

Oberflächen- und Kompressionseigenschaften von Kernen in relativistischer Mittelfeldnäherung

Dissertation der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Thomas von Chossy
aus Hof

München, den 14. Dezember 2001

1. Gutachter: Prof. Dr. W. Stocker

2. Gutachter: Prof. Dr. H. Bross

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Juli 2002

Zusammenfassung

Kompressionseigenschaften von Kernen werden in Relativistischer Mittelfeldnäherung (RMF) untersucht. Als Grundlage dient dabei das nichtlineare σ - ω - ρ -Modell der Quantenhydrodynamik. Als Näherungsverfahren werden sowohl die Relativistische Thomas-Fermi-Näherung (RTF) als auch die Relativistische Hartree-Näherung (RH) verwendet.

Bei der Behandlung nuklearer Systeme in ihrem Grundzustand in Teil I der Arbeit spielen Oberflächeneigenschaften eine zentrale Rolle. Druck- und Kräfteverhältnisse in endlichen Kernen und gesättigter semi-infiniter Kernmaterie werden anhand des Spannungstensors studiert. Für gebräuchliche RMF-Parametersätze sowie weitere, nichtrelativistische effektive Wechselwirkungen wird eine genäherte lineare Beziehung zwischen der Inkompressibilität K_∞ und der Anharmonizität K' extrahiert. Ein weiterer linearer Zusammenhang zwischen der SINM-Oberflächendicke t und K_∞ illustriert, daß nur die Berücksichtigung von Oberflächeneigenschaften bei der Anpassung effektiver Wechselwirkungen einen realistischen Wert für K_∞ garantiert. Im Gegensatz zu nichtrelativistischen Ansätzen fällt im Falle des σ - ω - ρ -Modells die Oberflächendicke t allerdings zu klein aus, wenn man eine Inkompressibilität gewährleisten will, die kompatibel mit experimentellen Anregungsenergien der isoskalaren Monopolriesenresonanz (GMR) in Kernen ist. Als alternativer feldtheoretischer Ansatz wird daher eine Modifikation des von Zimányi und Moszkowski vorgestellten Skalaren Ableitungskopplungsmodells (ZM) untersucht. Ein zusätzlicher Tensorkopplungsterm in der ZM-Lagrangedichte führt zwar zu einer deutlichen Verbesserung von Spin-Bahn-Aufspaltungen korrespondierender Einteilchenniveaus in Kernen, hat aber keine Verbesserung der Oberflächeneigenschaften zur Folge.

Teil II befaßt sich mit komprimierten Kernen in statischer Näherung. Sowohl schwache als auch starke Kompressionen werden betrachtet. Der feldtheoretische Formalismus wird zu diesem Zweck auf den Kompressionsfall durch die Hinzunahme eines Zusatzterms erweitert, der den äußeren Druck auf das nukleare System modelliert. RTF-Skalierungsrechnungen zeigen, daß eine Kompression die Instabilität von Kernen gegenüber dem β^+ -Zerfall erhöht und sogar auch eine Protonenemission zur Folge haben kann. Ein äußerer Druck führt ebenfalls zu einer Reduktion von Spaltbarrieren. Mittels der RH-Näherung lassen sich kompressionsbedingte Einteilcheneffekte studieren. Bei einer kritischen Kompression wird ein phasenübergangsartiger Wechsel in der Kernstruktur gefunden, der auf eine blasenförmige Kerndichte führt und mit einer charakteristischen Neuordnung der Einteilchenzustände verbunden ist. Eine leptoderme Entwicklung der Inkompressibilität endlicher Kerne wird anhand von RTF-Skalierungsrechnungen auf ihre Konvergenz untersucht und bei einer RH-Analyse experimenteller GMR-Energien herangezogen. Die Ergebnisse schränken zusammen mit expliziten RTF-Modellrechnungen die Inkompressibilität K_∞ auf den Bereich 230 ± 10 MeV ein.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
----------	-------------------	----------

I Nukleare Systeme im Grundzustand

2	Das σ-ω-ρ-Modell für den nuklearen Grundzustand	7
2.1	Feldgleichungen und Energie-Impuls-Tensor	8
2.2	Mittelfeldnäherung und Relativistische Hartree-Näherung	10
2.3	Infinite Kernmaterie	11
2.4	Das Modellsystem semi-infinite Kernmaterie	16
2.4.1	Oberflächenenergie	16
2.4.2	Oberflächendichte	18
2.5	Relativistische Thomas-Fermi-Näherung	18
2.5.1	Endliche Kerne	19
2.5.2	Semi-infinite Kernmaterie	22
2.6	Relativistische Hartree-Näherung	23
2.6.1	Endliche Kerne	24
2.6.2	Semi-infinite Kernmaterie	27
2.7	Vergleich der beiden Näherungen	29
3	Kompressionseffekte in nuklearen Systemen	33
3.1	Energie-Impuls-Tensor semi-infiniten Kernmaterie	34
3.2	Energie-Impuls-Tensor endlicher Kerne und der semi-infinite Grenzwert . .	35
3.3	Einfluß der Coulombkraft bei exotisch großen Kernen	39
4	Grundzustandsäquivalente Wechselwirkungen	45
5	Oberflächeneigenschaften und Spin-Bahn-Potential in einem modifizierten Zimányi-Moszkowski-Modell	51
5.1	Symmetrische semi-infinite Kernmaterie	53
5.2	Endliche Kerne	58

II Komprimierte nukleare Systeme

6	Kernkompressionen im σ-ω-ρ-Modell mit Zusatztermen	65
6.1	Feldgleichungen und Energie-Impuls-Tensor	66
6.2	Mittelfeldnäherung	67
6.3	Die nukleare Oberflächenspannung komprimierter semi-unendlicher Kernmaterie	69
7	Komprimierte Kerne in Relativistischer Thomas-Fermi-Näherung	75
7.1	Variationsprinzip für Kernkompressionen	75
7.2	Nukleare Energie komprimierter Kerne	79
7.3	Stabilitätseigenschaften komprimierter Kerne	82
7.4	Spaltung komprimierter Kerne	83
8	Komprimierte Kerne in Relativistischer Hartree-Näherung	87
8.1	Wahl des Zusatzterms	87
8.2	Verhalten des Kerns ^{40}Ca unter Kompression	88
	8.2.1 Energien und Dichten	89
	8.2.2 Einteilcheneigenschaften	91
8.3	Allgemeines Verhalten von Kernen unter externem Druck	94
8.4	Spaltung komprimierter Kerne	95
9	Leptoderme Entwicklung der Inkompressibilität endlicher Kerne	101
10	Skalierungsmodell-Analyse experimenteller Breathing-Mode-Energien	115
11	Zusammenfassung und Ausblick	123
A	Notation und Dirac-Matrizen	127
B	Parametersätze des σ-ω-ρ-Modells	129
	Abbildungsverzeichnis	131
	Tabellenverzeichnis	133
	Literaturverzeichnis	135

Kapitel 1

Einleitung

Atomkerne stellen komplexe Vielteilchensysteme dar, für die eine exakte theoretische Beschreibung unmöglich ist. Daher ist man bereits bei der Untersuchung ihrer Grundzustandseigenschaften auf Näherungsverfahren angewiesen, die auf Gleichungen führen, die mit vertretbarem numerischen Aufwand rechnerisch gelöst werden können. Innerhalb der nichtrelativistischen Kernphysik hat sich in der Vergangenheit das Hartree-Fock-Verfahren (HF) in Verbindung mit phänomenologischen, dichteabhängigen Skyrme- [1–5] und Gogny-Kräften [6–9] durchgesetzt. Die Gesamtwellenfunktion des Kerns wird dabei als antisymmetrisiertes Produkt (Slater-Determinante) aus Einteilchenwellenfunktionen geschrieben, die Lösungen zur Einteilchen-Schrödingergleichung darstellen. Dieser Ansatz entspricht einer unabhängigen Bewegung der Nukleonen in einem von ihnen selbst erzeugten mittleren Potential. Auch die semi-klassische Thomas-Fermi-Näherung (TF), bei der die Teilchendichten lokal durch Phasenraumintegrale über konstante Verteilungsfunktionen genähert werden, hat sich in Verbindung mit generalisierten Seyler-Blanchard-Kräften [10–13] als erfolgreich erwiesen. Sehr gute Ergebnisse konnten ebenfalls mit der Extended-Thomas-Fermi-Methode (ETF) [14] erzielt werden, bei der zusätzliche Korrekturterme vierter Ordnung einer semi-klassischen Wigner-Kirkwood-Entwicklung des Skyrme-HF-Energiefunktionals berücksichtigt wurden.

Im Verlauf der 80er Jahre des letzten Jahrhunderts haben sich in Konkurrenz zu den oben genannten Methoden relativistische Modelle etabliert, die auf einer quantenfeldtheoretischen Behandlung des nuklearen Vielteilchensystems basieren. In dieser als Quantenhadrodynamik (QHD) bezeichneten Feldtheorie wird die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen durch den Austausch von Mesonen vermittelt. Dieser Zugang geht auf den Vorschlag Yukawas (1935) zurück, die Kernkraft mittels des Austausches des bis dahin noch nicht experimentell gefundenen Pions zu beschreiben. Bereits in den Jahren 1955 und 1956 wurden von Johnson und Teller bzw. Duerr erste feldtheoretische Ansätze zu dieser Idee entwickelt. Schließlich wurde 1974 von Walecka das lineare σ - ω -Modell [15] eingeführt, das als Wechselwirkungsteilchen das skalare-isoskalare σ -Meson ($J^\pi = 0^+$, $I = 0$) und das vektorielle-isoskalare ω -Meson ($J^\pi = 1^-$, $I = 0$) enthält und die Dynamik der Nukleonen auf relativistische Weise mit der Dirac-Gleichung behandelt. In der Folgezeit wurde es von Boguta und Bodmer um nichtlineare σ -Selbstwechselwirkungsterme [16] sowie von Serot um das vektorielle-isovektorielle ρ -Meson ($J^\pi = 1^-$, $I = 1$) [17] zum sogenannten nichtlinearen σ - ω - ρ -Modell erweitert und mit großem Erfolg auf kernphysikalische Probleme angewandt (s. z.B. [18–23]).

Eine vollständige quantenfeldtheoretische Beschreibung von Kernen stellt einen prak-

tisch unlösbarer Ansatz dar, der eigentlich eine Berücksichtigung von Vakuumsfluktuationen, Retardierungseffekten und Vielteilchenkorrelationen notwendig macht. Daher beschränkt man sich in der Regel auf die statische Behandlung des nuklearen Systems in sogenannter Relativistischer Mittelfeldnäherung (RMF), bei der die Mesonenfelder durch ihre klassischen Erwartungswerte ersetzt werden. Dieses Vorgehen entspricht nach Ref. [18] dem Hartree-Verfahren (H). Zudem vernachlässigt man normalerweise Lösungen der Dirac-Gleichung mit negativer Energie, d.h. Antiteilchenzustände und damit Beiträge des Dirac-Sees bleiben in RMF unberücksichtigt. Diese, Relativistische Dirac-Hartree-Näherung genannte Methode wird gebräuchlicherweise auch kurz als Relativistische Hartree-Näherung (RH) bezeichnet.

Obwohl der quantenhadrodynamische Zugang eine fundamentalere Beschreibung der starken Wechselwirkung darstellt, trägt er ebenso wie die nichtrelativistischen Modelle phänomenologische Züge. Denn sowohl relativistische als auch nichtrelativistische Kräfte enthalten freie Parameter, die über eine Anpassung an Grundzustandseigenschaften wie Massen und Radien von Kernen bestimmt werden müssen, wodurch innerhalb des gewählten Näherungsansatzes (HF bzw. RH) vernachlässigte Vielteilcheneffekte teilweise wieder kompensiert werden.

Die quantenhadrodynamischen Modelle zeichnen sich vor allen Dingen durch zwei Aspekte gegenüber den konkurrierenden nichtrelativistischen Methoden aus: Zum einen enthalten sie bereits in ihrem Ansatz implizit die Spin-Bahn-Kraft in Kernen. Zum anderen führen sie durch das Wechselspiel zwischen attraktiven und repulsiven Potentialen automatisch zu einer Selbstbindung (Sättigung) infiniter Kernmaterie (INM), einem hypothetischen, isotropen System mit homogener Dichte, das angenähert die Verhältnisse im Inneren schwerer und mittelschwerer Kerne wiedergibt.

Auch wenn relativistische sowie nichtrelativistische Wechselwirkungen mit vergleichbarer Güte angepasste Grundzustandsgrößen von Kernen reproduzieren, weisen sie oftmals beträchtliche Unterschiede bei der Inkompressibilität K_∞ , dem Kompressionsmodul von infiniter Kernmaterie, auf. Diese Größe stellt ein charakteristisches Merkmal der Zustandsgleichung infiniter Kernmaterie dar und spielt eine wichtige Rolle bei der theoretischen Beschreibung von Schwerionenkollisionen, Supernova-Explosionen sowie der sich daran anschließenden Entstehung von Neutronensternen. Rückschlüsse von Laborexperimenten auf die Inkompressibilität K_∞ sind nur über eine Analyse der isoskalaren Monopolriesenresonanz (GMR) von Kernen möglich. Diese auch „breathing mode“ genannte kollektive Anregung von Kernen stellt eine Dichteschwingung mit kleiner Amplitude dar, bei der ein Kern seine sphärische Symmetrie beibehält. Bereits 1976 haben Blaizot, Gogny und Grammaticos [24] mittels systematischer nichtrelativistischer Random-Phase-Approximationsrechnungen (RPA) den Wert von K_∞ auf den Bereich von 210 ± 30 MeV eingeschränkt. Die Analyse von Youngblood, Clark und Lui [25] von 1999 fixiert in Verbindung mit den mikroskopischen RPA-Rechnungen von Blaizot *et al.* [9] K_∞ auf 231 ± 5 MeV. Gebräuchliche effektive Wechselwirkungen weisen dagegen nicht selten K_∞ -Werte zwischen ca. 170 und 350 MeV auf.

In der vorliegenden Arbeit werden Oberflächen- und Kompressionseigenschaften von Kernen in relativistischer Mittelfeldnäherung untersucht. Der Aufbau der Arbeit ist dabei zweigeteilt. Der erste Teil befaßt sich mit nuklearen Systemen, insbesondere Kernen, in ihrem Grundzustand. Kapitel 2 gibt dazu eine kurze Einführung in das nichtlineare σ - ω - ρ -Modell. Es werden dessen feldtheoretische Grundlagen sowie die Annahmen und

Grundzüge der Mittelfeldnäherung beschrieben. Die Modellsysteme infinite Kernmaterie und semi-infinite Kernmaterie (SINM), die als Grenzwert eines unendlich großen Kerns mit planer Oberfläche betrachtet werden kann, werden vorgestellt. Zusätzlich werden die Formalismen der Relativistischen Thomas-Fermi-Näherung (RTF) und der Relativistischen Hartree-Näherung erläutert, und die Eigenschaften beider Verfahren miteinander verglichen.

In Kap. 3 erfolgt eine Betrachtung zu Kompressionseffekten in Kernen bei zunächst ausgeschalteter Coulombkraft. Coulombeffekte werden im Anschluß daran besonders für exotisch große Kerne diskutiert.

Kapitel 4 schließlich setzt sich mit der Frage auseinander, wodurch die oben angedeuteten Differenzen bei der Inkompressibilität K_∞ von effektiven Wechselwirkungen zustande kommen können. Oberflächeneigenschaften wie die Oberflächenspannung σ von SINM und die SINM-Oberflächendicke t , die ein Maß für die Ausdehnung des Oberflächenbereichs der nuklearen Dichte ist, spielen dabei eine zentrale Rolle.

Kapitel 5 stellt den Abschluß des ersten Teils dieser Arbeit dar. Es wird darin untersucht, inwiefern sich die Oberflächeneigenschaften des von Zimányi und Moszkowski 1990 vorgestellten Skalaren Ableitungskopplungsmodells [26] durch Hinzunahme eines Tensorbeitrags in dessen Lagrangedichte verbessern lassen, und inwieweit der modifizierte Ansatz als Alternative zum nichtlinearen σ - ω - ρ -Modell betrachtet werden kann.

Der zweite Teil der Arbeit behandelt komprimierte nukleare Systeme. Es werden sowohl schwache Kompressionen, wie sie etwa bei der bereits erwähnten Monopolriesenresonanz in Kernen vorkommen, als auch starke Kompressionen in statischer Näherung betrachtet. Der feldtheoretische Formalismus wird dazu in Kap. 6 auf den Kompressionsfall erweitert. Zusatzterme in der Lagrangedichte des σ - ω - ρ -Modells simulieren dabei den für eine Kompression notwendigen äußeren Druck. Die vorgestellte Technik bildet die theoretische Grundlage für die nachfolgenden Kapitel.

Ein dichteabhängiger Zusatzterm findet in Kap. 7 bei der Beschreibung komprimierter Kerne im Rahmen der RTF-Näherung Verwendung. Energien und Inkompressibilitäten komprimierter endlicher Kerne werden betrachtet. Speziell für das Skalierungsmodell, in dem die statische Kernkompression durch eine homologe Transformation von Grundzustandsdichten erhalten wird, werden Aussagen bezüglich Teilchenstabilität und Stabilität gegenüber dem β -Zerfall getroffen. Auswirkungen eines externen Drucks auf die Kernspaltung werden allgemein diskutiert.

Einteilcheneffekte, die in der RTF-Methode unberücksichtigt bleiben, werden innerhalb der Relativistischen Hartree-Näherung in Kap. 8 untersucht. Es werden speziell die Auswirkungen eines Zusatzterms bestehend aus Mesonenbeiträgen auf Einteilchenenergien diskutiert. Die Betrachtungen zur Kernspaltung aus Kap. 7 werden nochmals aufgegriffen, und eine konkrete Berechnung von Spaltbarrieren nachgereicht.

Mit den Konvergenzeigenschaften von Entwicklungen der Inkompressibilität endlicher Kerne nach der Nukleonenzahl und dem relativen Neutronenüberschuß setzt sich Kap. 9 auseinander. Die Entwicklungskoeffizienten werden dazu anhand von Modellrechnungen für INM und SINM innerhalb des Skalierungsmodells numerisch bestimmt.

In Kap. 10 erfolgt eine Analyse experimenteller Breathing-Mode-Energien in Analogie zu dem in der Studie [24] ausgearbeiteten Verfahren. Als Basis hierfür dient eine Entwicklung der Inkompressibilität endlicher Kerne im Rahmen des Skalierungsmodells unter Verwendung von RH-Werten für Größen semi-infiniten Kernmaterie. Die damit ge-

wonnenen Aussagen werden mit expliziten RTF-Skalierungsergebnissen für endliche Kerne verglichen.

Kapitel 11 bildet mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick den Abschluß dieser Arbeit.

Teil I

Nukleare Systeme im Grundzustand

Kapitel 2

Das σ - ω - ρ -Modell für den nuklearen Grundzustand

Das σ - ω - ρ -Modell der Quantenhydrodynamik (QHD), das in diesem Kapitel vorgestellt werden soll, basiert auf dem von Walecka eingeführten linearen σ - ω -Modell [15]. In diesem wird die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung durch den Austausch des fiktiven skalaren-isoskalaren σ -Mesons mit Masse m_σ , welches den mittelreichweitigen attraktiven Anteil modelliert, und des vektoriellen-isoskalaren ω -Mesons mit Masse m_ω für den kurzreichweitigen repulsiven Anteil auf quantenfeldtheoretische Weise mit den Mesonenfeldern ϕ bzw. ω^μ beschrieben. Die Nukleonen selbst werden als relativistische Dirac-Teilchen (Ruhemasse M) mit dem Feldoperator

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

behandelt. Das ursprüngliche Modell wurde von Serot [17] um das Feld \vec{b}^μ für das vektorielle-isovektorielle ρ -Meson mit Masse m_ρ erweitert. Boguta und Bodmer [16] führten zusätzliche nichtlineare Terme in Form der kubischen und quartischen σ -Selbstwechselwirkungen $b_2\phi^3/3$ und $b_3\phi^4/4$ ein. Sie modellieren notwendige, sogenannte Counter-Terme eines Beitrags $\delta\mathcal{L}$, der die Renormierbarkeit der Theorie gewährleistet. Nimmt man noch das Coulombfeld A^μ hinzu, so ist die Lagrangedichte des σ - ω - ρ -Modells durch den Ansatz

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} \left[\gamma_\mu \left(i\partial^\mu - g_\omega\omega^\mu - g_\rho\vec{\tau} \cdot \vec{b}^\mu - e\frac{1+\tau_3}{2}A^\mu \right) - (M - g_\sigma\phi) \right] \psi \\ & + \frac{1}{2} \left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m_\sigma^2\phi^2 \right) - \frac{1}{3}b_2\phi^3 - \frac{1}{4}b_3\phi^4 \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu \right) \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\vec{G}_{\mu\nu} \cdot \vec{G}^{\mu\nu} - m_\rho^2\vec{b}_\mu \cdot \vec{b}^\mu \right) - \frac{1}{4}A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.2)$$

mit den Feldstärketensoren $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu$, $\vec{G}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\vec{b}_\nu - \partial_\nu\vec{b}_\mu$, $A_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ und den Paulimatrizen $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ für den Isospin gegeben. Die Konstanten g_σ , g_ω und g_ρ charakterisieren dabei die Stärke der Kopplung zwischen Mesonen und Nukleonen.

Im folgenden Abschnitt wird zunächst der feldtheoretische Formalismus der QHD anhand der Lagrangedichte \mathcal{L} (2.2) vorgestellt, bevor in Abschn. 2.2 auf die Näherungsannahmen der sogenannten Relativistischen Mittelfeldnäherung (RMF) eingegangen wird.

Die Darstellung der feldtheoretischen Grundzüge der QHD ist dabei bewußt knapp gehalten. Für eine umfassendere Behandlung sei auf Standardlehrbücher wie beispielsweise [27–30] verwiesen.

2.1 Feldgleichungen und Energie-Impuls-Tensor

Wie in der klassischen Feldtheorie läßt sich nun die Wirkung S über das Raumzeitintegral

$$S[\chi_a, \partial_\mu \chi_a] \equiv \int_{\mathcal{R}^4} \mathcal{L}(\chi_a, \partial_\mu \chi_a) d^4x \quad (\chi_a \equiv \psi, \bar{\psi}, \phi, \omega^\nu, \vec{b}^\nu, A^\nu) \quad (2.3)$$

definieren, aus deren Variation $\delta S = 0$ sich nach dem Hamiltonschen Prinzip die Bewegungsgleichungen für die Mesonenfelder und das Nukleonenfeld ψ als die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \chi_a)} = 0 \quad (2.4)$$

ergeben. Damit erhält man die Bestimmungsgleichungen

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m_\sigma^2 \phi = g_\sigma \bar{\psi} \psi - b_2 \phi^2 - b_3 \phi^3, \quad (2.5)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega^\nu = g_\omega \bar{\psi} \gamma^\nu \psi, \quad (2.6)$$

$$\partial_\mu \vec{G}^{\mu\nu} + m_\rho^2 \vec{b}^\nu = g_\rho \bar{\psi} \gamma^\nu \vec{\tau} \psi, \quad (2.7)$$

$$\partial_\mu A^{\mu\nu} = e \bar{\psi} \gamma^\nu \frac{1 + \tau_3}{2} \psi \quad (2.8)$$

für die Felder σ , ω^ν , \vec{b}^ν und A^ν , sowie durch die Variation nach $\bar{\psi}$ die Dirac-Gleichung

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - \Sigma_\mu) - (M - \Sigma)]\psi = 0 \quad (2.9)$$

für das Nukleonenfeld ψ mit den Selbstenergien

$$\Sigma_\mu \equiv g_\omega \omega_\mu + g_\rho \vec{\tau} \cdot \vec{b}_\mu + e \frac{1 + \tau_3}{2} A_\mu, \quad (2.10)$$

$$\Sigma \equiv g_\sigma \phi. \quad (2.11)$$

Die zu (2.9) adjungierte Gleichung,

$$i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + \bar{\psi}[\gamma^\mu \Sigma_\mu + (M - \Sigma)] = 0, \quad (2.12)$$

ergibt sich formal aus der Variation nach $\bar{\psi}$.

Nach dem Noether-Theorem ist mit jeder kontinuierlichen Symmetrietransformation, unter der die Lagrangedichte \mathcal{L} forminvariant ist, ein erhaltener Strom verknüpft. Das Raumintegral über seine zeitartige Komponente liefert dann eine Konstante der Bewegung. So gilt beispielsweise wegen der Invarianz von \mathcal{L} unter infinitesimalen Raumzeit-Translationen für den kanonischen Energie-Impuls-Tensor $\mathcal{T}_{\mu\nu}$,

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \sum_{\chi_a} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \chi_a)} \partial_\nu \chi_a, \quad (2.13)$$

der differentielle Erhaltungssatz:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.14)$$

woraus sich die Erhaltung der Energie E und des Impulses \mathbf{P} ableiten lassen:

$$P^\nu = \int_{\mathcal{R}^3} \mathcal{T}^{0\nu} d^3x, \quad P^\nu \equiv (E, \mathbf{P}). \quad (2.15)$$

Die Invarianz unter der globalen $U(1)$ -Phasentransformation $\psi \rightarrow e^{-i\alpha}\psi$ mit der konstanten Phase α führt auf die Kontinuitätsgleichung

$$\partial^\mu j_\mu = 0 \quad (2.16)$$

für die Stromdichte

$$j^\mu \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (2.17)$$

Als Erhaltungsgröße findet man die Nukleonenzahl A :

$$A = \int_{\mathcal{R}^3} j^0 d^3x = \int_{\mathcal{R}^3} \bar{\psi}\gamma^0\psi d^3x. \quad (2.18)$$

Wendet man den Differentialoperator ∂^μ auf Gl. (2.6) an und berücksichtigt den Erhaltungssatz (2.16), so ergibt sich wegen

$$m_\omega^2 \partial_\mu \omega^\mu = 0 \xrightarrow{m_\omega \neq 0} \partial_\mu \omega^\mu = 0 \quad (2.19)$$

für (2.6) die Proca-Gleichung:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\omega^2)\omega^\nu = g_\omega \bar{\psi}\gamma^\nu\psi. \quad (2.20)$$

Eine weitere, innere $U(1)$ -Symmetrie liefert die Erhaltung der elektrischen Ladung Q . Eine $SU(2)$ -Symmetrie im Isospinraum führt zum Isospinstrom

$$\vec{J}_\mu \equiv \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\psi \quad (2.21)$$

mit der erhaltenen 3-Komponente

$$I_3 \equiv \int_{\mathcal{R}^3} (J^0)_3 d^3x \quad (2.22)$$

des Isospins \vec{I} . Die elektrische Gesamtladung Q des Systems ist mit der Nukleonenzahl A und I_3 über die Beziehung

$$Q = \frac{1}{2}A + I_3 \quad (2.23)$$

verknüpft.

2.2 Mittelfeldnäherung und Relativistische Hartree-Näherung

Im Rahmen einer quantenfeldtheoretischen Behandlung der Lagrangedichte \mathcal{L} (2.2) müssen die Mesonenfelder, das Coulombfeld sowie das Nukleonenfeld als Operatoren aufgefaßt werden. Dies hat zur Folge, daß die aus \mathcal{L} resultierenden Feldgleichungen (2.5) – (2.9) aufgrund der darin implizit enthaltenen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren von komplizierter Struktur und in geschlossener Form praktisch unlösbar sind (s. z.B. Ref. [31]). Man verwendet daher üblicherweise die sogenannte Relativistische Mittelfeldnäherung (RMF), bei der man die Mesonenfeldoperatoren sowie den Operator A^μ für das Coulombfeld durch ihre Grundzustandserwartungswerte (GEV) ersetzt. Diese Näherung ist besonders für hohe Dichten geeignet, da dann die Quellterme in den Feldgleichungen (2.5) – (2.8) hohe Werte annehmen, und Quantenfluktuationen klein gegenüber den Felderwartungswerten werden [18]. σ , ω^μ , \vec{b}^μ und A^μ werden dabei als klassische „kondensierte“ Felder betrachtet. Die quantale Natur des Vielteilchensystems wird dadurch ausschließlich vom Nukleonenfeld ψ getragen. In Ref. [18] wird gezeigt, daß dieses Verfahren der relativistischen Hartree-Näherung entspricht. Bei der Beschränkung auf statische klassische Felder verschwinden wegen der Ladungserhaltung die geladenen Komponenten von \vec{b}^μ , so daß lediglich die ungeladene Komponente $(b^\mu)_0$ zur Energiedichte \mathcal{T}^{00} beiträgt. Zusätzlich hat die Invarianz des Modells gegenüber Zeitumkehr zur Folge, daß bei den in dieser Arbeit behandelten Systemen der GEV der Raumkomponenten der Mittelfelder Null ist. Ferner werden in RMF die Quellterme der Feldgleichungen (2.5) – (2.8) durch deren Erwartungswerte ersetzt.

