 &= \begin{cases} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\ell^3} \left(1 + 2 \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{1}{|u_i - u_k|^3} \right) & \text{für } i = j \\ - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\ell^3} \frac{2}{|u_i - u_j|^3} & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (5.20)
 \end{aligned}$$

Dies ist für den Fall $N = 2$ eine algebraische Gleichung zweiten Grades in Ω^2 , deren zwei Lösungen leicht explizit angegeben werden können:

$$\Omega_{COM}^2(m_1, m_2) = a_0 \left(\frac{1}{\mu(m_1, m_2)} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} - \frac{1}{m_1 m_2}} \right) \quad (5.21)$$

$$\Omega_{stretch}^2(m_1, m_2) = a_0 \left(\frac{1}{\mu(m_1, m_2)} + \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} - \frac{1}{m_1 m_2}} \right), \quad (5.22)$$

wobei $a_0 = m_1 \omega_1^2 = m_2 \omega_2^2$ eine Konstante, $\omega_{1/2}$ die axiale Oszillationsfrequenz eines einzelnen Ions der Masse $m_{1/2}$ und $\mu(m_1, m_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1}$ die reduzierte Masse beider Ionen ist.

Die Eigenvektoren der Schwerpunktseigenschwingung und der Atmungsmode lauten:

$$\vec{b}_{COM} = N_{COM} \left(1 - \frac{m_2}{m_1} + \sqrt{1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right) + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2}, 1 \right) \quad (5.23)$$

$$\vec{b}_{stretch} = N_{stretch} \left(1 - \frac{m_2}{m_1} - \sqrt{1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right) + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2}, 1 \right) , \quad (5.24)$$

mit den Normierungsfaktoren N_{COM} und $N_{stretch}$.

Die Indizes COM und stretch stehen für die 2 verschiedenen Schwingungsmoden, die bei einem 2-Ionen-Kristall axial existieren können. COM bezeichnet die "Center-of-Mass"- bzw. Schwerpunktsmode, bei der alle Ionen gleichphasig oszillieren, so daß der Schwerpunkt in der Falle hin und her schwingt. Falls die Ionen gleiche Masse haben, sind die Amplituden der Schwingungen identisch, bei unterschiedlichen Massen wird die Amplitude des schwereren Ions immer kleiner, so daß schließlich nur noch das leichtere schwingt. "Stretch" bezeichnet die nächsthöhere Eigenmode, bei der die Ionen bei gleichen Massen außer Phase schwingen, bzw. im allgemeinen Fall von N Ionen in der Falle eine Amplitude besitzen, die proportional zum Abstand vom Ursprung sind (siehe Tabelle 5.2). Deshalb wird diese Mode im deutschsprachigen Raum auch bisweilen Atmungsmode oder Streckschwingung genannt.

In Abb. 5.3 sind die Schwingungsfrequenzen in Abhängigkeit vom Massenverhältnis m_2/m_1 dargestellt. Die Schwingungsfrequenzen sind auf die COM-Mode von Magnesium $\omega_{COM}^{Mg} = \omega_z = 2\pi \cdot 560$ kHz (Gl. (2.28)) normiert.

Interessanterweise bleibt die Frequenz der Atmungsmode selbst bei beliebig vielen Ionen in der Falle stets $\sqrt{3}$ -mal so groß wie diejenige der COM-Mode, vorausgesetzt es befindet sich nur eine Ionensorte in der Falle und die harmonische Näherung kann angewandt werden. Für $m_2 \rightarrow 0$ verhält sich die Frequenz der Atmungsmode wie $\frac{1}{\sqrt{m_2}}$, da hauptsächlich das leichte Ion (m_2) schwingt. Die Frequenz der COM-Mode steigt dagegen nur leicht an. Es gibt immer genau so viele Moden, deren Frequenzen ein $\frac{1}{\sqrt{m_2}}$ -Verhalten zeigen wie es leichte Ionen im Kristall gibt. Bei $m_2 \gg m_1$ geht die Frequenz der Atmungsmode gegen $\sqrt{\frac{2a_0}{m_1}} = \sqrt{2} \omega_z$, die Frequenz der COM-Mode geht gegen $\sqrt{\frac{3}{2} \frac{a_0}{m_2}}$, da in diesem Fall die Masse des schwereren Ions die Eigenfrequenz bestimmt. (siehe auch Kapitel 5.2.4.1).

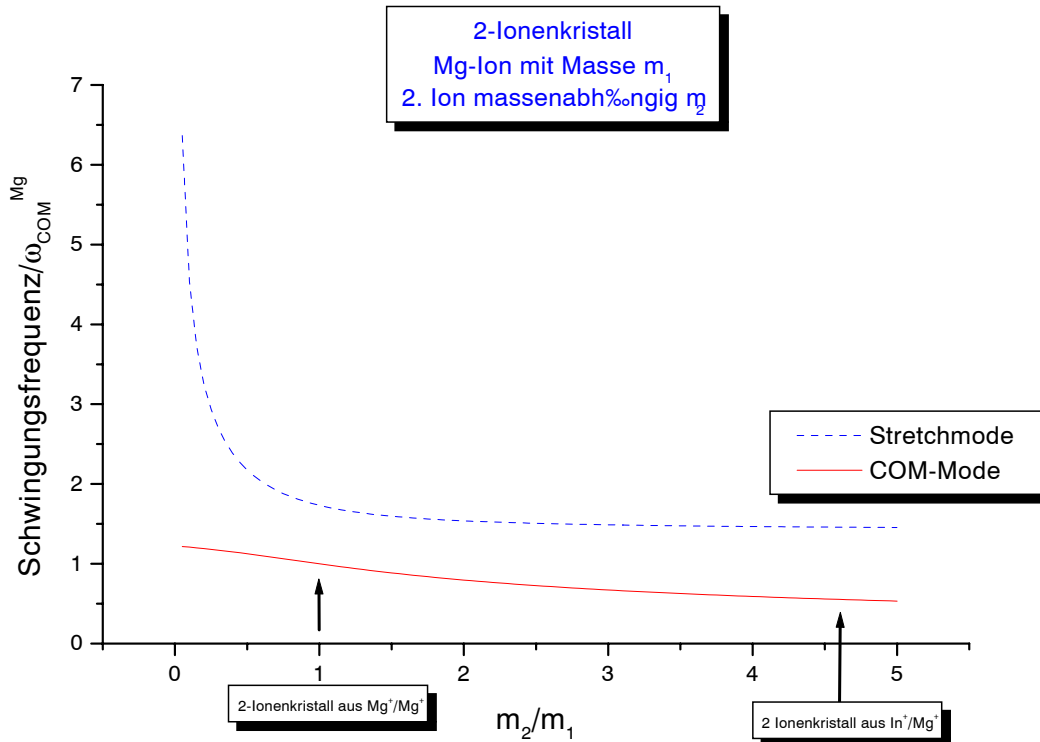


Abbildung 5.3: Massenabhängigkeit der Schwingungsfrequenzen in einem 2-Ionen-Kristall.

5.2.3 2-Ionen-Kristall in 3 Dimensionen

Es wurde hierbei das Potential für die axiale (z) und zwei radiale (x, y) Komponente berücksichtigt. Der entsprechende Coulombterm der potentiellen Energie wurde in einer 6-dimensionalen Taylorentwicklung der Variablen x_1, x_2, y_1, y_2, z_1 und z_2 um die Gleichgewichtspositionen $\{x_1^0, x_2^0, y_1, y_2, z_1^0, z_2^0\} = \{0, 0, 0, 0, u_1, u_2\}$ ℓ bis zur 2. Ordnung entwickelt. Hierbei wurde eine axiale Oszillationsfrequenz von $\omega_z/2\pi = 560$ kHz und eine radiale Säkularfrequenzen von $\omega_x/2\pi = \omega_y/2\pi = 5,12$ MHz bei der Masse vom Magnesium zugrunde gelegt. Abb. 5.4 zeigt eine numerische Auswertung der Eigenfrequenzen. Für $a = 0$ sind die radialen Eigenfrequenzen zweifach entartet, so daß es 4 verschiedene Schwingungsfrequenzen gibt. Im Falle gleicher Masse der Ionen sind dies bei den axialen Frequenzen die COM- und die Atmungsmode (die beiden untersten) wie im eindimensionalen Fall; bei den radialen Frequenzen sind dies die beiden hier entarteten radialen (x und y) COM-Moden

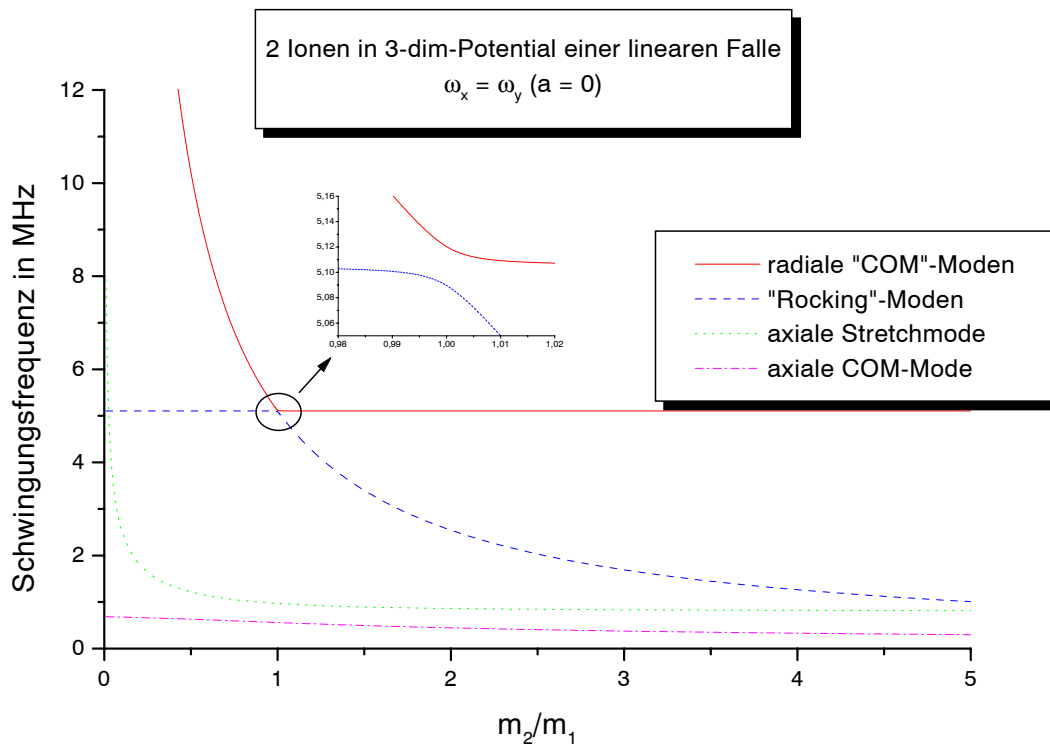


Abbildung 5.4: Massenabhängigkeit der Schwingungsfrequenzen in einem 3-dimensionalen 2-Ionen-Kristall in einer linearen Falle. Es wurde $\omega_z/2\pi = 560$ kHz und $\omega_x/2\pi = \omega_y/2\pi = 5,12$ MHz bei der Masse vom Magnesium zugrunde gelegt. Zu erkennen sind die axiale COM- und Atmungs-Mode wie in Abb. 5.3. Bei den radialen Frequenzen erkennt man die radiale COM-Mode und die sogenannte Rocking-Mode (siehe Abb. 5.2). Diese beiden Moden treffen sich fast am Punkt $m_1 = m_2$ (siehe vergrößerter Ausschnitt), jedoch wird eine Kreuzung vermieden. Bei der Rocking-Mode schwingen für $m_2 > (<) m_1$ nur die Masse m_1 (m_2). Bei gleicher Masse führen beide eine Schaukelbewegung aus.

und die beiden ebenfalls entarteten sogenannten x-z- und y-z-Rocking^[1]-Frequenzen.

Bei den axialen Schwingungen hat die Atmungsmode, bei der die Ionen gegenphasig schwingen, eine um $\sqrt{3}$ höhere Frequenz als die Grundschiwingung. Bei den radialen ist die Frequenzabhängigkeit jedoch umgekehrt. Hier besitzen die Rocking-Moden, bei der die Ionen ebenfalls gegenphasig schwingen, niedrigere Frequenzen als die COM-Moden, welche für

^[1] Diese Mode wird Rocking-Mode [57] genannt, da sie einer Schaukelbewegung der Ionen entspricht.

$m_1 = m_2$ durch folgende Ausdrücke

$$\omega_{rocking}^{xz} = \sqrt{\omega_x^2 - \omega_z^2} \quad (5.25)$$

$$\omega_{rocking}^{yz} = \sqrt{\omega_y^2 - \omega_z^2} \quad (5.26)$$

gegeben sind [57]. Dies kann auch durch folgendes Argument plausibel gemacht werden: Bei der radialen COM-Schwingung haben die Ionen einen zeitlich konstanten Abstand voneinander. Verglichen damit hat die Rocking-Mode einen im Mittel größeren Abstand, da die Ionen außer Phase schwingen (siehe Abb. 5.2). Für die Rocking-Mode ist also die Coulombabstoßung im Mittel geringer, was eine geringere "Federkonstante" und somit eine kleinere Schwingungsfrequenz bedeutet. Dies konnte auch in der numerischen Berechnung bestätigt werden (siehe Abb. 5.4).

Das Verhalten der beiden radialen Moden ist folgendermaßen. Die Frequenz der radialen COM-Mode liegt immer oberhalb derjenigen der Rocking-Mode. Bei $m_1 = m_2$ berühren sich die beiden Kurven fast, jedoch wird eine Kreuzung vermieden (siehe Vergrößerung). Im Grenzfall $m_2 \ll m_1$ schwingt bei der COM-Mode nur das schwerere Ion (m_2), wohingegen bei der "Rocking"-Mode nur das leichtere (m_1) schwingt. Falls $m_2 \gg m_1$ gilt, vertauschen sich die Rollen von m_1 und m_2 . Von gemeinsamen radialen Schwerpunkts- bzw. Rocking-Moden kann man eigentlich nur sprechen, falls beide Massen ungefähr gleich groß sind. Ansonsten ist an der Schwingung jeweils nur ein Ion beteiligt.

5.2.4 Ionenkristalle mit $N > 2$ Ionen

Hier wurden die Kristalle der Einfachheit halber nur 1-dimensional behandelt. Die Vorgehensweise ist ebenso wie bereits oben dargelegt wurde. Der Unterschied besteht lediglich darin, daß der Fall $N = 2$ noch analytisch behandelbar war, während dies für die Fälle $N = 3$ und 4 zwar noch möglich wäre, aber keine handlichen Formeln mehr liefern würde. Für $N > 4$ existieren geschlossene Lösungen nicht mehr, was eine numerische Behandlung unumgänglich macht.

Deshalb wurde eine mathematische Funktion des Programms Mathcad genutzt, die Eigenwerte und Eigenvektoren zum verallgemeinerten Eigenwertproblem Gl. (5.12) berechnet. Die direkte Bestimmung von Eigenvektoren ist numerisch einfacher als die Nullstellenbestimmung von Polynomen.

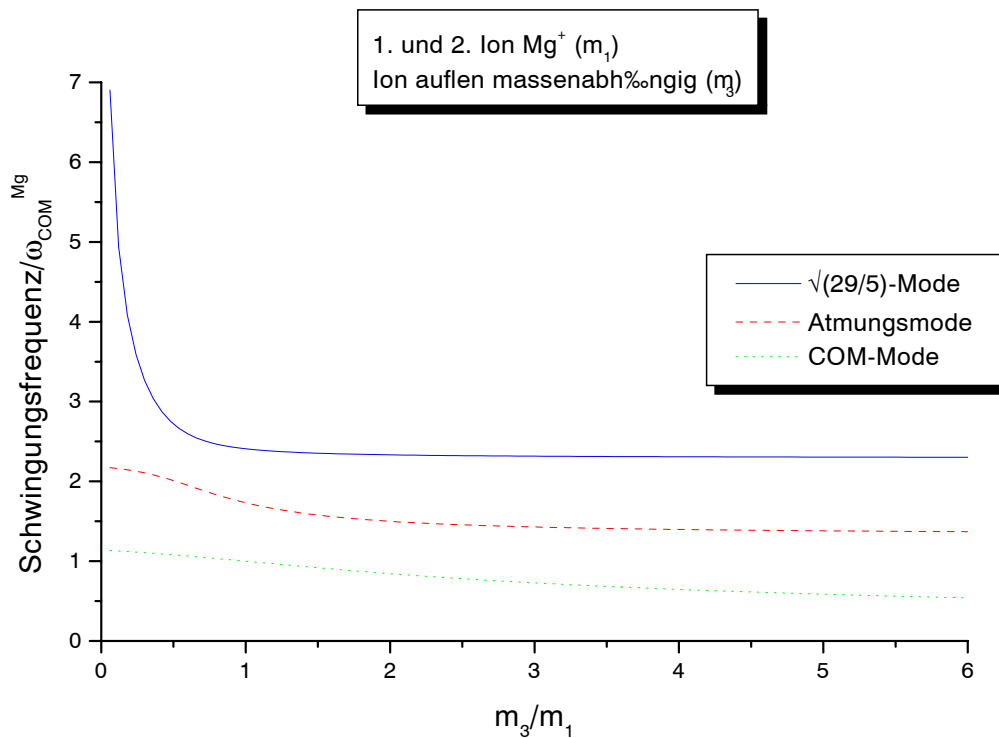
5.2.4.1 Der Fall $N = 3$ 

Abbildung 5.5: Massenabhängigkeit der Schwingungsfrequenzen in einem 3-Ionen-Kristall

Für diesen Fall gibt es mehrere Möglichkeiten wie die verschiedenen Ionen angeordnet sein können. Daraus ergeben sich unterschiedliche Schwingungsfrequenzen. Dies soll aber nicht im einzelnen untersucht werden. Vielmehr werden einige allgemeingültige Aussagen gemacht, die an einem Beispiel verdeutlicht werden.

Ein typischer Graph der Schwingungsfrequenzen eines 3-Ionen-Kristalls, bei dem die Masse des äußeren Ions (m_3) variiert wird, zeigt Abb. 5.5. Man sieht wieder, daß sich die Frequenz einer Mode bei $m_3 \rightarrow 0$ wie $\frac{1}{\sqrt{m_3}}$ verhält, während sich eine andere bei $m_3 \rightarrow \infty$ wie $\frac{1}{\sqrt{m_3}}$ verhält.

5.2.4.2 Eigenmoden für den Fall $N = 3$

In diesem Unterkapitel wird veranschaulicht, welche Eigenschwingungen des Kristalls welchen Schwingungsfrequenzen entsprechen. Diese Information kann aus den zu den

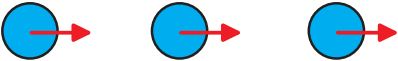


Frequenz	Schwingungsmoden	Bezeichnung
COM		Schwerpunkts-Mode
stretch = $\sqrt{3}$ COM		Atmungs-Mode
$\sqrt{\frac{29}{5}}$ COM		"Ägypter"-Mode

Abbildung 5.6: Oszillationsmoden und deren Frequenzen eines 3-Ionen-Kristalls für den Fall gleicher Massen $m_1 = m_2 = m_3$. Vgl. auch Tabelle 5.2.

N	Eigenwert Ω/Ω_{COM}	Eigenvektor	Bezeichnung
2	1	$\frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1)$	Schwerpunkts-Mode
2	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1)$	Atmungs-Mode
3	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)$	Schwerpunkts-Mode
3	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 0, 1)$	Atmungs-Mode
3	$\sqrt{\frac{29}{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}} (1, -2, 1)$	Ägypter-Mode
4	1	$\frac{1}{\sqrt{4}} (1, 1, 1, 1)$	Schwerpunkts-Mode
4	$\sqrt{3}$	$(-0.6742, -0.2132, 0.2132, 0.6742)$	Atmungs-Mode
4	$\sqrt{\frac{29}{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{4}} (1, -1, -1, 1)$	Mode 3
4	3.051	$(-0.2132, 0.6742, -0.6742, 0.2132)$	Mode 4

Tabelle 5.2: Eigenwerte und Eigenvektoren zu dem verallgemeinerten Eigenwertproblem $K \cdot \vec{b} = \Omega^2 M \cdot \vec{b}$

Eigenwerten zugehörigen Eigenvektoren gezogen werden. Für den zu betrachtenden Fall

$N = 3$ gibt es im Fall *gleicher Massen* folgende 3 Eigenschwingungen: die COM-Mode, die Stretch- oder Atmungsmode und die Ägypter-Mode^[2], die durch die Tatsache, daß ihre Frequenz $\sqrt{\frac{29}{5}}$ -mal so groß wie diejenige der Grundschiwingung ist, charakterisiert ist. Bei der COM-Mode schwingen alle Teilchen in Phase mit gleicher Amplitude, im Falle der Stretch-Mode bleibt das mittlere Teilchen in Ruhe, während die äußeren Teilchen gegenphasig schwingen. Bei der Ägypter-Mode schwingen die beiden äußeren Ionen in Phase, während das mittlere Ion mit doppelter Amplitude gegenphasig zu den beiden anderen oszilliert (siehe Abb. 5.6).

5.2.4.3 Fall $N = 4$

Anordnung	$\omega_{COM}/\omega_{COM}^{Mg}$	$\omega_{stretch}/\omega_{COM}^{Mg}$	$\omega_{\sqrt{29/5}}/\omega_{COM}^{Mg}$	$\omega_{3,051}/\omega_{COM}^{Mg}$
4 Mg-Ionen	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{29}{5}}$	3,051
4 In-Ionen	$0.466 = \sqrt{\frac{m_{Mg}}{m_{In}}}$	0.808	1.124	1.423
In-In-Mg-Mg	0.559	1.116	1.629	2.725
In-Mg-In-Mg	0.576	0.958	1.964	2.555
In-Mg-Mg-In	0.575	0.829	1.953	2.970
Mg-In-In-Mg	0.575	1.243	1.953	1.981

Tabelle 5.3: *Schwingungsfrequenzen von Mg⁺-In⁺-Ionenkristallen. Vergleich von reinen 4-Ionenkristallen aus Magnesium bzw. Indium mit 50/50-Mg⁺-In⁺-Mischkristallen. Dabei fällt insbesondere auf, daß die Schwerpunktsfrequenzen bei den Mischkristallen ungefähr um 25% größer sind als bei reinem Indium.*

Insbesondere für den Mg⁺-In⁺-Quantencomputer sind die Schwingungsfrequenzen von Ionenkristallen mit größerer Ionenanzahl wichtig. Tabelle 5.3 listet für den Fall $N = 4$ die Schwingungsfrequenzen verschiedener 4-Ionen-Kristalle auf. Wegen der größeren Masse besitzt ein reiner Indiumkristall gegenüber reinem Magnesium eine um den Faktor $\sqrt{\frac{m_{Mg}}{m_{In}}}$

^[2] *Die Bezeichnung wurde in Anlehnung an einen angeblich ägyptischen Tanzstil geprägt, bei dem man den Kopf (mittleres Ion) in die entgegengesetzte Richtung wie die 2 Hände (2 äußeren Ionen) bewegt, welche sich direkt links und rechts vom Kopf befinden.*

erniedrigte Schwerpunkts-Oszillationsfrequenz. Bei Kristallen, welche zur Hälfte aus Magnesium und zur Hälfte aus Indium bestehen, ergeben sich um ca. 25% größere Schwingungsfrequenzen als bei reinem Indium. Dadurch wird bei Seitenbandkühlung eines solchen Kristalls auf dem Indium-Kühl-Übergang mehr Energie entzogen und es ergibt sich nach Gl. (4.7) eine kleinere mittlere Oszillatorbesetzungszahl $\langle n \rangle$ und somit eine geringere Endtemperatur als im reinen Indium-Fall. In einer realen Falle existiert eine Heizrate, die an jedem einzelnen Ion angreift. Die Endtemperatur ergibt sich aus der Gleichheit von Heizrate und der Kühlrate. Da nur die Indiumionen direkt gekühlt werden, die gesamte Kette eine etwas größere Schwingungsfrequenz besitzt, ist die Endtemperatur in derselben Größenordnung zu erwarten, so daß von der Grundzustandskühlung eines reinen Indiumkristalls ausgehend [4], Grundzustandskühlung realisierbar erscheint.

Die Abhängigkeiten der Schwingungsfrequenzen von den verschiedenen Ionenanordnungen ist bei den verschiedenen Schwingungsmoden unterschiedlich stark ausgeprägt. Abb. 5.7 verdeutlicht dies anschaulich. Es sind dort die Schwingungsfrequenzen der vier Schwingungsmoden als Funktion des Massenverhältnisses der Ionensorten aufgetragen. Die Bänder geben die Variationsbreite der Oszillationsfrequenzen bei verschiedenen Anordnungen der Ionen wieder.

Diese Variationsbreite und insbesondere der Abstand der Bänder ist für Quantengatter mit dem heterogenen Kristall wichtig. Für eine zuverlässige Funktionsweise eines solchen Gatters ist es dabei wichtig, daß die Frequenzen der verschiedenen Moden gut voneinander getrennt sind. Andernfalls kann Energie von der einen Schwingungsmode in die andere transportiert werden, falls eine Kopplungsmöglichkeit gegeben ist, wie z.B. kubische Nichtlinearitäten im Fallenpotential. Diese Kopplung kann zu einem Verlust von Kohärenz bei Quantenlogikoperationen führen. Desweiteren muß, falls eine weitere Schwingungsmode zu nah an der Quantenlogikmode liegt, eventuell die Geschwindigkeit des Quantengatters reduziert werden, um unerwünschte Anregungen anderer Schwingungsmoden zu vermeiden.

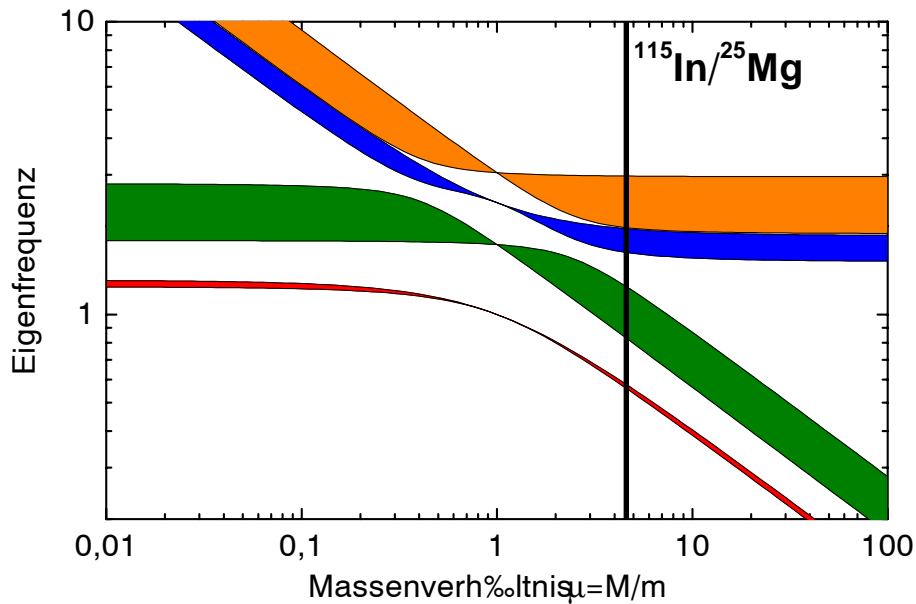


Abbildung 5.7: Schwingungsfrequenzen eines heterogenen 4-Ionen-Kristalls bestehend aus 2 Ionen der Masse m und 2 Ionen der Masse $M = \mu \cdot m$ als Funktion des Massenverhältnisses μ . Die Bänder geben die Variationsbreite der jeweiligen Schwingungsmode für die vier unterschiedlichen Ionenanordnungen wieder. Das Massenverhältnis von 4,6 der $^{115}In^+$ - $^{25}Mg^+$ -Ionenkette ist durch den senkrechten Strich hervorgehoben.

5.3 Heizraten

Ursache für die Heizung von bestimmten Schwingungsmoden des Ionenkristalls können unregelmäßig variierende elektrische Felder sein, wie z.B. fluktuierende Kontaktpotentiale auf den Elektrodenoberflächen. Wie diese Heizung die unterschiedlichen Schwingungsmoden des Ionenkristalls beeinflusst wird im Nachfolgenden untersucht. Da der Ionenkristall sehr viel kleiner ist als der Abstand des Ionenkristalls zu den Elektroden, kann man das Störfeld als homogen über die Länge des Kristalls annehmen. Dies führt dazu, daß lediglich die Schwerpunktsbewegung der Ionenkette geheizt werden kann. Für einen homogenen Ionenkristall ist dies die niedrigste Oszillationsmode, alle anderen höheren Schwingungsmoden sind orthogonal zu dieser Schwingung und erfahren keinerlei Heizung. Bei einer heterogenen Ionenkette hängt es jedoch davon ab, wie die Kette zusammengesetzt ist, d.h.

in welcher Reihenfolge die Ionen angeordnet sind, und welche Oszillationsmode man betrachtet. Bei solch einem Kristall ist die niedrigste Schwingungsmode nicht unbedingt mehr eine reine Schwerpunktschwingung und die höheren Schwingungsmoden sind im allgemeinen nicht orthogonal zur Schwerpunktsmode, so daß diese auch Heizung erfahren können. Die Heizraten \dot{n}_α für die verschiedenen Schwingungsmoden α ist gegeben durch [172]:

$$\frac{\dot{n}_\alpha}{\dot{n}_{COM}} = \frac{\Omega_{COM}}{N\Omega_\alpha} \left(\sum_{j=1}^N \frac{\beta_j'^\alpha}{\sqrt{m_i}} \right)^2 \quad (5.27)$$

Sie ist hier normiert auf die Schwerpunktsmode einer homogenen Ionenkette mit Ionen

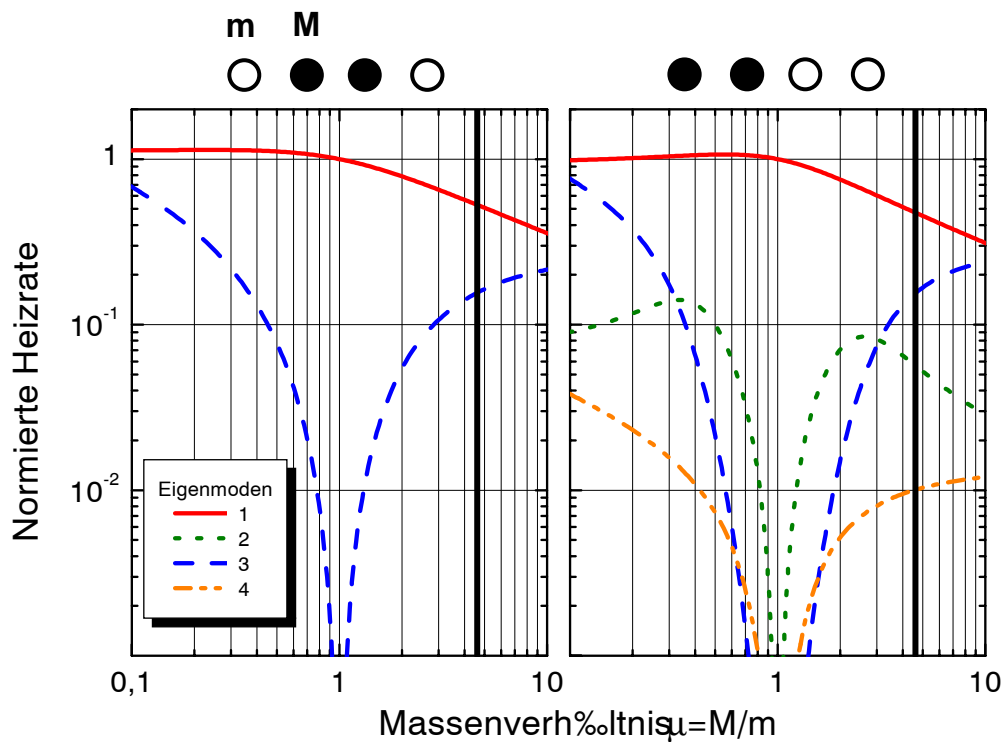


Abbildung 5.8: Normierte Heizraten der verschiedenen Schwingungsmoden eines heterogenen Ionenkristalls als Funktion des Massenverhältnisses μ . Die Normierung erfolgte so, daß die Kühlrate der ersten Schwingungsmode für $\mu = 1$ gerade gleich 1 ist. 2 unterschiedlicher Ionenanordnungen werden vergleichend gegenüber gestellt. Das Massenverhältnis von 4,6 der $^{115}\text{In}^+ - ^{25}\text{Mg}^+$ -Ionenkette ist durch den senkrechten Strich markiert.

der Masse m . Abbildung 5.8 zeigt die Heizraten für zwei unterschiedliche Konfigurationen

eines 4-Ionenkristalls mit jeweils 2 Ionen der Masse M und 2 anderen Ionen der Masse m . Die Heizraten sind als Funktion des Massenverhältnisses $\mu = M/m$ dargestellt. Die Schwingungsmoden sind entsprechend der Größe ihrer Schwingungsfrequenz bei $\mu = 1$ geordnet. Die rechte Seite von Abb. 5.8 zeigt, daß bei asymmetrischer Anordnung der Massen im Kristall alle Moden für alle Massenverhältnisse außer für $\mu = 1$ geheizt werden. Bei $\mu = 1$ wird wie oben erläutert nur die Schwerpunktschwingung, d.h. Eigenmode 1 geheizt. Bei der symmetrischen Anordnung auf der linken Seite werden jedoch nur Eigenmoden 1 und 3 geheizt. Eigenmoden 2, d.h. die Atmungsmode, und 4 erfahren bei allen Massenverhältnissen keine Heizung. In diesem Fall verschwindet die Summe aus Gl. (5.27).

Für die Realisierung eines Quantengatters würde man also die symmetrische Ionenkonfigurationen mit einer asymmetrischen Schwingungsmode wählen, da man hier im Idealfall keine Heizung erwartet.

5.4 Kühlraten bei sympathetischer Seitenbandkühlung von Indium

Bei sympathetischer Seitenbandkühlung von Indium tragen nur die Indiumionen zur Kühlung bei. Die absolute Größe der Kühlrate bei gegebener Laserleistung hängt von der verwendeten Oszillationsmode und der Position der Indiumionen innerhalb des Ionenkristalls ab. Falls die Indiumionen nicht an der zu kühlenden Eigenschwingung teilnehmen, wird keine Kühlung möglich sein, wie z.B. bei einem 3-Ionenkristall bestehend aus 2 Magnesiumionen und einem in der Mitte sitzenden Indiumion in der Atmungsmode. Falls das Indiumion jedoch außen sitzt, können alle Schwingungsmoden gekühlt werden. Allerdings wird in dieser Konfiguration auch die zweite Schwingungsmode geheizt (vgl. 5.8). Dies kann durch Hinzunahme eines weiteren Indiumions gelöst werden. Es lassen sich dann alle 4 Schwingungsmoden kühlen, und in der symmetrischen Anordnung auf der linken Seite von Abb. 5.8 erfahren die Schwingungsmoden 2 und 4 keine Heizung. Aus diesen Gründen ist dieser 4-Ionenkristall für die Realisierung eines 2-Bit-Quantengatters prädestiniert. Zur formalen Behandlung des Problems definiert man den Lamb-Dicke-Parameter η_j^α für

die Mode α und Ion j .

$$\eta_j^\alpha = k(\beta_j'^\alpha)^{-1} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\alpha}} \quad (5.28)$$

Der Lamb-Dicke-Parameter η_j^α beschreibt, wie stark die Auslenkung von Ion j an die Mode α koppelt. Ein relatives Maß für die Kühlrate der Mode α ergibt sich bei gegebener Laserleistung [171] durch die Summe der quadrierten Lamb-Dicke-Parameter aller Ionen:

$$W_\alpha = \sum_j |\eta_j^\alpha|^2. \quad (5.29)$$

Dabei ist jedoch vorausgesetzt, daß sich die Ionen im Lamb-Dicke-Limit befinden, daß also gilt:

$$\max_{\alpha, j \in \{1, 2, \dots, N\}} \{ |\eta_j^\alpha|^2 n_\alpha \} \ll 1 \quad (5.30)$$

In Abbildung 5.9 sieht man die normierten Kühlraten der vier Schwingungsmoden für zwei mögliche Ionenkonfigurationen, bei denen die Heizrate für 2 der 4 Eigenschwingungen verschwindet. Im Vergleich dazu sieht man in Abb. 5.9c) die Kühlrate für einen homogenen Ionenkristall, bei dem die Masse der Ionen variiert wird. Es werden hierbei nur Ionen mit Masse M direkt lasergekühlt. Man erkennt, daß in beiden Fällen für einen $^{25}\text{Mg}^+$ - $^{115}\text{In}^+$ -Ionenkristall die Kühlrate der zweiten Schwingungsmode größer ist als diejenige der vierten. Daher wird diese als Quantenbus geeigneter sein als die vierte.

Die zweite Schwingungsmode wird etwas stärker gekühlt, wenn sich die $^{115}\text{In}^+$ -Ionen außen befinden. Aufgrund der unterschiedlichen Masseabhängigkeit des radialen und des axialen Speicherpotentials ist diese Anordnung nicht besonders stabil. Dagegen ist die Anordnung mit den $^{115}\text{In}^+$ -Ionen in der Mitte (Abbildung 5.9b) äußerst stabil. Die etwas kleinere Kühlrate kann immer durch einen intensiveren Laser ausgeglichen werden. Diese Konfiguration hat außerdem den Vorteil, daß der Abstand der beiden $^{25}\text{Mg}^+$ -Ionen maximal ist. Dadurch erleichtert sich die Einzelionenansprache der $^{25}\text{Mg}^+$ -Ionen, die für die Realisierung eines Gatters notwendig ist.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Anordnung mit den $^{115}\text{In}^+$ -Ionen in der Mitte sowie die Verwendung der zweiten Schwingungsmode als Bus-Qubit die größten Vorteile mit sich bringt.

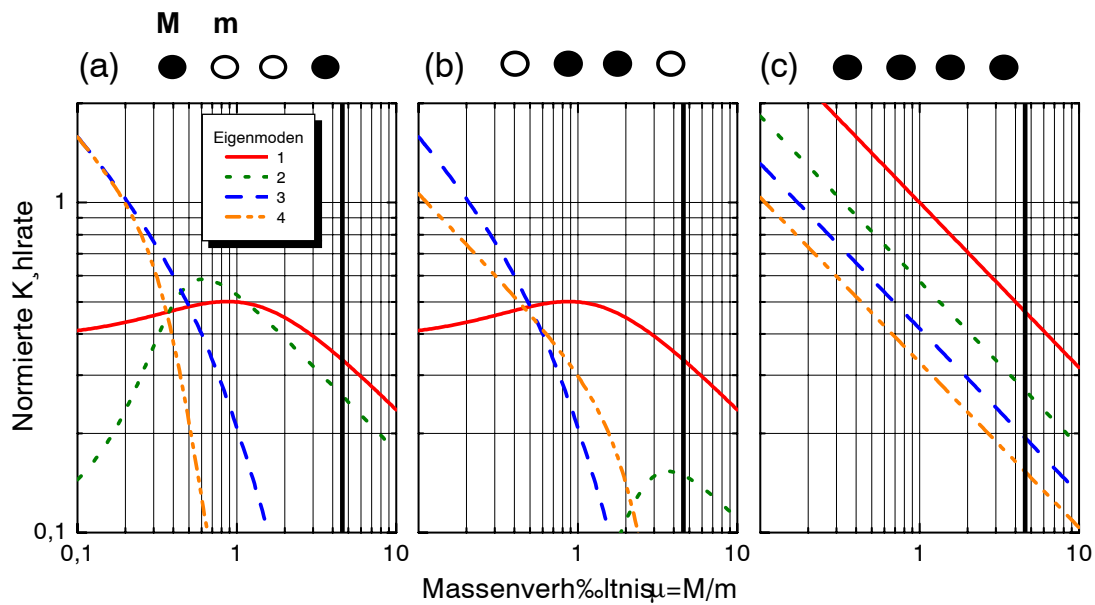


Abbildung 5.9: a) + b) Normierte Kühlraten aller Schwingungsmoden eines heterogenen Ionenkristalls als Funktion des Massenverhältnisses μ . Die Normierung erfolgte auf die Kühlrate des homogenen Ionenkristalls c) der ersten Schwingungsmode bei $\mu = 1$. Vergleich zweier unterschiedlicher Ionenanordnungen mit einer homogenen Ionenkette c). Gekühlt werden nur die Ionen der Masse M . Das Massenverhältnis von 4,6 der $^{115}In^+ - ^{25}Mg^+$ -Ionenkette ist durch den senkrechten Strich gekennzeichnet.

Kapitel 6

Experimenteller Aufbau

Mens agitat molem

Der Geist bewegt die Materie

Vergil Aeneis 6,727

Dieses Kapitel beschreibt sämtliche im Experiment verwendeten Aufbauten bis auf die Ionenfallen selbst. Die Vierstabfalle wurde bereits in Kapitel 3 ausführlich beschrieben. Die lineare Endkappenfalle wurde in [5] vorgestellt.

6.1 Fallenelektronik

Zur Erzeugung großer, radialer Säkularfrequenzen benötigt man nach Gl. (2.22) hohe Fallenantriebsfrequenzen im MHz-Bereich bei großen RF-Spannungsamplituden von einigen 100 Volt. Dies erreicht man üblicherweise mit Hilfe eines Resonanztransformators (siehe Abb. 6.1). Dazu erzeugt ein Signalgenerator eine Sinusschwingung ($f = 11,5$ MHz), welche anschließend von einem Breitband-RF-Verstärker^[1] hochtransformiert und anschließend in den Resonanzschwingkreis eingekoppelt wird. Die Einkopplung erfolgt induktiv, indem man eine einzelne Windung (Primärkreis) um die Spule im Sekundärschwingkreis anbringt. Der

^[1] Leistungen bis 100 Watt möglich; Firma Telemeter Electronic GmbH; RF 260-100 Power Amplifier

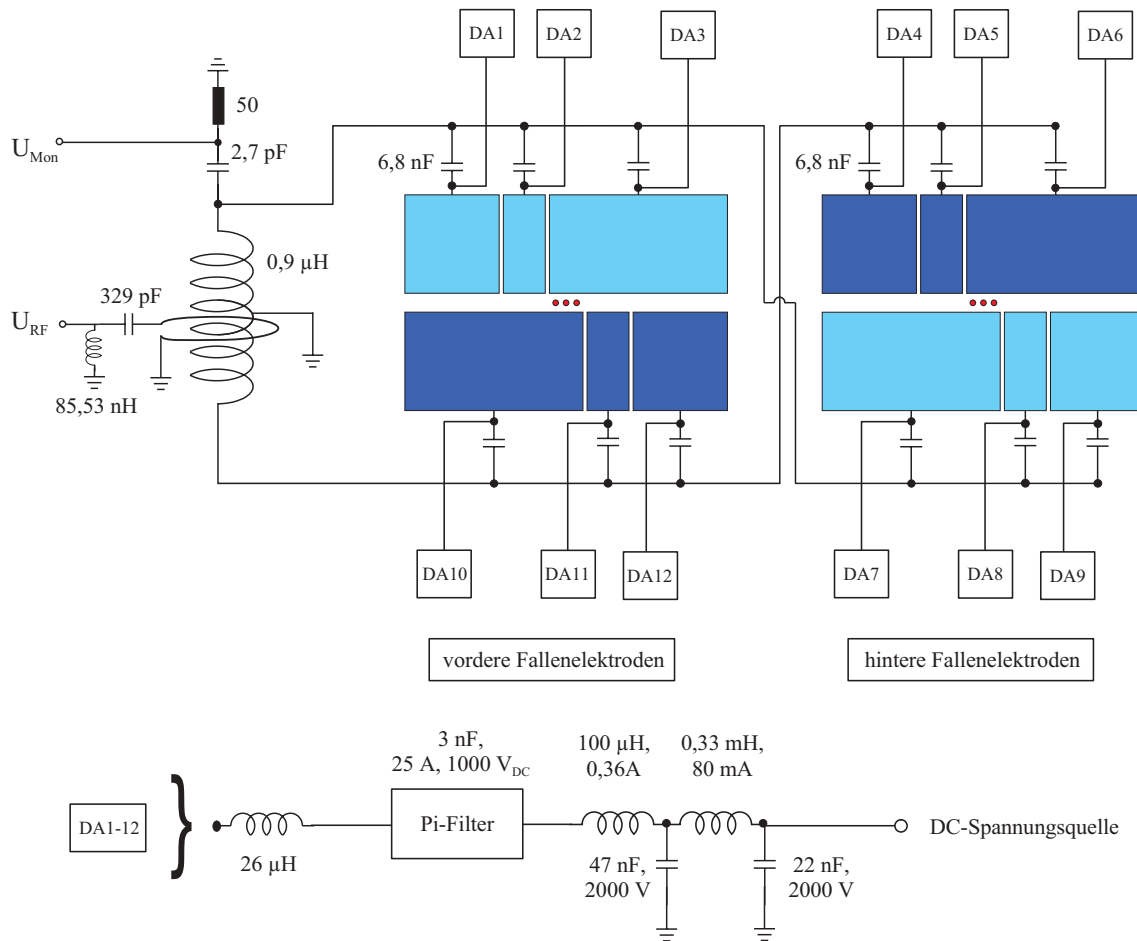


Abbildung 6.1: Die Fallenelektronik. Mit Hilfe eines Resonanztransformators bestehend aus einer Spule und der Falle als Kapazität wird die Fallenspannung U_{RF} generiert. Die Bauteile DA1 bis DA12 sind jeweils mit speziellen Tiefpässen ausgestattet. Die unterschiedlichen Farben der Elektroden stehen für die 2 unterschiedlichen RF-Phasen.

