

# Primitive Elemente gezopfter Hopfalgebren und Lie-Algebren in gezopften Kategorien

Dissertation

an der Fakultät für Mathematik,  
Informatik und Statistik  
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von  
Stephan Schmidt-Samoa  
aus Eschwege

eingereicht am 4. September 2003

1. Berichterstatter: Herr Prof. Dr. B. Pareigis
  2. Berichterstatter: Herr Prof. Dr. H.-J. Schneider
- Tag der mündlichen Prüfung: 17. Juni 2004

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Lie-Algebren in gezopften Kategorien</b>	<b>13</b>
1.1 Die klassische Situation . . . . .	13
1.2 Algebren . . . . .	16
1.3 Hopfalgebren und primitive Elemente . . . . .	20
1.4 Lie-Algebren . . . . .	25
1.5 Die universelle Hülle . . . . .	28
1.6 Schiefsymmetrische Endomorphismen und Derivationen . . . . .	33
<b>2 Operadenbeschreibung</b>	<b>39</b>
2.1 Präliminarien . . . . .	40
2.2 Zopfgruppensysteme . . . . .	46
2.3 Operaden in gezopften Kategorien . . . . .	52
2.4 Algebren über Operaden und zugehörige Monaden . . . . .	68
2.5 Lie-Operaden . . . . .	82
<b>3 Axiomatische Beschreibung</b>	<b>89</b>
3.1 Erzeugende und Relationen für Operaden . . . . .	89
3.2 Notwendige Bedingungen für Lie-Elemente . . . . .	109
3.3 Kharchenkos Ansatz . . . . .	113
3.4 Lie-Elemente . . . . .	117
3.5 Relationen . . . . .	131
3.6 Die Lie-Algebren von Pareigis . . . . .	138
<b>4 PBW-Theorem</b>	<b>143</b>
<b>Zusammenfassung</b>	<b>159</b>
<b>Summary</b>	<b>161</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>163</b>



# Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit sind Hopfalgebren in gezopften monoidalen Kategorien, die von primitiven Elementen erzeugt werden. Um solche gezopften Hopfalgebren zu studieren, wird eine geeignete Verallgemeinerung des Begriffs einer Lie-Algebra gesucht. Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, eine solche Definition anzugeben sowie eine praktikable Beschreibung der Kategorie der Lie-Algebren zu finden. Bevor aber eine Übersicht über den Inhalt gegeben wird, soll zunächst kurz das Interesse an diesen gezopften Hopfalgebren erläutert, der Ansatz zu ihrer Untersuchung mittels Lie-Algebren motiviert und die Ausgangslage beschrieben werden.

Hopfalgebren spielen in verschiedenen mathematischen und physikalischen Gebieten eine wichtige Rolle. In den letzten beiden Jahrzehnten wurden neue Beispielserien von Hopfalgebren konstruiert und untersucht. Aus diesen lassen sich unter anderem Lösungen der Quanten-Yang-Baxter-Gleichung, die zum Beispiel in der statistischen Mechanik auftritt, und Invarianten von Knoten gewinnen.

Die deformierten universellen Einhüllenden  $U_q(\mathfrak{g})$  von halbeinfachen komplexen Lie-Algebren  $\mathfrak{g}$  stellen eine dieser Beispielserien dar. Diese Hopfalgebren wurden von Drinfeld [Dri85] und Jimbo [Jim85] unabhängig voneinander eingeführt.

Eine Möglichkeit, solche mathematischen Objekte zu verstehen, besteht darin, sie zu zerlegen und die Bausteine zu untersuchen. Bei der Zerlegung der  $U_q(\mathfrak{g})$  treten allerdings verallgemeinerte Hopfalgebren in gezopften Kategorien auf. Zerlegungen von gewöhnlichen Hopfalgebren, bei denen Hopfalgebren in gezopften Kategorien vorkommen, wurden zuerst von Radford [Rad85] untersucht. Eine Zerlegung der deformierten universellen Einhüllenden wurde von Sommerhäuser [Som96] angegeben. Dabei treten jeweils Hopfalgebren in der Kategorie  $\mathcal{YD}_K^K$  der Yetter-Drinfeld-Moduln über einer Hopfalgebra  $K$  mit bijektiver Antipode auf. Diese gezopfte monoidale Kategorie wurde von Yetter [Yet90] eingeführt. Ferner werden die gezopften Hopfalgebren, die sich bei der Zerlegung der  $U_q(\mathfrak{g})$  ergeben, von primitiven Elementen erzeugt. Dabei heißt ein Element  $x$  primitiv, wenn für das Koproduct  $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$  gilt.

Die primitiven Elemente einer klassischen Hopfalgebra sind unter der binären Kommutatoroperation  $[x, y] := xy - yx$  abgeschlossen und bilden mit dieser Verknüpfung eine Lie-Algebra. Hierdurch ist ein Funktor  $\mathcal{P} : \text{Hopf} \rightarrow \text{Lie}$  von der Kategorie der Hopfalgebren in die Kategorie der Lie-Algebren gegeben. Umgekehrt kann zu jeder Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ihre universelle Einhüllende  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  konstruiert werden. Diese

ist als Hopfalgebra dadurch charakterisiert, dass der Funktor  $\mathcal{U} : \text{Lie} \rightarrow \text{Hopf}$  linksadjungiert zu  $\mathcal{P}$  ist. Dabei wird  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  als Algebra von primitiven Elementen erzeugt. Über Körpern der Charakteristik 0 induziert die Adjunktion  $(\mathcal{U}, \mathcal{P})$  eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der irreduziblen kokommutativen Hopfalgebren und der Kategorie der Lie-Algebren. Somit werden solche Hopfalgebren vollständig durch die Lie-Algebra ihrer primitiven Elemente beschrieben. Eine Darstellung dieses Zusammenhangs findet sich zum Beispiel in [Swe69, Abschnitt 13.0].

Die primitiven Elemente einer gezopfsten Hopfalgebra sind dagegen im Allgemeinen nicht mehr unter der Kommutatoroperation abgeschlossen. Deshalb lassen sich die eben skizzierten Resultate nicht einfach auf Hopfalgebren in gezopfsten Kategorien übertragen. Der Grund hierfür ist in der Zopfung zu sehen.

Die Zopfung übernimmt für eine monoidale Kategorie die Rolle des Standardvertauschers  $V \otimes W \rightarrow W \otimes V$ ,  $x \otimes y \mapsto y \otimes x$  auf der Kategorie  $\text{Vek}$  der Vektorräume. Bei der Zopfung handelt es sich um eine Familie  $\tau_{V,W} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$  von natürlichen Isomorphismen, die bestimmten Axiomen genügen. Dabei muss aber nicht mehr notwendigerweise  $\tau_{W,V} \circ \tau_{V,W} = \text{id}_{V \otimes W}$  gelten, wie dies beim Standardvertauscher der Fall ist. Sollte diese Bedingung dennoch für alle Objekte  $V$  und  $W$  der Kategorie erfüllt sein, so spricht man von einer Symmetrie.

Aus den Axiomen der Zopfung folgt insbesondere, dass für jedes Objekt  $V$  durch

$$\tilde{\lambda}_{V^{\otimes n}} : B_n \rightarrow \text{Aut}(V^{\otimes n}), \quad b_i \mapsto \text{id}_{V^{\otimes(i-1)}} \otimes \tau_{V,V} \otimes \text{id}_{V^{\otimes(n-i-1)}} \quad (1)$$

eine Darstellung der Zopfgruppe  $B_n$  definiert ist. Hierbei sind  $b_1, \dots, b_{n-1}$  die Standarderzeuger von  $B_n$ . Die lineare Fortsetzung  $\mathbb{k}B_n \rightarrow \text{End}(V^{\otimes n})$  sei ebenfalls mit  $\tilde{\lambda}_{V^{\otimes n}}$  bezeichnet. Für eine Symmetrie faktorisiert diese Darstellung über die symmetrische Gruppe  $S_n$ . Im Fall des Standardvertauschers handelt es sich dabei um die Permutation der Tensorfaktoren.

Mit Hilfe der Zopfung lassen sich nun bestimmte Konstruktionen auf gezopfte monoidale Kategorien übertragen. So ist das Tensorprodukt  $A \otimes B$  zweier assoziativer Algebren  $A$  und  $B$  mit der Multiplikation

$$\nabla_{A \otimes B} := (\nabla_A \otimes \nabla_B) \circ (\text{id}_A \otimes \tau_{B,A} \otimes \text{id}_B) : (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \rightarrow A \otimes B$$

eine Algebra. Hierbei bezeichnen  $\nabla_A : A \otimes A \rightarrow A$  und  $\nabla_B : B \otimes B \rightarrow B$  die Multiplikationen von  $A$  und  $B$ . Für den Standardvertauscher entspricht  $\nabla_{A \otimes B}$  der komponentenweisen Multiplikation.

Eines der Axiome einer Hopfalgebra besagt nun gerade, dass die Komultiplikation  $\Delta_H : H \rightarrow H \otimes H$  einer gezopfsten Hopfalgebra  $H$  ein Homomorphismus von Algebren bezüglich der gerade beschriebenen Multiplikation von  $H \otimes H$  ist. Damit kann das Koprodukt des Kommutators zweier Elemente  $x$  und  $y$  auf das Koprodukt von  $x$  und  $y$  zurückgeführt werden. Insbesondere kann  $\Delta_H([x, y])$  explizit berechnet werden, falls die Elemente  $x$  und  $y$  primitiv sind. Dabei taucht bei der Berechnung von Produkten in  $H \otimes H$  die Zopfung auf. Somit hängt es entscheidend von der Zopfung ab, ob mit  $x$  und  $y$  auch  $[x, y]$  primitiv ist. Aus der Formel für das Koprodukt von  $[x, y]$  ergibt sich ferner, dass es zweckmäßig ist, schon bei der Definition

des Kommutators die Zopfung zu verwenden. Dies führt zum gezopften Kommutator  $[\cdot, \cdot]_c := \nabla_A \circ (\text{id}_{A \otimes A} - \tau_{A,A})$ , der für eine assoziative Algebra  $A$  erklärt werden kann. Allerdings sind auch in diesem Fall die primitiven Elemente einer gezopften Hopfalgebra nur dann unter dem gezopften Kommutator abgeschlossen, wenn die Zopfung eine Symmetrie ist.

In [Par97, Par98a, Par98b] verallgemeinert Pareigis für die Kategorie  $\mathcal{YD}_K^K$  den Begriff einer Lie-Algebra derartig, dass die Menge der primitiven Elemente einer Hopfalgebra in  $\mathcal{YD}_K^K$  mit der Struktur einer Lie-Algebra versehen werden kann. Dabei stimmt diese Definition im Spezialfall  $K = \mathbb{k}G$ , wobei  $G$  die triviale Gruppe ist, mit derjenigen einer gewöhnlichen Lie-Algebra überein. Und falls  $G$  die zweielementige Gruppe ist, beinhaltet diese Definition die Lie-Superalgebren.

Es soll nun kurz der Ansatz aus [Par97] dargestellt werden, der zur Definition dieser Lie-Algebren führt. Dazu werden für gezopfte Hopfalgebren  $H$  sowie Tupel  $\alpha = (\alpha_t)_{t \in S_n} \in \mathbb{k}^{n!}$  Verknüpfungen der Form

$$f_\alpha : H^{\otimes n} \rightarrow H, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \mapsto \sum_{t \in S_n} \alpha_t x_{t(1)} \cdots x_{t(n)}$$

betrachtet. Für einige dieser Verknüpfungen werden dann Einschränkungen  $D_\alpha$  des Definitionsbereichs angegeben, so dass für jedes  $z \in D_\alpha \cap \mathcal{P}(H)^{\otimes n}$  das Element  $f_\alpha(z)$  primitiv ist. Schließlich werden Relationen zwischen diesen partiell definierten Verknüpfungen ermittelt, die dann zu der Definition einer Lie-Algebra axiomatisiert werden. Somit besteht der Unterschied zur klassischen Definition einerseits darin, dass jetzt nicht nur eine 2stellige Verknüpfung vorkommt, sondern auch mehrstellige Verknüpfungen möglich sind. Andererseits sind die Lie-Algebren nun durch partiell definierte Verknüpfungen gegeben. Aus diesem Vorgehen ergibt sich ferner, dass die primitiven Elemente einer gezopften Hopfalgebra wie im klassischen Fall eine Lie-Algebra bilden.

Eigentlich wird in [Par97] noch nicht mit der Kategorie der Yetter-Drinfeld-Moduln gearbeitet. Vielmehr lässt sich die verwendete Kategorie als Unterkategorie von  $\mathcal{YD}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}$  auffassen, wobei  $G$  eine abelsche Gruppe ist. Erst in den beiden folgenden Arbeiten werden die Aussagen für die Kategorie  $\mathcal{YD}_K^K$  verallgemeinert. Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass die obigen Verknüpfungen nun mit Hilfe der Zopfung ausgedrückt werden. Dies hat den Vorteil, dass sich Verknüpfungen einheitlich beschreiben und damit zusammenfassen lassen.

Den Prototyp einer Hopfalgebra, die von primitiven Elementen erzeugt wird, stellt die Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  eines Objekts  $V$  dar. Dabei ist die Koalgebrenstruktur von  $\mathcal{T}(V)$  dadurch festgelegt, dass die Elemente aus  $V \subset \mathcal{T}(V)$  primitiv sind. Die primitiven Elemente der Tensoralgebra lassen sich aber nicht alle durch sukzessives Anwenden der Lie-Verknüpfungen von Pareigis aus den Elementen von  $V$  gewinnen. Sind zum Beispiel  $q_{1,2}, q_{2,1}, q_{2,2} \in \mathbb{k}$  mit  $q_{1,2}q_{2,1}q_{2,2} = 1$  und  $x, y \in V$ , so dass für die Zopfung  $\tau(x \otimes y) = q_{1,2} y \otimes x$ ,  $\tau(y \otimes x) = q_{2,1} x \otimes y$  und  $\tau(y \otimes y) = q_{2,2} y \otimes y$  gelten, so ist

$$xy^2 - q_{1,2}(1 + q_{2,2})yxy + q_{1,2}^2 q_{2,2} y^2 x \quad (2)$$

ein homogenes primitives Element von  $\mathcal{T}(V)$ . Dieses Element lässt sich aber nur dann durch die Lie-Verknüpfungen von Pareigis gewinnen, wenn  $q_{2,2} = \pm 1$  gilt oder wenn  $q_{2,2}$  eine primitive 3te Einheitswurzel ist. Damit ist aber ein Großteil der obigen Elemente nicht erfasst.

Elemente von der Form (2) stellen aber ein typisches Beispiel für primitive Elemente der Tensoralgebra dar, die im Zusammenhang mit den gezopften Hopfalgebren, die bei der Zerlegung der  $U_q(\mathfrak{g})$  auftreten, eine wichtige Rolle spielen. Diese Hopfalgebren ergeben sich aus geeigneten Tensoralgebren durch Einführung zusätzlicher Relationen. Dabei sind die deformierten Serre-Relationen von entscheidender Bedeutung. Im generischen Fall werden sogar alle anderen Relationen von diesen erzeugt. Den Serre-Relationen entsprechen nun homogene primitive Elemente in der Tensoralgebra, die heraus faktorisiert werden. Ein Beispiel für solche Elemente liefern die Elemente der Gestalt (2). Dass diese Elemente im Allgemeinen nicht aus  $V$  durch sukzessives Anwenden der Lie-Verknüpfungen von Pareigis gewonnen werden können, hat zur Folge, dass diese gezopften Hopfalgebren nicht mit der universellen Hülle der Lie-Algebra ihrer primitiven Elemente übereinstimmen. Somit sind die gefundenen Lie-Verknüpfungen noch nicht ausreichend. Insbesondere sind auch die Definitionsbereiche dieser Lie-Verknüpfungen zu restriktiv.

Diese Beobachtungen bilden den Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit. Hieraus ergeben sich auch die folgenden Anforderungen an die Lie-Algebren.

- Die primitiven Elemente einer gezopften Hopfalgebra sollen mit der Struktur einer Lie-Algebra versehen werden können.
- Die Menge der primitiven Elemente der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  soll als Lie-Algebra von  $V$  erzeugt werden.

Letztlich kann die in dieser Arbeit angegebene Definition als Vervollständigung der Definition von Pareigis angesehen werden. Dabei gilt das Hauptaugenmerk der Kategorie  $\mathcal{YD}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}$  der Yetter-Drinfeld-Moduln über der Gruppenalgebra einer endlichen abelschen Gruppe  $G$  vom Exponenten  $m \geq 1$ . Zudem wird vom Grundkörper  $\mathbb{k}$  angenommen, dass er algebraisch abgeschlossen ist und die Charakteristik 0 besitzt. Zwar gelten einige Aussagen für wesentlich allgemeinere Kategorien. Dies trifft insbesondere auf die Monadenbeschreibung aus Kapitel 1 sowie die Definition gezopfter Operaden in Kapitel 2 zu. Spätestens aber die Konstruktion der Lie-Operade ist auf den Fall  $\mathcal{YD}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}$  zugeschnitten. Deshalb wird diese Kategorie bei der folgenden Inhaltsübersicht auch stets als Grundkategorie  $\mathcal{C}$  verwendet, um das Ganze nicht zu verkomplizieren und technischen Details aus dem Wege zu gehen.

Im ersten Kapitel werden die Lie-Algebren durch eine Monade definiert. Dieses Vorgehen wird durch die klassische Situation motiviert, da hier der Vergissfunktork  $\mathcal{V} : \text{Lie} \rightarrow \text{Vek}$  monadisch ist. Dies bedeutet zum einen, dass der Funktor  $\mathcal{V}$  einen Linksadjungierten besitzt. Diese Adjunktion erzeugt dann eine Monade  $L$ . Ferner ist damit die Kategorie  $\text{Vek}^L$  der Algebren über der Monade  $L$  sowie ein Vergleichsfunktork  $\text{Lie} \rightarrow \text{Vek}^L$  erklärt. Die zweite Forderung, die an einen monadischen Funktork



gestellt wird, besagt nun, dass der Vergleichsfunktor ein Isomorphismus ist. Somit kann die Kategorie der Lie-Algebren mit der Kategorie  $\mathbf{Vek}^L$  identifiziert werden.

Die Monade  $L$  wird auch von einer Adjunktion erzeugt, die die Kategorie der Lie-Algebren nicht verwendet. Dazu sei  $\mathcal{P} : \mathbf{Hopf} \rightarrow \mathbf{Vek}$  derjenige Funktor, der jeder Hopfalgebra  $H$  den Vektorraum  $\mathcal{P}(H)$  der primitiven Elemente von  $H$  zuordnet. Dieser Funktor besitzt einen Linksadjungierten  $\mathcal{T} : \mathbf{Vek} \rightarrow \mathbf{Hopf}$ , wobei  $\mathcal{T}(V)$  für jeden Vektorraum  $V$  die Tensoralgebra ist. Diese Adjunktion erzeugt dann ebenfalls die Monade  $L$ . Ferner entspricht der Vergleichsfunktor  $\mathbf{Hopf} \rightarrow \mathbf{Vek}^L$ , der von dieser zweiten Adjunktion induziert wird, unter der Identifikation  $\mathbf{Lie} \cong \mathbf{Vek}^L$  dem Funktor  $\mathcal{P} : \mathbf{Hopf} \rightarrow \mathbf{Lie}$ . Somit ist sowohl die Kategorie der Lie-Algebren als auch der Funktor  $\mathcal{P} : \mathbf{Hopf} \rightarrow \mathbf{Lie}$  durch die Adjunktion  $(\mathcal{T} : \mathbf{Vek} \rightarrow \mathbf{Hopf}, \mathcal{P} : \mathbf{Hopf} \rightarrow \mathbf{Vek})$  bis auf Isomorphie charakterisiert.

Für die Grundkategorie  $\mathcal{C}$  können die Funktoren  $\mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Hopf}$  und  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{\mathbf{Hopf}} : \mathbf{Hopf} \rightarrow \mathcal{C}$  ganz analog zum klassischen Fall erklärt werden. Dabei sind diese beiden Funktoren wieder zueinander adjungiert. Sei  $L$  die von dieser Adjunktion erzeugte Monade. Dann wird die Kategorie  $\mathbf{Lie}$  der Lie-Algebren in  $\mathcal{C}$  als Kategorie  $\mathcal{C}^L$  der Algebren über der Monade  $L$  definiert. Nach den obigen Erläuterungen kann dies als Verallgemeinerung der klassischen Definition von Lie-Algebren angesehen werden.

Aufgrund dieser Definition existieren auch ein Vergissfunktor  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\mathbf{Lie}} : \mathbf{Lie} \rightarrow \mathcal{C}$  und ein Vergleichsfunktor  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathbf{Lie}}^{\mathbf{Hopf}} : \mathbf{Hopf} \rightarrow \mathbf{Lie}$ . Für diese Funktoren gilt nun  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{\mathbf{Hopf}} = \mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\mathbf{Lie}} \circ \mathcal{P}_{\mathbf{Lie}}^{\mathbf{Hopf}}$ . Somit können die primitiven Elemente einer Hopfalgebra mit der Struktur einer Lie-Algebra versehen werden. Des Weiteren ist  $\mathcal{P} \circ \mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Lie}$  ein Linksadjungierter des Vergissfunktors  $\mathcal{V} : \mathbf{Lie} \rightarrow \mathcal{C}$ , d.h., für jedes Objekt  $V$  aus  $\mathcal{C}$  ist die Lie-Algebra  $\mathcal{P}\mathcal{T}(V)$  der primitiven Elemente der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  die freie Lie-Algebra auf  $V$ . Damit sind die vorher gestellten Bedingungen an die Lie-Algebren erfüllt. Schließlich kann zu jeder Lie-Algebra  $L$  auch wieder ihre universelle Einhüllende  $\mathcal{U}(L) \in \mathbf{Hopf}$  konstruiert werden. Dies liefert einen linksadjungierten Funktor  $\mathcal{U} : \mathbf{Lie} \rightarrow \mathbf{Hopf}$  von  $\mathcal{P} : \mathbf{Hopf} \rightarrow \mathbf{Lie}$ .

Die Definition der Lie-Algebren mittels der Monade  $L$  ist allerdings für konkrete Betrachtungen wenig geeignet. Dies liegt daran, dass der unterliegende Endofunktor der Monade  $L$  jedem Objekt  $V$  aus  $\mathcal{C}$  die primitiven Elemente der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  zuordnet und diese primitiven Elemente nicht explizit bekannt sind. Deshalb ist es wünschenswert, wie im klassischen Fall eine axiomatische Definition dieser Lie-Algebren zu finden.

Als Zwischenschritt wird hierzu im zweiten Kapitel eine Operade  $\mathfrak{L}$  angegeben, die die Kategorie der Lie-Algebren beschreibt und als Lie-Operade bezeichnet wird. Den Ausgangspunkt für die Definition von  $\mathfrak{L}$  bildet die assoziative Operade  $\mathfrak{A}$ , durch die die assoziativen Algebren gegeben sind. Dabei sollen diese beiden Operaden so definiert werden, dass

- die Lie-Operade eine Unteroperade der assoziativen Operade ist und
- die assoziative Operade durch Erzeugende und Relationen wie im klassischen Fall beschrieben wird.

Um diese beiden Anforderungen gleichzeitig zu erfüllen, muss eine geeignete Definition von Operaden verwendet werden.

Operaden wurden in [May72] eingeführt; siehe auch [KrM95]. Durch Operaden lassen sich bestimmte algebraische Strukturen erfassen, die durch multilineare Verknüpfungen gegeben sind. Dabei wird im Gegensatz zur klassischen axiomatischen Beschreibung eine Gesamtheit von Verknüpfungen der Form  $A^{\otimes n} \rightarrow A$  betrachtet, die unter dem ineinander Einsetzen von Abbildungen und dem Vertauschen der Argumente abgeschlossen ist.

Operaden können in jeder symmetrischen monoidalen Kategorie definiert werden. Dabei besteht eine Operade aus einer Familie  $\mathfrak{D}(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  von Objekten. In gewisser Weise parametrisiert das Objekt  $\mathfrak{D}(n)$  die  $n$ -stelligen Verknüpfungen  $A^{\otimes n} \rightarrow A$ . Das Vertauschen der Argumente wird durch eine Rechtsoperation der symmetrischen Gruppe  $S_n$  auf  $\mathfrak{D}(n)$  modelliert, während das ineinander Einsetzen von Abbildungen durch Morphismen

$$\mu_{(k;n_1,\dots,n_k)} : \mathfrak{D}(k) \otimes \mathfrak{D}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{D}(n_k) \rightarrow \mathfrak{D}(n)$$

für  $k, n, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \cdots + n_k = n$  beschrieben wird. Schließlich ist noch ein Einselement  $\eta : I \rightarrow \mathfrak{D}(1)$  gegeben. Von diesen Daten wird verlangt, dass das Verkettens assoziativ ist und dass  $\eta$  ein Einselement bezüglich der Verkettungen  $\mu_{(k;n_1,\dots,n_k)}$  ist. Ferner regeln Äquivarianzaxiome die Beziehungen zwischen den Rechtsoperationen der symmetrischen Gruppen und den Verkettungen.

In gezopften monoidalen Kategorien steht für das Vertauschen der Argumente die Zopfung zur Verfügung. Deshalb müssen in diesen Fällen bei der Definition von Operaden die Zopfgruppen anstelle der symmetrischen Gruppen verwendet werden. Operadendefinitionen, bei denen die Rechtsoperationen der symmetrischen Gruppen durch Operationen der Zopfgruppen ersetzt sind, kommen in [Fie91] und [Dun95] vor. Allerdings stammen die Objekte  $\mathfrak{D}(n)$  in diesen beiden Fällen aus einer symmetrischen Kategorie. In der vorliegenden Situation ist die Grundkategorie  $\mathcal{C}$  aber gezopft. Werden in diesem Fall beliebige Objekte aus  $\mathcal{C}$  für die  $\mathfrak{D}(n)$  zugelassen, so treten Probleme auf. Deshalb wird im zweiten Kapitel im Detail auf die Definition von gezopften Operaden eingegangen. Hierbei zeigt sich, dass man sich für die Objekte  $\mathfrak{D}(n)$  doch auf eine symmetrische Unterkategorie von  $\mathcal{C}$  zurückziehen muss. Allerdings können als Algebren über einer solchen Operade beliebige Objekte aus der gezopften Kategorie  $\mathcal{C}$  verwendet werden.

Zudem werden bei der Definition der Operaden Quotienten der Zopfgruppen benutzt, um die beiden oben angegebenen Forderungen an die Operaden  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{L}$  zu erfüllen. Dabei müssen diese Quotienten auf bestimmte Art und Weise miteinander verträglich sein. Ferner müssen die Darstellungen (1) der Zopfgruppen über diese Quotienten faktorisieren. Die hieraus resultierenden Darstellungen dieser Quotienten seien wieder mit  $\tilde{\lambda}_{V^{\otimes n}}$  bezeichnet.

Im Fall der Grundkategorie  $\mathcal{C} = \mathcal{YD}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}$  wird das System  $\mathcal{B}_m = (B_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$  von Quotienten der Zopfgruppen verwendet, wobei sich die Faktorgruppe  $B_{m,n}$  aus der

Zopfgruppe  $B_n$  durch Einführung der zusätzlichen Relationen

$$\begin{aligned} b_i^2 b_j^2 &= b_j^2 b_i^2 && \text{für } 1 \leq i, j < n, \\ b_i^{2m} &= e && \text{für } 1 \leq i < n \end{aligned}$$

ergibt. Dann ist  $B_{m,n}$  zu einem verschränkten Produkt

$$S_n \#_{\sigma_{m,n}} (\mathbb{Z}/(m))^{\binom{n}{2}}$$

isomorph. Insbesondere ist damit  $B_{m,n}$  endlich und die zugehörige Gruppenalgebra halbeinfach. Dies ist entscheidend dafür, dass die oben formulierten Anforderungen an die Operaden  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{L}$  erfüllt werden können.

Den Prototyp einer Operade stellt die Endomorphismenoperade  $\mathfrak{E}nd(V)$  eines Objektes  $V \in \mathcal{C}$  dar. Ihre Komponenten sind durch die Morphismenmengen

$$\mathfrak{E}nd(V)(n) := \mathcal{C}(V^{\otimes n}, V)$$

gegeben. Dabei ist die Rechtsoperation von  $\sigma \in \mathbb{k}B_{m,n}$  auf  $f \in \mathfrak{E}nd(V)(n)$  durch  $f \cdot \sigma := f \circ \tilde{\lambda}_{V^{\otimes n}}(\sigma)$  definiert. Des Weiteren werden die Verkettungen  $\mu_{(k;n_1, \dots, n_k)}$  von den Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(V^{\otimes k}, V) \times \mathcal{C}(V^{\otimes n_1}, V) \times \dots \times \mathcal{C}(V^{\otimes n_k}, V) &\rightarrow \mathcal{C}(V^{\otimes n}, V), \\ (g, f_1, \dots, f_k) &\mapsto g \circ (f_1 \otimes \dots \otimes f_k) \end{aligned}$$

induziert. Schließlich ist die Einheit  $\eta : \mathbb{k} \rightarrow \mathcal{C}(V, V)$  dieser Operade durch  $\eta(1) := \text{id}_V$  festgelegt. Mit Hilfe der Endomorphismenoperaden lassen sich auch Algebren über einer beliebigen Operade  $\mathfrak{D}$  beschreiben. So entsprechen die  $\mathfrak{D}$ -Algebrenstrukturen auf einem Objekt  $V \in \mathcal{C}$  genau den Morphismen  $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{E}nd(V)$  von Operaden.

Die Komponenten der assoziativen Operade sind durch  $\mathfrak{A}(n) := \mathbb{k}B_{m,n}$  definiert, wobei die Rechtsoperation von  $\mathbb{k}B_{m,n}$  auf  $\mathfrak{A}(n)$  durch die rechtsreguläre Darstellung gegeben ist. Auf die übrigen Strukturdaten dieser Operade soll an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden. Die Algebren über dieser Operade entsprechen den assoziativen Algebren. Diese Beziehung ist wie folgt erklärt. Für eine assoziative Algebra  $A$  sei die Multiplikation von  $n$  Faktoren mit  $\nabla^n : A^{\otimes n} \rightarrow A$  bezeichnet. Dann sind

$$\mathfrak{A}(n) \rightarrow \mathfrak{E}nd(A)(n), \sigma \mapsto \nabla^n \circ \tilde{\lambda}_{A^{\otimes n}}(\sigma)$$

die Komponenten eines Operadenmorphismus. Durch diesen wird  $A$  zu einer Algebra über der Operade  $\mathfrak{A}$ .

Für die Definition der Lie-Operade sind die primitiven Elemente der Tensoralgebra von entscheidender Bedeutung. Die Komultiplikation der Tensoralgebra ist explizit in [Sbg96] beschrieben. Hierbei tauchen Elemente  $S_{k,l} \in \mathbb{k}B_{k+l}$  auf, durch die die primitiven Elemente der Tensoralgebra charakterisiert werden können. Ein Element  $z \in V^{\otimes n} \subset \mathcal{T}(V)$  ist genau dann primitiv, wenn  $S_{k,l} \cdot z = 0$  für alle  $k, l > 0$

mit  $k + l = n$  gilt. Als Bezeichnung sei noch  $\mathfrak{S}_n$  für die Menge aller  $S_{k,l}$  mit  $k, l > 0$  und  $k + l = n$  eingeführt. Wird nun

$$\mathfrak{L}(n) := \text{Ann}_{\mathbb{k}B_{m,n}}^r(\mathfrak{S}_n) = \{\sigma \in \mathbb{k}B_{m,n} \mid S_{k,l} \cdot \sigma = 0 \text{ für } k, l > 0 \text{ mit } k + l = n\}$$

gesetzt, so ist hierdurch eine Unteroperade  $\mathfrak{L}$  der assoziativen Operade  $\mathfrak{A}$  definiert. Dies ist die Lie-Operade.

Jeder Operade kann eine Monade zugeordnet werden, die dieselbe Kategorie von Algebren besitzt. Im Fall der Lie-Operade  $\mathfrak{L}$  ist der unterliegende Endofunktor dieser Monade auf Objekten durch

$$V \mapsto \bigoplus_n \mathfrak{L}(n) \otimes_{\mathbb{k}B_{m,n}} V^{\otimes n}$$

gegeben. Dieser Funktor ist nun natürlich isomorph zum Funktor  $\mathcal{P} \circ \mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , der jedem Objekt  $V \in \mathcal{C}$  die primitiven Elemente der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  zuordnet. Hierfür ist von entscheidender Bedeutung, dass die Algebra  $\mathbb{k}B_{m,n}$  halbeinfach ist. Genauer gilt sogar, dass die zur Lie-Operade gehörige Monade isomorph zur vorher definierten Monade  $\mathbf{L}$  ist. Deshalb ist auch die Kategorie der Algebren über der Operade  $\mathfrak{L}$  isomorph zur Kategorie  $\text{Lie} = \mathcal{C}^{\mathbf{L}}$  der Lie-Algebren und kann mit dieser identifiziert werden.

Durch die gerade angegebene Definition der Lie-Operade ist aber noch nicht ganz soviel gewonnen, da es sich hierbei um eine implizite Definition handelt. Allerdings ist die Problemstellung nun viel klarer umrissen. Aus dieser Definition folgt auch schon, dass sich die Lie-Algebren in der Kategorie  $\mathcal{C}$  durch global definierte Verknüpfungen beschreiben lassen. Ferner ergibt sich, dass maximal eine  $n$ -stellige Verknüpfung benötigt wird, um alle anderen  $n$ -stelligen Verknüpfungen zu erzeugen, da  $\mathfrak{L}(n)$  als  $\mathbb{k}B_{m,n}$ -Rechtsmodul zyklisch ist.

Im dritten Kapitel wird nun versucht, eine axiomatische Definition der Lie-Algebren anzugeben. Dazu wird zunächst geklärt, was es bedeutet, eine Operade durch Erzeugende und Relationen zu beschreiben. Dies ist für Operaden über der Kategorie  $\mathcal{C}$  immer möglich und entspricht einer axiomatischen Definition der durch die Operade gegebenen algebraischen Struktur. Anschließend wird versucht, Erzeugende und Relationen für die Lie-Operade  $\mathfrak{L}$  zu finden. Hierzu liegen allerdings noch keine vollständigen Resultate vor. Insbesondere das Ermitteln von Relationen dürfte sich noch im Anfangsstadium befinden. Hier soll nun noch ein Überblick über die Hauptresultate gegeben werden, die zur Konstruktion von Elementen der Lie-Operade führen.

Um  $\mathfrak{L}(n) \subset \mathbb{k}B_{m,n}$  zu bestimmen, stellt sich allgemein das Problem, für einen  $\mathbb{k}B_n$ -Linksmodul  $M$  den Annulator

$$\mathcal{P}(M) := \text{Ann}_M^r(\mathfrak{S}_n) = \{v \in M \mid S_{k,l} \cdot v = 0 \text{ für alle } k, l > 0 \text{ mit } k + l = n\}$$

zu berechnen. Sei  $\mathfrak{J}_n$  das von  $\mathfrak{S}_n$  erzeugte Linksideal von  $\mathbb{k}B_n$ . Dann liefert jedes Element aus  $\mathfrak{J}_n$  eine notwendige Bedingung für die Elemente aus  $\mathcal{P}(M)$ . Bezeichnet  $e_n$  das Einselement der Zopfgruppe  $B_n$ , und wird ferner  $D_{1,n} := (b_1 \cdots b_{n-1})^n$

gesetzt, so liegt  $e_n - D_{1,n}$  in  $\mathfrak{J}_n$ . Somit ist  $\mathcal{P}(M)$  im Eigenraum der Operation mit  $D_{1,n}$  zum Eigenwert 1 enthalten. Dieser Eigenraum ist sogar ein  $\mathbb{k}B_n$ -Untermodul von  $M$ , da  $D_{1,n}$  zentral ist.

Ein weiteres Element aus  $\mathfrak{J}_n$  ist das Folgende. Das Dynkin-Specht-Wever-Element  $\Phi_n \in \mathbb{k}B_n$  sei durch

$$\Phi_n := (e_n - b_1 \cdots b_{n-1})(e_n - b_1 \cdots b_{n-2}) \cdots (e_n - b_1)$$

für  $n > 0$  definiert. Dann gilt  $ne_n - \Phi_n \in \mathfrak{J}_n$ , woraus  $\Phi_n \cdot v = nv$  für jedes  $v \in \mathcal{P}(M)$  folgt. Insbesondere besitzt also jedes  $v \in \mathcal{P}(M)$  eine Darstellung  $v = \Phi_n \cdot w$  mit  $w \in M$ . Dieses Resultat verallgemeinert eine Identität von Wigner [Wig89] und damit eine Teilaussage der Theoreme von Specht und Wever sowie Friedrichs [Jac62, V.4].

Die erste notwendige Bedingung zeigt, dass die Elemente  $D_{1,n}$  eine wichtige Rolle spielen. Sei  $R_n := \{D_{1,k} \mid k = 2, \dots, n\}$ . Dann ist  $S_{k,l}$  mit  $k+l = n$  in dem Ring der Brüche  $R_n^{-1}\mathbb{k}B_n$  invertierbar. Mit

$$\Theta_n := (e_n - D_{1,2})^{-1}(e_n - D_{1,3})^{-1} \cdots (e_n - D_{1,n})^{-1}$$

und

$$\Upsilon_n := \sum_{r=0}^1 (b_1 b_1 b_2)^r \sum_{r=0}^2 (b_1 b_1 b_2 b_3)^r \cdots \sum_{r=0}^{n-2} (b_1 b_1 \cdots b_{n-1})^r$$

ist dabei das Inverse von  $S_{1,n-1}$  durch  $\Phi_n \Theta_n \Upsilon_n$  gegeben.

Falls  $M$  ein Linksmodul über der Algebra  $Q_n := (R_n^{-1}\mathbb{k}B_n)/(e_n - D_{1,n})$  ist, so kann  $M$  auch als  $\mathbb{k}B_n$ -Linksmodul betrachtet werden. Für diesen Modul gilt nun

$$\mathcal{P}(M) = \Phi_n \Theta_{n-1} \Upsilon_n \cdot M, \quad (3)$$

d.h., in diesem Fall ist  $\mathcal{P}(M)$  explizit gegeben.

Um hieraus Aussagen über  $\mathfrak{L}(n) = \mathcal{P}(\mathbb{k}B_{m,n})$  zu gewinnen, wird

$$\mathbb{k}B_{m,n} \cong \mathbb{k}S_n \#_{\sigma} \mathbb{k}(\mathbb{Z}/(m)) \binom{n}{2}$$

zunächst als Linksmodul in  $m \binom{n}{2}$  Moduln  $M_{m,n}((\xi_{ij})_{1 \leq i < j \leq n})$  der Dimension  $n!$  zerlegt. Dabei handelt es sich bei den Parametern  $\xi_{ij} \in \mathbb{k}$  um  $m$ -te Einheitswurzeln. Auf einem solchen Modul operiert  $D_{1,n}$  durch Multiplikation mit dem Skalar  $\prod \xi_{ij}$ . Der Raum  $\mathcal{P}(M_{m,n}(\xi_{ij}))$  ist nun genau dann von Null verschieden, wenn dieser skalare Faktor gleich 1 ist. In diesem Fall gilt

$$(n-2)! \leq \dim_{\mathbb{k}} \mathcal{P}(M_{m,n}(\xi_{ij})) \leq (n-1)!$$

Operieren zudem  $e_n - D_{1,k}$  für  $k = 2, \dots, n-1$  durch Isomorphismen auf  $M_{m,n}(\xi_{ij})$ , so gilt  $\dim_{\mathbb{k}} \mathcal{P}(M_{m,n}(\xi_{ij})) = (n-2)!$ , und  $\mathcal{P}(M_{m,n}(\xi_{ij}))$  wird durch die Formel (3) beschrieben. Dabei sind diese zusätzlichen Bedingungen genau dann erfüllt, wenn

$$\prod_{\substack{i,j \in I \\ i < j}} \xi_{ij} \neq 1$$

für alle Teilmengen  $I \subset \{1, \dots, n\}$  mit  $1 < |I| < n$  gilt.

Die Aussagen über  $\mathcal{P}(M_{m,n}(\xi_{ij}))$  ergeben sich größtenteils auch aus den Arbeiten [Kha98, Kha99a, Kha00] von Kharchenko. So kommt es bei der Bestimmung von  $\mathcal{P}(M_{m,n}(\xi_{ij}))$  eigentlich nur auf den Isomorphietyp des  $\mathbb{k}B_n$ -Linksmoduls  $M_{m,n}(\xi_{ij})$  an. Für geeignete Objekte  $V \in \mathcal{C}$  kann  $M_{m,n}(\xi_{ij})$  aber als  $\mathbb{k}B_n$ -Untersmodul von  $V^{\otimes n}$  realisiert werden. Falls dieser Modul als Unterraum der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  betrachtet wird, so entsprechen die primitiven Elemente dieses Unterraumes den Elementen aus  $\mathcal{P}(M_{m,n}(\xi_{ij}))$ . Bei der Bildung des Radford-Biproduktes  $\mathbb{k}G\#\mathcal{T}(V)$  entsprechen die primitiven Elemente von  $\mathcal{T}(V)$  nun aber bestimmten schiefprimitiven Elementen von  $\mathbb{k}G\#\mathcal{T}(V)$  [Par98b, Theorem 2.2]. Solche schiefprimitiven Elemente betrachtet Kharchenko.

Allerdings sind für einen beliebigen  $\mathbb{k}B_n$ -Linksmodul  $M$  die Aussagen über  $\mathcal{P}(M)$  aus Kapitel 3 etwas allgemeiner als bei Kharchenko. Darunter fällt zum Beispiel Formel (3). Trotzdem sind die Beweise dieser Aussagen direkter und kürzer als bei Kharchenko. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass die Elemente aus  $\mathcal{P}(M)$  in der vorliegenden Arbeit viel expliziter beschrieben werden. Dies ist insbesondere für die konkrete Handhabung der Lie-Operade  $\mathfrak{L}$  von Bedeutung. Ferner können aus der speziellen Konstruktion auch Relationen für die Elemente aus  $\mathcal{P}(M)$  abgeleitet werden.

Das vierte Kapitel stellt einen Einstieg in die Untersuchung der Beziehung zwischen den Lie-Algebren und den Hopfalgebren in der Kategorie  $\mathcal{C}$  dar, die durch die Adjunktion ( $\mathcal{U} : \text{Lie} \rightarrow \text{Hopf}, \mathcal{P} : \text{Hopf} \rightarrow \text{Lie}$ ) gegeben ist. Dazu wird zunächst für einen kleinen Modellfall, der eine unvollständige Definition des Begriffs einer Lie-Algebra verwendet, eine Verallgemeinerung des Poincaré-Birkhoff-Witt-Theorems bewiesen: Die universelle Hülle  $\mathcal{U}(L)$  einer Lie-Algebra  $L$  besitzt eine Basis, die nur von dem unterliegenden Objekt der Lie-Algebra abhängt, nicht aber von der speziellen Lie-Algebrenstruktur. Aus diesem PBW-Theorem ergibt sich, dass die Bestimmung einer Basis von  $\mathcal{U}(L)$  auf den Fall der abelschen Lie-Algebren reduziert werden kann, d.h. von Lie-Algebren, deren Verknüpfungen alle Null sind.

Eine ganz andere Verallgemeinerung des PBW-Theorems wird in [Kha99b] bewiesen. Dort zeigt Kharchenko, dass bestimmte Hopfalgebren  $H$ , die u.a. von schiefprimitiven Elementen und einer abelschen Gruppe  $G$  als Menge der gruppenartigen Elemente erzeugt werden, eine PBW-Basis besitzen. Darunter ist zu verstehen, dass es eine total geordnete Teilmenge  $X$  von  $H$  sowie eine Abbildung  $h : X \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  gibt, so dass die Elemente der Form  $gx_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$  mit  $g \in G$ ,  $x_i \in X$ ,  $x_1 < \dots < x_n$  und  $0 \leq m_i < h(x_i)$  eine Basis von  $H$  bilden. Das Problem besteht dann überwiegend darin, die Menge  $X$  zu bestimmen. Diese hängt wesentlich von der Algebrenstruktur von  $H$  ab. Dabei wird allerdings keine Beziehung zwischen der Menge der schiefprimitiven Elemente von  $H$  und der Menge  $X$  hergestellt. Eine analoge Aussage gilt dann auch für bestimmte gezopfte Hopfalgebren, die von primitiven Elementen erzeugt werden.

Zum Schluss wird noch ein Beispiel dafür angegeben, dass Lie-Algebren existieren, für die  $L \not\cong \mathcal{P}\mathcal{U}(L)$  gilt. Dies ist selbst dann der Fall, wenn die vollständige

Definition einer Lie-Algebra im Sinne von Kapitel 1 verwendet wird. Somit ist die Kategorie der Lie-Algebren via der obigen Adjunktion nicht zu einer geeigneten Unterkategorie der Kategorie der Hopfalgebren äquivalent, wie es in der klassischen Situation der Fall ist.

### **Konventionen**

In der gesamten Arbeit bezeichne  $\mathbb{k}$  stets einen algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0. Ferner ist die Kategorie  $\mathcal{YD}_K^K$  der Yetter-Drinfeld-Moduln über einer Hopfalgebra  $K$  mit bijektiver Antipode gebildet, sofern nicht explizit etwas anderes gesagt wird.

### **Danksagungen**

Meinem Doktorvater, Herrn Professor Dr. B. Pareigis, danke ich ganz herzlich für die Möglichkeit, in München zu promovieren, sowie die Betreuung. Die Definition der Lie-Algebren mittels Monaden im ersten Kapitel entstand auf Anregung von Herrn Privatdozent Dr. P. Schauenburg hin. Für finanzielle Unterstützung in Form eines Doktorandenstipendiums gilt mein Dank dem Graduiertenkolleg „Mathematik im Bereich ihrer Wechselwirkung mit der Physik“ der Deutschen Forschungsgemeinschaft. Schließlich danke ich meinen Eltern für ihre Unterstützung.





# Kapitel 1

## Lie-Algebren in gezopfsten Kategorien

In diesem Kapitel wird für geeignete gezopfte Grundkategorien  $\mathcal{C}$  die Kategorie der Lie-Algebren durch eine Monade definiert. Dies kann als Verallgemeinerung von gewöhnlichen Lie-Algebren angesehen werden. Dabei ist die Definition so beschaffen, dass jede assoziative Algebra mit der Struktur einer Lie-Algebra versehen werden kann und die primitiven Elemente einer Hopfalgebra eine Lie-Unteralgebra bezüglich dieser Lie-Algebrenstruktur bilden. Ferner wird zu jeder Lie-Algebra ihre universelle Einhüllende konstruiert. Dabei handelt es sich zunächst um eine assoziative Algebra, die dann zu einer Hopfalgebra gemacht wird. Abschließend wird noch gezeigt, dass sowohl die schiefsymmetrischen Endomorphismen als auch die Derivationen einer Algebra eine Lie-Algebra bilden.

Hierbei werden die Grundlagen der Kategorientheorie als bekannt vorausgesetzt. Dies gilt insbesondere für adjungierte Funktoren und Monaden. Hierzu sei auf [Mac72] und [Par69] verwiesen. Ferner kann [Kas95] für die benötigten Begriffe und Aussagen über Zopfungen herangezogen werden.

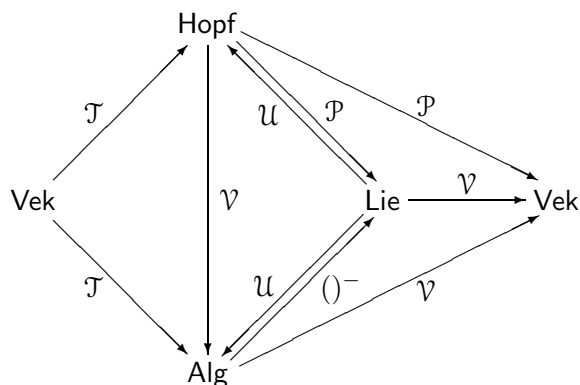
Als Grundkategorie wird dabei in diesem Kapitel stets eine abelsche, gezopft monoidale und kovollständige Kategorie  $\mathcal{C}$  verwendet, für die der Tensorfunktoren in jedem Argument additiv und exakt ist sowie Kolimites erhält. Der Einfachheit halber wird ferner angenommen, dass  $\mathcal{C}$  strikt ist. Das Einsobjekt und die Zopfung von  $\mathcal{C}$  werden mit  $I$  bzw.  $\tau = \tau^{\mathcal{C}}$  bezeichnet.

### 1.1 Die klassische Situation

Zunächst wird der Fall betrachtet, bei der die Grundkategorie durch die Kategorie  $\mathbf{Vek}$  der Vektorräume gegeben ist. Hierfür sollen einige Aussagen zusammengestellt werden, die dann den Ausgangspunkt für die Verallgemeinerung der Kategorie der Lie-Algebren bilden. Dazu sei noch einmal ausdrücklich daran erinnert, dass der Grundkörper nach Voraussetzung die Charakteristik 0 besitzt.

Neben der Kategorie der Vektorräume sind noch die Kategorien der Algebren, der

Hopfalgebren und der Lie-Algebren von Interesse. Die Beziehungen zwischen diesen Kategorien werden durch Funktoren beschrieben. Die hier benötigten Funktoren lassen sich durch das folgende Diagramm veranschaulichen.



Dabei sind die vorkommenden Funktoren wie folgt erklärt:

- $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{Alg}}^{\text{Vek}} : \text{Vek} \rightarrow \text{Alg}$  und  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^{\text{Vek}} : \text{Vek} \rightarrow \text{Hopf}$  ordnen jedem Vektorraum  $V$  die Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  zu, wobei  $\mathcal{T}(V)$  auf eindeutige Weise eine Hopfalgebra ist, so dass die Elemente aus  $V \subset \mathcal{T}(V)$  primitiv sind.
- $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{Vek}}^{\text{Alg}} : \text{Alg} \rightarrow \text{Vek}$ ,  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{Vek}}^{\text{Lie}} : \text{Lie} \rightarrow \text{Vek}$  und  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{Alg}}^{\text{Hopf}} : \text{Hopf} \rightarrow \text{Alg}$  bezeichnen Vergissfunktoren.
- $()^- : \text{Alg} \rightarrow \text{Lie}$  ordnet jeder assoziativen Algebra  $A$  die Lie-Algebra  $A^- := (A, [,])$  mit Lie-Klammer  $[x, y] := xy - yx$  zu.
- Durch  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\text{Vek}}^{\text{Hopf}} : \text{Hopf} \rightarrow \text{Vek}$  und  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\text{Lie}}^{\text{Hopf}} : \text{Hopf} \rightarrow \text{Lie}$  wird jede Hopfalgebra  $H$  auf die Menge  $\mathcal{P}(H)$  ihrer primitiven Elemente abgebildet. Dabei ist  $\mathcal{P}(H)$  eine Lie-Unteralgebra von  $H^-$ .
- $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\text{Alg}}^{\text{Lie}} : \text{Lie} \rightarrow \text{Alg}$  und  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\text{Hopf}}^{\text{Lie}} : \text{Lie} \rightarrow \text{Hopf}$  beschreiben die Bildung der universellen Einhüllenden. Hierbei ist die Hopfalgebrenstruktur von  $\mathcal{U}(L)$  dadurch festgelegt, dass die Elemente aus  $L \subset \mathcal{U}(L)$  primitiv sind.

Insbesondere kommutieren in dem Diagramm die vier inneren Dreiecke. Ferner befinden sich unter diesen Funktoren die folgenden Paare adjungierter Funktoren:

$$\begin{aligned}
 &(\mathcal{T} : \text{Vek} \rightarrow \text{Alg}, \mathcal{V} : \text{Alg} \rightarrow \text{Vek}) \\
 &(\mathcal{T} : \text{Vek} \rightarrow \text{Hopf}, \mathcal{P} : \text{Hopf} \rightarrow \text{Vek}) \\
 &(\mathcal{P} \circ \mathcal{T} : \text{Vek} \rightarrow \text{Lie}, \mathcal{V} : \text{Lie} \rightarrow \text{Vek}) \\
 &(\mathcal{U} : \text{Lie} \rightarrow \text{Alg}, ()^- : \text{Alg} \rightarrow \text{Lie}) \\
 &(\mathcal{U} : \text{Lie} \rightarrow \text{Hopf}, \mathcal{P} : \text{Hopf} \rightarrow \text{Lie})
 \end{aligned}$$

Alternativ lassen sich diese Adjunktionen auch durch universelle Eigenschaften beschreiben [Mac72, IV.1 Satz 2]. So ist die Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  die freie assoziative

Algebra über dem Vektorraum  $V$ , was der ersten Adjunktion entspricht. Siehe hierfür zum Beispiel [Kas95, Satz II.5.1]. Die vierte Adjunktion ergibt sich aus der definierenden Eigenschaft der universellen Einhüllenden [Jac62, V.1]. Hieraus folgen auch die entsprechenden universellen Eigenschaften von  $\mathcal{T}(V)$  und  $\mathcal{U}(L)$  als Hopfalgebren, was die zweite und fünfte Adjunktion liefert. Denn einerseits werden primitive Elemente durch einen Homomorphismus von Hopfalgebren wieder auf primitive Elemente abgebildet. Andererseits ist ein Algebrenmorphismus von einer Hopfalgebra, die von primitiven Elementen erzeugt wird, in eine andere Hopfalgebra schon dann ein Morphismus von Hopfalgebren, wenn die erzeugenden primitiven Elemente auf primitive Elemente abgebildet werden. Schließlich ergibt sich die dritte Adjunktion aus der Tatsache, dass die freie Lie-Algebra über  $V$  durch die primitiven Elemente der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  gegeben ist [Jac62, V.4].

Des Weiteren sind die beiden Vergissfunktoren  $\mathcal{V} : \mathbf{Alg} \rightarrow \mathbf{Vek}$  und  $\mathcal{V} : \mathbf{Lie} \rightarrow \mathbf{Vek}$  monadisch, da es sich bei  $\mathbf{Alg}$  und  $\mathbf{Lie}$  um algebraische Kategorien handelt [Par69, Kapitel 3]. Somit sind die Kategorien  $\mathbf{Alg}$  und  $\mathbf{Lie}$  jeweils isomorph zur Kategorie der Algebren über derjenigen Monade, die durch die zugehörige Adjunktion erzeugt wird, und können mit diesen Kategorien identifiziert werden.

Die zur Adjunktion  $(\mathcal{P} \circ \mathcal{T} : \mathbf{Vek} \rightarrow \mathbf{Lie}, \mathcal{V} : \mathbf{Lie} \rightarrow \mathbf{Vek})$  gehörige Monade wird dabei auch durch die Adjunktion  $(\mathcal{T} : \mathbf{Vek} \rightarrow \mathbf{Hopf}, \mathcal{P} : \mathbf{Hopf} \rightarrow \mathbf{Vek})$  erzeugt. Dies ergibt sich wie folgt. Zunächst liefern diese beiden Adjunktionen denselben Endofunktor  $\mathcal{P} \circ \mathcal{T} : \mathbf{Vek} \rightarrow \mathbf{Vek}$ , der jedem Vektorraum  $V$  den Raum der primitiven Elemente der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  zuordnet. Über diesem Endofunktor werden dann die beiden Monaden gebildet. Ferner besitzen diese beiden Adjunktionen auch dieselbe Einheit  $\eta_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Lie}} = \eta_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Hopf}} : \text{id}_{\mathbf{Vek}} \rightarrow \mathcal{P} \circ \mathcal{T}$ , die die Einheit der zugehörigen Monaden darstellt. Diese ist für jeden Vektorraum  $V$  durch die kanonische Inklusion  $V \rightarrow \mathcal{P}\mathcal{T}(V)$  gegeben. Schließlich seien die Koeinheiten dieser Adjunktionen mit

$$\epsilon_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Lie}} : \mathcal{P}_{\mathbf{Lie}}^{\mathbf{Hopf}} \mathcal{T}_{\mathbf{Hopf}}^{\mathbf{Vek}} \mathcal{V}_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Lie}} \rightarrow \text{id}_{\mathbf{Lie}} \quad \text{bzw.} \quad \epsilon_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Hopf}} : \mathcal{T}_{\mathbf{Hopf}}^{\mathbf{Vek}} \mathcal{P}_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Hopf}} \rightarrow \text{id}_{\mathbf{Hopf}}$$

bezeichnet. Dann entspricht für jede Hopfalgebra  $H$

$$\mathcal{P}_{\mathbf{Lie}}^{\mathbf{Hopf}} \epsilon_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Hopf}}(H) : \mathcal{P}_{\mathbf{Lie}}^{\mathbf{Hopf}} \mathcal{T}_{\mathbf{Hopf}}^{\mathbf{Vek}} \mathcal{P}_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Hopf}}(H) \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbf{Lie}}^{\mathbf{Hopf}}(H)$$

unter dem Adjunktionsisomorphismus

$$\mathbf{Lie} \left( \mathcal{P}_{\mathbf{Lie}}^{\mathbf{Hopf}} \mathcal{T}_{\mathbf{Hopf}}^{\mathbf{Vek}} \mathcal{P}_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Hopf}}(H), \mathcal{P}_{\mathbf{Lie}}^{\mathbf{Hopf}}(H) \right) \cong \mathbf{Vek} \left( \mathcal{P}_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Hopf}}(H), \mathcal{V}_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Lie}} \mathcal{P}_{\mathbf{Lie}}^{\mathbf{Hopf}}(H) \right)$$

dem Morphismus

$$\mathcal{V}_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Lie}} \mathcal{P}_{\mathbf{Lie}}^{\mathbf{Hopf}} \epsilon_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Hopf}}(H) \circ \eta_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Lie}} \mathcal{P}_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Hopf}}(H) = \mathcal{P}_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Hopf}} \epsilon_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Hopf}}(H) \circ \eta_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Hopf}} \mathcal{P}_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Hopf}}(H) = \text{id}_{\mathcal{P}_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Hopf}}(H)},$$

woraus  $\epsilon_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Lie}} \mathcal{P}_{\mathbf{Lie}}^{\mathbf{Hopf}}(H) = \mathcal{P}_{\mathbf{Lie}}^{\mathbf{Hopf}} \epsilon_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Hopf}}(H)$  folgt. Dann gilt aber auch

$$\mathcal{V}_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Lie}} \epsilon_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Lie}} \mathcal{P}_{\mathbf{Lie}}^{\mathbf{Hopf}} \mathcal{T}_{\mathbf{Hopf}}^{\mathbf{Vek}} = \mathcal{P}_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Hopf}} \epsilon_{\mathbf{Vek}}^{\mathbf{Hopf}} \mathcal{T}_{\mathbf{Hopf}}^{\mathbf{Vek}},$$

d.h., die beiden obigen Adjunktionen führen zu derselben Monadenmultiplikation. Insgesamt erzeugen also diese beiden Adjunktionen dieselbe Monade.

Somit ist die Kategorie der Lie-Algebren bis auf Isomorphie durch die Adjunktion  $(\mathcal{T} : \mathbf{Vek} \rightarrow \mathbf{Hopf}, \mathcal{P} : \mathbf{Hopf} \rightarrow \mathbf{Vek})$  charakterisiert. Dies kann als Ausgangspunkt genommen werden, um die Kategorie der Lie-Algebren sowie das obige Beziehungsgeflecht zu den anderen Kategorien für die Grundkategorie  $\mathcal{C}$  zu verallgemeinern.

## 1.2 Algebren

Ein Monoid in der Kategorie  $\mathcal{C}$  werde im Folgenden als Algebra bezeichnet. Für die Einheit und die Multiplikation einer Algebra  $A$  werden die Notationen  $\eta_A : I \rightarrow A$  und  $\nabla_A : A \otimes A \rightarrow A$  verwendet. Zusammen mit den Morphismen von Monoiden bilden die Algebren eine Kategorie  $\mathbf{Alg}$ . Ordnet man jeder Algebra das unterliegende Objekt der Grundkategorie  $\mathcal{C}$  zu, so erhält man einen Vergissfunktork  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\mathbf{Alg}} : \mathbf{Alg} \rightarrow \mathcal{C}$ .

Da in der Kategorie  $\mathcal{C}$  abzählbare Koproducte existieren und diese vom Tensorfunktork in jedem Argument erhalten werden, besitzt der Vergissfunktork  $\mathcal{V} : \mathbf{Alg} \rightarrow \mathcal{C}$  einen Linksadjungierten [Mac72, VII.3 Satz 2]. Sei nun ein Linksadjungierter  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathbf{Alg}}^{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Alg}$  sowie eine Adjunktion fest gewählt. Für ein Objekt  $V$  aus  $\mathcal{C}$  wird die zugehörige Algebra  $\mathcal{T}V$  als Tensoralgebra bezeichnet. Seien  $\eta_A : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{V} \circ \mathcal{T}$  und  $\epsilon_A : \mathcal{T} \circ \mathcal{V} \rightarrow \text{id}_{\mathbf{Alg}}$  die Einheit und Koeinheit der Adjunktion. Dann wird der Adjunktionsisomorphismus  $\mathbf{Alg}(\mathcal{T}V, A) \cong \mathcal{C}(V, \mathcal{V}A)$  durch folgende zueinander inverse Abbildungen beschrieben:

$$\begin{aligned} \mathbf{Alg}(\mathcal{T}V, A) &\rightarrow \mathcal{C}(V, \mathcal{V}A), & f &\mapsto \mathcal{V}(f) \circ \eta_A(V), \\ \mathcal{C}(V, \mathcal{V}A) &\rightarrow \mathbf{Alg}(\mathcal{T}V, A), & g &\mapsto \epsilon_A(A) \circ \mathcal{T}(g). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Sei  $\mathbf{A} := (\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{C}}^{\mathbf{Alg}} := \mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\mathbf{Alg}} \circ \mathcal{T}_{\mathbf{Alg}}^{\mathcal{C}}, \mu_{\mathbf{A}} := \mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\mathbf{Alg}} \epsilon_{\mathbf{A}} \mathcal{T}_{\mathbf{Alg}}^{\mathcal{C}}, \eta_{\mathbf{A}})$  die von der obigen Adjunktion erzeugte Monade. Die Kategorie der Algebren über der Monade  $\mathbf{A}$  werde mit  $\mathcal{C}^{\mathbf{A}}$  bezeichnet. Dann existieren ein Vergissfunktork  $\mathcal{V}_{\mathcal{C}^{\mathbf{A}}}^{\mathcal{C}^{\mathbf{A}}} : \mathcal{C}^{\mathbf{A}} \rightarrow \mathcal{C}$  und ein Vergleichsfunktork  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\mathcal{C}^{\mathbf{A}}}^{\mathbf{Alg}} : \mathbf{Alg} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathbf{A}}$  mit  $\mathcal{V}_{\mathcal{C}^{\mathbf{A}}}^{\mathcal{C}^{\mathbf{A}}} \circ \mathcal{K}_{\mathcal{C}^{\mathbf{A}}}^{\mathbf{Alg}} = \mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\mathbf{Alg}}$ . Hierbei ist der Vergleichsfunktork für ein Objekt  $A$  aus  $\mathbf{Alg}$  durch

$$\mathcal{K}(A) := \left( \mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\mathbf{Alg}}(A), \mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\mathbf{Alg}} \epsilon_A(A) : \mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\mathbf{Alg}} \circ \mathcal{T}_{\mathbf{Alg}}^{\mathcal{C}} \circ \mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\mathbf{Alg}}(A) \rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\mathbf{Alg}}(A) \right)$$

gegeben. Der Funktork  $\mathcal{K}$  ist sogar ein Isomorphismus von Kategorien. Um dies zu zeigen, wird verwendet:

**Bemerkung 1.2.1.** Sei  $(A, \nabla_A, \eta_A)$  eine Algebra und  $f : A \rightarrow B$  ein Epimorphismus in  $\mathcal{C}$ . Es existiere ein Morphismus  $\nabla_B : B \otimes B \rightarrow B$  mit  $f \circ \nabla_A = \nabla_B \circ (f \otimes f)$ . Dann besitzt  $B$  eine eindeutige Algebrenstruktur, so dass  $f$  ein Morphismus von Algebren ist. Diese ist durch  $(B, \nabla_B, \eta_B := f \circ \eta_A)$  gegeben. Ist  $C$  eine weitere Algebra, so ist ein  $\mathcal{C}$ -Morphismus  $g : B \rightarrow C$  genau dann ein Morphismus von Algebren, wenn  $g \circ f$  ein solcher ist.

Diese Aussagen lassen sich unmittelbar beweisen. Dabei ist als Einziges zu beachten, dass aufgrund der Voraussetzungen an die Kategorie  $\mathcal{C}$  mit  $f$  auch  $f \otimes f$  und  $f \otimes f \otimes f$  Epimorphismen sind.

**Satz 1.2.2.** *Der Vergissfunktork  $\mathcal{V} : \mathbf{Alg} \rightarrow \mathcal{C}$  ist monadisch. Insbesondere ist also der Vergleichsfunktork  $\mathcal{K} : \mathbf{Alg} \rightarrow \mathcal{C}^A$  ein Isomorphismus von Kategorien.*

*Beweis.* Der Beweis erfolgt mit dem Satz von Beck [Par69, 2.3 Satz 2]. Es wurde schon erwähnt, dass der Vergissfunktork  $\mathcal{V} : \mathbf{Alg} \rightarrow \mathcal{C}$  einen Linksadjungierten besitzt. Damit ist noch zu zeigen, dass der Vergissfunktork Differenzkokerne von  $\mathcal{V}$ -zusammenziehbaren Paaren erzeugt.

Sei also  $f, g : A \rightarrow B$  ein  $\mathcal{V}$ -zusammenziehbares Paar in  $\mathbf{Alg}$  und  $h : B \rightarrow C$  ein Differenzkorkern von  $f, g$  in  $\mathcal{C}$ . Zu zeigen ist nun, dass  $C$  eine eindeutige Algebrenstruktur besitzt, bezuglich der  $h$  ein Morphismus von Algebren ist, und dass  $h$  ein Differenzkorkern von  $f, g$  in  $\mathbf{Alg}$  ist.

Hierfür wird das folgende Diagramm betrachtet.

$$\begin{array}{ccccc}
 A \otimes A & \xrightarrow[\quad g \otimes g \quad]{\quad f \otimes f \quad} & B \otimes B & \xrightarrow{\quad h \otimes h \quad} & C \otimes C \\
 \downarrow \nabla_A & & \downarrow \nabla_B & & \downarrow \nabla_C \\
 A & \xrightarrow[\quad g \quad]{\quad f \quad} & B & \xrightarrow{\quad h \quad} & C
 \end{array}$$

Da  $f$  und  $g$  Morphismen von Algebren sind, kommutieren in diesem Diagramm das obere und untere linke Rechteck. Daraus ergibt sich

$$h \circ \nabla_B \circ (f \otimes f) = h \circ f \circ \nabla_A = h \circ g \circ \nabla_A = h \circ \nabla_B \circ (g \otimes g).$$

Ferner ist mit der unteren Zeile auch die obere Zeile ein Differenzkorkernendiagramm eines zusammenziehbaren Paares [Par69, 2.3 Lemma 3]. Somit existiert genau ein Morphismus  $\nabla_C : C \otimes C \rightarrow C$ , der das rechte Quadrat kommutativ macht. Des Weiteren ist  $h$  als Differenzkorkern auch ein Epimorphismus. Nach Bemerkung 1.2.1 besitzt damit  $C$  eine eindeutige Algebrenstruktur, so dass  $h$  ein Morphismus von Algebren ist.

Ist nun  $k : B \rightarrow D$  ein Algebrenmorphismus mit  $k \circ f = k \circ g$ , so gibt es nach Definition von  $h$  genau einen  $\mathcal{C}$ -Morphismus  $k' : C \rightarrow D$  mit  $k = k' \circ h$ . Aufgrund von Bemerkung 1.2.1 ist  $k'$  mit  $k$  sogar ein Algebrenmorphismus. Somit ist  $h$  auch ein Differenzkorkern von  $f, g$  in  $\mathbf{Alg}$ .  $\square$

Nun werden noch einige Aussagen zusammengestellt, die im weiteren Verlauf benötigt werden.

**Bemerkung 1.2.3.** Sei  $T := (\mathcal{T}, \mu_T, \eta_T)$  eine Monade über der Kategorie  $\mathcal{C}$  und  $(B, \alpha_B : \mathcal{T}B \rightarrow B)$  eine  $T$ -Algebra. Dann ist eine  $T$ -Unteralgebra von  $B$  ein Unterobjekt in der Kategorie  $\mathcal{C}^T$  der  $T$ -Algebren. Eine solche Unteralgebra wird durch einen Monomorphismus  $f : A \rightarrow B$  aus  $\mathcal{C}^T$  repräsentiert. Im Folgenden werden derartige Repräsentanten mit den zugehörigen Unteralgebren identifiziert. Teilweise wird auch einfach die Quelle  $A$  als Unteralgebra bezeichnet.

Für eine Unteralgebra  $f : A \rightarrow B$  ist  $f$  auch ein Monomorphismus in  $\mathcal{C}$  [Par69, 2.7 Lemma 3]. Ferner faktorisiert  $\alpha_B \circ \mathcal{T}(f)$  über  $f$ , denn für die Strukturabbildung  $\alpha_A : \mathcal{T}A \rightarrow A$  der Algebra  $A$  gilt  $f \circ \alpha_A = \alpha_B \circ \mathcal{T}(f)$ , da  $f$  ein Morphismus von  $\mathbb{T}$ -Algebren ist. Ist umgekehrt  $f : A \rightarrow B$  ein Monomorphismus aus  $\mathcal{C}$ , so dass  $\alpha_A : \mathcal{T}A \rightarrow A$  mit  $f \circ \alpha_A = \alpha_B \circ \mathcal{T}(f)$  existiert, so ist hierdurch eine Unteralgebra von  $B$  gegeben. Denn  $A$  ist dann auf eindeutige Weise eine  $\mathbb{T}$ -Algebra, so dass  $f$  ein Morphismus von  $\mathbb{T}$ -Algebren ist. Diese  $\mathbb{T}$ -Algebrenstruktur ist durch  $(A, \alpha_A)$  gegeben. Zudem ist  $f$  ein Monomorphismus in der Kategorie  $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$  der  $\mathbb{T}$ -Algebren.

Eine  $\mathbb{T}$ -Unteralgebra  $f : A \rightarrow B$  von  $B$  besitzt nun die folgende Eigenschaft: Für eine  $\mathbb{T}$ -Algebra  $C$  ist ein  $\mathcal{C}$ -Morphismus  $g : C \rightarrow A$  genau dann ein Morphismus von  $\mathbb{T}$ -Algebren, wenn  $f \circ g$  ein solcher ist.

Entsprechende Aussagen gelten auch für die Kategorie  $\mathbf{Alg}$ , die isomorph zu  $\mathcal{C}^A$  ist. Insbesondere ist eine Unteralgebra von  $(B, \nabla_B, \eta_B)$  durch einen Monomorphismus  $f : A \rightarrow B$  aus  $\mathcal{C}$  gegeben, für den  $\eta_B$  und  $\nabla_B \circ (f \otimes f)$  über  $f$  faktorisieren. Dies entspricht der üblichen Terminologie.

**Bemerkung 1.2.4.** Das Einsobjekt  $I$  ist mit dem Einheits-Constraint  $\nabla_I := \lambda_I = \rho_I : I \otimes I \rightarrow I$  als Multiplikation und  $\eta_I := \text{id}_I : I \rightarrow I$  als Einheit eine Algebra. Im vorliegenden strikten Fall gilt sogar  $\nabla_I = \text{id}_I$ .

Diese Algebra ist ein Anfangsobjekt in  $\mathbf{Alg}$ , wobei für jede Algebra  $(A, \nabla_A, \eta_A)$  der eindeutige Algebrenmorphismus von  $I$  nach  $A$  durch  $\eta_A : I \rightarrow A$  gegeben ist. Da  $\mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Alg}$  als linksadjungierter Funktor Kolimites erhält, ist  $\mathcal{T}(0)$  für ein Nullobjekt  $0$  aus  $\mathcal{C}$  ein Anfangsobjekt in  $\mathbf{Alg}$ . Damit sind  $I$  und  $\mathcal{T}(0)$  als Algebren isomorph.

**Bemerkung 1.2.5.** Das Tensorprodukt  $A \otimes B$  zweier Algebren  $(A, \nabla_A, \eta_A)$  und  $(B, \nabla_B, \eta_B)$  ist mit der Multiplikation

$$\nabla_{A \otimes B} := (\nabla_A \otimes \nabla_B) \circ (\text{id}_A \otimes \tau_{B,A} \otimes \text{id}_B) : A \otimes B \otimes A \otimes B \rightarrow A \otimes B$$

und der Einheit  $\eta_{A \otimes B} := (\eta_A \otimes \eta_B) \circ \lambda_I^{-1} = \eta_A \otimes \eta_B : I \rightarrow A \otimes B$  eine Algebra.

Ist  $(C, \nabla_C, \eta_C)$  eine weitere Algebra, so entsprechen die Algebrenmorphisme  $f : A \otimes B \rightarrow C$  eineindeutig den Paaren  $(f_A : A \rightarrow C, f_B : B \rightarrow C)$  von Algebrenmorphisme mit  $\nabla_C \circ (f_B \otimes f_A) = \nabla_C \circ \tau_{C,C} \circ (f_B \otimes f_A)$ . Diese Bijektion wird durch die zueinander inversen Abbildungen  $f \mapsto (f_A := f \circ (\text{id}_A \otimes \eta_B), f_B := f \circ (\eta_A \otimes \text{id}_B))$  und  $(f_A, f_B) \mapsto f := \nabla_C \circ (f_A \otimes f_B)$  beschrieben.

**Bemerkung 1.2.6.** Für jede Algebra  $A := (A, \nabla_A, \eta_A)$  ist durch

$$A^{\text{op}+} := (A, \nabla_{A^{\text{op}+}} := \nabla_A \circ \tau_{A,A}, \eta_{A^{\text{op}+}} := \eta_A)$$

eine Algebra definiert, die so genannte Gegenalgebra von  $A$ . Mit  $f : A \rightarrow B$  ist dann auch  $f^{\text{op}+} := f : A^{\text{op}+} \rightarrow B^{\text{op}+}$  ein Morphismus von Algebren. Hierdurch ist ein kovarianter Funktor  $(\ )^{\text{op}+} : \mathbf{Alg} \rightarrow \mathbf{Alg}$  erklärt.

Nun soll noch auf die Beziehung zwischen den Strukturabbildungen der monadentheoretischen Beschreibungen  $\mathcal{K}(A) = (A, \alpha_A)$  und  $\mathcal{K}(A^{\text{op}+}) = (A, \alpha_{A^{\text{op}+}})$  von  $A$  und  $A^{\text{op}+}$  eingegangen werden. Dazu sei zunächst für jedes Objekt  $V$  aus  $\mathcal{C}$  mit  $h_V$  der durch  $h_V \circ \eta_A(V) = \eta_A(V)$  eindeutig bestimmte Algebrenmorphismus  $\mathcal{TV} \rightarrow (\mathcal{TV})^{\text{op}+}$  bezeichnet. Dann sind  $\alpha_A \circ h_A = \alpha_A^{\text{op}+} \circ h_A : \mathcal{TA} \rightarrow (\mathcal{TA})^{\text{op}+} \rightarrow A^{\text{op}+}$  und  $\alpha_{A^{\text{op}+}} : \mathcal{TA} \rightarrow A^{\text{op}+}$  Morphismen von Algebren. Diese liefern wegen

$$\alpha_A \circ h_A \circ \eta_A(A) = \alpha_A \circ \eta_A(A) = \text{id}_A = \alpha_{A^{\text{op}+}} \circ \eta_A(A)$$

unter dem Adjunktionsisomorphismus (1.1) denselben Morphismus. Hieraus ergibt sich  $\alpha_{A^{\text{op}+}} = \alpha_A \circ h_A$ . Es sei noch erwähnt, dass bei diesen Betrachtungen auf die explizite Angabe des Vergissfunktors  $\mathcal{V} : \text{Alg} \rightarrow \mathcal{C}$  verzichtet worden ist.

Anstelle der Zopfung kann auch deren Inverses verwendet werden, um zu einer vorgegebenen Algebra  $A := (A, \nabla_A, \eta_A)$  eine neue Algebra

$$A^{\text{op}-} := (A, \nabla_{A^{\text{op}-}} := \nabla_A \circ \tau_{A,A}^{-1}, \eta_{A^{\text{op}-}} := \eta_A)$$

zu konstruieren. Der hierdurch definierte Funktor  $( )^{\text{op}-} : \text{Alg} \rightarrow \text{Alg}$  ist zu  $( )^{\text{op}+}$  invers. Für die Strukturabbildungen  $\alpha_A$  und  $\alpha_{A^{\text{op}-}}$  der monadentheoretischen Beschreibungen der Algebren  $A$  und  $A^{\text{op}-}$  gilt dann  $\alpha_{A^{\text{op}-}} = \alpha_A \circ h_A^{-1}$ .

**Satz 1.2.7.** *In Alg existieren Differenzkerne reflexiver Paare.*

*Beweis.* Sei  $f, g : (A, \nabla_A, \eta_A) \rightarrow (B, \nabla_B, \eta_B)$  ein reflexives Paar in Alg, d.h., es gibt einen Morphismus  $k : B \rightarrow A$  von Algebren mit  $f \circ k = \text{id}_B = g \circ k$ . Sei  $h : B \rightarrow C$  ein Differenzkern von  $f, g$  in  $\mathcal{C}$ . Auf  $C$  soll nun eine Algebrenstruktur definiert werden, so dass  $h$  ein Differenzkern von  $f, g$  in Alg ist.

Hierzu wird

$$\begin{array}{ccccc} (A \otimes B) \oplus (B \otimes A) & \xrightarrow{\begin{array}{c} [f \otimes \text{id}, \text{id} \otimes f] \\ [g \otimes \text{id}, \text{id} \otimes g] \end{array}} & B \otimes B & \xrightarrow{h \otimes h} & C \otimes C \\ \downarrow \begin{array}{c} [\nabla_A \circ (\text{id} \otimes k), \nabla_A \circ (k \otimes \text{id})] \\ \downarrow \end{array} & & \downarrow \nabla_B & & \downarrow \nabla_C \\ A & \xrightarrow{\begin{array}{c} f \\ g \end{array}} & B & \xrightarrow{h} & C \end{array}$$

betrachtet. Dabei wurde die Koprodukteigenschaft von  $A \otimes B \oplus B \otimes A$  zur Definition von  $[f \otimes \text{id}, \text{id} \otimes f]$  usw. verwendet. Sind also  $j_1 : A \otimes B \rightarrow A \otimes B \oplus B \otimes A$  und  $j_2 : B \otimes A \rightarrow A \otimes B \oplus B \otimes A$  die Inklusionen, so gelten  $[f \otimes \text{id}, \text{id} \otimes f] \circ j_1 = f \otimes \text{id}$  und  $[f \otimes \text{id}, \text{id} \otimes f] \circ j_2 = \text{id} \otimes f$ .

Es gilt nun

$$\begin{aligned} f \circ [\nabla_A \circ (\text{id} \otimes k), \nabla_A \circ (k \otimes \text{id})] \circ j_1 &= f \circ \nabla_A \circ (\text{id} \otimes k) \\ &= \nabla_B \circ (f \otimes f) \circ (\text{id} \otimes k) = \nabla_B \circ (f \otimes \text{id}) \\ &= \nabla_B \circ [f \otimes \text{id}, \text{id} \otimes f] \circ j_1, \end{aligned}$$

und ganz analog folgt  $f \circ [\nabla_A \circ (\text{id} \otimes k), \nabla_A \circ (k \otimes \text{id})] \circ j_2 = \nabla_B \circ [f \otimes \text{id}, \text{id} \otimes f] \circ j_2$ . Dies ist aber gleichbedeutend damit, dass das obere linke Rechteck im Diagramm kommutiert. Genauso ergibt sich die Kommutativität des unteren linken Rechtecks. Damit gilt dann aber auch

$$\begin{aligned} h \circ \nabla_B \circ [f \otimes \text{id}, \text{id} \otimes f] &= h \circ f \circ [\nabla_A \circ (\text{id} \otimes k), \nabla_A \circ (k \otimes \text{id})] \\ &= h \circ g \circ [\nabla_A \circ (\text{id} \otimes k), \nabla_A \circ (k \otimes \text{id})] = h \circ \nabla_B \circ [g \otimes \text{id}, \text{id} \otimes g]. \end{aligned}$$

Des Weiteren ist die obere Zeile in dem Diagramm ein Differenzkokerndiagramm. Entscheidend hierfür ist, dass das Tensorprodukt in  $\mathcal{C}$  Kolimites erhält. Deshalb existiert genau ein Morphismus  $\nabla_C : C \otimes C \rightarrow C$ , der das rechte Quadrat kommutativ macht. Ferner ist  $h$  als Differenzkern ein Epimorphismus. Nach Bemerkung 1.2.1 besitzt somit  $C$  eine eindeutige Algebrenstruktur, so dass  $h$  ein Morphismus von Algebren ist. Dass  $h$  sogar ein Differenzkern von  $f, g$  in  $\text{Alg}$  ist, folgt nun genauso wie im Beweis von Satz 1.2.2.  $\square$

### 1.3 Hopfalgebren und primitive Elemente

In einer gezopften monoidalen Kategorie lassen sich Hopfalgebren genauso wie in der Kategorie der Vektorräume definieren. Hierfür sei auf [Maj94] verwiesen. Die Koeinheit und die Komultiplikation einer Hopfalgebra  $H$  werden mit  $\epsilon_H : H \rightarrow I$  bzw.  $\Delta_H : H \rightarrow H \otimes H$  bezeichnet. Dies sind also insbesondere Algebrenmorphis-men, wobei das Einsobjekt  $I$  und das Tensorprodukt  $H \otimes H$  Algebren gemäß den Bemerkungen 1.2.4 und 1.2.5 sind. Wie im klassischen Fall folgt aus den Axiomen, dass die Antipode  $S_H$  von  $H$  ein Morphismus  $S_H : H \rightarrow H^{\text{op+}}$  von Algebren ist.

Zur Definition der primitiven Elemente sei für jede Hopfalgebra  $H$  ein Differenzkern  $\theta_H : \mathcal{P}H \rightarrow H$  von

$$H \begin{array}{c} \xrightarrow{\Delta_H} \\ \xrightarrow{\text{id} \otimes \eta_H + \eta_H \otimes \text{id}} \end{array} H \otimes H$$

in  $\mathcal{C}$  gewählt. Um dies zu einem Funktor fortzusetzen, wird für einen Morphismus  $f : H \rightarrow K$  von Hopfalgebren das folgende Diagramm betrachtet.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P}H & \xrightarrow{\theta_H} & H & \begin{array}{c} \xrightarrow{\Delta_H} \\ \xrightarrow{\text{id} \otimes \eta_H + \eta_H \otimes \text{id}} \end{array} & H \otimes H \\ \mathcal{P}f \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f \otimes f \\ \mathcal{P}K & \xrightarrow{\theta_K} & K & \begin{array}{c} \xrightarrow{\Delta_K} \\ \xrightarrow{\text{id} \otimes \eta_K + \eta_K \otimes \text{id}} \end{array} & K \otimes K \end{array}$$

Hierin kommutieren das rechte obere und untere Rechteck, woraus mit der Definition von  $\theta_H$  als Differenzkern  $\Delta_K \circ f \circ \theta_H = (\text{id} \otimes \eta_K + \eta_K \otimes \text{id}) \circ f \circ \theta_H$  folgt. Somit existiert nun aufgrund der Differenzkerneigenschaft von  $\theta_K$  genau ein  $\mathcal{C}$ -Morphismus



$\mathcal{P}f : \mathcal{P}H \rightarrow \mathcal{P}K$ , der das linke Quadrat kommutativ macht. Insgesamt ist damit ein Funktor  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_C^{\text{Hopf}} : \text{Hopf} \rightarrow \mathcal{C}$  erklärt. Ferner ist  $\theta : \mathcal{P}_C^{\text{Hopf}} \rightarrow \mathcal{V}_C^{\text{Hopf}}$  eine natürliche Transformation von  $\mathcal{P}_C^{\text{Hopf}}$  in den Vergissfunktor  $\mathcal{V}_C^{\text{Hopf}} : \text{Hopf} \rightarrow \mathcal{C}$ .

Wie üblich sind die Koeinheit und die Antipode auf den primitiven Elementen eindeutig bestimmt.

**Lemma 1.3.1.** *Sei  $H$  eine Hopfalgebra. Dann gelten:*

1.  $\epsilon_H \circ \theta_H : \mathcal{P}H \rightarrow I$  ist der Nullmorphismus.
2.  $S_H \circ \theta_H : \mathcal{P}H \rightarrow H$  stimmt mit  $-\theta_H$  überein.

*Beweis.* 1. Es gilt

$$\begin{aligned} \epsilon \circ \theta_H &= (\epsilon \otimes \epsilon) \circ \Delta_H \circ \theta_H = (\epsilon \otimes \epsilon) \circ (\text{id} \otimes \eta_H + \eta_H \otimes \text{id}) \circ \theta_H \\ &= (\epsilon + \epsilon) \circ \theta_H = \epsilon \circ \theta_H + \epsilon \circ \theta_H, \end{aligned}$$

woraus sich die Behauptung ergibt.

2. Es gilt

$$\begin{aligned} (\text{id} + S_H) \circ \theta_H &= \nabla_H \circ (\eta_H \otimes \text{id} + S_H \otimes \eta_H) \circ \theta_H \\ &= \nabla_H \circ (S_H \otimes \text{id}) \circ (\eta_H \otimes \text{id} + \text{id} \otimes \eta_H) \circ \theta_H \\ &= \nabla_H \circ (S_H \otimes \text{id}) \circ \Delta_H \circ \theta_H \\ &= \eta_H \circ \epsilon_H \circ \theta_H = 0, \end{aligned}$$

woraus  $S_H \circ \theta_H = -\theta_H$  folgt. □

Ist  $H$  eine klassische Bialgebra und  $S : H \rightarrow H^{\text{op}}$  ein Algebrenmorphismus, so ist  $S$  schon dann eine Antipode für  $H$ , wenn das Antipodenaxiom für ein Erzeugendensystem der Algebra  $H$  erfüllt ist [Kas95, Lemma III.3.6]. Eine Verallgemeinerung hiervon ist:

**Lemma 1.3.2.** *Sei  $H$  eine Bialgebra in  $\mathcal{C}$ ,  $S : H \rightarrow H^{\text{op}+}$  ein Algebrenmorphismus und  $d : C \rightarrow H$  ein Differenzkern von  $\nabla_H \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta_H$  und  $\eta_H \circ \epsilon_H$  in  $\mathcal{C}$ . Dann ist  $C$  eine Unteralgebra von  $H$ .*

*Beweis.* Zunächst einmal ist  $d$  als Differenzkern auch ein Monomorphismus in  $\mathcal{C}$ . Des Weiteren faktorisiert  $\eta_H$  über  $d$ , da

$$\begin{aligned} \nabla_H \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta_H \circ \eta_H &= \nabla_H \circ (S \otimes \text{id}) \circ (\eta_H \otimes \eta_H) \\ &= \nabla_H \circ (\eta_H \otimes \eta_H) \\ &= \eta_H = \eta_H \circ \epsilon_H \circ \eta_H \end{aligned}$$

gilt. Schließlich existiert wegen

$$\begin{aligned} \nabla_H \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta_H \circ \nabla_H \circ (d \otimes d) \\ = \nabla_H \circ (S \otimes \text{id}) \circ (\nabla_H \otimes \nabla_H) \circ (\text{id} \otimes \tau_{H,H} \otimes \text{id}) \circ (\Delta_H \otimes \Delta_H) \circ (d \otimes d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla_H \circ (\nabla_H \otimes \nabla_H) \circ (\tau_{H,H} \otimes \text{id} \otimes \text{id}) \circ (S \otimes S \otimes \text{id} \otimes \text{id}) \\
&\quad \circ (\text{id} \otimes \tau_{H,H} \otimes \text{id}) \circ (\Delta_H \otimes \Delta_H) \circ (d \otimes d) \\
&= \nabla_H \circ (\nabla_H \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes \nabla_H \otimes \text{id}) \circ (\tau_{H \otimes H, H} \otimes \text{id}) \circ (S \otimes \text{id} \otimes S \otimes \text{id}) \\
&\quad \circ (\Delta_H \otimes \Delta_H) \circ (d \otimes d) \\
&= \nabla_H \circ (\nabla_H \otimes \text{id}) \circ (\tau_{H,H} \otimes \text{id}) \circ (\nabla_H \otimes \text{id} \otimes \text{id}) \circ (S \otimes \text{id} \otimes S \otimes \text{id}) \\
&\quad \circ (\Delta_H \otimes \Delta_H) \circ (d \otimes d) \\
&= \nabla_H \circ (\nabla_H \otimes \text{id}) \circ (\tau_{H,H} \otimes \text{id}) \circ (\eta_H \otimes S \otimes \text{id}) \circ (\epsilon_H \otimes \Delta_H) \circ (d \otimes d) \\
&= \nabla_H \circ (\nabla_H \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes \eta_H \otimes \text{id}) \circ (S \otimes \text{id}) \circ (\epsilon_H \otimes \Delta_H) \circ (d \otimes d) \\
&= \nabla_H \circ (S \otimes \text{id}) \circ (\epsilon_H \otimes \Delta_H) \circ (d \otimes d) = \eta_H \circ (\epsilon_H \otimes \epsilon_H) \circ (d \otimes d) \\
&= \eta_H \circ \epsilon_H \circ \nabla_H \circ (d \otimes d)
\end{aligned}$$

genau ein Morphismus  $\nabla_C : C \otimes C \rightarrow C$  mit  $d \circ \nabla_C = \nabla_H \circ (d \otimes d)$ . Somit ist  $C$  eine Unteralgebra von  $H$ .  $\square$

Eine entsprechende Aussage gilt auch für die andere Hälfte des Antipodenaxioms. Damit kann nun die Hopfalgebrenstruktur der Tensoralgebra definiert und anschließend ein linksadjungierter Funktor von  $\mathcal{P} : \text{Hopf} \rightarrow \mathcal{C}$  angegeben werden.

**Satz 1.3.3.** *Für ein Objekt  $V$  aus  $\mathcal{C}$  besitzt  $\mathcal{T}V$  eine Hopfalgebrenstruktur, die charakterisiert ist durch:*

- $\Delta_{\mathcal{T}V} \circ \eta_A(V) = \eta_A(V) \otimes \eta_{\mathcal{T}V} + \eta_{\mathcal{T}V} \otimes \eta_A(V) : V \rightarrow \mathcal{T}V \otimes \mathcal{T}V$
- $\epsilon_{\mathcal{T}V} \circ \eta_A(V) = 0 : V \rightarrow I$
- $S_{\mathcal{T}V} \circ \eta_A(V) = -\eta_A(V) : V \rightarrow \mathcal{T}V$

*Beweis.* Wegen der universellen Eigenschaft der Tensoralgebra werden durch die obigen Gleichungen eindeutige Algebrenmorphisten  $\Delta = \Delta_{\mathcal{T}V} : \mathcal{T}V \rightarrow \mathcal{T}V \otimes \mathcal{T}V$ ,  $\epsilon = \epsilon_{\mathcal{T}V} : \mathcal{T}V \rightarrow I$  und  $S = S_{\mathcal{T}V} : \mathcal{T}V \rightarrow (\mathcal{T}V)^{\text{op}+}$  definiert. Zum Nachweis der noch fehlenden Axiome werden  $\eta := \eta_{\mathcal{T}V} : I \rightarrow \mathcal{T}V$  und  $\iota := \eta_A(V) : V \rightarrow \mathcal{T}V$  als Abkürzungen verwendet.

Das Koassoziativitätsaxiom ist eine Identität von Algebrenmorphisten mit Quelle  $\mathcal{T}V$ . Somit ist es ausreichend, die Gleichheit dieser Morphisten nach Verschalten von  $\iota : V \rightarrow \mathcal{T}V$  zu zeigen. Damit ergibt sich die Koassoziativität aus

$$\begin{aligned}
(\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta \circ \iota &= (\text{id} \otimes \Delta) \circ (\iota \otimes \eta + \eta \otimes \iota) \\
&= \iota \otimes \eta \otimes \eta + \eta \otimes \iota \otimes \eta + \eta \otimes \eta \otimes \iota \\
&= (\Delta \otimes \text{id}) \circ (\iota \otimes \eta + \eta \otimes \iota) \\
&= (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta \circ \iota.
\end{aligned}$$

Bei dem Koeinsaxiom handelt es sich ebenfalls um Identitäten von Algebrenmorphisten mit Quelle  $\mathcal{T}V$ . Somit folgt das Koeinsaxiom aus

$$(\epsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta \circ \iota = (\epsilon \otimes \text{id}) \circ (\iota \otimes \eta + \eta \otimes \iota) = 0 \otimes \eta + \iota = \iota$$

bzw. der analogen Rechnung für die andere Hälfte.