Mit den oben geschilderten Näherungen erhält man für die Lagrangedichte \mathcal{L} und den Energie-Impuls-Tensor $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ in RMF die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{RMF}} &= \bar{\psi} \left[i\gamma_\mu \partial^\mu - g_\omega \gamma^0 \omega_0 - g_\rho \gamma^0 \tau_3 b_{00} - e\gamma^0 \frac{1 + \tau_3}{2} A_0 - (M - g_\sigma \phi) \right] \psi \\ &\quad - \frac{1}{2} ((\nabla \phi)^2 + m_\sigma^2 \phi^2) - \frac{1}{3} b_2 \phi^3 - \frac{1}{4} b_3 \phi^4 \\ &\quad + \frac{1}{2} ((\nabla \omega_0)^2 + m_\omega^2 \omega_0^2 + (\nabla b_{00})^2 + m_\rho^2 b_{00}^2 + (\nabla A_0)^2), \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\text{RMF}} &= i\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi + \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \partial_\mu \omega_0 \partial_\nu \omega_0 - \partial_\mu b_{00} \partial_\nu b_{00} - \partial_\mu A_0 \partial_\nu A_0 \\ &\quad + g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} ((\nabla \phi)^2 + m_\sigma^2 \phi^2) + \frac{1}{3} b_2 \phi^3 + \frac{1}{4} b_3 \phi^4 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} ((\nabla \omega_0)^2 + m_\omega^2 \omega_0^2 + (\nabla b_{00})^2 + m_\rho^2 b_{00}^2 + (\nabla A_0)^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Für die Feldgleichungen (2.5) – (2.8) und die Dirac-Gleichung (2.9) ergibt sich dann:

$$(-\Delta + m_\sigma^2)\phi(\mathbf{x}) = g_\sigma \rho_s(\mathbf{x}) - b_2 \phi^2(\mathbf{x}) - b_3 \phi^3(\mathbf{x}), \quad (2.26)$$

$$(-\Delta + m_\omega^2)\omega_0(\mathbf{x}) = g_\omega \rho(\mathbf{x}), \quad (2.27)$$

$$(-\Delta + m_\rho^2)b_{00}(\mathbf{x}) = g_\rho \rho_3(\mathbf{x}), \quad (2.28)$$

$$-\Delta A_0(\mathbf{x}) = e \rho_p(\mathbf{x}), \quad (2.29)$$

$$[i\gamma_\mu \partial^\mu - \gamma^0 \Sigma_0(\mathbf{x}) - (M - \Sigma(\mathbf{x}))]\psi(x) = 0, \quad (2.30)$$

mit den Dichtedefinitionen:

$$\rho_s \equiv \langle \bar{\psi} \psi \rangle, \quad \rho \equiv \langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle, \quad \rho_3 \equiv \langle \bar{\psi} \gamma^0 \tau_3 \psi \rangle, \quad \rho_p \equiv \langle \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^0 (1 + \tau_3) \psi \rangle. \quad (2.31)$$

Für das statische Vielteilchensystem wird das Nukleonenfeld ψ als Normalmodenentwicklung nach den Lösungen zu positiver (+) und negativer (-) Energie mit einer noch zu bestimmenden Normierungskonstanten \mathcal{N} angesetzt:

$$\psi(x) = \mathcal{N} \sum_{\alpha} \left[A_{\alpha} \psi_{\alpha}^{(+)}(\mathbf{x}) e^{-i\varepsilon_{\alpha}^{(+)} t} + B_{\alpha}^{\dagger} \psi_{\alpha}^{(-)}(\mathbf{x}) e^{-i\varepsilon_{\alpha}^{(-)} t} \right]. \quad (2.32)$$

Dabei bezeichnet α einen Satz von Quantenzahlen, der das System vollständig charakterisiert. Die Spinoren $\psi_{\alpha}^{(\pm)}$ genügen der stationären Einteilchen-Dirac-Gleichung:

$$[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \Sigma_0(\mathbf{x}) + \beta(M - \Sigma(\mathbf{x}))] \psi_{\alpha}^{(\pm)}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\alpha}^{(\pm)} \psi_{\alpha}^{(\pm)}(\mathbf{x}). \quad (2.33)$$

Die Quantisierung erfolgt mittels Antikommutatorrelationen zu gleicher Zeit t , woraus sich Antikommutatorrelationen für die Erzeugungsoperatoren A_{α}^{\dagger} und B_{α}^{\dagger} bzw. die Vernichtungsoperatoren A_{α} und B_{α} ableiten lassen [18]. In der Regel beschränkt man sich aber in der sogenannten Dirac-Hartree-Näherung nur auf die Zustände mit positiver Energie, wobei in der Hartree-Näherung auftretende Beiträge des Dirac-Sees vernachlässigt werden. Dieser Zusammenhang wird im nächsten Abschnitt über infinite Kernmaterie in Stichpunkten referiert. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird – wie allgemein gebräuchlich – die Relativistische Dirac-Hartree-Näherung auch kurz als Relativistische Hartree-Näherung (RH) bezeichnet.

2.3 Infinite Kernmaterie

Bei der infiniten Kernmaterie (INM) handelt es sich um ein unendlich ausgedehntes, homogenes und isotropes System mit unendlich vielen Nukleonen. Es wird durch die Quantenzahlen \mathbf{k} für den Impuls, $\lambda = \pm 1$ für den Spin sowie $\tau = \pm 1$ für den Isospin charakterisiert. Das Symbol τ stellt dabei den Eigenwert der Pauli-Matrix τ_3 mit den möglichen Werten $+1$ für Protonen und -1 für Neutronen dar.

Da die Mesonenfelder nicht vom Ort \mathbf{x} abhängen, können in den Feldgleichungen (2.26) – (2.28) alle Ableitungsterme unterdrückt werden. Die Coulombkraft zwischen den Protonen muß man sich dabei wegen der unendlichen Teilchenzahl ausgeschaltet denken, d.h. die Feldgleichung (2.29) bleibt in infiniten Kernmaterie unberücksichtigt.

Die Lösung erfolgt zunächst in einem Kasten der Kantenlänge L mit Volumen Ω unter Vorgabe periodischer Randbedingungen. Wegen der Translationsinvarianz des Systems entwickelt man ψ nach relativistischen ebenen Wellen mit dem Ansatz:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\alpha} \left(A_{\alpha} U_{\alpha} e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\varepsilon_{\alpha}^{(+)} t} + B_{\alpha}^{\dagger} V_{\alpha} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\varepsilon_{\alpha}^{(-)} t} \right), \quad \alpha \equiv (\mathbf{k}, \lambda, \tau). \quad (2.34)$$

Die Spinoren U_{α} und V_{α} für Zustände mit positiver bzw. negativer Energie genügen dabei der stationären Einteilchen-Dirac-Gleichung

$$[+\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + \Sigma_0 + \beta(M - \Sigma)] U_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha}^{(+)} U_{\alpha}, \quad (2.35)$$

$$[-\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + \Sigma_0 + \beta(M - \Sigma)] V_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha}^{(-)} V_{\alpha} \quad (2.36)$$

mit den Eigenwerten

$$\varepsilon(k, \tau)^{(\pm)} \equiv \varepsilon_{\alpha}^{(\pm)} = g_{\omega} \omega_0 + \tau g_{\rho} b_{00} \pm \varepsilon^*(k), \quad (2.37)$$

$$\varepsilon^*(k) \equiv \sqrt{k^2 + M^{*2}} \quad (2.38)$$

und der sogenannten effektiven Masse M^* :

$$M^* \equiv M - \Sigma = M - g_\sigma \phi, \quad (2.39)$$

die durch den Einfluß des Skalarfelds ϕ stets kleiner als die Nukleonenmasse M ist. Für die Lösungsspinoren U_α und V_α findet man die folgenden Ausdrücke [18]:

$$U_\alpha = \left[\frac{\varepsilon^*(k) + M^*}{2\varepsilon^*(k)} \right]^{1/2} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{\varepsilon^*(k) + M^*} \chi^\lambda \right) \xi_\tau, \quad (2.40)$$

$$V_\alpha = \left[\frac{\varepsilon^*(k) + M^*}{2\varepsilon^*(k)} \right]^{1/2} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{\varepsilon^*(k) + M^*} \chi^\lambda \right) \xi_\tau, \quad (2.41)$$

mit den Spinoren χ^λ für Spin und ξ_τ für den Isospin:

$$\chi^\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

U_α und V_α sind wegen der Eigenschaft

$$\bar{U}_\alpha U_\alpha = -\bar{V}_\alpha V_\alpha = \frac{M^*}{\varepsilon^*(k)} \quad (2.43)$$

nicht kovariant normiert. Stattdessen wählt man als Normierungsbedingung:

$$U_{\mathbf{k},\lambda,\tau}^\dagger U_{\mathbf{k},\lambda',\tau'} = V_{\mathbf{k},\lambda,\tau}^\dagger V_{\mathbf{k},\lambda',\tau'} = \delta_{\lambda,\lambda'} \delta_{\tau,\tau'}, \quad (2.44)$$

weil sich dadurch die konkrete Berechnung von Erwartungswerten einfacher gestaltet.

Das formale Vorgehen bei der Quantisierung des Nukleonenfelds ψ über Antikommutatorrelationen für die Operatoren A_α^\dagger und B_α^\dagger bzw. A_α und B_α soll an dieser Stelle nur kurz geschildert werden, da im weiteren Verlauf die dabei auftretenden Probleme durch die Vernachlässigung der Zustände negativer Energie innerhalb der Dirac-Hartree-Näherung umgangen werden können. Eine ausführliche Betrachtung zu dieser Thematik findet sich in Ref. [18].

Setzt man die Entwicklung (2.34) in den Hamiltonoperator

$$H = \int_{\Omega} \mathcal{T}^{00} d^3x \quad (2.45)$$

ein, so erhält man einen divergenten Ausdruck, der noch Beiträge von besetzten Vakuumzuständen mit negativer Energie enthält. Da physikalische Größen immer relativ zum Vakuum gemessen werden, führt man zunächst eine Normalordnung von H aus, d.h. zieht von ihm seinen Vakuumserwartungswert ab. Selbst dann verbleibt noch der divergente Term

$$\delta H = - \sum_{\alpha} \left(\sqrt{k^2 + M^{*2}} - \sqrt{k^2 + M^2} \right), \quad (2.46)$$

der die Anhebung des wechselwirkenden Vakuums in dessen Energie gegenüber dem freien Vakuum durch das σ -Feld zum Ausdruck bringt. δH wird in der Dirac-Hartree-Näherung vernachlässigt, seine Beiträge zu H wurden in der Vergangenheit eingehend beispielsweise in den Arbeiten [31, 18, 22, 32, 23] untersucht. Durch die vereinfachte Behandlung von H verbleiben dann bei allen Erwartungswerten von Bilinearformen von ψ nur Terme der Art $U_\alpha^\dagger U_\alpha$ und $\bar{U}_\alpha U_\alpha$ mit den Spinoren U_α zu positiver Energie.

Der Grundzustand (GS) wird durch die beiden Fermi-Impulse k_{F_n} für Neutronen und k_{F_p} für Protonen charakterisiert. Im Impulsraum werden für Protonen und Neutronen separat alle Zustände mit $k = \|\mathbf{k}\|$ bis zu den Fermi-Impulsen besetzt. Durch die sogenannte Kontinuumssubstitution, bei der man das Volumen Ω gegen Unendlich streben läßt, erhält man schließlich bei der Bildung von Erwartungswerten anstelle von Summen über Einzelzustände α die Impulsraumintegrale:

$$\frac{1}{\Omega} \sum_{\Omega} \dots \xrightarrow{\Omega \rightarrow \infty} \sum_{\lambda, \tau} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k \leq k_{F_\tau}} d^3k \dots \quad (2.47)$$

Damit ergeben sich für die Teildichten ρ_n , ρ_p , ρ_{s_n} , ρ_{s_p} , die Differenzdichte ρ_3 , die skalare Dichte ρ_s sowie die Dichte ρ die Ausdrücke:

$$\rho = \rho_n + \rho_p = \frac{1}{3\pi^2} k_{F_n}^3 + \frac{1}{3\pi^2} k_{F_p}^3, \quad (2.48)$$

$$\rho_3 = \rho_p - \rho_n, \quad (2.49)$$

$$\rho_s = \rho_{s_n} + \rho_{s_p} = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{k \leq k_{F_n}} \frac{M^*}{\varepsilon^*(k)} d^3k + \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{k \leq k_{F_p}} \frac{M^*}{\varepsilon^*(k)} d^3k, \quad (2.50)$$

womit die Feldgleichungen (2.26) – (2.28) nun algebraisch als

$$\phi = \frac{1}{m_\sigma^2} [g_\sigma \rho_s - b_2 \phi^2 - b_3 \phi^3], \quad (2.51)$$

$$\omega_0 = \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho, \quad (2.52)$$

$$b_{00} = \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} \rho_3 \quad (2.53)$$

geschrieben werden können.

Infinite Kernmaterie wird durch die Teildichten ρ_n und ρ_p charakterisiert. Alternativ dazu kann man einen Variablenwechsel zu der Gesamtdichte ρ und der Asymmetrie

$$\delta = \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho_n + \rho_p} \quad (2.54)$$

vornehmen. Dabei empfiehlt es sich, einen effektiven Fermi-Impuls $k_{F_{\text{eff}}}$ einzuführen, der über

$$k_F \equiv k_{F_{\text{eff}}} \equiv 2^{-1/3} (k_{F_n}^3 + k_{F_p}^3)^{-1/3}, \quad \rho = \frac{2}{3\pi^2} k_F^3 \quad (2.55)$$

definiert wird und für den symmetrischen Fall mit dem Impuls $k_F = k_{F_n} = k_{F_p}$ zusammenfällt.

Die Energiedichte des Systems ist als GEV von \mathcal{T}^{00} durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \left(\frac{g_\omega^2}{2m_\omega^2} + \delta^2 \frac{g_\rho^2}{2m_\rho^2} \right) \rho^2 + \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_\tau \int_{k \leq k_{F\tau}} \varepsilon^*(k) d^3k \\ & + \frac{m_\sigma^2}{2g_\sigma^2} (M - M^*)^2 + \frac{1}{3} b M (M - M^*)^3 + \frac{1}{4} c (M - M^*)^4 \end{aligned} \quad (2.56)$$

mit den üblicherweise verwendeten dimensionslosen Konstanten b und c ,

$$b \equiv \frac{b_2}{g_\sigma^3 M}, \quad c \equiv \frac{b_3}{g_\sigma^4}, \quad (2.57)$$

gegeben. Der hydrostatische Druck p des Systems tritt bei ruhender Kernmaterie als Diagonalelement des Spannungstensors $\langle \mathcal{T}^{ik} \rangle = p \delta_{ik}$ auf und kann deshalb durch die Spurbildung

$$p_{\text{hydr}} \equiv \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \langle T_{ii} \rangle \quad (2.58)$$

ermittelt werden. Der damit erhaltene Ausdruck stimmt mit der thermodynamischen Druckdefinition

$$p_{\text{th}} \equiv \rho^2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} \quad (2.59)$$

für Temperatur $T = 0$ überein [18]. Das nichtlineare σ - ω - ρ -Modell stellt in Mittelfeldnäherung somit eine thermodynamisch konsistente Theorie dar. Für den Druck gilt:

$$\begin{aligned} p = & \left(\frac{g_\omega^2}{2m_\omega^2} + \delta^2 \frac{g_\rho^2}{2m_\rho^2} \right) \rho^2 + \frac{2}{3(2\pi)^3} \sum_\tau \int_{k \leq k_{F\tau}} \frac{k^2}{\varepsilon^*(k)} d^3k \\ & - \frac{m_\sigma^2}{2g_\sigma^2} (M - M^*)^2 - \frac{1}{3} b M (M - M^*)^3 - \frac{1}{4} c (M - M^*)^4. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Unter Vorgabe der Dichten ρ_n und ρ_p respektive des effektiven Fermi-Impulses k_F und der Asymmetrie δ lassen sich die Lösungen für ω_0 und b_{00} direkt aus den Gln. (2.52) und (2.53) ermitteln. Das σ -Feld ϕ ist dagegen noch unbestimmt. Es wird durch eine Minimierung der Energiedichte bezüglich ϕ gewonnen. Die dadurch erhaltene transzendente Gleichung stellt dabei nichts anderes dar als die ursprüngliche Feldgleichung (2.51). Sie muß für jeden Wert von k_F bei fester Asymmetrie δ selbstkonsistent durch ein geeignetes iteratives Verfahren gelöst werden. (Für numerische Details siehe z.B. auch [33, 34].)

Ein wesentliches Merkmal speziell symmetrischer Kernmaterie ($\delta = 0$) ist ihr Sättigungsverhalten im sogenannten Sättigungspunkt mit Dichte ρ_0 . Durch das Wechselspiel zwischen attraktiven und repulsiven Potentialen durch das σ - resp. ω -Meson kommt es bei ρ_0 zu einer Selbstbindung des Systems, die durch ein Verschwinden des Drucks p ,

$$p(\rho_0, \delta = 0) = 0, \quad (2.61)$$

und einem negativen Wert für die Energie pro Nukleon $e_\infty(\rho_0, \delta = 0)$,

$$e_\infty(\rho, \delta) \equiv \frac{\mathcal{E}(\rho, \delta)}{\rho} - M, \quad (2.62)$$

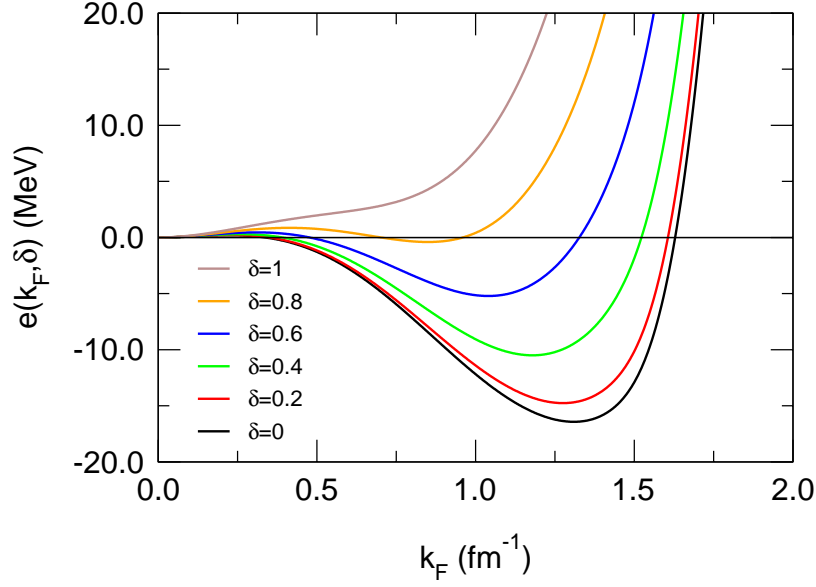


Abb. 2.1. Energie pro Nukleon in infiniter Kernmaterie für einige Werte der Asymmetrie δ (Parametersatz NL1).

gekennzeichnet ist. Dieser Sättigungsmechanismus ist ebenso für Werte $\delta < 0.8$ zu beobachten. Reine Neutronenmaterie ($\delta = 1$) ist dagegen ungebunden. Als Beispiel hierfür zeigt Abb. 2.1 e_∞ als Funktion des effektiven Fermi-Impulses k_F (2.55) für einige Werte der Asymmetrie δ für den Parametersatz NL1 aus Tabelle B.1.

Für die Energie/Nukleon e_∞ läßt sich eine Taylor-Entwicklung nach dem dimensionslosen Parameter

$$\varepsilon \equiv \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \quad (2.63)$$

und δ^2 aufstellen [35]:

$$e_\infty(\rho, \delta) = \left(a_v + \frac{1}{18} K_\infty \varepsilon^2 - \frac{1}{162} K' \varepsilon^3 + \dots \right) + \delta^2 \left(J + \frac{1}{3} L \varepsilon + \frac{1}{18} K_{\text{sym}} \varepsilon^2 + \dots \right) + \dots, \quad (2.64)$$

mit den Koeffizienten:

- $a_v \equiv e_\infty(\rho_0, \delta = 0)$ für die Energie pro Nukleon gesättigter symmetrischer INM,
- $K_\infty \equiv 9\rho_0^2 (\partial^2 e_\infty / \partial \rho^2)_{\rho=\rho_0, \delta=0}$ für die Inkompressibilität,
- $K' \equiv -27\rho_0^3 (\partial^3 e_\infty / \partial \rho^3)_{\rho=\rho_0, \delta=0}$ für die Anharmonizität; sie ist ein Maß für die Abweichung der Kurve von $e_\infty(\rho, \delta)$ von einer Parabelform,
- $J \equiv (\partial e_\infty / \partial (\delta^2))_{\rho=\rho_0, \delta=0}$ für die Symmetrie-Energie,
- $L \equiv 3\rho_0 (\partial^2 e_\infty / \partial (\delta^2) \partial \rho)_{\rho=\rho_0, \delta=0}$ für den Dichtesymmetriekoeffizienten,
- und schließlich $K_{\text{sym}} \equiv 9\rho_0^2 (\partial^3 e_\infty / \partial (\delta^2) \partial^2 \rho)_{\rho=\rho_0, \delta=0}$.

Kompressionseigenschaften kalter asymmetrischer Kernmaterie wurden beispielsweise in Ref. [34] untersucht und sollen an dieser Stelle deshalb nicht weiter verfolgt werden. Dennoch wird die Inkompressibilität K_∞ bei der Behandlung inhomogener Systeme einen zentralen Stellenwert innerhalb dieser Arbeit einnehmen.

2.4 Das Modellsystem semi-infinite Kernmaterie

Zum Studium von Oberflächeneigenschaften wurde von Swiatecki das Modell der semi-infiniten Kernmaterie (SINM) eingeführt [36]. Es besteht, ebenso wie INM, aus unendlich vielen Nukleonen, weist aber im Gegensatz dazu keine Homogenität und Isotropie mehr auf. Denn entlang einer ausgezeichneten Richtung, für die man gewöhnlich die z -Achse wählt, sind Dichten und Felder ortsabhängige Größen. In dazu senkrechten Ebenen (d.h. zur xy -Ebene parallelen Ebenen) liegen Kernmaterieverhältnisse vor. Im Grenzwert $z \rightarrow -\infty$ fordert man, daß alle Dichten und Felder ihre entsprechenden Werte aus gesättigter Kernmaterie anstreben. In diesem auch Bulk genannten Bereich liegt demnach gesättigte INM mit zentraler Asymmetrie δ_c vor. Für $z \rightarrow +\infty$ sollen dagegen alle Größen verschwinden. Der Frage, ob und wie sich die Kernmaterie im Bulk-Bereich von ihrem Sättigungspunkt wegbewegen läßt, wird ausführlich im zweiten Teil dieser Arbeit diskutiert.

Semi-infinite Kernmaterie stellt den Grenzfall unendlich großer Kerne mit $A \rightarrow \infty$ bei ausgeschalteter Coulombkraft dar. Obwohl es sich bei ihr um ein reines Modellsystem handelt, bietet sie die Möglichkeit, die Eigenschaften der nuklearen Oberfläche frei von störenden Krümmungseffekten, die bei endlichen Kernen auftreten, zu untersuchen.

2.4.1 Oberflächenenergie

Da das semi-infinite System unendlich viele Nukleonen enthält, ist seine gesamte Energie E als Raumintegral über die Energiedichte \mathcal{E} divergent. Auch die Energie pro Fläche E/F ,

$$E/F = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(z) dz, \quad (2.65)$$

liefert keinen endlichen Wert. Sie kann aber unter Verwendung der Referenzenergiedichte $\mathcal{E}_{\text{vol}} = e_\infty(\rho_0(\delta_c), \delta_c)\rho(z; \delta_c)$ in einen divergenten Volumen- und einen endlichen Oberflächenbeitrag aufgespalten werden:

$$E/F = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_{\text{vol}}(z; \delta_c) dz + \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{E}(z; \delta_c) - \mathcal{E}_{\text{vol}}(z; \delta_c)) dz = E_{\text{vol}}/F + E_{\text{sf}}/F. \quad (2.66)$$

Die Energie pro Einheitsfläche E_{sf}/F ist dann die nukleare Oberflächenspannung σ :

$$\sigma(\delta_c) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{E}(z; \delta_c) - \mathcal{E}_{\text{vol}}(z; \delta_c)) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{E}(z; \delta_c) - e_\infty(\rho_0(\delta_c), \delta_c)\rho(z; \delta_c)) dz. \quad (2.67)$$

Ihr Integrand, den man auch als Swiatecki-Integranden bezeichnet, liefert nur im Oberflächenbereich von Null verschiedene Werte, so daß σ damit einen endlichen Wert aufweist.

Die Wahl $\mathcal{E}_{\text{vol}} = \mu_n \rho_n + \mu_p \rho_p$ mit den chemischen Potentialen μ_n und μ_p führt auf die ebenfalls endliche Gibbs'sche Freie Energie pro Einheitsfläche

$$\tilde{\sigma}(\delta_c) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{E}(z; \delta_c) - \mu_n \rho_n(z; \delta_c) - \mu_p \rho_p(z; \delta_c)) dz, \quad (2.68)$$

deren Minimierung $\delta \tilde{\sigma} = 0$ die Bestimmungsgleichungen des semi-infiniten Systems liefert. Nach einem auf zweikomponentige Systeme verallgemeinerten Hugenholtz-van-Hove-Theorem [37] gilt dabei für μ_n und μ_p [38, 39]:

$$\mu_n = e_\infty(\rho_0(\delta_c), \delta_c) + (1 - \delta_c) \frac{\partial e_\infty(\rho_0(\delta_c), \delta_c)}{\partial \delta_c}, \quad (2.69)$$

$$\mu_p = e_\infty(\rho_0(\delta_c), \delta_c) - (1 + \delta_c) \frac{\partial e_\infty(\rho_0(\delta_c), \delta_c)}{\partial \delta_c}. \quad (2.70)$$

Mit der Beziehung [40]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_\infty(\rho_0(\delta_c), \delta_c)}{\partial \delta_c} &= \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} \rho_0(\delta_c) \delta_c + \frac{1}{2} \left(\sqrt{k_{\text{F}_{n,0}}^2 + M_0^{*\ 2}} - \sqrt{k_{\text{F}_{p,0}}^2 + M_0^{*\ 2}} \right), \\ k_{\text{F}_{a,0}} &\equiv k_{\text{F}_a}(\rho_0(\delta_c), \delta_c) \quad (a = n, p), \\ M_0^* &\equiv M^*(\rho_0(\delta_c), \delta_c), \end{aligned} \quad (2.71)$$

ergibt sich schließlich:

$$\mu_n = g_\omega \omega_0 - g_\rho b_{00} + \sqrt{k_{\text{F}_{n,0}}^2 + M_0^{*\ 2}}, \quad (2.72)$$

$$\mu_p = g_\omega \omega_0 + g_\rho b_{00} + \sqrt{k_{\text{F}_{p,0}}^2 + M_0^{*\ 2}}, \quad (2.73)$$

d.h. im symmetrischen Fall ($\delta_c = 0$) ist das chemische Potential $\mu = \varepsilon_{\text{F}} \equiv \varepsilon(k_{\text{F}})$ als Energie des energiereichsten Teilchens genauso groß wie die Energie pro Nukleon $a_v = e_\infty(\rho_0, \delta_c = 0)$ [37].

Abschließend sei noch bemerkt, daß nur für $\delta_c = 0$ die beiden Definitionen (2.67) und (2.68) für $\sigma(\delta_c)$ und $\tilde{\sigma}(\delta_c)$ identisch sind. Während $\tilde{\sigma}(\delta_c)$ eher als technische Hilfsgröße aufzufassen ist, steckt der physikalische Gehalt in der Definition (2.67) für die nukleare Oberflächenspannung $\sigma(\delta_c)$. Speziell die Größe

$$\sigma \equiv \sigma(\delta_c = 0) \quad (2.74)$$

aus gesättigter symmetrischer SINM ist dabei von besonderem Interesse. Sie bestimmt zusammen mit dem Kernradiusparameter r_0 ,

$$r_0 = \left(\frac{3}{4\pi\rho_0} \right)^{1/3}, \quad (2.75)$$

den Oberflächenenergiekoeffizienten

$$a_{\text{sf}} = 4\pi r_0^2 \sigma \quad (2.76)$$

der semi-empirischen Formel

$$E = a_v A + a_{\text{sf}} A^{2/3} + \dots \quad (2.77)$$

von Bethe und Weizsäcker [41, 42] für die Gesamtenergie eines Kerns.

2.4.2 Oberflächendichte

Als charakteristische Kenngröße der nuklearen Oberfläche wird die 90%-10%-Oberflächendicke t angesehen. Sie ist als Differenz der Orte $z_{0,1}$ und $z_{0,9}$ definiert, an denen die Dichte auf 10% bzw. 90% ihres zentralen Wertes ρ_c abgefallen ist. Sie läßt sich aus den in Streuexperimenten ermittelten Ladungsdichten von Kernen extrahieren und weist einen Wert von $t = 2.2 - 2.4$ fm auf [43].