Sekundärschwingkreis besteht aus einer Spule und einer Kapazität, die im wesentlichen durch die Falle selbst, aber auch durch die elektrischen Durchführungen und Zuleitungen zur Falle sowie Streukapazitäten gegeben ist. Die Spule besteht aus 2mm dickem, versilberten Kupferdraht, der in 8 Windungen um einen Teflonkern mit Durchmesser 28 mm gewickelt ist ($L_{\text{sekundär}} = (0,9 \pm 0,1) \mu\text{H}$)^[2]. Typische Wechselströme sind in der Größen-

^[2] Mit diesem Wert und der gemessenen Resonanz des Sekundärschwingkreises ($f = 11,5 \text{ MHz}$) ergibt sich unter Vernachlässigung des Widerstands der Leitungen im Sekundärkreis die Kapazität der Falle zu $C_{\text{Falle}} = (200 \pm 10) \text{ pF}$.

ordnung von einigen Ampere. Die Spannung im Sekundärkreis ergibt sich zu

$$U_{\text{sekundär}} = U_{\text{primär}} \cdot \sqrt{\frac{L_{\text{sekundär}}}{L_{\text{primär}}}} \cdot Q, \quad (6.1)$$

wobei $Q = \frac{\Delta\nu}{\nu}$ die Güte des Schwingkreises bezeichnet. Je höher die Güte des Schwingkreises, d.h. je niedriger die Verluste im Schwingkreis sind, desto weniger Eingangsleistung wird benötigt, um eine bestimmte Spannungsamplitude an den Elektroden zu erreichen. Typische Werte der Güte Q sind im jetzigen Aufbau etwa 120 bei einer Fallenfrequenz von 11,5 MHz.

Bei der linearen Endkappenfalle [5] wurde für die 2 RF-Elektroden lediglich eine Phase des RF-Feldes benötigt. Bei der jetzigen Vierstabfalle werden dahingegen zwei um π verschobene Phasen benutzt, so daß die RF-Spannungsamplituden zweier sich gegenüberliegenden Elektroden entgegengesetzt gleich groß sind. Zur Erzeugung dieser zwei Phasen wurde die Sekundärspule in der Mitte auf Masse gelegt (siehe Abb. 6.1), und die an beiden Enden entstehenden Spannungsamplituden, welche genau mit entgegengesetzter Phase schwingen, an gegenüberliegenden Elektroden der Falle angelegt. Um sicherzustellen, daß die Symmetrieebenen zwischen den Elektroden dem Potential Null entsprechen, wurde die Masse genau in der Mitte der Spule angelötet, was durch Abgleich der Beträge beider Amplituden nach dem Anlöten überprüft wurde. Es wurde eine Genauigkeit von besser als 0,3 Prozent erreicht (siehe Abb. 6.2). Die genaue Beschaltung kann Abb. 6.1 entnommen werden.

Bei den RF-Vakuumzuleitungen ist zu beachten, daß sie exakt dieselbe Länge von der RF-Quelle bis zu den Elektroden aufweisen, da etwaige Längenunterschiede zu unterschiedlichen Phasenlagen der Spannungen an den jeweiligen Elektroden führen würden. Dies würde insbesondere bei gegenüberliegenden RF-Elektroden zu großer Mikrobewegung führen.

Weiterhin kann zusätzlich zur Wechselspannung an jede Elektrode eine unterschiedliche Gleichspannung angelegt werden. Als Koppelkondensatoren dienen spezielle für den Hochfrequenzbereich geeignete, verlustarme Vielschicht-Keramik-Kondensatoren^[3]. Die Gleichspannungsquellen werden durch spezielle Tiefpässe vor dem RF-Signal geschützt (siehe unteren Teil von Abb. 6.1). Alle Bauteile wurden im Vergleich zum alten Aufbau dahingehend verbessert, daß Gleichspannungen bis zu 1000 V angelegt werden können. Dies ermöglicht insbesondere eine hohe, axiale Schwingungsfrequenz, welche wiederum Grundzustandskühlung erleichtert (siehe Kapitel 4). Eine Phase der RF-Fallenspannung kann

^[3] Firma Tekelec Temex, Sèvres, Frankreich; 6,8 nF

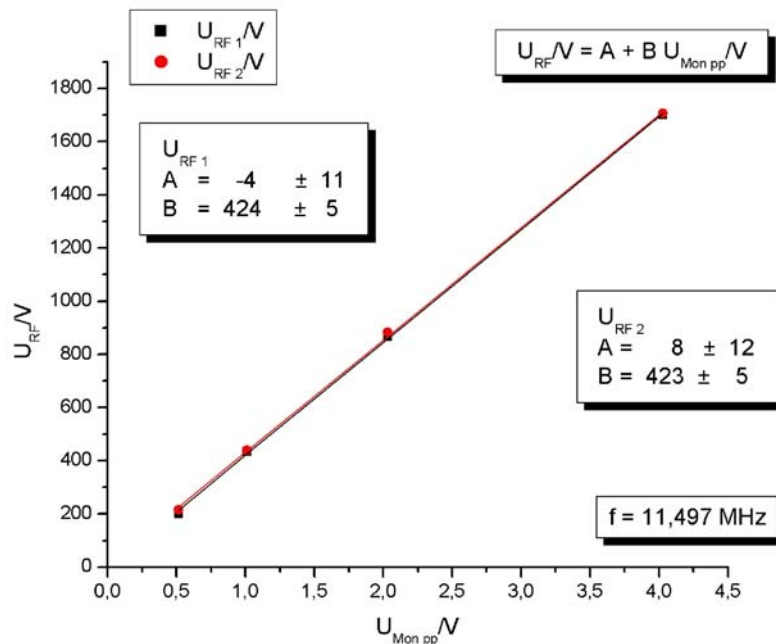


Abbildung 6.2: Abgleich der Amplituden beider RF-Phasen. Es konnte eine Genauigkeit von besser als 0,3 Prozent erreicht werden.

indirekt über einen kapazitiven Spannungsteiler abgegriffen werden. Diese Monitorspannung ist über dem Monitoreichfaktor X mit der Spannung U_{RF} verknüpft:

$$U_{RF} = X \cdot U_{Mon,pp} \quad . \quad (6.2)$$

Eine Eichung mittels Tastkopf ergab einen Wert von $135,1 \pm 0,5$ (siehe Abb. 6.3). Da aber während der Messung mit dem Tastkopf in den elektronischen Schaltkreis des Resonanztransformators eingegriffen wird - wenn auch minimal - so ist damit zu rechnen, daß das erhaltene Ergebnis eine gewisse Ungenauigkeit besitzt. Eine genauere Bestimmung des Eichfaktors X ist mit Hilfe von Messungen des Stabilitätsdiagramms (siehe Kapitel 7.3.4, Abb. 7.19) und der radialen Schwingungsfrequenzen (siehe Kapitel 7.3.1, Abb. 7.13) möglich. Zur optimalen Einkopplung der durch den Breitband-RF-Verstärker erzeugten Spannung in die Falle ist vor der Primärspule eine Impedanzanpassung notwendig, welche in Verbindung mit der Resonanztransformatorelektronik einen Gesamtwiderstand von 50Ω besitzt. Diese Impedanzanpassung besteht aus einer parallel geschalteten Luftspule mit

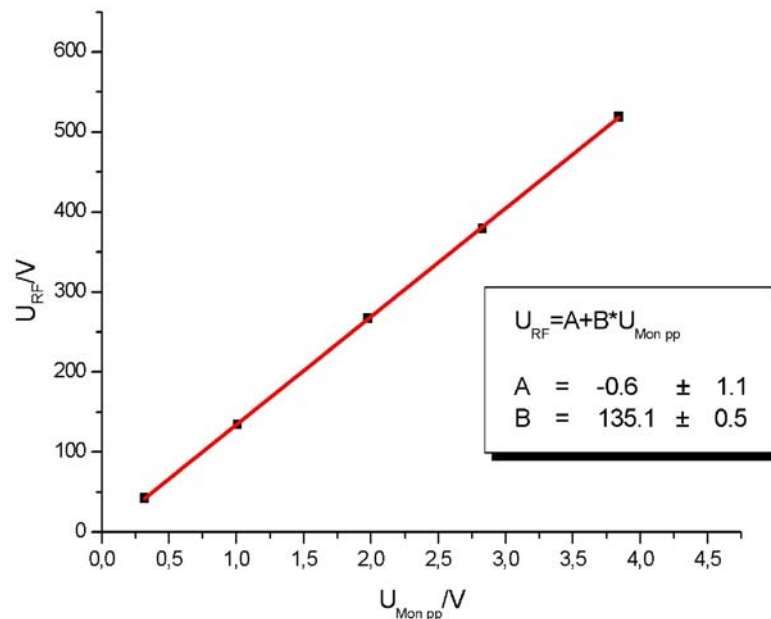


Abbildung 6.3: Bestimmung des Monitoreichfaktors X . Dazu wurde mit einem selbstgebauten Tastkopf die RF-Spannung an den Durchführungen in die Falle in Abhängigkeit der Monitorspannung aufgetragen. Der Tastkopf besitzt ein Teilverhältnis von 1:1105. Damit ergab sich ein X -Wert von 135. Der Tastkopf besteht aus einem 50 k Ω -Widerstand, welcher an die mittlere Leitung eines Koaxialkabels angelötet wurde und mit Hilfe der Metallisolierung desselben Kabels abgeschirmt wurde, so daß keine Streukapazitäten die Messung verfälschen. Dieser Meßkopf wurde parallel zu einem 50 Ω -Widerstand betrieben, so daß idealerweise ein Teilverhältnis von 1:1000 erwartet werden kann. Eine genauere Eichung dieses Meßkopfes ergab den oben angeführten Wert von 1:1105.

4 Windungen und einer Induktivität von 85,83 nH^[4] sowie einer in Serie geschalteten Kapazität ($C = 329$ pF). Da bei den verwendeten Leistungen normale Bauteile nach kürzester Zeit überhitzen, wurden spezielle verlustarme für den Hochfrequenzbereich geeignete Mica-Kondensatoren^[5] benutzt. Die in die Falle eingekoppelte Leistung liegt typischerweise im Bereich zwischen 95 und 100 %.

[4] Firma Hagn SMD Technology, Moosburg; HMM043A2

[5] Firma CBF Electronics, Vaterstetten

6.2 Vakuumsystem

Im Rahmen dieser Doktorarbeit wurde ein neuer Vakuumrezipient^[6] entworfen, in welchem das Konzept des Mg^+ - In^+ -Quantencomputers realisiert werden soll. Die genaue Beschreibung des Rezipienten erfolgt im nächsten Kapitel. Zunächst wird das Vakuumsystem beschrieben.

Das Vakuumsystem (siehe Abb. 6.4) besteht aus einer Turbomolekularpumpe^[7] mit vor-

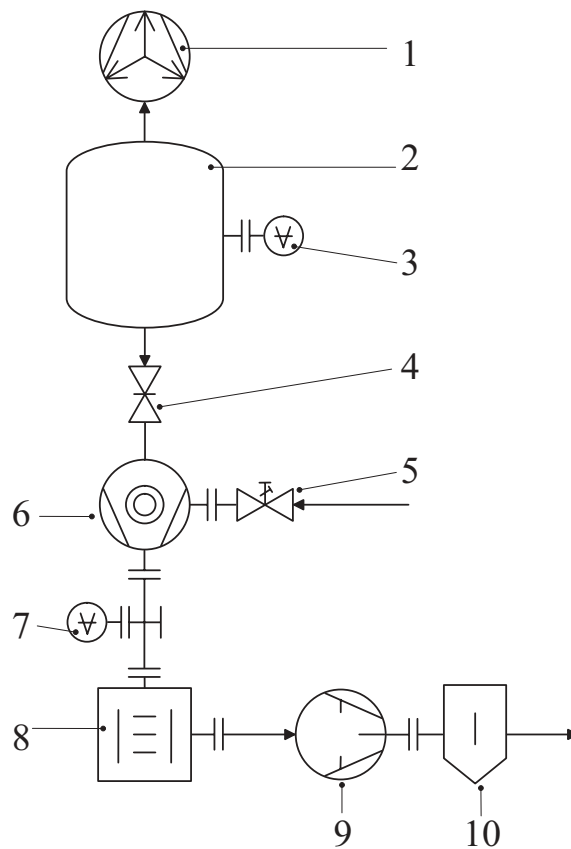


Abbildung 6.4: Schematische Zeichnung des Vakuumsystems. Die einzelnen Bezeichnungen stehen dabei für nachfolgende Apparate. 1 Titansublimation-Ionengetterpumpe 2 Vakuumkammer 3 Vakuummeßgerät (Ionivac) 4 Schiebventil 5 Nadelventil 6 Turbomolekularpumpe 7 Vorvakuummeßgerät 8 Adsorptionsfalle 9 Vorvakuumpumpe (Drehschieber) 10 Auspuff-Filter

^[6] Firma VAb Vakuum-Anlagenbau, Werkstoff Nr.: Flansche 1.4429, Rohre 1.4404, He-Lecktest: $Q < 1 \cdot 10^{-10} \text{mbar l s}^{-1}$

geschalteter Drehschieberpumpe^[8], welche unterhalb der Vakuumkammer angebracht sind. Oberhalb des Vakuumrezipienten befindet sich eine Titansublimation-Ionengetterpumpe^[9], welche erst bei niedrigen Drücken unterhalb 10^{-9} mbar in Betrieb genommen wird. Um einen noch besseren Enddruck zu erreichen kann mit Hilfe eines Schiebeventils^[10] (Punkt 4 in Abb. 6.4) der untere Teil des Vakuumsystems abgetrennt werden, so daß nur noch die Ionengetterpumpe die Vakuumkammer evakuiert. So kann ein Restgasdruck von $2 \cdot 10^{-11}$ mbar erreicht werden. Um Schwingungsübertragungen der Turbomolekularpumpe auf die Vakuumkammer zu reduzieren, wurde zwischen Schiebeventil und Kammer ein Wellbalg^[11] angebracht.

Nach einer Belüftung der Vakuumapparatur, z.B. bei einem Umbau der Ionenfalle, wird der Vakuumrezipient 1-2 Wochen lang bei einer Temperatur von 130 °C ausgeheizt, bis der Kammerdruck auf $1 \cdot 10^{-8}$ mbar gefallen ist. Dann erst wird die Ionengetterpumpe hinzugeschaltet und die Heizung langsam heruntergeschaltet. Zum Ausheizen wird der ganze Vakuumtopf mit Aluminiumfolie thermisch isoliert, an die Fensterflansche Heizmanschetten^[12] angebracht, sowie um den Topf selbst ein Heizband gewickelt.

Über ein Nadelventil^[13] kann Puffergas bis zu einem definierten Druck eingefüllt oder aber auch belüftet werden.

Zur Ansprache der Ionen mit Laserstrahlen wurden zahlreiche Fenster^[14] benutzt, welche sowohl für die Indiumwellenlänge 230,6 nm als auch für die Magnesiumwellenlänge 280 nm antireflexbeschichtet sind. Da der Polarisationszustand der Laserstrahlen von entscheidender Bedeutung für Operationen mit Ionen in der Ionenfalle ist, ist es unerlässlich, polarisationserhaltende Fenster zu benutzen. Während Saphirfenster zu einer Änderung des Polarisationszustandes des Lichts führen, kann durch amorphes Quarzglas, z.B. Suprasil, der Polarisationszustand erhalten werden. Über spezielle Dichtringe in Form von

[7] *Leybold Vakuum, Turbovac 361*

[8] *Leybold Vakuum, Trivac D 16 B*

[9] *VACOM, Saugvermögen 640 l/s IGP, edelgasstabile Diode (Ti/Ta)*

[10] *VAT, VAT-UHV-Schieber DN 100 CF*

[11] *VAb, Schwingungsdämpfer für Turbomolekularpumpe DN 100 CF*

[12] *Dickersbach, Flanschheizung DN 40/63/100/160 CF*

[13] *Air liquide, Dosierventil VIP 0,2/50 RXA-3*

[14] *Firma Laseroptik*

kupferummantelten Spiralfedern (Helicoflex^[15]) werden die Quarzfenster mit der Kammer verbunden. Zur gleichmäßigen Druckverteilung wird das Quarzsubstrat zwischen zwei Dichtringe eingespannt. Während der innere Dichtring der eigentlichen Abdichtung dient, vermittelt der äußere Ring beim Anpressen einen gleichmäßigen Druck. Durch gleichmäßiges Anziehen der Flanschschrauben kann eine spannungsinduzierte Doppelbrechung im Quarzglas vermieden werden [175].

Als Beobachtungsfenster kann ein in die Vakuumkammer gestülptes Saphirfenster eingesetzt werden, da für die Kamera Polarisationserhaltung keine Rolle spielt. Für die Einzelionenansprechung ist es jedoch vonnöten, polarisationserhaltende Fenster zu verwenden.

6.3 Fallenhalterung

Der gesamte Aufbau der Ionenfalle, inklusive Ionenfallenhalterung, Atomöfen sowie Atomöfenhalterung, als auch die beiden Elektronenkanonen steht schwingungsgedämpft auf dem DN 250 CF-Bodenflansch des Vakuumrezipienten (siehe Abb. 6.5). Auf diesem Flansch liegt der Vakuumtopf (siehe Abb. 6.18, 6.19). Wenn die Kammer geöffnet wird, wird dieser Vakuumtopf mit einem Flaschenzug in die Höhe gezogen, so daß man freien Zugang zum Fallenaufbau bekommt.

Im Bodenflansch (Abb. 6.6) befinden sich vier Flansche für elektrische Durchführungen: drei DN 40 CF-Flansche und ein DN 63 CF-Flansch. Davon ist jedoch z.Z. ein DN 40 CF-Flansch nicht in Benutzung und kann in Zukunft für weitere Anwendungen genutzt werden. Die 12 Fallenelektroden werden vom Resonanztransformator (siehe Kapitel 6.1) kommend über eine 13-fach Durchführung^[16] auf dem DN 63 CF-Flansch in die Kammer geführt. Die elektrischen Anschlüsse für die beiden Elektronenkanonen und die bis zu 4 Atomöfen werden durch zwei DN 40 CF-Flansche mittels zweier 7-fach-Durchführungen^[17] ins Vakuum geführt.

Im Bodenflansch sind weiterhin vier kreisförmige (Durchmesser $D = 28$ mm) Mulden ($R = 1,8$ mm) eingearbeitet (Tiefe 1 mm), welche für den im folgenden beschriebenen, schwin-

^[15] Garlock, *Helicoflex-Dichtung Typ HNV 200*

^[16] Spezialanfertigung von VAb, *CF-Blindflansch DN 63 CF mit 13-fach Stromdurchführung, 6kV, 15 A je Leiter*

^[17] VAb *7-fach Stromdurchführung DN 40 CF, 6kV, 15 A je Leiter*

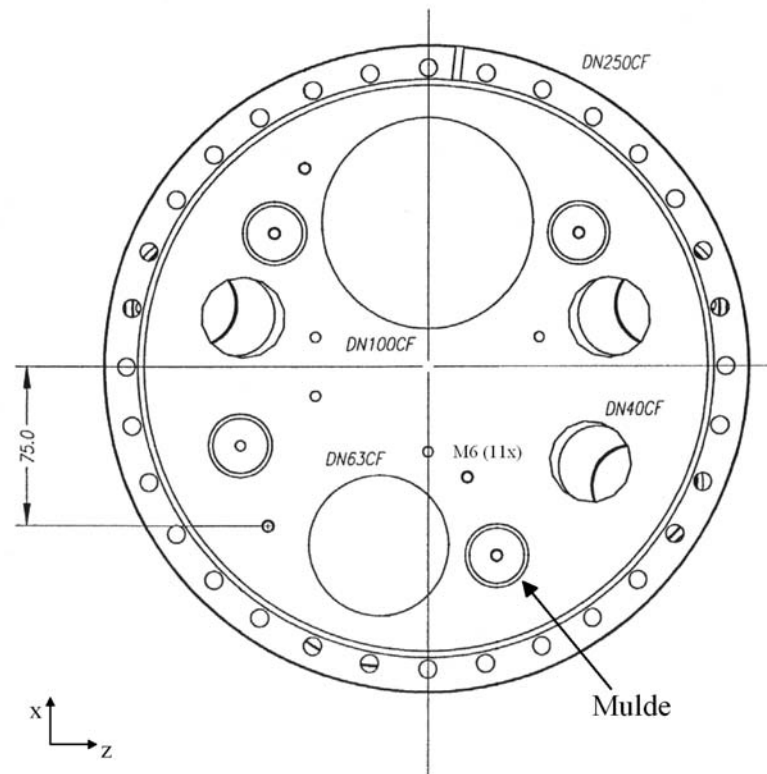


Abbildung 6.5: Vakuumseite des DN 250 CF-Bodenflansches. Man erkennt die vier Mulden, in die abwechselnd Vitonringe und Metallscheiben gelegt werden, um so vier Türme aufzubauen, auf denen zwei Metallplatten liegen. Unten erkennt man einen DN 63 CF-Flansch, durch den die 12 elektrischen Durchführungen für die 12 Fallenelektroden ins Vakuum geführt werden. Oben erkennt man einen DN 100 CF-Flansch, an dem die Turbomolekularpumpe getrennt durch ein Schiebeventil angeschlossen ist. Im Experiment ist in die Öffnung an der Oberkante des Rohres ein dichtmaschiges Gitter gesetzt, um die Turbomolekularpumpe vor eventuell herabfallenden kleinen Metallteilen wie z.B. Schrauben zu schützen. Von den 3 DN 40 CF-Flanschen (zwei rechts, einer links) ist der rechte obere nicht in Gebrauch. Der rechte untere wird zur elektrischen Durchführung von Atomöfenanschlüssen und den Anschlüssen der zweiten Elektronenkanone verwendet. Der linke 40er Flansch wurde für die Channeltronanschlüsse und die elektrischen Durchführungen der ersten Elektronenkanone verwendet. Weiterhin befinden sich im Bodenflansch elf M6 Bohrungen (Tiefe 12 mm), um eventuell bestimmte Kontakte auf Masse legen zu können oder etwaige zukünftige Projekte befestigen zu können. Die Maßangabe ist in mm.

gungsgedämpften Fallenhalterungsaufbau vorgesehen sind.

Diese vier Mulden dienen als Basis für vier Türme, auf welche 2 Stahlplatten gelegt wer-

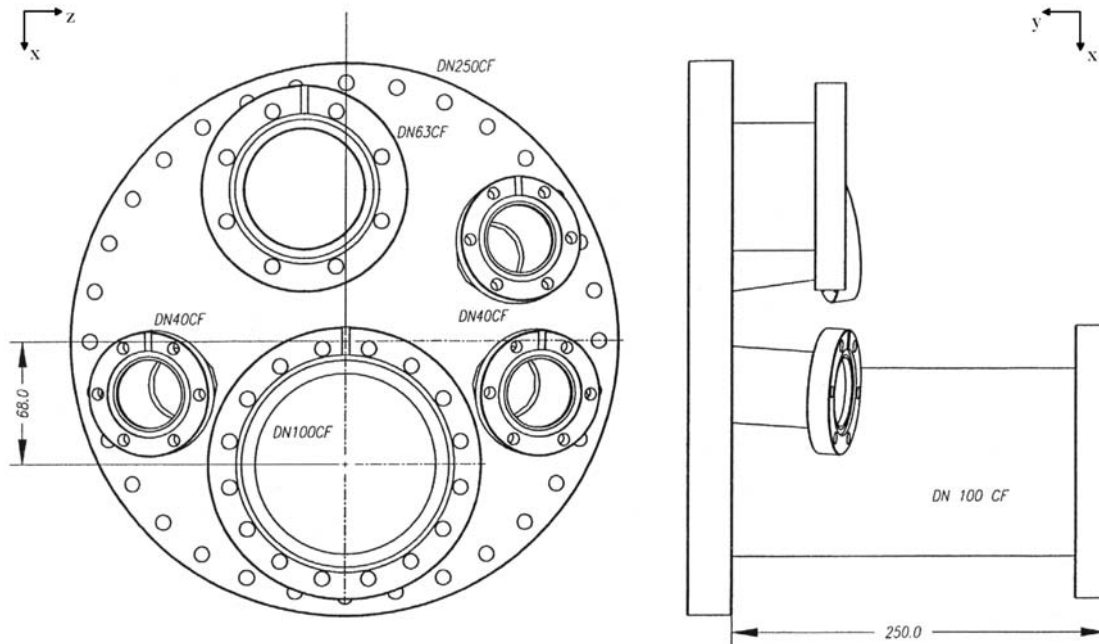


Abbildung 6.6: Der Bodenflansch, von unten gesehen. Man erkennt die 3 DN 40 CF-Flansche, welche für elektrische Durchführungen für die Elektronenkanonen und die Atomöfen gebraucht werden, sowie den DN 63 CF-Flansch, welcher die elektrische Durchführungen für die Fallenelektroden beinhaltet, als auch den DN 100 CF-Flansch, an den zunächst ein Wellbalg zur Schwingungsdämpfung, danach ein Schiebeventil und zuletzt die Turbomolekularpumpe angeschlossen werden. Die Maßangaben sind in mm.

den. An der obersten Stahlplatte werden sowohl Atomöfen, Elektronenkanonen als auch die Falle selbst befestigt.

Jeder Turm besteht aus sieben identischen 10 mm hohen Metallscheiben, welche durch Vitonringe (Durchmesser $D = 28$ mm, $R = 1,5$ mm) voneinander und vom Bodenflansch getrennt werden (siehe Abb. 6.7). In jeder Metallscheibe befinden sich dazu auf beiden Seiten identische Mulden wie im Bodenflansch^[18]. Die oberste Metallscheibe (Höhe 13 mm) eines jeden Turmes besitzt nur an der Unterseite eine Mulde, an der Oberseite besitzt sie eine 7,5 mm dicke, vertikale Bohrung, in welche ein unten spitz zulaufender Gewindestift gesetzt wird, welcher in die darüber liegende Stahlplatte (Höhe 38 mm) von unten eingeschraubt wird. Somit kann die Höhe des Aufbaus angepaßt werden, um eventuelle Un-

^[18] Durch Verwendung solcher Vitonringe zwischen zwei Mulden gleichen Durchmessers mit $R = 1,8$ mm sollen Luft einschüsse vermieden werden.

gleichmäßigkeiten des gesamten Aufbaus auszugleichen. Die Ionenfalle, die Atomöfen und die Elektronenkanonen sind an einer zweiten ebenfalls 38 mm hohen Stahlplatte befestigt, welche wiederum durch sechs in Mulden liegende Vitonringe getrennt auf der ersten unteren Stahlplatte steht. Durch diese abwechselnde Plazierung von Vitonringen und Stahlteilen wird eine sehr gute Schwingungsdämpfung erreicht.

Um eventuelle Schwingungsanregungen des Gesamtsystems klein zu halten, sollte ein mög-

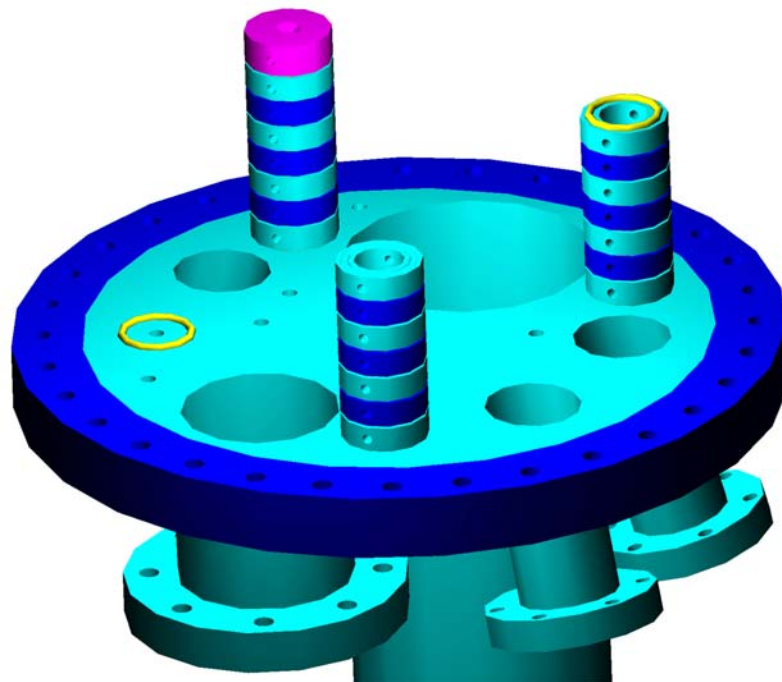


Abbildung 6.7: CAD-Zeichnung des Bodenflansches mit den 4 Türmen, auf die die Stahlplatten gelegt werden. Zur Verdeutlichung ist bei einem Turm lediglich die Mulde im Bodenflansch mit Vitonring dargestellt. Darauf aufbauend werden abwechselnd Metallscheiben (zur Abgrenzung untereinander mit unterschiedlichen Farben dargestellt) und Vitonringe gelegt. Die oberste Metallscheibe (nur am Turm oben links zu erkennen) ist anders gefertigt. Sie besitzt an der Oberseite eine Bohrung, in die ein spitz zulaufender Gewindestift gesetzt werden kann, welcher in die darüberliegende Stahlplatte geschraubt wird. Somit kann jeder Turm individuell in der Höhe geregelt werden, um eventuelle Ungleichmäßigkeiten auszugleichen.

lichst hohes Gesamtgewicht erreicht werden. Um eine einfache Anfertigung für die Werkstatt zu ermöglichen, wurden für den Aufbau zwei Stahlplatten angefertigt. Die untere besitzt keine besondere Funktion. Die obere bedurfte jedoch extensiver Planungsarbeit;

insbesondere bedurfte es großer Sorgfalt, allen experimentellen Anforderungen Genüge zu tun. Dies war praktisch nur mit Hilfe eines 3D-CAD-Programms^[19] möglich. Es sollte sowohl ein kompakter Aufbau als auch eine komplizierte Laserstrahlgeometrie in ein Gesamtkonzept einbezogen werden. Es wurden auf kleinsten Raum ein Atomofenhalter, welcher bis zu vier Atomöfen halten kann, zwei Elektronenkanonen und ein Linserhalter inklusive Abbildungslinse integriert.

Die obere Stahlplatte bietet in der Mitte die Möglichkeit, den Halter der Vierstabfalle

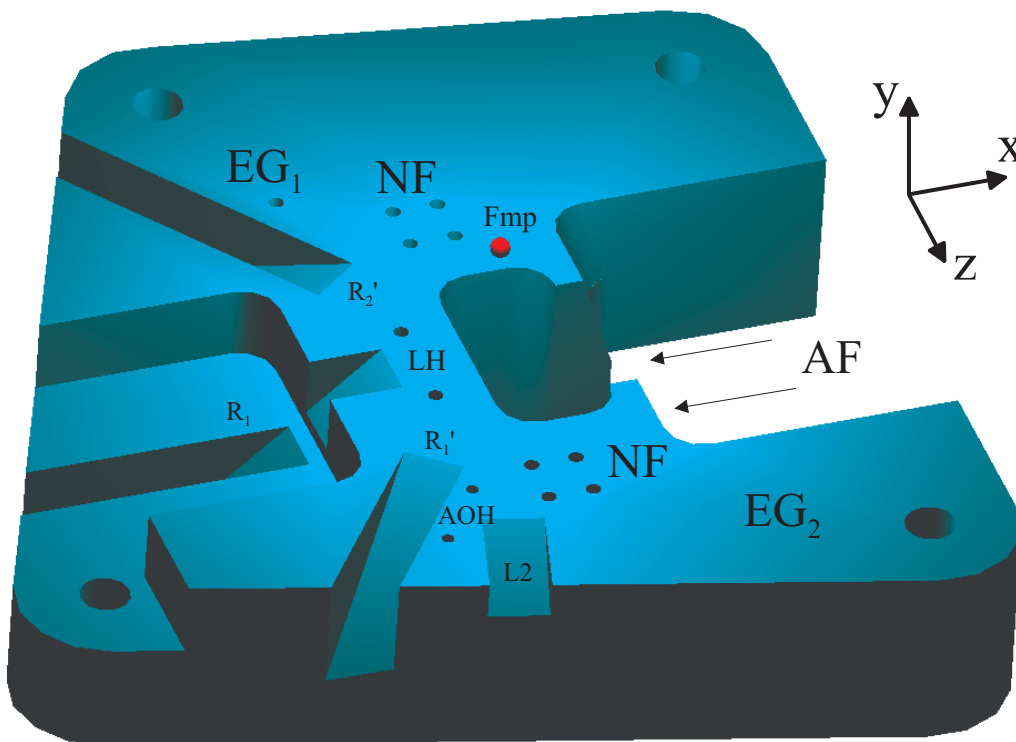


Abbildung 6.8: CAD-Zeichnung der oberen Stahlplatte, an welche die eigentliche Ionenfalle, die Atomofenhalterung (AOH) und die Elektronenkanonen (EG_1 und EG_2) befestigt werden. In der damaligen Planungsphase wurden Befestigungsmöglichkeiten für sowohl die alte lineare Endkappenfalle (AF) als auch die noch ungeplante neue Vierstabfalle (NF) vorgesehen. Aufgrund der kleinen Dimensionierung mußte die Platte an einigen Stellen ausgefräst werden, damit Laserstrahlen ungehindert durch den Versuchsaufbau laufen können.

[19] AutoCAD 2000

anzuschrauben (siehe Abb. 6.8 Position NF (Neue Falle)). Die Fallenzuleitungen können nach unten durch die längliche Ausfräsung zu den im Bodenflansch befindlichen, elektrischen Durchführungen geführt werden. Von dort aus etwas weiter in x-Richtung ist an einer um 18° aus der Vertikalen gekippten Schräge die Möglichkeit gegeben, den F-Halter der alten Endkappenfalle [5] zu befestigen (siehe Abb. 6.8 Position AF (Alte Falle)). So hat man also die Möglichkeit, beide Fallen mit demselben Fallenhalterungs Aufbau zu benutzen. Die Fallennachse befindet sich in z-Richtung. Die kleine (rote) Kugel kennzeichnet die Fallennmitte ($F_{mp} = \text{Fallennmittelpunkt}$), durch die alle Laserstrahlen gehen müssen, und somit den Ursprung des Koordinatensystems. Das obere Ende der Falle ist um 18° zur (-x)-Richtung geneigt. Weiterhin musste die Platte an den Stellen ausgefräst werden, wo Laserstrahlen verlaufen (Laser 2 (L2), 2 Ramanstrahlen R'_1 und R'_2 sowie ein weiterer Ramanstrahl R_1). An der linken Seite des Bildes sieht man eine großflächige Ausfräsung; auf der rechten Seite ebenso. Die linke ist für eine Einstülpung vorgesehen, in welche man ein Abbildungsobjektiv bis sehr nahe an die Ionenfalle einführen kann. Von der rechten Seite ist eine um 40° nach oben geneigte Einstülpung für ein Einzelionensprechobjektiv vorgesehen.

Die beiden Elektronenkanonen zielen von den Positionen EG_1 und EG_2 ausgehend auf die hintere (negatives z, EG_1) bzw. vordere (positives z, EG_2) Ladezone der Ionenfalle (siehe auch Abb. 6.14). Die beiden Ladezonen der Falle befinden sich auf der z-Achse jeweils 3,2 mm vom Fallennmittelpunkt entfernt. Die Atomofenhalterung wird mit 2 Schrauben an den 2 Gewinden, die mit AOH (Atomofenhalter) gekennzeichnet sind, befestigt. Genauere Details zur Befestigung der Elektronenkanonen und des Atomofenhalters finden sich im Kapitel über Ionenerzeugung.

6.4 Magnetfeldkompensation

Zur Erzeugung von Magnetfeldern benutzt man idealerweise Helmholtz-Spulenpaare (siehe Abb. 6.10), deren Abstand dem Durchmesser jeder einzelnen Spule entspricht. Für diesen Fall erhält man ein annähernd homogenes Magnetfeld zwischen den Spulen. Zur Magnetfeldkompensation insbesondere des Erdmagnetfeldes legt man dann gerade ein gleich großes Feld in entgegengesetzter Richtung an. Ausgehend von dieser Situation

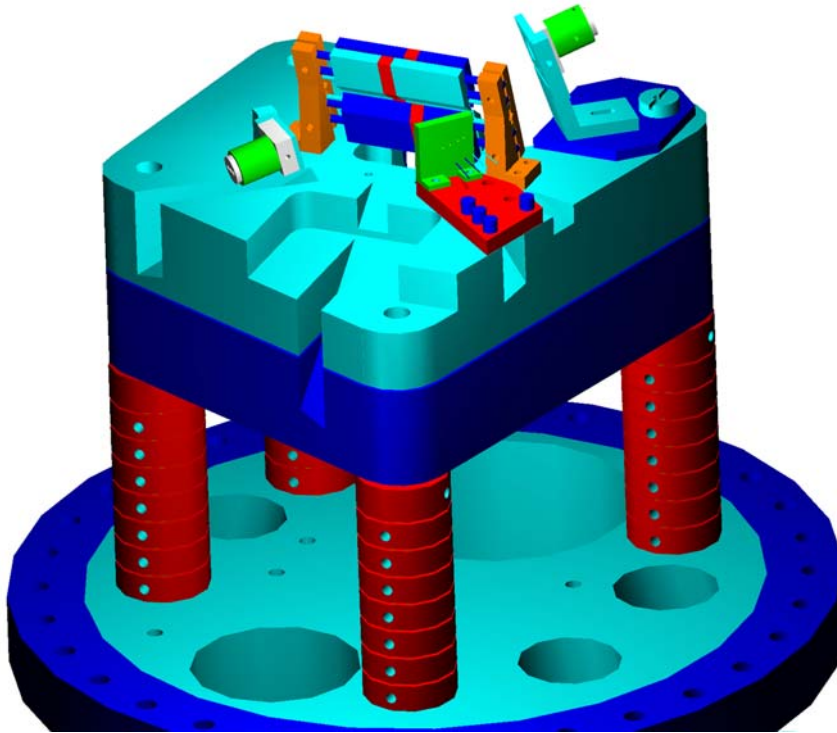


Abbildung 6.9: Gesamtansicht des schwingungsgedämpften Fallenaufbaus inklusive Bodenflansch. Gut zu erkennen sind die 2 Stahlplatten, welche auf den 4 Türmen liegen. Zwischen alle Metallteile, auch zwischen die zwei Stahlplatten wurden Vitonringe zur Dämpfung gelegt.

kann dann gegebenenfalls ein Führungsfeld zur Auszeichnung einer Quantisierungsachse angelegt werden.

Da aufgrund des gegebenen Fallenaufbaus diese ideale Geometrie nicht realisiert werden konnte, wick man auf rechteckige Helmholtz-Spulenpaare aus (Baudaten siehe Tabelle 6.1), die um den Vakuumtopf entlang der drei Raumrichtungen x, y und z anzubringen sind. Die Helmholtz-Bedingung, welche jedoch nur für kreisförmige Spulenpaare gilt, konnte deshalb ebenfalls nicht erfüllt werden. Da jedoch aufgrund der geringen Größe des Ionenkristalls das Magnetfeld nur auf einer Distanz von einigen $100 \mu\text{m}$ konstant sein muß, ist es ausreichend, die Spulenpaare so zu bauen. Außerdem wurde bei Simulationen auf Homogenität des entstehenden Magnetfelds in der Fallenmitte geachtet.

Bezeichnung	Wicklungen N	R _{Ges} in Ω	L _{y,z,x} in mm	L _{z,x,y} in mm	Abstand in mm
x ₊	60	2,54(5)	496	390	390
x ₋	60	2,54(6)	496	390	390
y ₊	75	2,63(7)	390	390	440
y ₋	75	2,63(9)	390	390	440
z ₊	70	2,69(8)	350	496	350
z ₋	70	2,70(4)	350	496	350

Tabelle 6.1: *Kenndaten der rechteckigen Helmholtz-Spulenpaare. Die Bezeichnung der Spulenpaare bezieht sich auf die Richtung im Laborsystem, in der ein Magnetfeld erzeugt wird. Der Zusatz \pm kennzeichnet die Position der Spule bezüglich des Ursprungs (Fallenmitte). Die Spule, die demnach mit der Partnerspule gemeinsam ein Magnetfeld in x -Richtung erzeugt und in positiver x -Richtung steht wird mit x_+ bezeichnet. Weiterhin ist die Wicklungszahl, der gemessene Gesamtwiderstand jeder Spule und die Länge des Rechtecks angegeben. Dabei gibt die erste Zahl ($L_{y,z,x}$) von einer x -Spule die Ausdehnung der Spule in y -Richtung, von einer y -Spule die Ausdehnung in z -Richtung usw. an. Die zweite Zahl ($L_{z,x,y}$) gibt von einer x -Spule die Ausdehnung in z -Richtung an etc. Als letzte Kenngröße wird der Abstand der beiden Spulen angegeben.*

Um ein typisches Erdmagnetfeld^[20] zu kompensieren benötigt man einen Strom von ca. 300 mA pro Spule. Die Variation des Magnetfeldes ist in einen solchen Fall zwischen den Spulen relativ hoch, jedoch auf der Strecke eines Ionenkristalls überaus homogen. Die entsprechende Kenngröße, die Abweichung des Magnetfeldes in 100 μm Abstand aus der Mitte im Vergleich zum Feld in der Mitte normiert auf dasselbe Feld in der Mitte ergibt eine minimale Abweichung:

$$\frac{B(100\mu\text{m}) - B(0\mu\text{m})}{B(0\mu\text{m})} = 2 \cdot 10^{-7} \quad (6.3)$$

Bei diesem Unterschied würde der $F=3, m_F=3$ Hyperfeingrundzustand des $^2\text{S}_{\frac{1}{2}}$ -Zustandes von $^{25}\text{Mg}^+$ eine Energieverschiebung von lediglich $\Delta E = h \cdot 0,46\text{Hz}$ erfahren.

