

Bernhard Irrgang

# Kondensation und Moräste

**Dissertation**  
an der  
Fakultät für Mathematik, Informatik und Statistik  
der  
Ludwig-Maximilians-Universität  
München

eingereicht am 26. März 2002

1. Berichterstatter: Prof. Dr. H.-D. Donder
  2. Berichterstatter: Prof. Dr. W. Buchholz
- Tag der mündlichen Prüfung: 25. Juli 2002

Bernhard Irrgang

# Kondensation und Moräste

## ZUSAMMENFASSUNG

*Moräste sind eine Axiomatisierung von Jensens Feinstrukturtheorie.*

Die vorliegende Arbeit stellt eine mögliche Präzisierung dieser Aussage dar. Dazu entwickle ich die Feinstrukturtheorie der inneren Modelle  $L[X]$ . Dabei sei  $X = \langle X_{\omega\nu} \mid \omega\nu \in S^* \rangle$  eine Folge mit  $X_{\omega\nu} \subseteq J_{\nu}^X$ , so daß gilt:

**(Fügsamkeit)** Für  $\omega\nu \in S^*$  ist  $I_{\nu} := \langle J_{\nu}^X, X \upharpoonright \omega\nu, X_{\omega\nu} \rangle$  fügsam.

**(Kondensation)** Ist  $\omega\nu \in S^*$  und  $H \prec_1 I_{\nu}$ , dann gibt es ein  $\mu \in Lim$  mit  $H \cong I_{\mu}$ .

**(Kohärenz)** Sei  $\omega\nu \in S^*$ ,  $H \prec_1 I_{\nu}$  und  $\omega\lambda = sup(H \cap On)$ . Dann ist  $\omega\lambda \in S^*$  und  $X_{\omega\lambda} = X_{\omega\nu} \cap J_{\lambda}^X$ .

Gegenstand der Feinstrukturtheorie der  $L[X]$  sind Strukturen, die eng mit der Hierarchie von  $L[X]$  zusammenhängen, und Abbildungen dazwischen. Ist  $S^* = \{\omega\nu \mid \omega\nu \text{ singular in } I_{\nu+1}\}$ , so bilden die Strukturen zusammen mit den Abbildungen Moräste. Diese sind besonders einfach. D.h. sie weisen zusätzlich zu den von Jensen [1972/73] untersuchten Eigenschaften weitere auf. Solche Moräste werde ich Standardmoräste nennen.

Hat man umgekehrt einen Standardmorast, so kann man diesen in einer Folge  $X$  wie oben kodieren.

Schließlich werde ich mit  $\{\omega\nu \mid \omega\nu \text{ singular in } I_{\nu+1}\} \subseteq S^*$  in  $L[X] \square_{\kappa}$  für alle  $\kappa \in Card^{L[X]}$  zeigen, und im Fall  $S^* = On$  den schwachen Überdeckungssatz für  $L[X]$  beweisen.



# Vorwort

Eine Dissertation über Moräste. Das klingt kombinatorisch und deshalb sehr technisch. Ich will hier aber eine andere Seite der Moräste ausleuchten. Die Existenz von Morästen ist unter bestimmten Bedingungen nämlich äquivalent zur Existenz eines inneren Modells mit fügsamen Stufen, Kondensation und einer Kohärenzeigenschaft. Diesen Eigenschaften sind die ersten vier Abschnitte gewidmet. Der erste behandelt die Fügsamkeit, der zweite die Kondensation. Im dritten Abschnitt wird mit Kondensation und Fügsamkeit die Feinstrukturtheorie entwickelt, im vierten anhand der  $\square$ -Prinzipien die Kohärenz motiviert. Schließlich zeige ich im fünften Abschnitt die angesprochene Äquivalenz zwischen diesen inneren Modellen und einem bestimmten Typ von Morästen. Abschließend beweise ich im sechsten Abschnitt den schwachen Überdeckungssatz für bestimmte dieser inneren Modelle. Denn dabei wirken Kondensation, Fügsamkeit und Kohärenz auf interessante Art zusammen.

Für die Anregung zu dieser Dissertation danke ich meinem Betreuer Prof. H.-D. Donder. Außerdem danke ich ihm für all die Unterstützung, die er mir gewährt hat. Prof. W. H. Woodin danke ich für die freundliche Einladung, sieben Monate in Berkeley zu arbeiten, wo auch eine Teil der Arbeit entstanden ist. Schließlich danke ich dem DFG-Graduiertenkolleg „Sprache, Information, Logik“ an der Universität München für die finanzielle Unterstützung meiner Arbeit und die Möglichkeit zum interdisziplinären Gedankenaustausch.



# Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	7
1	Fügsamkeit	15
2	Kondensation	23
3	Feinstrukturtheorie	37
4	$\square$ -Prinzipien	49
5	Moräste	57
6	Der schwache Überdeckungssatz	83





# 0

## Einleitung

Moräste sind komplexe, kombinatorische Strukturen. Unter Kondensation versteht man eine Eigenschaft einer Hierarchie des Universums, die z.B. die  $L$ -Hierarchie des konstruktiblen Universums aufweist. Diese beiden auf den ersten Blick sehr unterschiedlichen Konzepte stehen in einem engen Zusammenhang. Denn die Moräste sind Abstraktionen der Feinstruktur des konstruktiblen Universums. D.h. man versucht, die „wichtigen“ Eigenschaften dieser Feinstruktur axiomatisch zu fassen. Die Feinstrukturtheorie beruht aber wesentlich auf der Kondensationseigenschaft. Das Hauptziel meiner Dissertation ist es, einen präzisen Zusammenhang zwischen Kondensation und Morästen zu formulieren. Das will ich anhand eines Beispiels erklären. Dabei werde ich manchmal der Einfachheit wegen nicht hundertprozentig korrekt sein.

Ist  $X$  eine Menge, so heißt eine Teilmenge der Form  $\{x \in X \mid X \models \varphi(x, p_1, \dots, p_n)\}$  mit  $p_1, \dots, p_n \in X$  definierbar. Sei  $Def(X)$  die Menge aller definierbaren Teilmengen von  $X$ . Nehmen wir an, daß jede Menge rekursiv durch Aussonderung aus den bereits definierten Mengen entsteht: Sei

$$L_0 = \emptyset$$

$$L_{\nu+1} = Def(L_\nu)$$

$$L_\lambda = \bigcup \{L_\nu \mid \nu \in \lambda\} \text{ für Limeszahlen } \lambda$$

und  $L = \bigcup \{L_\nu \mid \nu \in On\}$  die Klasse der so entstandenen Mengen. Unsere Annahme, daß  $L$  das ganze Universum ist, kann man also kurz als  $V = L$  schreiben. Nun kann man für unendliche Kardinalzahlen  $\kappa$  folgendes kombinatorische Prinzip zeigen:

Es gibt eine Folge  $\langle C_\nu \mid \kappa < \nu < \kappa^+, \nu \in Lim \rangle$  mit

$C_\nu$  ist abgeschlossen und unbeschränkt in  $\nu$

$$otp(C_\nu) \leq \kappa$$

$$\mu \in Lim(C_\nu) \Rightarrow C_\mu = C_\nu \cap \mu \text{ (Kohärenz).}$$

Dieses Prinzip heißt  $\square_\kappa$ . Es wurde von Jensen formuliert und mit Hilfe der von ihm entwickelten Feinstrukturtheorie auch bewiesen.

Statt  $\square_\kappa$  beweist man folgendes:

Sei  $S = \{\nu \in Lim \mid \kappa < \nu < \kappa^+ \text{ und } L_\nu \models \kappa \text{ ist die größte Kardinalzahl}\}$ .  
Dann gibt es eine Folge  $\langle C_\nu \mid \nu \in S \rangle$ , so daß für alle  $\nu \in S$  gilt:

$C_\nu$  ist abgeschlossen und unbeschränkt in  $\nu$

$$otp(C_\nu) \leq \kappa$$

$$\mu \in Lim(C_\nu) \Rightarrow \mu \in S \text{ und } C_\mu = C_\nu \cap \mu \text{ (Kohärenz).}$$

Daraus folgt sofort  $\square_\kappa$ !

Wie findet man nun geeignete  $C_\nu$ ? Sei dazu  $\nu \in S$  und

$\beta(\nu) =$  das kleinste  $\beta$ , so daß es ein konfinales  $f : a \rightarrow \nu \in Def(L_\beta)$   
mit  $a \subseteq \nu' < \nu$  gibt

$n(\nu) =$  das kleinste  $n \geq 1$ , so daß ein solches  $f$   $\Sigma_n$ -definierbar ist.

Sei zunächst  $\beta(\nu) = \nu$  und  $n(\nu) = 1$ . D.h. es gibt einen Parameter  $p \in L_\nu$ , so daß  $f(\gamma) = \delta \Sigma_1$  (über  $L_\nu$ ) mit Parametern  $\gamma, \delta$  und  $p$  ist. Damit kann man versuchen,  $C_\nu$  folgendermaßen zu definieren:

$$\nu_0 = 0$$

$$\gamma_0 = \text{das kleinste } \gamma \in dom(f) \text{ mit } f(\gamma) > 0$$

$$\delta_0 = f(\gamma_0)$$

$$\nu_i = \text{das kleinste } \nu \text{ mit } L_\nu \models f(\gamma_j) = \delta_j \text{ für alle } j < i$$

$$\gamma_i = \text{das kleinste } \gamma \in dom(f) \text{ mit } f(\gamma) > \nu_i$$

$$\delta_i = f(\gamma_i)$$

$$i_0 = \text{kleinstes } i, \text{ so daß } \nu_i \text{ nicht existiert}$$

$$C_\nu = \{\nu_i \mid i < i_0\}$$

Denn dann ist  $i_0 \leq \kappa$  und für ein  $\lambda < i_0$  hat  $\langle \nu_i \mid i < \lambda \rangle$  dieselbe Definition über  $L_\mu$ ,  $\mu = \nu_\lambda$ , wie über  $L_\nu$ . Das geht aber nur, weil  $f$   $\Sigma_1$ -definierbar ist. Trotzdem hat man damit noch nicht die Kohärenz. Denn die Definition von  $C_\mu$  hängt noch vom zu  $\mu$  gehörigen  $f_\mu$  mit Parameter  $p_\mu$  und nicht nur von  $f$  und  $\mu$  ab. Man muß die Funktion und ihren Parameter also stets so wählen, daß für  $\mu \in Lim(C_\nu)$   $f_\mu = f$  und  $p_\mu = p$  gilt. Nun gibt es aber für jedes  $L_\nu$  mit  $\nu \in Lim$  eine kanonische  $\Sigma_1$ -Skolemfunktion  $h_\nu$ . Das ist eine über  $L_\nu$  ohne Parameter  $\Sigma_1$ -definierbare Funktion mit  $dom(h_\nu) \subseteq \omega \times L_\nu$  und  $rng(h_\nu) \subseteq L_\nu$ , so daß folgendes gilt: Existiert für ein  $p \in L_\nu$  und eine  $\Sigma_1$ -Formel  $\varphi$  ein  $x \in L_\nu$  mit  $L_\nu \models \varphi(x, p)$ , so gilt  $L_\nu \models \varphi(h_\nu(i, p), p)$  für ein  $i$ . Dieses  $h_\nu$  ist insofern kanonisch, als es für jedes  $\nu$  durch dieselbe Formel

definiert ist. Da es für das von uns betrachtete  $\nu$  und die  $\mu \in \text{Lim}(C_\nu)$  eine  $\Sigma_1$ -Funktion gibt, die in  $\nu$  bzw.  $\mu$  konfinal ist, gilt dies auch für  $h_\nu$  bzw.  $h_\mu$ . Somit braucht man nur noch den Parameter auf einheitliche Art zu wählen, und man ist in diesem Fall fertig!

Was macht man nun, wenn  $\beta(\nu) > \nu$  ist (aber weiterhin  $n(\nu) = 1$ )? Dann kann man ein  $B_\nu$  mit folgender Eigenschaft wählen: Jede  $\Sigma_1$ -Formel  $\varphi$  der Sprache  $\{\in\}$  kann man in eine  $\Sigma_1$ -Formel der Sprache  $\{\in, B\}$  übersetzen, so daß für  $x \in L_\nu$   $L_{\beta(\nu)} \models \varphi(x)$  genau dann gilt, wenn  $\langle L_\nu, B_\nu \rangle \models \varphi_B(x)$  gilt. Umgekehrt kann man auch jede  $\Sigma_1$ -Formel  $\varphi_B$  in ein  $\varphi$  mit festem Parameter zurückübersetzen. Damit befindet man sich wieder in der günstigen Situation des ersten Falles. Man profitiert also wieder von der Aufwärts-Absolutheit von  $\Sigma_1$ -Formeln. D.h. die Interpretation von  $\Sigma_1$ -Formeln ist in folgendem Sinne absolut: Ist ein transitives  $M$  Modell von  $\varphi(x)$  mit  $x \in M$ , so gilt dies auch für jedes transitive  $N \supseteq M$ . Allerdings muß man jetzt außer bei der Wahl von  $p_\nu$  auch bei der von  $B_\nu$  darauf achten, daß diese kanonisch ist. Denn dann wird für  $\mu \in \text{Lim}(C_\nu)$   $B_\mu = B_\nu \cap L_\mu$  gelten.

Zum Schluß muß man noch den Fall  $\beta(\nu) > \nu$  und  $n := n(\nu) > 1$  betrachten. Dann kann man mit Jensens Feinstrukturtheorie ein  $\rho(\nu)$  und ein  $A_\nu$  finden, so daß man  $\Sigma_n$ -Aussagen über  $L_{\beta(\nu)}$  in  $\Sigma_1$ -Aussagen über  $\langle L_{\rho(\nu)}, A_\nu \rangle$  übersetzen kann:  $\Sigma_1(\langle L_{\rho(\nu)}, A_\nu \rangle) = \mathfrak{P}(L_{\rho(\nu)}) \cap \Sigma_n(L_{\beta(\nu)})$ . Anders gesagt kodiert das  $A_\nu$  die  $\Sigma_n$ -Information von  $L_{\beta(\nu)}$  in  $\Sigma_1$ -Information von  $L_{\rho(\nu)}$ . Deshalb heißt  $A_\nu$  auch  $(n - 1)$ -Master-Code für  $L_{\beta(\nu)}$ . Die Struktur  $\langle L_{\rho(\nu)}, A_\nu \rangle$  heißt  $(n - 1)$ -tes Redukt von  $L_{\beta(\nu)}$ . Mit diesem  $\langle L_{\rho(\nu)}, A_\nu \rangle$  kann man jetzt wie im zweiten Fall mit  $L_{\beta(\nu)}$  verfahren, d.h. ein  $B_\nu$  finden, so daß  $\langle L_\nu, B_\nu \rangle$  das  $\langle L_{\rho(\nu)}, A_\nu \rangle$  kodiert. Da man das  $A_\nu$  sogar kanonisch wählen kann, erhält man auch in diesem Fall dann die Kohärenz der  $C_\nu$ .

Die Möglichkeiten, Aussagen über große Strukturen in Aussagen über kleinere mit einem Prädikat zu übersetzen, beruhen alle im wesentlichen auf einer einzigen Eigenschaft der  $L$ -Hierarchie. Das ist die Kondensationseigenschaft. Darunter versteht man das folgende:

Ist  $X \prec_1 L_\nu$  eine  $\Sigma_1$ -elementare Substruktur von  $L_\nu$  mit  $\nu \in \text{Lim}$ , so gibt es ein  $\mu$  mit  $X \cong L_\mu$ . Das  $L_\mu$  ist eindeutig bestimmt und ist die Transitivierung von  $X$ .

Zum Beispiel kann man  $B_\nu$  folgendermaßen definieren:

Sei jedes  $x \in L_{\rho(\nu)}$   $\Sigma_1$ -definierbar in  $\langle L_{\rho(\nu)}, A_\nu \rangle$  mit Parametern aus  $\kappa \cup \{p\}$  und  $\kappa$  in  $L_{\rho(\nu)}$  aus  $p$ . Ein solches gibt es! Für  $\mu < \rho(\nu)$  mit  $\kappa, p \in L_\mu$  setze  $X_\mu = h_\mu[\omega \times (L_\kappa \times \{p\})]$ . Dann ist  $X \prec_1 \langle L_\mu, A_\nu \cap L_\mu \rangle$ . Sei  $\pi_\mu : X_\mu \cong M_\mu \in L_\nu$ ,  $M_\mu$  transitiv,  $p_\mu = \pi_\mu(p)$  und  $L_{\nu_\mu} = X_\mu \cap L_\mu$ . Schließlich sei  $B_\nu = \{\langle M_\mu, p_\mu, \nu_\mu \rangle \mid \mu < \rho(\nu)\}$ .

Die  $A_\nu$  kann man analog definieren.

Das war's. Wir haben gesehen, wie man das kombinatorische Prinzip  $\square_\kappa$  mit Hilfe eines Übersetzungs-„Tricks“, der sogenannten Feinstrukturtheorie, beweist. Doch wie weit reicht diese Methode? Was kann man mit ihr alles machen?

Um sich darüber einen Überblick zu verschaffen, kann man das System der  $\langle L_\nu, B_\nu \rangle$  mit

$L_\nu \models \alpha_\nu := \omega_1$  ist die größte Kardinalzahl

$B_\nu$  wie oben

betrachten. Sei  $S_\alpha = \{\nu \mid \alpha_\nu = \alpha\}$ . Sei  $\mu \prec \nu$  definiert durch

$\alpha_\mu < \alpha_\nu$  und es ex. ein  $\Sigma_1$ -elementares  $\pi : \langle L_\mu, B_\mu \rangle \rightarrow \langle L_\nu, B_\nu \rangle$  mit  $\pi \upharpoonright \alpha_\mu = id \upharpoonright \mu$ .

Dieses  $\pi$  ist sogar eindeutig bestimmt. Schreibe dafür  $\pi_{\mu\nu}$ . Die wesentlichen kombinatorischen Eigenschaften unseres Systems sind die folgenden:

(M0)  $S_\alpha$  abg. in  $sup(S_\alpha)$

$$\omega_1 = \max\{\alpha_\nu \mid \nu \in \omega_2\} \qquad \omega_2 = sup(S_{\omega_1})$$

(M1) Ist  $\mu \prec \nu$ , so ist  $\pi_{\mu\nu} \upharpoonright \alpha_\mu = id \upharpoonright \alpha_\mu$ ,  $\pi_{\mu\nu}(\mu) = \nu$ ,  $\pi_{\mu\nu}(\alpha_\mu) = \alpha_\nu$  und

$\pi_{\mu\nu}$  bildet  $S_{\alpha_\mu} \cap \mu$  ordnungserhaltend in  $S_{\alpha_\nu} \cap \nu$  ab.

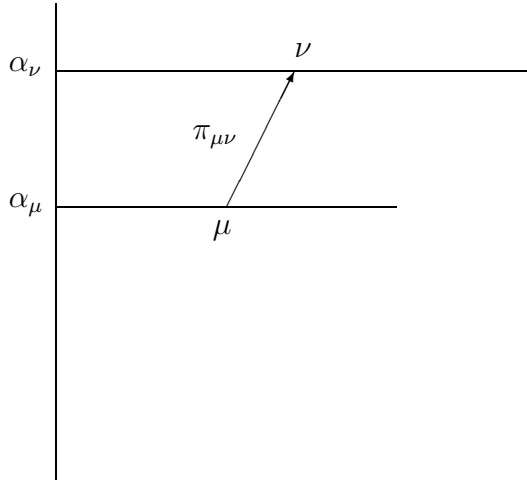
(M2)  $\bar{\nu} \prec \nu$ ,  $\bar{\mu} \in S_{\alpha_{\bar{\nu}}} \cap \bar{\nu}$ ,  $\mu = \pi_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\mu}) \Rightarrow \bar{\mu} \prec \mu$ ,  $\pi_{\bar{\mu}\mu} \upharpoonright \bar{\mu} = \pi_{\bar{\nu}\nu} \upharpoonright \bar{\mu}$

(M3)  $\{\alpha_\mu \mid \mu \prec \nu\}$  ist abgeschlossen in  $\alpha_\nu$

(M4)  $\nu$  nicht maximal in  $S_{\alpha_\nu} \Rightarrow \{\alpha \mid \mu \prec \nu\}$  unbeschränkt in  $\alpha_\nu$

(M5)  $\{\alpha_\mu \mid \mu \prec \nu\}$  unbeschränkt in  $\alpha_\nu \Rightarrow \nu = \bigcup\{\pi_{\mu\nu}[\mu] \mid \mu \prec \nu\}$

Versucht man das alles graphisch darzustellen, so zeichnet man die  $S_\alpha$ 's als Zeilen. Für  $\mu \prec \nu$  erhält man zum Beispiel:



Dann liefern (M3), (M4) und (M5) eine Art von vertikaler Stetigkeit. Es gibt noch zwei weitere Eigenschaften (M6) und (M7). Dabei drückt (M6) eine horizontale und (M7) eine diagonale Stetigkeit aus. Ein System von Abbildungen mit den Eigenschaften (M0) bis (M7) heißt  $(\omega_1, 1)$ -Morast. Dieser Begriff stammt von Jensen.

Mit  $(\omega_1, 1)$ -Morästen hat man aber natürlich die Möglichkeiten der Feinstruktur noch nicht ausgeschöpft. Für überabzählbare und reguläre  $\kappa$  konstruiert man analog  $(\kappa, 1)$ -Moräste. Diese heißen auch Gap-1 Moräste. Die Strukturen in diesen Morästen sind vom Typ der  $\Sigma_1$ -Skolemhüllen  $h_{\kappa^+}[\omega \times (L_{\omega\alpha} \times \{p, \kappa\})] \prec_1 L_{\kappa^+}$  mit  $\alpha < \kappa^+$ . Die oberste Ebene eines solchen Morastes bilden die  $h_{\kappa^+}[\omega \times (L_{\omega\alpha} \times \{p, \kappa\})]$ -artigen Strukturen mit  $\alpha \geq \kappa$ . Betrachtet man stattdessen alle Strukturen vom Typ der  $h_{\kappa^{++}}[\omega \times (L_{\omega\alpha} \times \{p, \kappa\})] \prec_1 L_{\kappa^{++}}$  mit  $\alpha < \kappa^{++}$ , so erhält man einen Gap-2 Morast. Das ist eine dreidimensionale Struktur, deren oberste Ebene ein Gap-1 Morast ist. Analog hat man sich für alle  $n \in \omega$  die  $(\kappa, n)$ -Moräste vorzustellen. Damit ist die Geschichte aber noch nicht zu Ende. Denn die Konstruktion verallgemeinert sich auch auf unendliche Ordinalzahlen. In seinem Manuskript über Moräste entwickelt Jensen [1972/73] eine Theorie von  $(\kappa, \beta)$ -Morästen für  $\beta < \kappa$ . Davon ausgehend werde ich  $(\kappa, \beta)$ -Moräste für alle  $\beta \leq \infty$  definieren.

Wieviel von der Feinstrukturtheorie deckt man mit den Morästen nun ab? Leider nicht alles! Aber man kann die Axiome so ergänzen, daß man die gesamte Feinstrukturtheorie axiomatisiert. Denn mit gewissen Zusatzbedingungen kann man einen  $(\omega_1, \infty)$ -Morast so in einer Folge  $X = \langle X_\nu \mid \nu \in S^* \subseteq \text{Lim} \rangle$  kodieren, daß  $L[X]$  eine Feinstruktur wie  $L$  hat. Dazu sei für  $\nu \in S^*$   $I_\nu := \langle L_\nu[X], X \upharpoonright \nu, X_\nu \rangle$  und  $I_\nu := \langle L_\nu[X], X \upharpoonright \nu \rangle$  für  $\nu \notin S^*$ , so daß  $X_\nu \subseteq L_\nu[X]$  ist und

$$L_0[X] = \emptyset$$

$$L_{\nu+1}[X] = \text{Def}(I_\nu)$$

$$L_\lambda[X] = \bigcup \{L_\nu[X] \mid \nu \in \lambda\} \text{ für Limeszahlen } \lambda.$$

Sei  $L[X] = \bigcup \{L_\nu[X] \mid \nu \in On\}$  die Klasse der so entstandenen Mengen.

Für  $X$  wird folgendes gelten:

**(Fügsamkeit)** Für  $\nu \in S^*$  ist  $I_\nu$  fügsam. D.h. für alle  $x \in L_\nu[X]$  ist  $x \cap X_\nu \in L_\nu[X]$ .

**(Kondensation)** Ist  $\nu \in S^*$  und  $H \prec_1 I_\nu$ , dann gibt es ein  $\mu \in On$  mit  $H \cong I_\mu$ .

**(Kohärenz)** Sei  $\nu \in S^*$ ,  $H \prec_1 I_\nu$  und  $\lambda = \text{sup}(H \cap On)$ . Dann ist  $\lambda \in S^*$  und  $X_\lambda = X_\nu \cap L_\lambda[X]$ .

Aber diese Eigenschaften reichen aus, um für die  $I_\nu$  mit  $\nu \in S^*$  die Feinstrukturtheorie analog zu  $L$  zu entwickeln. Ist also  $S^*$  reichhaltig genug, so kann

man auch in jedem  $L[X]$  mit diesen Eigenschaften einen  $(\omega_1, \infty)$ -Morast definieren. Dieser erfüllt sogar unsere zusätzlichen Voraussetzungen. Insgesamt hat man damit unter diesen Zusatzvoraussetzungen einen präzisen Zusammenhang zwischen der Kondensation und Morästen gefunden. Und man hat durch die Morastaxiome die kombinatorischen Eigenschaften von inneren Modellen wie  $V = L$  vollständig erfaßt. Die Moräste leisten also etwas ähnliches wie das von Sy Friedman in [1994] definierte Prinzip.

Welche Rolle spielen die Zusatzbedingungen? Als Beispiel sei die folgende genannt. Bei dem oben konstruierten Morast gibt es zu jedem  $\nu$  ein  $p_\nu$ , so daß gilt:

$$\begin{aligned} \pi : \langle L_{\bar{\rho}}, \bar{A} \rangle &\rightarrow \langle L_{\rho(\nu)}, A_\nu \rangle \Sigma_1\text{-elementar} \\ p_\nu &\in \text{rng}(\pi) \\ \Rightarrow \pi &\text{ ist eine zu } \nu \text{ gehörige Morastabbildung.} \end{aligned}$$

Aber Jensens Axiome ergeben zwar

$$\begin{aligned} \pi &\text{ ist eine zu } \nu \text{ gehörige Morastabbildung} \\ \Rightarrow \pi : \langle L_{\bar{\rho}}, \bar{K} \rangle &\rightarrow \langle L_{\rho(\nu)}, K_\nu \rangle \Sigma_1\text{-elementar} \end{aligned}$$

für ein dem  $A_\nu$  entsprechendes  $K_\nu$ .

Jedoch muß es kein  $p_\nu$  mit

$$\begin{aligned} \pi &\text{ Morastabbildung} \\ \pi : \langle L_{\bar{\rho}}, \bar{K} \rangle &\rightarrow \langle L_{\rho(\nu)}, K_\nu \rangle \Sigma_1\text{-elementar} \\ p_\nu &\in \text{rng}(\pi) \\ \Rightarrow \pi &\text{ gehört zu } \nu \end{aligned}$$

geben.

Eine der Zusatzbedingungen wird gerade die Existenz eines solchen  $p_\nu$  fordern.

Alle Forderungen werden insofern natürlich sein, als sie Eigenschaften der Feinstruktur von  $L$  widerspiegeln. Dank ihrer besteht zwischen den einzelnen Morastabbildungen ein Zusammenhang, so daß sich der Morast recht einfach und aufgeräumt darstellt. Dadurch wird es möglich, die einfachen Eigenschaften Fügsamkeit, Kondensation und Kohärenz als der Idee des Morastes zugrundeliegende Prinzipien zu isolieren. Hat man einen weniger aufgeräumten Morast, so kann man ebenfalls äquivalente Fügsamkeits-, Kondensations- und Kohärenzprinzipien formulieren. Doch sind diese dann erheblich schwächer und dadurch wesentlich kompliziertere Aussagen. Deshalb habe ich mich entschlossen, speziell diese aufgeräumten Moräste zu betrachten. Ich hoffe aber, daß das auch zum besseren Verständnis von Morästen allgemein beiträgt.

Fügsamkeit, Kondensation und Kohärenz sind starke Eigenschaften mit weitreichenden Konsequenzen. Man kann damit nicht nur Moräste konstruieren, sondern auch  $\square$ ,  $\diamond$ , etc. zeigen. Insgesamt hat  $L[X]$  damit wohl dieselben kombinatorischen Eigenschaften wie  $L$ . Was die kombinatorischen Prinzipien betrifft, will ich es aber bei den Morästen und  $\square$ -Prinzipien belassen. Stattdessen werde ich als weitere, interessante Anwendung im Fall  $S^* = \text{Lim}$  den schwachen Überdeckungssatz für  $L[X]$  beweisen.





# 1

## Fügsamkeit

Sei  $X = \langle X_{\omega\nu} \mid \nu \in On \rangle$  eine Folge, so daß  $X_{\omega\nu} \subseteq J_\nu^X$  und  $\langle J_\nu^X, X \upharpoonright \omega\nu, X_{\omega\nu} \rangle$  fügsam ist. Dieser Abschnitt faßt die Eigenschaften des damit definierten inneren Modells  $L[X]$  zusammen. Dabei wird auch meine von der üblichen Konvention abweichende Art die  $J_\nu^X \upharpoonright \nu$  zu indizieren eingeführt.

Zuvor aber zur Notation:

Für  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  mit  $n \in \omega$  werde ich oft einfach  $x_i$  schreiben. Das erscheint mir einfacher und, zu weniger Mißverständnissen Anlaß zu geben, als die dafür übliche Schreibweise  $\vec{x}$ . So bedeutet z.B.  $x_i \in M$  einfach  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in M$ .

Eine wichtige Rolle werden Strukturen spielen. Diese sind meist von der Form  $\mathfrak{W} = \langle W, X_i \rangle$  mit einer Trägermenge  $W$ , der  $\in$ -Relation und Prädikaten  $X_i \subseteq W$ . D.h. ich führe die  $\in$ -Relation in der Struktur nicht auf, obwohl sie vorhanden ist.

Eine Struktur heie transitiv, wenn ihre Trägermenge transitiv ist.

Um die  $J_\nu^X$  einzuführen, braucht man die rudimentären Funktionen. Dabei heißt eine Funktion  $f : V^n \rightarrow V$  genau dann rudimentär für eine Struktur  $\mathfrak{W} = \langle W, X_i \rangle$ , wenn sie von den folgenden Schemata erzeugt wird:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_i \text{ für ein } 1 \leq i \leq n$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \{x_i, x_j\} \text{ für } 1 \leq i, j \leq n$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_i - x_j \text{ für } 1 \leq i, j \leq n$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, \dots, x_n))$$

mit rudimentären Funktionen  $h, g_1, \dots, g_n$

$$f(y, x_2, \dots, x_n) = \bigcup \{g(z, x_2, \dots, x_n) \mid z \in y\}$$

mit rudimentärem  $g$

$$f(x_1, \dots, x_n) = X_i \cap x_j \text{ mit } 1 \leq j \leq n.$$

**Satz 1.1** (Basissatz)

Eine Funktion ist genau dann rudimentär, wenn sie eine Komposition von Basisfunktionen ist. Die Basisfunktionen sind:

$$F_0(x, y) = \{x, y\}$$

$$F_1(x, y) = x - y$$

$$F_2(x, y) = x \times y$$

$$F_3(x, y) = \{\langle u, z, v \rangle \mid z \in x \text{ und } \langle u, v \rangle \in y\}$$

$$F_4(x, y) = \{\langle z, u, v \rangle \mid z \in x \text{ und } \langle u, v \rangle \in y\}$$

$$F_5(x, y) = \bigcup x$$

$$F_6(x, y) = \text{dom}(x)$$

$$F_7(x, y) = \in \cap (x \times x)$$

$$F_8(x, y) = \{x[\{z\}] \mid z \in y\}$$

$$F_{9+i}(x, y) = x \cap X_i \text{ für die Prädikate der betrachteten Struktur}$$

**Beweis:** Siehe zum Beispiel in einem der beiden Bücher von Devlin.  $\square$

Eine Relation  $R \subseteq V^n$  heiÙe genau dann rudimentär, wenn es eine rudimentäre Funktion  $f : V^n \rightarrow V$  mit  $R(x_i) \Leftrightarrow f(x_i) \neq \emptyset$  gibt.

**Satz 1.2**

Jede Relation, die mit den Prädikaten der betrachteten Struktur  $\Sigma_0$  ist, ist rudimentär.

**Beweis:** Sei  $\chi_R$  die charakteristische Funktion von  $R$ . Die Behauptung folgt aus den Tatsachen (i)-(vi):

(i)  $R$  rudimentär  $\Leftrightarrow \chi_R$  rudimentär.

Klar ist  $\Leftarrow$ . Umgekehrt ist  $\chi_R = \bigcup \{g(y) \mid y \in f(x_i)\}$  mit  $g(y) = 1$  konstant und  $R(x_i) \Leftrightarrow f(x_i) \neq \emptyset$ .

(ii) Ist  $R$  rudimentär, so auch  $\neg R$ .

Denn  $\chi_{\neg R} = 1 - \chi_R$ .

(iii)  $x \in y$  und  $x = y$  sind rudimentär.

Wegen  $x \notin y \Leftrightarrow \{x\} - y \neq \emptyset$ ,  $x \neq y \Leftrightarrow (x - y) \cup (y - x) \neq \emptyset$  und (ii).

(iv) Ist  $R(y, x_i)$  rudimentär, so auch  $(\exists z \in y)R(z, x_i)$  und  $(\forall z \in y)R(z, x_i)$ .

Denn gilt  $R(y, x_i) \Leftrightarrow f(y, x_i) \neq \emptyset$ , so ist  $(\exists z \in y)R(z, x_i) \Leftrightarrow \bigcup \{f(z, x_i) \mid z \in y\} \neq \emptyset$ . Das zweite folgt daraus mit (ii).

(v) Sind  $R_1, R_2 \subseteq V^n$  rudimentär, so auch  $R_1 \vee R_2$  und  $R_1 \wedge R_2$ .

Weil  $f(x, y) = x \cup y$  rudimentär ist, ist auch  $(R_1 \vee R_2)(x_i) \Leftrightarrow \chi_{R_1}(x_i) \cup \chi_{R_2}(x_i) \neq \emptyset$  rudimentär. Das zweite folgt daraus mit (ii).

(vi)  $x \in X_i$  ist rudimentär.

Denn  $\{x\} \cap X_i \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in X_i$ .  $\square$

Für eine Umkehrung dieses Satzes definiert man:

Eine Funktion  $f$  heie genau dann einfach, wenn für jede  $\Sigma_0$ -Relation  $R(z, y_k)$  auch  $R(f(x_i), y_k)$   $\Sigma_0$  ist.

**Lemma 1.3**

Eine Funktion  $f$  ist genau dann einfach, wenn

- (i)  $z \in f(x_i)$  ist  $\Sigma_0$
- (ii)  $A(z)$  ist  $\Sigma_0 \Rightarrow (\exists z \in f(x_i))A(z)$  ist  $\Sigma_0$ .

**Beweis:** Ist  $f$  einfach, so gelten (i) und (ii), weil sie Spezialfälle der Definition sind. Die umgekehrte Richtung zeigt man durch Induktion über den Aufbau der  $\Sigma_0$ -Formeln. Ist z.B.  $R(z, y_k) : \Leftrightarrow z = y_k$ , so ist  $R(f(x_i), y_k) \Leftrightarrow f(x_i) = y_k \Leftrightarrow (\forall z \in f(x_i))(z \in y_k)$  und  $(\forall z \in y_k)(z \in f(x_i))$ . Man braucht also (i) und (ii). Die anderen Fälle sind ähnlich.  $\square$

**Satz 1.4**

Jede rudimentäre Funktion ist mit den Parametern  $X_i$   $\Sigma_0$ -definierbar.

**Beweis:** Durch Induktion zeigt man, daß die rudimentären Funktionen, die ohne das Schema  $f(x_1, \dots, x_n) = X_i \cap x_j$  erzeugt werden, einfach sind. Dazu verwendet man Lemma 1.3. Da nun aber auch die Funktion  $f(x, y) = x \cap y$  zu diesen gehört, gilt die Behauptung.  $\square$

Also ist jede rudimentäre Relation  $\Sigma_0$  mit den Parametern  $X_i$ , aber in allgemeinen nicht  $\Sigma_0$  mit den  $X_i$  als Prädikate. Als Beispiel betrachte die Relation  $\{x, y\} \in X_0$ .

**Lemma 1.5**

Für jede rudimentäre Funktion  $f$  gibt es ein  $p \in \omega$ , so daß

$$\text{rank}(f(x_i)) < \max(\text{rank}(x_i)) + p.$$

Also ist nicht jede  $\Sigma_0$ -Funktion rudimentär.

**Beweis:** Die Ungleichung ist klar. Also ist die konstante Funktion  $f(x) = \omega$  eine  $\Sigma_0$ -Funktion, die nicht rudimentär ist.  $\square$

Eine Struktur heie rudimentär abgeschlossen, wenn ihre Trägermenge unter allen rudimentären Funktionen abgeschlossen ist.

**Lemma 1.6**

Ist  $\mathfrak{W}$  rudimentär abgeschlossen und  $H \prec_1 \mathfrak{W}$ , so sind auch  $H$  und die Transitivierung von  $H$  rudimentär abgeschlossen.

**Beweis:** Das ist klar, da die Basisfunktionen  $F_0, \dots, F_{9+i}$  mit den Prädikaten  $X_i$   $\Sigma_0$  sind.  $\square$

Sei  $T_N$  die Menge der  $\Sigma_0$ -Formeln unserer Sprache  $\{\in, X_1, \dots, X_N\}$  mit genau einer freien Variable. Nach Satz 1.2 gibt es zu jeder  $\Sigma_0$ -Formel  $\psi$  eine rudimentäre Funktion  $f$  mit  $\psi(x_\star) \Leftrightarrow f(x_\star) \neq \emptyset$ . D.h. man hat nach Satz 1.1

$$\begin{aligned} x_0 &= f(x_\star) = F_{k_1}(x_1, x_2) \\ \text{mit } x_1 &= F_{k_2}(x_3, x_4) \\ x_2 &= F_{k_3}(x_5, x_6) \\ \text{und } x_3 &= \dots \end{aligned}$$

Irgendwann kann natürlich  $x_\star$  auftreten.

Also kann man eine effektive Gödelisierung

$$T_N \rightarrow G, \psi_u \mapsto u$$

folgendermaßen definieren ( $m, n$  evtl.  $= \star$ ):

$$\langle k, l, m, n \rangle \in u \Leftrightarrow x_k = F_l(x_m, x_n).$$

Sei  $\models_{\mathfrak{W}}^{\Sigma_0}(u, x_\star) \Leftrightarrow$

$\psi_u$   $\Sigma_0$ -Formel mit genau einer Variablen  
und  $\mathfrak{W} \models \psi_u(x_\star)$ .

### Satz 1.7

Ist  $\mathfrak{W}$  transitiv und rudimentär abgeschlossen, so ist  $\models_{\mathfrak{W}}^{\Sigma_0}(x, y)$  über  $\mathfrak{W}$   $\Sigma_1$ -definierbar. Die Definition von  $\models_{\mathfrak{W}}^{\Sigma_0}(x, y)$  hängt nur von der Anzahl der Prädikate von  $\mathfrak{W}$  ab, d.h. sie ist für Strukturen desselben Typs uniform.

**Beweis:** Ob  $\models_{\mathfrak{W}}^{\Sigma_0}(u, x_\star)$  gilt, kann man direkt berechnen. Man beginnt damit, die  $x_k$ , welche nur von  $x_\star$  abhängen, zu berechnen. D.h. für diese  $k$  gilt  $\langle k, l, \star, \star \rangle \in u$ . Dann berechnet man die  $x_i$ , die nur von  $x_m$  und  $x_n$  mit  $m, n \in \{k \mid \langle k, l, \star, \star \rangle \in u\}$  abhängen – usw. Da  $\mathfrak{W}$  rudimentär abgeschlossen ist, bricht dieser Prozeß erst ab, wenn man  $f(x_\star)$  berechnet hat. Und  $\models_{\mathfrak{W}}^{\Sigma_0}(u, x_\star)$  gilt genau dann, wenn  $f(x_\star) = \emptyset$  ist.

Formaler gesagt:  $\models_{\mathfrak{W}}^{\Sigma_0}(u, x_\star)$  gilt genau dann, wenn es (die) eine Folge  $\langle x_i \mid i \in d \rangle$ ,  $d = \{k \mid \langle k, l, m, n \rangle \in u\}$  gibt mit

$$\begin{aligned} \langle k, l, m, n \rangle \in u &\Rightarrow x_k = F_l(x_m, x_n) \\ \text{und } x_0 &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Somit ist  $\models_{\mathfrak{W}}^{\Sigma_0} \Sigma_1$ .  $\square$

Ist  $\mathfrak{W}$  eine Struktur, so sei  $rud(\mathfrak{W})$  der Abschluß von  $W \cup \{W\}$  unter den für  $\mathfrak{W}$  rudimentären Funktionen.

**Lemma 1.8**

Ist  $\mathfrak{W}$  transitiv, so ist es auch  $rud(\mathfrak{W})$ .

**Beweis:** Durch Induktion über den Aufbau der rudimentären Funktionen.  
□

**Satz 1.9**

Sei  $\mathfrak{W}$  eine transitive Struktur mit Trägermenge  $W$ . Dann ist

$$rud(\mathfrak{W}) \cap \mathfrak{P}(W) = Def(\mathfrak{W}).$$

**Beweis:** Sei zunächst  $A \in Def(\mathfrak{W})$ . Dann ist  $A$   $\Sigma_0$  über  $\langle W \cup \{W\}, X_i \rangle$ . D.h. es gibt Parameter  $p_i \in W \cup \{W\}$  und eine  $\Sigma_0$ -Formel  $\varphi$  mit  $x \in A \Leftrightarrow \varphi(x, p_i)$ . Nach Satz 1.2 ist aber jede  $\Sigma_0$ -Relation rudimentär. Also gibt es eine rudimentäre Funktion  $f$  mit  $x \in A \Leftrightarrow f(x, p_i) \neq \emptyset$ . Schließlich ist  $A = \bigcup \{ \{x\} \mid y \in f(x, p_i) \}$  und man ist fertig.

Sei umgekehrt  $A \in rud(\mathfrak{W}) \cap \mathfrak{P}(W)$ . Dann gibt es eine rudimentäre Funktion  $f$  und ein  $a \in W$  mit  $A = f(a, W)$ . Nach Satz 1.4 und Lemma 1.3 gibt es eine  $\Sigma_0$ -Formel  $\psi$  mit  $x \in f(a, W) \Leftrightarrow \psi(x, a, W, X_i)$ . D.h. wegen  $\Sigma_0$ -Absolutheit  $A = \{x \in W \mid W \cup \{W, X_i\} \models \psi(x, a, W, X_i)\}$ , da  $X_i \subseteq W$ . Also gibt es eine Formel  $\varphi$  mit  $A = \{x \in W \mid \mathfrak{W} \models \varphi(x, a)\}$ . □

Sei nun  $S^* \subseteq Lim$  und  $\langle X_\nu \mid \nu \in S^* \rangle$  eine Folge.

Für  $\nu \in Lim - S^*$  sei  $I_\nu = \langle J_\nu^X, X \upharpoonright \nu \rangle$  und für  $\nu \in S^*$  sei  $I_\nu = \langle J_\nu^X, X \upharpoonright \nu, X_\nu \rangle$ .

Dabei sei stets  $X_\nu \subseteq J_\nu^X$  und

$$\begin{aligned} J_0^X &= \emptyset \\ J_{\nu+\omega}^X &= rud(I_\nu) \\ J_\lambda^X &= \bigcup \{ J_\nu^X \mid \nu \in \lambda \} \text{ für } \lambda \in Lim^2 := Lim(Lim). \end{aligned}$$

Es gilt  $L[X] = \bigcup \{ J_\nu^X \mid \nu \in On \}$ .

Man sage  $L[X]$  sei fügsam, falls  $I_\nu$  für alle  $\nu \in S^*$  rudimentär abgeschlossen ist.

**Satz 1.10**

Es gilt:

- (i) Jedes  $J_\nu^X$  ist transitiv
- (ii)  $\mu < \nu \Rightarrow J_\mu^X \in J_\nu^X$
- (iii)  $rank(J_\nu^X) = J_\nu^X \cap On = \nu$

**Beweis:** Das sind drei einfache Induktionsbeweise.  $\square$

Manchmal braucht man Zwischenstufen zwischen  $J_\nu^X$  und  $J_{\nu+\omega}^X$ . Damit diese transitiv sind, definiert man

$$G_i(x, y, z) = F_i(x, y) \text{ für } i \leq 8$$

$$G_9(x, y, z) = x \cap X$$

$$G_{10}(x, y, z) = \langle x, y \rangle$$

$$G_{11}(x, y, z) = x[y]$$

$$G_{12}(x, y, z) = \{\langle x, y \rangle\}$$

$$G_{13}(x, y, z) = \langle x, y, z \rangle$$

$$G_{14}(x, y, z) = \{\langle x, y \rangle, z\}.$$

Sei

$$S_0 = \emptyset$$

$$S_{\mu+1} = S_\mu \cup \{S_\mu\} \cup \bigcup \{G_i[(S_\mu \cup \{S_\mu\})^3] \mid i \in 15\}$$

$$S_\lambda = \bigcup \{S_\mu \mid \mu \in \lambda\} \text{ für } \lambda \in \text{Lim}.$$

### Satz 1.11

Die Folge  $\langle I_\mu \mid \mu \in \text{Lim}(\nu) \rangle$  ist über  $I_\nu$  (uniform)  $\Sigma_1$ -definierbar.

**Beweis:** Die Folge  $\langle J_\mu^X \mid \mu \in \text{Lim}(\nu) \rangle$  ist die Lösung der Rekursion, die  $S_\mu$  definiert, eingeschränkt auf  $\text{Lim}$ . Da die Rekursionsbedingung  $\Sigma_0$  über  $I_\nu$  ist, ist die Lösung  $\Sigma_1$ . Sie ist  $\Sigma_1$  über  $I_\nu$ , wenn man den Existenzquantor auf  $J_\nu^X$  beschränken kann. D.h. für  $\tau \in \nu$  ist  $\langle S_\mu \mid \mu \in \tau \rangle \in J_\nu^X$  zu zeigen. Das zeigt man durch Induktion über  $\nu$ . Der Induktionsanfang  $\nu = 0$  und der Limeschritt sind klar. Beim Nachfolgerschritt beachte man, daß  $S_{\mu+1}$  eine rudimentäre Funktion von  $S_\mu$  und  $\mu$  ist, und verwende die rudimentäre Abgeschlossenheit von  $J_\nu^X$ .  $\square$

### Satz 1.12

Es gibt Wohlordnungen  $<_\nu$  der Mengen  $J_\nu^X$  mit

$$(i) \mu < \nu \Rightarrow <_\mu \subseteq <_\nu$$

$$(ii) <_{\nu+1} \text{ ist Enderweiterung von } <_\nu$$

$$(iii) \text{ Die Folge } \langle <_\mu \mid \mu \in \text{Lim}(\nu) \rangle \text{ ist über } I_\nu \text{ (uniform) } \Sigma_1\text{-definierbar.}$$

$$(iv) <_\nu \text{ ist über } I_\nu \text{ (uniform) } \Sigma_1\text{-definierbar.}$$

(v) Die Funktion  $pr_\nu(x) = \{z \mid z <_\nu x\}$  ist über  $I_\nu$  (uniform)  $\Sigma_1$ -definierbar.