Auch die Oberflächenverteilungsfunktion g [44, 45],

$$g(z) \equiv -\frac{\rho'(z)}{\rho_c}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) dz = 1, \quad (2.78)$$

charakterisiert den Dichteverlauf in der Oberflächenregion. Ihr erstes Moment z_0 ,

$$z_0 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) z dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\rho(z)}{\rho_c} - \theta(-z) \right) dz, \quad (2.79)$$

gibt den Ort an, an dem das Integral über die normierte Dichte denselben Wert wie das Integral über die Stufenfunktion $\theta(z - z_0)$ aufweist.

Die weiteren Momente B_2 – die sogenannte Oberflächenweite – und B_3 , die sich gemäß der allgemeinen Vorschrift

$$B_n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(z) (z - z_0)^n dz \quad (2.80)$$

aus der Verteilungsfunktion g ermitteln lassen, stellen ein integrales Gegenstück zu t bzw. ein Maß für die Schiefe der Dichteverteilung dar.

2.5 Relativistische Thomas-Fermi-Näherung

Die Relativistische Thomas-Fermi-Näherung (RTF) für den Grundzustand nuklearer Systeme stellt eine vereinfachte Behandlung der Mittelfeld-Lagrangedichte (2.24) des σ - ω - ρ -Modells dar [46, 18, 21]. Das Nukleonenfeld ψ wird dabei *lokal* nach ebenen Wellen entwickelt. Hierzu verwendet man für ψ den Kernmaterieansatz (2.34) mit nun ortsabhängigen Spinoren U_α und V_α (s.a. Gln. (2.40), (2.41)). Dieser Ansatz entspricht einer approximativen Lösung der stationären Dirac-Gleichung (2.33), bei der Gradientenbeiträge der Mittelfelder unterdrückt werden. Man geht also bei der RTF-Näherung von einer schwachen Ortsabhängigkeit der Felder und somit von lokal konstanten Feldern aus. Bei einer solchen Entwicklung nach den translationsinvarianten Lösungen eines homogenen Systems gehen Effekte der Spin-Bahn-Kraft, die in der nachfolgend beschriebenen relativistischen Hartree-Näherung implizit enthalten sind, verloren. Der RTF-Ansatz für das Nukleonenfeld entspricht vielmehr einer Lokalen Dichteannäherung (LDA).

2.5.1 Endliche Kerne

Für einen endlichen Kern mit sphärischer Symmetrie sind die RTF-Dichten durch die Ausdrücke

$$\rho(r) = \rho_p(r) + \rho_n(r) = \frac{1}{3\pi^2} \left(k_{F_p}^3(r) + k_{F_n}^3(r) \right), \quad (2.81)$$

$$\rho_3(r) = \rho_p(r) - \rho_n(r) = \frac{1}{3\pi^2} \left(k_{F_p}^3(r) - k_{F_n}^3(r) \right), \quad (2.82)$$

$$\rho_s(r) = \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{a=p,n} \int_{k \leq k_{F_a}(r)} \frac{M^*(r)}{\varepsilon^*(k, r)} d^3k, \quad (2.83)$$

$$M^*(r) = M - g_\sigma \phi(r), \quad (2.84)$$

$$\varepsilon^*(k, r) = \sqrt{k^2 + M^{*2}(r)} \quad (2.85)$$

gegeben. Sie führen auf den Ansatz

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{RTF}}(r) &= g_\omega \omega_0(r) \rho(r) + g_\rho b_{00}(r) \rho_3(r) + eA_0(r) \rho_p(r) \\ &\quad + \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{a=p,n} \int_{k \leq k_{F_a}(r)} \varepsilon^*(k, r) d^3k \\ &\quad - \frac{1}{2} (\omega_0'^2(r) + m_\omega^2 \omega_0^2(r)) \\ &\quad - \frac{1}{2} (b_{00}'^2(r) + m_\rho^2 b_{00}^2(r)) - \frac{1}{2} A_0'^2(r) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\phi'^2(r) + m_\sigma^2 \phi^2(r)) + \frac{1}{3} b_2 \phi^3(r) + \frac{1}{4} b_3 \phi^4(r) \\ &= \mathcal{E}_\infty(\phi(r), \omega_0(r), b_{00}(r), \rho_n(r), \rho_p(r)) + eA_0(r) \rho_p(r) \\ &\quad + \mathcal{E}_{\text{grad}}(\phi'(r), \omega_0'(r), b_{00}'(r), A_0'(r)), \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\mathcal{E}_{\text{grad}}(\phi', \omega_0', b_{00}', A_0') \equiv \frac{1}{2} (\phi'^2 - \omega_0'^2 - b_{00}'^2 - A_0'^2) \quad (2.87)$$

für die Energiedichte \mathcal{E}_{RTF} . Da zu \mathcal{E}_{RTF} neben den Mesonenfeldern ϕ , ω_0 , b_{00} und dem Coulombpotential A_0 ebenso deren Ableitungen über den Oberflächenterm $\mathcal{E}_{\text{grad}}$ beitragen, geht die RTF-Näherung über eine reine LDA hinaus.

Die RTF-Gleichungen werden für einen Kern mit Z Protonen, N Neutronen und $A = N + Z$ Nukleonen über die Minimierung der gesamten Energie $E = \int \mathcal{E}_{\text{RTF}}(r) d^3r$ unter der Nebenbedingung erhaltener Teilchenzahlen unter Verwendung der Lagrange-Multiplikatoren μ_n und μ_p gewonnen:

$$\delta \left(4\pi \int_0^\infty (\mathcal{E}_{\text{RTF}}(r) - \mu_n \rho_n(r) - \mu_p \rho_p(r)) r^2 dr \right) = 0. \quad (2.88)$$

Die Variation liefert das System gekoppelter Differentialgleichungen

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - m_\sigma^2 \right) \phi(r) = -g_\sigma \rho_s(r) + b_2 \phi^2(r) + b_3 \phi^3(r), \quad (2.89)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - m_\omega^2 \right) \omega_0(r) = -g_\omega \rho(r), \quad (2.90)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - m_\rho^2 \right) b_{00}(r) = -g_\rho \rho_3(r), \quad (2.91)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) A_0(r) = -e \rho_p(r) \quad (2.92)$$

für die Mittelfelder sowie die eigentlichen RTF-Beziehungen

$$g_\omega \omega_0(r) + g_\rho b_{00}(r) + e A_0(r) + \varepsilon_{F_p}^*(r) = \mu_p \quad (r \leq r_{p_u}), \quad (2.93)$$

$$g_\omega \omega_0(r) - g_\rho b_{00}(r) + \varepsilon_{F_n}^*(r) = \mu_n \quad (r \leq r_{n_u}), \quad (2.94)$$

$$\varepsilon_{F_{n,p}}^*(r) \equiv \sqrt{k_{F_{n,p}}^2(r) + M^{*2}(r)} \quad (2.95)$$

für die lokalen Fermi-Impulse k_{F_n} und k_{F_p} . Die aus Gl. (2.81) resultierenden Dichten ρ_n und ρ_p haben die Eigenschaft, jenseits der sogenannten klassischen Umkehrpunkte r_{n_u} und r_{p_u} , ab denen die Beziehungen (2.93) und (2.94) negative Werte für das Quadrat der Fermi-Impulse liefern, zu verschwinden:

$$\rho_n(r) = 0 \quad (r \geq r_{n_u}), \quad \rho_p(r) = 0 \quad (r \geq r_{p_u}). \quad (2.96)$$

Das Differentialgleichungssystem (2.89) – (2.92) muß zusammen mit den algebraischen Gleichungen (2.93) – (2.95) in einem Iterationsverfahren numerisch gelöst werden. Darin werden für gegebene Felder zunächst die chemischen Potentiale μ_n und μ_p ermittelt. Üblicherweise zieht man dafür ein Newton-Verfahren [47, 48] für die Integralbedingungen

$$N = 4\pi \int_0^\infty \rho_n(r) r^2 dr, \quad (2.97)$$

$$Z = 4\pi \int_0^\infty \rho_p(r) r^2 dr \quad (2.98)$$

heran. Die Dichten ρ_n und ρ_p ergeben sich dabei für die aktuellen Werte von μ_n und μ_p über die Beziehungen (2.93) – (2.95) und Gl. (2.81). Als deutlich schnellere Variante hat sich dagegen das folgende Verfahren herausgestellt: Aus Gl. (2.93) bzw. (2.94) wird zunächst für den aktuellen Wert von μ_a ($a \equiv n, p$) die unnormierte Dichte $\tilde{\rho}_a$ ermittelt. Als neue Dichte wird dann

$$\rho_a^{(\text{neu})}(r) = \frac{X \tilde{\rho}_a(r)}{4\pi \int_0^\infty \tilde{\rho}_a(r) r^2 dr} \quad (a = n, p, X = N, Z) \quad (2.99)$$

angesetzt. Daraus läßt sich mit der Beziehung (2.93) bzw. (2.94) wiederum die lokale Größe $\tilde{\mu}_a$ errechnen, deren räumliche Mittelung den neuen Wert für das chemische Potential μ_a liefert:

$$\mu_a^{(\text{neu})} = \frac{4\pi}{X} \int_0^\infty \tilde{\mu}_a \rho_a^{(\text{neu})}(r) r^2 dr. \quad (2.100)$$

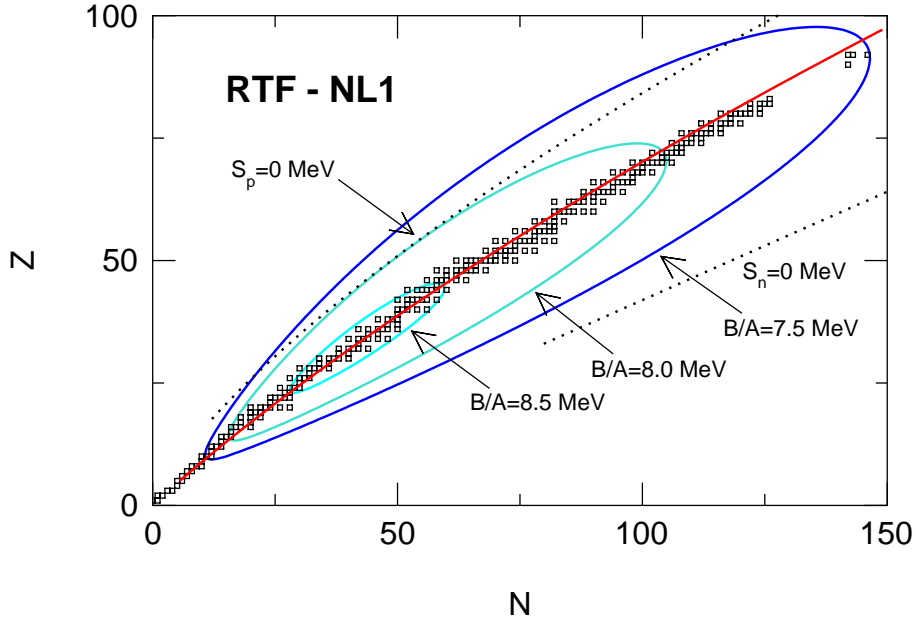


Abb. 2.2. (N, Z) -Ebene mit β -Stabilitätslinie (rot eingezeichnet), Neutronen- und Protonenabbruchkante sowie Höhenlinien für einige Werte der Bindungsenergie pro Nukleon B/A für den Parametersatz NL1. Die offenen Symbole repräsentieren die stabilen Kerne der Nuklidkarte.

Mit den aktualisierten Dichten können anschließend mittels einer sukzessiven Überrelaxation (SOR) in Verbindung mit dem Gauß-Seidel-Verfahren [49, 50, 47, 51] neue Mittelfelder aus dem Differentialgleichungssystem (2.89) – (2.92) mit den Randbedingungen

$$\left. \frac{d\chi_a(r)}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \chi_a(r) = 0 \quad (\chi_a = \phi, \omega_0, b_{00}, A_0) \quad (2.101)$$

gewonnen werden. Bei Rechnungen mit einem ausreichend großen Kavitätsradius R_{\max} lassen sich die Mesonenfelder bereits bei $r = R_{\max}$ auf Null setzen. Für das langreichweitige Coulombpotential ist hingegen zu berücksichtigen, daß es im Außenraum des Kerns gemäß

$$A_0(r > R_{\max}) = \frac{Ze}{4\pi r} \quad (2.102)$$

nur mit $1/r$ abfällt und daher bei $r = R_{\max}$ an den Randwert $(Ze)/(4\pi R_{\max})$ angepaßt werden muß. Das iterative Verfahren wird solange fortgesetzt, bis die Energie E des Kerns und die Mittelfelder (lokal) genügend auskonvergiert sind. Die Einbeziehung des Coulombfeldes führt dabei jedoch zu einer stark verlangsamten Konvergenz. Durch ein vorgeschaltetes Iterationsverfahren, in dem die Mittelfelder ϕ , ω_0 , b_{00} und A_0 über Fourier-Sinusreihen ermittelt werden, konnte das numerische Verfahren beträchtlich beschleunigt werden.

Um zu überprüfen, mit welcher Güte die RTF-Näherung die Bindungsenergien

$$B(Z, N) \equiv AM - E(Z, N) \quad (2.103)$$

von Kernen reproduziert, wurde eine Vielzahl von Kernen in der (N, Z) -Ebene der Nuklidkarte mit dem Parametersatz NL1 [20] (s.a. Tabelle B.1) berechnet. Aus den Ergebnissen wurden sowohl die β -Stabilitätslinie, die durch die Eigenschaft

$$\left. \frac{\partial B(Z, N)}{\partial Z} \right|_{N+Z} = 0 \iff \left. \frac{\partial B(A, I)}{\partial I} \right|_A = 0 \quad (2.104)$$

definiert ist, als auch die Neutronen- und Protonenseparationsenergien $S_n(Z, N)$ bzw. $S_p(Z, N)$ gemäß den Energiebilanzierungen

$$S_n(Z, N) = E(Z, N - 1) + M - E(Z, N) = B(Z, N) - B(Z, N - 1), \quad (2.105)$$

$$S_p(Z, N) = E(Z - 1, N) + M - E(Z, N) = B(Z, N) - B(Z - 1, N) \quad (2.106)$$

numerisch ermittelt. Der Beitrag der Elektronen in der Atomhülle sowie der Unterschied zwischen Neutronen- und Protonenmasse wurde bei der Bestimmung der Bindungs- und Separationsenergien vernachlässigt [52–54]. Die β -Stabilitätslinie wurde in der (N, Z) -Ebene als Contourlinie zum Wert Null der numerischen Ableitung

$$\left. \frac{\partial B(A, I)}{\partial I} \right|_A \approx \frac{B(Z - 1, N + 1) - B(Z + 1, N - 1)}{4/A} \quad (2.107)$$

gesucht. Abbildung 2.2 zeigt die extrahierte β -Stabilitätslinie (rot eingezeichnet), den Verlauf der Neutronen- und Protonenabbruchkante bei $S_n(Z, N) = 0$ MeV bzw. $S_p(Z, N) = 0$ MeV sowie einige Höhenlinien der Bindungsenergie pro Nukleon B/A . Die offenen Quadrate in Abb. 2.2 symbolisieren die stabilen Kerne der Nuklidkarte. Das zu schwache Abbiegen der β -Stabilitätslinie im Bereich schwerer Kerne deutet auf die bekannte Überschätzung der Neutron-Proton-Asymmetrie-Effekte durch den verwendeten Parametersatz NL1 hin.

2.5.2 Semi-infinite Kernmaterie

Die für das semi-infinite System zu lösenden Feldgleichungen lassen sich aus dem Gleichungssystem (2.89) – (2.92) für endliche Kerne durch die Vernachlässigung des Coulombfeldes A_0 und der Krümmungsbeiträge mit dem Differentialoperator d/dr , sowie mittels der anschließenden Ersetzung $r \rightarrow z$ erhalten:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - m_\sigma^2 \right) \phi(z) = -g_\sigma \rho_s(z) + b_2 \phi^2(z) + b_3 \phi^3(z), \quad (2.108)$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - m_\omega^2 \right) \omega_0(z) = -g_\omega \rho(z), \quad (2.109)$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - m_\rho^2 \right) b_{00}(z) = -g_\rho \rho_3(z). \quad (2.110)$$

Für die Dichten ρ_s , ρ und ρ_3 gelten dabei in entsprechender Weise die Beziehungen (2.81) – (2.83).

Formal wird das Gleichungssystem (2.108) – (2.110) aus der Variation $\delta \tilde{\sigma} = 0$ der freien Energie pro Einheitsfläche $\tilde{\sigma}$ (2.68) über die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\delta \mathcal{E}_{\text{RTF}}^{\text{SINM}}}{\delta \chi_a} = 0, \quad \frac{\delta}{\delta \chi_a} = \frac{\partial}{\partial \chi_a} - \frac{d}{dz} \frac{\partial}{\partial \chi'_a} \quad (\chi_a \equiv \phi, \omega_0, b_{00}) \quad (2.111)$$

gewonnen. Die hierbei auftretende Energiedichte $\mathcal{E}_{\text{RTF}}^{\text{SINM}}$ ist durch den Ausdruck \mathcal{E}_{RTF} (2.86) für endliche Kerne mit den Ersetzungen $r \rightarrow z$ und $A_0 \equiv 0$ gegeben:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{RTF}}^{\text{SINM}}(z) &= g_\omega \omega_0(z) \rho(z) + g_\rho b_{00}(z) \rho_3(z) \\ &+ \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{a=p,n} \int_{k \leq k_{F_a}(z)} \varepsilon^*(k, z) d^3k \\ &- \frac{1}{2}(\omega_0'^2(z) + m_\omega^2 \omega_0^2(z)) - \frac{1}{2}(b_{00}'^2(z) + m_\rho^2 b_{00}^2(z)) \\ &+ \frac{1}{2}(\phi'^2(z) + m_\sigma^2 \phi^2(z)) + \frac{1}{3} b_2 \phi^3(z) + \frac{1}{4} b_3 \phi^4(z) \\ &= \mathcal{E}_\infty(\phi(z), \omega_0(z), b_{00}(z), \rho_n(z), \rho_p(z)) \\ &+ \mathcal{E}_{\text{grad}}^{\text{SINM}}(\phi'(z), \omega_0'(z), b_{00}'(z)), \end{aligned} \quad (2.112)$$

$$\mathcal{E}_{\text{grad}}^{\text{SINM}}(\phi', \omega_0', b_{00}') \equiv \frac{1}{2}(\phi'^2 - \omega_0'^2 - b_{00}'^2). \quad (2.113)$$

Die RTF-Bestimmungsgleichungen

$$\frac{\delta \mathcal{E}_{\text{RTF}}^{\text{SINM}}}{\delta \rho_n} = \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{RTF}}^{\text{SINM}}}{\partial \rho_n} = \mu_n, \quad \frac{\delta \mathcal{E}_{\text{RTF}}^{\text{SINM}}}{\delta \rho_p} = \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{RTF}}^{\text{SINM}}}{\partial \rho_p} = \mu_p \quad (2.114)$$

für die chemischen Potentiale μ_p und μ_n lauten:

$$g_\omega \omega_0(z) + g_\rho b_{00}(z) + \varepsilon_{F_p}^*(z) = \mu_p \quad (z \leq z_{p_u}), \quad (2.115)$$

$$g_\omega \omega_0(z) - g_\rho b_{00}(z) + \varepsilon_{F_n}^*(z) = \mu_n \quad (z \leq z_{n_u}), \quad (2.116)$$

$$\varepsilon_{F_{n,p}}^*(z) \equiv \sqrt{k_{F_{n,p}}^2(z) + M^{*2}(z)}. \quad (2.117)$$

Die numerische Realisierung gestaltet sich einfacher als im Falle endlicher Kerne, da nun die chemischen Potentiale (2.115) und (2.116) während des gesamten Iterationsverfahrens mit entsprechenden INM-Werten fest vorgegeben sind. Die Feldgleichungen (2.108) – (2.110) können analog zu der Behandlung endlicher Kerne mit einem SOR-Gauß-Seidel-Verfahren gelöst werden. Die Problemstellung wird dazu auf das endliche Teilintervall $[z_1, z_r]$ eingeschränkt. Am rechten Rand z_r erzwingt man dabei das Verschwinden der Felder ϕ , ω_0 und b_{00} . Am linken Rand z_1 werden diese mit ihren Kernmateriewerten fixiert. Aufgrund der Translationsinvarianz der Oberflächeneigenschaften kann die Wahl der Intervallgrenzen z_1 und z_r willkürlich erfolgen. Üblicherweise werden die Ränder aber so gewählt, daß die Oberfläche in dem Gebiet um $z = 0$ zu liegen kommt. Deren genaue Lage wird durch den Startverlauf der Dichten und Felder bestimmt. Als Initialisierung bietet sich daher eine um den Ursprung zentrierte Fermi-Verteilung an.

2.6 Relativistische Hartree-Näherung

Die relativistische Hartree-Näherung für inhomogene Systeme unterscheidet sich von dem RTF-Verfahren des vorangegangenen Abschnitts durch eine explizitere Behandlung der Dirac-Gleichung (2.30). Die Feldgleichungen (2.26) – (2.29) sind in beiden Methoden zu lösen. Mit einer Normalmodenentwicklung gemäß dem Ansatz (2.32) sucht man in Analogie zur infiniten Kernmaterie Eigenfunktionen $\psi_\alpha^{(+)}$ der stationären Einteilchen-Dirac-Gleichung (2.33) mit nun veränderlichen Mittelfeldern. Dabei werden in der Dirac-Hartree-

Näherung lediglich positive Einteilchenenergien $\varepsilon_\alpha^{(+)}$ berücksichtigt. In den nachfolgenden beiden Unterabschnitten wird die Spezialisierung der RH-Näherung auf sphärisch-symmetrische Kerne sowie die semi-infinite Kernmaterie geschildert.

2.6.1 Endliche Kerne

Die stationäre Dirac-Gleichung (2.33) läßt sich für sphärisch-symmetrische Kerne mit den Abkürzungen

$$V(r) \equiv \Sigma_0(r) = g_\omega \omega_0(r) + \tau g_\rho b_{00}(r) + e \frac{1+\tau}{2} A_0(r), \quad S(r) \equiv \Sigma(r) = g_\sigma \phi(r) \quad (2.118)$$

für den zeitlichen Anteil der vektoriellen Selbstenergie Σ_μ und der skalaren Selbstenergie Σ für positive Energien in Matrixschreibweise auch darstellen als:

$$h \psi_\alpha^{(+)}(\mathbf{x}) \equiv \begin{pmatrix} V(r) + M - S(r) & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & V(r) - M + S(r) \end{pmatrix} \psi_\alpha^{(+)}(\mathbf{x}) = \varepsilon_\alpha^{(+)} \psi_\alpha^{(+)}(\mathbf{x}). \quad (2.119)$$

In der Dirac-Theorie ist der Bahndrehimpuls l keine gute Quantenzahl mehr. Der Bahndrehimpulsoperator \mathbf{l} und der Spin $\mathbf{s} = \boldsymbol{\Sigma}/2$ koppeln nun zum Gesamtspin \mathbf{j} :

$$\mathbf{j} \equiv \mathbf{l} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}, \quad \boldsymbol{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (2.120)$$

($\boldsymbol{\Sigma}$ ist dabei nicht mit dem bei sphärisch-symmetrischen Kernen verschwindenden Raumanteil der vektoriellen Selbstenergie Σ^μ zu verwechseln.) Da der Hamiltonoperator h mit \mathbf{j} , \mathbf{j}^2 , j_z und dem Spin-Bahn-Operator K ,

$$K \equiv \beta(\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{l} + 1), \quad (2.121)$$

vertauscht, kann $\psi_\alpha^{(+)}$ als Eigenfunktion zu h , \mathbf{j}^2 , j_z und K dargestellt werden. Es empfiehlt sich daher, mittels der Spin-Kugelfunktionen [55]

$$\begin{aligned} \Phi_{\kappa m}(\hat{\mathbf{x}}) &\equiv \sum_{m_l, m_s} (l m_l s m_s | j m) Y_{l m_l}(\hat{\mathbf{x}}) \chi_{m_s} \\ &= (l(m - \frac{1}{2}) \frac{1}{2} \frac{1}{2} | j m) Y_{l m - 1/2}(\hat{\mathbf{x}}) \chi^\uparrow \\ &\quad + (l(m + \frac{1}{2}) \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | j m) Y_{l m + 1/2}(\hat{\mathbf{x}}) \chi^\downarrow, \end{aligned} \quad (2.122)$$

die Eigenfunktionen zu \mathbf{j}^2 , \mathbf{l}^2 , \mathbf{s}^2 und j_z sind, den Winkel- und Spinanteil in der großen und kleinen Komponenten von $\psi_\alpha^{(+)}$ gemäß dem Ansatz [18, 22, 23] ($r \equiv \|\mathbf{x}\|$)

$$\psi_{a,m}(\mathbf{x}) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} \psi_u(r) \Phi_{\kappa m}(\hat{\mathbf{x}}) \\ \psi_l(r) \Phi_{-\kappa m}(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} \xi_\tau = \mathcal{N} \begin{pmatrix} i \frac{G_a(r)}{r} \Phi_{\kappa m}(\hat{\mathbf{x}}) \\ -\frac{F_a(r)}{r} \Phi_{-\kappa m}(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} \xi_\tau \quad (2.123)$$

abzuspalten. a ist dabei der reduzierte Satz von Quantenzahlen $a \equiv \{n, \kappa, \tau\}$. Für $\psi_{a,m}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^2 \psi_{a,m}(\mathbf{x}) &= j(j+1) \psi_{a,m}(\mathbf{x}), \\ j_z \psi_{a,m}(\mathbf{x}) &= m \psi_{a,m}(\mathbf{x}), \\ K \psi_{a,m}(\mathbf{x}) &= -\kappa \psi_{a,m}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.124)$$

Zwischen dem Eigenwert κ des Spin-Bahn-Operators K und den Quantenzahlen j , m , l , m_l und m_s bestehen die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} l &= \begin{cases} -\kappa - 1 & \kappa < 0, \\ \kappa & \kappa > 0, \end{cases} \\ j &= |\kappa| - \frac{1}{2}, \quad -j \leq m \leq j, \quad m_l = m - m_s, \end{aligned} \quad (2.125)$$

d.h.:

$$\kappa = \begin{cases} l & j = l - \frac{1}{2}, \\ -l - 1 & j = l + \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.126)$$

Die zu lösenden Feldgleichungen können auf folgende Weise erhalten werden: Zunächst findet man über die allgemeine Relation

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (2.127)$$

für zwei beliebige Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} die nützliche Beziehung:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x}}{r^2} [\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{p})] = -i \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x}}{r} \left[\frac{d}{dr} - \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l}}{r} \right]. \quad (2.128)$$

Angewandt auf die obere und untere Komponente ψ_u und ψ_l des Spinoransatzes (2.123) liefert sie wegen der Eigenschaft

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x}}{r} \Phi_{\kappa m}(\hat{\mathbf{x}}) = -\Phi_{-\kappa m}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.129)$$

die Ausdrücke:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \psi_u(\mathbf{x}) \Phi_{\kappa m}(\hat{\mathbf{x}}) = i \left(\frac{d}{dr} + \frac{\kappa + 1}{r} \right) \psi_u(\mathbf{x}) \Phi_{-\kappa m}(\hat{\mathbf{x}}), \quad (2.130)$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \psi_l(\mathbf{x}) \Phi_{-\kappa m}(\hat{\mathbf{x}}) = i \left(\frac{d}{dr} - \frac{\kappa - 1}{r} \right) \psi_l(\mathbf{x}) \Phi_{\kappa m}(\hat{\mathbf{x}}). \quad (2.131)$$

Mit diesen beiden Gleichungen kann schließlich aus dem Eigenwertproblem (2.119) das Differentialgleichungssystem erster Ordnung:

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r} \right) G_a(r) = (\varepsilon_a - V(r) + M - S(r)) F_a(r), \quad (2.132)$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} \right) F_a(r) = -(\varepsilon_a - V(r) - M + S(r)) G_a(r), \quad (2.133)$$

für die Orbitalwellenfunktionen G_a und F_a abgeleitet werden. G_a und F_a müssen neben den Randbedingungen

$$G_a(r=0) = F_a(r=0) = 0, \quad G_a(r \rightarrow \infty) = F_a(r \rightarrow \infty) = 0 \quad (2.134)$$

zusätzlich die Normierungsbedingung

$$\int_{\mathcal{R}^3} \psi_{a,m}^\dagger(\mathbf{x}) \psi_{a,m}(\mathbf{x}) d^3x = \int_0^\infty (G_a^2(r) + F_a^2(r)) dr = 1 \quad (2.135)$$

erfüllen. Die beiden Differentialgleichungen (2.132) und (2.133) werden zusammen mit den Feldgleichungen (2.26) – (2.29) abwechselnd iterativ gelöst. Bei der numerischen Umsetzung ist in jedem Iterationsschritt auf die Orthogonalität der Zustandsspinoren $\psi_{a,m}$ zu achten. Dazu bietet sich das Gram-Schmidt-Verfahren mit dem Skalarprodukt

$$(\psi_1, \psi_2) \equiv \int_0^\infty (G_1(r)G_2(r) + F_1(r)F_2(r)) dr \quad (2.136)$$

an. Ein neuer Schätzwert für die Einteilchenenergie ε_a läßt sich im Anschluß daran gemäß der Vorschrift

$$\begin{aligned} \varepsilon_a = & \int_0^\infty \left[F_a(r) \left(\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r} \right) G_a(r) - G_a(r) \left(\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} \right) F_a(r) \right. \\ & \left. - (M - V(r) - S(r)) F_a^2(r) + (M + V(r) - S(r)) G_a^2(r) \right] dr \quad (2.137) \end{aligned}$$

in Verbindung mit einem Relaxationsverfahren für den jeweils aktuellen Wert von ε_a erhalten.