Zur exakten Magnetfeldkompensation benutzt man die gefangenen Ionen als Sensor. Um

^[20] *Der Winkel zwischen der Richtung des Erdmagnetfeldes und der Erdoberfläche wird mit Inklination bezeichnet. In unseren Breiten beträgt er ca. 65° , so daß die größte Komponente von dem vertikalen Spulenpaar kompensiert werden muß. Typische Werte des Gesamtmagnetfeldes sind in der Größenordnung von 0,48 G.*

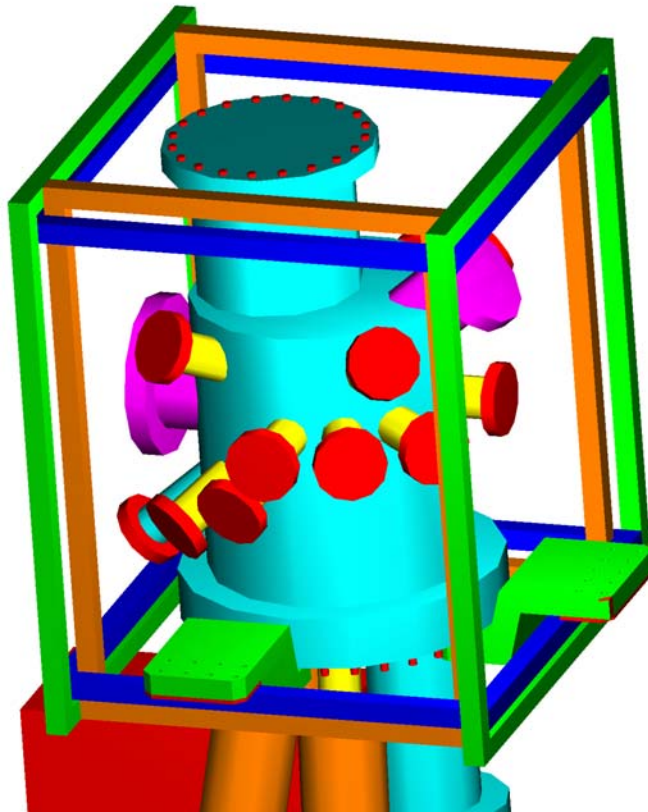


Abbildung 6.10: Schematische Zeichnung der rechteckigen Helmholtz-Spulenpaare im gesamten Fallenaufbau. Zur Verdeutlichung wurde der Laser-tisch entfernt. Für die Bezeichnung der Achsen des Laborsystems vergleiche man mit Abb. 6.18. Das Spulenpaar rechts-links erzeugt die Magnetfeldkomponente entlang der x -Richtung. Das Spulenpaar oben-unten die entsprechende Magnetfeldkomponente der y -Richtung.

das Magnetfeld auf Null abzugleichen, detektiert man die Fluoreszenz der gefangenen Ionen als Funktion des Stromes der Helmholtzspulen. Man erhält ausgeprägte Nullfeldresonanzen, die sich durch den Hanle-Effekt [176] des Grundzustands [177] erklären lassen. Der Hanle-Effekt des Grundzustands kann extrem schmalbandige Nullfeldresonanzen liefern, mit denen man Magnetfelder mit einer Genauigkeit bis zu 10^{-9} Gauss bestimmen kann [178].

6.5 Ionenerzeugung

Zur Ionenerzeugung bestehen grundsätzlich zwei Möglichkeiten: Ionisation durch Stöße mit anderen massiven Teilchen wie z.B. Elektronen oder Photoionisation [179–181].

6.5.1 Photoionisation

Photoionisation ist in gegenwärtigen Experimenten bis zu 5 Größenordnungen effektiver als Elektronenstoßionisation [180]. Aufgrund dessen kann man den Atomfluß drastisch reduzieren, was zu geringeren Bedampfungen der Fallenelektroden durch den Atomstrahl und somit auch zu kleineren Kontaktpotentialen^[21] führt. Dies ergibt wiederum kleinere Heizraten in der Falle [60]. Desweiteren wird keine statische Aufladung der Dielektrika der Fallenapparatur erzeugt wie es bei einem Elektronenstrahl der Fall ist. Dies kann insbesondere bei CQED-Experimenten mit Resonatoren hoher Güte die bisher gebräuchlichen Ladezonen überflüssig machen [182, 183].

Diese Methode ist für Indium in unserer Arbeitsgruppe realisiert worden [184]. Sie besteht aus einer zweistufigen Laseranregung in einen Rydbergzustand, welcher dann im Fallenfeld durch die RF-Fallenspannung ionisiert wird (siehe Abb. 6.11). Für beide Übergänge können gitterstabilisierte Diodenlaser, z.B. in Littrowkonfiguration, mit Leistungen bis zu 5 mW verwendet werden. Im ersten Schritt wird mit dem Diodenlaser bei 410 nm im Indium der Übergang $5s^25p\ ^2P_{\frac{1}{2}} \rightarrow 5s^26s\ ^2S_{\frac{1}{2}}$ getrieben. Im zweiten Schritt regt die Diode bei 448 nm diesen Zustand in einen Rydberg-Zustand an, welcher dann vom Fallenfeld leicht ionisiert wird (linker Pfad in Abb. 6.11c)). So wird erstens erreicht, daß nur die gewünschten Isotope ionisiert werden, und zweitens, daß nur Atome, welche in das Fallenfeld geraten, ionisiert werden. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, daß zwei Photonen bei 410 nm hintereinander absorbiert werden. Der zweite Absorptionsprozeß erfolgt ins Kontinuum, wobei Wechselwirkung mit den autoionisierenden Zuständen $5s5p^2\ ^2D$ den Wirkungsquerschnitt des Übergangs deutlich erhöht (rechter Pfad in Abb. 6.11c)).

Bei Magnesium ist es leider nicht möglich, mit einem Diodenlaser Photoionisation zu betreiben. Die Ionisationswellenlänge des neutralen Magnesiumatoms beträgt 285 nm. Diese Wellenlänge ist nur mittels frequenzverdoppelten Farbstofflasern zugänglich, aber auch zu

^[21] *engl.: patch potentials*

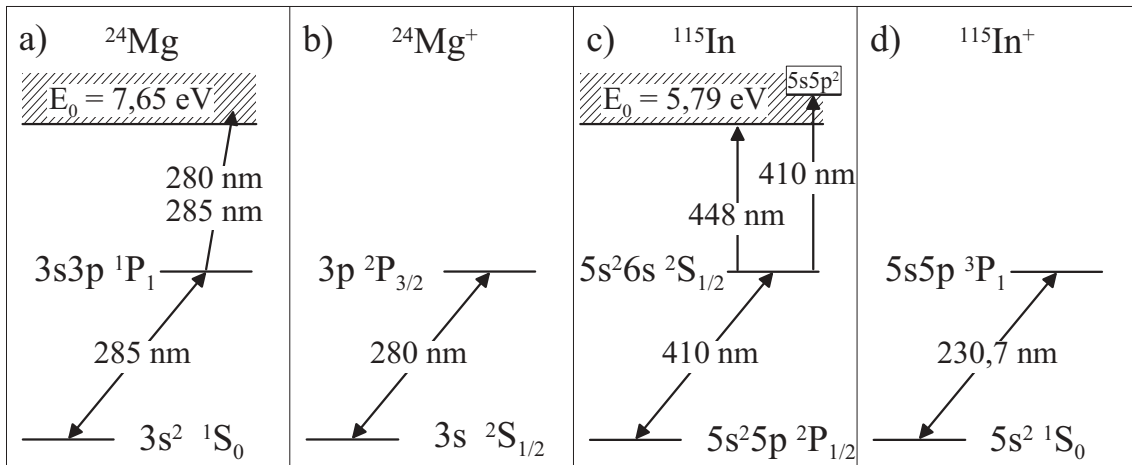


Abbildung 6.11: *Energieniveauschemata von ^{24}Mg (a), ^{115}In (c) und den jeweiligen einfach ionisierten Ionen (b+d).*

weit von der zur Kühlung von Magnesiumionen verwendeten Wellenlänge von 280 nm entfernt, um sie aus ein und demselben Farbstofflaser zu erzeugen. Man benötigt also einen weiteren Farbstofflaser, um diese Zugang zu wählen, wie in [179] demonstriert wurde. Die Ionisationsschema von ^{24}Mg und die beteiligten Laserwellenlängen sind in Abb. 6.11a) dargestellt. Beim ersten Schritt der zweistufigen Ionisation wird von einem Laser der Wellenlänge 285 nm das Mg-Atom vom Grundzustand in den $3s3p\ ^1P_1$ -Zustand angeregt. Von dort aus kann zur Ionisation sowohl derselbe Laser als auch der zur Kühlung der Mg-Ionen verwendete Laser der Wellenlänge 280 nm benutzt werden. In beiden Fällen liegt der Endzustand weit über der Ionisationsgrenze.

6.5.2 Elektronenstoßionisation

Dies ist die traditionelle Methode, in Ionenfallen Ionen zu erzeugen. Man benutzt eine Elektronenkanone, um einen thermischen Atomstrahl zu ionisieren. Aufgrund der Speichereigenschaften der Falle werden sich hauptsächlich einfach ionisierte Ionen der zu speichernden Ionensorte in der Falle befinden. Es ist aber auch möglich, daß im Restgas befindliche andere Atome ionisiert werden. Falls die spezifische Ladung Q/m mit derjenigen der zu speichernden Ionen im Rahmen der Stabilitätsbedingung übereinstimmt, können auch diese Ionen gespeichert werden. Da solche Ionen nicht mit dem anregenden

Laserlicht resonant ist, bleiben sie auf dem Kamerabild dunkel und werden deshalb Dunkelionen genannt. Dieser unerwünschten Ionen kann man sich dadurch entledigen, indem man sowohl in Richtung der a-Achse (Entfernung größerer Massen) als auch in Richtung der q-Achse (Entfernung kleinerer Massen) bis an den Rand des Stabilitätsdiagrammes der zu speichernden Ionensorte geht.

Elektronenstoßionisation wird in diesem Experiment benutzt. Um Kontaktpotentiale auf den Fallenelektroden so gering wie möglich zu halten, wurden im Rahmen dieser Doktorarbeit sowohl neue Atomofenhalterungen mit Blenden als auch eine neue Elektronenkanone, welche den Elektronenstrahl bis auf 1 mm fokussieren kann, entwickelt und gebaut.

Die im nachfolgenden beschriebenen Elektronenkanonen werden in Abb. 6.8 an den Positionen EG₁ und EG₂ befestigt. Dies trifft sowohl für die alten als auch für die neuen Elektronenkanonen zu. Die Atomöfen werden in der oben genannten Abbildung an der Stelle AOH durch einen Atomofenhalter gehalten.

Die Erzeugung der Mg⁺- oder In⁺-Ionen erfolgt durch Elektronenstoßionisation der jeweiligen thermischen Atomstrahlen in Nähe der Speicherbereiche. Magnesium wird am linken Ende^[22] der Falle (Ladezone 1 in Abb. 3.2) mit dem Strahl der ersten Elektronenkanone (EG₁) ionisiert, Indium wird von der zweiten Elektronenkanone (EG₂), welche der ersten auf der anderen Fallenseite gegenüber steht, am rechten Ende (Ladezone 2 in Abb. 3.2) ionisiert.

6.5.2.1 Atomofen

Ausgehend vom Problem der Kontaktpotentiale (siehe Kapitel 3.1.1) war es nötig, eine Bedampfung der Fallenelektroden durch die Atomstrahlen weitestgehend zu vermeiden. Dafür kommen mehrere Methoden in Betracht.

Da sich alle Atomöfen auf derselben Halterung befinden, musste man eine Abschirmung wählen, die für alle Atomstrahlen wirkt. Eine sehr elegante Lösung wäre, die Strahlen so abzuschneiden, daß sie oben und unten die Elektroden nicht berühren, aber seitlich

^[22] Von der Abbildungsoptik aus gesehen.

weniger beeinträchtigt werden^[23]. Dazu wären aber Langlöcher vonnöten gewesen, welche in der notwendigen Größe von 0,2 mm von unserer Werkstatt nicht anzufertigen waren. Deshalb entschlossen wir uns, jeden Atomstrahl einzeln mit Blenden zu kollimieren. Im folgenden werden zwei verschiedene Realisierungsmöglichkeiten, entweder mit einer oder zwei Blenden vorgestellt.

Zwei Blenden Wenn ein Atomstrahl, so wie er aus einem Atomofen herauskommt, von einer Blende, d.i. ein Bohrloch mit Durchmesser M durch ein Material der Dicke D , kollimiert wird, entsteht ein Kernstrahl (in Anlehnung an das optische Analogon Kernschatten) und ein Reststrahl mit nach außen abfallender Intensität. Bei der Realisierungsmöglichkeit mit zwei Blenden (siehe Abb. 6.12) ist die erste Blende mit Durchmesser $D = 0,6$ mm nach dem Atomofen zur groben Kollimierung. Die zweite Blende mit Durchmesser $D = 0,2$ mm schneidet aus dem Kernstrahl einen Teil aus, welcher dann zur Ladezone gelangt.

Der Atomofenhalter kann bis zu 4 Öfen halten, von denen 2 auf die linke Laderegion (negatives z) zielen (Magnesium), die anderen beiden auf die rechte (Indium, positives z). Auf diese Weise werden Kontaktpotentiale zwischen Magnesium und Indium vermieden.

Der ganze Aufbau sitzt auf einer Macorplatte, welche auf die obere Stahlplatte (siehe Abb. 6.8) an der Stelle AOH mit 2 Schrauben befestigt ist. An der Macorplatte wird vorne die zweite Blende mit 4 Löchern befestigt. Da diese Blende aus VA gefertigt wurde, ist es nicht möglich, beliebig kleine Bohrungen schräg durch das Material, d.h. mit Winkeln zur Oberfläche des Materials anzufertigen. 0,2 mm ist an der unteren Skala des technisch Möglichen mit konventionellen Methoden. Dazu wurde mit einem 1,3 mm dicken Bohrer bis zu einer Wanddicke von ca. 0,3 mm vorgebohrt und der Rest mit dem vorgegebenen Durchmesser von 0,2 mm durchgebohrt. Zur optimalen Justage wurde die zweite Blende mit einer Schwalbenschwanzverbindung in die vertikale Richtung über eine Schraube mit Feder justierbar gemacht. Das erleichterte die Justage der beiden Blenden erheblich. Mit Hilfe eines HeNe-Lasers justiert man nacheinander durch die 4 Löcher, kontrolliert, ob

^[23] Diese Realisierungsmöglichkeit ist am NIST in der Wineland-Gruppe gewählt worden.



Abbildung 6.12: Atomofenhalter mit 2 Blenden. Im Vordergrund erkennt man 3 Atomöfen, welche durch die 4 Schrauben kontaktiert werden. Die linke hintere Schraube ist auf Masse gelegt, bei den 3 anderen kann ein individueller Heizstrom angelegt werden. Dahinter ist die erste Blende mit 4 Bohrungen zu sehen. Das Metallstück mit den Bohrungen ist mit Hilfe einer Schwalbenschwanzführung in einem an die untere Macorplatte geschraubten Metallstück in vertikaler Richtung frei justierbar. Dies ist sehr hilfreich bei der Justage der Atomofenstrahlen durch die Fallenelektroden. Ganz im Hintergrund kann man die zweite Blende erkennen. Von den insgesamt vier Bohrungen kann man jedoch nur 2 erkennen. Auf der dem Leser zugewandten Seite handelt es sich um Vorbohrungen, die einen Durchmesser von 1 mm besitzen. Auf der dem Leser abgewandten Seite verjüngen sich diese Bohrungen zu einem Durchmesser von lediglich 0,2 mm.

der Laserstrahl an der richtigen Stelle durch die Fallenelektroden tritt und positioniert anschließend die Öfen entlang des Laserstrahls. Der Durchmesser des Atomstrahls an der Laderegion berechnet sich gemäß folgender Formel

$$D = 2 \left(\frac{d_2}{2} + \frac{d_1 + d_2}{2A} E \right) , \quad (6.4)$$

wobei D der Strahldurchmesser an der Laderegion, $d_{1/2}$ die Durchmesser der ersten und zweiten Blendenlöcher sind, A der Abstand zwischen Anfang des ersten Lochs und Ende des zweiten Lochs und E der Abstand vom Ende des zweiten Lochs bis zur Laderegion ist. Mit $d_1 = 0,6$ mm und $d_2 = 0,2$ mm ergibt sich im Experiment ein Durchmesser D

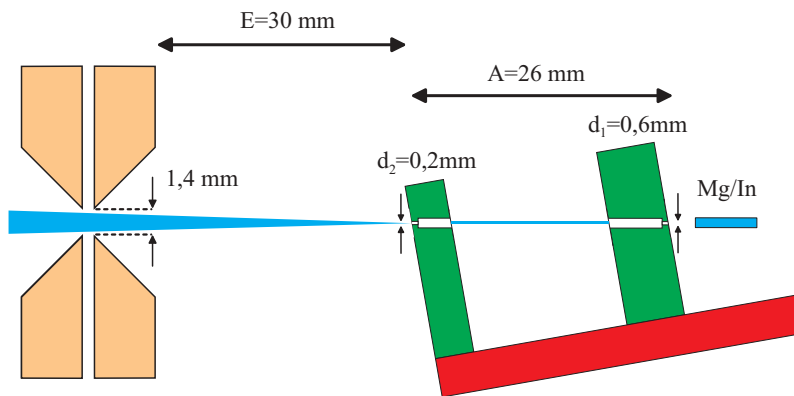


Abbildung 6.13: Schematische Zeichnung des Atomofenhalters mit 2 Blenden.

von ca. 1 mm. Dies ist etwas kleiner als der minimale Abstand zweier Elektroden von ca. 1,4 mm, so daß Verunreinigungen der Elektroden in guter Näherung vermieden werden können (siehe auch Abb. 6.13).

Die Atomöfen bestehen jeweils aus einem Tantal-Röhrchen, das an einem Ende verschlossen ist und einem Magnesium- bzw. Indium-Draht mit natürlicher Isotopenzusammensetzung gefüllt ist. An diese Röhrchen werden 0,2 mm dünne Tantaldrähte punktgeschweißt, durch die Ströme zwischen von 0,8 A und 1,2 A für Magnesium (In 2,3 A) fließen. Daraufhin erhitzen sich die Drähte und damit die Röhrchen soweit, daß Mg- bzw. In-Atome verdampfen. Im Experiment konnten gute Laderaten bei einem Strom von 0,97 A und einer Heizzeit von 2 Minuten erzielt werden, wobei nur in den letzten 30 Sekunden die Elektronenkanone angeschaltet wird.

Eine Blende Aufgrund des geringen atomaren Flusses bei der Verwendung von zwei Blenden, erscheint es vorteilhaft, zunächst nur eine Blende zu benutzen. Um denselben Atomstrahldurchmesser zu erreichen, kann man folgende Maßnahme ergreifen. Man bringt den Atomofen einfach weiter entfernt von der Blende an als im Fall zweier Blenden. Aufgrund der endlichen Ausdehnung des Atomofens wird somit dieselbe Kollimation wie im Fall zweier Blenden erreicht und die kritische Justage von 2 Blenden wird wesentlich erleichtert. Eine schematische Zeichnung zeigt Abb. 6.14.

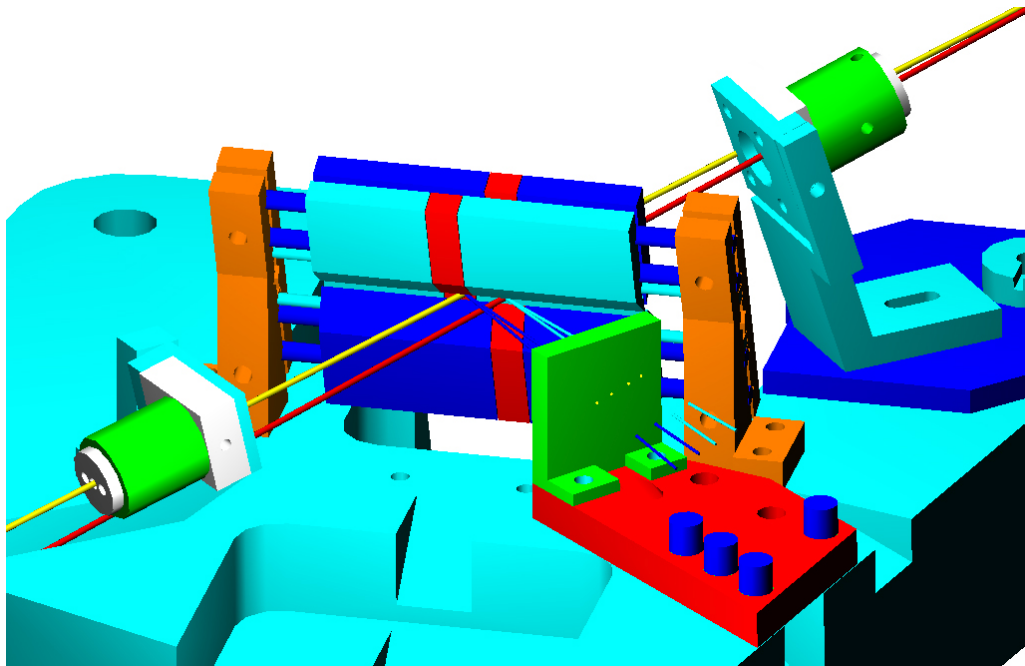


Abbildung 6.14: Schematische Zeichnung des Fallenaufbaus. Zu sehen sind die beiden Elektronenkanonen, der Atomofenhalter mit 4 möglichen Atomöfen und der Fallenthalter inklusive Fallenelektroden. In den beiden linken Öfen sind Magnesium vorhanden, welche durch die beiden linken Bohrungen auf die linke Ladezone der Falle zielt. Dort wird der Atomstrahl durch die linke Elektronenkanone ionisiert. In den beiden rechten Öfen ist Indium, welches in der anderen Ladezone geladen und von der zweiten Elektronenkanone ionisiert werden kann.

6.5.2.2 Elektronenkanonen

Die Erzeugung des für die Ionisation der Atomstrahlen benötigten Elektronenstrahlen erfolgt mit Hilfe von Elektronenkanonen. In allen Ionenfallen-Experimenten am Max-Planck-Institut für Quantenoptik wurden bisher Elektronenkanonen mit einem Wehneltzyliner eingesetzt, die einen sehr schlecht gebündelten Elektronenstrahl erzeugen. Mit einem Elektronenstrahl, der am Ort der Ionisation auf ca. 1 mm fokussiert ist, könnte die Ionisationseffizienz um mehrere Größenordnungen gesteigert werden. Dadurch wäre es weiter möglich, die Öfen bei noch niedrigeren Strömen zu betreiben. Im Rahmen dieser Doktorarbeit wurden 2 solche fokussierende Elektronenkanonen gebaut und getestet. Zuerst werden die im Einsatz befindlichen herkömmlichen Elektronenkanonen beschrieben, im Anschluß daran die neuen fokussierenden Elektronenkanonen.

Alte Elektronenkanone Jede der beiden im Experiment verwendeten Elektronenkanonen besteht aus einem $100\ \mu\text{m}$ dicken, thorierten Wolfram-Draht, der zu einer Spitze gebogen ist. Dieser Draht wird mit einem Strom von $1,6\ \text{A}$ geheizt. Die emittierten Elektronen werden über eine Potentialdifferenz von ca. $135\ \text{V}$ zwischen dem Wolfram-Draht (Kathode) und einer durchbohrten Anode beschleunigt. Zur Fokussierung des Elektronenstrahls wird ein Wehnelt-Zylinder verwendet, der über einen $330\ \Omega$ -Widerstand mit der Wolfram-Kathode verbunden ist.

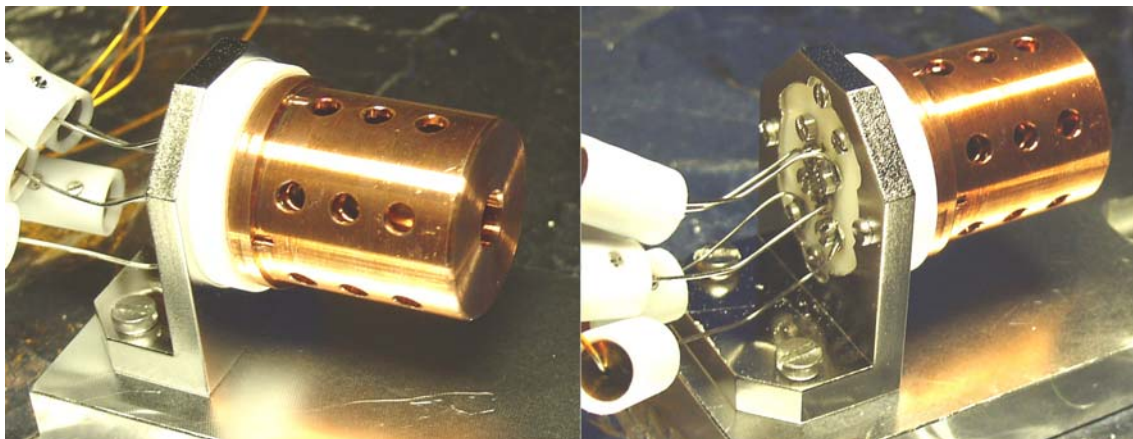


Abbildung 6.15: *Bilder der neuen fokussierende Elektronenkanone.*

Neue Elektronenkanone Die Tatsache, daß bei Verwendung der oben beschriebenen Elektronenkanonen nicht nur direkt an den angrenzenden Elektroden, sondern auch an allen anderen, weit entfernten Elektroden ein Elektronenstrom gemessen werden kann, zeigt, daß diese Art der Elektronenkanone keine besonders guten Fokussiereigenschaften besitzt. Mit einer fokussierenden Elektronenkanone könnten mehrere Umstände verbessert werden. Zum einen wäre die Ionisationseffizienz, d.i. die Anzahl ionisierter Atome pro Elektronenstrahlstrom, am Ort der Ionisation, d.h. dort, wo Atomstrahl und Elektronenstrahl sich kreuzen, um mehrere Größenordnungen erhöht. Andererseits könnten statische

Aufladungen von Keramiken und Beobachtungsfenstern weiter drastisch reduziert werden. Zwar wurde im experimentellen Aufbau angestrebt, möglichst wenig dielektrische Teile zu benutzen und, falls dies nicht vermieden werden konnte, diese abzuschirmen, jedoch würden etwaige Aufladungen zu Abklingzeiten der Störpotentiale von Minuten bis zu Stunden führen.

Die neue Elektronenkanone soll einerseits Ionisation von Restgasatomen und -molekülen unterdrücken, die ebenfalls zeitgleich mit Magnesium und Indium stabil gespeichert werden können und als Dunkelionen die Kühl- und Fluoreszenzrate verringern. Andererseits sollen aber Magnesium- und Indiumionen mit hoher Ausbeute einfach ionisiert werden.

Ausgehend von einer Elektronenkanone, wie sie am Lehrstuhl Habs am Experiment über kristalline Ionenstrahlen von Dr. Tobias Schätz [185] verwendet wurde, wurde eine neue entsprechende Elektronenkanone mit verkleinerten radialen Dimensionen konzipiert und gebaut, um den kleinen Abmessungen im vorhandenen Ionenfallenaufbau Rechnung zu tragen.

Als Elektronenquelle der Elektronenkanone (siehe Abb. 6.15, 6.16) dient ein mit ca. 1,1 A geheizter, unthorierter Wolframdraht der Dicke 0,2 mm, der über einer Rasierklinge zu einer Spitze gebogen wurde. Die emittierten Elektronen bilden vor dem Wolframdraht eine Ladungswolke, die als virtuelle Kathode zu verstehen ist. Die ringförmige, um die Drahtspitze gelegte Pierceelektrode kompensiert die Raumladung der Wolke, von der die Elektronen von den nachfolgenden Beschleunigungs- und Fokussierspannungen abgezogen werden. Diese bestehen aus 3 Zylindern (siehe Abb. 6.15, 6.16), welche auf einer Macorplatte befestigt sind. Der äußere Zylinder liegt auf Masse, an die beiden inneren Zylinder können verschiedene DC-Spannungen gelegt werden (U_{z1} und U_{z2}). Somit kann man den Elektronenstrahl beschleunigen und gleichzeitig seine Einhüllende formen.

Jeder Zylinder ist auf einer Seite offen und besitzt auf der anderen Seite ein rundes Loch unterschiedlichen Durchmessers. Die zwei äußeren Zylinder sind aus sauerstofffreiem Kupfer gefertigt, wohingegen der innere aus Molybdän besteht, da er direkt an den Glühdraht grenzt und somit höheren Temperaturen ausgesetzt ist. Die Pierceelektrode ist rund und besitzt ebenfalls ein rundes Loch, in dem knapp unterhalb der Lochebene die Spitze des Glühdrahtes sitzt. Die Kontaktierung aller Spannungen erfolgt durch Schrauben, welche durch Löcher in der Macorplatte in die Gewinde der Zylinder geschraubt werden.

Über den ganzen oben beschriebenen Aufbau wird der Vakuumtopf (siehe Abb. 6.18, 6.19)

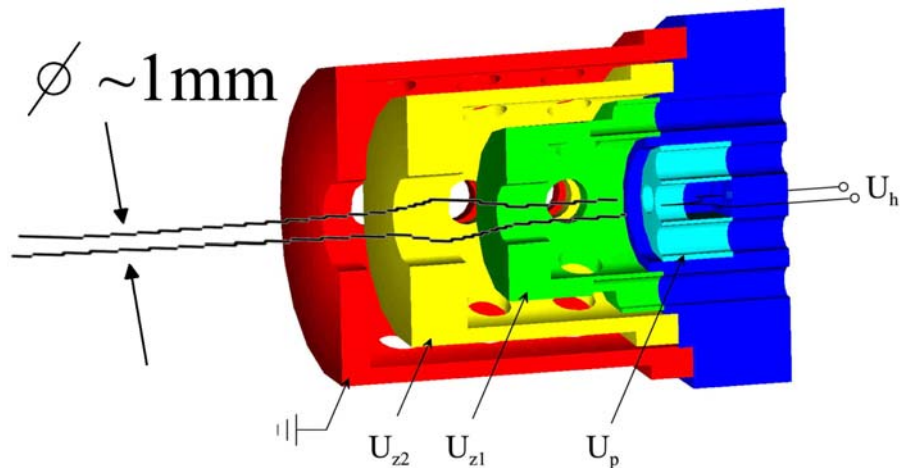


Abbildung 6.16: Schematische Zeichnung der neuen fokussierenden Elektronenkanone. Auf der rechten Seite erkennt man das Macorstück, an das sowohl die Pierce-Elektrode (U_p) als auch die 3 Zylinder geschraubt werden. Der äußere Zylinder liegt auf Masse, an Zylinder 1 und 2 werden variable Spannungen angelegt (siehe auch Abb. 6.17). Ein durch U_h geheizter Glühdraht wird zu einer Spitze gebogen, welche ungefähr am Ende der Pierceelektrode sitzt. Ein typisches Elektronenstrahlprofil ist angedeutet, welches sich nach Ende des äußeren Zylinders auf ca. 1 mm fokussieren läßt. Die Abmessungen wurden so gewählt, daß der Fokus im Fallenmittelpunkt läge.

gesetzt, wobei er an den Bodenflansch festgeschraubt wird. Auf fast allen Flanschen sitzen antireflexbeschichtete Fenster für 230,6 und 280 nm. Die Verbindungslinie zwischen Flansch Nummer 6 und 14 ist waagrecht. Laser 1 wird durch Fenster Nummer 6 auf die Falle gerichtet, wobei er entlang der Fallenachse läuft. Die Falle ist von Flansch 6 aus gesehen um 18° entgegen den Uhrzeigersinn geneigt. Laser 2 ist wie Laser 1 ebenfalls horizontal und wird durch Fenster Nummer 7 seitlich durch die Falle justiert. Flansch 1 dient der Beobachtung durch die Kamera oder einen Photomultiplier. An den oberen DN 160 CF-Flansch ist die Titansublimation-Ionengetterpumpe angeschlossen. Flansche 8 und 12 können für 2 Ramanlaser benutzt werden, bei denen der Differenzenwellenvektor Δk entlang der Fallenachse liegt, was für Kühl- und Quantenoperationen, welche nur in der z-Richtung sensitiv sein sollen, vorteilhaft ist. Alternativ kann zur Einzelionenansprache Flansch 10 in Kombination mit Flansch 6 benutzt werden. Flansche 7 und 17 besitzen zur Zeit keine Funktion, sie wurden angefertigt für zusätzliche Optionen wie z.B. Massenspektrometer etc. Auf Flansch Nummer 3 wird zur Druckmessung in der Kammer ein Ionivac eingesetzt.

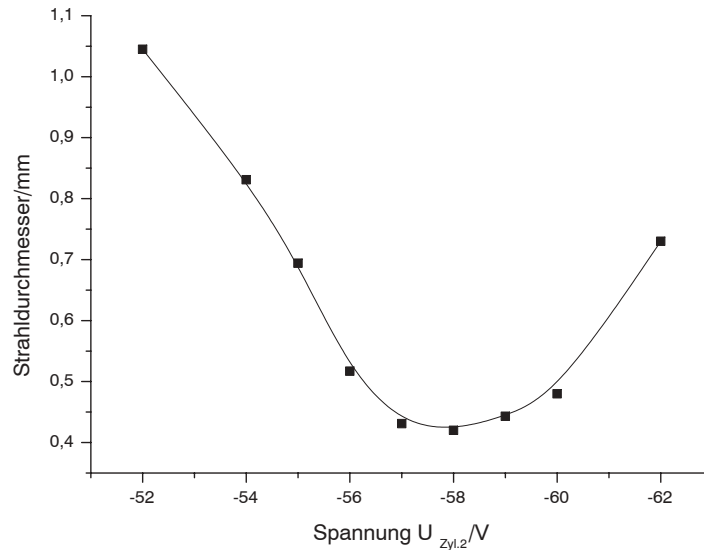


Abbildung 6.17: *Abhängigkeit des Fokusbereichs der neuen Elektronenkanone von der Zylinderspannung $U_{Zyl,2}$. $U_{Zyl,1}$ betrug bei dieser Messung -20 V bei einer Beschleunigungsspannung von $-68,1$ V. Der Heizdraht wurde bei $1,13$ A betrieben. Das Profil des Elektronenstrahls wurde bei einem Abstand von $33,8$ mm vom Ende des äußersten Zylinders vermessen. Dieser Abstand entspricht der im Experiment vorgesehene Entfernung zum Fallenmittelpunkt. Ein Gaußfit an das so erhaltene Profil ergab die aufgetragenen Durchmesser.*

6.6 Lasersystem

Zur Realisierung des Mg^+/In^+ -Quantencomputers werden Laserstrahlen der Wellenlängen $\lambda = 280$ nm und $\lambda = 230,6$ nm benötigt. Diese werden mit zwei Farbstofflasersystemen und mehreren Frequenzverdopplungseinheiten erzeugt (siehe Abb. 6.20).

Die Wellenlängen der Übergänge $3\ ^2S_{1/2} \rightarrow 3\ ^2P_{1/2,3/2}$ sind bei den Isotopen $^{24}Mg^+$ und $^{25}Mg^+$ ungefähr 280 nm. Zur Erzeugung der Laserstrahlen bei dieser Wellenlänge verwendet man zwei frequenzverdoppelte Farbstofflaser bei $\lambda = 560$ nm. Einen zur Dopplervorkühlung (P_1/P_2) und Nachweis (D) und einen weiteren für die Ramanlaser (R_1/R_2). Dabei ist die Frequenzdifferenz der Dopplerkühlungsstrahlen P_1/P_2 und der Ramanlaserstrahlen R_1/R_2

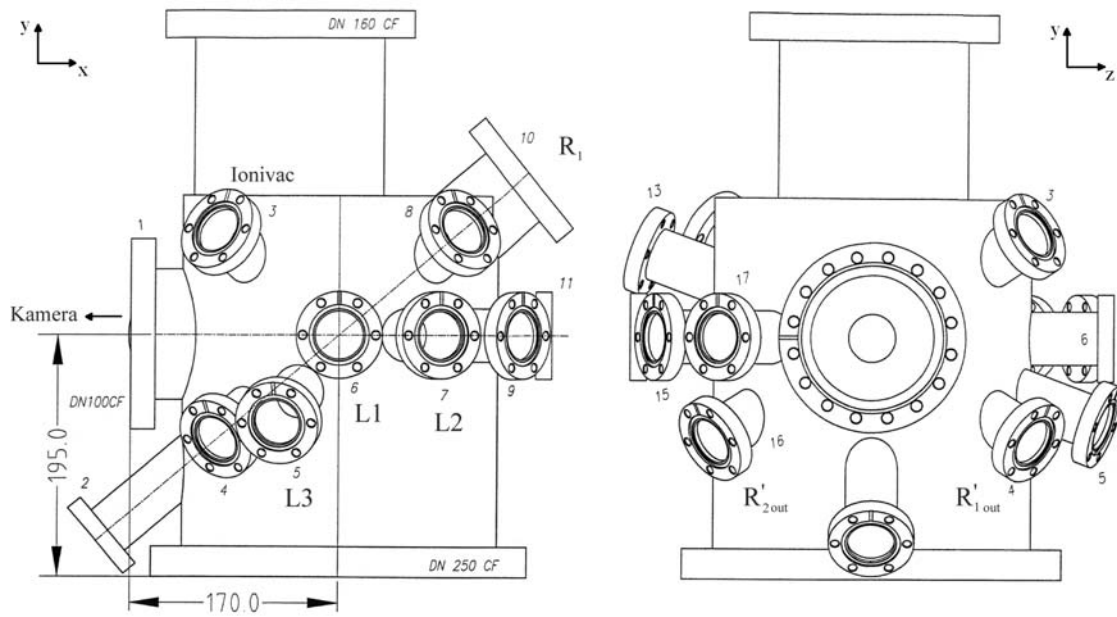


Abbildung 6.18: DN 250 CF Topf, welcher auf dem Bodenflansch angeschraubt wird. Die Ionenfalle befindet sich auf Höhe des Flansches Nummer 6. Am oberen DN 160 CF wird die Titansublimation-Ionengetterpumpe angeschlossen. An den Flanschen steht deren Verwendungszweck geschrieben. Flansche 5, 6 und 7 werden als Eingang für die 3 Dopplerkühlungslaser verwendet. Die Eingänge für Laser R'_1 ist Flansch Nummer 12 und für Laser R'_2 ist Flansch Nummer 8. Flansch 10 wird zur Einzelionenansprache für R_1 verwendet. Flansch 1 dient zur Beobachtung und Abbildung mit Kamera oder Photomultiplier. Auf Flansch 3 sitzt ein Ionivac zur Druckmessung. Flansche 9 und 17 sind für zusätzliche Anschlüsse wie z.B. Massenspektrometer etc. vorgesehen. Durch Flansch 11 kann man mit einem HeNe-Laser die Position der Kamera durch die Fallenelektroden grob vorjustieren.

gegeben durch die Grundzustandhyperfeinaufspaltung Δ_{HFS} von $^{25}\text{Mg}^+$

$$\nu_{P_1} - \nu_{P_2} = \nu_{R_1} - \nu_{R_2} = \omega_0 \simeq 1,8 \text{ GHz.} \quad (6.5)$$

Eine solch große Differenz kann nicht mit einem UV-AOM erreicht werden. Deshalb wählte man einen AOM bei $\lambda = 560 \text{ nm}$ in double-pass-Anordnung, der bei 450 MHz betrieben wird. Durch die nachfolgende Frequenzverdopplung beträgt die Differenz der jeweiligen Laserstrahlen viermal 450 MHz, was gerade Δ_{HFS} entspricht.

Die Strahlen, z.B. P_1 und R_1 , können nicht von ein und demselben Laserstrahl erzeugt werden, da die Übergänge der jeweiligen Strahlen in die unterschiedlichen Feinstrukturzustände $3^2P_{1/2,3/2}$ des 3 P-Dubletts von $^{25}\text{Mg}^+$ führen, und diese eine Frequenzdifferenz von

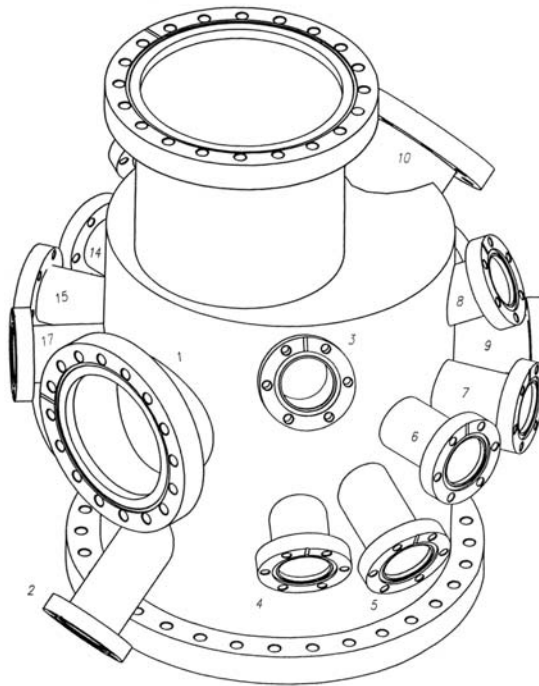


Abbildung 6.19: *Perspektivische Ansicht des Vakuumtopfes.*

2,7 THz aufweisen, ca. 1000 mal größer als die Grundzustandshyperfeinaufspaltung. Der Laser bei $\lambda = 230,6$ nm wird durch einfache Frequenzverdopplung eines Farbstofflasers der Wellenlänge $\lambda = 461,3$ nm generiert.