**Beweis:** Definiere Wohlordnungen  $<_\mu$  von  $S_\mu$  durch Rekursion:

$$(I) \quad <_0 = \emptyset$$

(II) (1) Für  $x, y \in S_\mu$  sei  $x <_{\mu+1} y \Leftrightarrow x <_\mu y$

(2)  $x \in S_\mu$  und  $y \notin S_\mu \Rightarrow x <_{\mu+1} y$

$y \in S_\mu$  und  $x \notin S_\mu \Rightarrow y <_{\mu+1} x$

(3) Sind  $x, y \notin S_\mu$ , so gibt es ein  $i \in 15$  und  $x_1, x_2, x_3 \in S_\mu$  mit  $x = G_i(x_1, x_2, x_3)$ . Außerdem gibt es ein  $j \in 15$  und  $y_1, y_2, y_3 \in S_\mu$  mit  $y = G_j(y_1, y_2, y_3)$ . Seien zuerst  $i$  und  $j$  minimal gewählt, danach  $x_1$  und  $y_1$ , dann  $x_2$  und  $y_2$  und schließlich  $x_3$  und  $y_3$ .

Setze:

(a)  $x <_{\mu+1} y$  falls  $i < j$

$y <_{\mu+1} x$  falls  $j < i$

(b)  $x <_{\mu+1} y$  falls  $i = j$  und  $x_1 <_\mu y_1$

$y <_{\mu+1} x$  falls  $i = j$  und  $y_1 <_\mu x_1$

(c)  $x <_{\mu+1} y$  falls  $i = j$  und  $x_1 = y_1$  und  $x_2 <_\mu y_2$

$y <_{\mu+1} x$  falls  $i = j$  und  $x_1 = y_1$  und  $y_2 <_\mu x_2$

(d)  $x <_{\mu+1} y$  falls  $i = j$  und  $x_1 = y_1$  und  $x_2 = y_2$  und  $x_3 <_\mu y_3$

$y <_{\mu+1} x$  falls  $i = j$  und  $x_1 = y_1$  und  $y_2 = x_2$  und  $y_3 <_\mu x_3$

$$(III) \quad <_\lambda = \bigcup \{ <_\mu \mid \mu \in \lambda \}$$

Die Eigenschaften (i) bis (v) sind dann klar. Für die  $\Sigma_1$ -Definierbarkeit muß man wieder das Argument aus Satz 1.11 verwenden.  $\square$

### Satz 1.13

Die rudimentär abgeschlossenen  $\langle J_\nu^X, X \upharpoonright \nu, A \rangle$  haben eine kanonische  $\Sigma_1$ -Skolemfunktion  $h$ .

**Beweis:** Sei  $\langle \psi_i \mid i \in \omega \rangle$  eine effektive Aufzählung der  $\Sigma_0$ -Formeln mit drei freien Variablen. Anschaulich gesprochen definiert man dann:

$$h(i, x) \simeq (z)_0$$

für

das  $<_\nu$ -kleinste  $z \in J_\nu^X$  mit  $\langle J_\nu^X, X \upharpoonright \nu, A \rangle \models \psi_i((z)_0, x, (z)_1)$ .

Formaler geht man folgendermaßen vor:

Sei entsprechend Satz 1.12 (v)  $\theta$  eine  $\Sigma_0$ -Formel mit

$$w = \{v \mid v <_\nu z\} \Leftrightarrow \langle J_\nu^X, X \upharpoonright \nu, A \rangle \models (\exists t)\theta(w, z, t).$$

Sei  $u_i$  die Gödelisierungen von

$$\theta((s)_1, (s)_0, (s)_2)$$

$$\wedge \psi_i(((s)_0)_0, (s)_3, ((s)_0)_1) \quad \wedge \quad (\forall v \in (s)_1) \neg \psi_i((v)_0, (s)_3, (v)_1)$$

und

$$y = h(i, x) \quad \Leftrightarrow$$

$$(\exists s)((s)_0 = y \quad \wedge \quad (s)_3 = x \quad \wedge \quad \models_{\langle J_\nu^X, X \upharpoonright \nu, A \rangle}^{\Sigma_0} (u_i, s)).$$

Das hat die gewünschten Eigenschaften. Berücksichtige Satz 1.7!  $\square$

Wenn ich  $h_{\nu, A}$  schreibe, werde ich stets diese  $\Sigma_1$ -Skolemfunktion meinen. Darauf werde ich nicht mehr extra hinweisen. Sei  $h_\nu := h_{\nu, \emptyset}$ .



## 2

# Kondensation

In diesem Abschnitt werde ich einige allgemeine Beobachtungen zur Kondensation beweisen. Und eine erste Annäherung an Moräste machen, indem ich grobe Moräste definiere.

Sei  $S^X \subseteq \text{Lim}$  und  $X = \langle X_\nu \mid \nu \in S^X \rangle$  eine Folge.

Für  $\nu \in \text{Lim} - S^*$  sei  $I_\nu^X = \langle J_\nu^X, X \upharpoonright \nu \rangle$  und für  $\nu \in S^X$  sei  $I_\nu^X = \langle J_\nu^X, X \upharpoonright \nu, X_\nu \rangle$ .

Dabei sei stets  $X_\nu \subseteq J_\nu^X$  und

$$\begin{aligned} J_0^X &= \emptyset \\ J_{\nu+\omega}^X &= \text{rud}(I_\nu^X) \\ J_\lambda^X &= \bigcup \{J_\nu^X \mid \nu \in \lambda\} \text{ für } \lambda \in \text{Lim}^2. \end{aligned}$$

Auf Fügbarkeit und Kohärenz wird in diesem Abschnitt verzichtet.

Für  $\nu \in \text{Lim}$  sei  $I_{\nu,0}^X := \langle J_\nu^X, X \upharpoonright \nu \rangle$  und für  $\nu \in S^X$  sei  $I_{\nu,1}^X := I_\nu^X$ .

Schreibe  $\text{Cond}(I_{\nu,0}^X)$ , falls für alle  $H \prec_1 I_{\nu,0}^X$  ein  $\mu \in \text{Lim}$  mit  $H \cong I_{\mu,0}^X$  existiert

Schreibe  $\text{Cond}(I_{\nu,1}^X)$ , falls  $\nu \in S^X$  ist, und für alle  $H \prec_1 I_{\nu,1}^X$  ein  $\mu \in S^X$  mit  $H \cong I_{\mu,1}^X$  existiert.

Man sage  $L[X]$  habe Kondensation, wenn für alle  $\nu \in S^X$   $\text{Cond}(I_{\nu,1}^X)$  gilt. Dann gilt offensichtlich auch  $\text{Cond}(I_{\nu,0}^X)$  für alle  $\nu \in \text{Lim}(S^X)$ .

### Lemma 2.1

Sei  $M \models \text{ZFC} + \text{Cond}(I_{\nu,i}^X)$  für  $i = 0$  oder  $i = 1$ . Dann gibt es kein  $\mathbb{P} \in M$  mit  $\mathbb{P} \Vdash \neg \text{Cond}(I_{\nu,i}^X)$ .

**Beweis:** Angenommen es gäbe ein solches  $\mathbb{P}$ . Dann wähle ein  $\kappa > \nu$ , so daß  $I_{\nu,i}^X, \mathbb{P} \in V_\kappa^M$  und in  $V_\kappa^M$  genügend von  $\text{ZFC}$  gilt. Sei  $Q \prec V_\kappa^M$ ,  $I_{\nu,i}^X, \mathbb{P} \in Q \in M$  und  $\text{card}^M(Q) = \omega$ . Sei  $\pi : \bar{M} \rightarrow V_\kappa^M$  die Umkehrung der Transitivierung von  $Q$ ,  $\pi(\bar{\mathbb{P}}) = \mathbb{P}$  und  $\pi(\bar{I}) = I_{\nu,i}^X$ . Dann ist wegen  $M \models \text{Cond}(I_{\nu,i}^X)$   $\bar{I} = I_{\bar{\nu},i}^X$  für ein  $\bar{\nu} \in \text{Lim}$ . Da  $\pi$  elementar ist, gilt

$\bar{M} \models (\bar{\mathbb{P}} \Vdash \neg \text{Cond}(I_{\bar{\nu},i}^X))$ . Da  $\bar{M}$  in  $M$  abzählbar ist, gibt es ein über  $\bar{M}$   $\bar{\mathbb{P}}$ -generisches  $G$  in  $M$ . Also gibt es in  $M$  ein  $\bar{H} \prec_1 I_{\bar{\nu},i}^X$ , so daß für kein  $\mu \in \text{Lim}$   $\bar{H} \cong I_{\mu,i}^X$  ist. Sei  $H = \pi[\bar{H}]$ . Dann gibt es kein  $\mu \in \text{Lim}$  mit  $H \cong I_{\mu,i}^X$ . Und  $H \prec_1 I_{\nu,i}^X$ , da  $\pi$  elementar ist. Außerdem gilt  $H \in M$ , weil  $\pi \in M$  ist. D.h.  $M \models \neg \text{Cond}(I_{\nu,i}^X)$ . Widerspruch!  $\square$

Beim nächsten Satz handelt es sich um Theorem 8.17 von Woodin [1999]. Leider steht dort kein Beweis. Aber ein ähnlicher Satz mit Beweis findet sich in Law [1993] (Lemma 1.1).

### Satz 2.2

Sei  $M$  ein inneres Modell in  $N$  und  $M \models \text{Cond}(I_{\nu,i}^X)$ . Dann ist  $N \models \text{Cond}(I_{\nu,i}^X)$ .

**Beweis:** Sei  $\mathbb{P} = \{f : n \rightarrow \nu \mid f \in M, n \in \omega\} \in M$  und  $G$   $\mathbb{P}$ -generisch über  $N$ . Dann ist  $J_\nu^X$  in  $N[G]$  abzählbar. Sei  $f : \omega \rightarrow J_{\nu+\omega}^X$  eine Bijektion mit  $f(0) = \nu$ . Sei  $i = 1$ . Für  $f(n) \in S^X$  definiere

$$x_{n,1} = \{\langle m, i, j \rangle \mid f(m) \in J_{f(n)}^X \text{ und}$$

$$(i = 1 \Leftrightarrow f(m) \in X \upharpoonright f(n)) \quad \text{und} \quad (j = 1 \Leftrightarrow f(m) \in X_{f(n)})\}$$

$$x = \{\langle n, m, i, j \rangle \mid \langle m, i, j \rangle \in x_{n,1}, f(n) \in S^1\}$$

$$g(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = f^{-1}(\langle x, y \rangle)$$

$$h(i, f^{-1}(x)) = h_{\nu, X_\nu}(i, x)$$

$$f^{-1}(x) < f^{-1}(y) \Leftrightarrow x <_\nu y.$$

Dann gilt  $N[G] \models \text{Cond}(I_\nu^X)$  genau dann, wenn

$$(\forall y \subseteq x_{0,1} \quad \text{mit} \quad (\forall k_0, k_1 \in y)(\exists k_2 \in y)(g(k_0, k_1) = k_2))$$

$$\text{und} \quad (\forall i)(\forall l_0 \in y)(\exists l_1 \in y)(h(i, l_0) = l_1))$$

$$(\exists n)(\exists \pi : y \rightarrow x_{n,1} \quad < \text{-erhaltende Bijektion})$$

in  $N[G]$  gilt. Bezeichne diesen Ausdruck mit  $\varphi(x, g, h, <)$ . Offensichtlich ist  $\varphi(x, g, h, <) \Pi_2^1(x, g, h, <)$ . Eine entsprechende Formel kann man finden, falls  $i = 0$  ist.

Angenommen  $N \models \neg \text{Cond}(I_\nu^X)$ . Dann ist  $N[G] \models \neg \text{Cond}(I_\nu^X)$ . Also ist  $N[G] \models \neg \varphi(x, g, h, <)$ . Nach Schoenfields Absolutheitstheorem ist also  $M[G] \models \neg \varphi(x, g, h, <)$ . Also gibt es ein  $p \in G$  mit  $(p \Vdash \neg \text{Cond}(I_\nu^X))^M$ . Das ist aber ein Widerspruch zu Lemma 2.1.  $\square$

Schreibe  $\text{Cond}_{\omega_1}(I_{\nu,0}^X)$ , falls für alle abzählbaren  $H \prec_1 I_{\nu,0}^X$  ein  $\mu \in \text{Lim}$  mit  $H \cong I_{\mu,0}^X$  existiert

Schreibe  $Cond_{\omega_1}(I_{\nu,1}^X)$ , falls  $\nu \in S^X$  ist, und für alle abzählbaren  $H \prec_1 I_{\nu,1}^X$  ein  $\mu \in S^X$  mit  $H \cong I_{\mu,1}^X$  existiert.

Der folgende Satz ist §1, Lemma 32 von Jensens Manuskript über Moräste [1972/73]. Über den Zusammenhang zwischen Kondensation und Morästen werde ich in einem Augenblick mehr sagen.

### Satz 2.3

Sei  $i = 0$  oder  $i = 1$ . Sei  $X \upharpoonright \omega_1 = Y \upharpoonright \omega_1$ , und gelte  $Cond_{\omega_1}(I_{\nu,i}^X)$  und  $Cond_{\omega_1}(I_{\nu,i}^Y)$ . Dann ist  $I_{\nu,i}^X = I_{\nu,i}^Y$ .

**Beweis:** Sei zunächst  $i = 1$ . Sei  $I_{\nu}^{X,Y} := I_{\nu}^Z$  mit  $Z := X \times \{1\} \cup Y \times \{0\}$ . Sei  $\pi : I_{\bar{\nu}}^{\bar{X},\bar{Y}} \rightarrow I_{\nu}^{X,Y}$  elementar mit  $card(I_{\bar{\nu}}^{\bar{X},\bar{Y}}) = \omega$ . Dann gilt wegen  $Cond(I_{\nu}^X)$ , daß  $\bar{X} \upharpoonright \bar{\nu} + 1 = X \upharpoonright \bar{\nu} + 1$  ist. Und wegen  $Cond(I_{\nu}^Y)$  ist  $\bar{Y} \upharpoonright \bar{\nu} + 1 = Y \upharpoonright \bar{\nu} + 1 = X \upharpoonright \bar{\nu} + 1$ . Also ist  $I_{\bar{\nu}}^{\bar{X},\bar{Y}} = I_{\bar{\nu}}^{X,Y} \models (\forall x)(x \in X_{\bar{\nu}} \Leftrightarrow x \in Y_{\bar{\nu}})$  und  $I_{\bar{\nu}}^{\bar{X},\bar{Y}} = I_{\bar{\nu}}^{X,Y} \models (\forall x)(x \in X \upharpoonright \bar{\nu} \Leftrightarrow x \in Y \upharpoonright \bar{\nu})$ . Da  $\pi$  elementar ist, ist also auch  $I_{\nu}^{X,Y} \models (\forall x)(x \in X_{\nu} \Leftrightarrow x \in Y_{\nu})$  und  $I_{\nu}^{X,Y} \models (\forall x)(x \in X \upharpoonright \nu \Leftrightarrow x \in Y \upharpoonright \nu)$ . D.h. es ist  $Y \upharpoonright \nu + 1 = X \upharpoonright \nu + 1$ . Also ist  $I_{\nu}^X = I_{\nu}^Y$ .

Der Fall  $i = 0$  geht ganz analog.  $\square$

### Satz 2.4

Habe  $L[X]$  Kondensation, sei  $S^X$  in  $On$  unbeschränkt,  $M$  transitiv und  $\pi : L[X] \rightarrow M$  elementar. Dann ist  $M = L[X]$ .

**Beweis:** Da  $\pi$  elementar ist, ist  $M = L[Y]$  für eine Folge  $\langle Y_{\nu} \mid \nu \in S^Y \rangle$ . Und da  $L[X]$  Kondensation hat, gilt aufgrund der Elementarität von  $\pi$   $L[Y] \models (\forall \nu \in S^Y) Cond(I_{\nu,1}^Y)$ . Nach Satz 2.2 hat also auch  $L[Y]$  Kondensation. Da  $S^X$  in  $On$  unbeschränkt ist, ist dann  $L[X] = L[Y]$ .  $\square$

### Korollar 2.5

Erfülle  $L[X]$  Kondensation. Sei  $S^X$  in  $On$  unbeschränkt. Dann gibt es in  $L[X]$  keine meßbaren Kardinalzahlen.

**Beweis:** Angenommen in  $L[X]$  gäbe es eine meßbare Kardinalzahl. Dann gäbe es ein über  $L[X]$  definierbares, elementares  $\pi : L[X] \rightarrow M \subseteq L[X]$ . Nach Satz 2.4 wäre dann aber  $M = L[X]$ . Das ist aber ein Widerspruch zur  $L[X]$ -Definierbarkeit von  $\pi$ .  $\square$

Jetzt noch zum Zusammenhang zwischen Kondensation und Morästen.

Sei  $\kappa > \omega$  eine reguläre Kardinalzahl und  $\beta \leq \infty$ .

Sei  $S \subseteq Lim$  und  $\triangleleft$  eine binäre Relation auf  $S$ . Gelte:

(a) Ist  $\nu \triangleleft \tau$ , so ist  $\nu < \tau$ . Und für  $\nu \in S$  ist  $\{\tau \mid \nu \triangleleft \tau\}$  abgeschlossen.

Sei  $\mu_{\nu}$  das größte  $\mu$  mit  $\nu \trianglelefteq \mu$ .

Sei

$$\nu \sqsubseteq \tau \Leftrightarrow \nu \in \text{Lim}(\{\delta \mid \delta \triangleleft \tau\}) \cup \{\delta \mid \delta \leq \tau\}.$$

Dann ist  $\sqsubseteq$  ein Baum. Für  $\alpha \in S$  sei  $|\alpha|$  der Rang von  $\alpha$  in diesem Baum.

Sei

$$S^+ := \{\nu \in S \mid \nu \text{ Nachfolger in } \sqsubseteq\}$$

$$S^0 := \{\alpha \in S \mid |\alpha| = 0\}$$

$$S^1 := \{\mu_\tau \mid \tau \in S^+\}$$

$$S^2 := \{\mu_\tau \mid \tau \in S\}$$

$$S' := \text{Lim}(S)$$

$$\mu'_\nu := \max(S' \cap (\mu_\nu + 1)).$$

Sei  $S_\alpha := \{\nu \in S \mid \nu \text{ direkter Nachfolger von } \alpha \text{ in } \sqsubseteq\}$ . Für  $\nu \in S^+$  sei  $\alpha_\nu$  der direkte Vorgänger von  $\nu$  in  $\sqsubseteq$ . Für  $\nu \in S^0$  sei  $\alpha_\nu := 0$ . Für  $\nu \notin S^+ \cup S^0$  sei  $\alpha_\nu := \nu$ .

(b) Für  $\nu, \tau \in S^+ \cup S^0$  mit  $\alpha_\nu = \alpha_\tau$  gelte

$$\nu < \tau \quad \Rightarrow \quad \mu_\nu < \tau.$$

Also ist für  $\nu \in S^+$   $\mu_\nu$  das größte  $\mu$  mit  $\nu \sqsubseteq \mu$ .

Für alle  $\alpha \in S$  gelte:

(c)  $S_\alpha$  ist abgeschlossen.

(d)  $\text{card}(S_\alpha) \leq \alpha^+$

$$\text{card}(S_\alpha) \leq \text{card}(\alpha) \text{ falls } \text{card}(\alpha) < \alpha$$

(e)  $\kappa = \max(S^0) = \sup(S^0 \cap \kappa)$

$$\kappa^{+i+1} = \max(S_{\kappa+i}) = \sup(S_{\kappa+i} \cap \kappa^{+i}) \text{ für alle } i < \beta.$$

Sei  $D = \langle D^\nu \mid \nu \in S^2 \rangle$  mit  $D^\nu \subseteq J_\nu^D$  eine Folge. Beachte, daß das  $\nu$ -te Folgeglied mit  $D^\nu$  statt mit  $D_\nu$  bezeichnet ist. Sei  $D_\nu := D \upharpoonright \nu$ . Das entspricht Jensens Konvention.

Eine  $\mathfrak{S}, D$ -Abbildung  $f$  sei ein Tripel  $\langle \bar{\nu}, |f|, \nu \rangle$  mit  $\bar{\nu}, \nu \in S$  und  $|f| : J_{\mu_{\bar{\nu}}}^D \rightarrow J_{\mu_\nu}^D$ .

Sei  $f = \langle \bar{\nu}, |f|, \nu \rangle$  eine  $\mathfrak{S}, D$ -Abbildung. Dann definiert man  $d(f)$  und  $r(f)$  durch  $d(f) = \bar{\nu}$  und  $r(f) = \nu$ . Und  $f(x)$  sei für  $x \in J_{\mu_{\bar{\nu}}}^D$  durch  $f(x) = |f|(x)$  definiert und für  $\tau = \mu_{\bar{\nu}}$  durch  $f(\tau) = \mu_\nu$ . Dagegen behalten  $\text{dom}(f)$ ,  $\text{rng}(f)$ ,  $f \upharpoonright X$ , etc. ihre üblichen mengentheoretischen Bedeutungen, d.h.  $\text{dom}(f) = \text{dom}(|f|)$ ,  $\text{rng}(f) = \text{rng}(|f|)$ ,  $f \upharpoonright X = |f| \upharpoonright X$ , usw.

Für  $\bar{\tau} \sqsubseteq \bar{\nu}$  sei  $f^{(\bar{\tau})} = \langle \bar{\tau}, |f| \upharpoonright J_{\mu_{\bar{\tau}}}^D, \tau \rangle$  mit  $\tau = f(\bar{\tau})$ . Und  $f^{-1}$  sei  $\langle \nu, |f|^{-1}, \bar{\nu} \rangle$ . Für  $g = \langle \nu, |g|, \nu' \rangle$  und  $f = \langle \bar{\nu}, |f|, \nu \rangle$  sei  $g \circ f = \langle \bar{\nu}, |g| \circ |f|, \nu' \rangle$ .

Ist  $g = \langle \nu', |g|, \nu \rangle$  und  $f = \langle \bar{\nu}, |f|, \nu \rangle$  mit  $\text{rng}(f) \subseteq \text{rng}(g)$ , so sei  $g^{-1}f = \langle \bar{\nu}, |g|^{-1}|f|, \nu' \rangle$ . Schließlich setze noch  $id_\nu = \langle \nu, id \upharpoonright J_{\mu_\nu}^D, \nu \rangle$ .

Sei  $\mathfrak{F}$  eine Menge von  $\mathfrak{S}, D$ -Abbildungen  $f = \langle \bar{\nu}, |f|, \nu \rangle$ , so daß folgendes gilt:

(0) Es ist  $f(\bar{\nu}) = \nu$ ,  $f(\alpha_{\bar{\nu}}) = \alpha_\nu$  und  $|f|$  ordnungserhaltend.

(1) Zu  $f \neq id_{\bar{\nu}}$  gibt es ein  $\beta \sqsubseteq \alpha_{\bar{\nu}}$  mit  $f \upharpoonright \beta = id \upharpoonright \beta$  und  $f(\beta) > \beta$ .

(2) Ist  $\bar{\tau} \in S^+$  und  $\bar{\nu} \sqsubset \bar{\tau} \sqsubseteq \mu_{\bar{\nu}}$ , so ist auch  $f^{(\bar{\tau})} \in \mathfrak{F}$ .

Für  $f = \langle \bar{\nu}, |f|, \nu \rangle \in \mathfrak{F}$  schreibe man  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$ . Ist für  $f \in \mathfrak{F}$   $r(f) = \nu$ , so schreibe man  $f \Rightarrow \nu$ . Das eindeutig bestimmte  $\beta$  aus (1) werde mit  $\beta(f)$  bezeichnet.

Ein  $f \in \mathfrak{F}$  heie genau dann für eine Eigenschaft  $P(f)$  minimal, wenn aus  $P(g)$  stets  $g^{-1}f \in \mathfrak{F}$  folgt.

Sei

$f_{(u,\xi,\nu)} =$  das (!) für  $f \Rightarrow \nu$  und  $u \cup \{\xi\} \subseteq \text{rng}(f)$  minimale  $f \in \mathfrak{F}$ ,

falls ein solches existiert.

Ein  $\nu \in S$  heie genau dann unabhängig, wenn für alle  $\beta < \alpha_\nu$   $d(f_{(\beta,0,\nu)}) < \alpha_\nu$  gilt.

Für  $\tau \sqsubseteq \nu$  sei  $\nu$  genau dann  $\xi$ -abhängig von  $\tau$ , wenn  $f_{(\alpha_\tau,\xi,\nu)} = id_\nu$  ist.

$\mathfrak{M} = \langle S, \triangleleft, \mathfrak{F}, D \rangle$  heie genau dann ein grober  $(\kappa, \beta)$ -Morast, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(3) **Minimumsprinzip** (minimum principle – MP)

Ist  $\nu \in (S^+ \cup S^1) - \text{Card}$  und  $\xi \in J_{\mu_\nu}^D$ , so existiert  $f_{(0,\xi,\nu)}$ .

(4)  **$\Sigma_1$ -Erhaltungssaxiom** (logical preservation axiom – LP1)

Für  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$  ist  $|f| : \langle J_{\mu_{\bar{\nu}}}^D, D_{\mu_{\bar{\nu}}} \rangle \rightarrow \langle J_{\mu_\nu}^D, D_{\mu_\nu} \rangle$   $\Sigma_1$ -elementar.

(5) **erstes Stetigkeitsprinzip** (first continuity principle – CP1)

Für  $i \leq j < \lambda$  seien  $f_i : \nu_i \Rightarrow \nu$  und  $g_{ij} : \nu_i \Rightarrow \nu_j$  so, daß  $g_{ij} = f_j^{-1}f_i$  gilt. Sei  $\langle g_i \mid i < \lambda \rangle$  der transitive, direkte Limes des gerichteten Systems  $\langle g_{ij} \mid i \leq j < \lambda \rangle$  und  $hg_i = f_i$  für alle  $i < \lambda$ . Dann sind  $g_i, h \in \mathfrak{F}$ .

(6) **erstes Abhängigkeitsaxiom** (first dependency axiom – DP1)

Ist  $\mu'_\nu < \mu'_{\alpha_\nu}$ , so ist  $\nu$  unabhängig.

(7) **zweites Abhängigkeitsaxiom** (DP2)

Sei  $K_\nu = \{\mu_{\bar{\nu}} < \alpha_\nu \mid \bar{\nu} = d(f_{(\beta,0,\nu)}) \text{ für ein } \beta < \nu\}$ . Sei  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$ ,  $\bar{\nu} \sqsubset \bar{\tau} \sqsubseteq \mu_{\bar{\nu}}$  und  $f(\bar{\tau}) = \tau$ . Ist dann  $\bar{\tau} \in S^+$  unabhängig, so ist  $f \upharpoonright J_{\alpha_{\bar{\tau}}}^D : \langle J_{\alpha_{\bar{\tau}}}^D, D_{\alpha_{\bar{\tau}}}, K_{\bar{\tau}} \rangle \rightarrow \langle J_{\alpha_\tau}^D, D_{\alpha_\tau}, K_\tau \rangle$   $\Sigma_0$ -elementar.

(8) **drittes Abhängigkeitsaxiom (DP3)**

Ist  $\nu$   $\xi$ -abhängig von  $\tau \sqsubseteq \nu$ ,  $\tau \in S^+$ ,  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$ ,  $f(\bar{\tau}) = \tau$  und  $\xi \in \text{rng}(f)$ , so ist  $f^{(\bar{\tau})} : \bar{\tau} \Rightarrow \tau$ .

(9) **starke Definierbarkeit (SD)**

$$\begin{aligned} & \{ \langle \xi, \tau, x, f_{(0,\xi,\tau)}(x) \rangle \mid \tau < \nu, \mu_\tau = \nu, \xi \in J_{\mu_\tau}^D, x \in \text{dom}(f_{(0,\xi,\tau)}) \} \\ & \cup \{ \langle \xi, x, f_{(0,\xi,\nu)}(x) \rangle \mid \mu_\nu = \nu, \xi \in J_{\mu_\nu}^D, x \in \text{dom}(f_{(0,\xi,\nu)}) \} \\ & \cup (\sqsubset \cap \nu^2) \end{aligned}$$

ist über  $\langle J_\nu^D, D_\nu, D^\nu \rangle$  uniform definierbar.

D.h.  $D_\nu$  kodiert  $\langle f_{(0,\xi,\tau)} \mid \xi \in J_{\mu_\tau}^D, \mu_\tau < \nu \rangle$  und  $\sqsubset \cap \nu^2$ .

Diese Definition von groben Morästen unterscheidet sich in einigen Punkten von der bei Jensen [1972/73].

(i) Jensen benutzt nur die Relation  $\sqsubset$ . Auch bei mir wird  $\triangleleft$  erst in Abschnitt 5 eine Rolle spielen.

(ii) Bei Jensen ist  $|f| : \mu_{\bar{\nu}} \rightarrow \mu_\nu$  statt  $|f| : J_{\mu_{\bar{\nu}}}^D \rightarrow J_{\mu_\nu}^D$ . Das kann er machen, da bei ihm die  $\nu \in S$  primitiv rekursiv abgeschlossen sind. In diesem Fall gibt es nämlich eine kanonische Bijektion zwischen  $\mu_\nu$  und  $J_{\mu_\nu}^D$  (vgl. Lemma 3.3).

(iii) Jensen betrachtet nur  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$  mit  $\bar{\nu}, \nu \in S^+ - \text{Card}$ . Das ist äquivalent zur Voraussetzung  $\nu \in S^+ - \text{Card}$  in (MP). Ich betrachte zusätzlich  $S^1$ , um (SP) (siehe unten) fordern zu können.

(iv) Er setzt in Axiom (0) zusätzlich  $k_{\bar{\nu}} = k_\nu$  und  $|\bar{\nu}| = |\nu|$  voraus. Das ist der Grund, warum er nur  $(\kappa, \beta)$ -Moräste mit  $\beta < \kappa$  betrachten kann. Mit  $k_{\bar{\nu}} = k_\nu$  und  $|\bar{\nu}| = |\nu|$  kann man für  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$

$$f \neq id_\nu \Leftrightarrow \mu_{\bar{\nu}} < \alpha_\nu$$

zeigen. Das ist §1, Korollar 10 bei Jensen [1972/73]. Daher kann er zur Definition der Unabhängigkeit von  $\nu \in S^+$  auch die schwächere Bedingung, daß für alle  $\beta < \alpha_\nu$   $f_{(\beta,0,\nu)} \neq id_\nu$  ist, verwenden.

(v) (DP1) lautet bei Jensen:

Ist  $\mu_\nu < \mu_{\alpha_\nu}$ , so ist  $\nu$  unabhängig.

Sei  $\mathfrak{M}' = \langle S', \triangleleft', \mathfrak{F}', D' \rangle$  mit

$$\triangleleft' = \triangleleft \upharpoonright S'$$

$$\mathfrak{F}' = \{ \langle \bar{\nu}, f \upharpoonright J_{\mu_{\bar{\nu}}}^D, \nu \rangle \mid f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu \in S' \}$$

und dem entsprechenden Code  $D'$  für  $\mathfrak{F}'$  (vgl. oben). Dann ist  $\mathfrak{M}'$  ein grober Morast, der das erfüllt. Ich verwende die schwächere Form vom (DP1),

um die zusätzliche Annahme (SP) (siehe unten) möglichst einfach halten zu können.

(vi) (DP2) lautet bei ihm:

Sei  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$ ,  $\bar{\nu} \sqsubset \bar{\tau} \sqsubseteq \mu_{\bar{\nu}}$ ,  $f(\bar{\beta}) = \beta$ ,  $f(\bar{\tau}) = \tau$ . Ist dann  $\bar{\tau}$  unabhängig, so gilt  $f(d(f_{\bar{\beta},0,\bar{\tau}})) = d(f_{(\beta,0,\tau)})$ .

Daraus folgt meine Formulierung von (DP2). Das ist §1, Lemma 18 von Jensen [1972/73]. Ich bevorzuge diese Formulierung von (DP2), weil ich später noble Moräste betrachten werde. Und diese sind u.a. dadurch definiert, daß (DP2) mit  $\Sigma_1$ -elementar an Stelle von  $\Sigma_0$ -elementar gilt.

### Lemma 2.6

Sei  $\nu \in (S^+ \cup S^1) - Card$  und  $u \subseteq J_{\mu\nu}^D$ . Dann gibt es ein für  $f \Rightarrow \nu$  und  $u \subseteq rng(f)$  minimales  $f \in \mathfrak{F}$ . Sei dieses mit  $f_{(u,\nu)}$  bezeichnet.

**Beweis:**

(1) Für endliche  $u = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  ist  $f_{(u,\nu)} = f_{(0, \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle, \nu)}$ .

Denn wegen (LP1) ist  $f_{(u,\nu)} : \langle J_{\bar{\nu}_1}^D, D_{\bar{\nu}_1} \rangle \rightarrow \langle J_{\nu}^D, D_{\nu} \rangle$   $\Sigma_1$ -elementar. Da  $J_{\nu}^D$  unter Paaren abgeschlossen ist, ist also mit  $u \subseteq rng(f_{(u,\nu)})$  auch  $\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle \in rng(f_{(u,\nu)})$ . Umgekehrt ist wegen (LP1)  $f_{(0, \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle, \nu)} : \langle J_{\bar{\nu}_2}^D, D_{\bar{\nu}_2} \rangle \rightarrow \langle J_{\nu}^D, D_{\nu} \rangle$   $\Sigma_1$ -elementar. Daher ist mit  $\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle \in rng(f_{(0, \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle, \nu)})$  auch  $u \subseteq rng(f_{(0, \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle, \nu)})$ . Wegen Minimalität gilt also (1).

(2) Sei nun  $u$  unendlich. Dann ist  $I = \{v \subseteq u \mid v \text{ endlich}\}$  bezüglich  $\subseteq$  eine gerichtete Menge. Für  $v \subseteq w \in I$  sei  $g_{vw} = f_{(w,\nu)}^{-1} f_{(v,\nu)}$ . Sei  $\langle g_v \mid v \in I \rangle$  der transitive, direkte Limes des gerichteten Systems  $\langle g_{vw} \mid v \subseteq w \rangle$  und  $hg_v = f_v$  für alle  $v \in I$ . Dann sind  $g_v, h \in \mathfrak{F}$ . Das folgt wie üblich aus (CP1). Offensichtlich ist  $h = f_{(u,\nu)}$ .  $\square$

### Lemma 2.7

Sei  $\nu \in (S^+ \cup S^1) - Card$ . Dann gilt:

- (a) Sind  $f, g \Rightarrow \nu$  mit  $rng(f) \subseteq rng(g)$ , dann ist  $g^{-1}f \in \mathfrak{F}$ .
- (b) Sei  $g : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$ ,  $\bar{u} \subseteq J_{\mu_{\bar{\nu}}}^D$  und  $u = g[\bar{u}]$ . Dann ist  $gf_{(\bar{u},\bar{\nu})} = f_{(u,\nu)}$ .
- (c) Sind  $f, g \in \mathfrak{F}$  mit  $r(f) = d(g)$ , dann ist  $gf \in \mathfrak{F}$ .
- (d)  $id_{\nu} \in \mathfrak{F}$ .

**Beweis:**

(a)  $g^{-1}f = f_{(rng(g^{-1}f), d(g))}$ .

(b) Es gilt einerseits

$$\begin{aligned} \bar{u} &= g^{-1}[u] \subseteq rng(g^{-1}f_{(u,\nu)}) \\ &\Rightarrow rng(f_{(\bar{u},\bar{\nu})}) \subseteq rng(g^{-1}f_{(u,\nu)}) \\ &\Rightarrow rng(gf_{(\bar{u},\bar{\nu})}) \subseteq rng(f_{(u,\nu)}). \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} u &\subseteq \text{rng}(gf_{(\bar{u}, \bar{\nu})}) \\ &\Rightarrow \text{rng}(f_{(u, \nu)}) \subseteq \text{rng}(gf_{(\bar{u}, \bar{\nu})}). \end{aligned}$$

(c) Wegen  $f = f_{(\text{rng}(f), d(f))}$  und  $g[\text{rng}(f)] = \text{rng}(gf)$  ist  $gf = f_{(\text{rng}(gf), \nu)}$ .

(d)  $id_\nu = f_{(u, \nu)}$  mit  $u = J_{\mu_\nu}^D$ .  $\square$

Aus den Axiomen (0) und (1) folgt, daß  $f \Rightarrow \nu$  mit  $f \upharpoonright \alpha_\nu = id \upharpoonright \alpha_\nu$  schon  $f = id_\nu$  ist. Angenommen  $f \neq id_\nu$ . Dann wäre wegen Axiom (1)  $\beta(f) \leq \alpha_\nu$ . Nach Voraussetzung ist aber  $f \upharpoonright \alpha_\nu = id \upharpoonright \alpha_\nu$  und nach Axiom (0) ist  $f(\alpha_\nu) = \alpha_\nu$ . Widerspruch! Wegen (CP1) ist  $J_{\mu_\nu}^D = \bigcup \{ \text{rng}(f_{(\beta, \xi, \nu)}) \mid \beta < \alpha_\nu \}$  für alle  $\xi \in J_{\mu_\nu}^D$ . Denn sei  $h : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$  die Umkehrung der Transitivierung von  $\bigcup \{ \text{rng}(f_{(\beta, \xi, \nu)}) \mid \beta < \alpha_\nu \}$ . Dann ist  $h \in \mathfrak{F}$  und  $h \upharpoonright \alpha_\nu = id \upharpoonright \alpha_\nu$ . Also ist  $h = id_\nu$ . Fertig!

Wegen meines schwachen (DP1) kann ich §1, Lemma 13 von Jensen [1972/73] nur für  $\tau$  mit  $\mu'_\tau < \mu'_\nu$  zeigen.

### Lemma 2.8

Seien  $\bar{\nu}, \nu \in S$  und  $h : \langle J_{\bar{\nu}}^D, \bar{D} \rangle \rightarrow \langle J_\nu^D, D_\nu \rangle$   $\Sigma_1$ -elementar, so daß ein  $\beta \sqsubseteq \bar{\nu}$  mit  $h \upharpoonright \beta = id \upharpoonright \beta$  existiert. Sei  $\mu'_\tau < \mu'_\nu$  und  $\tau = h(\bar{\tau}) \in (S^+ \cup S^1) - \text{Card}$ . Dann ist  $h^{(\bar{\tau})} : \bar{\tau} \Rightarrow \tau$ .

**Beweis:** Seien  $\delta_\tau \sqsubseteq \tau$  und  $\delta_\nu \sqsubseteq \nu$  minimal. Ist dann  $\delta_\tau \not\sqsubseteq \nu$ , so ist  $\tau < \delta_\nu$ . Also ist  $\bar{\tau} = \tau$ , und man ist in diesem Fall schon fertig. Sei daher  $\delta := \delta_\tau \sqsubseteq \nu$  und  $f_{(\delta, \xi, \nu)} : \tau(\xi) \Rightarrow \tau$ . Sei  $\delta \sqsubset \gamma(\xi) \sqsubseteq \tau(\xi)$  mit  $\alpha_{\gamma(\xi)} = \delta$ . Wegen (CP3) ist dann  $f_{(0, \xi, \tau(\xi))} = f_{(0, \xi, \gamma(\xi))}$  für alle  $\xi \in J_{\mu_\nu}^D$ . Und es ist  $\mu'_{\gamma(\xi)} \leq \mu'_\tau < \mu'_\nu \leq \mu'_\delta$ . Nach (CP1) ist also  $\gamma(\xi)$  unabhängig. D.h. für alle  $\beta < \alpha_{\gamma(\xi)}$  ist  $d(f_{(\beta, 0, \gamma(\xi))}) < \alpha_{\gamma(\xi)}$ . Da  $J_{\mu_{\gamma(\xi)}}^D = \bigcup \{ \text{rng}(f_{(\beta, 0, \gamma(\xi))}) \mid \beta < \alpha_{\gamma(\xi)} \}$  ist, ist  $\xi \in \text{rng}(f_{(\beta, 0, \gamma(\xi))})$  für ein  $\beta < \alpha_{\gamma(\xi)}$ . Also ist  $d(f_{(0, \xi, \gamma(\xi))}) < \delta$ . Insgesamt ist also

$$d(f_{(0, \xi, \tau)}) = d(f_{(\delta, \xi, \tau)} \circ f_{(0, \xi, \tau(\xi))}) = d(f_{(0, \xi, \tau(\xi))}) = d(f_{(0, \xi, \gamma(\xi))}) < \delta.$$

Da  $h : \langle J_{\bar{\nu}}^D, \bar{D} \rangle \rightarrow \langle J_\nu^D, D_\nu \rangle$   $\Sigma_1$ -elementar ist, gilt für  $\xi \in \text{rng}(h)$  auch  $\text{dom}(f_{(0, \xi, \tau)}) \in \text{rng}(h)$ . Nach Voraussetzung ist aber  $\text{rng}(h) \cap \delta \in \text{On}$ . Also ist sogar  $\text{dom}(f_{(0, \xi, \tau)}) \subseteq \text{rng}(h)$  und damit auch  $\text{rng}(f_{(0, \xi, \tau)}) \subseteq \text{rng}(h)$ . D.h. es ist

$$\text{rng}(h) \cap J_{\mu_\tau}^D = \bigcup \{ \text{rng}(f_{(0, \xi, \tau)}) \mid \xi \in \text{rng}(h) \cap J_{\mu_\tau}^D \}.$$

Somit ist

$$h^{(\bar{\tau})} = f_{(u, \tau)} \in \mathfrak{F} \text{ mit } u = \text{rng}(h) \cap J_{\mu_\tau}^D. \quad \square$$

Nun zu einer ersten Äquivalenz zwischen Kondensation und Morästen.

Sei  $S_{\text{On}}$  die Menge  $\text{Lim}$  versehen mit

$$\tau \triangleleft \nu \quad :\Leftrightarrow \quad \tau \text{ regulär in } I_\nu.$$



Dann ist

$$\tau \sqsubset \nu \quad :\Leftrightarrow \quad \tau \text{ Kardinalzahl in } I_\nu.$$

### Satz 2.9

Sei  $X = \langle X_\nu \mid \nu \in S^* \rangle$  eine Folge, so daß  $L[X]$  Kondensation hat,  $S^* = S_{On}^1$  und  $Card = Card^{L[X]}$  ist. Dann gibt es einen groben  $(\omega_1, \infty)$ -Morast.

**Beweis:** Sei  $S := S_{On}$  und  $\triangleleft$  wie in der Definition von  $S_{On}$ . Dann ist für  $\nu \in S^+ - Card$

$\mu_\nu = \beta(\nu) :=$  das kleinste  $\beta$  mit  $J_{\beta+\omega}^X \models \nu \notin Card$ .

Also gibt es für  $\nu \in S^+ - Card$  ein kleinstes  $p \in J_{\beta(\nu)+\omega}^X$ , so daß

$$\nu \subseteq h_{\beta(\nu)+\omega, \emptyset}[\omega \times (J_{\alpha_\nu}^X \times \{p\})]$$

ist. Sei dieses mit  $p_\nu$  bezeichnet.

Ist  $\nu \sqsubset \tau \sqsubseteq \mu_\nu$ , so ist offensichtlich  $p_\tau \leq p_\nu$  bezüglich der kanonischen Wohlordnung. Also ist

$$P_\nu := \{p_\tau \mid \nu \sqsubseteq \tau \sqsubseteq \mu_\nu\} \text{ endlich.}$$

Sei  $D = X$ .

Sei  $f \Rightarrow \nu$  genau dann, wenn für ein  $f^*$  und ein  $\bar{\nu}$

$$f = \langle \bar{\nu}, f^* \upharpoonright J_{\mu_{\bar{\nu}}}^D, \nu \rangle,$$

$$f^* : I_{\beta(\bar{\nu})+\omega}^0 \rightarrow I_{\beta(\nu)+\omega}^0 \text{ } \Sigma_1\text{-elementar,}$$

$$f(\bar{\nu}) = \nu \text{ und}$$

$$P_\nu \cup \{\nu, \mu_\nu\} \subseteq rng(f^*) \text{ ist mit}$$

$$I_\nu^0 := I_{\nu, 0}^X.$$

Dadurch ist  $\mathfrak{F}$  eindeutig bestimmt.

Bleiben die Axiome zu zeigen.

(0) ist trivial.

(1) Angenommen es gäbe kein solches  $\beta$ . Dann wäre  $\alpha_\nu \subseteq rng(f)$ . Nach Satz 1.13 ist  $h_{\beta(\nu)+\omega, \emptyset}$  über  $I_{\beta(\nu)+\omega}^0$   $\Sigma_1$ -definierbar. Also wäre  $h_{\beta(\nu)+\omega, \emptyset}[\omega \times (\alpha_\nu \times P_\nu \times \{\nu, \mu_\nu\})^{<\omega}] \subseteq rng(f)$ . Aber  $h_{\beta(\nu)+\omega, \emptyset}[\omega \times (\alpha_\nu \times P_\nu \times \{\nu, \mu_\nu\})^{<\omega}] = J_{\beta(\nu)+\omega, \emptyset}^X$ . D.h.  $f = id_{\bar{\nu}}$ . Widerspruch! Sei nämlich  $\pi : \bar{I} \rightarrow I_{\beta(\nu)+\omega}^0$  die Umkehrung der Transitivierung von  $h_{\beta(\nu)+\omega, \emptyset}[\omega \times (\alpha_\nu \times P_\nu \times \{\nu, \mu_\nu\})^{<\omega}]$ . Dann ist  $\bar{I} = I_{\bar{\beta}}^0$  für ein  $\bar{\beta} \in Lim$ , da  $S^* = S_{On}^1$  ist und  $L[X]$  Kondensation hat. Außerdem ist nach Definition von  $p_\nu$   $\nu \subseteq h_{\beta(\nu)+\omega, \emptyset}[\omega \times (\alpha_\nu \times P_\nu \times \{\nu, \mu_\nu\})^{<\omega}]$ . D.h.  $\pi \upharpoonright \nu = id \upharpoonright \nu$ . Und  $h_{\bar{\beta}, \emptyset}[\omega \times (\alpha_\nu \times \bar{P} \times \{\nu, \mu_\nu\})^{<\omega}] = J_{\bar{\beta}}^X$  mit  $\pi(\bar{P}) = P_\nu$ . Ist also  $\bar{\beta} = \beta(\nu) + \omega$ , so ist  $\bar{P} = P_\nu$  aufgrund der Minimalität von  $P_\nu$ . D.h.

wie gewünscht  $h_{\beta(\nu)+\omega, \emptyset}[\omega \times (\alpha_\nu \times P_\nu \times \{\nu, \mu_\nu\})^{<\omega}] = J_{\beta(\nu)+\omega}^X$ . Wäre aber  $\bar{\beta} < \beta(\nu) + \omega$ , so wäre bereits  $I_{\bar{\beta}} \models \nu \notin \text{Card}$ . Das widerspricht der Definition von  $\beta(\nu)$ .

(2) Sei  $\nu \sqsubset \tau \sqsubseteq \mu_\nu$ ,  $f \Rightarrow \nu$  und  $\tau \in \text{rng}(f)$ . Dann ist  $P_\tau \subseteq P_\nu$  und  $\mu_\tau = \mu_\nu$ . Also ist  $P_\tau \cup \{\tau, \mu_\tau\} \subseteq \text{rng}(f^*)$ .

(3) Sei  $g$  die Umkehrung der Transitivierung von  $h_{\beta(\nu)+\omega, \emptyset}[\omega \times (P_\nu \cup \{\nu, \mu_\nu, \xi\})^{<\omega}]$ . Nach Satz 1.13 ist  $h_{\beta(\nu)+\omega, \emptyset}$  über  $I_{\beta(\nu)+\omega}^0$   $\Sigma_1$ -definierbar. Also ist stets  $h_{\beta(\nu)+\omega, \emptyset}[\omega \times (P_\nu \cup \{\nu, \mu_\nu, \xi\})^{<\omega}] \subseteq \text{rng}(f^*)$  für  $f \Rightarrow \nu$  mit  $\xi \in \text{rng}(f)$ . D.h.  $f_{(0, \xi, \nu)} = \langle \bar{\nu}, g \upharpoonright J_{\mu_\nu}^D, \nu \rangle$ .

