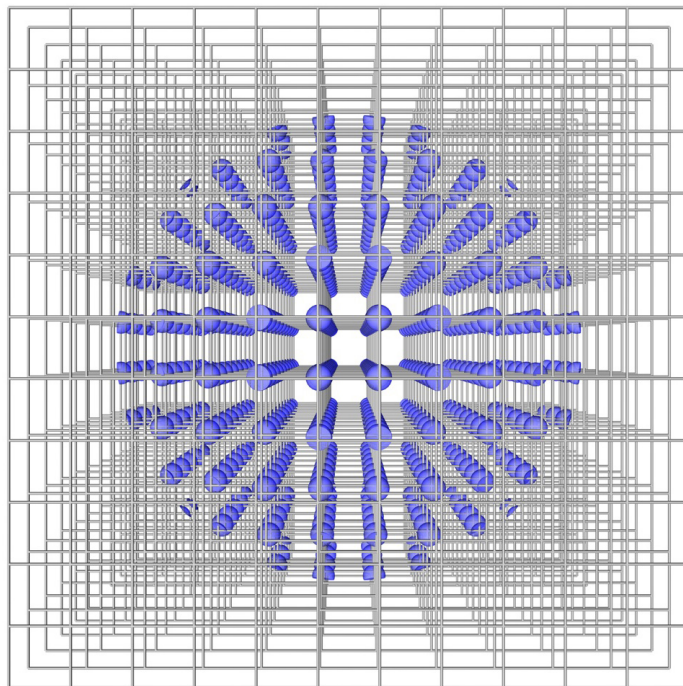


# Bosonische und fermionische Quantengase in dreidimensionalen optischen Gittern

– Präparation, Manipulation und Analyse –



Dissertation der Fakultät für Physik  
der Ludwig-Maximilians-Universität München

Tim Rom



# Bosonische und fermionische Quantengase in dreidimensionalen optischen Gittern

– Präparation, Manipulation und Analyse –



Dissertation der Fakultät für Physik  
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

**Tim Rom**

geboren in Aachen

München, Oktober 2009

Erstgutachter: Prof. Dr. Theodor W. Hänsch  
Zweitgutachter: Prof. Dr. Immanuel Bloch

Tag der mündlichen Prüfung: 01. Dezember 2009

## Kurzfassung

In den letzten Jahren haben sich atomare Quantengase in optischen Gittern zu einem faszinierenden und interdisziplinär bedeutsamen Forschungsfeld entwickelt. Die in den periodischen Potentialen gefangenen ultrakalten Atome stellen ein ideales Modellsystem dar, anhand dessen sich grundlegende Fragestellungen der modernen Festkörper- und Vielteilchenphysik untersuchen lassen. In der vorliegenden Arbeit werden neue Methoden zur Manipulation und Analyse von Quantenzuständen in optischen Gittern demonstriert. Insbesondere wird mittels der sogenannten Rauschkorrelationsanalyse die Ordnung der Atome im Gitter bestimmt und erstmals fermionisches Antibunching an freien neutralen Atomen nachgewiesen.

Grundlage für die vorgestellten Experimente ist eine im Rahmen dieser Arbeit neu entwickelte Apparatur, mit der sich simultan entartete bosonische und fermionische Quantengase aus  $^{87}\text{Rb}$  und  $^{40}\text{K}$  präparieren und in einem dreidimensionalen optischen Gitter untersuchen lassen. Die Apparatur zeichnet sich durch eine Serie technischer Innovationen aus: Eine neuartige Spulen- und Fallenkonfiguration eröffnet einen hervorragenden optischen Zugang zu den präparierten Ensembles und ermöglicht es, starke homogene Magnetfelder bei einer geringen dissipierten Leistung zu erzeugen. Dies sind wichtige Voraussetzungen, um definierte Gitterpotentiale verwirklichen und die interatomaren Wechselwirkungen mittels Feshbach-Resonanzen beeinflussen zu können. Das optische Potential geht aus der Überlagerung einer gekreuzten Dipolfalle und eines blauverstimmten dreidimensionalen Gitters hervor. Eine solche Kombination erlaubt es, sehr tiefe und relativ homogene Gitterpotentiale zu erzeugen sowie den externen Einschluss unabhängig von der Gittertiefe zu variieren. Des Weiteren lassen sich über eine frei einstellbare Wellenlänge spezialisierte Gitter realisieren. Die Vereinigung der hier aufgeführten Technologien liefert uns eine außergewöhnlich flexible Plattform für das Studium maßgeschneiderter Quantenzustände in periodischen Potentialen.

Durch den unabhängigen externen Einschluss kann erstmals ein Fermigas allein über dessen Kompression zwischen einem metallischen und einem isolierenden Zustand hin- und hergeschaltet und – in ersten Ansätzen – die entsprechende Dynamik beobachtet werden. Die Ergebnisse werden mit numerischen Simulationen verglichen. Neben der Durchführung von Transportmessungen lässt sich hieraus ein neues Diagnoseverfahren ableiten, das es ermöglicht, Quantenphasen, wie den bosonischen oder fermionischen Mott-Isolator, anhand der charakteristischen Kompressibilität zu identifizieren.

Als weiteres Diagnoseverfahren wird die Korrelationsanalyse von Flugzeitaufnahmen vorgestellt. Durch die Auswertung von Hanbury Brown und Twiss (HBT)-Korrelationen im Quantenrauschen der expandierenden Atomwolken lässt sich die mikroskopische Ordnung der Atome im Gitter nachweisen. Ausgangspunkt für die Messungen sind jeweils vollständig spinpolarisierte bosonische Mott-Isolatoren und fermionische Bandisolatoren. Trotz identischer Dichteverteilungen innerhalb des Gitters, weisen die Korrelationen von Bosonen und Fermionen entgegengesetzte Vorzeichen auf. Mit diesen Messungen gelingt es erstmals, fermionisches Antibunching an freien neutralen Atomen zu beobachten und innerhalb einer selben Apparatur mit dem bosonischen Bunching zu vergleichen. Neben dem Nachweis dieses fundamentalen Quanteneffektes lässt sich die Ordnung und die Temperatur der Fermionen im Gitter bis hinauf zur Fermi-Temperatur bestimmen. Damit erweist sich die Korrelationsanalyse als ein robustes Verfahren, mit dem sich in Zukunft noch weitaus komplexere Quantenphasen in optischen Gittern untersuchen lassen.



## Abstract

In the past couple of years atomic quantum gases in optical lattices have evolved into a fascinating research field of increasing interdisciplinary importance. Ultracold atoms trapped in periodic potentials of light represent an ideal model system to study fundamental questions of modern solid state and many-body physics. In the present work new experimental methods are presented for analysing and manipulating quantum states in optical lattices. By analysing noise correlations we determine the atomic order in the lattice and for the first time demonstrate fermionic antibunching with free neutral atoms.

Basis of these experiments is a newly developed apparatus allowing the simultaneous preparation of degenerate quantum gases of bosonic  $^{87}\text{Rb}$  and fermionic  $^{40}\text{K}$  atoms and permitting the investigation of these gases in a versatile three-dimensional optical lattice. The apparatus features a series of technical innovations: New coil and trap configurations provide an excellent optical access to the prepared atomic ensembles and allow the generation of strong homogeneous magnetic fields at low dissipated powers. These are important prerequisites to produce well-defined lattice potentials and to precisely manipulate the atomic interactions via magnetic Feshbach resonances. The optical potential is generated by superimposing a crossed dipole trap and a blue-detuned three-dimensional optical lattice. This configuration enables the creation of both very deep and very homogeneous lattice potentials. Moreover, the external confinement can be controlled independently from the lattice depth, and the freely tunable wavelength gives access to species-specific lattice potentials. These features and technologies provide us with an exceptionally flexible platform for the study of precisely tailored many-body quantum states in periodic potentials.

The independent external confinement for the first time allows switching a Fermi gas from a metallic to an insulating state, and vice versa, only by changing its compression. Preliminary measurements of the associated dynamics are presented and all results are compared with numerical simulations. These measurements open up a new avenue to detect bosonic and fermionic Mott insulators via their characteristic compressibility.

As further diagnostic tool, noise correlation analysis of time of flight images is demonstrated. By evaluating Hanbury Brown and Twiss (HBT) correlations in the quantum noise of expanding atom clouds the microscopic atomic order in the lattice is revealed. Starting point for the measurements are fully spin-polarised bosonic Mott and fermionic band insulators. Despite identical in-trap distributions, the correlations of bosons and fermions show opposite signs. These measurements constitute the first proof for fermionic antibunching of free neutral atoms and allow the comparison of bosonic and fermionic HBT effects within the same apparatus for the very first time. Besides the demonstration of these fundamental quantum effects the method is used to determine the ordering and temperature of the fermions in the periodic potential. Hence noise correlation analysis is proven to be a robust tool for future investigations of even more complex many-body quantum states in optical lattices.





*Wenn Du ein Schiff bauen willst, so trommle nicht Männer zusammen, um Holz zu beschaffen, Werkzeuge vorzubereiten, Aufgaben zu vergeben und die Arbeit einzuteilen, sondern lehre die Männer die Sehnsucht nach dem weiten endlosen Meer.*

*– Antoine de Saint-Exupéry zugeschrieben*



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theorie der Quantengase</b>	<b>7</b>
2.1	Quantenstatistik und zweite Quantisierung . . . . .	7
2.1.1	Zweite Quantisierung . . . . .	8
2.1.2	Bose-Einstein- und Fermi-Dirac-Statistik . . . . .	11
2.1.3	Dichteoperator . . . . .	12
2.1.4	Quantenentartung . . . . .	13
2.2	Fermigas . . . . .	14
2.2.1	Thermodynamische Betrachtungen . . . . .	14
2.2.2	Dichte- und Impulsverteilungen . . . . .	20
2.2.3	Thomas-Fermi-Näherung . . . . .	24
2.3	Bosegas . . . . .	27
2.3.1	Thermodynamische Betrachtungen . . . . .	27
2.3.2	Beschreibung des Bose-Einstein-Kondensates . . . . .	29
2.3.3	Freie Expansion beim Entlassen aus einer harmonischen Falle . . . . .	35
2.4	Wechselwirkende Bose-Fermi-Mischungen . . . . .	36
2.4.1	Selbstkonsistente Mean-Field-Berechnung . . . . .	36
2.4.2	Mischungen mit variabler Wechselwirkung . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse</b>	<b>47</b>
3.1	Vakuumsystem . . . . .	48
3.2	Atomquellen . . . . .	50
3.2.1	Aufbau und Eigenschaften der Dispensoren . . . . .	50
3.2.2	Herstellung der angereicherten Kalium-Dispensoren . . . . .	52
3.2.3	Schleusensystem: Montage und Einbau der Dispensoren . . . . .	54
3.3	Laserkühlung . . . . .	59
3.3.1	Prinzip der magneto-optischen Falle . . . . .	59
3.3.2	Kühlschemata und Termschemata für Rubidium und Kalium . . . . .	60
3.3.3	Laserstabilisierung und Spektroskopie . . . . .	61
3.3.4	Laseraufbau und Lasersystem . . . . .	66
3.3.5	Laserkühlung und -präparation . . . . .	71
3.4	Magnetfallen und Transport . . . . .	80
3.4.1	Transfer in die magnetische Quadrupolfalle . . . . .	80
3.4.2	Magnetischer Transport . . . . .	80

# Inhaltsverzeichnis

---

3.4.3	QUIC-Falle . . . . .	82
3.5	Evaporatives und sympathetisches Kühlen . . . . .	86
3.5.1	Kühlen in der Magnetfalle . . . . .	87
3.5.2	Kühlen in der gekreuzten Dipolfalle . . . . .	91
3.5.3	Grenzen beim sympathetischen Kühlen der Fermionen . . . . .	94
3.6	Abbildungssystem und Auswertung . . . . .	98
3.6.1	Absorptionsabbildung . . . . .	99
3.6.2	Bestimmung von Temperatur und Atomzahl . . . . .	100
3.6.3	Abbildungssystem . . . . .	103
3.7	Zustandspräparation . . . . .	107
3.8	Technische Weiterentwicklungen . . . . .	109
<b>4</b>	<b>Optische Potentiale</b>	<b>113</b>
4.1	Optische Dipolpotentiale . . . . .	114
4.1.1	Fokussierter Gauß-Strahl . . . . .	116
4.1.2	Gekreuzte Dipolfalle . . . . .	118
4.1.3	Gekreuzte Dipolfalle im Schwerefeld . . . . .	120
4.2	Optische Gitterpotentiale . . . . .	127
4.2.1	Eindimensionales Gitter . . . . .	127
4.2.2	Mehrdimensionale Gitter . . . . .	128
4.2.3	Externes Potential . . . . .	129
<b>5</b>	<b>Zustände im Gitter, Präparation und Analyse</b>	<b>135</b>
5.1	Einteilchenzustände im homogenen periodischen Potential . . . . .	136
5.1.1	Bloch-Zustände und Bandstruktur . . . . .	136
5.1.2	Aus der Sicht der Quantenoptik . . . . .	140
5.1.3	Impulsverteilung von Bloch-Zuständen . . . . .	144
5.1.4	Wannier-Funktionen und Matrixelemente . . . . .	145
5.1.5	Mehrdimensionale Gitter . . . . .	150
5.2	Vielteilchenzustände im inhomogenen periodischen Potential . . . . .	153
5.2.1	Bose-Einstein-Kondensat im flachen Gitter . . . . .	153
5.2.2	Entartetes Fermigas . . . . .	156
5.3	Transfer ins optische Gitter . . . . .	167
5.3.1	Adiabatisch in Bezug zur Bandstruktur . . . . .	168
5.3.2	Temperaturentwicklung des Fermigases . . . . .	168
5.3.3	Adiabatisch in Bezug zur räumlichen Umverteilung . . . . .	169
5.4	Analyse der Zustände im Gitter . . . . .	173
5.4.1	Analyse der Impulsverteilung . . . . .	173
5.4.2	Analyse der Kristallimpulsverteilung . . . . .	179
5.5	Hubbard-Modell . . . . .	183
5.5.1	Bose-Hubbard-Modell . . . . .	183
5.5.2	Phasendiagramm . . . . .	185

5.5.3	Mott-Isolator im inhomogenen Potential . . . . .	188
5.5.4	Experimentelle Beobachtung des Phasenübergangs . . . . .	190
5.5.5	Fermi-Hubbard-Modell . . . . .	191
5.5.6	Bose-Fermi-Mischungen . . . . .	195
<b>6</b>	<b>Aufbau und Merkmale des Gitters</b>	<b>201</b>
6.1	Aufbau des optischen Gitters und der Dipolfalle . . . . .	201
6.1.1	Justage von Dipolfalle und Gitter . . . . .	206
6.1.2	Kalibrierung von Dipolfalle und Gitter . . . . .	209
6.2	Merkmale der Dipolfalle und des Gitters . . . . .	213
6.2.1	Gekreuzte Dipolfalle . . . . .	214
6.2.2	Kombination von Dipolfalle und Gitter . . . . .	214
6.2.3	Spezies-abhängige Gitter . . . . .	215
<b>7</b>	<b>Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern</b>	<b>221</b>
7.1	Universelle Eigenschaften . . . . .	222
7.1.1	Kriterien für das Auftreten von Bandisolatoren . . . . .	223
7.1.2	Besetzungszahlen und Kristallimpulsverteilungen . . . . .	225
7.2	Gleichgewichtseigenschaften . . . . .	228
7.2.1	Berücksichtigung angeregter Bänder . . . . .	228
7.2.2	Berücksichtigung endlicher Temperaturen . . . . .	230
7.2.3	Thermometrie im Gitter . . . . .	232
7.2.4	Temperaturentwicklung beim Transfer ins Gitter . . . . .	233
7.2.5	Ab-initio-Berechnungen und experimentelle Ergebnisse . . . . .	238
7.3	Dynamik . . . . .	246
7.3.1	Dynamik eines Teilchens . . . . .	249
7.3.2	Quantenpendel . . . . .	252
7.3.3	Projektion eines Vielteilchenzustandes . . . . .	253
7.3.4	Universelle Dynamik . . . . .	255
7.3.5	Auflösung eines Bandisolators . . . . .	256
<b>8</b>	<b>Korrelationsanalyse</b>	<b>267</b>
8.1	Korrelationen in Lichtfeldern . . . . .	268
8.1.1	Michelson-Interferometer und transversale Kohärenz . . . . .	269
8.1.2	Mach-Zehnder-Interferometer und longitudinale Kohärenz . . . . .	274
8.1.3	Kohärenz- und Modenvolumen . . . . .	276
8.1.4	Intensitätsinterferometer . . . . .	279
8.2	Hanbury Brown und Twiss-Effekt . . . . .	282
8.2.1	HBT-Experiment . . . . .	283
8.2.2	Photodetektionswahrscheinlichkeiten . . . . .	284
8.2.3	Quantentheoretische Beschreibung . . . . .	286
8.2.4	HBT-Effekt in bosonischen und fermionischen Quantenfeldern . . . . .	293

# Inhaltsverzeichnis

---

8.3	Korrelationen in atomaren Ensembles . . . . .	298
8.4	Korrelationsanalyse von Zuständen in optischen Gittern . . . . .	301
8.4.1	Mittlere Dichteverteilung . . . . .	302
8.4.2	Atomares Rauschen und Dichtekorrelationsfunktion . . . . .	303
8.4.3	Verschiedene Erklärungen des HBT-Effektes . . . . .	305
8.4.4	Präparation der Quantengase . . . . .	311
8.4.5	Durchführung der Korrelationsanalyse . . . . .	312
8.4.6	Signal-Rausch-Verhältnis . . . . .	316
8.4.7	Auswirkungen der Auflösung auf die Korrelationsamplituden . . . . .	318
8.4.8	Struktur und Temperaturverhalten der Korrelationspeaks . . . . .	323
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>333</b>
	<b>Anhang</b>	<b>339</b>
A	Rubidiumdaten . . . . .	340
B	Kaliumdaten . . . . .	342
C	Häufig verwendete Naturkonstanten . . . . .	344
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>345</b>
	<b>Veröffentlichungen</b>	<b>371</b>

# 1 Einleitung

In einem visionären Vortrag formulierte Richard Feynman 1982 die Idee, mittels eines sehr gut kontrollierbaren, künstlichen Quantensystems andere, experimentell schwer zugängliche Vielteilchensysteme zu simulieren [1]. Beeindruckende Fortschritte in den Methoden Atome zu kühlen und zu manipulieren, haben die Verwirklichung eines solchen Quantensimulators in greifbare Nähe gerückt. So lassen sich inzwischen mit ultrakalten Atomen erste numerisch anspruchsvolle Modelle aus der theoretischen Festkörperphysik experimentell überprüfen.

Mit der Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten in verdünnten atomaren Gasen im Jahre 1995 [2, 3] wurde es möglich, grundlegende Phänomene, wie zum Beispiel Materiewelleninterferenz [4, 5], Suprafluidität und Vortizes [6–8] an einem sehr reinen und makroskopischen Quantensystem zu studieren. Das verdünnte Kondensat lässt sich im Rahmen einer Mean-Field-Theorie durch eine einzelne makroskopische Wellenfunktion beschreiben und entspricht daher dem einfachsten und grundlegendsten Zustand, den ein Vielteilchensystem einnehmen kann.

Stimuliert durch die zahlreichen Analogien zur Physik der kondensierten Materie richtet sich die Aufmerksamkeit der Forschung zunehmend auf atomare Gase im sogenannten stark korrelierten Regime. In diesem Regime zeichnen sich die Vielteilchensysteme durch eine weitaus komplexere und reichere Physik aus und lassen sich nicht mehr durch eine einfache Wellenfunktion beschreiben. Stattdessen wird das Verhalten der Systeme von starken interatomaren Wechselwirkungen geprägt, welche quantenmechanische Korrelationen zwischen den einzelnen Teilchen hervorrufen.

Um in dieses faszinierende Regime vorzudringen und ein spezifisches Modell der Festkörperphysik abzubilden, schlugen Dieter Jaksch und Mitarbeiter 1998 vor, die ultrakalten Atome in einen künstlichen Kristall aus Licht – ein sogenanntes optisches Gitter – zu transferieren [9]. Hierbei handelt es sich um ein periodisches Potential, das aus der Interferenz von entgegengesetzt propagierenden Laserstrahlen hervorgeht. Durch die Dipolkraft werden die Atome in den Knoten bzw. den Bäuchen der optischen Stehwellen gefangen. Mit zunehmender Laserleistung nimmt die Tunnelrate zwischen den einzelnen Gitterplätzen rasch ab, wodurch die kinetische Energie der Atome zugunsten ihrer Wechselwirkungsenergie unterdrückt wird. Auf diese Weise konnte 2002 in einem richtungsweisenden Experiment mit einem Bosegas in einem dreidimensionalen Gitter der Quantenphasenübergang von einem superfluiden Zustand zu einem Mott-Isolator beobachtet werden [10].

Alternativ lässt sich die Stärke der Wechselwirkung auch direkt über die interatomaren Streueigenschaften mittels einer sogenannten Feshbach-Resonanz beeinflussen. Dabei wird durch Anlegen eines Magnetfeldes das Energieniveau eines gebundenen molekularen

# 1 Einleitung

---

Zustandes in Resonanz mit der Energie des stoßenden Atompaars gebracht. Leider nehmen hierdurch bei bosonischen Atomen neben der Wechselwirkungsstärke auch die inelastischen Verluste drastisch zu. Ganz anders verhält es sich in einem Gas aus fermionischen Atomen. Ein solches Gas wurde erstmals 1999 in die Quantenentartung überführt [11]. Handelt es sich bei dem Fermigas um eine zweikomponentige Spinmischung, so lässt sich über eine Feshbach-Resonanz die interatomare Wechselwirkung verstärken, während inelastische Dreikörperstöße durch das Pauli-Prinzip unterdrückt werden. Dieser glückliche Umstand erlaubte es in 2003, erstmals molekulare Kondensate aus gepaarten Fermionen zu erzeugen [12–14]. Wenig später ließ sich das Phänomen der fermionischen Suprafluidität im gesamten Crossover-Bereich zwischen molekularem Kondensat (BEC) und Bardeen-Cooper-Schrieffer(BCS)-Zustand untersuchen [15–17].

In jüngster Zeit geht die Entwicklung dahin, die bewährten experimentellen Techniken miteinander zu kombinieren und somit zunehmend komplexere Vielteilchensysteme zu erzeugen. Seit der Beobachtung des bosonischen Mott-Isolators wurden eine Vielzahl weiterer Quantenphasen in optischen Gittern realisiert, darunter ein- und zweidimensionale Mott-Phasen [18, 19], Tonks-Girardeau-Gase [20, 21], fermionische Bandisolatoren [22] oder gepaarte Fermionen in optischen Gittern [23, 24]. Durch die Erforschung dieser Systeme erhofft man sich, insbesondere neues Licht auf ungeklärte Fragen der Festkörperphysik zu werfen. So lässt sich zum Beispiel das fermionische Hubbard-Modell – das einer vereinfachten Beschreibung stark korrelierter Elektronen in Festkörpern dient [25] – hervorragend mit wechselwirkenden Fermionen in optischen Gittern realisieren [26, 27]. Zwar verfügt der zugehörige Hamilton-Operator über eine einfache Struktur, doch stellt dessen Lösung eine große Herausforderung für die moderne Vielteilchentheorie dar. Die neue Generation von Gitterexperimenten erlaubt es, das Phasendiagramm des Hubbard-Modells anhand eines extrem reinen und vollständig kontrollierbaren Vielteilchensystems zu studieren und mit theoretischen Ergebnissen zu vergleichen.

Möglicherweise können ultrakalte Atome auch zu einem besseren Verständnis der Hochtemperatur-Supraleitung beitragen [28], denn bislang ist unklar, ob sich dieses Phänomen im Rahmen des Hubbard-Modells beschreiben lässt. Allgemein wird davon ausgegangen, dass die  $d$ -Wellen-Paarung in Kuprate-Supraleitern durch Spin-Fluktuationen hervorgerufen wird [29], welche bei geeigneter Löcherdotierung in der Nähe einer antiferromagnetisch geordneten Mott-Isolator-Phase auftreten [30, 31]. Die Darstellung eines solchen Antiferromagneten mit fermionischen Atomen in optischen Gittern wäre nicht nur ein wichtiger Meilenstein auf dem Weg zu einem mikroskopischen Verständnis der Hochtemperatur-Supraleitung, sondern würde auch ganz neue Einblicke in den Quantenmagnetismus und das Verhalten von Spinflüssigkeiten eröffnen [32].

Mit Bose-Fermi-Mischungen lässt sich das Spektrum der in optischen Gittern realisierbaren Quantenphasen noch deutlich erweitern [33–35]. Über die Interspezieswechselwirkung werden Teilchen verschiedener Statistik miteinander verknüpft und somit Phänomene zugänglich, die erheblich komplexer sind als im rein bosonischen oder fermionischen Fall. Das große Interesse für Bose-Fermi-Mischungen in optischen Gittern spiegelt sich in



---

einer rasant zunehmenden Anzahl von theoretischen Veröffentlichungen wider. So werden für diese Systeme eine Fülle von Quantenphasen, wie zum Beispiel Supersolids [36], bosonen induzierte Supraflüssigkeiten [37] oder Polaronenzustände [38] vorhergesagt.

Um diese teils recht exotischen Quantenphasen studieren zu können, müssen sich diese nicht nur präparieren, sondern auch einfach beobachten und zuverlässig nachweisen lassen. Mangels makroskopischer Kohärenzen ist es oftmals leider nicht möglich, die Vielteilchensysteme anhand der mittleren Dichteverteilungen in Flugzeitaufnahmen zu identifizieren. Jedoch zeigten Ehud Altman und dessen Mitarbeiter in einer theoretischen Arbeit, dass sich viele der Quantenphasen durch eine Korrelationsanalyse des atomaren Rauschens in den Flugzeitaufnahmen nachweisen lassen [39]. Dieses Verfahren ist analog zur Intensitätsinterferometrie an Lichtfeldern [40] oder zur Analyse des Stromrauschens in mesoskopischen Leiterstrukturen [41, 42]. Das Prinzip basiert auf einem grundlegenden Quanteneffekt, der vor mehr als fünfzig Jahren entdeckt wurde. Damals zeigten Robert Hanbury Brown und Richard Twiss in einem bahnbrechenden Experiment, dass die Photonen einer chaotischen Lichtquelle bevorzugt gebündelt auf zwei unabhängigen Detektoren eintreffen [43]. Durch die Entdeckung dieses sogenannten Bunching-Effektes wurde die Bedeutung von Photonenkorrelationen für die Charakterisierung von Lichtfeldern deutlich und die Entwicklung der modernen Quantenoptik angestoßen. Beim Photonen-Bunching handelt es sich um eine konstruktive Quanteninterferenz zwischen Amplituden, welche zwei ununterscheidbare Teilchen beschreiben. Dabei ist der additive Charakter auf die bosonische Natur der Photonen zurückzuführen.

Durch das Kühlen und Erzeugen atomarer Ensembles mit hohen Phasenraumdichten ist es in den letzten Jahren gelungen, den Hanbury Brown und Twiss-Effekt auch an bosonischen Atomen zu beobachten [44–49]. Im Gegensatz hierzu sollten fermionische Atome sogenanntes Antibunching aufweisen, also die Tendenz sich gegenseitig zu meiden. Das Antibunching beruht auf einer destruktiven Zwei-Teilchen-Interferenz und ist unmittelbar mit dem Pauli-Prinzip verknüpft, welches eine Mehrfachbesetzung desselben Quantenzustandes durch identische Fermionen verbietet. In dem später in dieser Arbeit beschriebenen Experiment wird fermionisches Antibunching erstmals an neutralen Atomen nachgewiesen [50] und innerhalb derselben Apparatur mit dem bosonischen Bunching verglichen. Dazu werden fermionische Bandisolatoren aus  $^{40}\text{K}$ -Atomen bzw. bosonische Mott-Isolatoren aus  $^{87}\text{Rb}$ -Atomen aus einem tiefen optischen Gitter entlassen und während der freien Expansion mittels Absorptionsabbildung aufgenommen. Anschließend wird das in den Absorptionaufnahmen sichtbare atomare Rauschen mittels einer Korrelationsanalyse ausgewertet. Aufgrund der vernachlässigbaren Wechselwirkungen zwischen den neutralen Atomen lassen sich die unterschiedlichen für Bosonen und Fermionen beobachteten Korrelationen allein auf die verschiedenen Quantenstatistiken der Teilchen zurückführen. Darüber hinaus gibt die Struktur der Korrelationen unmittelbar Auskunft über die Ordnung im Gitter. Mit dem hier demonstrierten Verfahren verfügt man über ein leistungsfähiges Werkzeug, mit dem sich zukünftig auch komplexere Quantenphasen wie der erwähnte Antiferromagnet nachweisen lassen.

# 1 Einleitung

---

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein neues Experiment entworfen und realisiert, mit dem sich entartete bosonische und fermionische Quantengase aus  $^{87}\text{Rb}$  und  $^{40}\text{K}$  präparieren und in einem dreidimensionalen (3D) optischen Gitter untersuchen lassen. Das Design bietet einen sehr guten optischen Zugang zu den präparierten Ensembles und ermöglicht es, starke homogene Magnetfelder bei geringen dissipierten Leistungen zu erzeugen. Dies sind wichtige Voraussetzungen, um hochqualitative Gitterpotentiale realisieren und die interatomaren Wechselwirkungen mittels Feshbach-Resonanzen beeinflussen zu können. Das optische Potential geht aus der Überlagerung einer gekreuzten Dipolfalle und eines blauverstimmtten 3D-Gitters hervor. Dies erlaubt es, nicht nur sehr tiefe und recht homogene Gitterpotentiale zu erzeugen, sondern gestattet es zudem, den externen Einschluss unabhängig von der Gittertiefe zu variieren. So konnte ein Fermigas erstmals allein über dessen Kompression zwischen einem metallischen und einem isolierenden Zustand hin- und hergeschaltet und die entsprechende Dynamik beobachtet werden [51, 52]. Solche Messungen eröffnen die Perspektive, bosonische oder fermionische Mott-Isolatoren anhand ihrer charakteristischen Kompressibilität nachzuweisen [27] oder Transportphänomene bei starken Wechselwirkungen zu untersuchen [53]. Der Aufbau ermöglicht es darüber hinaus, sämtliche Parameter des Hubbard-Modells – also die Tunnelrate, die interatomare Wechselwirkung und den externen Einschluss – unabhängig voneinander zu kontrollieren. Außerdem kann in der Bose-Fermi-Mischung über die frei einstellbare Gitterwellenlänge die relative Beweglichkeit der beiden Spezies beeinflusst werden. Im Zusammenspiel mit den demonstrierten Analyseverfahren bietet der Aufbau eine außergewöhnlich flexible Plattform, um eine große Zahl von Fragestellungen der modernen Vielteilchenphysik anhand maßgeschneiderter Quantenzustände zu untersuchen.

## **Gliederung der Arbeit**

Das zweite Kapitel befasst sich mit den grundlegenden statistischen und thermodynamischen Eigenschaften harmonisch gefangener Bose- und Fermigase. Wichtige Relationen für die Analyse der präparierten Quantengase werden hergeleitet, darunter die Dichteverteilungen des idealen Fermigases, des schwachwechselwirkenden Bosegases und der wechselwirkenden Bose-Fermi-Mischung in der harmonischen Falle.

Im dritten Kapitel wird der experimentelle Aufbau vorgestellt, mit dem sich die entarteten Bose- und Fermigase erzeugen lassen. Die physikalischen Grundlagen des Experiments als auch die experimentellen Schritte und deren technische Umsetzung werden umfassend dargestellt, angefangen bei den gepulsten Atomquellen bis hin zur Absorptionsabbildung. Wichtige Punkte beim Design und Aufbau des neuen Experiments sowie zukünftige Weiterentwicklungen werden besprochen.

Das vierte Kapitel befasst sich mit den optischen Potentialen der gekreuzten Dipolfalle und des dreidimensionalen Gitters. Mittels exakter numerischer Berechnungen und Näherungslösungen wird der Einfluss der Schwerkraft auf die gekreuzte Dipolfalle untersucht. Die Ergebnisse erweisen sich als wichtig für die evaporative und sympathetische Kühlung

---

in der Dipolfalle. Schließlich werden präzise Formeln für das externe Potential des rot- und blauverstimmten Gitters unter Berücksichtigung von Reflexionsverlusten, endlichem Tunneln und quantenmechanischen Nullpunktsenergien hergeleitet.

Das fünfte Kapitel behandelt die atomaren Zustände im optischen Gitter, deren Präparation und Analyse. Die theoretischen Betrachtungen der Gitterzustände gehen aus von den Bloch-Wellen im perfekt periodischen Potential, über die exakten Einteilchenspektren des inhomogenen Gitters bis hin zu den Hubbard-Modellen von wechselwirkenden Bosonen, Fermionen und Bose-Fermi-Mischungen. Die Kriterien für den adiabatischen Transfer der Atome ins optische Gitter sowie die Analyse der Impuls- und Kristallimpulsverteilungen werden diskutiert. Die erstmalige Erzeugung eines bosonischen Mott-Isolators in einem blauverstimmten Gitter mit schwachem externen Einschluss wird vorgestellt.

Das sechste Kapitel schildert den optischen Aufbau, die Justage sowie die Kalibrierung der gekreuzten Dipolfalle und des dreidimensionalen Gitters. Besondere Merkmale und mögliche Anwendungen der kombinierten optischen Potentiale werden diskutiert, wie zum Beispiel der Einsatz als spezie-abhängiges Gitter.

Im siebten Kapitel werden auf numerischer Basis die Gleichgewichts- und dynamischen Eigenschaften von nicht-wechselwirkenden Fermigasen in inhomogenen Gittern untersucht. Allgemeine Kriterien für die Ausbildung des Bandisolators werden aufgestellt sowie universelle Beziehungen zwischen den Besetzungszahlen im Gitter und der Kristallimpulsverteilung aufgedeckt. Anschließend werden Ab-initio-Berechnungen der Dichte- und Kristallimpulsverteilungen unter Berücksichtigung endlicher Temperaturen und höherer Bänder durchgeführt und mit ersten experimentellen Messungen verglichen. In diesem Zusammenhang wird erstmals die Kompression eines Fermigases in einem statischen periodischen Potential demonstriert. Der direkte Vergleich von berechneten und experimentellen Daten eröffnet zudem einen neuen Ansatz für die Thermometrie in optischen Gittern. Die exakte Temperaturentwicklung beim adiabatischen Transfer ins Gitter wird berechnet und ein Weg aufgezeigt, wie sich adiabatisches Heizen vermeiden lässt. Im letzten Teil des Kapitels wird die Dynamik in ein- und zweidimensionalen Systemen nach einer abrupten Veränderung der Gitterparameter simuliert. Neben der Schwerpunktbewegung werden erstmals die zeitlichen Entwicklungen der Orts- und Kristallimpulsverteilungen berechnet. Es folgt eine Gegenüberstellung der Ergebnisse zu vorläufigen Messungen.

Das achte Kapitel befasst sich mit der Methode der räumlichen Korrelationsanalyse frei expandierender Atomwolken in Theorie und Experiment. Die physikalischen Prinzipien werden zunächst am Beispiel von optischen Interferometern und der elektromagnetischen Kohärenztheorie eingeführt und lassen sich dann auf die Atomoptik übertragen. Die erstmalige Beobachtung von fermionischem Antibunching an neutralen Atomen wird beschrieben. Aus dem Vergleich der gemessenen Rauschkorrelationen mit den theoretischen Berechnungen lassen sich wichtige Informationen über den Zustand im Gitter gewinnen.

Das siebte und achte Kapitel stellen den Kern dieser Arbeit dar. Im Ausblick werden mögliche zukünftige Anwendungen der präsentierten Ergebnisse angesprochen.

# 1 Einleitung

---

## 2 Theorie der Quantengase

Nach einer kurzen Erinnerung an die Quantenstatistik [54] und den Formalismus der zweiten Quantisierung [55] befasst sich dieses Kapitel mit den grundlegenden statistischen und thermodynamischen Eigenschaften fermionischer und bosonischer Gase. Anschließend werden die Dichteverteilungen der ultrakalten Quantengase in der *harmonischen* Falle sowie deren freies Expansionsverhalten untersucht. Dabei werden wir sehen, dass beim Bosegas die interatomare Wechselwirkung eine bedeutende Rolle für die Dichteverteilung innerhalb der Falle und nach dem Entlassen aus derselben spielen. Der letzte Abschnitt befasst sich mit den komplexen Wechselwirkungseffekten in Bose-Fermi-Mischungen und untersucht die zugehörigen Dichteverteilungen im Rahmen eines selbstkonsistenten Mean-Field-Modells.

### 2.1 Quantenstatistik und zweite Quantisierung

Wir betrachten  $N$  identische Teilchen in einem System, das durch eine Basis von Einteilchenzuständen  $\{\varphi_i(\mathbf{r})\}$  mit  $i = 1, 2, \dots, \infty$  beschrieben wird. Die Variable  $\mathbf{r}$  stehe für den Orts- und Spinfreiheitsgrad eines Teilchens. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude, Teilchen 1 im Zustand  $\varphi_{i_1}(\mathbf{r}_1)$ , Teilchen 2 im Zustand  $\varphi_{i_2}(\mathbf{r}_2)$  usw. vorzufinden, sei durch die Vielteilchenwellenfunktion  $\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  gegeben. Da die Teilchen prinzipiell ununterscheidbar sind, muss die Wahrscheinlichkeit invariant unter der Vertauschung zweier Teilchen sein:

$$|\Psi(\dots, \mathbf{r}_k, \dots, \mathbf{r}_l, \dots)|^2 = |\Psi(\dots, \mathbf{r}_l, \dots, \mathbf{r}_k, \dots)|^2. \quad (2.1)$$

Demnach gibt es zwei Möglichkeiten, wie sich der Vielteilchenzustand unter Teilchenvertauschung verhält:

$$\Psi(\dots, \mathbf{r}_k, \dots, \mathbf{r}_l, \dots) = \pm \Psi(\dots, \mathbf{r}_l, \dots, \mathbf{r}_k, \dots). \quad (2.2)$$

Aus dem Prinzip der Ununterscheidbarkeit folgt somit unmittelbar, dass alle Teilchen in zwei fundamentale Klassen unterteilt sind: die Bosonen (für die das obere Vorzeichen gilt) und die Fermionen (für die das untere Vorzeichen gilt). Das Spin-Statistik-Theorem aus der Quantenfeldtheorie besagt, dass Teilchen mit ganzzahligem Spin Bosonen und Teilchen mit halbzahligem Spin Fermionen sind [56, 57]. Betrachten wir den Fall, dass sich zwei Fermionen im selben Einteilchenzustand befinden, so verschwindet gemäß Gleichung 2.2 der zugehörige Vielteilchenzustand:

$$\Psi(\dots, \mathbf{r}_k, \dots, \mathbf{r}_k, \dots) = 0. \quad (2.3)$$

## 2 Theorie der Quantengase

Hierin drückt sich das Pauli-Prinzip aus, welches Fermionen eine Mehrfachbesetzung derselben Einteilchenzustände verbietet. Bei Bosonen gibt es eine solche Beschränkung nicht.

Der bosonische Vielteilchenzustand lässt sich eindeutig durch die Besetzungszahlen  $n_i$  der verschiedenen Einteilchenzustände  $\varphi_i$  charakterisieren und ist durch die vollständig symmetrisierte Vielteilchenwellenfunktion

$$\Psi_N^{\text{Bose}}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \left( \frac{n_1! n_2! \dots n_\infty!}{N!} \right)^{1/2} \sum_{\{n_1, n_2, \dots, n_\infty\}} \varphi_{i_1}(\mathbf{r}_1) \varphi_{i_2}(\mathbf{r}_2) \dots \varphi_{i_N}(\mathbf{r}_N) \quad (2.4)$$

gegeben. Die Summe läuft über alle kombinatorischen Möglichkeiten,  $N$  Teilchen so über die verschiedenen Einteilchenzustände zu verteilen, dass sich  $n_1$  Teilchen im Zustand  $\varphi_1$ ,  $n_2$  Teilchen im Zustand  $\varphi_2$  usw. befinden. Hierfür gibt es insgesamt  $N!/(n_1! n_2! \dots)$  Möglichkeiten, woraus sich auch der Normierungsfaktor erklärt. Bei Fermionen sind die Besetzungszahlen der Einteilchenzustände in Übereinstimmung mit dem Pauli-Prinzip auf  $n_i = 0$  oder 1 beschränkt und die vollständig antisymmetrisierte Vielteilchenwellenfunktion lässt sich durch eine Slater-Determinante darstellen:

$$\Psi_N^{\text{Fermi}}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \varphi_{i_1}(\mathbf{r}_1) & \varphi_{i_1}(\mathbf{r}_2) & \dots & \varphi_{i_1}(\mathbf{r}_N) \\ \varphi_{i_2}(\mathbf{r}_1) & \varphi_{i_2}(\mathbf{r}_2) & \dots & \varphi_{i_2}(\mathbf{r}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{i_N}(\mathbf{r}_1) & \varphi_{i_N}(\mathbf{r}_2) & \dots & \varphi_{i_N}(\mathbf{r}_N) \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

Die Eigenschaften der Determinante gewährleisten, dass die Wellenfunktion antisymmetrisch unter der Vertauschung zweier Teilchen ist und für übereinstimmende Einteilchenzustände verschwindet.

### 2.1.1 Zweite Quantisierung

Im Formalismus der zweiten Quantisierung behandelt man die Vielteilchenprobleme in einer Basis aus vollständig symmetrisierten bzw. antisymmetrisierten Zuständen [55, 58]. Hierdurch werden die Symmetrieeigenschaften implizit in den Berechnungen berücksichtigt. Der vollständig symmetrisierte bosonische  $N$ -Teilchenzustand aus Gleichung 2.4 entspricht einem dieser Basiszustände und lässt sich eindeutig über die Besetzungszahlen  $n_i$  der Einteilchenzustände  $\varphi_i(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | i \rangle$  charakterisieren:  $|\Psi_N^{\text{Bose}}\rangle = |n_1, n_2, \dots\rangle$ . In dem Formalismus fasst man alle Basiszustände für  $N = 0, 1, 2, \dots$  in einem erweiterten Raum, den sogenannten Fock-Raum, zusammen und definiert Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, die vom Unterraum mit  $N$ -Teilchen zum Unterraum mit  $N \pm 1$  Teilchen führen:

$$\hat{a}_i^\dagger | \dots, n_i, \dots \rangle := \sqrt{n_i + 1} | \dots, n_i + 1, \dots \rangle. \quad (2.6)$$

Durch Adjungieren und bilden des Skalarprodukts folgt:

$$\hat{a}_i | \dots, n_i, \dots \rangle = \begin{cases} \sqrt{n_i} | \dots, n_i - 1, \dots \rangle & \text{für } n_i \geq 1 \\ 0 & \text{für } n_i = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

## 2.1 Quantenstatistik und zweite Quantisierung

Aus den obigen Relationen und der Vollständigkeit des Fock-Raumes ergeben sich die bosonischen Kommutationsregeln:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j]_- = 0, \quad [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger]_- = 0, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger]_- = \delta_{ij}. \quad (2.8)$$

Hierbei gilt  $[A, B]_- = AB - BA$ . Die eingeführten Basiszustände sind Eigenzustände des Teilchenzahloperators  $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ :

$$\hat{n}_i |\dots, n_i, \dots\rangle = n_i |\dots, n_i, \dots\rangle. \quad (2.9)$$

In gleicher Weise lässt sich auch ein Fock-Raum für Fermionen einführen. Damit die Besetzungszahlen in Übereinstimmung mit dem Pauli-Prinzip auf  $n_i = 0$  oder  $1$  beschränkt bleiben, müssen die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren bei Fermionen Antikommutationsregeln gehorchen:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j]_+ = 0, \quad [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger]_+ = 0, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger]_+ = \delta_{ij}. \quad (2.10)$$

Hierbei gilt  $[A, B]_+ = AB + BA$ . Aus den Antikommutationsregeln folgt  $(\hat{a}_i^\dagger)^2 = 0$ , was die Unmöglichkeit der Doppelbesetzung impliziert.

### Vielteilchengrundzustände

Als Beispiel betrachten wir  $N$  nicht wechselwirkende Bosonen (ohne Spin) in einem Potential mit dem Einteilchengrundzustand  $|i \equiv 0\rangle$ . Der  $N$ -Teilchengrundzustand ergibt sich durch  $N$ -fache Anwendung des Erzeugungsoperators  $\hat{a}_0^\dagger$  auf den Vakuumzustand (Zustand ohne Teilchen) und lautet:

$$|\Psi_N^{\text{Bose}}\rangle = |N, 0, 0, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} (\hat{a}_0^\dagger)^N |0, 0, 0, \dots\rangle. \quad (2.11)$$

Hierdurch wird das Bose-Einstein-Kondensat beschrieben, bei dem alle Bosonen denselben Einteilchengrundzustand besetzen.

Bei Fermionen ist der  $N$ -Teilchengrundzustand, in Übereinstimmung mit dem Pauli-Prinzip, durch die Einfachbesetzung der  $N$  niederenergetischsten Einteilchenzustände gegeben:

$$|\Psi_N^{\text{Fermi}}\rangle = |\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{N\text{-mal}}, 0, 0, \dots\rangle = \prod_{i < i_F} \hat{a}_i^\dagger |0, 0, 0, \dots\rangle, \quad (2.12)$$

wobei  $i_F$  so definiert ist, dass  $\sum_{i < i_F} 1 = N$  gilt.

### Einteilchen- und Mehrteilchenoperatoren in der zweiten Quantisierung

Der Operator eines  $N$ -Teilchensystems sei eine Summe von Einteilchenoperatoren

$$\hat{T} = \sum_{\alpha=1}^N \hat{t}_\alpha, \quad (2.13)$$

## 2 Theorie der Quantengase

---

wie zum Beispiel die kinetischen Energien  $\hat{p}_\alpha^2/2m$  oder die potentiellen Energien  $V(\mathbf{r}_\alpha)$ . Da die Teilchen ununterscheidbar sind, müssen die Einteilchenoperatoren alle von derselben Form  $\hat{t}$  sein und sich durch dieselben Matrixelemente  $\langle i|\hat{t}|j\rangle$  ausdrücken lassen. Damit folgt

$$\hat{T} = \sum_{i,j} \langle i|\hat{t}|j\rangle \sum_{\alpha=1}^N |i\rangle_\alpha \langle j|_\alpha. \quad (2.14)$$

Mit etwas Algebra lässt sich für Bosonen als auch für Fermionen die folgende Relation herleiten:

$$\sum_{\alpha=1}^N |i\rangle_\alpha \langle j|_\alpha = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j. \quad (2.15)$$

Hierdurch kann der Einteilchenoperator  $\hat{T}$  durch bosonische bzw. fermionische Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ausgedrückt werden:

$$\hat{T} = \sum_{i,j} \langle i|\hat{t}|j\rangle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j. \quad (2.16)$$

Eine analoge Darstellung findet man auch für Zweiteilchenoperatoren, die simultan auf zwei verschiedenen Teilchen wirken. Für ein Vielteilchensystem mit kinetischen Energien  $\hat{t}_\alpha$  und Zweiteilchenwechselwirkungen  $U(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta)$  hat der Hamilton-Operator in zweiter Quantisierung die Gestalt

$$\hat{H} = \sum_{i,j} \langle i|\hat{t}|j\rangle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} \langle i,j|\hat{U}|k,l\rangle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_l \hat{a}_k, \quad (2.17)$$

wobei bei Fermionen die Reihenfolge der beiden Vernichtungsoperatoren im Vergleich zu der Reihenfolge der Zustände  $|k,l\rangle$  im Matrixelement des Zweiteilchenoperators besonders zu berücksichtigen ist.

Statt in der Basis  $\{|i\rangle\}$  kann das System zum Beispiel auch in der Basis der Ortseigenzustände  $\{|\mathbf{r}\rangle\}$  beschrieben werden. Die beiden Basissysteme sind über die Entwicklung

$$|\mathbf{r}\rangle = \sum_i |i\rangle \underbrace{\langle i|\mathbf{r}\rangle}_{\varphi_i^*(\mathbf{r})} \quad (2.18)$$

miteinander verknüpft. Hiermit lassen sich die Feldoperatoren

$$\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_i \hat{a}_i^\dagger \varphi_i^*(\mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_i \hat{a}_i \varphi_i(\mathbf{r}) \quad (2.19)$$

eingeführen, welche ein Teilchen am Ort  $\mathbf{r}$  erzeugen bzw. vernichten. Ausgedrückt durch Feldoperatoren nimmt  $\hat{H}$  die folgende Form an:

$$\hat{H} = \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{t}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} + \frac{1}{2} \iint \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}'. \quad (2.20)$$



## 2.1 Quantenstatistik und zweite Quantisierung

### 2.1.2 Bose-Einstein- und Fermi-Dirac-Statistik

Laut dem *grundlegenden Postulat* der statistischen Physik ist ein abgeschlossenes Gleichgewichtssystem mit gleicher Wahrscheinlichkeit in jedem seiner zugänglichen Zustände vorzufinden [54, 59]. Dabei bezeichnen „zugängliche Zustände“ die Vielteilchenzustände  $|\kappa\rangle = |n_1, n_2, \dots, n_\infty\rangle$ , deren Gesamtteilchenzahl  $N_\kappa$  und deren Gesamtenergie  $E_\kappa$  mit den Vorgaben  $N$  und  $E$  des Systems übereinstimmen (mikrokanonisches Ensemble). Die Anzahl der zugänglichen Zustände definiert die mikrokanonische Zustandssumme  $\Omega(E, N)$ . Gemäß dem grundlegenden Postulat folgen aus dem Kehrwert  $p_\kappa = 1/\Omega(E, N)$  die Besetzungswahrscheinlichkeiten der zugänglichen Zustände  $|\kappa\rangle$ .

Statt eines isolierten Systems ist es oftmals hilfreich ein System zu betrachten, das im Kontakt mit einem großen Reservoir Energie und Teilchen austauschen kann (großkanonisches Ensemble). Die Wahrscheinlichkeit, das System in einem Zustand  $|\kappa\rangle$  mit der Energie  $E_\kappa$  und der Teilchenzahl  $N_\kappa$  vorzufinden, wird durch einen Boltzmann-Faktor bestimmt und lautet

$$p_\kappa = \frac{1}{Z} e^{-\beta(E_\kappa - \mu N_\kappa)}. \quad (2.21)$$

Hierbei werden die Temperatur  $T = 1/k_B\beta$  ( $k_B$  ist die Boltzmann-Konstante) und das chemische Potential  $\mu$  durch das Reservoir vorgegeben und  $Z$  bezeichnet die großkanonische Zustandssumme

$$Z = \sum_{\kappa} e^{-\beta(E_\kappa - \mu N_\kappa)}. \quad (2.22)$$

Durch Letztere wird die Gesamtwahrscheinlichkeit  $\sum_{\kappa} p_\kappa$  auf eins normiert. Für wechselwirkungsfreie Teilchen mit einem Einteilchenspektrum  $\{\epsilon_i\}$ , ist die Energie des Vielteilchenzustandes  $|\kappa\rangle = |n_1, n_2, \dots, n_\infty\rangle$  durch  $E_\kappa = \sum_i \epsilon_i n_i$  gegeben und die großkanonische Zustandssumme lässt sich wie folgt darstellen:

$$Z = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)n}. \quad (2.23)$$

Für Fermionen können die Besetzungszahlen  $n_i$  der Einteilchenzustände  $|i\rangle$  nur die Werte 0 und 1 annehmen, sodass

$$Z_F = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}) \quad (2.24)$$

ist. Bei Bosonen hingegen können die Besetzungszahlen alle Werte von 0 bis  $\infty$  annehmen, es folgt:

$$Z_B = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}}. \quad (2.25)$$

## 2 Theorie der Quantengase

---

Die mittleren Besetzungszahlen  $\langle n_i \rangle$  der Einteilchenzustände  $|i\rangle$  ergeben sich aus

$$\langle N_\kappa \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} \mp 1}, \quad (2.26)$$

denn zusammen mit der Beziehung  $\langle N_\kappa \rangle = \sum_i \langle n_i \rangle$  folgt:

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} \mp 1} \equiv f(\epsilon_i). \quad (2.27)$$

Dies ist die Bose-Einstein- (oberes Vorzeichen) bzw. die Fermi-Dirac-Verteilung (unteres Vorzeichen). Bei Systemen mit vorgegebener Gesamtteilchenzahl  $N$ , ist das chemische Potential durch die Bedingung  $\sum_i \langle n_i \rangle = N$  festgelegt.

### 2.1.3 Dichteoperator

Wir führen nun den Dichteoperator ein, der es uns erlaubt Erwartungswerte von statistischen Gemischen, wie zum Beispiel dem großkanonischen Ensemble, in eleganter Weise zu berechnen [54, 55]. Im Allgemeinen befindet sich ein System nicht in einem reinen Zustand, sondern dessen Basiszustände  $\{|\kappa\rangle\}$  sind nur mit gewissen statistischen Wahrscheinlichkeiten  $p_\kappa$  besetzt. In einem solchen Fall kann der Ensemblemittelwert einer Observablen  $\hat{O}$  über den Dichteoperator

$$\hat{\rho} = \sum_{\kappa} p_\kappa |\kappa\rangle \langle \kappa| \quad (2.28)$$

berechnet werden und lautet

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{O}). \quad (2.29)$$

Hierbei ist Sp die Spur, welche über eine beliebige vollständige Basis  $\{|\kappa'\rangle\}$  gebildet wird:

$$\text{Sp}(\hat{X}) = \sum_{\kappa'} \langle \kappa' | \hat{X} | \kappa' \rangle. \quad (2.30)$$

Die Spur eines Operators ist unabhängig von der gewählten Basis und wegen  $\sum_{\kappa} p_\kappa = 1$  ist der Dichteoperator automatisch normiert:  $\text{Sp}(\hat{\rho}) = 1$ .

Beim großkanonischen Ensemble entsprechen die Zustände  $\{|\kappa\rangle\}$  einer beliebigen vollständigen Basis des Fock-Raumes. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann die Basis so gewählt werden, dass sie zugleich den Eigenzuständen des Vielteilchen-Hamilton-Operators  $\hat{H}$  entspricht:  $\hat{H}|\kappa\rangle = E_\kappa|\kappa\rangle$ . Dann lässt sich der Dichteoperator des großkanonischen Ensembles unmittelbar aus Gleichung 2.21 und 2.28 ableiten und lautet:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} = \frac{e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}}{\text{Sp}(e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})})}. \quad (2.31)$$

Der Formalismus der Dichteoperatoren lässt sich natürlich auch für die Berechnung von Ensemblemittelwerten in Einteilchensystemen verwenden. In diesem Fall reicht es aus, eine vollständige Basis von Einteilchenzuständen  $\{|i\rangle\}$  zu betrachten.

## 2.1 Quantenstatistik und zweite Quantisierung

### 2.1.4 Quantenentartung

Verdünnte atomare Gase lassen sich in erster Näherung als ideale Quantengase beschreiben. Je nach Teilchennatur werden die mittleren Besetzungszahlen der Einteilchenzustände durch die Bose-Einstein- bzw. Fermi-Dirac-Verteilung 2.27 bestimmt. Bei hohen Temperaturen gehen die beiden Verteilungen in die Maxwell-Boltzmann-Verteilung eines idealen klassischen Gases über. Bei Annäherung an sehr niedrige Temperaturen spielt der Term  $\pm 1$  in Gleichung 2.27 eine zunehmende Rolle und es manifestiert sich ein deutlicher Unterschied zwischen Bosonen und Fermionen. Dies ist das Regime der Quantenentartung. Intuitiv erwartet man, dass die Quantenentartung eintritt, sobald der mittlere Abstand zwischen den Atomen  $n^{-1/3}$  von derselben Größenordnung ist, wie die thermische de Broglie-Wellenlänge

$$\lambda_{\text{dB}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_{\text{B}}T}}. \quad (2.32)$$

Dabei gibt  $\lambda_{\text{dB}}$  die mittlere räumliche Ausdehnung der atomaren Wellenpakete an. Wir erwarten also, dass die Quantenentartung eintritt, sobald die Phasenraumdicke  $n\lambda_{\text{dB}}^3$  Werte in der Größenordnung von eins annimmt. Hierbei bezeichnet  $n$  die Dichte des Gases und  $m$  die Masse der Atome. Für ein ideales klassisches Gas gilt die Relation  $e^{-\beta\mu} = 1/n\lambda_{\text{dB}}^3$  [59]. Hiermit lässt sich zeigen, dass Gleichung 2.27 tatsächlich ab einer Phasenraumdicke in der Größenordnung von eins beginnt signifikant von der klassischen Maxwell-Boltzmann-Verteilung abzuweichen. Eine äquivalente Formulierung besagt, dass die Quantenentartung eintritt, sobald die Anzahl  $M$  der im Rahmen der Energieerhaltung zugänglichen Zustände in die Größenordnung der Gesamtteilchenzahl  $N$  rückt.

Bei einem Fermigas macht sich im Regime der Quantenentartung das Pauli-Prinzip bemerkbar. Am absoluten Nullpunkt führt dieses zu einer strikten Einfachbesetzung der  $N$  niederenergetischsten Einteilchenzustände und es bildet sich ein Fermi-See aus. Dabei definiert die Energie  $\epsilon_{i=N}$  des höchsten besetzten Einteilchenzustandes die Fermi-Energie  $\epsilon_{\text{F}}$ .

Im Gegensatz zum Fermigas ist beim Bosegas eine Mehrfachbesetzung derselben Einteilchenzustände erlaubt. Berücksichtigt man die Ununterscheidbarkeit der Teilchen, so findet man, dass im Regime der Quantenentartung ( $M \lesssim N$ ) eine Mehrfachbesetzung nicht nur erlaubt ist, sondern statistisch sogar stark favorisiert wird. Dieser Effekt lässt sich bereits anhand des einfachen Beispiels in Abbildung 2.1 mit  $M = N = 2$  nachvollziehen: Für zwei ununterscheidbare Teilchen ist das statistische Gewicht beide Teilchen im selben Zustand vorzufinden  $2/3$ , während es bei voneinander unterscheidbaren Teilchen nur  $1/2$  beträgt. Mit zunehmenden  $N$  verstärkt sich dieser „Bunching-Effekt“, also die Bündelung der Bosonen in ein und demselben Quantenzustand. Außerdem versuchen die Teilchen beim Kühlen des Bosegases ihre Energie zu minimieren. Wird dabei eine kritische Temperatur  $T_{\text{c}}$  unterschritten, so kommt es zu einem Phasenübergang, bei dem eine makroskopische Bevölkerung des absoluten Grundzustandes einsetzt. Dies ist das Phänomen

## 2 Theorie der Quantengase



**Abbildung 2.1:** Bosonisches Bunching: Mögliche Besetzungen zweier Quantenzustände durch zwei unterscheidbare bzw. zwei ununterscheidbare Bosonen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand doppelt besetzt ist, ist bei ununterscheidbaren Teilchen höher.

der Bose-Einstein-Kondensation. Die kondensierten Teilchen besetzen dieselbe Grundzustandswellenfunktion und verfügen somit über eine langreichweitige Phasenkohärenz. Der Bunching-Effekt erklärt warum die makroskopische Bevölkerung des Grundzustandes bereits bei einer thermischen Energie  $k_B T_c$  einsetzt, die weitaus größer ist als der energetische Abstand  $\Delta\epsilon$  zwischen den untersten Niveaus.

In den beiden folgenden Abschnitten werden die Eigenschaften *harmonisch* gefangener Fermi- und Bosegase diskutiert und einander gegenübergestellt.

### 2.2 Fermigas

In diesem Abschnitt wird das in einer harmonischen Falle gefangene ideale Fermigas in der semi-klassischen Näherung behandelt. Neben grundlegenden thermodynamischen Größen, werden die Dichte- und Impulsverteilungen innerhalb der Falle und nach der freien Expansion ermittelt. Die Kenntnis der theoretischen Verteilungen ist Voraussetzung für eine präzise Temperaturbestimmung der Gase. Beim Kühlen der Fermionen in das entartete Regime tritt – im Gegensatz zum Bosegas – kein Phasenübergang ein, sodass der Grad der Quantenentartung aus dem Vergleich der gemessenen und der theoretischen Dichteverteilung abgeleitet werden muss.

#### 2.2.1 Thermodynamische Betrachtungen

Im Folgenden betrachten wir ein ultrakaltes Gas aus  $N$  spinpolarisierten Fermionen der Masse  $m$ . Üblicherweise wird die Wechselwirkung zwischen den Teilchen bei niedrigen Temperaturen durch  $s$ -Wellenstreuung bestimmt. Doch für identische Fermionen verschwindet wegen der Forderung einer antisymmetrischen Wellenfunktion die zugehörige Streuamplitude. Die Wechselwirkung in nächst höherer Ordnung, durch  $p$ -Wellenstreuung, ist wegen der Zentrifugalbarriere und der geringen Stoßenergien stark unterdrückt. Damit kann in den folgenden thermodynamischen und statistischen Überlegungen in guter Näherung von einem wechselwirkungsfreien, also idealen Fermigas ausgegangen werden [60, 61]. In mehrkomponentigen Fermigasen sind  $s$ -Wellen-Stöße hingegen erlaubt. Doch

auch hier sind aufgrund der geringen Dichten üblicherweise die Wechselwirkungsenergien klein gegenüber der Fermi-Energie (Gl. 2.38), sodass das ideale Fermigas eine brauchbare Näherung darstellt [62, 63]. Für ein Atom in einem zylindersymmetrischem harmonischen Potential lautet der Einteilchen-Hamiltonian:

$$H = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + \frac{m\omega_r^2}{2}(x^2 + y^2 + \alpha^2 z^2). \quad (2.33)$$

Der Quotient aus axialer und radialer Fallenfrequenz  $\alpha = \omega_z/\omega_r$  beschreibt das Aspektverhältnis der Falle. Definiert man die Nullpunktenergie als null, so sind die Einteilchenenergien durch  $\epsilon(n_x, n_y, n_z) = \hbar\omega_r(n_x + n_y + \alpha n_z)$  gegeben ( $n_{x,y,z} \in \mathbb{N}$ ). Da in der Regel die thermische Energie der Atome viel größer ist als der Abstand zwischen den Energieniveaus<sup>1</sup> ( $k_B T \gg \hbar\omega_r$ ), lässt sich das diskrete Energiespektrum durch ein Kontinuum annähern. Damit ergibt sich für den harmonischen Oszillator die Zustandsdichte<sup>2</sup>:

$$g(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2\alpha(\hbar\omega_r)^3}. \quad (2.34)$$

Mit dem kontinuierlichen Energiespektrum nimmt die Fermi-Dirac-Verteilung aus Gleichung 2.27 die folgende Form an:

$$f(\epsilon) = \frac{1}{Z^{-1}e^{\epsilon/k_B T} + 1}. \quad (2.35)$$

Hierbei wird die Fugazität  $Z = e^{\mu/k_B T}$  eingeführt. Diese erlaubt, wie wir später sehen werden, eine direkte Aussage über den Grad der Quantenentartung des Gases. Das chemische Potential  $\mu$  wird gemäß folgender Gleichung implizit durch die Temperatur und die Teilchenzahl bestimmt:

$$N = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon)}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} + 1} d\epsilon. \quad (2.36)$$

Für  $T = 0$  geht die Fermi-Dirac-Verteilung in eine Stufenfunktion über, die für Energien kleiner oder gleich der Fermi-Energie  $\epsilon_F = \mu(T = 0, N)$  gleich eins und ansonsten null ist. In diesem Fall vereinfacht sich das Integral für die Teilchenzahl zu

$$N = \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon. \quad (2.37)$$

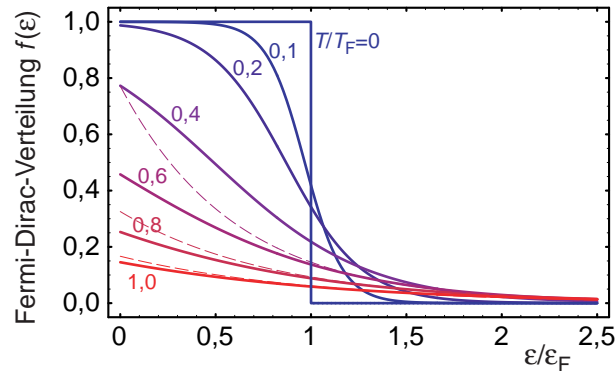
Hieraus folgt die Fermi-Energie, also die Energie des höchsten besetzten Einteilchenzustandes bei  $T = 0$ :

$$\epsilon_F = \hbar\omega_r(6\alpha N)^{1/3}. \quad (2.38)$$

<sup>1</sup>Für die Fermigase in unserem Experiment gilt typischerweise  $k_B T/\hbar\omega_r \geq 30$ .

<sup>2</sup>Die Anzahl  $N(E)$  der Energieniveaus mit einer Energie kleiner oder gleich  $E$  ist proportional zu dem Volumen  $V = E^3/6$  einer dreiseitigen Pyramide, welche von drei zueinander orthogonal verlaufenden Kanten der Länge  $E$  aufgespannt wird. Teilt man dieses Volumen  $V$  durch das Volumen  $v = (\hbar\omega_r)^3\alpha$ , welches einem einzelnen Zustand zugeordnet werden kann, so erhält man  $N(E)$ . Die Zustandsdichte folgt schließlich aus der Ableitung  $g(\epsilon) = dN(\epsilon)/d\epsilon$ .

## 2 Theorie der Quantengase



**Abbildung 2.2:** Fermi-Dirac-Verteilungen für verschiedene Temperaturen  $T/T_F$ . Für die höheren Temperaturwerte sind zum Vergleich die klassischen Maxwell-Boltzmann-Verteilungen dargestellt (gestrichelt).

Der Fermi-Radius  $R_F$  ist durch die maximale Auslenkung eines klassischen Teilchens der Energie  $\epsilon_F$  im harmonischen Potential definiert<sup>3</sup>:

$$R_F = \sqrt{\frac{2\epsilon_F}{m\omega_r^2}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_r}} (48\alpha N)^{1/6}. \quad (2.39)$$

Die aus dem Pauli-Prinzip resultierende effektive Abstoßung führt zu einem Fermi-See im Ortsraum, dessen Ausdehnung durch den Fermi-Radius  $R_F$  gegeben ist. Analog kann eine charakteristische Wellenzahl  $k_F$  über den Impuls eines freien Teilchens mit der Energie  $\epsilon_F$  definiert werden:

$$k_F = \sqrt{\frac{2m\epsilon_F}{\hbar^2}} = \left(\frac{48\alpha N}{R_F^3}\right)^{1/3} \quad (2.40)$$

Wie aus dem rechten Teil von Gleichung 2.40 hervorgeht, ist der Kehrwert des Fermi-Impulses  $1/k_F$  proportional zum interatomaren Abstand im Gas.

Für Temperaturen  $T > 0$  ergibt sich das chemische Potential  $\mu(T, N)$  als nicht-triviale Lösung von Gleichung 2.36. Eine Sommerfeld-Entwicklung [64] des Integranden ermöglicht es jedoch, einen einfachen analytischen Näherungsausdruck für sehr niedrige Temperaturen ( $k_B T \ll \epsilon_F$ ) anzugeben. Dabei geht man von einer geringen „Aufweichung“ der Fermi-Kante aus. Man nimmt also an, dass sich die Verteilungsfunktion nur in einem Bereich  $k_B T$  um  $\epsilon_F$  von der Stufenfunktion unterscheidet. Diesem Unterschied wird durch eine Taylor-Entwicklung des Integranden im Bereich von  $\epsilon_F$  Rechnung getragen<sup>4</sup>. Zusam-

<sup>3</sup>Hier ist der Fermi-Radius entlang der radialen Achse angegeben. Entlang der  $z$ -Achse ist der Fermi-Radius durch  $R_F/\alpha$  gegeben.

<sup>4</sup>Bei sehr niedrigen Temperaturen ( $k_B T \ll \epsilon_F$ ) und für eine Funktion  $h(\epsilon)$ , welche für  $\epsilon \rightarrow +\infty$  nicht schneller als mit einer Potenz von  $\epsilon$  divergiert, liefert die Sommerfeld-Entwicklung eine gute Näherung:  $\int_0^\infty f(\epsilon)h(\epsilon)d\epsilon = \int_0^{\epsilon_F} h(\epsilon)d\epsilon + h(\epsilon_F)(\mu - \epsilon_F) + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 h'(\epsilon_F) + \dots$

men mit Gleichung 2.38 erhält man dann für das chemische Potential:

$$\mu(T, N) = \epsilon_F \left( 1 - \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 \right) \quad \text{für } k_B T \ll \epsilon_F. \quad (2.41)$$

Die thermodynamischen Integrale der Fermi-Dirac- und der Bose-Einstein-Verteilung lassen sich für beliebige Temperaturen analytisch mittels der Polylogarithmen  $\text{Li}_s(Z)$  darstellen. Für beliebige  $s > -1$  gilt:

$$\int_0^\infty \frac{\epsilon^s}{Z^{-1} e^{\epsilon/k_B T} \mp 1} d\epsilon = \pm (k_B T)^{s+1} \Gamma(s+1) \text{Li}_{s+1}(\pm Z). \quad (2.42)$$

Dabei sind bei der Bose-Statistik die oberen Vorzeichen und bei der Fermi-Statistik die unteren Vorzeichen anzuwenden<sup>5</sup> und  $\Gamma$  steht für die Eulersche Gamma-Funktion. Der Polylogarithmus ist im Bereich  $|Z| < 1$  durch die folgende Reihenentwicklung definiert und lässt sich darüber hinaus analytisch fortsetzen:

$$\text{Li}_s(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z^k}{k^s}. \quad (2.43)$$

Diese Definition wird später benutzt, um durch Integration der einzelnen Summanden, das Integral von dem Polylogarithmus einer Funktion zu bestimmen.

In diesem Abschnitt werden zunächst nur die thermodynamischen Größen für das Fermigas hergeleitet. Später lassen sich diese Größen gemäß Gleichung 2.42 durch die Ersetzung  $-\text{Li}_s(-Z) \rightarrow \text{Li}_s(Z)$  direkt auf das Bosegas übertragen [61, 65]. Beim Bosegas muss außerdem ein Term für den Grundzustand hinzugefügt werden, da dieser nicht in der Zustandsdichte  $g(\epsilon)$  berücksichtigt wird, aber durchaus makroskopisch besetzt werden kann.

Für hohe Temperaturen geht  $Z \rightarrow 0$  und die beiden Quantenstatistiken gehen in die klassische Maxwell-Boltzmann-Statistik über. Für den klassischen Grenzfall  $Z \rightarrow 0$  ergibt die Ersetzung  $\text{Li}_s(\pm Z) \rightarrow \pm Z$  eine gute Näherung. Im Fall der Fermi-Dirac-Statistik geht mit sehr niedrigen Temperaturen  $Z \rightarrow +\infty$  und aus einer allgemeineren Form der Sommerfeld-Entwicklung folgt das asymptotische Verhalten [61, 66, 67]:

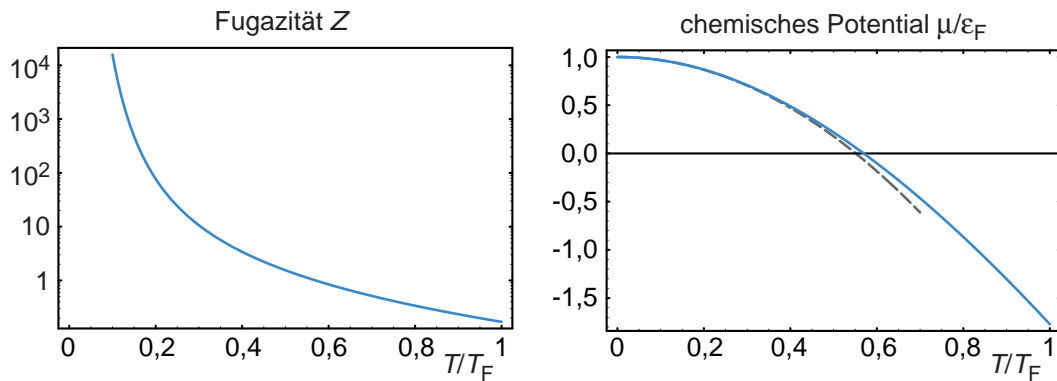
$$-\text{Li}_s(-Z) = \frac{(\ln Z)^s}{\Gamma(s+1)} = \frac{(T_F/T)^s}{\Gamma(s+1)} \quad \text{für } T \rightarrow 0. \quad (2.44)$$

Hiermit verfügen wir über das nötige Rüstzeug, um die thermodynamischen Größen des idealen Fermigases exakt zu ermitteln und um entsprechende Näherungsausdrücke für hohe und sehr niedrige Temperaturen anzugeben.

---

<sup>5</sup>Je nach Vorzeichen wird das Integral in Gleichung 2.42 als Bose-Integral bzw. als Fermi-Integral bezeichnet. Ersteres konvergiert für  $Z < 1$  und letzteres konvergiert für  $Z > -1$ .

## 2 Theorie der Quantengase



**Abbildung 2.3:** Fugazität  $Z$  und chemisches Potential  $\mu$  als Funktion von  $T/T_F$ . Die Näherung 2.41 für niedrige Temperaturen ist gestrichelt dargestellt.

Aus Gleichung 2.36 ergibt sich für die Teilchenzahl  $N$ :

$$N = -\frac{1}{\alpha} \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega_r} \right)^3 \text{Li}_3(-Z). \quad (2.45)$$

Hieraus folgt zusammen mit der Definition der Fermi-Temperatur  $T_F = \epsilon_F/k_B$  und Gleichung 2.38:

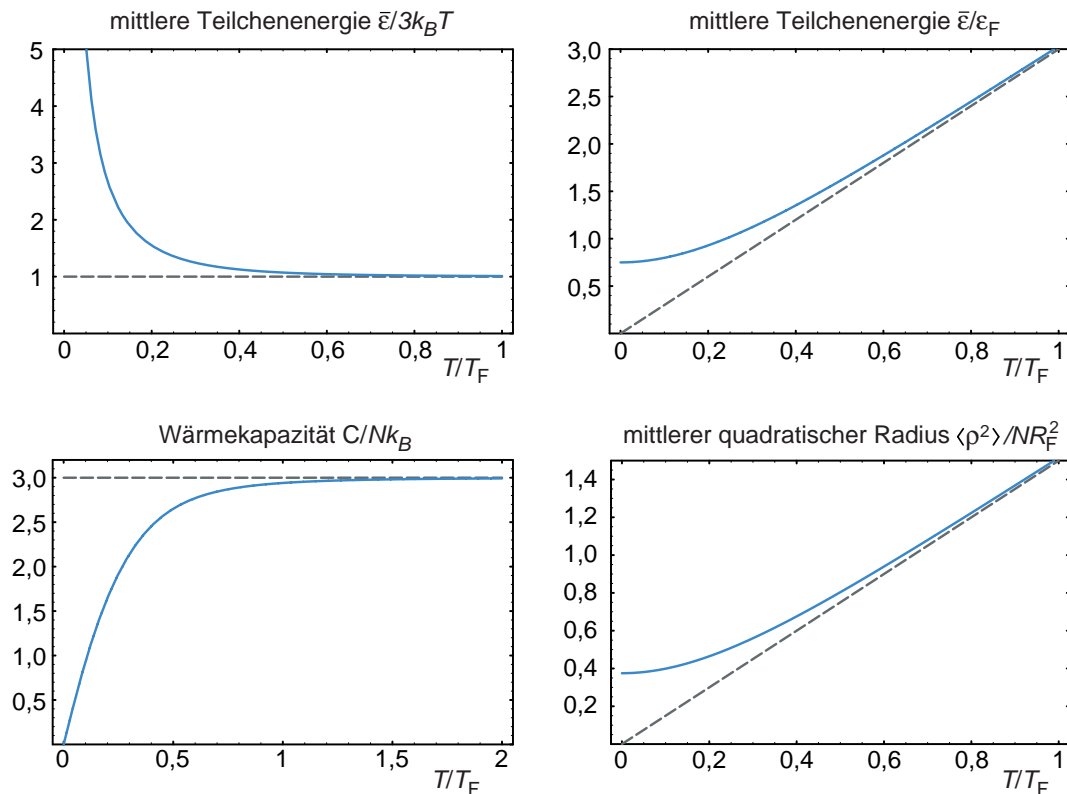
$$\text{Li}_3(-Z) = -\frac{1}{6 (T/T_F)^3}. \quad (2.46)$$

Die Form der Fermi-Dirac-Verteilung wird, wie in Abbildung 2.2 zu erkennen, allein durch das Temperaturverhältnis  $T/T_F$  bestimmt. Dabei verläuft der Übergang vom klassischen zum entarteten Regime kontinuierlich und ist nicht, wie beim Bosegas, durch einen Phasenübergang ausgezeichnet. Das Temperaturverhältnis  $T/T_F$  ist ein direktes Maß für den Grad der Quantenentartung des Fermigases. Gleiches gilt für die Fugazität  $Z$ , welche gemäß Gleichung 2.46 nur von  $T/T_F$  abhängt.

Um die Fugazität  $Z$  und das chemische Potential  $\mu = k_B T \ln(Z)$  als Funktion der Temperatur auszudrücken, muss Gleichung 2.46 für feste Temperaturen numerisch nach  $Z$  gelöst werden. Hierbei bietet es sich an, zu einheitenlosen Größen  $T/T_F$  und  $\mu/\epsilon_F$  überzugehen, da dann die errechneten Ergebnisse universell gültig sind. Für sehr kleine  $T/T_F$  ist die numerische Lösung von Gleichung 2.46 wegen der Divergenz von  $Z$  schwierig. Doch kann in diesem Bereich auf die Näherung 2.41 zurückgegriffen werden. Wir erhalten somit die Funktion  $Z = Z(T/T_F)$ , welche in die gewonnenen Ausdrücke der thermodynamischen Größen eingesetzt werden kann. Die Fugazität  $Z$  ist für niedrige Temperaturen eine sehr steile Funktion von  $T/T_F$  und fällt mit zunehmender Temperatur gegen null (Abbildung 2.3). Das chemische Potential  $\mu$  stimmt bei  $T = 0$  mit der Fermi-Energie  $\epsilon_F$  überein und geht bei  $T/T_F \approx 0,57$  durch null, um dann negative Werte anzunehmen.



## 2.2 Fermigas



**Abbildung 2.4:** Temperaturverläufe der thermodynamischen Größen des harmonisch gefangenen Fermigas. Zur Gegenüberstellung ist gestrichelt das Verhalten des klassischen Gases dargestellt. Mit der Wärmekapazität  $C$  geht auch die im Fermigas enthaltene Wärme mit abnehmender Temperatur auf null. Dennoch verfügen die Teilchen selbst bei  $T = 0$  im Mittel noch über eine Energie von  $\frac{3}{4}\epsilon_F$ . Der mittlere quadratische Radius der Atomverteilung  $\langle \rho^2 \rangle$  ist proportional zur mittleren Teilchenenergie  $\bar{\epsilon}$  und geht ebenfalls für  $T \rightarrow 0$  gegen einen endlichen Wert. Experimentell wurden diese Größen in [11, 68] untersucht.

Die Gesamtenergie des Fermigas errechnet sich aus dem Integral  $E = \int_0^\infty \epsilon g(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$ . Zusammen mit Gleichung 2.45 ergibt sich für die mittlere Energie pro Teilchen  $\bar{\epsilon} = E/N$ :

$$\bar{\epsilon} = 3k_B T \frac{\text{Li}_4(-Z)}{\text{Li}_3(-Z)}. \quad (2.47)$$

Dieser Ausdruck geht für hohe Temperaturen ( $Z \rightarrow 0$ ) in den klassischen Erwartungswert  $3k_B T$  über. Teilt man Gleichung 2.47 durch  $3k_B T$  bzw. durch  $\epsilon_F = k_B T_F$ , so erhält man die universellen Darstellungen aus Abbildung 2.4. Die mittlere Teilchenenergie für ein Fermigas in einer harmonischen Falle geht für  $T \rightarrow 0$  gegen  $\frac{3}{4}\epsilon_F$ . Die im Vergleich zum klassischen Gas überschüssige Teilchenenergie ist auf das Pauli-Prinzip zurückzuführen. Demnach dürfen die Fermionen die niedrigsten Vibrationsniveaus nur jeweils einzeln besetzen und nicht etwa gemeinsam in den Grundzustand der Falle übergehen. Wird die

## 2 Theorie der Quantengase

---

Energie des Fermigases zu der Energie eines klassischen Gases ins Verhältnis gesetzt, so beobachtet man eine Divergenz für  $T \rightarrow 0$ . In den Referenzen [11, 68] wurden erstmals die Teilchenenergien atomarer Fermigase im Regime der Entartung untersucht.

Aus Gleichung 2.47 folgt die Wärmekapazität  $C = \partial E / \partial T$  des Gases bei fester Teilchenzahl und konstanter Fallenfrequenz:

$$C = 3Nk_B \left( 4 \frac{\text{Li}_4(-z)}{\text{Li}_3(-z)} - 3 \frac{\text{Li}_3(-z)}{\text{Li}_2(-z)} \right). \quad (2.48)$$

Dabei wird die Bedingung  $\partial N / \partial T = 0$  auf Gleichung 2.45 angewendet und die Relation  $\partial \text{Li}_s(z) / \partial z = \frac{1}{z} \text{Li}_{s-1}(z)$  benutzt. Wie in Abbildung 2.4 gezeigt, geht die Wärmekapazität für hohe Temperaturen in den klassischen Wert  $C = 3Nk_B$  über, während sie bei niedrigen Temperaturen linear ( $C \approx \pi^2 N k_B T / T_F$ ) auf null abfällt. Bei dem linearen Verhalten der Wärmekapazität handelt es sich um eine universelle Eigenschaft, welche oftmals zum experimentellen Nachweis von Fermi-Flüssigkeiten verwendet wird.

### 2.2.2 Dichte- und Impulsverteilungen

Im Prinzip lassen sich die thermodynamischen Größen und die Dichteverteilungen des Fermigases durch Summation über die bekannten harmonischen Oszillatorzustände bestimmen. Bei einer exakten numerischen Auswertung der Summen zeigt sich, dass die Größen als Funktion der Teilchenzahl ein stufenförmiges Verhalten aufweisen [69]. Ähnlich zur Atomhülle oder zum Atomkern ist dieser Effekt auf die Ausbildung einer Schalenstruktur zurückzuführen. Der Schaleneffekt ruft eine leichte Riffelung der Dichteverteilung hervor. Diese wellige Struktur ist analog zu den sogenannten Friedel-Oszillationen, die in der Dichteverteilung eines homogenen Fermigases in der Nähe einer Störstelle auftreten [70]. Die Schalenstruktur spielt jedoch nur bei sehr kleinen Teilchenzahlen  $N$  und sehr niedrigen Temperaturen von wenigen Nanokelvin eine Rolle. Die Riffelung  $\delta n / n$  der Dichteverteilung skaliert wie  $N^{-2/3}$  [62] und kann daher bei üblichen Atomzahlen vernachlässigt werden.

Statt der Auswertung unhandlich großer Summen bietet sich die Anwendung einer semi-klassischen Näherung an [60, 71], welche für große  $N$  und  $k_B T \gg \hbar \omega_\nu$  gute Resultate liefert. In dieser Näherung geht man davon aus, dass sich die Einteilchenzustände durch lokalisierte Wellenpakete beschreiben lassen, sodass jedem Teilchen ein Ort  $\mathbf{r}$  und ein Wellenvektor  $\mathbf{k}$  zugeordnet werden kann. Die Energien der Teilchen sind dann durch die entsprechenden Werte eines klassischen Hamiltonians  $H(\mathbf{r}, \mathbf{k})$  (Gl. 2.33) gegeben. Betrachtet man ein freies Teilchen, welches auf ein Raumvolumen  $V$  eingeschränkt wird, so nimmt dieses im Impulsraum ein Volumen  $V_{\mathbf{k}} = (2\pi)^3 / V$  ein. Generell beansprucht ein fermionisches Teilchen im Phasenraum  $(\mathbf{r}, \mathbf{k})$  ein Volumen von  $(2\pi)^3$ . Statt Summen über Zustände werden in dieser semi-klassischen Näherung Integrale über Phasenraumverteilungen ausgewertet. Unter Berücksichtigung der Quantenstatistik ergibt sich für die

Anzahldichte im Phasenraum<sup>6</sup>:

$$w(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{Z^{-1} e^{H(\mathbf{r}, \mathbf{k})/k_B T} + 1}. \quad (2.49)$$

Die Teilchenzahl  $N$  des Gases ergibt sich durch Integration über den gesamten Orts- und Impulsraum,  $N = \int w(\mathbf{r}, \mathbf{k}) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{k}$ . Das sich hieraus ergebende chemische Potential  $\mu(T, N)$  stimmt mit dem bereits hergeleiteten Ausdruck überein. Die Dichteverteilung im Ortsraum folgt aus:

$$n(\mathbf{r}) = \int w(\mathbf{r}, \mathbf{k}) d^3\mathbf{k} = 4\pi \int_0^\infty k^2 w(\rho, k) dk. \quad (2.50)$$

Dabei definiert  $\rho = (x^2 + y^2 + \alpha^2 z^2)^{1/2}$  den effektiven Abstand vom Fallenzentrum. Substituiert man  $k$  durch  $\epsilon_{\text{kin}} = \hbar^2 k^2 / 2m$  und definiert  $Z' = Z \exp(-m\omega_r^2 \rho^2 / 2k_B T)$ , so kann man das Integral auf die Form von Gleichung 2.42 bringen und erhält für die Dichteverteilung:

$$n(\rho, T) = - \left( \frac{mk_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \text{Li}_{\frac{3}{2}} \left( -Z e^{-\frac{m\omega_r^2 \rho^2}{2k_B T}} \right). \quad (2.51)$$

Die Impulsverteilung  $\tilde{n}(\mathbf{k})$  folgt durch Integration von  $w(\mathbf{r}, \mathbf{k})$  über den Ortsraum<sup>7</sup>:

$$\tilde{n}(\mathbf{k}) = \int w(\mathbf{r}, \mathbf{k}) d^3\mathbf{r} = \frac{4\pi}{\alpha} \int_0^\infty w(\rho^2, k^2) d\rho. \quad (2.52)$$

Analog zum vorherigen Fall erhält man durch Substitution und Ausnutzung von Gleichung 2.42 die Impulsverteilung<sup>8</sup>:

$$\tilde{n}(k) = -\frac{1}{\alpha} \left( \frac{k_B T}{2\pi m \omega_r^2} \right)^{\frac{3}{2}} \text{Li}_{\frac{3}{2}} \left( -Z e^{-\frac{\hbar^2 k^2}{2mk_B T}} \right). \quad (2.53)$$

Im klassischen Grenzfall  $T \gg T_F$  erhält man mit der Ersetzung  $\text{Li}_s(-Z) \rightarrow -Z$  die folgenden gaußförmigen Orts- und Impulsverteilungen:

$$n(\rho) = \alpha N \left( \frac{m\omega_r^2}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\omega_r^2 \rho^2}{2k_B T}}, \quad (2.54)$$

$$\tilde{n}(k) = \hbar^3 N \left( \frac{1}{2\pi m k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\hbar^2 k^2}{2mk_B T}}. \quad (2.55)$$

<sup>6</sup>Genau genommen werden die Punkte im Phasenraum  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  nicht durch Wellenvektoren  $\mathbf{k}$ , sondern durch Impulse  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  bestimmt und die Verteilungsfunktion für den Phasenraum lautet dementsprechend  $w(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{\hbar^3} w(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ .

<sup>7</sup>Wegen  $w(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = w(\rho^2, k^2)$  bietet sich die Einführung einer skalierten Koordinate  $\tilde{z} = \alpha z$  an, sodass  $\rho^2 = x^2 + y^2 + \tilde{z}^2$ . Damit folgt für das Differential  $d^3\mathbf{r} = \frac{1}{\alpha} dx dy d\tilde{z} = \frac{1}{\alpha} 4\pi \rho^2 d\rho$ .

<sup>8</sup>Es gilt die Beziehung  $\tilde{n}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\hbar^3} \tilde{n}(\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar})$ .

## 2 Theorie der Quantengase

Aus Gleichung 2.51 lässt sich der mittlere quadratische Radius  $\langle \rho^2 \rangle$  bestimmen<sup>9</sup>:

$$\frac{1}{2} m \omega_r^2 \langle \rho^2 \rangle = \frac{3}{2} N k_B T \frac{\text{Li}_4(-Z)}{\text{Li}_3(-Z)}. \quad (2.56)$$

Während die Ausdehnung eines idealen klassischen Gases bei  $T = 0$  verschwindet, ist  $\langle \rho^2 \rangle$  für das Fermigas auf einen minimalen Wert von  $\frac{3}{8} N R_F^2$  beschränkt. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 2.4 dargestellt. Gemäß dem Äquipartitionstheorem lässt sich der mittlere quadratische Radius 2.56 auch direkt aus Gleichung 2.47 ableiten. Für hohe Temperaturen  $[\text{Li}_s(-Z) \rightarrow -Z]$  findet man in Übereinstimmung mit dem Korrespondenzprinzip die wohlbekannte klassische Beziehung.

### Freie Expansion beim Entlassen aus einer harmonischen Falle

Zur experimentellen Untersuchung der Dichteverteilung  $n(x, y, z)$  wird das atomare Gas aus der Falle entlassen und nach einigen Millisekunden freier Expansion in einer Absorptionsabbildung aufgenommen. Für ein ideales Gas, welches zum Zeitpunkt  $t = 0$  aus einer harmonischen Falle entlassen wird, skaliert die Dichteverteilung gemäß der Koordinatentransformation  $x_i \rightarrow x'_i = x_i / \sqrt{1 + \omega_i^2 t^2}$  (mit  $x_i = x, y, z$ ) [72]. Im Fall der zylindersymmetrischen harmonischen Falle ist die Dichteverteilung zum Zeitpunkt  $t$ :

$$n(x, y, z, t) = \frac{n(x', y', z', t = 0)}{(1 + \omega_r^2 t^2) \sqrt{1 + \omega_z^2 t^2}}. \quad (2.57)$$

Demnach bleibt die Form der ursprünglichen Dichteverteilung *entlang der einzelnen Fallachsen* auch während der freien Expansion erhalten. Es findet lediglich eine Skalierung um einen zeit- und achsenabhängigen Faktor statt. Die Erhaltung der Form ist eine Besonderheit der harmonischen Falle. Voraussetzung ist, dass innerhalb der Falle eine große Zahl von Vibrationsniveaus entlang der einzelnen Achsen besetzt sind. Diese Bedingung wird sowohl durch ein klassisches Gas aus vielen Teilchen und mit  $k_B T \gg \hbar \omega_\nu$ , als auch durch ein Fermigas mit  $\epsilon_F \gg \hbar \omega_\nu$  erfüllt. Für das Fermigas stimmt diese Bedingung mit dem Gültigkeitsbereich der semi-klassischen Näherung überein.

### Säulendichte des Fermigases

Bei der Absorptionsabbildung wird ein nahresonanter Laserstrahl auf die frei expandierende Atomwolke gerichtet und der resultierende Schattenwurf auf eine CCD-Kamera abgebildet. Über das Absorptionsgesetz lässt sich dann die Säulendichte (column density) des atomaren Gases bestimmen (siehe Abschnitt 3.6.1).

Die Säulendichte innerhalb der Falle errechnet sich aus Gleichung 2.51 durch Integration entlang der Abbildungsrichtung (im Folgenden sei dies die  $x$ -Achse). Dazu wird der

<sup>9</sup>Hierbei wird die Beziehung 2.46 benutzt und eine Integration durchgeführt, die analog zu der Herleitung von Gleichung 2.58 ist.

Polylogarithmus in der Reihenentwicklung von Gleichung 2.43 dargestellt und dann summandenweise über  $x$  integriert. Berücksichtigt man die durch Gleichung 2.57 beschriebene freie Expansion, so erhält man die Säulendichte zur Zeit  $t$  nach dem Entlassen aus der Falle:

$$n_{\text{col}}(y, z, t) = -\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_r t)^2} \sqrt{1 + (\omega_z t)^2}} \frac{m(k_B T)^2}{2\pi\hbar^3 \omega_r} \text{Li}_2\left(-Z e^{-\frac{y^2}{2\sigma_r^2}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}}\right), \quad (2.58)$$

wobei die Zeitabhängigkeit in den Breiten  $\sigma_r$  und  $\sigma_z$  enthalten ist:

$$\sigma_r^2 = \frac{k_B T}{m\omega_r^2} [1 + (\omega_r t)^2] \quad \text{und} \quad \sigma_z^2 = \frac{k_B T}{m\omega_z^2} [1 + (\omega_z t)^2]. \quad (2.59)$$

Im Grenzfall hoher Temperaturen erhält man wiederum eine Gauß-Verteilung. Das Aspektverhältnis der Wolke

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_r} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{1 + (\alpha\omega_r t)^2}{1 + (\omega_r t)^2}} \quad (\omega_z = \alpha\omega_r) \quad (2.60)$$

geht für  $t \gg 1/\omega_r$  gegen eins und die Wolke nimmt sphärische Symmetrie an. Nach langen Expansionszeiten  $t$  kann daher neben der Größe auch die Asymmetrie der ursprünglichen Wolke vernachlässigt werden. Für große  $t$  spiegelt die Dichteverteilung die Impulsverteilung innerhalb der Falle wider, wobei Letztere – unter den gemachten Voraussetzungen – immer isotrop ist.

### Universelle Darstellungen

Um die Dichte- und Impulsverteilung in einer allgemeingültigen Form, also unabhängig von Teilchenzahl und Fallenfrequenz, darstellen zu können, führen wir die einheitenlosen Größen für Temperatur  $\mathcal{T} = T/T_F$ , Radius  $\mathcal{R} = \rho/R_F$  und Wellenzahl  $\mathcal{K} = k/k_F$  ein. Damit nehmen die Gleichungen 2.51 und 2.53 die folgende Form an:

$$n(\mathcal{R}, \mathcal{T}) = -\frac{6}{\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{N\alpha}{R_F^3} \mathcal{T}^{\frac{3}{2}} \text{Li}_{\frac{3}{2}}\left(-Z(\mathcal{T})e^{-\mathcal{R}^2/\mathcal{T}}\right), \quad (2.61)$$

$$\tilde{n}(\mathcal{K}, \mathcal{T}) = -\frac{6}{\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{N}{k_F^3} \mathcal{T}^{\frac{3}{2}} \text{Li}_{\frac{3}{2}}\left(-Z(\mathcal{T})e^{-\mathcal{K}^2/\mathcal{T}}\right). \quad (2.62)$$

Da der Hamiltonian  $H(\mathbf{r}, \mathbf{k})$  dieselbe quadratische Abhängigkeit bezüglich Ort und Impuls aufweist, verfügen die obigen Verteilungen über denselben funktionellen Verlauf. Wegen der Isotropie der Masse tragen  $p_x^2$ ,  $p_y^2$  und  $p_z^2$  mit denselben Koeffizienten zum Hamiltonian bei und führen somit zu einer isotropen Impulsverteilung. Die Ortsverteilung kann hingegen, aufgrund verschiedener Koeffizienten für  $x^2$ ,  $y^2$  und  $z^2$ , eine anisotrope Form

## 2 Theorie der Quantengase

annehmen. Unter Ausnutzung der Relation 2.44 und  $\mu(T = 0) = \epsilon_F$  nimmt die Dichteverteilung aus Gleichung 2.61 für  $T = 0$  die folgende einfache Form an:

$$n(\rho, T = 0) = \frac{8}{\pi^2} \frac{N\alpha}{R_F^3} \left(1 - \frac{\rho^2}{R_F^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{für } \rho \leq R_F. \quad (2.63)$$

Für  $\rho > R_F$  wird die Dichte null. Somit gibt  $R_F$  tatsächlich den Radius des „Fermi-Sees“ im Ortsraum an. Gemäß der Definition von  $\rho$  bildet die Wolke ein Ellipsoid mit einem Durchmesser von  $2R_F$  in der  $x$ - $y$ -Ebene und einem Durchmesser von  $2R_F/\alpha$  entlang der  $z$ -Achse.

Um auch die Säulendichte  $n_{\text{col}}(y, z, t = 0)$  aus Gleichung 2.58 in universeller Form darstellen zu können, definieren wir analog zu  $\rho$  den effektiven Radius  $\rho_{\text{col}} = (y^2 + \alpha^2 z^2)^{1/2}$  und die zugehörige einheitenlose Größe  $\mathcal{R}_{\text{col}} = \rho_{\text{col}}/R_F$ . Damit folgt für die Säulendichte innerhalb der Falle ( $t = 0$ ):

$$n_{\text{col}}(\mathcal{R}_{\text{col}}) = -\frac{6}{\pi} \frac{N\alpha}{R_F^2} T^2 \text{Li}_2\left(-Z(T)e^{-\mathcal{R}_{\text{col}}^2/T}\right). \quad (2.64)$$

Abbildung 2.5 zeigt die universellen Darstellungen der Dichten und Säulendichten für verschiedene Temperaturen.

### 2.2.3 Thomas-Fermi-Näherung

Abschließend sei noch gezeigt, dass sich die Dichteverteilung 2.63 auch unmittelbar aus der Thomas-Fermi-Näherung ableiten lässt. Im Rahmen dieser lokalen Dichte-Näherung wird der Raum in kleine Zellen unterteilt, in denen das Fallenpotential als quasi konstant betrachtet werden kann. Gleichzeitig seien die Zellen jedoch so groß, dass viele Teilchen darin enthalten sind. Letztere können als freie Teilchen behandelt werden. Für jede der Zellen lässt sich dann über die Relation

$$\frac{4}{3}\pi k_F^3(\mathbf{r}) = (2\pi)^3 n(\mathbf{r}) \Leftrightarrow k_F(\mathbf{r}) = [6\pi^2 n(\mathbf{r})]^{\frac{1}{3}} \quad (2.65)$$

ein lokaler Fermi-Vektor  $k_F(\mathbf{r})$  definieren. Dabei ist  $n(\mathbf{r})$  die lokale Dichte und  $(2\pi)^3$  das Volumen, welches ein Fermion im Phasenraum einnimmt. Innerhalb einer Zelle am Ort  $\mathbf{r}$  können die Teilchen alle Wellenvektoren im Intervall  $0 \leq k \leq k_F(\mathbf{r})$  annehmen. Das energiereichste Teilchen am Ort  $\mathbf{r}$  hat demnach die Energie  $\hbar^2 k_F^2(\mathbf{r})/(2m)$  zuzüglich der potentiellen Energie  $V(\mathbf{r})$ . Im stationären Fall muss diese Gesamtenergie positionsunabhängig sein, da sich die Teilchen ansonsten an den Ort bewegen würden, an dem die Gesamtenergie geringer ist. Es gilt daher die Bedingung:

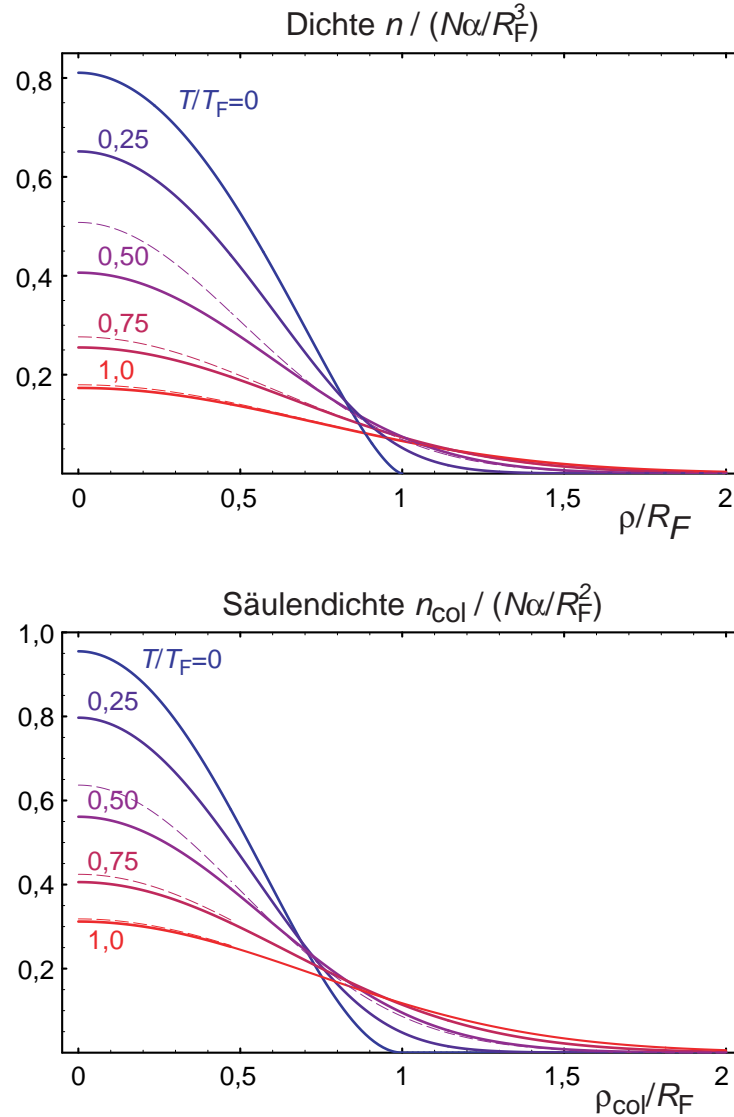
$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2(\mathbf{r})}{2m} + V(\mathbf{r}). \quad (2.66)$$

Durch Einsetzen von 2.65 in 2.66 erhält man die fermionische Dichte:

$$n(\mathbf{r}) = \frac{(2m)^{\frac{3}{2}}}{6\pi^2\hbar^3} \Re \left[ (\epsilon_F - V(\mathbf{r}))^{\frac{3}{2}} \right] \quad (2.67)$$

Der Realteil wird gebildet, damit der Ausdruck jenseits des Fermi-Radius null ergibt. Für ein harmonisches Fallenpotential folgt hieraus die Verteilung 2.63. Unter Berücksichtigung von Teilchenwechselwirkungen findet Gleichung 2.67 vielfältig Anwendung in der Atom-, Kern- und Astrophysik. Mit ihrer Hilfe werden wir am Ende dieses Kapitels die Dichteverteilung eines Fermigases berechnen, das mit einem Bose-Einstein-Kondensat wechselwirkt.

## 2 Theorie der Quantengase



**Abbildung 2.5:** Universelle Darstellung der Dichte  $n(\rho/R_F)$  und der Säulendichte  $n_{\text{col}}(\rho_{\text{col}}/R_F)$  für verschiedene Temperaturen  $T/T_F$ . Für die höheren Temperaturen sind zur Gegenüberstellung die klassischen Maxwell-Boltzmann-Verteilungen gestrichelt dargestellt. In dieser universellen Form geben die Darstellungen zugleich die Impulsverteilungen wieder. Dichte- und Säulendichte entsprechen respektive den Impulsverteilungen  $\tilde{n}(k/k_F)/(N/k_F^3)$  und  $\tilde{n}_{\text{col}}(k_{\text{col}}/k_F)/(N/k_F^2)$ , wobei  $k_{\text{col}}^2 = k_y^2 + k_z^2$ .



## 2.3 Bosegas

Im Gegensatz zu Fermionen ist bei Bosonen eine Mehrfachbesetzung derselben Einteilchenzustände erlaubt. Wird ein verdünntes Bosegas soweit gekühlt, dass die Phasenraum-dichte  $n\lambda_{\text{dB}}^3$  einen Wert von  $\sim 2,61$  überschreitet, so kommt es in einem Phasenübergang zu einer makroskopischen Bevölkerung des absoluten Grundzustandes. Hierbei handelt es sich um ein rein statistisches Phänomen, der Bose-Einstein-Kondensation.

Im Folgenden werden einige wichtige thermodynamische Größen sowie die Kriterien der Bose-Einstein-Kondensation für das harmonisch gefangene, wechselwirkungsfreie Bosegas hergeleitet. Anschließend werden die interatomaren Wechselwirkungen im Rahmen der Gross-Pitaevskii-Gleichung beschrieben und es wird die Dichteverteilung des Kondensats innerhalb der Falle und nach dem Entlassen aus derselbigen berechnet. Folgender Abschnitt orientiert sich an den Referenzen [73–76].

### 2.3.1 Thermodynamische Betrachtungen

Wir betrachten ein ideales Bosegas in einer harmonischen Falle. Bei hinreichend großen thermischen Energien<sup>10</sup> kann das Spektrum der harmonischen Oszillatorzustände durch ein Kontinuum angenähert werden und die Bose-Einstein-Verteilung 2.27 nimmt die folgende Form an

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_{\text{B}}T} - 1}. \quad (2.68)$$

Definieren wir die Grundzustandsenergie  $\epsilon(0, 0, 0)$  des harmonischen Oszillators als null, so muss das chemische Potential die Bedingung  $\mu \leq 0$  erfüllen, damit die Besetzungszahlen  $f(\epsilon)$  keine negativen Werte annehmen. Geht das chemische Potential gegen null, beziehungsweise die Fugazität  $\mathcal{Z} = e^{\mu/k_{\text{B}}T}$  gegen eins, so wird die Besetzungszahl  $N_0$  des Grundzustandes makroskopisch. Bei Integralen über die Zustandsdichte 2.34 ist der Grundzustand nicht enthalten, sodass dessen makroskopischer Beitrag separat berücksichtigt werden muss. Im Rahmen der Kontinuumsnäherung erhält man daher die folgende Relation zwischen chemischem Potential und Gesamtteilchenzahl:

$$N = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon)}{e^{(\epsilon-\mu)/k_{\text{B}}T} - 1} d\epsilon + N_0. \quad (2.69)$$

Analog zu Gleichung 2.45 folgt hieraus für die Gesamtteilchenzahl:

$$N - N_0 = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{k_{\text{B}}T}{\hbar\omega_r} \right)^3 \text{Li}_3(\mathcal{Z}). \quad (2.70)$$

Für  $T \leq T_c$  ist die Fugazität  $\mathcal{Z}$  konstant gleich eins und folglich  $\text{Li}_3(1) \approx 1,202$ , während für  $T > T_c$  die Besetzung des Grundzustandes auf makroskopischer Skala vernachlässigbar ist ( $N_0 \simeq 0$ ). Mit diesen beiden Ergebnissen lässt sich anhand von Gleichung 2.69

<sup>10</sup>In unserem Experiment liegt die kritische Temperatur der Bose-Einstein-Kondensation typischerweise bei  $k_{\text{B}}T_c \geq 60\hbar\omega_\nu$ .

## 2 Theorie der Quantengase

---

die Fugazität und das chemische Potential für beliebige Temperaturen ermitteln. Des Weiteren ergibt sich für die kritische Temperatur  $T_c$ , bei der die Bose-Einstein-Kondensation einsetzt<sup>11</sup>:

$$k_B T_c = \hbar \omega_r \left( \frac{\alpha N}{\text{Li}_3(1)} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 0,94 \hbar \omega_r (\alpha N)^{1/3}. \quad (2.71)$$

Setzt man diesen Ausdruck wiederum in Gleichung 2.70 ein, so erhält man die Temperaturabhängigkeit des Kondensatanteils für  $T \leq T_c$ :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^3. \quad (2.72)$$

Bei einer Temperatur von  $T/T_c = 0,5$  bevölkern bereits etwa 90% der Teilchen den absoluten Grundzustand. Mit dem Phasenübergang bildet sich eine charakteristische bimodale Dichteverteilung aus, denn die makroskopische Bevölkerung des Grundzustandes führt zu einer lokal überhöhten Dichte im Zentrum der Falle. Im wechselwirkungsfreien Fall ist das Dichteprofil des Kondensats direkt proportional zum Betragsquadrat des harmonischen Oszillatorgrundzustandes. Die nicht kondensierten Atome, welche den sogenannten thermischen Anteil bilden, umgeben das Zentrum in einer näherungsweise gaußförmigen Verteilung. Aus Letzterer lässt sich die Temperatur des Ensembles ableiten [75].

Für das ideale, nicht-kondensierte Bosegas ( $T > T_c$ ) lassen sich die Dichte- und Impulsverteilungen, als auch die thermodynamischen Größen mittels der Ersetzung  $-\text{Li}_s(-Z) \rightarrow \text{Li}_s(Z)$  unmittelbar aus den entsprechenden Größen des Fermigases (siehe Abschnitt 2.2.2) ableiten.

Da das Bosegas in unserm Experiment auch zum sympathetischen Kühlen des Fermigases verwendet wird, ist dessen Wärmekapazität eine wichtige Größe. Für  $T < T_c$  ist  $\mu = 0$  und die Gesamtenergie des Systems ergibt sich aus  $E = \int_0^\infty \epsilon g(\epsilon) / [\exp(\epsilon/k_B T) - 1]$ . Für die Wärmekapazität  $C = \partial E / \partial T$  bei konstanter Fallenfrequenz und Teilchenzahl folgt somit:

$$C = 12 N k_B \frac{\text{Li}_4(1)}{\text{Li}_3(1)} \left( \frac{T}{T_c} \right)^3 \quad \text{für } T < T_c. \quad (2.73)$$

Oberhalb der kritischen Temperatur ist  $N_0 \simeq 0$  und die Wärmekapazität kann mittels der Ersetzung  $-\text{Li}_s(-Z) \rightarrow \text{Li}_s(Z)$  direkt aus Gleichung 2.48 abgeleitet werden:

$$C = 3 N k_B \left( 4 \frac{\text{Li}_4(Z)}{\text{Li}_3(Z)} - 3 \frac{\text{Li}_3(Z)}{\text{Li}_2(Z)} \right) \quad \text{für } T > T_c. \quad (2.74)$$

---

<sup>11</sup>Streng genommen tritt der Phasenübergang bei  $T_c$  nur im thermodynamischen Limes ein. Dieser Limes ist durch  $N \rightarrow \infty$  und  $\omega \rightarrow 0$  definiert, wobei das Produkt  $N\omega^3$  konstant gehalten wird. In den Experimenten sind die Atomzahlen üblicherweise so groß, dass die Gase in guter Näherung unendlichen Systemen entsprechen und die Bevölkerung des Grundzustandes quasi abrupt einsetzt.

Die Wärmekapazität des harmonisch gefangenen Bosegas weist, wie in Abbildung 3.22 auf Seite 95 dargestellt, einen Sprung im Bereich der kritischen Temperatur auf und geht dann für sehr kleine Temperaturen rasch gegen null.

### 2.3.2 Beschreibung des Bose-Einstein-Kondensates

Am absoluten Nullpunkt  $T = 0$  ist das ideale Bosegas vollständig kondensiert ( $N_0 = N$ ) und sämtliche Teilchen besetzen denselben Einteilchengrundzustand  $\varphi_0(\mathbf{r})$  des externen Fallenpotentials  $V(\mathbf{r})$ . Die zugehörige Vielteilchenwellenfunktion ergibt sich als Produkt der identischen Einteilchenwellenfunktionen:

$$\Psi_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^N \varphi_0(\mathbf{r}_i). \quad (2.75)$$

Das Bose-Einstein-Kondensat lässt sich auch durch den Ordnungsparameter bzw. die makroskopische Wellenfunktion

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{N} \varphi_0(\mathbf{r}) \quad (2.76)$$

beschreiben, welche bis auf die Normierung mit dem Einteilchengrundzustand übereinstimmt. Die lokale Teilchendichte ist durch  $n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$  gegeben. In einer harmonischen Falle entspricht  $\varphi_0(\mathbf{r})$  dem gaußförmigen Oszillatorgrundzustand und in einem periodischen Gitterpotential ist  $\varphi_0(\mathbf{r})$  durch den Bloch-Zustand des untersten Bandes mit dem Kristallimpuls  $\hbar\mathbf{q} = \mathbf{0}$  gegeben.

### Schwach wechselwirkendes Bosegas

In ultrakalten und verdünnten Bosegasen wechselwirken die elastisch stoßenden Atome über van der Waals-Kräfte miteinander [77–79]. Aufgrund der geringen Dichten kommt es hauptsächlich zu Zweikörperstößen. Entsprechend der bosonischen Teilchennatur muss die Ortswellenfunktion des stoßenden Atompaars symmetrisch sein, sodass ausschließlich Streuamplituden mit geradzahligem Bahndrehimpuls  $l$  zur Wechselwirkung beitragen. Letztlich treten wegen der geringen kinetischen Energien in den ultrakalten Gasen nur  $s$ -Wellen-Stöße auf. Da die de Broglie-Wellenlänge der Teilchen weitaus größer ist als die effektive Ausdehnung des Wechselwirkungspotentials, spielt der genaue Potentialverlauf für den Stoßprozess keine Rolle. Der  $s$ -Wellen-Stoß bewirkt allein eine Phasenverschiebung zwischen den asymptotisch ein- und auslaufenden Wellenfunktionen. Demnach ist jedes Potential, das die richtige Phasenverschiebung hervorruft, gleichwertig und die interatomare Wechselwirkung lässt sich durch ein möglichst einfaches effektives Potential beschreiben:

$$U_{\text{int}}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \cdot \delta(\mathbf{r}) = g \cdot \delta(\mathbf{r}). \quad (2.77)$$

Hierbei handelt es sich um ein Kontaktpotential. Dabei ist  $\mathbf{r}$  der Relativvektor zwischen den beiden stoßenden Atomen,  $m$  ist deren Masse,  $a_s$  die  $s$ -Wellenstreuungslänge und  $g =$

## 2 Theorie der Quantengase

---

$4\pi\hbar^2 a_s/m$  die Kopplungsstärke. In ultrakalten verdünnten Bosegasen ist die interatomare Wechselwirkung besonders einfach und kann vollständig durch einen einzigen Parameter, die  $s$ -Wellenstreuungslänge, beschrieben werden. In welchem Maß das atomare Gas als „verdünnt“ zu betrachten ist, wird durch den sogenannten Gasparameter  $n|a_s|^3$  quantifiziert. Üblicherweise ist der Gasparameter kleiner als  $10^{-3}$  und damit die Streulänge  $a_s$  erheblich kleiner als der mittlere Teilchenabstand  $n^{-1/3}$ . In einem solchen Fall reicht es aus, nur Zweiteilchenwechselwirkungen zu berücksichtigen. Gemäß Abschnitt 2.1.1 lässt sich der Hamilton-Operator der  $N$  wechselwirkende Bosonen im externen Potential  $V(\mathbf{r})$ , wie folgt in zweiter Quantisierung darstellen:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \\ & + \frac{1}{2} \iint \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') U_{\text{int}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Dabei gehorchen die Feldoperatoren  $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})$  und  $\hat{\psi}(\mathbf{r})$  den bosonischen Kommutationsregeln 2.8. Mit der Kontaktwechselwirkung von Gleichung 2.77 nimmt das Doppelintegral in Gleichung 2.78 die folgende Form an:

$$\frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \cdot \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (2.79)$$

Aus der Heisenbergschen Bewegungsgleichung  $i\hbar\partial_t\hat{\psi} = [\hat{\psi}, \hat{H}]$  folgt die Zeitentwicklung des Feldoperators:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g \cdot \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t). \quad (2.80)$$

### Gross-Pitaevskii-Gleichung

Um das wechselwirkende Vielteilchenproblem nicht exakt lösen zu müssen, wird eine Mean-Field- oder Molekularfeld-Näherung verwendet, welche es erlaubt das System durch eine geringe Anzahl physikalisch aussagekräftiger Größen zu beschreiben. Nach Bogoliubov wird dazu der Feldoperator in eine komplexwertige Funktion und einen fluktuierenden Feldoperator zerlegt:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t) + \delta\hat{\psi}(\mathbf{r}, t). \quad (2.81)$$

Die komplexwertige Funktion  $\psi(\mathbf{r}, t)$  beschreibt das Bose-Einstein-Kondensat und ist über den Erwartungswert (Ensemblemittelwert 2.29) des bosonischen Feldoperators definiert,  $\psi(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \rangle$ . Ihr Betragsquadrat bestimmt die Dichte des Kondensatanteils. Der Operator  $\delta\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$  beschreibt quantenmechanische und thermische Fluktuationen und gibt somit die nicht kondensierten Teilchen wieder.

Mit der Einführung der Funktion  $\psi(\mathbf{r}, t)$  wird implizit die Annahme einer spontanen Symmetriebrechung gemacht. Denn  $\psi(\mathbf{r}, t)$  verfügt über eine wohldefinierte Phase, obwohl der Hamilton-Operator 2.78 invariant unter einer globalen  $U(1)$ -Eichtransformation ist. Mit dieser Annahme ist automatisch das Kriterium von Penrose und Onsager für die Bose-Einstein-Kondensation erfüllt [80]: Die Einteilchendichtematrix  $\langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}') \rangle$  weist selbst für große Abstände  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  einen endlichen Erwartungswert auf. Diese Eigenschaft wird auch als „off-diagonal long-range order“ bezeichnet [81] und ist gleichbedeutend mit einer langreichweitigen Phasenkohärenz<sup>12</sup>.

In der nullten Ordnung der Mean-Field-Näherung werden die Fluktuationen  $\delta\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$  als verschwindend klein betrachtet und der Feldoperator in Gleichung 2.80 wird einfach durch seinen Erwartungswert  $\psi(\mathbf{r}, t)$  ersetzt. Hierdurch vernachlässigt man gewissermaßen die Quantenmechanik des Feldoperators und setzt dessen Kommutatoren gleich null. Im Limes großer Teilchenzahlen ist dies eine brauchbare Annahme, da  $[\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)] = 1$ , während  $\langle \hat{\psi} \rangle \simeq \sqrt{N}$ . Anschaulich gesprochen kann im Grenzfall großer Teilchenzahlen das Kondensat durch ein klassisches Feld beschrieben werden. Wie in Gleichung 2.76 vorweggenommen, handelt es sich hierbei um eine makroskopische Wellenfunktion, die auch als Kondensatwellenfunktion bezeichnet wird und welche die Rolle eines Ordnungsparameters einnimmt. Mit der besprochenen Ersetzung erhält man aus Gleichung 2.80 die zeitabhängige Gross-Pitaevskii-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.82)$$

Diese Gleichung hat die Form einer nicht-linearen Schrödinger-Gleichung. Dabei wird die interatomare Wechselwirkung durch ein Mean-Field-Potential beschrieben, welches proportional zu der atomaren Dichte  $n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$  ist. Somit ist auch beim wechselwirkenden verdünnten Bosegas der Vielteilchengrundzustand durch ein Produkt aus identischen Einteilchenzuständen gegeben. Doch gegenüber dem idealen Bosegas kondensieren die Teilchen nun nicht in den Grundzustand des Einteilchenproblems, sondern in einen Grundzustand, der sich als Lösung der Gross-Pitaevskii-Gleichung 2.82 ergibt.

Bei der Herleitung der Gross-Pitaevskii-Gleichung werden die Fluktuationen  $\delta\hat{\psi}$  vernachlässigt und somit wird implizit angenommen, dass sämtliche Teilchen das Kondensat bevölkern ( $N_0 = N$ ). Berücksichtigt man jedoch die Fluktuationen in erster Ordnung, so erhält man die sogenannte Bogoliubov-Theorie. Diese ermöglicht die Beschreibung elementarer Anregungen des Kondensates in Form von Quasiteilchen. Dabei zeigt sich, dass aufgrund der interatomaren Wechselwirkung auch bei  $T = 0$  eine Besetzung thermischer Zustände auftritt. Diese Besetzung angeregter Zustände führt zu einer Verarmung des Kondensates (quantum depletion), welche proportional zu  $\sqrt{n|a_s|^3}$  ist. In typischen Experi-

<sup>12</sup>Die Phasenkohärenz wird über die Korrelationsfunktion erster Ordnung  $g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \propto \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}') \rangle$  quantifiziert, welche proportional zur Einteilchendichtematrix ist (siehe Definition 8.49).

## 2 Theorie der Quantengase

---

menten mit Gasparametern  $n|a_s|^3$  der Größenordnung  $10^{-5}$  beträgt diese Verarmung jedoch weniger als 1 %, sodass die Gross-Pitaevskii-Gleichung bei  $T \ll T_c$  eine sehr gute Näherung darstellt.

### Wechselwirkungen in atomaren Gasen und stark korrelierte Systeme

Die Stärke der Wechselwirkung in einem Vielteilchensystem lässt sich über den Parameter  $\gamma$  quantifizieren. Dieser gibt für jedes Teilchen das Verhältnis aus Wechselwirkungsenergie und *dichteabhängiger* kinetischer Energie an [82]:

$$\gamma = \frac{\epsilon_{\text{int}}}{\epsilon_{\text{kin}}} = \frac{|g|n}{\hbar^2 n^{2/3}/m} = 4\pi n^{1/3}|a_s|. \quad (2.83)$$

Demnach stimmt die Bedingung für ein „verdünntes Gas“ ( $n|a_s|^3 \ll 1$ ) mit der für ein „schwach wechselwirkendes Gas“ ( $\gamma < 1$ ) überein. Bei kleinem  $\gamma$  ist die Verarmung des Kondensats gering und folglich eine Beschreibung durch eine makroskopische Wellenfunktion möglich. Nur in diesem Regime kann die korpuskulare Natur des Vielteilchenzustandes zugunsten einer klassischen Feldbeschreibung vernachlässigt werden.

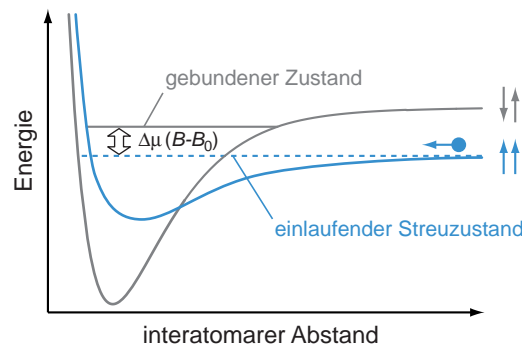
In den letzten Jahren wurden zunehmend Untersuchungen mit ultrakalten Atomen im stark korrelierten Regime ( $\gamma \gg 1$ ) durchgeführt. Dabei werden zwei unterschiedliche Ansätze verfolgt, um die starken Wechselwirkungen in den Gasen hervorzuheben.

Ein Ansatz basiert darauf, direkt die atomaren Stoßeigenschaften mittels sogenannter Feshbach-Resonanzen zu verändern [83–85]. Das Prinzip der Feshbach-Resonanzen ist in Abbildung 2.6 veranschaulicht. Diese Resonanzen treten immer dann auf, wenn die Energien zweier stoßender Atome mit der Energie eines gebundenen molekularen Zustandes im interatomaren Wechselwirkungspotential übereinstimmt. Das Niveau des gebundenen Zustandes lässt sich durch Anlegen eines homogenen Magnetfeldes gegenüber dem einlaufenden Streuzustand verschieben und somit auch die Streulänge  $a_s$ , welche die Stärke der interatomaren Wechselwirkung beschreibt, frei durchstimmen. In Bose-Einstein-Kondensaten führt diese Methode jedoch zu einer drastischen Verringerung der Lebensdauer [86], denn mit zunehmender Streulänge nehmen auch die Dreikörperverluste gemäß

$$\dot{n} \propto -\frac{\hbar}{m} n^3 a_s^4 \quad (2.84)$$

zu [87]. Dennoch hat es diese Methode ermöglicht, die Wechselwirkung zwischen bosonischen Atomen über einen weiten Bereich durchzustimmen und somit den Kollaps und die anschließende Explosion eines Kondensates zu beobachten [88, 89].

Im Jahr 2002 begann man auch die Wechselwirkungen in zweikomponentigen Fermigasen mittels Feshbach-Resonanzen zu beeinflussen. Durch die Absenkung der Energie eines molekularen Feshbach-Zustandes unter die Energie zweier freier Atome ließen sich erstaunlich langlebige Moleküle erzeugen [90–92]. In Referenz [93, 94] wurde darauf hingewiesen, dass die langen Lebensdauern in der Nähe der Feshbach-Resonanz eine direkte



**Abbildung 2.6:** Prinzip der Feshbach-Resonanz am Beispiel zweier Alkaliatome, die auf einem Triplettpotential einlaufen (parallele Spinausrichtung der Valenzelektronen). Durch die Hyperfeinwechselwirkung können die beiden streuenden Atome an einen gebundenen molekularen Singulettzustand (mit antiparallelen Elektronenspins) koppeln. Unterschiedliche magnetische Momente ermöglichen es den gebundenen Zustand und den einlaufenden Streuzustand durch Anlegen eines Magnetfeldes miteinander in Resonanz zu stimmen.

Konsequenz der fermionischen Teilchennatur sind: Damit in einem zweikomponentigen Fermigas ein inelastischer Dreikörperstoß auftreten kann, müssen sich mindestens zwei Fermionen mit gleichem Spin am selben Ort aufhalten, was durch das Pauli-Prinzip stark unterdrückt wird. Dieser unerwartete Effekt hat es ermöglicht, eine Vielzahl beeindruckender Experimente mit zweikomponentigen Fermigasen im Regime starker Wechselwirkung durchzuführen, wie zum Beispiel die Erzeugung von Kondensaten aus langlebigen Feshbach-Molekülen [12–14] und die Untersuchung des zugehörigen BEC-BCS-Übergangs [15–17]. Bei zweikomponentigen Fermigasen wird die Stärke der Wechselwirkung meistens über den Fermi-Impuls  $k_F$  statt über die Dichte  $n$  charakterisiert: Mit Gleichung 2.40 ergibt sich für den fermionischen Wechselwirkungsparameter  $\gamma \approx k_F |a_s|$ .

Ein anderer Ansatz, stark korrelierte Systeme mit ultrakalten Atomen zu realisieren, basiert auf einem Vorschlag von Dieter Jaksch und Mitarbeitern [9]. Bei diesem Ansatz werden die Atome in das periodische Potential eines optischen Gitters geladen. Um sich fortzubewegen, müssen die Atome von einem Gitterplatz zum Nächsten tunneln. Identifiziert man die Tunnelenergie mit der kinetischen Energie, so kann man den Teilchen eine effektive Masse zuordnen. Durch Erhöhen der Gittertiefe steigt die effektive Masse rasch an und die kinetische Energie wird exponentiell klein. Gleichzeitig bewirkt der zunehmende Einschluss auf den einzelnen Gitterplätzen, dass die Wechselwirkungsenergie in etwa linear ansteigt. Letztlich kann über die Gittertiefe das Verhältnis aus Wechselwirkungsenergie und kinetischer Energie massiv verändert werden, ohne dabei die Streulänge und die mittlere Dichte signifikant zu beeinflussen. Dies erlaubt es weitgehend stabile atomare Ensemble im stark korrelierten Regime zu präparieren und zu untersuchen. Basierend auf diesem Ansatz konnte in einem grundlegenden Experiment der Quantenphasenübergang von einem superfluiden Kondensat zu einem Mott-Isolator beobachtet werden [10, 95].

## 2 Theorie der Quantengase

### Thomas-Fermi-Näherung

Zwar bezeichnet man ein verdünntes Bosegas ( $n|a_s|^3 \ll 1$ ) als „schwach wechselwirkend“, dennoch bedeutet dies keinesfalls, dass die Effekte der Wechselwirkung vernachlässigt werden können. Wie wir im Folgenden sehen werden, kann sich das schwach wechselwirkende Gas erheblich von einem idealen Gas unterscheiden. Vergleicht man die Wechselwirkungsenergie des Gases diesmal mit der kinetischen Energie ( $E_{\text{kin}} \propto N\hbar\omega$ ), welche die  $N$  Teilchen aufgrund des Einschlusses in der harmonischen Falle aufweisen, so erhält man das Verhältnis:

$$\frac{E_{\text{int}}}{E_{\text{kin}}} \propto \frac{N|a_s|}{a_{\text{ho}}}. \quad (2.85)$$

Bezeichnet  $\bar{\omega} = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$  das geometrische Mittel der Fallenfrequenzen, dann ist  $a_{\text{ho}} = \sqrt{\hbar/m\bar{\omega}}$  die mittlere Ausdehnung des harmonischen Oszillatorgrundzustandes. Bei einem wechselwirkungsfreien Bosegas wäre dies zugleich die mittlere Ausdehnung des Kondensats. Aus dem Verhältnis in 2.85 folgt, dass in typischen Kondensaten die Wechselwirkungsenergie drei Größenordnungen größer ist als die durch den externen Einschluss bedingte kinetische Energie. Die repulsive Wechselwirkung führt zu einer erheblich größeren Ausdehnung des Kondensats im Vergleich zum idealen Bosegas. Die Kondensatwellenfunktion kann im Rahmen der zuvor beschriebenen Mean-Field-Näherung bestimmt werden. Im stationären Fall macht man den Ansatz  $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{i\mu t/\hbar}$ , wobei  $\mu$  das chemische Potential ist. Eingesetzt in Gleichung 2.82 erhält man dann die zeitunabhängige Gross-Pitaevskii-Gleichung:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g|\psi(\mathbf{r})|^2 \right) \psi(\mathbf{r}) = \mu\psi(\mathbf{r}). \quad (2.86)$$

Im Allgemeinen müssen die Lösungen zu Gleichung 2.86 numerisch ermittelt werden. Doch im Fall  $N|a_s|/a_{\text{ho}} \gg 1$  kann aufgrund der dominierenden Wechselwirkungsenergie in Gleichung 2.86 der Term für die kinetische Energie vernachlässigt werden. Für die Kondensatwellenfunktion ergibt sich dann der folgende einfache Ausdruck:

$$n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2 = \max\left(\frac{\mu - V(\mathbf{r})}{g}, 0\right). \quad (2.87)$$

Wegen der Ähnlichkeit mit der Dichteverteilung der Fermionen in Gleichung 2.67 wird die hier gemachte Näherung ebenfalls als Thomas-Fermi-Näherung bezeichnet. In den meisten Experimenten ist  $|a_s|/a_{\text{ho}}$  von der Größenordnung  $10^{-3}$ , sodass die Näherung für Kondensate mit mehr als  $10^4$  Teilchen gute Resultate liefert. Das chemische Potential ergibt sich aus der Normierung der Wellenfunktion auf die Teilchenzahl  $N$  im Kondensat. Für die harmonische Falle folgt:

$$\mu = \frac{\hbar\bar{\omega}}{2} \left( \frac{15Na_s}{a_{\text{ho}}} \right)^{2/5}. \quad (2.88)$$



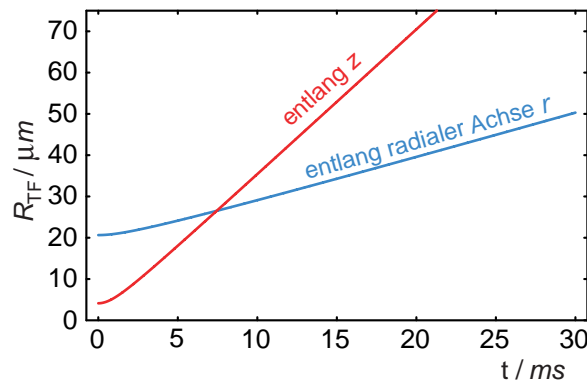
Das chemische Potential  $\mu$  hängt also nur über das geometrische Mittel  $\bar{\omega}$  von den Fallenfrequenzen ab. Die Dichteverteilung  $n(\mathbf{r})$  hat die Form einer invertierten Parabel und verschwindet jenseits des sogenannten Thomas-Fermi-Radius  $R_{\text{TF}}$ :

$$R_{\text{TF}} = a_{\text{ho}} \left( \frac{15Na_s}{a_{\text{ho}}} \right)^{\frac{1}{5}}. \quad (2.89)$$

Für eine axialsymmetrische Falle ist der Thomas-Fermi-Radius entlang der radialen und der axialen Achse durch  $\mu = \frac{1}{2}m\omega_r^2 R_{\text{TF},r}^2 = \frac{1}{2}m\omega_z^2 R_{\text{TF},z}^2$  definiert. Aufgrund der repulsiven Wechselwirkung ist die Ausdehnung des Kondensats typischerweise eine Größenordnung größer als die Ausdehnung  $a_{\text{ho}}$  des harmonischen Oszillatorgrundzustandes. Gleichzeitig ist die Dichte im Zentrum der Falle  $n(0) = \mu/g$  etwa zwei Größenordnungen kleiner als im wechselwirkungsfreien Fall.

### 2.3.3 Freie Expansion beim Entlassen aus einer harmonischen Falle

Zur experimentellen Untersuchung wird das Bose-Einstein-Kondensat aus der Falle entlassen. Die Dichteverteilung nach der freien Expansion kann aus einem Satz von hydrodynamischen Gleichungen abgeleitet werden, die das superfluide Kondensat beschreiben [73]. Als Ansatz wird von einer zeitlichen Skalierung der anfänglichen Thomas-Fermi-Verteilung ausgegangen, bei der die Parabelform des anfänglichen Gleichgewichtszustandes erhalten bleibt. Dieser Ansatz wird durch das Expansionsverhalten eines aus einer



**Abbildung 2.7:** Thomas-Fermi-Radien während der freien Expansion für ein BEC mit  $5 \cdot 10^5$   $^{87}\text{Rb}$ -Atomen (gemäß Gl. 2.90). Zum Zeitpunkt  $t = 0$  werden die Teilchen aus einer oblaten harmonischen Falle mit den Frequenzen  $\omega_r = 2\pi \cdot 27$  Hz und  $\omega_z = 2\pi \cdot 136$  Hz entlassen ( $\alpha = 5$ ). Die Umwandlung der Mean-Field-Energie in kinetische Energie bewirkt, dass die Atomwolke entlang der Achse des stärksten Einschlusses besonders schnell expandiert. Die während der freien Expansion stattfindende Inversion des Aspektverhältnisses ist – neben der bimodalen Dichteverteilung – ein wichtiges Charakteristikum der Bose-Einstein-Kondensation.

## 2 Theorie der Quantengase

---

harmonischen Falle entlassenen klassischen Gases motiviert, welches eine dichteabhängige Kraft verspürt [96]. Bei einer *oblaten* harmonischen Falle, wie in unserem Experiment, skalieren die Radien der expandierenden Thomas-Fermi-Verteilung dann wie:

$$\begin{aligned} R_{\text{TF},r}(\tau) &= R_{\text{TF},r}(0) \left[ 1 + \frac{1}{\alpha^2} \left( \tau \arctan \tau - \ln \sqrt{1 + \tau^2} \right) \right], \\ R_{\text{TF},z}(\tau) &= R_{\text{TF},z}(0) \sqrt{1 + \tau^2}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Dabei ist  $\tau = \omega_z t$  die einheitenlose Expansionszeit und  $\alpha = \omega_z / \omega_r$  das Aspektverhältnis der (entlang  $z$ ) zylindersymmetrischen Falle. Die Radien der anfänglichen Thomas-Fermi-Verteilung  $R_{\text{TF},r}(0)$  und  $R_{\text{TF},z}(0)$  ergeben sich analog zu Gleichung 2.89. Die Konversion der Wechselwirkungsenergie in kinetische Energie findet im Zeitraum  $\tau < 1$  statt. Dies entspricht etwa der ersten Millisekunde der freien Expansion.

### 2.4 Wechselwirkende Bose-Fermi-Mischungen

In den vorherigen Abschnitten wurden die Bose- und Fermigase unabhängig voneinander behandelt. Jedoch koexistieren beim sympathischen Kühlen beide Gase innerhalb einer Falle und können simultan zur Quantenentartung gebracht werden (siehe Abschnitt 3.5). Die dabei erzielten Dichten machen es notwendig, die Wechselwirkungen zwischen den beiden Spezies zu berücksichtigen. Es sind gerade diese Interspezieswechselwirkungen, welche Bose-Fermi-Mischungen zu interessanten Modellsystemen für die Untersuchung von Vielteilphänomenen machen. Wie wir sehen werden, können mit diesen Mischungen sowohl in einfachen Fällen als auch in optischen Gittern eine Vielzahl von Phasen und komplexen Quantenzuständen realisiert werden. Einen besonderen Reiz bietet dabei die Möglichkeit, die Interspezieswechselwirkungen mittels Feshbach-Resonanzen über einen weiten Bereich durchstimmen und in ihrem Vorzeichen verändern zu können.

Bereits in einer einfachen Falle führt das Wechselspiel zwischen Boson-Boson- und Boson-Fermion-Wechselwirkung zur Ausbildung eines reichhaltigen Phasendiagramms, welches wir im Folgenden genauer untersuchen wollen.

#### 2.4.1 Selbstkonsistente Mean-Field-Berechnung

Als Nächstes soll das Dichteprofil der harmonisch gefangenen Bose-Fermi-Mischung bei  $T = 0$  im Rahmen einer selbstkonsistenten Mean-Field-Theorie berechnet werden. Dabei orientieren wir uns an der grundlegenden theoretischen Arbeit von K. Mølmer [97] und den weiterführenden Arbeiten von R. Roth und H. Feldmeier [98, 99].

Für die Beschreibung der Wechselwirkungen in ultrakalten Bose-Fermi-Mischungen mit vollständig spinpolarisierten Spezies werden nur zwei Parameter benötigt. Dies sind die  $s$ -Wellenstreuulängen der Boson-Boson-Streuung  $a_{\text{BB}}$  und der Boson-Fermion-Streuung  $a_{\text{BF}}$ . Wegen des Pauli-Prinzips tritt keine Streuung zwischen den identischen Fermionen auf.

## 2.4 Wechselwirkende Bose-Fermi-Mischungen

Ausgangspunkt für die quantitative Beschreibung sind die Thomas-Fermi-Näherungen für das Bose- und das Fermigas bei  $T = 0$  (siehe Gl. 2.87 und 2.67). Der Wechselwirkung zwischen den beiden Spezies kann man Rechnung tragen, indem man das externe Potential  $V_i(\mathbf{r})$  durch ein dichteabhängiges Mean-Field-Potential  $g_{\text{BF}}n_i(\mathbf{r})$  ergänzt. Dabei ist  $n_i(\mathbf{r})$  die lokale Dichte der jeweils anderen Spezies ( $i = \{\text{B}, \text{F}\}$ ) und  $g_{\text{BF}}$  ist die Kopplungsstärke der Boson-Fermion-Wechselwirkung. Für die Dichteverteilungen erhält man somit ein gekoppeltes Paar von Gleichungen:

$$n_{\text{B}}(\mathbf{r}) = \max \left[ \frac{\mu_{\text{B}} - V_{\text{B}}(\mathbf{r}) - g_{\text{BF}}n_{\text{F}}(\mathbf{r})}{g_{\text{BB}}}, 0 \right], \quad (2.91a)$$

$$n_{\text{F}}(\mathbf{r}) = \frac{(2m_{\text{F}})^{\frac{3}{2}}}{6\pi^2\hbar^3} \Re \left[ (\mu_{\text{F}} - V_{\text{F}}(\mathbf{r}) - g_{\text{BF}}n_{\text{B}}(\mathbf{r}))^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (2.91b)$$

Die Kopplungsstärken sind proportional zu den jeweiligen Streulängen und wie folgt definiert:

$$g_{\text{BB}} = 2\pi\hbar^2 a_{\text{BB}}/\mu_{\text{BB}}, \quad (2.92a)$$

$$g_{\text{BF}} = 2\pi\hbar^2 a_{\text{BF}}/\mu_{\text{BF}}. \quad (2.92b)$$

Dabei sind  $\mu_{\text{BB}} = m_{\text{B}}/2$  und  $\mu_{\text{BF}} = (m_{\text{B}}m_{\text{F}})/(m_{\text{B}} + m_{\text{F}})$  die reduzierten Massen der stoßenden Atompaare. Die chemischen Potentiale  $\mu_{\text{B}}$  und  $\mu_{\text{F}}$  sind über die entsprechenden Teilchenzahlen  $N_{\text{B}}$  und  $N_{\text{F}}$  wie folgt festgelegt:

$$N_i = \int n_i(\mathbf{r}, \mu_i) d^3\mathbf{r} \quad i = \{\text{B}, \text{F}\}. \quad (2.93)$$

Die gekoppelten Gleichungen 2.91 können numerisch durch iteratives Einsetzen der Dichteverteilung in die jeweils andere Gleichung gelöst werden. Bei einem sphärisch symmetrischen Fallenpotential lässt sich das dreidimensionale Problem auf ein eindimensionales Problem reduzieren. Dasselbe gilt für anisotrope harmonische Fallen, bei denen Bosonen und Fermionen dasselbe absolute Potential verspüren. Die Übereinstimmung  $V_{\text{B}}(\mathbf{r}) = V_{\text{F}}(\mathbf{r})$  gilt näherungsweise für magnetisch gefangene Atome in maximal gestreckten Hyperfeinzuständen<sup>13</sup> oder für Atome in einer fernverstimmten Dipolfalle<sup>14</sup>. Handelt es sich zudem um eine (anisotrope) harmonische Falle, so lässt sich das Problem mittels neu skalierten Koordinaten

$$\tilde{x}_j = \sqrt{\frac{m_{\text{B}}\omega_{\text{B},j}^2}{2}} x_j = \sqrt{\frac{m_{\text{F}}\omega_{\text{F},j}^2}{2}} x_j \quad j \in \{x, y, z\} \quad (2.94)$$

<sup>13</sup>In den maximal gestreckten Zuständen  $|F = 2, m_F = +2\rangle$  für  $^{87}\text{Rb}$  und  $|F = 9/2, m_F = +9/2\rangle$  für  $^{40}\text{K}$  beträgt das magnetische Moment jeweils ein Bohrsches Magneton.

<sup>14</sup>Dies setzt voraus, dass die Atome über eine ähnliche Linienbreite  $\Gamma/2\pi$  verfügen. Für Rubidium und Kalium beträgt diese jeweils etwa 6 MHz.

## 2 Theorie der Quantengase

symmetrisieren und man erhält  $V_B(\tilde{r}) = V_F(\tilde{r}) = \tilde{r}^2$ . Bezüglich der neuen Koordinaten  $\tilde{r}$  nehmen die gekoppelten Gleichungen die folgende Form an:

$$n_B(\tilde{r}) = \max \left[ \frac{\mu_B - \tilde{r}^2 - g_{BF}n_F(\tilde{r})}{g_{BB}}, 0 \right], \quad (2.95a)$$

$$n_F(\tilde{r}) = \frac{(2m_F)^{\frac{3}{2}}}{6\pi^2\hbar^3} \mathfrak{Re} \left[ \left( \mu_F - \tilde{r}^2 - g_{BF}n_B(\tilde{r}) \right)^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (2.95b)$$

Da das Problem in den neu skalierten Koordinaten eine sphärische Symmetrie aufweist ( $\tilde{r}^2 = \tilde{r}^2$ ), können die dreidimensionalen Dichteverteilungen auf eindimensionale Verteilungen reduziert werden. Auch das Integral von Gleichung 2.93 lässt sich aufgrund der sphärischen Symmetrie vereinfachen:

$$N_i = 4\pi \left( \frac{2}{m_F \bar{\omega}_F^2} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty n_i(\tilde{r}, \mu_i) \tilde{r}^2 d\tilde{r} \quad i = \{B, F\}. \quad (2.96)$$

In den neuen Koordinaten hängen die bosonischen und fermionischen Dichteverteilungen nur vom geometrischen Mittel der Fallenfrequenzen  $\bar{\omega}_F = (\omega_{F,x}\omega_{F,y}\omega_{F,z})^{1/3}$  ab und das Aspektverhältnis der Falle spielt keine Rolle. Diese Ergebnisse gelten im Rahmen des Gültigkeitsbereichs der Thomas-Fermi-Näherung, also für  $N_B a_{BB}/a_{ho,B} \gg 1$  und  $N_F \gg 1$ . Die Dichteverteilungen können numerisch als selbstkonsistente Lösungen von Gleichung 2.95 und 2.96 ermittelt werden. Die einzelnen Schritte  $k$  des numerischen Iterationsverfahrens sind im Folgenden aufgeführt:

0. *Initialisierung:* Als Ausgangspunkt der Iteration ( $k = 0$ ) dient die Thomas-Fermi-Verteilung des reinen Bose-Kondensats  $n_{B,0}(\tilde{r})$ . Sie ergibt sich aus Gleichung 2.95a unter Vernachlässigung der Interspezieswechselwirkung ( $g_{B,F} = 0$ ). Das zugehörige chemische Potential  $\mu_{B,0}$  folgt aus Gleichung 2.88.
1. *Beginn einer Iterationsschleife:* Durch Einsetzen von  $n_{B,k}(\tilde{r})$  in Gleichung 2.95b erhält man die Fermionenverteilung  $n_{F,k+1}(\tilde{r}, \mu_{F,k+1})$ .
2. Das chemische Potential in  $n_{F,k+1}(\tilde{r}, \mu_{F,k+1})$  muss gemäß Gleichung 2.96 auf die Anzahl  $N_F$  der Fermionen angepasst werden. Somit erhält man die richtig normierte fermionische Dichteverteilung  $n_{F,k+1}(\tilde{r})$ .
3. Die neue Dichteverteilung der Fermionen  $n_{F,k+1}(\tilde{r})$  führt aufgrund der Interspezieswechselwirkung wiederum zu einer neuen Verteilung der Bosonen. Letztere folgt durch Einsetzen von  $n_{F,k+1}(\tilde{r})$  in Gleichung 2.95a.
4. *Ende einer Iterationsschleife:* Auch das chemische Potential in  $n_{B,k+1}(\tilde{r}, \mu_{B,k+1})$  muss so angepasst werden, dass die Integration in Gleichung 2.96 die Anzahl der Teilchen  $N_B$  ergibt. Somit folgt schließlich die bosonische Dichte  $n_{B,k+1}(\tilde{r})$ .

## 2.4 Wechselwirkende Bose-Fermi-Mischungen

Die resultierenden Dichteverteilungen  $n_{B,k+1}(\tilde{r})$  und  $n_{F,k+1}(\tilde{r})$  dienen als Ausgangspunkt für den nächsten Iterationszyklus ( $k = 1$  bis  $4$ ). Nach dem Durchlaufen mehrerer Zyklen können sich zwei verschiedene Situationen einstellen: Entweder konvergiert das Verfahren und es ergeben sich Dichteverteilungen, welche selbstkonsistente Lösungen des Problems darstellen. Oder das Verfahren divergiert, wobei die zentrale Dichte mit jedem Iterationszyklus weiter zunimmt. Der zweite Fall spiegelt den Kollaps der Mischung wider. Das Konvergenzverhalten wird entscheidend durch die Wechselwirkungsstärken  $g_{BF}$  und  $g_{BB}$  bestimmt.

### 2.4.2 Mischungen mit variabler Wechselwirkung

Je nach Größe und Vorzeichen der Wechselwirkungsstärken bilden die Mischungen verschiedene räumliche Phasen aus. Die zugehörigen Dichteverteilungen sollen am Beispiel einer harmonisch gefangenen Mischung aus  $^{87}\text{Rb}$  und  $^{40}\text{K}$  numerisch berechnet werden. Dabei gehen wir für jede Spezies von  $3 \cdot 10^5$  Teilchen aus, die in einer oblaten fernverstemten Dipolfalle mit den Frequenzen  $\omega_r = 2\pi \cdot 40 \text{ Hz}$  und  $\omega_z = 2\pi \cdot 200 \text{ Hz}$  (für  $^{40}\text{K}$ ) gefangen sind<sup>15</sup>. Des Weiteren sei  $a_{BB} = 100,4(1) a_0$ . Dies entspricht der Streulänge von Rubidiumatomen im absoluten Grundzustand  $|F, m_F\rangle = |1, +1\rangle$  [100]. Hierbei bezeichnet  $a_0$  den bohrschen Radius. Befinden sich die Kaliumatome ebenfalls in ihrem absoluten Grundzustand  $|9/2, -9/2\rangle$ , so verfügt die Mischung über eine bei  $B_0 = 546.7(4) \text{ G}$  zentrierte Interspezies-Feshbach-Resonanz mit einer Breite  $\Delta \approx -2,9 \text{ G}$  [101–103]. Diese Feshbach-Resonanz ermöglicht es, die Streulänge  $a_{BF}$  mittels eines externen Magnetfeldes  $B$  über einen weiten Bereich frei durchzustimmen<sup>16</sup>. In der Nähe der Resonanz lässt sich die Streulänge wie folgt parametrisieren

$$a_{BF}(B) = a_{bg} \left( 1 - \frac{\Delta}{B - B_0} \right), \quad (2.97)$$

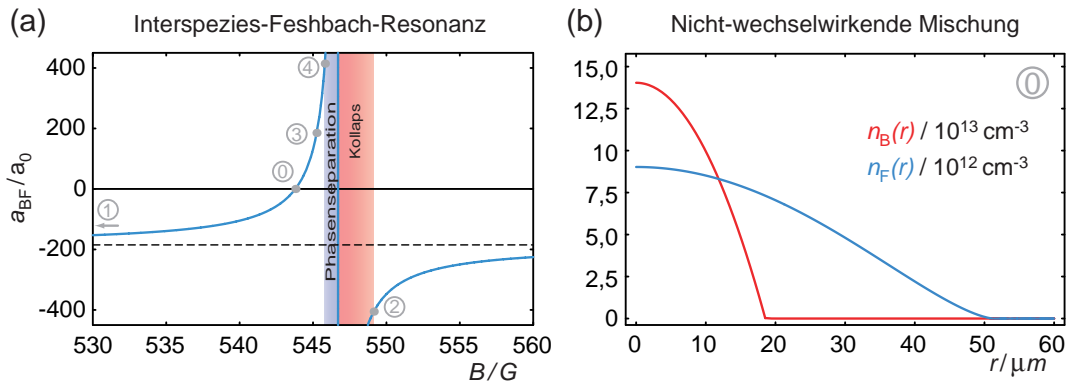
was in Abbildung 2.8a dargestellt ist. Dabei bezeichnet  $a_{bg} = -185(7) a_0$  die Hintergrundstreulänge. Die Feshbach-Resonanz erlaubt es, die Bose-Fermi-Wechselwirkung beliebig von attraktiv über nicht-wechselwirkend nach repulsiv einzustellen. Auf diese Weise lässt sich das gesamte Phasendiagramm der Mischung vom Kollaps bis zur Phasenseparation untersuchen, was jedoch nicht Ziel dieser Arbeit ist. Entsprechende experimentelle Studien wurden bereits in den Referenzen [101, 105] vorgestellt.

Doch auch für den adiabatischen Transfer der Bose-Fermi-Mischung in das optische Gitter ist eine genaue Kenntnis der Dichteverteilungen in der harmonischen Ausgangsfalle von Bedeutung. In der Regel verändert sich beim Hochfahren des Gitters die effektive Wechselwirkung zwischen den Atomen, was zu einer räumlichen Umverteilung der Mischung führt. Die Interspezies-Feshbach-Resonanz bietet die Möglichkeit diese Umvertei-

<sup>15</sup>Die entsprechenden Fallenfrequenzen für Rubidium seien um einen Faktor  $\sqrt{40/87}$  kleiner.

<sup>16</sup>Von dieser Interspezies-Feshbach-Resonanz liegt die nächste Resonanz, welche die Streulänge von Rubidium  $a_{BB}$  beeinflusst, etwa  $140 \text{ G}$  entfernt und verfügt über eine Breite von  $\Delta = 17 \text{ mG}$  [104]. In dieser Arbeit betrachten wir  $a_{BB}$  daher als unabhängig vom Magnetfeld.

## 2 Theorie der Quantengase



**Abbildung 2.8:** (a) Interspezies-Feshbach-Resonanz, die es erlaubt die Wechselwirkung zwischen  $^{87}\text{Rb}$  und  $^{40}\text{K}$  frei von stark attraktiv nach stark repulsiv durchzustimmen. Die farbigen Balken markieren die kritischen Bereiche, in denen laut Berechnung die Phasenseparation und der Kollaps der Mischung auftreten. Grau markierte Werte kennzeichnen Streulängen, zu denen die Rb- und K-Dichteverteilungen im Rahmen des selbstkonsistenten Mean-Field-Modells berechnet werden [siehe folgende Abbildungen ① bis ④] (b) Radiale Dichteverteilung der Bosonen (rot) und der Fermionen (blau) für eine nicht-wechselwirkende Mischung bei  $T = 0$  [ $a_{BF}(543,8 \text{ G}) = 0$ ].

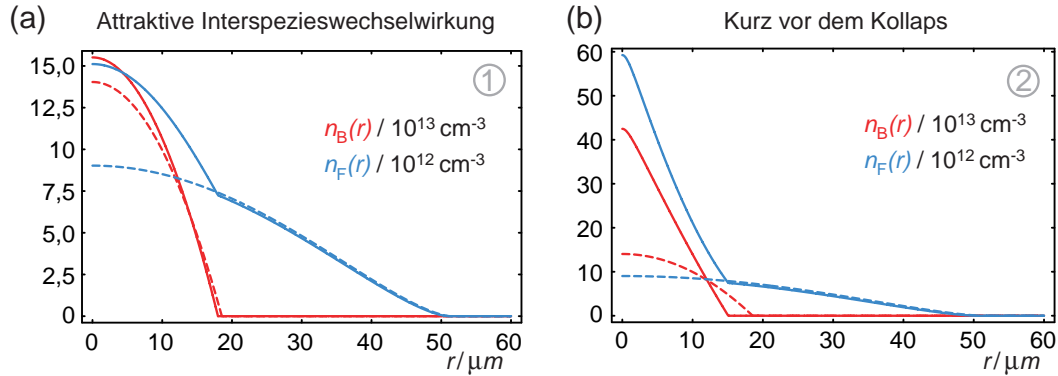
lung zu minimieren oder die Verteilung an die Anforderungen des jeweiligen Experimentes anzupassen (siehe Abschnitt 5.3.3).

### Keine Interspezieswechselwirkung

Abbildung 2.8b zeigt die berechneten radialen Verteilungen<sup>17</sup> der beiden unabhängigen Spezies bzw. die Verteilungen der Mischung bei „abgeschalteter“ Interspezieswechselwirkung. Ein „Abschalten“ der Wechselwirkung kann über die Feshbach-Resonanz erreicht werden, denn bei einem Feld von 543,8 G verschwindet die Interspeziesstrelänge. Man beachte, dass in der Abbildung die Kaliumdichte gegenüber der Rubidiumdichte um einen Faktor 10 skaliert dargestellt ist. Die im Vergleich zum Bosegas größere Ausdehnung und geringere Dichte des Fermigas ist auf die höheren Teilchenenergien zurückzuführen. So beträgt die Fermi-Energie  $\epsilon_F/k_B = 399 \text{ nK}$ , während das chemische Potential des Kondensats nur  $\mu_B/k_B = 53 \text{ nK}$  beträgt. Die größere Ausdehnung lässt sich als Ursache des nach außen gerichteten Fermidruckes verstehen. Hierbei handelt es sich um eine universelle Eigenschaft von entarteten Fermigasen, die zum Beispiel auch weiße Zwerge oder Neutronensterne vor dem gravitativen Kollaps bewahrt. Bei gleichgroßen Teilchenzahlen ist das Bose-Einstein-Kondensat vollständig in das Fermigas eingetaucht. In diesem Beispiel hat das Bosegas gegenüber dem Fermigas eine 2,8-mal geringere Ausdehnung und

<sup>17</sup>In axialer Richtung ( $z$ ) sind die Ausdehnungen um einen Faktor  $\alpha = \omega_z/\omega_r$  kleiner, die Dichteprofile aber ansonsten identisch.

## 2.4 Wechselwirkende Bose-Fermi-Mischungen



**Abbildung 2.9:** Bose-Fermi-Mischungen mit attraktiver interspezieswechselwirkung: **(a)** Verteilungen bei moderat attraktiver Wechselwirkung [ $a_{BF}(0 \text{ G}) = -185 a_0$ ]. **(b)** Verteilungen bei starker Anziehung, wobei sich die Mischung noch gerade stabil verhält [ $a_{BF}(549, 133 \text{ G}) = -405, 5 a_0$ ]. Für Streulängen  $a_{BF} \leq -406 a_0$  kollabiert das Ensemble. Die Verteilungen ohne interspezieswechselwirkung ( $a_{BF} = 0$ ) sind gestrichelt dargestellt.

somit ein 22-mal kleineres Volumen. Die zentrale Dichte ist etwa 15-mal größer.

### Attraktive interspezieswechselwirkung

Betrachtet man dieselbe Mischung bei einem verschwindendem Magnetfeld ( $B = 0$ ), so liegt eine schwach attraktive Bose-Fermi-Wechselwirkung vor ( $a_{BF} = -185(7) a_0$  [103]). Dabei generieren die Bosonen ein attraktives Mean-Field für die Fermionen und umgekehrt. Dies führt, wie in Abbildung 2.9a dargestellt, für beide Spezies zu einer Erhöhung der Dichte im zentralen Überlappungsbereich. Wegen der hohen Kondensatdichte ist der Einfluss von  $g_{BF}n_B$  auf die Fermionen weitaus stärker als der Einfluss von  $g_{BF}n_F$  auf die Bosonen. In diesem Beispiel nimmt die zentrale Dichte gegenüber dem wechselwirkungsfreien Fall um 10 % für die Bosonen und um 67 % für die Fermionen zu. Da sich die Wechselwirkung auf den Überlappungsbereich beschränkt, bildet das Fermigas ein bimodales Dichteprofil aus, dessen Knick genau am Kondensatrand situiert ist. Der Überlappungsbereich macht nur einen kleinen Anteil ( $1/22$ ) des Gesamtvolumens aus, weshalb die Fermi-Dichte im Außenbereich nur geringfügig vom wechselwirkungsfreien Fall abweicht. Aufgrund der vergleichsweise schwachen Wechselwirkung konvergiert die numerische Berechnung der Dichteverteilungen bereits nach wenigen Iterationen.

Die bimodale Struktur in der Fermionendichte lässt sich auch experimentell beobachten. Die Absorptionaufnahmen in Abbildung 2.10 zeigen die beiden Komponenten einer quantenentarteten Mischung nach 10 ms freier Expansion. Das  $^{87}\text{Rb}$  und das  $^{40}\text{K}$  werden aus einer oblaten Dipolfalle ( $\omega_z \approx 5\omega_r$ ) entlassen und quasi simultan entlang orthogonaler Achsen aufgenommen [ $^{87}\text{Rb}$  vertikal ( $z$ ) und  $^{40}\text{K}$  radial ( $r$ )]. Aufgrund der Dynamik während der Expansion spiegeln die Aufnahmen nicht unmittelbar die Atomverteilungen

## 2 Theorie der Quantengase

---

innerhalb der Falle wider. Während der Expansion wirkt sich das attraktive Mean-Field der Bose-Fermi-Mischung in zweierlei Art aus [106]:

1. Zum einen führt es innerhalb der Falle zu einem effektiv stärkeren Einschluss der beiden Spezies. Woraus eine schnellere Expansion nach dem Abschalten der Falle resultiert.
2. Zum anderen wechselwirken die beiden Spezies auch während der Expansion (insbesondere am Anfang). Die gegenseitige Anziehung bremst die beiden Spezies ab und verringert deren Expansion.

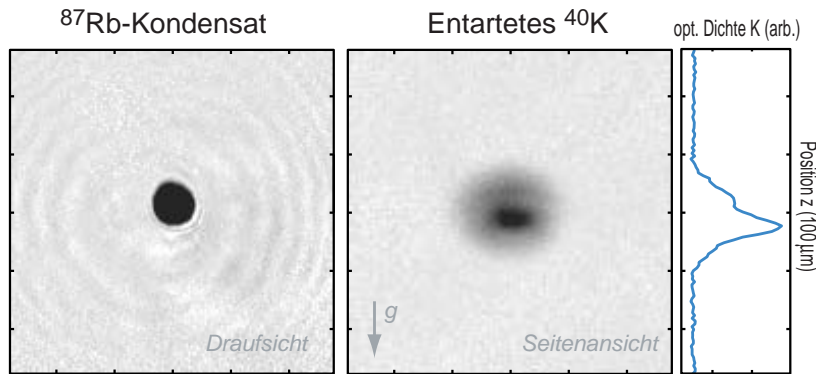
Diese beiden Effekte konkurrieren miteinander. Numerische Berechnungen für Mischungen aus  $^{87}\text{Rb}$  und  $^{40}\text{K}$  zeigen, dass der erste Effekt beim Bose-Kondensat und der zweite Effekt beim Fermigas überwiegt [106]. In einer Mischung mit attraktiver Wechselwirkung expandiert demnach das Kondensat geringfügig schneller, während das Fermigas im Überlappungsbereich der beiden Spezies verlangsamt wird. Letzteres macht klar, warum auch nach längeren Expansionszeiten noch eine durch das Kondensat hervorgerufene „Beule“ in der Fermi-Dichte nachgewiesen werden kann [105, 107].

Bei genauer Betrachtung von Abbildung 2.10 erkennt man, dass diese Beule bezüglich des Zentrums der Kaliumwolke geringfügig nach unten versetzt ist. Dieser Versatz ist auf die Verteilung der beiden Spezies innerhalb der Falle zurückzuführen. Verspüren beide Spezies ein ähnliches Fallenpotential, so hängt aufgrund der Schwerkraft und der unterschiedlichen Massen das Rubidium weiter nach unten durch als das Kalium. Der Unterschied  $\delta z$  im vertikalen Versatz der beiden Elemente wird auch als „differential gravitational sag“ bezeichnet und wird im Abschnitt 4.1.3 genauer besprochen. In der Abbildung beträgt der differentielle Versatz etwa  $12\ \mu\text{m}$ . Dieser Versatz ist vereinbar mit dem im Abschnitt 4.1.3 berechneten differentiellen Versatz innerhalb der Dipolfalle. Somit ist die Annahme berechtigt, dass der hier beobachtete Versatz unabhängig von der freien Expansion unmittelbar den In-situ-Versatz widerspiegelt.

Wie wir bereits gesehen haben, führt die Anziehung zwischen den beiden Spezies zu einer gegenseitigen Dichteerhöhung im gemeinsamen Überlappungsbereich. Mit zunehmender Wechselwirkungsstärke steigt dabei auch die Fermionendichte substantiell an. Dies ist in Abbildung 2.9b für eine Streulänge  $a_{\text{BF}} = -405,5 a_0$  gezeigt. In der Berechnung nimmt die zentrale Fermionendichte gegenüber dem wechselwirkungsfreien Fall um einen Faktor 6,6 zu und die zentrale Dichte des Kondensats nimmt um einen Faktor 3 zu. Bei einer geringfügig stärkeren Wechselwirkung wird die Mischung instabil und kollabiert. Die kinetische Energie der Atome und die abstoßende Wechselwirkung ( $a_{\text{BB}} > 0$ ) zwischen den Bosonen reicht dann nicht mehr aus, um das attraktive Mean-Field zu kompensieren. Letztlich kann das Gas durch zunehmende Kontraktion seine Energie immer weiter herabsetzen. In den Experimenten [101, 105, 108, 109] führt der mit dem plötzlichen Kollaps verbundene Dichteanstieg zu einer abrupten Zunahme der inelastischen Dreikörperstöße und der



## 2.4 Wechselwirkende Bose-Fermi-Mischungen



**Abbildung 2.10:** Simultane Absorptionsaufnahmen einer quantenentarteten Bose-Fermi-Mischung nach 10 ms freier Expansion. Das Bose-Einstein-Kondensat ist parallel und das Fermigas senkrecht zur Fallrichtung aufgenommen. Das attraktive Mean-Field des Kondensats spiegelt sich in der Fermi-Wolke in Form einer lokalen Dichteüberhöhung wider. Auch im vertikalen Schnitt durch das Zentrum der Fermionenverteilung ist eine deutliche „Beule“ zu erkennen.

dadurch hervorgerufenen Verluste. Dabei verringern sich die Dichten im Zentrum der Falle, bis die Mischung wieder in einen stabilen Zustand übergeht. Abbildung 2.9b zeigt den theoretischen Dichteverlauf einer stabilen Mischung dicht vor dem kritischen Bereich. Für Streulängen  $a_{BF} \leq -406 a_0$  wird das System schließlich instabil und kollabiert. Wie eingangs beschrieben, lassen sich die kritischen Parameter, bei denen der Kollaps eintritt, anhand des Konvergenzverhaltens der selbstkonsistenten numerischen Methode bestimmen.

In dem obigen Mean-Field-Modell wirkt die repulsive Boson-Boson-Wechselwirkung und die kinetische Energie der Fermionen der attraktiven Interspezieswechselwirkung entgegen. Darüber hinaus trägt auch die kinetische Energie der Bosonen zu einer Stabilisierung der Mischung bei. Dieser Beitrag kann jedoch im Rahmen der Thomas-Fermi-Näherung für Teilchenzahlen  $N_B > 10^4$  vernachlässigt werden [98]. Außerdem werden in dem rein statischen Mean-Field-Modell Anregungen und die damit verbundenen lokalen Dichteschwankungen vernachlässigt. Lokale Dichteüberhöhungen können zum vorzeitigen Kollaps einer ansonsten stabilen Mischung führen und treten zum Beispiel am Ende einer schnellen Evaporation auf. Dieser Effekt ist insbesondere dann zu berücksichtigen, wenn man die Stabilität der Mischung als Funktion der Teilchenzahl untersucht, da die Teilchenzahl in der Regel über die Evaporation kontrolliert wird. Solche Nicht-Gleichgewichtszustände erfordern eine dynamische Beschreibung [110]. Die statische Beschreibung ist dann geeignet, wenn man von einer stabilen Mischung im Gleichgewichtszustand ausgeht, bei der man anschließend die Wechselwirkungsstärke adiabatisch über eine Feshbach-Resonanz verändert. Bei einer Mischung aus  $^{87}\text{Rb}$   $|1, 1\rangle$  und  $^{40}\text{K}$   $|9/2, -9/2\rangle$  ist die Wechselwirkung oberhalb der Feshbach-Resonanz ( $B_0 = 546, 7 \text{ G}$ ) immer attraktiv

## 2 Theorie der Quantengase

---

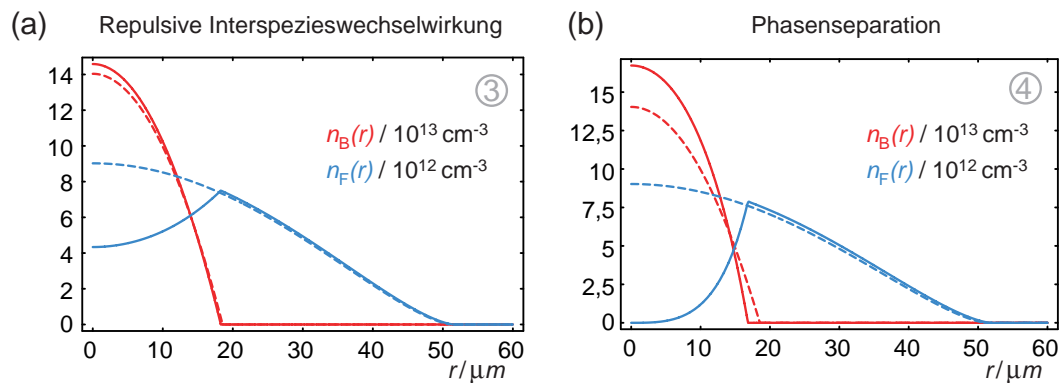
(siehe Abb. 2.8a). In diesem Bereich lässt sich die Stärke der Anziehung durch Verringerung des Magnetfeldes kontinuierlich erhöhen, bis die Berechnung ab einem Feld von etwa 549,13 G einen Kollaps der Mischung voraussagt. Um die Mischung bei Feldern oberhalb von  $B_0$  zu präparieren, bietet es sich an, das Feld hoch zu fahren während sich das Kalium im  $|9/2, -7/2\rangle$  Zustand befindet und erst nach Erreichen des gewünschten Feldes das Kalium durch Einstrahlung einer Radiofrequenz in den  $|9/2, -9/2\rangle$ -Zustand zu transferieren [105]. Hierdurch braucht man die Feshbach-Resonanz nicht zu durchkreuzen und kann unnötige Anregungen und Teilchenverluste vermeiden.

In Übereinstimmung mit der Theorie wird in unserem Experiment bei den erreichten Teilchenzahlen und üblichen Fallenfrequenzen für  $B = 0$  kein Mean-Field-Kollaps beobachtet.

### Repulsive Interspezieswechselwirkung

Im Feldbereich von 543,8 bis 546,7 G erlaubt es die heteronukleare Feshbach-Resonanz das Regime der repulsiven Wechselwirkung zu untersuchen (siehe Abb. 2.8a). In diesem Regime drängt das Kondensat die Fermionen aus dem Zentrum der Falle heraus, sodass die Fermionendichte dort ein lokales Minimum aufweist. Das Maximum der Fermionendichte verläuft nun entlang einer Ellipsoidfläche, die durch den Außenrand des Kondensats definiert ist. Dieser Fall ist in Abbildung 2.11a für eine Streulänge  $a_{\text{BF}}(545, 25 \text{ G}) = +185 a_0$  dargestellt. Dabei stimmt die Stärke der Wechselwirkung bis auf das Vorzeichen mit dem feldfreien Fall (siehe Abb. 2.9a) überein. Gegenüber dem wechselwirkungsfreien Fall ist die zentrale Fermionendichte um 52 % geringer. Das Kondensat wird durch die fermionische Außenschale geringfügig komprimiert, sodass dessen zentrale Dichte um 4 % zunimmt. Der effektiv stärkere Einschluss erhöht die Mean-Field-Energie des Kondensats und somit auch dessen Expansionsgeschwindigkeit beim Entlassen aus der Falle. Wird das Magnetfeld auf ein Feld von 545,80 G erhöht, so kommt es zur Phasenseparation. Das Kondensat verdrängt die Fermionen dabei vollständig aus dem Zentrum der Falle. Wie in Abbildung 2.11b dargestellt, bilden die beiden Komponenten eine räumliche getrennte Struktur aus. Diese besteht aus einem komprimierten bosonischen Kern (Erhöhung der zentralen Dichte um 19 %) und einer äußeren fermionischen Schale. Im Allgemeinen wird die räumliche Symmetrie dieser Struktur jedoch gebrochen, da die beiden Komponenten hierdurch ihre Wechselwirkungsenergie weiter verringern können. So ordnet sich im Schwerfeld das leichtere Kalium oberhalb des Rubidium-Kondensats an [105]. Auch für anisotrope Fallen wird eine Symmetriebrechung vorrausgesagt. In einer oblaten harmonischen Falle bildet sich zum Beispiel ein Art „Boson-Burger“ aus [111].

## 2.4 Wechselwirkende Bose-Fermi-Mischungen



**Abbildung 2.11:** Bose-Fermi-Mischungen mit repulsiver Interspezieswechselwirkung: **(a)** Verteilungen bei moderat abstoßender Wechselwirkung [ $a_{\text{BF}}(545, 25 \text{ G}) = +185 a_0$ ]. **(b)** Verteilungen beim Übergang zur Phasenseparation [ $a_{\text{BF}}(545, 80 \text{ G}) = +414, 35 a_0$ ]. Die Abstoßung ist gerade so stark gewählt, dass die Fermionendichte im Zentrum der Falle gegen null geht. Zur Gegenüberstellung sind die Verteilungen ohne Interspezieswechselwirkung ( $a_{\text{BF}} = 0$ ) gestrichelt dargestellt.



### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

Um atomare Quantengase in ein optisches 3D-Gitter zu laden, ist ein guter optischer Zugang der präparierten Ensemble notwendig. Zu diesem Zweck wurde von Markus Greiner und Mitarbeitern eine Doppelkammerapparatur entwickelt [112], bei der die lasergekühlten Atome über ein magnetisches Förderband aus der „MOT-Kammer“ in einen zweiten Teil der Apparatur, die eigentliche „Experimentkammer“, transportiert werden. In der Experimentkammer lassen sich die vorgekühlten Atome effizient mittels erzwungener Evaporation in die Quantenentartung überführen und entlang allen drei Raumachsen durch optische Stehwellen anfokusieren. Der damalige Aufbau erlaubte es erstmals, ein Kondensat aus  $^{87}\text{Rb}$ -Atomen in ein 3D-Gitter zu laden und dabei den Quantenphasenübergang von der superfluiden Phase in den Mott-Isolator zu beobachten [10].