6.6.1 Magnesium-Farbstofflaser und Frequenzverdopplung

Zur Erzeugung von Laserlicht der Wellenlänge $\lambda = 560$ nm wurde ein Ring-Farbstofflasersystem von Spectra Physics^[24] verwendet. Mit einem Argonionenlaser^[25] im sichtbaren Multiline-Betrieb (Emission zwischen 454 und 529 nm) bei 25 W betrieben, können bis zu zwei Farbstofflaser mit je 12,5 W gepumpt werden. Bei dem Spectra-Physics-Laser ist der verwendete Farbstoff Rhodamin 110^[26], von dem 0,68 g in 1,55 l Ethylenglykol gelöst und auf ca. 8-10 °C gekühlt wird. Der Farbstoff wird

[24] *Spectra Physics, Modell 380 D*

[25] *Coherent, Innova 400*

[26] *Lambda Physik, Rhodamin 110 LC5700 - 1g*

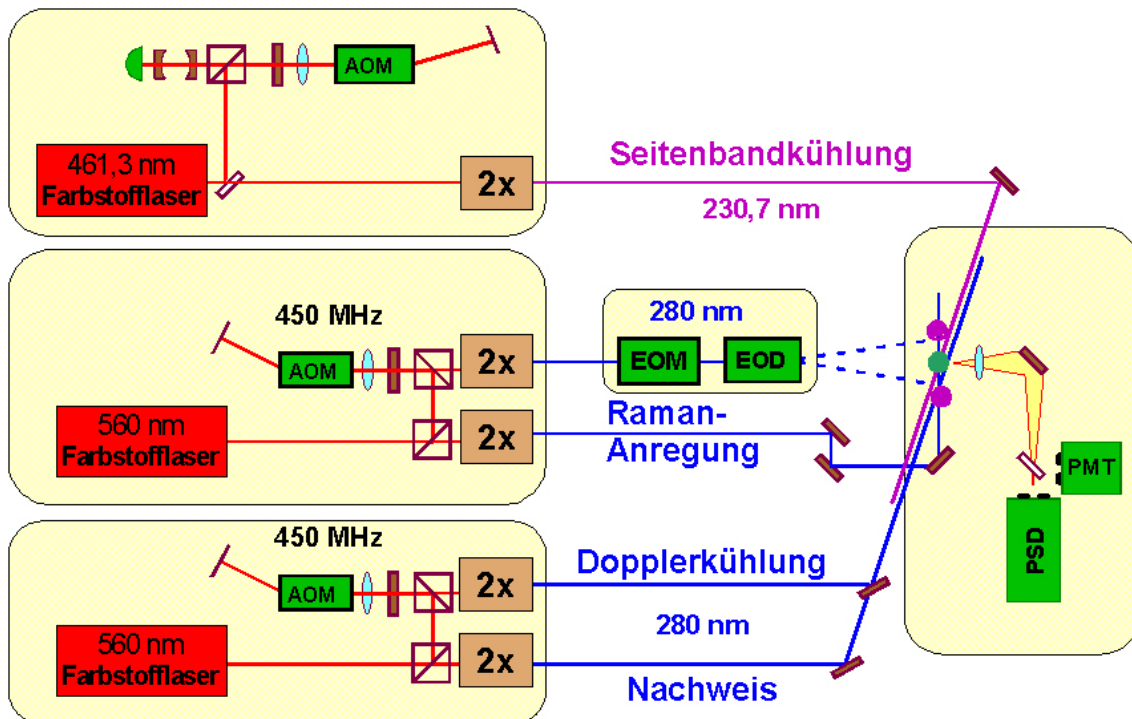


Abbildung 6.20: Schematischer Aufbau der Farbstofflasersysteme, Verdopplungseinheiten und Abbildungsoptik. Der Farbstofflaser bei 461,3 nm dient der Erzeugung der Laserstrahlung zur Seitenbandkühlung von Indium. Die beiden anderen Farbstofflaser bei 560 nm erzeugen die Laserstrahlen, welche für Magnesium benötigt werden.

bei 8,0 bar durch eine Düse aus geschliffenen Edelstahl gepumpt. Durch Verwendung eines mit Argongas betriebenen Dämpfungsgliedes konnten von der Pumpe kommende Schwingungen gedämpft werden, so daß der Laser stabiler betrieben werden konnte.

Mit frischen Farbstoff konnten bis 1,3 W Lichtleistung erreicht werden. Nach ca. 30-40 Betriebsstunden ist die Leistung auf ca. 400-500 mW gefallen und es ist kein stabiler Betrieb mehr möglich, so daß der Farbstoff gewechselt werden muß.

Die Stabilisierungselektronik ist äußerst komplex. Vereinfacht ausgedrückt wird die Laserfrequenz mittels eines Piezospiegels (hohe Frequenzen) und zweier Galvoplatten (niedrige Frequenzen) auf einen temperaturgeregelten Fabry-Perot-Resonator stabilisiert. Es existiert noch ein zweiter Fabry-Perot-Resonator mit einer niedrigeren Finesse, der jedoch nur bei größeren Frequenzsprüngen eingreift. Durch diese Regelung ergibt sich

eine Linienbreite von ca. 1 MHz. Die absolute Frequenzbestimmung des Laserlichts erfolgt durch Spektroskopie an Joddampf, welcher sich in einer Glaszelle befindet. Dabei nutzt man aus, daß die halbe Resonanzfrequenz des $^{24}\text{Mg}^+$ -Ions mit der Frequenz einer dopplerverbreiterten Jodlinie übereinstimmt.

Die nachfolgende Frequenzverdopplung kann in vier verschiedenen Verdopplungsresonatoren erfolgen, die alle nach dem Hänsch-Couillaud-Prinzip [186] aktiv auf die Laserfrequenz stabilisiert werden. Zur Erzeugung des zur Dopplerkühlung von $^{24}\text{Mg}^+$ verwendeten Laserlichts wird der leistungsstärkste Resonator verwendet. Dieser erzielt mit einem 57 mm langen KDP^[27]-Kristall bis zu 30 mW UV-Lichtleistung. Der den Verdopplungsresonator verlassende UV-Strahl ist stark astigmatisch und weist Interferenzstreifen auf. Nach einer Astigmatismuskompensation durch eine Zylinderlinse und einer räumlichen Filterung erhält man einen gaußförmigen Strahl mit einer Leistung bis zu 3 mW.

6.6.2 Indium-Laser

Das zur Kühlung der Indiumionen verwendete Lasersystem besteht aus einem Farbstoffringlaser, der bei einer Wellenlänge von $\lambda = 461,3$ nm betrieben wird. Er befindet sich Nachbarlabor wird durch ein Loch in der Wand in das Labor mit dem Experiment geschickt. Ein Frequenzverdopplungsresonator auf dem Tisch, auf dem auch die Vakuumkammer montiert ist, wird zur Erzeugung der Wellenlänge $\lambda = 230,6$ nm verwendet.

6.6.2.1 Indium-Farbstofflaser

Der Ringfarbstofflaser^[28] wird von einem Argon-Ionen-Laser^[29] mit 4,5 Watt Lichtleistung gepumpt, welcher im UV zwischen 330 und 360 nm emittiert. Damit wird der Farbstoff Stilben 3 gepumpt, der mit einer Konzentration von 1 g/ℓ in Ethylenglykol gelöst und auf eine Temperatur von 9 °C gekühlt ist. Die typische Ausgangsleistung des Farbstofflasers beträgt 80 mW im Einmodenbetrieb, wobei nach einer Betriebsdauer von 50-60 Stunden

^[27] *Kaliumdihydrogenphosphat*

^[28] *Coherent, CR 699-21*

^[29] *Coherent, Innova 200, 20/4*

der Farbstoff gewechselt werden muß.

Zwei unterschiedliche Methoden der Frequenzstabilisierung stehen zur Auswahl. Für die Dopplerkühlung der Indiumionen genügt die kommerzielle Stabilisierung auf einen temperaturstabilisierten externen Referenzresonator geringer Finesse ($F \approx 2$). Das gewonnene Regelsignal wird an zwei Stellelemente im Laserresonator, eine Galvoplatte und einen piezogesteuerten Resonatorspiegel geleitet. Der Laser weist eine Linienbreite von 2 MHz auf kurzer Zeitskala (sowie eine Langzeitstabilität von 10 MHz auf). Um Seitenbandkühlung durchführen zu können, muß die Linienbreite des Lasers allerdings vergleichbar oder kleiner als die natürliche Linienbreite des Indium- $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$ -Übergangs von 360 kHz sein. Gleichzeitig muß eine Langzeitdrift der Laserfrequenz verhindert werden. Dies wird durch die Stabilisierung auf einen Resonator sehr hoher Finesse ($F \approx 1000$) mit Hilfe des Pound-Dreier-Hall-Verfahrens [187, 188] erreicht. Dafür wird ein elektro-optischer Modulator (EOM) als schnelles Stellglied in den Resonator des Farbstofflasers eingebaut. Mit einer Regelbandbreite von 1,6 MHz erreicht man eine Linienbreite von kleiner als 3 kHz. Die Langzeitstabilität wird durch den extrem kleinen thermischen Ausdehnungskoeffizienten des verwendeten Resonatormaterials^[30] erzielt, sowie durch die Aufhängung des Resonators in einem Ultrahochvakuumgefäß, das aktiv temperaturstabilisiert wird. Es verbleibt eine langsame Drift der Laserlinie von 140 kHz/h [146]. Als Frequenzreferenz dient das dopplerfreie Absorptionssignal des Tellurmoleküls, welches mit Hilfe der Sättigungsspektroskopie an einer auf 480 °C geheizten Tellurzelle gewonnen wird.

6.6.2.2 Frequenzverdopplung

Zur Frequenzverdopplung wurde ein Verdopplungsresonator mit einem β -Bariumborat-Kristall (BBO) aufgebaut [8]. Der Überhöhungsresonator wird mit Hilfe der Hänsch-Couillaud-Methode [186] auf die Frequenz des Farbstofflasers stabilisiert. Die Temperatur des BBO-Kristalls wird auf 55 °C stabilisiert. Bei der direkten Übertragung durch die Luft stehen 80 mW für die Verdopplung zur Verfügung. Damit erhält man eine UV-Leistung von 100 μ W.

^[30] *ULE = Ultra Low Expansion Titanium Silicate*

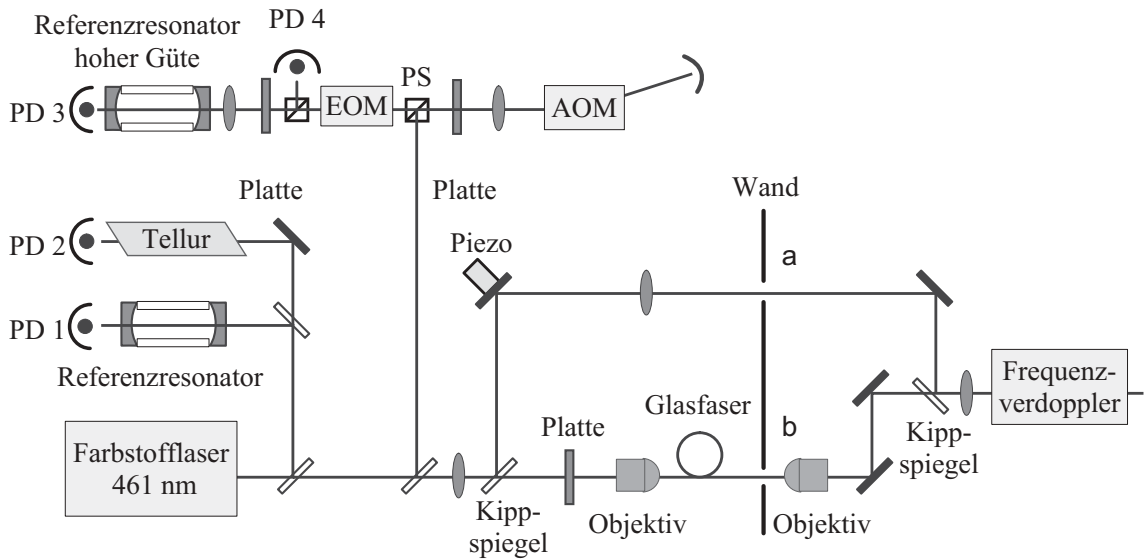


Abbildung 6.21: Indium Lasersystem. PS: Polarisationsstrahlteiler, PD: Photodiode, EOM: Elektro-optischer Modulator, AOM: Akusto-optischer Modulator. Die Wege a (freier Strahl) und b (Glasfaser) werden im Experiment alternativ benutzt.

6.7 Laserfokussierung in die Falle

Dieses Teilkapitel behandelt die im Experiment benötigten Laserstrahlen und diskutiert ihre Funktion für den Mg^+/In^+ -Quantencomputer.

Wieviele Laserstrahlen benötigt werden, hängt davon ab, ob man $^{24}\text{Mg}^+$ oder $^{25}\text{Mg}^+$ verwendet. Falls $^{24}\text{Mg}^+$ verwendet wird, benötigt man aufgrund der fehlenden Hyperfeinstruktur keinen Rückpumplaser wie im Falle von $^{25}\text{Mg}^+$ (vgl. Abb. 1.5), wo ein zusätzlicher Laser einschließlich Verdopplungsresonator gebraucht wird. In beiden Fällen würde ein Laserstrahl, der Winkel mit allen Hauptachsen der Ionenfalle besitzt, ausreichen, jedoch wird im Experiment gewöhnlich mit 2 Lasern (L1 und L2 (siehe Abb. 6.22)) gearbeitet, wobei einer entlang der Fallenachse (L1) eingestrahlt wird, und der andere (L2) Winkel mit allen Fallenachsen einschließt. Ein zusätzlicher dritter Laser (L3) kann ebenfalls eingesetzt werden. Insbesondere zur Mikrobewegungskompensationmethode mit phasenkorrelierter Detektion der Photonen sind 2 Laserstrahlen, die unterschiedliche Winkel in radialer Richtung der Ionenfalle besitzen, notwendig (siehe Kapitel 7.3.5).

Weiterhin werden für Ramanübergänge, die Rabioszillationen auf dem Qubit-Übergang

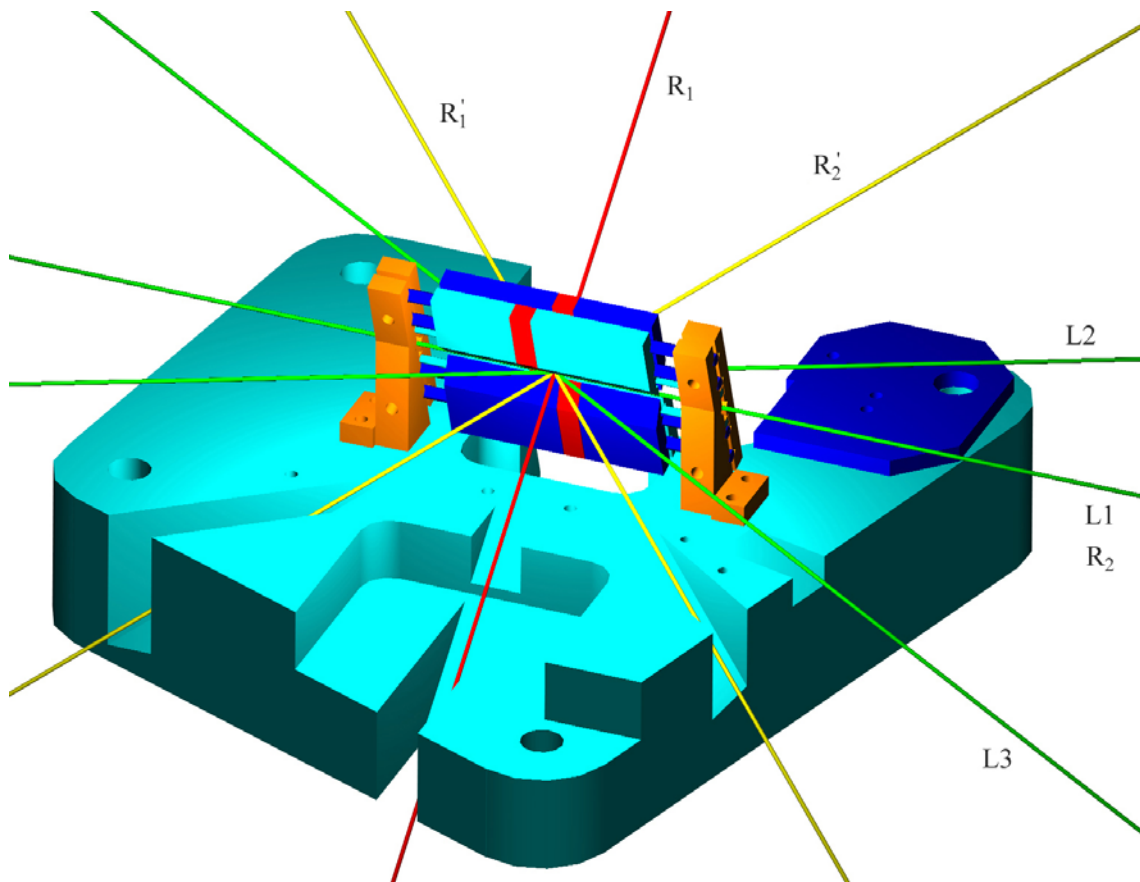


Abbildung 6.22: Schematische Darstellung der Laserstrahlgeometrie durch den Fallenaufbau.

(in $^{25}\text{Mg}^+$) treiben, 2 weitere Laser (R_1/R_2 oder R'_1/R'_2) benötigt. R_1/R_2 bezeichnet die Situation, in der R_1 über alle Ionen entlang der Achse eingestrahlt wird und R_2 zur Einzelionenansprache von der Seite kommend auf ein einzelnes Ion fokussiert wird. Im Falle von R'_1/R'_2 treffen die Strahlen im Vergleich zu R_1 um $\pm 45^\circ$ gedreht auf den Ionenkristall. Dabei kann ein Strahl den ganzen Kristall bescheinen, während der andere nur ein einzelnes Ion trifft. Diese Situation hat gegenüber dem R_1/R_2 -Fall den Vorteil, daß hier der Differenzvektor Δk der beiden Laser in der z -Achse liegt. Dies bewirkt, daß Ramanübergänge keine Heizung der radialen Moden erzeugen und nur - wie erwünscht - Übergänge zwischen verschiedenen Oszillatorniveaus der z -Schwingung getrieben werden.

6.8 Einzelionenansprache

Für die gezielte Anregung einzelner Ionen bei der Quanteninformationsverarbeitung muß der Fokus des Laserstrahls innerhalb von wenigen μs von einem Ion zu einem anderen bewegt werden. Hierzu wird ein elektro-optischer Deflektor^[31] (EOD) verwendet. Er besitzt eine Winkelablenkung von $1,80 \text{ mrad/kV}$, die auf einer Zeitskala von einigen μs variiert werden kann. Für eine Realisierung mit akustooptischen Modulatoren (AOM) siehe [189].

6.8.1 Elektrooptischer Deflektor

Für eine Realisierung von Quantencomputerrechnungen mit Ionenketten nach Cirac und Zoller [1] ist es notwendig, gezielt Rabi-oszillationen an einzelnen Ionen durchführen zu können. Im Fall von Ramanübergängen muß man dazu mindestens einen der beiden Ramanstrahlen auf ein beliebiges Ion fokussieren können, um es so einzeln ansprechen zu können. Im Experiment kann ein zur Strahlablenkung ein elektrooptischer Deflektor (EOD) benutzt werden, welcher aus einem nichtlinearen Kristall besteht. Die physikalische Natur der Strahlablenkung ist verschieden von derjenigen, die in einem akustooptischen Modulator verwendet wird. Im Falle des EOD wird die Frequenz des durchtretenden Laserlichts nicht verändert, was der entscheidende Vorteil des EODs ist. Somit ist er die ideale Lösung zur Einzelionenansprache.

Der elektrooptische Deflektor ist ein Gerät zur schnellen Strahlablenkung im Submikrosekundenbereich. Seine Funktionsweise basiert physikalisch auf dem linearen, elektrooptischen Effekt, welcher auch Pockels-Effekt genannt wird. Da Quantencomputerrechnungen bzw. Quantenoperationen im allgemeinen sehr zeitkritisch sind, d.h. auf einer Zeitskala durchgeführt werden müssen, die kurz gegen die Dekohärenzzeit (in Ionenfallen in der Größenordnung von Millisekunden bis Sekunden) ist, muß der Wechsel des Laserstrahls von einem Ion auf ein anderes auf einer Zeitskala von Mikrosekunden erfolgen. Mechanische Geräte wie Piezos sind also dafür ungeeignet. Neben zahlreichen Effekten in nichtlinearen Kristallen wie Kerr-Effekt, Spannungsdoppelbrechung usw. soll hier der lineare elektrooptische Effekt oder Pockels-Effekt im Vordergrund stehen. Der im Kristall induzierte Brechungsindexunterschied ist hierbei linear zum angelegten Feld.

^[31] *SpectroLas, Model 30 (ADP)*

Die Strahlablenkung kann mit Hilfe des elektrooptischen Effekts auf verschiedene Art und Weise geschehen. Allen diesen Methoden ist jedoch gemeinsam, daß Strahlen, die an unterschiedlichen Stellen des Kristalls eintreten, verschiedene Phasenunterschiede aufgeprägt bekommen, was dann zu einer Ablenkung führt. Hier soll nur eine Art vorgestellt werden, für weitere sei auf meine Diplomarbeit verwiesen [190].

6.8.2 Quadrupolfeldanordnung

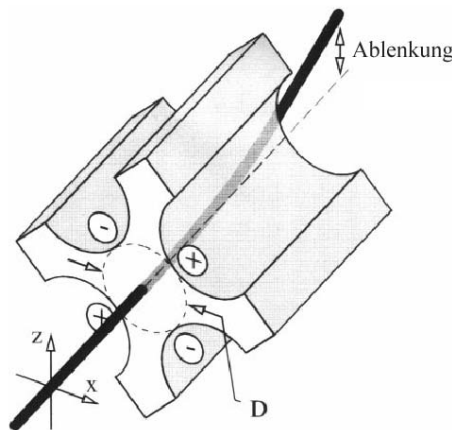


Abbildung 6.23: *Schema des Quadrupol-EOD. Vier Goldelektroden werden entlang der zylindrischen Oberflächen angebracht. Eine Strahlablenkung erfolgt in der angegebenen Richtung für einen in x-Richtung polarisierten Laserstrahl, falls eine hohe Spannung mit der angegebenen Polarität angelegt wird.*

Eine weitere auch kommerziell genutzte Anwendung ist der Quadrupol-EOD [191].

Die Funktionsweise des in Abb. 6.23 dargestellten Gerätes ist wie folgt: Durch das von den Goldelektroden erzeugte elektrische Quadrupolfeld wird eine elektrische Feldkomponente in x-Richtung erzeugt, die linear in z-Richtung variiert und in y-Richtung konstant ist. Es ist unmöglich dieses Feld zu erzeugen, ohne daß auch eine Restkomponente senkrecht dazu existiert. Die Kristallorientierung wurde deshalb so gewählt, daß diese Restkomponente in z-Richtung zeigt, für die der elektrooptische Effekt Null ist. Da so nur die x-Komponente n betrifft und da n eine lineare Funktion dieser Feldkomponente ist, so folgt, daß n auch linear mit z variieren wird. Dadurch wird ein in x-Richtung polarisierter Laserstrahl in z-Richtung abgelenkt, falls eine Spannung an den EOD gelegt wird.

Neuerlich wurde diese Form des EOD für eine besonders einfache und elegante Realisierung von Q-switching [192] eingesetzt. Bei diesem Experiment wurden Strahlablenkungen von 6 mrad/kV bei einer Wellenlänge von 1064 nm berichtet.

6.8.3 Zahl auflösbarer Punkte

Aufgrund der endlichen Apertur des Kristalls treten unweigerlich Beugungseffekte beim Durchtritt des Laserstrahls durch einen EOD auf. Die Zahl der maximal auflösbaren Punkte^[32] ist ein Maß dafür, wieviele Punkte vom Laser getrennt angesprochen werden können, ohne daß sie sich innerhalb der Strahltaile überlappen. Dies ist eine äußerst wichtige Kennzahl eines EODs, da sie bestimmt, ob die Ionen einer Kette bei einem bestimmten Abstand der Ionen untereinander noch getrennt angesprochen werden können oder nicht. Ein Gaußstrahl kann einen Kristall mit Höhe $D \geq 2w_0$ passieren. Falls wir $D = 2w_0$ setzen, ergibt sich die Zahl der auflösbaren Punkte N als Quotient aus Strahlablenkung und des Öffnungswinkels eines Gaußstrahls mit Strahltaile w_0 und zugehörigem Öffnungswinkel $\Theta_{beam} = \frac{\lambda}{\pi n_0 w_0}$ des Laserstrahls im Falle eines Doppelprismas zu

$$N = \frac{\Theta}{\Theta_{beam}} = \frac{\pi l n_0^4 r_{63}}{2\lambda} E_z. \quad (6.6)$$

Diese Kennzahl des Kristalls hängt außer von fundamentalen Materialkonstanten nur noch von der Länge des Kristalls, der verwendeten Laserwellenlänge und dem angelegten Ablenkkfeld ab.

Für einen ADP-Kristall ($n_0 = 1,48$) der Länge 128 mm ergibt sich bei einer Strahltaile von $2w_0 = 2 \text{ mm} = D$ und einer maximal anlegbaren Spannung von 4 kV eine Zahl der auflösbaren Punkte von $N = 59$. Das ist für diese Konfiguration auch gleichzeitig die maximale Anzahl von Ionen, mit denen Quantenrechnungen in der linearen Ionenfalle durchgeführt werden können.

Der untersuchte elektrooptische Deflektor^[33] arbeitet nach dem Prinzip des linearen transversalen elektrooptischen Effektes (Pockels-Effekt), wobei der r_{41} -Koeffizient des elektrooptischen Tensors eines ADP-Kristalls benutzt wird. Mit Tabellenwerten für ADP und den Kristallabmessungen ergibt sich damit ein theoretisches Ablenkvermögen von

^[32] engl.: *NRS = Number of Resolvable Spots*

^[33] *Firma SpektroLas, Langenbach; Electro-optic Deflector Model 30 (ADP)*

$\frac{\Theta}{U} = 3,15 \frac{\text{mrad}}{\text{kV}}$ bei einer Wellenlänge von 280 nm. Gemessen wurde ein Wert für das Ablenkvermögen von:

$$\frac{\Theta}{U} = (1,80 \pm 0,24) \frac{\text{mrad}}{\text{kV}} \quad (6.7)$$

6.9 Optik

In diesem Abschnitt werden die Optiken sowohl zum Nachweis der Ionen als auch zur Einzelionenansprechung besprochen.

6.9.1 Nachweisoptik

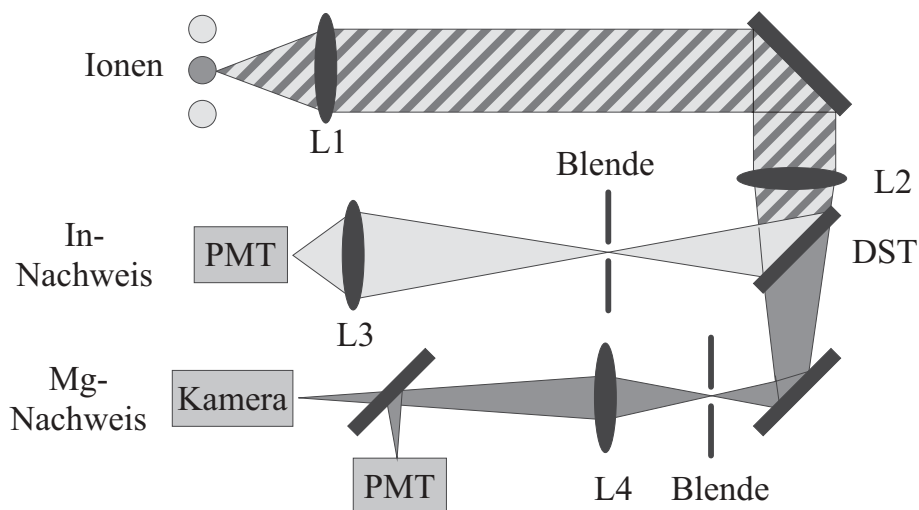


Abbildung 6.24: *Linensystem für den optischen Nachweis der Ionen. Aufgrund der chromatischen Dispersion können die beiden Ionensorten mit Linsen nicht auf dieselbe Bildebene abgebildet werden. Deshalb müssen die beiden Wellenlängen getrennt nachgewiesen werden. Die Brennweiten der Linsen sind: $f_1 = 15 \text{ mm}$, $f_2 = 300 \text{ mm}$, $f_3 = 100 \text{ mm}$ und $f_4 = 100 \text{ mm}$. Die Brennweiten sind für die Wellenlänge $\lambda = 633 \text{ nm}$ angegeben. Zur Umrechnung auf die Brennweiten bei $\lambda = 280 \text{ nm}$ ($\lambda = 230,6 \text{ nm}$) muß man die angegebenen Brennweiten mit einem Faktor $0,925$ ($0,879$) multiplizieren.*

Das von den Ionen abgestrahlte Fluoreszenzlicht wird mit einer im Vakuum montierten sehr kurzbrennweitigen Quarzlinse^[34] und einer zweiten Linse außerhalb der Vakuumkammer

^[34] *Halle Bestform $f = 15 \text{ mm}$*

auf ein Zwischenbild abgebildet (siehe Abb. 6.24). Dort wird mit einer rechteckigen Blende Streulicht so weit wie möglich abgeschnitten. Danach hat man mit einem schwenkbaren Spiegel die Möglichkeit mit einer dritten Linse entweder auf die Kamera^[35] oder mit einer weiteren dritten Linse in einen Photonenvervielfacher^[36] (PMT) abzubilden. Die wellenlängenabhängige Quanteneffizienz der Kamera und des PMTs liegt für $\lambda = 280$ nm bei etwa 20 % und für $\lambda = 231$ nm bei ca. 30 %. Die Gesamtvergrößerung des Abbildungssystems beträgt ca. 30.

Aufgrund der chromatischen Dispersion sind die Brechungsindices bei den jeweiligen Wellenlängen $\lambda = 280$ nm und $\lambda = 231$ nm nicht identisch ($n_{Mg} = 1,494$; $n_{Mg} = 1,520$). Dadurch liegen die Bildebenen der beiden Ionensorten in verschiedenen Bildebenen und es ist nicht möglich, beide Ionensorten gleichzeitig scharf abzubilden. Um sowohl Indium als auch Magnesium gleichzeitig abbilden zu können, ist es notwendig den Strahl mit einem dichroitischen Strahlteiler in einen reinen Strahl bei $\lambda = 280$ nm und einen weiteren bei $\lambda = 231$ nm aufzuspalten. Dann können beide Strahlen getrennt mit unterschiedlichen Optiken scharf abgebildet werden. Die chromatische Aberration kann durch den Einsatz eines Schwarzschild-Spiegel-Objektivs vermieden werden.

Es bestehen Pläne, die Linse im Vakuum durch eine Einstülpung mit hochwertigem Objektiv zu ersetzen. Für diese Einstülpung ist in der oberen Stahlplatte eine Aussparung vorhanden (siehe Abb. 6.8). Die Linse ist an der Stahlplatte an Position LH (Linsenhalter) angebracht.

6.9.2 Einzelionenansprechoptik

Dieses geplante Bauteil dient, wie oben bereits erwähnt, zur Fokussierung des Laserstrahls auf eine Strahltaile von 1 μ m. Damit sollen die Ionen in der Kette einzeln angesprochen werden (siehe Abb. 6.25).

Dies wird durch Ablenkung des auf die Mitte der Ionenkette gerichteten Laserstrahls durch einen elektrooptischen Deflektor (siehe Kapitel 6.8.1) und anschließender Fokussierung durch die Einzelionenansprechoptik. Dabei wird ein Objektiv bis auf 50 mm an das Fallenzentrum herangebracht (siehe Abb. 6.8 rechts von oben kommend). Da diese

^[35] *Mikrokanalplatten-Kamera, Hamamatsu, N1831U-02 Detektor C1809 Cooling Unit*

^[36] *Hamamatsu, R166UHP select*

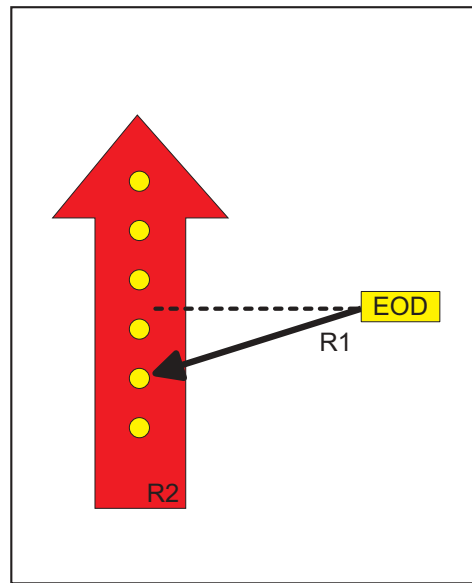


Abbildung 6.25: *Raman-Ansprache der Ionenkette. Der Ramanstrahl R_1 wird entlang der Fallenachse so eingestrahlt, daß er alle Ionen überstreicht. R_2 spricht senkrecht zu R_1 die Ionen einzeln an. Die Strahlablenkung erfolgt dabei mit Hilfe eines elektrooptischen Deflektors (EOD) (siehe Kapitel 6.8.1).*

Optik weiter von der Ionenkette entfernt ist als die Nachweisoptik, ergibt sich ein etwas schlechterer Wert der F-Zahl von 2,5.

Damit der intensive Ramanstrahl nicht die empfindliche Kamera hinter der Nachweisoptik zerstört oder beschädigt, wurde der Strahlengang so gewählt, daß das Intensitätsprofil des Ramanstrahls einen minimalen Überlapp mit der Nachweisoptik besitzt. Ein zusätzlich angebrachter Shutter kann den Einfall von Laserlicht in die Nachweisoptik verhindern.

Kapitel 7

Experimentelle Ergebnisse

Под лежащий камен вода не течет^[1].

Ohne Fleiß kein Preis.

Ausgehend von dem in Rahmen dieser Arbeit aufgebauten Vakuumrezipienten beschreibt dieses Kapitel Experimente, die mit verschiedenen Fallentypen in diesem Vakuumtopf durchgeführt wurden. Beschrieben werden dabei zuerst Ergebnisse mit dem alten Fallentyp, der linearen Endkappenfalle, und danach mit dem neuen, speziell für sympathetische Kühlung entworfenen Fallentyp, der Vierstabfalle.

7.1 Messungen mit der linearen Endkappenfalle

7.1.1 Speicherung von $^{24}\text{Mg}^+$ -Kristallen

Der Aufbau der im weiteren beschriebenen Experimente ist bis auf die Falle selbst derjenige, der in Kapitel 6 beschrieben wurde. Die Falle ist eine lineare Endkappenfalle, wie in der Doktorarbeit von Dr. Baldauf beschrieben [5]. Sie wurde an die obere Stahlplatte

^[1] wörtl.: *Unter einem liegenden Stein fließt kein Wasser.*

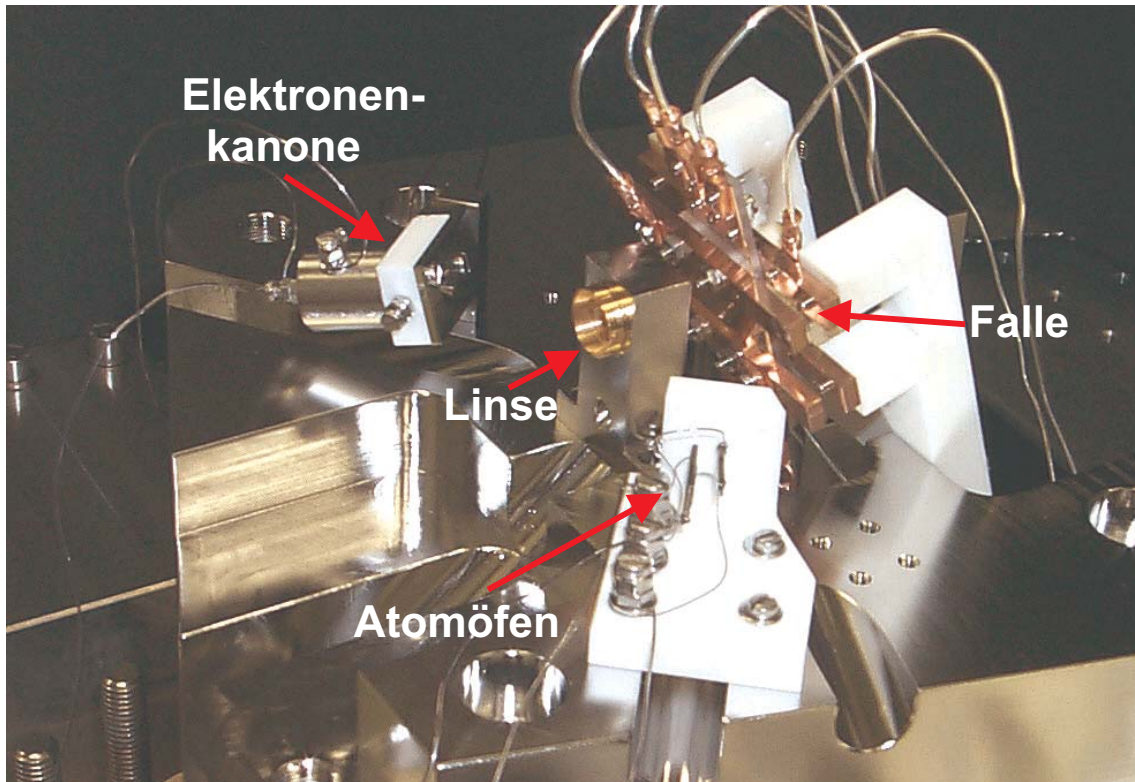
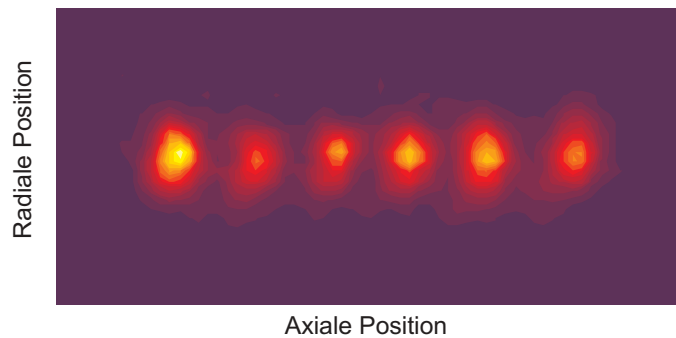


Abbildung 7.1: Foto des experimentellen Aufbaus mit der Endkappenfalle. Die Falle ist über den F-Halter an die obere Stahlplatte angeschraubt, an welche ebenfalls der Atomofenhalter mit Atomöfen, die Elektronenkanone und eine Nachweislinse befestigt sind.

der Halterung an eine um 18° aus der Vertikalen gedrehte Ebene angeschraubt (siehe Abb. 7.1, AF (alte Falle)). Mit dieser Falle können Säkularfrequenzen bis zu 6 MHz und axiale Schwingungsfrequenzen bis zu 600 kHz erreicht werden. Man sieht, daß somit in guter Näherung von einer linearen Falle gesprochen werden kann, wobei das Verhältnis dieser beiden Fallenfrequenzen bestimmt, wieviele Ionen in einer linearen Kette gespeichert werden können (vgl. Gl. (3.3)). Abbildung 7.2 zeigt einen in dieser Falle beobachteten 6-Ionen-Kristall.

7.1.2 Speicherung von $^{115}\text{In}^+$ -Wolken

Die Speicherung von $^{115}\text{In}^+$ wird in erster Linie dadurch erschwert, daß die Fluoreszenzrate des verwendeten Kühlübergangs um mehr als einen Faktor 100 kleiner ist als bei Magne-

Abbildung 7.2: $^{24}\text{Mg}^+$ -6-Ionen-Kristall

sium ($\Gamma_{\text{In}} = 2\pi \cdot 360 \text{ kHz}$ im Vergleich zu $\Gamma_{\text{Mg}} = 2\pi \cdot 42,7 \text{ MHz}$). Es erwies sich jedoch als ein großer Vorteil, daß der Strahlengang der Abbildungsoptik schon vorher auf das Magnesiumsignal justiert worden war. Aufgrund der verschiedenen Brechungsindices für die Magnesium- und Indiumwellenlängen war jedoch die Fokussierung in den PMT zunächst nicht optimal. Es wurde danach mit dem so gefundenen Strahlengang ein zweiter PMT nur für die Indiumwellenlänge aufgebaut, in den optimal fokussiert wird.

Durch Anlegen eines Magnetfelds von 6 G entlang der Laserstrahlachse und Einstrahlen von σ^+ -polarisiertem Licht wird eine doppelt so große Fluoreszenzintensität wie im linear polarisiertem Fall erreicht. Abb. 7.3 zeigt das Anregungsspektrum einer puffergasgekühlten $^{115}\text{In}^+$ -Wolke mit einem Helium-Partialdruck von $1 \cdot 10^{-5} \text{ mbar}$. Zur Absolutfrequenzzeichnung wird ein dopplerverbreitertes Tellurspektrum verwendet. Das Anregungsspektrum ist symmetrisch zur Resonanzfrequenz, da bei dem verwendeten Puffergasdruck und der eingestrahlten Laserleistung von $100 \mu\text{W}$ noch keinen Einfluß von Laserkühlung oder Laserheizung beobachtbar ist.

7.1.3 Gemeinsame Speicherung von $^{115}\text{In}^+$ - und $^{24}\text{Mg}^+$ -Wolken

Zur gemeinsamen Speicherung zweier Ionensorten unterschiedlicher Masse müssen die Fallenparameter im gemeinsamen Stabilitätsbereich beider Ionenspezies gewählt werden. Dazu wurden die Stabilitätsdiagramme beider Ionensorten gemessen (Abb. 7.4). Das Stabilitätsdiagramm von $^{24}\text{Mg}^+$ wurde an einzelnen Ionen gemessen, dasjenige von $^{115}\text{In}^+$ an puffer-

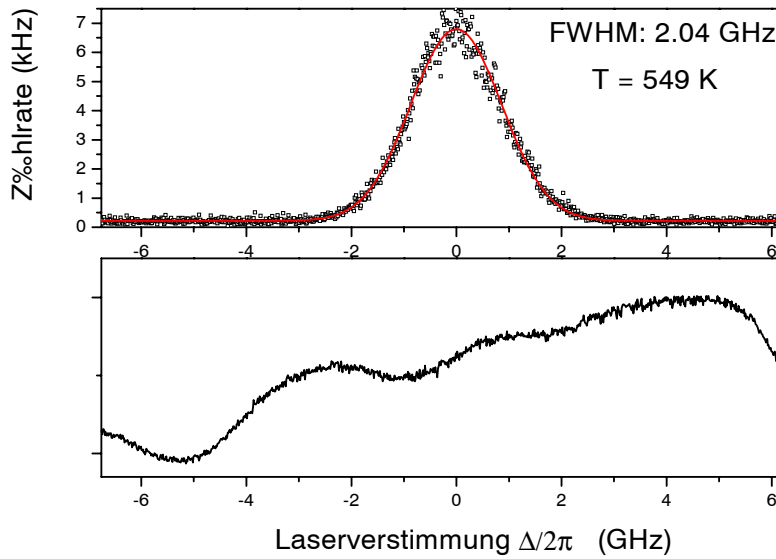


Abbildung 7.3: Anregungsspektrum einer $^{115}\text{In}^+$ -Wolke. Als Referenz dient das dopplerverbreiterte Tellurspektrum (unten).

gasgekühlten Ionenwolken, da keine Speicherung von $^{115}\text{In}^+$ ohne Puffergas möglich und somit auch keine Kristallisation realisierbar war.

Bei gleichzeitiger Speicherung beider Ionensorten ergibt sich jedoch die Schwierigkeit, daß ein simultaner optischer Nachweis beider Ionenspezies schwierig ist und im Experiment nicht nachgewiesen werden konnte. Dies liegt zum einen daran, daß die Fluoreszenzrate des verwendeten Kühlübergangs bei Magnesium um mehr als einen Faktor 100 größer als bei Indium ist und so ein optischer Nachweis von Indium extrem erschwert ist. Man mußte sich also einer anderen Nachweismethode bedienen, um gemeinsame Speicherung nachzuweisen.