(4) Das ist die Kondensation von  $L[X]$ .

(5) Sei  $H_i = \text{rng}(f_i^*)$  und  $H = \bigcup \{H_i \mid i < \lambda\}$ . Sei  $\pi : I_{\bar{\beta}}^0 \rightarrow I_{\beta(\nu)+\omega}^0$  mit  $\pi(\bar{\nu}) = \nu$  die Umkehrung der Transitivierung von  $H$ . Dann ist  $\bar{\beta} = \beta(\bar{\nu}) + \omega$ . Denn da  $I_{\beta(\nu)+\omega}^0 \models \nu \notin \text{Card}$  ist, ist auch  $I_{\bar{\beta}}^0 \models \bar{\nu} \notin \text{Card}$ . D.h.  $\beta(\bar{\nu}) + \omega \leq \bar{\beta}$ . Aber  $\bar{\beta} = \bar{\mu} + \omega$  mit  $\pi(\bar{\mu}) = \mu_\nu$ . Und da  $I_{\mu_\nu} \models \nu \in \text{Card}$  ist, ist  $I_{\bar{\mu}} \models \nu \in \text{Card}$ . D.h.  $\bar{\beta} = \beta(\bar{\nu}) + \omega$ . Also ist  $\pi = h^*$ . Sei  $\pi(\bar{p}) = p_\tau$  für  $\nu \sqsubseteq \tau \sqsubseteq \mu_\nu$ . Dann ist  $p_{\bar{\tau}} \leq \bar{p}$ . Denn da  $\tau \subseteq h_{\beta(\nu)+\omega, \emptyset}[\omega \times (\alpha_\tau \times \{p_\tau\})^{<\omega}]$  und  $\alpha_{\bar{\tau}} = \pi^{-1}[\alpha_\tau \cap \text{rng}(\pi)]$  ist, ist auch  $\bar{\tau} \subseteq h_{\beta(\bar{\nu})+\omega, \emptyset}[\omega \times (\alpha_{\bar{\tau}} \times \{\bar{p}\})^{<\omega}]$ . Angenommen  $p_{\bar{\tau}} < \bar{p}$ . Dann ist  $\bar{p} = h_{\beta(\bar{\nu})+\omega, \emptyset}(i, \langle x, p_{\bar{\tau}} \rangle)$  für ein  $x \in \alpha_{\bar{\tau}}^{<\omega}$  und ein  $i \in \omega$ . Also ist  $p_\tau = h_{\beta(\nu)+\omega, \emptyset}(i, \langle \pi(x), \pi(p_{\bar{\tau}}) \rangle)$ ,  $\pi(x) \in \alpha_\tau^{<\omega}$  und  $\pi(p_{\bar{\tau}}) < p_\tau$ . D.h.  $\tau \subseteq h_{\beta(\nu)+\omega, \emptyset}[\omega \times (\alpha_\tau \times \{\pi(p_{\bar{\tau}})\})^{<\omega}]$ . Das widerspricht aber der Minimalität von  $p_\tau$ . Insgesamt ist  $P_{\bar{\nu}} \subseteq \text{rng}(\pi^{-1} \circ f_i^*)$  für alle  $i$ . D.h.  $g_i^* = \pi^{-1} \circ f_i^*$ . Fertig!

(6)  $f_{(\beta, 0, \nu)}^*$  ist die Umkehrung der Transitivierung von  $h_{\beta(\nu)+\omega}[\omega \times (\beta \times P_\nu \times \{\nu, \mu_\nu\})^{<\omega}]$ . Sei  $\pi := f_{(\beta, 0, \nu)}^* : I_{\bar{\beta}}^0 \rightarrow I_{\beta(\nu)+\omega}^0$ . Dann ist  $h_{\bar{\beta}}[\omega \times (\beta \times \bar{P} \times \{\bar{\nu}, \bar{\mu}\})^{<\omega}] = J_{\bar{\beta}}^X$  mit  $\pi(\bar{P}) = P_\nu$ ,  $\pi(\bar{\nu}) = \nu$  und  $\pi(\bar{\mu}) = \mu_\nu$ . Angenommen  $\alpha_\nu \leq \bar{\beta}$ . Dann gäbe es also über  $I_{\bar{\beta}}^0$  eine Surjektion von einem  $\beta < \alpha_\nu$  auf  $\alpha_\nu$ . Aber wegen  $\mu'_\nu < \mu'_{\alpha_\nu}$  ist  $\mu_\nu + \omega < \mu_{\alpha_\nu}$ , und in  $I_{\mu_{\alpha_\nu}}$  ist  $\alpha_\nu$  eine Kardinalzahl. Widerspruch!

(7) Da  $\nu \sqsubset \tau \sqsubseteq \mu_\nu$  ist, ist  $\mu_\tau = \mu_\nu$  und  $P_\tau \subseteq P_\nu$ . Nach (1) ist also  $h_{\beta(\tau)+\omega}[\omega \times (\alpha_\nu \times P_\nu \times \{\nu, \tau, \mu_\tau\})^{<\omega}] = J_{\beta(\tau)+\omega}^X$ . Sei  $\{\xi_i \mid i \in n\} = P_\nu - P_\tau$  und  $\xi = \langle \xi_0, \dots, \xi_{n-1}, \nu \rangle$ . Dann ist  $\tau$   $\xi$ -abhängig von  $\nu$ . Angenommen  $\tau$  wäre unabhängig. Da  $J_{\mu_\tau}^D = \bigcup \{\text{rng}(f_{(\beta, 0, \tau)}) \mid \beta < \alpha_\tau\}$  ist, wäre dann für ein hinreichend großes  $\beta < \alpha_\tau$   $\xi \in \text{rng}(f_{(\beta, 0, \tau)})$ . Das würde aber  $f_{(\beta, 0, \tau)} = id_\tau$  bedeuten. Widerspruch! Somit ist  $\tau$  nicht unabhängig. Sei  $\beta < \alpha_\tau$ , so daß  $h_{\beta(\tau)+\omega}[\omega \times (\beta \times P_\tau \times \{\tau, \mu_\tau\})^{<\omega}] = J_{\beta(\tau)+\omega}^X$ . Dann ist  $\bar{\beta} := f^{-1}[\beta] < \alpha_{\bar{\tau}}$  und  $h_{\beta(\bar{\tau})+\omega}[\omega \times (\bar{\beta} \times P_{\bar{\tau}} \times \{\bar{\tau}, \mu_{\bar{\tau}}\})^{<\omega}] = J_{\beta(\bar{\tau})+\omega}^X$ . D.h.  $\bar{\tau}$  ist nicht unabhängig.

(8) Sei  $\tau \sqsubseteq \gamma \sqsubseteq \nu$ ,  $f(\bar{\xi}) = \xi$ ,  $\bar{\gamma} = f^{-1}[\gamma \cap \text{rng}(\pi)]$ ,  $\alpha = f(\alpha_{\bar{\gamma}})$ . Dann gilt  $p := f(p_{\bar{\gamma}}) = p_\gamma$ . Denn nach Definition von  $p_{\bar{\gamma}}$  ist  $\bar{\xi}, \bar{\nu}, \mu_{\bar{\nu}}, P_{\bar{\nu}} \in h_{\beta(\bar{\gamma})+\omega}[\omega \times$

$(J_{\alpha_{\bar{\gamma}}}^X \times \{p_{\bar{\gamma}}\})$ . Daher sind  $\xi, \nu, \mu_\nu, P_\nu \in h_{\beta(\gamma)+\omega}[\omega \times (J_{\alpha_\gamma}^X \times \{p\})]$ . Da  $\nu$   $\xi$ -abhängig von  $\tau$  ist, ist also  $h_{\beta(\gamma)+\omega}[\omega \times (J_{\alpha_\gamma}^X \times \{p\})] = J_{\beta(\gamma)+\omega}^X$ . D.h.  $p_\gamma \leq p$ . Angenommen  $p_\gamma < p$ . Dann gilt  $I_{\beta(\gamma)+\omega}^0 \models (\exists r < p)(\exists i \in \omega)(\exists x \in J_\alpha^X)(p = h_{\beta(\gamma)+\omega}(i, \langle x, r \rangle))$ . Also gilt auch  $I_{\beta(\bar{\gamma})+\omega}^0 \models (\exists r < p_{\bar{\gamma}})(\exists i \in \omega)(\exists x \in J_{\alpha_{\bar{\gamma}}}^X)(p_{\bar{\gamma}} = h_{\beta(\bar{\gamma})+\omega}(i, \langle x, r \rangle))$ . Das widerspricht aber der Definition von  $p_{\bar{\gamma}}$ . Wegen  $f(p_{\bar{\gamma}}) = p_\gamma$  für alle  $\tau \sqsubseteq \gamma \sqsubseteq \nu$  ist also  $P_\tau \subseteq \text{rng}(f)$  und somit  $f(\bar{\tau}) : \bar{\tau} \Rightarrow \tau$ .

(9) Definiere  $y = f_{(0, \xi, \tau)}(x)$  mit  $\xi \in J_{\mu_\tau}^D$ ,  $\mu_\tau < \mu_\nu$  durch: Es gibt ein  $\bar{\tau} \leq \tau$  und ein  $\bar{\xi} \leq \xi$ , so daß für alle  $i \in \omega$

$$(\exists z \in J_{\beta(\bar{\tau})+\omega}^X)(z = h_{\beta(\bar{\tau})+\omega}(i, \bar{\xi})) \Leftrightarrow (\exists z \in J_{\beta(\tau)+\omega}^X)(z = h_{\beta(\tau)+\omega}(i, \xi))$$

gilt und für alle  $z \in J_{\beta(\bar{\tau})+\omega}^X$  ein  $i \in \omega$  mit

$$z = h_{\beta(\bar{\tau})+\omega}(i, \bar{\xi})$$

existiert und es ein  $i \in \omega$  mit

$$h_{\beta(\bar{\tau})+\omega}(i, \bar{\xi}) = x \Leftrightarrow h_{\beta(\tau)+\omega}(i, \xi) = y$$

gibt.  $\square$

Für  $\nu \in S^+ - \text{Card}$  sei  $p_\nu$  das kleinste  $\xi \in J_{\mu_\nu}^D$ , so daß  $\mu_\nu$  von  $\nu$   $\xi$ -abhängig ist. Sei  $P_\nu := \{p_\tau \mid \nu \sqsubseteq \tau \sqsubseteq \mu_\nu\}$ .

Dann hat der eben konstruierte Morast außerdem folgende Eigenschaft:

(10) **Standard eigenschaft** (SP)

Für alle  $\nu \in (S^+ \cup S^1) - \text{Card}$  und  $\xi \in J_{\mu_\nu}^D$  gilt

$$f_{(0, \xi, \nu)} = f_{(0, \langle \xi, \nu, P_\nu \rangle, \mu_\nu)}.$$

Das ist eine Art Umkehrung von (DP3). Die hier definierten  $p_\tau$  sind übrigens nicht die aus Satz 2.9. Denn diese sind nicht notwendig in  $J_{\mu_\tau}^D$ . Das spielt aber keine Rolle. Da es über  $\langle J_\mu^X, X \upharpoonright \mu \rangle$  eine  $\Sigma_1$ -Funktion  $f$  mit  $f[\mu^{<\omega}] = J_\mu^X$  gibt, kann man sogar o.E.  $p_\tau \subseteq \mu$  annehmen.

### Satz 2.10

Sei  $\mathfrak{M} = \langle S, \triangleleft, \mathfrak{F}, D \rangle$  ein grober  $(\omega_1, \infty)$ -Morast, der (SP) erfüllt. Dann gibt es eine Folge  $X = \langle X_\nu \mid \nu \in S^* \rangle$ , so daß  $L[X]$  Kondensation hat und  $\text{Card} = \text{Card}^{L[X]}$  ist.

**Beweis:**

Definiere zuerst rekursiv einen groben Morast  $\langle S, \triangleleft, \mathfrak{F}^*, D^* \rangle$  durch

$$f^* = \langle \bar{\nu}, f \upharpoonright J_{\bar{\nu}}^{*D}, \nu \rangle \text{ für } f = \langle \bar{\nu}, | f |, \nu \rangle$$

$$\mathfrak{F}^* = \{f^* \mid f \in \mathfrak{F}\}$$

$${}^*D^\nu =$$

$$\begin{aligned} & \{\langle \xi, \tau, x, f_{(0,\xi,\tau)}^*(x) \rangle \mid \tau < \nu, \mu_\tau = \nu, \xi \in J_{\mu_\tau}^{*D}, x \in \text{dom}(f_{(0,\xi,\tau)}^*)\} \\ & \cup \{\langle \xi, x, f_{(0,\xi,\nu)}^*(x) \rangle \mid \mu_\nu = \nu, \xi \in J_{\mu_\nu}^{*D}, x \in \text{dom}(f_{(0,\xi,\nu)}^*)\} \\ & \cup (\sqsubset \cap \nu^2). \end{aligned}$$

Dieser erfüllt ebenfalls (SP).

Für  $\nu \in S^1$  mit  $f_{(0,\xi,\nu)}^* = id_\nu$  für ein  $\xi \in J_\nu^{*D}$  sei  $\sigma_\nu$  beliebig mit  $\sigma_\nu[J_\omega] = J_\nu^{*D}$

Für  $\nu \in S^1$  und  $f_{(0,\xi,\nu)}^* : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$  sei  $\sigma_{(\xi,\nu)} = f_{(0,\xi,\nu)}^* \circ \sigma_{\bar{\nu}}$ .

Definiere für  $\nu \in S^1$

$$X_\nu = \{\langle \xi, x, \sigma_{(\xi,\nu)}(x) \rangle \mid x \in J_\omega, \xi \in J_\nu^{*D}\} \cup (\sqsubset \cap \nu^2).$$

Setze  $S^* = S^1$  und  $X = \langle X_\nu \mid \nu \in S^* \rangle$ .

Mit Hilfe von (SP) sieht man durch Induktion:

(i)  ${}^*D^\nu$  ist über  $\langle J_\nu^X, X \upharpoonright \nu, X_\nu \rangle$  uniform definierbar.

(ii)  $J_\nu^{*D} \subseteq J_\nu^X$ .

Die Transitivierung berechnet man dabei wie im Beweis von Satz 2.9. D.h. definiere  $y = f_{(0,\xi,\tau)}^*(x)$  für  $\nu \in S^1$  durch: Es gibt ein  $\bar{\nu} \leq \nu$  und ein  $\bar{\xi} \leq \xi$ , so daß für alle  $r, s \in \omega$

$$\sigma_{(\bar{\xi},\bar{\nu})}(r) \leq \sigma_{(\bar{\xi},\bar{\nu})}(s) \Leftrightarrow \sigma_{(\xi,\nu)}(r) \leq \sigma_{(\xi,\nu)}(s)$$

gilt *und* für alle  $z \in J_{\bar{\nu}}^{*D}$  ein  $s \in \omega$  mit

$$z = \sigma_{(\bar{\xi},\bar{\nu})}(s)$$

existiert *und* es ein  $s \in \omega$  mit

$$\sigma_{(\bar{\xi},\bar{\nu})}(s) = x \Leftrightarrow \sigma_{(\xi,\nu)}(s) = y$$

gibt.

Sei  $\nu \in S^*$  und  $H \prec_1 I_\nu$ . Sei  $\pi : \langle J_{\bar{\nu}}^{\bar{X}}, \bar{Y}, \bar{X} \rangle \rightarrow \langle J_\nu^X, X \upharpoonright \nu, X_\nu \rangle$  die Umkehrung der Transitivierung von  $H$ . Dann ist nach Definition von  $X_\nu$  für alle  $\xi \in H$  auch  $\text{rng}(f_{(0,\xi,\nu)}^*) \subseteq H$ . Also ist  $H \cap J_\nu^{*D} = \bigcup \{\text{rng}(f_{(0,\xi,\nu)}^*) \mid \xi \in J_\nu^{*D}\}$ . Sei  $f : J_{\bar{\nu}}^{\bar{D}} \rightarrow J_\nu^{*D}$  die Umkehrung der Transitivierung von  $H \cap J_\nu^{*D}$ . Aufgrund von (CP1) ist  $\langle \bar{\nu}, f, \nu \rangle \in \mathfrak{F}^*$ . Da  $J_\nu^{*D}$  transitiv ist, ist aber  $\pi \upharpoonright J_{\bar{\nu}}^{*D} = f \upharpoonright J_{\bar{\nu}}^{*D}$ .

D.h. mit  $\bar{D} \upharpoonright \bar{\nu} = {}^*D_{\bar{\nu}}$  ist auch  $\bar{Y} = X \upharpoonright \bar{\nu}$ . Außerdem ist nach Lemma 2.7 (b)  $\bar{X} = X_{\bar{\nu}}$ . Damit ist die Kondensation gezeigt.

Sei  $\omega < \kappa$  eine Kardinalzahl. Dann sind nach (DP1) alle  $\nu \in S_\kappa$  unabhängig. Also gilt für alle  $f_{(\beta,0,\nu)}^* : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$  mit  $\beta < \alpha_\nu = \kappa$ , daß  $\bar{\nu} < \alpha_\nu = \kappa$  ist. Somit gilt für  $F : \{\langle \beta, x \rangle \mid x < d(f_{(\beta,0,\nu)}^*)\} \rightarrow \nu$  mit  $F(\beta, x) = f_{(\beta,0,\nu)}^*(x)$ , daß  $\text{rng}(F) = \bigcup \{\text{rng}(f_{(\beta,0,\nu)}^*) \cap \nu \mid \beta < \alpha_\nu\} = \nu$  ist. Nach (SP) ist  $F \in L[X]$ . Also gibt es in  $L[X]$  eine Surjektion von einer Teilmenge von  $\kappa \times \kappa$  auf  $\nu$ . Aufgrund der Axiome (c) und (e) ist  $S_\kappa$  in  $\kappa^+$  unbeschränkt. Also ist  $(\kappa^+)^{L[X]} = \kappa^+$ . Da  $\omega < \kappa$  beliebig war, gilt somit  $\text{Card}^{L[X]} - \omega_1 = \text{Card} - \omega_1$ . Bleibt  $\omega_1^{L[X]} = \omega_1$  zu zeigen. Sei dazu  $\nu \in S_{\omega_1}$  und  $\eta < \omega_1$  beliebig. Nach Axiom (1) ist dann  $\eta \subseteq \text{rng}(f_{(0,\eta,\nu)}^*)$ . Wegen der Definition von  $X$  gibt es in  $L[X]$  eine Surjektion von  $\omega$  auf  $\eta \subseteq \text{rng}(f_{(0,\eta,\nu)}^*)$ . Da  $\eta < \omega_1$  beliebig war, ist also  $\omega_1^{L[X]} = \omega_1$ .  $\square$

Abgesehen von  $S^* = S_{O_n}^1$  bilden die Sätze 2.9 und 2.10 bereits eine Äquivalenz. Eine echte Äquivalenz erhält man folgendermaßen:

Eine Struktur, die alle Axiome eines groben  $(\omega_1, \infty)$ -Morasts außer (SD) erfüllt, sei ein grober Standardmorast, wenn zusätzlich (SP),  $S = \text{Lim}$  und

$$\nu \triangleleft \tau \Rightarrow \nu \text{ Kardinalzahl in } J_\tau^D$$

gilt, und es Funktionen  $\sigma_{(\xi,\nu)}$  für  $\nu \in S^1$  und  $\xi \in J_\nu^D$  gibt, so daß gilt:

(A)

$$\sigma_{(\xi,\nu)}[\omega] = \text{rng}(f_{(0,\xi,\nu)})$$

(B) vgl. (CP1)

Ist  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$  und  $f(\bar{\xi}) = \xi$ , so ist  $\sigma_{(\xi,\nu)} = f \circ \sigma_{(\bar{\xi},\bar{\nu})}$ .

(C)

$$D^\nu = \{\langle \xi, x, \sigma_{(\xi,\nu)}(x) \rangle \mid x \in J_\omega, \xi \in J_\nu^D\}.$$

D.h. bei einem groben Standardmorast wird (SD) auf eine ganz bestimmte Weise erfüllt.

### Satz 2.11

Ein grober Standardmorast existiert genau dann, wenn es ein  $\langle X_\nu \mid \nu \in S^* \subseteq \text{Lim} \rangle$  gibt, so daß  $S^* = S_{O_n}^1$  ist,  $L[X]$  Kondensation hat und  $\text{Card} = \text{Card}^{L[X]}$  ist.

**Beweis:**

Habe  $L[X]$  Kondensation. Sei  $S^* = S_{O_n}^1$  und  $\text{Card}^{L[X]} = \text{Card}$ . Dann konstruiere einen groben  $(\omega_1, \infty)$ -Morast wie im Beweis von Satz 2.9. Also ist  $\text{rng}(f_{(0,\xi,\nu)}^*) = h_{\beta(\nu)+\omega}[\omega \times (P_\nu \times \{\xi, \nu, \mu_\nu\})^{<\omega}]$ . D.h. ist  $\xi \in J_\nu^D$  minimal

mit  $f_{(0,\xi,\nu)} = id_\nu$ , so definiert  $\sigma_\nu(i) = h_{\beta(\nu)+\omega}(i, \langle \xi, P_\nu, \nu, \mu_\nu \rangle)$  ein geeignetes  $\sigma_\nu$ .

Sei umgekehrt ein Standardmorast gegeben. Konstruiere daraus ein  $L[X]$  wie in Satz 2.10. Da  $J_\nu^D = J_\nu^X$  ist, ist  $\nu$  in  $J_{\mu_\nu}^X$  eine Kardinalzahl. Und über  $I_{\mu_\nu}$  gibt es eine Surjektion von einem  $\nu' < \nu$  auf  $\nu$ . Denn nach (SP) und Definition von  $X$  ist  $rng(f_{(\alpha_\nu,0,\nu)}) \subseteq h_{\mu_\nu, X_{\mu_\nu}}[\omega \times (\alpha_\nu \times \{\nu, P_\nu\})^{<\omega}]$ . Aber  $rng(f_{(\alpha_\nu,0,\nu)}) = J_{\mu_\nu}^D$ . Also ist  $S^* = S_{O_n}^1$ .  $\square$

### Bemerkung

Hat  $L[X]$  Kondensation und ist  $S^* = S_{O_n}^1$ , so gilt  $Cond(I_\nu^0)$  für alle  $\nu \in Lim$ . Denn für alle  $\nu \in Lim - Lim^2$  ist  $\nu \in S_{O_n}^+$  und  $\nu = \mu_\nu \in S^*$ . Im nächsten Abschnitt werde ich die Feinstrukturtheorie für die  $\nu \in S^*$  allerdings allein mit der Fügbarkeit und der Kondensation entwickeln.

# 3

## Feinstrukturtheorie

Habe  $L[X]$  Kondensation, und sei es fügsam.

In diesem Abschnitt werde ich die Feinstrukturtheorie für  $L[X]$  entwickeln.

Bevor ich aber zur Feinstrukturtheorie komme, möchte ich drei allgemeine Lemmata über die  $I_\nu$  nachtragen (vgl. Devlin).

**Lemma 3.1** (Gödelsche Paarfunktion)

Es gibt eine Bijektion  $\Phi : On^2 \rightarrow On$ , so daß für alle  $\alpha, \beta$   $\Phi(\alpha, \beta) \geq \alpha, \beta$  und  $\Phi^{-1} \upharpoonright \alpha$  für alle  $\alpha \in Lim$  über  $I_\alpha^0$  uniform  $\Sigma_1$ -definierbar ist.

**Beweis:** Definiere auf  $On^2$  eine Wohlordnung  $<^*$  durch

$$\langle \alpha, \beta \rangle <^* \langle \gamma, \delta \rangle$$

gdw

$$\begin{aligned} &max(\alpha, \beta) < max(\gamma, \delta) \text{ oder} \\ &max(\alpha, \beta) = max(\gamma, \delta) \text{ und } \alpha < \gamma \text{ oder} \\ &max(\alpha, \beta) = max(\gamma, \delta) \text{ und } \alpha = \gamma \text{ und } \beta < \delta. \end{aligned}$$

Sei  $\Phi : <^* \cong On$ . Dann kann man  $\Phi$  durch die Rekursion

$$\begin{aligned} \Phi(0, \beta) &= sup\{\Phi(\nu, \nu) \mid \nu < \beta\} \\ \Phi(\alpha, \beta) &= \Phi(0, \beta) + \alpha \text{ für } \alpha < \beta \\ \Phi(\alpha, \beta) &= \Phi(0, \alpha) + \alpha + \beta \text{ für } \alpha \geq \beta \end{aligned}$$

definieren. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Also gibt es für alle unter der gödelschen Paarfunktion abgeschlossenen  $\alpha$  eine uniforme Surjektion von  $\alpha$  auf  $\alpha \times \alpha$ . Eine solche gibt es für alle  $\alpha \in Lim$ . Allerdings muß man dann auf die Uniformität verzichten.

**Lemma 3.2**

Für alle  $\alpha \in Lim$  gibt es eine über  $I_\alpha^0$   $\Sigma_1$ -definierbare Surjektion von  $\alpha$  auf  $\alpha \times \alpha$ .

**Beweis** durch Induktion über  $\alpha \in Lim$ . Für die unter der gödelschen Paarfunktion abgeschlossenen  $\alpha$  reicht Lemma 3.1. Ist also  $\alpha = \beta + \omega$  für ein

$\beta \in Lim$ , so kann man  $\beta \neq 0$  voraussetzen. Dann gibt es aber eine über  $I_\alpha^0$   $\Sigma_1$ -definierbare Bijektion  $j : \alpha \rightarrow \beta$ . Außerdem hat man nach Induktionsvoraussetzung eine über  $I_\beta^0$   $\Sigma_1$ -definierbare Surjektion von  $\beta$  auf  $\beta \times \beta$ . D.h. es gibt eine  $\Sigma_1$ -Formel  $\varphi(x, y, p)$  und einen Parameter  $p \in J_\beta^X$ , so daß für alle  $y \in \beta \times \beta$  ein  $x \in \beta$  mit  $\varphi(x, y, p)$  existiert. Die  $\Sigma_1$ -Skolemfunktion liefert also eine über  $I_\beta^0$   $\Sigma_1$ -definierbare Injektion  $g : \beta \times \beta \rightarrow \beta$ . Somit definiert  $f(\langle \nu, \tau \rangle) = g(\langle j(\nu), j(\tau) \rangle)$  eine Injektion  $f : \alpha^2 \rightarrow \beta$ , die über  $I_\alpha^0$   $\Sigma_1$ -definierbar ist. Ein gesuchtes  $h$  erhält man daraus durch

$$\begin{aligned} h(\nu) &= f^{-1}(\nu) \text{ für } \nu \in rng(f) \\ h(\nu) &= \langle 0, 0 \rangle \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Denn  $rng(f) = rng(g) \in J_\alpha^X$ .

Sei nun  $\alpha \in Lim^2$ , aber nicht unter der gödelschen Paarfunktion abgeschlossen. Dann gilt  $\nu, \tau \in \alpha$  für  $\langle \nu, \tau \rangle = \Phi^{-1}(\alpha)$ , und  $c := \{z \mid z <^* \langle \nu, \tau \rangle\}$  liegt in  $J_\alpha^X$ . Also ist  $\Phi^{-1} \upharpoonright c : c \rightarrow \alpha$  eine über  $I_\alpha^0$   $\Sigma_1$ -definierbare Bijektion. Wählt man nun ein  $\gamma \in Lim$  mit  $\nu, \tau < \gamma$ , so ist  $\Phi^{-1} \upharpoonright \alpha : \alpha \rightarrow \gamma^2$  eine über  $I_\alpha^0$   $\Sigma_1$ -definierbare Injektion. Wie in ersten Fall gibt es aufgrund der Induktionsvoraussetzung in  $J_\alpha^X$  eine Injektion  $g : \gamma \times \gamma \rightarrow \gamma$ . Also definiert  $f(\langle \xi, \zeta \rangle) = g(\langle g\Phi^{-1}(\xi), g\Phi^{-1}(\zeta) \rangle)$  eine über  $I_\alpha^0$   $\Sigma_1$ -definierbare Bijektion  $f : \alpha^2 \rightarrow d$  mit  $d := g[g[c] \times g[c]]$ . Ein gesuchtes  $h$  erhält man daraus wieder durch

$$\begin{aligned} h(\xi) &= f^{-1}(\xi) \text{ für } \xi \in d \\ h(\xi) &= \langle 0, 0 \rangle \text{ sonst. } \square \end{aligned}$$

### Lemma 3.3

Sei  $\alpha \in Lim - \omega + 1$ . Dann gibt es eine über  $I_\alpha^0$   $\Sigma_1$ -definierbare Surjektion von  $\alpha$  auf  $J_\alpha^X$ . Diese ist für die unter der gödelschen Paarfunktion abgeschlossenen  $\alpha$  uniform.

**Beweis:** Sei  $f : \alpha \rightarrow \alpha \times \alpha$  eine über  $I_\alpha^0$  im Parameter  $p$   $\Sigma_1$ -definierbare Surjektion. Das  $p$  sei das bezüglich der kanonischen Wohlordnung kleinste, so daß ein solches  $f$  existiert. Definiere  $f^0, f^1$  durch  $f(\nu) = \langle f^0(\nu), f^1(\nu) \rangle$  und durch Induktion  $f_1 = id \upharpoonright \alpha$  und  $f_{n+1}(\nu) = \langle f^0(\nu), f_n \circ f^1(\nu) \rangle$ . Sei  $h := h_\alpha$  die kanonische  $\Sigma_1$ -Skolemfunktion und  $H = h[\omega \times (\alpha \times \{p\})]$ . Dann ist  $H$  unter geordneten Paaren abgeschlossen. Denn hat man  $y_1 = h(j_1, \langle \nu_1, p \rangle)$  und  $y_2 = h(j_2, \langle \nu_2, p \rangle)$ , und ist  $\langle \nu_1, \nu_2 \rangle = f(\tau)$ , so ist  $\langle y_1, y_2 \rangle$  über  $I_\alpha^0$   $\Sigma_1$ -definierbar mit den Parametern  $\tau, p$ . Also ist es aus  $H$ . Da  $H$  unter Paaren abgeschlossen ist, gilt  $H \prec_1 I_\alpha^0$ . Sei  $\sigma : H \rightarrow I_\beta^0$  die Transitivierung von  $H$ . Dann ist  $\alpha = \beta$ , da  $\alpha \subseteq H$  ist, und  $\sigma \upharpoonright \alpha = id \upharpoonright \alpha$ . Somit ist  $\sigma[f] = f$ , und  $\sigma[f]$  ist über  $I_\alpha^0$  im Parameter  $\sigma(p)$   $\Sigma_1$ -definierbar. Da  $\sigma$  eine Transitivierung ist, ist  $\sigma(p) \leq p$ . D.h.  $\sigma(p) = p$  aufgrund der Wahl von  $p$ . Allgemein gilt für  $\Sigma_1$ -elementare  $\pi$   $\pi(h(i, x)) \simeq h(i, \pi(x))$ . In unserem Fall ist also  $\sigma(h(i, \langle \nu, p \rangle)) \simeq h(i, \langle \nu, p \rangle)$  für alle  $i \in \omega$  und  $\nu \in \alpha$ . D.h. aber



$\sigma \upharpoonright H = id \upharpoonright H$  und  $H = J_\alpha^X$ . Somit erhält man eine gesuchte Surjektion durch  $g \circ f_3$  mit

$$\begin{aligned} g(i, \nu, \tau) &= y, \text{ falls } (\exists z \in S_\tau)\varphi(z, y, i, \langle \nu, p \rangle) \\ g(i, \nu, \tau) &= \emptyset \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Dabei sei  $S_\tau$  wie in Satz 1.11 definiert und  $y = h(i, x) \Leftrightarrow (\exists t \in J_\alpha^X)\varphi(t, i, x, y)$ .  
□

Sei  $\langle I_\nu^0, A \rangle := \langle J_\nu^X, X \upharpoonright \nu, A \rangle$ .

Wie in der Einleitung erklärt, ist es die Aufgabe der Feinstrukturtheorie,  $\Sigma_n$ -Prädikate über großen Strukturen in  $\Sigma_1$ -Prädikate über kleineren Strukturen zu übersetzen. Dazu kodiert man im einfachsten Fall die  $\Sigma_1$ -Information der gegebenen Struktur  $I_\beta^0$  in eine rudimentär abgeschlossene Struktur  $\langle I_\rho^0, A \rangle$ . D.h. in etwa soll gelten:

Über  $I_\beta^0$  ex.  $\Sigma_1$ -Funktion  $f$  mit

$$f[J_\rho^X] = J_\beta^X.$$

Für die  $\Sigma_1$ -Formeln  $\varphi_i$  gilt

$$\langle i, x \rangle \in A \Leftrightarrow I_\beta^0 \models \varphi_i(f(x)).$$

Und

$$\langle I_\rho^0, A \rangle \text{ ist rudimentär abgeschlossen.}$$

Habe man nun ein solches  $\langle I_\rho^0, A \rangle$ . Dann ist jedes  $B \subseteq J_\rho^X$ , das über  $I_\beta^0$   $\Sigma_1$ -definierbar ist, von der Form

$$B = \{x \mid A(i, \langle x, p \rangle)\} \text{ für ein } i \in \omega, p \in J_\rho^X.$$

Also ist auch  $\langle I_\rho^0, B \rangle$  für alle  $B \in \Sigma_1(I_\beta^0) \cap \mathfrak{P}(J_\rho^X)$  rudimentär abgeschlossen.

Das  $\rho$  ist eindeutig bestimmt.

### Lemma 3.4

Sei  $\beta > \omega$  und  $\langle I_\beta^0, B \rangle$  rudimentär abgeschlossen. Dann gibt es höchstens ein  $\rho \in Lim$ , so daß

$$\langle I_\rho^0, C \rangle \text{ für alle } C \in \Sigma_1(\langle I_\beta^0, B \rangle) \cap \mathfrak{P}(J_\rho^X) \text{ rudimentär abgeschlossen ist}$$

und

$$\text{eine über } \langle I_\rho^0, B \rangle \text{ } \Sigma_1\text{-definierbare Funktion } f \text{ mit } f[J_\rho^X] = J_\beta^X \text{ existiert.}$$

**Beweis:** Angenommen  $\rho < \bar{\rho}$  hätten beide diese Eigenschaften. Sei  $f$  eine über  $\langle I_\beta^0, B \rangle$   $\Sigma_1$ -definierbare Funktion mit  $f[J_\beta^X] = J_\beta^X$  und  $C = \{x \in J_\rho^X \mid x \notin f(x)\}$ . Dann ist  $C \subseteq J_\rho^X$   $\Sigma_1$ -definierbar über  $\langle I_\beta^0, B \rangle$ . Also ist  $\langle I_\rho^0, C \rangle$

rudimentär abgeschlossen. Aber dann ist  $C = C \cap J_\rho^X \in J_\rho^X$ . Somit gibt es ein  $x \in J_\rho^X$  mit  $C = f(x)$ . Daraus folgt der Widerspruch  $x \in f(x) \Leftrightarrow x \in C \Leftrightarrow x \notin f(x)$ .  $\square$

Das eindeutig bestimmte  $\rho$  aus Lemma 3.4 heie das Projektum von  $\langle I_\beta^0, B \rangle$ .

Hat man eine über  $\langle I_\beta^0, B \rangle$   $\Sigma_1$ -definierbare Funktion  $f$  mit  $f[J_\rho^X] = J_\beta^X$ , so gilt natürlich auch  $h_{\beta,B}[\omega \times (J_\rho^X \times \{p\})] = J_\beta^X$  für ein  $p \in J_\beta^X$ . Da die Funktion  $h_{\beta,B}$  kanonisch ist, kann man damit ein kanonisches  $A$  definieren:

Sei  $p$  das bezüglich der kanonischen Wohlordnung  $<$  kleinste mit obiger Eigenschaft, und sei

$$A = \{\langle i, x \rangle \mid i \in \omega \text{ und } x \in J_\rho^X \text{ und } \langle I_\beta^0, B \rangle \models \varphi_i(x, p)\}.$$

Das  $p$  heie der Standardparameter zu  $\langle I_\beta^0, B \rangle$  und das  $A$  der Standardcode dazu.

Das  $A$  besitzt folgende, wichtige und bereits in der Einleitung erwähnte Eigenschaft:

### Satz 3.5

Sei  $\beta > 0$  und  $\langle I_\beta^0, B \rangle$  rudimentär abgeschlossen. Sei  $\rho$  das Projektum davon, und  $A$  der zugehörige Standardcode. Dann gilt für alle  $m \geq 1$

$$\Sigma_{1+m}(\langle I_\beta^0, B \rangle) \cap \mathfrak{P}(J_\rho^X) = \Sigma_m(\langle I_\rho^0, A \rangle).$$

**Beweis:** Sei zunächst  $R \in \Sigma_{1+m}(\langle I_\beta^0, B \rangle) \cap \mathfrak{P}(J_\rho^X)$  und  $m$  gerade. Sei  $P$  eine über  $\langle I_\beta^0, B \rangle$  mit Parameter  $q_1$   $\Sigma_1$ -definierbare Relation, so daß für  $x \in J_\rho^X$   $R(x)$  genau dann gilt, wenn  $\exists y_0 \forall y_1 \exists y_3 \dots \forall y_{m-1} P(y_i, x)$  gilt. Sei  $f$  eine über  $\langle I_\beta^0, B \rangle$  mit Parameter  $q_2$   $\Sigma_1$ -definierbare Funktion mit  $f[J_\rho^X] = J_\beta^X$ . Definiere  $Q(z_i, x)$  durch  $z_i, x \in J_\rho^X$  und  $(\exists y_i)(y_i = f(z_i) \text{ und } P(y_i, x))$ . Sei  $p$  der Standardparameter zu  $\langle I_\beta^0, B \rangle$ . Dann gibt es nach Definition ein  $u \in J_\rho^X$ , so daß  $\langle q_1, q_2 \rangle$  in  $\langle I_\beta^0, B \rangle$  mit den Parametern  $u, p$   $\Sigma_1$ -definierbar ist. D.h. es gibt ein  $i \in \omega$ , so daß  $Q(z_i, x)$  genau dann gilt, wenn  $z_i, x \in J_\rho^X$  und  $\langle I_\beta^0, B \rangle \models \varphi_i(\langle z_i, x, u \rangle, p)$  ist – also genau dann, wenn  $z_i, x \in J_\rho^X$  und  $A(i, \langle z_i, x, u \rangle)$ . Außerdem gibt es analog ein  $j \in \omega$  und ein  $v \in J_\rho^X$ , so daß  $z \in \text{dom}(f) \cap J_\rho^X$  genau dann gilt, wenn  $z \in J_\rho^X$  und  $A(j, \langle z, v \rangle)$  ist. Sei dies mit  $D(z)$  abgekürzt. Dann hat man aber für  $x \in J_\rho^X$   $R(x)$  genau dann, wenn  $\exists y_0 \forall y_1 \exists y_3 \dots \forall y_{m-1} (D(z_0) \wedge D(z_2) \wedge \dots \wedge D(z_{m-2}) \text{ und } (D(z_1) \wedge D(z_3) \wedge \dots \wedge D(z_{m-1}) \Rightarrow Q(z_i, x)))$  und damit die Behauptung. Ist  $m$  ungerade, so geht man entsprechend vor. Damit hat man  $\Sigma_{1+m}(\langle I_\beta^0, B \rangle) \cap \mathfrak{P}(J_\rho^X) \subseteq \Sigma_m(\langle I_\rho^0, A \rangle)$  bewiesen.

Für das umgekehrte sei zuerst  $\varphi$  eine  $\Sigma_0$ -Formel und  $q \in J_\rho^X$ , so daß für alle  $x \in J_\rho^X$   $R(x)$  genau dann gilt, wenn  $\langle I_\rho^0, A \rangle \models \varphi(x, q)$  ist. Da  $\langle I_\rho^0, A \rangle$

rudimentär abgeschlossen ist, gilt  $R(x)$  genau dann, wenn  $(\exists u \in J_\rho^X)(\exists a \in J_\rho^X)(u \text{ transitiv und } x \in u \text{ und } q \in u \text{ und } a = A \cap u \text{ und } \langle u, a \rangle \models \varphi(x, q))$  gilt. Schreiben wir  $a = A \cap u$  aus:  $(\forall v \in a)(v \in u \text{ und } v \in A)$  und  $(\forall v \in u)(v \in A \Rightarrow v \in a)$ . Im Fall  $m = 1$  ist man fertig, wenn man zeigen kann, daß das  $\Sigma_2$  über  $\langle I_\beta^0, B \rangle$  ist. Ist  $m > 1$ , so folgt die Behauptung auch sofort mittels Induktion. Der zweite Teil ist  $\Pi_1$ . Wir müssen also nur vom ersten Teil zeigen, daß er  $\Sigma_2$  über  $\langle I_\beta^0, B \rangle$  ist. Der Definition von  $A$  entnimmt man, daß  $v \in A$  über  $\langle I_\beta^0, B \rangle$   $\Sigma_1$ -definierbar ist. D.h. es gibt eine  $\Sigma_0$ -Formel  $\psi$  und einen Parameter  $p$  mit  $v \in A \Leftrightarrow \langle I_\beta^0, B \rangle \models (\exists y)\psi(v, y, p)$ . Nun muß man zwei Fälle unterscheiden.

Im ersten Fall gebe es keine über  $\langle I_\beta^0, B \rangle$   $\Sigma_1$ -definierbare Funktion von einem  $\gamma < \rho$  konfinal in  $\beta$ . Dann ist  $(\forall v \in a)(v \in A)$   $\Sigma_2$  über  $\langle I_\beta^0, B \rangle$ , weil eine Art Ersetzungsaxiom gilt, und  $(\forall v \in a)(\exists y)\psi(v, y, p)$  über  $\langle I_\beta^0, B \rangle$  zu  $(\exists z)(\forall v \in a)(\exists y \in z)\psi(v, y, p)$  äquivalent ist. Für  $\rho = \omega$  ist dies klar. Ist  $\rho \neq \omega$ , so ist  $\rho \in \text{Lim}^2$  und man kann ein  $\gamma < \rho$  mit  $a \in J_\gamma^X$  wählen. Sei  $j : \gamma \rightarrow J_\gamma^X$  eine über  $I_\gamma$   $\Sigma_1$ -definierbare Surjektion, und  $g$  eine über  $\langle I_\beta^0, B \rangle$   $\Sigma_1$ -definierbare Funktion, die jedem  $v \in J_\beta^X$  ein  $g(v) \in J_\beta^X$  mit  $\psi(v, g(v), p)$  zuordnet, falls ein solches existiert. Eine solche findet man mit Hilfe der  $\Sigma_1$ -Skolemfunktion. Definiere nun eine Funktion  $f : \gamma \rightarrow \beta$  durch

$$f(\nu) = \text{das kleinste } \tau < \beta \text{ mit } g \circ j(\nu) \in S_\tau, \text{ falls } j(\nu) \in a$$

$$f(\nu) = 0 \text{ sonst.}$$

Da dieses  $f$   $\Sigma_1$  ist, gibt es im gegebenen Fall ein  $\delta < \beta$  mit  $f[\gamma] \subseteq \delta$ . Also hat man als beschränkendes  $z = S_\delta$ , und die Äquivalenz ist klar.

Kommen wir nun zum zweiten Fall. Sei  $\gamma < \rho$  minimal, so daß es eine über  $\langle I_\beta^0, B \rangle$   $\Sigma_1$ -definierbare Abbildung  $g$  von  $\gamma$  konfinal in  $\beta$  gibt. Dann ist  $(\forall v \in a)(\exists y)\psi(v, y, p)$  äquivalent zu  $(\forall v \in a)(\exists \nu \in \gamma)(\exists y \in S_{g(\nu)})\psi(v, y, p)$ . Definiert man nun ein Prädikat  $C \subseteq J_\rho^X$  durch  $\langle v, \nu \rangle \in C \Leftrightarrow y \in S_{g(\nu)}$  und  $\psi(v, y, p)$ , so ist  $\langle I_\beta^0, B \rangle \models (\forall v \in a)(\exists y)\psi(v, y, p)$  äquivalent zu  $\langle I_\beta^0, C \rangle \models (\forall v \in a)(\exists \nu \in \gamma)(\exists y)(\langle v, \nu \rangle \in C)$ . Das gilt aber genau dann, wenn  $\langle I_\beta^0, C \rangle \models (\exists w)(w \text{ transitiv und } a, \gamma \in w \text{ und } \langle w, C \cap w \rangle \models (\forall v \in a)(\exists \nu \in \gamma)(\exists y)(\langle v, \nu \rangle \in C \cap w))$ . Da  $C$   $\Sigma_1$  über  $\langle I_\beta^0, B \rangle$  ist, ist  $\langle I_\beta^0, C \rangle$  nach Definition des Projektums rudimentär abgeschlossen. D.h. unsere Aussage ist äquivalent zu  $\langle I_\beta^0, C \rangle \models (\exists w)(\exists c)(w \text{ transitiv und } a, \gamma \in w \text{ und } c = C \cap w \text{ und } \langle w, c \rangle \models (\forall v \in a)(\exists \nu \in \gamma)(\exists y)(\langle v, \nu \rangle \in c))$ . Um zu zeigen, daß das  $\Sigma_2$  ist, reicht es also zu beweisen, daß  $c = C \cap w$   $\Sigma_2$  ist. Ausgeschrieben ist das  $(\forall z)(z \in a \Leftrightarrow z \in w \text{ und } z \in C)$ . Nun ist aber  $z \in C$  aufgrund der Definition sogar  $\Delta_1$  über  $\langle I_\beta^0, B \rangle$  und damit ist man fertig.  $\square$

**Lemma 3.6**

(a) Sei  $\pi : \langle J_{\bar{\beta}}^X, X \upharpoonright \bar{\beta}, \bar{B} \rangle \rightarrow \langle J_{\beta}^X, X \upharpoonright \beta, B \rangle$   $\Sigma_0$ -elementar, und  $\pi[\bar{\beta}]$  konfinal in  $\beta$ . Dann ist  $\pi$  sogar  $\Sigma_1$ -elementar.

(b) Sei  $\langle J_{\bar{\nu}}^X, X \upharpoonright \bar{\nu}, \bar{A} \rangle$  rudimentär abgeschlossen und  $\pi : \langle J_{\bar{\nu}}^X, X \upharpoonright \bar{\nu} \rangle \rightarrow \langle J_{\nu}^Y, Y \upharpoonright \nu \rangle$   $\Sigma_0$ -elementar und konfinal. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes  $A \subseteq J_{\nu}^Y$ , so daß  $\pi : \langle J_{\bar{\nu}}^X, X \upharpoonright \bar{\nu}, \bar{A} \rangle \rightarrow \langle J_{\nu}^Y, X \upharpoonright \nu, A \rangle$   $\Sigma_0$ -elementar und  $\langle J_{\nu}^Y, X \upharpoonright \nu, A \rangle$  rudimentär abgeschlossen ist.

**Beweis:** (a) Sei  $\varphi$  eine  $\Sigma_0$ -Formel mit  $\langle J_{\beta}^X, X \upharpoonright \beta, B \rangle \models (\exists z)\varphi(z, \pi(x_i))$ . Da  $\pi[\bar{\beta}]$  konfinal in  $\beta$  ist, gibt es ein  $\nu \in \bar{\beta}$  mit  $\langle J_{\beta}^X, X \upharpoonright \beta, B \rangle \models (\exists z \in S_{\pi(\nu)})\varphi(z, \pi(x_i))$ . Das  $S_{\nu}$  sei dabei wieder wie in Satz 1.11 definiert. Ist dann  $\pi(S_{\nu}) = S_{\pi(\nu)}$ , so ist  $\langle J_{\beta}^X, X \upharpoonright \beta, B \rangle \models (\exists z \in \pi(S_{\nu}))\varphi(z, \pi(x_i))$ . Aufgrund der  $\Sigma_0$ -Elementarität von  $\pi$  ist also  $\langle J_{\beta}^X, X \upharpoonright \bar{\beta}, \bar{B} \rangle \models (\exists z \in S_{\nu})\varphi(z, x_i)$ . D.h.  $\langle J_{\beta}^X, X \upharpoonright \bar{\beta}, \bar{B} \rangle \models (\exists z)\varphi(z, x_i)$ . Die umgekehrte Richtung ist trivial.