Die Dichten werden als Quellterme der Mittelfeldgleichungen (2.26) – (2.29) bei komplett aufgefüllten j -Schalen durch die Summation von Bilinearformen der Art $\bar{\psi}_{a,m}\psi_{a,m}$ und $\psi_{a,m}^\dagger\psi_{a,m}$ über die magnetische Quantenzahl m bei festem κ und fixierter Hauptquantenzahl n ermittelt. Dadurch ergeben sich:

$$\rho(r) = \sum_a \frac{2j+1}{4\pi r^2} (G_a^2(r) + F_a^2(r)), \quad (2.138)$$

$$\rho_s(r) = \sum_a \frac{2j+1}{4\pi r^2} (G_a^2(r) - F_a^2(r)), \quad (2.139)$$

$$\rho_3(r) = \sum_a \frac{2j+1}{4\pi r^2} (-1)^{(\tau-1)/2} (G_a^2(r) + F_a^2(r)), \quad (2.140)$$

$$\rho_p(r) = \sum_a \frac{2j+1}{4\pi r^2} \frac{1+\tau}{2} (G_a^2(r) + F_a^2(r)). \quad (2.141)$$

Die Energie E eines endlichen Kerns ist als Raumintegral über die Energiedichte $\mathcal{E} = \langle T_{00}^{\text{RMF}} \rangle$ (2.25) durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} E = & \sum_a (2j+1)\varepsilon_a + \int \left[\frac{1}{2}(\phi^2(r) + m_\sigma^2\phi^2(r)) + \frac{1}{3}b_2\phi^3(r) + \frac{1}{4}b_3\phi^4(r) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}(\omega_0'^2(r) + m_\omega^2\omega_0^2(r)) - \frac{1}{2}(b_{00}^2(r) + m_\rho^2b_{00}^2(r)) - \frac{1}{2}A_0^2(r) \right] d^3r \quad (2.142) \end{aligned}$$

gegeben. Unter Verwendung der Mittelfeldgleichungen (2.26) – (2.29) läßt sich für ihn auch schreiben:

$$\begin{aligned} E = & \sum_a (2j+1)\varepsilon_a - \frac{1}{2} \int (-g_\sigma\rho_s(r)\phi(r) + \frac{1}{3}b_2\phi^3(r) + \frac{1}{2}b_3\phi^4(r) \\ & + g_\omega\omega_0(r)\rho(r) + g_\rho b_{00}(r)\rho_3(r) + eA_0(r)\rho_p(r)) d^3r. \quad (2.143) \end{aligned}$$

Sollen Kerne berechnet werden, bei denen Protonen und/oder Neutronen die am schwächsten gebundene j -Schale nicht vollständig ausfüllen, müssen die darin enthaltenen Nukleonen mit Gewichten w_a ($0 < w_a \leq 1$) gleichmäßig auf alle m -Unterzustände verteilt werden. Die Gewichte w_a sind dann bei der Bestimmung der Dichten (2.138) – (2.141) sowie der gesamten Energie Gl. (2.143) zu berücksichtigen.

2.6.2 Semi-infinite Kernmaterie

Die Behandlung semi-unendlicher Kernmaterie in RH-Näherung wurde detailliert in den Arbeiten [56, 57] vorgestellt. An dieser Stelle soll deshalb nur eine zusammenfassende Beschreibung der dort verwendeten Technik erfolgen.

Zunächst muß in Analogie zu sphärisch-symmetrischen Kernen ein geeigneter Ansatz für den Einteilchenspinor $\psi_\alpha^{(\pm)}$ gefunden werden, der gleichzeitig eine Eigenfunktion des Hamiltonoperators h und des Spin-Bahn-Operators

$$\tilde{K} \equiv \beta(\Sigma_y p_x - \Sigma_x p_y) = \begin{pmatrix} \sigma_y p_x - \sigma_x p_y & 0 \\ 0 & -(\sigma_y p_x - \sigma_x p_y) \end{pmatrix} \quad (2.144)$$

darstellt. Man macht dazu den folgenden Ansatz [56]:

$$\psi_\alpha(\mathbf{x}) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} \psi_u(z)\chi^\lambda \\ \psi_l(z)\chi^{-\lambda} \end{pmatrix} e^{i(k_x x + k_y y)} \xi_\tau = \mathcal{N} \begin{pmatrix} i G_\alpha(z)\chi^\lambda \\ F_\alpha(z)\chi^{-\lambda} \end{pmatrix} e^{i(k_x x + k_y y)} \xi_\tau, \quad (2.145)$$

mit der noch unbestimmten Normierungskonstanten \mathcal{N} , der Spinstellung $\lambda = \pm 1$, den Impulskomponenten k_x , k_y , k_z und dem Satz von Quantenzahlen $\alpha = \{k_x, k_y, k_z, \tau, \lambda\}$. Die Spinfunktionen $\chi^{\pm\lambda}$ [58],

$$\chi^{\pm\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2k_\perp}} \begin{pmatrix} \sqrt{k_y + ik_x} \\ \mp \lambda \sqrt{k_y - ik_x} \end{pmatrix}, \quad k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \quad (2.146)$$

sind dabei Eigenfunktionen des Spin-Bahn-Operators \tilde{K} (2.144) mit dem Eigenwert λk_\perp :

$$\tilde{K} \psi_\alpha(\mathbf{x}) = \lambda k_\perp \psi_\alpha(\mathbf{x}), \quad (2.147)$$

$$(\sigma_y k_x - \sigma_x k_y) \chi^{\pm\lambda} = \pm \lambda k_\perp \chi^{\pm\lambda}. \quad (2.148)$$

Aus der stationären Dirac-Gleichung

$$\begin{pmatrix} V(z) + M - S(z) & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & V(z) - M + S(z) \end{pmatrix} \psi_\alpha(\mathbf{x}) = \varepsilon_\alpha \psi_\alpha(\mathbf{x}), \quad (2.149)$$

$$V(z) \equiv g_\omega \omega_0(z) + \tau g_\rho b_{00}(z), \quad S(z) \equiv g_\sigma \phi(z) \quad (2.150)$$

erhält man mit dem Spinoransatz (2.145) dann das gekoppelte System von Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\left(\sigma_x k_x + \sigma_y k_y - i \sigma_z \frac{d}{dz} \right) \psi_l(z) \chi^{-\lambda} = (\varepsilon_\alpha - V(z) - M + S(z)) \psi_u(z) \chi^\lambda, \quad (2.151)$$

$$\left(\sigma_x k_x + \sigma_y k_y - i \sigma_z \frac{d}{dz} \right) \psi_u(z) \chi^\lambda = (\varepsilon_\alpha - V(z) + M - S(z)) \psi_l(z) \chi^{-\lambda}. \quad (2.152)$$

Mit den Eigenschaften

$$(\sigma_x k_x + \sigma_y k_y) \chi^{\pm\lambda} = \pm i \lambda k_\perp \chi^{\mp\lambda}, \quad (2.153)$$

$$\sigma_z \chi^{\pm\lambda} = \chi^{\mp\lambda} \quad (2.154)$$

ergeben sich daraus schließlich die Differentialgleichungen

$$\left(\frac{d}{dz} - \lambda k_{\perp}\right) G_{\alpha}(z) = (\varepsilon_{\alpha} - V(z) + M - S(z)) F_{\alpha}(z), \quad (2.155)$$

$$\left(\frac{d}{dz} + \lambda k_{\perp}\right) F_{\alpha}(z) = -(\varepsilon_{\alpha} - V(z) - M + S(z)) G_{\alpha}(z) \quad (2.156)$$

für die Orbitalwellenfunktionen G_{α} und F_{α} . Ihr asymptotisches Verhalten an den Rändern $z \rightarrow -\infty$ und $z \rightarrow +\infty$ kann ermittelt werden, indem man die konstanten Kernmateriewerte resp. Null für die Mesonenfelder in obige Differentialgleichungen einsetzt. Man erhält die Grenzwerte [56, 33]

$$G_{\alpha}(z) \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} \sin(k_z z + \delta_{\alpha}), \quad (2.157)$$

$$F_{\alpha}(z) \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} \frac{1}{\varepsilon^*(k) + M_0^*} (k_z \cos(k_z z + \delta_{\alpha}) - \lambda k_{\perp} \sin(k_z z + \delta_{\alpha})), \quad (2.158)$$

$$G_{\alpha}(z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} A_{\alpha} e^{-\gamma_{\alpha} z}, \quad \gamma_{\alpha} \equiv \sqrt{M^2 - \varepsilon_{\alpha}^2 + k_{\perp}^2}, \quad (2.159)$$

$$F_{\alpha}(z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} -\frac{\gamma_{\alpha} + \lambda k_{\perp}}{\varepsilon_{\alpha} + M} A_{\alpha} e^{-\gamma_{\alpha} z} \quad (2.160)$$

mit der Amplitude A_{α} und der Phase δ_{α} . Damit die Differentialgleichungen (2.155) und (2.156) erfüllt sind, muß für die Einteilchenenergie ε_{α} gelten:

$$\varepsilon_{\alpha} = g_{\omega} \omega_0 + \tau g_{\rho} b_{00} + \sqrt{k_z^2 + k_{\perp}^2 + M_0^{*2}}, \quad (2.161)$$

d.h. der Eigenwert ε_{α} ist durch die Einteilchenenergie von infiniten Kernmaterie gegeben und somit für vorgegebene Quantenzahlen k_z , k_{\perp} und λ schon bestimmt.

Formal erfolgt die Behandlung des semi-infiniten Problems zunächst in dem endlichen Quantisierungsvolumen Ω der Länge $2L$ und Fläche S ($-L \leq z \leq L$, $0 \leq x \leq \sqrt{S}$, $0 \leq y \leq \sqrt{S}$). Eine Normierung von $\psi_{\alpha}^{\dagger} \psi_{\alpha}$ liefert dann die Beziehung [56, 33]:

$$\mathcal{N} = \sqrt{\frac{4}{\Omega}} \sqrt{\frac{\varepsilon^*(k) + M_0^*}{2 \varepsilon^*(k)}}. \quad (2.162)$$

Um entsprechende Ausdrücke für die Dichten zu erhalten, läßt man analog zu der Vorgehensweise in Kernmaterie das Volumen Ω in der Kontinuumssubstitution

$$\frac{1}{\Omega} \sum_{\alpha} \dots \xrightarrow{\Omega \rightarrow \infty} \sum_{\lambda, \tau} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\vartheta_{F_{\tau}}} d^3 k \dots \quad (2.163)$$

gegen Unendlich streben, wobei nach Ref. [59] die Impulsraumintegration nur über die positive Fermihalbkuugel $\vartheta_{F_{\tau}}$,

$$\vartheta_{F_{\tau}} \equiv \{\mathbf{k} \mid k_z^2 + k_{\perp}^2 \leq k_{F_{\tau}}^2, 0 \leq k_z \leq k_{F_{\tau}}\}, \quad (2.164)$$

zu erfolgen hat. Es ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

$$\rho(z) = \sum_{\lambda, \tau} \rho^{\lambda, \tau}(z), \quad (2.165)$$

$$\rho_s(z) = \sum_{\lambda, \tau} \rho_s^{\lambda, \tau}(z), \quad (2.166)$$

$$\rho_3(z) = \rho_p(z) - \rho_n(z) = \sum_{\lambda} (\rho^{\lambda, \tau=+1}(z) - \rho^{\lambda, \tau=-1}(z)), \quad (2.167)$$

$$\rho^{\lambda, \tau}(z) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{F\tau}} \int_0^{\sqrt{k_{F\tau}^2 - k_z^2}} k_{\perp} (G_{\alpha}^2(z) + F_{\alpha}^2(z)) dk_{\perp} dk_z, \quad (2.168)$$

$$\rho_s^{\lambda, \tau}(z) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{F\tau}} \int_0^{\sqrt{k_{F\tau}^2 - k_z^2}} k_{\perp} (G_{\alpha}^2(z) - F_{\alpha}^2(z)) dk_{\perp} dk_z. \quad (2.169)$$

Für die Energiedichte \mathcal{E} des semi-infiniten Systems erhält man auf ähnliche Weise:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(z) = & \sum_{\lambda, \tau} \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{F\tau}} \int_0^{\sqrt{k_{F\tau}^2 - k_z^2}} k_{\perp} \varepsilon_{\alpha} (G_{\alpha}^2(z) + F_{\alpha}^2(z)) dk_{\perp} dk_z \\ & + \frac{1}{2} (\phi'^2(z) + m_{\sigma}^2 \phi^2(z)) + \frac{1}{3} b_2 \phi^3(z) + \frac{1}{4} b_3 \phi^4(z) \\ & - \frac{1}{2} (\omega_0'^2(z) + m_{\omega}^2 \omega_0^2(z)) - \frac{1}{2} (b_{00}'^2(z) + m_{\rho}^2 b_{00}^2(z)), \end{aligned} \quad (2.170)$$

womit sich die nukleare Oberflächenspannung σ gemäß Gl. (2.67) ermitteln läßt.

Die numerische Behandlung wirft einige Probleme auf, da die Lösung streng genommen in dem doppelt-unendlichen Intervall $]-\infty, +\infty[$ zu erfolgen hat. In der Praxis beschränkt man sich jedoch auf das endliche Teilintervall $[z_1, z_r]$, bei dem man am rechten Rand z_r das Verschwinden aller Dichten und Mittelfelder fordern kann. Aufgrund der sogenannten Friedel-Oszillationen, die in den Dichten auftreten und eine Art Brandungseffekt der Nukleonen an der Oberfläche darstellen, können für die Mittelfelder am linken Rand z_1 keine festen Werte vorgegeben werden. Die Randwerte ergeben sich stattdessen automatisch bei der Bestimmung der Mittelfelder über Greensche Funktionen. Als numerisch stabilere Variante hat sich dagegen ein Differenzenverfahren nach Numerov [49] in Verbindung mit einer lokalen Dichteapproximation am Punkt z_1 herausgestellt. Für die iterative Berechnung der Orbitalwellenfunktionen G_{α} und F_{α} bietet sich die sogenannte Mehrzielmethode [49] für Randwertprobleme unter Verwendung des Bulirsch-Stoer-Verfahrens an. Da neben G_{α} und F_{α} auch die Amplitude A_{α} sowie die Phase δ_{α} bestimmt werden müssen, werden diese vier Größen in dem um die Differentialgleichungen $dA_{\alpha}/dz = 0$ und $d\delta_{\alpha}/dz = 0$ erweiterten Gleichungssystem behandelt. Die Integrationen über die positive Fermihalbkuugeln $\vartheta_{F_{\tau}}$ erfolgen mittels einem zweidimensionalen Gauß-Legendre-Verfahren in der (k_{\perp}, k_z) -Impulsebene. Weitere Details zur numerischen Behandlung und damit verbundene Probleme finden sich in der Arbeit [33].

2.7 Vergleich der beiden Näherungen

Die RTF-Näherung weist charakteristische Unterschiede zu der realistischeren RH-Methode auf. Tabelle 2.1 zeigt einen Vergleich von Bindungsenergien B (2.103) und Ladingsradien r_{ch} beider Verfahren für die Parametersätze NL-Z, NL1 und NL-SH aus Tabelle B.1. Die Werte von r_{ch} wurden aus den Protonendichten ρ_p als die rms-Radien $\sqrt{\langle r^2 \rangle_{\text{ch}}}$

Tabelle 2.1. RTF- und RH-Werte der Bindungsenergie B (MeV) und des Ladungsradius r_{ch} (fm) endlicher Kerne. Alle Werte wurden aus Rechnungen ohne Schwerpunktskorrekturen gewonnen.

	RTF			RH		
	NL-Z	NL1	NL-SH	NL-Z	NL1	NL-SH
^{40}Ca	$B = 332.3$	327.2	324.4	336.4	333.5	331.5
	$r_{\text{ch}} = 3.55$	3.54	3.44	3.50	3.50	3.45
^{90}Zr	$B = 775.8$	770.0	765.4	778.4	777.9	775.1
	$r_{\text{ch}} = 4.41$	4.39	4.30	4.27	4.26	4.24
^{208}Pb	$B = 1619.5$	1610.5	1609.6	1631.9	1634.2	1636.9
	$r_{\text{ch}} = 5.73$	5.68	5.59	5.56	5.51	5.49

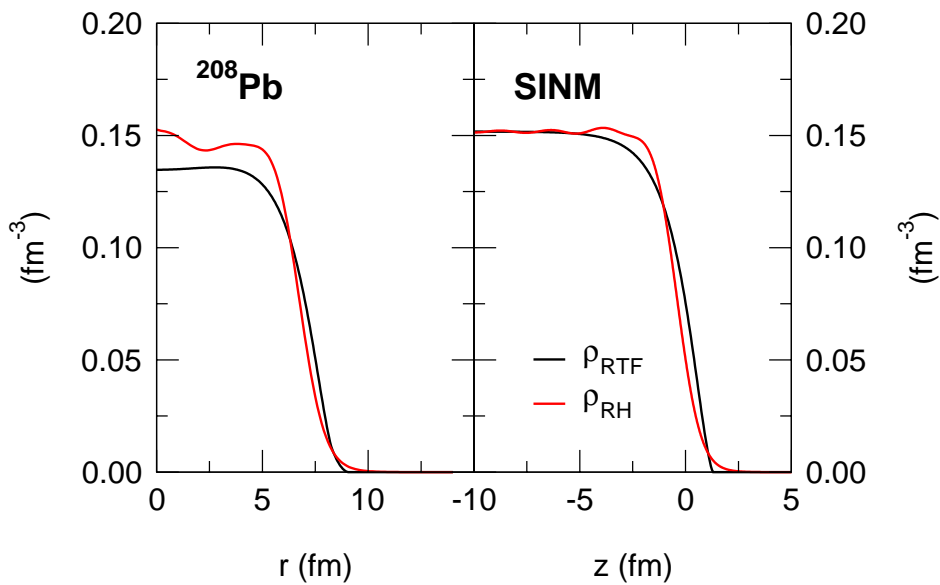


Abb. 2.3. RTF- und RH-Dichten für den Kern ^{208}Pb (linke Hälfte) sowie symmetrische SINM (rechte Abb.). Die Dichten stammen in beiden Fällen aus Grundzustandsrechnungen mit dem Parametersatz NL1.

der Ladungsdichte

$$\begin{aligned}\rho_{\text{ch}}(r) &= \int \frac{1}{(a\sqrt{\pi})^3} e^{-((r-r')/a)^2} \rho_{\text{p}}(r') \, d^3 r' \\ &= \frac{1}{ra\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left[e^{-((r-r')/a)^2} - e^{-((r+r')/a)^2} \right] \rho_{\text{p}}(r') r' \, dr',\end{aligned}\quad (2.171)$$

$$a = \sqrt{\frac{2}{3}} \langle r_{\text{p}} \rangle_{\text{rms}}, \quad (2.172)$$

$$\langle r_{\text{p}} \rangle_{\text{rms}} = 0.8 \text{ fm} \quad (2.173)$$

bestimmt [60]. Im Gegensatz zu ρ_{p} berücksichtigt die Ladungsdichte ρ_{ch} die endliche Ausdehnung des Protons mit rms-Ladungsradius $\langle r_{\text{p}} \rangle_{\text{rms}}$. Als Folge größerer Oberflächenenergien (s. Abschn. 2.4) fallen in RTF die Bindungsenergien etwas kleiner als im Falle der Hartree-Näherung aus. Wegen der charakteristischen langen Schulter der RTF-Dichten im Oberflächenbereich (s.a. Abb. 2.3) sind die Oberflächendicken im Vergleich zu den RH-Werten unrealistisch groß, was tendenziell zu größeren Werten für den Ladungsradius r_{ch} führt.

Die RTF-Methode wurde um Beiträge aus semi-klassischen \hbar - sowie Wigner-Kirkwood-Entwicklungen erweitert [61–65]. Diese RETF-Ansätze führen bei den Oberflächendicken zu einer besseren Übereinstimmung mit den RH-Werten, approximieren aber die RH-Energien nicht wesentlich besser als das einfache RTF-Verfahren.

Kapitel 3

Kompressionseffekte in nuklearen Systemen

Für das nichtlineare σ - ω - ρ -Modell in Mittelfeldnäherung stimmen in infiniten Kernmaterie die thermodynamische Druckdefinition p_{th} (2.59) und der hydrostatische Druck p_{hydr} (2.58) überein. Man spricht von thermodynamischer Konsistenz der RMF-Näherung für das nichtlineare σ - ω - ρ -Modell. Diese Übereinstimmung ist aber nicht bei allen Näherungen bzw. Verfahren gegeben. Beispielsweise geht bei der Dirac-Hartree-Fock-Methode, die über die Mittelfeldnäherung hinausgeht und Retardierungseffekte bei den Feldern berücksichtigt, die thermodynamische Konsistenz verloren [66].

Schon bei homogenen und isotropen Systemen wie Kernmaterie stellt sich also die Frage, welche Druckdefinition den „wahren“ Druck des Systems darstellt. In der klassischen Elektrodynamik wird durch den Maxwell'schen Spannungstensor ein Druck durch die elektromagnetischen Felder repräsentiert. Daher erscheint im Rahmen der QHD der feldtheoretisch basierte, hydrodynamische Druck p_{hydr} als adäquate Druckdefinition, weil in ihm Feldeffekte in konsistenter Weise automatisch enthalten sind. Die thermodynamische Konsistenz von Modellen ist eher als bemerkenswerte Tatsache anzusehen, stellt aber keine zwingende Notwendigkeit dar.

Die eigentlichen Druck- bzw. Kräfteverhältnisse im nuklearen System werden von dem Spannungstensor T_{ik} , d.h. von dem Raumanteil des Energie-Impuls-Tensors (2.25), angegeben. Mit seiner Hilfe erhält man über das Oberflächenintegral

$$F_i = \oint T_{ik} dn^k \quad (3.1)$$

die Komponente F_i der Kraft \mathbf{F} , die auf ein beliebiges Volumenelement ΔV mit Oberflächennormalen dn^k wirkt. Für ein statisches System muß für Kräftefreiheit jede Komponente von \mathbf{F} verschwinden. Diese Forderung ist nach dem Gauß'schen Satz gleichbedeutend damit, daß die Divergenz der Zeilenvektoren von T_{ik} Null ist. Für den gesamten Energie-Impuls-Tensor müssen die differentiellen Erhaltungssätze

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (3.2)$$

erfüllt sein, was allgemein durch eine Invarianz der Lagrangedichte \mathcal{L} unter infinitesimalen Raumzeit-Translationen gewährleistet wird.

In diesem Kapitel werden mit Hilfe des Spannungstensors T_{ik} die Druckverhältnisse in gesättigter semi-infiniten Kernmaterie sowie in endlichen Kernen im Grundzustand

studiert [67]. Zusätzlich wird der Grenzübergang von unendlich großen Kernen zu semi-infiniter Kernmaterie bei abgeschalteter Coulombkraft untersucht. Die Betrachtungen erfolgen dabei im Rahmen der relativistischen Thomas-Fermi-Näherung. Abschließend wird kurz auf den Einfluß der Coulombkraft bei endlichen Kernen eingegangen. Es werden besonders die Effekte bei exotisch großen Kernen diskutiert. Bei allen konkreten Rechnungen wurde der Parametersatz NL1 verwendet.

3.1 Energie-Impuls-Tensor semi-infiniten Kernmaterie

Der Einfachheit halber wird in diesem Abschnitt speziell symmetrische SINM, bei der das ρ -Meson zur Oberflächenspannung σ keine Beiträge liefert, behandelt. Das Feld b_{00} kann daher bei allen weiteren Betrachtungen weggelassen werden. Die Erweiterung aller nachfolgenden Ausdrücke auf asymmetrische SINM läßt sich dann durch die formale Ersetzung

$$\mu\rho \rightarrow \mu_n\rho_n + \mu_p\rho_p \quad (3.3)$$

vornehmen.

Für symmetrische SINM führt die Minimierung $\delta\sigma = 0$ der Oberflächenspannung in RTF-Näherung auf die Variationsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathcal{E}}{\delta\phi} &= 0, & \frac{\delta\mathcal{E}}{\delta\omega_0} &= 0, & \frac{\delta\mathcal{E}}{\delta\rho} &= \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho} = \mu, \\ \frac{\delta}{\delta\chi_a} &= \frac{\partial}{\partial\chi_a} - \frac{d}{dz} \frac{\partial}{\partial\chi'_a} \quad (\chi_a \equiv \phi, \omega_0, \rho). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Für den Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ (2.25) erhält man unter Verwendung der RTF-Energiedichte (2.112) und des Oberflächenbeitrags $\mathcal{E}_{\text{grad}}$ (2.113) den Ausdruck:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu\rho - \mathcal{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu\rho - \mathcal{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu\rho - \mathcal{E} + 2\mathcal{E}_{\text{grad}} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Wie in infiniten Kernmaterie verschwinden die Nichtdiagonalelemente von $T_{\mu\nu}$. Wegen der ausgezeichneten z -Richtung des semi-infiniten Systems unterscheidet sich aber das Element T_{33} von den beiden anderen räumlichen Diagonalelementen T_{11} und T_{22} . Die Gleichheit der Elemente T_{11} und T_{22} spiegelt den homogenen Charakter von SINM in zur z -Achse senkrechten lokalen Ebenen wider. T_{11} , T_{22} und die beiden ersten Terme in T_{33} stellen den negativen Swiatecki-Integranden dar, der nur in der Oberflächenregion von Null verschiedene Beiträge zur Oberflächenspannung σ liefert. Im Bulkbereich ($z \rightarrow -\infty$) entspricht er nach dem Hugenholtz-van-Hove-Theorem allgemein dem Druck in Kernmaterie, der am Sättigungspunkt gerade verschwindet.

Das Element T_{33} stellt die gerichtete Kraft pro Einheitsfläche mit Normalenvektor in z -Richtung dar. Es repräsentiert damit den lokalen Druck- bzw. Kräfteverlauf in SINM. Differenziert man nun T_{33} nach z , so erhält man:

$$T'_{33} = \mu\rho' - \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\chi_a}\chi'_a - \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\chi'_a}\chi''_a + \frac{d}{dz} \left(\chi'_a \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\chi'_a} \right) = \mu\rho' - \chi'_a \frac{\delta\mathcal{E}}{\delta\chi'_a}, \quad (3.6)$$

wobei über den stummen Index a für $\chi_a \equiv \phi, \omega_0, \rho$ zu summieren ist. Da der Gradientenbeitrag $\mathcal{E}_{\text{grad}}$ eine homogene Funktion vom Grad 2 in den Ableitungen der Felder ist, konnte in (3.6) für den Beitrag $2\mathcal{E}_{\text{grad}}$ zu T_{33} die Beziehung $2\mathcal{E}_{\text{grad}} = \chi'_a (\partial\mathcal{E}/\partial\chi'_a)$ eingesetzt werden. Die Summe über a kann hierbei um den Beitrag von ρ' erweitert werden, weil die Energiedichte \mathcal{E} nicht explizit von der Ableitung der Dichte abhängt. Unter Verwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen (3.4) ergibt sich ferner:

$$T'_{33}(z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad T_{33} = \text{const.} \quad \forall z. \quad (3.7)$$

Da in gesättigter SINM im Bulk-Bereich der Kernmateriedruck $T_{11}(z \rightarrow -\infty) = T_{22}(z \rightarrow -\infty) = T_{33}(z \rightarrow -\infty)$ verschwindet, ist damit T_{33} für den gesamten Verlauf in SINM identisch Null. Mit dieser Eigenschaft läßt sich der Spannungstensor T_{ik} auch schreiben als:

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} -2\mathcal{E}_{\text{grad}} & 0 & 0 \\ 0 & -2\mathcal{E}_{\text{grad}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Die Gültigkeit der Erhaltungssätze (3.2) kann mit diesem Ausdruck leicht verifiziert werden.