Basierend auf diesem Konzept wird im Rahmen dieser Arbeit eine neue Apparatur entworfen, in der sich entartete Bose- und Fermigase aus  $^{87}\text{Rb}$  und  $^{40}\text{K}$  präparieren und als einzelne Spezies oder Mischung in einem 3D-Gitter untersuchen lassen. Neben der Erweiterung auf die fermionische Spezies zeichnet sich die neue Apparatur durch folgende Weiterentwicklungen aus:

- Gepulste Atomquellen erlauben ein effizientes Laden der magneto-optischen Falle.
- Ein Schleusensystem und eine „in-situ“ ausheizbare MOT-Kammer (ohne Indium-Dichtungen) gestatten einen schnellen Austausch der Atomquellen.
- Eine längere Transportstrecke und der geplante Verzicht auf die übliche QUIC-Falle ermöglichen einen besseren Zugang zu den präparierten Quantengasen und eine höhere Qualität der optischen Potentiale.
- Der geplante Einsatz einer Quadrupolfalle mit „blue plug“ erlaubt eine effizientere Verdampfungskühlung und somit kürzere Zykluszeiten.
- Durch Umpolung der dicht um die Experimentkammer montierten Quadrupolspulen lassen sich bereits bei moderaten Strömen (62 A) stabile homogene Magnetfelder von über 1000 G erzeugen, wie sie für die Manipulation der Atome mittels Feshbach-Resonanzen benötigt werden.

Dieses Kapitel befasst sich mit den Komponenten des experimentellen Aufbaus und den einzelnen Sequenzen, die für die Präparation und die Analyse der ultrakalten Quantengase aus  $^{87}\text{Rb}$  und  $^{40}\text{K}$  notwendig sind. Ausgehend vom Vakuumsystem und den Atomquellen über die Laserkühlung und den magnetischen Transport bis hin zur evaporativen Kühlung und schließlichen Abbildung werden die einzelnen Punkte in chronologischer Reihenfolge

## 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

---

behandelt. Experimentelle Schritte, die sich als anspruchsvoll erwiesen haben, werden detaillierter beschrieben. So sind dem Aufbau der angereicherten Kaliumquellen, dem Laserkühlschema und der sympathetischen Kühlung ausführlichere Abschnitte gewidmet. Darüber hinaus werden die Verlustmechanismen in der Zwei-Spezies-MOT und die limitierenden Faktoren bei der sympathetischen Kühlung sowie mögliche methodische Verbesserungen zu diesen beiden Punkten diskutiert. Neben der Präparation wird auch die Analyse und Temperaturbestimmung der Quantengase beschrieben. Dieses Kapitel soll neuen Mitarbeitern als Leitfaden dienen und einen schnellen Einstieg in den experimentellen Betrieb ermöglichen. Die einzelnen Abschnitte können unabhängig voneinander gelesen werden. Dem optischen Gitter und der gekreuzten Dipolfalle sind eigene Kapitel gewidmet.

### 3.1 Vakuumsystem

Wie auf Seite 58 abgebildet, besteht das Herzstück des Ultrahochvakuumsystems aus zwei Teilkammern. In der MOT-Kammer werden das Rubidium und das Kalium aus einem Atomstrahl eingefangen und lasergekühlt. Anschließend werden die Atome mittels eines magnetischen Förderbandes durch eine differentielle Pumpstrecke hindurch in die eigentliche Experimentkammer transferiert. Die differentielle Pumpstrecke besteht aus zwei CF-16-Verbindungsstücken und einem Ganzmetallventil (48124-CE01, VAT), über das die beiden Kammern miteinander verbunden sind. Das Ventil ermöglicht es, die Kammern getrennt voneinander abzupumpen und auszuheizen. Der Leitwert der insgesamt 210 mm langen Verbindungsstrecke wird zusätzlich durch eine konzentrisch im Inneren angebrachte Edelstahlröhre mit einer Länge von 70 mm und einem freien Innendurchmesser von 8 mm soweit herabgesetzt, dass zwischen den beiden Kammern im molekularen Strömungsregime ein Druckunterschied von bis zu einem Faktor 200 aufrecht erhalten werden kann (gemessener Faktor). Die MOT- und Experimentkammer werden durch Ionengetterpumpen (VacIon Plus StarCell, Varian) mit Pumpleistungen von respektive 50 bzw. 150 Liter pro Sekunde evakuiert. An die Experimentkammer ist zudem eine Titansublimationspumpe (916-0050, Varian) angeschlossen. Der Hintergrunddruck in der MOT-Kammer ist kleiner als  $1 \cdot 10^{-10}$  mbar und steigt beim Betrieb der Atomquellen auf  $5 \cdot 10^{-10}$  mbar an. Hier von unberührt bleibt der Druck in der Experimentkammer immer kleiner als  $1 \cdot 10^{-11}$  mbar. Damit sind in der Experimentkammer Stöße zwischen gefangenen kalten Atomen und energiereichen Hintergrundteilchen soweit unterdrückt, dass die Fallenlebensdauer mehr als 90 s beträgt und ein effizientes evaporatives Kühlen möglich wird.

Bei den zusammengesetzten Vakuumkammern handelt es sich um Sonderanfertigungen aus schwach magnetischem Edelstahl (1.4301). Um die Ströme in den Magnetspulen zu minimieren, sind die Kammern so konstruiert, dass sich die Spulen in einem geringen Abstand zu den Atomen anbringen lassen. So sind beispielsweise die Quadrupolspulen der magneto-optischen Falle nur 24 mm vom Fallenzentrum entfernt. Um solch einen kompakten Aufbau zu ermöglichen, wurden bei der früheren Apparatur die Fenster der MOT-

Kammer mittels Indium gedichtet. Zwar sind Indium-Dichtungen sehr platzsparend, können jedoch wegen des niedrigen Schmelzpunktes des weichen Metalls nicht über  $\sim 100^\circ\text{C}$  ausgeheizt werden. Da der Dampfdruck von Kalium mehr als eine Größenordnung geringer ist als der von Rubidium, besteht die Gefahr einer metallischen Beschichtung der Fenster durch das Kalium (siehe z.B. [71]). Bei der Vorgänger-Apparatur hätte eine solche Beschichtung nicht einfach durch Erhitzen der Fenster rückgängig gemacht werden können. Zudem verfügen Indium-Dichtungen gegenüber handelsüblichen CF-Dichtungen eine geringere Zuverlässigkeit und lassen sich kaum zerstörungsfrei austauschen. Aus diesen Gründen werden bei der neuen Apparatur stattdessen CF40-Flanschfenster (P.N. 9722005, *ISI*) verwendet, welche durch Rohransätze aus dem Spulenbereich heraus geführt werden. Entlang der vertikalen Achse verfügt die MOT-Kammer über zwei platzsparende Anschweißfenster (P.N. 9721000, *ISI*). Bei letzteren Fenstern ist die Gefahr einer unerwünschten Beschichtung gering, da sie nicht dem direkten Atomstrahl ausgesetzt sind. Alle Fenster sind beidseitig breitbandig antireflexbeschichtet (BBAR671-850 nm/0° & MgF, *Laseroptik*) und bieten den MOT-Laserstrahlen eine freie Apertur von 35 mm. Temperaturbeständige und direkt auf der Außenfläche der Stahlkammer aufgebrachte Heizfolien<sup>1</sup> erlauben es die MOT-Kammer auf über  $100^\circ\text{C}$  aufzuheizen, ohne dass hierfür die die Kammer umgebenden Magnetspulen entfernt werden müssen. Dies ermöglicht ein einfaches und schnelles Ausheizen der Kammer nach einem eventuellen Austausch der Atomquellen über das weiter unten beschriebene Schleusensystem.

Wie eingangs erwähnt, müssen für das einfach-kubisch 3D-Gitter die präparierten atomaren Ensemble entlang allen drei Raumachsen optisch zugänglich sein. Aus diesem Grund verfügt die Experimentkammer über eine Glasküvette, welche über eine *Helicoflex*-Dichtung (HNV Delta Seal, *Garlock*) mit der eigentlichen Stahlkammer verbunden ist. Bei der Küvette (QX Suprasil 300, *Hellma*) handelt es sich um eine Sonderanfertigung aus synthetischem Quarzglas optischer Güte, das geringe Absorptionsverluste im nahen Infrarotbereich aufweist. Die Außenseiten der  $26 \times 26 \times 62,5$  mm großen und rechteckigen Zelle<sup>2</sup> sind mit einer breitbandigen Antireflexbeschichtung<sup>3</sup> versehen, um Transmissionsverluste und störende Laserreflexe zu minimieren. Der Transfer der Atome in die Glaszelle ermöglicht nicht nur einen hervorragenden optischen Zugang, sondern gestattet es auch die Magnetspulen in einem kleinen Abstand von jeweils nur 14 mm von den Atomen zu montieren. Neben steilen Gradienten lassen sich mit diesen Spulen auch starke homogene Magnetfelder generieren, wie sie für die Manipulation der interatomaren Wechselwirkungen mittels Feshbach-Resonanzen benötigt werden (siehe Abschnitt 3.8).

---

<sup>1</sup>Zwei Heizfolien mit  $R=22$ ,  $1 \Omega$ , Modell 5550, *Minco*.

<sup>2</sup>Der rechteckige Querschnitt mit einer Wandstärke von 4 mm und einer Höhe von 62,5 mm befindet sich auf einem 38 mm hohen zylindersymmetrischem Quarzsockel über den die Zelle eingespannt wird.

<sup>3</sup>Die AR-Beschichtung ist auf mehrere Wellenlängen optimiert (MAR 422+532+ 760-850 +1064 nm/0-45°, *Laseroptik*).

### 3.2 Atomquellen

Das fermionische Isotop  $^{40}\text{K}$  ist mit einer Halbwertszeit von  $1,28 \cdot 10^9$  Jahren im Wesentlichen stabil. Es besitzt jedoch nur eine geringe natürliche Isotopenhäufigkeit von 0,012%. Daher sind herkömmliche Kaliumquellen kaum geeignet, um eine große Anzahl  $^{40}\text{K}$ -Atome in eine magneto-optische Falle zu laden. Ein wesentlicher Schritt für die Erzeugung entarteter Fermigase aus  $^{40}\text{K}$  besteht deshalb in der Entwicklung einer angereicherten Quelle [113]. In üblichen Aufbauten wird die magneto-optische Falle aus einer Dampfzelle geladen, wofür zirka 1 g des entsprechenden Alkalimetalls in die Kammer selbst oder in einen an die Kammer angeschlossenen Ofen eingebracht werden muss. Aufgrund des hohen Preises von angereichertem Kalium wird in diesem Aufbau auf weitaus effizientere Quellen, sogenannte Dispensoren, zurückgegriffen, bei denen die Atome direkt aus einem gerichteten Atomstrahl eingefangen werden. Durch das direkte Laden aus einem Atomstrahl kann zudem auf das Erhitzen der MOT-Kammer – wie es zum Erhöhen des Dampfdruckes in einer Dampfzelle notwendig wäre [71] – verzichtet werden. Neben allgemeinen Eigenschaften werden im Folgenden der Aufbau der kommerziellen Rubidium-Dispensoren und der selbst entwickelten Kalium-Dispensoren beschrieben. Abschließend wird auf den Einbau der Quellen mittels eines speziellen Schleusensystems eingegangen.

#### 3.2.1 Aufbau und Eigenschaften der Dispensoren

Bei den eingesetzten Dispensoren handelt es sich um kleine Metallschiffchen, welche mit einer Alkalimetallverbindung und einem chemisch reduzierenden Zusatz befüllt sind. Über ohmsches Heizen wird soviel Energie zugeführt, dass eine Redoxreaktion aktiviert und das dabei erzeugte elementare Alkalimetall als Atomstrahl abgedampft wird.

#### Rubidium-Dispensoren

Um sämtliche Vorteile der kompakten Atomquellen ausnutzen zu können, wird in unserem Experiment auch das Rubidium aus Dispensoren gewonnen. Dabei können handelsübliche Dispensoren (RB/NF/3.4/12 FT10, *SAES Getters S.p.A.*) eingesetzt werden, da die natürliche Isotopenhäufigkeit von  $^{87}\text{Rb}$  mit 27,8% ausreichend hoch ist. Ein kommerzieller Rubidium-Dispensor besteht aus einem mit einem 12 mm langen Austrittsschlitz versehenen Nichrombehälter<sup>4</sup>, der mit einem Gemisch aus Rubidiumchromat ( $\text{Rb}_2\text{CrO}_4$ ) und einer Zirkonium-Aluminium-Legierung<sup>5</sup> befüllt ist [114]. Mittels eines durch den Dispensor fließenden Stroms von einigen Ampere lässt sich dieser kontrolliert erhitzen. Ab einer Temperatur von circa  $550^\circ\text{C}$  reduziert das Zirkonium-Aluminium das Rubidium der Chromatverbindung zu elementarem Rubidium. Die Rate, mit der das Rubidium freigesetzt wird, lässt sich genau über den Strom kontrollieren. Neben der Redoxwirkung besitzt das

---

<sup>4</sup>Nichrome ist eine Nickel-Chrom-Legierung (80%Ni, 20%Cr) mit einem hohen spezifischen elektrischen Widerstand von  $1,08 \mu\Omega\cdot\text{m}$ .

<sup>5</sup>Zirkonium-Aluminium-Legierung (84%Zr, 16%Al), von *SAES* unter der Bezeichnung *St101* vertrieben.



Zirkonium-Aluminium auch eine Getterwirkung, das heißt die beim Erhitzen freiwerdenden gasförmigen Verunreinigungen werden durch die Legierung gebunden. Vor dem ersten Betrieb muss der Dispensor zunächst im Vakuum durch einen stärkeren Strom aktiviert werden. Bei einer Aktivierungstemperatur von zirka 800°C diffundiert eine passivierende Oxidschicht von der Außenfläche des Zirkonium-Aluminiums ins Innere der feinen Körner und setzt somit die reaktive Oberfläche der Legierung frei [115]. Da bei der Aktivierung zugleich flüchtige Verunreinigungen ausgasen, wird dieser Prozess bereits zu Beginn des Ausheizens der Vakuumapparatur mehrfach durchgeführt (siehe Seite 55).

### Effiziente Pulsquellen

Die chemische Reaktion im Inneren eines Dispensors weist ein starkes Schwellenverhalten auf, sodass die Freisetzung des Alkalimetalls beim Unterschreiten einer gewissen Temperatur abrupt aufhört. In Kombination mit der geringen Wärmekapazität der kleinen Metallschiffchen ermöglicht dies den Einsatz der Dispensoren als gepulste Atomquellen [116]. Durch Abschalten der Dispensoren nach dem Laden der magneto-optischen Falle lässt sich ein schneller Druckabfall und dadurch eine längere MOT-Lebensdauer erzielen (siehe Messergebnisse in Abbildung 3.12). Da sich die Dispensoren durch unabhängige Ströme ansteuern lassen, kann das Verhältnis zwischen freigesetztem Rubidium und Kalium frei eingestellt werden. Dies ist ein weiterer Vorteil gegenüber einer Dampfzelle (siehe z.B. [117]), bei der der Partialdruck des Rubidiums immer größer ist als der des Kaliums. Zudem lassen sich die Dispensoren aufgrund ihrer geringen Abmessungen sehr dicht vor der magneto-optischen Falle montieren, sodass der Einfangbereich der magneto-optischen Falle einen großen Raumwinkel des gerichteten Atomstrahls abdeckt. Dispensoren ermöglichen einen sehr effizienten und sparsamen Umgang mit den Alkalimetallen, bei dem Verluste in die Pumpen und durch Absorption auf den Kammerwänden minimiert werden.

### Angereicherte Kalium-Dispensoren

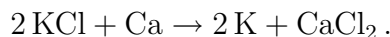
Die Verwendung effizienter Dispensoren bietet sich insbesondere in Anbetracht des hohen Preises des angereicherten Kaliums an ( $\sim 6000$  €/g bei 7%-tiger Anreicherung). Während für eine Dampfzelle typischerweise 1 g Alkalimetall verwendet wird, benötigen die selbst gebauten Dispensoren eine Füllmenge von nur 5 mg des angereicherten Materials.

Da Dispensoren mit angereichertem  $^{40}\text{K}$  nicht kommerziell erhältlich sind, müssen die Quellen wie in Referenz [113] beschrieben selber hergestellt werden. Um die Herstellung weitgehend zu vereinfachen, weicht die verwendete Chemie von der kommerzieller Dispensoren ab. Statt einer Kaliumchromatverbindung wird Kaliumchlorid eingesetzt. Dies bietet den Vorteil, dass das angereicherte Kalium bereits in Form dieses Salzes vom Hersteller geliefert wird und zum anderen vermeidet man somit den Umgang mit karzinogenen Chromaten. Als Reduktionsmittel dient sehr reines Calciumpulver. Das Kaliumchlorid und das Calcium werden als feinkörnige Pulver in einem molaren Verhältnis von 1:4 gemischt

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

---

und in ein Nichrom-Schiffchen gefüllt. Beim ohmschen Erhitzen des Schiffchens findet die folgende Redoxreaktion statt, bei der das elementare Kalium freigesetzt wird:



Gemäß Herstellerangaben besitzt das angereicherte Kalium die folgende Isotopenverteilung: 65,4 %  $^{39}\text{K}$ , 7,1 %  $^{40}\text{K}$  und 27,5 %  $^{41}\text{K}$ . Gegenüber der natürlichen Isotopenverteilung ist das fermionische  $^{40}\text{K}$  etwa 600-fach und das bosonische  $^{41}\text{K}$  4-fach angereichert.

#### 3.2.2 Herstellung der angereicherten Kalium-Dispensoren

Die Erfahrung bei der Herstellung und der Montage der Dispensoren zeigt, dass mehrere wichtige Punkte zu beachten sind, die nicht aus der Beschreibung in [113] hervorgehen. Für den interessierten Leser wird im Folgenden genauer auf diese Punkte eingegangen. Darüber hinaus werden einige Veränderungen und Weiterentwicklungen beschrieben.

#### Verarbeitung des Calcium- und Kaliumchlorid-Pulvers

Der Einsatz der Dispensoren im Ultrahochvakuum (UHV) stellt sehr hohe Anforderungen an die Reinheit der verwendeten Chemikalien und Behälter. Daher werden möglichst reine Ausgangssubstanzen verwendet und die gesamte Herstellung findet unter Luft- und Feuchtigkeitsschluss in einer Handschuhbox mit Argonschutzatmosphäre<sup>6</sup> statt. Das inerte Schutzgas verhindert die Reaktion des Calciums mit Luftfeuchtigkeit und Sauerstoff. Bei diesen Reaktionen würde Calciumhydroxid  $[\text{Ca}(\text{OH})_2]$  bzw. Calciumoxid  $[\text{CaO}]$  gebildet und somit wäre das ursprüngliche Calcium für die eigentliche Redoxreaktion verloren. Damit ein möglichst hoher Anteil des Kaliumchlorids in elementares Kalium umgesetzt werden kann, muss das Calcium nicht nur rein, sondern auch möglichst gut mit dem Kaliumsalz vermischt sein und über eine große Oberfläche verfügen. Das Calcium muss also in Form eines feinen Pulvers vorliegen. Als Ausgangsmaterial wird destilliertes Calcium (441872-5G, *Sigma-Aldrich*) verwendet. Wegen dessen Reinheit von 99,99 %, kann – im Gegensatz zu Referenz [113] – auf ein Ausglühen des Calciums vor der Verarbeitung verzichtet werden. Aus den einige Millimeter großen Calciumstücken wird durch Feilen<sup>7</sup> und anschließendes Sieben<sup>8</sup> das benötigte Pulver gewonnen<sup>9</sup>. Falls dieses Pulver über mehrere Stunden gelagert werden muss, so sollte dies – trotz der Schutzgasatmosphäre – in einem kleinen und hermetisch verschließbaren Gefäß geschehen. Da das angereicherte Kaliumchlorid von der Firma *Chemgas* bereits als sehr feines Pulver geliefert wird, braucht es nicht gesiebt zu werden. Leider begünstigt die extrem trockene Atmosphäre in der Handschuhbox elektrostatische Aufladungen. Deshalb sollten sich die Bearbeitungsschritte auf ein Minimum reduzieren, die feinen Pulver möglichst wenig umgefüllt und vorzugsweise

<sup>6</sup>Eine Stickstoffatmosphäre ist wegen der möglichen Bildung von Calciumnitrid weniger geeignet.

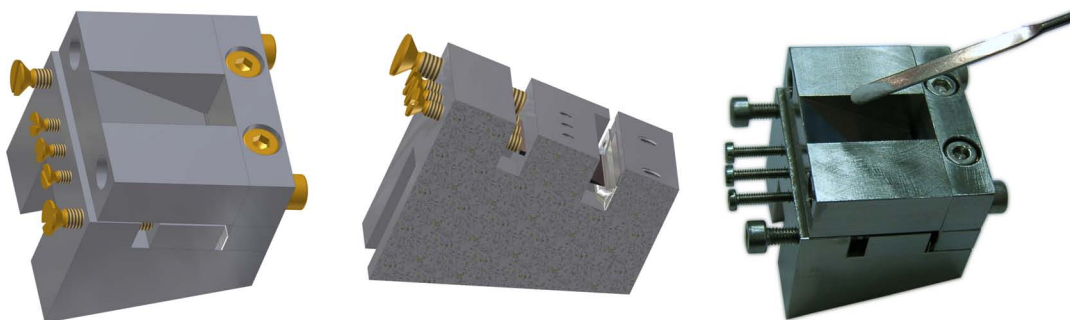
<sup>7</sup>Präzisionsnadelfeile 200 mm, Bst. Nr. 5371601, *Hoffmann Group*.

<sup>8</sup>Edelstahlsieb mit einer Maschenweite von 150  $\mu\text{m}$ , *Retsch*.

<sup>9</sup>Aufgrund seiner leichten Endzündlichkeit ist Calcium nicht kommerziell in Pulverform erhältlich.

Metall- oder auch Glasinstrumente benutzt werden. Ein direkter Kontakt mit Kunststoffflächen, wie z.B. den Handschuhen, ist zu vermeiden. Als weitere Maßnahme wird die metallische Grundplatte der Handschuhbox geerdet. Dennoch an Flächen haftendes Pulver lässt sich mittels einer Pipette mit einem kleinen Gummiaufsatz sehr vorsichtig abblasen.

Bei der ersten Inbetriebnahme der selbst gebauten Kalium-Dispensoren im Vakuum kann ein deutlicher Gettereffekt beobachtet werden. Das heißt, nach dem ersten Betrieb und dem Wiederabkühlen der Dispensoren stellte sich ein geringerer Druck innerhalb der MOT-Kammer als in der Ausgangssituation ein. Dies verdeutlicht in eindrucksvoller Weise die UHV-Tauglichkeit der neuen Atomquellen.



**Abbildung 3.1:** Edelstahlvorrichtung zum definierten Befüllen und Verschließen der Dispensorschiffchen innerhalb eines Arbeitsschritts. Über einen Trichteraufsatz rieselt das Pulver in das sich darunter befindende Dispensorblech. Ein Schnitt durch die Vorrichtung ohne Trichteraufsatz (Mitte) zeigt das Dispensorblech im Inneren, welches an den beiden Seitenflügeln (siehe Abb. 3.2) über Anpressbacken und entlang des Austrittschlitzes durch eine Anpressklinge verschlossen wird.

### Dispensorschiffchen

Die Behälter der selbst gebauten Kalium-Dispensoren sind aus  $125\ \mu\text{m}$  dicken Nichromblech (*Goodfellow*) geschnitten und gestanzt. Die vorgeformten Schiffchen werden in Aceton und anschließend in einem Argonplasma gereinigt. Um ein Verschütten der geringen Chemikalienmengen zu verhindern, wird das Befüllen und das anschließende Verschließen der Schiffchen in einer speziellen Vorrichtung in einem einzigen Arbeitsschritt durchgeführt. In der in Abbildung 3.1 dargestellten Vorrichtung wird jedes Blech über einen Trichter befüllt, dann zusammengefaltet und entlang der Kanten zusammen gepresst.

An dieser Stelle sei bemerkt, dass auch indirekt mit den Dispensoren in Kontakt tretende Bauteile und Werkzeuge sehr rein und fettfrei sein müssen. Sich berührende Metallflächen neigen dann jedoch zum Festfressen, ein Effekt, der insbesondere bei fettfreien Schrauben in Gewindegängen auftritt. Beim Design sämtlicher Komponenten muss diesem Umstand, wie zum Beispiel durch Kombination verschieden harter Metalle, Rechnung getragen werden.

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

---

Eine gebogene Metallzunge, die entlang des Austrittschlitzes des Dispensors verläuft, dient dazu, den austretenden Atomstrahl in den Einfangbereich der magneto-optischen Falle zu lenken. Das Verschließen der Dispensorbleche durch Zusammenpressen hat gegenüber dem üblichen Punktschweißen den Vorteil, dass keine Oxide und Verunreinigungen eingebracht werden. Durch ihre bauschige Form können die Dispensorschiffchen trotz kompakter Abmessungen jeweils mit 30 mg des KCl-Ca-Gemisches (im molaren Verhältnis 1:4) befüllt werden und enthalten somit 5 mg 7 %-tig angereichertes Kalium. Dies entspricht mehr als der vierfachen Menge an Kalium, welche in [71] in einem Dispensor enthalten war. Dort betrug die Lebensdauer eines kontinuierlich (also nicht-gepulst) betriebenen Dispensors bei täglichem experimentellen Einsatz drei Jahre.



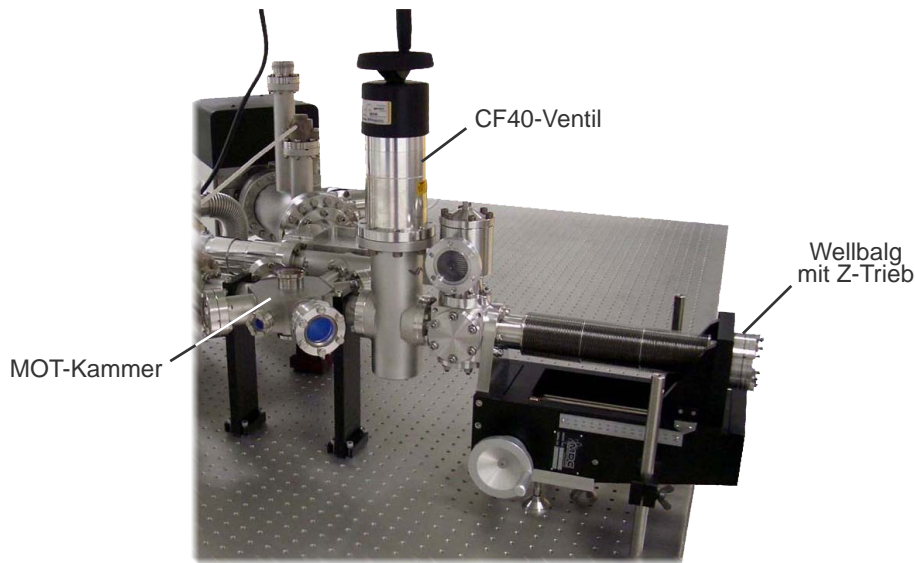
**Abbildung 3.2:** Eigenanfertigung eines Dispensorschiffchens aus Nichrom-Blech (Darstellung in Originalgröße). Die in die Seitenflügel gestanzten Löcher dienen zum Verschrauben des 33 mm langen Dispensors. Eine gebogene Metallzunge verläuft entlang des Austrittschlitzes um den entweichenden Atomstrahl in den Einfangbereich der magneto-optischen Falle umzulenken.

#### 3.2.3 Schleusensystem: Montage und Einbau der Dispensoren

Das in Abbildung 3.3 dargestellte, an die MOT-Kammer angeschlossene Schleusensystem erlaubt es, die Atomquellen auszutauschen, ohne dass hierfür die eigentliche Apparatur belüftet werden muss. Hierdurch lässt sich ein erneutes Ausheizen der Hauptkammern vermeiden. Letzteres würde einen kompletten Abbau der Spulen und Optiken erfordern.

Die Schleuse besteht aus einem CF40-Ganzmetallventil (48132-CE01, VAT) und einem Z-Trieb (*Caburn*). Bei geöffnetem Ventil können die Dispensoren mit dem Z-Trieb 153 mm vorgeschoben werden, sodass sie sich in einem Abstand von nur 40 mm vom MOT-Zentrum befinden. Die MOT-Strahlen mit einem Durchmesser von 35 mm decken somit einen Großteil des Raumwinkels ab, in den die Dispensoren abstrahlen. Zudem verhindert das Verschieben der Quellen in die MOT-Kammer, dass der Schleusenbereich selbst mit Alkalimetall bedampft wird. Hierdurch wird die Bildung von Metalloxiden beim eventuellen Belüften des Schleusenbereiches minimiert.

Um die Atomquellen weit genug in die MOT-Kammer schieben zu können, befinden sich diese auf der Frontseite eines 424 mm langen Gestänges aus Edelstahl. Wie in Abbildung 3.4 gezeigt, sind die Dispensoren über elektrisch isolierende Keramikscheiben auf einen Edelstahlring geschraubt. Die Molybdän-Schrauben dienen zugleich der elektrischen und thermischen Kontaktierung. Das Molybdän, die Aluminiumoxid-Keramik sowie die 1,5 mm dicken Kupferleitungen besitzen eine hohe Wärmeleitfähigkeit, wodurch ein rasches Abkühlen der Dispensoren nach dem Abschalten des Stromes erreicht wird. Dies



**Abbildung 3.3:** Schleusensystem zum Einbringen der Dispensoren in die MOT-Kammer. Das System besteht aus einem Wellbalg mit Z-Trieb, der über ein CF40-Ventil mit der MOT-Kammer verbunden ist. Hier ist die Apparatur noch vor der Montage der Spulen und der Optiken zu sehen.

ermöglicht einen effizienten Pulsbetrieb, bei dem für eine Dauer von etwa 24 Sekunden ein Strom von 5,8 A durch die Rb-Quellen und von 7,2 A durch die K-Quellen geschickt wird. Die Dauer eines experimentellen Zyklus beträgt (bei Verwendung der QUIC-Falle) bislang etwa 60 Sekunden.

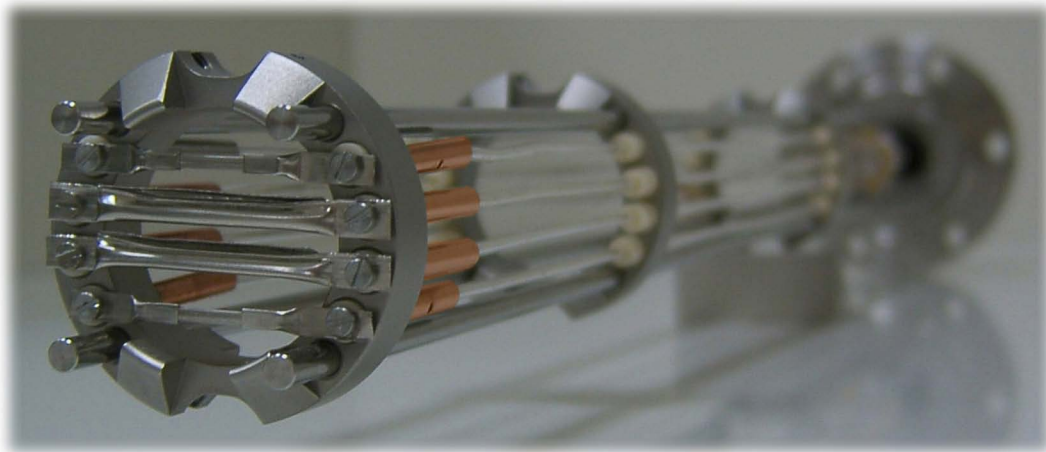
Damit sich bei Inbetriebnahme des Experimentes bereits nach wenigen experimentellen Zyklen reproduzierbare Alkalimetall-Drücke in der MOT-Kammer einstellen, muss ein kontinuierliches Aufheizen der gesamten Apparatur durch die dissipierte Wärme der Dispensoren vermieden werden. Aus diesem Grund dient die elektrische Durchführung (HV2-10A-10-C16, *Caburn*) auf der Rückseite des Gestänges zugleich als definierte Wärmesenke. Wie in Abbildung 3.5 dargestellt, wird die Durchführung auf der Vakuum-Außenseite mittels einer Peltier-Wasser-Kühlung auf konstant niedriger Temperatur gehalten. Durch den Peltier-Wasser-Kühler thermalisiert die Apparatur bereits nach wenigen Zyklen, sodass die magneto-optische Falle über viele Stunden hinweg bei reproduzierbaren Drücken geladen werden kann. Natürlich begünstigt die rasche Abführung der erzeugten Wärme auch den Pulsbetrieb der Dispensoren.

### Einbau und Betrieb der Dispensoren

Das Gestänge mit den fertig montierten Dispensoren wird in einem Argon befüllten Kunststoffbeutel aus der Handschuhbox in die ebenfalls mit Argon geflutete Schleuse transfe-

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

---

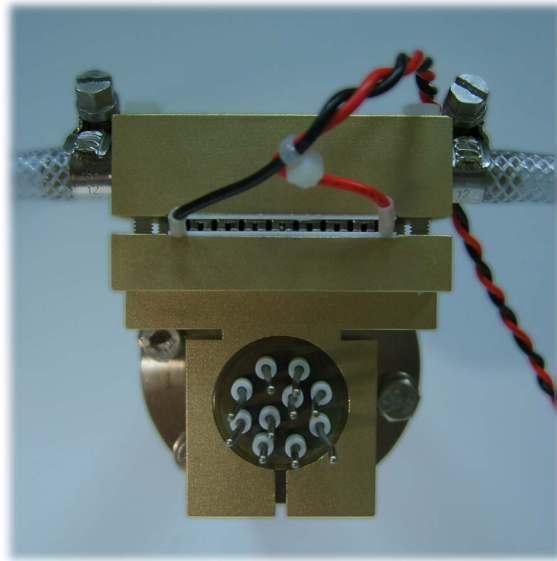


**Abbildung 3.4:** Dispensorhalterung: Die auf ein Gestänge montierten Dispensoren lassen sich über eine Schleuse in die MOT-Kammer schieben. Ein Edelstahlring auf der Frontseite umfasst zwei kommerzielle Rubidium-Dispensoren (oben und unten) und zwei selbst angefertigte Kalium-Dispensoren (Mitte). Der Edelstahlring besitzt Kufen, durch die ein Verhaken der Konstruktion beim Rein- und Rausschieben aus der Kammer verhindert wird. Die Dispensoren sind über Schrauben befestigt und zugleich elektrisch kontaktiert. Die versilberten Kupferleitungen führen nach hinten zu einer elektrischen Durchführung.

riert, sodass die Dispensoren zu keiner Zeit direkten Kontakt mit Luft haben.

Vor dem ersten Betrieb müssen unvermeidbare Verunreinigungen aus den Dispensoren ausgegast und die Zirkonium-Aluminium-Legierungen der Rubidium-Dispensoren aktiviert werden. Hierbei ist das Ventil zur MOT-Kammer verschlossen und die Schleuse wird separat abgepumpt und zusammen mit den Dispensoren ausgeheizt. Bereits zu Beginn des Ausheizens werden die Dispensoren mehrmals für mehrere Minuten von einem höheren Strom durchflossen. Dabei wird der Strom nach jedem Abklingen der Ausgasrate erneut erhöht, ein Druck von  $1 \cdot 10^{-5}$  mbar wird jedoch nicht überschritten. Während des Ausheizens werden die kommerziellen Dispensoren dauerhaft von mindestens einem Strom von 3 A und die Eigenbau-Dispensoren von 4 A durchflossen.

In einer Testapparatur werden mittels eines Restgasanalysators (RGA200, *Stanford Research Systems*) Massenspektren identischer Dispensoren aufgenommen. Dabei erweist sich molekularer Wasserstoff  $H_2$ , welcher vermutlich in Form von Metallhydrid in den Redoxmetallen reversibel gelöst ist [114], als primäre Verunreinigung. Dessen Partialdruck dominiert die Drücke aller weiteren Verunreinigungen ( $H_2O$ ,  $N_2$ ,  $CO_2$ ) um mehr als eine Größenordnung. Da das Massenspektrometer in dem Testaufbau nicht dem direkten Atomstrahl der Dispensoren ausgesetzt ist, lassen sich keine Aussagen über das absolute Verhältnis der freigesetzten Alkalimetalle gegenüber dem freigesetzten Wasserstoff fäl-



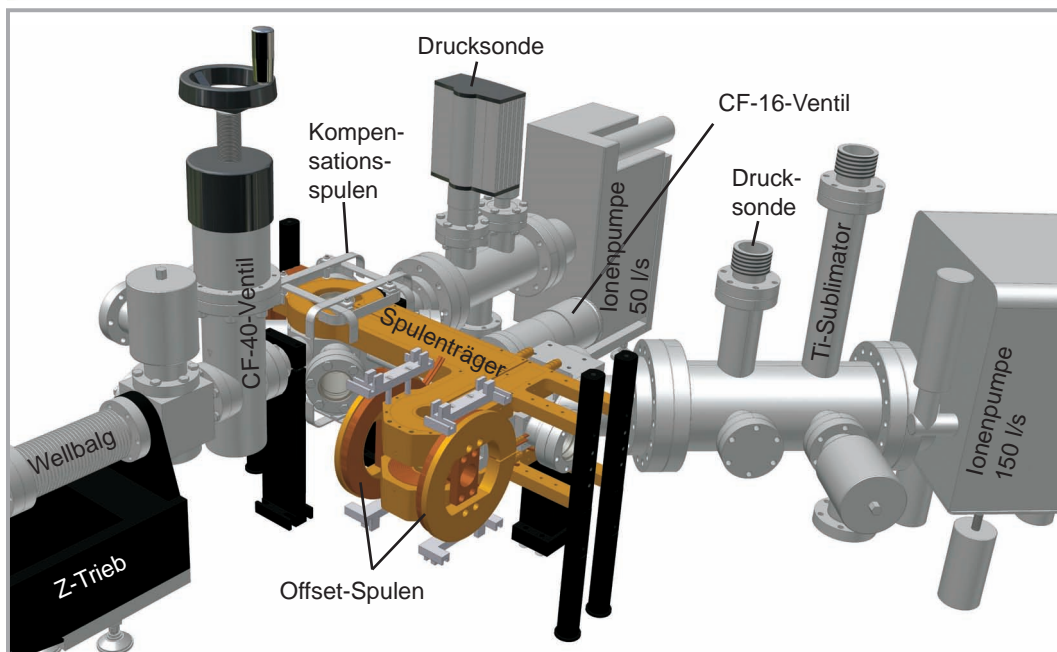
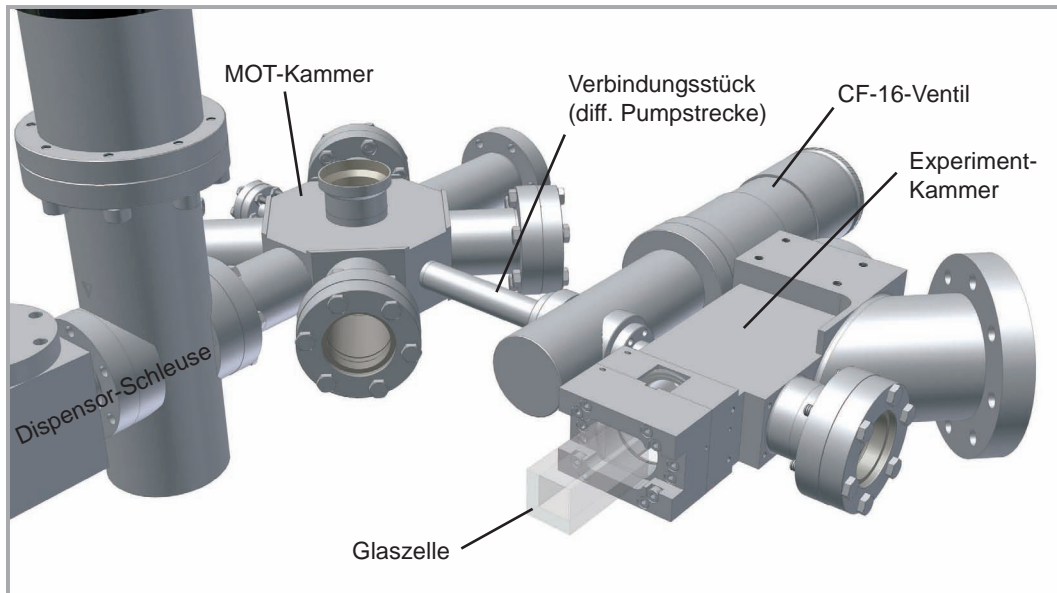
**Abbildung 3.5:** Peltier-Wasser-Kühler auf der Rückseite des Dispenser-Gestänges. Der Kühler ist direkt auf die elektrische Durchführung montiert, da hier ein Großteil der von den Dispensoren erzeugten Wärme eintrifft. Der Kühler erlaubt ein schnelles Abkühlen der gepulsten Atomquellen. Außerdem begünstigt er ein rasches Thermalisieren der gesamten Apparatur und ermöglicht somit einen stabilen Betrieb der magneto-optischen Falle.

len. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die freigesetzten Metalle – im Gegensatz zu den gasförmigen Verunreinigungen – nicht frei in der Kammer herum diffundieren, sondern direkt auf den Innenflächen der Kammer haften bleiben<sup>10</sup>. Folglich kann die nur indirekt an die MOT-Kammer angebrachte Drucksonde keinen unmittelbaren Aufschluss über den lokalen Alkalimetalldruck im Einfangbereich der magneto-optischen Falle geben und der tatsächliche Druck im Einfangbereich wird höher sein, als der von der Drucksonde angegebene Wert.

Beim Anpulsen der Dispensoren mit einem hohen Strom kommt es aufgrund des temperaturabhängigen Widerstandes zu einem sehr raschen Temperaturanstieg. Um dennoch einen sicheren Pulsbetrieb der Dispensoren gewährleisten zu können, wird die Stromzufuhr über einen MOSFET von einer Schutzschaltung kontrolliert. Im Regelbetrieb wird der MOSFET zentral durch ein Signal vom Computer geschaltet. Die Schutzschaltung kann den MOSFET jedoch vorzeitig öffnen, falls ein maximales Zeitfenster, ein maximaler Strom oder ein Schwellwert von der Drucksonde der MOT-Kammer überschritten wird.

<sup>10</sup>So kann an dem Fenster der Testkammer eine metallische Beschichtung aus Kalium beobachtet werden, die aufgrund einer teilweisen Abschottung des direkten Atomstrahls sehr scharfe Konturen aufweist.

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse



**Abbildung 3.6:** Überblick über das Herzstück der Vakuumanlage (oben) und den gesamten Vakuumaufbau inklusive Magnetfeldspulen (unten).



### 3.3 Laserkühlung

Das Kühlen der Atome bis zur Quantenentartung findet in zwei aufeinanderfolgenden Schritten statt. In einem ersten Schritt werden die Atome durch nahresonantes Laserlicht eingefangen und gekühlt [118, 119]. Dabei sind die minimal erzielbaren Temperaturen und maximalen Dichten durch die Reabsorption von gestreuten Photonen [120, 121] und letztlich durch die spontane Emission limitiert. Zur weiteren Kühlung und Erhöhung der Phasenraumdicke werden die Atome, in einem zweiten Schritt, in eine konservative Falle transferiert und schließlich unter Abwesenheit von nahresonantem Licht durch Verdampfungskühlen in die Quantenentartung überführt. Dieser zweistufige Kühlprozess spiegelt sich auch in der besprochenen Unterteilung der Vakuumapparatur wider.

Im Folgenden wird die in der MOT-Kammer durchgeführte Laserkühlung besprochen. Neben dem Prinzip und dem Aufbau der kombinierten magneto-optischen Falle wird auf das Lasersystem und die Külschemata der verschiedenen Isotope eingegangen.

#### 3.3.1 Prinzip der magneto-optischen Falle

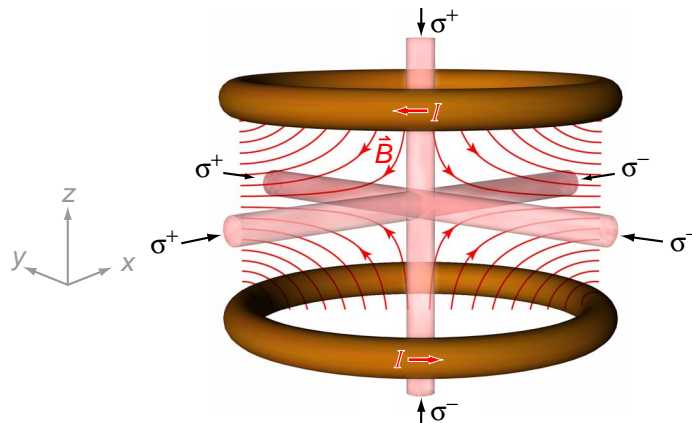
Eine magneto-optische Falle ermöglicht es, aus einem Atomstrahl die langsamsten Atome mit einer Geschwindigkeit von weniger als einigen 10 m/s einzufangen und auf etwa  $10^{-4}$  K abzukühlen. Dies geschieht durch Ausnutzung einer Kombination von Magnetfeldern und dissipativen Lichtkräften [122, 123].

Wie in Abbildung 3.7 dargestellt, besteht die MOT aus sechs jeweils paarweise entgegengesetzt verlaufenden Laserstrahlen, welche entlang aller drei Raumachsen auf die Atome einstrahlen. Das Laserlicht ist gegenüber der atomaren Resonanz leicht rotverstimmt und übt, aufgrund des Doppler-Effektes, eine geschwindigkeitsabhängige Kraft auf die Atome aus. Bewegt sich ein Atom entlang einer der Strahlachsen, so rückt der der Bewegung entgegengerichtete Laserstrahl näher an die Übergangsfrequenz und das Atom streut mehr Photonen aus diesem Laserstrahl als aus dem zur Bewegung gleichgerichteten Strahl. Netto erfahren die Atome durch den Photonenrückstoß entlang aller drei Raumachsen eine abbremsende Kraft. Neben dieser sogenannten Doppler-Kühlung findet ein weitaus subtilerer als Polarisationsgradienten-Kühlen bezeichneter Effekt statt, der zu noch niedrigeren Temperaturen führt [124].

Das überlagerte sphärische magnetische Quadrupolfeld bedingt eine ortsabhängige Zeeman-Verschiebung der atomaren Niveaus und damit eine Ortsabhängigkeit der Übergangsfrequenzen. Bei der magneto-optischen Falle weisen die entgegengesetzt propagierenden Laserstrahlen entgegengesetzte zirkuläre Polarisationen auf und unterliegen somit beim Treiben von Übergängen polarisationsabhängigen Auswahlregeln. Hierdurch wird erreicht, dass die ortsabhängige Lichtkraft immer in Richtung des Magnetfeldminimums weist und somit die Atome in der MOT nicht nur gekühlt, sondern auch räumlich gefangen werden.

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

Durch die Überlagerung der Laserstrahlen, welche zum Kühlen von  $^{87}\text{Rb}$  und von  $^{40}\text{K}$  benötigt werden, lässt sich das oben beschriebene Schema auf das einer Zwei-Spezies-MOT erweitern. Die von uns aufgebaute Zwei-Spezies-MOT erlaubt es uns simultan  $\sim 2 \cdot 10^7$  Kalium- und  $\sim 3 \cdot 10^9$  Rubidiumatome einzufangen und auf  $\leq 150 \mu\text{K}$  abzukühlen.



**Abbildung 3.7:** Prinzip der magneto-optischen Falle: Drei zueinander orthogonal verlaufende  $\sigma^+$ - $\sigma^-$ -polarisierte Stehwellen aus rotverstimmt Laserlicht üben einen abbremsenden Strahlungsdruck auf Atome aus. Durch ein von entgegengesetzten Strömen durchflossenes Spulenpaar (Anti-Helmholtz-Konfiguration) wird ein magnetisches Quadrupolfeld erzeugt, welches eine zusätzliche Ortsabhängigkeit des Strahlungsdruckes induziert. Hierdurch werden die lasergekühlten Atome im Zentrum der Anordnung gefangen.

#### 3.3.2 Kühltaschemata und Termschemata für Rubidium und Kalium

Zum Betreiben der magneto-optischen Falle werden pro Spezies jeweils zwei Laserfrequenzen benötigt, die innerhalb der  $D_2$ -Linien der entsprechenden Elemente liegen. Die zugehörigen Übergänge sind in den Termschemata von Abbildung 3.8 eingetragen.

Bei  $^{87}\text{Rb}$  wird hauptsächlich der Übergang  $|5^2S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5^2P_{3/2}, F' = 3\rangle$  getrieben. Der Kühl-Laser ist hierzu leicht rotverstimmt. Der Übergang ist nahezu geschlossen, dennoch kommt es hin und wieder zu nicht-resonanten Anregungen in den 267 MHz tiefer liegenden Zustand  $|5^2P_{3/2}, F' = 2\rangle$ . Von hier aus kann das Atom mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit in den absoluten Grundzustand  $|5^2S_{1/2}, F = 1\rangle$  zerfallen und es würde dann nicht mehr weiter gekühlt. Um ein solches Atom wieder in den Kühlzyklus zurückzuführen, wird ein sogenannter Rückpump-Laser resonant auf dem Übergang  $|5^2S_{1/2}, F = 1\rangle \rightarrow |5^2P_{3/2}, F' = 2\rangle$  eingestrahlt. Da die nicht-resonante Anregungsrate nach  $|5^2P_{3/2}, F' = 2\rangle$  relativ gering ist, wird weitaus weniger Laserleistung zum Rückpumpen als zum Kühlen von Rubidium benötigt.

Im Vergleich zu Rubidium weist Kalium eine bedeutend geringere Hyperfeinstruktur (HFS)-Aufspaltung der angeregten Zustände auf. Bei annähernd gleicher Linienbreite (etwa 6 MHz) erstreckt sich die gesamte HFS-Aufspaltung des  $4^2P_{3/2}$ -Zustandes von  $^{40}\text{K}$  über nicht viel mehr als 100 MHz. Folglich ist die Rate nicht-resonanter Anregungen in benachbarte Zustände erheblich höher als bei Rubidium. Aus diesem Grund wird in unserem Experiment für die Kalium-MOT etwa soviel Laserleistung zum Rückpumpen wie zum Kühlen verwendet. Außerdem sind die Rollen des Rückpump- und des Kühl-Lasers weniger eindeutig voneinander zu trennen als bei Rubidium. Wird neben dem Kühl-Laser auch der Rückpump-Laser rotverstimmt, so übt Letzterer ebenfalls eine kühlende Kraft auf die Atome aus. Für die bosonischen Isotope  $^{39,41}\text{K}$  ist die HFS-Aufspaltung der angeregten Zustände noch geringer (siehe Anhang B) und die Niveaus sind nicht mehr einzeln auflösbar. Um eine möglichst große Anzahl bosonischer Kaliumisotope zu fangen, bietet es sich an, Kühl- und Rückpump-Laser bezüglich der gesamten Zustandsmannigfaltigkeit rot zu verstimmen. Die größeren Verstimmungen führen jedoch zu höheren Temperaturen, da unter diesen Bedingungen Sub-Doppler-Kühlmechanismen ausgeschlossen sind [125].

Eine weitere Besonderheit, die sich auf das fermionische Isotop ( $^{40}\text{K}$ ) des Kaliums beschränkt, ist die invertierte Hyperfeinstruktur. Diese Inversion ist sowohl im Grundzustand als auch in den angeregten Zuständen vorzufinden. Sie rührt daher, dass der große nukleare Spin ( $I = 4$ ) entgegengesetzt zum nuklearen magnetischen Moment ausgerichtet ist. Respektive ergeben sich für  $^{40}\text{K}$  folgender Kühl- und folgender Rückpump-Übergang:

$$|4^2S_{1/2}, F = 9/2\rangle \xrightarrow{\text{Kühl}} |4^2P_{3/2}, F' = 11/2\rangle$$

$$|4^2S_{1/2}, F = 7/2\rangle \xrightarrow{\text{Rückp.}} |4^2P_{3/2}, F' = 9/2\rangle$$

Setzt man ähnliche Laserleistungen voraus, so müssen für einen optimalen Betrieb der magneto-optischen Falle sowohl Kühl- als auch Rückpump-Laser bezüglich ihrer Übergänge leicht rotverstimmt werden.

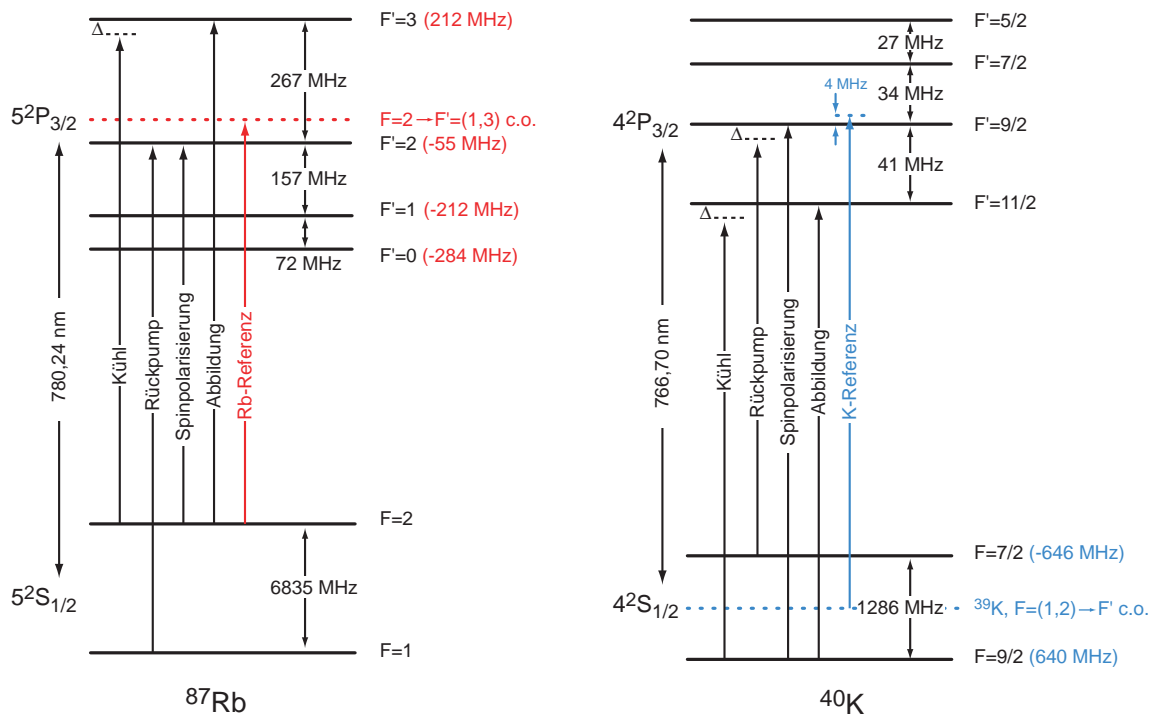
### 3.3.3 Laserstabilisierung und Spektroskopie

Die eingesetzten Laser werden entweder direkt mittels eines Radiofrequenz-Locks<sup>11</sup> auf eine dopplerfreie Sättigungsspektroskopie [126] stabilisiert oder über die Differenzfrequenz relativ zu einem festfrequenten Referenz-Laser stabilisiert (Offset-Lock).

Wegen der geringen natürlichen Isotopenhäufigkeit von 0,012 % beobachtet man im Spektrum einer Dampfzelle mit unangereichertem Kalium keine  $^{40}\text{K}$ -Linien (siehe Abbildung 3.9). Daher können die Laser nicht direkt auf die benötigten Übergänge stabilisiert werden. In unserem Aufbau wird stattdessen ein Referenz-Laser benutzt, welcher auf die stark ausgeprägte Grundzustands-Crossover-Resonanz  $F = (1, 2) \rightarrow F'$  von  $^{39}\text{K}$  stabilisiert wird. Wie in Abbildung 3.8 dargestellt, liegt die Frequenz dieser Resonanz jeweils

<sup>11</sup>Auch als Frequenzmodulationsspektroskopie bezeichnet.

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse



**Abbildung 3.8:** Energieniveaus zu den  $D_2$ -Linien von  $^{87}\text{Rb}$  und  $^{40}\text{K}$  und zugehörige lasergetriebene Übergänge. Mit *Kühl* und *Rückpump* werden die zur Laserkühlung eingesetzten Übergänge bezeichnet. *Spinpolarisierung* dient zum anschließenden optischen Pumpen der Atome in magnetisch fangbare Zustände. Die Absorptionsabbildung der Atomwolken geschieht auf dem *Abbildungs*-Übergang. Verstimmte eingestrahelte Laser sind durch ein  $\Delta$  gekennzeichnet. Darüber hinaus sind die auf Crossover-Resonanzen stabilisierten *Referenz*-Laser eingetragen. Sie dienen der Stabilisierung der anderen Laser über Offset-Locks. Die Offset-Frequenzen sind in Klammern angegeben. Siehe auch Seite 341 und 343.

grob 600 MHz von den Kühl- und Rückpump-Laserfrequenzen von  $^{40}\text{K}$  entfernt. Zum Überbrücken dieser Frequenzabstände bieten sich unterschiedliche Verfahren an:

Die Lichtfrequenz des Referenz-Lasers kann über einen akusto-optischen Modulator (AOM) verschoben werden (siehe z.B. [125]). Dies hat jedoch den Nachteil, dass für Frequenzverschiebungen von mehreren 100 MHz typischerweise zwei oder vier Durchgänge durch den Modulator erforderlich sind, was in der Regel zu einem empfindlichen optischen Aufbau und zu großen Leistungsverlusten führt. Zudem erweist sich ein solcher Aufbau als wenig flexibel, da eine Veränderung der Frequenz leicht eine Neujustage erfordert.

Eine andere Möglichkeit besteht im Aufmodulieren von Seitenbändern auf die Laserfrequenz mittels eines elektro-optischen Modulators (EOM). Jedoch sind die erreichbaren Lichtleistungen in den Seitenbändern in der Regel nicht sonderlich hoch und zudem wird

eines der beiden Seitenbänder nicht benötigt. Beim anschließenden Nachverstärken in einem aktiven Lasermedium wird die Trägerfrequenz zusammen mit *beiden* Seitenbändern verstärkt, wodurch Leistung ungenutzt verloren geht. Beim Nachverstärken besteht außerdem die Gefahr, dass sich im nicht-linearen Lasermedium unerwünschte Mischfrequenzen bilden [127], und dass aufgrund sogenannter „mode competition“ [128] das Leistungsverhältnis zwischen Kühl- und Rückpump-Licht nicht beliebig eingestellt werden kann.

Aus diesen Gründen kommt in unserem Aufbau ein drittes Verfahren zum Einsatz: Das Offset-Lock. Hierbei wird Licht des zu stabilisierenden Lasers mit Licht des Referenz-Lasers auf einer schnellen Photodiode überlagert. Die Schwebungsfrequenz der resultierenden Interferenz entspricht gerade der Frequenzdifferenz der beiden Laser. Im Radiofrequenzbereich kann eine solche Schwebung direkt von einer Photodiode gemessen werden. Das sich dabei ergebende elektronische RF-Signal wird anschließend elektronisch heruntergeteilt und von einem f/U-Wandler in eine der Frequenz proportionale Spannung konvertiert. Durch Subtraktion einer frei einstellbaren konstanten Spannung erhält man ein zur Frequenzabweichung proportionales Regelsignal. Dieses Regelsignal kann schließlich auf das Stellglied (Piezoaktuator) des zu stabilisierenden Lasers gegeben werden. Alternativ kann die Frequenz-Spannungs-Wandlung durch ein einfaches elektronisches Interferometer erreicht werden, bei dem man den frequenzabhängigen Phasenunterschied zwischen zwei unterschiedlich langen Signalleitungen ausnutzt [129].

Diese beiden Methoden erlauben es, die Differenzfrequenz (Offset-Frequenz) eines Lasers relativ zum Referenz-Laser mit einer Genauigkeit von  $\sim 1$  MHz zu stabilisieren und mittels einer variablen Gleichspannung über einen Bereich von mehreren 100 MHz frei einzustellen. Über Computer gesteuerte analoge Spannungssignale lässt sich somit die Laserstimmung während des experimentellen Zyklus kontinuierlich oder abrupt verändern. Die hohe Flexibilität des Offset-Locks gestattet es, in unserem Aufbau die magneto-optische Falle in kürzester Zeit zwischen den drei Kaliumisotopen ( $^{39,40,41}\text{K}$ ) umzuschalten. Dies erfordert keinerlei Umbauten, sondern lediglich das Einstellen neuer Offset-Frequenzen.

Die Offset-Frequenzen für  $^{87}\text{Rb}$  und  $^{40}\text{K}$  können aus den Termschemata in Abbildung 3.8 abgelesen werden (Werte in Klammern):

- Für Rubidium ist nur der frei verstimmbare Kühl-Laser über ein Offset-Lock stabilisiert. Die Offset-Frequenzen sind bezüglich der  $F = 2 \rightarrow F' = (1, 3)$  Crossover-Resonanz von  $^{87}\text{Rb}$  (roter Pfeil) angegeben. Die Werte entsprechen den verschiedenen  $F = 2 \rightarrow F'$ -Übergängen. Demnach besitzt der um  $|\Delta_{\text{KL}}|$  rotverstimmte Kühl-Laser eine Offset-Frequenz von  $(212 \text{ MHz} - \frac{|\Delta_{\text{KL}}|}{2\pi})$ . Der Rubidium-Rückpumper ist immer resonant ( $\Delta_{\text{RP}} = 0$ ) und daher direkt auf die zugehörige Linie einer Sättigungsspektroskopie stabilisiert.
- Für Kalium werden sowohl der Kühl- als auch der Rückpump-Laser über Offset-Locks stabilisiert. Die Offset-Frequenzen sind relativ zu der Grundzustands-Cross-

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

---

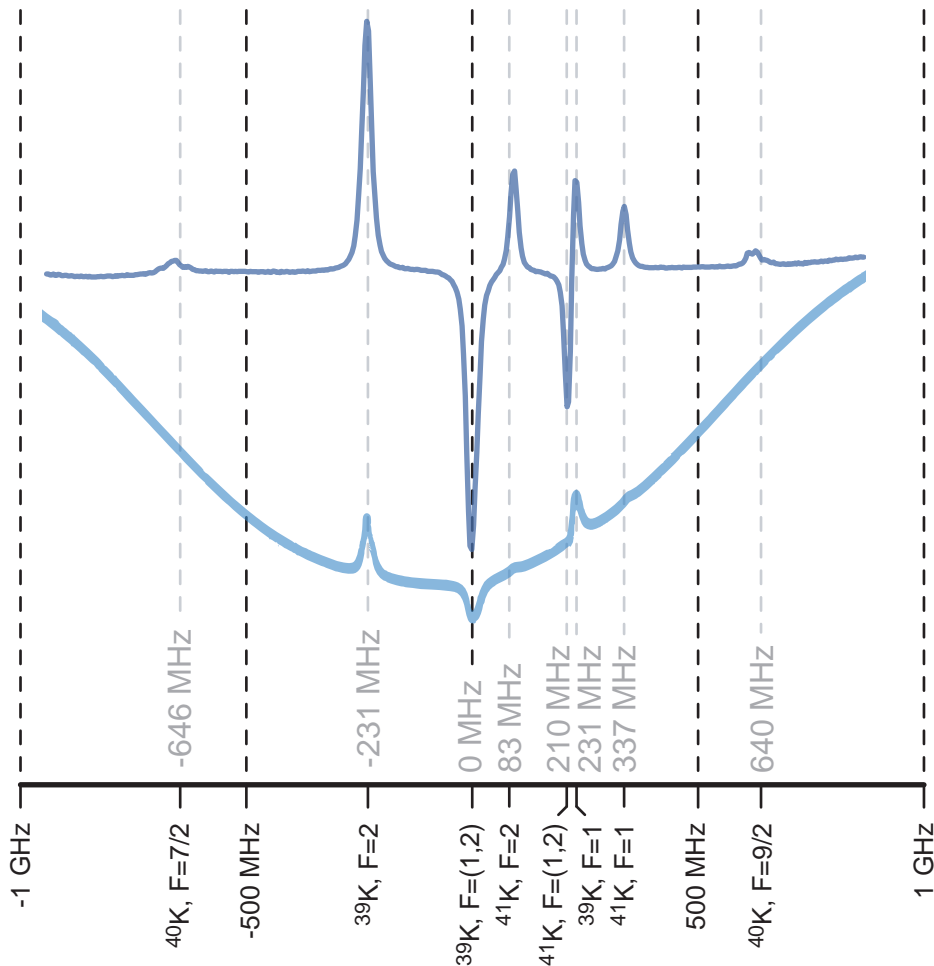
over-Resonanz  $F = (1, 2) \rightarrow F'$  (blauer Pfeil) des häufigsten Kaliumisotops ( $^{39}\text{K}$ ) angegeben. Sie entsprechen Übergängen, die von den beiden Hyperfeingrundzuständen ausgehen und in das (unaufgespaltene) Feinstrukturniveau  $4^2P_{3/2}$  führen. Unter Berücksichtigung der Verstimmungen und der Aufspaltung der Hyperfeinniveaus  $F'$  im angeregten Zustand ergeben sich die Offset-Frequenzen für den Kühl-Laser ( $595 \text{ MHz} - \frac{|\Delta_{\text{KL}}|}{2\pi}$ ) und für den Rückpump-Laser ( $-650 \text{ MHz} - \frac{|\Delta_{\text{RP}}|}{2\pi}$ ). Die Offset-Frequenzen zum Laserkühlen der bosonischen Isotope  $^{39,41}\text{K}$  können aus den Termschemata auf Seite 343 abgeleitet werden.

Die Sättigungsspektren von angereichertem und nicht angereichertem Kalium sind in Abbildung 3.9 dargestellt (in Transmission). Die von uns verwendeten Spektroskopiezellen<sup>12</sup> enthalten Kalium im natürlichen Isotopenverhältnis. Die Frequenzachse ist über die bekannten Hyperfeinverschiebungen in den einzelnen Isotopen<sup>13</sup> geeicht. Jede Linie im Spektrum entspricht gleich mehreren Übergängen, da die Hyperfeinzustände in den angeregten Zuständen überlappen. So bestehen zum Beispiel die Linien von  $^{39}\text{K}$  aus jeweils sechs nicht einzeln auflösbaren Hyperfeinübergängen. Diese Überlagerung bedingt, dass das Linienzentrum (definiert durch das nicht aufgespaltene Feinstrukturniveau  $4^2P_{3/2}$ ) nicht mit dem spektroskopischen Maximum übereinstimmt. So liegt zum Beispiel das spektroskopische Maximum der  $D_2$ -Linie von  $^{39}\text{K}$  ausgehend vom  $F = 1$ -Grundzustand  $12,0 \text{ MHz}$  unterhalb und ausgehend vom  $F = 2$ -Grundzustand  $2,6 \text{ MHz}$  oberhalb des Linienzentrums [130]. Wird der Referenz-Laser einfach nur auf das spektroskopische Maximum des entsprechenden Grundzustand-Crossovers  $F = (1, 2) \rightarrow F'$  stabilisiert, so liegt dieser in Wirklichkeit etwa  $10 \text{ MHz}$  unterhalb des Zentrums  $4^2P_{3/2}$ . Die nicht auflösbaren Hyperfeinübergänge führen zudem zu einem weniger steilen Regelsignal im Radiofrequenz-Lock des Referenz-Lasers. Um trotz dieser beiden Unsicherheiten den richtigen Lockpunkt des Referenz-Lasers (also das Zentrum  $4^2P_{3/2}$ ) zu finden, bietet sich eine nachträgliche Kontrolle des Lockpunktes über die resonante Abbildung von  $^{40}\text{K}$  an (siehe Abschnitt 3.6.3). Die in den Spektren sichtbaren Transmissionseinbrüche entsprechen den sogenannten Crossover-Resonanzen. Diese liegen genau in der Mitte zwischen zwei Linien, die den Anregungen aus den beiden Grundzuständen des jeweiligen Isotops entsprechen. Man beachte den geringen Abstand zwischen der Linie des  $^{39}\text{K}$   $F = 1 \rightarrow F'$ -Übergangs und der Crossover-Resonanz von  $^{41}\text{K}$ .

---

<sup>12</sup>Spektroskopiezellen, *Toptica Photonics AG*.

<sup>13</sup>Siehe Termschema auf 343.



**Abbildung 3.9:** Dopplerfreies Sättigungsspektrum der  $D_2$ -Linie von Kalium aufgenommen an einer Dampfzelle mit angereichertem (dunkel blau) und unangereichertem Kalium (hell blau). Die  $^{40}\text{K}$ -Linien sind nur im Spektrum des angereicherten Kaliums sichtbar. Es stammt aus Referenz [113] und ist mittels Lock-in-Verstärkung aufgenommen. Hieraus erklärt sich die höhere Signalqualität und das Fehlen des Doppler-Untergrundes. Da die feinen Hyperfeinstrukturaufspaltungen der angeregten Zustände nicht auflösbar sind, sind die verschiedenen Linien allein den unterschiedlichen Grundzuständen zuzuordnen. Die Crossover-Resonanz  $F = (1, 2) \rightarrow F'$  von  $^{39}\text{K}$  bestimmt die Frequenz des Kalium-Referenz-Lasers und definiert hier den Abszissenursprung. Die angegebenen Offset-Frequenzen (grau) entsprechen  $4^2S_{1/2}, F \rightarrow 4^2P_{3/2}$ -Übergängen.

## 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

---

### 3.3.4 Laseraufbau und Lasersystem

Das Kühlen zweier unterschiedlicher atomarer Spezies geht mit einer Verdopplung der Anzahl benötigter Laser einher. Um dennoch einen zuverlässigen Betrieb des Experimentes zu gewährleisten, ist das Lasersystem auf eine möglichst hohe Stabilität hin neu überarbeitet. Die hierbei entworfenen Bausätze für Diodenlaser und Trapez-Verstärker (TA) werden inzwischen auch international von anderen Arbeitsgruppen eingesetzt. Das System zum Laserkühlen basiert auf robusten und einfach zu betreibenden Halbleiterlaserdioden [127, 131].

Zur Stabilisierung der Laserdioden wird ein holographisches Gitter<sup>14</sup> in Littrow-Anordnung verwendet. Das frequenzselektive Gitter reflektiert die erste Beugungsordnung zurück in die Laserdiode und bildet zusammen mit der Rückfacette der Diode einen externen Resonator, der die Linienbreite des Lasers auf etwa 1 MHz reduziert [132]. Die Laserfrequenz lässt sich über eine piezogesteuerte Verkippung des Gitters regeln. In unserem Aufbau werden hauptsächlich antireflexbeschichtete Laserdioden<sup>15</sup> eingesetzt. Die Entspiegelung der Austrittsfacette verhindert, dass die Diode selber einen Laserresonator bildet. Hierdurch kann die Wellenlänge weitgehend durch den externen Resonator geprägt, also durch das Gitter bestimmt werden. Aufgrund ihres breiten Verstärkungsprofils besitzen die Laserdioden laut Herstellerangaben etwa einen Durchstimmbereich von 750 nm bis 790 nm [133]. Dies ist insbesondere für die Kalium-Wellenlänge von großem Vorteil, denn mit den früher verfügbaren Laserdioden konnte eine solch kurze Wellenlänge nur durch Kühlen auf etwa  $-40^{\circ}\text{C}$  erreicht werden [134]. Die AR-Laserdioden werden von uns knapp unter Raumtemperatur betrieben. Gegenüber nicht entspiegelten Laserdioden beobachten wir einen größeren modensprungfreien Bereich. Zudem lassen sich die Laser über einen weiten Bereich kontinuierlich über die Temperatur durchstimmen. Die Leistung eines stabilisierten Diodenlasers tritt entlang der nullten Beugungsordnung des Gitters aus und beträgt etwa 50 mW.

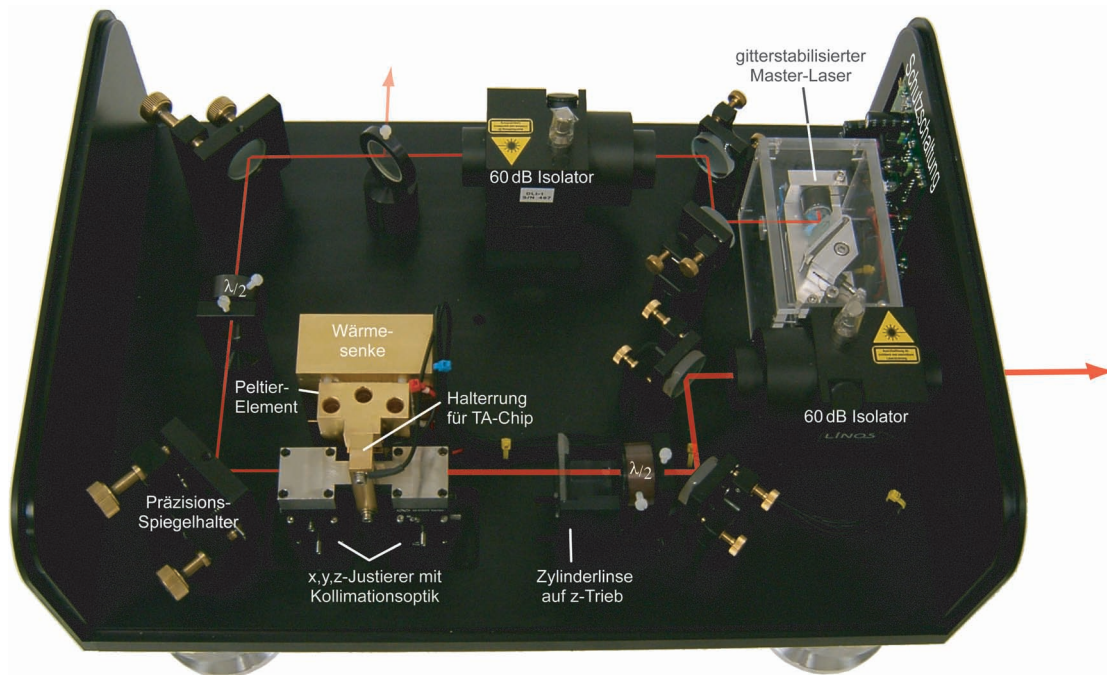
Diese Leistung ist zu gering, um eine hohe Zahl von Atomen in der magneto-optischen Falle zu fangen. Daher werden die Laserstrahlen anschließend durch Halbleiter-Trapezverstärker (tapered amplifier, TA) geschickt. Dies sind leistungsfähige Laserdioden mit entspiegelten Ein- und Austrittsfacetten, welche das injizierte Licht des Master-Lasers zu einem nahezu beugungsbegrenzten Strahl mit mehr als einem Watt Leistung verstärken können. Am Eingang eines solchen TA-Chips wird durch eine indexgeführte Rippenwellenleiterstruktur ein beugungsbegrenzter Strahl erzeugt, der beim Durchlaufen des Chips sukzessive verstärkt wird. Die hohe Ausgangsleistung wird dadurch ermöglicht, dass die innerhalb des Halbleiters zunehmende Lichtintensität durch eine gewinngeführte Trapezstruktur auf eine immer breiter werdende Querschnittsfläche verteilt wird [135]. Die Anordnung aus einem injizierenden gitterstabilisierten Diodenlaser und einem Trapezverstär-

<sup>14</sup>Optical reflective plane grating,  $1800\text{ mm}^{-1}$ , Nr. 263 232 9051 324, *Zeiss*.

<sup>15</sup>EYP-RWE-0790-04000-0750-SOT01-0000, *Eagleyard Photonics GmbH*.



### 3.3 Laserkühlung



**Abbildung 3.10:** Selbst entwickeltes MOPA-System, bestehend aus einem gitterstabilisiertem Diodenlaser als Master und einem temperaturstabilisierten TA-Chip als Verstärker.

ker bezeichnet man auch als MOPA (master oscillator-power amplifier). Der Aufbau des eingesetzten MOPA-Systems ist in Abbildung 3.10 zu sehen. Um eine hohe mechanische Stabilität des optischen Aufbaus zu gewährleisten, sind die Komponenten genau aufeinander abgestimmt und nur feinjustierbar. Die Halterung des 1 Watt-TA-Chip<sup>16</sup> ist über eine thermische Isolation fest mit der Grundplatte verbunden und nicht etwa über das kühlende Peltier-Element<sup>17</sup> befestigt, wie dies bei früheren Versionen der Fall war. Kompakte XYZ-Justiertische<sup>18</sup> ermöglichen es, die Kollimationsoptik<sup>19</sup> für die Ein- und Auskoppulung optimal an den TA-Chip anzupassen und gestatten – falls erforderlich – einen schnellen Austausch des Chips. Der aus dem TA-Chip austretenden Strahl weist aufgrund der Halbleiterstruktur einen starken Astigmatismus auf. Dieser wird über eine Zylinderlinse<sup>20</sup> ausgeglichen. Zwei 60 dB-Isolatoren<sup>21</sup> verhindern Rückreflexe und damit Rückkopplungen in den Master bzw. den Verstärker.

<sup>16</sup>EYP-TPA-0765-00000-3006-CMT03, *Eagleyard Photonics GmbH*.

<sup>17</sup>PE-127-14-11, *Telemeter Electronic GmbH*.

<sup>18</sup>M-DS25-XYZ, *Newport*.

<sup>19</sup>C330TM-B, *Thorlabs*.

<sup>20</sup> $f = 70$  mm, LJ1477-032, *Thorlabs*.

<sup>21</sup>DLI1 (durchstimmbare) oder FI-790-TV (fest vorgegebene Wellenlänge), *LINOS Photonics*.

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

---

Das Lasersystem zum Kühlen, optischen Pumpen und Abbilden der Atome befindet sich auf einem separaten optischen Tisch und ist schematisch auf Seite 70 dargestellt. Die Strahlengänge für Rubidium sind rot und für Kalium blau eingezeichnet.

Die beiden Referenz-Laser und der Rubidium-Rückpump-Laser sind über RF-Locks direkt auf die entsprechenden Linien (siehe Angaben) einer Sättigungsspektroskopie stabilisiert (RF-gelockte Laser sind in dem Schema durch ein gelbes Spektrum-Symbol markiert). Die Seitenbänder für das RF-Lock werden in der Regel nicht über den Laserstrom aufmoduliert, sondern über elektro-optische Modulatoren (EOM). Die Modulatoren erlauben es, nur den Lichtstrahlen Seitenbänder aufzuprägen, die tatsächlich durch die Spektroskopiezellen verlaufen, während die Strahlen zur Manipulation der Atome unberührt bleiben. Die in dem Schema mit einem Vorhängeschloß gekennzeichneten Laser sind über Offset-Locks auf die zugehörigen Referenz-Laser stabilisiert. Die daneben angegebenen Werte entsprechen den Offset-Frequenzen für  $^{87}\text{Rb}$  bzw.  $^{40}\text{K}$ .

Durch Verschieben der ursprünglichen Laserfrequenzen über akusto-optische Modulatoren<sup>22</sup> (AOM) wird das Licht zum Abbilden von Rubidium, sowie das Licht zum optischen Pumpen (Spinpol.) von Rubidium und Kalium erzeugt. Bei den anderen Strahlen dienen die AOMs allein zum schnellen Ein- und Ausschalten des Lichtes (Schaltzeit  $\sim 1 \mu\text{s}$ ). Um das Licht wirklich vollständig abschalten zu können, werden zusätzlich (nicht dargestellte) mechanische Shutter verwendet (Schaltzeit  $\sim 1 \text{ms}$ ). Die AOM-Frequenzen sind fest eingestellt. Ihre Werte und die Vorzeichen der Frequenzverschiebungen sind neben den AOM-Symbolen angegeben.

Insgesamt werden drei Trapezverstärker eingesetzt: Ein TA zum Kühlen von Rubidium und jeweils ein TA zum Kühlen und Rückpumpen von Kalium. Durch die Verwendung unabhängiger Trapezverstärker steht genügend Leistung zur Verfügung und zudem wird die Erzeugung unerwünschter Mischfrequenzen vermieden. Das Rubidium-Rückpump-Licht wird aus einem sogenannten Slave-Laser gewonnen. Dabei handelt es sich um eine gewöhnliche Laserdiode, welche durch einen gitterstabilisierten Diodenlaser (Master-Laser) injiziert wird. Dank der Injektion benötigt der Slave-Laser keinen externen Resonator, wodurch die gesamte Leistung der Diode zur Verfügung steht.

Die Vakuumapparatur mit dem eigentlichen Experiment befindet sich auf einem zweiten optischen Tisch. Zur Abschirmung von resonantem Streulicht sind beide Tische durch lichtdichte Vorhänge voneinander getrennt. Über polarisationserhaltende single-mode Fasern<sup>23</sup> wird das Laserlicht zum Experiment transferiert. Das Rubidium- und Kalium-Licht wird in den meisten Fällen gemeinsam in dieselbe Faser eingekoppelt. Dadurch sind die Strahlen auf dem Experimenttisch bereits perfekt räumlich überlagert. Um vor der Faser die beiden Wellenlängen ohne nennenswerte Verluste zu vereinen, werden die beiden Strahlen mit zueinander senkrechten Polarisierungen auf polarisierenden Strahlteilerwürfeln überlagert. Um das Licht schließlich mit parallelen Polarisierungen in die Fasern einkoppeln

---

<sup>22</sup>3080-125, *Crystal Technology*.

<sup>23</sup>FS-PM-4611 in FT030-Y tubing, *Thorlabs*; Konfektionierung HPC-S0.66/K + HPC-S8.66/K *Diamond GmbH*.

zu können, sind die Würfel von speziell angefertigte „multiple order“ Verzögerungsplatten<sup>24</sup> [136] gefolgt (im Schema durch Sterne markiert). Die Platten sind so angefertigt, dass sie die Polarisationsrichtung bei einer Wellenlänge von 767 nm erhalten und bei einer Wellenlänge von 780 nm um 90° drehen.

Auf dem Experimenttisch wird das Kühl- und das Rückpump-Licht auf sechs unabhängige Strahlen für die magneto-optische Falle aufgeteilt. Hier erlaubt es der Einsatz der speziellen Verzögerungsplatten, die Leistungsbalance zwischen den MOT-Strahlen für Rubidium und Kalium unabhängig voneinander einzustellen und somit beide Wolken in der MOT perfekt zu zentrieren. Nach den Fasern stehen jeweils etwa 300 mW Kühl-Licht für Rubidium und Kalium sowie 200 mW Rückpump-Licht für Kalium und 20 mW für Rubidium zur Verfügung.

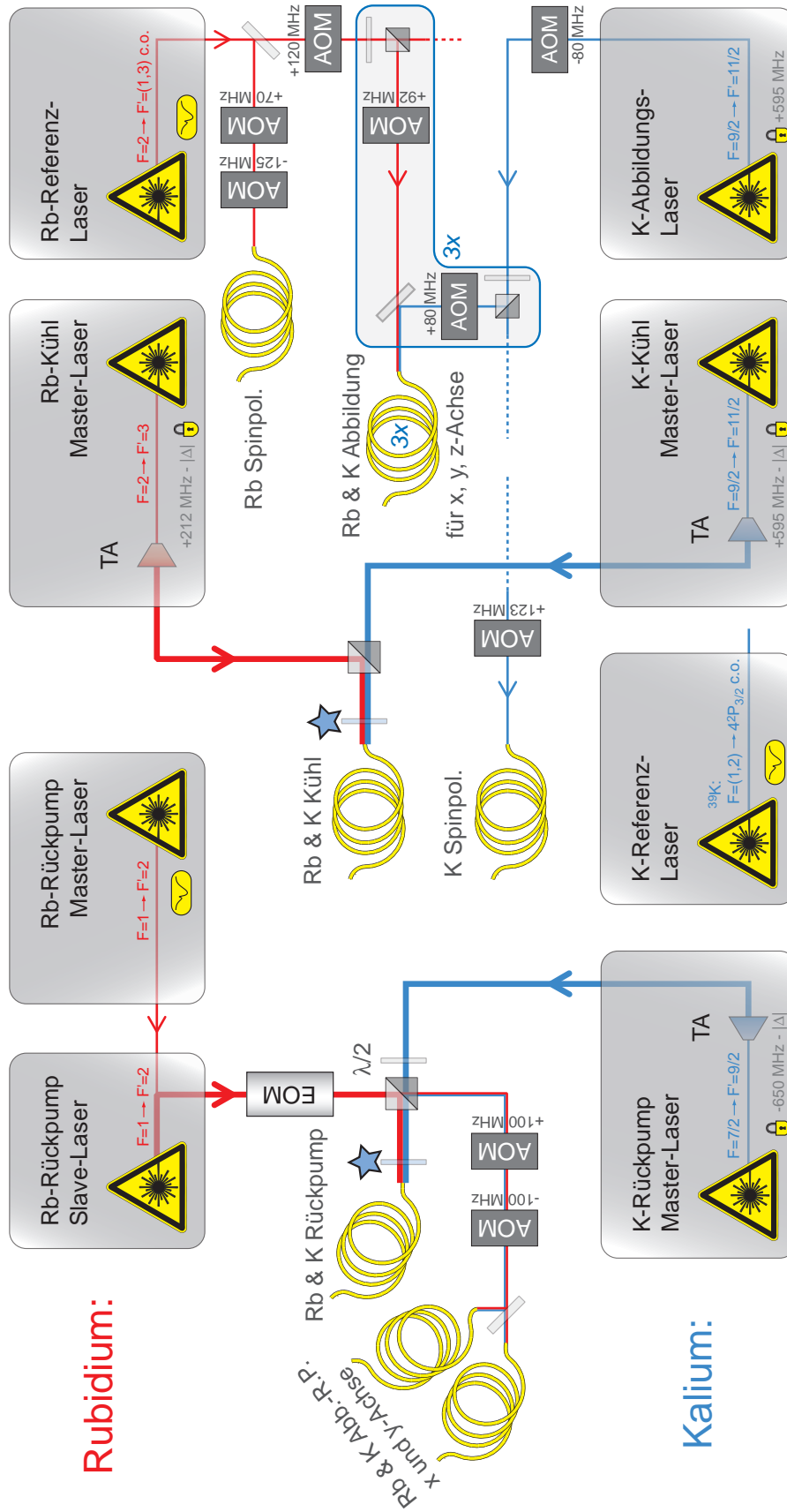
Der eingezeichnete elektro-optische Modulator (EOM) dient zum Drehen der Polarisationsrichtung des Rubidium-Rückpumper-Lichtes. Hierdurch kann die Leistungsaufteilung an dem folgenden Strahlteilerwürfel je nach Bedarf zeitlich variiert werden. Insbesondere lässt sich somit gegen Ende der MOT-Phase die Rückpump-Leistung verringern, um eine Dichteerhöhung in der Rubidiumwolke (temporal dark MOT) zu erzielen [137, 138].

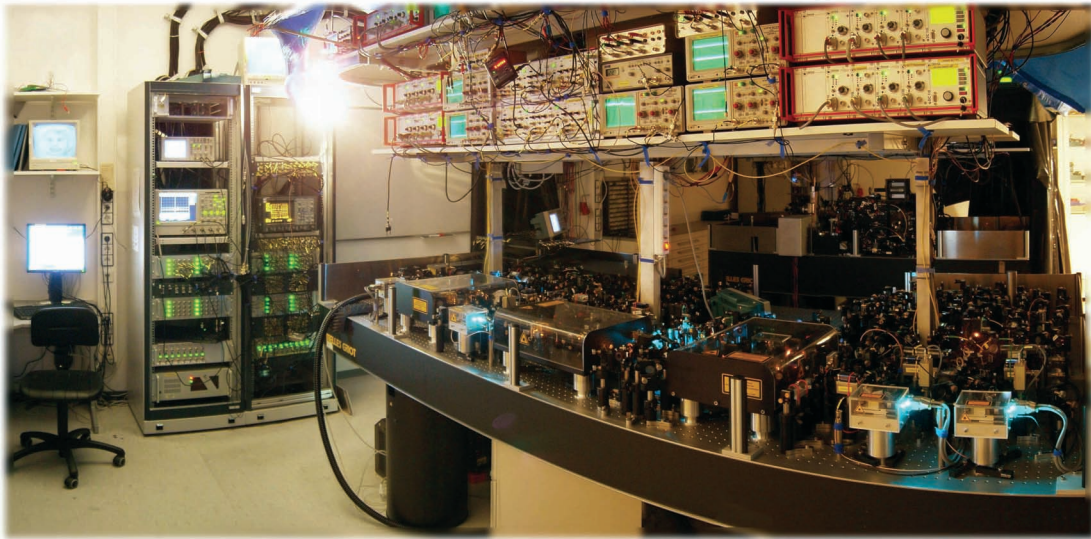
Nach der Durchführung des Experiments innerhalb der Glaszelle, können beide Spezies völlig unabhängig voneinander entlang jeder der drei Raumachsen abgebildet werden. In dem Schema sind die AOMs zum Schalten, die Vereinigung und die Einkoppelung des Abbildungslichtes nur für eine der drei Abbildungsachsen dargestellt (blau umrahmter Bereich).

---

<sup>24</sup>*Lens Optics.*

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse





**Abbildung 3.11:** Blick ins Labor: Im Vordergrund ist das Lasersystem zu sehen. Dahinter befindet sich ein weiterer optischer Tisch mit der Vakuumapparatur. In der linken Bildhälfte ist die Computersteuerung für die Kontrolle des Experimentes zu erkennen.

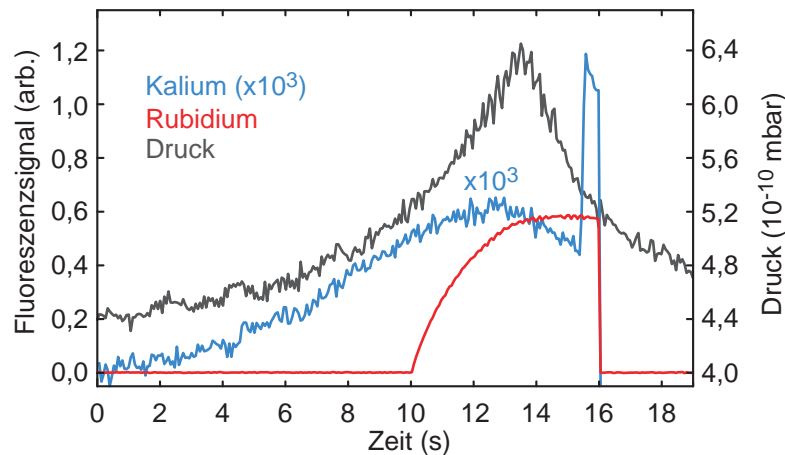
### 3.3.5 Laserkühlung und -präparation

In diesem Abschnitt werden die einzelnen Schritte der Laserkühlung und Laserpräparation in chronologischer Reihenfolge besprochen. Dies sind im Einzelnen: die Zwei-Spezies-MOT, die daran anschließende komprimierte MOT, die optische Melasse und schließlich das optische Pumpen der Atome in magnetisch fangbare Zustände. Neben einer tabellarischen Aufführung der optimierten experimentellen Parameter werden die Lebensdauer und die Verluste in der Zwei-Spezies-MOT untersucht.

#### Zwei-Spezies-MOT

Die Absorptionsabbildung von frei expandierenden ultrakalten Atomwolken erlaubt eine einfache und zuverlässige Bestimmung der Atomzahlen und Temperaturen (siehe Abschnitt 3.6). Je niedriger die aus der Laserkühlung resultierenden Temperaturen und je höher die eingefangenen Atomzahlen, umso vorteilhafter wirkt sich dies auf die anschließende evaporative Kühlung der Atome aus (siehe Abschnitt 3.5). Dieser Zusammenhang ermöglicht eine feine Optimierung der Laserkühlparameter direkt auf die letztendlich erzielten Phasenraumdichten nach der Verdampfungskühlung. Hierdurch erspart man sich eine weitere Absorptionsabbildung im Bereich der MOT-Kammer. Beim Kühlen zweier Spezies hängen die „optimalen“ experimentellen Parameter von den genauen Zielvorgaben, wie angestrebte Temperatur, Atomzahl und Atomzahlverhältnis, ab. Dementsprechend sind die in Tabelle C.1 für die Zwei-Spezies-MOT angegebenen Werte als „typische“ Parameter zu

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse



**Abbildung 3.12:** Druckverlauf und Ladekurven für Rubidium und Kalium in der Zwei-Spezies-MOT. Der Pulsbetrieb der Dispensoren ermöglicht einen schnellen Druckabfall ( $\tau_p = 1,9$  s) im Anschluss an den Ladevorgang. Die plötzliche Erhöhung der Kalium-Fluoreszenz gegen Ende der MOT ist durch eine Verringerung der Laserverstimmung während der CMOT bedingt. Deutlich sind auch die mit zunehmendem Rubidium einsetzenden Kaliumverluste zu erkennen. Das K-Fluoreszenzsignal ist gegenüber dem von Rb um einen Faktor  $10^3$  skaliert dargestellt.

verstehen. Ausgehend von diesen Parametern lassen sich simultan ein entartetes Bose- und ein entartetes Fermigas mit vergleichbaren Atomzahlen erzeugen.

Um die Zwei-Spezies-MOT während des Betriebes überwachen zu können, wird das entlang eines Kammerfensters austretende Rubidium- und Kalium-Fluoreszenzlicht über schmalbandige Interferenzfilter<sup>25</sup> voneinander getrennt und auf zwei separaten Photodioden vermessen. Aus der Stärke der Fluoreszenzsignale lässt sich grob die Anzahl der jeweils gefangenen Atome ermitteln. Abbildung 3.12 zeigt typische Ladekurven von Rubidium und Kalium in einer Zwei-Spezies-MOT. Dabei wird das Rubidium-Laserlicht gegenüber dem Kalium-Licht mit 10 s Verzögerung eingeschaltet. Parallel zu den Ladekurven ist auch der Druckverlauf innerhalb der MOT-Kammer dargestellt. Der gepulste Betrieb der Atomquellen führt zu einer starken Zeitabhängigkeit der Laderaten, sodass die MOT-Ladekurven signifikant von dem sonst üblichen exponentiellen Sättigungsverhalten abweichen. Wie am Druckverlauf zu erkennen ist, werden die Dispensoren bereits 2, 5 Sekunden vor dem Ende der MOT abgeschaltet, sodass der Druck wieder abfallen kann. An der Rubidium-Fluoreszenz ist zu erkennen, dass das vorzeitige Abschalten der Atomquellen *keine* signifikante Verringerung der gefangenen Atomzahl zur Folge hat. Der gemessene Hintergrunddruck in der MOT-Kammer fällt mit einer  $1/e$ -Zeitkonstante von 1,9 s ab. Es ist jedoch davon auszugehen, dass der lokale Druck im Einfangbereich weitaus höher ist

<sup>25</sup>F03-780.0-4-1.00, F03-766.5-4-1.00, CVI Laser.

als der gemessene Druck, da die Drucksonde nicht dem direkten Atomstrahl ausgesetzt ist und damit kaum Rb und K detektiert (siehe Seite 57). Die angegebene Zeitkonstante stellt somit eine obere Grenze dar und vermutlich fällt der lokale Druck im Zentrum der MOT mit einer noch kürzeren Zeitkonstante ab.

Nach der Laserkühlung werden die Atome magnetisch gefangen und mittels eines magnetischen Förderbandes aus der MOT-Kammer heraus transportiert. Das vorzeitige Abschalten der Dispensoren verringert den Druck innerhalb der MOT-Kammer und verringert somit die Verluste in der anschließenden Magnetfalle (bzw. im Förderband). Abbildung 3.13 zeigt eine Messung der Fallenlebensdauer für magnetisch gefangene Atome innerhalb der MOT-Kammer. Um die Lebensdauer zu bestimmen, werden die Atome aus einer Rubidium-MOT für eine variable Zeit in eine magnetische Quadrupolfalle transferiert und anschließend kurzzeitig wieder in der MOT eingefangen (recapture). Das Verhältnis der MOT-Fluoreszenzsignale vor und nach der magnetischen Speicherung gibt – neben der Transfereffizienz – Aufschluss über die Lebensdauer in der Magnetfalle<sup>26</sup>.

In der Anfangsphase unseres experimentellen Aufbaus befanden sich die Dispensoren noch innerhalb des Schleusenbereichs, also weit vom MOT-Zentrum entfernt. Außerdem wurden die Quellen damals kontinuierlich betrieben, sodass die Situation in etwa der einer üblichen Dampfzellen-MOT entsprach. Unter diesen Bedingungen wurden die rot dargestellten Messwerte aufgenommen. Bei den aktuellen, blau dargestellten Messwerten befinden sich die Dispensoren innerhalb der MOT-Kammer nur 4 cm vom MOT-Zentrum entfernt und werden, wie oben beschrieben, in einem gepulsten Modus betrieben. In diesem Fall misst man eine etwa zehnmal längere Fallenlebensdauer. Im gepulsten Modus nimmt die Fallenlebensdauer selbst nach vielen Betriebsstunden nicht ab. Aus der anfänglichen Steigung der MOT-Ladekurve (siehe Abbildung 3.14) lässt sich eine Rubidium-Laderate von  $\sim 4 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$  ermitteln. Solch günstige Kombinationen aus hoher Laderate und langer Speicherzeit werden üblicherweise nur mit kalten Atomstrahlen als Quellen erreicht (z.B. mit einem Zeeman-Slower [139] oder einer 2D-MOT [140]).

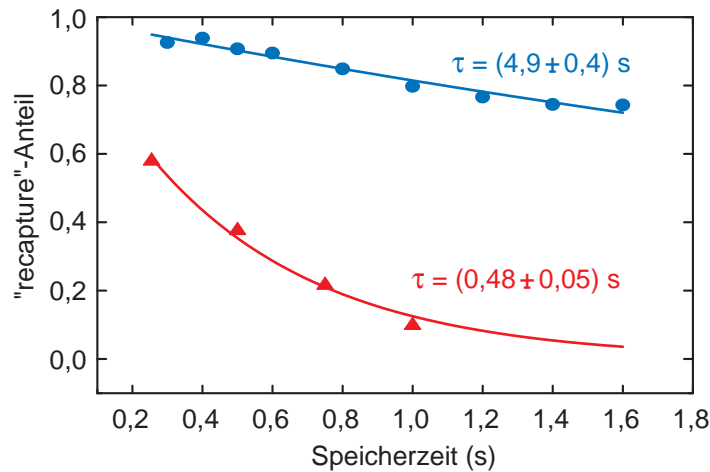
Aufgrund der niedrigen Temperaturen treten innerhalb der MOT langsam ablaufende, langreichweitige Stoßprozesse auf. Während der langen Wechselwirkungszeiten können optisch angeregte molekulare Zustände spontan zerfallen. Diese Zerfälle, als auch interatomare Fein- und Hyperfeinwechselwirkungen, können zu Fallenverlusten führen [79]. Bereits in Abbildung 3.12 ist zu erkennen, dass durch das Laden der Rubidium-MOT Verluste in der Kalium-MOT induziert werden. Vergleicht man die Fluoreszenz der Kalium-MOT in An- und in Abwesenheit der Rubidium-MOT<sup>27</sup>, so wird dieser Effekt noch deutlicher. Die Ergebnisse einer solchen Vergleichsmessung sind in Abbildung 3.14 wiedergegeben.

---

<sup>26</sup>In den beiden dargestellten Messungen ist die Transfereffizienz zwischen MOT und Magnetfalle auf eins normiert. Die Transfereffizienz entspricht dabei dem „recapture“-Anteil für eine auf null extrapolierte Haltezeit.

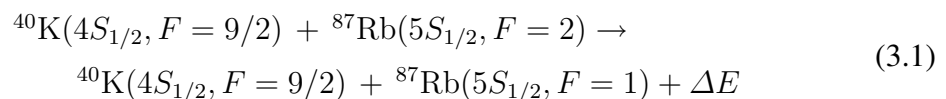
<sup>27</sup>Um die Kalium-MOT alleine zu betreiben, wird nur das relativ schwache Rubidium-Rückpump-Licht abgeschaltet, nicht aber das Rubidium-Kühl-Licht.

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse



**Abbildung 3.13:** In der MOT-Kammer durchgeführte Lebensdauerermessung rein magnetisch gefangener Atome. Aufgetragen ist der „recapture“-Anteil gegen die magnetische Speicherzeit. Bei gepulstem Betrieb der Atomquellen (blau) ist die Lebensdauer ( $1/e$ ) um eine Größenordnung länger als bei einem kontinuierlichem Betrieb der Quellen (rot).

Die in der Zwei-Spezies-MOT beobachteten Kaliumverluste sind auf inelastische heteronukleare Stöße zurückzuführen. Gemäß Referenz [141] handelt es sich dabei vornehmlich um Stöße, bei denen Grundzustandsatome den Hyperfeinzustand ändern, sogenannte hyperfine-changing collisions (HCC) [79]. Bei dem im Folgenden beispielhaft aufgeführten Prozess wird eine Energie von  $\Delta E = k_B \cdot 328 \text{ mK}$  frei, welche sich als kinetische Energie auf die beiden Stoßpartner verteilt ( $E_{\text{kin,K}} = k_B \cdot 225 \text{ mK}$  und  $E_{\text{kin,Rb}} = k_B \cdot 103 \text{ mK}$ ).

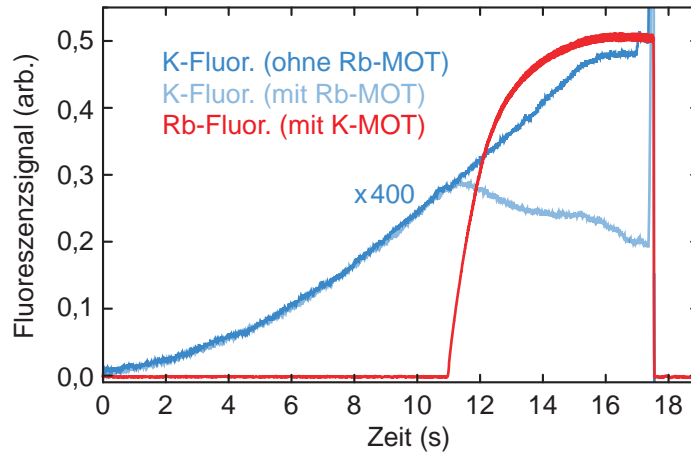


Die Tiefe der magneto-optischen Falle liegt im Bereich einiger 100 mK [123, 142], sodass die freiwerdende Energie ausreichend ist, um Kalium und eventuell auch Rubidium aus der Falle zu werfen.

Bei höheren Laserleistungen sollen auch zunehmend sogenannte lichtinduzierte Stöße zu den Verlusten beitragen [141]. Wird während eines K-Rb-Stoßes das Rubidium durch das Laserlicht in den  $5P_{3/2}$ -Zustand angeregt, so verspüren die beiden Stoßpartner ein attraktives Molekülpotential (K-Rb\*-Potential  $\propto -C_6/r^6$ ). Innerhalb der natürlichen Lebensdauer des angeregten Zustandes können die beiden ultrakalten Atome aufeinander zu beschleunigen. Findet die Reemission bei kleineren Kernabständen statt, so ist es möglich, dass die beiden Stoßpartner genügend kinetische Energie gewinnen, um aus der Falle zu entkommen<sup>28</sup>. Dieser Verlustprozess wird als radiative escape (RE) bezeichnet [143]. Von

<sup>28</sup>Das Wechselwirkungspotential bei dem Kalium der angeregte Stoßpartner ist (K\*-Rb), ist repulsiv und





**Abbildung 3.14:** Vergleich der Ladekurven einer Kalium-MOT in An- und Abwesenheit einer Rubidium-MOT. Beim Betrieb der Zwei-Spezies-MOT verringert sich die Kaliumatomzahl um 58 %, wobei die Kaliumverluste auf inelastische heteronukleare Stöße zurückzuführen sind. Die dargestellten Ladekurven sind das Ergebnis einer Mittelung über 9 Einzelmessungen. Die anfängliche Laderate der Rubidium-MOT beträgt hier  $\sim 4 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ . Eine weitere Vergleichsmessung ergibt, dass sich bei einer Halbierung der Atomzahl in der Rubidium-MOT die Kaliumverluste von 58 % auf 42 % verringern.

allen Alkalimetallkombinationen weist das Kalium-Rubidium-Gemisch das langreichweitigste Potential für die Wechselwirkung zwischen Grund- und angeregtem Zustand auf [141]. Für dieses Gemisch sind die lichtinduzierten Verluste deshalb besonders hoch. An dieser Stelle sei auch auf den außergewöhnlich großen Franck-Condon-Faktor hingewiesen, der das K-Rb-Gemisch zu einem günstigen Kandidaten für die Erzeugung heteronuklearer Moleküle über Photoassoziation macht [144]. Als Verlustkanal spielt das  $\text{K-Rb}^*$ -Potential selbst jedoch nur eine untergeordnete Rolle. Erst das durch einen zweiten Anregungsschritt erreichte  $\text{K}^*\text{-Rb}^*$ -Potential ( $\propto -C_5/r^5$ ) stellt den Hauptverlustkanal für radiative escape dar. Eine weitere Ursache für lichtinduzierte Verluste sind Feinstruktur ändernde Stöße [145], diese sollen jedoch für das Kalium-Rubidium-Gemisch gegenüber den zuvor genannten Prozessen vernachlässigbar sein [141].

Die zeitliche Entwicklung der Kaliumatomzahl  $N_K$  in der Zwei-Spezies-MOT lässt sich prinzipiell durch die folgende Ratengleichung beschreiben:

$$\frac{dN_K}{dt} = L_K - \gamma N_K - \beta_K \int_V n_K^2 d^3r - \beta_{K,Rb} \int_V n_K n_{Rb} d^3r. \quad (3.2)$$

Dabei ist  $L_K$  die Laderate der Kalium-MOT,  $\gamma$  die Verlustrate durch Stöße mit heißen Atomen aus dem Hintergrundgas,  $\beta_K$  beschreibt die Verluste durch Stöße zwischen zwei

---

stellt daher keinen Verlustkanal dar.

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

---

gefangenen Kaliumatomen und  $\beta_{K,Rb}$  beschreibt die Verluste durch Stöße zwischen den beiden gefangenen Spezies.  $n_K$  und  $n_{Rb}$  sind die ortsabhängigen Dichten der gefangenen Kalium- und Rubidiumwolken. Die Integration findet über das Wolkenvolumen  $V$  statt. Da in diesem Experiment die Anzahl Kaliumatome in der MOT mehr als zwei Größenordnungen kleiner ist als die von Rubidium, kann der Beitrag von  $\beta_K$  vernachlässigt werden. Aufgrund des Pulsbetriebs der Atomquellen ist sowohl die Laderate  $L_K(t)$  als auch die Verlustrate<sup>29</sup>  $\gamma(t)$  zeitabhängig. Folglich stellt sich kein Gleichgewichtszustand mit stabiler Atomzahl ein. Unter diesen Bedingungen ist eine genaue Bestimmung des Verlustkoeffizienten  $\beta_{K,Rb}$  sehr schwer. Abhängig von den genauen MOT-Parametern liegt  $\beta_{K,Rb}$  typischerweise in der Größenordnung von  $10^{-11}\text{cm}^3/\text{s}$  [117, 134, 141, 146].

Gemäß obiger Gleichung werden die Kaliumverluste entscheidend durch die Größe der Rubidium-MOT beeinflusst. In einer Vergleichsmessung zu der Messung in Abbildung 3.14 wird die Rubidiumatomzahl durch Verringerung der Laserleistung etwa halbiert, die relativen Kaliumverluste werden hierdurch von 58 % auf 42 % reduziert. Da die Verlustraten durch die Dichten und nicht etwa durch die absoluten Atomzahlen bestimmt werden, erweist es sich außerdem als günstig, die Magnetfeldgradienten und die Laserverstimmungen so zu wählen, dass die Kalium-MOT nicht zu stark komprimiert wird, auch wenn hierdurch die Rubidium-MOT ein wenig kleiner ausfällt. Ein weiterer Ansatz die Kaliumverluste zu verringern könnte darin bestehen, den räumlichen Überlapp der beiden Spezies während der MOT-Phase zu minimieren [147]. Dies ließe sich zum Beispiel durch ein (temporäres) Ungleichgewicht zwischen den Intensitäten zweier entgegengesetzt propagierender MOT-Strahlen erreichen.

Bei einer komplementären Messreihe, bei der der Einfluss der Kalium-MOT auf die Rubidium-MOT untersucht wird, können keine Rubidiumverluste beobachtet werden. Dies könnte daran liegen, dass die mehr als doppelt so große Rubidiummasse bei einem inelastischen K-Rb-Stoß zu einem kleineren Energieübertrag auf das Rubidium führt (siehe Kommentar zur Reaktionsgleichung 3.1) [141]. Aufgrund der um zwei Größenordnungen kleineren Kaliumatomzahlen ist es aber auch wahrscheinlich, dass etwaige Rubidiumverluste unterhalb der Nachweisgrenze liegen.

#### **"Komprimierte MOT"**

In der Regel lässt sich durch eine räumliche Kompression der Atomwolken nach dem Laden der MOT die Phasenraumdicke weiter erhöhen. Während einer solchen als compressed MOT (CMOT) bezeichneten Phase werden für eine kurze Zeit die Magnetfeldgradienten und Laserverstimmungen erhöht [148], wodurch die Rückstellkraft der MOT vergrößert und zugleich der durch Mehrfachstreuung bedingte Strahlungsdruck [120, 121] im inneren der MOT verringert wird. Mit steigender atomarer Dichte nehmen jedoch auch die lichtinduzierten Verluste zu. Die Kompression der Wolke sollte daher nicht mehr als einige hundert Millisekunden in Anspruch nehmen. Leider erweist sich die Kompression

---

<sup>29</sup>Der Hintergrunddruck wird durch die Atomquellen dominiert.

der Zwei-Spezies-MOT als nachteilig für die letztendlich erzielte Phasenraumdicke des Kaliums, was vermutlich auf mit der Dichte zunehmende heteronukleare Stöße und damit einhergehenden Kaliumverluste zurückzuführen ist. In diesem Experiment wird daher keine standard CMOT durchgeführt. Sowohl die Feldgradienten als auch die Verstimmungen des Rubidium-Lichtes bleiben unverändert, und im Gegensatz zur üblichen CMOT wird die Verstimmung des Kalium-Laserlichtes verringert statt erhöht. Im Detail wird während der letzten 500 ms der MOT die Verstimmung  $|\Delta_{\text{KL}}|$  des Kalium-Kühl-Lasers von  $4,3 \Gamma$  auf  $1,1 \Gamma$  verringert. In Übereinstimmung mit Referenz [117] wird dabei eine Erhöhung der Kalium-Phasenraumdicke nach dem anschließenden sympathetischen Kühlen beobachtet. In der Fluoreszenzabbildung der Kalium-MOT ist jedoch keine räumliche Kompression der Wolke zu erkennen. Diese Beobachtung deckt sich mit der Aussage, dass in dem hier vorliegenden Regime der Mehrfachstreuung eine Kompression durch eine Verringerung der Verstimmung nicht möglich ist<sup>30</sup>. Dass dennoch eine Erhöhung der Phasenraumdicke nach dem sympathetischen Kühlen beobachtet wird, ist vermutlich auf ein effizienteres Doppler-Kühlen bei kleinerer Verstimmung zurückzuführen.

Eine Möglichkeit die Dichte in der magneto-optischen Falle zu erhöhen, ohne dass dabei die lichtinduzierten Verluste zunehmen, bietet die sogenannte dark MOT [137]. Hierbei werden die Atome, sobald sie in der MOT gefangen sind, in einen Dunkelzustand transferiert. Das Streulicht anderer Atome ist somit nicht mehr resonant. Die Unterdrückung der Mehrfachstreuung verringert den Strahlungsdruck im Inneren der MOT. Da sich mehr Atome im Grundzustand befinden, verringert sich auch die Wahrscheinlichkeit, dass angeregte Atome miteinander stoßen. In diesem Experiment wird für Rubidium eine sogenannte temporal dark MOT eingesetzt [137, 138]. Dabei wird während der letzten  $\sim 50$  ms der MOT die Rubidium-Rückpump-Leistung mittels eines elektro-optischen Modulators abgeschwächt. Über nicht-resonante Anregung zerfallen die Rubidiumatome in den  $F=1$ -Hyperfeingrundzustand und werden seltener in den Kühlzyklus zurück gepumpt. Befinden die Atome sich im Dunkelzustand, so sind sie nicht mehr dem repulsiven Streulicht ausgesetzt. Zugleich verringert die zunehmende Bevölkerung des absoluten Rubidium-Grundzustandes auch die durch heteronukleare Stöße hervorgerufenen Kaliumverluste.

#### Optische Melasse

Die MOT-Phase wird von einer reinen optischen Melasse gefolgt. Hierfür wird das magnetische Quadrupolfeld der MOT abgeschaltet und das Erdmagnetfeld über Helmholtz-Spulenpaare kompensiert. Während der 10 ms dauernden Melassen-Phase wird weiterhin das  $\sigma^+ \text{-} \sigma^-$ -polarisierte Laserfeld der MOT eingestrahlt. Beim Übergang von der MOT- zur Melassen-Phase werden die Verstimmungen der Kalium-Laser nur geringfügig ver-

<sup>30</sup>Die in diesem Experiment realisierte Kalium-MOT enthält einige  $10^7$  Atome und befindet sich somit im Regime der Mehrfachstreuung [149]. Der dabei vorherrschende innere Strahlungsdruck skaliert mit  $\Delta_{\text{KL}}^{-4}$ , während die Rückstellkraft im Zentrum der MOT nur mit  $\Delta_{\text{KL}}^{-1}$  skaliert [148]. In diesem Regime ist also eine Kompression nur für eine *Erhöhung* der Verstimmung  $|\Delta_{\text{KL}}|$  zu erwarten.

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

---

ändert. Demgegenüber wird die Verstimmung des Rubidium-Kühl-Lasers innerhalb der ersten 4 ms von  $3,8 \Gamma$  auf  $13,2 \Gamma$  erhöht. Hierdurch lässt sich die Rubidiumwolke nach deren Kompression in der dark MOT wieder auf Sub-Doppler-Temperaturen ( $\sim 50 \mu\text{K}$ ) abkühlen. Bei Kalium kann die Doppler-Temperatur ( $T_D = 146 \mu\text{K}$ ) nicht unterschritten werden. Dies ist vermutlich auf die geringe Hyperfeinstrukturaufspaltung im angeregten Zustand zurückzuführen, welche ein effizientes Polarisationsgradientenkühlen verhindert.

#### Optisches Pumpen

Nach der Laserkühlung in der optischen Melasse sind die Atome über die verschiedenen Hyperfeinzustände verteilt. Nur ein Teil dieser Zustände – die sogenannten schwachfeld-suchenden Zustände – lassen sich in der anschließenden Magnetfalle fangen. Durch optisches Pumpen können die Atome gezielt in einen solchen Zustand transferiert werden. Dies geschieht unter Einstrahlung  $\sigma^+$ -polarisierter Laser, welche parallel zu einem homogenen Magnetfeld von wenigen Gauß Feldstärke verlaufen. Das Magnetfeld gibt eine feste Quantisierungsachse vor und hält die erzeugte Spinpolarisierung aufrecht. Zum optischen Pumpen des Rubidiums wird resonant der  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ -Übergang getrieben (siehe Abbildung 3.8). Bereits nach der Streuung weniger Photonen befinden die Atome sich im gewünschten Zustand  $|F = 2, m_F = +2\rangle$ . Bezüglich des  $\sigma^+$ -polarisierten Lichtes handelt es sich hierbei um einen Dunkelzustand. Sobald die Atome diesen Zustand erreichen, streuen sie keine weiteren Photonen mehr und werden somit nicht unnötig aufgeheizt. Entsprechend wird das Kalium durch optisches Pumpen auf dem  $|F = 9/2\rangle \rightarrow |F' = 9/2\rangle$ -Übergang in den  $|F = 9/2, m_F = +9/2\rangle$ -Zustand transferiert.

Für das optische Pumpen von Rubidium und Kalium werden aufgrund der geringen benötigten Streuraten nur schwache Laserstrahlen von jeweils  $\sim 200 \mu\text{W}$  Leistung verwendet. Die beiden Frequenzen werden simultan für eine Dauer von etwa  $400 \mu\text{s}$  eingestrahlt. Während dieses kurzen Pulses sind die Rückpumper der optischen Melasse nach wie vor eingeschaltet. Sie verhindern eine Bevölkung des  $|F = 1\rangle$ -Zustandes bei Rubidium und des  $|F = 7/2\rangle$ -Zustandes bei Kalium. Durch das optische Pumpen der beiden Alkalimetalle in die maximal polarisierten magnetischen Zustände, besitzen die beiden Spezies das gleiche magnetische Moment<sup>31</sup> und daher dieselbe potentielle Energie in einem Magnetfeld. Die Wahl dieser Zustände ermöglicht einen maximalen Überlapp und eine optimale Thermalisierung der beiden Atomwolken in der anschließenden Magnetfalle. Darüber hinaus sind atomare Gase, welche in diesen „gestreckten“ Zuständen präpariert werden, immun gegenüber Verlusten durch spinändernde Stöße [78, 150]. Dies ist insbesondere bei Kalium zu beachten, da hier neben dem maximal gestreckten Zustand  $m_F = 9/2$  noch vier weitere magnetisch fangbare Zustände existieren, die jedoch nicht stabil gegenüber spinändernden Stößen sind und daher zu Fallenverlusten führen können.

---

<sup>31</sup>Das maximale magnetische Moment eines Alkaliatoms im Grundzustand ist annähernd durch das magnetische Moment des einzelnen Valenzelektrons gegeben. Damit beträgt die zugehörige potentielle Energie in einem schwachen Magnetfeld  $\sim 1,4 \text{ MHz}$  pro Gauß.

**Zwei-Spezies-MOT**

Parameter	$^{87}\text{Rb}$	$^{40}\text{K}$
$\Delta_{\text{KL}}$	$-3,8 \Gamma_{\text{Rb}}$	$-4,3 \Gamma_{\text{K}}$
$\Delta_{\text{RP}}$	0	$-4,1 \Gamma_{\text{K}}$
$\Gamma_{\text{Alk.}}$	$2\pi \cdot 6,07 \text{ MHz}$	$\sim 2\pi \cdot 6,04 \text{ MHz}$
$I_{\text{KL}}^{\text{Peak}}$	$32 \text{ mW/cm}^2$	$28 \text{ mW/cm}^2$
$I_{\text{RP}}^{\text{Peak}}$	$1,2 \text{ mW/cm}^2$	$13,4 \text{ mW/cm}^2$
$N_{\text{Atome}}$	$(3 - 7) \cdot 10^9$	$(1,1 - 1,5) \cdot 10^7$
Dauer	$(4 - 6) \text{ s}$	17 s
$\partial B/\partial z$	8,5 G/cm	
$w$	$(20 \pm 1) \text{ mm}$	

**Komprimierte MOT**

$\Delta_{\text{KL}}$	$-3,8 \Gamma_{\text{Rb}}$	$-1,2 \Gamma_{\text{K}}$
$\Delta_{\text{RP}}$	0	$-4,1 \Gamma_{\text{K}}$
$I_{\text{RP}}^{\text{Peak}}$	$0,12 \text{ mW/cm}^2$	$13,4 \text{ mW/cm}^2$
$\partial B/\partial z$	8,5 G/cm	
Rampzeit	500 ms	

**Optische Melasse**

$\Delta_{\text{KL}}$	$-13,2 \Gamma_{\text{Rb}}$	$-2,2 \Gamma_{\text{K}}$
$\Delta_{\text{RP}}$	0	$-8,3 \Gamma_{\text{K}}$
$I_{\text{RP}}^{\text{Peak}}$	$1,2 \text{ mW/cm}^2$	$13,4 \text{ mW/cm}^2$
Rampzeit	$\sim 4 \text{ ms}$	
Dauer	10 ms	

**Tabelle C.1:** Typische Parameter der Laserkühlung: Die Verstimmungen des Kühl- ( $\Delta_{\text{KL}}$ ) und des Rückpump-Lasers ( $\Delta_{\text{RP}}$ ) sind in Einheiten der natürlichen Linienbreiten angegeben und deren Werte werden innerhalb der Rampzeit auf die jeweilige Kühlphase angepasst.  $I_{\text{KL}}^{\text{Peak}}$  und  $I_{\text{RP}}^{\text{Peak}}$  sind die Gesamt-Peak-Intensitäten des Kühl- bzw. Rückpump-Lichtes im Zentrum der MOT.  $\partial B/\partial z$  entspricht dem Magnetfeldgradienten entlang der Symmetrieachse der Quadrupolspulen.  $w$  ist die mittlere Strahltaile ( $1/e^2$ -Radius) der sechs MOT-Strahlen. Hier wird die Größe der Rubidium-MOT über ihre Dauer kontrolliert. Ist die Rubidiumatomzahl groß, so ist die Kaliumatomzahl klein und umgekehrt.

## 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

---

### 3.4 Magnetfallen und Transport

Nach dem optischen Pumpen befinden die Atome sich in schwachfeldsuchenden Zuständen. In diesen Zuständen nimmt die Zeeman-Energie mit dem Magnetfeld  $|\mathbf{B}(\mathbf{r})|$  zu:

$$E(\mathbf{r}) = g_F m_F \mu_B |\mathbf{B}(\mathbf{r})|. \quad (3.3)$$

Hierbei ist  $g_F$  der Landé-Faktor zum Hyperfeinzustand  $F$ ,  $m_F$  das zugehörige Zeeman-Niveau und  $\mu_B$  das Bohrsche Magneton. Nur Atome in schwachfeldsuchenden Zuständen können in dem lokalen Feldminimum einer Magnetfalle gefangen werden. Die einfachste Magnetfalle für neutrale Atome besteht aus einem sphärischen Quadrupolfeld und lässt sich durch ein Spulenpaar erzeugen, das von entgegengesetzten Strömen durchflossen wird [151]. Diese Anordnung wird als Anti-Helmholtz-Konfiguration bezeichnet und ist bereits im Zusammenhang mit der magneto-optischen Falle beschrieben worden (siehe Abbildung 3.7).

#### 3.4.1 Transfer in die magnetische Quadrupolfalle

Wird der Strom durch die MOT-Spulen vervielfacht, so lassen sich die Spulen auch zum reinen magnetischen Fangen der Atome einsetzen. Dabei stimmen das Zentrum der MOT und der Magnetfalle automatisch miteinander überein, was einen optimalen Transfer zwischen den beiden Fallen garantiert. Unmittelbar nach dem optischen Pumpen werden die Atome durch schnelles Einschalten der Spulenströme ( $1/e$ -Zeitkonstante von  $120 \mu\text{s}$ ) magnetisch gefangen. Die verwendeten rauscharmen Netzteile<sup>32</sup> mit Einschaltzeiten von mehreren Millisekunden sind zu langsam, um den Strom in so kurzer Zeit auf die benötigten 38 A zu schalten. Daher werden die Netzteile anfangs durch hinzugeschaltete Kapazitäten unterstützt<sup>33</sup>. Der axiale Fallengradient ist mit  $\partial B/\partial z = 65 \text{ G/cm}$  auf die Größe der Atomwolke angepasst (mode matched [75]), wodurch das Aufheizen der Wolke beim Einladen in die Magnetfalle minimiert wird. Für den anschließenden Transport wird die Atomwolke adiabatisch komprimiert. Dies geschieht durch eine Erhöhung des Fallengradienten innerhalb von 200 ms auf 100 G/cm.

#### 3.4.2 Magnetischer Transport

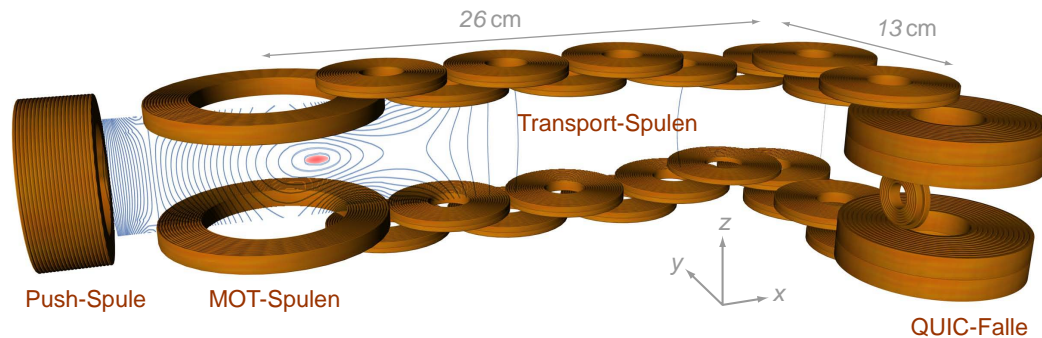
Anschließend werden die in der Quadrupolfalle gefangenen Atome über eine 39 cm lange Strecke magnetisch aus der MOT-Kammer in die Experimentkammer transportiert. Das magnetische Förderband beruht auf einem Design von Markus Greiner und Mitarbeitern [112] und besteht aus einer Serie zueinander versetzt angeordneter Spulenpaare. Dabei wird die Atomwolke durch geschicktes Überblenden der Ströme von einem Spulenpaar

---

<sup>32</sup>SM15-100, Delta Elektronik BV.

<sup>33</sup>Zu Anfang liefern die über eine MOSFET-Schaltung hinzugeschalteten Kapazitäten den gesamten durch die Quadrupolspulen fließenden Strom. Zusammen mit den Spulen und einem Widerstand bilden die Kapazitäten ein überdämpftes  $RLC$ -Glied und entladen sich mit einer  $1/e$ -Zeitkonstante von 90 ms.

## 3.4 Magnetfallen und Transport



**Abbildung 3.15:** Magnetisches Förderband für Atome: Mittels einer Kette von räumlich überlappenden Quadrupolspulen werden die lasergekühlten Atome (rot angedeutet) aus der MOT-Kammer in die Experimentkammer transportiert. An der Zielposition befinden sich die Atome innerhalb einer Glaszelle. Dank der  $90^\circ$ -Kurve sind die Atome hier entlang aller sechs Raumrichtungen optisch zugänglich. Um den Zugang zu verbessern, ist die Transportstrecke gegenüber der früheren Apparatur um 6 cm verlängert worden. Eine „Push-Spule“ reduziert die Änderung der Fallengeometrie beim Übergang von den großen MOT- auf die kleineren Transportspulen. Die hier dargestellten Äquipotentiallinien entsprechen der Feldkonfiguration beim Verlassen der MOT-Kammer (im Moment maximalen Stroms durch die Push-Spule). In der Glaszelle angekommen, werden die Atome aus der Quadrupolfalle in eine QUIC-Falle umgeladen.

zum Nächsten gereicht. Während des Transportes werden immer drei benachbarte Spulenpaare gleichzeitig betrieben. Dadurch verfügt man über genügend Freiheitsgrade, um die Fallenform während der Bewegung konstant zu halten und somit ein unnötiges Heizen der Atome zu vermeiden [112, 152]. Die erste Hälfte der Transportstrecke führt durch das differentielle Pumpröhrchen in das Ultrahochvakuum mit einem Druck von kleiner als  $1 \cdot 10^{-11}$  mbar. Hier wird die Wolke abgebremst, um anschließend senkrecht dazu beschleunigt und in die Glaszelle transportiert zu werden. Dank dieser  $90^\circ$ -Kurve und dem Fehlen der sonst üblichen zweiten MOT im Experiment-Bereich sind die Atome entlang aller sechs Raumrichtungen optisch zugänglich. Zusammen mit den MOT-Spulen und den Spulen der Zielfalle besteht die Transportstrecke aus 13 Quadrupolspulenpaaren. Die Spulen sind in zwei wassergekühlte, monolytische Fassungen aus Messing eingeklebt<sup>34</sup>, die dicht oberhalb und unterhalb der Vakuumapparatur angebracht sind. Zur Vermeidung von Wirbelströmen sind die Spulenfassungen auf der gesamten Länge geschlitzt und zudem elektrisch isoliert gehalten. Für den Transport werden schnelle rauscharme Netzteile<sup>35</sup> im

<sup>34</sup>Die Spulen sind von der Firma *Oswald Elektromotoren GmbH* aus Kupferdraht mit rechteckigem Querschnitt gewickelt, mit Stycast 2850FT verklebt sowie mit Araldit F Gießharz vakuumimprägniert und in die beiden Fassungen eingeklebt.

<sup>35</sup>Die Netzteile SM15-100 der Firma *Delta Elektronika BV* liefern bis zu 100 A bei bis zu 15 V.

## 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

---

programmierbaren Strommodus eingesetzt. Der zeitliche Verlauf der Ströme ist das Ergebnis einer numerischen Optimierung. Die auf diese Weise erhaltenen Stromkurven werden den Netzteilen über Optokoppler von Analog-Computerkarten<sup>36</sup> vorgegeben. Jedes vierte der räumlich hintereinander angeordneten Spulenpaare wird dabei von demselben Netzteil betrieben. Sobald der Strom innerhalb eines Spulenpaares wieder auf null abgeklungen ist, wird das Netzteil über MOSFET-Schalter auf das zugehörige nächste Spulenpaar umgeschaltet. Dieses geschickte Zusammenspiel von Netzteilen und MOSFET-Schaltern ermöglicht es, alle 13 Spulenpaare mit nur vier unabhängigen Stromquellen anzusteuern. Somit lassen sich die Atome unter minimalem Heizen innerhalb von 2 s aus der MOT-Kammer an ihre Zielposition transportieren.

### 3.4.3 QUIC-Falle

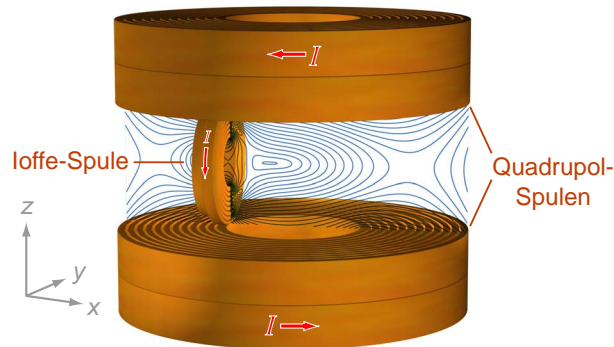
Am Ende des Transportes angelangt, befinden die Atome sich nach wie vor in einer magnetischen Quadrupolfalle. Da das Magnetfeld im Fallenzentrum verschwindet, können die Atome in dieser Falle nicht bis zur Quantenentartung gekühlt werden. Mit geringer werdender Temperatur halten die Atome sich bevorzugt in der Nähe des Fallenzentrums auf. An diesem Ort wird die Frequenz der Larmor-Präzession jedoch so gering, dass der atomare Spin nicht mehr der räumlichen Änderung des Magnetfeldes folgen kann. Dies führt zu nicht-adiabatischen Spin-Flips, bei denen die Atome in ungefangene Zustände ( $g_F m_F \leq 0$ ) übergehen können [153]. Die resultierenden Fallenverluste werden als Majorana-Verluste bezeichnet [154]. Eine Lösung des Problems besteht darin, das „Loch“ im Zentrum der Quadrupolfalle durch einen repulsiven Laserfokus – einen sogenannten „blue plug“ – zu verschließen [3]. Obwohl dieser Lösungsansatz heutzutage nur noch selten verfolgt wird, bietet er doch einige wesentliche Vorteile. Dieser Punkt soll in Abschnitt 3.8 näher erläutert werden.

Im aktuellen Aufbau wird das Problem durch den Einsatz der in Abbildung 3.16 dargestellten QUIC-Falle gelöst [155]. Dabei handelt es sich um eine Falle vom Ioffe-Pritchard-Typ [156, 157]. Wie in Abbildung 3.17 illustriert, zeichnen sich diese Fallen durch ein nicht-verschwindendes Magnetfeld im Fallenminimum aus. Dadurch kann selbst nahe am Fallenminimum der atomare Spin der Orientierung des Magnetfeldes adiabatisch folgen und die Majorana-Verluste sind stark unterdrückt. Die QUIC-Falle besteht aus zwei Quadrupolspulen und einer orthogonal dazu angebrachten kleinen Ioffe-Spule. Zu Anfang fließt nur durch die Quadrupolspulen ein Strom von  $I_Q = 34$  A, sodass die Atome in einem sphärischen Quadrupolfeld gefangen sind. Wird nun zusätzlich ein Strom  $I_{\text{Ioffe}}$  durch die Ioffe-Spule geschickt und dieser kontinuierlich erhöht, so geht die Quadrupolfalle in eine Ioffe-Pritchard-Falle über. Die Vereinigung dieser beiden Feldkonfigurationen spiegelt sich im Namen der Falle wieder (**q**uadrupol & **I**offe **c**onfiguration) [155].

---

<sup>36</sup>PCI-6733 und AT-AO-10, *National Instruments*.





**Abbildung 3.16:** QUIC-Falle: Beim Betrieb in der Ioffe-Konfiguration sind alle drei Spulen in Serie geschaltet und werden von demselben Strom  $I$  durchflossen. In blau sind die resultierenden Äquipotentiallinien der  $x$ - $z$ -Ebene dargestellt.

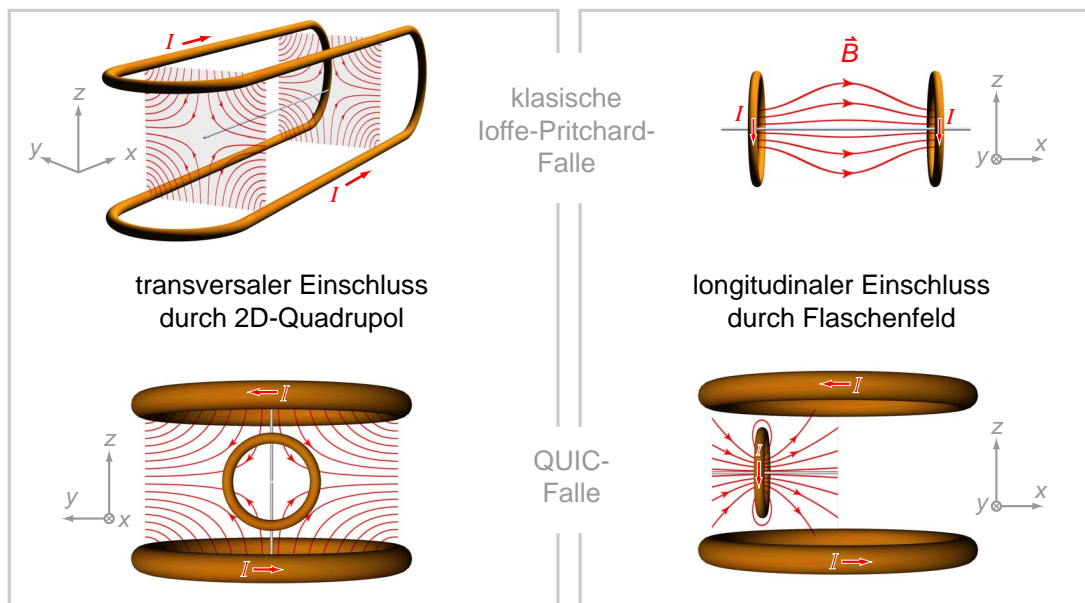
Der Umladeprozess ist in Abbildung 3.18 für reale Parameter dargestellt. Mit zunehmendem Strom  $I_{\text{Ioffe}}$  wandert das verschwindende Magnetfeldminimum des Quadrupolfeldes in Richtung Ioffe-Spule und eine weitere Null taucht in der Nähe der Ioffe-Spule auf. Diese Null ist auf einen zweiten sphärischen Quadrupol zurückzuführen, dessen Achse ( $x$ ) senkrecht zur Achse des ersten Quadrupols ( $z$ ) orientiert ist. Nähert der Strom  $I_{\text{Ioffe}}$  sich dem Endwert von 34 A, so verschmelzen die beiden Quadrupole unter Ausbildung der Ioffe-Falle.

Im Folgenden werden die verschiedenen Feldkomponenten der QUIC-Falle anhand von Abbildung 3.17 erläutert. Der Einschluss der Atome entlang der longitudinalen (axialen) Fallenachse ( $x$ ) wird durch die Feldkrümmung  $\partial^2 B / \partial x^2$  bestimmt, die von der Ioffe-Spule erzeugt wird. In der Nähe der Spule skaliert die Krümmung wie  $I_{\text{Ioffe}} / R^3$ , wobei  $R$  der Spulenradius ist. Durch die Wahl eines kleinen Radius  $R$  kann bereits bei geringen Strömen  $I_{\text{Ioffe}}$  eine hohe Feldkrümmung erzielt werden, da sich für kleine  $R$  und kleine  $I_{\text{Ioffe}}$  das Fallenminimum nahe an der Ioffe-Spule befindet. In der transversalen Richtung ( $y$ - $z$ -Ebene) werden die Atome durch ein zweidimensionales Quadrupolfeld eingeschlossen, welches aus dem ursprünglichen dreidimensionalen Quadrupolfeld durch Aufhebung der dritten Gradientenachse ( $x$ ) hervorgeht. Allgemein ist der Gradienten eines dreidimensionalen sphärischen Quadrupols entlang seiner Symmetrieachse ( $z$ ) doppelt so groß, wie entlang einer dazu orthogonalen Achse ( $x, y$ )<sup>37</sup>. Dennoch ist der aus dem 3D-Quadrupol hervorgehende 2D-Quadrupol entlang  $y$  genauso steil, wie entlang  $z$ . Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Ioffe-Spule den ursprünglichen Gradienten entlang  $y$  verstärkt und entlang  $z$  abschwächt.

Der Umladeprozess aus der Quadrupol- in die Ioffe-Falle am Ende des Transportes dauert genau eine Sekunde. Bei diesem Prozess wird die Stromquelle, welche die beiden Qua-

<sup>37</sup>Dieses Verhalten folgt aus  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  für den stromfreien Raum.

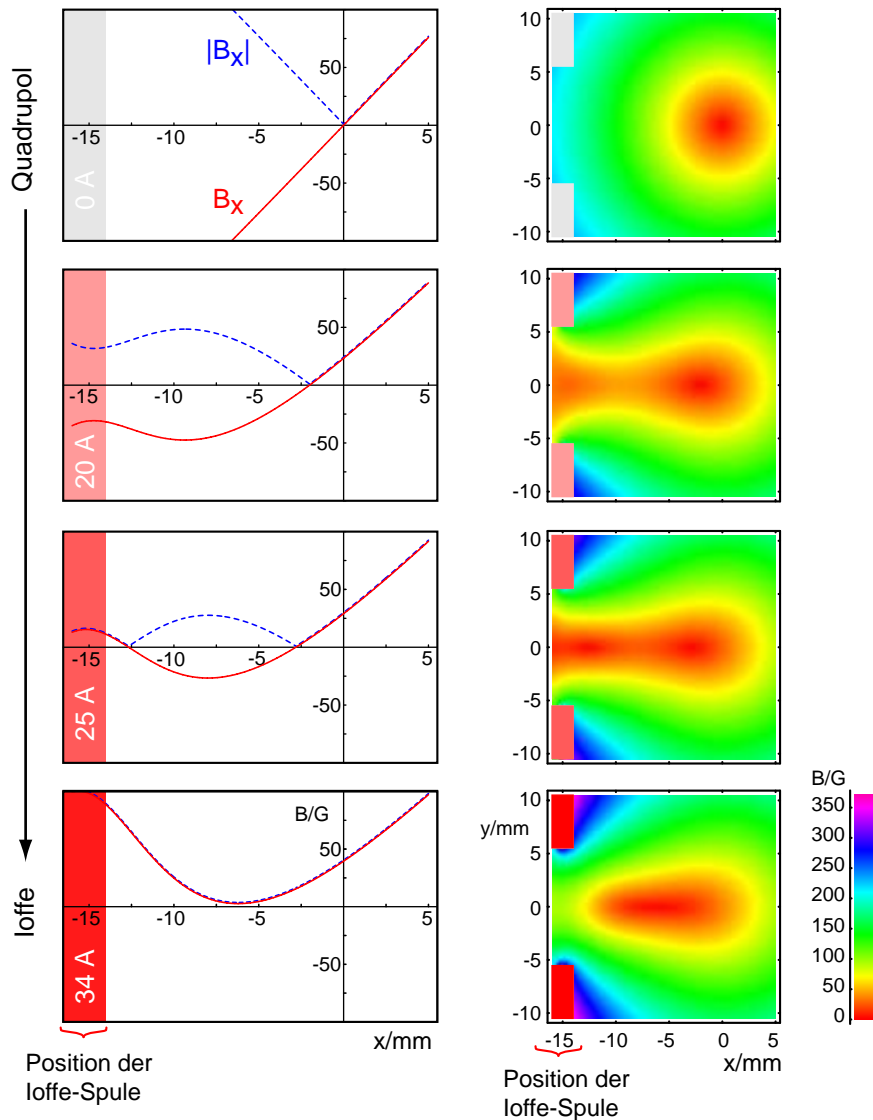
### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse



**Abbildung 3.17:** Vergleich der QUIC-Falle (untere Zeile) mit den Komponenten einer klassischen Ioffe-Pritchard-Falle (obere Zeile). Der transversale Einschluss (senkrecht zur  $x$ -Achse) wird durch ein zweidimensionales Quadrupolfeld erzielt. Ein Flaschenfeld sorgt für den harmonischen Einschluss in longitudinaler Richtung (entlang  $x$ ). Klassisch wird das Flaschenfeld von zwei gleichsinnig stromdurchflossenen, koaxialen Spulen erzeugt, deren Abstand größer ist als ihr Radius. Bei der QUIC-Falle geht das Flaschenfeld aus der Kombination der  $x$ -Komponente des dreidimensionalen Quadrupolfeldes und dem lokalen Feld der Ioffe-Spule hervor.

drupolspulen versorgt, kontinuierlich heruntergefahren und gleichzeitig wird eine andere rauscharme Stromquelle<sup>38</sup>, welche nun alle drei QUIC-Spulen in Serie versorgt, auf 34 A hoch gefahren. Das kontinuierliche Überblenden der Ströme und die Verwendung derselben Spulen ermöglichen einen effizienten Transfer der Atome zwischen den beiden Fallen. Aufgrund der kleinen Abstände zwischen Spulen und Atomen benötigt man geringe Ströme und dissipiert wenig Wärme. Zur Kühlung der Spulen reicht es daher aus, das Kühlwasser bei einem geringen Druck durch die Spulenfassungen zu führen. Somit lassen sich Turbulenzen in den Kühlleitungen und die damit verbundenen mechanischen Schwingungen vermeiden. Um eine hohe Stabilität des Fallenpotentials zu erzielen, müssen außerdem die Ströme möglichst stabil sein. Durch die Serienschaltung ihrer Spulen ist die QUIC-Falle jedoch weitaus weniger empfindlich gegenüber Stromschwankungen als klassische Ioffe-Pritchard-Fallen.

<sup>38</sup>6671A #J03, Agilent.



**Abbildung 3.18:** Berechnete Feldkonfigurationen während des Umladeprozesses innerhalb der QUIC-Falle: Links ist die Magnetfeldkomponente  $B_x(x, y = 0, z = 0)$  entlang der Symmetrieachse der Ioffe-Spule aufgetragen. Der entsprechende Magnetfeldbeitrag ist gestrichelt dargestellt. Aus Symmetriegründen stimmt dieser mit dem Vektorbeitrag  $|\mathbf{B}(x, y = 0, z = 0)|$  überein. Für dieselben Spulenströme ist rechts der Feldbetrag  $|\mathbf{B}(x, y, z = 0)|$  als Dichteprofil wiedergegeben. Zu Anfang fließt nur durch das Quadrupolspulenpaar ein Strom  $I_Q = 34 \text{ A}$ . Beim kontinuierlichen Erhöhen des Stromes durch die Ioffe-Spule  $I_{\text{Ioffe}}$  von 0 auf 34 A geht die Quadrupolfalle durch Verschmelzung mit einem weiteren Quadrupol in eine Ioffe-Pritchard-Falle über. Letztere bildet sich aus, sobald die Ioffe-Spule die in negative  $x$ -Richtung weisenden Feldbeiträge des dreidimensionalen sphärischen Quadrupols vollständig aufhebt. Beim Überblenden verschiebt sich das Fallenzentrum um 6,2 mm in Richtung Ioffe-Spule.

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

---

Bei einem Strom  $I_{\text{offe}} = I_Q = 34 \text{ A}$  erzeugt die verwendete QUIC-Falle ein in positive  $x$ -Richtung weisendes Offset-Feld von  $B_0 = 2,6 \text{ G}$ . Aus der longitudinalen Feldkrümmung  $\kappa = |\partial^2 B_x / \partial x^2|$  und dem transversalen Gradienten  $b = |\partial B_r / \partial r|$  im Fallenminimum lassen sich die entsprechenden Fallenfrequenzen berechnen [75]:

$$\omega_x = \sqrt{\frac{g_F m_F \mu_B}{m}} \cdot \sqrt{\kappa} \quad (3.4a)$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{g_F m_F \mu_B}{m}} \cdot \frac{b}{\sqrt{B_0}}. \quad (3.4b)$$

Für  $^{87}\text{Rb}$  in  $|F = 2, m_F = 2\rangle$  betragen diese  $\omega_x = 2\pi \cdot 22 \text{ Hz}$  und  $\omega_r = 2\pi \cdot 145 \text{ Hz}$ . Für  $^{40}\text{K}$  in  $|F = 9/2, m_F = 9/2\rangle$  sind die Frequenzen aufgrund der unterschiedlichen Masse um einen Faktor  $\sqrt{m_{\text{Rb}}/m_{\text{K}}} \approx 1,47$  größer.

Gemäß den Gleichungen 3.4 kann die transversale Fallenfrequenz unabhängig von der longitudinalen Fallenfrequenz über das Offset-Feld  $B_0$  verändert werden. Durch zusätzliche Offset-Spulen (siehe Abbildung auf Seite 58), welche ein homogenes Magnetfeld entlang der  $x$ -Achse erzeugen, lässt sich die transversale an die longitudinale Fallenfrequenz anpassen und somit die Asymmetrie der Falle reduzieren.

### 3.5 Evaporatives und sympathetisches Kühlen

Nach der Laserkühlung werden die Atome in eine konservative Falle transferiert und dort durch Evaporation bis zur Quantenentartung gekühlt. Bei diesem Verfahren, welches auch als Verdampfungskühlung bezeichnet wird, werden selektiv die energiereichsten Teilchen aus der Falle entfernt [158]. Die in der Falle verbleibenden, energieärmeren Teilchen rethermalisieren durch elastische Stöße und nehmen dabei eine neue, niedrigere Temperatur an. Durch sukzessives Entfernen der energiereichsten Teilchen kann das in der Falle verbleibende Gas bis auf wenige  $100 \text{ nK}$  abgekühlt werden. Bei diesem Verfahren gehen typischerweise zwei bis drei Größenordnungen der Atome verloren. Während die Bose-Einstein-Kondensation durch Verdampfungskühlung erreicht wird, gestaltet sich die Kühlung fermionischer Atome etwas schwieriger. Wie in Abschnitt 2.2 besprochen, sind bei niedrigen Temperaturen ( $T < 100 \mu\text{K}$ ) in einem Fermigas Stöße zwischen identischen Teilchen aufgrund des Pauli-Prinzips verboten. Hierdurch wird die für das evaporative Kühlen notwendige Thermalisierung unterdrückt. Experimentell wird dieses Problem auf zwei verschiedene Arten gelöst.

Der eine Ansatz geht von einem Fermigas aus, welches in einer Mischung von zwei unterschiedlichen Spinzuständen präpariert wird [11, 71]. Zwischen den Atomen in den verschiedenen Zeeman-Zuständen sind  $s$ -Wellen-Stöße erlaubt, da die Spinwellenfunktion eines solchen Paares antisymmetrisch unter Vertauschung sein kann<sup>39</sup>.

---

<sup>39</sup>Man beachte, dass im Kontext des Stoßprozesses, auch zwei identische Atome in verschiedenen Spinzu-

## 3.5 Evaporatives und sympathetisches Kühlen

Der andere Ansatz geht von einer Bose-Fermi-Mischung aus. Zwischen den verschiedenen Spezies sind  $s$ -Wellen-Stöße ebenfalls erlaubt. Dabei wird das Bosegas evaporativ gekühlt und bildet ein thermisches Bad, welches die Fermionen über elastische Stöße mitkühlt. Diese Methode wird als sympathetisches Kühlen [159] bezeichnet und erlaubt es, ein vollständig spinpolarisiertes Fermigas in die Quantenentartung zu überführen [68, 160]. Wie in Referenz [161] dient in unserem Experiment  $^{87}\text{Rb}$  als bosonisches Kühlmittel für das fermionische  $^{40}\text{K}$ . Das sympathetische Kühlen ist so effizient, dass mit dem entarteten Fermigas simultan ein Bose-Einstein-Kondensat erzeugt werden kann. In unserem Experiment findet das evaporative, beziehungsweise sympathetische Kühlen zuerst innerhalb der Magnetfalle statt, um dann, beim Erreichen einer Temperatur von etwa  $2\ \mu\text{K}$ , innerhalb einer optischen Dipolfalle fortgeführt zu werden. Die Gründe für dieses Vorgehen und die daraus resultierenden Vorteile werden in den folgenden Abschnitten erläutert.

### 3.5.1 Kühlen in der Magnetfalle

Das in der QUIC-Falle gefangene Rubidium wird durch Radiofrequenz-Evaporation [162] gekühlt. Dabei induziert eine eingestrahlte Radiowelle variabler Frequenz  $\omega_{\text{RF}}$  Zeeman-Übergänge in Atomen, welche die Resonanzbedingung  $\hbar\omega_{\text{RF}} = g_F\mu_B|B|$  erfüllen. Da das Fallenpotential durch  $m_F g_F \mu_B [B(r) - B(0)]$  gegeben ist, werden Atome mit einer Energie  $E \geq m_F \hbar(\omega_{\text{RF}} - \omega_0)$  in ungefangene Zustände ( $g_F m_F \leq 0$ ) überführt und aus der Magnetfalle entfernt<sup>40</sup>. Die Frequenz der eingestrahlten Radiowelle bestimmt also die effektive Falltiefe. Durch kontinuierliches Verringern der Frequenz und gleichzeitiges Thermalisieren werden die in der Falle verbleibenden Atome immer weiter abgekühlt. Vernachlässigt man den endlichen Fallboden, so ist die effektive Falltiefe für  $^{87}\text{Rb}$  in  $|F = 2, m_F = 2\rangle$  durch  $2\hbar\omega_{\text{RF}}$  und für  $^{40}\text{K}$  in  $|\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\rangle$  durch  $\frac{9}{2}\hbar\omega_{\text{RF}}$  gegeben. Damit ist die effektive Falle für Kalium mindestens um einen Faktor  $9/4$  tiefer als für Rubidium. Geht man von einer Mischung aus, die sich zu jeder Zeit im thermischen Gleichgewicht befindet, so wird durch die Radiofrequenz hauptsächlich Rubidium und kaum Kalium evaporiert<sup>41</sup>.

### Optimierung der RF-Evaporation

Im Experiment wird die Radiofrequenz von einem Synthesizer<sup>42</sup> erzeugt, dessen Frequenzverlauf über GPIB mit beliebigen Funktionen programmiert werden kann. Das Ausgangssignal des Synthesizers wird auf 1 Watt verstärkt<sup>43</sup> und von einer selbst gewickelten Helix-

---

ständen voneinander ununterscheidbar sind. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Atome aufgrund des spinabhängigen Wechselwirkungspotentials während des elastischen Stoßes ihren Spinzustand miteinander vertauschen können.

<sup>40</sup>Hierbei ist  $\omega_0 = g_F\mu_B B(0)$  die Resonanzfrequenz am Fallboden

<sup>41</sup>Für typische Evaporations- und Fallenparameter und unter der Annahme klassischer Boltzmann-Verteilungen erhält man eine Evaporationswahrscheinlichkeit, die für Kalium mehr als drei Größenordnungen kleiner ist als für Rubidium.

<sup>42</sup>8025, *Tabor Electronics Ltd.*

<sup>43</sup>ZHL-3A, *Mini-Circuits.*

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

---

antenne abgestrahlt. Während der Evaporation wird die Frequenz  $\omega_{\text{RF}}/2\pi$  innerhalb von 21 s kontinuierlich von 18,1 auf 2 MHz verringert. Der Verlauf der Frequenzmodulation ist aus mehreren Abschnitten zusammengesetzt, deren Längen und Steigungen bzw. Zeitkonstanten jeweils einzeln optimiert werden. Die Optimierung wird allein mit Rubidium durchgeführt.

Eine effiziente Evaporation zeichnet sich dadurch aus, dass die elastische Stoßrate  $\gamma_{\text{el}} = \langle n\sigma_{\text{Rb}v} \rangle$  groß gegenüber der Verlustrate in der Falle ist ( $\sigma_{\text{Rb}}$  bezeichnet den  $s$ -Wellenstreuquerschnitt zwischen den Rubidiumatomen<sup>44</sup>). Darüber hinaus muss die Stoßrate während des kontinuierlichen Evaporationsprozesses, trotz abnehmender Atomzahl  $N$ , zunehmen. Dies definiert die sogenannte Runaway-Evaporation [163]. Sie ist eine wichtige Voraussetzung zum Erreichen der Quantenentartung. In einer harmonischen Falle skalieren mittlere Dichte und mittlere Geschwindigkeit der Teilchen wie  $\langle n \rangle \propto NT^{-3/2}$  bzw.  $\langle v \rangle \propto \sqrt{T}$ . Demnach ist die Stoßrate proportional zu  $\gamma_{\text{el}} \propto N/T$ . Ziel der Verdampfungskühlung ist die Quantenentartung. Diese tritt ein, wenn die Phasenraumdichte  $n\lambda_{\text{dB}}^3$  Werte im Bereich von eins annimmt. Wegen  $n\lambda_{\text{dB}}^3 \propto N/T^3$  ist es aber möglich, dass während der Evaporation die Phasenraumdichte zunimmt und die Stoßrate dennoch abnimmt. Die Erhöhung der Phasenraumdichte ist somit noch kein ausreichendes Kriterium für die Aufrechterhaltung der Runaway-Evaporation.

Zur Charakterisierung werden die gekühlten Atomwolken aus der Magnetfalle entlassen und über Absorptionsabbildung aufgenommen (siehe Abschnitt 3.6.1). Für lange Expansionszeiten und gaußförmige Geschwindigkeitsverteilungen skaliert die zentrale optische Dichte der abgebildeten Atomwolken wie  $T/N$ . Demnach ist die zentrale optische Dichte direkt proportional zur Stoßrate und ein unmittelbares Maß für die Effizienz der Evaporation.

Bei der Optimierung der einzelnen Abschnitte der Frequenzrampe bietet es sich an, immer die gesamte Evaporationsrampe zu durchlaufen. Dadurch erhält man – unabhängig davon, ob der Anfang oder das Ende der Rampe optimiert wird – immer eine relativ kalte und kleine Atomwolke, die sich gut abbilden lässt. Die Variation eines Parameters der Rampe ergibt somit eine Serie von Absorptionenaufnahmen, an der sich der Trend der optischen Dichte und damit der Stoßrate leicht ablesen lässt.

#### Optimales sympathetisches Kühlen

Wird simultan mit dem Rubidium auch das Kalium in die Magnetfalle geladen, so erweist es sich als günstig, die Radiofrequenz bereits einzustrahlen, während die QUIC-Spulen von der Quadrupol- in die Ioffe-Konfiguration übergeblendet werden. In der zweiten Hälfte des Überblendevorganges wird die Anfangsfrequenz von 18,1 MHz konstant eingestrahlt.

---

<sup>44</sup>Im Allgemeinen ist der  $s$ -Wellenstreuquerschnitt abhängig von der Energie der Stoßpartner und somit temperaturabhängig. Bei  $^{87}\text{Rb}$ - $^{87}\text{Rb}$ -Stößen ist dieser Effekt gering und spielt keine bedeutende Rolle für die Thermalisierung. Wie wir sehen werden, verhält es jedoch bei  $^{87}\text{Rb}$ - $^{40}\text{K}$ -Stößen, also beim sympathetischen Kühlen anders.

### 3.5 Evaporatives und sympathetisches Kühlen

---

Dass sich dies als vorteilhaft erweist, liegt wahrscheinlich an der höheren Temperatur von Kalium, welches sich nicht so gut laserkühlen lässt wie Rubidium. Beim Überblenden in die QUIC-Falle können die energiereichsten Atome von innen an die Glaszelle stoßen und gehen dabei verloren. Diesem Prozess ist eine kontrollierte RF-Evaporation vorzuziehen.

Zwar ist in unserem Experiment die RF-Evaporation allein auf Rubidium optimiert, doch lässt sich mit demselben Frequenzverlauf auch das Kalium erfolgreich kühlen. Dies setzt jedoch voraus, dass die Wärmekapazität des Kaliums klein gegenüber der von Rubidium ist. Diese Bedingung ist gegen Ende der Evaporation nicht mehr erfüllt, da sich die Teilchenzahlen der beiden Spezies im Laufe der Evaporation angleichen.

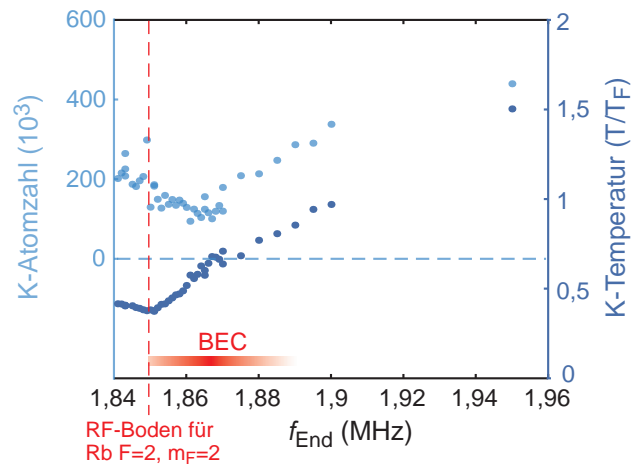
Eine weitere Voraussetzung für eine optimale Kühlung des Kaliums ist ein großer Streuquerschnitt  $\sigma_{\text{RbK}}$  zwischen den beiden Spezies. Experimente in einer magnetischen Mikrofalle haben gezeigt, dass bei sehr schneller Evaporation die Temperatur des Kaliums der von Rubidium hinterher hinkt [164]. Dieser beobachtete Effekt ist im oberen Temperaturbereich – also am Anfang der Evaporation – am stärksten. Die Ursache für die schlechte Thermalisierung zwischen den beiden Spezies wird auf den Ramsauer-Townsend-Effekt zurückgeführt. In Systemen mit negativer Streulänge sagt dieser Effekt ein Verschwinden der  $s$ -Wellenstreuung für eine spezifische Stoßenergie  $E$  voraus [165]. Für Rubidium-Kalium soll ein solches Minimum in  $\sigma_{\text{RbK}}$  bei einer Stoßenergie von etwa  $\sim k_{\text{B}} \cdot 630 \mu\text{K}$  auftreten [117]. Dass der Streuquerschnitt hier nicht vollständig verschwindet, ist den signifikanten Streubeiträgen von höheren Partialwellen ( $l > 0$ ) zu verdanken. So liegt die untere Schwelle für  $p$ -Wellenstreuung bei  $E = k_{\text{B}} \cdot 170 \mu\text{K}$ . Bei einer Stoßenergie von  $E = k_{\text{B}} \cdot 100 \mu\text{K}$  ist der Streuquerschnitt etwa ein Faktor zehn kleiner als für  $E \rightarrow 0$  und steigt mit abnehmender Stoßenergie kontinuierlich an.

Um eine optimale Kühlung des Kaliums zu erzielen, sollte diese Temperaturabhängigkeit des Streuquerschnittes  $\sigma_{\text{RbK}}$  berücksichtigt werden. Womöglich lässt sich auch in unserem Experiment durch eine langsamere Frequenzrampe am Anfang der Evaporation oder durch eine steilere Falle (Kompression) die Effizienz des sympathetischen Kühlens weiter steigern.

#### **Inelastische heteronukleare Stöße**

Wird die Mischung in der QUIC-Falle unterhalb von etwa  $2 \mu\text{K}$  gekühlt, so beobachten wir stark zunehmende Verluste in der Kaliumatomzahl. Das Ergebnis einer entsprechenden Messreihe ist in Abbildung 3.19 dargestellt. Dabei ist die Atomzahl und die Temperatur von Kalium in Abhängigkeit der Endfrequenz  $f_{\text{End}}$  der eingestrahlten Radiowelle aufgetragen. Unabhängig vom Messpunkt dauert die Evaporationsrampe jeweils 20 s, wobei die Frequenz während der letzten 500 ms bei  $f_{\text{End}}$  verweilt. Die Resonanzfrequenz für Rubidium in  $F = 2$  beträgt am Fallenboden 1,85 MHz. Die Kondensation setzt bei etwa 1,89 MHz mit einer Rubidiumatomzahl von  $1,2 \cdot 10^6$  und einer Temperatur  $T_c \approx 210 \text{ nK}$  ein. Die Kaliumverluste sind genau dann maximal, wenn die Bevölkerung des Kondensats und damit die Dichte ihr Maximum erreicht ( $\sim 1,87 \text{ MHz}$ ). Schneidet man mit dem

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse



**Abbildung 3.19:** Kaliumverluste beim Sympathetischen Kühlen in der QUIC-Falle. Aufgetragen ist die relative Temperatur (dunkel blau) und die Atomzahl von Kalium (hell blau) als Funktion der Endfrequenz  $f_{\text{End}}$  der Evaporationsrampe. Vor dem Abschalten verweilt die Radiofrequenz jeweils für 500 ms bei  $f_{\text{End}}$ . Sobald das Kondensat signifikant beschnitten wird, werden die Kaliumverluste wieder geringer.

„RF-Messer“ zügig durch den Fallenboden hindurch ( $f_{\text{End}} < 1,85$  MHz), so fallen die Kaliumverluste geringer aus. Dies ist darauf zurückzuführen, dass das Rubidiumkondensat weniger groß ist und nicht für 500 ms mit dem Kalium koexistiert. Bei solch schnellen Frequenzrampen wird das Kalium jedoch auch weniger kalt. Kühlt man innerhalb der QUIC-Falle das Kalium von  $2 \mu\text{K}$  auf die minimal erreichten  $0,4T_F = 170$  nK, so nimmt die zugehörige Atomzahl über diesen Bereich hinweg um einen Faktor fünf ab. Dass die Kaliumverluste nicht unmittelbar durch die Radiowelle induziert werden, lässt sich nachweisen, indem man am Ende der Evaporationsrampe die Frequenz wieder kontinuierlich erhöht. In der Tat geht bei diesem Prozess kein weiteres Kalium verloren.

Die beobachteten Kaliumverluste lassen sich auf inelastische heteronukleare Stöße zurückführen. Dies spiegelt sich in der Abhängigkeit der Verluste von der Rubidiumdichte wider. Zwischen zwei Atomen in vollständig gestreckten Spinzuständen ist ein inelastischer Stoß durch Spinaustausch (spin-exchange) nicht erlaubt, da die Projektion des Gesamtspins der beiden Teilchen erhalten bleiben muss. Doch die RF-Evaporation ruft eine geringfügige Bevölkerung des magnetisch fangbaren  $|F = 2, m_F = 1\rangle$ -Zustandes hervor. Ausgehend von diesem Zustand kann Rubidium bei einem Stoß mit Kalium seinen Hyperfeinzustand nach  $F = 1$  ändern (hyperfine-changing collision, siehe Abschnitt 3.3.5) und dabei genügend kinetische Energie freisetzen, um beide Teilchen aus der Falle zu werfen. Wegen der unterschiedlichen Teilchenzahlen der beiden Spezies machen sich dabei aber hauptsächlich die Kaliumverluste bemerkbar.

Ein Ansatz, dieses Problem zu umgehen, besteht darin, die Evaporation des Rubidiums auf einem Mikrowellenübergang zu treiben. Dabei wird das Rubidium von  $|2, 2\rangle$  direkt in



## 3.5 Evaporatives und sympathetisches Kühlen

---

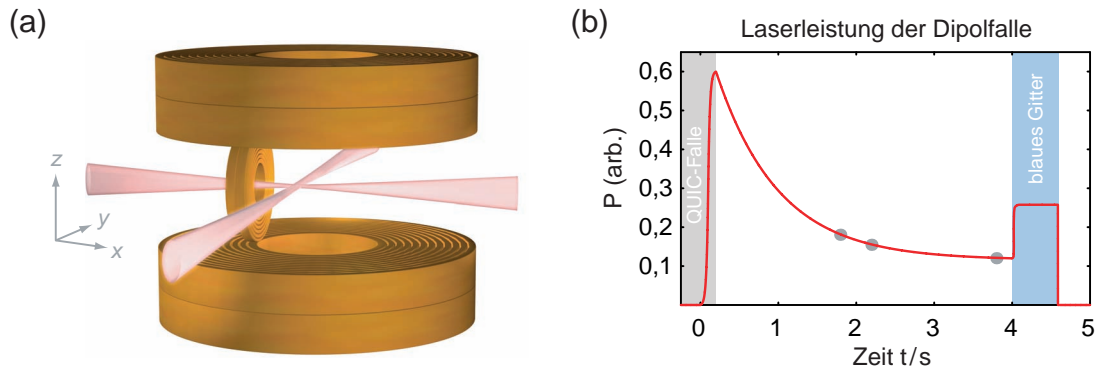
den ungefangenen Zustand  $|1, 1\rangle$  transferiert. Die Bevölkerung eines intermediären, magnetisch gefangenen Zustandes, welcher inelastische Verluste induziert, ist somit ausgeschlossen [78]. Ein weiterer Vorteil ist die große Diskrepanz in der Hyperfeinstrukturaufspaltung von Rubidium und Kalium. Diese garantiert, dass die Mikrowelle ausschließlich Rubidium evaporiert. Laut Referenz [166] können die inelastischen Verluste durch diese Maßnahme erfolgreich reduziert werden. Nachteil des Verfahrens, ist die lange Einstrahldauer und die hohe benötigte Mikrowellenleistung (und die eventuellen Auswirkungen auf die Umgebung). Alternativ kann die durch RF-Evaporation oder auch unzureichendes optisches Pumpen hervorgerufene Population im Zustand  $|1, 1\rangle$  mittels einer Serie von Mikrowellen-Sweeps entfernt werden [166].

### 3.5.2 Kühlen in der gekreuzten Dipolfalle

Im aktuellen experimentellen Zyklus werden die Atome nicht in der Magnetfalle bis zur Quantenentartung gekühlt, sondern erst nach dem Transfer in eine optische Dipolfalle. Die Motivation für dieses Vorgehen liegt primär in der hohen experimentellen Flexibilität, die die Dipolfalle gewährt. So lassen sich in ihr die Atome in beliebigen Spinzuständen fangen und mittels magnetischer Feshbach-Resonanzen die interatomaren Wechselwirkungen durchstimmen. Darüber hinaus erzeugt die Dipolfalle den externen Einschluss für ein blauverstimmttes optisches Gitter.

Vor dem Erreichen hoher Dichten und damit vor dem Einsetzen der inelastischen Kaliumverluste werden die Atome aus der QUIC-Falle in die optische Dipolfalle umgeladen. Die fernverstimmtte Dipolfalle wird durch zwei Laserstrahlen bei einer Wellenlänge von 1030 nm gebildet, die sich in der horizontalen Ebene senkrecht kreuzen. Die Strahlen weisen ein elliptisches Strahlprofil auf, wodurch ein starker Einschluss entlang der Schwerkraft und somit ein guter räumlicher Überlapp zwischen den beiden unterschiedlich schweren Spezies sichergestellt wird (Für eine detaillierte Beschreibung der optischen Falle sei auf Kapitel 4 verwiesen). Beim Erreichen einer Temperatur von  $2 \mu\text{K}$  wird die RF-Evaporation in der QUIC-Falle gestoppt. Die beiden Spezies werden dann durch s-förmiges Hochfahren der Laserleistung innerhalb von 200 ms in die gekreuzte Dipolfalle transferiert. Hiernach wird die Magnetfalle abrupt abgeschaltet und gleichzeitig, zum Aufrechterhalten der Spinpolarisation, ein homogenes externes Magnetfeld von 13,6 G in  $x$ -Richtung angelegt. Anschließend nutzt man die Eigenschaft, dass sich in der Dipolfalle die Atome in beliebigen Spinzuständen fangen lassen. Mittels eines adiabatischen Mikrowellen-Sweeps (ARP, siehe Abschnitt 3.7) werden die Rubidiumatome in 10 ms von  $|F = 2, m_F = 2\rangle$  in den absoluten Grundzustand  $|1, 1\rangle$  überführt. Im Anschluss wird für  $50 \mu\text{s}$  ein schwacher Puls mit Abbildungslicht eingestrahlt, der den kleinen Prozentsatz ( $< 5\%$ ) der im  $|F = 2\rangle$ -Zustand verbliebenen Rubidiumatome durch resonante Streuung aus der Falle entfernt. Damit sind fortan Verluste durch inelastische Stöße mit  $|2, 1\rangle$ -Rubidiumatomen ausgeschlossen. Auch das Kalium wird in seinen absoluten Grundzustand transferiert. Dies geschieht innerhalb von 30 ms mittels eines adiabati-

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse



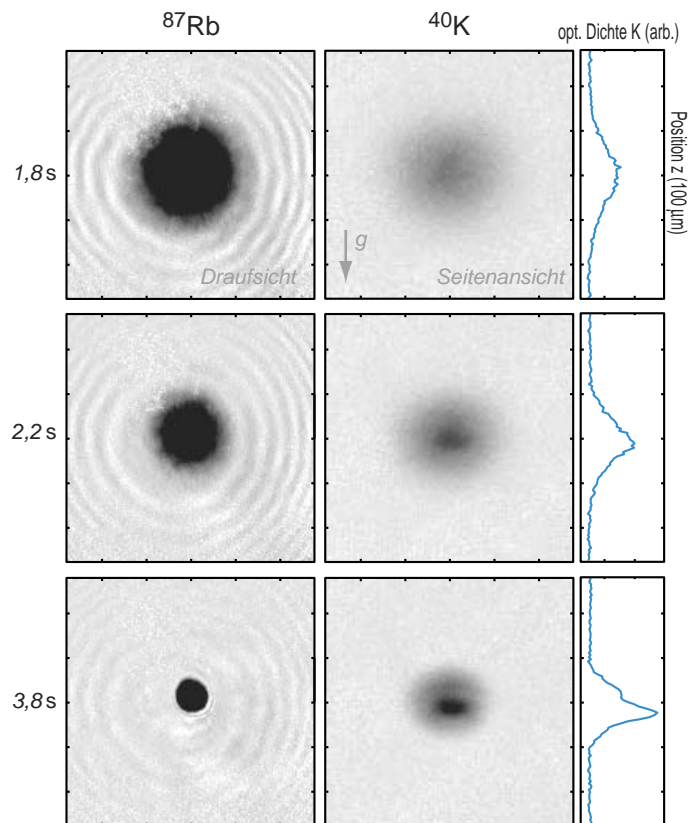
**Abbildung 3.20:** (a) Gekreuzte Dipolfalle: Das Fallenzentrum ist durch den Kreuzungspunkt der beiden Laserstrahlen definiert und mit dem Zentrum der QUIC-Falle überlagert. Die Strahlen verlaufen senkrecht zur Schwerkraft. Ein elliptisches Strahlprofil sorgt für einen starken vertikalen ( $z$ ) Einschluss der Atome. (b) Zeitlicher Verlauf der Laserleistung bei der erzwungenen Evaporation in der Dipolfalle. Die QUIC-Falle wird abgeschaltet, sobald die Dipolfalle ihre maximale Tiefe erreicht hat (200 ms). Je nach Verlauf des Experimentes wird die Dipolfalle am Ende der Evaporation (4 s) abgeschaltet oder wieder hochgerampft, um den externen Einschluss für das blauverstimmte Gitter zu liefern. Die grauen Punkte geben die Fallentiefen zu den drei in Abbildung 3.21 dargestellten Kühl-schritten an.

schen RF-Sweeps, welcher das Kalium, ausgehend vom  $|9/2, 9/2\rangle$ -Zustand, durch sämtliche Zeeman-Niveaus hindurch in den absoluten Grundzustand  $|9/2, -9/2\rangle$  transferiert (siehe Abschnitt 3.7). In ihren absoluten Grundzuständen verfügen die beiden Spezies über keinerlei interne Energie und sind somit stabil gegenüber inelastischen Zwei-Körper-Verlustprozessen [78].