Bleibt also  $\pi(S_{\nu}) = S_{\pi(\nu)}$  zu zeigen. Das beweist man durch Induktion über  $\nu$ . Ist  $\nu = 0$  oder  $\nu \notin \text{Lim}$ , so folgt die Behauptung offensichtlich aufgrund der Definition von  $S_{\nu}$  aus der Induktionsbehauptung. Sei also  $\lambda \in \text{Lim}$  und  $M := \pi(S_{\lambda})$ . Dann ist  $M$  wegen der  $\Sigma_0$ -Elementarität von  $\pi$  transitiv. Und da  $\lambda \in \text{Lim}$  ist (d.h.  $S_{\lambda} = J_{\lambda}^X$ ), ist die Folge  $\langle S_{\nu} \mid \nu < \lambda \rangle$  aufgrund (des Beweises) von Satz 1.11 über  $\langle J_{\lambda}^X, X \upharpoonright \lambda \rangle$  definierbar. Sei  $\varphi$  die Formel  $(\forall x)(\exists \nu)(x \in S_{\nu})$ . Weil  $\pi$   $\Sigma_0$ -elementar ist, ist  $\pi \upharpoonright S_{\lambda} : \langle J_{\lambda}^X, X \upharpoonright \lambda \rangle \rightarrow \langle M, (X \upharpoonright \lambda) \cap M \rangle$  elementar. Also ist mit  $\langle J_{\lambda}^X, X \upharpoonright \lambda \rangle \models \varphi$  auch  $\langle M, (X \upharpoonright \lambda) \cap M \rangle \models \varphi$ . Da  $M$  transitiv ist, bedeutet das aber  $M = S_{\tau}$  für ein  $\tau \in \text{Lim}$ . Und mit  $\pi(\lambda) = \pi(S_{\lambda} \cap \text{On}) = S_{\tau} \cap \text{On} = \tau$  folgt daraus  $\pi(S_{\lambda}) = S_{\pi(\lambda)}$ .

(b) Da  $\langle J_{\bar{\nu}}^X, X \upharpoonright \bar{\nu}, \bar{A} \rangle$  rudimentär abgeschlossen ist, ist für alle  $\mu < \bar{\nu}$   $\bar{A} \cap S_{\mu} \in J_{\bar{\nu}}^X$ . Sei  $S_{\mu}$  wieder wie in Satz 1.11 definiert. Wie im Beweis von (a) ist  $\pi(S_{\mu}) = S_{\pi(\mu)}$ . Also muß  $\pi(\bar{A} \cap S_{\mu}) = A \cap S_{\pi(\mu)}$  sein, damit  $\pi : \langle J_{\bar{\nu}}^X, X \upharpoonright \bar{\nu}, \bar{A} \rangle \rightarrow \langle J_{\nu}^Y, X \upharpoonright \nu, A \rangle$   $\Sigma_0$ -elementar wird. Da  $\pi$  konfinal ist, muß daher  $A = \bigcup \{ \pi(\bar{A} \cap S_{\mu}) \mid \mu < \bar{\nu} \}$  gelten. Dann ist  $\langle J_{\nu}^Y, X \upharpoonright \nu, A \rangle$  aber rudimentär abgeschlossen. Zu  $x \in J_{\nu}^Y$  kann man nämlich ein  $\mu < \bar{\nu}$  wählen mit  $x \in S_{\pi(\mu)}$ . Und  $x \cap A = x \cap (A \cap S_{\pi(\mu)}) = x \cap \pi(\bar{A} \cap S_{\mu}) \in J_{\bar{\nu}}^X$ . Sei jetzt  $\langle J_{\bar{\nu}}^X, X \upharpoonright \bar{\nu}, \bar{A} \rangle \models \varphi(x_i)$  mit einer  $\Sigma_0$ -Formel  $\varphi$  und  $u \in J_{\bar{\nu}}^X$  transitiv mit  $x_i \in u$ . Dann gilt  $\langle u, X \upharpoonright \bar{\nu} \cap u, \bar{A} \cap u \rangle \models \varphi(x_i)$ . Da  $\pi : \langle J_{\bar{\nu}}^X, X \upharpoonright \bar{\nu} \rangle \rightarrow \langle J_{\nu}^Y, Y \upharpoonright \nu \rangle$   $\Sigma_0$ -elementar ist, gilt also  $\langle \pi(u), Y \upharpoonright \nu \cap \pi(u), A \cap \pi(u) \rangle \models \varphi(\pi(x_i))$ . Weil  $\pi(u)$  transitiv ist, erhalten wir  $\langle J_{\nu}^Y, X \upharpoonright \nu, A \rangle \models \varphi(\pi(x_i))$ . Diese Argumentation funktioniert auch in der umgekehrten Richtung.  $\square$

Schreibe  $\text{Cond}_B(I_{\beta}^0)$ , falls für alle  $H \prec_1 \langle I_{\beta}^0, B \rangle$  ein  $\bar{\beta}$  und ein  $\bar{B}$  mit  $H \cong \langle I_{\bar{\beta}}^0, \bar{B} \rangle$  existieren.

Es gilt folgendes Kondensationslemma:

**Satz 3.7** (Fortsetzungssatz)

Sei  $\beta > \omega$ ,  $m \geq 0$  und  $\langle I_\beta^0, B \rangle$  eine rudimentär abgeschlossene Struktur. Gelte  $\text{Cond}_B(I_\beta^0)$ . Sei  $\rho$  das Projektum von  $\langle I_\beta^0, B \rangle$ ,  $A$  der Standardcode und  $p$  der Standardparameter zu  $\langle I_\beta^0, B \rangle$ . Dann gilt  $\text{Cond}_A(I_\rho^0)$ , und ist  $\langle I_\rho^0, \bar{A} \rangle$  rudimentär abgeschlossen und  $\pi : \langle I_\rho^0, \bar{A} \rangle \rightarrow \langle I_\rho^0, A \rangle$   $\Sigma_m$ -elementar, so gibt es eine eindeutig bestimmte  $\Sigma_{m+1}$ -elementare Fortsetzung  $\tilde{\pi} : \langle I_\beta^0, \bar{B} \rangle \rightarrow \langle I_\beta^0, B \rangle$  von  $\pi$ . Dabei ist  $\bar{\rho}$  das Projektum von  $\langle I_\beta^0, \bar{B} \rangle$ ,  $\bar{A}$  der Standardcode und  $\tilde{\pi}^{-1}(p)$  der Standardparameter zu  $\langle I_\beta^0, \bar{B} \rangle$ .

**Beweis:** Sei  $H = h_{\beta,B}[\omega \times (\text{rng}(\pi) \times \{p\})] \prec_1 \langle I_\beta^0, B \rangle$  und  $\tilde{\pi} : \langle I_\beta^0, \bar{B} \rangle \rightarrow \langle I_\beta^0, B \rangle$  die Umkehrung der Transitivierung von  $H$ .

(1)  $\tilde{\pi}$  ist eine Fortsetzung von  $\pi$

Sei  $\tilde{\rho} = \text{sup}(\pi[\bar{\rho}])$  und  $\tilde{A} = A \cap J_{\tilde{\rho}}^X$ . Dann ist  $\pi : \langle J_{\tilde{\rho}}^X, X \upharpoonright \tilde{\rho}, \bar{A} \rangle \rightarrow \langle J_{\tilde{\rho}}^X, X \upharpoonright \tilde{\rho}, \tilde{A} \rangle$   $\Sigma_0$ -elementar, nach Lemma 2.6 also  $\Sigma_1$ -elementar. Es gilt  $\text{rng}(\pi) = H \cap J_{\tilde{\rho}}^X$ . Offensichtlich ist  $\text{rng}(\pi) \subseteq H \cap J_{\tilde{\rho}}^X$ . Sei also  $y \in H \cap J_{\tilde{\rho}}^X$ . Dann gibt es ein  $i \in \omega$  und ein  $x \in \text{rng}(\pi)$ , so daß  $y$  das eindeutig bestimmte  $y \in J_\beta^X$  ist mit  $\langle I_\beta^0, B \rangle \models \varphi_i(\langle y, x \rangle, p)$ . Also ist nach Definition von  $A$   $y$  das eindeutig bestimmte  $y \in J_\beta^X$  mit  $\tilde{A}(i, \langle y, x \rangle)$ . Aber  $x \in \text{rng}(\pi)$  und  $\pi : \langle J_{\tilde{\rho}}^X, X \upharpoonright \tilde{\rho}, \bar{A} \rangle \rightarrow \langle J_{\tilde{\rho}}^X, X \upharpoonright \tilde{\rho}, \tilde{A} \rangle$  ist  $\Sigma_1$ -elementar. Somit ist auch  $y \in \text{rng}(\pi)$ . Damit haben wir gezeigt, daß  $H$  eine  $\in$ -Enderweiterung von  $\text{rng}(\pi)$  ist. Da  $\pi$  die Transitivierung von  $\text{rng}(\pi)$  und  $\tilde{\pi}$  die von  $H$  ist, gilt dann  $\pi \subseteq \tilde{\pi}$ .

(2)  $\tilde{\pi} : \langle I_\beta^0, \bar{B} \rangle \rightarrow \langle I_\beta^0, B \rangle$  ist  $\Sigma_{m+1}$ -elementar

Zu zeigen ist  $H \prec_{m+1} \langle I_\beta^0, B \rangle$ . Ist  $m = 0$ , so ist das klar. Sei also  $m > 0$  und  $y$  in  $\langle I_\beta^0, B \rangle$   $\Sigma_{m+1}$ -definierbar mit Parametern aus  $\text{rng}(\pi) \cup \{p\}$ . Dann müssen wir  $y \in H$  zeigen. Sei dazu  $\varphi$  eine  $\Sigma_{m+1}$ -Formel und  $x_i \in \text{rng}(\pi)$ , so daß  $y$  durch  $\langle I_\beta^0, B \rangle \models \varphi(y, x_i, p)$  eindeutig bestimmt ist. Sei  $\tilde{h}(\langle i, x \rangle) \simeq h(i, \langle x, p \rangle)$ . Dann ist nach Definition von  $p$   $\tilde{h}[J_\rho^X] = J_\beta^X$ . Es gibt also ein  $z \in J_\rho^X$  mit  $y = \tilde{h}(z)$ . Ist ein solches  $z \in J_\rho^X \cap H$ , so ist auch  $y \in H$ , da  $z, p \in H \prec_1 \langle I_\beta^0, B \rangle$  ist. Sei  $D = \text{dom}(\tilde{h}) \cap J_\rho^X$ . Dann reicht es also zu zeigen, daß

$$(\star) \quad (\exists z_0 \in D)(\forall z_1 \in D) \dots \langle I_\beta^0, B \rangle \models \psi(\tilde{h}(z_i), \tilde{h}(z), x_i, p)$$

für ein  $z \in H \cap J_\rho^X$  gilt. Dabei sei  $\psi$  für gerades  $m$  eine  $\Sigma_1$ -Formel bzw. eine  $\Pi_1$ -Formel für ungerades  $m$  mit  $\varphi(y, x_i, p) \Leftrightarrow \langle I_\beta^0, B \rangle \models (\exists z_0)(\forall z_1) \dots \psi(z_i, y, x_i, p)$ . Sei  $m$  zunächst gerade. Weil  $A$  der Standardcode ist, gibt es dann ein  $i_0 \in \omega$ , so daß für alle  $z \in J_\rho^X$   $z \in D \Leftrightarrow A(i_0, x)$  gilt – außerdem ein  $j_0 \in \omega$ , so daß für alle  $z_i, z \in D$   $\langle I_\beta^0, B \rangle \models \psi(\tilde{h}(z_i), \tilde{h}(z), x_i, p)$  genau dann gilt, wenn  $A(j_0, \langle z_i, z, x_i \rangle)$  ist. Also ist  $(\star)$  für  $z \in J_\rho^X$  äquivalent zu einer offensichtlichen  $\Sigma_m$ -Formel. Ist  $m$  ungerade, so schreibe in  $(\star)$   $\dots \neg \langle I_\beta^0, B \rangle \models \neg \psi(\dots)$ .

Dann ist  $\neg\psi \Sigma_1$  und man kann wie zuvor vorgehen. Schließlich ist  $\pi : \langle I_{\bar{\rho}}^0, \bar{A} \rangle \rightarrow \langle I_{\rho}^0, A \rangle$  nach Voraussetzung  $\Sigma_m$ -elementar und nach (1)  $\pi \subseteq \tilde{\pi}$  – d.h.  $H \cap J_{\rho}^X \prec_m \langle I_{\rho}^0, A \rangle$ . Da es ein  $z \in J_{\rho}^X$  gibt, das  $(\star)$  erfüllt, und  $x_i, p \in H \cap J_{\rho}^X$  sind, gibt es auch ein solches  $z \in H \cap J_{\rho}^X$ .

Sei  $H \prec_1 \langle I_{\rho}^0, A \rangle$ . Sei  $\pi$  die Umkehrung der Transitivierung von  $H$ . Dann hat  $\pi$  eine  $\Sigma_1$ -elementare Fortsetzung  $\tilde{\pi} : \langle I_{\bar{\rho}}^0, \bar{B} \rangle \rightarrow \langle I_{\beta}^0, B \rangle$ . Also ist  $H \cong \langle I_{\bar{\rho}}^0, \bar{A} \rangle$  für ein  $\bar{\rho}$  und  $\bar{A}$ . D.h.  $\text{Cond}_A(I_{\rho}^0)$ .

(3)  $\bar{A} = \{\langle i, x \rangle \mid i \in \omega \text{ und } x \in J_{\bar{\rho}}^X \text{ und } \langle I_{\bar{\rho}}^0, \bar{B} \rangle \models \varphi_i(x, \tilde{\pi}^{-1}(p))\}$

Da  $\pi : \langle I_{\bar{\rho}}^0, \bar{A} \rangle \rightarrow \langle I_{\rho}^0, A \rangle$   $\Sigma_0$ -elementar ist, gilt für  $x \in J_{\bar{\rho}}^X$   $\bar{A}(i, x) \Leftrightarrow A(i, \pi(x))$ . Weil  $A$  der Standardcode zu  $\langle I_{\beta}^0, B \rangle$  ist, gilt  $A(i, \pi(x)) \Leftrightarrow \langle I_{\beta}^0, B \rangle \models \varphi_i(\pi(x), p)$ . Schließlich gilt  $\langle I_{\beta}^0, B \rangle \models \varphi_i(\pi(x), p) \Leftrightarrow \langle I_{\bar{\rho}}^0, \bar{B} \rangle \models \varphi_i(x, \tilde{\pi}^{-1}(p))$ , weil  $\tilde{\pi} : \langle I_{\bar{\rho}}^0, \bar{B} \rangle \rightarrow \langle I_{\beta}^0, B \rangle$   $\Sigma_1$ -elementar ist.

(4)  $\bar{\rho}$  ist das Projektum von  $\langle I_{\bar{\rho}}^0, \bar{B} \rangle$

Nach Definition von  $H$  ist  $J_{\bar{\rho}}^X = h_{\bar{\rho}, \bar{B}}[\omega \times (J_{\bar{\rho}}^X \times \{\tilde{\pi}^{-1}(p)\})]$ . Also ist  $f(\langle i, x \rangle) \simeq h_{\bar{\rho}, \bar{B}}(i, \langle x, \tilde{\pi}^{-1}(p) \rangle)$  eine über  $\langle I_{\bar{\rho}}^0, \bar{B} \rangle$   $\Sigma_1$ -definierbare Funktion mit  $f[J_{\bar{\rho}}^X] = J_{\bar{\rho}}^X$ . Bleibt zu zeigen, daß  $\langle I_{\bar{\rho}}^0, C \rangle$  für alle  $C \in \Sigma_1(\langle I_{\bar{\rho}}^0, \bar{B} \rangle) \cap \mathfrak{P}(J_{\bar{\rho}}^X)$  rudimentär abgeschlossen ist. Nach Definition von  $H$  gibt es ein  $i \in \omega$  und ein  $y \in J_{\bar{\rho}}^X$ , so daß  $x \in C \Leftrightarrow \langle I_{\bar{\rho}}^0, \bar{B} \rangle \models \varphi_i(\langle x, y \rangle, \tilde{\pi}^{-1}(p))$  ist für alle  $x \in J_{\bar{\rho}}^X$ . Also ist wegen (3)  $x \in C \Leftrightarrow \bar{A}(i, \langle x, y \rangle)$ . Für  $u \in J_{\bar{\rho}}^X$  sei  $v = \{i, \langle x, y \rangle \mid x \in u\}$ . Dann ist  $v \in J_{\bar{\rho}}^X$  und auch  $\bar{A} \cap v \in J_{\bar{\rho}}^X$ , weil  $\langle I_{\bar{\rho}}^0, \bar{A} \rangle$  nach Voraussetzung rudimentär abgeschlossen ist. Aber  $x \in C \cap u$  gilt genau dann, wenn  $\langle i, \langle x, y \rangle \rangle \in \bar{A} \cap v$  ist. Da  $J_{\bar{\rho}}^X$  rudimentär abgeschlossen ist, ist somit  $C \cap u \in J_{\bar{\rho}}^X$ .

(5)  $\tilde{\pi}^{-1}(p)$  ist der Standardparameter zu  $\langle I_{\bar{\rho}}^0, \bar{B} \rangle$

Nach Definition von  $H$  ist  $J_{\bar{\rho}}^X = h_{\bar{\rho}, \bar{B}}[\omega \times (J_{\bar{\rho}}^X \times \{\tilde{\pi}^{-1}(p)\})]$  und nach (4) ist  $\bar{\rho}$  das Projektum von  $\langle I_{\bar{\rho}}^0, \bar{B} \rangle$ . Wir brauchen also nur noch zu zeigen, daß  $\tilde{\pi}^{-1}(p)$  das kleinste mit dieser Eigenschaft ist. Angenommen auch  $\bar{p}' < \tilde{\pi}^{-1}(p)$  hätte diese Eigenschaft. Dann gäbe es ein  $i \in \omega$  und ein  $x \in J_{\bar{\rho}}^X$  mit  $\tilde{\pi}^{-1}(p) = h_{\bar{\rho}, \bar{B}}(i, \langle x, \bar{p}' \rangle)$ . Da  $\tilde{\pi} : \langle I_{\bar{\rho}}^0, \bar{B} \rangle \rightarrow \langle I_{\beta}^0, B \rangle$   $\Sigma_1$ -elementar ist, wäre also  $p = h_{\beta, B}(i, \langle x, \bar{p}' \rangle)$  für  $\bar{p}' = \pi(\bar{p}') < p$ . Und damit wäre auch  $h_{\beta, B}[\omega \times (J_{\rho}^X \times \{\bar{p}'\})] = J_{\beta}^X$ . Das widerspricht aber der Definition von  $p$ .

(6) Eindeutigkeit

Angenommen  $\langle I_{\bar{\beta}_0}^0, \bar{B}_0 \rangle$  und  $\langle I_{\bar{\beta}_1}^0, \bar{B}_1 \rangle$  haben beide  $\bar{\rho}$  als Projektum und  $\bar{A}$  als Standardcode. Sei  $\bar{p}_i$  der Standardparameter zu  $\langle I_{\bar{\beta}_i}^0, \bar{B}_i \rangle$ . Dann gilt für alle  $j \in \omega$  und  $x \in J_{\bar{\rho}}^X$   $\langle I_{\bar{\beta}_0}^0, \bar{B}_0 \rangle \models \varphi_j(x, \bar{p}_0)$  genau dann, wenn  $\bar{A}(j, x)$ , bzw. wenn  $\langle I_{\bar{\beta}_1}^0, \bar{B}_1 \rangle \models \varphi_j(x, \bar{p}_1)$  gilt. Also definiert  $\sigma(h_{\bar{\beta}_0, \bar{B}_0}(j, \langle x, \bar{p}_0 \rangle)) \simeq h_{\bar{\beta}_1, \bar{B}_1}(j, \langle x, \bar{p}_1 \rangle)$  einen Isomorphismus  $\sigma : \langle I_{\bar{\beta}_0}^0, \bar{B}_0 \rangle \cong \langle I_{\bar{\beta}_1}^0, \bar{B}_1 \rangle$ , da für beide  $i$   $h_{\bar{\beta}_i, \bar{B}_i}[\omega \times (J_{\bar{\rho}}^X \times \{\bar{p}_i\})] = J_{\bar{\beta}_i}^X$  gilt. Weil aber beide Strukturen transitiv

sind, muß  $\sigma$  die Identität sein. Seien schließlich  $\tilde{\pi}_0 : \langle I_{\bar{\beta}}^0, \bar{B} \rangle \rightarrow \langle I_{\beta}^0, B \rangle$  und  $\tilde{\pi}_1 : \langle I_{\bar{\beta}}^0, \bar{B} \rangle \rightarrow \langle I_{\beta}^0, B \rangle$   $\Sigma_1$ -elementare Fortsetzungen von  $\pi$ . Sei  $\bar{p}$  der Standardparameter zu  $\langle I_{\bar{\beta}}^0, \bar{B} \rangle$ . Dann gibt es für jedes  $y \in J_{\bar{\beta}}^X$  ein  $x \in J_{\bar{\rho}}^X$  und ein  $j \in \omega$  mit  $y = h_{\bar{\beta}, \bar{B}}(j, \langle x, \bar{p} \rangle)$  – und es gilt  $\tilde{\pi}_0(y) = h_{\beta, B}(j, \pi(x), \pi(p)) = \tilde{\pi}_1(y)$ . Also ist  $\tilde{\pi}_0 = \tilde{\pi}_1$ .  $\square$

Um die  $\Sigma_n$ -Information von  $I_{\beta}$  mit  $\beta \in S^*$  entsprechend in einer Struktur  $\langle I_{\rho}^0, A \rangle$  zu kodieren, iteriert man diesen Prozeß.

Für  $n \geq 0$ ,  $\beta \in S^*$  sei

$$\begin{aligned} \rho^0 &= \beta, p^0 = \emptyset, A^0 = X_{\beta} \\ \rho^{n+1} &= \text{das Projektum von } \langle I_{\rho^n}^0, A^n \rangle \\ p^{n+1} &= \text{der Standardparameter zu } \langle I_{\rho^n}^0, A^n \rangle \\ A^{n+1} &= \text{der Standardcode zu } \langle I_{\rho^n}^0, A^n \rangle. \end{aligned}$$

Es heie

$$\begin{aligned} \rho^n &\text{ das } n\text{-te Projektum von } \beta, \\ p^n &\text{ der } n\text{-te (Standard-)Parameter zu } \beta, \\ A^n &\text{ der } n\text{-te (Standard-)Code zu } \beta. \end{aligned}$$

Aufgrund von Satz 3.5 ist  $A^n \subseteq J_{\rho^n}^X$  über  $I_{\beta}$   $\Sigma_n$ -definierbar, und es gilt für alle  $m \geq 1$

$$\Sigma_{n+m}(I_{\beta}) \cap \mathfrak{P}(J_{\rho^n}^X) = \Sigma_m(\langle I_{\rho^n}^0, A^n \rangle).$$

Aus Satz 3.7 erhält man durch Induktion folgenden Fortsetzungssatz:

Für  $\beta > \omega$ ,  $n \geq 1$ ,  $m \geq 0$  sei  $\rho^n$  das  $n$ -te Projektum und  $A^n$  der  $n$ -Code von  $\beta$ . Sei  $\langle I_{\bar{\rho}}^0, \bar{A} \rangle$  eine rudimentär abgeschlossene Struktur und  $\pi : \langle I_{\bar{\rho}}^0, \bar{A} \rangle \rightarrow \langle I_{\rho^n}^0, A^n \rangle$   $\Sigma_m$ -elementar. Dann gilt:

(1) Es gibt ein eindeutig bestimmtes  $\bar{\beta} \geq \bar{\rho}$ , so daß  $\bar{\rho}$  das  $n$ -te Projektum und  $\bar{A}$  der  $n$ -te Code von  $\bar{\beta}$  ist.

Für  $k \leq n$  sei

$$\begin{aligned} \rho^k &\text{ das } k\text{-te Projektum von } \beta, \\ p^k &\text{ der } k\text{-te Parameter zu } \beta, \\ A^k &\text{ der } k\text{-te Code zu } \beta \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \bar{\rho}^k &\text{ das } k\text{-te Projektum von } \bar{\beta}, \\ \bar{p}^k &\text{ der } k\text{-te Parameter zu } \bar{\beta}, \\ \bar{A}^k &\text{ der } k\text{-te Code zu } \bar{\beta}. \end{aligned}$$

(2) Es gibt eine eindeutig bestimmte Fortsetzung  $\tilde{\pi}$  von  $\pi$ , so daß für alle  $0 \leq k \leq n$

$$\tilde{\pi} \upharpoonright J_{\bar{\rho}^k}^X : \langle I_{\bar{\rho}^k}^0, \bar{A}^k \rangle \rightarrow \langle I_{\rho^k}^0, A^k \rangle \Sigma_{m+n-k}\text{-elementar}$$

und  $\tilde{\pi}(\bar{p}^k) = p^k$  ist.

Insgesamt hat man also eine sehr mächtige Kodierungsmethode, falls die Projekta existieren. Das zeigt aber der nächste Satz.

**Satz 3.8**

Sei  $\omega < \beta \in S^*$ . Dann existieren alle Projekta von  $\beta$ .

**Beweis** durch Induktion über  $n$ . Daß  $\rho^0$  existiert ist klar. Gebe es also die ersten Projekta  $\rho^0, \dots, \rho^{n-1}, \rho := \rho^n$ , die Parameter  $p^0, \dots, p^n$  und die Codes  $A^0, \dots, A^{n-1}, A := A^n$  von  $\beta$ . Sei  $\gamma \in \text{Lim}$  minimal, so daß es eine über  $\langle I_\rho^0, A \rangle$   $\Sigma_1$ -definierbare Funktion  $f$  mit  $f[J_\gamma^X] = J_\rho^X$  gibt. Sei  $C \in \Sigma_1(\langle I_\rho^0, A \rangle) \cap \mathfrak{P}(J_\gamma^X)$ . Zu zeigen ist also, daß  $\langle I_\gamma^0, C \rangle$  rudimentär abgeschlossen ist. Falls  $\gamma = \omega$  ist, ist  $J_\gamma^X = H_\omega$ , und das ist offensichtlich. Ist  $\gamma > \omega$ , so gilt  $\gamma \in \text{Lim}^2$  aufgrund der Definition von  $\gamma$ . Dann reicht es für die  $\delta \in \text{Lim} \cap \gamma$   $C \cap J_\delta^X \in J_\gamma^X$  zu zeigen. Sei  $B := C \cap J_\delta^X$  über  $\langle I_\rho^0, A \rangle$  mit dem Parameter  $q$  definierbar. Da offensichtlich  $\gamma \leq \rho$  ist, ist  $C \cap J_\delta^X$  aufgrund von Satz 3.5 über  $I_\beta$  mit den Parametern  $p_1, \dots, p^n, q$   $\Sigma_n$ -definierbar. Sei also  $\varphi$  eine  $\Sigma_n$ -Formel mit  $x \in C \Leftrightarrow I_\beta \models \varphi(x, p^1, \dots, p^n, q)$ . Sei

$$\begin{aligned} H_{n+1} &:= h_{\rho^n, A^n}[\omega \times (J_\delta^X \times \{q\})] \\ H_n &:= h_{\rho^{n-1}, A^{n-1}}[\omega \times (H_n \times \{p^n\})] \\ H_{n-1} &:= h_{\rho^{n-2}, A^{n-2}}[\omega \times (H_{n-1} \times \{p^{n-1}\})] \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Da  $L[X]$  die Kondensationseigenschaft hat, gibt es dann ein  $I_\mu$  mit  $H_1 \cong I_\mu$ . Sei  $\pi$  die Umkehrung der Transitivierung von  $H_1$ . Dann ist  $\pi$  die in Beweis von Satz 3.7 definierte Fortsetzung der Transitivierung von  $H_{n+1}$  und damit  $\Sigma_{n+1}$ -elementar. Da  $B \subseteq J_\delta^X$  und  $\pi \upharpoonright J_\delta^X = id \upharpoonright J_\delta^X$  ist, gilt  $x \in B \Leftrightarrow I_\mu \models \varphi(x, \pi^{-1}(p^1), \dots, \pi^{-1}(p^n), \pi^{-1}(q))$ . D.h.  $B$  ist in Wahrheit schon über  $I_\mu$   $\Sigma_n$ -definierbar. Wegen Satz 1.9 gilt also  $B \in J_{\mu+1}^X$ . Damit ist man aber bereits fertig. Denn es ist  $\mu < \rho$ . Sei nämlich

$$\begin{aligned} h_{n+1}(\langle i, x \rangle) &= h_{\rho^n, A^n}(i, \langle x, p \rangle) \\ h_n(\langle i, x \rangle) &= h_{\rho^{n-1}, A^{n-1}}(i, \langle x, p^n \rangle) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Dann ist die Funktion  $h = h_1 \circ \dots \circ h_{n+1}$  über  $I_\beta$   $\Sigma_{n+1}$ -definierbar. Also ist die Funktion  $\bar{h} = \pi[h \cap (H_1 \times H_1)]$  über  $I_\mu$   $\Sigma_{n+1}$ -definierbar mit  $\bar{h}[J_\delta^X] = J_\mu^X$ . D.h. wieder nach Satz 3.5 und 3.7, daß  $\bar{h} \cap (J_\rho^X)^2$   $\Sigma_1$ -definierbar über  $\langle I_\rho^0, A \rangle$  ist. Und nach Definition von  $\gamma$  gibt es eine über  $\langle I_\rho^0, A \rangle$   $\Sigma_1$ -definierbare Funktion  $f$  mit  $f[J_\gamma^X] = J_\rho^X$ . Wäre also  $\mu \geq \rho$ , so wäre  $f \circ \bar{h}$  eine über  $\langle I_\rho^0, A \rangle$   $\Sigma_1$ -definierbare Funktion mit  $(f \circ \bar{h})[J_\delta^X] = J_\rho^X$  – im Widerspruch zur Minimalität von  $\gamma$ .  $\square$

Für spätere Anwendungen sei die im Beweis von Satz 3.8 auftretende Funktion mit einer eigenen Bezeichnung versehen.



Sei  $\omega < \nu \in S^*$ ,  $\rho^n$  das  $n$ -te Projektum von  $\nu$ ,  $p^n$  der  $n$ -te Parameter und  $A^n$  der  $n$ -te Code dazu. Sei

$$\begin{aligned} h_{n+1}(i, x) &= h_{\rho^n, A^n}(i, x) \\ h_n(\langle i, x \rangle) &= h_{\rho^{n-1}, A^{n-1}}(i, \langle x, p^n \rangle) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Dann definiere

$$h_\nu^{n+1} = h_1 \circ \dots \circ h_{n+1}.$$

Es gilt:

- (1)  $h_\nu^n$  ist über  $I_\nu$   $\Sigma_n$ -definierbar
- (2)  $h_\nu^n[\omega \times Q] \prec_n I_\nu$ , falls  $Q \subseteq J_{\rho^{n-1}}^X$  unter geordneten Paaren abgeschlossen ist.

Im Beweis von Satz 3.8 steckt eine alternative Charakterisierung der Projekta.

### Lemma 3.9

Sei  $\omega < \beta \in S^*$  und  $n \geq 1$ . Dann ist

- (1) die kleinste Ordinalzahl  $\gamma \in Lim$ , so daß es eine über  $I_\beta$   $\Sigma_n$ -definierbare Funktion  $f$  mit  $f[J_\gamma^X] = J_\beta^X$  gibt,
  - (2) die größte Ordinalzahl  $\gamma \in Lim$ , so daß  $\langle I_\gamma^0, C \rangle$  für alle  $C \in \Sigma_n(I_\beta) \cap \mathfrak{P}(J_\gamma^X)$  rudimentär abgeschlossen ist,
  - (3) die kleinste Ordinalzahl  $\gamma \in Lim$ , so daß  $\mathfrak{P}(\gamma) \cap \Sigma_n(I_\beta) \not\subseteq J_\beta^X$  ist,
- das  $n$ -te Projektum von  $\beta$ .

### Beweis:

(1) Nach Definition des  $n$ -ten Projektums, gibt es ein über  $\langle I_{\rho^{n-1}}^0, A^{n-1} \rangle \Sigma_1$ -definierbares  $f^n$  mit  $f^n[J_{\rho^n}^X] = J_{\rho^{n-1}}^X$ , ein über  $\langle I_{\rho^{n-2}}^0, A^{n-2} \rangle \Sigma_1$ -definierbares  $f^{n-1}$  mit  $f^{n-1}[J_{\rho^{n-1}}^X] = J_{\rho^{n-2}}^X$ , etc. Nach Satz 3.5 ist dann für  $1 \leq k \leq n$   $f^k$   $\Sigma_k$ -definierbar über  $I_\beta$ . Also ist  $f = f^1 \circ f^2 \circ \dots \circ f^n$   $\Sigma_n$ -definierbar über  $I_\beta$  mit  $f[J_{\rho^n}^X] = J_\beta^X$ .

Andererseits ist das Projektum  $\bar{\rho}$  einer rudimentär abgeschlossenen Struktur  $\langle I_\beta^0, B \rangle$  das kleinste  $\bar{\rho}$ , so daß es eine über  $\langle I_\beta^0, B \rangle \Sigma_1$ -definierbare Funktion  $f$  mit  $f[J_{\bar{\rho}}^X] = J_\beta^X$  gibt. Denn angenommen, es gäbe ein  $\rho < \bar{\rho}$ , so daß ein solches  $f$  mit  $f[J_\rho^X] = J_\beta^X$  existiert, so führt der Beweis von Lemma 3.4 zu einem Widerspruch. Gäbe es also ein  $\gamma < \rho^n$ , so daß eine über  $I_\beta$   $\Sigma_n$ -definierbare Funktion  $f$  mit  $f[J_\gamma^X] = J_\beta^X$  existiert, so wäre nach Satz 3.5  $g := f \cap (J_{\rho^{n-1}}^X)^2$  eine über  $\langle I_{\rho^{n-1}}^0, A^{n-1} \rangle \Sigma_1$ -definierbare Funktion mit  $g[J_\gamma^X] = J_{\rho^{n-1}}^X$ . Was eben nicht sein kann.

(2) Nach Definition des  $n$ -ten Projektums ist  $\langle I_{\rho^n}^0, C \rangle$  für alle  $C \in \Sigma_1(\langle I_{\rho^{n-1}}^0, A^{n-1} \rangle) \cap \mathfrak{P}(J_{\rho^n}^X)$  rudimentär abgeschlossen. Aber nach Satz 3.5

ist  $\Sigma_1(\langle I_{\rho^{n-1}}^0, A^{n-1} \rangle) = \Sigma_n(I_\beta) \cap \mathfrak{P}(J_{\rho^{n-1}}^X)$ . Da  $\rho^n \leq \rho^{n-1}$  ist, ist deshalb  $\langle I_{\rho^n}^0, C \rangle$  für alle  $C \in \Sigma_n(I_\beta) \cap \mathfrak{P}(J_{\rho^n}^X)$  rudimentär abgeschlossen.

Angenommen  $\gamma$  wäre eine größere Ordinalzahl  $\in Lim$  mit dieser Eigenschaft. Sei  $f$  nach (1) eine über  $I_\beta$   $\Sigma_n$ -definierbare Funktion mit  $f[J_{\rho^n}^X] = J_\beta^X$ . Setze  $C = \{u \in J_{\rho^n}^X \mid u \notin f(u)\}$ . Dann ist  $C$  über  $I_\beta$   $\Sigma_n$ -definierbar und  $C \subseteq J_{\rho^n}^X$ . D.h.  $\langle J_\gamma^X, C \rangle$  wäre rudimentär abgeschlossen. Und somit  $C = C \cap J_{\rho^n}^X \in J_\gamma^X \subseteq J_\beta^X$ , und  $C = f(u)$  für ein  $u \in J_{\rho^n}^X$ . Daraus folgt aber der Widerspruch  $u \in f(u) \Leftrightarrow u \in C \Leftrightarrow u \notin f(u)$ .

(3) Sei  $\rho := \rho^n$  und  $f$  nach (1) eine über  $I_\beta$   $\Sigma_n$ -definierbare Funktion mit  $f[J_\rho^X] = J_\beta^X$ . Sei  $j$  eine über  $I_\rho^0$   $\Sigma_1$ -definierbare Surjektion von  $\rho$  auf  $J_\rho^X$ . Sei  $C$  die über  $I_\beta$   $\Sigma_n$ -definierbare Teilmenge  $C = \{\nu \in \rho \mid \nu \notin f \circ j(\nu)\}$  von  $\rho$ . Wäre  $C \in J_\beta^X$ , so gäbe es ein  $\nu \in \rho$  mit  $C = f \circ j(\nu)$ , und wir hätten den Widerspruch  $\nu \in C \Leftrightarrow \nu \notin f \circ j(\nu) \Leftrightarrow \nu \notin C$ . Also ist  $\mathfrak{P}(\rho) \cap \Sigma_n(I_\beta) \not\subseteq J_\beta^X$ . Aber ist  $\gamma \in Lim \cap \rho$  und  $D \in \mathfrak{P}(\gamma) \cap \Sigma_n(I_\beta)$ , dann ist  $D = D \cap J_\gamma^X \in J_\rho^X \subseteq J_\beta^X$ . Also ist  $\mathfrak{P}(\gamma) \cap \Sigma_n(I_\beta) \subseteq J_\beta^X$ .  $\square$

# 4

## □-Prinzipien

Habe  $L[X]$  Kondensation und Kohärenz. Sei  $L[X]$  fügsam und  $S_{On}^1 \subseteq S^*$ . Sei  $Card^{L[X]} = Card$ .

In diesem Abschnitt werde ich die kombinatorischen Prinzipien  $\square_\kappa$  für alle unendlichen Kardinalzahlen  $\kappa$  beweisen. Bei  $\square_\kappa$  handelt es sich um die folgende Behauptung:

Es gibt eine Folge  $\langle C_\nu \mid \kappa < \nu < \kappa^+, \nu \in Lim \rangle$  mit

$C_\nu$  ist abgeschlossen und unbeschränkt in  $\nu$

$otp(C_\nu) \leq \kappa$

$\mu \in Lim(C_\nu) \Rightarrow C_\mu = C_\nu \cap \mu$  (Kohärenz)

Den Beweis von  $\square_\kappa$  für den Fall  $V = L$  habe ich bereits in der Einleitung skizziert.

Die letzte Eigenschaft heißt Kohärenz und beruht darauf, daß für  $\mu \in Lim(C_\nu)$  das  $C_\mu$  über  $L_\mu$  dieselbe Definition hat wie  $C_\nu$  über  $L_\nu$  (siehe Seite 6). Versucht man nun den Beweis von  $\square_\kappa$  für ein inneres Modell  $L[X]$  mit Kondensationseigenschaft durchzuführen, so stößt man auf folgendes Problem: Ist  $\mu < \nu$ , so ist  $I_\mu = \langle J_\mu^X, X \upharpoonright \mu, X_\mu \rangle$  im allgemeinen keine  $\Sigma_0$ -elementare Substruktur von  $I_\nu = \langle J_\nu^X, X \upharpoonright \nu, X_\nu \rangle$ . Zwar ist  $\langle J_\mu^X, X \upharpoonright \mu \rangle \prec_0 \langle J_\nu^X, X \upharpoonright \nu \rangle$ , aber nicht notwendig  $I_\mu \prec_0 I_\nu$ . Das gilt genau dann, wenn  $X_\mu = X_\nu \cap J_\mu^X$  ist. Bilden wir in  $I_\nu$  die  $\Sigma_1$ -Skolemhülle, bzw. betrachten wir die eingeschränkte, kanonische  $\Sigma_1$ -Skolemfunktion  $h_{\nu, X_\nu} \upharpoonright (\omega \times (J_\gamma^X \times \{p\}))$  für ein  $\gamma < \nu$  und ein  $p \in J_\nu^X$ . Setze  $\mu = sup(h_{\nu, X_\nu}[\omega \times (J_\gamma^X \times \{p\})])$ . Dann gilt also im allgemeinen nicht  $h_{\mu, X_\mu} \upharpoonright (\omega \times (J_\gamma^X \times \{p\})) = h_{\nu, X_\nu} \upharpoonright (\omega \times (J_\gamma^X \times \{p\}))$ . Das war aber ein entscheidender Punkt in der Beweisidee von  $\square_\kappa$ . Die Kondensationseigenschaft wird somit wohl nicht zum Beweis von  $\square_\kappa$  ausreichen. Ich definiere deshalb eine weitere Eigenschaft:

**(Kohärenz)** Sei  $\nu \in S^*$ ,  $H \prec_1 I_\nu$  und  $\lambda = sup(H \cap On)$ . Dann ist  $\lambda \in S^*$

und  $X_\lambda = X_\nu \cap J_\lambda^X$ .

Nun kann man wie in der Einleitung vorgehen. Sei

$$S = \{\nu \in \text{Lim} - \text{Card} \mid \nu < \kappa^+ \text{ und}$$

$$I_\nu \models \text{ ex. größte überabz. Kardinalzahl } \}.$$

Für  $\nu \in S$  sei

$\beta(\nu)$  = das kleinste  $\beta$ , so daß es ein konfinales  $f : a \rightarrow \nu \in \text{Def}(I_\beta)$   
mit  $a \subseteq \nu' < \nu$  gibt

$n(\nu)$  = das kleinste  $n \geq 1$ , so daß ein solches  $f$   $\Sigma_n$ -definierbar ist

$\rho(\nu)$  = das  $(n(\nu) - 1)$ -te Projektum von  $\beta(\nu)$

$A_\nu$  = der  $(n(\nu) - 1)$ -te Code zu  $\beta(\nu)$

$\alpha_\nu$  = die größte Kardinalzahl in  $I_\nu$ .

Da  $S_{On}^1 \subseteq S^*$  ist, ist für  $\nu \in S$   $\beta(\nu) \in S^*$ .

Und das  $n(\nu)$ -te Projektum  $\gamma$  von  $\beta(\nu)$  ist höchstens  $\alpha_\nu$ . Denn da  $\alpha_\nu$  die größte Kardinalzahl in  $I_\nu$  ist, gibt es nach Definition von  $\beta(\nu)$  und  $n(\nu)$  eine über  $I_{\beta(\nu)}$   $\Sigma_{n(\nu)}$ -definierbare Funktion  $f$ , so daß  $f[\alpha_\nu]$  in  $\nu$  konfinal ist. Da aber  $\nu$  in  $\beta(\nu)$  regulär ist, kann  $f$  nicht in  $J_{\beta(\nu)}^X$  liegen. Also ist  $\mathfrak{P}(\nu \times \nu) \cap \Sigma_{n(\nu)}(I_{\beta(\nu)}) \not\subseteq J_{\beta(\nu)}^X$ . Wegen Lemma 3.3 ist auch  $\mathfrak{P}(\nu) \cap \Sigma_{n(\nu)}(I_{\beta(\nu)}) \not\subseteq J_{\beta(\nu)}^X$ . Mit Lemma 3.9 (3) erhält man  $\gamma \leq \nu$ . D.h. es gibt eine über  $I_{\beta(\nu)}$   $\Sigma_{n(\nu)}$ -definierbare Funktion  $g$  mit  $g[\nu] = J_{\beta(\nu)}^X$ . Andererseits gibt es, weil  $\alpha_\nu$  die größte Kardinalzahl in  $I_\nu$  ist, zu jedem  $\tau < \nu$  in  $J_\tau^X$  eine Surjektion von  $\alpha_\nu$  auf  $\tau$ . Sei  $f_\tau$  die  $<_\nu$ -kleinste solche. Definiere  $j_1(\sigma, \tau) = f_{f(\tau)}(\sigma)$  für  $\sigma, \tau < \nu$ . Dann ist  $j_1$   $\Sigma_{n(\nu)}$ -definierbar über  $I_{\beta(\nu)}$  und  $j_1[\alpha_\nu \times \alpha_\nu] = \nu$ . Mit Lemma 3.3 erhält man daraus eine über  $I_{\beta(\nu)}$   $\Sigma_{n(\nu)}$ -definierbare Surjektion  $j_2$  von einer Teilmenge von  $\alpha_\nu$  auf  $\nu$ . Also ist  $g \circ j_2$  eine über  $I_{\beta(\nu)}$   $\Sigma_{n(\nu)}$ -definierbare Abbildung mit  $g \circ j_2[\alpha_\nu] = J_{\beta(\nu)}^X$ . Fertig!

Und es gilt  $\alpha_\nu < \nu \leq \rho(\nu)$ . Denn nach Definition von  $\rho(\nu)$  gibt es im Fall  $n(\nu) > 1$  eine über  $I_{\beta(\nu)}$   $\Sigma_{n(\nu)-1}$ -definierbare Abbildung  $f$  mit  $f[\rho(\nu)] = \beta(\nu)$ . Aber  $\nu$  ist  $\Sigma_{n(\nu)-1}$ -regulär über  $I_{\beta(\nu)}$ . Also ist  $\nu \leq \rho(\nu)$ . Ist aber  $n(\nu) = 1$ , so ist  $\rho(\nu) = \beta(\nu) \geq \nu$ .

Aufgrund der ersten Ungleichung gibt es ein  $q$ , so daß jedes  $x \in J_{\rho(\nu)}^X$  in  $\langle I_{\rho(\nu)}^0, A_\nu \rangle$  mit Parametern aus  $\alpha_\nu \cup \{q\}$   $\Sigma_1$ -definierbar ist. Sei  $q_\nu$  das  $<_{\rho(\nu)}$ -kleinste solche. Definiere

$$p_\nu = \langle q_\nu, \alpha_\nu, \nu \rangle, \text{ falls } \nu < \rho(\nu),$$

$$p_\nu = \langle q_\nu, \alpha_\nu \rangle \text{ sonst.}$$

Für  $\tau \in On$  sei  $S_\tau$  wie in Satz 1.11 definiert. Für  $\tau \in On$ ,  $E_i \subseteq S_\tau$  und eine  $\Sigma_0$ -Formel  $\varphi$  sei

$h_{\tau, E_i}^\varphi(x_1, \dots, x_m)$  das bezüglich der kanonischen Wohlordnung kleinste  $x_0 \in S_\tau$  mit  $\langle S_\tau, E_i \rangle \models \varphi(x_i)$ , falls ein solches existiert,

und

$h_{\tau, E_i}^\varphi(x_1, \dots, x_m) = \emptyset$ , falls nicht.

Für  $\tau \in On$  mit  $p_\nu \in S_\tau$  sei  $H_\tau^\nu$  der Abschluß von  $S_{\alpha_\nu} \cup \{p_\nu\}$  unter allen  $h_{\tau, X \cap S_\tau, A_\nu \cap S_\tau}^\varphi$ . Dann sind aufgrund der Definition der  $h_{\tau, X \cap S_\tau, A_\nu \cap S_\tau}^\varphi$  die  $H_\tau^\nu \prec_1 \langle S_\tau, X \cap S_\tau, A_\nu \cap S_\tau, \{p_\nu\} \rangle$ . Sei  $M_\tau^\nu$  die Transitivierung von  $H_\tau^\nu$ . Definiere

$B_\nu = \{M_\tau^\nu \mid \tau \in \rho(\nu) \text{ und } p_\nu \in S_\tau\}$ , falls  $\nu < \rho(\nu)$ ,

$B_\nu = \{0\} \times A_\nu \cup \{1, p_\nu\}$  sonst.

#### Lemma 4.1

$B_\nu \subseteq J_\nu^X$  und  $\langle I_\nu^0, B_\nu \rangle$  ist rudimentär abgeschlossen.