Zum Nachweis des Antipodenaxioms wird ein Differenzkern  $d : C \rightarrow \mathcal{TV}$  von  $\nabla \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta$  und  $\eta \circ \epsilon$  gewählt. Dann ist zu zeigen, dass  $\text{id}_{\mathcal{TV}}$  über  $d$  faktorisiert. Wegen

$$\begin{aligned} \eta \circ \epsilon \circ \iota &= 0 = \nabla \circ (\eta \otimes \iota - \iota \otimes \eta) \\ &= \nabla \circ (S \otimes \text{id}) \circ (\iota \otimes \eta + \eta \otimes \iota) \\ &= \nabla \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta \circ \iota \end{aligned}$$

existiert genau ein Morphismus  $f : V \rightarrow C$  mit  $d \circ f = \iota$ . Da  $C$  nach Lemma 1.3.2 eine Algebra ist, gibt es einen Algebrenmorphismus  $\tilde{f} : \mathcal{TV} \rightarrow C$  mit  $f = \tilde{f} \circ \iota$ . Insgesamt ist somit  $d \circ \tilde{f} \circ \iota = d \circ f = \iota$ , woraus  $d \circ \tilde{f} = \text{id}_{\mathcal{TV}}$  folgt, da  $d \circ \tilde{f}$  ein Morphismus von Algebren ist. Damit ist die eine Hälfte des Antipodenaxioms gezeigt, und die andere ergibt sich analog.  $\square$

**Bemerkung 1.3.4.** Für die Antipode  $S = S_{\mathcal{TV}}$  der Tensoralgebra  $\mathcal{TV}$  gilt

$$S = \mathcal{T}(-\text{id}) \circ h_V = h_V \circ \mathcal{T}(-\text{id}).$$

Da dies alles Morphismen  $\mathcal{TV} \rightarrow (\mathcal{TV})^{\text{op}+}$  von Algebren sind, ist es ausreichend, die Gleichheit dieser Morphismen auf  $V$  zu zeigen. Damit folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(-\text{id}) \circ h_V \circ \eta_A(V) &= \mathcal{T}(-\text{id}) \circ \eta_A(V) = -\eta_A(V) \\ &= -h_V \circ \eta_A(V) = h_V \circ \mathcal{T}(-\text{id}) \circ \eta_A(V). \end{aligned}$$

**Bemerkung 1.3.5.** Da  $I$  und  $\mathcal{T}(0)$  als Algebren isomorph sind, besitzt  $I$  eine Hopfalgebrenstruktur, so dass  $I$  und  $\mathcal{T}(0)$  sogar als Hopfalgebren isomorph sind. Die entsprechenden Strukturabbildungen sind durch  $\Delta_I := \lambda_I^{-1} = \text{id}_I$ ,  $\epsilon_I := \text{id}_I$  und  $S_I := \text{id}_I$  gegeben, da  $I$  ein Anfangsobjekt in  $\text{Alg}$  ist.

**Satz 1.3.6.** *Zu jedem Objekt  $V$  aus  $\mathcal{C}$  gibt es einen Morphismus  $\eta_L(V) : V \rightarrow \mathcal{PTV}$  mit folgender universellen Eigenschaft:*

*Für jede Hopfalgebra  $H$  und jeden Morphismus  $j : V \rightarrow \mathcal{PH}$  existiert genau ein Morphismus  $f : \mathcal{TV} \rightarrow H$  von Hopfalgebren mit  $j = \mathcal{P}(f) \circ \eta_L(V)$ .*

*Beweis.* Nach der Definition der Komultiplikation der Tensoralgebra  $\mathcal{TV}$  sowie der Differenzkerneigenschaft von  $\theta_{\mathcal{TV}} : \mathcal{PTV} \rightarrow \mathcal{TV}$  gibt es genau einen Morphismus  $\eta_L(V) : V \rightarrow \mathcal{PTV}$  mit  $\theta_{\mathcal{TV}} \circ \eta_L(V) = \eta_A(V)$ . Nun soll gezeigt werden, dass dieser Morphismus die behauptete universelle Eigenschaft besitzt. Dazu sei  $H$  eine Hopfalgebra und  $j : V \rightarrow \mathcal{PH}$  ein Morphismus.

Zunächst einmal kann es höchstens einen Hopfalgebrenmorphismus  $f : \mathcal{TV} \rightarrow H$  mit  $j = \mathcal{P}(f) \circ \eta_L(V)$  geben, denn für einen solchen gilt

$$f \circ \eta_A(V) = f \circ \theta_{\mathcal{TV}} \circ \eta_L(V) = \theta_H \circ \mathcal{P}(f) \circ \eta_L(V) = \theta_H \circ j.$$

Wegen der universellen Eigenschaft der Tensoralgebra ist  $f$  hierdurch sogar schon als Algebrenmorphismus eindeutig festgelegt.

Für die Existenz sei umgekehrt  $f : \mathcal{T}V \rightarrow H$  als der eindeutige Algebrenmorphismus mit  $f \circ \eta_A(V) = \theta_H \circ j$  gewählt. Nach (1.1) ist also

$$f = \epsilon_A \mathcal{V}_{\text{Alg}}^{\text{Hopf}}(H) \circ \mathcal{T}(\theta_H \circ j). \quad (1.2)$$

Dies ist sogar ein Morphismus von Hopfalgebren. Hierfür sind Identitäten von Algebrenmorphisten mit Quelle  $\mathcal{T}V$  zu beweisen. Deshalb muss die Gleichheit jeweils nur auf  $V$  überprüft werden. Die Verträglichkeit von  $f$  mit der Komultiplikation, der Koeinheit und der Antipode ergibt sich damit aus

$$\begin{aligned} \Delta_H \circ f \circ \eta_A(V) &= \Delta_H \circ \theta_H \circ j = (\text{id} \otimes \eta_H + \eta_H \otimes \text{id}) \circ \theta_H \circ j \\ &= (\text{id} \otimes \eta_H + \eta_H \otimes \text{id}) \circ f \circ \eta_A(V) \\ &= (f \otimes f) \circ (\text{id} \otimes \eta_{\mathcal{T}V} + \eta_{\mathcal{T}V} \otimes \text{id}) \circ \eta_A(V) \\ &= (f \otimes f) \circ \Delta_{\mathcal{T}V} \circ \eta_A(V), \\ \epsilon_H \circ f \circ \eta_A(V) &= \epsilon_H \circ \theta_H \circ j = 0 = \epsilon_{\mathcal{T}V} \circ \eta_A(V), \\ S_H \circ f \circ \eta_A(V) &= S_H \circ \theta_H \circ j = -\theta_H \circ j = -f \circ \eta_A(V) \\ &= f \circ S_{\mathcal{T}V} \circ \eta_A(V). \end{aligned}$$

Schließlich erfüllt  $f$  die gewünschte Gleichung  $j = \mathcal{P}(f) \circ \eta_L(V)$ , da

$$\theta_H \circ j = f \circ \eta_A(V) = f \circ \theta_{\mathcal{T}V} \circ \eta_L(V) = \theta_H \circ \mathcal{P}(f) \circ \eta_L(V)$$

gilt und  $\theta_H$  ein Monomorphismus ist.  $\square$

**Korollar 1.3.7.** *Der Funktor  $\mathcal{P} : \text{Hopf} \rightarrow \mathcal{C}$  besitzt einen Linksadjungierten.*

*Hierbei kann die Adjunktion so gewählt werden, dass für den linksadjungierten Funktor  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Hopf}$  sowie die Einheit  $\eta_L : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{P} \circ \mathcal{T}$  und die Koeinheit  $\epsilon_L : \mathcal{T} \circ \mathcal{P} \rightarrow \text{id}_{\text{Hopf}}$  der Adjunktion gelten:*

1.  $\mathcal{V}_{\text{Alg}}^{\text{Hopf}} \circ \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^{\mathcal{C}} = \mathcal{T}_{\text{Alg}}^{\mathcal{C}}$
2.  $(\theta \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^{\mathcal{C}}) \eta_L = \eta_A$
3.  $\mathcal{V}_{\text{Alg}}^{\text{Hopf}} \epsilon_L = (\epsilon_A \mathcal{V}_{\text{Alg}}^{\text{Hopf}})(\mathcal{T}_{\text{Alg}}^{\mathcal{C}} \theta)$

*Beweis.* Folgt nach [Mac72, IV.1 Satz 2,(ii)] aus Satz 1.3.6 und dessen Beweis. Dabei ist die dritte Identität eine Konsequenz aus der Formel (1.2).  $\square$

## 1.4 Lie-Algebren

**Definition 1.4.1.** Sei  $L := (\mathcal{L} := \mathcal{P}_C^{\text{Hopf}} \circ \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^C, \mu_L := \mathcal{P}_C^{\text{Hopf}} \epsilon_L \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^C, \eta_L)$  die von der Adjunktion aus Korollar 1.3.7 erzeugte Monade. Dann ist die Kategorie Lie der Lie-Algebren in  $\mathcal{C}$  durch die Kategorie der Algebren über der Monade  $L$  gegeben, d.h., es ist  $\text{Lie} := \mathcal{C}^L$ .

Aufgrund dieser Definition existieren ein Vergissfunktork  $\mathcal{V}_C^{\text{Lie}} : \text{Lie} \rightarrow \mathcal{C}$  und ein Vergleichsfunktork  $\mathcal{P}_{\text{Lie}}^{\text{Hopf}} : \text{Hopf} \rightarrow \text{Lie}$  mit  $\mathcal{V}_C^{\text{Lie}} \circ \mathcal{P}_{\text{Lie}}^{\text{Hopf}} = \mathcal{P}_C^{\text{Hopf}}$ . Der Funktork  $\mathcal{P}_{\text{Lie}}^{\text{Hopf}}$  ist dabei für eine Hopfalgebra  $H$  durch

$$\mathcal{P}_{\text{Lie}}^{\text{Hopf}}(H) = \left( \mathcal{P}_C^{\text{Hopf}}(H), \mathcal{P}_C^{\text{Hopf}} \epsilon_L(H) : \mathcal{L}(\mathcal{P}_C^{\text{Hopf}}(H)) \rightarrow \mathcal{P}_C^{\text{Hopf}}(H) \right)$$

gegeben. Somit bilden die primitiven Elemente einer Hopfalgebra eine Lie-Algebra.

Weitere Beispiele für Lie-Algebren liefern Algebren. Genauer gesagt gibt es einen Funktork  $(-)^- : \text{Alg} \cong \mathcal{C}^A \rightarrow \text{Lie}$ , der mit den Vergissfunktoren verträglich ist. Solche Funktoren entsprechen eineindeutig Morphismen  $\varphi : L \rightarrow A$  von Monaden. Ein derartiger Monadenmorphismus soll nun konstruiert werden.

**Lemma 1.4.2.** *Es gilt  $\theta(\mathcal{P}_C^{\text{Hopf}} \epsilon_L) = (\mathcal{V}_C^{\text{Alg}} \epsilon_A \mathcal{V}_{\text{Alg}}^{\text{Hopf}})(\theta \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^C \mathcal{V}_C^{\text{Hopf}})(\mathcal{L}\theta)$ .*

*Beweis.* Die Behauptung ergibt sich aus der folgenden Rechnung.

$$\begin{aligned} \theta(\mathcal{P}_C^{\text{Hopf}} \epsilon_L) &= (\mathcal{V}_C^{\text{Hopf}} \epsilon_L)(\theta \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^C \mathcal{P}_C^{\text{Hopf}}) \\ &= (\mathcal{V}_C^{\text{Alg}} \mathcal{V}_{\text{Alg}}^{\text{Hopf}} \epsilon_L)(\theta \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^C \mathcal{P}_C^{\text{Hopf}}) \\ &= (\mathcal{V}_C^{\text{Alg}} \epsilon_A \mathcal{V}_{\text{Alg}}^{\text{Hopf}})(\mathcal{V}_C^{\text{Alg}} \mathcal{T}_{\text{Alg}}^C \theta)(\theta \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^C \mathcal{P}_C^{\text{Hopf}}) \\ &= (\mathcal{V}_C^{\text{Alg}} \epsilon_A \mathcal{V}_{\text{Alg}}^{\text{Hopf}})(\mathcal{V}_C^{\text{Hopf}} \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^C \theta)(\theta \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^C \mathcal{P}_C^{\text{Hopf}}) \\ &= (\mathcal{V}_C^{\text{Alg}} \epsilon_A \mathcal{V}_{\text{Alg}}^{\text{Hopf}})(\theta \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^C \mathcal{V}_C^{\text{Hopf}})(\mathcal{P}_C^{\text{Hopf}} \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^C) \\ &= (\mathcal{V}_C^{\text{Alg}} \epsilon_A \mathcal{V}_{\text{Alg}}^{\text{Hopf}})(\theta \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^C \mathcal{V}_C^{\text{Hopf}})(\mathcal{L}\theta) \end{aligned}$$

Hierbei wurde bei der ersten und der fünften Umformung die Natürlichkeit von  $\theta : \mathcal{P}_C^{\text{Hopf}} \rightarrow \mathcal{V}_C^{\text{Hopf}}$  verwendet. Das dritte Gleichheitszeichen gilt aufgrund der in Korollar 1.3.7 formulierten Beziehung zwischen den Koeinheiten  $\epsilon_A$  und  $\epsilon_L$ .  $\square$

**Satz 1.4.3.** *Die natürliche Transformation  $\tilde{\theta} := \theta \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^C : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{T}_C^C$  ist ein Morphismus  $L \rightarrow A$  von Monaden.*

*Beweis.*  $\tilde{\theta}$  ist mit den Einheiten der beiden Monaden  $L$  und  $A$  verträglich, denn nach Korollar 1.3.7 gilt  $\tilde{\theta}\eta_L = (\theta \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^C)\eta_L = \eta_A$ .

Für die Verträglichkeit von  $\tilde{\theta}$  mit der Multiplikation ist  $\tilde{\theta}\mu_L = \mu_A(\tilde{\theta}\mathcal{T}_C^C)(\mathcal{L}\tilde{\theta})$ , d.h.  $(\theta \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^C)(\mathcal{P}_C^{\text{Hopf}} \epsilon_L \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^C) = (\mathcal{V}_C^{\text{Alg}} \epsilon_A \mathcal{T}_{\text{Alg}}^C)(\theta \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^C \mathcal{T}_C^C)(\mathcal{L}\theta \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^C)$  zu zeigen. Diese Gleichung folgt aber unmittelbar aus Lemma 1.4.2 durch Vorschalten des Funktork  $\mathcal{T}_{\text{Hopf}}^C$ .  $\square$

**Korollar 1.4.4.** *Durch  $(A, \alpha_A : \mathcal{T}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} A \rightarrow A) \mapsto (A, \alpha_A \circ \tilde{\theta}(A) : \mathcal{L} A \rightarrow A)$  ist ein Funktor  $\tilde{\theta}^* : \mathcal{C}^A \rightarrow \text{Lie}$  definiert, der mit den Vergissfunktoren verträglich ist.*

*Bezogen auf die klassische Algebrendefinition ist  $(\ )^- := \tilde{\theta}^* \circ \mathcal{K}_{\mathcal{C}^A}^{\text{Alg}} : \text{Alg} \rightarrow \text{Lie}$  für Algebren  $A$  durch*

$$A^- = \left( \mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\text{Alg}}(A), \mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\text{Alg}} \epsilon_A(A) \circ \theta \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^{\mathcal{C}} \mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\text{Alg}}(A) : \mathcal{L} \mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\text{Alg}}(A) \rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\text{Alg}}(A) \right)$$

*gegeben. Für diesen Funktor gilt  $\mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\text{Lie}} \circ (\ )^- = \mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\text{Alg}}$ .*

*Beweis.* Nach [BW85, 3.6 Theorem 3] entspricht der Funktor  $\tilde{\theta}^* : \mathcal{C}^A \rightarrow \text{Lie}$  dem Monadenmorphismus  $\tilde{\theta} : \mathcal{L} \rightarrow \mathbf{A}$  aus Satz 1.4.3.  $\square$

Ausgehend von einer Hopfalgebra  $H$  kann man also auf zwei unterschiedliche Weisen eine Lie-Algebra gewinnen: Zum einen  $\mathcal{P}_{\text{Lie}}^{\text{Hopf}} H$ , und zum anderen  $(\mathcal{V}_{\text{Alg}}^{\text{Hopf}} H)^-$ . Ein Morphismus zwischen den unterliegenden Objekten der Kategorie  $\mathcal{C}$  ist durch  $\theta_H : \mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{\text{Hopf}} H \rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\text{Hopf}} H$  gegeben.

**Satz 1.4.5.** *Für jede Hopfalgebra  $H$  ist  $\theta_H : \mathcal{P}_{\text{Lie}}^{\text{Hopf}} H \rightarrow (\mathcal{V}_{\text{Alg}}^{\text{Hopf}} H)^-$  ein Morphismus von Lie-Algebren.*

*Beweis.* Es ist  $\theta_H \circ \mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{\text{Hopf}} \epsilon_1(H) = \mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\text{Alg}} \epsilon_A \mathcal{V}_{\text{Alg}}^{\text{Hopf}}(H) \circ \theta \mathcal{T}_{\text{Hopf}}^{\mathcal{C}} \mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\text{Alg}} \mathcal{V}_{\text{Alg}}^{\text{Hopf}}(H) \circ \mathcal{L}(\theta_H)$  zu zeigen. Dies ist aber genau die Aussage von Lemma 1.4.2.  $\square$

Dann ist  $\theta_H$  sogar ein Monomorphismus in der Kategorie Lie, da dies für den unterliegenden  $\mathcal{C}$ -Morphismus gilt. Somit ist  $\mathcal{P}_{\text{Lie}}^{\text{Hopf}} H$  wie im klassischen Fall eine Lie-Unteralgebra von  $(\mathcal{V}_{\text{Alg}}^{\text{Hopf}} H)^-$ .

Im nächsten Abschnitt wird die Hopfalgebrenstruktur der universellen Einhüllenden einer Lie-Algebra analog zur Darstellung in [Swe69] unter Verwendung gewisser Morphismen von Lie-Algebren konstruiert. Die dafür benötigten Aussagen sollen nun bereitgestellt werden.

**Satz 1.4.6.** *Seien  $L_i := (L_i, \kappa_i : \mathcal{L}(L_i) \rightarrow L_i)$ ,  $i = 1, 2$  Lie-Algebren.*

*Dann ist  $(L_1 \oplus L_2, (\kappa_1 \circ \mathcal{L}(p_1), \kappa_2 \circ \mathcal{L}(p_2)) : \mathcal{L}(L_1 \oplus L_2) \rightarrow L_1 \oplus L_2)$  mit den Projektionen  $p_i : L_1 \oplus L_2 \rightarrow L_i$  aus  $\mathcal{C}$  ein Produkt von  $L_1$  und  $L_2$  in Lie.*

*Beweis.* Nach [BW85, 3.4 Theorem 1] erzeugt der Vergissfunktor  $\mathcal{V}_{\mathcal{C}}^{\text{Lie}}$  Limites. Somit existieren in Lie endliche Produkte, da die Kategorie  $\mathcal{C}$  endliche Produkte besitzt. Ferner ergibt sich aus dem Beweis von [BW85, 3.4 Theorem 1], dass das Produkt wie angegeben gewählt werden kann.  $\square$

**Korollar 1.4.7.** *Sei  $L$  eine Lie-Algebra. Dann gibt es genau einen Morphismus  $\delta := \delta_L : L \rightarrow L \oplus L$  von Lie-Algebren mit  $p_i \circ \delta = \text{id}_L$ ,  $i = 1, 2$ .*  $\square$

**Lemma 1.4.8.** *Mit  $0$  ist auch  $\mathcal{L}(0)$  ein Nullobjekt in  $\mathcal{C}$ .*

*Beweis.* Es sind die primitiven Elemente von  $\mathcal{T}_{\text{Hopf}}^{\mathcal{C}}(0)$  zu bestimmen. Statt  $\mathcal{T}_{\text{Hopf}}^{\mathcal{C}}(0)$  kann auch die dazu isomorphe Hopfalgebra  $I$  betrachtet werden.

Der Differenzkern von  $\Delta_I = \text{id}_I$  und  $\text{id}_I \otimes \eta_I + \eta_I \otimes \text{id}_I = \text{id}_I + \text{id}_I$  stimmt aber mit dem Kern der Differenz  $\Delta_I - \text{id}_I \otimes \eta_I + \eta_I \otimes \text{id}_I = \text{id}_I$  überein. Hieraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 1.4.9.** *Ist  $0$  ein Nullobjekt in  $\mathcal{C}$ , so ist  $0_{\mathcal{L}} := (0, 0_{(\mathcal{L}(0),0)} : \mathcal{L}(0) \rightarrow 0)$  ein Nullobjekt in der Kategorie Lie.*

*Beweis.* Da  $0$  ein Endobjekt in  $\mathcal{C}$  ist, gelten  $0_{(\mathcal{L}(0),0)} \circ \mu_{\mathcal{L}}(0) = 0_{(\mathcal{L}(0),0)} \circ \mathcal{L}(0_{(\mathcal{L}(0),0)})$  und  $0_{(\mathcal{L}(0),0)} \circ \eta_{\mathcal{L}}(0) = \text{id}_0$ . Also ist  $0_{\mathcal{L}}$  eine Lie-Algebra.

Ferner sind für eine Lie-Algebra  $L = (L, \kappa_L)$  die eindeutigen  $\mathcal{C}$ -Morphismen  $0_{(L,0)} : L \rightarrow 0$  und  $0_{(0,L)} : 0 \rightarrow L$  sogar Morphismen von Lie-Algebren, denn es gelten  $0_{(L,0)} \circ \kappa_L = 0_{(\mathcal{L}(0),0)} \circ \mathcal{L}(0_{(L,0)})$  und  $0_{(0,L)} \circ 0_{(\mathcal{L}(0),0)} = \kappa_L \circ \mathcal{L}(0_{(0,L)})$ , da  $0$  ein Endobjekt bzw.  $\mathcal{L}(0)$  ein Anfangsobjekt in  $\mathcal{C}$  ist.  $\square$

**Korollar 1.4.10.** *Die Kategorie Lie ist eine Kategorie mit Nullmorphismen. Dabei sind die unterliegenden  $\mathcal{C}$ -Morphismen die Nullmorphismen aus  $\mathcal{C}$ .*  $\square$

**Korollar 1.4.11.** *Seien  $L_1$  und  $L_2$  Lie-Algebren. Dann sind die Inklusionen  $j_i : L_i \rightarrow L_1 \oplus L_2$ ,  $i = 1, 2$  Morphismen von Lie-Algebren.*

*Beweis.* Die Inklusionen  $j_i$  sind die eindeutig bestimmten  $\mathcal{C}$ -Morphismen in das Produkt  $L_1 \oplus L_2$  mit  $p_k \circ j_i = \delta_{ik}$ . Nach Satz 1.4.6 sind dann mit  $\text{id}_{L_i}$  sowie  $0_{(L_1, L_2)}$  und  $0_{(L_2, L_1)}$  auch die Inklusionen  $j_i$  Morphismen von Lie-Algebren.  $\square$

**Lemma 1.4.12.** *Sei  $V$  ein Objekt aus  $\mathcal{C}$ . Dann ist  $-\mathcal{L}(-\text{id}_V) : \mathcal{L}(V) \rightarrow \mathcal{L}(V)$  der eindeutig bestimmte Morphismus, der  $\theta_{\mathcal{T}V} \circ (-\mathcal{L}(-\text{id}_V)) = h_V \circ \theta_{\mathcal{T}V}$  erfüllt.*

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \theta_{\mathcal{T}V} \circ (-\mathcal{L}(-\text{id}_V)) &= -\theta_{\mathcal{T}V} \circ \mathcal{L}(-\text{id}_V) = S_{\mathcal{T}V} \circ \theta_{\mathcal{T}V} \circ \mathcal{L}(-\text{id}_V) \\ &= S_{\mathcal{T}V} \circ \mathcal{T}(-\text{id}_V) \circ \theta_{\mathcal{T}V} = h_V \circ \theta_{\mathcal{T}V}, \end{aligned}$$

wobei für die letzte Umformung Bemerkung 1.3.4 verwendet wurde. Ferner ist  $-\mathcal{L}(-\text{id}_V)$  durch diese Gleichung eindeutig festgelegt, da  $\theta_{\mathcal{T}V}$  ein Monomorphismus ist.  $\square$

**Satz 1.4.13.** *Sei  $L = (L, \kappa_L : \mathcal{L}(L) \rightarrow L)$  eine Lie-Algebra. Dann ist auch*

$$L^{\text{op}+} := (L, \kappa_{L^{\text{op}+}} := -\kappa_L \circ \mathcal{L}(-\text{id}_L) : \mathcal{L}(L) \rightarrow L)$$

*eine Lie-Algebra, und  $-\text{id}_L : L \rightarrow L^{\text{op}+}$  ist ein Morphismus von Lie-Algebren.*

*Beweis.* Dass  $L^{\text{op}+}$  eine Lie-Algebra ist, ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
\kappa_{L^{\text{op}+}} \circ \mu_L(L) &= -\kappa_L \circ \mathcal{L}(-\text{id}_L) \circ \mu_L(L) \\
&\stackrel{(1)}{=} -\kappa_L \circ \mu_L(L) \circ \mathcal{L}\mathcal{L}(-\text{id}_L) \\
&\stackrel{(2)}{=} -\kappa_L \circ \mathcal{L}(\kappa_L) \circ \mathcal{L}\mathcal{L}(-\text{id}_L) \\
&= -\kappa_L \circ \mathcal{L}(-\text{id}_L) \circ \mathcal{L}(-\kappa_L \circ \mathcal{L}(-\text{id}_L)) \\
&= \kappa_{L^{\text{op}+}} \circ \mathcal{L}(\kappa_{L^{\text{op}+}})
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\kappa_{L^{\text{op}+}} \circ \eta_L(L) &= -\kappa_L \circ \mathcal{L}(-\text{id}_L) \circ \eta_L(L) \\
&\stackrel{(3)}{=} -\kappa_L \circ \eta_L(L) \circ (-\text{id}_L) \\
&= \kappa_L \circ \eta_L(L) \stackrel{(4)}{=} \text{id}_L.
\end{aligned}$$

Dabei gelten (1) und (3) aufgrund der Natürlichkeit von  $\mu_L$  bzw.  $\eta_L$ . Ferner wird bei (2) und (4) verwendet, dass  $(L, \kappa_L)$  eine Lie-Algebra ist.

Schließlich ist  $-\text{id}_L : L \rightarrow L^{\text{op}+}$  wegen

$$\kappa_{L^{\text{op}+}} \circ \mathcal{L}(-\text{id}_L) = -\kappa_L \circ \mathcal{L}(-\text{id}_L) \circ \mathcal{L}(-\text{id}_L) = -\kappa_L = (-\text{id}_L) \circ \kappa_L$$

ein Morphismus von Lie-Algebren.  $\square$

Offensichtlich ist mit  $f : L_1 \rightarrow L_2$  auch  $f^{\text{op}+} := f : L_1^{\text{op}+} \rightarrow L_2^{\text{op}+}$  ein Morphismus von Lie-Algebren. Insgesamt ist damit ein Funktor  $(\ )^{\text{op}+} : \text{Lie} \rightarrow \text{Lie}$  definiert.

## 1.5 Die universelle Hülle

**Satz 1.5.1.** *Der Funktor  $(\ )^- : \text{Alg} \rightarrow \text{Lie}$  besitzt einen Linksadjungierten.*

*Beweis.* Aufgrund der Sätze 1.2.2 und 1.2.7 existieren in  $\mathcal{C}^A$  Differenzkokerne reflexiver Paare. Somit besitzt der Funktor  $\tilde{\theta}^* : \mathcal{C}^A \rightarrow \text{Lie}$  nach [Lin69, Korollar 1] einen Linksadjungierten, da er von einem Monadenmorphismus induziert ist. Dann existiert aber auch zu  $(\ )^- : \text{Alg} \cong \mathcal{C}^A \rightarrow \text{Lie}$  ein Linksadjungierter.  $\square$

Sei nun zu  $(\ )^- : \text{Alg} \rightarrow \text{Lie}$  ein linksadjungierter Funktor  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\text{Alg}}^{\text{Lie}} : \text{Lie} \rightarrow \text{Alg}$  sowie eine Adjunktion mit Einheit  $\eta_{\text{Lie}} : \text{id}_{\text{Lie}} \rightarrow (\ )^- \circ \mathcal{U}$  fest gewählt.

Für jede Lie-Algebra  $L$  besitzt dann der Morphismus  $\eta_{\mathcal{U}}(L) : L \rightarrow (\mathcal{U}L)^-$  von Lie-Algebren die folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder Algebra  $A$  und zu jedem Morphismus  $f : L \rightarrow A^-$  von Lie-Algebren existiert genau einen Morphismus  $g : \mathcal{U}L \rightarrow A$  von Algebren mit  $g^- \circ \eta_{\mathcal{U}}(L) = f$ .

Bevor die Hopfalgebrenstruktur der universellen Hülle definiert werden kann, müssen noch einige Aussagen über die universellen Hüllen von  $L_1 \oplus L_2$  und  $L^{\text{op}+}$



bewiesen werden. Dabei werden die Vergissfunktoren überwiegend nicht explizit aufgeführt, um die Bezeichnungen möglichst einfach zu halten. Wie üblich werden also Objekte und Morphismen in den verschiedenen Kategorien genauso bezeichnet wie die unterliegenden Objekte und Morphismen der Grundkategorie  $\mathcal{C}$ .

**Lemma 1.5.2.** *Seien  $L_i$ ,  $i = 1, 2$  Lie-Algebren. Dann kommutiert*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{T}(L_1 \oplus L_2) & \xrightarrow{\mathcal{T}(\iota_1 p_1 \otimes \eta_{\mathcal{U}L_2} + \eta_{\mathcal{U}L_1} \otimes \iota_2 p_2)} & \mathcal{T}(\mathcal{U}L_1 \otimes \mathcal{U}L_2) \\
\Delta \downarrow & & \downarrow \alpha_{1,2} \\
\mathcal{T}(L_1 \oplus L_2) \otimes \mathcal{T}(L_1 \oplus L_2) & & \\
\mathcal{T}p_1 \otimes \mathcal{T}p_2 \downarrow & & \\
\mathcal{T}L_1 \otimes \mathcal{T}L_2 & \xrightarrow{\mathcal{T}\iota_1 \otimes \mathcal{T}\iota_2} \mathcal{T}\mathcal{U}L_1 \otimes \mathcal{T}\mathcal{U}L_2 \xrightarrow{\alpha_1 \otimes \alpha_2} \mathcal{U}L_1 \otimes \mathcal{U}L_2 & 
\end{array}$$

wobei  $\iota_i := \eta_{\mathcal{U}}(L_i) : L_i \rightarrow \mathcal{U}L_i$  und  $\alpha_i := \epsilon_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}L_i) : \mathcal{T}\mathcal{U}L_i \rightarrow \mathcal{U}L_i$  für  $i = 1, 2$  sowie  $\alpha_{1,2} := \epsilon_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}L_1 \otimes \mathcal{U}L_2) : \mathcal{T}(\mathcal{U}L_1 \otimes \mathcal{U}L_2) \rightarrow \mathcal{U}L_1 \otimes \mathcal{U}L_2$  als Abkürzungen verwendet wurden.

*Beweis.* Da es sich hierbei um eine Identität von Algebrenmorphisms mit Quelle  $\mathcal{T}(L_1 \oplus L_2)$  handelt, ist es ausreichend, die Gleichheit dieser Morphismen auf  $L_1 \oplus L_2$  zu zeigen. Damit folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned}
& (\alpha_1 \otimes \alpha_2) \circ (\mathcal{T}\iota_1 \otimes \mathcal{T}\iota_2) \circ (\mathcal{T}p_1 \otimes \mathcal{T}p_2) \circ \Delta \circ \eta_{\mathcal{A}}(L_1 \oplus L_2) \\
&= (\alpha_1 \circ \mathcal{T}(\iota_1 p_1) \otimes \alpha_2 \circ \mathcal{T}(\iota_2 p_2)) \circ (\text{id} \otimes \eta_{\mathcal{T}(L_1 \oplus L_2)} + \eta_{\mathcal{T}(L_1 \oplus L_2)} \otimes \text{id}) \circ \eta_{\mathcal{A}}(L_1 \oplus L_2) \\
&= [\alpha_1 \circ \mathcal{T}(\iota_1 p_1) \circ \eta_{\mathcal{A}}(L_1 \oplus L_2)] \otimes \eta_{\mathcal{U}L_2} + \eta_{\mathcal{U}L_1} \otimes [\alpha_2 \circ \mathcal{T}(\iota_2 p_2) \circ \eta_{\mathcal{A}}(L_1 \oplus L_2)] \\
&= [\alpha_1 \circ \eta_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}L_1) \circ \iota_1 p_1] \otimes \eta_{\mathcal{U}L_2} + \eta_{\mathcal{U}L_1} \otimes [\alpha_2 \circ \eta_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}L_2) \circ \iota_2 p_2] \\
&= \iota_1 p_1 \otimes \eta_{\mathcal{U}L_2} + \eta_{\mathcal{U}L_1} \otimes \iota_2 p_2 \\
&= \alpha_{1,2} \circ \eta_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}L_1 \otimes \mathcal{U}L_2) \circ (\iota_1 p_1 \otimes \eta_{\mathcal{U}L_2} + \eta_{\mathcal{U}L_1} \otimes \iota_2 p_2) \\
&= \alpha_{1,2} \circ \mathcal{T}(\iota_1 p_1 \otimes \eta_{\mathcal{U}L_2} + \eta_{\mathcal{U}L_1} \otimes \iota_2 p_2) \circ \eta_{\mathcal{A}}(L_1 \oplus L_2).
\end{aligned}$$

Dabei wurde bei der zweiten Umformung verwendet, dass  $\alpha_i \circ \mathcal{T}(\iota_i p_i)$ ,  $i = 1, 2$  Morphismen von Algebren sind. Ferner gelten das vierte und fünfte Gleichheitszeichen, da  $\eta_{\mathcal{A}}$  und  $\epsilon_{\mathcal{A}}$  Einheit und Koeinheit einer Adjunktion sind. Hierbei beachte man, dass die Vergissfunktoren in der Notation unterdrückt wurden.  $\square$

**Satz 1.5.3.** *Seien  $L_i = (L_i, \kappa_i : \mathcal{L}(L_i) \rightarrow L_i)$ ,  $i = 1, 2$  Lie-Algebren. Ferner werden  $\iota_i := \eta_{\mathcal{U}}(L_i) : L_i \rightarrow \mathcal{U}L_i$  für  $i = 1, 2$  als Abkürzungen verwendet. Dann ist*

$$\iota_1 p_1 \otimes \eta_{\mathcal{U}L_2} + \eta_{\mathcal{U}L_1} \otimes \iota_2 p_2 : L_1 \oplus L_2 \rightarrow (\mathcal{U}L_1 \otimes \mathcal{U}L_2)^{-}$$

ein Morphismus von Lie-Algebren.

*Beweis.* Es werden die Bezeichnungen von Lemma 1.5.2 verwendet. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& (\iota_1 p_1 \otimes \eta_{\mathcal{U}L_2} + \eta_{\mathcal{U}L_1} \otimes \iota_2 p_2) \circ (\kappa_1 \circ \mathcal{L}p_1, \kappa_2 \circ \mathcal{L}p_2) \\
&= [\iota_1 \circ \kappa_1 \circ \mathcal{L}p_1] \otimes \eta_{\mathcal{U}L_2} + \eta_{\mathcal{U}L_1} \otimes [\iota_2 \circ \kappa_2 \circ \mathcal{L}p_2] \\
&\stackrel{(1)}{=} [\alpha_1 \circ \theta_{\mathcal{T}\mathcal{U}L_1} \circ \mathcal{L}\iota_1 \circ \mathcal{L}p_1] \otimes \eta_{\mathcal{U}L_2} + \eta_{\mathcal{U}L_1} \otimes [\alpha_2 \circ \theta_{\mathcal{T}\mathcal{U}L_2} \circ \mathcal{L}\iota_2 \circ \mathcal{L}p_2] \\
&= [\alpha_1 \circ \mathcal{T}(\iota_1 p_1) \circ \theta_{\mathcal{T}(L_1 \oplus L_2)}] \otimes \eta_{\mathcal{U}L_2} + \eta_{\mathcal{U}L_1} \otimes [\alpha_2 \circ \mathcal{T}(\iota_2 p_2) \circ \theta_{\mathcal{T}(L_1 \oplus L_2)}] \\
&\stackrel{(2)}{=} (\alpha_1 \circ \mathcal{T}(\iota_1 p_1) \otimes \alpha_2 \circ \mathcal{T}(\iota_2 p_2)) \circ (\text{id} \otimes \eta_{\mathcal{T}(L_1 \oplus L_2)} + \eta_{\mathcal{T}(L_1 \oplus L_2)} \otimes \text{id}) \circ \theta_{\mathcal{T}(L_1 \oplus L_2)} \\
&= (\alpha_1 \otimes \alpha_2) \circ (\mathcal{T}(\iota_1 p_1) \otimes \mathcal{T}(\iota_2 p_2)) \circ \Delta \circ \theta_{\mathcal{T}(L_1 \oplus L_2)} \\
&\stackrel{(3)}{=} \alpha_{1,2} \circ \mathcal{T}(\iota_1 p_1 \otimes \eta_{\mathcal{U}L_2} + \eta_{\mathcal{U}L_1} \otimes \iota_2 p_2) \circ \theta_{\mathcal{T}(L_1 \oplus L_2)} \\
&= \alpha_{1,2} \circ \theta_{\mathcal{T}(\mathcal{U}L_1 \otimes \mathcal{U}L_2)} \circ \mathcal{L}(\iota_1 p_1 \otimes \eta_{\mathcal{U}L_2} + \eta_{\mathcal{U}L_1} \otimes \iota_2 p_2).
\end{aligned}$$

Dabei wurde bei (1) verwendet, dass die  $\iota_i = \eta_0(L_i) : L_i \rightarrow (\mathcal{U}L_i)^-$  Morphismen von Lie-Algebren sind. Ferner gilt die Umformung (2), da  $\alpha_i$  und  $\mathcal{T}(\iota_i p_i)$  Algebrenmorphismen sind. Schließlich folgt (3) aus Lemma 1.5.2.

Diese Gleichung besagt nun aber, dass  $\iota_1 p_1 \otimes \eta_{\mathcal{U}L_2} + \eta_{\mathcal{U}L_1} \otimes \iota_2 p_2$  ein Morphismus von Lie-Algebren ist.  $\square$

**Korollar 1.5.4.** *Sei  $L$  eine Lie-Algebra. Dann ist*

$$\eta_0(L) \otimes \eta_{\mathcal{U}L} + \eta_{\mathcal{U}L} \otimes \eta_0(L) : L \rightarrow (\mathcal{U}L \otimes \mathcal{U}L)^-$$

*ein Morphismus von Lie-Algebren.*

*Beweis.* Der angegebene Morphismus ergibt sich durch Verkettung der Morphismen aus Korollar 1.4.7 und Satz 1.5.3.  $\square$

**Satz 1.5.5.** *Seien  $L_i$ ,  $i = 1, 2$  Lie-Algebren. Als Abkürzungen werden  $\iota_i := \eta_0(L_i) : L_i \rightarrow \mathcal{U}L_i$  für  $i = 1, 2$  und  $\iota_{1,2} := \eta_0(L_1 \oplus L_2) : L_1 \oplus L_2 \rightarrow \mathcal{U}(L_1 \oplus L_2)$  verwendet. Dann ist der eindeutig bestimmte Algebrenmorphismus  $f : \mathcal{U}(L_1 \oplus L_2) \rightarrow \mathcal{U}L_1 \otimes \mathcal{U}L_2$  mit  $f \circ \iota_{1,2} = \iota_1 p_1 \otimes \eta_{\mathcal{U}L_2} + \eta_{\mathcal{U}L_1} \otimes \iota_2 p_2$  ein Epimorphismus.*

*Beweis.* Seien  $g_i : \mathcal{U}L_i \otimes \mathcal{U}L_2 \rightarrow A$  Algebrenmorphismen mit  $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ . Dann ist  $g_1 = g_2$  zu zeigen. Seien  $j_i : L_i \rightarrow L_1 \oplus L_2$  die Inklusionen. Aus

$$\begin{aligned}
f \circ \mathcal{U}(j_1) \circ \iota_1 &= f \circ \iota_{1,2} \circ j_1 \\
&= (\iota_1 p_1 \otimes \eta_{\mathcal{U}L_2} + \eta_{\mathcal{U}L_1} \otimes \iota_2 p_2) \circ j_1 \\
&= (\text{id}_{\mathcal{U}L_1} \otimes \eta_{\mathcal{U}L_2}) \circ \iota_1
\end{aligned}$$

folgt dann  $f \circ \mathcal{U}(j_1) = \text{id}_{\mathcal{U}L_1} \otimes \eta_{\mathcal{U}L_2}$ . Des Weiteren gilt damit

$$g_1 \circ (\text{id}_{\mathcal{U}L_1} \otimes \eta_{\mathcal{U}L_2}) = g_1 \circ f \circ \mathcal{U}(j_1) = g_2 \circ f \circ \mathcal{U}(j_1) = g_2 \circ (\text{id}_{\mathcal{U}L_1} \otimes \eta_{\mathcal{U}L_2}).$$

Ganz analog wird  $g_1 \circ (\eta_{\mathcal{U}L_1} \otimes \text{id}_{\mathcal{U}L_2}) = g_2 \circ (\eta_{\mathcal{U}L_1} \otimes \text{id}_{\mathcal{U}L_2})$  bewiesen. Nach Bemerkung 1.2.5 folgt aus diesen beiden letzten Gleichungen  $g_1 = g_2$ .  $\square$

**Satz 1.5.6.** *Sei  $L = (L, \kappa_L)$  eine Lie-Algebra. Dann sind*

$$\eta_U(L) : L^{\text{op}+} \rightarrow (\mathcal{U}(L)^{\text{op}+})^- \quad \text{und} \quad \eta_U(L^{\text{op}+}) : L \rightarrow (\mathcal{U}(L^{\text{op}+})^{\text{op}-})^-$$

*Morphismen von Lie-Algebren.*

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \epsilon_A(\mathcal{U}(L)^{\text{op}+}) \circ \theta_{\mathcal{U}L} \circ \mathcal{L}(\eta_U(L)) &= \epsilon_A(\mathcal{U}L) \circ h_{\mathcal{U}L} \circ \theta_{\mathcal{U}L} \circ \mathcal{L}(\eta_U(L)) \\ &= -\epsilon_A(\mathcal{U}L) \circ \theta_{\mathcal{U}L} \circ \mathcal{L}(-\text{id}_{\mathcal{U}L}) \circ \mathcal{L}(\eta_U(L)) \\ &= -\epsilon_A(\mathcal{U}L) \circ \theta_{\mathcal{U}L} \circ \mathcal{L}(\eta_U(L)) \circ \mathcal{L}(-\text{id}_L) \\ &= \eta_U(L) \circ (-\kappa_L \circ \mathcal{L}(-\text{id}_L)). \end{aligned}$$

Hierbei wurden für die ersten beiden Umformungen Bemerkung 1.2.6 und Lemma 1.4.12 verwendet. Die letzte Gleichung gilt, da  $\eta_U(L) : L \rightarrow \mathcal{U}L^-$  ein Morphismus von Lie-Algebren ist. Somit ist  $\eta_U(L) : L^{\text{op}+} \rightarrow (\mathcal{U}(L)^{\text{op}+})^-$  ein Morphismus von Lie-Algebren.

Ganz analog zeigt

$$\begin{aligned} \epsilon_A(\mathcal{U}(L^{\text{op}+})^{\text{op}-}) \circ \theta_{\mathcal{U}(L^{\text{op}+})} \circ \mathcal{L}(\eta_U(L^{\text{op}+})) &= \epsilon_A(\mathcal{U}(L^{\text{op}+})) \circ h_{\mathcal{U}(L^{\text{op}+})}^{-1} \circ \theta_{\mathcal{U}(L^{\text{op}+})} \circ \mathcal{L}(\eta_U(L^{\text{op}+})) \\ &= -\epsilon_A(\mathcal{U}(L^{\text{op}+})) \circ \theta_{\mathcal{U}(L^{\text{op}+})} \circ \mathcal{L}(-\text{id}_{\mathcal{U}(L^{\text{op}+})}) \circ \mathcal{L}(\eta_U(L^{\text{op}+})) \\ &= -\epsilon_A(\mathcal{U}(L^{\text{op}+})) \circ \theta_{\mathcal{U}(L^{\text{op}+})} \circ \mathcal{L}(\eta_U(L^{\text{op}+})) \circ \mathcal{L}(-\text{id}_L) \\ &= -\eta_U(L^{\text{op}+}) \circ (-\kappa_L \circ \mathcal{L}(-\text{id}_L)) \circ \mathcal{L}(-\text{id}_L) \\ &= \eta_U(L^{\text{op}+}) \circ \kappa_L, \end{aligned}$$

dass  $\eta_U(L^{\text{op}+}) : L \rightarrow (\mathcal{U}(L^{\text{op}+})^{\text{op}-})^-$  ein Morphismus von Lie-Algebren ist.  $\square$

**Korollar 1.5.7.** *Für jede Lie-Algebra  $L$  ist  $-\eta_U(L) : L \rightarrow (\mathcal{U}(L)^{\text{op}+})^-$  ein Morphismus von Lie-Algebren.*

*Beweis.* Der angegebene Morphismus ergibt sich durch Verkettung der Morphismen  $-\text{id}_L : L \rightarrow L^{\text{op}+}$  und  $\eta_U(L) : L^{\text{op}+} \rightarrow (\mathcal{U}(L)^{\text{op}+})^-$  aus den Sätzen 1.4.13 und 1.5.6.  $\square$

**Satz 1.5.8.** *Sei  $L$  eine Lie-Algebra. Ferner seien  $\varphi_L : \mathcal{U}(L^{\text{op}+}) \rightarrow \mathcal{U}(L)^{\text{op}+}$  und  $\psi_L : \mathcal{U}L \rightarrow \mathcal{U}(L^{\text{op}+})^{\text{op}-}$  die eindeutigen Algebrenmorphisten mit  $\varphi_L \circ \eta_U(L^{\text{op}+}) = \eta_U(L)$  bzw.  $\psi_L \circ \eta_U(L) = \eta_U(L^{\text{op}+})$ . Dann sind  $\varphi_L$  und  $\psi_L^{\text{op}+}$  zueinander invers, und  $\varphi$  ist ein natürlicher Isomorphismus  $\mathcal{U} \circ ()^{\text{op}+} \rightarrow ()^{\text{op}+} \circ \mathcal{U}$ .*

*Beweis.* Aus

$$\psi_L^{\text{op}+} \circ \varphi_L \circ \eta_U(L^{\text{op}+}) = \psi_L^{\text{op}+} \circ \eta_U(L) = \psi_L \circ \eta_U(L) = \eta_U(L^{\text{op}+})$$

und

$$\varphi_L \circ \psi_L^{\text{op}+} \circ \eta_U(L) = \varphi_L \circ \psi_L \circ \eta_U(L) = \varphi_L \circ \eta_U(L^{\text{op}+}) = \eta_U(L)$$

folgen  $\psi_L^{\text{op}+} \circ \varphi_L = \text{id}_{\mathcal{U}(L^{\text{op}+})}$  und  $\varphi_L \circ \psi_L^{\text{op}+} = \text{id}_{\mathcal{U}(L)^{\text{op}+}}$ . Somit sind  $\varphi_L$  und  $\psi_L^{\text{op}+}$  zueinander invers.

Zum Nachweis der Natürlichkeit von  $\varphi$  sei  $f : L_1 \rightarrow L_2$  ein Morphismus von Lie-Algebren. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(f)^{\text{op}+} \circ \varphi_{L_1} \circ \eta_U(L_1^{\text{op}+}) &= \mathcal{U}(f) \circ \eta_U(L_1) = \eta_U(L_2) \circ f \\ &= \varphi_{L_2} \circ \eta_U(L_2^{\text{op}+}) \circ f^{\text{op}+} = \varphi_{L_2} \circ \mathcal{U}(f^{\text{op}+}) \circ \eta_U(L_1^{\text{op}+}), \end{aligned}$$

woraus  $\mathcal{U}(f)^{\text{op}+} \circ \varphi_{L_1} = \varphi_{L_2} \circ \mathcal{U}(f^{\text{op}+})$  folgt. Damit ist die Natürlichkeit von  $\varphi$  gezeigt.  $\square$

Nun kann die universelle Hülle einer Lie-Algebra mit einer Hopfalgebrenstruktur versehen werden und anschließend ein linksadjungierter Funktor zu  $\mathcal{P}_{\text{Lie}}^{\text{Hopf}}$  angegeben werden.

**Satz 1.5.9.** *Sei  $L$  eine Lie-Algebra. Dann ist  $\mathcal{U}L$  auf eindeutige Weise eine Hopfalgebra, so dass gelten*

- $\Delta_{\mathcal{U}L} \circ \eta_U(L) = \eta_U(L) \otimes \eta_{\mathcal{U}L} + \eta_{\mathcal{U}L} \otimes \eta_U(L) : L \rightarrow (\mathcal{U}L \otimes \mathcal{U}L)^-$
- $\epsilon_{\mathcal{U}L} \circ \eta_U(L) = 0 : L \rightarrow I^-$
- $S_{\mathcal{U}L} \circ \eta_U(L) = -\eta_U(L) : L \rightarrow (\mathcal{U}(L)^{\text{op}+})^-$

*Beweis.* Damit durch die obigen Gleichungen eindeutig bestimmte Algebrenmorphis-  
men  $\Delta := \Delta_{\mathcal{U}L} : \mathcal{U}L \rightarrow \mathcal{U}L \otimes \mathcal{U}L$ ,  $\epsilon := \epsilon_{\mathcal{U}L} : \mathcal{U}L \rightarrow I$  und  $S := S_{\mathcal{U}L} : \mathcal{U}L \rightarrow \mathcal{U}(L)^{\text{op}+}$   
definiert sind, müssen auf der rechten Seite dieser Gleichungen jeweils Morphismen  
von Lie-Algebren stehen. Dies ist aber nach den Korollaren 1.5.4, 1.4.10 und 1.5.7  
der Fall. Nun sind noch die Koassoziativität sowie das Koeins- und Antipodenaxiom  
zu zeigen.

Bei der Koassoziativität und dem Koeinsaxiom handelt es sich um Identitäten  
von Algebrenmorphis-  
men mit Quelle  $\mathcal{U}L$ . Somit ist es ausreichend, die entsprechen-  
den Gleichungen nach Vorschalten von  $\iota := \eta_U(L)$  zu beweisen. Der Nachweis erfolgt  
dann ganz analog zum Fall der Hopfalgebrenstruktur der Tensoralgebra aus Satz  
1.3.3.

Auch der Beweis des Antipodenaxioms wird mit Ausnahme eines kleinen Zusatz-  
arguments analog geführt. Sei dazu  $d : C \rightarrow \mathcal{U}L$  ein Differenzkern von  $\nabla \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta$   
und  $\eta \circ \epsilon$ . Dann gibt es eine Faktorisierung  $d \circ f = \iota$  von  $\iota$  über  $d$ . Hierbei ist  $f$  mit  $\iota$   
ein Morphismus von Lie-Algebren, da  $d$  als ein Monomorphismus von Lie-Algebren  
aufgefasst werden kann. Also existiert ein Algebrenmorphismus  $\tilde{f} : \mathcal{U}L \rightarrow C$  mit  
 $\tilde{f} \circ \iota = f$ . Dieses  $\tilde{f}$  liefert nun eine Faktorisierung von  $\text{id}_{\mathcal{U}L}$  über  $d$ , d.h., es gilt  
 $d \circ \tilde{f} = \text{id}_{\mathcal{U}L}$ . Hieraus folgt  $\nabla \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta = \eta \circ \epsilon$ . Die andere Hälfte des Antipo-  
denaxioms wird analog bewiesen.  $\square$

**Satz 1.5.10.** Für jede Lie-Algebra  $L$  gibt es einen Morphismus  $\eta_{\mathfrak{H}}(L) : L \rightarrow \mathcal{P}\mathcal{U}L$  von Lie-Algebren mit folgender universellen Eigenschaft:

Zu jeder Hopfalgebra  $H$  und jedem Morphismus  $j : L \rightarrow \mathcal{P}H$  von Lie-Algebren existiert genau ein Morphismus  $f : \mathcal{U}L \rightarrow H$  von Hopfalgebren mit  $j = \mathcal{P}(f) \circ \eta_{\mathfrak{H}}(L)$ .

*Beweis.* Wegen  $\Delta_{\mathcal{U}L} \circ \eta_{\mathfrak{U}}(L) = (\text{id}_{\mathcal{U}L} \otimes \eta_{\mathcal{U}L} + \eta_{\mathcal{U}L} \otimes \text{id}_{\mathcal{U}L}) \circ \eta_{\mathfrak{U}}(L)$  gibt es genau einen  $\mathcal{C}$ -Morphismus  $\eta_{\mathfrak{H}}(L) : L \rightarrow \mathcal{P}\mathcal{U}L$  mit  $\theta_{\mathcal{U}L} \circ \eta_{\mathfrak{H}}(L) = \eta_{\mathfrak{U}}(L)$ . Dabei ist mit  $\eta_{\mathfrak{U}}(L)$  auch  $\eta_{\mathfrak{H}}(L)$  ein Morphismus von Lie-Algebren, da  $\theta_{\mathcal{U}L}$  ein Monomorphismus von Lie-Algebren ist.

Der Nachweis der universellen Eigenschaft von  $\eta_{\mathfrak{H}}(L)$  erfolgt nun ganz analog zum Beweis von Satz 1.3.6.  $\square$

**Korollar 1.5.11.** Der Funktor  $\mathcal{P}_{\text{Lie}}^{\text{Hopf}} : \text{Hopf} \rightarrow \text{Lie}$  besitzt einen Linksadjungierten  $\mathcal{U}_{\text{Hopf}}^{\text{Lie}} : \text{Lie} \rightarrow \text{Hopf}$ . Dieser kann so gewählt werden, dass  $\mathcal{V}_{\text{Alg}}^{\text{Hopf}} \circ \mathcal{U}_{\text{Hopf}}^{\text{Lie}} = \mathcal{U}_{\text{Alg}}^{\text{Lie}}$  gilt.  $\square$

## 1.6 Schiefsymmetrische Endomorphismen und Derivationen

In diesem Abschnitt wird zusätzlich vorausgesetzt, dass die Kategorie  $\mathcal{C}$  abgeschlossen ist, d.h., es existiert ein innerer Hom-Funktor  $\text{hom} : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ . Dieser ist durch einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathcal{C}(U \otimes V, W) \cong \mathcal{C}(U, \text{hom}(V, W))$$

charakterisiert. Somit ist für jedes Objekt  $V$  aus  $\mathcal{C}$  der Funktor  $\text{hom}(V, -)$  rechtsadjungiert zum Funktor  $- \otimes V$ . Die Koeinheit dieser Adjunktion werde durch die Morphismen  $\vartheta_{V,W} : \text{hom}(V, W) \otimes V \rightarrow W$  beschrieben.

Dann besitzt  $\text{end}(V) := \text{hom}(V, V)$  eine eindeutige Algebrenstruktur, so dass durch  $\vartheta_{V,V} : \text{end}(V) \otimes V \rightarrow V$  eine Operation von  $\text{end}(V)$  auf  $V$  gegeben ist. Nun sollen zwei Verfahren zur Konstruktion von Lie-Unteralgebren von  $\text{end}(V)^-$  beschrieben werden.

Sei dazu zunächst  $\mu : V \otimes V \rightarrow I$  ein Morphismus aus  $\mathcal{C}$ . Hiermit seien die Morphismen

$$\varphi : \text{end}(V) \otimes V \otimes V \xrightarrow{\vartheta_{V,V} \otimes \text{id}_V} V \otimes V \xrightarrow{\mu} I$$

und

$$\psi : \text{end}(V) \otimes V \otimes V \xrightarrow{\tau_{\text{end}(V),V} \otimes \text{id}_V} V \otimes \text{end}(V) \otimes V \xrightarrow{\text{id}_V \otimes \vartheta_{V,V}} V \otimes V \xrightarrow{-\mu} I$$

gebildet. Ferner seien mit  $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} : \text{end}(V) \rightarrow \text{hom}(V \otimes V, I)$  die zugehörigen adjungierten Morphismen bezeichnet. Dann sind die schiefsymmetrischen Endomorphismen bezüglich  $\mu$  als Differenzkern  $i : \mathfrak{g} \rightarrow \text{end}(V)$  der beiden Morphismen  $\tilde{\varphi}$  und  $\tilde{\psi}$  definiert.

**Lemma 1.6.1.** *Seien  $\varrho, \sigma : \mathcal{T}\text{end}(V) \rightarrow \text{hom}(V \otimes V, I)$  definiert durch*

$$\varrho := \tilde{\varphi} \circ \epsilon_A(\text{end}(V)) \quad \text{bzw.} \quad \sigma := -\tilde{\psi} \circ \epsilon_A(\text{end}(V)) \circ S_{\mathcal{T}\text{end}(V)}.$$

*Ferner sei  $j : A \rightarrow \mathcal{T}\text{end}(V)$  ein Differenzkern von  $\varrho$  und  $\sigma$ . Dann ist  $A$  eine Unteralgebra von  $\mathcal{T}\text{end}(V)$ .*

*Beweis.* Zu zeigen ist, dass  $A$  die Einheit von  $\mathcal{T}\text{end}(V)$  enthält und unter der Multiplikation abgeschlossen ist, d.h.,  $\eta_{\mathcal{T}\text{end}(V)}$  und  $\nabla_{\mathcal{T}\text{end}(V)} \circ (j \otimes j)$  müssen über  $j$  faktorisieren. Hierfür sind

$$\varrho \circ \eta_{\mathcal{T}\text{end}(V)} = \sigma \circ \eta_{\mathcal{T}\text{end}(V)}$$

und

$$\varrho \circ \nabla_{\mathcal{T}\text{end}(V)} \circ (j \otimes j) = \sigma \circ \nabla_{\mathcal{T}\text{end}(V)} \circ (j \otimes j)$$

zu zeigen.

Anstatt dieser beiden Gleichungen werden die zugehörigen adjungierten Gleichungen bewiesen. Hierbei werden  $\epsilon := \epsilon_A(\text{end}(V))$  und  $S := S_{\mathcal{T}\text{end}(V)}$  als Abkürzungen verwendet. Die erste Gleichung gilt dann wegen

$$\begin{aligned} \varphi \circ (\epsilon \eta_{\mathcal{T}\text{end}(V)} \otimes \text{id}_{V \otimes V}) &\stackrel{(1)}{=} \varphi \circ (\eta_{\text{end}(V)} \otimes \text{id}_{V \otimes V}) \\ &= \mu \circ (\vartheta_{V,V} \otimes \text{id}_V) \circ (\eta_{\text{end}(V)} \otimes \text{id}_{V \otimes V}) \stackrel{(2)}{=} \mu \\ &\stackrel{(3)}{=} \mu \circ (\text{id}_V \otimes \vartheta_{V,V}) \circ (\text{id}_V \otimes \eta_{\text{end}(V)} \otimes \text{id}_V) \\ &= \mu \circ (\text{id}_V \otimes \vartheta_{V,V}) \circ (\text{id}_V \otimes \eta_{\text{end}(V)} \otimes \text{id}_V) \circ (\tau_{I,V} \otimes \text{id}_V) \\ &= \mu \circ (\text{id}_V \otimes \vartheta_{V,V}) \circ (\tau_{\text{end}(V),V} \otimes \text{id}_V) \circ (\eta_{\text{end}(V)} \otimes \text{id}_{V \otimes V}) \\ &= -\psi \circ (\eta_{\text{end}(V)} \otimes \text{id}_{V \otimes V}) \\ &\stackrel{(4)}{=} -\psi \circ (\epsilon S \eta_{\mathcal{T}\text{end}(V)} \otimes \text{id}_{V \otimes V}). \end{aligned}$$

Dabei wurde unter anderem benutzt, dass  $\epsilon$  und  $S$  Algebrenmorphisme sind [1,4] und durch  $\vartheta_{V,V}$  eine Operation gegeben ist [2,3]. Die zweite Gleichung ergibt sich nun aus

$$\begin{aligned} &\varphi \circ (\epsilon \nabla_{\mathcal{T}\text{end}(V)} \otimes \text{id}_{V \otimes V}) \circ (j \otimes j \otimes \text{id}_{V \otimes V}) \\ &\stackrel{(1)}{=} \mu \circ (\vartheta_{V,V} \otimes \text{id}_V) \circ (\nabla_{\text{end}(V)} \otimes \text{id}_{V \otimes V}) \circ (\epsilon j \otimes \epsilon j \otimes \text{id}_{V \otimes V}) \\ &\stackrel{(2)}{=} \mu \circ (\vartheta_{V,V} \otimes \text{id}_V) \circ (\text{id}_{\text{end}(V)} \otimes \vartheta_{V,V} \otimes \text{id}_V) \circ (\epsilon j \otimes \epsilon j \otimes \text{id}_{V \otimes V}) \\ &\stackrel{(3)}{=} \mu \circ (\text{id}_V \otimes \vartheta_{V,V}) \circ (\tau_{\text{end}(V),V} \otimes \text{id}_V) \circ (\text{id}_{\text{end}(V)} \otimes \vartheta_{V,V} \otimes \text{id}_V) \\ &\quad \circ (\epsilon S j \otimes \epsilon j \otimes \text{id}_{V \otimes V}) \\ &= \mu \circ (\vartheta_{V,V} \otimes \vartheta_{V,V}) \circ (\epsilon j \otimes \text{id}_V \otimes \epsilon S j \otimes \text{id}_V) \circ (\tau_{A,A \otimes V} \otimes \text{id}_V) \\ &\stackrel{(4)}{=} \mu \circ (\text{id}_V \otimes \vartheta_{V,V}) \circ (\tau_{\text{end}(V),V} \otimes \vartheta_{V,V}) \circ (\epsilon S j \otimes \text{id}_V \otimes \epsilon S j \otimes \text{id}_V) \\ &\quad \circ (\tau_{A,A \otimes V} \otimes \text{id}_V) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(5)}{=} \mu \circ (\text{id}_V \otimes \vartheta_{V,V}) \circ (\text{id}_V \otimes \nabla_{\text{end}(V)} \otimes \text{id}_V) \circ (\text{id}_V \otimes \epsilon S j \otimes \epsilon S j \otimes \text{id}_V) \\
&\quad \circ (\tau_{A,V} \otimes \text{id}_{A \otimes V}) \circ (\tau_{A,A \otimes V} \otimes \text{id}_V) \\
&\stackrel{(6)}{=} \mu \circ (\text{id}_V \otimes \vartheta_{V,V}) \circ (\text{id}_V \otimes \epsilon \nabla_{\mathcal{T}\text{end}(V)} \otimes \text{id}_V) \circ (\text{id}_V \otimes S j \otimes S j \otimes \text{id}_V) \\
&\quad \circ (\text{id}_V \otimes \tau_{A,A} \otimes \text{id}_V) \circ (\tau_{A \otimes A, V} \otimes \text{id}_V) \\
&= \mu \circ (\text{id}_V \otimes \vartheta_{V,V}) \circ (\text{id}_V \otimes \epsilon \nabla_{\mathcal{T}\text{end}(V)} \tau_{\mathcal{T}\text{end}(V), \mathcal{T}\text{end}(V)} \otimes \text{id}_V) \\
&\quad \circ (\text{id}_V \otimes S j \otimes S j \otimes \text{id}_V) \circ (\tau_{A \otimes A, V} \otimes \text{id}_V) \\
&\stackrel{(7)}{=} \mu \circ (\text{id}_V \otimes \vartheta_{V,V}) \circ (\text{id}_V \otimes \epsilon S \nabla_{\mathcal{T}\text{end}(V)} \otimes \text{id}_V) \circ (\text{id}_V \otimes j \otimes j \otimes \text{id}_V) \\
&\quad \circ (\tau_{A \otimes A, V} \otimes \text{id}_V) \\
&= \mu \circ (\text{id}_V \otimes \vartheta_{V,V}) \circ (\tau_{\text{end}(V), V} \otimes \text{id}_V) \circ (\epsilon S \nabla_{\mathcal{T}\text{end}(V)} \otimes \text{id}_{V \otimes V}) \\
&\quad \circ (j \otimes j \otimes \text{id}_{V \otimes V}) \\
&= -\psi \circ (\epsilon S \nabla_{\mathcal{T}\text{end}(V)} \otimes \text{id}_{V \otimes V}) \circ (j \otimes j \otimes \text{id}_{V \otimes V}).
\end{aligned}$$

Hierbei gelten die einzelnen Gleichheitszeichen, da  $\epsilon$  [1,6] und  $S$  [7] Morphismen von Algebren sind sowie  $\vartheta_{V,V}$  eine Operation ist [2,5]. Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned}
&\mu \circ (\vartheta_{V,V} \otimes \text{id}_V) \circ (\epsilon j \otimes \text{id}_{V \otimes V}) \\
&= \mu \circ (\text{id}_V \otimes \vartheta_{V,V}) \circ (\tau_{\text{end}(V), V} \otimes \text{id}_V) \circ (\epsilon S j \otimes \text{id}_{V \otimes V}),
\end{aligned}$$

da  $j$  ein Differenzkern von  $\varrho$  und  $\sigma$  ist. Diese Identität geht bei den Umformungen [3,4] ein. Schließlich wurden noch Eigenschaften der Zopfung  $\tau$  verwendet.  $\square$

**Satz 1.6.2.**  $\mathfrak{g}$  ist eine Lie-Unteralgebra von  $\text{end}(V)^-$ .

*Beweis.* Es ist zu zeigen, dass  $\epsilon_A(\text{end}(V)) \circ \theta_{\mathcal{T}\text{end}(V)} \circ \mathcal{L}(i) : \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{end}(V)$  über  $i : \mathfrak{g} \rightarrow \text{end}(V)$  faktorisiert. Nach Definition von  $i$  als Differenzkern von  $\tilde{\varphi}$  und  $\tilde{\psi}$  ist dies gleichbedeutend mit der Gültigkeit von

$$\tilde{\varphi} \circ \epsilon_A(\text{end}(V)) \circ \theta_{\mathcal{T}\text{end}(V)} \circ \mathcal{L}(i) = \tilde{\psi} \circ \epsilon_A(\text{end}(V)) \circ \theta_{\mathcal{T}\text{end}(V)} \circ \mathcal{L}(i).$$

Um diese Gleichung zu beweisen, wird Lemma 1.6.1 herangezogen. Seien dazu  $j$ ,  $\varrho$  und  $\sigma$  wie in diesem Lemma. Dann faktorisiert  $\eta_A(\text{end}(V)) \circ i : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{T}\text{end}(V)$  über  $j$ , denn es gilt

$$\begin{aligned}
\varrho \circ \eta_A(\text{end}(V)) \circ i &= \tilde{\varphi} \circ \epsilon_A(\text{end}(V)) \circ \eta_A(\text{end}(V)) \circ i = \tilde{\varphi} \circ i \\
&= \tilde{\psi} \circ i = \tilde{\psi} \circ \epsilon_A(\text{end}(V)) \circ \eta_A(\text{end}(V)) \circ i \\
&= -\tilde{\psi} \circ \epsilon_A(\text{end}(V)) \circ S_{\mathcal{T}\text{end}(V)} \circ \eta_A(\text{end}(V)) \circ i \\
&= \sigma \circ \eta_A(\text{end}(V)) \circ i.
\end{aligned}$$

Somit existiert ein Morphismus  $f : \mathfrak{g} \rightarrow A$  mit  $j \circ f = \eta_A(\text{end}(V)) \circ i$ . Da  $A$  eine Algebra ist, gibt es dann einen Algebrenmorphismus  $\tilde{f} : \mathcal{T}\mathfrak{g} \rightarrow A$  mit  $\tilde{f} \circ \eta_A(\mathfrak{g}) = f$ .

Wegen  $j \circ \tilde{f} \circ \eta_A(\mathfrak{g}) = j \circ f = \eta_A(\text{end}(V)) \circ i = \mathcal{T}i \circ \eta_A(\mathfrak{g})$  gilt dann  $j \circ \tilde{f} = \mathcal{T}i$ , woraus  $\varrho \circ \mathcal{T}i = \sigma \circ \mathcal{T}i$  folgt.

Nach diesen Vorbereitungen kann die eigentliche Gleichung gezeigt werden.

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} \circ \epsilon_A(\text{end}(V)) \circ \theta_{\mathcal{T}\text{end}(V)} \circ \mathcal{L}(i) &= \varrho \circ \theta_{\mathcal{T}\text{end}(V)} \circ \mathcal{L}(i) \\ &= \varrho \circ \mathcal{T}(i) \circ \theta_{\mathcal{T}\mathfrak{g}} = \sigma \circ \mathcal{T}(i) \circ \theta_{\mathcal{T}\mathfrak{g}} \\ &= -\tilde{\psi} \circ \epsilon_A(\text{end}(V)) \circ S_{\mathcal{T}\text{end}(V)} \circ \mathcal{T}(i) \circ \theta_{\mathcal{T}\mathfrak{g}} \\ &= -\tilde{\psi} \circ \epsilon_A(\text{end}(V)) \circ S_{\mathcal{T}\text{end}(V)} \circ \theta_{\mathcal{T}\text{end}(V)} \circ \mathcal{L}(i) \\ &= \tilde{\psi} \circ \epsilon_A(\text{end}(V)) \circ \theta_{\mathcal{T}\text{end}(V)} \circ \mathcal{L}(i). \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

Das zweite Beispiel für Lie-Unteralgebren liefern die Derivationen einer Algebra. Hierfür sei  $A = (A, \nabla_A, \eta_A)$  eine Algebra. Weiter seien

$$\begin{aligned} \varphi : \text{end}(A) \otimes A \otimes A &\xrightarrow{\text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \nabla_A} \text{end}(A) \otimes A \xrightarrow{\vartheta_{A,A}} A, \\ \psi : \text{end}(A) \otimes A \otimes A &\xrightarrow{\vartheta_{A,A} \otimes \text{id}_A + (\text{id}_A \otimes \vartheta_{A,A}) \circ (\tau_{\text{end}(A),A} \otimes \text{id}_A)} A \otimes A \xrightarrow{\nabla_A} A \end{aligned}$$

sowie  $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} : \text{end}(A) \rightarrow \text{hom}(A \otimes A, A)$  die zu  $\varphi$  und  $\psi$  adjungierten Morphismen. Dann sind die Derivationen von  $A$  als Differenzkern  $i : \text{Der}(A) \rightarrow \text{end}(A)$  von  $\tilde{\varphi}$  und  $\tilde{\psi}$  definiert.

Der Morphismus  $\psi$  kann auch anders dargestellt werden. Dazu wird der Morphismus  $\gamma : \text{end}(A) \otimes \text{end}(A) \otimes A \otimes A \rightarrow A$  mit

$$\gamma := \nabla_A \circ (\vartheta_{A,A} \otimes \vartheta_{A,A}) \circ (\text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \tau_{\text{end}(A),A} \otimes \text{id}_A)$$

verwendet. Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma &\circ (\text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \eta_{\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{A \otimes A} + \eta_{\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \\ &= \nabla_A \circ (\vartheta_{A,A} \otimes \vartheta_{A,A}) \circ (\text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \tau_{\text{end}(A),A} \otimes \text{id}_A) \\ &\quad \circ (\text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \eta_{\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{A \otimes A} + \eta_{\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \\ &= \nabla_A \circ (\vartheta_{A,A} \otimes \vartheta_{A,A}) \circ [(\text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \eta_{\text{end}(A)} \otimes \text{id}_A) \circ (\text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \tau_{I,A} \otimes \text{id}_A) \\ &\quad + \eta_{\text{end}(A)} \otimes \tau_{\text{end}(A),A} \otimes \text{id}_A] \\ &= \nabla_A \circ [\vartheta_{A,A} \otimes \text{id}_A + (\text{id}_A \otimes \vartheta_{A,A}) \circ (\tau_{\text{end}(A),A} \otimes \text{id}_A)] = \psi, \end{aligned}$$

und für den adjungierten Morphismus  $\tilde{\gamma} : \text{end}(A) \otimes \text{end}(A) \rightarrow \text{hom}(A \otimes A, A)$  von  $\gamma$  gilt  $\tilde{\psi} = \tilde{\gamma} \circ (\text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \eta_{\text{end}(A)} + \eta_{\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{\text{end}(A)})$ .

**Lemma 1.6.3.** *Seien  $\varrho, \sigma : \mathcal{T}\text{end}(A) \rightarrow \text{hom}(A \otimes A, A)$  definiert durch*

$$\varrho := \tilde{\varphi} \circ \epsilon_A(\text{end}(A)) \quad \text{bzw.} \quad \sigma := \tilde{\gamma} \circ [\epsilon_A(\text{end}(A)) \otimes \epsilon_A(\text{end}(A))] \circ \Delta_{\mathcal{T}\text{end}(A)},$$

und sei  $j : C \rightarrow \mathcal{T}\text{end}(A)$  ein Differenzkern von  $\varrho$  und  $\sigma$ . Dann ist  $C$  eine Unteralgebra von  $\mathcal{T}\text{end}(A)$ .



*Beweis.* Es sind

$$\varrho \circ \eta_{\mathcal{T}\text{end}(A)} = \sigma \circ \eta_{\mathcal{T}\text{end}(A)}$$

und

$$\varrho \circ \nabla_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \circ (j \otimes j) = \sigma \circ \nabla_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \circ (j \otimes j)$$

zu zeigen, damit  $\eta_{\mathcal{T}\text{end}(A)}$  und  $\nabla_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \circ (j \otimes j)$  über  $j$  faktorisieren. Der Nachweis erfolgt hierbei wiederum über die zugehörigen adjungierten Gleichungen. Dazu werden  $\vartheta := \vartheta_{A,A}$ ,  $\epsilon := \epsilon_A(\text{end}(A))$  und  $\Delta := \Delta_{\mathcal{T}\text{end}(A)}$  als Abkürzungen verwendet. Dann gilt die erste Gleichung wegen

$$\begin{aligned} \varphi \circ (\epsilon \eta_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{A \otimes A}) &\stackrel{(1)}{=} \varphi \circ (\eta_{\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{A \otimes A}) = \vartheta \circ (\eta_{\text{end}(A)} \otimes \nabla_A) \stackrel{(2)}{=} \nabla_A \\ &\stackrel{(3)}{=} \nabla_A \circ (\vartheta \otimes \vartheta) \circ (\eta_{\text{end}(A)} \otimes \text{id}_A \otimes \eta_{\text{end}(A)} \otimes \text{id}_A) \circ (\text{id}_I \otimes \tau_{I,A} \text{id}_A) \\ &= \nabla_A \circ (\vartheta \otimes \vartheta) \circ (\text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \tau_{\text{end}(A),A} \otimes \text{id}_A) \circ (\eta_{\text{end}(A)} \otimes \eta_{\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \\ &\stackrel{(4)}{=} \nabla_A \circ (\vartheta \otimes \vartheta) \circ (\text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \tau_{\text{end}(A),A} \otimes \text{id}_A) \circ (\epsilon \otimes \epsilon \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \\ &\quad \circ (\Delta \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \circ (\eta_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \\ &= \gamma \circ (\epsilon \otimes \epsilon \otimes \text{id}_{A \otimes A})(\Delta \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \circ (\eta_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{A \otimes A}). \end{aligned}$$

Hierbei geht ein, dass  $\epsilon$  und  $\Delta$  Morphismen von Algebren sind [1,4] sowie durch  $\vartheta$  eine Operation gegeben ist [2,3]. Dass die zweite Gleichung erfüllt ist, zeigt

$$\begin{aligned} &\varphi \circ (\epsilon \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \circ (\nabla_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \circ (j \otimes j \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \\ &\stackrel{(1)}{=} \vartheta \circ (\nabla_{\text{end}(A)} \otimes \nabla_A) \circ (\epsilon j \otimes \epsilon j \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \stackrel{(2)}{=} \vartheta \circ (\text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \vartheta) \circ (\epsilon j \otimes \epsilon j \otimes \nabla_A) \\ &\stackrel{(3)}{=} \vartheta \circ (\epsilon j \otimes \nabla_A) \circ (\text{id}_C \otimes \vartheta \otimes \vartheta) \circ (\text{id}_C \otimes \text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \tau_{\text{end}(A),A} \otimes \text{id}_A) \\ &\quad \circ (\text{id}_C \otimes \epsilon \otimes \epsilon \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \circ (\text{id}_C \otimes \Delta j \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \\ &\stackrel{(4)}{=} \nabla_A \circ (\vartheta \otimes \vartheta) \circ (\text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \tau_{\text{end}(A),A} \otimes \text{id}_A) \circ (\text{id}_{\text{end}(A) \otimes \text{end}(A)} \otimes \vartheta \otimes \vartheta) \\ &\quad \circ (\text{id}_{\text{end}(A) \otimes \text{end}(A) \otimes \text{end}(A)} \otimes \tau_{\text{end}(A),A} \otimes \text{id}_A) \circ (\epsilon \otimes \epsilon \otimes \epsilon \otimes \epsilon \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \\ &\quad \circ (\Delta j \otimes \Delta j \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \\ &\stackrel{(5)}{=} \nabla_A \circ (\vartheta \otimes \vartheta) \circ (\text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \tau_{\text{end}(A),A} \otimes \text{id}_A) \circ (\nabla_{\text{end}(A)} \otimes \nabla_{\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \\ &\quad \circ (\text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \tau_{\text{end}(A),\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{\text{end}(A) \otimes A \otimes A}) \circ (\epsilon \otimes \epsilon \otimes \epsilon \otimes \epsilon \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \\ &\quad \circ (\Delta j \otimes \Delta j \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \\ &\stackrel{(6)}{=} \nabla_A \circ (\vartheta \otimes \vartheta) \circ (\text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \tau_{\text{end}(A),A} \otimes \text{id}_A) \circ (\epsilon \otimes \epsilon \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \\ &\quad \circ (\nabla_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \otimes \nabla_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \\ &\quad \circ (\text{id}_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \otimes \tau_{\mathcal{T}\text{end}(A),\mathcal{T}\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{\mathcal{T}\text{end}(A) \otimes A \otimes A}) \circ (\Delta j \otimes \Delta j \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \\ &\stackrel{(7)}{=} \nabla_A \circ (\vartheta \otimes \vartheta) \circ (\text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \tau_{\text{end}(A),A} \otimes \text{id}_A) \circ (\epsilon \otimes \epsilon \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \circ (\Delta \circ \text{id}_{A \otimes A}) \\ &\quad \circ (\nabla_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \circ (j \otimes j \otimes \text{id}_{A \otimes A}). \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, dass  $\epsilon$  ein Algebrenmorphismus [1,6] und  $\vartheta$  eine Operation ist [2,5]. Da  $j$  ein Differenzkern von  $\varrho$  und  $\sigma$  ist, stimmt  $\vartheta \circ (\epsilon j \otimes \nabla_A)$  mit

$$\nabla_A \circ (\vartheta \otimes \vartheta) \circ (\text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \tau_{\text{end}(A),A} \otimes \text{id}_A) \circ (\epsilon \otimes \epsilon \otimes \text{id}_{A \otimes A}) \circ (\Delta j \otimes \text{id}_{A \otimes A})$$

überein. Dies geht bei den Umformungen [3,4] ein. Schließlich wird noch die Natürlichkeit von  $\tau$  [5,6] und die Verträglichkeit zwischen Multiplikation und Komultiplikation der Hopfalgebra  $\mathcal{T}\text{end}(A)$  benutzt [7].  $\square$

**Satz 1.6.4.**  $\text{Der}(A)$  ist eine Lie-Unteralgebra von  $\text{end}(A)^-$ .

*Beweis.* Es ist zu zeigen, dass  $\epsilon_A(\text{end}(A)) \circ \theta_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \circ \mathcal{L}(i) : \mathcal{L}(\text{Der}(A)) \rightarrow \text{end}(A)$  über  $i : \text{Der}(A) \rightarrow \text{end}(A)$  faktorisiert. Dazu wird

$$\tilde{\varphi} \circ \epsilon_A(\text{end}(A)) \circ \theta_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \circ \mathcal{L}(i) = \tilde{\psi} \circ \epsilon_A(\text{end}(A)) \circ \theta_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \circ \mathcal{L}(i)$$

bewiesen.

Hierfür wird zunächst  $\varrho \circ \mathcal{T}(i) = \sigma \circ \mathcal{T}(i)$  gezeigt, wobei  $\varrho$  und  $\sigma$  die Morphismen aus Lemma 1.6.3 sind. Da der Differenzkern von  $\varrho$  und  $\sigma$  eine Unteralgebra von  $\mathcal{T}\text{end}(A)$  ist, genügt es,  $\varrho \circ \eta_A(\text{end}(A)) \circ i = \sigma \circ \eta_A(\text{end}(A)) \circ i$  zu zeigen. Diese Gleichung gilt aber, denn es ist

$$\begin{aligned} \varrho \circ \eta_A(\text{end}(A)) \circ i &= \tilde{\varphi} \circ \epsilon_A(\text{end}(A)) \circ \eta_A(\text{end}(A)) \circ i = \tilde{\varphi} \circ i = \tilde{\psi} \circ i \\ &= \tilde{\gamma} \circ (\text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \eta_{\text{end}(A)} + \eta_{\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{\text{end}(A)}) \circ i \\ &= \tilde{\gamma} \circ [\text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \eta_{\text{end}(A)} + \eta_{\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{\text{end}(A)}] \circ \epsilon_A(\text{end}(A)) \circ \eta_A(\text{end}(A)) \circ i \\ &= \tilde{\gamma} \circ [\epsilon_A(\text{end}(A)) \otimes \epsilon_A(\text{end}(A))] \\ &\quad \circ [\text{id}_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \otimes \eta_{\mathcal{T}\text{end}(A)} + \eta_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{\mathcal{T}\text{end}(A)}] \circ \eta_A(\text{end}(A)) \circ i \\ &= \tilde{\gamma} \circ [\epsilon_A(\text{end}(A)) \otimes \epsilon_A(\text{end}(A))] \circ \Delta_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \circ \eta_A(\text{end}(A)) \circ i \\ &= \sigma \circ \eta_A(\text{end}(A)) \circ i. \end{aligned}$$

Nun zeigt

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} \circ \epsilon_A(\text{end}(A)) \circ \theta_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \circ \mathcal{L}(i) &= \varrho \circ \mathcal{T}(i) \circ \theta_{\mathcal{T}\text{Der}(A)} \\ &= \sigma \circ \mathcal{T}(i) \circ \theta_{\mathcal{T}\text{Der}(A)} = \sigma \circ \theta_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \circ \mathcal{L}(i) \\ &= \tilde{\gamma} \circ [\epsilon_A(\text{end}(A)) \otimes \epsilon_A(\text{end}(A))] \circ \Delta_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \circ \theta_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \circ \mathcal{L}(i) \\ &= \tilde{\gamma} \circ [\epsilon_A(\text{end}(A)) \otimes \epsilon_A(\text{end}(A))] \\ &\quad \circ [\text{id}_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \otimes \eta_{\mathcal{T}\text{end}(A)} + \eta_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{\mathcal{T}\text{end}(A)}] \circ \theta_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \circ \mathcal{L}(i) \\ &= \tilde{\gamma} \circ [\text{id}_{\text{end}(A)} \otimes \eta_{\text{end}(A)} + \eta_{\text{end}(A)} \otimes \text{id}_{\text{end}(A)}] \circ \epsilon_A(\text{end}(A)) \circ \theta_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \circ \mathcal{L}(i) \\ &= \tilde{\psi} \circ \epsilon_A(\text{end}(A)) \circ \theta_{\mathcal{T}\text{end}(A)} \circ \mathcal{L}(i), \end{aligned}$$

dass die eigentliche Gleichung erfüllt ist.  $\square$

## Kapitel 2

# Operadenbeschreibung

In diesem Kapitel sollen Lie-Algebren als Algebren über einer Operade dargestellt werden. Dies ist für Lie-Algebren in der Kategorie der Yetter-Drinfeld-Moduln über einer endlichen abelschen Gruppe möglich. Dabei werden allerdings Operaden in gezopferten monoidalen Kategorien benötigt. Diese verallgemeinern Operaden in symmetrischen Kategorien. Die Definition von gezopferten Operaden und ihrer Algebren stellt den Großteil dieses Kapitels dar.

Nachdem einige Begriffe und Hilfsaussagen zusammengestellt worden sind, werden im zweiten Abschnitt Quotienten der Zopfgruppen betrachtet, die bei der Definition des Operadenbegriffs verwendet werden. Dafür müssen diese Quotienten auf bestimmte Art und Weise miteinander verträglich sein. Der Zweck dieser Quotienten besteht darin, dass die assoziative Operade so definiert werden kann, dass sie einerseits durch Erzeugende und Relationen wie im klassischen Fall beschrieben werden kann und dass sie andererseits die Lie-Operade als Unteroperade enthält.

Im dritten Abschnitt werden gezopferte Operaden eingeführt. Für symmetrische Operaden existiert neben der in der Einleitung skizzierten Definition eine äquivalente Beschreibungsmöglichkeit. Diese Operaden können als Monoide in einer monoidalen Kategorie aufgefasst werden. Hierfür sei auf [GJ94], [SO99] und [KaM01] verwiesen. Während die erste Variante für konkrete Beispiele gut geeignet ist, ist die zweite Variante bei theoretischen Betrachtungen vorteilhaft. Hier werden für die gezopferten Operaden beide Definitionen angegeben, wobei der Schwerpunkt zunächst auf der Definition als Monoid in einer geeigneten monoidalen Kategorie liegt. Als Beispiel für eine gezopferte Operade wird die assoziative Operade betrachtet.

Der vierte Abschnitt behandelt Algebren über Operaden sowie die einer Operade zugeordnete Monade. Diese Begriffe sind dabei so gewählt, dass Algebren über einer Operade und ihrer zugehörigen Monade übereinstimmen. Die zur assoziativen Operade gehörige Monade ist dabei zur Monade  $\mathbf{A}$  aus Abschnitt 1.2 isomorph. Existiert ferner zu jedem Objekt  $V$  aus der Grundkategorie  $\mathcal{C}$  eine Endomorphismenoperade  $\mathbf{End}(V)$ , so entsprechen für jede Operade  $\mathfrak{D}$  die  $\mathfrak{D}$ -Algebrenstrukturen auf  $V$  den Operadenmorphisms  $\mathfrak{D} \rightarrow \mathbf{End}(V)$ .

Schließlich wird für die Kategorie der Yetter-Drinfeld-Moduln über einer endli-

chen abelschen Gruppe die Lie-Operade so als Unteroperade der assoziativen Operade definiert, dass die zugehörige Monade zur Monade  $L$  aus Abschnitt 1.4 isomorph ist.

Sofern nicht explizit etwas anderes gesagt wird, besitze die Grundkategorie  $\mathcal{C}$  in diesem Kapitel dieselben Eigenschaften wie im ersten Kapitel, d.h.,  $\mathcal{C}$  ist eine abelsche, gezopft monoidale und kovollständige Kategorie, für die der Tensorfunktoren in jedem Argument additiv und exakt ist und Kolimites erhält. Zudem wird angenommen, dass  $\mathcal{C}$  strikt ist.

## 2.1 Präliminarien

Bei der Definition von Operaden über der Kategorie  $\mathcal{C}$  können nicht beliebige Objekte aus  $\mathcal{C}$  zugelassen werden. Vielmehr wird eine volle Unterkategorie  $\mathcal{C}_s$  von  $\mathcal{C}$  verwendet. Diese enthalte genau diejenigen Objekte  $V$  aus  $\mathcal{C}$ , die  $\tau_{W,V}^{\mathcal{C}} \circ \tau_{V,W}^{\mathcal{C}} = \text{id}_{V \otimes W}$  für alle Objekte  $W$  erfüllen. Dann übertragen sich alle oben aufgeführten Eigenschaften von  $\mathcal{C}$  auf die Kategorie  $\mathcal{C}_s$ . Dabei ist  $\mathcal{C}_s$  sogar symmetrisch.

Für diese Arbeit stellt die Kategorie  $\mathcal{YD}_K^K$  der (rechtsseitigen) Yetter-Drinfeld-Moduln über einer Hopfalgebra  $K$  das wichtigste Beispiel der Grundkategorie  $\mathcal{C}$  dar. Die linksseitige Version dieser Kategorie wurde in [Yet90, Definition 3.6] eingeführt.

**Definition 2.1.1.** Ein (rechtsseitiger) Yetter-Drinfeld-Modul über einer Bialgebra  $K$  ist ein Vektorraum  $V$ , der sowohl ein  $K$ -Rechtsmodul als auch ein  $K$ -Rechtskomodul ist, so dass für alle  $h \in K$  und  $v \in V$

$$v_{[0]} \cdot h_{(1)} \otimes v_{[1]} h_{(2)} = (v \cdot h_{(2)})_{[0]} \otimes h_{(1)} (v \cdot h_{(2)})_{[1]} \quad (2.1)$$

gilt. Hierbei wurden für die Komultiplikation von  $K$  und die Komodulstruktur von  $V$  die Schreibweisen  $\Delta_K : K \rightarrow K \otimes K$ ,  $h \mapsto h_{(1)} \otimes h_{(2)}$  bzw.  $\delta : V \rightarrow V \otimes K$ ,  $v \mapsto v_{[0]} \otimes v_{[1]}$  verwendet. Dabei handelt es sich um eine Variante von Sweedlers Sigma-Notation. Die Morphismen in  $\mathcal{YD}_K^K$  sind die  $K$ -linearen und  $K$ -kolinearen Abbildungen.

**Satz 2.1.2.** Sei  $K$  eine Hopfalgebra mit bijektiver Antipode. Dann ist durch

$$\tau_{V,W} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V, v \otimes w \mapsto w_{[0]} \otimes v \cdot w_{[1]} \quad (2.2)$$

für Objekte  $V$  und  $W$  aus  $\mathcal{YD}_K^K$  eine Zopfung auf  $\mathcal{YD}_K^K$  definiert.

*Beweis.* Analog zu [Yet90, Theorem 5.2 und 7.2]. □

Damit die Kategorie  $\mathcal{YD}_K^K$  gezopft ist, wird im Folgenden stets angenommen, dass  $K$  eine Hopfalgebra mit bijektiver Antipode ist. Mit ähnlichen Methoden wie im Beweis des Theorems aus [Par01] kann nun  $\mathcal{C}_s$  für  $\mathcal{C} = \mathcal{YD}_K^K$  bestimmt werden.

**Lemma 2.1.3.** Für ein Objekt  $V$  aus  $\mathcal{YD}_K^K$  gilt genau dann  $\tau_{W,V} \circ \tau_{V,W} = \text{id}_{V \otimes W}$  für alle  $W$  aus  $\mathcal{YD}_K^K$ , wenn  $V$  die triviale Modul- und Komodulstruktur besitzt.

*Beweis.* Zunächst wird angenommen, dass  $\tau_{W,V} \circ \tau_{V,W} = \text{id}_{V \otimes W}$  für alle  $W$  aus  $\mathcal{YD}_K^K$  gilt. Dies wird auf  $W = K$  angewendet, wobei  $K$  bezüglich der regulären Operation ( $x \cdot h := xh$ ) und der koadjungierten Kooperation ( $\delta(h) := h_{(2)} \otimes S(h_{(1)})h_{(3)}$ ) ein Yetter-Drinfeld-Modul ist. Für  $v \otimes 1 \in V \otimes K$  gilt dann

$$v \otimes 1 = \tau^2(v \otimes 1) = \tau(1 \otimes v) = v_{[0]} \otimes v_{[1]}.$$

Somit ist die Komodulstruktur von  $V$  trivial.

Die Hopfalgebra  $K$  ist auch mit der adjungierten Operation ( $x \cdot h := S(h_{(1)})xh_{(2)}$ ) und der koregulären Kooperation ( $\delta(h) = h_{(1)} \otimes h_{(2)}$ ) ein Yetter-Drinfeld-Modul über sich selbst. Somit gilt für  $v \otimes h \in V \otimes K$

$$\begin{aligned} v \otimes h &= \tau^2(v \otimes h) = \tau(h_{(1)} \otimes v \cdot h_{(2)}) \\ &= (v \cdot h_{(2)})_{[0]} \otimes S((v \cdot h_{(2)})_{[1]})h_{(1)}(v \cdot h_{(2)})_{[2]}. \end{aligned}$$

Wendet man hierauf  $\text{id} \otimes \epsilon$  an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} v\epsilon(h) &= (v \cdot h_{(2)})_{[0]} \epsilon(S((v \cdot h_{(2)})_{[1]})) \epsilon(h_{(1)}) \epsilon((v \cdot h_{(2)})_{[2]}) \\ &= (v \cdot h)_{[0]} \epsilon((v \cdot h)_{[1]}) \epsilon((v \cdot h)_{[2]}) = v \cdot h, \end{aligned}$$

d.h., die Modulstruktur von  $V$  ist trivial.