Ein lokaler thermodynamischer Druck, der sich als

$$p_{\text{th}} \equiv \rho^2 \frac{\delta}{\delta\rho} \left(\frac{\mathcal{E}}{\rho} \right) = \rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\frac{\mathcal{E}}{\rho} \right) = \mu\rho - \mathcal{E} \quad (3.9)$$

definieren ließe, würde im Gegensatz zu (3.8) in der Oberfläche einen nichtverschwindenden Druck für das System liefern. Dieser Sachverhalt verdeutlicht die Notwendigkeit, über den Spannungstensor Materie- sowie Feldbeiträge bei einer Druckdefinition konsistent zu berücksichtigen.

3.2 Energie-Impuls-Tensor endlicher Kerne und der semi-infinite Grenzwert

Für die Untersuchung des Spannungstensors endlicher Kerne erfolgt nun zunächst eine Spezialisierung auf $N=Z$ -Kerne bei ausgeschalteter Coulombkraft, d.h. es werden nachfolgend Terme und Beiträge des Felds b_{00} und des Coulombpotentials A_0 unterdrückt. Wie im vorangegangenen Abschnitt lassen sich dann die Ergebnisse auf beliebige Kerne mit eingeschalteter Coulombkraft verallgemeinern, indem man für das Produkt $\mu_A\rho$, bestehend aus dem chemischen Potential μ_A und der Nukleonendichte ρ , die Ersetzung

$$\mu_A\rho \rightarrow \mu_{nN}\rho_n + \mu_{pZ}\rho_p \quad (3.10)$$

vornimmt. Die Indizes A , N und Z symbolisieren die implizite Abhängigkeit der chemischen Potentiale von der Nukleonen- bzw. Neutronen- und Protonenzahl.

Die Minimierung der Energie (2.88) unter der Nebenbedingung erhaltener Teilchenzahl A führt auf die Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\chi_a} - \frac{d}{dr} \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\chi'_a} - \frac{2}{r} \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\chi'_a} = 0 \quad (\chi_a = \phi, \omega_0), \quad \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho} = \mu_A. \quad (3.11)$$

Für den Energie-Impuls-Tensor erhält man in kartesischer Darstellung aus Gl. (2.13) den symmetrischen Ausdruck:

$$T_{\mu\nu}^A = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{A\rho} - \mathcal{E} + 2\mathcal{E}_{\text{grad}} \frac{x^2}{r^2} & 2\mathcal{E}_{\text{grad}} \frac{xy}{r^2} & 2\mathcal{E}_{\text{grad}} \frac{xz}{r^2} \\ 0 & 2\mathcal{E}_{\text{grad}} \frac{xy}{r^2} & \mu_{A\rho} - \mathcal{E} + 2\mathcal{E}_{\text{grad}} \frac{y^2}{r^2} & 2\mathcal{E}_{\text{grad}} \frac{yz}{r^2} \\ 0 & 2\mathcal{E}_{\text{grad}} \frac{xz}{r^2} & 2\mathcal{E}_{\text{grad}} \frac{yz}{r^2} & \mu_{A\rho} - \mathcal{E} + 2\mathcal{E}_{\text{grad}} \frac{z^2}{r^2} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Der Raumanteil T_{ik}^A kann auch in Kurzform als

$$T_{ik}^A = -(\mu_{A\rho} - \mathcal{E})g_{ik} + 2\mathcal{E}_{\text{grad}} \frac{1}{r^2} x_i x_k \quad (3.13)$$

geschrieben werden. Wegen der nun auftretenden Nichtdiagonalelemente in (3.12) bzw. (3.13) sieht der Spannungstensor auf den ersten Blick komplizierter aus als der entsprechende semi-infinite Ausdruck (3.5), den man im Limes $A \rightarrow \infty$ erhält, indem man $x = y = 0$ und $r = |z|$ wählt. Setzt man die Feldgleichungen (3.11) in die Beziehung

$$r^2 \partial^i T_{ik}^A = \left[\mu_{A\rho}'(r) - \frac{d}{dr} \mathcal{E}(r) + \frac{d}{dr} \{2\mathcal{E}_{\text{grad}}(r)\} \right] r x_k + 4\mathcal{E}_{\text{grad}}(r) x_k \quad (3.14)$$

ein, lassen sich auch für einen endlichen Kern die Erhaltungssätze (3.2) verifizieren.

Der Spannungstensor (3.12) kann in der Darstellung für die Kugelkoordinaten (θ, φ, r) bedeutend vereinfacht werden. Mit Hilfe eines Maple-Programms wurde für den Tensor T_{ab}^A der Ausdruck

$$T_{ab}^A = \begin{pmatrix} \mu_{A\rho} - \mathcal{E} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{A\rho} - \mathcal{E} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{A\rho} - \mathcal{E} + 2\mathcal{E}_{\text{grad}} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

erhalten, wobei die Indizes a und b die Koordinaten θ , φ und r repräsentieren. In Analogie zum semi-infiniten Fall (3.5) kann man nun versuchen, eine zu Gl. (3.7) äquivalente Beziehung herzuleiten. Für die radiale Komponente T_{rr}^A , die wegen der Homogenität von $\mathcal{E}_{\text{grad}}$ als

$$T_{rr}^A = \mu_{A\rho} - \mathcal{E} + 2\mathcal{E}_{\text{grad}} = \mu_{A\rho} - \mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \chi_a'} \chi_a' \quad (3.16)$$

geschrieben werden kann, erhält man durch Differentiation nach dem radialen Abstand r unter Ausnutzung der Variationsgleichungen (3.11):

$$\frac{d}{dr} T_{rr}^A = -\frac{4}{r} \mathcal{E}_{\text{grad}}. \quad (3.17)$$

Da der Gradientenbeitrag $\mathcal{E}_{\text{grad}}$ gerade im Oberflächenbereich nicht verschwindet, kann T_{rr}^A im Gegensatz zu T_{33} von SINM nicht identisch Null sein. Abbildung 3.1 zeigt dazu die Spannungstensorelemente $T_{\theta\theta}^A = T_{\varphi\varphi}^A$ und T_{rr}^A als Funktion von r bei ausgeschalteter Coulombkraft für einige Werte von A , einschließlich hypothetisch großer Kerne. Man sieht, daß im Zentrum bei $r = 0$ alle Diagonalelemente T_{aa}^A denselben Wert aufweisen. T_{rr}^A

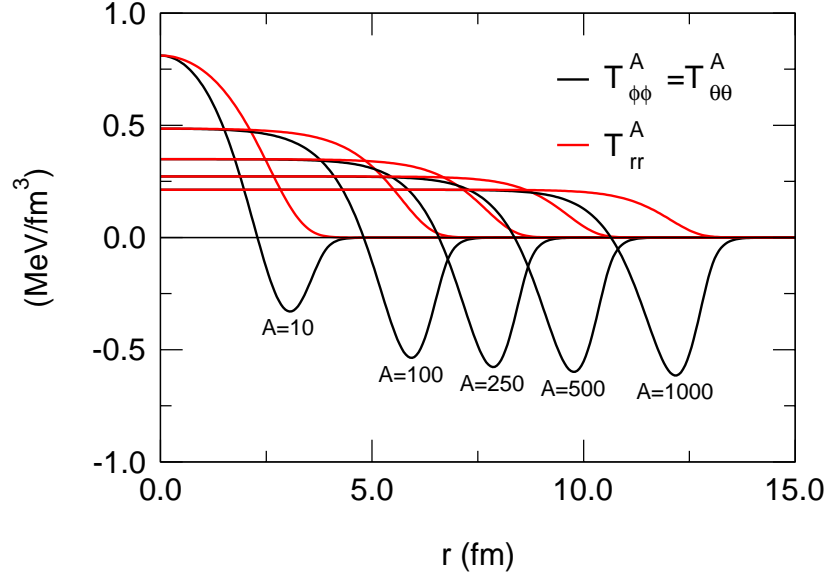


Abb. 3.1. Die RTF-Diagonalelemente $T_{\theta\theta}^A$, $T_{\varphi\varphi}^A$ und T_{rr}^A des Spannungstensors (3.15) in Kugelkoordinatendarstellung für $N=Z$ -Kerne für verschiedene Werte von A (Parametersatz NL1).

und $T_{\theta\theta}^A = T_{\varphi\varphi}^A$ unterscheiden sich nur in der Oberflächenregion durch den zusätzlichen Gradientenbeitrag $2\mathcal{E}_{\text{grad}}$ in T_{rr}^A . Im Grenzwert $A \rightarrow \infty$ strebt T_{rr}^A gegen $T_{33} \equiv 0$ von semi-infiniter Kernmaterie. Der Grenzwert der Elemente $T_{\theta\theta}^A$ und $T_{\varphi\varphi}^A$ ist dagegen der negative Swiatecki-Integrand der Oberflächenspannung σ .

Gerade im Zentrum des Kerns besteht offensichtlich ein nichtverschwindender Druck $T_{rr}^A(r=0)$. Es sollte an dieser Stelle allerdings vermerkt werden, daß der Energie-Impuls-Tensor, und damit der Spannungstensor $T_{ab}^A(r)$, in seiner Gestalt innerhalb der Feldtheorie nicht eindeutig festgelegt wird. Er wird durch die spezielle Gestalt der Lagrangedichte \mathcal{L} bestimmt. Allein die Erhaltungssätze (3.2) sind unabhängig von der konkreten Form von $T_{\mu\nu}$ und damit von physikalischer Bedeutung. Abbildung 3.1 unterstützt aber das intuitive Bild eines Drucks durch die Oberflächenspannung σ , der im Rahmen des Tröpfchenmodells (DM), d.h. bei scharfer Oberfläche, durch die elementare Beziehung

$$p = \frac{2\sigma}{R} \quad (3.18)$$

gegeben ist. In Abb. 3.2 wird daher ein Vergleich des zentralen Wertes von T_{rr}^A mit der Tröpfchenmodellvorhersage Gl. (3.18) vorgenommen. Der Kernradius R wurde dazu über die Beziehung

$$R(A) = r_0(A) A^{1/3}, \quad r_0(A) = \left(\frac{3}{4\pi\rho_c(A)} \right)^{1/3} \quad (3.19)$$

für die jeweilige zentrale Dichte $\rho_c(A) \equiv \rho_A(r=0)$ berechnet. Für Kerne mit ungefähr $A \geq 50$ erkennt man eine recht gute Übereinstimmung zwischen den beiden Drucken. Die Abweichung bei kleineren Kernen ist auf sogenannte Desaturationseffekte, d.h. Abweichungen von der Sättigungsstruktur, zurückzuführen [68, 14, 69], die in dem Tröpf-

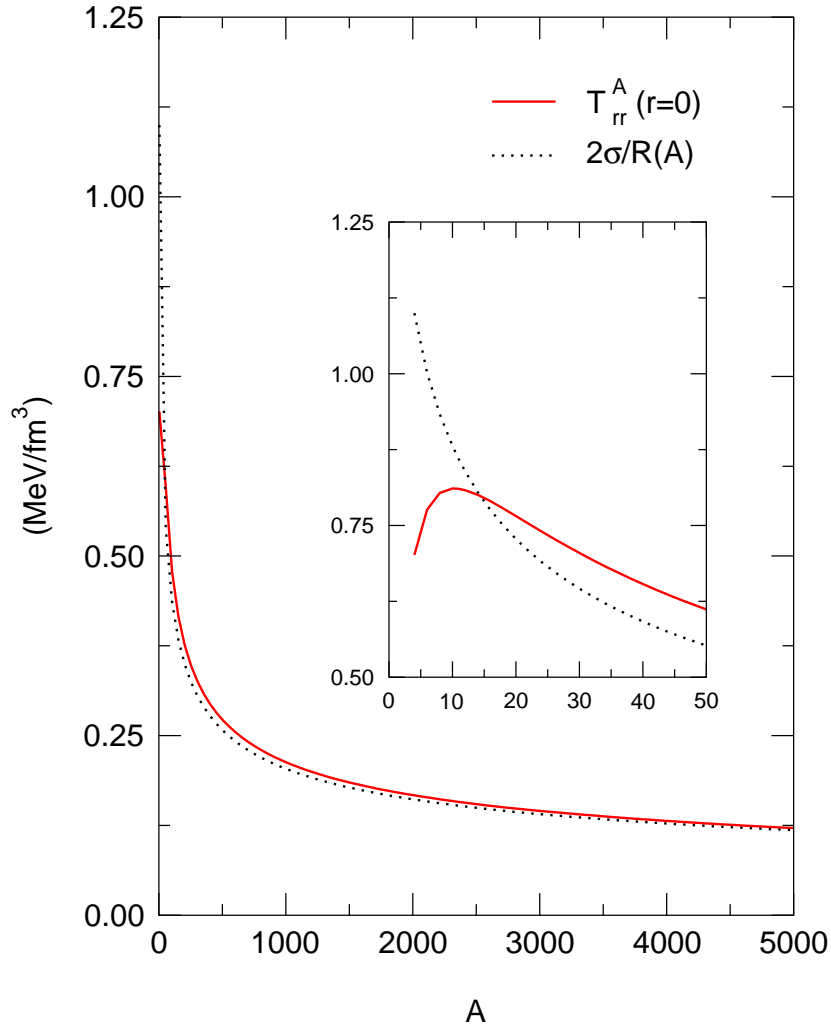


Abb. 3.2. Der zentrale RTF-Wert $T_{rr}^A(r=0)$ als Funktion der Nucleonenzahl A von $N=Z$ -Kernen bei ausgeschalteter Coulombkraft. Zum Vergleich wurde der DM-Druck $p = 2\sigma/R(A)$ ebenfalls eingezeichnet. (Parametersatz NL1.)

chenmodellausdruck (3.18) unberücksichtigt bleiben. In Abb. 3.3 wurden dazu die Abweichungen $\varepsilon_A \equiv (\rho_c(A) - \rho_0)/\rho_0$ der zentralen Dichte $\rho_c(A)$ in endlichen Kernen von der Sättigungsdichte ρ_0 symmetrischer unendlicher Kernmaterie als Funktion von $A^{-1/3}$ dargestellt. Im Tröpfchenmodell kann ε_A durch die Inkompressibilität K_∞ unendlicher Kernmaterie und die Oberflächenspannung σ ausgedrückt werden [35]. Die resultierende DM-Gerade wurde als Asymptote in Abb. 3.3 ebenfalls eingezeichnet. Der lineare Zusammenhang zwischen ε_A und $A^{-1/3}$ für große Kerne kann somit durch den von der Oberflächenspannung σ ausgeübten Kompressionseffekt erklärt werden. Bei kleineren Kernen sinkt die zentrale Dichte unter den Sättigungswert ρ_0 unendlicher Kernmaterie. Dieser Desaturationseffekt wurde ausgiebig in Kernstrukturstudien untersucht [68, 14, 69].

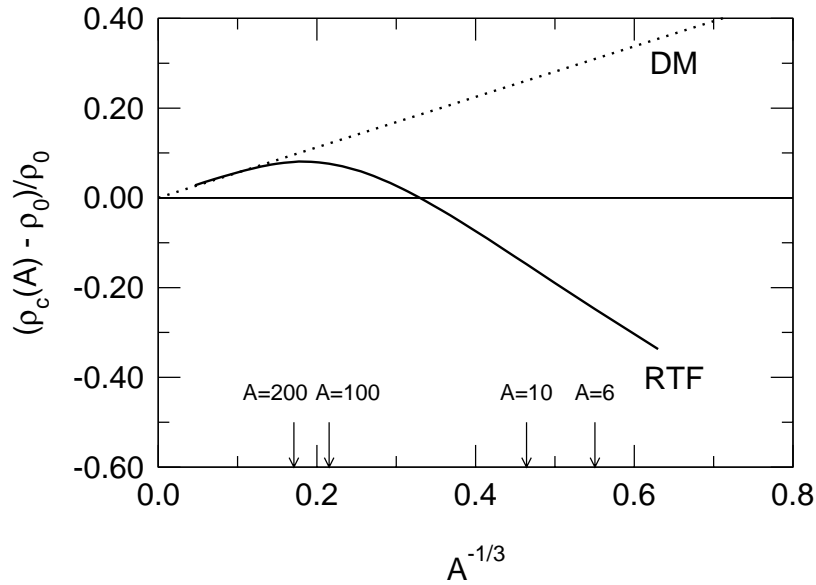


Abb. 3.3. Relative Dichteänderung $\varepsilon_A \equiv (\rho_c(A) - \rho_0)/\rho_0$ im Zentrum von $N=Z$ -Kernen bei ausgeschalteter Coulombkraft als Funktion von $A^{-1/3}$. Zusätzlich wurde die DM-Gerade als Asymptote eingezeichnet.

3.3 Einfluß der Coulombkraft bei exotisch großen Kernen

Schaltet man die Coulombkraft nun wieder ein, so werden die Protonen durch die gegenseitige Abstoßung vom Kernzentrum zum Kernrand hin gedrängt. Dadurch kommt es zu einer Absenkung der Protonendichte im Zentrum und einer charakteristischen Erhöhung derselben im Bereich der Oberflächenregion. Bei einer sehr hohen Anzahl von Protonen können sich Lösungen mit Blasenstruktur, die sich durch eine vollständig in der Kernoberfläche konzentrierte Dichte auszeichnet, einstellen. Auf die mögliche Existenz solcher Blasenkerne wurde bereits in der Mitte des vergangenen Jahrhunderts von Wilson [70] und von Wheeler [71] hingewiesen. Seitdem sind Blasenkerne bis in die Gegenwart immer wieder der Gegenstand von Studien gewesen [72–74, 12, 75–78].

Das Zustandekommen der Blasenform beruht auf einer Art Faraday-Becher-Effekt, bei dem die Protonen ab einer gewissen kritischen Anzahl vollständig in den Oberflächenbereich drängen, um dadurch den Coulombbeitrag zur gesamten Energie zu reduzieren. Wegen der Symmetrie-Energie folgen die Neutronen nahezu vollständig den Protonen zum Kernrand, wodurch eine zusätzliche (innere) Oberfläche ausgebildet wird. Obwohl damit ein zusätzlicher Energieaufwand verbunden ist, liegt die Blasenstruktur trotzdem insgesamt energetisch tiefer. Eine Behandlung von Blasenkernen im Tropfenmodell zeigt, daß die Blasenstruktur instabil gegenüber Kernspaltung ist [73]. Neuere Untersuchungen [75, 76] ergaben, daß Schaleneffekte jedoch eine Stabilisierung bewirken können.

Für die sechs Parametersätze aus Tabelle B.1 wurden systematische RTF-Rechnungen

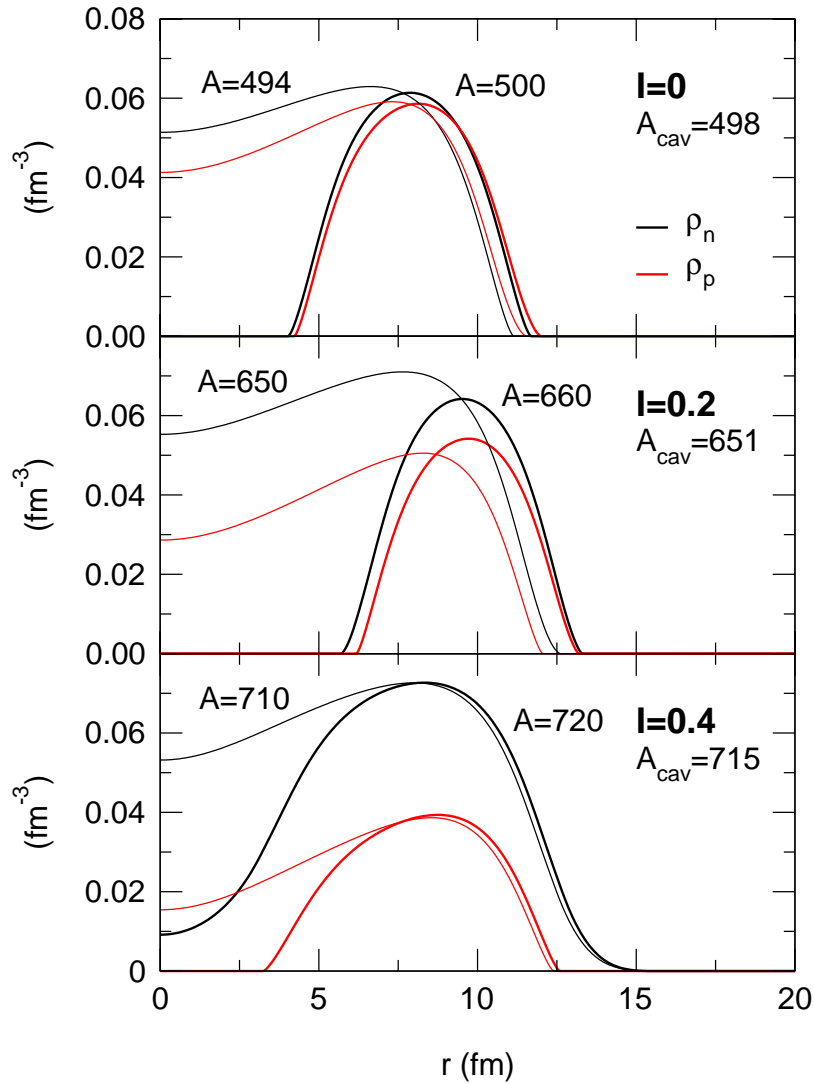


Abb. 3.4. RTF-Neutronen- und -Protonendichten kurz vor und nach der Kavitationsgrenze A_{cav} für die Neutronenüberschüsse $I = 0, 0.2$ und 0.4 (Parametersatz NL1).

für fixierte Werte des relativen Neutronenüberschusses

$$I = \frac{N - Z}{N + Z} \quad (3.20)$$

bis dicht an die Bindungsgrenzen mit $E = 0$ (z.B. $A \approx 3200$ für $I = 0.4$ bei NL1) durchgeführt. Dabei traten numerische Metastabilitätsbereiche auf, in denen – abhängig von der Programminitialisierung – kompakte Kerne sowie Blasenkerne als Lösungen vom numerischen Iterationsverfahren angesteuert wurden. Um die sogenannte Kavitationsgrenze A_{cav} , von der ab Blasenkerne energetisch favorisiert werden, bestimmen zu können, wurden für jeden Wert von I zwei Serien von Rechnungen gestartet. Bei der einen Serie wurde A sukzessiv erhöht, bei der anderen schrittweise reduziert. Als Programminitialisierung dienten dabei die Felder und Dichten der jeweils vorangegangenen Rechnung.

Abbildung 3.4 zeigt den Sprung in den Neutronen- und Protonendichten an den Ka-

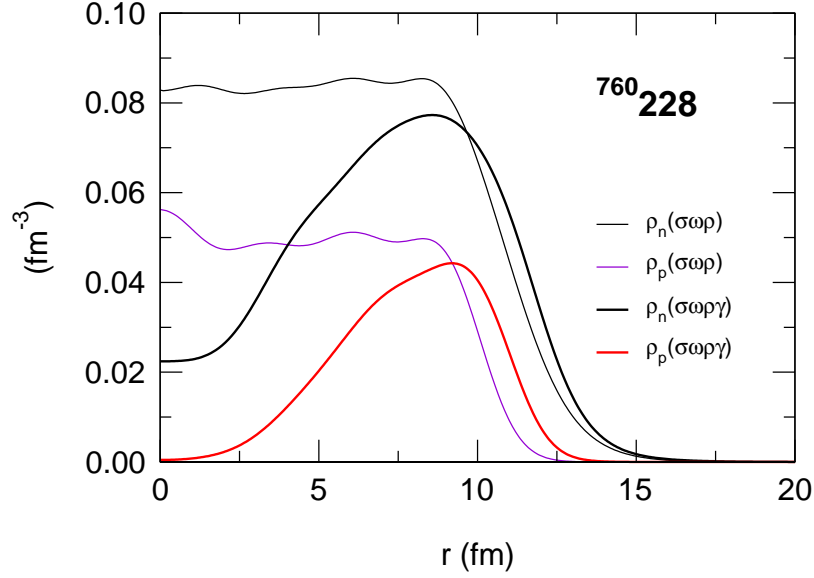


Abb. 3.5. Neutronen und Protonendichten des Kerns $^{760}_{228}$ in RH-Näherung bei ab- ($\sigma\omega\rho$) sowie eingeschalteter ($\sigma\omega\rho\gamma$) Coulombkraft (Parametersatz NL1).

vitationsgrenzen A_{cav} für den Parametersatz NL1 für die I -Werte $I = 0, 0.2$ und 0.4 . Für $I \approx 0.4$ und $A \approx A_{\text{cav}}$ verbleibt im Blaseninneren wegen des hohen Neutronenüberschusses eine Art Neutronengas.

Nach einer energetischen Abschätzung innerhalb des Tropfenmodells (LDM) [75] hängt A_{cav} nur von dem konventionellen Spaltungsparameter (s.a. Abschnitte 7.4 und 8.4)

$$x \equiv \frac{Z^2/A}{(Z^2/A)_{\text{crit}}}, \quad (Z^2/A)_{\text{crit}} \equiv \frac{40\pi\sigma r_0^3}{3e^2} \quad (3.21)$$

ab. Blasenkerne sind ausschließlich bei Kernen mit $x > 2$ [73, 75] zu erwarten. Für die sechs Wechselwirkungen ergab sich im Falle der RTF-Näherung für x an den numerisch extrahierten Kavitationsgrenzen über den LDM-Ausdruck

$$A_{\text{cav}} = 4 x_{\text{cav}} (Z^2/A)_{\text{crit}} \quad (I = 0) \quad (3.22)$$

ein Mittelwert von 2.34 ± 0.01 . Die inneren und äußeren Radien R_i und R_a , an denen die Dichte auf die Hälfte ihres maximalen Wertes abgefallen ist, weisen bei allen Parametersätzen einen Wert von ca. 5 bzw. 10 fm auf, so daß sich in Übereinstimmung mit der Studie [12] ein Verhältnis von $R_a/R_i \approx 2$ einstellte. Die rms-Radien von Blasenkernen jenseits von A_{cav} sind im Unterschied zu kompakten Kernen ($R \propto A^{1/3}$) proportional zu $A^{0.84 \pm 0.05}$.

Durch eine Analyse der Separationsenergien von Protonen und Neutronen konnten für NL1 teilchenstabile Blasenkerne (d.h. Blasenkerne mit positiven Separationsenergien) nur in der eingeschränkten Region $I \approx 0.35 - 0.4$ und $A \approx 700 - 1200$ gefunden werden. Dies ist in qualitativer Übereinstimmung mit der Untersuchung [77], in der mit der Hartree-Fock-Bogoliubov-Methode für Gogny-Kräfte mit endlicher Reichweite analoge Stabilitätsuntersuchungen vorgenommen wurden.

Auch Testrechnungen mit der relativistischen Hartree-Näherung führten zu Kernen mit Blasenstruktur. Abbildung 3.5 zeigt als Beispiel hierfür die Protonen- und Neutronendichte des Kerns ${}^{760}_{228}$ bei sowohl ab- als auch eingeschalteter Coulombkraft. Man erkennt deutlich die durch den Einschaltvorgang bedingte Formation einer Protonenblase. Die Neutronen folgen den Protonen, im Zentrum des Kerns bleibt aber wie in RTF weiter eine Neutronenhalo bestehen. Die Änderungen in den Einteilchenenergien ε_a verdeutlicht das Termschema Abb. 3.6. Durch das Einschalten der Coulombkraft sind die Protonen deutlich schwächer gebunden, das gesamte Termschema schrumpft auf einen kleineren Energiebereich zusammen. Vor allem fällt auf, daß beim Blasenkern die ersten 72 Protonen nur auf Schalen mit Hauptquantenzahl $n = 1$ verteilt werden (Zustände $1s_j - 1h_j$). Dadurch rutschen bei den tieferliegenden Niveaus die Zustände mit $n = 2$ in der Energie weiter nach oben. Die Spin-Bahn-Aufspaltung bei den $1p$ - und $2p$ -Zuständen dreht sich vom Vorzeichen her sogar um. Die Niveaufolge der Blasenformation aus Abb. 3.6 ist in qualitativer Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Studien [75, 76]. Sie wird erneut in Kap. 8 über komprimierte Kerne in RH-Näherung in Erscheinung treten. Allerdings wird sie dort bereits bei leichten Kernen von zentraler Bedeutung sein.