Mit dieser Mischung lässt sich das evaporative Kühlen auf rein optischem Wege fortsetzen. Durch sukzessives Verringern der Falltiefe während  $\sim 4$  s werden beide Spezies zur Quantenentartung gebracht. In der hinreichend flachen Dipolfalle ist aufgrund der Schwerkraft und der größeren Masse des Rubidiums das Potential für Rubidium weniger tief als für Kalium (siehe Abschnitt 4.1.3), sodass hauptsächlich Rubidium evaporiert wird. Bei diesem letzten Kühl-schritt betragen die Kaliumverluste etwa 30 % und sind wahrscheinlich auf die Evaporation desselbigen zurückzuführen. Letztlich erhält man auf diese Weise simultan ein Bose-Einstein-Kondensat aus  $2 \cdot 10^5$  Rubidiumatomen und ein entartetes Fermigas aus  $2,2 \cdot 10^5$  Kaliumatomen mit einer Temperatur von  $T/T_F \approx 0,2$ .

Liegen genügend Bosonen als Kühlmittel vor, wird die Temperatur der Fermionen, weitgehend unabhängig von deren Teilchenzahl, durch die Temperatur der Bosonen bestimmt. Da Letztere durch die Tiefe der Dipolfalle am Ende der Rampe vorgegeben wird, lässt sich das Fermigas mit hoher Reproduzierbarkeit auf eine gewünschte Temperatur  $T$  kühlen.

### 3.5 Evaporatives und sympathetisches Kühlen



**Abbildung 3.21:** Sympathetisches Kühlen: Die Absorptionenaufnahmen zeigen die beiden Spezies zu verschiedenen Zeitpunkten der Evaporation (siehe Markierungen in Abbildung 3.20b). Die beiden Spezies werden quasi simultan entlang zweier orthogonaler Achsen nach 10 ms freier Expansion aufgenommen. Rubidium wird parallel zur Schwerkraft (entlang  $z$ ) und Kalium senkrecht dazu abgebildet. Wegen der hohen Dichten sättigt die Abbildung des Rubidiums frühzeitig. Doch aufgrund der attraktiven Interspezieswechselwirkung spiegelt sich das Einsetzen der Kondensation (bei  $\sim 2$  s) in Form einer bimodalen Struktur in der Kaliumverteilung wider. Rechts sind vertikale Schnitte durch die Zentren der Kaliumverteilungen dargestellt.

Im Gegensatz zur RF-Evaporation in der Magnetfalle werden durch die erzwungene Evaporation in der Dipolfalle keine Spinzustände bevölkert, die zu inelastischen Verlusten führen. Doch gibt es weitere Gründe, die dafür sprechen, den letzten Kühlschritt innerhalb der Dipolfalle durchzuführen: Beim rechtzeitigen Umladen fallen die damit einhergehenden Heizeffekte weniger ins Gewicht, da noch genügend Atome zur Verfügung stehen, um das Gas weiter zu kühlen. Die hohen Fallenfrequenzen und der steile vertikale Einschluss in der gekreuzten Dipolfalle sorgen für hohe Stoßraten und einen guten Überlapp zwischen den beiden unterschiedlich schweren Spezies. Dies garantiert beim Absenken

## 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

---

der Fallentiefe bis zuletzt eine gute Thermalisierung und somit ein effizientes evaporatives bzw. sympathetisches Kühlen.

Nachteile der Dipolfalle sind das vergleichsweise geringe Fallenvolumen und die Tatsache, dass die Dipolfalle oberhalb einer gewissen Fallentiefe bzw. Temperatur für Kalium weniger tief ist als für Rubidium (siehe Abschnitt 4.1.3). Daher ist es in der Tat von Vorteil die Atome in einer Magnetfalle vorzukühlen.

### 3.5.3 Grenzen beim sympathetischen Kühlen der Fermionen

In unserem Experiment kann das Kalium durch sympathetisches Kühlen mit Rubidium bisher auf Temperaturen von  $T/T_F = 0,23(3)$  gebracht werden. Es stellt sich die Frage, durch welche Faktoren diese Temperatur bestimmt wird und wie sich das Fermigas zukünftig noch tiefer in das Regime der Quantenentartung kühlen lässt.

#### Wärmekapazität

Ein einfaches thermodynamisches Argument besagt, dass die Effizienz des Kühlprozesses stark abnimmt, sobald die Wärmekapazität des Kühlmittels kleiner wird als die des Fermigases  $C_{\text{Rb}} < C_{\text{K}}$  [167–169]. Am Ende der Verdampfungskühlung hat sich die Zahl der Bosonen etwa auf die der Fermionen reduziert. Gleichzeitig geht die spezifische Wärmekapazität der Bosonen unterhalb der kritischen Temperatur  $T_c$  mit  $T^3$  gegen null, während die spezifische Wärmekapazität der Fermionen für  $T \ll T_F$  nur linear gegen null geht (siehe Kapitel 2). Abbildung 3.22 zeigt eine direkte Gegenüberstellung der beiden Größen für realistische experimentelle Parameter. Die beiden Verläufe schneiden sich bei  $T/T_F \approx 0,2$ . Die genaue Übereinstimmung mit dem von uns gemessenen  $T/T_F$  ist sicherlich Zufall, zumal auch für  $C_{\text{Rb}} < C_{\text{K}}$  noch ein kleiner Kühleffekt zu erwarten ist. Doch scheint diese Argumentation eine brauchbare Abschätzung der erreichbaren Temperaturen zu liefern.

Da die Wärmekapazität des Bosegases knapp unterhalb der kritischen Temperatur  $T_c$  am größten ist, sollte idealerweise  $T_c/T_F \ll 1$  gelten. In diesem Fall ist das sympathetische Kühlen auch dann noch effizient, wenn sich das Fermigas bereits tief im entarteten Regime befindet. Aus den Gleichungen für die Fermi-Temperatur 2.38 und die kritische Temperatur 2.71 folgt

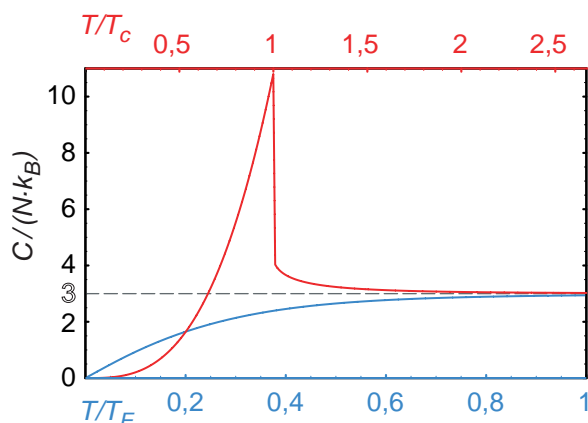
$$\frac{T_c}{T_F} \approx 0,52 \frac{\bar{\omega}_{\text{Rb}}}{\bar{\omega}_{\text{K}}} \left( \frac{N_{\text{Rb}}}{N_{\text{K}}} \right)^{1/3}. \quad (3.5)$$

Hierbei bezeichnen  $\bar{\omega}_{\text{Rb}}$  und  $\bar{\omega}_{\text{K}}$  die geometrischen Mittel der Fallenfrequenzen für Rubidium bzw. Kalium. Um das Verhältnis  $T_c/T_F$  möglichst klein zu halten, müssen die Fallenfrequenzen von Rubidium klein gegenüber denen von Kalium sein. Dies lässt sich in einer sogenannten bichromatischen Dipolfalle verwirklichen [167, 168]. Neben der üblichen fernverstimmten Dipolfalle setzt man dabei Licht einer weiteren Wellenlänge ein, das bezüglich Kalium rot- und Rubidium blau-verstimm ist<sup>45</sup>. Wie gewünscht, wird hierdurch

---

<sup>45</sup>Für die überlagerte Falle würde sich eine Wellenlänge von 774,7 nm anbieten, da dann die Streuraten

### 3.5 Evaporatives und sympathetisches Kühlen



**Abbildung 3.22:** Wärmekapazität  $C/(Nk_B)$  der Bosonen (rot) und der Fermionen (blau) in einer harmonischen Falle als Funktion der Temperatur (in Einheiten von  $T_c$  bzw.  $T_F$ ). Jeweils für sich haben die beiden Darstellungen universelle Gültigkeit. Die Gegenüberstellung gilt für  $T_c/T_F = 0.375$ . Dies entspricht gleich großen Teilchenzahlen  $N_{\text{Rb}} = N_{\text{K}}$  und einem Frequenzverhältnis  $\omega_{\text{K}}/\omega_{\text{Rb}} = 1,38$ , wie es in der eingesetzten 1030 nm-Dipolfalle vorliegt. Die beiden Wärmekapazitäten stimmen bei  $T/T_F \approx 0,2$  miteinander überein und gehen bei hohen Temperaturen gegen den klassischen Wert  $C = 3Nk_B$ .

die Falle für Rubidium flacher und für Kalium tiefer. Positiver Nebeneffekt ist die verringerte Wahrscheinlichkeit, beim sympathetischen Kühlen das Kalium mit aus der Dipolfalle zu evaporieren. Unser experimenteller Aufbau müsste für die Implementierung einer bichromatischen Falle nur minimal modifiziert werden, da bereits eine fernverstimmte Dipolfalle zusammen mit einem blauverstimmten Gitter eingesetzt wird.

Für ein abgeschlossenes System besagt die thermodynamische Berechnung, dass ein reines Kondensat aufgrund seiner verschwindenden Wärmekapazität als Kühlmittel vollkommen ungeeignet ist. Eine solche Argumentation ist jedoch etwas zu stark vereinfacht, um direkt auf den evaporativen Kühlprozess übertragen zu werden. Denn im Experiment liegt ein nicht-abgeschlossenes System vor, bei dem ein Aufheizen des Kühlmittels zu einem Teilchenverlust führt. Betrachtet man ein kleines heißes Ensemble aus  $^{40}\text{K}$ -Atomen in einem großen und reinem  $^{87}\text{Rb}$ -Kondensat ( $T = 0$ ), so wird mit jedem Interspeziesstoß Energie aus dem Kaliumensemble entzogen und dabei ein energiereiches Rubidiumatom erzeugt. Bleibt Letzteres in der Falle gespeichert, so führt dies in der Tat zu einem drastischen Aufheizen des Rubidiumreservoirs. Wird aber das thermische Rubidiumatom direkt aus der Falle entfernt, so kann der sympathetische Kühlprozess mit dem Rubidiumbad bei

$\Gamma_{\text{sc}}/2\pi$  für beide Elemente gleich groß sind. Geht man von derselben Strahlkonfiguration wie bei unserer Dipolfalle aus (s. Abb. 4.2), so gilt für die zusätzlichen Streuraten im Fallenzentrum  $34 \text{ mHz} \frac{P}{\text{mW}}$ . Die hervorgerufene Änderung im Potential beträgt für Rubidium  $\Delta V_{\text{Rb}}/k_B = +0,78 \mu\text{K} \frac{P}{\text{mW}}$  und für Kalium  $\Delta V_{\text{K}}/k_B = -0,82 \mu\text{K} \frac{P}{\text{mW}}$ . Dabei ist  $P$  die Leistung in mW, welche in jedem der beiden Strahlen ist.

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

---

$T = 0$  fortgesetzt werden. Diese Argumentation wird durch eine theoretische Publikation unterstützt [170]. In dieser wird anhand eines idealisierten Systems gezeigt, dass die Temperaturabnahme pro evaporierten Teilchen umso größer ist, je größer der Kondensatanteil im Kühlmittel ist. Trotz dieser beiden widersprüchlichen Argumentationen, scheint es letztlich eine sinnvolle Arbeitshypothese zu sein, dass für ein effizientes sympathetisches Kühlen die Rubidiumatomzahl mindestens so groß sein muss wie die des Kaliums.

#### Pauli-Blockierung

Aufgrund des Pauli-Prinzips nimmt mit abnehmender Temperatur des Fermigas auch die elastische Stoßrate und damit die Effizienz des sympathetischen Kühlprozesses ab. Denn ein elastischer Stoß zwischen einem Boson und einem Fermion ist nur dann erlaubt, wenn der Endzustand, in den das Fermion gestreut wird, nicht bereits von einem anderen Fermion besetzt ist. Jedoch steigt mit zunehmender Entartung des Fermigas die Besetzung der Endzustände an. Gegenüber der Stoßrate  $\gamma_{\text{el}}^{(\text{kl})}$  in einem klassischen Gas verhält sich die Stoßrate  $\gamma_{\text{el}}$  in einem Fermigas für  $T < T_{\text{F}}$  wie  $\gamma_{\text{el}}/\gamma_{\text{el}}^{(\text{kl})} \propto T^3$  [171]. So ist die elastische Stoßrate bei  $T/T_{\text{F}} = 0,2$  bereits um eine Größenordnung unterdrückt. Durch die Pauli-Blockierung wird der Prozess der Thermalisierung sukzessive verlangsamt, bis schließlich Zeitskalen erreicht werden, auf denen Heizprozesse dominieren. Die starke Temperaturabhängigkeit der Stoßrate könnte im Prinzip auch dazu benutzt werden, den Grad der Entartung eines Fermigas über die Relaxation der Bewegung eines Testteilchens zu ermitteln [171]. Im Gegensatz zum räumlichen Dichteprofil der Fermi-Wolke wäre die Relaxationsrate auch bei sehr niedrigen Temperaturen noch eine präzise und zuverlässige Messgröße für die Bestimmung von  $T/T_{\text{F}}$ .

#### Suprafluidität des Kondensats

Auch die Suprafluidität des Kondensats begrenzt die minimal erreichbaren Temperaturen [172]. So durchqueren Fremdatome, die eine Geschwindigkeit kleiner als eine kritische Geschwindigkeit  $v_{\text{s}}$  aufweisen, das Kondensat ohne inkohärent mit diesem zu streuen. Dieser Effekt konnte bereits experimentell beobachtet werden [173]. Die kritische Geschwindigkeit  $v_{\text{s}}$  entspricht der Bogoliubov-Schallgeschwindigkeit im Kondensat und lässt sich gemäß  $v_{\text{s}} = \sqrt{\mu/m_{\text{Rb}}}$  aus dessen chemischem Potential  $\mu$  errechnen. Im Thomas-Fermi-Limit ist das chemische Potential durch Gleichung 2.88 gegeben. Für typische Parameter in unserem Experiment folgt  $v_{\text{s}} = 2 \text{ mm/s}$ . Mit einer groben Abschätzung, welche von einer Boltzmann-Verteilung ausgeht, ergibt sich hieraus eine minimale Temperatur für die Fermionen von 7 nK bzw.  $T/T_{\text{F}} = 0,02$ . Somit spielt die Suprafluidität noch keine limitierende Rolle und die Fermionen werden bislang sowohl von den thermischen als auch von den kondensierten Bosonen gekühlt.

## 3.5 Evaporatives und sympathetisches Kühlen

### Heizen durch Löcher im Fermi-See

Neben der Effizienz des sympathetischen Kühlens bestimmt auch die Stärke der Heizprozesse die erzielbaren Temperaturen. Heizprozesse können sowohl technischer Natur sein, wie zum Beispiel Schwankungen des Fallenpotentials, als auch physikalische Ursachen haben, wie zum Beispiel nicht-resonante Lichtstreuung in der Dipolfalle oder spinändernde Stöße. Ein besonderer Effekt, der nur in entarteten Fermigasen auftritt, ist das Heizen durch fermionische Löcher (fermionic hole heating) [174]. Demnach führen Teilchenverluste in einem entarteten Fermigas, beispielsweise durch Stöße mit dem Hintergrundgas, nicht nur zu einer Abnahme in der Teilchenzahl, sondern auch zu einem starken Aufheizen der verbleibenden Atome. Betrachtet man ein gefangenes Fermigas bei  $T = 0$ , so entstehen durch Teilchenverlust Löcher im Fermi-See und somit Anregungen. Anschließend relaxiert das System in einen neuen Gleichgewichtszustand, der nun bei einer höheren Temperatur liegt. Bei der Relaxation werden die Löcher durch Fermionen gefüllt, deren Energie ursprünglich höher lag. Ihre überschüssige Energie geben sie an andere Fermionen ab, die dadurch über die Fermi-Kante gehoben werden. Bei solchen Fermion-Loch-Streuprozessen, die mit dem Auger-Effekt verwandt sind, können Teilchen mit Energien von bis zu  $2\epsilon_F$  erzeugt werden. Ein Gas mit einer Anfangstemperatur  $T_0 \ll T_F$  wird infolge dieser hohen Energien stark aufgeheizt. Wird das Gas nicht mehr gekühlt, so verdoppelt sich dessen Temperatur innerhalb einer Dauer  $\tau \approx 20(T_0/T_F)^2 \tau_{\text{loss}}$ , wobei  $\tau_{\text{loss}} = 1/\gamma_{\text{loss}}$  die durch eine konstante Verlustrate  $\gamma_{\text{loss}}$  bestimmte Lebensdauer ist [174]. Unabhängig von der Anfangstemperatur  $T_0 \ll T_F$  erhöht sich innerhalb der Hälfte der Lebensdauer  $\tau_{\text{loss}}$  die Temperatur auf  $T \geq T_F/4$ . Um weitergehende Experimente bei niedrigen Temperaturen durchführen zu können, bietet es sich an, die durch die Löcher freigesetzte Energie kontinuierlich über eine bosonische Spezies abzuführen. In Referenz [175] wird das sympathetisch gekühlte Fermigas unter Berücksichtigung des "hole heating"-Effektes mittels einer Quanten-Boltzmann-Gleichung simuliert. Für die minimal erreichbare Temperatur finden die Autoren folgenden Näherungsausdruck:  $T/T_F \approx 0,65(\gamma_{\text{loss}}/\gamma_{\text{coll}})^{0,44}$ . Für typische Verhältnisse aus Boson-Fermion-Stoßrate  $\gamma_{\text{coll}}$  (im klassischem Regime) und Verlustrate  $\gamma_{\text{loss}}$  ergibt sich  $T/T_F \leq 0,03$ .

### Ausblick

Bisher ist noch nicht untersucht worden, durch welche Faktoren genau der Kühlprozess in unserem Experiment limitiert wird. Es wäre aber sicherlich von Vorteil, wenn man bereits vor dem evaporativen Kühlen niedrigere Temperaturen und höhere Dichten erlangen könnte. Interessante Ansätze hierzu bieten das Raman-Seitenband-Kühlen innerhalb eines optischen Gitters [176] oder das Sub-Doppler-Laserkühlen in einer optischen Falle [177, 178]. Dabei reicht es aus, nur eine der beiden Spezies mit Laserlicht zu kühlen<sup>46</sup>, da aufgrund des externen Einschlusses die zweite Spezies sympathetisch gekühlt wird. Um

<sup>46</sup>Wegen der effizienteren Sub-Doppler-Kühlmechanismen und der höheren Masse würde sich hierfür die Laserkühlung des Rubidiums anbieten.

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

---

lichtinduzierte Verluste zu verringern, ist es ratsam, die Laserkühlung gepulst ( $\sim 10$  ms) durchzuführen [147]. Die Thermalisierung zwischen den Spezies kann dann auf langsamer Zeitskala auch zwischen den Pulsen stattfinden. Bessere Ausgangsbedingungen vor dem evaporativen Kühlen könnten zu größeren Kondensaten und kälteren Fermigasen führen. Es existieren auch Vorschläge, Fermigase auf rein optischem Weg bis zur Entartung zu kühlen [179].

Selbst wenn das Rubidium am Ende des sympathetischen Kühlens vollständig verbraucht ist, kann das Kalium noch weiter gekühlt werden. Üblicherweise wird dazu ein homogenes Magnetfeld von etwa 240 G angelegt. Bei diesem Feld ist die Entartung der Zeeman-Niveaus vollständig aufgehoben. Das in der Dipolfalle gefangene Kalium wird dann durch einen festfrequenten RF-Puls zu 50 % ( $\pi/2$ -Puls) aus dem  $|9/2, -9/2\rangle$ -Zustand in den  $|9/2, -7/2\rangle$ -Zustand transferiert. Durch inkohärente Stöße bildet sich hieraus eine ausgewogene Spinmischung. Zwischen den Fermionen in den beiden verschiedenen Spinzuständen sind  $s$ -Wellenstöße erlaubt. Die zugehörige Streulänge ist bei dem angelegten Magnetfeld ausreichend groß, sodass die Mischung durch Absenken der Laserleistung effizient weiter gekühlt werden kann [180]. Dieser Weg ist im Rahmen dieser Arbeit noch nicht besprochen worden. Doch üblicherweise kann ein solches zweikomponentiges Kaliumgas bis auf  $T/T_F \approx 0,1$  abgekühlt werden. Die Mischung der beiden Spinzustände sollte während des Kühlens ausgewogen bleiben, da ansonsten der Effekt der Pauli-Blockierung das Thermalisieren stark behindert [181]. Bei der Evaporation durch Verringern der optischen Fallentiefe werden beide Spinzustände in der Regel mit gleicher Wahrscheinlichkeit aus der Falle geworfen, sodass diese Bedingung hier automatisch erfüllt ist. Wegen der zwei Spinausrichtungen kann jedes Fallenniveau doppelt besetzt werden. Erzeugt man die Spinmischung ausgehend von einem stark entarteten einkomponentigen Fermigas, so wird das Gas bei der Besetzung der neu verfügbaren Zustände erheblich aufgeheizt. Idealerweise sollte die Mischung deshalb bei  $T > T_F$  erzeugt werden, zumal dann auch noch genügend Bosonen zum Vorkühlen zur Verfügung stehen.

Wegen der  $s$ -Wellenwechselwirkung und der bei 202 G zentrierten Feshbach-Resonanz [180] ist diese Spinmischung experimentell von besonderer Bedeutung. Mit einer solchen entarteten Mischung konnte zum Beispiel erstmals ein molekulares Kondensat hergestellt [12] und resonante fermionische Suprafluidität [15] beobachtet werden. Tief in die Entartung gekühlte zweikomponentige Fermigase in optischen Gittern sind zudem Ausgangspunkt für die Erzeugung eines fermionischen Mott-Isolators [26, 27] und die Beobachtung antiferromagnetischer Ordnung.

#### 3.6 Abbildungssystem und Auswertung

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Abbildung und Analyse der Atomwolken nach dem Entlassen aus der harmonischen Falle oder dem optischen Gitter. Es wird auf die Tempera-



## 3.6 Abbildungssystem und Auswertung

tur- und Atomzahlbestimmung eingegangen und schließlich werden besondere Merkmale des Abbildungssystems diskutiert.

### 3.6.1 Absorptionsabbildung

Für den Nachweis der Atome nutzten wir die Methode der Absorptionsabbildung [75]. Dabei wird ein nahresonanter Laserstrahl auf die Atomwolke gerichtet und der durch die Wolke hervorgerufene Schattenwurf wird von einem Linsensystem auf eine CCD-Kamera abgebildet. Aufgrund der inkohärenten Lichtstreuung ist diese Abbildungsmethode destruktiv. Für jeden Datenpunkt einer Messreihe muss daher ein neues atomares Ensemble präpariert werden. Dies setzt eine hohe Reproduzierbarkeit der Versuchsbedingungen voraus. Nach einer ersten Aufnahme vom Schattenprofil der Wolke  $I(y, z)$  wird eine zweite Aufnahme (Referenzbild) vom Intensitätsprofil  $I_0(y, z)$  des ungestörten Laserstrahls gemacht. Aus den beiden Aufnahmen lässt sich dann über das Lambert-Beersche-Absorptionsgesetz

$$I(y, z) = I_0(y, z) e^{-D(y, z)} \quad \text{mit} \quad D(y, z) = \frac{\sigma_0}{1 + 4\Delta^2/\Gamma^2} n_{\text{col}}(y, z) \quad (3.6)$$

die optische Dichte  $D(y, z)$  und die Säulendichte  $n_{\text{col}}(y, z)$  der Atomwolke ableiten. Die Säulendichte bezeichnet die entlang der Ausbreitungsrichtung des Strahls (hier z.B. die  $x$ -Achse) aufintegrierte atomare Dichte:  $n_{\text{col}}(y, z) = \int n(x, y, z) dx$ . Die optische Dichte  $D(y, z)$  ergibt sich aus der Säulendichte nach Multiplikation mit dem atomaren Streuquerschnitt. Hierbei ist  $\Delta = \omega_L - \omega_0$  die Verstimmung des Lasers bezüglich der atomaren Übergangsfrequenz,  $\Gamma$  die zugehörige Linienbreite und  $\sigma_0 = 3\lambda^2/(2\pi)$  der resonante Streuquerschnitt<sup>47</sup> des Zwei-Niveau-Atoms für polarisiertes Licht der Wellenlänge  $\lambda$ . In dem obigen Ausdruck wird von einem Streuquerschnitt ausgegangen, der unabhängig von der Laserintensität und damit auch unabhängig von der Abschwächung des Lichtes innerhalb der Wolke ist. Diese Annahme ist gerechtfertigt, wenn die eingestrahlte Laserintensität klein gegenüber der Sättigungsintensität  $I_{\text{sat}}$  des entsprechenden Übergangs ist. Damit die Atomwolke trotz der geringen Lichtintensitäten vollständig durchleuchtet werden kann, sollte die optische Dichte der Bedingung  $D(y, z) \leq 4$  genügen. Diese Bedingung wird nach hinreichend langen Expansionszeiten erfüllt. Im Experiment wird die Pulsdauer des Abbildungslichtes so kurz gewählt, dass man in guter Näherung eine Momentaufnahme der frei fallenden Atomwolke erhält. Eine geringe Intensität ( $\sim 0,1 I_{\text{sat}}$ ) und kurze Pulsdauer ( $\sim 50 \mu\text{s}$ ) verhindern außerdem, dass die Wolke durch die inkohärente Lichtstreuung über das optische Auflösungsvermögen ( $\sim 6 \mu\text{m}$ ) des Abbildungssystems hinaus „zerblasen“ wird. Da aus technischen Gründen die Belichtungszeit der CCD-Kamera sehr viel

<sup>47</sup>Da in unserem Aufbau mit linear polarisiertem Licht abgebildet werden muss, können die Atome nicht als reine Zwei-Niveau-Systeme betrachtet werden. Folglich ist der Streuquerschnitt  $\sigma_0$  mit einem zusätzlichen Faktor zu multiplizieren, der sämtliche beteiligten Übergänge berücksichtigt. Bei verschwindendem Magnetfeld ergibt sich dieser Faktor durch Mittelung über die Quadrate der Clebsch-Gordan-Koeffizienten aller Übergänge in die entarteten Zeeman-Niveaus. Für die Abbildung von  $^{87}\text{Rb}$  und  $^{40}\text{K}$  betragen die Faktoren  $7/15$  bzw.  $2/5$ .

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

---

länger ist als die eigentliche Pulsdauer des Abbildungslichtes, gibt es auf beiden Aufnahmen einen Hintergrund durch Streulicht. Zusammen mit dem thermischen Rauschen und dem Ausleserauschen des Kamerasystems würde dieser Hintergrund die Messung verfälschen. Deswegen wird mit gleicher Belichtungszeit ein drittes, sogenanntes Rauschbild ohne Laserpuls aufgenommen. Für die experimentelle Auswertung wird die Verteilung  $R(y, z)$  des Rauschbildes von den beiden anderen Intensitätsverteilungen subtrahiert. Aus diesen Größen lässt sich schließlich die optische Dichte ermitteln:

$$D(y, z) = \ln \left( \frac{I_0(y, z) - R(y, z)}{I(y, z) - R(y, z)} \right). \quad (3.7)$$

#### 3.6.2 Bestimmung von Temperatur und Atomzahl

Der Übergang in die Quantenentartung manifestiert sich beim Bosegas durch die markanten Merkmale des Phasenübergangs: Mit der Kondensation bildet das Gas eine bimodale Dichteverteilung aus und während der freien Expansion zeigt die Dichte eine charakteristische Inversion ihres Aspektverhältnisses. Beim (wechselwirkungsfreien) Fermigas findet hingegen kein Phasenübergang statt. Hier ist der Übergang ins entartete Regime kontinuierlich und somit schwieriger nachzuweisen.

#### Fermigas

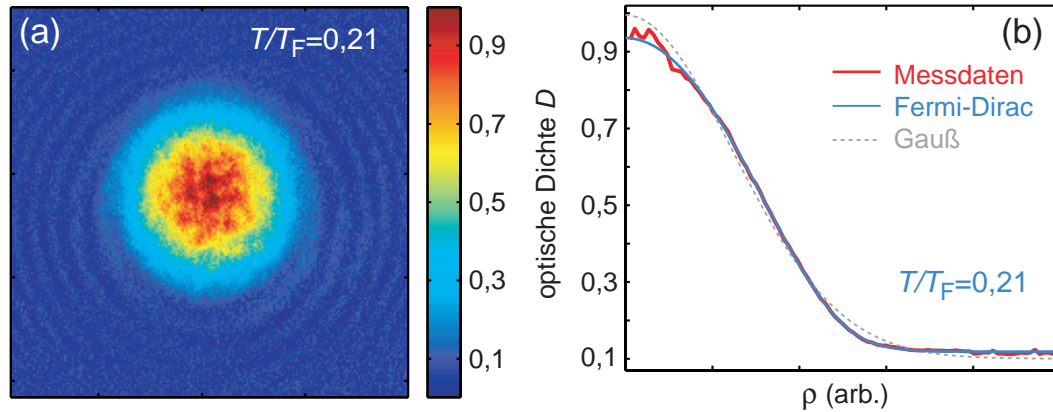
Um den Entartungsgrad des Fermigases zu bestimmen, ist eine sorgfältige Auswertung der abgebildeten Atomverteilungen erforderlich [71]. Die theoretische Dichteverteilung des Fermigases wurde in Abschnitt 2.2.2 hergeleitet. Durch Integration der expandierten Dichte entlang der Abbildungsachse  $x$  erhält man die Säulendichte 2.58. Daraus folgt der theoretische Verlauf der optischen Dichte:

$$D(y, z) = \frac{D_0}{\text{Li}_2(-Z)} \cdot \text{Li}_2 \left( -Z e^{-\frac{(y-y_0)^2}{2\sigma_y^2}} e^{-\frac{(z-z_0)^2}{2\sigma_z^2}} \right). \quad (3.8)$$

Eine numerische Anpassung dieser Verteilung an die experimentelle optische Dichte (Gleichung 3.7) erlaubt eine Bestimmung der Temperatur und der Teilchenzahl. Als sinnvolle Größen für die numerische Anpassung werden hier die zentrale optische Dichte  $D_0$ , die Zentrumspositionen  $y_0$  und  $z_0$ , die Breiten  $\sigma_y$  und  $\sigma_z$  und schließlich die Fugazität  $Z$  gewählt. Da Letztere nur positive Werte annehmen kann und ein sehr empfindliches Temperaturverhalten aufweist, bietet es sich an, statt der Fugazität ihren Logarithmus als Anpassungsgröße zu wählen. Dies führt in Gleichung 3.8 zu der Ersetzung  $Z \rightarrow \exp(\ln(Z))$ . Im klassischen Limit geht Gleichung 3.8 in eine zweidimensionale Gauß-Verteilung über:

$$D(y, z) = D_0 e^{-\frac{(y-y_0)^2}{2\sigma_y^2}} e^{-\frac{(z-z_0)^2}{2\sigma_z^2}}. \quad (3.9)$$

### 3.6 Abbildungssystem und Auswertung



**Abbildung 3.23:** Entartetes Fermigas: **(a)** Falschfarbendarstellung einer Absorptionaufnahme nach freier Expansion. **(b)** Azimutal gemittelttes Profil der Aufnahme. Aus den beiden numerischen Anpassungen folgt, dass das Gas eine nicht-klassische Impulsverteilung aufweist. Die Fermi-Dirac-Verteilung entspricht einer Temperatur von  $T/T_F = 0,21$ .

Die Verläufe 3.8 und 3.9 können sowohl auf die Impulsverteilung, als auch auf die räumliche Verteilung der Fermionen angewendet werden. Gemäß Gleichung 2.59 sind die Breiten für beliebige Expansionszeiten  $t$  durch

$$\sigma_y^2 = \frac{k_B T}{m\omega_y^2} [1 + (\omega_y t)^2] \quad \text{und} \quad \sigma_z^2 = \frac{k_B T}{m\omega_z^2} [1 + (\omega_z t)^2] \quad (3.10)$$

gegeben. Auf Seite 26 wurden theoretische Verteilungen der Säulendichte für verschiedene Temperaturen  $T/T_F$  dargestellt. Im Gegensatz zum klassischen Gas (Gauß-Verteilung) ist die zentrale Dichte des Fermigases bei abnehmender Temperatur auf endliche Werte beschränkt. Weit unterhalb von  $T_F$  wird eine präzise Temperaturbestimmung immer schwieriger, da hier die Temperaturveränderungen der Dichteverteilung sehr gering werden. Abbildung 3.23a zeigt ein Beispiel für eine Absorptionaufnahme einer sympathetisch gekühlten Kaliumwolke. Das Bild ist entlang der Symmetrieachse ( $z$ ) der Dipolfalle aufgenommen. Die Temperatur der Wolke lässt sich mittels einer zweidimensionalen numerischen Anpassung von Gleichung 3.8 an die Messdaten (Gl. 3.7) ermitteln. Das Ergebnis der Anpassung ist in Abbildung 3.23b als blaue Kurve dargestellt. Die rote Kurve zeigt die azimutal gemittelten Messdaten. Die Quantenentartung des Gases spiegelt sich in der Tatsache wider, dass die Messdaten bedeutend besser durch eine Fermi-Dirac- als durch eine Gauß-Verteilung angepasst werden können.

Bei der numerischen Anpassung können die Fugazität  $\mathcal{Z}$  und die Breiten  $\sigma_{y,z}$  unabhängig voneinander variiert werden. Da beide Größen Aufschluss über die Temperatur des Fermigases geben, verfügt man gewissermaßen über zwei unabhängige Thermometer:

Die Fugazität bestimmt die Form der Fermi-Verteilung und somit den Grad der Quan-

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

---

tenentartung. Aus der Fugazität  $Z$  ergibt sich über Gleichung 2.46 die relative Temperatur:

$$T/T_F = [-6 \operatorname{Li}_3(-Z)]^{-1/3}. \quad (3.11)$$

Sind die Fallenfrequenzen bekannt, so kann die Temperatur über Gleichung 3.10 auch aus den gemessenen Breiten  $\sigma_{y,z}$  abgeleitet werden. Zusammen mit dem Ausdruck 2.38 für die Fermi-Energie  $\epsilon_F = k_B T_F$  erhält man für die relative Temperatur:

$$T/T_F = \frac{m\omega_y^2\sigma_y^2}{\hbar\bar{\omega}(6N)^{1/3}[1+(\omega_y t)^2]}. \quad (3.12)$$

Ein analoger Ausdruck ergibt sich mit  $\sigma_z$ . Hierbei ist  $\bar{\omega} = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$  das geometrische Mittel der Fallenfrequenzen und  $N$  die Atomzahl. Die Atomzahl kann in guter Näherung durch Anpassung einer Gauß-Verteilung (Gleichung 3.9) ermittelt werden. Die resultierenden Größen  $D_0$  und  $\sigma_{y,z}$  ergeben dann unter Berücksichtigung des atomaren Streuquerschnitts den folgenden Näherungsausdruck für die Atomzahl:

$$N \approx 2\pi D_0\sigma_y\sigma_z \cdot \frac{1+4\Delta^2/\Gamma^2}{\sigma_0}. \quad (3.13)$$

Ein Vergleich der über Gleichung 3.11 und Gleichung 3.12 bestimmten Temperaturen ermöglicht es zu überprüfen, wie zuverlässig die aus der Dichteverteilung ermittelten Daten sind. Durch Integration der theoretischen optischen Dichte 3.8 über die beiden verbleibenden Koordinaten lässt sich auch der exakte Ausdruck für die Atomzahl herleiten:

$$N = 2\pi D_0\sigma_y\sigma_z \cdot \frac{1+4\Delta^2/\Gamma^2}{\sigma_0} \cdot \frac{\operatorname{Li}_3(-Z)}{\operatorname{Li}_2(-Z)}. \quad (3.14)$$

#### **Bosegas**

Für die quantitative Analyse der optischen Dichte eines teilweise kondensierten Bosegas wird üblicherweise eine zusammengesetzte zweidimensionale Modellfunktionen verwendet. Diese ergibt sich als Summe einer Parabel und einer Gauß-Funktion. Erstere beschreibt den Kondensatanteil und Letztere den thermischen Anteil. Die hohe Dichte des Kondensats kann zu störenden Beugungseffekten und bei verstimmter Abbildung auch zu dispersiven Effekten führen. Für eine genaue Temperaturbestimmung empfiehlt es sich daher, bei der Anpassung nur die äußeren Flügel der Wolke zu berücksichtigen. In den Flügeln spielt die Bose-Statistik selbst bei niedrigen Temperaturen eine vernachlässigbare Rolle, sodass die Gauß-Verteilung 3.9 eine gute Näherung liefert. Die absolute Temperatur  $T$  kann dann aus den Breiten der Gauß-Verteilung wie beim Fermigas gemäß Gleichung 3.10 bestimmt werden.

## 3.6 Abbildungssystem und Auswertung

### 3.6.3 Abbildungssystem

Das Experiment verfügt für jede der drei Gitterachsen über eine unabhängige Abbildung. Der optische Aufbau für eine der Achsen ist auf Seite 205 schematisch dargestellt (gelber Strahlengang). Jede der drei Abbildungsachsen wird durch eine Single-Mode-Faser versorgt, die das Licht für Rubidium und für Kalium führt. Vor den Fasereinkopplungen befinden sich akusto-optische Modulatoren, über die das Licht ein- und ausgeschaltet werden kann (siehe Seite 70). Rubidium und Kalium können quasi simultan (mit  $\sim 100 \mu\text{s}$  Verzögerung) entlang zweier orthogonaler Richtungen aufgenommen werden. Welche Spezies auf welcher Achse abgebildet wird, ist dabei von Zyklus zu Zyklus frei wählbar. Die Strahlen für die Abbildung und für das optische Gitter werden über polarisierende Strahlteilerwürfel vereinigt und später wieder getrennt. Dies erfordert orthogonale lineare Polarisationen zwischen den beiden Strahlen. Demnach werden die Atome mit linear, statt zirkular polarisiertem Licht abgebildet, wodurch der Absorptionsquerschnitt etwa um einen Faktor zwei reduziert wird (siehe Fußnote Seite 99). Entlang der horizontal verlaufenden  $x$ - und  $y$ -Achsen wird das Gitter- und das Abbildungslicht über dichroitische Spiegel zusätzlich mit dem langwelligen Licht der Dipolfalle vereinigt (siehe Seite 205). Die Überlagerung der Strahlengänge erlaubt es, die drei Kameras des Abbildungssystems nicht nur für den Nachweis der Atome einzusetzen, sondern auch für die Justage des optischen Gitters und der Dipolfalle zu nutzen. Eine geringer Anteil des Lichtes der Dipolfalle ( $\sim 1\%$ ) wird von den dichroitischen Spiegeln<sup>48</sup> reflektiert statt transmittiert. Dieses Restlicht trifft auf die Kamera und kann zur Justage der Dipolfalle genutzt werden. Im normalen Betrieb befinden sich Kantenfilter<sup>49</sup> vor den Kameras, um das Restlicht der Dipolfalle zu unterdrücken. Entlang der  $x$ - und der  $y$ -Achse kann Rückpump-Licht eingestrahlt werden. Dies ermöglicht es, auch Rubidium im  $|F = 1\rangle$ - und Kalium im  $|F = 7/2\rangle$ -Zustand zu detektieren. Das Abbildungs-Rückpump-Licht wird immer orthogonal zu der jeweiligen Abbildungsachse eingestrahlt. Der durch die Atomwolke im Abbildungsstrahl hervorgerufene Schatten wird durch einen ersten Achromaten kollimiert (derselbe Achromat fokussiert außerdem den Gitter- und den Dipolstrahl auf die Atome) und anschließend in größerem Abstand durch einen zweiten Achromaten auf eine CCD-Kamera abgebildet. Die Abbildungsmaßstäbe liegen je nach Achse zwischen 2 und 3,5. Die Auflösungen sind beugungsbegrenzt auf etwa  $6 \mu\text{m}$  beschränkt.

Da sämtliche experimentelle Daten aus den Absorptionsabbildungen der Atomwolken gewonnen werden, ist eine möglichst hohe Qualität der Aufnahmen erforderlich. Dies gilt insbesondere für die Korrelationsmessungen. Hier ist man auf die Nachweisbarkeit einzelner Atome angewiesen, um das atomare Schrotrauschen untersuchen zu können. Neben einer hohen Auflösung müssen die Aufnahmen ein möglichst geringes, abbildungstechnisch bedingtes Bildrauschen aufweisen. Zu einem guten Signal-Rausch-Verhältnis trägt das Kamerasystem maßgeblich bei.

<sup>48</sup>Dichroitische 2-Zoll-Spiegel, HR 740-840 nm, AR 1025-1035 nm,  $45^\circ$ , u-pol, *Laseroptik*.

<sup>49</sup>Kurzpassfilter mit Cut-off-Wellenlänge bei 900 nm, LC-3RD/900SP-25, *Laser Components GmbH*.

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

---

#### Kamerasystem

Einen Überblick über die verschiedenen technischen Optionen moderner CCD-Kameras und eine Erläuterung der damit verknüpften Begriffe kann zum Beispiel in Referenz [182] gefunden werden.

Für unser Abbildungssystem werden drei unterschiedliche Kameras eingesetzt. Darunter zwei sehr sensitive EMCCD-Kameras der Firma *Andor*, die es ermöglichen einzelne Photonen nachzuweisen. Bei der EMCCD-Technik werden vor dem Auslesen des Sensors die erzeugten Photoelektronen vervielfacht. Hierdurch lässt sich selbst das Signal einzelner Photonen noch über das Ausleserauschen verstärken. In der Regel kann die EMCCD-Verstärkung jedoch abgeschaltet werden, da die Intensitäten des Abbildungslichtes so hoch gewählt werden, dass die Abbildung nicht durch Photonen-Schrotrauschen gestört wird. Durch eine thermoelektrische Kühlung des CCD-Chips auf bis zu  $-90^{\circ}\text{C}$  wird der Dunkelstrom auf ein vernachlässigbares Niveau reduziert. Um den gekühlten Chip vor Luftfeuchtigkeit zu schützen, befindet sich dieser hinter einem Fenster im Vakuum. Das Fenster ist breitbandig antireflex beschichtet, um störende Reflexe auf der Abbildung zu vermeiden. Für die Abbildung entlang der  $y$ -Achse wird eine „back illuminated“ Version<sup>50</sup> der Kamera eingesetzt. Hier ist die Quanteneffizienz gegenüber der „front illuminated“ Version von etwa 43 % auf 73 % (für  $\sim 775 \text{ nm}$ ) erhöht. Auf den Aufnahmen mit der „back illuminated“ Kamera beobachten wir schwache Interferenzstreifen, welche womöglich auf einen Etalon-Effekt des nahinfraroten Abbildungslichtes zwischen der Front- und der Rückseite der Silizium-CCD-Struktur zurückzuführen sind. Für die Korrelationsmessungen wird daher eine „front illuminated“ Version<sup>51</sup> verwendet. Diese bildet die Atome entlang der  $z$ -Achse ab. Die Kamera verfügt über  $1004 \times 1002$  Pixel mit einer Größe von  $8 \mu\text{m} \times 8 \mu\text{m}$ . Unter Berücksichtigung des Abbildungsmaßstabes entspricht ein Pixel, projiziert in die Abbildungsebene, einer Ausdehnung von  $3,5 \mu\text{m}$ .

Auf der  $x$ -Achse wird eine Frame-Transfer-Kamera der Firma *Apogee* (AP1E) eingesetzt. Diese kann innerhalb eines experimentellen Zykluses im Abstand von Millisekunden mehrere Aufnahmen machen. Zwar wird diese Option bislang noch nicht verwendet, ermöglicht es aber prinzipiell beide Spezies entlang ein und derselben Achse aufzunehmen.

#### Mechanische Stabilität und Laserstabilisierung

Zum Erzielen einer hohen Bildqualität sollte der Abbildungsstrahl über ein möglichst gleichförmiges Intensitätsprofil verfügen. Neben hochqualitativen Achromaten werden an unserem Aufbau selbst entwickelte Faserauskoppler mit beugungsbegrenzten Kollimatoren<sup>52</sup> eingesetzt (siehe Abbildung 6.2). Dennoch treten bei der Abbildung die für kohärentes Laserlicht typischen Interferenzmuster auf. Um Interferenzen durch Streuung an geometrischen Aperturen oder durch Brechung an Glaskanten zu reduzieren, verwenden wir

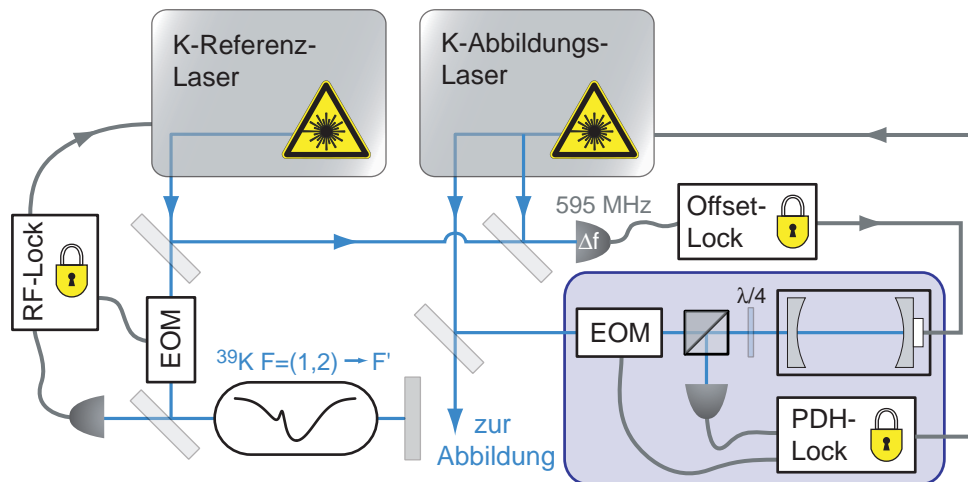
---

<sup>50</sup>iXon, DV887 (back illuminated), *Andor*.

<sup>51</sup>iXon, DV885 (front illuminated), *Andor*.

<sup>52</sup>06GLC001, *Melles Griot*.

## 3.6 Abbildungssystem und Auswertung



**Abbildung 3.24:** Offset-Lock des Kalium-Abbildungs-Lasers auf den Referenz-Laser mit einem optischen Resonator als intermediäres Stellglied. Der Referenz-Laser ist durch ein RF-Lock auf eine breite Crossover-Linie im Spektrum von  $^{39}\text{K}$  stabilisiert. Der Abbildungs-Laser ist durch ein Pound-Drever-Hall(PDH)-Lock auf einen Fabry-Pérot-Resonator stabilisiert (blau eingerahmt). Über das Offset-Lock wird der Resonator so geregelt, dass der Abbildungs-Lasers zum Referenz-Laser die benötigte Differenzfrequenz von 595 MHz aufweist.

einen Abbildungsstrahl mit möglichst kleinem Durchmesser. Stationäre Interferenzmuster lassen sich durch das Referenzbild (Aufnahme ohne Atome) heraus normieren (siehe Gleichung 3.7).

Zeitlich driftende Interferenzmuster, wie sie aufgrund von Schwankungen der Laserfrequenz oder Änderungen der optischen Weglänge auftreten, bleiben jedoch erhalten. Das Driften der Interferenzmuster kann dadurch minimiert werden, dass man möglichst wenig Zeit zwischen den beiden Aufnahmen vergehen lässt. Schnell aufeinanderfolgende Aufnahmen sind mit Frame-Transfer- oder Interline-Transfer-Kameras möglich [182]. In unserem Experiment liegen einige Zehn Millisekunden zwischen den beiden Aufnahmen. Daher wird auf eine möglichst hohe mechanische Stabilität des Aufbaus Wert gelegt (siehe Seite 207). Zur Vermeidung mechanischer Schwingungen werden die Lüfter der Kameras 8 s vor den Aufnahmen abgeschaltet.

Neben mechanischen Schwingungen sollten auch Frequenzabweichungen der Laser so weit wie möglich vermieden werden. Die RF-Spektroskopie an der Rubidium-Dampfzelle liefert ein steiles Fehlersignal, welches es erlaubt, den Rubidium-Abbildungs-Laser mit einer hohen Regelbandbreite zu stabilisieren. Der Kalium-Abbildungs-Laser ist über ein Frequenz-Offset-Lock auf einen Referenz-Laser stabilisiert, der selber wiederum über ein RF-Lock auf die Crossover-Resonanz  $F = (1, 2) \rightarrow F'$  von  $^{39}\text{K}$  stabilisiert wird. Aufgrund der überlappenden Hyperfeinzustände im angeregten Zustand von  $^{39}\text{K}$  (siehe Ab-

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

---

schnitt 3.3.2) ist das resultierende Fehlersignal weniger steil als bei Rubidium.

Um dennoch die Frequenzdrift zwischen den beiden Aufnahmen gering zu halten, wird ein modifiziertes Offset-Lock eingesetzt. Dieses ist in Abbildung 3.24 schematisch dargestellt. Dabei wird der Abbildungs-Laser über ein Pound-Drever-Hall(PDH)-Lock mit hoher Regelbandbreite auf einen stabilen optischen Resonator stabilisiert [183, 184]. In dieser Konfiguration regelt das Offset-Lock den Abbildungs-Laser indirekt über die Länge des optischen Resonators. Der Resonator wurde als Transfer-Resonator für ein Photoassoziations-Experiment [185] entwickelt und verfügt über eine hohe passive Stabilität. Das PDH-Lock überträgt die intrinsische Stabilität des Resonators auf den Abbildungs-Laser. Somit reicht die geringe Regelbandbreite des Offset-Locks vollständig aus. Es ist sogar möglich, Absorptionenaufnahmen durchzuführen, während der Resonator manuell auf eine gewisse Offset-Frequenz eingestellt wird. Auf diese Weise kann innerhalb weniger experimenteller Zyklen die exakte Resonanz der Absorptionsabbildung bestimmt werden. Ist die Absorptionsfrequenz ermittelt, so kann umgekehrt mit der bekannten Offset-Frequenz von 595 MHz der exakte Lockpunkt des Referenz-Lasers (also das tatsächliche Zentrum der Crossover-Resonanz  $F = (1, 2) \rightarrow F'$  von  $^{39}\text{K}$ ) bestimmt werden (siehe auch Seite 64).

Die Stabilisierung des Abbildungs-Lasers über ein Frequenz-Offset-Lock erlaubt es, die Abbildungsfrequenz zügig um mehrere hundert Megahertz zu verstimmen. Dies ist insbesondere für Experimente zur Molekülbildung mittels Feshbach-Resonanzen von großem Interesse. Die benötigten hohen Magnetfelder führen zu Zeeman-Verstimmungen der atomaren Übergänge, die ebenfalls bei einigen hundert Megahertz liegen können. Mittels des Offset-Locks können die Atome oder die dann erzeugten Moleküle direkt bei hohen Magnetfeldern abgebildet werden. Somit wäre ein schnelles Abschalten der Spulen am Ende des Experiments nicht mehr zwangsläufig erforderlich.

#### Zustandsselektiver Nachweis

In der Dipolfalle können Atome in beliebigen Spinzuständen präpariert und gefangen werden. Durch Anlegen eines Magnetfeldgradienten während der freien Expansionsdauer werden die Atome räumlich nach den verschiedenen Zeeman-Zuständen getrennt. Dieses Verfahren geht auf das grundlegende Experiment von Otto Stern und Walther Gerlach zurück, in dem 1922 erstmals die Richtungsquantelung des atomaren Drehimpulses beobachtet wurde [186]. In unserem Aufbau wird der Magnetfeldgradient durch eine einzelne Spule mit einem Durchmesser von 25 mm, 20 Windungen (auf einer Länge von etwa 23 mm) und einem Strom von einigen zehn Ampere erzeugt. Die Spule befindet sich in unmittelbarer Nähe ( $\sim 1,5\text{mm}$ ) zur Glaszelle. Hierdurch kann bereits bei geringen absoluten Feldern ein Gradient erzeugt werden, der ausreicht um die verschiedenen Spincomponenten räumlich voneinander zu trennen. Abbildung 3.25a zeigt eine mit der Stern-Gerlach-Technik aufgenommene Serie verschiedener Absorptionenaufnahmen von  $^{40}\text{K}$ . Dabei sind die Atome mittels unterschiedlicher langer adiabatischer Passagen in den einzelnen Zeeman-Zuständen des Hyperfeingrundzustandes  $|F = 9/2\rangle$  präpariert worden.



Durch zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Aufnahmen, einmal ohne und einmal mit Rückpump-Licht, lässt sich zudem jeweils die Population der beiden Hyperfeingrundzustände  $|F\rangle$  bestimmen. Dabei ist jedoch darauf zu achten, dass der Lichtpuls für die erste Aufnahme (ohne Rückpump-Licht) kurz genug sein muss, um die Population nicht bereits nennenswert zu transferieren.

### 3.7 Zustandspräparation

Mit der Technik der adiabatischen Passage (adiabatic rapid passage, ARP) [187] können die Atome in beliebigen Hyperfeinzuständen  $|F, m_F\rangle$  präpariert werden. Nach dem Transfer aus der Magnetfalle in die Dipolfalle wird ein homogenes Magnetfeld von  $B_x = 13,6$  G angelegt. Die Rubidiumatome werden dann mittels eines adiabatischen Mikrowellen-Sweeps von  $|F = 2, m_F = 2\rangle$  in den absoluten Grundzustand  $|1, 1\rangle$  überführt. Dies geschieht über Einstrahlung einer Mikrowelle, welche innerhalb von 10 ms linear 500 kHz über die Resonanz 6,8629 GHz gestimmt wird. Auch das Kalium wird für das sympathetische Kühlen in seinen absoluten Grundzustand transferiert. Dies geschieht mit nahezu hundertprozentiger Effizienz mittels eines adiabatischen RF-Sweeps, welcher das Kalium ausgehend vom  $|9/2, 9/2\rangle$ -Zustand durch sämtliche Zeeman-Niveaus hindurch in den absoluten Grundzustand  $|9/2, -9/2\rangle$  transferiert. Für den RF-Sweep wird die eingestrahlte Radiofrequenz innerhalb von 30 ms linear von 4,6 auf 3,8 MHz reduziert. Wie in Abbildung 3.25a gezeigt, lassen sich mit Rampen über kleinere Frequenzintervalle auch gezielt die dazwischenliegenden Zeeman-Zustände adressieren.

Um magnetische Feshbach-Spektroskopie durchführen zu können, ist eine präzise Kalibrierung der Magnetfelder am Ort der Atome erforderlich. Eine solche Kalibrierung kann zum Beispiel mittels Mikrowellenspektroskopie durchgeführt werden. In Abbildung 3.25b ist eine entsprechende Resonanz für den  $|1, 0\rangle \rightarrow |2, 0\rangle$ -Übergang von Rubidium bei einem Feld von 79 G dargestellt.

Die Radiofrequenz für die Zustandspräparation wird durch einen Signalgenerator<sup>53</sup> erzeugt und über einen RF-Schalter und einen Combiner auf denselben Verstärker geleitet, der auch für die RF-Evaporation eingesetzt wird. Somit lässt sich dieselbe Helixantenne zur Abstrahlung einsetzen. Die linearen Frequenzrampen für die RF-Sweeps werden dem Signalgenerator über eine externe Signalquelle<sup>54</sup> vorgegeben.

Das Setup für die Mikrowellenmanipulation besteht aus einem Signalgenerator<sup>55</sup>, dessen Ausgangssignal über einen Up-Converter<sup>56</sup> mit dem festfrequenten 6,3 GHz-Signal

---

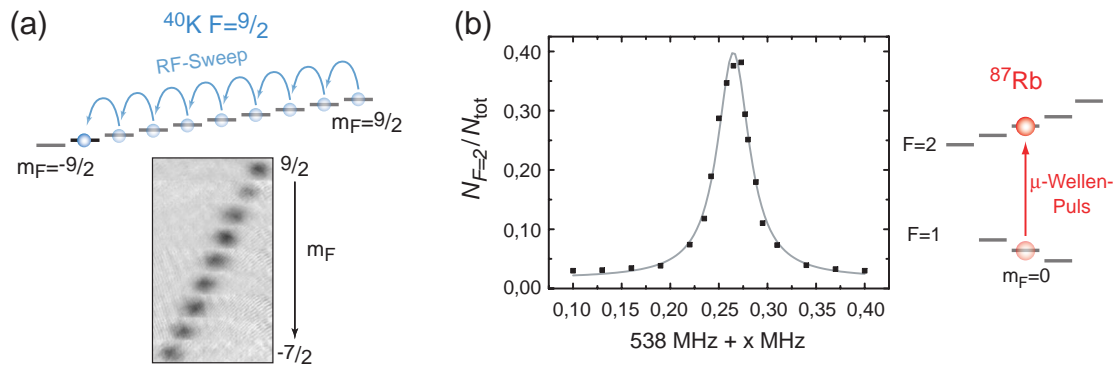
<sup>53</sup>Signalgenerator, SML02, Rohde&Schwarz.

<sup>54</sup>Arbiträrer Funktionsgenerator, 33250A, Agilent.

<sup>55</sup>Signalgenerator, E4432B, Agilent.

<sup>56</sup>Up-Converter, Kuhne electronic GmbH.

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse



**Abbildung 3.25:** (a) Präparation von  $^{40}\text{K}$  ( $F = 9/2$ ) in verschiedenen Zeeman-Zuständen  $m_F$  durch adiabatische Passage: Eine Serie von Absorptionsoptionen zeigt das Kalium nach verschiedenen weiten RF-Rampen. Der Nachweis der Population in den einzelnen Zeeman-Zuständen erfolgt mittels der Stern-Gerlach-Technik. (b) Mikrowellen-Spektroskopie zur Kalibrierung des Magnetfeldes: Die dargestellte Resonanz von  $^{87}\text{Rb}$  auf dem  $|F = 1, m_F = 0\rangle \rightarrow |2, 0\rangle$ -Übergang entspricht einem Feld von  $78,93(6)$  G. Das Verhältnis aus Atomen im  $F = 2$ -Zustand zur Gesamtatomzahl ist gegen die Mikrowellenfrequenz aufgetragen. Hierzu wird nach dem Mikrowellenpuls eine Aufnahme ohne und unmittelbar danach mit Rückpump-Licht durchgeführt.

eines DRO-Oszillators<sup>57</sup> gemischt wird. Der Up-Converter unterdrückt die Differenz- und Trägerfrequenz, sodass der abschließende 15 W-Verstärker<sup>58</sup> im Wesentlichen nur das höherfrequente Seitenband verstärkt. Die Mikrowelle wird schließlich durch eine Hohlleiterantenne abgestrahlt, die in etwa 65 mm Entfernung von den Atomen montiert ist. Der Verstärker wird durch einen Zirkulator und einen entsprechenden Abschluss vor reflektierter Leistung geschützt. Sämtliche Generatoren können über GPIB programmiert werden<sup>59</sup>. Die einzelnen Frequenzrampen und Frequenzpulse sowie die RF-Schalter werden über optoentkoppelte Digitalsignale vom Steuerungscomputer<sup>60</sup> getriggert.

<sup>57</sup>Phase Locked Dielectric Resonator Oscillator (PLDRO), 6,3 GHz, MITEQ.

<sup>58</sup>Kuhne electronic GmbH.

<sup>59</sup>Computerkarte PCI-GPIB, National Instruments.

<sup>60</sup>Digital I/O Computerkarten, DIO-64 und DIO-128, Viewpoint Systems.

### 3.8 Technische Weiterentwicklungen

In diesem Abschnitt werden zwei technische Innovationen vorgeschlagen, die einfach zu implementieren sind und deren Zusammenspiel das experimentelle Potential der Apparatur voraussichtlich erheblich erweitern wird.

#### Quadrupolfalle mit „blue plug“

Eine wichtige Zielsetzung bei der damaligen Entwicklung der Doppelkammerapparatur mit magnetischem Förderband war der gute optische Zugang zu den erzeugten Quantengasen [112]. Durch den Einsatz der QUIC-Falle wird dieser Zugang jedoch wieder verschlechtert, da sich die Ioffe-Spule in unmittelbarer Nähe zur Glaszelle befindet. Hinzu kommt, dass beim Überblenden der QUIC-Falle von der Quadrupol- in die Ioffe-Konfiguration die Atome aus dem Zentrum der Glaszelle entlang der  $x$ -Achse bis dicht an die Innenwand der Zelle ( $< 3$  mm) herangeschoben werden (siehe Abbildung 3.18). Dies erweist sich als nachteilig für die Qualität des optischen Gitters und der Dipolfalle, da die nicht beschichtete Innenseite der Glaszelle zu Rückreflexen und somit zur Ausbildung unerwünschter Stehwellen führt. Zwar kann der Laserstrahl so justiert werden, dass der Rückreflex die Atome nicht trifft, jedoch wird hierdurch die maximal mögliche Strahltaile erheblich eingeschränkt. Bei einem schrägen Strahlverlauf vergrößern sich darüber hinaus die Linsenfehler.

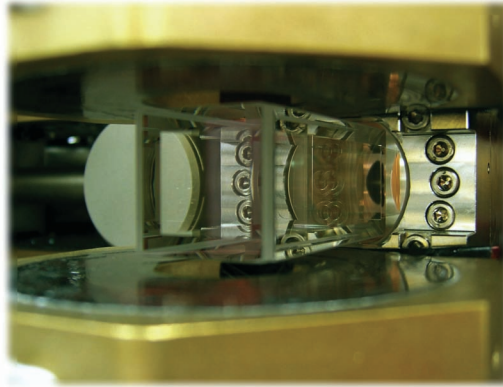
Einen eleganten Ausweg stellt der Einsatz einer reinen Quadrupolfalle mit „blue plug“ dar [3]. Ein blauverstimmter Laserstrahl verhindert dabei, dass sich die Atome im Fallennorminimum aufhalten und unterdrückt somit Majorana-Verluste (siehe Abschnitt 3.4.3). In dieser Konfiguration werden nur noch die beiden Quadrupolspulen benötigt, sodass ein optimaler optischer Zugang besteht. Gleichzeitig befinden sich die Atome immer im Zentrum der Glaszelle. Aufgrund des größeren Abstandes reicht bereits ein kleiner Winkel zwischen dem Laserstrahl und der Normalen zur Zellenwand aus, um Stehwellen zu verhindern. Durch den größeren Abstand werden zugleich Kaliumverluste durch Stöße an die heiße Zellenwand vermieden (vergleiche mit Seite 88).

Die Quadrupolfalle mit „blue plug“ bietet darüber hinaus ideale Ausgangsbedingungen für das evaporative Kühlen: Ein großes Fallenvolumen erlaubt es, die lasergekühlten Atome in ihrer Gesamtheit zu speichern, was in einer reinen Dipolfalle schwierig zu erfüllen wäre. In dem linearen Potential der Quadrupolfalle lassen sich steile Gradienten und somit hohe Dichten realisieren. Das ermöglicht, den Ramsauer-Townsend-Effekt, der zu einem reduzierten Streuquerschnitt zwischen Rubidium und Kalium im oberen Temperaturbereich führt, teilweise zu kompensieren (siehe Abschnitt 3.5.1). Letztlich lassen sich durch eine bessere Thermalisierung auch die Zykluszeiten erheblich reduzieren.

Bereits in einem der ersten Experimente zur Bose-Einstein-Kondensation wurde eine

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

---



**Abbildung 3.26:** Glaszelle mit einem gutem optischen Zugang: Der Einsatz einer Quadrupolfalle mit „blue plug“ ermöglicht den Verzicht auf die Ioffe-Spule und erlaubt daher einen optimalen Zugang zu den Atomen. Sobald sich die Atome in der Dipolfalle befinden, können die „Quadrupol“-Spulen umgepolt und zur Erzeugung starker homogener Magnetfelder eingesetzt werden. Somit lassen sich die Spulen sowohl zum Fangen als auch zum Manipulieren der Atome mittels Feshbach-Resonanzen einsetzen.

Quadrupolfalle mit „blue plug“ eingesetzt [3]. Dennoch etablierten sich in den folgenden Jahren stattdessen rein magnetische und später auch rein optische Fallen zum Speichern und evaporativen Kühlen der Atome. Dies war im Wesentlichen auf zwei Nachteile des „blue plug“ zurückzuführen. Zum einen wird ein ausreichend starker blauerstimmter Laserstrahl benötigt, der präzise auf das Fallenzentrum justiert werden muss. Zum anderen weist das Potential im Minimum nicht die bevorzugte harmonische Form auf<sup>61</sup>. Da heutzutage in den meisten Experimenten die Atome für den letzten Kühlschritt in eine Dipolfalle umgeladen und erst dort bis zur Quantenentartung gekühlt werden, spielt letzterer Punkt keine Rolle mehr. In unserem Aufbau wird auch das erste Argument entkräftet, denn das Laserlicht für das blauerstimmte Gitter lässt sich zugleich für den „optischen Stopfen“ einsetzen. Wird der Rückreflex blockiert, so kann bereits der entlang der  $z$ -Achse verlaufende Gitterstrahl als „blue plug“ fungieren. Aufgrund der inzwischen weitgehend ausgereiften Justagetechniken stellt auch die präzise Ausrichtung der Laserstrahlen kein Problem mehr dar. Voraussichtlich wird mit dem zunehmendem Einsatz von Dipolfallen auch die „blue plug“-Technik wieder an Bedeutung gewinnen (siehe z.B. [188]).

#### Umpolung der Quadrupolspulen

Experimente mit magnetischen Feshbach-Resonanzen werden in optischen Dipolfallen durchgeführt, da sich die Atome in den fernverstimmten Lichtfeldern unabhängig von ih-

---

<sup>61</sup>Durch die Wahl eines „blue plug“ mit elliptischem Strahlprofil kann die Falle jedoch in zwei harmonische Fallen unterteilt werden [188].

## 3.8 Technische Weiterentwicklungen

---

ren Spinzuständen fangen lassen. Zur Adressierung der Feshbach-Resonanzen in Rubidium und Kalium werden homogene Magnetfelder von mehreren hundert Gauß benötigt. Diese hohen Felder werden üblicherweise durch ein separates Helmholtz-Spulenpaar erzeugt, welches von starken Strömen durchflossen wird. Statt auf unabhängige Helmholtz-Spulen wird in unserem Aufbau auf die Quadrupolspulen der Magnetfalle zurückgegriffen. Nach dem Transfer der Atome in die Dipolfalle werden die Quadrupolspulen abgeschaltet und über eine MOSFET-Schaltung aus der Anti-Helmholtz- in die Helmholtz-Konfiguration umgepolt. Aufgrund ihres geringen Abstandes zur Glaszelle ( $\sim 1$  mm) erzeugen die Spulen bereits bei vergleichsweise kleinen Strömen starke Magnetfelder am Ort der Atome. Um eine hohe Stabilität der Felder zu garantieren, werden die Spulen in Serie betrieben. Dabei erzeugen sie ein homogenes Magnetfeld von 16,2 G pro Ampere. Hiermit ließe sich zum Beispiel die bei 1007,4 G situierte Rubidium-Feshbach-Resonanz ( $^{87}\text{Rb}$ ,  $|F = 1, m_F = 1\rangle$ ) [104] mit einem Spulenstrom von nur 62 A adressieren. Bei diesem Strom beträgt die gesamte in den Spulen dissipierte ohmsche Leistung weniger als 500 W. Vergleicht man diese Werte mit denen von üblichen Aufbauten, so wird die enorme Vereinfachung deutlich. Bei der ersten experimentellen Untersuchung der oben genannten Feshbach-Resonanz wurden Spulenströme von knapp 1400 A benötigt und die dabei dissipierte ohmsche Leistung betrug mehr als 10 kW [189]. Solch starke Ströme zu stabilisieren und die freigesetzte Wärme genügend schnell abzuführen, erfordert einen erheblichen zusätzlichen Aufwand. Durch die kompakte Spulenanordnung in unserem Aufbau wird zudem die im Magnetfeld gespeicherte Energie minimiert, was ein rasches Hoch- und Runterfahren der Magnetfelder erlaubt.

Wird statt der QUIC-Falle die Quadrupolfalle mit „blue plug“ verwendet, so lässt sich die Dipolfalle genau auf das Zentrum zwischen den beiden Quadrupolspulen justieren. Diese symmetrische Konfiguration bietet den Vorteil, dass die Atome einem weitgehend homogenen Magnetfeld ohne Gradienten ausgesetzt sind. Da die Anordnung der Spulen nicht der idealen Helmholtz-Konfiguration entspricht, weist das Feld eine endliche Krümmung auf. Entlang der Spulenchse beträgt der errechnete Wert  $B_z'' = 4,7 \text{ G}/(\text{Acm}^2)$ . Bei dem Feld der obigen Feshbach-Resonanz ( $B_0 = 1007,4 \text{ G}$ ) ergibt sich daraus, für eine typische Ausdehnung der Atomwolken von  $10 \mu\text{m}$ , eine Feldvariation von 0,3 mG über die Wolke hinweg. Gegenüber der Breite der Feshbach-Resonanz ( $\Delta B = 170 \text{ mG}$ ) ist diese Variation vernachlässigbar klein. Natürlich lassen sich mit den „Quadrupolspulen“ neben den homonuklearen Feshbach-Resonanzen auch die Interspezies-Feshbach-Resonanzen von Rubidium und Kalium adressieren.

Im Zusammenspiel mit dem „blue plug“ ermöglicht die Umpolung der Quadrupolspulen die Erzeugung von starken homogenen Magnetfeldern bei leicht zu stabilisierenden Strömen und geringer dissipierter Wärme.

### 3 Experimenteller Aufbau, Präparation und Analyse

---

## 4 Optische Potentiale

Laser stellen ein vielseitiges Werkzeug zur Manipulation von Atomen dar. Mit Laserlicht lassen sich Atome nicht nur kühlen, sondern bei hinreichend großen Verstimmungen auch fangen [118, 119]. Hierbei nutzt man den Effekt, dass ein oszillierendes elektrisches Lichtfeld ein oszillierendes Dipolmoment im Atom induziert und gleichzeitig mit diesem Dipol wechselwirkt. Weist das fernverstimmte Lichtfeld ein inhomogenes Intensitätsprofil auf, so wirkt eine konservative Kraft auf die Atome. Bereits ein einfacher fokussierter gaußscher Laserstrahl reicht aus, um eine elementare optische Dipolfalle zu erzeugen.

Durch die Überlagerung von entgegengesetzt propagierenden Laserstrahlen lassen sich auch komplexere Potentiallandschaften, wie optische Gitter realisieren. Hier werden die Atome in den periodischen Interferenzmustern der optischen Stehwellen gefangen. Lädt man ultrakalte bosonische oder fermionische Quantengase in einen solchen künstlichen Lichtkristall, so verfügt man über ein leistungsfähiges Modellsystem, mit dem sich beispielsweise stark korrelierte Vielteilchensysteme aus der Festkörperphysik simulieren lassen. Eine repulsive Wechselwirkung zwischen Bosonen oder die Pauli-Blockierung bei Fermionen erlauben es hochgradig geordnete Vielteilchenzustände sogenannte Quantenregister für die Quanteninformationsverarbeitung zu präparieren.

Mit einer Vielzahl frei einstellbarer Parameter bieten optische Dipolfallen und Gitter ein hohes Maß an experimenteller Flexibilität und Kontrolle. Dies setzt jedoch eine genaue Kenntnis der Potentiale voraus. Einleitend werden in diesem Kapitel das Prinzip der konservativen Dipolkraft sowie die Formeln zur Bestimmung der optischen Potentiale erläutert. Um einen guten räumlichen Überlapp zwischen den beiden unterschiedlich schweren Spezies zu gewährleisten, wird in unserem Aufbau eine gekreuzte Dipolfalle mit oblater Fallengeometrie eingesetzt. Im Folgenden werden die zugehörigen Fallenparameter unter Berücksichtigung der Schwerkraft numerisch exakt, als auch mittels einfacher Näherungen, berechnet. Auch für die evaporative und sympathetische Kühlung in der Dipolfalle erweist sich eine genaue Kenntnis der Potentiale als hilfreich. So zeigen Theorie und Experiment, dass sich die Potentialschwelle während der Verringerung der Fallentiefe abrupt in ihrer Form verändert, was sich maßgeblich auf die Effizienz und Spezies-Selektivität des Evaporationsprozesses auswirkt.

Im zweiten Teil dieses Kapitels werden die Potentiale von rot- und blauverstimmten Gittern ermittelt. Hierbei werden die endlichen Reflexionsverluste bei der Erzeugung der optischen Stehwellen berücksichtigt. Für das externe harmonische Potential des blauverstimmten Gitters erweisen sich darüber hinaus Effekte, wie die endliche Eindringtiefe der Atome in die Potentialbarrieren und die räumliche Variation der quantenmechanischen Nullpunktenergie, von Bedeutung.

## 4 Optische Potentiale

---

### 4.1 Optische Dipolpotentiale

Dass sich inhomogene Lichtfelder als konservative Potentiale für Atome einsetzen lassen, wurde bereits in den späten sechziger Jahren erkannt [190]. Im Jahr 1986 gelang es Steven Chu und Mitarbeitern erstmals einige wenige lasergekühlte Atome im Fokus eines fernverstimmt Laserstrahles zu fangen [191]. Zwölf Jahre später konnte in der Gruppe von Wolfgang Ketterle ein Bose-Einstein-Kondensat rein optisch gespeichert werden [192]. In 2001 gelang es schließlich der Gruppe um Michael Chapman, Atome durch Evaporation innerhalb einer Dipolfalle bis zur Quantenentartung zu kühlen [193]. So ließ sich zum ersten Mal ein Kondensat ohne Magnetfalle erzeugen. Inzwischen stellen fernverstimmt Lichtfelder ein Standardwerkzeug zur Speicherung und Präparation ultrakalter Atome dar. Referenz [194] gibt eine allgemeine Einführung in die Theorie der optischen Dipolfallen und vermittelt einen guten Überblick über deren Einsatzgebiete.

Die konservative Lichtkraft lässt sich bereits in einem klassischen Modell begreifen: Demnach wird durch ein klassisches elektromagnetisches Feld der Frequenz  $\omega_L$  in einem Atom mit der Übergangsfrequenz  $\omega_A$  ein schwingendes Dipolmoment  $\mathbf{p} = \alpha(\omega_L)\mathbf{E}$  induziert. Hierbei bezeichnet  $\alpha$  die komplexe Polarisierbarkeit, welche von der treibenden Frequenz  $\omega_L$  abhängt, und  $\mathbf{E}$  ist der elektrische Feldvektor des Lichtes. Zeitgemittelt  $\langle \rangle$  über die optische Frequenz ergibt sich für den Dipol in dem treibenden Feld  $\mathbf{E}$  ein konservatives Potential der Form:

$$V_{\text{dip}} \propto -\langle \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \rangle \propto -\Re[\alpha(\omega_L)]I. \quad (4.1)$$

Die potentielle Energie ist somit direkt proportional zur Intensität  $I \propto E^2$  des Lichtfeldes und zum Realteil der Polarisierbarkeit  $\Re(\alpha)$ . Der Realteil beschreibt den Anteil des Dipolmomentes, der in Phase mit dem Lichtfeld schwingt. Ist die Frequenz des Lichtfeldes gegenüber der atomaren Resonanz rotverstimmt ( $\omega_L < \omega_A$ ), so schwingt das induzierte Dipolmoment parallel zu  $\mathbf{E}$ . Demnach wird das Atom in einem inhomogenen Lichtfeld in den Bereich maximaler Intensität gezogen. Ist das Lichtfeld hingegen blauverstimmt ( $\omega_L > \omega_A$ ), so schwingt das Dipolmoment antiparallel und das Atom wird aus dem Bereich maximaler Intensität heraus gedrängt.

Die konservative Dipolkraft resultiert aus der dispersiven Komponente der Atom-Licht-Wechselwirkung und wird durch  $\Re(\alpha)$  beschrieben. Demgegenüber wird durch den Imaginärteil  $\Im(\alpha)$  der Dipolanteil beschrieben, der  $90^\circ$  außer Phase schwingt. Dieser spiegelt die dissipative (d.h. die absorptive) Komponente der Atom-Licht-Wechselwirkung wider und führt zur spontanen Streuung von Licht mit einer Rate  $\Gamma_{\text{sc}} \propto \Im(\alpha)I$ .

Der funktionale Verlauf der Polarisierbarkeit  $\alpha(\omega_L)$  kann im Prinzip klassisch über das Lorentz'sche Oszillatormodell berechnet werden. Der exakte Wert für die „Dämpfung“ dieses Oszillators folgt jedoch erst im Rahmen eines semi-klassischen Modells, bei dem das Atom als Zwei-Niveau-System behandelt wird. Die „Dämpfung“  $\Gamma_A$  entspricht hier



## 4.1 Optische Dipolpotentiale

der Linienbreite des angeregten Zustandes (bzw. dessen spontaner Zerfallsrate) und ergibt sich aus dem Dipolmatrixelement zwischen Grund- und angeregtem Zustand. Da in konservativen Dipolfällen große Verstimmungen  $\Delta = \omega_L - \omega_A$  vorliegen, sind Sättigungseffekte vernachlässigbar und dementsprechend sind die Streuraten sehr klein ( $\Gamma_{sc} \ll \Gamma_A$ ). Unter diesen Voraussetzungen liefert bereits das klassische Modell eine extrem gute Näherung<sup>1</sup> für die Polarisierbarkeit  $\alpha(\omega_L)$ . Aus dem Real- und Imaginärteil der Polarisierbarkeit  $\alpha(\omega_L)$  lassen sich dann das Dipolpotential  $V_{dip}(\mathbf{r})$  und die spontane Streurrate  $\Gamma_{sc}(\mathbf{r})$  ableiten:

$$V_{dip}(\mathbf{r}) = -\frac{3\pi c^2}{2\omega_A^3} \left( \frac{\Gamma_A}{\omega_A - \omega_L} + \frac{\Gamma_A}{\omega_A + \omega_L} \right) I(\mathbf{r}), \quad (4.2)$$

$$\Gamma_{sc}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_A^3} \left( \frac{\omega_L}{\omega_A} \right)^3 \left( \frac{\Gamma_A}{\omega_A - \omega_L} + \frac{\Gamma_A}{\omega_A + \omega_L} \right)^2 I(\mathbf{r}). \quad (4.3)$$

Die Ortsabhängigkeit der potentiellen Energie und der spontanen Streurrate ergibt sich aus der Ortsabhängigkeit der Intensität. Für nicht zu große Verstimmungen ( $\Delta \ll \omega_A$ ) lassen sich die beiden Ausdrücke im Rahmen der Drehwellennäherung (rotating wave approximation, RWA) wie folgt vereinfachen:

$$V_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\omega_A^3} \frac{\Gamma_A}{\Delta} I(\mathbf{r}), \quad (4.4)$$

$$\Gamma_{sc}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_A^3} \left( \frac{\Gamma_A}{\Delta} \right)^2 I(\mathbf{r}). \quad (4.5)$$

Bei großen Verstimmungen, wie in unserer Dipolfalle, liefert die Näherung jedoch weniger genaue Ergebnisse. Für Rubidium ergibt sich mit der Näherung zum Beispiel ein Fehler von 2% in der Gittertiefe ( $\lambda_L = 755$  nm) und von 12% in der Dipolfallentiefe ( $\lambda_L = 1030$  nm). Dennoch lassen sich anhand der Näherungen 4.4 und 4.5 wesentliche Eigenschaften der Dipolfallen ableiten: Zum einen ist – wie bereits besprochen – das Vorzeichen des Potentials abhängig vom Vorzeichen der Verstimmung  $\Delta$ . Zum anderen skaliert das Potential wie  $I/\Delta$  und die spontane Streurrate wie  $I/\Delta^2$ . Im Rahmen der verfügbaren Laserleistung sollte daher die Verstimmung der Dipolfalle so groß wie möglich gewählt werden, um die spontane Lichtstreuung zu minimieren und somit ein möglichst konservatives Potential zu erzeugen.

Eine alternative, rein quantentheoretische Herleitung des Dipolpotentials erhält man im Modell der sogenannten dressed states [124, 195]. Hierbei wird das Atom als Zwei-Niveau-System mit einem Grundzustand  $|g\rangle$  und einem angeregten Zustand  $|e\rangle$  aufgefasst. Auch das Lichtfeld wird nun quantisiert, indem die Lichtmode durch  $n$ -Photonenzustände  $|n\rangle$  dargestellt wird. Die Atom-Licht-Wechselwirkung (Rabi-Kopplung) führt zu neuen

<sup>1</sup>Vorausgesetzt man verwendet den exakten Wert der Linienbreite  $\Gamma_A$ . Also einen Wert, der quantenmechanisch aus dem Dipolmatrixelement berechnet oder experimentell bestimmt wird.

## 4 Optische Potentiale

Eigenzuständen, den dressed states, welche sich als Linearkombination der beiden gekoppelten Produktzustände  $|g, n\rangle$  und  $|e, n-1\rangle$  ergeben. Folglich enthalten die neuen atomaren Eigenzustände jeweils eine kleine Beimischung des anderen Zustandes ( $|e\rangle$  bzw.  $|g\rangle$ ). Dies führt zu einem Energieversatz der atomaren Niveaus, der sogenannten AC-Stark-Verschiebung. Wegen der Intensitätsabhängigkeit der AC-Stark-Verschiebung verspürt ein Atom in einem inhomogenen Lichtfeld eine ortsabhängige potentielle Energie. Da Sättigungseffekte in einer fernverstimten Dipolfalle vernachlässigbar sind, bevölkert ein darin gefangenes Atom im Wesentlichen nur den Grundzustand. Demnach wird das Dipolpotential allein durch die AC-Stark-Verschiebung des Grundzustandes bestimmt.

In Alkaliatomen bedingt die Spin-Bahn-Kopplung eine Feinstrukturaufspaltung der angeregten Zustände. Hieraus ergeben sich die  $D_1$ - und die  $D_2$ -Übergänge  $S_{1/2} \rightarrow P_{1/2}$  bzw.  $S_{1/2} \rightarrow P_{3/2}$ . Darüber hinaus führt die Kopplung mit dem Kernspin  $I$  zu einer Hyperfeinaufspaltung der Grund- und der angeregten Zustände. Bei der Berechnung des Dipolpotentials muss diese Sub-Struktur berücksichtigt werden, indem über die Beiträge aller beteiligten Übergänge summiert wird. Außerdem hängt das Dipolpotential von dem Grundzustand, in dem sich das Atom befindet, sowie von der Laserpolarisation ab. Üblicherweise ist die Verstimmung der Dipolfalle groß gegenüber der Hyperfeinstrukturaufspaltung in den angeregten Zuständen ( $\sim 100$  MHz), sodass diese nicht explizit berücksichtigt werden muss. Unter diesen Bedingungen setzt sich das Gesamtdipolpotential gemäß folgender Gewichtung aus den Beiträgen  $V_{\text{dip},D1}$  und  $V_{\text{dip},D2}$  des  $D_1$ - und des  $D_2$ -Übergangs zusammen [194]:

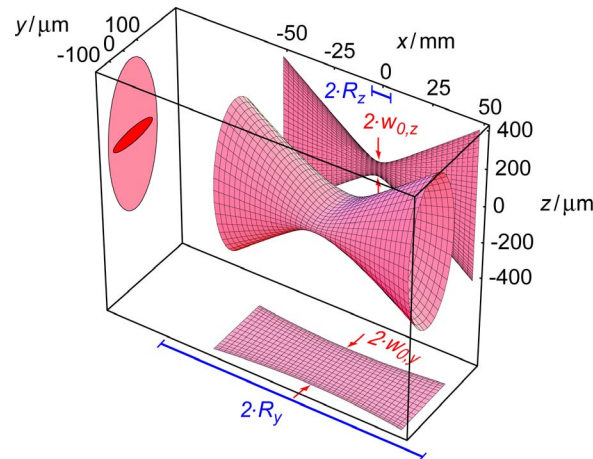
$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1 - \mathcal{P}g_F m_F}{3} V_{\text{dip},D1}(\mathbf{r}) + \frac{2 + \mathcal{P}g_F m_F}{3} V_{\text{dip},D2}(\mathbf{r}). \quad (4.6)$$

Die Beiträge  $V_{\text{dip},X}$  errechnen sich gemäß Gleichung 4.2 aus den Linienbreiten  $\Gamma_X$  und den Übergangsfrequenzen  $\omega_X$  der jeweiligen D-Linien, wobei  $X = \{D1, D2\}$  ist. Die entsprechenden Werte für  $^{87}\text{Rb}$  und  $^{40}\text{K}$  sind im Anhang angegeben. Der Faktor  $\mathcal{P}$  in Gleichung 4.6 ist abhängig von der Polarisation des eingestrahnten Lichtes [ $\mathcal{P} = 0$  für lineare Polarisation ( $\pi^0$ ) und  $\mathcal{P} = \pm 1$  für zirkuläre Polarisation ( $\sigma^\pm$ )]. Hierbei bezeichnet  $m_F$  das Zeeman-Niveau eines Atoms im Hyperfeingrundzustand  $F$  und  $g_F$  ist der zugehörige Landé-Faktor. Mit denselben Gewichtungsfaktoren wie in Gleichung 4.6, lässt sich auch die Gesamtstreurate  $\Gamma_{\text{sc}}$  gemäß Gleichung 4.3 aus den Beiträgen der  $D_1$ - und der  $D_2$ -Linie berechnen. Für linear polarisiertes Licht ist das Dipolpotential und die Streurate unabhängig vom Hyperfeingrundzustand  $|F, m_F\rangle$ , in dem sich das Atom befindet.

### 4.1.1 Fokussierter Gauß-Strahl

Bei roter Verstimmung werden die Atome in das Intensitätsmaximum eines Lichtfeldes gezogen. Somit lässt sich bereits mit einem einfachen fokussierten gaußschen Laserstrahl ein dreidimensionaler Einschluss der Atome erzielen. Die räumliche Intensitätsverteilung eines solchen Strahls, der entlang der  $x$ -Achse propagiert und ein elliptisches Strahlprofil

## 4.1 Optische Dipolpotentiale



**Abbildung 4.1:** Fokussierter Gauß-Strahl mit elliptischem Profil: Die dargestellte Einhüllende ist durch die Strahlradien  $w_y(x)$  und  $w_z(x)$  definiert und umschließt  $\sim 86,5\%$  der Leistung. Die Strahlparameter entsprechen denen unserer gekreuzten Dipolfalle: Wellenlänge  $\lambda_L = 1030$  nm, Strahltaillen im Fokus  $w_{0,y} = 150$   $\mu\text{m}$  und  $w_{0,z} = 40$   $\mu\text{m}$ . In den Projektionen sind die beiden Rayleighlängen  $R_y = 68,6$  mm und  $R_z = 4,9$  mm (blau) und das Strahlprofil des Fokuses (rot) angedeutet. In der Richtung seiner stärksten Fokussierung divergiert der Strahl am schnellsten. Man beachte, dass die  $x$ -Koordinate um einen Faktor hundert gestaucht dargestellt ist.

aufweist, lässt sich durch

$$I_x(\mathbf{r}) = \frac{2P}{\pi w_y(x) w_z(x)} \exp\left(-\frac{2y^2}{w_y^2(x)} - \frac{2z^2}{w_z^2(x)}\right) \quad (4.7)$$

beschreiben. Dabei entspricht  $P$  der Lichtleistung und  $w_\nu(x)$  bezeichnet die Strahlradien entlang der beiden Ellipsenachsen  $\nu = \{y, z\}$ . Die Radien geben den Abstand von der Strahlachse an, bei dem die Intensität auf  $1/e^2$  abgefallen ist. Sie hängen gemäß

$$w_\nu(x) = w_{0,\nu} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{R_\nu}\right)^2} \quad (4.8)$$

vom Ort  $x$  ab. Die Radien  $w_{0,\nu}$  im Fokus definieren die Strahltaillen (beam waists). Zusammen mit der Laserwellenlänge  $\lambda_L$  bestimmen sie die zugehörigen Rayleigh-Längen  $R_\nu = \pi w_{0,\nu}^2 / \lambda_L$ . Wie am Beispiel von Abbildung 4.1 dargestellt, geben die Rayleigh-Längen an, wie schnell sich der in  $x$ -Richtung propagierende Gauß-Strahl nach dem Fokus entlang  $y$  und  $z$  aufweitet<sup>2</sup>. Das aus dem fokussierten Laserstrahl resultierende zylindersymmetrische Fallenpotential kann im Fokusbereich durch Taylor-Entwicklung angenähert

<sup>2</sup>Man beachte, dass die beiden Rayleigh-Längen  $R_{y,z}$  jeweils eine Ausdehnung in  $x$ -Richtung angeben.

## 4 Optische Potentiale

werden:

$$V_x(\mathbf{r}) \approx V_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{R_y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{R_z} \right)^2 - 2 \left( \frac{y}{w_{0,y}} \right)^2 - 2 \left( \frac{z}{w_{0,z}} \right)^2 \right]. \quad (4.9)$$

Die Potentialtiefe  $V_0$  ergibt sich durch Einsetzen der maximalen Intensität (Intensität im Fokus)  $I_0 = 2P/(\pi w_{0,y} w_{0,z})$  in die Gleichungen 4.2 und 4.6. Aus der Entwicklung 4.9 erhält man die Fallenfrequenzen in axialer ( $x$ ) und transversaler ( $\nu = \{y, z\}$ ) Richtung:

$$\omega_x = \sqrt{\frac{|V_0|}{m} \left( \frac{1}{R_y^2} + \frac{1}{R_z^2} \right)}, \quad (4.10)$$

$$\omega_\nu = \sqrt{\frac{4|V_0|}{m w_{0,\nu}^2}}. \quad (4.11)$$

Typische Strahltaillen liegen in der Größenordnung von  $100 \mu\text{m}$ , während die Laserwellenlänge etwa einen Mikrometer beträgt. Wegen  $\omega_\nu/\omega_x \approx \pi w_0/\lambda_L$  sind somit die transversalen Frequenzen  $\omega_{y,z}$  zwei Größenordnungen höher als die axiale<sup>3</sup> Frequenz  $\omega_x$ . Ein einzelner Laserstrahl erzeugt also in der Regel eine stark anisotrope Dipolfalle.

In unserem Experiment werden Rubidium und Kalium in einer fernverstimmten Dipolfalle gefangen. Da die verwendete Wellenlänge von  $1030 \text{ nm}$  näher an den Rubidium-Übergängen liegt, verspürt  $^{87}\text{Rb}$  ein geringfügig tieferes Dipolpotential als  $^{40}\text{K}$ . Durch Einsetzen der atomaren Daten in Gleichung 4.2 und 4.6 folgt  $V_{\text{Rb}}/V_{\text{K}} \approx 1,15$  und damit ergibt sich für das Verhältnis der Fallenfrequenzen der beiden Spezies:

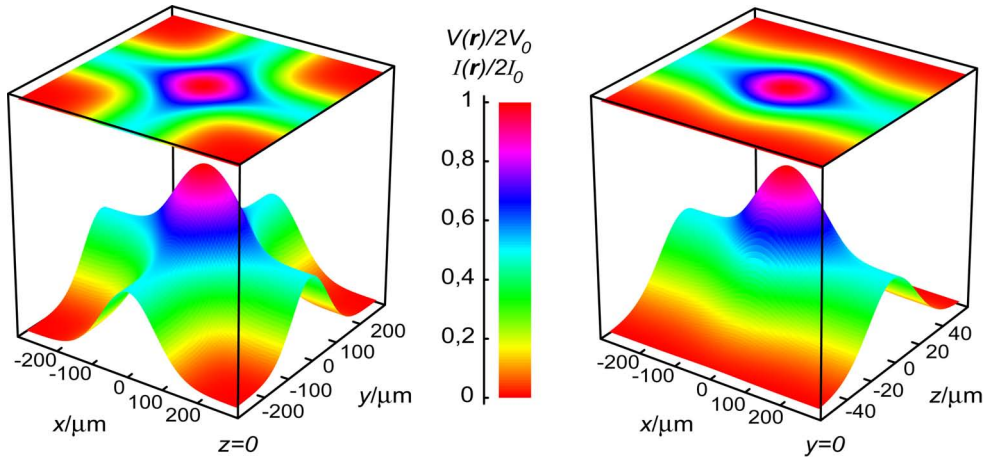
$$\frac{\omega_{\text{K}}}{\omega_{\text{Rb}}} = \sqrt{\frac{V_{\text{K}} m_{\text{Rb}}}{V_{\text{Rb}} m_{\text{K}}}} \approx 1,38. \quad (4.12)$$

### 4.1.2 Gekreuzte Dipolfalle

Mit einem einzelnen Laserstrahl lässt sich nur ein sehr asymmetrisches Fallenpotential erzeugen. Um einen weitaus isotroperen Einschluss der Atome zu erzielen, wird in unserem Experiment eine gekreuzte Dipolfalle verwendet. Dabei kreuzen sich zwei Laserstrahlen mit orthogonalen linearen Polarisierungen und identischen Strahltaillen unter einem Winkel von  $90^\circ$  in ihren Fokussen. Zum zeitlichen Herausmitteln eventuell verbleibender Kreuzinterferenzen werden die beiden Laserstrahlen zueinander um  $160 \text{ MHz}$  in den Frequenzen verschoben. Auch wenn die Polarisation in einem gewissen Raum- und Zeitpunkt elliptisch statt linear ist, so hat sie eine halbe Schwebungsperiode später ( $\sim 6 \text{ ns}$ ) das umgekehrte Vorzeichen. Im Zeitmittel ist das Lichtfeld daher effektiv linear polarisiert und somit die

<sup>3</sup>Im Folgenden ist mit „axial“ immer die Propagationsrichtung des Laserstrahls gemeint, während die „transversale“ Ebene senkrecht dazu steht.

## 4.1 Optische Dipolpotentiale



**Abbildung 4.2:** Theoretischer Potentialverlauf der gekreuzten Dipolfalle entlang der horizontalen und der vertikalen Schnittebene durch das Fallenzentrum. Die Strahlparameter entsprechen denen unserer Dipolfalle und sind in Abbildung 4.1 spezifiziert. Das zur besseren Übersicht invertiert dargestellte Potential  $V(\mathbf{r})$  ist direkt proportional zur räumlichen Intensitätsverteilung  $I(\mathbf{r})$ . Es gilt  $V(\mathbf{r})/2V_0 = I(\mathbf{r})/2I_0$ , wobei  $2V_0$  die absolute Fallentiefe und  $2I_0$  die maximale Intensität im Fokus ist. Man beachte, dass die  $z$ -Achse, entlang derer der Einschluss besonders steil ist, um einen Faktor fünf gestreckt ist. Die effektive Fallentiefe ist durch  $V_0$  gegeben. Im Fallenzentrum betragen die berechneten Streuraten  $\Gamma_{sc}/2\pi = 24 \text{ mHz} \cdot \frac{P}{W}$  für Rubidium und  $18 \text{ mHz} \cdot \frac{P}{W}$  für Kalium. Dabei bezeichnet  $P$  die Leistung in jedem der beiden Strahlen.

AC-Stark-Verschiebung gemäß Gleichung 4.6 unabhängig vom genauen Hyperfeingrundzustand  $|F, m_F\rangle$ , in dem sich das Atom befindet [196]. Im Folgenden sollen die Strahlen der gekreuzten Dipolfalle wie in Abbildung 3.20a entlang der  $x$ - und der  $y$ -Achse verlaufen und sich im Ursprung kreuzen. In einer solchen Falle lassen sich die Atome entlang aller drei Raumachsen stark einschließen. Verfügt jeder der beiden Strahlen über eine Leistung  $P$  und weisen beide ein elliptisches Profil mit einer Taille  $w_{0,h}$  in der Strahlebene und  $w_{0,v}$  senkrecht dazu auf, so lässt sich für kleine Ausdehnungen der atomaren Wolken das resultierende Dipolpotential  $V_{xy}$ , wie folgt nähern:

$$V_{xy}(\mathbf{r}) \approx 2V_0 \left[ 1 - \frac{x^2 + y^2}{w_{0,h}^2} - \frac{2z^2}{w_{0,v}^2} \right]. \quad (4.13)$$

Aufgrund der in der harmonischen Näherung vorliegenden Zylindersymmetrie ist es sinnvoll, den radialen Abstand  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$  einzuführen und die Strahlebene ( $x$ - $y$ ) als radiale Ebene zu bezeichnen. In Übereinstimmung mit dem vorherigen Abschnitt 4.1.1 gibt  $V_0$  die Tiefe einer Falle an, die nur von einem der beiden Strahlen gebildet wird. Somit errechnet sich  $V_0$  wie in Abschnitt 4.1.1 beschrieben mit den Ersetzungen  $w_{0,y} = w_{0,h}$  und  $w_{0,z} = w_{0,v}$ . Da, wie in Abbildung 4.2 zu erkennen, die Atome den steilen Bereich der

## 4 Optische Potentiale

---

gekreuzten Dipolfalle entlang der beiden Laserstrahlen verlassen können und dann quasi frei sind, ist die effektive Falltiefe durch  $V_0$  und nicht etwa durch  $2V_0$  gegeben. In der Näherung 4.13 wird nur der Einschluss durch die transversalen Krümmungen der beiden Laserstrahlen berücksichtigt, da die axialen Krümmungen demgegenüber vernachlässigbar sind. Daraus folgt, dass die Fallenfrequenz in der radialen Ebene in sehr guter Näherung durch Gleichung 4.11 gegeben ist:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{4|V_0|}{mw_{0,h}^2}} \quad (4.14)$$

Ganz allgemein gilt für die Überlagerung mehrerer harmonischer Fallen, dass sich die Einzelfrequenzen quadratisch zum Quadrat der Gesamtfrequenz aufaddieren. Demnach gilt

$$\omega_z^2 = 2 \cdot \frac{4|V_0|}{mw_{0,v}^2}, \quad (4.15)$$

da entlang der  $z$ -Achse sowohl der transversale Einschluss vom  $x$ - als auch vom  $y$ -Strahl wirkt.

### 4.1.3 Gekreuzte Dipolfalle im Schwerfeld

In der gekreuzten Dipolfallen lassen sich die Rubidium- und Kaliumatome unabhängig von ihren Hyperfeinzuständen fangen und mittels magnetischer Feshbach-Resonanzen in ihrer Wechselwirkung beeinflussen. Eine wichtige Voraussetzung für die Beobachtung von heteronuklearen Wechselwirkungen oder für die Erzeugung heteronuklearer Moleküle ist ein guter räumlicher Überlapp zwischen den beiden unterschiedlich schweren Spezies der Mischung. Auch für das sympathetische Kühlen in der Dipolfalle ist, unabhängig von der Falltiefe, ein guter räumlicher Überlapp zwischen den beiden Spezies notwendig.

#### Minimieren des gravitativen Versatzes

Aufgrund ihrer unterschiedlichen Schwerkraft werden die Rubidium- und Kaliumatome in einer Dipolfalle im Allgemeinen verschieden weit nach unten „durchhängen“. In einer hinreichend tiefen gekreuzten Dipolfalle verspüren die Atome der Masse  $m$  gemäß Gleichung 4.13 nur den harmonischen Anteil des Dipolpotentials. Wirkt die Schwerkraft mit einer Beschleunigung  $ge_z$  senkrecht zur Strahlebene, so lässt sich das resultierende Gesamtpotential  $V_{\text{tot}}(\mathbf{r}) = V_{xy}(\mathbf{r}) + mgz$  mit Gleichung 4.14 und 4.15 wie folgt annähern:

$$V_{\text{tot}}(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{2}m(\omega_r^2 r^2 + \omega_z^2 z^2) + mgz. \quad (4.16)$$

Das heißt, für genügend tiefe Fallen bleibt der harmonische Einschluss auch unter dem Einfluss der Schwerkraft erhalten, jedoch verschiebt sich die Gleichgewichtsposition gegenüber dem ungestörten Potential um  $\Delta z = -g/\omega_z^2$ . Die Massenabhängigkeit der Verschiebung ist gemäß Gleichung 4.15 in der Fallenfrequenz  $\omega_z$  enthalten. Aufgrund ihrer

## 4.1 Optische Dipolpotentiale

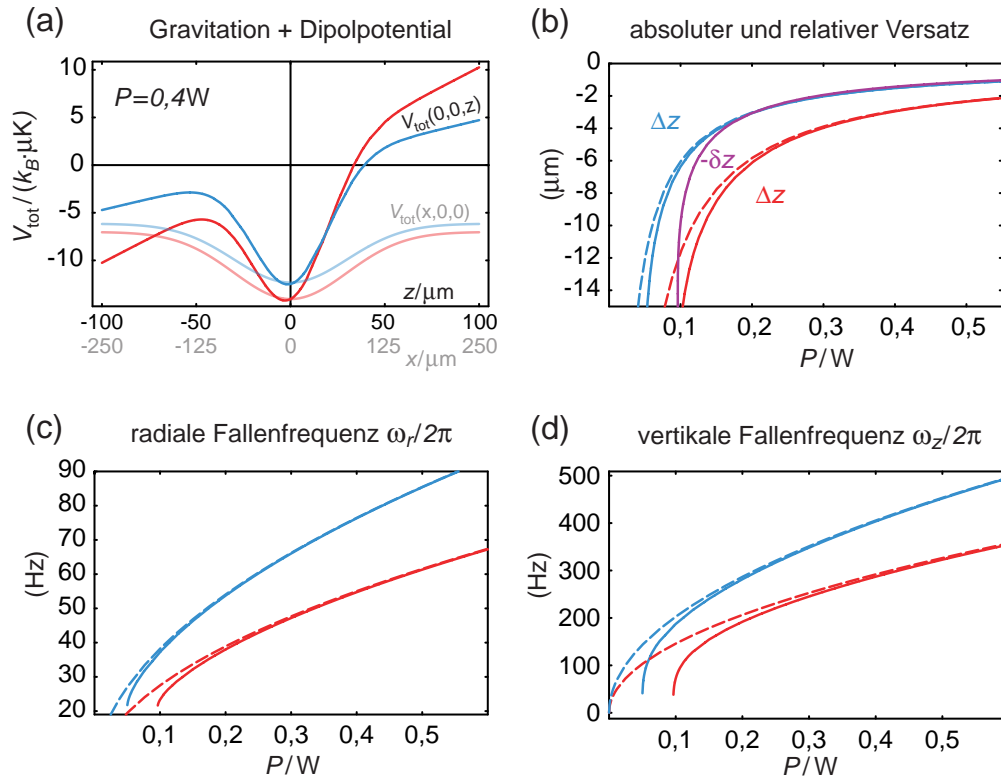
verschiedenen Massen erfahren Rubidium und Kalium einen unterschiedlichen Versatz  $\Delta z$ . Hieraus resultiert ein differentieller Versatz  $\delta z$ , der die relative Verschiebung zwischen den Schwerpunkten der beiden Wolken angibt und auch als differential gravitational sag bezeichnet wird:

$$\delta z = \frac{g}{\omega_{\text{Rb},z}^2} - \frac{g}{\omega_{\text{K},z}^2}. \quad (4.17)$$

Ein Ansatz, den differentiellen Versatz  $\delta z$  zu minimieren, besteht darin, die Laserwellenlänge so zu wählen, dass die Fallenfrequenzen von Rubidium und Kalium miteinander übereinstimmen:  $\omega_{\text{Rb},z} = \omega_{\text{K},z}$ . Laut Gleichung 4.15 bedeutet dies, dass das Verhältnis der Dipolpotentiale  $V_{\text{Rb}}(\mathbf{r})/V_{\text{K}}(\mathbf{r})$  mit dem Massenverhältnis  $m_{\text{Rb}}/m_{\text{K}}$  übereinstimmen muss. Durch Auswertung von Gleichung 4.2 und 4.6 lässt sich zeigen, dass diese Bedingung bei einer Wellenlänge von 807,5 nm erfüllt wird. Bei dieser Wellenlänge ist der Versatz im Schwerfeld für beide Elemente identisch und somit der räumliche Überlapp der beiden Atomwolken perfekt. Doch ist dann die Dipolfalle für Rubidium mehr als doppelt so tief wie für Kalium, was ein sympathetisches Kühlen des Kaliums innerhalb der Dipolfalle unmöglich macht. Dieses Problem kann durch die Überlagerung einer zweiten, fern-rotverstimmten Dipolfalle gelöst werden [197]. In dieser Konfiguration verfügt das 807-nm-Licht nur über soviel Leistung, dass es gerade die Gravitation kompensiert. Die Strahlen des fernverstimmten Lichts werden auf die Gleichgewichtsposition der Atome justiert und erzeugen für beide Spezies ein nahezu identisches Potential. Über die Leistung des fernverstimmten Lichts lässt sich dann die Falltiefe variieren.

Der in unserem Experiment verfolgte Ansatz basiert darauf, für beide Elemente den *absoluten* Versatz  $\Delta z$  zu minimieren. Um dies umzusetzen, müssen die vertikalen Fallenfrequenzen für Rubidium und Kalium möglichst groß sein. In einer gekreuzten Dipolfalle wird dies dadurch erreicht, dass die Strahlen senkrecht zur Schwerkraft verlaufen (entlang der horizontalen  $x$ - $y$ -Ebene) und ein elliptisches Strahlprofil mit kleiner vertikaler Taille  $w_{0,v}$  aufweisen. Hieraus resultiert eine oblate Falle, bei der die vertikale Fallenfrequenz  $\omega_z$  um einen Faktor  $\alpha = \sqrt{2}w_{0,h}/w_{0,v}$  größer ist als die radiale Fallenfrequenz  $\omega_r$ . In einer solchen Falle ist selbst bei geringer Tiefe noch ein steiler vertikaler Einschluss möglich. Dies garantiert beim evaporativen Kühlen durch Verringern der Falltiefe bis zuletzt einen guten räumlichen Überlapp zwischen den beiden Spezies. Das große Aspektverhältnis der Falle erlaubt es, trotz des steilen vertikalen Einschlusses geringe mittlere Fallenfrequenzen  $\bar{\omega} = (\omega_z \omega_r^2)^{1/3}$  zu realisieren und somit atomare Mischungen mit nicht zu hohen Dichten zu präparieren. In unserem Aufbau liefert die oblate Dipolfalle zugleich den externen Einschluss für das optische Gitter. Dank der oblaten Form lassen sich entlang der horizontalen Gitterebenen sehr ausgedehnte und recht homogene periodische Systeme präparieren. Ein geringer absoluter Versatz  $|\Delta z|$  vereinfacht zudem die Justage des optischen Gitters, da die vertikale Position der Atomwolke wenig mit der Dipolfalltiefe (insbesondere im Augenblick des Transfers der Atome ins Gitter) variiert.

## 4 Optische Potentiale



**Abbildung 4.3:** (a) Numerisch berechnetes Potential der gekreuzten Dipolfalle im Schwerfeld für Rubidium (rot) und Kalium (blau) bei einer Leistung von  $P = 0,4\text{W}$  pro Strahl. Man beachte die verschiedenen Skalierungen der Koordinatenachse für  $V_{\text{tot}}(0,0,z)$  und  $V_{\text{tot}}(x,0,0)$ . (b) Absoluter Versatz  $\Delta z$ , differentieller Versatz  $\delta z$  (violett), (c) radiale und (d) vertikale Fallenfrequenzen als Funktion von  $P$ . Die Ergebnisse der entsprechenden harmonischen Näherungen sind gestrichelt dargestellt.

### Exakte Bestimmung der charakteristischen Fallengrößen

Unter Berücksichtigung der Schwerkraft ist eine exakte Bestimmung der charakteristischen Fallengrößen wie Frequenz, effektive Fallentiefe und Versatz nur numerisch möglich. Entsprechende Berechnungen werden am Beispiel unserer Dipolfalle durchgeführt. Die zugehörigen Strahlparameter sind in Abbildung 4.1 spezifiziert. Abbildung 4.3a zeigt das unter dem Einfluss der Schwerkraft resultierende Gesamtpotential  $V_{\text{tot}}$  für Rubidium (rot) und Kalium (blau) bei einer typischen Laserleistung von  $P = 0,4\text{W}$  pro Strahl. Entlang der vertikalen Achse wird das Dipolpotential durch die Schwerkraft verzerrt. Dessen Minimum verschiebt sich für Rubidium (Kalium) um  $|\Delta z| = 3\mu\text{m}$  ( $1,5\mu\text{m}$ ) nach unten. Ein Bose-Einstein-Kondensat und ein entartetes Fermigas mit jeweils  $2 \cdot 10^5$  Atomen besitzen in dieser Falle entlang der vertikalen Achse eine Ausdehnung von etwa 5 bzw.  $13\mu\text{m}$ . Der differentielle Versatz ist mit  $\delta z = 1,5\mu\text{m}$  so gering, dass die beiden Wolken vollstän-



dig überlappen. In den Abbildungen 4.3b-d sind die Verschiebungen sowie die Fallenfrequenzen als Funktion der Laserleistung  $P$  aufgetragen. Dabei bezeichnet  $P$  die Leistung in jedem einzelnen der beiden Laserstrahlen. Neben den exakten numerischen Berechnungen sind die Ergebnisse der harmonischen Näherungen (Gleichung 4.14, 4.15 und 4.17) gestrichelt dargestellt. Mit abnehmender Falltiefe werden die Fehler der Näherungen immer größer. Bei den Frequenzen sind die Abweichungen auf den vernachlässigten Versatz  $\Delta z$  bezüglich des Fallenzentrums zurückzuführen. Unterhalb einer minimalen Leistung von  $P_{\min} \approx 100 \text{ mW}$  ( $\approx 50 \text{ mW}$ ) reicht die Dipolkraft schließlich nicht mehr aus, um das Rubidium (Kalium) gegen die Schwerkraft zu halten. Die Justage der gekreuzten Dipolfalle ist kritisch auf die Ausrichtung der elliptischen Strahlprofile bezüglich der Schwerkraft und auf ein zentrisches Kreuzen der beiden Laserstrahlen. Anhand eines Vergleichs von  $P_{\min}$  bzw. der Fallenfrequenzen aus Abbildung 4.3 mit den gemessenen Werten lässt sich abschließend die richtige Justage der Dipolfalle überprüfen.

### Effektive Falltiefe im Schwerfeld

Betrachtet man das Gesamtpotential  $V_{\text{tot}}(\mathbf{r}) = V_{xy}(\mathbf{r}) + mgz$  der gekreuzten Dipolfalle im Schwerfeld bei hohen Laserleistungen  $P$ , so kann die Schwerkraft gegenüber dem Dipolpotential  $V_{xy}(\mathbf{r})$  vernachlässigt werden. Um die Falle zu verlassen, haben Atome, die sich genau entlang der Strahlachsen bewegen, die niedrigste Potentialschwelle zu überwinden. Damit ist die effektive Falltiefe näherungsweise durch die der reinen Dipolfalle gegeben:  $\Delta V_{\text{eff}} \approx V_0$ . Bedingt durch den zunehmenden relativen Einfluss der Schwerkraft, taucht unterhalb einer kritischen Laserleistung  $P_{\text{cr}}$  abrupt eine neue, niedrigere Schwelle entlang der vertikalen  $z$ -Achse auf. Die effektive Falltiefe ist dann durch

$$\Delta V_{\text{eff}} = V_{\text{tot}}(0, 0, z_{\max}) - V_{\text{tot}}(0, 0, z_{\min}) \quad \text{für } P \leq P_{\text{cr}} \quad (4.18)$$

gegeben. Hierbei bezeichnen  $z_{\max}$  und  $z_{\min} = \Delta z$  die Positionen des lokalen Maximums beziehungsweise Minimums des Gesamtpotentials  $V_{\text{tot}}(0, 0, z)$  entlang der vertikalen Achse. Abbildung 4.4a zeigt die numerisch exakt ermittelten effektiven Falltiefen  $\Delta V_{\text{eff}}$  für Rubidium und Kalium (durchgehende Kurven). Am Beispiel von Rubidium wird gezeigt, dass der Verlauf der effektiven Falltiefe  $\Delta V_{\text{eff}}$  oberhalb von  $P_{\text{cr}}$  in guter Näherung durch  $V_0$  (grob gestrichelt) gegeben ist. Unterhalb von  $P_{\text{cr}}$  kann die effektive Falltiefe exakt durch Gleichung 4.18 (fein gestrichelte Kurve) wiedergegeben werden. Die kritische Laserleistung  $P_{\text{cr}}$  ist näherungsweise durch den Schnittpunkt der beiden gestrichelten Kurven gegeben. Zwar ist die hier aufgeführte Näherung für  $\Delta V_{\text{eff}}$  nach wie vor numerisch zu lösen, dies erweist sich jedoch als weitaus weniger aufwendig, als die exakte numerische Lösung, bei der die minimale Potentialschwelle im gesamten Raum gesucht werden muss.

Erst unterhalb von  $P_{\text{cr}}$  wird die effektive Falltiefe durch den Einfluss der Schwerkraft limitiert und erst dann wird die Falle für das schwere Rubidium flacher als für das leichte Kalium. Hieraus folgt, dass sich das Kalium nur für  $P < P_{\text{cr}}$  effizient sympathetisch in der Dipolfalle kühlen lässt. Um eine unnötige Evaporation des Kaliums zu vermeiden,

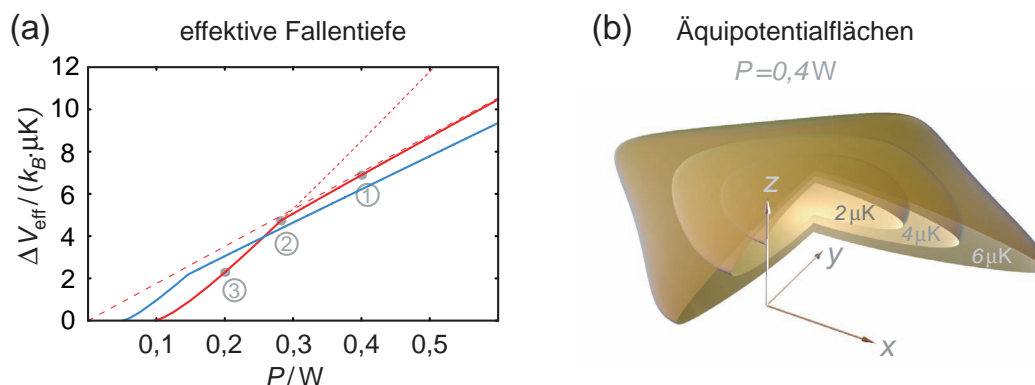
## 4 Optische Potentiale

---

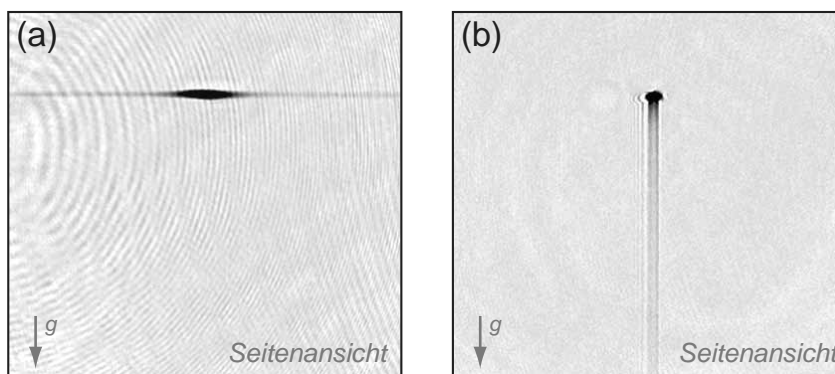
sollte die Mischung hinreichend weit vorgekühlt werden, bevor sie in die gekreuzte Dipolfalle transferiert wird. Erst der Unterschied in der Schwerkraft ermöglicht ein selektives Evaporieren des Rubidiums und somit ein sympathetisches Kühlen des Kaliums in einer ansonsten für beide Spezies etwa gleich tiefen Dipolfalle.

In Abbildung 4.6 sind für drei verschiedene Fallentiefen  $\Delta V_{\text{eff}}$  die Äquipotentialflächen dargestellt, entlang derer Rubidiumatome die Falle während der Evaporation verlassen können. Dabei entsprechen die Fallentiefen den drei in Abbildung 4.4a markierten Werten. Oberhalb von  $P_{\text{cr}}$  verlassen die Atome die Falle bevorzugt entlang der Strahlachsen, während sie unterhalb von  $P_{\text{cr}}$  direkt aus dem Zentrum „herausfallen“ können. Das unterschiedliche Evaporationsverhalten wird experimentell durch die In-situ-Absorptionsaufnahmen in Abbildung 4.5 bestätigt. Die Schwerkraft spielt nicht nur eine wichtige Rolle für die Spezies-Selektivität beim Evaporieren, sondern sie beeinflusst auch über die Form der Potentialschwellen die Effizienz des Evaporationsprozesses. Dieser Sachverhalt sollte zukünftig bei der Optimierung der Evaporationsrampen berücksichtigt werden.

## 4.1 Optische Dipolpotentiale



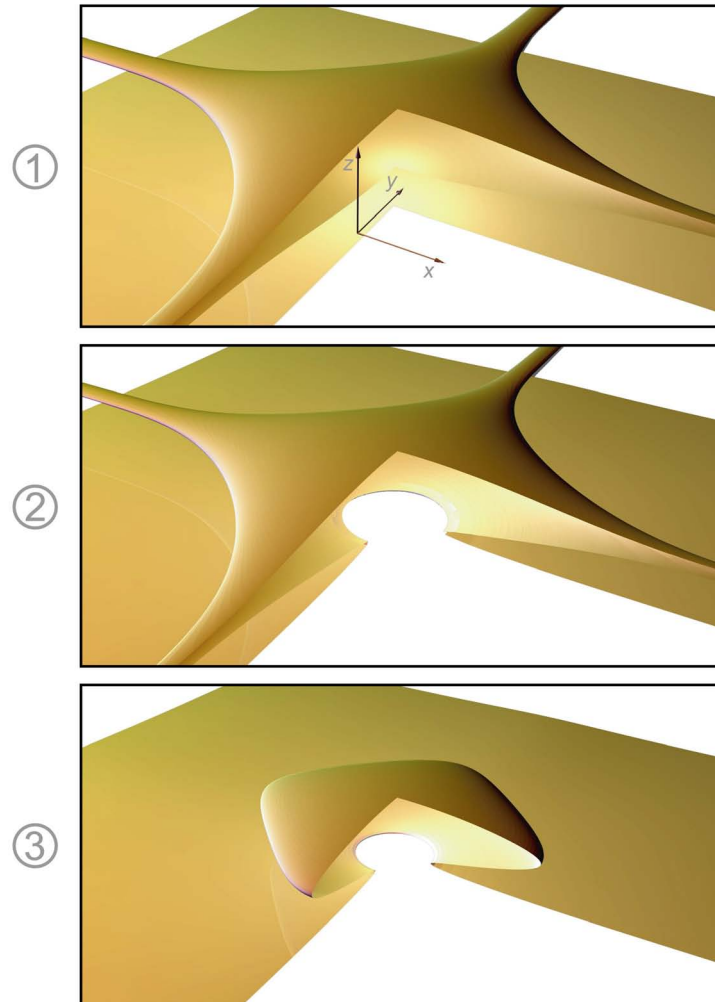
**Abbildung 4.4:** Gekreuzte Dipolfalle im Schwerfeld: **(a)** Effektive Fallentiefe  $\Delta V_{\text{eff}}$  für Rubidium (rot) und Kalium (blau) als Funktion der Strahlleistungen  $P$ . Für Rubidium ist zudem  $V_0(P)$  (grob gestrichelt) und der Verlauf aus Gleichung 4.18 (fein gestrichelt) wiedergegeben. Zu den drei markierten Fallentiefen sind in Abbildung 4.6 die zugehörigen Äquipotentialflächen dargestellt. Der Punkt ② definiert die kritische Laserleistung  $P_{\text{cr}} \approx 0,28 W$ . Unterhalb dieser Leistung verlassen die Rubidiumatome die Falle nicht mehr bevorzugt entlang der Laserstrahlen, sondern direkt aus dem Fallenzentrum. **(b)** Äquipotentialflächen einer gekreuzten Dipolfalle bei  $P = 0,4 W$  [Punkt ①]. Mit zunehmender Teilchenenergie  $E/k_B$  weicht die Fallengeometrie deutlich von dem Rotationsellipsoid eines harmonischen Potentials (Gl. 4.16) ab.



**Abbildung 4.5:** In-situ-Aufnahmen der gekreuzten Dipolfalle: **(a)** Thermische Atome in einer relativ tiefen Dipolfalle verlassen die Falle bevorzugt entlang der Strahlachsen. **(b)** Wohingegen die Atome bei einer flachen Falle direkt aus dem Fallenzentrum herausfallen. Letzteres ist am Beispiel eines Rb-Kondensats dargestellt, welches in Form eines Atomlasers entlang der Schwerkraft entweicht. Die Maßstäbe der beiden Abbildungen sind verschieden.

## 4 Optische Potentiale

Äquipotentialflächen der Rb-Evaporation

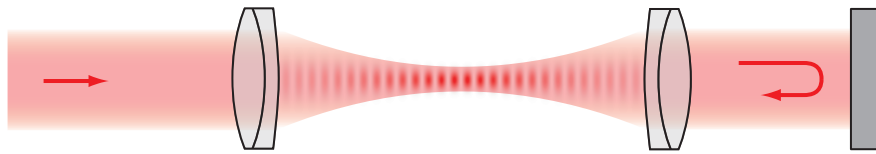


**Abbildung 4.6:** Rubidium-Äquipotentialflächen einer gekreuzten Dipolfalle im Schwerfeld bei drei verschiedenen Fallentiefen  $\Delta V_{\text{eff}}$  [siehe Markierungen in Abbildung 4.4a]: Die im Dreiviertelschnitt dargestellten Äquipotentialflächen entsprechen einer Energie, die 2 % über der jeweiligen Fallentiefe  $\Delta V_{\text{eff}}$  liegt. Somit geben die Flächen Pfade wieder, entlang derer das Rubidium die Falle während der Evaporation bevorzugt verlässt. In einer tiefen Falle [ $P = 0,4 \text{ W}$  ①] verlassen die Atome die Falle bevorzugt entlang der Strahlachsen. Demgegenüber ist eine flache Falle [ $P = 0,2 \text{ W}$  ③] durch die Schwerkraft so stark deformiert, dass die Atome direkt aus dem Fallenzentrum „herausfallen“ können. Am Übergangspunkt [mit der kritischen Leistung  $P_{\text{cr}} \approx 0,28 \text{ W}$  ②] verlassen die Atome die Falle sowohl entlang der Strahlachsen als auch unmittelbar über das Fallenzentrum.

## 4.2 Optische Gitterpotentiale

Statt einfacher Dipolfallen lassen sich über räumlich variierende Intensitätsmuster auch komplexere Potentiallandschaften realisieren. So nutzt man die Interferenz von entgegengesetzt propagierenden Laserstrahlen um periodische Potentiale aus Licht, sogenannte optische Gitter, zu erzeugen. Je nach der Verstimmung des Laserlichtes werden die Atome in den Knoten oder in den Bäuchen der optischen Stehwellen gefangen. Nachstehend wird die Struktur der Gitterpotentiale genauer untersucht.

### 4.2.1 Eindimensionales Gitter



**Abbildung 4.7:** Ausbildung einer Stehwelle durch Rückreflexion eines Laserstrahls.

Die einfachste Form eines optischen Gitters stellt das 1D-Gitter dar. Es wird realisiert, indem man einen fokussierten gaußschen Laserstrahl in sich zurück reflektiert. Da die Rayleigh-Länge in der Regel sehr viel größer ist als der Strahldurchmesser, wird diese von nun an als unendlich angenommen. Das periodische Potential der Stehwelle ergibt sich dann zu:

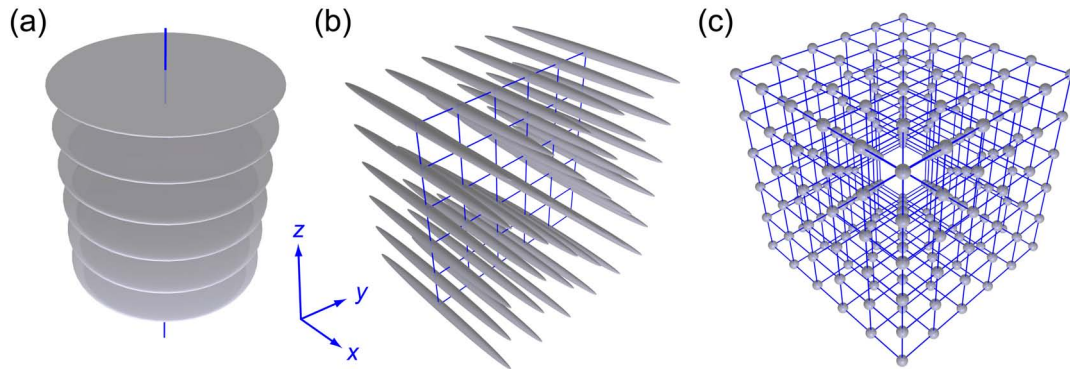
$$V_{\text{1D}}(\mathbf{r}) = V_z e^{-2 \frac{x^2 + y^2}{w_z^2}} \cos^2(kz) \approx V_z \left( 1 - 2 \frac{x^2 + y^2}{w_z^2} \right) \cos^2(kz). \quad (4.19)$$

Hierbei propagiert das Licht entlang der  $z$ -Achse und  $k = 2\pi/\lambda$  bezeichnet den Betrag des zugehörigen Wellenvektors. Der Abstand zwischen den periodisch angeordneten Potentialmulden ist durch die halbe Wellenlänge  $\lambda/2$  gegeben. Der Laserstrahl weist ein rotationssymmetrisches Strahlprofil mit einer Strahltaile<sup>4</sup>  $w_z$  auf. Aufgrund der konstruktiven Interferenz zwischen der vor- und der zurücklaufenden Laserwelle entspricht die maximale Tiefe  $V_z$  des optischen Gitters viermal der Tiefe  $V_{0,z}$  einer entsprechenden Dipolfalle ohne Rückreflex (siehe Abschnitt 4.1.1). Häufig wird die Tiefe des Gitters  $V_z = s_z E_r$  in der „natürlichen Einheit“ der Rückstoßenergie  $E_r = \hbar^2 k^2 / 2m$  angegeben. Dabei bezeichnet  $m$  die Atommasse.

Ist das Laserlicht gegenüber den atomaren Übergängen rotverstimmt, so ist  $V_z < 0$  und die Atome werden in den Bäuchen der Stehwelle gefangen. Umgekehrt ist für blauverstimmt Laserlicht  $V_z > 0$  und die Atome halten sich bevorzugt in den Knoten der Stehwelle auf. Die individuellen Potentialmulden haben die Form von oblaten Scheiben (siehe

<sup>4</sup>Die Strahltaile entspricht dem Radius, bei dem die Intensität auf  $1/e^2$  des Maximalwertes abgefallen ist.

## 4 Optische Potentiale



**Abbildung 4.8:** Räumliche Struktur des 1D-, 2D- und 3D-Gitters: **(a)** Eine entlang der  $z$ -Achse verlaufende Stehwelle bildet ein 1D-Gitter. In diesem formen die Atomwolken oblate Scheiben, welche parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene ausgerichtet sind. **(b)** Durch Überlagerung einer weiteren Stehwelle entlang der  $y$ -Achse erhält man ein 2D-Gitter. Hier sind die Atome in langgestreckten Röhren eingeschlossen, welche senkrecht zur Strahlebene verlaufen. **(c)** Stehwellen entlang aller drei Raumachsen bilden die Kristallstruktur des 3D-Gitters.

Abbildung 4.8a). Bei rotverstimmt Laserlicht bedingt die gaußförmige Einhüllende der Intensitätsverteilung zusätzlich einen transversalen ( $x$ - $y$ ) Einschluss der Atome. Bei blauverstimmt Laserlicht sind die Atome nur entlang der Stehwelle ( $z$ ) eingeschlossen. Der transversale Einschluss muss hier durch die Überlagerung eines weiteren Fallenpotentials, wie etwa dem einer Magnetfalle oder einer rotverstimmt Dipolfalle, erzeugt werden.

### 4.2.2 Mehrdimensionale Gitter

Durch die Überlagerung mehrerer Stehwellen entlang unterschiedlicher Raumrichtungen lassen sich mehrdimensionale Gitter erzeugen. So bilden zwei zueinander senkrecht verlaufende Stehwellen ein 2D-Gitter. In diesem ordnen sich die Atome, wie Abbildung 4.8b illustriert, in Form langgestreckter Schläuche an, welche vertikal zur Strahlebene aufgereiht sind. Durch die Wahl zueinander orthogonaler linearer Polarisationen werden Kreuzinterferenzen zwischen den verschiedenen Stehwellen vermieden. Zusätzlich verwendet man auf den verschiedenen Achsen leicht unterschiedliche Laserfrequenzen (einige 10 MHz), um etwaige durch kleine Abweichungen der Polarisationen bedingte Kreuzinterferenzen zeitlich herauszumitteln (siehe Abschnitt 4.1.2). In gleicher Weise wird in unserem Experiment durch die Überlagerung von drei zueinander senkrecht verlaufender Stehwellen ein 3D-Gitter mit einfach kubischer Symmetrie realisiert. Aufgrund orthogonaler Polarisationen und unterschiedlicher Laserfrequenzen sind die einzelnen Stehwellen voneinander unabhängig und das Gesamtpotential ergibt sich aus der Summe der Einzelpotentiale:

$$V_{3D}(\mathbf{r}) = V_x e^{-2 \frac{y^2+z^2}{w_x^2}} \cos^2(kx) + V_y e^{-2 \frac{x^2+z^2}{w_y^2}} \cos^2(ky) + V_z e^{-2 \frac{x^2+y^2}{w_z^2}} \cos^2(kz). \quad (4.20)$$

Dabei sind  $w_\nu$  die Tailen der Gauß-Strahlen, die entlang der Achsen  $\nu \in \{x, y, z\}$  verlaufen, und  $V_\nu$  sind die zugehörigen Gittertiefen.

In einem tiefen 3D-Gitter sind die Atome auf individuellen Gitterplätzen gefangen. Wie in Abbildung 4.8c gezeigt, weist eine solche Anordnung, ähnlich zu einem Festkörper, eine einfach kubische Kristallstruktur auf. Ist das Gitter hinreichend tief, so kann der Einschluss auf den einzelnen Plätzen durch ein harmonisches Potential angenähert werden. Für ein Gitter, welches entlang der Achse  $\nu$  eine Tiefe  $V_\nu = s_\nu E_r$  aufweist, beträgt die entsprechende Fallenfrequenz auf den Gitterplätzen

$$\omega_{G,\nu}^2 = \frac{2k^2}{m} |V_\nu| = \frac{4E_r^2}{\hbar^2} |s_\nu|. \quad (4.21)$$

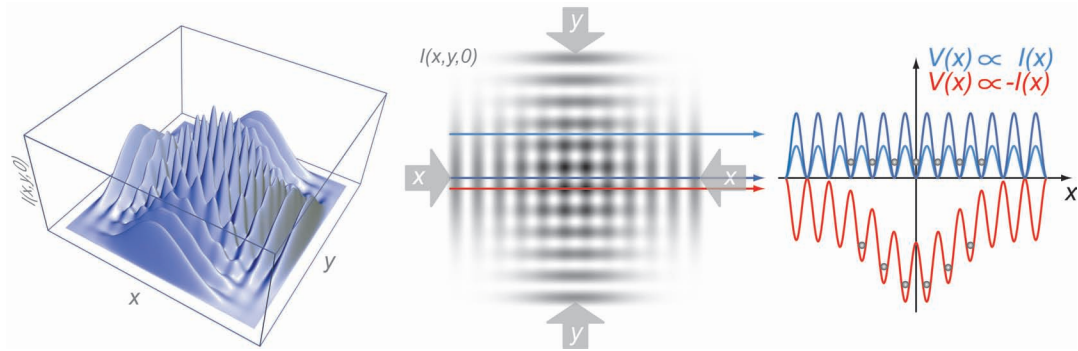
Die Betragsstriche drücken aus, dass es für die Fallenfrequenz unerheblich ist, ob die Atome in den Intensitätsmaxima eines rotverstimmten Gitters ( $V_\nu < 0$ ) oder in den Intensitätsminima eines blauverstimmten Gitters ( $V_\nu > 0$ ) gefangen sind.

### 4.2.3 Externes Potential

Aufgrund des gaußförmigen Profils der Laserstrahlen weicht das Gitterpotential von einem homogenen periodischen Potential ab. In welcher Weise die Einhüllende der Intensitätsverteilung das Potential beeinflusst, wird maßgeblich durch das Vorzeichen der Laserverstimmung bestimmt (man vergleiche die nachstehenden Punkte mit Abbildung 4.9):

- In einem rotverstimmten Gitter halten sich die Atome in den lokalen Intensitätsmaxima auf und die Einhüllende gibt die Tiefe der jeweiligen Potentialtöpfchen vor. Somit sorgt die gaußförmige Einhüllende auch für den externen Einschluss der Atome.
- In einem blauverstimmten Gitter halten sich die Atome in den lokalen Intensitätsminima auf. Im Fall vollständiger Interferenz verschwindet die Intensität im Zentrum eines jeden Gitterplatzes, sodass die Atome in erster Näherung nichts von der Einhüllenden verspüren. Unter diesen Annahmen führt die gaußförmige Intensitätsverteilung nur zu einer Variation der Barrierenhöhe, nicht aber zu einem Energieversatz zwischen den Potentialtöpfchen. In der Realität weisen die Atome jedoch eine endliche Eindringtiefe in die Potentialbarrieren auf und Reflexionsverluste verursachen eine unvollständige (destruktive) Interferenz. Folglich sind die Atome endlichen Intensitäten ausgesetzt und zusammen mit dem gaußförmigen Strahlprofil und der blauen Verstimmung führt dies zu einem schwachen, repulsiven externen Potential. Mit der Variation der Barrierenhöhen geht zudem eine Änderung der quantenmechanischen Nullpunktenergien zwischen den einzelnen Gitterplätzen einher. Dies ruft einen zusätzlichen repulsiven externen Beitrag hervor.

## 4 Optische Potentiale



**Abbildung 4.9:** Schematische Darstellung der Intensitätsverteilung  $I(x, y, z = 0)$  in einem 2D-Gitter als Höhen- und als Dichteprofil. Verschiedene Schnitte verdeutlichen den Einfluss des Strahlprofils der  $y$ -Stehwelle auf den Potentialverlauf parallel zur  $x$ -Achse. Der rote Schnitt verläuft durch einen Bauch der  $y$ -Stehwelle und spiegelt somit den Fall eines rotverstimmten Gitters wider. Die blauen Schnitte verlaufen jeweils durch Knoten der  $y$ -Stehwelle und spiegeln damit den Fall eines blauverstimmten Gitters wider.

Für die Bestimmung der einzelnen Potentialbeiträge gehen wir davon aus, dass das Potential des 3D-Gitters für Abstände vom Zentrum, die klein gegenüber der Strahltaile sind, durch ein homogenes periodisches Potential und ein externes harmonisches Potential angenähert werden kann:

$$V_{3D}(\mathbf{r}) \approx V_x \cos^2(kx) + V_y \cos^2(ky) + V_z \cos^2(kz) + \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2). \quad (4.22)$$

Die zugehörigen Größen  $V_\nu$  und  $\omega_\nu^2$  sollen im Folgenden, unter Berücksichtigung von Reflexionsverlusten bei der Erzeugung der Stehwellen, bestimmt werden. Im Allgemeinen wird ein Laserstrahl bei der Reflexion und beim Durchlaufen der optischen Elemente in seiner Intensität verringert. Ist die Intensität des rückreflektierten Strahles am Ort der Atome um einen Faktor  $0 < R_x < 1$  gegenüber dem einlaufenden Strahl abgeschwächt, so findet bei der Interferenz keine vollständige Auslöschung mehr statt<sup>5</sup>. Für das Potential der resultierenden Stehwelle ergibt sich dann statt Gleichung 4.19:

$$V_{1D}(\mathbf{r}) = V_{0,z} e^{-2 \frac{x^2 + y^2}{w_z^2}} (1 + R_z - 2\sqrt{R_z} + 4\sqrt{R_z} \cos^2(kz)) \quad (4.23a)$$

$$\approx V_{0,z} \left(1 - 2 \frac{x^2 + y^2}{w_z^2}\right) (1 + R_z - 2\sqrt{R_z} + 4\sqrt{R_z} \cos^2(kz)). \quad (4.23b)$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich für die einzelnen Achsen  $\nu \in \{x, y, z\}$  eines 3D-Gitters. Hierbei bezeichnet  $V_{0,\nu}$  die maximale Tiefe einer Dipolfalle, welche nur durch den ein-

<sup>5</sup>Neben Reflexions- und Absorptionsverlusten führen auch unterschiedliche Strahltaillen zwischen dem vor- und dem zurücklaufenden Strahl zu einer unvollständigen Interferenz. Berücksichtigt man für unser Experiment einen Fehler zwischen den Strahltaillen von etwa  $10 \mu\text{m}$ , so ergibt sich zusammen mit den Verlusten eine „effektive Reflektivität“ von  $0,75 \leq R_\nu \leq 0,9$ .



## 4.2 Optische Gitterpotentiale

laufenden Strahl gebildet wird. Bei vollständiger Reflexion  $R_\nu = 1$  gilt  $V_\nu = 4V_{0,\nu}$  und wir erhalten wieder den Ausdruck aus Gleichung 4.19. Demgegenüber ist bei endlichen Intensitätsverlusten die Tiefe der Potentialtöpfchen entlang der Achse  $\nu$  durch

$$V_\nu = 4\sqrt{R_\nu}V_{0,\nu} \quad (4.24)$$

gegeben. Gemäß Gleichung 4.21 verringert sich die zugehörige Fallenfrequenz  $\omega_{G,\nu}$  auf den Gitterplätzen um einen Faktor  $\sqrt[4]{R_\nu}$ , denn es gilt

$$\omega_{G,\nu}^2 = \frac{8k^2}{m} \sqrt{R_\nu} |V_{0,\nu}|. \quad (4.25)$$

Vernachlässigt man zunächst die endliche Eindringtiefe in die Potentialbarrieren, so definieren beim rotverstimmten Gitter die lokalen Intensitätsmaxima ( $\cos^2(kx_\nu) = 1$ ) das Potential, welches den externen Einschluss erzeugt. Entsprechend definieren die lokalen Intensitätsminima ( $\cos^2(kx_\nu) = 0$ ) das externe Potential des blauerstimmten Gitters. Setzt man diese beiden Fälle in Gleichung 4.23b und die entsprechenden Gleichungen für die beiden anderen Gitterachsen ein, so erhält man das externe Potential des 3D-Gitters in harmonischer Näherung:

$$\omega_z^2 = \frac{4}{m} \left( \frac{-V_{0,x}(1 + R_x \pm 2\sqrt{R_x})}{w_x^2} + \frac{-V_{0,y}(1 + R_y \pm 2\sqrt{R_y})}{w_y^2} \right). \quad (4.26)$$

Dabei gilt das obere Vorzeichen für das rot- und das untere Vorzeichen für das blauerstimmte Gitter. Die Ausdrücke für  $\omega_x^2$  und  $\omega_y^2$  ergeben sich aus Gleichung 4.26 durch zyklisches Vertauschen der Indizes  $\nu \in \{x, y, z\}$ .

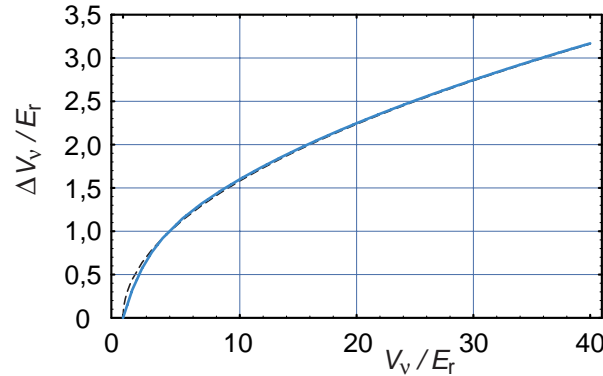
Nun halten sich die Atome nicht nur in den Zentren der Gitterplätze auf, sondern sie verfügen auch über eine endliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit innerhalb der Potentialbarrieren. Dies führt zu einem zusätzlichen Potentialversatz. Für eine entlang der Achse  $\nu$  verlaufende Stehwelle der effektiven Tiefe  $V_\nu = 4\sqrt{R_\nu}V_{0,\nu} = s_\nu E_r$  beträgt dieser

$$\Delta V_\nu = V_\nu \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(kx_\nu) |w(x_\nu - x_{\nu,j})|^2 dx_\nu \approx \text{sign}(s_\nu) \frac{1}{2} E_r \sqrt{|s_\nu|}. \quad (4.27)$$

Hierbei ist  $w(x_\nu - x_{\nu,j})$  die Wannier-Funktion für ein Teilchen im untersten Band und am Ort des  $j$ -ten Gitterplatzes (siehe Gl. 5.21). Im Bereich des Gitterplatzes lässt sich die Wannier-Funktion sehr gut durch einen gaußförmigen Oszillatorgrundzustand annähern. Im Gegenzug kann der Energieversatz, verursacht durch den Überlapp mit den Potentialbarrieren, durch die potentielle Energie des harmonischen Oszillatorgrundzustandes wiedergegeben werden<sup>6</sup>. Somit ergibt sich der rechte Ausdruck in Gleichung 4.27. Wie aus

<sup>6</sup>Die potentielle Energie eines harmonischen Oszillatorgrundzustandes beträgt gerade die Hälfte seiner Nullpunktenergie  $\hbar\omega_{G,\nu}/2$  (Gl. 4.21).

## 4 Optische Potentiale



**Abbildung 4.10:** Energieversatz  $\Delta V_\nu$  durch den Überlapp der Wannier-Wellenfunktion mit den Potentialbarrieren für eine Stehwelle der Tiefe  $V_\nu$  (siehe Gleichung 4.27, die harmonische Näherung ist gestrichelt dargestellt). In einem dreidimensionalen Gitter summieren sich die Beiträge  $\Delta V_\nu$  der einzelnen Stehwellen  $\nu \in \{x, y, z\}$  zu einem Gesamtversatz.

Abbildung 4.10 hervorgeht, liefert diese Näherung bereits bei geringen Gittertiefen sehr gute Resultate. Im 3D-Gitter verursacht jede der Achsen  $\nu \in \{x, y, z\}$  einen entsprechenden Versatz  $\Delta V_\nu$ . Aufgrund der gaußförmigen Einhüllenden sind die Versätze  $\Delta V_\nu$  ortsabhängig und rufen somit einen weiteren Beitrag zum externen Potential hervor. In der harmonischen Näherung lautet dieser:

$$\omega_z^2 = \frac{4}{m} \left( \frac{-\Delta V_x(R_x, V_{0,x})}{w_x^2} + \frac{-\Delta V_y(R_y, V_{0,y})}{w_y^2} \right). \quad (4.28)$$

Gleichung 4.25 für die Fallenfrequenz auf den einzelnen Gitterplätzen gilt streng genommen nur im Zentrum des Gitters, da nach außen hin die Tiefe der Potentialtöpfchen mit dem gaußschen Strahlprofil abnimmt (siehe Gl. 4.23). So fällt zum Beispiel die  $z$ -Fallenfrequenz auf den Gitterplätzen wie folgt ab:

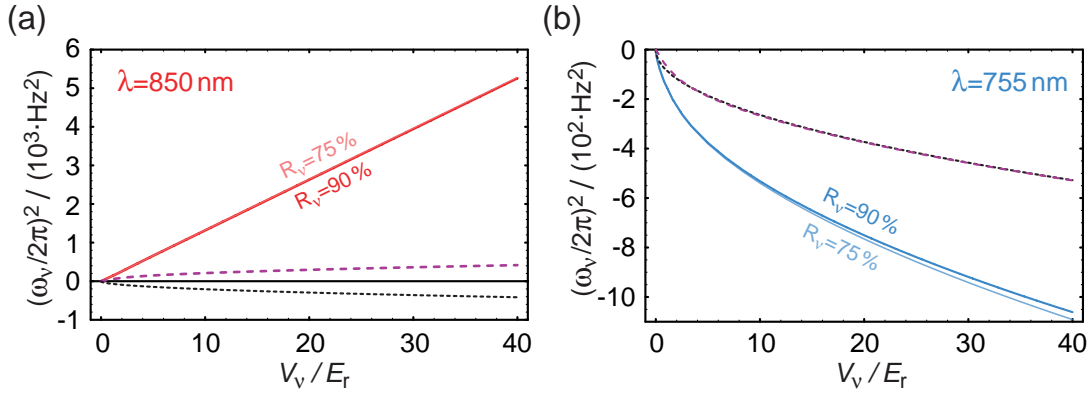
$$\omega_{G,z}(\mathbf{r}) = \omega_{G,z}(\mathbf{0}) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_z^2}\right) \approx \omega_{G,z}(\mathbf{0}) \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{w_z^2}\right). \quad (4.29)$$

Mit der Fallenfrequenz nimmt jedoch gleichzeitig die quantenmechanische Nullpunktenergie  $E_0 = \hbar(\omega_{G,x} + \omega_{G,y} + \omega_{G,z})/2$  der einzelnen Potentialtöpfchen ab. Hieraus resultiert ein dritter Beitrag zum externen Potential, der unabhängig vom Vorzeichen der Verstimmung immer repulsiv wirkt:

$$\omega_z^2 = -\frac{2E_r}{m} \left( \frac{\sqrt{|s_x|}}{w_x^2} + \frac{\sqrt{|s_y|}}{w_y^2} \right) \leq 0. \quad (4.30)$$

Hierbei wird die Gittertiefe  $V_\nu = s_\nu E_r$  gemäß Gleichung 4.24 bestimmt und in Einheiten der Rückstoßenergie  $E_r$  ausgedrückt.

## 4.2 Optische Gitterpotentiale



**Abbildung 4.11:** Externes Potential eines (a) rot- und eines (b) blauverstimmten 3D-Gitters als Funktion der drei miteinander übereinstimmenden effektiven Gittertiefen  $V_\nu$  ( $\nu \in \{x, y, z\}$ ). Für die Strahltaillen gilt  $w_\nu = 150 \mu\text{m}$ . Die Potentiale sind in Einheiten der quadratischen Rubidium-Fallenfrequenzen angegeben. Bei roter Verstimmung ist das Potential attraktiv ( $\omega_\nu^2 > 0$ ) und bei blauer Verstimmung repulsiv ( $\omega_\nu^2 < 0$ ). Neben den externen Gesamtpotentialen für Strahl-Reflektivitäten von 75 % und 90 % sind auch die Einzelbeiträge, verursacht durch die endliche Eindringtiefe in die Potentialbarrieren (violett gestrichelt) und durch die quantenmechanische Nullpunktsenergie (schwarz gestrichelt), wiedergegeben.

Summiert man die Beiträge aus den Gleichungen 4.26, 4.28 und 4.30, so ergibt sich schließlich die quadratische Fallenfrequenz des externen Gesamtpotentials. Letzteres wirkt beim blauverstimmten Gitter repulsiv ( $\omega_\nu^2 < 0$ ). Damit die Atome hier dennoch gefangen werden können, muss zusätzlich das Potential einer Magnetfalle oder einer rotverstimmten Dipolfalle überlagert werden, dessen Fallenfrequenz  $\omega_{\nu,\text{trap}}$  die Bedingung  $\omega_{\nu,\text{trap}}^2 > |\omega_\nu^2|$  erfüllt.

Gemäß Abbildung 4.10 lässt sich das Überlappintegral in 4.27 sehr gut durch die Wurzel aus der Gittertiefe beschreiben. Setzt man diese Näherung in Gleichung 4.28 ein, so stellt sich interessanter Weise heraus, dass die beiden Energieversätze, verursacht durch die endliche Eindringtiefe in die Potentialbarrieren und durch die quantenmechanische Nullpunktenergie, betragsmäßig miteinander übereinstimmen. Im rotverstimmten Gitter heben sich die beiden Beiträge gegenseitig auf, wohingegen sie sich beim blauverstimmten Gitter zu einem repulsiven Potential vereinigen. Bei der Berechnung der externen Potentiale können Reflexionsverluste, abgesehen von ihrem Einfluss auf die effektive Gittertiefe  $V_\nu = 4\sqrt{R_\nu}V_{0,\nu}$ , in der Regel vernachlässigt werden. Wie in Abbildung 4.11 zu erkennen ist, gilt dies gleichermaßen für das rot- und das blauverstimmte Gitter. Bei roter Verstimmung und typischen Reflektivitäten  $R_\nu$ , lässt sich der Faktor  $V_{0,\nu}(1 + R_\nu + 2\sqrt{R_\nu})$  in Gleichung 4.26 in guter Näherung durch die effektive Gittertiefe  $V_\nu = 4\sqrt{R_\nu}V_{0,\nu}$  ersetzen. Da sich zudem die beiden Beiträge 4.28 und 4.30 gegenseitig aufheben, nimmt beim rot-

## 4 Optische Potentiale

---

verstimmten Gitter der externe Einschluss linear mit der effektiven Gittertiefe  $V_\nu$  zu. Für das blauverstimmt Gitter ist der Term  $V_{0,\nu}(1+R_\nu-2\sqrt{R_\nu})$  in Gleichung 4.26 in guter Näherung null, sodass das externe Potential allein durch den doppelten Beitrag von Gleichung 4.30 beschrieben werden kann. Um das vergleichsweise schwache repulsive Potential zu kompensieren, muss eine zusätzliche Falle überlagert werden, deren Tiefe nur wurzelförmig mit der effektiven Gittertiefe  $V_\nu$  zunimmt. Zwar stimmen beim 755 nm-Gitter die einheitenlosen Gittertiefen  $s_{\nu,\text{Rb}} = s_{\nu,\text{K}}$  für Rubidium und Kalium miteinander überein, doch ist das repulsive externe Potential für Kalium um einen Faktor  $m_{\text{Rb}}/m_{\text{K}}$  stärker als für Rubidium. Dementsprechend muss die zusätzliche Falle um  $m_{\text{Rb}}/m_{\text{K}}$  erhöht werden, um den externe Einschluss neben Rubidium auch für Kalium aufrecht erhalten zu können.

Fassen wir die vorangegangenen Ergebnisse zusammen: Das durch das gaußförmige Profil der Gitterstrahlen verursachte externe Potential lässt sich harmonisch nähern. Beim rotverstimmten Gitter wirkt das Potential attraktiv und die Fallenfrequenzen sind in guter Näherung durch

$$\omega_z^2 = \frac{4E_r}{m} \left( \frac{|s_x|}{w_x^2} + \frac{|s_y|}{w_y^2} \right) \geq 0 \quad (4.31)$$

und entsprechend zyklisch vertauschte Ausdrücke für die beiden anderen Achsen gegeben. Beim blauverstimmten Gitter wirkt das hervorgerufene externe Potential repulsiv und die „Fallenfrequenzen“ sind in guter Näherung durch

$$\omega_z^2 = -\frac{4E_r}{m} \left( \frac{\sqrt{|s_x|}}{w_x^2} + \frac{\sqrt{|s_y|}}{w_y^2} \right) \leq 0. \quad (4.32)$$

und die entsprechend zyklisch vertauschten Ausdrücke gegeben. In den obigen Formeln sind  $s_\nu = V_\nu/E_r = 4\sqrt{R_\nu}V_{0,\nu}/E_r$  die effektiven Gittertiefen entlang der Gitterachsen  $\nu \in \{x, y, z\}$  in Einheiten von  $E_r$ . Dabei bezeichnet  $V_{0,\nu}$  die maximale Tiefe einer Dipolfalle, welche nur durch den einlaufenden Strahl gebildet wird, und  $R_\nu$  gibt den Anteil des rückreflektierten Lichtes an. Gleichung 4.32 stellt ein wichtiges Ergebnis dieses Kapitels dar.

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

Dieses Kapitel befasst sich mit den atomaren Zuständen im optischen Gitter, mit deren Präparation und Analyse. Die Betrachtungen gehen aus von den Bloch-Wellen im perfekt periodischen Potential, über die Einteilchenspektren des inhomogenen Gitters bis hin zu den Hubbard-Modellen von wechselwirkenden Bosonen, Fermionen und Bose-Fermi-Mischungen.

Zunächst werden die verschiedenen Beugungsregimes für Atome in optischen Stehwellen diskutiert. Hieraus ergibt sich ein intuitiver Zugang zum Konzept der Bloch-Wellen und der Bandstruktur.

Es folgt eine qualitative Beschreibung des Bose-Einstein-Kondensates im flachen, inhomogenen Gitter. Anhand numerisch ermittelter Einteilchenspektren werden die exakten Dichteverteilungen entarteter, einkomponentiger Fermigase im inhomogenen 1D-Gitter berechnet. Die Resultate lassen sich später leicht auf endliche Temperaturen und mehrdimensionale Gitter erweitern. Die Entwicklung der Dichteverteilung bei Veränderung der Gittertiefe bzw. des externen Einschlusses (Kompression) wird studiert. Im Rahmen der Tight-Binding-Näherung wird das Kriterium für die Ausbildung des fermionischen Bandisolators hergeleitet.

Als Nächstes werden die Bedingungen für einen adiabatischen Transfer der Atome ins optische Gitter untersucht. Dabei erweisen sich die Veränderungen der Bandstruktur und makroskopische Umverteilungsprozesse von Bedeutung. Die Temperaturerhöhung beim adiabatischen Einladen eines Fermigases in ein tiefes Gitter wird bestimmt. Schließlich wird gezeigt, wie sich die Adiabatizitätskriterien in einem blauerstimmten Gitter entschärfen lassen.

Der darauf folgende Abschnitt befasst sich mit der Analyse der Zustände im optischen Gitter anhand ihrer Impuls- und Kristallimpulsverteilungen. Die Beziehung zwischen diesen beiden Verteilungen wird veranschaulicht.

Der letzte Abschnitt beschreibt die erstmalige Beobachtung des bosonischen Mott-Isolator-Übergangs in einem blauerstimmten optischen Gitter. Das Gitter zeichnet sich durch seinen schwachen externen Einschluss aus, was einen scharfen Phasenübergang und eine ausschließliche Einfachbesetzung der zentralen Gitterplätze ermöglicht. Es wird ein theoretischer Überblick über die Hubbard-Modelle wechselwirkender Bosonen, Fermionen und deren Mischungen gegeben. Abschließend werden die Vorteile der verwendeten Gitter-Konfiguration für zukünftige Experimente geschildert.

### 5.1 Einteilchenzustände im homogenen periodischen Potential

#### 5.1.1 Bloch-Zustände und Bandstruktur

Die Bewegung eines Atoms im periodischen Potential eines optischen Gitters ist vergleichbar mit der eines Bloch-Elektrons im periodischen Kristall eines Festkörpers. Deshalb lassen sich viele Methoden aus der Festkörperphysik direkt auf optische Gitter anwenden. Charakteristisch für Teilchen in periodischen Potentialen ist das Auftreten einer Bandstruktur im zugehörigen Energiespektrum. In einem einfach kubischen Gitter lässt sich die Teilchendynamik nach den drei Raumkoordinaten  $x, y$  und  $z$  separieren. Es reicht also zunächst aus, nur die Schrödinger-Gleichung des eindimensionalen Problems zu betrachten:

$$\hat{H}\psi_{n,q}(x) = \epsilon_n(q)\psi_{n,q}(x) \quad \text{mit} \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x). \quad (5.1)$$

Hierbei sei  $V(x)$  das homogene Gitterpotential mit der Periode  $a = \pi/k$ . Gemäß dem Bloch-Theorem kann jeder Eigenzustand  $\psi_{n,q}(x)$  des Hamilton-Operators als Produkt einer ebenen Welle  $\exp(iqx)$  und einer gitterperiodischen Funktion  $u_{n,q}(x) = u_{n,q}(x+a)$  dargestellt werden [64]:

$$\psi_{n,q}(x) = e^{iqx} u_{n,q}(x). \quad (5.2)$$

Setzt man diese Bloch-Wellen in Gleichung 5.1 ein, so erhält man ein Eigenwertproblem für  $u_{n,q}(x)$ :

$$\hat{H}^{(q)}u_{n,q}(x) = \left( \frac{\hbar^2}{2m} \left( -i\frac{\partial}{\partial x} + q \right)^2 + V(x) \right) u_{n,q}(x) = \epsilon_{n,q}u_{n,q}(x). \quad (5.3)$$

Aufgrund der periodischen Randbedingung  $u_{n,q}(x) = u_{n,q}(x+a)$  kann 5.3 als hermitesches Eigenwertproblem eines Teilchens betrachtet werden, das auf einer einzelnen Elementarzelle des Gitters eingeschlossen ist. Aus dieser räumlichen Einschränkung folgt, dass sich das Teilchen durch einen abzählbaren Satz von Eigenzuständen  $u_n(x)$  mit diskreten Eigenenergien  $\epsilon_n$  beschreiben lässt, wobei  $n = \{1, 2, \dots\}$ . In dem Eigenwertproblem 5.3 stellt der Wellenvektor  $q$  einen freien Parameter dar. Wir erwarten daher, dass jedes der diskreten Energieniveaus  $\epsilon_n$  kontinuierlich mit  $q$  variiert<sup>1</sup>. Für einen festen Index  $n$  ist demnach  $\epsilon_{n,q} = \epsilon_n(q)$  eine stetige Funktion von  $q$ . Sie wird als Energieband bezeichnet und  $n$  ist der zugehörige Bandindex.

Da das Potential  $V(x)$  und die Funktion  $u_{n,q}(x)$  dieselbe Periodizität wie das Gitter aufweisen, lassen sich beide Größen nach ebenen Wellen entwickeln, deren Wellenvektoren  $G$  reziproken Gittervektoren entsprechen ( $G = \nu \cdot 2\pi/a = \nu \cdot 2k$  mit  $\nu, \mu \in \mathbb{Z}$ ):

$$V(x) = \sum_{\mu} \tilde{V}_{\mu} e^{i2k\mu x} \quad \text{und} \quad u_{n,q}(x) = \sum_{\nu} c_{\nu}^{n,q} e^{i2k\nu x}. \quad (5.4)$$

<sup>1</sup>In einem Gitter mit endlicher Ausdehnung  $L = Ma$  beschränkt die Born-von Karman-Randbedingung  $\psi_{n,q}(x+Ma) = \psi_{n,q}(x)$  die Wellenvektoren  $q$  auf eine diskrete Anzahl  $M$ . Jedoch geht in das Problem 5.3 die Ausdehnung des Gitters nicht ein, sodass  $\epsilon_n(q)$  zunächst für beliebige  $q$  definiert ist.

## 5.1 Einteilchenzustände im homogenen periodischen Potential

---

Setzt man diese Entwicklungen in Gleichung 5.3 ein, so wird der Term für die kinetische Energie zu

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left( -i \frac{\partial}{\partial x} + q \right)^2 u_{n,q}(x) = \sum_{\nu} \frac{\hbar^2 (q + 2k\nu)^2}{2m} c_{\nu}^{n,q} e^{i2k\nu x} \quad (5.5)$$

und der Term für die potentielle Energie wird zu

$$V(x)u_{n,q}(x) = \sum_{\mu} \sum_{\nu'} \tilde{V}_{\mu} c_{\nu'}^{n,q} e^{i2k(\mu+\nu')x} = \sum_{\nu(=\mu+\nu')} \sum_{\mu} \tilde{V}_{\mu} c_{\nu-\mu}^{n,q} e^{i2k\nu x}. \quad (5.6)$$

Das Eigenwertproblem eines Teilchens in einem eindimensionalen periodischen Potential nimmt somit die folgende allgemeingültige Form an:

$$\sum_{\nu} \left[ \left( \frac{\hbar^2 (q + 2k\nu)^2}{2m} - \epsilon_n(q) \right) c_{\nu}^{n,q} + \sum_{\mu} \tilde{V}_{\mu} c_{\nu-\mu}^{n,q} \right] e^{i2k\nu x} = 0. \quad (5.7)$$

Da die ebenen Wellen zueinander orthogonal sind, muss jeder Summand in 5.7 verschwinden. Die Terme in den eckigen Klammern bilden somit einen Satz von linearen Gleichungen. Im Fall optischer Gitter hat das periodische Potential eine sehr einfache Struktur

$$V(x) = V_x \cos^2(kx) = \frac{V_x}{4} (e^{i2kx} + e^{-i2kx} + 2), \quad (5.8)$$

sodass sich bei dessen Entwicklung nur drei nicht-verschwindende Fourier-Komponenten  $\tilde{V}_0 = V_x/2$  und  $\tilde{V}_{\pm 1} = V_x/4$  ergeben. Man kann Gleichung 5.7 auch als Matrixdarstellung der Schrödinger-Gleichung 5.3 auffassen, denn sie hat die folgende Form:

$$\sum_{\nu'} H_{\nu\nu'}^{(q)} c_{\nu'}^{n,q} = \epsilon_n(q) c_{\nu}^{n,q}. \quad (5.9)$$

Dabei ist  $H_{\nu\nu'}^{(q)}$  die Matrixdarstellung des Hamilton-Operators  $\hat{H}^{(q)}$  bezüglich der Basis  $\{|\nu\rangle\}$  der ebenen Wellen  $\langle x|\nu\rangle = e^{i2k\nu x}$ . Mit den Fourier-Komponenten des Gitterpotentials folgt schließlich:

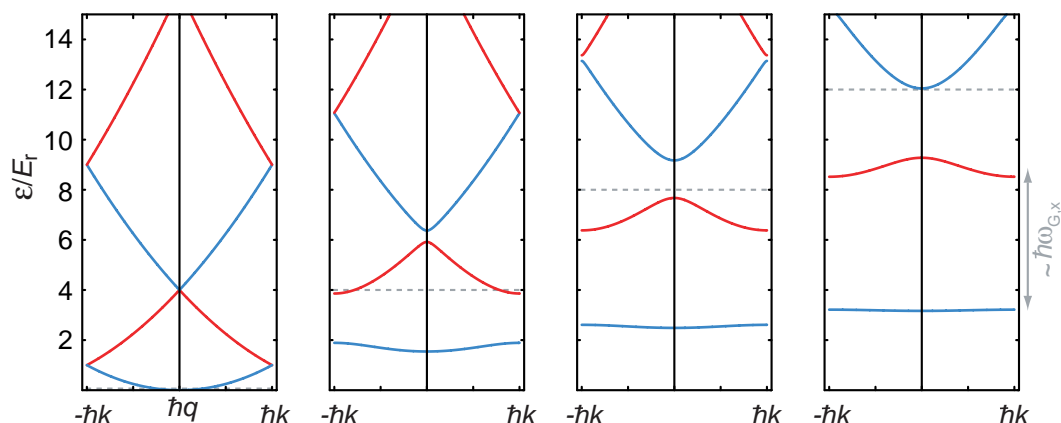
$$H_{\nu\nu'}^{(q)} = \begin{cases} (q/k + 2\nu)^2 E_r + V_x/2 & \text{für } |\nu - \nu'| = 0 \\ V_x/4 & \text{für } |\nu - \nu'| = 1 \\ 0 & \text{für } |\nu - \nu'| > 1. \end{cases} \quad (5.10)$$

Für Wellenvektoren  $q$ , die sich genau um reziproke Gittervektoren  $G = 2k \cdot \nu$  voneinander unterscheiden, stimmen die zugehörigen Wellenfunktionen  $\psi_{n,q}(x)$  und Eigenenergien  $\epsilon_n(q)$  miteinander überein<sup>2</sup>. Demnach weisen die Wellenfunktionen und Eigenenergien als Funktionen von  $q$  die Periodizität des *reziproken* Gitters auf. Zur Charakterisierung der

---

<sup>2</sup>Ist  $q' = q + G$ , so folgt  $\psi_{n,q'} = e^{iq'x} u_{n,q'} = e^{iqx} \{e^{iGx} u_{n,q'}\} = e^{iqx} u_{n,q} = \psi_{n,q}$ . Setzt man das Ergebnis  $u_{n,q} = e^{iGx} u_{n,q'}$  in 5.3 ein, so erhält man außerdem  $\epsilon_n(q) = \epsilon_n(q')$ .

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse



**Abbildung 5.1:** Bandstruktur des eindimensionalen optischen Gitters, dargestellt im reduzierten Zonenschema für die Gittertiefen (von links nach rechts)  $V_x = 0, 4, 8$  und  $12 E_T$ . Man beachte, dass selbst oberhalb der gestrichelt angedeuteten Potentialschwelle  $V_x$  noch verbotene Energiebereiche auftreten.

Einteilcheneigenzustände genügt es deshalb, sich auf die Kristallimpulse  $\hbar q$  der ersten Brillouin-Zone  $]-\hbar k, \hbar k]$  zu beschränken. Die Bloch-Wellen werden über Gleichung 5.2 und 5.4 durch die Eigenvektoren  $\mathbf{c}^{n,q} = (c_\nu^{n,q})$  bestimmt. Das entsprechende Eigenwertproblem löst man durch Diagonalisieren der Matrix  $H_{\nu,\nu'}$ . Zur Beschreibung der ultrakalten Atome in optischen Gittern reichen in der Regel die Bloch-Wellen der untersten Bänder aus. Die zugehörigen Koeffizienten  $c_\nu^{n,q}$  werden mit zunehmenden  $|\nu|$  sehr schnell klein. Bei üblichen Gittertiefen<sup>3</sup>  $V_x \leq 40 E_T$  kann deshalb das Eigenwertproblem in guter Näherung auf eine Matrix der Größe  $-6 \leq \nu \leq 6$  beschränkt werden.

In Abbildung 5.1 ist die Bandstruktur des sinusförmigen eindimensionalen optischen Gitters für verschiedene Gittertiefen  $V_x$  im reduzierten Zonenschema dargestellt. Bei verschwindendem  $V_x$  entspricht die Bandstruktur der kinetischen Energie eines freien Teilchens, dessen parabelförmige Dispersion auf die erste Brillouin-Zone zurückgefaltet wird. Mit zunehmender Gittertiefe nehmen die Aufspaltungen zwischen den Bändern (Bandlücken) zu und die Breite der Bänder wird exponentiell kleiner. Bei den untersten Bändern lassen sich die Bandlücken für große  $V_x$  in etwa durch die Energieabstände  $\hbar\omega_{G,x}$  (Gleichung 4.21) eines harmonischen Oszillators annähern. Für die unterste Bandlücke  $\Delta\epsilon_1$  erhält man eine bessere Näherung, wenn man das Potential eines Gittertöpfchens bis zum biquadratischen Term entwickelt [198]:

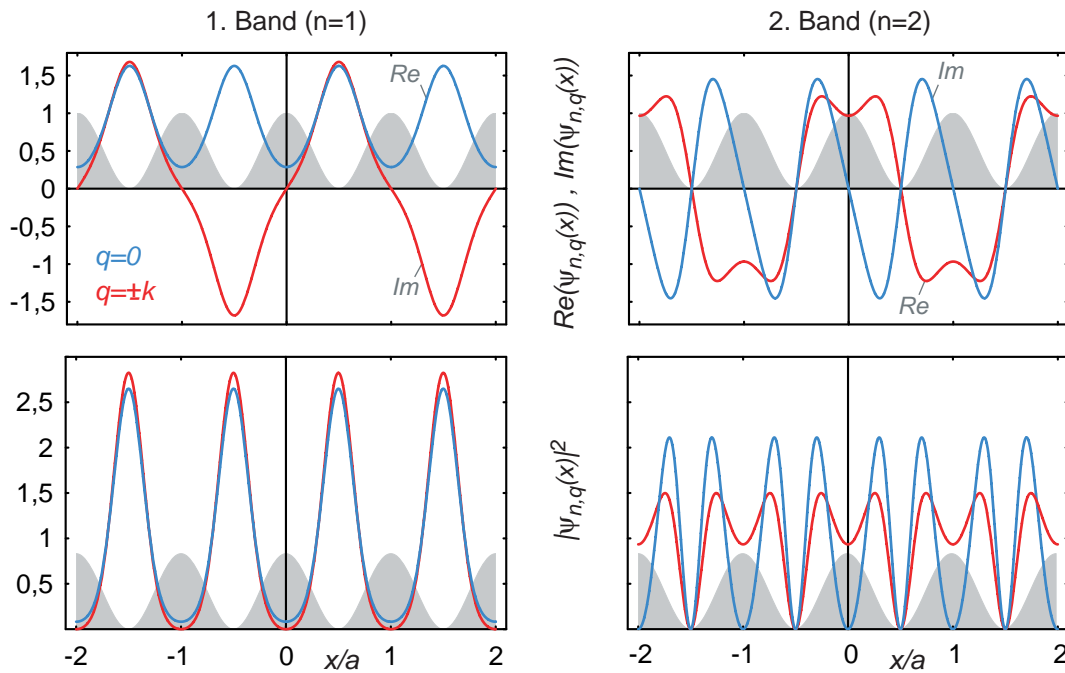
$$\Delta\epsilon_1 \approx 2\sqrt{V_x E_T} - E_T. \quad (5.11)$$

Gegenüber der rein harmonischen Näherung unterscheidet sich dieser Ausdruck um eine

<sup>3</sup>Man beachte, dass die Beimischung höherer Impulskomponenten  $c_\nu^{n,q}$  mit der Gittertiefe zunimmt.



## 5.1 Einteilchenzustände im homogenen periodischen Potential



**Abbildung 5.2:** Bloch-Wellen  $\psi_{n,q}(x)$  im ersten und zweiten Band eines  $8 E_r$  tiefen Gitters. Es sind jeweils die Amplituden (Real- bzw. Imaginärteil) und die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Kristallimpulse  $\hbar q = \{0, \pm \hbar k\}$  dargestellt. Die Lage des Gitterpotentials  $V(x) = V_x \cos^2(kx)$  ist grau angedeutet.

Rückstoßenergie  $E_r$ .