Sei nun umgekehrt die Modul- und Komodulstruktur von  $V$  trivial. Ist dann  $W$  ein beliebiger Yetter-Drinfeld-Modul, so gilt

$$\begin{aligned} \tau^2(v \otimes w) &= \tau(w_{[0]} \otimes v \cdot w_{[1]}) = \tau(w_{[0]} \otimes v\epsilon(w_{[1]})) \\ &= \tau(w \otimes v) = v \otimes w \cdot 1 = v \otimes w \end{aligned}$$

für alle  $v \in V$  und  $w \in W$ . Damit ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

Zur Durchführung von universellen Rechnungen mit der Zopfung wird die Zopf-kategorie verwendet, die die freie gezopfte strikt monoidale Kategorie über einem Erzeuger ist. Diese Kategorie ist aus den Zopfgruppen aufgebaut.

Die Zopfgruppen und die symmetrischen Gruppen seien mit  $B_n$  bzw.  $S_n$  bezeichnet. Hierbei sind  $B_0$ ,  $B_1$ ,  $S_0$  und  $S_1$  gleich der trivialen Gruppe. Für  $n \geq 2$  wird  $B_n$  von den elementaren Zöpfen  $b_1, \dots, b_{n-1}$  erzeugt mit den Relationen

$$b_i b_j b_i = b_j b_i b_j, \quad \text{falls } |i - j| = 1, \quad (2.3)$$

$$b_i b_j = b_j b_i, \quad \text{falls } |i - j| \geq 2, \quad (2.4)$$

und  $S_n$  wird von den Transpositionen  $t_i := (i \ i + 1)$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$  erzeugt mit den Relationen

$$t_i t_j t_i = t_j t_i t_j, \quad \text{falls } |i - j| = 1, \quad (2.5)$$

$$t_i t_j = t_j t_i, \quad \text{falls } |i - j| \geq 2, \quad (2.6)$$

$$t_i^2 = e \quad \text{für } 1 \leq i \leq n - 1. \quad (2.7)$$

Hierbei bezeichnet  $e$  oder auch  $e_n$  das neutrale Element von  $B_n$  und  $S_n$ .

Sei  $\pi = \pi_n : B_n \rightarrow S_n$  der kanonische Epimorphismus mit  $b_i \mapsto t_i$  für  $i = 1, \dots, n-1$ . Wie üblich wird auch kurz  $\bar{b}$  für das Bild von  $b \in B_n$  unter  $\pi_n$  geschrieben. Der Kern von  $\pi_n$  heißt reine Zopfgruppe und wird mit  $P_n$  bezeichnet.

Im Weiteren wird ein Schnitt von  $\pi_n$  benötigt. Dazu sei zunächst für jede Permutation  $s \in S_n$  die Menge der Fehlstände von  $s$  mit

$$F(s) := F_n(s) := \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n, s(i) > s(j)\}$$

bezeichnet. Dann heißt  $\ell(s) := |F(s)|$  die Länge von  $s$ . Dieser Wert ist gleich der minimalen Anzahl an Faktoren, die benötigt werden, um  $s$  als Produkt in den Erzeugern  $t_1, \dots, t_{n-1}$  zu schreiben.

Die Längen von  $s$  und  $t_i s$  unterscheiden sich um genau 1: Ist  $s^{-1}(i) < s^{-1}(i+1)$ , so gelten  $F(t_i s) = F(s) \dot{\cup} \{(s^{-1}(i), s^{-1}(i+1))\}$  und  $\ell(t_i s) = \ell(s) + 1$ . Andernfalls ist  $F(s) = F(t_i s) \dot{\cup} \{(s^{-1}(i+1), s^{-1}(i))\}$  und  $\ell(t_i s) = \ell(s) - 1$ .

**Lemma 2.1.4** ([CR87, 64.20]). *Es gibt genau einen Schnitt  $L = L_n : S_n \rightarrow B_n$  von  $\pi_n : B_n \rightarrow S_n$  mit  $L(e) = e$ ,  $L(t_i) = b_i$  für  $i = 1, \dots, n-1$  und  $L(s_1 s_2) = L(s_1)L(s_2)$  für  $s_1, s_2 \in S_n$  mit  $\ell(s_1 s_2) = \ell(s_1) + \ell(s_2)$ .  $\square$*

**Bemerkung 2.1.5.** Ausgehend von der Zopfgruppe  $B_n$  bzw. der zugehörigen Gruppenalgebra werden im Folgenden die verschiedensten Gruppen bzw. Algebren konstruiert. Diese ergeben sich durch sukzessive Restklassenbildung oder die Bildung eines Ringes von Brüchen. Die dabei auftretenden Homomorphismen vom Ausgangsobjekt in das neu konstruierte Objekt und ihre Verkettungen werden kurz als kanonische Homomorphismen bezeichnet. Des Weiteren werden die Bilder von Elementen aus  $B_n$  oder  $\mathbb{k}B_n$  unter diesen kanonischen Homomorphismen genauso wie in  $B_n$  bzw.  $\mathbb{k}B_n$  bezeichnet, falls klar ist, in welcher Gruppe bzw. Algebra gerechnet wird.

Die Zopfkatgorie  $\mathcal{B}$  ist nun eine gezopfte strikt monoidale Kategorie. Die Objekte von  $\mathcal{B}$  sind die nicht negativen ganzen Zahlen, und die Morphismenmengen sind durch

$$\mathcal{B}(m, n) := \begin{cases} B_n, & \text{falls } m = n, \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Hierbei werden Morphismen aus  $\mathcal{B}(n, n)$  entsprechend der Multiplikation von  $B_n$  verkettet. Das Tensorprodukt ist für Objekte durch die Addition definiert, und auf Morphismen ist es durch die Gruppenmorphisimen  $\otimes : B_m \times B_n \rightarrow B_{m+n}$  mit  $b_i \otimes e_n := b_i$  und  $e_m \otimes b_j := b_{m+j}$  gegeben.

Für  $i \leq j$  seien  $d_{ij} := b_{j-1} \cdots b_i$  und  $u_{ij} := b_i \cdots b_{j-1}$ . Dann ist die Zopfung von  $\mathcal{B}$  durch die Morphismen

$$\tau_{m,n}^{\mathcal{B}} := d_{1,n+1} d_{2,n+2} \cdots d_{m,m+n} = u_{n,n+m} u_{n-1,n+m-1} \cdots u_{1,m+1}$$

definiert. Die Kategorie  $\mathcal{B}$  besitzt die folgende universelle Eigenschaft.

**Satz 2.1.6** ([Kas95, Korollar XIII.3.8]). *Sei  $\mathcal{D}$  eine gezopfte strikt monoidale Kategorie. Dann gibt es zu jedem Objekt  $V$  aus  $\mathcal{D}$  genau einen gezopfsten strikten Tensorfunktorkomplex  $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$  mit  $\varphi(1) = V$ .  $\square$*

Analog kann die symmetrische Kategorie  $\mathcal{S}$  definiert werden, falls anstelle der Zopfgruppen die symmetrischen Gruppen verwendet werden.

Zur Handhabung von Morphismen, die aus der Zopfung durch Tensorproduktbildung und Verkettung aufgebaut sind, wird der Formalismus der verallgemeinerten Funktorkategorien benutzt. Dazu sei  $\mathcal{D}$  eine gezopfte strikt monoidale Kategorie. Mit  $\mathcal{D}^n$  sei das kartesische Produkt von  $n$  Kopien der Kategorie  $\mathcal{D}$  bezeichnet. Insbesondere besitzt also  $\mathcal{D}^0$  genau ein Objekt und einen Morphismus, d.h.,  $\mathcal{D}^0$  ist isomorph zum Einsobjekt bezüglich des kartesischen Produktes. Der Einfachheit halber wird  $\mathcal{D}^m \times \mathcal{D}^n$  mit  $\mathcal{D}^{m+n}$  identifiziert.

Für jede Permutation  $s \in S_n$  sei  $\mathcal{D}^s : \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}^n$  derjenige Funktor, der die Komponenten von  $\mathcal{D}^n$  entsprechend der Permutation  $s$  vertauscht, d.h., für Objekte  $V_1, \dots, V_n$  aus  $\mathcal{D}$  gilt  $\mathcal{D}^s(V_1, \dots, V_n) = (V_{s^{-1}(1)}, \dots, V_{s^{-1}(n)})$ . Insbesondere ist dann  $\mathcal{D}^{e_n} = \text{id}_{\mathcal{D}^n}$ , und für  $s, t \in S_n$  gilt  $\mathcal{D}^{st} = \mathcal{D}^s \circ \mathcal{D}^t$ . Schließlich sei mit  $\otimes_n : \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$  die Tensorproduktbildung von  $n$  Faktoren bezeichnet.

Für die verallgemeinerte Funktorkategorie der Kategorien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{D}$  wird  $\{\mathcal{A}, \mathcal{D}\}$  geschrieben. Hier wird eine Variante von [Kel72, S. 74] verwendet.

1. Die Objekte von  $\{\mathcal{A}, \mathcal{D}\}$  sind die Paare  $(n, \mathcal{T})$  bestehend aus einer natürlichen Zahl  $n$  und einem Funktor  $\mathcal{T} : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{D}$ .
2. Morphismen  $(m, \mathcal{S}) \rightarrow (n, \mathcal{T})$  existieren höchstens im Fall  $m = n$ . Ist diese Gleichung erfüllt, so ist ein solcher Morphismus ein Paar  $(s, \varphi)$  aus einer Permutation  $s \in S_n$  und einer natürlichen Transformation  $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{A}^s$ .
3. Die Verkettung von  $(t, \psi) : (n, \mathcal{S}) \rightarrow (n, \mathcal{T})$  und  $(s, \varphi) : (n, \mathcal{R}) \rightarrow (n, \mathcal{S})$  ist durch  $(t, \psi)(s, \varphi) := (ts, (\psi\mathcal{A}^s)\varphi)$  erklärt.
4. Der identische Morphismus des Objekts  $(n, \mathcal{T})$  ist  $(e_n, \text{id}_{\mathcal{T}})$ .

Ist die Kategorie  $\mathcal{D}$  zusätzlich strikt monoidal und gezopft, so übertragen sich diese Strukturen auf  $\{\mathcal{A}, \mathcal{D}\}$ . Dabei ist das Tensorprodukt von Objekten und Morphismen durch

$$(m, \mathcal{S}) \otimes (n, \mathcal{T}) := (m + n, \otimes(\mathcal{S} \times \mathcal{T}))$$

bzw.

$$(s, \varphi) \otimes (t, \psi) := (s \otimes t, \otimes(\varphi \times \psi))$$

erklärt. Das Einsobjekt dieses Tensorproduktes ist  $(0, \mathcal{J})$ . Hierbei ist der Funktor  $\mathcal{J} : \mathcal{A}^0 \rightarrow \mathcal{D}$  dadurch festgelegt, dass er das einzige Objekt von  $\mathcal{A}^0$  auf das Einsobjekt von  $\mathcal{D}$  abbildet. Schließlich ist die Zopfung durch die Morphismen

$$\tau_{(m, \mathcal{S}), (n, \mathcal{T})}^{\{\mathcal{A}, \mathcal{D}\}} := (\tau_{m, n}^{\mathcal{S}}, \tau^{\mathcal{D}}(\mathcal{S} \times \mathcal{T})) : (m, \mathcal{S}) \otimes (n, \mathcal{T}) \rightarrow (n, \mathcal{T}) \otimes (m, \mathcal{S})$$

gegeben. Die Strukturdaten sind insbesondere so gewählt, dass die Projektion auf die erste Komponente einen gezopfsten strikten Tensorfunktorkomplex  $\mathcal{P}_1^{\{\mathcal{A}, \mathcal{D}\}} : \{\mathcal{A}, \mathcal{D}\} \rightarrow \mathcal{S}$  liefert.

Aufgrund der universellen Eigenschaft der Zopfkatgorie existiert nun genau ein gezopfster strikter Tensorfunktorkomplex  $\varphi^{\mathcal{D}} : \mathcal{B} \rightarrow \{\mathcal{D}, \mathcal{D}\}$  mit  $\varphi^{\mathcal{D}}(1) := (1, \text{id}_{\mathcal{D}})$ . Für diesen Funktorkomplex gilt  $\varphi^{\mathcal{D}}(n) = (1, \text{id}_{\mathcal{D}})^{\otimes n} = (n, \otimes_n)$ . Da  $\varphi^{\mathcal{D}}$  gezopfster ist, gilt zudem

$$\varphi^{\mathcal{D}}(\tau_{m,n}^{\mathcal{B}}) = \tau_{\varphi^{\mathcal{D}}(m), \varphi^{\mathcal{D}}(n)}^{\{\mathcal{D}, \mathcal{D}\}}.$$

Damit ist insbesondere das Bild des Morphismus  $b_1 = \tau_{1,1}^{\mathcal{B}} \in B_2$  unter  $\varphi^{\mathcal{D}}$  festgelegt. Hieraus lassen sich die Bilder aller Morphismen bestimmen, da  $\varphi^{\mathcal{D}}$  ein strikter Tensorfunktorkomplex ist.

Die Verkettung  $\mathcal{P}_1^{\{\mathcal{D}, \mathcal{D}\}} \circ \varphi^{\mathcal{D}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$  ist ein gezopfster strikter Tensorfunktorkomplex mit  $(\mathcal{P}_1^{\{\mathcal{D}, \mathcal{D}\}} \circ \varphi^{\mathcal{D}})(1) = 1$ . Somit handelt es sich hierbei um den kanonischen Funktorkomplex von der Zopfkatgorie in die symmetrische Katgorie. Damit sind die ersten Komponenten der Bilder unter  $\varphi^{\mathcal{D}}$  bekannt.

Für  $b \in B_n$  sei die zweite Komponente von  $\varphi^{\mathcal{D}}(b)$  mit  $\varphi_2^{\mathcal{D}}(b)$  bezeichnet. Dies ist eine natürliche Transformation  $\otimes_n \rightarrow \otimes_n \mathcal{D}^{\bar{b}}$ . Für Objekte  $V_1, \dots, V_m, W_1, \dots, W_n$  gilt dann  $\varphi_2^{\mathcal{D}}(\tau_{m,n}^{\mathcal{B}})(V_1, \dots, V_m, W_1, \dots, W_n) = \tau_{V_1 \otimes \dots \otimes V_m, W_1 \otimes \dots \otimes W_n}^{\mathcal{D}}$ . Speziell ist also  $\varphi_2^{\mathcal{D}}(b_1)(V, W) = \tau_{V, W}^{\mathcal{D}}$ , woraus

$$\varphi_2^{\mathcal{D}}(b_i)(V_1, \dots, V_m) = \text{id}_{V_1} \otimes \dots \otimes \text{id}_{V_{i-1}} \otimes \tau_{V_i, V_{i+1}}^{\mathcal{D}} \otimes \text{id}_{V_{i+2}} \otimes \dots \otimes \text{id}_{V_m}$$

folgt. Des Weiteren ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi_2^{\mathcal{D}}(b_1)(V_1 \otimes \dots \otimes V_m, W_1 \otimes \dots \otimes W_n) &= \tau_{V_1 \otimes \dots \otimes V_m, W_1 \otimes \dots \otimes W_n}^{\mathcal{D}} \\ &= \varphi_2^{\mathcal{D}}(\tau_{m,n}^{\mathcal{B}})(V_1, \dots, V_m, W_1, \dots, W_n) \\ &= \varphi_2^{\mathcal{D}}(\varphi_2^{\mathcal{B}}(b_1)(m, n))(V_1, \dots, V_m, W_1, \dots, W_n). \end{aligned}$$

Allgemeiner gilt für  $m, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ ,  $b \in B_m$  und Objekte  $V_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n_i$  aus  $\mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \varphi_2^{\mathcal{D}}(b)(V_{11} \otimes \dots \otimes V_{1n_1}, \dots, V_{m1} \otimes \dots \otimes V_{mn_m}) \\ = \varphi_2^{\mathcal{D}}(\varphi_2^{\mathcal{B}}(b)(n_1, \dots, n_m))(V_{11}, \dots, V_{mn_m}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Abschließend soll noch kurz auf Modulkategorien und Monoidalgebren eingegangen werden. Für Algebren  $A$  und  $B$  in  $\mathcal{C}$  seien mit  ${}_A\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}_B$  und  ${}_A\mathcal{C}_B$  die Kategorien der  $A$ -Linksmoduln, der  $B$ -Rechtsmoduln bzw. der  $(A, B)$ -Bimoduln in  $\mathcal{C}$  bezeichnet. Für die Strukturabbildung eines  $A$ -Links- bzw. eines  $B$ -Rechtsmoduls  $M$  wird die Notation  $\lambda_M = \lambda_M^A : A \otimes M \rightarrow M$  bzw.  $\rho_M = \rho_M^B : M \otimes B \rightarrow M$  verwendet.

Das Tensorprodukt von  $\mathcal{C}$  induziert nun zwei unterschiedliche „Tensorprodukte“ auf den Modulkategorien. Zum einen ist ein Bifunktorkomplex  $\otimes : {}_A\mathcal{C} \times {}_B\mathcal{C} \rightarrow {}_{A \otimes B}\mathcal{C}$  auf Objekten durch

$$\begin{aligned} ((M, \lambda_M, \rho_M), (N, \lambda_N, \rho_N)) &\mapsto (M \otimes N, (\lambda_M \otimes \lambda_N) \circ (\text{id}_A \otimes \tau_{B, M}^{\mathcal{C}} \otimes \text{id}_N), \\ &\quad (\rho_M \otimes \rho_N) \circ (\text{id}_M \otimes \tau_{N, C}^{\mathcal{C}} \otimes \text{id}_D)) \end{aligned}$$



erklärt. Andererseits ist ein Bifunktor

$$\otimes_B : {}_A\mathcal{C}_B \times {}_B\mathcal{C}_C \rightarrow {}_A\mathcal{C}_C$$

über die Wahl von Differenzkokerndiagrammen

$$M \otimes B \otimes N \begin{array}{c} \xrightarrow{\rho_M \otimes \text{id}_N} \\ \xrightarrow{\text{id}_M \otimes \lambda_N} \end{array} M \otimes N \xrightarrow{q_{M,N}} M \otimes_B N$$

definiert. Dabei ist die  $(A, C)$ -Bimodulstruktur von  $M \otimes_B N$  dadurch festgelegt, dass der Epimorphismus  $q_{M,N}$  ein Morphismus von Bimoduln ist. Ferner ist das Tensorprodukt der Morphismen  $f : M \rightarrow M'$  und  $g : N \rightarrow N'$  durch die Gleichung

$$q_{M',N'} \circ (f \otimes g) = (f \otimes_B g) \circ q_{M,N}$$

charakterisiert. Diese beiden Tensorprodukte sind jeweils bis auf Isomorphie assoziativ.

Für einen  $A$ -Linksmodul  $M$  induziert die Strukturabbildung  $\lambda_M : A \otimes M \rightarrow M$  einen Isomorphismus

$$\bar{\lambda}_M = \bar{\lambda}_M^A : A \otimes_A M \rightarrow M$$

von  $A$ -Linksmoduln, der natürlich in  $M$  ist. Dieser Isomorphismus ist durch die Gleichung  $\lambda_M = \bar{\lambda}_M \circ q_{A,M}$  festgelegt und besitzt  $q_{A,M} \circ (\eta_A \otimes \text{id}_M)$  als Umkehrabbildung.

Die beiden gerade beschriebenen Arten der Tensorproduktbildung sind bis auf Isomorphie miteinander vertauschbar. Um dies zu konkretisieren, sei für  $n \geq 1$  die Permutation  $s_n \in S_{2n}$  durch

$$s_n(k) := \begin{cases} 2k-1, & \text{falls } k \leq n, \\ 2(k-n), & \text{falls } k > n \end{cases}$$

definiert. Ferner sei  $s_0 := e_0 \in S_0$  gesetzt. Mit  $\bar{d}_{ij} = t_{j-1} \cdots t_i$  und  $\bar{u}_{ij} = t_i \cdots t_{j-1} = \bar{d}_{ij}^{-1}$  für  $i \leq j$  gilt dann  $s_n = (e_2 \otimes s_{n-1})\bar{u}_{2,n+1} = (s_{n-1} \otimes e_2)\bar{d}_{n,2n-1}$  für alle  $n \geq 1$ .

**Lemma 2.1.7.** *Seien  $A_i, B_i$  und  $C_i$  Algebren in  $\mathcal{C}$  sowie  $M_i \in {}_{A_i}\mathcal{C}_{B_i}$  und  $N_i \in {}_{B_i}\mathcal{C}_{C_i}$  Bimoduln für  $i = 1, \dots, n$ . Dann gibt es genau einen Morphismus*

$$(M_1 \otimes \cdots \otimes M_n) \otimes_{B_1 \otimes \cdots \otimes B_n} (N_1 \otimes \cdots \otimes N_n) \longrightarrow (M_1 \otimes_{B_1} N_1) \otimes \cdots \otimes (M_n \otimes_{B_n} N_n),$$

so dass

$$\begin{array}{ccc} M_1 \otimes \cdots \otimes M_n \otimes N_1 \otimes \cdots \otimes N_n & \xrightarrow{\varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_n))(M_1, \dots, M_n, N_1, \dots, N_n)} & M_1 \otimes N_1 \otimes \cdots \otimes M_n \otimes N_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ (M_1 \otimes \cdots \otimes M_n) \otimes_{B_1 \otimes \cdots \otimes B_n} (N_1 \otimes \cdots \otimes N_n) & \longrightarrow & (M_1 \otimes_{B_1} N_1) \otimes \cdots \otimes (M_n \otimes_{B_n} N_n) \end{array}$$

kommutiert. Dies ist ein Isomorphismus von  $(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n, C_1 \otimes \cdots \otimes C_n)$ -Bimoduln, der natürlich in den  $M_i$  und  $N_i$  ist.  $\square$

In der Kategorie  $\mathcal{C}$  lassen sich wie im klassischen Fall Monoidalgebren bilden. Diese Monoidalgebren werden von einem Tensorfunktork  $\text{Set} \rightarrow \mathcal{C}$  von der Kategorie der Mengen nach  $\mathcal{C}$  induziert. Dieser ist auf Objekten durch  $S \mapsto \coprod_{s \in S} I$  definiert.

Konkret ist für ein Monoid  $G$  in der Kategorie der Mengen die zugehörige Monoidalgebra in  $\mathcal{C}$  durch

$$IG = \left( \coprod_{g \in G} I, \nabla_{IG}, \eta_{IG} \right)$$

gegeben. Werden die Inklusionen in das Koprodukt mit  $\iota_g : I \rightarrow IG$  bezeichnet, so ist die Multiplikation von  $IG$  durch  $\nabla_{IG} \circ (\iota_g \otimes \iota_h) = \iota_{gh}$  charakterisiert. Ferner gilt für die Einheit  $\eta_{IG} = \iota_e$ , wobei  $e$  das neutrale Element von  $G$  ist.

Sind  $G_1$  und  $G_2$  Monoide in der Kategorie der Mengen, so existiert ein natürlicher Isomorphismus  $I(G_1 \times G_2) \cong IG_1 \otimes IG_2$ .

Für die Moduln über einer Monoidalgebra  $IG$  existiert ein äquivalentes Konzept. Anstelle von Moduln  $M$  und  $N$  mit Strukturabbildungen  $\lambda_M : IG \otimes M \rightarrow M$  bzw.  $\rho_N : N \otimes IG \rightarrow N$  können auch Darstellungen, d.h. Monoidhomomorphismen  $\tilde{\lambda}_M = \tilde{\lambda}_M^G : G \rightarrow \text{End}_{\mathcal{C}}(M)$  bzw.  $\tilde{\rho}_N = \tilde{\rho}_N^G : G^{\text{op}} \rightarrow \text{End}_{\mathcal{C}}(N)$  verwendet werden.

## 2.2 Zopfgruppensysteme

Zopfgruppensysteme lassen sich als Quotientenkategorien der Zopfkatgorie  $\mathcal{B}$  verstehen, auf die sich die monoidale Struktur von  $\mathcal{B}$  überträgt.

**Definition 2.2.1.** Eine Familie  $\mathcal{Z} = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Quotientengruppen  $Z_n = B_n/N_n$  der Zopfgruppen  $B_n$  heißt Zopfgruppensystem, falls  $N_n \subseteq P_n$  und  $N_m \otimes N_n \subseteq N_{m+n}$  für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  gelten. Ein Zopfgruppensystem  $\mathcal{Z} = (Z_n)$  heißt endlich, falls alle Gruppen  $Z_n$  endlich sind.

Die Bedingung  $N_n \subseteq P_n$  ist gleichbedeutend damit, dass  $\pi_n : B_n \rightarrow S_n$  über den kanonischen Epimorphismus  $q_n = q_n^{\mathcal{Z}} : B_n \rightarrow Z_n$  faktorisiert, d.h., es gibt genau einen Homomorphismus  $\pi_n^{\mathcal{Z}} : Z_n \rightarrow S_n$  mit  $\pi_n = \pi_n^{\mathcal{Z}} \circ q_n^{\mathcal{Z}}$ .

Des Weiteren ist  $N_m \otimes N_n \subseteq N_{m+n}$  äquivalent zur Existenz eines Gruppenhomomorphismus  $\otimes : Z_m \times Z_n \rightarrow Z_{m+n}$ , der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B_m \times B_n & \xrightarrow{\otimes} & B_{m+n} \\ q_m \times q_n \downarrow & & \downarrow q_{m+n} \\ Z_m \times Z_n & \xrightarrow{\otimes} & Z_{m+n} \end{array}$$

kommutativ macht.

Aus einem Zopfgruppensystem kann man wie vorher im Fall der Zopfgruppen eine gezopfte strikt monoidale Kategorie  $\mathcal{Z}$  konstruieren. Dann ist der Funktor  $\mathcal{Q}_{\mathcal{Z}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{Z}$ , der auf Objekten die Identität ist und auf Morphismenmengen durch

die kanonischen Morphismen  $q_n$  gegeben ist, ein gezopfter strikter Tensorfunktorkomplex. Im Weiteren wird ein Zopfgruppensystem mit der eben definierten Kategorie  $\mathcal{Z}$  identifiziert.

**Definition 2.2.2.** Sei  $\mathcal{Z} = (Z_n)$  ein Zopfgruppensystem.

1. Eine gezopfte strikt monoidale Kategorie  $\mathcal{D}$  faktorisiert über  $\mathcal{Z}$ , wenn der Funktor  $\varphi^{\mathcal{D}} : \mathcal{B} \rightarrow \{\mathcal{D}, \mathcal{D}\}$  über  $\mathcal{Q}_{\mathcal{Z}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{Z}$  faktorisiert, d.h. ein Funktor  $\overline{\varphi}^{\mathcal{D}} : \mathcal{Z} \rightarrow \{\mathcal{D}, \mathcal{D}\}$  mit  $\varphi^{\mathcal{D}} = \overline{\varphi}^{\mathcal{D}} \circ \mathcal{Q}_{\mathcal{Z}}$  existiert.
2.  $\mathcal{Z}$  heißt reflexiv, wenn  $\mathcal{Z}$  über sich selbst faktorisiert.

Die für diese Arbeit wichtigsten Beispiele von Zopfgruppensystemen sollen nun behandelt werden. Für  $m, n \in \mathbb{N}$  bezeichne  $P_{m,n}$  den von den Relationen

$$b_i^2 b_j^2 = b_j^2 b_i^2 \quad \text{für } 1 \leq i, j < n, \quad (2.9)$$

$$b_i^{2m} = e \quad \text{für } 1 \leq i < n \quad (2.10)$$

erzeugten Normalteiler von  $B_n$ . Damit sei  $B_{m,n} := B_n/P_{m,n}$  sowie  $\mathcal{B}_m := (B_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$ . Man beachte, dass im Fall  $m = 0$  die zweite Familie der obigen Relationen keine Bedingungen liefert. Mit  $q_{m,n} : B_n \rightarrow B_{m,n}$  sei der kanonische Epimorphismus bezeichnet.

Da die erzeugenden Elemente von  $P_{m,n}$  in der reinen Zopfgruppe enthalten sind, gilt  $P_{m,n} \trianglelefteq P_n$ . Deshalb faktorisiert  $\pi_n : B_n \rightarrow S_n$  über  $q_{m,n} : B_n \rightarrow B_{m,n}$ , d.h., es gibt genau einen Homomorphismus  $\pi_{m,n} : B_{m,n} \rightarrow S_n$  mit  $\pi_n = \pi_{m,n} \circ q_{m,n}$ . Der Kern von  $\pi_{m,n}$  ist gleich  $K_{m,n} := P_n/P_{m,n}$ .

Die Gruppe  $B_{m,n}$  ist dann isomorph zu einem verschränkten Produkt von  $K_{m,n}$  mit  $S_n$ . Bevor dieses verschränkte Produkt und der zugehörige Isomorphismus  $B_{m,n} \rightarrow S_n \#_{\sigma_{m,n}} K_{m,n}$  näher beschrieben werden, soll zum besseren Verständnis kurz die allgemeine Situation dargestellt werden. Vergleiche hierzu [Mon93, 7.1.6], wobei das verschränkte Produkt dort allerdings andersherum gebildet wird.

Sei also  $G$  eine Gruppe,  $N$  ein Normalteiler von  $G$ ,  $\overline{G} := G/N$  die zugehörige Faktorgruppe und  $\pi : G \rightarrow \overline{G}$  der kanonische Epimorphismus. Hierzu sei ein Schnitt  $\gamma : \overline{G} \rightarrow G$  von  $\pi$  gewählt, d.h., es gelte  $\pi \circ \gamma = \text{id}_{\overline{G}}$ . Der Einfachheit halber wird zudem angenommen, dass dieser Schnitt das neutrale Element erhält, d.h.  $\gamma(\bar{e}) = e$  erfüllt. Ferner sei  $\cdot : N \times \overline{G} \rightarrow N$  durch  $n \cdot \bar{x} := \gamma(\bar{x})^{-1} n \gamma(\bar{x})$  sowie der Kozykel  $\sigma : \overline{G} \times \overline{G} \rightarrow N$  durch  $\sigma(\bar{x}, \bar{y}) := \gamma(\bar{x}\bar{y})^{-1} \gamma(\bar{x}) \gamma(\bar{y})$  definiert. Dann stimmt das verschränkte Produkt  $\overline{G} \#_{\sigma} N$  von  $N$  mit  $\overline{G}$  als Menge mit  $\overline{G} \times N$  überein. Die Multiplikation ist durch

$$(\bar{x} \# m)(\bar{y} \# n) := \bar{x}\bar{y} \# \sigma(\bar{x}, \bar{y})(m \cdot \bar{y})n$$

definiert, und das neutrale Element ist durch  $\bar{e} \# e$  gegeben. Des Weiteren sind die Morphismen  $G \rightarrow \overline{G} \#_{\sigma} N$ ,  $x \mapsto \bar{x} \# \gamma(\bar{x})^{-1} x$  und  $\overline{G} \#_{\sigma} N \rightarrow G$ ,  $\bar{x} \# n \mapsto \gamma(\bar{x})n$  zueinander invers. Entsprechendes gilt auch für die zugehörigen Gruppenalgebren.

Nun soll zunächst die Gruppe  $K_{m,n}$  näher untersucht werden. Dazu werden die nachstehenden Resultate herangezogen.

**Lemma 2.2.3** ([Art47a, Formel 29]). Für  $1 \leq i < j$  sei

$$A_{ij} := b_{j-1} \cdots b_{i+1} b_i^2 b_{i+1}^{-1} \cdots b_{j-1}^{-1} = b_i^{-1} \cdots b_{j-2}^{-1} b_{j-1}^2 b_{j-2} \cdots b_i.$$

Dann gilt

$$b_r A_{ij} b_r^{-1} = \begin{cases} A_{ij}, & \text{falls } r < i-1, i < r < j-1, \\ & \text{falls } j < r \text{ oder } r = i = j-1, \\ A_{i+1,j}, & \text{falls } r = i < j-1, \\ A_{i,j+1}, & \text{falls } r = j, \\ A_{ij}^{-1} A_{i-1,j} A_{ij}, & \text{falls } r = i-1, \\ A_{j-1,j} A_{i,j-1} A_{j-1,j}^{-1}, & \text{falls } i < r = j-1 \end{cases}$$

für  $r \geq 1$  und  $1 \leq i < j$ . □

**Theorem 2.2.4** ([Art47a, Theorem 17 und 18]). Die reine Zopfgruppe  $P_n$  wird von  $A_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$  mit den Relationen

$$A_{rs} A_{ij} A_{rs}^{-1} = \begin{cases} A_{ij}, & \text{falls } i < j < r < s \\ & \text{oder } i < r < s < j, \\ A_{is}^{-1} A_{ij} A_{is}, & \text{falls } i < j = r < s, \\ A_{ij}^{-1} A_{ir}^{-1} A_{ij} A_{ir} A_{ij}, & \text{falls } i < r < s = j, \\ A_{is}^{-1} A_{ir}^{-1} A_{is} A_{ir} A_{ij} A_{ir}^{-1} A_{is}^{-1} A_{ir} A_{is}, & \text{falls } i < r < j < s \end{cases}$$

erzeugt. □

Sei  $P'_{m,n}$  gleich dem von den Relationen

$$A_{ij} A_{kl} = A_{kl} A_{ij} \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq n \text{ und } 1 \leq k < l \leq n, \quad (2.11)$$

$$A_{ij}^m = e \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq n \quad (2.12)$$

erzeugten Normalteiler von  $P_n$ . Ziel ist es dann zu zeigen, dass  $P_{m,n}$  und  $P'_{m,n}$  übereinstimmen, da sich hieraus unmittelbar der Isomorphietyp von  $K_{m,n}$  ergibt.

**Lemma 2.2.5.** Die Gruppe  $P_n/P'_{m,n}$  ist isomorph zum direkten Produkt von  $\binom{n}{2}$  Kopien der zyklischen Gruppe  $\mathbb{Z}/(m)$ .

*Beweis.* Aufgrund von Theorem 2.2.4 und der Definition von  $P'_{m,n}$  ist die Gruppe  $P_n/P'_{m,n}$  isomorph zu einer Gruppe, die von den  $\binom{n}{2}$  Elementen  $A_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$  mit den Relationen aus Theorem 2.2.4 sowie den Relationen (2.11) und (2.12) erzeugt wird. Da aber die Relationen aus Theorem 2.2.4 eine Konsequenz der Relationen (2.11) und (2.12) sind, wird diese Gruppe auch von den  $A_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$  mit den Relationen (2.11) und (2.12) erzeugt. Diese Gruppe ist aber isomorph zum direkten Produkt von  $\binom{n}{2}$  Kopien der zyklischen Gruppe  $\mathbb{Z}/(m)$ . □

Zur Vereinfachung der Notation wird  $A_{ji} := A_{ij}$  für  $1 \leq i < j$  gesetzt. Da  $P_{m,n}$  und  $P_n$  Normalteiler von  $B_n$  sind, induziert die Konjugation von  $B_n$  eine Linksoperation  $\cdot : B_n \times K_{m,n} \rightarrow K_{m,n}$ ,  $b \cdot \bar{x} := \overline{bx}b^{-1}$ .

**Lemma 2.2.6.** *Für die Linksoperation  $b \cdot \bar{x} := \overline{bx}b^{-1}$  von  $B_n$  auf  $K_{m,n}$  gilt*

$$b \cdot \bar{A}_{ij} = \bar{A}_{\bar{b}(i), \bar{b}(j)}.$$

*Beweis.* Es genügt, die Gleichung für die Erzeuger  $b_r$ ,  $1 \leq r < n$  von  $B_n$  zu zeigen, d.h.  $\bar{b}_r \bar{A}_{ij} \bar{b}_r^{-1} = \bar{A}_{\bar{b}_r(i), \bar{b}_r(j)}$  in  $B_{m,n}$ . Mit Ausnahme der Fälle  $r = i - 1$  und  $i < r = j - 1$  folgt dies unmittelbar aus Lemma 2.2.3.

Zunächst wird der Fall  $r = i - 1$  behandelt. In  $B_{m,n}$  gilt  $\bar{b}_{i-1}^2 \bar{b}_i^2 = \bar{b}_i^2 \bar{b}_{i-1}^2$  bzw. äquivalent dazu  $\bar{b}_i^{-1} \bar{b}_{i-1}^2 \bar{b}_i = \bar{b}_i \bar{b}_{i-1}^2 \bar{b}_i^{-1}$ . Mit Lemma 2.2.3 folgt dann

$$\begin{aligned} \bar{b}_r \bar{A}_{ij} \bar{b}_r^{-1} &= \bar{A}_{ij}^{-1} \bar{A}_{i-1,j} \bar{A}_{ij} = \bar{b}_{j-1} \cdots \bar{b}_{i+1} \bar{b}_i^{-2} \bar{b}_{i-1}^2 \bar{b}_i^{-1} \bar{b}_{i+1}^2 \bar{b}_{i-1}^{-1} \cdots \bar{b}_{j-1}^{-1} \\ &= \bar{b}_{j-1} \cdots \bar{b}_{i+1} \bar{b}_i^{-1} \bar{b}_{i-1}^2 \bar{b}_i \bar{b}_{i+1}^{-1} \cdots \bar{b}_{j-1}^{-1} \\ &= \bar{b}_{j-1} \cdots \bar{b}_{i+1} \bar{b}_i \bar{b}_{i-1}^2 \bar{b}_i^{-1} \bar{b}_{i+1}^{-1} \cdots \bar{b}_{j-1}^{-1} = \bar{A}_{i-1,j} = \bar{A}_{\bar{b}_r(i), \bar{b}_r(j)}. \end{aligned}$$

Im Fall  $i < r = j - 1$  gilt unter Verwendung von Lemma 2.2.3

$$\begin{aligned} \bar{b}_r \bar{A}_{ij} \bar{b}_r^{-1} &= \bar{A}_{j-1,j} \bar{A}_{i,j-1} \bar{A}_{j-1,j}^{-1} = \bar{b}_{j-1}^2 (\bar{b}_i^{-1} \cdots \bar{b}_{j-3}^{-1} \bar{b}_{j-2}^2 \bar{b}_{j-3} \cdots \bar{b}_i) \bar{b}_{j-1}^{-2} \\ &= \bar{b}_i^{-1} \cdots \bar{b}_{j-3}^{-1} \bar{b}_{j-2}^2 \bar{b}_{j-1}^{-2} \bar{b}_{j-3} \cdots \bar{b}_i \\ &= \bar{b}_i^{-1} \cdots \bar{b}_{j-3}^{-1} \bar{b}_{j-2}^2 \bar{b}_{j-3} \cdots \bar{b}_i = \bar{A}_{i,j-1} = \bar{A}_{\bar{b}_r(i), \bar{b}_r(j)}. \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen.  $\square$

**Korollar 2.2.7.** *In  $K_{m,n}$  gilt  $\bar{A}_{ij} \bar{A}_{kl} = \bar{A}_{kl} \bar{A}_{ij}$ .*

*Beweis.* Es ist  $\bar{A}_{kl} \bar{A}_{ij} \bar{A}_{kl}^{-1} = A_{kl} \cdot \bar{A}_{ij} = \bar{A}_{\bar{A}_{kl}(i), \bar{A}_{kl}(j)} = \bar{A}_{ij}$ , da die Identität die unterliegende Permutation von  $A_{kl}$  ist.  $\square$

**Lemma 2.2.8.** *Es gilt  $P_{m,n} = P'_{m,n}$ .*

*Beweis.* Wegen  $A_{i,i+1} = b_i^2$  sind die erzeugenden Relationen von  $P_{m,n}$  eine Teilmenge der erzeugenden Relationen von  $P'_{m,n}$ . Somit ist zum Nachweis von  $P_{m,n} \subseteq P'_{m,n}$  ausreichend zu zeigen, dass  $P'_{m,n}$  ein Normalteiler von  $B_n$  ist. Hierzu wiederum genügt zu zeigen, dass das Konjugieren der erzeugenden Elemente von  $P'_{m,n}$  nicht aus dieser Menge herausführt. Konjugation eines Kommutators  $A_{ij} A_{kl} A_{ij}^{-1} A_{kl}^{-1}$  mit  $b \in B_n$  ergibt den Kommutator der beiden Elemente  $b A_{ij} b^{-1}$ ,  $b A_{kl} b^{-1} \in P_n$ . Dieser Kommutator ist aber in  $P'_{m,n}$  enthalten, da  $P_n/P'_{m,n}$  abelsch ist. Ferner liegt im Fall  $m \geq 1$  das Element  $b A_{ij}^m b^{-1} = (b A_{ij} b^{-1})^m$  in  $P'_{m,n}$ , da die Gruppe  $P_n/P'_{m,n}$  vom Exponenten  $m$  ist.

Umgekehrt liegen die Elemente  $A_{ij}A_{kl}A_{ij}^{-1}A_{kl}^{-1}$  nach dem vorstehenden Korollar in  $P_{m,n}$ . Ferner sind auch die Elemente  $A_{ij}^m = b_{j-1} \cdots b_{i+1} b_i^{2m} b_{i+1}^{-1} \cdots b_{j-1}^{-1}$  in  $P_{m,n}$  enthalten, da sie Konjugierte von erzeugenden Elementen von  $P_{m,n}$  sind. Somit ist auch  $P'_{m,n} \subseteq P_{m,n}$  gezeigt.  $\square$

Damit ist die Struktur von  $K_{m,n}$  geklärt. Zudem faktorisiert die Rechtsoperation  $\bar{x} \cdot b := \overline{b^{-1}xb}$  von  $B_n$  auf  $K_{m,n}$  über die symmetrische Gruppe  $S_n$ . Somit ist die für das verschränkte Produkt benötigte Abbildung  $\cdot : K_{m,n} \times S_n \rightarrow K_{m,n}$  unabhängig vom gewählten Schnitt und eine Rechtsoperation von  $S_n$  auf  $K_{m,n}$  durch Gruppenautomorphismen. Diese Operation ist durch  $\bar{A}_{ij} \cdot t = \bar{A}_{t^{-1}(i), t^{-1}(j)}$  festgelegt.

Zur vollständigen Beschreibung des verschränkten Produktes muss jetzt nur noch der Kozykel angegeben werden. Dessen Definition erfolgt unter Verwendung eines Schnittes von  $\pi_{m,n} : B_{m,n} \rightarrow S_n$ . Sei  $L_{m,n} := q_{m,n} \circ L_n : S_n \rightarrow B_{m,n}$ . Wegen  $\pi_{m,n} \circ L_{m,n} = \pi_{m,n} \circ q_{m,n} \circ L_n = \pi_n \circ L_n = \text{id}_{S_n}$  ist dies ein Schnitt von  $\pi_{m,n}$ . Dieser Schnitt erfüllt  $L_{m,n}(e) = e$  sowie  $L_{m,n}(st) = L_{m,n}(s)L_{m,n}(t)$  für  $s, t \in S_n$  mit  $\ell(st) = \ell(s) + \ell(t)$ .

**Satz 2.2.9.** *Für  $s, t \in S_n$  sei*

$$\sigma_{m,n}(s, t) := \prod_{\substack{i < j \\ t(i) > t(j) \\ st(i) < st(j)}} \bar{A}_{ij} = \prod_{(i,j) \in \mathbf{F}_n(t) \setminus \mathbf{F}_n(st)} \bar{A}_{ij} \in K_{m,n}.$$

Dann gilt  $L_{m,n}(s)L_{m,n}(t) = L_{m,n}(st)\sigma_{m,n}(s, t)$ , d.h.,  $\sigma_{m,n}$  ist gleich dem Kozykel, der durch den Schnitt  $L_{m,n}$  gegeben ist.

*Beweis.* Die Behauptung wird durch vollständige Induktion nach  $\ell(s)$  bewiesen.

Im Falle  $\ell(s) = 0$  gilt  $s = e_n$ . Damit ist

$$\sigma_{m,n}(s, t) = \sigma_{m,n}(e_n, t) = \prod_{(i,j) \in \mathbf{F}_n(t) \setminus \mathbf{F}_n(t)} \bar{A}_{ij} = e_n,$$

woraus

$$L_{m,n}(s)L_{m,n}(t) = L_{m,n}(t) = L_{m,n}(st) = L_{m,n}(st)\sigma_{m,n}(s, t)$$

folgt.

Für den Induktionsschritt wird die Gültigkeit der Gleichung für alle  $s, t \in S_n$  mit  $\ell(s) = m$  angenommen. Dann ist die Gleichung für  $s, t \in S_n$  mit  $\ell(s) = m+1$  zu zeigen. In diesem Fall existieren  $\tilde{s} \in S_n$  sowie  $1 \leq r < n$  mit  $\ell(\tilde{s}) = m$  und  $s = t_r \tilde{s}$ . Dann gelten  $\tilde{s}^{-1}(r) < \tilde{s}^{-1}(r+1)$  und  $\mathbf{F}_n(s) = \mathbf{F}_n(\tilde{s}) \dot{\cup} \{(\tilde{s}^{-1}(r), \tilde{s}^{-1}(r+1))\}$ . Ferner ist

$$\begin{aligned} L_{m,n}(s)L_{m,n}(t) &= L_{m,n}(t_r \tilde{s})L_{m,n}(t) = L_{m,n}(t_r)L_{m,n}(\tilde{s})L_{m,n}(t) \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} L_{m,n}(t_r)L_{m,n}(\tilde{s}t)\sigma_{m,n}(\tilde{s}, t). \end{aligned}$$

Nun erfolgt eine vollständige Fallunterscheidung nach  $\ell(t_r \tilde{s}t) = \ell(st)$ .

Zunächst wird der Fall  $\ell(t_r \tilde{s}t) = \ell(\tilde{s}t) - 1$  behandelt. Mit  $k := (\tilde{s}t)^{-1}(r+1)$  und  $l := (\tilde{s}t)^{-1}(r)$  gelten dann  $k < l$  und  $F_n(\tilde{s}t) = F_n(st) \dot{\cup} \{(k, l)\}$ . Ferner ist  $(k, l) \in F_n(t)$ , da  $t(k) = \tilde{s}^{-1}(r+1) > \tilde{s}^{-1}(r) = t(l)$  gilt. Damit ist

$$\sigma_{m,n}(s, t) = \prod_{(i,j) \in F_n(t) \setminus F_n(st)} \bar{A}_{ij} = \bar{A}_{kl} \prod_{(i,j) \in F_n(t) \setminus F_n(\tilde{s}t)} \bar{A}_{ij} = \bar{A}_{kl} \sigma_{m,n}(\tilde{s}, t).$$

Hiermit ergibt sich die Behauptung, denn es gilt

$$\begin{aligned} L_{m,n}(t_r) L_{m,n}(\tilde{s}t) \sigma_{m,n}(\tilde{s}, t) &= L_{m,n}(t_r) L_{m,n}(t_r st) \sigma_{m,n}(\tilde{s}, t) \\ &= L_{m,n}(t_r)^2 L_{m,n}(st) \sigma_{m,n}(\tilde{s}, t) = \bar{A}_{r,r+1} L_{m,n}(st) \sigma_{m,n}(\tilde{s}, t) \\ &= L_{m,n}(st) \bar{A}_{(st)^{-1}(r), (st)^{-1}(r+1)} \sigma_{m,n}(\tilde{s}, t) \\ &= L_{m,n}(st) \bar{A}_{kl} \sigma_{m,n}(\tilde{s}, t) = L_{m,n}(st) \sigma_{m,n}(s, t). \end{aligned}$$

Andernfalls ist  $\ell(t_r \tilde{s}t) = \ell(\tilde{s}t) + 1$ . Wegen  $L_{m,n}(t_r) L_{m,n}(\tilde{s}t) = L_{m,n}(st)$  ist dann  $\sigma_{m,n}(\tilde{s}, t) = \sigma_{m,n}(s, t)$  bzw.

$$\prod_{(i,j) \in F_n(t) \setminus F_n(\tilde{s}t)} \bar{A}_{ij} = \prod_{(i,j) \in F_n(t) \setminus F_n(st)} \bar{A}_{ij}$$

zu zeigen. Mit  $k := (\tilde{s}t)^{-1}(r)$  und  $l := (\tilde{s}t)^{-1}(r+1)$  gelten nun  $k < l$  und  $F_n(st) = F_n(\tilde{s}t) \dot{\cup} \{(k, l)\}$ . Somit ist noch  $(k, l) \notin F_n(t)$  zu zeigen. Dies ist aber erfüllt, denn es gilt  $t(k) = \tilde{s}^{-1}(r) < \tilde{s}^{-1}(r+1) = t(l)$ .  $\square$

**Korollar 2.2.10.**  $\varrho_{m,n} : B_{m,n} \rightarrow S_n \#_{\sigma_{m,n}} K_{m,n}$ ,  $b_i \mapsto t_i \# e$  ist ein Isomorphismus von Gruppen. Hierbei ist die Multiplikation im verschränkten Produkt  $S_n \#_{\sigma_{m,n}} K_{m,n}$  durch  $(s \# \bar{x})(t \# \bar{y}) = st \#_{\sigma_{m,n}}(s, t)(\bar{x} \cdot t) \bar{y}$  gegeben, wobei  $\sigma_{m,n}$  der Kozykel aus dem vorstehenden Satz ist und die Rechtsoperation von  $S_n$  auf den Erzeugern von  $K_{m,n}$  durch  $\bar{A}_{ij} \cdot t = \bar{A}_{t^{-1}(i), t^{-1}(j)}$  erklärt ist.

Ferner gelten  $(\pi_{m,n} \circ \varrho_{m,n}^{-1})(s \# \bar{x}) = s$  und  $(\varrho_{m,n} \circ L_{m,n})(s) = s \# e$  für  $s \in S_n$  und  $\bar{x} \in K_{m,n}$ , d.h., der kanonische Epimorphismus  $\pi_{m,n} : B_{m,n} \rightarrow S_n$  und sein Schnitt  $L_{m,n}$  besitzen bezüglich  $S_n \#_{\sigma_{m,n}} K_{m,n}$  eine besonders einfache Gestalt.  $\square$

Aus der Darstellung von  $B_{m,n}$  als verschränktes Produkt geht insbesondere hervor, dass diese Gruppe für  $m \geq 1$  endlich ist. Dies ist entscheidend dafür, dass eine Operade angegeben werden kann, die die Kategorie der Lie-Algebren beschreibt.

**Lemma 2.2.11.**  $\mathcal{B}_m = (B_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$  ist ein reflexives Zopfgruppensystem.

*Beweis.* Zunächst einmal ist  $P_{m,n}$  in  $P_n$  enthalten. Damit  $\mathcal{B}_m$  ein Zopfgruppensystem ist, muss dann noch gezeigt werden, dass  $P_{m,r} \times P_{m,s}$  durch den Homomorphismus  $\otimes : B_r \times B_s \rightarrow B_{r+s}$  nach  $P_{m,r+s}$  abgebildet wird. Hierzu genügt zu zeigen, dass erzeugende Elemente des Normalteilers  $P_{m,r} \times P_{m,s}$  durch  $\otimes$  in  $P_{m,r+s}$  abgebildet werden. Erzeugende Elemente von  $P_{m,r} \times P_{m,s}$  erhält man aus den erzeugenden

Elementen von  $P_{m,r}$  und  $P_{m,s}$ , die den Relationen (2.9) und (2.10) entsprechen. Diese werden aber durch den Homomorphismus  $\otimes$  offensichtlich nach  $P_{m,r+s}$  abgebildet. So gilt zum Beispiel  $e_r \otimes b_i^2 b_j^2 b_i^{-2} b_j^{-2} = b_{i+r}^2 b_{j+r}^2 b_{i+r}^{-2} b_{j+r}^{-2} \in P_{m,r+s}$ . Somit ist  $\mathcal{B}_m$  ein Zopfgruppensystem.

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $\mathcal{B}_m$  reflexiv ist. Die erzeugenden Relationen von  $P_{m,n}$  ergeben sich aus  $b_1^{2m} = e_2$  und  $b_1^2 b_2^2 = b_2^2 b_1^2$  durch Tensorproduktbildung mit Einselementen. Deshalb genügt zu zeigen, dass  $\varphi_2^{\mathcal{B}_m}(b_1^{2m}) = \text{id}_\otimes$  und  $\varphi_2^{\mathcal{B}_m}(b_1^2) \varphi_2^{\mathcal{B}_m}(b_2^2) = \varphi_2^{\mathcal{B}_m}(b_2^2) \varphi_2^{\mathcal{B}_m}(b_1^2)$  gelten. Seien dazu  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$ ,  $r := k_1 + k_2$  und  $s := k_1 + k_2 + k_3$ . Dann ist die Identität die unterliegende Permutation von

$$\varphi_2^{\mathcal{B}_m}(b_1^2)(k_1, k_2) = \varphi_2^{\mathcal{B}_m}(b_1)(k_2, k_1) \circ \varphi_2^{\mathcal{B}_m}(b_1)(k_1, k_2) = \tau_{k_2, k_1}^{\mathcal{B}_m} \circ \tau_{k_1, k_2}^{\mathcal{B}_m}.$$

Somit liegt  $\varphi_2^{\mathcal{B}_m}(b_1^2)(k_1, k_2)$  in der Untergruppe  $K_{m,r}$  von  $B_{m,r}$ . Analog folgt  $\varphi_2^{\mathcal{B}_m}(b_1^2)(k_1, k_2, k_3), \varphi_2^{\mathcal{B}_m}(b_2^2)(k_1, k_2, k_3) \in K_{m,s}$ . Da aber  $K_{m,s}$  abelsch ist und  $K_{m,r}$  im Fall  $m \geq 1$  vom Exponenten  $m$  ist, ergeben sich hieraus die Behauptungen. Also ist  $\mathcal{B}_m$  reflexiv.  $\square$

**Lemma 2.2.12.** *Sei  $G$  eine endliche abelsche Gruppe vom Exponenten  $m \geq 1$ . Dann faktorisiert die Kategorie  $\mathcal{YD}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}$  über  $\mathcal{B}_m$ .*

*Beweis.* Da der Grundkörper  $\mathbb{k}$  algebraisch abgeschlossen ist und die Charakteristik 0 besitzt, ist die Kategorie  $\mathcal{YD}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}$  halbeinfach, und alle einfachen Objekte sind eindimensional. Siehe hierfür zum Beispiel [AG99, Satz 3.1.2]. Sind  $U, V$  und  $W$  einfache Objekte in  $\mathcal{YD}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}$ , so ist  $\tau_{W,V} \circ \tau_{V,W} : V \otimes W \rightarrow V \otimes W$  gleich der Multiplikation mit einer  $m$ -ten Einheitswurzel, woraus  $(\tau_{W,V} \circ \tau_{V,W})^m = \text{id}_{V \otimes W}$  folgt. Ferner kommutieren  $(\tau_{V,U} \circ \tau_{U,V}) \otimes \text{id}_W$  und  $\text{id}_U \otimes (\tau_{W,V} \circ \tau_{V,W})$ .

Da jedes Objekt aus  $\mathcal{YD}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}$  isomorph zu einer direkten Summe einfacher Objekte ist, gelten die obigen Aussagen auch für beliebige Objekte  $U, V$  und  $W$ . Wie im vorstehenden Lemma ergibt sich hieraus die Behauptung.  $\square$

### 2.3 Operaden in gezopften Kategorien

Operaden werden in Abhängigkeit von Zopfgruppensystemen definiert. Sei dazu  $\mathcal{Z} = (Z_n)$  stets ein reflexives Zopfgruppensystem, über das die Kategorie  $\mathcal{C}$  faktorisiert.

Ziel ist es nun, die Funktorkategorie  $\mathcal{D}_s := \mathcal{C}_s^{\mathcal{Z}^{\text{op}}} = \text{Funk}(\mathcal{Z}^{\text{op}}, \mathcal{C}_s)$  zu einer monoidalen Kategorie sowie  $\mathcal{D} := \mathcal{C}^{\mathcal{Z}^{\text{op}}} = \text{Funk}(\mathcal{Z}^{\text{op}}, \mathcal{C})$  zu einer  $\mathcal{D}_s$ -Linkskategorie zu machen. Ein Objekt  $\mathcal{F}$  aus  $\mathcal{D}_s$  (bzw.  $\mathcal{D}$ ) entspricht also einer Familie  $(\mathcal{F}(n))_{n \in \mathbb{N}}$  von Objekten aus  $\mathcal{C}_s$  (bzw.  $\mathcal{C}$ ), bei der jedes  $\mathcal{F}(n)$  ein  $IZ_n$ -Rechtsmodul ist. Die Kategorie  $\mathcal{D}_s$  kann auch als Unterkategorie von  $\mathcal{D}$  aufgefasst werden.

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ , und sei  $A$  eine Algebra in  $\mathcal{C}$ . Eine wesentliche Rolle bei der Konstruktion des Tensorproduktes spielen die Funktoren  $\mathcal{H}_{m,n}^A : \mathcal{D} \times_{IZ_n} \mathcal{C}_A \rightarrow_{IZ_m} \mathcal{C}_A$ . Diese sind auf Objekten durch

$$\mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{F}, M) := \coprod_{n_1 + \dots + n_m = n} (\mathcal{F}(n_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}(n_m)) \otimes_{IZ_{n_1} \otimes \dots \otimes IZ_{n_m}} M$$



erklärt. Hierbei ist der  $IZ_n$ -Linksmodul  $M$  auch ein  $IZ_{n_1} \otimes \cdots \otimes IZ_{n_m}$ -Linksmodul vermöge des Algebrenhomomorphismus  $IZ_{n_1} \otimes \cdots \otimes IZ_{n_m} \rightarrow IZ_n$ , der von dem Gruppenhomomorphismus  $Z_{n_1} \times \cdots \times Z_{n_m} \xrightarrow{\otimes} Z_n$  induziert wird. Ganz analog sind die Funktoren  $\mathcal{H}_{m,n}^A$  für Morphismen erklärt.

Die  $A$ -Rechtsmodulstruktur von  $\mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{F}, M)$  ist die Offensichtliche. Sie wird von der Rechtsoperation auf dem hinteren Tensorproduktfaktor  $M$  jedes Summanden des Koproduktes induziert. Dagegen ist die  $IZ_m$ -Linksmodulstruktur erheblich komplizierter und bedarf einiger Erläuterungen.

**Lemma 2.3.1.** *Seien  $m, n, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \cdots + n_m = n$ ,  $\sigma \in Z_m$  sowie  $A$  eine Algebra in  $\mathcal{C}$ . Zudem seien Objekte  $\mathcal{F} \in \mathcal{D}$  und  $M \in IZ_n \mathcal{C}_A$  gegeben. Als Abkürzung wird  $n'_i := n_{\sigma^{-1}(i)}$  für  $i = 1, \dots, m$  verwendet. Dann gibt es genau einen Morphismus  $\tilde{\lambda}_{\mathcal{F}, M, n_1, \dots, n_m}(\sigma)$ , der das folgende Diagramm kommutativ macht.*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}(n_m) \otimes M & \xrightarrow{\overline{\varphi}_2^{\mathcal{C}}(\sigma)(\mathcal{F}(n_1), \dots, \mathcal{F}(n_m)) \otimes \tilde{\lambda}_M(\overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_m))} & \mathcal{F}(n'_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}(n'_m) \otimes M \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\mathcal{F}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}(n_m))_{IZ_{n_1} \otimes \cdots \otimes IZ_{n_m}} \otimes M & \xrightarrow{\tilde{\lambda}_{\mathcal{F}, M, n_1, \dots, n_m}(\sigma)} & (\mathcal{F}(n'_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}(n'_m))_{IZ_{n'_1} \otimes \cdots \otimes IZ_{n'_m}} \otimes M
 \end{array}$$

Für diese Morphismen gelten:

1.  $\tilde{\lambda}_{\mathcal{F}, M, n_1, \dots, n_m}(\sigma)$  ist  $A$ -rechtslinear.
2.  $\tilde{\lambda}_{\mathcal{F}, M, n_1, \dots, n_m}(e_m) = \text{id}$ .
3.  $\tilde{\lambda}_{\mathcal{F}, M, n_1, \dots, n_m}(\sigma_1 \sigma_2) = \tilde{\lambda}_{\mathcal{F}, M, n_{\sigma_2^{-1}(1)}, \dots, n_{\sigma_2^{-1}(m)}}(\sigma_1) \circ \tilde{\lambda}_{\mathcal{F}, M, n_1, \dots, n_m}(\sigma_2)$ .
4. Für Morphismen  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  aus  $\mathcal{D}$  und  $f : M \rightarrow N$  aus  $IZ_n \mathcal{C}_A$  ist

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\lambda}_{\mathcal{G}, N, n_1, \dots, n_m}(\sigma) \circ ((\varphi(n_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(n_m))_{IZ_{n_1} \otimes \cdots \otimes IZ_{n_m}} \otimes f) \\
 &= ((\varphi(n'_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(n'_m))_{IZ_{n'_1} \otimes \cdots \otimes IZ_{n'_m}} \otimes f) \circ \tilde{\lambda}_{\mathcal{F}, M, n_1, \dots, n_m}(\sigma).
 \end{aligned}$$

*Beweis.* Der linke und rechte vertikale Morphismus in dem obigen Diagramm seien mit  $q$  bzw.  $q'$  bezeichnet. Da  $q$  als Differenzkokern ein Epimorphismus ist, gibt es höchstens einen Morphismus  $\tilde{\lambda}_{\mathcal{F}, M, n_1, \dots, n_m}(\sigma)$ , der das Diagramm kommutativ macht. Umgekehrt kann die Differenzkokerneigenschaft von  $q$  benutzt werden, um die Existenz von  $\tilde{\lambda}_{\mathcal{F}, M, n_1, \dots, n_m}(\sigma)$  nachzuweisen. Dazu sei  $\gamma_i \in Z_i$  für  $i = 1, \dots, m$ . Ferner sei  $\gamma'_i := \gamma_{\sigma^{-1}(i)}$  gesetzt. Dann gelten

$$\begin{aligned}
 & \overline{\varphi}_2^{\mathcal{C}}(\sigma)(\mathcal{F}(n_1), \dots, \mathcal{F}(n_m)) \circ \tilde{\rho}_{\mathcal{F}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}(n_m)}(\gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_m) \\
 &= \overline{\varphi}_2^{\mathcal{C}}(\sigma)(\mathcal{F}(n_1), \dots, \mathcal{F}(n_m)) \circ (\tilde{\rho}_{\mathcal{F}(n_1)}(\gamma_1) \otimes \cdots \otimes \tilde{\rho}_{\mathcal{F}(n_m)}(\gamma_m))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\tilde{\rho}_{\mathcal{F}(n'_1)}(\gamma'_1) \otimes \cdots \otimes \tilde{\rho}_{\mathcal{F}(n'_m)}(\gamma'_m)) \circ \overline{\varphi}_2^{\mathcal{C}}(\sigma)(\mathcal{F}(n_1), \dots, \mathcal{F}(n_m)) \\
&= \tilde{\rho}_{\mathcal{F}(n'_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}(n'_m)}(\gamma'_1 \otimes \cdots \otimes \gamma'_m) \circ \overline{\varphi}_2^{\mathcal{C}}(\sigma)(\mathcal{F}(n_1), \dots, \mathcal{F}(n_m))
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\tilde{\lambda}_M(\overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_m)) \circ \tilde{\lambda}_M(\gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_m) \\
&= \tilde{\lambda}_M(\overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_m) \cdot (\gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_m)) \\
&= \tilde{\lambda}_M((\gamma'_1 \otimes \cdots \otimes \gamma'_m) \cdot \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_m)) \\
&= \tilde{\lambda}_M(\gamma'_1 \otimes \cdots \otimes \gamma'_m) \circ \tilde{\lambda}_M(\overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_m)),
\end{aligned}$$

da  $\overline{\varphi}_2^{\mathcal{C}}(\sigma)$  und  $\overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)$  natürliche Isomorphismen sind und  $\tilde{\lambda}_M$  ein Homomorphismus von Gruppen ist. Verwendet man zusätzlich noch, dass  $q'$  ein Differenzkern ist, so folgt hieraus

$$\begin{aligned}
&q' \circ \left( \overline{\varphi}_2^{\mathcal{C}}(\sigma)(\mathcal{F}(n_1), \dots, \mathcal{F}(n_m)) \otimes \tilde{\lambda}_M(\overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_m)) \right) \\
&\quad \circ \left( \tilde{\rho}_{\mathcal{F}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}(n_m)}(\gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_m) \otimes \text{id}_M \right) \\
&= q' \circ \left( \overline{\varphi}_2^{\mathcal{C}}(\sigma)(\mathcal{F}(n_1), \dots, \mathcal{F}(n_m)) \otimes \tilde{\lambda}_M(\overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_m)) \right) \\
&\quad \circ \left( \text{id}_{\mathcal{F}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}(n_m)} \otimes \tilde{\lambda}_M(\gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_m) \right).
\end{aligned}$$

Damit ist die Existenz von  $\tilde{\lambda}_{\mathcal{F}, M, n_1, \dots, n_m}(\sigma)$  gezeigt.

Die vier behaupteten Eigenschaften der Morphismen  $\tilde{\lambda}_{\mathcal{F}, M, n_1, \dots, n_m}(\sigma)$  ergeben sich nun unmittelbar aus entsprechenden Eigenschaften der Morphismen  $\overline{\varphi}_2^{\mathcal{C}}(\sigma)(\mathcal{F}(n_1), \dots, \mathcal{F}(n_m)) \otimes \tilde{\lambda}_M(\overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_m))$ .  $\square$

**Korollar 2.3.2.** *Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $A$  eine Algebra in  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{F}$  ein Objekt aus  $\mathcal{D}$  und  $M$  ein  $(IZ_n, A)$ -Bimodul in  $\mathcal{C}$ . Dann gibt es zu jedem  $\sigma \in Z_m$  genau einen Morphismus  $\tilde{\lambda}_{\mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{F}, M)}(\sigma) : \mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{F}, M) \rightarrow \mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{F}, M)$ , so dass für alle  $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \cdots + n_m = n$  das folgende Diagramm kommutiert.*

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{F}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}(n_m))_{IZ_{n_1} \otimes \cdots \otimes IZ_{n_m}} \otimes M & \xrightarrow{\tilde{\lambda}_{\mathcal{F}, M, n_1, \dots, n_m}(\sigma)} & (\mathcal{F}(n'_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}(n'_m))_{IZ_{n'_1} \otimes \cdots \otimes IZ_{n'_m}} \otimes M \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{F}, M) & \xrightarrow{\tilde{\lambda}_{\mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{F}, M)}(\sigma)} & \mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{F}, M)
\end{array}$$

Hierbei ist wiederum  $n'_i := n_{\sigma^{-1}(i)}$  gesetzt, und die vertikalen Morphismen sind die Inklusionen in das Koprodukt.

Durch  $\tilde{\lambda}_{\mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{F}, M)} : Z_m \rightarrow \text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{F}, M))$  ist eine Darstellung definiert. Hiermit wird  $\mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{F}, M)$  zu einem  $(IZ_m, A)$ -Bimodul. Ferner ist  $\mathcal{H}_{m,n}^A(\varphi, f)$  für Morphismen  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  aus  $\mathcal{D}$  und  $f : M \rightarrow N$  aus  $IZ_m \mathcal{C}_A$   $IZ_m$ -linkslinier.  $\square$

Damit ist der Funktor  $\mathcal{H}_{m,n}^A$  wohldefiniert. Im Fall  $A = M = IZ_n$  wird auch kurz  $\mathcal{H}_{m,n}(\mathcal{F})$  für  $\mathcal{H}_{m,n}^{IZ_n}(\mathcal{F}, IZ_n)$  geschrieben. Insbesondere ist dann  $\mathcal{H}_{m,n}(\mathcal{F})$  ein  $(IZ_m, IZ_n)$ -Bimodul.

Unter Verwendung dieser Funktoren kann nun ein Bifunktor  $\boxtimes : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  erklärt werden. Für Objekte  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  aus  $\mathcal{D}$  sowie  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})(n) := \coprod_m \mathcal{F}(m) \otimes_{IZ_m} \mathcal{H}_{m,n}(\mathcal{G}).$$

Ganz analog wird der Bifunktor  $\boxtimes$  für Morphismen definiert.

**Bemerkung 2.3.3.** Ein Morphismus  $\psi : \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3$  aus  $\mathcal{D}$  ist durch eine Familie  $(\psi(n) : (\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2)(n) \rightarrow \mathcal{F}_3(n))_{n \in \mathbb{N}}$  von Morphismen gegeben, bei der jedes  $\psi(n)$   $IZ_n$ -rechtslinear ist. Für  $m, n, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \dots + n_m = n$  bezeichne

$$\begin{aligned} & p_{(m;n_1, \dots, n_m)}^{(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)} : \mathcal{F}_1(m) \otimes \mathcal{F}_2(n_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_2(n_m) \\ & \longrightarrow \mathcal{F}_1(m) \otimes \mathcal{F}_2(n_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_2(n_m) \otimes IZ_n \\ & \longrightarrow \coprod_{\tilde{m}} \mathcal{F}_1(\tilde{m}) \otimes_{IZ_{\tilde{m}}} \left( \coprod_{\tilde{n}_1 + \dots + \tilde{n}_{\tilde{m}} = n} (\mathcal{F}_2(\tilde{n}_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_2(\tilde{n}_{\tilde{m}})) \otimes_{IZ_{\tilde{n}_1} \otimes \dots \otimes IZ_{\tilde{n}_{\tilde{m}}}} IZ_n \right) \\ & = \coprod_{\tilde{m}} \mathcal{F}_1(\tilde{m}) \otimes_{IZ_{\tilde{m}}} \mathcal{H}_{\tilde{m},n}(\mathcal{F}_2) = (\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2)(n) \end{aligned}$$

den offensichtlichen Morphismus, der aus der Einheit von  $IZ_n$  sowie Differenzkernen und Inklusionen in Koprodukte aufgebaut ist. Dann ist  $\psi(n)$  schon durch die Morphismen

$$\psi(m; n_1, \dots, n_m) = \psi(n) \circ p_{(m;n_1, \dots, n_m)}^{(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)} \quad (2.13)$$

mit  $n_1 + \dots + n_m = n$  bestimmt. Dabei braucht man  $IZ_n$  nur auf der Einheit zu betrachten, da  $\psi(n)$   $IZ_n$ -rechtslinear ist. Ferner erfüllen diese Morphismen die folgenden Bedingungen, die sich aus den vorkommenden Differenzkernen sowie der  $IZ_n$ -Rechtslinearität von  $\psi(n)$  ergeben.

1. Für  $\gamma_i \in Z_{n_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$  gilt

$$\begin{aligned} & \psi(m; n_1, \dots, n_m) \circ (\text{id}_{\mathcal{F}_1(m)} \otimes \tilde{\rho}_{\mathcal{F}_2(n_1)}(\gamma_1) \otimes \dots \otimes \tilde{\rho}_{\mathcal{F}_2(n_m)}(\gamma_m)) \\ & = \tilde{\rho}_{\mathcal{F}_3(n)}(\gamma_1 \otimes \dots \otimes \gamma_m) \circ \psi(m; n_1, \dots, n_m). \end{aligned}$$

2. Sei  $\sigma \in Z_m$ , und seien  $n'_i := n_{\sigma^{-1}(i)}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} & \psi(m; n_1, \dots, n_m) \circ (\tilde{\rho}_{\mathcal{F}_1(m)}(\sigma) \otimes \text{id}_{\mathcal{F}_2(n_1)} \otimes \dots \otimes \text{id}_{\mathcal{F}_2(n_m)}) \\ & = \tilde{\rho}_{\mathcal{F}_3(n)}(\tilde{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_m)) \circ \psi(m; n'_1, \dots, n'_m) \\ & \quad \circ (\text{id}_{\mathcal{F}_1(m)} \otimes \tilde{\varphi}_2^{\mathcal{C}}(\sigma)(\mathcal{F}_2(n_1), \dots, \mathcal{F}_2(n_m))). \end{aligned}$$

Umgekehrt ist durch eine Familie

$$\psi(m; n_1, \dots, n_m) : \mathcal{F}_1(m) \otimes \mathcal{F}_2(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_2(n_m) \longrightarrow \mathcal{F}_3(n)$$

von Morphismen für  $m, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \cdots + n_m = n$  ein  $IZ_n$ -rechtslinearer Morphismus  $\psi(n) : (\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2)(n) \rightarrow \mathcal{F}_3(n)$  definiert, der der Gleichung (2.13) genügt, falls die beiden vorstehenden Bedingungen erfüllt sind.

Im Weiteren werden noch andere Familien von Morphismen verwendet, die aus Einheiten, Differenzkokernen und Inklusionen in Koprodukte aufgebaut sind. Diese werden dann kurz als kanonische Morphismen bezeichnet. Damit sollen Morphismen, die komplexe Objekte als Quelle besitzen, einfacher beschrieben werden. Dabei bedarf es jeweils nur einer Erklärung, warum man sich auf die Einheiten zurückziehen kann. Neben der obigen Begründung liegt dies in den späteren Fällen auch an den auftretenden Differenzkokernen.

Zur Konstruktion des Assoziativitätsisomorphismus werden einige Hilfsisomorphismen verwendet. Dazu seien  $A$  und  $B$  Algebren in  $\mathcal{C}$  sowie  $k, m, n \in \mathbb{N}$ . Ferner seien Objekte  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{D}$ ,  $M \in {}_{IZ_n}\mathcal{C}_A$  und  $N \in {}_A\mathcal{C}_B$  gegeben.

Zunächst gibt es genau einen Morphismus

$$h_{m,n}^{(1)}(\mathcal{G}, M, N) : \mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{G}, M) \otimes_A N \rightarrow \mathcal{H}_{m,n}^B(\mathcal{G}, M \otimes_A N),$$

der für alle  $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \cdots + n_m = n$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \left( (\mathcal{G}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{G}(n_m)) \otimes_{IZ_{n_1} \otimes \cdots \otimes IZ_{n_m}} M \right) \otimes_A N & \xrightarrow{\cong} & (\mathcal{G}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{G}(n_m)) \otimes_{IZ_{n_1} \otimes \cdots \otimes IZ_{n_m}} (M \otimes_A N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{G}, M) \otimes_A N & \xrightarrow{h_{m,n}^{(1)}(\mathcal{G}, M, N)} & \mathcal{H}_{m,n}^B(\mathcal{G}, M \otimes_A N) \end{array}$$

kommutativ macht. Hierbei ergeben sich die beiden vertikalen Morphismen aus Inklusionen in Koprodukte. Dann ist  $h_{m,n}^{(1)}(\mathcal{G}, M, N)$  ein Isomorphismus von  $(IZ_m, B)$ -Bimoduln, der natürlich in  $\mathcal{G}$ ,  $M$  und  $N$  ist.

Der zweite Isomorphismus hängt von  $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$  mit  $m_1 + \cdots + m_k = m$  ab. Er wird mit  $h_{(m_1, \dots, m_k), n}^{(2)}(\mathcal{G}, M)$  bezeichnet und ist wie folgt definiert.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{G}, M) &= \coprod_{n_1 + \cdots + n_m = n} (\mathcal{G}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{G}(n_m)) \otimes_{IZ_{n_1} \otimes \cdots \otimes IZ_{n_m}} M \\ &\longrightarrow \coprod_{\substack{n_1 + \cdots + n_k \\ = n}} \coprod_{\substack{n_{11} + \cdots + n_{1m_1} = n_1 \\ \dots \\ n_{k1} + \cdots + n_{km_k} = n_k}} (\mathcal{G}(n_{11}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{G}(n_{km_k})) \otimes_{IZ_{n_{11}} \otimes \cdots \otimes IZ_{n_{km_k}}} M \\ &\longrightarrow \coprod_{\substack{n_1 + \cdots + n_k \\ = n}} \coprod_{\substack{n_{11} + \cdots + n_{1m_1} = n_1 \\ \dots \\ n_{k1} + \cdots + n_{km_k} = n_k}} (\mathcal{G}(n_{11}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{G}(n_{km_k})) \\ &\quad \otimes_{IZ_{n_{11}} \otimes \cdots \otimes IZ_{n_{km_k}}} \left[ (IZ_{n_1} \otimes \cdots \otimes IZ_{n_k}) \otimes_{IZ_{n_1} \otimes \cdots \otimes IZ_{n_k}} M \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \longrightarrow \prod_{\substack{n_1+\dots+n_k \\ =n}} \prod_{\substack{n_{11}+\dots+n_{1m_1}=n_1 \\ \dots \\ n_{k1}+\dots+n_{km_k}=n_k}} \left[ (\mathcal{G}(n_{11}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{km_k})) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. IZ_{n_{11}} \otimes \dots \otimes IZ_{n_{km_k}} (IZ_{n_1} \otimes \dots \otimes IZ_{n_k}) \right]_{IZ_{n_1} \otimes \dots \otimes IZ_{n_k}} M \\
& \longrightarrow \prod_{\substack{n_1+\dots+n_k \\ =n}} \prod_{\substack{n_{11}+\dots+n_{1m_1}=n_1 \\ \dots \\ n_{k1}+\dots+n_{km_k}=n_k}} \left[ \left( (\mathcal{G}(n_{11}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{1m_1})) \right)_{IZ_{n_{11}} \otimes \dots \otimes IZ_{n_{1m_1}}} IZ_{n_1} \right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \otimes \dots \otimes \left( (\mathcal{G}(n_{k1}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{km_k})) \right)_{IZ_{n_{k1}} \otimes \dots \otimes IZ_{n_{km_k}}} IZ_{n_k} \right]_{IZ_{n_1} \otimes \dots \otimes IZ_{n_k}} M \\
& \longrightarrow \prod_{\substack{n_1+\dots+n_k \\ =n}} \left[ \left( \prod_{\substack{n_{11}+\dots+n_{1m_1} \\ =n_1}} (\mathcal{G}(n_{11}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{1m_1})) \right)_{IZ_{n_{11}} \otimes \dots \otimes IZ_{n_{1m_1}}} IZ_{n_1} \right) \otimes \dots \otimes \\
& \qquad \qquad \qquad \left( \prod_{\substack{n_{k1}+\dots+n_{km_k} \\ =n_k}} (\mathcal{G}(n_{k1}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{km_k})) \right)_{IZ_{n_{k1}} \otimes \dots \otimes IZ_{n_{km_k}}} IZ_{n_k} \right]_{IZ_{n_1} \otimes \dots \otimes IZ_{n_k}} M \\
& = \prod_{n_1+\dots+n_k=n} (\mathcal{H}_{m_1, n_1}(\mathcal{G}) \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{m_k, n_k}(\mathcal{G}))_{IZ_{n_1} \otimes \dots \otimes IZ_{n_k}} M
\end{aligned}$$

Hierbei ist der vierte Morphismus nach Lemma 2.1.7 ein Isomorphismus. Der Isomorphismus  $h_{(m_1, \dots, m_k), n}^{(2)}(\mathcal{G}, M)$  ist offensichtlich  $(IZ_{m_1} \otimes \dots \otimes IZ_{m_k}, A)$ -bilinear und natürlich in  $\mathcal{G}$  und  $M$ .

Schließlich sei der Isomorphismus  $h_{k, n}^{(3)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, M)$  erklärt durch

$$\begin{aligned}
& \prod_m \mathcal{H}_{k, m}^A(\mathcal{F}, \mathcal{H}_{m, n}^A(\mathcal{G}, M)) \\
& = \prod_m \prod_{\substack{m_1+\dots+m_k \\ =m}} (\mathcal{F}(m_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}(m_k))_{IZ_{m_1} \otimes \dots \otimes IZ_{m_k}} \mathcal{H}_{m, n}^A(\mathcal{G}, M) \\
& \longrightarrow \prod_m \prod_{\substack{m_1+\dots+m_k \\ =m}} (\mathcal{F}(m_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}(m_k))_{IZ_{m_1} \otimes \dots \otimes IZ_{m_k}} \\
& \qquad \qquad \qquad \prod_{\substack{n_1+\dots+n_k \\ =n}} (\mathcal{H}_{m_1, n_1}(\mathcal{G}) \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{m_k, n_k}(\mathcal{G}))_{IZ_{n_1} \otimes \dots \otimes IZ_{n_k}} M \\
& \longrightarrow \prod_m \prod_{\substack{m_1+\dots+m_k \\ =m}} \prod_{\substack{n_1+\dots+n_k \\ =n}} (\mathcal{F}(m_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}(m_k))_{IZ_{m_1} \otimes \dots \otimes IZ_{m_k}} \\
& \qquad \qquad \qquad \left[ (\mathcal{H}_{m_1, n_1}(\mathcal{G}) \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{m_k, n_k}(\mathcal{G}))_{IZ_{n_1} \otimes \dots \otimes IZ_{n_k}} M \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\longrightarrow \prod_m \prod_{\substack{m_1+\dots+m_k \\ =m}} \prod_{\substack{n_1+\dots+n_k \\ =n}} \left[ (\mathcal{F}(m_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}(m_k)) \otimes_{IZ_{m_1} \otimes \dots \otimes IZ_{m_k}} \right. \\
&\quad \left. (\mathcal{H}_{m_1, n_1}(\mathcal{G}) \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{m_k, n_k}(\mathcal{G})) \right] \otimes_{IZ_{n_1} \otimes \dots \otimes IZ_{n_k}} M \\
&\longrightarrow \prod_m \prod_{\substack{m_1+\dots+m_k \\ =m}} \prod_{\substack{n_1+\dots+n_k \\ =n}} \left[ (\mathcal{F}(m_1) \otimes_{IZ_{m_1}} \mathcal{H}_{m_1, n_1}(\mathcal{G})) \otimes \dots \right. \\
&\quad \left. \otimes (\mathcal{F}(m_k) \otimes_{IZ_{m_k}} \mathcal{H}_{m_k, n_k}(\mathcal{G})) \right] \otimes_{IZ_{n_1} \otimes \dots \otimes IZ_{n_k}} M \\
&\longrightarrow \prod_{\substack{n_1+\dots+n_k \\ =n}} \left[ \left( \prod_{m_1} \mathcal{F}(m_1) \otimes_{IZ_{m_1}} \mathcal{H}_{m_1, n_1}(\mathcal{G}) \right) \otimes \dots \right. \\
&\quad \left. \otimes \left( \prod_{m_k} \mathcal{F}(m_k) \otimes_{IZ_{m_k}} \mathcal{H}_{m_k, n_k}(\mathcal{G}) \right) \right] \otimes_{IZ_{n_1} \otimes \dots \otimes IZ_{n_k}} M \\
&= \prod_{\substack{n_1+\dots+n_k \\ =n}} ((\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})(n_1) \otimes \dots \otimes (\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})(n_k)) \otimes_{IZ_{n_1} \otimes \dots \otimes IZ_{n_k}} M = \mathcal{H}_{k, n}^A(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}, M).
\end{aligned}$$

Hierbei wird der erste Isomorphismus von den Morphismen  $h_{(m_1, \dots, m_k), n}^{(2)}(\mathcal{G}, M)$  induziert, und der vierte Morphismus ist nach Lemma 2.1.7 ein Isomorphismus. Es ist klar, dass  $h_{k, n}^{(3)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, M)$   $A$ -rechtslinear und natürlich in  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  und  $M$  ist.

Das bisher Gesagte ist für beliebige Objekte  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  aus  $\mathcal{D}$  richtig. Es wird aber zusätzlich benötigt, dass  $h_{k, n}^{(3)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, M)$   $IZ_k$ -linkslinier ist. Um dies zu zeigen, wird das folgende Lemma verwendet, für das eine zusätzliche Voraussetzung notwendig ist.

**Lemma 2.3.4.** *Sei  $b \in B_n$ , und seien  $V_i$  und  $W_j$  für  $i, j = 1, \dots, n$  Objekte aus  $\mathcal{C}$  mit  $\tau_{W_j, V_i}^{\mathcal{C}} \circ \tau_{V_i, W_j}^{\mathcal{C}} = \text{id}_{V_i \otimes W_j}$ . Als Abkürzungen werden  $V'_i := V_{b^{-1}(i)}$  und  $W'_j := W_{b^{-1}(j)}$  verwendet. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
&\varphi_2^{\mathcal{C}}(b)(V_1 \otimes W_1, \dots, V_n \otimes W_n) \circ \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_n))(V_1, \dots, V_n, W_1, \dots, W_n) \\
&= \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_n))(V'_1, \dots, V'_n, W'_1, \dots, W'_n) \circ (\varphi_2^{\mathcal{C}}(b)(V_1, \dots, V_n) \otimes \varphi_2^{\mathcal{C}}(b)(W_1, \dots, W_n)).
\end{aligned}$$

*Beweis.* Da  $\varphi^{\mathcal{C}} : \mathcal{B} \rightarrow \{\mathcal{C}, \mathcal{C}\}$  ein Funktor ist, folgt aus der Gültigkeit der obigen Gleichung für  $b$  und  $b'$  leicht die Behauptung für  $bb'$  und  $b^{-1}$ . Deshalb genügt es, die Behauptung für die Erzeuger  $b_i$  der Zopfgruppe  $B_n$  zu zeigen. Dies erfolgt durch Induktion nach  $n$ .

Ist  $n = 1$ , so sind alle auftretenden Morphismen gleich der Identität; und im Fall  $n = 2$  gilt

$$\begin{aligned}
&\varphi_2^{\mathcal{C}}(b_1)(V_1 \otimes W_1, V_2 \otimes W_2) \circ \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_2))(V_1, V_2, W_1, W_2) \\
&= \tau_{V_1 \otimes W_1, V_2 \otimes W_2}^{\mathcal{C}} \circ (\text{id}_{V_1} \otimes \tau_{V_2, W_1}^{\mathcal{C}} \otimes \text{id}_{W_2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\text{id}_{V_2} \otimes \tau_{V_1, W_2}^{\mathcal{C}} \otimes \text{id}_{W_1}) \circ (\tau_{V_1, V_2}^{\mathcal{C}} \otimes \tau_{W_1, W_2}^{\mathcal{C}}) \circ (\text{id}_{V_1} \otimes \tau_{W_1, V_2}^{\mathcal{C}} \otimes \text{id}_{W_2}) \\
&\quad \circ (\text{id}_{V_1} \otimes \tau_{V_2, W_1}^{\mathcal{C}} \otimes \text{id}_{W_2}) \\
&= (\text{id}_{V_2} \otimes \tau_{V_1, W_2}^{\mathcal{C}} \otimes \text{id}_{W_1}) \circ (\tau_{V_1, V_2}^{\mathcal{C}} \otimes \tau_{W_1, W_2}^{\mathcal{C}}) \\
&= \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_2))(V_2, V_1, W_2, W_1) \circ (\varphi_2^{\mathcal{C}}(b_1)(V_1, V_2) \otimes \varphi_2^{\mathcal{C}}(b_1)(W_1, W_2)).
\end{aligned}$$

Hierbei wurde bei der dritten Umformung die Voraussetzung  $\tau_{W_1, V_2}^{\mathcal{C}} \circ \tau_{V_2, W_1}^{\mathcal{C}} = \text{id}_{V_2 \otimes W_1}$  verwendet.

Beim Induktionsschritt von  $n \geq 2$  auf  $n + 1$  erfolgt eine Fallunterscheidung. Für  $b_i$  mit  $i < n$  ergibt sich die Behauptung aus

$$\begin{aligned}
&\varphi_2^{\mathcal{C}}(b_i)(V_1 \otimes W_1, \dots, V_{n+1} \otimes W_{n+1}) \circ \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_{n+1}))(V_1, \dots, V_{n+1}, W_1, \dots, W_{n+1}) \\
&= \varphi_2^{\mathcal{C}}(b_i)(V_1 \otimes W_1, \dots, V_{n+1} \otimes W_{n+1}) \\
&\quad \circ \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_n) \otimes e_2)(V_1, \dots, V_n, W_1, \dots, W_n, V_{n+1}, W_{n+1}) \\
&\quad \circ \varphi_2^{\mathcal{C}}(d_{n+1, 2n+1})(V_1, \dots, V_{n+1}, W_1, \dots, W_{n+1}) \\
&\stackrel{\text{IV}}{=} \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_n) \otimes e_2)(V_1, \dots, V_{i+1}, V_i, \dots, V_n, W_1, \dots, W_{i+1}, W_i, \dots, W_n, V_{n+1}, W_{n+1}) \\
&\quad \circ (\varphi_2^{\mathcal{C}}(b_i)(V_1, \dots, V_n) \otimes \varphi_2^{\mathcal{C}}(b_i)(W_1, \dots, W_n) \otimes \text{id}_{V_{n+1} \otimes W_{n+1}}) \\
&\quad \circ (\text{id}_{V_1 \otimes \dots \otimes V_n} \otimes \tau_{V_{n+1}, W_1 \otimes \dots \otimes W_n}^{\mathcal{C}} \otimes \text{id}_{W_{n+1}}) \\
&= \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_n) \otimes e_2)(V_1, \dots, V_{i+1}, V_i, \dots, V_n, W_1, \dots, W_{i+1}, W_i, \dots, W_n, V_{n+1}, W_{n+1}) \\
&\quad \circ (\text{id}_{V_1 \otimes \dots \otimes V_{i+1} \otimes V_i \otimes \dots \otimes V_n} \otimes \tau_{V_{n+1}, W_1 \otimes \dots \otimes W_{i+1} \otimes W_i \otimes \dots \otimes W_n}^{\mathcal{C}} \otimes \text{id}_{W_{n+1}}) \\
&\quad \circ (\varphi_2^{\mathcal{C}}(b_i)(V_1, \dots, V_n) \otimes \text{id}_{V_{n+1}} \otimes \varphi_2^{\mathcal{C}}(b_i)(W_1, \dots, W_n) \otimes \text{id}_{W_{n+1}}) \\
&= \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_n) \otimes e_2)(V_1, \dots, V_{i+1}, V_i, \dots, V_n, W_1, \dots, W_{i+1}, W_i, \dots, W_n, V_{n+1}, W_{n+1}) \\
&\quad \circ \varphi_2^{\mathcal{C}}(d_{n+1, 2n+1})(V_1, \dots, V_{i+1}, V_i, \dots, V_{n+1}, W_1, \dots, W_{i+1}, W_i, \dots, W_{n+1}) \\
&\quad \circ (\varphi_2^{\mathcal{C}}(b_i)(V_1, \dots, V_{n+1}) \otimes \varphi_2^{\mathcal{C}}(b_i)(W_1, \dots, W_{n+1})) \\
&= \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_{n+1}))(V_1, \dots, V_{i+1}, V_i, \dots, V_{n+1}, W_1, \dots, W_{i+1}, W_i, \dots, W_{n+1}) \\
&\quad \circ (\varphi_2^{\mathcal{C}}(b_i)(V_1, \dots, V_{n+1}) \otimes \varphi_2^{\mathcal{C}}(b_i)(W_1, \dots, W_{n+1})).
\end{aligned}$$

Wird  $s_{n+1} = (e_2 \otimes s_n)\bar{u}_{2, n+2}$  anstelle von  $s_{n+1} = (s_n \otimes e_2)\bar{d}_{n+1, 2n+1}$  verwendet, so folgt die Behauptung für  $b_i$  mit  $i > 1$  ganz analog. Wegen  $n \geq 2$  ist damit die Aussage für alle Erzeuger  $b_i$  von  $B_{n+1}$  gezeigt.  $\square$

**Lemma 2.3.5.** *Seien  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $A$  eine Algebra in  $\mathcal{C}$  und  $M$  ein  $(IZ_n, A)$ -Bimodul. Ferner seien  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  Objekte aus  $\mathcal{D}$ , von denen mindestens eins in  $\mathcal{D}_s$  liegt. Dann ist der Isomorphismus*

$$h_{k,n}^{(3)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, M) : \coprod_m \mathcal{H}_{k,m}^A(\mathcal{F}, \mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{G}, M)) \longrightarrow \mathcal{H}_{k,n}^A(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}, M)$$

*$IZ_k$ -linkslinier.*

*Beweis.* Seien  $m, m_1, \dots, m_k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$  mit  $m_1 + \dots + m_k = m$  und  $n_1 + \dots + n_k = n$ . Ferner seien  $n_{ij} \in \mathbb{N}$  für  $1 \leq i \leq k$  und  $1 \leq j \leq m_i$  mit  $n_{i1} + \dots + n_{im_i} = n_i$ . Dann seien

$$\begin{aligned} p_{n_{11}, \dots, n_{km_k}}^{m_1, \dots, m_k} &: \mathcal{F}(m_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}(m_k) \otimes \mathcal{G}(n_{11}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{km_k}) \otimes M \\ &\longrightarrow \coprod_m \mathcal{H}_{k,m}^A(\mathcal{F}, \mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{G}, M)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} q_{n_{11}, \dots, n_{km_k}}^{m_1, \dots, m_k} &: \mathcal{F}(m_1) \otimes \mathcal{G}(n_{11}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{1m_1}) \otimes \dots \\ &\quad \otimes \mathcal{F}(m_k) \otimes \mathcal{G}(n_{k1}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{km_k}) \otimes M \\ &\longrightarrow \mathcal{F}(m_1) \otimes \mathcal{G}(n_{11}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{1m_1}) \otimes IZ_{n_1} \otimes \dots \\ &\quad \otimes \mathcal{F}(m_k) \otimes \mathcal{G}(n_{k1}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{km_k}) \otimes IZ_{n_k} \otimes M \\ &\longrightarrow \mathcal{H}_{k,n}^A(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}, M) \end{aligned}$$

die kanonischen Morphismen, die aus Differenzkernen und Inklusionen in Koproducte sowie im zweiten Fall auch aus Einheiten aufgebaut sind.