**Beweis:** Ist  $\nu = \rho(\nu)$ , so ist beides klar. Andernfalls zeige zuerst  $M_\tau^\nu \in J_\nu^X$  für alle  $\tau \in \rho(\nu)$  mit  $p_\nu \in S_\tau$ . Sei  $\tau$  ein solches und  $\tau' \in \rho(\nu) - Lim$ , so daß  $X \cap S_\tau, A_\nu \cap S_\tau \in S_{\tau'}$  sind (rudimentäre Abgeschlossenheit von  $\langle I_{\rho(\nu)}^0, A_\nu \rangle$ ). Sei  $\eta := \sup(\tau' \cap Lim)$ . Sei  $H$  der Abschluß von  $\alpha_\nu \cup \{p_\nu, X \cap S_\tau, S_\tau, A_\nu \cap S_\tau, \eta\}$  unter allen  $h_{\tau'}^\varphi$ . Sei  $\sigma : H \cong S$  die Transitivierung von  $H$  und  $\sigma(\eta) = \bar{\eta}$ . Ist dann  $\eta \in S^*$ , so ist  $S = S_{\bar{\tau}'}$  für ein  $\bar{\eta}'$  aufgrund der Kondensation von  $L[X]$ . Ist  $\eta \notin S^*$ , so ist  $S = S_{\bar{\tau}'}^{X \upharpoonright \bar{\eta}}$  für ein  $\bar{\tau}'$  aufgrund der Bemerkung am Ende von Abschnitt 2. Dabei sei  $S_{\bar{\tau}'}^{X \upharpoonright \bar{\eta}}$  wie  $S_{\bar{\tau}'}$  nur mit  $X \upharpoonright \bar{\eta}$  an Stelle von  $X$  definiert. In beiden Fällen ist  $S \in J_\nu^X$  und es gibt in  $I_{\bar{\eta}+\omega}$  eine Surjektion von  $\alpha_\nu \cup \{\sigma(p_\nu), \sigma(X \cap S_\tau), \sigma(S_\tau), \sigma(A_\nu \cap S_\tau), \bar{\eta}\}$  auf  $S$ . Wäre also  $\nu \leq \bar{\tau}'$ , so wäre  $\nu$  singulär in  $J_{\rho(\nu)}^X$ . Das widerspricht aber der Definition von  $\beta(\nu)$ . Somit sind  $\sigma(p_\nu), \sigma(X \cap S_\tau), \sigma(S_\tau), \sigma(A_\nu \cap S_\tau) \in J_\nu^X$ . Sei  $\bar{H}_\tau^\nu$  der Abschluß von  $S_{\alpha_\nu} \cup \{\sigma(p_\nu)\}$  unter allen  $h_{\sigma(S_\tau), \sigma(X \cap S_\tau), \sigma(A_\nu \cap S_\tau)}^\varphi$ . Diese seien wie die  $h_{\tau, E_i}^\varphi$  nur mit  $\sigma(S_\tau)$  an Stelle von  $S_\tau$  definiert. Dann ist  $\bar{H}_\tau^\nu \prec_1 \langle \sigma(S_\tau), \sigma(X \cap S_\tau), \sigma(A_\nu \cap S_\tau), \{\sigma(p_\nu)\} \rangle$  und  $M_\tau^\nu$  ist die Transitivierung von  $\bar{H}_\tau^\nu$ . Da  $\nu < \rho(\nu)$  und  $\nu$  eine Kardinalzahl in  $I_{\beta(\nu)}$  ist, ist  $J_\nu^X \models ZF^-$ . Man kann also die Transitivierung innerhalb von  $J_\nu^X$  bilden. D.h.  $M_\tau^\nu \in J_\nu^X$ .

Nun zur rudimentären Abgeschlossenheit. Da die  $\gamma = M \cap On$  mit  $M \in B_\nu$  in  $\nu$  unbeschränkt sind, reicht es zu zeigen, daß die Anfangsstücke der Folge  $\mathfrak{B} = \{\langle \gamma, M \rangle \mid \gamma = M \cap On, M \in B_\nu\}$  Elemente von  $J_\nu^X$  sind. Da die Folge  $\langle H_\tau^\nu \mid \tau < \rho(\nu) \rangle$  bezüglich  $\subseteq$  aufsteigend ist, ist ein solches Anfangsstück von der Form  $\langle M_\tau^\nu \mid \tau < \gamma \rangle$  mit  $\gamma < \rho(\nu)$ , und es gilt  $H_{\delta_\tau}^\nu = H_\tau^\nu$ . Dabei sei für  $\tau < \gamma$   $\delta_\tau$  das kleinste  $\eta \geq \tau$  mit  $\eta \in H_\gamma^\nu \cup \{\gamma\}$ . Da  $\delta_\tau \in H_\gamma^\nu \prec_1 \langle S_\gamma, X \cap S_\gamma, A_\nu \cap S_\gamma, \{p_\nu\} \rangle$  ist, gilt  $(H_{\delta_\tau}^\nu)^{H_\gamma^\nu} = H_\tau^\nu$ . Sei  $\pi : M_\gamma^\nu \rightarrow S_\gamma$  die Umkehrung der Transitivierung von  $H_\gamma^\nu$ . Dann ist aufgrund der  $\Sigma_1$ -Elementarität von  $\pi$   $M_\tau^\nu = M_{\delta_\tau}^\nu$  die Transitivierung von  $(H_{\pi^{-1}(\delta_\tau)})^{M_\gamma^\nu}$ . Also ist  $\langle M_\tau^\nu \mid \tau < \gamma \rangle$  aus  $M_\gamma \in J_\nu^X$  definierbar. Fertig!  $\square$

**Lemma 4.2**

Für  $x \in J_\nu^X$  und  $y_i \in J_{\alpha_\nu}^X$  sind äquivalent:

- (i)  $x$  ist in  $\langle I_{\rho(\nu)}^0, A_\nu \rangle$  mit den Parametern  $y_i, p_\nu$   $\Sigma_1$ -definierbar.
- (ii)  $x$  ist in  $\langle I_\nu^0, B_\nu \rangle$  mit den Parametern  $y_i$   $\Sigma_1$ -definierbar.

**Beweis:** Für  $\nu = \rho(\nu)$  ist das klar. Anderenfalls sei zunächst  $x$  in  $\langle I_{\rho(\nu)}^0, A_\nu \rangle$  durch  $(\exists z)\psi(z, x, \langle y_i, p_\nu \rangle)$  mit einer  $\Sigma_0$ -Formel  $\psi$  eindeutig bestimmt. Das ist äquivalent zu  $(\exists \tau)(\exists z \in S_\tau)\psi(z, x, \langle y_i, p_\nu \rangle)$  und das wiederum zu  $(\exists \tau)H_\tau^\nu \models (\exists z)\psi(z, x, \langle y_i, p_\nu \rangle)$ . Da  $y_i \in J_{\alpha_\nu}^X \subseteq H_\tau^\nu$  gilt, werden die  $y_i$  bei der Transitivierung nicht bewegt. Sei  $p$  das Bild von  $p_\nu$  unter dieser. Dann definiert  $(\exists \tau)M_\tau^\nu \models (\exists z)\psi(z, x, \langle y_i, p \rangle)$  das  $x$ . Also wird es in  $\langle I_\nu^0, B_\nu \rangle$  durch  $(\exists M \in B_\nu)M \models (\exists z)\psi(z, x, \langle y_i, p \rangle)$  definiert.

Sei nun  $x$  in  $\langle I_\nu^0, B_\nu \rangle$  durch  $(\exists z)\psi(z, x, y_i)$  mit einer  $\Sigma_0$ -Formel  $\psi$  definiert. Das ist aber äquivalent zu  $(\exists \gamma)(\exists B)(B \in \mathfrak{B} \text{ und } \langle I_\gamma^0, B \rangle \models \psi(z, x, y_i))$ . Da  $\mathfrak{B}$  und die Modellbeziehung von  $\langle I_\gamma^0, B \rangle$  über  $\langle I_{\rho(\nu)}^0, A_\nu \rangle$   $\Sigma_1$ -definierbar sind, ist damit die Behauptung klar. □

**Satz 4.3**

Sei  $H \prec_1 \langle I_\nu^0, B_\nu \rangle$  für ein  $\nu \in S$  und  $\pi : \langle I_\mu^0, B \rangle \rightarrow \langle I_\nu^0, B_\nu \rangle$  die Umkehrung der Transitivierung von  $H$ . Dann ist  $\mu \in S$  und  $B = B_\mu$ .

**Beweis:** Dazu setzt man  $\pi$  zuerst wie in Fortsetzungssatz 3.7 fort. Sei

$M = \{x \in J_{\rho(\nu)}^X \mid x \text{ ist in } \langle I_{\rho(\nu)}^0, A_\nu \rangle \text{ mit Parametern aus } (rng(\pi) \cap J_{\alpha_\nu}^X) \cup \{p_\nu\} \Sigma_1\text{-definierbar}\}$ .

Dann ist  $rng(\pi) = M \cap J_\nu^X$ . Denn ist  $x \in M \cap J_\nu^X$ , so gibt es nach Definition von  $M$   $y_i \in rng(\pi) \cap J_{\alpha_\nu}^X$ , so daß  $x$  in  $\langle I_{\rho(\nu)}^0, A_\nu \rangle$  mit den Parametern  $y_i$  und  $p_\nu$   $\Sigma_1$ -definierbar ist. Also ist es nach Lemma 4.2 in  $\langle I_\nu^0, B_\nu \rangle$  mit den  $y_i$   $\Sigma_1$ -definierbar. Wegen  $y_i \in rng(\pi) \cap J_{\alpha_\nu}^X \prec_1 \langle I_\nu^0, B_\nu \rangle$  ist daher  $x \in rng(\pi)$ . Ist umgekehrt  $x \in rng(\pi)$ , so ist es in  $\langle I_\nu^0, B_\nu \rangle$  mit einem Parameter aus  $J_{\alpha_\nu}^X$   $\Sigma_1$ -definierbar. Das folgt aus der Tatsache, daß in  $\langle I_{\rho(\nu)}^0, A_\nu \rangle$  jedes Element mit Parametern aus  $J_{\alpha_\nu}^X \cup \{p_\nu\}$   $\Sigma_1$ -definierbar ist. Also ist  $\langle I_\nu^0, B_\nu \rangle \models (\exists y \in J_{\alpha_\nu}^X)\exists i(x = h_{\nu, B_\nu}(i, y))$ . Sei  $\varphi_j$  die Formel  $\exists i(x = h_{\nu, B_\nu}(i, y))$  und  $y \in J_{\alpha_\nu}^X$ . Dann ist  $y = h_{\nu, B_\nu}(j, x)$ . Aber wegen  $rng(\pi) \prec_1 \langle I_\nu^0, B_\nu \rangle$  bedeutet das  $y \in rng(\pi)$ . Und aufgrund von Lemma 4.2 ist  $x$  in  $\langle I_{\rho(\nu)}^0, A_\nu \rangle$  mit den Parametern  $y$  und  $p_\nu$  definierbar. Sei  $\hat{\pi} : \langle I_\rho^0, A \rangle \rightarrow \langle I_{\rho(\nu)}^0, A_\nu \rangle$  die Umkehrung der Transitivierung von  $M$ . Dann ist  $\hat{\pi}$  eine Fortsetzung von  $\pi$ , weil  $M \cap J_\nu^X$  ein  $\in$ -Anfangsstück von  $M$  und  $rng(\pi) = M \cap J_\nu^X$  ist. Außerdem gibt es nach Satz 3.7 eine elementare Fortsetzung  $\tilde{\pi} : I_\beta \rightarrow I_{\beta(\nu)}$ , so daß  $\rho$  das  $(n(\nu) - 1)$ -te Projektum von  $I_\beta$  und  $A$  der  $(n(\nu) - 1)$ -te Standardcode dazu ist. Sei  $\tilde{\pi}(p) = p_\nu$  und  $\tilde{\pi}(\alpha) = \alpha_\nu$ . Und es gilt  $\tilde{\pi}(\mu) = \nu$ , falls  $\nu < \beta(\nu)$  ist. Denn aufgrund der Definition von

$p_\nu$  ist  $\nu \in \text{rng}(\pi)$  und  $\tilde{\pi}$  ist eine Fortsetzung von  $\pi$ . Da  $\pi \upharpoonright J_\mu^X : J_\mu^X \rightarrow J_\nu^X$   $\Sigma_1$ -elementar ist, werden Kardinalzahlen von  $J_\mu^X$  auf welche von  $J_\nu^X$  abgebildet. Angenommen es gäbe eine Kardinalzahl  $\tau > \alpha$  von  $J_\mu^X$ . Dann wäre  $\pi(\tau) > \alpha_\tau$  eine Kardinalzahl von  $J_\nu^X$ . Weil das ein Widerspruch ist, ist  $\alpha = \alpha_\mu$ . Also gilt auch  $\mu \in S$ . Denn  $\mu \notin \text{Card}$ . Über  $I_\beta$  ist  $\mu$  nämlich  $\Sigma_{n(\nu)}$ -singulär. Aufgrund der Definition von  $M$  ist  $J_\rho^X = h_{\rho,A}[\omega \times (\alpha \times \{p\})]$  klar. Also gibt es eine über  $\langle I_\rho^0, A \rangle$   $\Sigma_1$ -definierbare Abbildung von  $\alpha$  konfinal in  $\mu$ . Da aber  $\rho$  das  $(n(\nu) - 1)$ -te Projektum und  $A$  der  $(n(\nu) - 1)$ -te Code dazu ist, ist diese Abbildung über  $I_\beta$   $\Sigma_n$ -definierbar.

Andererseits ist  $\mu$   $\Sigma_{n(\nu)-1}$ -regulär über  $I_\beta$ , falls  $n(\nu) > 1$  ist. Angenommen es gäbe eine über  $I_\beta$   $\Sigma_{n(\nu)-1}$ -definierbare Funktion  $f$  und ein  $x \in \mu$ , so daß  $f[x]$  in  $\mu$  konfinal wäre. D.h. es würde  $(\forall y \in \mu)(\exists z \in x)(f(x) > y)$  in  $I_\beta$  gelten. Über  $I_\beta$  ist  $(\exists z \in x)(f(z) > y)$   $\Sigma_{n(\nu)-1}$ . Also ist es  $\Sigma_0$  über  $\langle I_\rho^0, A \rangle$ . Dann ist aber auch  $(\forall y \in \mu)(\exists z \in x)(f(z) > y)$   $\Sigma_0$  über  $\langle I_\rho^0, A \rangle$ , falls  $\mu < \rho$  ist. Somit ist es  $\Sigma_{n(\nu)}$  über  $I_\beta$ . D.h. aber es würde das selbe für  $\tilde{\pi}(x)$  in  $I_{\beta(\nu)}$  gelten. Das widerspricht der Definition von  $n(\nu)$ ! Sei nun  $\mu = \rho$ . Da  $\alpha$  die größte Kardinalzahl in  $I_\mu$  ist, bekäme man dann mit  $f$  auch eine über  $I_\beta$   $\Sigma_{n(\nu)-1}$ -definierbare Surjektion von  $\alpha$  auf  $\rho$  und damit von  $\alpha$  auf  $\beta$ . Das widerspricht aber Lemma 3.9 und der Tatsache, daß  $\rho$  das  $(n(\nu) - 1)$ -te Projektum von  $\beta$  ist. Falls  $n(\nu) = 1$  ist, erhält man mit demselben Argument, daß  $\mu$  zumindest in  $I_\beta$  regulär ist.

Die letzten beiden Absätze liefern  $\beta = \beta(\mu)$  und  $n(\mu) = n(\nu)$ . Können wir jetzt auch noch  $p = p_\nu$  zeigen, so sind wir fertig. Denn da  $\tilde{\pi}$   $\Sigma_1$ -elementar ist, gilt  $\tilde{\pi}(h_{\tau, X \cap S_\tau, A_\mu \cap S_\tau}^\varphi(x_i)) = h_{\tilde{\pi}(\tau), X \cap S_{\tilde{\pi}(\tau)}, A_\nu \cap S_{\tilde{\pi}(\tau)}}^\varphi(x_i)$  für alle  $\Sigma_1$ -Formeln  $\varphi$  und  $x_i \in S_\tau$ .

Daß  $p = p_\mu$  ist, kann man aber genauso zeigen wie (5) im Beweis des Fortsetzungssatzes 3.7.  $\square$

#### Satz 4.4

Sei  $H \prec_1 \langle I_\nu^0, B_\nu \rangle$  und  $\lambda = \text{sup}(H \cap \nu)$  für ein  $\nu \in S$ . Dann ist  $\lambda \in S$  und  $B_\nu \cap J_\lambda^X = B_\lambda$ .

**Beweis:** Sei  $\pi_0 : \langle I_\mu^0, B_\mu \rangle \rightarrow \langle I_\lambda^0, B_\nu \cap J_\lambda^X \rangle$  die Umkehrung der Transitivierung von  $H$  und  $\pi_1 : \langle I_\lambda^0, B_\nu \cap J_\lambda^X \rangle \rightarrow \langle I_\nu^0, B_\nu \rangle$  die Identität. Da  $L[X]$  Kohärenz hat, sind  $\pi_0$  und  $\pi_1$   $\Sigma_0$ -elementar. Nach Lemma 3.6 ist  $\pi_0$  sogar  $\Sigma_1$ -elementar, weil es konfinal ist. Um  $B_\lambda = B_\nu \cap J_\lambda^X$  zu beweisen, setzt man  $\pi_0$  und  $\pi_1$  so zu  $\hat{\pi}_0 : \langle I_{\rho(\mu)}^0, A_\mu \rangle \rightarrow \langle I_\rho^0, A \rangle$  und  $\hat{\pi}_1 : \langle I_\rho^0, A \rangle \rightarrow \langle I_{\rho(\nu)}^0, A_\nu \rangle$  fort, daß  $\hat{\pi}_0$   $\Sigma_1$ -elementar und  $\hat{\pi}_1$   $\Sigma_0$ -elementar ist. Dann weiß man aufgrund des Fortsetzungssatzes, daß  $\rho$  das  $(n(\nu) - 1)$ -te Projektum eines  $\beta$  und  $A$  der  $(n(\nu) - 1)$ -te Standardcode dazu ist. Also gibt es eine  $\Sigma_{n(\nu)}$ -elementare Fortsetzung  $\tilde{\pi}_0 : I_\beta \rightarrow I_\beta$ . Man kann also wieder das Argument aus Satz 4.3 anwenden, um zu zeigen, daß  $\lambda$  über  $I_\beta$   $\Sigma_{n(\nu)-1}$  regulär ist. Andererseits ist

aber  $\lambda$  als Supremum von  $H \cap On$   $\Sigma_{n(\nu)}$ -singulär über  $I_\beta$ . Daraus schließt man wie im Beweis von 4.3 auf  $B_\lambda = B_\nu \cap J_\lambda^X$ .

Zuvor aber zu  $\lambda \in S$ . Da  $\alpha_\nu$  in  $\langle I_{\rho(\nu)}^0, A_\nu \rangle$  mit  $p_\nu$   $\Sigma_1$ -definierbar ist, ist nach Lemma 4.2  $\alpha_\nu \in H \prec_1 \langle I_\nu^0, B_\nu \rangle$ . D.h.  $\alpha_\nu < \lambda \leq \nu$ . Wegen  $I_\nu \models (\alpha_\nu \text{ größte Kardinalzahl})$  ist also  $\lambda \notin Card$ . Außerdem ist  $\alpha_\nu$  die größte Kardinalzahl in  $I_\lambda$ . Denn wäre  $\tau$  die nächstgrößere, so wäre  $\tau$  in  $I_\lambda$  mit  $\alpha_\nu$   $\Sigma_1$ -definierbar und somit in  $H$ . Aufgrund der  $\Sigma_1$ -Elementarität von  $\pi_0$  wäre dann auch  $\pi_0^{-1}(\tau) > \pi_0^{-1}(\alpha_\nu) = \alpha_\mu$  eine Kardinalzahl in  $I_\mu$ . Das widerspricht aber der Definition von  $\alpha_\mu$ . Daher ist  $\lambda \in S$ .

Aber nun zu  $B_\lambda = B_\nu \cap J_\lambda^X$ . Sei  $\pi = \pi_1 \circ \pi_0 : \langle I_\mu^0, B_\mu \rangle \rightarrow \langle I_\nu^0, B_\nu \rangle$  und  $\hat{\pi} : \langle I_{\rho(\mu)}^0, A_\mu \rangle \rightarrow \langle I_{\rho(\nu)}^0, A_\nu \rangle$  die im Beweis von Satz 4.3 konstruierte Fortsetzung. Sei  $\gamma = \sup(rng(\hat{\pi}) \cap \nu)$ . Dann ist  $\hat{\pi}' = \hat{\pi} \cap (J_{\rho(\mu)}^X \times J_\gamma^X) : \langle I_{\rho(\mu)}^0, A_\mu \rangle \rightarrow \langle I_\gamma^0, A_\nu \cap J_\gamma^X \rangle$   $\Sigma_0$ -elementar aufgrund der Kohärenz von  $L[X]$  und konfinal. Also ist  $\hat{\pi}'$   $\Sigma_1$ -elementar. Sei  $H' = h_{\gamma, A_\nu \cap J_\gamma^X}[\omega \times (J_{\alpha_\nu}^X \times \{p_\nu\})]$  und  $\hat{\pi}_1 : \langle I_\rho^0, A \rangle \rightarrow \langle I_{\rho(\nu)}^0, A_\nu \rangle$  die Umkehrung der Transitivierung von  $H'$ . Dann ist  $H = rng(\hat{\pi}') \subseteq H'$ . Sei dazu  $z \in rng(\hat{\pi}')$  und  $z = \hat{\pi}'(y)$ . Dann gibt es nach Definition von  $p_\mu$  ein  $x \in J_{\alpha_\mu}^X$  und ein  $i \in \omega$  mit  $y = h_{\rho(\mu), A_\mu}(i, \langle x, p_\mu \rangle)$ . Aufgrund der  $\Sigma_1$ -Elementarität von  $\hat{\pi}'$  gilt also  $z = h_{\gamma, A_\nu \cap J_\gamma^X}(i, \langle \hat{\pi}'(x), \hat{\pi}'(p_\mu) \rangle)$ . Aber  $\hat{\pi}'(p_\mu) = \hat{\pi}(p_\mu) = p_\nu$  und  $\hat{\pi}'(x) \in J_{\hat{\pi}'(\alpha_\mu)}^X = J_{\hat{\pi}(\alpha_\mu)}^X = J_{\alpha_\nu}^X$ .

Außerdem gilt  $\sup(H' \cap \nu) = \lambda$ . Denn wegen  $H \subseteq H'$  ist  $\sup(H' \cap \nu) \geq \lambda$ . Sei andererseits  $x \in H' \cap \nu$ , d.h.  $x = h_{\gamma, A_\nu \cap J_\gamma^X}(i, \langle y, p_\nu \rangle)$  für ein  $i \in \omega$  und ein  $y \in J_{\alpha_\nu}^X$ . Dann ist  $x$  durch  $\langle I_\gamma^0, A_\nu \cap J_\gamma^X \rangle \models (\exists z)\psi_i(z, x, \langle y, p_\nu \rangle)$  eindeutig bestimmt. Ein solches  $z$  gibt es aber schon in einem  $S_\tau$  mit  $\tau < \gamma$ . Da  $\gamma = \sup(rng(\hat{\pi}) \cap \nu)$  ist, kann man ein solches  $\tau \in rng(\hat{\pi})$  wählen. Sei  $\bar{\tau} = \hat{\pi}^{-1}(\tau)$ . Sei  $\vartheta = \sup(\nu \cap H_{\bar{\tau}}^\nu)$  und  $\bar{\vartheta} = \sup(\mu \cap H_{\bar{\tau}}^\mu)$ . Da  $\nu$  in  $I_{\rho(\nu)}$  regulär ist, gilt  $\vartheta < \nu$ . Analog gilt  $\bar{\vartheta} < \mu$ . Aber natürlich gilt  $\hat{\pi}(\bar{\vartheta}) = \vartheta$ . Also ist  $x < \vartheta = \hat{\pi}(\bar{\vartheta}) < \sup(\hat{\pi}[\mu]) = \lambda$ .

Aufgrund von Satz 3.7 setzt sich  $\hat{\pi} : \langle I_\rho^0, A \rangle \rightarrow \langle I_{\rho(\nu)}^0, A_\nu \rangle$  zu einer  $\Sigma_{n(\nu)-1}$ -elementaren Einbettung  $\tilde{\pi}_1 : I_\beta \rightarrow I_{\beta(\nu)}$  fort, so daß  $\rho$  das  $(n(\nu) - 1)$ -te Projektum von  $I_\beta$  und  $A$  der  $(n(\nu) - 1)$ -te Standardcode dazu ist. Sei  $\hat{\pi}_0 = \hat{\pi}_1^{-1} \circ \hat{\pi}$ . Dann ist  $\hat{\pi}_0 : \langle I_{\rho(\mu)}^0, A_\mu \rangle \rightarrow \langle I_\rho^0, A \rangle$   $\Sigma_0$ -elementar aufgrund der Kohärenz von  $L[X]$  und konfinal. D.h. nach Lemma 3.6 ist es  $\Sigma_1$ -elementar. Wendet man also nochmal den Fortsetzungssatz an, so erhält man ein  $\Sigma_{n(\nu)}$ -elementares  $\tilde{\pi}_0 : I_{\beta(\mu)} \rightarrow I_\beta$ .

Wie in Satz 4.3 reicht es,  $\beta = \beta(\lambda)$ ,  $n(\nu) = n(\lambda)$ ,  $\rho = \rho(\lambda)$ ,  $A = A_\lambda$  und  $\hat{\pi}^{-1}(p_\nu) = p_\lambda$  zu zeigen. Also müssen wir, falls  $n(\nu) > 1$  ist, zeigen, daß  $\lambda$   $\Sigma_{n(\nu)-1}$ -regulär über  $I_\beta$  ist. Ist  $n(\nu) = 1$ , so reicht  $I_\beta \models (\lambda \text{ regulär})$ . Außerdem muß  $\lambda$   $\Sigma_{n(\nu)}$ -singulär über  $I_\beta$  sein. Für die Regularität betrachte man  $\tilde{\pi}_0$  und wie in Satz 4.3 das kleinste Gegenbeispiel  $x \in \lambda$ , falls ein solches



existiert. Dieses ist dann wieder  $\Sigma_n$ -definierbar und somit in  $rng(\tilde{\pi}_0)$ . Dann hätte aber  $\tilde{\pi}_0^{-1}(x)$  in  $I_{\beta(\mu)}$  dieselbe Eigenschaft. Widerspruch!

Da  $I_\nu \models (\alpha_\nu \text{ ist die größte Kardinalzahl})$  ist, ist  $H' \cap \nu$  transitiv. Also gilt  $H' \cap \nu = \lambda$ . Da  $\hat{\pi}_1 : \langle I_\rho^0, A \rangle \rightarrow \langle I_\gamma^0, A \cap J_\gamma^X \rangle$   $\Sigma_1$ -elementar und  $\lambda \subseteq H' = rng(\hat{\pi}_1)$  ist, gilt also  $\lambda = \lambda \cap h_{\rho,A}[\omega \times (J_{\alpha_\nu}^X \times \{\hat{\pi}_1^{-1}(p_\nu)\})]$ . D.h. es gibt über  $\langle I_\rho, A \rangle$  eine  $\Sigma_1$ -Abbildung von  $\alpha_\nu$  auf  $\lambda$ . Diese ist dann aber über  $I_\beta$   $\Sigma_{n(\nu)}$ -definierbar und  $\lambda$  ist  $\Sigma_{n(\nu)}$ -singulär über  $I_\beta$ .

Daß  $\hat{\pi}_1^{-1}(p_\nu) = p_\lambda$  ist, zeigt man wieder wie (5) im Beweis des Fortsetzungssatzes 3.7.  $\square$

Das  $C_\nu$  approximiert man durch Rekursion über  $\omega$ . Sei  $H_\nu(0, \tau) = h_{\nu, B_\nu}[\omega \times (J_\tau^X \times \{p_\nu\})]$ . Definiere für  $k \in \omega$

$$s_\nu(k, \tau) = sup(H_\nu(k, \tau) \cap \nu)$$

$$C_\nu(k) = \{s_\nu(k, \tau) < \nu \mid \tau \in Lim - \{0\}\}$$

Ist  $C_\nu(k)$  in  $\nu$  beschränkt und nicht leer, so sei  $p_\nu(k) = sup(C_\nu(k))$ .

$$H_\nu(k, \tau) = h_{\nu, B_\nu}[\omega \times (J_\tau^X \times \{p_\nu(0), \dots, p_\nu(k-1)\})].$$

Die Rekursion bricht also ab, wenn  $C_\nu(k)$  in  $\nu$  unbeschränkt oder leer ist. Ist es unbeschränkt, so sei  $C_\nu = C_\nu(k)$ . Ist aber  $C_\nu(k) = \emptyset$ , so ist  $H_\nu(k, \omega) \cap \nu$  unbeschränkt in  $\nu$ . Also ist die Menge der

$$sup(h_{\nu, B_\nu}[\omega \times (n^{<\omega} \times \{p_\nu(0), p_\nu(1), \dots, p_\nu(k-1)\})]) \cap \nu$$

unbeschränkt in  $\nu$ . Außerdem ist sie natürlich abgeschlossen, da sie keine Limespunkte hat. Sei also das  $C_\nu$  diese Menge, falls  $C_\nu(k) = \emptyset$  ist.

#### Satz 4.5

Für  $\nu \in S$  ist  $C_\nu$  abgeschlossen und unbeschränkt in  $\nu$ .

**Beweis:** Falls es existiert, ist  $C_\nu(k)$  für alle  $k \in \omega$  und  $\nu \in S$  abgeschlossen. Denn offensichtlich ist die Folge  $\langle s_\nu(k, \tau) \mid \tau < \nu \rangle$  aufsteigend. Es reicht also  $sup\{s_\nu(k, \tau) \mid \tau \in Lim \cap \lambda\} = s_\nu(k, \lambda)$  für  $\lambda \in Lim^2$  zu zeigen. Das ist aber klar, da  $\bigcup\{H_\nu(k, \tau) \mid \tau \in Lim \cap \lambda\}$  gilt. Unser Satz gilt also, wenn die Rekursion tatsächlich abbricht.

Sei dazu  $\tau_k$  das größte  $\tau$ , so daß  $sup(H_\nu(k, \tau) \cap \nu) = p_\nu(k)$  ist. Da  $C_\nu(k)$  abgeschlossen und beschränkt ist, gilt  $p_\nu(k) \in C_\nu(k)$ . Also gibt es ein  $\tau$  mit  $p_\nu(k) = s_\nu(k, \tau)$ . Wie eben zeigt man, daß auch die Menge dieser  $\tau$  abgeschlossen ist. Deshalb gibt es ein größtes. Ist die Folge der  $\tau_k$  echt absteigend, so bricht die Rekursion ab. Denn es gibt keine echt absteigende Ordinalzahlfolge der Länge  $\omega$ . Aber offensichtlich gilt  $\tau_k \in H_\nu(k+1, \tau_k)$ . Denn in dieser Hülle hat man auch  $p_\nu(k)$  als Parameter zur Verfügung. Also ist auch  $\tau_k + 1 \in H_\nu(k+1, \tau_k)$ . Somit ist  $H_\nu(k+1, \tau_k) \cap \nu$  nach Definition von  $\tau_k$  in  $\nu$  unbeschränkt. Also ist  $\tau_{k+1} < \tau_k$ . Fertig!  $\square$

**Satz 4.6**

Sei  $\nu \in S$  und  $\mu \in \text{Lim}(C_\nu)$ . Dann ist  $\mu \in S$  und  $C_\mu = C_\nu \cap \mu$ .

**Beweis:** Ist  $\mu \in \text{Lim}(C_\nu)$ , so ist  $\mu = \text{sup}(H \cap \nu)$  für ein  $H \prec_1 \langle I_\nu^0, B_\nu \rangle$  aufgrund der Definition der  $s_\nu(k, \tau)$ . Also ist wegen Satz 4.4  $\mu \in S$ .

Für  $C_\mu = C_\nu \cap \mu$  sei zunächst  $\mu \in C_\nu(0)$ . Dann ist  $\mu = s_\nu(0, \gamma)$  mit  $\gamma \in \text{Lim} - \{0\}$ . Also ist  $\mu = \text{sup}(H \cap \nu)$  für ein  $H \prec_1 \langle I_\nu^0, B_\nu \rangle$ . Somit gilt aufgrund von Satz 4.4  $\langle I_\mu^0, B_\mu \rangle = \langle J_\mu^X, X \upharpoonright \mu, B_\nu \cap J_\mu^X \rangle$ . Daher ist  $H_\nu(0, \tau) = H_\mu(0, \tau)$  für alle  $\tau \in (\text{Lim} - \{0\}) \cap \gamma$ . Also gilt  $\mu \in C_\nu(0) \Rightarrow C_\mu(0) = C_\nu(0) \cap \mu$ . Ist  $\mu \in C_\nu(1)$ , so kann man mit dem Argument von eben  $C_\nu(0) = C_\mu(0)$  zeigen. Deshalb gilt  $p_\nu(0) = p_\mu(0)$ , und wie oben beweist man  $\mu \in C_\nu(1) \Rightarrow C_\mu(1) = C_\nu(1) \cap \mu$ . Durch Induktion erhält man  $\mu \in C_\nu(k) \Rightarrow C_\mu(k) = C_\nu(k) \cap \mu$  für alle möglichen  $k \in \omega$ . Ist nun  $\mu \in \text{Lim}(C_\nu)$  und  $C_\nu = C_\nu(k)$ , dann ist  $C_\mu(k) = C_\nu(k) \cap \mu$  unbeschränkt in  $\mu$ . Deshalb ist  $C_\mu = C_\mu(k) = C_\nu(k) \cap \mu = C_\nu \cap \mu$  und man ist fertig. □

Jetzt ist man mit dem Beweis von  $\square_\kappa$  praktisch fertig. Denn sei  $S_\kappa = \{\nu \in S \mid \alpha_\nu = \kappa\}$ . Dann gilt für  $\nu \in S_\kappa$  natürlich  $\text{otp}(C_\nu) \leq \kappa$  nach Definition von  $p_\nu$ . Ist also  $\pi : ]\kappa, \kappa^+[\rightarrow S_\kappa$  die monotone Aufzählung von  $S_\kappa$  durch  $]\kappa, \kappa^+[$ , so ist  $\langle \pi^{-1}[C_{\pi(\nu)}] - \kappa \mid \nu \in \text{Lim} \cap ]\kappa, \kappa^+[ \rangle$  eine  $\square_\kappa$ -Folge.

**Bemerkung**

Die Rekursion breche bei  $C_\nu(k)$  ab. Sei  $C_\nu(k) \neq \emptyset$ ,  $H \prec_1 \langle I_\nu^0, C_\nu \rangle$  und  $\pi : \langle I_\mu^0, C \rangle \rightarrow \langle I_\nu^0, C_\nu \rangle$  die Umkehrung der Transitivierung von  $H$ . Dann ist  $\mu \in S$  und  $C = C_\mu$ . Ist  $C_\nu(k) = \emptyset$ , so kann man die  $C_\nu$  entsprechend wählen. Das ist die zentrale Idee des nächsten Abschnitts.

# 5

## Moräste

In diesem Abschnitt werde ich die noblen Moräste und Standardmoräste definieren. Es wird die angekündigt Äquivalenz zwischen einem Standardmorast und den Prinzipien Fügbarkeit, Kondensation, Kohärenz und  $S^* = S_{On}^2$  gezeigt.

Sei  $RCard$  die Menge der regulären Kardinalzahlen.

Sei  $\kappa > \omega$  regulär und  $\beta \leq \infty$ . Ein grober  $(\kappa, \beta)$ -Morast heiße ein nobler  $(\kappa, \beta)$ -Morast, wenn folgende Axiome gelten:

### (MP)

Ist  $\nu \in S - RCard^{L[D]}$  und  $\xi \in J_{\mu\nu}^D$ , so existiert  $f_{(0,\xi,\nu)}$ .

### (LP1)

Für  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$  ist  $|f| : \langle J_{\mu\bar{\nu}}^D, D_{\mu\bar{\nu}} \rangle \rightarrow \langle J_{\mu\nu}^D, D_{\mu\nu} \rangle$   $\Sigma_1$ -elementar.

### (LP2)

Für  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$  sei  $\lambda(f) = \sup(f[\bar{\nu}])$  und  $\Lambda(\xi, \nu) = \{\lambda(f_{(\beta,\xi,\nu)}) < \nu \mid \beta < \nu\}$ . Ist dann  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$  und  $f(\bar{\xi}) = \xi$ , so ist  $(f \upharpoonright J_{\bar{\nu}}^D) : \langle J_{\bar{\nu}}^D, D_{\bar{\nu}}, \Lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu}) \rangle \rightarrow \langle J_{\nu}^D, D_{\nu}, \Lambda(\xi, \nu) \rangle$   $\Sigma_0$ -elementar.

### (CP1)

Für  $i \leq j < \lambda$  seien  $f_i : \nu_i \Rightarrow \nu$  und  $g_{ij} : \nu_i \Rightarrow \nu_j$  so, daß  $g_{ij} = f_j^{-1} f_i$  gilt. Sei  $\langle g_i \mid i < \lambda \rangle$  der transitive, direkte Limes des gerichteten Systems  $\langle g_{ij} \mid i \leq j < \lambda \rangle$  und  $hg_i = f_i$  für alle  $i < \lambda$ . Dann sind  $g_i, h \in \mathfrak{F}$ .

### (CP2)

Sei  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$ ,  $\bar{\nu} \in Lim(S^2)$  und  $\lambda = \sup(f[\bar{\nu}])$ . Ist dann für ein  $\bar{\lambda}$   $h : \langle J_{\bar{\lambda}}^D, \bar{D} \rangle \rightarrow \langle J_{\lambda}^D, D_{\lambda} \rangle$   $\Sigma_1$ -elementar mit  $rng(f \upharpoonright J_{\bar{\nu}}^D) \subseteq rng(h)$ , so gibt es ein  $g : \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda$  mit  $g \upharpoonright J_{\bar{\lambda}}^D = h$ .

### (DP1)

Ist  $\mu_{\nu} < \mu_{\alpha\nu}$ , so ist  $\nu$  unabhängig.

**(DP2)**

Sei  $K_\nu = \{\mu_{\bar{\nu}} < \alpha_\nu \mid \bar{\nu} = d(f_{(\beta,0,\nu)}) \text{ für ein } \beta < \nu\}$ . Sei  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$ ,  $\bar{\nu} \sqsubset \bar{\tau} \sqsubseteq \mu_{\bar{\nu}}$  und  $f(\bar{\tau}) = \tau$ . Ist dann  $\bar{\tau} \in S^+ \cup S^2$  unabhängig, so ist  $(f \upharpoonright J_{\alpha_{\bar{\tau}}}^D) : \langle J_{\alpha_{\bar{\tau}}}^D, D_{\alpha_{\bar{\tau}}}, K_{\bar{\tau}} \rangle \rightarrow \langle J_{\alpha_\tau}^D, D_{\alpha_\tau}, K_\tau \rangle$   $\Sigma_1$ -elementar.

**(DP3)**

Ist  $\nu$   $\xi$ -abhängig von  $\tau \sqsubseteq \nu$ ,  $\tau \in S^+$ ,  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$ ,  $f(\bar{\tau}) = \tau$  und  $\xi \in \text{rng}(f)$ , so ist  $f^{(\bar{\tau})} : \bar{\tau} \Rightarrow \tau$ .

**(SD)**

$$\{\langle \xi, \tau, x, f_{(0,\xi,\tau)}(x) \rangle \mid \tau < \nu, \mu_\tau = \nu, \xi \in J_{\mu_\tau}^D, x \in \text{dom}(f_{(0,\xi,\tau)})\}$$

$$\cup \{\langle \xi, x, f_{(0,\xi,\nu)}(x) \rangle \mid \mu_\nu = \nu, \xi \in J_{\mu_\nu}^D, x \in \text{dom}(f_{(0,\xi,\nu)})\}$$

$$\cup (\sqsubset \cap \nu^2)$$

ist uniform über  $\langle J_\nu^D, D_\nu, D^\nu \rangle$  definierbar.

Damit ist die Definition der noblen Moräste abgeschlossen. Ich brauche aber noch die Version von (CP2), in der  $\bar{\nu} \in \text{Lim}(S^2)$  nicht vorausgesetzt wird:

**(CP2)\***

Sei  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$  und  $\lambda = \text{sup}(f[\bar{\nu}])$ . Ist dann für ein  $\bar{\lambda} h : \langle J_{\bar{\lambda}}^D, \bar{D} \rangle \rightarrow \langle J_\lambda^D, D_\lambda \rangle$   $\Sigma_1$ -elementar mit  $\text{rng}(f \upharpoonright J_{\bar{\nu}}^D) \subseteq \text{rng}(h)$ , so gibt es ein  $g : \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda$  mit  $g \upharpoonright J_{\bar{\lambda}}^D = h$ .

In meinem Ansatz ist auch (CP2)\* leicht zu erfüllen. Denn  $D$  ist relativ unabhängig von  $\mathfrak{F}$ . Jensen dagegen setzt  $D^\nu =$

$$\{\langle \xi, \tau, x, f_{(0,\xi,\tau)}(x) \rangle \mid \tau < \nu, \mu_\tau = \nu, \xi \in J_{\mu_\tau}^D, x \in \text{dom}(f_{(0,\xi,\tau)})\}$$

$$\cup \{\langle \xi, x, f_{(0,\xi,\nu)}(x) \rangle \mid \mu_\nu = \nu, \xi \in J_{\mu_\nu}^D, x \in \text{dom}(f_{(0,\xi,\nu)})\}$$

$$\cup (\sqsubset \cap \nu^2).$$

In diesem Fall ist es so gut wie unmöglich (CP2)\* zu erfüllen.

Meine Definition unterscheidet sich wieder in einigen Punkten von der bei Jensen [1972/73]:

(i) Die schon bei den groben Morästen besprochene abweichende Definition der Unabhängigkeit, daß  $|f| : J_{\mu_{\bar{\nu}}}^D \rightarrow J_{\mu_\nu}^D$  ist und daß  $f_{(0,\xi,\nu)}$  für alle  $\nu \in S - \text{RCard}^{L[D]}$  existiert.

(ii) Statt (LP2) fordert Jensen, daß der Morast in seinem Sinne ordentlich ist, und die Erhaltungseigenschaften für die sog. atomaren Abbildungen gelten. Daraus folgt (LP2). Das ist §3, Lemma 11 (d) von Jensen [1972/73].

(iii) Bei ihm gilt in (DP2) sogar, daß  $(f \upharpoonright \alpha_{\bar{\tau}}) : \langle \alpha_{\bar{\tau}}, D_{\alpha_{\bar{\tau}}}, K_{\bar{\tau}} \rangle \rightarrow \langle \alpha_\tau, D_{\alpha_\tau}, K_\tau \rangle$

$Q$ -elementar ist. Das ist §3, Lemma 4 von Jensen [1972/73]. Das scheint mir aber sehr stark und schwer zu erfüllen (vgl. Lemma 5.4).

Zuerst werde ich einen noblen Morast konstruieren. Sei also bis auf weiteres  $L[X]$  fügsam mit  $S^* = S_{On}^2$ , Kondensation und Kohärenz, so daß  $Card^{L[X]} = Card$  gilt.

Sei  $S = Lim$  und

$$\nu \triangleleft \tau \quad :\Leftrightarrow \quad \nu \text{ regulär in } I_\tau.$$

Sei

$$E = Lim - RCard^{L[X]}.$$

Für  $\nu \in E$  sei

$\beta(\nu) =$  das kleinste  $\beta$ , so daß es ein konfinales  $f : a \rightarrow \nu \in Def(I_\beta)$  mit  $a \subseteq \nu' < \nu$  gibt

$n(\nu) =$  das kleinste  $n \geq 1$ , so daß ein solches  $f$  über  $I_{\beta(\nu)}$   $\Sigma_n$ -definierbar ist.

$\rho(\nu) =$  das  $(n(\nu) - 1)$ -te Projektum von  $I_{\beta(\nu)}$

$A_\nu =$  der  $(n(\nu) - 1)$ -te Standardcode zu  $I_{\beta(\nu)}$

$\gamma(\nu) =$  das  $n(\nu)$ -te Projektum von  $I_{\beta(\nu)}$ .

Um wie in Abschnitt 4 geeignete Parameter zu definieren, muß man zwei Fälle unterscheiden. Für  $\nu \in S^+ - Card$  gibt es wie in Abschnitt 4 ein  $p$ , so daß jedes  $x \in J_{\rho(\nu)}^X$  in  $\langle I_{\rho(\nu)}^0, A_\nu \rangle$  mit Parametern aus  $\alpha_\nu \cup \{p\}$   $\Sigma_1$ -definierbar ist. Sei  $p_\nu$  das kleinste solche.

Offensichtlich ist  $p_\tau \leq p_\nu$  für  $\nu \sqsubseteq \tau \sqsubseteq \mu_\nu$ .

D.h.  $P_\nu := \{p_\tau \mid \nu \sqsubseteq \tau \sqsubseteq \mu_\nu, \tau \in S^+\}$  ist endlich.

Sei nun  $\nu \in E - S^+$ . Nach Definition von  $\beta(\nu)$ , gibt es in  $J_\beta^X$  kein konfinales  $f : a \rightarrow \nu$  mit  $a \subseteq \nu' < \nu$ . Also ist  $\mathfrak{P}(\nu \times \nu) \cap \Sigma_{n(\nu)}(I_{\beta(\nu)}) \not\subseteq J_{\beta(\nu)}^X$ . Wegen Lemma 3.2 ist also  $\mathfrak{P}(\nu) \cap \Sigma_{n(\nu)}(I_{\beta(\nu)}) \not\subseteq J_{\beta(\nu)}^X$ . Somit ist nach Lemma 3.9

(3)

$$\gamma(\nu) \leq \nu.$$

Angenommen  $\rho(\nu) < \nu$ . Dann gäbe es ein über  $I_{\beta(\nu)}$   $\Sigma_{n(\nu)-1}$ -definierbares  $f$  mit  $f[\rho(\nu)] = \nu$ . Das widerspricht aber der Definition von  $n(\nu)$ . Also ist

$$\nu \leq \rho(\nu).$$

Aus der ersten Ungleichung folgt mit Lemma 3.9 (1), daß es eine über  $I_{\beta(\nu)}$   $\Sigma_{n(\nu)}$ -definierbare Funktion  $f$  mit  $f[J_\nu^X] = J_{\beta(\nu)}^X$  gibt. Also gibt es ein  $p \in$

$J_{\rho(\nu)}^X$ , so daß jedes  $x \in J_{\rho(\nu)}^X$  in  $\langle I_{\rho(\nu)}^0, A_\nu \rangle$  mit Parametern aus  $\nu \cup \{p\}$   $\Sigma_1$ -definierbar ist. Sei  $p_\nu$  das kleinste solche.

Sei

$$\alpha_\nu^* = \sup\{\alpha < \nu \mid h_{\rho(\nu), A_\nu}[\omega \times (J_\alpha^X \times \{p_\nu\})] \cap \nu = \alpha\}.$$

Dann ist  $\alpha_\nu^* < \nu$ . Denn nach Definition von  $\beta(\nu)$  existiert ein  $\nu' < \nu$  und ein  $p \in J_{\rho(\nu)}^X$ , so daß  $h_{\rho(\nu), A_\nu}[\omega \times (J_{\nu'}^X \times \{p\})] \cap \nu$  in  $\nu$  konfinal ist. Aber  $p$  ist in  $h_{\rho(\nu), A_\nu}[\omega \times (J_\nu^X \times \{p_\nu\})]$ . Also gibt es ein  $\alpha < \nu$ , so daß  $h_{\rho(\nu), A_\nu}[\omega \times (J_\alpha^X \times \{p_\nu\})] \cap \nu$  in  $\nu$  konfinal ist. D.h.  $\alpha_\nu^* < \alpha < \nu$ .