In Abbildung 5.2 sind die Bloch-Zustände eines  $8 E_r$  tiefen Gitters für die Kristallimpulse am Rand ( $\hbar q = \pm \hbar k$ ) und im Zentrum ( $\hbar q = 0$ ) der ersten Brillouin-Zone dargestellt. Die Bloch-Zustände 5.2 entsprechen ebenen Wellen, die über das gesamte Gitter delokalisiert sind und beschreiben daher Teilchen, die sich frei durch das Gitter bewegen können. Wie anhand des Faktors  $e^{iqx}$  zu erkennen ist, verfügen die Wellenfunktionen auf zwei benachbarten Gitterplätzen genau dann über eine maximale Phasendifferenz von  $\pi$ , wenn die zugehörigen Kristallimpulse am Rand der Brillouin-Zone liegen. Für  $q = 0$  weisen die Wellenfunktionen auf allen Gitterplätzen dieselbe Phase auf und stimmen miteinander überein. Mit steigendem Bandindex  $n$  nimmt die Anzahl der Knoten in den Wellenfunktionen zu. Im Brillouin-Zonenzentrum verfügen die Wellenfunktionen pro Gitterperiode über  $(n - 1)$  Knoten für ungerade  $n$ , und über  $n$  Knoten für gerade  $n$ . Am Brillouin-Zonenrand haben die Wellenfunktionen pro Gitterperiode  $n$  Knoten für ungerade  $n$ , und  $(n - 1)$  Knoten für gerade  $n$ . Aus den dargestellten Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $|\psi_{n,q}(x)|^2$  geht hervor, dass sich die Teilchen des zweiten Bandes eher innerhalb der Potentialbarrieren aufhalten, als die Teilchen des ersten Bandes. Diese unterschiedlichen Aufenthaltswahr-

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

---

scheinlichkeiten führen zu unterschiedlichen potentiellen Energien und bedingen letztlich die mit der Gittertiefe  $V_x$  zunehmende Aufspaltung der Bänder.

### 5.1.2 Aus der Sicht der Quantenoptik ...

In diesem Abschnitt wird die Dynamik der Teilchen im optischen Gitter aus einer quantenoptischen Perspektive beschrieben, indem die Atom-Licht-Wechselwirkung explizit berücksichtigt wird. Der Brückenschlag zwischen der festkörperphysikalischen und der quantenoptischen Betrachtungsweise ermöglicht ein intuitives Verständnis der zuvor besprochenen Konzepte von Bloch-Wellen und Bandstruktur.

Wir gehen von zwei entgegengesetzt propagierenden und ansonsten identischen Laserstrahlen mit einer Wellenlänge von  $\lambda = 2\pi/k$  aus, deren Interferenz zu einem eindimensionalen optischen Gitter der Tiefe  $V_x$  führt. Die Verstimmung  $\Delta$  des Lichtfeldes bezüglich des atomaren Übergangs sei viel größer als die zugehörige Rabi-Kopplung  $\Omega$ , sodass spontane Streuung vernachlässigt werden kann. Bezeichnet  $\Omega$  die Rabi-Frequenz, welche durch einen einzelnen der beiden Laserstrahlen hervorgerufen wird<sup>4</sup>, so gilt für die Gittertiefe:

$$V_x = \frac{\hbar(2\Omega)^2}{4\Delta}. \quad (5.12)$$

Der Faktor zwei vor der Rabi-Frequenz berücksichtigt die konstruktive Interferenz der beiden Laserstrahlen, deren elektrischen Felder sich in den Maxima der optischen Stehwelle addieren.

### Bragg-Beugung

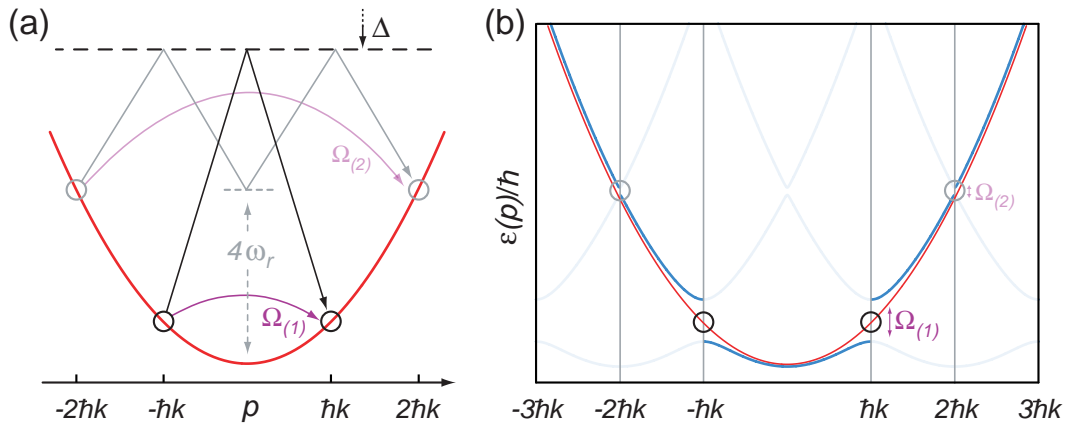
In einer schwachen optischen Stehwelle, ist die Dispersion des Atoms im wesentlichen durch die kinetische Energie  $p^2/2m$  eines freien Teilchens gegeben (rote Parabel in Abbildung 5.3a). Verfügt das Atom jedoch über einen Impuls  $p = \pm\hbar k$  (schwarze Kreise), so kann es durch Absorption eines Photons aus einem Laserstrahl und durch stimulierte Reemission in den anderen Laserstrahl seinen Impuls um genau  $2\hbar k$  ändern und dabei zugleich die Bedingung der Energieerhaltung erfüllen. Bei diesem Prozess handelt es sich um eine Bragg-Beugung erster Ordnung, die auch als stimulierter Raman-Prozess aufgefasst werden kann [199, 200]. Statt interner atomarer Zustände werden bei diesem Raman-Prozess Bewegungszustände miteinander gekoppelt. Die ursprüngliche Entartung der beiden Impulszustände wird durch die 2-Photonen-Wechselwirkung aufgehoben (siehe blaue Kurve in Abb. 5.3b) [201]. Die Größe der Aufspaltung ist direkt durch die Kopplungsstärke der Bragg-Beugung oder, was gleichbedeutend ist, durch die Raman-Rabi-Frequenz

$$\Omega_{(1)} = \frac{\Omega_1 \Omega_2}{2\Delta} = \frac{V_x}{2\hbar} \quad (5.13)$$

---

<sup>4</sup>Bei einem Zwei-Niveau-Atom mit der Linienbreite  $\Gamma_A$  und der Übergangsfrequenz  $\omega_A$  ist die Rabi-Kopplung in einem Laserfeld der Intensität  $I$  durch  $\Omega = \sqrt{6\pi c^2 \Gamma_A I / \hbar \omega_A^3}$  gegeben. Zusammen mit  $V_{\text{dip}} = \hbar \Omega^2 / 4\Delta$  erhält man wieder das Dipolpotential aus Gleichung 4.4.

## 5.1 Einteilchenzustände im homogenen periodischen Potential



**Abbildung 5.3:** (a) Dispersionsrelation eines freien Teilchens (rot) und (b) eines Teilchens in einer schwachen optischen Stehwelle (blau). Durch Bragg-Beugung verursacht das Lichtfeld einer stationären Stehwelle eine kohärente Kopplung (violette Übergänge) zwischen den entarteten Impulzuständen  $-n\hbar k$  und  $+n\hbar k$ . Im erweiterten Zonenschema resultieren hieraus verbotene Kreuzungen an den Brillouin-Zonenrändern (Bragg-Ebenen). Die Aufspaltung der Dispersion führt zu separaten Energiebändern. Die Größen der Bandlücken sind durch die  $2n$ -Photonen-Raman-Kopplungen  $\Omega_{(n)}$  gegeben.

gegeben. Beim rechten Gleichheitszeichen wird berücksichtigt, dass die Stehwelle von zwei identischen Laserstrahlen gebildet wird, für die  $\Omega_{1,2} = \Omega$  gilt. Die Aufspaltung der Bänder am Rand der ersten Brillouin-Zone entspricht einer vermiedenen Kreuzung zwischen quasi-entarteten Zuständen. Gemäß Gleichung 5.13 ist die unterste Bandlücke in erster Ordnung Störungstheorie durch die halbe Gittertiefe  $V_x$  gegeben.

Bei dem stimulierten 2-Photonen-Raman-Prozess handelt es sich um eine Bragg-Beugung erster Ordnung. Im Allgemeinen können auch Bragg-Beugungen  $n$ -ter Ordnung auftreten, die dann  $2n$ -Photonen-Raman-Übergängen entsprechen ( $n \in \mathbb{N}$ ). Bei diesen Mehr-Photonen-Prozessen werden, unter Beachtung der Energie und Impulserhaltung, die beiden Zustände mit den Impulsen  $-n\hbar k$  und  $+n\hbar k$  zu einem effektiven Zwei-Niveau-System gekoppelt.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Bedingung für die Bragg-Beugung  $n$ -ter Ordnung mit der klassischen Bedingung für die Bragg-Reflexion in einem Kristall übereinstimmt: Damit ein Teilchen mit der de Broglie-Wellenlänge  $\lambda_{\text{dB}} = 2\pi\hbar/p$  in einem Kristall der Gitterkonstante  $a = \pi/k$  senkrecht reflektiert wird, müssen die Wellenanteile, welche an hintereinander liegenden Gitterebenen gebeugt werden, konstruktiv miteinander interferieren. Es muss also  $n\lambda_{\text{dB}} = 2a$  gelten, was mit der Bragg-Bedingung  $p = \pm n\hbar k$  übereinstimmt.

Am Beispiel von Abbildung 5.3a betrachten wir die Bragg-Beugung zweiter Ordnung

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

zwischen den Impulszuständen  $| - 2\hbar k \rangle$  und  $| + 2\hbar k \rangle$  (graue Kreise). Die Kopplung an den intermediären Impulszustand  $|0\rangle$  ist nicht-resonant und hat eine Verstimmung, welche durch die kinetische Energie  $4E_r = 4\hbar\omega_r$  gegeben ist. Die Population des Zustandes  $|0\rangle$  ist von der Größenordnung  $\sim \Omega_{(1)}^2 / (4\omega_r)^2$  und ist daher bei hinreichend geringen Laserintensitäten vernachlässigbar. Unter diesen Bedingungen liegt ein effektives Zwei-Niveau-System vor. Die Bragg-Beugung zweiter Ordnung kann als Raman-Prozess betrachtet werden, der selber wiederum aus zwei Raman-Übergängen zusammengesetzt ist. Dabei wird die Verstimmung bezüglich des intermediären Zustandes mit  $4\omega_r$  identifiziert. Die Kopplungsstärke der Bragg-Beugung zweiter Ordnung ergibt sich dann zu:

$$\Omega_{(2)} = \frac{\Omega_{(1)} \Omega_{(1)}}{2(4\omega_r)} = \frac{\Omega_{(1)}^2}{8\omega_r} = \frac{V_x^2}{32\hbar^2\omega_r}. \quad (5.14)$$

In diesem Fall gibt die Rabi-Frequenz die Kopplungsstärke zwischen den Impulszuständen am Rand der *zweiten* Brillouin-Zone an und bestimmt (in erster Ordnung Störungstheorie) die Aufspaltung zwischen dem zweiten und dritten Energieband. Führt man diese Argumentation in analoger Weise fort, so ergibt sich für die Bragg-Beugung  $n$ -ter Ordnung<sup>5</sup> [199]:

$$\Omega_{(n)} = \frac{\Omega_{(1)}^n}{(8\omega_r)^{n-1} [(n-1)!]^2}. \quad (5.15)$$

Für Atome [199, 202] oder Bose-Einstein-Kondensate [203], welche zu Anfang in einem der beiden Impulszustände  $|\pm n\hbar k\rangle$  präpariert werden, sagt das Zwei-Niveau-Modell eine kohärente Oszillation zwischen diesen beiden Zuständen voraus (Pendellösung). Dabei oszilliert die Population zeitlich mit der Rabi-Frequenz des Bragg-Prozesses  $n$ -ter Ordnung:

$$P_n(t) = \sin^2(\Omega_{(n)}t/2). \quad (5.16)$$

Im Allgemeinen befindet sich ein Atom während der Wechselwirkung mit dem Lichtfeld in einer Superposition aus den beiden entarteten Impulszuständen. Wie bereits angesprochen, ist das Modell des effektiven Zwei-Niveau-Systems nur bei geringer Laserleistung anwendbar. Die zugehörige Bedingung  $\Omega_{(1)} \ll 4\omega_r$  definiert gerade das Regime der Bragg-Beugung<sup>6</sup>. In diesem Regime kann eine Beimischung der nicht-resonanten Impulszustände zum Gesamtzustand vernachlässigt werden. Mit wachsender Laserintensität nimmt jedoch die Bevölkerung in den nicht-resonanten Impulszuständen zu, sodass sämtliche durch den 2-Photonen-Prozess miteinander gekoppelten Impulszustände  $|n\hbar k + \nu 2\hbar k\rangle$  ( $\nu \in \mathbb{Z}$ ) bei der Lösung der Bewegungsgleichung berücksichtigt werden müssen [204]. Aufgrund der „Leistungsverbreiterung“ kommt es nun auch zu starken Kopplungen innerhalb von Zustandsklassen  $\{|\hbar q + \nu 2\hbar k\rangle\}$  ( $\nu \in \mathbb{Z}$ ), welche die Bragg-Bedingung nicht erfüllen (also

<sup>5</sup>Dabei wird vorausgesetzt, dass  $\Delta \gg n^2\omega_r$ .

<sup>6</sup>Da der Energieabstand und damit die Verstimmung zu den benachbarten (nicht-resonanten) Impulszuständen mit  $n$  wächst, sind bei höheren Beugungsordnungen ( $n > 1$ ) auch höhere Laserintensitäten zulässig. Für die  $n$ -te Beugungsordnung ist das Bragg-Regime durch die weniger restriktive Bedingung  $\Omega_{(1)} \ll 4(n-1)\omega_r$  definiert.

## 5.1 Einteilchenzustände im homogenen periodischen Potential

für  $\hbar q \neq n\hbar k$ ). Dies führt uns zu den bereits besprochenen Bloch-Zuständen. Wählt man eine solche Zustandsklasse als Basis, so nimmt der Hamilton-Operator, der die Bewegung eines Atoms in einer optischen Stehwelle beschreibt, die Form aus Gleichung 5.10 an [204]. Aus quantenoptischer Sicht entsprechen die Nebendiagonalelemente  $V_x/4$  gerade den Raman-Kopplungen  $\hbar\Omega_{(1)}/2$  zwischen den um  $2\hbar k$  voneinander getrennten Impulszuständen.

Zusammenfassend stellen wir fest, dass die Dispersionsrelation eines Teilchens in einem *flachen* optischen Gitter nur an den Brillouin-Zonenrändern von der Dispersion eines freien Teilchens abweicht. Denn nur im Bereich der Entartung führt das Lichtfeld über Bragg-Beugung zu einer starken Kopplung zwischen den Impulszuständen. Demgegenüber ist der Einfluss des Lichtfeldes in einem *tiefen* Gitter (also jenseits des Bragg-Regimes) so stark, dass es auch für Impulszustände, die innerhalb der ersten Brillouin-Zone liegen, eine signifikante Kopplung durch 2-Photonen-Raman-Übergänge gibt.

Damit im Regime der Bragg-Beugung tatsächlich nur die jeweils entarteten Impulszustände  $|\pm n\hbar k\rangle$  miteinander gekoppelt werden und Populationen in benachbarten Zuständen vernachlässigbar sind, muss neben der Lichtintensität auch die Fourier-Breite des Raman-Prozesses ausreichend klein sein. Für Bragg-Beugung  $n$ -ter Ordnung ist es daher erforderlich, dass die Einstrahldauer  $\tau$  der optischen Stehwelle die folgende Bedingung erfüllt:

$$\tau > \frac{2\pi}{4(n-1)\omega_r} \quad \text{für } n \geq 0. \quad (5.17)$$

### Beugung im Raman-Nath-Regime

Strahlt man das Lichtfeld hingegen als kurzen Puls der Dauer  $\tau \ll 1/\omega_r$  ein, so ist dessen Fourier-Breite so groß, dass die Atome, ungeachtet ihrer freien Dispersionsrelation, simultan in mehrere benachbarte Impulszustände gebeugt werden können [205]. Insbesondere lassen sich nun auch ruhende Atome in höhere Ordnungen beugen. Im sogenannten Raman-Nath-Regime geht man des Weiteren davon aus, dass die Bewegung des Atoms im Potential, also während des Pulses, vernachlässigt werden kann. Unter diesen Bedingungen kann das AC-Stark-Potential  $V(x) = V_x \cos^2(kx)$  der Stehwelle als dünnes Phasengitter aufgefasst werden, das der atomaren Wellenfunktion eine räumlich periodische Phase aufprägt. Befindet sich das betrachtete Atom zu Anfang im Impulszustand  $|0\rangle$ , so ergibt sich für dessen Wellenfunktion nach der Wechselwirkungsdauer  $\tau$  [200]:

$$|\psi\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^\tau V(x) dt\right) |0\rangle = \exp\left(-i \frac{V_x \tau}{2\hbar} \cos(2kx)\right) |0\rangle. \quad (5.18)$$

Dabei wird  $V(x) = V_x[1 + \cos(2kx)]/2$  benutzt und der konstante Phasenschub ignoriert. Nutzt man die Identität für Bessel-Funktionen erster Art,  $e^{i\alpha \cos\beta} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} i^\nu J_\nu(\alpha) e^{i\nu\beta}$ ,

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

so lässt sich die atomare Wellenfunktion auf die folgende Form bringen:

$$|\psi\rangle = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} i^{\nu} J_{\nu}(V_x \tau / 2\hbar) |\nu \cdot 2\hbar k\rangle. \quad (5.19)$$

Demnach wird der Impulszustand  $|\nu \cdot 2\hbar k\rangle$  bzw. die  $\nu$ -te Beugungsordnung mit einer Wahrscheinlichkeit  $P_{\nu} = J_{\nu}(V_x \tau / 2\hbar)^2$  bevölkert. Wie aus Abbildung 5.4 zu entnehmen ist, werden die Atome mit zunehmender Pulsfläche  $A = V_x \tau / 2\hbar$  in höhere Ordnungen gebeugt.

Im Folgenden wollen wir mittels einer einfachen Abschätzung den Gültigkeitsbereich der Raman-Nath-Näherung bestimmen. Ein zu Anfang ruhendes klassisches Teilchen kann in dem Potential maximal eine kinetische Energie  $V_x$  gewinnen. Daher beträgt der maximal erreichbare Impuls  $p_{\max} \approx 2\hbar k \cdot \sqrt{s_x}/2 \equiv 2\hbar k \cdot \nu_{\max}$ . Hierbei bezeichnet  $s_x = V_x/E_r$  die Gittertiefe in Einheiten der Rückstoßenergie und  $\nu_{\max}$  definiert die höchste auftretende Beugungsordnung. Damit die Bewegung des Atoms im Potential während der Zeit  $\tau$  vernachlässigbar ist, muss die zurückgelegte Strecke  $\sim p_{\max} \tau / m$  sehr viel kleiner sein als die Periode des Potentials. Hieraus ergibt sich an die Pulsdauer die Bedingung  $\tau < 1/(\sqrt{s_x} \omega_r)$  und an die Pulsfläche die Bedingung  $A < \sqrt{s_x}/2$ .

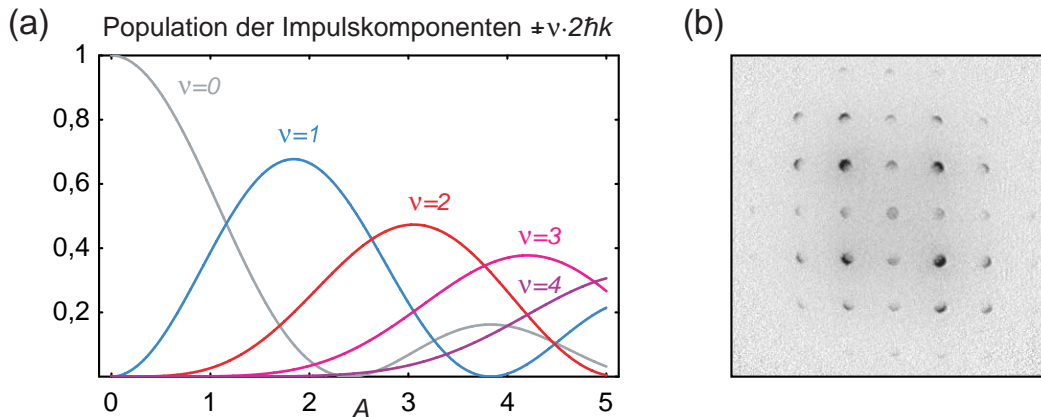
Strahlt man eine gepulste Stehwelle auf ein frei expandierendes Kondensat (siehe Abbildung 5.4b), so lässt sich anhand der detektierten Populationen in den einzelnen Beugungsordnungen die Pulsfläche und somit die Gittertiefe  $V_x$  bestimmen [206]. Dieses Verfahren kann im Prinzip zur Eichung der Gittertiefe herangezogen werden. Es erfordert jedoch eine umständliche Kurvenanpassung an die Atomzahl (z.B. als Funktion der Laserintensität) und darüber hinaus eine präzise Bestimmung der absoluten Pulsdauer  $\tau$ . Aus diesen Gründen wird in unserem Experiment das in Abschnitt 6.1.2 beschriebene Verfahren eingesetzt.

### 5.1.3 Impulsverteilung von Bloch-Zuständen

Mit dem Wissen aus dem letzten Abschnitt wenden wir uns nun noch einmal den Bloch-Zuständen zu. Da es sich hierbei um Einteilcheneigenzustände des periodischen Potentials handelt, sind die zugehörigen Quantenzahlen  $n$  und  $q$  Erhaltungsgrößen. Für unabhängige Teilchen bleibt der Kristallimpuls  $\hbar q$  sogar dann erhalten, wenn die Tiefe  $V_x$  des Gitters variiert wird. Bei einem *optischen* Gitter ist dies leicht nachzuvollziehen, denn die einzige Möglichkeit für ein Atom, seinen realen Impuls  $p = \hbar q$  zu ändern, besteht in stimulierten Absorptions-Emissions-Prozessen, bei denen Photonen zwischen den entgegengesetzt propagierenden Laserstrahlen ausgetauscht werden. Hierbei bleibt der Impuls bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\hbar k$  (oder modulo  $2\hbar k$ ) erhalten. Die Eigenzustände ergeben sich folglich als Überlagerung aller ebenen Wellen, die durch das Lichtfeld kohärent miteinander gekoppelt werden:

$$\psi_{n,q}(x) = \sum_{\nu} c_{\nu}^{n,q} e^{i(q+2k\nu)x}. \quad (5.20)$$

## 5.1 Einteilchenzustände im homogenen periodischen Potential



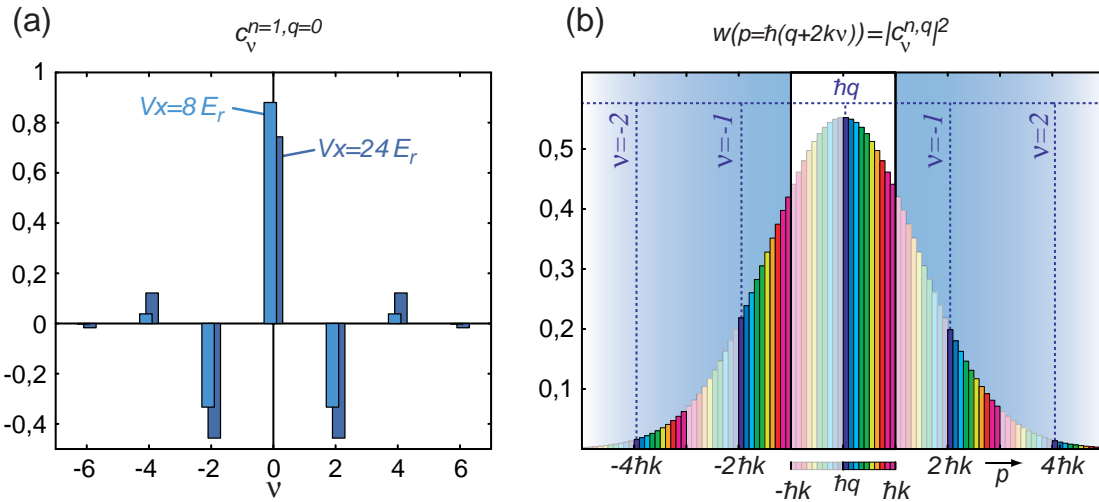
**Abbildung 5.4:** Beugung im Raman-Nath-Regime: Durch kurzes Anpulsen von ruhenden Atomen mit einer stationären Stehwelle werden diese symmetrisch in mehrere Impulszustände  $|\pm\nu \cdot 2\hbar k\rangle$  gebeugt. **(a)** Der Graph gibt die Summe der Populationen in den beiden Ordnungen  $\pm\nu$  als Funktion der Pulsfläche  $A = V_x \tau / 2\hbar$  an. **(b)** Beugungsbild eines frei expandierenden Rubidium-Kondensats, welches zu Beginn der Expansion von zwei zueinander orthogonal verlaufenden Stehwellen angepulsst wird.

Dies ist die Darstellung der Bloch-Zustände. Die Amplituden  $c_{\nu}^{n,q}$  der ebenen Wellen entsprechen den Komponenten der Eigenvektoren zur Matrix 5.10. Als Beispiel ist in Abbildung 5.5a für zwei verschiedene Gittertiefen die Zerlegung des Bloch-Zustandes  $|n = 1, q = 0\rangle$  in seine Wellenanteile dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Bevölkerung der höheren Impulskomponenten  $|\nu| > 0$  mit der Gittertiefe  $V_x$  zunimmt. Dies deckt sich mit der Argumentation, dass mit zunehmender „Leistungsverbreiterung“ auch „Bragg“-Prozesse zwischen ansonsten nicht-entarteten Impulszuständen möglich werden. Abbildung 5.5b gibt die Populationen in den diskreten Impulszuständen  $|q + 2k\nu\rangle$  wieder, aus deren Superposition sich die einzelnen Bloch-Zustände  $|n = 1, q\rangle$  ergeben. Dabei dienen die verschiedenen Farben der Zuordnung der Impulskomponenten zu ihrem jeweiligen Bloch-Zustand.

### 5.1.4 Wannier-Funktionen und Matrixelemente

In einem tiefen Gitter ist das Tunneln eines Teilchens zwischen benachbarten Gitterplätzen unterdrückt. Treten zudem Wechselwirkungseffekte auf, so kann die Bewegung des Teilchens auf einen einzelnen Gitterplatz beschränkt sein. Anstelle von Bloch-Wellen bietet sich hier eine naheliegendere Beschreibung mittels Wannier-Funktionen an. Dies sind auf die einzelnen Gitterplätze lokalisierte Wellenfunktionen, welche durch Superposition aus den Bloch-Wellen hervorgehen, jedoch keine Einteilcheneigenzustände darstellen [64]. Zu jedem Band  $n$  bilden die zugehörigen Wannier-Funktionen einen vollständigen orthonormalen Satz von Zuständen. Für ein Teilchen im  $n$ -ten Energieband, das auf den Ort  $x_j$  des

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse



**Abbildung 5.5:** Die Bloch-Zustände können als Superpositionen von ebenen Wellen  $\exp(i(q + 2k\nu)x)$  mit Amplituden  $c_\nu^{n,q}$  dargestellt werden. **(a)** Eine entsprechende Zerlegung des Bloch-Zustandes  $|n = 1, q = 0\rangle$  ist für zwei verschiedene Gittertiefen  $V_x$  gezeigt. Mit zunehmender Gittertiefe nehmen die Beiträge der höheren Impulskomponenten  $|\nu| > 0$  zu. **(b)** Impulsverteilung  $w(p)$  für verschiedene Bloch-Zustände  $|n = 1, q\rangle$  in einem  $24 E_r$  tiefen Gitter. Die Impulskomponenten  $p_\nu = \hbar(q + 2k\nu)$  sind entsprechend dem zugehörigen Kristallimpuls  $\hbar q$  farblich markiert.

$j$ -ten Gitterplatzes lokalisiert ist, lautet die Wannier-Funktion<sup>7</sup>:

$$w_n(x - x_j) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_q e^{-iqx_j} \psi_{n,q}(x). \quad (5.21)$$

Hierbei läuft die Summe über eine diskrete Anzahl  $M$  von Wellenvektoren  $q$ , welche innerhalb der ersten Brillouin-Zone liegen. Eine solche Diskretisierung ergibt sich zum Beispiel bei einem System endlicher Ausdehnung im Rahmen der Born-von Karman-Randbedingung<sup>8</sup>. Sind alle  $N$  Bloch-Wellen normiert,  $\sum_\nu |c_\nu^{n,q}|^2 = 1$ , so ist die Normierung der Wannier-Funktionen durch  $\mathcal{N} = M$  gegeben.

Da die Wannier-Funktionen eine vollständige Basis bilden, lässt sich umgekehrt aus ihnen jede Bloch-Welle konstruieren:

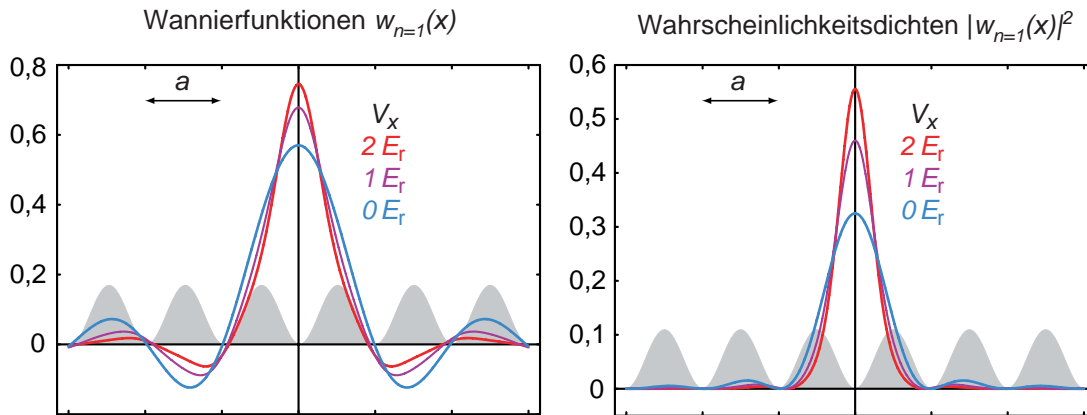
$$\psi_{n,q}(x) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_j e^{iqx_j} w_n(x - x_j). \quad (5.22)$$

<sup>7</sup>Im cosinusförmigen Gitter ist der Ort des  $j$ -ten Gitterplatzes durch  $x_j = (j + \frac{1}{2})a$  gegeben. Geht man stattdessen von einem sinusförmigen Potential aus, so ist die Wannier-Funktion  $w_n(x)$  am Ursprung  $x = 0$  zentriert und nimmt eine besonders einfache Form an. Man beachte jedoch, dass mit dem Potential auch die Hamilton-Matrix 5.9 eine andere Form annimmt.

<sup>8</sup>Siehe Fußnote auf Seite 136.



## 5.1 Einteilchenzustände im homogenen periodischen Potential



**Abbildung 5.6:** Wannier-Funktionen im untersten Band ( $n = 1$ ) und zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichten bei verschiedenen Gittertiefen  $V_x$ . Die Lage des Potentials ist grau angedeutet. Die Seitenflügel der Wellenfunktionen werden mit zunehmender Gittertiefe exponentiell unterdrückt.

Dabei läuft die Summe über alle  $M$  Gitterplätze. Diese Darstellung verdeutlicht, dass der Bloch-Wellenvektor  $q$  die Phasenbeziehung zwischen den Wellenfunktionen auf den einzelnen Gitterplätzen bestimmt. In einem tiefen Gitter stimmt der periodische Anteil  $u_{n,q}(x)$  der Bloch-Wellenfunktion im Bereich eines Gitterplatzes näherungsweise mit der entsprechenden Wannier-Funktion überein.

### Tunnelmatrixelement

In Abbildung 5.6 sind die Wannier-Funktionen für verschiedene Gittertiefen dargestellt. An den Seitenflügeln der Verteilungen ist zu erkennen, dass die Teilchen auch über eine endliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit auf den benachbarten Gitterplätzen verfügen, was einer endlichen Tunnelwahrscheinlichkeit entspricht. Für Teilchen im untersten Band ( $n = 1$ ) reicht es aufgrund des steilen Abfalls der Wellenfunktionen in der Regel aus, nur Tunnelprozesse zwischen unmittelbar benachbarten Plätzen zu berücksichtigen. Die Rate, mit der diese Prozesse stattfinden, ist durch das folgende Tunnelmatrixelement gegeben:

$$J = - \int_{-\infty}^{\infty} w_n^*(x \pm a) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) w_n(x) dx. \quad (5.23)$$

In dieser Definition ist  $J$  immer positiv. Mit zunehmender Gittertiefe nimmt der Überlapp zwischen benachbarten Wannier-Funktionen und damit die Tunnelrate 5.23 rasch ab.

Wie wir auf Seite 163 sehen werden, lässt sich in hinreichend tiefen Gittern das unterste Band ( $n = 1$ ) im Rahmen einer Tight-Binding-Näherung beschreiben:

$$\epsilon_{n=1}(q) \approx -2J \cos(q \cdot a). \quad (5.24)$$

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

Dank dieses Zusammenhangs lässt sich das Tunnelmatrixelement näherungsweise aus der Bandbreite bestimmen:

$$J \approx \frac{\epsilon_1(q = \pm k) - \epsilon_1(q = 0)}{4}. \quad (5.25)$$

Abbildung 5.8a zeigt das Tunnelmatrixelement als Funktion der Gittertiefe. Eine Gegenüberstellung der exakt berechneten Werte für  $J$  (blau) und der aus der Bandbreite abgeleiteten Werte (schwarz), verdeutlicht, dass die obige Tight-Binding-Näherung bereits für Gittertiefen  $V_x \gtrsim 3 E_r$  sehr gute Resultate liefert.

Der Zusammenhang zwischen der Bandbreite und dem Tunnelmatrixelement  $J$  lässt sich auch anschaulich begreifen: Mit zunehmender Tiefe der Potentialtöpfchen werden die Teilchen immer stärker lokalisiert. Folglich wird die Dispersion immer flacher und geht allmählich in die diskrete Niveaustuktur des harmonischen Oszillators über. Mit der Abnahme der Tunnelkopplung  $J$  verringert sich zugleich die Beweglichkeit der Teilchen im Gitter. Dieser Sachverhalt spiegelt sich in einer Zunahme der effektiven Masse  $m^*$  wider, welche gerade umgekehrt proportional zur Bandkrümmung ist (siehe Abb. 5.7):

$$m^*(q) = \frac{\hbar^2}{\partial^2 \epsilon_1(q) / \partial q^2} \xrightarrow{(5.24)} m^*(q = 0) \approx \frac{\hbar^2}{2Ja^2}. \quad (5.26)$$

Die Bandbreite und damit das Tunnelmatrixelement kann auch aus der eindimensionalen Mathieu-Gleichung abgeleitet werden [207]. Im Tight-Binding-Limit  $V_x \gg E_r$  ergibt sich daraus ein analytischer Näherungsausdruck für  $J$  (rot gestrichelter Verlauf in Abb. 5.8a) [82]:

$$J \approx \frac{4}{\sqrt{\pi}} E_r \left( \frac{V_x}{E_r} \right)^{3/4} e^{-2\sqrt{V_x/E_r}}. \quad (5.27)$$

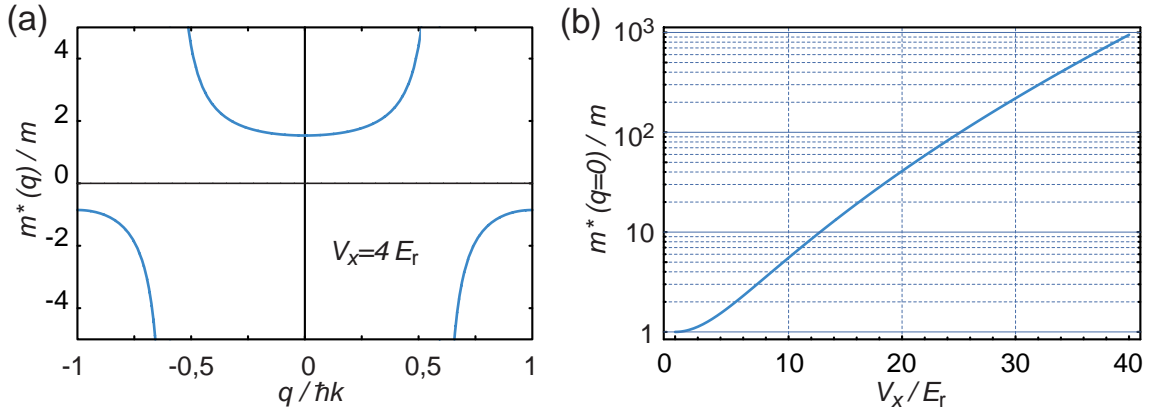
### Wechselwirkungsmatrixelemente

Besetzt ein Teilchen die Mode einer Wannier-Funktion  $w_n(x - x_j)$ , so kann diesem Teilchen der Gittervektor  $x_j$  als mittlerer Aufenthaltsort zugeordnet werden. Aufgrund ihrer Lokalisierung bieten sich Wannier-Funktionen für die Beschreibung von kurzreichweitigen Wechselwirkungen zwischen Teilchen auf demselben Gitterplatz an. Die  $s$ -Wellenstreuung zwischen zwei Bosonen auf demselben Gitterplatz kann mittels des effektiven Kontaktpotentials 2.77 beschrieben werden. Die zugehörige Wechselwirkungsenergie beträgt:

$$U_{\text{BB}} = \frac{4\pi\hbar^2 a_{\text{BB}}}{m_{\text{B}}} \int |w_{\text{B}}(\mathbf{r})|^4 d\mathbf{r}^3 = \frac{4\pi\hbar^2 a_{\text{BB}}}{m_{\text{B}}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |w_{\text{B}}(x)|^4 dx \right)^3. \quad (5.28)$$

Hierbei bezeichnet  $a_{\text{BB}}$  die Streulänge zwischen den beiden Bosonen und  $w_{\text{B}}(\mathbf{r}) = w(\mathbf{r})$  die Wannier-Funktion im dreidimensionalen Gitter (siehe Gleichung 5.32). Ist das Gitter entlang allen drei Achsen gleich tief, so gilt für  $U_{\text{BB}}$  der rechte Ausdruck in Gleichung 5.28.

## 5.1 Einteilchenzustände im homogenen periodischen Potential



**Abbildung 5.7:** (a) Effektive Masse als Funktion des Kristallimpulses für ein Teilchen in einem  $4 E_r$  tiefen Gitter. (b) Effektive Masse im Minimum des untersten Bandes als Funktion der Gittertiefe  $V_x$ . Die effektive Masse ist in Einheiten der realen Teilchen Masse  $m$  angegeben.

In einem tiefen Gitter kann die Wannier-Funktion durch den gaußförmigen Grundzustand des harmonischen Oszillators angenähert werden. Bezeichnet  $s_B = V_B/E_{r,B}$  die Gittertiefe für die Bosonen in Einheiten ihrer Rückstoßenergie, so erhält man [82]:

$$U_{BB} \approx \sqrt{\frac{8}{\pi}} k a_{BB} E_{r,B} s_B^{3/4}. \quad (5.29)$$

In Abbildung 5.8b ist das Wechselwirkungsmatrixelement für Rubidium im absoluten Grundzustand  $|F = 1, m_F = 1\rangle$  ( $a_{BB} = 100.4 a_0$ ) als Funktion der Gittertiefe zusammen mit der Näherung 5.29 dargestellt.

Aus Abbildung 5.8c geht hervor, dass durch Veränderung der Gittertiefe das Verhältnis aus Wechselwirkungsenergie  $U_{BB}$  und kinetischer Energie  $J_B$  über mehrere Größenordnungen variiert werden kann. Optische Gitter bieten daher einen direkten Zugang zum Regime der starken Wechselwirkungen, ohne dass hierfür die Dichte erhöht oder die atomare Streulänge über Feshbach-Resonanzen modifiziert werden müsste.

Auch zwischen den beiden Spezies einer Bose-Fermi-Mischung ist  $s$ -Wellenstreuung erlaubt. Wegen der unterschiedlichen optischen Verstimmungen verspüren die Bosonen und die Fermionen aber im Allgemeinen unterschiedliche Gittertiefen und müssen folglich durch verschiedene Wannier-Funktionen  $w_B(\mathbf{r})$  und  $w_F(\mathbf{r})$  dargestellt werden. Die Interpezieswechselwirkung  $U_{BF}$  auf einem Gitterplatz wird durch den räumlichen Überlapp zwischen den beiden Wellenfunktionen bestimmt:

$$U_{BF} = \frac{2\pi\hbar^2 a_{BF}}{\mu_{BF}} \int |w_B(\mathbf{r})|^2 |w_F(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}^3. \quad (5.30)$$

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

Der Faktor vor dem Integral entspricht der Kopplungsstärke  $g_{\text{BF}}$ , welche bereits in Gleichung 2.92b definiert wurde. Letztere setzt sich aus der Interspeziesstreuung  $a_{\text{BF}}$  und der reduzierten Masse  $\mu_{\text{BF}}$  der beiden Teilchen zusammen. Auch in diesem Fall lassen sich die beiden Wannier-Funktionen durch die Grundzustände harmonischer Oszillatoren annähern. Sind  $s_{\text{B}} = V_{\text{B}}/E_{\text{r,B}}$  und  $s_{\text{F}} = V_{\text{F}}/E_{\text{r,F}}$  die Gittertiefen für die beiden Spezies in Einheiten ihrer jeweiligen Rückstoßenergien, so gilt:

$$U_{\text{BF}} \approx \frac{4}{\sqrt{\pi}} k a_{\text{BF}} E_{\text{r},\mu} \left( \frac{\sqrt{s_{\text{B}}}\sqrt{s_{\text{F}}}}{\sqrt{s_{\text{B}}} + \sqrt{s_{\text{F}}}} \right)^{3/2}. \quad (5.31)$$

Hierbei wird zur Abkürzung die Größe  $E_{\text{r},\mu} = \hbar^2 k^2 / 2\mu_{\text{BF}}$  eingeführt.

In unserem Experiment ist das optische Gitter durch die besondere Wellenlänge von 755 nm ausgezeichnet. Bei dieser Wellenlänge ist die Laserverstimmung gerade so, dass die Gittertiefen für Rubidium und Kalium, gemessen in Einheiten ihrer jeweiligen Rückstoßenergien, gleich groß sind ( $s_{\text{B}} = s_{\text{F}}$ ). Unter diesen Bedingungen stimmen die beiden Wannier-Funktionen miteinander überein und der Überlapp zwischen den Spezies ist maximal. Für Rubidium und Kalium in den absoluten Grundzuständen  $|F = 1, m_F = 1\rangle$  bzw.  $|9/2, -9/2\rangle$  gilt dann unabhängig von der Gittertiefe die Beziehung<sup>9</sup>  $U_{\text{BF}}/U_{\text{BB}} = -2.9(1)$  (siehe Abb. 5.27). Es werden die Streulängen aus den Referenzen [100, 103] verwendet.

### 5.1.5 Mehrdimensionale Gitter

Da sich das Potential des dreidimensionalen optischen Gitters als Summe unabhängiger Potentiale von  $x$ ,  $y$  und  $z$  ergibt, ist das Einteilchenproblem nach den einzelnen Achsen separierbar. Die Bloch-Zustände und Wannier-Funktionen des einfach kubischen 3D-Gitters folgen aus dem Produkt der entsprechenden eindimensionalen Wellenfunktionen. So lautet zum Beispiel die Wannier-Funktion im untersten Band ( $n = 1$ ) des dreidimensionalen Gitters:

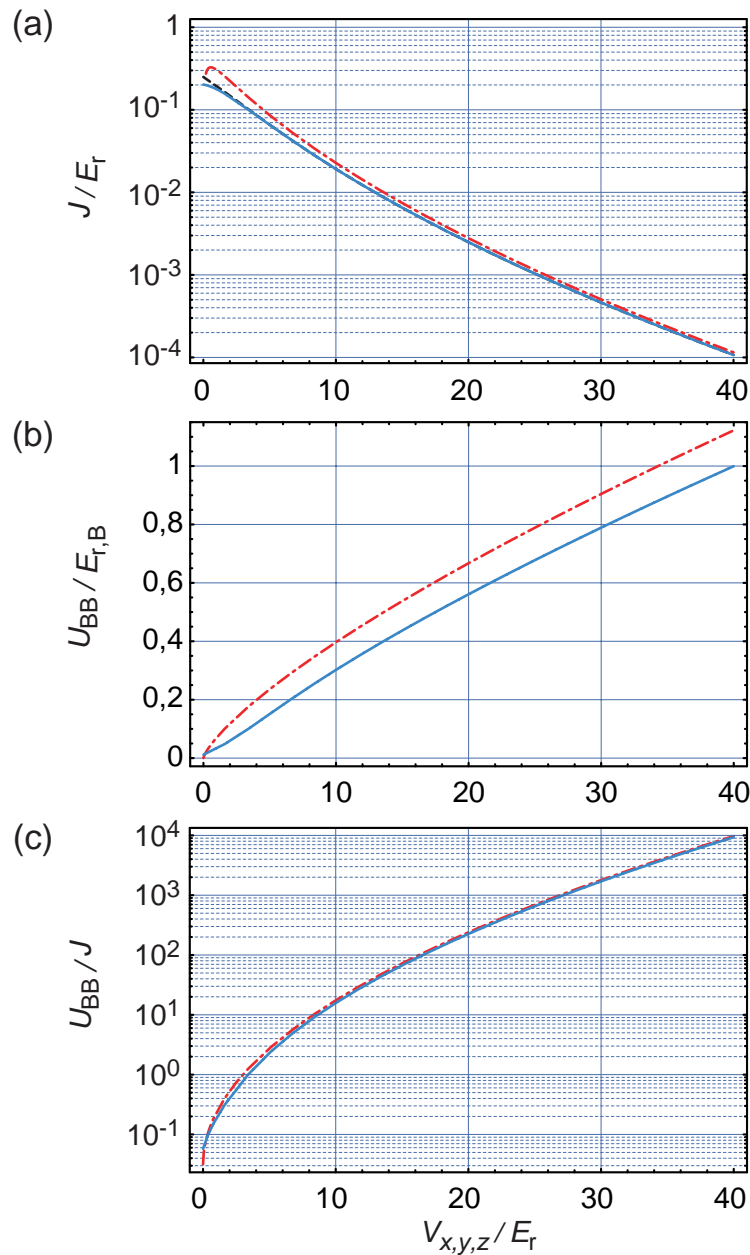
$$w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) = w_1(x - x_j) \cdot w_1(y - y_j) \cdot w_1(z - z_j). \quad (5.32)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$  den Gittervektor des  $j$ -ten Gitterplatzes.

Die mehrdimensionale Bandstruktur ergibt sich aus der Summe der einzelnen Eigenenergien. Abbildung 5.9 zeigt die Bandstruktur eines zweidimensionalen  $4 E_{\text{r}}$  tiefen Gitters. Man beachte, dass das zweite und dritte Band miteinander überlappen. Diese Eigenschaft ist analog zum isotropen zweidimensionalen harmonischen Oszillator, bei dem die beiden einfach angeregten Zustände  $(n_x, n_y) = (1, 0)$  und  $(0, 1)$  miteinander entartet sind. Da die beiden Bänder mit zunehmender Gittertiefe immer flacher werden, erhöht sich deren Überlapp bis sie quasi vollständig entartet sind. Analog liegt bei den ersten angeregten Bändern des 3D-Gitters eine dreifache Entartung vor. Während im 1D-Gitter eine Bandlücke für beliebige Gittertiefen  $V_x > 0$  existiert, tritt die entsprechende Lücke im isotropen

<sup>9</sup>Bei Abwesenheit eines externen Magnetfeldes.

## 5.1 Einteilchenzustände im homogenen periodischen Potential

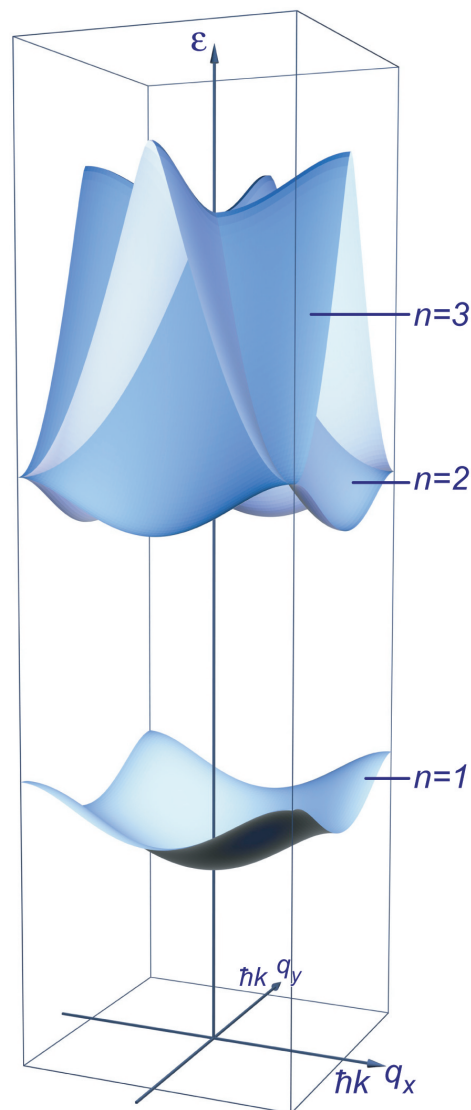


**Abbildung 5.8:** (a) Tunnelmatrixelement  $J$  als Funktion der Gittertiefe  $V_{x,y,z}$ . Der Graph gilt für beliebige Spezies und Gitterwellenlängen, da die Größen  $J$  und  $V_x$  in Einheiten der jeweiligen Rückstoßenergie angegeben sind. Die Näherungen 5.25 und 5.27 sind schwarz bzw. rot dargestellt. (b) Wechselwirkungsenergie  $U_{BB}$  für  $|F = 1, m_F = 1\rangle$ - $^{87}\text{Rb}$ -Atome in einem 755 nm-Gitter. Die Näherung 5.29 ist rot dargestellt. (c) Die Tunnelrate hängt exponentiell von der Gittertiefe ab. Dies erlaubt es, den Kopplungsparameter  $U_{BB}/J$  über viele Größenordnungen zu variieren. Der rote Verlauf zeigt das Verhältnis  $U_{BB}/J$ , wie es sich aus den beiden Näherungen 5.29 und 5.27 ergibt. In den Graphen geben die blauen Kurven jeweils die exakten Berechnungen wieder.

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

---

2D-Gitter erst oberhalb von  $V_{x,y} > 1,39 E_r$  und im isotropen 3D-Gitter erst oberhalb von  $V_{x,y,z} > 2,23 E_r$  auf.



**Abbildung 5.9:** Bandstruktur eines zweidimensionalen optischen Gitters mit einer Tiefe von  $4 E_r$ . Das zweite und dritte Band überlappen teilweise miteinander.

### 5.2 Vielteilchenzustände im inhomogenen periodischen Potential

Nach den Einteilchenzuständen des rein periodischen Potentials wollen wir uns nun den Vielteilchenzuständen des inhomogenen periodischen Potentials zuwenden. Ziel ist es, die Dichteverteilung des Bose-Einstein-Kondensats und des entarteten einkomponentigen Fermigas im realen Gitter zu bestimmen. Es wird untersucht, wie der Vielteilchengrundzustand durch den zusätzlichen externen Einschluss und die Wechselwirkung zwischen den Bosonen bzw. die Fermi-Statistik beeinflusst wird.

#### 5.2.1 Bose-Einstein-Kondensat im flachen Gitter

Ist die Tunnelkopplung  $J$  zwischen benachbarten Plätzen groß gegenüber der Wechselwirkungsenergie  $U$  zweier Atome auf demselben Platz, so liegt das Regime der schwachen Wechselwirkung vor. Auch in einem 3D-Gitter bildet sich dann als bosonischer Vielteilchengrundzustand ein Bose-Einstein-Kondensat aus, dessen makroskopische Wellenfunktion einer Gross-Pitaevskii-Gleichung genügt. Ist das chemische Potential klein gegenüber der Gittertiefe, so kann die makroskopische Wellenfunktion in einem Tight-Binding-Ansatz als Summe lokalisierter Wellenfunktionen dargestellt werden [208]:

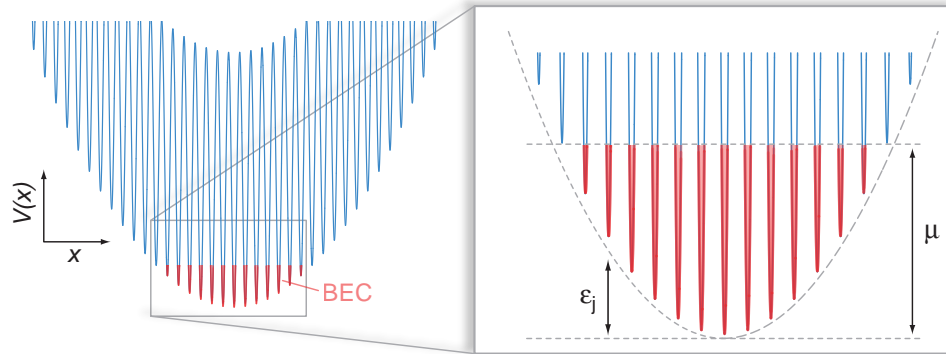
$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_j \psi_j w_j(\mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad \psi_j = \sqrt{\bar{n}_j} e^{i\varphi_j}. \quad (5.33)$$

Die auf die einzelnen Gitterplätze lokalisierten Wellenfunktionen  $\psi_j$  verfügen über eine wohldefinierte Phase  $\varphi_j$  und eine Amplitude  $\sqrt{\bar{n}_j}$ , die durch die mittlere Teilchenzahl  $\bar{n}_j$  auf dem jeweiligen Gitterplatz gegeben ist. Die Gesamtatomzahl folgt aus  $N_B = \sum_j \bar{n}_j$ . Das System kann als periodische Anordnung mikroskopischer Kondensate aufgefasst werden. Wobei  $\psi_j$  die einzelnen Kondensatwellenfunktionen sind, deren makroskopische Phasen  $\varphi_j$  über Josephson-Tunnelkontakte miteinander gekoppelt sind [208, 209]. Geht man außerdem davon aus, dass das chemische Potential die unterste Bandlücke nicht überschreitet, so können die lokalisierten Wellenfunktionen  $w_j(\mathbf{r})$  durch die Wannier-Funktionen  $w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$  des ersten Bandes angenähert werden. Das System aus mikroskopischen Kondensaten gehorcht einer diskretisierten Form der Gross-Pitaevskii-Gleichung mit einem Hamilton-Operator [208]:

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle i, j \rangle} \psi_i^* \psi_j + \sum_j \epsilon_j |\psi_j|^2 + \sum_j \frac{1}{2} U |\psi_j|^4. \quad (5.34)$$

Die erste Summe entspricht der kinetischen Energie und läuft über alle Paare von unmittelbar benachbarten Gitterplätzen  $\langle i, j \rangle$ . Das externe Potential ruft einen vom Gitterplatz abhängigen Energieversatz  $\epsilon_j$  hervor. Ist die Variation des externen Potentials über eine Gitterperiode hinweg klein, so gilt in guter Näherung  $\epsilon_j \approx V_{\text{ext}}(\mathbf{r}_j)$ . Wie in Abschnitt 4.2.3 beschrieben, wird das externe Potential durch das gaußsche Strahlprofil der Gitterlaser und durch die überlagerte Dipolfalle erzeugt und kann harmonisch genähert werden. Der

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse



**Abbildung 5.10:** Dichteverteilung des Bose-Einstein-Kondensats im inhomogenen Gitter. Die Atome verteilen sich so, dass das chemische Potential  $\mu$  auf allen Gitterplätzen gleich ist. Das lokale chemische Potential am  $j$ -ten Platz ist näherungsweise durch den Potentialversatz  $\epsilon_j$  und die Wechselwirkungsenergie pro Atom  $U \cdot \bar{n}_j$  gegeben. Folglich nimmt die Einhüllende der Dichteverteilung das typische Thomas-Fermi-Profil (invertierte Parabel) an.

letzte Term in 5.34 berücksichtigt die Wechselwirkung zwischen Atomen auf demselben Gitterplatz, wobei  $U$  das Wechselwirkungsmatrixelement aus Gleichung 5.28 bezeichnet.

### Grundzustandsverteilung in der Thomas-Fermi-Näherung

Im homogenen periodischen Potential ist der Einteilchengrundzustand, und damit auch die makroskopische Wellenfunktion 5.33 eines schwach wechselwirkenden Kondensats, durch die Bloch-Welle mit dem Kristallimpuls  $\hbar q = 0$  gegeben. Ein Vergleich mit der Bloch-Wellen-Darstellung in Gleichung 5.22 zeigt, dass in diesem Fall die Kondensatwellenfunktionen  $\psi_j$  auf den einzelnen Gitterplätzen über dieselben Phasen  $\varphi_j \equiv 0$  verfügen. Berechnet man den kinetischen Energieterm des Hamilton-Operators 5.34 für zwei Wellenfunktionen benachbarter Gitterplätze und bildet dessen Realteil, so erhält man die Josephson-Energie  $-J\sqrt{\bar{n}_i\bar{n}_j}\cos(\varphi_i - \varphi_j)$  [208, 210]. Demnach kann das System durch Annehmen einer einheitlichen Phase seine Energie pro Tunnelkontakt und pro Atom um  $J$  absenken. Somit zeichnet sich auch im inhomogenen Gitter der Grundzustand durch eine einheitliche Phase aus.

Damit der Vielteilchengrundzustand tatsächlich stationär ist, müssen sich die Phasen der einzelnen Wellenfunktionen  $\psi_j$  mit derselben zeitlichen Rate entwickeln. Dies erfordert, dass das lokale chemische Potential über das Gitter hinweg konstant ist. In der Thomas-Fermi-Näherung kann der Beitrag der kinetischen bzw. der Josephson-Energie in Gleichung 5.34 vernachlässigt werden und die Energie am  $j$ -ten Gitterplatz beträgt:

$$E_j \approx \epsilon_j |\psi_j|^2 + \frac{U}{2} |\psi_j|^4 = \epsilon_j \bar{n}_j + \frac{U}{2} \bar{n}_j^2. \quad (5.35)$$



## 5.2 Vielteilchenzustände im inhomogenen periodischen Potential

Da die Entropie  $S$  bei einem System im absoluten Grundzustand konstant null ist, folgt für das lokale chemische Potential

$$\mu_j = \frac{\partial E_j}{\partial n_j} = \epsilon_j + U\bar{n}_j \equiv \mu = \text{konst.} \quad (5.36)$$

Aus der Forderung eines räumlich konstanten chemischen Potentials  $\mu_j$  lässt sich die Besetzung  $\bar{n}_j$  der einzelnen Gitterplätze abschätzen. Ist der Abstand  $a = \lambda/2$  zwischen benachbarten Plätzen klein gegenüber der Ausdehnung der Atomwolke, so können die Besetzungszahlen  $\bar{n}_j$  durch eine kontinuierliche Verteilung  $\bar{n}(\mathbf{r})$  angenähert werden. Dabei entspricht  $\bar{n}(\mathbf{r})/a^3$  der mittleren Dichte. Der externe Einschluss sei durch ein harmonisches Potential mit dem Aspektverhältnis  $\alpha = \omega_z/\omega_r$  gegeben. Im Rahmen der Kontinuumsnäherung führen wir die folgende Ersetzung durch:

$$\epsilon_j \rightarrow V_{\text{ext}}(\rho) = \frac{1}{2}m\omega_r^2\rho^2 \quad \text{mit} \quad \rho^2 = x_j^2 + y_j^2 + \alpha^2 z_j^2. \quad (5.37)$$

Dabei bezeichnet  $\rho$  den effektiven Abstand des betrachteten Gitterplatzes  $j$  vom Zentrum der anisotropen harmonischen Falle. Im Limes der Kontinuumsnäherung ergibt sich die Gesamtatomzahl zu:

$$N_{\text{B}} = \frac{1}{a^3} \int \bar{n}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}^3 = \frac{4\pi}{a^3\alpha} \int_0^\infty \bar{n}(\rho)\rho^2 d\rho. \quad (5.38)$$

Diese Gleichung legt das chemische Potential  $\mu$  fest. Aus der Konstanz des chemischen Potentials in Gleichung 5.36 lässt sich dann die Dichteverteilung ableiten. Diese weist das typische Thomas-Fermi-Profil auf:

$$\bar{n}(\rho) = \max\left(\frac{\mu - \frac{1}{2}m\omega_r^2\rho^2}{U}, 0\right). \quad (5.39)$$

Durch Einsetzen in Gleichung 5.38 ergibt sich das chemische Potential und der effektive Thomas-Fermi-Radius als Funktion der Fallenparameter und der Atomzahl [210]:

$$\mu = \left(\frac{15(\lambda/2)^3 m^{3/2} N_{\text{B}} U \alpha \omega_r^3}{16\sqrt{2}\pi}\right)^{2/5} \quad \text{und} \quad \rho_{\text{TF}} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_r^2}}. \quad (5.40)$$

Bei der obigen Herleitung wird von einer hohen Tunnelkopplung  $J$  ausgegangen, sodass sich eine einheitliche Phase zwischen den Gitterplätzen einstellt. Damit die Thomas-Fermi-Näherung angewendet werden kann, muss aber gleichzeitig die Gesamt-Wechselwirkungsenergie auf jedem Gitterplatz groß gegenüber der kinetischen Energie der einzelnen Atome sein ( $\bar{n}U/J \gg 1$ , siehe Seite 34) [208]. Um beiden Bedingungen gerecht zu werden, sind hohe Besetzungszahlen  $\bar{n}_j$  der Gitterplätze erforderlich. In 3D-Gittern stellen hohe Besetzungszahlen  $\bar{n}_j$  eher die Ausnahme dar, sodass die obige Argumentation nur ein qualitatives Verständnis der sich einstellenden Dichteverteilung liefert.

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

---

### 5.2.2 Entartetes Fermigas

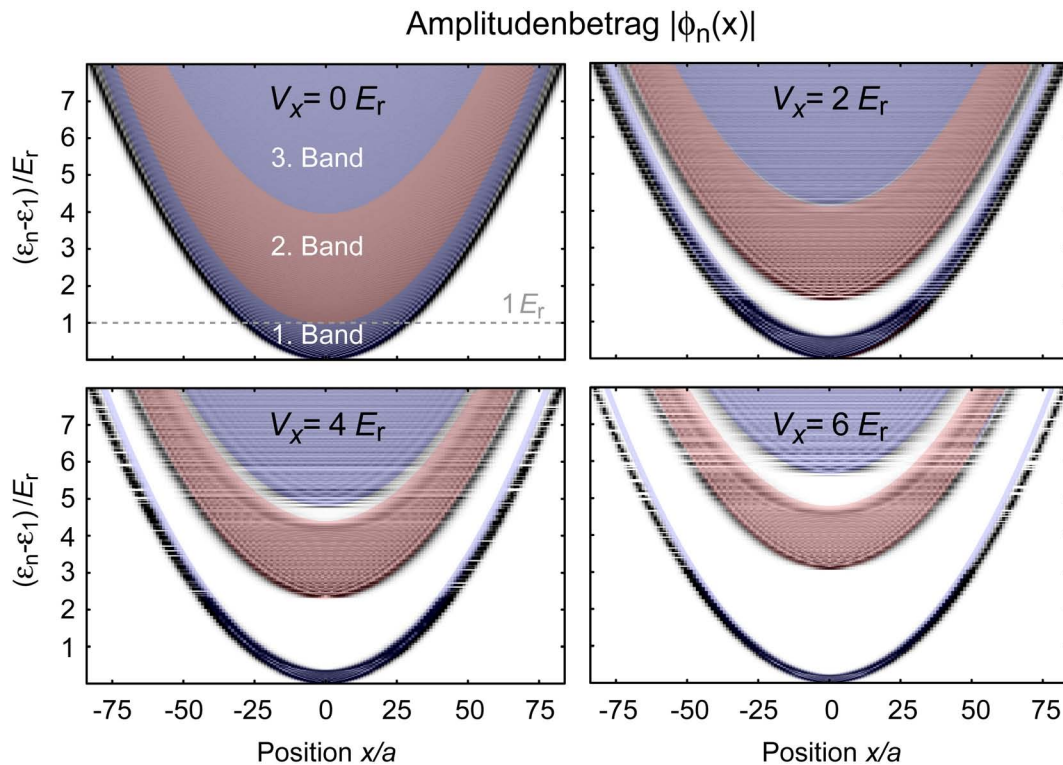
Im vollständig spinpolarisierten Fermigas ist  $s$ -Wellenstreuung in Übereinstimmung mit dem Pauli-Prinzip verboten und der Streuquerschnitt der nächst höheren Streuordnung ( $p$ -Wellen-Streuung) nimmt mit der Temperatur gemäß  $\sigma_p \propto T^2$  ab. Ein ultrakaltes einkomponentiges Fermigas kann daher als ideales Gas aufgefasst werden und der Vielteilchenzustand setzt sich aus den ungestörten Einteilchenzuständen zusammen. Bei  $T = 0$  besetzen  $N$  Fermionen gemäß dem Pauli-Prinzip die  $N$  niederenergetischsten Einteilcheneigenzustände des Gitterpotentials. Die Fermi-Energie ist durch die Energie des höchsten, besetzten Eigenzustandes definiert,  $\epsilon_F = \epsilon_N$ . Da die Einteilchenprobleme des einfach kubischen 2D- und 3D-Gitters separierbar sind, wollen wir uns in diesem Abschnitt zunächst auf die Eigenzustände des inhomogenen 1D-Gitters konzentrieren. Aus diesen lassen sich später die fermionischen Dichteverteilungen in höherdimensionalen Gittern und bei endlichen Temperaturen herleiten. Es sei angemerkt, dass die hergeleiteten Einteilcheneigenschaften gleichermaßen für Bosonen wie für Fermionen gelten.

Infolge des externen Einschlusses weist das Potential des optischen Gitters keine perfekte Translationssymmetrie auf und somit stimmen die Einteilcheneigenzustände nicht mit den Bloch-Zuständen überein. Dennoch können Bandstruktur und Bloch-Wellen eine gute Beschreibung der atomaren Zustände liefern. Dies setzt jedoch voraus, dass die Änderung des externen Potentials auf der Längenskala der Atomwolke klein gegenüber der Breite der Energiebänder ist. Diese Bedingung wird am ehesten von einem Bose-Einstein-Kondensat erfüllt, da die Atome hier in der Regel eine schmale Orts- und Impulsverteilung aufweisen. Ganz anders verhält es sich bei Fermionen, hier führt die Einfachbesetzung der Eigenzustände bei großen Teilchenzahlen zu einer großen räumlichen Ausdehnung. Eine zuverlässige Beschreibung der Dichteverteilung erfordert in diesem Fall eine Bestimmung der exakten Eigenzustände des inhomogenen periodischen Potentials. Für ein 1D-Gitter mit überlagertem harmonischen Einschluss lautet die Einteilchen-Schrödinger-Gleichung entlang der Gitterachse  $x$ :

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 + V_x \cos^2(kx) \right) \phi_n(x) = \epsilon_n \phi_n(x). \quad (5.41)$$

Eine exakte Lösung dieser Gleichung ist nur numerisch möglich. Zu diesem Zweck diskretisieren wir den Hamilton-Operator bezüglich der Ortskoordinate  $x$  ( $\sim 15$  Punkte pro Gitterperiode  $a = \lambda/2$ ). Dabei nimmt die zweite Ableitung in der kinetischen Energie die Form eines Differenzenquotienten an. Für ein endliches Gitter lässt sich der Hamilton-Operator dann als symmetrische Matrix darstellen und diagonalisieren. Neben den Energieeigenwerten  $\epsilon_n$  erhält man auf diese Weise auch die Eigenzustände  $\phi_n(x)$  in der Ortsdarstellung. In Abbildung 5.11 sind die resultierenden Spektren für vier verschiedene Gittertiefen bei konstantem externen Einschluss wiedergegeben. Die Eigenzustände werden durch ihren Amplitudenbetrag  $|\phi_n(x)|$  in einer Grauskala dargestellt, wobei die Eigenenergien die vertikalen Positionen definieren. Helle Bereiche entsprechen verbotenen Bändern

## 5.2 Vielteilchenzustände im inhomogenen periodischen Potential

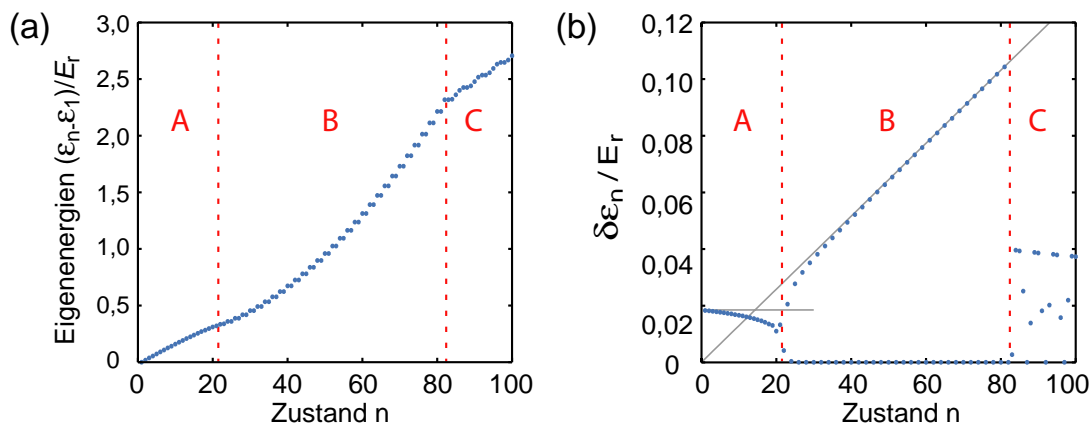


**Abbildung 5.11:** Numerisch berechnetes Spektrum der Einteilcheneigenzustände des inhomogenen 1D-Gitters ( $\lambda = 755 \text{ nm}$ ) für vier verschiedene Gittertiefen und konstanten externen Einschluss ( $\omega_x = 2\pi \cdot 200 \text{ Hz}$  für  $^{40}\text{K}$ ). Der Betrag  $|\phi_n(x)|$  der Eigenzustände ist in einer Grauskala dargestellt und zeigt deren räumliche Ausdehnung. Die vertikalen Positionen der Zustände werden durch die Eigenenergien  $\epsilon_n$  bestimmt. Zum Vergleich sind die Ergebnisse einer Bandstrukturberechnung farblich überlagert. Hier wird der harmonische Einschluss nachträglich in Form eines ortsabhängigen Energieversatzes berücksichtigt.

bzw. Bandlücken, in denen die Aufenthaltswahrscheinlichkeit verschwindet.

Im Gegensatz zum translationssymmetrischen Gitter werden im inhomogenen Gitter die Bandlücken nicht allein durch den Impuls, sondern auch durch den Ort der Teilchen bestimmt. Dennoch lassen sich die erlaubten und verbotenen Aufenthaltsbereiche näherungsweise aus der Bandstruktur des homogenen Gitters ermitteln, indem man das zusätzliche harmonische Potential in Form eines ortsabhängigen Energieversatzes berücksichtigt. Die Ergebnisse einer solchen Näherung sind in Abbildung 5.11 als farbliche Überlagerungen dargestellt. Im Zentrum des flachen Gitters sind die Zustände über viele Gitterplätze delokalisiert, sodass hier eine gute Übereinstimmung zwischen den räumlich „verbogenen“ Bändern und den exakt berechneten Spektren besteht. Nach außen hin nimmt der Gradient des externen Potentials jedoch soweit zu, dass das Gitter nicht mehr als abschnittsweise

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse



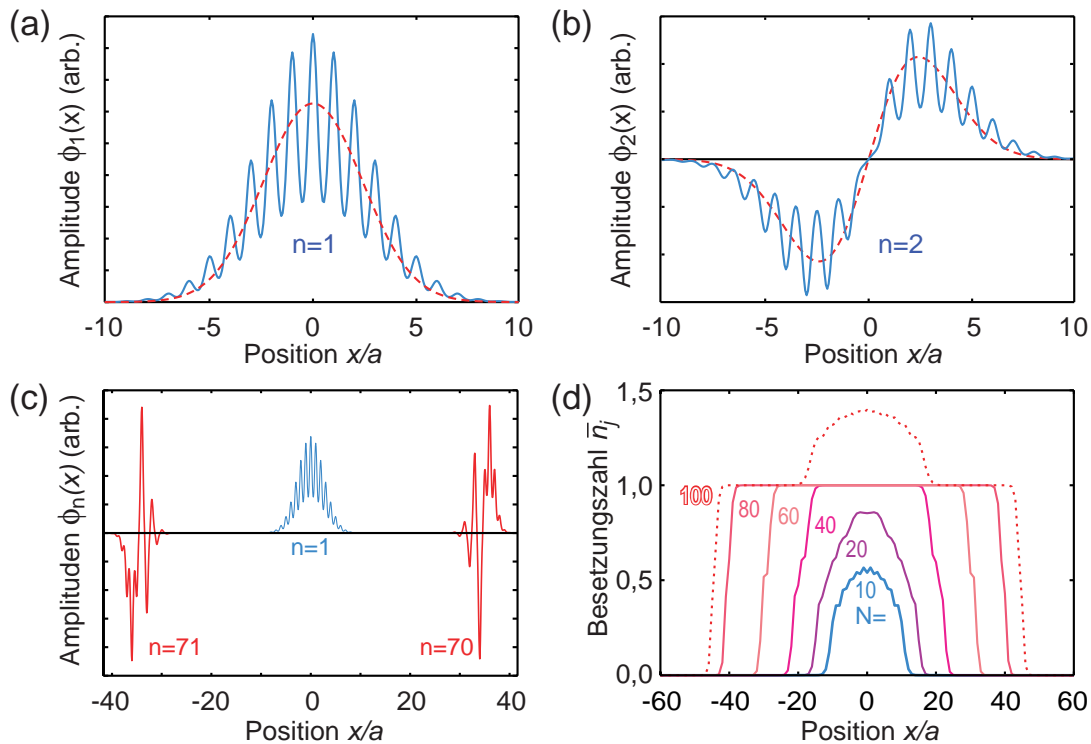
**Abbildung 5.12:** (a) Energiespektrum als Funktion der Quantenzahl  $n$  für ein  $^{40}\text{K}$ -Atom in einem  $4 E_r$  tiefen 1D-Gitter ( $\lambda = 755 \text{ nm}$ ) mit einem externen harmonischen Einschluss der Frequenz  $\omega_x = E_r/(43,8 \cdot \hbar) \approx 2\pi \cdot 200 \text{ Hz}$ . (b) Energiedifferenz zwischen den jeweils benachbarten Eigenwerten aus dem Graphen (a). Zum Vergleich zeigt die kurze horizontale Linie die Energiedifferenz  $\hbar\omega^*$  eines reinen harmonischen Oszillators, wobei  $\omega^* = \omega_x \sqrt{m/m^*}$  die Oszillatorfrequenz eines Teilchens der effektiven Masse  $m^*$  ist. Die Diagonale gibt den Potentialunterschied zwischen benachbarten Gitterplätzen an.

homogen betrachtet werden kann. In diesem Bereich bricht das Bild von delokalisierten Bloch-Wellen zusammen.

In Abbildung 5.13a,b sind die beiden niederenergetischsten Eigenzustände eines inhomogenen  $4 E_r$  tiefen Gitters dargestellt. Die schnell oszillierenden Anteile der Wellenfunktionen werden durch das periodische Potential verursacht und spiegeln den Bloch-Wellencharakter der Zustände wider. Zugleich besitzen die Wellenfunktionen auch Eigenschaften von harmonischen Oszillatorzuständen. Dies deckt sich mit der Tatsache, dass ein Teilchen im Minimum des Bloch-Bandes eine ähnliche Dispersion aufweist, wie ein freies Teilchen mit einer effektiven Masse  $m^*(q = 0)$  (Gleichung 5.26) [211–213]. Tatsächlich zeigt der Vergleich in den Abbildungen 5.13a,b, dass sich die lokalen Amplituden der niederenergetischsten Zustände sehr gut durch die harmonischen Oszillatorzustände eines Teilchens der Masse  $m^*(q = 0)$  wiedergeben lassen.

In Abbildung 5.12a ist ein typisches Energiespektrum als Funktion der Quantenzahl  $n$  dargestellt. Mit zunehmendem  $n$  weicht der Verlauf immer stärker von dem linearen Verhalten eines harmonischen Oszillators ab. Wie anhand der Knicke zu erkennen ist, lässt sich das Spektrum in drei verschiedene Bereiche (A, B, C) unterteilen [211–213]. Die drei Bereiche treten noch deutlicher in Erscheinung, wenn man die Energiedifferenz  $\delta\epsilon_n = \epsilon_{n+1} - \epsilon_n$  zwischen jeweils benachbarten Eigenwerten als Funktion von  $n$  aufträgt. Dies ist in Abbildung 5.12b gezeigt. Während  $\delta\epsilon_n$  in einem rein harmonischen Potential konstant ist, nimmt es bei Anwesenheit eines periodischen Potentials mit zunehmendem

## 5.2 Vielteilchenzustände im inhomogenen periodischen Potential



**Abbildung 5.13:** Zustände für  $^{40}\text{K}$  in einem  $4 E_r$  tiefen 1D-Gitter ( $\lambda = 755 \text{ nm}$ ) mit einem harmonischen Einschluss der Frequenz  $\omega_x = 2\pi \cdot 200 \text{ Hz}$ : **(a)** zeigt den Grundzustand  $\phi_1(x)$  und **(b)** den ersten angeregten Zustand  $\phi_2(x)$ . Zum Vergleich sind die Zustände eines reinen harmonischen Oszillators mit einer effektiven Masse  $m^*(q = 0)$  gestrichelt dargestellt. **(c)** zeigt zwei höher angeregte und miteinander entartete Zustände (rot), deren Ausdehnung auf den rechten bzw. linken Bereich des Gitters beschränkt ist. **(d)** Besetzung der Gitterplätze für verschiedene Fermionenzahlen bei  $T = 0$ .

$n$  zunächst immer weiter ab, um dann im Bereich B abrupt in zwei Äste aufzuspalten. Dabei ist der untere Ast konstant null und durch das Auftreten von paarweise entarteten Zuständen bedingt<sup>10</sup>. Exemplarisch sind in Abbildung 5.13c die zwei entarteten Zustände mit den Quantenzahlen  $n = 70$  und  $71$  wiedergegeben. Mit dem Übergang in den Bereich B beginnen die Wellenfunktionen abwechselnd auf den rechten bzw. den linken Teilbereich des Gitters beschränkt zu sein und die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Zentrum des Gitters verschwindet. Diese lokalisierten Zustände sind analog zu den sogenannten Wannier-Stark-Zuständen, welche sich in einem periodischen Potential beim Anlegen eines homogenen Gradienten ausbilden. Mit größer werdendem  $n$  nimmt die Lokalisierung immer weiter zu, bis die Einteilchenzustände schließlich jeweils einem einzelnen Gitter-

<sup>10</sup>Man beachte, dass die Entartung nur dann auftritt, wenn das periodische Potential, wie in Gleichung 5.41, eine Symmetrie bezüglich des Minimums des harmonischen Potentials aufweist. Im Experiment ist dies im Allgemeinen nicht der Fall, sodass die Zustände nur *quasi*-entartet sind.

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

---

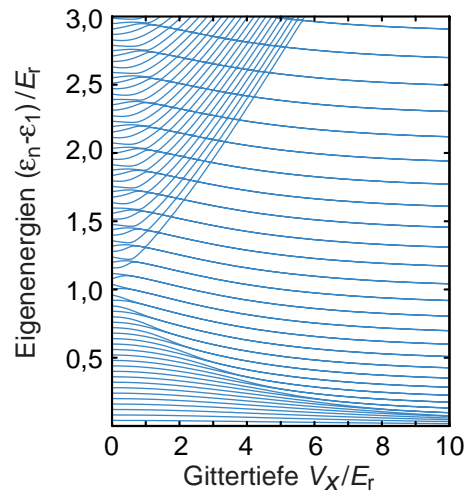
platz  $j$  zugeordnet werden können. In diesem Fall ist die Energiedifferenz  $\delta\epsilon_n$  im aufsteigenden Ast in sehr guter Näherung durch den Potentialunterschied  $\frac{1}{2}m\omega_x^2 a^2(2j)$  zwischen zwei benachbarten Gitterplätzen gegeben und die paarweise entarteten Zustände entsprechen Teilchen auf den symmetrisch zum Ursprung angeordneten Gitterplätzen  $\pm j$ . Geht man zu größeren Quantenzahlen  $n$  über, so erreicht man den Bereich C. Hier treten neben den lokalisierten Zuständen am Gitterrand auch wieder *delokalisierte* Zustände im Zentrum des Gitters auf. Wie ein Vergleich mit Abbildung 5.11 zeigt, sind Letztere dem zweiten Energieband zuzuordnen. Die starke Streuung von  $\delta\epsilon_n$  rührt daher, dass im Energiebereich C Zustände des ersten und des zweiten Bandes koexistieren.

Die Grundzustandsverteilung von  $N$  Fermionen folgt durch Summation über die Betragsquadrate der  $N$  niederenergetischsten Zustände  $\phi_n(x)$ . Integriert man die resultierende Dichteverteilung lokal über die einzelnen Perioden  $a$ , so erhält man die mittlere Besetzungszahl  $\bar{n}_j$  der Gitterplätze. In Abbildung 5.13d sind die entsprechenden Verteilungen für verschiedene Teilchenzahlen  $N$  dargestellt. Für sehr kleine  $N$  stimmt das Dichteprofil noch näherungsweise mit der Verteilung in einer rein harmonischen Falle überein. Nähert sich die Fermi-Energie den entarteten Energieniveaus und damit im Spektrum dem Bereich B, so erreicht die Dichte im Zentrum des Gitters den Wert eins und nimmt (vorerst) nicht weiter zu. Das Hinzufügen weiterer Teilchen bewirkt allein, dass sich der Bereich mit Einfachbesetzung ( $\bar{n}_j = 1$ ) immer weiter zum Rand hin ausdehnt.

Da durch Aufaddieren unterschiedlicher Einteilchenzustände die Besetzungszahl  $\bar{n}_j$  den Wert 1 nicht überschreitet und gemäß dem Pauli-Prinzip jeder Zustand nur einfach besetzt werden darf, formt sich ausgehend vom Zentrum des Gitters ein isolierender Vielteilchenzustand. Dieser sogenannte Bandisolator ist wegen der verschwindenden Varianz seiner Dichte inkompressibel. Wächst jedoch mit größer werdender Teilchenzahl die Fermi-Energie über einen kritischen Wert hinaus, so können die Teilchen schließlich wieder ins Zentrum des Gitters tunneln. Im Bild der Bloch-Wellen sind diese höher energetischen Teilchen dem zweiten Band zuzuordnen und verfügen somit über eine unterschiedliche Quantenzahl  $n'$ . Eine Mehrfachbesetzung der zentralen Gitterplätze kann daher stattfinden, sobald die Fermi-Energie über die erste Bandlücke hinaus wächst. Im Spektrum aus Abbildung 5.12 entspricht dies dem Übergang vom Bereich B nach C. Das durch einen Gradienten hervorgerufene Tunneln von Teilchen in höhere Bänder wird auch als Landau-Zener-Tunneln bezeichnet. Wie anhand des gestrichelten Verlaufs in Abbildung 5.13d zu erkennen ist, bildet sich mit der Besetzung der höheren Bänder eine Schalenstruktur in der fermionischen Dichteverteilung aus.

Abbildung 5.14 zeigt das Spektrum der Eigenenergien als Funktion der Gittertiefe für einen konstanten harmonischen Einschluss und spiegelt somit die Entwicklung der Zustände beim Hochrampen des Gitters wider. Offensichtlich können die Ausgangszustände im harmonischen Potential ( $V_x = 0$ ) in zwei Klassen unterteilt werden [214]. So zeigen die Zustände mit einer Energie kleiner als die Rückstoßenergie  $E_r$  ein monotones Verhalten beim Hochrampen des Gitters. Wohingegen die Zustände oberhalb der Rückstoßenergie

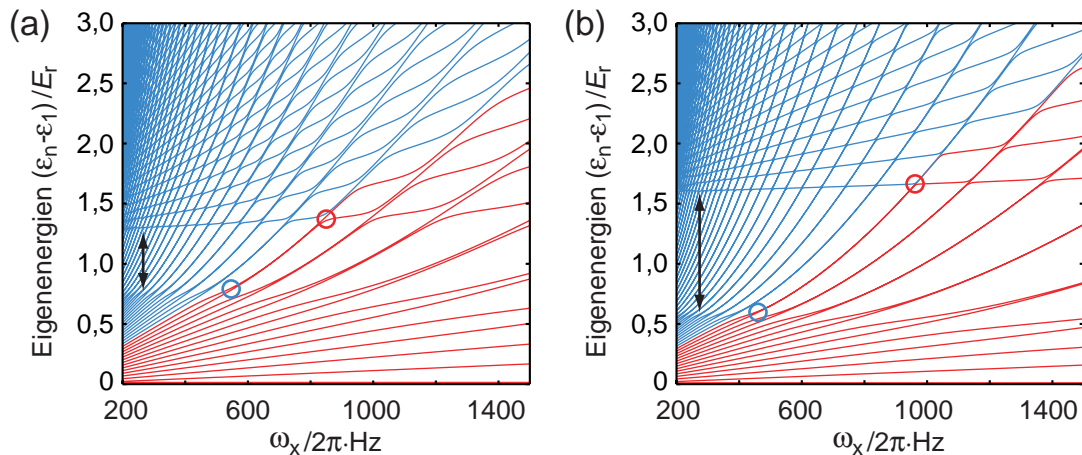
## 5.2 Vielteilchenzustände im inhomogenen periodischen Potential



**Abbildung 5.14:** Energieniveaus  $\epsilon_n$  relativ zum Grundzustand  $\epsilon_1$  als Funktion der Gittertiefe  $V_x$  bei einem harmonischen Einschluss mit  $\omega_x = E_r / (25 \cdot \hbar) = 2\pi \cdot 350 \text{ Hz}$  für  $^{40}\text{K}$  in einem 755 nm-Gitter.

einen komplizierteren Verlauf aufweisen, der durch mehrere vermiedene Kreuzungen ausgezeichnet ist. Der Grund für das Auftreten dieser beiden Klassen kann anhand von Abbildung 5.11 nachvollzogen werden. Beim Hochrampen des periodischen Potentials bildet sich eine Bandlücke aus, welche die beiden Zustandsklassen voneinander trennt. Dabei gehören die unteren Zustände allein dem ersten Band an und verringern ihre Energie relativ zum Grundzustand  $\epsilon_1$ . Demgegenüber enthält die obere Zustandsklasse ( $\epsilon_n > E_r$ ) neben Zuständen des ersten Bandes auch Zustände aus höheren Bändern. Bei Letzteren steigt die Energie mit zunehmendem  $V_x$  relativ zu  $\epsilon_1$  an. Dieses unterschiedliche Verhalten der Zustände innerhalb der oberen Klasse führt zu den vermiedenen Kreuzungen in Abbildung 5.14. Sobald sich die Bandlücken öffnen, nimmt der räumliche Überlapp und damit auch die Landau-Zener-Tunnelkopplung zwischen den quasi-entarteten Zuständen rasch ab (siehe Abbildung 5.11). Die rasche Abnahme der Kopplung wird auch anhand der vermiedenen Kreuzungen deutlich, deren Aufspaltung mit zunehmendem  $V_x$  zügig gegen null geht. Aufgrund der geringen Tunnelwahrscheinlichkeiten bleiben die Atome in ihren jeweiligen Bändern gefangen, selbst wenn am Ende der Rampe freie Zustände mit weitaus kleineren Energien in den unteren Bändern zur Verfügung stehen. Gilt zu Anfang  $\epsilon_F > E_r$ , so befindet sich das Vielteilchensystem nach dem Hochrampen des Gitters in der Regel in einem angeregten, metastabilen Zustand mit mehrfach besetzten Gitterplätzen. Gilt hingegen  $\epsilon_F < E_r$ , so kann das System jederzeit in seinem Grundzustand verbleiben, ohne dass Umverteilungsprozesse zwischen den Bändern notwendig sind. Nur im letzteren Fall lässt sich das Vielteilchensystem in kurzer Zeit adiabatisch aus der harmonischen Falle in ein Gitter mit einfach besetzten Plätzen überführen [214].

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse



**Abbildung 5.15:** Energieeigenwerte  $\epsilon_n$  relativ zu  $\epsilon_1$  als Funktion der externen Fallenfrequenz  $\omega_x$  für ein (a)  $1 E_r$ - bzw. (b)  $2 E_r$  tiefes 1D-Gitter ( $\lambda = 755$  nm). Zur Veranschaulichung ist der Grundzustand eines Systems aus 15 Fermionen rot dargestellt. Blaue Kreise markieren den Punkt, bei dem das System durch Erhöhen von  $\omega_x$  erstmals vollständig isolierend wird. Rote Kreise markieren den Punkt, bei dem erstmals ein Teilchen in das zweite Band tunneln kann. Pfeile geben die Position und die Breite der Bandlücke in einem homogenen Gitter gleicher Tiefe an. Aufgrund ihrer größeren Tunnelkopplung weisen die Niveaus des zweiten Bandes eine geringere Steigung auf als die Niveaus des ersten Bandes.

Dank der zusätzlichen Dipolfalle kann in unserem Experiment der externe Einschluss unabhängig von der Gittertiefe variiert werden. Dies ermöglicht es, die Fallenfrequenzen jeweils so an die Teilchenzahlen  $N$  anzupassen, dass die Bedingung  $\epsilon_F < E_r$  erfüllt wird.

Darüber hinaus kann die Gittertiefe bei einem bestimmten Wert  $V_x$  konstant gehalten und allein der externe Einschluss erhöht werden. Auf diese Weise lassen sich die Atome durch Landau-Zener-Übergänge aus dem unteren Band in höhere Bänder „quetschen“. Damit ein solcher Transfer auch tatsächlich innerhalb experimenteller Zeitskalen stattfindet, muss die Tunnelkopplung zwischen den entarteten Zuständen der verschiedenen Bänder hinreichend groß sein. Ein solches Experiment gelingt nur in einem sehr flachen optischen Gitter, bei dem die räumliche Ausdehnung der verbotenen Aufenthaltsbereiche klein ist. In Abbildung 5.15 sind die Eigenzustände für ein 1 bzw.  $2 E_r$  tiefes Gitter als Funktion der externen Fallenfrequenz dargestellt. Die Pfeile kennzeichnen die Lage der Bandlücke eines homogenen periodischen Potentials gleicher Tiefe. Tatsächlich weist auch das inhomogene System innerhalb dieser „Energieschlücke“ eine geringere Zustandsdichte auf. In diesem Bereich gehen die Zustände paarweise in die Entartung über und entsprechen den besprochenen lokalisierten Wellenfunktionen. Oberhalb der „Energieschlücke“ können die Atome schließlich – eine ausreichende Kopplung vorausgesetzt – aus den Zuständen des ersten Bandes (steile Verläufe) in die Zustände des zweiten Bandes (geringere Steigung) tunneln.



## 5.2 Vielteilchenzustände im inhomogenen periodischen Potential

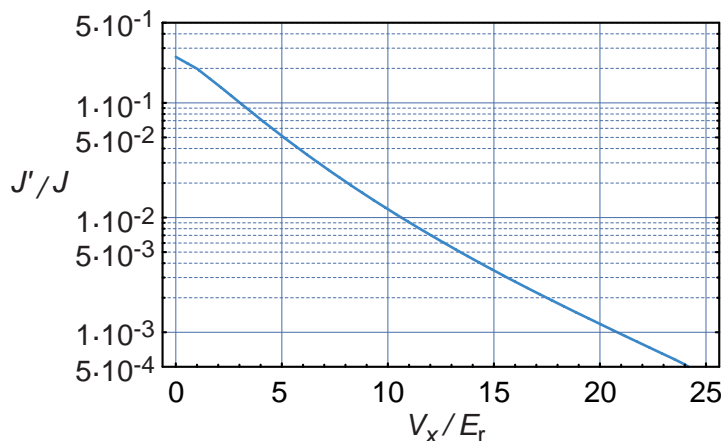
### Tight-Binding-Näherung

Im vorherigen Abschnitt wurden die Eigenzustände des inhomogenen periodischen Potentials durch Lösen der exakten Schrödinger-Gleichung 5.41 bestimmt. Aus den Spektren konnten wesentliche Eigenschaften des entarteten Fermigas im inhomogenen Gitter abgeleitet werden. Dieser Abschnitt befasst sich mit einem alternativen Lösungsansatz, der von der Tight-Binding-Näherung Gebrauch macht. Neben einer Reduktion des numerischen Rechenaufwands erlaubt es dieser Ansatz, einige der bisherigen Aussagen in analytischer Form darzustellen.

Ist ein Teilchen auf das unterste Vibrationsniveau der Gitterplätze beschränkt, so lässt sich dessen Wellenfunktion  $\phi_n(x)$  nach den Wannier-Funktionen  $w(x - ja)$  des untersten Bandes entwickeln:

$$\phi_n(x) = \sum_j c_j w(x - ja). \quad (5.42)$$

Dabei bezeichnet  $w(x - ja)$  die Wannier-Funktion des  $j$ -ten Gitterplatzes und  $c_j$  ist die zugehörige Wahrscheinlichkeitsamplitude. Gemäß Abbildung 5.16 wird die Tunnelkopplung  $J'$  zwischen übernächsten Gitterplätzen ab einer Gittertiefe  $V_x \gtrsim 3 E_r$  eine Größenordnung kleiner, als die Kopplung  $J$  zwischen direkt benachbarten Gitterplätzen. Für tiefere Gitter reicht es demnach aus, nur Tunnel-Prozesse zwischen unmittelbar benachbarten Gitterplätzen zu berücksichtigen. Dies führt uns zur sogenannten Tight-Binding-Näherung, in der der Einteilchen-Hamilton-Operator bezüglich der Basis der Wannier-Funktionen die



**Abbildung 5.16:** Verhältnis zwischen Übernächster-Nachbar- und Nächster-Nachbar-Tunnelkopplung als Funktion der Gittertiefe. Die rasche Abnahme von  $J'/J$  rechtfertigt die Anwendung der Tight-Binding-Näherung bei größeren Gittertiefen.

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

folgende Form annimmt:

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} c_i^* c_j + \frac{1}{2} m \omega_x^2 a^2 \sum_j j^2 |c_j|^2. \quad (5.43)$$

Betrachtet man ein endliches Gitter, so lässt sich der eindimensionale Hamilton-Operator als Matrix darstellen und numerisch diagonalisieren. Im Gegensatz zu Gleichung 5.41 benötigt man für die Beschreibung der Wellenfunktion  $\phi_n(x)$  nur noch einen Koeffizienten  $c_j$  pro Gitterplatz. Hierdurch ist die Dimension der zu diagonalisierenden Matrix bedeutend kleiner und der Rechenaufwand erheblich geringer. Aus dem Hamilton-Operator 5.43 folgt, dass sich das Einteilchenspektrum mittels eines einzelnen Parameters charakterisieren lässt, nämlich dem Verhältnis aus Tunnelenergie  $J$  und harmonischen Einschluss  $\frac{1}{2} m \omega_x^2 a^2$ . Je nachdem welcher dieser beiden Energieterme überwiegt, liegt das Regime des schwachen oder des starken Einschlusses vor.

Setzt man im Hamilton-Operator 5.43 die Fallenfrequenz gleich null, so sind dessen Eigenzustände durch die Bloch-Wellen des untersten Bandes gegeben. Wendet man den Hamilton-Operator dann auf die Bloch-Wellen 5.22 an, so erhält man das unterste Energieband des homogenen Gitters in der Tight-Binding-Näherung (Gleichung 5.24). Demnach entspricht die Bandbreite gerade dem Vierfachen der Tunnelenergie  $J$ . Verfügt das Gitter über einen harmonischen Einschluss und ist dieser gering gegenüber der Bandbreite ( $\frac{1}{2} m \omega_x^2 a^2 \lesssim 4J$ ), so lässt sich die Energiedispersion wie folgt nähern [211]:

$$\epsilon_n \approx -2J \cos(q \cdot a) + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2. \quad (5.44)$$

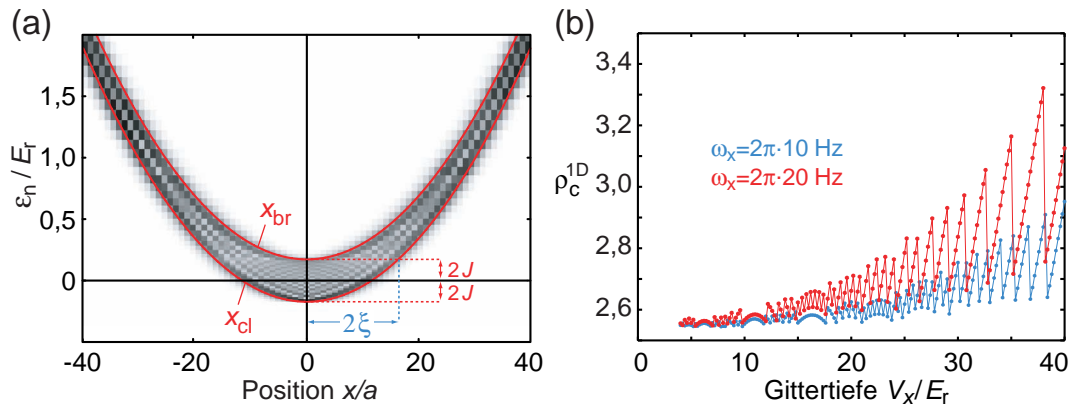
Hier wird der externe Einschluss einfach in Form eines ortsabhängigen ( $x = ja$ ) Energieversatzes berücksichtigt und man erhält, wie in Abbildung 5.11 farblich dargestellt, ein räumlich verbogenes Band. Setzt man den Kristallimpuls  $\hbar q = 0$ , so lassen sich aus Gleichung 5.44 die klassischen Umkehrpunkte der einzelnen Zustände  $\phi_n$  ermitteln [211]:

$$x_{\text{cl}} = \pm \sqrt{\frac{\epsilon_n + 2J}{\frac{1}{2} m \omega_x^2}}. \quad (5.45)$$

Der Abstand zwischen diesen beiden Punkten gibt die maximale räumliche Ausdehnung des Zustandes  $\phi_n$  im harmonischen Potential wieder. Neben dem harmonischen Potential können aber auch Bragg-Reflexionen zu einer Richtungsänderung und damit zu einer Lokalisierung der Teilchen führen [211, 212]: Bedingt durch den externen Einschluss werden die Teilchen im periodischen Potential beschleunigt und es kommt immer dann zu Umklappprozessen, wenn der Kristallimpuls die Bragg-Bedingung  $q = \pm\pi/a$  erfüllt. Setzt man diese Bedingung in Gleichung 5.44 ein, so lassen sich die zugehörigen „Bragg-Umkehrpunkte“ bestimmen [211]:

$$x_{\text{br}} = \pm \sqrt{\frac{\epsilon_n - 2J}{\frac{1}{2} m \omega_x^2}}. \quad (5.46)$$

## 5.2 Vielteilchenzustände im inhomogenen periodischen Potential



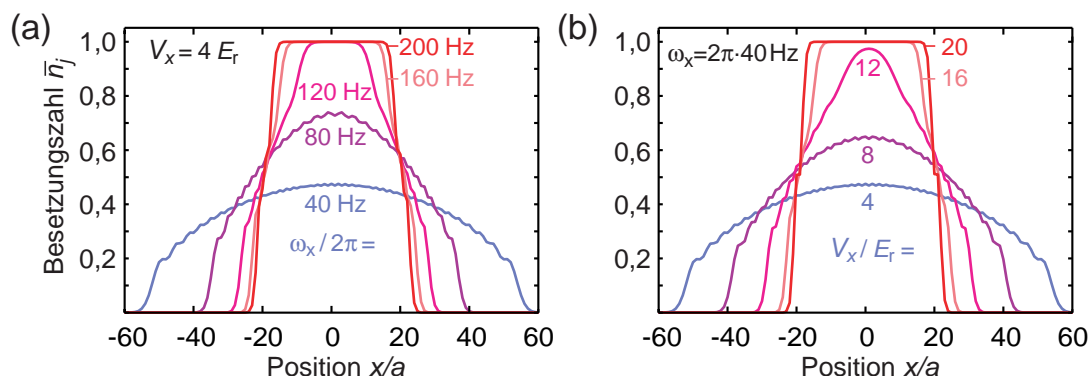
**Abbildung 5.17:** (a) Spektrum der Einteilcheneigenzustände in einem inhomogenen  $4 E_F$  tiefen 1D-Gitter (Parameter wie in Abbildung 5.11). In rot sind die klassischen Umkehrpunkte  $x_{cl}$  und die Positionen  $x_{br}$ , an denen Bragg-Reflexion stattfindet, eingezeichnet. (b) Numerisch berechnete Werte für die kritische Dichte  $\rho_c$  als Funktion der Gittertiefe für zwei verschiedene Fallenfrequenzen. Im Kontinuumslimit konvergiert  $\rho_c$  gegen den konstanten Wert  $2,545(4)$ .

Der Vergleich in Abbildung 5.17a zeigt, dass die räumliche Ausdehnung der Eigenzustände sehr gut durch  $x_{cl}$  und  $x_{br}$  wiedergegeben werden kann. Gemäß Gleichung 5.46 treten die Bragg-Reflexionen erst oberhalb einer Energie  $\epsilon_n > 2J$  auf. Ab hier sind die Einteilchenzustände auf den rechten bzw. linken Teilbereich des Gitters beschränkt. Auch der fermionische Bandisolator bildet sich aus, sobald die Fermi-Energie die obere Bandkante erreicht  $\epsilon_F > 2J$ . Mit zunehmenden Teilchenenergien rücken die Bragg- und die klassischen Umkehrpunkte immer dichter aneinander, bis die Zustände schließlich auf einen einzelnen Gitterplatz lokalisiert sind.

Da die Wannier-Funktionen im Tight-Binding-Regime in guter Näherung jeweils auf einen Gitterplatz beschränkt sind, geben die Betragsquadrate  $|c_j|^2$  die Besetzungswahrscheinlichkeiten der Plätze an. Summiert man diese Wahrscheinlichkeiten über die bevölkerten Zustände  $\phi_n$ , so erhält man die mittlere Besetzungszahl des  $j$ -ten Gitterplatzes:  $\bar{n}_j = \sum_n |c_j^{(n)}|^2$ . Auf diese Weise werden die in Abbildung 5.18 dargestellten Dichteverteilungen berechnet. Aus den beiden Abbildungen geht hervor, wie sich ein Fermigas durch alleiniges Erhöhen der Fallenfrequenz  $\omega_x$  bzw. der Gittertiefe  $V_x$  aus dem metallischen Zustand in den Bandisolator überführen lässt. Entsprechende Experimente werden in Kapitel 7 vorgestellt.

Ist die Ausdehnung eines Fermigas in einem inhomogenen Gitter sehr viel größer als der Gitterabstand  $a$ , so kann dessen Dichteverteilung als quasi kontinuierlich betrachtet werden (Kontinuumslimit). Der Abstand vom Fallenzentrum, bei dem das harmonische

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse



**Abbildung 5.18:** Dichteverteilung von 40 Fermionen in einem inhomogenen 1D-Gitter. (a) Dichteverteilungen bei konstanter Gittertiefe für verschiedenen Fallenfrequenzen  $\omega_x$ . (b) Dichteverteilungen bei konstanter Fallenfrequenz für verschiedene Gittertiefen  $V_x$ .

Potential gerade mit der Tunnelenergie  $J$  übereinstimmt, definiert eine charakteristische Länge  $\xi$  (siehe Abbildung 5.17a):

$$\xi = \sqrt{\frac{J}{\frac{1}{2}m\omega_x^2}}. \quad (5.47)$$

Im Kontinuumslimit ist die Dichteverteilung des *eindimensionalen* Fermigases, bezüglich der normierten Koordinate  $x' = x/\xi$ , als auch dessen normierte Impulsverteilung allein von der charakteristischen Dichte

$$\rho = Na/\xi \quad (5.48)$$

abhängig [215]. Dieses universelle Verhalten erlaubt es, eine kritische Dichte  $\rho_c = N_c a/\xi$  zu definieren, ab der sich im Zentrum des Gitters ein Bandisolator ausbildet. Dabei bezeichnet  $N_c$  die minimale Atomzahl, bei der für einen vorgegebenen Fallenparameter  $\xi$  erstmals eine Einfachbesetzung des zentralen Gitterplatzes erreicht wird. In Abbildung 5.17b sind die numerisch errechneten Werte für  $\rho_c$  als Funktion der Gittertiefe  $V_x$  für zwei verschiedene Fallenfrequenzen aufgetragen<sup>11</sup>. Mit abnehmender Gittertiefe nimmt die räumliche Ausdehnung des Fermigases und damit die für die Erzeugung des Bandisolators benötigte Atomzahl  $N_c$  zu. Im Kontinuumslimit ( $N_c \gg 1$ ) konvergiert  $\rho_c$  unabhängig von den Fallenparametern ( $V_x$ ,  $\omega_x$  und  $a$ ) gegen einen konstanten Wert  $\rho_c = 2,545(4)$ . Da  $N_c$  die Anzahl der Eigenzustände mit einer Energie  $(\epsilon_n - \epsilon_1) \leq 4J$  angibt, entspricht  $N_c$  zugleich der Quantenzahl, oberhalb derer erstmals die paarweise Entartung auftritt (Übergang von Bereich A nach B in Abbildung 5.12).

<sup>11</sup>Bei der numerischen Berechnung wird  $N_c$  über die kleinste Atomzahl bestimmt, bei der die zentrale Besetzung größer als 0,99 wird.

## 5.3 Transfer ins optische Gitter

Das Verhältnis aus Tunnelenergie  $J$  und Potentialunterschied  $\delta E$  zwischen benachbarten Gitterplätzen bestimmt den Grad der Lokalisierung der Eigenzustände. Bei einem harmonischen externen Einschluss nimmt  $\delta E \approx m\omega_x^2 a^2 j$  linear mit dem Index  $j$  zu, sodass die weiter außen liegenden Zustände am stärksten lokalisiert sind. Durch Erhöhen der Gittertiefe bzw. der Fallenfrequenz lassen sich auch die innen liegenden Zustände zunehmend lokalisieren. Für  $J < \frac{1}{2}m\omega_x^2 a^2$  reicht schließlich selbst im Zentrum des Gitters die kinetische Energie der Teilchen nicht mehr aus, um auf benachbarte Gitterplätze zu tunneln. In diesem Regime ist jeder Eigenzustand auf einen eigenen Gitterplatz beschränkt und kann durch den zugehörigen Index  $j \in \mathbb{Z}$  charakterisiert werden. Die Eigenenergien sind dann in guter Näherung durch

$$\epsilon_j = \frac{1}{2}\hbar\omega_{G,x} + \frac{1}{2}m\omega_x^2 a^2 j^2 \quad (5.49)$$

gegeben. Dabei ist  $\frac{1}{2}\hbar\omega_{G,x} = \sqrt{s_x E_r}$  die Energie des niedrigsten Vibrationsniveaus auf einem Gitterplatz (Gl. 4.21). Im Gegensatz zum perfekt periodischen Potential werden im inhomogenen Gitter die lokalisierten Zustände bereits bei endlichen Gittertiefen  $V_x = s_x E_r$  zu exakten Eigenzuständen des Systems. Im tiefen inhomogenen 3D-Gitter führt die quadratische Abhängigkeit der Eigenenergien von den Quantenzahlen  $j_{x,y,z}$  dazu, dass die Zustandsdichte dasselbe Potenzverhalten wie bei einem freien Fermigas aufweist:

$$g(\epsilon) \propto \epsilon^{1/2}. \quad (5.50)$$

Da die Tight-Binding-Näherung auf das unterste Band beschränkt ist, darf sie im Prinzip nur auf Zustände angewendet werden, deren Energie so klein ist, dass die Bandlücke  $\Delta\epsilon_1$  zwischen dem ersten und dem zweiten Band *nicht* überwunden werden kann. Damit gilt die Näherung streng genommen nur für Zustände des ersten Bandes, deren Wellenfunktion nicht über den Gitterplatz  $j_{\max} \approx \sqrt{2\Delta\epsilon_1/(m\omega_x^2 a^2)}$  hinausragen. Doch haben wir gesehen, dass die Tunnelkopplungen zwischen den verschiedenen Bändern bereits ab geringen Gittertiefen vernachlässigt werden können. In solchen Fällen lässt sich die Tight-Binding-Näherung über den obigen Geltungsbereich hinaus auf alle Zustände des untersten Bandes anwenden.

### 5.3 Transfer ins optische Gitter

Das in der Dipolfalle präparierte Bose-Einstein-Kondensat bzw. entartete Fermigas wird durch Hochfahren optischer Stehwellen in ein optisches Gitter transferiert. Findet das Hochfahren der Laserintensitäten langsam genug statt, so ist der Umladeprozess adiabatisch und das Vielteilchensystem verbleibt jederzeit in seinem Grundzustand. Das Kriterium für die Adiabaticität wird nicht nur durch die Bandstruktur, sondern auch durch die Wechselwirkung zwischen den Atomen und durch den Grad der räumlichen Umverteilung im inhomogenen Gitterpotential bestimmt. Im Folgenden sollen die einzelnen Adiabaticitätskriterien für das Einladen ins optische Gitter und die Auswirkungen auf die Temperatur des Fermigases besprochen werden.

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

### 5.3.1 Adiabatisch in Bezug zur Bandstruktur

Ein schwach wechselwirkendes Bose-Einstein-Kondensat in einem flachen Gitter lässt sich näherungsweise durch den niederenergetischsten Bloch-Zustand  $|n = 1, q = 0\rangle$  beschreiben. Auch die Atome eines entarteten Fermigases bevölkern bei hinreichend kleiner Atomzahl bzw. Fallenfrequenz allein das unterste Energieband. Um beim Hochrampen des optischen Gitters Teilchenanregungen in höhere Bänder ( $n > 1$ ) zu vermeiden, muss der Einteilchen-Hamilton-Operator die folgende Adiabatizitätsbedingung erfüllen [216]:

$$|\langle n, q | \partial H / \partial t | 1, q \rangle| \ll |\epsilon_n(q) - \epsilon_1(q)|^2 / \hbar. \quad (5.51)$$

Dabei ist der Ausdruck auf der linken Seite immer kleiner als  $dV_x/dt$ . Für Teilchen im Zentrum der Brillouin-Zone beträgt die Bandlücke unabhängig von der Gittertiefe mindestens  $4 E_r$  (vergleiche Abbildung 5.1) und die Adiabatizitätsbedingung vereinfacht sich zu:

$$\frac{d V_x}{dt} \frac{V_x}{E_r} \ll 16\omega_r \approx \begin{cases} (2, 5 \mu\text{s})^{-1} & \text{für Rb} \\ (1, 1 \mu\text{s})^{-1} & \text{für K} \end{cases} \quad (5.52)$$

Die angegebenen Zeitskalen entsprechen einem Gitter mit einer Wellenlänge von 755 nm.

Bei verschwindender Gittertiefe geht die Bandlücke an den Brillouin-Zone-Rändern gegen null. Für Atome, die sich dort aufhalten, kann die Adiabatizitätsbedingung 5.51 nicht erfüllt werden. Deshalb muss, um ein entartetes Fermigas adiabatisch aus der harmonischen Ausgangsfalle in das Gitter transferieren zu können, dessen Fermi-Energie  $\epsilon_F$  zu Beginn der Giterrampe kleiner als die Rückstoßenergie  $E_r$  sein. Dieser Bedingung sind wir bereits im Zusammenhang mit Abbildung 5.14 begegnet. Sie impliziert, dass sich von Anfang an keine Fermionen in höheren Bändern aufhalten. Hierdurch kann das Vielteilchensystem jederzeit in seinem Grundzustand verbleiben, ohne dass langsame Umverteilungs- und Tunnelprozesse zwischen den Bändern notwendig sind. Denn diese würden die maximale Geschwindigkeit einer adiabatischen Rampe erheblich reduzieren. Aus der Forderung  $\epsilon_F < E_r$  lässt sich zusammen mit der Gleichung 2.38 für die Fermi-Energie in der rein harmonischen Falle eine Bedingung für das geometrische Mittel der Fallenfrequenz  $\bar{\omega}$  und für die maximale Fermionenzahl  $N_{\max}$  in der Ausgangsfalle aufstellen:

$$\hbar \bar{\omega} (6N_{\max})^{1/3} < E_r. \quad (5.53)$$

### 5.3.2 Temperaturentwicklung des Fermigases

Beim Transfer der Atome ins optische Gitter ändert sich die Zustandsdichte ausgehend von der Relation  $g(\epsilon) \propto \epsilon^2$  (Gl. 2.34) des dreidimensionalen harmonischen Oszillators hin zur Relation  $g(\epsilon) \propto \epsilon^{1/2}$  (Gl. 5.50) des tiefen 3D-Gitters. Mit der Änderung der Zustandsdichte geht in der Regel auch eine Änderung der Temperatur einher. Findet der Transfer ins Gitter langsam genug statt, so ist der Prozess reversibel und die Entropie des Systems bleibt erhalten. Die Entropie  $S$  eines Fermigases ist durch den folgenden Ausdruck gegeben (Seite

184 in [54]):

$$\frac{S}{k_B} = \frac{\mathcal{E} - \mu N}{k_B T} + \sum_n \ln(1 + e^{(\mu - \epsilon_n)/k_B T}) \quad (5.54)$$

Dabei bezeichnet  $\mathcal{E} = \int \epsilon g(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$  die Gesamtenergie des Systems. Der Index  $n$  läuft über die Energieeigenwerte  $\epsilon_n$  und  $f(\epsilon)$  ist die Fermi-Dirac-Verteilung. Das chemische Potential  $\mu$  ergibt sich durch die Normierung auf die Gesamtteilchenzahl  $N = \int g(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$ . Bei niedrigen Temperaturen kann der Ausdruck für die Entropie mittels einer Sommerfeld-Entwicklung genähert werden. Befindet sich das ideale Fermigas in einem Potential, welches entlang der drei Raumachsen  $\nu$  demselben Potenzgesetz  $V(\mathbf{r}) \propto r_\nu^\gamma$  folgt, so ergibt sich für die Entropie des Gases [217–219]:

$$\frac{S}{k_B} = N\pi^2 \left( \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2} \right) \frac{T}{T_F} + \mathcal{O} \left[ \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right]. \quad (5.55)$$

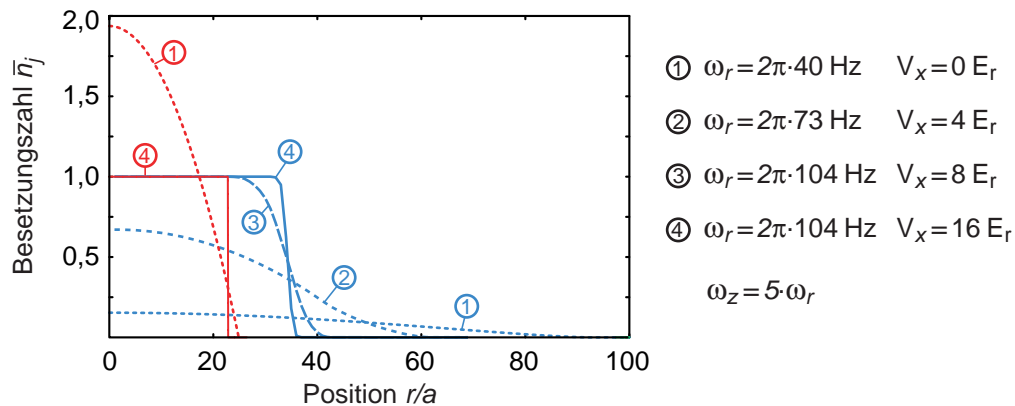
Hiermit lässt sich die Entropie des entarteten Fermigases ( $T \ll T_F$ ) in der harmonischen Ausgangsfall ( $\gamma = 2$ ) bzw. im tiefen Gitter mit überlagertem harmonischem Potential bestimmen. Gemäß Gleichung 5.50 stimmt im letzteren Grenzfall die Zustandsdichte mit der von freien Fermionen in einem Kastenpotential ( $\gamma = \infty$ ) überein. Folglich führt ein isentropischer Transfer aus der harmonischen Falle ins tiefe Gitter zu einem Anstieg der relativen Temperatur  $T/T_F$  um einen Faktor zwei [198, 219].

In den obigen Überlegungen wurde von einer alleinigen Bevölkerung des untersten Energiebandes ausgegangen. Dies impliziert, dass die Atomzahl der Bedingung  $N < N_{\max}$  (Gl. 5.53) genügt. Bei endlichen Temperaturen ist aber immer noch eine thermische Besetzung der angeregten Bänder möglich. Wie wir zuvor gesehen haben (Seite 161), machen in einem solchen Fall extrem langsame Umverteilungsprozesse zwischen den Bändern ein adiabatisches Hochrampen des Gitters innerhalb experimentell realistischer Zeitskalen unmöglich [214]. Zur Vermeidung von Anregungen muss daher – über die Bedingung 5.53 hinaus – eine thermische Besetzung höherer Bänder ausgeschlossen werden. In Abschnitt 7.2.4 wird eine allgemeinere Beschreibung der Temperaturentwicklung für sämtliche Gittertiefen und unter Berücksichtigung höherer Bänder gegeben. Dort wird unter Anderem gezeigt, wie sich Fermigase durch eine geeignete Anpassung des externen Einschlusses ohne adiabatisches Heizen in ein blauverstimmt optisches Gitter transferieren lassen.

### 5.3.3 Adiabatisch in Bezug zur räumlichen Umverteilung

Wie wir in den vorherigen Abschnitten gesehen haben, hängen die Dichteprofile des bosonischen und des fermionischen Vielteilchengrundzustandes von der Gittertiefe und von der Stärke des externen Einschlusses ab. Um einen adiabatischen Transfer in das Gitter zu gewährleisten, müssen die Fallenparameter so langsam variiert werden, dass die Atome durch räumliche Umverteilung zu jeder Zeit den aktuellen Gleichgewichtszustand einnehmen können. Die hierfür benötigten Zeiten liegen üblicherweise Größenordnungen über

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse



**Abbildung 5.19:** Theoretische Entwicklung des Vielteilchengrundzustandes beim Einladen von Atomen in ein optisches 3D-Gitter ( $\lambda = 755 \text{ nm}$ ). Dargestellt ist ein radialer Schnitt durch die dreidimensionale Dichteverteilung von  $10^4$  Rubidiumatomen (rot) bzw.  $3 \cdot 10^4$  Kaliumatomen (blau) bei verschiedenen Fallenparametern. Die angegebenen Gittertiefen gelten für beide Elemente, während die Fallenfrequenzen für Rubidium um einen Faktor  $\sqrt{40/87}$  kleiner sind als die angegebenen Kalium-Fallenfrequenzen.

den durch die Bandlücke vorgegebenen Zeitskalen aus Gleichung 5.52.

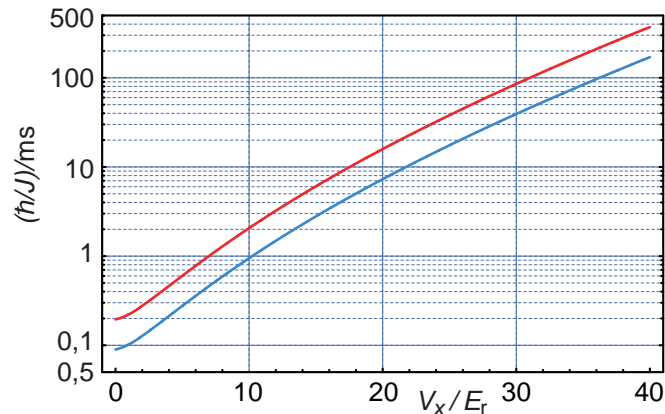
Gemäß der vereinfachenden Betrachtung aus Abschnitt 5.2.1 ordnen sich bosonische Atome in einem flachen optischen Gitter so an, dass das chemische Potential  $\mu \approx \epsilon_j + U \bar{n}_j$  über die Plätze hinweg konstant ist. Dabei bezeichnet  $\epsilon_j \approx V_{\text{ext}}(r_j)$  die potentielle Energie eines Teilchens am Ort des  $j$ -ten Gitterplatzes. Aus Abbildung 5.8b geht hervor, dass das Wechselwirkungsmatrixelement  $U$  in etwa linear mit der Gittertiefe zunimmt. Will man das Adiabazitätskriterium entschärfen, so muss man dafür sorgen, dass die Besetzungszahlen  $\bar{n}_j$  der einzelnen Plätze während der Gitterrampe so weit wie möglich erhalten bleiben. Zusammen mit der räumlichen Konstanz des chemischen Potentials folgt hieraus die Bedingung, dass das externe Potential  $V_{\text{ext}} \propto \epsilon_j$  in etwa linear mit der Gittertiefe  $V_{x,y,z}$  zunehmen muss.

Wie in Abschnitt 4.2 besprochen, sind die Atome bei rotverstimmttem Laserlicht in den lokalen Intensitätsmaxima des Gitters gefangen, sodass das gaußförmige Strahlprofil zugleich für den „externen“ Einschluss der Atome sorgt. In diesem Fall führt eine Erhöhung der Gittertiefe automatisch zu einer angemessenen Erhöhung des harmonischen Einschlusses [210]. Anders verhält es sich bei einem blauverstimmtten Gitter, bei dem die Atome in den lokalen Intensitätsminima gefangen sind. Hier ist für den externen Einschluss ein zusätzliches Fallenpotential erforderlich. Letzteres muss synchron mit der Gittertiefe verändert werden, um der Bedingung  $V_{\text{ext}} \propto V_{x,y,z}$  zu genügen.

Abbildung 5.19 zeigt die theoretische Entwicklung der Dichteprofile beim adiabatischen Einladen von Atomen in ein inhomogenes 3D-Gitter. Unabhängig voneinander sind die



## 5.3 Transfer ins optische Gitter



**Abbildung 5.20:** Tunnelzeiten  $\tau = \hbar/J$  [10] als Funktion der Gittertiefe  $V_x$  für Rubidium (rot) und Kalium (blau) in einem Gitter mit einer Wellenlänge von 755 nm. Bei dieser Wellenlänge stimmen die Gittertiefen  $V_x/E_r$ , gemessen in Einheiten der jeweiligen Rückstoßenergien, für Rubidium und Kalium miteinander überein und es gilt  $\tau_{\text{Rb}}/\tau_{\text{K}} = m_{\text{Rb}}/m_{\text{K}} = 2,175$ . Um einen adiabatischen Transfer ins optische Gitter zu gewährleisten, muss berücksichtigt werden, dass die räumliche Umverteilung der Atome durch die exponentiell zunehmenden Tunnelzeiten erschwert wird.

Dichteprofile für eine Rubidium- und eine Kaliumwolke bei  $T = 0$  dargestellt. Für Rubidium sind nur die einfach zu berechnenden Grenzfälle der rein harmonischen Falle und des tiefen Gitters dargestellt. Zu Anfang wird der externe Einschluss in etwa linear mit der Gittertiefe erhöht, sodass gemäß der Näherung 5.39 die Ausgangsverteilung des Bose-Einstein-Kondensats erhalten bleibt. Spätestens beim Übergang zum Mott-Isolator bricht diese Näherung jedoch zusammen. In dem Beispiel wird die Fallenfrequenz gegen Ende nicht weiter erhöht und es wird angenommen, dass sich ein reiner Mott-Isolator formt. Das Beispiel gibt Aufschluss über das Ausmaß der räumlichen Umverteilung. Während die repulsiv wechselwirkenden Bosonen nach außen streben, findet beim idealen Fermigas eine Umverteilung in Richtung Fallenzentrum statt. Im flachen Gitter muss die Rampe hinreichend langsam sein, um kollektive Anregungen zu vermeiden. Beim Bosegas ist die räumliche Umverteilung kurz vor dem Phasenübergang zum Mott-Isolator besonders stark [220]. Im Gegenzug wird jenseits des Phasenübergangs die Wahrscheinlichkeit für kollektive Anregungen, aufgrund der sich ausbildenden Energielücke, stark unterdrückt. Im tiefen Gitter wird die Adiabaticität schließlich durch die exponentiell abnehmende Einzelchentunnelrate limitiert (vergleiche Abbildung 5.20), da Letztere die Geschwindigkeit der Umverteilungsprozesse bestimmt. Entsprechend darf der externe Einschluss in tiefen Gitter nur sehr langsam verändert werden.

In Referenz [221] wird das Laden von Bose-Einstein-Kondensaten in optische Gitter untersucht. Im Anschluss an den Ladeprozess werden die Atome aus dem optischen Gitter

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

---

entlassenen und die Interferenzmuster in den frei expandierenden Wolken analysiert. Anregungen zerstören die feste Phasenbeziehung zwischen den mikroskopischen Kondensaten auf den einzelnen Gitterplätzen und verringern somit den Kontrast des resultierenden Interferenzmusters. Der Kontrast gibt Aufschluss über die Adiabaticität des Ladeprozesses. Auf diese Weise wird gezeigt, dass die Adiabaticität im superfluiden Regime durch Einzelchontunneln limitiert ist. Abhängig von der Ausdehnung des Vielteilchensystems und der angestrebten Gittertiefe werden folglich einige zehn bis einige hundert Millisekunden benötigt, um das Kondensat ohne Anregungen in das Gitter zu transferieren. Welche Faktoren die dynamische Entwicklung und die Reversibilität des Prozesses beim Übergang zum Mott-Isolator bestimmen, ist bislang nur ansatzweise erkundet. Diesbezüglich sind weitere theoretische und experimentelle Untersuchungen erforderlich [220, 221].

Auch für das Fermigas stehen entsprechende systematische Untersuchungen noch aus. Bei den in unserem Experiment [50] verwendeten Parametern und Rampendauern ( $\tau \sim 40$  ms) beobachten wir keine irreversiblen Heizprozesse, wenn das Fermigas aus der harmonischen Falle in ein tiefes optisches Gitter und wieder zurück transferiert wird.

Die in Abbildung 5.19 dargestellten Dichteprofile gelten auch für eine Rb-K-Mischung, vorausgesetzt die Wechselwirkung zwischen den beiden Spezies verschwindet. Befinden sich die beiden Spezies in ihren absoluten Grundzuständen, so lässt sich die Interspezieswechselwirkung mittels der in Abschnitt 2.4.2 beschriebenen Feshbach-Resonanz bei einem Magnetfeld<sup>12</sup> von 543,8 G „abschalten“. Unter diesen Bedingungen bildet sich beim Hochrampen des Gitters parallel zum bosonischen Mott-Isolator auch ein fermionischer Bandisolator aus. Am Ende der Rampe sind die zentralen Gitterplätze jeweils mit genau einem Boson und einem Fermion besetzt. Durch abruptes Erhöhen der Gittertiefe lassen sich diese Atompaaire schließlich vollständig voneinander isolieren. Das auf diese Weise präparierte System bildet einen idealen Ausgangszustand für weitergehende Experimente. So könnten nun mittels Feshbach-Resonanzen oder mittels Photoassoziation effizient heteronukleare Moleküle erzeugt werden, die aufgrund ihrer räumlichen Trennung stabil gegenüber Stößen sind.

Will man einen reinen fermionischen Bandisolator präparieren, so wird nur das Kalium ins Gitter geladen. Aus Abbildung 5.19 geht hervor, dass es sich in diesem Fall anbietet, bereits in der harmonischen Ausgangsfalle einen möglichst steilen Einschluss zu wählen. Hierdurch lassen sich die Umverteilungsprozesse während der Gitterrampe weiter minimieren. Wie wir zuvor gesehen haben, darf der externe Einschluss jedoch nicht so stark sein, dass es zu einer Besetzung höherer Bänder kommt (siehe Bedingung 5.53).

---

<sup>12</sup>Nimmt man an, dass sich das Magnetfeld mit einer Genauigkeit von  $\pm 100$  mG [102] auf den angegebenen Wert regeln lässt, so gilt für das Verhältnis der Wechselwirkungsmatrixelemente  $|U_{BF}/U_{BB}| \leq 0,1$ . Bei solch einem kleinen Verhältnis ist es energetisch ungünstig, einen Gitterplatz, der mit einem Fermion besetzt ist, mit mehr als einem Boson zu besetzen.

### 5.4 Analyse der Zustände im Gitter

Mit üblichen optischen Abbildungssystemen lassen sich die kleinen Gitterabstände ( $a \sim 400 \text{ nm}$ ) leider nicht räumlich auflösen. Daher werden zur Untersuchung der im Gitter präparierten Vielteilchenzustände sogenannte Time-of-Flight(TOF)- oder Flugzeit-Messungen durchgeführt. Hierbei entlässt man die Atome aus dem optischen Potential und nimmt deren Dichteverteilung nach einigen Millisekunden freier Expansion durch Absorptionsabbildung auf. Welche Informationen sich aus diesen Aufnahmen über den früheren Zustand im Gitter ableiten lassen, ist Thema dieses Abschnitts.

#### 5.4.1 Analyse der Impulsverteilung

Zunächst bestimmen wir die theoretische Dichteverteilung, welche eine Atomwolke zu einem Zeitpunkt  $t > 0$  nach dem Entlassen aus einem homogenen Gitterpotential annimmt. Dabei sei der Ausgangszustand im Gitter durch den Vielteilchenzustand  $|\Psi_0\rangle$  gegeben. Der Index 0 steht für den Zeitpunkt unmittelbar vor dem Abschalten des Gitters. Im periodischen Potential lassen sich die Einteilchenzustände nach den Wannier-Funktionen  $w_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$  entwickeln. Ist die Bewegung der Teilchen auf das unterste Energieband beschränkt, so brauchen nur die Wannier-Funktionen mit  $n = 1$  berücksichtigt zu werden. Bezüglich dieser Basis lässt sich der Feldoperator der zweiten Quantisierung wie folgt darstellen:

$$\hat{\psi}_0(\mathbf{r}) = \sum_j \hat{a}_j w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j). \quad (5.56)$$

Während der Operator  $\hat{a}_j$  ein Teilchen im Zustand  $w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$  vernichtet, vernichtet der Feldoperator  $\hat{\psi}_0(\mathbf{r})$  ein Teilchen an einem beliebigen Ort  $\mathbf{r}$  innerhalb des Gitters. Je nach Teilchennatur gehorchen die obigen Operatoren den bosonischen Kommutations- bzw. den fermionischen Antikommutationsregeln. Wir gehen davon aus, dass das Gitter zum Zeitpunkt  $t = 0$  „abrupt“ abgeschaltet wird. Das heißt die Dauer des Abschaltvorgangs soll kurz gegenüber der Schwingungsperiode (Gl. 4.21) der Atome auf den einzelnen Gitterplätzen sein. Hierdurch werden die Einteilchenzustände des Gitters auf freie ebene Wellen mit den Impulsen<sup>13</sup>  $\hbar\boldsymbol{\kappa}$  projiziert. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsamplituden sind durch die Fourier-Transformierten  $\tilde{w}(\boldsymbol{\kappa})$  der Wannier-Funktionen gegeben. Hierbei vernachlässigt man etwaige Wechselwirkungen während der freien Expansion<sup>14</sup>. Um die Verteilung der Atome zum Zeitpunkt  $t > 0$  zu bestimmen, wechseln wir ins Heisenberg-Bild. In dieser Darstellung ist der Feldoperator  $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$ , der das frei expandierende System beschreibt, explizit zeitabhängig, während der Vielteilchenzustand zeitunabhängig und durch den Ausgangszustand  $|\Psi_0\rangle$  gegeben ist. Der Feldoperator ergibt sich dann aus den Beiträgen der frei propagierenden ebenen Wellen, welche von den einzelnen Gitterplätzen  $j$

<sup>13</sup>Hier und im Folgenden beschreibt  $\hbar\boldsymbol{\kappa}$  einen beliebigen Teilchenimpuls und  $\hbar\mathbf{k}$  steht weiterhin für den Impuls eines Gitterphotons.

<sup>14</sup>Darüber hinaus vernachlässigen wir im Folgenden die Beschleunigung im Schwerfeld, da sie sich durch die Wahl eines mitbewegten Bezugssystems eliminieren lässt.

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

ausgehen und lautet:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_j \mathcal{N}_j \tilde{w} \left[ \boldsymbol{\kappa}_j = \frac{m}{\hbar t} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \right] \exp [i (\boldsymbol{\kappa}_j (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) - \omega_j t)] \hat{a}_j. \quad (5.57)$$

Die Exponentialfunktion enthält die Phase, welche die Teilchen während der freien Propagation von  $\mathbf{r}_j$  nach  $\mathbf{r}$  aufsammeln. Dabei gibt  $\hbar \boldsymbol{\kappa}_j = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)m/t$  den Impuls und  $\hbar \omega_j = \hbar^2 \boldsymbol{\kappa}_j^2 / 2m$  die kinetische Energie der Teilchen an. Nach hinreichend langen Expansionszeiten  $t$  kann die ursprüngliche Verteilung im Gitter als punktförmig betrachtet werden. Unter diesen Voraussetzungen sind Terme quadratisch in  $\mathbf{r}_j$  vernachlässigbar und die Wellenvektoren in guter Näherung unabhängig von  $j$ . Hiermit erhalten wir den Feldoperator in der Fernfeldnäherung:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \left( \frac{m}{\hbar t} \right)^{3/2} \tilde{w} \left( \boldsymbol{\kappa} = \frac{m\mathbf{r}}{\hbar t} \right) e^{i\frac{1}{2}\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}} \sum_j e^{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}_j} \hat{a}_j. \quad (5.58)$$

Der Normierungsfaktor  $\mathcal{N} = (m/\hbar t)^{3/2}$  berücksichtigt die Verringerung der Dichte während der freien Expansion. Durch bilden des Erwartungswertes  $\langle \Psi_0 | \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) | \Psi_0 \rangle$  erhält man schließlich die mittlere Dichteverteilung zum Zeitpunkt  $t$  [82, 222]:

$$\langle \hat{n}(\mathbf{r}, t) \rangle = \left( \frac{m}{\hbar t} \right)^3 \left| \tilde{w} \left( \boldsymbol{\kappa} = \frac{m\mathbf{r}}{\hbar t} \right) \right|^2 S(\boldsymbol{\kappa}), \quad \text{mit} \quad (5.59)$$

$$S(\boldsymbol{\kappa}) = \sum_{i,j} e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} \langle \Psi_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j | \Psi_0 \rangle.$$

Im Fernfeld spiegelt der Erwartungswert der Dichte  $\langle \hat{n}(\mathbf{r}, t) \rangle$  die mittlere Impulsverteilung innerhalb des Gitters wider. Wobei das Betragsquadrat der Fourier-Transformierten  $\tilde{w}(\boldsymbol{\kappa})$  die Einhüllende der Impulsverteilung bestimmt. Letztere entspricht in einem tiefen Gitter näherungsweise der Fourier-Transformierten des harmonischen Oszillatorgrundzustandes und kann daher durch eine Gauß-Funktion genähert werden. Die dreidimensionale Funktion lässt sich nach den drei Gitterachsen  $\nu \in \{x, y, z\}$  separieren und man erhält:

$$\left| \tilde{w}_\nu \left( \kappa_\nu = \frac{m r_\nu}{\hbar t} \right) \right|^2 \approx \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma_\nu} e^{-r_\nu^2 / \sigma_\nu^2} \quad \text{mit} \quad \sigma_\nu = \frac{\hbar k t}{m} s_\nu^{1/4}. \quad (5.60)$$

Dabei ist  $\sigma_\nu$  die Breite der expandierenden Verteilung und  $V_\nu = s_\nu E_r$  die Gittertiefe entlang der jeweiligen Achse  $\nu$ . Die Summe  $S(\boldsymbol{\kappa})$  in Gleichung 5.59 wird als statischer Strukturfaktor bezeichnet. Sie enthält die Einteilchendichtematrix, läuft über alle möglichen Paare von Gittervektoren und beschreibt Interferenzeffekte aufgrund von Einteilchenkohärenzen. Als Nächstes wird exemplarisch die Dichteverteilung eines Bosegases berechnet, welches zum einen aus einem flachen und zum anderen aus einem tiefen Gitter entlassen wird.

## 5.4 Analyse der Zustände im Gitter

### Bose-Einstein-Kondensat

Wir betrachten  $N$  Teilchen in einem Gitter mit  $M$  Plätzen. Ist die Tunnelkopplung  $J$  sehr viel größer als die Wechselwirkungsenergie  $U$ , so ist der Vielteilchengrundzustand  $|\Psi_0\rangle$  durch ein Kondensat gegeben. Dieses lässt sich als Produkt von identischen Einteilchen-Bloch-Zustände  $|n = 1, \mathbf{q} = \mathbf{0}\rangle$  darstellen, wobei jedes der  $N$  Teilchen über sämtliche Gitterplätze delokalisiert ist (siehe Gl. 5.22):

$$|\Psi_0\rangle_{U=0} = \left( \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=1}^M \hat{a}_j^\dagger \right)^N |0\rangle. \quad (5.61)$$

Diesen Zustand kann man durch ein Produkt von Vielteilchenzuständen  $|\psi_j\rangle$  annähern, welche auf die einzelnen Gitterplätze  $j$  lokalisiert sind:

$$|\Psi_0\rangle_{U=0} \approx \prod_{j=1}^M |\psi_j\rangle. \quad (5.62)$$

Im Limes großer  $N$  und  $M$  folgen die Atomzahlverteilungen in den einzelnen Potentialmulden einer Poisson-Statistik [82, 223, 224] und die  $|\psi_j\rangle$  entsprechen in guter Näherung den sogenannten kohärenten oder Glauber-Zuständen  $|\alpha_j\rangle$  [225]:

$$|\psi_j\rangle \approx |\alpha_j\rangle = e^{-|\alpha_j|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_j^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_j. \quad (5.63)$$

Die kohärenten Zustände werden durch die Superposition von Teilchenzahlzuständen also Fock-Zuständen  $|n\rangle_j$  gebildet und stellen die Eigenzustände des Vernichtungsoperators  $\hat{a}_j$  dar:

$$\hat{a}_j |\alpha_j\rangle = \alpha_j |\alpha_j\rangle. \quad (5.64)$$

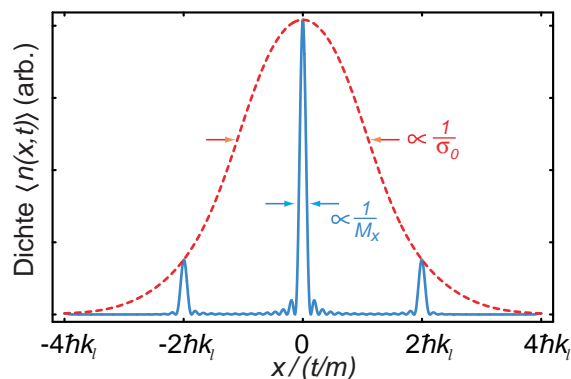
Die komplexwertige Amplitude  $\alpha_j = \sqrt{\bar{n}_j} e^{i\varphi_j}$  legt den kohärenten Zustand eindeutig fest und wird selbst durch die mittlere Besetzungszahl  $\bar{n}_j$  des  $j$ -ten Gitterplatzes und einen Phasenfaktor  $\varphi_j$  bestimmt. Gemäß Abschnitt 2.3.2 definiert der Erwartungswert eines bosonischen Feldoperators die makroskopische Wellenfunktion eines Kondensats. Insbesondere definiert der Erwartungswert von  $\hat{a}_j$  die Kondensatwellenfunktion  $\psi_j$  auf dem  $j$ -ten Gitterplatz:

$$\psi_j = \langle \Psi_0 | \hat{a}_j | \Psi_0 \rangle \approx \langle \alpha_j | \hat{a}_j | \alpha_j \rangle = \alpha_j = \sqrt{\bar{n}_j} e^{i\varphi_j}. \quad (5.65)$$

Demnach können die Vielteilchenzustände  $|\psi_j\rangle$  in guter Näherung durch klassische Felder mit wohldefinierten Phasen  $\varphi_j$  wiedergegeben werden. Wie in Abschnitt 5.2.1 beschrieben, liegt aufgrund der hohen Tunnelkopplung eine einheitliche Phasenbeziehung zwischen den Gitterplätzen vor,  $\varphi_j = \varphi$ . In einem homogenen System folgt für die mittlere Besetzung der Plätze:  $\bar{n}_j = \bar{n} = N/M$ . Mit diesen Resultaten ergibt sich die Einteilchendichtematrix zu

$$\langle \Psi_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j | \Psi_0 \rangle = \alpha_i^* \alpha_j = \bar{n} \quad (5.66)$$

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse



**Abbildung 5.21:** Dichteverteilung  $\langle n(x, t) \rangle$  im Fernfeld für ein (idealisiertes) wechselwirkungsfreies Kondensats, welches über 15 Plätze in einem  $10 E_r$  tiefen 1D-Gitter delokalisiert ist. In rot ist die Einhüllende der Verteilung dargestellt. Deren Breite verhält sich umgekehrt proportional zur Ausdehnung  $\sigma_0$  der Wannier-Funktionen auf den einzelnen Plätzen. Die Breite der Interferenzpeaks ist invers zur Anzahl  $(2M_x + 1)$  der Plätze, über die die Atome delokalisiert sind. Der Peakabstand wird durch den reziproken Gittervektor  $2\hbar k$  bestimmt.

und der Strukturfaktor  $S(\boldsymbol{\kappa})$  aus Gleichung 5.59 nimmt die folgende Form an:

$$S(\boldsymbol{\kappa}) = \bar{n} \sum_{i,j} \exp\left(i \frac{m\mathbf{r}}{\hbar t} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\right) = \bar{n} \left| \sum_j \exp\left(i \frac{m\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_j}{\hbar t}\right) \right|^2. \quad (5.67)$$

Im einfach kubischen Gitter lässt sich die  $\nu$ -Komponente eines Gittervektors  $\mathbf{r}_j$  als ganzzahliges Vielfaches  $j_\nu$  der Gitterkonstante  $a$  darstellen. Ist das homogene Gitter in einem rechteckigen und unendlich hohen Kastenpotential eingeschlossen und dadurch entlang der Raumachse  $\nu$  auf  $(2M_\nu + 1)$  Plätze beschränkt, so folgt weiter:

$$S(\boldsymbol{\kappa}) = \bar{n} \prod_\nu \left| \sum_{j_\nu=-M_\nu}^{+M_\nu} \exp\left(i \frac{m r_\nu j_\nu a}{\hbar t}\right) \right|^2 = \bar{n} \prod_\nu \left| \frac{\sin\left((2M_\nu + 1) \frac{m r_\nu a}{2\hbar t}\right)}{\sin\left(\frac{m r_\nu a}{2\hbar t}\right)} \right|^2. \quad (5.68)$$

Durch Einsetzen in Gleichung 5.59 ergibt sich schließlich die Dichteverteilung  $\langle \hat{n}(\mathbf{r}, t) \rangle$ . Wie in Abbildung 5.21 dargestellt, bildet die Dichte eine periodische Struktur aus Peaks, deren Positionen durch  $r_\nu = \pm n_\nu \cdot 2\pi\hbar t/ma$  gegeben sind. Die Regelmäßigkeit der Struktur ist unmittelbar auf die Periodizität des optischen Gitters zurückzuführen.

Die von den einzelnen Gitterplätzen ausgehenden kohärenten Materiewellen überlappen während der freien Expansion miteinander und bilden – aufgrund ihrer starren Phasenbeziehungen – ein Vielteilchen-Interferenzmuster. Dieses Phänomen ist analog zur Beugung von kohärentem Licht an einem Mehrfachspalt. Vernachlässigt man während der Expansion auftretende Wechselwirkungseffekte, so gibt das Interferenzmuster die Fourier-Transformierte der makroskopischen Wellenfunktion im Gitter wieder. Damit entspricht

## 5.4 Analyse der Zustände im Gitter

die Dichte, abgesehen von einem Skalierungsfaktor, der Impulsverteilung im Gitter. In der Kristallographie definiert die Fourier-Transformierte von einer Gitterstruktur ein zugehöriges reziprokes Gitter. Auch hier kann das Interferenzmuster als reziprokes Gitter aufgefasst werden, wobei der Peakabstand  $2\pi\hbar t/ma$  durch den reziproken Vektor  $2\hbar k = 2\hbar\frac{\pi}{a}$  gegeben ist.

Gemäß dem Strukturfaktor in Gleichung 5.59 ist für die Beobachtung scharfer Interferenzmaxima eine über das Gitter langsam variierende Einteilchendichtematrix  $\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \rangle$  notwendig. Ganz allgemein bestimmt der Erwartungswert der Einteilchendichtematrix  $\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \rangle$  für große Abstände  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  die Kondensatdichte  $\bar{n}_0$  auf den Gitterplätzen. Liegen keine Phasenfluktuationen innerhalb des Gitters vor und können Wechselwirkungseffekte während der Expansion vernachlässigt werden, so ist – in Übereinstimmung mit der Fourier-Beziehung – die Breite der Maxima umgekehrt proportional zur räumlichen Ausdehnung des BEC im Gitter (siehe Abb. 5.21). Gleichzeitig verhält sich die Breite der Einhüllenden  $|\tilde{w}(\boldsymbol{\kappa})|^2$  (rot dargestellt) reziprok zur Ausdehnung  $\sigma_0$  der Wellenfunktionen auf den einzelnen Gitterplätzen. Im realen Experiment werden die Interferenzpeaks jedoch durch die repulsive Wechselwirkung während der Expansion, die endliche Ausdehnung der Anfangsverteilung sowie das inhomogene Fallenpotential beeinflusst [226]. Dennoch kann die Breite, insbesondere beim Übergang zum bosonischen Mott-Isolator [10, 18] (oder auch in fermionischen Systemen [22]), beugungsbegrenzt sein und somit direkten Aufschluss über die Kohärenzlänge im Gitter geben. Für eine quantitative Analyse bietet es sich an, statt der Breite der Peaks den Kontrast des Interferenzmusters auszuwerten [227, 228], da Letzterer weniger sensitiv auf Wechselwirkungseffekte ist.

Alternativ kann das Auftreten der Interferenzpeaks auch im Bild der Bloch-Wellen begriffen werden: Demnach wird der durch das Kondensat makroskopisch besetzte Bloch-Zustand  $|n = 1, \mathbf{q} = \mathbf{0}\rangle$  beim abrupten Abschalten des Gitters auf seine freien Impulszustände  $|\pm n, 2\hbar k\rangle$  projiziert (dunkel blaue Balken in Abbildung 5.5b). Da das Gitter einer optischen Stehwelle entspricht, lassen sich die freien Impulszustände ihrerseits als Bragg-Peaks deuten (siehe Abschnitt 5.1.3).

Aus der Beobachtung scharfer Interferenzmaxima wird zumeist auf die Suprafluidität des Systems geschlossen. Hierbei stützt man sich auf die enge Verknüpfung zwischen Suprafluidität und langreichweitiger Phasenkohärenz. Streng genommen ist es für den Nachweis der Suprafluidität jedoch erforderlich, über die reinen Grundzustandseigenschaften (wie Kohärenz, Kondensatanteil und Atomzahlfluktuationen) hinauszugehen, und auch das hydrodynamische Verhalten des Systems zu untersuchen (wie z.B. den Fluss in einem beschleunigten Gitter) [222].

Beim Entlassen von wechselwirkungsfreien Fermigasen aus optischen Gittern lassen sich ebenfalls Interferenzmuster beobachten. Die Breiten der Interferenzmaxima geben

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

auch in diesem Fall Aufschluss über die Delokalisierung der Atome im Gitter und somit über deren Kohärenzlänge [22]. Im Gegensatz zu Bosegasen handelt es sich jedoch um Einteilchen- und nicht um makroskopische Kohärenzen. Da Wechselwirkungseffekte bei einkomponentigen Fermigasen vollständig vernachlässigbar sind, spiegeln die Interferenzmuster nach ausreichend langen Expansionszeiten eins zu eins die Impulsverteilung im Gitter wider.

### Mott-Isolator

Wir betrachten nun den anderen bosonischen Grenzfall, bei dem der Vielteilchengrundzustand  $|\Psi_0\rangle$  durch einen Mott-Isolator gegeben ist. Dieser Zustand bildet sich in einem tiefen optischen Gitter aus, wenn das Wechselwirkungsmatrixelement  $U$  sehr viel größer ist als die Tunnelenergie  $J$ . Handelt es sich um ein homogenes System, in dem die Anzahl  $N$  der Atome genau mit der Anzahl  $M$  der Gitterplätze übereinstimmt, so entspricht der Grundzustand  $|\Psi_0\rangle$  einem Produkt aus Fock-Zuständen

$$|\Psi_0\rangle_{J=0} = \prod_j |n\rangle_j \quad (5.69)$$

mit jeweils genau einem Atom pro Gitterplatz ( $n = 1$ ). Durch die gleichmäßige Verteilung der Atome und die Unterdrückung der Atomzahlfluktuationen gelingt es dem System, seine Wechselwirkungsenergie zu minimieren. Somit stellt die Konfiguration 5.69 für  $J \rightarrow 0$  den absoluten Grundzustand dar und wir erhalten für die Einteilchendichtematrix im Gitter:

$$\langle \Psi_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j | \Psi_0 \rangle = \sqrt{n} \sqrt{n} \langle n-1 |_i \langle n-1 \rangle_j = n \delta_{ij}. \quad (5.70)$$

Aufgrund der verschwindenden Korrelationen erster Ordnung bestehen keinerlei Phasenbeziehungen zwischen den verschiedenen Gitterplätzen. Folglich ergibt sich die Dichteverteilung als inkohärente Summe der von den einzelnen Potentialmulden ausgehenden Einteilchenwellenfunktionen. Damit ist die resultierende mittlere Dichteverteilung

$$\langle \hat{n}(\mathbf{r}, t) \rangle = \left( \frac{m}{\hbar t} \right)^3 \left| \tilde{w} \left( \boldsymbol{\kappa} = \frac{m\mathbf{r}}{\hbar t} \right) \right|^2 N \quad (5.71)$$

vollkommen strukturlos und gibt allein die näherungsweise gaußförmigen Impulsverteilungen auf den individuellen Gitterplätzen wieder. Im Gegensatz zum Kondensat kann den Zuständen in den einzelnen Potentialmulden  $|\psi_j\rangle$  keine makroskopische Wellenfunktion zugeordnet werden. Dies äußert sich in einem verschwindenden Erwartungswert des bosonischen Feldoperators

$$\psi_j = \langle \psi_j | \hat{a}_j | \psi_j \rangle = 0. \quad (5.72)$$

Während die Teilchenzahlen auf jedem Gitterplatz genau festgelegt sind, sind die individuellen Phasen  $\varphi_j$  maximal unscharf. Wie wir gesehen haben verhält sich dies beim Kondensat im flachen Gitter genau umgekehrt: Hier verfügt jede Materiewelle  $\psi_j$  über eine wohldefinierte Phase. Wohingegen die Atomzahlverteilung auf den Gitterplätzen vollkommen zufällig ist (Poisson-Verteilung).



### 5.4.2 Analyse der Kristallimpulsverteilung

Das Interferenzmuster der abrupt aus dem optischen Gitter entlassenen Atomwolke steht in einem unmittelbaren Zusammenhang mit der Kristallimpulsverteilung im Gitter. Um die formale Beziehung zu ermitteln, bestimmen wir zunächst die Besetzung der Bloch-Zustände im untersten Band. Gemäß Gleichung 5.22 lassen sich die Bloch-Wellen  $\psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})$  nach den lokalisierten Wannier-Funktionen  $w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$  entwickeln. Hiervon ausgehend definieren wir einen Operator, der innerhalb des Gitters ein Teilchen mit dem Kristallimpuls  $\hbar\mathbf{q}$  vernichtet:

$$\hat{a}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_j e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j} \hat{a}_j. \quad (5.73)$$

Der Erwartungswert für den Kristallimpuls  $\hbar\mathbf{q}$  lautet somit:

$$\langle \hat{n}_{\mathbf{q}} \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i,j} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} \langle \Psi_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j | \Psi_0 \rangle. \quad (5.74)$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit der Dichteverteilung  $\langle \hat{n}(\mathbf{r}, t) \rangle$  nach der freien Expansion in Gleichung 5.59, so erhalten wir die folgende Relation [222]:

$$\langle \hat{n}(\mathbf{r}, t) \rangle = M \left( \frac{m}{\hbar t} \right)^3 \left| \tilde{w} \left( \mathbf{q} = \frac{m\mathbf{r}}{\hbar t} \right) \right|^2 \langle \hat{n}_{\mathbf{q}} \rangle. \quad (5.75)$$

Bei der Herleitung wird angenommen, dass ausschließlich Bloch-Zustände des untersten Energiebandes besetzt sind. Da die zugehörigen Kristallimpulse innerhalb der ersten Brillouin-Zone liegen, gilt die Beziehung 5.75 nur für Orte  $\mathbf{r}$ , die die Bedingung  $|m\mathbf{r}/\hbar t| \leq \pi/a$  erfüllen. Aus der Beziehung 5.75 folgt, dass die Dichte am Ort  $\mathbf{r} = \hbar\mathbf{q}t/m$  proportional zur Besetzungswahrscheinlichkeit des Kristallimpulses  $\hbar\mathbf{q}$  ist. Der Proportionalitätsfaktor wird durch die Fourier-Transformierte der Wannier-Funktion bestimmt und ist somit abhängig von der Gittertiefe und vom Impuls der Teilchen.

Setzen wir den Ausdruck 5.71 für die Dichteverteilung des aus dem Gitter entlassenen Mott-Isolators in Gleichung 5.75 ein, so erhalten wir für die Besetzung der Kristallimpulse:  $\langle \hat{n}_{\mathbf{q}} \rangle = N/M$ . Während beim reinen Kondensat ausschließlich der niederenergetischste Bloch-Zustand bevölkert wird, sind die Teilchen beim Mott-Isolator *im Mittel* gleichmäßig über das gesamte untere Band verteilt. Demnach ist das sukzessive Verschwinden der Interferenzmaxima beim Erhöhen von  $U/J$  (siehe Abschnitt 5.5.4) auf eine Umverteilung der Populationen von  $\hbar\mathbf{q} = \mathbf{0}$  zu höheren Kristallimpulsen zurückzuführen. Aufgrund dieses Verhaltens kann der Interferenzkontrast als ein Maß für die Gleichförmigkeit aufgefasst werden, mit der die Kristallimpulse bevölkert sind [222]. Auch beim fermionischen Bandisolator weist ein vollständig verschwindender Interferenzkontrast auf eine gleichförmige Besetzung der Bloch-Zustände hin. Ist jeder Bloch-Zustand des untersten Bandes in Übereinstimmung mit dem Pauli-Prinzip mit genau einem Fermion besetzt, so ergibt sich wiederum die strukturlose Dichteverteilung aus Gleichung 5.71.

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

---

Das Fehlen von Interferenzen in den Dichteverteilungen des bosonischen Mott-Isolators und des fermionischen Bandisolators lässt sich auch anhand von Abbildung 5.5b nachvollziehen: Die Summe über alle Impulskomponenten  $|\hbar\mathbf{q} \pm n_\nu 2\hbar\mathbf{k}\rangle$  sämtlicher Bloch-Zustände  $|\hbar\mathbf{q}\rangle$  des untersten Bandes führt zu der strukturlosen Impulsverteilung  $|\tilde{w}(\hbar\boldsymbol{\kappa})|^2$ .

### Direkte Abbildung der Kristallimpulse und der Bandbevölkerung

Die Besetzung der Kristallimpulse kann auch unmittelbar abgebildet werden, indem man das Gitter adiabatisch herunter fährt und die resultierende Impulsverteilung nach einer freien Expansion im realen Raum aufnimmt [229, 230]. Dabei muss die Gittertiefe langsam im Bezug zur Aufspaltung der Bänder (siehe Gl. 5.52) und schnell gegenüber der Vielteilchendynamik – also Stoß- und Umverteilungsprozessen – verändert werden<sup>15</sup>. Unter diesen Bedingungen bleibt die Bevölkerung der einzelnen Bloch-Zustände während der Gitterrampe erhalten. Die Aufspaltung zwischen den Bändern nimmt kontinuierlich ab, bis die Bandstruktur schließlich in die Dispersion freier Teilchen übergeht. Dies wird anhand von Abbildung 5.3b deutlich, welche die Bandstruktur in einem erweiterten Zonenschema darstellt. Bei gleichbleibender Gitterperiode ist der Kristallimpuls  $\hbar\mathbf{q}$  eines individuellen Teilchens eine Erhaltungsgröße und die Bloch-Zustände werden adiabatisch in die freien Impulszustände überführt. Hierdurch wird das  $n$ -te Energieband auf die  $n$ -te Brillouin-Zone des reziproken Raumes abgebildet. Im 1D-Gitter ist die  $n$ -te Brillouin-Zone durch die beiden Impulsintervalle  $(n-1)\hbar k \leq |p| \leq n\hbar k$  definiert. Entsprechend komplexere Zonenschemata ergeben sich bei höherdimensionalen Gittern. So sind in Abbildung 5.22a die Brillouin-Zonen des einfach kubischen 2D-Gitters dargestellt.

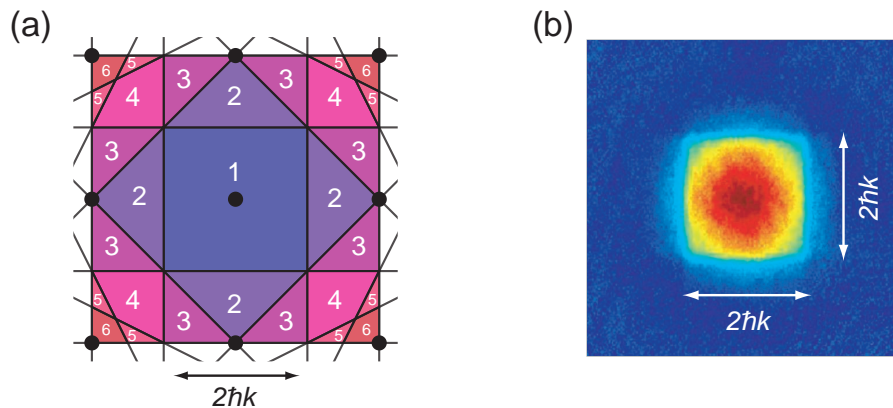
Zur Gegenüberstellung zeigt Abbildung 5.22b eine Flugzeitaufnahme eines Fermigases, das zuvor innerhalb von 1 ms adiabatisch aus unserem 3D-Gitter entlassen wird. Eine solche Messung entspricht einer direkten Abbildung der Fermi-Flächen und wird erstmals in Referenz [22] beschrieben. In unserer Messung weist die entlang der vertikalen Gitterachse abgebildete Atomwolke die Würfelform der ersten Brillouin-Zone auf. Hierin äußert sich die vollständige Besetzung des untersten Energiebandes. Aus der Aufnahme geht außerdem hervor, dass die Populationen in höheren Bändern vernachlässigbar sind. Im Falle einer Bevölkerung der angeregten Bänder würde die zweite und die dritte Brillouin-Zone simultan besetzt, da die entsprechenden Bänder miteinander überlappen (siehe Abbildung 5.9). Damit liefert die Abbildung der Kristallimpulse zugleich eine einfache Möglichkeit zu überprüfen, ob beim Transfer ins optische Gitter keine Anregungen in höhere Bänder stattgefunden haben.

Lädt man spinpolarisierte Fermionen bei  $T = 0$  in ein homogenes Gitter, so werden die niederenergetischsten Bloch-Zustände in aufsteigender Reihenfolge jeweils einfach besetzt. Stellt man die zugehörigen Kristallimpulse im erweiterten Zonenschema dar, so

---

<sup>15</sup>Eine Bedingung, die bei stark wechselwirkenden Systemen im Allgemeinen nicht zu erfüllen ist.

## 5.4 Analyse der Zustände im Gitter



**Abbildung 5.22:** (a) Reziprokes Gitter und Brillouin-Zonen des einfach kubischen 2D-Gitters. Die Bragg-Ebenen (schwarze Linien) bilden die Zonengrenzen. Man beachte, dass in der Darstellung nur die Zonen 1 bis 3 vollständig wiedergegeben sind. (b) Absorptionssaufnahme eines frei expandierenden Fermigas, welches adiabatisch aus einem  $4 E_F$  tiefen Gitter entlassen wird (Mittlung über 4 Aufnahmen). Im Zentrum des Gitters bilden die Fermionen einen Bandisolator, sodass die erste Brillouin-Zone vollständig ausgefüllt wird. Wie anhand der höheren Brillouin-Zonen zu erkennen ist, ist die Bevölkerung in angeregten Bändern vernachlässigbar klein.

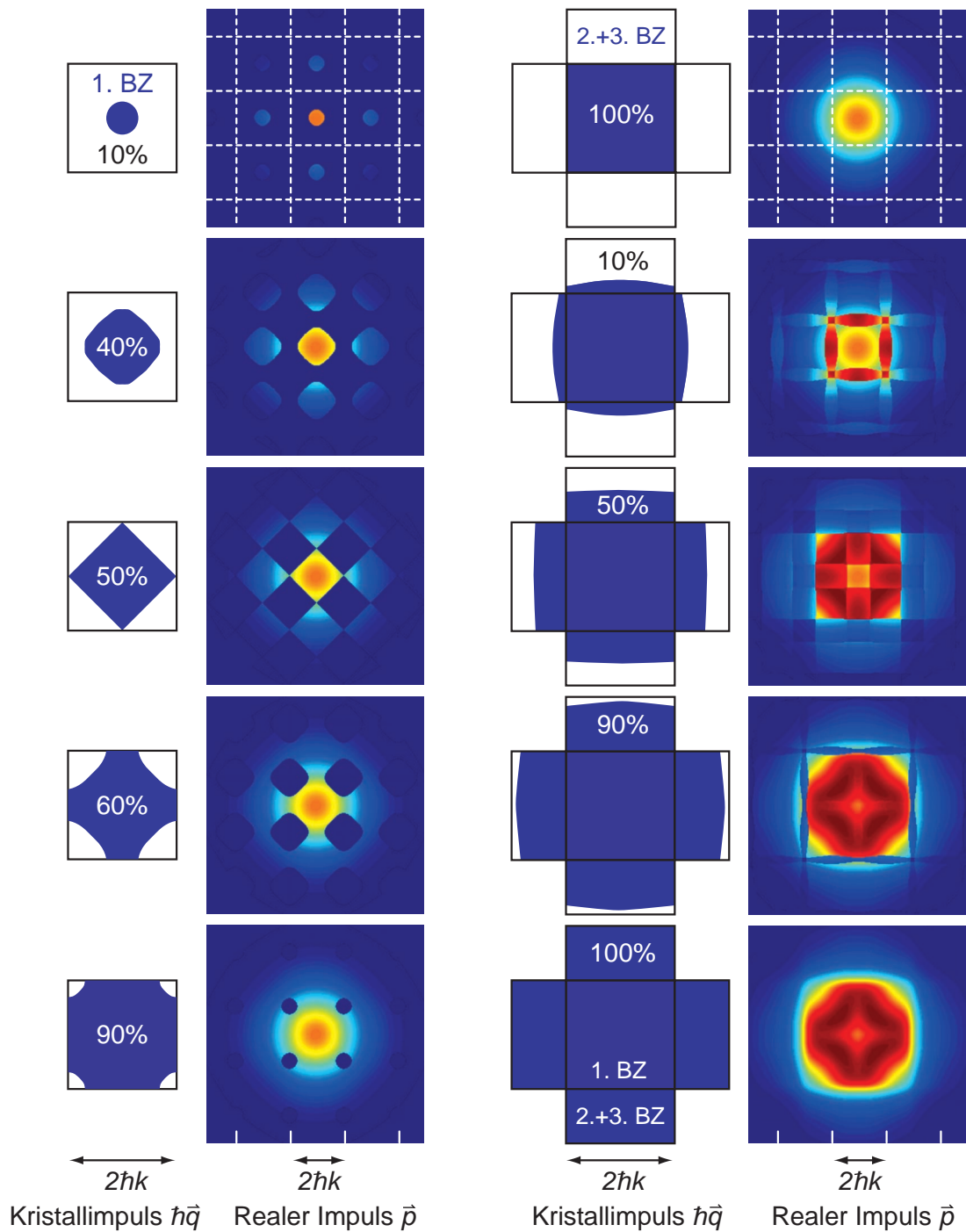
erhält man die Fermi-Flächen. Am Beispiel eines *homogenen* 2D-Gitters zeigt Abbildung 5.23 die berechneten Fermi-Flächen für verschiedene Füllungen. Die anfangs runde Fermi-Fläche bildet mit zunehmender Besetzung des untersten Bandes Ausläufer aus, die senkrecht auf die Bragg-Ebenen stoßen. Bei vollständiger Besetzung des untersten Bandes ist schließlich die gesamte erste Brillouin-Zone gefüllt und die Fermi-Fläche nimmt die Form eines Quadrates an. Fügt man darüber hinaus weitere Fermionen zu, so kommt es zu einer Bevölkerung der angeregten Bänder. Dabei werden, aufgrund der überlappenden Bänder, die zweite und die dritte Brillouin-Zone simultan besetzt.

In Abbildung 5.23 sind neben den Kristallimpulsverteilungen die zugehörigen realen Impulsverteilungen dargestellt. Erstere erhält man im Experiment durch ein adiabatisches und Letztere durch ein abruptes Abschalten des Gitters. Nur beim adiabatischen Herunterrampen lassen sich die Populationen eindeutig ihren Bändern zuordnen. Im realen und damit *inhomogenen* Gitter sind die Fermi-Flächen im Allgemeinen aufgeweicht, da die Bänder abhängig vom Ort verschieden stark gefüllt sind.

Aus der Gegenüberstellung in Abbildung 5.23 geht deutlich hervor, dass sich die reale Impulsverteilung aus der periodischen Wiederholung der Kristallimpulsverteilung ergibt, wobei die Einhüllende durch die Fourier-Transformierte der Wannier-Funktion des jeweiligen Bandes bestimmt wird.

Die in diesem Abschnitt berechneten Dichteverteilungen  $\langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle$  entsprechen Erwartungswerten und geben daher nur Ensemblemittelwerte an. Aufgrund der korpuskularen

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse



**Abbildung 5.23:** Gegenüberstellung der Kristallimpulsverteilungen (Fermi-Flächen) und der realen Impulsverteilungen für entartete Fermigase ( $T = 0$ ) in einem homogenen 2D-Gitter. Die Serie zeigt die berechneten Verteilungen für ein  $10 E_r$  tiefes Gitter bei variabler Füllung der Bänder. Die Prozentangaben beschreiben die Füllung der Bänder, wobei die 2. und die 3. Brillouin-Zone (BZ) zusammengefasst sind.

Natur der Materiefelder und dem damit verbundenen Schrotrauschen weicht die Einzelmessung von diesen mittleren Dichteverteilungen ab. In Kapitel 8 werden wir sehen, wie sich auch aus dem atomaren Schrotrauschen wichtige Informationen über den Vielteilchenzustand im Gitter gewinnen lassen.

### 5.5 Hubbard-Modell

In einem flachen optischen Gitter sind die Atome eines Bose-Einstein-Kondensats über das gesamte Gitter delokalisiert. Der Vielteilchenzustand ist suprafluid und lässt sich durch eine makroskopische Wellenfunktion darstellen (siehe Abschnitt 5.2.1). Eine solche Beschreibung ist gültig, solange die Tunnelrate  $J$  groß ist. Erhöht man jedoch die Gittertiefe, so beginnt die Wechselwirkungsenergie  $U$  zwischen den Atomen die rasch abnehmende Tunnelenergie  $J$  zu dominieren. Die starken Korrelationen zwischen den Teilchen führen dazu, dass das System seine Welleneigenschaften allmählich verliert und sich schließlich – in einem Quantenphasenübergang – ein isolierender Zustand aus lokalisierten Teilchen, der sogenannte Mott-Isolator, ausbildet [9, 231]. Die Mott-Isolator-Phase existiert auch in wechselwirkenden fermionischen Systemen, wo sie eine besonders wichtige Rolle spielt. So ist eine Vielzahl der in realen Festkörpern auftretenden Quanteneffekte auf das Verhalten stark korrelierter Elektronen in der Nähe eines Mott-Isolators zurückzuführen. Dieter Jaksch und Mitarbeiter erkannten die enge Verknüpfung zwischen diesen beiden physikalischen Systemen. Sie zeigten, dass sich das aus der Festkörpertheorie bekannte Hubbard-Modell in hervorragender Weise mittels ultrakalter Atome in optischen Gittern realisieren lässt [9] und sich somit der Quantenphasenübergang zum Mott-Isolator direkt experimentell beobachten lässt [10].

Dieser Abschnitt befasst sich zunächst mit dem Bose-Hubbard-Modell, das eine Beschreibung wechselwirkender bosonischer Atome in optischen Gittern erlaubt. Aufgrund des Pauli-Prinzips und der zusätzlichen Spinfreiheitsgrade erweist sich das entsprechende fermionische Modell als weitaus komplizierter. Daher werden wir uns bei der Betrachtung wechselwirkender fermionischer Teilchen in optischen Gittern nur auf einige qualitative Aussagen beschränken. Abschließend seien noch Merkmale der Bose-Fermi-Mischungen in optischen Gittern angesprochen.

#### 5.5.1 Bose-Hubbard-Modell

Ausgangspunkt unserer Betrachtungen ist der Hamilton-Operator in zweiter Quantisierung für wechselwirkende bosonische Atome in einem Fallenpotential (siehe Gl. 2.78 und 2.79):

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \\ & + \frac{1}{2} \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

Dabei ist  $\hat{\psi}$  der bosonische Feldoperator. Das Fallenpotential  $V(\mathbf{r})$  setzt sich aus dem periodischen Anteil  $V_{\text{per}}(\mathbf{r})$  des Gitters und dem langsam variierenden externen Einschluss  $V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$  zusammen (siehe Abschnitt 4.2.3). Die Wechselwirkung zwischen den Teilchen wird durch ein Kontaktpotential angenähert, wobei  $a_s$  die Streulänge und  $m$  die Masse der Atome ist. Wegen des näherungsweise periodischen Potentials  $V(\mathbf{r})$  und der lokalen Wechselwirkung bietet es sich an, in die Basis aus lokalisierten Wannier-Funktionen zu wechseln. Sind die Energien, die für die Dynamik des Systems verantwortlich sind, klein gegenüber der Anregungsenergie ins zweite Band, so reicht es aus, nur die Wannier-Funktionen des untersten Bandes zu berücksichtigen und der Feldoperator lässt sich wieder wie folgt entwickeln:  $\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_j \hat{a}_j w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ . Die geringe Ausdehnung der Wannier-Funktionen erlaubt es, Tunnelprozesse zwischen Gitterplätzen, die nicht unmittelbar benachbart sind, zu vernachlässigen (Tight-Binding-Näherung). Darüber hinaus berücksichtigen wir nur Wechselwirkungen zwischen Teilchen, die sich auf denselben Plätzen befinden. Setzt man die Entwicklung des Feldoperators in Gleichung 5.76 ein, so erhält man zusammen mit den obigen Näherungen den Bose-Hubbard(BH)-Hamiltonian [9, 231]:

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} U \sum_i \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1) + \sum_i (\epsilon_i - \mu) \hat{n}_i. \quad (5.77)$$

Der erste Term beschreibt das Tunneln von Teilchen zwischen benachbarten Gitterplätzen  $\langle i, j \rangle$  und wird als kinetische Energie interpretiert. Dabei ist  $J$  das Tunnelmatrixelement aus Gleichung 5.23. Der Operator  $\hat{a}_j$  vernichtet ein Boson auf dem  $j$ -ten Gitterplatz, während  $\hat{a}_i^\dagger$  ein Teilchen auf dem  $i$ -ten Platz erzeugt. Bei jedem Tunnelprozess können die Teilchen ihre Energie um  $J$  absenken. Eine hohe Tunnelkopplung  $J$  führt demnach zu einer Delokalisierung der Teilchen über das gesamte Gitter. Wie die Feldoperatoren gehorchen auch die Operatoren  $\hat{a}_i^\dagger$  und  $\hat{a}_j$  den bosonischen Kommutationsregeln 2.8 und  $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$  gibt die Teilchenzahl auf dem  $i$ -ten Gitterplatz an.