Ein Morphismus mit Quelle  $\coprod_m \mathcal{H}_{k,m}^A(\mathcal{F}, \mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{G}, M))$  bzw.  $\mathcal{H}_{k,n}^A(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}, M)$  ist dann eindeutig durch die Familie von Morphismen bestimmt, die man durch Vorschalten der  $p_{n_{11}, \dots, n_{km_k}}^{m_1, \dots, m_k}$  bzw.  $q_{n_{11}, \dots, n_{km_k}}^{m_1, \dots, m_k}$  aus dem gegebenen Morphismus gewinnt.

Damit ist  $h_{k,n}^{(3)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, M)$  durch

$$\begin{aligned} &h_{k,n}^{(3)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, M) \circ p_{n_{11}, \dots, n_{km_k}}^{m_1, \dots, m_k} \\ &= q_{n_{11}, \dots, n_{km_k}}^{m_1, \dots, m_k} \circ \left[ \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_k))(\mathcal{F}(m_1), \dots, \mathcal{F}(m_k), \mathcal{G}(n_{11}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{1m_1}), \dots, \right. \\ &\quad \left. \mathcal{G}(n_{k1}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{km_k})) \otimes \text{id}_M \right] \end{aligned}$$

charakterisiert.

Zur Beschreibung der  $IZ_k$ -Linksmodulstruktur von  $\coprod_m \mathcal{H}_{k,m}^A(\mathcal{F}, \mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{G}, M))$  und  $\mathcal{H}_{k,n}^A(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}, M)$  sei  $\sigma \in Z_k$ . Als Abkürzungen werden  $m'_i := m_{\sigma^{-1}(i)}$ ,  $n'_i := n_{\sigma^{-1}(i)}$  und  $n'_{ij} := n_{\sigma^{-1}(i),j}$  für  $1 \leq i \leq k$  und  $1 \leq j \leq m'_i$  verwendet. Dann gelten

$$\begin{aligned} &\tilde{\lambda}_{\coprod_m \mathcal{H}_{k,m}^A(\mathcal{F}, \mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{G}, M))}(\sigma) \circ p_{n_{11}, \dots, n_{km_k}}^{m_1, \dots, m_k} \\ &= p_{n'_{11}, \dots, n'_{km'_k}}^{m'_1, \dots, m'_k} \circ \left[ \overline{\varphi}_2^{\mathcal{C}}(\sigma)(\mathcal{F}(m_1), \dots, \mathcal{F}(m_k)) \otimes \overline{\varphi}_2^{\mathcal{C}}(\sigma)(\mathcal{G}(n_{11}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{1m_1}), \dots, \right. \\ &\quad \left. \mathcal{G}(n_{k1}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{km_k})) \otimes \tilde{\lambda}_M(\overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_k)) \right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\tilde{\lambda}_{\mathcal{H}_{k,n}^A(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}, M)}(\sigma) \circ q_{n_{11}, \dots, n_{km_k}}^{m_1, \dots, m_k} \\ &= q_{n'_{11}, \dots, n'_{km'_k}}^{m'_1, \dots, m'_k} \circ \left[ \overline{\varphi}_2^{\mathcal{C}}(\sigma)(\mathcal{F}(m_1) \otimes \mathcal{G}(n_{11}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{1m_1}), \dots, \right. \\ &\quad \left. \mathcal{F}(m_k) \otimes \mathcal{G}(n_{k1}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{km_k})) \otimes \tilde{\lambda}_M(\overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_k)) \right]. \end{aligned}$$



Die  $IZ_k$ -Linkslinearität von  $h_{k,n}^{(3)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, M)$  ergibt sich nun aus

$$\begin{aligned}
& h_{k,n}^{(3)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, M) \circ \tilde{\lambda}_{\coprod_m \mathcal{H}_{k,m}^A(\mathcal{F}, \mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{G}, M))}(\sigma) \circ p_{n_{11}, \dots, n_{km_k}}^{m_1, \dots, m_k} \\
&= h_{k,n}^{(3)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, M) \circ p_{n'_{11}, \dots, n'_{km'_k}}^{m'_1, \dots, m'_k} \circ \left[ \varphi_2^{\mathcal{C}}(\sigma)(\mathcal{F}(m_1), \dots, \mathcal{F}(m_k)) \right. \\
&\quad \otimes \overline{\varphi}_2^{\mathcal{C}}(\sigma)(\mathcal{G}(n_{11}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{1m_1}), \dots, \mathcal{G}(n_{k1}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{km_k})) \\
&\quad \left. \otimes \tilde{\lambda}_M(\overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_k)) \right] \\
&= q_{n'_{11}, \dots, n'_{km'_k}}^{m'_1, \dots, m'_k} \circ \left[ \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_k))(\mathcal{F}(m'_1), \dots, \mathcal{F}(m'_k), \mathcal{G}(n'_{11}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n'_{1m'_1}), \dots, \right. \\
&\quad \left. \mathcal{G}(n'_{k1}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n'_{km'_k})) \otimes \text{id}_M \right] \\
&\quad \circ \left[ \overline{\varphi}_2^{\mathcal{C}}(\sigma)(\mathcal{F}(m_1), \dots, \mathcal{F}(m_k)) \otimes \overline{\varphi}_2^{\mathcal{C}}(\sigma)(\mathcal{G}(n_{11}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{1m_1}), \dots, \right. \\
&\quad \left. \mathcal{G}(n_{k1}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{km_k})) \otimes \tilde{\lambda}_M(\overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_k)) \right] \\
&= q_{n'_{11}, \dots, n'_{km'_k}}^{m'_1, \dots, m'_k} \circ \left[ \overline{\varphi}_2^{\mathcal{C}}(\sigma)(\mathcal{F}(m_1) \otimes \mathcal{G}(n_{11}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{1m_1}), \dots, \right. \\
&\quad \left. \mathcal{F}(m_k) \otimes \mathcal{G}(n_{k1}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{km_k})) \otimes \tilde{\lambda}_M(\overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_k)) \right] \\
&\quad \circ \left[ \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_k))(\mathcal{F}(m_1), \dots, \mathcal{F}(m_k), \mathcal{G}(n_{11}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{1m_1}), \dots, \right. \\
&\quad \left. \mathcal{G}(n_{k1}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{km_k})) \otimes \text{id}_M \right] \\
&= \tilde{\lambda}_{\mathcal{H}_{k,n}^A(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}, M)}(\sigma) \circ q_{n_{11}, \dots, n_{km_k}}^{m_1, \dots, m_k} \circ \left[ \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_k))(\mathcal{F}(m_1), \dots, \mathcal{F}(m_k), \right. \\
&\quad \left. \mathcal{G}(n_{11}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{1m_1}), \dots, \mathcal{G}(n_{k1}) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_{km_k})) \otimes \text{id}_M \right] \\
&= \tilde{\lambda}_{\mathcal{H}_{k,n}^A(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}, M)}(\sigma) \circ h_{k,n}^{(3)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, M) \circ p_{n_{11}, \dots, n_{km_k}}^{m_1, \dots, m_k}
\end{aligned}$$

Neben den oben aufgeführten Formeln wurde bei der dritten Gleichung das vorherige Lemma verwendet. An dieser Stelle geht auch die Voraussetzung ein, dass eines der beiden Objekte  $\mathcal{F}$  oder  $\mathcal{G}$  in  $\mathcal{D}_s$  enthalten ist.  $\square$

**Korollar 2.3.6.** *Die Voraussetzungen seien wie im vorstehenden Lemma. Ferner sei  $\beta_{k,n}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, M)$  definiert durch*

$$\begin{aligned}
& \coprod_m \mathcal{H}_{k,m}(\mathcal{F}) \otimes_{IZ_m} \mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{G}, M) \xrightarrow{\coprod_m h_{k,m}^{(1)}(\mathcal{F}, IZ_m, \mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{G}, M))} \coprod_m \mathcal{H}_{k,m}^A(\mathcal{F}, IZ_m \otimes_{IZ_m} \mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{G}, M)) \\
& \xrightarrow{\coprod_m \mathcal{H}_{k,m}^A(\text{id}, \tilde{\lambda}_{\mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{G}, M)})} \coprod_m \mathcal{H}_{k,m}^A(\mathcal{F}, \mathcal{H}_{m,n}^A(\mathcal{G}, M)) \\
& \xrightarrow{h_{k,n}^{(3)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, M)} \mathcal{H}_{k,n}^A(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}, M).
\end{aligned}$$

Dann ist  $\beta_{k,n}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, M)$  ein Isomorphismus von  $(IZ_k, A)$ -Bimoduln, der natürlich in  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  und  $M$  ist.  $\square$

Damit sind alle Hilfsmittel bereitgestellt, um den Assoziativitätsisomorphismus angeben zu können. Die restlichen Daten für die monoidale Struktur auf  $\mathcal{D}_s$  sind nun wie folgt definiert.

1. Seien  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$  Objekte aus  $\mathcal{D}_s$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist die  $n$ -te Komponente des Assoziativitätsisomorphismus  $a_{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3}$  durch

$$\begin{aligned}
((\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2) \boxtimes \mathcal{F}_3)(n) &= \coprod_m \left( \coprod_k \mathcal{F}_1(k) \otimes_{IZ_k} \mathcal{H}_{k,m}(\mathcal{F}_2) \right) \otimes_{IZ_m} \mathcal{H}_{m,n}(\mathcal{F}_3) \\
&\longrightarrow \coprod_m \coprod_k (\mathcal{F}_1(k) \otimes_{IZ_k} \mathcal{H}_{k,m}(\mathcal{F}_2)) \otimes_{IZ_m} \mathcal{H}_{m,n}(\mathcal{F}_3) \\
&\longrightarrow \coprod_m \coprod_k \mathcal{F}_1(k) \otimes_{IZ_k} (\mathcal{H}_{k,m}(\mathcal{F}_2) \otimes_{IZ_m} \mathcal{H}_{m,n}(\mathcal{F}_3)) \\
&\longrightarrow \coprod_k \mathcal{F}_1(k) \otimes_{IZ_k} \left( \coprod_m \mathcal{H}_{k,m}(\mathcal{F}_2) \otimes_{IZ_m} \mathcal{H}_{m,n}(\mathcal{F}_3) \right) \\
&\longrightarrow \coprod_k \mathcal{F}_1(k) \otimes_{IZ_k} \mathcal{H}_{k,n}(\mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3) = (\mathcal{F}_1 \boxtimes (\mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3))(n)
\end{aligned}$$

gegeben, wobei der letzte Isomorphismus von den  $\beta_{k,n}(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, IZ_n)$  induziert wird.

2. Das Einsobjekt  $\mathcal{J}$  ist durch

$$\mathcal{J}(n) := \begin{cases} I, & \text{falls } n = 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erklärt. Hierbei ist jedes  $\mathcal{J}(n)$  auf eindeutige Weise ein  $IZ_n$ -Rechtsmodul.

3. Der Linkseinheitsisomorphismus für ein Objekt  $\mathcal{F}$  aus  $\mathcal{D}_s$  an der Stelle  $n \in \mathbb{N}$  ist durch

$$\begin{aligned}
l_{\mathcal{F}}(n) : (\mathcal{J} \boxtimes \mathcal{F})(n) &= \coprod_m \mathcal{J}(m) \otimes_{IZ_m} \mathcal{H}_{m,n}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{J}(1) \otimes_{IZ_1} (\mathcal{F}(n) \otimes_{IZ_n} IZ_n) \\
&\xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(n)
\end{aligned}$$

definiert. Dabei ergibt sich der erste Isomorphismus durch Weglassen aller Summanden des Koproduktes, die Nullobjekte sind; und der zweite Isomorphismus wird wegen  $\mathcal{J}(1) = I \cong IZ_1$  von den Moduloperationen induziert.

4. Ganz analog ist der Rechtseinheitsisomorphismus durch

$$\begin{aligned} r_{\mathcal{F}}(n) : (\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{J})(n) &= \coprod_m \mathcal{F}(m) \otimes_{IZ_m} \mathcal{H}_{m,n}(\mathcal{J}) \\ &\xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(n) \otimes_{IZ_n} \left( (\mathcal{J}(1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{J}(1)) \otimes_{IZ_1 \otimes \cdots \otimes IZ_1} IZ_n \right) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(n) \end{aligned}$$

gegeben.

**Bemerkung 2.3.7.** Seien  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$  Objekte aus  $\mathcal{D}_s$  sowie  $k, m, n, m_1, \dots, m_k, n_1, \dots, n_k$  natürliche Zahlen mit  $m_1 + \cdots + m_k = m$  und  $n_1 + \cdots + n_k = n$ . Des Weiteren seien  $n_{ij} \in \mathbb{N}$  für  $1 \leq i \leq k$  und  $1 \leq j \leq m_i$  mit  $n_{i1} + \cdots + n_{im_i} = n_i$ . Die kanonischen Morphismen

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_1(k) \otimes \mathcal{F}_2(m_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_2(m_k) \otimes \mathcal{F}_3(n_{11}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_3(n_{km_k}) \\ &\longrightarrow \mathcal{F}_1(k) \otimes \mathcal{F}_2(m_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_2(m_k) \otimes IZ_m \otimes \mathcal{F}_3(n_{11}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_3(n_{km_k}) \otimes IZ_n \\ &\longrightarrow \coprod_{\tilde{m}} \left( \coprod_{\tilde{k}} \mathcal{F}_1(\tilde{k}) \otimes_{IZ_{\tilde{k}}} \mathcal{H}_{\tilde{k}, \tilde{m}}(\mathcal{F}_2) \right) \otimes_{IZ_{\tilde{m}}} \mathcal{H}_{\tilde{m}, n}(\mathcal{F}_3) = ((\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2) \boxtimes \mathcal{F}_3)(n) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_1(k) \otimes \mathcal{F}_2(m_1) \otimes \mathcal{F}_3(n_{11}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_3(n_{1m_1}) \otimes \cdots \\ &\quad \otimes \mathcal{F}_2(m_k) \otimes \mathcal{F}_3(n_{k1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_3(n_{km_k}) \\ &\longrightarrow \mathcal{F}_1(k) \otimes \mathcal{F}_2(m_1) \otimes \mathcal{F}_3(n_{11}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_3(n_{1m_1}) \otimes IZ_{n_1} \otimes \cdots \\ &\quad \otimes \mathcal{F}_2(m_k) \otimes \mathcal{F}_3(n_{k1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_3(n_{km_k}) \otimes IZ_{n_k} \otimes IZ_n \\ &\longrightarrow \coprod_{\tilde{k}} \mathcal{F}_1(\tilde{k}) \otimes_{IZ_{\tilde{k}}} \mathcal{H}_{\tilde{k}, n}(\mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3) = (\mathcal{F}_1 \boxtimes (\mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3))(n) \end{aligned}$$

seien mit  $p_{(k; m_1, \dots, m_k; n_{11}, \dots, n_{km_k})}^{((\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2), \mathcal{F}_3)}$  bzw.  $p_{(k; m_1, \dots, m_k; n_{11}, \dots, n_{km_k})}^{(\mathcal{F}_1, (\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3))}$  bezeichnet. Dann ist der Assoziativitätsisomorphismus durch

$$\begin{aligned} &a_{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3}(n) \circ p_{(k; m_1, \dots, m_k; n_{11}, \dots, n_{km_k})}^{((\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2), \mathcal{F}_3)} \\ &= p_{(k; m_1, \dots, m_k; n_{11}, \dots, n_{km_k})}^{(\mathcal{F}_1, (\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3))} \circ \left( \text{id}_{\mathcal{F}_1(k)} \otimes \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_k))(\mathcal{F}_2(m_1), \dots, \mathcal{F}_2(m_k), \right. \\ &\quad \left. \mathcal{F}_3(n_{11}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_3(n_{1m_1}), \dots, \mathcal{F}_3(n_{k1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_3(n_{km_k})) \right) \end{aligned}$$

charakterisiert.

Das Pentagonaxiom in der Kategorie  $\mathcal{D}_s$  wird auf die folgende Identität von Zöpfen zurückgeführt. Stellt man die beiden Zöpfe graphisch dar, so ist ihre Übereinstimmung anschaulich klar. Formal ließe sich der Beweis durch eine Induktion nach  $k$  führen.

**Lemma 2.3.8.** *Seien  $k, l, l_1, \dots, l_k \in \mathbb{N}$  mit  $l_1 + \dots + l_k = l$ . Dann gilt*

$$\begin{aligned} & (\varphi_2^{\mathcal{B}}(L(s_k))(1, \dots, 1, 2l_1, \dots, 2l_k)) \cdot (e_k \otimes L(s_l)) \\ &= (e_1 \otimes L(s_{l_1}) \otimes \dots \otimes e_1 \otimes L(s_{l_k})) \cdot (\varphi_2^{\mathcal{B}}(L(s_k))(l_1 + 1, \dots, l_k + 1, l_1, \dots, l_k)) \\ & \quad \cdot (\varphi_2^{\mathcal{B}}(L(s_k))(1, \dots, 1, l_1, \dots, l_k) \otimes e_l) \end{aligned}$$

in  $B_{k+2l}$ .  $\square$

**Satz 2.3.9.**  *$(\mathcal{D}_s, \boxtimes, \mathcal{J}, a, l, r)$  ist eine monoidale Kategorie.*

*Beweis.* Es ist klar, dass  $a, l$  und  $r$  natürliche Isomorphismen sind. Somit sind noch das Dreiecks- und Pentagonaxiom zu zeigen.

In diesem Beweis seien  $k, l, m, n$  sowie  $l_i, m_i, n_i, m_{ij}, n_{ij}, n_{ijr}$  für  $1 \leq i \leq k$ ,  $1 \leq j \leq l_i$  und  $1 \leq r \leq m_{ij}$  natürliche Zahlen. Für diese gelte stets  $l_1 + \dots + l_k = l$ ,  $m_1 + \dots + m_k = m$ ,  $n_1 + \dots + n_k = n$ ,  $m_{i1} + \dots + m_{il_i} = m_i$ ,  $n_{i1} + \dots + n_{il_i} = n_i$  und  $n_{ij1} + \dots + n_{ijm_{ij}} = n_{ij}$ .

Seien  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  Objekte aus  $\mathcal{D}_s$ . Dann ist zum Nachweis des Dreiecksaxioms  $(\text{id}_{\mathcal{F}} \boxtimes l_{\mathcal{G}})(m) \circ a_{\mathcal{F}, \mathcal{J}, \mathcal{G}}(m) = (r_{\mathcal{F}} \boxtimes \text{id}_{\mathcal{G}})(m)$  zu zeigen. Dazu genügt es, diese Gleichung nach Vorschalten von  $p_{((\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathcal{G})}^{(k; l_1, \dots, l_k; m_{11}, \dots, m_{kl_k})}$  zu beweisen. Im Fall  $l_1 = \dots = l_k = 1$  gelten  $k = l$  und  $\mathcal{J}(l_i) = I$ , woraus

$$\begin{aligned} & (\text{id}_{\mathcal{F}} \boxtimes l_{\mathcal{G}})(m) \circ a_{\mathcal{F}, \mathcal{J}, \mathcal{G}}(m) \circ p_{((\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathcal{G})}^{(k; l_1, \dots, l_k; m_{11}, \dots, m_{kl_k})} \\ &= p_{(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^{(k; m_1, \dots, m_k)} = (r_{\mathcal{F}} \boxtimes \text{id}_{\mathcal{G}})(m) \circ p_{((\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathcal{G})}^{(k; l_1, \dots, l_k; m_{11}, \dots, m_{kl_k})} \end{aligned}$$

folgt. Ansonsten ist die Quelle ein Nullobjekt, und die beiden Abbildungen sind auch in diesem Fall gleich.

Zum Beweis des Pentagonaxioms seien  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_4$  Objekte aus  $\mathcal{D}_s$ . Dann ist

$$\begin{aligned} & a_{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \boxtimes \mathcal{F}_4}(n) \circ a_{\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4}(n) \\ &= (\text{id}_{\mathcal{F}_1} \boxtimes a_{\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4})(n) \circ a_{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4}(n) \circ (a_{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3} \boxtimes \text{id}_{\mathcal{F}_4})(n) \end{aligned}$$

zu zeigen. Es genügt, diese Gleichung nach Vorschalten der kanonischen Morphismen

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_1(k) \otimes \mathcal{F}_2(l_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_2(l_k) \otimes \mathcal{F}_3(m_{11}) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_3(m_{kl_k}) \\ & \quad \otimes \mathcal{F}_4(n_{111}) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_4(n_{kl_k m_{kl_k}}) \\ & \longrightarrow \mathcal{F}_1(k) \otimes \mathcal{F}_2(l_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_2(l_k) \otimes IZ_l \otimes \mathcal{F}_3(m_{11}) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_3(m_{kl_k}) \otimes IZ_m \\ & \quad \otimes \mathcal{F}_4(n_{111}) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_4(n_{kl_k m_{kl_k}}) \otimes IZ_n \\ & \longrightarrow \prod_{\tilde{m}} \left( \prod_{\tilde{l}} \left( \prod_{\tilde{k}} \mathcal{F}_1(\tilde{k}) \otimes_{IZ_{\tilde{k}}} \mathcal{H}_{\tilde{k}, \tilde{l}}(\mathcal{F}_2) \right) \otimes_{IZ_{\tilde{l}}} \mathcal{H}_{\tilde{l}, \tilde{m}}(\mathcal{F}_3) \right) \otimes_{IZ_{\tilde{m}}} \mathcal{H}_{\tilde{m}, n}(\mathcal{F}_4) \\ & = \left( ((\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2) \boxtimes \mathcal{F}_3) \boxtimes \mathcal{F}_4 \right)(n) \end{aligned}$$

zu beweisen. Wird  $G_{ij} := \mathcal{F}_4(n_{ij1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_4(n_{ijm_{ij}})$  für  $1 \leq i \leq k$  und  $1 \leq j \leq l_i$  gesetzt, so läuft dies auf den Nachweis von

$$\begin{aligned}
& \left[ \text{id}_{\mathcal{F}_1(k)} \otimes \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_k))(\mathcal{F}_2(l_1), \dots, \mathcal{F}_2(l_k), \mathcal{F}_3(m_{11}) \otimes G_{11} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_3(m_{1l_1}) \otimes G_{1l_1}, \right. \\
& \quad \left. \dots, \mathcal{F}_3(m_{k1}) \otimes G_{k1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_3(m_{kl_k}) \otimes G_{kl_k}) \right] \\
& \circ \left[ \text{id}_{\mathcal{F}_1(k)} \otimes \text{id}_{\mathcal{F}_2(l_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_2(l_k)} \otimes \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_l))(\mathcal{F}_3(m_{11}), \dots, \mathcal{F}_3(m_{kl_k}), G_{11}, \dots, G_{kl_k}) \right] \\
= & \left[ \text{id}_{\mathcal{F}_1(k)} \otimes \text{id}_{\mathcal{F}_2(l_1)} \otimes \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_{l_1}))(\mathcal{F}_3(m_{11}), \dots, \mathcal{F}_3(m_{1l_1}), G_{11}, \dots, G_{1l_1}) \otimes \cdots \right. \\
& \quad \left. \otimes \text{id}_{\mathcal{F}_2(l_k)} \otimes \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_{l_k}))(\mathcal{F}_3(m_{k1}), \dots, \mathcal{F}_3(m_{kl_k}), G_{k1}, \dots, G_{kl_k}) \right] \\
& \circ \left[ \text{id}_{\mathcal{F}_1(k)} \otimes \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_k))(\mathcal{F}_2(l_1) \otimes \mathcal{F}_3(m_{11}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_3(m_{1l_1}), \dots, \right. \\
& \quad \left. \mathcal{F}_2(l_k) \otimes \mathcal{F}_3(m_{k1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_3(m_{kl_k}), G_{11} \otimes \cdots \otimes G_{1l_1}, \dots, G_{k1} \otimes \cdots \otimes G_{kl_k}) \right] \\
& \circ \left[ \text{id}_{\mathcal{F}_1(k)} \otimes \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_k))(\mathcal{F}_2(l_1), \dots, \mathcal{F}_2(l_k), \mathcal{F}_3(m_{11}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_3(m_{1l_1}), \right. \\
& \quad \left. \dots, \mathcal{F}_3(m_{k1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_3(m_{kl_k})) \otimes \text{id}_{G_{11} \otimes \cdots \otimes G_{kl_k}} \right]
\end{aligned}$$

hinaus. Unter Berücksichtigung der Eigenschaften von  $\varphi^{\mathcal{C}}$ , wie zum Beispiel Formel (2.8), ist dies eine unmittelbare Folgerung aus Lemma 2.3.8.  $\square$

**Definition 2.3.10.** Eine  $\mathcal{Z}$ -Operade über  $\mathcal{C}$  ist ein Monoid in der monoidalen Kategorie  $\mathcal{D}_s = \mathcal{C}_s^{\mathcal{Z}^{\text{op}}}$ , und die Morphismen von Operaden sind durch die Monoidhomomorphismen gegeben, d.h., die Kategorie  $\text{Op}(\mathcal{C})$  der Operaden über  $\mathcal{C}$  ist gleich der Kategorie  $\text{Mon}(\mathcal{D}_s)$  der Monoide in  $\mathcal{D}_s$ .

**Bemerkung 2.3.11.** Für ein Objekt  $\mathcal{F}$  aus  $\mathcal{D}_s$  ist ein Morphismus  $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{F}$  schon durch die Einskomponente bestimmt. Zudem kann ein Morphismus  $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  entsprechend Bemerkung 2.3.3 durch eine Familie von Morphismen beschrieben werden. Damit ergibt sich die folgende alternative Definition für eine Operade.

Eine  $\mathcal{Z}$ -Operade über  $\mathcal{C}$  besteht aus

- einer Familie  $\mathfrak{D} = (\mathfrak{D}(n))_{n \in \mathbb{N}}$  von Objekten aus  $\mathcal{C}_s$ , bei der jedes  $\mathfrak{D}(n)$  ein  $I\mathcal{Z}_n$ -Rechtsmodul ist,
- einem  $\mathcal{C}$ -Morphismus  $\eta : I \rightarrow \mathfrak{D}(1)$  sowie
- einer Familie  $\mu_{(m; n_1, \dots, n_m)} : \mathfrak{D}(m) \otimes \mathfrak{D}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{D}(n_m) \longrightarrow \mathfrak{D}(n)$  von  $\mathcal{C}$ -Morphismen für  $m, n, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \cdots + n_m = n$ .

Von diesen Daten wird verlangt, dass sie die folgenden Axiome erfüllen.

1. Äquivarianzaxiome: Seien  $\gamma_i \in Z_{n_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$  und  $\gamma \in Z_m$ . Als Abkürzung wird  $n'_i := n_{\bar{\gamma}^{-1}(i)}$  gesetzt. Dann gelten

$$\begin{aligned} & \mu_{(m;n_1, \dots, n_m)} \circ (\text{id}_{\mathfrak{D}(m)} \otimes \tilde{\rho}_{\mathfrak{D}(n_1)}(\gamma_1) \otimes \cdots \otimes \tilde{\rho}_{\mathfrak{D}(n_m)}(\gamma_m)) \\ &= \tilde{\rho}_{\mathfrak{D}(n)}(\gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_m) \circ \mu_{(m;n_1, \dots, n_m)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \mu_{(m;n_1, \dots, n_m)} \circ (\tilde{\rho}_{\mathfrak{D}(m)}(\gamma) \otimes \text{id}_{\mathfrak{D}(n_1)} \otimes \cdots \otimes \text{id}_{\mathfrak{D}(n_m)}) \\ &= \tilde{\rho}_{\mathfrak{D}(n)}(\overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\gamma)(n_1, \dots, n_m)) \circ \mu_{(m;n'_1, \dots, n'_m)} \\ & \circ (\text{id}_{\mathfrak{D}(m)} \otimes \overline{\varphi}_2^{\mathcal{C}}(\gamma)(\mathfrak{D}(n_1), \dots, \mathfrak{D}(n_m))). \end{aligned}$$

2. Einsaxiome: Es gelten

$$\mu_{(m;1, \dots, 1)} \circ (\text{id}_{\mathfrak{D}(m)} \otimes \eta^{\otimes m}) = \text{id}_{\mathfrak{D}(m)}$$

und

$$\mu_{(1;n)} \circ (\eta \otimes \text{id}_{\mathfrak{D}(n)}) = \text{id}_{\mathfrak{D}(n)}.$$

3. Assoziativität: Seien  $k, m, n, m_i, n_i, n_{ij} \in \mathbb{N}$  für  $1 \leq i \leq k$  und  $1 \leq j \leq m_i$  mit  $m_1 + \cdots + m_k = m$ ,  $n_1 + \cdots + n_k = n$  und  $n_{i1} + \cdots + n_{im_i} = n_i$ . Dann ist

$$\begin{aligned} & \mu_{(m;n_{11}, \dots, n_{km_k})} \circ (\mu_{(k;m_1, \dots, m_k)} \otimes \text{id}_{\mathfrak{D}(n_{11}) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{D}(n_{km_k})}) \\ &= \mu_{(k;n_1, \dots, n_k)} \circ (\text{id}_{\mathfrak{D}(k)} \otimes \mu_{(m_1;n_{11}, \dots, n_{1m_1})} \otimes \cdots \otimes \mu_{(m_k;n_{k1}, \dots, n_{km_k})}) \\ & \circ (\text{id}_{\mathfrak{D}(k)} \otimes \overline{\varphi}_2^{\mathcal{C}}(L(s_k))(\mathfrak{D}(m_1), \dots, \mathfrak{D}(m_k), \\ & \quad \mathfrak{D}(n_{11}) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{D}(n_{1m_1}), \dots, \mathfrak{D}(n_{k1}) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{D}(n_{km_k}))). \end{aligned}$$

In dieser konkreten Beschreibungsform besteht ein Operadenmorphismus

$$\varphi : (\mathfrak{D}, \mu^{\mathfrak{D}}, \eta^{\mathfrak{D}}) \rightarrow (\mathfrak{P}, \mu^{\mathfrak{P}}, \eta^{\mathfrak{P}})$$

aus einer Familie  $(\varphi(n) : \mathfrak{D}(n) \rightarrow \mathfrak{P}(n))_{n \in \mathbb{N}}$  von Morphismen, für die gelten:

1.  $\varphi(n)$  ist  $IZ_n$ -rechtslinear.
2.  $\varphi(1) \circ \eta^{\mathfrak{D}} = \eta^{\mathfrak{P}}$ .
3. Für alle  $m, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \cdots + n_m = n$  ist

$$\varphi(n) \circ \mu_{(m;n_1, \dots, n_m)}^{\mathfrak{D}} = \mu_{(m;n_1, \dots, n_m)}^{\mathfrak{P}} \circ (\varphi(m) \otimes \varphi(n_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(n_m)).$$

Ein erstes Beispiel für eine Operade liefert das Zopfgruppensystem  $\mathcal{Z} = (Z_n)$  selbst. Diese Operade heißt assoziative Operade und wird mit  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\mathcal{Z}}$  bezeichnet. Im Fall  $\mathcal{Z} = \mathcal{B}_m$  wird auch die Kurzschreibweise  $\mathfrak{A}_m$  verwendet. Diese Operade beschreibt die Kategorie der assoziativen Algebren.

**Satz 2.3.12.** *Durch die folgenden Daten ist eine Operade  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\mathcal{Z}} = (\mathfrak{A}, \mu^{\mathfrak{A}}, \eta^{\mathfrak{A}})$  definiert.*

1. Für  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\mathfrak{A}(n) := IZ_n$  der reguläre  $IZ_n$ -Rechtsmodul.
2.  $\eta^{\mathfrak{A}} := \eta_{IZ_1} : I \rightarrow IZ_1$ .
3. Für  $m, n, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \dots + n_m = n$  sei

$$\mu_{(m;n_1, \dots, n_m)}^{\mathfrak{A}} : IZ_m \otimes IZ_{n_1} \otimes \dots \otimes IZ_{n_m} \longrightarrow IZ_n$$

derjenige Morphismus, der von der Mengenabbildung

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{(m;n_1, \dots, n_m)}^{\mathfrak{A}} : Z_m \times Z_{n_1} \times \dots \times Z_{n_m} &\longrightarrow Z_n, \\ (\sigma, \varrho_1, \dots, \varrho_m) &\mapsto \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_m) \cdot (\varrho_1 \otimes \dots \otimes \varrho_m) \end{aligned}$$

induziert wird.

*Beweis.* Seien  $m, n, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \dots + n_m = n$ . Des Weiteren seien  $\sigma, \gamma \in Z_m$  und  $\varrho_i, \gamma_i \in Z_{n_i}$  für  $i = 1, \dots, m$ . Als Abkürzungen werden  $n'_i := n_{\overline{\gamma}^{-1}(i)}$  und  $\varrho'_i := \varrho_{\overline{\gamma}^{-1}(i)}$  verwendet. Dann sind wegen

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{(m;n_1, \dots, n_m)}^{\mathfrak{A}}(\sigma, \varrho_1 \gamma_1, \dots, \varrho_m \gamma_m) &= \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_m) \cdot (\varrho_1 \gamma_1 \otimes \dots \otimes \varrho_m \gamma_m) \\ &= \tilde{\mu}_{(m;n_1, \dots, n_m)}^{\mathfrak{A}}(\sigma, \varrho_1, \dots, \varrho_m) \cdot (\gamma_1 \otimes \dots \otimes \gamma_m) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{(m;n_1, \dots, n_m)}^{\mathfrak{A}}(\sigma \gamma, \varrho_1, \dots, \varrho_m) &= \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma \gamma)(n_1, \dots, n_m) \cdot (\varrho_1 \otimes \dots \otimes \varrho_m) \\ &= \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n'_1, \dots, n'_m) \cdot \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\gamma)(n_1, \dots, n_m) \cdot (\varrho_1 \otimes \dots \otimes \varrho_m) \\ &= \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n'_1, \dots, n'_m) \cdot (\varrho'_1 \otimes \dots \otimes \varrho'_m) \cdot \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\gamma)(n_1, \dots, n_m) \\ &= \tilde{\mu}_{(m;n'_1, \dots, n'_m)}^{\mathfrak{A}}(\sigma, \varrho'_1, \dots, \varrho'_m) \cdot \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\gamma)(n_1, \dots, n_m) \end{aligned}$$

die Äquivarianzaxiome erfüllt.

Die beiden Einsaxiome ergeben sich aus

$$\tilde{\mu}_{(m;1, \dots, 1)}^{\mathfrak{A}}(\sigma, e_1, \dots, e_1) = \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(1, \dots, 1) \cdot (e_1 \otimes \dots \otimes e_1) = \sigma$$

und

$$\tilde{\mu}_{(1;m)}^{\mathfrak{A}}(e_1, \sigma) = \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(e_1)(m) \cdot \sigma = \sigma.$$

Zum Nachweis der Assoziativität seien  $k, m, n, m_i, n_i, n_{ij} \in \mathbb{N}$  sowie  $\sigma \in Z_k$ ,  $\gamma_i \in Z_{m_i}$  und  $\varrho_{ij} \in Z_{n_{ij}}$  für  $1 \leq i \leq k$  und  $1 \leq j \leq m_i$ . Es gelten  $m_1 + \dots + m_k = m$ ,  $n_1 + \dots + n_k = n$  und  $n_{i1} + \dots + n_{im_i} = n_i$ . Dann liefert

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{(m;n_{11}, \dots, n_{km_k})}^{\mathfrak{A}}(\tilde{\mu}_{(k;m_1, \dots, m_k)}^{\mathfrak{A}}(\sigma, \gamma_1, \dots, \gamma_k), \varrho_{11}, \dots, \varrho_{km_k}) \\ = \left( \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(m_1, \dots, m_k) \cdot (\gamma_1 \otimes \dots \otimes \gamma_k))(n_{11}, \dots, n_{km_k}) \right) \cdot (\varrho_{11} \otimes \dots \otimes \varrho_{km_k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_k) \cdot \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\gamma_1 \otimes \dots \otimes \gamma_k)(n_{11}, \dots, n_{km_k}) \cdot (\varrho_{11} \otimes \dots \otimes \varrho_{km_k}) \\
&= \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_k) \cdot \left[ \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\gamma_1)(n_{11}, \dots, n_{1m_1}) \otimes \dots \otimes \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\gamma_k)(n_{k1}, \dots, n_{km_k}) \right] \\
&\quad \cdot (\varrho_{11} \otimes \dots \otimes \varrho_{km_k}) \\
&= \tilde{\mu}_{(k;n_1, \dots, n_k)}^{\mathfrak{A}}(\sigma, \tilde{\mu}_{(m_1;n_{11}, \dots, n_{1m_1})}^{\mathfrak{A}}(\gamma_1, \varrho_{11}, \dots, \varrho_{1m_1}), \dots, \\
&\quad \tilde{\mu}_{(m_k;n_{k1}, \dots, n_{km_k})}^{\mathfrak{A}}(\gamma_k, \varrho_{k1}, \dots, \varrho_{km_k}))
\end{aligned}$$

die Assoziativität von  $\mu^{\mathfrak{A}}$ . □

## 2.4 Algebren über Operaden und zugehörige Monaden

Für die Definition von Algebren über einer Operade wird die Grundkategorie  $\mathcal{C}$  zu einer  $\mathcal{D}_s$ -Linkskategorie gemacht. Hierzu wird zunächst die Kategorie  $\mathcal{D}$  mit der Struktur einer  $\mathcal{D}_s$ -Linkskategorie versehen.

**Definition 2.4.1.** Sei  $(\mathcal{A}, \otimes, I, a, l, r)$  eine monoidale Kategorie. Eine  $\mathcal{A}$ -Linkskategorie ist ein Tupel  $(\mathcal{M}, \odot, \alpha, \lambda)$  bestehend aus einer Kategorie  $\mathcal{M}$ , einem Bifunktor  $\odot : \mathcal{A} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  sowie natürlichen Isomorphismen

$$\alpha : \odot(\otimes \times \text{id}_{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\sim} \odot(\text{id}_{\mathcal{A}} \times \odot) \quad \text{und} \quad \lambda : \odot(I \times \text{id}_{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{M}},$$

so dass für alle Objekte  $A, B, C \in \mathcal{A}$  und  $M \in \mathcal{M}$  das Pentagonaxiom

$$(\text{id}_A \odot \alpha_{B,C,M}) \circ \alpha_{A,B \otimes C, M} \circ (a_{A,B,C} \odot \text{id}_M) = \alpha_{A,B,C \odot M} \circ \alpha_{A \otimes B, C, M} \quad (2.14)$$

und das Dreiecksaxiom

$$(\text{id}_A \odot \lambda_M) \circ \alpha_{A,I,M} = r_A \odot \text{id}_M \quad (2.15)$$

erfüllt sind.

**Bemerkung 2.4.2.** Sei  $\mathcal{M}$  eine  $\mathcal{A}$ -Linkskategorie.

1. Dann gilt für alle Objekte  $A \in \mathcal{A}$  und  $M \in \mathcal{M}$

$$\lambda_{A \odot M} \circ \alpha_{I,A,M} = l_A \odot \text{id}_M. \quad (2.16)$$

Diese Behauptung lässt sich genauso beweisen wie die entsprechende Aussage für monoidale Kategorien. Vergleiche hierzu [Kas95, Lemma XI.2.2]. Somit ist die obige Definition äquivalent zu derjenigen aus [Par77].

2. Ist  $A$  ein Monoid in  $\mathcal{A}$ , so lässt sich auf natürliche Weise der Begriff eines  $A$ -Linksmoduls in  $\mathcal{M}$  definieren. Die Kategorie dieser Moduln werde wie üblich mit  ${}_A\mathcal{M}$  bezeichnet.



Im vorherigen Abschnitt wurde für die Kategorie  $\mathcal{D}_s$  eine monoidale Struktur eingeführt. Diese monoidale Struktur kann nicht auf ganz  $\mathcal{D}$  erklärt werden, da zur Definition des Assoziativitätsisomorphismus Lemma 2.3.5 benötigt wird, für das eine zusätzliche Voraussetzung notwendig ist. Allerdings kann der Assoziativitätsisomorphismus  $a_{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3}$  schon dann wie vorher definiert werden, wenn  $\mathcal{F}_2$  oder  $\mathcal{F}_3$  in  $\mathcal{D}_s$  enthalten ist. Alle übrigen Strukturdaten sowie der Beweis, dass hierdurch eine monoidale Kategorie gegeben ist, unterliegen dagegen keiner Einschränkung. Somit kann mit denselben Formeln wie vorher die Kategorie  $\mathcal{D}$  zu einer  $\mathcal{D}_s$ -Linkskategorie gemacht werden.

Sei  $\mathcal{D}_0$  diejenige volle Unterkategorie von  $\mathcal{D}$ , die alle Objekte  $\mathcal{G}$  aus  $\mathcal{D}$  enthält, bei denen die  $\mathcal{G}(n)$  für  $n > 0$  Nullobjekte sind. Dann ist für  $n > 0$  und Objekte  $\mathcal{F}$  aus  $\mathcal{D}_s$  und  $\mathcal{G}$  aus  $\mathcal{D}_0$

$$(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})(n) = \coprod_m \mathcal{F}(m) \otimes_{IZ_m} \coprod_{n_1 + \dots + n_m = n} (\mathcal{G}(n_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_m)) \otimes_{IZ_{n_1} \otimes \dots \otimes IZ_{n_m}} IZ_n$$

ein Nullobjekt, da jeder Summand des Koproduktes ein Nullobjekt in Gestalt von  $\mathcal{G}(n_i)$  für ein  $i$  mit  $n_i > 0$  enthält. Also ist  $\mathcal{D}_0$  eine  $\mathcal{D}_s$ -Unterkategorie von  $\mathcal{D}$ . Ferner kann angenommen werden, dass

$$(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})(0) = \coprod_m \mathcal{F}(m) \otimes_{IZ_m} \mathcal{G}(0)^{\otimes m}$$

gilt.

Die Kategorie  $\mathcal{C}$  ist nun offensichtlich äquivalent zur Kategorie  $\mathcal{D}_0$ . Somit überträgt sich die Struktur einer  $\mathcal{D}_s$ -Linkskategorie von  $\mathcal{D}_0$  auf  $\mathcal{C}$ .

**Satz 2.4.3.** *Die Kategorie  $\mathcal{C}$  ist mit folgenden Daten eine  $\mathcal{D}_s$ -Linkskategorie:*

1. Der Bifunktor  $\odot : \mathcal{D}_s \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  ist auf Objekten  $\mathcal{F}$  aus  $\mathcal{D}_s$  und  $V$  aus  $\mathcal{C}$  durch

$$\mathcal{F} \odot V := \coprod_m \mathcal{F}(m) \otimes_{IZ_m} V^{\otimes m}$$

erklärt, und für Morphismen ist  $\odot$  ganz analog definiert.

2. Der Einheitsisomorphismus ist für ein Objekt  $V$  aus  $\mathcal{C}$  durch

$$\lambda_V : \mathcal{J} \odot V = \coprod_m \mathcal{J}(m) \otimes_{IZ_m} V^{\otimes m} \xrightarrow{\cong} \mathcal{J}(1) \otimes_{IZ_1} V \xrightarrow{\cong} V$$

gegeben.

3. Für Objekte  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  aus  $\mathcal{D}_s$  sowie  $V$  aus  $\mathcal{C}$  ist der Assoziativitätsisomorphis-

mus  $\alpha_{\mathcal{F},\mathcal{G},V}$  durch die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}(m) \otimes \mathcal{G}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{G}(n_m) \otimes V^{\otimes n} & \xrightarrow{p_{(m;n_1,\dots,n_m)}^{((\mathcal{F},\mathcal{G}),V)}} & (\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \odot V \\
\downarrow \text{id}_{\mathcal{F}(m)} \otimes \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_m))(\mathcal{G}(n_1), \dots, \mathcal{G}(n_m), V^{\otimes n_1}, \dots, V^{\otimes n_m}) & & \downarrow \alpha_{\mathcal{F},\mathcal{G},V} \\
\mathcal{F}(m) \otimes \mathcal{G}(n_1) \otimes V^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{G}(n_m) \otimes V^{\otimes n_m} & \xrightarrow{p_{(m;n_1,\dots,n_m)}^{(\mathcal{F},(\mathcal{G},V))}} & \mathcal{F} \odot (\mathcal{G} \odot V)
\end{array}$$

für  $m, n, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \cdots + n_m = n$  charakterisiert. Hierbei sind die beiden waagerechten Morphismen die kanonischen Morphismen.  $\square$

**Definition 2.4.4.** Sei  $\mathfrak{D}$  eine Operade über  $\mathcal{C}$ . Die Kategorie der  $\mathfrak{D}$ -Algebren ist durch die Kategorie  ${}_{\mathfrak{D}}\mathcal{C}$  der  $\mathfrak{D}$ -Linksmoduln in  $\mathcal{C}$  gegeben.

**Bemerkung 2.4.5.** Sei  $(\mathcal{A}, I, \otimes, a, l, r)$  eine monoidale Kategorie und  $(\mathcal{M}, \odot, \alpha, \lambda)$  eine  $\mathcal{A}$ -Linkskategorie. Dann induziert der Bifunktor  $\odot : \mathcal{A} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  einen Funktor  $\mathcal{E} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}^{\mathcal{M}} = \text{Funk}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ . Werden zudem  $\varphi_0 : \text{id}_{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{E}(I)$  und  $\varphi_2(A, B) : \mathcal{E}(A) \circ \mathcal{E}(B) \rightarrow \mathcal{E}(A \otimes B)$  für Objekte  $A, B \in \mathcal{A}$  durch

$$\varphi_0(M) := \lambda_M^{-1} : M \rightarrow I \odot M$$

bzw.

$$\varphi_2(A, B)(M) := \alpha_{A,B,M}^{-1} : A \odot (B \odot M) \rightarrow (A \otimes B) \odot M$$

erklärt, so ist  $(\mathcal{E}, \varphi_0, \varphi_2)$  ein Tensorfunktorkomplex.

Damit induziert  $\mathcal{E}$  einen Funktor von der Kategorie der Monoide in  $\mathcal{A}$  in die Kategorie der Monaden über  $\mathcal{M}$ . Jedem Monoid  $(A, \mu_A, \eta_A)$  in  $\mathcal{A}$  wird dabei die Monade

$$(\mathcal{E}(A) = A \odot -, \mu_{\mathcal{E}(A)} := \mathcal{E}(\mu_A) \circ \varphi_2(A, A), \eta_{\mathcal{E}(A)} := \mathcal{E}(\eta_A) \circ \varphi_0)$$

zugeordnet. Konkret ist also

$$\eta_{\mathcal{E}(A)}(M) = (\eta_A \odot \text{id}_M) \circ \lambda_M^{-1} : M \rightarrow A \odot M$$

und

$$\mu_{\mathcal{E}(A)}(M) = (\mu_A \odot \text{id}_M) \circ \alpha_{A,A,M}^{-1} : A \odot (A \odot M) \rightarrow A \odot M$$

für Objekte  $M$  aus  $\mathcal{M}$ . Ferner stimmt die Kategorie der  $A$ -Linksmoduln in  $\mathcal{M}$  mit der Kategorie der Algebren über der Monade  $\mathcal{E}(A)$  überein.

Wendet man diese Bemerkung auf die  $\mathcal{D}_s$ -Linkskategorie  $\mathcal{C}$  an, so ist damit insbesondere erklärt, was die zugehörige Monade einer Operade ist. Für die assoziative Operade  $\mathfrak{A}$  ist die zugehörige Monade  $\mathcal{E}(\mathfrak{A})$  durch die folgenden Daten beschrieben.

1. Der Endofunktor  $\mathcal{E}(\mathfrak{A}) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  ist auf Objekten durch

$$V \mapsto \mathfrak{A} \odot V = \coprod_m IZ_m \otimes_{IZ_m} V^{\otimes m}$$

gegeben und ganz entsprechend für Morphismen erklärt.

2. Auf einem Objekt  $V$  aus  $\mathcal{C}$  ist die Einheit  $\eta_{\mathcal{E}(\mathfrak{A})}$  durch

$$V \xrightarrow{\eta_{IZ_1} \otimes \text{id}_V} IZ_1 \otimes V \xrightarrow{p_1^{(\mathfrak{A},V)}} \mathfrak{A} \odot V$$

definiert. Hierbei bezeichnet  $p_m^{(\mathfrak{A},V)} : IZ_m \otimes V^{\otimes m} \rightarrow \mathfrak{A} \odot V$  den kanonischen Morphismus, d.h.,  $p_m^{(\mathfrak{A},V)}$  ist gleich der Verkettung einer Inklusion in ein Koprodukt mit einem Differenzkernmorphimus.

3. Die Multiplikation  $\mu_{\mathcal{E}(\mathfrak{A})}(V) = (\mu^{\mathfrak{A}} \odot \text{id}_V) \circ \alpha_{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}, V}^{-1}$  ist durch die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} IZ_m \otimes IZ_{n_1} \otimes V^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes IZ_{n_m} \otimes V^{\otimes n_m} & \xrightarrow{p_{(m;n_1, \dots, n_m)}^{(\mathfrak{A}, (\mathfrak{A}, V))}} & \mathfrak{A} \odot (\mathfrak{A} \odot V) \\ \downarrow \text{id}_{IZ_m} \otimes \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_m))(IZ_{n_1}, \dots, IZ_{n_m}, V^{\otimes n_1}, \dots, V^{\otimes n_m})^{-1} & & \downarrow \alpha_{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}, V}^{-1} \\ IZ_m \otimes IZ_{n_1} \otimes \cdots \otimes IZ_{n_m} \otimes V^{\otimes n} & \xrightarrow{p_{(m;n_1, \dots, n_m)}^{((\mathfrak{A}, \mathfrak{A}), V)}} & (\mathfrak{A} \boxtimes \mathfrak{A}) \odot V \\ \downarrow \mu_{(m;n_1, \dots, n_m)}^{\mathfrak{A}} \otimes \text{id}_{V^{\otimes n}} & & \downarrow \mu^{\mathfrak{A}} \odot \text{id}_V \\ IZ_n \otimes V^{\otimes n} & \xrightarrow{p_n^{(\mathfrak{A}, V)}} & \mathfrak{A} \odot V \end{array}$$

für  $m, n, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \cdots + n_m = n$  charakterisiert.

Die assoziative Monade  $\mathbf{A} = (\mathcal{T}, \mu_{\mathbf{A}}, \eta_{\mathbf{A}})$  aus Abschnitt 1.2 kann wie folgt gewählt werden. Der Endofunktor  $\mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  ist auf Objekten  $V$  durch  $\mathcal{T}(V) = \coprod_n V^{\otimes n}$  definiert. Werden die Inklusionen in das Koprodukt mit  $\iota_n(V) : V^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{T}(V)$  bezeichnet, so ist die Einheit der Monade  $\mathbf{A}$  durch  $\eta_{\mathbf{A}}(V) := \iota_1(V)$  gegeben. Schließlich ist die Multiplikation  $\mu_{\mathbf{A}}$  durch die Gleichung

$$\mu_{\mathbf{A}}(V) \circ \iota_m(\mathcal{T}(V)) \circ (\iota_{n_1}(V) \otimes \cdots \otimes \iota_{n_m}(V)) = \iota_n(V)$$

für  $m, n, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \cdots + n_m = n$  festgelegt.

Der Endofunktor  $\mathcal{E}(\mathfrak{A})$  ist nun offensichtlich isomorph zum Funktor  $\mathcal{T}$ . Ein solcher Isomorphismus wird von der Familie

$$\Psi_{\mathfrak{A}}(V) : \mathcal{T}(V) = \coprod_m V^{\otimes m} \xrightarrow{\coprod_m \bar{\lambda}_{V^{\otimes m}}^{-1}} \coprod_m IZ_m \otimes_{IZ_m} V^{\otimes m} = \mathfrak{A} \odot V = \mathcal{E}(\mathfrak{A})(V)$$

von Morphismen geliefert. Diese Morphismen lassen sich auch durch

$$\Psi_{\mathfrak{A}}(V) \circ \iota_m(V) = p_m^{(\mathfrak{A}, V)} \circ (\eta_{IZ_m} \otimes \text{id}_{V^{\otimes m}})$$

charakterisieren. Im Fall  $m = 1$  besagt diese Gleichung aber gerade, dass  $\Psi_{\mathfrak{A}} \eta_{\mathfrak{A}} = \eta_{\mathcal{E}(\mathfrak{A})}$  gilt, d.h. der natürliche Isomorphismus  $\Psi_{\mathfrak{A}} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E}(\mathfrak{A})$  bildet die Einheit der assoziativen Monade auf die Einheit der Monade  $\mathcal{E}(\mathfrak{A})$  ab.

Damit also  $\mathfrak{A}$  und  $\mathcal{E}(\mathfrak{A})$  als Monaden via  $\Psi_{\mathfrak{A}}$  isomorph sind, ist noch zu zeigen, dass  $\Psi_{\mathfrak{A}}$  mit der Multiplikation verträglich ist. Seien dazu  $m, n, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \dots + n_m = n$ . Das Tensorprodukt in der Endofunktorkategorie von  $\Psi_{\mathfrak{A}}$  mit sich selbst ist an der Stelle  $V$  durch

$$(\text{id}_{\mathfrak{A}} \odot \Psi_{\mathfrak{A}}(V)) \circ \Psi_{\mathfrak{A}}(\mathcal{T}(V)) : \mathcal{T}(\mathcal{T}(V)) \longrightarrow \mathfrak{A} \odot \mathcal{T}(V) \longrightarrow \mathfrak{A} \odot (\mathfrak{A} \odot V)$$

gegeben. Hierfür gilt

$$\begin{aligned} & (\text{id}_{\mathfrak{A}} \odot \Psi_{\mathfrak{A}}(V)) \circ \Psi_{\mathfrak{A}}(\mathcal{T}(V)) \circ \iota_m(\mathcal{T}(V)) \circ (\iota_{n_1}(V) \otimes \dots \otimes \iota_{n_m}(V)) \\ &= (\text{id}_{\mathfrak{A}} \odot \Psi_{\mathfrak{A}}(V)) \circ p_m^{(\mathfrak{A}, \mathcal{T}(V))} \circ (\eta_{IZ_m} \otimes \text{id}_{\mathcal{T}(V)^{\otimes m}}) \circ (\iota_{n_1}(V) \otimes \dots \otimes \iota_{n_m}(V)) \\ &= p_m^{(\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \odot V)} \circ (\text{id}_{IZ_m} \otimes \Psi_{\mathfrak{A}}(V)^{\otimes m}) \circ (\eta_{IZ_m} \otimes \iota_{n_1}(V) \otimes \dots \otimes \iota_{n_m}(V)) \\ &= p_m^{(\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \odot V)} \circ (\text{id}_{IZ_m} \otimes p_{n_1}^{(\mathfrak{A}, V)} \otimes \dots \otimes p_{n_m}^{(\mathfrak{A}, V)}) \\ &\quad \circ (\eta_{IZ_m} \otimes \eta_{IZ_{n_1}} \otimes \text{id}_{V^{\otimes n_1}} \otimes \dots \otimes \eta_{IZ_{n_m}} \otimes \text{id}_{V^{\otimes n_m}}) \\ &= p_{(m; n_1, \dots, n_m)}^{(\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \odot V)} \circ (\eta_{IZ_m} \otimes \eta_{IZ_{n_1}} \otimes \text{id}_{V^{\otimes n_1}} \otimes \dots \otimes \eta_{IZ_{n_m}} \otimes \text{id}_{V^{\otimes n_m}}). \end{aligned}$$

Dabei wurde bei der ersten und dritten Gleichheit die Charakterisierung von  $\Psi_{\mathfrak{A}}$  verwendet. Die zweite Gleichheit gilt nach Definition des Tensorproduktes  $\odot$ , und bei der letzten Gleichheit wird eine Beziehung zwischen den kanonischen Morphismen ausgenutzt.

Dass  $\Psi_{\mathfrak{A}}$  mit der Multiplikation verträglich ist, zeigt nun die folgende Gleichungskette.

$$\begin{aligned} & \Psi_{\mathfrak{A}}(V) \circ \mu_{\mathfrak{A}}(V) \circ \iota_m(\mathcal{T}(V)) \circ (\iota_{n_1}(V) \otimes \dots \otimes \iota_{n_m}(V)) \\ &= \Psi_{\mathfrak{A}}(V) \circ \iota_n(V) = p_n^{(\mathfrak{A}, V)} \circ (\eta_{IZ_n} \otimes \text{id}_{V^{\otimes n}}) \\ &= p_n^{(\mathfrak{A}, V)} \circ (\mu_{(m; n_1, \dots, n_m)}^{\mathfrak{A}} \otimes \text{id}_{V^{\otimes n}}) \circ (\eta_{IZ_m} \otimes \eta_{IZ_{n_1}} \otimes \dots \otimes \eta_{IZ_{n_m}} \otimes \text{id}_{V^{\otimes n}}) \\ &= p_n^{(\mathfrak{A}, V)} \circ (\mu_{(m; n_1, \dots, n_m)}^{\mathfrak{A}} \otimes \text{id}_{V^{\otimes n}}) \circ (\eta_{IZ_m} \otimes \eta_{IZ_{n_1}} \otimes \dots \otimes \eta_{IZ_{n_m}} \otimes \text{id}_{V^{\otimes n}}) \\ &\quad \circ \left( \text{id}_I \otimes \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_m))(I, \dots, I, V^{\otimes n_1}, \dots, V^{\otimes n_m})^{-1} \right) \\ &= p_n^{(\mathfrak{A}, V)} \circ (\mu_{(m; n_1, \dots, n_m)}^{\mathfrak{A}} \otimes \text{id}_{V^{\otimes n}}) \\ &\quad \circ \left( \text{id}_{IZ_m} \otimes \varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_m))(IZ_{n_1}, \dots, IZ_{n_m}, V^{\otimes n_1}, \dots, V^{\otimes n_m})^{-1} \right) \\ &\quad \circ (\eta_{IZ_m} \otimes \eta_{IZ_{n_1}} \otimes \text{id}_{V^{\otimes n_1}} \otimes \dots \otimes \eta_{IZ_{n_m}} \otimes \text{id}_{V^{\otimes n_m}}) \\ &= \mu_{\mathcal{E}(\mathfrak{A})}(V) \circ p_{(m; n_1, \dots, n_m)}^{(\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \odot V)} \circ (\eta_{IZ_m} \otimes \eta_{IZ_{n_1}} \otimes \text{id}_{V^{\otimes n_1}} \otimes \dots \otimes \eta_{IZ_{n_m}} \otimes \text{id}_{V^{\otimes n_m}}) \\ &= \mu_{\mathcal{E}(\mathfrak{A})}(V) \circ (\text{id}_{\mathfrak{A}} \odot \Psi_{\mathfrak{A}}(V)) \circ \Psi_{\mathfrak{A}}(\mathcal{T}(V)) \circ \iota_m(\mathcal{T}(V)) \circ (\iota_{n_1}(V) \otimes \dots \otimes \iota_{n_m}(V)) \end{aligned}$$

Hierbei wurden bei der ersten, zweiten und sechsten Gleichheit die Charakterisierungen von  $\mu_{\mathcal{A}}$ ,  $\Psi_{\mathfrak{A}}$  bzw.  $\mu_{\mathcal{E}(\mathfrak{A})}$  benutzt. Die dritte Gleichung ergibt sich aus  $\tilde{\mu}_{(m;n_1,\dots,n_m)}^{\mathfrak{A}}(e_m, e_{n_1}, \dots, e_{n_m}) = e_n$ . Bei der vierten Gleichheit wurde benutzt, dass in einer gezopfsten strikt monoidalen Kategorie die Zopfung gleich der Identität ist, falls eines der beiden Argumente das Einsobjekt  $I$  ist. Schließlich gilt die fünfte Gleichung aufgrund der Natürlichkeit von  $\varphi_2^{\mathcal{C}}(L(s_m))$ , und bei der letzten Gleichheit wurde die vorstehende Identität verwendet.

**Satz 2.4.6.** *Die zur assoziativen Operade  $\mathfrak{A}$  gehörige Monade  $\mathcal{E}(\mathfrak{A})$  ist isomorph zur Monade  $\mathbf{A} = (\mathcal{T}, \mu_{\mathbf{A}}, \eta_{\mathbf{A}})$  aus Abschnitt 1.2.  $\square$*

Die Kategorie  $\mathcal{C}$  kann als  $\mathcal{C}$ -Linkskategorie aufgefasst werden. Dann ist  $\mathcal{C}$  aber auch eine Linkskategorie über der Unterkategorie  $\mathcal{C}_s$ . Falls  $\mathcal{C}$  als  $\mathcal{C}_s$ -Linkskategorie abgeschlossen ist, lassen sich Endomorphismenoperaden über  $\mathcal{C}$  bilden. Mit diesen können dann Algebren über Operaden durch Operadenmorphisme beschrieben werden. Hierauf soll nun näher eingegangen werden. Dazu werden zunächst abgeschlossene Linkskategorien ganz allgemein betrachtet.

**Definition 2.4.7.** Sei  $(\mathcal{A}, \otimes, I, a, l, r)$  eine monoidale Kategorie und  $(\mathcal{M}, \odot, \alpha, \lambda)$  eine  $\mathcal{A}$ -Linkskategorie. Dann heißt  $\mathcal{M}$  abgeschlossen, falls für jedes Objekt  $M$  aus  $\mathcal{M}$  der Funktor  $- \odot M : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}$  einen Rechtsadjungierten besitzt.

**Bemerkung 2.4.8.** Nach [Mac72, IV.1 Satz 2] ist eine  $\mathcal{A}$ -Linkskategorie  $\mathcal{M}$  genau dann abgeschlossen, wenn für alle Objekte  $M$  und  $N$  aus  $\mathcal{M}$  ein Objekt  $\text{hom}_{\mathcal{A}}(M, N) = \text{hom}(M, N)$  aus  $\mathcal{A}$  sowie ein Morphismus

$$\vartheta_{\mathcal{A}}(M, N) = \vartheta_{M,N} : \text{hom}(M, N) \odot M \rightarrow N$$

aus  $\mathcal{M}$  existieren, so dass es zu jedem Morphismus  $f : A \odot M \rightarrow N$  aus  $\mathcal{M}$  genau einen  $\mathcal{A}$ -Morphismus  $h : A \rightarrow \text{hom}(M, N)$  mit  $f = \vartheta_{M,N} \circ (h \odot \text{id}_M)$  gibt. Das Objekt  $\text{hom}(M, N)$  wird auch als inneres Hom-Objekt bezeichnet, und  $\vartheta_{M,N}$  heißt Auswertungsmorphismus.

Für Morphismen  $f : N \rightarrow M$  und  $g : U \rightarrow V$  aus  $\mathcal{M}$  sei der  $\mathcal{A}$ -Morphismus  $\text{hom}(f, g) : \text{hom}(M, U) \rightarrow \text{hom}(N, V)$  durch

$$\vartheta_{N,V} \circ (\text{hom}(f, g) \odot \text{id}_N) = g \circ \vartheta_{M,U} \circ (\text{id}_{\text{hom}(M,U)} \odot f) \quad (2.17)$$

definiert. Dann ist  $\text{hom} : \mathcal{M}^{\text{op}} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Funktor. Ferner ist der Funktor  $\text{hom}(M, -) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$  rechtsadjungiert zum Funktor  $- \odot M : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}$ . Dabei ist die Koeinheit dieser Adjunktion durch  $\vartheta_{\mathcal{A}}(M, -)$  gegeben. Somit entsprechen sich unter dem zugehörigen Adjunktionsisomorphismus

$$\mathcal{M}(A \odot M, N) \cong \mathcal{A}(A, \text{hom}(M, N)) \quad (2.18)$$

die Morphismen  $h : A \rightarrow \text{hom}(M, N)$  und  $f := \vartheta_{M,N} \circ (h \odot \text{id}_M) : A \odot M \rightarrow N$ .

Das Endomorphismenobjekt  $\text{end}(M) := \text{hom}(M, M)$  ist nun auf eindeutige Weise ein Monoid, so dass durch den Auswertungsmorphismus  $\vartheta_{M,M}$  eine Linksoperation von  $\text{end}(M)$  auf  $M$  definiert ist.

**Satz 2.4.9.** *Sei  $(\mathcal{A}, \otimes, I, a, l, r)$  eine monoidale Kategorie und  $(\mathcal{M}, \odot, \alpha, \lambda)$  eine abgeschlossene  $\mathcal{A}$ -Linkskategorie. Für ein Objekt  $M$  aus  $\mathcal{M}$  seien die Morphismen  $\mu_{\text{end}(M)} : \text{end}(M) \otimes \text{end}(M) \rightarrow \text{end}(M)$  und  $\eta_{\text{end}(M)} : I \rightarrow \text{end}(M)$  durch*

$$\vartheta_{M,M} \circ (\mu_{\text{end}(M)} \odot \text{id}_M) = \vartheta_{M,M} \circ (\text{id}_{\text{end}(M)} \odot \vartheta_{M,M}) \circ \alpha_{\text{end}(M), \text{end}(M), M} \quad (2.19)$$

bzw.

$$\vartheta_{M,M} \circ (\eta_{\text{end}(M)} \odot \text{id}_M) = \lambda_M \quad (2.20)$$

definiert. Dann ist  $(\text{end}(M), \mu_{\text{end}(M)}, \eta_{\text{end}(M)})$  ein Monoid in  $\mathcal{A}$ .

*Beweis.* Als Abkürzungen werden  $\vartheta := \vartheta_{M,M}$ ,  $\mu := \mu_{\text{end}(M)}$  und  $\eta := \eta_{\text{end}(M)}$  verwendet. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \vartheta \circ (\mu \odot \text{id}_M) \circ ((\mu \otimes \text{id}_{\text{end}(M)}) \odot \text{id}_M) \\ & \stackrel{(2.19)}{=} \vartheta \circ (\text{id}_{\text{end}(M)} \odot \vartheta) \circ \alpha_{\text{end}(M), \text{end}(M), M} \circ ((\mu \otimes \text{id}_{\text{end}(M)}) \odot \text{id}_M) \\ & = \vartheta \circ (\text{id}_{\text{end}(M)} \odot \vartheta) \circ (\mu \odot (\text{id}_{\text{end}(M)} \odot \text{id}_M)) \circ \alpha_{\text{end}(M) \otimes \text{end}(M), \text{end}(M), M} \\ & = \vartheta \circ (\mu \odot \text{id}_M) \circ ((\text{id}_{\text{end}(M)} \otimes \text{id}_{\text{end}(M)}) \odot \vartheta) \circ \alpha_{\text{end}(M) \otimes \text{end}(M), \text{end}(M), M} \\ & \stackrel{(2.19)}{=} \vartheta \circ (\text{id}_{\text{end}(M)} \odot \vartheta) \circ \alpha_{\text{end}(M), \text{end}(M), M} \circ ((\text{id}_{\text{end}(M)} \otimes \text{id}_{\text{end}(M)}) \odot \vartheta) \\ & \quad \circ \alpha_{\text{end}(M) \otimes \text{end}(M), \text{end}(M), M} \\ & = \vartheta \circ (\text{id}_{\text{end}(M)} \odot \vartheta) \circ (\text{id}_{\text{end}(M)} \odot (\text{id}_{\text{end}(M)} \odot \vartheta)) \\ & \quad \circ \alpha_{\text{end}(M), \text{end}(M), \text{end}(M) \odot M} \circ \alpha_{\text{end}(M) \otimes \text{end}(M), \text{end}(M), M}. \end{aligned}$$

Ganz analog ergibt sich

$$\begin{aligned} & \vartheta \circ (\mu \odot \text{id}_M) \circ ((\text{id}_{\text{end}(M)} \otimes \mu) \odot \text{id}_M) \circ (a_{\text{end}(M), \text{end}(M), \text{end}(M)} \odot \text{id}_M) \\ & = \vartheta \circ (\text{id}_{\text{end}(M)} \odot \vartheta) \circ (\text{id}_{\text{end}(M)} \odot (\text{id}_{\text{end}(M)} \odot \vartheta)) \\ & \quad \circ (\text{id}_{\text{end}(M)} \odot \alpha_{\text{end}(M), \text{end}(M), M}) \circ \alpha_{\text{end}(M), \text{end}(M) \otimes \text{end}(M), M} \\ & \quad \circ (a_{\text{end}(M), \text{end}(M), \text{end}(M)} \odot \text{id}_M). \end{aligned}$$

Nach dem Pentagonaxiom (2.14) stimmen die beiden obigen Ausdrücke überein. Mit der universellen Eigenschaft von  $\vartheta$  folgt hieraus

$$\mu \circ (\mu \otimes \text{id}) = \mu \circ (\text{id} \otimes \mu) \circ a_{\text{end}(M), \text{end}(M), \text{end}(M)}.$$

Somit ist die Multiplikation  $\mu$  assoziativ.

Die Einsaxiome lassen sich ähnlich beweisen. Dabei gehen die Dreiecksaxiome (2.15) und (2.16) ein.  $\square$

**Satz 2.4.10.** *Sei  $(\mathcal{A}, \otimes, I, a, l, r)$  eine monoidale Kategorie und  $(\mathcal{M}, \odot, \alpha, \lambda)$  eine abgeschlossene  $\mathcal{A}$ -Linkskategorie. Ferner sei  $(A, \mu_A, \eta_A)$  ein Monoid in  $\mathcal{A}$ ,  $M$  ein Objekt aus  $\mathcal{M}$  und  $\gamma : A \odot M \rightarrow M$  ein Morphismus. Schließlich sei  $f : A \rightarrow \text{end}(M)$  der eindeutig bestimmte  $\mathcal{A}$ -Morphismus mit  $\vartheta_{M,M} \circ (f \odot \text{id}_M) = \gamma$ .*

1. *Es gilt genau dann  $\gamma \circ (\eta_A \odot \text{id}_M) = \lambda_M$ , wenn  $f \circ \eta_A = \eta_{\text{end}(M)}$  ist.*
2. *Die Gleichung  $\gamma \circ (\mu_A \odot \text{id}_M) = \gamma \circ (\text{id}_A \odot \gamma) \circ \alpha_{A,A,M}$  ist genau dann erfüllt, wenn  $f \circ \mu_A = \mu_{\text{end}(M)} \circ (f \otimes f)$  gilt.*

*Insbesondere ist  $(M, \gamma)$  genau dann ein  $A$ -Linksmodul, wenn  $f$  ein Homomorphismus von Monoiden ist.*

*Beweis.* Aufgrund der Definitionsgleichungen von  $f$  und  $\eta_{\text{end}(M)}$  gelten

$$\vartheta_{M,M} \circ (f \odot \text{id}_M) \circ (\eta_A \odot \text{id}_M) = \gamma \circ (\eta_A \odot \text{id}_M)$$

und  $\vartheta_{M,M} \circ (\eta_{\text{end}(M)} \odot \text{id}_M) = \lambda_M$ . Somit folgt aus  $f \circ \eta_A = \eta_{\text{end}(M)}$  die Gleichung  $\gamma \circ (\eta_A \odot \text{id}_M) = \lambda_M$ . Nach der universellen Eigenschaft des Auswertungsmorphismus  $\vartheta_{M,M}$  gilt aber auch die Umkehrung. Damit ist die erste Behauptung gezeigt.

Für die zweite Aussage werden die beiden Gleichungen

$$\vartheta_{M,M} \circ (f \odot \text{id}_M) \circ (\mu_A \odot \text{id}_M) = \gamma \circ (\mu_A \odot \text{id}_M)$$

und

$$\begin{aligned} & \vartheta_{M,M} \circ (\mu_{\text{end}(M)} \odot \text{id}_M) \circ ((f \otimes f) \odot \text{id}_M) \\ &= \vartheta_{M,M} \circ (\text{id}_{\text{end}(M)} \odot \vartheta_{M,M}) \circ \alpha_{\text{end}(M), \text{end}(M), M} \circ ((f \otimes f) \odot \text{id}_M) \\ &= \vartheta_{M,M} \circ (\text{id}_{\text{end}(M)} \odot \vartheta_{M,M}) \circ (f \odot (f \odot \text{id}_M)) \circ \alpha_{A,A,M} \\ &= \vartheta_{M,M} \circ (f \odot \gamma) \circ \alpha_{A,A,M} = \gamma \circ (\text{id}_A \odot \gamma) \circ \alpha_{A,A,M} \end{aligned}$$

herangezogen. Hieraus ergibt sich ganz analog zur obigen Argumentation die zweite Äquivalenz. Oder anders ausgedrückt: Unter dem passenden Adjunktionsisomorphismus (2.18) entsprechen sich  $f \circ \mu_A$  und  $\gamma \circ (\mu_A \odot \text{id}_M)$  sowie  $\mu_{\text{end}(M)} \circ (f \otimes f)$  und  $\gamma \circ (\text{id}_A \odot \gamma) \circ \alpha_{A,A,M}$ . Somit gehen die beiden Gleichungen mittels dieser Adjunktion auseinander hervor.  $\square$

**Satz 2.4.11.** *Sei  $(\mathcal{A}, \otimes, I, a, l, r)$  eine monoidale Kategorie und  $(\mathcal{M}, \odot, \alpha, \lambda)$  eine abgeschlossene  $\mathcal{A}$ -Linkskategorie. Ferner sei  $(A, \mu_A, \eta_A)$  ein Monoid in  $\mathcal{A}$  sowie  $(M, \gamma_M)$  und  $(N, \gamma_N)$   $A$ -Linksmoduln in  $\mathcal{M}$ . Die zugehörigen Monoidhomomorphismen seien mit  $f_M : A \rightarrow \text{end}(M)$  bzw.  $f_N : A \rightarrow \text{end}(N)$  bezeichnet, d.h.,  $f_M$  und  $f_N$  sind durch  $\vartheta_{M,M} \circ (f_M \odot \text{id}_M) = \gamma_M$  bzw.  $\vartheta_{N,N} \circ (f_N \odot \text{id}_N) = \gamma_N$  charakterisiert.*

*Dann ist ein Morphismus  $g : M \rightarrow N$  genau dann ein Homomorphismus von  $A$ -Linksmoduln, d.h.,  $g$  erfüllt  $\gamma_N \circ (\text{id}_A \odot g) = g \circ \gamma_M$ , wenn*

$$\text{hom}(\text{id}_M, g) \circ f_M = \text{hom}(g, \text{id}_N) \circ f_N$$

*gilt. Existiert ferner ein Differenzkern  $h : B \rightarrow A$  von  $\text{hom}(\text{id}_M, g) \circ f_M$  und  $\text{hom}(g, \text{id}_N) \circ f_N$  in  $\mathcal{A}$ , so ist  $B$  ein Untermonoid von  $A$ .*

*Beweis.* Die zu  $\text{hom}(\text{id}_M, g) \circ f_M$  und  $\text{hom}(g, \text{id}_N) \circ f_N$  adjungierten Morphismen aus  $\mathcal{M}$  sind

$$\begin{aligned} & \vartheta_{M,N} \circ (\text{hom}(\text{id}_M, g) \odot \text{id}_M) \circ (f_M \odot \text{id}_M) \\ & \stackrel{(2.17)}{=} g \circ \vartheta_{M,M} \circ (f_M \odot \text{id}_M) = g \circ \gamma_M \end{aligned} \quad (2.21)$$

und

$$\begin{aligned} & \vartheta_{M,N} \circ (\text{hom}(g, \text{id}_N) \odot \text{id}_M) \circ (f_N \odot \text{id}_M) \\ & \stackrel{(2.17)}{=} \vartheta_{N,N} \circ (f_N \odot g) = \gamma_N \circ (\text{id}_A \odot g). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Somit sind die beiden angegebenen Gleichungen äquivalent zueinander, da sie sich unter dem Adjunktionsisomorphismus entsprechen.

Sei nun  $h : B \rightarrow A$  ein Differenzkern von  $\text{hom}(\text{id}_M, g) \circ f_M$  und  $\text{hom}(g, \text{id}_N) \circ f_N$ . Damit  $B$  ein Untermonoid von  $A$  ist, muss gezeigt werden, dass sowohl  $\eta_A : I \rightarrow A$  als auch  $\mu_A \circ (h \otimes h) : B \otimes B \rightarrow A$  über  $h$  faktorisiert. Nach Definition von  $h$  als Differenzkern sind hierfür

$$\text{hom}(\text{id}_M, g) \circ f_M \circ \eta_A = \text{hom}(g, \text{id}_N) \circ f_N \circ \eta_A$$

und

$$\text{hom}(\text{id}_M, g) \circ f_M \circ \mu_A \circ (h \otimes h) = \text{hom}(g, \text{id}_N) \circ f_N \circ \mu_A \circ (h \otimes h)$$

zu zeigen. Es werden nun jeweils die zugehörigen adjungierten Gleichungen in  $\mathcal{M}$  bewiesen, die wegen (2.21) und (2.22) sowie der Natürlichkeit der Adjunktion durch

$$g \circ \gamma_M \circ (\eta_A \odot \text{id}_M) = \gamma_N \circ (\eta_A \odot g)$$

und

$$g \circ \gamma_M \circ (\mu_A \odot \text{id}_M) \circ ((h \otimes h) \odot \text{id}_M) = \gamma_N \circ (\mu_A \odot g) \circ ((h \otimes h) \odot \text{id}_M)$$

gegeben sind. Die erste Gleichung ist nun wegen

$$g \circ \gamma_M \circ (\eta_A \odot \text{id}_M) = g \circ \lambda_M = \lambda_N \circ (\text{id}_I \odot g) = \gamma_N \circ (\eta_A \odot g)$$

erfüllt, wobei für die erste und letzte Umformung die Einsaxiome der Moduln  $M$  und  $N$  verwendet wurden, während die zweite Gleichung aufgrund der Natürlichkeit von  $\lambda$  gilt.

Zum Nachweis der zweiten Gleichung sei zunächst angemerkt, dass

$$\text{hom}(\text{id}_M, g) \circ f_M \circ h = \text{hom}(g, \text{id}_N) \circ f_N \circ h$$

nach Definition von  $h$  gilt. Die hierzu adjungierte Gleichung in  $\mathcal{M}$  lautet

$$g \circ \gamma_M \circ (h \odot \text{id}_M) = \gamma_N \circ (h \odot g). \quad (2.23)$$



Dann ist aber

$$\begin{aligned}
& g \circ \gamma_M \circ (\mu_A \odot \text{id}_M) \circ ((h \otimes h) \odot \text{id}_M) \\
&= g \circ \gamma_M \circ (\text{id}_A \odot \gamma_M) \circ \alpha_{A,A,M} \circ ((h \otimes h) \odot \text{id}_M) \\
&= g \circ \gamma_M \circ (\text{id}_A \odot \gamma_M) \circ (h \odot (h \odot \text{id}_M)) \circ \alpha_{B,B,M} \\
&\stackrel{(2.23)}{=} \gamma_N \circ (h \odot g) \circ (\text{id}_B \odot \gamma_M) \circ (\text{id}_B \odot (h \odot \text{id}_M)) \circ \alpha_{B,B,M} \\
&\stackrel{(2.23)}{=} \gamma_N \circ (\text{id}_A \odot \gamma_N) \circ (h \odot (h \odot g)) \circ \alpha_{B,B,M} \\
&= \gamma_N \circ (\text{id}_A \odot \gamma_N) \circ \alpha_{A,A,N} \circ ((h \otimes h) \odot g) \\
&= \gamma_N \circ (\mu_A \odot g) \circ ((h \otimes h) \odot \text{id}_M).
\end{aligned}$$

Hierbei wurde bei der ersten und letzten Gleichung die Assoziativität der Moduloperationen benutzt. Ferner geht bei der zweiten und fünften Umformung die Natürlichkeit von  $\alpha$  ein.  $\square$

**Korollar 2.4.12.** *Sei  $\mathcal{C}$  als  $\mathcal{D}_s$ -Linkskategorie abgeschlossen. Dann existiert zu jedem Objekt  $M$  aus  $\mathcal{C}$  eine Endomorphismenoperade  $\mathbf{End}(M)$ , die vermöge des Auswertungsmorphismus  $\vartheta = \vartheta_{M,M} : \mathbf{End}(M) \odot M \rightarrow M$  universell auf  $M$  operiert, d.h., ist  $\mathfrak{D}$  eine Operade und  $\gamma_M : \mathfrak{D} \odot M \rightarrow M$  eine Operation, so gibt es genau einen Morphismus  $f_M : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbf{End}(M)$  von Operaden mit  $\gamma_M = \vartheta \circ (f_M \odot \text{id}_M)$ .*

*Ist  $(N, \gamma_N)$  ein weiterer  $\mathfrak{D}$ -Modul aus  $\mathcal{C}$  mit zugehörigem Operadenmorphismus  $f_N : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbf{End}(N)$ , so ist ein  $\mathcal{C}$ -Morphismus  $g : M \rightarrow N$  genau dann ein Morphismus von Moduln, wenn  $\text{hom}_{\mathcal{D}_s}(\text{id}_M, g) \circ f_M = \text{hom}_{\mathcal{D}_s}(g, \text{id}_N) \circ f_N$  gilt. Diese Bedingung muss nur auf einem „Erzeugendensystem“ von  $\mathfrak{D}$  überprüft werden.  $\square$*

Es ist nicht unbedingt notwendig zu zeigen, dass  $\mathcal{C}$  als  $\mathcal{D}_s$ -Linkskategorie abgeschlossen ist. Vielmehr folgt dies schon, falls  $\mathcal{C}$  als  $\mathcal{C}_s$ -Linkskategorie abgeschlossen ist. Dies soll nun gezeigt werden.

**Lemma 2.4.13.** *Sei  $(\mathcal{A}, \otimes, I, a, l, r)$  eine monoidale Kategorie und  $(\mathcal{M}, \odot, \alpha, \lambda)$  eine abgeschlossene  $\mathcal{A}$ -Linkskategorie. Ferner sei  $(A, \mu_A, \eta_A)$  ein Monoid in  $\mathcal{A}$  und  $(M, \gamma_M)$  ein  $\mathcal{A}$ -Linksmodul in  $\mathcal{M}$ . Wird für ein Objekt  $N$  aus  $\mathcal{M}$  der  $\mathcal{A}$ -Morphismus  $\rho_{\text{hom}(M,N)} : \text{hom}(M, N) \otimes A \rightarrow \text{hom}(M, N)$  durch*

$$\vartheta_{M,N} \circ (\rho_{\text{hom}(M,N)} \odot \text{id}_M) = \vartheta_{M,N} \circ (\text{id}_{\text{hom}(M,N)} \odot \gamma_M) \circ \alpha_{\text{hom}(M,N),A,M} \quad (2.24)$$

*definiert, so ist  $(\text{hom}(M, N), \rho_{\text{hom}(M,N)})$  ein  $\mathcal{A}$ -Rechtsmodul in  $\mathcal{A}$ .*

*Ist des Weiteren  $(U, \rho_U)$  ein  $\mathcal{A}$ -Rechtsmodul in  $\mathcal{A}$ , so ist ein  $\mathcal{A}$ -Morphismus  $f : U \rightarrow \text{hom}(M, N)$  genau dann  $\mathcal{A}$ -rechtslinear, wenn der zugehörige adjungierte Morphismus  $g := \vartheta_{M,N} \circ (f \odot \text{id}_M)$  die Gleichung*

$$g \circ (\rho_U \odot \text{id}_M) = g \circ (\text{id}_U \odot \gamma_M) \circ \alpha_{U,A,M} \quad (2.25)$$

*erfüllt.*

*Beweis.* Damit  $(\text{hom}(M, N), \rho_{\text{hom}(M, N)})$  ein  $A$ -Rechtsmodul in  $\mathcal{A}$  ist, müssen das Einsaxiom und die Assoziativität gezeigt werden. Da es sich hierbei um Identitäten von Morphismen mit Ziel  $\text{hom}(M, N)$  handelt, können genauso gut die zugehörigen adjungierten Gleichungen bewiesen werden. Mittels der Definitionsgleichung von  $\rho_{\text{hom}(M, N)}$  sowie der Axiome der  $\mathcal{A}$ -Linkskategorie  $\mathcal{M}$  lassen sich diese Gleichungen auf das Einsaxiom und die Assoziativität von  $(M, \gamma_M)$  zurückführen. Diese Rechnungen sind kanonisch und sollen deshalb nicht im Detail durchgeführt werden.

Exemplarisch soll hier nur auf die Charakterisierung der  $A$ -rechtslinearen Morphismen  $f : U \rightarrow \text{hom}(M, N)$  eingegangen werden. Es gelten

$$\vartheta_{M, N} \circ (f \odot \text{id}_M) \circ (\rho_U \odot \text{id}_M) = g \circ (\rho_U \odot \text{id}_M)$$

und

$$\begin{aligned} & \vartheta_{M, N} \circ (\rho_{\text{hom}(M, N)} \odot \text{id}_M) \circ ((f \otimes \text{id}_A) \odot \text{id}_M) \\ & \stackrel{(2.24)}{=} \vartheta_{M, N} \circ (\text{id}_{\text{hom}(M, N)} \odot \gamma_M) \circ \alpha_{\text{hom}(M, N), A, M} \circ ((f \otimes \text{id}_A) \odot \text{id}_M) \\ & = \vartheta_{M, N} \circ (f \odot \gamma_M) \circ \alpha_{U, A, M} = g \circ (\text{id}_U \odot \gamma_M) \circ \alpha_{U, A, M}. \end{aligned}$$

Somit ist die Gleichung  $f \circ \rho_U = \rho_{\text{hom}(M, N)} \circ (f \otimes \text{id}_A)$  adjungiert zu (2.25), was die Behauptung liefert.  $\square$

**Satz 2.4.14.** *Falls  $\mathcal{C}$  als  $\mathcal{C}_s$ -Linkskategorie abgeschlossen ist, so ist  $\mathcal{C}$  auch als  $\mathcal{D}_s$ -Linkskategorie abgeschlossen. Für Objekte  $M$  und  $N$  aus  $\mathcal{C}$  können die inneren Hom-Objekte und Auswertungsmorphismen dabei wie folgt gewählt werden.*

1. Die  $n$ -te Komponente von  $\text{hom}_{\mathcal{D}_s}(M, N) \in \mathcal{D}_s$  ist durch

$$\text{hom}_{\mathcal{D}_s}(M, N)(n) := \text{hom}_{\mathcal{C}_s}(M^{\otimes n}, N)$$

definiert. Dabei ist die Rechtsoperation von  $IZ_n$  auf diesem Objekt gemäß dem vorstehendem Lemma durch diejenige Linksoperation von  $IZ_n$  auf  $M^{\otimes n}$  gegeben, die von der Zopfung induziert wird.

2. Der Auswertungsmorphismus  $\vartheta_{\mathcal{D}_s}(M, N) : \text{hom}_{\mathcal{D}_s}(M, N) \odot M \rightarrow N$  ist durch

$$\vartheta_{\mathcal{D}_s}(M, N) \circ p_n^{(\text{hom}_{\mathcal{D}_s}(M, N), M)} = \vartheta_{\mathcal{C}_s}(M^{\otimes n}, N)$$

charakterisiert, wobei für ein Objekt  $\mathcal{F}$  aus  $\mathcal{D}_s$  mit

$$p_n^{(\mathcal{F}, M)} : \mathcal{F}(n) \otimes M^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{F}(n) \underset{IZ_n}{\otimes} M^{\otimes n} \rightarrow \prod_m \mathcal{F}(m) \underset{IZ_m}{\otimes} M^{\otimes m} = \mathcal{F} \odot M$$

der kanonische Morphismus bezeichnet ist.

Ferner gilt dann  $\text{hom}_{\mathcal{D}_s}(f, g)(n) = \text{hom}_{\mathcal{C}_s}(f^{\otimes n}, g)$  für Morphismen  $f : N \rightarrow M$  und  $g : U \rightarrow V$  aus  $\mathcal{C}$  sowie  $n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Es ist zu zeigen, dass der Auswertungsmorphismus  $\vartheta_{\mathcal{D}_s}(M, N)$  die geforderte universelle Eigenschaft besitzt. Dazu sei ein Objekt  $\mathcal{F}$  aus  $\mathcal{D}_s$  sowie ein  $\mathcal{C}$ -Morphismus  $f : \mathcal{F} \odot M \rightarrow N$  gegeben.

Für die Eindeutigkeitsaussage wird nun angenommen, dass ein  $\mathcal{D}_s$ -Morphismus  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{D}_s}(M, N)$  mit  $\vartheta_{\mathcal{D}_s}(M, N) \circ (\varphi \odot \text{id}_M) = f$  existiert. Dann gilt

$$\begin{aligned} f \circ p_n^{(\mathcal{F}, M)} &= \vartheta_{\mathcal{D}_s}(M, N) \circ (\varphi \odot \text{id}_M) \circ p_n^{(\mathcal{F}, M)} \\ &= \vartheta_{\mathcal{D}_s}(M, N) \circ p_n^{(\text{hom}_{\mathcal{D}_s}(M, N), M)} \circ (\varphi(n) \otimes \text{id}_{M^{\otimes n}}) \\ &= \vartheta_{\mathcal{C}_s}(M^{\otimes n}, N) \circ (\varphi(n) \otimes \text{id}_{M^{\otimes n}}). \end{aligned}$$

Durch diese Gleichung ist aber  $\varphi(n)$  eindeutig festgelegt, da  $\vartheta_{\mathcal{C}_s}(M^{\otimes n}, N)$  nach Voraussetzung die universelle Eigenschaft aus Bemerkung 2.4.8 besitzt.

Zum Nachweis der Existenz eines  $\mathcal{D}_s$ -Morphismus  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{D}_s}(M, N)$  mit  $\vartheta_{\mathcal{D}_s}(M, N) \circ (\varphi \odot \text{id}_M) = f$  werden nun umgekehrt die Komponenten von  $\varphi$  durch

$$\vartheta_{\mathcal{C}_s}(M^{\otimes n}, N) \circ (\varphi(n) \otimes \text{id}_{M^{\otimes n}}) = f \circ p_n^{(\mathcal{F}, M)}$$

definiert. Zunächst sei angemerkt, dass  $\varphi(n)$  nach dem vorstehenden Lemma  $IZ_n$ -rechtslinear ist, da die entsprechende Version von Gleichung (2.25) erfüllt ist. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass  $p_n^{(\mathcal{F}, M)} \circ (\rho_{\mathcal{F}(n)} \otimes \text{id}_{M^{\otimes n}}) = p_n^{(\mathcal{F}, M)} \circ (\text{id}_{\mathcal{F}(n)} \otimes \gamma_{M^{\otimes n}})$  nach Definition von  $p_n^{(\mathcal{F}, M)}$  gilt, wobei  $\rho_{\mathcal{F}(n)}$  und  $\gamma_{M^{\otimes n}}$  die Rechts- bzw. Linksoperation von  $IZ_n$  auf  $\mathcal{F}(n)$  bzw.  $M^{\otimes n}$  bezeichnen. Somit ist  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{D}_s}(M, N)$  ein Morphismus aus  $\mathcal{D}_s$ . Analog zur obigen Rechnung ergibt sich nun

$$\begin{aligned} f \circ p_n^{(\mathcal{F}, M)} &= \vartheta_{\mathcal{C}_s}(M^{\otimes n}, N) \circ (\varphi(n) \otimes \text{id}_{M^{\otimes n}}) \\ &= \vartheta_{\mathcal{D}_s}(M, N) \circ p_n^{(\text{hom}_{\mathcal{D}_s}(M, N), M)} \circ (\varphi(n) \otimes \text{id}_{M^{\otimes n}}) \\ &= \vartheta_{\mathcal{D}_s}(M, N) \circ (\varphi \odot \text{id}_M) \circ p_n^{(\mathcal{F}, M)}, \end{aligned}$$

woraus  $\vartheta_{\mathcal{D}_s}(M, N) \circ (\varphi \odot \text{id}_M) = f$  folgt. Somit ist  $\mathcal{C}$  als  $\mathcal{D}_s$ -Linkskategorie abgeschlossen.

Zum Nachweis der letzten Behauptung seien  $f : N \rightarrow M$  und  $g : U \rightarrow V$  Morphismen aus  $\mathcal{C}$  sowie  $n \in \mathbb{N}$ . Dann sind  $\text{hom}_{\mathcal{C}_s}(f^{\otimes n}, g)$  und  $\text{hom}_{\mathcal{D}_s}(f, g)$  durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\vartheta_{\mathcal{C}_s}(N^{\otimes n}, V) \circ (\text{hom}_{\mathcal{C}_s}(f^{\otimes n}, g) \otimes \text{id}_{N^{\otimes n}}) \\ &= g \circ \vartheta_{\mathcal{C}_s}(M^{\otimes n}, U) \circ (\text{id}_{\text{hom}_{\mathcal{C}_s}(M^{\otimes n}, U)} \otimes f^{\otimes n}) \end{aligned}$$

bzw.

$$\vartheta_{\mathcal{D}_s}(N, V) \circ (\text{hom}_{\mathcal{D}_s}(f, g) \odot \text{id}_N) = g \circ \vartheta_{\mathcal{D}_s}(M, U) \circ (\text{id}_{\text{hom}_{\mathcal{D}_s}(M, U)} \odot f)$$

definiert. Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned} &\vartheta_{\mathcal{C}_s}(N^{\otimes n}, V) \circ (\text{hom}_{\mathcal{D}_s}(f, g)(n) \otimes \text{id}_{N^{\otimes n}}) \\ &= \vartheta_{\mathcal{D}_s}(N, V) \circ p_n^{(\text{hom}_{\mathcal{D}_s}(N, V), N)} \circ (\text{hom}_{\mathcal{D}_s}(f, g)(n) \otimes \text{id}_{N^{\otimes n}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \vartheta_{\mathcal{D}_s}(N, V) \circ (\text{hom}_{\mathcal{D}_s}(f, g) \odot \text{id}_N) \circ p_n^{(\text{hom}_{\mathcal{D}_s}(M, U), N)} \\
&= g \circ \vartheta_{\mathcal{D}_s}(M, U) \circ (\text{id}_{\text{hom}_{\mathcal{D}_s}(M, U)} \odot f) \circ p_n^{(\text{hom}_{\mathcal{D}_s}(M, U), N)} \\
&= g \circ \vartheta_{\mathcal{D}_s}(M, U) \circ p_n^{(\text{hom}_{\mathcal{D}_s}(M, U), M)} \circ (\text{id}_{\text{hom}_{\mathcal{D}_s}(M, U)(n)} \otimes f^{\otimes n}) \\
&= g \circ \vartheta_{\mathcal{C}_s}(M^{\otimes n}, U) \circ (\text{id}_{\text{hom}_{\mathcal{C}_s}(M^{\otimes n}, U)} \otimes f^{\otimes n}) \\
&= \vartheta_{\mathcal{C}_s}(N^{\otimes n}, V) \circ (\text{hom}_{\mathcal{C}_s}(f^{\otimes n}, g) \otimes \text{id}_{N^{\otimes n}}),
\end{aligned}$$

woraus  $\text{hom}_{\mathcal{D}_s}(f, g)(n) = \text{hom}_{\mathcal{C}_s}(f^{\otimes n}, g)$  folgt.  $\square$

Die vorstehenden Ergebnisse lassen sich insbesondere auf die Kategorie  $\mathcal{YD}_K^K$  der Yetter-Drinfeld-Moduln anwenden.