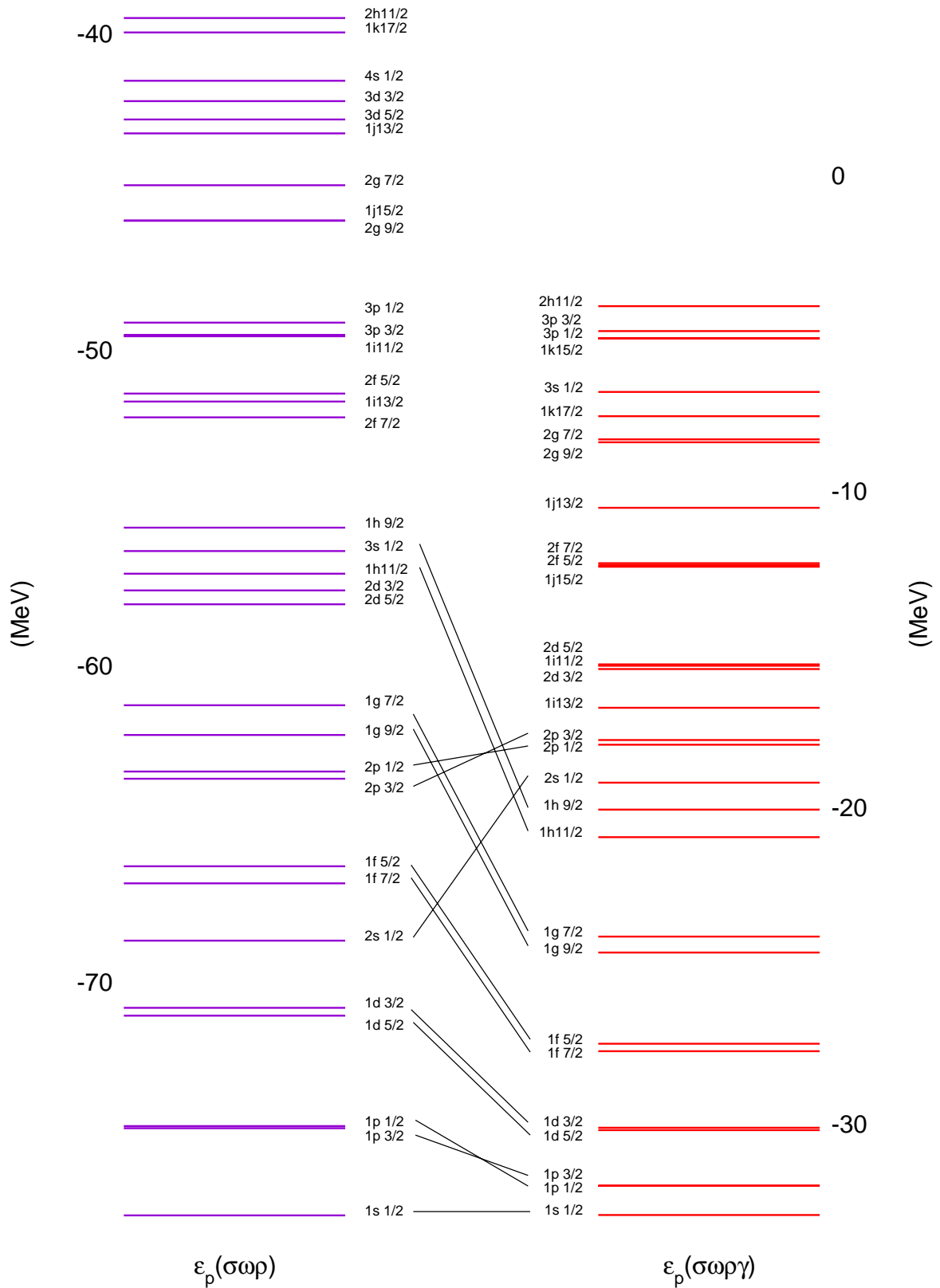


Abb. 3.6. Einteilchenenergien von Protonen im Kern $^{760}_{228}$ in RH -Näherung bei aus- ($\sigma\omega\rho$) und eingeschalteter ($\sigma\omega\rho\gamma$) Coulombkraft (Parametersatz NL1). (Bei beiden Termschemen wurde dieselbe graphische Auflösung in MeV/cm verwendet.)

Kapitel 4

Grundzustandsäquivalente Wechselwirkungen

Nichtrelativistische effektive Nukleon-Nukleon-Wechselwirkungen wie etwa Skyrme- (Sk) oder Gogny-Kräfte (G) werden bis heute in Verbindung mit dem Hartree-Fock-Verfahren oder etwa auch der kombinierten Thomas-Fermi-Strutinsky-Methode (ETFSI) [79] mit sehr großem Erfolg zur Beschreibung von Grundzustandseigenschaften von Kernen herangezogen. Auch Thomas-Fermi-Näherungen (TF) mit generalisierten Seyler-Blanchard-Wechselwirkungen (SB) haben sich dabei als erfolgreich erwiesen [10–13]. Daneben haben sich in der Vergangenheit mehr und mehr relativistische Mittelfeldmodelle etabliert, die trotz noch vorhandener phänomenologischer Aspekte aufgrund ihrer feldtheoretischen Basis eine fundamentalere Beschreibung der nuklearen Wechselwirkung darstellen. So sind beispielsweise die Spin-Bahn-Kraft sowie der INM-Sättigungsmechanismus im Gegensatz zu nichtrelativistischen Modellen schon automatisch im relativistischen Ansatz enthalten.

Sowohl nichtrelativistische als auch relativistische Modelle benötigen freie Parameter, die die Stärke der effektiven Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung bzw. die Kopplung zwischen Nukleonen und Mesonen spezifizieren. Die Festlegung der Parameter erfolgt üblicherweise über aufwendige Fit-Rechnungen an Grundzustandseigenschaften endlicher Kerne – vornehmlich an Massen und Radien. Diese Anpassung kompensiert teilweise vernachlässigte Beiträge der Austausch- sowie der Korrelationsenergie. Realistische Wechselwirkungen sollten vergleichbare Werte zumindest für die Volumenenergie a_v und den Oberflächenenergiekoeffizienten a_{sf} als führende Terme der Energieentwicklung

$$E = a_v(1 + \alpha I^2 + \dots)A + a_{sf}(1 + \beta I^2 + \dots)A^{2/3} + \dots \quad (4.1)$$

liefern. Wegen den Beziehungen

$$a_{sf} = 4\pi r_0^2 \sigma, \quad r_0 = \left(\frac{3}{4\pi\rho_0}\right)^{1/3}, \quad R \approx r_0 A^{1/3} \quad (4.2)$$

zwischen der SINM-Oberflächenspannung σ , der INM-Sättigungsdichte ρ_0 und dem Kernradius R sind ebenso übereinstimmende Werte für ρ_0 und σ zu erwarten. Effektive Wechselwirkungen mit mehr oder minder gleichen Massenformelkoeffizienten und gleicher Sättigungsdichte ρ_0 lassen sich als grundzustandsäquivalent bezeichnen. Für die INM-Inkompressibilität K_∞ liefern sie jedoch nicht selten stark differierende Werte, die sich teilweise um bis zu 100% voneinander unterscheiden. So führen beispielsweise die Skyrme-Kraft

Tabelle 4.1. INM- und SINM-Koeffizienten für verschiedene RMF-, Skyrme-, Generalized-Skyrme-, Gogny- und Generalized-Seyler-Blanchard (Thomas-Fermi) Parametersätze. Die Skyrme-Oberflächeneigenschaften wurden von [81] zur Verfügung gestellt, für Gen.-SB wurden sie aus den Arbeiten [10, 12] extrahiert.

		a_v (MeV)	ρ_0 (fm ⁻³)	K_∞ (MeV)	K' (MeV)	t (fm)	σ (MeV fm ⁻²)	a_{sf} (MeV)
<i>RMF (Hartree)</i>	NL-Z	-16.18	0.1508	172.8	422.5	2.29	1.038	17.72
	NL1	-16.42	0.1518	211.1	32.7	2.24	1.098	18.66
	NLC	-15.77	0.1485	224.5	278.1	2.07	1.021	17.61
	NL3	-16.24	0.1482	271.5	-203.0	1.99	1.069	18.46
	NL-RA	-16.25	0.1570	320.5	-216.2	1.88	1.169	19.43
	NL-SH	-16.35	0.1460	355.3	-601.6	1.83	1.092	19.05
<i>Skyrme (HF)</i>	SkM*	-15.77	0.1603	216.6	386.0	2.45	1.074	17.60
	SkKM	-15.85	0.1607	220	292.2	2.43	1.072	17.54
	S3	-15.85	0.1453	355.4	-101.4	2.01	1.079	18.88
<i>Gen. Skyrme (HF)</i>	SkK200	-15.85	0.1554	200	1189.1	2.25	1.053	17.62
	SkK220	-15.82	0.1536	220	616.4	2.17	1.038	17.50
	SkK240	-15.79	0.1519	240	434.7	2.08	1.025	17.41
<i>Gogny (HF)</i>	D1S	-16.02	0.166	209	543.4	2.46	1.138	18.21
	D1	-16.32	0.166	228	456.0	2.45	1.268	20.29
	D250	-15.86	0.1589	252.7	353.8	2.30	1.182	19.48
	D300	-16.23	0.1571	303.1	230.4	2.02	1.239	20.58
<i>Gen. SB (TF)</i>	Set 1	-16.24	0.1611	234	252.7	2.4	1.14	18.63
	Set 2	-16.53	0.1654	301.3	194.6	2.09	1.26	20.27

S3 und der RMF-Parametersatz NL-SH auf eine Inkompressibilität von $K_\infty = 355$ MeV, während die Skyrme-Parametrisierung SkM* [14] ($K_\infty = 217$ MeV) und die Kraft NL1 ($K_\infty = 211$ MeV) beträchtlich kleinere Werte aufweisen. In der Untersuchung [80] wurde diskutiert, durch welche Mechanismen solch unterschiedliche K_∞ -Werte bei grundzustandsäquivalenten Wechselwirkungen ermöglicht werden. Die dort angestellten Betrachtungen werden im folgenden nochmals zusammengefaßt wiedergegeben.

Die Energiedichte eines endlichen Kerns ist unter Vernachlässigung von Oberflächeneffekten in erster Näherung innerhalb der Lokalen Dichteanäherung (LDA) durch $e_\infty(\rho(r))\rho(r)$ gegeben. Die Entwicklung (2.64) der Energie pro Nukleon e_∞ für symmetrische INM ($\delta_c = 0$) zeigt, daß bei Kernen mit hauptsächlich $\rho(r) < \rho_0$ eine erhöhte Inkompressibilität K_∞ durch einen kleineren Wert für die Anharmonizität K' kompensiert werden kann. Unabhängig davon sollte die Entwicklung (2.64) für $\rho \rightarrow 0$ gegen $e_\infty(0) = 0$ streben, so daß ein größerer K_∞ -Beitrag durch K' und Terme noch höherer Ordnung korrigiert werden muß.

Tabelle 4.1 zeigt eine Auflistung von INM- und SINM-Größen für die grundzustandsäquivalenten RMF-Parametersätze aus Tabelle B.1, die gebräuchlichsten Skyrme- [5] und Gogny-Parametrisierungen [9] sowie die TF-SB-Ansätze aus [10, 12]. Alle

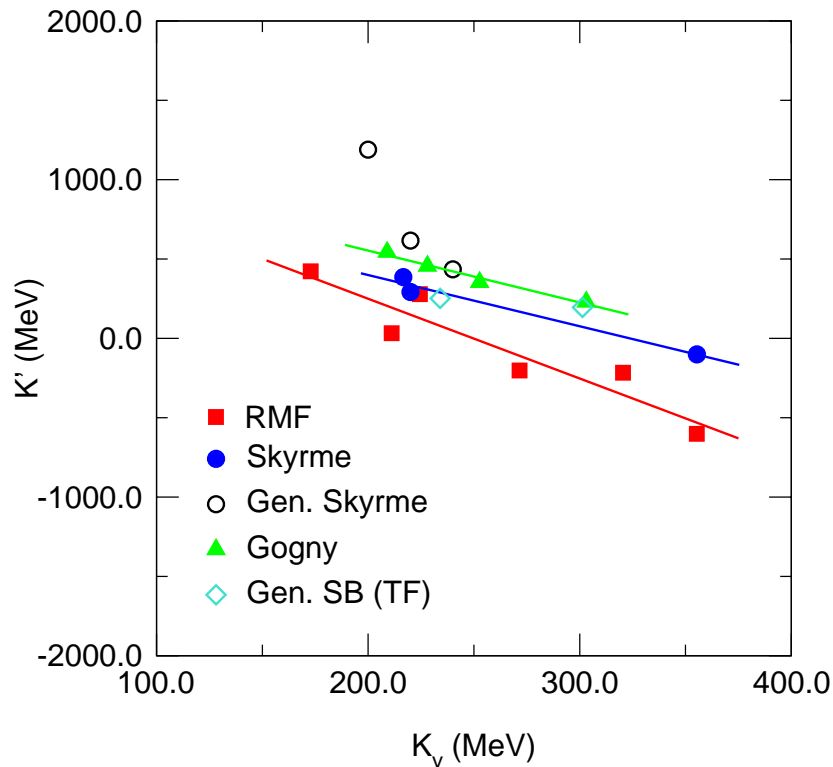


Abb. 4.1. INM-Anharmonizität K' vs. K_∞ für die Wechselwirkungen aus Tabelle 4.1. Die farbigen Linien stellen Regressionsgeraden an die RMF-, Skyrme- und Gogny-Werte dar.

angeführten Wechselwirkungen weisen wie erwartet ungefähr die gleichen Werte für a_v (Abw. 2%), ρ_0 (4%), σ (7%) und a_{sf} (6%) auf.

Zusätzlich enthält Tabelle 4.1 die Werte der Inkompressibilität K_∞ , der Anharmonizität K' und der SINM-90%-10%-Oberflächendicke t . Für jeden funktionalen Wechselwirkungsansatz ist eine näherungsweise lineare Abnahme von K' bei steigenden K_∞ -Werten zu erkennen. Dieses Verhalten ist in Abb. 4.1 graphisch dargestellt. (Die dort eingezeichneten Punkte für generalisierte Skyrme-Kräfte wurden nicht mit Ausgleichsgeraden approximiert, da jeder Parametersatz eine eigene funktionale Unterklasse repräsentiert [s. Ref. [5]]). Auch für die Oberflächendicke t ist eine systematische Abhängigkeit von K_∞ ersichtlich. In Abb. 4.2 sind die Kehrwerte von t gegen K_∞ aufgetragen. Man erkennt eine annähernd lineare Relation zwischen $1/t$ und K_∞ . Aus experimentellen Daten [43, 82–86] läßt sich ein Schätzwert für den experimentellen Wertebereich der SINM-Größe t extrahieren, der in Abb. 4.2 durch ein rechteckiges Symbol an der Ordinate gekennzeichnet wurde. Ein Vergleich mit den Ausgleichsgeraden in Abb. 4.2 liefert die Einschränkung $150 < K_\infty < 280$ MeV an die Inkompressibilität infinites Kernmaterie. Bezeichnenderweise führen Wechselwirkungen, die nicht nur an Massen und Radien, sondern zusätzlich auch an Oberflächeneigenschaften wie etwa Ladungsdichten, Diffraktionsradien oder Oberflächenweiten (s. Unterabschn. 2.4.2) angepaßt worden sind, automatisch zu K_∞ -Werten kleiner als ca. 240 MeV. Beispiele hierfür sind die Skyrme-Kraft SkM*, der RMF-Parametersatz NL1 und der TF-SB-Ansatz aus Ref. [13].

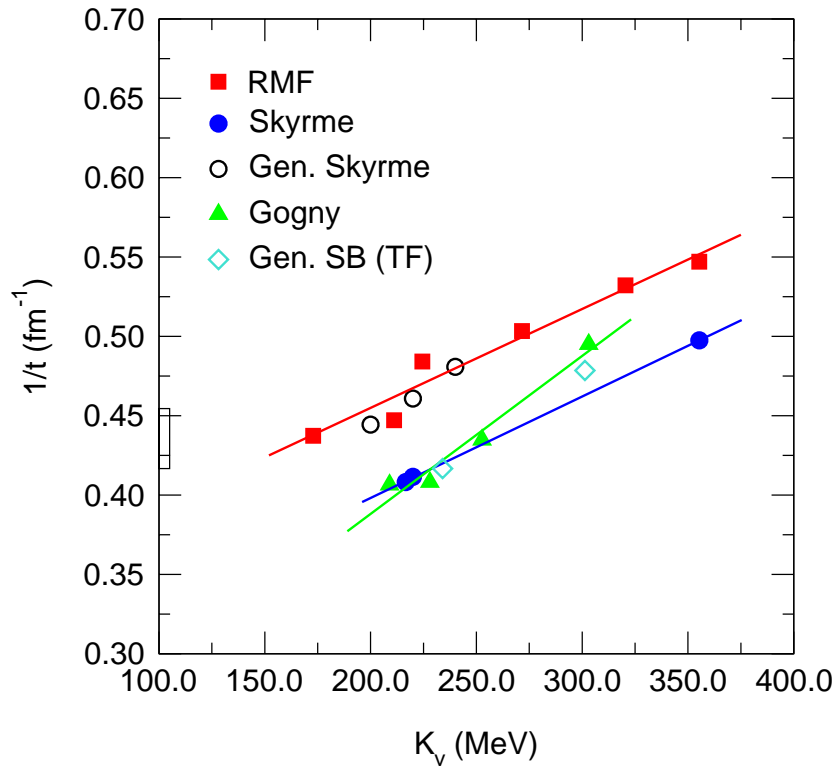


Abb. 4.2. $1/t$ vs. K_∞ für die Wechselwirkungen aus Tabelle 4.1. Das Rechteck an der Ordinate repräsentiert den experimentellen Wertebereich für $1/t$. Ausgleichsgeraden an die RMF-, Skyrme- und Gogny-Werte von $1/t$ wurden mit farbigen Linien gekennzeichnet.

Ein Rückschluß auf die Inkompressibilität unendlicher Kernmaterie von experimentellen Daten ist nur bei isoskalaren Monopolesonresonanzen (GMR, „breathing modes“) möglich (s.a. Kap. 10). Dabei handelt es sich um kollektive Dichteschwingungen in Kernen mit so kleinen Amplituden, daß der Einfluß von K' auf die INM-Zustandsgleichung so gut wie nicht ausgetestet wird. Eine Analyse experimenteller GMR-Energien [25] fixiert in Verbindung mit systematischen RPA-Rechnungen [9] den Wert von K_∞ auf den Bereich 231 ± 5 MeV. Nur solche Wechselwirkungen, bei deren Bestimmung ebenso Ladungsdichten, Diffraktionsradien oder Oberflächenweiten berücksichtigt wurden, führen auf GMR-kompatible K_∞ -Werte. Daher sollte in jedem Fall die Anpassung von grundzustandsäquivalenten Wechselwirkungen zusätzlich an spezielle Oberflächeneigenschaften erfolgen (s.a. Refn. [10, 12, 13] für TF-SB). Dieser Sachverhalt wird auch durch die Ergebnisse der Studie [87] gestützt, in der für unterschiedliche nichtrelativistische sowie relativistische Modelle die Güte der Reproduktion von Kernmassen und -radien untersucht wurde. Unabhängig von der Genauigkeit der ermittelten Bindungsenergien verbleiben bei allen Wechselwirkungen in den Ladungsradien Abweichungen, die umso kleiner zu sein scheinen, je mehr die Inkompressibilität in den oben genannten Wertebereich fällt.

Der Einfluß der Oberflächenweite B_2 (2.80) und der Oberflächenspannung σ auf die Inkompressibilität K_∞ wurde von Myers und Swiatecki im Rahmen von TF für generalisierte SB-Wechselwirkungen in den Arbeiten [10, 12] numerisch untersucht. Dabei stellte sich für feste Oberflächenweite B_2 eine lineare Beziehung zwischen K_∞ und der Oberflächenspan-

Tabelle 4.2. Werte der Pocket-Formel (4.3) für K_∞ für die Wechselwirkungen aus Tabelle 4.1. Für die Größen PF2 und PF3 gilt: $PF2 \equiv 432\sigma/(5t\rho_0)$, $PF3 \equiv PF2 - K'/12$.

		σ/ρ_0	K_∞	PF2	PF3
		(MeV fm)	(MeV)	(MeV)	(MeV)
<i>RMF (Hartree)</i>	NL-Z	6.88	172.8	260	225
	NL1	7.23	211.1	280	277
	NLC	6.87	224.5	288	264
	NL3	7.21	271.5	314	331
	NL-RA	7.45	320.5	342	360
	NL-SH	7.48	355.3	354	403
<i>Skyrme (HF)</i>	SkM*	6.70	216.6	236	204
	SkKM	6.67	220	237	213
	S3	7.43	355.4	319	328
<i>Gen. Skyrme (HF)</i>	SkK200	6.78	200	260	161
	SkK220	6.76	220	269	218
	SkK240	6.75	240	280	244
<i>Gogny (HF)</i>	D1S	6.85	209	240	195
	D1	7.63	228	269	231
	D250	7.44	252.7	279	250
	D300	7.89	303.1	337	318
<i>Gen. SB (TF)</i>	Set 1	7.08	234	255	234
	Set 2	7.63	301.3	316	299

nung σ heraus. Diese Verbindung zwischen Oberflächen- und Bulk-Eigenschaften läßt sich für beliebige Wechselwirkungen direkt mit der in Ref. [88] abgeleiteten Pocket-Formel

$$K_\infty = \frac{432}{5} \frac{\sigma}{\rho_0} \frac{1}{t} - \frac{1}{12} K' \quad (4.3)$$

studieren. Sie basiert zum einen auf der Stationarität der SINM-Oberflächenspannung σ gegenüber Bulk-Kompressionen („ $\dot{\sigma}=0$ -Theorem“), zum anderen auf dem Minimalprinzip für σ bezüglich virtuellen Dichteänderungen in der Oberflächenregion. Für die Herleitung von (4.3) wurde als Näherung ein trapezoidaler SINM-Dichteverlauf angenommen. Eine Verallgemeinerung auf beliebige Dichteverläufe wurde in Ref. [89] gegeben. Tabelle 4.2 zeigt das Verhältnis σ/ρ_0 , die Inkompressibilität K_∞ sowie die Teilsummen der Pocket-Formel (4.3) für die Wechselwirkungen aus Tabelle 4.1. Differenzen zwischen den Pocket-Formel-Werten und K_∞ lassen sich auf eine Abweichung der Dichten von einem linearen Verlauf im Oberflächenbereich und auf INM-Beiträge höherer Ordnung zurückführen. Das Verhältnis σ/ρ_0 ist für alle Wechselwirkungen mit einer Standardabweichung von ca. 5% nahezu konstant. Damit können die linearen Beziehungen $K'(K_\infty)$ aus Abb. 4.1 und $(1/t)(K_\infty)$ aus Abb. 4.2 mit der Pocket-Formel (4.3) qualitativ reproduziert werden.

Wie bereits erwähnt, ist es notwendig, bei der Bestimmung einer grundzustandsäquivalenten Wechselwirkung spezielle Oberflächeneigenschaften miteinzubeziehen, um einen

realistischen Wert von K_∞ gewährleisten zu können. In diesem Zusammenhang zeigt aber Abb. 4.2, daß im Falle des nichtlinearen σ - ω - ρ -Modells die SINM-Oberflächendicke t im Gegensatz zu nichtrelativistischen Ansätzen zu klein ist, wenn man eine Inkompressibilität von $K_\infty = 220 - 235$ MeV gewährleisten will. Im nächsten Kapitel wird daher ein alternativer Ansatz für eine relativistische Lagrangedichte studiert.

Kapitel 5

Oberflächeneigenschaften und Spin-Bahn-Potential in einem modifizierten Zimányi-Moszkowski-Modell

Das skalare Ableitungskopplungsmodell (im folgenden mit ZM bezeichnet) wurde von Zimányi und Moszkowski in Ref. [26] als Alternative zum nichtlinearen σ - ω - ρ -Modell vorgestellt. Es basiert auf der Kopplung des σ -Mesons an die Nukleonenfeldableitung $\partial_\mu\psi$ sowie auf einer gleichzeitigen Kopplung des σ -Mesons an die Baryonenstromdichte und das ω -Meson. Durch eine geeignete Umskalierung des Nukleonenfelds ψ erhält man für das ZM-Modell den Ansatz

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{ZM}} = & \bar{\psi} \left\{ \gamma_\mu \left[\left(i\partial^\mu - e \frac{1 + \tau_3}{2} A^\mu \right) - g_\omega \omega^\mu - g_\rho \vec{\tau} \cdot \vec{b}^\mu \right] - M^* \right\} \psi \\ & + \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_\sigma^2 \phi^2 \right) + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{b}_\mu \cdot \vec{b}^\mu - \frac{1}{4} \vec{G}_{\mu\nu} \cdot \vec{G}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu}\end{aligned}\quad (5.1)$$

für die Lagrangedichte \mathcal{L} , der formal mit dem des linearen Walecka-Modells übereinstimmt. Im Unterschied dazu gilt für die effektive Masse M^* die Beziehung:

$$M^* = M - m^* g_\sigma \phi, \quad (5.2)$$

mit der Definition:

$$m^* \equiv \frac{1}{1 + g_\sigma \phi / M}. \quad (5.3)$$

Eine Taylor-Entwicklung des Wechselwirkungsterms $\bar{\psi} M^* \psi$ im Ansatz (5.1) nach σ zeigt, daß in \mathcal{L}_{ZM} nichtlineare σ -Selbstwechselwirkungsterme beliebiger Ordnung implizit enthalten sind [26].

Der ZM-Ansatz wurde in Mittelfeldnäherung auf infinite Kernmaterie [90, 91] sowie auf endliche Kerne [92] angewandt. In der Untersuchung [93] kommen Sharma, Moszkowski und Ring im Rahmen der RTF-Näherung zu dem Schluß, daß das ZM-Modell in seinen Grundzustandseigenschaften starke Ähnlichkeiten mit der nichtrelativistischen Skyrme-Wechselwirkung SkM* [14] aufweist. Durch die effektive Dichteabhängigkeit in der skalaren

Kopplung zwischen den Nukleonen und den σ -Mesonen konnte das ZM-Modell ebenfalls erfolgreich bei der Beschreibung von Schwerionen-Experimenten eingesetzt werden [94].

Neben einem realistischen Wert für die Inkompressibilität unendlicher Kernmaterie von $K_\infty = 225$ MeV zeichnet sich der ZM-Ansatz aber durch einen hohen Wert für die effektive Masse $M^* \approx 0.85M$ in symmetrischer Kernmaterie aus. Dies bedingt bei endlichen Kernen zu kleine Spin-Bahn-Aufspaltungen bei korrespondierenden Einteilchenniveaus. In Ref. [95] wurde von Biró und Zimányi daher eine Erweiterung der ursprünglichen ZM-Lagrangedichte um einen zusätzlichen Tensorkopplungsterm vorgeschlagen, der die Kernmaterieeigenschaften unverändert läßt und nur durch Auswirkungen in Oberflächenbereichen zu einer verbesserten Spin-Bahn-Aufspaltung führt. Dieser Effekt kann mit den in [56, 96, 97] beschriebenen Methoden in semi-unendlicher Kernmaterie direkt studiert werden.

In Zusammenarbeit mit Prof. Guo H. (Peking University) wurde während seines Aufenthalts an der Ludwig-Maximilians-Universität München im Rahmen des München-Peking-Austauschprogramms untersucht, inwiefern sich in einem modifizierten ZM-Modell unter Hinzunahme eines Tensorkopplungsterms Oberflächeneigenschaften sowie Spin-Bahn-Potentiale bei endlichen Kernen verbessern lassen, und inwieweit dadurch das ZM-Modell als Alternative zum nichtlinearen σ - ω - ρ -Modell angesehen werden kann [98]. Die Studie basiert auf dem Tensorkopplungsterm, der von Furnstahl, Serot und Tang in Ref. [99] innerhalb einer chiralen effektiven Feldtheorie berücksichtigt wurde. Er unterscheidet sich von dem in Ref. [95] vorgeschlagenen Ansatz lediglich dadurch, daß in ihm statt der effektiven Masse M^* (5.2), (5.3) die freie Nukleonmasse M auftritt. Del Estal, Centelles und Viñas haben im Rahmen der relativistischen Hartree-Näherung die Auswirkungen des in Ref. [99] auftretenden Tensorbeitrags in Verbindung mit zusätzlichen Selbstwechselwirkungstermen für das σ - und das ω -Meson in SINM untersucht [100]. Sowohl der in der Studie [99] als auch der in Ref. [95] gegebene Ausdruck für die Tensorkopplung führten in der Untersuchung [98] auf qualitativ gleiche Ergebnisse. In einer neuen Untersuchung [101] wurde dieser Sachverhalt von Guo H. nochmals bestätigt.