Für  $\nu \in E$  sei  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$  genau dann, wenn für ein  $f^*$

- (1)  $f = \langle \bar{\nu}, f^* \upharpoonright J_{\mu_{\bar{\nu}}}^D, \nu \rangle$ ,
- (2)  $f^* : I_{\mu_{\bar{\nu}}} \rightarrow I_{\mu_\nu}$   $\Sigma_{n(\nu)}$ -elementar,
- (3)  $\alpha_\nu^*, p_\nu, \alpha_{\mu_\nu}^*, P_\nu \in \text{rng}(f^*)$ ,
- (4)  $\nu \in \text{rng}(f^*)$ , falls  $\nu < \mu_\nu$ ,
- (5)  $f(\bar{\nu}) = \nu$ .

Dadurch ist  $\mathfrak{F}$  definiert.

Sei  $D = X$ .

Sei  $P_\nu^*$  minimal mit  $h_{\mu_\nu}^{n(\nu)-1}(i, P_\nu^*) = P_\nu$  für ein  $i \in \omega$ .

Sei  $\alpha_{\mu_\nu}^{**}$  minimal mit  $h_{\mu_\nu}^{n(\nu)-1}(i, \alpha_{\mu_\nu}^{**}) = \alpha_{\mu_\nu}^*$  für ein  $i \in \omega$ .

- $$\nu^* = \emptyset, \text{ falls } \nu = \rho(\nu)$$
- $$\nu^* = \nu, \text{ falls } \nu < \rho(\nu).$$

Für  $\tau \in On$  sei  $S_\tau$  wie in Satz 1.11 definiert. Für  $\tau \in On$ ,  $E_i \subseteq S_\tau$  und eine  $\Sigma_0$ -Formel  $\varphi$  sei

$h_{\tau, E_i}^\varphi(x_1, \dots, x_m)$  das bezüglich der kanonischen Wohlordnung kleinste  $x_0 \in S_\tau$  mit  $\langle S_\tau, E_i \rangle \models \varphi(x_i)$ , falls ein solches existiert,

und

$h_{\tau, E_i}^\varphi(x_1, \dots, x_m) = \emptyset$ , falls nicht.

Für  $\tau \in On$  mit  $\nu^*, \alpha_\nu^*, p_\nu, \alpha_{\mu_\nu}^{**}, P_\nu^* \in S_\tau$  sei  $H_\nu(\alpha, \tau)$  der Abschluß von  $S_\alpha \cup \{\nu^*, \alpha_\nu^*, p_\nu, \alpha_{\mu_\nu}^{**}, P_\nu^*\}$  unter allen  $h_{\tau, X \cap S_\tau, A_\nu \cap S_\tau}^\varphi$ . Dann sind aufgrund der Definition der  $h_{\tau, X \cap S_\tau, A_\nu \cap S_\tau}^\varphi$  die  $H_\nu(\alpha, \tau) \prec_1 \langle S_\tau, X \cap S_\tau, A_\nu \cap S_\tau, \{\nu^*, \alpha_\nu^*, p_\nu, \alpha_{\mu_\nu}^{**}, P_\nu^*\} \rangle$ . Sei  $M_\nu(\alpha, \tau)$  die Transitivierung von  $H_\nu(\alpha, \tau)$ . Definiere

- $$B_\nu = \{M_\nu(\alpha, \tau) \mid \alpha < \nu, \tau \in \rho(\nu) \text{ und } \nu^*, \alpha_\nu^*, p_\nu, \alpha_{\mu_\nu}^{**}, P_\nu^* \in S_\tau\} \text{ für } \nu < \rho(\nu),$$
- $$B_\nu = \{0\} \times A_\nu \cup \{1, \nu^*, \alpha_\nu^*, p_\nu, \alpha_{\mu_\nu}^{**}, P_\nu^*\} \text{ sonst.}$$

**Lemma 5.1**

Für  $\nu \in E$  gilt:

- (a)  $B_\nu \subseteq J_\nu^X$
- (b)  $\langle I_\nu^0, B_\nu \rangle$  ist rudimentär abgeschlossen.
- (c) Für  $x \in J_\nu^X$  und  $y_i \in J_{\alpha_\nu}^X$  sind äquivalent:
  - (i)  $x$  in  $\langle I_{\rho(\nu)}^0, A_\nu \rangle$  mit Parametern  $y_i, \nu^*, \alpha_\nu^*, p_\nu, \alpha_{\mu_\nu}^{**}, P_\nu^*$   $\Sigma_1$ -definierbar
  - (ii)  $x$  ist in  $\langle I_\nu^0, B_\nu \rangle$  mit den Parametern  $y_i$   $\Sigma_1$ -definierbar.

Sei  $\pi : \langle I_\mu^0, B \rangle \rightarrow \langle I_\nu^0, B_\nu \rangle$   $\Sigma_1$ -elementar.

- (d) Dann ist  $\mu \in E$  und  $B = B_\mu$ .
- (e) Es gibt eine  $\Sigma_1$ -elementare Fortsetzung  $\tilde{\pi}' : \langle I_{\rho(\mu)}^0, A_\mu \rangle \rightarrow \langle I_{\rho(\nu)}^0, A_\nu \rangle$ .
- (f) Es gibt eine  $\Sigma_{n(\nu)}$ -elementare Fortsetzung  $\tilde{\pi} : I_{\beta(\mu)} \rightarrow I_{\beta(\nu)}$ .
- (g) Sei  $H \prec_1 \langle I_\nu^0, B_\nu \rangle$  und  $\lambda = \sup(H \cap \nu)$ . Dann ist  $\lambda \in E$  und  $B_\lambda = B_\nu \cap J_\lambda^X$ .

**Beweis:**

- (a), (b) wie Lemma 4.1.
- (c) wie Lemma 4.2.
- (d), (e), (f) wie Satz 4.3. Seien die Bezeichnungen wie dort. Dann muß man noch zeigen:

(1)  $\mu$  ist  $\Sigma_{n(\nu)}$ -singulär über  $I_\beta$

Sei  $\lambda := \sup(\pi[\mu])$ . Da  $\lambda > \alpha_\nu^*$  ist, gibt es ein  $\gamma < \lambda$  mit

$$\sup(h_{\rho(\nu), A_\nu}[\omega \times (J_\gamma^X \times \{q_\nu\})] \cap \nu) \geq \lambda.$$

Und weil  $\text{rng}(\pi)$  in  $\lambda$  konfinal ist, existiert ein solches  $\gamma \in \text{rng}(\pi)$ . Sei  $\gamma = \pi(\bar{\gamma})$ . Aufgrund der  $\Sigma_1$ -Elementarität von  $\tilde{\pi}$  ist also  $\bar{\gamma} < \mu$ , und es gilt mit  $\tilde{\pi}(q) = q_\nu$  für jedes  $\eta < \mu$

$$\langle I_\rho, A \rangle \models (\exists x \in J_{\bar{\gamma}}^X)(\exists i)h_{\rho, A}(i, \langle x, p \rangle) > \eta.$$

Somit ist  $h_{\rho, A}[\omega \times (J_{\bar{\gamma}}^X \times \{q\})]$  in  $\mu$  konfinal.

(2) Sei  $\pi(\alpha) = \alpha_\nu^*$ . Dann ist  $\alpha = \alpha_\mu^*$ .

Denn aufgrund der  $\Sigma_1$ -Elementarität von  $\tilde{\pi}$  gilt mit  $\tilde{\pi}(q) = q_\nu$  für alle  $\alpha \in \mu$

$$h_{\rho, A}[\omega \times (J_\alpha^X \times \{q\})] \cap \mu = \alpha \Leftrightarrow h_{\rho(\nu), A_\nu}[\omega \times (J_{\pi(\alpha)}^X \times \{q_\nu\})] \cap \nu = \pi(\alpha).$$

(g) wie Satz 4.4. Denn  $\alpha_\lambda^* = \alpha_\nu^*$ . Das sieht man, da  $\pi_0(\alpha_\mu^*) = \alpha_\nu^* \in \text{rng}(\pi_0)$  ist, wie in (2).  $\square$

**Lemma 5.2**

Sei  $\nu \in E$  und  $\Lambda(\xi, \nu) = \{sup(h_{\nu, B_\nu}[\omega \times (J_\beta^X \times \{\xi\})] \cap \nu) < \nu \mid \beta \in Lim \cap \nu\}$ .  
 Sei  $\bar{\eta} < \bar{\nu}$  und  $\pi : \langle I_{\bar{\nu}}^0, B \rangle \rightarrow \langle I_\nu^0, B_\nu \rangle$   $\Sigma_1$ -elementar. Dann ist  $\Lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu}) \cap \bar{\eta} \in J_{\bar{\nu}}^X$   
 und  $\pi(\Lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu}) \cap \bar{\eta}) = \Lambda(\xi, \nu) \cap \pi(\bar{\eta})$ .

**Beweis:**

(1) Sei  $\lambda \in \Lambda(\xi, \nu)$ . Dann ist  $\Lambda(\xi, \lambda) = \Lambda(\xi, \nu) \cap \lambda$ .

Sei  $\beta_0$  minimal mit

$$sup(h_{\nu, B_\nu}[\omega \times (J_{\beta_0}^X \times \{\xi\})] \cap \nu) = \lambda.$$

Dann gilt nach Lemma 5.1 (g) für alle  $\beta \leq \beta_0$

$$h_{\lambda, B_\lambda}[\omega \times (J_\beta^X \times \{\xi\})] = h_{\nu, B_\nu}[\omega \times (J_\beta^X \times \{\xi\})]$$

und für alle  $\beta_0 \leq \beta$

$$\begin{aligned} h_{\lambda, B_\lambda}[\omega \times (J_{\beta_0}^X \times \{\xi\})] &\subseteq h_{\lambda, B_\lambda}[\omega \times (J_\beta^X \times \{\xi\})] \\ &\subseteq h_{\nu, B_\nu}[\omega \times (J_\beta^X \times \{\xi\})]. \end{aligned}$$

Also ist  $\Lambda(\xi, \lambda) = \Lambda(\xi, \nu) \cap \lambda$ .

(2)  $\Lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu}) \cap \bar{\eta} \in J_{\bar{\nu}}^X$

Sei  $\bar{\lambda} := sup(\Lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu}) \cap \bar{\eta} + 1)$ . Dann ist nach (1)  $\Lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu}) \cap \bar{\eta} + 1 = \Lambda(\bar{\xi}, \bar{\lambda}) \cup \{\bar{\lambda}\}$ .  
 Aber  $\Lambda(\bar{\xi}, \bar{\lambda})$  ist über  $I_{\beta(\bar{\lambda})}$  definierbar. Da  $\beta(\bar{\lambda}) < \bar{\nu}$  ist, ist  $\Lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu}) \cap \bar{\eta} + 1 \in J_{\bar{\nu}}^X$ .

(3) Sei  $sup(h_{\bar{\nu}, B_{\bar{\nu}}}[\omega \times (J_{\bar{\beta}}^X \times \{\bar{\xi}\})]) < \bar{\nu}$  und  $\pi(\bar{\beta}) = \beta$ . Dann ist

$$\pi(sup(h_{\bar{\nu}, B_{\bar{\nu}}}[\omega \times (J_{\bar{\beta}}^X \times \{\bar{\xi}\})] \cap \bar{\nu})) = sup(h_{\nu, B_\nu}[\omega \times (J_\beta^X \times \{\xi\})] \cap \nu).$$

Sei  $\bar{\lambda} := sup(h_{\bar{\nu}, B_{\bar{\nu}}}[\omega \times (J_{\bar{\beta}}^X \times \{\bar{\xi}\})] \cap \bar{\nu})$ . Dann ist  $\langle I_{\bar{\nu}}^0, B_{\bar{\nu}} \rangle \models \neg(\exists \bar{\lambda} < \theta)(\exists i \in \omega)(\exists \xi_i < \bar{\beta})(\theta = h_{\bar{\nu}, B_{\bar{\nu}}}(i, \langle \xi_i, \bar{\xi} \rangle))$ . Also ist  $\langle I_\nu^0, B_\nu \rangle \models \neg(\exists \lambda < \theta)(\exists i \in \omega)(\exists \xi_i < \beta)(\theta = h_{\nu, B_\nu}(i, \langle \xi_i, \xi \rangle))$  mit  $\pi(\bar{\lambda}) = \lambda$ . D.h.  $sup(h_{\nu, B_\nu}[\omega \times (J_\beta^X \times \{\xi\})] \cap \nu) \leq \lambda$ . Aber  $(\pi \upharpoonright J_{\bar{\lambda}}^X) : \langle I_{\bar{\lambda}}^0, B_{\bar{\lambda}} \rangle \rightarrow \langle I_\lambda^0, B_\lambda \rangle$  ist elementar. Also ist mit  $\langle I_{\bar{\lambda}}^0, B_{\bar{\lambda}} \rangle \models (\forall \eta)(\exists \xi_i \in \bar{\beta})(\exists n \in \omega)(\eta \leq h_{\bar{\lambda}, B_{\bar{\lambda}}}(n, \langle \xi_i, \bar{\xi} \rangle))$  auch  $\langle I_\lambda^0, B_\lambda \rangle \models (\forall \eta)(\exists \xi_i \in \beta)(\exists n \in \omega)(\eta \leq h_{\lambda, B_\lambda}(n, \langle \xi_i, \xi \rangle))$ . Aber wegen Lemma 5.1 (g) ist  $h_{\lambda, B_\lambda}[\omega \times (J_\beta^X \times \{\xi\})] \subseteq h_{\nu, B_\nu}[\omega \times (J_\beta^X \times \{\xi\})]$ . D.h. es ist tatsächlich  $\lambda = sup(h_{\nu, B_\nu}[\omega \times (J_\beta^X \times \{\xi\})] \cap \nu)$ .

(4)  $\pi(\Lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu}) \cap \bar{\eta}) = \Lambda(\xi, \nu) \cap \pi(\bar{\eta})$

Für  $\bar{\lambda} \in \Lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu})$  ist

$$\pi(\Lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu}) \cap \bar{\lambda})$$

nach (1)

$$= \pi(\Lambda(\bar{\xi}, \bar{\lambda}))$$

wegen  $\Sigma_1$ -Elementarität von  $\pi$

$$= \Lambda(\xi, \pi(\bar{\lambda}))$$



wegen (1) und (3)  
 $= \Lambda(\xi, \nu) \cap \pi(\bar{\lambda})$ .

Ist also  $\Lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu})$  in  $\bar{\nu}$  konfinal, so ist man fertig. Gibt es dagegen  $\bar{\lambda} := \max(\Lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu}))$ , so ist nach (1) und (2)  $\Lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu}) \in J_{\bar{\nu}}^X$ , und es reicht  $\pi(\Lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu})) = \Lambda(\xi, \nu)$  zu zeigen. Sei dazu  $\bar{\beta}$  maximal mit  $\bar{\lambda} = \sup(h_{\bar{\nu}, B_{\bar{\nu}}}[\omega \times (J_{\bar{\beta}}^X \times \{\bar{\xi}\})] \cap \bar{\nu})$ . D.h.  $h_{\bar{\nu}, B_{\bar{\nu}}}[\omega \times (J_{\bar{\beta}+1}^X \times \{\bar{\xi}\})]$  ist konfinal in  $\bar{\nu}$ . Da  $\pi[h_{\bar{\nu}, B_{\bar{\nu}}}[\omega \times (J_{\bar{\beta}+1}^X \times \{\bar{\xi}\})]] \subseteq h_{\nu, B_{\nu}}[\omega \times (J_{\beta+1}^X \times \{\xi\})]$  mit  $\pi(\bar{\beta}) = \beta$  ist, ist also  $\sup(\text{rng}(\pi) \cap \nu) \leq \sup(h_{\nu, B_{\nu}}[\omega \times (J_{\beta+1}^X \times \{\xi\})] \cap \nu)$ . Somit ist in der Tat  $\pi(\Lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu})) = \Lambda(\xi, \nu)$ .  
 $\square$

### Lemma 5.3

Sei  $\nu \in E$ ,  $H \prec_1 \langle I_{\nu}^0, B_{\nu} \rangle$  und  $\lambda = \sup(H \cap \nu)$ . Sei  $h : I_{\lambda}^0 \rightarrow I_{\lambda}^0$   $\Sigma_1$ -elementar mit  $H \subseteq \text{rng}(h)$ . Dann ist  $\lambda \in E$  und  $h : \langle I_{\lambda}^0, B_{\lambda} \rangle \rightarrow \langle I_{\lambda}^0, B_{\lambda} \rangle$   $\Sigma_1$ -elementar.

**Beweis:** Nach Lemma 5.1 (g) ist  $B_{\lambda} = B_{\nu} \cap J_{\lambda}^X$ . Also reicht es nach Lemma 5.1 (d)  $\text{rng}(h) \prec_1 \langle I_{\lambda}^0, B_{\lambda} \rangle$  zu zeigen. Seien  $x_i \in \text{rng}(h)$  und  $\langle I_{\lambda}^0, B_{\lambda} \rangle \models (\exists z)\psi(z, x_i)$  für eine  $\Sigma_0$ -Formel  $\psi$ . Dann ist zu zeigen, daß ein  $z \in \text{rng}(h)$  mit  $\langle I_{\lambda}^0, B_{\lambda} \rangle \models \psi(z, x_i)$  existiert. Da  $\lambda = \sup(H \cap \nu)$  ist, gibt es ein  $\eta \in H \cap \text{Lim}$  mit  $\langle I_{\eta}^0, B_{\lambda} \cap J_{\eta}^X \rangle \models (\exists z)\psi(z, x_i)$ . Und weil  $H \prec_1 \langle I_{\nu}^0, B_{\nu} \rangle$  ist, gilt  $\langle I_{\eta}^0, B_{\lambda} \cap J_{\eta}^X \rangle \in H \subseteq \text{rng}(h)$ . Also gilt, weil  $\text{rng}(h) \prec_1 I_{\lambda}^0$  ist, auch

$$\text{rng}(h) \models (\langle I_{\eta}^0, B_{\lambda} \cap J_{\eta}^X \rangle \models (\exists z)\psi(z, x_i)).$$

Somit gibt es ein  $z \in \text{rng}(h)$  mit  $\langle I_{\eta}^0, B_{\lambda} \cap J_{\eta}^X \rangle \models \psi(z, x_i)$ . D.h.  $\langle I_{\lambda}^0, B_{\lambda} \rangle \models \psi(z, x_i)$ , was zu zeigen war.  $\square$

### Lemma 5.4

Sei  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$ ,  $\bar{\nu} \sqsubset \bar{\tau} \sqsubseteq \mu_{\bar{\nu}}$  und  $f(\bar{\tau}) = \tau$ . Ist dann  $\bar{\tau} \in S^+ \cup S^2$  unabhängig, so ist  $(f \upharpoonright J_{\alpha_{\bar{\tau}}}^D) : \langle J_{\alpha_{\bar{\tau}}}^D, D_{\alpha_{\bar{\tau}}}, K_{\bar{\tau}} \rangle \rightarrow \langle J_{\alpha_{\tau}}^D, D_{\alpha_{\tau}}, K_{\tau} \rangle$   $\Sigma_1$ -elementar.

**Beweis:** Ist  $\bar{\tau} = \mu_{\bar{\tau}} < \mu_{\bar{\nu}}$ , so gilt die Behauptung, da  $|f| : I_{\mu_{\bar{\nu}}} \rightarrow I_{\mu_{\nu}}$   $\Sigma_1$ -elementar ist. Ist  $\mu_{\bar{\tau}} = \mu_{\bar{\nu}}$  und  $n(\bar{\tau}) = n(\bar{\nu})$ , so ist  $P_{\bar{\tau}} \subseteq P_{\bar{\nu}}$ . D.h.  $\bar{\tau}$  ist von  $\bar{\nu}$  abhängig. Somit ist  $\bar{\tau}$  nicht unabhängig (siehe (7) im Beweis von Satz 2.9). Sei also  $\mu := \mu_{\bar{\tau}} = \mu_{\bar{\nu}}$ ,  $n := n(\bar{\tau}) < n(\bar{\nu})$  und  $\tau \in S^+ \cup S^2$  unabhängig. Dann ist aufgrund der Definition der Parameter  $\alpha_{\tau}$  das  $n$ -te Projektum von  $\mu$ .

Sei

$$\gamma_{\beta} := \text{crit}(f_{(\beta, 0, \tau)}) < \alpha_{\tau}$$

für ein  $\beta$  und

$$H_{\beta} := \text{die } \Sigma_n\text{-Hülle von } \beta \cup P_{\tau} \cup \{\alpha_{\mu}^*, \tau\} \text{ in } I_{\mu}.$$

D.h.  $H_{\beta} = h_{\mu}^n[\omega \times (J_{\beta}^X \times \{\alpha'_{\mu}, \tau', P'_{\tau}\})]$  mit

$$\alpha'_{\mu} := \text{minimal mit } h_{\mu}^n(i, \alpha'_{\mu}) = \alpha_{\mu}^* \text{ für ein } i \in \omega$$

$P'_\tau :=$  minimal mit  $h_\mu^n(i, P'_\tau) = P_\tau$  für ein  $i \in \omega$   
 $\tau' :=$  minimal mit  $h_\mu^n(i, \tau') = \tau$  für ein  $i \in \omega$  (bzw.  $\tau' := 0$  für  $\tau = \mu$ ).

Denn die Standardparameter sind in  $P_\tau$ .

Zunächst ist  $H_\beta$  über  $I_\mu$  mit den Parametern  $\{\beta, \tau, \alpha_\mu^*\} \cup P_\tau$   $\Sigma_n$ -definierbar.  
 Sei

$\rho := \alpha_\tau =$  das  $n$ -te Projektum von  $\mu$

$A :=$  der  $n$ -te Standardcode zu  $\mu$

$p := \langle \alpha'_\mu, \tau', P'_\tau \rangle$ .

Also ist  $H_\beta \cap J_\rho^X$  über  $\langle I_\rho^0, A \rangle$  mit den Parametern  $\beta$  und  $p$   $\Sigma_0$ -definierbar.  
 (Feinstrukturtheorie!)

Und  $\gamma_\beta$  ist definiert durch

$$\gamma_\beta \notin H_\beta \quad \text{und} \quad (\forall \delta \in \gamma_\beta)(\delta \in H_\beta).$$

D.h. auch  $\gamma_\beta$  ist über  $\langle I_\rho^0, A \rangle$  mit den Parametern  $\beta$  und  $p$   $\Sigma_0$ -definierbar.

Sei  $f_0 := f_{(\beta, 0, \tau)}$  für ein  $\beta$ ,  $\bar{\tau}_0 := d(f_0) < \alpha_\tau$  und  $\gamma := \text{crit}(f_0) < \alpha_\tau$ . Sei  
 $f_1 := f_{(\beta, \gamma, \tau)}$ ,  $\bar{\tau}_1 := d(f_1) < \alpha_\tau$  und  $\delta := \text{crit}(f_1) < \alpha_\tau$ . Dann ist  $\mu_{\bar{\tau}_1}$  der  
 direkte Nachfolger von  $\mu_{\bar{\tau}_0}$  in  $K_\tau$ . Also ist  $f_{(\beta, \gamma, \bar{\tau}_1)} = \text{id}_{\bar{\tau}_1}$ . D.h. für das  
 minimale  $\eta \in S^+ \cup S^0$  mit  $\gamma < \eta \sqsubseteq \delta$  gilt  $\mu_\eta = \mu_{\bar{\tau}_1}$ . Somit ist

$$\mu' \in K_\tau^+ := K_\tau - (\text{Lim}(K_\tau) \cup \{\min(K_\tau)\})$$

$\Leftrightarrow$

$$(\exists \beta, \gamma, \delta, \eta)(\gamma = \gamma_\beta \text{ und } \delta = \gamma_{(\gamma_\beta + 1)})$$

$$\text{und } \eta \in S^+ \cup S^0 \text{ minimal mit } \gamma < \eta \sqsubseteq \delta \text{ und } \mu' = \mu_\eta$$

D.h.  $K_\tau^+$  ist über  $\langle I_\rho^0, A \rangle$   $\Sigma_1$ -definierbar mit Parameter  $p$

Betrachte nun  $\langle I_{\alpha_\tau}^0, K_\tau \rangle \models \varphi(x)$  mit einer  $\Sigma_1$ -Formel  $\varphi$ . Dann gilt, da  $K_\tau$  in  
 $\alpha_\tau$  unbeschränkt ist,

$$\langle I_{\alpha_\tau}^0, K_\tau \rangle \models \varphi(x)$$

$\Leftrightarrow$

$$(\exists \gamma)(\gamma \in K_\tau^+ \text{ und } \langle I_{\alpha_\gamma}^0, K_\gamma \rangle \models \varphi(x)).$$

Also ist  $\langle I_{\alpha_\tau}^0, K_\tau \rangle \models \varphi(x)$  über  $\langle I_\rho^0, A \rangle$   $\Sigma_1$  mit dem Parameter  $p$ , bzw. über  
 $I_\mu$   $\Sigma_{n+1}$  mit den Parametern  $\alpha_\mu^*, \tau, P_\tau$ . Da aber  $n = n(\tau) < n(\nu)$  ist,  
 ist  $f$  mindestens  $\Sigma_{n+1}$ -elementar. Außerdem ist  $f(\alpha_\tau^*) = \alpha_\tau^*$ ,  $f(\bar{\tau}) = \tau$ ,  
 $f(P_\tau) = P_\tau$ . Also gilt für  $x \in \text{rng}(f)$   $\langle I_{\alpha_\tau}^0, K_\tau \rangle \models \varphi(f^{-1}(x))$  genau dann,  
 wenn  $\langle I_{\alpha_\tau}^0, K_\tau \rangle \models \varphi(x)$  ist.  $\square$

**Satz 5.5**

Sei  $L[X]$  fügsam mit  $S^* = S_{O_n}^2$ , Kondensation und Kohärenz, so daß  $Card^{L[X]} = Card$  ist. Dann gibt es einen noblen  $(\omega_1, \infty)$ -Morast, der  $(CP2)^*$  erfüllt.

**Beweis:** Dazu muß man noch die Axiome nachprüfen. Das  $|f_{(0, \xi, \nu)}|$  ist die Umkehrung der Transitivierung von  $h_{\mu\nu}^{n[\nu]}[\omega \times \{\xi^*, \nu^*, \alpha_\nu^*, \alpha_{\mu\nu}^{**}, P_\nu^*\}^{<\omega}]$ . Dabei sei  $\xi^*$  minimal mit  $h_{\mu\nu}^{n(\nu)-1}(i, \xi^*) = \xi$ . Also gilt (MP). Das Axiom (LP2) ist Lemma 5.2,  $(CP2)^*$  folgt aus Lemma 5.3 und (DP2) entspricht Lemma 5.4. Die übrigen Axiome beweist man wie in Satz 2.9.  $\square$

Sei nun ein nobler Morast mit  $(CP2)^*$  gegeben.

In noblen Morästen spielen die

$$C_\nu = \{\lambda(f) < \nu \mid f \Rightarrow \nu\}$$

eine wichtige Rolle. Zur Analyse dieser Mengen benutzt Jensen in §4 von [1972/73] eine Konstruktion wie in Abschnitt 4, die ich in Lemma 5.6 bis 5.12 wiedergebe.

Mit den  $C_\nu$  sind eng folgende Parameter verknüpft:

Definiere rekursiv

$$\begin{aligned} q_\nu(0) &= 0 \\ q_\nu(k+1) &= \max(\Lambda(q_\nu^k, \nu)) \\ q_\nu^k &= \langle q_\nu(0), \dots, q_\nu(k) \rangle, \end{aligned}$$

solange  $\max(\Lambda(q_\nu^k, \nu))$  existiert. Wie in Satz 4.5 zeigt man, daß diese Rekursion abbricht. D.h. es gibt ein  $k_\nu$ , so daß entweder

$$\Lambda(q_\nu^{k_\nu}, \nu) = \emptyset$$

oder

$$\Lambda(q_\nu^{k_\nu}, \nu) \text{ in } \nu \text{ unbeschränkt ist.}$$

Setze  $q_\nu := q_\nu^{k_\nu}$ .

**Lemma 5.6**

Sei  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$ ,  $\xi \in \text{rng}(f)$  und  $\lambda = \lambda(f)$ . Dann ist  $\Lambda(\xi, \nu) \cap \lambda = \Lambda(\xi, \lambda)$ .

**Beweis:** Sei  $f(\bar{\xi}) = \xi$ . Dann ist einerseits  $(f \upharpoonright J_{\bar{\nu}}^D) : \langle J_{\bar{\nu}}^D, D_{\bar{\nu}}, \Lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu}) \rangle \rightarrow \langle J_\nu^D, D_\nu, \Lambda(\xi, \nu) \rangle$  nach (LP2)  $\Sigma_0$ -elementar. D.h. auch

$$(*) (f \upharpoonright J_{\bar{\nu}}^D) : \langle J_{\bar{\nu}}^D, D_{\bar{\nu}}, \Lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu}) \rangle \rightarrow \langle J_\lambda^D, D_\lambda, \Lambda(\xi, \nu) \cap \lambda \rangle \Sigma_0\text{-elementar.}$$

Andererseits ist nach  $(CP2)^*$  und (LP2) auch

$$(**) (f \upharpoonright J_{\bar{\nu}}^D) : \langle J_{\bar{\nu}}^D, D_{\bar{\nu}}, \Lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu}) \rangle \rightarrow \langle J_\lambda^D, D_\lambda, \Lambda(\xi, \lambda) \rangle \Sigma_0\text{-elementar.}$$

Unterscheide nun drei Fälle:

$$(1) \lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu}) = \emptyset$$

Dann ist wegen (\*)  $\Lambda(\xi, \nu) \cap \lambda = \emptyset$  und wegen (\*\*)  $\Lambda(\xi, \lambda) = \emptyset$ . Fertig!

(2)  $\bar{\eta} := \max(\Lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu}))$  existiert

Sei  $f(\bar{\eta}) = \eta$ . Dann ist wegen (\*) und (\*\*)

$$\eta = \max(\Lambda(\xi, \nu) \cap \lambda) = \max(\Lambda(\xi, \lambda)).$$

Wegen (CP2)\* gilt außerdem

$$x \in \Lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu}) \Leftrightarrow x \in \Lambda(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \cup \{\bar{\eta}\}.$$

Also gilt wegen (\*)

$$x \in \Lambda(\xi, \nu) \cap \lambda \Leftrightarrow x \in \Lambda(\xi, \eta) \cup \{\eta\}.$$

und wegen (\*\*)

$$x \in \Lambda(\xi, \lambda) \Leftrightarrow x \in \Lambda(\xi, \eta) \cup \{\eta\}.$$

Fertig!

(3)  $\Lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu})$  ist in  $\bar{\nu}$  unbeschränkt

Dann ist wegen (\*)  $\Lambda(\xi, \nu) \cap \lambda$  in  $\lambda$  unbeschränkt. Also ist  $\lambda \in \Lambda(\xi, \nu)$ , weil  $\Lambda(\xi, \nu)$  abgeschlossen ist. Wegen (CP2)\* ist daher  $\Lambda(\xi, \lambda) = \Lambda(\xi, \nu) \cap \lambda$ .  $\square$

### Lemma 5.7

Sei  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$ .

(a) Ist  $q_{\bar{\nu}}^k \in \text{rng}(f)$ , so ist  $f(q_{\bar{\nu}}^k) = q_{\nu}^k$ .

(b) Ist  $f$  konfinal, so ist  $f(q_{\bar{\nu}}) = q_{\nu}$ .

**Beweis:**

(a) Das beweist man durch Induktion über  $k$ , indem man (LP2) benutzt, um  $f(\max(\Lambda(\bar{\xi}, \bar{\nu})) = \max(\Lambda(\xi, \nu))$  für  $\max(\Lambda(\xi, \nu)) \in \text{rng}(f)$  zu zeigen.

(b) Wie (a). Aufgrund der Konfinalität von  $f$  ist  $q_{\bar{\nu}}^k$  stets in  $\text{rng}(f)$ .

### Lemma 5.8

Für  $\lambda \in C_{\nu}$  ist  $\lambda \in \Lambda(q_{\lambda}, \nu)$ .

**Beweis:** Da  $\lambda \in C_{\nu}$  ist, ist nach Lemma 5.7 (b)  $q_{\lambda} \in \text{rng}(f)$  für ein  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$ . D.h. nach Lemma 5.6, daß  $\Lambda(q_{\lambda}, \nu) \cap \lambda = \Lambda(q_{\lambda}, \lambda)$  ist. Aufgrund der Definition von  $q_{\lambda}$  existiert daher  $\max(\Lambda(q_{\lambda}, \nu) \cap \lambda)$  nicht. Ist aber  $\Lambda(q_{\lambda}, \nu) \cap \lambda$  in  $\lambda$  unbeschränkt, so ist  $\lambda \in \Lambda(q_{\lambda}, \nu)$  aufgrund der Abgeschlossenheit von  $\Lambda(q_{\lambda}, \nu)$ . Sei also  $\Lambda(q_{\lambda}, \nu) \cap \lambda = \emptyset$ . Dann ist aber  $\lambda = \lambda(f_{(0, q_{\lambda}, \nu)})$ . Denn  $\lambda(f_{(0, q_{\lambda}, \nu)}) \geq \lambda$ , weil sonst  $\Lambda(q_{\lambda}, \nu) \cap \lambda \neq \emptyset$  wäre. Und  $\lambda(f_{(0, q_{\lambda}, \nu)}) \leq \lambda$ , weil nämlich  $\lambda \in C_{\nu}$  ist. D.h. nach Lemma 5.7 (b) ist  $q_{\lambda} \in \text{rng}(f)$  für ein  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$ . Aber dann ist  $\text{rng}(f_{(0, q_{\lambda}, \nu)}) \subseteq \text{rng}(f)$ .  $\square$

**Lemma 5.9**

Sei  $\rho \in C_\nu \cap \lambda$  mit  $\rho > q_\lambda$ . Dann ist  $q_\lambda$  ein Anfangsstück von  $q_\rho$ .

**Beweis:**

$$q_\rho(k) = \max(\Lambda(q_\rho^k, \rho)) = \max(\Lambda(q_\rho^k, \nu) \cap \rho),$$

solange diese Maxima existieren. Denn  $\rho \in C_\nu$ . Also ist nach Lemma 5.7 (b)  $q_\rho^k \in \text{rng}(f)$  für ein  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$ . D.h. nach Lemma 5.6, daß  $\Lambda(q_\rho^k, \nu) \cap \rho = \Lambda(q_\rho^k, \rho)$  ist. Entsprechend ist

$$q_\lambda(k) = \max(\Lambda(q_\lambda^k, \lambda)) = \max(\Lambda(q_\lambda^k, \nu) \cap \lambda) = \max(\Lambda(q_\lambda^k, \nu) \cap \rho),$$

solange diese Maxima existieren. Denn  $q_\lambda < \rho < \lambda$ . Aus diesen beiden Gleichungen folgt die Behauptung durch Induktion.  $\square$

**Lemma 5.10**

$C_\nu$  ist abgeschlossen.

**Beweis:** Sei  $\lambda \in \text{Lim}(C_\nu)$ . Betrachte die Folge  $\langle q_\rho \mid \rho \in C_\nu \cap \lambda \rangle$ . Nach Lemma 5.9 gibt es ein  $\rho_0 \in C_\nu \cap \lambda$ , so daß  $q_\rho = q_{\rho_0}$  ist für alle  $\rho_0 < \rho \in C_\nu \cap \lambda$ . Nach Lemma 5.8 ist also  $\rho \in \Lambda(q_{\rho_0}, \nu)$  für alle  $\rho_0 < \rho \in C_\nu \cap \lambda$ . Aber  $\Lambda(q_{\rho_0}, \nu)$  ist abgeschlossen. Somit ist  $\lambda \in \Lambda(q_{\rho_0}, \nu) \subseteq C_\nu$ .  $\square$

**Lemma 5.11**

Für  $\lambda \in C_\nu$  ist  $C_\lambda = C_\nu \cap \lambda$ .

**Beweis** durch Induktion über  $\lambda$  und  $\nu$ . Sei die Behauptung für alle  $\rho < \lambda$  und  $\mu \leq \nu$  bereits bewiesen. Nach Lemma 5.8 ist  $\Lambda(q_\lambda, \lambda) = \Lambda(q_\lambda, \nu) \cap \lambda$ . Für alle  $\rho \in \Lambda(q_\lambda, \lambda)$  ist also  $\rho \in C_\nu \cap C_\lambda$ . Somit ist nach Induktionsvoraussetzung  $C_\lambda \cap \rho = C_\nu \cap \rho = C_\rho$ . Ist daher  $\Lambda(q_\lambda, \lambda)$  in  $\lambda$  unbeschränkt, so ist man fertig. Ist  $\Lambda(q_\lambda, \lambda) = \emptyset$ , so ist nach Lemma 5.9  $(C_\nu \cap \lambda) - (q_\lambda(k_\lambda) + 1) = \emptyset$ . Denn angenommen  $(C_\nu \cap \lambda) - (q_\lambda(k_\lambda) + 1) \neq \emptyset$ . Sei  $\rho = \min(C_\nu - (q_\lambda(k_\lambda) + 1))$ . Dann ist nach Lemma 5.9  $q_\rho = q_\lambda$ . Also wäre  $\rho \in \Lambda(q_\lambda, \lambda)$ . Widerspruch! Somit ist  $(C_\nu \cap \lambda) - (q_\lambda(k_\lambda) + 1) = C_\lambda - (q_\lambda(k_\lambda) + 1) = \emptyset$ . Ist  $q_\lambda(k_\lambda) = 0$ , so sind wir fertig. Ist  $q_\lambda(k_\lambda) \neq 0$ , so ist  $q_\lambda(k_\lambda) = \max(C_\lambda) = \max(C_\nu \cap \lambda)$ . Aber  $C_\lambda \cap q_\lambda(k_\lambda) = C_\nu \cap q_\lambda(k_\lambda) = C_{q_\lambda(k_\lambda)}$ . Also ist  $C_\lambda = C_\nu \cap \lambda$ .  $\square$

**Lemma 5.12**

Sei  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$ . Dann ist  $(f \upharpoonright J_{\bar{\nu}}^D) : \langle J_{\bar{\nu}}^D, D_{\bar{\nu}}, C_{\bar{\nu}} \rangle \rightarrow \langle J_\nu^D, D_\nu, C_\nu \rangle$   $\Sigma_0$ -elementar.

**Beweis:** Zeige  $f(C_{\bar{\nu}} \cap \bar{\eta}) = C_\nu \cap f(\bar{\eta})$  für alle  $\bar{\eta} < \bar{\nu}$ . Wegen (LP1) gilt  $f(C_{\bar{\nu}} \cap \bar{\lambda}) = f(C_{\bar{\lambda}}) = C_\lambda = C_\nu \cap f(\bar{\lambda})$  für alle  $\bar{\lambda} \in C_{\bar{\nu}}$ . Ist also  $C_{\bar{\nu}}$  in  $\bar{\nu}$  konfinal, so sind wir fertig. Ist es das nicht, so ist  $f(q_{\bar{\nu}}) = q_\nu$ . Ist  $q_{\bar{\nu}}(k_{\bar{\nu}}) = 0$ , dann ist  $\Lambda(0, \bar{\nu}) = \Lambda(0, \nu) = \emptyset$ , so daß  $C_{\bar{\nu}} = C_\nu = \emptyset$  ist. Ist  $q_{\bar{\nu}}(k_{\bar{\nu}}) \neq 0$ , so braucht man  $f(\max(C_{\bar{\nu}})) = \max(C_\nu)$ . Aber  $\max(C_{\bar{\nu}}) = q_{\bar{\nu}}(k_{\bar{\nu}})$  und  $\max(C_\nu) = q_\nu(k_\nu)$ .  $\square$

Ein Standardmorast wird wie im groben Fall ein Morast sein, bei dem (SD) auf eine bestimmte Art erfüllt wird. Zunächst möchte ich statt (SD) eine schwache Definierbarkeit (WD) voraussetzen.

**(WD)**

Ist  $f_{(0,\eta,\nu)} = id_\nu$  für ein  $\nu \in S^2$  und  $\eta \in J_{\mu_\nu}^D$ , so ist

$$\{\langle \xi, x, f_{(0,\xi,\nu)}(x) \rangle \mid \xi \in J_{\mu_\nu}^D, x \in \text{dom}(f_{(0,\xi,\nu)})\}$$

uniform über  $\langle J_{\mu_\nu}^D, D_{\mu_\nu}, D^{\mu_\nu} \rangle$  definierbar.

Analog zum groben Fall wird ein Axiom (SP) die  $f \Rightarrow \nu$  mit den  $f \Rightarrow \mu_\nu$  in Beziehung setzen. In (SP) spiegelt sich die Feinstruktur wider.

Definiere rekursiv für  $1 \leq n \in \omega$ :

$$f_{(\beta,\xi,\nu)}^1 = f_{(\beta,\xi,\nu)}$$

$$\tau(n, \nu) = \text{das minimale } \tau \in S^0 \cup S^+ \cup S^2, \text{ so daß für ein } \xi \in J_{\mu_\nu}^D$$

$$f_{(\alpha_\tau,\xi,\nu)}^n = id_\nu$$

$$\xi(n, \nu) = \text{das minimale } \xi \in J_{\mu_\nu}^D \text{ mit } f_{(\alpha_{\tau(n,\nu)},\xi,\nu)}^n = id_\nu$$

$$K_\nu^n = \{d(f_{(\beta,\xi(n,\nu),\nu)}^n) < \alpha_{\tau(n,\nu)} \mid \beta < \nu\}$$

$f \Rightarrow_n \nu$  genau dann, wenn  $f \Rightarrow \nu$  und für alle  $1 \leq m < n$

$$\text{rng}(f) \cap J_{\alpha_{\tau(m,\nu)}}^D \prec_1 \langle J_{\alpha_{\tau(m,\nu)}}^D, D_{\alpha_{\tau(m,\nu)}}, K_\nu^m \rangle$$

$$\xi(m, \nu) \in \text{rng}(f)$$

$$f_{(u,\nu)}^n = \text{das minimale } f \Rightarrow_n \nu \text{ mit } u \subseteq \text{rng}(f)$$

$$f_{(\beta,\xi,\nu)}^n = f_{(\beta \cup \{\xi\},\nu)}^n$$

$$f : \bar{\nu} \Rightarrow_n \nu : \Leftrightarrow f \Rightarrow_n \nu \text{ und } f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu.$$

Sei

$$n_\nu = \text{das kleinste } n \text{ mit } f_{(\gamma,\xi,\mu_\nu)}^n \text{ konfinal in } \nu \text{ für ein } \xi \in J_{\mu_\nu}^D, \gamma \sqsubset \nu$$

$$\xi_\nu = \text{das kleinste } \xi \text{ mit } f_{(\alpha_\nu,\xi,\mu_\nu)}^n = id_\nu.$$

Sei

$$\alpha_\nu^* = \alpha_\nu \text{ für } \nu \in S^+$$

$$\alpha_\nu^* = \sup\{\alpha < \nu \mid \beta(f_{(\alpha,\xi_\nu,\mu_\nu)}^{n_\nu}) = \alpha\} \text{ für } \nu \notin S^+.$$

Sei  $P_\nu := \{\xi_\tau \mid \nu \sqsubset \tau \sqsubseteq \mu_\nu, \tau \in S^+\} \cup \{\xi_\nu\}$ .

**(SP)**

Für alle  $\nu \in S - RCard^{L[D]}$  mit  $\nu \sqsubseteq \mu_\nu$  und  $\xi \in J_{\mu_\nu}^D$  ist

$$f_{(0,\xi,\nu)} = f_{(0,(\xi,\nu,\alpha_\nu^*,P_\nu),\mu_\nu)}^{n_\nu}.$$

Das ist eine Art Umkehrung von (DP2) und (DP3).

Damit die Konstruktion der  $f_{(u,\nu)}^n$  nicht abbricht braucht man

**(DP3)\***

Für  $\nu \in S^2$  und  $1 \leq n \in \omega$  gilt:

(a) Ist  $f_{(\alpha_\tau, \xi, \nu)}^n = id_\nu$  mit  $\tau \in S^+ \cup S^0$  und  $\tau \sqsubseteq \nu$ , so ist  $\mu_\nu = \mu_\tau$ .

(b) Ist  $\beta < \alpha_{\tau(n, \nu)}$ , so ist auch  $d(f_{(\beta, \xi(n, \nu), \nu)}^n) < \alpha_{\tau(n, \nu)}$ .

Außerdem fordere ich als Ergänzung zu (CP2):

**(CP3)**

Sei  $\nu \in S - RCard^{L[D]}$  und  $C_\nu = \{\lambda(f) < \nu \mid f \Rightarrow \nu\}$  in  $\nu$  unbeschränkt.

Dann ist für alle  $\xi \in J_{\mu_\nu}^D$

$$rng(f_{(0, \xi, \nu)}) = \bigcup \{rng(f_{(0, \xi, \lambda)}) \mid \lambda \in C_\nu\}.$$

Ein Struktur, die außer (SD) alle Axiome eines noblen  $(\omega_1, \infty)$ -Morasts erfüllt, sei ein Standardmorast, wenn sie zusätzlich (CP2)\*, (DP3)\*, (SP),  $S = Lim$  und

$$\nu \triangleleft \tau \Rightarrow \nu \text{ regulär in } J_\tau^D$$

erfüllt, und es Funktionen  $\sigma_{(\xi, \nu)}$  für  $\nu \in S^2$  und  $\xi \in J_\nu^D$  gibt, so daß gilt:

**(A)**

$$\sigma_{(\xi, \nu)}[\omega] = rng(f_{(0, \xi, \nu)})$$

**(B)** vgl. (CP1)

Ist  $f : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$  und  $f(\bar{\xi}) = \xi$ , so ist  $\sigma_{(\xi, \nu)} = f \circ \sigma_{(\bar{\xi}, \bar{\nu})}$ .

**(C)** vgl. (CP3)

Ist  $C_\nu$  in  $\nu$  unbeschränkt, so ist  $\sigma_{(\xi, \nu)} = \bigcup \{\sigma_{(\xi, \lambda)} \mid \lambda \in C_\nu, \xi \in J_\lambda^D\}$ .

**(D)** vgl. (WD)

Ist  $f_{(0, \xi, \nu)} = id_\nu$  für ein  $\xi \in J_\nu^D$ , so ist

$$\{\langle i, \eta, \sigma_{(\eta, \nu)}(i) \rangle \mid \eta \in J_\nu^D, i \in dom(\sigma_{(\eta, \nu)})\}$$

uniform über  $\langle J_{\mu_\nu}^D, D_{\mu_\nu}, D^{\mu_\nu} \rangle$  definierbar.

**(E)**

Ist  $C_\nu$  in  $\nu$  unbeschränkt, so ist  $D^\nu = C_\nu$ . Ist es beschränkt, so ist  $D^\nu = \{\langle i, \sigma_{(q_\nu, \nu)}(i) \rangle \mid i \in dom(\sigma_{(q_\nu, \nu)})\}$ .

**Satz 5.13**

Sei  $L[X]$  fügsam mit  $S^* = S_{O_n}^2$ , Kondensation und Kohärenz, so daß  $Card^{L[X]} = Card$  ist. Dann gibt es einen Standardmorast.

**Beweis:** Sei  $\langle S, \triangleleft, \mathfrak{F}, X \rangle$  der Morast aus Satz 5.5. Definiere

$$\sigma_{(\xi, \nu)}(i) = h_{\nu}^{n(\nu)}(i, \langle \xi, \alpha_{\nu}^*, p_{\nu} \rangle).$$

Sei damit  $D$  wie in der Definition vom Standardmorästen definiert. Dann gilt:

(1)  $D^{\nu}$  ist über  $\langle J_{\nu}^X, X \upharpoonright \nu, X_{\nu} \rangle$  uniform definierbar.