**Satz 2.4.15.** *Sei  $\mathcal{C} := \mathcal{YD}_K^K$ . Dann ist  $\mathcal{C}$  als  $\mathcal{C}_s$ -Linkskategorie abgeschlossen. Dabei können die inneren Hom-Objekte und Auswertungsmorphismen für Objekte  $M$  und  $N$  aus  $\mathcal{C}$  wie folgt gewählt werden.*

1. *Das innere Hom-Objekt  $\text{hom}(M, N)$  ist durch den Vektorraum  $\mathcal{YD}_K^K(M, N)$  der Yetter-Drinfeld-Morphismen  $M \rightarrow N$  gegeben, der bezüglich der trivialen Modul- und Komodulstruktur ein Objekt aus  $\mathcal{C}_s$  ist.*
2. *Der Auswertungsmorphismus  $\vartheta_{M, N} : \text{hom}(M, N) \otimes M \rightarrow N$  ist durch die Zuordnung  $f \otimes m \mapsto f(m)$  festgelegt.*

*Beweis.* Für  $f \in \text{hom}(M, N)$ ,  $m \in M$  und  $h \in K$  gelten

$$\begin{aligned}
\vartheta_{M, N}((f \otimes m) \cdot h) &= \vartheta_{M, N}(f \cdot h_{(1)} \otimes m \cdot h_{(2)}) = \vartheta_{M, N}(f \epsilon(h_{(1)}) \otimes m \cdot h_{(2)}) \\
&= \vartheta_{M, N}(f \otimes (m \cdot h)) = f(m \cdot h) = f(m) \cdot h = \vartheta_{M, N}(f \otimes m) \cdot h
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\vartheta_{M, N}((f \otimes m)_{[0]} \otimes (f \otimes m)_{[1]}) &= \vartheta_{M, N}(f_{[0]} \otimes m_{[0]}) \otimes f_{[1]} m_{[1]} \\
&= \vartheta_{M, N}(f \otimes m_{[0]}) \otimes m_{[1]} = f(m_{[0]}) \otimes m_{[1]} = f(m)_{[0]} \otimes f(m)_{[1]} \\
&= \vartheta_{M, N}(f \otimes m)_{[0]} \otimes \vartheta_{M, N}(f \otimes m)_{[1]}.
\end{aligned}$$

Somit ist  $\vartheta_{M, N}$  ein Homomorphismus von Yetter-Drinfeld-Moduln.

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $\vartheta_{M, N}$  die universelle Eigenschaft aus Bemerkung 2.4.8 besitzt. Dazu sei ein Objekt  $U$  aus  $\mathcal{C}_s$  und ein Yetter-Drinfeld-Homomorphismus  $f : U \otimes M \rightarrow N$  gegeben. Dann ist zu zeigen, dass es genau einen  $\mathcal{C}_s$ -Morphismus  $g : U \rightarrow \text{hom}(M, N)$  mit  $f = \vartheta_{M, N} \circ (g \otimes \text{id}_M)$  gibt. Diese letzte Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn  $f(u \otimes m) = g(u)(m)$  für alle  $u \in U$  und  $m \in M$  gilt. Hierdurch ist aber  $g$  eindeutig festgelegt.

Umgekehrt wird durch  $g(u)(m) := f(u \otimes m)$  für  $u \in U$  und  $m \in M$  eine  $\mathbb{k}$ -lineare Abbildung  $g : U \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(M, N)$  definiert. Dann ist noch zu zeigen, dass  $g(u)$  für alle  $u \in U$  ein Homomorphismus von Yetter-Drinfeld-Moduln ist. In diesem Fall kann  $g$  nämlich als Morphismus  $U \rightarrow \mathcal{YD}_K^K(M, N)$  aufgefasst werden. Zudem ist

dieser Morphismus als  $\mathbb{k}$ -lineare Abbildung dann auch in  $\mathcal{C}_s$  enthalten. Da  $U$  nach Lemma 2.1.3 die triviale Modul- und Komodulstruktur besitzt, gelten für  $u \in U$ ,  $m \in M$  und  $h \in K$

$$g(u)(m \cdot h) = f(u \otimes (m \cdot h)) = f((u \otimes m) \cdot h) = f(u \otimes m) \cdot h = g(u)(m) \cdot h$$

und

$$\begin{aligned} g(u)(m_{[0]}) \otimes m_{[1]} &= f(u \otimes m_{[0]}) \otimes m_{[1]} = f(u_{[0]} \otimes m_{[0]}) \otimes u_{[1]} m_{[1]} \\ &= f((u \otimes m)_{[0]}) \otimes (u \otimes m)_{[1]} = f(u \otimes m)_{[0]} \otimes f(u \otimes m)_{[1]} \\ &= g(u)(m)_{[0]} \otimes g(u)(m)_{[1]}. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

**Bemerkung 2.4.16.** Im Fall  $\mathcal{C} = \mathcal{YD}_K^K$  ist  $\mathcal{C}$  also als  $\mathcal{C}_s$ -Linkskategorie abgeschlossen. Wegen Satz 2.4.14 ist  $\mathcal{C}$  dann auch als  $\mathcal{D}_s$ -Linkskategorie abgeschlossen. Somit existiert nach Korollar 2.4.12 zu jedem Objekt  $V$  aus  $\mathcal{C}$  eine Endomorphismenoperade  $\mathfrak{E}nd(V)$ . Konkret ist diese Operade durch folgende Daten gegeben:

1. Die  $n$ -te Komponente von  $\mathfrak{E}nd(V)$  ist  $\mathfrak{E}nd(V)(n) = \mathcal{YD}_K^K(V^{\otimes n}, V)$ . Dabei wird die Rechtsoperation von  $\mathbb{k}Z_n$  auf diesem Objekt durch die Linksoperation von  $\mathbb{k}Z_n$  auf  $V^{\otimes}$  induziert, d.h.  $\sigma \in Z_n$  operiert auf  $f \in \mathcal{YD}_K^K(V^{\otimes n}, V)$  durch  $f \cdot \sigma = f \circ \tilde{\lambda}_{V^{\otimes n}}(\sigma)$ .
2. Die Einheit  $\eta^{\mathfrak{E}nd(V)} : \mathbb{k} \rightarrow \mathfrak{E}nd(V)(1) = \mathcal{YD}_K^K(V, V)$  ist durch  $\eta^{\mathfrak{E}nd(V)}(1) = \text{id}_V$  festgelegt.
3. Für  $m, n, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \dots + n_m = n$  ist die Multiplikation  $\mu_{(m; n_1, \dots, n_m)}^{\mathfrak{E}nd(V)}$  ein Morphismus

$$\mathcal{YD}_K^K(V^{\otimes m}, V) \otimes \mathcal{YD}_K^K(V^{\otimes n_1}, V) \otimes \dots \otimes \mathcal{YD}_K^K(V^{\otimes n_m}, V) \rightarrow \mathcal{YD}_K^K(V^{\otimes n}, V),$$

der durch  $g \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_m \mapsto g \circ (f_1 \otimes \dots \otimes f_m)$  definiert ist.

Schließlich ergibt sich aus dem vorstehenden Satz, dass für  $\mathcal{C} = \mathcal{YD}_K^K$  der innere Hom-Funktor der  $\mathcal{C}_s$ -Linkskategorie  $\mathcal{C}$  ein gewöhnlicher Hom-Funktor ist. Somit gilt  $\text{hom}_{\mathcal{C}_s}(f, g)(h) = g \circ h \circ f$  für Yetter-Drinfeld-Morphismen  $f : N \rightarrow M$ ,  $h : M \rightarrow U$  und  $g : U \rightarrow V$ . Nach Satz 2.4.14 ist dann

$$\text{hom}_{\mathcal{D}_s}(f, g)(n)(h) = \text{hom}_{\mathcal{C}_s}(f^{\otimes n}, g)(h) = g \circ h \circ f^{\otimes n}$$

für  $n \in \mathbb{N}$  sowie Morphismen  $f : N \rightarrow M$ ,  $h : M^{\otimes n} \rightarrow U$  und  $g : U \rightarrow V$ .

## 2.5 Lie-Operaden

In diesem Abschnitt wird die Kategorie  $\mathcal{YD}_K^K$  der Yetter-Drinfeld-Moduln über der Hopfalgebra  $K$  als Grundkategorie  $\mathcal{C}$  verwendet. Ferner sei  $\mathcal{Z}$  ein reflexives Zopfgruppensystem, über das  $\mathcal{C} = \mathcal{YD}_K^K$  faktorisiert.

Da  $\mathcal{YD}_K^K$  eine  $\mathbb{k}$ -lineare Kategorie ist, induziert die Zopfung für jede natürliche Zahl  $n$  und jedes Objekt  $V$  aus  $\mathcal{YD}_K^K$  eine Darstellung

$$\tilde{\lambda}_{V^{\otimes n}} = \tilde{\lambda}_{V^{\otimes n}}^{\mathbb{k}B_n} : \mathbb{k}B_n \longrightarrow \text{End}_{\mathcal{C}}(V^{\otimes n}).$$

Mit dem bisherigen Formalismus lässt sich das Bild eines Gruppenelementes  $b \in B_n$  durch  $\tilde{\lambda}_{V^{\otimes n}}(b) = \varphi_2^{\mathcal{C}}(b)(V, \dots, V)$  beschreiben. Diese Darstellung faktorisiert über  $\mathbb{k}Z_n$ . Die durch diese Faktorisierung definierte Darstellung  $\mathbb{k}Z_n \rightarrow \text{End}(V^{\otimes n})$  werde auch mit  $\tilde{\lambda}_{V^{\otimes n}} = \tilde{\lambda}_{V^{\otimes n}}^{\mathbb{k}Z_n}$  bezeichnet.

Falls das Zopfgruppensystem  $\mathcal{Z}$  endlich ist, soll nun eine  $\mathcal{Z}$ -Unteroperade der assoziativen Operade definiert werden, deren zugehörige Monade isomorph zur Monade  $\mathbb{L}$  aus Abschnitt 1.4 ist. Dazu ist insbesondere für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein  $\mathbb{k}Z_n$ -Untermodul  $\mathfrak{L}(n) = \mathfrak{L}_{\mathcal{Z}}(n)$  von  $\mathfrak{A}(n) = \mathbb{k}Z_n$  zu definieren, so dass für jedes Objekt  $V$  aus  $\mathcal{YD}_K^K$

$$\bigoplus_m \mathfrak{L}(m) \otimes_{\mathbb{k}Z_m} V^{\otimes m}$$

natürlich isomorph zur freien Lie-Algebra  $\mathcal{L}(V)$  ist. Die freie Lie-Algebra  $\mathcal{L}(V)$  ist dabei gleich der Lie-Algebra der primitiven Elemente der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$ . Somit ist es notwendig, die primitiven Elemente der Tensoralgebra zu charakterisieren.

Die Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  besitzt eine Graduierung, bei der die Elemente vom Grad  $n$  durch  $\mathcal{T}_n(V) := V^{\otimes n}$  gegeben sind. Hierdurch wird eine Graduierung auf  $\mathcal{T}(V) \otimes \mathcal{T}(V)$  induziert. Die homogenen Elemente vom Grad  $n$  sind dabei durch

$$(\mathcal{T}(V) \otimes \mathcal{T}(V))_n := \bigoplus_{n_1+n_2=n} \mathcal{T}_{n_1}(V) \otimes \mathcal{T}_{n_2}(V)$$

gegeben. Bezüglich dieser Graduierungen ist sowohl die Komultiplikation  $\Delta_{\mathcal{T}(V)}$  als auch  $\text{id} \otimes \eta_{\mathcal{T}(V)} + \eta_{\mathcal{T}(V)} \otimes \text{id}$  graduiert. Somit bilden die primitiven Elemente  $\mathcal{P}(\mathcal{T}(V))$  einen homogenen Untermodul von  $\mathcal{T}(V)$ . Wird mit  $\mathcal{P}_n(\mathcal{T}(V)) := \mathcal{P}(\mathcal{T}(V)) \cap \mathcal{T}_n(V)$  der Untermodul der primitiven Elemente vom Grad  $n$  bezeichnet, so gilt

$$\mathcal{P}(\mathcal{T}(V)) = \bigoplus_n \mathcal{P}_n(\mathcal{T}(V)).$$

Deshalb genügt es, die primitiven Elemente in  $\mathcal{T}_n(V)$  zu bestimmen. Dafür werden explizite Formeln für die Komultiplikation der Tensoralgebra benötigt. Hierbei treten Mischpermutationen auf.

**Definition 2.5.1.** Seien  $k, l \in \mathbb{N}$  und  $n := k + l$ . Eine Permutation  $s \in S_n$  heißt  $(k, l)$ -Mischpermutation, falls  $s^{-1}(i) < s^{-1}(j)$  für alle  $i < j \leq k$  und  $k < i < j$  gilt. Die Menge aller  $(k, l)$ -Mischpermutationen wird mit  $S_{k,l}$  bezeichnet.

Mit den Mischpermutationen können nun die Elemente

$$S_{k,l} := \sum_{s \in S_{k,l}} L(s) \in \mathbb{k}B_n$$

für  $k, l, n \in \mathbb{N}$  mit  $k + l = n$  definiert werden. Ferner sei für  $n > 0$

$$\mathfrak{S}_n := \{S_{k,l} \mid k + l = n \text{ und } k, l > 0\}$$

sowie  $\mathfrak{I}_n$  das von  $\mathfrak{S}_n$  erzeugte Linksideal in  $\mathbb{k}B_n$ . Benötigt werden auch noch die Zopfgruppensymmetrisierer

$$S_n := \sum_{s \in S_n} L(s) \in \mathbb{k}B_n.$$

Die Elemente  $S_{k,l}$  und  $S_n$  erfüllen nun die Rekursionsformeln

$$S_{n,0} = S_{0,n} = e_n \tag{2.26}$$

$$S_{k,l} = (S_{k,l-1} \otimes e_1) + (e_{k-1} \otimes \tau_{l,1}^B)(S_{k-1,l} \otimes e_1) \tag{2.27}$$

$$= (e_1 \otimes S_{k-1,l}) + (\tau_{1,k}^B \otimes e_{l-1})(e_1 \otimes S_{k,l-1}) \tag{2.28}$$

bzw.

$$S_0 = e_0, \quad S_1 = e_1 \tag{2.29}$$

$$S_{k+l} = (S_k \otimes S_l)S_{k,l} \tag{2.30}$$

für  $k, l, n \in \mathbb{N}$  mit  $k, l > 0$  [Sbg96].

**Bemerkung 2.5.2.** Seien  $k, l, n \in \mathbb{N}$  mit  $k + l = n$ . Dann ist eine Mischpermutation  $s \in S_{k,l}$  schon vollständig durch die Menge  $I$  der Urbilder  $s^{-1}(1) < \dots < s^{-1}(k)$  bestimmt. Die zugehörige Mischpermutation lässt sich auch als

$$s = \varphi_2^S(s_n^{-1})(\chi_I(1), 1 - \chi_I(1), \dots, \chi_I(n), 1 - \chi_I(n))$$

schreiben, wobei  $\chi_I$  die Indikatorfunktion der Menge  $I$  bezeichnet. Es gibt also insbesondere  $\binom{n}{k}$   $(k, l)$ -Mischpermutationen in  $S_n$ . Diese werden durch die  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$  beschrieben.

**Bemerkung 2.5.3.** Seien  $k, l, n, r, m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$  mit  $r > 0$  und  $k + l = n = m_1 + \dots + m_r$ . Dann kann  $S_{k,l}$  auch als

$$\sum_{\substack{k_1 + \dots + k_r = k \\ k_i \leq m_i}} \varphi_2^B(L(s_r^{-1}))(k_1, m_1 - k_1, \dots, k_r, m_r - k_r)(S_{k_1, m_1 - k_1} \otimes \dots \otimes S_{k_r, m_r - k_r})$$

geschrieben werden. Anstatt nämlich bei der Erzeugung der  $(k, l)$ -Mischpermutationen die Urbilder von  $1, \dots, k$  aus  $\{1, \dots, n\}$  jeweils in einem Schritt auszuwählen,

kann man auch wie folgt vorgehen. Zunächst werden  $k_1, \dots, k_r$  mit  $k_1 + \dots + k_r = k$  und  $k_i \leq m_i$  gewählt. Anschließend werden  $k_i$  Elemente aus der  $m_i$ -elementigen Menge

$$\{m_1 + \dots + m_{i-1} + 1, \dots, m_1 + \dots + m_i\}$$

ausgewählt. Daraus ergibt sich die obige Darstellung.

**Lemma 2.5.4** ([Sbg96, Theorem 2.7]). *Sei  $V$  ein Objekt aus  $\mathcal{YD}_K^K$ . Die Inklusionen in die Tensoralgebra seien mit  $\iota_n(V) : V^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{T}(V)$  bezeichnet. Dann ist die Komultiplikation  $\Delta$  der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  durch*

$$\Delta \circ \iota_n(V) = \sum_{n_1+n_2=n} (\iota_{n_1}(V) \otimes \iota_{n_2}(V)) \circ \tilde{\lambda}_{V^{\otimes n}}(\mathfrak{S}_{n_1, n_2})$$

charakterisiert. □

**Korollar 2.5.5.** *Sei  $V$  ein Objekt aus  $\mathcal{YD}_K^K$  und  $n > 0$ . Dann gilt*

$$\mathcal{P}_n(\mathcal{T}(V)) = \text{Ann}_{V^{\otimes n}}^r(\mathfrak{S}_n) := \{x \in V^{\otimes n} \mid sx = 0 \text{ für alle } s \in \mathfrak{S}_n\},$$

d.h., die Menge der primitiven Elemente der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  vom Grad  $n$  ist gleich dem Rechtsannullator von  $\mathfrak{S}_n$  in  $V^{\otimes n}$ .

*Beweis.* Die Menge der primitiven Elemente der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  vom Grad  $n$  ist gleich dem Kern von

$$(\Delta - \text{id} \otimes \eta - \eta \otimes \text{id}) \circ \iota_n(V) = \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1, n_2 > 0}} (\iota_{n_1}(V) \otimes \iota_{n_2}(V)) \circ \tilde{\lambda}_{V^{\otimes n}}(\mathfrak{S}_{n_1, n_2}).$$

Da die Bilder der  $(\iota_{n_1}(V) \otimes \iota_{n_2}(V)) \circ \tilde{\lambda}_{V^{\otimes n}}(\mathfrak{S}_{n_1, n_2})$  in unterschiedlichen direkten Summanden liegen und die  $\iota_{n_1}(V) \otimes \iota_{n_2}(V)$  injektiv sind, ist dieser Kern gleich dem Durchschnitt der Kerne der  $\tilde{\lambda}_{V^{\otimes n}}(\mathfrak{S}_{n_1, n_2})$  für  $n_1, n_2 > 0$  mit  $n_1 + n_2 = n$ . Dies stimmt mit dem angegebenen Annullator überein. □

**Definition 2.5.6.** Sei  $n > 0$ . Für einen  $\mathbb{k}B_n$ -Linksmodul  $M$  sei

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(M) &:= \text{Ann}_M^r(\mathcal{T}_n) = \text{Ann}_M^r(\mathfrak{S}_n) \\ &= \{v \in M \mid \mathfrak{S}_{k,l} \cdot v = 0 \text{ für alle } k, l > 0 \text{ mit } k + l = n\}. \end{aligned}$$

Die Elemente aus  $\mathcal{P}(M)$  heißen primitiv oder Lie-Elemente.

Mit dieser Definition besagt Korollar 2.5.5, dass die Menge der primitiven Elemente der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  vom Grade  $n$  gleich  $\mathcal{P}(V^{\otimes n})$  ist. Somit hat man allgemein das Problem zu lösen, für einen  $\mathbb{k}B_n$ -Linksmodul  $M$  den Raum  $\mathcal{P}(M)$  zu bestimmen.

Die Lie-Elemente der assoziativen Operade  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\mathcal{Z}}$  bilden nun eine Unteroperade von  $\mathfrak{A}$ .



**Satz 2.5.7.** *Für  $n \in \mathbb{N}$  sei*

$$\mathfrak{L}(n) = \mathfrak{L}_{\mathcal{Z}}(n) := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0, \\ \mathcal{P}(\mathbb{k}Z_n), & \text{falls } n > 0. \end{cases}$$

*Dann ist  $\mathfrak{L}$  eine  $\mathcal{Z}$ -Unteroperade von  $\mathfrak{A}$ . Diese wird als Lie-Operade bezeichnet.*

*Beweis.* Zunächst einmal ist  $\mathfrak{L}(n)$  ein  $\mathbb{k}Z_n$ -Untermodul der rechtsregulären Darstellung  $\mathfrak{A}(n) = \mathbb{k}Z_n$ . Damit ist  $\mathfrak{L}$  ein Unterobjekt von  $\mathfrak{A}$  in der Kategorie  $\mathcal{D}_s$ . Ferner gilt  $\mathfrak{L}(1) = \mathbb{k}Z_1 = \mathfrak{A}(1)$ , da  $\mathfrak{S}_1$  die leere Menge ist. Also liegt die Einheit von  $\mathfrak{A}$  schon in  $\mathfrak{L}$ .

Es bleibt somit noch zu zeigen, dass  $\mathfrak{L}$  unter der Multiplikation abgeschlossen ist. Seien dazu  $m, n, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \dots + n_m = n$ . Dann ist

$$\mu_{(m;n_1, \dots, n_m)}^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{L}(m) \otimes \mathfrak{L}(n_1) \otimes \dots \otimes \mathfrak{L}(n_m)) \subseteq \mathfrak{L}(n)$$

zu zeigen. Hierbei kann  $m, n_i > 0$  angenommen werden, da anderenfalls die Behauptung wegen  $\mathfrak{L}(m) \otimes \mathfrak{L}(n_1) \otimes \dots \otimes \mathfrak{L}(n_m) = 0$  klar ist. Es kann sogar  $m > 1$  vorausgesetzt werden, da  $\mathfrak{L}(1) = \mathbb{k}Z_1 \cong \mathbb{k}$  nur die skalaren Vielfachen der Einheit enthält, woraus  $\mu_{(1;n)}^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{L}(1) \otimes \mathfrak{L}(n)) = \mathfrak{L}(n)$  folgt. Insbesondere gilt damit  $n \geq m > 1$ .

Seien nun  $c = \sum_{\sigma} c_{\sigma} \sigma \in \mathfrak{L}(m)$  und  $d_i \in \mathfrak{L}(n_i)$  für  $i = 1, \dots, m$ . Als Abkürzungen werden  $n_i^{\sigma} := n_{\bar{\sigma}^{-1}(i)}$  und  $k_i^{\sigma} := k_{\bar{\sigma}^{-1}(i)}$  verwendet. Dann gilt für  $k, l > 0$  mit  $k+l = n$

$$\begin{aligned} & S_{k,l} \mu_{(m;n_1, \dots, n_m)}^{\mathfrak{A}}(c \otimes d_1 \otimes \dots \otimes d_m) \\ &= \sum_{\sigma} c_{\sigma} S_{k,l} \bar{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_m)(d_1 \otimes \dots \otimes d_m) \\ &= \sum_{\sigma} c_{\sigma} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = k \\ k_i \leq n_i}} \bar{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(L(s_m^{-1}))(k_1^{\sigma}, n_1^{\sigma} - k_1^{\sigma}, \dots, k_m^{\sigma}, n_m^{\sigma} - k_m^{\sigma}) \\ &\quad (S_{k_1^{\sigma}, n_1^{\sigma} - k_1^{\sigma}} \otimes \dots \otimes S_{k_m^{\sigma}, n_m^{\sigma} - k_m^{\sigma}}) \bar{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_m)(d_1 \otimes \dots \otimes d_m) \\ &= \sum_{\sigma} c_{\sigma} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = k \\ k_i \leq n_i}} \bar{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(L(s_m^{-1}))(k_1^{\sigma}, n_1^{\sigma} - k_1^{\sigma}, \dots, k_m^{\sigma}, n_m^{\sigma} - k_m^{\sigma}) \\ &\quad \bar{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_m)(S_{k_1, n_1 - k_1} \otimes \dots \otimes S_{k_m, n_m - k_m})(d_1 \otimes \dots \otimes d_m). \end{aligned}$$

Hierbei wurde bei der zweiten Umformung Bemerkung 2.5.3 und bei der letzten die Natürlichkeit von  $\bar{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)$  verwendet. Da  $d_i$  in  $\mathfrak{L}(n_i)$  enthalten ist, gilt  $S_{k_i, n_i - k_i} d_i = 0$ , falls  $0 < k_i < n_i$  ist. Somit bleiben von der inneren Summe nur noch diejenigen Summanden übrig, bei denen  $k_i = 0$  oder  $k_i = n_i$  für alle  $i$  gilt. Diese Summanden werden also schon durch die Menge  $I$  von Indizes  $i \in \{1, \dots, m\}$  beschrieben, für die  $k_i = n_i$  gilt. Ferner sind für diese Summanden die  $S_{k_i, n_i - k_i}$  jeweils gleich dem

Einselement. Da  $\overline{\varphi}^{\mathcal{Z}}$  ein Funktor ist, ergibt sich mit Formel (2.8) für die obige Summe

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ \sum_{i \in I} n_i = k}} \sum_{\sigma} c_{\sigma} \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(L(s_m^{-1})) (n_1^{\sigma} \chi_{\overline{\sigma}(I)}(1), n_1^{\sigma} (1 - \chi_{\overline{\sigma}(I)}(1)), \dots, \\
& \qquad \qquad \qquad n_m^{\sigma} \chi_{\overline{\sigma}(I)}(m), n_m^{\sigma} (1 - \chi_{\overline{\sigma}(I)}(m))) \\
& \qquad \qquad \qquad \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_m)(d_1 \otimes \dots \otimes d_m) \\
& = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ \sum_{i \in I} n_i = k}} \left[ \sum_{\sigma} c_{\sigma} \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}} \left( \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(L(s_m^{-1})) (\chi_{\overline{\sigma}(I)}(1), 1 - \chi_{\overline{\sigma}(I)}(1), \dots, \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. \chi_{\overline{\sigma}(I)}(m), 1 - \chi_{\overline{\sigma}(I)}(m)) \sigma \right) (n_1, \dots, n_m) \right] \\
& \qquad \qquad \qquad (d_1 \otimes \dots \otimes d_m).
\end{aligned}$$

Es genügt nun zu zeigen, dass für  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$  mit  $\sum_{i \in I} n_i = k$  die innere Summe verschwindet. Seien dazu  $k' := |I|$  und  $l' := m - k'$ . Wegen  $0 < k < n$  gilt dann  $0 < k' < m$  bzw.  $k', l' > 0$ . Hieraus folgt  $S_{k', l'} c = 0$ , da  $c$  in  $\mathfrak{L}(m)$  liegt. Es wird aber benötigt, dass sogar schon ein bestimmter Teil  $c_I$  von  $S_{k', l'} c$  verschwindet. Zu  $\sigma \in Z_m$  gibt es genau eine  $(k', l')$ -Mischpermutation  $s$ , die  $\overline{\sigma}(I)$  in  $\{1, \dots, k'\}$  überführt, d.h., für die  $s\overline{\sigma}(I) = \{1, \dots, k'\}$  gilt. Diese Mischpermutation ist durch

$$\varphi_2^{\mathcal{S}}(s_m^{-1})(\chi_{\overline{\sigma}(I)}(1), 1 - \chi_{\overline{\sigma}(I)}(1), \dots, \chi_{\overline{\sigma}(I)}(m), 1 - \chi_{\overline{\sigma}(I)}(m))$$

gegeben. Somit enthält

$$c_I := \sum_{\sigma} c_{\sigma} \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(L(s_m^{-1})) (\chi_{\overline{\sigma}(I)}(1), 1 - \chi_{\overline{\sigma}(I)}(1), \dots, \chi_{\overline{\sigma}(I)}(m), 1 - \chi_{\overline{\sigma}(I)}(m)) \sigma$$

genau diejenigen Summanden von  $S_{k', l'} c$ , deren unterliegenden Permutationen die Menge  $I$  auf  $\{1, \dots, k'\}$  abbilden. Da  $c_I$  und  $S_{k', l'} c - c_I$  in unterschiedlichen direkten Summanden von  $\mathbb{k}Z_m$  liegen, müssen sie beide schon gleich 0 sein. Wendet man aber auf  $c_I$  die lineare Fortsetzung von  $Z_m \rightarrow Z_n$ ,  $\sigma \mapsto \overline{\varphi}_2^{\mathcal{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_m)$  an, so ergibt sich die obige innere Summe.  $\square$

Für die Lie-Operade  $\mathfrak{L}$  gilt  $\mathfrak{L}(n)V^{\otimes n} \subseteq \mathcal{P}_n(\mathcal{T}(V))$ . Somit können die Elemente aus  $\mathfrak{L}(n)$  dazu verwendet werden, um primitive Elemente zu produzieren.

Es ist allerdings möglich, dass  $\mathfrak{L}(n) = 0$  für alle  $n \neq 1$  gilt. Dies trifft zum Beispiel im Fall  $\mathcal{Z} = \mathcal{B}$  zu, wie man wie folgt sieht. Die Zopfgruppen sind graduert, falls man den Erzeugern  $b_i$  den Grad 1 zuordnet. Dann ist 0 der kleinste Grad, der in den Elementen  $S_{k, l}$  vorkommt, und die zugehörige homogene Komponente ist das Einselement  $e_{k+l}$ . Somit kann nur 0 im Annulator von  $S_{k, l}$  liegen.

Dieselbe Argumentation ist für alle Zopfgruppensysteme möglich, die aus den Zopfgruppen durch Hinzunahme von homogenen Relationen bezüglich der obigen Graduierung entstehen. Insbesondere trifft dies für  $\mathcal{B}_0$  zu. Wenn das Zopfgruppensystem allerdings endlich ist, so kann man mit den  $\mathfrak{L}(n)$  alle primitiven Elemente der Tensoralgebra gewinnen.

**Satz 2.5.8.** *Sei  $\mathcal{Z}$  ein endliches Zopfgruppensystem. Dann ist die zur Lie-Operade  $\mathfrak{L}$  gehörige Monade isomorph zur Monade  $\mathbf{L}$  aus Abschnitt 1.4. Insbesondere ist damit die Kategorie  $\text{Lie}$  der Lie-Algebren isomorph zur Kategorie der  $\mathfrak{L}$ -Algebren.*

*Beweis.* Nach Satz 1.4.3 ist die Monade  $\mathbf{L}$  eine Untermonade von  $\mathbf{A}$ . Ferner ist die zur Lie-Operade gehörige Monade  $\mathcal{E}(\mathfrak{L})$  eine Untermonade von  $\mathcal{E}(\mathfrak{A})$ . Die Monaden  $\mathbf{A}$  und  $\mathcal{E}(\mathfrak{A})$  sind nun nach Satz 2.4.6 zueinander isomorph. Somit genügt zu zeigen, dass sich die Untermonaden  $\mathbf{L}$  und  $\mathcal{E}(\mathfrak{L})$  von  $\mathbf{A}$  bzw.  $\mathcal{E}(\mathfrak{A})$  unter dem Monadenisomorphismus  $\Psi_{\mathfrak{A}} : \mathbf{A} \rightarrow \mathcal{E}(\mathfrak{A})$  entsprechen.

Mit  $\gamma : \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{A}$  sei der im Beweis des vorstehenden Satzes konstruierte Operadenmorphismus bezeichnet. Ferner sei  $\tilde{\theta}_n(V) : \mathcal{P}_n(\mathcal{T}(V)) \rightarrow V^{\otimes n}$  für  $n \in \mathbb{N}$  der kanonische Monomorphismus. Dann reicht zu zeigen, dass es für jedes  $n \in \mathbb{N}$  einen Isomorphismus

$$\bar{\lambda}_n(V) : \mathfrak{L}(n) \otimes_{\mathbb{k}Z_n} V^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{P}_n(\mathcal{T}(V))$$

gibt, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{L}(n) \otimes_{\mathbb{k}Z_n} V^{\otimes n} & \xrightarrow{\gamma(n) \otimes \text{id}_{\mathbb{k}Z_n}} & \mathfrak{A}(n) \otimes_{\mathbb{k}Z_n} V^{\otimes n} \\ \bar{\lambda}_n(V) \downarrow & & \downarrow \bar{\lambda}_{V^{\otimes n}} \\ \mathcal{P}_n(\mathcal{T}(V)) & \xrightarrow{\tilde{\theta}_n(V)} & V^{\otimes n} \end{array}$$

kommutativ macht.

Falls  $n = 0$  ist, so ist durch den Nullmorphismus ein geeigneter Isomorphismus

$$\bar{\lambda}_0(V) : \mathfrak{L}(0) \otimes_{\mathbb{k}Z_0} V^{\otimes 0} = 0 \rightarrow 0 = \mathcal{P}_0(\mathcal{T}(V))$$

gegeben.

Somit ist noch der Fall  $n > 0$  zu betrachten. Dann ist die Gruppenalgebra  $\mathbb{k}Z_n$  halbeinfach, da die Gruppe  $Z_n$  endlich ist und der Grundkörper  $\mathbb{k}$  die Charakteristik 0 besitzt. Deshalb existiert ein idempotentes Element  $f' \in \mathbb{k}Z_n$ , das das Linksideal  $\mathfrak{I}_n \subseteq \mathbb{k}Z_n$  erzeugt. Dann ist  $f := 1 - f' \in \mathbb{k}Z_n$  ein idempotentes Element, das orthogonal zu  $f'$  ist. Für jeden  $\mathbb{k}Z_n$ -Linksmodul  $M$  gilt damit  $\text{Ann}_M^r(\mathfrak{I}_n) = f \cdot M$ . Insbesondere gelten also  $\mathfrak{L}(n) = f \cdot \mathbb{k}Z_n$  und  $\mathcal{P}_n(\mathcal{T}(V)) = f \cdot V^{\otimes n} = \mathfrak{L}(n) \cdot V^{\otimes n}$ . Somit induziert die  $\mathbb{k}Z_n$ -Linksmodulstruktur  $\lambda_{V^{\otimes n}} : \mathbb{k}Z_n \otimes V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n}$  von  $V^{\otimes n}$  durch Einschränkung einen Morphismus  $\lambda_n(V) : \mathfrak{L}(n) \otimes V^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathcal{T}(V))$ . Dieser Morphismus ist durch  $\tilde{\theta}_n(V) \circ \lambda_n(V) = \lambda_{V^{\otimes n}} \circ (\gamma(n) \otimes \text{id}_{V^{\otimes n}})$  charakterisiert. Ferner ist er surjektiv und faktorisiert über den kanonischen Epimorphismus

$$q_n : \mathfrak{L}(n) \otimes V^{\otimes n} \rightarrow \mathfrak{L}(n) \otimes_{\mathbb{k}Z_n} V^{\otimes n}.$$

Somit gibt es genau einen surjektiven Morphismus

$$\bar{\lambda}_n(V) : \mathfrak{L}(n) \otimes_{\mathbb{k}Z_n} V^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathcal{T}(V))$$

mit  $\bar{\lambda}_n(V) \circ q_n = \lambda_n(V)$ . Dieser macht das obige Diagramm kommutativ. Zudem ist  $\bar{\lambda}_n(V)$  ein Isomorphismus. Das Inverse ist dabei durch die Verkettung von  $q_n$  mit dem Morphismus  $\mathcal{P}_n(\mathcal{T}(V)) \rightarrow \mathfrak{L}(n) \otimes V^{\otimes n}$ ,  $z \mapsto f \otimes z$  gegeben.  $\square$

Dieser Satz kann also insbesondere angewendet werden, wenn die Hopfalgebra  $K$  die Gruppenalgebra einer endlichen abelschen Gruppe  $G$  vom Exponenten  $m \geq 1$  ist, da  $\mathcal{Z} = \mathcal{B}_m$  ein endliches Zopfgruppensystem ist, über das  $\mathcal{C} = \mathcal{YD}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}$  faktorisiert. In diesem Fall werde die oben definierte Lie-Operade mit  $\mathfrak{L}_m$  bezeichnet. Dann kann die Kategorie Lie der Lie-Algebren als Kategorie der  $\mathfrak{L}_m$ -Algebren aufgefasst werden.

## Kapitel 3

# Axiomatische Beschreibung

In diesem Kapitel wird versucht, eine axiomatische Definition für die Lie-Algebren anzugeben. Dazu wird im ersten Abschnitt zunächst geklärt, was es bedeutet, eine Operade durch Erzeuger und Relationen zu beschreiben. Ferner wird gezeigt, dass über geeigneten Kategorien eine solche Beschreibung für jede Operade existiert und einer axiomatischen Beschreibung der durch die Operade gegebenen algebraischen Struktur entspricht.

Ziel der folgenden Abschnitte ist es dann, Erzeuger und Relationen für die Lie-Operade  $\mathfrak{L}_m$  zu finden. Dazu werden als Erstes Aussagen über den Raum  $\mathcal{P}(M)$  der Lie-Elemente eines  $\mathbb{k}B_n$ -Linksmoduls  $M$  bereitgestellt. Hieraus können Elemente der Lie-Operade  $\mathfrak{L}_m$  gewonnen werden, zwischen denen dann Relationen ermittelt werden. Allerdings reichen die gefundenen Elemente nicht aus, um die Lie-Operade zu erzeugen. Deshalb wird darauf verzichtet, eine axiomatische Definition der Lie-Algebren anzugeben, da diese sowieso nur provisorischen Charakter haben könnte.

Am Anfang des ersten Abschnitts wird zunächst wieder eine abelsche, gezopft monoidale und kovollständige Kategorie  $\mathcal{C}$  als Grundkategorie verwendet, für die der Tensorfunktorkomplex in jedem Argument additiv und exakt ist sowie Kolimites erhält. Zudem wird wie üblich angenommen, dass  $\mathcal{C}$  strikt ist.

Für den Schluss des ersten Abschnitts sowie die restlichen Abschnitte wird die Kategorie  $\mathcal{YD}_K^K$  der Yetter-Drinfeld-Moduln über der Hopfalgebra  $K$  als Grundkategorie gewählt. Dabei wird die Hopfalgebra  $K$  gegebenenfalls noch weiter spezialisiert, zum Beispiel als Gruppenalgebra einer endlichen abelschen Gruppe.

Des Weiteren bezeichne  $\mathcal{Z} = (Z_n)$  stets ein reflexives Zopfgruppensystem, über das die Kategorie  $\mathcal{C}$  faktorisiert.

### 3.1 Erzeugende und Relationen für Operaden

Damit Operaden durch Erzeugende und Relationen beschrieben werden können, werden freie Operaden sowie Ideale und Quotientenoperaden benötigt. Deshalb sind diese Objekte ein zentraler Gegenstand dieses Abschnitts.

Freie Operaden sind nun einfach freie Monoide in der monoidalen Kategorie  $\mathcal{D}_s$ . Ihre Existenz ist also gleichbedeutend damit, dass der Vergissfunktor

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\mathcal{D}_s}^{\text{Op}(\mathcal{C})} : \text{Op}(\mathcal{C}) = \text{Mon}(\mathcal{D}_s) \rightarrow \mathcal{D}_s$$

einen Linksadjungierten besitzt. Da aber das Tensorprodukt in  $\mathcal{D}_s$  im Allgemeinen keine abzählbaren Koprodukte im zweiten Argument erhält, ist die klassische Konstruktion von freien Monoiden als Koprodukt über die endlichen Tensorpotenzen, wie sie in [Mac72, VII.3 Satz 2] beschrieben wird, in der Kategorie  $\mathcal{D}_s$  nicht möglich. Statt dessen ergibt sich die Existenz der freien Operaden aus

**Satz 3.1.1** ([BJT97, Satz B.1]). *Sei  $(\mathcal{A}, \otimes, I, a, l, r)$  eine monoidale Kategorie mit endlichen, nichtleeren Koprodukten und filtrierenden Kolimites, so dass der Tensorfunktors im ersten Argument endliche, nichtleere Koprodukte sowie in beiden Argumenten filtrierende Kolimites erhält. Dann besitzt der Vergissfunktor  $\mathcal{V} : \text{Mon}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$  einen Linksadjungierten.*  $\square$

Wie oben angemerkt wurde, ist der Tensorfunktors auf der Kategorie  $\mathcal{D}_s$  insbesondere im zweiten Argument problematisch. Deshalb soll hier etwas ausführlicher auf diejenigen Aussagen eingegangen werden, die zusätzlich benötigt werden, um zu zeigen, dass dieser Tensorfunktors filtrierende Kolimites im zweiten Argument erhält. Hierbei dürfte es sich um Standardresultate handeln.

Zunächst sei daran erinnert, dass eine Kategorie  $\mathcal{J}$  filtrierend heißt, wenn sie nichtleer ist und wenn gelten:

1. Zu je zwei Objekten  $j_1, j_2 \in \mathcal{J}$  existieren ein Objekt  $j \in \mathcal{J}$  sowie Morphismen  $j_i \rightarrow j$  für  $i = 1, 2$ .
2. Zu je zwei Morphismen  $u, v : j_1 \rightarrow j_2$  gibt es einen Morphismus  $w : j_2 \rightarrow j_3$  mit  $w \circ u = w \circ v$ .

Dann heißt der Kolimes eines Funktors  $\mathcal{F} : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{A}$  filtrierend, falls die Kategorie  $\mathcal{J}$  filtrierend ist.

**Lemma 3.1.2.** *Sei  $n > 0$ , und sei  $\mathcal{J}$  eine filtrierende Kategorie. Dann gelten:*

1. *Zu Morphismen  $u_i : j \rightarrow j_i$ ,  $i = 1, 2$  gibt es ein Objekt  $k \in \mathcal{J}$  sowie Morphismen  $v_i : j_i \rightarrow k$  für  $i = 1, 2$  mit  $v_1 \circ u_1 = v_2 \circ u_2$ .*
2. *Zu Objekten  $j_1, \dots, j_n$  aus  $\mathcal{J}$  gibt es ein Objekt  $j \in \mathcal{J}$  und Morphismen  $j_i \rightarrow j$  für  $i = 1, \dots, n$ .*
3. *Seien  $u_i, v_i : j_i \rightarrow j$ ,  $i = 1, \dots, n$  Paare von parallelen Morphismen mit gemeinsamen Ziel  $j$ . Dann existiert ein Morphismus  $w : j \rightarrow k$  mit  $w \circ u_i = w \circ v_i$  für  $i = 1, \dots, n$ .*
4. *Seien  $u_{r,i} : j_i \rightarrow k_r$  Morphismen für  $i = 1, \dots, n$  und  $k = 1, 2$ . Dann existieren ein Objekt  $k \in \mathcal{J}$  sowie Morphismen  $v_r : k_r \rightarrow k$ ,  $r = 1, 2$  mit  $v_1 \circ u_{1,i} = v_2 \circ u_{2,i}$  für  $i = 1, \dots, n$ .*

*Beweis.* 1. Zu  $j_1, j_2$  existieren ein Objekt  $k'$  und Morphismen  $v'_i : j_i \rightarrow k'$  für  $i = 1, 2$ . Des Weiteren gibt es zu den beiden parallelen Morphismen  $v'_i \circ u_i : j \rightarrow k'$ ,  $i = 1, 2$  einen Morphismus  $w : k' \rightarrow k$  mit  $w \circ v'_1 \circ u_1 = w \circ v'_2 \circ u_2$ . Dann ist die Behauptung für  $v_i := w \circ v'_i : j_i \rightarrow k$  erfüllt.

2. Diese Aussage ist eine Verallgemeinerung der ersten Eigenschaft einer filtrierenden Kategorie auf  $n$  Objekte und kann durch eine einfache Induktion aus dem Fall für  $n = 2$  gezeigt werden.

3. Die Behauptung wird durch eine Induktion nach  $n$  gezeigt. Der Induktionsanfang  $n = 1$  entspricht genau der zweiten Eigenschaft einer filtrierenden Kategorie. Im Induktionsschritt von  $n$  nach  $n + 1$  existieren aufgrund der Induktionsvoraussetzung Morphismen  $w_r : j \rightarrow k_r$ ,  $r = 1, 2$  mit  $w_1 \circ u_i = w_2 \circ v_i$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $w_2 \circ u_{n+1} = w_1 \circ v_{n+1}$ . Nach der ersten Aussage dieses Lemmas gibt es nun zu  $w_1, w_2$  Morphismen  $w'_r : k_r \rightarrow k$  für  $r = 1, 2$  mit  $w'_1 \circ w_1 = w'_2 \circ w_2$ . Dann ist der Induktionsschritt für  $w := w'_1 \circ w_1 : j \rightarrow k$  erfüllt.

4. Zu den Objekten  $k_1, k_2$  existieren Morphismen  $v'_r : k_r \rightarrow j$  für  $r = 1, 2$ . Dann sind  $v'_1 \circ u_{1,i}, v'_2 \circ u_{2,i} : j_i \rightarrow j$ ,  $i = 1, \dots, n$  Paare von parallelen Morphismen mit Ziel  $j$ . Also gibt es nach der vorherigen Aussage einen Morphismus  $w : j \rightarrow k$  mit  $w \circ v'_1 \circ u_{1,i} = w \circ v'_2 \circ u_{2,i}$  für  $i = 1, \dots, n$ . Dann wird die Behauptung aber von  $v_r := w \circ v'_r : k_r \rightarrow k$ ,  $r = 1, 2$  erfüllt.  $\square$

Dieses Lemma besagt insbesondere, dass für  $n > 0$  und für eine filtrierende Kategorie  $\mathcal{J}$  der Diagonalfunktor  $\Delta_{\mathcal{J}}^n : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}^n$  final ist. Dabei ist der Diagonalfunktor auf Objekten  $j$  und Morphismen  $h$  aus  $\mathcal{J}$  durch  $\Delta_{\mathcal{J}}^n(j) := (j, \dots, j)$  bzw.  $\Delta_{\mathcal{J}}^n(h) := (h, \dots, h)$  erklärt.

Ferner sei angemerkt, dass hier der Begriff final im Sinne der Definition [Sbt70, 9.1.1.] verwendet wird. Danach heißt ein Funktor  $\mathcal{F} : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{A}$  final, wenn gelten:

1. Zu jedem Objekt  $A \in \mathcal{A}$  gibt es ein Objekt  $j \in \mathcal{J}$  und einen  $\mathcal{A}$ -Morphismus  $A \rightarrow \mathcal{F}(j)$ .
2. Sind  $u_i : A \rightarrow \mathcal{F}(j_i)$ ,  $i = 1, 2$  zwei Morphismen der obigen Gestalt, so gibt es ein Objekt  $k \in \mathcal{J}$  und Morphismen  $v_i : j_i \rightarrow k$  mit  $\mathcal{F}(v_1) \circ u_1 = \mathcal{F}(v_2) \circ u_2$ .

**Korollar 3.1.3.** *Sei  $n > 0$ , und sei  $\mathcal{J}$  eine filtrierende Kategorie. Dann ist der Diagonalfunktor  $\Delta_{\mathcal{J}}^n : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}^n$  final.*

*Beweis.* Als erstes ist zu zeigen, dass zu jedem Objekt  $(j_1, \dots, j_n)$  aus  $\mathcal{J}^n$  ein Objekt  $j \in \mathcal{J}$  und ein Morphismus  $(j_1, \dots, j_n) \rightarrow \Delta_{\mathcal{J}}^n(j) = (j, \dots, j)$  existieren. Dies ist aber gerade die zweite Aussage aus dem vorstehenden Lemma. Des Weiteren ist zu zeigen, dass zu zwei Morphismen  $u_r = (u_{r,1}, \dots, u_{r,n}) : (j_1, \dots, j_n) \rightarrow \Delta_{\mathcal{J}}^n(k_r)$ ,  $r = 1, 2$  ein Objekt  $k$  aus  $\mathcal{J}$  und Morphismen  $v_r : k_r \rightarrow k$ ,  $r = 1, 2$  mit  $\Delta_{\mathcal{J}}^n(v_1) \circ u_1 = \Delta_{\mathcal{J}}^n(v_2) \circ u_2$ , d.h. mit  $v_1 \circ u_{1,i} = v_2 \circ u_{2,i}$  für  $i = 1, \dots, n$  existieren. Dies entspricht der letzten Aussage aus dem vorherigen Lemma.  $\square$

Schließlich werden noch Aussagen über Kolimites von Funktoren benötigt, deren Quelle ein kartesisches Produkt von Kategorien ist. Derartige Kolimites lassen

sich sukzessive berechnen [Par69, 2.7 Lemma 1]. Eine konkrete Formulierung dieser Aussage ist im folgenden Satz festgehalten. Darin bezeichnet

$$\mathcal{K}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathcal{A}} = \text{Funk}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

für Kategorien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  den Konstantenfunktor. Dieser ist für Objekte  $A \in \mathcal{A}$  und  $B \in \mathcal{B}$  sowie Morphismen  $f \in \mathcal{A}$ ,  $g \in \mathcal{B}$  durch  $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(B)(A) := B$ ,  $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(B)(f) := \text{id}_B$  und  $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(g)(A) := g$  erklärt.

**Satz 3.1.4.** *Sei  $\mathcal{F} : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{B}$  ein Funktor. Für jedes Objekt  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  besitze der Funktor  $\mathcal{F}(A_1, -) : \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{B}$  einen Kolimes*

$$\left( \mathcal{G}(A_1), \varphi(A_1) : \mathcal{F}(A_1, -) \dashrightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}_2}(\mathcal{G}(A_1)) \right).$$

*Dann gibt es zu jedem Morphismus  $f : A_1 \rightarrow A'_1$  aus  $\mathcal{A}_1$  genau einen  $\mathcal{B}$ -Morphismus  $\mathcal{G}(f) : \mathcal{G}(A_1) \rightarrow \mathcal{G}(A'_1)$  mit*

$$\varphi(A'_1)(A_2) \circ \mathcal{F}(f, \text{id}_{A_2}) = \mathcal{G}(f) \circ \varphi(A_1)(A_2)$$

*für alle Objekte  $A_2 \in \mathcal{A}_2$ . Hierdurch ist ein Funktor  $\mathcal{G} : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{B}$  definiert.*

*Der Funktor  $\mathcal{F}$  besitzt nun genau dann einen Kolimes, wenn der Kolimes von  $\mathcal{G}$  existiert. Ist in diesem Fall  $(B, \psi : \mathcal{G} \dashrightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}_1}(B))$  ein Kolimes von  $\mathcal{G}$ , so ist  $(B, \gamma : \mathcal{F} \dashrightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}(B))$  mit  $\gamma(A_1, A_2) := \psi(A_1) \circ \varphi(A_1)(A_2)$  ein Kolimes von  $\mathcal{F}$ , und jeder Kolimes von  $\mathcal{F}$  kann so dargestellt werden.  $\square$*

Aus diesem Satz ergibt sich leicht das folgende Resultat.

**Satz 3.1.5.** *Seien  $\mathcal{F}_i : \mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{B}_i$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $\mathcal{G} : \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}$  Funktoren. Ferner sei  $(B_i, \varphi_i : \mathcal{F}_i \dashrightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{A}_i}(B_i))$  ein Kolimes von  $\mathcal{F}_i$ , der von  $\mathcal{G}$  im  $i$ -ten Argument erhalten wird. Dann ist  $(\mathcal{G}(B_1, \dots, B_n), \mathcal{G}(\varphi_1, \dots, \varphi_n))$  ein Kolimes des Funktors  $\mathcal{G} \circ (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n) : \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{B}$ .  $\square$*

Mit der folgenden Hilfsaussage kann nun gezeigt werden, dass freie Operaden existieren.

**Lemma 3.1.6.** *Sei  $n > 0$ , und sei  $\mathcal{J}$  eine filtrierende Kategorie. Ferner seien  $\mathcal{F} : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{A}$  und  $\mathcal{G} : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{B}$  Funktoren. Der Kolimes von  $\mathcal{F}$  möge existieren und von dem Funktor  $\mathcal{G}$  in jedem Argument erhalten werden. Dann erhält auch der Funktor  $\mathcal{G} \circ \Delta_{\mathcal{A}}^n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  den Kolimes von  $\mathcal{F}$ .*

*Beweis.* Sei  $(A, \varphi : \mathcal{F} \dashrightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{J}}(A))$  ein Kolimes von  $\mathcal{F}$ . Nach dem vorherigen Satz ist  $(\mathcal{G}(A, \dots, A), \mathcal{G}(\varphi, \dots, \varphi))$  ein Kolimes von  $\mathcal{G} \circ (\mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}) : \mathcal{J}^n \rightarrow \mathcal{B}$ . Da die Kategorie  $\mathcal{J}$  filtrierend ist, ist der Diagonalfunktor  $\Delta_{\mathcal{J}}^n : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}^n$  nach Korollar 3.1.3 final. Gemäß [Sbt70, 9.1.1] ist dann  $(\mathcal{G}(A, \dots, A), \mathcal{G}(\varphi, \dots, \varphi) \Delta_{\mathcal{J}}^n)$  ein Kolimes von  $\mathcal{G} \circ (\mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}) \circ \Delta_{\mathcal{J}}^n : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{B}$ . Aus der Definition des Diagonalfunktors ergibt sich nun unmittelbar, dass  $(\mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}) \circ \Delta_{\mathcal{J}}^n = \Delta_{\mathcal{A}}^n \circ \mathcal{F}$  und  $(\varphi, \dots, \varphi) \Delta_{\mathcal{J}}^n = \Delta_{\mathcal{A}}^n \varphi$



gelten. Somit ist  $((\mathcal{G} \circ \Delta_{\mathcal{A}}^n)(A), (\mathcal{G} \circ \Delta_{\mathcal{A}}^n)\varphi)$  ein Kolimes von  $\mathcal{G} \circ \Delta_{\mathcal{A}}^n \circ \mathcal{F}$ . Dies bedeutet aber gerade, dass der Funktor  $\mathcal{G} \circ \Delta_{\mathcal{A}}^n$  den Kolimes von  $\mathcal{F}$  erhält.  $\square$

**Satz 3.1.7.** *Sei  $(\mathcal{D}_s, \boxtimes, \mathcal{J}, a, l, r)$  die monoidale Kategorie aus Satz 2.3.9. Insbesondere ist also das Tensorprodukt auf Objekten  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  durch*

$$(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})(n) = \coprod_m \mathcal{F}(m) \otimes_{IZ_m} \coprod_{n_1 + \dots + n_m = n} (\mathcal{G}(n_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{G}(n_m)) \otimes_{IZ_{n_1} \otimes \dots \otimes IZ_{n_m}} IZ_n$$

gegeben. Dann ist  $\mathcal{D}_s$  kovollständig, und das Tensorprodukt  $\boxtimes$  erhält im ersten Argument beliebige Kolimites und im zweiten Argument filtrierende Kolimites.

*Beweis.* Mit  $\mathcal{C}$  ist auch die Kategorie  $\mathcal{C}_s$  kovollständig. Dann ist nach der dualen Version von [Par69, 2.7 Satz 1] aber auch die Funktorkategorie  $\mathcal{D}_s = \text{Funk}(\mathcal{Z}^{\text{op}}, \mathcal{C}_s)$  kovollständig. Somit sind nur noch die Behauptungen über den Tensorfunktoren zu zeigen. Dabei genügt es, das Tensorprodukt  $\boxtimes$  als Funktor  $\mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  mit  $\mathcal{D} = \text{Funk}(\mathcal{Z}^{\text{op}}, \mathcal{C})$  zu betrachten.

Zunächst sei angemerkt, dass für eine Algebra  $A$  in  $\mathcal{C}$  der Vergissfunktoren  $\mathcal{V} : {}_A\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  von der Kategorie der  $A$ -Linksmoduln in die Grundkategorie  $\mathcal{C}$  Kolimites erzeugt, da das Tensorprodukt von  $\mathcal{C}$  Kolimites im zweiten Argument erhält. Deshalb erhält ein Funktor  $\mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow {}_A\mathcal{C}$  genau dann den Kolimes eines Funktors  $\mathcal{F} : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{A}$ , wenn  $\mathcal{V} \circ \mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  diesen Kolimes erhält. Eine entsprechende Aussage gilt dann auch für Kategorien von Rechts- oder Bimoduln. Somit kann im Folgenden die Modulstruktur vernachlässigt werden.

Im vorliegenden Fall handelt es sich jeweils um Moduln über Monoidalgebren  $IG$ . Für diese kann auch wie folgt gezeigt werden, dass der Vergissfunktoren  $\mathcal{V} : {}_IG\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  Kolimites erzeugt. Die Kategorie  ${}_IG\mathcal{C}$  kann mit der Funktorkategorie  $\mathcal{C}^G = \text{Funk}(G, \mathcal{C})$  identifiziert werden. Die zu  $G$  gehörige diskrete Kategorie  $|G|$  besitzt genau ein Objekt. Deshalb kann die Funktorkategorie  $\mathcal{C}^{|G|}$  mit  $\mathcal{C}$  gleichgesetzt werden. Die Inklusion  $|G| \rightarrow G$  induziert nun einen Funktor  $\mathcal{C}^G \rightarrow \mathcal{C}^{|G|}$ . Bezüglich der Identifizierungen  ${}_IG\mathcal{C} = \mathcal{C}^G$  und  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{|G|}$  entspricht dieser Funktor dem Vergissfunktoren  $\mathcal{V} : {}_IG\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ . Die Analoge Aussage von [Mac72, V.3 Satz 2] für Kolimites besagt aber gerade, dass der Funktor  $\mathcal{C}^G \rightarrow \mathcal{C}^{|G|}$  Kolimites erzeugt.

Der Tensorfunktoren  $\boxtimes : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  erhält nun Kolimites im ersten Argument, da

- Kolimites in der Funktorkategorie  $\mathcal{D} = \text{Funk}(\mathcal{Z}^{\text{op}}, \mathcal{C})$  argumentweise gebildet werden [Par69, 2.7 Anmerkung zu Satz 1];
- Kolimites von Kolimes-Konstruktionen, hier also von Differenzkokern- und Koproduktbildungen erhalten werden [Par69, 2.5 Lemma 2 und 2.7 Satz 3]; alternativ kann man auch damit argumentieren, dass Kolimites mit Kolimites vertauschen [Par69, 2.7 Korollar 2];
- das Tensorprodukt von  $\mathcal{C}$  in jedem Argument Kolimites erhält.

Ferner erhält das Tensorprodukt  $\boxtimes$  filtrierende Kolimites im zweiten Argument. Hierfür wird neben den obigen Argumenten noch zusätzlich benötigt, dass für feste natürliche Zahlen  $m, n_1, \dots, n_m$  der Funktor  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{G}(n_m)$  filtrierende Kolimites erhält. Dies ist aber nach dem vorstehenden Lemma der Fall, da der Funktor  $\mathcal{D}^m \rightarrow \mathcal{C}, (\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_m) \mapsto \mathcal{G}_1(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{G}_m(n_m)$  in jedem Argument Kolimites erhält.  $\square$

**Korollar 3.1.8.** *Der Vergissfunktor  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\mathcal{D}_s}^{\text{Op}(\mathcal{C})} : \text{Op}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}_s$  besitzt einen Linksadjungierten  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\text{Op}(\mathcal{C})}^{\mathcal{D}_s} : \mathcal{D}_s \rightarrow \text{Op}(\mathcal{C})$ .*  $\square$

**Bemerkung 3.1.9.** Sei  $(\mathcal{A}, \otimes, I, a, l, r)$  eine monoidale Kategorie und  $(A, \mu_A, \eta_A)$  ein Monoid in  $\mathcal{A}$ . Dann besitzt der Vergissfunktor  $\mathcal{V} : \mathcal{A}_A \rightarrow \mathcal{A}$  einen Linksadjungierten. Ein solcher linksadjungierter Funktor  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_A$  ist auf Objekten  $V$  und Morphismen  $f : V \rightarrow W$  aus  $\mathcal{A}$  durch  $\mathcal{F}(V) := (V \otimes A, (\text{id}_V \otimes \mu_A) \circ a_{V,A,A})$  und  $\mathcal{F}(f) := f \otimes \text{id}_A$  gegeben. Dabei können die Einheit  $\eta : \text{id}_A \xrightarrow{\quad} \mathcal{V} \circ \mathcal{F}$  und Koeinheit  $\epsilon : \mathcal{F} \circ \mathcal{V} \xrightarrow{\quad} \text{id}_{\mathcal{A}_A}$  der Adjunktion als  $\eta(V) := (\text{id}_V \otimes \eta_A) \circ r_V^{-1}$  bzw.  $\epsilon(W, \rho_W : W \otimes A \rightarrow W) := \rho_W$  gewählt werden.

Dann besitzt aber auch der Vergissfunktor

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\mathcal{D}_s} : \mathcal{D}_s = \mathcal{C}_s^{\mathcal{Z}^{\text{op}}} \rightarrow \mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}$$

einen linksadjungierten Funktor

$$\mathcal{F}_{\mathcal{D}_s}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}} : \mathcal{C}_s^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{D}_s.$$

Hierbei wird die obige Konstruktion eines freien Moduls argumentweise angewendet.

**Bemerkung 3.1.10.** Sei  $\mathcal{C} = \mathcal{YD}_K^K$ . Dann kann  $\mathcal{C}_s$  nach Lemma 2.1.3 mit der Kategorie  $\text{Vek}$  der Vektorräume identifiziert werden. Der Vergissfunktor  $\text{Vek} \rightarrow \text{Set}$  besitzt in Gestalt der Konstruktion des freien Vektorraums einen linksadjungierten Funktor. Wendet man diese Konstruktion argumentweise an, so ergibt sich ein Linksadjungierter für den Vergissfunktor  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{Set}^{\mathbb{N}}}^{\text{Vek}^{\mathbb{N}}} : \mathcal{C}_s^{\mathbb{N}} = \text{Vek}^{\mathbb{N}} \rightarrow \text{Set}^{\mathbb{N}}$ .

Insgesamt wurde also gezeigt, dass die Vergissfunktionen  $\text{Op}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}_s$  und  $\mathcal{D}_s \rightarrow \mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}$  sowie  $\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}} \rightarrow \text{Set}^{\mathbb{N}}$  im Fall  $\mathcal{C} = \mathcal{YD}_K^K$  linksadjungierte Funktoren besitzen. Aus diesen Vergissfunktionen lassen sich weitere Vergissfunktionen durch Verkettung gewinnen, zu denen dann ebenfalls Linksadjungierte existieren. Für diese Adjunktionen soll eine einheitliche Notation verwendet werden.

Dazu seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zwei verschiedene Kategorien von  $\text{Op}(\mathcal{C})$ ,  $\mathcal{D}_s$  und  $\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}$  sowie  $\text{Set}^{\mathbb{N}}$  im Fall  $\mathcal{C} = \mathcal{YD}_K^K$ , wobei  $\mathcal{A}$  in dieser Liste vor  $\mathcal{B}$  stehe. Dann gibt es einen Vergissfunktor  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ . Zu diesem Vergissfunktor sei eine Adjunktion fest gewählt. Dabei werde der zugehörige linksadjungierte Funktor mit  $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  bezeichnet. Ferner seien  $\eta_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : \text{id}_{\mathcal{B}} \xrightarrow{\quad} \mathcal{V}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \circ \mathcal{F}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$  und  $\epsilon_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : \mathcal{F}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \circ \mathcal{V}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \xrightarrow{\quad} \text{id}_{\mathcal{A}}$  die Einheit

und Koeinheit dieser Adjunktion. Hiermit lassen sich die Adjunktionsisomorphismen

$$\Phi_B^A : \mathcal{A}(\mathcal{F}_A^{\mathcal{B}}(-), -) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(-, \mathcal{V}_B^A(-))$$

und

$$\Psi_A^{\mathcal{B}} : \mathcal{B}(-, \mathcal{V}_B^A(-)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(\mathcal{F}_A^{\mathcal{B}}(-), -)$$

beschreiben. Für Objekte  $A \in \mathcal{A}$  und  $B \in \mathcal{B}$  sowie Morphismen  $f : \mathcal{F}_A^{\mathcal{B}}(B) \rightarrow A$  und  $g : B \rightarrow \mathcal{V}_B^A(A)$  gelten

$$\Phi_B^A(B, A)(f) = \mathcal{V}_B^A(f) \circ \eta_B^A(B) : B \rightarrow \mathcal{V}_B^A(A) \quad (3.1)$$

und

$$\Psi_A^{\mathcal{B}}(B, A)(g) = \epsilon_B^A(A) \circ \mathcal{F}_A^{\mathcal{B}}(g) : \mathcal{F}_A^{\mathcal{B}}(B) \rightarrow A. \quad (3.2)$$

Falls die Objekte  $A$  und  $B$  klar sind, werden auch die Kurzschreibweisen  $\Phi_B^A(f)$  und  $\Psi_A^{\mathcal{B}}(g)$  verwendet. Ferner werden die Vergissfaktoren in der Notation zum Teil unterdrückt.

Zur Konstruktion von Quotientenoperaden werden Ideale benötigt. Diese Ideale werden ganz analog zu [GK94, 2.1.3] definiert.

**Definition 3.1.11.** Sei  $(\mathfrak{D}, \mu^{\mathfrak{D}}, \eta^{\mathfrak{D}})$  eine Operade über  $\mathcal{C}$ . Ein Ideal von  $\mathfrak{D}$  ist ein Unterobjekt  $\iota : \mathcal{J} \rightarrow \mathfrak{D}$  von  $\mathfrak{D}$  in  $\mathcal{D}_s$ , so dass für alle  $k, n, n_0, n_1, \dots, n_{n_0} \in \mathbb{N}$  mit  $0 \leq k \leq n_0$  und  $n_1 + \dots + n_{n_0} = n$  ein  $\mathcal{C}$ -Morphismus

$$\overline{\mu}_{(n_0; n_1, \dots, n_{n_0})}^{\iota, k} : \mathfrak{D}(n_0) \otimes \dots \otimes \mathfrak{D}(n_{k-1}) \otimes \mathcal{J}(n_k) \otimes \mathfrak{D}(n_{k+1}) \otimes \dots \otimes \mathfrak{D}(n_{n_0}) \longrightarrow \mathcal{J}(n)$$

mit

$$\mu_{(n_0; n_1, \dots, n_{n_0})}^{\mathfrak{D}} \circ (\text{id}_{\mathfrak{D}(n_0)} \otimes \dots \otimes \iota(n_k) \otimes \dots \otimes \text{id}_{\mathfrak{D}(n_{n_0})}) = \iota(n) \circ \overline{\mu}_{(n_0; n_1, \dots, n_{n_0})}^{\iota, k} \quad (3.3)$$

existiert.

**Lemma 3.1.12.** Sei  $\varphi : (\mathfrak{D}, \mu^{\mathfrak{D}}, \eta^{\mathfrak{D}}) \rightarrow (\mathfrak{P}, \mu^{\mathfrak{P}}, \eta^{\mathfrak{P}})$  ein Morphismus von Operaden. Dann ist der Kern  $\iota : \text{Ke}(\varphi) \rightarrow \mathfrak{D}$  von  $\varphi$  in der Kategorie  $\mathcal{D}_s$  ein Ideal von  $\mathfrak{D}$ .

*Beweis.* Seien  $k, n, n_0, \dots, n_{n_0} \in \mathbb{N}$  mit  $0 \leq k \leq n_0$  und  $n_1 + \dots + n_{n_0} = n$  fest gewählt. Dann ist

$$\begin{aligned} & \varphi(n) \circ \mu_{(n_0; n_1, \dots, n_{n_0})}^{\mathfrak{D}} \circ (\text{id}_{\mathfrak{D}(n_0)} \otimes \dots \otimes \iota(n_k) \otimes \dots \otimes \text{id}_{\mathfrak{D}(n_{n_0})}) \\ &= \mu_{(n_0; n_1, \dots, n_{n_0})}^{\mathfrak{P}} \circ (\varphi(n_0) \otimes \dots \otimes (\varphi(n_k) \circ \iota(n_k)) \otimes \dots \otimes \varphi(n_{n_0})) \end{aligned}$$

der Nullmorphismus, da  $\varphi(n_k) \circ \iota(n_k) = 0$  gilt und das Tensorprodukt diesen Nullmorphismus erhält. Deshalb faktorisiert der Morphismus

$$\mu_{(n_0; n_1, \dots, n_{n_0})}^{\mathfrak{D}} \circ (\text{id}_{\mathfrak{D}(n_0)} \otimes \dots \otimes \iota(n_k) \otimes \dots \otimes \text{id}_{\mathfrak{D}(n_{n_0})})$$

über  $\iota(n) : \text{Ke}(\varphi)(n) \rightarrow \mathfrak{D}(n)$ . Dies bedeutet aber gerade, dass es einen Morphismus

$$\overline{\mu}_{(n_0; n_1, \dots, n_{n_0})}^{\iota, k} : \mathfrak{D}(n_0) \otimes \cdots \otimes \text{Ke}(\varphi)(n_k) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{D}(n_{n_0}) \longrightarrow \mathfrak{J}(n),$$

gibt, der die Gleichung (3.3) erfüllt.  $\square$

Bevor nun Quotientenoperaden konstruiert werden können, wird noch eine kategorientheoretische Hilfsaussage benötigt.

**Bemerkung 3.1.13.** Sei  $n > 0$ , und seien  $f_i : K_i \rightarrow M_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  Morphismen aus  $\mathcal{C}$ . Ferner sei  $g_i : M_i \rightarrow N_i$  ein Kokern von  $f_i$ . Dann gibt es zu jedem Morphismus  $h : M_1 \otimes \cdots \otimes M_n \rightarrow N$  mit  $h \circ (\text{id}_{M_1} \otimes \cdots \otimes f_i \otimes \cdots \otimes \text{id}_{M_n}) = 0$  für  $i = 1, \dots, n$  genau einen Morphismus  $\overline{h} : N_1 \otimes \cdots \otimes N_n \rightarrow N$  mit  $h = \overline{h} \circ (g_1 \otimes \cdots \otimes g_n)$ .

Dies sieht man wie folgt. Sei  $\mathcal{J}$  die Kategorie mit zwei Objekten  $A$  und  $B$ , die außer den Identitäten die beiden Morphismen  $f, g : A \rightarrow B$  besitzt. Die Funktoren  $\mathcal{F}_i : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  seien durch  $\mathcal{F}_i(A) := K_i$ ,  $\mathcal{F}_i(B) := M_i$ ,  $\mathcal{F}_i(f) := f_i$  und  $\mathcal{F}_i(g) := 0$  erklärt. Dann entspricht der Kokern von  $f_i$  dem Kolimes von  $\mathcal{F}_i$ . Nach Satz 3.1.5 besitzt der Funktor  $\mathcal{F} := \otimes_n(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n) : \mathcal{J}^n \rightarrow \mathcal{C}$  einen Kolimes, wobei  $N_1 \otimes \cdots \otimes N_n$  als zugehöriges Kolimesobjekt gewählt werden kann.

Sei nun  $N$  ein Objekt aus  $\mathcal{C}$  und  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{J}^n}(N)$  eine natürliche Transformation. Da das Tensorprodukt von  $\mathcal{C}$  Nullmorphismen erhält, gibt es zu jedem Objekt  $\mathbf{C} \neq (B, \dots, B)$  aus  $\mathcal{J}^n$  einen Morphismus in  $\mathcal{J}^n$  mit Quelle  $\mathbf{C}$ , der durch  $\mathcal{F}$  auf den Nullmorphimus abgebildet wird. Aus der Natürlichkeit von  $\varphi$  folgt dann  $\varphi(\mathbf{C}) = 0$ . Somit ist  $\varphi$  schon vollständig durch den Morphismus  $h := \varphi(B, \dots, B) : M_1 \otimes \cdots \otimes M_n \rightarrow N$  festgelegt. Umgekehrt definiert ein solches  $h$  genau dann eine natürliche Transformation  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{J}^n}(N)$ , wenn  $h \circ \mathcal{F}(\mathbf{f}) = 0$  für alle Morphismen  $\mathbf{f} \neq \text{id}$  aus  $\mathcal{J}^n$  gilt, deren Ziel  $(B, \dots, B)$  ist. Sei  $\mathbf{f}_i$  derjenige Morphismus aus  $\mathcal{J}^n$ , deren  $i$ -te Komponente gleich  $f$  ist, während alle anderen Komponenten gleich  $\text{id}_B$  sind. Jeder Morphismus  $\mathbf{f} \neq \text{id}$  aus  $\mathcal{J}^n$  mit Ziel  $(B, \dots, B)$  muss in einer seiner Komponenten entweder den Morphismus  $f$  oder den Morphismus  $g$  enthalten. Im ersten Fall kann dann  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_i \circ \mathbf{g}$  für ein geeignetes  $i$  und einen Morphismus  $\mathbf{g}$  aus  $\mathcal{J}^n$  geschrieben werden, und im zweiten Fall gilt  $\mathcal{F}(\mathbf{f}) = 0$ . Somit ist die Bedingung  $h \circ \mathcal{F}(\mathbf{f}) = 0$  nur für die Morphismen  $\mathbf{f}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  zu überprüfen. Somit entsprechen die natürlichen Transformationen  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{J}^n}(N)$  den Morphismen  $h : M_1 \otimes \cdots \otimes M_n \rightarrow N$  mit  $h \circ (\text{id}_{M_1} \otimes \cdots \otimes f_i \otimes \cdots \otimes \text{id}_{M_n}) = 0$  für  $i = 1, \dots, n$ .

Im Fall des obigen Kolimes von  $\mathcal{F}$  ist die zugehörige natürliche Transformation  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{J}^n}(N_1 \otimes \cdots \otimes N_n)$  durch den Morphismus  $g_1 \otimes \cdots \otimes g_n$  bestimmt. Hieraus ergibt sich dann die Behauptung.

**Satz 3.1.14.** Sei  $(\mathfrak{D}, \mu^{\mathfrak{D}}, \eta^{\mathfrak{D}})$  eine Operade über  $\mathcal{C}$ , und sei  $\iota : \mathfrak{J} \rightarrow \mathfrak{D}$  ein Ideal von  $\mathfrak{D}$ . Ferner sei  $\pi = \pi_{\iota} : \mathfrak{D} \rightarrow \overline{\mathfrak{D}}$  ein Kokern von  $\iota$  in  $\mathcal{D}_s$ . Dann ist  $\overline{\mathfrak{D}}$  auf eindeutige Weise eine Operade, so dass  $\pi$  ein Morphismus von Operaden ist.

Ist des Weiteren  $\varphi : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{P}$  ein Operadenmorphismus mit  $\varphi \circ \iota = 0$ , so gibt es genau einen Operadenmorphismus  $\overline{\varphi} : \overline{\mathfrak{D}} \rightarrow \mathfrak{P}$  mit  $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$ .

*Beweis.* Sei  $(\overline{\mathfrak{D}}, \mu^{\overline{\mathfrak{D}}}, \eta^{\overline{\mathfrak{D}}})$  eine Operadenstruktur auf  $\overline{\mathfrak{D}}$ , so dass  $\pi$  ein Morphismus von Operaden ist. Dann gelten

$$\eta^{\overline{\mathfrak{D}}} = \pi(1) \circ \eta^{\mathfrak{D}} \quad (3.4)$$

und

$$\mu_{(n_0; n_1, \dots, n_{n_0})}^{\overline{\mathfrak{D}}} \circ (\pi(n_0) \otimes \cdots \otimes \pi(n_{n_0})) = \pi(n) \circ \mu_{(n_0; n_1, \dots, n_{n_0})}^{\mathfrak{D}} \quad (3.5)$$

für alle  $n, n_0, \dots, n_{n_0} \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \cdots + n_{n_0} = n$ . Da  $\pi(n_0) \otimes \cdots \otimes \pi(n_{n_0})$  ein Epimorphismus ist, sind durch diese Gleichung  $\eta^{\overline{\mathfrak{D}}}$  und  $\mu^{\overline{\mathfrak{D}}}$  eindeutig festgelegt.

Umgekehrt kann durch die Gleichung (3.4) ein Morphismus  $\eta^{\mathfrak{D}} : I \rightarrow \overline{\mathfrak{D}}(1)$  definiert werden. Ferner ist

$$\begin{aligned} \pi(n) \circ \mu_{(n_0; n_1, \dots, n_{n_0})}^{\mathfrak{D}} \circ (\text{id}_{\mathfrak{D}(n_0)} \otimes \cdots \otimes \iota(n_k) \otimes \cdots \otimes \text{id}_{\mathfrak{D}(n_{n_0})}) \\ = \pi(n) \circ \iota(n) \circ \bar{\mu}_{(n_0; n_1, \dots, n_{n_0})}^{\iota, k} = 0 \end{aligned}$$

für  $0 \leq k \leq n_0$ , da  $\iota$  ein Ideal von  $\mathfrak{D}$  und  $\pi(n)$  ein Kokern von  $\iota(n)$  ist. Dann existiert aber nach der vorstehenden Bemerkung genau ein Morphismus

$$\mu_{(n_0; n_1, \dots, n_{n_0})}^{\overline{\mathfrak{D}}} : \overline{\mathfrak{D}}(n_0) \otimes \cdots \otimes \overline{\mathfrak{D}}(n_{n_0}) \longrightarrow \overline{\mathfrak{D}}(n),$$

der die Gleichung (3.5) erfüllt.

Damit  $\overline{\mathfrak{D}}$  hierdurch zu einer Operade wird, müssen noch die Äquivarianzaxiome, die Einsaxiome und das Assoziativitätsaxiom aus Bemerkung 2.3.11 gezeigt werden. Hierbei handelt es sich jeweils um Identitäten von Morphismen, deren Quelle ein Tensorprodukt von Objekten der Form  $\overline{\mathfrak{D}}(n)$  ist. Da das Tensorprodukt von Morphismen der Gestalt  $\pi(n)$  ein Epimorphismus ist, genügt es, diese Gleichungen nach Vorschalten eines solchen Epimorphismus zu beweisen. Unter Verwendung der Definitionsgleichungen (3.4) und (3.5) sowie der  $I\mathbb{Z}_n$ -Rechtslinearität von  $\pi(n)$  lassen sich dann die obigen Axiome leicht auf die entsprechenden Axiome von  $(\mathfrak{D}, \mu^{\mathfrak{D}}, \eta^{\mathfrak{D}})$  zurückführen. Deshalb soll hier nur exemplarisch das zweite Äquivarianzaxiom gezeigt werden. Dazu seien  $m, n, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \cdots + n_m = n$ . Ferner sei  $\gamma \in Z_m$ . Als Abkürzung wird  $n'_i := n_{\gamma^{-1}(i)}$  gesetzt. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \mu_{(m; n_1, \dots, n_m)}^{\overline{\mathfrak{D}}} \circ (\tilde{\rho}_{\overline{\mathfrak{D}}(m)}(\gamma) \otimes \text{id}_{\overline{\mathfrak{D}}(n_1)} \otimes \cdots \otimes \text{id}_{\overline{\mathfrak{D}}(n_m)}) \circ (\pi(m) \otimes \pi(n_1) \otimes \cdots \otimes \pi(n_m)) \\ &= \pi(n) \circ \mu_{(m; n_1, \dots, n_m)}^{\mathfrak{D}} \circ (\tilde{\rho}_{\mathfrak{D}(m)}(\gamma) \otimes \text{id}_{\mathfrak{D}(n_1)} \otimes \cdots \otimes \text{id}_{\mathfrak{D}(n_m)}) \\ &= \pi(n) \circ \tilde{\rho}_{\mathfrak{D}(n)}(\tilde{\varphi}_2^{\mathbb{Z}}(\gamma)(n_1, \dots, n_m)) \circ \mu_{(m; n'_1, \dots, n'_m)}^{\mathfrak{D}} \\ & \quad \circ (\text{id}_{\mathfrak{D}(m)} \otimes \tilde{\varphi}_2^{\mathbb{C}}(\gamma)(\mathfrak{D}(n_1), \dots, \mathfrak{D}(n_m))) \\ &= \tilde{\rho}_{\overline{\mathfrak{D}}(n)}(\tilde{\varphi}_2^{\mathbb{Z}}(\gamma)(n_1, \dots, n_m)) \circ \mu_{(m; n'_1, \dots, n'_m)}^{\overline{\mathfrak{D}}} \circ (\pi(m) \otimes \pi(n'_1) \otimes \cdots \otimes \pi(n'_m)) \\ & \quad \circ (\text{id}_{\mathfrak{D}(m)} \otimes \tilde{\varphi}_2^{\mathbb{C}}(\gamma)(\mathfrak{D}(n_1), \dots, \mathfrak{D}(n_m))) \\ &= \tilde{\rho}_{\overline{\mathfrak{D}}(n)}(\tilde{\varphi}_2^{\mathbb{Z}}(\gamma)(n_1, \dots, n_m)) \circ \mu_{(m; n'_1, \dots, n'_m)}^{\overline{\mathfrak{D}}} \circ (\text{id}_{\overline{\mathfrak{D}}(m)} \otimes \tilde{\varphi}_2^{\mathbb{C}}(\gamma)(\overline{\mathfrak{D}}(n_1), \dots, \overline{\mathfrak{D}}(n_m))) \\ & \quad \circ (\pi(m) \otimes \pi(n_1) \otimes \cdots \otimes \pi(n_m)). \end{aligned}$$

Hierbei wurde bei der ersten und dritten Umformung verwendet, dass  $\pi(m)$  bzw.  $\pi(n)$   $IZ_m$ - bzw.  $IZ_n$ -rechtslinear ist sowie die Definitionsgleichung (3.5) gilt. Die zweite Gleichung ist aufgrund des entsprechenden Äquivarianzaxioms der Operade  $\mathfrak{D}$  erfüllt. Schließlich gilt die letzte Gleichung wegen der Natürlichkeit von  $\overline{\varphi}_2^{\mathcal{C}}(\gamma)$ . Hieraus ergibt sich dann das zweite Äquivarianzaxiom für  $\overline{\mathfrak{D}}$ , und die andere Axiome werden analog bewiesen.

Somit ist  $(\overline{\mathfrak{D}}, \mu^{\overline{\mathfrak{D}}}, \eta^{\overline{\mathfrak{D}}})$  eine Operade. Ferner besagen die Definitionsgleichungen (3.4) und (3.5), dass  $\pi : \mathfrak{D} \rightarrow \overline{\mathfrak{D}}$  ein Morphismus von Operaden ist.

Sei nun  $\varphi : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{P}$  ein Operadenmorphismus mit  $\varphi \circ \iota = 0$ . Da der Vergissfunktorkomposition  $\mathcal{V} : \text{Op}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}_s$  treu ist und  $\pi$  ein Epimorphismus in  $\mathcal{D}_s$  ist, kann es höchstens einen Operadenmorphismus  $\overline{\varphi} : \overline{\mathfrak{D}} \rightarrow \mathfrak{P}$  mit  $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$  geben. Umgekehrt gibt es einen  $\mathcal{D}_s$ -Morphismus  $\overline{\varphi} : \overline{\mathfrak{D}} \rightarrow \mathfrak{P}$  mit  $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$ , da  $\varphi \circ \iota = 0$  gilt und  $\pi$  ein Kokern von  $\iota$  in  $\mathcal{D}_s$  ist. Dieser Morphismus ist wegen

$$\overline{\varphi}(1) \circ \eta^{\overline{\mathfrak{D}}} = \overline{\varphi}(1) \circ \pi(1) \circ \eta^{\mathfrak{D}} = \varphi(1) \circ \eta^{\mathfrak{D}} = \eta^{\mathfrak{P}}$$

mit den Einheiten verträglich. Hierbei wurden die Definitionsgleichungen für  $\eta^{\overline{\mathfrak{D}}}$  und  $\overline{\varphi}$  benutzt sowie die Tatsache, dass  $\varphi$  ein Morphismus von Operaden ist. Zudem folgt aus

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(n) \circ \mu_{(m;n_1, \dots, n_m)}^{\overline{\mathfrak{D}}} \circ (\pi(m) \otimes \pi(n_1) \otimes \dots \otimes \pi(n_m)) &= \overline{\varphi}(n) \circ \pi(n) \circ \mu_{(m;n_1, \dots, n_m)}^{\mathfrak{D}} \\ &= \varphi(n) \circ \mu_{(m;n_1, \dots, n_m)}^{\mathfrak{D}} = \mu_{(m;n_1, \dots, n_m)}^{\mathfrak{P}} \circ (\varphi(m) \otimes \varphi(n_1) \otimes \dots \otimes \varphi(n_m)) \\ &= \mu_{(m;n_1, \dots, n_m)}^{\mathfrak{P}} \circ (\overline{\varphi}(m) \otimes \overline{\varphi}(n_1) \otimes \dots \otimes \overline{\varphi}(n_m)) \circ (\pi(m) \otimes \pi(n_1) \otimes \dots \otimes \pi(n_m)) \end{aligned}$$

für  $m, n, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \dots + n_m = n$ , dass  $\overline{\varphi}$  mit der Multiplikation verträglich ist, da  $\pi(m) \otimes \pi(n_1) \otimes \dots \otimes \pi(n_m)$  ein Epimorphismus ist. Also ist  $\overline{\varphi}$  ein Morphismus von Operaden.  $\square$

**Bemerkung 3.1.15.** Die eben konstruierte Operade  $\overline{\mathfrak{D}}$  wird als Quotientenoperade bezeichnet. Für sie wird auch die Notation  $\mathfrak{D}/\iota$  verwendet. Wird zudem für das Unterobjekt  $\iota : \mathcal{J} \rightarrow \mathfrak{D}$  die Kurzschreibweise  $\mathcal{J}$  benutzt, so wird auch  $\mathfrak{D}/\mathcal{J}$  für diese Operade geschrieben.

Für das Weitere wird nun zusätzlich vorausgesetzt, dass in  $\mathcal{C}_s$  beliebige Durchschnitte existieren. Dann besitzt auch die Funktorkategorie  $\mathcal{D}_s = \text{Funk}(\mathcal{Z}^{\text{op}}, \mathcal{C}_s)$  beliebige Durchschnitte, und diese Durchschnitte werden argumentweise gebildet. Diese Voraussetzung ist zum Beispiel erfüllt, wenn in  $\mathcal{C}$  beliebige Durchschnitte existieren.

**Lemma 3.1.16.** *Sei  $(\mathfrak{D}, \mu^{\mathfrak{D}}, \eta^{\mathfrak{D}})$  eine Operade. Ferner sei  $(\iota_i : \mathcal{J}_i \rightarrow \mathfrak{D})_{i \in I}$  eine Familie von Idealen von  $\mathfrak{D}$  und  $\iota : \mathcal{J} \rightarrow \mathfrak{D}$  der Durchschnitt der Unterobjekte  $\mathcal{J}_i$ ,  $i \in I$ . Dann ist  $\iota : \mathcal{J} \rightarrow \mathfrak{D}$  ein Ideal von  $\mathfrak{D}$ .*

*Beweis.* Seien  $\nu_i : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}_i$  die durch den Durchschnitt definierten Morphismen mit  $\iota = \nu_i \circ \nu_i$  für alle  $i \in I$ . Für feste  $k, n, n_0, \dots, n_{n_0} \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \dots + n_{n_0} = n$  und  $0 \leq k \leq n_0$  gilt dann

$$\begin{aligned} & \mu_{(n_0; n_1, \dots, n_{n_0})}^{\mathfrak{D}} \circ (\text{id}_{\mathfrak{D}(n_0)} \otimes \dots \otimes \iota(n_k) \otimes \dots \otimes \text{id}_{\mathfrak{D}(n_{n_0})}) \\ &= \mu_{(n_0; n_1, \dots, n_{n_0})}^{\mathfrak{D}} \circ (\text{id}_{\mathfrak{D}(n_0)} \otimes \dots \otimes (\nu_i(n_k) \circ \nu_i(n_k)) \otimes \dots \otimes \text{id}_{\mathfrak{D}(n_{n_0})}) \\ &= \nu_i(n) \circ \bar{\mu}_{(n_0; n_1, \dots, n_{n_0})}^{\iota, k} \circ (\text{id}_{\mathfrak{D}(n_0)} \otimes \dots \otimes \nu_i(n_k) \otimes \dots \otimes \text{id}_{\mathfrak{D}(n_{n_0})}) \end{aligned}$$

für alle  $i \in I$ , da die  $\nu_i : \mathcal{J}_i \rightarrow \mathfrak{D}$  Ideale sind. Somit faktorisiert der Morphismus

$$\mu_{(n_0; n_1, \dots, n_{n_0})}^{\mathfrak{D}} \circ (\text{id}_{\mathfrak{D}(n_0)} \otimes \dots \otimes \iota(n_k) \otimes \dots \otimes \text{id}_{\mathfrak{D}(n_{n_0})})$$

über alle  $\nu_i(n)$ ,  $i \in I$ . Dann faktorisiert dieser Morphismus aber auch über den Durchschnitt  $\iota(n)$  dieser Unterobjekte. Also existiert ein Morphismus

$$\bar{\mu}_{(n_0; n_1, \dots, n_{n_0})}^{\iota, k} : \mathfrak{D}(n_0) \otimes \dots \otimes \mathcal{J}(n_k) \otimes \dots \otimes \mathfrak{D}(n_{n_0}) \longrightarrow \mathcal{J}(n)$$

mit

$$\mu_{(n_0; n_1, \dots, n_{n_0})}^{\mathfrak{D}} \circ (\text{id}_{\mathfrak{D}(n_0)} \otimes \dots \otimes \iota(n_k) \otimes \dots \otimes \text{id}_{\mathfrak{D}(n_{n_0})}) = \iota(n) \circ \bar{\mu}_{(n_0; n_1, \dots, n_{n_0})}^{\iota, k}.$$

Dies besagt aber gerade, dass  $\iota : \mathcal{J} \rightarrow \mathfrak{D}$  ein Ideal von  $\mathfrak{D}$  ist.  $\square$

Aufgrund dieses Lemmas ist nun die folgende Bezeichnung gerechtfertigt.

**Definition 3.1.17.** Sei  $(\mathfrak{D}, \mu^{\mathfrak{D}}, \eta^{\mathfrak{D}})$  eine Operade und  $\gamma : \mathcal{R} \rightarrow \mathfrak{D}$  ein Morphismus aus  $\mathcal{D}_s$ . Die Klasse aller Ideale von  $\mathfrak{D}$ , über die  $\gamma$  faktorisiert, sei mit  $I(\gamma)$  bezeichnet, d.h.,  $I(\gamma)$  enthält genau diejenigen Ideale  $\iota : \mathcal{J} \rightarrow \mathfrak{D}$  von  $\mathfrak{D}$ , zu denen ein  $\mathcal{D}_s$ -Morphismus  $\nu : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{J}$  mit  $\gamma = \iota \circ \nu$  existiert. Der Durchschnitt aller Elemente aus  $I(\gamma)$  heißt das von  $\gamma$  erzeugte Ideal. Dieses werde mit  $\langle \gamma \rangle : \langle \mathcal{R} \rangle \rightarrow \mathfrak{D}$  bezeichnet.

**Lemma 3.1.18.** Sei  $\varphi : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{B}$  ein Morphismus von Operaden,  $\gamma : \mathcal{R} \rightarrow \mathfrak{D}$  ein  $\mathcal{D}_s$ -Morphismus und  $\langle \gamma \rangle : \langle \mathcal{R} \rangle \rightarrow \mathfrak{D}$  das von  $\gamma$  erzeugte Ideal. Dann gilt genau dann  $\varphi \circ \gamma = 0$ , wenn  $\varphi \circ \langle \gamma \rangle = 0$  ist.

*Beweis.* Es gelte zunächst  $\varphi \circ \gamma = 0$ . Da  $\varphi$  ein Morphismus von Operaden ist, ist der Kern  $\iota : \text{Ke}(\varphi) \rightarrow \mathfrak{D}$  von  $\varphi$  nach Lemma 3.1.12 ein Ideal. Zudem faktorisiert  $\gamma$  wegen  $\varphi \circ \gamma = 0$  über den Kern von  $\varphi$ . Somit ist  $\iota$  in  $I(\gamma)$  enthalten. Nach der Definition des Durchschnitts gibt es dann aber insbesondere einen  $\mathcal{D}_s$ -Morphismus  $\nu : \langle \mathcal{R} \rangle \rightarrow \text{Ke}(\varphi)$  mit  $\langle \gamma \rangle = \iota \circ \nu$ . Hieraus folgt  $\varphi \circ \langle \gamma \rangle = \varphi \circ \iota \circ \nu = 0$ .