Die im weiteren Verlauf verwendete Lagrangedichte \mathcal{L}_{MZM} des modifizierten ZM-Modells mit Tensorkopplungsbeitrag lautet:

$$\mathcal{L}_{\text{MZM}} = \mathcal{L}_{\text{ZM}} - \bar{\psi} \frac{f_v}{4M} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \psi, \quad (5.4)$$

mit $\sigma_{\mu\nu} \equiv (i/2)[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ und der Tensorkopplungskonstanten f_v . Aus \mathcal{L}_{MZM} lassen sich die Dirac-Gleichung

$$\left\{ \gamma_\mu \left[\left(i\partial^\mu - e \frac{1 + \tau_3}{2} A^\mu \right) - g_\omega \omega^\mu - g_\rho \vec{\tau} \cdot \vec{b}^\mu \right] - M^* - \frac{f_v}{4M} g_\omega \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\} \psi = 0 \quad (5.5)$$

für das Nukleonenfeld ψ , sowie die Feldgleichungen

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m_\sigma^2 \phi = g_\sigma m^{*2} \bar{\psi} \psi, \quad (5.6)$$

$$\partial_\mu \left(F^{\mu\nu} - \frac{f_v g_\omega}{2M} \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi \right) + m_\omega^2 \omega^\nu = g_\omega \bar{\psi} \gamma^\nu \psi, \quad (5.7)$$

$$\partial_\mu \vec{G}^{\mu\nu} + m_\rho^2 \vec{b}^\nu = g_\rho \bar{\psi} \gamma^\nu \vec{\tau} \psi, \quad (5.8)$$

$$\partial_\mu A^{\mu\nu} = e \bar{\psi} \gamma^\nu \frac{1 + \tau_3}{2} \psi \quad (5.9)$$

Tabelle 5.1. Kopplungskonstanten $C_i^2 \equiv g_i^2(M/m_i)^2$ ($i = \sigma, \omega, \rho$) und Mesonenmassen des MZM-Modells.

C_σ^2	C_ω^2	C_ρ^2	M (MeV)	m_σ (MeV)	m_ω (MeV)	m_ρ (MeV)
177.396	63.478	29.550	938.27	525	783	770

Tabelle 5.2. Eigenschaften gesättigter symmetrischer Kernmaterie des MZM-Modells für den Parametersatz aus Tabelle 5.1.

a_v (MeV)	M^* (MeV)	K_∞ (MeV)	K' (MeV)	J (MeV)	ρ_0 (fm $^{-3}$)
-15.69	799.17	220.80	608.62	32.46	0.150

für die Mesonenfelder und das elektromagnetische Feld gewinnen.

Es wird nun der Einfluß der Tensorkraft sowie einer Variation der σ -Mesonenmasse m_σ auf SINM und endliche Kerne in Mittelfeldnäherung untersucht. Die Eigenschaften von unpolarisierter Kernmaterie werden dabei nicht verändert, da zum einen der Erwartungswert $\langle \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \rangle$ in unpolarisierter INM verschwindet, und zum anderen physikalische Größen nur durch die konstant gehaltenen Verhältnisse C_i^2 ($i = \sigma, \omega, \rho$) bestimmt werden. Als Grundlage dient der Parametersatz aus Tabelle 5.1, dessen Kernmaterieeigenschaften in Tabelle 5.2 aufgelistet sind.

5.1 Symmetrische semi-infinite Kernmaterie

Für das MZM-Modell ergibt sich aus der Lagrangedichte (5.4) die stationäre Dirac-Gleichung:

$$\left(-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + g_\omega \omega_0(z) + g_\rho \tau_3 b_{00}(z) + \beta M^*(z) - i \frac{f_v g_\omega}{2M} \frac{d\omega_0(z)}{dz} \gamma^3 \right) \psi_\alpha(\mathbf{x}) = \varepsilon_\alpha \psi_\alpha(\mathbf{x}), \quad (5.10)$$

die mit dem Ansatz (2.145), (2.146) auf das folgende Differentialgleichungssystem erster Ordnung für die Orbitalwellenfunktionen G_α und F_α führt:

$$\left(\frac{d}{dz} - \lambda k_\perp - \frac{f_v g_\omega}{2M} \frac{d\omega_0(z)}{dz} \right) G_\alpha(z) = (\varepsilon_\alpha - g_\omega \omega_0(z) - \tau g_\rho b_{00}(z) + M^*(z)) F_\alpha(z), \quad (5.11)$$

$$\left(\frac{d}{dz} + \lambda k_\perp + \frac{f_v g_\omega}{2M} \frac{d\omega_0(z)}{dz} \right) F_\alpha(z) = -(\varepsilon_\alpha - g_\omega \omega_0(z) - \tau g_\rho b_{00}(z) - M^*(z)) G_\alpha(z). \quad (5.12)$$

Der Eigenwert ε_α ist formal durch die Beziehung (2.161) gegeben, wobei auch hier wiederum beachtet werden muß, daß die effektive Masse M^* der Definition (5.2) gehorcht.

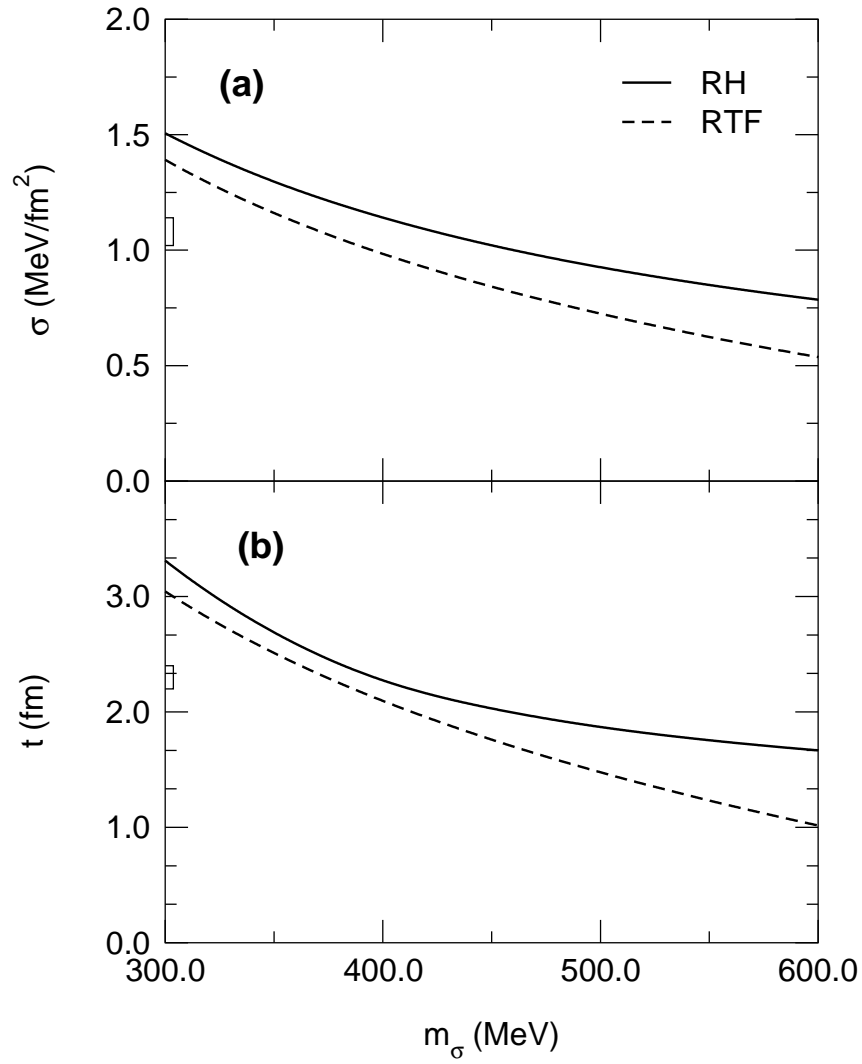


Abb. 5.1. Oberflächenspannung σ (a) und Oberflächendicke t (b) im ursprünglichen ZM-Modell als Funktion der Mesonenmasse m_σ . Die empirischen Werte wurden jeweils mit Rechtecken an den Ordinaten gekennzeichnet.

Für die Mittelfelder erhält man das Differentialgleichungssystem:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - m_\sigma^2\right)\phi(z) = -g_\sigma m^{*2}(z)\rho_s(z), \quad (5.13)$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - m_\omega^2\right)\omega_0(z) = -g_\omega \left(\rho(z) + \frac{f_v}{2M} \frac{d\rho_t(z)}{dz}\right), \quad (5.14)$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - m_\rho^2\right)b_{00}(z) = -g_\rho \rho_3(z). \quad (5.15)$$

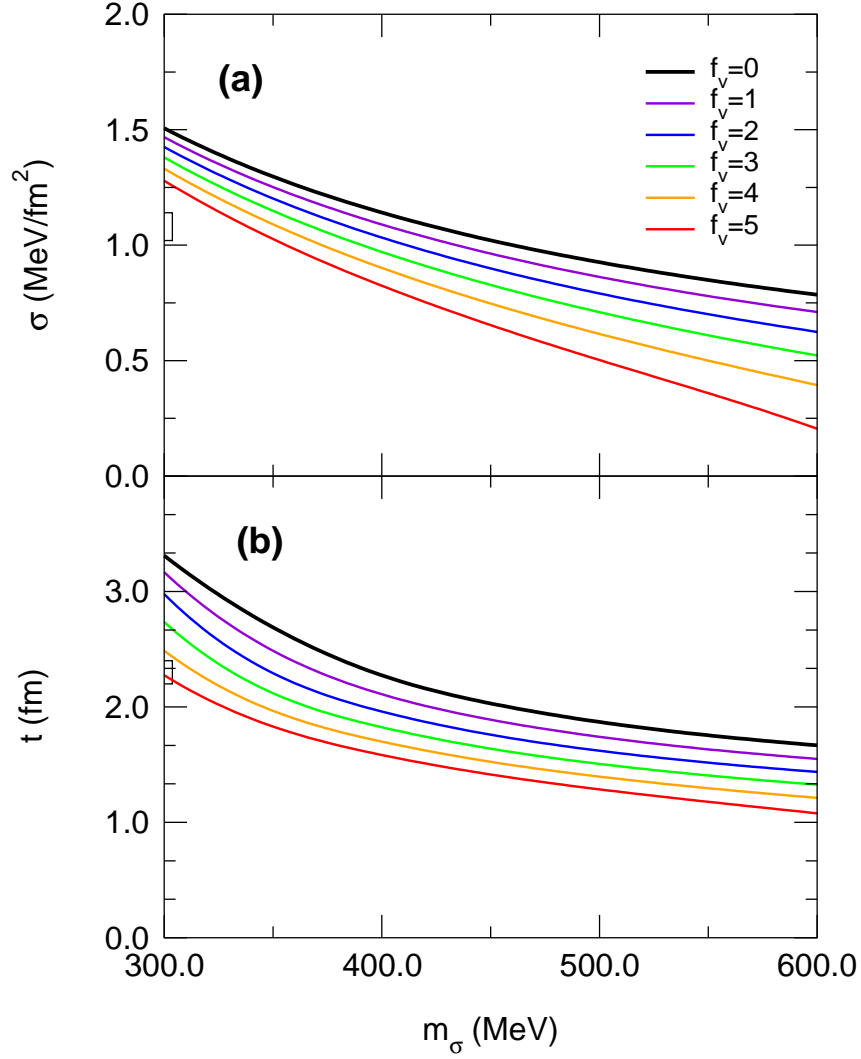


Abb. 5.2. Oberflächenspannung (a) und Oberflächendicke (b) versus m_σ für die Werte $f_v = 0 - 5.0$.

Neben den bereits in Kap. 2 definierten Dichten ρ , ρ_s und ρ_3 (2.165) – (2.169) taucht in ihm zusätzlich die Dichte

$$\rho_t(z) = \sum_{\lambda, \tau} \frac{2}{\pi^2} \int_0^{k_{F\tau}} \int_0^{\sqrt{k_{F\tau}^2 - k_z^2}} k_\perp G_\alpha(z) F_\alpha(z) dk_\perp dk_z \quad (5.16)$$

auf. Die Energiedichte \mathcal{E} , die durch den Ausdruck (2.170) *ohne* die nichtlinearen Selbstwechselwirkungsterme (d.h. $b_2 = b_3 = 0$) gegeben ist, enthält nun implizite Beiträge der Tensorkopplung.

Abbildung 5.1 zeigt die Oberflächenspannung σ und die 90%-10%-Oberflächendicke t als Funktion der σ -Mesonenmasse m_σ bei ausgeschalteter Tensorkopplung sowohl für die RH- als auch die RTF-Näherung. Im Gegensatz zum nichtlinearen σ - ω - ρ -Modell sind die RTF-Werte von t und σ stets kleiner als die entsprechenden Hartree-Werte. Sowohl die RH- als auch die RTF-Werte von σ und t nehmen mit wachsendem m_σ ab. Dieses

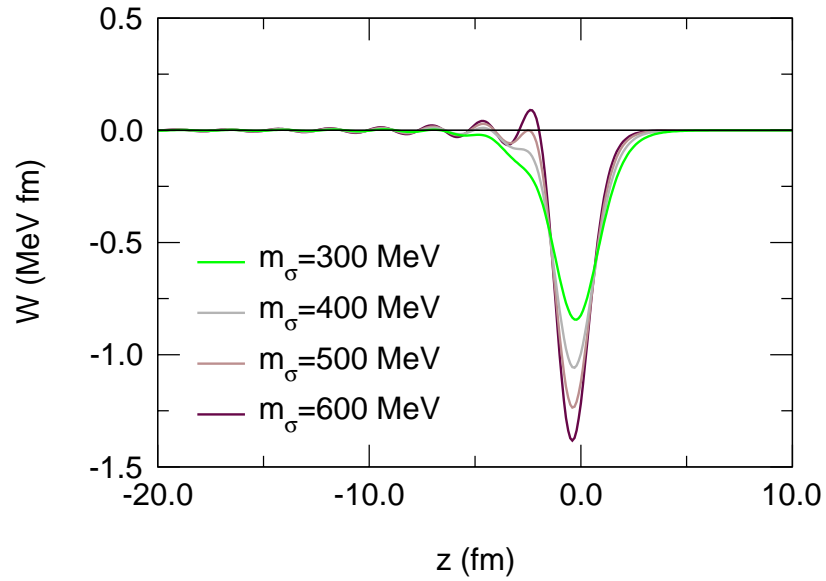


Abb. 5.3. Spin-Bahn-Potential in SINM für $k = k_F$ als Funktion der Koordinate z mit $f_v = 0$ für $m_\sigma = 300, 400, 500,$ und 600 MeV.

Verhalten zeigt sich auch bei eingeschalteter Tensorkopplung in Abb. 5.2, in der beide Größen als Funktion von m_σ für verschiedene Werte von f_v dargestellt sind. Zusätzlich ist eine Abnahme von σ und t bei Erhöhung von f_v erkennbar.

Tabelle 5.3 zeigt das Verhältnis σ/t für unterschiedliche Werte von m_σ und f_v . Der Mittelwert $\langle \sigma/t \rangle = 0.47$ MeV/fm³ deckt sich mit dem Wert der umgeschriebenen Pocket-Formel (4.3),

$$\frac{\sigma}{t} = \frac{5\rho_0}{432} \left(K_\infty + \frac{1}{12}K' \right), \quad (5.17)$$

und liegt im empirischen Bereich $\sigma/t = 0.43 - 0.52$ MeV/fm³. Die Abweichungen vom Pocket-Formel-Wert besonders für hohe Werte von m_σ und f_v sind auf resultierende Dichteverteilungen und Energiedichten zurückzuführen, die von den zur Ableitung von (5.17) angenommenen Verteilungen stark differieren.

Tabelle 5.3. Das Verhältnis σ/t (MeV/fm³) in RH-Näherung für unterschiedliche Werte von m_σ (MeV) und f_v . In Klammern sind entsprechende RTF-Werte aufgelistet. Zum Vergleich wurden zusätzlich der empirische Wert^a sowie der Wert^b der Pocket-Formel (5.17) angeführt.

m_σ	$f_v = 0$	$f_v = 2.5$	$f_v = 5.0$	
300	0.45 (0.46)	0.49	0.56	0.43 – 0.52 ^a 0.47 ^b
400	0.50 (0.47)	0.53	0.52	
500	0.50 (0.49)	0.48	0.39	
600	0.47 (0.53)	0.42	0.19	

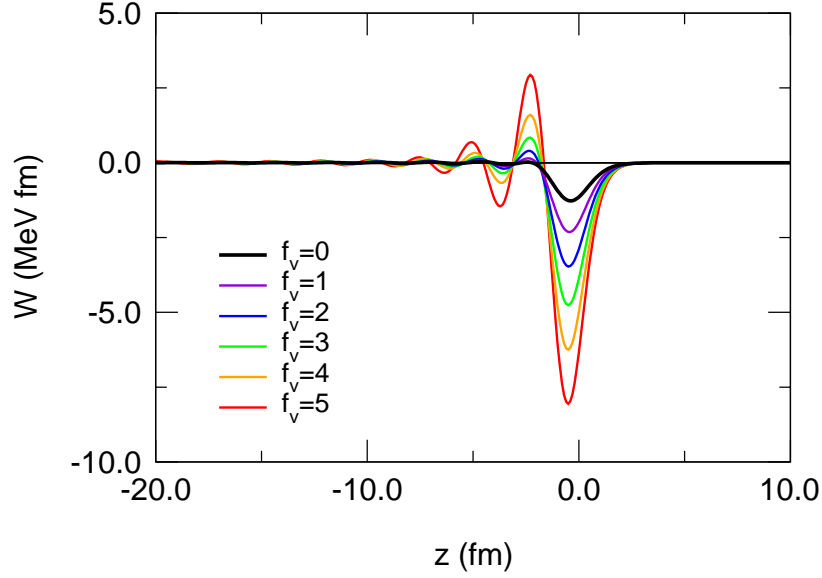


Abb. 5.4. Spin-Bahn-Potential in SINM für $k = k_F$ versus z mit $m_\sigma = 525$ MeV für unterschiedliche Werte von f_v .

Abbildung 5.3 zeigt das Spin-Bahn-Potential W ,

$$W(z) = \frac{g_\omega(d\omega_0(z)/dz) + \tau g_\rho(db_{00}(z)/dz) - (dM^*(z)/dz)}{2M(\varepsilon_\alpha - g_\omega\omega_0(z) - \tau g_\rho b_{00}(z) + M^*(z))} + \frac{f_v g_\omega}{2M^2} \frac{d\omega_0(z)}{dz}, \quad (5.18)$$

an der Fermikante ($k = k_F$) als Funktion der Koordinate z bei ausgeschalteter Tensorkopplung für die Mesonenmassen $m_\sigma = 300, 400, 500$ und 600 MeV. Eine Erhöhung von m_σ führt zwar zu einer betragsmäßigen Vergrößerung von W , die damit erreichbare Potentialtiefe ist aber im Vergleich zu einem empirischen Wert von ungefähr -4.5 MeV fm trotzdem viel zu klein. Abbildung 5.4 zeigt den Einfluß von f_v auf die Tiefe des Spin-Bahn-Potentials für die fixierte Mesonenmasse $m_\sigma = 525$ MeV. Für f_v -Werte zwischen $f_v = 3$ und $f_v = 4$ kann man eine realistische Tiefe von W erzielen. Der recht hohe Wert von $m_\sigma = 525$ MeV ist aber andererseits mit einer unrealistisch niedrigen Oberflächenspannung und einer viel zu kleinen Oberflächendicke verbunden.

Um einen Parametersatz zu finden, der zu angemessenen Werten der Oberflächenspannung σ sowie der Spin-Bahn-Potentialtiefe W_{\min} führt, wurden ausgiebige SINM-Hartree-Rechnungen für zahlreiche Wertepaare (m_σ, f_v) durchgeführt. Abbildung 5.5 zeigt als Ergebnis davon zusammenhängende Bereiche für die extrahierten Contourlinien $\sigma = 0.85$ bzw. 1.05 MeV/fm², $t = 2.2$ bzw. 2.4 fm und $W_{\min} = -4$ bzw. -6 MeV fm. Als empirische Werte können für die Oberflächenspannung nach Tabelle 4.1 $\sigma = 1.02 - 1.14$ MeV/fm², für die Spin-Bahn-Potentialtiefe $W_{\min} = -4.5$ MeV angesehen werden. Da das MZM-Modell, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, offensichtlich eine kleine Oberflächenspannung und dafür ein starkes Spin-Bahn-Potential favorisiert, wurden in Abb. 5.5 die Bereiche für σ und W_{\min} entsprechend adaptiert. Dennoch zeigt Abb. 5.5, daß kein gemeinsamer Überdeckungsbereich existiert, in dem gleichzeitig realistische Werte von σ , t und W_{\min} erhalten werden können. Stattdessen sind zwei Überschneidungsbereiche erkennbar: einer für σ und W_{\min} , ein anderer für t und W_{\min} . Da die Energie endlicher Kerne wegen des

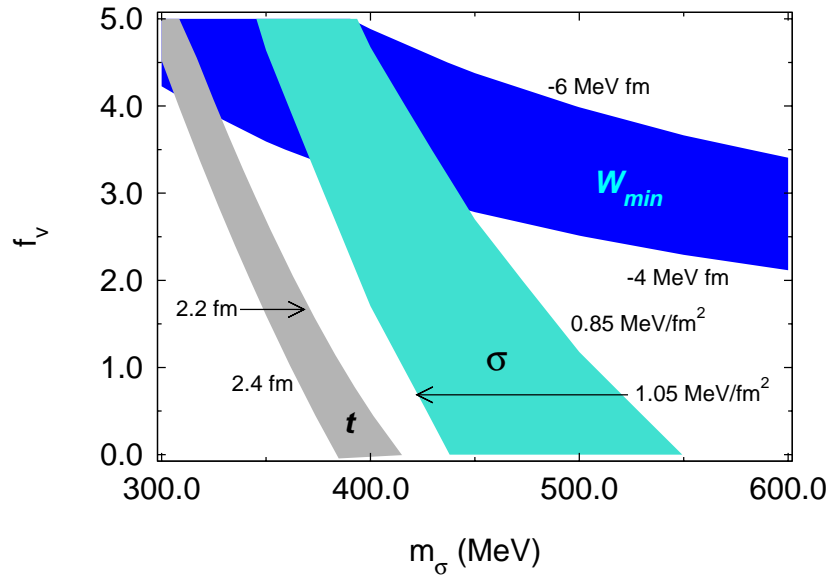


Abb. 5.5. Parameterbereiche für die Oberflächenspannung σ ($0.85 - 1.05 \text{ MeV/fm}^2$), die Oberflächendicke t ($2.2 - 2.4 \text{ fm}$) und die Spin-Bahn-Potentialtiefe W_{min} ($-4 - -6 \text{ MeV fm}$) in der (m_σ, f_v) -Ebene.

Oberflächenterms in der Entwicklung (2.77) maßgeblich durch σ bestimmt wird, werden im folgenden Parametersätze aus dem ersten Überschneidungsbereich für die Behandlung sphärisch-symmetrischer Kerne herangezogen. In diesem Fall wird die Oberflächendicke t aber weiterhin zu klein ausfallen.

5.2 Endliche Kerne

Für einen sphärisch-symmetrischen Kern sind innerhalb des MZM-Modells die Feldgleichungen

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - m_\sigma^2 \right) \phi(r) = -g_\sigma m^{*2}(r) \rho_s(r), \quad (5.19)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - m_\omega^2 \right) \omega_0(r) = -g_\omega \left(\rho(r) + \frac{f_v}{2M} \frac{d\rho_t(r)}{dr} \right), \quad (5.20)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - m_\rho^2 \right) b_{00}(r) = -g_\rho \rho_3(r), \quad (5.21)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) A_0(r) = -e \rho_p(r) \quad (5.22)$$

mit der zusätzlichen Dichte

$$\rho_t(r) = \sum_a 2 \frac{2j+1}{4\pi r^2} G_a(r) F_a(r) \quad (5.23)$$

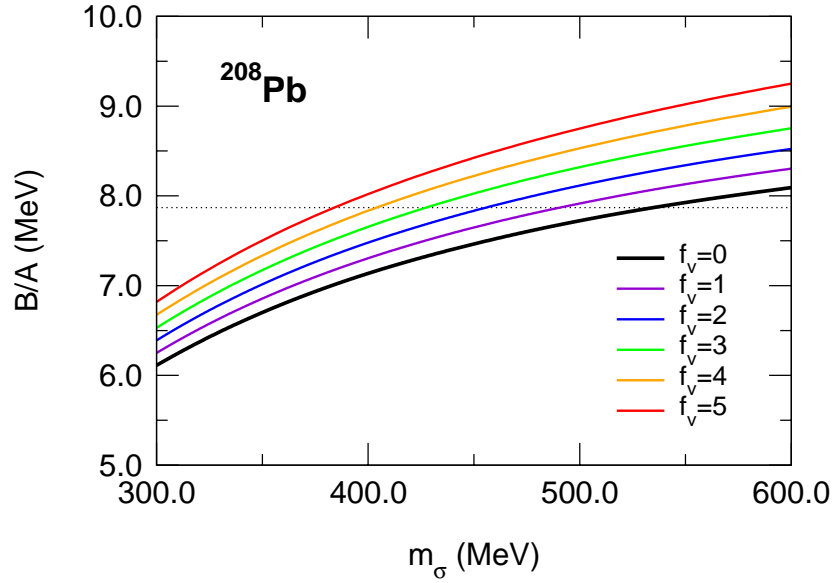


Abb. 5.6. Bindungsenergie pro Nukleon des Kerns ^{208}Pb versus m_σ für $f_v = 0 - 5.0$. Die gestrichelte waagerechte Linie repräsentiert den experimentellen Wert.

zu lösen. Mit dem Ansatz (2.123) für den Dirac-Spinor ψ ergeben sich für die Orbitalwellenfunktionen G_a und F_a die gekoppelten Differentialgleichungen

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r} - \frac{f_v g_\omega}{2M} \frac{d\omega_0(r)}{dr} \right) G_a(r) = (\varepsilon_a - V(r) + M^*(r)) F_a(r), \quad (5.24)$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} + \frac{f_v g_\omega}{2M} \frac{d\omega_0(r)}{dr} \right) F_a(r) = -(\varepsilon_a - V(r) - M^*(r)) G_a(r) \quad (5.25)$$

mit dem Vektorpotential

$$V(r) = g_\omega \omega_0(r) + \tau g_\rho b_{00}(r) + \left(\frac{\tau + 1}{2} \right) e A_0(r). \quad (5.26)$$

Für die Energie erhält man unter Verwendung der Feldgleichungen (5.19) – (5.22) den Ausdruck:

$$\begin{aligned} E = & \sum_a (2j + 1) \varepsilon_a - \frac{1}{2} \int \left[-g_\sigma m^*(r) \rho_s(r) \phi(r) \right. \\ & + g_\omega \omega_0(r) \left(\rho(r) + \frac{f_v}{2M} \frac{d\rho_t(r)}{dr} \right) \\ & \left. + g_\rho b_{00}(r) \rho_3(r) + e A_0(r) \rho_p(r) \right] d^3r. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Abbildung 5.6 zeigt die Bindungsenergie pro Nukleon B/A des Kerns ^{208}Pb als Funktion der Mesonenmasse m_σ für verschiedene Werte der Tensorkopplungskonstanten f_v . In Übereinstimmung mit den SINM-Resultaten, bei denen mit wachsenden Werten von m_σ oder f_v die Oberflächenspannung reduziert wird, bewirkt eine Zunahme von m_σ oder f_v eine stärkere Bindung des Kerns. Der experimentelle Wert von B/A für ^{208}Pb läßt sich

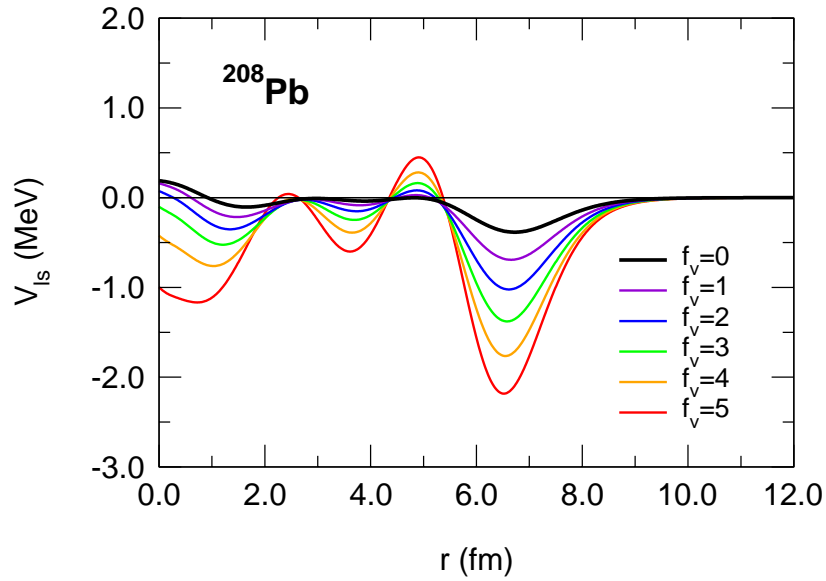


Abb. 5.7. Spin-Bahn-Potential V_{Is} für Neutronen im Kern ^{208}Pb mit $m_\sigma = 525$ MeV für $f_v = 0 - 5.0$.

mit f_v -Werten im Bereich $0 \leq f_v \leq 5$ mit σ -Mesonenmassen zwischen 540 und 383 MeV reproduzieren.