(2)  $X_{\nu}$  ist über  $\langle J_{\nu}^D, D_{\nu}, D^{\nu} \rangle$  uniform definierbar.

(1) ist klar. Für (2) sei zunächst  $\nu \in S^2$  mit  $f_{(0, q_{\nu}, \nu)} = id_{\nu}$ . Da die Menge  $\{i \mid \sigma_{(q_{\nu}, \nu)}(i) \in X_{\nu}\}$  über  $\langle J_{\nu}^X, X \upharpoonright \nu, X_{\nu} \rangle$  mit den Parameter  $p_{\nu}, \alpha_{\nu}^*, q_{\nu}$   $\Sigma_{n(\nu)}$ -definierbar ist, gibt es ein  $j \in \omega$ , so daß

$$\sigma_{(q_{\nu}, \nu)}(\langle i, j \rangle) \text{ existiert} \Leftrightarrow \sigma_{(q_{\nu}, \nu)}(i) \in X_{\nu}.$$

Damit gilt

$$X_{\nu} = \{\sigma_{(q_{\nu}, \nu)}(i) \mid \langle i, j \rangle \in \text{dom}(\sigma_{(q_{\nu}, \nu)})\}.$$

Somit gibt es im Fall, daß  $f_{(0, q_{\nu}, \nu)} = id_{\nu}$  ist, eine geeignete Definition von  $X_{\nu}$ .

Sei  $\nu \in S^2$ ,  $f_{(0, q_{\nu}, \nu)} : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$  konfinal und  $f(\bar{q}) = q_{\nu}$ . Dann ist  $f_{(0, \bar{q}, \bar{\nu})} = id_{\bar{\nu}}$ . Und nach Lemma 5.7 (b) ist  $\bar{q} = q_{\bar{\nu}}$ . Ist daher  $\bar{\nu} = \nu$ , so ist  $f_{(0, q_{\nu}, \nu)} = id_{\nu}$ . Sei also  $\bar{\nu} < \nu$ . Dann ist  $f_{(0, q_{\nu}, \nu)}(x) = y$  definiert durch: Es gibt ein  $\bar{\nu} \leq \nu$ , so daß für alle  $r, s \in \omega$

$$\sigma_{(q_{\bar{\nu}}, \bar{\nu})}(r) \leq \sigma_{(q_{\bar{\nu}}, \bar{\nu})}(s) \Leftrightarrow \sigma_{(q_{\nu}, \nu)}(r) \leq \sigma_{(q_{\nu}, \nu)}(s)$$

gilt und für alle  $z \in J_{\bar{\nu}}^X$  ein  $s \in \omega$  mit

$$z = \sigma_{(q_{\bar{\nu}}, \bar{\nu})}(s)$$

existiert und es ein  $s \in \omega$  mit

$$\sigma_{(q_{\bar{\nu}}, \bar{\nu})}(s) = x \Leftrightarrow \sigma_{(q_{\nu}, \nu)}(s) = y$$

gibt.

Und da  $\langle J_{\nu}^X, X_{\nu} \rangle$  rudimentär abgeschlossen ist, ist

$$X_{\nu} = \bigcup \{f(X_{\bar{\nu}} \cap \eta) \mid \eta < \bar{\nu}\}.$$



Ist schließlich  $\nu \in S^2$  und  $f_{(0,q_\nu,\nu)}$  in  $\nu$  nicht konfinal, so ist  $C_\nu$  in  $\nu$  unbeschränkt und

$$X_\nu = \bigcup \{X_\lambda \mid \lambda \in C_\nu\}.$$

Denn  $L[X]$  hat Kohärenz.

Also gilt (2). Daraus folgt (D).

Wegen (1) und (2) ist  $J_\nu^X = J_\nu^D$  für alle  $\nu \in Lim$  und für alle  $H \subseteq J_\nu^X = J_\nu^D$  gilt

$$H \prec_1 \langle J_\nu^X, X \upharpoonright \nu \rangle \Leftrightarrow H \prec_1 \langle J_\nu^D, D_\nu \rangle.$$

Also ist  $\langle S, \triangleleft, \mathfrak{F}, D \rangle$  ein nobler Morast. Insbesondere gilt auch  $(CP2)^*$ , wo  $H \prec_1 \langle J_\nu^D, D_\nu \rangle$  in der Voraussetzung auftritt (vgl. Lemma 5.3).

(C)

Sei  $x \in J_\nu^X$ ,  $i \in \omega$  und  $y = h_{\nu, B_\nu}(i, x)$ . Da  $C_\nu$  in  $\nu$  unbeschränkt ist, gibt es ein  $\lambda \in C_\nu$  mit  $x, y \in J_\lambda^X$ . Nach Lemma 5.1 (g) ist  $B_\lambda = B_\nu \cap J_\lambda^X$ . Also ist  $y = h_{\lambda, B_\lambda}(i, x)$ . Aber  $B_\nu = \{0\} \times A_\nu \cup \{ \langle 1, \alpha_\nu^*, p_\nu \rangle \}$  und  $B_\lambda = \{0\} \times A_\lambda \cup \{ \langle 1, \alpha_\lambda^*, p_\lambda \rangle \}$ .

(SP)

Sei  $\mu := \mu_\nu$ ,  $k := n(\mu)$  und

$\pi(n, \beta, \xi) :=$  die Umkehrung der Transitivierung von

$$h_\mu^{k+n}[\omega \times (J_\beta^X \times \{ \alpha_\mu^{**}, p_\mu^*, \xi^* \}^{<\omega})].$$

Dabei sei

$\xi^* :=$  minimal mit  $h_\mu^{k+n-1}(i, \xi^*) = \xi$  für ein  $i \in \omega$

$p_\mu^* :=$  minimal mit  $h_\mu^{k+n-1}(i, p_\mu^*) = p_\mu$  für ein  $i \in \omega$

$\alpha_\mu^{**} :=$  minimal mit  $h_\mu^{k+n-1}(i, \alpha_\mu^{**}) = \alpha_\mu^*$  für ein  $i \in \omega$ .

Zeige durch Induktion für alle  $n \in \omega$

$$| f_{(\beta, \xi, \mu)}^{1+n} | = \pi(n, \beta, \xi).$$

Für  $n = 0$  gilt das nach Definition von  $f_{(\beta, \xi, \mu)}^1 = f_{(\beta, \xi, \mu)}$ . Sei also  $| f_{(\beta, \xi, \mu)}^m | = \pi(m-1, \beta, \xi)$  für alle  $1 \leq m \leq n$  bereits bewiesen. Dann ist nach Definition von  $\tau(m, \mu)$

$\alpha_{\tau(m, \mu)} =$  das  $(k+m-1)$ -te Projektum von  $\mu$ .

Sei  $\pi(n, \beta, \xi) : I_{\bar{\mu}} \rightarrow I_\mu$ . Dann ist  $\xi(m, \mu) = \pi(n, \beta, \xi)\xi(m, \bar{\mu})$  für alle  $1 \leq m \leq n$ . Das zeigt man wie in (8) im Beweis von Satz 2.9:

Sei  $\pi := \pi(n, \beta, \xi)$ ,  $\alpha := \pi^{-1}[\alpha_{\tau(m, \mu)} \cap rng(\pi)]$ ,  $\rho := \pi(\alpha)$

$r :=$  minimal mit  $h_\mu^{k+m-2}(i, r) = p_\mu$  für ein  $i \in \omega$

$\alpha' := \text{minimal mit } h_\mu^{k+m-2}(i, \alpha') = \alpha_\mu^* \text{ für ein } i \in \omega$

$p := \text{der } (k + m - 1)\text{-te Standardparameter von } \mu$

und  $\pi(\bar{r}) = r$ ,  $\pi(\bar{p}) = p$ ,  $\pi(\bar{\alpha}') = \alpha'$ . Sei  $\bar{\xi} := \xi(m, \bar{\mu})$ . Dann ist  $\bar{p} = h_{\bar{\mu}}^{k+m-1}(i, \langle \bar{x}, \bar{\xi}, \bar{r}, \bar{\alpha}' \rangle)$  für ein  $\bar{x} \in J_{\bar{\alpha}}^X$ . Denn  $\alpha = \alpha_{\tau(m, \bar{\mu})}$ . Also ist  $p = h_\mu^{k+m-1}(i, \langle x, \xi, r, \alpha' \rangle)$  mit  $\pi(\bar{x}) = x$  und  $\pi(\bar{\xi}) = \xi$ . D.h.  $h_\mu^{k+m-1}[\omega \times (J_{\alpha_{\tau(m, \mu)}}^X \times \{\alpha', r, \xi\}^{<\omega})] = J_\mu^X$  nach Definition von  $p$ . D.h.  $\xi(m, \mu) \leq \xi$ . Angenommen  $\xi(m, \mu) < \xi$ . Dann würde  $I_\mu \models (\exists \eta < \xi)(\exists i \in \omega)(\exists x \in J_\rho^X)(\xi = h_\mu^{k+m-1}(i, \langle x, \eta, r, \alpha' \rangle))$  gelten. Also gilt auch  $I_{\bar{\mu}} \models (\exists \eta < \bar{\xi})(\exists i \in \omega)(\exists x \in J_{\bar{\alpha}}^X)(\bar{\xi} = h_{\bar{\mu}}^{k+m-1}(i, \langle x, \eta, \bar{r}, \bar{\alpha}' \rangle))$ . Das widerspricht aber der Definition von  $\bar{\xi} = \xi(m, \bar{\mu})$ .

Also ist für alle  $1 \leq m \leq n$

$$\xi(m, \mu) \in \text{rng}(\pi(n, \beta, \xi)).$$

Außerdem ist für alle  $\beta < \alpha_{\tau(m, \mu)}$

$$d(f_{(\beta, \xi(m, \mu), \mu)}^m) < \alpha_{\tau(m, \mu)}.$$

Betrachte  $\pi := \pi(m-1, \beta, \xi) = |f_{(\beta, \xi, \mu)}^m|$  mit  $\xi = \xi(m, \mu)$ . Dann ist  $\pi : I_{\bar{\mu}} \rightarrow I_\mu$  die Umkehrung der Transitivierung von  $h_\mu^{k+m-1}[\omega \times (\beta \times \{\xi, \alpha', r\}^{<\omega})]$  mit

$r := \text{minimal mit } h_\mu^{k+m-2}(i, r) = p_\mu \text{ für ein } i \in \omega$

$\alpha' := \text{minimal mit } h_\mu^{k+m-2}(i, \alpha') = \alpha_\mu^* \text{ für ein } i \in \omega.$

Und es gilt  $h_{\bar{\mu}}^{k+m-1}[\omega \times (\beta \times \{\bar{\xi}, \bar{\alpha}', \bar{r}\}^{<\omega})] = J_{\bar{\mu}}^X$  mit  $\pi(\bar{\xi}) = \xi$ ,  $\pi(\bar{\alpha}') = \alpha'$  und  $\pi(\bar{r}) = r$ . Angenommen  $\alpha_{\tau(m, \mu)} \leq \bar{\mu} < \mu$ . Dann gäbe es über  $I_{\bar{\mu}}$  eine Surjektion von  $\beta < \alpha_{\tau(m, \mu)}$  auf  $\alpha_{\tau(m, \mu)}$ . Das widerspricht der Tatsache, daß  $\alpha_{\tau(m, \mu)}$  in  $I_\mu$  eine Kardinalzahl ist. Ist  $\bar{\mu} = \mu$ , so ist bereits  $f_{(\beta, \bar{\xi}, \mu)}^m = id_\mu$ . Das widerspricht der Minimalität von  $\tau(m, \mu)$ .

Wegen  $\xi(m, \mu) \in \text{rng}(\pi(n, \beta, \xi))$  kann man also wie in Lemma 5.4

$$\text{rng}(\pi(n, \beta, \xi)) \cap J_{\alpha_{\tau(m, \mu)}}^D \prec_1 \langle J_{\alpha_{\tau(m, \mu)}}^D, D_{\alpha_{\tau(m, \mu)}}, K_\mu^m \rangle$$

für alle  $1 \leq m \leq n$  zeigen.

Bleibt die Minimalität zu zeigen. Sei dazu  $f \Rightarrow \mu$  mit  $\beta \cup \{\xi\} \subseteq \text{rng}(f)$ , so daß für alle  $1 \leq m \leq n$

$$\text{rng}(f) \cap J_{\alpha_{\tau(m, \mu)}}^D \prec_1 \langle J_{\alpha_{\tau(m, \mu)}}^D, D_{\alpha_{\tau(m, \mu)}}, K_\mu^m \rangle$$

$$\xi(m, \mu) \in \text{rng}(f)$$

gilt. Zeige, daß  $f$   $\Sigma_{k+n}$ -elementar ist und die ersten Standardparameter bis einschließlich des  $(k+n-1)$ -ten in  $\text{rng}(f)$  liegen. Das reicht, denn  $\pi(n, \beta, \xi)$  ist das minimale solche.

Sei  $p_\mu^{k+m}$  der  $(k+m)$ -te Standardparameter von  $\mu$ .

Zeige durch Induktion über  $0 \leq m \leq n$

$f$  ist  $\Sigma_{k+m}$ -elementar

$$p_\mu^1, \dots, p_\mu^{k+m-1} \in \text{rng}(f).$$

Für  $m=0$  ist das wegen  $f \Rightarrow \mu$  klar. Sei es also für  $m < n$  bereits bewiesen. Dann sei  $\alpha := \alpha_{\tau(m+1, \mu)}$  und  $\bar{\alpha} = f^{-1}[\alpha \cap \text{rng}(f)]$ . Betrachte  $\pi := (f \upharpoonright J_{\bar{\alpha}}^D) : \langle J_{\bar{\alpha}}^D, D_{\bar{\alpha}}, \bar{K} \rangle \rightarrow \langle J_\alpha^D, D_\alpha, K_\mu^{m+1} \rangle$ . Konstruiere eine  $\Sigma_{k+m+1}$ -elementare Fortsetzung  $\tilde{\pi}$  von  $\pi$ . Dazu seien

$$f_\beta = f_{(\beta, \xi(m+1, \mu), \mu)}^{m+1}$$

$$\mu(\beta) = d(f_\beta)$$

$$H = \bigcup \{f_\beta[\text{rng}(\pi) \cap J_{\mu(\beta)}^D] \mid \beta < \alpha\}.$$

Dann ist  $H \cap J_\alpha^D = \text{rng}(\pi)$ . Denn  $\text{rng}(\pi) \subseteq H \cap J_\alpha^D$  ist klar, da  $f_\beta \upharpoonright J_\beta^D = \text{id} \upharpoonright J_\beta^D$  ist. Sei also  $y \in H \cap J_\alpha^D$ . D.h.  $y = f_\beta(x)$  für ein  $x \in \text{rng}(\pi)$  und ein  $\beta < \alpha$ . Sei  $K^+ = K_\mu^{m+1} - \text{Lim}(K_\mu^{m+1})$  und  $\beta(\eta) = \sup\{\beta \mid f_{(\beta, \xi(m+1, \eta), \eta)}^{m+1} \neq \text{id}_\eta\}$ . Dann gilt

$$\langle J_\alpha^D, D_\alpha, K_\mu^{m+1} \rangle \models (\exists y)(\exists \eta \in K^+)(y = f_{(\beta, \xi(m+1, \eta), \eta)}^{m+1}(x) \in J_{\beta(\eta)}^D).$$

Da  $\text{rng}(\pi) \prec_1 \langle J_\alpha^D, D_\alpha, K_\mu^{m+1} \rangle$  ist, ist also mit  $x \in \text{rng}(\pi)$  auch  $y = f_{(\beta, \xi(m+1, \eta), \eta)}^{m+1}(x) \in \text{rng}(\pi)$  für ein solches  $\eta$ . Weil aber  $y = f_{(\beta, \xi(m+1, \eta), \eta)}^{m+1}(x) \in J_{\beta(\eta)}^D$  ist, gilt  $f_\beta(x) = f_{(\beta, \xi(m+1, \eta), \eta)}^{m+1}(x) \in \text{rng}(\pi)$ .

Zeige  $H \prec_{k+m+1} I_\mu$ . Da  $f_{(\beta, \xi, \mu)}^{m+1} = \pi(m, \beta, \xi)$  ist, ist  $\alpha_{\tau(m+1, \mu)}$  das  $(k+m)$ -te Projektum von  $\mu$ . Wie in (8) im Beweis von Satz 2.9 kann man zeigen, daß der  $(k+m)$ -te Standardparameter  $p_\mu^{k+m}$  von  $\mu$  in  $\text{rng}(f_\beta)$  ist. Sei nun  $I_\mu \models (\exists x)\varphi(x, y, p_\mu^1, \dots, p_\mu^{k+m})$  mit einer  $\Pi_{k+m}$ -Formel  $\varphi$  und  $y \in H \cap J_\alpha^D$ . Da die  $f_\beta$   $\Sigma_{k+m}$ -elementar sind, gilt

$$I_\mu \models (\exists x)\varphi(x, y, p_\mu^1, \dots, p_\mu^{k+m}) \Leftrightarrow (\exists \gamma \in K_\mu^{m+1})(\exists x)(I_\gamma \models \varphi(x, y, p_\gamma^1, \dots, p_\gamma^{k+m})).$$

Da  $\text{rng}(\pi) \prec_1 \langle J_\alpha^D, D_\alpha, K_\mu^{m+1} \rangle$  ist, ist also auch

$$\text{rng}(\pi) \models (\exists \gamma \in K_\mu^{m+1})(\exists x)(I_\gamma \models \varphi(x, y, p_\gamma^1, \dots, p_\gamma^{k+m})).$$

Somit gibt es ein solches  $x$  in  $\text{rng}(\pi)$  und damit in  $H$ .

Sei  $\tilde{\pi}$  die Umkehrung der Transitivierung von  $H$ . Dann ist  $\tilde{\pi}$   $\Sigma_{k+m}$ -elementar und da  $p_\mu^1, \dots, p_\mu^{k+m}$  für alle  $\beta < \alpha$  in  $\text{rng}(f_\beta)$  sind, gilt  $p_\mu^1, \dots, p_\mu^{k+m} \in \text{rng}(\pi) = H$ . Außerdem gilt nach Induktionsvoraussetzung, daß  $f$   $\Sigma_{k+m}$ -elementar ist und  $p_\mu^1, \dots, p_\mu^{k+m-1} \in \text{rng}(f)$  sind. Wieder wie in (8) im Beweis von Satz 2.9 kann man mit  $\xi(m+1, \mu) \in \text{rng}(f)$  zeigen, daß auch  $p_\mu^{k+m} \in \text{rng}(f)$  ist. Da  $\tilde{\pi}$  und  $f$  aber auch auf dem  $(k+m)$ -ten Projektum übereinstimmen, gilt  $\tilde{\pi} = f$ .

Aus  $|f_{(\beta, \xi, \mu)}^{1+n}| = \pi(n, \beta, \xi)$  folgt (SP), denn für alle  $\nu \sqsubset \tau \sqsubseteq \mu_\nu$  mit  $\tau \in S^+$  bzw.  $\tau = \nu$  gilt:

$$p_\tau \in \text{rng}(\pi(n, \beta, \xi)) \Leftrightarrow \xi_\tau \in \text{rng}(\pi(n, \beta, \xi)).$$

Das zeigt man wieder wie in (8) im Beweis von Satz 2.9.

(DP3)\*

(a) ist klar.

(b) wurde bereits bei (SP) mitbewiesen.

Die übrigen Eigenschaften eines Standardmorastes folgen direkt aus der Konstruktion.  $\square$

### Lemma 5.14

Sei ein Standardmorast, der (SD) erfüllt, gegeben. Setze  $\alpha_{\tau(0, \nu)} = \mu_\nu$  und  $\xi(0, \nu) = \emptyset$  für alle  $\nu$ . Dann gilt für alle  $0 \leq n$  und  $\nu \in S^2$ :

(i) Sei  $f : \bar{\nu} \Rightarrow_{n+1} \nu$ ,  $\alpha := \alpha_{\tau(n, \nu)}$  und  $\bar{\alpha} := f^{-1}[\alpha \cap \text{rng}(f)]$ . Dann gilt  $\bar{\alpha} = \alpha_{\tau(n, \bar{\nu})}$ .

(ii) Ist  $f : \bar{\nu} \Rightarrow_{n+1} \nu$ , dann gilt  $f(\xi(n, \bar{\nu})) = \xi(n, \nu)$ .

(iii) Sei  $f : \bar{\nu} \Rightarrow_{n+1} \nu$  und  $\bar{K} = f^{-1}[K_\nu^n \cap \text{rng}(f)]$ . Dann ist  $\bar{K} = K_{\bar{\nu}}^n$ .

(iv) Sind  $f, g \Rightarrow_{n+1} \nu$  und  $\text{rng}(f) \subseteq \text{rng}(g)$ , so ist  $g^{-1}f \Rightarrow_{n+1} d(g)$ .

(v) Für  $u \subseteq J_{\mu_\nu}^D$  existiert  $f_{(u, \nu)}^{n+1}$ .

(vi) Für alle  $\beta < \nu$  und  $\xi \in J_{\mu_\nu}^D$  ist  $f_{(\beta, \xi, \nu)}^{n+1}$  uniform definierbar über  $\langle J_\nu^D, D_\nu, D^\nu \rangle$ .

**Beweis** durch Induktion über  $n$ . Für  $n = 0$  gelten (i) bis (v) aufgrund der Morastaxiome.

(vi) Die  $\text{rng}(f_{(0, \xi, \nu)}^1)$  sind aufgrund von (SD) über  $\langle J_\nu^D, D_\nu, D^\nu \rangle$  uniform definierbar. Wie in Beweis von Lemma 2.6 gilt  $\text{rng}(f_{(\beta, \xi, \nu)}^1) = \bigcup \{ \text{rng}(f_{(0, \eta, \nu)}^1) \mid \eta \in (\beta \cup \{\xi\})^{<\omega} \}$ . Und  $f_{(\beta, \xi, \nu)}^1(x) = y$  berechnet man durch: Es gibt ein  $\bar{\nu}$  und ein  $\bar{\xi}$ , so daß für alle  $\eta \in \beta^{<\omega}$

$$d(f_{(0, \langle \eta, \bar{\xi} \rangle, \bar{\nu})}) = d(f_{(0, \langle \eta, \xi \rangle, \nu)})$$

gilt und für alle  $t \in J_{\bar{\nu}}^D$  ein  $\eta \in \beta^{<\omega}$  existiert mit

$$t \in \text{rng}(f_{(0,(\eta,\bar{\xi}),\bar{\nu})})$$

und ein  $z$  und ein  $\eta \in \beta^{<\omega}$  existiert mit

$$f_{(0,(\eta,\bar{\xi}),\bar{\nu})}(z) = x \Leftrightarrow f_{(0,(\eta,\xi),\nu)}(z) = y.$$

Seien (i) bis (vi) nun für alle  $0 \leq m < n$  bereits bewiesen.

(i) Sei  $B^n(\xi, \nu) := \{\beta(f_{(\gamma,\xi,\nu)}^n) < \alpha_{\tau(n,\nu)} \mid \gamma < \nu\} = \{\beta < \alpha_{\tau(n,\nu)} \mid \beta \notin \text{rng}(f_{(\beta,\xi,\nu)}^n)\}$ . Sei  $f(\bar{\xi}) = \xi(n, \nu)$ ,  $B = B^n(\xi, \nu)$  und  $\bar{B} := f^{-1}[B \cap \text{rng}(f)]$ . Dann gilt nach (iv) der Induktionsvoraussetzung  $f \circ f_{(\bar{u},\bar{\nu})}^n = f_{(u,\nu)}^n$  für  $\bar{u} \subseteq J_{\mu\bar{\nu}}^D$  und  $u = f[\bar{u}]$  (vgl. Lemma 2.7b). Ist also  $f(\bar{\beta}) = \beta \in \text{rng}(f_{(\beta,\xi(n,\nu),\nu)})$ , so ist  $\bar{\beta} \in \text{rng}(f_{(\bar{\beta},\bar{\xi},\bar{\nu})})$ . Denn  $\bar{\beta} = f^{-1}[\beta \cap \text{rng}(f)]$ . Und ist  $f(\bar{\beta}) = \beta \notin \text{rng}(f_{(\beta,\xi(n,\nu),\nu)})$ , so ist  $\bar{\beta} \notin \text{rng}(f_{(\bar{\beta},\bar{\xi},\bar{\nu})})$ . D.h. insgesamt ist  $\bar{B} = B^n(\bar{\xi}, \bar{\nu})$ . Nach (DP3)<sup>\*</sup>(b) und (iv) der Induktionsvoraussetzung ist  $B^n(\xi(n, \nu), \nu) = \bigcup\{B^n(\xi(n, \eta), \eta) \mid \eta \in K_{\nu}^n\}$ . Nun ist aber  $B^n(\xi(n, \nu), \nu)$  in  $\alpha$  unbeschränkt und  $\text{rng}(f) \cap J_{\alpha}^D \prec_1 \langle J_{\alpha}^D, D_{\alpha}, K_{\nu}^n \rangle$ . Also ist auch  $\bar{B} = B^n(\bar{\xi}, \bar{\nu})$  in  $\bar{\alpha}$  unbeschränkt. Angenommen es gäbe ein  $\zeta \in J_{\mu\bar{\nu}}^D$  und ein  $\beta < \bar{\alpha}$  mit  $f_{(\beta,\zeta,\bar{\nu})}^n = id_{\bar{\nu}}$ . Dann gäbe es ein  $\beta \leq \gamma < \bar{\alpha}$  mit  $\zeta \in \text{rng}(f_{(\gamma,\bar{\xi},\bar{\nu})}^n)$ . Denn nach (iv) der Induktionsvoraussetzung ist  $f_{(\bar{\alpha},\bar{\xi},\bar{\nu})}^n = id_{\bar{\nu}}$ . Also wäre  $f_{(\gamma,\bar{\xi},\bar{\nu})}^n = id_{\bar{\nu}}$ . Das widerspricht aber der Tatsache, daß  $B^n(\bar{\xi}, \bar{\nu})$  in  $\bar{\alpha}$  unbeschränkt ist.

(ii) Nach dem Beweis von (i) gilt  $f_{(\bar{\alpha},\bar{\xi},\bar{\nu})}^n = id_{\bar{\nu}}$  mit  $\bar{\alpha} = \alpha_{\tau(n,\bar{\nu})}$  und  $f(\bar{\xi}) = \xi(n, \bar{\nu})$ . Also ist  $\xi(n, \bar{\nu}) \leq \bar{\xi}$ . Angenommen  $\xi(n, \bar{\nu}) < \bar{\xi}$ . Dann wäre  $\xi(n, \nu) \in \text{rng}(f_{(\alpha,\xi,\nu)}^n)$  mit  $\xi := f(\xi(n, \bar{\nu}))$  und  $\alpha := \alpha_{\tau(n,\nu)}$ . Also wäre  $f_{(\alpha,\xi,\nu)}^n = id_{\nu}$  mit  $\xi < \xi(n, \nu)$ , was aber der Definition von  $\xi(n, \nu)$  widerspricht.

(iii) Sei  $f(\bar{\mu}) = \mu$ ,  $K^+ = K_{\nu}^n - \text{Lim}(K_{\nu}^n)$  und  $\bar{K}^+ = K_{\bar{\nu}}^n - \text{Lim}(K_{\bar{\nu}}^n)$ . Zeige zuerst  $\mu \in K^+ \Rightarrow \bar{\mu} \in \bar{K}^+$ . Aus (i) und (ii) wissen wir, daß  $\bar{B} = f^{-1}[B \cap \text{rng}(f)]$  ist mit  $B = B^n(\xi, \nu)$ ,  $\bar{B} = B^n(\bar{\xi}, \bar{\nu})$  und  $\xi = \xi(n, \nu)$ ,  $\bar{\xi} = \xi(n, \bar{\nu})$ . Sei  $\mu = d(f_{(\beta,\xi,\nu)}^n)$ . Da  $\mu \in K^+ \cap \text{rng}(f)$  ist, können wir  $\beta \in B^+ \cap \text{rng}(f)$  mit  $B^+ = B - \text{Lim}(B)$  annehmen. Sei  $\delta$  der Vorgänger von  $\beta$  in  $B$ . Dann ist  $f_{(\delta,(\delta,\xi),\mu)}^n = id_{\mu}$ . Definiere  $\gamma = \beta$  für  $\beta \in S^+ \cup S^0$ , und  $\gamma = \min\{\gamma \sqsubset \beta \mid \delta < \gamma\}$  sonst. Dann ist  $\gamma \in \text{rng}(f)$  und nach (DP3)<sup>\*</sup>(a)  $\mu = \mu_{\gamma}$ . Sei  $f(\bar{\beta}) = \beta$ ,  $f(\bar{\gamma}) = \gamma$ . Wegen (iv) der Induktionsvoraussetzung gilt  $\bar{\mu} = \mu_{\bar{\gamma}} = d(f_{(\bar{\beta},\bar{\xi},\bar{\nu})}^n) \in \bar{K}^+$ . Genauso zeigt man  $\bar{\mu} \in \bar{K}^+ \Rightarrow \mu \in K^+$ . Aber  $K_{\nu}^n = \bigcup\{K_{\eta}^n \mid \eta \in K^+\}$  und  $K_{\bar{\nu}}^n = \bigcup\{K_{\eta}^n \mid \eta \in \bar{K}^+\}$ . Also gilt tatsächlich die Behauptung.

(iv) folgt unmittelbar aus (ii), (iii) und der Definition von  $\Rightarrow_{n+1}$ .

(v) Zunächst stellt man fest, daß  $\langle J_{\alpha}^D, D_{\alpha}, K_{\nu}^n \rangle$  mit  $\alpha := \alpha_{\tau(n,\nu)}$  rudimentär abgeschlossen ist. Denn wegen (iv) ist  $K_{\nu}^n \cap \eta = K_{\eta}^n$  für alle  $\eta \in K_{\nu}^n$ . Aber

wegen (vi) der Induktionsvoraussetzung ist  $K_\eta^n$  über  $\langle J_\eta^D, D_\eta, D_\eta^n \rangle$  definierbar. Da  $\langle J_\alpha^D, D_\alpha, K_\nu^n \rangle$  rudimentär abgeschlossen ist, gilt aber nach der Definition von  $\Rightarrow_{n+1}$ :

$$f_{(u,\nu)}^{n+1} = f_{(w \cup u \cup \{\xi(n,\nu)\}, \nu)}^n$$

mit  $w := h[\omega \times (u \cap J_\alpha^D)^{<\omega}]$ .

Dabei sei  $h$  die kanonische Skolemfunktion von  $\langle J_\alpha^D, D_\alpha, K_\nu^n \rangle$  aus Satz 1.13.

(vi) Ist  $w \prec_1 \langle J_{\alpha_{\tau(n,\nu)}}^D, D_{\alpha_{\tau(n,\nu)}}, K_\nu^n \rangle$ , so gibt es ein eindeutig bestimmtes  $f \Rightarrow_{n+1} \nu$  mit  $\text{rng}(f) \cap J_{\alpha_{\tau(n,\nu)}}^D = w$ .

Existenz :

Sei  $\alpha := \alpha_{\tau(n,\nu)}$  und seien

$$f_\beta = f_{(\beta, \xi(n,\nu), \nu)}^n$$

$$\nu(\beta) = d(f_\beta)$$

$$H = \bigcup \{f_\beta[w \cap J_{\nu(\beta)}^D] \mid \beta < \alpha\}.$$

Dann ist  $H \cap J_\alpha^D = w$ . Denn  $w \subseteq H \cap J_\alpha^D$  ist klar, da  $f_\beta \upharpoonright J_\beta^D = id \upharpoonright J_\beta^D$  ist. Sei also  $y \in H \cap J_\alpha^D$ . D.h.  $y = f_\beta(x)$  für ein  $x \in w$  und ein  $\beta < \alpha$ . Sei  $K^+ = K_\nu^n - \text{Lim}(K_\nu^n)$  und  $\beta(\eta) = \sup\{\beta \mid f_{(\beta, \xi(n,\eta), \eta)}^n \neq id_\eta\}$ . Dann gilt

$$\langle J_\alpha^D, D_\alpha, K_\nu^n \rangle \models (\exists y)(\exists \eta \in K^+)(y = f_{(\beta, \xi(m+1,\eta), \eta)}^{m+1}(x) \in J_{\beta(\eta)}^D).$$

Da  $w \prec_1 \langle J_\alpha^D, D_\alpha, K_\nu^n \rangle$  ist, ist also mit  $x \in w$  auch  $y = f_{(\beta, \xi(n,\eta), \eta)}^n(x) \in w$  für ein solches  $\eta$ . Weil aber  $y = f_{(\beta, \xi(n,\eta), \eta)}^n(x) \in J_{\beta(\eta)}^D$  ist, gilt  $f_\beta(x) = f_{(\beta, \xi(n,\eta), \eta)}^n(x) \in w$ .

Sei  $|f| : J_\nu^D \rightarrow J_\nu^D$  die Umkehrung der Transitivierung von  $H$  und  $f = \langle \bar{\nu}, |f|, \nu \rangle$ . Dann ist  $f : \bar{\nu} \Rightarrow_{n+1} \nu$ . Denn für alle  $\beta < \alpha$  gilt wegen (SD)  $f^{(\bar{\nu}(\beta))} : \bar{\nu}(\beta) \Rightarrow_n \nu(\beta)$  mit  $f(\bar{\nu}(\beta)) = \nu(\beta)$ , falls  $\nu(\beta) \in \text{rng}(f)$  ist. Sei  $\Gamma = \{\beta < \alpha \mid \nu(\beta) \in \text{rng}(f)\}$ . Für  $\beta, \gamma \in \Gamma$  seien  $g_\beta = f_\beta \circ f^{(\bar{\nu}(\beta))}$  und  $g_{\beta\gamma} = g_\gamma^{-1} \circ g_\beta$ . Sei  $\langle h_\beta \mid \beta \in \Gamma \rangle$  der transitive, direkte Limes des gerichteten Systems  $\langle g_{\beta\gamma} \mid \beta \leq \gamma \in \Gamma \rangle$ . Dann ist  $f \circ h_\beta = g_\beta$  für alle  $\beta \in \Gamma$ . Also ist nach (CP1) und (iv) der Induktionsvoraussetzung  $f : \bar{\nu} \Rightarrow_n \nu$ . Aber  $\xi(n+1, \nu) \in H = \text{rng}(f)$  und  $\text{rng}(f) \cap J_\alpha^D = w \prec_1 \langle J_\alpha^D, D_\alpha, K_\nu^n \rangle$ . Also ist  $f : \bar{\nu} \Rightarrow_{n+1} \nu$ .

Eindeutigkeit:

Sei  $f : \bar{\nu} \Rightarrow_{n+1} \nu$  mit  $\text{rng}(f) \cap J_{\alpha_{\tau(n,\nu)}}^D = w$  und  $\bar{\alpha} := f^{-1}[\alpha \cap \text{rng}(f)]$ . Dann gilt nach (i)  $\bar{\alpha} = \alpha_{\tau(n,\bar{\nu})}$ . Und nach (iv) gilt  $f \circ f_{(\bar{\alpha}, \bar{\nu})}^{n+1} = f_{(w,\nu)}^{n+1}$  (vgl. Lemma 2.7b). Aber da  $\bar{\alpha} = \alpha_{\tau(n,\bar{\nu})}$  ist, ist  $f_{(\bar{\alpha}, \bar{\nu})}^{n+1} = id_{\bar{\nu}}$ . Also ist  $f = f_{(w,\nu)}^{n+1}$  eindeutig bestimmt.

Sei  $f_{(0, \langle \xi(n, \nu), \xi \rangle, \nu)}^n(\xi^*) = \xi$ . Betrachte  $w = h_{(n, \nu)}[\omega \times (\beta^{<\omega} \times \{\xi^*\})]$ . Dabei sei  $h_{(n, \nu)}$  die  $\Sigma_1$ -Skolemfunktion von  $\langle J_{\alpha_{\tau(n, \nu)}}^D, D_{\alpha_{\tau(n, \nu)}}, K_\nu^n \rangle$ . Nach (vi) der Induktionsvoraussetzung ist  $K_\nu^n$  uniform über  $\langle J_\nu^D, D_\nu, D^\nu \rangle$  definierbar. Daher ist nach Satz 1.13 das  $w$  uniform über  $\langle J_\nu^D, D_\nu, D^\nu \rangle$  definierbar. Sei  $\pi$  die Umkehrung der Transitivierung von  $w$ . Dann kann man  $\pi(x) = y$  definieren durch: Es gibt ein  $\bar{\nu} \leq \nu$  und ein  $\bar{\xi} \leq \xi^*$ , so daß für alle  $i \in \omega$  und  $\eta \in \beta^{<\omega}$

$$(\exists z \in J_{\alpha_{\tau(n, \bar{\nu})}}^D)(z = h_{(n, \bar{\nu})}(i, \langle \eta, \bar{\xi} \rangle)) \Leftrightarrow (\exists z \in J_{\alpha_{\tau(n, \nu)}}^X)(z = h_{(n, \nu)}(i, \langle \eta, \xi^* \rangle))$$

gilt und für alle  $z \in J_{\alpha_{\tau(n, \bar{\nu})}}^X$  ein  $i \in \omega$  und ein  $\eta \in \beta^{<\omega}$  mit

$$z = h_{(n, \bar{\nu})}(i, \langle \eta, \bar{\xi} \rangle)$$

existiert und es ein  $i \in \omega$  und ein  $\eta \in \beta^{<\omega}$  mit

$$h_{(n, \bar{\nu})}(i, \langle \eta, \bar{\xi} \rangle) = x \Leftrightarrow h_{(n, \nu)}(i, \langle \eta, \xi^* \rangle) = y$$

gibt. Dadurch ist  $\bar{\nu}$  eindeutig bestimmt. Nach dem oben gezeigten, kann man also  $f_{(\beta, \xi, \nu)}^{n+1}(x) = f_{(w, \nu)}^n(x) = y$  definieren durch: Für alle  $\xi \in \alpha_{\tau(n, \bar{\nu})}^{<\omega}$  gilt

$$d(f_{(0, \langle \xi, \xi(n, \bar{\nu}) \rangle, \bar{\nu})}^n) = d(f_{(0, \langle \pi(\xi), \xi(n, \nu) \rangle, \nu)}^n)$$

und für alle  $t \in J_{\bar{\nu}}^D$  existiert ein  $\xi \in \alpha_{\tau(n, \bar{\nu})}^{<\omega}$  mit

$$t \in \text{rng}(f_{(0, \langle \xi, \xi(n, \bar{\nu}) \rangle, \bar{\nu})}^n)$$

und es existiert ein  $z$  und ein  $\xi \in \alpha_{\tau(n, \bar{\nu})}^{<\omega}$  mit

$$f_{(0, \langle \xi, \xi(n, \bar{\nu}) \rangle, \bar{\nu})}^n(z) = x \Leftrightarrow f_{(0, \langle \pi(\xi), \xi(n, \nu) \rangle, \nu)}^n(\pi(z)) = y.$$

□

### Lemma 5.15

Jeder Standardmorast erfüllt (SD).

**Beweis:** Zeige zunächst durch Induktion über  $\mu \in S^2$ , daß für alle  $\mu \in S^2$  die Menge

$$\{\langle i, \xi, \sigma_{(\xi, \mu)}(i) \rangle \mid \eta \in J_\mu^D, i \in \text{dom}(\sigma_{(\xi, \mu)})\}$$

uniform über  $\langle J_\mu^D, D_\mu, D^\mu \rangle$  definierbar ist. Sei das für alle  $\tau < \mu$ ,  $\tau \in S^2$  bereits bewiesen.

Ist dann  $C_\mu$  in  $\mu$  unbeschränkt, so gilt nach (C)

$$\sigma_{(\xi, \nu)} = \bigcup \{\sigma_{(\xi, \lambda)} \mid \lambda \in C_\nu, \xi \in J_\lambda^D\}.$$

Aufgrund der Induktionsvoraussetzung sind die  $\sigma_{(\xi,\lambda)}$  mit  $\lambda \in C_\mu$  aber uniform über  $\langle J_\mu^D, D_\mu, D^\mu \rangle$  definierbar. Und nach (E) ist  $C_\mu = D^\mu$ . Also ist  $\sigma_{(\xi,\nu)}$  uniform über  $\langle J_\mu^D, D_\mu, D^\mu \rangle$  definierbar.

Ist  $C_\mu$  in  $\mu$  beschränkt, so ist  $\text{rng}(f_{(0,q_\mu,\mu)})$  in  $\mu$  unbeschränkt. Also gilt nach (CP2)\*

$$\text{rng}(f_{(0,(\xi,q_\mu),\mu)}) = h_\mu[\omega \times (\text{rng}(f_{(0,q_\mu,\mu)}) \times \{\xi\})].$$

Dabei sei  $h_\mu$  die  $\Sigma_1$ -Skolemfunktion von  $\langle J_\mu^D, D_\mu \rangle$  entsprechend Satz 1.13. Da  $D^\mu = \text{rng}(f_{(0,q_\mu,\mu)})$  ist, sind nach Satz 1.13 die  $\text{rng}(f_{(0,(\xi,q_\mu),\mu)})$  uniform über  $\langle J_\mu^D, D_\mu, D^\mu \rangle$  definierbar. Da nach (B) und Lemma 5.7 (b) für  $\bar{\mu} := d(f_{(0,(\xi,q_\mu),\mu)})$

$$f_{(0,(\xi,q_\mu),\mu)} \circ \sigma_{(q_{\bar{\mu}},\bar{\mu})} = \sigma_{(q_\mu,\mu)}$$

gilt, kann man  $f_{(0,(\xi,q_\mu),\mu)}(x) = y$  definieren durch: Es gibt ein  $\bar{\mu} \leq \mu$  und ein  $\bar{\xi} \leq \xi$ , so daß für alle  $i, j \in \omega$

$$(\exists z \in J_{\bar{\mu}}^D)(z = h_{\bar{\mu}}(i, \langle \sigma_{(q_{\bar{\mu}},\bar{\mu})}(j), \bar{\xi} \rangle)) \Leftrightarrow (\exists z \in J_\mu^D)(z = h_\mu(i, \langle \sigma_{(q_\mu,\mu)}(j), \xi \rangle))$$

gilt *und* für alle  $z \in J_{\bar{\mu}}^D$  ein  $i \in \omega$  und ein  $j \in \omega$  mit

$$z = h_{\bar{\mu}}(i, \langle \sigma_{(q_{\bar{\mu}},\bar{\mu})}(j), \bar{\xi} \rangle)$$

existiert *und* es ein  $i \in \omega$  und ein  $j \in \omega$  mit

$$h_{\bar{\mu}}(i, \langle \sigma_{(q_{\bar{\mu}},\bar{\mu})}(j), \bar{\xi} \rangle) = x \Leftrightarrow h_\mu(i, \langle \sigma_{(q_\mu,\mu)}(j), \xi \rangle) = y$$

gibt.

Ist nun  $\alpha_{\tau(1,\mu)} = 0$ , so folgt aus (D), daß  $\{\langle i, \xi, \sigma_{(\xi,\mu)}(i) \rangle \mid \eta \in J_\mu^D, i \in \text{dom}(\sigma_{(\xi,\mu)})\}$  uniform über  $\langle J_\mu^D, D_\mu, D^\mu \rangle$  definierbar ist. Ist aber  $\alpha_{\tau(1,\mu)} > 0$ , so ist nach (DP3)\*(b) stets  $\bar{\mu} = d(f_{(0,(\xi,q_\mu),\mu)}) < \mu$ . Aber dann ist nach (B)  $\sigma_{(\xi,\mu)} = f_{(0,(\xi,q_\mu),\mu)} \circ \sigma_{(\bar{\xi},\bar{\mu})}$  mit  $f_{(0,(\xi,q_\mu),\mu)}(\bar{\xi}) = \xi$  mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung definierbar.

Aus den  $\sigma$ s berechnet man  $f_{(0,\xi,\mu)}(x) = y$  wie folgt: Es gibt ein  $\bar{\mu} \leq \mu$  und ein  $\bar{\xi} \leq \xi$ , so daß für alle  $r, s \in \omega$

$$\sigma_{(\bar{\xi},\bar{\mu})}(r) \leq \sigma_{(\bar{\xi},\bar{\mu})}(s) \Leftrightarrow \sigma_{(\xi,\mu)}(r) \leq \sigma_{(\xi,\mu)}(s)$$

gilt *und* für alle  $z \in J_{\bar{\mu}}^D$  ein  $s \in \omega$  mit

$$z = \sigma_{(\bar{\xi},\bar{\mu})}(s)$$

existiert *und* es ein  $s \in \omega$  mit

$$\sigma_{(\bar{\xi},\bar{\mu})}(s) = x \Leftrightarrow \sigma_{(\xi,\mu)}(s) = y$$



gibt.

Da nun aber die  $f_{(0,\xi,\mu)}^1$  uniform über  $\langle J_\mu^D, D_\mu, D^\mu \rangle$  definierbar sind und (SD) nach Induktionsvoraussetzung für alle  $\tau \in S^2 \cap \mu$  gilt, kann man die  $f_{(0,\xi,\mu)}^n$  für  $\xi \in J_\mu^D$  wie im Beweis von Lemma 5.14 uniform über  $\langle J_\mu^D, D_\mu, D^\mu \rangle$  definieren. Daraus läßt sich schließlich mit (SP)

$$\begin{aligned} & \{ \langle \xi, \nu, x, f_{(0,\xi,\nu)}(x) \rangle \mid \nu < \mu, \mu_\nu = \mu, \xi \in J_\mu^D, x \in \text{dom}(f_{(0,\xi,\nu)}) \} \\ & \cup \{ \langle \xi, x, f_{(0,\xi,\mu)}(x) \rangle \mid \xi \in J_\mu^D, x \in \text{dom}(f_{(0,\xi,\mu)}) \} \\ & \cup (\square \cap \mu^2) \end{aligned}$$

uniform über  $\langle J_\mu^D, D_\mu, D^\mu \rangle$  definieren.  $\square$

Sei nun ein Standardmorast gegeben. Damit werde ich im folgenden ein fügsames  $L[X]$  mit  $S^* = S_{On}^2$ , Kondensation und Kohärenz konstruieren, so daß  $\text{Card}^{L[X]} = \text{Card}$  ist. Dazu verwende ich die  $C_\nu$  aus (CP3):

Ist  $\nu \in S^2$  und  $C_\nu$  in  $\nu$  unbeschränkt, so sei

$$X_\nu = C_\nu.$$

Sei  $\nu \in S^2$  und  $C_\nu$  in  $\nu$  beschränkt. Dann ist  $\Lambda(q, \nu)$  für alle  $q \in \nu$  beschränkt. Also ist  $\Lambda(q_\nu, \nu) = \emptyset$ . D.h.  $f_{(0,q_\nu,\nu)}$  ist konfinal. Sei in diesem Fall

$$X_\nu = \{ \sigma_{(q_\nu,\nu)}[n] \mid n \in \omega \}.$$

Sei  $S^* = S^2$ .

### Lemma 5.16

Sei  $\nu \in S^2$  und  $C_\nu$  in  $\nu$  unbeschränkt. Ist dann  $f : \langle J_\nu^{\bar{D}}, \bar{D}, \bar{C} \rangle \rightarrow \langle J_\nu^D, D_\nu, C_\nu \rangle$   $\Sigma_1$ -elementar, so ist  $\langle \bar{\nu}, f, \nu \rangle \in \mathfrak{F}$ .

**Beweis:** Sei  $\xi \in \text{rng}(f)$ ,  $i \in \omega$  und  $y = \sigma_{(\xi,\nu)}(i)$ . Dann ist  $y \in \text{rng}(f)$  zu zeigen. Da  $C_\nu$  in  $\nu$  unbeschränkt ist, gibt es nach (C) ein  $\lambda \in C_\nu$  mit  $y = \sigma_{(\xi,\lambda)}(i)$ . Da nach Lemma 5.15 die  $\sigma_{(\xi,\tau)}$  mit  $\tau < \nu$  in  $\langle J_\nu^D, D_\nu \rangle$  definierbar sind, gilt also  $\langle J_\nu^D, D_\nu, C_\nu \rangle \models (\exists y)(\exists \lambda \in C_\nu)(y = \sigma_{(\xi,\lambda)}(i))$ . Daher gilt auch  $\text{rng}(f) \models (\exists y)(\exists \lambda \in C_\nu)(y = \sigma_{(\xi,\lambda)}(i))$ . D.h.  $y \in \text{rng}(f)$ .  $\square$

Lemma 5.16 entspricht Lemma 6.39 von Beller / Jensen / Welch [1982].