Sei nun umgekehrt  $\varphi \circ \langle \gamma \rangle = 0$ . Da  $\gamma$  über alle Elemente aus  $I(\gamma)$  faktorisiert, faktorisiert  $\gamma$  auch über den Durchschnitt der Elemente aus  $I(\gamma)$ . Somit existiert ein  $\mathcal{D}_s$ -Morphismus  $\nu : \mathcal{R} \rightarrow \langle \mathcal{R} \rangle$  mit  $\gamma = \langle \gamma \rangle \circ \nu$ . Dann gilt aber  $\varphi \circ \gamma = \varphi \circ \langle \gamma \rangle \circ \nu = 0$ .  $\square$

**Korollar 3.1.19.** Sei  $(\mathfrak{D}, \mu^{\mathfrak{D}}, \eta^{\mathfrak{D}})$  eine Operade und  $\gamma : \mathcal{R} \rightarrow \mathfrak{D}$  ein  $\mathcal{D}_s$ -Morphismus. Mit  $\pi = \pi_\gamma := \pi_{\langle \gamma \rangle} : \mathfrak{D} \rightarrow \overline{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D} / \langle \gamma \rangle$  sei die Quotientenoperade von  $\mathfrak{D}$  nach dem von  $\gamma$  erzeugten Ideal bezeichnet. Dann gilt  $\pi \circ \gamma = 0$ . Ferner gibt es zu jedem Morphismus  $\varphi : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{P}$  von Operaden mit  $\varphi \circ \gamma = 0$  genau einen Operadenmorphismus  $\overline{\varphi} : \overline{\mathfrak{D}} \rightarrow \mathfrak{P}$  mit  $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$ .  $\square$

**Definition 3.1.20.** Sei  $V$  ein Objekt und  $\gamma : R \rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(C)} \mathcal{F}_{\text{Op}(C)}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(V)$  ein Monomorphismus aus  $\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}$ . Ferner sei

$$\widehat{\gamma} := \Psi_{\mathcal{D}_s}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(\gamma) : \mathcal{F}_{\mathcal{D}_s}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(R) \rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{D}_s}^{\text{Op}(C)} \mathcal{F}_{\text{Op}(C)}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(V)$$

der zu  $\gamma$  adjungierte Morphismus aus  $\mathcal{D}_s$ . Hiermit sei die Quotientenoperade

$$\mathcal{O}(V, R) := \mathcal{F}_{\text{Op}(C)}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(V) / \langle \widehat{\gamma} \rangle$$

der freien Operade  $\mathcal{F}_{\text{Op}(C)}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(V)$  nach dem von  $\widehat{\gamma}$  erzeugten Ideal gebildet. Ferner sei

$$\iota_{(V, R)} := \Phi_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(C)}(\pi_{\widehat{\gamma}}) : V \rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(C)}(\mathcal{O}(V, R))$$

der zu  $\pi_{\widehat{\gamma}} : \mathcal{F}_{\text{Op}(C)}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(V) \rightarrow \mathcal{O}(V, R)$  adjungierte Morphismus aus  $\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}$ . Dann heißt  $(\mathcal{O}(V, R), \iota_{(V, R)})$  die von  $V$  mit den Relationen  $R$  erzeugte Operade.

**Bemerkung 3.1.21.** Die Funktorkategorien  $\mathcal{D}_s = \mathcal{C}_s^{\mathcal{Z}^{\text{Op}}}$  und  $\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}$  sind mit  $\mathcal{C}_s$  abelsch [Par69, 4.7 Satz 1]. Hierbei wird die abelsche Struktur dieser Funktorkategorien argumentweise aus derjenigen von  $\mathcal{C}_s$  gebildet. Hieraus ergibt sich, dass der Vergissfunktors  $\mathcal{V} : \mathcal{D}_s \rightarrow \mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}$  additiv ist. Aus der expliziten Beschreibung (3.1) des Adjunktionsisomorphismus folgt dann, dass

$$\Phi_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\mathcal{D}_s}(V, W) : \text{Mor}_{\mathcal{D}_s}(\mathcal{F}_{\mathcal{D}_s}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(V), W) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(V, \mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\mathcal{D}_s}(W))$$

ein Isomorphismus von Gruppen ist. Insbesondere entsprechen sich also die Nullmorphisme unter dieser Adjunktion.

**Satz 3.1.22.** Sei  $V$  ein Objekt und  $\gamma : R \rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(C)} \mathcal{F}_{\text{Op}(C)}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(V)$  ein Monomorphismus aus  $\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}$ . Ferner sei  $(\mathcal{O}(V, R), \iota_{(V, R)})$  die von  $V$  mit den Relationen  $R$  erzeugte Operade. Dann gelten:

1.  $\mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(C)}(\Psi_{\text{Op}(C)}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(\iota_{(V, R)})) \circ \gamma = 0$ .
2. Zu jeder Operade  $\mathfrak{P}$  und jedem  $\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}$ -Morphismus  $\nu : V \rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(C)}(\mathfrak{P})$  mit

$$\mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(C)}(\Psi_{\text{Op}(C)}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(\nu)) \circ \gamma = 0$$

existiert genau ein Morphismus  $\varphi : \mathcal{O}(V, R) \rightarrow \mathfrak{P}$  mit  $\mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(C)}(\varphi) \circ \iota_{(V, R)} = \nu$ .



*Beweis.* Es werden die Bezeichnungen aus Definition 3.1.20 verwendet.

1. Nach Definition ist  $\pi_{\hat{\gamma}}$  der zu  $\iota_{(V,R)}$  adjungierte Morphismus aus  $\text{Op}(\mathcal{C})$ . Somit ist  $\mathcal{V}(\pi_{\hat{\gamma}}) \circ \gamma = 0$  zu zeigen. Nach der vorstehenden Bemerkung genügt nun zu zeigen, dass der zu  $\mathcal{V}(\pi_{\hat{\gamma}}) \circ \gamma$  adjungierte Morphismus aus  $\mathcal{D}_s$  der Nullmorphismus ist. Dieser adjungierte Morphismus ist aber durch

$$\Psi_{\mathcal{D}_s}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(\mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(\mathcal{C})}(\pi_{\hat{\gamma}}) \circ \gamma) = \mathcal{V}_{\mathcal{D}_s}^{\text{Op}(\mathcal{C})}(\pi_{\hat{\gamma}}) \circ \Psi_{\mathcal{D}_s}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(\gamma) = \mathcal{V}_{\mathcal{D}_s}^{\text{Op}(\mathcal{C})}(\pi_{\hat{\gamma}}) \circ \hat{\gamma} \quad (3.6)$$

gegeben. Hierbei geht bei der ersten Umformung die Natürlichkeit des Adjunktionsisomorphismus ein, während bei der zweiten Gleichheit nur die Definition von  $\hat{\gamma}$  eingesetzt wurde. Nach Korollar 3.1.19 steht aber auf der rechten Seite der Gleichung (3.6) der Nullmorphismus, womit die Behauptung bewiesen ist.

2. Ganz analog zur obigen Rechnung ergibt sich, dass der zu

$$\mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(\mathcal{C})}(\Psi_{\text{Op}(\mathcal{C})}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(\nu)) \circ \gamma$$

adjungierte Morphismus aus  $\mathcal{D}_s$  durch

$$\mathcal{V}_{\mathcal{D}_s}^{\text{Op}(\mathcal{C})}(\Psi_{\text{Op}(\mathcal{C})}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(\nu)) \circ \hat{\gamma}$$

gegeben ist. Nach der Voraussetzung an  $\nu$  sowie Bemerkung 3.1.21 handelt es sich dabei um den Nullmorphismus. Da  $\mathcal{O}(V, R)$  die Quotientenoperade der freien Operade  $\mathcal{F}(V)$  nach dem von  $\hat{\gamma}$  erzeugten Ideal ist, gibt es somit nach Korollar 3.1.19 genau einen Operadenmorphismus  $\varphi : \mathcal{O}(V, R) \rightarrow \mathfrak{P}$  mit  $\varphi \circ \pi_{\hat{\gamma}} = \Psi_{\text{Op}(\mathcal{C})}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(\nu)$ . Wegen der Natürlichkeit des Adjunktionsisomorphismus ist  $\mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(\mathcal{C})}(\varphi) \circ \iota_{(V,R)} = \nu$  die hierzu adjungierte Gleichung in  $\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}$ .  $\square$

Der vorstehende Satz beschreibt also die universelle Eigenschaft einer durch Erzeugende und Relationen gegebenen Operade  $\mathcal{O}(V, R)$ , indem die Operadenmorphis men mit Quelle  $\mathcal{O}(V, R)$  charakterisiert werden. Nun soll noch gezeigt werden, dass jede Operade durch Erzeugende und Relationen dargestellt werden kann.

**Lemma 3.1.23.** *Sei  $\mathfrak{D}$  eine Operade und  $\iota : \mathcal{J} \rightarrow \mathfrak{D}$  ein Ideal von  $\mathfrak{D}$ . Ferner sei  $\varphi : V \rightarrow \mathcal{J}$  ein Epimorphismus in  $\mathcal{D}_s$ . Dann ist das von  $\gamma := \iota \circ \varphi$  erzeugte Ideal gleich  $\iota$ .*

*Beweis.* Sei  $\langle \gamma \rangle : \langle V \rangle \rightarrow \mathfrak{D}$  das von  $\gamma$  erzeugte Ideal. Da  $\gamma$  nach Definition über  $\iota$  faktorisiert, liegt  $\iota$  in  $I(\gamma)$ . Dann ist aber  $\langle \gamma \rangle$  als Schnitt der Elemente aus  $I(\gamma)$  kleiner als  $\iota$ . Somit gibt es einen Morphismus  $\nu : \langle V \rangle \rightarrow \mathcal{J}$  mit  $\langle \gamma \rangle = \iota \circ \nu$ . Hierbei ist  $\nu$  mit  $\langle \gamma \rangle$  ein Monomorphismus.

Ferner faktorisiert  $\gamma$  über  $\langle \gamma \rangle$ , da  $\gamma$  per Definition über alle Elemente aus  $I(\gamma)$  faktorisiert. Also gibt es einen Morphismus  $\theta : V \rightarrow \langle V \rangle$  mit  $\gamma = \langle \gamma \rangle \circ \theta$ . Dann gilt aber insgesamt  $\iota \circ \varphi = \gamma = \langle \gamma \rangle \circ \theta = \iota \circ \nu \circ \theta$ , woraus  $\varphi = \nu \circ \theta$  folgt, da  $\iota$  ein Monomorphismus ist. Dann ist aber  $\nu$  mit  $\varphi$  ein Epimorphismus.

Damit ist gezeigt, dass  $\nu$  sowohl ein Mono- als auch ein Epimorphismus ist. Dann ist aber  $\nu$  schon ein Isomorphismus, da die Kategorie  $\mathcal{D}_s$  abelsch ist [Par69, 4.2 Lemma 2]. Also beschreiben  $\iota$  und  $\langle \gamma \rangle$  dasselbe Unterobjekt von  $\mathfrak{D}$ .  $\square$

**Satz 3.1.24.** *Sei  $\mathfrak{D}$  eine Operade. Dann existieren ein Objekt  $V$  und ein Monomorphismus  $\gamma : R \rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(\mathcal{C})} \mathcal{F}_{\text{Op}(\mathcal{C})}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(V)$  aus  $\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}$ , so dass  $\mathfrak{D}$  isomorph zur Operade  $\mathcal{O}(V, R)$  ist.*

*Beweis.* Sei  $V := \mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(\mathcal{C})}(\mathfrak{D})$  und

$$\pi := \epsilon_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(\mathcal{C})}(\mathfrak{D}) \stackrel{(3.2)}{=} \Psi_{\text{Op}(\mathcal{C})}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(\text{id}_{\mathcal{V}(\mathfrak{D})}) : \mathcal{F}_{\text{Op}(\mathcal{C})}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}} \mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(\mathcal{C})}(\mathfrak{D}) \rightarrow \mathfrak{D}.$$

Es wird nun benötigt, dass  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}_s}^{\text{Op}(\mathcal{C})}(\pi)$  ein Epimorphismus in  $\mathcal{D}_s$  ist. Dazu genügt zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\mathcal{D}_s}^{\text{Op}(\mathcal{C})}(\pi) \circ \eta_{\mathcal{D}_s}^{\text{Op}(\mathcal{C})}(\mathcal{F}_{\mathcal{D}_s}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}} \mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(\mathcal{C})}(\mathfrak{D})) &\stackrel{(3.1)}{=} \Phi_{\mathcal{D}_s}^{\text{Op}(\mathcal{C})}(\pi) = \Phi_{\mathcal{D}_s}^{\text{Op}(\mathcal{C})} \Psi_{\text{Op}(\mathcal{C})}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(\text{id}_{\mathcal{V}(\mathfrak{D})}) \\ &= \Phi_{\mathcal{D}_s}^{\text{Op}(\mathcal{C})} \Psi_{\text{Op}(\mathcal{C})}^{\mathcal{D}_s} \Psi_{\mathcal{D}_s}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(\text{id}_{\mathcal{V}(\mathfrak{D})}) = \Psi_{\mathcal{D}_s}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(\text{id}_{\mathcal{V}(\mathfrak{D})}) \stackrel{(3.2)}{=} \epsilon_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\mathcal{D}_s}(\mathcal{V}_{\mathcal{D}_s}^{\text{Op}(\mathcal{C})}(\mathfrak{D})) \end{aligned}$$

ein Epimorphismus in  $\mathcal{D}_s$  ist. Da aber der Vergissfunktors  $\mathcal{V} : \mathcal{D}_s \rightarrow \mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}$  treu ist, ist der letzte Morphismus in der obigen Gleichungskette ein Epimorphismus in  $\mathcal{D}_s$  [Par69, 2.12 Satz 3].

Sei nun  $\iota : \text{Ke}(\pi) \rightarrow \mathcal{F}\mathcal{V}(\mathfrak{D})$  der Kern von  $\pi$  in  $\mathcal{D}_s$ . Nach Lemma 3.1.12 ist  $\iota$  ein Ideal von  $\mathcal{F}\mathcal{V}(\mathfrak{D})$ . Ferner ist  $\pi$  ein Kokern von  $\iota$  in  $\mathcal{D}_s$ , da  $\pi$  ein Epimorphismus in der abelschen Kategorie  $\mathcal{D}_s$  ist [Par69, 4.2 Lemma 2]. Nach Satz 3.1.14 ist dann  $\mathfrak{D}$  auf eindeutige Weise eine Operade, so dass  $\pi$  ein Operadenmorphismus ist. Somit muss es sich hierbei um die vorgegebene Operadenstruktur handeln. Durch diese Konstruktion ist aber die Quotientenoperade  $\mathcal{F}\mathcal{V}(\mathfrak{D}) / \iota$  definiert. Also ist  $\mathfrak{D}$  gleich dieser Quotientenoperade.

Zu zeigen ist damit noch, dass es einen Monomorphismus  $\gamma : R \rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(\mathcal{C})} \mathcal{F}_{\text{Op}(\mathcal{C})}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(V)$  in  $\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}$  gibt, dessen zugehöriger adjungierter Morphismus  $\hat{\gamma}$  in  $\mathcal{D}_s$  das Ideal  $\iota$  erzeugt. Hierzu sei

$$\gamma := \mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\mathcal{D}_s}(\iota) : \mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\mathcal{D}_s}(\text{Ke}(\pi)) \rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(\mathcal{C})} \mathcal{F}_{\text{Op}(\mathcal{C})}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}} \mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(\mathcal{C})}(\mathfrak{D})$$

gewählt. Da der Vergissfunktors als ein rechtsadjungierter Funktors Monomorphismen erhält [Par69, 2.7 Lemma 3], ist  $\gamma$  mit  $\iota$  ein Monomorphismus. Der zu  $\gamma$  gehörige adjungierte Morphismus in  $\mathcal{D}_s$  ist

$$\hat{\gamma} := \Psi_{\mathcal{D}_s}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}(\gamma) \stackrel{(3.2)}{=} \epsilon_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\mathcal{D}_s}(\mathcal{V}_{\mathcal{D}_s}^{\text{Op}(\mathcal{C})} \mathcal{F}_{\text{Op}(\mathcal{C})}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}} \mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(\mathcal{C})}(\mathfrak{D})) \circ \mathcal{F}_{\mathcal{D}_s}^{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}} \mathcal{V}_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\mathcal{D}_s}(\iota) = \iota \circ \epsilon_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\mathcal{D}_s}(\text{Ke}(\pi)),$$

wobei für die Umformung am Ende die Natürlichkeit der Koeinheit benutzt wurde. Da aber der Vergissfunktors  $\mathcal{D}_s \rightarrow \mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}$  treu ist, ist  $\epsilon_{\mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}}^{\mathcal{D}_s}(\text{Ke}(\pi))$  ein Epimorphismus. Nach dem vorstehenden Lemma stimmt dann das von  $\hat{\gamma}$  erzeugte Ideal mit  $\iota$  überein.

Somit ist die Operade  $\mathfrak{D}$  isomorph zu derjenigen Operade, die von  $V$  mit den durch  $\gamma$  gegebenen Relationen erzeugt wird.  $\square$

Zum Abschluss dieses Abschnitts soll noch etwas näher auf den Yetter-Drinfeld-Fall eingegangen werden. Ab jetzt wird also stets  $\mathcal{C} = \mathcal{YD}_K^K$  als Grundkategorie verwendet. In dieser Situation kann die Definition einer durch Erzeuger und Relationen gegebenen Operade leicht abgeändert werden. Dazu wird anstelle der Adjunktion  $(\mathcal{F} : \mathcal{C}_s^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{D}_s, \mathcal{V} : \mathcal{D}_s \rightarrow \mathcal{C}_s^{\mathbb{N}})$  die Adjunktion  $(\mathcal{F} : \text{Set}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{D}_s, \mathcal{V} : \mathcal{D}_s \rightarrow \text{Set}^{\mathbb{N}})$  verwendet.

**Definition 3.1.25.** Sei  $V = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Familie von Mengen und  $R = (R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Familie von Teilmengen

$$R_n \subseteq (\mathcal{V}_{\text{Set}^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(\mathcal{C})} \mathcal{F}_{\text{Op}(\mathcal{C})}^{\text{Set}^{\mathbb{N}}}(V))(n).$$

Die zugehörigen Inklusionsabbildungen seien mit  $\gamma_n$  bezeichnet. Ferner sei  $\hat{\gamma} : \mathcal{F}_{\mathcal{D}_s}^{\text{Set}^{\mathbb{N}}}(R) \rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{D}_s}^{\text{Op}(\mathcal{C})} \mathcal{F}_{\text{Op}(\mathcal{C})}^{\text{Set}^{\mathbb{N}}}(V)$  der zu  $\gamma := (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  adjungierte Morphismus aus  $\mathcal{D}_s$ . Hiermit sei die Quotientenoperade

$$\mathfrak{O}(V, R) := \mathcal{F}_{\text{Op}(\mathcal{C})}^{\text{Set}^{\mathbb{N}}}(V) / \langle \hat{\gamma} \rangle$$

der freien Operade  $\mathcal{F}_{\text{Op}(\mathcal{C})}^{\text{Set}^{\mathbb{N}}}(V)$  nach dem von  $\hat{\gamma}$  erzeugten Ideal gebildet. Ferner sei

$$\iota_{(V,R)} : V \rightarrow \mathcal{V}_{\text{Set}^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(\mathcal{C})}(\mathfrak{O}(V, R))$$

der zum kanonischen Epimorphismus  $\pi_{\hat{\gamma}} : \mathcal{F}_{\text{Op}(\mathcal{C})}^{\text{Set}^{\mathbb{N}}}(V) \rightarrow \mathfrak{O}(V, R)$  adjungierte Morphismus aus  $\text{Set}^{\mathbb{N}}$ . Dann heißt  $(\mathfrak{O}(V, R), \iota_{(V,R)})$  die von  $V$  mit den Relationen  $R$  erzeugte Operade.

Abgesehen von Bemerkung 3.1.21 wurde beim Beweis der Sätze 3.1.22 und 3.1.24 nur von der Tatsache Gebrauch gemacht, dass  $(\mathcal{F} : \mathcal{C}_s^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{D}_s, \mathcal{V} : \mathcal{D}_s \rightarrow \mathcal{C}_s^{\mathbb{N}})$  eine Adjunktion ist, bei der der Vergissfaktor  $\mathcal{V} : \mathcal{D}_s \rightarrow \mathcal{C}_s^{\mathbb{N}}$  treu ist. Die Bemerkung 3.1.21 hat im vorliegenden Fall die folgende Entsprechung: Der Nullmorphismus  $0 : \mathcal{F}_{\mathcal{D}_s}^{\text{Set}^{\mathbb{N}}}(V) \rightarrow W$  aus  $\mathcal{D}_s$  wird unter dem Adjunktionsisomorphismus  $\Phi_{\text{Set}^{\mathbb{N}}}^{\mathcal{D}_s}(V, W)$  auf denjenigen Morphismus  $f : V \rightarrow \mathcal{V}_{\text{Set}^{\mathbb{N}}}^{\mathcal{D}_s}(W)$  abgebildet, bei dem  $f_n(v)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und jedes Element  $v \in V_n$  der Nullvektor aus  $\mathcal{V}(W)(n)$  ist.

Damit lassen sich die beiden obigen Sätze mit ihren Beweisen unmittelbar übertragen. Somit lässt sich jede Operade über der Kategorie  $\mathcal{YD}_K^K$  durch Erzeuger und Relationen beschreiben. Ferner wird die universelle Eigenschaft der Operade  $\mathfrak{O}(V, R)$  durch den nachstehenden Satz beschrieben. Hierbei wie auch bei den folgenden Betrachtungen wird auf die explizite Angabe der Vergissfaktoren verzichtet.

**Satz 3.1.26.** Sei  $V = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Familie von Mengen und  $R = (R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Familie von Teilmengen  $R_n \subseteq (\mathcal{F}_{\text{Op}(\mathcal{C})}^{\text{Set}^{\mathbb{N}}}(V))(n)$ . Ferner sei  $(\mathfrak{O}(V, R), \iota_{(V,R)})$  die von  $V$  mit den Relationen  $R$  erzeugte Operade. Dann gelten:

1. Jedes Element  $r \in R_n$  wird durch die  $n$ -te Komponente

$$\pi(n) = (\Psi_{\text{Op}(\mathcal{C})}^{\text{Set}^{\mathbb{N}}}(\iota_{(V,R)}))(n) : (\mathcal{F}_{\text{Op}(\mathcal{C})}^{\text{Set}^{\mathbb{N}}}(V))(n) \rightarrow \mathcal{O}(V,R)(n)$$

des Quotientenmorphisms  $\pi : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{O}(V,R)$  auf Null abgebildet.

2. Sei  $\mathfrak{P}$  eine Operade,  $\nu : V \rightarrow \mathfrak{P}$  ein Morphismus aus  $\text{Set}^{\mathbb{N}}$  und  $\widehat{\nu} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathfrak{P}$  der zugehörige adjungierte Morphismus aus  $\text{Op}(\mathcal{C})$ . Falls jedes Element  $r \in R_n$  durch  $\widehat{\nu}(n)$  auf Null abgebildet wird, existiert genau ein Operadenmorphismus  $\varphi : \mathcal{O}(V,R) \rightarrow \mathfrak{P}$  mit  $\varphi \circ \iota_{(V,R)} = \nu$ .  $\square$

Für die Anwendung dieses Satzes soll noch kurz auf freie Operaden eingegangen werden. Dazu sei  $V = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Familie von Mengen. Für die folgende Betrachtung wird für die freie Operade  $\mathcal{F}_{\text{Op}(\mathcal{C})}^{\text{Set}^{\mathbb{N}}}(V)$  auch die Kurzschreibweise  $\mathcal{F}(V)$  verwendet. Ferner werden die Elemente aus den Mengen von  $V$  und ihre Bilder in der freien Operade  $\mathcal{F}(V)$  unter der Einheit  $\iota_V := \eta_{\text{Set}^{\mathbb{N}}}^{\text{Op}(\mathcal{C})}(V) : V \rightarrow \mathcal{F}_{\text{Op}(\mathcal{C})}^{\text{Set}^{\mathbb{N}}}(V)$  der Adjunktion gleich bezeichnet.

Die Einheit  $\eta^{\mathcal{F}(V)} : \mathbb{k} \rightarrow \mathcal{F}(V)(1)$  der freien Operade ist durch das Element  $E = E_{\mathcal{F}(V)} := \eta^{\mathcal{F}(V)}(1) \in \mathcal{F}(V)(1)$  festgelegt. Mit  $U = (U_n)$  sei nun dasjenige Unterobjekt von  $\mathcal{F}(V)$  in  $\text{Set}^{\mathbb{N}}$  bezeichnet, das genau diejenigen Elemente enthält, die aus  $E$  und den Elementen aus den Mengen  $V_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  durch sukzessives Anwenden

(O1) der Vektorraumstrukturen der  $\mathcal{F}(V)(n)$ ,

(O2) der Rechtsoperation von  $Z_n$  auf  $\mathcal{F}(V)(n)$  sowie

(O3) der Multiplikationen  $\mu_{(m;n_1, \dots, n_m)}^{\mathcal{F}(V)}$  für  $m, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$

gewonnen werden können. Dann enthält  $U$  die Einheit der Operade  $\mathcal{F}(V)$  und ist unter den Operationen (O1)-(O3) abgeschlossen. Somit ist  $U$  eine Unteroperade der freien Operade  $\mathcal{F}(V)$ , die die Bilder der Elemente der  $V_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  enthält. Also faktorisiert  $\iota_V : V \rightarrow \mathcal{F}(V)$  über die Inklusion  $j : U \rightarrow \mathcal{F}(V)$ , d.h., es gibt einen Morphismus  $\nu : V \rightarrow U$  in  $\text{Set}^{\mathbb{N}}$  mit  $\iota_V = j \circ \nu$ .

Nach der universellen Eigenschaft der freien Operade existiert zum Morphismus  $\nu$  ein Operadenmorphismus  $\varphi : \mathcal{F}(V) \rightarrow U$  mit  $\nu = \varphi \circ \iota_V$ . Insgesamt gilt somit  $\iota_V = j \circ \nu = j \circ \varphi \circ \iota_V$ , wobei  $j \circ \varphi$  ein Morphismus von Operaden ist. Hieraus folgt wiederum mit der universellen Eigenschaft der freien Operade, dass  $j \circ \varphi = \text{id}$  gilt. Damit sind die einzelnen Komponenten der Inklusion  $j$  nicht nur injektiv, sondern auch surjektiv. Also ist  $j$  ein Isomorphismus. Dies bedeutet aber gerade, dass  $U = \mathcal{F}(V)$  gilt. Somit sind alle Elemente der freien Operade  $\mathcal{F}(V)$  beschrieben.

Damit ist insbesondere geklärt, welche Gestalt die Elemente haben, die als Relationen bei der Definition einer Operade durch Erzeugende und Relationen auftreten können. Ferner lässt sich hiermit für eine Operade  $\mathfrak{P}$  und einen Morphismus  $\nu : V \rightarrow \mathfrak{P}$  aus  $\text{Set}^{\mathbb{N}}$  der zugehörige adjungierte Operadenmorphismus  $\widehat{\nu} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathfrak{P}$  explizit angeben. Da  $\widehat{\nu}$  ein Morphismus von Operaden ist, bildet er die Einheiten aufeinander ab und ist mit den Operationen (O1)-(O3) verträglich. Insbesondere

wird also  $E_{\mathcal{F}(V)}$  durch  $\widehat{\nu}(1)$  auf  $E_{\mathfrak{P}} := \eta^{\mathfrak{P}}(1)$  abgebildet. Aufgrund der Adjunktionsbedingung gilt zudem  $\nu = \widehat{\nu} \circ \iota_V$ . Somit wird für jedes  $v \in V_n$  das Element  $\iota_V(n)(v) \in \mathcal{F}(V)(n)$  durch  $\widehat{\nu}(n)$  auf  $\nu(n)(v)$  abgebildet. Insgesamt wird also ein Ausdruck, der unter Verwendung der Operationen (O1)-(O3) aus den Elementen der Mengen  $\iota_V(n)(V_n)$  sowie dem Element  $E_{\mathcal{F}(V)}$  gebildet ist, unter  $\widehat{\nu}$  auf dasjenige Element von  $\mathfrak{P}$  abgebildet, das ganz analog aus den zugehörigen Elementen der Mengen  $\nu(n)(V_n)$  sowie dem Element  $E_{\mathfrak{P}}$  unter Verwendung der entsprechenden Strukturen der Operade  $\mathfrak{P}$  gebildet ist. Hiermit kann dann überprüft werden, ob ein Element  $r \in \mathcal{F}(V)(n)$  durch  $\widehat{\nu}(n)$  auf das Nullelement von  $\mathfrak{P}(n)$  abgebildet wird, was für die Anwendung des obigen Satzes benötigt wird.

Für eine Operade  $\mathcal{O}(V, R)$ , die durch Erzeugende und Relationen gegeben ist, lässt sich nun die Kategorie der Algebren über dieser Operade axiomatisch beschreiben. Nach Korollar 2.4.12 entsprechen die Algebren über der Operade  $\mathcal{O}(V, R)$  den Paaren  $(A, \varphi)$  bestehend aus einem Objekt  $A$  aus  $\mathcal{C}$  und einem Morphismus  $\varphi : \mathcal{O}(V, R) \rightarrow \mathbf{End}(A)$  von Operaden. Mit Hilfe der Beschreibung der Endomorphismenoperaden im Yetter-Drinfeld-Fall aus Bemerkung 2.4.16 ist ein solcher Operadenmorphismus  $\varphi$  nach dem obigen Satz durch folgende Daten spezifiziert. Zu jedem Element  $v \in V_n$  ist ein Morphismus  $\nu(n)(v) : A^{\otimes n} \rightarrow A$  von Yetter-Drinfeld-Moduln anzugeben. Von diesen Verknüpfungen wird verlangt, dass sie die durch die Relationen  $R$  definierten Axiome erfüllen, d.h., für jede Relation  $r \in R_n$  muss  $\widehat{\nu}(n)(r) : A^{\otimes n} \rightarrow A$  der Nullmorphismus sein. Hierbei ist  $\widehat{\nu} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathbf{End}(A)$  der zu  $\nu : V \rightarrow \mathbf{End}(A)$  adjungierte Operadenmorphismus. Des Weiteren ist ein  $\mathcal{C}$ -Morphismus  $f : A \rightarrow B$  zwischen zwei Algebren  $(A, \nu_A : V \rightarrow \mathbf{End}(A))$  und  $(B, \nu_B : V \rightarrow \mathbf{End}(B))$  über der Operade  $\mathcal{O}(V, R)$  genau dann ein Morphismus von Algebren, wenn  $f \circ \nu_A(n)(v) = \nu_B(n)(v) \circ f^{\otimes n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $v \in V_n$  gilt.

Als Beispiel soll nun noch die assoziative Operade  $\mathfrak{A}$  aus Satz 2.3.12 behandelt werden. Dabei soll gezeigt werden, dass diese Operade so durch Erzeugende und Relationen beschrieben werden kann, dass die zugehörige axiomatische Beschreibung der klassischen Definition der Kategorie der assoziativen Algebren entspricht.

Hierzu sei zunächst  $V_{\mathfrak{A}} = (V_{\mathfrak{A}}(n))_{n \in \mathbb{N}}$  wie folgt definiert. Die Mengen  $V_{\mathfrak{A}}(0) := \{e\}$  und  $V_{\mathfrak{A}}(2) := \{m\}$  seien jeweils einelementig, während alle anderen  $V_{\mathfrak{A}}(n)$  leer seien. Mit  $E := \eta^{\mathcal{F}(V_{\mathfrak{A}})}(1) \in \mathcal{F}(V_{\mathfrak{A}})(1)$  seien

$$R_{\mathfrak{A}}(1) := \left\{ \mu_{(2;1,0)}^{\mathcal{F}(V_{\mathfrak{A}})}(m \otimes E \otimes e) - E, \mu_{(2;0,1)}^{\mathcal{F}(V_{\mathfrak{A}})}(m \otimes e \otimes E) - E \right\}$$

und

$$R_{\mathfrak{A}}(3) := \left\{ \mu_{(2;2,1)}^{\mathcal{F}(V_{\mathfrak{A}})}(m \otimes m \otimes E) - \mu_{(2;1,2)}^{\mathcal{F}(V_{\mathfrak{A}})}(m \otimes E \otimes m) \right\}$$

sowie  $R_{\mathfrak{A}}(n) := \emptyset$  für  $n \neq 1, 3$  gesetzt. Eine Algebra über der Operade  $\mathcal{O}(V_{\mathfrak{A}}, R_{\mathfrak{A}})$  entspricht dann einem Tupel  $(A, \nabla_A : A \otimes A \rightarrow A, \eta_A : \mathbb{k} \rightarrow A)$ , für das  $\nabla_A \circ (\text{id}_A \otimes \eta_A) - \text{id}_A$ ,  $\nabla_A \circ (\eta_A \otimes \text{id}_A) - \text{id}_A$  und  $\nabla_A \circ (\nabla_A \otimes \text{id}_A) - \nabla_A \circ (\text{id}_A \otimes \nabla_A)$  jeweils Nullabbildungen sind. Dies besagt aber gerade, dass  $(A, \nabla_A, \eta_A)$  eine assoziative Algebra ist. Ferner sind die Morphismen in dieser Kategorie gerade die Homomorphismen von assoziativen Algebren. Somit beschreibt die Operade  $\mathcal{O}(V_{\mathfrak{A}}, R_{\mathfrak{A}})$  die

Kategorie der assoziativen Algebren. Es soll nun gezeigt werden, dass die assoziative Operade  $\mathfrak{A}$  isomorph zur Operade  $\mathcal{O}(V_{\mathfrak{A}}, R_{\mathfrak{A}})$  ist.

**Lemma 3.1.27.** *Sei  $(\mathfrak{D}, \mu^{\mathfrak{D}}, \eta^{\mathfrak{D}})$  eine Operade. Es sei  $E_{\mathfrak{D}} := \eta^{\mathfrak{D}}(1) \in \mathfrak{D}(1)$  gesetzt. Für Elemente  $e_{\mathfrak{D}} \in \mathfrak{D}(0)$  und  $m_{\mathfrak{D}} \in \mathfrak{D}(2)$ , die die Relationen*

$$\mu_{(2;1,0)}^{\mathfrak{D}}(m_{\mathfrak{D}} \otimes E_{\mathfrak{D}} \otimes e_{\mathfrak{D}}) = E_{\mathfrak{D}}, \quad (3.7)$$

$$\mu_{(2;0,1)}^{\mathfrak{D}}(m_{\mathfrak{D}} \otimes e_{\mathfrak{D}} \otimes E_{\mathfrak{D}}) = E_{\mathfrak{D}}, \quad (3.8)$$

$$\mu_{(2;2,1)}^{\mathfrak{D}}(m_{\mathfrak{D}} \otimes m_{\mathfrak{D}} \otimes E_{\mathfrak{D}}) = \mu_{(2;1,2)}^{\mathfrak{D}}(m_{\mathfrak{D}} \otimes E_{\mathfrak{D}} \otimes m_{\mathfrak{D}}) \quad (3.9)$$

erfüllen, seien  $m_n = m_n^{\mathfrak{D}} \in \mathfrak{D}(n)$  induktiv definiert durch  $m_0 := e_{\mathfrak{D}}$  und

$$m_{n+1} := \mu_{(2;n,1)}^{\mathfrak{D}}(m_{\mathfrak{D}} \otimes m_n \otimes E_{\mathfrak{D}})$$

für  $n \geq 0$ . Dann gelten  $m_1 = E_{\mathfrak{D}}$  und  $m_2 = m_{\mathfrak{D}}$ , und für  $k, n, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \dots + n_k = n$  ist

$$\mu_{(k;n_1, \dots, n_k)}^{\mathfrak{D}}(m_k \otimes m_{n_1} \otimes \dots \otimes m_{n_k}) = m_n. \quad (3.10)$$

*Beweis.* Die Gleichung  $m_1 = E_{\mathfrak{D}}$  entspricht gerade der Voraussetzung (3.8). Mit dem ersten Einsaxiom für Operaden gilt damit dann  $m_2 = \mu_{(2;1,1)}^{\mathfrak{D}}(m_{\mathfrak{D}} \otimes E_{\mathfrak{D}} \otimes E_{\mathfrak{D}}) = m_{\mathfrak{D}}$ .

Die Gleichung (3.10) wird nun zunächst für den Fall  $k = 2$  induktiv nach  $n_2$  bewiesen. Hierbei werden  $r := n_1$  und  $s := n_2$  als Abkürzungen verwendet. Der Induktionsanfang  $s = 0$  ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \mu_{(2;r,0)}^{\mathfrak{D}}(m_2 \otimes m_r \otimes m_0) &= \mu_{(2;r,0)}^{\mathfrak{D}}(m_{\mathfrak{D}} \otimes m_r \otimes e_{\mathfrak{D}}) \\ &= \mu_{(2;r,0)}^{\mathfrak{D}}(m_{\mathfrak{D}} \otimes \mu_{(1;r)}^{\mathfrak{D}}(E_{\mathfrak{D}} \otimes m_r) \otimes \mu_{(0)}^{\mathfrak{D}}(e_{\mathfrak{D}})) \\ &= \mu_{(1;r)}^{\mathfrak{D}}(\mu_{(2;1,0)}^{\mathfrak{D}}(m_{\mathfrak{D}} \otimes E_{\mathfrak{D}} \otimes e_{\mathfrak{D}}) \otimes m_r) \\ &\stackrel{(3.7)}{=} \mu_{(1;r)}^{\mathfrak{D}}(E_{\mathfrak{D}} \otimes m_r) = m_r. \end{aligned}$$

Dabei wurden bei der zweiten und letzten Gleichung die Einsaxiome der Operade  $\mathfrak{D}$  benutzt, während die dritte Umformung aufgrund der Assoziativität der Operadenmultiplikation gilt.

Der Induktionsschritt von  $s \geq 0$  auf  $s + 1$  ist dann wegen

$$\begin{aligned} &\mu_{(2;r,s+1)}^{\mathfrak{D}}(m_2 \otimes m_r \otimes m_{s+1}) \\ &= \mu_{(2;r,s+1)}^{\mathfrak{D}}(m_{\mathfrak{D}} \otimes \mu_{(1;r)}^{\mathfrak{D}}(E_{\mathfrak{D}} \otimes m_r) \otimes \mu_{(2;s,1)}^{\mathfrak{D}}(m_{\mathfrak{D}} \otimes m_s \otimes E_{\mathfrak{D}})) \\ &= \mu_{(3;r,s,1)}^{\mathfrak{D}}(\mu_{(2;1,2)}^{\mathfrak{D}}(m_{\mathfrak{D}} \otimes E_{\mathfrak{D}} \otimes m_{\mathfrak{D}}) \otimes m_r \otimes m_s \otimes E_{\mathfrak{D}}) \\ &\stackrel{(3.9)}{=} \mu_{(3;r,s,1)}^{\mathfrak{D}}(\mu_{(2;2,1)}^{\mathfrak{D}}(m_{\mathfrak{D}} \otimes m_{\mathfrak{D}} \otimes E_{\mathfrak{D}}) \otimes m_r \otimes m_s \otimes E_{\mathfrak{D}}) \\ &= \mu_{(2;r+s,1)}^{\mathfrak{D}}(m_{\mathfrak{D}} \otimes \mu_{(2;r,s)}^{\mathfrak{D}}(m_{\mathfrak{D}} \otimes m_r \otimes m_s) \otimes \mu_{(1;1)}^{\mathfrak{D}}(E_{\mathfrak{D}} \otimes E_{\mathfrak{D}})) \\ &\stackrel{IV}{=} \mu_{(2;r+s,1)}^{\mathfrak{D}}(m_{\mathfrak{D}} \otimes m_{r+s} \otimes E_{\mathfrak{D}}) = m_{r+s+1} \end{aligned}$$

erfüllt. Hierbei wurden unter anderem bei der ersten und fünften Umformung die Einsaxiome der Operade sowie bei der zweiten und vierten Gleichung das Assoziativitätsaxiom verwendet. Somit ist der Fall  $k = 2$  gezeigt.

Der allgemeine Fall wird nun durch eine Induktion nach  $k$  bewiesen. Im Induktionsanfang ist  $\mu_{(0)}^{\mathfrak{D}}(m_0) = m_0$  zu zeigen. Diese Gleichung ist aber nach dem ersten Einsaxiom der Operade  $\mathfrak{D}$  erfüllt. Schließlich ergibt sich der Induktionsschritt von  $k \geq 0$  auf  $k + 1$  aus

$$\begin{aligned} & \mu_{(k+1;n_1, \dots, n_{k+1})}^{\mathfrak{D}}(m_{k+1} \otimes m_{n_1} \otimes \cdots \otimes m_{n_{k+1}}) \\ &= \mu_{(k+1;n_1, \dots, n_{k+1})}^{\mathfrak{D}}(\mu_{(2;k,1)}^{\mathfrak{D}}(m_{\mathfrak{D}} \otimes m_k \otimes E_{\mathfrak{D}}) \otimes m_{n_1} \otimes \cdots \otimes m_{n_{k+1}}) \\ &= \mu_{(2;n_1+\dots+n_k, n_{k+1})}^{\mathfrak{D}}(m_{\mathfrak{D}} \otimes \mu_{(k;n_1, \dots, n_k)}^{\mathfrak{D}}(m_k \otimes m_{n_1} \otimes \cdots \otimes m_{n_k}) \otimes m_{n_{k+1}}) \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \mu_{(2;n_1+\dots+n_k, n_{k+1})}^{\mathfrak{D}}(m_{\mathfrak{D}} \otimes m_{n_1+\dots+n_k} \otimes m_{n_{k+1}}) = m_{n_1+\dots+n_{k+1}}. \end{aligned}$$

Dabei wurden bei der zweiten Umformung die Einsaxiome und das Assoziativitätsaxiom der Operade  $\mathfrak{D}$  benutzt, und bei der letzten Gleichung geht der Fall  $k = 2$  ein.  $\square$

**Satz 3.1.28.** *Sei  $\mathfrak{A}$  die assoziative Operade aus Satz 2.3.12. Dann ist  $\mathfrak{A}$  isomorph zur Operade  $\mathcal{O}(V_{\mathfrak{A}}, R_{\mathfrak{A}})$ .*

*Beweis.* Da eine Operade, die durch Erzeugende und Relationen gegeben ist, bis auf Isomorphie durch die universelle Eigenschaft aus Satz 3.1.26 festgelegt ist, genügt zu zeigen, dass die Operade  $\mathfrak{A}$  mit einem geeigneten Morphismus  $\iota : V_{\mathfrak{A}} \rightarrow \mathfrak{A}$  aus  $\text{Set}^{\mathbb{N}}$  die universelle Eigenschaft von  $\mathcal{O}(V_{\mathfrak{A}}, R_{\mathfrak{A}})$  besitzt.

Sei  $\mathfrak{D}$  eine Operade. Dann entspricht ein  $\text{Set}^{\mathbb{N}}$ -Morphismus  $\nu : V_{\mathfrak{A}} \rightarrow \mathfrak{D}$  der Wahl zweier Elemente  $e_{\mathfrak{D}} \in \mathfrak{D}(0)$  und  $m_{\mathfrak{D}} \in \mathfrak{D}(2)$ . Ferner werden alle Elemente  $r \in R_{\mathfrak{A}}(n)$  genau dann unter dem adjungierten Operadenmorphismus  $\widehat{\nu} : \mathcal{F}(V_{\mathfrak{A}}) \rightarrow \mathfrak{D}$  auf Null abgebildet, wenn die Elemente  $e_{\mathfrak{D}}$ ,  $m_{\mathfrak{D}}$  und  $E_{\mathfrak{D}} := \eta^{\mathfrak{D}}(1) \in \mathfrak{D}(1)$  die Relationen (3.7)-(3.9) erfüllen. Somit ist Folgendes zu zeigen:

1. In der assoziativen Operade  $\mathfrak{A}$  gibt es Elemente  $e_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}(0)$  und  $m_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}(2)$ , so dass diese Elemente zusammen mit  $E_{\mathfrak{A}} := \eta^{\mathfrak{A}}(1) \in \mathfrak{A}(1)$  die Relationen (3.7)-(3.9) erfüllen.
2. Ist  $\mathfrak{D}$  eine Operade mit Elementen  $e_{\mathfrak{D}} \in \mathfrak{D}(0)$  und  $m_{\mathfrak{D}} \in \mathfrak{D}(2)$ , die den Relationen (3.7)-(3.9) genügen, so gibt es genau einen Morphismus  $\varphi = (\varphi_n) : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{D}$  von Operaden mit  $\varphi_0(e_{\mathfrak{A}}) = e_{\mathfrak{D}}$  und  $\varphi_2(m_{\mathfrak{A}}) = m_{\mathfrak{D}}$ .

Das neutrale Element der Gruppe  $Z_n$  sei mit  $e_n$  bezeichnet. Dann gilt in der assoziativen Operade  $\mathfrak{A}$

$$\mu_{(m;n_1, \dots, n_m)}^{\mathfrak{A}}(e_m \otimes e_{n_1} \otimes \cdots \otimes e_{n_m}) = e_n$$

für  $m, n, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \cdots + n_m = n$ . Ferner ist die Einheit dieser Operade durch das Element  $E_{\mathfrak{A}} := \eta^{\mathfrak{A}}(1) = e_1 \in \mathfrak{A}(1)$  festgelegt. Daraus ergibt sich unmittelbar, dass die Elemente  $e_{\mathfrak{A}} := e_0$  und  $m_{\mathfrak{A}} := e_2$  die Relationen (3.7)-(3.9) erfüllen.

Damit ist der erste Punkt gezeigt. Es sei noch angemerkt, dass  $m_n^{\mathfrak{A}} = e_n$  für die im vorstehenden Lemma definierten Elemente  $m_n^{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}(n)$  gilt.

Sei nun  $\mathfrak{D}$  eine Operade mit Elementen  $e_{\mathfrak{D}} \in \mathfrak{D}(0)$  und  $m_{\mathfrak{D}} \in \mathfrak{D}(2)$ , die die Relationen (3.7)-(3.9) erfüllen. Zunächst wird angenommen, dass ein Operadenmorphismus  $\varphi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{D}$  mit  $\varphi_0(e_{\mathfrak{A}}) = e_{\mathfrak{D}}$  und  $\varphi_2(m_{\mathfrak{A}}) = m_{\mathfrak{D}}$  existiert. Da  $\varphi$  mit der Multiplikation der Operaden verträglich ist und die Einheit der Operade  $\mathfrak{A}$  auf die Einheit von  $\mathfrak{D}$  abbildet, zeigt eine einfache Induktion, dass  $\varphi_n(m_n^{\mathfrak{A}}) = m_n^{\mathfrak{D}}$  gilt. Dann ist aber  $\varphi_n(\sigma) = \varphi_n(e_n \cdot \sigma) = \varphi_n(e_n) \cdot \sigma = \varphi_n(m_n^{\mathfrak{A}}) \cdot \sigma = m_n^{\mathfrak{D}} \cdot \sigma$  für  $\sigma \in Z_n$ . Somit ist  $\varphi_n$  auf einer Basis von  $\mathfrak{A}(n)$  festgelegt. Daraus ergibt sich die Eindeutigkeit von  $\varphi$ .

Zum Nachweis der Existenz von  $\varphi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{D}$  werden die einzelnen Komponenten von  $\varphi$  zunächst durch  $\varphi_n(\sigma) := m_n^{\mathfrak{D}} \cdot \sigma$  für  $\sigma \in Z_n$  als  $\mathbb{k}$ -lineare Abbildungen definiert. Insbesondere gelten dann  $\varphi_0(e_{\mathfrak{A}}) = e_{\mathfrak{D}}$  und  $\varphi_2(m_{\mathfrak{A}}) = m_{\mathfrak{D}}$ , d.h.,  $\varphi$  bildet die beiden vorgegebenen Elemente der Operade  $\mathfrak{A}$  auf die entsprechenden Elemente der Operade  $\mathfrak{D}$  ab. Ferner gilt für Elemente  $\varrho, \sigma \in Z_n$

$$\varphi_n(\varrho\sigma) = m_n^{\mathfrak{D}} \cdot \varrho\sigma = (m_n^{\mathfrak{D}} \cdot \varrho) \cdot \sigma = \varphi_n(\varrho) \cdot \sigma.$$

Also ist  $\varphi_n$  eine  $\mathbb{k}Z_n$ -rechtslineare Abbildung.

Somit verbleibt noch zu zeigen, dass  $\varphi$  sogar ein Morphismus von Operaden ist. Wegen  $\varphi_1(E_{\mathfrak{A}}) = \varphi_1(e_1) = m_1^{\mathfrak{D}} = E_{\mathfrak{D}}$  respektiert  $\varphi$  die Einheiten. Zum Nachweis der Verträglichkeit von  $\varphi$  mit der Operadenmultiplikation seien  $k, n, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 + \dots + n_k = n$  sowie  $\sigma \in Z_k$  und  $\sigma_i \in Z_{n_i}$  für  $i = 1, \dots, k$  gewählt. Zudem sei  $n'_i := n_{\overline{\sigma^{-1}(i)}}$  als Abkürzung gesetzt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi_n(\mu_{(k;n_1, \dots, n_k)}^{\mathfrak{A}}(\sigma \otimes \sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_k)) &\stackrel{(1)}{=} \varphi_n(\overline{\varphi}_2^{\mathfrak{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_k) \cdot (\sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_k)) \\ &\stackrel{(2)}{=} m_n^{\mathfrak{D}} \cdot (\overline{\varphi}_2^{\mathfrak{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_k) \cdot (\sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_k)) \\ &\stackrel{(3)}{=} \mu_{(k;n'_1, \dots, n'_k)}^{\mathfrak{D}}(m_k^{\mathfrak{D}} \otimes m_{n'_1}^{\mathfrak{D}} \otimes \dots \otimes m_{n'_k}^{\mathfrak{D}}) \cdot (\overline{\varphi}_2^{\mathfrak{Z}}(\sigma)(n_1, \dots, n_k) \cdot (\sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_k)) \\ &\stackrel{(4)}{=} \mu_{(k;n_1, \dots, n_k)}^{\mathfrak{D}}(m_k^{\mathfrak{D}} \cdot \sigma \otimes m_{n_1}^{\mathfrak{D}} \otimes \dots \otimes m_{n_k}^{\mathfrak{D}}) \cdot (\sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_k) \\ &\stackrel{(5)}{=} \mu_{(k;n_1, \dots, n_k)}^{\mathfrak{D}}(m_k^{\mathfrak{D}} \cdot \sigma \otimes m_{n_1}^{\mathfrak{D}} \cdot \sigma_1 \otimes \dots \otimes m_{n_k}^{\mathfrak{D}} \cdot \sigma_k) \\ &\stackrel{(6)}{=} \mu_{(k;n_1, \dots, n_k)}^{\mathfrak{D}}(\varphi_k(\sigma) \otimes \varphi_{n_1}(\sigma_1) \otimes \dots \otimes \varphi_{n_k}(\sigma_k)). \end{aligned}$$

Dabei wurde die Definition der Multiplikation der Operade  $\mathfrak{A}$  [1] sowie des Morphismus  $\varphi$  [2,6] verwendet. Ferner geht das vorstehende Lemma [3] und die beiden Äquivarianzaxiome für die Operade  $\mathfrak{D}$  ein [4,5].  $\square$

Damit ist gezeigt, dass die assoziative Operade  $\mathfrak{A}$  eine Beschreibung durch Erzeuger und Relationen besitzt, die der axiomatischen Definition der Kategorie der assoziativen Algebren entspricht. Das eigentliche Interesse gilt hier aber der Unteroperade  $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_m$  von  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_m$  aus Abschnitt 2.5. Ziel ist es nun, Erzeuger und Relationen für die Operade  $\mathfrak{L}$  zu finden. Dabei ist es sicherlich wünschenswert, möglichst wenige Erzeuger und einfache Relationen zu haben.



Aus der Definition von  $\mathfrak{L}_m(n)$  als Untermodul der regulären Darstellung einer halbeinfachen Algebra ergibt sich, dass  $\mathfrak{L}_m(n)$  als  $\mathbb{k}B_{m,n}$ -Rechtsmodul von einem Element erzeugt wird. Somit besitzt die Operade  $\mathfrak{L}_m$  zumindest ein abzählbares Erzeugendensystem  $V_{\mathfrak{L}} = (V_{\mathfrak{L}}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ , bei dem jedes  $V_{\mathfrak{L}}(n)$  einelementig ist. Unter Berücksichtigung der zusätzlichen Operadenstruktur wäre es dabei auch denkbar, dass nicht alle diese Erzeuger benötigt werden. Um aber überhaupt solche Erzeuger zu finden, ist es sinnvoll,  $\mathfrak{L}_m(n)$  zunächst unabhängig von der Operadenstruktur nur als  $\mathbb{k}B_{m,n}$ -Modul zu betrachten und explizit zu bestimmen.

## 3.2 Notwendige Bedingungen für Lie-Elemente

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass bestimmte Elemente in dem Linksideal  $\mathfrak{J}_n$  von  $\mathbb{k}B_n$  liegen, das von den Elementen  $S_{k,l}$  für  $k, l > 0$  mit  $k+l = n$  erzeugt wird. Für einen  $\mathbb{k}B_n$ -Linksmodul  $M$  annulliert jedes Element aus  $\mathfrak{J}_n$  alle Elemente aus  $\mathcal{P}(M)$ . Somit liefern solche Elemente notwendige Bedingungen für die Lie-Elemente von  $M$ .

Man beachte, dass hier in der Gruppenalgebra zur Zopfgruppe gearbeitet wird. Es werden also noch keine Eigenschaften verwendet, die erst in bestimmten Quotientengruppen erfüllt sind.

Die Elemente  $H_n \in B_n$  seien induktiv definiert durch

$$H_0 := e_0 \in B_0, \quad (3.11)$$

$$H_{n+1} := (e_1 \otimes H_n) \tau_{n,1}^{\mathcal{B}} = \tau_{n,1}^{\mathcal{B}}(H_n \otimes e_1) \in B_{n+1}. \quad (3.12)$$

Für  $n > 1$  ist dann die Konjugation mit  $H_n$  auf den Erzeugern der Zopfgruppe  $B_n$  durch  $b_i \mapsto b_{n-i}$  für  $i = 1, \dots, n-1$  gegeben. Hieraus folgt leicht, dass

$$H_n S_{k,l} H_n^{-1} = S_{l,k} \quad (3.13)$$

für alle natürlichen Zahlen  $k, l, n$  mit  $k+l = n$  gilt.

Die Antipode  $S$  der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  ist ein Antiautomorphismus von Algebren, der auf  $V \subset \mathcal{T}(V)$  durch  $-\text{id}_V$  gegeben ist. Deshalb stimmt  $S$  auf  $V^{\otimes n} \subset \mathcal{T}(V)$  mit dem durch die Operation von  $(-1)^n H_n$  definierten Endomorphismus von  $V^{\otimes n}$  überein. Da die Antipode  $S$  nach Lemma 1.3.1 auf primitiven Elementen als  $-\text{id}$  wirkt, werden die Elemente aus  $\mathcal{P}_n(\mathcal{T}(V))$  von  $e_n + (-1)^n H_n$  annulliert. Es soll nun gezeigt werden, dass  $e_n + (-1)^n H_n$  in  $\mathfrak{J}_n$  enthalten ist.

**Lemma 3.2.1.** *Für  $n \geq 1$  gelten*

$$\sum_{k+l=n} (-1)^l (e_k \otimes H_l) S_{k,l} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k+l=n} (-1)^k (H_k \otimes e_l) S_{k,l} = 0.$$

*Beweis.* Der Beweis der ersten Gleichung erfolgt durch eine Fallunterscheidung nach  $n$ . Für  $n = 1$  ist die Behauptung wegen  $(e_1 \otimes H_0) S_{1,0} - (e_0 \otimes H_1) S_{0,1} = e_1 - e_1 = 0$

erfüllt. Andernfalls ist  $n > 1$ . Dann ergibt sich die Behauptung aus

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{k+l=n \\ k,l \geq 1}} (-1)^l (e_k \otimes H_l) S_{k,l} \\
\stackrel{(2.27)}{=} & \sum_{\substack{k+l=n \\ k,l \geq 1}} (-1)^l (e_k \otimes H_l) ((S_{k,l-1} \otimes e_1) + (e_{k-1} \otimes \tau_{l,1}^B)(S_{k-1,l} \otimes e_1)) \\
\stackrel{(3.12)}{=} & \sum_{\substack{k+l=n \\ k,l \geq 1}} (-1)^l ((e_k \otimes H_l)(S_{k,l-1} \otimes e_1) + (e_{k-1} \otimes H_{l+1})(S_{k-1,l} \otimes e_1)) \\
= & \sum_{\substack{k+l=n-1 \\ k \geq 1}} (-1)^{l+1} (e_k \otimes H_{l+1})(S_{k,l} \otimes e_1) + \sum_{\substack{k+l=n-1 \\ l \geq 1}} (-1)^l (e_k \otimes H_{l+1})(S_{k,l} \otimes e_1) \\
= & -(e_{n-1} \otimes H_1)(S_{n-1,0} \otimes e_1) + (-1)^{n-1} H_n(S_{0,n-1} \otimes e_1) = -e_n + (-1)^{n-1} H_n.
\end{aligned}$$

Schließlich ist die zweite Gleichung erfüllt, da sie aus der ersten durch Konjugieren mit  $H_n$  hervorgeht.  $\square$

**Korollar 3.2.2.** Für  $n > 1$  sind  $e_n + (-1)^n H_n$  und

$$e_n - H_n^2 = (e_n - (-1)^n H_n)(e_n + (-1)^n H_n)$$

in  $\mathcal{I}_n$  enthalten.  $\square$

Somit werden die Lie-Elemente eines  $\mathbb{k}B_n$ -Linksmoduls  $M$  von  $e_n - H_n^2$  annulliert. Oder anders ausgedrückt:  $\mathcal{P}(M)$  ist im Eigenraum des Operators  $H_n^2$  zum Eigenwert 1 enthalten. Das Element  $H_n^2$  besitzt in den Erzeugern  $b_i$  der Zopfgruppe  $B_n$  die Darstellung  $H_n^2 = (b_1 \cdots b_{n-1})^n$ . Ferner erzeugt dieses Element das Zentrum von  $B_n$ . Deshalb ist der Eigenraum zum Eigenwert 1 der Linksoperation von  $H_n^2$  auf  $M$  ein  $\mathbb{k}B_n$ -Untermodul von  $M$ . Nur in diesem Untermodul können die Lie-Elemente von  $M$  liegen.

Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $\mathbb{k}$  der Charakteristik 0. Dann sind die primitiven Elemente der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  durch die Theoreme von Specht, Wever [Jac62, V.4 Theorem 8] und Friedrichs [Jac62, V.4. Theorem 9] charakterisiert. Um diese Charakterisierung zu formulieren, sei zunächst mit  $\mathfrak{g}$  die Lie-Unteralgebra von  $\mathcal{T}(V)^-$  bezeichnet, die von  $V$  erzeugt wird, d.h.,  $\mathfrak{g}$  ist der kleinste Untervektorraum von  $\mathcal{T}(V)$ , der  $V$  enthält und unter der Kommutatoroperation  $[x, y] := xy - yx$  abgeschlossen ist. Oder anders ausgedrückt:  $\mathfrak{g}$  ergibt sich aus  $V$  durch sukzessives Anwenden des Kommutators. Ferner seien die Dynkin-Specht-Wever-Elemente  $\Phi_n, \tilde{\Phi}_n \in \mathbb{k}B_n$  induktiv definiert durch

$$\Phi_0 := 0 \in \mathbb{k}B_0, \quad \Phi_1 := e_1 \in \mathbb{k}B_1, \quad (3.14)$$

$$\Phi_{n+1} := (e_{n+1} - \tau_{n,1}^B)(\Phi_n \otimes e_1) = \Phi_n \otimes e_1 - (e_1 \otimes \Phi_n)\tau_{n,1}^B \in \mathbb{k}B_{n+1} \quad (3.15)$$

bzw.

$$\tilde{\Phi}_0 := 0 \in \mathbb{k}B_0, \quad \tilde{\Phi}_1 := e_1 \in \mathbb{k}B_1, \quad (3.16)$$

$$\tilde{\Phi}_{n+1} := (e_{n+1} - \tau_{1,n}^B)(e_1 \otimes \tilde{\Phi}_n) \in \mathbb{k}B_{n+1} \quad (3.17)$$

für  $n \geq 1$ . Im Hinblick auf das Folgende werden diese Elemente gleich über den Zopfgruppen erklärt. Für die klassische Situation wäre es ausreichend, die  $\Phi_n$  und  $\tilde{\Phi}_n$  über den symmetrischen Gruppen zu definieren.

Sei  $n > 0$ . Dann sind nach den Theoremen von Specht, Wever und Friedrichs für  $x \in \mathcal{T}_n(V) = V^{\otimes n} \subset \mathcal{T}(V)$  die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $x \in \mathfrak{g}$ .
2.  $x$  ist primitiv.
3.  $\Phi_n x = nx$ .
4.  $\tilde{\Phi}_n x = nx$ .

Zum Beweis sei Folgendes angemerkt. Eine einfache Rechnung zeigt, dass der Kommutator zweier primitiver Elemente wieder primitiv ist. Daraus ergibt sich unmittelbar, dass die zweite Aussage aus der ersten folgt. Die Implikation von 3. bzw. 4. nach 1. ist eine direkte Konsequenz der Definition der Dynkin-Specht-Wever-Elemente. Dass die zweite Aussage die dritte bzw. vierte Aussage impliziert, wird in [Wig89] mit einer Identität in der Tensoralgebra bewiesen.

Diese Charakterisierung der primitiven Elemente der Tensoralgebra vom Grad  $n > 0$  überträgt sich nicht unmittelbar auf gezopfte monoidale Kategorien, da der Kommutator  $[,] := \nabla \circ (\text{id} - \tau)$  in solchen Kategorien auf den primitiven Elementen nicht abgeschlossen ist, d.h., die Implikation von 1. nach 2. besitzt hier keine Gültigkeit. Verallgemeinert werden kann allerdings die Identität von Wigner und damit die Implikation von der zweiten zur dritten bzw. vierten Aussage.

**Lemma 3.2.3.** *Für jede natürliche Zahl  $n$  gelten*

$$\sum_{k+l=n} (e_k \otimes \Phi_l) S_{k,l} = ne_n \quad \text{und} \quad \sum_{k+l=n} (\tilde{\Phi}_k \otimes e_l) S_{k,l} = ne_n.$$

*Beweis.* Es genügt, die erste Gleichung zu beweisen, da sich die zweite Gleichung aus der ersten durch Konjugation mit  $H_n$  ergibt.

Im Fall  $n = 0$  sind beide Seiten dieser Identität gleich 0. Für  $n \geq 1$  wird die Gleichung nun durch Induktion nach  $n$  bewiesen. Hierbei ist der Induktionsanfang wegen  $(e_0 \otimes \Phi_1) S_{0,1} + (e_1 \otimes \Phi_0) S_{1,0} = e_1 + 0 = e_1$  erfüllt. Der Induktionsschritt von  $n \geq 1$  nach  $n + 1$  ergibt sich nun aus

$$\begin{aligned} \sum_{k+l=n+1} (e_k \otimes \Phi_l) S_{k,l} &= \Phi_{n+1} + \sum_{\substack{k+l=n+1 \\ k,l \geq 1}} (e_k \otimes \Phi_l) S_{k,l} \\ &\stackrel{(2.27)}{=} \Phi_{n+1} + \sum_{\substack{k+l=n+1 \\ k,l \geq 1}} (e_k \otimes \Phi_l) ((S_{k,l-1} \otimes e_1) + (e_{k-1} \otimes \tau_{l,1}^B)(S_{k-1,l} \otimes e_1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi_{n+1} + \sum_{\substack{k+l=n \\ k \geq 1}} (e_k \otimes \Phi_{l+1})(S_{k,l} \otimes e_1) + \sum_{\substack{k+l=n \\ l \geq 1}} (e_{k+1} \otimes \Phi_l)(e_k \otimes \tau_{l,1}^{\mathcal{B}})(S_{k,l} \otimes e_1) \\
&= \sum_{k+l=n} (e_k \otimes \Phi_{l+1})(S_{k,l} \otimes e_1) + \sum_{\substack{k+l=n \\ l \geq 1}} (e_{k+1} \otimes \Phi_l)(e_k \otimes \tau_{l,1}^{\mathcal{B}})(S_{k,l} \otimes e_1) \\
&= e_{n+1} + \sum_{\substack{k+l=n \\ l \geq 1}} ((e_k \otimes \Phi_{l+1}) + (e_{k+1} \otimes \Phi_l)(e_k \otimes \tau_{l,1}^{\mathcal{B}}))(S_{k,l} \otimes e_1) \\
&\stackrel{(3.15)}{=} e_{n+1} + \sum_{\substack{k+l=n \\ l \geq 1}} (e_k \otimes \Phi_l \otimes e_1)(S_{k,l} \otimes e_1) \\
&= e_{n+1} + \sum_{k+l=n} (e_k \otimes \Phi_l \otimes e_1)(S_{k,l} \otimes e_1) \stackrel{IV}{=} e_{n+1} + ne_{n+1} = (n+1)e_{n+1}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

**Korollar 3.2.4.** Für  $n \geq 1$  sind

$$ne_n - \Phi_n = \sum_{\substack{k+l=n \\ k,l \geq 1}} (e_k \otimes \Phi_l)S_{k,l} \quad \text{und} \quad ne_n - \tilde{\Phi}_n = \sum_{\substack{k+l=n \\ k,l \geq 1}} (\tilde{\Phi}_k \otimes e_l)S_{k,l}$$

in  $\mathfrak{I}_n$  enthalten.  $\square$

Sei  $n > 1$  und  $M$  ein  $\mathbb{k}B_n$ -Linksmodul. Dann wird jedes Lie-Element  $v \in \mathcal{P}(M)$  von  $ne_n - \Phi_n$  annulliert, d.h.,  $v$  genügt der Gleichung  $\Phi_n v = nv$ . Da  $n$  im vorliegenden Fall invertierbar ist, besitzt  $v$  die Darstellung  $v = \Phi_n \frac{1}{n} v$ . Somit ist  $v$  in  $\Phi_n \cdot M$  enthalten.

**Bemerkung 3.2.5.** Sei  $\mathbb{k}\mathcal{B} := \prod_n \mathbb{k}B_n$  als Vektorraum. Dann ist  $\mathbb{k}\mathcal{B}$  zusammen mit dem Faltungsprodukt  $*$  eine Algebra. Hierbei ist für Elemente  $c = (c_n)$  und  $d = (d_n)$  aus  $\mathbb{k}\mathcal{B}$  die  $n$ -te Komponente von  $c * d$  durch

$$(c * d)_n := \sum_{k+l=n} (c_k \otimes d_l)S_{k,l}$$

definiert. Das Einselement bezüglich dieser Multiplikation ist durch  $E = (E_n)$  mit  $E_0 := e_0$  und  $E_n := 0$  für  $n > 0$  gegeben.

Es seien  $S := ((-1)^n H_n)$ ,  $\Phi := (\Phi_n)$ ,  $\tilde{\Phi} := (\tilde{\Phi}_n)$ ,  $I := (e_n)$  und  $J := (ne_n)$ . Abgesehen von der Nullkomponente ist Lemma 3.2.1 dann äquivalent zu

$$I * S = E = S * I. \quad (3.18)$$

Zudem lässt sich in diesem Formalismus die Aussage von Lemma 3.2.3 kurz als

$$I * \Phi = J = \tilde{\Phi} * I \quad (3.19)$$

schreiben.

Des Weiteren ist für jedes Objekt  $V$  aus  $\mathcal{YD}_K^K$  durch

$$\psi = \psi_V : \mathbb{k}\mathcal{B} \rightarrow \text{End}(\mathcal{T}(V)), \quad c = (c_n) \mapsto \bigoplus_n \tilde{\lambda}_{V^{\otimes n}}^{\mathbb{k}\mathcal{B}_n}(c_n)$$

ein Homomorphismus von Faltungsalgebren erklärt. Insbesondere ist also das Bild von  $\mathbb{E}$  unter  $\psi$  gleich dem Einselement  $\eta \circ \epsilon$  der Faltungsalgebra  $(\text{End}(\mathcal{T}(V)), *)$ . Ferner ist  $\psi(\mathbb{S})$  die Antipode von  $\mathcal{T}(V)$  und  $\psi(\mathbb{1})$  die Identität. Durch  $\psi(\Phi)$  und  $\psi(\tilde{\Phi})$  sind Dynkin-Specht-Wever-Operatoren auf  $\mathcal{T}(V)$  gegeben. Schließlich stimmt  $\psi(\mathbb{J})$  auf  $V^{\otimes n} \subset \mathcal{T}(V)$  mit der Multiplikation mit  $n$  überein.

Anwendung von  $\psi$  auf die Gleichung (3.18) liefert somit das Antipodenaxiom für die Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$ . Ferner ergibt sich aus (3.19) die in [Wig89] bewiesene Identität.

### 3.3 Kharchenkos Ansatz

Sei  $V \in \mathcal{YD}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}$  ein Yetter-Drinfeld-Modul über einer abelschen Gruppe  $G$ , der Summe eindimensionaler Yetter-Drinfeld-Moduln ist. Dann verwendet Kharchenko zur Berechnung der primitiven Elemente der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  nicht die Elemente  $\mathbb{S}_{k,l}$ , die sich aus der Beschreibung der Komultiplikation von  $\mathcal{T}(V)$  ergeben, sondern benutzt eine andere Charakterisierung der primitiven Elemente [Kha98, Abschnitt 7]. Dieser Ansatz soll nun in dem hier vorliegenden Formalismus dargestellt werden. Dabei wird wiederum über den Zopfgruppen gearbeitet, wodurch die Aussagen etwas allgemeiner sind als bei Kharchenko. Es sei noch erwähnt, dass Kharchenko meistens mit dem Radford-Biproduct  $\mathbb{k}G \star \mathcal{T}(V)$  und schiefprimitiven Elementen anstelle von  $\mathcal{T}(V)$  und primitiven Elementen arbeitet.

Zur Formulierung der Aussagen werden  $S_n$ -Graduierungen verwendet. Hierzu seien zunächst einige Bezeichnungen eingeführt. Sei  $A$  eine  $S_n$ -graduierete Algebra. Für jede Permutation  $t \in S_n$  sei die Menge der homogenen Elemente vom Grad  $t$  aus  $A$  mit  $A_t$  bezeichnet. Dann ist also  $A$  gleich der direkten Summe der  $A_t$ ,  $t \in S_n$ . Insbesondere besitzt jedes Element  $a \in A$  eine eindeutige Darstellung

$$a = \sum_{t \in S_n} a_t$$

mit  $a_t \in A_t$ . Für  $k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_r \in \{1, \dots, n\}$  seien

$$A_{|k_1, \dots, k_r}^{l_1, \dots, l_r} := \bigoplus_{\substack{t \in S_n, \\ t(k_i) = l_i}} A_t \quad \text{und} \quad a_{|k_1, \dots, k_r}^{l_1, \dots, l_r} := \sum_{\substack{t \in S_n, \\ t(k_i) = l_i}} a_t$$

gesetzt. Im Fall  $k_i = l_i$  werden auch die Abkürzungen  $A_{k_1, \dots, k_r} := A_{|k_1, \dots, k_r}^{k_1, \dots, k_r}$  und  $a_{k_1, \dots, k_r} := a_{|k_1, \dots, k_r}^{k_1, \dots, k_r}$  verwendet. Des Weiteren seien noch für jede natürliche Zahl  $k$

die Bezeichnungen

$$A_{\leq k} := \bigoplus_{\substack{t \in S_n, \\ t(1) \leq k}} A_t \quad \text{und} \quad a_{\leq k} := \sum_{\substack{t \in S_n, \\ t(1) \leq k}} a_t$$

eingeführt. Ganz analog seien  $A_{<k}$ ,  $A_{>k}$ ,  $A_{\geq k}$  und  $a_{<k}$ ,  $a_{\geq k}$ ,  $a_{>k}$  definiert. Dieselben Notation werden auch im Falle eines  $S_n$ -graduerten  $A$ -Moduls  $M$  benutzt.

Im Folgenden sei die Gruppenalgebra  $\mathbb{k}B_n$  stets mit derjenigen  $S_n$ -Graduierung versehen, bei der die Basiselemente  $b \in B_n$  homogen sind und der zugehörige Grad durch die unterliegende Permutation  $\pi(b) \in S_n$  gegeben ist.

**Definition 3.3.1.** Sei  $M$  ein  $S_n$ -graduierter  $\mathbb{k}B_n$ -Linksmodul. Ein Element  $v \in M$  heißt rechts- bzw. linksprimitiv (bezüglich der ersten Stelle), falls  $S_{k,l} \cdot v \in M_{\leq k}$  bzw.  $S_{k,l} \cdot v \in M_{>k}$  für  $k, l > 0$  mit  $k + l = n$  gilt. Die Menge der rechts- bzw. linksprimitiven Elemente von  $M$  werde mit  $\mathcal{P}_r(M)$  bzw.  $\mathcal{P}_l(M)$  bezeichnet.

**Bemerkung 3.3.2.** Sei  $M$  ein  $S_n$ -graduierter  $\mathbb{k}B_n$ -Linksmodul. Da  $M_{\leq k} \cap M_{>k} = 0$  für  $0 < k < n$  gilt, ist  $\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}_r(M) \cap \mathcal{P}_l(M)$ .

Die rechts- und linksprimitiven Elemente lassen sich nun unter Verwendung von Dynkin-Specht-Wever-Elementen vollständig beschreiben. Dabei sollen zunächst die rechtsprimitiven Elemente behandelt werden.

**Lemma 3.3.3.** Für  $n > 0$  gilt  $\Phi_n \in \mathcal{P}_r(\mathbb{k}B_n)$ .

*Beweis.* Der Beweis wird durch eine Induktion nach  $n$  geführt. Der Induktionsanfang ist wegen  $\Phi_1 = e_1 \in \mathbb{k}B_1 = \mathcal{P}_r(\mathbb{k}B_1)$  erfüllt.

Für den Induktionsschritt von  $n > 0$  nach  $n + 1$  seien  $k, l > 0$  mit  $k + l = n + 1$ . Dann ist  $S_{k,l}\Phi_{n+1} \in (\mathbb{k}B_{n+1})_{\leq k}$  zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} S_{k,l}\Phi_{n+1} &\stackrel{(3.15)}{=} S_{k,l}(e_{n+1} - \tau_{n,1}^{\mathcal{B}})(\Phi_n \otimes e_1) \\ &\stackrel{(2.27)}{=} [(S_{k,l-1} \otimes e_1) + (e_{k-1} \otimes \tau_{l,1}^{\mathcal{B}})(S_{k-1,l} \otimes e_1)](\Phi_n \otimes e_1) \\ &\stackrel{(2.28)}{=} - [(e_1 \otimes S_{k-1,l}) + (\tau_{1,k}^{\mathcal{B}} \otimes e_{l-1})(e_1 \otimes S_{k,l-1})] \tau_{n,1}^{\mathcal{B}}(\Phi_n \otimes e_1) \\ &= [e_{n+1} - (\tau_{1,k}^{\mathcal{B}} \otimes e_{l-1})\tau_{n,1}^{\mathcal{B}}](S_{k,l-1}\Phi_n \otimes e_1) \\ &\quad + [(e_{k-1} \otimes \tau_{l,1}^{\mathcal{B}}) - \tau_{n,1}^{\mathcal{B}}](S_{k-1,l}\Phi_n \otimes e_1). \end{aligned}$$

Die letzten beiden Summanden werden nun einzeln betrachtet. Für den ersten Summanden erfolgt dabei eine Fallunterscheidung nach  $l$ . Ist  $l = 1$ , so ist dieser Summand gleich  $[e_{n+1} - \tau_{1,n}\tau_{n,1}](\Phi_n \otimes e_1)$ . Da die Identität die unterliegende Permutation von  $\tau_{1,n}\tau_{n,1}$  ist, liegt dieses Element in  $(\mathbb{k}B_{n+1})_{\leq n}$ . Im Fall  $l > 1$  gilt  $S_{k,l-1}\Phi_n \otimes e_1 \in (\mathbb{k}B_{n+1})_{\leq k}$  aufgrund der Induktionsvoraussetzung. Ferner bildet die

unterliegende Permutation von  $(\tau_{1,k} \otimes e_{l-1})\tau_{n,1}$  die Elemente  $1, \dots, k$  auf sich selbst ab. Daraus folgt die Behauptung.

Für den zweiten Summanden erfolgt eine Fallunterscheidung nach  $k$ . Falls  $k = 1$  ist, so gilt  $(e_{k-1} \otimes \tau_{l,1}) - \tau_{n,1} = 0$ , d.h., der zweite Summand verschwindet. Ist  $k > 1$ , so gilt  $\mathbf{S}_{k-1,l}\Phi_n \otimes e_1 \in (\mathbb{k}B_{n+1})_{\leq k-1}$  nach Induktionsvoraussetzung. Die unterliegenden Permutationen von  $e_{k-1} \otimes \tau_{l,1}$  und  $\tau_{n,1}$  bilden die Elemente  $1, \dots, k-1$  auf sich selbst bzw. auf  $2, \dots, k$  ab. Somit ist der zweite Summand in  $(\mathbb{k}B_{n+1})_{\leq k}$  enthalten.  $\square$

**Lemma 3.3.4.** *Sei  $n > 0$ , und sei  $M$  ein  $S_n$ -graduierter  $\mathbb{k}B_n$ -Linksmodul. Dann gilt  $\mathcal{P}_r(M) \cap M_{>1} = 0$ .*

*Beweis.* Für  $n = 1$  ist die Behauptung wegen  $M_{>1} = 0$  klar.

Andernfalls wird der Beweis durch Widerspruch geführt. Dazu wird angenommen, dass  $v \in \mathcal{P}_r(M) \cap M_{>1}$  mit  $v \neq 0$  existiert. Dann ist  $m := \min\{k \mid v|_1^k \neq 0\}$  wohldefiniert, und wegen  $v \in M_{>1}$  gilt  $1 < m \leq n$ . Für  $k := m - 1$  und  $l := n - k$  gelten somit  $k, l > 0$  und  $k + l = n$ . Aus der Voraussetzung  $v \in \mathcal{P}_r(M)$  folgt damit  $\mathbf{S}_{k,l} \cdot v \in M_{\leq k}$ , woraus sich insbesondere  $(\mathbf{S}_{k,l} \cdot v)|_1^m = 0$  ergibt.

Für eine  $(k, l)$ -Mischpermutation  $s$  gilt andererseits  $s^{-1}(m) < \dots < s^{-1}(n)$ . Also ist  $s^{-1}(m) \leq m$ , und es gilt  $s^{-1}(m) = m$  genau für  $s = e_n$ . Ist des Weiteren  $t \in S_n$  mit  $t(1) \geq m$ , so gilt

$$st(1) = m \Leftrightarrow t(1) = s^{-1}(m) \Leftrightarrow t(1) = m = s^{-1}(m) \Leftrightarrow t(1) = m \wedge s = e_n.$$

Da  $v \in M_{\geq m}$  nach Definition von  $m$  gilt, folgt hieraus  $(\mathbf{S}_{k,l} \cdot v)|_1^m = v|_1^m \neq 0$ . Dies ist ein Widerspruch.  $\square$

**Satz 3.3.5.** *Sei  $n > 0$ , und sei  $M$  ein  $S_n$ -graduierter  $\mathbb{k}B_n$ -Linksmodul. Dann ist  $\varphi_r : M_1 = M|_1^1 \rightarrow \mathcal{P}_r(M), v \mapsto \Phi_n \cdot v$  wohldefiniert und bijektiv. Insbesondere gilt also  $\mathcal{P}_r(M) = \Phi_n \cdot M_1$ .*

*Beweis.* Zum Nachweis der Wohldefiniertheit von  $\varphi_r$  seien  $k, l > 0$  mit  $k + l = n$ . Aufgrund von Lemma 3.3.3 gilt dann  $\mathbf{S}_{k,l}\Phi_n \in (\mathbb{k}B_n)_{\leq k}$ . Für  $v \in M_1$  folgt hieraus  $\mathbf{S}_{k,l} \cdot (\Phi_n \cdot v) = (\mathbf{S}_{k,l}\Phi_n) \cdot v \in M_{\leq k}$ . Somit ist  $\Phi_n \cdot v$  rechtsprimitiv, und die Abbildung  $\varphi_r$  ist wohldefiniert.

Offensichtlich gilt  $(\Phi_n)_1 = e_n$ . Hieraus folgt  $(\Phi_n \cdot v)_1 = v$  für  $v \in M_1$ , woraus sich die Injektivität von  $\varphi_r$  ergibt.

Abschließend ist noch die Surjektivität von  $\varphi_r$  zu zeigen. Dazu sei  $v \in \mathcal{P}_r(M)$ . Nach dem bisher Gezeigten ist dann  $\Phi_n \cdot v_1$  und damit auch  $w := v - \Phi_n \cdot v_1$  rechtsprimitiv. Ferner gilt  $w_1 = v_1 - (\Phi_n \cdot v_1)_1 = v_1 - v_1 = 0$ . Insgesamt ist also  $w \in \mathcal{P}_r(M) \cap M_{>1}$ , woraus nach Lemma 3.3.4  $w = 0$ , d.h.  $v = \Phi_n \cdot v_1$  folgt.  $\square$

Diese Resultate lassen sich mittels des nachstehenden Lemmas auch auf linksprimitive Elemente übertragen.

**Lemma 3.3.6.** *Sei  $n > 0$ , und sei  $M$  ein  $S_n$ -graduierter  $\mathbb{k}B_n$ -Linksmodul. Dann ist die Abbildung  $\psi : \mathcal{P}_r(M) \rightarrow \mathcal{P}_l(M), v \mapsto H_n^{-1} \cdot v$  wohldefiniert und bijektiv.*

*Beweis.* Sei  $v \in \mathcal{P}_r(M)$ . Für  $k, l > 0$  mit  $k + l = n$  gilt dann  $S_{l,k} \cdot v \in M_{\leq l}$ . Da die unterliegende Permutation von  $H_n^{-1}$  ein Element  $i \in \{1, \dots, n\}$  auf  $n - i + 1$  abbildet, folgt  $S_{k,l} H_n^{-1} \cdot v = H_n^{-1} S_{l,k} \cdot v \in M_{>k}$ . Hierbei wurde (3.13) verwendet. Somit ist  $H_n^{-1} \cdot v$  linksprimitiv, und die Abbildung  $\psi$  ist wohldefiniert.

Ganz analog zeigt man, dass  $\mathcal{P}_l(M) \rightarrow \mathcal{P}_r(M), v \mapsto H_n \cdot v$  wohldefiniert ist. Dann sind diese beiden Abbildungen aber offensichtlich zueinander invers.  $\square$

Um die Aussage von Satz 3.3.5 ganz analog für linksprimitive Elemente zu formulieren, soll das Element  $H_n^{-1} \Phi_n$  noch anders dargestellt werden. Dabei treten Dynkin-Specht-Wever-Elemente  $\Phi'_n \in \mathbb{k}B_n$  auf, die analog zu den  $\Phi_n$  unter Verwendung der inversen Zopfung definiert sind. Konkret ist also

$$\begin{aligned} \Phi'_0 &:= 0 \in \mathbb{k}B_0, \quad \Phi'_1 := e_1 \in \mathbb{k}B_1, \\ \Phi'_{n+1} &:= (e_{n+1} - (\tau_{1,n}^B)^{-1})(\Phi'_n \otimes e_1) \in \mathbb{k}B_{n+1} \end{aligned}$$

für  $n > 0$ .

**Lemma 3.3.7.** *Für  $n > 0$  gilt  $H_n \Phi'_n = (-1)^{n-1} \Phi_n$ .*

*Beweis.* Die Behauptung wird durch Induktion nach  $n$  gezeigt. Der Induktionsanfang ist dabei wegen  $\Phi_1 = \Phi'_1 = H_1 = e_1$  erfüllt. Der Induktionsschritt von  $n > 0$  auf  $n + 1$  ergibt sich aus

$$\begin{aligned} H_{n+1} \Phi'_{n+1} &= H_{n+1}(e_{n+1} - b_1^{-1} \cdots b_n^{-1})(\Phi'_n \otimes e_1) \\ &= (e_{n+1} - b_n^{-1} \cdots b_1^{-1}) H_{n+1}(\Phi'_n \otimes e_1) \\ &= (e_{n+1} - (\tau_{n,1})^{-1}) \tau_{n,1}(H_n \Phi'_n \otimes e_1) \\ &\stackrel{IV}{=} (-1)^n (e_{n+1} - \tau_{n,1})(\Phi_n \otimes e_1) = (-1)^n \Phi_{n+1}. \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen.  $\square$

**Satz 3.3.8.** *Sei  $n > 0$ , und sei  $M$  ein  $S_n$ -graduierter  $\mathbb{k}B_n$ -Linksmodul. Dann ist  $\varphi_l : M_1 \rightarrow \mathcal{P}_l(M), v \mapsto \Phi'_n \cdot v$  wohldefiniert und bijektiv. Insbesondere gilt also  $\mathcal{P}_l(M) = \Phi'_n \cdot M_1$ .*

*Beweis.* Nach Lemma 3.3.7 stimmt  $\varphi_l$  bis auf den Faktor  $(-1)^{n-1}$  mit der Verkettung der Abbildungen  $\varphi_r : M_1 \rightarrow \mathcal{P}_r(M), v \mapsto \Phi_n \cdot v$  und  $\psi : \mathcal{P}_r(M) \rightarrow \mathcal{P}_l(M), v \mapsto H_n^{-1} \cdot v$  aus Satz 3.3.5 bzw. Lemma 3.3.6 überein. Also ist  $\varphi_l$  mit  $\varphi_r$  und  $\psi$  bijektiv.  $\square$

Der folgende Satz bildet dann bei Kharchenko den Ausgangspunkt für die Berechnung der primitiven Elemente.



**Satz 3.3.9.** *Sei  $n > 0$ , und sei  $M$  ein  $S_n$ -graduierter  $\mathbb{k}B_n$ -Linksmodul. Ferner sei  $D(M) := \{v \in M_1 \mid \Phi_n \cdot v = \Phi'_n \cdot v\}$ . Dann ist  $\gamma : D(M) \rightarrow \mathcal{P}(M), v \mapsto \Phi_n \cdot v$  wohldefiniert und bijektiv.*

*Beweis.* Sei  $v \in D(M)$ . Dann ist  $v \in M_1$ , und aufgrund der Sätze 3.3.5 und 3.3.8 ist das Element  $\Phi_n \cdot v = \Phi'_n \cdot v$  in  $\mathcal{P}_r(M) \cap \mathcal{P}_l(M) = \mathcal{P}(M)$  enthalten. Somit ist  $\gamma$  wohldefiniert.

Die Injektivität von  $\gamma$  ergibt sich unmittelbar aus der Injektivität der Abbildung  $\varphi_r$  aus Satz 3.3.5. Somit verbleibt noch, die Surjektivität von  $\gamma$  zu zeigen. Dazu sei  $w \in \mathcal{P}(M) = \mathcal{P}_r(M) \cap \mathcal{P}_l(M)$ . Dann existieren  $u, v \in M_1$  mit  $\Phi_n \cdot u = w = \Phi'_n \cdot v$ . Wegen  $(\Phi_n)_1 = e_n = (\Phi'_n)_1$  folgt hieraus  $u = (\Phi_n \cdot u)_1 = w_1 = (\Phi'_n \cdot v)_1 = v$ . Also ist  $w = \Phi_n \cdot u$  mit  $u \in D(M)$ .  $\square$

### 3.4 Lie-Elemente

Sei  $M$  ein  $\mathbb{k}B_n$ -Linksmodul. Nach Korollar 3.2.4 lässt sich jedes primitive Element aus  $M$  als  $\Phi_n \cdot v$  für ein geeignetes  $v \in M$  schreiben. Um umgekehrt festzustellen, ob ein Element der Form  $\Phi_n \cdot v$  primitiv ist, ist es sinnvoll, die Elemente  $S_{k,l}\Phi_n$  für  $k, l > 0$  mit  $k + l = n$  zu studieren. Es wurde schon in Abschnitt 2.5 gezeigt, dass  $\mathcal{P}(\mathbb{k}B_n) = 0$  gilt. Somit wird  $\Phi_n$  jedenfalls nicht von allen  $S_{k,l}$  annulliert.

**Lemma 3.4.1.** *Für  $n > 1$  gilt in  $\mathbb{k}B_n$*

$$S_{1,n-1}(e_n - \tau_{n-1,1}^{\mathcal{B}}) = (e_n - b_1 \tau_{n-1,1}^{\mathcal{B}})(S_{1,n-2} \otimes e_1).$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} S_{1,n-1}(e_n - \tau_{n-1,1}^{\mathcal{B}}) &\stackrel{(2.27)}{=} [(S_{1,n-2} \otimes e_1) + \tau_{n-1,1}^{\mathcal{B}}] - [e_n + b_1(e_1 \otimes S_{1,n-2})] \tau_{n-1,1}^{\mathcal{B}} \\ &\stackrel{(2.28)}{=} (e_n - b_1 \tau_{n-1,1}^{\mathcal{B}})(S_{1,n-2} \otimes e_1). \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

Werden die Elemente  $\Psi_n \in \mathbb{k}B_n$  induktiv definiert durch

$$\begin{aligned} \Psi_1 &:= e_1 \in \mathbb{k}B_1, \\ \Psi_{n+1} &:= (e_{n+1} - b_1 \tau_{n,1}^{\mathcal{B}})(\Psi_n \otimes e_1) \in \mathbb{k}B_{n+1} \end{aligned}$$

für  $n > 0$ , so ergibt sich aus dem vorstehenden Lemma durch eine einfache Induktion:

**Korollar 3.4.2.** *Für  $n > 0$  gilt  $S_{1,n-1}\Phi_n = \Psi_n$ .*  $\square$

Ausgehend von dieser Gleichung soll nun gezeigt werden, dass die  $S_{k,l}$  in einem geeigneten Ring von Brüchen  $R_n^{-1}\mathbb{k}B_n$  invertierbar sind.

Das Element  $b_1\tau_{n-1,1}^{\mathcal{B}}$  besitzt den Zykel  $(23 \cdots n)$  der Länge  $n - 1$  als unterliegende Permutation. Somit ist die  $(n - 1)$ -te Potenz dieses Elementes in der reinen Zopfgruppe enthalten. Genauer gesagt handelt es sich bei  $(b_1\tau_{n-1,1}^{\mathcal{B}})^{n-1}$  um das Element  $(b_1 \cdots b_{n-1})^n$ , das das Zentrum der Zopfgruppe  $B_n$  erzeugt. Dies sieht man wie folgt. Aufgrund der Natürlichkeit der Zopfung gilt

$$\tau_{n-1,1}^k b_l = b_{k+l} \tau_{n-1,1}^k \quad (3.20)$$

für  $0 \leq k < n$  und  $0 < l < n$  mit  $k + l < n$ . Hieraus folgt

$$(b_1\tau_{n-1,1})^k = b_1 \cdots b_k \tau_{n-1,1}^k \quad (3.21)$$

für  $0 \leq k < n$ . Insbesondere ergibt sich im Fall  $k = n - 1$  die behauptete Identität. Die Gleichung (3.21) kommt in der Literatur zum Beispiel in [Art47b, Formel 6] vor.

Des Weiteren folgt

$$(e_n - b_1\tau_{n-1,1}) \sum_{k=0}^{n-2} (b_1\tau_{n-1,1})^k = e_n - (b_1 \cdots b_{n-1})^n.$$

Da in dieser Gleichung die beiden Faktoren auf der linken Seite untereinander sowie mit der rechten Seite kommutieren, wäre  $e_n - b_1\tau_{n-1,1}$  invertierbar, sofern das Element  $e_n - (b_1 \cdots b_{n-1})^n$  invertierbar ist. In diesem Fall wäre das Inverse von  $e_n - b_1\tau_{n-1,1}$  durch

$$(e_n - (b_1 \cdots b_{n-1})^n)^{-1} \sum_{k=0}^{n-2} (b_1 \tau_{n-1,1})^k \quad (3.22)$$

gegeben. Dies soll nun formalisiert werden. Dazu sei

$$D_{ij} := (b_i \cdots b_{j-1})^{j-i+1} = A_{i,i+1}(A_{i,i+2}A_{i+1,i+2}) \cdots (A_{i,j}A_{i+1,j} \cdots A_{j-1,j})$$

für  $1 \leq i < j$  als Abkürzung eingeführt. Die zweite Gleichheit findet man zum Beispiel in [Bir75, Korollar 1.8.4]. Dabei kann  $D_{ij}$  als Element von  $B_n$  für alle  $n \geq j$  aufgefasst werden. Da  $D_{1,n}$  zentral in  $B_n$  ist, kommutiert  $D_{ij}$  mit allen Elementen, die in der von den  $b_k$  für  $i \leq k < j$  erzeugten Untergruppe liegen.