Der zweite Term des Hamiltonians beschreibt Wechselwirkungen zwischen Teilchen, die sich auf denselben Gitterplätzen befinden. Die Stärke der Wechselwirkung wird durch das Matrixelement  $U$  aus Gleichung 5.28 beschrieben. Auf einem Gitterplatz können  $n$  Teilchen mit  $(n - 1)$  anderen Teilchen durch Zwei-Körper-Stöße wechselwirken. Der Faktor  $1/2$  berücksichtigt, dass nur halb so viele stoßende Paare existieren. Aufgrund ihrer Wechselwirkung tendieren die Atome dazu, sich auf verschiedene Plätze zu verteilen. Bei großem  $U$  führt dies zur Lokalisierung im Gitter.

Der letzte Term des Hamiltonians berücksichtigt das externe Potential. Auf dem  $i$ -ten Gitterplatz verursacht es einen Energieversatz  $\epsilon_i = \int V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) |w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)|^2 d\mathbf{r}^3 \approx V_{\text{ext}}(\mathbf{r}_i)$ . Um in einem großkanonischen Ensemble den Erwartungswert der Gesamtteilchenzahl festlegen zu können, wird zudem das chemische Potential  $\mu$  eingeführt.

In Abbildung 5.8 auf Seite 151 ist das Tunnel- und das Wechselwirkungsmatrixelement

von Rubidium im absoluten Grundzustand  $|F = 1, m_F = 1\rangle$  als Funktion der Gittertiefe dargestellt. Der Kopplungsparameter  $U/J$  lässt sich mittels der Gittertiefe kontinuierlich über einen großen Bereich durchstimmen. Somit wird es möglich, das gesamte Phasendiagramm des Bosegases von schwach bis stark korreliert zu untersuchen.

### 5.5.2 Phasendiagramm

Betrachten wir zunächst das Bose-Hubbard-Modell im Fall eines homogenen Gitters ( $\epsilon_i = 0$ ). Einige Eigenschaften der Grundzustände im Regime starker und schwacher Wechselwirkung wurden bereits in Abschnitt 5.4 diskutiert.

Ist die Wechselwirkungsenergie  $U$  vernachlässigbar gegenüber der kinetischen Energie  $J$ , so ist der Vielteilchengrundzustand suprafluid und durch Gleichung 5.61 gegeben. Die Teilchen kondensieren in den niederenergetischsten Bloch-Zustand und sind über das gesamte Gitter delokalisiert. Wie wir in Abschnitt 5.4 gesehen haben, lassen sich die Kondensatwellenfunktionen auf den Gitterplätzen durch kohärente Zustände  $|\psi_i\rangle$  mit einer einheitlichen Phase  $\varphi$  darstellen,  $\psi_i = \sqrt{\bar{n}_i}e^{i\varphi}$ . Die Besetzungszahlen  $n_i$  der Gitterplätze folgen einer Poisson-Statistik, deren Varianz  $\sigma_{n_i}$  durch die mittlere Besetzung  $\bar{n}_i$  gegeben ist.

Gemäß Abschnitt 5.2.1 bilden die Kondensatwellenfunktionen  $\psi_i$  bei einer einheitlichen Phasen  $\varphi$  zugleich den Grundzustand des Hamilton-Operators 5.34. Tatsächlich stellt der aus der Gross-Pitaevskii-Gleichung abgeleitete Hamilton-Operator 5.34 einen Spezialfall des allgemeineren BH-Hamiltonians dar, und zwar für den Grenzfall makroskopischer Wellenfunktionen mit definierten Phasen. Dies lässt sich einfach nachprüfen, indem man die Erwartungswerte der kinetischen Energie und der Wechselwirkungsenergie des BH-Hamiltonians für kohärente Zustände auswertet:

$$-J\langle\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_j\rangle = -J\psi_i^*\psi_j \quad \text{und} \quad \frac{U}{2}\langle\hat{n}_i(\hat{n}_i - 1)\rangle = \frac{U}{2}|\psi_j|^4. \quad (5.78)$$

Mit zunehmender Gittertiefe nimmt die Tunnelrate  $J$  exponentiell ab, und schließlich dominiert die interatomare Wechselwirkung  $U$  das Verhalten des Systems ( $U \gg J$ ). Die Atomzahlfluktuationen auf den Gitterplätzen werden energetisch immer kostspieliger, wodurch die Atome auf den Plätzen lokalisiert werden. In einem Phasenübergang zweiter Ordnung geht das System in den Mott-Isolator-Zustand über, der nicht länger durch eine makroskopische Wellenfunktion beschrieben werden kann. Der Vielteilchengrundzustand entspricht stattdessen einem Produkt aus lokalen Fock-Zuständen (siehe Gleichung 5.69). Im Mott-Isolator-Zustand besteht keinerlei langreichweitige Phasenkohärenz, die Besetzungszahlen der Gitterplätze sind genau festgelegt und perfekt miteinander korreliert.

Wegen des nicht-lokalen Charakters der Tunnelkopplung lassen sich die exakten Lösungen des BH-Hamiltonians nur mit großem numerischen Aufwand ermitteln. Dennoch kann im Rahmen einer selbstkonsistenten Mean-Field-Theorie ein analytischer Näherungsausdruck für die Phasengrenzen hergeleitet werden [232, 233]. Analog zum Bogoliubov-

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

Ansatz in Gleichung 2.81 ersetzt man den bosonischen Feldoperator durch seinen Erwartungswert und eine kleine Schwankung,  $\hat{a}_i = \langle \hat{a}_i \rangle + \delta \hat{a}_i$ . Dabei spielt  $\langle \hat{a}_i \rangle = \psi_i$  die Rolle eines Landau-Ordnungsparameters. Dieser kann aufgrund der  $U(1)$ -Invarianz des BH-Hamiltonians reell gewählt werden. Vernachlässigt man quadratische Schwankungsterme der Art  $\delta \hat{a}_i^\dagger \delta \hat{a}_j$ , so erhält man die Relation  $\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j = \psi_i^* \hat{a}_j + \psi_j \hat{a}_i^\dagger - \psi_i^* \psi_j$ . Diese setzen wir in den kinetischen Term des BH-Hamiltonians ein. Wegen der Homogenität des Systems ( $\epsilon_i = 0$ ) nehmen wir an, dass der Erwartungswert des bosonischen Feldoperators unabhängig vom Gitterplatz ist,  $\psi_i = \psi$ . Hiermit lässt sich der Hamiltonian effektiv auf das Problem eines einzelnen Platzes reduzieren und wir erhalten unabhängig vom Index  $i$ :

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} U \hat{n}(\hat{n} - 1) - \mu \hat{n} + Jz\psi^2 - Jz\psi(\hat{a}^\dagger + \hat{a}). \quad (5.79)$$

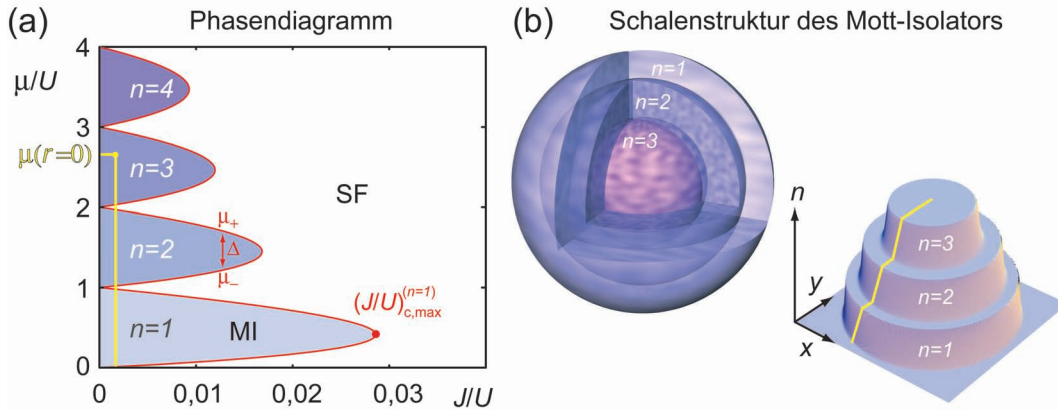
Dabei bezeichnet  $z$  die Anzahl der unmittelbar benachbarten Gitterplätze. Im einfach kubischen 3D-Gitter ist  $z = 6$ . Im Rahmen der Mean-Field-Näherung haben wir das Bose-Hubbard-Modell auf den lokalen Hamilton-Operator 5.79 reduziert. Dessen Lösungen lassen sich numerisch bestimmen [233]. Hierzu wird der Hamilton-Operator bezüglich der Fock-Basis in Matrixform gebracht und diagonalisiert. Anschließend berechnet man den neuen Erwartungswert  $\langle \hat{a} \rangle$  und iteriert das Verfahren, bis die Lösungen schließlich die Selbstkonsistenzbedingung  $\langle \hat{a} \rangle = \psi$  erfüllen.

In der superfluiden Phase weist der Ordnungsparameter  $\psi$  einen endlichen Wert auf. Betrachtet man ein homogenes System mit ganzzahligen *mittleren* Besetzungszahlen  $\bar{n} = n$ , so verschwindet der Ordnungsparameter  $\psi$  oberhalb eines kritischen Wertes  $(U/J)_c$  und das System geht in den Mott-Isolator über. In der Nähe der Phasengrenze  $(U/J)_c$  ist die Tunnelkopplung klein und kann daher störungstheoretisch behandelt werden: Die nullte Ordnung Störungstheorie entspricht dem Grenzfall  $J = 0$ . Hier ist der Grundzustand auf einem Gitterplatz durch den Fock-Zustand  $|n\rangle$  gegeben. Die zugehörige Energie  $E_n^{(0)}$  ergibt sich trivial aus dem Hamilton-Operator 5.79 und ist minimal, wenn das chemische Potential die Bedingung  $(n-1)U \leq \mu \leq nU$  erfüllt. Betrachtet man als Nächstes eine kleine Störung bzw. Tunnelkopplung  $J$ , so kann der Tunnelterm  $\hat{V} = -Jz\psi(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$  im Hamilton-Operator 5.79 störungstheoretisch behandelt werden. Die Grundzustandsenergie errechnet sich dann bis in zweiter Ordnung Störungstheorie gemäß:

$$E_n = E_n^{(0)} + \langle n | \hat{V} | n \rangle + \sum_{m \neq n} \frac{|\langle n | \hat{V} | m \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} + \mathcal{O}(\psi^4). \quad (5.80)$$

Hierbei sind  $|m\rangle$  die ungestörten ( $J = 0$ ) Eigenzustände und  $|n\rangle$  ist der oben besprochene Grundzustand. Die Störung  $\hat{V}$  koppelt  $|n\rangle$  nur mit den beiden Zuständen, die ein Teilchen mehr bzw. weniger aufweisen. Aus der Struktur von  $\hat{V}$  folgt außerdem, dass Energiekorrekturen mit ungeraden Potenzen von  $\psi$  verschwinden. Insbesondere ist  $\langle n | \hat{V} | n \rangle = 0$ . Die nach Gleichung 5.80 ausgewertete Energie lässt sich als Potenzreihe des Ordnungsparameters  $\psi$  darstellen und nimmt die Form  $E_n(\psi) = a_0 + a_2\psi^2 + \mathcal{O}(\psi^4)$  an. Gemäß der





**Abbildung 5.24:** (a) Phasendiagramm des Bose-Hubbard-Modells bei  $T = 0$ . Die Phasengrenzen  $(J/U)_c$  sind rot dargestellt und nach Gleichung 5.81 berechnet. In den blauen Bereichen (Mott-Lobes) befinden sich die inkompressiblen Mott-Isolator-Phasen (MI) mit ganzzahligen Besetzungszahlen  $n$ . Die Ober- und Unterkanten definieren die Anregungsenergielücke  $\Delta[n, (J/U)] = \mu_+ - \mu_-$  der jeweiligen Mott-Phase. Außerhalb der blauen Bereiche ist das System superfluid (SF). (b) Schematische Darstellung der Schalenstruktur und der Dichte eines Mott-Isolators in einem 3D-Gitter mit sphärisch harmonischem Einschluss. Ein zentraler Schnitt ( $z = 0$ ) zeigt die stufenförmige Dichteverteilung, welche auf die Inkompressibilität der Mott-Phasen zurückzuführen ist. Die radiale Dichte variiert mit dem lokalen chemischen Potential  $\mu(r)$  und kann anhand des gelben Pfades im Phasendiagramm (a) abgelesen werden. Zwischen den MI-Schalen liegen SF-Schalen. Letztere werden mit abnehmendem  $(J/U)$  immer dünner.

phänomenologischen Landau-Theorie beschreibt diese Form einen Phasenübergang zweiter Ordnung. Minimiert man die Energie  $E_n(\psi)$  nach dem Ordnungsparameter  $\psi$ , so gilt  $\psi \neq 0$  für  $a_2 < 0$  und  $\psi = 0$  für  $a_2 > 0$ . Demnach ist die Phasengrenze zwischen dem superfluiden ( $\psi \neq 0$ ) und dem Mott-Isolator-Zustand ( $\psi = 0$ ) durch die Bedingung  $a_2 \equiv 0$  gegeben. Durch Auswerten dieser Bedingung erhält man die kritischen Parameter an den Phasengrenzen:

$$\left(\frac{J}{U}\right)_c = \frac{1}{z} \frac{(n - \frac{\mu}{U})(1 - n + \frac{\mu}{U})}{1 + \frac{\mu}{U}}. \quad (5.81)$$

Das zugehörige Phasendiagramm ist in Abbildung 5.24a dargestellt. Die Füllfaktoren der verschiedenen Mott-Isolator-Phasen sind ganzzahlig und hängen wie folgt vom chemischen Potential  $\mu$  ab:  $(n - 1)U \leq \mu \leq nU$ .

In der superfluiden Phase ist das Spektrum der Dichteanregungen kontinuierlich, denn das System kann beliebig kleine Energiemengen in Form von Phasenfluktuationen aufnehmen. Mit dem Übergang zum Mott-Isolator öffnet sich eine Energielücke im Anregungsspektrum. Diese lässt sich anhand des Phasendiagramms in Abbildung 5.24a begrei-

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

---

fen. Innerhalb einer Mott-Isolator-Phase kann das chemische Potential über einen Bereich  $\Delta = \mu_+ - \mu_-$  variiert werden, ohne dass sich die Dichte  $n$  verändert. Die Energielücke  $\Delta$  kann aus Gleichung 5.81 abgeleitet werden. Sie ist eine Funktion von  $(J/U)$  und abhängig vom Füllfaktor  $n$ . Für sehr kleine Tunnelkopplungen  $J$  geht sie gegen die Wechselwirkungsenergie  $U$ . Dies ist die Energie, welche man für eine Teilchen-Loch-Anregung aufwenden muss. Dabei wird ein Teilchen von einem Gitterplatz entfernt und auf einem anderen Platz wieder hinzugefügt. Dichteänderungen und damit Anregungen des Systems sind also nur möglich, wenn die nötige Energie  $\Delta[n, (J/U)]$  für eine Einteilchenanregung aufgebracht werden kann.

In einem homogenen System ( $\epsilon_i = 0$ ) mit fester Gesamtteilchenzahl können sich die mittleren Besetzungszahlen  $\bar{n}_i$  der Plätze auch bei einer Variation der Gittertiefe nicht verändern. Um in einem solchen System einen reinen Mott-Isolator erzeugen zu können, sind daher von Anfang an ganzzahlige *mittlere* Besetzungszahlen  $\bar{n}_i$  notwendig. Wird diese Bedingung nicht erfüllt, so bilden die überschüssigen Atome einen superfluiden Rest, der sich frei über den Mott-Isolator hinweg bewegt. Selbst bei kleinem  $(J/U)$  können die überschüssigen Teilchen ihre kinetische Energie absenken, indem sie sich über das gesamte Gitter delokalisieren. Da sich diese überschüssigen Teilchen nicht auf denselben Gitterplätzen aufhalten müssen, wird deren Bewegung auch nicht durch die Wechselwirkungsenergie  $U$  blockiert. Dieselbe Argumentation gilt auch für zu kleine Füllfaktoren, nur dass sich nun Löcher statt Teilchen über das Gitter delokalisieren.

### 5.5.3 Mott-Isolator im inhomogenen Potential

Im realen Experiment werden die Atome in einem *inhomogenen* Gitterpotential gefangen. Daher sind die mittleren Besetzungszahlen  $\bar{n}_i$  abhängig vom Ort und verändern sich mit der Gittertiefe. Geht man von einem nicht zu starken harmonischen Einschluss aus, so lässt sich das System in kleine Bereiche unterteilen, die jeweils als homogen betrachtet werden können. Für diese Bereiche lässt sich ein lokales chemisches Potential einführen:

$$\mu_i = \mu - \epsilon_i \quad \text{bzw.} \quad \mu(\mathbf{r}) \approx \mu - V_{\text{ext}}(\mathbf{r}). \quad (5.82)$$

Naturgemäß können zwischen diesen fiktiven Bereichen Umverteilungsprozesse stattfinden, was eine Anpassung der mittleren Besetzungszahlen  $\bar{n}_i$  an die jeweiligen Gittertiefen erlaubt. Ist für die Erzeugung eines reinen Mott-Isolators die mittlere Besetzungszahl zu hoch, so tunneln die überschüssigen Teilchen an den Rand der Atomwolke und besetzen dort freie Gitterplätze. Dabei verringert das System seine Wechselwirkungsenergie. Ist hingegen für die Ausbildung eines Mott-Isolators die mittlere Besetzungszahl zu klein, so tunneln Teilchen vom Rand der Atomwolke ins Zentrum der Falle und füllen dort Löcher auf. In diesem Fall verringert das System seine potentielle Energie. Im inhomogenen System führen die konkurrierenden Beiträge aus potentieller Energie und Wechselwirkungsenergie zu Umverteilungsprozessen, die es erlauben den Mott-Isolator ausgehend von beliebigen Gesamtatomzahlen (bzw.  $\bar{n}_i$ ) zu erzeugen. Man beachte, dass sich beim Hochrampen des

Gitters sowohl die mittlere Teilchenzahl  $\bar{n}_i$  als auch das lokale chemische Potential  $\mu_i$  verändert, sodass die Phasengrenzen in Abbildung 5.24a im Allgemeinen „schräg“ gekreuzt werden.

Als Beispiel betrachten wir in Abbildung 5.24b eine sphärisch symmetrische Falle, in deren Zentrum ein Mott-Isolator mit einem Füllfaktor  $n = 3$  vorliegt. Im Fallenzentrum nimmt das lokale chemische Potential seinen maximalen Wert  $\mu(r = 0) = \mu$  an und fällt nach außen hin ab, bis es am Rand der Atomwolke verschwindet (siehe gelbe Linien in Abbildung 5.24). Folgt man dem radialen Verlauf, so durchläuft man eine Serie von Mott-Domänen, die durch superfluide Phasen voneinander getrennt sind. In einem inhomogenen Potential weist das Dichteprofil demnach ein stufenförmiges Verhalten auf und sämtliche Phasen mit einem chemischen Potential kleiner oder gleich  $\mu$  koexistieren. Trotz des nach außen hin zunehmenden externen Potentials bleibt die atomare Dichte innerhalb der Mott-Domänen konstant. Dies ist eine unmittelbare Konsequenz der Inkompressibilität ( $\partial n / \partial \mu = 0$ ) des Mott-Isolators. Die Schalenstruktur der Mott-Domänen konnte auch experimentell mittels spinändernder Stöße [220] bzw. durch die dichteabhängige Frequenzverschiebung des atomaren Uhrenübergangs [234] nachgewiesen werden.

Bei verschwindender Tunnelkopplung  $J$  können die Radien der einzelnen Mott-Domänen unmittelbar aus der Relation  $\mu = V_{\text{ext}}(R_n) + nU$  abgeleitet werden. Dabei befindet sich die Domäne mit dem Füllfaktor  $n$  zwischen  $R_n$  und  $R_{n-1}$ . Das chemische Potential  $\mu$  wird durch die Gesamtteilchenzahl  $N = \frac{1}{a^3} \int n(r, \mu) d^3r$  festgelegt [235].

Beim Erhöhen der Gittertiefe geht das System als erstes an den Spitzen, der in Abbildung 5.24a dargestellten Phasengrenzen, in den Mott-Isolator über. Die Positionen  $\mu_{c,\text{max}}$  der Maxima lassen sich durch Ableiten von Gleichung 5.81 nach dem chemischen Potential ermitteln. Setzt man die Ergebnisse wiederum in Gleichung 5.81 ein, so erhält man die maximalen kritischen Werte für den Phasenübergang, welche wie folgt vom Füllfaktor  $n$  abhängen:

$$\left(\frac{J}{U}\right)_{c,\text{max}}^{(n)} = \frac{1}{z} \left(2n + 1 - 2\sqrt{n(n+1)}\right). \quad (5.83)$$

In einer harmonischen Falle nimmt die Dichte vom Rand der Atomwolke zum Zentrum hin zu. Bilden sich beim Erhöhen der Gittertiefe mehrere Mott-Domänen aus, so findet der Phasenübergang schrittweise bei verschiedenen Gittertiefen statt und die Schalen formen sich vom Rand der Falle in Richtung Zentrum aus. In der folgenden Tabelle sind die kritischen Gittertiefen  $V_c$  für die verschiedenen Mott-Domänen angegeben:

$n$	1	2	3	4	5
$V_c/E_T$	12,62	14,54	15,85	16,87	17,70

Hierbei wird eine Gitterwellenlänge von  $\lambda = 755 \text{ nm}$  und die Streulänge  $a_{\text{BB}} = 100,4 a_0$  von  $^{87}\text{Rb}$  im absoluten Grundzustand  $|F = 1, m_F = 1\rangle$  vorausgesetzt. Der funktiona-

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

---

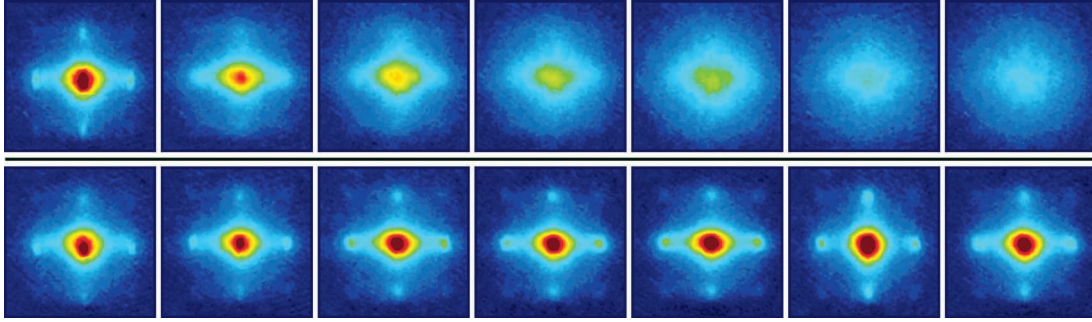
le Zusammenhang zwischen  $(J/U)$  und der Gittertiefe wird exakt mittels der Wannier-Funktionen ausgewertet. Zwar ist die Tunnelkopplung  $J/E_r$  unabhängig von der Gitterwellenlänge  $\lambda$ , doch für die Wechselwirkungsenergie gilt  $U/E_r \propto a_{\text{BB}}/\lambda$ .

### 5.5.4 Experimentelle Beobachtung des Phasenübergangs

In unserem Experiment kann der Phasenübergang vom superfluiden Zustand zum Mott-Isolator erstmals in einem sehr flexiblen, blauverstimmten optischen Gitter beobachtet werden. Ausgangspunkt für die Experimente ist ein quasi reines Bose-Einstein-Kondensat aus etwa  $10^5$   $^{87}\text{Rb}$ -Atomen im absoluten Grundzustand  $|F = 1, m_F = 1\rangle$ . Das Kondensat ist in einer gekreuzten Dipolfalle (1030 nm) mit radialen und axialen Fallenfrequenzen von  $\sim 23$  bzw.  $\sim 90$  Hz gefangen. Durch s-förmiges Hochfahren der Laserleistung werden die Atome innerhalb von 30 ms adiabatisch in ein dreidimensionales optisches Gitter variabler Tiefe  $V_{\text{max}}$  transferiert. Mit einer Wellenlänge von 755 nm ist das Gitter blauverstimmt. Um den repulsiven Anteil des Gitters zu kompensieren und somit den externen Einschluss aufrecht zu erhalten (siehe Abschnitt 4.2.3), wird synchron mit dem Gitter die Leistung der Dipolfalle um einen Faktor  $\sim 1,8$  erhöht. Bei den hier betrachteten Parametern bildet sich ausschließlich ein Mott-Isolator mit einem Füllfaktor von  $n = 1$  aus. Entsprechend wird ein recht scharfer Phasenübergang ab einer Gittertiefe von  $12,6 E_r$  erwartet. Um den Übergang nachzuweisen, werden die Atome in verschiedenen tiefe Gitter transferiert und nach 150 ms durch abruptes Abschalten sämtlicher Potentiale entlassen. Schließlich werden die Atome nach 10 ms freier Expansion mittels Absorptionsabbildung aufgenommen.

In der oberen Reihe von Abbildung 5.25 ist eine Serie solcher Aufnahmen für zunehmende maximale Gittertiefen  $V_{\text{max}}$  dargestellt. Man beobachtet eine rasche Abnahme des Interferenzkontrastes. Diese Abnahme ist durch den Verlust der langreichweitigen Phasenkohärenz bedingt und lässt sich auf die Ausbildung des Mott-Isolators zurückführen. Darüber hinaus weist die bis zu relativ hohen Gittertiefen sichtbare Kreuzstruktur auf kurzreichweitige Phasenkohärenzen hin. Letztere können gemäß Referenz [227, 228] auf die kohärente Beimischung von Teilchen-Loch-Paaren zum reinen Mott-Isolator-Zustand bei kleinen aber endlichen Tunnelkopplungen zurück geführt werden. Dass die Abnahme des Interferenzkontrastes nicht bloß durch ein thermisches Dephasieren hervorgerufen wird, lässt sich anhand der Reversibilität des Prozesses nachweisen. In der unteren Zeile der dargestellten Absorptionaufnahmen wird das Gitter vor dem abrupten Abschalten innerhalb von 20 ms wieder adiabatisch von  $V_{\text{max}}$  auf  $10,5 E_r$  verringert. Tatsächlich beobachtet man unabhängig von der maximal eingestellten Gittertiefe ein Wiederaufleben des Interferenzmusters und damit der langreichweitigen Phasenkohärenz.

Das Verschwinden der langreichweitigen Phasenkohärenz ist eine direkte Konsequenz des Quantenphasenübergangs vom superfluiden Zustand zum Mott-Isolator, stellt aber noch keinen eindeutigen Beweis dar. Ein weiteres wichtiges Merkmal des Mott-Isolators ist die Ausbildung der Energielücke im Anregungsspektrum. Letztere konnte in anderen Experimenten durch Anlegen eines Magnetfeldgradienten [10] und über Bragg-Spektroskopie nachgewiesen werden [18]. Wie wir gesehen haben, geht mit der Energielücke auch



**Abbildung 5.25:** Erstmalige Beobachtung des Phasenübergangs vom superfluiden Zustand zum Mott-Isolator in einem blauverstimmt optischen Gitter. Die Absorptionsspektren zeigen die Atomwolken 10 ms nach dem Abschalten des Gitters. In der oberen Serie wird die maximale Gittertiefe in gleichmäßigen Schritten von  $10,5 E_r$  (links) nach  $32 E_r$  (rechts) erhöht. Die Interferenzstruktur verschwindet mit dem Phasenübergang zum Mott-Isolator. In der unteren Serie werden dieselben maximalen Gittertiefen realisiert. Jedoch wird das Gitter am Ende jedes Experiments, vor dem abrupten Abschalten, wieder adiabatisch auf  $10,5 E_r$  Tiefe verringert. Das Wiederauftauchen des Interferenzmusters verdeutlicht die Reversibilität des Quantenphasenübergangs.

die Inkompressibilität des Mott-Isolators einher. In einem inhomogenen Potential manifestiert sich die Inkompressibilität durch die Ausbildung einer Schalenstruktur. Auch Letztere konnte experimentell beobachtet werden [220, 234].

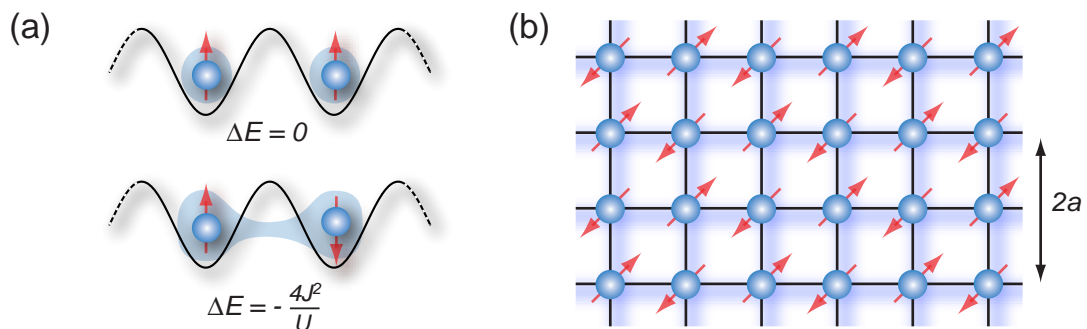
### 5.5.5 Fermi-Hubbard-Modell

In einem ultrakalten einkomponentigen Fermigas treten aufgrund des Pauli-Prinzips keine  $s$ -Wellen-Stöße auf. Ein solches Gas ist in der Regel wechselwirkungsfrei und lässt, wie in Abschnitt 5.2.2, durch unabhängige Einteilchenzustände beschreiben. Um starke Korrelationen und Mott-Physik mit Fermionen zu untersuchen, benötigt man Spinnmischungen, also Atome in unterschiedlichen Hyperfeinzuständen. Ein zweikomponentiges (Spin-1/2-) Fermigas mit festen Teilchenzahlen und in einem homogenen Gitter lässt sich durch den fermionischen Hubbard(FH)-Hamiltonian beschreiben:

$$\hat{H} = -J \sum_{\sigma} \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{a}_{i,\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{j,\sigma} + U \sum_i \hat{n}_{i,\uparrow} \hat{n}_{i,\downarrow}. \quad (5.84)$$

Hierbei gehorchen die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren den fermionischen Antikommutationsregeln und  $\sigma \in \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$  kennzeichnet die beiden Hyperfeinzustände der Atome. Wie beim Bose-Hubbard-Hamiltonian bezeichnet  $J$  das Tunnel- und  $U$  das Wechselwirkungsmatrixelement. Stimmt das Gitterpotential für die Atome in den beiden Hyperfeinzuständen überein, so sind  $J$  und  $U$  wiederum durch Gleichung 5.23 bzw. 5.28

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse



**Abbildung 5.26:** Austauschwechselwirkung und Antiferromagnetismus: **(a)** Das Pauli-Prinzip verbietet Tunnelprozesse zwischen Gitterplätzen mit gleichem Spin. Antiparallele Spinausrichtungen erlauben es den Atomen ihre kinetische Energie durch Tunneln abzusenken. Da für die Doppelbesetzung eines Gitterplatzes die Wechselwirkungsenergie  $U$  aufgewendet werden muss, handelt es sich um virtuelle Tunnelprozesse. **(b)** Die Austauschwechselwirkung führt bei hinreichend niedrigen Temperaturen zu einer antiferromagnetischen Ordnung im Mott-Isolator. Die Ausdehnung einer Einheitszelle ist dann doppelt so groß wie die Gitterperiode  $a$ . Der antiferromagnetische Quantenzustand besteht aus einer kohärenten Überlagerung der dargestellten Konfiguration und einer entsprechenden, um  $a$  verschobenen, Spinkonfiguration.

gegeben. Das Hubbard-Modell ist auf das unterste Band beschränkt. Wegen des Pauli-Prinzips können sich nur Teilchen mit unterschiedlichem Spin auf demselben Gitterplatz aufhalten und miteinander wechselwirken.

Das fermionische Hubbard-Modell weist ein sehr komplexes Phasendiagramm auf, das von der Temperatur, den Füllfaktoren und der Kopplungsstärke  $U/J$  abhängt [28, 236–238]. Im Weiteren betrachten wir den wichtigen Spezialfall einer ausgewogenen Spinmischung mit repulsiver Wechselwirkung ( $U > 0$ ). Zudem soll sich auf jedem Gitterplatz im Mittel ein Atom aufhalten, was zur halben Füllung des untersten Bandes führt. Ist die Wechselwirkung klein ( $U/J \ll 1$ ), so sind die Atome über das gesamte Gitter delokalisiert und bilden – analog zu Elektronen im Festkörper – einen metallischen Zustand. Wie beim Bose-Hubbard-Modell geht das System oberhalb einer kritischen Kopplungsstärke  $U/J$  in einen Mott-Isolator über. Zwar weist der Isolator eine endliche Energielücke für Dichteanregungen auf, doch lässt sich das System nach wie vor leicht über die vorhandenen Spinfreiheitsgrade anregen. Im Allgemeinen bildet der Mott-Isolator aufgrund von thermischen Anregungen einen paramagnetischen Zustand aus, bei dem die Spins auf den Gitterplätzen zufällig ausgerichtet sind. Um dem System die in den Spins gespeicherte Entropie zu entziehen, muss es unter die kritische Néel-Temperatur gekühlt werden. In einem einfach kubischen Gitter ergibt sich dann eine antiferromagnetische Ordnung, bei der die Spins auf benachbarten Gitterplätzen jeweils entgegengesetzt ausgerichtet sind (siehe Abbildung 5.26).

An dieser Stelle sei betont, dass die Kopplung zwischen den Spins nicht etwa auf eine magnetische Dipolwechselwirkung zurückzuführen ist, sondern durch eine Austauschwechselwirkung zustande kommt: Besitzen zwei Teilchen auf benachbarten Gitterplätzen entgegengesetzte Spins, so lässt das Pauli-Prinzip virtuelle Tunnelprozesse zwischen diesen Plätzen zu. Dies ermöglicht eine zusätzliche Delokalisierung der Teilchen und führt zu einer Absenkung ihrer kinetischen Energie (ein analoger Effekt konnte kürzlich mit bosonischen Atomen in optischen Gittern nachgewiesen werden [239]). Betrachtet man zwei einfach besetzte und unmittelbar benachbarte Potentialtöpfchen  $\langle i, j \rangle$ , so existieren für dieses Teilsystem im Limes  $J = 0$  vier miteinander entartete Spinkonfigurationen. Diese Entartung wird bereits durch eine kleine Tunnelkopplung  $J$  aufgehoben. Da das Pauli-Prinzip nur für den Singulettzustand  $(|\uparrow\rangle_i|\downarrow\rangle_j - |\downarrow\rangle_i|\uparrow\rangle_j)/\sqrt{2}$  eine Beimischung der Zustände mit doppelt besetzten Gitterplätzen erlaubt, weist dieser eine kleinere Energie als die drei Triplettzustände auf. Durch diese Beimischung wird der Singulettzustand in zweiter Ordnung Störungstheorie (für entartete Zustände) energetisch um den Betrag

$$J_H = \frac{4J^2}{U} \quad (5.85)$$

abgesenkt. Dies verdeutlicht, dass der Grundzustand des Hubbard-Modells bei halber Füllung ( $\bar{n}_i = 1$ ) und starker Kopplung  $U/J \gg 1$  antiferromagnetisch ist. Betrachtet man thermische Energien, die sehr klein gegenüber der Energielücke ( $\sim U$ ) des Mott-Isolators sind, so kann der Hilbert-Raum auf Zustände mit einfach besetzten Gitterplätzen reduziert werden. In diesem Unterraum aus niederenergetischen Zuständen lässt sich das fermionische Hubbard-Modell auf das quantenmechanische Heisenberg-Modell abbilden:

$$\hat{H}_H = J_H \sum_{\langle i, j \rangle} \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j. \quad (5.86)$$

Hierbei bezeichnet  $\hat{\mathbf{S}}_i$  einen Spin-Operator, der auf den  $i$ -ten Gitterplatz wirkt.

Nach den obigen Betrachtungen sind im Regime starker Kopplung verschiedene Temperaturbereiche zu unterscheiden: Für  $k_B T \lesssim U$  bildet sich ein Mott-Isolator mit paramagnetischer Ordnung aus. In diesem Zustand sind Dichtefluktuationen stark unterdrückt. Bei weitaus niedrigeren Temperaturen wird die Wechselwirkung zwischen den Spins relevant. Unterhalb der Néel-Temperatur  $k_B T_N \sim J_H$  beginnt das System eine makroskopische antiferromagnetische Ordnung – die Néel-Phase – auszubilden. Die verbleibenden Spinanregungen lassen sich im Rahmen des Heisenberg-Modells beschreiben. Für  $T \rightarrow 0$  geht das System schließlich in den absoluten Grundzustand, einen Mott-Isolator mit perfekter antiferromagnetischer Ordnung, über.

Es sei darauf hingewiesen, dass sich die Néel-Phase auch bereits bei kleineren Kopplungen  $U/J$ , also vor dem Übergang zum Mott-Isolator, ausbildet. Jedoch ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass sich zwei Teilchen mit entgegengesetzten Spins auf demselben

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

---

Gitterplatz aufhalten, nur partiell unterdrückt. Entsprechend schwach fällt die räumliche Modulation der beiden Spindichten  $\bar{n}_\uparrow, \bar{n}_\downarrow$  und damit die Amplitude der „Magnetisierung“ aus. Dieser geordnete Zustand wird als Spindichtewelle bezeichnet und entspricht dem Grundzustand des Systems [240]. Die zugehörige Néel-Temperatur ist exponentiell klein,  $k_B T_N \approx 6J \exp(-7J/|U|)$ , und stimmt mit dem bekannten Ausdruck aus der BCS-Theorie überein [241]. In der Tat gibt  $T_N$  – im Fall attraktiver Wechselwirkung – zugleich die kritische Temperatur  $T_c$  für den BCS-Übergang im Gitter an [28]. Dass die Phasengrenzen für attraktive und repulsive Wechselwirkung miteinander übereinstimmen, ist eine unmittelbare Konsequenz der Half-füllung und der fermionischen Symmetrie zwischen Teilchen und Löchern. Für den Fall repulsiver Wechselwirkung findet man, dass die kritische Néel-Temperatur zunächst mit der Gittertiefe zunimmt, um dann im tiefen Gitter gemäß  $k_B T_N \sim J_H$  wieder abzunehmen. Das Maximum der Néel-Temperatur liegt im Crossover-Bereich  $|U|/J \sim 10$ , der das Regime schwacher und starker Wechselwirkung stetig miteinander verbindet. Ausgehend von der Spindichtewelle wandelt sich der Grundzustand mit zunehmender Gittertiefe kontinuierlich in einen perfekten Antiferromagneten um. Im Fall attraktiver Wechselwirkung würde dieser Übergang dem BCS-BEC-Crossover entsprechen [237].

Um die Voraussetzungen zu untersuchen, bei denen sich ein fermionischer Mott-Isolator mit antiferromagnetischer Ordnung ausbildet, betrachten wir nochmal das Regime der starken repulsiven Wechselwirkung ( $U/J \gg 1$ ). Aufgrund der zwei möglichen Spinausrichtungen beträgt die maximale Entropie pro Teilchen im Heisenberg-Modell  $k_B \ln(2)$ . Ist die Temperatur des Gases in der Ausgangsfalle so klein, dass die Entropie pro Teilchen unterhalb von  $k_B \ln(2)$  liegt, so wird durch das adiabatische Hochfahren des optischen Gitters die Néel-Phase erreicht. Etwas strengere Anforderungen an die Temperatur ergeben sich, wenn über diese intuitive Argumentation hinaus auch Fluktuationen zwischen benachbarten Gitterplätzen berücksichtigt werden. Ein entsprechend erweitertes Mean-Field-Modell liefert, angewendet auf  $^{40}\text{K}$ -Atome in einem  $8 E_r$  tiefen Gitter der Wellenlänge  $\lambda = 755 \text{ nm}$ , eine Néel-Temperatur von  $T_N = 0,012 T_F$  [242]. Theoretisch ließe sich diese Temperatur erreichen, indem man das Gas in einer harmonischen Falle bei  $0,059 T_F$  präpariert und anschließend adiabatisch in das Gitter transferiert [242]. Eventuell lässt sich die Néel-Temperatur auch mittels Feshbach-Resonanz über das Wechselwirkungsmatrixelement  $U$  erhöhen, da sich der Mott-Isolator dann bereits in einem flacheren Gitter also bei größerer Tunnelkopplung  $J$  ausbilden könnte.

Für den Fall des inhomogenen Gitters zeigen Quanten-Monte-Carlo-Simulationen des eindimensionalen Hubbard-Modells, dass der Mott-Isolator von kompressiblen metallischen Flügeln umgeben ist [215, 236]. Doch ungeachtet des inhomogenen Potentials gelten die vorherigen Betrachtungen innerhalb der Mott-Phase weiterhin, solange die Einfachbesetzung der Gitterplätze erhalten bleibt. Oberhalb einer kritischen Teilchenzahl  $N_{\text{max}}$  verfügen die Atome am Rand der Falle über genügend potentielle Energie, um die Energielücke des Mott-Isolators zu überwinden. Solche Teilchen können ins Zentrum des Gitters



tunneln und dort, durch eine Mehrfachbesetzung der Plätze, die antiferromagnetische Ordnung zerstören. Im Limes großer Kopplungsstärken  $U/J$  geht die Energielücke für Dichteanregungen im Mott-Isolator gegen  $U$ . Gehen wir außerdem von einem harmonischen Einschluss  $V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$  mit dem Aspektverhältnis  $\alpha = \omega_z/\omega_r$  aus, so führt die Forderung der Einfachbesetzung der Gitterplätze zu der maximalen Atomzahl:

$$N_{\text{max}} = \frac{4\pi}{3\alpha} \left( \frac{8U}{m\omega_r^2\lambda^2} \right)^{3/2}. \quad (5.87)$$

Dabei wird das Gitter als Kontinuum angenähert (siehe Seite 155) und aus der Relation  $V_{\text{ext}}(\rho_{\text{max}}) = U$  wird der maximale effektive Radius  $\rho_{\text{max}}$  und damit die maximale Atomzahl  $N_{\text{max}}$  bestimmt. Für unsere experimentellen Parameter,  $^{40}\text{K}$  in einem  $8 E_r$  tiefen Gitter mit den harmonischen Fallenfrequenzen von  $\omega_r = 2\pi \cdot 40 \text{ Hz}$  und  $\omega_z = 2\pi \cdot 200 \text{ Hz}$ , erhält man  $N_{\text{max}} \approx 6 \cdot 10^5$ . Diese Atomzahl wird in den Experimenten üblicherweise nicht überschritten. Bei rotverstimmten Gittern können die maximal zulässigen Atomzahlen  $N_{\text{max}}$ , je nach Strahltaile, erheblich kleiner ausfallen, da bei roter Verstimmung der externe Einschluss mit der Gittertiefe zunimmt. Ganz anders verhält es sich bei blauverstimmten Gittern mit einem unabhängigen externen Einschluss. Hier erlaubt es ein schwacher externer Einschluss tief in das Mott-Isolator-Regime ( $U \gg J$ ) vorzudringen, ohne dass sich aufgrund von Doppelbesetzungen ein fermionischer Bandisolator ausbildet.

### 5.5.6 Bose-Fermi-Mischungen

Wie wir in Abschnitt 2.4 gesehen haben, zeigen Bose-Fermi-Mischungen schon in einer einfachen Falle interessante Phänomene wie Phasenseparation oder Kollaps. Durch ein optisches Gitter lassen sich die effektiven Massen und die interatomaren Wechselwirkungen soweit erhöhen, dass Wechselwirkungseffekte bereits auf mikroskopischer Skala eine bedeutende Rolle spielen. Analog zu den reinen Quantengasen lassen sich die Bose-Fermi-Mischungen in optischen Gittern durch ein Hubbard-Modell beschreiben. Geht man von einem spinpolarisierten Fermigas aus, so müssen nur die Wechselwirkungsmatrixelemente für die Boson-Boson- ( $U_{\text{BB}}$ ) und für die Boson-Fermion-Wechselwirkung ( $U_{\text{BF}}$ ) berücksichtigt werden (Gleichung 5.28 und 5.30). Kombiniert man die Hamilton-Operatoren der reinen Quantengase und fügt einen Term für die Interspezieswechselwirkung hinzu, so erhält man den folgenden Bose-Fermi-Hubbard (BFH)-Hamiltonian<sup>16</sup>:

$$\hat{H} = -J_{\text{B}} \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j - J_{\text{F}} \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j + \frac{U_{\text{BB}}}{2} \sum_i \hat{n}_{\text{B},i} (\hat{n}_{\text{B},i} - 1) + U_{\text{BF}} \sum_i \hat{n}_{\text{B},i} \hat{n}_{\text{F},i}. \quad (5.88)$$

Hierbei sind  $\hat{b}_i$  und  $\hat{c}_i$  die bosonischen und fermionischen Vernichtungsoperatoren mit  $\hat{n}_{\text{B},i} = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$  und  $\hat{n}_{\text{F},i} = \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i$ . Im Allgemeinen verfügen Bosonen und Fermionen über

<sup>16</sup>Der Hamiltonian ist hier für ein homogenes Gitter und feste Gesamtteilchenzahlen angegeben.

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

---

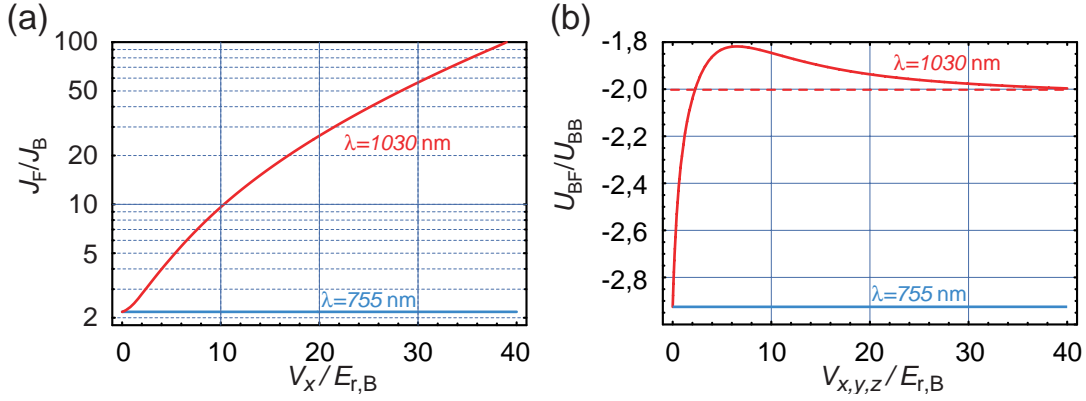
unterschiedliche große Tunnelkopplungen  $J_B$  und  $J_F$ .

Eine rasch zunehmende Anzahl von theoretischen Arbeiten befasst sich mit Bose-Fermi-Mischungen in optischen Gittern (darunter [36, 38, 243–250]). Für das Regime starker interatomarer Wechselwirkung wird ein reichhaltiges Phasendiagramm vorausgesagt, bei dem sich die Fermionen mit einer unterschiedlichen Anzahl von Bosonen zu Kompositteilchen paaren [244]. Systeme mit gemischter Statistik erlauben es zudem, „bosonen-induzierte“ Paarungsmechanismen zu untersuchen, wie sie auch bei der Cooper-Paarung in einem Supraleiter auftreten [37, 243, 251–255]. Noch vor der Bildung von Paaren sollen die Bose-Fermi-Korrelationen zu Ladungsdichtewellen und Polaronenzuständen [38, 250] führen. Für ein- und zweidimensionale Systeme werden Luttinger-Flüssigkeiten [38, 249] bzw. Supersolid-Phasen [36] vorausgesagt. Darüber hinaus kann in einer Mischung eine Spezies als Störstelle für die andere Spezies dienen und somit zu interessanten Lokalisierungseffekten und Quantenphasen mit Unordnung führen [248, 256, 257].

In zwei zeitgleich veröffentlichten experimentellen Arbeiten wurden Mischungen aus  $^{87}\text{Rb}$  und  $^{40}\text{K}$  in dreidimensionalen optischen Gittern untersucht [33, 34]. Bei hinreichend tiefen Gittern zeigen die Interferenzmuster, der entlassenen und frei expandierenden Atomwolken, dass die Kohärenz der Bosonen im Gitter durch die zunehmende Beimischung von Fermionen rasch abnimmt. Als Ursachen für diesen Effekt werden zurzeit verschiedene physikalische Phänomene diskutiert: von adiabatischen Temperaturveränderungen über die Bildung von Kompositteilchen bis hin zur Lokalisierung durch Unordnung.

Im Gegensatz zu den Experimenten zeigen numerische Simulationen [250] für zunehmende Fermionenzahlen eine Verschiebung des Mott-Isolator-Übergangs zu größeren Gittertiefen hin. Dieses Verhalten lässt sich im Rahmen einer linearen Antworttheorie nachvollziehen [250]: Hierbei beschreibt man die Bosonen in einem reinen Bose-Hubbard-Modell und berücksichtigt den Einfluss der Fermionen in Form einer modifizierten Boson-Boson-Wechselwirkung  $U_{\text{eff}}$ . Durch die Interspezieswechselwirkung induziert die Bosonendichte  $n_B(\mathbf{q})$  eine Fermionendichte  $\langle n_F(\mathbf{q}) \rangle = U_{\text{BF}} \chi(T, \mathbf{q}) n_B(\mathbf{q})$ , wobei  $\chi(T, \mathbf{q})$  eine lineare Antwortfunktion (die Lindhard-Funktion) für Fermionen der Temperatur  $T$  ist. Die gestörte Fermionendichte wirkt ihrerseits auf die Bosonen, sodass sich eine effektive Boson-Boson-Wechselwirkung  $U_{\text{eff}} = U_{\text{BB}} + U_{\text{BF}}^2 \chi(T, \mathbf{q})$  ergibt [245]. Da die Lindhard-Funktion stets negativ ist, induzieren die Fermionen, unabhängig vom Vorzeichen der Interspezieswechselwirkung  $U_{\text{BF}}$ , immer eine attraktive Wechselwirkung zwischen den Bosonen. Ein ähnlicher Effekt tritt in der konventionellen Supraleitung auf, wo Phononen (Bosonen) eine effektive Elektron-Elektron-Wechselwirkung hervorrufen. Aus der effektiven Reduktion der Boson-Boson-Wechselwirkung erklärt sich die in den Simulationen [250] beobachtete Verschiebung des Mott-Isolator-Übergangs zu höheren Gittertiefen hin.

Abweichend hiervon, verschwindet die bosonische Interferenz in den Experimenten [33, 34] durch das Hinzufügen von Fermionen bereits bei kleineren Gittertiefen. Simu-



**Abbildung 5.27:** (a) Verhältnis der Tunnelraten zwischen Bosonen ( $^{87}\text{Rb}$ ) und Fermionen ( $^{40}\text{K}$ ) in einem Gitter mit einer Wellenlänge von 1030 nm (rot) bzw. 755 nm (blau) als Funktion der Gittertiefe. Die Gittertiefen sind in Einheiten der bosonischen Rückstoßenergie  $E_{r,B}$  angegeben. (b) Analoge Darstellung für das Verhältnis aus Boson-Fermion-Wechselwirkung  $U_{BF}$  zu Boson-Boson-Wechselwirkung  $U_{BB}$ . Die rot gestrichelte Linie geht aus den harmonischen Näherungen 5.29 und 5.31 hervor. Die vorausgesetzten Streulängen entsprechen denen von  $^{87}\text{Rb}$   $|F = 1, m_F = 1\rangle$  und  $^{40}\text{K}$   $|9/2, -9/2\rangle$  [100, 103].

lationen [250] für Mischungen mit endlichen Temperaturen deuten darauf hin, dass dieses gegensätzliche Verhalten durch einen adiabatischen Heizeffekt hervorgerufen wird. Dieser Heizeffekt kann selbst in einer wechselwirkungsfreien Mischung auftreten und wird bereits in Referenz [33] als eine mögliche Ursache für den Kohärenzverlust aufgeführt. Bei kleinen aber endlichen Temperaturen ist die Entropie einer wechselwirkungsfreien Bose-Fermi-Mischung durch  $S \approx \alpha N_B (T/T_c)^3 + \beta N_F T/T_F$  gegeben. Hierbei ist  $N_B$  die Anzahl der Bosonen,  $N_F$  die Anzahl der Fermionen und  $\alpha, \beta$  sind numerische Konstanten. In einer harmonischen Falle ist die kritische Temperatur für die Bose-Einstein-Kondensation  $T_c$  proportional zum geometrischen Mittel  $\bar{\omega}_B$  der bosonischen Fallenfrequenzen und die Fermi-Temperatur  $T_F$  ist proportional zum geometrischen Mittel  $\bar{\omega}_F$  der fermionischen Fallenfrequenzen (s. Gl. 2.38 und 2.71). Beim Hochrampen des optischen Gitters bleiben aufgrund von Stößen die absoluten Temperaturen der beiden Spezies stets im Gleichgewicht. Mit den kleiner werdenden Tunnelraten  $J_{B,F}$  nehmen die effektiven Massen  $m_{B,F}^* \propto 1/J_{B,F}$  zu (s. Gl. 5.26) und die Fallenfrequenzen ab, sodass für die charakteristischen Temperaturen  $T_c \propto \sqrt{J_B}$  und  $T_F \propto \sqrt{J_F}$  gilt. Wie anhand von Abbildung 5.27a zu erkennen ist, nimmt beim Hochfahren eines fern rotverstimmten Gitters – wie es in den Experimenten [33, 34] eingesetzt wird – die Tunnelrate von  $^{87}\text{Rb}$  sehr viel schneller ab, als die von  $^{40}\text{K}$ . Folglich wird  $T_c$  sehr viel schneller klein als  $T_F$ . Bei konstanter Entropie führt dies zum adiabatischen Aufheizen der bosonischen Wolke und zu einer Abnahme des Kondensatanteils. Gleichzeitig wird die fermionische Wolke adiabatisch gekühlt [33]. Dieses Verhalten ist ähnlich zu der Situation, die wir im Zusammenhang mit dem sympathetischen Kühlen in der Dipolfalle am Anfang von Abschnitt 3.5.3 besprochen haben [167, 168].

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

---

In unserem blauverstimmten optischen Gitter ( $\lambda = 755$  nm) ist das Verhältnis der Tunnelraten  $J_F/J_B$  unabhängig von der Gittertiefe und durch das Verhältnis der realen Massen  $m_{Rb}/m_K = 2,175$  gegeben (siehe Abbildung 5.27a). Somit ist auch  $T_c/T_F$  konstant und im Modell der wechselwirkungsfreien Mischung bleibt der Kondensatanteil erhalten. Lassen sich diese Schlussfolgerungen näherungsweise auf die wechselwirkende Mischung übertragen, so sollte der adiabatische Transfer in das blauverstimmte Gitter geringere Temperaturveränderungen hervorrufen. Eine Wiederholung der oben beschriebenen Experimente in unserem Aufbau könnte daher genaueren Aufschluss über die Dekohärenzmechanismen liefern und zudem die Möglichkeit bieten, die theoretisch vorausgesagte durch die Fermionen induzierte Verschiebung des Mott-Isolator-Übergangs zu größeren Gittertiefen [250] zu beobachten.

### Besetzung der Gitterplätze in der Bose-Fermi-Mischung

In den meisten Experimenten ist man daran interessiert, durch Rekombinationsprozesse bedingte Verluste möglichst klein zu halten. In einem tiefen Gitter sind Plätze mit drei oder mehr Atomen inelastischen Verlusten unterworfen, bei denen ein tief gebundener molekularer Zustand erzeugt wird. Durch die freiwerdende Energie wird das Molekül und ein weiteres Atom, das als Stoßpartner dient, aus der Falle geschleudert. Bei der Bose-Fermi-Mischung begünstigt die attraktive Interspezieswechselwirkung ( $U_{BF} < 0$ ) die Mehrfachbesetzung der Gitterplätze, was die Wahrscheinlichkeit für Rekombinationsprozesse stark erhöht. Ein Gitterplatz, auf dem sich ein Fermion ( $n_F = 1$ ) befindet, kann mit bis zu

$$n_B^{\max} \leq -2 \frac{U_{BF}}{U_{BB}} + 1 \quad (5.89)$$

Bosonen besetzt werden, bevor die repulsive Wechselwirkung ( $U_{BB} > 0$ ) zwischen den Bosonen den Energiegewinn durch die attraktive Interspezieswechselwirkung kompensiert. Hier und im weiteren Verlauf wird angenommen, dass die Form der Wannier-Funktionen auf den Gitterplätzen von der Wechselwirkung unbeeinflusst bleibt. In einem Gitter mit einer Wellenlänge von 755 nm stimmen die bosonische und die fermionische Wannier-Funktion miteinander überein. Der perfekte räumliche Überlapp zwischen den beiden Spezies bedingt, dass bei dieser Wellenlänge das Verhältnis der Wechselwirkungsenergien mit  $U_{BF}/U_{BB} = -2,9$  maximal ist. Für einen Gitterplatz mit einem Fermion ist es deshalb energetisch vorteilhaft, mit bis zu 6 Bosonen besetzt zu werden. Abbildung 5.27b zeigt zum Vergleich das Verhältnis der Wechselwirkungsenergien in einem fern rotverstimmten Gitter ( $\lambda = 1030$  nm). Hier variiert  $U_{BF}/U_{BB}$  mit der Gittertiefe und geht für große Werte gegen  $-2,0$ . Ein Gitterplatz mit einem Fermion kann dann bis zu 5 Bosonen aufnehmen. Um Verluste durch Dreikörperrekombination zu verhindern, muss  $n_B^{\max} < 2$  sein. Andererseits erfordern z.B. Experimente zur heteronuklearen Molekülbildung, dass sich neben dem Fermion mindestens ein Boson auf dem Gitterplatz aufhält. Diese beiden Bedingungen führen zu der Forderung  $-U_{BB}/2 < U_{BF} \leq 0$ . Die in Abschnitt 2.4.2 be-

sprochene Feshbach-Resonanz erlaubt es, die Interspezieswechselwirkung so einzustellen, dass die obige Ungleichung erfüllt wird. Dazu muss in unserem blauverstimmten Gitter das Feshbach-Feld im Intervall  $542,7 \text{ G} < B \leq 543,8 \text{ G}$  liegen. Bei einer nicht wechselwirkenden Mischung lassen sich, wie wir in Abbildung 5.19 gesehen haben, durch die gleichzeitige Ausbildung eines bosonischen Mott-Isolators und eines fermionischen Bandisolators die zentralen Gitterplätze mit jeweils einem Boson und einem Fermion besetzen. Nach den obigen Überlegungen muss hierfür die Interspezieswechselwirkung nur näherungsweise ausgeschaltet werden. Folglich sind die Anforderungen an die Stabilität des Feshbach-Feldes nicht all zu hoch und experimentell leicht zu erfüllen.

Ein alternativer Ansatz die zentralen Gitterplätze mit jeweils einem heteronuklearen Atompaar zu besetzen, besteht darin, die Anzahl der Bosonen kleiner als die der Fermionen zu wählen [258] und bereits bei kleinen Gittertiefen, also vergleichsweise schwachen Bose-Fermi-Korrelationen  $U_{\text{BF}} \ll J_{\text{B,F}}$ , einen fermionischen Bandisolator zu erzeugen. Dies erlaubt es jedem Boson einen eigenen Gitterplatz mit einem Fermion einzunehmen und dabei seine Energie um  $U_{\text{BF}}$  abzusenken. Die uniforme Dichteverteilung des Bandisolators garantiert, dass die Bosonen (abgesehen vom Einfluss des externen Potentials) keinen Gitterplatz bevorzugen. Die bosonische Mehrfachbesetzung der Gitterplätze wird dann, wie beim reinen Mott-Isolator, durch die repulsive Wechselwirkung zwischen den Bosonen unterdrückt. Bei einer hinreichend großen Fermionenzahl geht die Ausdehnung des Bandisolator über die der bosonischen Atomwolke hinaus. Im Rahmen des Hubbard-Modells hat die bosonische Dichte aufgrund der Inkompressibilität des Bandisolators keinen Einfluss auf die Fermionen. Gleichzeitig bleibt auch die Boson-Boson-Wechselwirkung von der Anwesenheit der Fermionen unbeeinflusst. Auf die Bosonen wirkt sich der Bandisolator im Wesentlichen nur durch einen einheitlichen Energieversatz des externen Potentials um  $U_{\text{BF}}$  aus. Somit können die Bosonen in einem reinen Bose-Hubbard-Modell beschrieben werden [34, 36, 245, 249]. Um eine bosonische Mehrfachbesetzung der Gitterplätze aufgrund des externen Einschlusses zu vermeiden, darf die Fallenfrequenz bzw. die Anzahl der Bosonen nicht zu hoch sein (siehe Gleichung 5.87). Andererseits muss die Anzahl der Fermionen bzw. die Fallenfrequenz möglichst groß sein, damit sich der fermionische Bandisolator bereits bei kleinen Gittertiefen und damit kleinen  $U_{\text{BF}}/J_{\text{B,F}}$  ausbildet.

### Nachtrag

Während der Fertigstellung dieser Arbeit gelang es meinen Kollegen eine quantenentartete  $^{87}\text{Rb}$ - $^{40}\text{K}$ -Mischung mit einstellbarer Interspezieswechselwirkung in dem 755 nm-Gitter zu untersuchen [35]. Dabei wird für attraktive Interspezieswechselwirkungen und hohe relative Fermionenzahlen eine Verschiebung des bosonischen Mott-Isolator-Übergangs zu niedrigeren Gittertiefen hin beobachtet. Diese Verschiebung lässt sich durch eine wechselwirkungsbedingte Verformung der Orbitale auf den einzelnen Gitterplätzen beschrei-

## 5 Zustände im Gitter, Präparation und Analyse

---

ben, welche zu einer Renormierung der Parameter des Bose-Hubbard-Modells führt [259]. Somit können Beiträge höher Bloch-Bänder – welche in den meisten theoretischen Betrachtungen vernachlässigt werden – durchaus eine bedeutende Rolle für das Verhalten ultrakalter Quantengase in optischen Gittern spielen. Außerdem wird in dem aktuellen Experiment gezeigt, dass sich die Interspezieswechselwirkung im optischen Gitter mittels Feshbach-Resonanzen ausschalten lässt. Dies ermöglicht es, wie zuvor dargestellt, gezielt bestimmte Besetzungszahlen auf den Gitterplätzen zu präparieren.

Des Weiteren gelang es der Züricher Arbeitsgruppe [26] und wenig später meinen Kollegen [27] fermionische Mott-Isolator in optischen Gittern zu präparieren und diese eingehend zu untersuchen.

## 6 Aufbau und Merkmale des Gitters

Dieses Kapitel befasst sich mit dem Aufbau des dreidimensionalen optischen Gitters und der gekreuzten Dipolfalle. Wie wir gesehen haben, dient die fernverstimmte Dipolfalle nicht nur der Präparation, also dem Kühlen und Speichern der Atome, sondern sie erzeugt auch den externen Einschluss für das blauverstimmte optische Gitter. Das Gitter besteht aus drei zueinander orthogonal verlaufenden und in sich zurück reflektierten Laserstrahlen. Auf den beiden horizontalen Achsen sind zusätzlich die einlaufenden Strahlen der gekreuzten Dipolfalle überlagert. Um reproduzierbare Experimente in optischen Gittern durchführen zu können und nicht-adiabatische Heizeffekte zu vermeiden, sind optische Potentiale mit einer hohen Qualität und Stabilität erforderlich. Zu diesem Zweck werden im Rahmen dieser Arbeit maßgeschneiderte optomechanische Komponenten, wie zum Beispiel präzise Faserauskoppler und schwingungsgedämpfte 3D-Montierungen, entwickelt. Darüber hinaus kommt eine spezielle, im Haus entworfene, Intensitätsregelung zum Einsatz.

Nachstehend wird der Aufbau, die Justage und die Kalibrierung der optischen Potentiale beschrieben. Anschließend wird auf die Vereinigung von Dipolfalle und optischem Gitter und deren besonderen Merkmale eingegangen. Im letzten Abschnitt werden die Charakteristika und Anwendungsmöglichkeiten spezies-abhängiger Gitter diskutiert. Unter anderem werden präzise Ausdrücke für die Photonenstreuraten sowie die wellenlängenabhängigen Gittertiefen und effektiven Massen für Rubidium und Kalium berechnet.

### 6.1 Aufbau des optischen Gitters und der Dipolfalle

Das Licht für das blauverstimmte optische Gitter stammt aus einem kommerziellen Titan-Saphir-Laser<sup>1</sup>, der mit bis zu 18 W frequenzverdoppelten Licht (532 nm) aus einem diodengepumpten Festkörperlaser<sup>2</sup> gepumpt wird. Der Ti:Saphir-Laser ist auf einen internen Referenzresonator stabilisiert und zeichnet sich durch eine schmale Linienbreite ( $\sim 10$  kHz) und einen weiten Durchstimmbereich aus. Mit dem aktuell verwendeten Spiegelsatz des Laserresonators kann die Wellenlänge frei in einem Bereich zwischen 700 nm und 780 nm durchgestimmt werden. Bei einer Wellenlänge von 755 nm liefert der Laser single-mode eine Ausgangsleistung von bis zu 4 W. Das austretende Licht wird durch einen optischen Isolator<sup>3</sup> geführt um Rückreflexe in den Laser zu vermeiden und anschließend auf vier unabhängige Strahlen aufgeteilt. Drei der Strahlen versorgen die Achsen

---

<sup>1</sup>MBR 110, *Coherent*.

<sup>2</sup>Verdi V18, *Coherent*.

<sup>3</sup>FI-760, *Linos*.

## 6 Aufbau und Merkmale des Gitters

---

des optischen Gitters. Der vierte Strahl dient als Reserve und kann zum Beispiel als „blue plug“ für die Quadrupolfalle eingesetzt werden. Jeder Strahl wird unabhängig von einem akusto-optischen Modulator<sup>4</sup> (AOM) in der Frequenz verschoben und anschließend in eine polarisationserhaltende single-mode Faser<sup>5</sup> eingekoppelt, sodass hinter den Fasern noch etwa 60% der gesamten Laserleistung zur Verfügung steht. Die Modulatoren erfüllen dabei zwei Funktionen: Zum einen erzeugen sie Frequenzverschiebungen, die sich für die drei Gitterachsen um einige zehn Megahertz unterscheiden. Wie wir in Abschnitt 4.1.2 gesehen haben, werden hierdurch eventuelle Kreuzinterferenzen zwischen den Gitterachsen zeitlich herausgemittelt. Zum anderen kann über die Radiofrequenzleistung, mit der die Modulatoren betrieben werden, die Intensität der Strahlen geregelt werden. Die Eintrittsfacetten<sup>6</sup> der Fasern sind angewinkelt um Rückreflexe zu vermeiden. Die Fasern leiten das Licht auf den zweiten optischen Tisch, auf dem sich die Vakuumapparatur befindet, und bewirken zugleich eine räumliche Modenfilterung des Lichtes.

Das Licht für die fernverstimmte Dipolfalle wird von einem kommerziellen 18 Watt Ytterbium:YAG-Scheibenlaser<sup>7</sup> erzeugt. Hierbei handelt es sich um einen diodengepumpten Festkörperlaser. Das aktive Medium besteht aus einem Ytterbium dotierten YAG-Kristall<sup>8</sup> in Form einer etwa 240  $\mu\text{m}$  dünnen Scheibe mit einem Durchmesser von 10 mm. Die dünne Scheibe ist direkt auf einen Kühlfinger aufgebracht, was eine hohe thermische Stabilität gewährleistet. Der Laser wird mittels eines Etalons im Resonator auf eine einzelne Frequenz gezwungen und weist eine Linienbreite von kleiner als 5 MHz auf. Die Wellenlänge lässt sich über ein Lyot-Filter verändern und wird in unserem Experiment auf das Maximum des Verstärkungsprofils bei 1030 nm eingestellt. Wird der Laser ohne Etalon, also multi-mode betrieben, so lässt sich die Ausgangsleistung bis auf 30 W erhöhen. Für die beiden Achsen der gekreuzten Dipolfalle wird das Licht in zwei unabhängige Strahlen aufgeteilt und zur Regelung der Intensität jeweils durch AOMs geführt. Auch hier mitteln unterschiedliche Frequenzverschiebungen auf den beiden Achsen eventuelle Kreuzinterferenzen heraus. Der Scheibenlaser befindet sich auf demselben optischen Tisch wie die Vakuumapparatur. Dennoch wird das Licht, zur Erhöhung der Strahlstabilität, durch polarisationserhaltende Fasern geschickt. Hierbei handelt es sich um photonische Kristallfasern<sup>9</sup>, in denen trotz hoher Lichtintensitäten keine nichtlineare Effekte und Materialschäden auftreten. Wird der Laser single-mode betrieben, so stehen hinter den beiden Fasern jeweils etwa 5 W Lichtleistung zur Verfügung.

Das Schema auf Seite 205 zeigt den optischen Aufbau des Gitters und der Dipolfalle für eine der beiden horizontalen Achsen ( $x$  bzw.  $y$ ). Die vertikale Achse ( $z$ ) ist identisch

---

<sup>4</sup>3080-125, *Crystal Technology*.

<sup>5</sup>FS-PM-4611 in FT030-Y tubing, *Thorlabs*.

<sup>6</sup>Konfektionierung HPC-S0.66/K + HPC-S8.66/K *Diamond GmbH*.

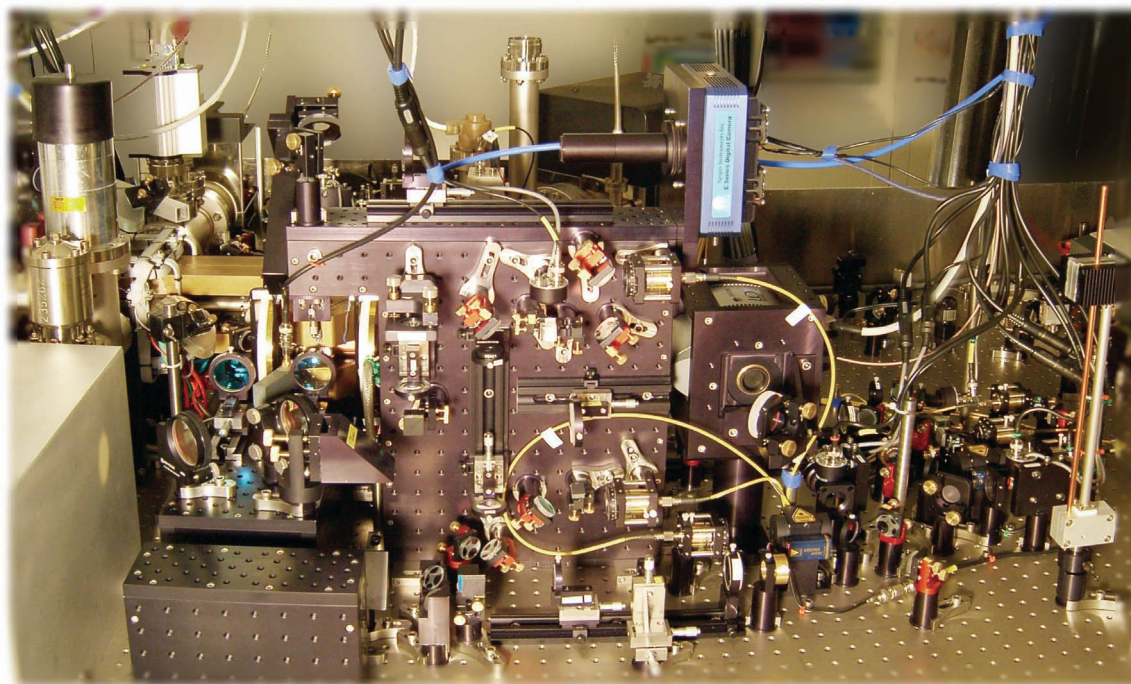
<sup>7</sup>VersaDisk, *ELS Elektronik Laser System GmbH*.

<sup>8</sup>YAG = Yttrium-Aluminium-Granat

<sup>9</sup>LMA-PZ-20 with SMA 905 high power connectors, *Crystal Fibre*.



## 6.1 Aufbau des optischen Gitters und der Dipolfalle



**Abbildung 6.1:** Blick auf den zweiten optischen Tisch: Die Vakuuapparatur ist von Spulenträgern (Messing) und den Aufbauten für das dreidimensionale Gitter und für die gekreuzte Dipolfalle umgeben. Die optischen Komponenten sind auf passiv schwingungsgedämpften Boxen (schwarz eloxiert) montiert, welche als dreidimensionale Breadboards dienen und einen kompakten und stabilen Aufbau ermöglichen.

aufgebaut, nur dass hier der Strahl für die Dipolfalle wegfällt und sich an den Stellen der beiden dichroitischen Spiegel normale Spiegel befinden. Aufgrund der räumlichen Modenfilterung erhält man hinter den Fasern perfekte Gauß-Strahlen ( $TEM_{00}$ -Moden). Für die Gitter- und Abbildungsstrahlen werden die in Abbildung 6.2 dargestellten Faserauskoppler mit beugungsbegrenzten Kollimatoren<sup>10</sup> eingesetzt. Hinter der Faser wird der Gitterstrahl zunächst durch einen optischen Isolator geführt, sodass zurücklaufendes Licht nicht vom Faserende reflektiert werden kann. Hierdurch werden unerwünschte Übergitter vermieden.

Zur Kontrolle und Regelung der Gittertiefe wird ein kleiner Anteil des polarisierten Lichts auf zwei schnelle Photodioden<sup>11</sup> abgezweigt. Eine elektronische Intensitätsregelung vergleicht das gemessene Signal mit dem Sollwert. Im Falle einer Abweichung passt die Regelung die RF-Leistung auf den AOM, der sich vor der Faser befindet, entsprechend an. Die im Hause entwickelte Intensitätsregelung verfügt über eine hohe Bandbreite und erlaubt Anstiegszeiten im Bereich einer Mikrosekunde. Der Sollwert wird von einem

<sup>10</sup>06GLC001, *Melles Griot*.

<sup>11</sup>PDA55-EC, *Thorlabs*

## 6 Aufbau und Merkmale des Gitters

---

Funktionsgenerator<sup>12</sup> vorgegeben, der sich über GPIB vom Computer<sup>13</sup> aus programmieren lässt. Eine ähnliche elektronische Regelung wird auch für die Dipolfalle benutzt.

Das Gitterlicht läuft anschließend durch ein Teleskop, das den Strahldurchmesser vergrößert. Die im Aufbau eingesetzten Teleskope dienen außerdem dazu, die unterschiedlich langen Wege zwischen den einzelnen Strahlengängen – und damit die unterschiedlichen Divergenzen oder Konvergenzen der Strahlen – auszugleichen.

Der Abbildungsstrahlengang wurde bereits in Abschnitt 3.6.3 beschrieben. Das zueinander orthogonal polarisierte Gitter- (755 nm) und Abbildungslicht (780 bzw. 767 nm) wird auf einem polarisierenden Strahlteilerwürfel miteinander überlagert. Auf einem dichroitischen Spiegel<sup>14</sup> werden die beiden Strahlen dann mit dem Licht der fernverstimmten Dipolfalle (1030 nm) vereinigt. Da sowohl für das Gitter als auch für die Abbildung eine möglichst hohe Strahlqualität erforderlich ist, werden die zugehörigen Strahlen so geführt, dass sie von einem Dichroiten reflektiert werden, wohingegen der weniger kritische Dipolstrahl den Dichroiten transmittiert. Schließlich wird das Licht für die optischen Potentiale durch einen finalen Achromaten auf die Atome fokussiert. Das Teleskop des Abbildungsstrahlengangs ist so eingestellt, dass das Abbildungslicht einen Fokus vor dem finalen Achromaten aufweist und durch Letzteren auf die Atome *kollimiert* wird. Im Fokus weisen die drei Gitterstrahlen eine Strahltaile ( $1/e^2$ -Radius) von  $150\ \mu\text{m}$  auf. Im Strahlengang der Dipolfalle ist zusätzlich ein Teleskop aus Zylinderlinsen eingebaut, um ein elliptisches Strahlprofil und somit einen starken vertikalen Einschluss der Atome zu erzielen (siehe Abschnitt 4.1.3). Die beiden Strahlen der gekreuzten Dipolfalle weisen im Fokus eine horizontale Taille von  $150\ \mu\text{m}$  und eine vertikale Taille von  $40\ \mu\text{m}$  auf. Durch einen weiteren Achromaten hinter der Glaszelle werden die Strahlen bzw. der Schattenwurf im Abbildungsstrahl wieder kollimiert. Das Licht der Dipolfalle transmittiert einen zweiten Dichroiten und endet in einem Strahlblocker. Das Gitter- und Abbildungslicht wird hingegen vom Dichroiten umgelenkt und anschließend durch einen polarisierenden Strahlteilerwürfel voneinander getrennt. Schließlich wird das Gitterlicht von einem Retrospiegel in sich zurück reflektiert. Der Retrospiegel befindet sich im Fokus einer Linse, wodurch die Stabilität der erzeugten Stehwelle erhöht wird. Der kollimierte Schattenwurf im Abbildungsstrahl wird auf eine CCD-Kamera abgebildet. Um zu vermeiden, dass die Kamera durch das intensive Streulicht der Dipolfalle belichtet wird, befindet sich ein Kantenfilter<sup>15</sup> vor deren Apertur.

---

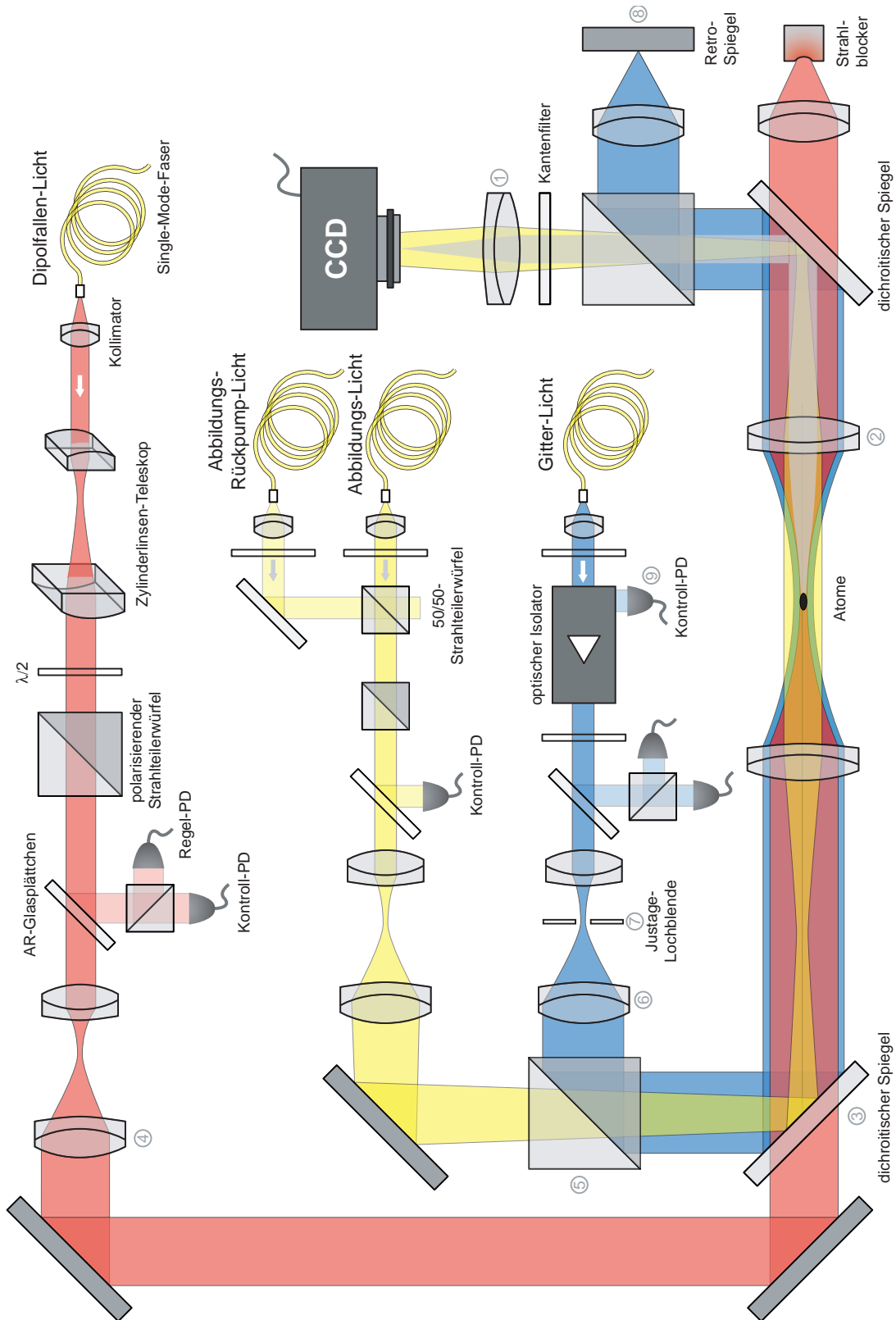
<sup>12</sup>Arbiträrer Funktionsgenerator, 33250A, *Agilent*.

<sup>13</sup>Computerkarte PCI-GPIB, National Instruments.

<sup>14</sup>Dichroitische 2-Zoll-Spiegel, HR 740-840 nm, AR 1025-1035 nm, 45°, u-pol, *Laseroptik*.

<sup>15</sup>Kurzpassfilter mit Cut-off-Wellenlänge bei 900 nm, LC-3RD/900SP-25, *Laser Components GmbH*.

## 6.1 Aufbau des optischen Gitters und der Dipolfalle



## 6 Aufbau und Merkmale des Gitters

---

### 6.1.1 Justage von Dipolfalle und Gitter

Um wohldefinierte Potentiale zu erzeugen, muss die Justage des optischen Gitters und der Dipolfalle mit großer Sorgfalt durchgeführt werden. Ein guter räumlicher Überlapp der Gauß-Strahlen untereinander und mit den Atomwolken ist Voraussetzung, damit der Grundzustand des Gitters bevölkert werden kann. Ausrichtungsfehler rufen unerwünschte Gradienten hervor, die beim Transfer in die optischen Potentiale zu Anregungen führen.

Der optische Aufbau wird zunächst in einem CAD-Programm entworfen und mittels gaußscher Strahlenoptik berechnet. Dann wird die Optik positioniert und mit Hilfe einer Strahlanalyse-Kamera<sup>16</sup> werden die Strahltaillen an verschiedenen Stellen vermessen. Die Messdaten und Rechnungen werden verglichen und iterativ aneinander angepasst. An diesem Punkt ist die Grobjustage abgeschlossen.

Für die Feinjustage müssen zunächst die Abbildungen entlang der drei Gitterachsen auf die Atome scharf gestellt werden. Dazu wird in einem ersten Schritt der Achromat ① vor der Kamera (siehe Seite 205) so justiert, dass die Kamera auf unendlich scharf gestellt ist. Als Nächstes ist der Achromat ② hinter der Glaszelle so zu positionieren, dass die Kamera ein kleines in der Magnetfalle gespeichertes BEC scharf abbildet<sup>17</sup>. Hierdurch befinden sich die Atome genau in der Brennebene der Linse ②. Dann wird die Pixel-Position der auf den CCD-Chip abgebildeten Atome registriert. Über den Winkel des vor der Glaszelle angebrachten dichroitischen Spiegels ③ wird der Fokus des Dipolstrahls auf dieselbe Pixelposition ausgerichtet. Da die Kamera auf die Atomposition scharf gestellt ist, können mit ihrer Hilfe auch die Strahltaillen am Ort der Atome bestimmt werden. Die Strahltaille des Dipolstrahls kann durch eine Verschiebung der Teleskoplinse ④ angepasst werden. Bei der Justage der Dipolfalle nutzt man die Tatsache, dass ein kleiner Teil des Dipollichtes von dem Dichroiten hinter der Glaszelle reflektiert statt transmittiert wird und somit von der Kamera aufgenommen werden kann<sup>18</sup>. Die Justage des Gitterstrahls wird in analoger Weise durchgeführt. Dabei wird die Fokusposition über den Winkel des Strahlteilerwürfels ⑤ (im Experiment allerdings über einen weiteren unabhängigen Spiegel) und die Strahltaille über die Teleskoplinse ⑥ eingestellt. Der Strahlengang der Dipolfalle bleibt davon unberührt. Nachdem der hinlaufende Gitterstrahl eingestellt ist, wird für die Justage des rücklaufenden Strahls eine Lochblende ⑦ in das Teleskop des Gitters eingesetzt. Die Lochblende wird mit Hilfe eines XYZ-Justiertisches so positioniert, dass deren Öffnung scharf auf der Kamera abgebildet werden kann und mit der Pixel-Position der Atome übereinstimmt. Schließlich wird der Retro-Spiegel ⑧ bzw. der davor platzierte Achromat so justiert, dass möglichst viel Licht durch die Lochblende hindurch zurück reflektiert wird. Die rückreflektierte Lichtintensität lässt sich über die Kontroll-Photodiode ⑨ am

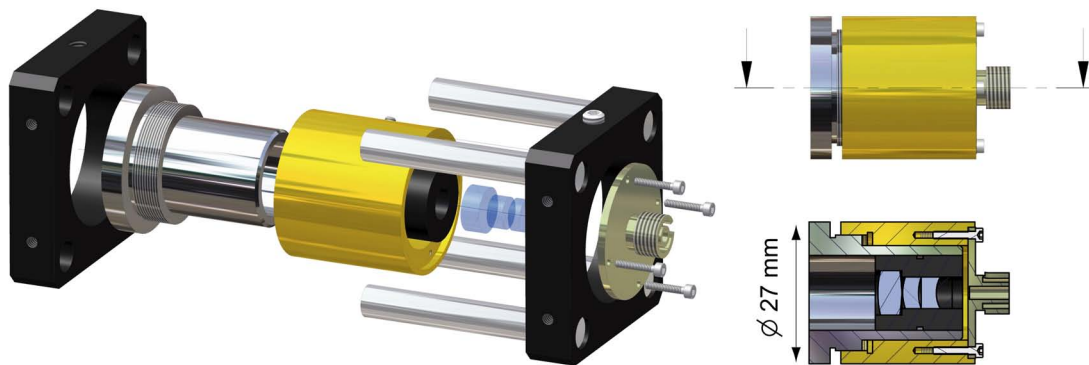
---

<sup>16</sup>WinCamD, *DataRay Inc.*

<sup>17</sup>Die BEC-Position wird quasi in-situ nach 0, 1 ms Expansionszeit aufgenommen. Alternativ lässt sich die Position der Atome für variable Expansionszeiten aufnehmen und nach  $t_{\text{TOF}} = 0$  extrapolieren.

<sup>18</sup>Bei der Bestimmung der Atomposition und der Dipolstrahlposition wird der Kantenfilter vor der Kamera entfernt.

## 6.1 Aufbau des optischen Gitters und der Dipolfalle



**Abbildung 6.2:** Neu entwickelter Präzisions-Faserauskoppler mit FC-PC-Stecker: Um den austretenden Strahl einer Faser zu kollimieren, muss die Faserendfläche exakt im Fokus der Optik positioniert sein. Die Kollimationsoptik befindet sich in einem Stahlkolben, der über ein Feingewinde innerhalb einer Gleitführung aus Messing verschoben werden kann. Die hohe Passgenauigkeit und die geringe Haftung zwischen den unterschiedlichen Materialien erlauben eine einfache Justage bei minimaler Hysterese. Der konzentrische Aufbau (Toleranz  $\pm 5 \mu\text{m}$ ) reduziert das System auf einen Freiheitsgrad und beschränkt die maximale Winkelabweichung des Strahls – auch während der Justage – auf unter  $0,2^\circ$ . Bei den mechanischen Komponenten handelt es sich um externe Sonderanfertigungen. Das Linsensystem (*Melles Griot*) ist für einen Wellenlängenbereich von 670 bis 1550 nm ausgelegt und erlaubt eine Kollimation bei minimaler Wellenfrontdeformation ( $< \lambda/4$ ).

Seitenausgang des optischen Isolators nachweisen. Hiernach wird die Lochblende wieder entfernt und die Feinjustage ist im Prinzip abgeschlossen.

### Stabilität der Potentiale

Damit sich statische und wohldefinierte Potentiale realisieren lassen, müssen einige Punkte beachtet werden. Man benötigt einen Gitter-Laser mit einer ausreichenden Frequenzstabilität, sodass die Interferenzen der Stehwelle räumlich und zeitlich stabil sind. Um Anregungen in höhere Bänder zu vermeiden, dürfen insbesondere keine Frequenzschwankungen im Bereich der Fallenfrequenzen auftreten. Langsame Frequenzdrifts spielen hingegen keine Rolle, solange die Atome adiabatisch folgen können. Beim verwendeten Ti:Saphir-Laser wird die Kurzzeitstabilität und schmale Linienbreite durch einen internen temperaturstabilisierten Referenzresonator erzielt.

Theoretisch ist bei der Dipolfalle die Frequenzstabilität irrelevant, da der einfach durchlaufende Strahl keine Interferenzen erzeugt. Dennoch ist hier große Vorsicht geboten, denn bereits schwache Rückreflexe an optischen Elementen können Stehwellen hervorrufen, deren Schwankungen die Atome aufheizen. Aus diesem Grund wäre für die Dipolfalle im Prinzip eine vollständig inkohärente monochromatische Lichtquelle am besten geeignet. In unserem Aufbau betreiben wir den Scheibenlaser im Single-Mode-Betrieb, da sich eventu-

## 6 Aufbau und Merkmale des Gitters

---

ell verbleibende schwache Stehwellen dann statisch verhalten. Allgemein lassen sich unerwünschte Rückreflexe nachweisen, indem man ein Bose-Einstein-Kondensat dem einlaufenden Laserstrahl aussetzt<sup>19</sup>. Im Fall von Rückreflexen treten die für Stehwellen charakteristischen Bragg-Beugungen auf. Hauptursache für die unerwünschten Stehwellen ist die nicht antireflexbeschichtete Innenseite der Glaszelle. Rückreflexe, die auf die Atomwolke fallen, lassen sich weitgehend vermeiden, indem man die Strahlen so justiert, dass sie nicht senkrecht auf die Glaszellenwand treffen. Leider werden die Atome beim Umladen in die QUIC-Falle nah an die Ioffe-Spule herangezogen, weshalb sich die Atome in dieser Richtung ( $x$ ) dicht vor der Glaszellenwand befinden. Entlang dieser Achse ist ein besonders schräger Strahlverlauf notwendig, um dem Rückreflex auszuweichen. Durch den Einsatz einer Quadrupolfalle mit „blue plug“ ließe sich dieses Problem erheblich verringern, da sich die Atome dann genau im Zentrum der Glaszelle aufhalten würden (siehe Abschnitt 3.8).

Auch Intensitätsfluktuationen im Frequenzbereich der Bandlücke führen zu Anregungen in höhere Bänder und somit zu einem Aufheizen der Atomwolken. Um dies zu vermeiden, sollte der Laser über eine möglichst hohe intrinsische Intensitätsstabilität verfügen. Im unteren Frequenzbereich ( $< 100$  kHz) lassen sich Schwankungen auch aktiv über die elektronische Intensitätsregelung ausgleichen. Bei der Regelung ist darauf zu achten, dass keine Stehwellen und Interferenzen im Bereich der Photodioden auftreten, da die gemessenen Intensitäten ansonsten nicht proportional zu den Intensitäten am Ort der Atome sind.

Auch mechanische Schwingungen des Aufbaus übertragen sich auf die optischen Potentiale und sollten vermieden werden. Der Retrospiegel gibt die Randbedingungen für die optischen Stehwellen vor und legt somit die räumliche Lage der Gitterplätze fest. Um Schwingungen des Gitterpotentials zu vermeiden, sollte der Strahlengang zwischen Atomen und Retro-Spiegel möglichst kurz und stabil aufgebaut sein. In unserem Aufbau werden speziell entwickelte Boxen als dreidimensionale Breadboards eingesetzt (siehe Abbildung 6.1). Die mit zahlreichen Gewindengängen bestückten Boxen erlauben es, die Optik auch entlang der vertikalen Ebenen aufzubauen und somit kompakte Strahlengänge zu realisieren. Zur passiven Schwingungsdämpfung sind die Boxen in ihrem Inneren mit einem Gemisch aus Sand und Schrotkugeln (Blei) gefüllt. Zum Vermeiden von Schwingungen werden etwa 8 s vor dem Transfer der Atome in das optische Gitter die Lüfter der Kameras abgeschaltet. Für eine höhere mechanische Stabilität wird außerdem ein System aus maßangefertigten, nicht höhenverstellbaren Optikhaltern eingesetzt.

Wie wir gesehen haben, werden bei der Dipolfalle und beim optischen Gitter Kreuzinterferenzen zwischen den verschiedenen Achsen unter anderem durch die Wahl zueinander senkrecht stehender linearer Polarisierungen unterdrückt. Entsprechend müssen bei der Planung des dreidimensionalen optischen Aufbaus die Drehungen der Polarisierungen berücksichtigt werden, welche durch die komplexe Strahlführung entlang mehrerer orthogonaler Raumrichtungen zustande kommen.

---

<sup>19</sup>Handelt es sich um einen Gitterstrahl, so muss zuvor natürlich der Retrospiegel blockiert werden. Für den rücklaufenden Gitterstrahl funktioniert diese Methode leider nicht.

## 6.1 Aufbau des optischen Gitters und der Dipolfalle

---

### 6.1.2 Kalibrierung von Dipolfalle und Gitter

Im Folgenden werden Methoden beschrieben, mit denen sich die Fallenfrequenzen und Gittertiefen bestimmen und somit die Photodioden der entsprechenden Intensitätsregelungen kalibrieren lassen.

#### Fallenfrequenzen der Dipolfalle

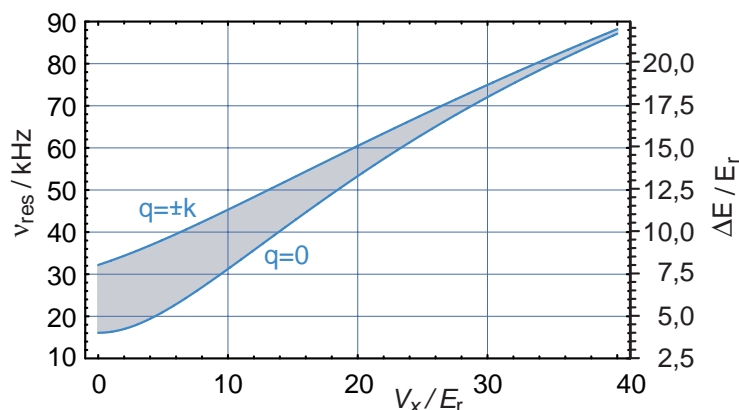
Um die Fallenfrequenzen in der gekreuzten Dipolfalle zu bestimmen, werden ultrakalte Atome in einer Dipolfalle mit gewünschter Tiefe präpariert und dann in kollektive Schwingungen versetzt. Um die Schwingungen anzuregen, werden die Atome über eine Änderung ihres gravitativen Versatzes aus ihrer Gleichgewichtslage ausgelenkt. Letzteres geschieht durch ein abruptes Erhöhen der Fallentiefe für einige 10 ms (siehe Abbildung 4.3b). Anschließend wird die ursprüngliche Fallentiefe wiederhergestellt und nach verschiedenen langen Oszillationszeiten werden die Atome aus der Falle entlassen. Der Impuls der oszillierenden Schwerpunktsbewegung zum Zeitpunkt des Abschaltens kann nach einigen Millisekunden freier Expansion direkt im Ortsraum abgebildet werden. Da ein hinreichend starker vertikaler Versatz aufgrund der Anharmonizität des Potentials auch horizontale Schwingungen anregt, lässt sich diese Methode für die Bestimmung der Fallenfrequenzen entlang aller drei Raumachsen anwenden.

#### Gittertiefen

Eine Möglichkeit die Gittertiefe zu bestimmen, basiert auf einer periodischen Modulation der Laserintensität. Hierbei muss die Amplitude der Intensitätsmodulation klein gegenüber der Gesamtintensität sein, um als kleine Störung betrachtet werden zu können. Stimmt die Modulationsfrequenz mit der Energielücke zwischen dem ersten und dem dritten Band überein,  $h\nu_{\text{mod}} = \epsilon_3(q) - \epsilon_1(q)$ , so können die Atome angeregt werden und man beobachtet ein Aufheizen der Atomwolken. Bei diesem Prozess handelt es sich um eine parametrische Anregung [260]. Die Symmetrie der Anregung bedingt, dass die Übergänge nicht in das zweite, sondern direkt in das dritte Band stattfinden. Alternativ lässt sich der Prozess auch als Bragg-Spektroskopie [261] auffassen, denn durch die Intensitätsmodulation werden der Gitterfrequenz  $\nu_{\text{lat}}$  zwei Seitenbänder bei  $\nu_{\text{lat}} \pm \nu_{\text{mod}}$  aufgeprägt. Um die Gittertiefe zu bestimmen, braucht das gemessene Anregungsspektrum nur mit der Bandstruktur verglichen zu werden.

In Abbildung 6.3 ist die Resonanzfrequenz  $\nu_{\text{res}} = (\epsilon_3(q) - \epsilon_1(q))/h$  als Funktion der Gittertiefe aufgetragen. Aufgrund der Dispersion der Bloch-Bänder hängt die Energielücke vom Kristallimpuls  $\hbar q$  der Atome ab und das Anregungsspektrum ist entsprechend verbreitert. Eine präzise Kalibrierung erfordert daher, dass sich die Atome nur bei  $q = 0$  aufhalten, oder aber eine große Gittertiefe, bei der die Bänder hinreichend flach sind. So beträgt zum Beispiel bei einer Tiefe von  $40 E_r$  der Unterschied zwischen den Übergangsfrequenzen bei  $q = 0$  und  $q = \pm k$  nur noch 1,3%. Aufgrund des gaußschen Strahlprofils variiert die Gittertiefe über die Ausdehnung der Atomwolke hinweg. Bei einer ther-

## 6 Aufbau und Merkmale des Gitters



**Abbildung 6.3:** Bandlücke  $\Delta E(q) = \epsilon_3(q) - \epsilon_1(q)$  zwischen dem ersten und dem dritten Band als Funktion der Gittertiefe. Die rechte Skala ist allgemeingültig und gibt  $\Delta E$  in Einheiten der Rückstoßenergie an. Die linke Skala gibt die entsprechenden Anregungsfrequenz  $\nu_{\text{res}} = \Delta E/h$  für  $^{87}\text{Rb}$  in einem 755 nm-Gitter an ( $E_r/h = 4,02$  kHz). Die Breite der Anregung wird durch die unterschiedlichen Bandlücken  $\Delta E(q)$  im Zentrum ( $q = 0$ ) und am Rand ( $q = \pm k$ ) der ersten Brillouin-Zone bestimmt.

mischen Atomwolke mit großer Ausdehnung kann die dadurch verursachte Verbreiterung der Übergangsfrequenz leicht 10 % ihres Absolutwertes betragen. Damit die Ausdehnung der Atomwolke trotz Anregung klein bleibt, sollte als Ausgangszustand ein kleines Bose-Einstein-Kondensat gewählt werden, welches in ein möglichst tiefes Gitter transferiert wird.

In Abschnitt 5.1.2 haben wir gesehen, dass die Beugung von Atomen an einer optischen Stehwelle als stimulierter Raman-Prozess (Bragg-Beugung) und für kurze Wechselwirkungsauern (Raman-Nath-Regime) als Beugung an einem Phasengitter aufgefasst werden kann. Die Kenntnis der exakten Eigenzustände des periodischen Potentials erlaubt es alternativ, die Beugung in einem gepulsten Gitter durch eine Zustandsprojektion zu beschreiben [262]. Betrachten wir als Ausgangszustand ein Bose-Einstein-Kondensat, das durch eine ebene Welle mit dem Impuls  $\hbar q_0$  wiedergegeben wird. Beim abrupten Einschalten des optischen Gitters wird der Zustand des Kondensats  $|\psi(t=0)\rangle = |q_0\rangle$  auf die Bloch-Zustände  $|n, q_0\rangle$  mit den Eigenenergien  $\epsilon_n(q_0)$  projiziert<sup>20</sup>:

$$|\psi(t=0)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |n, q_0\rangle \langle n, q_0 | q_0\rangle. \quad (6.1)$$

Laut Gleichung 5.20 lassen sich die Bloch-Zustände als Superposition von ebenen Wellen mit den Impulsen  $\hbar(q + 2k\nu)$  darstellen:  $|n, q\rangle = \sum_{\nu} c_{\nu}^{n,q} |q + 2k\nu\rangle$ . Somit gilt  $\langle n, q_0 | q_0\rangle =$

<sup>20</sup>Wir nehmen an, dass im Ausgangszustand der Impuls  $\hbar q_0$  des Kondensats innerhalb der ersten Brillouin-Zone liegt,  $|\hbar q_0| < \hbar k$ . Hierbei bezeichnet  $\hbar k$  den Photonenimpuls des Gitters.



## 6.1 Aufbau des optischen Gitters und der Dipolfalle

$(c_{\nu=0}^{n,q_0})^*$ . Für die zeitliche Entwicklung des Zustandes im eingeschalteten optischen Gitter folgt:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{\nu=0}^{n,q_0})^* \exp(-i\epsilon_n(q_0)t/\hbar) |n, q_0\rangle. \quad (6.2)$$

Schließlich wird das Gitter zum Zeitpunkt  $\tau$  wieder abrupt abgeschaltet. Hierdurch wird  $|\psi(\tau)\rangle$  auf die freien Impulszustände  $\{|q_0 + 2k\tilde{\nu}\}$ , welche im Experiment die Messbasis bilden, zurück projiziert ( $\tilde{\nu} \in \mathbb{Z}$ ). Die Wahrscheinlichkeitsamplituden für die Besetzung der einzelnen Impulszustände  $|q_0 + 2k\tilde{\nu}\rangle$  lauten dann:

$$\langle q_0 + 2k\tilde{\nu} | \psi(\tau) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{\nu=0}^{n,q_0})^* c_{\tilde{\nu}}^{n,q_0} \exp(-i\epsilon_n(q_0)\tau/\hbar). \quad (6.3)$$

Die Interferenz der verschiedenen Exponentialterme im obigen Ausdruck führt dazu, dass die Bevölkerung der Impulskomponenten  $|q_0 + 2k\tilde{\nu}\rangle$  mit der Pulsdauer  $\tau$  oszilliert. Verfügt das Kondensat zu Anfang über einen Impuls  $\hbar q_0 = 0$ , so ist dessen Ausgangszustand symmetrisch. Folglich können im Gitter auch nur symmetrische Zustände  $|n, q = 0\rangle$  bevölkert werden. Letztere Zustände liegen in Bändern mit einem ungradzahligen Index  $n$ .

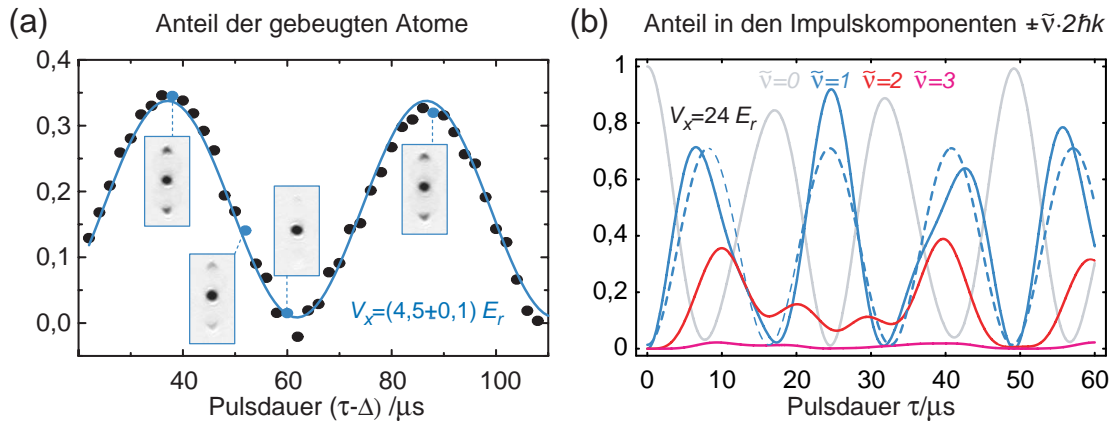
Um in unserem Experiment die Oszillationen zwischen den Impulskomponenten zu beobachten, präparieren wir Bose-Einstein-Kondensate ( $\hbar q_0 = 0$ ) in der Dipolfalle und pulsen diese für variable Zeiten  $\tau$  entlang einer der drei Gitterachsen mit einer Stehwelle konstanter Intensität an. Das Ein- und Ausschalten des optischen Gitters geschieht in jeweils weniger als einer Mikrosekunde. Die Dipolfalle wird simultan mit dem Gitter abgeschaltet. Nach einigen Millisekunden freier Expansion lässt sich die Impulsverteilung der Atome als räumliche Verteilung abbilden.

Abbildung 6.4a zeigt die gemessene Entwicklung der Populationen für eine schwache optische Stehwelle variabler Einstrahldauer. Die relativ schwache Atom-Licht-Wechselwirkung bewirkt, dass im Wesentlichen nur das erste und das dritte Band bevölkert werden. Folglich verhält sich das System wie ein effektives Zwei-Niveau-System und man beobachtet eine nahezu perfekte sinusförmige Oszillation zwischen der nullten und der ersten Beugungsordnung. Die Oszillationsfrequenz  $(\epsilon_3(0) - \epsilon_1(0))/\hbar$  ist direkt durch die Energiedifferenz zwischen den beiden beteiligten Bändern gegeben. Eine einfache Kurvenanpassung an die Messdaten liefert eine Gittertiefe von  $(4,5 \pm 0,1) E_r$ .

Zur Gegenüberstellung zeigt Abbildung 6.4b die gemäß Gleichung 6.3 berechneten Populationen der Beugungsordnungen für ein  $24 E_r$  tiefes 1D-Gitter. Aufgrund der stärkeren Atom-Licht-Wechselwirkung werden nun gleich mehrere Bänder signifikant miteinander gekoppelt, wodurch das Zeitverhalten von der einfachen sinusförmigen Oszillation abweicht.

Eine präzise Bestimmung der Gittertiefe lässt sich also am einfachsten durchführen, indem man die Intensität der Stehwelle soweit herabsetzt, dass im wesentlichen nur Beugung erster Ordnung ( $\tilde{\nu} = \pm 1$ ) auftritt. Darüber hinaus sollte das Kondensat möglichst klein sein, um Sättigungseffekte bei der Abbildung zu vermeiden. Bei kleinere Kondensat-

## 6 Aufbau und Merkmale des Gitters



**Abbildung 6.4:** Kohärente Oszillationen der Impulskomponenten von Bose-Einstein-Kondensaten ( $q_0 = 0$ ), welche für variable Zeiten  $\tau$  von einem eindimensionalen Gitter der Tiefe  $V_x$  angepulst werden: **(a)** Die Messdaten geben den Anteil der in die beiden Ordnungen  $\nu = \pm 1$  gebeugten Atome für verschiedene Pulsdauern an. Aus der angepassten Sinuskurve ergibt sich eine Gittertiefe von  $V_x = (4,5 \pm 0,1) E_r$ . Zu den blau markierten Messpunkten sind die aufgenommenen Beugungsmuster dargestellt. **(b)** Berechnete Populationen der Beugungsordnungen  $\nu = 0, \dots, \pm 3$  für ein  $24 E_r$  tiefes Gitter. Zum Vergleich zeigt der gestrichelte Verlauf die Dynamik, wenn nur die ersten Beugungsordnungen  $\nu = \pm 1$ , also das erste und dritte Band, berücksichtigt werden.

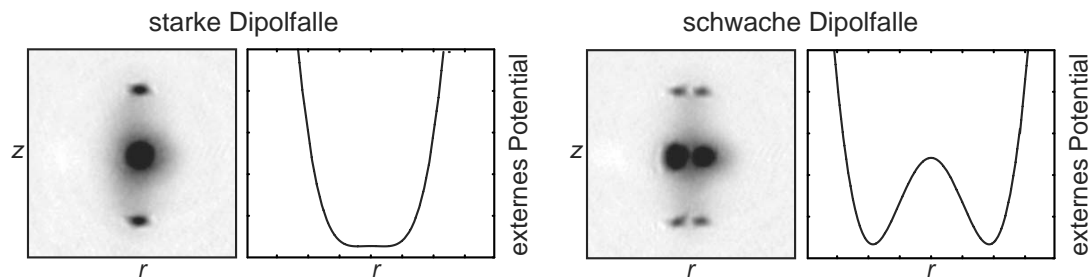
dichten ist zudem die Wahrscheinlichkeit für  $s$ -Wellenstreuung zwischen den unterschiedlichen Impulskomponenten kleiner. Schwächer ausgeprägte Streukugeln führen wiederum zu einem höheren Kontrast der beobachteten Oszillationen. Die hier beschriebene Methode zur Bestimmung der Gittertiefe zeichnet sich durch eine einfache Auswertung (Kurvenanpassung) aus und erfordert – im Gegensatz zur Methode im Raman-Nath-Regime – keine Kenntnis über die absolute Pulsdauer. Die Bestimmung Letzterer wird durch die endlichen Ein- und Abschaltzeiten des Gitters erschwert.

### Anpassung der Dipolfalle an die Gittertiefe

Wie wir in Abschnitt 4.2.3 gesehen haben, ruft das blauverstimmte optische Gitter ein repulsives externes Potential hervor. Damit dennoch ein externer Einschluss aufrecht erhalten bleibt, muss die Dipolfalle im richtigen Verhältnis mit der Gittertiefe hochgefahren werden (siehe Abbildung 3.20b). Bei einer zu schwachen Dipolfalle fallen die Atome in der Regel unter dem Einfluss der Schwerkraft aus dem Gitter heraus. Dies muss aber nicht zwangsläufig der Fall sein:

Sind die Strahltaillen eines Gitterstrahls kleiner als die entsprechenden Taillen der Dipolstrahlen, so kann sich in der flachen Falle senkrecht zum Gitterstrahl ein Doppelmuldenpotential ausbilden. Abbildung 6.5 zeigt die Absorptionaufnahmen von frei expandie-

## 6.2 Merkmale der Dipolfalle und des Gitters



**Abbildung 6.5:** Beugungsmuster nach dem Entlassen eines Kondensats aus einem blauverstimmtten 1D-Gitter mit überlagerter Dipolfalle unterschiedlicher Tiefe. Das resultierende Gesamtpotential für die beiden Dipolfallentiefen ist schematisch dargestellt. Das Gitter verläuft entlang der  $z$ -Achse und weist eine Strahltaile von  $w_r = 95 \mu\text{m}$  auf. Die Strahlen der gekreuzten Dipolfalle verlaufen in der radialen Ebene ( $r$ ) und weisen radiale Strahltaillen von  $w_r = 190 \mu\text{m}$  auf. Bei zu schwacher Dipolfalle kann der repulsive Anteil des Gitters nicht kompensiert werden, es bildet sich ein radiales Doppelmuldenpotential aus und entsprechend beobachtet man eine räumliche Aufspaltung des Beugungsmusters.

renden Bose-Einstein-Kondensaten, welche abrupt aus einem blauverstimmtten 1D-Gitter entlassen werden. Dabei ist der Gitterstrahl nur halb so breit wie die Dipolstrahlen. Bei ausreichender Falltiefe beobachtet man nach der freien Expansion das typische Beugungsmuster (linke Aufnahme). Wird die Leistung der Dipolfalle unter einen kritischen Wert verringert, so beobachtet man hingegen eine Verdoppelung des Beugungsmusters (rechte Aufnahme). Die transversale Aufspaltung ist bereits innerhalb der Falle vorhanden und auf die Ausbildung eines externen Doppelmuldenpotentials zurückzuführen. Allgemein muss, um ein Doppelmuldenpotential zu generieren, der blauverstimmtte Strahl bedeutend schmäler als die Dipolstrahlen sein. Nur dann lässt sich durch Herunterrampen der Dipolfalle eine Doppelmulde erzeugen, noch bevor die Atome aus dem flachen Potential herausfallen.

In einem sehr tiefen blauverstimmtten Gitter lassen sich die Atome auch ganz ohne Dipolfalle speichern. Hierbei macht man sich die extrem langen Tunnelzeiten zunutze, durch die die Atome effektiv auf ihren Gitterplätzen gefangen werden.

### 6.2 Merkmale der Dipolfalle und des Gitters

In diesem Abschnitt werden die besonderen Merkmale der gekreuzten Dipolfalle und des blauverstimmtten Gitters zusammengefasst. Dabei zeigt sich, dass man durch die Kombination der beiden unabhängigen Potentiale ein erhebliches Maß an zusätzlicher experimenteller Kontrolle gewinnt. Neben den bereits ausgenutzten Eigenschaften werden auch mögliche zukünftige Anwendungen besprochen.

## 6 Aufbau und Merkmale des Gitters

---

### 6.2.1 Gekreuzte Dipolfalle

- In der fernverstimmten Dipolfalle lassen sich die Atome in beliebigen Hyperfeinzuständen präparieren und ohne Magnetfelder fangen. Somit ist die Falle prädestiniert, um in ihr Experimente mit magnetischen Feshbach-Resonanzen durchzuführen.
- Gemäß Abschnitt 4.1.3 erzeugt das elliptische Strahlprofil der gekreuzten Dipolfalle einen starken vertikalen Einschluss, wodurch der differentielle Versatz zwischen den unterschiedlich schweren Rubidium- und Kaliumatomen minimiert wird. Ein guter räumlicher Überlapp zwischen den Spezies ist sowohl für ein effizientes sympathetisches Kühlen als auch für die anschließenden Experimente mit den Mischungen eine notwendige Voraussetzung.

### 6.2.2 Kombination von Dipolfalle und Gitter

Die Kombination der gekreuzten Dipolfalle mit dem optischen Gitter erlaubt es, die Gitterparameter und den externen Einschluss unabhängig voneinander einzustellen.

- Durch die Wahl großer Strahltaillen für die Gitterstrahlen und kleiner Taillen für die Dipolstrahlen, lässt sich über die Ausdehnung der Atomwolke hinweg eine recht gleichförmige Gittertiefe realisieren.
- Aufgrund des elliptischen Strahlprofils ruft die Dipolfalle entlang der horizontalen Ebene einen schwachen externen Einschluss hervor. Folglich ist in dieser Richtung das Gitterpotential vergleichsweise homogen und die räumliche Krümmung der Bandstruktur entsprechend gering. Wie wir in Abschnitt 5.5.3 und 5.5.5 gesehen haben, erlaubt es ein schwacher externer Einschluss sowohl beim bosonischen als auch beim fermionischen Mott-Isolator, eine große Anzahl von einfach besetzten Gitterplätzen zu präparieren. Um eine ausschließliche Einfachbesetzung zu erzielen, muss die Änderung des externen Potentials über die Ausdehnung der Atomwolke hinweg kleiner als die Wechselwirkungsenergie  $U$  sein (siehe Gleichung 5.87). Die Einfachbesetzung der Gitterplätze ist zum Beispiel eine wichtige Voraussetzung, um einen fermionischen Mott-Isolator mit antiferromagnetischer Ordnung beobachten zu können.
- Eine geringe räumliche Krümmung der Bänder ist auch von Vorteil, wenn es darum geht, eine große Anzahl von Fermionen ausschließlich in das unterste Band eines flachen Gitters zu transferieren. Gemäß Abschnitt 5.3.1 ruft die Bevölkering höherer Bänder leicht nicht-adiabatische Heizeffekte beim Hochfahren des optischen Gitters hervor und sollte daher vermieden werden.
- Dank der Dipolfalle ist es möglich, den externen Einschluss vollkommen unabhängig von der Gittertiefe zu verändern. Somit lassen sich die Atomwolken bei einer konstanten Gittertiefe komprimieren oder dekomprimieren. In Abschnitt 7.2.5 wird

## 6.2 Merkmale der Dipolfalle und des Gitters

---

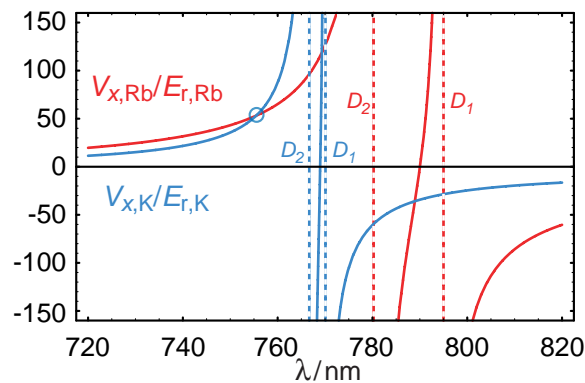
beschrieben, wie auf diese Weise ein atomares Fermigas erstmals allein durch Kompression vom metallischen Zustand in einen Bandisolator überführt wird. Messungen zur Kompressibilität stellen womöglich auch eine elegante Methode dar, den Mott-Isolator-Zustand oder Bose-Glas-Phasen nachzuweisen. Wegen der fehlenden makroskopischen Kohärenzen ist eine solche Methode insbesondere für den Nachweis des fermionischen Mott-Isolators interessant. Eine weitere mögliche Anwendung ist die Untersuchung des bosonischen Mott-Isolator-Übergangs in Abhängigkeit des externen Einschlusses. Durch die Kompression eines bosonischen Mott-Isolators in der Nähe der Phasengrenzen  $(J/U)_c^{\max}$  lässt sich die mittlere Besetzungszahl der Gitterplätze erhöhen und somit gemäß Abbildung 5.24a ein Übergang in die superfluide Phase erzwingen.

- In Abschnitt 4.2.3 wurde gezeigt, dass es in einem blauverstimmtten Gitter, mittels einer geeigneten Anpassung der Dipolfalle, möglich ist, die Gittertiefe zu variieren, ohne dass sich das externe Potential verändert. Auf diese Weise kann zum Beispiel der Mott-Isolator-Übergang bei konstantem externen Einschluss untersucht werden.
- Über eine Änderung der Tiefe bzw. der Position der Dipolfalle lassen sich kollektive Schwingungen anregen und Transportphänomene bei einer festen Gittertiefe untersuchen. In Abschnitt 7.3.5 wird beispielsweise die Dynamik analysiert, mit der sich ein fermionischer Bandisolator nach dem abrupten Dekomprimieren der Dipolfalle auflöst. Transportmessungen in optischen Gittern sind insbesondere im Hinblick auf die Untersuchung und den Nachweis von Anderson-Lokalisierung [263] und Bose-Glas-Phasen [231] von Bedeutung (siehe z.B. [264]). Für die kollektiven Schwingungen wechselwirkender Fermionen werden Signaturen im Frequenzspektrum vorausgesagt, die den Nachweis des Mott-Isolator-Übergangs ermöglichen [265].
- Der große Durchstimmbereich des Ti:Saphir-Lasers erlaubt es, die Wellenlänge des Gitters über einen weiten Bereich frei einzustellen. Mit dem unabhängigen externen Einschluss der Dipolfalle lassen sich insbesondere auch blauverstimmtte optische Gitter realisieren.

### 6.2.3 Spezies-abhängige Gitter

Die Wellenlänge des Gitters legt die Verstimmung gegenüber den atomaren Übergängen fest und bestimmt somit das Verhältnis zwischen Laserintensität und Gittertiefe. Da jede Spezies ihre charakteristischen Übergänge aufweist, werden Rubidium und Kalium in ein und demselben Gitter im Allgemeinen eine unterschiedliche Gittertiefe verspüren. Innerhalb des periodischen Potentials werden die Eigenschaften der Teilchen durch ihre Tunnel- und Wechselwirkungsmatrixelemente bestimmt. Drückt man diese Größen in Einheiten der jeweiligen Rückstoßenergien  $E_r$  aus, so hängen diese – wie auch die Wannier-Funktionen – allein von der „einheitenlosen“ Gittertiefe  $s_x = V_x/E_r$  ab (siehe Abschnitt 5.1.4). Der

## 6 Aufbau und Merkmale des Gitters



**Abbildung 6.6:** Gittertiefe für  $^{87}\text{Rb}$  (rot) und  $^{40}\text{K}$  (blau) als Funktion der Wellenlänge. Die Tiefen sind in Einheiten der jeweiligen Rückstoßenergien angegeben. Die Berechnungen gehen von einer Stehwelle mit einer Leistung von 100 mW, einer Strahltaile von  $150\ \mu\text{m}$  und einer Reflektivität von 100 % aus. Die gestrichelten Linien geben die Lage der  $D_1$ - und  $D_2$ -Übergänge an.

Einfluss des Gitterpotentials auf das Rubidium und Kalium lässt sich daher aus den zugehörigen Gittertiefen  $s_{x,\text{Rb}}$  und  $s_{x,\text{K}}$  ableiten. Abbildung 6.6 zeigt diese Größen als Funktion der Wellenlänge für eine Stehwelle konstanter Leistung. In der Nähe der atomaren Resonanzen verspüren die beiden Spezies sehr unterschiedliche Gittertiefen. Destruktive Interferenzen zwischen den Übergangsamplituden der  $D_1$ - und  $D_2$ -Übergänge erlauben es zudem, das Gitterpotential für jeweils eine Spezies ganz auszublenden und somit ein vollständig „spezies-selektives Gitter“ zu realisieren [256]. Die Wellenlängen, bei denen die destruktiven Interferenzen auftreten, liegen innerhalb der D-Linien-Duplets und werden durch die Nullpunkte in Abbildung 6.6 bestimmt. Für  $^{87}\text{Rb}$  und  $^{40}\text{K}$  betragen die Wellenlängen  $790,03(1)\ \text{nm}$  bzw.  $768,97(1)\ \text{nm}$ . Streng genommen, muss bei der Berechnung der Dipolpotentiale in der Nähe der atomaren Resonanzen die Hyperfeinstruktur der Atome und die Polarisation des Lichtes mitberücksichtigt werden. In einem dreidimensionalen Gitter mit Strahlen leicht unterschiedlicher Frequenzen und orthogonalen Polarisationen stellt die alleinige Berücksichtigung der Feinstruktur jedoch eine sinnvolle Näherung dar.

Abbildung 6.7a zeigt, wie sich das Verhältnis der Gittertiefen  $s_{x,\text{K}}/s_{x,\text{Rb}}$  mit der Wellenlänge verändert. Zwar wird das Verhältnis in der Nähe der atomaren Resonanzen extremal, doch nehmen dann auch die Streuraten drastisch zu, wodurch die Atome schneller aufgeheizt werden. Daher muss im Experiment im Allgemeinen ein Kompromiss zwischen der Spezies-Selektivität des Gitters und den Streuraten eingegangen werden. Die absoluten Streuraten von Rubidium und Kalium lassen sich aus Abbildung 6.7b ableiten<sup>21</sup>. Ihr genauer Wert hängt vom Überlapp der Wannier-Funktionen mit dem Lichtfeld ab und ist

<sup>21</sup>Eventuell in der Nähe der Laserfrequenzen liegende Molekülniveaus und die damit verbundenen Photoassoziations-Verluste werden hier vernachlässigt.

## 6.2 Merkmale der Dipolfalle und des Gitters

---

direkt proportional zum Potentialversatz  $\Delta V_x$ , den das Lichtfeld auf die Atome ausübt. Vernachlässigt man bei der Erzeugung der Stehwelle auftretende Reflexionsverluste, so lässt sich der Potentialversatz  $\Delta V_x$  aus der Näherung in Gleichung 4.27 ableiten und man erhält:

$$\Delta V_x/E_r = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{|s_x|} & \text{für } s_x > 0 \text{ „blauverstimmt“} \\ |s_x| - \frac{1}{2}\sqrt{|s_x|} & \text{für } s_x < 0 \text{ „rotverstimmt“} \end{cases} \quad (6.4)$$

Die obige Fallunterscheidung berücksichtigt das Vorzeichen des Potentials und somit die Tatsache, ob sich die Teilchen in den Knoten oder in den Bäuchen einer Stehwelle aufhalten. Vorzeichenwechsel des Potentials finden bei den  $D_1$ - und  $D_2$ -Übergängen sowie bei den destruktiven Interferenzen statt. In einem spezies-selektiven Gitter, dass für Rubidium vollständig verschwindet (790, 03 nm), erhält man die folgenden Streuraten als Funktion der einheitenlosen Kalium-Gittertiefe:

$$\Gamma_{\text{Rb}}/(2\pi) = 47,5 |s_{x,\text{K}}| \text{ mHz}, \quad (6.5a)$$

$$\Gamma_{\text{K}}/(2\pi) = 4,1 \left( |s_{x,\text{K}}| - \frac{1}{2}\sqrt{|s_{x,\text{K}}|} \right) \text{ mHz}. \quad (6.5b)$$

Analog ergeben sich für ein spezies-selektives Gitter, dass für Kalium vollständig verschwindet (768, 97 nm), die folgenden Streuraten als Funktion der einheitenlosen Rubidium-Gittertiefe:

$$\Gamma_{\text{Rb}}/(2\pi) = 1,9 \sqrt{|s_{x,\text{Rb}}|} \text{ mHz} \quad (6.6a)$$

$$\Gamma_{\text{K}}/(2\pi) = 230,8 |s_{x,\text{Rb}}| \text{ mHz}. \quad (6.6b)$$

Spezies-abhängige Gitter bieten ein breites Spektrum potentieller Anwendungen: Die Gitterwellenlänge erlaubt es, das Verhältnis der effektiven Massen von Rubidium und Kalium über einen größeren Bereich zu verändern. Abbildung 6.7c zeigt das Verhältnis  $m_{\text{Rb}}^*/m_{\text{K}}^*$  für Teilchen mit dem Kristallimpuls  $\hbar q = 0$ . In der Rechnung wird die Laserleistung so mit der Wellenlänge verändert, dass das Gitter für Rubidium immer über eine Tiefe von  $V_{x,\text{Rb}} = 4 E_{\text{r,Rb}}$  verfügt. Abbildung 6.7d zeigt die zugehörigen Streuraten, wie man sie auch zusammen mit Gleichung 6.4 aus der allgemeingültigen Darstellung 6.7b ableiten kann.

Während in einem fern rotverstimmteten Gitter die Beweglichkeit von Kalium immer größer ist als die von Rubidium, lässt sich die Situation in einem frei durchstimmbaren Gitter umkehren. Die Kaliumatome können dann zum Beispiel als lokalisierte Störstellen für ein superfluides Rubidiumkondensat dienen. Dies erlaubt es, Unordnung in das ansonsten defektfreie Gitterpotential einzuführen [248, 256, 257]. Entfernt man die Kaliumatome teilweise aus dem optischen Gitter, indem man sie in einer Überlagerung ihrer beiden Hyperfeingrundzustände präpariert und anschließend für einen der beiden Zustände resonantes Licht einstrahlt, so lässt sich eine rein zufällige Anordnung von Störstellen realisieren.

## 6 Aufbau und Merkmale des Gitters

---

Der Anteil der Störstellen kann über die Dauer des Mikrowellenpulses, mit dem die Überlagerung der Hyperfeinzustände präpariert wird, kontrolliert werden. Darüber hinaus lässt sich die Stärke der Wechselwirkung zwischen den Rubidiumatomen und den lokalisierten Störstellen über eine Interspezies-Feshbach-Resonanz regeln. Ein solches System bietet ideale Voraussetzungen um Anderson-Lokalisierung [263] und Bose-Glas-Phasen [231] zu untersuchen (siehe z.B. [264]).

Spezies-selektive Gitter ermöglichen es außerdem, phononenartige Anregungen in den starren Kristall eines optischen Gitters einzuführen. Hierbei bilden kondensierte Bosonen ein über das Gitter ausgedehntes Medium, welches mit sich selbst und den lokalisierten Fermionen wechselwirkt. Das Kondensat dient als Träger für phononenartige Anregungen und erlaubt es somit, Wechselwirkungen zwischen den räumlich getrennten Fermionen zu vermitteln [37, 243, 251–255]. Auf diese Weise ließe sich zum Beispiel die phononeninduzierte Cooper-Paarung eines Supraleiters simulieren. Je kleiner dabei die effektive Masse der Bosonen ist, umso größer ist die Schallgeschwindigkeit im Kondensat und damit die Stärke der vermittelten Kopplung.

Spezies-selektive Gitter bieten zumindest prinzipiell die Möglichkeit, über die Lokalisierung einer Spezies ein periodisches Potential für die zweite Spezies zu erzeugen, welches allein (oder teilweise) auf der Interspezieswechselwirkung beruht. Das resultierende Gitterpotential wäre nicht sinusförmig und könnte aufgrund von Schwingungen der lokalisierten Spezies – ähnlich zu dem Kristall eines Festkörpers – eine dynamische Struktur aufweisen. Die Tiefe eines solchen Gitters ließe sich über eine Interspezies-Feshbach-Resonanz verändern.

In Abschnitt 5.5.6 haben wir im Zusammenhang mit dem adiabatischen Einladen einer Bose-Fermi-Mischung in ein optisches Gitter gesehen, dass sich das Verhältnis der effektiven Massen auch auf das Temperaturverhalten der Mischung und die relative Temperatur  $T/T_F$  des Fermigas auswirkt [33].

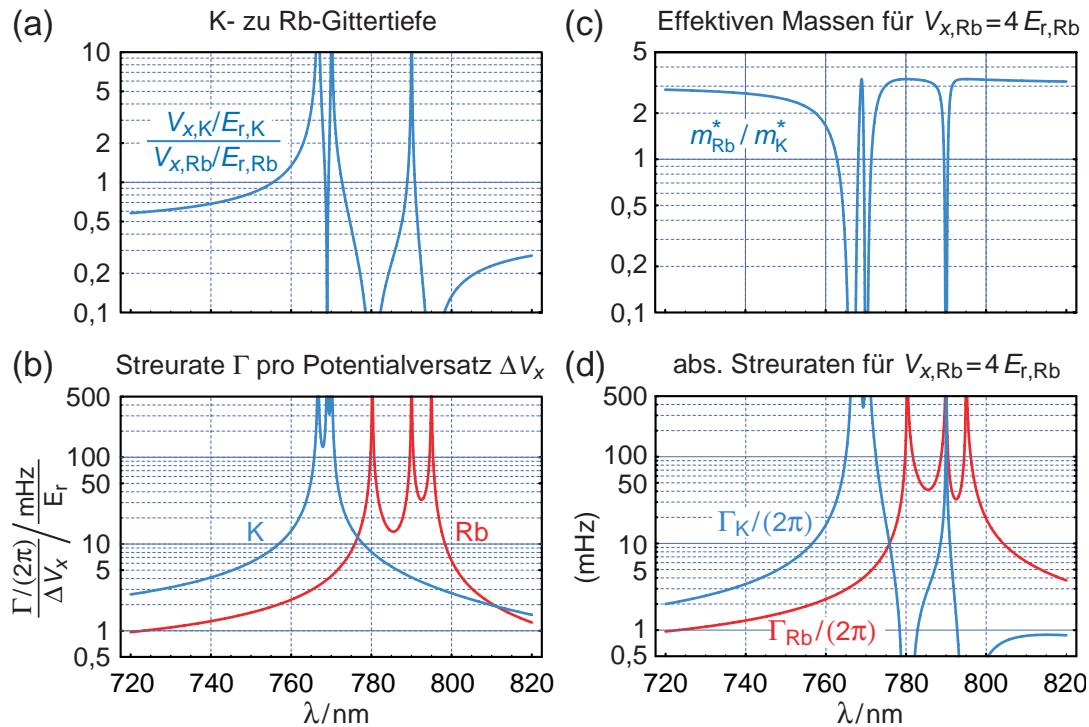
### Blauverstimmtes Gitter

Für die Experimente in dieser Arbeit wird das Gitter in der Nähe von  $755,50(7)$  nm betrieben. Bei dieser Wellenlänge stimmen die einheitenlosen Gittertiefen der beiden Elemente und deren Wannier-Funktionen miteinander überein. Folglich sind die Tunnelraten der beiden Elemente von der gleichen Größenordnung und deren Verhältnis ist unabhängig von der Gittertiefe durch  $J_K/J_{Rb} = m_{Rb}/m_K$  gegeben. Auch zwischen den Matrixelementen der Boson-Fermion- und der Boson-Boson-Wechselwirkung liegt dann ein konstantes Verhältnis vor (siehe Abbildung 5.27). Gemäß Abbildung 6.6 gibt es drei Wellenlängen, bei denen die einheitenlosen Gittertiefen für beide Spezies übereinstimmen. Hierbei zeichnet sich das 755 nm-Gitter durch die kleinsten Streuraten aus, zumal es sich um eine blaue Verstimmung handelt, sodass sich die Atome in den Knoten der Stehwelle aufhalten. Für die Streuraten ergibt sich:

$$\Gamma_{Rb}/(2\pi) = 1,0 \sqrt{|s_x|} \text{ mHz} \quad \text{und} \quad \Gamma_K/(2\pi) = 4,4 \sqrt{|s_x|} \text{ mHz}. \quad (6.7)$$



## 6.2 Merkmale der Dipolfalle und des Gitters



**Abbildung 6.7:** Gittergrößen für Rubidium und Kalium als Funktion der Wellenlänge  $\lambda$ : **(a)** Verhältnis zwischen den einheitenlosen Gittertiefen, **(b)** Streuraten pro Potentialversatz, den die Teilchen im Lichtfeld erfahren, **(c)** Verhältnis zwischen den effektiven Massen von Teilchen mit einem Kristallimpuls  $\hbar q = 0$  und **(d)** zugehörige absolute Streuraten. Die Graphen **(a, b)** gelten allgemein für beliebige 1D-Gitter entsprechender Wellenlänge. Die Graphen **(c, d)** beziehen sich auf ein 1D-Gitter, dass für Rubidium unabhängig von der Wellenlänge immer eine Tiefe von  $4 E_{r,Rb}$  aufweist. Bei mehrdimensionalen Gittern summieren sich die Streuraten der einzelnen Achsen.

In Kombination mit der hohen Leistung des Ti:Saphir-Laser lassen sich Gitter von einigen  $100 E_r$  Tiefe bei moderaten Heizraten realisieren. Die große Tiefe der Potentialtöpfe und der vollständige Überlapp zwischen den Wellenfunktionen erhöht auch die Effizienz der heteronuklearen Molekülbildung mittels Photoassoziation [185, 266]. Schließlich lassen sich in sehr tiefen 2D-Gittern eindimensionale Systeme wie Tonks-Girardeau-Gase [20, 21] oder Luttinger-Flüssigkeiten [23, 267] realisieren.

Wie in Abschnitt 3.8 vorgeschlagen, kann das repulsive Potential eines einzelnen blauverstimmten Laserstrahls auch dazu benutzt werden, das Zentrum der magnetischen Quadrupolfalle durch einen „blue plug“ zu verschließen. Kombiniert man einen solchen Strahl mit der gekreuzten Dipolfalle, so lässt sich ein ringförmiges Potential erzeugen. In einem solchen Torus kann zum Beispiel der superfluide Fluss der quantisierten Rotation eines

## 6 Aufbau und Merkmale des Gitters

---

Bose-Einstein-Kondensats untersucht werden. Gemäß Abschnitt 3.5.3 lässt sich mit Laserlicht, das für Rubidium rot- und für Kalium blauverstimmt ist, eine bichromatischen Dipolfalle realisieren. Im Gegensatz zu einer reinen Dipolfalle ist die bichromatische Falle für Kalium tiefer als für Rubidium. Aufgrund der unterschiedlichen Fallenfrequenzen fällt auch das Temperaturverhältnis  $T_c/T_F$  kleiner aus [167, 168]. Beide Effekte sollten ein effizienteres sympathetisches Kühlen des Kaliums ermöglichen.

## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern

Aufbauend auf den eindimensionalen Betrachtungen aus Abschnitt 5.2.2 werden in diesem Kapitel die Eigenschaften von idealen Fermigasen in mehrdimensionalen Gittern und bei endlichen Temperaturen untersucht. Im zweiten Teil wird die Dynamik der idealen Gase nach einer abrupten Potentialveränderung in ein- und zweidimensionalen Gittern berechnet. Die theoretischen Ergebnisse werden ersten experimentellen Messungen gegenübergestellt.

Die fermionische Statistik und die Inhomogenität des periodischen Potentials führen dazu, dass bereits wechselwirkungsfreie Fermigase komplexe Merkmale aufweisen. Eine genaue Beschreibung der Gleichgewichts- und dynamischen Eigenschaften der idealen Gase ist daher auch für das Verständnis und die Identifikation charakteristischer Wechselwirkungseffekte von Bedeutung.

Als Erstes werden präzise Werte für die kritischen Dichten berechnet, bei denen sich in mehrdimensionalen und anisotropen Gittern der fermionische Bandisolator ausbildet. Im Rahmen der Tight-Binding-Näherung weisen sowohl die Gleichgewichts- als auch die dynamischen Systeme universelle Eigenschaften auf. So wird z.B. gezeigt, dass beim idealen Fermigas die Anzahl der einfach besetzten Gitterplätze unmittelbar aus der Kristallimpulsverteilung abgeleitet werden kann.

Numerisch exakt ermittelte Einteilchenspektren erlauben es, das Temperaturverhalten des Fermigases beim Einladen in ein dreidimensionales optisches Gitter für den gesamten Verlauf der Gitterrampe zu berechnen und dabei den Einfluss angeregter Bänder zu berücksichtigen. Im Zuge dieser Berechnungen wird eine einfache Möglichkeit aufgezeigt, Fermigase ohne adiabatisches Heizen in ein optisches Gitter zu transferieren.

Ausgehend von den exakten Einteilchenzuständen werden die Dichte- und die Kristallimpulsverteilungen von bis zu  $2,5 \cdot 10^5$  Fermionen unter Berücksichtigung endlicher Temperaturen sowie angeregter Bänder berechnet. Die Ergebnisse der Ab-initio-Berechnungen werden mit entsprechenden Messungen verglichen. Ein solcher Vergleich bietet einen neuen Ansatz, die Temperatur von Fermionen in optischen Gittern zu bestimmen. Mit den vorgestellten Messungen gelingt es erstmals, ein Fermigas bei konstanter Gittertiefe und Teilchenzahl allein durch dessen Kompression von einem metallischen Zustand in einen Bandisolator zu überführen und schließlich einen neuen metallischen Zustand in angeregten Bändern zu erzeugen.

Im zweiten Teil dieses Kapitels wird die Dynamik von ein- und zweidimensionalen Fermigasen nach einer abrupten Veränderung der Gitterparameter berechnet. Dabei wird neben der Schwerpunktsbewegung auch die zeitliche Entwicklung der Kristallimpulsverteilung untersucht. In den Simulationen zeigt die Kristallimpulsverteilung charakteristische Interferenzmuster, die auch in einer ersten Messreihe beobachtet werden können.

## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern

---

### 7.1 Universelle Eigenschaften

In Abschnitt 5.2.2 wurde das eindimensionale Fermigas im inhomogenen Gitter mittels exakter numerischer Berechnungen sowie im Rahmen des Tight-Binding-Ansatzes behandelt. Über das Verhältnis aus dem kinetischen und dem potentiellen Energieterm im Tight-Binding-Ansatz 5.43 wurde eine charakteristische Länge

$$\xi_x = \sqrt{\frac{2J_x}{m\omega_x^2}}, \quad (7.1)$$

eingeführt, die es ermöglicht, unterschiedliche Systeme miteinander zu vergleichen. Stimmen für Gitterpotentiale mit unterschiedlichen externen Einschlüssen und Gittertiefen die charakteristischen Längen 7.1 überein, so sind die Einteilchenwellenfunktionen und damit zugleich die fermionischen  $N$ -Teilchenzustände in den betrachteten Systemen exakt identisch. Darüber hinaus lassen sich auch Fermigase mit unterschiedlichen Teilchenzahlen  $N$  vergleichen: Verfügen diese Systeme über identische charakteristische Dichten

$$\rho = Na/\xi_x, \quad (7.2)$$

so stimmen im Rahmen der Kontinuumsnäherung ( $N \gg 1$ ) die Dichteverteilungen bezüglich der normierten Koordinaten  $x' = x/\xi_x$  sowie die normierten Kristallimpulsverteilungen miteinander überein. In dieser Arbeit durchgeführte numerische Berechnungen zeigen, dass diese Beziehungen nicht nur – wie bislang bekannt – zwischen entarteten Fermigasen gelten, sondern auch zwischen Gasen mit übereinstimmenden relativen Temperaturen  $T/T_F$ . Voraussetzung ist jedoch, dass keine thermischen Populationen in angeregten Bändern auftreten, da ansonsten die Tight-Binding-Näherung zusammenbricht.

In den Referenzen [215, 236] wird gezeigt, dass die charakteristische Dichte auch in wechselwirkenden Fermigasen (Hubbard-Modell) eine sinnvolle Größe darstellt. So kann das Phasendiagramm des Spin-1/2-Fermigases im inhomogenen Gitter eindeutig über den Kopplungsparameter  $U/J$  und die charakteristische Dichte  $\rho$  beschrieben werden. Abhängig von diesen beiden Größen bildet sich im Zentrum des inhomogenen Gitters entweder eine metallische ( $n_j < 1$  bzw.  $1 < n_j < 2$ ), eine Mott-Isolator- ( $n_j = 1$ ) oder eine Bandisolator-Phase ( $n_j = 2$ ) aus. Im Allgemeinen koexistieren die hier aufgezählten Phasen aufgrund der Inhomogenität des Gitters in Form einer räumlichen Schalenstruktur, wobei die Phasen mit den kleineren Besetzungszahlen  $n_j$  radial weiter außen angeordnet sind. Auch bei den wechselwirkenden Fermigasen lassen sich die Dichte- und Impulsverteilungen für verschiedene Teilchenzahlen und externe Einschlüsse über die oben beschriebene Skalierung miteinander vergleichen. Diese universellen Beziehungen ermöglichen es, die Ergebnisse numerischer Simulationen auf größere experimentelle Systeme zu übertragen. Dieses Verfahren lässt sich, wie wir später sehen werden, auch bei der Berechnung der Dynamik von Fermionen in optischen Gittern anwenden.

### 7.1.1 Kriterien für das Auftreten von Bandisolatoren

In Abschnitt 5.2.2 wurde im Rahmen der Kontinuumsnäherung gezeigt, dass ideale entartete eindimensionale Fermigase – unabhängig von den Systemparametern – immer dann einen Bandisolator im Zentrum eines Gitters ausbilden, wenn die charakteristische Dichte  $\rho^{1D}$  einen kritischen Wert von  $\rho_c^{1D} = 2,545(4)$  überschreitet (siehe auch Abbildung 7.1a).

Analoge Kriterien lassen sich auch für Fermigase in zwei- und dreidimensionalen Gittern aufstellen. Hierzu führt man die folgenden charakteristischen Dichten

$$\rho^{2D} = \frac{Na^2}{\xi_x \xi_y} \quad \text{und} \quad \rho^{3D} = \frac{Na^3}{\xi_x \xi_y \xi_z} \quad \text{mit} \quad \xi_\nu = \sqrt{\frac{2J_\nu}{m\omega_\nu^2}} \quad (7.3)$$

ein, wobei  $\xi_\nu$  die charakteristischen Längen entlang der verschiedenen Gitterachsen  $\nu$  bezeichnen. Mit den obigen Definitionen lassen sich die kritischen Dichten bei vorgegebenen Fallenparametern  $\xi_\nu$  aus den minimalen Atomzahlen  $N_c$  berechnen, die zu einer Einfachbesetzung des zentralen Gitterplatzes führen<sup>1</sup>. Abbildung 7.1 b und c zeigen die numerischen Ergebnisse für das *isotrope* 2D- und 3D-Gitter bei verschiedenen Fallenfrequenzen und Gittertiefen. Im Kontinuumslimit<sup>2</sup> konvergieren die kritischen Dichten gegen  $\rho_c^{2D} = 12,177(2)$  und  $\rho_c^{3D} = 55,70(4)$ .

Am Beispiel des 3D-Gitters wird in Abbildung 7.1d demonstriert, dass die kritischen Dichten nicht von den Fallenfrequenzen bzw. dem Aspektverhältnis des externen Einschlusses abhängen. Anders verhält es sich mit den Gittertiefen. Für ein asymmetrisches Gitter, also ein Gitter mit unterschiedlichen Tiefen  $V_\nu$  entlang der einzelnen Achsen  $\nu$ , hängen die kritischen Dichten empfindlich von den Verhältnissen der Tunnelraten  $J_\nu$  ab. In Abbildung 7.1e und f sind die kritischen Dichten des 2D- und 3D-Gitters für verschiedene Verhältnisse der Tunnelraten dargestellt. Bei den blauen (roten) Daten in Abbildung 7.1e beträgt die Tiefe auf einer Gitterachse konstant  $4 E_r$  ( $8 E_r$ ), während die Tiefe der anderen Achse verändert wird. Die gute Übereinstimmung der roten und blauen Daten belegt, dass die kritische Dichte allein durch das Verhältnis der Tunnelraten bestimmt wird. Der funktionale Verlauf der Dichte  $\rho_c^{3D}$  in Abbildung 7.1f wird in entsprechender Weise berechnet, wobei beim 3D-Gitter von übereinstimmenden Tiefen entlang der  $x$ - und  $y$ -Achse ausgegangen wird<sup>3</sup>.

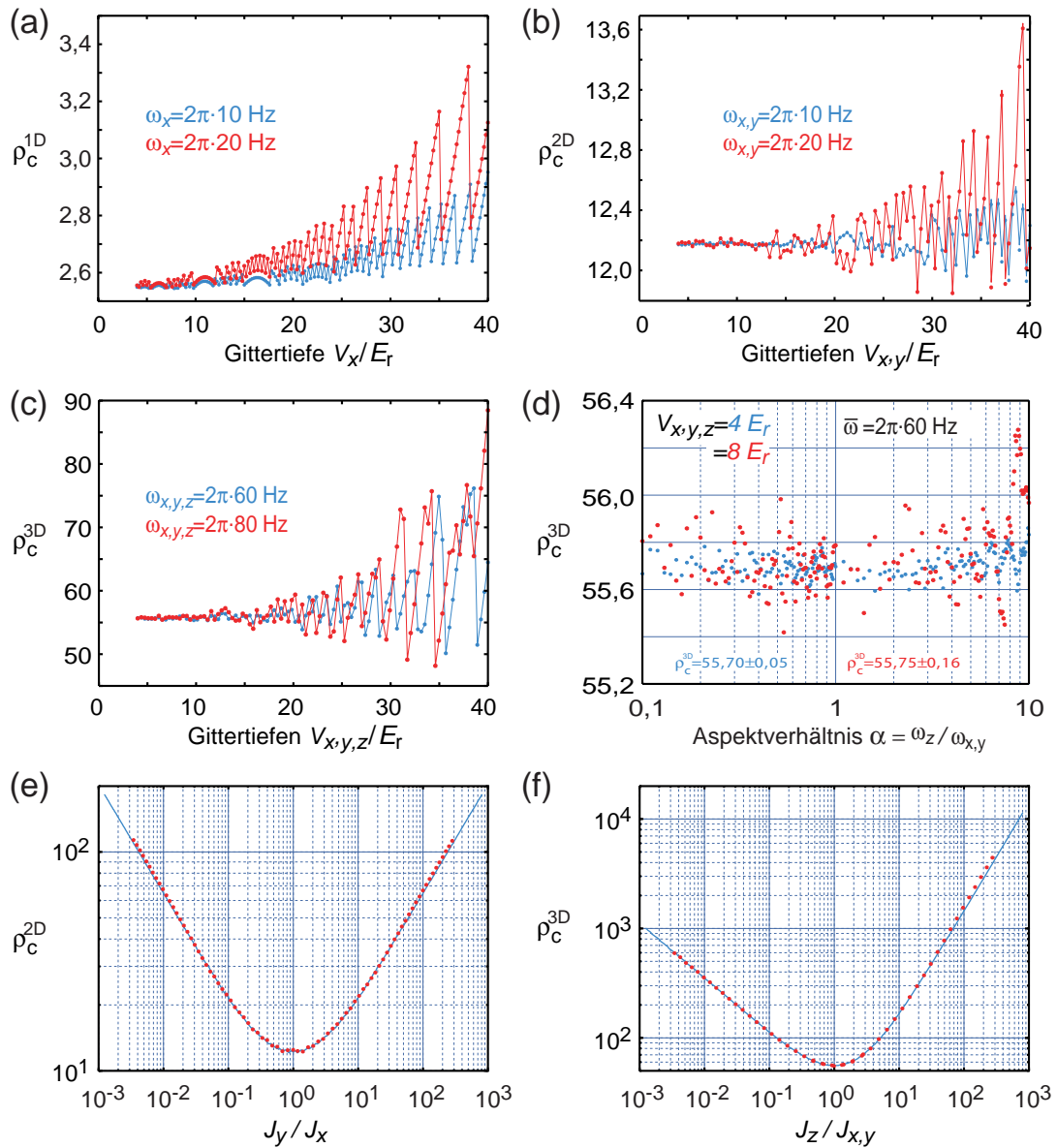
Wie im eindimensionalen Fall beschreibt  $N_c$  auch bei den höherdimensionalen Gittern die Quantenzahl  $n$  des ersten Einteilchenzustandes, der auf einen Randbereich des Gitters lokalisiert ist. Handelt es sich um ein isotropes 2D- oder 3D-Gitter, so bedingt die Symmetrie, dass im gesamten Spektrum entartete Zustände auftreten und nicht erst, wie im eindimensionalen Fall, für  $n \geq N_c$ .

<sup>1</sup>In den Berechnungen ist  $N_c$  die kleinste Atomzahl, bei der die zentrale Besetzung größer als 0,99 wird.

<sup>2</sup>Für die Berechnung der kritischen Dichten des 1D- bis 3D-Gitters im Kontinuumslimit werden die Systemparameter so gewählt, dass  $N_c^{1D} > 2 \cdot 10^3$ ,  $N_c^{2D} > 1 \cdot 10^6$  bzw.  $N_c^{3D} > 2 \cdot 10^6$  gilt.

<sup>3</sup>In Abbildung 7.1e und f werden die Fallenfrequenzen so mit den Gittertiefen verändert, dass  $N_c$  immer hinreichend groß ist und die kritischen Dichten somit in etwa den Werten im Kontinuumslimit entsprechen.

## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern

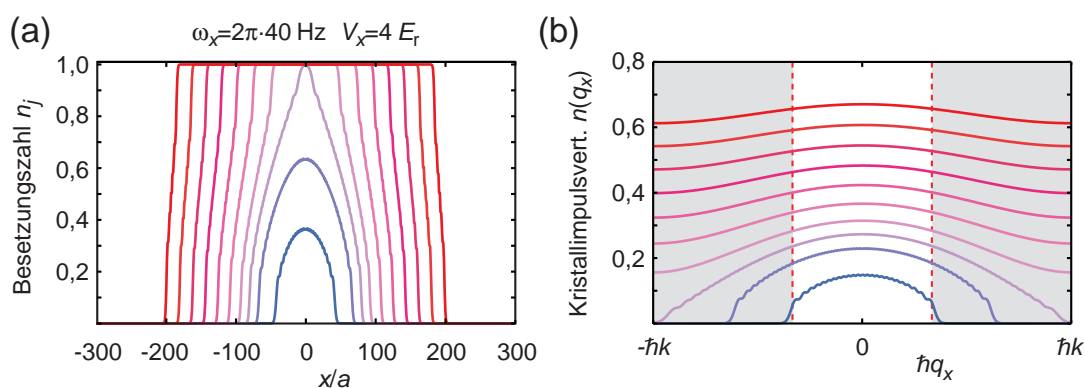


**Abbildung 7.1:** Kritische Dichten im isotropen (a) 1D-, (b) 2D- und (c) 3D-Gitter als Funktion der Gittertiefe für jeweils zwei verschiedene Fallenfrequenzen. Für große Teilchenzahlen  $N_c$  konvergieren die Größen gegen  $\rho_c^{1D} = 2,545(4)$ ,  $\rho_c^{2D} = 12,177(2)$  bzw.  $\rho_c^{3D} = 55,70(4)$ . (d) Kritische Dichte  $\rho_c^{3D}$  im symmetrischen 3D-Gitter für verschiedene Aspektverhältnisse des externen Einschlusses. (e) Kritische Dichte  $\rho_c^{2D}$  im asymmetrischen 2D-Gitter als Funktion des Verhältnisses der Tunnelraten. Bei den blauen (roten) Daten wird eine Achse konstant bei  $4 E_r$  ( $8 E_r$ ) gehalten. (f) Entsprechende Ergebnisse für das asymmetrische 3D-Gitter mit  $V_x = V_y$ .

### 7.1.2 Besetzungszahlen und Kristallimpulsverteilungen

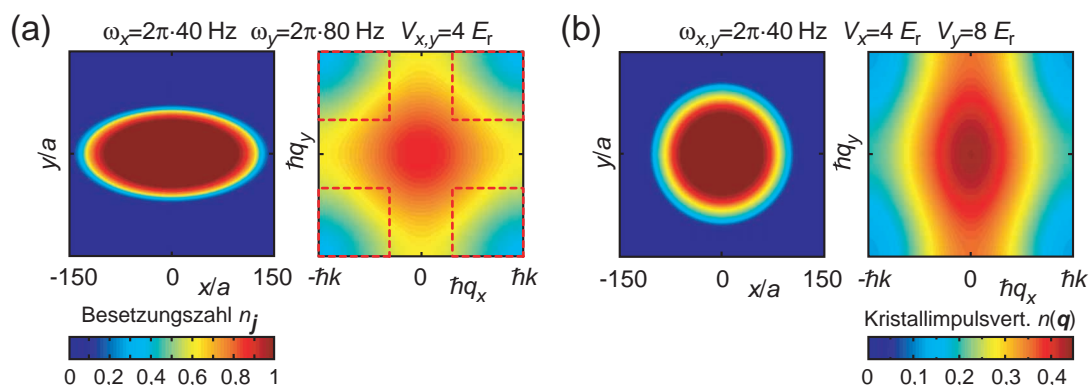
Der Bandisolator bildet sich als Erstes im Zentrum des inhomogenen Gitters (Potentialminimum) und dehnt sich dann beim Hinzufügen weiterer Teilchen immer weiter nach außen hin aus. Dies ist in Abbildung 7.2 am Beispiel von eindimensionalen Fermigasen ( $T = 0$ ) mit unterschiedlichen Teilchenzahl  $N$  illustriert. Neben den Dichteverteilungen der  $N$ -Teilchengrundzustände sind die zugehörigen Kristallimpulsverteilungen dargestellt. Sobald die Besetzungszahl  $n_{j=0}$  des zentralen Gitterplatzes einen Wert von eins annimmt (hier für  $N = 105$ ), stößt die Kristallimpulsverteilung erstmals an die Ränder  $\pm\hbar k$  der Brillouin-Zone. Von nun an werden weitere hinzugefügte Teilchen durch Bragg-Beugung auf den rechten bzw. linken Rand des Gitters lokalisiert, sodass die zentrale Dichte nicht weiter zunimmt. Numerische Berechnungen zeigen, dass sich die Populationen  $n(\pm\hbar k)$  an den Zonen-Rändern direkt proportional zur Anzahl der einfach besetzten Gitterplätze verhalten. Somit lässt sich über die Populationen  $n(\pm\hbar k)$  die Ausbildung des Bandisolators nachweisen. Statt in einem diskreten Punkt werden im Experiment die Atomzahlen innerhalb eines endlichen Impulsintervalls bestimmt. Als Konvention seien die „Brillouin-Zonen-Ränder“ daher im Folgenden durch die beiden äußeren Drittel der Zone definiert (siehe rot gestrichelte Unterteilung in Abbildung 7.2b). Außerdem bezeichne  $R_{\text{BZ}}$  den Anteil der Atome innerhalb der beiden Brillouin-Zonen-Ränder und  $R_{\text{BI}}$  den Bandisolator-Anteil, also das Verhältnis der einfach besetzten Gitterplätze zur Gesamtatomzahl  $N$ . In Abbildung 7.4a sind die Größen  $R_{\text{BI}}$  und  $R_{\text{BZ}}$  für verschiedene Gitter als Funktion der Teilchenzahl berechnet und für identische  $N$  gegeneinander aufgetragen. Das Ergebnis verdeutlicht, dass für hinreichend große Systeme, unabhängig von den Gitterparametern, ein fester funktionaler Zusammenhang zwischen  $R_{\text{BI}}$  und  $R_{\text{BZ}}$  besteht.

Werden die Eigenzustände  $\phi_n$  des eindimensionalen inhomogenen Gitters im Rahmen des Tight-Binding-Ansatzes 5.43 berechnet, so sind diese auf das unterste Band beschränkt.



**Abbildung 7.2:** (a) Dichte- und (b) Kristallimpulsverteilungen der  $N$ -Teilchengrundzustände mit  $N = 25, 65, 105, \dots, 385$  in einem  $4 E_r$  tiefen 1D-Gitter ( $\lambda = 755 \text{ nm}$ ) mit einem harmonischen Einschluss der Frequenz  $\omega_x = 2\pi \cdot 40 \text{ Hz}$  für  $^{40}\text{K}$ .

## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern



**Abbildung 7.3:** Berechnete Dichte- und Kristallimpulsverteilungen von 25000  $^{40}\text{K}$ -Atomen ( $T = 0$ ) (a) in einem 2D-Gitter mit anisotropem harmonischen Einschluss und identischen Gittertiefen  $V_x = V_y$  bzw. (b) in einem asymmetrischen 2D-Gitter ( $V_x \neq V_y$ ) mit isotropem harmonischen Einschluss. Die rot gestrichelten Linien kennzeichnen die vier Ecken der Brillouin-Zone für die Bestimmung von  $R_{\text{BZ}}$  (siehe Text).

Die durch Fourier-Transformation aus den Ortswellenfunktionen  $\phi_n(x) = \sum_j c_j w(x - ja)$  (Gl. 5.42) hervorgehenden Kristallimpulsverteilungen

$$\tilde{\phi}_n(q) = \langle q | \phi_n \rangle = \int \underbrace{\langle q | x \rangle}_{(5.22)} \underbrace{\langle x | \phi_n \rangle}_{\phi_n(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=1}^M e^{-iqx_j} c_j \quad (7.4)$$

sind daher auf die erste Brillouin-Zone beschränkt. Die diskrete Fourier-Transformation läuft über die Gitterplätze und ist so normiert, dass  $\int_{-\pi/a}^{+\pi/a} |\tilde{\phi}_n(q)|^2 dq = 1$  gilt. Man beachte, dass die Amplitude von  $\tilde{\phi}_n(q)$  mit der Anzahl der berücksichtigten Gitterplätze  $M$  variiert.

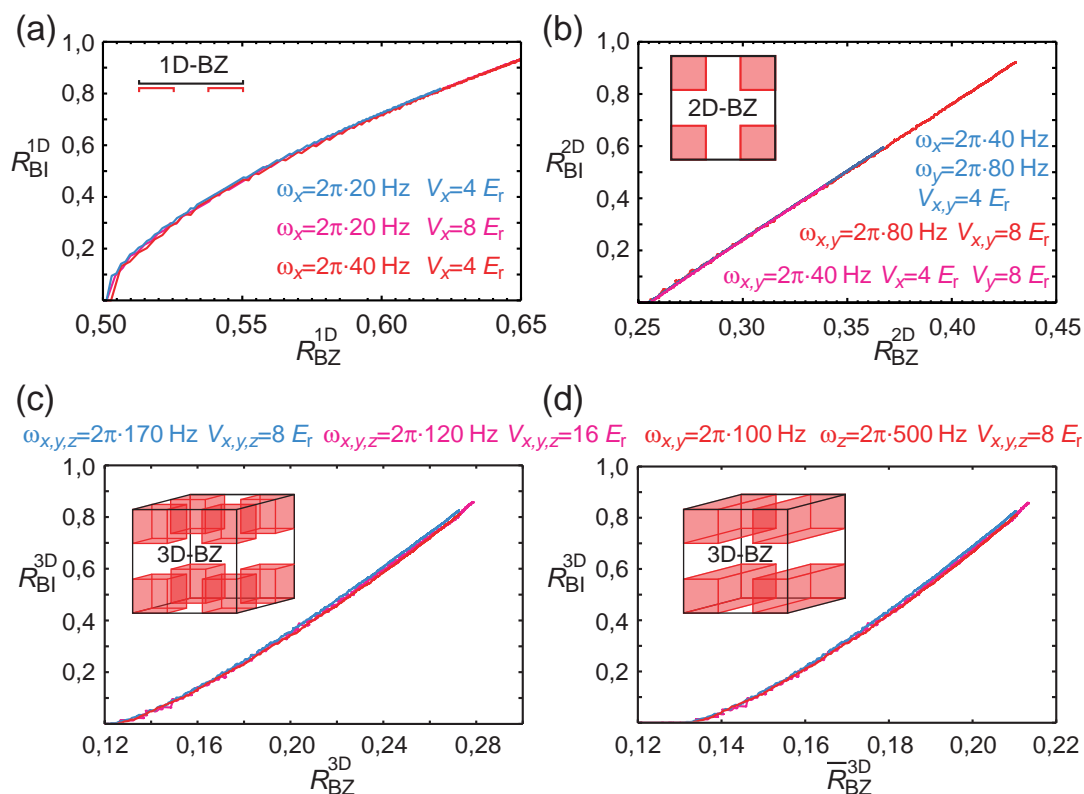
In mehrdimensionalen einfach kubischen Gittern lässt sich das Einteilchenproblem nach den verschiedenen Gitterachsen  $\nu$  separieren. So sind die Einteilchenzustände des mehrdimensionalen Gitters durch das Produkt der 1D-Wellenfunktionen und die Einteilchenenergien durch die Summe der zugehörigen 1D-Eigenwerte gegeben:

$$\phi_n(\mathbf{r}) = \prod_{\nu} \phi_{n\nu}(x_{\nu}), \quad \tilde{\phi}_n(\mathbf{q}) = \prod_{\nu} \tilde{\phi}_{n\nu}(q_{\nu}), \quad \epsilon_n = \sum_{\nu} \epsilon_{n\nu}. \quad (7.5)$$

Für die Berechnung der fermionischen  $N$ -Teilchengrundzustände werden die mehrdimensionalen Wellenfunktionen nach aufsteigenden Eigenenergien sortiert und schließlich die Betragsquadrate der  $N$  ersten Wellenfunktionen summiert. Abbildung 7.3 zeigt exemplarisch die berechneten Dichte- und Kristallimpulsverteilungen für 25000 Fermionen in zwei unterschiedlichen 2D-Gittern. In beiden Fällen bilden sich in den Zentren der Gitter Bandisolatoren aus. Während der anisotrope harmonische Einschluss zu einer elliptischen Dichteverteilung innerhalb des Gitters führt, bleibt die Kristallimpulsverteilung von der Asymmetrie des externen Einschlusses unberührt (Abb. 7.3a). Genau umgekehrt verhalten sich



## 7.1 Universelle Eigenschaften



**Abbildung 7.4:** Die numerischen Berechnungen zeigen den Zusammenhang zwischen dem Anteil  $R_{BI}$  der Atome im Bandisolator (BI) und dem Anteil  $R_{BZ}$  der Atome in den rot dargestellten Ecken der Brillouin-Zone (BZ) für das 1D-, 2D- und 3D-Gitter und verschiedene Systemparameter.

die Dichte- und Kristallimpulsverteilungen in dem asymmetrischen Gitter mit isotropem externen Einschluss (Abb. 7.3b).

Auch bei mehrdimensionalen Gittern lassen sich universelle Beziehungen zwischen der Größe des Bandisolators und der Kristallimpulsverteilung nachweisen. Analog zur obigen Konvention seien beim 2D-Gitter die Ecken der Brillouin-Zone durch vier Quadrate (siehe Abb. 7.4b) und beim 3D-Gitter durch acht Würfel (siehe Abb. 7.4c) mit Kantenlängen von jeweils  $2\hbar k/3$  definiert. Trägt man für verschiedene Atomzahlen den Bandisolatoranteil  $R_{BI}$  gegen den Anteil der Atome in den Brillouin-Zonen-Ecken  $R_{BZ}$  auf, so erhält man die Graphen in Abbildung 7.4 b und c. Die funktionalen Beziehungen zwischen  $R_{BI}$  und  $R_{BZ}$  erweisen sich als unabhängig von den Gitterparametern und den Achsenverhältnissen.

Für die experimentelle Analyse dreidimensionaler Systeme bietet es sich aufgrund der Projektion bei der Absorptionsabbildung an, die „Ränder“ der Brillouin-Zone durch die vier in Abbildung 7.4d dargestellten Quader zu definieren. Bezeichnet  $\bar{R}_{BZ}^{3D}$  den Anteil der

## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern

---

darin enthaltenen Atome, so besteht auch zwischen  $R_{\text{BI}}$  und  $\overline{R}_{\text{BZ}}$  eine universelle Beziehung. Doch deren Allgemeingültigkeit beschränkt sich nun auf Gitter, die entlang aller drei Raumachsen gleich tief sind. Wie anhand der Graphen in Abbildung 7.4d zu erkennen ist, bleibt die Beziehung zwischen  $R_{\text{BI}}$  und  $\overline{R}_{\text{BZ}}$  vom Aspektverhältnis des externen Einschlusses weiterhin unberührt.

### 7.2 Gleichgewichtseigenschaften

Ziel dieses Abschnitts ist die Beschreibung der Gleichgewichtseigenschaften wechselwirkungsfreier Fermigase in dreidimensionalen optischen Gittern unter Berücksichtigung endlicher Temperaturen und höherer Bänder. So wird das Temperaturverhalten der Gase beim Transfer in verschiedene optische Gitter untersucht, Methoden für die Thermometrie im Gitter werden vorgestellt und schließlich exakte Ab-initio-Berechnungen der Dichteverteilungen mit ersten experimentellen Ergebnissen verglichen.

#### 7.2.1 Berücksichtigung angeregter Bänder

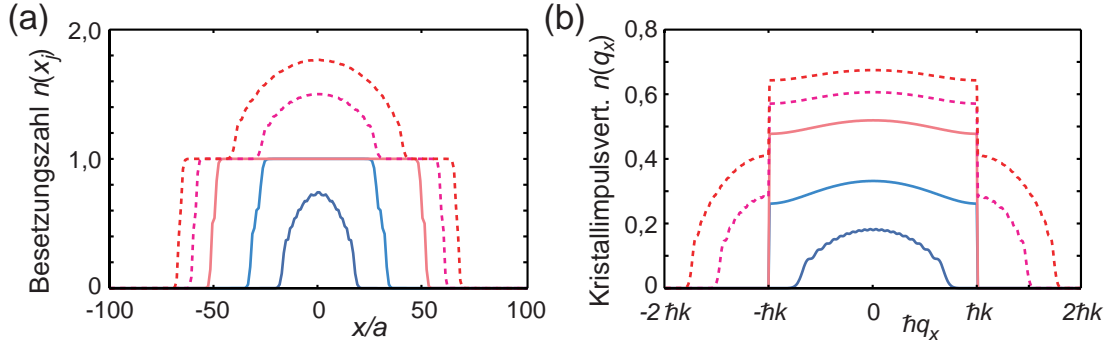
Durch räumliche Diskretisierung der Schrödinger-Gleichung 5.41 und anschließende Diagonalisierung lassen sich die exakten Eigenzustände des inhomogenen 1D-Gitters ermitteln. Ist das 1D-Gitter auf  $M$  Perioden beschränkt und wird jede Periode in  $m$  äquidistante Punkte unterteilt, so liefert die Diagonalisierung maximal  $M$  physikalisch relevante Eigenvektoren  $\mathbf{v}_n = \{\phi_n(x_1), \dots, \phi_n(x_{m \cdot M})\}$ , deren  $m \cdot M$  Einträge den Werten der Ortswellenfunktionen  $\phi_n(x)$  an den Orten  $x_l = l \cdot \frac{a}{m}$  entsprechen. Durch Fourier-Transformation der Eigenvektoren erhält man die zugehörigen *realen* Impulsverteilungen:

$$\tilde{\phi}_n(p) = \frac{1}{\sqrt{m \cdot M}} \sum_{l=1}^{m \cdot M} e^{-ipx_l} \phi_n(x_l). \quad (7.6)$$

Die Normierung ist so gewählt, dass  $\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\phi}_n(p)|^2 dp = 1$  gilt. Man beachte, dass die Amplitude  $\tilde{\phi}_n(p)$  mit der Anzahl der betrachteten Gitterplätze  $M$  variiert. Demgegenüber verhält sich die Amplitude bei einer hinreichend großen Anzahl  $m$  von Diskretisierungsschritten unabhängig von  $m$ .

Für die Charakterisierung wechselwirkungsfreier Fermionen in optischen Gittern ist deren Kristallimpulsverteilung von besonderer Bedeutung, so lassen sich aus ihr zum Beispiel die Populationen in den verschiedenen Bändern ermitteln. Experimentell wird die Kristallimpulsverteilung durch adiabatisches Abschalten des Gitters in einer Flugzeitmessung bestimmt (siehe Abschnitt 5.4.2). Bei diesem Detektionsverfahren werden die besetzten Einteilchenzustände  $\phi_n$  des inhomogenen Gitters auf „freie“ Bloch-Zustände projiziert. Gemäß Abschnitt 5.1.3 besteht jeder Bloch-Zustand aus einer Superposition von Impulszuständen, die jeweils  $2\hbar k$  auseinanderliegen. Die Kristallimpulsverteilung zu einem bestimmten Einteilchenzustand  $\phi_n$  errechnet sich durch Summation über die Beset-

## 7.2 Gleichgewichtseigenschaften



**Abbildung 7.5:** Exakt berechnete (a) Dichteverteilungen und (b) Kristallimpulsverteilungen im erweiterten Zonenschema für die fermionischen  $N$ -Teilchengrundzustände mit  $N = 20, 60, 100, 140$  und  $180$  in einem  $4 E_r$  tiefen 1D-Gitter ( $\lambda = 755$  nm) mit einem harmonischen Einschluss der Frequenz  $\omega_x = 2\pi \cdot 160$  Hz für  $^{40}\text{K}$ .

zungszahlen der äquidistanten Impulse  $p_\nu$ :

$$|\tilde{\phi}_n(q)|^2 = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |\tilde{\phi}_n(p_\nu = p_0 + 2\hbar k\nu)|^2 \quad (7.7)$$

Hierbei ist der Kristallimpuls  $\hbar q$  zum Beispiel durch den Impuls  $p_0$  festgelegt. Mit der folgenden Definition

$$\hbar q_{\text{red}} \equiv ((p_0 + \hbar k) \bmod 2\hbar k) - \hbar k \quad (7.8)$$

beschreibt die obige Formel die Kristallimpulsverteilung des Zustandes  $\phi_n$  im reduzierten Zonenschema. Um jedoch mit den Ergebnissen der Flugzeitmessungen verglichen werden zu können, müssen die berechneten Verteilungen im erweiterten Zonenschema dargestellt werden. Gehört der Zustand  $\phi_n$  dem  $n'$ -ten Band an, so muss dessen Verteilung in der  $n'$ -te Brillouin-Zone des erweiterten Zonenschemas angeordnet sein. Dies lässt sich durch die folgende, erweiterte Definition des Kristallimpulses erreichen:

$$\hbar q_{\text{ext}} \equiv \hbar q_{\text{red}} + (-1)^{(n'+1)} \text{sgn}(\hbar q_{\text{red}}) \lfloor \frac{n'}{2} \rfloor 2\hbar k. \quad (7.9)$$

Hierbei bezeichnet  $\lfloor x \rfloor$  die Abrundungsfunktion, die einer Zahl  $x$  die nächst kleinere ganze Zahl zuordnet. Zusammen mit Gleichung 7.7 ergibt dies die Kristallimpulsverteilung des Zustandes  $\phi_n$  im erweiterten Zonenschema. Wie die Einteilchenspektren auf Seite 157 verdeutlichen, weisen die Ortsverteilungen  $\phi_n(x)$  in einem hinreichend tiefen Gitter verbotene Bereiche auf. Daher erlauben die Ortsverteilungen eine Zuordnung der Einteilchenzustände  $\phi_n$  zu diskreten Bändern  $n'$ .