### Lemma 5.17

Sei  $\nu \in S^2$ ,  $H \prec_1 I_\nu$  und  $f$  die Umkehrung der Transitivierung von  $H$ . Sei  $f \upharpoonright On : \bar{\nu} \rightarrow \nu$ . Dann ist  $\langle \bar{\nu}, f, \nu \rangle \in \mathfrak{F}$ .

**Beweis:** Ist  $C_\nu$  in  $\nu$  beschränkt, so ist  $\lambda(f_{(0,q_\nu,\nu)}) = \nu$ , und aufgrund der Definition von  $X_\nu$  ist  $\text{rng}(f_{(0,q_\nu,\nu)}) \subseteq \text{rng}(f)$ . Außerdem ist  $f \upharpoonright J_{\bar{\nu}}^D : \langle J_{\bar{\nu}}^D, D_{\bar{\nu}} \rangle \rightarrow \langle J_\nu^D, D_\nu \rangle$   $\Sigma_1$ -elementar. Also folgt die Behauptung aus (CP2)\*. Ist  $C_\nu$  in  $\nu$  unbeschränkt, so folgt die Behauptung aus Lemma 5.16.  $\square$

### Satz 5.18

Sei  $\mathfrak{M}$  ein Standardmorast. Dann gibt es eine Folge  $X = \langle X_\nu \mid \nu \in S^* \rangle$ , so daß  $S^* = S_{O_n}^2$  ist und  $L[X]$  Kondensation und Kohärenz hat, fügsam ist und  $\text{Card}^{L[X]} = \text{Card}$ .

#### Beweis:

(1)  $L[X]$  hat Kohärenz

Sei  $\nu \in S^*$  und  $H \prec_1 I_\nu$ . Ist  $C_\nu$  in  $\nu$  unbeschränkt, so ist nach Lemma 5.17  $\lambda := \text{sup}(H \cap \nu) \in C_\nu$  und  $C_\nu \cap \lambda$  in  $\lambda$  unbeschränkt. Nach Lemma 5.11 ist aber  $C_\nu \cap \lambda = C_\lambda$ . Also ist tatsächlich  $X_\lambda = X_\nu \cap \lambda$ . Ist aber  $C_\nu$  in  $\nu$  beschränkt, so ist nach Definition von  $X_\nu$   $H \cap \nu$  in  $\nu$  unbeschränkt. D.h. es ist nichts zu zeigen.

(2)  $L[X]$  ist fügsam

Ist  $\nu \in S^*$  und  $C_\nu$  in  $\nu$  beschränkt, so ist  $X_\nu \cap J_\eta^X$  mit  $\eta < \nu$  stets endlich. Die Fügsamkeit ist also trivial. Ist  $\nu \in S^*$  und  $C_\nu$  in  $\nu$  unbeschränkt, so ist für alle  $\lambda \in C_\nu$  nach Lemma 5.11  $C_\nu \cap \lambda = C_\lambda$ . Für alle  $\lambda \in \text{Lim}(C_\nu)$  ist also  $X_\lambda = X_\nu \cap \lambda$ . Ist  $\text{Lim}(C_\nu)$  in  $\nu$  unbeschränkt, so ist man fertig. Ist es das nicht, so sei  $\lambda := \text{max}(\text{Lim}(C_\nu))$ . Dann ist  $X_\nu \cap J_\eta^X = C_\lambda \cup E$  mit einer endlichen Menge  $E$  für alle  $\eta > \lambda$ .

(3)  $L[X]$  hat Kondensation

Ist  $\nu \in S^*$ ,  $H \prec_1 I_\nu$  und  $C_\nu$  in  $\nu$  unbeschränkt, so gilt Kondensation wegen Lemma 5.12 und 5.17. Ist  $\nu \in S^*$  und  $C_\nu$  in  $\nu$  beschränkt, so ist  $H \prec_1 I_\nu$  in  $\nu$  nach Definition von  $X_\nu$  unbeschränkt. Sei  $\pi$  die Umkehrung der Transitivierung von  $H$  und  $\pi \upharpoonright On : \bar{\nu} \rightarrow \nu$ . Nach Lemma 5.7 (b) und 5.17 ist  $\pi(q_{\bar{\nu}}) = q_\nu$ . Wegen der Eigenschaften von  $\sigma_\nu$  und  $\sigma_{\bar{\nu}}$  gilt dann Kondensation.

(4)  $\text{Card}^{L[X]} = \text{Card}$

Sei  $\omega < \kappa$  eine Kardinalzahl. Dann sind nach (DP1) alle  $\nu \in S_\kappa$  unabhängig. Also gilt für alle  $f_{(\beta,0,\nu)} : \bar{\nu} \Rightarrow \nu$  mit  $\beta < \alpha_\nu = \kappa$ , daß  $\bar{\nu} < \alpha_\nu = \kappa$  ist. Somit gilt für  $F : \{\langle \beta, x \rangle \mid x < d(f_{(\beta,0,\nu)})\} \rightarrow \nu$  mit  $F(\beta, x) = f_{(\beta,0,\nu)}(x)$ , daß  $\text{rng}(F) = \bigcup \{\text{rng}(f_{(\beta,0,\nu)}) \cap \nu \mid \beta < \alpha_\nu\} = \nu$  ist. Nach Lemma 5.15 ist  $F \in L[X]$ . Also gibt es in  $L[X]$  eine Surjektion von einer Teilmenge von  $\kappa \times \kappa$  auf  $\nu$ . Aufgrund der Axiome (c) und (e) ist  $S_\kappa$  in  $\kappa^+$  unbeschränkt. Also ist  $(\kappa^+)^{L[X]} = \kappa^+$ . Da  $\omega < \kappa$  beliebig war, gilt somit  $\text{Card}^{L[X]} - \omega_1 = \text{Card} - \omega_1$ . Bleibt  $\omega_1^{L[X]} = \omega_1$  zu zeigen. Sei dazu  $\nu \in S_{\omega_1}$  und  $\eta < \omega_1$  beliebig. Nach

Axiom (1) ist dann  $\eta \subseteq \text{rng}(f_{(0,\eta,\nu)})$ . Wegen der Definition von  $X$  gibt es in  $L[X]$  eine Surjektion von  $\omega$  auf  $\eta \subseteq \text{rng}(f_{(0,\eta,\nu)})$ . Denn ist  $n_\nu = 1$ , so ist nach (SP)  $\sigma_{(\langle \eta, \alpha_\nu^*, P_\nu \rangle, \mu_\nu)}$  eine geeignete Surjektion. Und wenn  $n_\nu > 1$  ist, ist nach dem Beweis von Lemma 5.14 (vi) und (SP)

$$h(i) := h_{\alpha_{\tau(n_\nu-1, \mu_\nu)}, K_{\mu_\nu}^{n_\nu-1}}(i, \langle \eta, \nu^*, \alpha_\nu^{**}, P_\nu^* \rangle)$$

eine solche. Dabei sei

$$\begin{aligned} f_{(\beta, \langle \xi(n_\nu-1, \mu_\nu), \alpha_\nu^* \rangle, \mu_\nu)}^{n_\nu-1}(\alpha_\nu^{**}) &= \alpha_\nu^* \\ f_{(\beta, \langle \xi(n_\nu-1, \mu_\nu), P_\nu \rangle, \mu_\nu)}^{n_\nu-1}(P_\nu^*) &= P_\nu \\ \nu^* &= \nu \text{ f\"ur } \nu < \alpha_{\tau(n_\nu-1, \mu_\nu)} \text{ und } \nu^* = 0 \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Da  $\eta < \omega_1$  beliebig war, ist also  $\omega_1^{L[X]} = \omega_1$ .

$$(5) S^* = S_{O_n}^2$$

Denn nach Definition von  $n_\nu$  in (SP) existiert ein  $\xi \in J_{\mu_\nu}^D$  und ein  $\gamma \sqsubset \nu$ , so da\ss  $f_{(\gamma, \xi, \mu_\nu)}^{n_\nu}$  in  $\nu$  konfimal ist. Ist dann  $n_\nu = 1$ , so ist  $F : \gamma \times \omega \rightarrow \mu_\nu$  mit

$$\langle \eta, i \rangle \mapsto \sigma_{(\langle \eta, \xi \rangle, \mu_\nu)}(i)$$

in  $\nu$  konfimal. Ist  $n_\nu > 1$ , so ist  $F : \gamma \times \omega \rightarrow \alpha_{\tau(n_\nu-1, \mu_\nu)}$  mit

$$\langle \eta, i \rangle \mapsto h_{\alpha_{\tau(n_\nu-1, \mu_\nu)}, K_{\mu_\nu}^{n_\nu-1}}(i, \langle \eta, \xi^* \rangle)$$

aufgrund des Beweises von Lemma 5.14 (vi) in  $\nu$  konfimal. Dabei sei

$$f_{(\beta, \langle \xi(n_\nu-1, \mu_\nu), \xi \rangle, \mu_\nu)}^{n_\nu-1}(\xi^*) = \xi.$$

$F$  ist aber nach Lemma 5.15 \u00fcber  $I_{\mu_\nu}$  definierbar. Und andererseits gilt im Standardmorast

$$\nu \triangleleft \tau \Rightarrow \nu \text{ regul\"ar in } J_\tau^D.$$

Also ist  $\nu$  in  $I_{\mu_\nu}$  regul\"ar.  $\square$

### Satz 5.19

Sei  $\langle X_\nu \mid \nu \in S^* \rangle$ , so da\ss gilt:

- (1)  $L[X] \models S^* = S_{O_n}^2$
- (2)  $L[X]$  ist f\u00fcgsam
- (3)  $L[X]$  hat Kondensation
- (4)  $L[X]$  hat Koh\"arenz.

Dann gibt es eine Folge  $C = \langle C_\nu \mid \nu \in S^2 \rangle$ , so da\ss gilt:

- (1)  $L[C] = L[X]$
- (2)  $L[C]$  hat Kondensation

(3)  $C_\nu$  ist in  $J_\nu^C$  abgeschlossen und unbeschränkt bzgl. der kanonischen Wohlordnung  $<_\nu$  von  $J_\nu^C$

(4)  $otp(\langle C_\nu, <_\nu \rangle) > \omega \Rightarrow C_\nu \subseteq \nu$

(5)  $\mu \in Lim(C_\nu) \Rightarrow C_\mu = C_\nu \cap \mu$ ,

(6)  $otp(C_\nu) < \nu$ .

**Beweis:** Konstruiere zuerst mit  $L[X]$  wie in Satz 5.13 einen Standardmorast. Dann konstruiere daraus ein inneres Modell  $L[C]$  wie in Satz 5.18.  $\square$

### Bemerkung

Soetwas war eigentlich zu erwarten. Denn sei  $S^* = S_{On}^2$  und habe  $L[X]$  Kondensation. Wird dann  $\nu$  über  $I_\nu$  singularisiert und ist  $H \prec_1 I_\nu$  mit  $H \cong I_\mu$ , so wird  $\mu$  über  $I_\mu$  singularisiert. Was liegt also näher als anzunehmen, daß die singularisierende Funktion  $f$  durch die Transitivierung übertragen wird. D.h. zu erwarten, daß  $f$   $\Sigma_1$ -definierbar ist.

### Bemerkung

Sei  $L[X]$  fügsam mit Kondensation und Kohärenz. Ist dann  $S^* = S_{On}^2$ , so ist  $S^* = \{\nu \mid \nu \text{ singular in } I_{\nu+\omega}\}$ . Denn nach Definition ist  $\{\nu \mid \nu \text{ singular in } I_{\nu+\omega}\} \subseteq S_{On}^2$ . Für  $S_{On}^2 \subseteq \{\nu \mid \nu \text{ singular in } I_{\nu+\omega}\}$  betrachte das kleinste  $n$ , so daß  $\nu$  über  $I_{\mu_\nu}$  singularisiert wird. Sei  $p$  minimal, so daß  $\nu$  über  $I_{\mu_\nu}$  mit dem Parameter  $p$  singularisiert wird. Sei  $p^*$  minimal, so daß für ein  $i \in \omega$   $h_{\mu_\nu}^n(i, p^*) = p$  ist. Sei  $\pi : I_{\bar{\mu}} \rightarrow I_{\mu_\nu}$  die Umkehrung der Transitivierung von  $h_{\mu_\nu}^n[\omega \times (J_\nu^X \times \{p^*\})]$ . Sei  $\pi(\bar{p}) = p^*$ . Dann wird  $\nu$  über  $I_{\bar{\mu}}$  singularisiert und  $h_{\bar{\mu}}^n[\omega \times (J_\nu^X \times \{\bar{p}\})] = J_{\bar{\mu}}^X$ . Aufgrund der Minimalität von  $\mu_\nu$  ist also  $\bar{\mu} = \mu_\nu$  und  $\mu_\nu \in \{\nu \mid \nu \text{ singular in } I_{\nu+\omega}\}$ .

Ist umgekehrt  $S^* = \{\nu \mid \nu \text{ singular in } I_{\nu+\omega}\}$ , so ist  $S^* = S_{On}^2$ . Dann gilt nämlich wie in der Bemerkung am Ende von Abschnitt 2  $Cond(I_\nu^0)$  für alle  $\nu \in Lim$ . Also hat man die Feinstrukturtheorie auch für alle  $I_\nu^0$ . Damit zeigt man wie oben  $S_{On}^2 \subseteq \{\nu \mid \nu \text{ singular in } I_{\nu+\omega}\}$ . Und  $\{\nu \mid \nu \text{ singular in } I_{\nu+\omega}\} \subseteq S_{On}^2$  gilt wieder per definitionem.

# 6

## Der schwache Überdeckungssatz

Sei  $L[X]$  fügsam. Habe es Kondensation und Kohärenz. Sei  $S^* = \text{Lim}$ . Dann gilt der schwache Überdeckungssatz (vgl. Mitchell und Schimmerling [1995]):

Gebe es kein nicht triviales, elementares  $\pi : L[X] \rightarrow L[X]$ . Sei  $\kappa \in \text{Card}^{L[X]} - \omega_2$  und  $\tau = (\kappa^+)^{L[X]}$ . Dann gilt

$$\tau < \kappa^+ \quad \Rightarrow \quad cf(\tau) = card(\kappa).$$

Sei  $A$  mit  $\omega_1 \cup \{\kappa\} \subseteq A$  in  $\tau$  unbeschränkt. Angenommen es wäre  $card(A) < card(\kappa)$ . Aufgrund der Kondensation ist die Transitivierung von  $h_{\tau, X\tau}[\omega \times A^{<\omega}]$  ein Anfangsstück unserer Hierarchie. Sei es  $I_\nu$ , und  $\pi : I_\nu \rightarrow I_\tau$  die Umkehrung der Transitivierung. Das  $\pi$  ist konfinal, denn  $A \subseteq h_{\tau, X\tau}[\omega \times A^{<\omega}]$  ist unbeschränkt in  $\tau$ . Sei  $\pi(\alpha_\nu) = \kappa$ .

Sei

$\mu_\nu =$  das kleinste  $\mu$ , so daß es ein konfinales  $f : a \rightarrow \nu \in \text{Def}(I_\mu)$  mit  $a \subseteq \nu' < \nu$  gibt

$n_\nu =$  das kleinste  $1 \leq n < \omega$ , so daß ein solches  $f$   $\Sigma_n$ -definierbar ist, falls ein solches  $f$  existiert. Andernfalls sei

$$\mu_\nu = \infty$$

$$n_\nu = \omega.$$

Setze  $I_\infty^0 = I_\infty = \langle L[X], X \rangle$ .

Angenommen  $\pi$  hätte eine  $\Sigma_{n_\nu}$ -elementare Fortsetzung  $\tilde{\pi} : I_{\mu_\nu} \rightarrow I_\beta$ . Ist dann  $\mu_\nu < \infty$ , so gibt es nach Definition von  $\mu_\nu$  und  $n_\nu$  eine Surjektion  $f : a \rightarrow \nu$  mit  $a \subseteq \alpha_\nu$ , die über  $I_{\mu_\nu}$  durch eine  $\Sigma_{n_\nu}$ -Formel  $\varphi$  definierbar

ist. Sei über  $I_\beta$  durch  $\varphi$  eine Funktion  $g$  definiert. Dann gilt aufgrund der  $\Sigma_{n_\nu}$ -Elementarität von  $\tilde{\pi} A \subseteq \text{rng}(\pi) \subseteq g[\kappa] =: B$ . Offensichtlich ist  $B \in L[X]$ , und da  $\kappa < \tau$  ist, wäre  $\tau$  in  $L[X]$  singular. Das widerspricht aber der Tatsache, daß  $\tau$  in  $L[X]$  eine Nachfolgerkardinalzahl ist. Wäre aber  $\mu_\nu = \infty$  und  $n_\nu = \omega$ , dann wäre  $\tilde{\pi} : L[X] \rightarrow L[X]$  eine elementare Einbettung. Und da  $\text{card}(\nu) = \text{card}(A) < \text{card}(\kappa)$  ist, wäre es nicht trivial. Das darf aber nach der Voraussetzung des Überdeckungssatzes nicht sein. Um den Überdeckungssatz zu zeigen, muß man also die Fortsetzbarkeit von  $\Sigma_1$ -elementaren Abbildungen untersuchen.

Sei  $\pi : I_\nu \rightarrow I_\tau$   $\Sigma_1$ -elementar und konfinal.

Für  $\mu \in \text{Lim}$  und eine Formel  $\varphi$  sei

$h_\mu^\varphi(x_1, \dots, x_m)$  das bezüglich der kanonischen Wohlordnung kleinste  $x_0 \in J_\mu^X$  mit  $I_\mu^0 \models \varphi(x_i)$ , falls ein solches existiert,

und

$h_\mu^\varphi(x_1, \dots, x_m) = \emptyset$ , falls nicht.

Für  $Q \subseteq J_\mu^X$  sei  $H_\mu^n(Q)$  für  $1 \leq n \in \omega$  der Abschluß von  $Q$  unter allen  $h_\mu^\varphi$  mit einer  $\Sigma_n$ -Formel  $\varphi$ . Dann sind aufgrund der Definition der  $h_\mu^\varphi$  die  $H_\mu(Q) \prec_n I_\mu^0$ .

Sei

$$I(\nu) = \{ \langle m, \alpha, p, \eta \rangle \mid p \subseteq J_\eta^X \text{ endlich, } 1 \leq m < n_\nu \text{ für } \eta = \mu_\nu, \\ 1 \leq m \in \omega, \eta \leq \mu_\nu, \alpha < \eta \in \text{Lim}^2, \alpha_\nu < \alpha < \nu \}$$

$\langle m, \alpha, p, \eta \rangle \leq \langle k, \beta, q, \delta \rangle :\Leftrightarrow m \leq k, \alpha \leq \beta, p \subseteq q, \eta \leq \delta, (\eta \in q \text{ für } \eta < \delta)$ .

Für  $i = \langle m, \alpha, p, \eta \rangle \in I(\nu)$  sei  $f_i : I_{\mu(i)}^0 \rightarrow I_\eta^0$  die Umkehrung der Transitivierung von  $H_\eta^m(\alpha \cup p)$ .

Für  $i \leq j \in I(\nu)$  sei  $g_{ij} = f_j^{-1} f_i$ .

Dann ist  $\langle f_i \mid i \in I(\nu) \rangle$  der direkte Limes des gerichteten Systems  $\langle g_{ij} \mid i \leq j \in I(\nu) \rangle$ . Sei  $\langle f_i^\pi \mid i \in I(\nu) \rangle$  mit  $f_i^\pi : I_{\pi(\mu(i))}^0 \rightarrow M^\pi$  der direkte Limes von  $\langle \pi(g_{ij}) \mid i \leq j \in I(\nu) \rangle$ . Sei

$$\begin{array}{ccc} I_\mu^0 & \xrightarrow{\hat{\pi}} & M^\pi \\ f_i \uparrow & & f_i^\pi \uparrow \\ I_{\mu(i)}^0 & \xrightarrow{\pi \upharpoonright J_{\mu(i)}^X} & \pi(I_{\mu(i)}^0) \end{array}$$

für alle  $i \in I(\nu)$  kommutativ. Man prüft leicht nach, daß dadurch tatsächlich ein  $\hat{\pi}$  definiert wird. Außerdem gibt es für jedes  $x \in J_\nu^X$  ein  $i = \langle m, \alpha, p, \eta \rangle \in I(\nu)$  mit  $x \in J_\alpha^X$ . Also ist  $\hat{\pi}(x) = f_i^\pi \circ \pi \circ f_i^{-1}(x) = \pi(x)$ . D.h.  $\hat{\pi}$  ist eine

Fortsetzung von  $\pi$ , da  $\pi : I_\nu \rightarrow I_\tau$  konfinal ist.

Ist  $M^\pi$  nicht fundiert, so gibt es eine Folge  $\langle i_n \in I(\nu), x_n \in J_\tau^X \mid n \in \omega \rangle$ , so daß für alle  $n \in \omega$

$$x_{n+1} \in \pi(g_{i_n i_{n+1}})(x_n)$$

gilt.

Ist  $\mu_\nu = \infty$ , so gibt es sogar eine solche Folge mit

$$i_n = \langle m_n, \alpha_n, p_n, \eta_n \rangle$$

$$\eta_n \in p_{n+1}.$$

Denn ist  $i = \langle m, \alpha, p, \infty \rangle$ , so ist  $\lambda = \sup(\text{rng}(f_i) \cap On) < \infty$  und  $f_i = f_j$  mit  $j = \langle m, \alpha, p, \lambda \rangle$ .

Nenne eine solche Folge gemein, und wähle eine kanonische gemeine Folge  $\langle i_n^\pi, x_n^\pi \mid n \in \omega \rangle$ . Das macht man rekursiv: Ist  $\langle i_m^\pi, x_m^\pi \mid m \in n \rangle$  schon definiert, so sei

$\langle i_n^\pi, x_n^\pi \rangle$  bezüglich der kanonischen Wohlordnung minimal, so daß  $\langle i_m^\pi, x_m^\pi \mid m \in n + 1 \rangle$  der Anfang einer gemeinen Folge ist.

Für  $i_n^\pi = \langle m_n, \alpha_n, p_n, \eta_n \rangle$  sei

$$\theta(\pi) := \sup\{\eta_n \mid n \in \omega\}.$$

### Lemma 6.1

(i)  $\bigcup\{\text{rng}(f_i) \mid i = i_n^\pi, n \in \omega\} = J_{\theta(\pi)}^X$

(ii)  $\sup\{\alpha_n \mid n \in \omega\} = \nu$ .

#### Beweis:

(i) Sei  $H = \bigcup\{\text{rng}(f_i) \mid i = i_n^\pi, n \in \omega\}$  und  $\sigma : H \cong J_\lambda^X$  die Transitivierung von  $H$ . Dann ist  $\langle \sigma(i_n^\pi), x_n \mid n \in \omega \rangle$  eine gemeine Folge. Denn mit  $j_n := \sigma(i_n^\pi)$  gilt  $g_{j_n j_{n+1}} = g_{i_n^\pi i_{n+1}^\pi}$ . Aufgrund der Definition der kanonischen gemeinen Folge ist also  $\sigma(i_n^\pi) = i_n^\pi$ . Insbesondere ist  $\sigma(\eta_n) = \eta_n$  für alle  $n \in \omega$ . Also ist  $\lambda = \theta(\pi)$  und  $H = J_{\theta(\pi)}^X$ .

(ii) Da stets  $\alpha_\nu < \alpha_n$  gilt, ist  $\gamma_n := \text{rng}(f_{i_n^\pi}) \cap \nu$  transitiv. Weil  $\nu$  regulär in  $I_{\mu_\nu}$  ist, ist  $\gamma_n < \nu$ . Wegen (i) ist aber  $\sup\{\gamma_n \mid n \in \omega\} = \nu$ . Also ist auch  $\sup\{\alpha_n \mid n \in \omega\} = \nu$ .  $\square$

Definiere rekursiv eine Folge  $\langle H_\gamma \mid \gamma \leq \omega_1 \rangle$  mit  $H_\gamma \prec_1 I_\tau$ .

Für  $Q \subseteq J_\tau^X$  sei  $H(Q) = h_{\tau, X_\tau}[\omega \times Q^{<\omega}]$ .

Sei  $H_0 = H(A)$ .

Sei  $H_\lambda = \bigcup\{H_\gamma \mid \gamma < \lambda\}$  für  $\lambda \in \text{Lim}$ ,  $1 \leq \lambda \leq \omega_1$ .

Sei  $\pi_\gamma : I_{\nu_\gamma} \rightarrow I_\tau$  die Umkehrung der Transitivierung von  $H_\gamma$ .

Sei schließlich

$$H_{\gamma+1} = H(H_\gamma \cup \{x_n^{\pi_\gamma} \mid n \in \omega, x_n^{\pi_\gamma} \text{ ex.}\}).$$

Sei  $\nu := \nu_{\omega_1}$  und  $\pi := \pi_{\omega_1} : I_\nu \rightarrow I_\tau$ . Dann ist  $\text{card}(\nu) < \text{card}(\kappa)$ , da  $\kappa \geq \omega_2$  ist.

### Lemma 6.2

Sei  $\mu_\nu = \infty$ . Dann ist  $M^\pi$  fundiert.

**Beweis:** Angenommen  $M^\pi$  wäre nicht fundiert. Dann gäbe es  $\langle i_n^\pi, x_n^\pi \mid n \in \omega \rangle$ . Und aufgrund der Konstruktion von  $\pi$  gäbe es ein  $\gamma < \omega_1$  mit  $I' := \{i_n^\pi \mid n \in \omega\} \subseteq \text{rng}(\pi^{-1} \circ \pi_\gamma)$ . Sei ein solches fest gewählt. Dann ist auch  $\{g_{ij} \mid i \leq j \in I'\} \subseteq \text{rng}(\pi^{-1} \circ \pi_\gamma)$ . Sei  $i_n^\pi = \langle m_n, \alpha_n, p_n, \eta_n \rangle$ . Außerdem sei  $\bar{\pi} := \pi^{-1} \circ \pi_\gamma$ ,  $\bar{g}_{ij} := \bar{\pi}^{-1}(g_{ij})$  und  $\bar{\mu}(i) := \pi^{-1}(\mu(i))$ . Sei  $\langle \bar{f}_i \mid i \in I' \rangle$  mit  $\bar{f}_i : I_{\bar{\mu}(i)}^0 \rightarrow M$  der direkte Limes von  $\langle \bar{g}_{ij} \mid i \leq j \in I' \rangle$ . Sei

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\pi'} & I_{\theta(\pi)}^0 \\ \bar{f}_i \uparrow & & f_i \uparrow \\ I_{\bar{\mu}(i)}^0 & \xrightarrow{\bar{\pi} \upharpoonright J_{\bar{\mu}(i)}^X} & I_{\mu(i)}^0 \end{array}$$

für alle  $i \in I'$  kommutativ. Man prüft leicht nach, daß dadurch tatsächlich ein  $\pi'$  definiert wird. Und da nach Satz 6.1 (ii)  $\text{sup}\{\alpha_n \mid n \in \omega\} = \nu$  ist, ist  $\pi'$  eine Fortsetzung von  $\bar{\pi}$ . Weil  $I_{\theta(\pi)}^0$  transitiv ist, kann man o. E. auch  $M$  als transitiv annehmen. D.h.  $M = I_\mu^0$  für ein  $\mu \in \text{Lim}^2$ .

Sei  $i_n := i_n^\pi$  und  $j_n := (\pi')^{-1}(i_n)$ . Dann ist  $\pi'(g_{j_n j_{n+1}}) = g_{i_n i_{n+1}}$ . Also ist auch  $\pi_\gamma(g_{j_n j_{n+1}}) = \pi(g_{i_n i_{n+1}})$ . D.h.  $\langle j_n, x_n^\pi \mid n \in \omega \rangle$  ist für  $\pi_\gamma$  eine gemeine Folge. Da  $\langle i_n, x_n^\pi \mid n \in \omega \rangle$  sogar kanonisch war, ist auch  $\langle j_n, x_n^\pi \mid n \in \omega \rangle$  kanonisch. Also ist

$$j_n = i_n^{\pi_\gamma}$$

$$x_n^{\pi_\gamma} = x_n^\pi.$$

Nach Konstruktion von  $\pi$  wäre daher  $\{x_n^\pi \mid n \in \omega\} \subseteq \text{rng}(\pi)$ . D.h. es wäre

$$\pi^{-1}(x_{n+1}^\pi) \in g_{i_n i_{n+1}}(\pi^{-1}(x_n^\pi)).$$

Das System  $\langle g_{ij} \mid i \leq j \in I(\nu) \rangle$  hat aber einen fundierten direkten Limes, nämlich  $\langle f_i \mid i \in I(\nu) \rangle$  mit  $f_i : I_{\mu(i)}^0 \rightarrow I_\infty$ . Das ist ein Widerspruch!  $\square$



**Lemma 6.3**

Sei  $\mu_\nu = \infty$ . Dann ist  $\hat{\pi}$  elementar.

**Beweis:** Sei  $x_i \in L[X]$ . Dann gilt

$$I_\infty \models \varphi(x_i)$$

$$\Leftrightarrow \text{für alle hinreichend großen } j \in I \quad I_{\mu(j)}^0 \models \varphi(f_j^{-1}(x_i))$$

$$\Leftrightarrow \text{für alle hinreichen großen } j \in I \quad \pi(I_{\mu(j)}^0) \models \varphi((f_j^\pi)^{-1}(x_i))$$

$$\Leftrightarrow M^\pi \models \varphi(\hat{\pi}(x_i)). \quad \square$$

**Lemma 6.4**

Sei  $\mu_\nu = \infty$ . Dann ist  $\{y \mid M^\pi \models y \in x\}$  eine Menge für  $x \in M^\pi$ .

**Beweis:** Sei  $i = \langle m, \alpha, p, \eta \rangle \in I(\nu)$  und  $\gamma > \nu$  regulär. Dann ist  $\lambda := \sup(\text{rng}(f_i) \cap \gamma) < \gamma$ . Sei  $\pi : I_\mu^0 \rightarrow I_\eta^0$  die Umkehrung der Transitivierung von  $H_\eta^m(\lambda \cup p)$  und  $\pi(\bar{p}) = p$ . Sei  $j = \langle m, \alpha, \bar{p}, \mu \rangle$ . Dann ist  $j \in J_\gamma^X$  und  $\text{rng}(f_i) \cap J_\gamma^X \subseteq \text{rng}(f_j)$ . Aufgrund der Elementarität von  $\hat{\pi}$  ist also

$$M^\pi \models \text{rng}(\hat{\pi}(f_i)) \cap \hat{\pi}(J_\gamma^X) \subseteq \text{rng}(\hat{\pi}(f_j)).$$

Aber  $\{x \mid M^\pi \models x \in \text{rng}(\hat{\pi}(f_i))\} = \text{rng}(f_i^\pi)$ . Also ist

$$\{x \mid M^\pi \models x \in \hat{\pi}(J_\gamma^X)\} \subseteq \bigcup \{\text{rng}(f_i^\pi) \mid i \in J_\gamma^X\}.$$

Da die regulären  $\gamma$  in  $On$  unbeschränkt sind, folgt daraus die Behauptung.  $\square$

Ist also  $\mu_\nu = \infty$ , so kann man aufgrund von Lemma 6.2 und 6.4  $M^\pi$  transitivieren. Dadurch erhält man eine Abbildung  $\tilde{\pi} : L[X] \rightarrow M$  mit transitivem  $M$ . Diese ist nach Lemma 6.3 elementar. Wegen Satz 2.4 hat man also eine elementare Einbettung  $\tilde{\pi} : L[X] \rightarrow L[X]$

Wie geht man mit dem Fall  $\mu_\nu < \infty$  um?

Sei dazu  $\pi : I_\nu \rightarrow I_\tau$   $\Sigma_1$ -elementar mit  $A \subseteq \text{rng}(\pi)$ . Seien  $p_\nu$  und  $B_\nu$  wie in Abschnitt 4 definiert. Dann gilt

$$h_{\mu_\nu}^{n_\nu}[\omega \times (J_\nu^X \times \{p_\nu\})] = J_{\mu_\nu}^X.$$

Definiere

$$h(\langle i, x \rangle) \simeq h_{\mu_\nu}^{n_\nu}(i, \langle x, p_\nu \rangle)$$

für  $x \in J_{\mu_\nu}^X$ . Dann ist

$$I_{\mu_\nu} \cong \mathfrak{M} = \langle M, \in^{\mathfrak{M}}, =^{\mathfrak{M}}, Y^{\mathfrak{M}}, Z^{\mathfrak{M}} \rangle / =^{\mathfrak{M}}$$

mit

$$\begin{aligned}
M &= \text{dom}(h) \\
\in^{\mathfrak{M}} &= \{\langle x, y \rangle \in M^2 \mid h(x) \in h(y)\} \\
=^{\mathfrak{M}} &= \{\langle x, y \rangle \in M^2 \mid h(x) = h(y)\} \\
Y^{\mathfrak{M}} &= \{x \in M \mid h(x) \in X \upharpoonright \mu_\nu\} \\
Z^{\mathfrak{M}} &= \{x \in M \mid h(x) \in X_{\mu_\nu}\}.
\end{aligned}$$

Nach Satz 4.1 sind diese Mengen und Relationen über  $\langle I_\nu, B_\nu \rangle$  ohne Parameter  $\Sigma_1$ -definierbar. Sei  $B$  entsprechend Lemma 3.6 (b), so daß

$$\pi : \langle I_\nu, B_\nu \rangle \rightarrow \langle I_\tau, B \rangle \quad \Sigma_1\text{-elementar}$$

ist. Seien  $N, \in^{\mathfrak{N}}, =^{\mathfrak{N}}, Y^{\mathfrak{N}}, Z^{\mathfrak{N}}$  über  $\langle I_\tau, B \rangle$  durch die selben Formeln definiert. Dann gilt

$$(!) \quad N, \in^{\mathfrak{N}}, =^{\mathfrak{N}}, Y^{\mathfrak{N}}, Z^{\mathfrak{N}} \text{ sind über } \langle I_\tau, B \rangle \text{ uniform } \Sigma_1\text{-definierbar.}$$

Sei

$$\mathfrak{N}(\pi) = \langle N, \in^{\mathfrak{N}}, =^{\mathfrak{N}}, Y^{\mathfrak{N}}, Z^{\mathfrak{N}} \rangle / =^{\mathfrak{N}}.$$

Dann ist

$$\pi \upharpoonright M : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}(\pi) \quad \Sigma_{n_\nu}\text{-elementar.}$$

Denn auch  $\models_{\mathfrak{M}}^{n_\nu}$  ist über  $\langle I_\nu, B_\nu \rangle$   $\Sigma_1$ -definierbar.

Angenommen  $\in^{\mathfrak{N}}$  ist fundiert. Dann ist  $\mathfrak{N}(\pi) \cong I_{\beta,1}^Y$  für eine Folge  $Y$  und ein  $\beta \in \text{Lim}$ . Außerdem existiert  $I_{\beta,1}^X = I_\beta$ , da  $S^* = \text{Lim}$  ist. Und es gilt  $\text{Cond}_{\omega_1}(I_{\beta,1}^X)$ , weil  $L[X]$  Kondensation hat. Angenommen es gilt nun auch  $\text{Cond}_{\omega_1}(I_{\beta,1}^Y)$ , so ist nach Satz 2.3 wie gewünscht  $\mathfrak{N}(\pi) \cong I_{\beta,1}^Y = I_\beta$ . Denn wegen  $\omega_1 \subseteq A$  ist  $X \upharpoonright \omega_1 = Y \upharpoonright \omega_1$ .

Sei andererseits  $\in^{\mathfrak{N}}$  nicht fundiert oder  $\text{Cond}_{\omega_1}(I_{\beta,1}^Y)$  verletzt. Dann gibt es eine abzählbare  $\Sigma_1$ -elementare Substruktur  $Q(\pi) \prec_1 \mathfrak{N}(\pi)$ , so daß

$$(\forall \eta \in \text{Lim})(Q(\pi) \not\cong I_\eta)$$

ist.

Nun kann man die Konstruktion der Folge  $\langle H_\gamma \mid \gamma \leq \omega_1 \rangle$  so ergänzen, daß  $\pi$  immer eine  $\Sigma_{n_\nu}$ -elementare Fortsetzung  $\tilde{\pi} : I_{\mu_\nu} \rightarrow I_\beta$  hat. Und zwar egal, ob  $\mu_\nu = \infty$  oder  $\mu_\nu < \infty$  ist.

Seien  $H(Q), H_0, H_\lambda$  für  $\lambda \in \text{Lim}$  und  $\pi_\gamma$  wie zuvor. Aber sei jetzt

$$H_{\gamma+1} = H(H_\gamma \cup \{x_n^{\pi_\gamma} \mid n \in \omega, x_n^{\pi_\gamma} \text{ ex.}\})$$

$$\cup \bigcup \{Q(\pi_\gamma \upharpoonright J_\nu^X) \mid \nu \leq \nu_\gamma, Q(\pi_\gamma \upharpoonright J_\nu^X) \text{ existiert}\}.$$

Sei immer noch  $\nu := \nu_{\omega_1}$  und  $\pi := \pi_{\omega_1} : I_\nu \rightarrow I_\tau$ . Dann gelten im Fall  $\mu_\nu = \infty$  weiterhin die Lemmata 6.1 bis 6.4 und ihre Beweise. D.h. ist  $\mu_\nu = \infty$ , so

hat  $\pi$  eine elementare Fortsetzung  $\tilde{\pi} : L[X] \rightarrow L[X]$ . Ist aber  $\mu_\nu < \infty$ , so kann man jetzt folgendes zeigen:

**Lemma 6.5**

Sei  $\mu_\nu < \infty$ . Dann gibt es für jedes abzählbare  $H \prec_1 \mathfrak{N}(\pi)$  ein  $\eta \in Lim$  mit  $H \cong I_\eta$ .

**Beweis:** Angenommen es gäbe ein abzählbares  $Q \prec_1 \mathfrak{N}(\pi)$ , so daß für kein  $\eta \in Lim$   $Q \cong I_\eta$  gilt. Sei  $\pi : \langle I_\nu^0, B_\nu \rangle \rightarrow \langle I_\tau, B \rangle$  die Fortsetzung von  $\pi$  entsprechend Lemma 3.6 (b). Sei  $M = h_{\tau, B}[\omega \times Q^{<\omega}]$ . Sei  $H = \pi^{-1}[M \cap rng(\pi)]$ . Dann ist  $H \prec_1 \langle I_\nu, B_\nu \rangle$ . Aufgrund der Konstruktion von  $\pi$  gibt es ein  $\gamma < \omega_1$  mit  $H \subseteq rng(\pi^{-1} \circ \pi_\gamma)$ . Sei  $\pi_0 = \pi^{-1} \circ \pi_\gamma$ . Sei  $\bar{H} = \pi_0^{-1}[H \cap rng(\pi_0)]$ . Sei  $\delta = sup(M \cap \tau)$ ,  $\lambda = sup(H \cap \nu)$  und  $\bar{\lambda} = sup(\bar{H} \cap \nu_\gamma)$ . Dann ist nach Lemma 5.1 (d)  $B_\lambda = B_\nu \cap J_\lambda^X$ . Sei  $\pi' = \pi \upharpoonright J_\lambda^X : I_\lambda^0 \rightarrow I_\delta^0$  und  $\pi' : \langle I_\lambda^0, B_\lambda \rangle \rightarrow \langle I_\delta^0, B' \rangle$  die Fortsetzung von  $\pi'$  entsprechend Lemma 3.6 (b). Da  $B_\lambda = B_\nu \cap J_\lambda^X$  ist, ist  $B' = B \cap J_\delta^X$ . Sei  $\pi'_0 = \pi_0 \upharpoonright J_\lambda^X : I_\lambda^0 \rightarrow I_\lambda^0$ . Dann ist nach Lemma 5.3  $\pi'_0 : \langle I_\lambda^0, B_\lambda \rangle \rightarrow \langle I_\lambda^0, B_\lambda \rangle$   $\Sigma_1$ -elementar. Also ist  $\pi_\gamma \upharpoonright J_\lambda^X = \pi' \circ \pi'_0 : \langle I_\lambda^0, B_\lambda \rangle \rightarrow \langle I_\delta^0, B' \rangle$  die Fortsetzung von  $\pi_\gamma \upharpoonright J_\lambda^X = \pi' \circ \pi'_0$  nach Lemma 3.6 (b). Da (!) gilt und  $B' = B \cap J_\delta^X$  ist, ist  $Q \prec_1 \mathfrak{N}(\pi_\gamma \upharpoonright J_\lambda^X)$ . Aufgrund der Annahme über  $Q$  bedeutet das, daß  $Q(\pi_\gamma \upharpoonright J_\lambda^X)$  existiert. Nach Konstruktion von  $\pi$  ist  $Q(\pi_\gamma \upharpoonright J_\lambda^X) \subseteq rng(\pi)$ . Also ist  $Q(\pi_\gamma \upharpoonright J_\lambda^X) \subseteq rng(\pi')$ . Sei  $\bar{Q} = \pi^{-1}[Q(\pi_\gamma \upharpoonright J_\lambda^X) \cap rng(\pi)]$ . Dann ist  $\bar{Q} \prec_1 \mathfrak{N}(\pi'_0)$  und  $\bar{Q} \cong Q(\pi_\gamma \upharpoonright J_\lambda^X)$ . Also gibt es kein  $\eta \in Lim$  mit  $\bar{Q} \cong I_\eta$ . Aber  $\mathfrak{N}(\pi'_0) \cong I_{\mu_\lambda}$  und das hat die Kondensationseigenschaft. Widerspruch!  $\square$

Insbesondere ist  $\mathfrak{N}(\pi)$  fundiert und erfüllt  $\omega_1$ -Kondensation. D.h.  $\mathfrak{N} \cong I_\beta$  für ein  $\beta \in Lim$  (siehe oben).

Damit sind wir fertig und es gilt

**Satz 6.6** (Überdeckungssatz)

Gebe es kein nicht triviales, elementares  $\pi : L[X] \rightarrow L[X]$ . Sei  $\kappa \in Card^{L[X]} - \omega_2$  und  $\tau = (\kappa^+)^{L[X]}$ . Dann gilt

$$\tau < \kappa^+ \quad \Rightarrow \quad cf(\tau) = card(\kappa).$$

**Beweis:** Da  $\tau < \kappa^+$  ist, ist  $cf(\tau) \leq card(\kappa)$ . Angenommen  $cf(\tau) < card(\kappa)$ . Dann gäbe es eine in  $\tau$  unbeschränkte Menge  $A$  mit  $card(A) < card(\kappa)$ . Da  $\kappa \geq \omega_2$  ist, kann man o. E.  $\omega_1 \cup \{\kappa\} \subseteq A$  annehmen. Sei  $\pi : I_\nu \rightarrow I_\tau$  wie vor Lemma 6.4 definiert. Dann gibt es eine  $\Sigma_{n_\nu}$ -elementare Fortsetzung  $\tilde{\pi} : I_{\mu_\nu} \rightarrow I_\beta$  von  $\pi$ . Ist dann  $\mu_\nu < \infty$ , so gibt es nach Definition von  $\mu_\nu$  und  $n_\nu$  eine Surjektion  $f : a \rightarrow \nu$  mit  $a \subseteq \alpha_\nu$ , die über  $I_{\mu_\nu}$  durch eine  $\Sigma_{n_\nu}$ -Formel  $\varphi$  definierbar ist. Denn da  $\kappa \in Card^{L[X]}$  und  $\tau = (\kappa^+)^{L[X]}$  ist, ist  $\alpha_\nu$  die größte Kardinalzahl in  $I_\nu$ . Sei über  $I_\beta$  durch  $\varphi$  eine Funktion  $g$  definiert.

Dann gilt aufgrund der  $\Sigma_{n_\nu}$ -Elementarität von  $\tilde{\pi} A \subseteq \text{rng}(\pi) \subseteq g[\kappa] =: B$ . Offensichtlich ist  $B \in L[X]$ , und da  $\kappa < \tau$  ist, wäre  $\tau$  in  $L[X]$  singulär. Das widerspricht aber der Tatsache, daß  $\tau$  in  $L[X]$  eine Nachfolgerkardinalzahl ist. Wäre aber  $\mu_\nu = \infty$  und  $n_\nu = \omega$ , dann wäre  $\tilde{\pi} : L[X] \rightarrow L[X]$  eine elementare Einbettung. Und da  $\text{card}(\nu) = \text{card}(A) < \text{card}(\kappa)$  ist, wäre es nicht trivial. Das darf aber nach der Voraussetzung des Überdeckungssatzes nicht sein.  $\square$

# Literatur

A. Beller, R.-B. Jensen, P. Welch: **Coding the Universe**, London Mathematical Society Lecture Notes Series, Cambridge University Press, London, 1982

K. Devlin: **Aspects of Constructibility**, Lecture Notes in Mathematics, no. 354, Springer-Verlag, Berlin, 1973

K. Devlin: **Constructibility**, Springer-Verlag, Berlin, 1984

K. Devlin, R.-B. Jensen: Marginalia to a Theorem of Silver, **Logic Conference Kiel 1974**, Lecture Notes in Mathematics, no. 499, Springer-Verlag, Berlin, 1975, S. 115-142

H.-D. Donder, R.-B. Jensen, L.J. Stanley: Condensation-Coherent Global Square Systems, **Recursion theory**, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 42, American Mathematical Society, Providence, RI, 1985, S. 237-258

S. Friedman: Fine Structure Theory and Its Applications, **Recursion theory**, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 42, American Mathematical Society, Providence, RI, 1985, S. 259-269

S. Friedman: Jensen's  $\Sigma^*$ -Theory and the Combinatorial Content of  $V = L$ , **The Journal of Symbolic Logic**, vol. 59, 1994, S. 1096-1104

R.-B. Jensen: The Fine Structure of the Constructible Hierarchy, **Annals of Mathematical Logic**, vol. 4 (1972), S. 229-308

R.-B. Jensen: **Higher-Gap Morasses**, Manuskript, 1972/73

D. Law: **An Abstract Condensation Property**, Doctoral Dissertation, California Institute of Technology, 1993

W. Mitchell, E. Schimmerling: Covering without Countable Closure, **Mathematical Research Letters**, vol. 2, 1995, S. 595-609

H. Woodin: **The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms, and the Nonstationary Ideal**, de Gruyter, Berlin, 1999



# Lebenslauf

## **persönliche Daten**

Bernhard Irrgang

geb. am 07. Juni 1973 in München

## **akademischer Werdegang**

Juli	1993	Abitur am Max-Planck-Gymnasium, München
November	1993	Aufnahme des Studiums der Mathematik und theoretischen Physik an der Ludwig-Maximilians-Universität, München
November	1995	Vordiplom
Dezember	1998	Diplom Spezialgebiet: Math. Logik und Mengenlehre Diplomarbeit: „Jensens Kodierungstheorem“ Betreuer: Prof. Dr. H.-D. Donder
Februar	1999	Aufnahme in das DFG-Graduiertenkolleg „Sprache, Information, Logik“ an der Ludwig-Maximilians-Universität, München (3-jähriges Promotionsstipendium)
Oktober bis	1999	Aufenthalt als Visiting Scholar an der University of California, Berkeley (Prof. H. Woodin, Prof. J. Steel)
Mai	2000	wissenschaftlicher Mitarbeiter
seit März	2002	an der Ludwig-Maximilians-Universität, München

## **Sprachen**

Englisch, Norwegisch

## **Hobby**

Reisen