Es sei nun  $R_m := \{e - D_{1,j} \mid 1 < j \leq m\}$  gesetzt. Dies kann wieder als Teilmenge jeder Algebra  $\mathbb{k}B_n$  für  $n \geq m$  verstanden werden. Hiermit lässt sich dann der Ring der Brüche  $R_n^{-1}\mathbb{k}B_n$  bilden [Coh73, Satz 1.2.1]. Genauer gesagt handelt es sich dabei um einen Ringhomomorphismus  $\beta : \mathbb{k}B_n \rightarrow R_n^{-1}\mathbb{k}B_n$ , der die folgende universelle Eigenschaft besitzt: Zu jedem Ringhomomorphismus  $\varphi : \mathbb{k}B_n \rightarrow A$ , für den alle  $\varphi(a)$ ,  $a \in R_n$  invertierbar sind, existiert genau ein Ringhomomorphismus  $\psi : R_n^{-1}\mathbb{k}B_n \rightarrow A$  mit  $\varphi = \psi \circ \beta$ .

Der Ring  $R_n^{-1}\mathbb{k}B_n$  kann konkret wie folgt konstruiert werden. Als  $\mathbb{k}$ -Algebra wird  $R_n^{-1}\mathbb{k}B_n$  von Elementen  $b_i$ ,  $c_i$  und  $d_i$  für  $i = 1, \dots, n - 1$  erzeugt. Von diesen Elementen wird gefordert, dass die  $b_i$  die Zopfrelationen (2.3) und (2.4) erfüllen sowie

die Relationen  $b_i c_i = 1 = c_i b_i$  und  $(1 - (b_1 \cdots b_i)^{i+1}) d_i = 1 = d_i (1 - (b_1 \cdots b_i)^{i+1})$  für  $i = 1, \dots, n-1$  gelten.

Es sei noch einmal an die Konvention erinnert, dass die Bilder von Elementen aus  $\mathbb{k}B_n$  unter dem kanonischen Homomorphismus  $\beta : \mathbb{k}B_n \rightarrow R_n^{-1}\mathbb{k}B_n$  genauso wie in der Algebra  $\mathbb{k}B_n$  bezeichnet werden.

In  $R_n^{-1}\mathbb{k}B_n$  ist nun  $e_n - b_1 \tau_{n-1,1}$  invertierbar. Das Inverse ist dabei durch Formel (3.22) gegeben. Ferner sind in  $R_n^{-1}\mathbb{k}B_n$  auch die Elemente

$$e_n - D_{ij} = (\tau_{j-i+1, i-1} \otimes e_{n-j})(e_n - D_{1, j-i+1})(\tau_{j-i+1, i-1}^{-1} \otimes e_{n-j}) \quad (3.23)$$

für  $1 \leq i < j \leq n$  invertierbar.

Werden nun die Elemente  $\Theta_n \in R_n^{-1}\mathbb{k}B_n$  und  $\Upsilon_n \in \mathbb{k}B_n$  induktiv durch

$$\begin{aligned} \Theta_1 &:= e_1 \in R_1^{-1}\mathbb{k}B_1, \\ \Theta_{n+1} &:= (\Theta_n \otimes e_1)(e_{n+1} - D_{1, n+1})^{-1} \in R_{n+1}^{-1}\mathbb{k}B_{n+1} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &:= e_1 \in \mathbb{k}B_1, \\ \Upsilon_{n+1} &:= (\Upsilon_n \otimes e_1) \sum_{k=0}^{n-1} (b_1 \tau_{n,1})^k \in \mathbb{k}B_{n+1} \end{aligned}$$

für  $n > 0$  definiert, so ergibt sich unmittelbar, dass  $\Theta_n \Upsilon_n$  das Inverse von  $\Psi_n$  in  $R_n^{-1}\mathbb{k}B_n$  ist, d.h., in  $R_n^{-1}\mathbb{k}B_n$  gilt

$$\Theta_n \Upsilon_n \Psi_n = e_n = \Psi_n \Theta_n \Upsilon_n. \quad (3.24)$$

Hierbei sei nur kurz darauf hingewiesen, dass beim Inversen von  $\Psi_n$  alle Terme der Form  $(e - D_{1,m})^{-1}$  am Anfang zusammengefasst werden können, da  $e - D_{1,m}$  zentral in  $\mathbb{k}B_m$  ist. Deshalb kommutieren auch alle Faktoren von  $\Theta_n$  untereinander.

Aufgrund von Korollar 3.4.2 ist  $\Phi_n \Theta_n \Upsilon_n$  nun ein Rechtsinverses von  $S_{1, n-1}$  in  $R_n^{-1}\mathbb{k}B_n$ . Bevor gezeigt wird, dass  $S_{1, n-1}$  und  $\Phi_n \Theta_n \Upsilon_n$  sogar zueinander invers sind, werden noch zwei Hilfsaussagen bereitgestellt.

**Lemma 3.4.3.** *Sei  $n > 1$ . Dann gilt für  $0 \leq k, l < n$*

$$(b_1 \tau_{n-1,1})^k b_1 \cdots b_l = \begin{cases} b_1 \cdots b_{k+l} \tau_{n-1,1}^k, & \text{falls } k+l < n-1, \\ b_1 \cdots b_{k+l+1-n} \tau_{n-1,1}^{k+1}, & \text{falls } k+l \geq n-1. \end{cases}$$

*Beweis.* Im Fall  $k+l \leq n-1$  gilt

$$(b_1 \tau_{n-1,1})^k b_1 \cdots b_l \stackrel{(3.21)}{=} b_1 \cdots b_k \tau_{n-1,1}^k b_1 \cdots b_l \stackrel{(3.20)}{=} b_1 \cdots b_{k+l} \tau_{n-1,1}^k.$$

Und für  $k + l \geq n - 1$  ist

$$\begin{aligned}
(b_1 \tau_{n-1,1})^k b_1 \cdots b_l &= (b_1 \tau_{n-1,1})^{k+l+1-n} (b_1 \tau_{n-1,1})^{n-1-l} b_1 \cdots b_l \\
&\stackrel{(3.21)}{=} b_1 \cdots b_{k+l+1-n} \tau_{n-1,1}^{k+l+1-n} (b_1 \tau_{n-1,1})^{n-1-l} b_1 \cdots b_l \\
&= b_1 \cdots b_{k+l+1-n} \tau_{n-1,1}^{k+l+1-n} b_1 \cdots b_{n-1} \tau_{n-1,1}^{n-1-l} \\
&= b_1 \cdots b_{k+l+1-n} \tau_{n-1,1}^{k+1}.
\end{aligned}$$

Dabei wurde bei der vorletzten Umformung der zuerst gezeigte Fall benutzt.  $\square$

**Lemma 3.4.4.** *Sei  $n > 1$ . Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{n-2} (b_1 \tau_{n-1,1})^k S_{1,n-1} = (S_{1,n-2} \otimes e_1) \sum_{k=0}^{n-1} \tau_{n-1,1}^k.$$

*Beweis.* Die linke Seite der behaupteten Gleichung ist

$$\sum_{k=0}^{n-2} (b_1 \tau_{n-1,1})^k S_{1,n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=0}^{n-1} (b_1 \tau_{n-1,1})^k b_1 \cdots b_l,$$

und für die rechte Seite gilt

$$(S_{1,n-2} \otimes e_1) \sum_{k'=0}^{n-1} \tau_{n-1,1}^{k'} = \sum_{l'=0}^{n-2} \sum_{k'=0}^{n-1} b_1 \cdots b_{l'} \tau_{n-1,1}^{k'}.$$

Auf beiden Seiten der Gleichung treten also jeweils  $n(n-1)$  Summanden auf. Für jedes  $m \in \{0, \dots, n(n-1) - 1\}$  gibt es nun eindeutig bestimmte  $k, l, k', l'$  mit

$$m = kn + l, \quad 0 \leq l < n, \quad 0 \leq k < n - 1$$

bzw.

$$m = k'(n-1) + l', \quad 0 \leq l' < n-1, \quad 0 \leq k' < n.$$

Im Fall  $k + l < n - 1$  gelten dann  $k' = k$  und  $l' = k + l$ . Ansonsten ist  $n - 1 \leq k + l < 2(n - 1)$ , woraus sich  $k' = k + 1$  und  $l' = k + l + 1 - n$  ergeben. Nach dem vorstehenden Lemma stimmt somit der zum Indexpaar  $(k, l)$  gehörige Summand der linken Seite mit dem zu  $(k', l')$  gehörigen Summanden der rechten Seite überein.  $\square$

**Satz 3.4.5.** *Sei  $n > 0$ . Dann ist  $S_{1,n-1}$  in  $R_n^{-1} \mathbb{k} B_n$  invertierbar, und das Inverse ist durch  $\Phi_n \Theta_n \Upsilon_n$  gegeben.*

*Beweis.* Dass  $\Phi_n \Theta_n \Upsilon_n$  ein Rechtsinverses von  $S_{1,n-1}$  ist, wurde schon oben angemerkt. Somit ist noch zu zeigen, dass  $\Phi_n \Theta_n \Upsilon_n$  auch ein Linksinverses von  $S_{1,n-1}$  ist. Dies wird induktiv nach  $n$  bewiesen.

Der Induktionsanfang  $n = 1$  ist dabei wegen  $S_{1,0} = \Phi_1 = \Theta_1 = \Upsilon_1 = e_1$  klar. Im Induktionsschritt von  $n > 0$  auf  $n + 1$  gilt

$$\begin{aligned}
\Phi_{n+1}\Theta_{n+1}\Upsilon_{n+1}S_{1,n} &= \Phi_{n+1}\Theta_{n+1}(\Upsilon_n \otimes e_1) \sum_{k=0}^{n-1} (b_1\tau_{n,1})^k S_{1,n} \\
&= \Phi_{n+1}\Theta_{n+1}(\Upsilon_n S_{1,n-1} \otimes e_1) \sum_{k=0}^n \tau_{n,1}^k \\
&= (e_{n+1} - \tau_{n,1})(\Phi_n \Theta_n \Upsilon_n S_{1,n-1} \otimes e_1) \left( \sum_{k=0}^n \tau_{n,1}^k \right) (e_{n+1} - D_{1,n+1})^{-1} \\
&= (e_{n+1} - \tau_{n,1}) \left( \sum_{k=0}^n \tau_{n,1}^k \right) (e_{n+1} - D_{1,n+1})^{-1} \\
&= (e_{n+1} - \tau_{n,1}^{n+1})(e_{n+1} - D_{1,n+1})^{-1} = e_{n+1}.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde bei der zweiten Gleichheit das vorstehende Lemma verwendet, und bei der vierten Gleichung geht die Induktionsvoraussetzung ein.  $\square$

**Korollar 3.4.6.** *In  $R_n^{-1}\mathbb{k}B_n$  ist  $S_n$  invertierbar.*

*Beweis.* Die Behauptung wird durch eine Induktion nach  $n$  gezeigt. Für  $n = 0$  und  $n = 1$  ist die Behauptung wegen  $S_0 = e_0$  und  $S_1 = e_1$  klar.

Im Induktionsschritt von  $n > 0$  auf  $n + 1$  wird die Identität  $S_{n+1} = (e_1 \otimes S_n)S_{1,n}$  verwendet. Da  $e_1 \otimes S_n$  und  $S_{1,n}$  nach der Induktionsvoraussetzung bzw. dem obigen Satz invertierbar sind, ist dann auch  $S_{n+1}$  invertierbar.  $\square$

**Korollar 3.4.7.** *Seien  $k, l, n$  natürliche Zahlen mit  $k + l = n$ . Dann ist  $S_{k,l}$  in  $R_n^{-1}\mathbb{k}B_n$  invertierbar.*

*Beweis.*  $S_{n,0} = e_n = S_{0,n}$  sind offensichtlich invertierbar. Und im Fall  $k, l > 0$  gilt  $S_n = (S_k \otimes S_l)S_{k,l}$ . Nach dem vorstehenden Korollar sind aber  $S_n$  und  $S_k \otimes S_l$  invertierbar. Also ist auch  $S_{k,l}$  invertierbar.  $\square$

Mit Hilfe der bisher bewiesenen Aussagen und Formeln kann für bestimmte  $\mathbb{k}B_n$ -Linksmoduln  $M$  der Raum  $\mathcal{P}(M)$  der Lie-Elemente vollständig angegeben werden. Dabei kommen auch nicht triviale Lie-Elemente vor.

Nach Korollar 3.2.2 operiert  $D_{1,n}$  auf allen Elementen aus  $\mathcal{P}(M)$  als Identität. Da aber  $D_{1,n}$  zentral in  $\mathbb{k}B_n$  ist, ist die Menge aller Elemente aus  $M$ , auf denen  $D_{1,n}$  als Identität operiert, ein  $\mathbb{k}B_n$ -Untermodul von  $M$ . Somit genügt es, nur  $\mathbb{k}B_n$ -Linksmoduln  $M$  zu betrachten, auf denen  $D_{1,n}$  als Identität operiert.

Um die vorstehenden Resultate anwenden zu können, wird ferner angenommen, dass die Elemente  $e - D_{1,m}$  für  $1 < m < n$  auf  $M$  durch Isomorphismen operieren.

Zusammenfassend lassen sich diese Bedingungen dann auch so ausdrücken, dass die Operation von  $\mathbb{k}B_n$  auf  $M$  über die Algebra

$$Q_n := (R_{n-1}^{-1}\mathbb{k}B_n)/(e - D_{1,n})$$

faktorisiert. Im weiteren Verlauf wird eine Erweiterung eines nicht trivialen Quotienten von  $\mathbb{k}B_n$  konstruiert, in der die Bilder der Elemente  $e - D_{1,m}$  für  $1 < m < n$  invertierbar sind sowie das Bild von  $e - D_{1,n}$  verschwindet. Deshalb ist  $Q_n$  auf jeden Fall von 0 verschieden.

**Satz 3.4.8.** *Sei  $n > 1$ , und sei  $M$  ein  $Q_n$ -Linksmodul. Dann gilt*

$$\mathcal{P}(M) = \Phi_n(\Theta_{n-1} \otimes e_1)\Upsilon_n \cdot M.$$

*Beweis.* Für  $k, l > 0$  mit  $k+l = n$  ist  $S_k \otimes S_l$  aufgrund von Korollar 3.4.6 invertierbar in  $Q_n$ . Damit gilt  $S_{k,l} = (S_k^{-1} \otimes S_l^{-1})S_n = (S_k^{-1} \otimes S_l^{-1})(S_1 \otimes S_{n-1})S_{1,n-1}$ . Dann wird aber jedes Element aus  $M$ , das von  $S_{1,n-1}$  annulliert wird, auch von  $S_{k,l}$  annulliert. Hieraus folgt  $\mathcal{P}(M) = \text{Ann}_M^r(S_{1,n-1}) = \{v \in M \mid S_{1,n-1} \cdot v = 0\}$ .

In  $Q_n$  sind  $\Psi_{n-1} \otimes e_1$  und  $\Theta_{n-1}\Upsilon_{n-1} \otimes e_1$  zueinander invers. Zusammen mit Korollar 3.4.2 folgt hieraus

$$\begin{aligned} S_{1,n-1}\Phi_n(\Theta_{n-1} \otimes e_1)\Upsilon_n &= \Psi_n(\Theta_{n-1} \otimes e_1)\Upsilon_n \\ &= (e_n - b_1\tau_{n-1,1}) \sum_{k=0}^{n-2} (b_1\tau_{n-1,1})^k = e_n - D_{1,n} = 0. \end{aligned}$$

Deshalb handelt es sich bei den im Satz angegebenen Elementen um Lie-Elemente.

Somit ist noch zu zeigen, dass alle Lie-Elemente in  $M$  die angegebene Form besitzen. Dafür sei  $u \in \mathcal{P}(M)$ . Dann existiert nach Korollar 3.2.4 ein  $v \in M$  mit  $u = \Phi_n \cdot v$ . Da  $\Theta_{n-1}\Upsilon_{n-1} \otimes e_1$  in  $Q_n$  invertierbar ist, operiert dieses Element durch einen Isomorphismus auf  $M$ . Also existiert ein  $w \in M$  mit  $v = (\Theta_{n-1}\Upsilon_{n-1} \otimes e_1) \cdot w$ . Für das Element  $w$  gilt nun

$$(e_n - b_1\tau_{n-1,1}) \cdot w = S_{1,n-1}\Phi_n(\Theta_{n-1}\Upsilon_{n-1} \otimes e_1) \cdot w = S_{1,n-1} \cdot u = 0$$

bzw.  $b_1\tau_{n-1,1} \cdot w = w$ . Hieraus folgt aber

$$\begin{aligned} \Phi_n(\Theta_{n-1} \otimes e_1)\Upsilon_n \cdot \frac{1}{n-1}w &= \frac{1}{n-1}\Phi_n(\Theta_{n-1}\Upsilon_{n-1} \otimes e_1) \sum_{k=0}^{n-2} (b_1\tau_{n-1,1})^k \cdot w \\ &= \Phi_n(\Theta_{n-1}\Upsilon_{n-1} \otimes e_1) \cdot w = \Phi_n \cdot v = u, \end{aligned}$$

d.h.,  $u$  ist von der behaupteten Gestalt.  $\square$

Die Aussage dieses Satzes lässt sich unter Verwendung von  $S_n$ -Graduierungen etwas präzisieren. Dazu sei angemerkt, dass sich die  $S_n$ -Graduierung von  $\mathbb{k}B_n$  auf die Algebra  $Q_n$  überträgt. Das liegt daran, dass sowohl die Elemente aus  $R_{n-1}$  als auch das Element  $e - D_{1,n}$  homogen bezüglich dieser Graduierung sind. Dass dies bei der Bildung des Ringes der Brüche ausreichend ist, ergibt sich direkt aus der konkreten Konstruktion dieses Ringes, wie sie oben beschrieben worden ist.

**Satz 3.4.9.** *Sei  $n > 1$ , und sei  $M$  ein  $S_n$ -graduierter  $Q_n$ -Linksmodul. Dann ist*

$$\varphi : M_{1,2} \rightarrow \mathcal{P}(M), v \mapsto \Phi_n(\Theta_{n-1} \otimes e_1)\Upsilon_n \cdot v$$

*wohldefiniert und bijektiv.*

*Beweis.* Die Abbildung  $\varphi$  ist nach dem vorherigen Satz wohldefiniert.

Zum Nachweis der Injektivität wird  $\varphi$  als Abbildung  $M_{1,2} \rightarrow M$  betrachtet. Diese Abbildung kann als  $\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$  mit  $\varphi_1 : M_{1,2} \rightarrow M_1, v \mapsto \sum_{k=0}^{n-2} (b_1 \tau_{n-1,1})^k \cdot v$ ,  $\varphi_2 : M_1 \rightarrow M_1, v \mapsto (\Theta_{n-1} \Upsilon_{n-1} \otimes e_1) \cdot v$  und  $\varphi_3 : M_1 \rightarrow M, v \mapsto \Phi_n \cdot v$  geschrieben werden. Es genügt nun zu zeigen, dass die  $\varphi_i$  injektiv sind. Die unterliegende Permutation von  $b_1 \tau_{n-1,1}$  ist der Zykel  $(23 \cdots n)$ . Deshalb bildet für  $0 \leq k \leq n-2$  die unterliegende Permutation von  $(b_1 \tau_{n-1,1})^k$  das Element 2 auf  $2+k$  ab. Somit gilt für  $v \in M_{1,2}$

$$\left( \sum_{k=0}^{n-2} (b_1 \tau_{n-1,1})^k \cdot v \right)_{1,2} = v,$$

woraus die Injektivität von  $\varphi_1$  folgt. Die Abbildung  $\varphi_2$  ist injektiv, da  $\Theta_{n-1} \Upsilon_{n-1} \otimes e_1$  invertierbar ist. Schließlich ist  $\varphi_3$  aufgrund von Satz 3.3.5 injektiv.

Es verbleibt noch zu zeigen, dass  $\varphi$  surjektiv ist. Hierzu wird die Beweisführung des vorstehenden Satzes etwas verfeinert. Sei also  $u \in \mathcal{P}(M)$ . Nach Satz 3.3.5 existiert dann ein  $v \in M_1$  mit  $u = \Phi_n \cdot v$ . Da  $\Theta_{n-1} \Upsilon_{n-1} \otimes e_1$  in  $(Q_n)_1$  invertierbar ist, gibt es hierzu ein  $w \in M_1$  mit  $v = (\Theta_{n-1} \Upsilon_{n-1} \otimes e_1) \cdot w$ . Schließlich sei  $z := w_{1,2}$ . Nun ist noch  $w = \sum_{k=0}^{n-2} (b_1 \tau_{n-1,1})^k \cdot z$  zu zeigen, denn dann gilt  $u = \Phi_n(\Theta_{n-1} \otimes e_1)\Upsilon_n \cdot z$  mit  $z \in M_{1,2}$ . Wie im Beweis des vorherigen Satzes folgt  $b_1 \tau_{n-1,1} \cdot w = w$ . Dann gilt aber

$$w|_{1,2}^{1,k} = ((b_1 \tau_{n-1,1})^{k-2} \cdot w)|_{1,2}^{1,k} = (b_1 \tau_{n-1,1})^{k-2} \cdot w_{1,2}$$

für  $2 \leq k \leq n$ , woraus

$$w = \sum_{k=2}^n w|_{1,2}^{1,k} = \sum_{k=0}^{n-2} (b_1 \tau_{n-1,1})^k \cdot z$$

folgt. Damit ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

Für einen  $S_n$ -graduerten  $\mathbb{k}B_n$ -Linksmodul  $M$  sind die homogenen Komponenten insbesondere Vektorräume über dem Grundkörper  $\mathbb{k}$ . Dabei können die  $M_t$  auch als  $\mathbb{k}$ -Rechtsvektorräume aufgefasst werden. Dies ordnet sich der folgenden etwas allgemeineren Situation unter.

Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper, der mit der trivialen  $S_n$ -Graduierung versehen ist, d.h., alle Elemente in  $\mathbb{K}$  sind homogen vom Grad  $e_n$ . Für einen  $S_n$ -graduerten  $(\mathbb{k}B_n, \mathbb{K})$ -Bimodul  $M$  ist dann durch  $M_e \rightarrow M_t, v \mapsto L(t) \cdot v$  für jedes  $t \in S_n$  ein  $\mathbb{K}$ -rechtslinearer Isomorphismus definiert. Somit sind die homogenen Komponenten von  $M$  als  $\mathbb{K}$ -Rechtsvektorräume zueinander isomorph. Aus dem vorstehenden Satz ergibt sich damit:

**Korollar 3.4.10.** *Sei  $n > 1$ , und sei  $M$  ein  $S_n$ -graduierte  $(Q_n, \mathbb{K})$ -Bimodul. Dann gilt*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{P}(M) = (n-2)! \cdot \dim_{\mathbb{K}} M_e.$$

*Im Fall  $\dim_{\mathbb{K}} M_e = 1$  ist also insbesondere  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{P}(M) = (n-2)!$ .*  $\square$

Als Nächstes soll gezeigt werden, dass  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{P}(M) \geq (n-2)!$  für jeden  $S_n$ -graduierten  $(\mathbb{K}B_n, \mathbb{K})$ -Bimodul  $M$  gilt, auf dem  $D_{1,n}$  als Identität operiert und der  $\dim_{\mathbb{K}} M_e = 1$  erfüllt. Es wird jetzt also nicht mehr angenommen, dass die Elemente  $e_n - D_{1,m}$  für  $1 < m < n$  auf  $M$  durch Isomorphismen operieren.

Diese Behauptung entspricht der ersten Aussage aus [Kha00, Theorem 6.1], und auch die Beweisführung wird von [Kha00] übernommen. Hierzu werden die primitiven Elemente durch ein homogenes lineares Gleichungssystem beschrieben, und anschließend wird der Rang der zugehörigen Matrix betrachtet. Für einen bestimmten generischen Fall kann der Rang dieser Matrix aus den bisherigen Resultaten abgeleitet werden. Dies liefert dann eine Obergrenze für den Rang der Matrix im allgemeinen Fall.

Aus den Bedingungen an den Bimodul  $M$  ergibt sich, dass die Linksoperation von  $\mathbb{K}B_n$  über die Algebra

$$A_n := \mathbb{K}B_{0,n}/(e_n - D_{1,n})$$

faktorisiert. Dies ergibt sich wie folgt. Wegen  $\dim_{\mathbb{K}} M_e = 1$  sind die homogenen Komponenten von  $M$  jeweils eindimensional als  $\mathbb{K}$ -Rechtsvektorräume. Dann operiert aber jedes Element aus der reinen Zopfgruppe  $P_n$  auf jeder homogenen Komponente durch Rechtsmultiplikation mit einem Skalar aus  $\mathbb{K}$ . Also kommutieren die Operationen von Elementen aus  $P_n$  untereinander. Insbesondere stimmen die Operationen von  $b_i^2 b_j^2$  und  $b_j^2 b_i^2$  auf  $M$  überein. Zudem wurde vorausgesetzt, dass  $D_{1,n}$  auf  $M$  als Identität operiert. Hieraus ergibt sich die Behauptung. Deshalb genügt es,  $S_n$ -graduierte  $(A_n, \mathbb{K})$ -Bimoduln  $M$  mit  $\dim_{\mathbb{K}} M_e = 1$  zu betrachten.

Als Vorbereitung soll jetzt noch der generische Fall beschrieben werden. Dazu wird eine Erweiterung der Algebra  $A_n$  konstruiert, die einen Körper  $\mathcal{Q}(\overline{K}_n)$  als Unter algebra enthält. Diese Erweiterung wird dann als  $(A_n, \mathcal{Q}(\overline{K}_n))$ -Bimodul betrachtet.

Nach Korollar 2.2.10 ist die Algebra  $\mathbb{K}B_{0,n}$  isomorph zu einem verschränkten Produkt einer Laurentpolynomialgebra  $K_n := \mathbb{K}K_{0,n}$  in  $\binom{n}{2}$  Unbestimmten  $A_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$  mit der Gruppenalgebra  $H = \mathbb{K}S_n$ . Ein solches verschränktes Produkt einer kommutativen Algebra  $A$  mit einer Gruppenalgebra  $H = \mathbb{K}G$  ist gegeben durch

1. eine Rechtsoperation von  $G$  auf  $A$  durch Algebrenautomorphismen, d.h.,  $A$  ist eine  $H$ -Rechtsmodulalgebra, sowie
2. einen normierten invertierbaren 2-Kozykel  $\sigma : H \otimes H \rightarrow A$  für diese Operation, d.h., für  $g, h, k \in G$  gelten:

$$(a) \quad \sigma(g, e) = \sigma(e, h) = 1 \qquad \text{(Normierung)}$$



- (b)  $\sigma(g, h) \in A^*$  (Invertierbarkeit)  
 (c)  $\sigma(gh, k)[\sigma(g, h) \cdot k] = \sigma(g, hk)\sigma(h, k)$  (Kozykelbedingung)

Im Fall  $\mathbb{k}B_{0,n} \cong \mathbb{k}S_n \#_{\sigma} K_n$  ist die Rechtsoperation von  $S_n$  auf  $K_n$  durch

$$A_{ij} \cdot t = A_{t^{-1}(i), t^{-1}(j)}$$

für  $t \in S_n$  festgelegt. Hierbei wird  $A_{ji}$  wieder mit  $A_{ij}$  identifiziert. Ferner ist der Kozykel  $\sigma = \sigma_n := \sigma_{0,n} : \mathbb{k}S_n \otimes \mathbb{k}S_n \rightarrow K_n$  durch

$$\sigma(s, t) := \prod_{\substack{i < j \\ t(i) > t(j) \\ st(i) < st(j)}} A_{ij}$$

für  $s, t \in S_n$  erklärt.

Hiermit lässt sich auch die Restklassenalgebra  $A_n = \mathbb{k}B_{0,n}/(1 - D_{1,n})$  leicht als verschränktes Produkt darstellen. Zunächst kann  $1 - D_{1,n} = 1 - \prod_{1 \leq i < j \leq n} A_{ij}$  als Element aus der Unteralgebra  $K_n \subset \mathbb{k}S_n \#_{\sigma} K_n$  aufgefasst werden. Mit dem Element  $1 - \prod_{1 \leq i < j \leq n} A_{ij}$  ist auch das hiervon erzeugte Ideal von  $K_n$  invariant unter der Operation von  $S_n$ . Somit gibt es genau eine Rechtsoperation von  $S_n$  auf  $\overline{K}_n := K_n / (1 - \prod_{1 \leq i < j \leq n} A_{ij})$  durch Algebrenautomorphismen, so dass der kanonische Epimorphismus  $q : K_n \rightarrow \overline{K}_n$   $S_n$ -rechtslinear ist. Für diese Operation ist  $\overline{\sigma} := q \circ \sigma$  ein normierter invertierbarer 2-Kozykel. Somit kann das verschränkte Produkt  $\mathbb{k}S_n \#_{\overline{\sigma}} \overline{K}_n$  gebildet werden. Ferner ist  $\text{id} \otimes q : \mathbb{k}S_n \#_{\sigma} K_n \rightarrow \mathbb{k}S_n \#_{\overline{\sigma}} \overline{K}_n$  ein Algebrenepimorphismus mit Kern  $(1 - \prod_{1 \leq i < j \leq n} A_{ij})$ . Also gilt

$$A_n = \mathbb{k}B_{0,n} / (1 - D_{1,n}) \cong (\mathbb{k}S_n \#_{\sigma} K_n) / \left( 1 - \prod_{1 \leq i < j \leq n} A_{ij} \right) \cong \mathbb{k}S_n \#_{\overline{\sigma}} \overline{K}_n.$$

Siehe hierzu auch [Pas89, Lemma 1.4].

Aufgrund der Relation  $\prod_{1 \leq i < j \leq n} A_{ij} = 1$  lässt sich in  $\overline{K}_n$  jedes  $A_{ij}$  durch die anderen Unbestimmten ausdrücken. Hieraus ergibt sich, dass  $\overline{K}_n$  isomorph zu einer Laurentpolynomialalgebra in  $\binom{n}{2} - 1$  Unbestimmten ist. Ferner wird jede Laurentpolynomialunteralgebra von  $K_n$ , die von  $\binom{n}{2} - 1$  der Unbestimmten  $A_{ij}$  erzeugt wird, unter  $q$  isomorph auf  $\overline{K}_n$  abgebildet. Insbesondere gilt also  $q(P) \neq 0$  für jedes  $P \neq 0$  aus  $K_n$ , in dem nicht alle Unbestimmte  $A_{ij}$  vorkommen.

Als Laurentpolynomialalgebra ist  $\overline{K}_n$  ein Integritätsring und kann somit in seinen Quotientenkörper eingebettet werden:  $\iota : \overline{K}_n \hookrightarrow \mathcal{Q}(\overline{K}_n)$ . Die Rechtsoperation von  $S_n$  auf  $\overline{K}_n$  durch Algebrenautomorphismen lässt sich dann eindeutig auf  $\mathcal{Q}(\overline{K}_n)$  fortsetzen. Für diese Operation ist  $\tilde{\sigma} := \iota \circ \overline{\sigma}$  ein normierter invertierbarer 2-Kozykel. Somit kann das verschränkte Produkt  $\mathbb{k}S_n \#_{\tilde{\sigma}} \mathcal{Q}(\overline{K}_n)$  gebildet werden. Ferner ist  $\text{id} \otimes \iota : \mathbb{k}S_n \#_{\overline{\sigma}} \overline{K}_n \hookrightarrow \mathbb{k}S_n \#_{\tilde{\sigma}} \mathcal{Q}(\overline{K}_n)$  ein Monomorphismus von Algebren. Also kann  $\mathbb{k}S_n \#_{\tilde{\sigma}} \mathcal{Q}(\overline{K}_n)$  auch als Erweiterung der Algebra  $A_n$  betrachtet werden. Zudem ist der Quotientenkörper  $\mathcal{Q}(\overline{K}_n)$  als Unteralgebra in  $\mathbb{k}S_n \#_{\tilde{\sigma}} \mathcal{Q}(\overline{K}_n)$  enthalten.

Die Algebra  $\mathbb{k}S_n \#_{\bar{\sigma}} \mathcal{Q}(\overline{K}_n)$  besitzt eine  $S_n$ -Graduierung, bei der die Elemente  $t \# a$  mit  $t \in S_n, a \in \mathcal{Q}(\overline{K}_n)$  homogen vom Grad  $t$  sind. Bezüglich dieser Graduierung ist jede homogene Komponente ein eindimensionaler  $\mathcal{Q}(\overline{K}_n)$ -Rechtsvektorraum, und die Inklusion  $A_n \hookrightarrow \mathbb{k}S_n \#_{\bar{\sigma}} \mathcal{Q}(\overline{K}_n)$  ist ein Morphismus von  $S_n$ -graduierten Algebren. Somit ist  $M := \mathbb{k}S_n \#_{\bar{\sigma}} \mathcal{Q}(\overline{K}_n)$  ein  $S_n$ -graduierter  $(A_n, \mathcal{Q}(\overline{K}_n))$ -Bimodul mit  $\dim_{\mathcal{Q}(\overline{K}_n)} M_e = 1$ .

Da  $A_n$  ein Quotient von  $\mathbb{k}B_n$  ist, kann  $M$  auch als  $\mathbb{k}B_n$ -Linksmodul betrachtet werden. Sei  $p : \mathbb{k}B_n \rightarrow \mathbb{k}S_n \#_{\bar{\sigma}} \mathcal{Q}(\overline{K}_n)$  die Verkettung des Epimorphismus  $\mathbb{k}B_n \rightarrow A_n$  mit der Inklusion  $A_n \hookrightarrow \mathbb{k}S_n \#_{\bar{\sigma}} \mathcal{Q}(\overline{K}_n)$ . Dann operiert jedes Element  $a \in \mathbb{k}B_n$  auf  $M$  durch Linksmultiplikation mit  $p(a)$ . Die Elemente  $p(1 - D_{1,m})$  sind nun für  $1 < m < n$  invertierbar. Ferner gilt  $p(1 - D_{1,n}) = 0$ . Deshalb faktorisiert  $p$  über den kanonischen Homomorphismus  $\mathbb{k}B_n \rightarrow Q_n$ . Also ist  $M$  auch ein  $S_n$ -graduierte  $(Q_n, \mathcal{Q}(\overline{K}_n))$ -Bimodul. Nach Korollar 3.4.10 gilt somit  $\dim_{\mathcal{Q}(\overline{K}_n)} \mathcal{P}(M) = (n-2)!$ .

Damit sind nun alle benötigten Hilfsmittel bereitgestellt, um die eigentliche Behauptung beweisen zu können.

**Satz 3.4.11** ([[Kha00](#), Theorem 6.1]). *Sei  $n > 1$ , und sei  $M$  ein  $S_n$ -graduierter  $(A_n, \mathbb{K})$ -Bimodul mit  $\dim_{\mathbb{K}} M_e = 1$ . Dann gilt  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{P}(M) \geq (n-2)!$ .*

*Beweis.* Sei  $v_e \neq 0$  aus  $M_e$ . Für  $t \in S_n$  sei damit  $v_t := L(t) \cdot v_e \in M_t$  gesetzt. Dann ist  $(v_t)_{t \in S_n}$  eine  $\mathbb{K}$ -Basis von  $M$ .

Die homogenen Elemente vom Grad  $e$  der Algebra  $A_n \cong \mathbb{k}S_n \#_{\bar{\sigma}} \overline{K}_n$  bilden eine Unteralgebra, die mit  $\overline{K}_n$  identifiziert werden kann. Es gibt dann genau eine Abbildung  $\varphi : \overline{K}_n \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $a \cdot v_e = v_e \cdot \varphi(a)$  für  $a \in \overline{K}_n$ . Dabei handelt es sich um einen Ringhomomorphismus.

Seien  $k, l > 0$  mit  $k + l = n$ . Dann ist die Linksmultiplikation mit  $S_{k,l}$  eine  $\mathbb{K}$ -rechtslineare Abbildung. Die zugehörige darstellende Matrix bezüglich der Basis  $(v_t)_{t \in S_n}$  sei mit  $M(k) = (m_{s,t}^{(k)})_{s,t \in S_n}$  bezeichnet. Für  $t \in S_n$  gilt

$$\begin{aligned} S_{k,l} \cdot v_t &= \sum_{s \in S_{k,l}} L(s) \cdot v_t = \sum_{s \in S_{k,l}} L(s)L(t) \cdot v_e = \sum_{s \in S_{k,l}} L(st) \bar{\sigma}(s,t) \cdot v_e \\ &= \sum_{s \in S_{k,l}} L(st) \cdot v_e \cdot \varphi(\bar{\sigma}(s,t)) = \sum_{s \in S_{k,l}} v_{st} \cdot \varphi(\bar{\sigma}(s,t)), \end{aligned}$$

woraus

$$m_{s,t}^{(k)} = \begin{cases} \varphi(\bar{\sigma}(st^{-1}, t)), & \text{falls } st^{-1} \in S_{k,l}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für  $s, t \in S_n$  folgt. Hiermit sei

$$M := \begin{pmatrix} M(1) \\ \vdots \\ M(n-1) \end{pmatrix} \in {}^{(n-1)n!} \mathbb{K}^{n!}$$

gebildet.

Dann ist  $\mathcal{P}(M)$  als  $\mathbb{K}$ -Rechtsvektorraum isomorph zum Kern von  $M$ . Somit gilt  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{P}(M) \geq (n-2)!$  genau dann, wenn  $\text{rg}(M) \leq n! - (n-2)!$  für den Rang der Matrix  $M$  gilt. Dies ist aber gleichbedeutend damit, dass alle Minoren der Größe  $n! - (n-2)! + 1$  von  $M$  verschwinden.

Im Fall  $M = \mathbb{K}S_n \#_{\bar{\sigma}} \mathcal{Q}(\overline{K}_n)$  wurde schon gezeigt, dass  $\dim_{\mathcal{Q}(\overline{K}_n)} \mathcal{P}(M) = (n-2)!$  gilt. Dann verschwinden also auch die angegebenen Minoren. In diesem Fall stimmt aber  $\varphi : \overline{K}_n \rightarrow \mathcal{Q}(\overline{K}_n)$  mit der Inklusion in den Quotientenkörper überein. Ferner ist die Matrix  $M$  schon über der Unteralgebra  $\overline{K}_n$  definiert. Deshalb verschwinden die Minoren der Größe  $n! - (n-2)! + 1$  schon über  $\overline{K}_n$ .

Im allgemeinen Fall geht dann die Matrix  $M$  und die zugehörigen Minoren aus diesem generischen Fall durch Anwendung des Ringhomomorphismus  $\varphi : \overline{K}_n \rightarrow \mathbb{K}$  hervor. Dann verschwinden aber auch hier die Minoren der Größe  $n! - (n-2)! + 1$ .  $\square$

Nun soll noch kurz auf obere Schranken für die Dimension von  $\mathcal{P}(M)$  eingegangen werden. Dazu lässt sich das Folgende sagen.

**Satz 3.4.12.** *Für  $n > 1$  sei ein  $S_n$ -graduierter  $(A_n, \mathbb{K})$ -Bimodul  $M$  gegeben, der  $\dim_{\mathbb{K}} M_e = 1$  erfüllt. Dann ist  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{P}(M) \leq (n-1)!$ , wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn die Linksoperation von  $A_n$  auf  $M$  über  $\mathbb{K}S_n$  faktorisiert.*

*Beweis.* Da jedes primitive Element von  $M$  insbesondere auch rechtsprimitiv ist, folgt  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{P}(M) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{P}_r(M) = (n-1)!$  aus Satz 3.3.5. Falls zudem die Operation von  $A_n$  auf  $M$  über  $\mathbb{K}S_n$  faktorisiert, stimmt die Operation von  $\Phi_n$  auf  $M$  mit derjenigen von  $\Phi'_n$  überein. Dann gilt aber  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{P}(M) = (n-1)!$  nach Satz 3.3.9.

Somit ist noch zu zeigen, dass  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{P}(M) < (n-1)!$  gilt, falls die Operation von  $A_n$  auf  $M$  nicht über  $\mathbb{K}S_n$  faktorisiert. In diesem Fall existieren  $t \in S_n$  und  $0 < i < n$ , so dass  $1 - A_{i,i+1}$  auf  $M_t$  durch Rechtsmultiplikation mit einem Skalar  $r \neq 0$  aus  $\mathbb{K}$  operiert. Zunächst soll nun gezeigt werden, dass  $t = e$  und  $i = 1$  angenommen werden kann.

Nach Formel (3.23) geht  $1 - A_{i,i+1}$  aus  $1 - A_{1,2}$  durch Konjugation mit einem invertierbaren Element hervor. Deshalb ist auch die Operation von  $1 - A_{1,2}$  auf  $M$  von Null verschieden. Somit kann  $i = 1$  angenommen werden. Ferner sei  $M'_s := M_{st}$  für jedes  $s \in S_n$  gesetzt. Hierdurch ist dann eine weitere  $S_n$ -Graduierung auf  $M$  definiert, bezüglich der  $M$  ein  $S_n$ -graduierter  $(A_n, \mathbb{K})$ -Bimodul ist. Dann operiert aber  $1 - A_{1,2}$  auf  $M'_e = M_t$  durch Rechtsmultiplikation mit  $r \neq 0$ . Deshalb kann die Graduierung auch gleich so gewählt werden, dass  $t = e$  gilt.

Sei nun  $v \neq 0$  aus  $M_e$ . Dann ist  $\Phi_n \cdot v$  nach Satz 3.3.5 rechtsprimitiv. Wegen  $(\Psi_n)_e = 1 - A_{1,2}$  gilt ferner

$$(\mathbb{S}_{1,n-1} \Phi_n \cdot v)_e = (\Psi_n \cdot v)_e = (1 - A_{1,2}) \cdot v = v \cdot r \neq 0.$$

Deshalb ist  $\Phi_n \cdot v$  nicht primitiv. Damit ist ein Element in  $M$  gefunden, das zwar rechtsprimitiv, aber nicht primitiv ist. Hieraus folgt die Behauptung.  $\square$

Um die bisherigen Resultate auf einen beliebigen  $\mathbb{K}B_n$ -Linksmodul  $M$  anwenden und Elemente aus  $\mathcal{P}(M)$  berechnen zu können, besteht das Problem, einen Untermo-

dul von  $M$  zu bestimmen, der sogar ein  $Q_n$ -Modul ist. Im Fall der Algebren  $\mathbb{k}B_{m,n}$  für  $m > 0$  ist dies aber ohne weiteres möglich. Damit lassen sich dann einige Aussagen über die Lie-Operaden  $\mathfrak{L}_m$  gewinnen. Diese Resultate sollen nun zusammengestellt werden.

Dazu sei zunächst kurz an die Definition von  $\mathfrak{L}_m$  erinnert. Die Grundkategorie ist in diesem Fall  $\mathcal{C} = \mathcal{YD}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}$ , wobei  $G$  eine endliche abelsche Gruppe vom Exponenten  $m \geq 1$  ist. Dann faktorisiert die Zopfung von  $\mathcal{C}$  über das endliche Zopfgruppensystem  $\mathcal{Z} = \mathcal{B}_m = (B_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$ . Die Komponenten der Lie-Operade  $\mathfrak{L}_m$  sind nun durch

$$\mathfrak{L}_m(n) := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0, \\ \mathcal{P}(\mathbb{k}B_{m,n}), & \text{falls } n > 0 \end{cases}$$

gegeben.

Die Gruppenalgebra  $\mathbb{k}B_{m,n}$  ist dabei isomorph zu einem verschränkten Produkt der Unteralgebra  $\mathbb{k}K_{m,n}$  mit der Gruppenalgebra  $\mathbb{k}S_n$ , wobei die Gruppe  $K_{m,n}$  zu einem direkten Produkt von  $\binom{n}{2}$  Kopien der zyklischen Gruppe  $\mathbb{Z}_m$  mit  $m$  Elementen isomorph ist. Aufgrund der Voraussetzungen an den Grundkörper ist dann  $\mathbb{k}K_{m,n}$  isomorph zu einem direkten Produkt von  $m^{\binom{n}{2}}$  Kopien des Grundkörpers  $\mathbb{k}$ . Diese Zerlegung entspricht einer vollständigen Familie von paarweise orthogonalen und unzerlegbaren Idempotenten der Algebra  $\mathbb{k}K_{m,n}$ . Wird mit  $\mu_m = \mu_m(\mathbb{k})$  die Gruppe der  $m$ -ten Einheitswurzeln von  $\mathbb{k}$  bezeichnet, so sind diese Idempotenten durch

$$E_{m,n}(\xi_{ij}) := E_{m,n}((\xi_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \xi_{ij}^{-k} A_{ij}^k$$

für Familien  $(\xi_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$  mit  $\xi_{ij} \in \mu_m$  definiert. Für diese Elemente gilt nun insbesondere  $A_{rs}E_{m,n}(\xi_{ij}) = \xi_{rs}E_{m,n}(\xi_{ij})$ . Falls alle  $\xi_{ij}$  gleich  $\xi$  sind, so wird auch  $E_{m,n}(\xi)$  für  $E_{m,n}(\xi_{ij})$  geschrieben.

Bei den  $E_{m,n}(\xi_{ij})$  handelt es sich zudem um eine vollständige Familie von paarweise orthogonalen Idempotenten der Algebra  $\mathbb{k}B_{m,n}$ . Wird hiermit  $M_{m,n}(\xi_{ij}) := \mathbb{k}B_{m,n}E_{m,n}(\xi_{ij})$  gesetzt, so ist

$$\mathbb{k}B_{m,n} = \bigoplus_{\substack{(\xi_{ij})_{1 \leq i < j \leq n} \\ \xi_{ij} \in \mu_m}} M_{m,n}(\xi_{ij})$$

eine Zerlegung von  $\mathbb{k}B_{m,n}$  als Linksmodul, woraus

$$\mathcal{P}(\mathbb{k}B_{m,n}) = \bigoplus_{\substack{(\xi_{ij})_{1 \leq i < j \leq n} \\ \xi_{ij} \in \mu_m}} \mathcal{P}(M_{m,n}(\xi_{ij}))$$

folgt. Somit genügt es, die  $\mathcal{P}(M_{m,n}(\xi_{ij}))$  zu bestimmen. Hierbei ist jeder der Moduln  $M_{m,n}(\xi_{ij})$  sogar  $S_n$ -graduiert und besitzt die Dimension  $n!$ .

Es seien noch

$$E_{m,n} := \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} D_{1,n}^k = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} (b_1 \cdots b_{n-1})^{kn}$$

und  $M_{m,n} := \mathbb{k}B_{m,n}E_{m,n}$  gesetzt. Dann ist  $E_{m,n}$  ein zentrales und idempotentes Element von  $\mathbb{k}B_{m,n}$ . Ferner ist  $M_{m,n}$  der Eigenraum der Linksoperation von  $D_{1,n}$  auf  $\mathbb{k}B_{m,n}$  zum Eigenwert 1. Hierbei handelt es sich um einen Bimodul. Da  $D_{1,n}$  auf  $M_{m,n}(\xi_{ij})$  durch Multiplikation mit dem Skalar  $\prod_{1 \leq i < j \leq n} \xi_{ij}$  operiert, stimmt  $M_{m,n}$  mit der Summe derjenigen Moduln  $M_{m,n}(\xi_{ij})$  überein, die

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \xi_{ij} = 1 \quad (3.25)$$

erfüllen. Ganz analog ist auf der Seite der idempotenten Elemente  $E_{m,n}$  gleich der Summe aller  $E_{m,n}(\xi_{ij})$ , die der Bedingung (3.25) genügen.

Schließlich werden zur expliziten Beschreibung bestimmter Elemente aus  $\mathfrak{L}_m(n)$  noch Elemente  $\Lambda_n, \Omega_n \in \mathbb{k}B_{0,n}$  benötigt. Für eine endliche Teilmenge  $I \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$  sei zunächst

$$A_I := \prod_{\substack{i,j \in I \\ i < j}} A_{ij}$$

gesetzt. Ist  $n$  die größte Zahl, die in  $I$  vorkommt, so kann  $A_I$  als Element von  $B_{0,k}$  für alle  $k \geq n$  aufgefasst werden. Insbesondere gilt dann  $D_{1,n} = A_{\{1,\dots,n\}}$  in  $B_{0,n}$ . Hiermit seien nun

$$\Lambda_n := \prod_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ 1 < |I| < n}} (1 - A_I) \quad \text{und} \quad \Omega_n := \prod_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ I \neq \{1,\dots,k\} \\ 1 < |I| < n}} (1 - A_I)$$

definiert. Dabei ist die Bedingung  $I \neq \{1, \dots, k\}$  beim zweiten Produkt so zu verstehen, dass dies für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt.

**Satz 3.4.13.** *Seien  $m > 0$  und  $n > 1$  natürliche Zahlen. Dann gelten:*

1. Der Raum  $\mathcal{P}(M_{m,n}(\xi_{ij}))$  ist genau dann nicht trivial, wenn die Bedingung (3.25) erfüllt ist. In diesem Fall ist  $(n-2)! \leq \dim_{\mathbb{k}} \mathcal{P}(M_{m,n}(\xi_{ij})) \leq (n-1)!$ .
2.  $\Phi_n \Omega_n \Upsilon_n \cdot M_{m,n} \subseteq \mathcal{P}(M_{m,n})$ .
3. Falls Bedingung (3.25) und

$$\prod_{\substack{i,j \in I \\ i < j}} \xi_{ij} \neq 1 \quad (3.26)$$

für alle Teilmengen  $I \subset \{1, \dots, n\}$  mit  $1 < |I| < n$  erfüllt sind, so gelten

$$\mathcal{P}(M_{m,n}(\xi_{ij})) = \Phi_n \Omega_n \Upsilon_n \cdot M_{m,n}(\xi_{ij})$$

und  $\dim_{\mathbb{k}} \mathcal{P}(M_{m,n}(\xi_{ij})) = (n-2)!$ .

*Beweis.* 1. Die Linksmultiplikation mit  $D_{1,n}$  auf dem Modul  $M_{m,n}(\xi_{ij})$  besitzt genau dann Eigenvektoren zum Eigenwert 1, wenn die Bedingung (3.25) gilt. Nach Korollar 3.2.2 kommen aber nur solche Elemente als nicht triviale Lie-Elemente in Frage. Dies zeigt, dass (3.25) notwendig ist. Umgekehrt kann  $M_{m,n}(\xi_{ij})$  als  $A_n$ -Modul aufgefasst werden, falls die Bedingung (3.25) erfüllt ist. Dann ergibt sich aber die behauptete Dimensionsaussage aus den Sätzen 3.4.11 und 3.4.12. Dies zeigt insbesondere, dass (3.25) für  $n > 2$  hinreichend ist. Im Fall  $n = 2$  besagt (3.25) schließlich, dass  $\xi_{1,2} = 1$  gilt. Dann kann aber  $M_{m,2}(\xi_{1,2})$  als Modul über  $\mathbb{k}S_2$  betrachtet werden, woraus  $\dim_{\mathbb{k}} \mathcal{P}(M_{m,2}(\xi_{1,2})) = 1$  nach Satz 3.4.12 folgt.

2. Da  $D_{1,n}$  auf  $M_{m,n}$  als Identität operiert, kann  $M_{m,n}$  als  $A_n$ -Modul verstanden werden. Somit genügt zu zeigen, dass  $\Phi_n \Omega_n \Upsilon_n \in \mathcal{P}(A_n)$  gilt. Hierzu wird zunächst die Algebra  $R_{n-1}^{-1} A_n$  betrachtet. Dies ist ein Quotient von  $Q_n$ . Daraus ergibt sich unmittelbar, dass Satz 3.4.8 auf  $R_{n-1}^{-1} A_n$ -Moduln übertragen werden kann, d.h., für jeden  $R_{n-1}^{-1} A_n$ -Linksmodul  $M$  gilt  $\mathcal{P}(M) = \Phi_n(\Theta_{n-1} \otimes e_1) \Upsilon_n \cdot M$ . In  $R_{n-1}^{-1} A_n$  ist  $\Lambda_n$  aber invertierbar und zentral. Ferner gilt  $(\Theta_{n-1} \otimes e_1) \Lambda_n = \Omega_n$ . Hieraus folgt

$$\mathcal{P}(M) = \Phi_n(\Theta_{n-1} \otimes e_1) \Upsilon_n \Lambda_n \cdot M = \Phi_n(\Theta_{n-1} \otimes e_1) \Lambda_n \Upsilon_n \cdot M = \Phi_n \Omega_n \Upsilon_n \cdot M.$$

Insbesondere gilt dann  $\Phi_n \Omega_n \Upsilon_n \in \mathcal{P}(R_{n-1}^{-1} A_n)$ . Aus den Vorbetrachtungen zu Satz 3.4.11 ergibt sich unmittelbar, dass  $A_n$  eine Unteralgebra von  $R_{n-1}^{-1} A_n$  ist. Das Element  $\Phi_n \Omega_n \Upsilon_n$  liegt in dieser Unteralgebra, weshalb  $\Phi_n \Omega_n \Upsilon_n \in \mathcal{P}(A_n)$  gilt.

3. Falls die Bedingungen (3.25) und (3.26) erfüllt sind, kann  $M_{m,n}(\xi_{ij})$  als Linksmodul sowohl über  $R_{n-1}^{-1} A_n$  als auch über  $Q_n$  aufgefasst werden. Dann gilt  $\mathcal{P}(M_{m,n}(\xi_{ij})) = \Phi_n \Omega_n \Upsilon_n \cdot M_{m,n}(\xi_{ij})$  nach dem Beweis des zweiten Punktes, und aus Korollar 3.4.10 ergibt sich die Dimensionsaussage.  $\square$

Wird mit  $E'_{m,n}$  die Summe aller  $E_{m,n}(\xi_{ij})$  bezeichnet, die den Bedingungen (3.25) und (3.26) genügen, so ist  $E'_{m,n}$  ein zentrales idempotentes Element der Algebra  $\mathbb{k}B_{m,n}$ . Für den Modul  $M'_{m,n} := \mathbb{k}B_{m,n} E'_{m,n}$  gilt dann  $\mathcal{P}(M'_{m,n}) = \Phi_n \Omega_n \Upsilon_n \cdot M'_{m,n}$  nach dem letzten Punkt des obigen Satzes. Da  $E'_{m,n}$  zentral ist, handelt es sich hierbei um einen Untermodul des Rechtsmoduls  $\mathcal{P}(\mathbb{k}B_{m,n})$ . Dieser Untermodul wird zum Beispiel von  $\Phi_n \Omega_n \Upsilon_n E'_{m,n}$  erzeugt. Ferner kann kein Element aus  $\mathcal{P}(M'_{m,n})$  via der Multiplikation der Lie-Operade aus kleineren Lie-Elementen gewonnen werden. Etwas lax ausgedrückt liegt dies daran, dass aufgrund von (3.26) für keine echte Teilmenge von Argumenten die Bedingung (3.25) erfüllt ist, die für die Existenz von nicht trivialen Lie-Elementen notwendig ist. Somit muss auf jeden Fall ein Erzeuger aus  $\mathcal{L}_m(n)$  gewählt werden, falls  $E'_{m,n}$  von Null verschieden ist. Dieser Erzeuger muss dabei so beschaffen sein, dass  $\Phi_n \Omega_n \Upsilon_n E'_{m,n}$  in dem hiervon erzeugten Rechtsmodul enthalten ist.

Für die Moduln  $M_{m,n}(\xi_{ij})$ , die (3.25), aber nicht (3.26) erfüllen, können von Null verschiedene Lie-Elemente vermöge der Multiplikation der Lie-Operade aus kleineren Lie-Elementen gewonnen werden. Allerdings wird in Bemerkung 4.0.3 ein Beispiel dafür angegeben, dass nicht alle Lie-Elemente von  $M_{m,n}(\xi_{ij})$  auf diese Weise produziert werden können.

**Bemerkung 3.4.14.** Die beiden Elemente  $\Phi_2\Omega_2\Upsilon_2E'_{m,2} = \Phi_2E'_{m,2} = \Phi_2E_{m,2}$  und  $\Phi_3\Omega_3\Upsilon_3E'_{m,3}$  generieren alle 2er- und 3er-Verknüpfungen der Lie-Operade  $\mathfrak{L}_m$ . Für  $n = 2$  ist die Bedingung (3.26) leer und damit immer erfüllt. Somit werden durch  $\Phi_2E'_{m,2}$  alle Elemente aus  $\mathfrak{L}_m(2)$  produziert. Ferner ist (3.25) nur bei der Wahl  $\xi_{1,2} = 1$  erfüllt. Somit ist  $\mathfrak{L}_m(2)$  sogar immer eindimensional.

Gilt im Fall  $n = 3$  die Bedingung (3.25), so besitzt  $\mathcal{P}(M_{m,3}(\xi_{ij}))$  die Dimension eins oder zwei. Nach Satz 3.4.12 wird die Dimension 2 genau dann realisiert, wenn die Linksoperation auf  $M_{m,3}(\xi_{ij})$  über  $\mathbb{k}S_3$  faktorisiert, was genau für die Wahl  $\xi_{ij} = 1$  für  $1 \leq i < j \leq 3$  der Fall ist. Dies entspricht aber der klassischen Situation. Deshalb können diese Lie-Elemente aus den Elementen von  $\mathfrak{L}_m(2)$  gewonnen werden. Ist ansonsten die Bedingung (3.26) nicht erfüllt, so kann mindestens ein eindimensionaler Unterraum von  $\mathcal{P}(M_{m,3}(\xi_{ij}))$  aus den Elementen von  $\mathfrak{L}_m(2)$  gewonnen werden. Dieser Unterraum muss dann aber aus Dimensionsgründen schon der ganze Raum sein. Schließlich liefert  $\Phi_3\Omega_3\Upsilon_3E'_{m,3}$  alle Elemente aus  $\mathcal{P}(M_{m,3}(\xi_{ij}))$ , falls sowohl (3.25) als auch (3.26) gelten.

## 3.5 Relationen

Bei der Beschreibung einer Operade durch Erzeuger  $V = (V_n)$  und Relationen  $R = (R_n)$  kommt den Relationen die entscheidende Bedeutung zu. Von den Erzeugern ist fast nur interessant, welche Mächtigkeiten die Mengen  $V_n$  besitzen. Bei dem Versuch, die Lie-Operade durch Erzeuger und Relationen zu beschreiben, sind aber auch die Erzeuger wichtig. Gründe hierfür sind:

1. Für die konkret vorgegebene Lie-Operade  $\mathfrak{L}_m$  soll eine Beschreibung durch Erzeuger und Relationen gefunden werden. Hierzu sind Erzeuger von  $\mathfrak{L}_m$  zu finden sowie alle Relationen zu bestimmen, die diese Elemente erfüllen. Somit kommt den konkret gewählten Erzeugern zumindest während des Berechnungsprozesses eine zentrale Rolle zu.
2. Es besteht nicht nur ein Interesse daran, Erzeuger und Relationen für die Lie-Operade zu finden. Genauso wichtig ist der Morphismus von der Lie-Operade in die assoziative Operade, der den Funktor  $(\ )^- : \mathbf{Alg} \rightarrow \mathbf{Lie}$  induziert. Dieser Morphismus von Operaden ist dadurch festgelegt, dass die abstrakten Erzeuger auf die zugehörigen konkreten Erzeuger abgebildet werden, die zur Berechnung der Relationen gewählt worden sind und jetzt als Elemente der assoziativen Operade aufgefasst werden.

Insbesondere lassen sich nur unvollständige Resultate über die Relationen erzielen, solange keine Klarheit über die Erzeuger der Lie-Operade  $\mathfrak{L}_m$  besteht. Zudem hängen die Relationen entscheidend von der Wahl der Erzeuger ab.

Hier sollen nur einige wenige Relationen angegeben werden, die zwischen den vorher ermittelten Lie-Elementen bestehen. Somit handelt es sich hierbei nur um einen ersten Einstieg in die Problematik, die Operade  $\mathfrak{L}_m$  durch Erzeuger und Relationen zu beschreiben.

Die auftretenden Relationen können zwei unterschiedlichen Klassen zugeordnet werden. Zum einen erzeugt jedes Element  $v$  aus  $\mathcal{L}_m(n)$  einen  $\mathbb{k}B_{m,n}$ -Rechtsuntermodul. Die Struktur dieses Untermoduls wird durch den Rechtsannullator

$$\text{Ann}_{\mathbb{k}B_{m,n}}^r(v) = \{\sigma \in \mathbb{k}B_{m,n} \mid v \cdot \sigma = 0\}$$

von  $v$  in  $\mathbb{k}B_{m,n}$  beschrieben. Dieser Annullator ist ein Untermodul der rechtsregulären Darstellung der halbeinfachen Algebra  $\mathbb{k}B_{m,n}$ . Als solcher wird er von einem Element  $\sigma_v$  erzeugt. Somit wird die Struktur des von  $v$  erzeugten Moduls durch die Relation  $v \cdot \sigma_v = 0$  charakterisiert. Natürlich ist es auch denkbar, mehrere Relationen von dieser Art einzuführen. Dies könnte dann sinnvoll sein, wenn kein einzelner Erzeuger des Annullators bekannt ist oder aber dieser Erzeuger zu kompliziert ist. In der klassischen Situation ist das Antisymmetrieaxiom bei der Definition von Lie-Algebren von diesem Typ.

Als zweite Möglichkeit treten Relationen auf, bei denen die Operadenmultiplikation vorkommt. Bei den klassischen Lie-Algebren ist das bei der Jacobi-Identität der Fall.

Zunächst sollen nun Relationen vom ersten Typ angegeben werden. Genauer sollen für  $v = \Phi_n \Omega_n \Upsilon_n E_{m,n}$  bzw.  $v = \Phi_n \Omega_n \Upsilon_n E'_{m,n}$  Elemente aus  $\text{Ann}_{\mathbb{k}B_{m,n}}^r(v)$  ermittelt werden.

**Lemma 3.5.1.** *Sei  $n > 1$ . Dann gilt  $\Phi_n \Omega_n \Upsilon_n S_{1,n-1} = 0$  in  $A_n$ .*

*Beweis.* Nach Lemma 3.4.4 und Satz 3.4.5 gilt in  $R_{n-1}^{-1} \mathbb{k}B_n$

$$\begin{aligned} & \Phi_n(\Theta_{n-1} \otimes e_1) \Upsilon_n S_{1,n-1} \\ &= (e_n - \tau_{n-1,1})(\Phi_{n-1} \Theta_{n-1} \Upsilon_{n-1} \otimes e_1) \sum_{k=0}^{n-2} (b_1 \tau_{n-1,1})^k S_{1,n-1} \\ &= (e_n - \tau_{n-1,1})(\Phi_{n-1} \Theta_{n-1} \Upsilon_{n-1} S_{1,n-2} \otimes e_1) \sum_{k=0}^{n-1} \tau_{n-1,1}^k \\ &= (e_n - \tau_{n-1,1}) \sum_{k=0}^{n-1} \tau_{n-1,1}^k = e_n - D_{1,n}, \end{aligned}$$

woraus  $\Phi_n(\Theta_{n-1} \otimes e_1) \Upsilon_n S_{1,n-1} = 0$  in  $R_{n-1}^{-1} A_n$  folgt. Wird diese letzte Gleichung mit dem zentralen Element  $\Lambda_n$  multipliziert, so ergibt sich  $\Phi_n \Omega_n \Upsilon_n S_{1,n-1} = 0$ . Diese Gleichung ist dann auch in der Unteralgebra  $A_n$  von  $R_{n-1}^{-1} A_n$  gültig.  $\square$

**Lemma 3.5.2.** *Sei  $n > 1$ , und sei  $M$  ein  $R_{n-1}^{-1} A_n$ -Linksmodul. Dann gilt*

$$\text{Ann}_M^r(\Phi_n \Omega_n \Upsilon_n) = S_{1,n-1} \cdot M.$$

*Beweis.* Dass  $S_{1,n-1} \cdot M$  in dem Annullator von  $\Phi_n \Omega_n \Upsilon_n$  in  $M$  enthalten ist, ergibt sich aus dem vorstehenden Lemma. Sei nun umgekehrt  $u \in \text{Ann}_M^r(\Phi_n \Omega_n \Upsilon_n)$ , d.h.,



es ist  $u \in M$  mit  $\Phi_n \Omega_n \Upsilon_n \cdot u = 0$ . Multiplikation dieser Gleichung von links mit dem zentralen Element  $\Lambda_n^{-1}$  liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi_n (\Theta_{n-1} \otimes e_1) \Upsilon_n \cdot u \\ &= (e_n - \tau_{n-1,1}) (\Phi_{n-1} \Theta_{n-1} \Upsilon_{n-1} \otimes e_1) \sum_{k=0}^{n-2} (b_1 \tau_{n-1,1})^k \cdot u. \end{aligned}$$

Hierbei ist  $\Phi_{n-1} \Theta_{n-1} \Upsilon_{n-1} \otimes e_1$  in  $R_{n-1}^{-1} A_n$  invertierbar, und das Inverse ist nach Satz 3.4.5 durch  $S_{1,n-2} \otimes e_1$  gegeben. Ferner gilt

$$\text{Ann}_M^r(e_n - \tau_{n-1,1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \tau_{n-1,1}^k \cdot M.$$

Dies ergibt sich folgendermaßen. Da  $\tau_{n-1,1}^n = 1$  in  $R_{n-1}^{-1} A_n$  gilt, kann  $M$  in Eigenräume des durch  $\tau_{n-1,1}$  gegebenen Operators zerlegt werden. Dann stimmt der obige Annulator mit dem Eigenraum zum Eigenwert 1 überein, und durch Multiplikation mit  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tau_{n-1,1}^k$  ist die Projektion auf diesen Eigenraum gegeben. Deshalb besitzt der Annulator die angegebene Darstellung.

Insgesamt existiert dann ein  $v \in M$  mit

$$\sum_{k=0}^{n-2} (b_1 \tau_{n-1,1})^k \cdot u = (S_{1,n-2} \otimes e_1) \sum_{k=0}^{n-1} \tau_{n-1,1}^k \cdot v = \sum_{k=0}^{n-2} (b_1 \tau_{n-1,1})^k S_{1,n-1} \cdot v.$$

Hierbei wurde bei der letzten Gleichung Lemma 3.4.4 verwendet.

Schließlich kann  $M$  in die Eigenräume des Operators  $b_1 \tau_{n-1,1}$  zerlegt werden, da  $(b_1 \tau_{n-1,1})^{n-1} = 1$  in  $R_{n-1}^{-1} A_n$  gilt. Hieraus ergibt sich leicht die Identität

$$\text{Ann}_M^r \left( \sum_{k=0}^{n-2} (b_1 \tau_{n-1,1})^k \right) = (e_n - b_1 \tau_{n-1,1}) \cdot M.$$

Da  $u - S_{1,n-1} \cdot v$  in diesem Annulator enthalten ist, existiert somit ein  $w \in M$  mit  $u = S_{1,n-1} \cdot v + (e_n - b_1 \tau_{n-1,1}) \cdot w$ . Wegen Lemma 3.4.1 gilt zudem  $e_n - b_1 \tau_{n-1,1} = S_{1,n-1} (e_n - \tau_{n-1,1}) (S_{1,n-2}^{-1} \otimes e_1)$  in  $R_{n-1}^{-1} A_n$ , woraus insgesamt  $u \in S_{1,n-1} \cdot M$  folgt.  $\square$

**Satz 3.5.3.** *Seien  $m > 0$  und  $n > 1$  natürliche Zahlen.*

1. In  $\mathbb{k}B_{m,n}$  gilt  $\Phi_n \Omega_n \Upsilon_n E_{m,n} S_{1,n-1} = 0$ .
2. Der Rechtsannulator  $\text{Ann}_{\mathbb{k}B_{m,n}}^r(\Phi_n \Omega_n \Upsilon_n E'_{m,n})$  wird als  $\mathbb{k}B_{m,n}$ -Rechtsmodul von  $S_{1,n-1}$  und  $1 - E'_{m,n}$  erzeugt.

*Beweis.* 1. Durch  $b_i \mapsto b_i E_{m,n}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  ist ein Morphismus  $A_n \rightarrow \mathbb{k}B_{m,n} \cdot E_{m,n}$  von  $\mathbb{k}$ -Algebren definiert. Unter diesem Morphismus geht die Identität aus Lemma 3.5.1 in die behauptete Gleichung über.

2. Da  $E'_{m,n}$  ein idempotentes Element ist, liegt  $1 - E'_{m,n}$  in dem Annulator  $\text{Ann}_{\mathbb{k}B_{m,n}}^r(\Phi_n \Omega_n \Upsilon_n E'_{m,n})$ . Ferner ist  $E'_{m,n}$  zentral und erfüllt  $E'_{m,n} = E_{m,n} E'_{m,n}$ . Deshalb ist nach dem ersten Punkt auch  $S_{1,n-1}$  in diesem Annulator enthalten.

Sei nun umgekehrt  $a \in \text{Ann}_{\mathbb{k}B_{m,n}}^r(\Phi_n \Omega_n \Upsilon_n E'_{m,n})$ . Wegen  $a = E'_{m,n} a + (1 - E'_{m,n}) a$  genügt zu zeigen, dass  $E'_{m,n} a \in S_{1,n-1} \cdot \mathbb{k}B_{m,n}$  gilt. Durch  $b_i \mapsto b_i E'_{m,n}$  für  $i = 1, \dots, n-1$  ist ein Morphismus  $R_{n-1}^{-1} A_n \rightarrow \mathbb{k}B_{m,n} \cdot E'_{m,n}$  von  $\mathbb{k}$ -Algebren festgelegt. Via dieses Morphismus ist  $\mathbb{k}B_{m,n} \cdot E'_{m,n}$  ein  $R_{n-1}^{-1} A_n$ -Linksmodul. Bezüglich dieser Modulstruktur ist dann  $E'_{m,n} a$  in  $\text{Ann}_{\mathbb{k}B_{m,n} \cdot E'_{m,n}}^r(\Phi_n \Omega_n \Upsilon_n)$  enthalten. Damit ergibt sich die Behauptung aus dem vorherigen Lemma.  $\square$

Im Fall  $n = 2$  wird  $\text{Ann}_{\mathbb{k}B_{m,2}}^r(\Phi_2 \Omega_2 \Upsilon_2 E'_{m,2}) = \text{Ann}_{\mathbb{k}B_{m,2}}^r(\Phi_2 E_{m,2})$  sogar von  $S_{1,1} = e_2 + \tau_{1,1} = e_2 + b_1$  allein erzeugt. Dazu ist  $1 - E'_{m,2} \in S_{1,1} \cdot \mathbb{k}B_{m,2}$  zu zeigen. Für  $\xi \in \mu_m$  gilt nun  $S_{1,1}(e_2 - b_1)E_{m,2}(\xi) = (e_2 - A_{1,2})E_{m,2}(\xi) = (1 - \xi)E_{m,2}(\xi)$ , woraus  $E_{m,2}(\xi) \in S_{1,1} \cdot \mathbb{k}B_{m,n}$  für alle  $\xi \in \mu_m \setminus \{1\}$  folgt. Wegen

$$1 - E'_{m,2} = 1 - E_{m,2}(1) = \sum_{\xi \in \mu_m \setminus \{1\}} E_{m,2}(\xi)$$

ergibt sich dann die Behauptung.

Somit ist die Modulstruktur des von  $\Phi_2 E_{m,2}$  erzeugten Rechtsmoduls durch  $(\Phi_2 E_{m,2}) \cdot S_{1,1} = 0$  bzw.  $(\Phi_2 E_{m,2}) \cdot \tau_{1,1} = -\Phi_2 E_{m,2}$  charakterisiert. Für eine Lie-Algebra  $L$  ist dies gleichbedeutend damit, dass die durch  $\Phi_2 E_{m,2}$  definierte Verknüpfung  $L \otimes L \rightarrow L$  wie im klassischen Fall antisymmetrisch ist.

Als Beispiel für Relationen, bei denen die Operadenmultiplikation auftritt, soll jetzt noch die zweite Jacobi-Identität aus [Par98b] in den vorliegenden Formalismus übertragen und verallgemeinert werden. Hierzu werden zunächst einige Hilfsaussagen bewiesen.

**Lemma 3.5.4.** *Sei  $n > 1$ , und sei  $N_n$  die von  $A_{1,j}$ ,  $j = 2, \dots, n$  erzeugte Untergruppe von  $B_n$ . Dann ist  $N_n$  ein Normalteiler von  $B_n|_1^1 = \{b \in B_n \mid \bar{b}(1) = 1\}$ .*

*Beweis.*  $B_n|_1^1$  wird als Gruppe von  $b_2, \dots, b_{n-1}$  sowie  $A_{1,2}, \dots, A_{1,n}$  erzeugt. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Beschreibung von  $B_n$  als verschränktes Produkt der reinen Zopfgruppe  $P_n$  mit der symmetrischen Gruppe  $S_n$ . Somit genügt zu zeigen, dass  $b_r A_{1,j} b_r^{-1}$  und  $b_r^{-1} A_{1,j} b_r$  für  $r = 2, \dots, n-1$  und  $j = 2, \dots, n$  in  $N_n$  liegen. Nach Lemma 2.2.3 und Theorem 2.2.4 gilt

$$b_r A_{1,j} b_r^{-1} = \begin{cases} A_{1,j}, & \text{falls } r < j-1 \text{ oder } j < r, \\ A_{1,j+1}, & \text{falls } r = j, \\ A_{1,j}^{-1} A_{1,j-1} A_{1,j}, & \text{falls } r = j-1, \end{cases}$$

womit  $b_r A_{1,j} b_r^{-1} \in N_n$  gezeigt ist. Ferner folgt aus dieser Formel  $A_{1,j} \in b_r N_n b_r^{-1}$  bzw.  $b_r^{-1} A_{1,j} b_r \in N_n$ . Nicht ganz so offensichtlich ist dabei höchstens der Fall  $r = j$ . Dieser Fall ergibt sich aus  $b_r A_{1,r} A_{1,r+1} A_{1,r}^{-1} b_r^{-1} = A_{1,r+1} (A_{1,r+1}^{-1} A_{1,r} A_{1,r+1}) A_{1,r+1}^{-1} = A_{1,r}$ . Damit ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

**Lemma 3.5.5.** *Sei  $k > 1$ . Dann gilt  $\varphi_2^{\mathcal{B}}(A_{1,k})(2, 1, \dots, 1) = A_{1,k+1}A_{2,k+1}$  in  $B_{k+1}$ .*

*Beweis.* Für  $k = 2$  gilt

$$\begin{aligned}\varphi_2^{\mathcal{B}}(A_{1,2})(2, 1) &= \varphi_2^{\mathcal{B}}(b_1)(1, 2)\varphi_2^{\mathcal{B}}(b_1)(2, 1) = \tau_{1,2}^{\mathcal{B}}\tau_{2,1}^{\mathcal{B}} = (b_2b_1)(b_1b_2) \\ &= (b_2b_1^2b_2^{-1})b_2^2 = A_{1,3}A_{2,3}.\end{aligned}$$

Hiermit kann der allgemeine Fall bewiesen werden:

$$\begin{aligned}\varphi_2^{\mathcal{B}}(A_{1,k})(2, 1, \dots, 1) &= \varphi_2^{\mathcal{B}}(b_{k-1} \cdots b_2 A_{1,2} b_2^{-1} \cdots b_{k-1}^{-1})(2, 1, \dots, 1) \\ &= (\varphi_2^{\mathcal{B}}(e_1)(2) \otimes \varphi_2^{\mathcal{B}}(b_{k-2} \cdots b_1)(1, \dots, 1)) (\varphi_2^{\mathcal{B}}(A_{1,2})(2, 1) \otimes \varphi_2^{\mathcal{B}}(e_{k-2})(1, \dots, 1)) \\ &\quad (\varphi_2^{\mathcal{B}}(e_1)(2) \otimes \varphi_2^{\mathcal{B}}(b_1^{-1} \cdots b_{k-2}^{-1})(1, \dots, 1)) \\ &= (e_2 \otimes b_{k-2} \cdots b_1)(A_{1,3}A_{2,3} \otimes e_{k-2})(e_2 \otimes b_1^{-1} \cdots b_{k-2}^{-1}) \\ &= b_k \cdots b_3 A_{1,3} A_{2,3} b_3^{-1} \cdots b_k^{-1} = A_{1,k+1}A_{2,k+1}.\end{aligned}$$

Dabei wurde insbesondere bei der zweiten Umformung davon Gebrauch gemacht, dass  $\varphi^{\mathcal{B}}$  ein Tensorfunktors ist.  $\square$

**Satz 3.5.6.** *Für  $n > 0$  bezeichne  $M_{n+1}$  den Quotientenmodul der linksregulären Darstellung von  $\mathbb{K}B_{n+1}$  nach dem von  $e_{n+1} - A_{1,j}$ ,  $j = 2, \dots, n+1$  erzeugten Untermodul. Dann ist  $M_{n+1}$  ein  $S_{n+1}$ -graduierter  $\mathbb{K}B_{n+1}$ -Linksmodul. In diesem Modul gilt für jedes Element  $b \in B_n$*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} (\varphi_2^{\mathcal{B}}(b)(1, \dots, 1, 2, 1, \dots, 1)(e_{n+1} - e_k \otimes \tau_{1,1} \otimes e_{n-k-1})(\tau_{1,k} \otimes e_{n-k})) \Big|_1^1 \\ = ((e_{n+1} - \tau_{1,n})(e_1 \otimes b)) \Big|_1^1.\end{aligned}$$

*Hierbei steht die zwei in  $\varphi_2^{\mathcal{B}}(b)(1, \dots, 2, \dots, 1)$  an der  $(k+1)$ -ten Stelle.*

*Beweis.* Auf den Modul  $M_{n+1}$  überträgt sich die  $S_{n+1}$ -Graduierung von  $\mathbb{K}B_{n+1}$ , da ein Untermodul heraus faktorisiert wird, der von homogenen Elementen bezüglich der Graduierung erzeugt wird. Somit ist noch die Identität zu zeigen.

Die rechte Seite dieser Gleichung ist  $e_1 \otimes b$ . Zur Ermittlung des Wertes der linken Seite werden die unterliegenden Permutationen der einzelnen Summanden betrachtet. Die zu  $\tau_{1,k} \otimes e_{n-k}$  und  $(e_k \otimes \tau_{1,1} \otimes e_{n-k-1})(\tau_{1,k} \otimes e_{n-k})$  gehörigen Permutationen bilden 1 auf  $k+1$  bzw.  $k+2$  ab. Ferner werden  $k+1$  und  $k+2$  durch die unterliegende Permutation von  $\varphi_2^{\mathcal{B}}(b)(1, \dots, 2, \dots, 1)$  auf  $\bar{b}(k+1)$  bzw.  $\bar{b}(k+1)+1$  abgebildet. Mit  $r := \bar{b}^{-1}(1)$  liefert dann nur der Summand zum Index  $k = r - 1$  einen Beitrag zur linken Seite. Somit ist die linke Seite durch  $\varphi_2^{\mathcal{B}}(b)(1, \dots, 2, \dots, 1)(\tau_{1,r-1} \otimes e_{n-r+1})$  gegeben. Damit ist noch zu zeigen, dass dieses Element in  $M_{n+1}$  mit  $e_1 \otimes b$  übereinstimmt.

Dazu sei  $c := b(\tau_{1,r-1} \otimes e_{n-r})$  gesetzt. Dann ist  $c$  in  $B_n|_1^1$  enthalten. Deshalb existieren nach Lemma 3.5.4  $c_1 \in N_n$  und  $c_2 \in B_{n-1}$  mit  $c = (e_1 \otimes c_2)c_1$ . Das

Element  $c_1$  kann als  $c_1 = A_{1,j_1}^{\epsilon_1} \cdots A_{1,j_m}^{\epsilon_m}$  mit  $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$  und  $1 < j_i \leq n$  geschrieben werden. Aufgrund der beiden vorstehenden Lemmata gibt es nun ein  $A \in N_{n+1}$  mit

$$\begin{aligned} \varphi_2^{\mathcal{B}}(c_1)(2, 1, \dots, 1) &= \varphi_2^{\mathcal{B}}(A_{1,j_1}^{\epsilon_1})(2, 1, \dots, 1) \cdots \varphi_2^{\mathcal{B}}(A_{1,j_m}^{\epsilon_m})(2, 1, \dots, 1) \\ &= (A_{1,j_1+1} A_{2,j_1+1})^{\epsilon_1} \cdots (A_{1,j_m+1} A_{2,j_m+1})^{\epsilon_m} \\ &= A_{2,j_1+1}^{\epsilon_1} \cdots A_{2,j_m+1}^{\epsilon_m} A = (e_1 \otimes c_1)A. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt dann

$$\begin{aligned} &\varphi_2^{\mathcal{B}}(b)(1, \dots, 2, \dots, 1)(\tau_{1,r-1} \otimes e_{n-r+1}) \\ &= \varphi_2^{\mathcal{B}}((e_1 \otimes c_2)c_1(\tau_{1,r-1}^{-1} \otimes e_{n-r}))(1, \dots, 2, \dots, 1)(\tau_{1,r-1} \otimes e_{n-r+1}) \\ &= \varphi_2^{\mathcal{B}}(e_1 \otimes c_2)(2, 1, \dots, 1)\varphi_2^{\mathcal{B}}(c_1)(2, 1, \dots, 1) \\ &\quad \varphi_2^{\mathcal{B}}(\tau_{1,r-1}^{-1} \otimes e_{n-r})(1, \dots, 2, \dots, 1)(\tau_{1,r-1} \otimes e_{n-r+1}) \\ &= (e_2 \otimes c_2)(e_1 \otimes c_1)A(\tau_{2,r-1}^{-1} \otimes e_{n-r})(\tau_{1,r-1} \otimes e_{n-r+1}) \\ &= (e_1 \otimes c)A(e_1 \otimes \tau_{1,r-1}^{-1} \otimes e_{n-r})(\tau_{1,r-1}^{-1} \otimes e_{n-r+1})(\tau_{1,r-1} \otimes e_{n-r+1}) \\ &= (e_1 \otimes c)A(e_1 \otimes \tau_{1,r-1}^{-1} \otimes e_{n-r}) \\ &= (e_1 \otimes c)(e_1 \otimes \tau_{1,r-1}^{-1} \otimes e_{n-r})A' = (e_1 \otimes b)A' \end{aligned}$$

für ein geeignetes Element  $A' \in N_{n+1}$ . In  $M_{n+1}$  stimmt dieses Element aber mit  $e_1 \otimes b$  überein.  $\square$

Für natürliche Zahlen  $m > 0$  und  $n > 1$  sei  $p_{m,n} \in \mathbb{k}B_{m,n}$  definiert durch

$$p_{m,n} := \prod_{j=2}^n \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} A_{1,j}^k.$$

Dann ist  $p_{m,n}$  ein Idempotent, für das  $A_{1,j}p_{m,n} = p_{m,n}$  für  $j = 2, \dots, n$  gilt.

**Satz 3.5.7.** *Seien  $m, n > 0$  natürliche Zahlen. Es sei  $D := \Phi_2 E_{m,2} \in \mathfrak{L}_m(2)$  gesetzt. Dann gilt für jedes  $L \in \mathfrak{L}_m(n)$*

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n-1} \mu_{(n;1,\dots,1,2,1,\dots,1)}^{\mathfrak{L}_m} \left( L \otimes e_1^{\otimes k} \otimes D \otimes e_1^{\otimes(n-k-1)} \right) (\tau_{1,k} \otimes e_{n-k}) p_{m,n+1} \\ &= \mu_{(2;1,n)}^{\mathfrak{L}_m} (D \otimes e_1 \otimes L) p_{m,n+1}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Das Element  $D \in \mathfrak{L}_m(2)$  ist durch

$$D = \frac{1}{m} \Phi_2 \sum_{r=0}^{m-1} A_{1,2}^r = \frac{1}{m} (e_2 - \tau_{1,1}) \sum_{r=0}^{m-1} A_{1,2}^r$$

gegeben, und  $L \in \mathfrak{L}_m(n) \subseteq \mathbb{k}B_{m,n}$  kann als

$$L = \sum_{\sigma \in B_{m,n}} c_\sigma \sigma$$

mit  $c_\sigma \in \mathbb{k}$  geschrieben werden. In  $\mathbb{k}B_{m,n+1}$  gilt nun für  $k = 0, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} A_{k+1,k+2}^r (\tau_{1,k} \otimes e_{n-k}) p_{m,n+1} \\ &= (\tau_{1,k} \otimes e_{n-k}) \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} A_{1,k+2}^r p_{m,n+1} = (\tau_{1,k} \otimes e_{n-k}) p_{m,n+1}. \end{aligned}$$

Zusammen mit dem ersten Äquivarianzaxiom der Operadenmultiplikation folgt hieraus für einen typischen Summanden der linken Seite der behaupteten Identität

$$\begin{aligned} & \mu_{(n;1,\dots,1,2,1,\dots,1)}^{\mathcal{L}_m} \left( L \otimes e_1^{\otimes k} \otimes D \otimes e_1^{\otimes(n-k-1)} \right) (\tau_{1,k} \otimes e_{n-k}) p_{m,n+1} \\ &= \mu_{(n;1,\dots,1,2,1,\dots,1)}^{\mathcal{L}_m} \left( L \otimes e_1^{\otimes k} \otimes \Phi_2 \otimes e_1^{\otimes(n-k-1)} \right) \\ & \quad \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} A_{k+1,k+2}^r (\tau_{1,k} \otimes e_{n-k}) p_{m,n+1} \\ &= \mu_{(n;1,\dots,1,2,1,\dots,1)}^{\mathcal{L}_m} \left( L \otimes e_1^{\otimes k} \otimes \Phi_2 \otimes e_1^{\otimes(n-k-1)} \right) (\tau_{1,k} \otimes e_{n-k}) p_{m,n+1} \\ &= \sum_{\sigma \in B_{m,n}} c_\sigma \overline{\varphi}_2^{\mathcal{B}_m}(\sigma)(1, \dots, 2, \dots, 1) (e_k \otimes \Phi_2 \otimes e_{n-k-1}) (\tau_{1,k} \otimes e_{n-k}) p_{m,n+1}. \end{aligned}$$

Auch die rechte Seite der obigen Gleichung wird zunächst umgeformt. Dafür wird

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_2^{\mathcal{B}_m}(A_{1,2})(1, n) &= \overline{\varphi}_2^{\mathcal{B}_m}(b_1)(n, 1) \overline{\varphi}_2^{\mathcal{B}_m}(b_1)(1, n) = \tau_{n,1} \tau_{1,n} \\ &= b_1 \cdots b_n b_n \cdots b_1 = b_1 \cdots b_{n-1} b_{n-1} \cdots b_1 A_{1,n+1} \\ &= \dots = A_{1,2} A_{1,3} \cdots A_{1,n+1} \end{aligned}$$

benötigt. Aufgrund von Lemma 3.5.4 und der Definition von  $p_{m,n+1}$  gilt dann

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_2^{\mathcal{B}_m}(A_{1,2}^r)(1, n) (e_1 \otimes L) p_{m,n+1} &= (A_{1,2} \cdots A_{1,n+1})^r (e_1 \otimes L) p_{m,n+1} \\ &= (e_1 \otimes L) p_{m,n+1}. \end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich für die rechte Seite der obigen Gleichung

$$\begin{aligned} & \mu_{(2;1,n)}^{\mathcal{L}_m} (D \otimes e_1 \otimes L) p_{m,n+1} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \left( \overline{\varphi}_2^{\mathcal{B}_m}(e_2)(1, n) - \overline{\varphi}_2^{\mathcal{B}_m}(\tau_{1,1})(1, n) \right) \overline{\varphi}_2^{\mathcal{B}_m}(A_{1,2}^r)(1, n) (e_1 \otimes L) p_{m,n+1} \\ &= (e_{n+1} - \tau_{1,n}) (e_1 \otimes L) p_{m,n+1} = \sum_{\sigma \in B_{m,n}} c_\sigma (e_{n+1} - \tau_{1,n}) (e_1 \otimes \sigma) p_{m,n+1}. \end{aligned}$$

Nach diesen Vorbereitungen kann nun die eigentliche Behauptung bewiesen werden. Da es sich hierbei um eine Identität von Lie-Elementen in dem  $S_{n+1}$ -graduierten  $\mathbb{k}B_{n+1}$ -Linksmodul  $\mathbb{k}B_{m,n+1}$  handelt, genügt nach Lemma 3.3.4 zu zeigen, dass die in

$\mathbb{k}B_{m,n+1}|_1^1$  gelegenen Komponenten der beiden Seite gleich sind. Durch  $b \mapsto bp_{m,n+1}$  ist nun ein Homomorphismus  $\mathbb{k}B_{n+1} \rightarrow \mathbb{k}B_{m,n+1}$  von  $S_{n+1}$ -graduierten  $\mathbb{k}B_{n+1}$ -Linksmoduln definiert. Da die Elemente  $1 - A_{1,j}$ ,  $j = 2, \dots, n+1$  im Kern dieses Morphismus liegen, faktorisiert der Morphismus über die Quotientenabbildung  $\mathbb{k}B_{n+1} \rightarrow M_{n+1}$ . Hieraus folgt, dass die Gleichung in  $M_{n+1}$  aus dem vorherigen Satz eine entsprechende Gleichung in  $\mathbb{k}B_{m,n+1}$  induziert. Somit gilt für jedes  $\sigma \in B_{m,n+1}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \overline{\varphi}_2^{\mathcal{B}^m}(\sigma)(1, \dots, 2, \dots, 1)(e_k \otimes \Phi_2 \otimes e_{n-k-1})(\tau_{1,k} \otimes e_{n-k})p_{m,n+1} \right) \Big|_1^1 \\ = \left( (e_{n+1} - \tau_{1,n})(e_1 \otimes \sigma)p_{m,n+1} \right) \Big|_1^1. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung unmittelbar.  $\square$

**Bemerkung 3.5.8.** Sei  $G$  eine endliche abelsche Gruppe vom Exponenten  $m$  und  $L$  eine Lie-Algebra in  $\mathcal{YD}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}$ . Dann definiert jedes  $\sigma \in \mathfrak{L}_m(n)$  eine Verknüpfung  $[-]_\sigma : L^{\otimes n} \rightarrow L$ . Der Yetter-Drinfeld-Untermodul von  $L$  mit trivialer Modul- und Komodulstruktur sei mit  $L_0$  bezeichnet. Auf diesem Untermodul induziert  $[-]_{\Phi_2 E_{m,2}} : L \otimes L \rightarrow L$  durch Einschränkung eine Verknüpfung  $[-] : L_0 \otimes L_0 \rightarrow L_0$ . Mit dieser Abbildung ist  $L_0$  eine gewöhnliche Lie-Algebra. Ferner definiert  $[-]_{\Phi_2 E_{m,2}}$  einen Morphismus  $L_0 \otimes L \rightarrow L$ . Durch diesen wird  $L$  zu einem  $L_0$ -Modul. Dann sind auch alle Tensorpotenzen von  $L$  Moduln über  $L_0$ . Der vorstehende Satz besagt nun insbesondere, dass die Abbildungen  $[-]_\sigma : L^{\otimes n} \rightarrow L$  Homomorphismen von  $L_0$ -Moduln sind.

### 3.6 Die Lie-Algebren von Pareigis

In den Arbeiten [Par97], [Par98a] und [Par98b] wurde eine Verallgemeinerung des klassischen Begriffs einer Lie-Algebra angegeben. Dabei ist die algebraische Struktur durch partiell definierte Verknüpfungen gegeben. In diesem Abschnitt soll nun die Beziehung zwischen diesen Lie-Algebren und den Lie-Algebren aus der vorliegenden Arbeit exemplarisch erläutert werden. Insbesondere soll verdeutlicht werden, dass der hier verwendete Begriff einer Lie-Algebra als Vervollständigung der Definition der Lie-Algebren von Pareigis aufgefasst werden kann.

Im Prinzip wird die Definition der Lie-Algebren bei Pareigis auf eine ganz ähnliche Weise gewonnen wie die Definition der Lie-Operaden in Abschnitt 2.5. Für eine assoziative Algebra  $A$  werden zunächst Verknüpfungen  $A^{\otimes n} \rightarrow A$  bestimmt, die aus der Multiplikation von  $A$  und der Zopfung aufgebaut sind und im Falle einer Hopfalgebra auf der Menge der primitiven Elemente abgeschlossen sind. Hierzu müssen allerdings die Definitionsbereiche der Verknüpfungen eingeschränkt werden, wodurch die partiell definierten Verknüpfungen entstehen. Anschließend werden Relationen zwischen diesen Verknüpfungen ermittelt, die zum Begriff der Lie-Algebra axiomatisiert werden. Insbesondere besitzt dann jede assoziative Algebra die Struktur einer

Lie-Algebra. Diese verallgemeinerten Lie-Klammern einer assoziativen Algebra sollen nun mit der assoziativen Operade und ihrer Lie-Unteroperade in Verbindung gebracht werden.