Diese Methode besteht darin, gezielt eine Schwingung der einen oder anderen Ionensorte in der gemeinsamen Ionenwolke anzuregen. Dies kann die Säkular- oder axiale Schwingung der Ionen sein. Jedoch ist es einfacher die axiale Schwingung zu verwenden, da die Frequenzen kleiner sind und aufgrund der anderen Masseabhängigkeit in einen relativ kleineren Frequenzintervall liegen als bei den radialen Frequenzen. Dazu legt man an ein äußeres Elektrodenpaar zusätzlich zu den normalerweise anliegenden DC- und RF-Spannungen eine weitere Sinusschwingung im Bereich der axialen Oszillationsfrequenzen der Ionenwolke

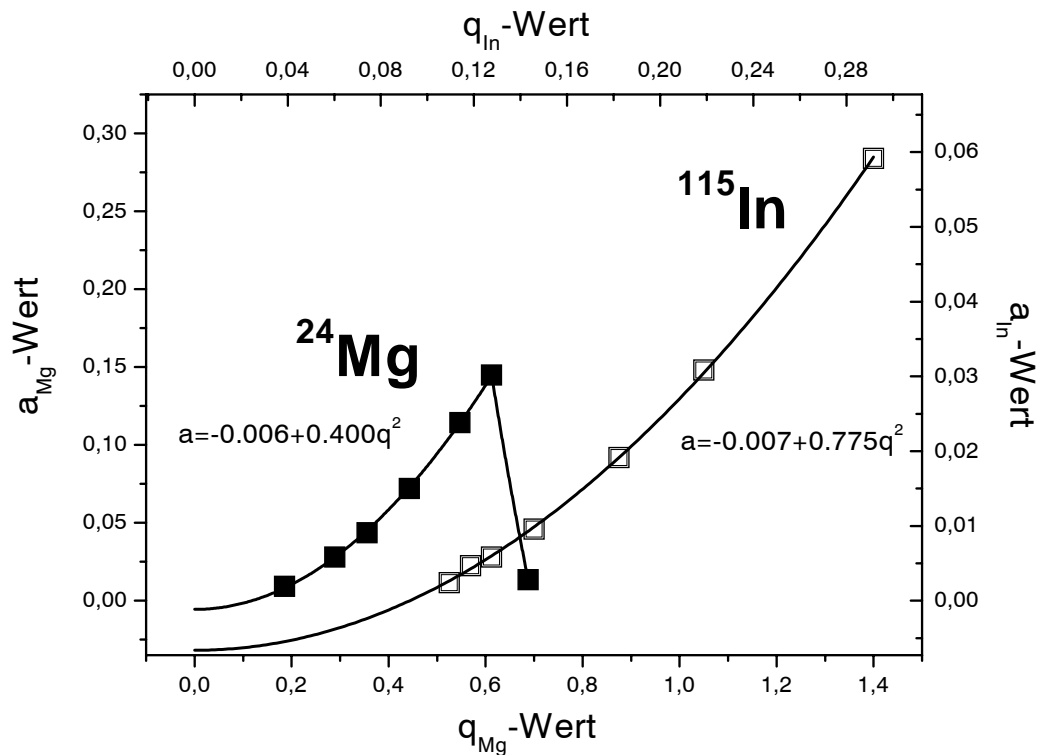


Abbildung 7.4: Stabilitätsdiagramm der linearen Endkappenfalle für $^{24}\text{Mg}^+$ und $^{115}\text{In}^+$.

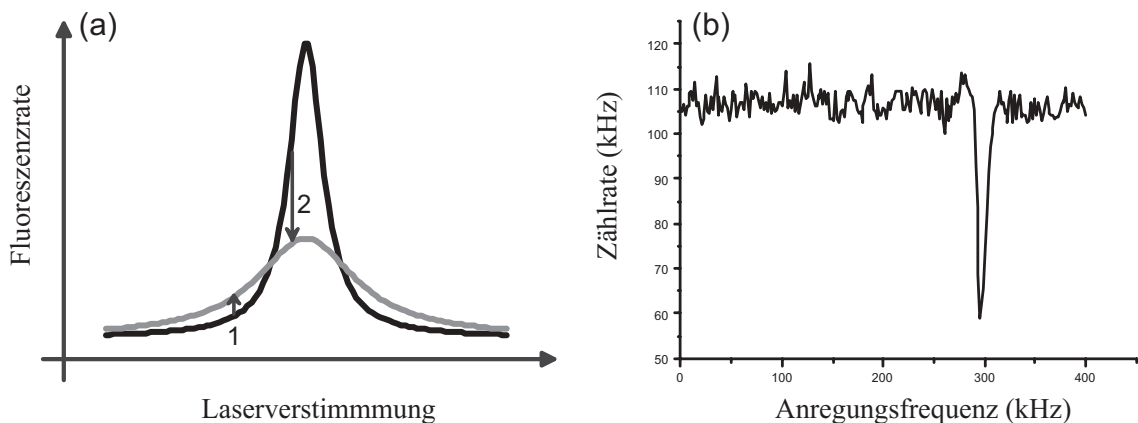


Abbildung 7.5: (a): Durch Aufheizen der Ionen geht das Anregungsspektrum von der dunklen zur hellen Kurve über. Je nach Laserverstimmung (angedeutet durch die beiden Pfeile) macht sich dies durch einen Anstieg oder Einbruch der Fluoreszenzrate bemerkbar. (b): Typischer Einbruch der Fluoreszenzrate, wenn die Verstimmung wie bei 2 gewählt wird.

an. Die Amplitude dieser Schwingung beträgt jedoch nur einige zehn Millivolt bis Volt. Falls beim Durchstimmen die Frequenz dieser Störspannung mit der axialen Schwingungsfrequenz einer Ionensorte übereinstimmt, werden diese resonant in Schwingung versetzt und somit geheizt. Dadurch verbreitert sich ihr Anregungsspektrum (siehe Abb. 7.5a)). Je nach Verstimmung des anregenden Lasers erhöht oder erniedrigt^[2] sich die Fluoreszenzrate. Somit können beide Ionensorten gleichzeitig nachgewiesen werden. In dem Fall einer Wolke ist die Kopplung der Ionen untereinander schwach verglichen mit der thermischen Bewegungsenergie. Verschiedene wie in Kapitel 5 behandelte Schwingungsmoden treten deshalb nicht auf. Bei der Anregung werden lediglich alle Ionen einer Masse unabhängig voneinander zum Schwingen angeregt. Erst im kristallinen Zustand können verschiedene Schwingungsmoden angeregt werden. Hierbei muß aber auch beachtet werden, an welche Elektroden die Störspannung angelegt wird, um eine möglichst hohe Kopplung an die verschiedenen Moden zu erreichen.

7.1.4 Sympathetische Kühlung von $^{115}\text{In}^+$ - und $^{24}\text{Mg}^+$

Mit der gerade beschriebenen Methode konnte auch sympathetische Kühlung nachgewiesen werden. Bei Speicherung einer $^{115}\text{In}^+$ - $^{24}\text{Mg}^+$ -Wolke ohne Puffergas, bei der nur $^{24}\text{Mg}^+$ dopplergekühlt wird, ließ sich sowohl bei der axialen Schwingungsfrequenz von $^{24}\text{Mg}^+$ als auch von $^{115}\text{In}^+$ eine Aufheizung der Ionenwolke beobachten, die über den Einbruch der Magnesium-Fluoreszenz nachgewiesen wurde (siehe Abb. 7.6). Da die Indiumionen nicht gekühlt werden, aber trotzdem auch nach längerer Zeit nicht die Falle verlassen, kann von sympathetischer Kühlung durch die direkt gekühlten $^{24}\text{Mg}^+$ -Ionen gesprochen werden. Umgekehrt heizen die zur Schwingung angeregten Indiumionen auch die Magnesiumionen auf, was ebenfalls einer sympathetischen Wechselwirkung entspricht.

Die bis hier beschriebenen experimentellen Ergebnisse sind ausführlicher in [8] dargestellt.

^[2] Nur bei einer einzigen Frequenz ändert sich die Fluoreszenzrate nicht, was jedoch in der Praxis keine Rolle spielt.

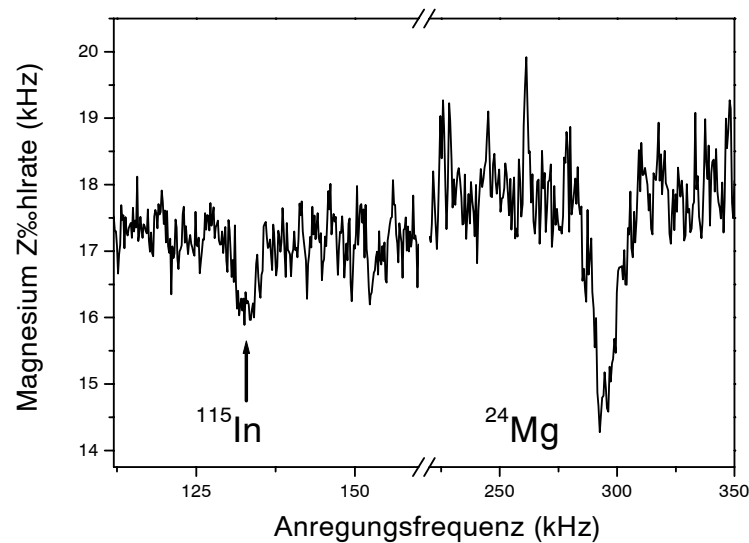


Abbildung 7.6: Anregung der beiden axialen Schwingungen der heterogenen $^{24}\text{Mg}^+ - ^{115}\text{In}^+$ -Ionenwolke. Nur die $^{24}\text{Mg}^+$ -Ionen werden lasergekühlt. Die axiale Einschlussspannung beträgt 50 V.

7.2 Channeltron-Messungen mit der Vierstabfalle

Die Messungen mit dem Channeltron als Ionennachweisgerät wurden durchgeführt, um sich langwierige Justagearbeiten zu ersparen, die gewöhnlich beim Aufbau einer neuen, unbekanntem Falle anfallen. Dies liegt darin begründet, daß in einer solchen Situation nachfolgende Werte nur ungenau oder gar nicht bekannt sind: die exakte RF-Spannungsamplitude, d.h. der q-Wert, der Ladestrom der neuen Atomöfen, aber am entscheidendsten wohl die Justage der anregenden UV-Laserstrahlen und der Abbildungsoptiken. Weil man deshalb Gefahr läuft, die Atomöfen zu schnell zu entleeren, falls man einen zu hohen Ladestrom verwendet, ist es am wichtigsten schnell Ionen in der Falle nachzuweisen. Am einfachsten geschieht dies mit Puffergaskühlung der Ionen und Nachweis der Ionen mit einem Channeltron, da man in diesem Fall nur wenige Versuche mit unterschiedlichen q-Werten benötigt. Weiterhin wurden mit dem Channeltron Versuche durchgeführt, bei denen die Massen von Dunkelionen bestimmt werden. Dunkelionen sind gefangene Ionen, die mit den anregenden Magnesium- oder Indiumlasern nicht resonant sind und deshalb auf der Kamera dunkel erscheinen.

Das Channeltron (siehe Abb. 7.8) ist in einem Metallgehäuse eingebaut. Am runden Eingang befindet sich ein Netz, welches negativ geladen ist ($U_{mesh} = -216 \text{ V}$), um die positiv geladenen Ionen anzuziehen, falls die Falle ausgeschaltet wird. Kurz dahinter befindet sich der Eingangstrichter des Channeltrons. Die hier durch die auftreffenden Ionen erzeugten Elektronen durchlaufen in der Channeltronröhre eine Spannungsdifferenz von -3 kV . Durch die Beschleunigung und das Auftreffen auf die Wände entsteht aufgrund der gekrümmten Form des Channeltrons am Ausgang ein verstärkter Puls, der von einem Zähler registriert und an den Meßcomputer weitergeleitet wird.

Das Channeltron befindet sich in Nähe des Fallenmittelpunkts, auf der gegenüberliegenden

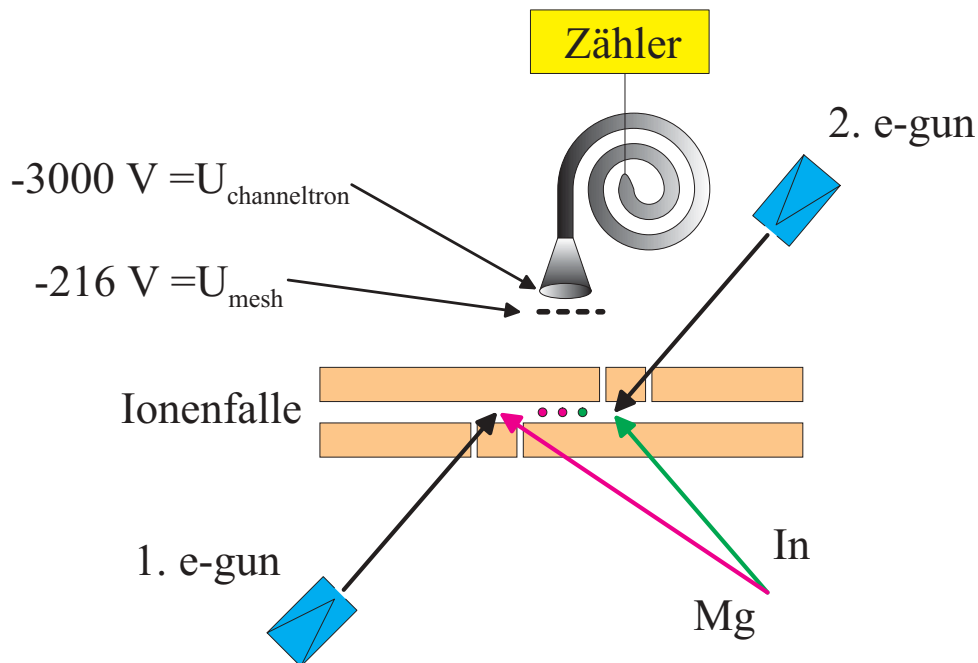


Abbildung 7.7: Schematischer Aufbau des Channeltrons zum Nachweis der gespeicherten Ionen.

Seite der Abbildungslinse. Durch die Nähe des Channeltrons zum Fallenmittelpunkt und der damit verbundenen Hochspannung, kann es u.U. zu Verzerrungen des Fallenpotentials kommen und damit verbundenen leicht veränderten Speicherbedingungen. Im Experiment konnten jedoch nur kleine Einflüsse beobachtet werden.

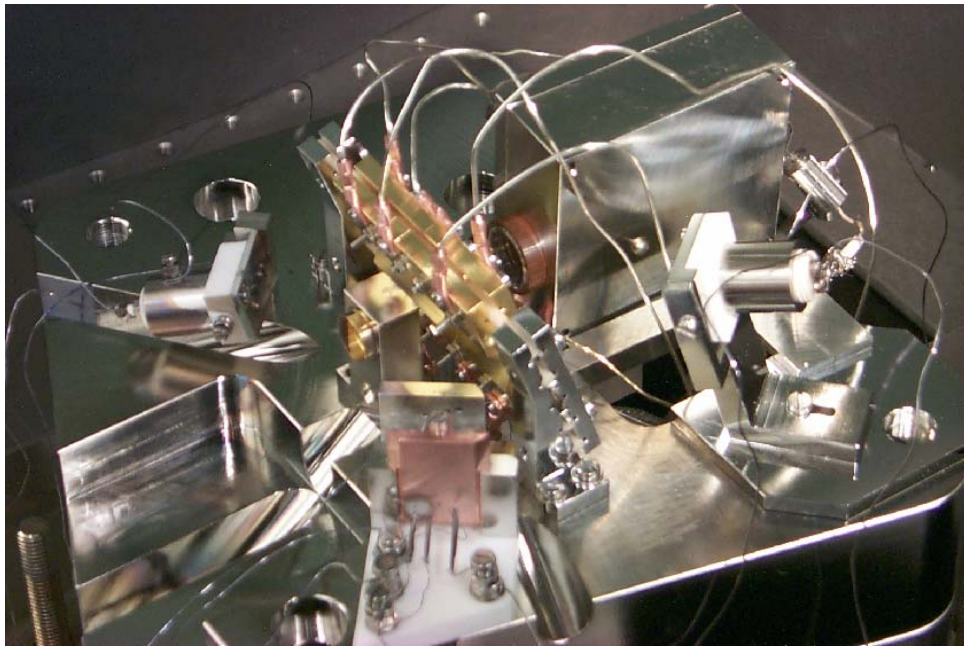


Abbildung 7.8: *Experimenteller Aufbau der neuen Ionenfalle mit Channeltron und zwei Elektronenkanonen. Im vorderen Teil des Bildes erkennt man den Atomofenaufbau mit verbesserter Kollimation der Atomstrahlen mit Hilfe zweier Blenden. Das Channeltron ist in dem Stahlgehäuse am rechten oberen Bildrand zu erkennen.*

7.2.1 Axiale Oszillationsfrequenzen

Die Dunkelionen können durch Betreiben der Elektronenkanone ohne Benutzung der Atomöfen einfach aus dem Hintergrundgas geladen werden. Bei allen hier präsentierten Messungen mit dem Channeltron wurde zur Kühlung Helium-Puffergas mit einem Gesamtdruck von $1 \cdot 10^{-5}$ mbar verwendet. Zur Massenbestimmung der Dunkelionen kann die Tatsache ausgenutzt werden, daß Ionen unterschiedlicher Masse unterschiedliche Resonanzfrequenzen in der Ionenfalle besitzen. Darüber hinaus besitzen die axialen und radialen Oszillationsfrequenzen unterschiedliche Masseabhängigkeiten. Die axialen Oszillationsfrequenzen variieren wie $\omega_{axial} \sim \frac{1}{\sqrt{m}}$ (vgl. Gl. (2.28)). Die radialen Säkularfrequenzen verhalten sich jedoch wie $\omega_{radial} \sim \frac{1}{m}$ (vgl. Gl. (2.11)).

Konkret wurden zur Massenbestimmung bei unterschiedlichen axiale Einschlußspannungen Dunkelionen geladen und anschließend durch eine zusätzlich an die Fallenelektroden angelegt Störspannung, deren Frequenz über den Bereich der axialen Oszillationsfrequen-

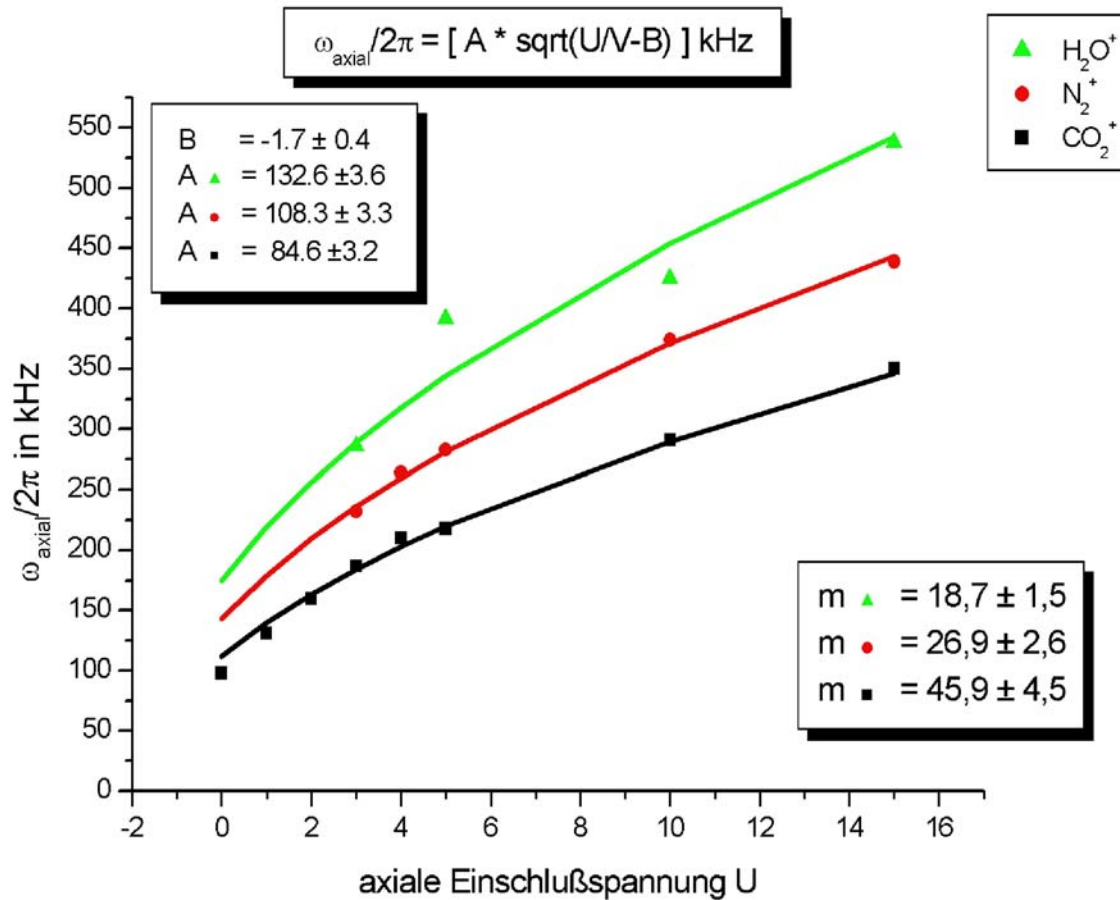


Abbildung 7.9: Massenbestimmung der Dunkelionen, welche aus dem Restgas stammen. Die dominierenden Restgaskomponenten sind Wasser (H_2O^+), Stickstoff (N_2^+) und Kohlendioxyd (CO_2^+).

zen durchgestimmt wird, wieder aus der Falle entfernt. Falls die Frequenz der anregenden Störspannung mit der axialen Oszillationsfrequenz einer gespeicherten Ionensorte übereinstimmt, werden diese bei genügend großer Störampplitude so stark geheizt, daß sie die Falle verlassen und vom Channeltron detektiert werden können. Auf diese Art und Weise können die Masseabhängigkeiten der verschiedenen Dunkelionen genau abgetastet werden, wodurch die relativen Massenverhältnisse der gefangenen Dunkelionen ermittelt werden können. Aus Kenntnis der Frequenzen bei Speicherung von Magnesium kann eine Absoluteichung der Massen erreicht werden. Im Falle der axialen Oszillationsfrequenzen ergab sich folgende Messung (siehe Abb. 7.9). Die gemessenen atomaren Massen liegen bei 18, 28

und 44, entsprechend den Ionen von Wasser, Stickstoff und Kohlendioxyd. Vergleich mit einem typischen Restgasspektrum einer Turbomolekularpumpe ergibt eine hervorragende Übereinstimmung mit dem erhaltenen Ergebnis.

Es wurden ebenfalls Indium und Magnesium in der Falle mit dem Channeltron nachge-

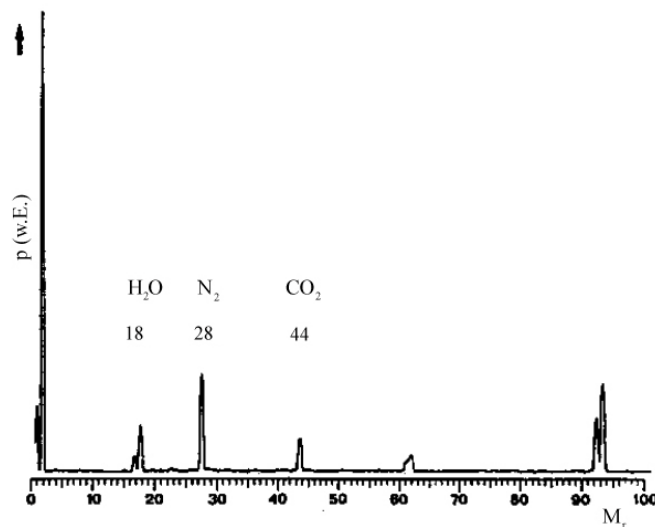


Abbildung 7.10: Restgasspektrum einer Turbomolekularpumpe bei einem Enddruck von $2 \cdot 10^{-10}$ mbar. Aufgetragen ist der Partialdruck der jeweiligen Restgaskomponente in Abhängigkeit ihrer relativen Molekülmasse. Abgesehen vom größtem Peak bei der relativen Molekülmasse 2, welche von Wasserstoff stammt, erkennt man, daß im Restgas größere Mengen von Gasen mit den Massen um 18 u, 28 u und 44 u vorkommen. Die stärksten Komponenten dabei sind Wasser H_2O^+ (18 u), Stickstoff (N_2^+) (28 u) und Kohlendioxyd (CO_2) (44 u).

wiesen. Eine Messung von radialen Oszillationsfrequenzen in Abhängigkeit der angelegten RF-Spannungsamplitude zeigt Abb. 7.11. Das aus dieser Messung bestimmte Massenverhältnis stimmt im Rahmen des Meßfehlers mit dem theoretischen überein.

Mit derselben Methode konnten sogar unterschiedliche Mg^+ -Isotope unterschieden werden. Abb. 7.12 zeigt eine Messung mit $^{24}Mg^+$ und $^{25}Mg^+$.

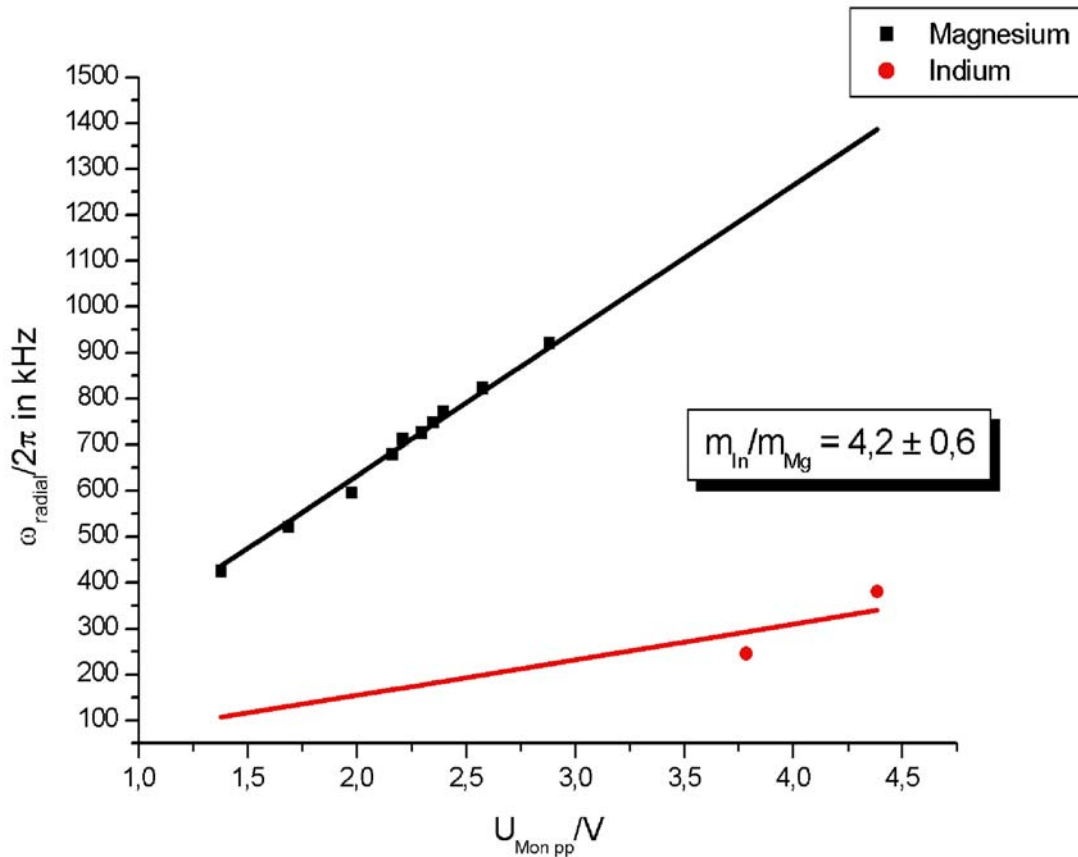


Abbildung 7.11: Radiale Schwingungsfrequenzen als Funktion der angelegten RF-Spannungsamplitude. Man erkennt den theoretisch erwarteten linearen Zusammenhang zwischen radialer Oszillationsfrequenz und Monitorspannung: $\omega_{\text{radial}} = \frac{1}{\sqrt{8}} q' \Omega_{\text{RF}}$.

7.3 Messungen mit der neuen Vierstabfalle

Die nachfolgenden Messungen wurden im Rahmen dieser Arbeit mit dem im Kapitel 6 beschriebenen experimentellen Aufbau durchgeführt.

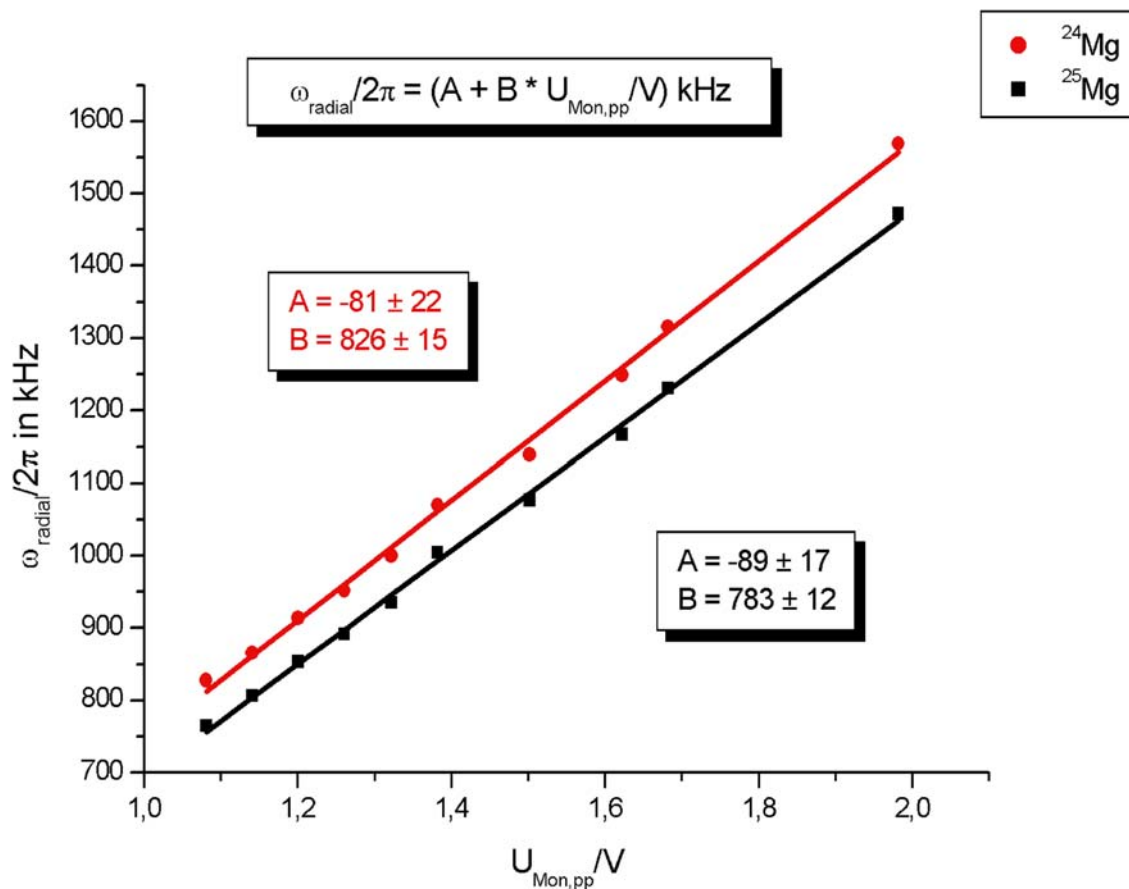


Abbildung 7.12: Radiale Schwingungsfrequenzen von $^{24}\text{Mg}^+$ und $^{25}\text{Mg}^+$ als Funktion der angelegten RF-Spannungsamplitude. Falls die obere Kurve als $^{24}\text{Mg}^+$ identifiziert wird, folgt für die Masse des anderen Isotops $m = 25,3 \pm 0,6$ u.

7.3.1 Fallenfrequenzen

7.3.1.1 Radiale Fallenfrequenzen

Zur Charakterisierung der neuen Falle wurden nach der ersten erfolgreichen Speicherung von $^{24}\text{Mg}^+$ -Wolken die Fallenfrequenzen vermessen. Dies geschieht durch Anlegen einer sinusförmigen Störspannung variabler Frequenz an gewisse Fallenelektroden. Für optimale Kopplung an die radiale Schwingung wurde die zusätzliche Wechselspannung an die Elektrode 3 über die ganze Breite (3LMR) gelegt. Abbildung 7.13 zeigt die Messung der radialen Schwingungsfrequenzen im Vergleich zur Computersimulation.

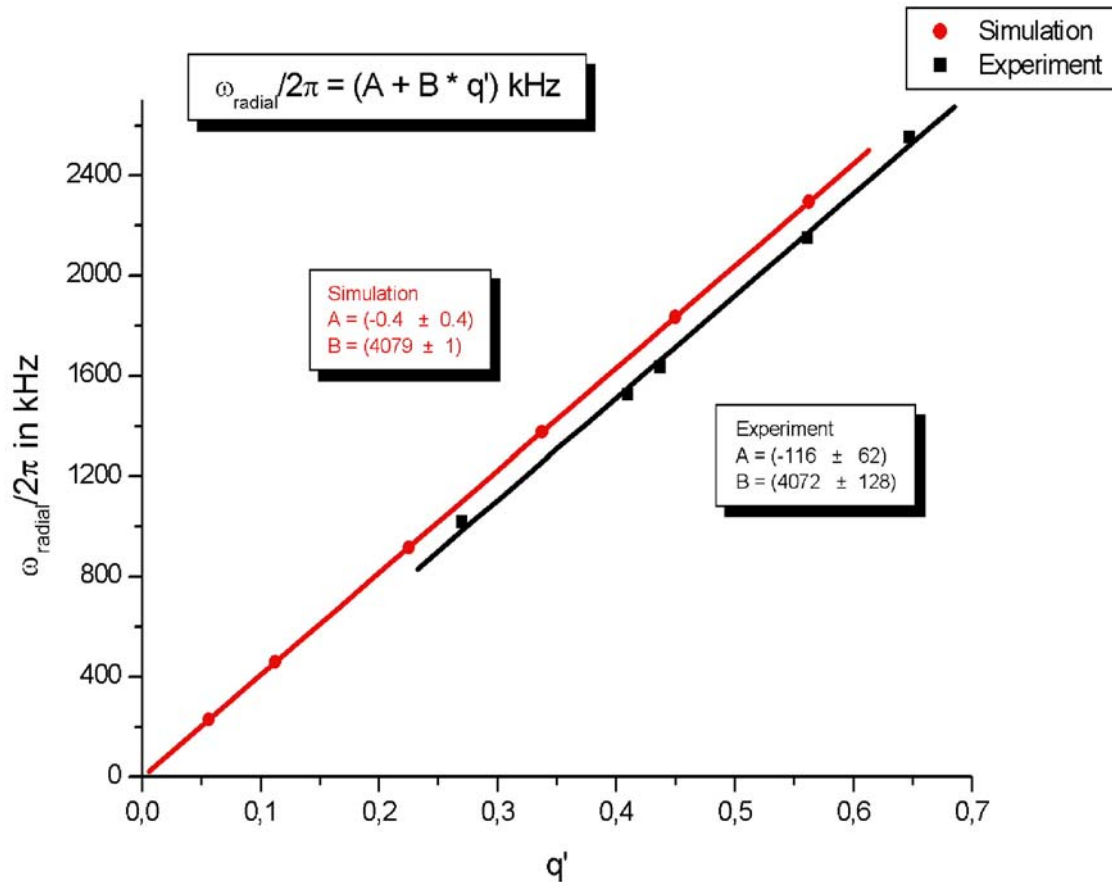


Abbildung 7.13: Vergleich von Experiment und Simulation der radialen Oszillationsfrequenzen. Die Steigungen der jeweiligen Geraden stimmen sehr gut überein.

Ein Fit an die experimentell bestimmten radialen Oszillationsfrequenzen in Abhängigkeit vom Monitorersignal $U_{\text{Mon},pp}$ ergibt $\omega_{\text{radial}} = 2\pi \cdot \left(A + B \frac{U_{\text{Mon},pp}}{V} \right)$ kHz mit $A = -116 \pm 62$ und $B = 703 \pm 22$. Aus der Steigung B kann man das Verhältnis $\frac{X}{L}$ bestimmen. Laut Theorie gilt für die radialen Schwingungsfrequenzen mit $a = 0$:

$$\omega_{\text{radial}} = \omega_{\text{säkular}} = \frac{1}{\sqrt{8}} q' \Omega_{RF} = \frac{e}{\sqrt{2} m \Omega r_0^2} \frac{X}{L} U_{\text{Mon},pp} \quad (7.1)$$

Somit kann man aus der Messung der radialen Schwingungsfrequenzen in Abhängigkeit von der Monitorerspannung direkt das Verhältnis $\frac{X}{L}$ bestimmen, welches sich zu $\frac{X}{L} = 112 \pm 4$ ergibt. Es gibt nun zwei Möglichkeiten X und L einzeln zu bestimmen. Man kann aus

der Eichung des Monitorsignals X (siehe Kapitel 6.1, Abb.6.3) L direkt bestimmen. Die genauere Methode besteht jedoch darin, einen Wert für $\frac{X^2}{L}$ aus dem Stabilitätsdiagramm zu bestimmen, womit man ebenfalls X und L einzeln bestimmen kann. Dies wird in Kapitel 7.3.4 geschehen.

Bei der oben genannten Computersimulation wurde zur Bestimmung der radialen Fallenfrequenzen in Abhängigkeit vom q' -Wert bzw. der angelegten RF-Spannungsamplitude, wie bereits in Kapitel 3.5 bereits kurz erwähnt, für verschiedene RF-Spannungsamplituden das Pseudopotential berechnet und für das so erhaltene radiale Potential ein quadratischer Fit in Nähe des Fallenzentrums entlang der beiden radialen Hauptachsen (siehe Abb. 3.7) durchgeführt. So erhält man direkt die radiale Oszillationsfrequenz in Abhängigkeit von der RF-Amplitude. Dies ist in Abb. 7.13 dargestellt.

7.3.1.2 Axiale Fallenfrequenzen

Die axialen Oszillationsfrequenzen wurden ebenso wie die radialen Oszillationsfrequenzen durch eine an den Elektroden anliegende Störspannung, welche die Ionen resonant anregt, vermessen. Jedoch ist es in diesem Fall besser die Störspannung an den Elektroden 2M und 3M (siehe Abb. 3.3) anzulegen, um eine bessere Kopplung an die axialen Moden zu erreichen.

Abbildung 7.14 zeigt eine Messung der axialen Schwingungsfrequenzen im Vergleich mit einer Computersimulation. Wie bei den radialen Schwingungsfrequenzen auch wurde zur Berechnung der axialen Fallenfrequenzen einer konkreten Fallenbeschaltung zuerst der Pseudopotentialanteil ausgerechnet, welcher vom Wechselspannungsanteil herrührt und danach der DC-Anteil. Im nachfolgenden Fall wurde $U_{RF} = 300V$ verwendet, was einem q' -Wert von 0,337 entspricht. Danach wurden die axialen Oszillationsfrequenzen für verschiedene Spannungswerte an (2l,2r) ausgerechnet, wobei jeweils dasselbe Potential an 1l und 1r gelegt wurde. Die Spannungswerte an (1l,1r) sind von untergeordnetem Interesse, da diese Elektroden sehr weit vom Fallenzentrum entfernt sind und somit einen vernachlässigbaren Einfluß auf das Potential in der Fallenmitte haben. Sie wurden jedoch wie im Experiment auf 20 V gesetzt. Somit wurde also die Konfigurationen (20,U,U,20) V berechnet, wobei U von 0 V bis 15 V variiert wurde. Der Theorie entsprechend (vgl. Gl. (2.28)) wird ein

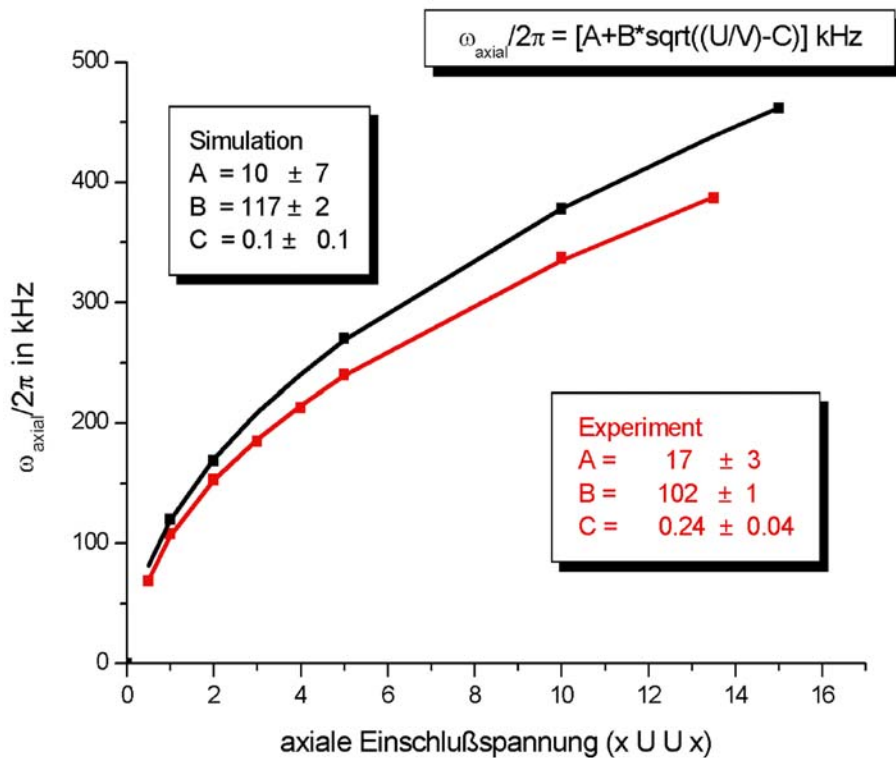


Abbildung 7.14: Axiale Oszillationsfrequenzen

wurzelförmiger Verlauf erwartet, welcher in Abb. 7.14 auch zu sehen ist. Ein Fit an die berechnete Kurve der Computersimulation ergibt:

$$\omega_{axial} = 2\pi \left(10\text{kHz} + 117\text{kHz} \cdot \sqrt{\frac{U}{V}} \right) \quad (7.2)$$

Ein entsprechender Fit an die experimentellen Daten (siehe Fitdaten in Abb. 7.14) liefert einen etwas kleineren Vorfaktor vor der Wurzel. Dies könnte auf die Größe der bei der Messung verwendeten Ionenwolke zurückzuführen sein. Ionen, welche nicht in der Fallennitte schwingen, erfahren ein flacheres axiales Potential und besitzen somit eine kleinere axiale Schwingungsfrequenz. Eine Mittelung über die ganze Ionenwolke würde im Mittel eine kleinere Schwingungsfrequenz liefern.