Um den Rechenaufwand – insbesondere für die spätere Erweiterung auf mehrdimensionale Gitter – zu minimieren, werden die Dichteverteilungen  $|\phi_n(x)|^2$  über die einzelnen Perioden  $a$  integriert, damit erhält man Vektoren der Länge  $M$ , welche die Besetzungszahlen der einzelnen Gitterplätze enthalten:  $\mathbf{w}_n = \{n_n(x_1), \dots, n_n(x_M)\}$ . Summiert man

## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern

die Verteilungen  $n_n(x_j)$  bzw.  $|\tilde{\phi}_n(q_x)|^2$  der  $N$  niederenergetischsten Einteilchenzustände, so erhält man schließlich die Dichte- und Kristallimpulsverteilungen der fermionischen  $N$ -Teilchengrundzustände. Abbildung 7.5 zeigt entsprechende Ergebnisse für verschiedene Teilchenzahlen  $N$ . In dem Beispiel setzt ab einer Teilchenzahl von  $N = 103$  eine Bevölkerung der angeregten Bänder  $n' > 1$  ein. Im Ortsraum führt dies zu einer Mehrfachbesetzung der zentralen Gitterplätze (Ausbildung einer Schalenstruktur) und im Kristallimpulsraum zu einer Bevölkerung der höheren Brillouin-Zonen.

### 7.2.2 Berücksichtigung endlicher Temperaturen

Bei endlichen Temperaturen  $T$  errechnen sich die Verteilungen der  $N$ -Teilchenzustände durch Summation über die Beiträge sämtlicher Einteilchenzustände, wobei diese mit der Fermi-Dirac-Verteilung  $f(\epsilon_n)$  (Gl. 2.27) gewichtet werden:

$$n(x_j) = \sum_n f(\epsilon_n) n_n(x_j) \quad \text{und} \quad n(q_x) = \sum_n f(\epsilon_n) |\tilde{\phi}_n(q_x)|^2. \quad (7.10)$$

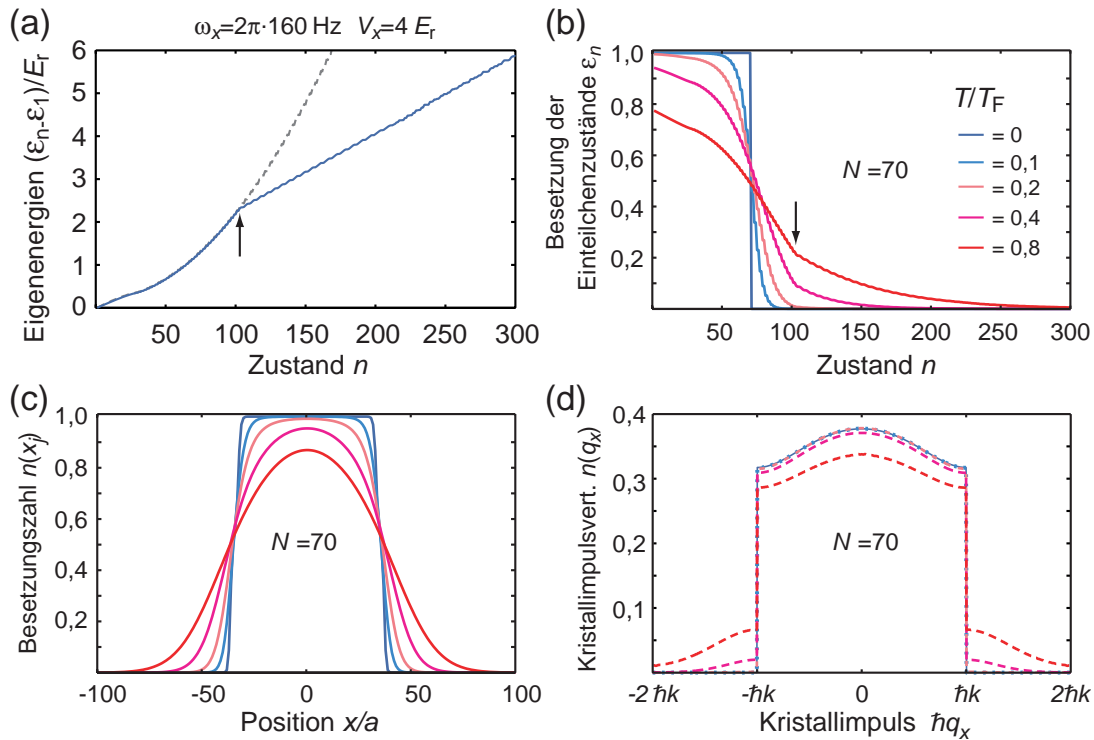
Dabei ist das chemische Potential  $\mu$  über die Gesamtteilchenzahl  $N = \sum_n f(\epsilon_n)$  festgelegt. Bei der Diagonalisierung der Schrödinger-Gleichung muss die Anzahl der Gitterplätze  $M$  und damit die Anzahl der berücksichtigten Einteilchenzustände so groß gewählt werden, dass die Fermi-Dirac-Verteilung im Bereich der energiereichsten Zustände auf ein vernachlässigbares Maß abgefallen ist.

Für ein Fermigas fester Teilchenzahl werden in Abbildung 7.6 die theoretischen Dichte- und Kristallimpulsverteilungen bei verschiedenen Temperaturen dargestellt. Im Grundzustand (blau) liegt das Vielteilchensystem vorwiegend in Form eines Bandisolators vor, der sich mit zunehmender Temperatur rasch auflöst. Demgegenüber zeigt die Kristallimpulsverteilung zunächst nur eine geringe Temperaturabhängigkeit. Erst wenn die thermische Energie ausreicht, um Teilchen in höhere Bänder anzuregen, findet eine deutliche Umverteilung statt. Die Bevölkerung der angeregten Bänder kann unmittelbar an den höheren Brillouin-Zonen abgelesen werden.

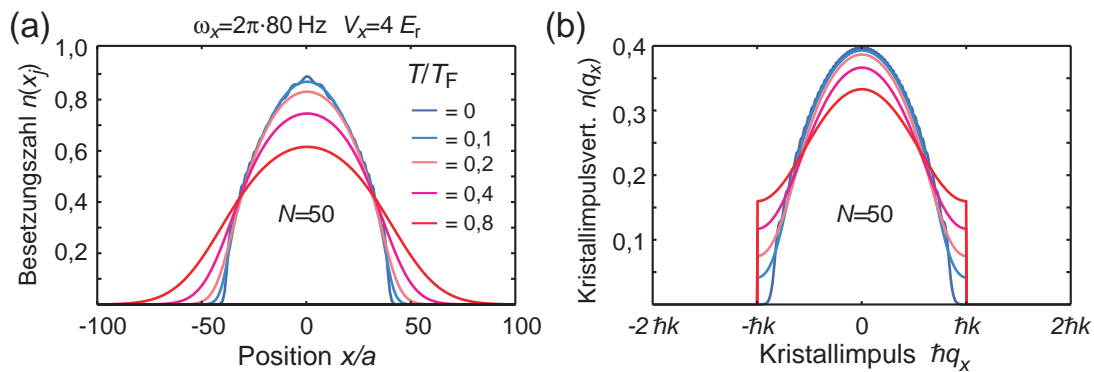
Zur Gegenüberstellung sind in Abbildung 7.7 die Verteilungen für ein Gas mit kleiner Teilchenzahl  $N$  und bei schwachem externen Einschluss dargestellt. Die Systemparameter sind gerade so gewählt, dass der Vielteilchengrundzustand kurz davor steht, einen Bandisolator im Zentrum des Gitters auszubilden ( $N \lesssim N_c$ ). Hierdurch führt bereits eine kleine Temperaturerhöhung zu einer Bevölkerung von lokalisierten Einteilchenzuständen, was mit einer signifikanten Veränderung der Populationen an den Rändern der ersten Brillouin-Zone einhergeht.

Die Ergebnisse in Abbildung 7.7 verdeutlichen, dass die Kristallimpulsverteilung im Allgemeinen keine direkte Auskunft über die Besetzungszahlen der Gitterplätze gibt. So können bei endlichen Temperaturen die Brillouin-Zonen-Ränder bevölkert sein, ohne dass ein Bandisolator vorliegt. Im Rahmen dieser Arbeit durchgeführte Berechnungen zeigen jedoch, dass auch bei endlichen Temperaturen universelle Beziehungen zwischen dem Bandisolatoranteil  $R_{BI}$  und dem Anteil  $R_{BZ}$  der Atome in den Brillouin-Zonen-Rändern

## 7.2 Gleichgewichtseigenschaften



**Abbildung 7.6:** (a) Exakt berechnetes Einteilchenspektrum für  $^{40}\text{K}$  in einem 1D-Gitter mit  $V_x = 4 E_r$  und  $\omega_x = 2\pi \cdot 160 \text{ Hz}$ . Der gestrichelte Verlauf zeigt das Spektrum im Rahmen der Tight-Binding-Näherung. Der niederenergetischste Zustand des zweiten Bandes liegt bei  $n = 103$  und ist durch einen Pfeil gekennzeichnet. (b) Besetzung der Einteilchenzustände in einem Gas aus  $N = 70$  Teilchen bei verschiedenen Temperaturen sowie zugehörige (c) Dichte- und (d) Kristallimpulsverteilungen.



**Abbildung 7.7:** (a) Dichte- und (b) Kristallimpulsverteilungen für ein Gas aus  $N = 50$   $^{40}\text{K}$ -Atomen bei verschiedenen Temperaturen in einem  $4 E_r$  tiefen 1D-Gitter mit schwachem externen Einschluss ( $\omega_x = 2\pi \cdot 80 \text{ Hz}$ ). In diesem Gitter bildet der Vielteilchengrundzustand erst für  $N \geq 53$  einen Bandisolator aus.

## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern

---

bestehen<sup>4</sup>. In Übereinstimmung mit Abschnitt 7.1.2 hängen diese Beziehungen nicht von den Gitterparametern ab, sondern nur von der relativen Temperatur  $T/T_F$ . Im Vergleich zu Abbildung 7.4 verschiebt sich der Verlauf der Funktion  $R_{\text{BI}}(R_{\text{BZ}})$  mit zunehmendem  $T/T_F$  nach rechts, dabei nimmt die Steigung zu und der maximal erreichbare Anteil von Atomen im Bandisolator  $R_{\text{BI}}^{\text{max}}$  ab.

### 7.2.3 Thermometrie im Gitter

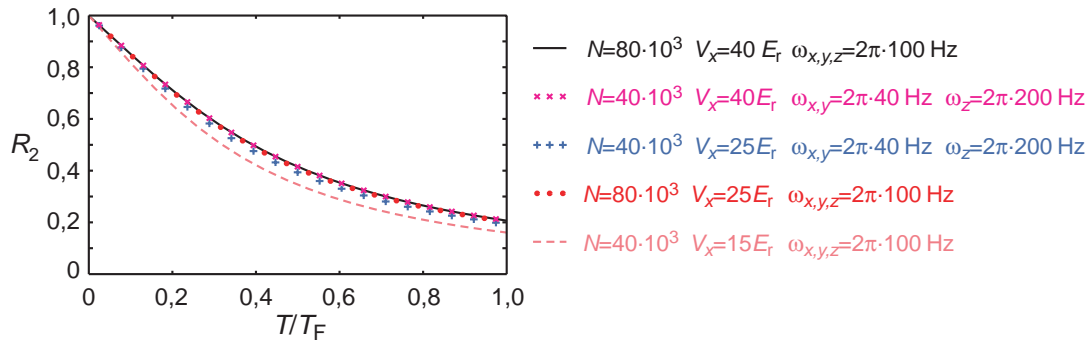
Eine wichtige Voraussetzung, um die Phasendiagramme von fermionischen Atomen in optischen Gittern experimentell abbilden und charakterisieren zu können, ist eine präzise Kontrolle und Bestimmung der Temperaturen im Gitter. Wie wir im Zusammenhang mit Abbildung 7.6 und 7.7 gesehen haben, weist die Kristallimpulsverteilung des idealen Fermigases genau dann ein besonders empfindliches Temperaturverhalten auf, wenn die Fermi-Energie knapp unter der Energie des ersten lokalisierten Einteilchenzustandes bzw. dem zweiten Energieband liegt. In den Spektren auf Seite 158 entspricht dies dem Übergang von Bereich A nach B bzw. B nach C. In diesen Übergangsbereichen bietet sich die Kristallimpulsverteilung für eine präzise Temperaturbestimmung an. Dazu vergleicht man die experimentell gemessenen Kristallimpulsverteilungen mit den Ergebnissen exakter Ab-initio-Berechnungen. In der Regel lassen sich die Gitterparameter so an die jeweiligen Teilchenzahlen anpassen, dass die Fermi-Energie in einem der beiden temperaturempfindlichen Bereiche liegt. Hat man die Temperatur an einem solchen Punkt bestimmt und geht man von adiabatischen Veränderungen der Potentiale aus, so lassen sich die Temperaturen bei anderen Gitterparametern aus den gemessenen Werten berechnen. Solche Berechnungen werden im folgenden Abschnitt 7.2.4 dargestellt.

Bei einem wechselwirkungsfreien Fermigas, das aus zwei Spinanteilen mit jeweils  $N$  Atomen besteht, kann die Temperatur auch über den Anteil der doppelt besetzten Gitterplätze bestimmt werden [219, 268]. Sind beide Spezies gemäß derselben Fermi-Dirac-Verteilung  $f(\epsilon_n)$  (Gl. 2.27) über die Einteilcheneigenzustände  $\epsilon_n$  verteilt, so ergibt sich die Anzahl der doppelt besetzten Einteilchenzustände und damit (im Mittel) der doppelt besetzten Gitterplätze zu  $N_2 = \sum_n f(\epsilon_n)^2$ . Die Summe läuft über sämtliche Einteilchenzustände und lässt sich leicht numerisch auswerten. In Abbildung 7.8 sind entsprechende Ergebnisse für verschiedene 3D-Gitter dargestellt. Die Graphen zeigen, dass der Anteil  $R_2 = N_2/N$  der doppelt besetzten Gitterplätze ein starkes Temperaturverhalten aufweist und sich somit zur Temperaturbestimmung eignet. In sehr tiefen Gittern ( $V_{x,y,z} \gtrsim 25 E_r$ ) weist  $R_2$  einen universellen Temperaturverlauf auf. Demgegenüber muss in flacheren Gittern der Verlauf von  $R_2$  für jede Kombination von Systemparametern (Gittertiefen, Fallenfrequenzen und Teilchenzahlen) eigens berechnet werden. Damit die Wechselwirkungen zwischen den beiden Spinkomponenten tatsächlich vernachlässigbar sind, müssen diese über eine Feshbach-Resonanz abgeschaltet werden. Mit derselben Feshbach-Resonanz

---

<sup>4</sup>Wie in Abschnitt 7.1.2 gelten diese universellen Beziehungen nur im Rahmen des Tight-Binding-Ansatzes, also bei einer ausschließlichen Bevölkerung des untersten Bandes.

## 7.2 Gleichgewichtseigenschaften



**Abbildung 7.8:** Die numerischen Resultate zeigen den Anteil  $R_2 = N_2/N$  der doppelt besetzten Gitterplätze als Funktion der relativen Temperatur  $T/T_F$  für verschiedene 3D-Gitter und Teilchenzahlen  $N$ .

lassen sich zudem die Atompaare auf den doppelt besetzten Gitterplätzen in Moleküle umwandeln<sup>5</sup>. Auf diese Weise konnte in Referenz [268] über die Anzahl der in einer Spinnmischung erzeugten Moleküle auf den Anteil der doppelt besetzten Gitterplätze und damit letztlich auf die Temperatur der Spinnmischung im Gitter zurückgeschlossen werden.

### 7.2.4 Temperaturentwicklung beim Transfer ins Gitter

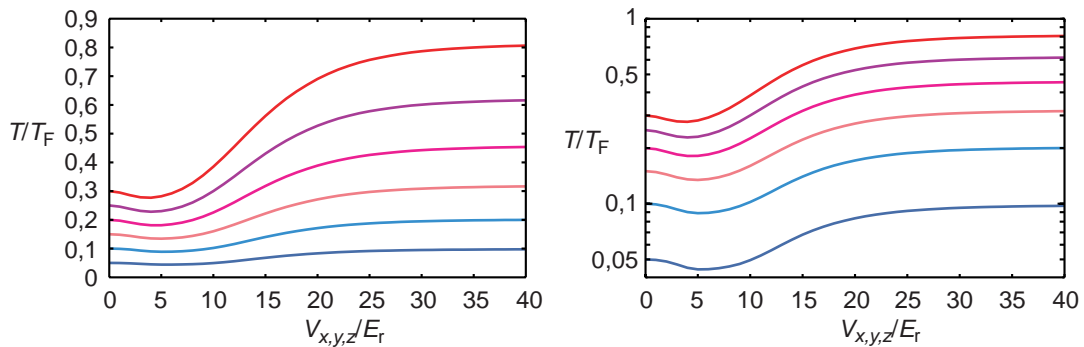
Der Transfer eines Fermigas aus einer harmonischen Falle in ein optisches Gitter geht in der Regel mit einer signifikanten Veränderung der Zustandsdichte einher, wodurch das Gas entweder adiabatisch geheizt oder gekühlt wird. In diesem Abschnitt werden, ausgehend von den numerisch exakt ermittelten Einteilchenspektren, die Temperaturentwicklungen idealer Fermigase beim Transfer in verschiedene Gitterkonfigurationen berechnet. Es wird gezeigt, dass Fermigase durch die Wahl geeigneter Fallenparameter beim Transfer in blauverstimmte Gitter – statt dem üblichen Aufheizen – geringfügig adiabatisch gekühlt werden können. Dies ist von besonderer Bedeutung für die Realisierung fermionischer Quantenphasen, welche sich erst bei sehr niedrigen Temperaturen im Gitter ausbilden.

Werden die Gitterparameter langsam genug verändert, so kann das Vielteilchensystem der Entwicklung der Einteilchenzustände adiabatisch folgen und verbleibt jederzeit im thermischen Gleichgewicht. Das abgeschlossene System entwickelt sich dann entlang eines Pfades konstanter Entropie  $S(T, V_{x,y,z}, \omega_{x,y,z}, N) = S_0$ . Ausgehend von den numerisch exakt ermittelten Einteilchenspektren des inhomogenen 3D-Gitters errechnen wir mittels Gleichung 5.54 die Entropie des idealen Fermigas für verschiedene Gitterparameter. Hieraus folgt durch numerische Inversion der Temperaturverlauf  $T(S_0, V_{x,y,z}, \omega_{x,y,z}, N)$  als Funktion der adiabatisch veränderten Gitterparameter.

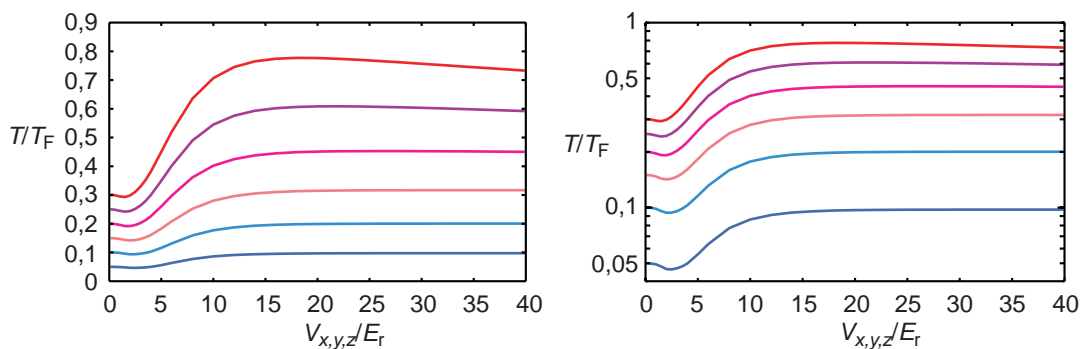
<sup>5</sup>Um Molekülverluste durch inelastische Stöße zu vermeiden, bietet es sich an, vor der Erzeugung der Moleküle die Gittertiefe abrupt zu erhöhen.

## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern

Im Folgenden betrachten wir ein ideales Fermigas aus  $50 \cdot 10^3$  Atomen, das durch langsames Erhöhen der Gittertiefe adiabatisch aus einer harmonischen Falle in ein blau- bzw. rotverstimmtes 3D-Gitter geladen wird. Die Abbildungen 7.9 und 7.10 zeigen die zugehörigen (isentropischen) Temperaturverläufe für verschiedene Ausgangstemperaturen. Die Parameter des blauverstimmten Gitters entsprechen denen in unserem Aufbau und die Parameter des rotverstimmten Gitters entsprechen denen aus Referenz [219, 268]. Beim blauverstimmten Gitter macht man sich die Tatsache zunutze, dass der externe Einschluss unabhängig von der Gittertiefe verändert werden kann. So wird in Abbildung 7.9 das ex-



**Abbildung 7.9:** Temperaturentwicklung eines idealen Fermigases beim adiabatischen Einladen in ein blauverstimmtes 3D-Gitter ( $\lambda = 755$  nm). Während des Transfers der  $50 \cdot 10^3$  Atome ( $^{40}\text{K}$ ) wird der externe Einschluss konstant gehalten ( $\omega_{x,y} = 2\pi \cdot 40$  Hz und  $\omega_z = 2\pi \cdot 200$  Hz). Die berechneten Daten sind bezüglich einer linearen und einer logarithmischen Skala dargestellt.



**Abbildung 7.10:** Temperaturentwicklung desselben Fermigases beim adiabatischen Einladen in ein rotverstimmtes 3D-Gitter ( $\lambda = 826$  nm) mit Strahltaillen von  $70 \mu\text{m}$ . In der harmonischen Ausgangsfalle betragen die Fallenfrequenzen  $\omega_{x,y,z} = 2\pi \cdot 36,6$  Hz. Während des Transfers nimmt der externe Einschluss gemäß Gleichung 4.31 mit der Gittertiefe zu. Die berechneten Daten sind bezüglich einer linearen und einer logarithmischen Skala dargestellt.



## 7.2 Gleichgewichtseigenschaften

---

terne Potential so an die jeweilige Gittertiefe angepasst, dass die Fallenfrequenzen zu jeder Zeit mit denen in der harmonischen Ausgangsfalle übereinstimmen. Im Gegensatz hierzu nimmt das externe Potential des rotverstimmten Gitters in Abbildung 7.10 linear mit der Gittertiefe zu.

Sowohl im blau- als auch im rotverstimmten Gitter fällt die relative Temperatur  $T/T_F$  mit zunehmender Gittertiefe geringfügig ab, bevor sie rasch ansteigt und schließlich gegen einen konstanten Wert strebt. In Übereinstimmung mit der Sommerfeld-Näherung aus Abschnitt 5.3.2 zeigen die numerischen Ergebnisse, dass das Einladen des Fermigases ins tiefe Gitter zu einer Verdopplung von  $T/T_F$  führt. Doch für Ausgangstemperaturen oberhalb von  $\sim 0,1T_F$  zeigen die exakten Berechnungen einen stärkeren Temperaturanstieg. Hier verliert die Sommerfeld-Näherung ihre Gültigkeit.

Das schwache Abklingen der Temperatur zu Beginn der Gitterrampe ist darauf zurückzuführen, dass mit der Tunnelrate  $J$  auch die kinetische Energie der Teilchen abnimmt. Da jedoch die Fermi-Energie in einem vergleichbaren Maße abnimmt, ist das Abklingen der relativen Temperatur  $T/T_F$  gering. Dieser schwache Kühleffekt wurde für den adiabatischen Transfer in perfekt periodische Potentiale vorausgesagt [218], kann aber auch in inhomogenen Gittern auftreten, vorausgesetzt die Tunnelrate  $J$  ist groß gegenüber den potentiellen Energien der Teilchen. Ab einer gewissen Gittertiefe wird diese Bedingung nicht mehr erfüllt und die relative Temperatur steigt an. Der Temperaturanstieg setzt umso später im Verlauf der Rampe ein, je schwächer der externe Einschluss, je kleiner die Teilchenzahl und je niedriger die Ausgangstemperatur ist. Um möglichst niedrige Temperaturen im Gitter zu erzielen, bietet es sich daher an, einen anisotropen externen Einschluss zu wählen, bei dem die Atome durch einen vertikalen Gradienten gegen die Schwerkraft gehalten werden, ansonsten aber nur einen schwachen Einschluss verspüren. Die Temperatur erreicht ihr Maximum, wenn alle Teilchen auf einzelnen Gitterplätzen lokalisiert sind (siehe Abschnitt 5.3.2).

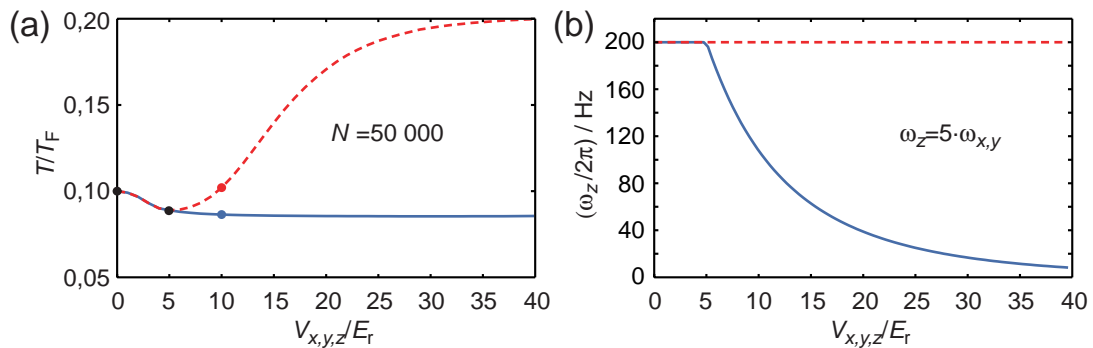
Um ein adiabatisches Aufheizen des Gases zu vermeiden, muss die Lokalisierung der Teilchen verhindert werden. Dies lässt sich in blauverstimmten Gittern erreichen, indem man das externe Potential im selben Maße verringert, wie die Tunnelrate  $J$  abnimmt. Bezeichnet  $V^{(0)}$  die Gittertiefe, bei der die relative Temperatur ihren minimalen Wert  $(T/T_F)_0$  annimmt und sind  $\omega_\nu^{(0)}$  die zugehörigen Fallenfrequenzen, so müssen im weiteren Verlauf der Rampe die Fallenfrequenzen, wie folgt an die Gittertiefen  $V > V^{(0)}$  angepasst werden:

$$\omega_\nu = \omega_\nu^{(0)} \cdot \sqrt{J(V)/J(V^{(0)})} \quad \nu \in \{x, y, z\}. \quad (7.11)$$

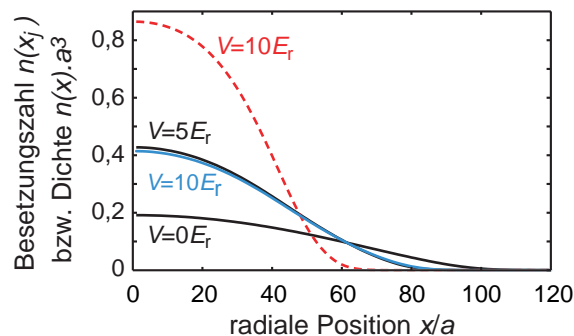
Der in Abbildung 7.11a dargestellte Temperaturverlauf (durchgehende Kurve) bestätigt, dass die minimale Temperatur  $(T/T_F)_0$  erhalten bleibt, wenn die Fallenfrequenzen gemäß Gleichung 7.11 an die Gittertiefen  $V > V^{(0)}$  angepasst werden. Zur Gegenüberstellung zeigt der gestrichelte Verlauf die Temperaturentwicklung desgleichen Systems bei konstantem externen Einschluss.

## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern

Die radialen Dichteprofile in Abbildung 7.12 verdeutlichen, wie sich die atomaren Verteilungen im Laufe der beiden Gitterrampen verändern. Zu Beginn der Rampen findet eine besonders starke Umverteilung in Richtung Fallenzentrum statt. Entsprechend langsam müssen hier die Gittertiefen verändert werden, um einen adiabatischen Transfer zu gewährleisten (siehe auch Abschnitt 5.3.3). Bei der Rampe mit konstantem externen Einschluss nimmt die Dichte immer weiter zu, bis die zentralen Gitterplätze jeweils einfach besetzt werden. Betrachtet man hingegen die Rampe mit variablem externen Einschluss, so verändert sich die Dichteverteilung jenseits von  $V^{(0)}$  nur noch geringfügig. Dies ist darauf zurückzuführen, dass mit der Anpassung der Fallenfrequenzen an die Gittertiefen konstante charakteristische Längen  $\xi_\nu$  (Gl. 7.3) einhergehen. Im Experiment kann der ex-



**Abbildung 7.11:** (a) Theoretische Temperaturentwicklung eines idealen Fermigases beim Transfer in ein blauverstimmtes Gitter mit konstantem (gestrichelt) bzw. variablem (durchgehend) externen Einschluss. Im Fall des konstanten Einschlusses stimmen die Systemparameter mit denen in Abbildung 7.9 überein. In (b) sind die zugehörigen Fallenfrequenzen als Funktion der Gittertiefe dargestellt. Das Temperaturminimum  $(T/T_F)_0$  wird bei einer Tiefe von  $V^{(0)} \approx 5 E_r$  erreicht. Zu den vier in (a) markierten Punkten zeigt Abbildung 7.12 die zugehörigen Dichteprofile.



**Abbildung 7.12:** Radiale Dichteprofile ( $z = 0$ ) des Fermigases beim Transfer ins optische Gitter für die vier in Abbildung 7.11a markierten Punkte.

## 7.2 Gleichgewichtseigenschaften

---

terne Einschluss nicht beliebig herabgesetzt werden, da die Atome gegen die Schwerkraft gehalten werden müssen. Hier kommt uns in unserem Aufbau jedoch die Anisotropie der externen Dipolfalle zugute. Ein Vergleich mit Abbildung 4.3d auf Seite 122 zeigt, dass die vertikale Fallenfrequenz  $\omega_z$  einen Wert von etwa  $2\pi \cdot 100$  Hz nicht unterschreiten darf. Gemäß Abbildung 7.11b ist damit eine Anpassung des externen Einschlusses bis hin zu Gittertiefen von etwa  $10 E_r$  möglich.

Abbildung 7.10 zeigt die Temperaturentwicklung für ein rotverstimmtes Gitter, wie es in den Experimenten von Referenz [219, 268] eingesetzt wird. Dieselben Systemparameter werden in Referenz [219] im Rahmen der Tight-Binding-Näherung untersucht. Vergleicht man die dortigen Temperaturverläufe (Abbildung 1) mit denen aus Abbildung 7.10, so werden zwei wesentliche Unterschiede deutlich:

Erstens weisen die aus dem Tight-Binding-Ansatz abgeleiteten Temperaturverläufe für kleine Ausgangstemperaturen lokale Maxima im Bereich des flachen Gitters auf. Demgegenüber zeigen die exakten Berechnungen in Abbildung 7.10 weitaus gleichmäßigere Temperaturverläufe, die für  $V \rightarrow 0$  stetig in die Ausgangstemperaturen übergehen. Tatsächlich zeigt eine genauere Analyse, dass der Tight-Binding-Ansatz für das flache Gitter ( $V \lesssim 6 E_r$ ) kleine, aber systematische Abweichungen in den Energiespektren ergibt. Da die Fehler im unteren Energiebereich an Bedeutung gewinnen, weisen die Temperaturverläufe mit den kleinsten Ausgangstemperaturen die stärksten Abweichungen auf. Es sei darauf hingewiesen, dass bei den untersten Temperaturverläufen thermische Populationen in angeregten Bändern noch keine Rolle spielen.

Zweitens sagen die Tight-Binding-Berechnungen in Referenz [219] eine Sättigung der relativen Temperatur im tiefen Gitter voraus, wohingegen die obersten in Abbildung 7.10 dargestellten Kurven eine leichte Abnahme von  $T/T_F$  aufzeigen. Eine genauere Analyse des fermionischen Systems zeigt, dass die Temperaturabnahme auf eine Bevölkerung höherer Bänder zurückzuführen ist. Durchläuft das System die oberste in Abbildung 7.10 dargestellte Temperaturkurve, so nimmt die Bevölkerung der angeregten Bänder in etwa linear mit der Gittertiefe bis auf circa ein halbes Prozent der Gesamtteilchenzahl zu. Dies macht deutlich, dass bereits kleinste Populationen in angeregten Bändern einen wesentlichen Einfluss auf das Temperaturverhalten des Gases haben.

Zusammenfassend stellen wir fest, dass der Tight-Binding-Ansatz, aufgrund seiner mangelnden Genauigkeit im flachen Gitter und der Beschränkung auf das unterste Band, für präzise Temperaturberechnungen im Allgemeinen ungeeignet ist.

Ähnliche Ergebnisse werden in Referenz [198] vorgestellt. Dort schlagen die Autoren vor, gezielt größere Populationen in angeregten Bändern zu präparieren, um somit einen Anstieg von  $T/T_F$  beim Transfer ins tiefe Gitter zu unterdrücken. Wie wir in Abschnitt 5.2.2 (Seite 161) gesehen haben, verhindern dann jedoch extrem langsame Umverteilungsprozesse zwischen den Bändern ein adiabatisches Einladen innerhalb experimentell realistischer Zeitskalen [214]. Um Anregungen und nicht-adiabatische Heizprozesse zu unterdrücken, müssen demnach sowohl direkte als auch thermische Besetzungen höherer

## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern

---

Bänder vermieden werden.

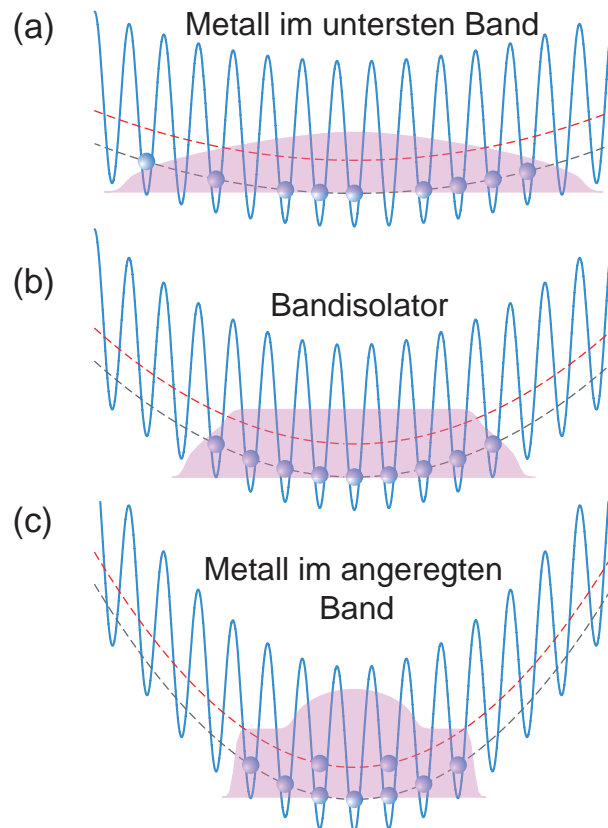
Die in etwa linear anwachsenden Populationen in den angeregten Bändern des rotverstimmten Gitters sind auf den mit der Gittertiefe zunehmenden externen Einschluss zurückzuführen. Bei dem betrachteten blauverstimmten Gitter wird der externe Einschluss konstant gehalten. Folglich erwarten wir hier keine Zunahme der Populationen in den angeregten Bändern. Tatsächlich zeigen die theoretischen Temperaturverläufe in Abbildung 7.9 eine Sättigung von  $T/T_F$  im tiefen Gitter, wie dies im Rahmen der Tight-Binding-Näherung – also bei einer ausschließlichen Bevölkerung des untersten Bandes – vorausgesagt wird. In Prinzip lässt sich der externe Einschluss bei blauverstimmten Gittern immer so an die jeweiligen Teilchenzahlen und Temperaturen anpassen, dass keine Populationen in den angeregten Bändern auftreten. Auf diese Weise lassen sich die Adiabazitätsbedingungen an die Gitterrampe deutlich entschärfen.

### 7.2.5 Ab-initio-Berechnungen und experimentelle Ergebnisse

Die Kombination einer rotverstimmten Dipolfalle und eines blauverstimmten Gitters ermöglicht es uns, den externen Einschluss unabhängig von der Gittertiefe zu verändern und somit Atomwolken in einem konstanten periodischen Potential zu komprimieren. Abbildung 7.13 illustriert das Verhalten eines idealen entarteten Fermigases im Laufe einer solchen Kompression. Ausgehend von einer rein metallischen Phase bildet sich mit zunehmendem externen Einschluss im Zentrum des Gitters ein inkompressibler Bandisolator mit einfach besetzten Gitterplätzen ( $n_j = 1$ ) aus. Die den Bandisolator umgebende metallische Phase ( $n_j < 1$ ) wird mit zunehmendem Einschluss immer dünner. Betrachtet man dasselbe System bei endlichen Temperaturen, so fallen die Besetzungszahlen an den Rändern kleiner aus und dementsprechend größer ist die Ausdehnung des Gases. Bei geringen Gittertiefen und hinreichend großen Teilchenzahlen lässt sich der externe Einschluss so weit erhöhen, dass schließlich die potentielle Energie der äußersten Teilchen ausreicht, um durch Landau-Zener-Tunneln in höhere Bänder überzugehen. Von diesem Punkt an nimmt die zentrale Dichte wieder zu, und im Zentrum des Bandisolators bildet sich ein metallischer Kern aus mehrfach besetzten Gitterplätzen ( $n_j > 1$ ).

Für unser Experiment wird zunächst ein spinpolarisiertes Fermigas mit  $2,4(2) \cdot 10^5$   $^{40}\text{K}$ -Atomen und einer Temperatur von  $T/T_F = 0,25(3)$  in einer rotverstimmten Dipolfalle mit oblater Fallengeometrie ( $\alpha = \omega_z/\omega_r \approx 5$ ) präpariert. Durch s-förmiges Hochfahren der Laserintensitäten dreier orthogonaler und blauverstimmter Stehwellen wird das Gas adiabatisch in ein 3D-Gitter der Tiefe  $V_{x,y,z} = 4,0(1) E_r$  transferiert. Eine detailliertere Beschreibung der experimentellen Präparation und der Fallenparameter findet sich auf Seite 311. Die Temperaturentwicklung beim Hochfahren des Gitters lässt sich anhand der theoretischen Verläufe in Abbildung 7.15a abschätzen.

Ausgangspunkt für das eigentliche Experiment ist das Fermigas im  $4 E_r$ -tiefen Gitter. In einer Serie von Messungen wird die Intensität der Dipolfalle von einem festen Ausgangs-



**Abbildung 7.13:** Kompression eines idealen entarteten Fermigas in einem Gitter konstanter Tiefe. **(a)** Bei einem schwachen externen Potential (harmonische Einhüllende) liegt das atomare Gas in Form einer ausgedehnten metallischen Phase vor. Die Besetzungszahlen der Gitterplätze (violette Verteilung) sind kleiner als eins. **(b)** Mit zunehmendem externen Einschluss bildet sich im Zentrum des Gitters ein inkompressibler Bandisolator mit einfach besetzten Plätzen aus. **(c)** Bei sehr starkem Einschluss können die Teilchen schließlich durch Landau-Zener-Übergänge in höhere Bänder (rot gestrichelt) tunneln. Es formt sich ein kompressibler metallischer Kern aus mehrfach besetzten Plätzen.

wert s-förmig auf verschiedene Endwerte erhöht und dadurch das Fermigas unterschiedlich stark komprimiert. Um die Kompression so adiabatisch wie möglich durchzuführen, beträgt die Dauer der s-förmigen Rampe 100 ms. Am Ende einer jeden Sequenz wird die resultierende Kristallimpulsverteilung mittels der in Abschnitt 5.4.2 beschriebenen adiabatischen Abbildungstechnik ermittelt. Dazu werden die optischen Stehwellen innerhalb von 1 ms auf null heruntergefahren und schließlich die Atome aus der Dipolfalle entlassen. Nach 10 ms freier Expansion werden die Atome entlang ihrer Fallrichtung ( $z$ ) abgebildet. Abbildung 7.14c zeigt eine Serie solcher Absorptionsschichten für zunehmenden externen Einschluss. Die Stärke des Einschlusses wird über die radiale Fallenfrequenz  $\omega_r/2\pi$

## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern

---

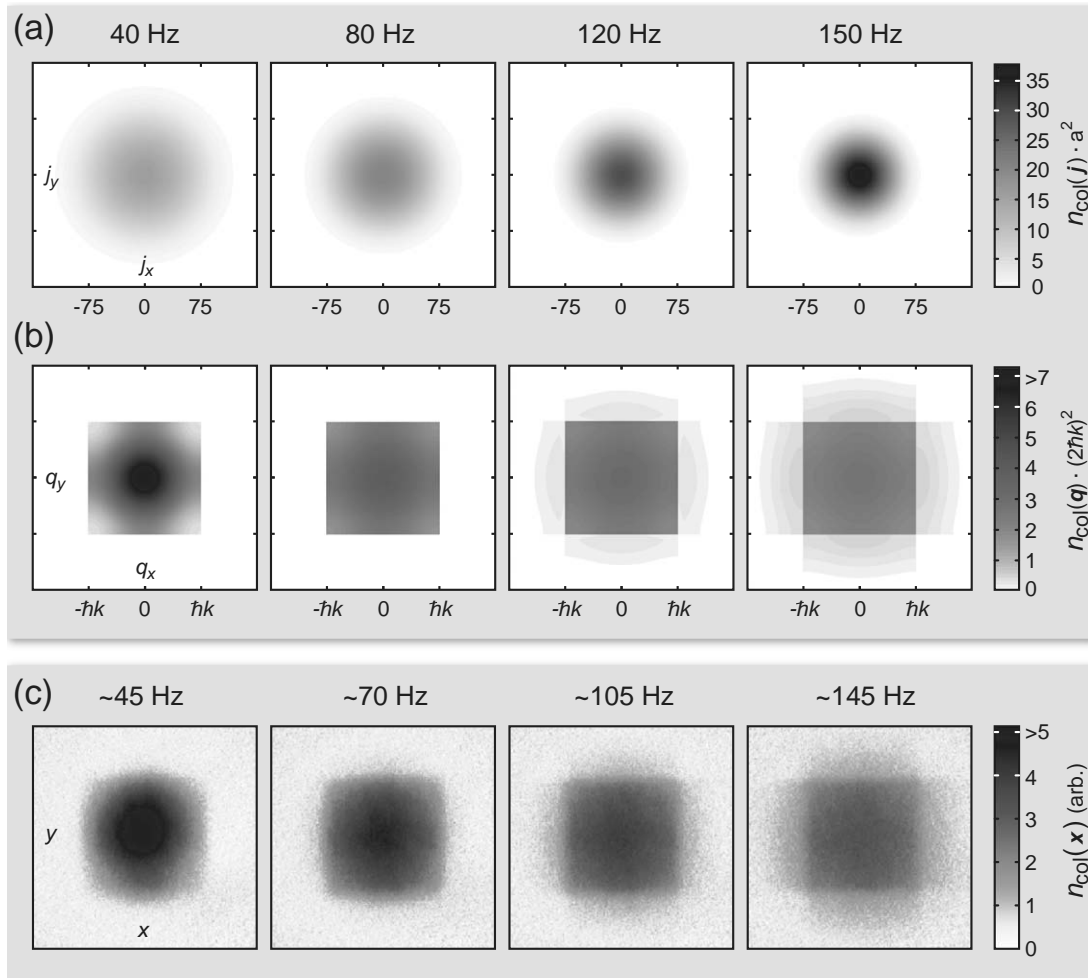
spezifiziert und im Experiment zwischen 40(4) und 145(15) Hz variiert. Da die Fallenfrequenzen nur bei einer bestimmten Dipolfalltiefe gemessen wurden, müssen die Frequenzen bei anderen Fallentiefen aus diesen Werten, den eingestrahelten Intensitäten und den Strahlparametern abgeleitet werden. Die absolute Unsicherheit der angegebenen Frequenzen wird auf 10 % geschätzt.

Die Absorptionsoptionen in Abbildung 7.14c spiegeln die Kristallimpulsverteilungen der Atome im optischen Gitter wider. Die anfangs noch runden Fermi-Flächen nehmen mit zunehmendem externen Einschluss die rechteckige Form der ersten Brillouin-Zone an. Dabei bildet sich im Zentrum des Gitters ein Bandisolator aus. Man beachte, dass die Fermi-Flächen aufgrund der Inhomogenität des periodischen Potentials selbst bei  $T = 0$  keine scharfen Kanten aufweisen (siehe Abbildung 7.18). Bei weiterer Kompression ragen die Fermi-Flächen schließlich über die erste Brillouin-Zone hinaus. Dies entspricht Teilchen in angeregten Bändern. Mit den hier vorgestellten Messungen gelingt es erstmals, ein Fermigas bei konstanter Teilchenzahl und Gittertiefe allein durch dessen Kompression von einem metallischen Zustand in einen Bandisolator zu überführen und schließlich einen metallischen Zustand in angeregten Bändern zu erzeugen [51, 52].

Die numerischen Methoden aus den vorherigen Abschnitten gestatten es uns, die exakten Dichte- und die Kristallimpulsverteilungen der  $\sim 2,5 \cdot 10^5$   $^{40}\text{K}$ -Atome im optischen Gitter zu berechnen und ohne Anpassung freier Parameter direkt mit den experimentellen Messungen zu vergleichen. Für die Berechnung der Verteilungen müssen zunächst die adiabatischen Temperaturentwicklungen beim Einladen ins optische Gitter und bei der anschließenden Kompression ermittelt werden. Entsprechende Ergebnisse sind in Abbildung 7.15 dargestellt. Bei der Kompression im  $4 E_r$ -tiefen Gitter kommt es zunächst zu einem Anstieg der relativen Temperatur, der auf die zunehmende potentielle Energie und die zunehmende Lokalisierung der Teilchen zurückzuführen ist. Man beachte, dass im Gegensatz hierzu die Kompression in einer rein harmonischen Falle keine Veränderung von  $T/T_F$  hervorruft. Sobald nennenswerte Populationen in höheren Bändern auftreten – was umso früher der Fall ist, je höher die Ausgangstemperaturen sind – nimmt die relative Temperatur wieder ab. Dies deckt sich mit den Ergebnissen des vorherigen Abschnitts.

Für die Berechnungen der Verteilungen gehen wir davon aus, dass das Gas aus genau  $2,5 \cdot 10^5$   $^{40}\text{K}$ -Atomen besteht und im  $4 E_r$ -tiefen Gitter mit einer Anfangs-Fallenfrequenz von  $\omega_r/2\pi = 40$  Hz eine Temperatur von  $T/T_F = 0,25$  annimmt. Im Rahmen der Fehlergrenzen stimmen diese Daten mit den experimentellen Werten überein. In Abbildung 7.14 a und b sind die numerischen Ergebnisse für die Säulendichten im Gitter und die zugehörigen Kristallimpulsverteilungen im erweiterten Zonenschema dargestellt. Die berechneten und gemessenen Kristallimpulsverteilungen zeigen eine relativ gute Übereinstimmung.

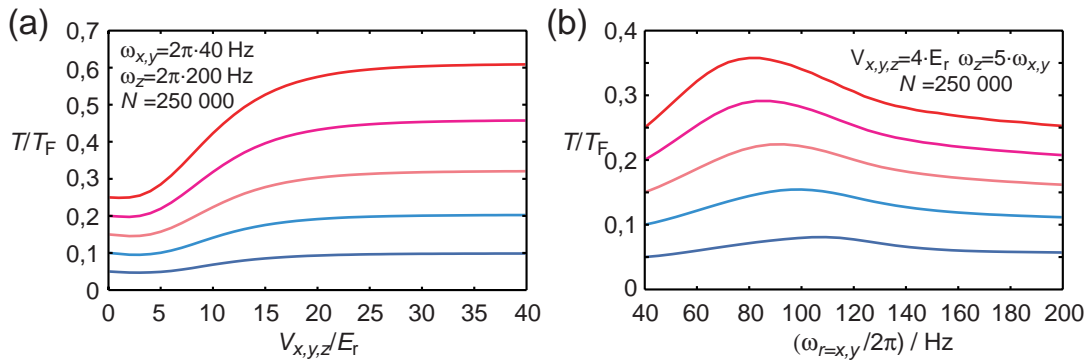
Für die weitere Analyse unterteilen wir die zweidimensionalen Kristallimpulsverteilungen (Säulendichten) in verschiedene Bereiche. So werden durch die vier kleinen Quadrate in Abbildung 7.16e (Einsatz) die „Ecken“ der ersten Brillouin-Zone und durch die vier



**Abbildung 7.14:** Vergleich theoretischer und experimenteller Daten für die Kompression eines Fermigases aus  $2,5 \cdot 10^5$   $^{40}\text{K}$ -Atomen in einem  $4 E_r$ -tiefen 3D-Gitter. **(a)** Numerisch berechnete Atomverteilung im Gitter (Säulendichte) und **(b)** Kristallimpulsverteilung im erweiterten Zonenschema (über  $q_z$  integriert) für verschiedene externe Fallenfrequenzen  $\omega_r/2\pi$ . **(c)** Experimentell gemessene Kristallimpulsverteilungen bei vergleichbaren Parametern (jeweils über drei Aufnahmen gemittelt).

äußeren Rechtecke in Abbildung 7.16f die „höheren“ Brillouin-Zonen definiert. Wie wir in Abschnitt 7.1.2 gesehen haben, gibt der Anteil  $\bar{R}_{\text{BZ}}$  der Atome in den Ecken der ersten Brillouin-Zone bei bekannter Temperatur  $T/T_F$  Auskunft über den Anteil  $R_{\text{BI}}$  der Atome im Bandisolator. So wurde beispielsweise in Abbildung 7.4d die funktionale Beziehung  $R_{\text{BI}}(\bar{R}_{\text{BZ}})$  für  $T/T_F = 0$  dargestellt. Dieser Zusammenhang legt es nahe, im Folgenden die Größe  $\bar{R}_{\text{BZ}}$  für den Vergleich der theoretischen und der experimentellen Kristallimpulsverteilungen heranzuziehen.

## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern



**Abbildung 7.15:** (a) Theoretische Temperaturentwicklung eines idealen Fermigases beim adiabatischen Einladen in ein blauverstimmtes 3D-Gitter ( $\lambda = 755$  nm). Während des Transfers der  $2,5 \cdot 10^5$  Atome ( $^{40}\text{K}$ ) wird der externe Einschluss konstant gehalten ( $\omega_r = 2\pi \cdot 40$  Hz und  $\omega_z = 2\pi \cdot 200$  Hz). (b) Temperaturentwicklung desselben Systems während der adiabatischen Kompression in einem Gitter konstanter Tiefe  $V_{x,y,z} = 4 E_r$ . Der externe Einschluss wird über radiale Fallenfrequenz  $\omega_r$  spezifiziert. Entlang der vertikalen Achse ( $z$ ) ist die Fallenfrequenz um einen Faktor  $\alpha = \omega_z/\omega_r = 5$  größer.

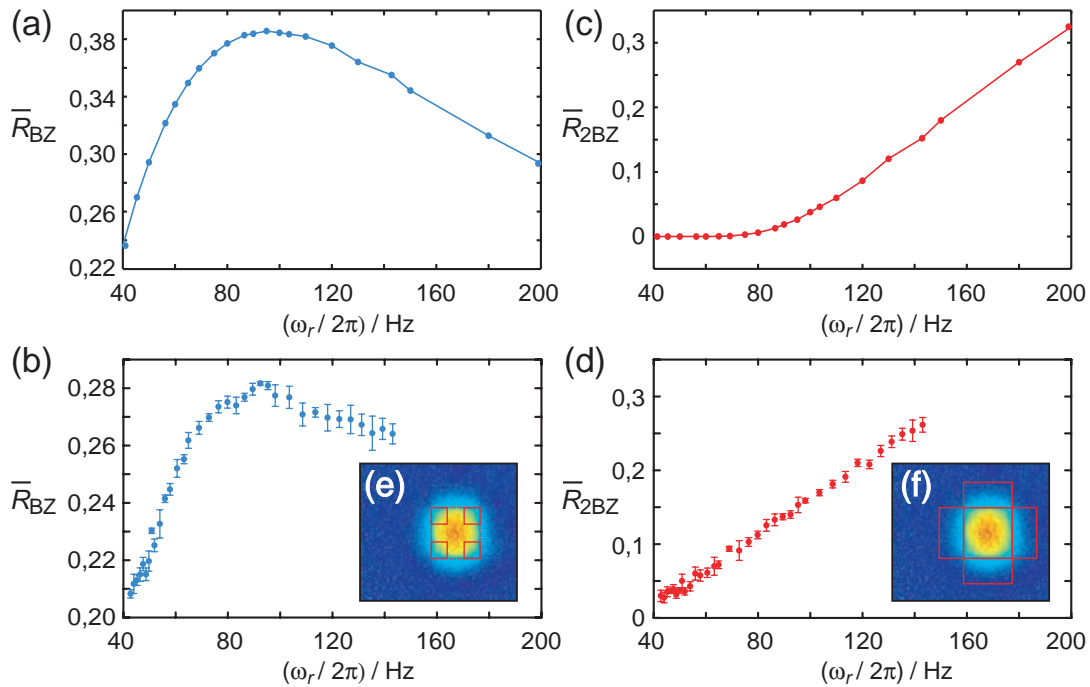
In Abbildung 7.16 a und b werden die numerisch und experimentell ermittelten Verläufe von  $\overline{R}_{\text{BZ}}$  miteinander verglichen. Übereinstimmend zeigen die beiden Verläufe für stärker werdenden Einschluss zunächst einen Anstieg und dann eine Abnahme von  $\overline{R}_{\text{BZ}}$ . Der anfängliche Anstieg wird durch die immer gleichmäßigere Verteilung innerhalb der ersten Brillouin-Zone hervorgerufen, welche ihrerseits Ausdruck für die zunehmende Lokalisierung der Teilchen ist. Die Abnahme von  $\overline{R}_{\text{BZ}}$  ist auf den Transfer von Atomen in höhere Bänder zurückzuführen, wodurch sich die erste Brillouin-Zone entleert.

In Abbildung 7.16 c und d sind die numerisch und experimentell ermittelten Anteile  $\overline{R}_{2\text{BZ}}$  der Atome in höheren Brillouin-Zonen dargestellt. In beiden Fällen beobachtet man im Bereich starken Einschlusses einen linearen Anstieg von  $\overline{R}_{2\text{BZ}}$  mit der Fallenfrequenz. Während die berechneten Daten erst für Frequenzen  $\omega_r/2\pi$  oberhalb von 70 Hz signifikant von null abweichen, zeigen die Messdaten bereits zu Beginn der Kompression Populationen in den höheren Brillouin-Zonen an.

Für die systematischen Abweichungen zwischen den berechneten und gemessenen Daten kommen mehrere Ursachen in Frage. Bei den Berechnungen wurde die endliche räumliche Ausdehnung der Ausgangsverteilung vernachlässigt. Zudem kann ein zu schnelles oder ein zu langsames Herunterfahren des Gitters zu Änderungen in den Kristallimpulsverteilungen führen. Auch nicht-adiabatisches Heizen während der Kompression stellt eine mögliche Fehlerquelle dar. Bei schwachem externen Einschluss oder hohen Temperaturen können des Weiteren Anharmonizitäten der Dipolfalle eine Rolle spielen. Schließlich können Sättigungseffekte bei der Absorptionsabbildung zu Abweichungen in den Säulendichten führen. Zur genaueren Charakterisierung der Fehlerquellen sind weitere Untersuchungen notwendig. Mit dem direkten Vergleich von exakten Ab-initio-Berechnungen und



## 7.2 Gleichgewichtseigenschaften



**Abbildung 7.16:** Vergleich theoretischer und experimenteller Daten für die Kompression eines Fermigases in einem 3D-Gitter mit Parametern wie in Abbildung 7.14. **(a)** Berechneter Anteil  $\bar{R}_{BZ}$  der Atome in den Ecken der ersten Brillouin-Zone und **(b)** entsprechende Messergebnisse. **(c)** Berechneter Anteil  $\bar{R}_{2BZ}$  der Atome in höheren Brillouin-Zonen und **(d)** entsprechende Messergebnisse. Jeder Datenpunkt ist über vier bis fünf Messungen gemittelt und die Balken zeigen die entsprechenden Standardabweichungen an. Die Fallenfrequenzen weisen einen systematischen Fehler von bis zu 10 % auf. Die Einsätze **(e)** und **(f)** zeigen die für die Auswertung der Absorptionsabbildungen verwendeten Einteilungen der Brillouin-Zonen.

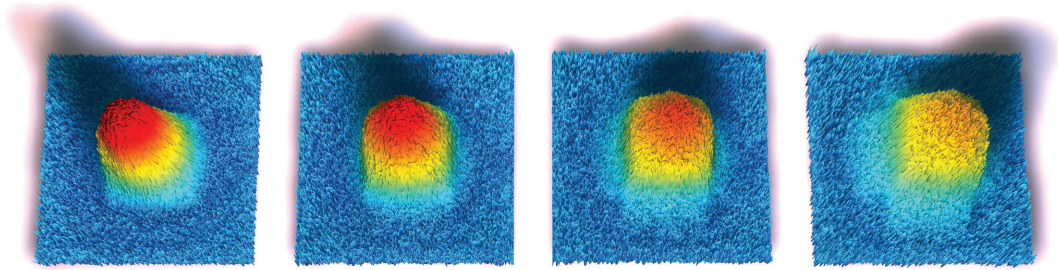
gemessenen Atomverteilungen steht uns ein neues Verfahren zur Evaluation der Gitterexperimente zur Verfügung.

Wie wir zu Beginn dieses Kapitels gesehen haben, weisen Fermigase mit identischen charakteristischen Dichten  $\rho$ , relativen Temperaturen  $T/T_F$  und Verhältnissen der Tunnelraten ( $J_x : J_y : J_z$ ) ganz ähnliche Eigenschaften auf. So unterscheiden sich beispielsweise die Dichte- und Kristallimpulsverteilungen dieser Gase jeweils nur durch eine Skalierung. Diese universellen Beziehungen erlauben es, die Verteilungen eines Fermigases anhand eines Modellsystems mit kleineren Teilchenzahlen, aber identischen Charakteristika, zu berechnen. Auf diese Weise lässt sich der numerische Rechenaufwand erheblich reduzieren.

In Referenz [22] werden experimentell ermittelte Kristallimpulsverteilungen mit den

## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern

---



**Abbildung 7.17:** Entwicklung der Fermi-Flächen mit zunehmender Kompression. Dreidimensionale Darstellung der Messdaten aus Abbildung 7.14c.

skalierten Verteilungen eines Modellsystems aus  $20 \times 20 \times 20$  Gitterplätzen verglichen. Dabei werden jedoch die endlichen Temperaturen der Atomwolken vernachlässigt, welche im Experiment je nach Gittertiefe zwischen  $0, 2$  und  $0, 4 T_F$  liegen.

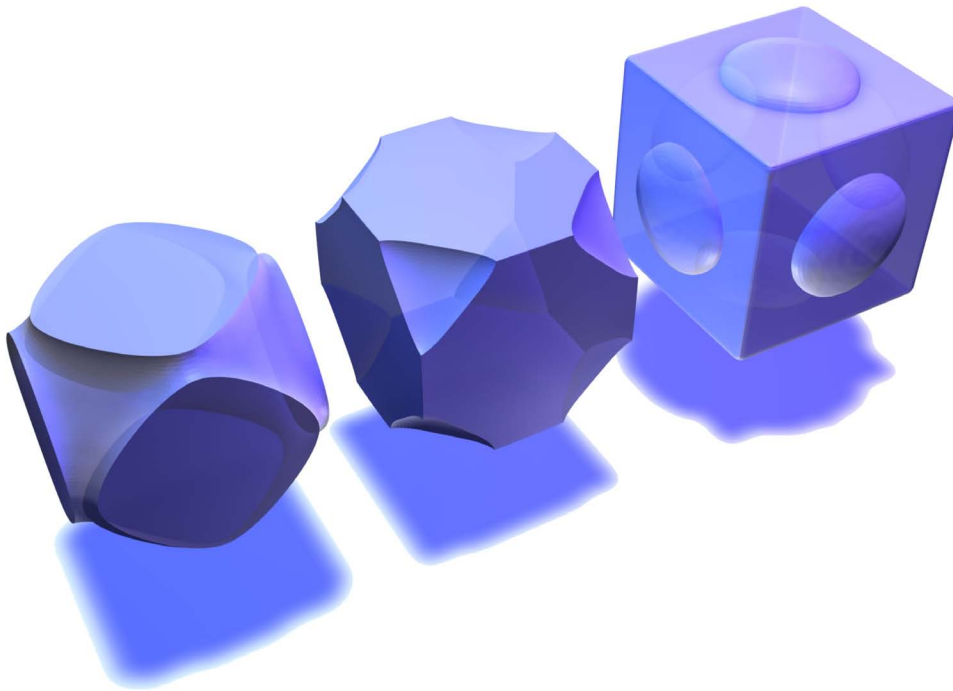
Da die universellen Beziehungen nur im Rahmen des Tight-Binding-Ansatzes gelten, lässt sich das Skalierungsverfahren nur zur Beschreibung von Systemen verwenden, bei denen keine Populationen in höheren Bändern vorliegen und bei denen das Gitter hinreichend tief ist. Für die Simulation des Kompressions-Experimentes aus Abbildung 7.14 sind hingegen exakte Ab-initio-Berechnungen notwendig, in welche die tatsächlichen Systemgrößen einfließen. So werden in den Berechnungen neben endlichen Temperaturen und angeregten Bändern bis zu  $500 \times 500 \times 100$  Gitterplätze berücksichtigt. Mit den vorgestellten Simulationen gelingt es erstmals, Kristallimpulsverteilungen, die sich über mehrere Brillouin-Zonen des erweiterten Zonenschemas erstrecken, exakt darzustellen.

Die im Rahmen dieser Arbeit geschriebenen Computerprogramme gestatten es, bereits auf einem einfachen Notebook zeitlich effizient exakte Ab-initio-Berechnungen von fermionischen Systemen mit einigen hunderttausend Teilchen durchzuführen. Dadurch können experimentelle Flugzeitaufnahmen der Kristallimpulsverteilungen oder auch In-situ-Aufnahmen der Dichteverteilungen ohne Anpassung freier Parameter direkt mit numerischen Ergebnissen verglichen werden. Die Simulationen liefern uns eine feste Referenz, anhand derer sich die Qualität der Gitterexperimente evaluieren lässt. Zudem bietet der Vergleich von numerischen und experimentellen Verteilungen eine neue Möglichkeit zur Temperaturbestimmung in optischen Gittern (siehe Abschnitt 7.2.3).

Die Ergebnisse in Abbildung 7.14 legen es nahe, Veränderungen des externen Einschlusses zur Messung der globalen Kompressibilität von Zuständen in optischen Gittern einzusetzen. Damit verfügt man über ein neuartiges Diagnoseverfahren, um Quantenphasen wie den bosonischen und fermionischen Mott-Isolator [27] oder die Bose-Glas-Phase zweifelsfrei nachzuweisen. Man beachte, dass sich ein solches Diagnoseverfahren in der Festkörperphysik nicht realisieren lässt, da mit einer Veränderung der Ladungsträgerdichte zwangsläufig eine Veränderung der Kristallstruktur einhergehen würde.

## 7.2 Gleichgewichtseigenschaften

Die bei der adiabatischen Kompression bzw. Dekompression von Fermigasen in optischen Gittern auftretenden Temperaturveränderungen (siehe Abbildung 7.15b) eröffnen womöglich auch einen neuen Ansatz, Fermigase effizienter evaporativ zu kühlen. Ein mögliches Kühlt-schema könnte darin bestehen, das Gas in einem flachen Gitter bis zum Erreichen seiner maximalen relativen Temperatur zu komprimieren, dann selektiv die Teilchen höchster Entropie zu entfernen und schließlich das verbleibende Gas wieder adiabatisch zu dekomprimieren. Das selektive Entfernen von lokalisierten Atomen in optischen Gittern mittels Radiofrequenz konnte bereits erfolgreich in Referenz [269] demonstriert werden. Um die tatsächliche Effizienz des hier vorgeschlagenen Kühlt-schemas abzuschätzen, sind jedoch noch genauere Analysen der Entropieverteilungen notwendig.



**Abbildung 7.18:** Berechnete „Fermi-Flächen“ im erweiterten Zonenschema für ein entartetes Gas ( $T = 0$ ) in einem inhomogenen Gitter. Aufgrund der Inhomogenität des periodischen Potentials sind die Fermi-Flächen aufgeweitet. Innerhalb der dargestellten Flächen befinden sich (von links nach rechts) 80, 90 bzw. 99 % der Teilchen. In dem Würfel spiegelt sich die Form der ersten Brillouin-Zone wider. Bei dem betrachteten System handelt es sich um ein Gas aus  $10^5$   $^{40}\text{K}$ -Atomen in einem isotropen 3D-Gitter ( $\lambda = 755$  nm) mit einer Tiefe von  $V_{x,y,z} = 4 E_r$  und einer externen Fallenfrequenz von  $\omega_{x,y,z} = 2\pi \cdot 300$  Hz.

## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern

### 7.3 Dynamik

Fermionische Atome in optischen Gittern stellen ein ideales Modellsystem für das Studium von Transportphänomenen dar. Das System weist zum einen eine enge Analogie zu Elektronen in Festkörperkristallen auf und zum anderen lassen sich an ihm alle grundlegenden Parameter genau kontrollieren. So können beispielsweise über abrupte Potentialveränderungen kollektive Schwingungen angeregt, über Feshbach-Resonanzen die interatomaren Wechselwirkungen verändert oder durch Hinzufügen einer weiteren Spezies Streuzentren erzeugt werden. Diese experimentelle Flexibilität erlaubt es, verschiedene physikalische Phänomene einzeln zu beobachten und schließlich deren Zusammenspiel in einer komplexen Gesamtdynamik zu studieren.

Im Folgenden wird die Dynamik von idealen Fermigasen nach einer abrupten Veränderung der Gitterparameter untersucht. Mit Hilfe der Von-Neumann-Gleichung und der Tight-Binding-Näherung gelingt es, numerisch effizient die Vielteilchendynamik in 1D- und 2D-Gittern zu simulieren. Die Ergebnisse lassen sich auf Systeme mit identischen charakteristischen Dichten übertragen. Neben der Schwerpunktsbewegung wird die Entwicklung der Kristallimpulsverteilung berechnet. Die theoretischen Ergebnisse werden ersten experimentellen Messungen gegenübergestellt.

Betrachten wir zunächst das eindimensionale Problem. Im Rahmen der Tight-Binding-Näherung kann die Dynamik des idealen Fermigases im inhomogenen Gitter durch den folgenden Hamilton-Operator beschrieben werden:

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j + \frac{1}{2} m \omega_x^2 a^2 \sum_j j^2 \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j. \quad (7.12)$$

Die Struktur dieses Operators ist analog zur der des Einteilchen-Hamilton-Operators in Gleichung 5.43. Statt um Wahrscheinlichkeitsamplituden handelt es sich bei  $\hat{c}_i^\dagger$  und  $\hat{c}_j$  um Operatoren der zweiten Quantisierung, welche Teilchen auf den Gitterplätzen erzeugen bzw. vernichten. Die Operatoren wirken im Fock-Raum  $\mathcal{F}$  und gehorchen den fermionischen Antikommutationsregeln 2.10.

Im Folgenden gehen wir davon aus, dass die Dynamik zu einem Zeitpunkt  $t = 0$  durch eine abrupte Veränderung der Gitterparameter hervorgerufen wird. Vor dieser Anregung ( $t < 0$ ) befindet sich das System in einem Gleichgewichtszustand, der sich als Lösung des folgenden Hamilton-Operators ergibt:

$$\hat{H}_0 = -J_0 \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j + \frac{1}{2} m \omega_{x,0}^2 a^2 \sum_j (j - j_{x,0})^2 \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j. \quad (7.13)$$

Das heißt, die Anregung wird durch eine Veränderung der Tunnelrate  $J_0 \rightarrow J$ , der externen Fallenfrequenz  $\omega_{x,0} \rightarrow \omega_x$  und/oder durch einen Versatz des harmonischen Potentials um  $j_{x,0}$  Gitterplätze hervorgerufen.

Im Allgemeinen handelt es sich bei dem Ausgangszustand um ein Gas im thermischen Gleichgewicht. Ein solches Gas kann durch den großkanonischen Dichteoperator

$$\hat{\rho}(0) = \frac{e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})}}{\text{Sp}(e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})})} \quad (7.14)$$

beschrieben werden. Dabei ist  $T = 1/k_B\beta$  die Temperatur des Gases im Ausgangszustand und  $\mu$  das zugehörige chemische Potential (siehe Gleichung 2.31).

Durch die abrupte Veränderung der Gitterparameter wird das System aus dem Gleichgewicht gebracht und entwickelt sich dann gemäß dem neuen Hamilton-Operator 7.12. Aus der Von-Neumann-Gleichung [270]

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (7.15)$$

folgt die Bewegungsgleichung des Dichteoperators im Schrödinger-Bild:

$$\hat{\rho}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}(0) e^{i\hat{H}t/\hbar}. \quad (7.16)$$

Hiermit lässt sich schließlich die zeitliche Entwicklung des Erwartungswertes einer beliebigen Observablen  $\hat{O}$  berechnen:

$$\langle \hat{O} \rangle(t) = \text{Sp}(\hat{\rho}(t)\hat{O}). \quad (7.17)$$

Handelt es sich bei der Observablen  $\hat{O}$  um einen Einteilchenoperator<sup>6</sup>, so lässt sich das Problem erheblich vereinfachen, denn der Dichteoperator  $\hat{\rho}$  kann dann vom Fock-Raum  $\mathcal{F}$  auf einen Dichteoperator  $\rho$  im Einteilchen-Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  projiziert werden<sup>7</sup>:  $P : \hat{\rho} \mapsto \rho$ . Gemäß der symplektischen Geometrie handelt es sich bei der Projektion  $P$  um eine äquivariante Abbildung [271]:

$$P(\hat{U}\hat{\rho}\hat{U}^\dagger) = UP(\hat{\rho})U^\dagger. \quad (7.18)$$

Hierbei ist  $U$  eine beliebige unitäre Transformation in  $\mathcal{H}$ , und  $\hat{U}$  ist die entsprechende Transformation in  $\mathcal{F}$ .

Die Operatoren  $\hat{H}$  und  $\hat{H}_0$  beschreiben wechselwirkungsfreie Teilchen und entsprechen somit Einteilchenoperatoren. Folglich existieren zu  $\hat{H}$  und  $\hat{H}_0$  äquivalente Operatoren ( $H$  und  $H_0$ ) im Einteilchen-Hilbert-Raum und die Bewegungsgleichung 7.16 kann mittels 7.18 auf die folgende Form reduziert werden:

$$\rho(t) = e^{-iHt/\hbar} \rho(0) e^{iHt/\hbar}. \quad (7.19)$$

<sup>6</sup>Ein Einteilchenoperator zeichnet sich dadurch aus, dass er unabhängig auf die einzelnen Teilchen wirkt. In der zweiten Quantisierung wird er durch die Form 2.16 dargestellt.

<sup>7</sup>Um im Folgenden die Operatoren des Einteilchen-Hilbert-Raumes  $\mathcal{H}$  von denen des Fock-Raumes  $\mathcal{F}$  unterscheiden zu können, werden Erstere ohne Operatorzeichen dargestellt.

## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern

Ist  $\hat{O}$  eine Einteilchenobservable und  $O$  deren Repräsentation im Einteilchen-Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$ , so vereinfacht sich Gleichung 7.17 zu

$$\langle \hat{O} \rangle(t) = \text{Sp}(\rho(t)O). \quad (7.20)$$

Die vollständigen Lösungssätze der beiden Eigenwertgleichungen

$$H|n\rangle = \epsilon_n|n\rangle \quad \text{und} \quad H_0|\nu\rangle = \epsilon_\nu^0|\nu\rangle \quad (7.21)$$

liefern uns zwei Basissysteme für  $\mathcal{H}$ . Mittels Gleichung 7.20 lässt sich der Dichteoperator  $\rho$  bezüglich beliebiger Basissysteme darstellen. Die Matrixelemente des Dichteoperators ergeben sich aus den Erwartungswerten der mit den jeweiligen Basiszuständen assoziierten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. So folgt beispielsweise für die obigen Basissysteme:

$$\rho_{nn'} = \text{Sp}(\hat{\rho}\hat{a}_n^\dagger\hat{a}_n) = \langle \hat{a}_n^\dagger\hat{a}_n \rangle \quad \text{und} \quad \rho_{\nu\nu'} = \text{Sp}(\hat{\rho}\hat{a}_{\nu'}^\dagger\hat{a}_{\nu'}) = \langle \hat{a}_{\nu'}^\dagger\hat{a}_{\nu'} \rangle. \quad (7.22)$$

Setzt man den großkanonischen Dichteoperator 7.14 in den rechten Ausdruck ein, so erhält man die Matrixelemente des Ausgangszustandes:

$$\rho_{\nu\nu'}(0) = \delta_{\nu\nu'} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\nu - \mu)} + 1}. \quad (7.23)$$

Wie zu erwarten, handelt es sich hierbei um eine Diagonalmatrix, deren Einträge den Besetzungszahlen  $\langle \hat{n}_\nu \rangle$  der Eigenzustände von  $H_0$  entsprechen und einer Fermi-Dirac-Verteilung folgen.

Da wir uns für die zeitliche Entwicklung der Besetzungszahlen der Gitterplätze interessieren, bietet es sich an, die Dynamik in der Basis der Wannier-Zustände  $\{|i\rangle\}$  zu beschreiben. Mit der Matrix  $V_0 = (c_{i\nu}^0) \equiv (\langle i|\nu\rangle)$  lässt sich der Ausgangszustand  $\rho_{\nu\nu'}(0)$  in die Wannier-Basis transformieren:

$$(\rho_{ij}(0)) = V_0 (\rho_{\nu\nu'}(0)) V_0^\dagger. \quad (7.24)$$

Gemäß Gleichung 7.19 wird die zeitliche Entwicklung des Dichteoperators durch eine unitäre Transformation beschrieben. Bezüglich der Eigenzustände von  $H$  ist die Transformation diagonal und lautet

$$U_{nn'} = \delta_{nn'} \exp(-i\epsilon_n t/\hbar). \quad (7.25)$$

Mit der Matrix  $V = (c_{in}) \equiv (\langle i|n\rangle)$  kann  $U_{nn'}$  in die Wannier-Basis transformiert werden:

$$(U_{ij}) = V (U_{nn'}) V^\dagger. \quad (7.26)$$

Aus den obigen Gleichungen erhalten wir schließlich folgende Bewegungsgleichung für den Dichteoperator:

$$(\rho_{ij}(t)) = (\langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i \rangle(t)) = (U_{ij}) V_0 (\rho_{\nu\nu'}(0)) V_0^\dagger (U_{ij})^\dagger. \quad (7.27)$$

Die Schwerpunktsbewegung ergibt sich durch Einsetzen von  $(\rho_{ij}(t))$  in Gleichung 7.20, wobei  $O$  den Ortsoperator darstellt. Bezüglich der Wannier-Basis nimmt der Ortsoperator die Form einer Diagonalmatrix an, deren Einträge  $O_{ij} = \delta_{ij}ia$  die Positionen der Gitterplätze angeben. Die Besetzungszahlen der einzelnen Gitterplätze können direkt aus den Diagonalelementen  $\rho_{ii}(t) = \langle \hat{n}_i \rangle(t)$  abgelesen werden.

Neben der Dichteverteilung interessieren wir uns für die Kristallimpulsverteilung, da sich Letztere besonders einfach mit experimentellen Daten vergleichen lässt. Dazu transformieren wir den Dichteoperator aus der Basis der Wannier-Zustände  $|i\rangle$  in die Basis der Bloch-Wellen  $|q\rangle$ :

$$(\rho_{qq'}(t)) = W (\rho_{ij}(t)) W^\dagger \quad \text{mit} \quad W = (\langle q|i\rangle) = \left( \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-iqx_i} \right). \quad (7.28)$$

Die Einträge der Matrix  $W$  ergeben sich durch Projektion der einzelnen Wannier-Zustände auf die einzelnen Bloch-Zustände (siehe Gleichung 5.21). Dabei bezeichnet  $M$  die Anzahl der berücksichtigten Gitterplätze und  $x_i = ia$  sind deren Positionen im Ortsraum.

### 7.3.1 Dynamik eines Teilchens

Mit den hergeleiteten Methoden wollen wir nun die Dynamik einiger konkreter Modellsysteme numerisch simulieren. Um ein besseres Verständnis der verschiedenen Transportphänomene zu gewinnen, betrachten wir zunächst die Dynamik eines einzelnen Teilchens, welches zum Zeitpunkt  $t = 0$  auf einen bestimmten Gitterplatz  $j$  lokalisiert ist und dann frei im Gitter propagiert. Dies lässt sich durch einen Sprung aus einem sehr tiefen in ein weniger tiefes Gitter realisieren. Bezüglich der Wannier-Basis nimmt der Ausgangszustand eine besonders einfache Form an. So besteht dessen Dichteoperator aus einem einzigen nicht-verschwindenden Matrixelement  $\rho_{jj}(0) = 1$ .

In Abbildung 7.19a betrachten wir die Dynamik eines Teilchens, welches zu Anfang auf den zentralen Gitterplatz  $j = 0$  (mit minimaler potentieller Energie) lokalisiert ist. Die verschiedenen Wellenanteile des Ausgangszustandes breiten sich nach außen hin aus, werden durch den harmonischen Einschluss reflektiert und führen schließlich – nach einer halben Periode – zu einem partiellen Wiederaufleben des lokalisierten Wellenpaketes. Die Amplitude dieser pulsierenden Schwingung hängt unmittelbar mit der Impulsunschärfe des lokalisierten Ausgangszustandes zusammen. Verringert man die Tiefe des Ausgangsgitters, so nimmt die Impulsunschärfe und damit auch die Oszillationsamplitude ab. Im Gegensatz zu einem rein harmonischen Potential, weist das Gitter eine nicht-lineare Dispersionsrelation auf. Dies führt zu der Dephasierung der verschiedenen Wellenanteile und der Dämpfung des periodischen Wiederauflebens. Beide Effekte fallen umso stärker aus, je breiter die Ausgangsimpulsverteilung ist.

Neben der Ortsverteilung ist in Abbildung 7.19a die zugehörige Kristallimpulsverteilung dargestellt. Die starke räumliche Lokalisierung des Ausgangszustandes bewirkt, dass dieser die erste Brillouin-Zone gleichmäßig bevölkert. Je weiter sich die Dichteverteilung

## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern

---

im Gitter ausdehnt, umso schmaler wird die zugehörige Kristallimpulsverteilung. Nach einer viertel Schwingungsperiode, wenn die Mehrheit der miteinander überlagerten Wellenanteile ihren Umkehrpunkt erreicht hat, ist die Kristallimpulsverteilung am schmalsten und nimmt ein Maximum bei  $q = 0$  an. Wie zu erwarten, verhalten sich die Dichte- und die Kristallimpulsverteilung zueinander reziprok.

Im unteren Energiebereich lässt sich die Dispersionsrelation des Gitters durch das Spektrum eines harmonischen Oszillators nähern, wobei der Einfluss des periodischen Potentials in Form einer effektiven Masse  $m^*(q = 0)$  berücksichtigt wird (siehe Gleichung 5.26). Demnach vollführen die Teilchen in einem flachen Gitter und bei kleinen Auslenkungen näherungsweise eine Dipolschwingung mit einer Frequenz von

$$\omega_x^* = \pi \sqrt{J/E_r} \omega_x. \quad (7.29)$$

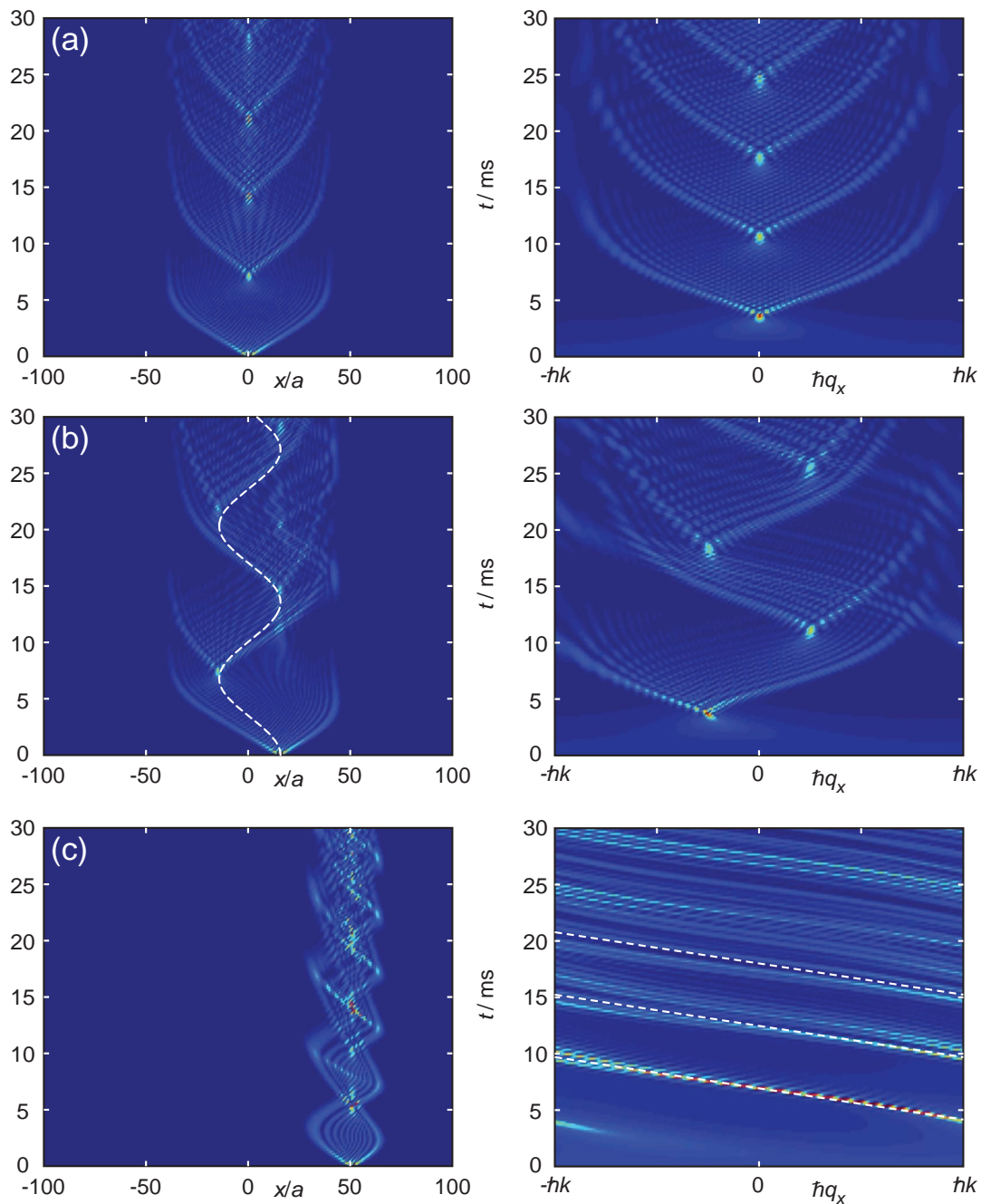
Hierbei bezeichnet  $E_r$  die Rückstoßenergie im Gitter. In Abbildung 7.19b ist die Dynamik eines Teilchens dargestellt, welches zu Beginn auf den Gitterplatz  $j = 15$  lokalisiert ist. Gleichzeitig ist gestrichelt der Verlauf eines klassischen Teilchens dargestellt, das bei gleicher Auslenkung in einem rein harmonischen Potential der Frequenz  $\omega_x^*$  oszilliert. Die Punkte, an denen die Dichte wiederauflebt und ein lokales Maximum annimmt, liegen relativ dicht an der klassischen Teilchenbahn.

In Abbildung 7.19c betrachten wir die Dynamik eines Teilchens, welches zu Beginn auf den Gitterplatz  $j = 50$  lokalisiert ist. Damit bevölkert das Teilchen ausschließlich Eigenzustände des Gitters, deren Energien  $\epsilon_n$  oberhalb der ersten Bandkante liegen ( $\epsilon_n - \epsilon_1 > 4J$ ). Folglich bleibt die Dynamik des Teilchens auf die rechte Hälfte des Gitters beschränkt. Die dargestellte Entwicklung der Kristallimpulsverteilung macht deutlich, dass das Teilchen durch den externen Einschluss in Richtung Fallenzentrum beschleunigt wird, bis der Kristallimpuls den linken Rand der ersten Brillouin-Zone erreicht. Hier wird die Bragg-Bedingung  $\hbar q = -\hbar k$  erfüllt und es kommt zu einem Umklappprozess, bei dem sich die Ausbreitungsrichtung exakt umkehrt. Diese Dynamik wiederholt sich immer wieder und verhindert, dass das Teilchen zum Zentrum des Gitters gelangt. Hierbei handelt es sich um Bloch-Oszillationen. Streng genommen treten Bloch-Oszillationen nur in periodischen Potentialen mit einer konstanten externen Kraft auf und verhalten sich nur dann wirklich periodisch. Bei kleinen Amplituden im Gitter können wir das externe harmonische Potential jedoch als näherungsweise linear betrachten und dem Teilchen die folgende Bloch-Frequenz zuordnen:

$$\omega_{B,x} = \frac{F_x a}{\hbar} \quad \text{mit} \quad F_x = m\omega_x^2 \langle x \rangle. \quad (7.30)$$

Dabei ist  $F_x$  die Kraft, die das Teilchen im externen Potential auf seinem mittleren Aufenthaltsort  $\langle x \rangle$  verspürt. In Abbildung 7.19c ist die aus Gleichung 7.30 abgeleitete Frequenz in Form einer gestrichelten Trajektorie wiedergegeben, wobei  $\langle x \rangle = 50a$  angenommen wurde.





**Abbildung 7.19:** Dynamik eines  $^{40}\text{K}$ -Atoms in einem  $4 E_r$ -tiefen Gitter ( $\lambda = 755 \text{ nm}$ ) mit einer externen Fallenfrequenz von  $\omega_x = 2\pi \cdot 80 \text{ Hz}$ . Zu Anfang ist das Teilchen auf einen einzelnen Gitterplatz lokalisiert, der sich **(a)** genau im Minimum des externen Potentials, **(b)** 15 bzw. **(c)** 50 Plätze vom Minimum entfernt befindet. Links sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen im Gitter und rechts die zugehörigen Kristallimpulsverteilungen dargestellt. Auf Gitterplätzen mit  $|x_j| \geq 41 a$  ist die potentielle Energie größer als  $4J$ .

## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern

Die Beobachtung von Bloch-Oszillationen an ultrakalten Atomen gelang erstmals 1996 in einer beschleunigten optischen Stehwelle [272]. Die Lokalisierung von Teilchen in periodischen Potentialen aufgrund eines überlagerten harmonischen Einschlusses konnte erstmals in 2004 nachgewiesen werden [269]. In dem Experiment wurden nicht-kondensierte Bosegase in ein 1D-Gitter mit überlagerter Magnetfalle geladen. Durch Einstrahlung einer Radiofrequenz ließen sich Atome aus dem Potentialminimum – also dem Zentrum des Gitters – entfernen, ohne dabei die lokalisierten Teilchen am Rand des Gitters zu verlieren.

### 7.3.2 Quantenpendel

Einen alternativen Einblick in die Dynamik der Atome im Gitter erhält man, wenn man den Einteilchen-Hamilton-Operator  $H$  (5.43) bezüglich der Basis der Bloch-Zustände 5.22 darstellt:

$$H_q = -2J \cos(qa) + \frac{1}{2}m\omega_x^2 \left(-i\frac{\partial}{\partial q}\right)^2. \quad (7.31)$$

In diesem Fall verfügt der Operator über dieselbe Struktur wie der Hamilton-Operator eines quantenmechanischen Pendels [273]. Dabei ist die Auslenkung des Pendels (gemessen in Radiant) über die Relation  $\varphi \equiv qa$  mit dem Kristallimpuls assoziiert, und das homogene Schwerefeld wird durch das Verhältnis aus Tunnelmatrixelement und Fallenfrequenz  $J/\omega_x$  repräsentiert. Der Hamilton-Operator 7.31 dient als Modell für das Studium komplexer Quantensysteme in der Nähe von nicht-linearen Resonanzen [274] und spielt damit eine besondere Rolle für die Erforschung von sogenanntem Quantenchaos.

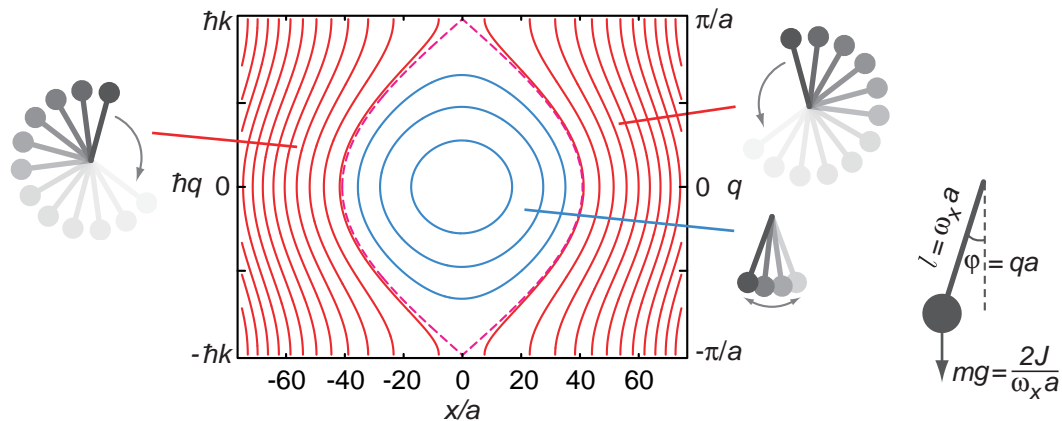
Für  $(2J/m\omega_x^2 a^2)^{1/2} \gg 1$  geht die quantenmechanische Dynamik in die eines klassischen Pendels über. Eine besondere Eigenschaft des klassischen Pendels ist die Existenz einer ausgezeichneten Trajektorie im Phasenraum, der sogenannten Separatrix, welche das Regime der Vibrations- und der Rotationsbewegung voneinander trennt. Die verschiedenen Trajektorien eines klassischen Pendels können aus der folgenden Bedingung für die Energieerhaltung abgeleitet werden

$$E = -2J \cos(qa) + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2. \quad (7.32)$$

Ein entsprechendes Phasenporträt wird in Abbildung 7.20 gezeigt. Die Separatrix (gestrichelt dargestellt) wird durch die Trajektorie mit der Energie  $E = 2J$  definiert.

Auch im quantenmechanischen Regime spielt die Separatrix eine bedeutende Rolle. Im Bild des inhomogenen Gitters trennt sie die räumlich ausgedehnten Zustände von den lokalisierten (paarweise entarteten) Zuständen (siehe auch Abschnitt 5.2.2). Da jeder Quantenzustand im Phasenraum eine Fläche der Größe des planckschen Wirkungsquantums  $h$  einnimmt, lässt sich aus der von der Separatrix umschlossenen Fläche (Wirkung)

$$S = \frac{8}{\pi} \sqrt{\frac{2J}{m\omega_x^2 a^2}} h \quad (7.33)$$



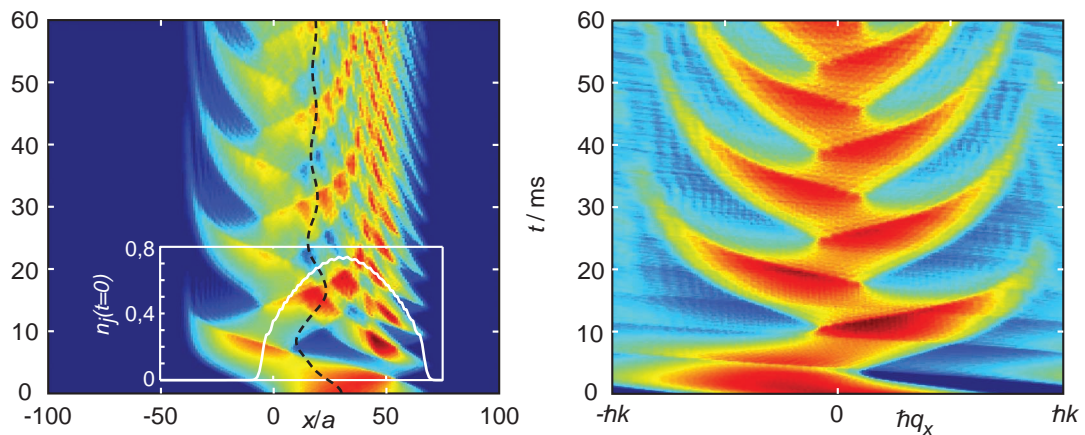
**Abbildung 7.20:** Phasenporträt eines klassischen Pendels mit Systemparametern, die denen in Abbildung 7.19 entsprechen. Die gestrichelt dargestellte Separatrix trennt die geschlossenen Trajektorien der Pendeloszillationen von den offenen Trajektorien der Rotationen. Der Zusammenhang zwischen den physikalischen Größen des mathematischen Pendels und des Atoms im inhomogenen Gitter wird in dem rechten Schema angegeben.

die Anzahl  $N_c$  der räumlich ausgedehnten Einteilchenzustände bestimmen:  $N_c = W/h$ . Für die zu Beginn dieses Kapitels definierte kritische Dichte erhalten wir somit  $\rho_c^{1D} = 8/\pi$ . Dieser Wert stimmt sehr gut mit dem numerischen Ergebnis auf Seite 224 überein. Wie wir in Abschnitt 5.2.2 gesehen haben, treten für Quantenzahlen  $n$  größer als  $N_c$  paarweise entartete Einteilchenzustände auf, die auf die rechte bzw. linke Hälfte des Gitters lokalisiert sind. Wie in Abbildung 7.20 veranschaulicht, handelt es sich bei diesen Zuständen um quantenmechanische Repräsentationen des im Uhrzeigersinn und des gegen den Uhrzeigersinn rotierenden Pendels. In gleicher Weise lassen sich auch die Dipolschwingungen im Zentrum des Gitters und die Bloch-Oszillationen am Rand des Gitters als Pendelschwingungen bzw. -rotationen auffassen.

### 7.3.3 Projektion eines Vielteilchenzustandes

Gehen wir nun zu fermionischen Vielteilchensystemen über. In Abbildung 7.21 betrachten wir die Dynamik von 40 Fermionen nach einem abrupten räumlichen Versatz des externen Einschlusses. In dem Beispiel ist der Ausgangszustand durch den Vielteilchengrundzustand im unverschobenen Gitterpotential gegeben. Dieser Zustand wird zum Zeitpunkt  $t = 0$  in das neue Gitterpotential projiziert. Formal entspricht dies einem Sprung vom Hamilton-Operator  $\hat{H}_0$  zu  $\hat{H}$ , sodass die Dynamik mittels Gleichung 7.27 beschrieben werden kann. Da wir hier einen Ausgangszustand der Temperatur  $T = 0$  betrachten, nimmt dessen Dichteoperator (Gl. 7.23) eine besonders einfache Form an. Doch auch die Berücksichtigung endlicher Temperaturen würde das Problem nicht wesentlich erschweren. Es muss dann einzig darauf geachtet werden, dass hinreichend viele Gitterplätze in die

## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern



**Abbildung 7.21:** Dynamik von  $40\ ^{40}\text{K}$ -Atomen in einem  $4 E_r$ -tiefen Gitter ( $\lambda = 755\text{ nm}$ ) mit einer externen Fallenfrequenz von  $\omega_x = 2\pi \cdot 80\text{ Hz}$  nach einem abrupten Versatz des externen Einschlusses um 30 Gitterplätze. Der Ausgangszustand ( $t = 0$ ) entspricht dem Vielteilchengrundzustand des unverschobenen Gitterpotentials. Dessen Dichteverteilung ist als weißer Graph eingezeichnet. Links ist die Dichteverteilung im Gitter und rechts die zugehörige Kristallimpulsverteilung dargestellt. Die Bewegung des Schwerpunktes ist als gestrichelter Verlauf in die Dynamik der Dichteverteilung eingetragen.

Berechnungen einbezogen werden, sodass auch die thermischen Ausläufer der Atomverteilungen während der gesamten Dynamik innerhalb der betrachteten Gittergröße liegen.

Aus der zeitlichen Entwicklung der Dichteverteilung in Abbildung 7.21 geht hervor, dass die Atomwolke in dem betrachteten Beispiel sowohl Dipolschwingungen im Zentrum als auch Bloch-Oszillationen am Rand des Gitters ausführt. Die gleichzeitige Bevölkering einer Vielzahl von Eigenzuständen führt zu einem breiten Spektrum von Oszillationsfrequenzen und damit zu einer raschen Dephasierung der Superposition. Entsprechend schnell zerfließt das Ausgangswellenpaket und entsprechend stark ist die Dämpfung der Schwerpunktsbewegung. Letztere ist als gestrichelte Kurve in Abbildung 7.21 dargestellt. Wie zu erkennen ist, strebt der Schwerpunkt nicht gegen die Gleichgewichtsposition  $x = 0$ , sondern verbleibt auf der rechten Seite des Gitters. Dies ist auf die Bloch-Oszillationen zurückzuführen, die einen Transport auf makroskopischer Skala unterbinden. Damit kann der Anteil der Bloch-oszillierenden Atome als isolierende Phase aufgefasst werden. Die restlichen Atome können makroskopische Dipolschwingungen ausführen und repräsentieren daher den leitfähigen Anteil des Gases.

Entsprechende Messungen zur Schwerpunktsdynamik wurden mit spinpolarisierten  $^{40}\text{K}$ -Atomen in einem eindimensionalen Gitter durchgeführt [275]. In dem Experiment wurde das Fermigas durch einen abrupten Versatz des externen harmonischen Einschlusses in kollektive Schwingungen versetzt. Über die Gittertiefe konnte zwischen den einzelnen Mes-

sungen die Lage der Fermi-Energie verändert werden. Bei Annäherung der Fermi-Energie an die erste Bandlücke konnte eine starke Dämpfung der Schwerpunktsbewegung und ein bleibender Versatz des Schwerpunktes beobachtet werden. Diese Messungen bestätigen, dass ein steiler externer Gradient – wie er am Rand des Gitters vorliegt – den makroskopischen Transport in periodischen Potentialen unterbindet. In einem weiteren Experiment konnte gezeigt werden, dass der fermionische Transport durch Hinzufügen einer weiteren Spezies ( $^{87}\text{Rb}$ ) wiederhergestellt werden kann [276]. Stöße mit den bosonischen Atomen erlauben es den Fermionen, ihre Zustände zu verändern und somit die lokalisierten Zustände am Rand des Gitters zu verlassen. Dieses Experiment verdeutlichte in eindrucksvoller Weise die Bedeutung von Stößen für Transportprozesse in perfekt periodischen Potentialen.

Erst kürzlich konnte die Schwerpunktsbewegung einer wechselwirkenden fermionischen Spinmischung in einem dreidimensionalen optischen Gitter untersucht werden [53]. Dabei ließ sich die Stärke der Wechselwirkung über eine Feshbach-Resonanz verändern. Mit zunehmender attraktiver Wechselwirkung wurde ein Übergang der Schwerpunktsbewegung von einer gedämpften Schwingung – im nicht-wechselwirkenden Fall – zu einer langsamen Drift ins Fallenminimum beobachtet. Bei starker attraktiver Wechselwirkung wird der Transport durch die Dynamik lokaler fermionischer Paare bestimmt, welche sich nur sehr langsam durch Tunnelprozesse zweiter Ordnung fortbewegen können.

Abbildung 7.21 zeigt, dass, selbst wenn die Schwerpunktsbewegung verschwindet, noch eine deutliche Dynamik in der Kristallimpulsverteilung zu erkennen ist. Dies ist darauf zurückzuführen, dass sich die Bloch-oszillierenden Atome mit der Zeit gleichmäßig über die erste Brillouin-Zone verteilen und somit die langsamer dephasierenden Dipolschwingungen in den Vordergrund treten. Damit liefert die Dynamik der Kristallimpulsverteilung Informationen, die nicht aus der Schwerpunktsbewegung gewonnen werden können. Im Experiment lassen sich die Kristallimpulsverteilungen besonders einfach über Flugzeitaufnahmen messen. Eine exakte Beschreibung der Kristallimpulsdynamik des nicht-wechselwirkenden Fermigases bildet die Voraussetzung, um in Zukunft auch charakteristische Wechselwirkungseffekte über Flugzeitaufnahmen nachweisen zu können.

#### 7.3.4 Universelle Dynamik

Im ersten Teil dieses Kapitels wurde gezeigt, dass wechselwirkungsfreie Fermigase mit identischen charakteristischen Dichten  $\rho$  (Gl. 7.2) und relativen Temperaturen  $T/T_F$  vergleichbare Eigenschaften aufweisen. Diese universellen Beziehungen sind eine unmittelbare Konsequenz des Tight-Binding-Ansatzes 7.12 und gelten daher nicht nur für Fermigase im Gleichgewicht, sondern auch für deren Dynamik.

Im Folgenden betrachten wir die Dynamik von zwei eindimensionalen Fermigasen in unterschiedlichen Gittern. Vor ihrer Anregung ( $t < 0$ ) sollen die beiden Gase über die gleichen relativen Temperaturen  $T/T_F$  verfügen. Zudem sollen die Wellenlängen der beiden Gitter übereinstimmen. Die Atomzahlen  $N_{1,2}$ , externen Fallenfrequenzen  $\omega_{1,2}$  und Tun-

## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern

nelraten  $J_{1,2}$  seien dem System entsprechend indiziert. Stimmen die charakteristischen Dichten  $\rho_{1,2}$  der beiden Systeme miteinander überein, so erhalten wir:

$$\frac{N_1\omega_1}{\sqrt{J_1}} = \frac{N_2\omega_2}{\sqrt{J_2}}. \quad (7.34)$$

Wird diese Bedingung zu jedem Zeitpunkt erfüllt, so weisen die beiden Systeme eine vergleichbare Dynamik auf. Dies bedeutet, dass im Kontinuumslimit ( $N \gg 1$ ) die Dichteverteilungen und die Kristallimpulsverteilungen der beiden Systeme über die folgenden Relationen miteinander verknüpft sind:

$$n_1(x_1/\xi_1, t_1) = n_2(x_2/\xi_2, t_2) \quad \text{und} \quad \frac{1}{N_1}n_1(q_1, t_1) = \frac{1}{N_2}n_2(q_2, t_2). \quad (7.35)$$

Dabei bezeichnen  $\xi_{1,2}$  die charakteristischen Längen (Gl. 7.1) der beiden Systeme. Die unterschiedlichen Geschwindigkeiten der Dynamiken spiegeln sich in folgender Zeitrelation wieder:

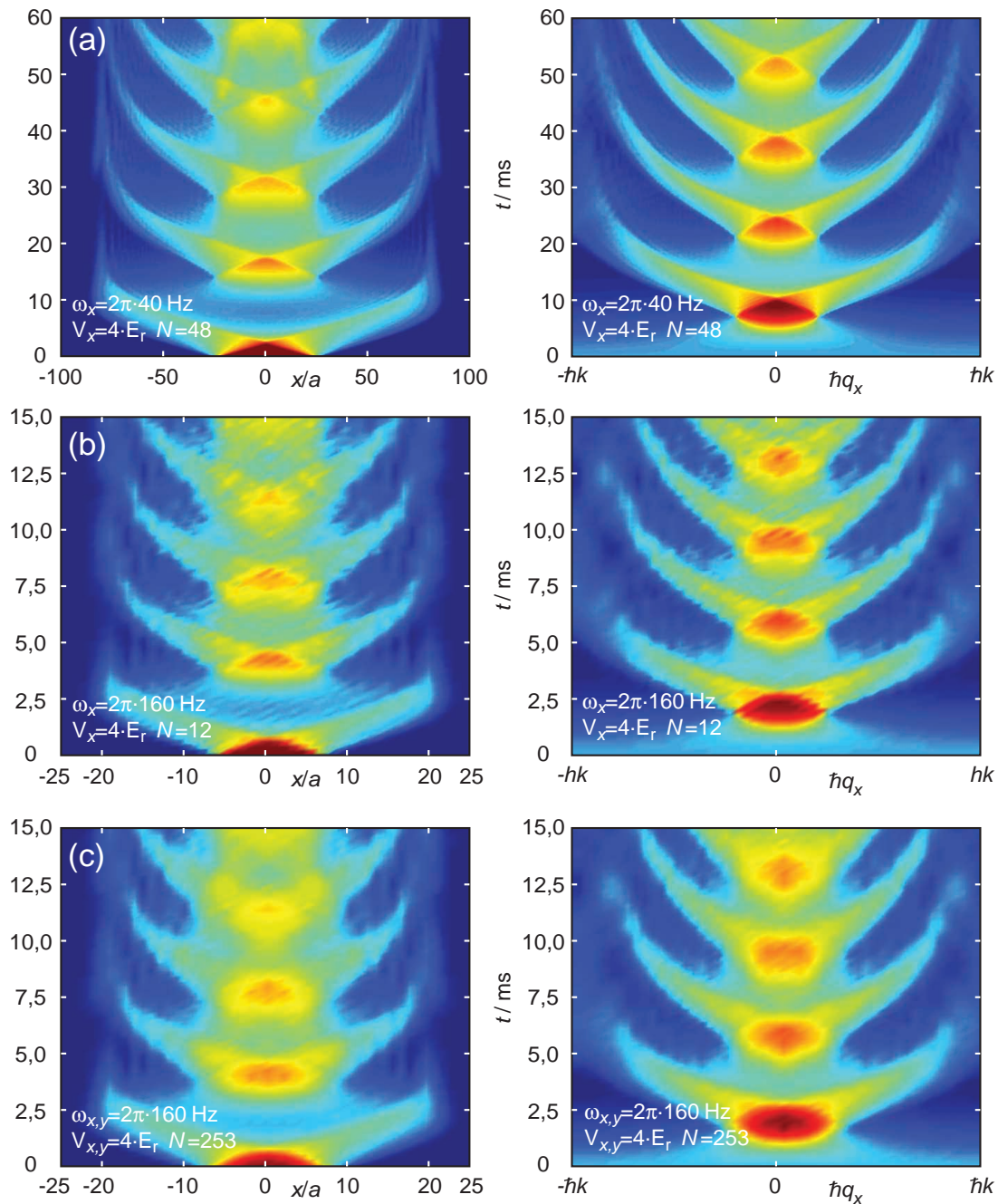
$$\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \frac{J_1}{J_2}}. \quad (7.36)$$

Dabei gehen wir davon aus, dass beide Systeme zum Zeitpunkt  $t_1 = t_2 = 0$  aus ihrem Gleichgewicht gebracht werden. Geschieht dies durch einen räumlichen Versatz  $\delta x_{1,2}$  des externen Einschlusses, so muss zusätzlich die Bedingung  $\delta x_1/\xi_1 = \delta x_2/\xi_2$  erfüllt werden, damit die Dynamiken vergleichbar sind.

Die universellen Beziehungen erlauben es, die zeitliche Entwicklung eines Fermigases anhand eines Modellsystems mit kleineren Teilchenzahlen, aber identischen Charakteristika, zu berechnen. Auf diese Weise lässt sich der numerische Rechenaufwand erheblich reduzieren. Der Einfachheit halber bietet es sich an, ein Modell zu wählen, das über die gleiche Gittertiefe ( $V_1 = V_2$ ) verfügt. Dadurch vereinfacht sich die Bedingung 7.34 zu  $N_1\omega_1 = N_2\omega_2$  und auch die Zeitrelation wird besonders intuitiv:  $t_2/t_1 = \omega_1/\omega_2$ . In den Abbildungen 7.22 a und b werden exemplarisch zwei Systeme verglichen, die über die gleichen Gittertiefen verfügen, sich aber um einen Faktor vier in ihrer Größe unterscheiden. Nach einer entsprechenden Skalierung stimmen die Ergebnisse sehr gut miteinander überein. Unterschiede sind allein auf die diskrete Natur des Gitters zurückzuführen. Man beachte, dass in flachen Gittern durch steile Einschlüsse oder starke Anregungen Landau-Zener-Übergänge in höhere Bänder hervorgerufen werden können, die nicht durch die Tight-Binding-Näherung beschrieben werden.

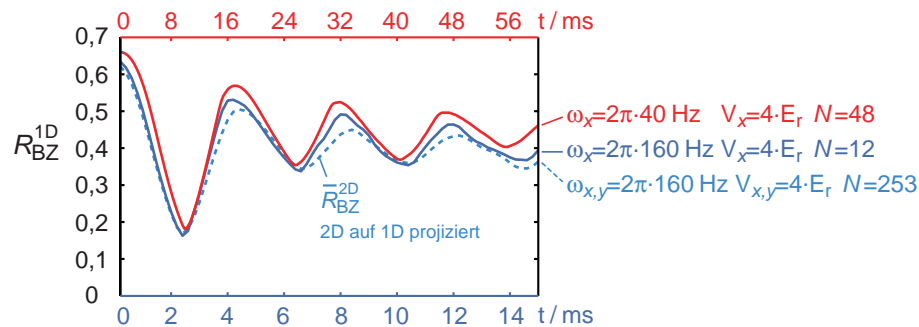
### 7.3.5 Auflösung eines Bandisolators

Die in Abbildung 7.22 a, b bzw. c dargestellte Entwicklung zeigt den Auflösungsprozess eines Bandisolators, wenn dieser abrupt in ein Gitter mit geringerer Tiefe oder Fallfrequenz entlassen wird. Die nicht-wechselwirkenden Teilchen bewegen sich völlig unab-



**Abbildung 7.22:** Vergleich der Dynamik von fermionischen Systemen unterschiedlicher Größe. Ausgangszustand ist jeweils ein perfekter Bandisolator ( $T = 0$ ). In (a) und (b) werden zwei eindimensionale Systeme betrachtet, die sich um einen Faktor vier in der Größe unterscheiden. (c) zeigt die auf eine Gitterachse projizierte 2D-Dynamik aus Abbildung 7.25. Links sind die Dichteverteilungen im Gitter und rechts die zugehörigen Kristallimpulsverteilungen dargestellt.

## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern



**Abbildung 7.23:** Zeitliche Entwicklung des Anteils  $R_{BZ}$  der Atome in den Ecken der ersten Brillouin-Zone für die in Abbildung 7.22 betrachteten Systeme.

hängig voneinander. Mit Blick auf die anfängliche Einfachbesetzung der zentralen Gitterplätze mag es verwundern, dass selbst das Pauli-Prinzip keinerlei Einschränkung für die Bewegung der einzelnen Teilchen darstellt. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der Zeitentwicklungsoperator in der Bewegungsgleichung 7.19 einer unitären Transformation entspricht. Hierdurch wird letztlich die Antisymmetrie des Ausgangszustandes „automatisch“ auf die neuen Zustände ( $t > 0$ ) übertragen. Demnach lässt sich die Dynamik jedes wechselwirkungsfreien Fermigases als Summe unabhängiger Einteilchen-Trajektorien<sup>8</sup> darstellen. Um dabei physikalisch sinnvolle Ergebnisse zu erhalten, muss einzig darauf geachtet werden, dass die Einteilchenzustände zu Beginn gemäß dem Pauli-Prinzip besetzt werden.

Wie in Abbildung 7.22 zu erkennen ist, führt der abrupte Transfer eines Bandisolators in ein Gitter mit geringerer Tiefe oder Fallenfrequenz zu einer pulsierenden Schwingung (breathing mode), bei der die zentrale Dichte mehrmals wiederauflebt. Die starke Dämpfung ist auf die unterschiedliche Dispersion der besetzten Einteilchenzustände – bzw. auf die verschiedenen effektiven Massen der Teilchen – zurückzuführen. Folglich ist die pulsierende Schwingung nicht wirklich periodisch, und auch die Dauer  $T_{\text{rev}}$  bis zum ersten Wiederaufleben der zentralen Dichte kann nur grob durch  $\pi/\omega_x^*$  (siehe Gl. 7.29) genähert werden. Abbildung 7.23 zeigt, dass sich die pulsierende Schwingung über den Anteil  $R_{BZ}$  der Atome in den Ecken der ersten Brillouin-Zone (siehe Seite 227) nachweisen lässt. Zudem verdeutlicht die Gegenüberstellung des roten und des blauen Graphen, dass der zeitliche Verlauf von  $R_{BZ}$  anhand eines kleineren Modellsystems reproduziert werden kann.

### Zweidimensionales Problem

Die für die Dynamik des eindimensionalen Fermigases verwendeten Simulationen lassen sich in einfacher Weise auf das zweidimensionale Problem erweitern. Betrachten wir ein 2D-Gitter mit  $M \times M$  Plätzen, so können wir die Einteilchenzustände (im Rahmen des Tight-Binding-Ansatzes) durch Vektoren der Länge  $M^2$  darstellen. Dement-

<sup>8</sup>So können beispielsweise die in Abbildung 7.19 dargestellten Verteilungen als Einteilchen-Trajektorien eines Bandisolators (als Ausgangszustand) betrachtet werden.



sprechend werden der Einteilchen-Hamilton-Operator und der Dichteoperator des Vielteilchenzustandes durch Matrizen der Dimension  $M^2 \times M^2$  repräsentiert. Dies macht deutlich, dass der numerische Rechenaufwand rasch mit der Anzahl der berücksichtigten Gitterplätze wächst. Dennoch können bereits auf einem einfachen Notebook Simulationen mit bis zu  $60 \times 60$  Gitterplätzen durchgeführt werden. Sind die Atome zu Anfang ( $t = 0$ ) auf individuelle Gitterplätze lokalisiert, so lässt sich die Dynamik aufgrund der einfach kubischen Symmetrie des Gitters nach den einzelnen Achsen separieren.

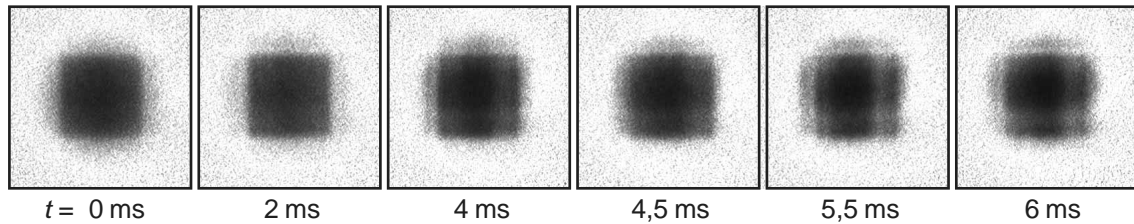
Die in Abbildung 7.25 vorgestellten Simulationsergebnisse zeigen den Auflösungsprozess eines zweidimensionalen Bandisolators, nach dem abrupten Transfer in ein Gitter mit geringerer Tiefe bzw. Fallenfrequenz. Die Dynamik ist ähnlich zum eindimensionalen Fall. So wird auch hier eine pulsierende Schwingung in der Dichte- und Kristallimpulsverteilung beobachtet, und es tritt genau dann ein Maximum in der Kristallimpulsverteilung auf, wenn die Teilchen maximal delokalisiert sind. Durch Projektion der zweidimensionalen Dynamik auf eine der beiden Gitterachsen erhält man die in Abbildung 7.22c dargestellten Verläufe. Der Vergleich mit Abbildung 7.22b zeigt, dass sich die projizierte 2D-Dynamik zumindest qualitativ durch ein eindimensionales System mit entsprechenden Parametern reproduzieren lässt. Dabei wird für die Teilchenzahl des 1D-Gases die mittlere Teilchenzahl in den parallelen „Röhren“ des 2D-Gitters vorausgesetzt. Wertet man die 2D-Dynamik anhand des Anteils  $\bar{R}_{\text{BZ}}$  der Atome auf den Rändern der projizierten Brillouin-Zone aus, so erhält man den gestrichelten Verlauf in Abbildung 7.23. Auch dieser Verlauf lässt sich gut durch das eindimensionale System wiedergeben. Der hier beobachtete Zusammenhang zwischen ein- und zweidimensionalen Systemen legt es nahe, dass sich auch die auf die Abbildungsebene projizierte 3D-Dynamik durch 2D-Simulationen reproduzieren lässt. Aufgrund der oblaten Fallengeometrie ( $\omega_z/\omega_r \approx 5$ ) eignet sich in unserem Experiment die  $z$ -Gitterachse als Abbildungsrichtung. Denn in diesem Fall werden die Verteilungen bei der Abbildung nur über wenige Gitterebenen integriert.

### Messungen

Erste Messergebnisse zur Dynamik der Kristallimpulsverteilung werden in Abbildung 7.24 präsentiert [51, 52]. Für das Experiment werden Fermigase mit einer Ausgangstemperatur von  $0,25(3) T_F$  in ein  $4 E_r$ -tiefes 3D-Gitter transferiert. Die zusätzlich überlagerte Dipolfalle erzeugt einen starken externen Einschluss mit einer radialen Fallenfrequenz  $\omega_r/2\pi$  von  $104(10)$  Hz ( $\omega_z \approx 5\omega_r$ ), sodass sich im Zentrum des Gitters ein Bandisolator ausbildet. Nach einer konstanten Haltezeit von 60 ms wird die Dipolfalle abrupt ( $\sim 1 \mu\text{s}$ ) auf eine Fallenfrequenz von  $56(6)$  Hz verringert, wobei die Gittertiefe unverändert bleibt. Eine variable Zeit  $t$  nach der Dekompression werden die Atome innerhalb 1 ms adiabatisch aus den optischen Potentialen entlassen und schließlich nach 10 ms freier Expansion entlang der  $z$ -Achse abgebildet. Auf diese Weise erhält man eine zeitliche Abfolge von Kristallimpulsverteilungen, die den Auflösungsprozess des Bandisolators wiedergibt.

In Übereinstimmung mit den numerischen Simulationen in Abbildung 7.25 beobachten

## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern



**Abbildung 7.24:** Erste Messergebnisse zur Dynamik der Kristallimpulsverteilung von  $2,0(2) \cdot 10^5$   $^{40}\text{K}$ -Atomen ( $T \approx 0,25T_F$ ) in einem konstanten,  $4 E_r$ -tiefen Gitter nach einer abrupten Verringerung der externen Fallenfrequenz  $\omega_r/2\pi$  von  $104(10)$  auf  $56(6)$  Hz ( $\omega_z/\omega_r \approx 5$ ). Eine variable Zeit  $t$  nach der Dekompression werden die Atome adiabatisch aus den optischen Potentialen entlassen und schließlich nach 10 ms freier Expansion entlang der  $z$ -Achse abgebildet.

wir in den Messungen zunächst die Ausbildung einer Kreuzstruktur und schließlich einen raschen Übergang zu verschiedenen Interferenzmustern. Wie zu erwarten, verringert die Integration entlang der Abbildungsrichtung den Kontrast der Strukturen. Aus den numerischen Berechnungen geht hervor, dass die Interferenzmuster erstmals auftreten, wenn die nach innen und nach außen laufenden Teilchenströme von gleicher Größenordnung sind. Asymmetrien in den Interferenzmustern können durch geringe Unterschiede in den Gittertiefen und Fallenfrequenzen entlang der verschiedenen Achsen hervorgerufen werden. Der unmittelbare Vergleich numerischer Simulationen und gemessener Kristallimpulsverteilungen eröffnet einen neuen Ansatz, um die externen Fallenfrequenzen bei Anwesenheit des Gitters zu messen und zu kalibrieren. Die Simulationsergebnisse in Abbildung 7.26 zeigen die Auflösung eines Bandisolators bei einem gleichzeitigen Versatz des externen Einschlusses. Auch ein abrupter räumlicher Potentialversatz kann demnach zu Asymmetrien in der Dynamik führen.

Der Übergang eines Bandisolators in den metallischen Zustand wurde erstmals in Referenz [22] untersucht. Statt der freien Dynamik nach einer Zustandsprojektion wurde dort der Auflösungsprozess des Bandisolators bei einer kontinuierlichen Verringerung der Gittertiefe studiert. Außerdem wurde nicht die Kristallimpulsverteilung, sondern die Impulsverteilung der Atome ausgewertet. Aus der Breite der Impulsverteilung ließ sich auf die Kohärenzlänge bzw. die Delokalisierung der Teilchen im Gitter zurückschließen.

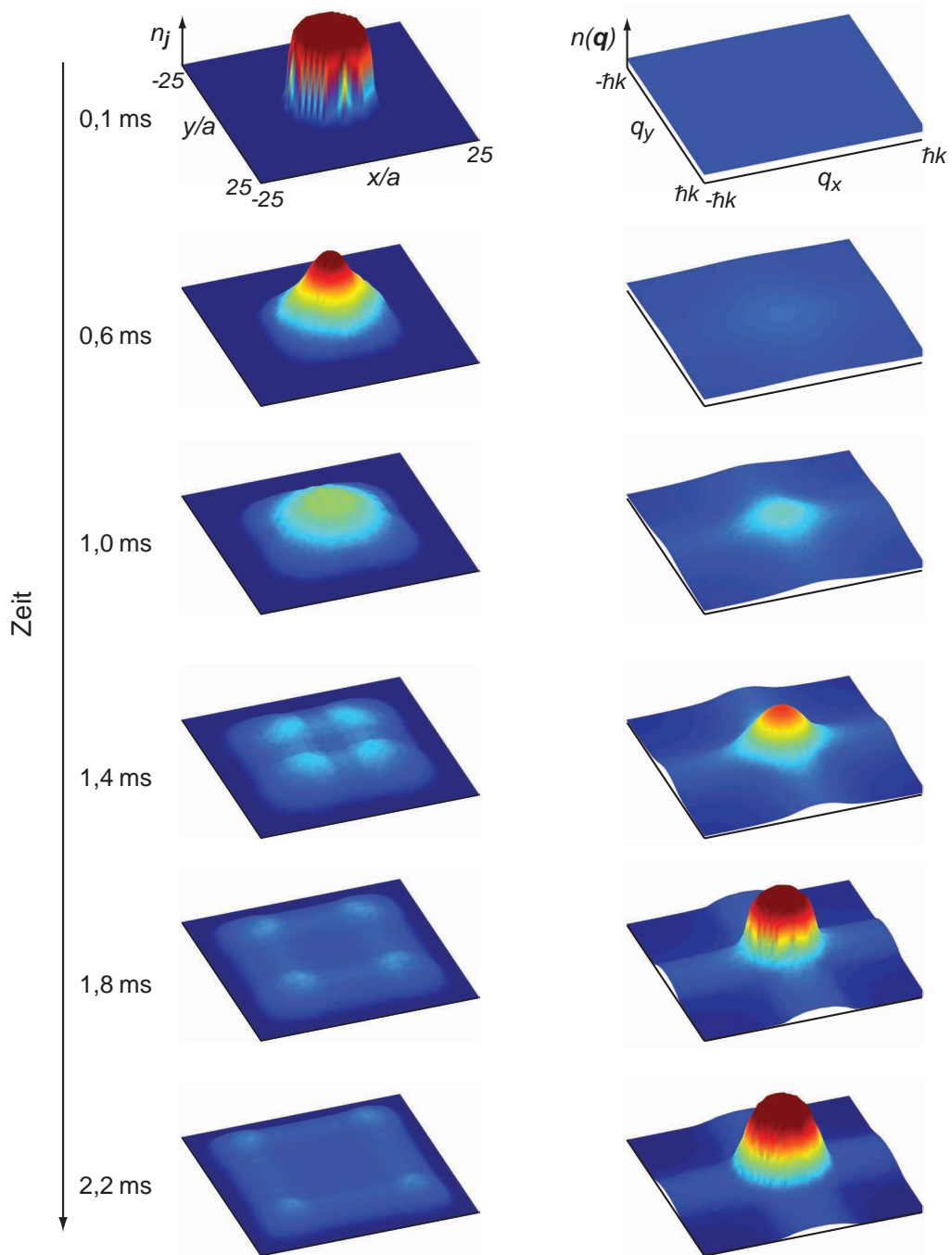
Im nicht-wechselwirkenden Fall gibt die Kristallimpulsverteilung einen unmittelbaren Einblick in die räumliche Verteilung der Atome, denn beide Verteilungen sind gemäß Gleichung 7.28 durch eine unitäre Transformation miteinander verknüpft. Insbesondere lässt sich, wie wir in Abbildung 7.23 gesehen haben, über den Anteil  $R_{BZ}$  der Atome in den Ecken der Brillouin-Zone die Zeitskala der Dynamik bestimmen. Für die experimentellen Parameter in Abbildung 7.24 wurde anhand eines skalierten zweidimensionalen Modell-

systems der Verlauf von  $R_{BZ}$  simuliert. Der Vergleich der Simulationen mit den Messdaten deutet darauf hin, dass sich die Zeitskala der Dynamik anhand des zweidimensionalen Modellsystems reproduzieren lässt.

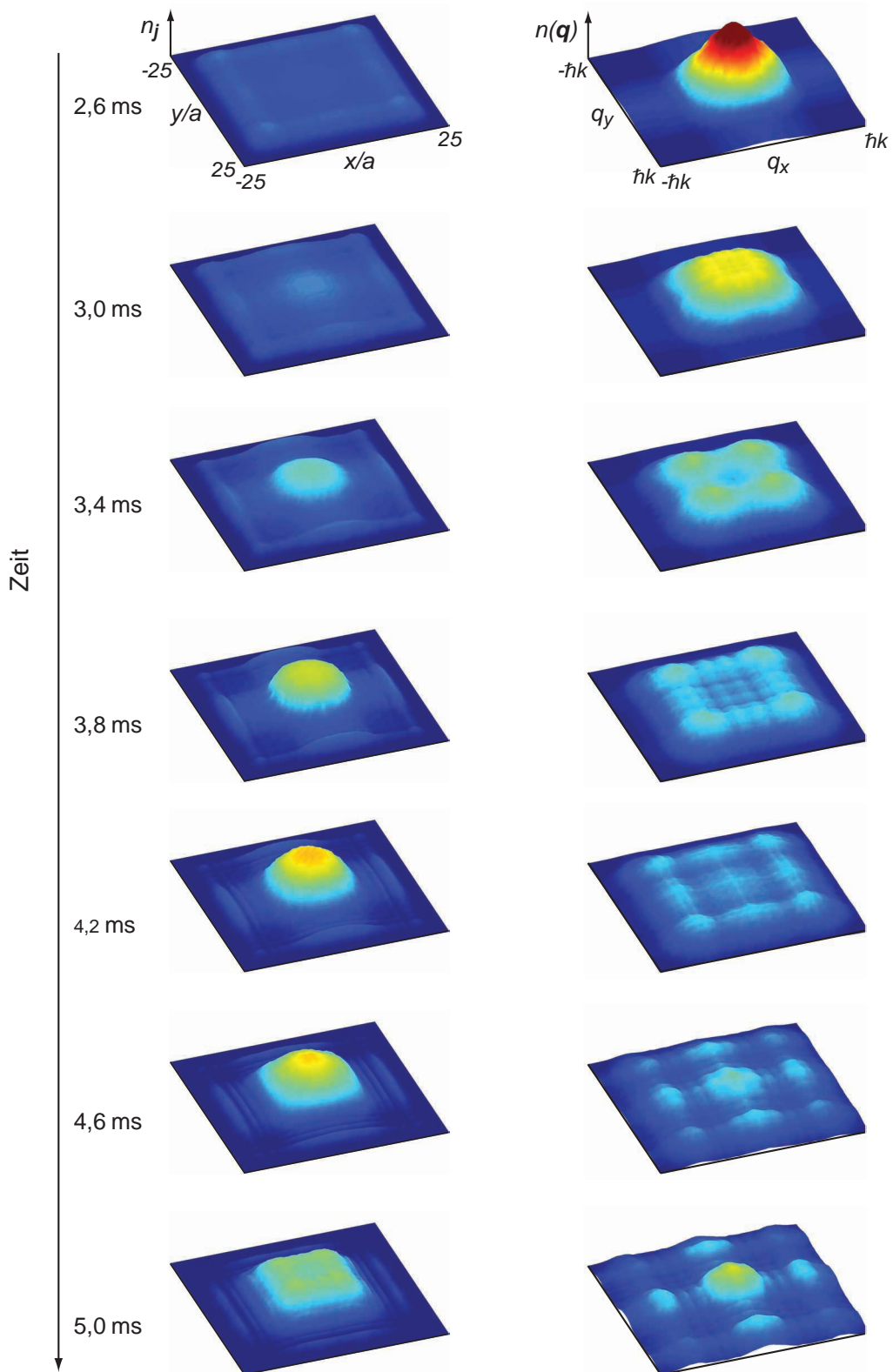
Bei den hier vorgestellten experimentellen Ergebnissen handelt es sich um erste vorläufige Messungen. Um eine gute Übereinstimmung zwischen den gemessenen und simulierten Daten zu erhalten, sollten in Zukunft mehrere Punkte beachtet werden: Es dürfen zu keiner Zeit Populationen in höheren Bändern auftreten (wie hier zu beobachten), da diese nicht durch den Tight-Binding-Ansatz beschrieben werden. Dies lässt sich durch ein tieferes Gitter, kleinere Teilchenzahlen und niedrigere Ausgangstemperaturen sicherstellen. Durch letztere Faktoren wird außerdem vermieden, dass die Atome bis in den anharmonischen Bereich der Dipolfalle schwingen. Statt durch Dekompression, welche mit einem räumlichen Versatz der Dipolfalle einhergeht, sollte die Dynamik durch eine abrupte Verringerung der Gittertiefe angeregt werden. Ein tieferes Ausgangsgitter bietet zudem den Vorteil, dass sich in ihm ein reinerer Bandisolator präparieren lässt.

Eine gute Übereinstimmung zwischen der gemessenen und simulierten Dynamik des idealen Fermigasens ist Voraussetzung, um in einem weiteren Schritt Wechselwirkungseffekte anhand der Dynamik nachweisen zu können.

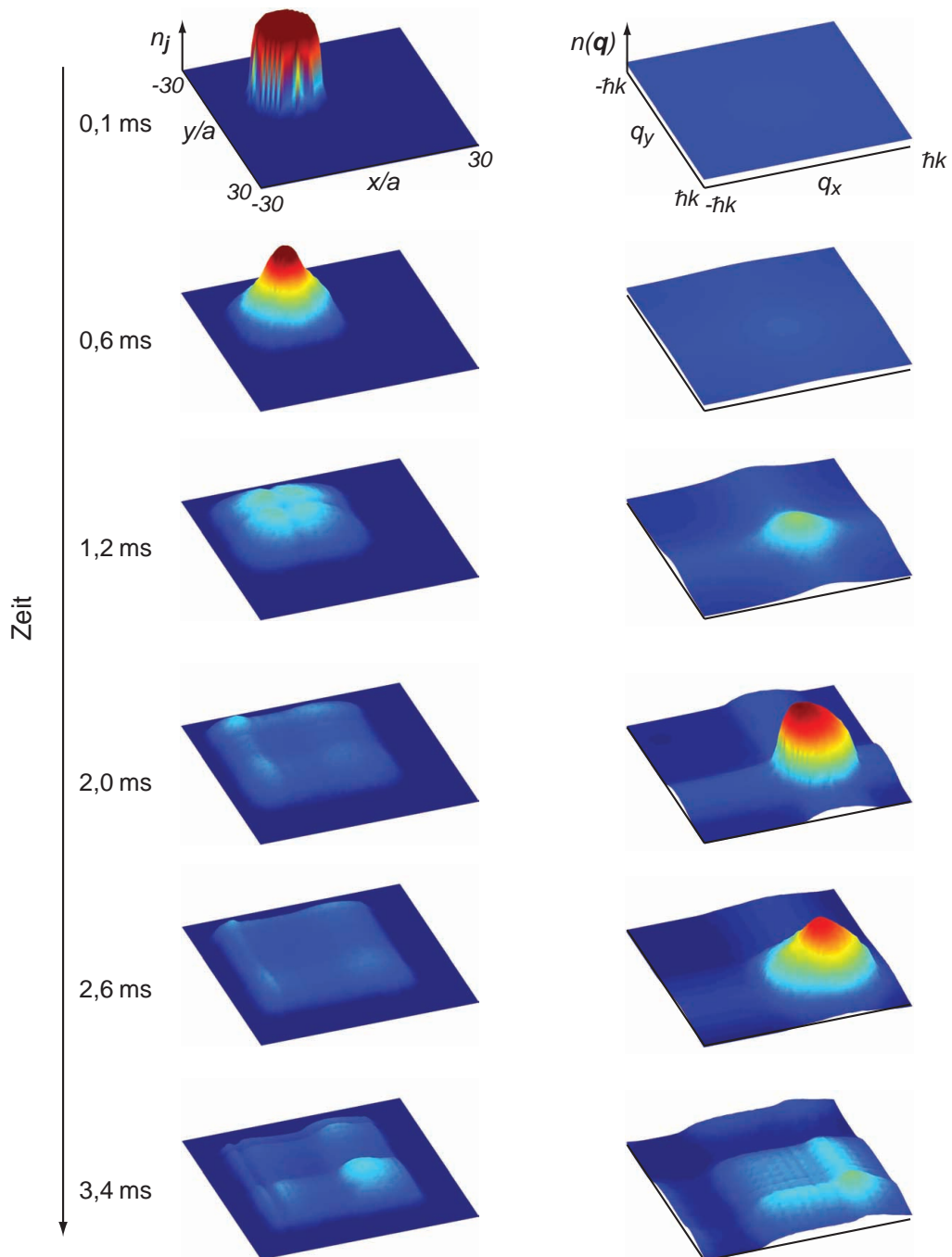
## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern



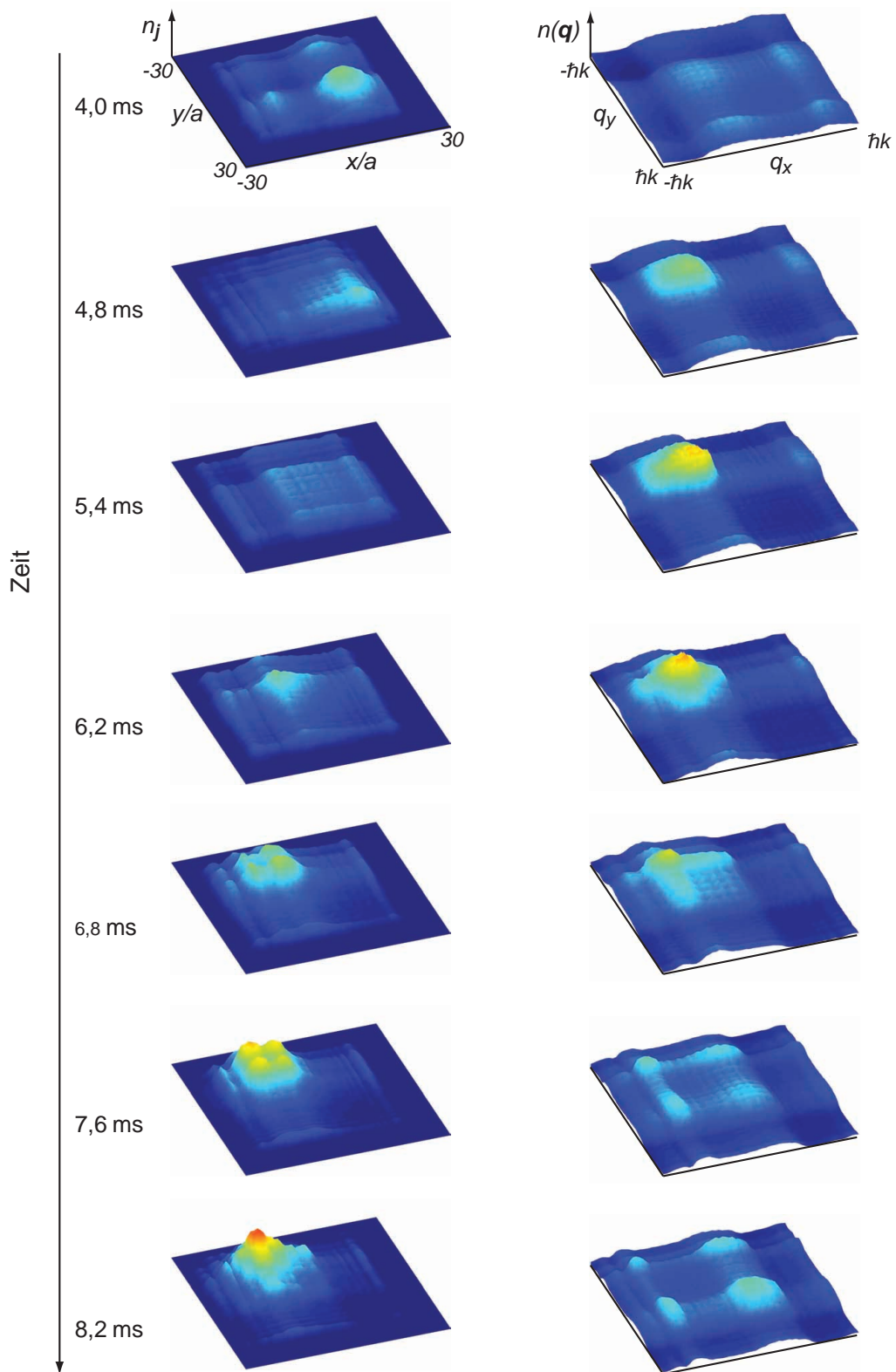
**Abbildung 7.25:** Auflösung eines zweidimensionalen Bandisolators ( $T = 0$ ) aus 253  $^{40}\text{K}$ -Atomen nach dem Transfer in ein  $4 E_r$ -tiefes Gitter ( $\lambda = 755 \text{ nm}$ ) mit externen Fallenfrequenzen von  $\omega_{x,y} = 2\pi \cdot 160 \text{ Hz}$ . In der linken Spalte sind die Dichteverteilungen im Gitter und in der rechten Spalte die zugehörigen Kristallimpulsverteilungen dargestellt. Fortsetzung der zeitlichen Serie auf der gegenüberliegenden Seite.



## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern



**Abbildung 7.26:** Auflösung eines zweidimensionalen Bandisolators. Die Systemparameter stimmen mit denen in Abbildung 7.25 überein. Einziger Unterschied: Vor der Dynamik ( $t < 0$ ) ist das externe Potential um jeweils 9 Gitterplätze entlang der  $x$ - und  $y$ -Achse versetzt. Fortsetzung der zeitlichen Serie auf der gegenüberliegenden Seite.



## 7 Ideale Fermigase in inhomogenen Gittern

---



## 8 Korrelationsanalyse

Die makroskopische Besetzung desselben Einteilchenzustandes in Bose-Einstein-Kondensaten erlaubt es, die Wellennatur der Materie in beeindruckender Weise sichtbar zu machen. In einer frei expandierenden Wolke lassen sich die kondensierten Atome anhand eines charakteristischen Dichtepicks nachweisen. Die Überlagerung von zwei oder mehr superfluiden Wolken führt zu einer Interferenzstruktur, die einen direkten Nachweis der makroskopisch verstärkten Einteilchenkohärenzen liefert. Experimente mit Feshbach-Resonanzen oder optischen Gittern erlauben es, Vielteilchenphänomene zu studieren, die über diese einfachen Einteilchenkorrelationen hinausgehen. Solche stark korrelierten Systeme bilden komplexe Ordnungen aus, welche sich einer Beschreibung durch Einteilchenwellenfunktionen entziehen. Diese Vielteilchenzustände können nicht unmittelbar anhand ihrer Dichteprofile identifiziert werden. So rufen beispielsweise die lokalisierten Atome eines Mott-Isolators ein verschwindendes Interferenzmuster hervor, aus dem sich nur schwer Informationen über den zugrundeliegenden Vielteilchenzustand ableiten lassen. Gleiches gilt für die Superfluidität gepaarter Fermionen, da diese keinen kohärenten Peak in der Dichteverteilung hervorruft. Für die Mehrzahl der theoretisch vorausgesagten stark wechselwirkenden Vielteilchensysteme sind die zugehörigen Ordnungsparameter nur schwer experimentell zugänglich.

Ehud Altman und Mitarbeiter erkannten, dass sich die verborgene Ordnung in den stark korrelierten Systemen oftmals anhand von Korrelationen im atomaren Quantenrauschen nachweisen lassen [39]. Bei dieser Methode wird das in den Absorptionsoptionen von Atomwolken sichtbare Schrotrauschen mittels einer Korrelationsanalyse ausgewertet. Neben der Struktur des Vielteilchensystems geben die Rauschkorrelationen Auskunft über die Quantenstatistik der zugrundeliegenden Teilchen.

Rauschkorrelationen können bei einer Vielzahl von Quantenfeldern beobachtet werden. Bereits 1956 zeigten Robert Hanbury Brown und Richard Twiss (HBT) in einem bahnbrechenden Experiment, dass die von einer chaotischen Lichtquelle ausgesendeten Photonen (Bosonen) bevorzugt synchron auf zwei unabhängigen Detektoren eintreffen. Diese positiven Korrelationen im Photonenrauschen werden als Bunching bezeichnet und sind auf die konstruktive Interferenz zwischen den Amplituden zweier ununterscheidbarer Bosonen zurückzuführen. Durch das Kühlen und Erzeugen atomarer Ensembles mit hohen Phasenraumdichten konnte der Bunching-Effekt auch an bosonischen Atomen nachgewiesen werden.

Bei fermionischen Atomen erwartet man das Pendant zum Bunching-Effekt. So sollten fermionische Atome Antibunching aufweisen, also die Tendenz sich gegenseitig zu meiden. Das Antibunching ist die Folge einer destruktiven Zwei-Teilchen-Interferenz und unmittelbar mit dem Pauli-Prinzip verknüpft. Zusammenfassend werden das bosonische

## 8 Korrelationsanalyse

---

Bunching und das fermionische Antibunching im Folgenden als HBT-Effekte bezeichnet.

In unserem Experiment kann fermionisches Antibunching erstmals anhand von neutralen Atomen nachgewiesen und innerhalb einer selben Apparatur mit dem bosonischen Bunching verglichen werden. Dazu werden bosonische bzw. fermionische Atome aus einem tiefen optischen Gitter entlassen und mittels Absorptionsabbildung aufgenommen. Anschließend wird das in den Absorptionaufnahmen sichtbare atomare Schrotrauschen mittels einer Korrelationsanalyse ausgewertet. Aufgrund der vernachlässigbaren Wechselwirkungen zwischen den neutralen Atomen lassen sich die unterschiedlichen für Bosonen und Fermionen beobachteten Korrelationen allein auf die verschiedenen Quantenstatistiken zurückführen. Darüber hinaus liefert die Struktur der Korrelationen Informationen über den Vielteilchenzustand. Mit dem demonstrierten Verfahren lassen sich auch komplexere Quantenphasen in optischen Gittern nachweisen, wie sie im Fokus der aktuellen Forschung stehen.

Um ein theoretisches Verständnis des HBT-Effektes und der in unserem Experiment beobachteten Rauschkorrelationen zu gewinnen, behandeln wir zunächst die Kohärenzeigenschaften von Licht. Am Beispiel zweier Sterninterferometer werden die Korrelationsfunktionen erster und zweiter Ordnung eingeführt. Eine Vielzahl der Konzepte und Phänomene aus der Kohärenztheorie der elektromagnetischen Strahlung lassen sich unmittelbar auf die Atomoptik übertragen. Wir werden sehen, dass ultrakalte Atome besonders gut geeignet sind, um den HBT-Effekt zu untersuchen. In unserem Experiment geschieht dies durch Analyse der Rauschkorrelationen der aus einem optischen Gitter entlassenen und durch Absorptionsabbildung aufgenommenen Atomwolken. Der Berechnung der theoretischen Korrelationssignale ist ein eigener Abschnitt gewidmet. Dabei wird neben der endlichen Auflösung des Abbildungssystems auch die endliche Temperatur der Atome berücksichtigt. Es folgt eine Beschreibung der durchgeführten Experimente. Mögliche zukünftige Anwendungen der Korrelationsanalyse werden im Ausblick dieser Arbeit vorgestellt.

### 8.1 Korrelationen in Lichtfeldern

Überraschenderweise war es eine neue Methode aus der Astronomie, durch die in den fünfziger Jahren eine bedeutende Weiterentwicklung in der Quantentheorie des Lichtes angestoßen wurde. Bei dieser Methode werden die zeitlichen Intensitätsschwankungen der von Teleskopen detektierten Strahlung analysiert, um den scheinbaren Winkeldurchmesser von Sternen zu bestimmen. Bevor wir uns dieser sogenannten Intensitätsinterferometrie zuwenden, befassen wir uns mit einem älteren astronomischen Verfahren zur Winkelbestimmung, welches ein klassisches Phaseninterferometer ausnutzt.

### 8.1.1 Michelson-Interferometer und transversale Kohärenz

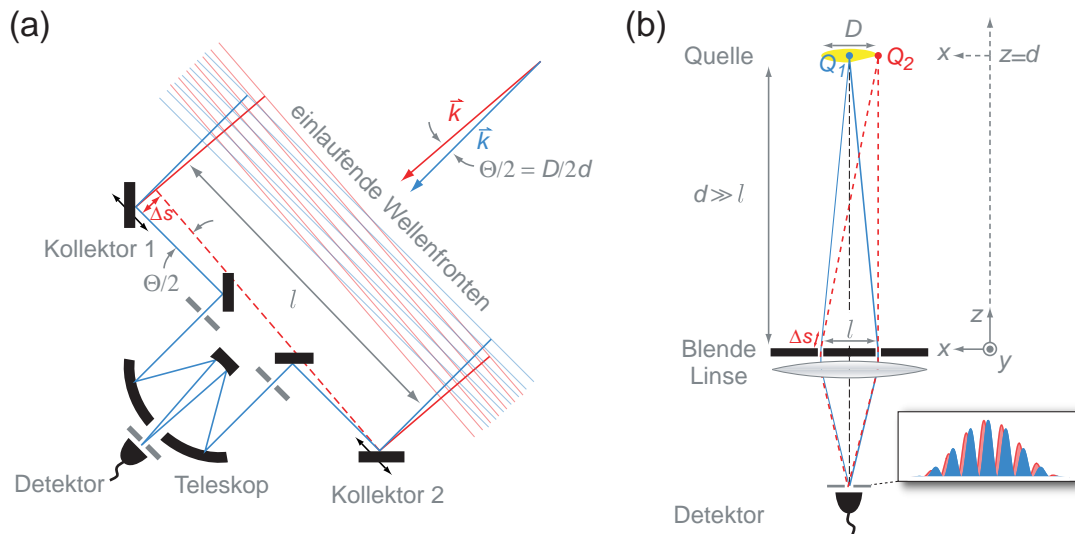
Wegen ihres großen Abstandes von der Erde erscheinen die meisten Fixsterne als punktförmig. Die endliche Sterngröße, welche man in einem Teleskop beobachtet, ist in der Regel auf die Beugung an der Apertur zurückzuführen und gibt daher *keine* Auskunft über die tatsächliche Winkelgröße des Sterns. Bereits 1890 schlug Albert A. Michelson, basierend auf einer Idee von Armand H. Fizeau [277], eine interferometrische Methode zur Bestimmung der stellaren Winkeldurchmesser vor [278]. Ab 1920 konnte Michelson mit dem nach ihm benannten Interferometer die Durchmesser einiger näher gelegener Riesensterne ermitteln [279, 280].

Der Aufbau des Michelson-Interferometers ist schematisch in Abbildung 8.1a dargestellt. Es besteht aus zwei zueinander parallel verschiebbaren Kollektoren, die das Licht des fernen Himmelskörpers einfangen. Anschließend wird das Licht über Umlenkspiegel in ein Teleskop geleitet und in dessen Brennebene fokussiert. Durch den Einsatz der Kollektoren wird die Apertur des Teleskops effektiv vergrößert. Das Prinzip dieses Aufbaus ist mit dem in Abbildung 8.1b dargestellten Young'schen Doppelspalt vergleichbar, wobei die Kollektoren durch die beiden Spalten repräsentiert werden. Die sichtbare Fläche des Sterns kann als scheibenförmige Anordnung  $Q$  punktförmiger, quasi-monochromatischer Lichtquellen  $Q_i$  aufgefasst werden, die bei annähernd gleicher Leuchtkraft chaotisches Licht der Wellenlänge  $\lambda$  aussenden. Dabei besteht zwischen den parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene verteilten Punktquellen  $Q_i$  keinerlei Phasenbeziehung, sodass sich deren Intensitäten inkohärent addieren. Ist die optische Achse des Interferometers, wie in dem dargestellten Beispiel, genau auf das Sternzentrum ausgerichtet, so durchläuft Licht von der zentralen Punktquelle  $Q_1$  die beiden Arme ohne Gangunterschied und interferiert konstruktiv am Ort des Detektors. Licht vom Rand  $Q_2$  des Sterns fällt hingegen unter einem Winkel  $\theta/2 = D/2d \ll 1$  ein. Hierbei bezeichnet  $\theta$  den Winkeldurchmesser des Sterns, der sich in einem Abstand  $d$  vom Beobachter befindet und dessen Durchmesser  $D$  beträgt. Die von der Punktquelle  $Q_2$  ausgehende Wellenfront trifft wegen ihres schrägen Einfallswinkels mit einem Gangunterschied  $\Delta s = l \sin(\theta/2) \approx l\theta/2$  auf den beiden Kollektoren ein. Für sehr kleine Abstände  $l$  zwischen den beiden Kollektoren wird sämtliches eintreffendes Licht konstruktiv mit sich selbst interferieren. In diesem Fall trägt die gesamte Sternfläche zum Detektorsignal bei. Für schräg einfallende Wellenfronten nehmen jedoch mit zunehmendem Kollektorabstand  $l$  auch die Gangunterschiede zu, sodass das Licht beginnt, teilweise destruktiv mit sich selbst zu interferieren und folglich verringert sich die resultierende Gesamtintensität. Für einen Gangunterschied von  $\Delta s = \lambda/2$  kommt es zu einer vollständigen Auslöschung. Diese Auslöschung tritt als erstes für Licht auf, das vom Rand  $Q_2$  des Sterns stammt, und zwar wenn der Kollektorabstand

$$l_c^{(t)} = \lambda/\theta. \tag{8.1}$$

beträgt. Die Länge  $l_c^{(t)}$  gibt die Größenskala an, innerhalb derer das Detektorsignal des Michelson-Interferometers auf seinen minimalen Wert abfällt. Aus der Messung von  $l_c^{(t)}$  lässt sich über Gleichung 8.1 der Winkeldurchmesser  $\theta$  des Sterns ableiten. Wegen der

## 8 Korrelationsanalyse



**Abbildung 8.1:** (a) Schematischer Aufbau eines Michelson-Sterninterferometers: Das Licht eines Sterns wird von zwei verschiebbaren Kollektoren aufgefangen und über Umkehrspiegel in ein Teleskop geführt. Innerhalb der Brennebene werden die Strahlen zur Interferenz gebracht. Die dargestellten Wellenvektoren und Wellenfronten entsprechen Licht, das vom Zentrum  $Q_1$  bzw. vom Rand  $Q_2$  des Sterns ausgeht. Die als Funktion des Kollektorabstandes  $l$  im Brennpunkt des Interferometers gemessene Intensität liefert über Gleichung 8.6 die Korrelationsfunktion erster Ordnung  $g^{(1)}(l)$ . Aus der resultierenden transversalen Kohärenzlänge  $l_c^{(t)}$  lässt sich mit Gleichung 8.1 der Winkeldurchmesser  $\theta$  des Sterns ableiten. (b) Im Prinzip kann das Michelson-Interferometer mit einem Young'schen Doppelspalt verglichen werden, wobei die Spalten im Abstand  $l$  den beiden Kollektoren entsprechen. Wegen des schrägen Einfallswinkels  $\theta/2$  verfügt Licht, das vom Rand  $Q_2$  des Sterns ausgeht, am Ort der beiden Spalten über einen Gangunterschied  $\Delta s = l\theta/2$ . Folglich ist das Maximum des resultierenden Interferenzmusters (rot dargestellt) gegenüber dem des senkrecht einfallenden Lichtes (blau dargestellt) verschoben und trägt nicht mehr in voller Intensität zum Detektorsignal bei. Dies bedeutet, dass der Kontrast der Gesamtinterferenz abnimmt.

Beziehung

$$\Delta k = |\mathbf{k}|\theta = \frac{2\pi}{\lambda}\theta = \frac{2\pi}{l_c^{(t)}} \quad (8.2)$$

gibt  $l_c^{(t)}$  zugleich Auskunft über die Breite der Verteilung der transversalen Wellenvektorkomponenten des einfallenden Lichtes (siehe Abbildung 8.1a).

In einer klassischen Beschreibung kann Licht, das wir der Einfachheit halber als vollständig polarisiert betrachten, als komplexes skalares Feld  $\psi(\mathbf{r}, t)$  dargestellt werden. Das Feld sei so definiert, dass die mittlere Intensität des Lichtes am Ort  $\mathbf{r}$  zur Zeit  $t$  durch den

## 8.1 Korrelationen in Lichtfeldern

folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\bar{I}(\mathbf{r}, t) = \langle \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (8.3)$$

Die Klammern  $\langle \rangle$  bzw. der Querstrich  $\bar{\phantom{x}}$  bezeichnen eine Ensemblemittelung über alle statistisch möglichen Feldkonfigurationen. Für ein stationäres Lichtfeld, also ein Feld konstanter mittlerer Intensität, ist dies äquivalent mit einer zeitlichen Mittelung über eine Dauer  $\tau$ , die groß gegenüber der Kohärenzzeit des Lichtes ist und die zugleich dicht um den Zeitpunkt  $t$  herum liegt. Das Michelson-Interferometer erlaubt es, die Feldamplituden an den beiden Positionen  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  der Kollektoren miteinander in Beziehung zu setzen. Das wird deutlich, wenn man die am Ort des Detektors resultierende Intensität  $\bar{I}_D$  berechnet:

$$\begin{aligned} \bar{I}_D &= \langle |\psi(\mathbf{r}_1, t) + \psi(\mathbf{r}_2, t)|^2 \rangle = \\ &= \langle |\psi(\mathbf{r}_1, t)|^2 \rangle + \langle |\psi(\mathbf{r}_2, t)|^2 \rangle + 2 \Re \langle \psi^*(\mathbf{r}_1, t) \psi(\mathbf{r}_2, t) \rangle. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Die Kohärenzeigenschaften des klassischen Feldes lassen sich über die normierte Korrelationsfunktion erster Ordnung charakterisieren:

$$g^{(1)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = \frac{\langle \psi^*(\mathbf{r}_1, t_1) \psi(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle}{\sqrt{\langle |\psi(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle \langle |\psi(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle}}. \quad (8.5)$$

Geht man von einer symmetrischen Ausrichtung und Anordnung des Interferometers aus, so fallen die gleichen Lichtintensitäten auf die beiden Kollektoren und man erhält für die Intensität am Ort des Detektors:

$$\frac{\bar{I}_D}{\bar{I}_{\text{tot}}} = 1 + \Re g^{(1)}(l). \quad (8.6)$$

Hierbei bezeichnet  $\bar{I}_{\text{tot}}/2$  die Intensität am Ort des Detektors, wenn einer der beiden Kollektoren verdeckt wird. Wegen der symmetrischen Ausrichtung hängt die Korrelationsfunktion nur vom Relativabstand  $l = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  der beiden Kollektoren ab. Außerdem wird davon ausgegangen, dass die einfallenden Intensitäten im zeitlichen Mittel konstant sind (stationäres Lichtfeld).

Gemäß Gleichung 8.6 gibt das Detektorsignal des Michelson-Interferometers direkten Aufschluss über den Grad der Kohärenz zwischen den optischen Feldern im Abstand  $l$ . Statt der Intensität im Zentrum kann auch der Kontrast des in der Brennebene liegenden Interferenzmusters ausgewertet werden. Gemäß Abbildung 8.1b erzeugen schräg einfallende Strahlen seitlich versetzte Interferenzmuster. Je Breiter die Winkelverteilung  $\theta$  der einfallenden Strahlen ist, umso stärker sind die zugehörigen Interferenzmuster gegeneinander verschoben und umso kleiner fällt der Kontrast der resultierenden Gesamtinterferenz aus. Nach Michelson ist der Kontrast<sup>1</sup> eines solchen Musters durch die folgende Größe definiert:

$$\mathcal{V} = \frac{\bar{I}_{\text{max}} - \bar{I}_{\text{min}}}{\bar{I}_{\text{max}} + \bar{I}_{\text{min}}}. \quad (8.7)$$

<sup>1</sup>Der Kontrast  $\mathcal{V}$  wird auch als Sichtbarkeit oder im Englischen als visibility bezeichnet.

## 8 Korrelationsanalyse

Hierbei werden die mittleren Intensitäten zweier unmittelbar benachbarter Interferenzmaxima und -minima bestimmt. Es lässt sich allgemein zeigen, dass der auf diese Weise ausgewertete Kontrast direkt proportional zum Betrag der Korrelationsfunktion ist [281]. In den meisten Fällen sind die mittleren Intensitäten in den beiden Interferometerarmen gleich groß, sodass gilt:

$$\mathcal{V} = |g^{(1)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2)|. \quad (8.8)$$

Da  $0 \leq |g^{(1)}| \leq 1$ , kann der Interferenzkontrast maximal einen Wert von eins annehmen. In einem solchen Fall verfügt das Lichtfeld über eine vollständige Kohärenz erster Ordnung. Aufgrund der Relationen 8.6 und 8.8 liefert sowohl die Detektorintensität  $\bar{I}_D$  als auch der Interferenzkontrast  $\mathcal{V}$  Informationen über den Grad der Kohärenz des einfallenden Lichtes und die Größe  $l_c^{(t)}$  lässt sich als transversale Kohärenzlänge des Lichtfeldes interpretieren.

### Van Cittert-Zernike-Theorem

Im Folgenden wollen wir den Kohärenzgrad eines Lichtfeldes bestimmen, das von einer weit entfernten quasi-monochromatischen Lichtquelle endlicher Ausdehnung erzeugt wird [282]. Die geometrische Anordnung ist in Abbildung 8.2a dargestellt. Wie im Beispiel der Sternscheibe sei die Lichtquelle  $Q$  eben und parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene bei  $z = d$  positioniert. Der Kohärenzgrad des Feldes soll zwischen zwei Punkten  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  bestimmt werden, die auf der  $x$ -Achse angeordnet sind. Diese Punkte definieren die beiden Öffnungen einer Blende, welche innerhalb der  $x$ - $y$ -Ebene ( $z = 0$ ) liegt und einen Young'schen Doppelspalt bildet. Die Feldamplitude am Ort  $\mathbf{r}_1$  ergibt sich aus der Summe aller Amplituden, die von den unabhängigen Punktquellen an den Orten  $\mathbf{r}_Q = (x, y, d)$  ausgehen:

$$\psi(\mathbf{r}_1, t) = \int_Q \frac{\psi(\mathbf{r}_Q, t - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_Q|/c)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_Q|} dx dy. \quad (8.9)$$

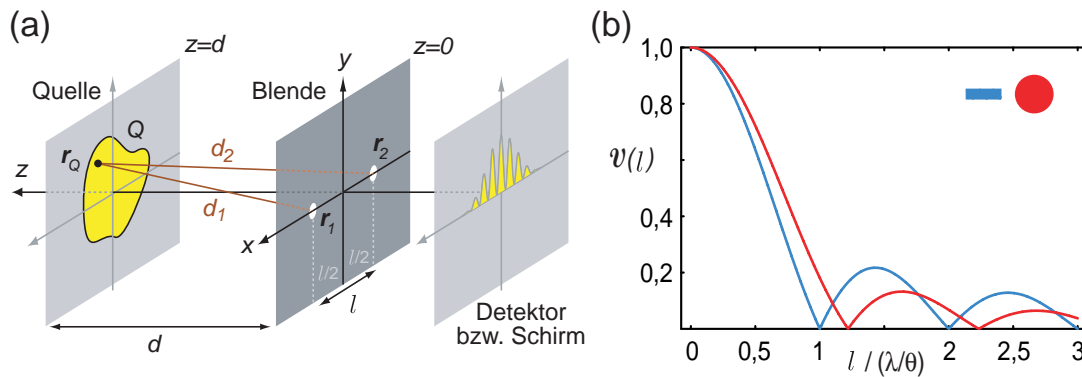
Hier wird über die gesamte Fläche der Lichtquelle  $Q$  integriert, wobei die unterschiedlich langen Propagationsstrecken der einzelnen Amplitudenbeiträge berücksichtigt werden. Ein analoger Ausdruck ergibt sich für die Feldamplitude  $\psi(\mathbf{r}_2, t)$  am Ort  $\mathbf{r}_2$ . Für große Abstände  $d$  zwischen Quelle und Lochblende ( $d \gg l, D$ ) werden die beiden Öffnungen bei  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  in guter Näherung von jeder der Punktquellen mit der gleichen Intensität ausgeleuchtet und für die Amplitudenkorrelation  $\langle \psi^*(\mathbf{r}_1, t) \psi(\mathbf{r}_2, t) \rangle$  folgt:

$$\left\langle \frac{1}{d^2} \int_Q \int_Q \psi^* \left( \mathbf{r}_Q, t - \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_Q|}{c} \right) \psi \left( \mathbf{r}'_Q, t - \frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_Q|}{c} \right) dx dy dx' dy' \right\rangle. \quad (8.10)$$

Da die einzelnen Punktquellen zueinander inkohärent sind, verschwindet der zeitliche Mittelwert des Doppelintegrals für alle  $\mathbf{r}_Q \neq \mathbf{r}'_Q$ . Zwischen den beiden Amplituden besteht nur dann eine feste Phasenbeziehung, wenn diese von derselben Punktquelle ausgehen und es folgt:

$$\langle \psi^*(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_2) \rangle = \int_Q \frac{\bar{I}_Q(x, y)}{d^2} e^{ik(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_Q| - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_Q|)} dx dy. \quad (8.11)$$

## 8.1 Korrelationen in Lichtfeldern



**Abbildung 8.2:** (a) Geometrische Anordnung zur Herleitung des van Cittert-Zernike-Theorems: Eine ausgedehnte inkohärente Lichtquelle  $Q$ , die parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene ausgerichtet ist, befindet sich bei  $z = d$ . Von jedem Punkt  $\mathbf{r}_Q = (x, y, d)$  der Quelle fällt Licht der Wellenlänge  $\lambda$  auf die Punkte  $\mathbf{r}_1 = (l/2, 0, 0)$  und  $\mathbf{r}_2 = (-l/2, 0, 0)$ . An diesen beiden Punkten befinden sich die Öffnungen eines Young'schen Doppelspalts. (b) Interferenzkontrast  $\mathcal{V}(l) = |g^{(1)}(l)|$  hinter einem Young'schen Doppelspalt als Funktion des Spaltabstandes  $l$ . Die Graphen zeigen den Kontrast für eine lineare (blau) und eine kreisrunde (rot) quasi-monochromatische Lichtquelle. Beide Quellen verfügen über eine homogene Intensitätsverteilung und über einen „Winkeldurchmesser“  $\theta$ .

Auch hier sind wir von einer stationären Quelle ausgegangen, das heißt einer Quelle, deren zeitlich gemittelte Intensitätsverteilung  $\bar{I}_Q(x, y)$  unabhängig vom Zeitpunkt  $t$  ist. Für den Betrag der Wellenvektoren gilt  $k = 2\pi/\lambda$ . Der Gangunterschied  $\Delta d = d_2 - d_1$  zwischen den beiden Propagationsstrecken  $d_1 = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_Q|$  und  $d_2 = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_Q|$  lässt sich für große Abstände  $d$  in der Fernfeldnäherung berechnen<sup>2</sup>. Gehen wir außerdem davon aus, dass die beiden Öffnungen der Blende symmetrisch um den Ursprung der  $x$ -Achse in einem relativen Abstand  $l$  angeordnet sind, so erhält man für den Gangunterschied  $\Delta d = -lx/d$ . Um den Ausdruck 8.11 auf die Form von Gleichung 8.5 zu bringen, normieren wir die Korrelationsfunktion mit der auf die beiden Blendenöffnungen treffenden Gesamtleistung und erhalten schließlich:

$$g^{(1)}(l) = \frac{\int_Q \bar{I}_Q(x, y) e^{-ik \frac{l}{d} x} dx dy}{\int_Q \bar{I}_Q(x, y) dx dy}. \quad (8.12)$$

Hierbei handelt es sich um eine spezielle Formulierung des van Cittert-Zernike-Theorems [40, 282]. Dieses besagt, dass der Kohärenzgrad des optischen Feldes in einem hinreichend großen Abstand von einer inkohärenten quasi-monochromatischen Lichtquelle durch die Fourier-Transformierte der normierten Intensitätsverteilung der Quelle gegeben ist.

<sup>2</sup>Wie bei der Fraunhofer-Beugung nutzt man hierzu die Reihenentwicklung  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ .

## 8 Korrelationsanalyse

---

Wir wenden nun das van Cittert-Zernike-Theorem 8.12 auf zwei Quellen mit homogener Intensitätsverteilung an. In den beiden Beispielen befindet sich das Zentrum der Quelle jeweils auf der Symmetrieachse ( $z$ -Achse) des Interferometers. Für eine eindimensionale lineare Quelle der Länge  $D$ , die parallel zu den Interferometerarmen ( $x$ -Achse) ausgerichtet ist und damit über einen „Winkeldurchmesser“  $\theta = D/d$  verfügt, ergibt sich der Kohärenzgrad zu:

$$g^{(1)}(l) = \frac{\sin\left(\pi \frac{l}{\lambda/\theta}\right)}{\pi \frac{l}{\lambda/\theta}}. \quad (8.13)$$

Analog folgt für den Kohärenzgrad einer kreisrunden homogenen Quelle mit einem Durchmesser  $D$ :

$$g^{(1)}(l) = 2 \frac{J_1\left(\pi \frac{l}{\lambda/\theta}\right)}{\pi \frac{l}{\lambda/\theta}}. \quad (8.14)$$

Hierbei bezeichnet  $J_1$  die Bessel-Funktion erster Art und erster Ordnung. Die Kontraste  $\mathcal{V}(l)$  der resultierenden Interferenzmuster sind gemäß Gleichung 8.8 durch die Beträge der obigen Ausdrücke gegeben und in Abbildung 8.2b als Funktion des Kollektor- bzw. Spaltabstandes  $l$  dargestellt.

Bei der Bestimmung von stellaren Winkeldurchmessern mit dem Michelson-Interferometer können die Sterne in guter Näherung als Scheiben gleichmäßiger Leuchtkraft aufgefasst werden. Gemäß dem roten Graphen nimmt der Interferenzkontrast sein erstes Minimum an, wenn der Kollektorabstand einen Wert von  $l = 1,22\lambda/\theta$  erreicht. Ist dieser Abstand bekannt, so lässt sich daraus der Winkeldurchmesser  $\theta$  des Sterns ermitteln.

Im Fall der linearen Quelle wird das erste Minimum bei einem Spaltabstand erreicht, der mit der transversalen Kohärenzlänge  $l_c^{(t)}$  übereinstimmt (siehe blauer Graph).

Neben dem Winkeldurchmesser lassen sich aus einer interferometrischen Messung auch Informationen über die Intensitätsverteilung der Quelle gewinnen. Hierfür ist gemäß dem van Cittert-Zernike-Theorem eine detaillierte Auswertung des funktionalen Verlaufs des Interferenzkontrastes  $\mathcal{V}(l)$  notwendig.

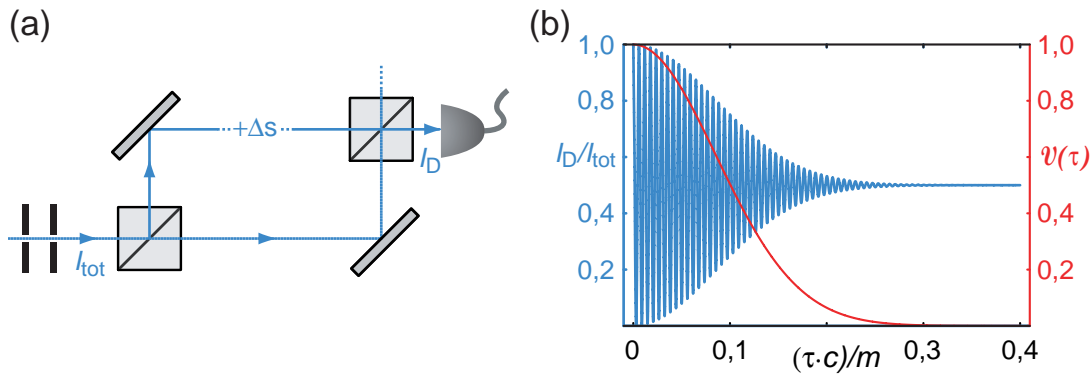
### 8.1.2 Mach-Zehnder-Interferometer und longitudinale Kohärenz

In den bisherigen Betrachtungen sind wir implizit davon ausgegangen, dass Licht, welches von ein und derselben Punktquelle stammt, vollständig kohärent ist und somit bei der Überlagerung mit sich selbst einen hundertprozentigen Interferenzkontrast hervorruft. In der Realität verfügt eine quasi-monochromatische Lichtquelle jedoch über eine endliche spektrale Breite  $\Delta\nu$ . Somit besteht das Licht aus einer Überlagerung verschiedener Frequenzen, die um eine Mittenfrequenz  $\nu$  herum verteilt sind. Damit das Licht beim Durchlaufen eines Interferometers eine Interferenz hervorrufen kann, muss der Laufzeitunterschied  $\Delta t$  zwischen den beiden Interferometerarmen klein gegenüber der Kohärenzzeit

$$\tau_c = 1/\Delta\nu \quad (8.15)$$



## 8.1 Korrelationen in Lichtfeldern



**Abbildung 8.3:** (a) Mach-Zehnder-Interferometer und (b) dessen Ausgangssignal. Am Beispiel einer dopplerverbreiterten Natrium-Lichtquelle ( $T = 300$  K, gefilterte  $D_2$ -Linie  $\lambda = 589$  nm) wird die Austrittsleistung  $\bar{I}_D$  (blau) und der zugehörige Interferenzkontrast  $\mathcal{V}(\tau) = |g^{(1)}(\tau)|$  (rot) als Funktion des Gangunterschiedes  $\Delta s = \tau c$  zwischen den beiden Interferometerarmen berechnet. Umgekehrt lässt sich aus dem Verlauf der Signale mittels des Wiener–Khinchin-Theorem die Linienbreite und Linienform der Quelle ableiten. Wird der Gangunterschied  $\Delta s$  um  $\lambda$  variiert, so führt die Ausgangsleistung eine Oszillation aus. Man beachte, dass zur besseren Darstellung die Oszillationsfrequenz im Graphen um einen Faktor  $10^4$  verringert ist.

sein. Dies ist gleich bedeutend mit der Forderung, dass der Gangunterschied  $\Delta s$  klein gegenüber der longitudinalen Kohärenzlänge

$$l_c^{(l)} = c/\Delta\nu \quad (8.16)$$

ist. Denn nur wenn die einzelnen Frequenzbeiträge beim Durchlaufen der beiden Pfade miteinander in Phase bleiben, kann ein „Verwaschen“ der Interferenz vermieden werden. Basierend auf diesen Überlegungen bezeichnen wir eine Lichtquelle als quasi-monochromatisch, wenn deren spektrale Breite die Bedingung  $\Delta\nu \ll \nu$  erfüllt.