Sei  $m > 0$  fest gewählt. Als Grundkategorie  $\mathcal{C}$  wird nun die Kategorie  $\mathcal{YD}_K^K$  der Yetter-Drinfeld-Moduln über einer Hopfalgebra  $K$  verwendet, für die die Zopfung über das Zopfgruppensystem  $\mathcal{B}_m$  faktorisiert. Dies ist zum Beispiel für  $K = \mathbb{k}G$  der Fall, wobei  $G$  eine endliche abelsche Gruppe vom Exponenten  $m$  ist.

Sei  $A$  eine assoziative Algebra in  $\mathcal{C}$ . Die Multiplikation von  $n$  Faktoren werde mit  $\nabla^n : A^{\otimes n} \rightarrow A$  bezeichnet. Die Definitionsbereiche für die verallgemeinerten Lie-Klammern von Pareigis sind dann durch

$$A^n(\zeta) = \{z \in A^{\otimes n} \mid A_{ij} \cdot z = \zeta^2 z \text{ für } 1 \leq i < j \leq n\}$$

für alle  $n > 1$  und primitiven  $n$ -ten Einheitswurzeln  $\zeta \in \mathbb{k}$  gegeben. Hierauf sind die Lie-Klammern durch

$$[-]_c : A^n(\zeta) \rightarrow A, z \mapsto [z]_c := \sum_{t \in S_n} \zeta^{-\ell(t)} \nabla^n(L(t) \cdot z)$$

definiert. Der Fall  $n = 1$  kann dabei vernachlässigt werden, da die zugehörige Lie-Klammer die Identität auf  $A$  ist und somit keine Information enthält. Zu diesen Definitionen siehe [Par98a, Lemma 2.4 und Korollar 4.2].

Die Operation von  $E_{m,n}(\zeta^2)$  auf  $A^{\otimes n}$  ist ein Projektionsoperator auf den Unterraum  $A^n(\zeta) \subseteq A^{\otimes n}$ . Deshalb können die partiell definierten Lie-Klammern auf ganz  $A^{\otimes n}$  fortgesetzt werden, indem die Operation mit  $E_{m,n}(\zeta^2)$  vorgeschaltet wird. Daraus ergeben sich die global definierten Verknüpfungen

$$[-]_c : A^{\otimes n} \rightarrow A, z \mapsto [z]_c := \sum_{t \in S_n} \zeta^{-\ell(t)} \nabla^n(L(t) E_{m,n}(\zeta^2) \cdot z).$$

Die Algebrenstruktur von  $A$  entspricht einem Morphismus  $\varphi : \mathfrak{A}_m \rightarrow \mathfrak{End}(A)$  von Operaden. Nach dem Beweis von Satz 3.1.28 sind die Komponenten von  $\varphi$  durch

$$\varphi_n(\sigma) : A^{\otimes n} \rightarrow A, z \mapsto \nabla^n(\sigma \cdot z)$$

für  $\sigma \in \mathbb{k}B_{m,n}$  gegeben. Somit ergibt sich die vorstehende Lie-Klammer als Bild von

$$F_{m,n}(\zeta) := \sum_{t \in S_n} \zeta^{-\ell(t)} L(t) E_{m,n}(\zeta^2) \in \mathbb{k}B_{m,n} = \mathfrak{A}_m(n) \quad (3.27)$$

unter  $\varphi$ .

**Lemma 3.6.1.** *Sei  $n > 1$  und  $\zeta \in \mathbb{k}$  eine primitive  $n$ -te Einheitswurzel.*

1. *Es gilt  $F_{m,n}(\zeta) b_i = \zeta F_{m,n}(\zeta)$  für  $0 < i < n$ .*
2. *Das Element  $F_{m,n}(\zeta)$  ist in  $\mathfrak{L}_m(n)$  enthalten.*

*Beweis.* 1. Für einen einzelnen Summanden von  $F_{m,n}(\zeta) b_i$  gilt

$$\begin{aligned}\zeta^{-\ell(t)} L(t) E_{m,n}(\zeta^2) b_i &= \zeta^{-\ell(t)} L(t) b_i E_{m,n}(\zeta^2) = \zeta^{-\ell(t)} L(t) L(t_i) E_{m,n}(\zeta^2) \\ &= \zeta^{-\ell(t)} L(tt_i) \sigma_{m,n}(t, t_i) E_{m,n}(\zeta^2).\end{aligned}$$

Es erfolgt nun eine Fallunterscheidung nach  $\ell(tt_i)$ . Im Fall  $\ell(tt_i) = \ell(t) + 1$  gilt  $\sigma_{m,n}(t, t_i) = e_n$ . Andernfalls ist  $\ell(tt_i) = \ell(t) - 1$ , und es gilt

$$\sigma_{m,n}(t, t_i) E_{m,n}(\zeta^2) = A_{i,i+1} E_{m,n}(\zeta^2) = \zeta^2 E_{m,n}(\zeta^2).$$

Hiermit ergibt sich dann in beiden Fällen

$$\zeta^{-\ell(t)} L(t) E_{m,n}(\zeta^2) b_i = \zeta^{-\ell(tt_i)} L(tt_i) E_{m,n}(\zeta^2).$$

Da aber  $tt_i$  mit  $t$  alle Permutationen durchläuft, folgt hieraus die Behauptung.

2. Seien  $k, l > 0$  mit  $k + l = n$ . Dann ist  $S_{k,l} F_{m,n}(\zeta) = 0$  zu zeigen. Es gilt nun

$$\begin{aligned}S_{k,l} F_{m,n}(\zeta) &= \sum_{s \in S_{k,l}} \sum_{t \in S_n} \zeta^{-\ell(t)} L(s) L(t) E_{m,n}(\zeta^2) \\ &= \sum_{s \in S_{k,l}} \sum_{t \in S_n} \zeta^{-\ell(t)} L(st) \sigma_{m,n}(s, t) E_{m,n}(\zeta^2) \\ &= \sum_{s \in S_{k,l}} \sum_{t \in S_n} \zeta^{-\ell(t) + 2|\mathbb{F}_n(t) \setminus \mathbb{F}_n(st)|} L(st) E_{m,n}(\zeta^2) \\ &= \sum_{t \in S_n} \left( \sum_{s \in S_{k,l}} \zeta^{-\ell(s^{-1}t) + 2|\mathbb{F}_n(s^{-1}t) \setminus \mathbb{F}_n(t)|} \right) L(t) E_{m,n}(\zeta^2).\end{aligned}$$

Die inneren Summen seien mit  $c(t)$  für  $t \in S_n$  abgekürzt. Nach der ersten Aussage dieses Lemmas gilt  $S_{k,l} F_{m,n}(\zeta) L(t) = \zeta^{\ell(t)} S_{k,l} F_{m,n}(\zeta)$  für jede Permutation  $t \in S_n$ . Andererseits ist

$$\begin{aligned}S_{k,l} F_{m,n}(\zeta) L(t) &= \sum_{s \in S_n} c(s) L(s) E_{m,n}(\zeta^2) L(t) \\ &= \sum_{s \in S_n} c(s) L(st) \sigma_{m,n}(s, t) E_{m,n}(\zeta^2) \\ &= \sum_{s \in S_n} \zeta^{2|\mathbb{F}_n(t) \setminus \mathbb{F}_n(st)|} c(s) L(st) E_{m,n}(\zeta^2).\end{aligned}$$

Somit gilt  $\zeta^{\ell(t)} c(st) = \zeta^{2|\mathbb{F}_n(t) \setminus \mathbb{F}_n(st)|} c(s)$  für alle Permutationen  $s, t \in S_n$ , d.h.,  $c(s)$  und  $c(st)$  unterscheiden sich nur um einen skalaren Faktor ungleich Null. Deshalb genügt zu zeigen, dass

$$c(e_n) = \sum_{s \in S_{k,l}} \zeta^{-\ell(s^{-1}) + 2|\mathbb{F}_n(s^{-1}) \setminus \mathbb{F}_n(e_n)|} = \sum_{s \in S_{k,l}} \zeta^{\ell(s^{-1})} = \sum_{s \in S_{k,l}} \zeta^{\ell(s)}$$

verschwindet.



Jede Permutation  $s \in S_n$  besitzt eine eindeutige Darstellung  $s = (t_1 \otimes t_2)t$  mit  $t_1 \in S_k$ ,  $t_2 \in S_l$  und  $t \in S_{k,l}$ . Dabei gilt  $\ell(s) = \ell(t_1) + \ell(t_2) + \ell(t)$  für die Längen dieser Permutationen. Hieraus folgt

$$S_n(x) = S_k(x)S_l(x)S_{k,l}(x), \quad (3.28)$$

falls für jede Teilmenge  $W \subseteq S_n$  das Polynom  $W(x)$  durch  $W(x) := \sum_{s \in W} x^{\ell(s)}$  definiert wird. Nach [Hum90, Theorem 3.15] besitzt das Poincaré-Polynom  $S_n(x)$  der symmetrischen Gruppe  $S_n$  die Faktorisierung

$$S_n(x) = \prod_{r=2}^n \frac{x^r - 1}{x - 1}.$$

Für die primitive  $n$ -te Einheitswurzel  $\zeta$  gelten deshalb  $S_n(\zeta) = 0$  und  $S_k(\zeta) \neq 0$  für  $0 < k < n$ . Aus der Gleichung (3.28) folgt somit  $c(e_n) = S_{k,l}(\zeta) = 0$ .  $\square$

Damit sind die  $F_{m,n}(\zeta)$  Elemente der Lie-Operade  $\mathfrak{L}_m$ . Die Definition der Lie-Algebren von Pareigis lässt sich dann als Versuch deuten, die von den Elementen  $F_{m,n}(\zeta)$  erzeugte Unteroperade von  $\mathfrak{L}_m$  axiomatisch zu beschreiben. Diese Erzeuger sind allerdings in zweierlei Hinsicht unvollständig.

1.  $F_{m,n}(\zeta)$  ist ein Lie-Element in dem Modul  $M_{m,n}(\zeta^2) = \mathbb{k}B_{m,n}E_{m,n}(\zeta^2)$ . Hierbei ist  $M_{m,n}(\zeta^2)$  ein Bimodul über der Algebra  $\mathbb{k}B_{m,n}$ , da  $E_{m,n}(\zeta^2)$  zentral ist. Dieser Modul ist sogar  $S_n$ -graduiert und besitzt die Dimension  $n!$ . Ferner entspricht die Linksoperation von  $D_{1,n}$  der Multiplikation mit dem Skalar  $\zeta^{n(n-1)} = 1$ . Somit besitzt der Raum  $\mathcal{P}(M_{m,n}(\zeta^2))$  der Lie-Elemente nach Satz 3.4.11 mindestens die Dimension  $(n-2)!$  und ist zudem ein  $\mathbb{k}B_{m,n}$ -Rechtsuntermodul von  $M_{m,n}(\zeta^2)$ .

Nach der ersten Aussage der vorstehenden Lemmas erzeugt  $F_{m,n}(\zeta)$  aber nur einen eindimensionalen  $\mathbb{k}B_{m,n}$ -Untermodul von  $\mathcal{P}(M_{m,n}(\zeta^2))$ . Der einzige Ausweg bestünde darin, dass sich weitere Elemente aus  $\mathcal{P}(M_{m,n}(\zeta^2))$  via der Operadenmultiplikation aus kleineren Lie-Elementen ergeben. Falls  $n = p$  eine Primzahl ist, ist auch dies nicht möglich, da dann  $D_{1,k}$  für  $1 < k < n$  von links auf  $M_{m,n}(\zeta^2)$  durch Multiplikation mit dem Skalar  $\zeta^{k(k-1)} \neq 1$  operiert.

2. Nach Satz 3.4.13 existieren in dem Modul  $M_{m,n}(\xi_{ij}) = \mathbb{k}B_{m,n}E_{m,n}(\xi_{ij})$  genau dann nicht triviale Lie-Elemente, wenn  $D_{1,n} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} A_{ij}$  auf diesem Linksmodul als Identität operiert. Dies ist eine klar schwächere Bedingung als diejenige, dass die  $A_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$  mit demselben skalaren Faktor  $\zeta^2$  auf einem derartigen Modul operieren, wobei  $\zeta$  eine primitive  $n$ -te Einheitswurzel ist.



## Kapitel 4

# PBW-Theorem

Als Einstieg in die Untersuchung der universellen Einhüllenden einer Lie-Algebra wird in diesem Kapitel für einen kleinen Modellfall, bei dem mit einer unvollständigen Definition des Begriffs einer Lie-Algebra gearbeitet wird, ein PBW-Theorem bewiesen: Die universelle Hülle  $\mathcal{U}(L)$  einer Lie-Algebra  $L$  besitzt eine Basis, die nur von dem unterliegenden Objekt der Lie-Algebra abhängt, nicht aber von der speziellen Lie-Algebrenstruktur. Für diese Formulierung des PBW-Theorems ist es essentiell, dass eine unabhängige Definition von Lie-Algebren vorliegt.

Aufgrund dieses PBW-Theorems kann die Bestimmung einer Basis von  $\mathcal{U}(L)$  auf den Fall der abelschen Lie-Algebren reduziert werden, d.h. von Lie-Algebren, deren Verknüpfungen alle Null sind. Ferner ergibt sich aus diesem Theorem auch, dass in dem Modellfall die für die Verknüpfungen verwendeten Relationen ausreichend sind. Abschließend wird noch gezeigt, dass es gezopfte Lie-Algebren  $L$  gibt, für die  $L \not\cong \mathcal{PU}(L)$  gilt. Dies ist selbst dann der Fall, wenn mit der vollständigen Definition von Lie-Algebren im Sinne von Kapitel 1 gearbeitet wird.

Sei  $G$  eine zyklische Gruppe der Ordnung 3. Dann wird hier eine Unterkategorie der Kategorie  $\mathcal{YD}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}$  der Yetter-Drinfeld-Moduln über der Gruppe  $G$  als Grundkategorie verwendet. Die Kategorie  $\mathcal{YD}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}$  ist halbeinfach. Die Isomorphietypen der einfachen Objekte werden dabei durch die Elemente der Gruppe  $G \times \widehat{G}$  parametrisiert. Für ein Element  $(g, \chi) \in G \times \widehat{G}$  sei  $V(g, \chi)$  eindimensional als  $\mathbb{k}$ -Vektorraum. Mit  $v \cdot h := v\chi(h)$  und  $\delta(v) := v \otimes g$  für  $v \in V(g, \chi)$  und  $h \in G$  ist  $V(g, \chi)$  dann ein einfaches Objekt in  $\mathcal{YD}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}$ . Ferner ist jedes einfache Objekt aus dieser Kategorie zu genau einem  $V(g, \chi)$  isomorph. Hierfür sei zum Beispiel auf [AG99, Satz 3.1.2] verwiesen.

Das Tensorprodukt zweier einfacher Moduln aus  $\mathcal{YD}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}$  ist wieder einfach. Genauer gilt  $V(g_1, \chi_1) \otimes V(g_2, \chi_2) \cong V(g_1g_2, \chi_1\chi_2)$  für  $(g_i, \chi_i) \in G \times \widehat{G}$ . Die Zopfung ist auf diesem Tensorprodukt durch

$$\tau : V(g_1, \chi_1) \otimes V(g_2, \chi_2) \rightarrow V(g_2, \chi_2) \otimes V(g_1, \chi_1), v \otimes w \mapsto \chi_1(g_2)w \otimes v$$

explizit beschrieben.

Für eine Untergruppe  $\Gamma \subseteq G \times \widehat{G}$  bezeichne  $\mathcal{C}_\Gamma$  diejenige volle Unterkategorie von  $\mathcal{YD}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}$ , die alle Objekte enthält, die isomorph zu einer direkten Summe von einfachen Objekten  $V(g, \chi)$  mit  $(g, \chi) \in \Gamma$  sind. Dann ist  $\mathcal{C}_\Gamma$  eine abelsche und monoidale Unterkategorie von  $\mathcal{YD}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}$ .

Seien jetzt nicht triviale Elemente  $g \in G$  und  $\chi \in \widehat{G}$  fest gewählt. Dann ist  $\xi := \chi(g) \in \mathbb{k}$  eine primitive 3te Einheitswurzel, und  $(g, \chi)$  erzeugt eine zyklische Untergruppe  $\Gamma$  der Ordnung 3 von  $G \times \widehat{G}$ . Als Grundkategorie wird nun  $\mathcal{C} := \mathcal{C}_\Gamma$  verwendet. Insbesondere besitzt dann jedes Objekt  $V$  aus  $\mathcal{C}$  eine eindeutige Zerlegung  $V = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$ , wobei  $V_i$  zu einer direkten Summe von Kopien des einfachen Moduls  $V(g^i, \chi^i)$  isomorph ist.

Die Kategorie  $\mathcal{C}$  kann auch mit der Kategorie der  $G$ -graduierten  $\mathbb{k}$ -Vektorräume identifiziert werden. Siehe zum Beispiel [Par98b, Abschnitt 1]. Eine mögliche Argumentation ist die Folgende. Die  $G$ -graduierten  $\mathbb{k}$ -Vektorräume entsprechen den Rechtskomoduln über  $\mathbb{k}G$  [Mon93, Beispiel 1.6.7]. Ferner ist durch  $g \mapsto \chi$  ein Gruppenhomomorphismus  $\varphi : G \rightarrow \widehat{G}$  festgelegt. Derartige Homomorphismen entsprechen eineindeutig den Bicharakteren  $\lambda : G \times G \rightarrow \mathbb{k}^\times$  via  $\lambda(g_1, g_2) = \varphi(g_2)(g_1)$ . Der Bicharakter  $\lambda$  macht  $\mathbb{k}G$  nun zu einer koquasitriangulären Bialgebra [Mon93, Beispiel 10.2.6]. Analog zu [Mon93, Beispiel 10.6.14] kann aber für jede koquasitrianguläre Bialgebra  $B = (B, r : B \otimes B \rightarrow \mathbb{k})$  die Kategorie  $\mathcal{M}^B$  der  $B$ -Rechtskomoduln als volle Unterkategorie von  $\mathcal{YD}_B^B$  aufgefasst werden. Hierbei ist für jeden Komodul  $V$  die Rechtsoperation durch  $v \cdot h := v_{[0]}r(h \otimes v_{[1]})$  definiert. Im konkreten Fall ergibt sich damit genau die Unterkategorie  $\mathcal{C}$ .

Bei der Definition von Lie-Algebren wird nun eine Beschreibung mittels partiell definierten Verknüpfungen verwendet, da Bereiche, auf denen die Lie-Verknüpfungen prinzipiell verschwinden, für die Konstruktion der universellen Einhüllenden völlig belanglos sind. Ferner werden hier auch nur 2er- und 3er-Verknüpfungen berücksichtigt. Hierzu werden die 2er- und 3er-Verknüpfungen aus [Par97, Definition 4.1] mit den zugehörigen Axiomen benutzt. Für den vorliegenden Fall sind die meisten Daten der Definition in [Par97, Beispiel 4.8.4] konkretisiert.

**Definition 4.0.2.** Ein Objekt  $L = L_0 \oplus L_1 \oplus L_2$  aus  $\mathcal{C}$  zusammen mit  $\mathcal{C}$ -Morphismen

$$[\cdot, \cdot] : L \otimes L_0 + L_0 \otimes L \rightarrow L \quad \text{und} \quad [\cdot, \cdot] : L_1^{\otimes 3} \oplus L_2^{\otimes 3} \rightarrow L$$

heißt Lie-Algebra, falls für alle  $t \in S_3$ ,  $x, x_1, x_2 \in L_0$ ,  $y \in L$  sowie  $z_1, \dots, z_4 \in L_1$  oder  $z_1, \dots, z_4 \in L_2$  gelten:

$$(L1) \quad [x, y] = -[y, x]$$

$$(L2) \quad [z_{t(1)}, z_{t(2)}, z_{t(3)}] = [z_1, z_2, z_3]$$

$$(L3) \quad [x_1, [x_2, y]] + [x_2, [y, x_1]] + [y, [x_1, x_2]] = 0$$

$$(L4) \quad [x, [z_1, z_2, z_3]] = [[x, z_1], z_2, z_3] + [z_1, [x, z_2], z_3] + [z_1, z_2, [x, z_3]]$$

$$(L5) \quad [z_1, [z_2, z_3, z_4]] + [z_2, [z_3, z_4, z_1]] + [z_3, [z_4, z_1, z_2]] + [z_4, [z_1, z_2, z_3]] = 0$$

**Bemerkung 4.0.3.** Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 3.4 gelten

$$E'_{3,2} \cdot L^{\otimes 2} = E_{3,2}(1) \cdot L^{\otimes 2} = L \otimes L_0 + L_0 \otimes L$$

und

$$E'_{3,3} \cdot L^{\otimes 3} = (E_{3,3}(\xi) + E_{3,3}(\xi^2)) \cdot L^{\otimes 3} = E_{3,3}(\xi^2) \cdot L^{\otimes 3} = L_1^{\otimes 3} \oplus L_2^{\otimes 3}.$$

Somit ergeben sich die obigen Definitionsbereiche durch Anwendung der Projektionsoperatoren  $E'_{3,2}$  und  $E'_{3,3}$ . Ferner entsprechen die Lie-Klammern einer assoziativen Algebra, deren Eigenschaften zu der obigen Definition axiomatisiert wurden, auf diesen Definitionsbereichen den Elementen  $\Phi_2 E'_{3,2}$  und  $\Phi_3 \Omega_3 \Upsilon_3 E'_{3,3}$  der assoziativen Operade. Nach Bemerkung 3.4.14 sind die Verknüpfungen somit ausreichend, um alle 2er- und 3er-Verknüpfungen zu erfassen.

Allerdings ergibt sich aus [Par98b, Theorem 7.1], dass gegenüber [Par97, Definition 4.1] eine 6stellige Verknüpfung mit Definitionsbereich  $L_1^{\otimes 6} \oplus L_2^{\otimes 6}$  weggelassen worden ist. Ob diese Verknüpfung aus kleineren gewonnen werden kann, ist offen.

Auf jeden Fall fehlt aber eine 4stellige Verknüpfung. Dies sieht man wie folgt. Sei  $V = V_1 \oplus V_2$  mit  $\dim_{\mathbb{k}} V_1 = 3$  und  $\dim_{\mathbb{k}} V_2 = 1$ . Hierzu seien Basen  $x_1, x_2, x_3$  von  $V_1$  und  $x_4$  von  $V_2$  gewählt. Der von den Elementen  $x_{t(1)} \otimes \cdots \otimes x_{t(4)}$ ,  $t \in S_4$  aufgespannte  $\mathbb{k}$ -Vektorraum sei mit  $U$  bezeichnet. Dies ist ein  $\mathbb{k}B_{3,4}$ -Linksuntermodul von  $V^{\otimes 4}$  der Dimension  $4! = 16$ , auf dem  $D_{1,4}$  als Identität operiert. Ferner ist  $U$   $S_4$ -graduiert, falls dem Element  $x_{t(1)} \otimes \cdots \otimes x_{t(4)}$  der Grad  $t^{-1}$  zugeordnet wird. Nach Satz 3.4.11 gilt damit  $\dim_{\mathbb{k}} \mathcal{P}(U) \geq 2$ . Andererseits ergibt sich aus den obigen Axiomen der Lie-Verknüpfungen, dass die skalaren Vielfachen von  $[[x_1, x_2, x_3], x_4]$  die einzigen Lie-Elemente von  $U$  sind, die unter Verwendung der Lie-Algebrenstruktur der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  aus  $V$  gewonnen werden können. Somit muss es eine 4stellige Lie-Verknüpfung geben, die die fehlenden Elemente produziert.

Für jede assoziative Algebra  $A$  ist auf dem unterliegenden  $\mathcal{C}$ -Objekt durch

$$[x, y]_c := xy - yx \tag{4.1}$$

und

$$[z_1, z_2, z_3]_c := \sum_{t \in S_3} z_{t(1)} z_{t(2)} z_{t(3)} \tag{4.2}$$

für  $x$  oder  $y$  aus  $A_0$  sowie  $z_1, z_2, z_3 \in A_1$  oder  $z_1, z_2, z_3 \in A_2$  eine Lie-Algebra  $A^-$  erklärt [Par97, Lemma 4.3]. Hierdurch ist ein Funktor  $(\ )^- : \text{Alg} \rightarrow \text{Lie}$  definiert.

Auf Ebene der Algebren ist die universelle Hülle dann durch einen linksadjungierten Funktor  $\mathcal{U} : \text{Lie} \rightarrow \text{Alg}$  von  $(\ )^-$  gegeben. Dieser kann auf Objekten als  $\mathcal{U}(L) := \mathcal{T}(L)/I_L$  gewählt werden, wobei  $\mathcal{T}(L)$  die Tensoralgebra von  $L$  ist und das Ideal  $I_L$  von  $[x, y]_c - [x, y]$  und  $[z_1, z_2, z_3]_c - [z_1, z_2, z_3]$  für  $x$  oder  $y$  aus  $L_0$  sowie  $z_1, z_2, z_3 \in L_1$  oder  $z_1, z_2, z_3 \in L_2$  erzeugt wird. Aus der Definition von  $I_L$  ergibt sich unmittelbar, dass  $\mathcal{U}(L)$  die geforderte universelle Eigenschaft besitzt.

Nun soll für jede Lie-Algebra  $L$  ein Repräsentantensystem für eine Basis von  $\mathcal{U}(L)$  aus Elementen von  $\mathcal{T}(L)$  bestimmt werden. Dazu sei zunächst eine total geordnete und homogene Basis  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, \preceq)$  von  $L$  fest gewählt, die  $x_0 \prec x_1 \prec x_2$  für alle  $x_i \in \mathcal{B}_i := \mathcal{B} \cap L_i$  erfüllt. Das freie Monoid über  $\mathcal{B}$  sei mit  $\langle \mathcal{B} \rangle$  bezeichnet. Dann kann die Monoidalgebra  $\mathbb{k}\langle \mathcal{B} \rangle$  mit  $\mathcal{T}(L)$  identifiziert werden.

Zur Konstruktion des Repräsentantensystems einer Basis von  $\mathcal{U}(L)$  wird nun ein Reduktionssystem  $S_L \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle \times \mathbb{k}\langle \mathcal{B} \rangle$  verwendet. Dieses bestehe aus den Elementen

$$(yx, xy + [y, x]) \quad (4.3)$$

$$(z^3, \frac{1}{6}[z, z, z]) \quad (4.4)$$

$$(z_2^2 z_1, -z_2 z_1 z_2 - z_1 z_2^2 + \frac{1}{2}[z_2, z_2, z_1]) \quad (4.5)$$

$$(z_2 z_1^2, -z_1 z_2 z_1 - z_1^2 z_2 + \frac{1}{2}[z_2, z_1, z_1]) \quad (4.6)$$

$$(z_3 z_2 z_1, - \sum_{t \in S_3 \setminus \{e\}} z_{t(3)} z_{t(2)} z_{t(1)} + [z_3, z_2, z_1]) \quad (4.7)$$

für alle  $x \in \mathcal{B}_0$  und  $y \in \mathcal{B}$  mit  $x \prec y$  sowie alle  $z, z_1, z_2, z_3$ , die innerhalb eines Paares alle entweder aus  $\mathcal{B}_1$  oder aber aus  $\mathcal{B}_2$  stammen und  $z_1 \prec z_2 \prec z_3$  erfüllen. Abgesehen von skalaren Faktoren ungleich Null stimmen dann die Elemente  $W - f$ ,  $(W, f) \in S_L$  mit den Elementen

$$[y, x]_c - [y, x] \quad (4.8)$$

$$[z_3, z_2, z_1]_c - [z_3, z_2, z_1] \quad (4.9)$$

für  $x \in \mathcal{B}_0$  und  $y \in \mathcal{B}$  mit  $x \prec y$  sowie  $z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{B}_1$  oder  $z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{B}_2$  mit  $z_1 \preceq z_2 \preceq z_3$  überein. Wann immer die Elemente  $W - f$ ,  $(W, f) \in S_L$  verwendet werden und es nicht auf skalare Faktoren ungleich Null ankommt, können somit genauso gut die Elemente der Form (4.8) und (4.9) benutzt werden. Dies hat den Vorteil, dass hierdurch die Reduktionen (4.4) bis (4.7) gemeinsam behandelt werden können. So wird das von den  $W - f$ ,  $(W, f) \in S_L$  erzeugte Ideal auch von den Elementen der Form (4.8) und (4.9) erzeugt. Da die Lie-Verknüpfungen linear in jedem Argument sind und die Axiome (L1) und (L2) erfüllen, handelt es sich bei diesem Ideal um  $I_L$ . Somit passt das obige Reduktionssystem zu der Restklassenalgebra  $\mathcal{U}(L)$ .

Sofern nun jede Mehrdeutigkeit von  $S_L$  relativ zu einer geeigneten Halbordnung  $\leq$  von  $\langle \mathcal{B} \rangle$  auflösbar ist, lässt sich nach dem Diamantenlemma [Ber78, Theorem 1.2] ein Repräsentantensystem für eine Basis von  $\mathcal{U}(L)$  direkt angeben. Dabei wird von der Halbordnung auf  $\langle \mathcal{B} \rangle$  gefordert, dass sie monoidal ist, die absteigende Kettenbedingung erfüllt und mit dem Reduktionssystem  $S_L$  verträglich ist, d.h., es müssen gelten:

1. Für  $A, B, B', C \in \langle \mathcal{B} \rangle$  folgt aus  $B < B'$  die Relation  $ABC < AB'C$ .
2. Ist  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Elementen aus  $\langle \mathcal{B} \rangle$  mit  $A_i \geq A_{i+1}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ , so existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $A_i = A_{i+1}$  für alle  $i \geq N$ .

3. Für jedes  $(W, f) \in S_L$  ist  $f$  eine Linearkombination von Elementen  $A \in \langle \mathcal{B} \rangle$  mit  $A < W$ .

Im vorliegenden Fall kann dieselbe Halbordnung wie im Beweis von [Ber78, Theorem 3.1] benutzt werden. Um diese Halbordnung zu definieren, sei zunächst für  $A = x_1 \cdots x_n \in \langle \mathcal{B} \rangle$  mit  $f(A)$  die Anzahl der Fehlstände von  $A$ , d.h. die Anzahl aller Paare  $(i, j)$  mit  $1 \leq i < j \leq n$  und  $x_i \succ x_j$  bezeichnet. Dann sei  $A < B$  für Elemente  $A = x_1 \cdots x_m$  und  $B = y_1 \cdots y_n$  aus  $\langle \mathcal{B} \rangle$  gesetzt, falls

- $m < n$  ist oder aber
- $m = n$  und  $f(A) < f(B)$  gelten sowie eine Permutation  $t \in S_m$  mit  $y_i = x_{t(i)}$  für  $i = 1, \dots, m$  existiert.

Die reflexive Hülle dieser Relation definiert dann eine Halbordnung  $\leq$  auf  $\langle \mathcal{B} \rangle$ , die offensichtlich die geforderten Bedingungen erfüllt. Für jedes  $A \in \langle \mathcal{B} \rangle$  sei nun noch mit  $I_A$  derjenige  $\mathbb{k}$ -Untervektorraum von  $\mathbb{k}\langle \mathcal{B} \rangle$  bezeichnet, der von den Elementen  $B(W - f)C$  für  $B, C \in \langle \mathcal{B} \rangle$  und  $(W, f) \in S_L$  mit  $BWC < A$  aufgespannt wird.

Das Reduktionssystem  $S_L$  besitzt nur Überlappungs- und keine Inklusionsmehrfdeutigkeiten. Eine Überlappungsmehrfdeutigkeit von  $S_L$  ist ein Quintupel  $(\sigma_1, \sigma_2, A, B, C)$  bestehend aus  $\sigma_i = (W_i, f_i) \in S_L$  und  $A, B, C \in \langle \mathcal{B} \rangle \setminus \{1\}$  mit  $W_1 = AB$  und  $W_2 = BC$ . Eine solche Mehrdeutigkeit heißt auflösbar relativ zu  $\leq$ , wenn  $f_1C - Af_2 \in I_{ABC}$  gilt. Diese Bedingung ist äquivalent zur Existenz von  $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$  mit  $(\alpha, \beta) \neq 0$  und

$$0 \in \alpha(W_1 - f_1)C + \beta A(W_2 - f_2) + I_{ABC}. \quad (4.10)$$

Dabei muss notwendigerweise  $\alpha + \beta = 0$  gelten, da  $\alpha + \beta$  der Koeffizient von  $ABC$  in einer zugehörigen Darstellung der Null ist. Es ist nun aber nicht erforderlich, die Auflösbarkeit aller Mehrdeutigkeiten zu zeigen.

**Bemerkung 4.0.4.** Seien  $((U, f), (V, g), A, BC, D)$  und  $((V, g), (W, h), B, CD, E)$  Überlappungsmehrfdeutigkeiten von  $S_L$  mit  $C \neq 1$ , die relativ zu  $\leq$  auflösbar sind, d.h., es gelten  $fD - Ag \in I_{ABCD}$  und  $gE - Bh \in I_{BCDE}$ . Dann ist auch  $((U, f), (W, h), AB, C, DE)$  eine Überlappungsmehrfdeutigkeit von  $S_L$ , die wegen

$$fDE - ABh = (fD - Ag)E + A(gE - Bh) \in I_{ABCDE}$$

ebenfalls relativ zu  $\leq$  auflösbar ist.

Die Auflösbarkeit der Mehrdeutigkeiten von  $S_L$  wird auf die nachstehenden Lemmata zurückgeführt. Dabei wird nur das erste Lemma exemplarisch bewiesen. Die restlichen Behauptungen lassen sich ganz analog und ebenso einfach zeigen.

**Lemma 4.0.5.** Seien  $z_1, \dots, z_4 \in \mathcal{B}_1$  oder  $z_1, \dots, z_4 \in \mathcal{B}_2$  mit  $z_1 \preceq z_2 \preceq z_3 \preceq z_4$ . Ferner sei  $t \in S_4$ , und die Skalare  $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$  seien durch

$$\alpha := \begin{cases} -1, & \text{falls } z_{t(1)} = z_1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \beta := \begin{cases} 1, & \text{falls } z_{t(1)} = z_4, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Dann liegt  $[z_{t(1)}, [z_{t(2)}, z_{t(3)}, z_{t(4)}]_c]_c - [z_{t(1)}, [z_{t(2)}, z_{t(3)}, z_{t(4)}]]$  in

$$\alpha \left( [z_4, z_3, z_2]_c - [z_4, z_3, z_2] \right) z_1 + \beta z_4 \left( [z_3, z_2, z_1]_c - [z_3, z_2, z_1] \right) + I_{z_4 z_3 z_2 z_1}.$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} & [z_{t(1)}, [z_{t(2)}, z_{t(3)}, z_{t(4)}]_c]_c - [z_{t(1)}, [z_{t(2)}, z_{t(3)}, z_{t(4)}]] \\ &= [z_{t(1)}, [z_{t(2)}, z_{t(3)}, z_{t(4)}]_c - [z_{t(2)}, z_{t(3)}, z_{t(4)}]]_c \\ & \quad + [z_{t(1)}, [z_{t(2)}, z_{t(3)}, z_{t(4)}]]_c - [z_{t(1)}, [z_{t(2)}, z_{t(3)}, z_{t(4)}]] \\ &= z_{t(1)} \left( [z_{t(2)}, z_{t(3)}, z_{t(4)}]_c - [z_{t(2)}, z_{t(3)}, z_{t(4)}] \right) \\ & \quad - \left( [z_{t(2)}, z_{t(3)}, z_{t(4)}]_c - [z_{t(2)}, z_{t(3)}, z_{t(4)}] \right) z_{t(1)} \\ & \quad + \left( [z_{t(1)}, [z_{t(2)}, z_{t(3)}, z_{t(4)}]]_c - [z_{t(1)}, [z_{t(2)}, z_{t(3)}, z_{t(4)}]] \right). \end{aligned}$$

Da die 2stellige Lie-Verknüpfung dem Axiom (L1) genügt, ist der dritte Summand in diesem letzten Ausdruck eine Linearkombination von Elementen  $W - f$ , für die  $(W, f) \in S_L$  gilt und  $W$  ein Monom der Länge zwei ist. Deshalb ist dieser Summand in  $I_{z_4 z_3 z_2 z_1}$  enthalten. Ferner sind die ersten beiden Summanden wegen Axiom (L2) skalare Vielfache von Elementen  $B(W - f)C$  mit  $B, C \in \langle \mathcal{B} \rangle$  und  $(W, f) \in S_L$ . Zum Nachweis der Behauptung müssen somit noch die maximalen Monome in diesen beiden Summanden betrachtet werden. Im Fall  $z_{t(1)} \neq z_4$  ist das größte Monom des ersten Summanden kleiner als  $z_4 z_3 z_2 z_1$ , so dass dieser Summand dann in  $I_{z_4 z_3 z_2 z_1}$  enthalten ist. Ansonsten ist der erste Summand gleich  $z_4 ([z_3, z_2, z_1]_c - [z_3, z_2, z_1])$ . Insgesamt liefert dies den angegebenen Faktor  $\beta$ . Ganz analog liegt der zweite Summand nur dann nicht in  $I_{z_4 z_3 z_2 z_1}$ , wenn  $z_{t(1)} = z_1$  gilt. In diesem Fall stimmt er aber mit  $-([z_4, z_3, z_2]_c - [z_4, z_3, z_2])z_1$  überein. Hieraus ergibt sich der Wert von  $\alpha$ .  $\square$

**Lemma 4.0.6.** Seien  $x_1, x_2 \in \mathcal{B}_0$  und  $x_3 \in \mathcal{B}$  mit  $x_1 \prec x_2 \prec x_3$ . Dann liegt für jede Permutation  $t \in S_3$  das Element  $[x_{t(1)}, [x_{t(2)}, x_{t(3)}]_c]_c - [x_{t(1)}, [x_{t(2)}, x_{t(3)}]]$  in

$$\alpha \left( [x_3, x_2]_c - [x_3, x_2] \right) x_1 + \beta x_3 \left( [x_2, x_1]_c - [x_2, x_1] \right) + I_{x_3 x_2 x_1},$$

wobei die Skalare  $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$  durch

$$\alpha := \begin{cases} \text{sign}(t), & \text{falls } t(1) = 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \beta := \begin{cases} -\text{sign}(t), & \text{falls } t(1) = 3, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben sind.  $\square$



**Lemma 4.0.7.** Seien  $z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{B}_1$  oder  $z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{B}_2$  mit  $z_1 \preceq z_2 \preceq z_3$ . Ferner sei  $x \in \mathcal{B}_0$ . Dann ist  $[x, [z_1, z_2, z_3]_c]_c - [x, [z_1, z_2, z_3]]$  in

$$-\left([z_3, z_2, z_1]_c - [z_3, z_2, z_1]\right)x + I_{z_3 z_2 z_1 x}$$

enthalten.  $\square$

**Lemma 4.0.8.** Seien  $z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{B}_1$  oder  $z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{B}_2$  mit  $z_1 \preceq z_2 \preceq z_3$ . Ferner seien  $x \in \mathcal{B}_0$  und  $t \in S_3$ . Dann ist mit

$$\alpha := \begin{cases} -1, & \text{falls } z_{t(1)} = z_1 \text{ und } z_2 \neq z_3, \\ -2, & \text{falls } z_{t(1)} = z_1 \text{ und } z_2 = z_3, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

das Element  $[x, z_{t(1)}]_c, z_{t(2)}, z_{t(3)}]_c - [x, z_{t(1)}, z_{t(2)}, z_{t(3)}]$  in

$$\alpha z_3 z_2 \left([z_1, x]_c - [z_1, x]\right) + I_{z_3 z_2 z_1 x}$$

enthalten.  $\square$

**Satz 4.0.9.** Alle Mehrdeutigkeiten von  $S_L$  sind auflösbar relativ zu  $\leq$ .

*Beweis.* Es wurde schon angemerkt, dass das Reduktionssystem  $S_L$  nur Überlappungsmehrdeutigkeiten besitzt. Solche Mehrdeutigkeiten  $(\sigma_1, \sigma_2, A, B, C)$  treten bei folgenden Monomen  $ABC$  auf:

1.  $yx_2x_1$ ,
2.  $z_3z_2z_1x$ ,
3.  $z_4z_3z_2z_1$ ,
4.  $z_5z_4z_3z_2z_1$

für  $x, x_1, x_2 \in \mathcal{B}_0$ ,  $y \in \mathcal{B}$  und  $z_1, \dots, z_5 \in \mathcal{B}_1$  bzw.  $z_1, \dots, z_5 \in \mathcal{B}_2$  mit  $x_1 \prec x_2 \prec y$  und  $z_i \preceq z_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

Nach Bemerkung 4.0.4 ergibt sich die Auflösbarkeit der Mehrdeutigkeiten auf den Monomen vom vierten Typ aus der entsprechenden Aussage für die Monome vom dritten Typ. Somit sind nur noch die ersten drei Fälle zu behandeln. Dazu wird gezeigt, dass in diesen Fällen die Bedingung (4.10) erfüllt ist. Dabei können die Elemente  $W - f$ ,  $(W, f) \in S_L$  auch durch die Elemente der Form (4.8) und (4.9) ersetzt werden, da es bei Bedingung (4.10) nicht auf skalare Faktoren ungleich Null ankommt.

Für  $z_1, \dots, z_4 \in \mathcal{B}_1$  oder  $z_1, \dots, z_4 \in \mathcal{B}_2$  mit  $z_i \preceq z_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, 3$  gilt nun aufgrund von Axiom (L5)

$$\begin{aligned} & \left([z_1, [z_2, z_3, z_4]_c]_c - [z_1, [z_2, z_3, z_4]]\right) \\ & + \left([z_2, [z_3, z_4, z_1]_c]_c - [z_2, [z_3, z_4, z_1]]\right) \\ & + \left([z_3, [z_4, z_1, z_2]_c]_c - [z_3, [z_4, z_1, z_2]]\right) \\ & + \left([z_4, [z_1, z_2, z_3]_c]_c - [z_4, [z_1, z_2, z_3]]\right) = 0. \end{aligned}$$

Dieses Element ist aber nach Lemma 4.0.5 in

$$\alpha \left( [z_4, z_3, z_2]_c - [z_4, z_3, z_2] \right) z_1 + \beta z_4 \left( [z_3, z_2, z_1]_c - [z_3, z_2, z_1] \right) + I_{z_4 z_3 z_2 z_1}$$

mit  $\alpha = -|\{i \mid z_i = z_1\}|$  und  $\beta = |\{i \mid z_i = z_4\}|$  enthalten. Wegen  $\text{char } \mathbb{k} = 0$  sind dann  $\alpha$  und  $\beta$  von Null verschieden. Somit ist in diesem Fall die Bedingung (4.10) erfüllt, d.h., alle Mehrdeutigkeiten von  $S_L$  auf Monomen vom dritten Typ sind auflösbar relativ zu  $\leq$ .

Ganz analog wird in den anderen beiden Fällen verfahren. Für die Mehrdeutigkeiten auf Monomen der Form  $yx_2x_1$  für  $x_i \in \mathcal{B}_0$  und  $y \in \mathcal{B}$  mit  $x_1 \prec x_2 \prec y$  wird die Relation (L3) und Lemma 4.0.6 verwendet. Dieser Fall entspricht der klassischen Situation und soll deshalb nicht weiter behandelt werden.

Schließlich gilt für  $z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{B}_1$  bzw.  $z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{B}_2$  mit  $z_1 \preceq z_2 \preceq z_3$  und  $x \in \mathcal{B}_0$  aufgrund von Axiom (L4)

$$\begin{aligned} & \left( [x, [z_1, z_2, z_3]_c]_c - [x, [z_1, z_2, z_3]] \right) \\ & - \left( [[x, z_1]_c, z_2, z_3]_c - [[x, z_1], z_2, z_3] \right) \\ & - \left( [z_1, [x, z_2]_c, z_3]_c - [z_1, [x, z_2], z_3] \right) \\ & - \left( [z_1, z_2, [x, z_3]_c]_c - [z_1, z_2, [x, z_3]] \right) = 0. \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.0.7 und 4.0.8 liegt dieses Element in

$$-\left( [z_3, z_2, z_1]_c - [z_3, z_2, z_1] \right) x + \beta z_3 z_2 \left( [z_1, x]_c - [z_1, x] \right) + I_{z_3 z_2 z_1 x}$$

für ein geeignetes  $\beta \in \mathbb{k}$ . Genauer gesagt wurde dabei auch noch Relation (L2) verwendet, um die Elemente in die Form von Lemma 4.0.8 zu bringen. Damit ist auch in diesem Fall die Bedingung (4.10) gezeigt.  $\square$

**Korollar 4.0.10 (PBW-Theorem).** *Sei  $L$  eine Lie-Algebra in  $\mathcal{C}$ . Des Weiteren sei  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, \preceq)$  eine total geordnete Basis von  $L$  aus homogenen Elementen, so dass  $x_0 \prec x_1 \prec x_2$  für alle  $x_i \in \mathcal{B}_i := \mathcal{B} \cap L_i$  gilt. Mit  $\mathcal{R}(\mathcal{B})$  sei die Menge aller Elemente aus dem freien Monoid  $\langle \mathcal{B} \rangle$  über  $\mathcal{B}$  bezeichnet, die kein Teilwort der Form*

- $yx$  für  $x \in \mathcal{B}_0$  und  $y \in \mathcal{B}$  mit  $x \prec y$  oder
- $z_3 z_2 z_1$  für  $z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{B}_1$  oder  $z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{B}_2$  mit  $z_1 \preceq z_2 \preceq z_3$

enthalten. Dann ist  $\mathcal{R}(\mathcal{B})$  ein Repräsentantensystem für eine Basis von  $\mathcal{U}(L)$ .

*Beweis.* Die angegebenen Teilworte, die nicht auftreten dürfen, sind genau diejenigen Monome, die als erste Komponente der Reduktionen aus  $S_L$  vorkommen. Somit folgt die Behauptung mit dem Diamantenlemma [Ber78, Theorem 1.2] direkt aus dem vorstehenden Satz.  $\square$

**Korollar 4.0.11.** *Für jede Lie-Algebra  $L$  in  $\mathcal{C}$  ist der kanonische Homomorphismus  $\iota_L : L \rightarrow \mathcal{U}(L)$  injektiv.*

*Beweis.* Nach dem vorstehenden Korollar gilt  $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}(\mathcal{B})$ . □

Insbesondere ist also jede Lie-Algebra isomorph zu einer Lie-Unteralgebra von  $A^-$  für eine geeignete assoziative Algebra  $A$ . Deshalb genügen die abstrakten Lie-Verknüpfungen allen Relationen, die für jede assoziative Algebra  $A$  von den Lie-Klammern (4.1) und (4.2) erfüllt werden. Dann entsprechen aber die oben definierten Lie-Algebren in  $\mathcal{C}$  den Algebren über derjenigen Unteroperade der assoziativen Operade  $\mathfrak{A}_3$ , die von den beiden Elementen  $\Phi_2 E'_{3,2}$  und  $\Phi_3 \Omega_3 \Upsilon_3 E'_{3,3}$  erzeugt wird. In diesem Sinne sind die angegebenen Relationen für den Modellfall ausreichend.

Da eine Operade allerdings nicht durch die Kategorie ihrer Algebren festgelegt ist, ist es möglich, dass diese Unteroperade durch die aufgeführten Relationen noch nicht vollständig beschrieben ist. Die fehlenden Relationen müssen dann aber über der Kategorie  $\mathcal{C}$  automatisch erfüllt sein.

Zum Abschluss soll noch ein Beispiel für eine Lie-Algebra  $L$  mit  $L \not\cong \mathcal{PU}(L)$  angegeben werden. Dies ist auch dann möglich, wenn Algebren  $L$  über der Lie-Operade  $\mathfrak{L}_3$  in  $\mathcal{C}$  betrachtet werden.

Hierzu sei  $L$  ein Objekt aus  $\mathcal{C}$  mit  $L = L_1$  und  $\dim_{\mathbb{k}} L = 2$ . Dann ist  $L$  mit der trivialen Struktur eine Algebra über der Operade  $\mathfrak{L}_3$ . Dabei ist für alle  $n > 1$  und jedes Element  $\sigma \in \mathfrak{L}_3(n)$  die zugehörige Lie-Verknüpfung  $[-]_{\sigma} : L^{\otimes n} \rightarrow L$  die Nullabbildung. Ferner muss  $e_1 \in \mathfrak{L}_3(1)$  notwendigerweise auf  $\text{id}_L$  abgebildet werden. Insgesamt ist dadurch ein Morphismus  $\mathfrak{L}_3 \rightarrow \mathbf{End}(L)$  von Operaden erklärt, der  $L$  zu einer Algebra über  $\mathfrak{L}_3$  macht.

Die universelle Hülle von  $L$  ist nun durch  $\mathcal{U}(L) := \mathcal{T}(L)/I$  gegeben, wobei  $I$  als Ideal von allen primitiven Elementen der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(L)$  erzeugt wird, die homogen vom Grad  $\geq 2$  sind. Es sei eine Basis  $x, y$  von  $L$  fest gewählt. Dann sind

$$\frac{1}{2}[x, x, y]_{\mathcal{C}} = x^2 y + x y x + y x^2 \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{2}[x, y, y]_{\mathcal{C}} = x y^2 + y x y + y^2 x \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{6}[x, x, x]_{\mathcal{C}} = x^3 \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{6}[y, y, y]_{\mathcal{C}} = y^3 \quad (4.14)$$

primitive Elemente der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(L)$ , da sie vermöge der Verknüpfung (4.2) aus den primitiven Elementen  $x$  und  $y$  gewonnen werden. Insbesondere sind diese Elemente also in  $I$  enthalten. Es soll nun zunächst gezeigt werden, dass  $I$  sogar von diesen vier Elementen als Ideal erzeugt wird.

Sei  $I'$  das von den Elementen (4.11) und (4.12) erzeugte Ideal von  $\mathcal{T}(L)$ . Hiermit wird die Quotientenalgebra  $H := \mathcal{T}(L)/I'$  gebildet. Da  $I'$  von primitiven Elementen erzeugt wird, ist  $H$  sogar eine Hopfalgebra. Für  $z := yx - \xi xy$  gelten

$$zx - \xi^2 xz = yx^2 - \xi xyx - \xi^2 xyx + x^2 y = yx^2 + xyx + x^2 y$$

und

$$yz - \xi^2 zy = y^2 x - \xi yxy - \xi^2 yxy + xy^2 = y^2 x + yxy + xy^2.$$

Deshalb ist  $H$  als Algebra isomorph zur Algebra  $H'$ , die von Elementen  $x$  und  $y$  vom Typ  $(g, \chi)$  sowie  $z$  vom Typ  $(g^2, \chi^2)$  mit den Relationen

$$yx = \xi xy + z \quad (4.15)$$

$$zx = \xi^2 xz \quad (4.16)$$

$$yz = \xi^2 zy \quad (4.17)$$

erzeugt wird.

**Satz 4.0.12.** *Die Elemente  $x^r z^s y^t$  mit  $r, s, t \in \mathbb{N}$  bilden eine Basis von  $H'$ .*

*Beweis.* Die Behauptung wird durch eine Anwendung des Diamantenlemmas bewiesen. Dabei wird das verwendete Reduktionssystem durch die Relationen (4.15) bis (4.17) beschrieben. Ferner seien die Erzeuger von  $H'$  durch  $x \prec z \prec y$  total geordnet. Analog zum Beweis des PBW-Theorems kann hiermit eine monoidale Halbordnung auf den Monomen in den Erzeugern definiert werden, die die absteigende Kettenbedingung erfüllt. Diese Halbordnung ist dann auch mit dem Reduktionssystem verträglich.

Es kommt nur eine Mehrdeutigkeit vor, und zwar auf dem Monom  $yzx$ . Wegen

$$yzx \mapsto \xi^2 yxz \mapsto xyz + \xi^2 z^2 \mapsto \xi^2 xzy + \xi^2 z^2$$

und

$$yzx \mapsto \xi^2 zyx \mapsto zxy + \xi^2 z^2 \mapsto \xi^2 xzy + \xi^2 z^2$$

ist diese Mehrdeutigkeit auflösbar. Somit ist das Diamantenlemma anwendbar, woraus sich die Behauptung ergibt.  $\square$

Da  $H$  und  $H'$  als Algebren isomorph sind, überträgt sich via dieses Isomorphismus die Hopfalgebrenstruktur von  $H$  auf  $H'$ . Insbesondere sind dann die beiden Elemente  $x, y \in H'$  primitiv. Hieraus kann die Komultiplikation auf den Basiselementen  $x^r z^s y^t$  berechnet werden.

Dazu werden die  $q$ -Binomialkoeffizienten benötigt. Diese sind zunächst in dem Funktionenkörper  $\mathbb{k}(q)$  erklärt. Mit den  $q$ -Zahlen

$$(n)_q := \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

sind die  $q$ -Binomialkoeffizienten für alle  $k, n \in \mathbb{N}$  durch

$$\binom{n}{k}_q := \begin{cases} \prod_{m=0}^{k-1} \frac{(n-m)_q}{(m+1)_q}, & \text{falls } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Diese Elemente sind sogar schon in der Polynomialgebra  $\mathbb{k}[q] \subset \mathbb{k}(q)$  enthalten [Kas95, Satz IV.2.1].

Sei  $A$  eine  $\mathbb{k}$ -Algebra. Dann definiert jedes Element  $a \in A$  einen Auswertungsmorphismus  $\mathbb{k}[q] \rightarrow A$  mit  $q \mapsto a$ . Die Bilder der  $q$ -Binomialkoeffizienten unter diesem Morphismus werden mit  $\binom{n}{k}_a$  bezeichnet. Für zwei Elemente  $x, y \in A$  mit  $yx = axy$  gilt dann die  $q$ -Version der binomischen Formel [Kas95, Satz IV.2.2]:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_a x^k y^{n-k}. \quad (4.18)$$

**Satz 4.0.13.** *In  $H'$  ist das Koprodukt  $\Delta(x^r z^s y^t)$  für  $r, s, t \in \mathbb{N}$  durch*

$$\sum_{k_1+k_2=r} \sum_{l_1+l_2+l_3=s} \sum_{m_1+m_2=t} \binom{r}{k_1}_\xi \binom{s}{l_1+l_2}_\xi \binom{l_1+l_2}{l_1}_\xi \binom{t}{m_1}_\xi \\ c_{k_1, k_2, l_1, l_2, l_3, m_1, m_2} \left( x^{k_1} z^{l_1} y^{l_2+m_1} \otimes x^{k_2+l_2} z^{l_3} y^{m_2} \right)$$

gegeben. Hierbei wurde

$$c_{k_1, k_2, l_1, l_2, l_3, m_1, m_2} := (1 - \xi^2)^{l_2} \xi^{\binom{l_2}{2} + k_2(2l_1+l_2) + (k_2+l_2+2l_3)m_1}$$

als Abkürzung verwendet.

*Beweis.* Es gilt  $(1 \otimes x)(x \otimes 1) = \xi(x \otimes x) = \xi(x \otimes 1)(1 \otimes x)$ , und ganz analog ergibt sich  $(1 \otimes y)(y \otimes 1) = \xi(y \otimes 1)(1 \otimes y)$ . Mit der binomischen Formel (4.18) folgen daraus

$$\Delta(x^r) = \Delta(x)^r = (x \otimes 1 + 1 \otimes x)^r = \sum_{k_1+k_2=r} \binom{r}{k_1}_\xi \left( x^{k_1} \otimes x^{k_2} \right)$$

und

$$\Delta(y^t) = \sum_{m_1+m_2=t} \binom{t}{m_1}_\xi \left( y^{m_1} \otimes y^{m_2} \right).$$

Das Koprodukt von Potenzen von  $z$  ist dagegen aufwendiger zu berechnen. Zunächst einmal ist

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= \Delta(yx - \xi xy) = \Delta(y)\Delta(x) - \xi\Delta(x)\Delta(y) \\ &= (y \otimes 1 + 1 \otimes y)(x \otimes 1 + 1 \otimes x) - \xi(x \otimes 1 + 1 \otimes x)(y \otimes 1 + 1 \otimes y) \\ &= yx \otimes 1 + y \otimes x + \xi x \otimes y + 1 \otimes yx - \xi(xy \otimes 1 + x \otimes y + \xi y \otimes x + 1 \otimes xy) \\ &= (yx - \xi xy) \otimes 1 + (1 - \xi^2)(y \otimes x) + 1 \otimes (yx - \xi xy) \\ &= z \otimes 1 + (1 - \xi^2)(y \otimes x) + 1 \otimes z. \end{aligned}$$

Ferner gelten

$$\begin{aligned} (1 \otimes z)(z \otimes 1) &= \xi(z \otimes z) = \xi(z \otimes 1)(1 \otimes z), \\ (1 \otimes z)(y \otimes x) &= \xi^2(y \otimes zx) = \xi(y \otimes xz) = \xi(y \otimes x)(1 \otimes z), \\ (y \otimes x)(z \otimes 1) &= \xi^2(yz \otimes x) = \xi(z y \otimes x) = \xi(z \otimes 1)(y \otimes x). \end{aligned}$$

Somit liefert eine zweifache Anwendung der binomischen Formel (4.18)

$$\begin{aligned}\Delta(z^s) &= \Delta(z)^s = \left( (z \otimes 1 + (1 - \xi^2)(y \otimes x)) + 1 \otimes z \right)^s \\ &= \sum_{l=0}^s \binom{s}{l}_{\xi} (z \otimes 1 + (1 - \xi^2)(y \otimes x))^l (1 \otimes z^{s-l}) \\ &= \sum_{l_1+l_2+l_3=s} \binom{s}{l_1+l_2}_{\xi} \binom{l_1+l_2}{l_1}_{\xi} (1 - \xi^2)^{l_2} (z^{l_1} \otimes 1)(y \otimes x)^{l_2} (1 \otimes z^{l_3}).\end{aligned}$$

Schließlich zeigt eine einfache Induktion, dass  $(y \otimes x)^n = \xi^{\binom{n}{2}}(y^n \otimes x^n)$  gilt. Hiermit folgt dann

$$\begin{aligned}(x^{k_1} \otimes x^{k_2})(z^{l_1} \otimes 1)(y \otimes x)^{l_2}(1 \otimes z^{l_3})(y^{m_1} \otimes y^{m_2}) \\ &= \xi^{\binom{l_2}{2}}(x^{k_1} \otimes x^{k_2})(z^{l_1} y^{l_2} \otimes x^{l_2} z^{l_3})(y^{m_1} \otimes y^{m_2}) \\ &= \xi^{\binom{l_2}{2}+k_2(2l_1+l_2)}(x^{k_1} z^{l_1} y^{l_2} \otimes x^{k_2+l_2} z^{l_3})(y^{m_1} \otimes y^{m_2}) \\ &= \xi^{\binom{l_2}{2}+k_2(2l_1+l_2)+(k_2+l_2+2l_3)m_1}(x^{k_1} z^{l_1} y^{l_2+m_1} \otimes x^{k_2+l_2} z^{l_3} y^{m_2})\end{aligned}$$

Wegen  $\Delta(x^r z^s y^t) = \Delta(x^r)\Delta(z^s)\Delta(y^t)$  ergibt sich damit insgesamt die behauptete Formel für die Komultiplikation.  $\square$

Bevor mit Hilfe dieser Formel die primitiven Elemente von  $H'$  berechnet werden können, muss noch geklärt werden, wann die Spezialisierungen der  $q$ -Binomialkoeffizienten verschwinden. Für einen Skalar  $\zeta \in \mathbb{k}$  gilt nach Definition  $(1 - \zeta)(n)_{\zeta} = 1 - \zeta^n$ . Im Fall  $\zeta \neq 1$  ist deshalb  $(n)_{\zeta}$  genau dann Null, wenn  $\zeta^n = 1$  gilt. Ferner ergibt sich aus der Definition der Binomialkoeffizienten die Gleichung

$$\binom{n}{k}_{\zeta} \prod_{m=1}^k (m)_{\zeta} = \prod_{m=0}^{k-1} (n-m)_{\zeta}$$

für  $0 \leq k \leq n$ . Aus diesen Betrachtungen erhält man die folgende Aussage.

**Lemma 4.0.14.** *Sei  $r > 1$ , und sei  $\zeta \in \mathbb{k}$  eine primitive  $r$ -te Einheitswurzel. Dann ist  $\binom{n}{k}_{\zeta} \neq 0$  für alle  $k, n \in \mathbb{N}$  mit  $0 \leq k \leq n < r$ .*  $\square$

Um hieraus den allgemeinen Fall abzuleiten, wird noch eine Hilfsaussage benötigt.

**Lemma 4.0.15.** *Sei  $r > 1$ , und sei  $\zeta \in \mathbb{k}$  eine primitive  $r$ -te Einheitswurzel. Für  $k, l, m, n \in \mathbb{N}$  mit  $0 \leq k, l < r$  gilt dann*

$$\binom{nr+l}{mr+k}_{\zeta} = \binom{n}{m} \binom{l}{k}_{\zeta}.$$

Hierbei ist  $\binom{n}{m}$  ein gewöhnlicher Binomialkoeffizient.

*Beweis.* Eine Variante der  $q$ -Binomialkoeffizienten erhält man, wenn in der Definition anstelle der  $q$ -Zahlen  $(n)_q$  mit

$$[n]_q := \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} = q^{-n+1} \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1} = q^{-n+1} (n)_{q^2}$$

gearbeitet wird. Die zugehörigen Binomialkoeffizienten seien mit  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$  bezeichnet. Für diese gilt

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{k(k-n)} \binom{n}{k}_{q^2}.$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichung ist die Behauptung dann äquivalent zu [Lus93, Lemma 34.1.2, c].  $\square$

**Korollar 4.0.16.** *Sei  $r > 1$ , und sei  $\zeta \in \mathbb{k}$  eine primitive  $r$ -te Einheitswurzel. Ferner seien  $k, l, m, n \in \mathbb{N}$  mit  $0 \leq k, l < r$ . Dann ist genau dann*

$$\binom{nr + l}{mr + k}_{\zeta} = 0,$$

wenn  $m > n$  oder  $k > l$  gilt.  $\square$

**Satz 4.0.17.** *Die Elemente  $x, y, x^3$  und  $y^3$  bilden eine  $\mathbb{k}$ -Basis des Raumes  $\mathcal{P}(H')$  der primitiven Elemente der Hopfalgebra  $H'$ .*

*Beweis.* Die angegebenen Elemente sind nach Satz 4.0.12 linear unabhängig in  $H'$ . Ferner sind sie als Bilder von primitiven Elementen unter dem Homomorphismus  $\mathcal{T}(L) \rightarrow H \cong H'$  von Hopfalgebren selber primitiv. Somit ist noch zu zeigen, dass alle primitiven Elemente von  $H'$  in dem von  $x, y, x^3, y^3$  aufgespannten Raum liegen.

Eine Basis von  $H' \otimes H'$  ist durch die Elemente  $x^{r_1} z^{s_1} y^{t_1} \otimes x^{r_2} z^{s_2} y^{t_2}$ ,  $r_i, s_i, t_i \in \mathbb{N}$  gegeben. Durch die Formel aus Satz 4.0.13 wird das Koprodukt  $\Delta(x^r z^s y^t)$  bezüglich dieser Basis dargestellt. Dabei sind  $x^r z^s \otimes y^t$  und  $x^r \otimes z^s y^t$  die einzigen Basiselemente der Form  $x^k z^l \otimes y^m$  oder  $x^k \otimes z^l y^m$ , die im Koprodukt von  $x^r z^s y^t$  vorkommen. Ferner sind die zugehörigen Koeffizienten dieser beiden Elemente jeweils eins. Somit tauchen  $x^r z^s \otimes y^t$  und  $x^r \otimes z^s y^t$  nur im Koprodukt von  $x^r z^s y^t$  auf. Deshalb müssen in einer Basisdarstellung

$$a = \sum_{r,s,t \in \mathbb{N}} \alpha_{r,s,t} x^r z^s y^t$$

eines primitiven Elements  $a \in H'$  alle Koeffizienten  $\alpha_{r,s,t}$  verschwinden, bei denen mindestens zwei der drei Indizes  $r, s, t$  von Null verschieden sind. Somit sind alle primitiven Elemente von  $H'$  in dem von  $x^r, z^s, y^t$  mit  $r, s, t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  aufgespannten Raum enthalten.

Werden den Erzeugern  $x, y$  und  $z$  von  $H'$  die Grade  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  bzw.  $(1, 1)$  zugeordnet, so sind die Relationen (4.15)-(4.17) homogen. Deshalb ist hierdurch eine  $\mathbb{N}^2$ -Graduierung auf  $H'$  definiert. Diese induziert eine  $\mathbb{N}^2$ -Graduierung auf  $H' \otimes H'$ .

Ferner respektiert die Komultiplikation diese Graduierung, da dies für die Erzeuger der Algebra  $H'$  der Fall ist. Deshalb bilden die primitiven Elemente einen graduerten Unterraum. Da die Elemente  $x^r, z^s, y^t$  mit  $r, s, t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  homogen sind und paarweise verschiedene Grade besitzen, ist eine Basis von  $\mathcal{P}(H')$  schon durch Elemente dieser Form gegeben. Es bleibt damit noch zu zeigen, dass die Elemente  $x^r, z^s, y^t$  für  $r, s, t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  mit  $r, t \notin \{1, 3\}$  nicht primitiv sind.

Sei  $r = 3k$  mit  $k > 1$ . Dann ist der Koeffizient von  $x^3 \otimes x^{r-3}$  in der Basisdarstellung von  $\Delta(x^r)$  gleich  $\binom{r}{3}_\xi = \binom{k}{1} \binom{0}{0}_\xi \neq 0$ . Ferner ist  $x^3 \otimes x^{r-3}$  wegen  $k > 1$  verschieden von  $x^r \otimes 1$  und  $1 \otimes x^r$ . Deshalb ist  $x^{3k}$  in diesem Fall nicht primitiv. Im Fall  $r = 3k + m$  mit  $0 < m < 3$  ist der Koeffizient von  $x \otimes x^{r-1}$  in der Basisdarstellung von  $\Delta(x^r)$  durch  $\binom{r}{1}_\xi = \binom{k}{0} \binom{m}{1}_\xi \neq 0$  gegeben. Ferner gilt  $x \otimes x^{r-1} \neq x \otimes 1$ , wenn  $r > 1$  ist. Somit ist auch für diese  $r$  das Element  $x^r$  nicht primitiv. Die entsprechende Aussage über die Potenzen von  $y$  wird ganz analog bewiesen.

Sei nun  $s = 3k$  mit  $k > 0$ . Abgesehen vom Faktor  $c_{0,0,0,3,s-3,0,0} \neq 0$  ist dann  $\binom{s}{3}_\xi \binom{3}{0}_\xi = \binom{k}{1} \binom{1}{0} \neq 0$  der Koeffizient von  $y^3 \otimes x^3 z^{s-3}$  in der Darstellung von  $\Delta(z^s)$ . Somit ist  $z^{3k}$  für  $k > 0$  nicht primitiv. Schließlich ist im Fall  $s = 3k + m$  mit  $0 < m < 3$  der Koeffizient von  $y \otimes x z^{s-1}$  in der Basisdarstellung von  $\Delta(z^s)$  abgesehen vom Faktor  $c_{0,0,0,1,s-1,0,0} \neq 0$  durch  $\binom{s}{1}_\xi \binom{1}{0}_\xi = \binom{k}{0} \binom{m}{1}_\xi \binom{1}{0}_\xi \neq 0$  gegeben. Deshalb ist auch  $z^{3k+m}$  für  $0 < m < 3$  nicht primitiv.  $\square$

**Korollar 4.0.18.** *Das Ideal  $I$  der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(L)$  werde von allen primitiven Elementen erzeugt, die homogen vom Grad  $\geq 2$  sind. Dann wird  $I$  als Ideal von den Elementen (4.11)-(4.14) erzeugt.*

*Beweis.* Mit  $\tilde{I}$  sei das Ideal von  $\mathcal{T}(L)$  bezeichnet, das von den Elementen (4.11) bis (4.14) erzeugt wird. Dann ist zu zeigen, dass jedes primitive Element von  $\mathcal{T}(L)$ , das homogen vom Grad  $\geq 2$  ist, in  $\tilde{I}$  liegt.

Die kanonische Abbildung  $f : \mathcal{T}(L) \rightarrow H = \mathcal{T}(L)/I'$  ist ein Homomorphismus von graduerten Hopfalgebren, da die Erzeuger (4.11) und (4.12) des Ideals  $I'$  homogen sind. Somit ist für jedes primitive Element  $a \in \mathcal{T}(L)$ , das homogen vom Grad  $\geq 2$  ist, das Bild  $f(a)$  primitiv und homogen von einem Grad  $\geq 2$ . Wegen  $H \cong H'$  folgt aus dem vorherigen Satz, dass  $f(a)$  in dem von  $x^3$  und  $y^3$  aufgespannten Unterraum von  $H$  enthalten ist. Hieraus ergibt sich, dass  $a \in I' + \text{span}\{x^3, y^3\} \subseteq \tilde{I}$  gilt.  $\square$

Damit ist die Hopfalgebra  $U(L) = \mathcal{T}(L)/I$  konkret genug beschrieben, um ihre primitiven Elemente berechnen zu können. Diese werden ganz analog zu den primitiven Elementen der Hopfalgebra  $H \cong H'$  bestimmt.

Sei  $U'$  die von den Elementen  $x$  und  $y$  vom Typ  $(g, \chi)$  sowie  $z$  vom Typ  $(g^2, \chi^2)$  mit den Relationen (4.15) bis (4.17) sowie

$$x^3 = 0 \quad \text{und} \quad y^3 = 0 \quad (4.19)$$

erzeugte Algebra. Dann sind  $U(L)$  und  $U'$  als Algebren isomorph, wodurch sich die Hopfalgebrenstruktur von  $U(L)$  auf  $U'$  überträgt. Diese Hopfalgebra  $U'$  kann auch als Quotient von  $H'$  nach dem von  $x^3$  und  $y^3$  erzeugten Ideal gewonnen werden.



**Satz 4.0.19.** *Die Elemente  $x^r z^s y^t$  mit  $r, s, t \in \mathbb{N}$  und  $r, t < 3$  bilden eine Basis von  $U'$ .*

*Beweis.* Diese Behauptung wird analog zu Satz 4.0.12 wieder mit dem Diamantenlemma bewiesen. Im Vergleich zur Algebra  $H'$  wird  $U'$  nur durch mehr Relationen beschrieben. Somit muss das Reduktionssystem aus dem Beweis von Satz 4.0.12 um diejenigen Reduktionen ergänzt werden, die den zusätzlichen Relationen (4.19) entsprechen. Dagegen wird dieselbe Halbordnung auf den Monomen in den Erzeugern verwendet wie im Beweis von Satz 4.0.12. Diese Halbordnung ist auch im vorliegenden Fall mit dem Reduktionssystem verträglich.

Es bleibt noch zu zeigen, dass alle neu hinzugekommenen Mehrdeutigkeiten auflösbar sind. Diese treten bei den Monom  $y^3x$ ,  $yx^3$ ,  $zx^3$  und  $y^3z$  auf. Wegen

$$\begin{aligned} y^3x &\mapsto \xi y^2xy + y^2z \mapsto \xi^2 yxy^2 + \xi yzy + \xi^2 yzy \\ &\mapsto xy^3 + \xi^2 zy^2 + (\xi + \xi^2)\xi^2 zy^2 \mapsto 0 + (1 + \xi + \xi^2)zy^2 = 0 \end{aligned}$$

und  $y^3x \mapsto 0$  ist die erste Mehrdeutigkeit auflösbar. Die Auflösbarkeit der zweiten Mehrdeutigkeit wird ganz analog bewiesen. Auch von den letzten beiden Mehrdeutigkeiten soll nur eine exemplarisch gezeigt werden, da der Beweis der anderen ganz ähnlich verläuft. Wegen  $zx^3 \mapsto \xi^2 xzx^2 \mapsto \xi x^2zx \mapsto x^3z \mapsto 0$  und  $zx^3 \mapsto 0$  ist nun auch die dritte Mehrdeutigkeit auflösbar. Somit kann das Diamantenlemma angewendet werden. Hieraus ergibt sich dann die Behauptung.  $\square$

**Satz 4.0.20.** *Eine Basis für den Raum  $\mathcal{P}(U')$  der primitiven Elemente der Hopfalgebra  $U'$  ist durch  $x$ ,  $y$  und  $z^3$  gegeben.*

*Beweis.* Da  $U'$  ein Quotient der Hopfalgebra  $H'$  ist, induziert die Formel aus Satz 4.0.13 eine entsprechende Formel für das Koproduct der Basiselemente  $x^r z^s y^t$ ,  $r, t < 3$  von  $U'$ . Für eine Basisdarstellung müssen allerdings noch alle Summanden weggelassen werden, die Potenzen von  $x$  oder  $y$  mit Exponenten größer als zwei enthalten. Dies sind diejenigen Summanden, für die  $l_2 + m_1 > 2$  oder  $k_2 + l_2 > 2$  gilt. Alle Argumentationen aus dem Beweis von Satz 4.0.17, die nicht diese Summanden verwenden, können dann übernommen werden. Damit ist nur noch zu zeigen, dass  $z^3$  primitiv ist, nicht aber die Elemente  $z^{3k}$  für  $k > 1$ .

Zunächst wird die Formel für  $\Delta(z^3)$  aus Satz 4.0.13 betrachtet. Der Binomialkoeffizient  $\binom{3}{l_1+l_3}_\xi$  ist nur in den Fällen  $l_1+l_2 = 0$  oder  $l_1+l_2 = 3$  von Null verschieden. Im ersten Fall müssen dann  $l_1 = l_2 = 0$  und  $l_3 = 3$  gelten. Im zweiten Fall ist nun  $\binom{l_1+l_2}{l_1}_\xi = \binom{3}{l_1}_\xi$  genau dann ungleich Null, wenn  $l_1 = 0$  oder  $l_1 = 3$  ist. Aus  $l_1 = 0$  folgt aber  $l_2 = 3$ . Der zugehörige Summand entfällt dann aber, da in ihm  $x^3 = 0$  vorkommt. Schließlich impliziert  $l_1 = 3$ , dass  $l_2 = l_3 = 0$  ist. Insgesamt sind damit nur zwei Summanden von Null verschieden. Diese sind  $z^3 \otimes 1$  und  $1 \otimes z^3$ . Somit ist  $z^3$  primitiv.

Sei nun  $s = 3k$  mit  $k > 1$ . Dann wird in der Basisdarstellung von  $\Delta(z^s)$  das Element  $z^3 \otimes z^{s-3}$  betrachtet. Wegen  $k > 1$  ist dieses Element auf jeden Fall von

$z^s \otimes 1$  und  $1 \otimes z^s$  verschieden. Ferner ist der Koeffizient dieses Basiselementes bis auf den Faktor  $c_{0,0,3,0,s-3,0,0} \neq 0$  durch  $\binom{s}{3}_\xi \binom{3}{3}_\xi = \binom{k}{1} \neq 0$  gegeben. Damit ist  $z^{3k}$  für  $k > 1$  nicht primitiv.  $\square$

Somit gilt  $\mathcal{PU}(L) = \text{span}\{x, y, (yx - \xi xy)^3\} \not\cong L$  für die triviale Lie-Algebra  $L$  mit  $\dim_{\mathbb{k}} L = 2$  und  $L = L_1$ . Deshalb kann die Kategorie der Lie-Algebren via der Adjunktion ( $\mathcal{U} : \text{Lie} \rightarrow \text{Hopf}, \mathcal{P} : \text{Hopf} \rightarrow \text{Lie}$ ) nicht zu einer Unterkategorie der Kategorie der Hopfalgebren äquivalent sein.

# Zusammenfassung

Die primitiven Elemente einer gewöhnlichen Hopfalgebra sind unter der binären Kommutatoroperation  $[x, y] := xy - yx$  abgeschlossen und bilden mit dieser Verknüpfung eine Lie-Algebra. Umgekehrt kann zu jeder Lie-Algebra ihre universelle Einhüllende konstruiert werden. Dabei handelt es sich um eine Hopfalgebra, die von primitiven Elementen erzeugt wird. Durch diese Zuordnungen sind zueinander adjungierte Funktoren gegeben, die über Körpern der Charakteristik 0 eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der irreduziblen kokommutativen Hopfalgebren und der Kategorie der Lie-Algebren induzieren.

Für gezopfte monoidale Kategorien lässt sich der Begriff einer Hopfalgebra verallgemeinern. Allerdings besitzen die Lie-Algebren in derartigen Kategorien keine offensichtliche und einfache Entsprechung, so dass die eben geschilderten Beziehungen zu den Hopfalgebren ihre Gültigkeit behalten. Um Hopfalgebren in gezopfsten Kategorien zu untersuchen, die von primitiven Elementen erzeugt werden, soll eine geeignete und praktikable Verallgemeinerung der Lie-Algebren gefunden werden.

Dazu wird die Kategorie der Lie-Algebren zunächst durch eine Monade definiert. Für geeignete gezopfte Grundkategorien  $\mathcal{C}$  kann der Funktor  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{\text{Hopf}} : \mathbf{Hopf} \rightarrow \mathcal{C}$  erklärt werden, der jeder Hopfalgebra  $H$  die primitiven Elemente von  $H$  zuordnet. Dieser Funktor besitzt einen Linksadjungierten  $\mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Hopf}$ . Sei  $\mathbf{L}$  die von dieser Adjunktion erzeugte Monade. Dann wird die Kategorie  $\mathbf{Lie}$  der Lie-Algebren in  $\mathcal{C}$  durch die Kategorie  $\mathcal{C}^{\mathbf{L}}$  der Algebren über der Monade  $\mathbf{L}$  definiert. Dies kann als Verallgemeinerung des klassischen Begriffs einer Lie-Algebra verstanden werden. Ferner ist damit auch ein Vergissfunktork  $\mathcal{V} : \mathbf{Lie} \rightarrow \mathcal{C}$  sowie ein Vergleichsfunktork  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathbf{Lie}}^{\text{Hopf}} : \mathbf{Hopf} \rightarrow \mathbf{Lie}$  gegeben. Für diese Funktoren gilt  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{\text{Hopf}} = \mathcal{V} \circ \mathcal{P}_{\mathbf{Lie}}^{\text{Hopf}}$ . Somit können die primitiven Elemente einer Hopfalgebra mit der Struktur einer Lie-Algebra versehen werden. Schließlich wird noch gezeigt, dass der Funktor  $\mathcal{P} : \mathbf{Hopf} \rightarrow \mathbf{Lie}$  einen Linksadjungierten  $\mathcal{U} : \mathbf{Lie} \rightarrow \mathbf{Hopf}$  besitzt, was der klassischen Konstruktion der universellen Einhüllenden entspricht.

Die Definition der Lie-Algebren mittels der Monade  $\mathbf{L}$  ist allerdings für konkrete Betrachtungen wenig praktikabel, da der unterliegende Endofunktork der Monade  $\mathbf{L}$  jedem Objekt  $V$  aus  $\mathcal{C}$  die primitiven Elemente der Tensoralgebra  $\mathcal{T}(V)$  zuordnet und diese primitiven Elemente nicht explizit bekannt sind. Deshalb besteht die Notwendigkeit, eine andere Beschreibung der Kategorie der Lie-Algebren zu finden.

Falls die Kategorie  $\mathcal{YD}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}$  der Yetter-Drinfeld-Moduln über der Gruppenalgebra einer endlichen abelschen Gruppe  $G$  als Grundkategorie  $\mathcal{C}$  verwendet wird, so kann

eine Operade  $\mathcal{L}$  definiert werden, die die Kategorie der Lie-Algebren beschreibt und als Lie-Operade bezeichnet wird. Hierfür werden Operaden in gezopferten monoidalen Kategorien benötigt. Diese stellen eine leichte Verallgemeinerung von Operaden in symmetrischen monoidalen Kategorien dar. Allerdings ist ihre Definition nicht völlig unproblematisch. Deshalb wird auf diese Operaden und ihre Algebren im Detail eingegangen.

Die Lie-Operade ist zunächst nur implizit als Unteroperade der assoziativen Operade erklärt. Für eine Konkretisierung dieser Operade ist deshalb eine Beschreibung durch Erzeugende und Relationen gesucht. Dazu wird als Erstes gezeigt, dass sich Operaden über der Grundkategorie  $\mathcal{YD}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}$  stets durch Erzeugende und Relationen beschreiben lassen und dass dies einer axiomatischen Definition der durch die Operade gegebenen algebraischen Struktur entspricht. Anschließend werden Elemente der Lie-Operade berechnet sowie Relationen zwischen diesen Elementen ermittelt. Hierzu liegen aber noch keine vollständigen Resultate vor.

Abschließend werden noch zwei Aussagen über die universellen Einhüllenden von Lie-Algebren gezeigt. Zum einen wird für einen kleinen Modellfall, der eine unvollständige Definition des Begriffs einer Lie-Algebra verwendet, eine Verallgemeinerung des Poincaré-Birkhoff-Witt-Theorems bewiesen: Die universelle Hülle  $\mathcal{U}(L)$  einer Lie-Algebra  $L$  besitzt eine Basis, die nur von dem unterliegenden Objekt der Lie-Algebra abhängt, nicht aber von der speziellen Lie-Algebrenstruktur. Zum anderen wird ein Beispiel einer Lie-Algebra angegeben, für die  $L \not\cong \mathcal{PU}(L)$  gilt.

# Summary

The primitive elements of an ordinary Hopf algebra are closed under the binary bracket operation  $[x, y] := xy - yx$  and form a Lie algebra with respect to this operation. Conversely, given a Lie algebra one can construct a universal enveloping algebra, which is in fact a Hopf algebra that is generated by primitive elements. These two processes define a pair of adjoint functors inducing over fields of characteristic zero a category equivalence between the category of irreducible cocommutative Hopf algebras and the category of Lie algebras.

Hopf algebras can be defined in any braided monoidal category. But there is no such obvious and simple generalization of the notion of a Lie algebra preserving the category equivalence described above. This thesis aims to give a suitable and applicable definition of Lie algebras in braided monoidal categories in order to study braided Hopf algebras generated by primitive elements.

First we give a definition of the category of Lie algebras through monads. For suitable underlying braided monoidal categories  $\mathcal{C}$ , there is a functor  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{\text{Hopf}} : \text{Hopf} \rightarrow \mathcal{C}$ , assigning to each Hopf algebra  $H$  its set of primitive elements. This functor has a left adjoint  $\mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Hopf}$ . Let  $\mathbf{L}$  be the monad generated by this adjunction. Then the category  $\text{Lie}$  of Lie algebras is defined as the category  $\mathcal{C}^{\mathbf{L}}$  of algebras over the monad  $\mathbf{L}$ . This can be viewed as a generalization of the classical notion of Lie algebras. Moreover, this leads to a forgetful functor  $\mathcal{V} : \text{Lie} \rightarrow \mathcal{C}$  and a comparison functor  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\text{Lie}}^{\text{Hopf}} : \text{Hopf} \rightarrow \text{Lie}$ , for which the equation  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{\text{Hopf}} = \mathcal{V} \circ \mathcal{P}_{\text{Lie}}^{\text{Hopf}}$  holds. Therefore, the primitive elements of a Hopf algebra can be equipped with the structure of a Lie algebra. Finally, we show that the functor  $\mathcal{P} : \text{Hopf} \rightarrow \text{Lie}$  has a left adjoint  $\mathcal{U} : \text{Lie} \rightarrow \text{Hopf}$ , which corresponds to the classical construction of the universal enveloping algebra.

The definition of Lie algebras by the monad  $\mathbf{L}$ , however, is not very useful for concrete considerations, since the underlying functor of the monad  $\mathbf{L}$  assigns to each object  $V \in \mathcal{C}$  the primitive elements of the tensor algebra  $\mathcal{T}(V)$  and these primitive elements are not explicitly known. Therefore, it is necessary to find another description for the category of Lie algebras.

Using the category  $\mathcal{YD}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}$  of Yetter-Drinfeld modules over the group algebra of a finite abelian group  $G$  as our base category  $\mathcal{C}$ , we define an operad  $\mathfrak{L}$ , which describes the category of Lie algebras and is called Lie operad. For this construction we need operads in braided monoidal categories. These operads slightly generalize operads in symmetric monoidal categories. Since their definition is not completely

straightforward, we study these operads and their algebras in detail.

At first the Lie operad is defined only implicitly as a sub operad of the associative operad. In order to make this definition more explicit, we are interested in finding generators and relations of the Lie operad. For this we show that any operad over the base category  $\mathcal{YD}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}$  can be described by generators and relations and that this corresponds to an axiomatic definition of the algebraic structure given by the operad. Then we compute some elements of the Lie operad and determine relations between these elements.

Finally, we prove two statements about universal enveloping algebras. First we prove a generalization of the Poincaré-Birkhoff-Witt theorem for a sample case, which uses an incomplete definition of Lie algebras: The universal enveloping algebra  $\mathcal{U}(L)$  of a Lie algebra  $L$  has a basis, which is independent of the Lie algebra structure, but is determined only by the underlying object of the Lie algebra  $L$ . In the end we give an example of a Lie algebra  $L$  satisfying  $L \not\cong \mathcal{PU}(L)$ .

# Literaturverzeichnis

- [AG99] N. Andruskiewitsch, M. Graña: Braided Hopf algebras over non-abelian finite groups, *Bol. Acad. Nac. Cienc. (Córdoba)* **63** (1999), 45-78.
- [Art47a] E. Artin: Theory of braids, *Ann. of Math. (2)* **48** (1947), 101-126.
- [Art47b] E. Artin: Braids and permutations, *Ann. of Math. (2)* **48** (1947), 643-649.
- [Ber78] G. M. Bergman: The diamond lemma for ring theory, *Adv. in Math.* **29** (1978), 178-218.
- [Bir75] J. S. Birman: *Braids, links, and mapping class groups*, Annals of Mathematics Studies 82, Princeton University Press, 1975.
- [BJT97] H.-J. Baues, M. Jibladze, A. Tonks: Cohomology of monoids in monoidal categories, in *Operads: Proceedings of Renaissance Conferences*, 137-165, Contemp. Math. 202, Amer. Math. Soc., 1997.
- [BW85] M. Barr, C. Wells: *Toposes, triples and theories*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 278, Springer-Verlag, 1985.
- [Coh73] P. M. Cohen: *Skew field constructions*, Carleton Mathematical Lecture Notes 7, 1973.
- [CR87] C. W. Curtis, I. Reiner: *Methods of representation theory*, Volume II, J. Wiley, 1987.
- [Dri85] V. G. Drinfeld: Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation, *Soviet. Math. Dokl.* **32** (1985), 254-258.
- [Dun95] G. Dunn:  $K$ -theory of braided tensor ring categories with higher commutativity, *K-Theory* **9** (1995), 591-605.
- [Fie91] Z. Fiedorowicz: The symmetric bar construction, 1991, unveröffentlicht.
- [GK94] V. Ginzburg, M. Kapranov: Koszul duality for operads, *Duke Math. J.* **76** (1994), 203-272.

- [GJ94] E. Getzler, J. D. S. Jones: Operads, homotopy algebras and iterated integrals for double loop spaces, Preprint, [hep-th/9403055](#).
- [Hum90] J. E. Humphreys: *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 29, 1990.
- [Jac62] N. Jacobson: *Lie algebras*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics 10, Interscience Publisher, 1962.
- [Jim85] M. Jimbo: A  $q$ -difference analogue of  $U(\mathfrak{g})$  and the Yang-Baxter equation, *Lett. Math. Phys.* **10** (1985), 63-69.
- [KaM01] M. Kapranov, Yu. Manin: Modules and Morita theorem for operads, *Amer. J. Math.* **123** (2001), 811-838.
- [Kas95] C. Kassel: *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics 155, Springer-Verlag, 1995.
- [Kel72] G. M. Kelly: Many-variable functorial calculus I, in *Coherence in categories*, 66-105, Lecture Notes in Mathematics 281, Springer-Verlag, 1972.
- [Kha98] V. K. Kharchenko: An algebra of skew primitive elements, *Algebra and Logic* **37** (1998), 101-126.
- [Kha99a] V. K. Kharchenko: An existence condition for multilinear quantum operations, *J. Alg.* **217** (1999), 188-228.
- [Kha99b] V. K. Kharchenko: A quantum analogue of the Poincaré-Birkhoff-Witt theorem, *Algebra and Logic* **38** (1999), 259-276.
- [Kha00] V. K. Kharchenko: Multilinear quantum Lie operations, *Zap. Nauchn. Sem. S.-Petersburg Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* **272** (2000), englische Übersetzung als Preprint [math.QA/0105106](#).
- [Kha01] V. K. Kharchenko: Skew primitive elements in Hopf algebras and related identities, *J. Alg.* **238** (2001), 534-559.
- [KrM95] I. Kriz, J. P. May: *Operads, algebras, modules and motives*, Astérisque 233, 1995.
- [Lin69] F. E. J. Linton: Coequalizers in categories of algebras, in *Seminar on Triples and Categorical Homology Theory*, 75-90, Lecture Notes in Mathematics 80, Springer-Verlag, 1969.
- [Lus93] G. Lusztig: *Introduction to quantum groups*, Birkhäuser, 1993.
- [Mac72] S. Mac Lane: *Kategorien*, Springer-Verlag, 1972.



- [Maj94] S. Majid: Algebras and Hopf algebras in braided categories, in *Advances in Hopf algebras*, 55-105, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 158, Dekker, 1994.
- [Man76] E. G. Manes: *Algebraic theories*, Graduate Texts in Mathematics 26, Springer-Verlag, 1976.
- [May72] J. P. May: *The geometry of iterated loop spaces*, Lecture Notes in Mathematics 271, Springer-Verlag, 1972.
- [Mon93] S. Montgomery: *Hopf algebras and their actions on rings*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics 82, AMS, 1993.
- [Par69] B. Pareigis: *Kategorien und Funktoren*, Teubner, 1969.
- [Par77] B. Pareigis: Non-additive ring and module theory II.  $\mathcal{C}$ -categories,  $\mathcal{C}$ -functors and  $\mathcal{C}$ -morphisms, *Publ. Math. Debrecen* **24** (1977), 351-361.
- [Par97] B. Pareigis: On Lie algebras in braided categories, in *Quantum groups and quantum spaces*, 139-158, Banach Center Publ. 40, Polish Acad. Sci., 1997.
- [Par98a] B. Pareigis: On Lie algebras in the category of Yetter-Drinfeld modules, *Appl. Categ. Structures* **6** (1998), 151-175.
- [Par98b] B. Pareigis: Skew-primitive elements of quantum groups and braided Lie algebras, in *Rings, Hopf algebras, and Brauer groups*, 219-238, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 197, Dekker, 1998.
- [Par01] B. Pareigis: Symmetric Yetter-Drinfeld categories are trivial, *J. Pure and Appl. Algebra* **155** (2001), 91.
- [Pas89] D. S. Passman: *Infinite crossed products*, Pure and Applied Mathematics 135, Academic Press, 1989.
- [Rad85] D. E. Radford: The structure of Hopf algebras with a projection, *J. Alg.* **92** (1985), 322-347.
- [Sbg96] P. Schauenburg: A characterization of the Borel-like subalgebras of quantum enveloping algebras, *Comm. Algebra* **24** (1996), 2811-2823.
- [Sbt70] H. Schubert: *Kategorien I*, Heidelberger Taschenbücher, Band 65, Springer-Verlag, 1970.
- [SO99] S. Shnider, D. H. Van Osdol: Operads as abstract algebras, and the Koszul property, *J. Pure Appl. Algebra* **143** (1999), 381-407.
- [Som96] Y. Sommerhäuser: Deformed enveloping algebras, *New York J. Math.* **2** (1996), 35-58.

- [Swe69] M. E. Sweedler: *Hopf algebras*, Mathematics Lecture Note Series, W. A. Benjamin, Inc., 1969.
- [Wig89] D. Wigner: An identity in the free Lie algebra, *Proc. Amer. Math. Soc.* **106** (1989), 639-640.
- [Yet90] D. N. Yetter: Quantum groups and representations of monoidal categories, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **108** (1990), 261-290.

# Lebenslauf

Stephan Schmidt-Samoa

geboren am 23. Juli 1969 in Eschwege

ledig

## Schule, Wehrdienst

- |           |   |
|-----------|---|
| 1976–1989 | Grundschule und Gymnasium in Eschwege<br>Abschluss mit Abitur                         |
| 6/89–8/90 | Grundwehrdienst: Fernmeldeaufklärer in Clausthal-Zellerfeld<br>und Hessisch Lichtenau |

## Studium

- |            |   |
|------------|---|
| 10/90–3/98 | Studium der Mathematik mit Nebenfach Informatik und<br>der Volkswirtschaftslehre an der Georg-August-Universität<br>Göttingen |
| 9.2.1996   | Diplom in Mathematik  |
| 13.2.1998  | Vordiplom in Volkswirtschaftslehre  |
| seit 10/97 | Promotion in Mathematik an der Ludwig-Maximilians-Univer-<br>sität München  |
| 10/97–9/00 | Stipendiat im Graduiertenkolleg „Mathematik im Bereich ihrer<br>Wechselwirkung mit der Physik“                                |

## Tätigkeiten an der Universität

- |                             |  |
|-----------------------------|--|
| 9/93–3/94 und<br>10/94–3/95 | wissenschaftliche Hilfskraft an der Georg-August-Universität<br>Göttingen        |
| 11/00–7/01                  | wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Ludwig-Maximilians-<br>Universität München |