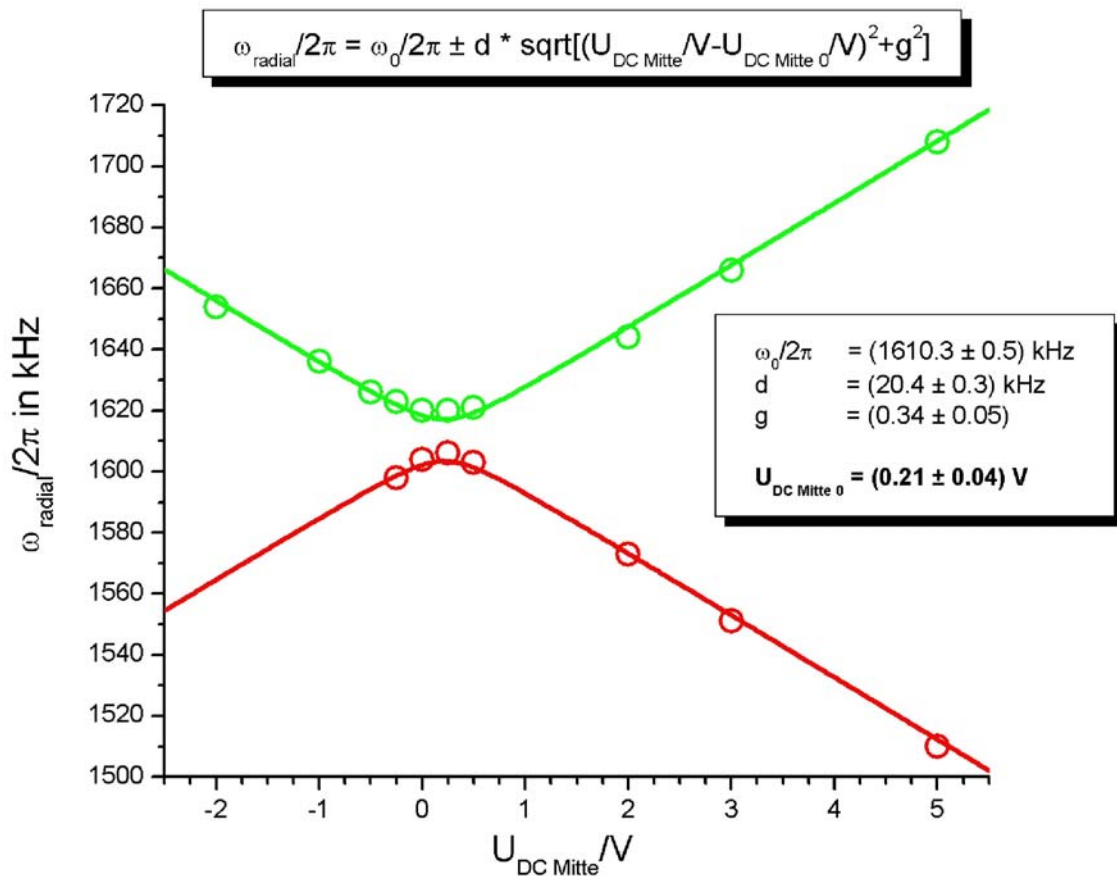


Abbildung 7.15: Aufspaltung der Radialfrequenzen in Abhängigkeit der angelegten Fallgleichspannung zur Bestimmung von $U_{\text{DC } 0}$. Die Messung wurde bei $q' = 0,424$ ($U_{\text{RF}} = 358 \text{ V}$) durchgeführt. Die anregende Störspannung wurde an Elektroden 3 über die ganze Breite angelegt, so daß an die radialen Schwingungen optimal angekoppelt werden konnte.

7.3.2 Bestimmung der Offset-Spannung des a-Wertes

Aufgrund von unterschiedlichen Kontaktpotentialen oder ungleichen kapazitiven Kopplungen zwischen den Durchführungen im Resonanztransformatorkasten oder im Versuchsaufbau selbst, kann es zu kleinen Offset-Spannungen zwischen den verschiedenen Zuleitungen zur Falle kommen. Deshalb ist es sehr wichtig, insbesondere im Hinblick auf die fehlerfreie Bestimmung des Stabilitätsdiagrammes, den genauen Wert zu bestimmen, den man außen anlegen muß, so daß man an der Falle einen a-Wert von Null anliegen hat. Die beste Methode, dies zu bewerkstelligen, besteht darin, die Aufspaltung der radialen Oszillati-

onsfrequenzen in Abhängigkeit vom angelegten U_{DC} -Wert zu messen, und der minimalen Aufspaltung den U_{DC0} -Wert zuzuordnen, der $a = 0$ entspricht. Falls keine Kopplung zwischen den beiden radialen Oszillationen vorliegt, erwartet man Entartung bei $a = 0$. Die vorhandene Kopplung könnte jedoch auf die Größe der bei der Messung verwendeten Wolke zurückzuführen sein, da bei großen Wolken durch die Coulomb-Wechselwirkung der Ionen untereinander beide radialen Schwingungen miteinander koppeln. An die erhaltenen Daten wurde eine symmetrische Fitfunktion ähnlich wie bei einer vermiedenen Kreuzung zweier atomaren Niveaus gefittet (siehe Abb. 7.15). Die minimale Aufspaltung ergab sich bei $U_{DC0} = (0,21 \pm 0,04)$ V. In allen nachfolgenden Messungen wurde dieser U_{DC} -Wert vom realen U_{DC} -Wert abgezogen.

Wie bereits oben erwähnt spalten die radialen Oszillationsfrequenzen bei Anwesenheit ei-

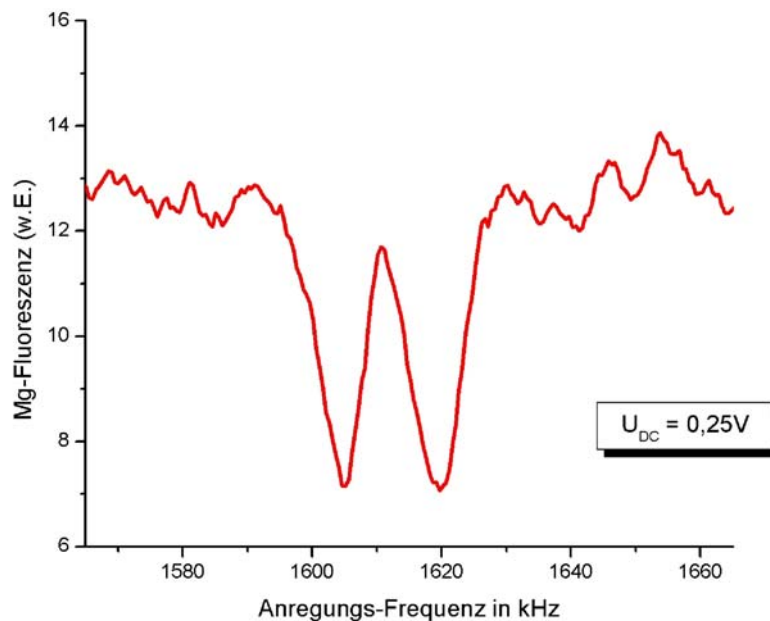


Abbildung 7.16: *Aufspaltung der radialen Oszillationsfrequenzen.*

nes a -Wertes auf. Dies läßt sich mit der dadurch induzierten Symmetriebrechung erklären. Eine Einzelmessung aus Abb. 7.15 für $U_{DC} = 0,25$ V ist in Abb. 7.16 dargestellt. Deutlich erkennt man die beiden Einbrüche der Magnesium-Fluoreszenz aufgrund der Anregung an den Elektroden und der dadurch bedingten Aufheizung der Ionenwolke.

7.3.3 Speicherung von $^{24}\text{Mg}^+$ -Kristallen

Ausgehend von der Speicherung von $^{24}\text{Mg}^+$ -Wolken mit Puffergas als erstem Schritt, wurde nun ohne Puffergas bei einem Druck von ca. $1 \cdot 10^{-10}$ mbar versucht Ionen-Kristalle zu erzeugen. Dazu wirft man ausgehend von einer großen Wolke durch Anlegen eines a -Wertes am Rande des Stabilitätsbereichs zahlreiche Ionen so lange aus der Falle, bis die Linienbreite der Ionenwolke in die Nähe der natürlichen Linienbreite des verwendeten Kühlübergangs ist. Dann wird man es in der Regel mit wenigen Ionen zu tun haben, die nach erfolgter Kristallisation eine lineare Kette bilden. Zur Kristallisation ist es entscheidend, die Mikrobewegung zu minimieren, welche wiederum kritisch von der radialen Position der Ionenkette in der Ionenfalle abhängt. Um die radiale Position zu verändern wurden die in Kapitel 3.3 erläuterten Verschiebespannungen U_H und U_V benutzt. Dadurch verringerte sich die Linienbreite der Ionenwolke weiter, bis Kristallisation durch einfaches Scannen der Laserfrequenz möglich wurde. Abbildung 7.17 zeigt einen Phasenübergang einer $^{24}\text{Mg}^+$ -Wolke zu einem Ionenkristall [132,133,193,194]. Die Parameter der Ionenfalle waren hierbei (20V,5V,5V,20V; $a=0,q'=0,267;U_H=0,25\text{V},U_V=-0,61\text{V}$). Die verbleibende Verbreiterung der Resonanz kommt von der Sättigungsverbreiterung der anregenden Laser. Ein Kamerabild eines solchen Kristalls ist in Abbildung 7.18 zu sehen.

7.3.4 Stabilitätsdiagramm

Das Stabilitätsdiagramm der Ionenfalle wurde mit kleinen Ionenkristallen vermessen. Dabei geht man folgendermaßen vor: man lädt die Falle bei einem bestimmten q -Wert und erhöht dann nach Erreichen einen Kristalls solange den a -Wert, bis der Kristall die Falle verläßt und das Fluoreszenzsignal einbricht. Den so erlangten Punkt trägt man als Grenzpunkt in ein a - q -Diagramm ein. Ein solches zeigt Abbildung 7.19. Aufgrund der z.Z. angeschlossenen Elektronik kann kein U_{DC} -Wert größer als 12,5 V angelegt werden, weshalb Abbildung 7.19 nur den unteren Teil des Stabilitätsdiagrammes zeigt. Durch den symmetrischen Fit konnte aber die quadratische Steigung des Randes des Stabilitätsdiagrammes sehr genau bestimmt werden. Außerdem konnte die obere Grenze auf der q' -Achse bestimmt werden, wo die Ionen die Falle verlassen. Das maximale $U_{Mon,pp}$ beträgt 3,7 V, was einem q' -Wert von 0,62 entspricht.

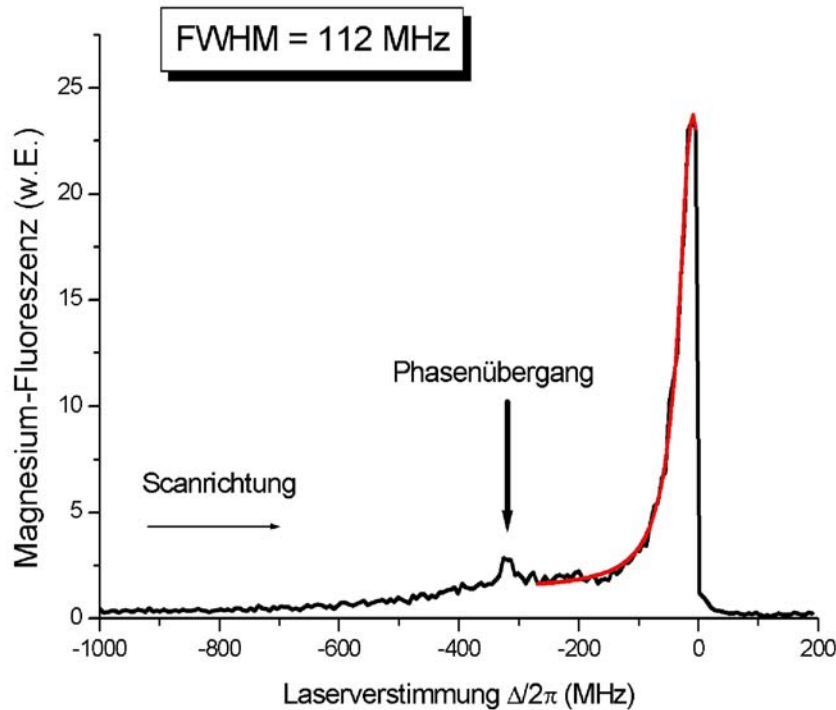


Abbildung 7.17: Experimenteller Nachweis der Kristallisation einer Mg^+ -Wolke. Die Laserverstimmung zum atomaren Mg-Übergang wurde von -1000 MHz ausgehend verkleinert. Während dieses Scanvorgangs ereignet sich bei -322 MHz-Verstimmung ein Phasenübergang vom Wolkenzustand zum kristallinen Zustand, erkennbar an dem Knick in der Kurve. Dieser Knick kommt von der plötzlichen Verkleinerung der Linienbreite der Ionen. Im Wolkenzustand ist die Linienbreite noch breit und somit bei großer Verstimmung größer als im kristallinen Zustand. Deshalb fällt direkt nach der Kristallisation die Fluoreszenz zunächst ab, um dann aber zur Resonanz hin wesentlich größer als im Wolkenzustand zu werden (siehe auch [132, 193]).

Aus dieser Messung läßt sich $\frac{X^2}{L}$ bestimmen. Die Herleitung erfolgt folgendermaßen. Laut Theorie (siehe Anhang I) besitzt der obere Rand des Stabilitätsbereichs in nullter Näherung eine quadratische Abhängigkeit folgender Form:

$$a_0 = \frac{1}{2}q^2 \quad (7.3)$$

Setzt man in Gl. (7.3) die Definitionen der a- und q-Werte aus Gl. (2.4) unter Berücksichtigung des Spannungsverlustfaktors L ein, dann ergibt sich mit $U_{RF} = X \cdot U_{Mon,pp}$ folgende Gleichung:

$$U_{DC} = \frac{e}{2m\Omega^2 r_0^2} \frac{X^2}{L} U_{Mon,pp}^2 = A \cdot U_{Mon,pp}^2 \quad (7.4)$$

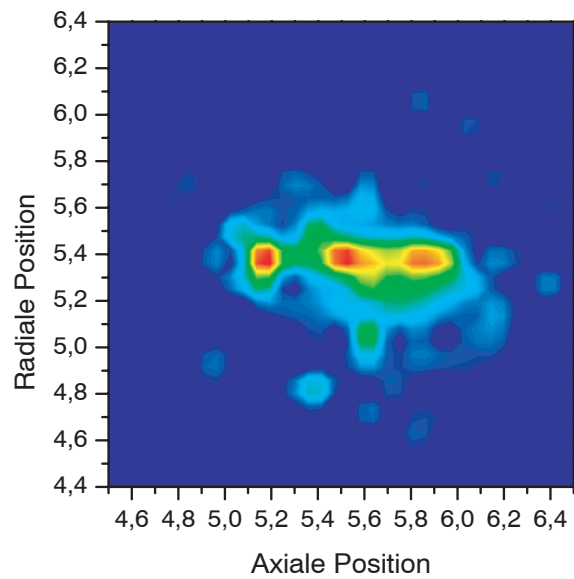


Abbildung 7.18: $^{24}\text{Mg}^+$ -3-Ionen-Kristall. Es fällt auf, daß das linke Ion gut lokalisiert ist, während die beiden rechten Ionen etwas verwaschen erscheinen. Dies kann auf die in einer radialen Richtung nicht kompensierte Mikrobewegung zurückzuführen sein.

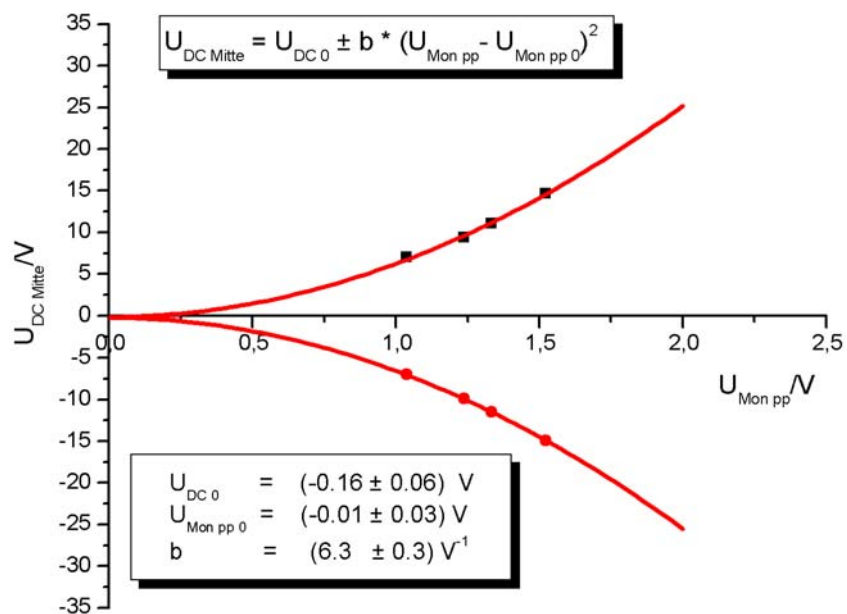


Abbildung 7.19: Mit Ionenkristallen gemessenes Stabilitätsdiagramm der neuen Vierstabfalle.

Aus dem symmetrischen Fit an beiden Stabilitätsgrenzen aus Abb. 7.19 ergibt sich A zu $A = (6,3 \pm 0,3) V^{-1}$. Damit erhält man einen Wert der L und X verknüpft: $\frac{X^2}{L} = 16300 \pm 800$. Aus der Messung der radialen Schwingungsfrequenzen in Abhängigkeit des Monitorsignals (siehe Kapitel 7.3.1) erhielt man einen Wert für $\frac{X}{L}$ von 112 ± 4 , so daß sich der Monitoreichfaktor X und der Spannungsverlustfaktor L ergeben zu:

$$X = 146 \pm 9 \quad (7.5)$$

$$L = 1,30 \pm 0,09 \quad (7.6)$$

Der theoretisch ermittelte Spannungsverlustfaktor ist 1,30 (siehe Kapitel 3.5.1), was sehr gut mit dem experimentell bestimmten Wert übereinstimmt. Der mit einem Tastkopf ermittelte Monitoreichfaktor ergab sich zu $135,1 \pm 0,5$ (siehe Abb. 6.3). Wie bereits erläutert wird bei der Messung aus Abb. 6.3 in das System eingegriffen, weshalb man mit einem systematischen Fehler rechnen mußte. Trotzdem ist die Übereinstimmung erstaunlich gut.

7.3.5 Mikrobewegungskompensation

Eine wichtige Voraussetzung für stabile Ionenkristalle und die Grundzustandskühlung ist die Kompensation der Mikrobewegung. Welchen Einfluß die Mikrobewegung auf die Laserkühlung hat, ist in [195] ausführlich beschrieben.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, Mikrobewegungskompensation zu erreichen. Die im folgenden beschriebene Methode, welche ausführlich in [114] beschrieben ist, bedient sich einer RF-Korrelationsmethode, bei der in Abhängigkeit der Phase der RF-Fallenspannung die Fluoreszenz des Ionenkristalls detektiert wird. Daneben seien noch zwei weitere Detektionsmethoden angeführt [196]: Man kann die Veränderung der mittleren Position der Ionen beobachten, falls die Fallenpotentiale verändert werden. Eine weitere Methode detektiert die Seitenbänder, welche durch die Mikrobewegung erzeugt werden (siehe auch Kapitel 4.2 bzw. 4.3). Durch Veränderung der Ionenposition kann erreicht werden, daß die Seitenbänder verschwinden und somit die Mikrobewegung kompensiert wird.

Die Lösung der in Kapitel 2.1 behandelten Bewegungsgleichung setzt sich in adiabatischer Näherung (siehe Anhang F) aus der langsamen Säkularbewegung und der schnellen Mikrobewegung bei der Fallenfrequenz zusammen. Bei Vorhandensein von Mikrobewegung wird

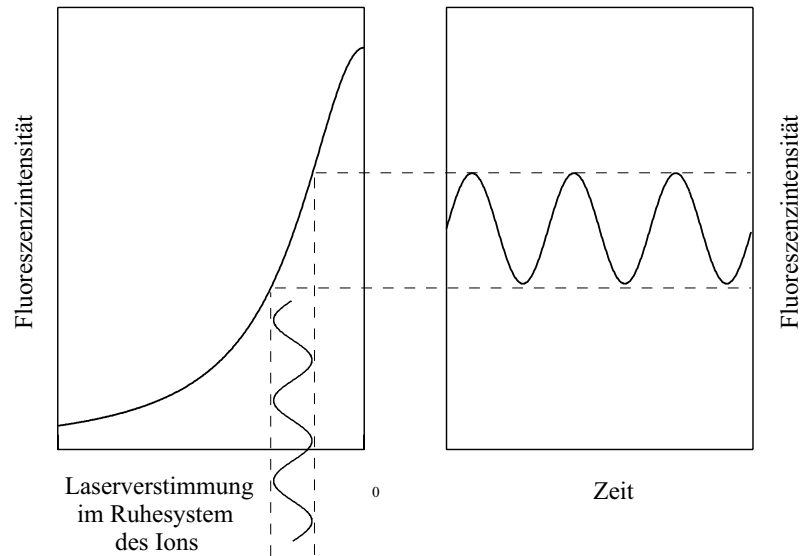


Abbildung 7.20: Nachweis der Mikrobewegung über die Modulation der Fluoreszenzintensität. Die periodische Dopplerverschiebung der Laserverstimmung im Ruhesystem des Ions resultiert in einer Intensitätsmodulation des Fluoreszenzlichts.

durch RF-Heizung [107], die Ionenwolke geheizt und Kristallisation^[3] verhindert.

Bei einer linearen Ionenfalle sollte im Idealfall aus Symmetriegründen entlang der Fallachse keine Mikrobewegung auftreten, da dort keine RF-Feldkomponente auftreten sollte. Falls die Ionenkette aber in radialer Richtung aufgrund von Kontaktpotentialen auf den Elektroden oder sonstigen Störfeldern wie z.B. elektrischen Ladungen auf dielektrischen Materialien wie z.B. Keramiken ausgelenkt werden sollte, tritt Mikrobewegung auf, welche umso stärker ist, je weiter sie vom Minimum des Pseudopotentials entfernt sind (siehe Abbildung 7.21).

Die RF-Korrelationsmethode nutzt die Tatsache aus, daß durch die Mikrobewegung der Ionen das Laserlicht im Ruhesystem der Ionenkette frequenzmoduliert ist (siehe Abbildung 7.20 links). Dies resultiert in einer Intensitätsmodulation des Fluoreszenzlichts mit der Fallenfrequenz. Aus der Messung der Fluoreszenz in Korrelation mit der Fallenfrequenz

^[3] Kristallisation hängt vom Plasmaparameter Γ ab, welcher wie folgt definiert ist: $\Gamma = \frac{E_{Coul}}{k_B T}$, wobei E_{Coul} die Coulombenergie zwischen nächsten Nachbarn ist. Experimente an größeren $^{24}\text{Mg}^+$ -Kristallen zeigten [197], daß das Einsetzen von räumlicher Ordnung bei ähnlichen Plasmaparametern wie im Fall von unendlichen Plasmen [198] erfolgt. In den dortigen Simulationen [198] wurde gezeigt, daß eine Kristallisation bei einem Plasmaparameter von $\Gamma \geq 100$ erwartet wird.

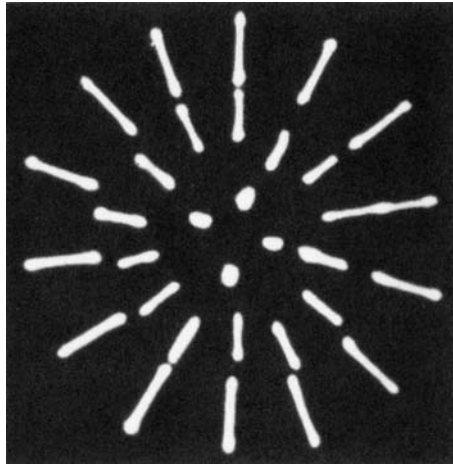


Abbildung 7.21: *Messung der radialen Mikrobewegung gespeicherter Aluminiumteilchen (Durchmesser ca. $20\ \mu\text{m}$). Die Abbildung ist [199] entnommen.*

kann die Mikrobewegungsamplitude direkt bestimmt werden. Zur Kompensation der Mikrobewegung werden die Ionen mittels der seitlichen und vertikalen Verschiebespannungen U_H und U_V solange verändert, bis keine Änderung der Fluoreszenzintensität mehr zu beobachten ist (siehe Abbildung 7.22). Im Vergleich zu dieser Messung, bei der man die Mikrobewegung so gut kompensieren konnte, daß man praktisch keinen Einfluß der Mikrobewegung mehr erkennen konnte, sieht man in Abbildung 7.23 eine entsprechende Messung mit der linearen Endkappenfalle, wo man noch deutliche Restspuren von Mikrobewegung sehen kann. Dies spricht ganz eindeutig für eine wesentlich verbesserte Justage der Fallenelektroden der neuen Vierstabfalle im Vergleich zur linearen Endkappenfalle, wo der ganze Zusammenbau mit Hilfe eines Mikroskop getätigt werden mußte, was offenbar nicht so gut bewerkstelligt werden konnte wie die Autojustage der neuen Falle dieser Arbeit.

Da diese RF-Korrelationsmethode auf dem Dopplereffekt erster Ordnung beruht, ist es damit nur möglich, Informationen über die Mikrobewegung entlang des eingestrahnten Lasers zu bekommen. Zur vollständigen Mikrobewegungskompensation ist es notwendig, zwei Laserstrahlen, welche in radialer Richtung unterschiedliche Winkel mit den Fallachsen einschließen, zu verwenden. Mit einem weiteren Laser entlang der Fallachse kann man auch Mikrobewegung in dieser Richtung messen und somit Abweichungen vom Verhalten einer idealen linearen Falle feststellen.

In Abb. 7.24 sieht man eine Gerade in der (U_H, U_V) -Ebene aufgetragen, die einer Kom-

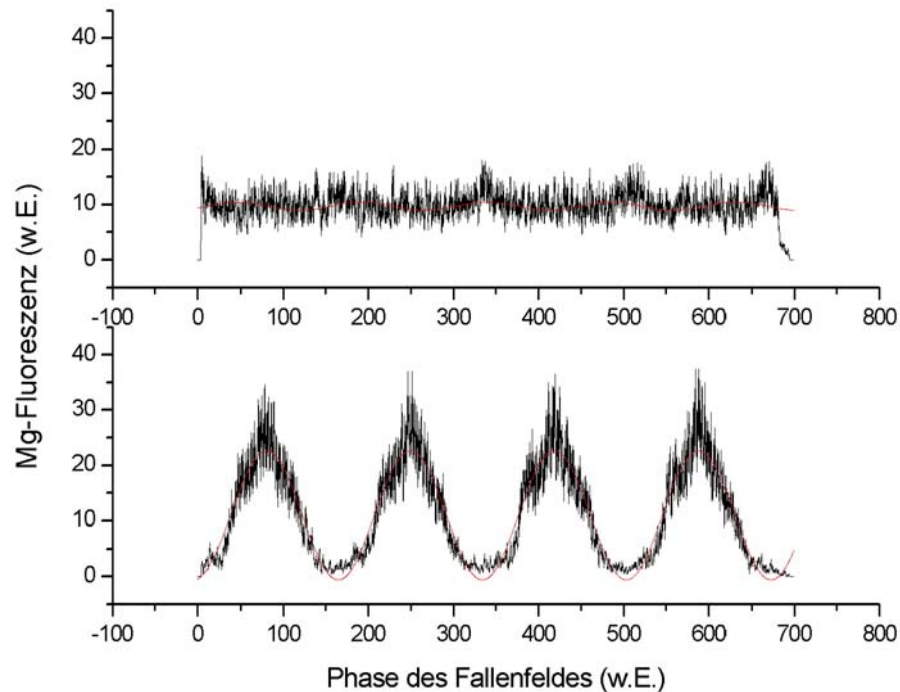


Abbildung 7.22: *Kompensation der Mikrobewegung in radialer Richtung. Mikrobewegung gemessen bezüglich des Lasers 2 (L2). Die radialen Verschiebungen betragen in der unteren Abbildung ohne Kompensation $U_H = 0,45$ V und $U_V = -0,77$ V. Nach erfolgter Kompensation (obere Kurve) ergeben sich folgende Werte: $U_H = 0,47$ V und $U_V = -0,6$ V.*

ponente der Mikrobewegung entlang Laser 2 entspricht. Mit Hilfe eines zweiten radialen Lasers kann eine zweite solche Gerade gemessen werden. An der Schnittstelle beider Geraden ist die radiale Mikrobewegungskompensation optimal, d.h. die Mikrobewegung ist in beiden radialen Richtungen kompensiert. Um einen solchen Laser in den momentanen Aufbau zu integrieren, ist jedoch ein Umbau der Strahlführung notwendig.

Es konnten jedoch auch vorher schon weitere für die Realisierung von Zweikomponenten-Ionenkristallen wichtige Experimente durchgeführt werden. Dabei wurde versucht, Mg-Ionenkristalle bei hohen q -Werten zu realisieren, bei denen ebenfalls Indium gespeichert werden kann, da dort letztendlich die angestrebten Experimente durchgeführt werden sollen. Dazu wurden bei einem q -Wert innerhalb des Stabilitätsdiagrammes Ionen geladen, bei dem die Ladeeffizienz am höchsten ist und dann der q -Wert erhöht. Bei dieser Erhöhung

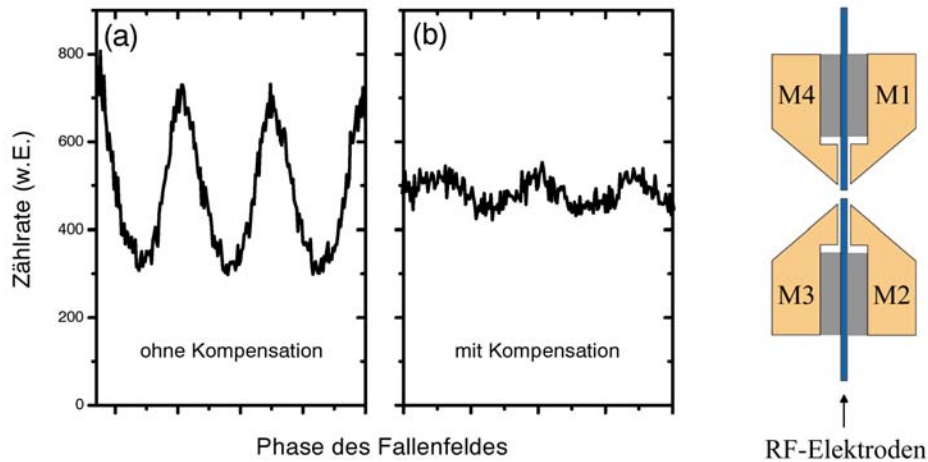


Abbildung 7.23: *Kompensation der Mikrobewegung in radialer Richtung bei der linearen Endkappenfalle (siehe Abbildung auf der rechten Seite). Die Falle besteht aus 2 sich gegenüberstehenden RF-Elektroden, welche dieselbe Fallenphase tragen. Zur Mikrobewegungskompensation sind 4 Masseelektroden (M1 bis M4) angebracht. Die an diesen Elektroden anliegenden Spannungen werden ebenfalls mit M1 bis M4 bezeichnet. (a): Mikrobewegung gemessen bezüglich eines Laserstrahls mit radialer Komponente. (b): Durch Anlegen von Kompensationsspannungen an die RF-Masselektroden kann die Mikrobewegung minimiert werden. Die restliche Mikrobewegungsamplitude beträgt $\approx 20 \mu\text{m}$. $M1 = 2,5 \text{ V}$, $M4 = 1,3 \text{ V}$.*

wurde beobachtet, daß noch innerhalb des Stabilitätsdiagrammes die Ionen seitlich aus der idealen Laserfokusposition wanderten. Dies ist auf eine Verschiebung des Potentialminimums zurückzuführen^[4]. Bei dem nun erreichten höheren q -Wert konnte dann Mikrobewegungskompensation bezüglich Laser 2 erreicht werden. Die Kristallisation war schwieriger zu erreichen als bei niedrigem q -Wert, da sich die nicht kompensierte radiale Komponente hier stärker auswirkte. Dies ist wiederum darauf zurückzuführen, daß gleich große Auslenkungen von der idealen Position bei höherem q -Wert aufgrund des steileren Einschusses zu einer höheren Mikrobewegung führen als bei niedrigem q -Wert, also flachem Einschluß. Das wiederholte Erhöhen des q -Wertes kann man bis zu einem beliebigen q -Wert durch-

^[4] *Eine mögliche Erklärung dafür wäre der flachere radiale Einschluß. Da dort die Mikrobewegungskompensation nicht so sensitiv wie bei steilem Einschluß ist, könnte bei Erhöhung des q -Wertes so die Ionenkette in eine Position geschoben worden sein, an der die Mikrobewegung nicht perfekt kompensiert ist.*

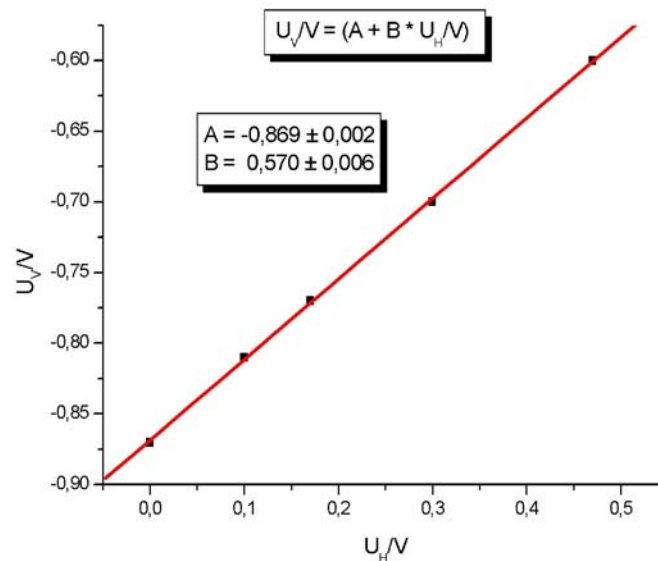


Abbildung 7.24: *Minimierung der Mikrobewegung. Die Gerade beschreibt die radialen Verschiebespannungen, für die die Mikrobewegung entlang Laser 2 kompensiert wird.*

führen und so auch nahe der Stabilitätsgrenze mikrobewegungskompensierte Magnesium-Ionenkristalle speichern.

Zur Speicherung von heterogenen Ionenkristallen muß als nächster Schritt zusätzlich Indium geladen werden. Im Idealfall kann man so einen Misch-Kristall erhalten. Da im jetzigen Aufbau Kontaktpotentiale vermieden werden, bleibt als hauptsächliche Schwierigkeit bei der Realisierung von In^+ - Mg^+ -Kristallen der Massenunterschied.

Magnesium als das leichtere Ion muß bei einem sehr hohen q -Wert gespeichert werden. Dies führt zu einer erhöhten Heizung der Ionen und kann bei hohen q -Werten einen Phasenübergang verhindern [200]. Desweiteren kann der große Massenunterschied dazu führen, daß der heterogene Kristall zick-zack-förmig wird. Dies hängt damit zusammen, daß die radialen Potentiale invers proportional zur Masse sind und somit die Indiumionen radial sehr viel schwächer gebunden sind als die Magnesiumionen.

Ausblick

登鶴雀樓

白日依山盡
黃河入海流
欲窮千里目
更上一層樓
王之渙

Den Storchenturm erklimmen

Die Sonne steht schon nah am Berg
Der gelbe Fluß strömt ins Meer
Willst über den Horizont du sehn
Mußt noch ein Stockwerk erklimmen

Chinesisches Gedicht der Tang-Dynastie

Wang Zhihuan (688-742)

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine neuartige Ionenfalle konzipiert und in Betrieb genommen, die beste Voraussetzungen zur Speicherung heterogener Ionenkristalle liefert. Mit dieser Ionenfalle wurden sowohl Indium als auch Magnesium gespeichert und Magnesium-Ionenkristalle nachgewiesen. Die für stabile Kristalle wichtige Mikrobewegungskompensation wurde gegenüber früher betriebenen Ionenfallen verbessert. Durch neue fokussierende Elektronenkanonen und optimal kollimierte Atomstrahlen ist eine effizientere Nutzung der Atomöfen und somit ein saubereres Laden der Ionenfalle

möglich. Durch die Trennung der Ladezonen der beiden verwendeten Ionensorten konnten Kontaktpotentiale durch Bedampfung mit unterschiedlichen Metallen vermieden werden. All dies schafft ideale Voraussetzungen für eine erfolgreiche Realisierung und Kühlung von Magnesium-Indium-Ionenkristallen.

Eine weitere herausragende Eigenschaft dieser neuartigen Falle ist u.a. die sehr genaue Autojustage der Elektroden gegeneinander durch hochpräzise Keramikröhrchen, welche als Abstandshalter zwischen die Elektroden in vorgefertigte Nuten gelegt sind. Weiterhin ist der Abstand der Elektroden wesentlich grösser als bei der linearen Endkappenfalle. Dies soll eine kleinere Heizrate bewirken, da in den letzten Jahren zahlreiche Hinweise auf erhöhte Heizraten bei kleinen Abständen der Ionen von den Elektroden beobachtet worden waren [60].

Damit sind optimale Voraussetzungen für eine baldige Realisierung von Magnesium-Indium-Ionenkristallen geschaffen. Von diesen heterogenen Kristallen ausgehend, könnte man an $^{115}\text{In}^+$ Seitenbandkühlung betreiben und somit durch die sympathetische Wechselwirkung der beiden Ionensorten auch $^{25}\text{Mg}^+$ kühlen. Für Indium sollten axiale Schwingungsfrequenzen bis zu 500 kHz ohne Probleme realisierbar sein. Damit würde sich ohne Berücksichtigung von weiteren Heizeffekten nach Gl. (4.7) eine theoretische mittlere Besetzung der Oszillatorniveaus von $\langle n \rangle = 0,16$, also Grundzustandskühlung, ergeben. Insbesondere wäre auch das Lamb-Dicke-Regime erreicht, welches eine wichtige Voraussetzung für das Sørensen-Mølmer-Gatter darstellt.

Um die Effizienz der Kühlung zu testen, ist die Messung der erreichten Endtemperatur wichtig. Die genaueste Methode (wie in Kapitel 4.3 bereits beschrieben) mißt die Intensität des roten und blauen Seitenbands (S_{-1} und S_1), sowie des Trägers (S_0), woraus man die Temperatur bestimmen kann. Für diese Messung gibt es beim heterogenen Kristall mehrere Möglichkeiten. Zum einem kann sie am $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$ -Übergang des $^{115}\text{In}^+$ -Ions durchgeführt werden. Dies wurde in unserer Arbeitsgruppe bereits erfolgreich sowohl für ein als auch zwei Ionen demonstriert [4]. Bei dieser Messung kann jedoch nur der Träger und das rote Seitenband zur Temperaturbestimmung genutzt werden, da auf dem blauen Seitenband die Ionen aus der Falle geheizt werden. Außerdem ist die

Bestimmung unpräzise, da das erste rote Seitenband sogar bei einer Säkularfrequenz von 1 MHz schwer aufzulösen ist, da der Übergang selbst eine Linienbreite von nur 360 kHz besitzt. Desweiteren verändert sich die Temperatur während der Messung. Eine genauere Bestimmung der Temperatur ist auf dem schmalbandigen $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ -Indium-Übergang realisierbar. Allerdings steht dieser Laser im Experiment nicht zur Verfügung. Die beste Realisierungsmöglichkeit bietet ein Raman-Übergang zwischen zwei Hyperfeinniveaus des Grundzustandes von $^{25}\text{Mg}^+$. In Anlehnung an ein Experiment der Wineland-Gruppe [67], welches mit Beryllium durchgeführt wurde, bestimmt man die Temperatur aus dem Verhältnis des ersten roten zum ersten blauen Seitenbandes eines stimulierten Raman-Übergangs zwischen den beiden oben angesprochenen Hyperfeinniveaus. Da die Linienbreite der Raman-Übergänge durch Wahl der experimentellen Parameter beliebig schmal gemacht werden kann, stellt die Auflösung der Seitenbänder kein Hindernis dar. Desweiteren wird die Temperatur der Ionen während der Messung nur unwesentlich verändert, da die Raman-Übergänge nur wenige μs dauern.

Damit wären die wesentlichen Voraussetzungen für eine Realisierung eines Sørensen-Mølmer-Gatters bereitgestellt. Wie bereits in Kapitel 5.3 diskutiert, würde ein 4-Ionen-Kristall mit je 2 Magnesium und je 2 Indium-Ionen in symmetrischer Konfiguration und Benutzung einer antisymmetrischen Schwingungsmode, z.B. der Atmungsschwingung, den Idealfall in Punkto Heizraten darstellen. Ein erstes Experiment in dieser Anordnung ist der Nachweis der Verschränkung der beiden Magnesium-Ionen. In Verbindung mit Einzelqubitrotationen wäre erstmalig ein CNOT-Gatter zwischen zwei Ionen bei permanenter Kühlung der ganzen heterogenen Ionenkette realisierbar. Bisher wurden in Ionenfallen erst drei Realisierungen eines CNOT-Gatter berichtet [68–70], bei denen die verknüpften Qubits in zwei unterschiedlichen Ionen gespeichert wurden. Ein Gatter, bei dem beide verknüpften Qubits in Oszillation und internen Niveaus eines einzigen Ions gespeichert wurden, wurde bereits 1995 realisiert [67].

Anhang A

Magnesium

- **Isotopenzusammensetzung:**
 ^{24}Mg : 79%, ^{25}Mg : 10%, ^{26}Mg : 11%
- **Ionisierungsenergie:** 7,65 eV
- **Atomarer Übergang von $^{24}\text{Mg}^+$:** $3^2\text{S}_{1/2} \rightarrow 3^2\text{P}_{1/2}; 3^2\text{P}_{3/2}$
- **Wellenlänge:** $\lambda = 280,270 \text{ nm}; 279,553 \text{ nm}$
- **Linienbreite:** $\Gamma = 2\pi \cdot 42,7 \text{ MHz}$
- **Übergangsfrequenz:** $\omega_A = 2\pi \cdot 1,07287 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$
- **Lebensdauer:** $\tau_R = 3,75 \text{ ns}$
- **Sättigungsintensität:** $I_{sat} = \frac{2\pi^2 \hbar c \Gamma}{3\lambda^3} = 255,5 \text{ mW/cm}^2$
- **Rückstoßenergie:** $E_R = 10 \mu\text{K}$
- **Rückstoßfrequenz:** $\omega_R = 2\pi \cdot 106 \text{ kHz}$
- **Doppler-Kühlgrenze:** $T_{Doppler} = 1,0 \text{ mK} \hat{=} 100 E_R$
- **Kernspin von $^{24}\text{Mg}^+$:** $I = 0$
- **Kernspin von $^{25}\text{Mg}^+$:** $I = 5/2$

- Kernspin von $^{26}\text{Mg}^+$: $I = 0$
- Hyperfeinaufspaltung des Grundzustands von $^{25}\text{Mg}^+$:
 $\omega_{HFA} = 1788763128(162)$ Hz
- Isotopenverschiebung:
 $^{24}\text{Mg}^+ \rightarrow ^{25}\text{Mg}^+$, F=2-Zustand: 0,55 GHz
 $^{24}\text{Mg}^+ \rightarrow ^{25}\text{Mg}^+$, F=3-Zustand: 2,34 GHz
 $^{24}\text{Mg}^+ \rightarrow ^{26}\text{Mg}^+$: 3,05 GHz
- Landéfactoren g_F von $^{25}\text{Mg}^+$:

	$3^2S_{1/2}$	$3^2P_{1/2}$	$3^2P_{3/2}$
F=4	—	—	$-\frac{1}{2}$
F=3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{18}$
F=2	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
F=1	—	—	-1

Anhang B

Indium

- **Isotopenzusammensetzung:**

$$^{113}\text{In}: 4,3\%$$

$$^{115}\text{In}: 95,7\%$$

- **Ionisierungsenergie:**

$$5,79 \text{ eV}$$

- **Wellenzahlen der $^{115}\text{In}^+$ -Übergänge ($^1\text{S}_0, F=9/2 \longrightarrow ^3\text{P}_{1,F}$)**

$$F = 7/2: \quad (43349,30 \pm 0,02) \text{ cm}^{-1}$$

$$F = 9/2: \quad (43350,36 \pm 0,02) \text{ cm}^{-1}$$

$$F = 11/2: \quad (43351,62 \pm 0,02) \text{ cm}^{-1}$$

- **Hyperfeinstrukturkonstanten:**

$$A(^3P_1) = (0,232 \pm 0,003) \text{ cm}^{-1}$$

$$B(^3P_1) = (-0,016 \pm 0,014) \text{ cm}^{-1}$$

- **Isotopieverschiebung zwischen $^{115}\text{In}^+$ und $^{113}\text{In}^+$ bei $^1\text{S}_0 \longrightarrow ^3\text{P}_1$:**

$$\nu_{113} - \nu_{115} = (0,696 \pm 0,007) \text{ GHz}$$

- **Lebensdauern:**

$$\tau(^3P_1) : (0,44 \pm 0,04) \mu\text{s}$$

$$\tau(^3P_0) : (0,195 \pm 0,005) \text{ s}$$

- **Sättigungsintensität bei $^1\text{S}_0 \longrightarrow ^3\text{P}_1$:**

$$I_{\text{sat}} = 3,837 \text{ mW/cm}^2$$

- Rückstoßfrequenz:

$$\omega_R = 2\pi \cdot 33 \text{ kHz}$$

Anhang C

Shor's

Primzahlfaktorierungsalgorithmus

C.1 Beschreibung des Algorithmus

Der Algorithmus^[1] bestimmt die Primzahlfaktoren einer Zahl in einer Zeit die polynomial von der Länge der Zahl abhängt, wohingegen ein klassischer Computer dies nur mit einem exponentiellen Zeitanstieg bewältigen würde. Zeit deutet in diesem Zusammenhang auf die Anzahl der Schritte hin, welche zur Lösungsfindung nötig sind.