Die zeitliche (bzw. longitudinale) Kohärenz einer Lichtquelle lässt sich mit dem in Abbildung 8.3a dargestellten Mach-Zehnder-Interferometer untersuchen. Dabei wird räumlich gefiltertes Licht von einem Strahlteilerwürfel in zwei Strahlen aufgeteilt. Nach dem Durchlaufen der beiden Interferometerarme wird das Licht auf einem zweiten Würfel wieder überlagert und die resultierende Interferenz auf einem Photodetektor gemessen. Ein variabler Gangunterschied  $\Delta s$  zwischen den beiden Armen erlaubt es, die Feldamplituden zweier verschiedener Zeitpunkte miteinander in Beziehung zu setzen und somit die zeitliche Amplitudenkorrelation  $\langle \psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle$  zu untersuchen. Hierbei bezeichnet  $\mathbf{r}$  die Position, an der das Licht in die beiden Strahlen aufgeteilt wird. Da es sich hierbei um eine feste Größe handelt, wird im weiteren Verlauf auf dessen Angabe verzichtet. Gehen wir von einer stationären Quelle und zwei symmetrischen (50/50) Strahlteilern aus, so gilt

## 8 Korrelationsanalyse

unabhängig vom Zeitpunkt  $t$  für die Intensität  $\bar{I}_D$  am Ort des Detektors:

$$\frac{\bar{I}_D}{\bar{I}_{\text{tot}}} = \frac{1}{2} \{1 + \Re g^{(1)}(\tau)\} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{\Delta s}{c}. \quad (8.17)$$

Hierbei bezeichnet  $\bar{I}_{\text{tot}}$  die mittlere Intensität des einlaufenden Lichtes. Aufgetragen als Funktion von  $\Delta s$  bildet das Ausgangssignal  $\bar{I}_D$ , wie in Abbildung 8.3b illustriert, eine schnell modulierte Interferenz, deren Kontrast wiederum durch den Betrag der Korrelationsfunktion gegeben ist:  $\mathcal{V}(\tau) = |g^{(1)}(\tau)|$ .

### Wiener–Khinchin-Theorem

Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass sich die im Mach-Zehnder-Interferometer untersuchte Feldamplitude  $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(t)$  nach ihren Frequenzanteilen  $\psi(\nu)$  entwickeln lässt,

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\nu) e^{-i2\pi\nu t} d\nu, \quad (8.18)$$

so folgt für die zeitgemittelte Amplitudenkorrelation:

$$\langle \psi^*(t) \psi(t + \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \psi^*(\nu) \psi(\nu) \rangle e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu. \quad (8.19)$$

Hierbei ist  $\bar{I}(\nu) = \langle \psi^*(\nu) \psi(\nu) \rangle$  proportional zur zeitgemittelten spektralen Leistungsdichte des Feldes. Teilt man den obigen Ausdruck durch die Gesamtintensität  $\bar{I} = \int \bar{I}(\nu) d\nu$ , so erhält man gemäß Gleichung 8.5 die normierte Korrelationsfunktion erster Ordnung:

$$g^{(1)}(\tau) = g^{(1)}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}, t + \tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{I}(\nu) e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu}{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{I}(\nu) d\nu}. \quad (8.20)$$

Dies ist eine einfache Form des Wiener–Khinchin-Theorems. Es besagt, dass die Autokorrelationsfunktion eines Zufallsprozesses  $\psi(t)$  durch die Fourier-Transformierte des normierten Leistungsdichtespektrums  $\bar{I}(\nu)/\bar{I}$  gegeben ist [40]. Diese Beziehung erlaubt es anhand des Interferenzkontrastes  $|g^{(1)}(\tau)|$  am Ausgang des Mach-Zehnder-Interferometers direkte Rückschlüsse auf das Energiespektrum der Lichtquelle zu ziehen. Insbesondere folgt in Übereinstimmung mit Gleichung 8.15, dass die Kohärenzzeit  $\tau_c$  einer quasi-monochromatischen Lichtquelle umgekehrt proportional zu deren Linienbreite  $\Delta\nu$  ist. Beim Wiener–Khinchin-Theorem handelt es sich um das zeitliche Äquivalent zum van Cittert-Zernike-Theorem.

### 8.1.3 Kohärenz- und Modenvolumen

Basierend auf den bisherigen Überlegungen führen wir nun einige Konzepte ein, die uns ein intuitiveres Verständnis der Kohärenzeigenschaften von Licht ermöglichen.

## 8.1 Korrelationen in Lichtfeldern

Wenden wir uns nochmal dem Michelson-Interferometer bzw. dem Young'schen Doppelspalt zu. Damit das Licht einer quasi-monochromatischen Quelle am Ausgang eines solchen Interferometers ein kontrastreiches Interferenzmuster hervorrufen kann, müssen die beiden Kollektoren bzw. Lochblenden in etwa innerhalb einer Fläche der Größe

$$F_c = l_c^{(t)} \cdot l_c^{(t)} = \frac{\lambda^2}{\theta^2} \quad (8.21)$$

angeordnet sein. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 8.4 illustriert. Der Einfachheit halber wird hier wieder von einer homogenen kreisförmigen Quelle mit einem Winkeldurchmesser  $\theta$  ausgegangen. Wie in den früheren Betrachtungen gehen wir außerdem von einem großen Abstand zwischen Quelle und Interferometer aus, sodass beim Beobachter nahezu ebene Wellen eintreffen und die Quelle nur unter einem kleinen Raumwinkel  $\sim \theta^2$  erscheint. Bei einer Quelle endlicher Linienbreite  $\Delta\nu$  muss darüber hinaus der Gangunterschied zwischen den beiden interferierenden Pfaden kleiner als die longitudinale Kohärenzlänge  $l_c^{(l)}$  sein.

Die obigen Bedingungen lassen sich wie folgt zusammenfassen: Um interferenzfähig zu sein, muss das überlagerte Licht aus einem selben Volumen stammen, welches durch einen fiktiven rechtwinkligen Zylinder mit einer Basis  $F_c$  und einer Höhe  $l_c^{(l)}$  definiert wird. Das Zylindervolumen beträgt

$$V_c = F_c \cdot l_c^{(l)} = \frac{\lambda^2}{\theta^2} \frac{c}{\Delta\nu} \quad (8.22)$$

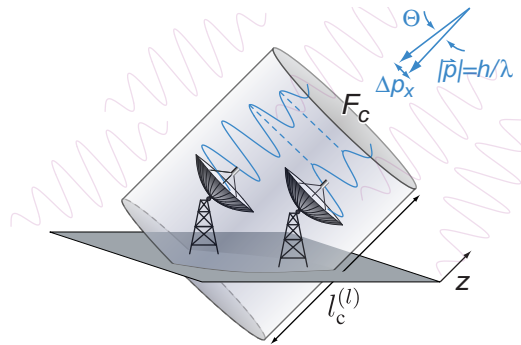
und entspricht dem Kohärenzvolumen des optischen Feldes an einem gewissen Raum-Zeit-Punkt. In Abbildung 8.4 ist das Lichtfeld zur Veranschaulichung der Kohärenzeigenschaften durch endliche Wellenzüge der Länge  $l_c^{(l)}$  und mit verschiedenen Ausbreitungsrichtungen dargestellt. Innerhalb eines Kohärenzvolumens  $V_c$  verfügen die Wellenzüge über eine weitgehend feste Phasenbeziehung und über annähernd dieselben Ausbreitungsrichtungen. In der Realität sind die Kohärenzvolumina natürlich nicht scharf begrenzt, sondern gehen für angrenzende Raum-Zeit-Punkte fließend ineinander über.

Eine wichtige Interpretation des Kohärenzvolumens ergibt sich im Rahmen einer quantenmechanischen Beschreibung, bei der das Licht als ein Fluss von Photonen aufgefasst wird. Gemäß einer bekannten Aussage von Paul Dirac „interferiert jedes Photon nur mit sich selbst“ [283]. Um eine Interferenz beobachten zu können, muss demnach das Modenvolumen jedes einzelnen Photons so groß sein, dass jedes Photon auf beide Interferometerarme treffen kann (Auslöschung der „Welcher-Weg-Information“).

Demgegenüber fordert die im Rahmen der klassischen Wellenbeschreibung aufgestellte Interferenzbedingung, dass die beiden Interferometereingänge innerhalb eines selben Kohärenzvolumens liegen. Damit die klassische und die quantenmechanische Bedingung übereinstimmen, müssen das Kohärenzvolumen und das Modenvolumen ein und dieselbe Größe beschreiben. In anderen Worten ausgedrückt, gibt das Kohärenzvolumen  $V_c$  ein Maß für die räumliche Unschärfe des Quantenzustandes des Photons an:

$$V_c = \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (8.23)$$

## 8 Korrelationsanalyse



**Abbildung 8.4:** Illustration zum Konzept des Kohärenzvolumens: Das Licht einer entfernten, ausgedehnten quasi-monochromatischen Quelle trifft als nahezu ebene Wellenfront ( $\theta \ll 1$ ) auf die beiden Kollektoren eines Interferometers. Kann das überlagerte Licht einem selben fiktiven Zylinder mit einer Grundfläche  $F_c$  und einer Höhe  $l_c^{(l)}$  zugeordnet werden, so verfügt dieses über eine definierte Phasenbeziehung und ist interferenzfähig. Das im nächsten Abschnitt beschriebene Intensitätsinterferometer misst immer dann Korrelationen in den eintreffenden Photonen, wenn diese aus ein und demselben Kohärenzvolumen stammen.

Neben dieser räumlichen Unschärfe gibt es auch eine Unschärfe im Impuls der eintreffenden Photonen: Aufgrund der beugungsbegrenzten Auflösung der einzelnen Kollektoren lässt sich prinzipiell keine Aussage darüber fällen, von welchem Punkt der ausgedehnten Quelle das Licht emittiert wurde. Aus der resultierenden Varianz der Einfallswinkel ergibt sich, bei einem mittleren Impulsbetrag von  $p = h/\lambda$ , die folgende Unsicherheit in den transversalen Impulskomponenten (siehe Abbildung 8.4):

$$\Delta p_x = \Delta p_y = \frac{h}{\lambda} \theta. \quad (8.24)$$

Auch entlang der Ausbreitungsrichtung ( $z$ ) verfügt der Impuls über eine Unschärfe, die im Wesentlichen auf die endliche Linienbreite  $\Delta\nu$  der Lichtquelle zurückzuführen ist. Dabei verhält sich die relative Impulsunschärfe  $\Delta p_z/p$  wie die Linienbreite  $\Delta\nu$  zur mittleren Frequenz  $\nu = c/\lambda$  des Lichtes und es folgt:

$$\Delta p_z = \frac{h}{\lambda} \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{h \Delta\nu}{c}. \quad (8.25)$$

Die Zustände der Photonen lassen sich durch ihren Ort und Impuls im Phasenraum darstellen. Aus den oben abgeleiteten Varianzen für Ort und Impuls folgt, dass jedem Photon dann ein endliches Phasenraumvolumen von

$$\Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = V_c \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = h^3. \quad (8.26)$$

zuzuschreiben ist. Interessanterweise ist dies zugleich die kleinste Volumeneinheit, welche in Übereinstimmung mit der Heisenbergschen Unschärferelation im Phasenraum aufgelöst

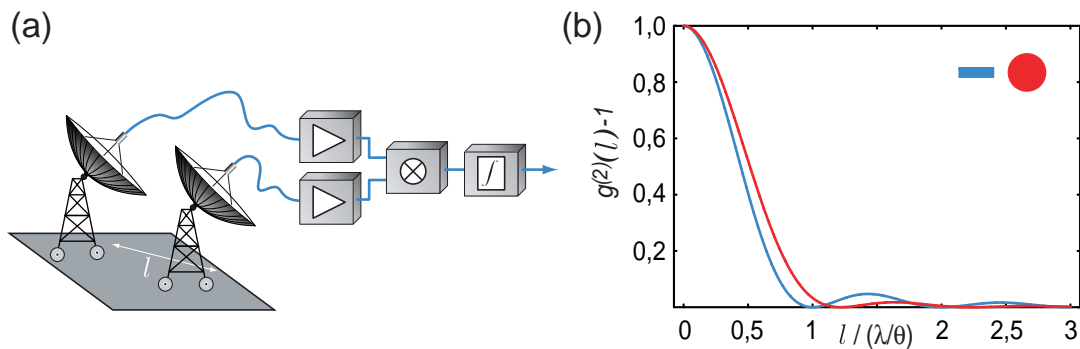
werden kann. Befinden sich zwei Photonen gleicher Polarisation innerhalb eines solchen elementaren Phasenraumvolumens, so sind diese Photonen prinzipiell nicht voneinander zu unterscheiden. Damit besetzen Photonen, die von einer fernen quasi-monochromatischen Quelle stammen und sich in einem selben Kohärenzvolumen  $V_c$  aufhalten, denselben Quantenzustand. Wir stellen also fest, dass sich, durch eine hinreichende Limitierung der Linienbreite  $\Delta\nu$  und des Winkeldurchmessers  $\theta$  der Lichtquelle als auch durch eine Einschränkung des Beobachtungsvolumens, einzelne Photonenzustände des Lichtfeldes „herausfiltern“ und analysieren lassen.

### 8.1.4 Intensitätsinterferometer

Mit einem klassischen Phaseninterferometer von sechs Metern Spannweite konnte Albert Michelson Sterne mit Durchmessern bis hinab zu 0,02 Bogensekunden vermessen [279, 280]. Einer weiteren Erhöhung des Auflösungsvermögens durch noch größere Kollektorabstände stehen jedoch zwei praktische Hindernisse entgegen: Zum einen beeinflussen lokale Turbulenzen den Brechungsindex der Luft und verändern somit die optischen Weglängen, die das Licht in der Atmosphäre durchläuft. Bei großen Kollektorabständen sind die atmosphärischen Störungen der beiden Strahlen statistisch unabhängig. Mit dem Gangunterschied der beiden Strahlen bzw. deren relativer Phase schwankt auch das Interferenzmuster zeitlich in unkontrollierter Weise. Ein zweites Hindernis stellt die endliche Linienbreite der Lichtquelle dar. Um die Interferenzen bei ausreichenden Intensitäten mit bloßem Auge sehen zu können, nutzte Michelson den gesamten Spektralbereich des Sternlichtes aus. Hieraus resultierte eine sehr kurze longitudinale Kohärenzlänge  $l_c^{(l)} \sim 15 \mu\text{m}$ . Entsprechend klein mussten die Gangunterschiede zwischen den beiden Interferometerarmen sein, damit die Interferenzmuster nicht verwischten. Dies erforderte nicht nur eine präzise Angleichung der beiden Armlängen, sondern auch eine sehr hohe mechanische Stabilität des Aufbaus. Bei noch größere Interferometerspannweiten ließen sich diese strengen Anforderungen nicht mehr erfüllen.

Im Jahre 1956 umgingen Robert Hanbury Brown und Richard Twiss (HBT) die hier beschriebenen Probleme, indem sie ein von ihnen wenige Jahre zuvor entwickeltes radioastronomisches Verfahren [284] auf den optischen Spektralbereich übertrugen [285]. Bei dieser sogenannten Intensitätsinterferometrie werden statt der Feldamplituden die Lichtintensitäten an zwei Raumpunkten miteinander verglichen. Das Verfahren ist somit unempfindlich gegenüber kleineren Phasenschwankungen. Der Aufbau eines solchen Intensitätsinterferometers ist in Abbildung 8.5a schematisch dargestellt. Es besteht aus zwei gegeneinander verschiebbaren Parabolspiegeln, die das Licht eines Sterns einsammeln und jeweils auf einen Photomultiplier fokussieren. Die resultierenden Photoströme werden einzeln verstärkt und anschließend in einem linearen Mischer miteinander multipliziert. Das zeitlich gemittelte Ausgangssignal des Mixers liefert das eigentliche Messsignal. Da die Photoströme proportional zu den momentanen Intensitäten auf den Detektoren sind, spiegelt das Messsignal die zeitlich gemittelten Intensitätskorrelationen  $\langle I(\mathbf{r}_1, t)I(\mathbf{r}_2, t) \rangle$  zwi-

## 8 Korrelationsanalyse



**Abbildung 8.5:** (a) Schematischer Aufbau des stellaren Intensitätsinterferometers nach Hanbury Brown und Twiss: Das einfallende Sternlicht wird über Hohlspiegel auf zwei Photodetektoren fokussiert. Die resultierenden Photoströme werden verstärkt und in einem linearen Mischer miteinander multipliziert. Nach einer zeitlichen Mittelung erhält man das eigentliche Messsignal, welches proportional zur Korrelationsfunktion zweiter Ordnung  $g^{(2)}(l)$  ist. Misst man  $g^{(2)}(l)$  als Funktion des Detektorabstandes  $l$ , so lässt sich daraus die transversale Kohärenzlänge des Lichtes bzw. der Winkeldurchmesser des Sterns ableiten. (b) Der Graph zeigt die Korrelationsfunktionen zweiter Ordnung  $g^{(2)}(l)$  für eine lineare (blau) und eine kreisrunde (rot) Lichtquelle als Funktion des Detektorabstandes  $l$ . Beide Quellen verfügen über eine homogene Intensitätsverteilung und über einen „Winkeldurchmesser“  $\theta$ . Die Verläufe werden mittels Gleichung 8.13, 8.14 und 8.32 berechnet.

schen den beiden Detektorpositionen wider. Um den Winkeldurchmesser eines Sterns zu bestimmen, werden diese Intensitätskorrelationen als Funktion des Detektorabstandes vermessen.

### Klassische Beschreibung der Intensitätskorrelationen

Das eintreffende Sternlicht stammt von einer sehr großen Anzahl unabhängig voneinander emittierender Atome. Für eine solche chaotische Lichtquelle lassen sich die Intensitätskorrelationen mittels fluktuierender klassischer Felder beschreiben [225]. Dabei nimmt man an, dass sich das Lichtfeld  $\psi(x)$  an einem beliebigen Raum-Zeit-Punkt  $x = (\mathbf{r}, t)$  aus den unabhängigen Feldbeiträgen der einzelnen emittierenden Atome zusammensetzt:

$$\psi(x) = \sum_i \psi_i(x). \quad (8.27)$$

Auch weiterhin beschreiben die Klammern  $\langle \rangle$  eine Ensemblemittelung. Doch im Gegensatz zu Gleichung 8.3 entsprechen die im Folgenden angegebenen Intensitäten  $I(x)$  (ohne Querstrich) „momentanen“ Werten, bei denen nur über Zeiten, die sehr kurz gegenüber der Kohärenzzeit sind, gemittelt wird. Damit folgt für die Intensitätskorrelation  $\langle I(x_1)I(x_2) \rangle$

## 8.1 Korrelationen in Lichtfeldern

zwischen zwei Raum-Zeit-Punkten:

$$\begin{aligned}
 \langle \psi^*(x_1)\psi(x_1)\psi^*(x_2)\psi(x_2) \rangle &= \sum_i \langle \psi_i^*(x_1)\psi_i(x_1)\psi_i^*(x_2)\psi_i(x_2) \rangle \\
 &+ \sum_{i \neq j} \langle \psi_i^*(x_1)\psi_i(x_1)\psi_j^*(x_2)\psi_j(x_2) \rangle \\
 &+ \sum_{i \neq j} \langle \psi_i^*(x_1)\psi_j(x_1)\psi_j^*(x_2)\psi_i(x_2) \rangle. \quad (8.28)
 \end{aligned}$$

Hierbei werden nur Terme berücksichtigt, bei denen das Feld von einem Atom mit dem komplex konjugierten Feld desselben Atoms multipliziert wird. Wegen der Unabhängigkeit der einzelnen Emitter fallen alle anderen Terme bei der Ensemble- bzw. zeitlichen Mittelung heraus. Geht man von einer großen Anzahl  $\nu$  emittierender Atome aus, so kann man in Gleichung 8.28 die einfache Summe gegenüber den Doppelsummen vernachlässigen und in guter Näherung die Doppelsummen über sämtliche Indizes laufen lassen:

$$\begin{aligned}
 \langle I(x_1)I(x_2) \rangle &= \sum_{i=1}^{\nu} \langle \psi_i^*(x_1)\psi_i(x_1) \rangle \sum_{j=1}^{\nu} \langle \psi_j^*(x_2)\psi_j(x_2) \rangle \\
 &+ \sum_{i=1}^{\nu} \langle \psi_i^*(x_1)\psi_i(x_2) \rangle \sum_{j=1}^{\nu} \langle \psi_j(x_1)\psi_j^*(x_2) \rangle. \quad (8.29)
 \end{aligned}$$

Für  $\nu$  Emitter mit identischen Eigenschaften vereinfacht sich der obige Ausdruck zu:

$$\langle I(x_1)I(x_2) \rangle = \nu^2 \langle \psi_i^*(x_1)\psi_i(x_1) \rangle \langle \psi_i^*(x_2)\psi_i(x_2) \rangle + \nu^2 |\langle \psi_i^*(x_1)\psi_i(x_2) \rangle|^2. \quad (8.30)$$

Um die Intensitätskorrelationen unabhängig von den mittleren Intensitäten  $\bar{I}(x_1) = \langle I(x_1) \rangle$  und  $\bar{I}(x_2) = \langle I(x_2) \rangle$  zu quantifizieren, die auf die beiden Detektoren fallen, führen wir die normierte Korrelationsfunktion zweiter Ordnung ein:

$$g^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = \frac{\langle I(\mathbf{r}_1, t_1)I(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle}{\langle I(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle \langle I(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle} = \frac{\langle \psi^*(x_1)\psi(x_1)\psi^*(x_2)\psi(x_2) \rangle}{\langle \psi^*(x_1)\psi(x_1) \rangle \langle \psi^*(x_2)\psi(x_2) \rangle}. \quad (8.31)$$

Setzt man Gleichung 8.30 und die mittleren Intensitäten in Gleichung 8.31 ein und verwendet die Definition der Korrelationsfunktion erster Ordnung 8.5, so erhält man schließlich:

$$g^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = 1 + |g^{(1)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2)|^2. \quad (8.32)$$

Diese wichtige Relation zwischen Korrelationsfunktion erster und zweiter Ordnung wird später auch im Rahmen einer quantenmechanischen Beschreibung des Lichtes hergeleitet. Sie gilt für jede Form von chaotischem Licht. Im Spezialfall einer weit entfernten Lichtquelle gilt das van Cittert-Zernike-Theorem 8.12 und es folgt (für  $t_1 = t_2$  und  $l = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ )

$$g^{(2)}(l) = 1 + \frac{1}{P^2} \left| \int_Q \bar{I}_Q(x, y) e^{-ik \frac{l}{a} x} dx dy \right|^2, \quad (8.33)$$

## 8 Korrelationsanalyse

---

wobei  $P = \int_Q \bar{I}_Q(x, y) dx dy$  die auf den Detektoren eintreffende Gesamtleistung ist.

Aufgrund der Relation 8.32 bzw. 8.33 bietet die Intensitätsinterferometrie eine alternative Methode, die Kohärenzeigenschaften einer chaotischen Lichtquelle zu untersuchen. Der rote Graph in Abbildung 8.5b zeigt die berechnete Korrelationsfunktion zweiter Ordnung  $g^{(2)}(l)$  für eine homogene Sternscheibe als Funktion des Detektorabstandes  $l$ . Durch den Vergleich dieses Verlaufs mit den gemessenen Intensitätskorrelationen konnten Hanbury Brown und Twiss die transversale Kohärenzlänge  $l_c^{(t)}$  des eintreffenden Sternlichtes bzw. den Winkeldurchmesser  $\theta$  des entsprechenden Sternes bestimmen.

Da das HBT-Interferometer nur Intensitäten misst, ist es weitaus robuster gegenüber Phasenschwankungen, als das Michelson-Interferometer. Die hohe Robustheit des HBT-Interferometers erlaubt es, Integrationszeiten von vielen Stunden zu realisieren und somit auch bei schwachen Intensitäten zu messen. Folglich lässt sich über schmalbandige Filter die effektive spektrale Breite der Quelle reduzieren und somit die longitudinale Kohärenzlänge (bzw. Kohärenzzeit) erheblich verlängern. Entsprechend klein werden die Anforderungen an die mechanische Stabilität des Interferometers und an die Qualität der Sammeloptik. Im Allgemeinen werden beim Intensitätsinterferometer die Messungen der transversalen Kohärenzeigenschaften nicht durch Schwankungen der Gangunterschiede gestört, solange diese kleiner sind als die longitudinale Kohärenzlänge des detektierten Lichtes. Dies erlaubte es Hanbury Brown und Twiss, selbst mit einem recht rudimentären Interferometer, das aus zwei modifizierten Suchlichtern aus dem zweiten Weltkrieg aufgebaut war, den Winkeldurchmesser von Sirius zu bestimmen [285].

In Anschluss an diese erfolgreiche Messung bauten die beiden Astrophysiker eine weiträumige Beobachtungsstation im australischen Busch auf (Narrabri/Sydney). Hier bestand das Interferometer aus zwei Reflektoren mit einem Durchmesser von jeweils 6,5 m. Diese ließen sich auf einem großen Schienenkreis verschieben und somit in variablen Abständen von bis zu 188 m positionieren. Das Instrument ermöglichte es erstmals, Sterndurchmesser bis hinab zu  $\sim 5 \cdot 10^{-4}$  Bogensekunden präzise zu vermessen [286, 287].

### 8.2 Hanbury Brown und Twiss-Effekt

Im Rahmen einer klassischen Feldbeschreibung lassen sich die Korrelationen in den Photoströmen des HBT-Interferometers leicht nachvollziehen, da die beiden Detektoren ein und demselben Feld ausgesetzt sind, das innerhalb des Kohärenzvolumens  $V_c$  synchron fluktuiert. Übersetzt ins Teilchenbild, entsprechen die Korrelationen einem gehäuften Auftreten von Photonenkoinzidenzen zwischen den beiden Detektoren. Tatsächlich ist, wenn ein Photon auf einem Detektor nachgewiesen wird, für Detektorabstände  $l \lesssim l_c^{(t)}$  die Wahrscheinlichkeit erhöht, innerhalb der Kohärenzzeit  $\tau_c$  ein weiteres Photon auf dem zweiten Detektor nachzuweisen. Das gebündelte Eintreffen der Photonen auf den beiden Detektoren wird als HBT- oder Bunching-Effekt bezeichnet. Da die Atome einer chaotischen Lichtquelle unabhängig voneinander Licht emittieren, kann der Bunching-Effekt nicht in



## 8.2 Hanbury Brown und Twiss-Effekt

einem naiven Photonenbild verstanden werden, welches die quantenmechanischen Welleneigenschaften des Lichtes außer Acht lässt. Das Lichtfeld am Ort eines Detektors muss vielmehr als eine Überlagerung sämtlicher von der Lichtquelle ausgehender Wellenzüge betrachtet werden. Aus deren zufälligen Überlagerung ergeben sich die Intensitätsfluktuationen am Ort des Detektors. Befinden sich die beiden Detektoren (räumlich und zeitlich) innerhalb eines selben Kohärenzvolumens  $V_c$ , so sind gemäß Abschnitt 8.1.3 zwei zufällig bei den Detektoren eintreffende Wellenzüge miteinander kohärent und daher interferenzfähig. Im Vergleich zu einer inkohärenten Addition führt die Interferenz zu einer überhöhten Intensitätsfluktuation [288]. Da die Wellenzüge innerhalb eines selben Kohärenzvolumens  $V_c$  dieselbe Lichtmode beschreiben, entspricht eine solche Intensitätsspitze mehreren Photonen in einem selben Quantenzustand. Diese Photonen können von beiden Detektoren als Koinzidenzen gemessen werden. Dieser heuristische Erklärungsansatz soll im Folgenden auf eine solide quantenmechanische Basis gestellt werden. Dabei zeigt sich, dass das gebündelte Auftreten der Photonen eine unmittelbare Konsequenz der bosonischen Symmetrieeigenschaften der Vielteilchenwellenfunktion ist: Ununterscheidbare Bosonen weisen die Tendenz auf, denselben Quantenzustand bzw. dasselbe Phasenraumvolumen mehrfach zu besetzen.

### 8.2.1 HBT-Experiment

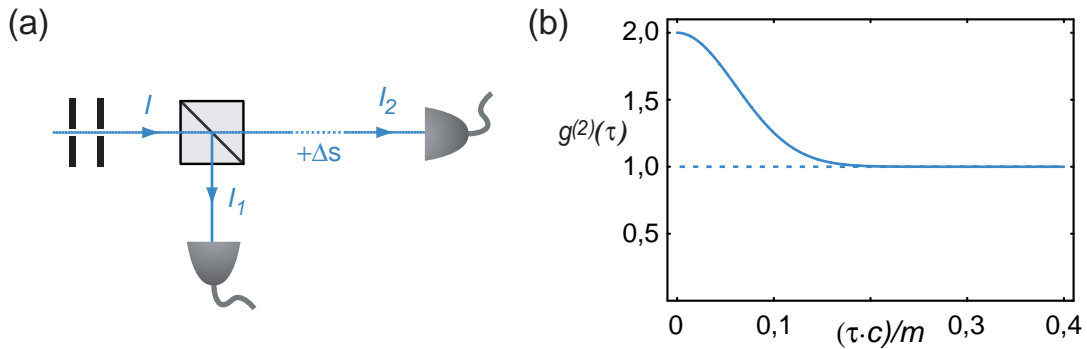
Bevor Hanbury Brown und Twiss das erste stellare Intensitätsinterferometer für den optischen Frequenzbereich bauten, wiesen sie den Effekt des Photon-Bunching in einem grundlegenden Laborexperiment nach [43]. Abbildung 8.6a zeigt das Prinzip des Aufbaus. Das Licht einer sehr schmalbandigen thermischen Quelle wird räumlich gefiltert und mittels eines symmetrischen Strahlteilers auf zwei Photodetektoren geschickt. Die Photostrome der beiden Detektoren werden miteinander multipliziert und zeitlich gemittelt. Anhand dieser Mittelwerte konnten Hanbury Brown und Twiss zeigen, dass die beiden Detektoren eine deutliche Tendenz aufweisen, Photonen simultan nachzuweisen.

Die Korrelationen lassen sich auch als Funktion einer zeitlichen Verzögerung  $\tau = \Delta s/c$  untersuchen, indem man einen der beiden Detektoren um eine zusätzliche Wegstrecke  $\Delta s$  verfährt. Für einen symmetrischen Strahlteiler und Licht, das sich als klassisches Feld beschreiben lässt, sind die Intensitäten auf den beiden Detektoren über die Beziehung  $I_1(t) = I_2(t) = \frac{1}{2}I(t)$  mit der Intensität  $I(t)$  des einlaufenden Lichtes verknüpft (Die feste Ortskoordinate  $r$  wird hier fallengelassen) und es gilt:

$$\frac{\langle I_1(t)I_2(t+\tau) \rangle}{\langle I_1(t) \rangle \langle I_2(t+\tau) \rangle} = \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle \langle I(t+\tau) \rangle} = g^{(2)}(\tau). \quad (8.34)$$

Die gemessenen Mittelwerte geben also direkte Auskunft über die zeitliche Korrelationsfunktion zweiter Ordnung  $g^{(2)}(\tau)$ . Aus deren Verlauf lässt sich über die Relation 8.32 und das Wiener-Khinchin-Theorem 8.20 die Linienbreite und Linienform der Lichtquelle ermitteln (siehe Abbildung 8.6b). Während die Bestimmung der spektralen Eigenschaften einer Lichtquelle mittels eines Mach-Zehnder-Interferometers bereits durch kleinste

## 8 Korrelationsanalyse



**Abbildung 8.6:** (a) Schematischer Aufbau des klassischen HBT-Experiments: Räumlich gefiltertes Licht wird mittels eines Strahlteilers auf zwei Photodetektoren geschickt. Aus den Detektorsignalen lässt sich die zeitliche Korrelationsfunktion zweiter Ordnung  $g^{(2)}(\tau)$  bestimmen. Hierbei ist  $\tau = \Delta s/c$  die durch den Gangunterschied  $\Delta s$  verursachte zeitliche Verzögerung. (b) Der Graph zeigt  $g^{(2)}(\tau)$  für eine dopplerverbreiterte Natrium-Lichtquelle (siehe Abbildung 8.3). Aus dem Verlauf des Korrelationssignals lässt sich über das Wiener–Khinchin-Theorem 8.20 und die Relation 8.32 die Linienbreite und Linienform der Quelle bestimmen.

Gangunterschiede gestört wird (siehe Abbildung 8.3b), erweist sich die intensitätsinterferometrische Methode als unempfindlich gegenüber kleinen Phasenschwankungen. In den folgenden Abschnitten werden wir wiederholt auf das HBT-Experiment zurückkommen. Es sei bemerkt, dass moderne HBT-Experimente häufig nur noch einen einzigen Detektor verwenden. Hier werden die Ankunftszeiten der Photonen elektronisch registriert und anschließend zur Bestimmung der Korrelationen an einem Rechner ausgewertet.

### 8.2.2 Photodetektionswahrscheinlichkeiten

Ein intuitiveres Verständnis der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung  $g^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2)$  ergibt sich, wenn man diese als Verhältnis von Photonen-Nachweiswahrscheinlichkeiten darstellt. Aus einer semi-klassischen Theorie des Detektionsprozesses [40, 281] folgt, dass die Umwandlung der kontinuierlichen elektromagnetischen Strahlung in Photoelektronen einem zufälligen Prozess entspricht. Die Wahrscheinlichkeit ein einzelnes Photon auf einem Detektor am Ort  $\mathbf{r}_1$  innerhalb eines kurzen Zeitfensters  $\Delta t$  um den Zeitpunkt  $t_1$  herum zu detektieren, ist proportional zur momentanen Intensität, die auf den Detektor fällt:

$$P_1(\mathbf{r}_1, t_1)\Delta t = \eta I(\mathbf{r}_1, t_1)\Delta t. \quad (8.35)$$

Naturgemäß ist dies zugleich die Wahrscheinlichkeit, mit der im Detektor ein Photoelektron erzeugt wird. Dabei ist  $\eta$  eine Konstante, die die Empfindlichkeit des Detektors beschreibt. Ein analoger Ausdruck ergibt sich für die Nachweiswahrscheinlichkeit  $P_2(\mathbf{r}_2, t_2)$  auf einem zweiten, identischen Detektor am Ort  $\mathbf{r}_2$  zum Zeitpunkt  $t_2$ . Wenn sich die

## 8.2 Hanbury Brown und Twiss-Effekt

Photoemissionen gegenseitig nicht beeinflussen, dann ist die gemeinsame Nachweiswahrscheinlichkeit  $P_{1\cap 2}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2)\Delta t^2$  (Zwei-Teilchen-Nachweiswahrscheinlichkeit) durch das Produkt der beiden unabhängigen Nachweiswahrscheinlichkeiten gegeben:

$$P_{1\cap 2}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2)\Delta t^2 = \eta^2 I(\mathbf{r}_1, t_1)I(\mathbf{r}_2, t_2)\Delta t^2. \quad (8.36)$$

Der Ausdruck für die gemeinsame Nachweiswahrscheinlichkeit gilt auch, wenn die beiden Detektionsprozesse auf ein und demselben Detektor ( $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ ) zu den Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  stattfinden. Bei einem zeitlich fluktuierenden Feld müssen die obigen Ausdrücke entsprechend gemittelt werden und man erhält für die Einzelnachweiswahrscheinlichkeit

$$P_1(\mathbf{r}_1, t_1)\Delta t = \eta \langle I(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle \Delta t \quad (8.37)$$

und für die gemeinsame Nachweiswahrscheinlichkeit

$$P_{1\cap 2}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2)\Delta t^2 = \eta^2 \langle I(\mathbf{r}_1, t_1)I(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle \Delta t^2. \quad (8.38)$$

Auch wenn sich in der klassischen Feldbeschreibung die beiden Photoemissionen nicht gegenseitig beeinflussen, so sind diese doch über das gemeinsame fluktuierende Feld miteinander korreliert. In Experimenten zur Photonenstatistik interessiert man sich außerdem häufig für die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P_{1|2}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2)\Delta t$ , ein Photoelektron am Raum-Zeit-Punkt  $(\mathbf{r}_2, t_2)$  zu registrieren, wenn zuvor ein Photoelektron am Raum-Zeit-Punkt  $(\mathbf{r}_1, t_1)$  erzeugt wurde. Zwischen den verschiedenen Nachweiswahrscheinlichkeiten gilt die folgende Beziehung:

$$P_{1\cap 2}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2)\Delta t^2 = P_1(\mathbf{r}_1, t_1)\Delta t P_{1|2}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2)\Delta t. \quad (8.39)$$

Mit Gleichung 8.37 bis 8.39 lässt sich die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung 8.31 wie folgt darstellen:

$$g^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = \frac{P_{1\cap 2}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2)}{P_1(\mathbf{r}_1, t_1)P_2(\mathbf{r}_2, t_2)} = \frac{P_{1|2}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2)}{P_2(\mathbf{r}_2, t_2)}. \quad (8.40)$$

Ist die gemeinsame Nachweiswahrscheinlichkeit faktorisiert,  $P_{1\cap 2} = P_1P_2$ , so sind die beiden Detektionsprozesse vollständig unkorreliert und die Korrelationsfunktion nimmt den Wert  $g^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = 1$  an.

Betrachten wir nochmal den HBT-Aufbau aus Abbildung 8.6. Bei einem Gangunterschied  $\Delta s = 0$  lässt sich hiermit die unverzögerte Korrelation  $g^{(2)}(\tau = 0)$  bestimmen. Sind die Nachweiswahrscheinlichkeiten auf den beiden Detektoren voneinander unabhängig, so gilt  $g^{(2)}(0) = 1$  und das auf den Strahlteiler treffende Feld entspricht einer perfekt stabilen Welle. Handelt es sich jedoch um ein fluktuierendes Feld, so sind die Nachweiswahrscheinlichkeiten voneinander abhängig und man beobachtet eine positive Korrelation  $g^{(2)}(0) > 1$ . Aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz folgt, dass die in Gleichung 8.31

## 8 Korrelationsanalyse

---

definierte Korrelationsfunktion  $g^{(2)}(0)$  nicht kleiner als 1 werden kann. Für klassische Felder sind die Photonenergebnisse auf den beiden Detektoren daher niemals antikorreliert. Dies ist plausibel, da der Strahlteiler das klassische Feld in zwei identische Kopien aufspaltet, welche nur gemeinsam oder gar nicht fluktuieren können. Für *klassische* Felder ist es unmöglich, dass die Intensität auf dem einen Detektor zunimmt, während sie auf dem anderen Detektor abnimmt.

### 8.2.3 Quantentheoretische Beschreibung

Um eine korpuskulare Vorstellung vom Licht mit den Ergebnissen der HBT-Experimente vereinbaren zu können, wurde eine vollständig quantentheoretische Beschreibung der elektromagnetischen Felder und des Detektionsprozesses notwendig. Im Jahre 1963 präsentierte Roy J. Glauber in drei ausführlichen Artikeln die formalen Konzepte für eine Quantentheorie der optischen Kohärenzen [289–291]. Diese Arbeit bildete die Grundlage für eine Vielzahl weitergehender theoretischer als auch experimenteller Studien und ermöglichte ein tieferes Verständnis des wenige Jahre zuvor erstmals erzeugten Laserlichtes. Mit seiner Theorie leistete Glauber einen entscheidenden Beitrag zur Entwicklung der modernen Quantenoptik, wofür er im Jahr 2005 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet wurde [292].

Im Folgenden wollen wir einige wichtige Konzepte dieser Theorie erläutern. Dabei verwenden wir eine möglichst allgemeine Beschreibung, die sowohl für bosonische als auch fermionische Quantenfelder gültig ist und sich später direkt auf Atome übertragen lässt.

### Quantenmechanischer Detektionsprozess

Während sich das Amplitudenquadrat einer klassischen Welle im Prinzip durch eine beliebig kleine Störung bestimmen lässt, muss für die Messung eines Quantenfeldes mindestens ein Energiequant vernichtet werden. Insbesondere bei Korrelationsmessungen ist zu berücksichtigen, dass das Lichtfeld bei jedem Detektionsprozess um ein Photon verringert wird. Folglich kann ein Lichtfeld, das aus  $n$  Photonen besteht, auch nur Korrelationen bis zur  $n$ -Ordnung aufweisen.

Allgemein lassen sich die Detektionsprozesse mittels der Feldoperatoren der zweiten Quantisierung beschreiben, die abhängig von der Natur des Feldes bosonischen oder fermionischen Kommutationsregeln gehorchen (siehe Abschnitt 2.1.1). Der Vernichtungsoperator  $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$  beschreibt die Detektion eines Teilchens am Ort  $\mathbf{r}$  zum Zeitpunkt  $t$ . Durch den adjungierten Operator  $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)$  wird ein Teilchen am Raum-Zeit-Punkt  $(\mathbf{r}, t)$  erzeugt. Die Feldoperatoren lassen sich in der vollständigen Basis der Einteilchenzustände  $\psi_k(\mathbf{r}, t)$  entwickeln:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \hat{a}_k \psi_k(\mathbf{r}, t) \quad \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) = \sum_k \hat{a}_k^\dagger \psi_k^*(\mathbf{r}, t). \quad (8.41)$$

Bei elektromagnetischen Feldern können  $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  und  $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) = \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$  mit den positiven bzw. negativen Frequenzanteilen und die Wellenfunktionen  $\psi_k(\mathbf{r}, t)$  mit den verschiedenen Moden des Lichtfeldes identifiziert werden.

## 8.2 Hanbury Brown und Twiss-Effekt

Wird auf einem Detektor am Ort  $\mathbf{r}$  zum Zeitpunkt  $t$  ein einzelnes Photon nachgewiesen, so wechselt das Lichtfeld von seinem Ausgangszustand  $|i\rangle$  in einen neuen Zustand  $|f\rangle$ , der ein Photon weniger enthält. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude für diesen Prozess ist durch das Matrixelement

$$\langle f|\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)|i\rangle \quad (8.42)$$

gegeben. Die Wahrscheinlichkeit ein Photon nachzuweisen, ergibt sich durch Bildung des Betragsquadrates und durch Summation über den vollständigen Satz aller möglichen Endzustände  $|f\rangle$ :

$$\begin{aligned} \sum_f |\langle f|\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)|i\rangle|^2 &= \sum_f \langle i|\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)|f\rangle \langle f|\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)|i\rangle \\ &= \langle i|\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)|i\rangle. \end{aligned} \quad (8.43)$$

Bei intensitätsinterferometrischen Messungen, wie denen von Hanbury Brown und Twiss, werden zwei Photonen an zwei verschiedenen Raum-Zeit-Punkten nachgewiesen, dabei ist der Endzustand  $|f\rangle$  um zwei Teilchen verringert und die zugehörige Übergangsamplitude lautet:

$$\langle f|\hat{\psi}(\mathbf{r}_2, t_2)\hat{\psi}(\mathbf{r}_1, t_1)|i\rangle. \quad (8.44)$$

Analog zur obigen Überlegung findet man für die gemeinsame Nachweiswahrscheinlichkeit der beiden Photonen:

$$\langle i|\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_1, t_1)\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_2, t_2)\hat{\psi}(\mathbf{r}_2, t_2)\hat{\psi}(\mathbf{r}_1, t_1)|i\rangle. \quad (8.45)$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass im Allgemeinen die zueinander adjungierten Operatoren in den Nachweiswahrscheinlichkeiten 8.43 und 8.45 nicht miteinander kommutieren. Die Anordnung, bei der sämtliche Vernichtungsoperatoren rechts von den Erzeugungsoperatoren stehen, wird als Normalordnung bezeichnet und ist eine direkte Konsequenz des destruktiven Detektionsprozesses (also z.B. der Photonenabsorption).

### Quantenmechanische Definitionen der Korrelationsfunktionen

Im Allgemeinen befindet sich das zu untersuchende Feld nicht in einem reinen Quantenzustand, sondern der Ausgangszustand  $|i\rangle$  ist nur mit einer gewissen statistischen Wahrscheinlichkeit  $p_i$  besetzt. Gemäß Abschnitt 2.1.3 lässt sich ein solches statistisches Gemisch durch den zugehörigen Dichteoperator  $\hat{\rho}$  beschreiben. Statt an der Nachweiswahrscheinlichkeit für einen wohldefinierten Ausgangszustand  $|i\rangle$  ist man bei einem statistischen Gemisch an dem Ensemblemittelwert der Nachweiswahrscheinlichkeiten interessiert. Mittels der in Gleichung 2.29 definierten Konvention lassen sich unsere Betrachtungen auf statistische Gemische verallgemeinern. Somit erhalten wir zum Beispiel für die Einteilchennachweiswahrscheinlichkeit:

$$\text{Sp}(\hat{\rho}\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)) \equiv \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \hat{n}(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (8.46)$$

## 8 Korrelationsanalyse

Bei einem Lichtfeld entspricht  $\langle \hat{n}(\mathbf{r}, t) \rangle$  der mittleren Photonendichte.

In Interferenzexperimenten, wie sie mit dem Michelson- oder Mach-Zehnder-Interferometer durchgeführt werden, misst man Intensitäten, die sich aus der Überlagerung von Feldamplituden zweier verschiedener Raum-Zeit-Punkte ergeben. Um die mittlere Photonendichte in einem Feld der Art  $(\hat{\psi}(\mathbf{r}_1, t_1) + \hat{\psi}(\mathbf{r}_2, t_2))$  zu bestimmen, muss man einen Ausdruck wie in Gleichung 8.46 auswerten, dessen beiden Argumente jedoch zwei verschiedenen Raum-Zeit-Punkten angehören. Dies führt uns zur quantenmechanischen Formulierung der Korrelationsfunktion erster Ordnung:

$$G^{(1)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{\psi}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle. \quad (8.47)$$

Analog lautet die quantenmechanische Definition der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung:

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{\psi}(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{\psi}(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle. \quad (8.48)$$

Wie bei den klassischen Definitionen 8.5 und 8.31 lassen sich auch normierte Korrelationsfunktionen einführen:

$$\begin{aligned} g^{(1)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) &= \frac{\langle \hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{\psi}(x_2) \rangle}{\sqrt{\langle \hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{\psi}(x_1) \rangle \langle \hat{\psi}^\dagger(x_2) \hat{\psi}(x_2) \rangle}} \\ &= \frac{G^{(1)}(x_1, x_2)}{\sqrt{G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2)}}, \end{aligned} \quad (8.49)$$

$$\begin{aligned} g^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) &= \frac{\langle \hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{\psi}^\dagger(x_2) \hat{\psi}(x_2) \hat{\psi}(x_1) \rangle}{\langle \hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{\psi}(x_1) \rangle \langle \hat{\psi}^\dagger(x_2) \hat{\psi}(x_2) \rangle} \\ &= \frac{G^{(2)}(x_1, x_2)}{G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2)}. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Die klassischen und quantenmechanischen Definitionen der Korrelationsfunktionen weisen formal eine ähnliche Struktur auf. Anstelle von Mittelwerten klassischer Feldamplituden bzw. Intensitäten werden nun jedoch Erwartungswerte quantenmechanischer Operatoren ausgewertet. In Übereinstimmung mit dem semi-klassischen Ergebnis 8.40 gibt die normierte Korrelationsfunktion zweiter Ordnung 8.50 das Verhältnis zwischen der gemeinsamen Nachweiswahrscheinlichkeit  $P_{1 \cap 2}$  und dem Produkt  $P_1 P_2$  der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten an. Die Nachweiswahrscheinlichkeiten sind proportional zu den Erwartungswerten normalgeordneter Operatoren, wobei die Normalordnung den destruktiven Charakter des Detektionsprozesse widerspiegelt.

### Nicht-klassische Felder und Antibunching

Als Nächstes wenden wir uns nochmal dem HBT-Experiment aus Abbildung 8.6 zu, diesmal im Rahmen einer vollständig quantentheoretischen Beschreibung. Wiederum interes-

## 8.2 Hanbury Brown und Twiss-Effekt

sieren wir uns für den Fall simultaner ( $\tau = 0$ ) Photodetektionen auf den beiden Detektoren. Wird das Licht, bevor es auf den Strahlteiler trifft, ausreichend räumlich gefiltert und ist die Zeitskala, innerhalb derer der Messprozess stattfindet, klein gegenüber der Kohärenzzeit  $\tau_c$ , so kann man davon ausgehen, dass nur eine einzelne Mode des Strahlungsfeldes vermessen wird, oder – was gleichbedeutend ist – dass alle detektierten Photonen aus demselben Kohärenzvolumen stammen. Somit bleibt in der Entwicklung 8.41 nur noch der Beitrag einer einzelnen Mode  $k$  übrig und durch Einsetzen in die Definition 8.50 folgt:

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{a}_k \rangle}{\langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle^2} = \frac{\langle \hat{n}_k(\hat{n}_k - 1) \rangle}{\langle \hat{n}_k \rangle^2}. \quad (8.51)$$

Da wir unsere Betrachtungen auf eine einzelne Mode beschränken, lassen wir den Index  $k$  im Folgenden fallen. Im rechten Ausdruck von Gleichung 8.51 manifestiert sich das quantenmechanische Prinzip, dass der Messprozess das zu messende System beeinflusst. Bei der Bestimmung der Anzahl  $n$  der Photonen verringert sich deren Anzahl um eins, sodass bei der zweiten Messung nur noch  $(n - 1)$  Photonen vorliegen. Hierin besteht der grundlegende Unterschied zwischen der klassischen und der quantenmechanischen Kohärenz zweiter Ordnung.

In der vollständig quantentheoretischen Beschreibung gibt es nun auch Felder, deren Korrelationsfunktionen die Ungleichung  $g^{(2)}(0) \geq 1$  verletzen und die daher als nicht-klassisch bezeichnet werden. Ein einfaches Beispiel für ein solches nicht-klassisches Feld ist ein Lichtstrahl, der nur aus einem einzelnen Photon besteht. Das Feld ist dann ein Eigenzustand des Photonenzahloperators,  $\hat{n}|1\rangle = 1|1\rangle$ , und durch Einsetzen in Gleichung 8.51 folgt  $g^{(2)}(0) = 0$ .

Das erste HBT-Experiment, indem sich ein nicht-klassisches Feld nachweisen ließ, wurde im Jahre 1977 durchgeführt [293]. Hier diente die Resonanzfluoreszenz einzelner Atome als Lichtquelle. Da ein Atom nur ein Photon aussendet und sich dieses Photon nur einmal detektieren lässt, können die beiden Detektoren im HBT-Aufbau niemals synchron ansprechen. Die Detektorsignale sind also vollständig antikorreliert. Das einzelne Auftreten der Photonen wird auch als Antibunching bezeichnet. Hierin spiegelt sich die Tatsache wider, dass jede Mode des Lichtfeldes maximal mit einem Photon besetzt ist. Während das Antibunching nur bei speziell präparierten Lichtfeldern zu beobachten ist, tritt der Effekt bei fermionischen Teilchen zwangsläufig auf, denn hier verbietet das Pauli-Prinzip eine Mehrfachbesetzung desselben Quantenzustandes bzw. desselben Kohärenzvolumens. Fermionische Felder lassen sich daher nur quantentheoretisch beschreiben.

### Kohärente Zustände

In der klassischen Theorie haben wir gesehen, dass perfekt stabile Wellen aufgrund fehlender Intensitätsfluktuationen keinerlei Korrelationen zweiter Ordnung aufweisen. Die Quantenzustände eines Ein-Moden-Feldes, die einem solchen klassischen Zustand defi-

## 8 Korrelationsanalyse

nierter Phase und Amplitude am nächsten kommen, sind die kohärenten oder Glauber-Zustände [225]. Diesen Zuständen sind wir bereits in Abschnitt 5.4.1 begegnet. Dort erlaubten sie uns eine quantenmechanische Beschreibung der makroskopischen Kondensatwellenfunktionen. Allgemein beschreiben kohärente Zustände Quantenfelder, welche bei vorgegebener mittlerer Teilchenzahl  $\langle \hat{n} \rangle \equiv \bar{n}$  ein minimales Produkt aus Amplituden- und Phasenschwankungen aufweisen. Die kohärenten Zustände lassen sich als Überlagerung von Fock-Zuständen  $|n\rangle$  darstellen:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad \text{mit} \quad |\alpha|^2 = \langle \hat{n} \rangle. \quad (8.52)$$

Im Fall einer Lichtmode entsprechen die Fock-Zustände  $|n\rangle$  Zuständen definierter Photonenzahl. Da kohärente Zustände keine definierte Photonenzahl aufweisen und Eigenzustände des Vernichtungsoperators sind,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (8.53)$$

haben sie die besondere Eigenschaft, nicht durch den Detektionsprozess verändert zu werden. Diese Eigenschaft weisen alle Quantenfelder auf, die von einer klassischen Stromverteilung abgestrahlt werden. Bei dem Eigenwert  $\alpha$  handelt es sich um eine komplexwertige Funktion, die genau mit der klassischen Lösung des abgestrahlten elektrischen Feldes übereinstimmt. Der kohärente Zustand  $|\alpha\rangle$  ist ein reiner Zustand und lässt sich durch den trivialen Dichteoperator  $\hat{\rho} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$  beschreiben. Hiermit folgt für die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung  $g^{(2)}(0) = 1$ . Dies stimmt mit dem klassischen Ergebnis für eine perfekt stabile Welle überein. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem kohärenten Zustand der mittleren Besetzungszahl  $\bar{n}$  genau  $n$  Photonen nachgewiesen werden, ergibt sich aus dem Erwartungswert  $|\langle n|\alpha\rangle|^2$  und lautet:

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}. \quad (8.54)$$

Hierbei handelt es sich um eine Poisson-Verteilung. Sie entspricht einer rein zufälligen Verteilung, was nochmals das Fehlen jeglicher Korrelationen zwischen den Photonen bestätigt. Alternativ beschreibt  $p_n$  die Wahrscheinlichkeit, genau  $n$  Photonen innerhalb einer Zeitdauer  $\Delta t \ll \tau_c$  zu registrieren, wenn innerhalb von  $\Delta t$  im Ensemblemittel  $\bar{n}$  Photonen des kohärenten Lichtfeldes detektiert werden. Die quadratische Varianz in der Anzahl der detektierten Photonen ergibt sich zu

$$(\Delta n)^2 = \langle (\hat{n} - \bar{n})^2 \rangle = \langle \hat{n}^2 \rangle - \bar{n}^2 = \bar{n}. \quad (8.55)$$

Zwar verfügt kohärentes Licht über eine maximale Amplituden- und Intensitätsstabilität, dennoch misst ein Detektor, auf den das Licht fällt, gemäß Gleichung 8.55 zeitliche Intensitätsfluktuationen. Diese Fluktuationen werden als Schrotrauschen bezeichnet. Sie sind



## 8.2 Hanbury Brown und Twiss-Effekt

auf die diskrete und zufällige Natur des Detektionsprozesses zurückzuführen: Das Entfernen von Energie aus dem Lichtfeld kann immer nur in Einheiten von ganzen Photonen geschehen. Die relative Intensität des Schrotrauschens  $\Delta n/\bar{n}$  nimmt mit der mittleren Teilchenzahl gemäß  $1/\sqrt{\bar{n}}$  ab und kann daher bei hohen Intensitäten bzw. großen mittleren Teilchenzahlen vernachlässigt werden.

Glauber erkannte, dass Laserlicht die hier aufgeführten statistischen Eigenschaften besitzt und sich in guter Näherung durch kohärente Zustände beschreiben lässt. Arecchi konnte als Erster die reduzierten Intensitätsfluktuationen in Laserlicht experimentell nachweisen [294]. Aufgrund der stimulierten Emission baut sich innerhalb eines Laserresonators ein starkes oszillierendes Feld auf, dessen Amplitude durch den Sättigungseffekt des Lasermediums stabilisiert wird. Zusammen mit dem Feld bildet sich eine oszillierende makroskopische Polarisation im aktiven Medium aus. Da die makroskopische Polarisation von den einzelnen Emissionsprozessen weitgehend unbeeinflusst bleibt, sind die Photonen statistisch unabhängig. Andererseits bewirkt die makroskopische Phasenbeziehung, dass alle Emissionen in ein und dieselbe kollektive Lichtmode stattfinden.

### Chaotisches Licht

Auch in der Quantentheorie kann chaotisches Licht als eine zufällige Überlagerung von Feldern aufgefasst werden. Doch statt klassischer Wellen handelt es sich nun um kohärente Zustände [291, 295]. Das Superpositionsprinzip erlaubt es eine Überlagerung von  $j$  kohärenten Zuständen durch folgenden Dichteoperator darzustellen:

$$\hat{\rho} = |\alpha_1 + \dots + \alpha_j\rangle\langle\alpha_1 + \dots + \alpha_j|. \quad (8.56)$$

Bei chaotischem Licht entsprechen die Amplituden der individuellen Anregungen zufälligen komplexen Zahlen  $\alpha_j$ , deren Summe  $\alpha = (\alpha_1 + \dots + \alpha_j)$  eine Zufallsbewegung in der komplexen Ebene ausführt. Im Limes  $j \rightarrow \infty$  nähert sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Summe  $\alpha$  der folgenden Gauß-Verteilung:

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi\bar{n}} e^{-|\alpha|^2/\bar{n}}. \quad (8.57)$$

Dabei bezeichnet  $\bar{n} = |\alpha|^2$  die mittlere Photonenzahl der betrachteten Mode. Der Dichteoperator, der die statistische Mischung aus kohärenten Zuständen beschreibt, kann somit als Integral über die komplexe Ebene dargestellt werden:

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha. \quad (8.58)$$

Mittels der Entwicklung 8.52 lässt sich der Dichteoperator in die Basis der Fock-Zustände  $|n\rangle$  überführen und zusammen mit Gleichung 8.57 folgt nach etwas Algebra:

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{n})^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}} |n\rangle\langle n|. \quad (8.59)$$

## 8 Korrelationsanalyse

---

Der Vorfaktor in der Summe entspricht einer Bose-Einstein-Verteilung und gibt die Wahrscheinlichkeit  $p_n$  an  $n$  Photonen vorzufinden, wenn die mittlere Besetzungszahl der Lichtmode  $\bar{n}$  beträgt. Damit ergibt sich die quadratische Varianz der Photonenzahl zu:

$$(\Delta n)^2 = \bar{n} + \bar{n}^2. \quad (8.60)$$

Die Fluktuationen  $\Delta n$  in einer Mode sind also von derselben Größenordnung wie die mittlere Besetzungszahl  $\bar{n}$  und damit sehr stark. In der Tat beschreibt der Dichteoperator 8.59 ein maximal chaotisches Lichtfeld, denn es lässt sich zeigen, dass der zugehörige gemischte Zustand eine maximale Entropie (für vorgegebenes  $\bar{n}$ ) aufweist. Betrachtet man einen Resonator im thermischen Gleichgewicht, so ist die mittlere Photonenzahl in einer Lichtmode der Frequenz  $\nu$  durch das Plancksche Strahlungsgesetz  $\bar{n} = [\exp(h\nu/k_B T) - 1]^{-1}$  gegeben, wobei  $k_B$  die Boltzmann-Konstante und  $T$  die Temperatur des Resonators bezeichnet. Setzt man dieses Ergebnis in den Dichteoperator 8.59 ein, so erhält man die Photonverteilung innerhalb einer thermischen Strahlungsmode. Demnach stellt thermisches Licht eine spezielle Form von chaotischem Licht dar.

In seiner berühmten Arbeit zur Quantenstatistik eines idealen atomaren Gases untersuchte Albert Einstein die Teilchenzahlfluktuationen in einem kleinen Teilvolumen eines solchen Gases [296]. Für endliche Temperaturen fand er dieselbe Varianz wie in Gleichung 8.60. Den linearen Rauschterm interpretierte er als Fluktuationen zwischen unabhängigen Teilchen, was heute als Schrotrauschen bezeichnet wird. Bereits damals erkannte Einstein, dass der quadratische Rauschterm die Folge eines Interferenzeffektes ist, der auf die Wellennatur der Teilchen zurückzuführen ist. Ganz allgemein gilt die durch Gleichung 8.60 beschriebene Varianz für beliebige Teilchen, die der Bose-Einstein-Verteilung gehorchen.

Gemäß der obigen Beschreibung kann chaotisches Licht durch eine zufällige Überlagerung vieler unabhängiger kohärenter Lichtfelder erzeugt werden. So schickte Arecchi einen kohärenten Laserstrahl durch eine drehende Streuscheibe variabler Winkelgeschwindigkeit um chaotisches Licht mit einer frei einstellbaren Kohärenzzeit zu generieren [294]. Das auf diese Weise erzeugte Licht weist ebenfalls Bunching auf und wird als pseudo-thermisch bezeichnet.

Das Experiment von Arecchi macht deutlich, dass ein Intensitätsinterferometer als eine Art Speckle-Analysator aufgefasst werden kann. Denn fällt das pseudo-thermische Licht auf einen Beobachtungsschirm, so erzeugt es auf diesem ein räumlich und zeitlich variierendes Specklemuster. Aus der Größe und zeitlichen Entwicklung der granularen Intensitätsverteilungen (*Speckle*) lassen sich die Kohärenzlänge und die Kohärenzzeit der Lichtquelle ableiten. Wie wir später sehen werden, können auch Absorptionenaufnahmen von frei expandierenden Atomwolken als Speckle-Muster aufgefasst werden, aus deren Analyse sich Informationen über die atomare Quelle gewinnen lassen.

Wie aus Gleichung 8.40 hervorgeht, gibt die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung das Verhältnis zwischen der bedingten und der einzelnen Photodetektionswahrscheinlichkeit an. Wertet man Gleichung 8.51 mit dem Dichteoperator 8.59 aus, so erhalten wir für chaotisches Licht das Ergebnis  $g^{(2)}(0) = 2$ . Demnach verdoppelt sich die Wahrscheinlichkeit,

## 8.2 Hanbury Brown und Twiss-Effekt

ein Photon zu detektieren, wenn bereits unmittelbar zuvor ein Photon detektiert wurde. Dies ist gerade das Photon-Bunching, welches Hanbury Brown und Twiss an thermischem Licht beobachten konnten. Innerhalb einer selben Mode sind die Photonen über die Bose-Einstein-Verteilung miteinander korreliert. Führt man dasselbe HBT-Experiment jedoch mit längeren Verzögerungszeiten  $\tau \gg \tau_c$  durch, so gehören die detektierten Photonen verschiedenen Moden an. In diesem Fall sind die Photonen statistisch unabhängig und die Korrelationsfunktion geht gegen eins:  $g^{(2)}(\tau \gg \tau_c) = 1$ .

Erst durch die Analyse der Photonenstatistik lässt sich eindeutig feststellen, ob Licht von einer thermischen oder einer kohärenten Quelle stammt oder womöglich von einer rein quantenmechanischen Quelle, wie einem einzelnen Atom, emittiert wurde. Die verschiedenen Quellen können über die Intensitätskorrelationen unterschieden werden. So zeigt  $g^{(2)}$  Bunching für thermisches Licht, einen flachen Verlauf für kohärente Strahlung und Antibunching für nicht-klassisches Licht. Zudem lassen sich aus dem funktionalen Verlauf von  $g^{(2)}$  über Gleichung 8.32, das Wiener–Khinchin- 8.20 und das van Cittert-Zernike-Theorem 8.12 Informationen über die Linienbreite und die Geometrie der Lichtquelle gewinnen. Die Übereinstimmung zwischen der klassischen und der quantenmechanischen Kohärenztheorie bei klassischen Feldern ist darauf zurückzuführen, dass sich die Felder im Bereich  $g^{(2)} \geq 1$  durch kohärente Zustände  $|\alpha\rangle$  beschreiben lassen. Kohärente Zustände sind Eigenzustände der Feldoperatoren  $\hat{a}$  und deren Eigenwerte  $\alpha$  stimmen mit den Amplituden der klassischen Felder überein. Damit können die klassisch hergeleiteten Theoreme 8.12 und 8.20 auch in der quantenmechanischen Kohärenztheorie angewendet werden.

### 8.2.4 HBT-Effekt in bosonischen und fermionischen Quantenfeldern

In Hinblick auf eine spätere Erweiterung auf Atome, sollen im Folgenden die chaotischen Quantenfelder als ideale bosonische bzw. fermionische Gase im thermischen Gleichgewicht betrachtet werden. Für diese Gase wollen wir, analog zu Gleichung 8.32, die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung durch die Korrelationsfunktion erster Ordnung ausdrücken. Die quantenmechanischen Korrelationsfunktionen enthalten Ensemblemittelwerte, die sich im Fall eines großkanonischen Ensembles über den folgenden Dichteoperator berechnen lassen (siehe Abschnitt 2.1.3):

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}. \quad (8.61)$$

Hierbei ist  $\hat{H}$  der Hamilton-Operator des Systems,  $\hat{N}$  bezeichnet den Operator für die Gesamtteilchenzahl und  $\beta = 1/k_B T$  wird durch die Temperatur des Gases bestimmt. Der Wert der großkanonischen Zustandssumme  $Z$  ergibt sich aus der Normierungsbedingung  $\langle \hat{\rho} \rangle = 1$ . Für ein Quantengas mit variabler Gesamtteilchenzahl  $N$ , zum Beispiel einem Photonengas in einem Strahlungshohlraum, ist der Hamilton-Operator unabhängig von  $N$ . In einem solchen Fall verschwindet das chemische Potential  $\mu = \partial \langle \epsilon_i \rangle / \partial N$  und das

## 8 Korrelationsanalyse

großkanonische Ensemble stimmt mit dem kanonischen Ensemble überein. Für die Bestimmung der quantenstatistischen Erwartungswerte der Feldoperatoren ist eine genaue Kenntnis des Dichteoperators nicht notwendig, sondern es reichen die folgenden algebraischen Relationen aus (Seite 239 in [55]):

$$\hat{a}_i \hat{\rho} = \hat{\rho} \hat{a}_i e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}, \quad (8.62)$$

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{\rho} = \hat{\rho} \hat{a}_i^\dagger e^{\beta(\epsilon_i - \mu)}. \quad (8.63)$$

Dabei ist  $\epsilon_i$  die Energie des Einteilcheneigenzustandes  $\psi_i$ . Im Folgenden verwenden wir wieder die Konvention, dass das obere Vorzeichen bei Bosonen und das untere Vorzeichen bei Fermionen gilt. Auf diese Weise lassen sich die Herleitungen für Bosonen und Fermionen parallel ausführen und direkt miteinander vergleichen. Aus den bosonischen und fermionischen Kommutationsregeln  $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger]_{\mp} = \delta_{ij}$  erhalten wir:

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j = \pm \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i + \delta_{ij}, \quad (8.64)$$

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j = \pm \hat{a}_j \hat{a}_i^\dagger \mp \delta_{ij}. \quad (8.65)$$

Des Weiteren nutzen wir die Invarianz der Spur unter zyklischer Vertauschung:

$$\text{Sp}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = \text{Sp}(\hat{C}\hat{A}\hat{B}). \quad (8.66)$$

Durch Einsetzen der Entwicklungen 8.41 in die Korrelationsfunktionen 8.47 und 8.48 folgt:

$$G^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{i,j} \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \rangle \psi_i^*(\mathbf{r}_1) \psi_j(\mathbf{r}_2), \quad (8.67)$$

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{i,j,k,l} \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \hat{a}_l \rangle \psi_i^*(\mathbf{r}_1) \psi_j^*(\mathbf{r}_2) \psi_k(\mathbf{r}_2) \psi_l(\mathbf{r}_1). \quad (8.68)$$

Hierbei beschränken wir unsere Betrachtungen auf einen einzigen festgelegten Zeitpunkt. Die Erwartungswerte in den obigen Ausdrücken lassen sich durch Ausnutzung der Relationen 8.62 bis 8.66 und nach etwas Algebra auf die folgenden Formen bringen:

$$\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \rangle = \frac{\delta_{ij}}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} \mp 1} = \delta_{ij} \langle \hat{n}_i \rangle \quad (8.69)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \hat{a}_l \rangle &= \frac{\delta_{il} \langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \rangle \pm \delta_{ik} \langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_l \rangle}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} \mp 1} \\ &= \delta_{il} \delta_{jk} \langle \hat{n}_i \rangle \langle \hat{n}_j \rangle \pm \delta_{ik} \delta_{jl} \langle \hat{n}_i \rangle \langle \hat{n}_j \rangle. \end{aligned} \quad (8.70)$$

## 8.2 Hanbury Brown und Twiss-Effekt

Gleichung 8.69 entspricht der Bose-Einstein- bzw. der Fermi-Dirac-Verteilung. Durch Einsetzen dieser Ergebnisse in die Korrelationsfunktionen 8.67 und 8.68 folgt:

$$G^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_i \langle \hat{n}_i \rangle \psi_i^*(\mathbf{r}_1) \psi_i(\mathbf{r}_2), \quad (8.71)$$

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \sum_{i,j} \langle \hat{n}_i \rangle \langle \hat{n}_j \rangle [\psi_i^*(\mathbf{r}_1) \psi_i(\mathbf{r}_1)] [\psi_j^*(\mathbf{r}_2) \psi_j(\mathbf{r}_2)] \\ &\quad \pm \sum_{i,j} \langle \hat{n}_i \rangle \langle \hat{n}_j \rangle [\psi_i^*(\mathbf{r}_1) \psi_i(\mathbf{r}_2)] [\psi_j^*(\mathbf{r}_2) \psi_j(\mathbf{r}_1)] \\ &= G^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) G^{(1)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2) \pm |G^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2. \end{aligned} \quad (8.72)$$

Setzt man 8.72 in die Definition 8.50 ein, so erhält man die normierte Korrelationsfunktion zweiter Ordnung:

$$g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 1 \pm |g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2. \quad (8.73)$$

Mit dem Pluszeichen gilt die Beziehung für Bosonen und stimmt mit dem Ergebnis 8.32 für klassische chaotische Felder überein. Mit dem Minuszeichen gilt die Beziehung für Fermionen und es existiert kein klassisches Äquivalent.

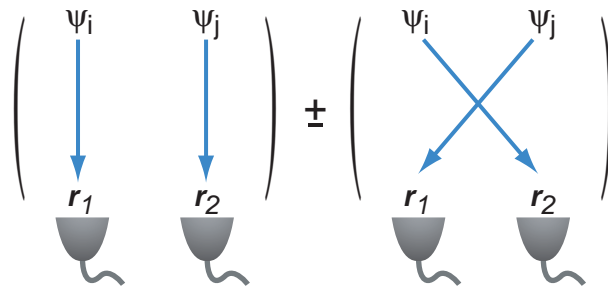
Bei einem Bose- oder Fermigas endlicher Kohärenzlänge  $l_c$  verschwindet die Korrelationsfunktion erster Ordnung  $g^{(1)}(l)$  für  $l \gg l_c$  und damit geht die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung  $g^{(2)}(l)$  gegen eins. Das heißt, in großen Abständen  $l \gg l_c$  sind die Teilchen vollständig unkorreliert. Bei kleinen Abständen gilt für Bosonen  $g^{(2)}(0) = 2$ . Weshalb die Wahrscheinlichkeit, zwei Bosonen dicht beieinander vorzufinden, doppelt so groß wie die Wahrscheinlichkeit, diese weit voneinander entfernt zu detektieren. Bei Fermionen gilt  $g^{(2)}(0) = 0$ , weshalb die Wahrscheinlichkeit, zwei Fermionen am selben Ort zu detektieren, verschwindet. Die als Funktion des Detektorabstandes  $l$  aufgetragene Korrelationsfunktion  $g^{(2)}(l)$  weist also eine „Beule“ auf, welche für Bosonen nach oben und für Fermionen nach unten zeigt und deren Breite durch die Kohärenzlänge bestimmt wird. Bei einem thermischen Gas aus massiven Teilchen stimmt die Kohärenzlänge  $l_c$  mit der thermischen de Broglie-Wellenlänge  $\lambda_{dB}$  (Gl. 2.32) überein.

Aus dem vorangegangenen Ausdruck kann eine quantenmechanische Erklärung für das bosonische Bunching und das fermionische Antibunching abgeleitet werden: Die Wahrscheinlichkeit  $G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , zwei Teilchen gemeinsam an den Orten  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  zu detektieren, ist durch Gleichung 8.72 gegeben und lässt sich auf die folgende Form bringen:

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle \hat{n}_i \rangle \langle \hat{n}_j \rangle |\psi_i(\mathbf{r}_1) \psi_j(\mathbf{r}_2) \pm \psi_i(\mathbf{r}_2) \psi_j(\mathbf{r}_1)|^2. \quad (8.74)$$

Um dieses Ergebnis zu interpretieren betrachten wir die schematische Darstellung in Abbildung 8.7. Es gibt zwei Möglichkeiten zwei Teilchen, die sich in den Einteilchenzuständen  $\psi_i$  und  $\psi_j$  befinden, gemeinsam nachzuweisen: Einerseits kann das Teilchen im Zustand  $\psi_i$  auf den Detektor am Ort  $\mathbf{r}_1$  und das Teilchen im Zustand  $\psi_j$  auf den Detektor am

## 8 Korrelationsanalyse

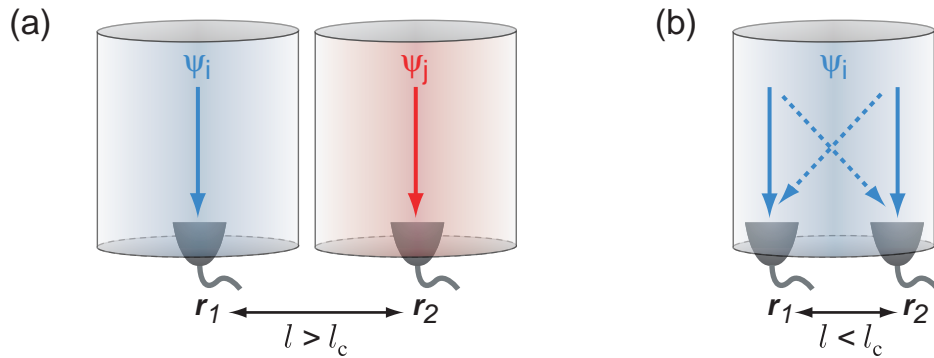


**Abbildung 8.7:** Schematische Darstellung der miteinander interferierenden Zwei-Teilchen-Amplituden (direkter Prozess und Austauschprozess). Bei übereinstimmenden Einteilchenzuständen  $\psi_i = \psi_j$  kommt es zur vollständig konstruktiven bzw. destruktiven Interferenz, woraus sich das bosonische Bunching bzw. das fermionische Antibunching erklärt.

Ort  $r_2$  treffen. Andererseits kann das Teilchen im Zustand  $\psi_i$  bei  $r_2$  und das Teilchen im Zustand  $\psi_j$  bei  $r_1$  nachgewiesen werden. Handelt es sich um identische Teilchen, so können der direkte Prozess und der Austauschprozess prinzipiell nicht voneinander unterschieden werden und die gemeinsame Nachweiswahrscheinlichkeit ergibt sich aus der Superposition der beiden Zwei-Teilchen-Amplituden. Die Gesamtwahrscheinlichkeit  $G^{(2)}(r_1, r_2)$  ergibt sich durch Summation über die Zwei-Teilchen-Nachweiswahrscheinlichkeiten aller möglichen Paare  $\{i, j\}$  besetzter Zustände.

Bezeichnen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  die Einteilchenzustände mit den größten Amplituden an den Detektorpositionen  $r_1$  bzw.  $r_2$ , so liefert die Zwei-Teilchen-Amplitude  $\psi_1(r_1)\psi_2(r_2)$  den Hauptbeitrag zur Gesamtwahrscheinlichkeit  $G^{(2)}(r_1, r_2)$ . Wohingegen die Amplitude des zugehörigen Austauschprozesses  $\psi_1(r_2)\psi_2(r_1)$  bei großen Detektorabständen vernachlässigbar ist (siehe Abbildung 8.8). Befinden sich die beiden Detektoren jedoch innerhalb eines selben Kohärenzvolumens<sup>3</sup>  $V_c$  um den Ort  $r_1$  herum, so stimmen die Zwei-Teilchen-Amplituden für den direkten Prozess  $\psi_1(r_1)\psi_1(r_2)$  und den Austauschprozess  $\psi_1(r_2)\psi_1(r_1)$  miteinander überein und liefern zusammen den Hauptbeitrag zu  $G^{(2)}(r_1, r_2)$ . Bei Bosonen müssen die beiden Amplituden addiert werden. Deren konstruktive Interferenz bedingt den Überhöhungsfaktor 2 in der gemeinsamen Nachweiswahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeit, zwei Teilchen innerhalb eines selben Einteilchenzustandes (oder Kohärenzvolumens) vorzufinden, ist also doppelt so groß wie die Wahrscheinlichkeit, die Teilchen innerhalb zweier verschiedener Zustände (bzw. Kohärenzvolumina) zu detektieren. Betrachtet man Fermionen, so müssen die Zwei-Teilchen-Amplituden voneinander subtrahiert werden, um antisymmetrisch gegenüber Teilchenaustausch zu sein. Stimmen die beiden Einteilchenzustände miteinander überein,  $\psi_i = \psi_j$ , so führt dies zu einer vollständig destruktiven Interferenz. Zwei Fermionen dürfen also nicht denselben Einteilchen-

<sup>3</sup>Gemäß Abschnitt 8.1.3 entspricht das Kohärenzvolumen  $V_c$  dem Volumen, welches ein quantenmechanischer Zustand  $\psi_i$  im Raum einnimmt. Für ein Lichtfeld stimmt  $V_c$  mit dem Modenvolumen oder dem „Volumen eines Photons“ überein. Kohärenz-, Moden- und Zustandsvolumen sind hier also als synonyme Begriffe zu verstehen.



**Abbildung 8.8:** (a) Zwei Detektoren, die sich innerhalb unterschiedlicher Kohärenzvolumina befinden, weisen in der Regel Teilchen aus verschiedenen Quantenzuständen  $\psi_i \neq \psi_j$  nach. Wegen der geringen Amplitude von  $\psi_i$  bei  $r_2$  und von  $\psi_j$  bei  $r_1$  kann die Zwei-Teilchen-Amplitude des Austauschprozesses vernachlässigt werden. (b) Befinden sich die beiden Detektoren innerhalb eines selben Kohärenzvolumens, so tragen der direkte Prozess und der Austauschprozess in gleichen Maßen zur gemeinsamen Nachweiswahrscheinlichkeit bei und die zugehörigen Zwei-Teilchen-Amplituden interferieren miteinander.

zustand bzw. dasselbe Kohärenzvolumen besetzen. Folglich verschwindet die gemeinsame Nachweiswahrscheinlichkeit, wenn die beiden Detektoren innerhalb eines selben Kohärenzvolumens angeordnet sind.

An dieser Stelle sei bemerkt, dass die Annahme eines großkanonischen Ensembles für Systeme mit fester Teilchenzahl  $N$  nur eine Näherung darstellt. Die daraus resultierenden Fehler in den normierten Korrelationsfunktionen sind von der Größenordnung  $O(1/N)$  und können daher bei ausreichend großen Teilchenzahlen  $N$  vernachlässigt werden (thermodynamischer Limes) [297].

### Kohärente bosonische Felder

Für ein bosonisches System mit fester Teilchenzahl  $N$  und einer Temperatur  $T < T_c$  sagt das großkanonische Ensemble jedoch unrealistisch große Teilchenzahlfluktuationen für die Kondensatmode voraus. Der Kondensatanteil muss stattdessen in einem kanonischen Ensemble beschrieben werden [297]. Dessen Korrelationen ergeben sich dann zu:

$$\langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 \rangle = \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle + O(N). \quad (8.75)$$

Da der erste Term von der Ordnung  $N^2$  ist, kann der zweite Term im Limes großer Teilchenzahlen vernachlässigt werden. Bei einem reinen Kondensat bzw. einem vollständig kohärenten Feld befinden sich alle Teilchen im selben Einteilchenzustand  $\psi_0$ . Gemäß Gleichung 8.75 faktorisieren für diese Teilchen die Zwei-Teilchen-Korrelationen und man er-

## 8 Korrelationsanalyse

---

hält  $g^{(2)}(l) = 1$  für beliebige Abstände  $l$ . In einem Kondensat bestehen also keinerlei Korrelationen zwischen den Teilchen.

### 8.3 Korrelationen in atomaren Ensembles

Wie wir im vorherigen Abschnitt gesehen haben, ist der HBT-Effekt nicht allein auf Photonen beschränkt, sondern tritt für beliebige ununterscheidbare Teilchen – und damit auch für massive Teilchen – auf. Allgemein kann man die quantenmechanisch bedingten Intensitäts- oder Dichtefluktuationen in Vielteilchensystemen als Rauschen auffassen. Die aus dem Quantenrauschen abgeleiteten Korrelationen liefern Informationen über die Kohärenz und die Quantenstatistik des untersuchten Systems und ermöglichen damit Rückschlüsse auf dessen Struktur. Heutzutage wird die Rauschkorrelationsanalyse in vielen Bereichen der Physik als Analyseverfahren eingesetzt. Neben der Quantenoptik und Astronomie reichen die Anwendungsgebiete über die Atom- und Festkörperphysik [41, 42] bis hin zur Nuklear- und Elementarteilchenphysik [298]. So wurde bosonisches Bunching völlig unabhängig von den Experimenten von Hanbury Brown und Twiss auch an einem Beschleuniger in Berkeley in Form von Winkelkorrelation zwischen identischen Pionen entdeckt [299].

Wegen der guten Kontrollierbarkeit und der hohen Phasenraumdichten sind ultrakalte Atome besonders gut geeignet, um den HBT-Effekt zu untersuchen. Bereits in einer magneto-optischen Falle lassen sich die Dichten so weit erhöhen, dass die Wahrscheinlichkeit, zwei Atome innerhalb einer selben Mode vorzufinden, in den experimentell nachweisbaren Bereich rückt. Auf diesem Weg ließ sich 1996 bosonisches Bunching erstmals anhand von Atomen beobachten [44]. In dem Experiment wurden metastabile Neonatome ( $^{20}\text{Ne}^*$ ) aus einer MOT entlassen und als frei fallender Atomstrahl zeitaufgelöst auf einer Mikrokanalplatte (MCP) nachgewiesen. Aus den gemessenen Ankunftszeiten konnten die Korrelationen rekonstruiert werden. Einen eher indirekten Nachweis für bosonisches Bunching lieferte die beobachtete Reduzierung der inelastischen Verluste beim Übergang eines atomaren Gases in den quantenentarteten Zustand [300, 301].

Im Gegensatz zu Photonen können Atome sowohl bosonischer als auch fermionischer Natur sein, sodass sich Bunching und Antibunching unmittelbar miteinander vergleichen lassen. Gegenüber geladenen Teilchen weisen neutrale Atome den Vorteil auf, dass die Korrelationen nicht von der starken Coulomb-Wechselwirkung verschleiert werden. Dies ist insbesondere beim Nachweis von fermionischem Antibunching von Bedeutung. Fermionisches Antibunching wurde zunächst mit Elektronen in Halbleiter-Nanostrukturen demonstriert [302, 303], später an einem freien Elektronenstrahl [304] und schließlich 2006 mit einem Strahl thermischer Neutronen [305] nachgewiesen. Im selben Jahr konnte im Rahmen dieser Arbeit fermionisches Antibunching erstmals an neutralen Atomen beobachtet [50] und innerhalb einer selben Apparatur mit bosonischem Bunching verglichen werden. Parallel fanden auch in anderen Forschungsgruppen Korrelationsmessungen an ultrakalten Atomen statt. Dabei kamen zum Teil sehr unterschiedliche experimentelle



## 8.3 Korrelationen in atomaren Ensembles

---

Verfahren zum Einsatz. Im Folgenden soll ein kurzer chronologischer Überblick gegeben werden. Für Genaueres sei auf die angegebenen Referenzen verwiesen.

### Überblick: Aktuelle HBT-Experimente mit Atomen

Bei dem ersten in Mainz durchgeführten HBT-Experiment [45] wurden bosonische Mott-Isolatoren ( $^{87}\text{Rb}$ ) aus einem dreidimensionalen optischen Gitter entlassen und durch Absorptionsabbildung aufgenommen. Bei der Analyse der Aufnahmen manifestierte sich das bosonische Bunching in Form von räumlich periodischen Korrelationen im atomaren Rauschen. Die Periodizität der Korrelationen spiegelt unmittelbar die frühere Ordnung der Atome im optischen Gitter wider. Außerdem wurde in dem Experiment die Stärke der Korrelationssignale in Abhängigkeit von der Atomzahl bzw. der Expansionsdauer untersucht und eine gute Übereinstimmung mit theoretischen Voraussagen gefunden.

Mittels einer ähnlichen Analyseverfahren konnten in einem Experiment in Boulder Zwei-Teilchen-Korrelationen in den Absorptionaufnahmen von dissoziierten Molekülfragmenten nachgewiesen werden [306]. Hier sind die Korrelationen in den frei expandierenden Atomwolken jedoch auf den Dissoziationsprozess zurückzuführen und nicht etwa, wie beim HBT-Effekt, auf die Interferenz zweier fundamental ununterscheidbarer Quantenprozesse.

In einem Experiment in Orsay wurden die Teilchenkorrelationen in Wolken aus metastabilen bosonischen Heliumatomen ( $^4\text{He}^*$ ) oberhalb und unterhalb der kritischen Temperatur  $T_c$  der Bose-Einstein-Kondensation untersucht [46]. Dazu wurden die evaporativ gekühlten Atome aus einer Magnetfalle entlassen und per Einzeldetektion auf einer Mikrokanalplatte zeit- und orts aufgelöst nachgewiesen. Anhand der aufgezeichneten Eintreffzeiten und -orte ließen sich die Zwei-Teilchen-Korrelationen entlang der drei Raumachsen rekonstruieren. Bei reinen Kondensaten zeigte die Korrelationsfunktion einen flachen Verlauf. Wohingegen die Atomwolken oberhalb von  $T_c$  Bunching auf einer Länge zeigten, die sich umgekehrt proportional zur Wolkenausdehnung in der Falle verhielt.

Statt metastabiler Atome lassen sich auch leichter zu handhabende Grundzustandsatome mit hoher Effizienz einzeln nachweisen und zählen. So wurde in einem Züricher Experiment ein optischer Resonator hoher Güte verwendet, um die Korrelationen in einem Rubidiumatomstrahl ( $^{87}\text{Rb}$ ) zu messen [47]. Sobald ein Atom durch den Resonator fällt, verändert sich dessen Transmissionsverhalten und das durch den Resonator geschickte Probelicht wird abgeschwächt. Als Atomquelle diente ein magnetisch gefangenes Bose-Einstein-Kondensat, welches durch die Einstrahlung einer Mikrowelle als 500 ms langer Atomstrahl ausgekoppelt wurde. Nach Durchlaufen einer freien Fallstrecke wurden die Ankunftszeiten der Atome am Ort des Resonators registriert und daraus die zeitlichen Korrelationen ermittelt. Bei einer kohärenten Auskoppelung der Atome in Form eines Atomlasers ergab sich, wie erwartet, ein flacher Verlauf der Korrelationsfunktion. Wird

## 8 Korrelationsanalyse

der Mikrowelle weißes Rauschen definierter Bandbreite hinzugemischt, so lassen sich auch pseudo-thermische Atomstrahlen erzeugen. Für solche Atomstrahlen konnten in dem Experiment zeitliche Korrelationen zwischen den Atomen nachgewiesen werden, wobei sich die Kohärenzzeiten umgekehrt proportional zur Bandbreite der Rauschquelle verhielten.

Eine weitere Gruppe von Forschern am Institut in Orsay wies Bunching anhand der lokalen Dichtefluktuationen in einem quasi-eindimensionalen  $^{87}\text{Rb}$ -Bosegas nach [48]. Als Ausgangspunkt für das Experiment diente eine magnetische Mikrofalle, in der sich ein stark anisotropes Fallenpotential mit einer hohen radialen Fallenfrequenz  $\omega_r = 2.85 \text{ kHz}$  erzeugen ließ. Bei Temperaturen im Bereich von  $1, 4\hbar\omega_r/k_B$  verhielten sich die Gase quasi-eindimensional. Die reduzierte Dimensionalität und eine In-situ-Absorptionsabbildung erlaubten es, die Dichteverteilung der Atomwolken zu bestimmen, ohne dass die lokalen Dichtefluktuationen entlang der Abbildungsachse herausgemittelt wurden. Befinden sich zwei Atome in demselben Quantenzustand, so werden diese mit hoher Wahrscheinlichkeit in demselben Kohärenzvolumen  $V_c \approx \lambda_{\text{dB}}^3$  nachgewiesen. Hierbei beschreibt die thermische de Broglie-Wellenlänge  $\lambda_{\text{dB}}$  (siehe Gl. 2.32) die mittlere räumliche Ausdehnung eines Quantenzustandes. Für die quadratische Varianz in der Besetzungszahl eines solchen Zustandes folgt bei einer mittleren Besetzung  $\bar{n}$ :

$$(\Delta n)^2 = \bar{n} + \bar{n}^2. \quad (8.76)$$

Diesem Ausdruck sind wir bereits im Zusammenhang mit der Photonverteilung in den Moden eines chaotischen Lichtfeldes begegnet (siehe Gleichung 8.60). Der lineare Term beschreibt das Schrotrauschen und tritt auch bei klassischen Gasen auf, wohingegen der zusätzliche quadratische Term typisch für nicht-kondensierte Bosegase ist und das Bunching widerspiegelt. Ist das kleinste auflösbare Beobachtungsvolumen um einen Faktor  $\alpha$  größer als das Kohärenzvolumen  $V_c$ , so verringert sich die quadratische Varianz auf:

$$(\Delta n)^2 = \bar{n} + \frac{\bar{n}^2}{\alpha}. \quad (8.77)$$

Dabei bezieht sich die quadratische Varianz nun auf das kleinste auflösbare Beobachtungsvolumen (einen „effektiven Pixel“) und  $\bar{n}$  ist die darin enthaltene mittlere Teilchenzahl. Mit der reduzierten Dimensionalität und einer optischen Auflösung von  $10 \mu\text{m}$  (Breite eines effektiven Pixels) ergab sich im Experiment ein Faktor von  $\alpha \approx 70$ . Tatsächlich zeigte die quadratische Varianz  $(\Delta n)^2$  der Atomzahl pro Pixel bei hinreichend niedrigen Temperaturen das für ein ideales Bosegas typische quadratische Verhalten als Funktion von  $\bar{n}$ . Darüber hinaus konnte im Regime hoher Dichten eine Unterdrückung der Atomzahlfluktuationen beobachtet werden, welche sich durch die repulsive Wechselwirkung zwischen den Teilchen erklären lässt.

Mit derselben Analyseverfahren wie im Mainzer HBT-Experiment wurde am NIST in Gaithersburg der Übergang zwischen der superfluiden und der Mott-Isolator-Phase in 2D-Bosegasen ( $^{87}\text{Rb}$ ) untersucht [49]. In dem Experiment wurde die Gittertiefe entlang der

## 8.4 Korrelationsanalyse von Zuständen in optischen Gittern

---

ritten Gitterachse ausgehend vom Mott-Isolator-Regime verringert und dabei eine Verbreiterung der Rauschkorrelationen in der Nähe des Phasenübergangs beobachtet. In Übereinstimmung mit der Theorie [307] verhielt sich die Breite der Signale umgekehrt proportional zur Größe der vorhandenen Mott-Domäne.

Mittels der Korrelationsanalyse von Absorptionsoptionen wird im Rahmen dieser Arbeit erstmals fermionisches Antibunching an neutralen Atomen nachgewiesen [50]. Für das Experiment werden fermionische Bandisolatoren aus  $^{40}\text{K}$ -Atomen abrupt aus einem dreidimensionalen optischen Gitter entlassen und nach der freien Expansion abgebildet. Im Gegensatz zum bosonischen Mott-Isolator aus  $^{87}\text{Rb}$ -Atomen zeigt die Analyse beim fermionischen Bandisolator negative Korrelationen im atomaren Rauschen. Anhand dieser Korrelationen wird die periodische Anordnung der Atome im Gitter nachgewiesen und deren Temperatur bestimmt.

Auch in einem Amsterdamer Experiment ließ sich bosonisches Bunching und fermionisches Antibunching innerhalb einer selben Apparatur beobachten. Dazu wurden die Korrelationen in Wolken aus metastabilen bosonischen und fermionischen Heliumisotopen ( $^4\text{He}^*$  und  $^3\text{He}^*$ ) untersucht [308]. Das Experiment ist ähnlich zu dem in Orsay [46] und verwendet im Rahmen einer Kooperation denselben Mikrokanaldetektor.

### 8.4 Korrelationsanalyse von Zuständen in optischen Gittern

Atomare Systeme, die makroskopischen Wellenfunktionen gehorchen, können unmittelbar anhand der Dichteverteilungen in den Flugzeitaufnahmen charakterisiert werden. Auf diese Weise lassen sich zum Beispiel Bose-Einstein-Kondensate, Interferenzen zwischen Materiewellen oder quantisierte Vortizes direkt nachweisen. Anders verhält es sich bei stark korrelierten Quantensystemen, wie sie in der Nähe von Feshbach-Resonanzen oder in optischen Gitter auftreten. So haben wir in Abschnitt 5.4 gesehen, dass die Dichteverteilung eines abrupt aus einem optischen Gitter entlassenen Mott-Isolators im Mittel zu einer strukturlosen Gauß-Verteilung führt. Aus dieser Gauß-Verteilung lassen sich – bis auf das Fehlen der Phasenkohärenz – keine Informationen über den Vielteilchenzustand im Gitter gewinnen. Das hohe Anwendungspotential optischer Gitter als Quantensimulatoren hat in den letzten Jahren zur Voraussage einer Vielzahl weiterer stark korrelierter Quantenphasen geführt, darunter antiferromagnetische Zustände, Spin- und Ladungsdichtewellen. Bei den meisten dieser Zustände war bislang unklar, wie sich diese experimentell einfach nachweisen lassen.

Ehud Altman und Mitarbeiter erkannten, dass die Absorptionsoptionen von frei expandierenden Atomwolken mehr Informationen enthalten, als die mit der mittleren Dichteverteilung verknüpften Einteilchenkohärenzen. In einem theoretischen Vorschlag [39] zeigten die Autoren, dass sich Korrelationen zwischen den Atomen direkt nachweisen las-

## 8 Korrelationsanalyse

sen, indem man das Rauschen in den Absorptionsaufnahmen einer sorgfältigen Analyse unterzieht. Im Rahmen einer solchen Analyse können grundlegende Eigenschaften der stark korrelierten Vielteilchensysteme aufgedeckt und diese oftmals eindeutig identifiziert werden. Im Folgenden wollen wir die Dichtekorrelationen für ein Quantengas bestimmen, welches einige Millisekunden zuvor abrupt aus einem optischen Gitter entlassen wird.

### 8.4.1 Mittlere Dichteverteilung

Bei der üblichen Flugzeitmessungen wird eine Atomwolke zum Zeitpunkt  $t = 0$  abrupt aus dem optischen Gitter entlassen und nach einigen Millisekunden freier Expansion deren Säulendichte durch Absorptionsabbildung aufgenommen. Zur Auswertung vergleicht man die Aufnahme mit dem theoretischen Erwartungswert der Dichteverteilung. Analog zu Abschnitt 5.4.1 kann bei hinreichend langen Expansionszeiten  $t$ , die ursprüngliche Ausdehnung im Gitter vernachlässigt und die Atomwolke in der Fernfeldnäherung durch den folgenden Feldoperator beschrieben werden:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{m}{\hbar t}\right)^{3/2} \tilde{w}\left(\boldsymbol{\kappa} = \frac{m\mathbf{r}}{\hbar t}\right) e^{i\frac{1}{2}\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}} \sum_j e^{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}_j} \hat{a}_j. \quad (8.78)$$

Dabei wird angenommen, dass die Bevölkerung im Gitter auf das unterste Band beschränkt ist. Entsprechend bezeichnet  $\tilde{w}(\boldsymbol{\kappa})$  die Fourier-Transformierte der Wannier-Funktion des untersten Bandes. Mit dem Feldoperator errechnet sich der Erwartungswert der dreidimensionalen Dichteverteilung zu (siehe Gleichung 5.59):

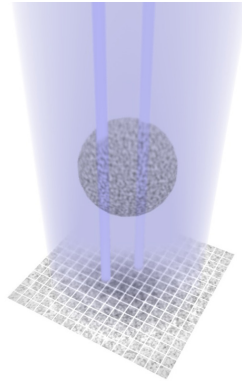
$$\langle \hat{n}(\mathbf{r}, t) \rangle = \left(\frac{m}{\hbar t}\right)^3 \left| \tilde{w}\left(\boldsymbol{\kappa} = \frac{m\mathbf{r}}{\hbar t}\right) \right|^2 \sum_{i,j} e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} \langle \Psi_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j | \Psi_0 \rangle. \quad (8.79)$$

In dem Erwartungswert der obigen Summe bezeichnet  $|\Psi_0\rangle$  den Vielteilchenzustand kurz vor dem Abschalten des optischen Gitters. Bei endlichen Temperaturen ist dieser Erwartungswert durch einen Ensemblemittelwert zu ersetzen (siehe Abschnitt 2.1.3). In der Fernfeldnäherung ist die Dichteverteilung der expandierenden Wolke direkt proportional zur Impulsverteilung innerhalb des Gitters:  $\langle \hat{n}(\mathbf{r}, t) \rangle \approx (m/\hbar t) \langle n(\boldsymbol{\kappa}) \rangle$ . Wobei der Wellenvektor  $\boldsymbol{\kappa} = m\mathbf{r}/(\hbar t)$  die Beziehung zwischen der Position  $\mathbf{r}$  in der frei expandierenden Wolke und dem Impuls  $\hbar\boldsymbol{\kappa}$  innerhalb des Gitters angibt. Für den Mott-Isolator oder den Bandisolator mit Einfachbesetzung gilt  $\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \rangle = \delta_{ij} \langle \hat{n}_i \rangle$ . Die resultierenden Dichteverteilungen weisen kein Interferenzmuster auf und sind durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\langle \hat{n}(\mathbf{r}, t) \rangle = \left(\frac{m}{\hbar t}\right)^3 \left| \tilde{w}\left(\frac{m\mathbf{r}}{\hbar t}\right) \right|^2 N. \quad (8.80)$$

Bei nicht-kondensierten Gasen resultiert die mittlere Dichteverteilung aus der inkohärenten Summe der von den Gitterplätzen ausgehenden Einteilchenwellenfunktionen. Damit ist die mittlere Dichteverteilung im Fernfeld unabhängig von der Temperatur. Die Verteilung 8.80 gilt für alle nicht-kondensierten bosonischen und fermionischen Gase, solange die  $N$  Teilchen auf das unterste Band beschränkt sind und Wechselwirkungen außerhalb des Gitters, also während der Expansion, vernachlässigt werden können.

## 8.4 Korrelationsanalyse von Zuständen in optischen Gittern



**Abbildung 8.9:** Illustration des Detektionsschemas: Die frei expandierende Atomwolke absorbiert resonantes Abbildungslicht und der resultierende Schatten wird von einem Raster aus CCD-Pixeln aufgenommen. Jeder Pixel registriert die Atome, die sich in dem Volumen oberhalb seiner Fläche befinden. In der Darstellung sind zwei der Pixel hervorgehoben. Abhängig vom Abstand  $d$  zwischen den beiden Pixeln, sind deren fluktuierenden Signale teilweise miteinander korreliert.

### 8.4.2 Atomares Rauschen und Dichtekorrelationsfunktion

Wegen der Teilchennatur der Materiewellenfelder wird mit jeder Absorptionaufnahme nur eine diskrete Verteilung von Atomen gemessen und nicht etwa der Erwartungswert  $\langle \hat{n}(\mathbf{r}, t) \rangle$  selbst. Dies wird als Schrotrauschen bezeichnet. Erst durch die Mittelung über viele Messungen nähert sich die Dichteverteilung dem Erwartungswert  $\langle \hat{n}(\mathbf{r}, t) \rangle$  an. Dieser Sachverhalt gilt allgemein bei der Intensitätsmessung von quantisierten Feldern.

Im Experiment findet jedoch bereits bei der einzelnen Messung eine Mittelung statt, welche auf die endliche Auflösung des Abbildungssystems und die Integration entlang der Abbildungsrichtung zurückzuführen ist. Bei der Absorptionsabbildung (siehe Abb. 8.9) streuen die Atome das Licht aus einem resonanten Laserstrahl und der resultierende Schattenwurf wird auf eine CCD-Kamera abgebildet. Aus dem aufgenommenen Intensitätsprofil lässt sich die Säulendichte der Atomwolke bestimmen. Da die Aufnahme in eine endliche Anzahl von Pixeln unterteilt ist, erhält man ein zweidimensionales Raster von diskreten Werten  $n_{\text{col}} = N_{\text{px}}/A_{\text{px}}$ . Hierbei bezeichnet  $N_{\text{px}}$  die Atomzahl in einem Raumvolumen, das durch die Fläche eines Pixels  $A_{\text{px}}$  und den Wolkendurchmesser definiert wird. Für die Anzahl der auf einen Pixel abgebildeten Atome erwartet man Fluktuationen im Bereich von  $\Delta N_{\text{px}} = \sqrt{N_{\text{px}}}$ . In unserem Experiment werden typischerweise  $N_{\text{px}} \approx 25$  Fermionen (bzw. 130 Bosonen) auf dem zentralen Pixel abgebildet, sodass die relativen Atomzahlfluktuationen  $\Delta N_{\text{px}}/N_{\text{px}}$  und die mittlere Abweichung vom Erwartungswert der Säulendichte  $\langle \hat{n}_{\text{col}}(\mathbf{r}, t) \rangle$  im Bereich von 20 % (bzw. 10 %) liegen. Bei dieser Größenordnung ist das atomare Rauschen deutlich in den Absorptionsabbildungen zu erkennen. Wie wir sehen werden, überwiegt, nach einer geeigneten Mittelung, der korrelierte Anteil des atomaren Rauschens alle anderen Formen von unkorreliertem Rauschen.

## 8 Korrelationsanalyse

Das atomare Rauschen der aus dem Gitter entlassenen, dreidimensionalen Wolke lässt sich über die normierte Dichtekorrelationsfunktion

$$C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \frac{\langle \hat{n}(\mathbf{r}_1, t) \hat{n}(\mathbf{r}_2, t) \rangle}{\langle \hat{n}(\mathbf{r}_1, t) \rangle \langle \hat{n}(\mathbf{r}_2, t) \rangle} \quad (8.81)$$

charakterisieren. Wir gehen von einer fest vorgegebenen Expansionsdauer  $t > 0$  aus, sodass wir im weiteren Verlauf auf die Angabe der Zeit  $t$  verzichten können. Da der Detektionsprozess außerhalb des Gitters, im Fernfeld durchgeführt wird, müssen für die Berechnung der Korrelationen die Feldoperatoren im Fernfeld  $\hat{\psi}(\mathbf{r})$  auf Normalordnung gebracht werden und es folgt:

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}(\mathbf{r}_1) \hat{n}(\mathbf{r}_2) \rangle &= \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\psi}(\mathbf{r}_1) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}(\mathbf{r}_2) \rangle \\ &= \langle \hat{n}(\mathbf{r}_1) \rangle \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \pm \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}(\mathbf{r}_1) \hat{\psi}(\mathbf{r}_2) \rangle \\ &= \langle \hat{n}(\mathbf{r}_1) \rangle \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \pm G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \end{aligned} \quad (8.82)$$

Demnach stimmt die normierte Dichtekorrelationsfunktion  $C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  bis auf eine Deltafunktion bei  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$  mit der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung  $g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  überein. Wie zuvor ist das obere Vorzeichen bei Bosonen und das untere Vorzeichen bei Fermionen anzuwenden. Durch Einsetzen der Feldoperatoren aus Gleichung 8.78 folgt<sup>4</sup>:

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left(\frac{m}{\hbar t}\right)^6 \left| \tilde{w}\left(\frac{m\mathbf{r}_1}{\hbar t}\right) \right|^2 \left| \tilde{w}\left(\frac{m\mathbf{r}_2}{\hbar t}\right) \right|^2 \sum_{i,j,k,l} e^{i\frac{m}{\hbar t}\{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l) \cdot \mathbf{r}_2\}} \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \hat{a}_l \rangle. \quad (8.83)$$

Den Erwartungswert  $\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \hat{a}_l \rangle$  wollen wir zunächst für einen reinen bosonischen Mott-Isolator bzw. einen reinen fermionischen Bandisolator jeweils am absoluten Nullpunkt  $T = 0$  auswerten. Das Gitter sei hinreichend tief, sodass der Vielteilchenzustand als Produkt von Fock-Zuständen  $|n_i\rangle$  auf den einzelnen Gitterplätzen dargestellt werden kann. Durch Anwendung der bosonischen bzw. fermionischen Vertauschungsrelationen lassen sich die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren durch die Teilchenzahloperatoren der einzelnen Gitterplätze darstellen und man erhält:

$$\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \hat{a}_l \rangle = \delta_{il} \delta_{jk} \langle \hat{n}_i \rangle \langle \hat{n}_j \rangle \pm \delta_{ik} \delta_{jl} \langle \hat{n}_i \rangle \langle \hat{n}_j \rangle - \{ \langle \hat{n}_i \rangle (\delta_{ij} \delta_{ik} \delta_{il} \pm \delta_{ij} \delta_{ik} \delta_{il}) \} \quad (8.84)$$

Bei der Herleitung wird ausgenutzt, dass die Einteilchenzustände auf jeweils einen Gitterplatz lokalisiert sind. Die ersten beiden Terme auf der rechten Seite entsprechen den beiden Möglichkeiten, einen nicht verschwindenden Erwartungswert  $\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \hat{a}_l \rangle$  zu erhalten. Sie beschreiben den direkten Prozess und den Austauschprozess bei der Zwei-Teilchen-Detektion. Der Term in den geschweiften Klammern resultiert aus der wiederholten Anwendung der bosonischen bzw. fermionischen Kommutationsregeln. Dieser Term kann

<sup>4</sup>Wir verwenden hier die Fernfeldnäherung, wodurch sich die Rechnung erheblich vereinfachen lässt. Im Wesentlichen stimmt das Resultat mit der exakt berechneten Korrelationsfunktion überein. Damit gilt das Resultat auch für Längenskalen, die kleiner sind als die Ausgangsverteilung im Gitter.

## 8.4 Korrelationsanalyse von Zuständen in optischen Gittern

vernachlässigt werden, da er gegenüber den quadratischen Termen nur linear in den Teilchenzahlen ist (für Fermionen ist er genau null). Setzt man die obigen Ergebnisse in Gleichung 8.81 ein, so erhält man für die normierte Dichtekorrelationsfunktion:

$$C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\left(\frac{m}{\hbar t}\right)^3 \left|\tilde{w}\left(\frac{m\mathbf{r}_2}{\hbar t}\right)\right|^2 N} + 1 \pm \frac{1}{N^2} \left| \sum_j e^{i\frac{m}{\hbar t}\mathbf{r}_j \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \langle \hat{n}_j \rangle \right|^2. \quad (8.85)$$

Dabei läuft die Summe über alle Gitterplätze  $j$ . Durch die Vernachlässigung des Terms in den geschweiften Klammern von Gleichung 8.84 resultiert ein Fehler in  $C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , der maximal von der Größenordnung  $O(1/N)$  ist. Da wir im weiteren Verlauf die Dichtekorrelationsfunktion hauptsächlich für nicht verschwindende Abstände  $\mathbf{d} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  betrachten, verkürzen wir deren Schreibweise indem wir den Term mit der Deltafunktion fallen lassen.

### 8.4.3 Verschiedene Erklärungen des HBT-Effektes

Um das Ergebnis 8.85 zu interpretieren und den Zusammenhang mit dem HBT-Effekt hervorzuheben betrachten wir zunächst das in Abbildung 8.10a dargestellte eindimensionale Modell mit zwei Atomen, die entlang der Gitterachse  $\nu$  auf zwei benachbarten Gitterplätzen im Abstand  $a$  lokalisiert sind:  $\langle \hat{n}_1 \rangle = \langle \hat{n}_2 \rangle = 1$ . Für dieses System nimmt die eindimensionale Korrelationsfunktion die folgende Form an (für  $d > 0$ ):

$$C_\nu(d) = 1 \pm \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{ma}{\hbar t}d\right) \right] = 1 \pm \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{l}d\right) \right]. \quad (8.86)$$

Hieraus folgt, dass die Zwei-Teilchen-Nachweiswahrscheinlichkeit sinusförmig mit dem Abstand zwischen den beiden Detektoren variiert. Dies ist in Abbildung 8.10b dargestellt. Die Oszillationsperiode ist durch die charakteristische Länge

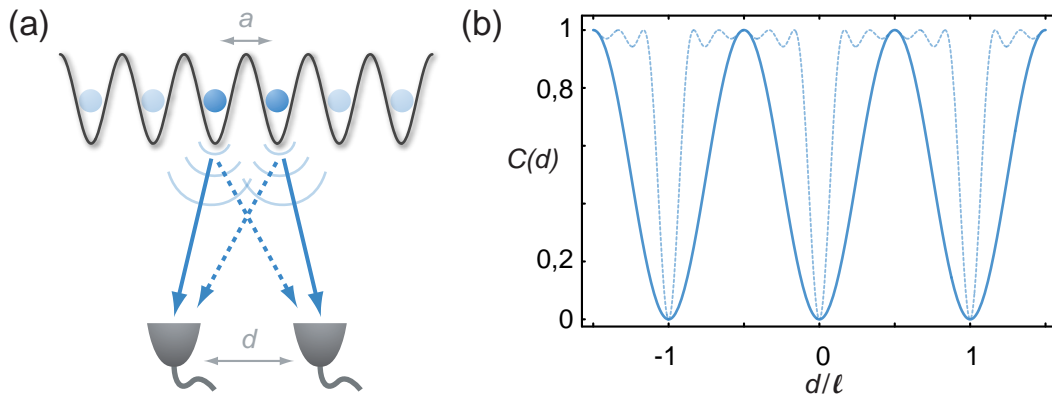
$$\ell = \frac{\hbar t}{ma} \quad (8.87)$$

gegeben. Das oszillatorische Verhalten ist auf die Interferenz der in Abbildung 8.10a dargestellten Zwei-Teilchen-Amplituden der beiden ununterscheidbaren Detektionsprozesse zurückzuführen.

Betrachten wir eine größere Anzahl von periodisch angeordneten und voneinander isolierten Atomen, wie dies zum Beispiel beim fermionischen Bandisolator der Fall ist, so müssen die entsprechenden Zwei-Teilchen-Amplituden aller möglichen Atompaare aufsummiert werden. Die relativen Wellenvektoren der jeweiligen Paare entsprechen ganzzahligen Vielfachen von  $2\pi/\ell$ . Daher addieren (bzw. subtrahieren) sich die Zwei-Teilchen-Amplituden jenseits von  $d = 0$  nur dann vollständig, wenn der Detektorabstand ein Vielfaches von  $\ell$  beträgt. Sind entlang einer Gitterachse  $\nu$  genau  $N_\nu$  Plätze mit einem Atom besetzt,  $\langle \hat{n}_j \rangle = 1$ , so nimmt die eindimensionale Korrelationsfunktion entlang dieser Achse die folgende Form an:

$$C_\nu(d) = 1 \pm \left[ \frac{\sin(N_\nu \pi d / \ell)}{N_\nu \sin(\pi d / \ell)} \right]^2. \quad (8.88)$$

## 8 Korrelationsanalyse



**Abbildung 8.10:** HBT-Effekt für lokalisierte Teilchen, die aus einem periodischen Potential entlassen werden: **(a)** Für zwei identische Teilchen, die von benachbarten Plätzen stammen und auf zwei unabhängigen Detektoren nachgewiesen werden, sind die beiden dargestellten Detektionspfade prinzipiell ununterscheidbar. Die zugehörigen Amplituden interferieren bei Bosonen konstruktiv und bei Fermionen destruktiv. **(b)** Die Zwei-Teilchen-Nachweiswahrscheinlichkeit bzw. Korrelationsfunktion  $C(d)$  (durchgehende Kurve) oszilliert sinusförmig als Funktion des Detektorabstandes  $d$ . Die blässere Kurve zeigt  $C(d)$  bei einer Erweiterung von zwei auf insgesamt sechs periodisch angeordnete Fermionen.

Analog zur optischen Interferenz an einem Mehrfachspalt bildet die Korrelationsfunktion mit zunehmender Atomzahl ein Muster aus schmaler werdenden Peaks, deren Breite proportional zum Verhältnis  $\ell/N_\nu$  ist und deren Anordnung dem reziproken Gitter entspricht. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 8.10b dargestellt.

Für ein 3D-Gitter muss die dreidimensionale Korrelationsfunktion 8.85 im Allgemeinen numerisch ausgewertet werden. Ist der externe Einschluss des einfach kubischen 3D-Gitters durch ein Kastenpotential gegeben, so bildet sich innerhalb des Gitters eine rechteckige Atomverteilung aus. In diesem Spezialfall kann die dreidimensionale Funktion  $C(\mathbf{d})$  nach den drei Raumachsen  $\nu$  separiert und als Produkt der eindimensionalen Lösungen 8.88 dargestellt werden:

$$C(\mathbf{d}) = 1 \pm \prod_{\nu} |C_{\nu}(d_{\nu}) - 1|. \quad (8.89)$$

Wie wir später sehen werden, beeinflusst die Form und Ausdehnung der Atomwolke im Gitter nicht nur die Breite der Korrelationspeaks, sondern auch deren Struktur. Je nach der Quantenstatistik der Teilchen findet an den Positionen der Peaks  $\mathbf{d}_{\text{Peak}}$  vollständig konstruktive oder vollständig destruktive Interferenz statt. In positiven Peaks spiegelt sich bosonisches Bunching und in negativen Peaks fermionisches Antibunching wider.



## 8.4 Korrelationsanalyse von Zuständen in optischen Gittern

### Bloch-Bild

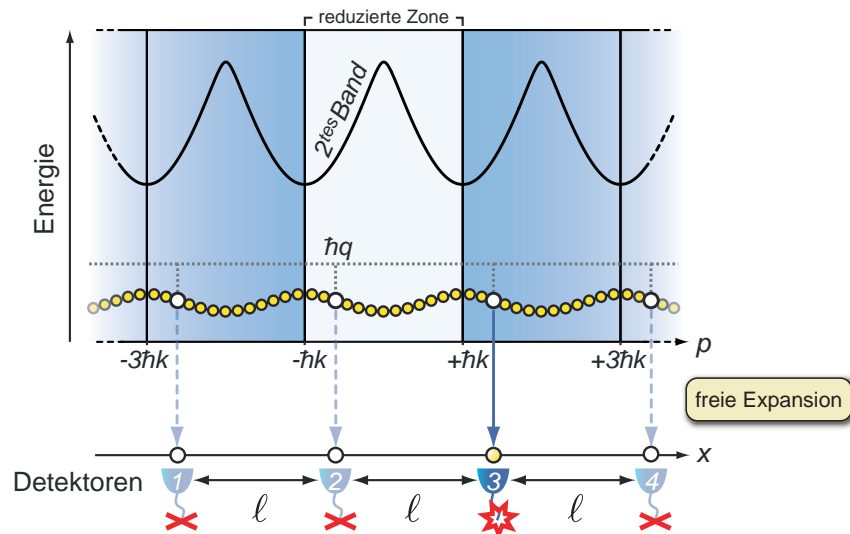
Üblicherweise werden Bunching und Antibunching als Konsequenz einer quantenmechanischen Interferenz zwischen zwei ununterscheidbaren Zwei-Teilchen-Detektionsprozessen begriffen. Für fermionische Atomwolken, die aus einem periodischen Potential entlassen werden, lassen sich die räumlichen Antikorrelationen auch mittels der Bloch-Zustände erklären. Dazu betrachten wir das in Abbildung 8.11 dargestellte Bändermodell eines eindimensionalen periodischen Potentials. Ist jeder Bloch-Zustand des untersten Bandes mit genau einem Fermion besetzt und das zweite Energieband unbevölkert, so liegt ein fermionischer Bandisolator vor. Gemäß Abschnitt 5.1.3 ist jeder Bloch-Zustand durch seinen Kristallimpuls  $\hbar q$  charakterisiert und ergibt sich aus der Überlagerung von ebenen Wellen mit den diskreten Impulsen  $p_\nu = \hbar q + \nu 2\hbar k$ . Hierbei bezeichnet  $\hbar k$  den Impuls eines Gitterphotons und  $\nu$  ist eine ganze Zahl. Wird ein Teilchen mit dem Kristallimpuls  $\hbar q$  abrupt aus dem Gitterpotential entlassen, so expandiert dessen Wellenfunktion in Form von freien ebenen Wellen mit den diskreten Impulsen  $p_\nu$ . Bei hinreichend langer Flugzeit  $t$  ist die ursprüngliche Ausdehnung des Systems im Gitter vernachlässigbar und das betrachtete Teilchen kann an jeder der Positionen  $x_\nu = (\hbar q + \nu 2\hbar k)t/m$  nachgewiesen werden. Dabei sind die Positionen äquidistant mit einem Abstand

$$\ell = \frac{2\hbar k t}{m}. \quad (8.90)$$

Wegen  $k = \pi/a$  stimmt das Ergebnis mit dem aus Gleichung 8.87 überein. Im Umkehrschluss muss ein Teilchen, welches an einer der Positionen  $x_\nu$  detektiert wird, aus dem Zustand mit dem Kristallimpuls  $\hbar q$  hervorgegangen sein. Da das Pauli-Prinzip bei einer ausschließlichen Bevölkung des untersten Bandes eine Mehrfachbesetzung desselben Kristallimpulses verbietet, sind die Signale zweier Detektoren an den Positionen  $x_\nu$  und  $x_{\nu'}$  für alle  $\nu, \nu'$  antikorreliert. Sobald einer der beiden Detektoren ein Teilchen detektiert, ist also ausgeschlossen, dass der andere Detektor ein weiteres Teilchen detektiert. Bezeichnet  $n(x)$  die Dichte der expandierenden Atomwolke, wie man sie in einer einzelnen Realisierung des Experimentes am Ort  $x$  misst, so verschwindet die räumliche Dichtekorrelation  $\langle n(x)n(x') \rangle$  für alle Abstände  $|x - x'|$ , die ein ganzzahliges Vielfaches von  $\ell$  betragen. Das Auftreten der räumlichen Antikorrelationen lässt sich auch anhand von Abbildung 5.5b nachvollziehen. Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Impulskomponenten der verschiedenen Bloch-Zustände des untersten Bandes.

Auch beim Entlassen eines bosonischen Mott-Isolators aus einem optischen Gitter beobachtet man räumliche Dichtekorrelationen auf einer Längenskala  $\ell$ , nun jedoch mit positiven Vorzeichen. Demnach tendieren die Bosonen dazu, dieselben Bloch-Zustände mehrfach zu besetzen. Für ein ideales, nicht-kondensiertes Bosegas ist dies leicht nachzuvollziehen, da die Einteilcheneigenzustände im wechselwirkungsfreien Fall mit den Bloch-Zuständen übereinstimmen und deren Besetzung einer Bose-Einstein-Verteilung folgt. Bei einem reinen Mott-Isolator mit Einfachfüllung mag eine solches Verhalten zunächst verwundern, da die repulsive Wechselwirkung zur Lokalisierung der Atome auf individuelle

## 8 Korrelationsanalyse



**Abbildung 8.11:** Ursprung der Antikorrelationen in einem frei expandierenden Fermigas, das aus einem optischen Gitter entlassen wird. Jeder besetzte Bloch-Zustand mit Kristallimpuls  $\hbar q$  wird im reduzierten Zonenschema (weißer Bereich) durch einen Punkt dargestellt. Die vollständige Besetzung des untersten Bandes und das leere zweite Band repräsentieren den fermionischen Bandisolator. Im erweiterten Zonenschema (blau erweiterter Bereich) wird deutlich, dass jeder Bloch-Zustand aus einer Überlagerung von Impulszuständen besteht, deren Werte äquidistant um  $2\hbar k$  auseinander liegen. Wird das Gitter abrupt abgeschaltet, so kann ein Atom mit dem Kristallimpuls  $\hbar q$  frei expandieren und nach einer Flugzeit  $t$  verschiedene äquidistante Detektoren mit Abständen  $\ell$  erreichen. Wird das Teilchen zum Beispiel auf dem Detektor 3 nachgewiesen, so ist wegen der Einfachbesetzung der Bloch-Zustände (Pauli-Prinzip) der Nachweis eines weiteren Teilchens auf den Detektoren 1, 2 und 4 ausgeschlossen.

Gitterplätze führt. Statt durch Bloch-Wellen sind die Einteilchenzustände nun durch lokalisierte Wannier-Funktionen gegeben. Damit verfügen die Atome innerhalb des Gitters über eine wohldefinierte Position und eine maximale Impulsunschärfe. Werden die Atome hingegen aus dem Gitter entlassen und nach einer längeren Flugzeit abgebildet, so kann jedem detektierten Atom ein definierter Impuls zugeordnet werden, aber es lässt sich keine Aussage darüber fällen, von welchem Gitterplatz das Teilchen stammt. Der Zustand des einzelnen Atoms kurz vor der Detektion ergibt sich daher als Überlagerung sämtlicher frei expandierender Wannier-Funktionen. Wegen der Periodizität des Gitters stimmt eine solche Überlagerung gerade mit einer frei expandierenden Bloch-Welle überein. Letztlich wird jedes Atom erst durch den Abbildungsprozess in einen gewissen Bloch-Zustand projiziert. Dabei ist für Bosonen die Wahrscheinlichkeit erhöht, zwei Teilchen innerhalb eines selben Zustandes nachzuweisen. Beim fermionischen Bandisolator und bosonischen Mott-Isolator mit Einfachfüllung ist jeder Wannier-Zustand genau einfach besetzt. Doch im

## 8.4 Korrelationsanalyse von Zuständen in optischen Gittern

Gegensatz zum Bandisolator fluktuieren beim Mott-Isolator die Besetzungen der Bloch-Zustände um den Erwartungswert  $\langle \hat{n}_q \rangle = 1$  herum.

### Doppelmuldenpotential

Zur weiteren Veranschaulichung der Dichtekorrelationen des bosonischen Mott-Isolators bzw. des fermionischen Bandisolators betrachten wir das in Abbildung 8.12 dargestellte Modellsystem, welches aus zwei ununterscheidbaren, lokalisierten Teilchen in einem Doppelmuldenpotential besteht. Sind  $|L\rangle$  und  $|R\rangle$  die auf die linke bzw. rechte Potentialmulde lokalisierten Einteilchenzustände (siehe Abbildung 8.12a), so lässt sich das „Zwei-Teilchen-Analogon“ eines bosonischen Mott-Isolators bzw. eines fermionischen Bandisolators durch den folgenden Zustand darstellen:

$$|\psi_{\text{isol.}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |L\rangle \otimes |R\rangle \pm |R\rangle \otimes |L\rangle \}. \quad (8.91)$$

Hierbei handelt es sich um einen vollständig symmetrisierten bzw. antisymmetrisierten Zwei-Teilchen-Zustand. In dem direkten Produkt  $|\cdot\rangle \otimes |\cdot\rangle$  steht der erste Zustand für das Teilchen 1 und der zweite Zustand für das Teilchen 2. In einem periodischen Gitterpotential würden die lokalisierten Zustände  $|L\rangle$  und  $|R\rangle$  den Wannier-Zuständen entsprechen. Sie lassen sich als Superpositionen der beiden niederenergetischsten Eigenzustände  $|\psi_S\rangle$  und  $|\psi_A\rangle$  des Doppelmuldenpotentials darstellen (siehe Abbildung 8.12b):

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\psi_S\rangle + |\psi_A\rangle \} \quad \text{und} \quad |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\psi_S\rangle - |\psi_A\rangle \}. \quad (8.92)$$

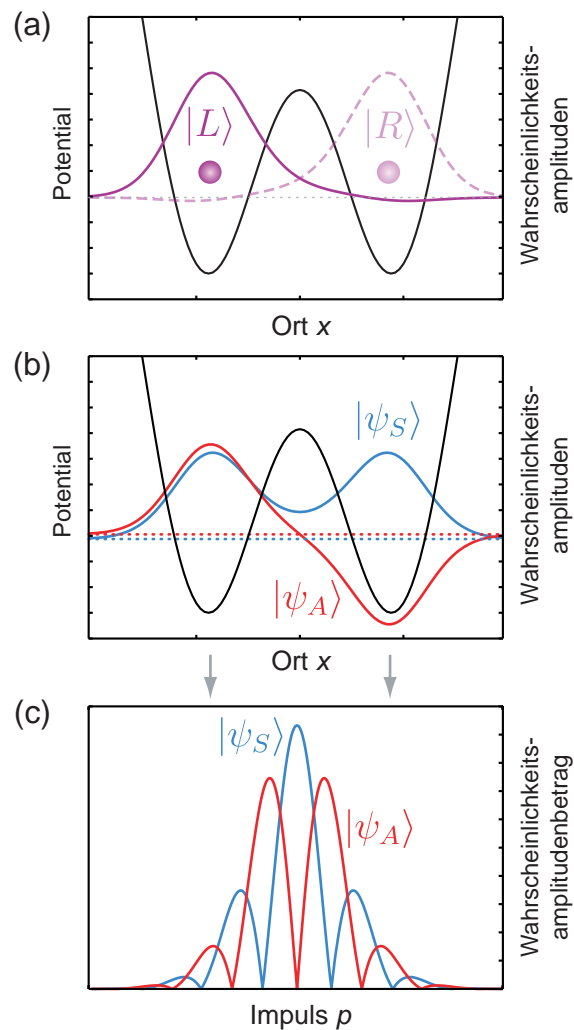
Die Eigenzustände  $|\psi_S\rangle$  und  $|\psi_A\rangle$  sind jeweils über beide Mulden des Potentials delokalisiert und bilden das Äquivalent zu den  $N$  Bloch-Zuständen im untersten Band eines Gitters mit  $N$  Plätzen. Setzt man die Superpositionen 8.92 in Gleichung 8.91 ein und multipliziert die Produkte aus, so erhält man für den bosonischen Isolator-Zustand

$$|\psi_{\text{isol.}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\psi_S\rangle \otimes |\psi_S\rangle - |\psi_A\rangle \otimes |\psi_A\rangle \} \quad (8.93)$$

und für den fermionischen Isolator-Zustand

$$|\psi_{\text{isol.}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\psi_A\rangle \otimes |\psi_S\rangle - |\psi_S\rangle \otimes |\psi_A\rangle \}. \quad (8.94)$$

Demnach werden beim bosonischen Isolator beide Teilchen im selben Einteilchenzustand detektiert, während sie beim fermionischen Isolator immer in verschiedenen Zuständen nachgewiesen werden. Abbildung 8.12c zeigt die Impulsverteilungen der beiden Zustände  $|\psi_S\rangle$  und  $|\psi_A\rangle$ . Ersetzt man den Impuls  $p$  durch den Ort  $x = pt/m$ , so entsprechen die dargestellten Wahrscheinlichkeitsamplituden den räumlichen Verteilungen der beiden Zustände nach einer hinreichend langen Expansionszeit  $t$ . Hieraus folgt, dass nach der freien Expansion die Bosonen räumlich korreliert und die Fermionen räumlich antikorreliert sind.



**Abbildung 8.12:** Zwei Teilchen im Doppelmuldenpotential: **(a)** Die berechneten Wahrscheinlichkeitsamplituden zeigen die auf die linke und rechte Potentialmulde lokalisierten Einteilchenzustände  $|L\rangle$  und  $|R\rangle$ . Diese ergeben sich aus der Superposition der beiden niederenergetischsten Eigenzustände  $|\psi_S\rangle$  und  $|\psi_A\rangle$  des Doppelmuldenpotentials **(b)**. Abbildung **(c)** zeigt die zugehörigen Impulsverteilungen.

In unserem Analogon wird ein Bose-Einstein-Kondensat im optischen Gitter durch zwei Bosonen im absoluten Grundzustand des Doppelmuldenpotentials repräsentiert:

$$|\psi_0\rangle = |\psi_S\rangle \otimes |\psi_S\rangle. \quad (8.95)$$

Hierbei bevölkern beide Teilchen denselben Einteilchenzustand und sind über beide Potentialmulden delokalisiert. Folglich weist die mittlere Dichteverteilung nach der freien Expansion ein Interferenzmuster auf. Innerhalb dieser Dichteverteilung sind die beiden Teilchen jedoch vollkommen unkorreliert.

## 8.4 Korrelationsanalyse von Zuständen in optischen Gittern

### 8.4.4 Präparation der Quantengase

An unserer Apparatur werden HBT-Experimente an bosonischen und fermionischen Atomen durchgeführt. Ausgangspunkt für die Messungen sind Bose-Einstein-Kondensat aus  $^{87}\text{Rb}$ - bzw. entartete Fermigase aus  $^{40}\text{K}$ -Atomen in einer gekreuzten Dipolfalle. Die Präparation der Quantengase wurde ausführlich in Kapitel 3 diskutiert und soll im Folgenden am Beispiel des Fermigases zusammengefasst werden.

Das Kalium wird in zwei Etappen sympathetisch über das Rubidium gekühlt. Zunächst werden die beiden lasergekühlten Spezies in eine magnetische QUIC-Falle transferiert, wobei sich das  $^{87}\text{Rb}$  im  $|F = 2, m_F = 2\rangle$ -Zustand und das  $^{40}\text{K}$  im  $|9/2, 9/2\rangle$ -Zustand befindet. Diese Mischung wird durch Radiofrequenz-Evaporation des Rubidiums bis auf  $2\ \mu\text{K}$  abgekühlt. Für den zweiten sympathetischen Kühlschritt werden die beiden Spezies in eine oblate Dipolfalle mit einer Wellenlänge von  $1030\ \text{nm}$  transferiert. Die Falle besteht aus zwei in der horizontalen  $x$ - $y$ -Ebene verlaufenden und sich orthogonal kreuzenden gaußförmigen Laserstrahlen mit elliptischen Strahlprofilen (Tailen:  $w_{x,y} = 150\ \mu\text{m}$  und  $w_z = 40\ \mu\text{m}$ ). Nach dem Abschalten der Magnetfalle wird ein homogenes Magnetfeld von  $13,6\ \text{G}$  angelegt. Anschließend wird das  $^{87}\text{Rb}$  mittels eines adiabatischen Mikrowellen-Sweeps in den absoluten Grundzustand  $|1, 1\rangle$  überführt und auch das  $^{40}\text{K}$  wird mittels eines adiabatischen RF-Sweeps durch sämtliche Zeeman-Niveaus hindurch in seinen absoluten Grundzustand  $|9/2, -9/2\rangle$  überführt. Diese Mischung ist stabil gegenüber spinändernden Stößen und wird durch sukzessives Verringern der Falltiefe weiter evaporativ gekühlt. Am Ende des Kühlprozesses verbleiben  $2,2(5) \cdot 10^5$  Kalium- und  $2,0(5) \cdot 10^5$  Rubidiumatome in der Dipolfalle. Die Rubidiumatome werden durch einen resonanten Laserpuls vollständig aus der Falle entfernt und es verbleibt ein einkomponentiges Fermigas mit typischerweise  $2,0(5) \cdot 10^5$  Atomen, bei einer Temperatur bis hinab zu  $T/T_F = 0,23(3)$ .

Das ultrakalte Fermigas wird schließlich in ein dreidimensionales optisches Gitter geladen, welches von drei zueinander orthogonal verlaufenden Stehwellen gebildet wird. Die Laserstrahlen für die Erzeugung der Stehwellen verfügen an der Position der Atome über Strahltaillen von  $150\ \mu\text{m}$  und sind mit einer Wellenlänge von  $755\ \text{nm}$  blau gegenüber den  $D_1$ - und  $D_2$ -Übergängen der beiden Spezies verstimmt. Das Gitterpotential wird in einer  $s$ -förmigen Rampe innerhalb von  $40\ \text{ms}$  auf eine Gittertiefe von  $V_x = V_y = 20 E_r$  und  $V_z = 10 E_r$  erhöht. Dies geschieht zunächst entlang der  $x$ - und  $y$ -Achse und schließlich entlang der  $z$ -Achse. Bei diesen Parametern bilden die Atome einen fermionischen Bandisolator im untersten Energieband des Gitters aus, was wir mit der in Abschnitt 5.4.2 beschriebenen adiabatischen Abbildungstechnik nachweisen (siehe Einsatz in Abb. 8.13c).

Mit einer ähnlichen experimentellen Sequenz lässt sich auch ein reines Bose-Einstein-Kondensat aus  $3,0(5) \cdot 10^5$   $^{87}\text{Rb}$ -Atomen in der gekreuzten Dipolfalle präparieren. Die Kaliumatome werden bereits am Anfang der Sequenz durch Abschalten der entsprechenden Kühlaser weggelassen. Das präparierte Kondensat wird adiabatisch in ein Gitter mit den Tiefen  $V_x = V_y = 30 E_r$  und  $V_z = 15 E_r$  transferiert, wobei sich ein bosonischer Mott-Isolator ausbildet.

## 8 Korrelationsanalyse

---

### 8.4.5 Durchführung der Korrelationsanalyse

Für die Korrelationsmessungen werden alle optischen Potentiale abrupt abgeschaltet und die Rubidium- bzw. Kaliumwolken nach 10 ms freier Expansion durch eine Standard-Absorptionsabbildung entlang der Fallrichtung ( $z$ ) aufgenommen. Das durch die resonante Absorption im Abbildungsstrahl erzeugte Intensitätsprofil wird durch ein Linsensystem auf eine CCD-Kamera abgebildet und daraus gemäß Abschnitt 3.6.1 die zweidimensionale Säulendichte  $n_{\text{col}}(\mathbf{x})$  der Atomwolke berechnet. Wie in Abbildung 8.9 veranschaulicht, ist die zweidimensionale Säulendichte  $n_{\text{col}}(\mathbf{x})$  durch die entlang der Abbildungsachse ( $z$ ) aufintegrierte dreidimensionale Dichteverteilung  $n(\mathbf{r})$  der Atomwolke gegeben.

In Abbildung 8.13 a und c sind exemplarisch die aufgenommenen Säulendichten für einen bosonischen Mott-Isolator und einen fermionischen Bandisolator dargestellt. Für beide Systeme erwarten wir eine Einfachbesetzung der Gitterplätze. Aufgrund der inkohärenten Überlagerung der frei expandierenden Wannier-Funktionen lassen sich die mittleren Dichteverteilungen der abgebildeten Atomwolken durch Gauß-Verteilungen annähern (Gleichung 5.60). Dies wird durch die in Abbildung 8.13 a und c dargestellten Schnitte (blau) und die gaußförmigen Anpassungen (rote Kurven) verdeutlicht. Anhand der Schnitte ist außerdem zu erkennen, dass die Dichteverteilungen in den einzelnen Aufnahmen starke Fluktuationen um ihren jeweiligen Mittelwert aufweisen. Auf den ersten Blick ist in diesem Rauschen jedoch keinerlei Struktur auszumachen.

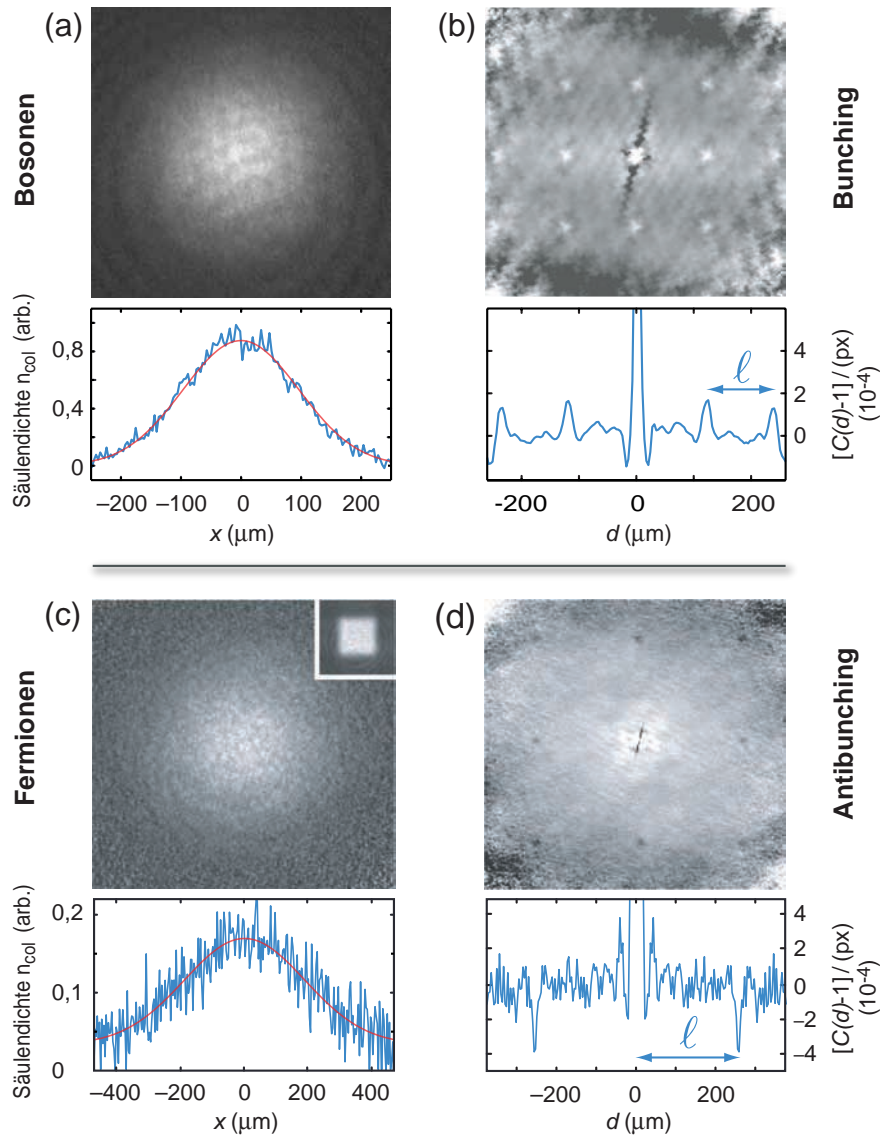
Zur genaueren Untersuchung der Dichtefluktuationen werden bei gleichbleibenden experimentellen Parametern Sätze von bis zu 200 Absorptionenaufnahmen gemacht. Aufnahmen, die technische Artefakte, wie zu hohe Abweichungen in der Gesamtatomzahl oder starke Interferenzen aufgrund von Frequenzschwankungen des AbbildungsLasers, aufweisen, werden verworfen (etwa 30 % aller Bilder). Die verbleibenden Bilder werden entsprechend der folgenden Korrelationsfunktion ausgewertet:

$$C(\mathbf{d}) = \frac{\int \langle n_{\text{col}}(\mathbf{x} - \mathbf{d}/2) n_{\text{col}}(\mathbf{x} + \mathbf{d}/2) \rangle d^2 \mathbf{x}}{\int \langle n_{\text{col}}(\mathbf{x} - \mathbf{d}/2) \rangle \langle n_{\text{col}}(\mathbf{x} + \mathbf{d}/2) \rangle d^2 \mathbf{x}}. \quad (8.96)$$

Die Integration findet über die gesamte relevante Bildfläche statt. Die Klammern  $\langle \rangle$  stehen für eine Mittelung über alle ausgewählten Aufnahmen.  $C(\mathbf{d})$  gibt die relative Häufigkeit an, zwei Teilchen bei einem Abstand  $\mathbf{d}$  vorzufinden. Bei einer großen Anzahl von Aufnahmen, nähert sich  $C(\mathbf{d})$  der räumlich gemittelten Korrelationsfunktion zweiter Ordnung  $g^{(2)}(\mathbf{d})$  an. Dabei ist  $C(\mathbf{d}) > 1$  charakteristisch für bosonisches Bunching und  $C(\mathbf{d}) < 1$  charakteristisch für fermionisches Antibunching.

In unserem Experiment werden unter anderem Korrelationsanalysen an 66 Aufnahmen von bosonischen Mott-Isolatoren und an 158 Aufnahmen von fermionischen Bandisolatoren durchgeführt. Die entsprechenden Ergebnisse sind in Abbildung 8.13 b und d dargestellt. In beiden Fällen ist eine symmetrisch um den zentralen Autokorrelationspeak angeordnete periodische Struktur aus schmalen Peaks zu erkennen. Diese Struktur spiegelt

## 8.4 Korrelationsanalyse von Zuständen in optischen Gittern



**Abbildung 8.13:** Absorptionaufnahmen (links) und Korrelationsanalysen (rechts) von bosonischen und fermionischen Atomwolken. Die Aufnahmen entsprechen einem Mott-Isolator aus  $^{87}\text{Rb}$ -Atomen und einem Bandisolator aus  $^{40}\text{K}$ -Atomen jeweils nach 10 ms freier Expansion. Eine Abbildung der Brillouin-Zone (kleiner Einsatz) bestätigt, dass die Fermionen einen Bandisolator bilden. Horizontale Schnitte durch die Zentren der Abbildungen zeigen die Fluktuationen der Säulendichten  $n_{\text{col}}(x, 0)$  (blau) um ihre gaußförmigen Mittelwerte (rot). Die aus Serien von Absorptionaufnahmen abgeleiteten räumlichen Rauschkorrelationen sind rechts dargestellt und zeigen ein Muster aus hellen bzw. dunklen Peaks mit periodischen Abständen  $\ell$ . Horizontale Schnitte  $C(d, 0)$  verdeutlichen, dass es sich um positive bzw. negative Korrelationspeaks handelt, worin sich das Bunching bzw. Antibunching manifestiert.

## 8 Korrelationsanalyse

das reziproke Gitter wider. Horizontale Schnitte durch die Zentren der Korrelationsbilder verdeutlichen, dass die Peaks bei Bosonen ein positives und bei Fermionen ein negatives Vorzeichen aufweisen. In den Profilen ist zu erkennen, dass die Abstände der Peaks gut mit den theoretisch zu erwartenden Abständen  $\ell$  (durch Pfeile repräsentiert) übereinstimmen. Die dargestellten Korrelationsbilder sind allein mit einem Hochpassfilter nachbearbeitet. Dieser Filter unterdrückt einen breiten gaußförmigen Untergrund, der sich auf Atomzahlfluktuationen zwischen den einzelnen Aufnahmen zurückführen lässt.

Statt die Korrelationsfunktion 8.96 durch direkte Integration auszuwerten, verwenden wir einen effizienten Algorithmus [45], der sich aus dem Wiener–Khinchin-Theorem ableitet [40]. Dazu wird zunächst zu jeder aufgenommenen Dichteverteilung  $n_{\text{col}}(\mathbf{x})$  die zugehörige Autokorrelationsfunktion<sup>5</sup>  $ac(\mathbf{d})$  ermittelt, welche wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} ac(\mathbf{d}) &= \int n_{\text{col}}(\mathbf{x})n_{\text{col}}(\mathbf{x} + \mathbf{d})d^2\mathbf{x} \\ &= \iint n_{\text{col}}(\mathbf{x})n_{\text{col}}(\mathbf{y})\delta(\mathbf{y} - (\mathbf{x} + \mathbf{d}))d^2\mathbf{x}d^2\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (8.97)$$

Die Darstellung mit der Dirac'schen Delta-Funktion  $\delta(\mathbf{x})$  ermöglicht es, die Fourier-Transformierte  $\mathcal{F}$  der Autokorrelationsfunktion  $ac(\mathbf{d})$  in einfacher Weise zu berechnen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(ac) &= \iiint n_{\text{col}}(\mathbf{x})n_{\text{col}}(\mathbf{y})\delta(\mathbf{y} - (\mathbf{x} + \mathbf{d}))e^{i2\pi\mathbf{k}\mathbf{d}}d^2\mathbf{x}d^2\mathbf{y}d^2\mathbf{d} \\ &= \iint n_{\text{col}}(\mathbf{x})n_{\text{col}}(\mathbf{y})e^{i2\pi\mathbf{k}(\mathbf{y}-\mathbf{x})}d^2\mathbf{x}d^2\mathbf{y} \\ &= \mathcal{F}^*(n_{\text{col}})\mathcal{F}(n_{\text{col}}). \end{aligned} \quad (8.98)$$

Der letzte Schritt berücksichtigt, dass die Verteilung  $n_{\text{col}}(\mathbf{x})$  reell ist. Statt durch Integration, lässt sich die Autokorrelationsfunktion nun mit geringem numerischen Aufwand durch zwei aufeinanderfolgende Fourier-Transformationen (FFT) berechnen:

$$ac(\mathbf{d}) = \mathcal{F}^{-1}(|\mathcal{F}(n_{\text{col}}(\mathbf{x}))|^2). \quad (8.99)$$

Durch Mittelung über die Autokorrelationsfunktionen sämtlicher Absorptionaufnahmen erhält man den Zähler in Gleichung 8.96. Für den Nenner wird zunächst über alle Absorptionaufnahmen gemittelt und dann die Autokorrelationsfunktion dieser Durchschnittsverteilung berechnet.

Prinzipiell ist es denkbar, dass bei den Bosonen ein kleiner superfluider Rest die positiven Dichtekorrelationen hervorruft und die resultierenden Interferenzstrukturen aufgrund starker Schuss-zu-Schuss-Fluktuationen erst in der Korrelationsanalyse zutage treten. Dass

<sup>5</sup>Der Begriff „Autokorrelation“ soll hier ausdrücken, dass jede Aufnahme mit sich selbst in Bezug gesetzt wird.



## 8.4 Korrelationsanalyse von Zuständen in optischen Gittern

---

ein solcher Effekt keine Rolle spielt, wurde bereits in dem ersten Mainzer HBT-Experiment [45] nachgewiesen. Dazu wurden mittels einer Maske die Bereiche aus den Absorptionsoptionen ausgeblendet, an denen möglicherweise superfluide Bragg-Peaks auftreten. Tatsächlich zeigte die Anwendung einer solchen Maske keinen signifikanten Einfluss auf das resultierende Korrelationssignal. In Referenz [49] wurde eine solche Maske dazu benutzt, gezielt den superfluiden Anteil einer Atomwolke auszublenden und nur den lokalisierten Anteil der Atome zu betrachten. Auf diese Weise ließ sich der Mott-Isolator auch in der Nähe zum Phasenübergang mittels Korrelationsanalyse untersuchen.

In dem ersten Mainzer HBT-Experiment konnte gezeigt werden, dass die Korrelationsmuster im Mott-Isolator-Regime stabil sind und sich über einen weiten Bereich von Gittertiefen beobachten lassen. Auch für ein 2D-Gitter mit einigen tausend unabhängigen eindimensionalen Bose-Einstein-Kondensaten konnten ähnliche Dichtekorrelationen nachgewiesen werden [45]. Diese Beobachtungen stehen im engen Zusammenhang mit einem früheren Experiment, bei dem die Interferenzmuster von 30 miteinander interferierenden, unabhängigen Bose-Einstein-Kondensaten untersucht wurden [309]. In beiden Experimenten lässt sich das Bunching in einem Modell chaotischer klassischer Felder begreifen, wie wir dies auch für pseudo-thermisches Licht gesehen haben. Im Gegensatz zu den interferierenden Kondensaten lässt sich der Bunching-Effekt im Mott-Isolator-Regime nur quantenmechanisch erklären und für den Nachweis der Dichtekorrelationen ist die Detektion des atomaren Rauschens – also einzelner Atome – notwendig.

Für Bose-Einstein-Kondensate, die aus einem flachen optischen Gitter entlassen werden, erwartet man einen flachen Verlauf der Korrelationsfunktion  $C(\mathbf{d})$ . In diesem Regime ist eine experimentelle Bestimmung der Korrelationsfunktion bislang nicht gelungen. Denn im Experiment beobachtet man zwischen den einzelnen Aufnahmen kleine Schwankungen in den superfluiden Interferenzmustern, welche auf Schuss-zu-Schuss-Fluktuationen in der Atomzahl und Anregungen des Kondensats durch externe Störungen zurückzuführen sind. Diese Schwankungen werden nicht durch die Normierung in Gleichung 8.96 aufgehoben, sodass die daraus resultierenden Korrelationen stärker sind als die beim Mott-Isolator beobachteten Quantenkorrelationen [45]. Die weitaus robusteren Quantenkorrelationen des Mott-Isolators lassen sich durch dessen Anregungsenergielücke erklären. Zudem ist hier aufgrund eines gleichmäßigeren Verlaufs der mittleren Dichteverteilung die Korrelationsanalyse weniger sensitiv auf Positionsschwankungen in der Abbildung (bessere Normierung).

Die Ergebnisse in Abbildung 8.13 bestätigen in eindrucksvoller Weise, dass sich das intrinsische Quantenrauschen der Atomwolken bereits mittels einfacher Absorptionsabbildung nachweisen lässt [45, 50, 306] und dass sich aus den Rauschkorrelationen Informationen über die räumliche Ordnung der Atome im Gitter gewinnen lassen, die nicht in der mittleren Dichteverteilung enthalten sind. Zudem gibt das Vorzeichen der Korrelationen Auskunft über die Quantenstatistik der Teilchen.

## 8 Korrelationsanalyse

---

Da bei der Korrelationsanalyse das „Zählen“ der Atome im Nachhinein – also unabhängig vom Detektionsprozess – stattfindet, kann jedes Atom mit sich selbst in Bezug gesetzt werden. Folglich überwiegt die Autokorrelation alle anderen Zwei-Teilchen-Korrelationen. Dass man dennoch Zwei-Teilchen-Korrelationen nachweisen kann, ist der Bragg-Beugung im Gitter zu verdanken. Durch Letztere können Teilchen, die einen bestimmten Einteilchenzustand besetzen, an verschiedenen Raumpunkten nachgewiesen werden. Die Bragg-Beugung erzeugt gewissermaßen räumlich periodische Kopien der Einteilchenzustände, welche ohne Gitter vorliegen würden<sup>6</sup>. Somit bauen sich die Zwei-Teilchen-Korrelationen auch außerhalb des zentralen Autokorrelationspeaks auf und lassen sich nachweisen.

### 8.4.6 Signal-Rausch-Verhältnis

Um die Dichtekorrelationen in den Absorptionsabbildungen nachweisen zu können, darf der korrelierte Anteil des atomaren Rauschens nicht vollständig von anderen Rauschquellen verdeckt werden. Wie wir im Anschluss sehen werden, findet bei der Absorptionsabbildung eine Mittelung über mehrere Kohärenzvolumina statt. Mit der Abschätzung 8.115 lässt sich zeigen, dass bei unseren Parametern die Korrelationsamplitude für das  $^{40}\text{K}$  maximal einen Wert von  $\sim 15 \cdot 10^{-4}$  annimmt. Hieraus folgt, dass der korrelierte Anteil des atomaren Rauschens<sup>7</sup>  $\Delta n_{\text{col, cor.}} / \langle n_{\text{col}} \rangle$  etwa 0,04 beträgt und damit etwa einen Faktor 5 kleiner ist als das in den Absorptionaufnahmen sichtbare Rauschen  $\Delta n_{\text{col}} / \langle n_{\text{col}} \rangle \approx 0,2$ . Neben unkorrelierten atomaren Rauschen treten im Experiment auch Photonen-Schrotrauschen und technische Störquellen auf:

Das Photonen-Schrotrauschen des Abbildungslichtes lässt sich minimieren, indem man dafür sorgt, dass genügend Photonen auf die einzelnen Pixel der CCD-Kamera fallen. Für die Abbildung wählen wir eine Pulsdauer von  $50 \mu\text{s}$  und eine Lichtleistung, die etwa 10 % der Sättigungsintensität  $I_{\text{sat}}$  beträgt. Berücksichtigt man die atomare Absorption, so treffen mindestens  $N_p = 2400$  Photonen auf jeden CCD-Pixel. Hieraus ergibt sich eine effektive Varianz in der optischen Dichte, deren Wert kleiner ist als  $\Delta D = \sqrt{N_p} / N_p = 0,02$ .

Die wichtigste technische Störquelle ist das sogenannte Ausleserauschen, welches beim Zählen der in den einzelnen CCD-Pixeln gespeicherten Photoelektronen auftritt. Weniger kritisch ist das thermische Rauschen, welches sich durch das Kühlen des CCD-Chips stark unterdrücken lässt.

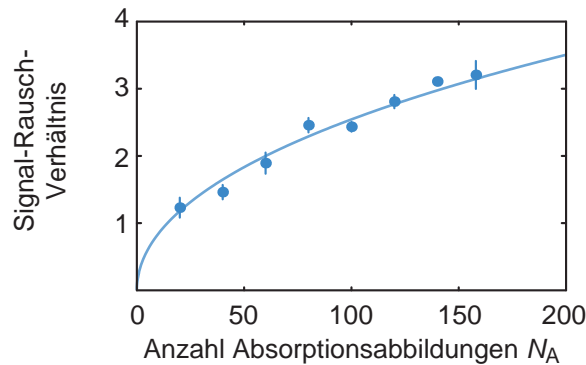
Ein weiteres Störsignal stellen die bei der Abbildung mit kohärentem Licht auftretenden Interferenzmuster dar. Diese lassen sich durch die Normierung mit einem Referenzbild ohne Atome weitgehend aufheben. Um eine optimale Normierung zu garantieren, achten wir in unserem Experiment auf eine hohe Frequenzstabilität des Abbildungslasers, eine

---

<sup>6</sup>In einer Analogen Darstellung zu Abbildung 8.8 würden die einzelnen Kohärenzvolumina aus räumlich nicht zusammenhängenden Teilvolumina bestehen.

<sup>7</sup>Das atomare Rauschen beträgt  $\Delta n_{\text{col}} / \langle n_{\text{col}} \rangle = \sqrt{N_{\text{pxl}}} / N_{\text{pxl}}$  (siehe Seite 303) und lässt sich in einen korrelierten  $\Delta n_{\text{col, cor.}}$  und einen unkorrelierten Anteil  $\Delta n_{\text{col, uncor.}}$  zerlegen.

## 8.4 Korrelationsanalyse von Zuständen in optischen Gittern



**Abbildung 8.14:** Signal-Rausch-Verhältnis von  $C(d)$  als Funktion der Anzahl Absorptionsabbildungen, die in die Korrelationsanalyse einbezogen werden. Die Punkte geben die gemessenen Werte wieder und der Graph beschreibt den Mittelwert der gemessenen Korrelationsamplituden geteilt durch eine  $A + B/\sqrt{N_A}$ -Anpassung an das Hintergrundrauschen.

gute Strahlqualität und einen kurzen Zeitabstand zwischen Absorptionaufnahme und Referenzbild (siehe Abschnitt 3.6.3). Schließlich werden Aufnahmen, an deren Rändern Interferenzmuster auftreten, ausselektiert.

Durch eine Auswertung von Absorptionaufnahmen ohne Atome findet man für das Hintergrundrauschen experimentell eine Varianz in der optischen Dichte von  $\Delta D \approx 0,03$ . Hieraus folgt, dass das Photonen-Schrotrauschen und technische Störquellen etwa in gleichen Maßen zum Hintergrundrauschen beitragen. Bei einer typischen optischen Dichte der Atomwolke von  $D \approx 0,2$  ist damit das Hintergrundrauschen ( $\Delta D/D \approx 0,15$ ) etwa einen Faktor 4 größer als der korrelierte Anteil des atomaren Rauschens ( $\Delta n_{\text{col, cor.}}/\langle n_{\text{col}} \rangle \approx 0,04$ ).

Um die Korrelationspeaks eindeutig identifizieren und charakterisieren zu können, muss das Signal-Rausch-Verhältnis in den Korrelationsbildern hinreichend groß sein. Abbildung 8.14 zeigt dieses Verhältnis als Funktion der Anzahl von Absorptionaufnahmen  $N_A$ , die in die Korrelationsanalyse einbezogen werden. Das Signal-Rausch-Verhältnis der einzelnen Korrelationsbilder wird aus dem Verhältnis der numerisch angepassten Peakamplituden und der Varianz des Hintergrundrauschens (in Peaknähe) bestimmt. Da die Varianz des Hintergrundrauschens in guter Übereinstimmung mit einem  $1/\sqrt{N_A}$ -Verhalten abnimmt, kann das Signal-Rausch-Verhältnis durch Einbeziehen von mehr und mehr Absorptionaufnahmen in die Korrelationsanalyse sukzessive erhöht werden. Wir finden, dass mindestens 50 Absorptionaufnahmen notwendig sind, um die Peaks zuverlässig durch zweidimensionale Gauß-Verteilungen anpassen zu können, wenn die Positionen, Breiten und Amplituden der Gauß-Verteilungen freie Parameter sind.

## 8 Korrelationsanalyse

---

### 8.4.7 Auswirkungen der Auflösung auf die Korrelationsamplituden

Die theoretische Korrelationsfunktion aus Gleichung 8.85 zeigt vollständiges Bunching bzw. Antibunching. Das heißt, die Korrelationsamplitude  $|C(\mathbf{d}_{\text{Peak}}) - 1|$  nimmt den maximal möglichen Wert von eins an. Im Experiment misst man hingegen deutlich kleinere Amplituden, was dadurch bedingt ist, dass bei der Absorptionsabbildung eine Mittelung über mehrere Kohärenzvolumina stattfindet. Diese Mittelung ist auf die endliche Auflösung des Abbildungssystems und auf die Integration entlang der Abbildungsrichtung zurückzuführen.

Das Auflösungsvermögen unseres Abbildungssystems wird im Wesentlichen durch drei Faktoren begrenzt. Dazu zählen die optische Auflösung, die endliche Größe der CCD-Pixel und die Bewegung der Atome während der Belichtungsdauer. Im Folgenden gehen wir am Beispiel von Kalium genauer auf diese Punkte ein:

- Die Optische Auflösung wird durch das abbildende Linsenpaar bestimmt, dessen Blendenzahl etwa 3,2 beträgt. Bei der verwendeten Wellenlänge von  $\lambda = 767 \text{ nm}$  folgt hieraus eine beugungsbegrenzte Auflösung von etwa  $3 \mu\text{m}$ .
- Berücksichtigt man die 2,3-fache Vergrößerung der optischen Abbildung, so verfügt die Kamera am Ort der Atome über eine effektive Pixelgröße von  $3,5 \mu\text{m}$ .
- Während der Belichtungsdauer  $t_{\text{Puls}} = 50 \mu\text{s}$  legen die Atome eine Fallstrecke von  $\Delta z = 4,9 \mu\text{m}$  zurück. Da die Atome entlang der Fallrichtung abgebildet werden, hat diese Bewegung keinen nennenswerten Einfluss auf die Auflösung der zweidimensionalen Dichteverteilung  $n_{\text{col}}(x, y)$ . Doch durch die inkohärente Lichtstreuung erfahren die Atome auch eine transversale Geschwindigkeitskomponente. Jedes Atom streut im Mittel  $N_p = \Gamma t_{\text{Puls}} / (2 + 2I_{\text{sat}}/I) \approx 85$  Photonen aus dem Abbildungslicht. Hierbei bezeichnet  $I$  die Intensität des eingestrahnten Lichtes,  $\Gamma$  die Linienbreite des getriebenen atomaren Übergangs und  $I_{\text{sat}}$  die zugehörige Sättigungsintensität. Durch die inkohärente Streuung vollführen die Atome eine Zufallsbewegung, deren mittlere transversale Geschwindigkeit am Ende der Belichtungsdauer  $\sqrt{N_p} v_r$  beträgt. Hierbei bezeichnet  $v_r = h/\lambda m = 13,0 \text{ mm/s}$  die Rückstoßgeschwindigkeit eines  $^{40}\text{K}$ -Atoms. Die durch die Zufallsbewegung hervorgerufene Unschärfe in der Position der einzelnen Atome lässt sich durch eine Kreisscheibe beschreiben, deren mittlerer Radius etwa  $5 \mu\text{m}$  beträgt.

Bildet man die quadratische Summe der einzelnen Beiträge, so findet man, dass jedes Atom innerhalb einer Kreisfläche mit einem mittleren Radius von  $6 \mu\text{m}$  abgebildet werden kann. Dieses Ergebnis stimmt in etwa mit dem gemessenen Auflösungsvermögen von  $\sigma = 5,6 \mu\text{m}$  überein. Letzteres wird durch eine Gauß-Anpassung an den zentralen Autokorrelationspeak ermittelt (siehe Seite 321).

## 8.4 Korrelationsanalyse von Zuständen in optischen Gittern

Die endliche Auflösung des Abbildungssystems lässt sich mathematisch beschreiben, indem man die atomare Dichteverteilung mit einer sogenannten Punktspreizfunktion faltet. Bei unserer Abbildung ist die Punktspreizfunktion in guter Näherung durch eine zweidimensionale Gauß-Funktion der Breite  $\sigma$  gegeben:

$$f_{\text{abb}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)^2/\sigma^2}. \quad (8.100)$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{x}$  die auf die Detektorebene ( $x$ - $y$ ) projizierte Position eines Atoms und  $\mathbf{x}_1$  den Beobachtungspunkt, also zum Beispiel das Zentrum eines CCD-Pixels. Damit das Gesamtsignal erhalten bleibt, ist die Punktspreizfunktion normiert  $\int f_{\text{abb}}(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x} = 1$ . Bei der Absorptionsabbildung wird die atomare Dichte entlang der Abbildungsrichtung ( $z$ ) integriert und über die minimal aufgelöste Fläche gemittelt. Die auf einem CCD-Pixel mit dem Ort  $\mathbf{x}_1$  detektierte Säulendichte lässt sich daher über den folgenden Operator berechnen:

$$\hat{n}_{\text{abb}}(\mathbf{x}_1) = \int f_{\text{abb}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \hat{n}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (8.101)$$

Hierbei steht der Index „abb“ für die Integration der dreidimensionalen Dichteverteilung entlang der Abbildungsrichtung ( $z$ ) und für die Faltung des Ergebnisses mit der zweidimensionalen Punktspreizfunktion. Der dreidimensionale Ortsvektor  $\mathbf{r} = (\mathbf{x}, z)$  besteht aus einem zweidimensionalen Vektor  $\mathbf{x}$ , der parallel zur Detektorebene verläuft und einer senkrechten  $z$ -Komponente.

Mit dem Operator aus Gleichung 8.101 erhält man für die Dichtekorrelation:

$$\langle \hat{n}_{\text{abb}}(\mathbf{x}_1) \hat{n}_{\text{abb}}(\mathbf{x}_2) \rangle = \iint f_{\text{abb}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) f_{\text{abb}}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_2) \langle \hat{n}(\mathbf{r}) \hat{n}(\mathbf{r}') \rangle d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}'. \quad (8.102)$$

Zusammen mit Gleichung 8.82 folgt:

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_{\text{abb}}(\mathbf{x}_1) \hat{n}_{\text{abb}}(\mathbf{x}_2) \rangle &= \int f_{\text{abb}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) f_{\text{abb}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle d^3\mathbf{r} + \\ &\pm \iint f_{\text{abb}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) f_{\text{abb}}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_2) G^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (8.103)$$

In diesen Ausdruck setzen wir Gleichung 8.79 und 8.83 ein und bezeichnen das Integral in der oberen Zeile als  $A$  und das Doppelintegral in der unteren Zeile als  $B$ . Im einfach kubischen Gitter lassen sich die Gittervektoren  $\mathbf{r}_j$  als ganzzahliges Vielfaches der Gitterperiode  $a$  darstellen:  $\mathbf{r}_j = \mathbf{j}a = (\mathbf{j}_\perp, j_z)a$ . Dabei ist der zweidimensionale Vektor  $\mathbf{j}_\perp = (j_x, j_y)a$  parallel zur Beobachtungsebene und  $j_\nu$  sind ganze Zahlen. In den Termen  $A$  und  $B$  muss die frei expandierende Wannier-Funktion entlang der Abbildungsachse aufintegriert werden und es gilt:

$$W(\mathbf{x}) \equiv \int \left| \tilde{w} \left( \frac{m\mathbf{r}}{\hbar t} \right) \right|^2 dz \approx \frac{1}{\pi w_{x,y}^2} e^{-\mathbf{x}^2/w_{x,y}^2} \quad \text{mit} \quad w_{x,y} = \frac{\hbar k t}{m} s_{x,y}^{1/4}. \quad (8.104)$$

## 8 Korrelationsanalyse

Hierbei wird die Wannier-Funktion gemäß Gleichung 5.60 genähert und es wird angenommen, dass die einheitenlosen Gittertiefen  $s_{x,y}$  entlang der  $x$ - und  $y$ -Achse miteinander übereinstimmen. Für den Bandisolator bzw. Mott-Isolator (mit Einfachbesetzung) gilt  $\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \rangle = \delta_{ij} \langle \hat{n}_i \rangle$ . Nutzt man außerdem die Relation

$$\frac{1}{\pi^2 \sigma^4} \int e^{-(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)^2/\sigma^2} e^{-(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)^2/\sigma^2} d^2 \mathbf{x} = \frac{1}{2\pi \sigma^2} e^{-(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)^2/2\sigma^2} \quad (8.105)$$

und die Tatsache, dass sich  $W(\mathbf{x})$  auf der Längenskala von  $\sigma$  kaum verändert, so erhält man

$$A = \left(\frac{m}{\hbar t}\right)^3 W(\mathbf{x}_1) N \frac{1}{2\pi \sigma^2} e^{-(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)^2/2\sigma^2}. \quad (8.106)$$

Die Zwei-Teilchen-Korrelationen der Isolator-Zustände sind durch Gleichung 8.84 gegeben, wobei wir wiederum nur die quadratischen Terme in den Teilchenzahlen berücksichtigen. Für die Auswertung von  $B$  benötigt man außerdem die Relation

$$\frac{1}{\pi \sigma^2} \int e^{\pm i \left(\frac{m\mathbf{a}}{\hbar t}\right) (\mathbf{i}_\perp - \mathbf{j}_\perp) \mathbf{x}} e^{-(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)^2/\sigma^2} d^2 \mathbf{x} = e^{\pm i \left(\frac{m\mathbf{a}}{\hbar t}\right) (\mathbf{i}_\perp - \mathbf{j}_\perp) \mathbf{x}_1} e^{-\left(\frac{m\mathbf{a}}{\hbar t}\right)^2 (\mathbf{i}_\perp - \mathbf{j}_\perp)^2 \sigma^2/4} \quad (8.107)$$

und nach etwas Algebra folgt:

$$B = \left(\frac{m}{\hbar t}\right)^6 W(\mathbf{x}_1) W(\mathbf{x}_2) \times \left( \sum_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} \delta_{i_z j_z} e^{i \left(\frac{m\mathbf{a}}{\hbar t}\right) (\mathbf{i}_\perp - \mathbf{j}_\perp) (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} e^{-2 \left(\frac{m\mathbf{a}\sigma}{2\hbar t}\right)^2 (\mathbf{i}_\perp - \mathbf{j}_\perp)^2} \langle \hat{n}_i \rangle \langle \hat{n}_j \rangle \pm N^2 \right). \quad (8.108)$$

Auf ähnliche Weise erhält man die mittlere Dichteverteilung des Mott-Isolators bzw. des Bandisolators:

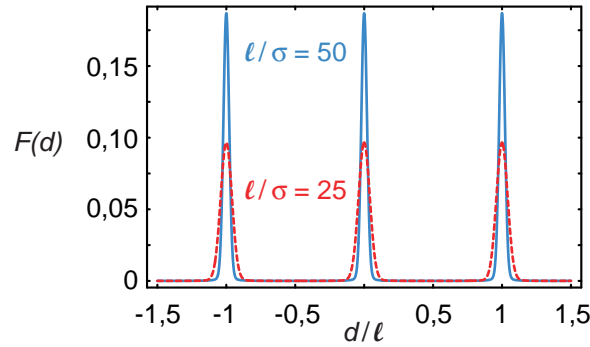
$$\langle \hat{n}_{\text{abb}}(\mathbf{x}) \rangle = \left(\frac{m}{\hbar t}\right)^3 W(\mathbf{x}) N. \quad (8.109)$$

Teilt man die Summe ( $A + B$ ) durch die mittleren Dichten an den Positionen  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$ , so erhält man schließlich die normierte Dichtekorrelationsfunktion für die Absorptionsabbildung mit endlicher Auflösung:

$$C_{\text{abb}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{e^{-(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)^2/2\sigma^2}}{2\pi \sigma^2 \left(\frac{m}{\hbar t}\right)^3 W(\mathbf{x}_1) N} + 1 \pm \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} \delta_{i_z j_z} e^{i \left(\frac{m\mathbf{a}}{\hbar t}\right) (\mathbf{i}_\perp - \mathbf{j}_\perp) (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} e^{-2 \left(\frac{m\mathbf{a}\sigma}{2\hbar t}\right)^2 (\mathbf{i}_\perp - \mathbf{j}_\perp)^2} \langle \hat{n}_i \rangle \langle \hat{n}_j \rangle. \quad (8.110)$$

Im Experiment werden die gemessenen Korrelationen räumlich gemittelt und als Funktion des Relativabstandes  $\mathbf{d} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  aufgetragen. Da Gleichung 8.110 weitgehend unabhängig von den absoluten Positionen  $\mathbf{x}_{1,2}$  ist, lässt sie sich in der Form  $C_{\text{abb}}(\mathbf{d})$  schreiben und stimmt in guter Näherung mit der räumlich gemittelten Korrelationsfunktion überein.

## 8.4 Korrelationsanalyse von Zuständen in optischen Gittern



**Abbildung 8.15:** Darstellung der Funktion 8.112 für eine Gitterachse mit  $N_{\perp} = 100$  einfach besetzten Plätzen und für zwei verschiedene Auflösungen  $\ell/\sigma$  des Abbildungssystems.

Nur der erste Term in Gleichung 8.110, der den zentralen Autokorrelationspeaks ( $\mathbf{d} = 0$ ) beschreibt, weist eine schwache Abhängigkeit von der absoluten Position  $\mathbf{x}_1$  auf. Da aber  $\sigma$  sehr viel kleiner ist als die Ausdehnung von  $W(\mathbf{x})$ , bleibt die Form des gaußförmigen Peaks von der räumlichen Mittelung weitgehend unberührt. Aus der Breite dieses zentralen Autokorrelationspeaks lässt sich das Auflösungsvermögen  $\sigma$  des Abbildungssystems ableiten.