Die Faktorisierung einer Zahl N läßt sich auf ein äquivalentes Problem zurückführen. Nämlich die Bestimmung der Periode r der Funktion

$$F_N(a) := y^a \text{ MOD } N = F_N(a+r) \quad , a = 0, 1, 2, \dots, N^2 - 1 \quad , \quad (\text{C.1})$$

wobei y eine willkürlich gewählte Zahl mit $\text{ggT}(N,y) = 1$ ist.

Im nächsten Abschnitt wird klar werden wie der Zusammenhang zwischen der Periode dieser Funktion und den Primfaktoren von N ist. Betrachten wir zuerst die Legendre-Kongruenz

$$x^2 \equiv 1 \text{ MOD } N \quad , \quad (\text{C.2})$$

^[1] Für eine kürzliche Realisierung mittels Kernspinresonanz siehe [65].

welche immer die sogenannten Trivialsösungen $x \equiv \pm 1 \pmod{N}$ besitzt. Falls N eine ungerade Primzahl p ist, dann sind dies die *einzigsten* Lösungen^[2]. Falls jedoch N zusammengesetzt, also von der Form $N = p_1 p_2$ (p_1 und p_2 Primzahlen) ist, dann gibt es auch noch andere nichttriviale Lösungen der Form $x \equiv \pm a \pmod{N}$ mit $a \neq 1$. Für diese gilt, daß der größte gemeinsame Teiler von $a \pm 1$ und N ein Faktor von N ist. Für einen Beweis mittels des Chinesischen Restsatzes siehe [201, 202].

Falls man eine nichttriviale Lösung x von C.1 hat, kann man schnell einen nichttrivialen Faktor von N finden. Solch ein x findet man wie folgt. Wähle bei gegebenen N ein zufälliges $y < N$. Falls für y und N $\text{ggT}(y, N) = 1$ gilt und R die Ordnung von $y \pmod{N}$ ist, gilt also

$$y^R \equiv 1 \pmod{N}. \quad (\text{C.3})$$

Vergleich mit C.1 läßt erkennen, daß R mit der Periode von $r \ F_N(a)$ übereinstimmt, d.h. $R = r$. Falls r gerade ist, wäre

$$x = y^{\frac{r}{2}} \quad (\text{C.4})$$

wegen $x^2 = y^r \equiv 1 \pmod{N}$ ein Kandidat für unsere nichttriviale Lösung a von C.2. Zwei Faktoren von N sind also $\text{ggT}(x \pm 1, N) = \text{ggT}(y^{\frac{r}{2}} \pm 1, N)$ ^[3]. Falls diese Faktoren noch keine Primzahlen sind kann der Algorithmus nochmals auf sie einzeln angewandt werden. Der Algorithmus funktioniert nicht falls r ungerade ist; man kann jedoch zeigen, daß die kombinierte Wahrscheinlichkeit, daß r gerade ist und $y^{\frac{r}{2}} \not\equiv \pm 1 \pmod{N}$ ist (also, daß es eine nichttriviale Lösung zu C.2 gibt) größer als

$$1 - \frac{1}{2^k - 1} \quad (\text{C.5})$$

ist, falls N von der Form

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \quad (\text{C.6})$$

ist.

Zur Illustration folgt jetzt ein Rechenbeispiel für den einfachen Fall $N = 15$. Dazu stelle ich nochmals den Algorithmus in praktikabler Kurzform vor.

^[2] Da Multiplikation \pmod{p} eine Umkehrung besitzt und $x^2 - 1 \equiv (x - 1)(x + 1) \equiv 0 \pmod{p}$ $x - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ oder $x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ impliziert

^[3] Der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen x und y kann in polynomialen Zeitaufwand mittels des Euklidischen Algorithmus (siehe Anhang E) ermittelt werden.

1. Wähle $y < N$ so, daß $\text{ggT}(y, N) = 1$ ist
2. Bestimme die Periode r der Funktion $F_N(a) := y^a \text{ MOD } N$
3. Zwei Faktoren von N sind $\text{ggT}(y^{\frac{r}{2}} \pm 1, N)$.

Im ersten Schritt kann man also eine Zahl aus der Menge $\{2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ auswählen. Wir wählen $y = 11$ und rechnen im zweiten Schritt die Funktion $11^\alpha \text{ MOD } 15$ für $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ aus. Dies ergibt $11, 1, 11, 1, 11, \dots$, woraus man $r = 2$ erhält. $x = y^{\frac{r}{2}}$ berechnet sich zu $x = 11$ und die Faktoren von $N = 15$ sind schließlich $\text{ggT}(11-1, 15) = 5$ und $\text{ggT}(11+1, 15) = 3$.

C.2 Bestimmung der Periode von F_N

Dies ist der entscheidende, noch fehlende Schritt im Shor-Algorithmus. Dazu wird ein Quantenregister, bestehend aus m Bits, wobei m zwischen N^2 und $2N^2$ gewählt wird, in eine gleichgewichtete Superposition aller 2^m Basiszustände der Form $|0\rangle |1\rangle \dots |1\rangle |0\rangle$. Dies geschieht mit Hilfe der unitären Hadamard-Transformation, welche in der Qubit-Basis eines einzelnen Qubits, folgendermaßen geschrieben wird:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Wird diese Transformation bei einem Quantenregister, das sich im Grundzustand $|0\rangle \dots |0\rangle$ befindet, auf jedes Qubit einzeln angewandt, so ergibt sich mit \hat{A} als den die gesamte Transformation bezeichnenden Operator

$$|\Psi\rangle = \hat{A} |0\rangle_m = \overbrace{T |0\rangle T |0\rangle \dots T |0\rangle}^{m \text{ Mal}} = \frac{1}{2^{m/2}} \sum_{x=0}^{2^m-1} |x\rangle, \quad (\text{C.8})$$

wobei die dezimale Darstellung von $|x\rangle$ gewählt wurde (siehe Kapitel 1.1).

Daraufhin werden mit einer einzigen unitären Transformation alle Funktionswerte von F_N im zweiten Register berechnet. Der sich ergebende Zustand lautet also

$$\frac{1}{2^{m/2}} \sum_{x=0}^{2^m-1} |x\rangle |F_N(x)\rangle = \frac{1}{2^{m/2}} \sum_{x=0}^{2^m-1} |x\rangle |y^x \text{ MOD } N\rangle \quad (\text{C.9})$$

Nun wird nur am zweiten Register eine Messung durchgeführt, die z.B. den Wert $z \text{ MOD } N$ liefert, welcher in der Form $y^\ell \text{ MOD } N$ für ein $\ell \leq r$ geschrieben werden kann. Da F_N r -periodisch ist, ist der Zustand im ersten Register reduziert worden auf x -Werte von $x = \ell, \ell + r, \ell + 2r, \dots, \ell + Ar$, wobei A die größte ganze Zahl kleiner als $(q - \ell) / r$ ist. $\ell \leq r$ wurde zufällig von der Messung ausgewählt und variiert von Messung zu Messung. Es ist $\ell \leq r < N$ und $2^m \approx O(N^2)$, so daß $A \approx 2^m / r$ ist. Der Messung des ersten Registers ist also nach der Messung

$$|\Phi_\ell\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+A}} \sum_{j=0}^A |j r + \ell\rangle \quad (\text{C.10})$$

Um nun die Periodizität zu erhalten wird auf den Zustand aus Gl. C.10 eine Quantenfouriertransform (QFT) bzw. um etwas genauer zu sein, eine diskrete Fouriertransformation zu den Basiszuständen $|x\rangle$, abkürzend DFT_x genannt, der Form

$$DFT_q : |x\rangle \longrightarrow \frac{1}{2^{m/2}} \sum_{y=0}^{2^m-1} \exp\left(\frac{2\pi i x y}{2^m}\right) |y\rangle \quad (\text{C.11})$$

angewandt.

Um die Formeln etwas einfacher zu halten beschränken wir uns auf den Fall, daß r 2^m exakt teilt, es gilt also $A = \frac{2^m}{r} - 1$. Gl. C.11 läßt sich dann schreiben als

$$\sqrt{\frac{r}{2^m}} \sum_{x=0}^{\frac{2^m}{r}-1} |x r + \ell\rangle = \sum_{y=0}^{2^m-1} f(y) |y\rangle \quad , \quad (\text{C.12})$$

wobei $f(y) = \sqrt{\frac{r}{2^m}} \delta_{y, x r + \ell}$ ist mit $x = 0, 1, \dots, \frac{2^m}{r} - 1$. Bei Anwendung der diskreten Fouriertransformation auf diesen Zustand erhält man den Zustand

$$DFT_x |\Phi_\ell\rangle = \sum_{z=0} \tilde{f}(z) |z\rangle \quad , \quad (\text{C.13})$$

wobei die Amplitude $\tilde{f}(z)$ die diskrete Fouriertransformierte von $f(y)$ ist. Sie ist ungleich Null, falls z ein Vielfaches von $2^m / r$ ist. Bei einer Messung am ersten Register erhält man nun mit einer Wahrscheinlichkeit proportional zu $|\tilde{f}(n 2^m / r)|^2$ den Wert $n 2^m / r$, wobei n eine natürliche Zahl ist. Da m bekannt ist, erhält man nach wenigen Versuchen mit hoher Wahrscheinlichkeit die Periode r .

Im letzten Schritt wird der probabilistische Charakter der Rechnung besonders deutlich. Der Algorithmus liefert nicht mit 100 %-iger Wahrscheinlichkeit das gewünschte Ergebnis.

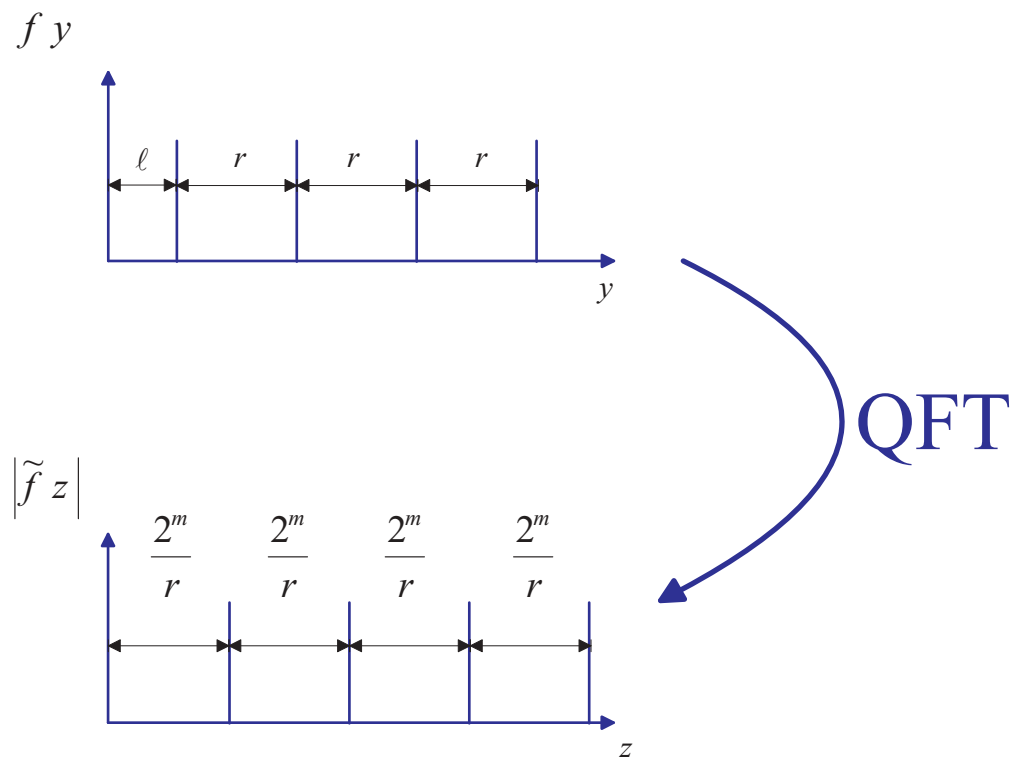


Abbildung C.1: *Quantenfouriertransformation. Die Funktion $f(y)$ und der Betrag ihrer Fouriertransformierten $\tilde{f}(z)$. Bei Messung des Zustands nach der QFT erhält man mit einer Wahrscheinlichkeit proportional zu $|\tilde{f}(n 2^m/r)|^2$ den Wert $n 2^m/r$, wobei n eine natürliche Zahl ist. Damit erhält man nach wenigen Messungen die Periode r .*

Vielmehr ist es notwendig, den Algorithmus öfters mit derselben Eingabe laufen zu lassen. Da der Quantenalgorithmus aber exponentiell schneller als der entsprechende klassische ist, bleibt er selbstverständlich dem klassischen vorzuziehen.

Anhang D

Satz von Earnshaw

Ich führe hierzu zwei Beweise an, der erste ist zur Illustration ein eher physikalischer Beweis, der zweite folgt aus einem einfachen Satz aus einer Vorlesung über Partielle Differentialgleichungen.

Beweis des Satzes von Earnshaw

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ein Gebiet. Dann besitzt die harmonische Funktion Ψ , die der Laplacegleichung $\Delta\Psi = 0$ genügt in Ω kein Extremum.

Beweis:

Sei $\vec{r} = 0$ der Mittelpunkt P einer Kugel $B_R \supset \Omega$. Wir differenzieren den Mittelwert von Ψ auf der Kugeloberfläche nach dem Kugelradius:

$$\frac{\partial}{\partial R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{d\Omega}{4\pi} \Psi(R, \theta, \phi) = \int_{\partial B_R(0)} \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\partial}{\partial R} \Psi = \quad (\text{D.1})$$

$$\frac{1}{4\pi R^2} \int_S d\vec{S} \cdot \vec{\nabla} \Psi = \frac{1}{4\pi R^2} \int_V d\vec{r} \Delta \Psi = 0 \quad (\text{D.2})$$

Dabei ist V das Kugelvolumen und S dessen Oberfläche. Es wurde also gezeigt, daß der Mittelwert nicht vom Kugelradius abhängt und somit gleich seinem $R \rightarrow 0$ Grenzwert, also dem Wert am Mittelpunkt sein muß. Ist nun aber der zentrale Wert gleich dem Mittelwert der Oberfläche von Ψ , so kann im Kugelmittelpunkt kein Maximum oder Minimum von Ψ sein. Das bedeutet, daß das Extremum von $\bar{\Omega}$ auf dem Rand $\partial\Omega$ angenommen wird. Es ist also keine stabile Speicherung eines Teilchens im elektrostatischen Falle möglich.

Vorab zum zweiten Beweis eine Definition aus der Vorlesung von Andreas Hinz [203].

Definition 5.1. Ist $u \in C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, so heißt u *subharmonisch* (*superharmonisch*), wenn

$$\forall 0 \leq \varphi \in C_0^\infty(\Omega) : \int u(x) \Delta \varphi(x) dx \geq 0 \quad (\leq 0). \quad (\text{D.3})$$

Satz 5.2. Es sei Ω ein Gebiet in \mathbb{R}^d , d.h. $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ist offen, beschränkt und zusammenhängend; $u \in C(\bar{\Omega})$ sei subharmonisch (superharmonisch) in Ω . Nimmt dann u sein Maximum (Minimum) in Ω an, so ist u konstant.

Aus Definition 5.1. folgt durch partielle Integration, daß eine harmonische Funktion Ψ aus $C^2(\Omega)$ sowohl sub- als auch superharmonisch ist. Mit Satz 5.2. folgt dann, daß, falls Ψ in Ω ein Extremum besitzt, Ψ konstant ist.

Anhang E

Euklidischer Algorithmus

Wir betrachten natürliche Zahlen a, b mit $a \geq b > 0$. Es gibt weitere ganze Zahlen q und c , so daß $q b + c = a$ mit $0 \leq c < b$ gilt. Dann ist

$$\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, c) \quad , \quad (\text{E.1})$$

denn jeder gemeinsame Teiler von b und c ist ein solcher von $a = q b + c$ und b und umgekehrt. Der Einfachheit halber setzt man in der rekursiven Programmierung des Algorithmus $\text{ggT}(x, y) = \text{ggT}(x-y, y)$, wobei $x > y$ gilt. Der Algorithmus bricht ab, falls

- eines der beiden Argumente gleich Null ist. Das Ergebnis ist das andere Argument, da im vorhergehendem Schritt beide Argumente gleich waren und trivialerweise $\text{ggT}(z, z) = z$ gilt.
- eines der Argumente gleich Eins ist. In dem Fall war es nicht möglich gemeinsame Teiler von x und y zu finden, sie sind teilerfremd und es gilt dann $\text{ggT}(x, y) = 1$.

Anhang F

Adiabatische Näherung

Hier soll die adiabatische Näherung, wie sie in Kapitel 2.1 erwähnt wurde, genauer ausgeführt werden. Ausgehend von der bereits gefundenen Lösung 2.8 (Ansatz über Floquetlösungen) der Mathieschen Differentialgleichung, wird über Koeffizientenvergleich eine Rekursionsformel für die Koeffizienten C_{2n} gefunden [204]. Daraus kann man einen Ausdruck für den Säkularparameter β in Abhängigkeit von den Parametern der Mathieschen Differentialgleichung a und q finden. In der Näherung $|a|, |q| \ll 1$, geht die Lösung 2.8 in 2.10 über.

Setzen wir also Lösung 2.8 an den Anfang.

$$\rho(\xi) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} \cos(2n + \beta)\xi + B \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} \sin(2n + \beta)\xi \quad , \quad (\text{F.1})$$

wobei A und B Integrationskonstanten sind, die nur von den Anfangswerten abhängen.

Setzt man o.B.d.A. $\dot{\rho}(0) = 0$, so folgt

$$\rho(\xi) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} \cos(2n + \beta)\xi \quad (\text{F.2})$$

$$\ddot{\rho}(\xi) = -A \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} (2n + \beta)^2 \cos(2n + \beta)\xi \quad (\text{F.3})$$

Setzt man dies in die Mathiesche Differentialgleichung $\ddot{\rho} + (a - 2q \cos 2\xi)\rho = 0$ ein, so ergibt sich:

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ C_{2n} \left(a - (2n + \beta)^2 \right) \cos[(2n + \beta)\xi] - 2q C_{2n} \cos 2\xi \cos[(2n + \beta)\xi] \right\} \quad (\text{F.4})$$

Mit dem bekannten Additionstheorem für den Kosinus

$$\cos [(2n + \beta) \xi] \cos (2\xi) = \frac{1}{2} \{ \cos [(2(n - 1) + \beta) \xi] + \cos [(2(n + 1) + \beta) \xi] \} \quad (\text{F.5})$$

erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ C_{2n} \left(a - (2n + \beta)^2 \right) \cos [(2n + \beta) \xi] \right. \\ &\quad \left. - q C_{2n} \{ \cos [(2(n - 1) + \beta) \xi] + \cos [(2(n + 1) + \beta) \xi] \} \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

und kann durch Ummumerierung des Laufindizes und Koeffizientenvergleich des Faktoren vor den Kosinus folgende Rekursionsformel bestimmen:

$$C_{2n} \left[a - (2n + \beta)^2 \right] - q C_{2n+2} - q C_{2n-2} = 0. \quad (\text{F.7})$$

Leicht erhält man folgende Form

$$\frac{C_{2n}}{C_{2n-2}} = \frac{q}{a - (2n + \beta)^2 \left[1 - \frac{q}{a - (2n + \beta)^2} \frac{C_{2n+2}}{C_{2n}} \right]} \quad (\text{F.8})$$

Durch rekursives Einsetzen derselben Formel für $\frac{C_{2n+2}}{C_{2n}}$ gelangt man zu

$$\frac{C_{2n}}{C_{2n-2}} = \frac{1}{q^{-1} \left[a - (2n + \beta)^2 \right] - \frac{1}{q^{-1} \left[a - (2n + 2 + \beta)^2 \right] - \frac{1}{q^{-1} \left[a - (2n + 4 + \beta)^2 \right] - \frac{1}{\dots}}} \quad (\text{F.9})$$

Ebenso ergibt sich

$$\frac{C_{2n}}{C_{2n+2}} = \frac{1}{q^{-1} \left[a - (2n + \beta)^2 \right] - \frac{1}{q^{-1} \left[a - (2n - 2 + \beta)^2 \right] - \frac{1}{q^{-1} \left[a - (2n - 4 + \beta)^2 \right] - \frac{1}{\dots}}} \quad (\text{F.10})$$

Gleichsetzen der Ausdrücke für $\frac{C_0}{C_{-2}}$ (aus F.9) und $\left(\frac{C_{-2}}{C_0} \right)^{-1}$ (aus F.10) ergibt aufgelöst nach β^2 :

$$\begin{aligned} \beta^2 &= a + \frac{q^2}{(\beta + 2)^2 - a - \frac{q^2}{(\beta + 4)^2 - a - \dots}} \\ &\quad + \frac{q^2}{(\beta - 2)^2 - a - \frac{q^2}{(\beta - 4)^2 - a - \dots}} \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

Für $|a|, |q| \ll 1$ ist $|\beta|, |a| \ll 2$. Damit ergibt sich

$$\beta^2 = a + \frac{q^2}{2} \quad (\text{F.12})$$

Bei der Rekursion der C_{2n} kann man sich in der adiabatischen Näherung auf $n \in \{-1, 0, 1\}$, also auf C_{-2}, C_0 und C_2 beschränken, da die anderen Koeffizienten rasch gegen Null streben. Es ergibt sich

$$C_2 = C_{-2} = -\frac{q}{4} C_0 \quad (\text{F.13})$$

Setzt man dies in F.2 ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \rho(\xi) &= A \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} \cos[(2n + \beta)\xi] \\ &= AC_{-2} \cos[(-2 + \beta)\xi] + AC_0 \cos[\beta\xi] + AC_2 \cos[(2 + \beta)\xi] \\ &= A \left(-\frac{q}{4}\right) C_0 (\cos \beta\xi \cos 2\xi + \sin \beta\xi \sin 2\xi) \\ &+ A \left(-\frac{q}{4}\right) C_0 (\cos \beta\xi \cos 2\xi - \sin \beta\xi \sin 2\xi) + AC_0 \cos \beta\xi \\ &= AC_0 \left[1 - \frac{q}{2} \cos \Omega t\right] \cos\left(\frac{\beta}{2}\Omega t\right) \quad , \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

wobei im letzten Schritt $\xi = \frac{\Omega t}{2}$ eingesetzt wurde. Hiermit ist man also bei dem Ausdruck angelangt, der Gl. 2.10 entspricht und an dem man explizit Makrobewegung (Säkluarbewegung) und Mikrobewegung erkennen kann.

Anhang G

Berechnung des Matrixelements

$$\langle m | e^{i\eta(a+a^\dagger)} | n \rangle$$

Für $m \geq n$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \langle m | e^{i\eta(a+a^\dagger)} | n \rangle &= e^{-\frac{1}{2}\eta^2} \langle m | e^{i\eta a^\dagger} e^{i\eta a} | n \rangle \\
 &= e^{-\frac{1}{2}\eta^2} \langle m | e^{i\eta a^\dagger} \sum_{l=0}^n (i\eta)^l \frac{1}{l!} \sqrt{n(n-1)\cdots(n-l+1)} | n-l \rangle \\
 &= e^{-\frac{1}{2}\eta^2} \langle m | \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^{\infty} (i\eta)^{l+k} \frac{1}{l!k!} \sqrt{n(n-1)\cdots(n-l+1)} \\
 &\quad \cdot \sqrt{(n-l+1)(n-l+2)\cdots(n-l+k)} | n-l+k \rangle \\
 &= e^{-\frac{1}{2}\eta^2} \sum_{l=0}^n (i\eta)^{2l+m-n} \frac{1}{l!(m+l-n)!} \sqrt{\frac{n!}{(n-l)!}} \sqrt{\frac{m!}{(n-l)!}} \\
 &= i^{m-n} e^{-\frac{1}{2}\eta^2} \eta^{m-n} \sqrt{\frac{n!}{m!}} \sum_{l=0}^n (-1)^l \eta^{2l} \frac{1}{l!} \binom{m}{n-l} \\
 &= i^{m-n} e^{-\frac{1}{2}\eta^2} \eta^{m-n} \sqrt{\frac{n!}{m!}} L_n^{m-n}(\eta^2) \quad , \tag{G.1}
 \end{aligned}$$

wobei L_n^α ein verallgemeinertes Laguerre-Polynom ist:

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{x^m}{m!}. \tag{G.2}$$

Man verallgemeinert leicht auf:

$$\langle m | e^{i\eta(a+a^\dagger)} | n \rangle = i^{|m-n|} e^{-\frac{1}{2}\eta^2} \eta^{|m-n|} \sqrt{\frac{\min(n, m)!}{\max(n, m)!}} L_{\min(n, m)}^{|m-n|}(\eta^2) \quad (\text{G.3})$$

Anhang H

Herleitung der Formel $\langle n \rangle = \frac{5}{16} \left(\frac{\Gamma}{\omega_z} \right)^2$ bei Seitenbandkühlung

Zur Herleitung der Formel 4.7 betrachtet man zuerst die zeitliche Ableitung des Erwartungswertes des Hamiltonoperators, also die Bilanz aus Kühl- und Heizrate. Für ein einzelnes, gefangenes Ion, das mit Laserlicht niedriger Intensität bestrahlt wird lautet der Ausdruck [145,205]:

$$\frac{d}{dt} \langle H \rangle = \frac{I \sigma_0}{\hbar \omega_L} \sum_n P_n \sum_f (E_f - E_n + E_R) |\langle \Psi_n | e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} | \Psi_f \rangle|^2 \cdot g(\omega_L - (E_f - E_n) / \hbar) \quad , \quad (\text{H.1})$$

wobei I die Intensität, σ_0 der resonante Photonenstreuquerschnitt und P_n die Besetzungswahrscheinlichkeit des n -ten Schwingungsniveaus der Energie $E_n = \hbar \omega_z (n + 1/2)$ und Wellenfunktion $|\Psi_n\rangle = |n\rangle$ ist. $g(\omega)$ ist das Linienprofil. Für ein 2-Niveau-Atom gilt:

$$g(\omega) = \frac{\Gamma^2/4}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (\text{H.2})$$

Falls man in diesem Ausdruck η bis zur 1. Ordnung berücksichtigt, erhält man für das Matrixelement $\langle \Psi_n | e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} | \Psi_f \rangle$ folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_n | e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} | \Psi_f \rangle &= \langle \Psi_n | 1 + i\eta (a^\dagger + a) + \dots | \Psi_f \rangle \\
&= \delta_{nf} + i\eta \sqrt{n} \delta_{n-1,f} + i\eta \sqrt{f} \delta_{n,f-1} \\
| \langle \Psi_n | e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} | \Psi_f \rangle |^2 &= \delta_{nf} + \eta^2 n \delta_{n-1,f} + \eta^2 f \delta_{n,f-1}
\end{aligned}$$

Falls man dieses Ergebnis in Gl. H.1 einsetzt erhält man:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \langle H \rangle \\
&= \frac{I\sigma_0}{\hbar\omega_L} E_R \left[g(\omega_L) + \left(\frac{E_R}{\hbar\omega_z} - 1 \right) \langle n \rangle g(\omega_L + \omega_z) + (1 + \langle n \rangle) \left(\frac{E_R}{\hbar\omega_z} + 1 \right) g(\omega_L - \omega_z) \right] \\
&= \frac{I\sigma_0}{\hbar\omega_L} E_R \left[g(\omega_L) + (\eta^2 - 1) \langle n \rangle g(\omega_L + \omega_z) + (1 + \langle n \rangle) (\eta^2 + 1) g(\omega_L - \omega_z) \right] \\
&= \frac{I\sigma_0}{\hbar\omega_L} E_R \{ \langle n \rangle [g(\omega_L - \omega_z) - g(\omega_L + \omega_z)] + [g(\omega_L) + g(\omega_L - \omega_z)] \} \quad , \quad (\text{H.3})
\end{aligned}$$

wobei $\langle n \rangle = \sum_n n P_n$ die mittlere Besetzungszahl der Oszillatorzustände ist, und η^2 -Terme in dieser Näherung vernachlässigt wurden.

Da der Gleichgewichtszustand am Ende der Kühlprozedur stationär ist, gilt $\frac{d}{dt} \langle H \rangle = 0$. Hieraus folgt für die mittlere Besetzungszahl $\langle n \rangle$ unter Ausnutzung von $\Gamma \ll \omega_z$ und $\omega_L = \omega_0 - \omega_z$ (1. rotes Seitenband):

$$\begin{aligned}
\langle n \rangle &= - \frac{g(\omega_L) + g(\omega_L - \omega_z)}{g(\omega_L - \omega_z) - g(\omega_L + \omega_z)} \\
&= \frac{5}{16} \left(\frac{\Gamma}{\omega_z} \right)^2 \quad (\text{H.4})
\end{aligned}$$

Anhang I

Stabilitätsdiagramm

I.1 Bestimmung der Eckpunkte des Stabilitätsdiagramms

Die stabilen, gebundenen Lösungen für die Mathieu-Gleichung in x-Richtung sind in Abb. I.1 zu sehen. Die Region um den Nullpunkt wird von den charakteristischen Kurven a_0 und b_1 begrenzt, für die $\beta = 0$ und $\beta = 1$ sind. Die charakteristischen Kurven sind nach [204] gegeben durch:

$$a_0 = -\frac{1}{2}q^2 + \frac{7}{128}q^4 - \frac{29}{2304}q^6 + \frac{68687}{18874368}q^8 + \dots \quad (\text{I.1})$$

$$b_1 = 1 - q - \frac{1}{8}q^2 + \frac{1}{64}q^3 + \frac{1}{1536}q^4 + \frac{11}{36864}q^5 + \frac{49}{589824}q^6 - \frac{55}{9437184}q^7 - \frac{265}{113246208}q^8 + \dots \quad (\text{I.2})$$

Da die entsprechenden Stabilitätskurven für die y-Richtung durch Spiegelung an der q-Achse zu gewinnen sind, kann man folgende Aussagen über das Stabilitätsdiagramm für die radiale Richtung in der Nähe des Ursprungs machen: Das Ende in q-Richtung ist durch den ersten positiven Schnittpunkt von b_1 mit der a-Achse gegeben. Der obere Rand des Stabilitätsdiagramms ist bis zum Schnittpunkt von $-a_0$ und b_1 durch $-a_0$ gegeben, danach durch b_1 . Der Schnittpunkt von $-a_0$ und b_1 ergibt sich zu $q_s = 0,706$; das Ende des Stabilitätsdiagramms zu $q_{max} = 0,909$. Der a-Grenzwert bei q_s ist gegeben durch $a(q_s) = 0,237$.

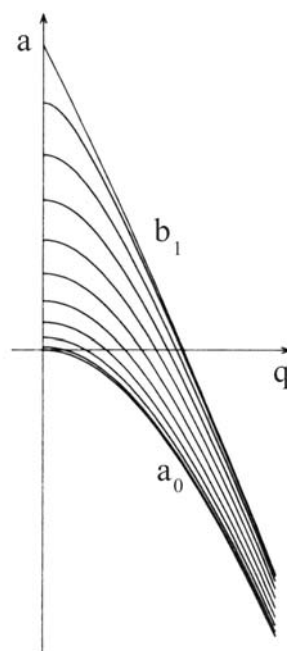


Abbildung I.1: *Stabilitätsdiagramm der Mathieu-Differentialgleichung in x -Richtung in Nähe des Ursprungs. Abbildung entnommen aus [204].*

Anhang J

Besselfunktionen

Hier sollen einige wichtige Eigenschaften von Besselfunktionen präsentiert werden, welche im Zusammenhang mit Seitenbändern wichtig sind. Die Besselfunktionen erster Gattung der Ordnungen $J_n(z)$ ($z \in \mathbb{C}$) sind Lösungen zur Besselschen Differentialgleichung für $y(z)$:

$$z^2 y'' + zy' + (z^2 - n^2)y = 0 \quad y, z, n \in \mathbb{C} \quad (\text{J.1})$$

Im allgemeinsten Fall kann $n \in \mathbb{C}$ gelten, wir wollen uns jedoch auf den Fall $n \in \mathbb{Z}$ beschränken. In Abb. J.1 kann man die Besselfunktionen der Ordnungen 0 bis 3 (J_0 bis J_3) als Funktion einer reellen Variable sehen. In Tabelle J.1 sind die ersten vier positiven Nullstellen der ersten 6 Besselfunktionen aufgeführt.

Man sieht also, daß bis $M = 2,405$ der Träger keine Nullstelle hat und weiterhin, daß bis $M = 1,435$ der Träger größer als alle anderen Seitenbänder ist.

Für Besselfunktionen erster Gattung geradzahlgiger Ordnung gilt:

N	n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
1	2,405	3,832	5,135	6,379	7,588	8,771
2	5,520	7,016	8,417	9,760	11,064	12,339
3	8,654	10,173	11,620	13,015	14,373	15,700
4	11,792	13,323	14,796	16,224	17,616	18,980

Tabelle J.1: *Nullstellen einiger Besselfunktionen.*

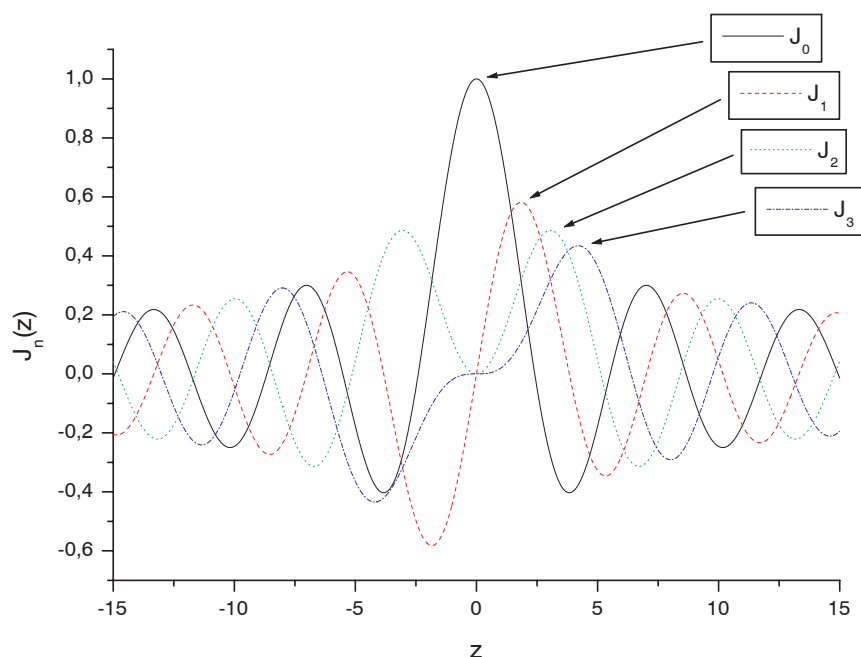


Abbildung J.1: Besselfunktionen der Ordnungen 0 bis 3 (J_0 bis J_3) als Funktion einer reellen Variable z .

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \quad z \in \mathbb{C} \quad (\text{J.2})$$

$$J_n(-z) = (-1)^n J_n(z) \quad z \in \mathbb{C}. \quad (\text{J.3})$$

Die Besselfunktionen tauchen als Koeffizienten in der Laurententwicklung der Erzeugendenfunktion $e^{\frac{z}{2}(s-\frac{1}{s})}$ auf:

$$e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n \quad z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (\text{J.4})$$

Aus der Funktionentheorie weiß man, dass die Koeffizienten als ein Integral in der komplexen Ebene geschrieben werden können:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{e^{\frac{z}{2}(\zeta-\frac{1}{\zeta})}}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{iz \sin \varphi} e^{in\varphi} d\varphi \quad (\text{J.5})$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos(z \sin(\varphi) - n\varphi) d\varphi \quad (\text{J.6})$$

Leicht überprüft man, daß die $J_n(z)$ der Besselschen Differentialgleichung genügen.

Setzt man $t \equiv e^{i\xi}$ bzw. $t \equiv ie^{i\xi}$ so erhält man:

$$e^{iM \sin \xi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\xi} J_n(M) \quad (\text{J.7})$$

$$e^{iM \cos \xi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{in\xi} J_n(M) \quad (\text{J.8})$$

Die erste Formel wird in Kapitel 4.2 gebraucht, bei der Herleitung der Höhe der Seitenbänder.

Mit $\xi = 0$ erhält man aus der ersten Formel

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(M) \quad \forall M \in \mathbb{R}. \quad (\text{J.9})$$

D.h. die Summe aller Besselfunktionen ist immer gleich Eins. Hieraus folgt auch, daß bei $M = 0$ wegen $J_0(0) = 1$ alle anderen Besselfunktionen gleich Null sein müssen:

$$J_n(0) = 0 \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (\text{J.10})$$

Es gilt jedoch auch

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(M) \quad \forall M \in \mathbb{R}. \quad (\text{J.11})$$

D.h., daß sogar die relativen Höhen aller Seitenbänder, normiert auf die Höhe des Trägers bei $M = 0$ gleich Eins ergeben (wegen $J_0(0) = 1$).

Dies kann man mit Hilfe des Additionstheorems von Neumann für Besselfunktionen (siehe [206]) beweisen, dessen Beweis zuerst erfolgen soll.

$$J_n(y+z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \zeta^{-n-1} e^{\frac{1}{2}(y+z)\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)} d\zeta \quad (\text{J.12})$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{m=-\infty}^{\infty} \zeta^{m-n-1} J_m(y) e^{\frac{1}{2}z\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)} d\zeta \quad (\text{J.13})$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(y) J_{n-m}(z) \quad (\text{J.14})$$

Mit $z = -y$ und $n = 0$ folgt:

$$J_0(y+z) = J_0(0) = 1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(y) J_{-m}(-y) \quad (\text{J.15})$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(y) J_m(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m^2(y) \quad \blacksquare \quad (\text{J.16})$$

Zum Schluß wird noch eine Formel angegeben, mit der man in der Praxis einfach Bessel-funktionen berechnen kann:

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2m}}{m! \Gamma(n+m+1)} \quad n, z \in \mathbb{C}. \quad (\text{J.17})$$

Anhang K

Thermodynamische Temperatur in lasergekühlten Ensembles

Hier soll kurz die Problematik angesprochen werden, die dabei entsteht, wenn man einem Ensemble lasergekühlter Teilchen eine Temperatur zuweisen muß. Dabei besteht das Problem darin, daß in der Thermodynamik eine Temperatur nur für ein abgeschlossenes System im thermischen Gleichgewicht mit seiner Umwelt definiert ist. Dafür ist ein Wärmeaustausch zwischen den Systemen notwendig. Bei Laserkühlung kann man jedoch nicht von einem Wärmeaustausch sprechen, da die Probe von Atomen immerzu Licht streut und absorbiert und somit die Umgebung wesentlich verändert. Außerdem besteht kein Wärmeaustausch mit der Umgebung, denn, obwohl Licht eine Energieform ist, kann man bei Licht nicht von Wärme sprechen. So kann das System also sehr wohl in einem Gleichgewichtszustand sein, wenn auch in keinem thermischen Gleichgewicht, so daß die Zuweisung einer thermodynamischen Temperatur unangebracht ist.

Jedoch ist die Zuweisung einer Temperatur eines atomaren Ensembles, dessen mittleren Energie $\langle E_k \rangle$ in einer Dimension durch Laserkühlung reduziert wurde, sehr nützlich. Dies geschieht einfach durch folgende Gleichung:

$$\frac{1}{2}k_B T = \langle E_k \rangle \quad (\text{K.1})$$

Man muß sich jedoch vor Augen führen, daß die Zuweisung einer solchen Temperatur für Systeme unangebracht ist, die keine wohldefinierte Geschwindigkeitsverteilung besitzen,

unabhängig davon, ob sie im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung stehen oder nicht. Es gibt unendlich viele Geschwindigkeitsverteilung, die dasselbe $\langle E_k \rangle$ aufweisen aber so unterschiedlich voneinander sind, daß es ein schwerer Fehler wäre, sie mit derselben Temperatur zu bezeichnen.

Im Gleichgewicht besitzen die lasergekühlten Teilchen wie klassische Teilchen im Gleichgewicht eine Maxwell-Boltzmann-Verteilung. Dies wurde sowohl theoretisch [207] als auch experimentell [208] gezeigt.

Die oben angesprochene Maxwell-Boltzmann-Verteilung besitzt im ein- bzw. dreidimensionalen Fall folgende Geschwindigkeitsverteilung:

$$f_{1D}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\tilde{v}} \exp\left(-\frac{v^2}{2\tilde{v}^2}\right) \quad v \in]-\infty, \infty[\quad v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \tilde{v} \quad (\text{K.2})$$

$$f_{3D}(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v^2}{\tilde{v}^3} \exp\left(-\frac{v^2}{2\tilde{v}^2}\right) \quad v \in [0, \infty[\quad v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3}\tilde{v}. \quad (\text{K.3})$$

Hierbei ist $\tilde{v} = \sqrt{\frac{k_B T}{M}}$. In diesem thermischen Gleichgewicht mit Temperatur T ergibt sich die Besetzungswahrscheinlichkeit des n-ten Eigenzustands eines quantenmechanischen harmonischen Oszillators mit Hamiltonfunktion $\mathcal{H} = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$ aus der kanonischen Verteilungsfunktion mit Dichteoperator

$$\rho = \frac{1}{Z} \exp(-\beta\mathcal{H}) \quad \text{mit } Z = \text{tr} \{ \exp(-\beta\mathcal{H}) \} \quad (\text{K.4})$$

zu:

$$p_n = \langle n | \rho | n \rangle = \left[1 - e^{-\beta\hbar\omega} \right] e^{-n\beta\hbar\omega} \quad , \quad (\text{K.5})$$

wobei β für $\frac{1}{k_B T}$ steht. Die mittlere Besetzung des quantenmechanischen harmonischen Oszillators ergibt sich somit zu:

$$\langle n \rangle = \sum_n n p_n = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \quad (\text{K.6})$$

Literaturverzeichnis

- [1] J. I. Cirac und P. Zoller, “Quantum Computation with Cold Trapped Ions”, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4091–4094 (1995).
- [2] A. Sørensen und K. Mølmer, “Quantum Computation with Ions in Thermal Motion”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1971–1974 (1999).
- [3] A. Sørensen und K. Mølmer, “Entanglement and quantum computation with ions in thermal motion”, *Phys. Rev. A* **62**, 022311–1–11 (2000).
- [4] E. Peik, J. H. Abel, T. Becker, J. von Zanthier und H. Walther, “Sideband cooling of ions in radio-frequency traps”, *Phys. Rev. A* **60**, 439–449 (1999).
- [5] H. Baldauf, „Aufbau einer linearen Quadrupolfalle zur Beobachtung von Quantenphänomenen gespeicherter Ionen“, Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität, München, 1998.
- [6] M. Kasevich und S. Chu, “Laser cooling below a photon recoil with three-level atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1741–1744 (1992).
- [7] G. Morigi, J. I. Cirac, M. Lewenstein und P. Zoller, “Ground-state laser cooling beyond the Lamb-Dicke-limit”, *Europhys. Lett.* **39**, 13–18 (1997).
- [8] S. Köhler, „Sympathetisches Kühlen als Anwendung für den Ionenfallen-Quantencomputer“, Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität, München, 2001.
- [9] W. Paul, O. Osberghaus und E. Fischer, “Ein Ionenkäfig”, *Forschungsberichte des Wirtschafts- und Verkehrsministeriums von Nordrhein-Westfalen* pp. 1–42 (1958).

-
- [10] P. W. Shor, In *Proceedings of the 35. Annual Symposium on the Foundations of Computer Science*, S. Goldwasser, Hrsg., (IEEE Computer Society Press, Los Alamitos CA, 1994).
- [11] P. W. Shor, “Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer”, *SIAM J. Comput.* **26**, 1484–1509 (1997).
- [12] A. Ekert und R. Jozsa, “Quantum computation and Shor’s factoring algorithm”, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 733–753 (1996).
- [13] R. Rivest, A. Shamir und L. Adleman, “A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems”, *Commun. Assoc. Comput. Mach.* **21**, 120–126 (1978).
- [14] R. Rivest, A. Shamir und L. Adleman, “On Digital Signatures and Public-Key Cryptosystems”, MIT Laboratory for Computer Science, Technical Report MIT/LCS/TR-212 (1979).
- [15] R. P. Feynman, “Simulating physics with computers”, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 467–488 (1982).
- [16] P. Benioff, “The computer as a physical system: a microscopic quantum mechanical model of computers as represented by Turing machines”, *J. Stat. Phys.* **22**, 563–591 (1980).
- [17] P. A. Benioff, “Quantum Mechanical Hamiltonian Models of Discrete Processes That Erase Their Own Histories: Application to Turing Machines”, *Int. J. theor. Phys.* **21**, 177–201 (1982).
- [18] P. A. Benioff, “Quantum Mechanical Models of Turing Machines That Dissipate No Energy”, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1581–1585 (1982).
- [19] D. Deutsch, “Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer”, *Proc. R. Soc. Lond. A* **400**, 97–117 (1985).
- [20] E. Biolatti, I. D’Amico, P. Zanardi und F. Rossi, “Electro-optical properties of semiconductor quantum dots: Application to quantum information processing”, *Phys. Rev. B* **65**, 075306–1–23 (2002).

- [21] P. Solinas, P. Zanardi, N. Zanghì und F. Rossi, “Nonadiabatic geometrical quantum gates in semiconductor quantum dots”, *Phys. Rev. A* **67**, 052309–1–5 (2003).
- [22] Q. A. Turchette, C. J. Hood, W. Lange, H. Mabuchi und H. J. Kimble, “Measurement of Conditional Phase Shifts for Quantum Logic”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4710–4713 (1995).
- [23] P. Domokos, J. M. Raimond, M. Brune und S. Haroche, “Simple cavity-QED two-bit universal quantum logic gate: The principle and expected performances”, *Phys. Rev. A* **52**, 3554–3559 (1995).
- [24] E. Hagley, X. Maître, G. Nogues, C. Wunderlich, M. Brune, J. M. Raimond und S. Haroche, “Generation of Einstein-Podolsky-Rosen Pairs of Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1–5 (1997).
- [25] Y. A. Pashkin, T. Yamamoto, O. Astafiev, Y. Nakamura, D. V. Averin und J. S. Tsai, “Quantum oscillations in two coupled charge qubits”, *Nature* **421**, 823–826 (2003).
- [26] C. M. Tesch und R. deVivie Riedle, “Quantum Computation with Vibrationally Excited Molecules”, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 157901–1–4 (2002).
- [27] D. Suter und K. Lim, “Scalable architecture for spin-based quantum computers with a single type of gate”, *Phys. Rev. A* **65**, 052309–1–5 (2002).
- [28] O. Mandel, M. Greiner, A. Widera, T. Rom, T. W. Hänsch und I. Bloch, “Controlled collisions for multiparticle entanglement of optically trapped atoms”, *Nature* **425**, 937–940 (2003).
- [29] G. K. Brennen, C. M. Caves, P. S. Jessen und I. H. Deutsch, “Quantum Logic Gates in Optical Lattices”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1060–1063 (1999).
- [30] D. Jaksch, H.-J. Briegel, J. I. Cirac, C. W. Gardiner und P. Zoller, “Entanglement of Atoms via Cold Controlled Collisions”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1975–1978 (1999).
- [31] D. Jaksch, J. I. Cirac, P. Zoller, S. L. Rolston, R. Côté und M. D. Lukin, “Fast Quantum Gates for Neutral Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2208–2211 (2000).
- [32] G. Ciaramicoli, I. Marzoli und P. Tombesi, “Scalable Quantum Processor with Trapped Electrons”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 017901–1–4 (2003).

- [33] J. L. O'Brien, G. J. Pryde, A. G. White, T. C. Ralph und D. Branning, "Demonstration of an all-optical quantum controlled-NOT gate", *Nature* **426**, 264–267 (2003).
- [34] B. E. Kane, "A silicon-based nuclear spin quantum computer", *Nature* **393**, 133–137 (1998).
- [35] B. E. Kane, "Silicon-based Quantum Computation", *Fortschr. Phys.* **48**, 2023–2041 (2000).
- [36] N. A. Gershenfeld und I. L. Chuang, "Bulk spin-resonance quantum computation", *Science* **275**, 350–356 (1997).
- [37] I. L. Chuang, L. M. K. Vandersypen, X. Zhou, D. W. Leung und S. Lloyd, "Experimental realization of a quantum algorithm", *Nature* **393**, 143–146 (1998).
- [38] D. Kielpinski, C. Monroe und D. J. Wineland, "Architecture for a large-scale ion-trap quantum computer", *Nature* **417**, 709–711 (2002).
- [39] M. Rowe, A. Ben-Kish, B. DeMarco, D. Leibfried, V. Meyer, J. Beall, J. Britton, J. Hughes, W. M. Itano, B. Jelenković, C. Langer, T. Rosenband und D. J. Wineland, "Transport of quantum states and separation of ions in a dual rf ion trap", *Quant. Inf. Comp.* **2**, 257–271 (2002).
- [40] J. I. Cirac und P. Zoller, "A scalable quantum computer with ions in an array of microtraps", *Nature* **404**, 579–581 (2000).
- [41] W. H. Zurek, "Decoherence and the Transition from Quantum to Classical", *Physics Today* pp. 36–44 (1991).
- [42] W. H. Zurek, "Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical", *Rev. Mod. Phys.* **75**, 715–775 (2003).
- [43] C. J. Myatt, B. E. King, Q. A. Turchette, C. A. Sackett, D. Kielpinski, W. M. Itano, C. Monroe und D. J. Wineland, "Decoherence Of Quantum Superpositions Through Coupling To Engineered Reservoirs", *Nature* **403**, 269–273 (2000).
- [44] R. J. Hughes, D. F. V. James, E. H. Knill, R. Laflamme und A. G. Petschek, "Decoherence Bounds on Quantum Computation with Trapped Ions", *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3240–3243 (1987).

-
- [45] M. B. Plenio und P. L. Knight, “Decoherence limits to quantum computation using trapped ions”, *Proc. R. Soc. Lond. A* **453**, 2017–2041 (1997).
- [46] S. Schneider und G. J. Milburn, “Decoherence in ion traps due to laser intensity and phase fluctuations”, *Phys. Rev. A* **57**, 3748–3752 (1998).
- [47] S. Schneider und G. J. Milburn, “Decoherence and fidelity in ion traps with fluctuating trap parameters”, *Phys. Rev. A* **59**, 3766–3774 (1999).
- [48] R. Laflamme, C. Miquel, J. P. Paz und W. H. Zurek, “Perfect Quantum Error Correcting Code”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 198–201 (1996).
- [49] A. M. Steane, “Error Correcting Codes in Quantum Theory”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 793–797 (1996).
- [50] A. R. Calderbank und P. W. Shor, “Good quantum error correcting codes exist”, *Phys. Rev. A* **54**, 1098–1105 (1996).
- [51] E. Knill und R. Laflamme, “Theory of quantum error-correcting codes”, *Phys. Rev. A* **55**, 900–911 (1998).
- [52] D. P. DiVincenzo und P. W. Shor, “Fault-Tolerant Error Correction with Efficient Quantum Codes”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3260–3263 (1996).
- [53] J. Preskill, “Battling decoherence: the fault-tolerant quantum computer”, *Phys. Today* **52**, 24–30 (1999).
- [54] A. Barenco, C. H. Bennett, C. R., D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, J. Sleator, T. Smolin und H. Weinfurter, “Elementary gates for quantum computation”, *Phys. Rev. A* **52**, 3457–3467 (1995).
- [55] F. Diedrich, J. C. Berquist, W. M. Itano und D. J. Wineland, “Laser Cooling to the Zero-Point Energy of Motion”, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 403–406 (1989).
- [56] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, S. R. Jefferts, W. M. Itano, D. J. Wineland und P. Gould, “Resolved-Sideband Raman Cooling of a Bound Atom to the 3D Zero-Point Energy”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4011–4014 (1995).

- [57] B. E. King, C. S. Wood, C. J. Myatt, Q. A. Turchette, D. Leibfried, W. M. Itano, C. Monroe und D. J. Wineland, “Cooling the Collective Motion of Trapped Ions to Initialize a Quantum Register”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1525–1528 (1998).
- [58] F. Schmidt-Kaler et al., “Ground state cooling, quantum state engineering and study of decoherence of ions in Paul traps”, *J. Mod. Opt.* **47**, 2573–2582 (2000).
- [59] C. A. Sackett, D. Kielpinski, B. E. King, C. Langer, V. Meyer, C. J. Myatt, M. Rowe, Q. A. Turchette, W. M. Itano, D. J. Wineland und C. Monroe, “Experimental entanglement of four particles”, *Nature* **404**, 256–259 (2000).
- [60] Q. A. Turchette, D. Kielpinski, B. E. King, D. Leibfried, D. M. Meekhof, C. J. Myatt, M. A. Rowe, C. A. Sackett, C. S. Wood, W. M. Itano, C. Monroe und D. J. Wineland, “Heating of trapped ions from the quantum ground state”, *Phys. Rev. A* **61**, 063418–1–8 (2000).
- [61] J. F. Poyatos, J. I. Cirac und P. Zoller, “Quantum Gates with ”Hot” Trapped Ions”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1322–1325 (1998).
- [62] A. Sørensen und K. Mølmer, “Multiparticle Entanglement of Hot Trapped Ions”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1835–1838 (1999).
- [63] S. Schneider, D. F. V. James und G. J. Milburn, “Quantum controlled-NOT gate with hot trapped ions”, *J. Mod. Opt.* **47**, 499–505 (2000).
- [64] J. Jonathan und M. B. Plenio, “Light-Shift-Induced Quantum Gates for Ions in Thermal Motion”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 127901–1–4 (2001).
- [65] L. M. K. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta, C. S. Yannoni, M. H. Sherwood und I. L. Chuang, “Experimental realization of Shor’s quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance”, *Nature* **414**, 883–887 (2001).
- [66] A. R. Kessel und V. L. Ermakov, “Quantum entanglement and classical separability in NMR computing”, arXiv:quant-ph/0011002 (2000).
- [67] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano und D. J. Wineland, “Demonstration of a Fundamental Quantum Logic Gate”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4714–4717 (1995).

- [68] B. DeMarco, A. Ben-Kish, D. Leibfried, V. Meyer, M. Rowe, B. M. Jelenković, W. M. Itano, J. Britton, C. Langer, T. Rosenband und D. J. Wineland, “Experimental Demonstration of a Controlled-NOT Wave-Packet Gate”, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 267901–1–4 (2002).
- [69] D. Leibfried, B. DeMarco, V. Meyer, D. Lucas, M. Barrett, J. Britton, W. M. Itano, B. Jelenković, C. Langer, T. Rosenband und D. J. Wineland, “Experimental demonstration of a robust, high-fidelity geometric two ion-qubit phase gate”, *Nature* **422**, 412–415 (2003).
- [70] F. Schmidt-Kaler, H. Häffner, M. Riebe, S. Gulde, G. P. T. Lancaster, T. Deuschle, C. Becher, C. F. Roos, J. Eschner und R. Blatt, “Realization of the Cirac-Zoller controlled-NOT quantum gate”, *Nature* **422**, 408–411 (2003).
- [71] S. Gulde, M. Riebe, G. P. T. Lancaster, C. Becher, J. Eschner, H. Häffner, F. Schmidt-Kaler, I. L. Chuang und R. Blatt, “Implementation of the Deutsch-Jozsa algorithm on an ion-trap quantum computer”, *Nature* **421**, 48–50 (2003).
- [72] M. A. Rowe, A. Ben Kish, B. L. DeMarco, D. Leibfried, V. Meyer, J. Britton, J. Hughes, W. M. Itano, B. M. Jelenkovic, C. Langer, T. Rosenband und D. J. Wineland, “Transportation of quantum states and separation of ions in a dual rf ion trap”, *Quant. Inf. Comput.* **2**, 257–271 (2002).
- [73] A. S. Kholevo, *Problemy Peredachi Informatsii* **9**, 3 (1973).
- [74] J. A. Smolin, „Quantum Gates, Mixed-State Entanglement and Error-Correcting Codes”, Doktorarbeit, University of California, Los Angeles, 1996.
- [75] V. Vedral, “The role of relative entropy in quantum information theory”, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 197–234 (2002).
- [76] D. P. DiVincenzo, “The Physical Implementation of Quantum Computation”, *Fortschr. Phys.* **48**, 771–783 (2000).
- [77] D. Deutsch, “Quantum computational networks”, *Proc. R. Soc. Lond. A* **425**, 73 (1989).

-
- [78] E. Fredkin und T. Toffoli, “Conservative Logic”, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 219–253 (1982).
- [79] D. P. DiVincenzo, “Two-bit gates are universal for quantum computation”, *Phys. Rev. A* **51**, 1015–1022 (1995).
- [80] S. Lloyd, “Almost Any Quantum Logic Gate is Universal”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 346–349 (1995).
- [81] D. Deutsch, A. Barenco und A. Ekert, “Universality in quantum computation”, *Proc. Phys. Soc. London, Ser A* **449**, 669 (1995).
- [82] A. Barenco, “A universal two-bit gate for quantum computation”, *Proc. Phys. Soc. London, Ser A* **449**, 679 (1995).
- [83] T. Sleator und H. Weinfurter, “Realizable Universal Quantum Logic Gates”, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4087–4090 (1995).
- [84] D. F. V. James, “Quantum dynamics of cold trapped ions with application to quantum computation”, *Appl. Phys. B* **66**, 181–190 (1998).
- [85] C. F. Roos, D. Leibfried, A. Mundt, F. Schmidt-Kaler, J. Eschner und R. Blatt, “Experimental Demonstration of Ground State Laser Cooling with Electromagnetically Induced Transparency”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5547–5550 (2000).
- [86] A. Sørensen und K. Mølmer, “Ion Trap Quantum Computer with Bichromatic Light”, *Fortschr. Phys.* **48**, 811–821 (2000).
- [87] X. Zou, K. Pahlke und W. Mathis, “Quantum phase-gate implementation for trapped ions in thermal motion”, *Phys. Rev. A* **66**, 044307–1–3 (2002).
- [88] M. Šašura und A. M. Steane, “Fast quantum logic by selective displacement of hot trapped ions”, *Phys. Rev. A* **67**, 062318–1–19 (2003).
- [89] G. Milburn, “Simulating nonlinear spin models in an ion trap”, [arXiv:quant-ph/9908037](https://arxiv.org/abs/quant-ph/9908037).

-
- [90] F. Schmidt-Kaler, H. Häffner, S. Gulde, M. Riebe, G. Lancaster, J. Eschner, C. Becher und R. Blatt, “Quantized phase shifts and a dispersive universal quantum gate”, arXiv:quant-ph/0307211 (2003).
- [91] L. K. Grover, “Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack”, Phys. Rev. Lett. **79**, 325–328 (1997).
- [92] D. Deutsch und R. Jozsa, “Rapid solution of problems by quantum computation”, Proc. R. Soc. Lond. A **439**, 553–558 (1992).
- [93] E. Moreno und D. Baldomir, “Sylvester’s criterion applied to Poisson’s equation”, IEE PROC. **127**, 399–401 (1980).
- [94] W. Jones, “Earnshaw’s Theorem and the stability of matter”, Eur. J. Phys. **1**, 85–88 (1980).
- [95] B. G. Englert, “Atomfallen, Atomoptik, Atominterferometrie”, Vorlesung LMU, Sommersemester 1994 .
- [96] H. Dehmelt, “Radiofrequency spectroscopy of stored ions I: storage”, Adv. At. Mol. Phys. **3**, 53–72 (1967).
- [97] R. S. Van Dyck Jr., P. B. Schwinberg und H. G. Dehmelt, “Precise Measurement of Axial, Magnetron, Cyclotron, and Spin-Cyclotron-Beat Frequencies on an Isolated 1-meV Electron”, Phys. Rev. Lett. **38**, 310–314 (1977).
- [98] R. S. Van Dyck Jr., P. B. Schwinberg und H. G. Dehmelt, “Electron magnetic moment from geonium spectra: Early experiments and background concepts”, Phys. Rev. D **34**, 722–736 (1986).
- [99] W. Paul und M. Raether, “Das elektrische Massenfilter”, Z.Phys. **140**, 262–273 (1955).
- [100] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen* (Springer, 1993).
- [101] J. Meixner und F. W. Schäfke, *Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen* (Springer Verlag, 1954).

-
- [102] M. Abramowitz und I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publications, INC., New York, 1970).
- [103] M. Drewsen und A. Bröner, “Harmonic linear Paul trap: Stability diagram and effective potentials”, *Phys. Rev. A* **62**, 045401–1–4 (2000).
- [104] T. Gudjons, P. Seibert und G. Werth, “Influence of anharmonicities of a Paul trap potential on the motion of stored ions”, *Appl. Phys. B* **65**, 57–62 (1997).
- [105] M. A. N. Razvi, X. Z. Chu, R. Alheit, G. Werth und R. Blümel, “Fractional frequency collective parametric resonances of an ion cloud in a Paul trap”, *Phys. Rev. A* **58**, R34–R37 (1998).
- [106] J. D. Prestage, G. J. Dick und L. Maleki, “New ion trap for frequency standard applications”, *J. Appl. Phys.* **66**, 1013–1017 (1989).
- [107] R. Blümel, C. Kappler, W. Quint und H. Walther, “Chaos and order of laser-cooled ions in a Paul trap”, *Phys. Rev. A* **40**, 808–823 (1989).
- [108] R. G. DeVoe, “Elliptical ion traps and trap arrays for quantum computation”, *Phys. Rev. A* **58**, 910–914 (1998).
- [109] M. G. Raizen, J. M. Gilligan, J. C. Bergquist, W. M. Itano und D. J. Wineland, “Linear trap for high-accuracy spectroscopy of stored ions”, *Journal of Modern Optics* **39**, 233–242 (1992).
- [110] M. E. Poitzsch, J. C. Bergquist, W. M. Itano und D. J. Wineland, “Cryogenic linear ion trap for accurate spectroscopy”, *Rev. Sci. Instrum.* **67**, 129–134 (1996).
- [111] V. Meyer, M. A. Rowe, D. Kielpinski, C. A. Sackett, W. M. Itano, C. Monroe und D. J. Wineland, “Experimental Demonstration of Entanglement-Enhanced Rotation Angle Estimation Using Trapped Ions”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5870–5873 (2001).
- [112] C. A. Schrama, E. Peik, W. W. Smith und H. Walther, “Novel miniature ion traps”, *Opt. Comm.* **101**, 32–36 (1993).
- [113] N. W. Ashcroft und N. D. Mermin, *Solid State Physics* (Brooks/Cole, 1975).

- [114] J. Höffges, „Untersuchung der Resonanzfluoreszenz eines einzelnen gespeicherten Ions“, Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität, München, 1997.
- [115] A. Steane, “The Ion Trap Quantum Information Processor”, *Appl. Phys. B* **64**, 623–642 (1997).
- [116] H. Totsuji und J.-L. Barrat, “Structure of a Nonneutral Classical Plasma in a Magnetic Field”, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2484–2487 (1988).
- [117] D. H. E. Dubin, “Theory of Structural Phase Transitions in a Trapped Coulomb Crystal”, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2753–2756 (1993).
- [118] C. F. Roos, T. Zeiger, H. Rohde, H. C. Nägerl, J. Eschner, D. Leibfried, F. Schmidt-Kaler und R. Blatt, “Quantum State Engineering on an Optical Transition and Decoherence in a Paul Trap”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4713–4716 (2001).
- [119] H. J. Metcalf und P. van der Straten, *Laser Cooling and Trapping* (Springer, Gaithersburg, MD, 1999).
- [120] S. Chu, “The manipulation of neutral particles”, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 685–706 (1998).
- [121] C. N. Cohen-Tannoudji, “Manipulating atoms with photons”, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 707–719 (1998).
- [122] W. D. Phillips, “Laser cooling and trapping of neutral atoms”, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 721–741 (1998).
- [123] W. Ketterle, “Nobel lecture: When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser”, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 1131–1151 (2002).
- [124] E. A. Cornell und C. E. Wieman, “Nobel Lecture: Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments”, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 875–893 (2002).
- [125] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn und W. Ketterle, “Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969–3973 (1995).

- [126] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman und E. A. Cornell, "Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor below 200 nanokelvin", *Science* **269**, 198 (1995).
- [127] A. Einstein, *Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.* **1924**, 261 (1924).
- [128] T. W. Hänsch und A. L. Schawlow, "Cooling of Gases by Laser Radiation", *Opt. Commun.* **13**, 68–69 (1975).
- [129] D. J. Wineland und H. Dehmelt, "Proposed $10^{14} \Delta\nu < \nu$ laser fluorescence spectroscopy on TI^+ mono-ion oscillator III", *Bull. Am. Phys. Soc.* **20**, 637 (1975).
- [130] W. Neuhauser, M. Hohenstatt, P. Toschek und H. G. Dehmelt, "Optical-Sideband Cooling of Visible Atom Cloud Confined in Parabolic Well", *Phys. Rev. Lett.* **41**, 233–236 (1978).
- [131] D. J. Wineland, R. E. Drullinger und F. L. Walls, "Radiation-pressure cooling of bound resonant absorbers", *Phys. Rev. Lett.* **40**, 1639–1642 (1978).
- [132] F. Diedrich, E. Peik, J. M. Chen, W. Quint und H. Walther, "Observation of a Phase Transition of Stored Laser-Cooled Ion", *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2931–2934 (1987).
- [133] D. J. Wineland, J. C. Bergquist, W. M. Itano, J. J. Bollinger und C. H. Manney, "Atomic-Ion Coulomb Clusters in an Ion Trap", *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2935–2938 (1987).
- [134] O. R. Frisch, *Zeitschrift für Physik* **86**, 42 (1933).
- [135] W. Phillips und H. Metcalf, "Laser Deceleration of an Atomic Beam", *Phys. Rev. Lett.* **48**, 596–599 (1982).
- [136] S. Chu, L. Hollberg, J. Bjorkholm, A. Cable und A. Ashkin, "Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure", *Phys. Rev. Lett.* **55**, 48–51 (1985).
- [137] E. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu und D. Pritchard, "Trapping of Neutral-Sodium Atoms with Radiation Pressure", *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2631–2634 (1987).

- [138] P. D. Lett, R. N. Watts, C. I. Westbrook, W. D. Phillips, P. L. Gould und H. J. Metcalf, "Observation of Atoms Laser Cooled below the Doppler Limit", *Phys. Rev. Lett.* **61**, 169–172 (1988).
- [139] J. Dalibard und C. Cohen-Tannoudji, "Laser Cooling below the Doppler Limit by Polarization Gradients - Simple Theoretical Models", *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2023–2045 (1989).
- [140] P. J. Ungar, D. S. Weiss, E. Riis und S. Chu, "Optical molasses and multilevel atoms: theory", *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2058–2071 (1989).
- [141] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste und C. Cohen-Tannoudji, "Laser Cooling below the One-Photon Recoil Energy by Velocity-Selective Coherent Population Trapping", *Phys. Rev. Lett.* **61**, 826–829 (1988).
- [142] W. D. Phillips, *Fundamental Systems in Quantum Optics, Les Houches, Session LIII, 1990* (J. Dalibard, J.M. Raimond, J. Zinn-Justin, Elsevier, Amsterdam, 1992).
- [143] S. R. Jefferts, C. Monroe, E. Bell und D. J. Wineland, "Coaxial-resonator-driven rf (Paul) trap for strong confinement", *Phys. Rev. A* **51**, 3112–3116 (1995).
- [144] Bronstein und Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik, 24. Auflage* (Verlag Harri Deutsch, 1989).
- [145] D. J. Wineland und W. M. Itano, "Laser cooling of atoms", *Phys. Rev. A* **20**, 1521–1540 (1979).
- [146] J. Abel, „Hochauflösende Spektroskopie an einzelnen gespeicherten Indium-Ionen“, Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität, München, 1998.
- [147] E. Peik, „Laserspektroskopie an gespeicherten Indium-Ionen“, Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität, München, 1993.
- [148] T. Becker, J. v. Zanthier, A. Y. Nevsky, C. Schwedes, M. N. Skvortsov, H. Walther und E. Peik, "High-resolution spectroscopy of a single In^+ ion: Progress towards an optical frequency standard", *Phys. Rev. A* **63**, 051802(R)–1–4 (2001).
- [149] T. Becker, „Hochauflösende Spektroskopie gespeicherter Indium-Ionen“, Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität, München, 2002.

- [150] D. J. Heinzen und D. J. Wineland, “Quantum-limited cooling and detection of radio-frequency oscillations by laser-cooled ions”, *Phys. Rev. A* **42**, 2977–2994 (1990).
- [151] D. Wineland, J. Bollinger, W. Itano, F. Moore und D. Heinzen, “Spin squeezing and reduced quantum noise in spectroscopy”, *Phys. Rev. A* **46**, R6797–R6800 (1992).
- [152] D. Wineland, J. Bollinger, W. Itano und D. Heinzen, “Squeezed atomic states and projection noise in spectroscopy”, *Phys. Rev. A* **50**, 67–88 (1994).
- [153] G. Morigi, J. Eschner, J. I. Cirac und P. Zoller, “Laser Cooling of two trapped ions: Sideband cooling beyond the Lamb-Dicke limit”, *Phys. Rev. A* **59**, 3797–3808 (1999).
- [154] R. E. Drullinger, D. J. Wineland und J. C. Bergquist, “High-Resolution Optical Spectra of Laser Cooled Ions”, *Appl. Phys.* **22**, 365–368 (1980).
- [155] D. J. Larson, B. J. C., J. J. Bollinger, W. M. Itano und D. J. Wineland, “Sympathetic Cooling of Trapped Ions: A Laser-Cooled Two-Species Nonneutral Ion Plasma”, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 70–73 (1986).
- [156] G. Gabrielse, X. Fei, L. A. Orozco und R. L. Tjoelker, “Cooling and slowing of trapped antiprotons below 100 meV”, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1360–1363 (1989).
- [157] D. S. Hall und G. Gabrielse, “Electron Cooling of Protons in a Nested Penning Trap”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1962–1965 (1996).
- [158] R. deCarvalho, J. M. Doyle, B. Friedrich, T. Guillet, J. Kim, D. Patterson und J. D. Weinstein, “Buffer-gas loaded magnetic traps for atoms and molecules: A primer”, *Eur. Phys. J. D* **7**, 289 (1999).
- [159] C. J. Myatt, E. A. Burt, R. W. Ghrist, E. A. Cornell und C. E. Wieman, “Production of Two Overlapping Bose-Einstein Condensates by Sympathetic Cooling”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 586–589 (1997).
- [160] B. DeMarco und D. S. Jin, “Onset of Fermi Degeneracy in a Trapped Atomic Gas”, *Science* **285**, 1703–1706 (1999).
- [161] A. G. Truscott, K. E. Strecker, W. I. McAlexander, G. B. Partridge und R. G. Hulet, “Observation of Fermi Pressure in a Gas of Trapped Atoms”, *Science* **291**, 2570–2572 (2001).

- [162] F. Schreck, L. Khaykovich, K. Corwin, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles und C. Salomon, “Quasipure Bose-Einstein Condensate Immersed in a Fermi Sea”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080403–1–4 (2001).
- [163] I. Bloch, M. Greiner, O. Mandel, T. Hänsch und T. Esslinger, “Sympathetic cooling of ^{85}Rb and ^{87}Rb ”, *Phys. Rev. A* **64**, 021402–1–4 (2001).
- [164] G. Modugno, G. Ferrari, G. Roati, R. J. Brecha, A. Simoni und M. Inguscio, “Bose-Einstein Condensation of Potassium Atoms by Sympathetic Cooling”, *Science* **294**, 1320–1322 (2001).
- [165] M. Mudrich, S. Kraft, K. Singer, R. Grimm, A. Mosk und M. Weidemüller, “Sympathetic Cooling with Two Atomic Species in an Optical Trap”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 253001–1–4 (2002).
- [166] H. Rohde, S. T. Gulde, C. F. Roos, D. Leibfried, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler und R. Blatt, “Sympathetic ground-state cooling and coherent manipulation with two-ion crystals”, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **3**, S34–S41 (2001).
- [167] M. D. Barrett, B. DeMarco, T. Schätz, D. Leibfried, J. Britton, J. Chiaverini, W. M. Itano, B. Jelenković, J. D. Jost, C. Langer, T. Rosenband und D. J. Wineland, “Sympathetic cooling of $^9\text{Be}^+$ and $^{24}\text{Mg}^+$ for quantum logic”, *Phys. Rev. A* **68**, 042302–1–8 (2003).
- [168] L. Hornekær, N. Kjærgaard, A. M. Thommesen und M. Drewsen, “Structural Properties of Two-Component Coulomb Crystals in Linear Paul Traps”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1994–1997 (2001).
- [169] P. Rowe, L. Hornekær, C. Brodersen, M. Drewsen, J. S. Hangst und J. S. Schif-fer, “Sympathetic Crystallization of Trapped Ions”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2071–2074 (1999).
- [170] B. B. Blinov, L. Deslauriers, P. Lee, M. J. Madsen, R. Miller und C. Monroe, “Sympathetic Cooling of Trapped Cd^+ Isotopes”, *Phys. Rev. A* **65**, 040304–1–4 (2002).
- [171] G. Morigi und H. Walther, “Two-species Coulomb chains for quantum information”, *Eur. Phys. J. D* **13**, 261–269 (2001).

- [172] D. Kielpinski, B. E. King, C. J. Myatt, C. A. Sackett, Q. A. Turchette, W. M. Itano, C. Monroe, D. J. Wineland und W. H. Zurek, “Sympathetic cooling of trapped ions for quantum logic”, *Phys. Rev. A* **61**, 032310–1–8 (2000).
- [173] T. Baba und I. Waki, “Cooling and Mass-Analysis of Molecules Using Laser-Cooled Atoms”, *Jpn. J. Appl. Phys.* **35**, 1134–1137 (1996).
- [174] K. Moilhave und M. Drewsen, “Formation of translationally cold MgH^+ and MgD^+ molecules in an ion trap”, *Phys. Rev. A* **62**, 011401(R)–1–4 (2000).
- [175] G. Birkl, „Laserspektroskopie an Ionen in einem Quadrupol-Speicherring“, Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität, München, 1993.
- [176] W. Hanle, “Über magnetische Beeinflussung der Polarisation der Resonanzfluoreszenz”, *Z. Phys.* **30**, 93 (1924).
- [177] J.-C. Lehmann und C. Cohen-Tannoudji, “Pompage optique en champ magnétique faible”, *C. R. Acad. Sc. Paris* **258**, 4463–4466 (1964).
- [178] J. Dupont-Roc, S. Haroche und C. Cohen-Tannoudji, “Detection of very weak magnetic fields (10^{-9} Gauss) by ^{87}Rb zero-field level crossing resonances”, *Phys. Lett.* **28 A**, 638–639 (1969).
- [179] N. Kjærgaard, L. Hornekær, A. M. Thommesen, Z. Videsen und M. Drewsen, “Isotope selective loading of an ion trap using resonance-enhanced two-photon ionization”, *Appl. Phys.* **B 71**, 207–210 (2000).
- [180] S. Gulde, D. Rotter, P. Barton, F. Schmidt-Kaler, R. Blatt und W. Hogervorst, “Simple and efficient photo-ionization loading of ions for precision ion-trapping experiments”, *Appl. Phys.* **B 73**, 861–863 (2001).
- [181] D. M. Lucas, A. Ramos, J. P. Home, M. J. McDonnell, S. Nakayama, J.-P. Stacey, S. C. Webster, D. N. Stacey und A. M. Steane, “Isotope-selective photoionization for calcium ion trapping”, *Phys. Rev. A* **69**, 012711–1–13 (2004).
- [182] A. B. Mundt, A. Kreuter, C. Russo, C. Becher, D. Leibfried, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler und R. Blatt, “Coherent coupling of a single $^{40}\text{Ca}^+$ ion to a high-finesse optical cavity”, *Appl. Phys. B* **76**, 117–124 (2003).

- [183] M. Keller, B. Lange, K. Hayasaka, W. Lange und H. Walther, “Deterministic coupling of single ions to an optical cavity”, *Appl. Phys. B* **76**, 125–128 (2003).
- [184] P. Eckle, „Photoionisation von Indium und Fallenpotentialrechnungen für ein optisches Frequenznormal”, Diplomarbeit, Technische Universität, München, 2003.
- [185] T. Schätz, „Kristalline Ionenstrahlen”, Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität, München, 2001.
- [186] T. W. Hänsch und B. Couillaud, “Laser Frequency Stabilization By Polarization Spectroscopy Of A Reflecting Cavity”, *Opt. Comm.* **35**, 441–444 (1980).
- [187] R. V. Pound, *Review of Scientific Instruments* **17**, 490 (1946).
- [188] R. W. P. Drever, J. L. Hall, F. V. Kowalski, J. Hough, G. M. Ford, A. J. Munley und H. Ward, “Laser Phase and Frequency Stabilization Using an Optical Resonator”, *Appl. Phys. B* **31**, 97–105 (1983).
- [189] H. C. Nägerl, D. Leibfried, H. Rohde, G. Thalhammer, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler und R. Blatt, “Laser addressing of individual ions in a linear ion trap”, *Phys. Rev. A* **60**, 145–148 (1999).
- [190] V. Ludsteck, „Experimente mit einer linearen Ionenkette zur Realisierung eines Quantencomputers”, Diplomarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität, München, 1999.
- [191] V. J. Fowler, C. F. Buhner und L. R. Bloom, “Electro-Optic Light Beam Deflector”, *Proc. IEEE (Correspondence)* **52**, 193–194 (1964).
- [192] G. J. Friel, R. S. Conroy, A. J. Kemp, B. D. Sinclair und J. M. Ley, “Q-switching of a diode-pumped Nd:YVO₄ laser using a quadrupole electro-optic deflector”, *Appl. Phys. B* **67**, 267–270 (1998).
- [193] R. Blümel, J. M. Chen, E. Peik, W. Quint, W. Schleich, Y. R. Shen und H. Walther, “Phase transition of stored laser-cooled ions”, *Nature* **334**, 309–313 (1988).
- [194] S. L. Gilbert, J. J. Bollinger und D. J. Wineland, “Shell-Structure Phase of Magnetically Confined Strongly Coupled Plasmas”, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2022–2025 (1988).

- [195] J. I. Cirac, L. J. Garay, R. Blatt, A. S. Parkins und P. Zoller, “Laser cooling of trapped ions: The influence of micromotion”, *Phys. Rev. A* **49**, 421–432 (1994).
- [196] D. J. Berkeland, J. D. Miller, J. C. Bergquist, W. M. Itano und D. J. Wineland, “Minimization of ion micromotion in a Paul trap”, *J. Appl. Phys.* **83**, 5025–5033 (1998).
- [197] M. Drewsen, C. Brodersen, L. Hornekær, J. S. Hangst und J. P. Schiffer, “Large Ion Crystals in a Linear Paul Trap”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2878–2881 (1998).
- [198] J. P. Schiffer, In *Proceedings of the Workshop on Crystalline Ion Beams*, R. W. Hasse, I. Hofmann und D. Liesen, Hrsg., (GSI Report No. GSI-89-10, 1989, Wertheim, Gemany, 1988).
- [199] R. F. Wuerker, H. Shelton und R. V. Langmuir, “Electrodynamic Containment of Charged Particles”, *J. Appl. Phys.* **30**, 342–349 (1959).
- [200] P. T. H. Fisk, M. A. Lawn und C. Coles, “Laser Cooling of $^{171}\text{Yb}^+$ -Ions in a Linear Paul Trap”, *Appl. Phys. B* **57**, 287–291 (1993).
- [201] A. Ekert und R. Jozsa, “Shor’s Quantum Algorithm for Factorising Numbers”, Preprint (1995).
- [202] G. Scheja und U. Storch, *Lehrbuch der Algebra Teil 2* (B.G. Teubner Stuttgart, 1988).
- [203] A. M. Hinz, “Partielle Differentialgleichungen”, Vorlesung LMU, Wintersemester 1995/96 .
- [204] R. E. March und R. J. Hughes, *Quadrupole Storage Mass Spectrometry*, chemical analysis vol. 102 ed. (J.D. Winefordner, I.M. Kolthoff, Wiley Interscience, 1989).
- [205] C. Cohen-Tannoudji, “Cours de physique atomique et moleculaire, année scolaire 1985-1986,” “Refroidissement des ions piégés”, Collège de France lecture notes, unpublished (1985).
- [206] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd edition ed. (University Press, Cambridge, 1966).

- [207] S. Stenholm, "The semiclassical theory of laser cooling", *Rev. Mod. Phys.* **58**, 699–739 (1986).
- [208] D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano und D. J. Wineland, "Generation of nonclassical motional states of a trapped atom", *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1796–1799 (1996).

Index

- $^{25}\text{Mg}^+$, 21, 171
- $^{24}\text{Mg}^+$, 66, 171
- adiabatische Eliminierung, 73
- adiabatische Näherung, 38, 183
- atomares Hilfsniveau, 19
- Atomofen, 117
- Ausgangszustand, 11
- Austrittsarbeit, 47
- axiale Fallenfrequenzen, 153
- Bedampfungen, 45
- Besselfunktion, 67, 192
- Bloch-Vektor, 19
- Channeltron, 145
- Coulomb-Abstoßung, 15
- Datenbanksuche, 29
- Dekohärenzzeit, 12
- Detektionsübergang, 22
- Deutsch-Josza-Algorithmus, 29
- Dopplerkühlung, 65
- Dopplertemperatur, 66
- Einzelionenansprache, 132, 133, 136
- Einzelionenansprechoptik, 137
- Einzelqubitrotationen, 12, 13
- Elektrodenabstand, 50
- Elektronenkanone, 58, 111, 121
- Elektronenstoßionisation, 116
- Elektrooptischer Deflektor, 133
- Energiedissipation, 10
- Falle
 - lineare elektrische Quadrupol-, 31
 - lineare Endkappen-, 32
 - lineare Ionen-, 14, 33, 48
 - Paul-, 31, 32
 - Penning-, 32
 - Vierstab-, 32
- Fallenfrequenz, 101
- Fallenhalterung, 106
- Fallenjustage, 54
- Farbstofflaser
 - Indium-, 129
 - Magnesium-, 127
- Frequenzverdopplung, 127, 130
- Güte des Schwingkreises, 101
- Gatter
 - Cirac-Zoller-, 14
 - CNOT-, 13
 - heiße, 23
 - kaltes, 14
 - universelles 2-Bit-, 13

- Gesamtvergrößerung, 137
Grover-Algorithmus, 29
Grundzustandhyperfeinaufspaltung, 126
Grundzustandskühlung, 15, 70
Grundzustandskühlung außerhalb des
 Lamb-Dicke-Limits, 74
Hanle-Effekt, 114
Heizraten, 50
Helicoflex, 106
heterogene Ionenkette, 45, 48
hyperboloid, 31
Hyperfeinaufspaltung, 21
Hyperfeingrundzustand, 15
Impedanzanpassung, 102
Implementierung von Quantencomputern, 11
Indium, 173
Ionenkette, 14
Ionenwolke, 142, 144, 156, 157
Jaynes-Cummings-Wechselwirkung, 17
Kompensationselektrode, 47
Kontaktpotential, 45, 46
Kristallisation, 142, 157, 161
Lamb-Dicke-Limit, 45, 68, 72
Laserkühlung, 63
Laserpulse, 15
Laserstrahlgeometrie, 132
Lasersystem, 125
Mathieusche Differentialgleichung, 35
Mikrobewegung, 38, 47
Mikrobewegungskompensation, 160
Monitoreichfaktor X, 102
nichtmagnetischer Stahl, 51
Ofenheizung, 58
Oszillationsfrequenz
 axiale, 44
 radiale, 44
Phasenübergang, 158
Phasengatter, 19
Phononen, 15
Photoionisation, 115
Primärkreis, 99
Primzahlfaktorisation, 11
Pseudopotential, 39
Quadrupol-Massenfilter, 32
Quanten-Bus, 15
Quantenalgorithmus, 29
Quantengatter, 12
Quanteninformationsverarbeitung, 21
Quantenparallelrechnen, 11
Quantenrechnung, 9
Qubit, 9, 10
radiale Fallenfrequenzen, 151
Raman-Seitenband-Kühlung, 45, 70
Raumladungseffekte, 40
Register, 10
reversibel, 13
RF-Vakuumzuleitungen, 101

-
- Säkularbewegung, 38
- Säkularfrequenz, 38, 99
- Satz
- von Earnshaw, 32, 180
 - von Floquet, 35
- Schwingungsdämpfung, 109
- Seitenbänder, 16, 68
- Seitenband
- blaues, 18
 - rotes, 16
- Seitenbandkühlung, 67, 188
- Sekundärkreis, 99
- skalierbar, 11
- Spannungsverlustfaktor, 53
- Stabilitätsdiagramm, 190
- Stabilitätsdiagramm, 37, 157, 159
- Strahldurchmesser
- Atomstrahl, 119
- Sympathetische Kühlung, 77, 144
- Sørensen-Mølmer-Gatter, 22
- Titansublimation-Ionengetterpumpe, 105
- Träger, 67
- unitär, 10
- Universalität, 13
- Vakuumkammer, 105
- Vakuumsystem, 104
- verlustarme Hochfrequenzkondensatoren,
103
- Wechselwirkungsoperator, 16
- Zahl auflösbarer Punkte, 135

Lebenslauf

Volker Ludsteck

geb. 16.10.1973 in Ludwigshafen am Rhein

Vater:	Dr. rer. nat. Dieter Ludsteck
Mutter:	Irmgard Ludsteck, geb. Klauß
1980-1984	Grundschule in Ludwigshafen-Edigheim
1984-1993	Wilhelm-von-Humboldt-Gymnasium in Ludwigshafen-Edigheim
1993	Abitur
1993-1997	Studium der Physik an der Ludwig-Maximilians-Universität München
seit 5.12.1997	Diplomarbeit am Max-Planck-Institut für Quantenoptik in Garching
7. Januar 1999	Diplom der Physik
seit 15.2.1999	Promotion an der Ludwig-Maximilians-Universität München

Erklärung

Hiermit erkläre ich, diese Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.

München, den 6. Mai 2004

Volker Ludsteck