Im Folgenden interessieren wir uns für den Kontrast der Korrelationen, also für die Peakamplituden außerhalb des zentralen Bereichs, sodass wir den ersten Term in Gleichung 8.110 nicht weiter zu berücksichtigen brauchen. Im Allgemeinen kann die Korrelationsfunktion 8.110 nur numerisch ausgewertet werden. Um dennoch Aussagen über ihren Verlauf treffen zu können, betrachten wir den vereinfachten Fall, dass innerhalb des einfach kubischen Gitters eine rechteckige Atomverteilung vorliegt. Dabei seien entlang der  $x$ - und  $y$ -Achse jeweils  $N_{\perp}$  und entlang der  $z$ -Achse  $N_z$  Gitterplätze mit je einem Atom besetzt, sodass die Gesamtatomzahl  $N = N_{\perp}^2 N_z$  beträgt. Mit diesen Annahmen ergibt sich die Korrelationsfunktion zu

$$C_{\text{abb}}(\mathbf{d}) = 1 \pm \frac{1}{N_z} F(d_x) F(d_y). \quad (8.111)$$

Hierbei ist  $\mathbf{d} = (d_x, d_y)$  und es wird die folgende skalare Funktion eingeführt:

$$F(d) \equiv \frac{1}{N_{\perp}^2} \sum_{i=1}^{N_{\perp}} \sum_{j=1}^{N_{\perp}} e^{i \frac{2\pi}{\ell} (i-j)d} e^{-2 \left(\frac{\pi\sigma}{\ell}\right)^2 (i-j)^2}. \quad (8.112)$$

Die Funktion  $F(d)$  ist periodisch mit dem Abstand  $\ell = ht/ma$  (siehe Abbildung 8.15) und aus deren Maximalwert  $F(\ell)$  ergibt sich die Korrelationsamplitude:

$$|C(\mathbf{d}_{\text{Peak}}) - 1| = \frac{F(\ell)^2}{N_z}. \quad (8.113)$$

## 8 Korrelationsanalyse

Bei unendlich hoher Auflösung ( $\sigma = 0$ ) ist  $F(\ell) = 1$  und der Kontrast des Korrelationssignals wird allein durch die Integration entlang der Abbildungsachse auf einen Wert von  $1/N_z$  reduziert. Bei endlicher Auflösung ( $\sigma > 0$ ) beschränkt die zweite Gauß-Funktion in Gleichung 8.112 die Summation über  $j$  auf jeweils etwa  $\ell/\pi\sigma$  Werte. Damit ist

$$F(d = \ell) \sim \frac{1}{N_z^2} N_\perp \frac{\ell}{\pi\sigma} \quad (8.114)$$

und für den Kontrast des Korrelationssignals erhält man die Näherung [45]:

$$|C(\mathbf{d}_{\text{Peak}}) - 1| \approx \frac{\beta}{\pi^2 N} \left( \frac{\ell}{\sigma} \right)^2. \quad (8.115)$$

Der Koeffizient  $\beta$  lässt sich durch eine numerische Auswertung der Funktion 8.112 bestimmen. Dabei findet man, dass sich  $\beta$  nur geringfügig mit dem Aspektverhältnis  $\alpha$  der rechteckigen Atomverteilung im Gitter verändert. Für ein typisches Auflösungsvermögen mit  $\ell/\sigma = 50$  findet man  $\beta \approx 1,38$ .

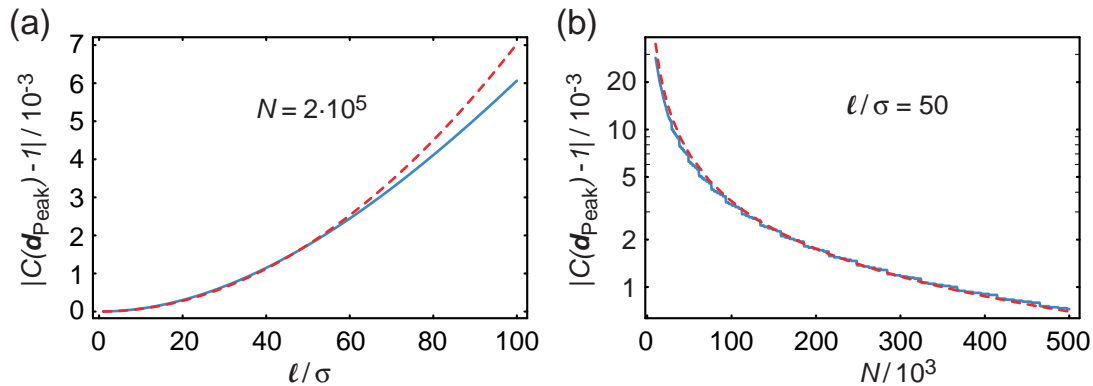
Abbildung 8.16 zeigt eine Gegenüberstellung der numerisch ermittelten Korrelationsamplitude 8.113 (durchgehende Kurve) und der Näherung 8.115 (gestrichelte Kurve), zum einen als Funktion der Auflösung  $\ell/\sigma$  und zum anderen als Funktion der Teilchenzahl  $N$ . Bei hohen Auflösungen  $\ell/\sigma$  wird die quadratische Näherung rasch ungeeignet, da die Korrelationsamplitude für  $\sigma = 0$  auf  $1/N_z$  beschränkt ist.

Statt in einer rechteckigen Gesamtverteilung ordnen sich die Atome im realen Gitter entlang den Äquipotentialflächen des externen harmonischen Einschlusses an und bilden dabei näherungsweise ein Rotationsellipsoid aus. In einem solchen Fall lässt sich die Korrelationsfunktion 8.110 nicht mehr nach den drei Raumachsen separieren und die Berechnung der zugehörigen Amplituden erfordert eine vollständig numerische Auswertung von 8.110, für die man zunächst die Koordinaten aller besetzten Gitterplätze bestimmen muss. Doch auch in diesem Fall lassen sich die Amplituden durch Gleichung 8.115 annähern. Bei einer typischen Auflösung von  $\ell/\sigma = 50$  erhält man für den Koeffizienten<sup>8</sup>  $\beta \approx 1,25$ . Variiert man das Aspektverhältnis  $\alpha = \omega_z/\omega_r$  des externen Einschlusses zwischen 1 und 5, so verändert sich  $\beta$  um weniger als 10%. Für unsere experimentellen Parameter [ $2,0(5) \cdot 10^5$   $^{40}\text{K}$ -Atome,  $\alpha = 5$  und  $\ell/\sigma = 47(3)$ ] ergibt die exakte numerische Berechnung eine Korrelationsamplitude von  $15(4) \cdot 10^{-4}$ . Im Experiment messen wir bei den niedrigsten Temperaturen [ $T/T_F = 0,23(3)$ ] des Fermigases eine Korrelationsamplitude von  $8(1) \cdot 10^{-4}$ . Die Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment erklärt sich dadurch, dass in der obigen Berechnung die endliche Temperatur des Fermigases vernachlässigt wird. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, nimmt mit der Temperatur auch die Ausdehnung des Gases im optischen Gitter zu und folglich die Korrelationsamplitude ab.

<sup>8</sup>Die exakte numerische Rechnung liefert für Gleichung 8.115 einen Vorfaktor, der etwa 1,6 mal größer ist als der in Referenz [45] angegebene Vorfaktor.



## 8.4 Korrelationsanalyse von Zuständen in optischen Gittern



**Abbildung 8.16:** Theoretischer Verlauf der Korrelationsamplitude bei endlicher Auflösung des Abbildungssystems. Der Graph (a) zeigt die Amplitude als Funktion des Auflösungsvermögens in Einheiten von  $\ell/\sigma$  bei fester Gesamtteilchenzahl  $N$  und der Graph (b) als Funktion der Gesamtatomzahl  $N$  bei konstanter Auflösung  $\ell/\sigma$ . In beiden Fällen wird von einer rechteckigen Atomverteilung mit einem Aspektverhältnis von  $\alpha = 5$  innerhalb des optischen Gitters ausgegangen. Die durchgehenden Kurven entsprechen den exakten numerischen Lösungen gemäß Gleichung 8.112 und 8.113. Die gestrichelten Kurven entsprechen der Näherung 8.115 mit  $\beta = 1,38$ .

Die obigen Betrachtungen legen zwei Möglichkeiten nahe, mit denen sich im Experiment der Kontrast der Korrelationssignale erhöhen lässt. Gemäß Gleichung 8.115 nimmt die Korrelationsamplitude quadratisch mit der Expansionsdauer  $t$  zu, denn der Abstand der Korrelationspeaks  $\ell$  ist direkt proportional zu  $t$ . Andererseits lässt sich die Korrelationsamplitude erhöhen, indem man die Anzahl  $N_z$  der entlang der Abbildungsrichtung aufintegrierten Gitterplätze reduziert. Dies kann entweder durch ein räumlich selektives Abbildungsverfahren oder durch eine tatsächliche Reduzierung der entlang der Abbildungsachse besetzten Gitterplätze geschehen. Letzteres lässt sich, wie in unserem Experiment, durch einen anisotropen externen Einschluss erzielen. Dabei muss aber auch die Gesamtatomzahl  $N$  verringert werden, da ansonsten eine zunehmende transversale Besetzung  $N_{\perp}$  den positiven Effekt auf die Korrelationsamplitude kompensiert. Die durch Gleichung 8.115 beschriebene Abhängigkeit der Korrelationsamplitude von der Gesamtatomzahl  $N$  und der Expansionsdauer  $t \propto \ell$  wurde bereits in dem früheren HBT-Experiment [45] untersucht.

### 8.4.8 Struktur und Temperaturverhalten der Korrelationspeaks

Bei der Besprechung der optischen Intensitätsinterferometrie fanden wir einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen dem Verlauf der Korrelationsfunktion und dem Intensitätsprofil der Lichtquelle. Gemäß dem van Cittert-Zernike-Theorem sind beide Verläufe über eine Fourier-Beziehung miteinander verknüpft. Auch bei der atomaren Korrelationsanalyse sind die Dichtekorrelationen und die ursprüngliche Atomverteilung im Gitter über eine

## 8 Korrelationsanalyse

Fourier-Beziehung miteinander verknüpft. So spiegelt sich in der Periodizität der Korrelationspeaks das reziproke Gitter wider und die Breite der einzelnen Peaks verhält sich umgekehrt proportional zur Wolkenausdehnung im Gitter (siehe Abschnitt 8.4.3) [307]. In diesem Abschnitt untersuchen wir, wie die Form der einzelnen Peaks durch die Einhüllende der Atomverteilung im Gitter beeinflusst wird. Insbesondere zeigen wir, dass sich aus den Korrelationsamplituden die Temperatur der Atome im Gitter ableiten lässt [50].

Der enge mathematische Zusammenhang zwischen der optischen Intensitätsinterferometrie und der Korrelationsanalyse von atomaren Absorptionsoptionen wird deutlich, wenn man die optische Korrelationsfunktion zweiter Ordnung 8.33 mit der atomaren Dichtekorrelationsfunktion 8.85 vergleicht. In beiden Fällen sind die Korrelationsfunktionen im Fernfeld durch Fourier-Transformierte der Quelle gegeben. Wobei es sich bei der atomaren Korrelationsfunktion, wegen der Periodizität des Gitters, um eine diskrete Fourier-Transformation handelt. Erstreckt sich die Atomwolke entlang der verschiedenen Gitterachsen  $\nu$  über hinreichend viele Plätze ( $N_\nu \gg 1$ ), so lässt sich die diskrete Transformation im Bereich der Peaks durch eine kontinuierliche Fourier-Transformation der Einhüllenden der Atomverteilung annähern. Dies wollen wir im Folgenden als Kontinuumsnäherung bezeichnen.

Für die in Abbildung 8.17a dargestellte rechteckige Atomverteilung in einem 2D-Gitter lässt sich die zugehörige Korrelationsfunktion  $C(\mathbf{d})$  gemäß Gleichung 8.89 als Produkt der eindimensionalen Lösungen 8.88 darstellen. Betrachtet man die Korrelationsfunktion im Bereich eines Peaks<sup>9</sup>, so gilt  $d_\nu \ll \ell$  und die eindimensionalen Lösungen 8.88 lassen sich wie folgt nähern:

$$C_\nu(d_\nu) = 1 \pm \left[ \frac{\sin(N_\nu \pi d_\nu / \ell)}{N_\nu \pi d_\nu / \ell} \right]^2. \quad (8.116)$$

Der einzelne Peak hat demnach dieselbe Form, wie die Intensitätskorrelationen der homogenen linearen Lichtquelle (siehe Gleichung 8.13, 8.32 und Abbildung 8.5b).

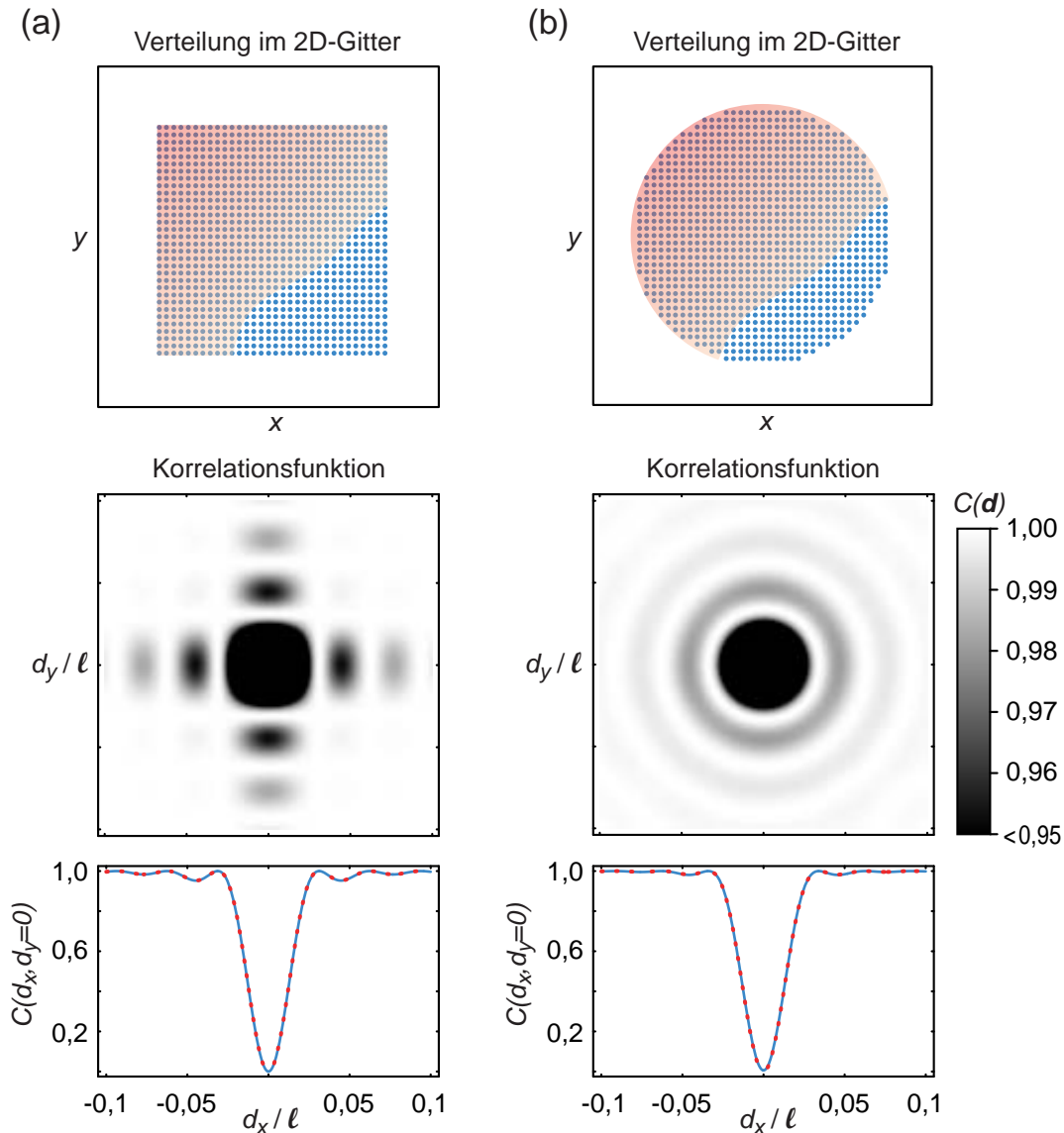
Für die in Abbildung 8.17b dargestellte runde Atomverteilung in einem 2D-Gitter legt die obige Analogie nahe, dass die zugehörigen Korrelationspeaks dieselbe Struktur aufweisen, wie die Intensitätskorrelationen einer kreisrunden homogenen Lichtquelle (siehe Gleichung 8.14, 8.32 und Abbildung 8.5b). In der Tat lässt sich hier der radiale Verlauf eines einzelnen Korrelationspeaks wie folgt nähern:

$$C_r(d_r) = 1 \pm \left| 2 \frac{J_1(N_r \pi d_r / \ell)}{N_r \pi d_r / \ell} \right|^2. \quad (8.117)$$

Dabei ist  $N_r$  über die Gesamtteilchenzahl  $N = \pi(N_r/2)^2$  definiert. Da man bei der Kontinuumsnäherung nur die Einhüllende der Dichteverteilung betrachtet und somit die diskrete periodische Struktur des optischen Gitters vernachlässigt, geht auch die Periodizität

<sup>9</sup>Der Einfachheit halber vernachlässigen wir den zentralen Autokorrelationspeak und gehen davon aus, dass der betrachtete Peak bei  $\mathbf{d}_{\text{Peak}} \equiv \mathbf{0}$  positioniert ist.

## 8.4 Korrelationsanalyse von Zuständen in optischen Gittern



**Abbildung 8.17:** Struktur der Korrelationspeaks für ein zweidimensionales Gitter mit (a) einer rechteckigen Verteilung aus  $32 \times 32$  Fermionen und (b) einer näherungsweise runden Verteilung aus 1000 Fermionen. Die berechneten Korrelationspeaks sind durch zweidimensionale Dichteprofile und deren horizontale Schnitte (blaue Kurven) dargestellt. Die atomaren Verteilungen im optischen Gitter lassen sich näherungsweise durch ihre Einhüllenden (rote Flächen) beschreiben. Im Rahmen der Kontinuumsnäherung sind die Formen der Korrelationspeaks durch die Fourier-Transformierten der Einhüllenden gegeben. Die Schnitte zeigen die Resultate der Kontinuumsnäherung 8.116 und 8.117 (rote Punkte) im Vergleich mit den exakten Verläufen der Korrelationsfunktionen (blauen Kurven).

## 8 Korrelationsanalyse

der Korrelationsfunktion verloren. Folglich geben die Kontinuumsnäherungen 8.116 und 8.117 nur die Formen der einzelnen Peaks und nicht etwa die gesamten Verläufe der Korrelationsfunktionen wieder.

Letztlich spiegelt die Form jedes einzelnen Korrelationspeaks die Kristallimpulskorrelationen  $\langle \hat{n}_q \hat{n}_{q+\Delta q} \rangle$  innerhalb des Gitters wider. Beim Entlassen aus dem Gitter werden diese Korrelationen durch die Bragg-Beugung in periodische Impulskorrelationen umgewandelt und diese schließlich – während der freien Expansion – in räumlich periodische Dichtekorrelationen überführt.

### Temperaturverhalten der Korrelationspeaks

Bislang sind wir von verschwindenden Temperaturen im optischen Gitter ausgegangen und haben die atomaren Korrelationen nur für reine Isolatorzustände mit ganzzahligen Besetzungszahlen  $\langle \hat{n}_j \rangle$  analysiert. Für das einkomponentige Fermigas wollen wir nun auch das Temperaturverhalten der Korrelationen untersuchen.

Dazu betrachten wir zunächst ein eindimensionales Fermigas aus  $N$  Atomen in einem Gitter mit einem externen harmonischen Einschluss der Frequenz  $\omega$ . Wir nehmen an, dass das Gitter hinreichend tief ist, sodass Tunnelprozesse unterdrückt sind ( $J \ll 1$ ). Darüber hinaus sei die Temperatur im Gitter  $T_{\text{lat}}$  so klein, dass die Atome ausschließlich das unterste Vibrationsniveau eines jeden Gitterplatzes besetzen. Im tiefen inhomogenen Gitter entsprechen die Einteilcheneigenzustände den lokalisierten Zuständen auf den verschiedenen Gitterplätzen und die Eigenenergien sind durch die potentiellen Energien an den entsprechenden Plätzen gegeben,  $\epsilon_j = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 j^2$ . Hierbei bezeichnet  $a$  die Gitterkonstante und  $j$  den Index des jeweiligen Gitterplatzes. Da die Besetzung der Einteilchenzustände zugleich der Besetzung der Gitterplätze entspricht, lässt sich  $\langle \hat{n}_j \rangle$  über das großkanonische Ensemble aus Abschnitt 8.2.4 auswerten und es gilt Gleichung 8.69. Auch die Teilchenkorrelationen zwischen den Gitterplätzen  $\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \hat{a}_l \rangle$  lassen sich aus dem großkanonischen Ensemble ableiten und man erhält Gleichung 8.70. Vergleicht man dieses Ergebnis mit dem aus Gleichung 8.84, so findet man, dass die Teilchenkorrelationen bei endlichen Temperaturen von derselben Form sind, wie beim reinen Bandisolator am absoluten Nullpunkt. Damit ist die Korrelationsfunktion aus Gleichung 8.85 auch für  $T_{\text{lat}} > 0$  gültig, wobei die Besetzungszahlen  $\langle \hat{n}_j \rangle$  nun durch die folgende Fermi-Dirac-Verteilung bestimmt werden:

$$\langle \hat{n}_j \rangle = \frac{1}{\exp \left[ \left( \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 j^2 - \mu \right) / k_B T_{\text{lat}} \right] + 1}. \quad (8.118)$$

Das chemische Potential  $\mu$  wird über die Gesamtteilchenzahl  $N = \sum_j \langle \hat{n}_j \rangle$  festgelegt.

Am absoluten Nullpunkt füllen die Fermionen die Gitterplätze ausgehend vom Zentrum der Falle sukzessive nach außen hin auf, wobei sich ein Fermi-See im Ortsraum mit dem Radius  $R_F = Na/2$  ausbildet (siehe Abbildung 8.18a). Somit lässt sich die Fermi-

## 8.4 Korrelationsanalyse von Zuständen in optischen Gittern

Temperatur im Gitter  $T_{\text{F,lat}}$  folgendermaßen darstellen:

$$k_{\text{B}}T_{\text{F,lat}} = \frac{1}{2}m\omega^2 \left( \frac{Na}{2} \right)^2. \quad (8.119)$$

Mit zunehmender Temperatur können die Atome auch weiter außen liegende Gitterplätze besetzen und die räumliche Ausdehnung der Atomwolke nimmt zu. In dem hier betrachteten eindimensionalen Fall nimmt die fermionische Dichtekorrelationsfunktion aus Gleichung 8.85 die folgende Form an:

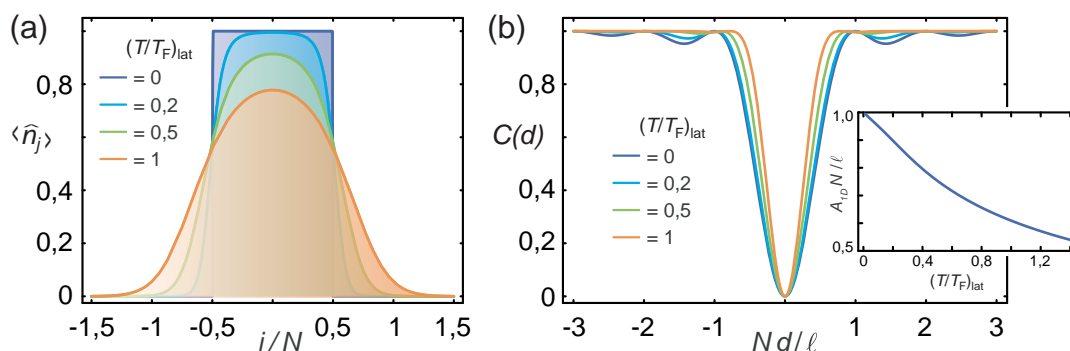
$$C(d) = 1 - \frac{1}{N^2} \left| \sum_j e^{i\frac{2\pi}{\ell}jd} \langle \hat{n}_j \rangle \right|^2. \quad (8.120)$$

Diese Funktion weist negative Peaks in periodischen Abständen  $\ell$  auf und geht bei  $T_{\text{lat}} = 0$  in den bekannten Ausdruck 8.88 über. Abbildung 8.18b zeigt die Form eines Peaks für verschiedene Temperaturen. Dabei finden wir, dass die Amplitude der Peaks unabhängig von der Temperatur immer den Wert 1 annimmt. Im Gegensatz dazu nimmt die Breite der Peaks mit zunehmender Temperatur ab. Dieses Verhalten lässt sich wie folgt verstehen: Die Amplitude von 1 entspricht einer vollständig verschwindenden Korrelationsfunktion  $C(d)$  und ist eine universelle Eigenschaft der Fermionen, die jeden Bloch-Zustand nur einfach besetzen dürfen. Wie wir gesehen haben, wird die Form des einzelnen Korrelationspeaks durch die Kristallimpulskorrelationen  $\langle \hat{n}_q \hat{n}_{q+\Delta q} \rangle$  im optischen Gitter bestimmt. Letztere lassen sich durch eine Korrelationslänge  $\delta q$  im Kristallimpulsraum charakterisieren, die über die Beziehung  $l_c = \hbar\delta q t/m$  mit der Breite  $l_c$  der einzelnen Korrelationspeaks verknüpft ist. Für das wechselwirkungsfreie Fermigas verhält sich die Korrelationslänge  $\delta q$  umgekehrt proportional zur Ausdehnung der Atomwolke im Gitter. Die mit der Temperatur zunehmende Ausdehnung im Gitter führt folglich zu einer Abnahme der Peakbreiten  $l_c$ .

Es sei bemerkt, dass die Flügel der Korrelationspeaks bei verschwindender Temperatur mit einer Periode oszillieren, die sich umgekehrt proportional zum Fermi-Radius  $R_{\text{F}}$  verhält. Diese Oszillationen sind analog zu den Friedel-Oszillationen, welche ein freies Fermigas im Ortsraum ausführt [70]. Mit zunehmender Temperatur weichen die Kanten des Fermi-Sees im Ortsraum auf, wodurch auch die Oszillationen in den Flügeln der Korrelationspeaks verschwinden.

Bei typischen Systemgrößen von  $N = 100$  entlang der  $x$ - und  $y$ -Gitterachse erwarten wir für unserer Experiment Korrelationspeaks mit einer Breite von etwa  $1 \mu\text{m}$ . Dieser Wert ist deutlich kleiner als das Auflösungsvermögen unseres Abbildungssystems von  $5, 6 \mu\text{m}$ . Damit wird die Struktur und die Breite der beobachteten Peaks im Wesentlichen durch die Punktspreizfunktion 8.100 unseres Abbildungssystems bestimmt und ein direkter Vergleich zwischen den beobachteten und den theoretischen Peakformen ist nicht möglich. Da aber die Punktspreizfunktion das Volumen der Korrelationspeaks bewahrt, wirkt sich eine

## 8 Korrelationsanalyse



**Abbildung 8.18:** (a) Berechnete Dichteverteilungen und (b) zugehörige Dichtekorrelationen für Fermionen verschiedener Temperatur in einem eindimensionalen Gitter. Abbildung (a) zeigt die Einhüllenden der Dichteverteilungen im Gitter für verschiedene Temperaturen  $(T/T_F)_{\text{lat}}$  im Gitter. Abbildung (b) zeigt die theoretischen Formen der zugehörigen Korrelationspeaks und der kleine Einsatz zeigt die Entwicklung der Peakfläche  $A_{1D}$  mit der Temperatur  $(T/T_F)_{\text{lat}}$ . Im Kontinuumslimit ( $N \gg 1$ ) sind alle Darstellungen universell gültig. Die Rechnung wird hier für die experimentell relevanten Parameter  $N = 100$  und  $\omega = 2\pi \cdot 40$  Hz durchgeführt, für die sich  $T_{F,\text{lat}} = 53$  nK ergibt.

Änderung in den zu erwartenden Peakbreiten unmittelbar auf die Amplituden der beobachteten Peaks aus. Die gemessenen Amplituden sind direkt proportional zu dem Volumen, welches innerhalb eines Peaks liegt. Übertragen auf unser eindimensionales Modellsystem entspricht das „Peakvolumen“ der Fläche

$$A_{1D} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} |C(d) - 1| \mathrm{d}d. \quad (8.121)$$

Setzt man die eindimensionale Korrelationsfunktion 8.120 ein, so folgt

$$\begin{aligned} A_{1D} &= \frac{1}{N^2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left| \sum_j e^{i\frac{2\pi}{\ell}jd} \langle \hat{n}_j \rangle \right|^2 \mathrm{d}d = \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \langle \hat{n}_i \rangle \langle \hat{n}_j \rangle \underbrace{\int_{-\ell/2}^{\ell/2} e^{i\frac{2\pi}{\ell}(i-j)d} \mathrm{d}d}_{=\ell \cdot \delta_{ij}} = \\ &= \frac{\ell}{N^2} \sum_j \langle \hat{n}_j \rangle^2. \end{aligned} \quad (8.122)$$

Dieser Ausdruck lässt sich nur numerisch auswerten. Dabei berechnet man zunächst für jede Temperatur  $T_{\text{lat}}$  über die Bedingung  $N = \sum_j \langle \hat{n}_j \rangle$  das chemische Potential der Fermi-Dirac-Verteilung 8.118. Der kleine Einsatz in Abbildung 8.18b zeigt die numerischen Resultate für die Peakfläche  $A_{1D}$  als Funktion der Temperatur. Drückt man die Temperatur

## 8.4 Korrelationsanalyse von Zuständen in optischen Gittern

$T_{\text{lat}}$  in Einheiten der Fermi-Temperatur 8.119 aus, so lässt sich die Fallenfrequenz  $\omega$  aus der Fermi-Dirac-Verteilung 8.118 eliminieren und bei hinreichend großen Teilchenzahlen  $N$  (Kontinuumslimit) ist der dargestellte Temperaturverlauf von  $A_{1D}N/\ell$  universell gültig.

Die vorangegangenen Überlegungen lassen sich direkt auf ein zweidimensionales Modell erweitern. Die Korrelationsfunktion lautet dann

$$C(\mathbf{d}) = 1 - \frac{1}{N^2} \left| \sum_j e^{i\frac{2\pi}{\ell} \mathbf{j} \mathbf{d}} \right|^2, \quad (8.123)$$

wobei  $\mathbf{j} = (j_x, j_y)$  und  $j_x, j_y$  ganze Zahlen sind. Die Signalstärke der Korrelationspeaks ist durch das Volumen  $A_{2D}$  innerhalb eines Peaks, also durch das Integral von  $C(\mathbf{d})$  über eine Zelle der Größe  $\ell \times \ell$ , gegeben. Eine Rechnung analog zu 8.122 liefert:

$$A_{2D} = \frac{\ell^2}{N^2} \sum_j \langle \hat{n}_j \rangle^2. \quad (8.124)$$

Ist der externe harmonische Einschluss entlang der beiden Gitterachsen gleich stark, so sind die Eigenenergien der lokalisierten Zustände durch  $\epsilon_j = \frac{1}{2}m\omega^2(j_x^2 + j_y^2)$  gegeben. Bei einer hinreichend großen Gesamtteilchenzahl  $N$ , lässt sich die Fermi-Temperatur im Gitter wie folgt annähern:

$$k_B T_{\text{F,lat}} = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 \frac{N}{\pi}. \quad (8.125)$$

Setzt man die Eigenenergien  $\epsilon_j$  in die Fermi-Dirac-Verteilung 8.69 ein und drückt die Fallenparameter in Einheiten von  $T_{\text{F,lat}}$  aus, so erhält man für die Fläche unter einem Peak

$$A_{2D} = \frac{\ell^2}{N^2} \sum_j \left[ \exp \left( \frac{T_{\text{F,lat}} \pi \mathbf{j}^2}{T} - \frac{\mu}{k_B T_{\text{lat}}} \right) + 1 \right]^{-2} \quad (8.126)$$

und für die Beziehung zwischen dem chemischem Potential  $\mu$  und der Gesamtteilchenzahl:

$$N = \sum_j \left[ \exp \left( \frac{T_{\text{F,lat}} \pi \mathbf{j}^2}{T} - \frac{\mu}{k_B T_{\text{lat}}} \right) + 1 \right]^{-1}. \quad (8.127)$$

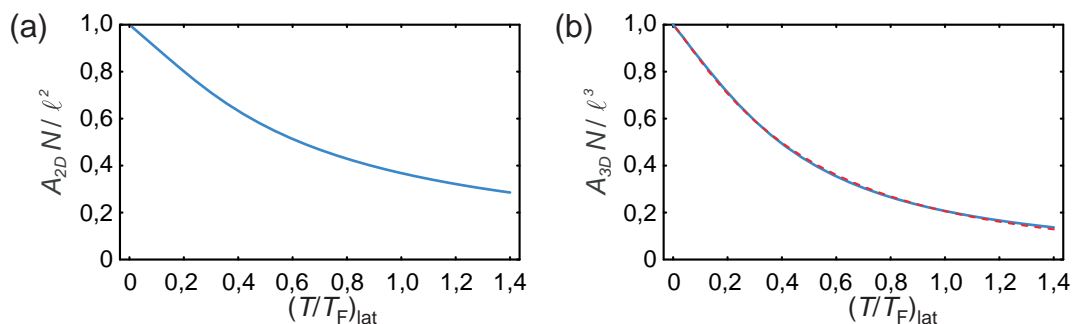
Diese beiden Ausdrücke enthalten unendliche Doppelsummen, die sich bei hinreichend großen Teilchenzahlen  $N$  wie folgt durch ein Flächenintegral approximieren lassen,

$$\sum_{j_x=-\infty}^{\infty} \sum_{j_y=-\infty}^{\infty} \dots \rightarrow \int_0^{\infty} 2\pi j \dots \mathfrak{d}j, \quad (8.128)$$

wobei  $j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2}$  nun als kontinuierliche Variable aufgefasst wird. Mit dieser Näherung lassen sich die obigen Ausdrücke analytisch lösen. Dazu wertet man zunächst Gleichung 8.127 aus und erhält:

$$N = N \frac{T_{\text{lat}}}{T_{\text{F,lat}}} \ln \left( 1 + e^{\mu/k_B T_{\text{lat}}} \right). \quad (8.129)$$

## 8 Korrelationsanalyse



**Abbildung 8.19:** Volumen eines Korrelationspeaks als Funktion der Temperatur  $(T/T_F)_{\text{lat}}$  für das **(a)** zweidimensionale und **(b)** dreidimensionale Gitter. Die Näherung 8.131 ist gestrichelt dargestellt.

Das chemische Potential  $\mu$  ist demnach unabhängig von der Gesamtteilchenzahl. Dann lösen wir nach  $\mu$  auf, setzen das Ergebnis in Gleichung 8.126 ein und erhalten nach der Integration:

$$A_{2D} = \frac{\ell^2}{N} \left[ 1 + \frac{T_{\text{lat}}}{T_{F,\text{lat}}} \left( e^{-\frac{T_{F,\text{lat}}}{T_{\text{lat}}} - 1} \right) \right]. \quad (8.130)$$

In analoger Weise lässt sich auch das Volumen  $A_{3D}$  der Korrelationspeaks für das dreidimensionale Gitter mit isotropem harmonischen Einschluss berechnen. Hier ist jedoch, wie im eindimensionalen Fall, nur eine numerische Lösung möglich. Die Temperaturverläufe der Korrelationssignale  $A_{2D}$  und  $A_{3D}$  sind in Abbildung 8.19 gezeigt. Auch hier sind die Einheiten so gewählt, dass die Darstellungen für beliebige harmonische Fallenfrequenzen  $\omega$  und Teilchenzahlen (mit  $N^{1/3} \gg 1$ ) gültig sind. In dem dargestellten Temperaturbereich lässt sich das Volumen der dreidimensionalen Korrelationspeaks näherungsweise durch den folgenden Ausdruck beschreiben (siehe gestrichelte Kurve):

$$A_{3D} \approx \frac{\ell^3}{N} \left( \frac{1}{1 + (T_{\text{lat}}/T_{F,\text{lat}})^{1,12}} \right)^{2,28}. \quad (8.131)$$

In unserem Experiment ist die Fallenfrequenz des externen harmonischen Einschlusses entlang der vertikalen  $z$ -Gitterachse, also parallel zur Abbildungsrichtung, um einen Faktor  $\omega_z/\omega_{x,y} \approx 5$  größer als entlang der beiden horizontal verlaufenden  $x$ - und  $y$ -Gitterachsen. Daher dehnt sich die Atomwolke bei einer Temperaturerhöhung im Wesentlichen entlang der horizontalen Gitterebenen aus. Unter diesen Bedingungen lässt sich das Temperaturverhalten der Korrelationssignale in guter Näherung durch das zweidimensionale Modell, also Gleichung 8.130 beschreiben.

Es sei darauf hingewiesen, dass sich Gleichung 8.85 auch auf ein wechselwirkungsfreies Bosegas in einem tiefen Gitter mit harmonischem Einschluss anwenden lässt, bei dem die Besetzung der Gitterplätze  $\langle \hat{n}_j \rangle$  einer Bose-Einstein-Verteilung folgt. Dafür muss sich das



## 8.4 Korrelationsanalyse von Zuständen in optischen Gittern

---

Gas jedoch oberhalb der kritischen Temperatur für die Bose-Einstein-Kondensation befinden und gleichzeitig so kalt sein, dass eine Bevölkerung höherer Bänder ausgeschlossen ist.

Bislang ließen sich solche Dichtekorrelationen nicht experimentell nachweisen, da bei einem thermischen Bosegas erhöhte Temperatur- und Dichteschwankungen zwischen den einzelnen Absorptionaufnahmen zu einem verstärkten Hintergrundrauschen in den Korrelationsbildern führen [45].

Zwar geben die beim fermionischen Bandisolator oder bosonischen Mott-Isolator beobachteten Dichtekorrelationen Auskunft über die periodische Anordnung der Atome im optischen Gitter, doch zeigen die vorangegangenen Überlegungen, dass sich aus den Korrelationen keine Informationen über die unterdrückten Teilchenzahlfluktuationen in den Isolatorzuständen gewinnen lassen.

### Temperaturmessungen

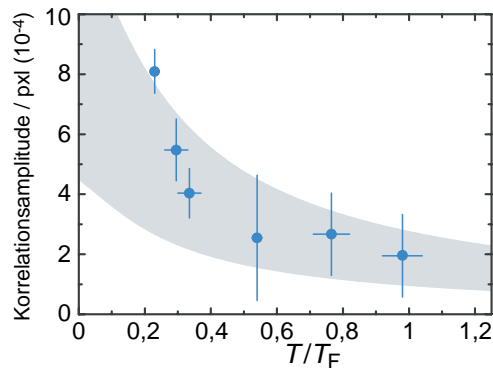
Um das Temperaturverhalten der fermionischen Korrelationen zu untersuchen, haben wir einkomponentige Fermigase bei verschiedenen Temperaturen präpariert. Dies geschieht durch Variation des Endpunktes der erzwungenen Evaporation in der Dipolfalle. Vor dem Hochfahren des Gitters wird die Dipolfalltiefe wieder auf einen festen Wert zurückgefahren, sodass der externe Einschluss für alle präparierten Ensemble übereinstimmt. Zu jedem Temperaturwert wird dann eine Korrelationsanalyse an einer Serie von Absorptionaufnahmen durchgeführt. Wie anhand der Messdaten in Abbildung 8.20 zu erkennen ist, beobachten wir eine deutliche Abnahme der Korrelationsamplituden mit zunehmender Temperatur. Die Analyse erweist sich als hinreichend sensitiv, um das Antibunching bis hinauf zu Temperaturen von  $T/T_F \approx 1$  nachzuweisen. Da wir bislang keine unabhängige Methode zur Messung der Temperaturen im Gitter besitzen, entsprechen die angegebenen Werte den Ausgangstemperaturen der Atomwolken innerhalb der Dipolfalle, also noch vor dem Hochfahren des Gitters.

In Abbildung 8.20 wird das gemessene Temperaturverhalten der Korrelationsamplituden mit den theoretischen Voraussagen des zweidimensionalen Modells (Gleichung 8.130), unter Berücksichtigung der endlichen Auflösung des Abbildungssystems und der Integration entlang der Abbildungsrichtung, verglichen. Dabei finden wir eine gute quantitative Übereinstimmung mit der Theorie, wenn wir von einem adiabatischen Aufheizen der Atome beim Einladen in das optische Gitter ausgehen. Gemäß Abschnitt 5.3.1 führt ein adiabatischer Transfer in ein tiefes Gitter zu einer Verdoppelung von  $T/T_F$  [219]. Durch Wiederherunterfahren des Gitters wird separat überprüft, dass nicht-adiabatische Heizeffekte im Rahmen der Messgenauigkeit ( $\sim 10\%$ ) vernachlässigt werden können.

Die hier vorgestellten Messungen belegen, dass die Korrelationsanalyse eine robuste Methode darstellt, um die Ordnung und die Temperatur der Fermionen im optischen Gitter zu bestimmen.

## 8 Korrelationsanalyse

---



**Abbildung 8.20:** Gemessene Korrelationsamplituden aufgetragen gegen die Temperatur der Atomwolken vor dem Transfer ins optische Gitter. Für jeden Datenpunkt werden zwei bis vier Serien mit insgesamt etwa 200 Absorptionenaufnahmen ausgewertet. Die gemittelten Daten sind mit Standardabweichungen aufgetragen. Der grau markierte Bereich kennzeichnet die im Rahmen von Gleichung 8.130 theoretisch vorausgesagten Korrelationsamplituden unter Berücksichtigung der experimentellen Unsicherheiten in den Atomzahlen.

Zur Ermittlung der Amplituden werden invertierte zweidimensionale Gauß-Funktionen numerisch an die Peaks in ungefilterten Korrelationsbildern angepasst. Dazu werden zunächst die Positionen und die Breiten der Peaks anhand von drei Korrelationsbildern bei der niedrigsten Temperatur  $T/T_F = 0,23(3)$  bestimmt. In den Korrelationsbildern zu den höheren Temperaturen werden diese Parameter dann nicht mehr variiert und nur noch die Amplituden als freie Parameter angepasst. Die zu jedem Korrelationsbild ermittelte Amplitude entspricht dem Mittelwert aus vier Peaks, die analog zum reziproken Gitter um den zentralen Autokorrelationspeak angeordnet sind. Naturgemäß wird der zentrale Autokorrelationspeak nicht mit in die Auswertung einbezogen.

## 9 Zusammenfassung und Ausblick

Seit einigen Jahren gibt es weltweit Bemühungen, stark korrelierte Systeme der kondensierten Materie mit ultrakalten Atomen zu simulieren. Die Kombination verschiedener experimenteller Methoden wie die Präparation quantenentarteter Bose-Fermi-Mischungen, die Veränderung der interatomaren Wechselwirkungen mittels Feshbach-Resonanzen sowie das Speichern der Atome in optischen Gitterpotentialen bietet die Perspektive, ein breites Spektrum stark korrelierter Quantenphasen zu realisieren und in einer extrem reinen und gut kontrollierbaren Umgebung zu studieren.

In dieser Arbeit wurde ein neuer experimenteller Aufbau vorgestellt, der es erlaubt, simultan entartete bosonische und fermionische Quantengase aus  $^{87}\text{Rb}$  und  $^{40}\text{K}$  in einem sehr flexiblen dreidimensionalen optischen Gitter zu präparieren und unter dem Einfluss starker homogener Magnetfelder zu untersuchen. Es wurden neue Methoden demonstriert, mit denen sich die Vielteilchen-Quantenzustände im optischen Gitter manipulieren und analysieren lassen. Diese Methoden sowie besondere Merkmale des Aufbaus werden im Folgenden zusammengefasst. Gleichzeitig wird ein Ausblick auf mögliche zukünftige Anwendungen gegeben.

### Aufbau

In unserem Experiment können bosonische  $^{87}\text{Rb}$ - und fermionische  $^{40}\text{K}$ -Atome mittels einer Zwei-Spezies-MOT und anschließender evaporativer und sympathetischer Kühlung simultan in die Quantenentartung überführt werden. Der Aufbau zeichnet sich durch einen außergewöhnlich guten Zugang zu den präparierten Ensembles aus und bietet – dank einer neuartigen Spulen- und Fallenkonfiguration – die Möglichkeit, die interatomaren Wechselwirkungen bei geringen dissipierten Leistungen durch starke homogene Magnetfelder zu beeinflussen. Zudem erlaubt die Vereinigung einer gekreuzten Dipolfalle und eines blauverstimmtten dreidimensionalen Gitters eine hervorragende Kontrolle über die Bewegungsfreiheitsgrade der Atome. Um den komplexen Aufbau zuverlässig und bei minimalen täglichem Justageaufwand betreiben zu können, wurden zahlreiche Komponenten ausgehend von den Atomquellen über das Lasersystem bis hin zur eigentlichen Vakuumanlage speziell hierfür entworfen. Ein kompakter Gitteraufbau und die geplante Implementierung einer Quadrupolfalle mit „blue plug“ bieten genügend Spielraum für zukünftige Erweiterungen des Experiments.

## 9 Zusammenfassung und Ausblick

---

### Präparation & Manipulation

Die eingesetzte Kombination einer gekreuzten Dipolfalle und eines blauverstimmten Gitters bringt zahlreiche experimentelle Vorteile und Anwendungsmöglichkeiten mit sich.

Die Lokalisierung der Atome in den Intensitätsminima der optischen Stehwellen erlaubt es, tiefe Gitter mit geringen Photonenstreuraten und einem schwachem externen Einschluss zu realisieren. So lassen sich in tiefen 1D- und 2D-Gittern Quantengase reduzierter Dimensionalität, wie beispielsweise eindimensionale Tonks-Girardeau-Gase [20, 21] und Luttinger-Flüssigkeiten [23], erzeugen oder der Kosterlitz–Thouless-Übergang eines zweidimensionalen Bosegases beobachten [310].

Sehr vielversprechend sind Experimente mit Bose-Fermi-Mischungen in optischen Gittern, nicht zuletzt dank der über Feshbach-Resonanzen einstellbaren Intra- bzw. Inter-spezieswechselwirkungen. So können bosonische Atome, ähnlich zu Phononen in Festkörpern, eine effektiv attraktive Wechselwirkung endlicher Reichweite zwischen lokal repulsiv wechselwirkenden Fermionen vermitteln. Die beiden miteinander konkurrierenden Wechselwirkungen lassen sich über die Streulängen und die Gitterparameter in ihrer Stärke verändern. Für ein zweidimensionales System werden, je nach dem Verhältnis der beiden Wechselwirkungsstärken, unterschiedliche fermionische Quantenphasen wie Ladungs- und Spin-Dichtewellen aber auch superfluide Phasen mit  $s$ -,  $p$ - und  $d$ -Wellen-Paarung vorausgesagt [311]. Experimente mit solchen Mischungen können entscheidende Einblicke in das Verhalten von stark korrelierten Elektronensystemen gewähren, wie sie in unkonventionellen Supraleitern vorliegen. Ist die Phononen- bzw. Schallgeschwindigkeit  $c$  im kondensierten Bosegas erheblich größer als die Fermi-Geschwindigkeit  $v_F$ , so kann die bosoneninduzierte Wechselwirkung zwischen den Fermionen als instantan betrachtet werden. Üblicherweise wird jedoch die Phononengeschwindigkeit in einer  $^{87}\text{Rb}$ - $^{40}\text{K}$ -Mischung, aufgrund der großen bosonischen Masse, von derselben Größenordnung sein wie die Fermi-Geschwindigkeit (adiabatisches Limit). Die daraus resultierenden Retardationseffekte verhindern die Ausbildung von supraleitenden Zuständen mit höheren Paarungssymmetrien als die  $s$ -Wellen-Paarung [311]. Die Retardationseffekte lassen sich jedoch durch die Verwendung einer leichteren bosonischen Spezies wie  $^{23}\text{Na}$  erheblich reduzieren.

Einen alternativen Ansatz bietet das in dieser Arbeit beschriebene spezies-abhängige Gitter. Die frei einstellbare Gitterwellenlänge erlaubt es, das Verhältnis der effektiven Massen von Rubidium und Kalium kontinuierlich über einen größeren Bereich durchzustimmen und somit Geschwindigkeitsverhältnisse ( $v_F/c \ll 1$ ) wie in „Heavy Fermion“-Materialien zu realisieren. Damit liefert das Gitter ideale Voraussetzungen, um auch die superfluiden Phasen mit unkonventioneller  $p$ - und  $d$ -Wellen-Paarung verwirklichen zu können.

Des Weiteren wird für zweidimensionale Bose-Fermi-Mischungen in optischen Gittern unter geeigneten Bedingungen die Ausbildung eines Supersolids vorausgesagt [36]. Die-

---

ser Zustand weist sowohl eine langreichweitige Phasenkohärenz (off-diagonal long-range order) als auch eine nicht-triviale kristalline Ordnung (diagonal long-range order) auf. Die Phasenkohärenz ist auf die Kondensation der Bosonen zurückzuführen, während die räumliche Struktur in der Kondensatdichte durch die Wechselwirkung mit einer fermionischen Ladungsdichtewelle hervorgerufen wird.

Bose-Fermi-Mischungen in spezies-spezifischen Gittern bieten sich außerdem für das Studium von unordnungsinduzierten Effekten an. So können zufällig im Gitter verteilte Fermionen hoher effektiver Masse als lokalisierte Störstellen für bewegliche Bosonen dienen [256, 257]. Die Wechselwirkung mit den Störstellen kann über die Interspezies-Feshbach-Resonanz durchgestimmt und die Konzentration der Störstellen frei über die Anzahl der Fermionen verändert werden. Unordnungsinduzierte Effekte spielen eine wichtige Rolle in vielen Transportphänomenen und beeinflussen maßgeblich die elektrische Leitfähigkeit von Festkörpern. In einer grundlegenden theoretischen Arbeit zeigte Philip W. Anderson, dass die Streuung einer Wellenfunktion an zufällig verteilten Störstellen durch Mehrfachinterferenz zu deren vollständigen Lokalisierung führen kann [263]. Neben der Anderson-Lokalisierung von superfluiden Phasen, ist der Einfluss von Unordnung auf das Verhalten von stark korrelierten Systemen, wie zum Beispiel dem bosonischen Mott-Isolator, von besonderem Interesse. In einem solchen System soll sich bei hinreichend starker Unordnung eine neuartige isolierende Phase, die sogenannte Bose-Glas-Phase [231], ausbilden. Letztere unterscheidet sich vom Mott-Isolator durch ihre endliche Kompressibilität und die fehlende Energielücke im Anregungsspektrum. Erste wichtige Anzeichen für die Ausbildung einer solchen Phase konnten bereits an einem Bosegas in einem bichromatischen Gitter beobachtet werden [312].

Eine weitere faszinierende Perspektive bietet die Erzeugung von heteronuklearen K-Rb-Molekülen in optischen Gittern. In ihrem absoluten Grundzustand weisen die Moleküle ein permanentes elektrisches Dipolmoment auf. Dies ermöglicht das Studium von neuartigen Quantenphasen, welche auf langreichweitigen anisotropen Wechselwirkungen beruhen [313, 314]. Die intermolekularen Wechselwirkungen lassen sich mittels elektrischer Felder beeinflussen, voraus interessante Anwendungsmöglichkeiten für die Quanteninformationsverarbeitung hervorgehen [315]. Außerdem bieten ultrakalte Moleküle in optischen Gittern die Möglichkeit, Präzisionsmessungen zu fundamentalen Naturkonstanten durchzuführen [316]. Idealer Ausgangspunkt für die Erzeugung heteronuklearer Moleküle ist ein tiefes 3D-Gitter mit jeweils genau einem Fermion und einem Boson pro Gitterplatz. Ein solcher Zustand lässt sich bei abgeschalteter Interspezieswechselwirkung durch die parallele Ausbildung eines fermionischen Bandisolators und eines bosonischen Mott-Isolators präparieren. Im Anschluss können die Atompaaire mittels Photoassoziation [185, 317] oder magnetischer Feshbach-Resonanzen [258, 268, 318, 319] in Moleküle umgewandelt werden. Dank der Isolation auf separaten Gitterplätzen lassen sich Moleküle in genau definierten internen und externen Zuständen erzeugen und Verluste durch inelastische Stöße vermeiden. Durch die Wahl geeigneter optischer Übergänge ist es vor

## 9 Zusammenfassung und Ausblick

---

kurzem gelungen, ultrakalte Moleküle in tiefliegenden Vibrationsniveaus bzw. in ihren absoluten Grundzuständen zu erzeugen [320–324]. In unserer Arbeitsgruppe wurde ein optischer Frequenzkamm aufgebaut [325], der es ermöglichen sollte, im 3D-Gitter präparierte Feshbach-Moleküle mittels kohärenter 2-Photonen-Photoassoziationsprozesse in ihre absoluten Grundzustände zu überführen.

### Analyse

Mit der Realisierung immer komplexerer Quantenphasen in optischen Gittern werden auch neue Verfahren notwendig, um diese zuverlässig nachzuweisen.

In dieser Arbeit wurde gezeigt, wie sich der unabhängige externe Einschluss zur Präparation und Analyse der Quantenzustände im optischen Gitter einsetzen lässt. So konnte erstmals ein spinpolarisiertes Fermigas allein durch dessen Kompression von einem metallischen Zustand in einen Bandisolator überführt werden [51, 52]. Diese Ergebnisse zeigen, dass sich die Veränderung des externen Einschlusses zur Messung der globalen Kompressibilität von Zuständen im optischen Gitter einsetzen lässt. Damit verfügt man über ein neuartiges Diagnoseverfahren, um Quantenphasen wie den bosonischen und fermionischen Mott-Isolator oder die Bose-Glas-Phase zweifelsfrei nachzuweisen. Während der Fertigstellung dieser Arbeit gelang es meinen Kollegen, fermionische Mott-Isolatoren zu erzeugen und diese anhand eines charakteristischen lokalen Minimums in der globalen Kompressibilität zu identifizieren [27]. Abrupte Änderungen des externen Einschlusses erlauben es darüber hinaus, kollektive Schwingungen und Transportphänomene im optischen Gitter zu untersuchen. Solche Messungen wurden in dieser Arbeit am Beispiel eines spinpolarisierten Fermigases durchgeführt und mit theoretischen Berechnungen verglichen.

Als weiteres Verfahren für den Nachweis bosonischer und fermionischer Quantenphasen in optischen Gittern wurde in dieser Arbeit die Korrelationsanalyse von Flugzeitaufnahmen vorgestellt. Anhand von Hanbury Brown und Twiss (HBT)-Korrelationen im Quantenrauschen der expandierenden Atomwolken ließ sich die mikroskopische Ordnung der Atome im optischen Gitter nachweisen. Hierbei handelt es sich um Informationen, die sich nicht aus der mittleren Dichteverteilung ableiten lassen, da diese nur Aufschluss über die Einteilchenwellenfunktionen auf den einzelnen Gitterplätzen gibt. Ausgangspunkt für die Messungen waren jeweils vollständig spinpolarisierte bosonische Mott-Isolatoren und fermionische Bandisolatoren. Zwar liegen in beiden Fällen identische Dichteverteilungen innerhalb des Gitters vor, doch weisen die Korrelationen von Bosonen und Fermionen entgegengesetzte Vorzeichen auf. Mit diesen Messungen gelang es erstmals fermionisches Antibunching an freien neutralen Atomen zu beobachten und innerhalb derselben Apparatur mit dem bosonischen Bunching zu vergleichen. Neben dem Nachweis dieses fundamentalen Quanteneffektes ließ sich die Ordnung und die Temperatur der Fermionen im Gitter bis hinauf zu Fermi-Temperatur bestimmen. Damit erweist sich die Korrelationsanalyse von Absorptionsabbildungen als ein einfaches und robustes Verfahren, mit dem sich

---

zukünftig auch komplexere bosonische und fermionische Quantenphasen in optischen Gittern nachweisen und untersuchen lassen.

Mit der Erzeugung fermionischer Mott-Isolatoren [26, 27] und neuen Ansätzen zum Kühlen der Atome innerhalb des Gitters [237, 326, 327] scheint auch die Realisierung der Néel-Phase in naher Zukunft möglich. Zwar weist diese antiferromagnetische Phase keinerlei Signaturen in der mittleren Impulsverteilung auf, lässt sich jedoch eindeutig anhand zusätzlicher Peaks in den Rauschkorrelationen identifizieren [39, 237]. Die antiferromagnetische Ordnung führt zu einer Verdoppelung der Einheitszelle, wodurch zusätzliche Korrelationspeaks bei halben reziproken Gittervektoren auftauchen. In ähnlicher Weise lassen sich Spin- und Ladungsdichtewellen [39] oder die räumliche Ordnung in Supersolid-Phasen nachweisen [307]. Darüber hinaus lässt sich aus den Korrelationsmustern der Grad der Unordnung in Glasphasen [248] oder in metastabilen Zuständen dipolarer Gase ermitteln [328]. In eindimensionalen Fermigasen weisen die Rauschkorrelationen Singularitäten auf, aus deren Potenzverhalten der Luttinger-Parameter und damit die Charakteristik des Systems abgeleitet werden kann [329]. Auch die verschiedenen Phasen von eindimensionalen Gasen in ungeordneten periodischen Potentialen lassen sich anhand von Rauschkorrelationen unterscheiden [330]. Die Auswertung von Fluktuationen im Interferenzkontrast von miteinander überlagerten Atomwolken [331] ermöglichte es vor kurzem, den Kosterlitz–Thouless-Übergang in 2D-Bosegasen nachzuweisen [310] und die Korrelationsfunktionen höherer Ordnung von 1D-Bosegasen zu untersuchen [332].

Eine weitere interessante Anwendung für die Korrelationsanalyse ist der Nachweis fermionischer Paarung im BCS-Zustand. In diesem Zustand existiert zu jedem Atom mit Impuls  $\mathbf{k}$  ein weiteres Atom mit Impuls  $-\mathbf{k}$ , wodurch die Korrelationsfunktion  $C(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  einen scharfen Peak bei  $\mathbf{k} = -\mathbf{k}'$  aufweist. Ähnliche Impulskorrelationen wurden bereits bei der Dissoziation von Feshbach-Molekülen beobachtet [306]. Lässt sich fermionische Suprafluidität tatsächlich im Rahmen des repulsiven ( $U > 0$ ) Hubbard-Modells verwirklichen [28], so kann die Symmetrie der superfluiden Wellenfunktion prinzipiell aus der Struktur des Korrelationspeaks abgeleitet werden [39].

Darüber hinaus geben die Korrelationen Auskunft über das niederenergetische Anregungsverhalten. Im Bereich schwacher Kopplung – dem BCS-Limit – führt eine Temperaturerhöhung zum Aufbrechen der Cooper-Paare, wodurch die Amplitude des Korrelationspeaks immer weiter abnimmt, bis diese schließlich bei  $T = T_c$  ganz verschwindet. Demgegenüber kommt es im Bereich starker Kopplung – dem BEC-Limit – zu kollektiven Bogoliubov-Anderson-Anregungen. Hierbei handelt es sich um Quasiteilchen mit einer endlichen Schwerpunktschwindigkeit. Das heißt, bei stark gebundenen Paaren führen thermische Anregungen zu einer Verbreiterung des Korrelationspeaks. Somit kann aus dem Temperaturverhalten der Korrelationspeaks auf das jeweilige Paarungsregime geschlossen werden [39].

Mit der neuen Generation von Gitterexperimenten rückt die Verwirklichung von Richard

## 9 Zusammenfassung und Ausblick

---

Feynman's Vision eines Quantensimulators in greifbare Nähe. In dieser Arbeit wurde nicht nur eine äußerst flexible und gut kontrollierbare Plattform zur Simulation erster komplexer Vielteilchensysteme vorgestellt, sondern es wurden auch neue Verfahren präsentiert, mit denen sich die Simulationsergebnisse effizient „auslesen“ lassen.





## A Rubidiumdaten

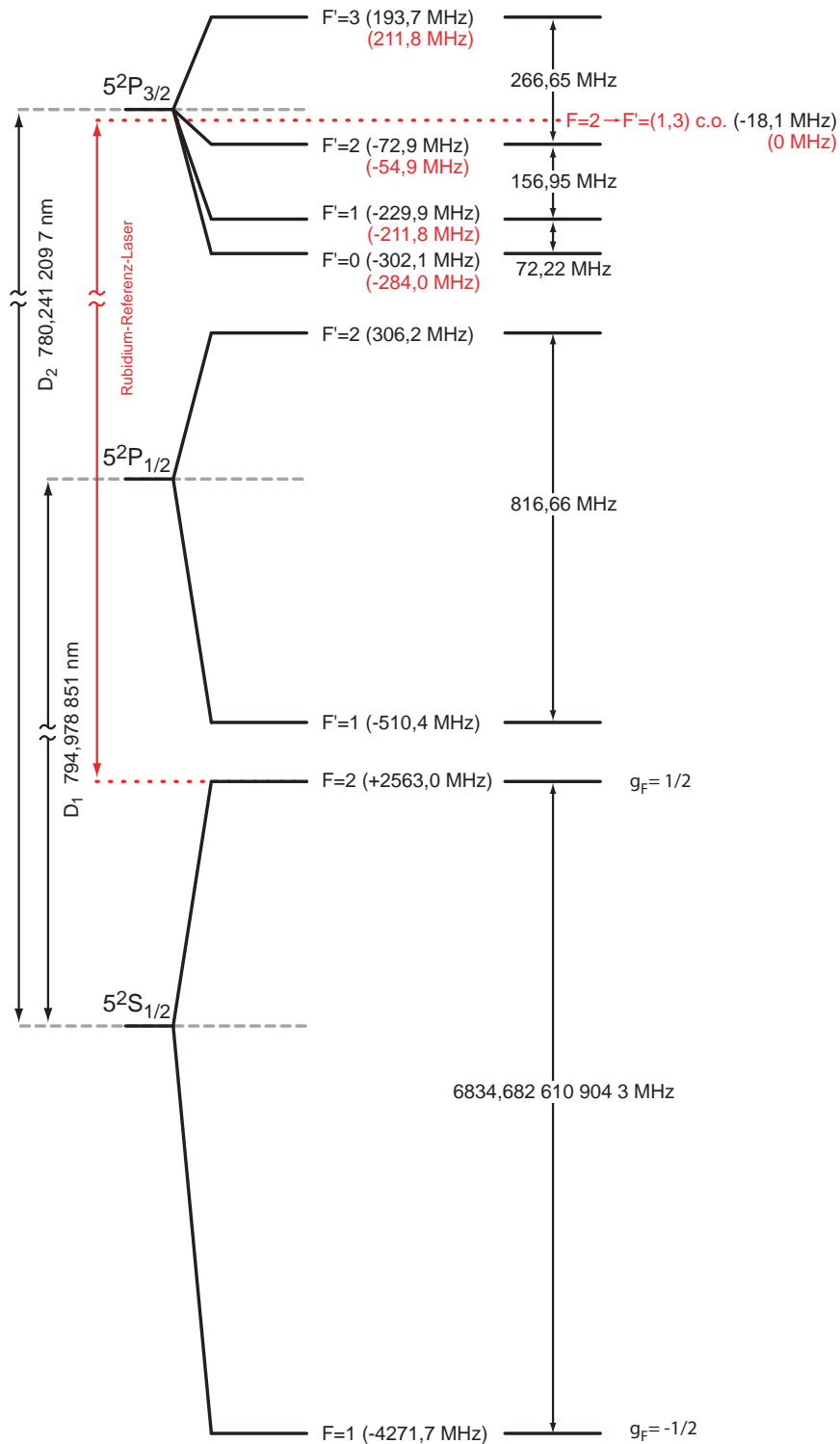
 $^{87}\text{Rb}$ 

Masse	$m$	86,909 18 u
Natürliche Isotopenhäufigkeit		27,835 %
Kernspin	$I$	$3/2^+$
Grundzustand-HFS-Aufspaltung	$\nu_{\text{hfs}}$	6 834,682 610 904 29(9) MHz
Vakuumwellenlänge $D_1$ -Übergang (ohne HFS)	$\lambda_{D1}$	794,978 850 9(8) nm
Vakuumwellenlänge $D_2$ -Übergang (ohne HFS)	$\lambda_{D2}$	780,241 209 686(13) nm
Linienbreite $D_1$ -Übergang	$\Gamma_{D1}$	$2\pi \cdot 5,746(8)$ MHz
Linienbreite $D_2$ -Übergang	$\Gamma_{D2}$	$2\pi \cdot 6,065(9)$ MHz
Sättigungsintensität und resonanter Streuquerschnitt		
für $\sigma^\pm$ -pol. Licht auf dem $D_2$ -Übergang	$I_{\text{sat}}$	1,669(2) mW/cm <sup>2</sup>
$ F = 2, m_F = \pm 2\rangle \rightarrow  F' = 3, m_{F'} = \pm 3\rangle$	$\sigma_0$	$2.9067 \cdot 10^{-9}$ cm <sup>2</sup>
Sättigungsintensität und resonanter Streuquerschnitt		
für isotrop pol. Licht auf dem $D_2$ -Übergang	$\tilde{I}_{\text{sat}}$	3,576(4) mW/cm <sup>2</sup>
$F = 2 \rightarrow F' = 3$	$\tilde{\sigma}_0$	$1.3565 \cdot 10^{-9}$ cm <sup>2</sup>
Singulett-Streulänge	$a_S$	+90.4(2) $a_0$ [100]
Triplet-Streulänge	$a_T$	+98.98(4) $a_0$ [100]
Schmelzpunkt	$T_m$	39 °C
Siedepunkt	$T_b$	688 °C
Dampfdruck bei 25 °C	$p_v$	$4 \cdot 10^{-7}$ mbar

Die Sättigungsintensität und der Streuquerschnitt sind gemäß  $I_{\text{sat}} = \pi h c \Gamma_{D2} / (3 \lambda_{D2}^3)$  und  $\sigma_0 = 3 \lambda_{D2}^2 / (2\pi)$  berechnet worden [333]. Für isotrop polarisiertes Licht muss über die Quadrate der Clebsch-Gordan-Koeffizienten aller beteiligten Übergänge gemittelt werden und man erhält  $\tilde{I}_{\text{sat}} = 15 I_{\text{sat}} / 7$  und  $\tilde{\sigma}_0 = 7 \sigma_0 / 15$ .

Die spektroskopischen Daten und das Termschema für  $^{87}\text{Rb}$  stammen aus Referenz [333]. Im Termschema sind die HFS-Aufspaltungen maßstabsgetreu dargestellt, wobei die Aufspaltungen in den angeregten Niveaus ( $5P_{1/2}$ ,  $5P_{3/2}$ ) um einen Faktor 5 gegenüber den Aufspaltungen im Grundzustand ( $5S_{1/2}$ ) vergrößert sind.

# A Rubidiumdaten



$^{87}\text{Rb}$ ,  $I=3/2^+$ , 27,83%

## Anhang

### B Kaliumdaten

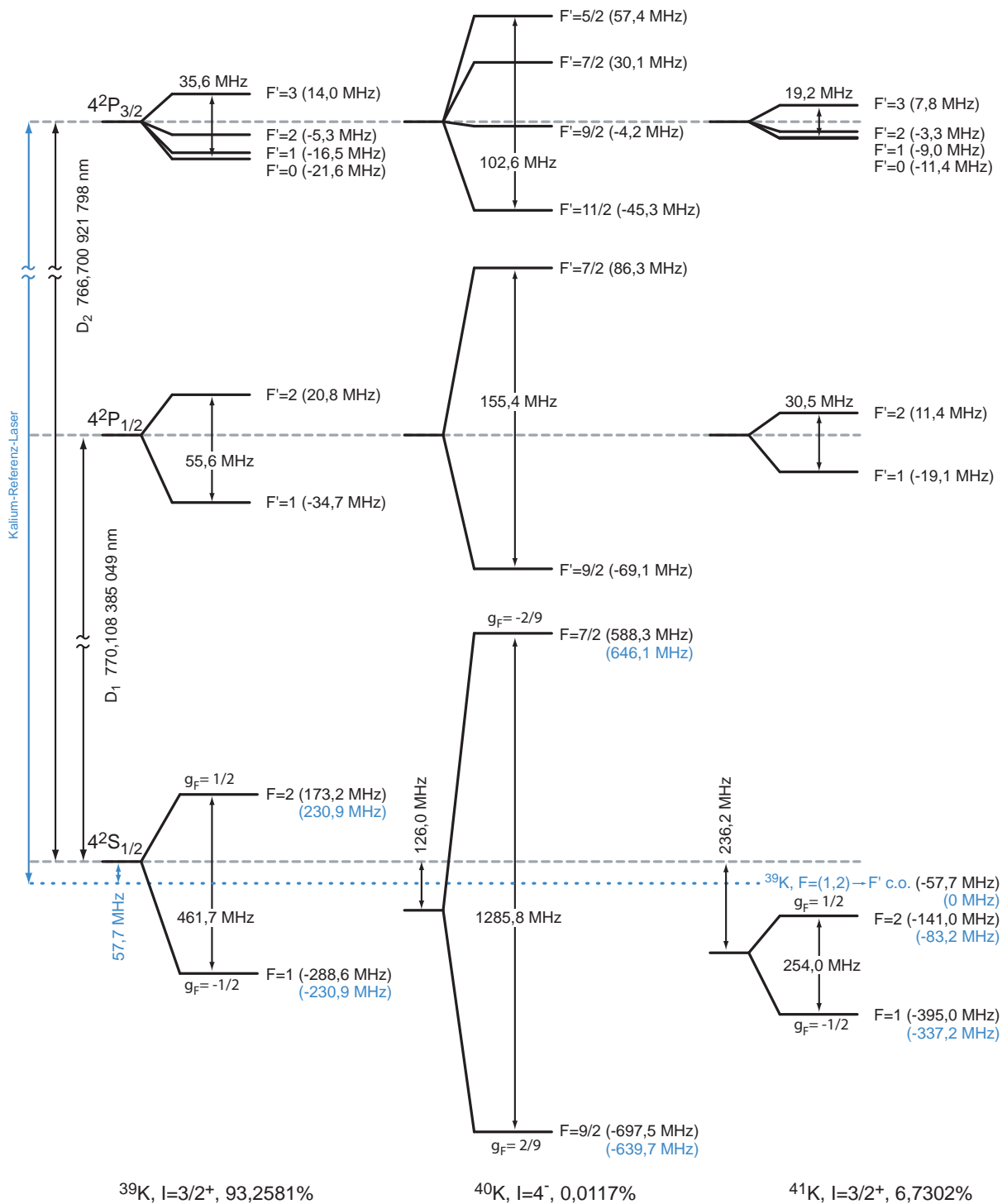
$^{40}\text{K}$

Masse	$m$	39,963 999 u
Natürliche Isotopenhäufigkeit		0,0117 %
Kernspin	$I$	$4^-$
Grundzustand-HFS-Aufspaltung	$\nu_{\text{hfs}}$	1285,790(7) MHz [334]
Vakuumwellenlänge $D_1$ -Übergang (ohne HFS)	$\lambda_{D1}$	770,108 136 5(2) nm [335]
Vakuumwellenlänge $D_2$ -Übergang (ohne HFS)	$\lambda_{D2}$	766.700 674 7(3) nm [335]
Linienbreite $D_1$ -Übergang ( $^{39}\text{K}$ )	$\Gamma_{D1}$	$2\pi \cdot 5,96(1)$ MHz [336]
Linienbreite $D_2$ -Übergang ( $^{39}\text{K}$ )	$\Gamma_{D2}$	$2\pi \cdot 6,04(1)$ MHz [336]
Sättigungsintensität und resonanter Streuquerschnitt		
für $\sigma^\pm$ -pol. Licht auf dem $D_2$ -Übergang	$I_{\text{sat}}$	1,752(3) mW/cm <sup>2</sup>
$ F = 9/2, m_F = \pm 9/2\rangle \rightarrow  F' = 11/2, m_{F'} = \pm 11/2\rangle$	$\sigma_0$	$2,8067 \cdot 10^{-9}$ cm <sup>2</sup>
Sättigungsintensität und resonanter Streuquerschnitt		
für isotrop pol. Licht auf dem $D_2$ -Übergang	$\tilde{I}_{\text{sat}}$	4,379(8) mW/cm <sup>2</sup>
$F = 9/2 \rightarrow F' = 11/2$	$\tilde{\sigma}_0$	$1,1227 \cdot 10^{-9}$ cm <sup>2</sup>
Singulett-Streulänge	$a_S$	104 $a_0$ [337]
Triplet-Streulänge	$a_T$	174 $a_0$ [337]
Schmelzpunkt	$T_m$	63 °C
Siedepunkt	$T_b$	759 °C
Dampfdruck bei 25 °C	$p_v$	$2,4 \cdot 10^{-8}$ mbar

Die Sättigungsintensität  $I_{\text{sat}} = \pi h c \Gamma_{D2} / (3 \lambda_{D2}^3)$  ist hier über die Linienbreite von  $^{39}\text{K}$  berechnet worden. Der Streuquerschnitt folgt aus  $\sigma_0 = 3 \lambda_{D2}^2 / (2\pi)$  [333]. Für isotrop polarisiertes Licht muss über die Quadrate der Clebsch-Gordan-Koeffizienten aller beteiligten Übergänge gemittelt werden und man erhält  $\tilde{I}_{\text{sat}} = 5 I_{\text{sat}} / 2$  und  $\tilde{\sigma}_0 = 2 \sigma_0 / 5$ .

Die Termschemata der Kaliumisotope sind aus den neuesten verfügbaren Messdaten abgeleitet [334, 335]. Die HFS-Aufspaltungen sind maßstabsgetreu dargestellt, wobei die Aufspaltungen in den angeregten Niveaus ( $4P_{1/2}$ ,  $4P_{3/2}$ ) um einen Faktor 5 gegenüber den Aufspaltungen in den Grundzuständen ( $4S_{1/2}$ ) vergrößert sind.

# Kaliumdaten



### C Häufig verwendete Naturkonstanten

---

Vakuum-Lichtgeschwindigkeit	$c$	299 792 458 m/s
Magnetische Feldkonstante	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$
Plancksches Wirkungsquantum	$h$	$6,626\,069\,3(11) \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Plancksches Wirkungsquantum	$\hbar$	$1,054\,571\,68(18) \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Bohrsches Magneton	$\mu_B$	$9,274\,009\,49(80) \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$
Bohrscher Radius	$a_0$	$0,529\,177\,210\,8(18) \cdot 10^{-10} \text{ m}$
Atomare Masseneinheit	$m_u$	$1,660\,538\,86(28) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Boltzmann-Konstante	$k_B$	$1,380\,650\,5(24) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$

---

Data recommended by the Committee on Data for Science and Technology (CODATA) [338].

## Literaturverzeichnis

- [1] R. P. Feynman. *Simulating physics with computers*. International Journal of Theoretical Physics, **21**, 467, (1982).
- [2] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*. Science, **269**, 198, (1995).
- [3] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. *Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms*. Physical Review Letters, **75**, 3969, (1995).
- [4] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. *Observation of Interference Between Two Bose Condensates*. Science, **275**, 637, (1997).
- [5] I. Bloch, T. W. Hänsch, and T. Esslinger. *Measurement of the spatial coherence of a trapped Bose gas at the phase transition*. Nature, **403**, 166, (2000).
- [6] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. *Vortices in a Bose-Einstein Condensate*. Physical Review Letters, **83**, 2498, (1999).
- [7] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard. *Vortex Formation in a Stirred Bose-Einstein Condensate*. Physical Review Letters, **84**, 806, (2000).
- [8] J. R. Abo-Shaeer, C. Raman, J. M. Vogels, and W. Ketterle. *Observation of Vortex Lattices in Bose-Einstein Condensates*. Science, **292**, 476, (2001).
- [9] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller. *Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices*. Physical Review Letters, **81**, 3108, (1998).
- [10] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, and I. Bloch. *Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms*. Nature, **415**, 39, (2002).
- [11] B. DeMarco and D. S. Jin. *Onset of Fermi Degeneracy in a Trapped Atomic Gas*. Science, **285**, 1703, (1999).
- [12] M. Greiner, C. A. Regal, and D. S. Jin. *Emergence of a molecular Bose-Einstein condensate from a Fermi gas*. Nature, **426**, 537, (2003).

- [13] S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, S. Riedl, C. Chin, J. Hecker Denschlag, and R. Grimm. *Bose-Einstein Condensation of Molecules*. *Science*, **302**, 2101, (2003).
- [14] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, S. Gupta, Z. Hadzi-babic, and W. Ketterle. *Observation of Bose-Einstein Condensation of Molecules*. *Physical Review Letters*, **91**, 250401, (2003).
- [15] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin. *Observation of Resonance Condensation of Fermionic Atom Pairs*. *Physical Review Letters*, **92**, 040403, (2004).
- [16] C. Chin, M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, J. Hecker Denschlag, and R. Grimm. *Observation of the Pairing Gap in a Strongly Interacting Fermi Gas*. *Science*, **305**, 1128, (2004).
- [17] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, and W. Ketterle. *Condensation of Pairs of Fermionic Atoms near a Feshbach Resonance*. *Physical Review Letters*, **92**, 120403, (2004).
- [18] T. Stöferle, H. Moritz, C. Schori, M. Köhl, and T. Esslinger. *Transition from a Strongly Interacting 1D Superfluid to a Mott Insulator*. *Physical Review Letters*, **92**, 130403, (2004).
- [19] M. Köhl, H. Moritz, T. Stöferle, C. Schori, and T. Esslinger. *Superfluid to Mott insulator transition in one, two, and three dimensions*. *Journal of Low Temperature Physics*, **138**, 635, (2005).
- [20] B. Paredes, A. Widera, V. Murg, O. Mandel, S. Fölling, I. Cirac, G. V. Shlyapnikov, T. W. Hänsch, and I. Bloch. *Tonks–Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice*. *Nature*, **429**, 277, (2004).
- [21] T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss. *Observation of a One-Dimensional Tonks–Girardeau Gas*. *Science*, **305**, 1125, (2004).
- [22] M. Köhl, H. Moritz, T. Stöferle, K. Günter, and T. Esslinger. *Fermionic Atoms in a Three Dimensional Optical Lattice: Observing Fermi Surfaces, Dynamics, and Interactions*. *Physical Review Letters*, **94**, 080403, (2005).
- [23] H. Moritz, T. Stöferle, K. Günter, M. Köhl, and T. Esslinger. *Confinement Induced Molecules in a 1D Fermi Gas*. *Physical Review Letters*, **94**, 210401, (2005).
- [24] J. K. Chin, D. E. Miller, Y. Liu, C. Stan, W. Setiawan, C. Sanner, K. Xu, and W. Ketterle. *Evidence for superfluidity of ultracold fermions in an optical lattice*. *Nature*, **443**, 961, (2006).



- [25] J. Hubbard. *Electron Correlations in Narrow Energy Bands*. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, **276**, 238, (1963).
- [26] R. Jördens, N. Strohmaier, K. Günter, H. Moritz, and T. Esslinger. *A Mott insulator of fermionic atoms in an optical lattice*. Nature, **455**, 204, (2008).
- [27] U. Schneider, L. Hackermuller, S. Will, Th. Best, I. Bloch, T. A. Costi, R. W. Helmes, D. Rasch, and A. Rosch. *Metallic and Insulating Phases of Repulsively Interacting Fermions in a 3D Optical Lattice*. Science, **322**, 1520, (2008).
- [28] W. Hofstetter, J. I. Cirac, P. Zoller, E. Demler, and M. D. Lukin. *High-Temperature Superfluidity of Fermionic Atoms in Optical Lattices*. Physical Review Letters, **89**, 220407, (2002).
- [29] D. J. Scalapino. *The case for  $d_{x^2-y^2}$  pairing in the cuprate superconductors*. Physics Reports, **250**, 329, (1995).
- [30] P. W. Anderson. *The Resonating Valence Bond State in  $La_2CuO_4$  and Superconductivity*. Science, **235**, 1196, (1987).
- [31] P. A. Lee, N. Nagaosa, and X.-G. Wen. *Doping a Mott Insulator: Physics of High Temperature Superconductivity*. Reviews of Modern Physics, **78**, 17, (2006).
- [32] M. Lewenstein, A. Sanpera, V. Ahufinger, B. Damski, A. Sen, and U. Sen. *Ultracold atomic gases in optical lattices: mimicking condensed matter physics and beyond*. Advances in Physics, **56**, 243, (2007).
- [33] K. Günter, T. Stöferle, H. Moritz, M. Köhl, and T. Esslinger. *Bose-Fermi Mixtures in a Three-Dimensional Optical Lattice*. Physical Review Letters, **96**, 180402, (2006).
- [34] S. Ospelkaus, C. Ospelkaus, O. Wille, M. Succo, P. Ernst, K. Sengstock, and K. Bongs. *Localization of Bosonic Atoms by Fermionic Impurities in a Three-Dimensional Optical Lattice*. Physical Review Letters, **96**, 180403, (2006).
- [35] Th. Best, S. Will, U. Schneider, L. Hackermueller, D. van Oosten, I. Bloch, and D.-S. Luehmann. *Role of interactions in  $^{87}Rb$ - $^{40}K$  Bose-Fermi mixtures in a 3d optical lattice*. Physical Review Letters, **102**, 030408, (2009).
- [36] H. P. Büchler and G. Blatter. *Supersolid versus Phase Separation in Atomic Bose-Fermi Mixtures*. Physical Review Letters, **91**, 130404, (2003).
- [37] F. Illuminati and A. Albus. *High-Temperature Atomic Superfluidity in Lattice Bose-Fermi Mixtures*. Physical Review Letters, **93**, 090406, (2004).
- [38] L. Mathey, D.-W. Wang, W. Hofstetter, M. D. Lukin, and E. Demler. *Luttinger Liquid of Polarons in One-Dimensional Boson-Fermion Mixtures*. Physical Review Letters, **93**, 120404, (2004).

## Literaturverzeichnis

---

- [39] E. Altman, E. Demler, and M. D. Lukin. *Probing many-body states of ultracold atoms via noise correlations*. Physical Review A, **70**, 013603, (2004).
- [40] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, (1995).
- [41] Ya. M. Blanter and M. Büttiker. *Shot Noise in Mesoscopic Conductors*. Physics Reports, **336**, 1, (2000).
- [42] C. Beenakker and C. Schönberger. *Quantum Shot Noise*. Physics Today, **56**, 37, (2003).
- [43] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss. *Correlation between Photons in two Coherent Beams of Light*. Nature, **177**, 27, (1956).
- [44] M. Yasuda and F. Shimizu. *Observation of Two-Atom Correlation of an Ultracold Neon Atomic Beam*. Physical Review Letters, **77**, 3090, (1996).
- [45] S. Fölling, F. Gerbier, A. Widera, O. Mandel, T. Gericke, and I. Bloch. *Spatial quantum noise interferometry in expanding ultracold atom clouds*. Nature, **434**, 481, (2005).
- [46] M. Schellekens, R. Hoppeler, A. Perrin, J. Viana Gomes, D. Boiron, A. Aspect, and C. I. Westbrook. *Hanbury Brown Twiss Effect for Ultracold Quantum Gases*. Science, **310**, 648, (2005).
- [47] A. Öttl, S. Ritter, M. Köhl, and T. Esslinger. *Correlations and Counting Statistics of an Atom Laser*. Physical Review Letters, **95**, 090404, (2005).
- [48] J. Esteve, J.-B. Trebbia, T. Schumm, A. Aspect, C. I. Westbrook, and I. Bouchoule. *Observations of Density Fluctuations in an Elongated Bose Gas: Ideal Gas and Quasicondensate Regimes*. Physical Review Letters, **96**, 130403, (2006).
- [49] I. B. Spielman, W. D. Phillips, and J. V. Porto. *Mott-Insulator Transition in a Two-Dimensional Atomic Bose Gas*. Physical Review Letters, **98**, 080404, (2007).
- [50] T. Rom, Th. Best, D. van Oosten, U. Schneider, S. Fölling, B. Paredes, and I. Bloch. *Free fermion antibunching in a degenerate atomic Fermi gas released from an optical lattice*. Nature, **444**, 733, (2006).
- [51] T. Rom, T. Best, D. van Oosten, U. Schneider, S. Fölling, B. Paredes, and I. Bloch. *Antibunching in einem atomaren Fermigas*. Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, **Vortrag**, A 1.4, (2007).

- [52] S. Will, T. Best, T. Rom, U. Schneider, L. Hackermüller, D. van Oosten, M. Zwierlein, and I. Bloch. *Ultrakalte bosonische und fermionische Quantengase in optischen Gittern*. Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, **Poster C**, Q 64.22, (2007). <http://www.dpg-verhandlungen.de/2007/duesseldorf/q64.pdf>.
- [53] N. Strohmaier, Y. Takasu, K. Günter, R. Jördens, and M. Köhl. *Interaction-Controlled Transport of an Ultracold Fermi Gas*. Physical Review Letters, **99**, 220601, (2007).
- [54] K. Huang. *Statistical Mechanics*. Wiley, New York, (1987).
- [55] A. L. Fetter and J. D. Walecka. *Quantum Theory of Many-Particle Systems*. Courier Dover Publications, (2003).
- [56] W. Pauli. *The Connection Between Spin and Statistics*. Physical Review, **58**, 716, (1940).
- [57] M. E. Peskin and D. V. Schoeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, (1995).
- [58] F. Schwabel. *Quantenmechanik für Fortgeschrittene (QMII)*. Springer, (1997).
- [59] T. Fließbach. *Statistische Physik*. Elsevier, (2007).
- [60] D. A. Butts and D. S. Rokhsar. *Trapped Fermi gases*. Physical Review A, **55**, 4346, (1997).
- [61] M. Li, Z. Yan, J. Chen, L. Chen, and Ch. Chen. *Thermodynamic properties of an ideal Fermi gas in an external potential with  $U = br^t$  in any dimensional space*. Physical Review A, **58**, 1445, (1998).
- [62] E. J. Mueller. *Density Profile of a Harmonically Trapped Ideal Fermi Gas in Arbitrary Dimension*. Physical Review Letters, **93**, 190404, (2004).
- [63] C. A. Regal, M. Greiner, S. Giorgini, M. Holl, and D. S. Jin. *Momentum Distribution of a Fermi Gas of Atoms in the BCS-BEC Crossover*. Physical Review Letters, **95**, 250404, (2005).
- [64] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin. *Solid State Physics*. Saunders College Publishing, (1976).
- [65] L. Chen, Z. Yan, M. Li, and Ch. Chen. *Bose–Einstein condensation of an ideal Bose gas trapped in any dimension*. Journal of Physics A, **31**, 8289, (1998).
- [66] R. K. Pathria. *Statistical Mechanics, 2nd edition*. Butterworth-Heinemann, (1996).

## Literaturverzeichnis

---

- [67] M. Schulz. *Thermodynamik und Statistische Physik (Theorie V)*. Skript, Abteilung für theoretische Physik Universität Ulm, (2001).
- [68] A. G. Truscott, K. E. Strecker, W. I. McAlexander, G. B. Partridge, and R. G. Hulet. *Observation of Fermi Pressure in a Gas of Trapped Atoms*. *Science*, **291**, 2570, (2001).
- [69] J. Schneider and H. Wallis. *Mesoscopic Fermi gas in a harmonic trap*. *Physical Review A*, **57**, 1253, (1998).
- [70] J. Friedel. *The distribution of electrons round impurities in monovalent metals*. *Philosophical Magazine*, **43**, 153, (1952).
- [71] B. DeMarco. *Quantum Behavior of an Atomic Fermi Gas*. PhD thesis, University of Colorado, (2001).
- [72] G. M. Bruun and C. W. Clark. *Ideal gases in time-dependent traps*. *Physical Review A*, **61**, 061601, (2000).
- [73] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari. *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*. *Reviews of Modern Physics*, **71**, 463, (1999).
- [74] A. J. Leggett. *Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts*. *Reviews of Modern Physics*, **73**, 307, (2001).
- [75] W. Ketterle, D. S. Durfee, and D. M. Stamper-Kurn. *Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates*. *Proceedings of the International School of Physics*, **CXL**, 67, (1999).
- [76] A. S. Parkins and D. F. Walls. *The physics of trapped dilute-gas Bose-Einstein condensates*. *Physics Reports*, **303**, 1, (1998).
- [77] J. Dalibard. *Collisional dynamics of ultra-cold atomic gases*. *Proceedings of the International School of Physics*, **CXL**, 321, (1999).
- [78] D. J. Heinzen. *Ultracold atomic interactions*. *Proceedings of the International School of Physics*, **CXL**, 351, (1999).
- [79] J. Weiner, V. S. Bagnato, S. Zilio, and P. S. Julienne. *Experiments and theory in cold and ultracold collisions*. *Review of Modern Physics*, **71**, 1, (1999).
- [80] O. Penrose and L. Onsager. *Bose-Einstein Condensation and Liquid Helium*. *Physical Review*, **104**, 576, (1956).
- [81] C. N. Yang. *Concept of Off-Diagonal Long-Range Order and the Quantum Phases of Liquid He and of Superconductors*. *Reviews of Modern Physics*, **34**, 694, (1962).

- [82] W. Zwerger. *Mott-Hubbard transition of cold atoms in optical lattices*. Journal of Optics B, **5**, 9, (2003).
- [83] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle. *Observation of Feshbach resonances in a Bose–Einstein condensate*. Nature, **392**, 151, (1998).
- [84] Ph. Courteille, R. S. Freeland, D. J. Heinzen, F. A. van Abeelen, and B. J. Verhaar. *Observation of a Feshbach Resonance in Cold Atom Scattering*. Physical Review Letters, **81**, 69, (1998).
- [85] E. Timmermans, P. Tommasini, M. Hussein, and A. Kerman. *Feshbach resonances in atomic Bose–Einstein condensates*. Physics Reports, **315**, 199, (1999).
- [86] J. Stenger, S. Inouye, M. R. Andrews, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle. *Strongly Enhanced Inelastic Collisions in a Bose-Einstein Condensate near Feshbach Resonances*. Physical Review Letters, **82**, 2422, (1999).
- [87] P. O. Fedichev, M. W. Reynolds, and G. V. Shlyapnikov. *Three-Body Recombination of Ultracold Atoms to a Weakly Bound  $s$  Level*. Physical Review Letters, **77**, 2921, (1996).
- [88] S. L. Cornish, N. R. Claussen, J. L. Roberts, E. A. Cornell, and C. E. Wieman. *Stable  $^{85}\text{Rb}$  Bose-Einstein Condensates with Widely Tunable Interactions*. Physical Review Letters, **85**, 1795, (2000).
- [89] E. A. Donley, N. R. Claussen, S. L. Cornish, J. L. Roberts, E. A. Cornell, and C. E. Wieman. *Dynamics of collapsing and exploding Bose-Einstein condensates*. Nature, **412**, 295, (2001).
- [90] J. Cubizolles, T. Bourdel, S. J. J. M. F. Kokkelmans, G.V. Shlyapnikov, and C. Salomon. *Production of Long-Lived Ultracold  $\text{Li}_2$  Molecules from a Fermi Gas*. Physical Review Letters, **91**, 240401, (2003).
- [91] S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, C. Chin, J. Hecker Denschlag, and R. Grimm. *Pure Gas of Optically Trapped Molecules Created from Fermionic Atoms*. Physical Review Letters, **91**, 240402, (2003).
- [92] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin. *Lifetime of Molecule-Atom Mixtures near a Feshbach Resonance in  $^{40}\text{K}$* . Physical Review Letters, **92**, 083201, (2004).
- [93] D. S. Petrov. *Three-body problem in Fermi gases with short-range interparticle interaction*. Physical Review A, **67**, 010703, (2003).
- [94] D. S. Petrov, C. Salomon, and G.V. Shlyapnikov. *Weakly Bound Dimers of Fermionic Atoms*. Physical Review Letters, **93**, 090404, (2004).

- [95] I. Bloch. *Ultracold quantum gases in optical lattices*. Nature Physics, **1**, 23, (2005).
- [96] Y. Castin and R. Dum. *Bose-Einstein Condensates in Time Dependent Traps*. Physical Review Letters, **77**, 5315, (1996).
- [97] K. Mølmer. *Bose Condensates and Fermi Gases at Zero Temperature*. Physical Review Letters, **80**, 1804, (1998).
- [98] R. Roth and H. Feldmeier. *Mean-field instability of trapped dilute boson-fermion mixtures*. Physical Review A, **65**, 021603, (2002).
- [99] R. Roth. *Structure and stability of trapped atomic boson-fermion mixtures*. Physical Review A, **66**, 013614, (2002).
- [100] E. G. M. van Kempen, S. J. J. M. F. Kokkelmans, D. J. Heinzen, and B. J. Verhaar. *Interisotope Determination of Ultracold Rubidium Interactions from Three High-Precision Experiments*. Physical Review Letters, **88**, 093201, (2002).
- [101] M. Zaccanti, F. Ferlaino C. D'Errico, G. Roati, M. Inguscio, and G. Modugno. *Control of the interaction in a Fermi-Bose mixture*. Physical Review A, **74**, 041605, (2006).
- [102] F. Ferlaino, C. D'Errico, G. Roati, M. Zaccanti, M. Inguscio, G. Modugno, and A. Simoni. *Feshbach spectroscopy of a K-Rb atomic mixture*. Physical Review A, **73**, 040702, (2006).
- [103] F. Ferlaino, C. D'Errico, G. Roati, M. Zaccanti, M. Inguscio, G. Modugno, and A. Simoni. *Erratum: Feshbach spectroscopy of a K-Rb atomic mixture [Phys. Rev. A 73, 040702 (2006)]*. Physical Review A, **74**, 039903(E), (2006).
- [104] A. Marte, T. Volz, J. Schuster, S. Dürr, G. Rempe, E. G. M. van Kempen, and B. J. Verhaar. *Feshbach Resonances in Rubidium 87: Precision Measurement and Analysis*. Physical Review Letters, **89**, 283202, (2002).
- [105] S. Ospelkaus, C. Ospelkaus, L. Humbert, K. Sengstock, and K. Bongs. *Tuning of Heteronuclear Interactions in a Degenerate Fermi-Bose Mixture*. Physical Review Letters, **97**, 120403, (2006).
- [106] H. Hu, X.-J. Liu, and M. Modugno. *Expansion of a quantum degenerate boson-fermion mixture*. Physical Review A, **67**, 063614, (2003).
- [107] F. Ferlaino, E. de Mirandes, G. Roati, G. Modugno, and M. Inguscio. *Expansion of a Fermi Gas Interacting with a Bose-Einstein Condensate*. Physical Review Letters, **92**, 140405, (2004).

- [108] G. Modugno, G. Roati, F. Riboli, F. Ferlaino, R. J. Brecha, and M. Inguscio. *Collapse of a Degenerate Fermi Gas*. Science, **297**, 2240, (2002).
- [109] C. Ospelkaus, S. Ospelkaus, K. Sengstock, and K. Bongs. *Interaction-Driven Dynamics of  $^{40}\text{K}$ - $^{87}\text{Rb}$  Fermion-Boson Gas Mixtures in the Large-Particle-Number Limit*. Physical Review Letters, **96**, 020401, (2006).
- [110] S. K. Adhikari. *Mean-field description of a dynamical collapse of a fermionic condensate in a trapped boson-fermion mixture*. Physical Review A, **70**, 043617, (2004).
- [111] N. Nygaard and K. Mølmer. *Component separation in harmonically trapped boson-fermion mixtures*. Physical Review A, **59**, 2974, (1999).
- [112] M. Greiner, I. Bloch, T. W. Hänsch, and T. Esslinger. *Magnetic transport of trapped cold atoms over a large distance*. Physical Review A, **63**, 031401, (2001).
- [113] B. DeMarco, H. Rohner, and D. S. Jin. *An enriched  $^{40}\text{K}$  source for fermionic atom studies*. Review of Scientific Instruments, **70**, 1967, (1999).
- [114] *Alkali Metal Dispensers*. SAES Getters S.p.A., Broschüre.
- [115] *St101 non-evaporable getters*. SAES Getters S.p.A., Broschüre.
- [116] J. Fortagh, A. Grossmann, T. W. Hänsch, and C. Zimmermann. *Fast loading of a magneto-optical trap from a pulsed thermal source*. Journal of Applied Physics, **84**, 6499, (1998).
- [117] J. M. Goldwin. *Quantum Degeneracy and Interactions in the  $^{87}\text{Rb}$ - $^{40}\text{K}$  Bose-Fermi Mixture*. PhD thesis, University of Colorado, (2005).
- [118] C. S. Adams and E. Riis. *Laser cooling and trapping of neutral atoms*. Progress in Quantum Electronics, **21**, 1, (1997).
- [119] H. J. Metcalf and P. van der Straten. *Lasercooling and Trapping*. Springer, (1999).
- [120] T. Walker, D. Sesko, and C. Wieman. *Collective Behavior of Optically Trapped Neutral Atoms*. Physical Review Letters, **64**, 408, (1990).
- [121] D. W. Sesko, T. G. Walker, and C. E. Wieman. *Behavior of neutral atoms in a spontaneous force trap*. Journal of the Optical Society of America B, **8**, 946, (1991).
- [122] E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, and D. E. Pritchard. *Trapping of Neutral Sodium Atoms with Radiation Pressure*. Physical Review Letters, **59**, 2631, (1987).
- [123] A. M. Steane, M. Chowdhury, and C. J. Foot. *Radiation force in the magneto-optical trap*. Journal of the Optical Society of America B, **9**, 2142, (1992).

## Literaturverzeichnis

---

- [124] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji. *Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients: simple theoretical models*. Journal of the Optical Society of America B, **6**, 2023, (1989).
- [125] M. Prevedelli, F. S. Cataliotti, E. A. Cornell, J. R. Ensher, C. Fort, L. Ricci, G. M. Tino, and M. Inguscio. *Trapping and cooling of potassium isotopes in a double-magneto-optical-trap apparatus*. Physical Review A, **59**, 886, (1999).
- [126] A. L. Schawlow. *Spectroscopy in a new light*. Reviews of Modern Physics, **54**, 697, (1982).
- [127] G. Ferrari, M.-O. Mewes, F. Schreck, and C. Salomon. *High-power multiple-frequency narrow-linewidth laser source based on a semiconductor tapered amplifier*. Optics Letters, **24**, 151, (1999).
- [128] W. Brunner S. Raab, K. Hoffman and H. Paul. *Mode Competition in Injection Lasers*. Optics Communications, **28**, 213, (1979).
- [129] U. Schünemann, H. Engler, R. Grimm, M. Weidemüller, and M. Zielonkowski. *Simple scheme for tunable frequency offset locking of two lasers*. Review of Scientific Instruments, **70**, 242, (1999).
- [130] A. Banerjee and V. Natarajan. *Absolute-frequency measurements of the  $D_2$  line and fine-structure interval in  $^{39}\text{K}$* . Physical Review A, **70**, 052505, (2004).
- [131] C. E. Wieman and L. Hollberg. *Using diode lasers for atomic physics*. Review of Scientific Instruments, **62**, 1, (1991).
- [132] L. Ricci, M. Weidemüller, T. Esslinger, A. Hemmerich, C. Zimmermann, V. Vuletic, and T.W. Hänsch W. König. *A compact grating-stabilized diode laser system for atomic physics*. Optics Communications, **117**, 541, (1987).
- [133] Eagleyard Photonics Datasheet. *Ridge Waveguide Laser with AR coating, EYP-RWE-0790-04000-0750-SOT03-0000*.
- [134] J. Goldwin, S. B. Papp, B. DeMarco, and D. S. Jin. *Two-species magneto-optical trap with  $^{40}\text{K}$  and  $^{87}\text{Rb}$* . Physical Review A, **65**, 021402, (2002).
- [135] m2k-laser GmbH. *Trapezverstärker für MOPA-Systeme*.
- [136] M. Greiner. *persönliche Mitteilung*.
- [137] W. Ketterle, K. B. Davis, M. A. Joffe, A. Martin, and D. E. Pritchard. *High Densities of Cold Atoms in a Dark Spontaneous-Force Optical Trap*. Physical Review Letters, **70**, 2253, (1993).



- [138] C. S. Adams, H. J. Lee, N. Davidson, M. Kasevich, and S. Chu. *Evaporative Cooling in a Crossed Dipole Trap*. Physical Review Letters, **74**, 3577, (1995).
- [139] F. Lison, P. Schuh, D. Haubrich, and D. Meschede. *High-brilliance Zeeman-slowed cesium atomic beam*. Physical Review A, **61**, 013405, (1999).
- [140] K. Dieckmann, R. J. C. Spreeuw, M. Weidemüller, and J. T. M. Walraven. *Two-dimensional magneto-optical trap as a source of slow atoms*. Physical Review A, **58**, 3891, (1999).
- [141] L. G. Marcassa, G. D. Telles, S. R. Muniz, and V. S. Bagnato. *Collisional losses in a K-Rb cold mixture*. Physical Review A, **63**, 013413, (2000).
- [142] C. Monroe, W. Swann, H. Robinson, and C. Wieman. *Very Cold Trapped Atoms in a Vapor Cell*. Physical Review Letters, **65**, 1571, (1990).
- [143] J. Vigué. *Possibility of applying laser-cooling techniques to the observation of collective quantum effects*. Physical Review A, **34**, 4476, (1986).
- [144] H. Wang and W. C. Stwalley. *Ultracold photoassociative spectroscopy of heteronuclear alkali-metal diatomic molecules*. Journal of Chemical Physics, **108**, 5767, (1998).
- [145] A. Gallagher and D. E. Pritchard. *Exoergic Collisions of Cold Na\*-Na*. Physical Review Letters, **63**, 957, (1989).
- [146] M. Taglieber, A.-C. Voigt, F. Henkel, S. Fray, T. W. Hänsch, and K. Dieckmann. *Simultaneous magneto-optical trapping of three atomic species*. Physical Review A, **73**, 011402, (2006).
- [147] M. Mudrich, S. Kraft, K. Singer, R. Grimm, A. Mosk, and M. Weidemüller. *Sympathetic Cooling with Two Atomic Species in an Optical Trap*. Physical Review Letters, **88**, 253001, (2002).
- [148] W. Petrich, M. H. Anderson, J. R. Ensher, and E. A. Cornell. *Behavior of atoms in a compressed magneto-optical trap*. Journal of the Optical Society of America B, **11**, 1332, (1994).
- [149] C. G. Townsend, C. J. Cooper N. H. Edwards, K. P. Zetie, C. J. Foot, A. M. Steane, P. Szriftgiser, H. Perrin, and J. Dalibard. *Phase-space density in the magneto-optical trap*. Physical Review A, **52**, 1423, (1995).
- [150] G. Ferrari, M. Inguscio, W. Jastrzebski, G. Modugno, G. Roati, and A. Simoni. *Collisional Properties of Ultracold K-Rb Mixtures*. Physical Review Letters, **89**, 053202, (2002).

## Literaturverzeichnis

---

- [151] A. L. Migdall, J. V. Prodan, W. D. Phillips, T. H. Bergeman, and H. J. Metcalf. *First Observation of Magnetically Trapped Neutral Atoms*. Physical Review Letters, **54**, 2596, (1985).
- [152] R. Long, T. Rom, W. Hänsel, T. W. Hänsch, and J. Reichel. *Long distance magnetic conveyor for precise positioning of ultracold atoms*. European Physical Journal D, **35**, 125, (2005).
- [153] W. Petrich, M. H. Anderson, J. R. Ensher, and E. A. Cornell. *Stable, Tightly Confining Magnetic Trap for Evaporative Cooling of Neutral Atoms*. Physical Review Letters, **74**, 3352, (1995).
- [154] E. Majorana. *Atomi orientati in campo magnetico variabile*. Nuovo Cimento, **9**, 43, (1932).
- [155] T. Esslinger, I. Bloch, and T. W. Hänsch. *Bose-Einstein condensation in a quadrupole-Ioffe-configuration trap*. Physical Review A, **58**, 2664, (1998).
- [156] Yu. V. Gott, M. S. Ioffe, and V. G. Tel'kovskii. *Some New Results on Confinement in Magnetic Traps (Russian)*. Nuclear Fusion, **Suppl. 2**, 1045, (1962).
- [157] D. E. Pritchard. *Cooling Neutral Atoms in a Magnetic Trap for Precision Spectroscopy*. Physical Review Letters, **51**, 1336, (1983).
- [158] H. F. Hess. *Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen*. Physical Review B, **34**, 3476, (1986).
- [159] C. J. Myatt, E. A. Burt, R. W. Ghrist, E. A. Cornell, and C. E. Wieman. *Production of Two Overlapping Bose-Einstein Condensates by Sympathetic Cooling*. Physical Review Letters, **78**, 586, (1997).
- [160] F. Schreck, G. Ferrari, K. L. Corwin, J. Cubizolles, L. Khaykovich, M.-O. Mewes, and C. Salomon. *Sympathetic cooling of bosonic and fermionic lithium gases towards quantum degeneracy*. Physical Review A, **64**, 011402, (2001).
- [161] G. Roati, F. Riboli, G. Modugno, and M. Inguscio. *Fermi-Bose Quantum Degenerate  $^{40}\text{K}$ - $^{87}\text{Rb}$  Mixture with Attractive Interaction*. Physical Review Letters, **89**, 150403, (2002).
- [162] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. A. Joffe, M. R. Andrews, and W. Ketterle. *Evaporative Cooling of Sodium Atoms*. Physical Review Letters, **74**, 5202, (1995).
- [163] W. Ketterle and N. J. van Druten. *Evaporative Cooling of Trapped Atoms*. Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics, **37**, 181, (1996).

- 
- [164] S. Aubin, S. Myrskog, M. H. T. Extavour, L. J. LeBlanc, D. McKay, A. Stummer, and J. H. Thywissen. *Rapid sympathetic cooling to Fermi degeneracy on a chip*. Nature Physics, **2**, 384, (2006).
- [165] J. J. Sakurai (Editor: San Fu Tuan). *Modern Quantum Mechanics, Revised Edition*. Addison-Wesley Publishing Company, (1994).
- [166] T. Stöferle. *Exploring Atomic Quantum Gases in Optical Lattices*. PhD thesis, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, (2005).
- [167] R. Onofrio and C. Presilla. *Reaching Fermi Degeneracy in Two-Species Optical Dipole Traps*. Physical Review Letters, **89**, 100401, (2002).
- [168] R. Onofrio and C. Presilla. *Ultracold Atomic Fermi–Bose Mixtures in Bichromatic Optical Dipole Traps: A Novel Route to Study Fermion Superfluidity*. Journal of Statistical Physics, **115**, 57, (2004).
- [169] M. Brown-Hayes and R. Onofrio. *Optimal cooling strategies for magnetically trapped atomic Fermi-Bose mixtures*. Physical Review A, **70**, 063614, (2004).
- [170] L. D. Carr and Y. Castin. *Limits of sympathetic cooling of fermions: The role of heat capacity of the coolant*. Physical Review Letters, **69**, 043611, (2004).
- [171] G. Ferrari. *Collisional relaxation in a fermionic gas*. Physical Review A, **59**, 4125, (1999).
- [172] E. Timmermans and R. Côté. *Superfluidity in Sympathetic Cooling with Atomic Bose-Einstein Condensates*. Physical Review Letters, **80**, 3419, (1998).
- [173] A. P. Chikkatur, A. Görlitz, D. M. Stamper-Kurn, S. Inouye, S. Gupta, and W. Ketterle. *Suppression and Enhancement of Impurity Scattering in a Bose-Einstein Condensate*. Physical Review Letters, **85**, 483, (2000).
- [174] E. Timmermans. *Degenerate Fermion Gas Heating by Hole Creation*. Physical Review Letters, **87**, 240403, (2001).
- [175] L. D. Carr, T. Bourdel, and Y. Castin. *Limits of sympathetic cooling of fermions by zero-temperature bosons due to particle losses*. Physical Review A, **69**, 033603, (2004).
- [176] A. J. Kerman, V. Vuletić, Ch. Chin, and S. Chu. *Beyond Optical Molasses: 3D Raman Sideband Cooling of Atomic Cesium to High Phase-Space Density*. Physical Review Letters, **84**, 439, (2000).
- [177] D. Boiron, A. Michaud, J. M. Fournier, L. Simard, M. Sprenger, G. Grynberg, and C. Salomon. *Cold and dense cesium clouds in far-detuned dipole traps*. Physical Review A, **57**, 4106, (1998).

## Literaturverzeichnis

---

- [178] S. L. Winoto, M. T. DePue, N. E. Bramall, and D. S. Weiss. *Laser cooling at high density in deep far-detuned optical lattices*. Physical Review A, **59**, 19, (1991).
- [179] Z. Idziaszek, L. Santos, and M. Lewenstein. *Laser cooling of trapped Fermi gases far below the Fermi temperature*. Physical Review A, **64**, 051402, (2001).
- [180] C. A. Regal and D. S. Jin. *Measurement of Positive and Negative Scattering Lengths in a Fermi Gas of Atoms*. Physical Review Letters, **90**, 230404, (2003).
- [181] B. DeMarco, S. B. Papp, and D. S. Jin. *Pauli Blocking of Collisions in a Quantum Degenerate Atomic Fermi Gas*. Physical Review Letters, **86**, 5409, (2001).
- [182] Andor. *Digital Camera Fundamentals*. (2006).
- [183] R. W. P. Drever, J. L. Hall, F. V. Kowalski, J. Hough, G. M. Ford, A. J. Munley, and H. Ward. *Laser Phase and Frequency Stabilization Using an Optical Resonator*. Applied Physics B, **31**, 97, (1983).
- [184] E. D. Black. *An introduction to Pound–Drever–Hall laser frequency stabilization*. American Journal of Physics, **69**, 79, (2001).
- [185] T. Rom, T. Best, O. Mandel, A. Widera, M. Greiner, T. W. Hänsch, and I. Bloch. *State Selective Production of Molecules in Optical Lattices*. Physical Review Letters, **93**, 073002, (2004).
- [186] W. Gerlach and O. Stern. *Über die Richtungsquantelung im Magnetfeld*. Annalen der Physik, **74**, 673, (1924).
- [187] A. Abragam. *The principles of nuclear magnetism*. Clarendon Press, Oxford, (1961).
- [188] D. S. Naik and C. Raman. *Optically plugged quadrupole trap for Bose-Einstein condensates*. Physical Review A, **71**, 033617, (2005).
- [189] A. Marte. *Feshbach-Resonanzen bei Stößen ultrakalter Rubidiumatome*. PhD thesis, Technische Universität München, (2003).
- [190] V. S. Letokhov. *Narrowing of the Doppler width in a standing light wave*. Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters, **7**, 272, (1968).
- [191] S. Chu, J. E. Bjorkholm, A. Ashkin, and A. Cable. *Experimental Observation of Optically Trapped Atoms*. Physical Review Letters, **57**, 314, (1986).
- [192] D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, A. P. Chikkatur, S. Inouye, H.-J. Miesner, J. Stenger, and W. Ketterle. *Optical Confinement of a Bose-Einstein Condensate*. Physical Review Letters, **80**, 2027, (1998).

- 
- [193] M. D. Barrett, J. A. Sauer, and M. S. Chapman. *All-Optical Formation of an Atomic Bose-Einstein Condensate*. Physical Review Letters, **87**, 010404, (2001).
- [194] R. Grimm, M. Weidemüller, and Y. B. Ovchinnikov. *Optical dipole traps for neutral atoms*. Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics, **42**, 95, (2000).
- [195] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji. *Dressed-atom approach to atomic motion in laser light: the dipole force revisited*. Journal of the Optical Society of America B, **2**, 1707, (1985).
- [196] M. T. DePue, C. McCormick, S. Lukman Winoto, S. Oliver, and D. S. Weiss. *Unity Occupation of Sites in a 3D Optical Lattice*. Physical Review Letters, **82**, 2262, (1999).
- [197] S. Ospelkaus-Schwarzer. *Quantum Degenerate Fermi-Bose Mixtures of  $^{40}\text{K}$  and  $^{87}\text{Rb}$  in 3D Optical Lattices*. PhD thesis, Physik Department der Universität Hamburg, (2006).
- [198] P. B. Blakie, A. Bezett, and P. Buonsante. *Degenerate Fermi gas in a combined harmonic-lattice potential*. Physical Review A, **75**, 063609, (2007).
- [199] D. M. Giltner, R. W. McGowan, and S. A. Lee. *Theoretical and experimental study of the Bragg scattering of atoms from a standing light wave*. Physical Review A, **52**, 3966, (1995).
- [200] S. Gupta, A. E. Leanhardt, A. D. Cronin, and D. E. Pritchard. *Coherent manipulation of atoms with standing light waves*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, **2**, 479, (2001).
- [201] M. Wilkens, E. Schumacher, and P. Meystre. *Band theory of a common model of atom optics*. Physical Review A, **44**, 3130, (1991).
- [202] P. J. Martin, B. G. Oldaker, A. H. Miklich, and D. E. Pritchard. *Bragg scattering of atoms from a standing light wave*. Physical Review Letters, **60**, 515, (1988).
- [203] M. Kozuma, L. Deng, E. W. Hagley, J. Wen, R. Lutwak, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips. *Coherent Splitting of Bose-Einstein Condensed Atoms with Optically Induced Bragg Diffraction*. Physical Review Letters, **82**, 871, (1999).
- [204] S. Dürr, S. Kunze, and G. Rempe. *Pendellösung oscillations in second-order Bragg scattering of atoms from a standing light wave*. Journal of Optics B, **8**, 531, (1996).
- [205] P. L. Gould, G. A. Ruff, and D. E. Pritchard. *Diffraction of atoms by light: The near-resonant Kapitza-Dirac effect*. Physical Review Letters, **56**, 827, (1986).

## Literaturverzeichnis

---

- [206] Yu. B. Ovchinnikov, J. H. Müller, M. R. Doery, E. J. D. Vredenburg, K. Helmer-son, S. L. Rolston, and W. D. Phillips. *Diffraction of a Released Bose-Einstein Condensate by a Pulsed Standing Light Wave*. Physical Review Letters, **83**, 284, (1999).
- [207] J. C. Slater. *A Soluble Problem in Energy Bands*. Physical Review, **87**, 807, (1952).
- [208] F. S. Cataliotti, S. Burger, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi, A. Trombettoni, A. Smerzi, and M. Inguscio. *Josephson Junction Arrays with Bose-Einstein Condensates*. Science, **293**, 843, (2001).
- [209] B. P. Anderson and M. A. Kasevich. *Macroscopic Quantum Interference from Atomic Tunnel Arrays*. Science, **282**, 1686, (1998).
- [210] M. Greiner. *Ultracold quantum gases in three-dimensional optical lattice potentials*. PhD thesis, Ludwig-Maximilians-Universität München, (2003).
- [211] Ch. Hooley and J. Quintanilla. *Single-Atom Density of States of an Optical Lattice*. Physical Review Letters, **93**, 080404, (2004).
- [212] M. Rigol and A. Muramatsu. *Confinement control by optical lattices*. Physical Review A, **70**, 043627, (2004).
- [213] A. M. Rey, G. Pupillo, Ch. W. Clark, and C. J. Williams. *Ultracold atoms confined in an optical lattice plus parabolic potential: A closed-form approach*. Physical Review A, **72**, 033616, (2005).
- [214] L. Viverit, C. Menotti, T. Calarco, and A. Smerzi. *Efficient and Robust Initialization of a Qubit Register with Fermionic Atoms*. Physical Review Letters, **93**, 110401, (2004).
- [215] M. Rigol and A. Muramatsu. *Quantum Monte Carlo study of confined fermions in one-dimensional optical lattices*. Physical Review A, **69**, 053612, (2004).
- [216] A. Messiah. *Quantum Mechanics*, volume II. North-Holland, Amsterdam, (1975).
- [217] G. Su, J. Chen, and L. Chen. *Low-temperature behavior of a weakly interacting Fermi gas trapped in a power-law potential*. Physics Letters A, **315**, 109, (2003).
- [218] P. B. Blakie and A. Bezett. *Adiabatic cooling of fermions in an optical lattice*. Physical Review A, **71**, 033616, (2005).
- [219] M. Köhl. *Thermometry of fermionic atoms in an optical lattice*. Physical Review A, **73**, 031601, (2006).

- [220] S. Fölling, A. Widera, T. Müller, F. Gerbier, and I. Bloch. *Formation of Spatial Shell Structure in the Superfluid to Mott Insulator Transition*. Physical Review Letters, **97**, 060403, (2006).
- [221] T. Gericke, F. Gerbier, A. Widera, S. Fölling, O. Mandel, and I. Bloch. *Adiabatic loading of a Bose-Einstein condensate in a 3D optical lattice*. Journal of Modern Optics, **54**, 735, (2007).
- [222] R. Roth and K. Burnett. *Superfluidity and interference pattern of ultracold bosons in optical lattices*. Physical Review A, **67**, 031602, (2003).
- [223] E. M. Wright, D. F. Walls, and J. C. Garrison. *Collapses and Revivals of Bose-Einstein Condensates Formed in Small Atomic Samples*. Physical Review Letters, **77**, 2158, (1996).
- [224] M. Greiner, O. Mandel, T. W. Hänsch, and I. Bloch. *Collapse and revival of the matter wave field of a Bose-Einstein condensate*. Nature, **419**, 51, (2002).
- [225] R. Loudon. *The Quantum Theory of Light*. Oxford University Press, (2000).
- [226] F. Gerbier, S. Fölling, A. Widera, and I. Bloch. *Visibility of a Bose-condensed gas released from an optical lattice at finite temperatures*. arXiv, **cond-mat**, 0701.420, (2007).
- [227] F. Gerbier, A. Widera, S. Fölling, O. Mandel, T. Gericke, and I. Bloch. *Phase Coherence of an Atomic Mott Insulator*. Physical Review Letters, **95**, 050404, (2005).
- [228] F. Gerbier, A. Widera, S. Fölling, O. Mandel, T. Gericke, and I. Bloch. *Interference pattern and visibility of a Mott insulator*. Physical Review A, **72**, 053606, (2005).
- [229] A. Kastberg, W. D. Phillips, S. L. Rolston, R. J. C. Spreeuw, and P. S. Jessen. *Adiabatic Cooling of Cesium to 700 nK in an Optical Lattice*. Physical Review Letters, **74**, 1542, (1995).
- [230] M. Greiner, I. Bloch, O. Mandel, T. W. Hänsch, and T. Esslinger. *Exploring Phase Coherence in a 2D Lattice of Bose-Einstein Condensates*. Physical Review Letters, **87**, 160405, (2001).
- [231] M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein, and D. S. Fisher. *Boson localization and the superfluid-insulator transition*. Physical Review B, **40**, 546, (1989).
- [232] D. van Oosten, P. van der Straten, and H. T. C. Stoof. *Quantum phases in an optical lattice*. Physical Review A, **63**, 053601, (2001).

- [233] K. Sheshadri, H. R. Krishnamurthy, R. Pandit, and T. V. Ramakrishnan. *Superfluid and Insulating Phases in an Interacting-Boson Model: Mean-Field Theory and the RPA*. *Europhysics Letters*, **22**, 257, (1993).
- [234] G. K. Campbell, J. Mun, M. Boyd, P. Medley, A. E. Leanhardt, L. G. Marcassa, D. E. Pritchard, and W. Ketterle. *Imaging the Mott Insulator Shells by Using Atomic Clock Shifts*. *Science*, **313**, 649, (2006).
- [235] B. DeMarco, C. Lannert, S. Vishveshwara, and T.-C. Wei. *Structure and stability of Mott-insulator shells of bosons trapped in an optical lattice*. *Physical Review A*, **71**, 063601, (2005).
- [236] M. Rigol, A. Muramatsu, G. G. Batrouni, and R. T. Scalettar. *Local Quantum Criticality in Confined Fermions on Optical Lattices*. *Physical Review Letters*, **91**, 130403, (2003).
- [237] F. Werner, O. Parcollet, A. Georges, and S. R. Hassan. *Interaction-Induced Adiabatic Cooling and Antiferromagnetism of Cold Fermions in Optical Lattices*. *Physical Review Letters*, **95**, 056401, (2005).
- [238] A. Georges. *Condensed Matter Physics With Light And Atoms: Strongly Correlated Cold Fermions in Optical Lattices*. arXiv, **cond-mat**, 0702.122, (2007).
- [239] S. Trotzky, P. Cheinet, S. Fölling, M. Feld, U. Schnorrberger, A. M. Rey, A. Polkovnikov, E. A. Demler, M. D. Lukin, and I. Bloch. *Time-Resolved Observation and Control of Superexchange Interactions with Ultracold Atoms in Optical Lattices*. *Science*, **319**, 295, (2008).
- [240] G. Grüner. *The dynamics of spin-density waves*. *Reviews of Modern Physics*, **66**, 1, (1994).
- [241] R. Micnas, J. Ranninger, and S. Robaszkiewicz. *Superconductivity in narrow-band systems with local nonretarded attractive interactions*. *Review of Modern Physics*, **62**, 113, (1990).
- [242] A. Koetsier, R. A. Duine, I. Bloch, and H. T. C. Stoof. *Achieving the Néel state in an optical lattice*. *Physical Review A*, **77**, 023623, (2008).
- [243] A. Albus, F. Illuminati, and J. Eisert. *Mixtures of bosonic and fermionic atoms in optical lattices*. *Physical Review A*, **68**, 023606, (2003).
- [244] M. Lewenstein, L. Santos, M. A. Baranov, and H. Fehrmann. *Atomic Bose-Fermi Mixtures in an Optical Lattice*. *Physical Review Letters*, **92**, 050401, (2004).
- [245] H. P. Büchler and G. Blatter. *Phase separation of atomic Bose-Fermi mixtures in an optical lattice*. *Physical Review A*, **69**, 063603, (2004).



- [246] M. Cramer, J. Eisert, and F. Illuminati. *Inhomogeneous Atomic Bose-Fermi Mixtures in Cubic Lattices*. Physical Review Letters, **93**, 190405, (2004).
- [247] D. B. M. Dickerscheid, D. van Oosten, E. J. Tillema, and H. T. C. Stoof. *Quantum Phases in a Resonantly Interacting Boson-Fermion Mixture*. Physical Review Letters, **94**, 230404, (2005).
- [248] V. Ahufinger, L. Sanchez-Palencia, A. Kantian, A. Sanpera, and M. Lewenstein. *Disordered ultracold atomic gases in optical lattices: A case study of Fermi-Bose mixtures*. Physical Review A, **72**, 063616, (2005).
- [249] L. Pollet, M. Troyer, K. Van Houcke, and S. M. A. Rombouts. *Phase Diagram of Bose-Fermi Mixtures in One-Dimensional Optical Lattices*. Physical Review Letters, **96**, 190402, (2006).
- [250] L. Pollet, C. Kollath, U. Schollwöck, and M. Troyer. *Mixture of bosonic and spin-polarized fermionic atoms in an optical lattice*. Physical Review A, **77**, 023608, (2008).
- [251] M. J. Bijlsma, B. A. Heringa, and H. T. C. Stoof. *Phonon exchange in dilute Fermi-Bose mixtures: Tailoring the Fermi-Fermi interaction*. Physical Review A, **61**, 053601, (2000).
- [252] H. Heiselberg, C. J. Pethick, H. Smith, and L. Viverit. *Influence of Induced Interactions on the Superfluid Transition in Dilute Fermi Gases*. Physical Review Letters, **85**, 2418, (2000).
- [253] D. V. Efremov and L. Viverit. *p-wave Cooper pairing of fermions in mixtures of dilute Fermi and Bose gases*. Physical Review B, **65**, 134519, (2002).
- [254] L. Viverit. *Boson-induced s-wave pairing in dilute boson-fermion mixtures*. Physical Review A, **66**, 023605, (2002).
- [255] F. Matera. *Fermion pairing in Bose-Fermi mixtures*. Physical Review A, **68**, 043624, (2003).
- [256] U. Gavish and Y. Castin. *Matter-Wave Localization in Disordered Cold Atom Lattices*. Physical Review Letters, **95**, 020401, (2005).
- [257] A. Mering and M. Fleischhauer. *One-dimensional Bose-Fermi-Hubbard model in the heavy-fermion limit*. Physical Review A, **77**, 023601, (2008).
- [258] C. Ospelkaus, S. Ospelkaus, L. Humbert, P. Ernst, K. Sengstock, and K. Bongs. *Ultracold Heteronuclear Molecules in a 3D Optical Lattice*. Physical Review Letters, **97**, 120402, (2006).

- [259] D.-S. Lühmann, K. Bongs, K. Sengstock, and D. Pfannkuche. *Self-Trapping of Bosons and Fermions in Optical Lattices*. Physical Review Letters, **101**, 050402, (2008).
- [260] R. Jáuregui, N. Poli, G. Roati, and G. Modugno. *Anharmonic parametric excitation in optical lattices*. Physical Review A, **64**, 033403, (2001).
- [261] J. Stenger, S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, D. E. Pritchard, and W. Ketterle. *Bragg Spectroscopy of a Bose-Einstein Condensate*. Physical Review Letters, **82**, 4569, (1999).
- [262] J. Hecker Denschlag, J. E. Simsarian, H. Häffner, C. McKenzie, A. Browaeys, D. Cho, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips. *A Bose-Einstein condensate in an optical lattice*. Journal of Physics B, **35**, 3095, (2002).
- [263] P. W. Anderson. *Absence of Diffusion in Certain Random Lattices*. Physical Review, **109**, 1492, (1958).
- [264] L. Sanchez-Palencia, D. Clément, P. Lugan, P. Bouyer, and A. Aspect. *Disorder-induced trapping versus Anderson localization in Bose-Einstein condensates expanding in disordered potentials*. New Journal of Physics, **10**, 045019, (2008).
- [265] X.-J. Liu, P. D. Drummond, and H. Hu. *Signature of Mott-Insulator Transition with Ultracold Fermions in a One-Dimensional Optical Lattice*. Physical Review Letters, **94**, 136406, (2005).
- [266] D. Jaksch, V. Venturi, J. I. Cirac, C. J. Williams, and P. Zoller. *Creation of a Molecular Condensate by Dynamically Melting a Mott Insulator*. Physical Review Letters, **89**, 040402, (2002).
- [267] A. Recati, P. O. Fedichev, W. Zwerger, and P. Zoller. *Fermi one-dimensional quantum gas: Luttinger liquid approach and spin-charge separation*. Journal of Optics B, **5**, 55, (2003).
- [268] T. Stöferle, H. Moritz, K. Günter, M. Köhl, and T. Esslinger. *Molecules of Fermionic Atoms in an Optical Lattice*. Physical Review Letters, **96**, 030401, (2006).
- [269] H. Ott, E. de Mirandes, F. Ferlaino, G. Roati, V. Türck, G. Modugno, and M. Inguscio. *Radio Frequency Selective Addressing of Localized Atoms in a Periodic Potential*. Physical Review Letters, **93**, 120407, (2004).
- [270] F. Schwabel. *Quantenmechanik (QMI)*. Springer, (1998).
- [271] V. Ruuska and P. Törmä. *Quantum transport of non-interacting Fermi gas in an optical lattice combined with harmonic trapping*. New Journal of Physics, **6**, 59, (2004).

- [272] M. B. Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon. *Bloch Oscillations of Atoms in an Optical Potential*. Physical Review Letters, **76**, 4508, (1996).
- [273] A. R. Kolovsky and H. J. Korsch. *Bloch Oscillations of Cold Atoms in Optical Lattices*. International Journal of Modern Physics B, **18**, 1235, (2004).
- [274] G. P. Berman, G. M. Zaslavskii, and A. R. Kolovskii. *Interaction between quantum nonlinear resonances*. Soviet Physics JETP, **54**, 272, (1981).
- [275] L. Pezzè, L. Pitaevskii, A. Smerzi, S. Stringari, G. Modugno, E. de Mirandes, F. Ferlaino, H. Ott, G. Roati, and M. Inguscio. *Insulating Behavior of a Trapped Ideal Fermi Gas*. Physical Review Letters, **93**, 120401, (2004).
- [276] H. Ott, E. de Mirandes, F. Ferlaino, G. Roati, G. Modugno, and M. Inguscio. *Collisionally Induced Transport in Periodic Potentials*. Physical Review Letters, **92**, 160601, (2004).
- [277] A. H. Fizeau. *Prix bordin: rapport sur le concours de l'année 1867*. Comptes rendus de l'Académie des sciences, **66**, 932, (1868).
- [278] A. A. Michelson. *On the Application of Interference Methods to Astronomical Measurements*. Philosophical Magazine, **30**, 1, (1890).
- [279] A. A. Michelson and F. G. Pease. *Measurement of the diameter of  $\alpha$ -Orionis with the interferometer*. The Astrophysical Journal, **53**, 249, (1921).
- [280] F. G. Pease. *Measurement of Star Diameters by the Interferometer Method*. Proceedings of the American Philosophical Society, **60**, 524, (1921).
- [281] L. Mandel and E. Wolf. *Coherence Properties of Optical Fields*. Reviews of Modern Physics, **37**, 231, (1965).
- [282] K. K. Sharma. *Optics: Principles and Applications*. Academic Press, (2006).
- [283] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics, Fourth Edition (1982)*. Oxford University Press, (1935).
- [284] R. Hanbury Brown, R. C. Jennison, and M. K. Das Gupta. *Apparent Angular Sizes of Discrete Radio Sources: Observations at Jodrell Bank, Manchester*. Nature, **170**, 1061, (1952).
- [285] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss. *A Test of a New Type of Stellar Interferometer on Sirius*. Nature, **178**, 1046, (1956).
- [286] R. Hanbury Brown. *Stellar Interferometer at Narrabri Observatory*. Nature, **218**, 637, (1968).

## Literaturverzeichnis

---

- [287] J. Davis and B. Lovell. *Robert Hanbury Brown 31 August 1916 – 16 January 2002*. Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society, **49**, 83, (2003). <http://www.jstor.org/stable/3650215>.
- [288] E. M. Purcell. *The Question of Correlation Between Photons in Coherent Light Rays*. Nature, **178**, 1449, (1956).
- [289] R. J. Glauber. *Photon Correlations*. Physical Review Letters, **10**, 84, (1963).
- [290] R. J. Glauber. *The Quantum Theory of Optical Coherence*. Physical Review, **130**, 2529, (1963).
- [291] R. J. Glauber. *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field*. Physical Review, **131**, 2766, (1963).
- [292] R. J. Glauber. *Nobel Lecture: One hundred years of light quanta*. Reviews of Modern Physics, **78**, 1267, (2006).
- [293] H. J. Kimble, M. Dagenais, and L. Mandel. *Photon Antibunching in Resonance Fluorescence*. Physical Review Letters, **39**, 691, (1977).
- [294] F. T. Arecchi. *Measurement of the Statistical Distribution of Gaussian and Laser Sources*. Physical Review Letters, **15**, 912, (1965).
- [295] E. C. G. Sudarshan. *Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams*. Physical Review Letters, **10**, 277, (1963).
- [296] A. Einstein. *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases*. Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, **1**, 3, (1925).
- [297] M. Naraschewski and R. J. Glauber. *Spatial coherence and density correlations of trapped Bose gases*. Physical Review A, **59**, 4595, (1999).
- [298] G. Baym. *The physics of Hanbury Brown-Twiss intensity interferometry: from stars to nuclear collisions*. Acta Physica Polonica B, **29**, 1839, (1998).
- [299] G. Goldhaber, S. Goldhaber, W. Lee, and A. Pais. *Influence of Bose-Einstein Statistics on the Antiproton-Proton Annihilation Process*. Physical Review, **120**, 300, (1960).
- [300] E. A. Burt, R. W. Ghrist, C. J. Myatt, M. J. Holland, E. A. Cornell, and C. E. Wieman. *Coherence, Correlations, and Collisions: What One Learns about Bose-Einstein Condensates from Their Decay*. Physical Review Letters, **79**, 337, (1997).
- [301] B. Laburthe Tolra, K. M. O'Hara, J. H. Huckans, W. D. Phillips, S. L. Rolston, and J. V. Porto. *Observation of Reduced Three-Body Recombination in a Correlated 1D Degenerate Bose Gas*. Physical Review Letters, **92**, 190401, (2004).

- [302] M. Henny, S. Oberholzer, C. Strunk, T. Heinzel, K. Ensslin, M. Holland, and C. Schönberger. *The Fermionic Hanbury Brown and Twiss Experiment*. Science, **284**, 296, (1999).
- [303] W. D. Oliver, J. Kim, R. C. Liu, and Y. Yamamoto. *Hanbury Brown and Twiss-Type Experiment with Electrons*. Science, **284**, 299, (1999).
- [304] H. Kiesel, A. Renz, and F. Hasselbach. *Observation of Hanbury Brown–Twiss anti-correlations for free electrons*. Nature, **418**, 392, (2002).
- [305] M. Iannuzzi, A. Orecchini, F. Sacchetti, P. Facchi, and S. Pascazio. *Direct Experimental Evidence of Free-Fermion Antibunching*. Physical Review Letters, **96**, 080402, (2006).
- [306] M. Greiner, C. A. Regal, J. T. Stewart, and D. S. Jin. *Probing Pair-Correlated Fermionic Atoms through Correlations in Atom Shot Noise*. Physical Review Letters, **94**, 110401, (2005).
- [307] V. W. Scarola, E. Demler, and S. Das Sarma. *Searching for a supersolid in cold-atom optical lattices*. Physical Review A, **73**, 051601, (2006).
- [308] T. Jelte, J. M. McNamara, W. Hogervorst, W. Vassen, V. Krachmalnicoff, M. Schellekens, A. Perrin, H. Chang, D. Boiron, A. Aspect, and C. I. Westbrook. *Comparison of the Hanbury Brown–Twiss effect for bosons and fermions*. Nature, **445**, 402, (2007).
- [309] Z. Hadzibabic, S. Stock, B. Battelier, V. Bretin, and J. Dalibard. *Interference of an Array of Independent Bose-Einstein Condensates*. Physical Review Letters, **93**, 180403, (2004).
- [310] Z. Hadzibabic, P. Krüger, M. Cheneau, B. Battelier, and J. Dalibard. *Berezinskii–Kosterlitz–Thouless crossover in a trapped atomic gas*. Nature, **441**, 1118, (2006).
- [311] D.-W. Wang, M. D. Lukin, and E. Demler. *Engineering superfluidity in Bose-Fermi mixtures of ultracold atoms*. Physical Review A, **72**, 051604, (2005).
- [312] L. Fallani, J. E. Lye, V. Guarrera, C. Fort, and M. Inguscio. *Ultracold Atoms in a Disordered Crystal of Light: Towards a Bose Glass*. Physical Review Letters, **98**, 130404, (2007).
- [313] A. Micheli, G. K. Brennen, and P. Zoller. *A toolbox for lattice-spin models with polar molecules*. Nature Physics, **2**, 341, (2006).

- [314] G. Pupillo, A. Griessner, A. Micheli, M. Ortner, D.-W. Wang, and P. Zoller. *Cold Atoms and Molecules in Self-Assembled Dipolar Lattices*. Physical Review Letters, **100**, 050402, (2008).
- [315] P. Rabl, D. DeMille, J. M. Doyle, M. D. Lukin, R. J. Schoelkopf, and P. Zoller. *Hybrid Quantum Processors: Molecular Ensembles as Quantum Memory for Solid State Circuits*. Physical Review Letters, **97**, 033003, (2006).
- [316] T. Zelevinsky, S. Kotochigova, and Jun Ye. *Precision Test of Mass-Ratio Variations with Lattice-Confined Ultracold Molecules*. Physical Review Letters, **100**, 043201, (2008).
- [317] K. Winkler, G. Thalhammer, M. Theis, H. Ritsch, R. Grimm, and J. H. Denschlag. *Atom-Molecule Dark States in a Bose-Einstein Condensate*. Physical Review Letters, **95**, 063202, (2005).
- [318] G. Thalhammer, K. Winkler, F. Lang, S. Schmid, R. Grimm, and J. H. Denschlag. *Long-Lived Feshbach Molecules in a Three-Dimensional Optical Lattice*. Physical Review Letters, **96**, 050402, (2006).
- [319] T. Volz, N. Syassen, D. M. Bauer, E. Hansis, S. Dürr, and G. Rempe. *Preparation of a quantum state with one molecule at each site of an optical lattice*. Nature Physics, **2**, 692, (2006).
- [320] M. Viteau, A. Chotia, M. Allegrini, N. Bouloufa, O. Dulieu, D. Comparat, and P. Pillet. *Optical Pumping and Vibrational Cooling of Molecules*. Science, **321**, 232, (2008).
- [321] J. G. Danzl, E. Haller, M. Gustavsson, M. J. Mark, R. Hart, N. Bouloufa, O. Dulieu, H. Ritsch, and H.-C. Nägerl. *Quantum Gas of Deeply Bound Ground State Molecules*. Science, **321**, 1062, (2008).
- [322] J. Deiglmayr, A. Grochola, M. Repp, K. Mörtlbauer, C. Glück, J. Lange, O. Dulieu, R. Wester, and M. Weidemüller. *Formation of Ultracold Polar Molecules in the Rovibrational Ground State*. Physical Review Letters, **101**, 133004, (2008).
- [323] K.-K. Ni, S. Ospelkaus, M. H. G. de Miranda, A. Pe'er, B. Neyenhuis, J. J. Zirbel, S. Kotochigova, P. S. Julienne, D. S. Jin, and J. Ye. *A High Phase-Space-Density Gas of Polar Molecules*. Science, **322**, 231, (2008).
- [324] F. Lang, K. Winkler, C. Strauss, R. Grimm, and J. Hecker Denschlag. *Ultracold Triplet Molecules in the Rovibrational Ground State*. Physical Review Letters, **101**, 133005, (2008).
- [325] C. Groß. *Ein Frequenzkamm-basiertes, phasenkohärentes Diodenlasersystem*. Diplomarbeit im Fachbereich Physik, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, (2006).

- [326] A. Griessner, A. J. Daley, S. R. Clark, D. Jaksch, and P. Zoller. *Dark-State Cooling of Atoms by Superfluid Immersion*. Physical Review Letters, **97**, 220403, (2006).
- [327] J.-S. Bernier, C. Kollath, A. Georges, L. De Leo, F. Gerbier, C. Salomon, and M. Köhl. *Getting into Shape: Efficient Cooling Scheme for Fermionic Atoms in Optical Lattices*. arXiv, **cond-mat.str-el**, 0902.0005, (2009).
- [328] C. Menotti, C. Trefzger, and M. Lewenstein. *Metastable States of a Gas of Dipolar Bosons in a 2D Optical Lattice*. Physical Review Letters, **98**, 235301, (2007).
- [329] L. Mathey, E. Altman, and A. Vishwanath. *Noise Correlations in One-Dimensional Systems of Ultracold Fermions*. Physical Review Letters, **100**, 240401, (2008).
- [330] A. M. Rey, I. I. Satija, and C. W. Clark. *Quantum coherence of hard-core bosons: Extended, glassy, and Mott phases*. Physical Review A, **73**, 063610, (2006).
- [331] A. Polkovnikov, E. Altman, and E. Demler. *Interference between independent fluctuating condensates*. The Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, **103**, 6125, (2006).
- [332] S. Hofferberth, I. Lesanovsky, T. Schumm, A. Imambekov, V. Gritsev, E. Demler, and J. Schmiedmayer. *Probing quantum and thermal noise in an interacting many-body system*. Nature Physics, **4**, 489, (2008).
- [333] D. A. Steck. *Rubidium 87 D Line Data*. Los Alamos National Laboratory, <http://steck.us/alkalidata>, (2001).
- [334] E. Arimondo, M. Inguscio, and P. Violino. *Experimental determinations of the hyperfine structure in the alkali atoms*. Reviews of Modern Physics, **49**, 31, (1977).
- [335] S. Falke, E. Tiemann, C. Lisdat, H. Schnatz, and G. Grosche. *Transition frequencies of the D lines of  $^{39}\text{K}$ ,  $^{40}\text{K}$ , and  $^{41}\text{K}$  measured with a femtosecond laser frequency comb*. Physical Review A, **74**, 032503, (2006).
- [336] H. Wang, J. Li, X. T. Wang, C. J. Williams, P. L. Gould, and W. C. Stwalley. *Precise determination of the dipole matrix element and radiative lifetime of the  $^{39}\text{K}$  4p state by photoassociative spectroscopy*. Physical Review A, **55**, R1569, (1997).
- [337] C. Ticknor, C. A. Regal, D. S. Jin, and J. L. Bohn. *Multiplet structure of Feshbach resonances in nonzero partial waves*. Physical Review A, **69**, 042712, (2004).
- [338] P. J. Mohr and B. N. Taylor. *CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2002*. Reviews of Modern Physics, **77**, 1, (2005). [www.physics.nist.gov/constants](http://www.physics.nist.gov/constants).





## Veröffentlichungen

- T. Rom, *Informationen aus dem Quantenrauschen*, Physik in unserer Zeit, **38**, 112, (2007)
- T. Rom, Th. Best, D. van Oosten, U. Schneider, S. Fölling, B. Paredes and I. Bloch, *Free fermion antibunching in a degenerate atomic Fermi gas released from an optical lattice*, Nature, **444**, 733, (2006)
- P. Treutlein, T. Steinmetz, Y. Colombe, B. Lev, P. Hommelhoff, J. Reichel, M. Greiner, O. Mandel, A. Widera, T. Rom, I. Bloch and T. W. Hänsch, *Quantum information processing in optical lattices and magnetic microtraps*, Fortschritte der Physik, **54**, 702, (2006)
- R. Long, T. Rom, W. Hänsel, T. W. Hänsch and J. Reichel *Long distance magnetic conveyor for precise positioning of ultracold atoms*, European Physical Journal D, **35**, 125, (2005)
- T. Rom, T. Best, O. Mandel, A. Widera, M. Greiner, T. W. Hänsch and I. Bloch, *State Selective Production of Molecules in Optical Lattices*, Physical Review Letters, **93**, 073002, (2004)
- M. Greiner, O. Mandel, T. Rom, A. Altmeyer, A. Widera, T. W. Hänsch and I. Bloch, *Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in an ultracold gas of atoms*, Physica B, **329-333**, 11, (2003)
- O. Mandel, M. Greiner, A. Widera, T. Rom, T. W. Hänsch and I. Bloch, *Controlled collisions for multi-particle entanglement of optically trapped atoms*, Nature, **425**, 937, (2003)
- O. Mandel, M. Greiner, A. Widera, T. Rom, T. W. Hänsch and I. Bloch, *Coherent Transport of Neutral Atoms in Spin-Dependent Optical Lattice Potentials*, Physical Review Letters, **91**, 010407, (2003)
- M. Greiner, O. Mandel, A. Altmeyer, A. Widera, T. Rom, T.W. Hänsch and I. Bloch, *Beyond mean field physics with Bose-Einstein condensates in optical lattices*, Proceedings of the XVIII International Conference on Atomic Physics, 171, World Scientific, (2002)
- J. Reichel, W. Hänsel, P. Hommelhoff, R. Long, T. Rom, T. Steinmetz and T. W. Hänsch, *Speedy BEC in a Tiny Trap: Coherent Matter Waves on a Microchip*, Proceedings of the XV International Conference on Laser Spectroscopy, 289, World Scientific, (2001)

# Free fermion antibunching in a degenerate atomic Fermi gas released from an optical lattice

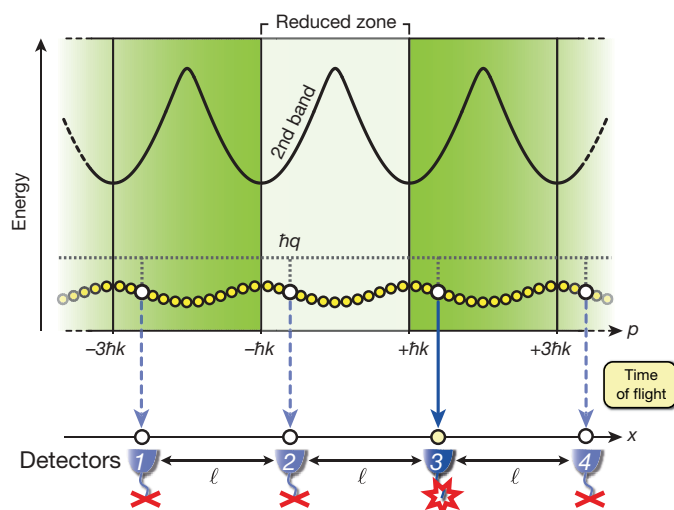
T. Rom<sup>1</sup>, Th. Best<sup>1</sup>, D. van Oosten<sup>1</sup>, U. Schneider<sup>1</sup>, S. Fölling<sup>1</sup>, B. Paredes<sup>1</sup> & I. Bloch<sup>1</sup>

Noise in a quantum system is fundamentally governed by the statistics and the many-body state of the underlying particles<sup>1–4</sup>. The correlated noise<sup>5–7</sup> observed for bosonic particles (for example, photons<sup>8</sup> or bosonic neutral atoms<sup>9–14</sup>) can be explained within a classical field description with fluctuating phases; however, the anticorrelations (‘antibunching’) observed in the detection of fermionic particles have no classical analogue. Observations of such fermionic antibunching are scarce and have been confined to electrons<sup>15–17</sup> and neutrons<sup>18</sup>. Here we report the direct observation of antibunching of neutral fermionic atoms. By analysing the atomic shot noise<sup>3,10,19</sup> in a set of standard absorption images of a gas of fermionic <sup>40</sup>K atoms released from an optical lattice, we find reduced correlations for distances related to the original spacing of the trapped atoms. The detection of such quantum statistical correlations has allowed us to characterize the ordering and temperature of the Fermi gas in the lattice. Moreover, our findings are an important step towards revealing fundamental fermionic many-body quantum phases in periodic potentials, which are at the focus of current research.

Bunching and antibunching effects in the detection of bosonic and fermionic particles are usually understood as a consequence of the constructive or destructive interference of the two possible propagation paths that two particles can follow to reach two detectors, as was first outlined in the famous experiments of Hanbury Brown and Twiss for the case of bosonic particles<sup>7</sup>. For the case of a fermionic atom cloud released from a periodic potential, the origin of spatial anticorrelations in the shot noise can be more naturally understood within the following picture. In the lowest energy band of a one-dimensional periodic potential, atoms can occupy Bloch states, each of them characterized by a crystal momentum  $\hbar q$ , as illustrated in Fig. 1, where  $q$  is the crystal wave vector and  $\hbar$  denotes Planck’s constant divided by  $2\pi$ . Each Bloch state is a superposition of plane waves, which correspond to different real momenta  $p_v = \hbar q + v2\hbar k$ , where  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  being the wavelength of the laser light used to form the optical lattice potential, and  $v$  an integer number. When a particle with crystal momentum  $\hbar q$  is released from the lattice potential, its wavefunction will expand freely, and after a time of flight (TOF)  $t$ , long enough to neglect the initial size of the system, it can be detected at any of the positions  $x_v = (\hbar q + v2\hbar k)t/m$ . These positions are equally spaced by  $\ell = 2\hbar kt/m$ , where  $m$  is the atomic mass. Conversely, if a particle is detected at any of the positions  $x_v$ , it had to emerge from a state with crystal momentum  $\hbar q$ . As the Pauli principle does not allow two fermionic particles to occupy the same Bloch state, the output of two detectors at positions  $x_v$  and  $x_{v'}$  will thus be anticorrelated for any  $v, v'$ . That is, if one detector detects a particle, the second detector will not detect another particle. Therefore, if  $n(x)$  represents the density of the expanding atom cloud detected at position  $x$  in a single run of the experiment, the spatial correlations  $\langle n(x)n(x') \rangle$  will vanish for any  $|x-x'|$  being an integer multiple of

$\ell$ . It is interesting to note that for bosonic particles, which can populate the same crystal momentum state, enhanced spatial correlations at these distances can arise, corresponding to a ‘bunching’ of the particles<sup>10,14</sup>. For both bosons and fermions, the behaviour of  $\langle n(x)n(x') \rangle$  for  $|x-x'|$  different from these characteristic distances will depend on the many-body state of the trapped particles<sup>3</sup>.

The starting point for our experiment is an oblate-shaped degenerate Fermi gas in a crossed optical dipole trap with typically  $2.0(5) \times 10^5$  atoms (the values in the brackets denote the  $1\sigma$  uncertainty in the last shown digit) of <sup>40</sup>K at temperatures ( $T$ ) as low as  $T/T_F = 0.23(3)$ , where  $T_F$  is the Fermi temperature. These atoms are transferred into a three-dimensional optical lattice potential with lattice depths of  $V_x = V_y = 20E_r$  and  $V_z = 10E_r$  in the  $x$ ,  $y$  and  $z$  direction, respectively. Here,  $E_r = \hbar^2 k^2/2m$  denotes the recoil energy. For our experimental parameters the atoms form a fermionic band insulator in the lowest energy band, which we verify using an adiabatic mapping technique<sup>20,21</sup> (Fig. 2a inset). For the correlation



**Figure 1 | Origin of anticorrelations in a Fermi gas released from an optical lattice.** Each occupied Bloch state, labelled by a crystal momentum  $\hbar q$ , is represented by a dot in the reduced zone scheme (white region). The full occupation of the lowest energy band opposed to the empty second band describes the fermionic band insulating state. The periodically extended zone scheme (extension shown as green shaded region) shows that each Bloch state is a superposition of states with momenta equally spaced by  $2\hbar k$ . After the lattice is switched off abruptly, an atom with crystal momentum  $\hbar q$  propagates freely during a time of flight  $t$  and can reach detectors equally spaced by a distance  $\ell$ . If for example, detector number 3 detects a particle (yellow dot above detector), then owing to the single occupancy of each Bloch state dictated by the Pauli principle, detectors 1, 2 and 4 will not detect a particle (white dots above detectors).

<sup>1</sup>Institut für Physik, Johannes Gutenberg-Universität, Staudingerweg 7, 55128 Mainz, Germany.

analysis, all optical potentials are suddenly switched off and images are recorded along the vertical direction ( $z$ ) via standard absorption imaging after a TOF period of 10 ms.

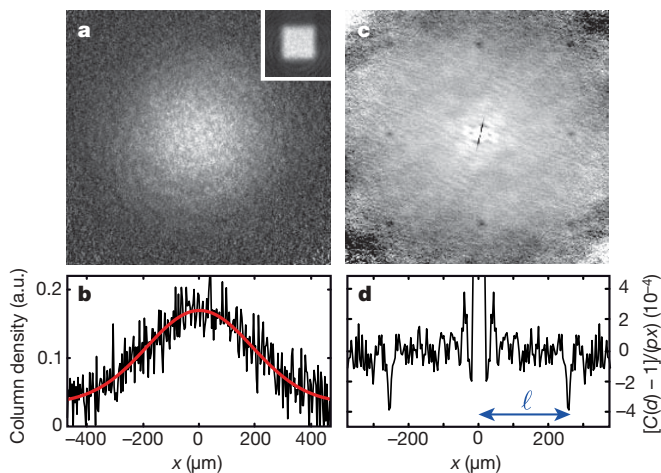
Typically, 200 absorption images are taken for the same set of experimental parameters, yielding independent two-dimensional spatial density profiles,  $n(\mathbf{x})$ . An example of such a density profile and a corresponding cut through it can be seen in Fig. 2a, b. The atom cloud exhibits a gaussian-like envelope, as a result of the expansion of the Wannier function that characterizes the initial localization of the particles at each lattice site. Additionally, atomic noise is directly visible as fluctuations in the recorded single images. However, no distinct structure can be seen in this noise.

After discarding images showing technical artefacts ( $\sim 30\%$  of the total images), a spatial correlation analysis is carried out. This yields the density–density correlation function:

$$C(\mathbf{d}) = \frac{\int \langle n(\mathbf{x} - \mathbf{d}/2) n(\mathbf{x} + \mathbf{d}/2) \rangle d^2x}{\int \langle n(\mathbf{x} - \mathbf{d}/2) \rangle \langle n(\mathbf{x} + \mathbf{d}/2) \rangle d^2x} \quad (1)$$

which gives the conditional probability of finding particles at two positions separated by a vector  $\mathbf{d}$ , averaged over the whole image. The brackets  $\langle \cdot \rangle$  denote a statistical averaging over the set of images. Values of  $C(\mathbf{d}) > 1$  correspond to bunching, whereas the characteristic antibunching for fermions shows up as  $C(\mathbf{d}) < 1$ .

Results of the above analysis are shown in Fig. 2c, d. Centred around the autocorrelation peak, a perfectly regular structure arises (Fig. 2c) in the correlation images. A horizontal cut through the centre of such a correlation image exhibits distinct dips where  $C(\mathbf{d}_{\text{dip}}) < 1$  (Fig. 2d), demonstrating the antibunching of the atoms. We find that the spacing between these dips along the horizontal and vertical directions is in good agreement with the expected value of  $\ell$ . In order to reliably detect and characterize these correlation dips, the signal to noise ratio in the resulting correlation image has to be sufficiently high. As the root mean square (r.m.s.) background noise decreases in good agreement with a  $1/\sqrt{N_{\text{images}}}$  scaling, the signal to noise ratio can be successively increased by including more single shot absorption images ( $N_{\text{images}}$ ) in the correlation analysis. When fitting two-dimensional gaussians to these dips, we find that at least



**Figure 2 | Single shot absorption images and correlation analysis.** **a**, Single absorption image of a fermionic  $^{40}\text{K}$  atom cloud after 10 ms of free expansion. The inset shows a Brillouin zone mapping of the cloud, demonstrating that the Fermi gas is in a band insulating state. **b**, One-dimensional cut through **a** together with a gaussian fit (red). **c**, Spatial noise correlations obtained from an analysis of 158 independent images, showing an array of eight dark dots. **d**, A horizontal profile through the centre of the image shows that these dots correspond to correlation dips, with the characteristic spacing  $\ell$ . The profile has been high-pass filtered to suppress a broad gaussian background that we attribute to shot to shot fluctuations in the atom number.

50 images are needed for a reliable fit, if width, position and amplitude of the dips are free parameters.

In order to experimentally investigate the temperature dependence of the measured correlation signal, we have prepared Fermi gases at different temperatures by varying the end point of the forced evaporation procedure in the optical dipole trap. Before the lattice potentials are ramped up, the optical trap depth is adjusted to obtain a defined external confinement, equal for all temperatures. For each temperature, a correlation analysis for a series of absorption images is performed. As Fig. 3 shows, we find a distinct decrease of the correlation amplitude with increasing temperature. Antibunching is, however, still clearly visible up to temperatures of  $T/T_F \approx 1$ . Note that all quoted temperatures refer to the initial temperatures in the optical dipole trap without the lattice, as we currently do not have an independent means to measure the temperature of the quantum gas in the lattice.

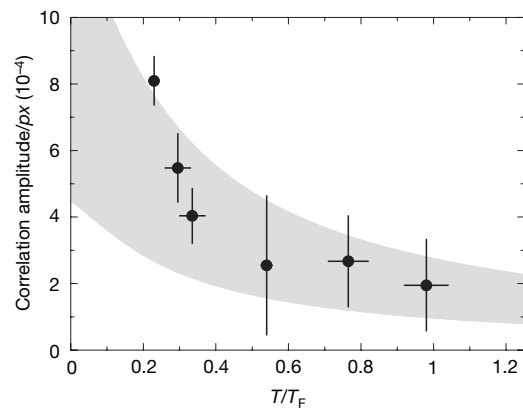
In order to understand the strength of the correlation signals and specifically their temperature dependence, we consider a one-dimensional system of  $N$  fermionic atoms in a lattice in the presence of an external harmonic confinement. We assume that the lattice is deep enough to suppress tunnelling processes and that the temperature is low enough such that the atoms only occupy the lowest on-site vibrational state. Under these conditions, the occupation of the lattice sites is given by a Fermi–Dirac distribution of the form:

$$f_j = \frac{1}{1 + \exp\left(\left(\frac{1}{2} m \omega^2 (\lambda/2)^2 j^2 - \mu\right) / k_B T^{\text{lat}}\right)} \quad (2)$$

where the integer number  $j$  labels the lattice site,  $T^{\text{lat}}$  denotes the temperature in the lattice, and  $k_B$  is Boltzmann's constant. The trapping frequency of the external harmonic confinement is denoted by  $\omega$ , and the chemical potential  $\mu$  is defined through  $\sum_j f_j = N$ . At zero temperature, starting from the centre of the trap, the atoms fill the lattice sites one-by-one, forming a Fermi sea in real space (Fig. 4 left inset). In analogy to the Fermi momentum of free fermions, we define a Fermi radius  $R_F = N\lambda/4$ , which characterizes the extension of the atomic cloud. The Fermi temperature in the lattice,  $T_F^{\text{lat}}$ , can then be written as  $k_B T_F^{\text{lat}} = 1/2 m \omega^2 R_F^2$ . As temperature increases, atoms can access lattice sites further out in the trap, leading to an increase in the spatial extension of the atom cloud.

A similar calculation to the one presented in ref. 10 yields the fermionic noise correlator:

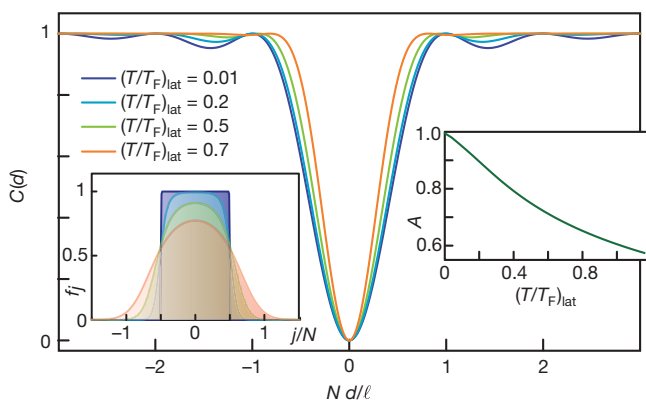
$$C(d) = 1 - \frac{1}{N^2} \left| \sum_j f_j e^{i2\pi d j / \ell} \right|^2 \quad (3)$$



**Figure 3 | Measured correlation amplitude versus temperature of the atomic cloud before loading into the optical lattice.** For each data point, two to four independent runs with about 200 images in total were averaged (data show mean  $\pm$  s.d.). The shaded area indicates the expected values of the correlation amplitude for the two-dimensional version of the theory discussed in the text (see Methods), taking into account our experimental uncertainties in the atom number.

where the minus sign on the right-hand side causes dips at integer multiples of  $\ell$ . For zero temperature, the above equation takes the simple form  $C(d) = 1 - \left[ \frac{\sin(\pi d/\ell N)}{N \sin(\pi d/\ell)} \right]^2$ . The temperature dependence of the shape of one of these dips is shown in Fig. 4. The amplitude of the dip is always equal to 1, regardless of temperature. However, its width decreases with increasing temperature. This leads to a decrease in the signal strength of the dip, which we characterize by the spatial integral of the correlation function (see equation (3)) over a distance  $\ell$ . We can understand these features in the following way. The amplitude of 1, corresponding to the vanishing of the correlation function  $C(d)$ , is a universal feature for fermions. It reflects the fact that two fermions cannot occupy the same crystal momentum state. On the other hand, the detailed shape of the dip directly reflects the density–density correlations in crystal momentum space of the fermionic system before expansion. These correlations can be characterized by a correlation length in momentum space, which determines the width of the dip. For non-interacting fermions, this correlation length is inversely proportional to the size of the system. This explains the observation that when temperature increases, leading to an expansion of the system in the trap, the width of the dip decreases. It is interesting to note that for the case of zero temperature, the wings of the dip oscillate with a period inversely proportional to the Fermi radius. These oscillations are analogous to the Friedel oscillations that a system of free fermions exhibits in real space.

Let us compare these findings to our experimental results. For a typical system size of  $N = 100$  in the  $x$  and  $y$  dimension, we expect the width of each dip to be of the order of  $1 \mu\text{m}$  on the basis of the above model, which is much smaller than the actual optical resolution of our imaging system of  $5.6 \mu\text{m}$ . Therefore, the observed shape and width of our correlation dips are predominantly determined by the point spread function of our optical imaging system (approximately a gaussian) and do not allow us to observe the detailed shape of the correlation dips predicted by theory. However, as the point spread function leaves the volume of a correlation dip constant, a change in the width of the theoretically predicted signal directly translates into a change of the observed correlation amplitude. For our lowest temperatures, we observe a correlation amplitude of  $8(1) \times 10^{-4}$ , in good agreement with the expected value at zero temperature of  $9(4) \times 10^{-4}$  for our experimental parameters, taking additionally into account the integration along the line of sight<sup>10</sup>. For increasing temperatures, we have compared the observed decrease in the correlation signal with the one predicted by a two-dimensional version



**Figure 4 | Calculated noise correlations for  $^{40}\text{K}$  atoms in a one-dimensional lattice.** In the main panel, the different curves correspond to different values of the temperature  $(T/T_F)_{\text{lat}}$  in the lattice. The left inset shows the corresponding spatial density profiles of the system for different values of  $(T/T_F)_{\text{lat}}$ . The right inset shows the area  $A$  under the correlation dip as a function of  $(T/T_F)_{\text{lat}}$ . The parameters used were  $N = 100$  and an external confinement of  $\omega = 2\pi \times 40 \text{ Hz}$ , yielding  $T_F^{\text{lat}} \approx 350 \text{ nK}$ .

of the model presented above (Methods). Assuming adiabatic heating when the atoms are loaded into the lattice potential<sup>22</sup>, we find good quantitative agreement with theory (Fig. 3). These results show that the correlation signal can be used as an efficient thermometer for fermions in an optical lattice.

In conclusion, we have demonstrated antibunching of free neutral fermionic atoms using a degenerate single component Fermi gas released from a three dimensional optical lattice potential. Recently it has come to our attention that fermionic antibunching has also been observed in an ultracold gas of metastable  $^3\text{He}$  atoms<sup>23</sup>. In our experiment the anticorrelations obtained from a shot noise analysis of standard absorption images have allowed us to reveal the quantum statistics and furthermore identify the ordering and temperature of the atoms in the periodic potential up to a temperature of  $T/T_F \approx 1$ . These measurements show that noise correlations are a robust tool for further studies of degenerate Fermi systems. In particular, this method could allow the unambiguous detection of fermionic quantum phases, such as an antiferromagnetically ordered Néel phase<sup>24</sup>, which is strongly connected to models of high- $T_c$  superconductivity<sup>25,26</sup>. Further complex orders could be revealed by applying this method to low-dimensional quantum systems<sup>4,27</sup>, mixtures<sup>28,29</sup>, quantum phases with disorder<sup>30</sup> or supersolid phases<sup>31</sup>.

## METHODS

**Experimental set-up and cooling cycle.** In the experiment, we sympathetically cool  $^{40}\text{K}$  with  $^{87}\text{Rb}$  in a two step process. First, both species are trapped in a magnetic trap of the quadrupole Ioffe type, with  $^{87}\text{Rb}$  in the  $|F=2, m_F=2\rangle$  and  $^{40}\text{K}$  in the  $|F=9/2, m_F=9/2\rangle$  substates. Radio-frequency (r.f.)-evaporative cooling of  $^{87}\text{Rb}$  is used to cool the mixture to a temperature of  $2 \mu\text{K}$ . Both species are then transferred into a crossed optical dipole trap formed at the intersection of two orthogonal elliptical gaussian laser beams (waists  $w_{x,y} = 150 \mu\text{m}$ ,  $w_z = 40 \mu\text{m}$ ) at a wavelength of  $1,030 \text{ nm}$ . After switching off the magnetic trap, a constant offset field of  $13.6 \text{ G}$  is applied. Then  $^{87}\text{Rb}$  is transferred to the  $|F=1, m_F=1\rangle$  state with an adiabatic microwave sweep, and  $^{40}\text{K}$  is transferred to the  $|F=9/2, m_F=-9/2\rangle$  state with an adiabatic r.f. sweep across the magnetic substates. The depth of the optical dipole trap is subsequently lowered to further evaporate the two species. At the end of this cooling process, we are left with up to  $2.2(5) \times 10^5$  atoms of  $^{40}\text{K}$ , and  $2.0(5) \times 10^5$  atoms of  $^{87}\text{Rb}$ , in the optical trap. After removing the rubidium cloud completely via a resonant laser pulse, we are left with a single component Fermi gas of typically  $2.0(5) \times 10^5$  atoms at an initial temperature  $T$  as low as  $T/T_F \approx 0.23(3)$ .

**Optical lattices.** The cold fermionic quantum gas is loaded into a three-dimensional optical lattice potential formed by three mutually orthogonal optical standing waves. The laser beams used for the optical standing waves have waists of  $150 \mu\text{m}$  at the position of the trapped quantum gas and a wavelength of  $\lambda = 755 \text{ nm}$ , blue detuned to the atomic  $D_1$  and  $D_2$  transitions of  $^{40}\text{K}$ . The lattice potentials are successively ramped up to final lattice depths of  $V_x = V_y = 20 E_r$ , and  $V_z = 10 E_r$ . This is done in an ‘S’-shaped ramp within  $40 \text{ ms}$ , first in the  $x$  and  $y$  directions and finally in the  $z$  direction.

**Determining correlation signal amplitudes.** Correlation signal amplitudes are extracted from the unprocessed correlation images by fitting the dips of the correlation images with an inverted two dimensional gaussian. First, the positions and widths of the anticorrelation dips are determined from three correlation images with  $T/T_F = 0.23(3)$ . In subsequent fits to all images, the dip amplitudes were obtained using these widths and positions. The correlation signal amplitude of an image is given as the average over the four dips at positions corresponding to the principal reciprocal lattice vectors. Note that the central autocorrelation peak shows a substructure due to technical artefacts.

**Temperature dependence in two dimensions.** A generalization of the theory model described above to the two-dimensional case is straightforward. The correlation function takes then the form  $C(\mathbf{d}) = 1 - \frac{1}{N^2} \left| \sum_{\mathbf{j}} f_{\mathbf{j}} e^{i2\pi \mathbf{j} \cdot \mathbf{d}/\ell} \right|^2$ , where  $\mathbf{j} = (j_x, j_y)$ , with  $j_x, j_y$  being integer numbers. The integral of the function  $C(\mathbf{d})$  over a  $\ell \times \ell$  cell, which characterizes the signal strength of the dips, can be calculated to be:

$$\frac{\ell^2}{N^2} \sum_{\mathbf{j}} f_{\mathbf{j}}^2 = \frac{\ell^2}{N} \left( 1 - \frac{T}{T_F^{\text{lat}}} \left( 1 - e^{-T_F^{\text{lat}}/T} \right) \right) \quad (4)$$

where  $k_B T_F^{\text{lat}} = m\omega^2(\lambda/2)^2 N/2\pi$  is the Fermi temperature of the atoms in the two-dimensional lattice. This result has been used to determine the region of amplitudes that, taking into account the uncertainty in the number of particles

and the heating of the atoms when loading the optical lattice, is expected for the experimental dips.

Received 15 August; accepted 6 October 2006.

- Blanter, Y. M. & Büttiker, M. Shot noise in mesoscopic conductors. *Phys. Rep.* **336**, 1–166 (2000).
- Beenakker, C. W. J. & Schönberger, C. Quantum shot noise. *Phys. Today* **56**, 37–42 (2003).
- Altman, E., Demler, E. & Lukin, M. D. Probing many-body states of ultracold atoms via noise correlations. *Phys. Rev. A* **70**, 013603 (2004).
- Polkovnikov, A., Altman, E. & Demler, E. Interference between independent fluctuating condensates. *Proc. Natl Acad. Sci. USA* **103**, 6125–6129 (2006).
- Brown, R. H. & Twiss, R. Q. Correlation between photons in two coherent beams of light. *Nature* **177**, 27–29 (1956).
- Brown, R. H. & Twiss, R. Q. The question of correlation between photons in coherent light rays. *Nature* **178**, 1447–1448 (1956).
- Baym, G. The physics of Hanbury Brown-Twiss intensity interferometry: From stars to nuclear collisions. *Acta Phys. Pol. B* **29**, 1839–1884 (1998).
- Mandel, L. & Wolf, E. *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, New York, 1995).
- Yasuda, M. & Shimizu, F. Observation of two-atom correlation of an ultracold neon atomic beam. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3090–3093 (1996).
- Fölling, S. *et al.* Spatial quantum noise interferometry in expanding ultracold atom clouds. *Nature* **434**, 481–484 (2005).
- Schellekens, M. *et al.* Hanbury Brown Twiss effect for ultracold quantum gases. *Science* **310**, 648–651 (2005).
- Öttl, A., Ritter, S., Köhl, M. & Esslinger, T. Correlations and counting statistics of an atom laser. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 090404 (2005).
- Esteve, J. *et al.* Observations of density fluctuations in an elongated Bose gas: Ideal gas and quasicondensate regimes. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 130403 (2006).
- Spielman, I. B., Phillips, W. D. & Porto, J. V. The Mott insulator transition in two dimensions. Preprint at (<http://arxiv.org/cond-mat/0606216>) (2006).
- Oliver, W. D., Kim, J., Liu, R. C. & Yamamoto, Y. Hanbury Brown and Twiss-type experiment with electrons. *Science* **284**, 299–301 (1999).
- Henny, M. *et al.* The fermionic Hanbury Brown and Twiss experiment. *Science* **284**, 296–298 (1999).
- Kiesel, H., Renz, A. & Hasselbach, F. Observation of Hanbury Brown-Twiss anticorrelations for free electrons. *Nature* **418**, 392–394 (2002).
- Iannuzzi, M., Orecchini, A., Sacchetti, F., Facchi, P. & Pascazio, S. Direct experimental evidence of free-fermion antibunching. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 080402 (2006).
- Greiner, M., Regal, C. A., Stewart, J. T. & Jin, D. S. Probing pair-correlated fermionic atoms through correlations in atom shot noise. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 110401 (2005).
- Greiner, M., Bloch, I., Mandel, O., Hänsch, T. W. & Esslinger, T. Exploring phase coherence in a 2D lattice of Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 160405 (2001).
- Köhl, M., Moritz, H., Stöferle, T., Günter, K. & Esslinger, T. Fermionic atoms in a three dimensional optical lattice: Observing Fermi-surfaces, dynamics and interactions. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 080403 (2005).
- Köhl, M. Thermometry of fermionic atoms in an optical lattice. *Phys. Rev. A* **73**, 031601 (2006).
- Westbrook, C. I. *et al.* Producing and detecting correlated atoms. Preprint at (<http://arxiv.org/quant-ph/0609019>) (2006).
- Werner, F., Parcollet, O., Georges, A. & Hassan, S. R. Interaction-induced adiabatic cooling and antiferromagnetism of cold fermions in optical lattices. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 056401 (2005).
- Lee, P. A., Nagaosa, N. & Wen, X.-G. Doping a Mott insulator: Physics of high-temperature superconductivity. *Rev. Mod. Phys.* **78**, 17–85 (2006).
- Hofstetter, W., Cirac, J. I., Zoller, P., Demler, E. & Lukin, M. D. High-temperature superfluidity of fermionic atoms in optical lattices. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 220407 (2002).
- Mathey, L., Altman, E. & Vishwanath, A. Noise correlations in one-dimensional systems of ultra-cold fermions. Preprint at (<http://arxiv.org/cond-mat/0507108>) (2005).
- Wang, D.-W., Lukin, M. D. & Demler, E. Engineering superfluidity in Bose-Fermi mixtures of ultracold atoms. *Phys. Rev. A* **72**, 051604 (2005).
- Ahufinger, V., Sanchez-Palencia, L., Kantian, A., Sanpera, A. & Lewenstein, M. Disordered ultracold atomic gases in optical lattices: A case study of Fermi-Bose mixtures. *Phys. Rev. A* **72**, 063616 (2005).
- Rey, A. M., Indubala, I. S. & Clark, C. W. Quantum coherence of hard-core bosons and fermions: Extended, glassy and Mott phases. *Phys. Rev. A* **73**, 063610 (2006).
- Scarola, V. W., Demler, E. & Sarma, S. D. Searching for a supersolid in cold-atom optical lattices. *Phys. Rev. A* **73**, 051601(R) (2006).

**Acknowledgements** This work was supported by the DFG, and by the EU under a Marie-Curie excellence grant (QUASICOMBS) and an Integrated Project (SCALA). We acknowledge the technical assistance of T. Berg in the construction of the apparatus.

**Author Information** Reprints and permissions information is available at [www.nature.com/reprints](http://www.nature.com/reprints). The authors declare no competing financial interests. Correspondence and requests for materials should be addressed to I.B. ([bloch@uni-mainz.de](mailto:bloch@uni-mainz.de)).