In Abb. 5.7 wird für Neutronen der Einfluß von f_v auf das Spin-Bahn-Potential V_{Is} ,

$$V_{Is}(r) = \frac{dV(r)/dr + dS(r)/dr}{2m_{\text{eff}}^2(r)r} + \frac{f_v g_\omega}{m_{\text{eff}}(r)Mr} \frac{d\omega_0(r)}{dr}, \quad (5.28)$$

$$S(r) \equiv g_\sigma m^*(r) \phi(r), \quad (5.29)$$

$$m_{\text{eff}}(r) \equiv M - \frac{1}{2}(V(r) + S(r)), \quad (5.30)$$

des Spin-Bahn-Operators $h_{Is} = V_{Is}(r) \mathbf{1} \cdot \mathbf{s}$ [20] verdeutlicht. Höhere Werte von f_v führen zu einer Verstärkung von V_{Is} besonders im Oberflächenbereich. Mit der Beziehung

$$W(z) \approx V_{Is}(r) \frac{r}{2} \frac{m_{\text{eff}}(r)}{M} \Big|_{r=z} \quad (5.31)$$

läßt sich im Oberflächengebiet von ^{208}Pb ($r \approx 6.6$ fm, $m_{\text{eff}}/M \approx 0.92$) eine qualitative Übereinstimmung zwischen der Tiefe von V_{Is} und der von W in SINM erzielen.

Die Auswirkungen des Tensorkopplungsterms auf die Dichte in ^{208}Pb zeigt Abb. 5.8. Große Werte von f_v (und auch von m_σ) führen zu einer unrealistischen Überhöhung der Schalenstruktur in der Dichte. Vor allem fällt die Oberflächenregion bei hohen Werten von f_v deutlich zu klein aus.

Unter Verwendung der zusätzlichen Schwerpunktskorrektur $E_{\text{c.m.}} \approx -17.2 \text{ MeV} A^{-0.2}$ zur Energie E (5.27) wurden für die Kerne ^{16}O , ^{40}Ca , ^{48}Ca und ^{208}Pb optimale Werte von m_σ und f_v gesucht, die bei fixiertem B/A die Spin-Bahn-Aufspaltungen $\Delta\varepsilon_{\text{so}}$ bestmöglich reproduzieren. Die Bestimmung der Parameter erfolgte dabei in dem in Abb. 5.5 vorhergesagten Überschneidungsbereich für realistische Werte von σ und W_{min} . Die für je-

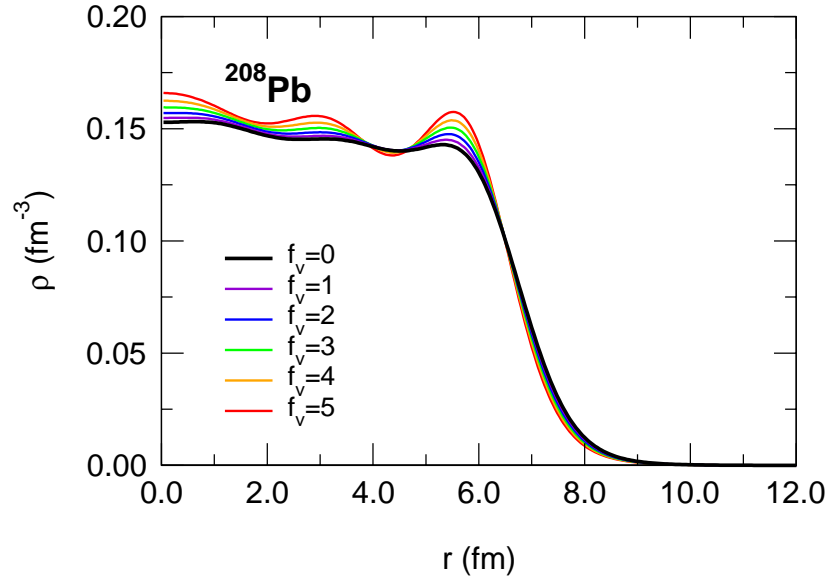


Abb. 5.8. Dichte ρ in ^{208}Pb als Funktion des radialen Abstands r für unterschiedliche Werte von f_v und $m_\sigma = 525$ MeV.

Tabelle 5.4. Bindungsenergien B/A (MeV), Ladungsradien r_{ch} (fm) und Spin-Bahn-Aufspaltungen $\Delta\varepsilon_{\text{so}}$ (MeV) für die Kerne ^{16}O , ^{40}Ca , ^{48}Ca und ^{208}Pb . Die $\Delta\varepsilon_{\text{so}}$ beziehen sich auf Neutronenzustände, entsprechende Werte für Protonen sind in Klammern gegeben. Zum Vergleich ist für jede Größe der experimentelle Wert angeführt.

	m_σ	f_v	B/A		r_{ch}		$\Delta\varepsilon_{\text{so}}$		
			calc.	Exp.	calc.	Exp.	calc.	Exp.	Exp.
^{16}O	361	5.1	7.99	7.98	2.72	2.74	1p	6.2 (6.1)	6.1 (6.3)
^{40}Ca	374	4.85	8.58	8.55	3.44	3.48	1d	6.3 (6.3)	6.3
^{48}Ca	396	3.1	8.63	8.67	3.50	3.47	1d	3.6 (3.8)	3.6
^{208}Pb	374.6	5.5	7.88	7.87	5.53	5.50	2p	1.1 (1.1)	0.5
							2f	2.5	1.8
							3p	0.9	0.9

den einzelnen Kern angepaßten Wertepaare sind in Tabelle 5.4 zusammen mit der Bindungsenergie pro Nukleon, dem Ladungsradius r_{ch} (s. Abschn. 2.7) sowie den Spin-Bahn-Aufspaltungen $\Delta\varepsilon_{\text{so}}$ aufgelistet. Bei dem beschriebenen Verfahren konnte allerdings kein Wertepaar (m_σ, f_v) gefunden werden, das B/A und die $\Delta\varepsilon_{\text{so}}$ für alle Kerne aus Tabelle 5.4 gleichzeitig zufriedenstellend reproduziert. Für die gefundenen Werte von (m_σ, f_v) ist in Abb. 5.5 vor allen Dingen eine deutlich zu kleine Oberflächendicke t abzulesen. Durch die Hinzunahme der Tensorkopplung lassen sich somit zwar die Spin-Bahn-Aufspaltungen in endlichen Kernen erhöhen, Oberflächeneigenschaften wie speziell die Oberflächendicke t können durch den MZM-Ansatz dagegen nicht verbessert werden.

Teil II

Komprimierte nukleare Systeme

Kapitel 6

Kernkompressionen im σ - ω - ρ -Modell mit Zusatztermen

Während man bei infiniten Kernmaterie die Nukleonendichte ρ beliebig vorgeben kann, erfordern Kompressionsrechnungen für das Modellsystem semi-infinite Kernmaterie sowie für endliche Kerne die Anwesenheit eines kompensierenden externen Drucks, der dem Druck des nuklearen Systems im Sinne einer gerichteten Kraft pro Fläche (s.a. Abschnitte 3.1 und 3.2) entgegenwirkt und es damit stabilisiert. Die nukleare Kompression ist dann als Reaktion des Systems auf einen äußeren Druck aufzufassen.

Innerhalb der nichtrelativistischen Hartree-Fock-Theorie wurden dichteabhängige Zusatzterme zur Energiedichte addiert [102, 103], um einen äußeren Druck zu simulieren. Diese Technik kann direkt auf die semiklassische RTF-Näherung übertragen werden [34, 104]. Für eine feldtheoretische Behandlung ist dagegen eine Modifikation der Lagrangedichte \mathcal{L} des unkomprimierten Systems notwendig. Zu diesem Zweck wird ein geeigneter, noch näher zu spezifizierender Zusatzterm \mathcal{C} von der ursprünglichen Lagrangedichte \mathcal{L} (2.2) abgezogen,

$$\mathcal{L}_C = \mathcal{L} - \mathcal{C}, \quad (6.1)$$

um dadurch nach der Legendre-Transformation (2.13) von \mathcal{L}_C in der gesamten Energiedichte \mathcal{E}_C in Analogie zum nichtrelativistischen Fall [102, 103] einen additiven Beitrag zu erhalten. Aufgrund der feldtheoretischen Formulierung erlaubt dieses Verfahren zudem, die Druck- bzw. Kräfteverhältnisse im komprimierten System anhand des Feldstärketensors zu studieren. In der Arbeit [34] wurde mittels dieser Methode die RTF-Näherung für komprimierte symmetrische SINM erhalten. Es wurden dort Zusatzterme betrachtet, die sowohl von der baryonischen als auch von der skalaren Dichte abhängen. Im realen System kann man sich den Zusatzdruck sowohl von den Mesonen als auch von dem Nukleonenfeld selbst vermittelt vorstellen. Allgemein kann daher \mathcal{C} als Lorentz-Skalar aus nukleonischen sowie mesonischen Beiträgen bestehen. Mögliche Ansätze hierfür sind:

- skalarer nukleonischer Beitrag $\mathcal{C}_s(\bar{\psi}\psi)$,
- nukleonischer Beitrag $\mathcal{C}_B(j^\mu j_\mu)$ in Abhängigkeit von der Stromdichte j^μ ,
- isospinabhängige Beiträge $\mathcal{C}_{n,p}(j_{n,p}^\mu j_{n,p}^\mu)$, die von der Neutronenstromdichte j_n^μ bzw. von der Protonenstromdichte j_p^μ abhängen,
- mesonische Beiträge wie $\mathcal{C}_m(\phi^2, \omega^\mu \omega_\mu, \vec{b}^\mu \cdot \vec{b}_\mu)$.

Selbst reine Coulombbeiträge wie etwa $\mathcal{C}_{\text{Coul}}(A^\mu A_\mu)$ wären bei endlichen Kernen prinzipiell möglich. Der Zusatzterm \mathcal{C} muß dabei so gehalten sein, daß Erhaltungssätze und Invarianzen der ursprünglichen Lagrangedichte \mathcal{L} (2.2) von der Gesamt-Lagrangedichte $\mathcal{L}_\mathcal{C}$ des komprimierten Systems nicht verletzt werden. Insbesondere sollte dabei weiterhin die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ gelten.

Weitere sinnvolle Anforderungen an $\mathcal{L}_\mathcal{C}$ speziell für Kernmaterie in Mittelfeldnäherung sind:

- Die Beschreibung komprimierter Systeme mittels der Lagrangedichte $\mathcal{L}_\mathcal{C}$ sollte thermodynamisch konsistent bleiben, d.h. der Gesamtdruck in Kernmaterie sollte ebenfalls durch die thermodynamische Druckdefinition erhalten werden können (s. Gln. (2.58), (2.59)).
- Ein vorgegebener Neutronenüberschuß in Kernmaterie sollte durch \mathcal{C} nicht verändert werden.

Allgemein sind für die Konstruktion von \mathcal{C} beliebige invariante Kontraktionen von Feldern und deren Ableitungen denkbar. (Der zusätzliche Tensorbeitrag $f_\nu \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \psi / (4M)$ zu \mathcal{L}_{ZM} (5.1) des MZM-Modells aus Kap. 5 kann beispielsweise als ein Zusatzterm aufgefaßt werden, der nach Abb. 5.8 jedoch nur bei endlichen Kernen zu einer Kompression führt.) Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden entweder die rein nukleonischen Stromdichtebeiträge $\mathcal{C}_\text{B}(j^\mu j_\mu)$ oder mesonische Beiträge \mathcal{C}_m in ihrer Wirkung auf nukleare Systeme untersucht, so daß für die nachfolgenden Betrachtungen der Zusatzterm \mathcal{C} vereinfachend als

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_\text{B}(j^\mu j_\mu) + \mathcal{C}_\text{m}(\phi^2, \omega^\mu \omega_\mu, \vec{b}^\lambda \cdot \vec{b}_\lambda) \quad (6.2)$$

geschrieben wird.

6.1 Feldgleichungen und Energie-Impuls-Tensor

Aus dem Hamiltonschen Prinzip für die Lagrangedichte $\mathcal{L}_\mathcal{C}$ ergeben sich die Feldgleichungen des komprimierten Systems analog zum Grundzustandsfall (2.4) aus den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\mathcal{C}}{\partial \chi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_\mathcal{C}}{\partial (\partial_\mu \chi_a)} = 0 \quad (\chi_a \equiv \psi, \bar{\psi}, \phi, \omega_\nu, \vec{b}_\nu, A_\nu). \quad (6.3)$$

Die Dirac-Gleichung (DG)

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - \Sigma_\mu) - (M - \Sigma)]\psi - \mathcal{C}'_\text{B}(j^\lambda j_\lambda) 2\gamma^\lambda j_\lambda \psi = 0 \quad (6.4)$$

folgt dabei aus der Variation nach $\bar{\psi}$. Sie enthält nun einen expliziten Beitrag von \mathcal{C}_B . Die dazu adjungierte Gleichung,

$$(\partial_\mu \bar{\psi}) i\gamma^\mu + \bar{\psi} [\gamma^\mu \Sigma_\mu + (M - \Sigma)] + \mathcal{C}'_\text{B}(j^\lambda j_\lambda) 2\bar{\psi} \gamma^\lambda j_\lambda = 0, \quad (6.5)$$

folgt formal aus der Variation nach ψ . Die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung $\partial^\mu j_\mu = 0$ kann leicht verifiziert werden, indem man (6.4) von links mit $\bar{\psi}$, (6.5) von rechts mit ψ multipliziert und schließlich beide Gleichungen addiert.

Die restlichen Feldgleichungen für die Mesonen sowie das Coulombpotential sind durch

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m_\sigma^2 \phi + \frac{\partial \mathcal{C}_m}{\partial \phi} = g_\sigma \bar{\psi} \psi - b_2 \phi^2 - b_3 \phi^3, \quad (6.6)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega^\nu - \frac{\partial \mathcal{C}_m}{\partial \omega_\nu} = \partial_\mu \partial^\mu \omega^\nu + m_\omega^2 \omega^\nu - \frac{\partial \mathcal{C}_m}{\partial \omega_\nu} = g_\omega \bar{\psi} \gamma^\nu \psi, \quad (6.7)$$

$$\partial_\mu \vec{G}^{\mu\nu} + m_\rho^2 \vec{b}^\nu - \frac{\partial \mathcal{C}_m}{\partial \vec{b}_\nu} = \partial_\mu \partial^\mu \vec{b}^\nu + m_\rho^2 \vec{b}^\nu - \frac{\partial \mathcal{C}_m}{\partial \vec{b}_\nu} = g_\rho \bar{\psi} \gamma^\nu \vec{\tau} \psi, \quad (6.8)$$

$$\partial_\mu A^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = e \bar{\psi} \gamma^\nu \frac{1 + \tau_3}{2} \psi \quad (6.9)$$

gegeben. Während die Dirac-Gleichung (6.4) den rein nukleonischen Beitrag \mathcal{C}'_B von \mathcal{C} enthält, werden die Feldgleichungen (6.6) – (6.8) nur durch den mesonischen Term \mathcal{C}_m modifiziert.

Der Energie-Impuls-Tensor $\mathcal{T}_C^{\mu\nu}$ des komprimierten Systems wird über die Vorschrift

$$\mathcal{T}_C^{\mu\nu} \equiv -g^{\mu\nu} \mathcal{L}_C + \sum_{\chi_a} \frac{\partial \mathcal{L}_C}{\partial (\partial_\mu \chi_a)} \partial^\nu \chi_a \quad (\chi_a \equiv \psi, \bar{\psi}, \phi, \omega^\lambda, \vec{b}^\lambda, A^\lambda) \quad (6.10)$$

erhalten (s.a. Abschn. 2.1). Im Falle des unkomprimierten Systems fällt der DG-Term der ursprünglichen Lagrangedichte \mathcal{L} (2.2) im Energie-Impuls-Tensor $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ (2.13) heraus. Für $\mathcal{T}_C^{\mu\nu}$ ergibt sich dagegen unter Verwendung der Dirac-Gleichung (6.4) der Beitrag:

$$\bar{\psi} [\gamma^\mu (i\partial_\mu - \Sigma_\mu) - (M - \Sigma)] \psi = \bar{\psi} \mathcal{C}'_B (j^\lambda j_\lambda) 2\gamma^\lambda j_\lambda \psi = \mathcal{C}'_B (j^\lambda j_\lambda) 2j^\lambda j_\lambda. \quad (6.11)$$

Ferner muß noch der Zusatzterm \mathcal{C} zu der Lagrangedichte \mathcal{L}_C selbst berücksichtigt werden. Insgesamt ist $\mathcal{T}_C^{\mu\nu}$ damit durch

$$\mathcal{T}_C^{\mu\nu} = \mathcal{T}^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \left(\mathcal{C}'_B (j^\lambda j_\lambda) 2j^\lambda j_\lambda - \mathcal{C}_B (j^\lambda j_\lambda) - \mathcal{C}_m \right) \quad (6.12)$$

gegeben.

6.2 Mittelfeldnäherung

Für die Behandlung der Lagrangedichte \mathcal{L}_C (6.1) in Mittelfeldnäherung ist zunächst der Erwartungswert des nukleonischen Zusatzterms \mathcal{C}_B zu bestimmen. Faßt man \mathcal{C}_B als Potenzreihe in $j^\lambda j_\lambda$ auf, so werden im Rahmen der Hartree-Näherung Korrelationen bei der Bestimmung des Erwartungswertes $\langle j^\lambda j_\lambda \rangle$ vernachlässigt [34, 105, 106]. Die Argumentation bei der Behandlung der operatorwertigen Terme in \mathcal{C}_B kann in analoger Weise wie bei der relativistischen Hartree-Näherung für Lagrangedichten mit dichteabhängigen Kopplungskonstanten [105, 106] erfolgen: In RMF bewegen sich die Nukleonen des komprimierten Systems in einem statischen Mittelfeld, das aus stationären klassischen Mesonenfeldern *und* den äußeren Druck vermittelnden externen klassischen Feldern zusammengesetzt ist. Durch die Grundannahme der Hartree-Näherung, nach der das Nukleonenfeld als Produkt der besetzten fermionischen Zustände angesetzt wird, erhält man im Ruhesystem ($\langle \mathbf{j} \rangle = 0$) für die Erwartungswerte der Potenzen von $j^\lambda j_\lambda$ [105, 106]:

$$\langle (j^\lambda j_\lambda)^n \rangle = \rho^{2n}. \quad (6.13)$$

Hieraus ergeben sich schließlich für die Terme mit \mathcal{C}_B und \mathcal{C}'_B der Gln. (6.4) und (6.12) die Erwartungswerte:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{C}'_B(j^\lambda j_\lambda) 2\gamma^\lambda j_\lambda \rangle &= 2\gamma^0 \mathcal{C}'_B(\rho^2)\rho, \\ \langle \mathcal{C}_B(j^\lambda j_\lambda) \rangle &= \mathcal{C}_B(\rho^2), \\ \langle 2\mathcal{C}'_B(j^\lambda j_\lambda) j^\lambda j_\lambda \rangle &= 2\mathcal{C}'_B(\rho^2)\rho^2.\end{aligned}\quad (6.14)$$

Mit der Definition

$$C_B(\rho) \equiv \mathcal{C}_B(\rho^2) \quad (6.15)$$

folgt für die Dirac-Gleichung (6.4) der Ausdruck:

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - \delta_{\mu 0} \Sigma_0^{\text{eff}}) - (M - \Sigma)]\psi = 0, \quad (6.16)$$

mit der effektiven vektoriellen Selbstenergie

$$\Sigma_0^{\text{eff}} \equiv \Sigma_0 + C'_B(\rho). \quad (6.17)$$

Der dichteabhängige Term C'_B wirkt in Gl. (6.16) somit wie ein externes vektorielles Mittelfeld. Für den Einteilchenspinor ψ_α ist dann die stationäre Dirac-Gleichung

$$[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \Sigma_0^{\text{eff}} + \beta(M - \Sigma)]\psi_\alpha = \varepsilon_\alpha \psi_\alpha \quad (6.18)$$

zur Einteilchenenergie ε_α zusammen mit den nachfolgend angegebenen Feldgleichungen zu lösen.

Für den mesonischen Zusatzterm \mathcal{C}_m soll an dieser Stelle keine explizite Betrachtung für die Mittelfeldnäherung erfolgen, da bei der hier angenommenen Gestalt ein entsprechender Ausdruck leicht gewonnen werden kann. Das Differentialgleichungssystem für die Mesonenfelder und das Coulombpotential lautet dann:

$$-\Delta\phi + m_\sigma^2\phi + \frac{\partial\mathcal{C}_m}{\partial\phi} = g_\sigma\rho_s - b_2\phi^2 - b_3\phi^3, \quad (6.19)$$

$$-\Delta\omega_0 + m_\omega^2\omega_0 - \frac{\partial\mathcal{C}_m}{\partial\omega_0} = g_\omega\rho, \quad (6.20)$$

$$-\Delta b_{00} + m_\rho^2 b_{00} - \frac{\partial\mathcal{C}_m}{\partial b_{00}} = g_\rho\rho_3, \quad (6.21)$$

$$-\Delta A_0 = e\rho_p. \quad (6.22)$$

Durch die oben genannten Näherungen vereinfacht sich schließlich der Erwartungswert von $\mathcal{T}_C^{\mu\nu}$ aus Gl. (6.12) zu:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{T}_C^{\mu\nu} \rangle &= \langle \mathcal{T}^{\mu\nu} \rangle - g^{\mu\nu} (C'_B(\rho)\rho - C_B(\rho) - \mathcal{C}_m) \\ &= \langle \mathcal{T}^{\mu\nu} \rangle - g^{\mu\nu} \left(\rho^2 \frac{d}{d\rho} \frac{C_B(\rho)}{\rho} - \mathcal{C}_m \right).\end{aligned}\quad (6.23)$$

Der Energie-Impuls-Tensor $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ des unkomprimierten Systems ist dabei durch den RMF-Ausdruck (2.25) gegeben. Der nukleonische Zusatzterm C_B liefert in infiniten Kernmaterie, SINM und bei sphärisch-symmetrischen Kernen einen äußeren Druck, der der thermodynamischen Druckdefinition (2.59) gehorcht. Der mesonische Beitrag \mathcal{C}_m stellt dagegen direkt einen äußeren Druck dar.

Die intrinsische nukleare Energiedichte des Systems, d.h. die Energiedichte ohne externe Beiträge, wird formal aus der Energiedichte

$$\mathcal{E}_c = \langle \mathcal{T}^{00} \rangle \quad (6.24)$$

erhalten, indem man in Gl. (6.23) die Beiträge von C_B und C_m streicht. Der Term $-C'_B(\rho)\rho$ darf hingegen nicht vernachlässigt werden, da er durch den kinetischen Beitrag $\langle \bar{\psi} i \gamma^0 \partial_0 \psi \rangle$ aus $\langle \mathcal{T}^{00} \rangle$ kompensiert wird. Die nukleare Energie E_{nuc} eines komprimierten endlichen Kerns, für den die totale Energie

$$E_c = \int \mathcal{E}_c d^3r \quad (6.25)$$

minimiert wird, ist damit durch

$$E_{\text{nuc}} = E_c - \int \mathcal{C} d^3r = \int [\langle \mathcal{T}^{00} \rangle(r) - C'_B(\rho(r))\rho(r)] d^3r \quad (6.26)$$

gegeben.

In infiniter Kernmaterie führt der Stromdichtebeitrag $\mathcal{C}_B(j^\mu j_\mu)$ gemäß den Gln. (6.16) und (6.17) zu einer Verschiebung der Einteilchenenergien ε_α^\pm (2.37) um $C'_B(\rho)$. Der Erwartungswert $\langle \bar{\psi} i \gamma^0 \partial_0 \psi \rangle$ liefert damit bei der Gesamtenergiedichte \mathcal{E}_c (6.24) den zusätzlichen Beitrag $C'_B(\rho)\rho$, der sich mit dem Term $-C'_B(\rho)\rho$ aus Gl. (6.23) gerade exakt aufhebt [34]. Im Falle von INM und der RTF-Näherung für inhomogene Systeme gilt daher für \mathcal{E}_c :

$$\mathcal{E}_c = \mathcal{E} + \mathcal{C}. \quad (6.27)$$

6.3 Die nukleare Oberflächenspannung komprimierter semi-infiniter Kernmaterie

Bei der Bestimmung der nuklearen Oberflächenspannung σ_{nuc} von komprimierter SINM ist zusätzlich an jeder Stelle z das Druckgleichgewicht $p_{\text{tot}} = p_{\text{sys}} + p_{\text{ext}} = 0$ zu beachten [34], für das im Bulk-Bereich über die chemischen Potentiale μ_{nuc} und μ_{pc} gesorgt sein muß (s.a. Abschn. 3.1). Nach dem Hugenholtz-van-Hove-Theorem für zweikomponentige Systeme [37–39, 33] gilt für asymmetrische INM mit Dichte ρ_c , Asymmetrie δ_c und Energiedichte \mathcal{E}_c^∞ bei resultierendem Gesamtdruck $p_{\text{tot}}^\infty = 0$:

$$\mu_{(n,p)c} = \frac{\mathcal{E}_c^\infty + p_{\text{tot}}^\infty}{\rho_c} \pm (1 \mp \delta_c) \frac{\partial \mathcal{E}_c^\infty}{\partial \delta_c} \frac{1}{\rho_c} = \frac{\mathcal{E}_c^\infty}{\rho_c} \pm (1 \mp \delta_c) \frac{\partial \mathcal{E}_c^\infty}{\partial \delta_c} \frac{1}{\rho_c}. \quad (6.28)$$

Die chemischen Potentiale μ_{nuc} und μ_{pc} bestimmen die Gibbs'sche Freie Energie pro Einheitsfläche [38, 39]

$$\tilde{\sigma}_c(\rho_c, \delta_c) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{E}_c(z) - \mu_{\text{pc}} \rho_p(z) - \mu_{\text{nuc}} \rho_n(z)) dz, \quad (6.29)$$

deren Minimierung die Feldgleichungen des komprimierten Systems liefert (s.a. Unterabschn. 2.4.1 für den unkomprimierten Fall). Die nachträgliche Bestimmung der nuklearen Oberflächenspannung σ_{nuc} hat dagegen über die Beziehung

$$\sigma_{\text{nuc}}(\rho_c, \delta_c) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\langle \mathcal{T}^{00} \rangle(z) - C'_B(\rho(z))\rho(z) - e_\infty(\rho_c, \delta_c)\rho(z)] dz \quad (6.30)$$

zu erfolgen. Speziell für den Fall der symmetrischen SINM läßt sich aus den Gln. (6.28) und (6.29) mit $\mu_C \equiv \mu_{nc} = \mu_{pc}$, $\sigma_C \equiv \tilde{\sigma}_C(\rho_c, \delta_c = 0)$ und $\mathcal{C}_\infty \equiv \lim_{z \rightarrow -\infty} \mathcal{C}(z)$ die praktische Beziehung

$$\sigma_{\text{nuc}} = \sigma_C - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathcal{C}(z) - \frac{\mathcal{C}_\infty}{\rho_c} \rho(z) \right) dz \quad (6.31)$$

gewinnen.

Die Oberflächenspannung σ_{nuc} hängt nach (6.29) und (6.30) von der Asymmetrie δ_c , dem durch \mathcal{C} in Kernmaterie verursachten zentralen Kompressionsverhältnis

$$q \equiv \frac{\rho_c}{\rho_0(\delta_c)} \quad (6.32)$$

und der Dichte $\rho(z)$ ab. Der Dichteverlauf im Oberflächenbereich ist dabei durch q und δ_c nicht eindeutig bestimmt, er wird vielmehr als zusätzlicher Freiheitsgrad durch die konkrete funktionale Gestalt von \mathcal{C} festgelegt. Unabhängig von der Kompressionsmode ist nach dem sogenannten „ $\dot{\sigma} = 0$ “-Theorem von Myers und Swiatecki [35] die erste Ableitung der nuklearen Oberflächenspannung nach der zentralen Dichte ρ_c an der Sättigungsdichte ρ_0 in symmetrischer SINM Null:

$$\dot{\sigma} \equiv \left. \frac{d}{d\rho_c} \sigma_{\text{nuc}}(\rho_c, \delta_c = 0) \right|_{\rho_c = \rho_0}, \quad \dot{\sigma} = 0. \quad (6.33)$$

Im Falle von komprimierter SINM in RTF-Näherung kann es unter Ausnutzung der aus $\delta\sigma_C = 0$ gewonnenen Variationsgleichungen für rein nukleonische Zusatzterme $C_B(\rho)$:

$$\frac{\delta\mathcal{E}_C}{\delta\chi_a} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\chi_a} - \frac{d}{dz} \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\chi'_a} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\chi_a} - \frac{d}{dz} x_a \chi'_a = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\chi_a} - x_a \chi''_a = 0, \quad (6.34)$$

$$\chi_a \equiv (\phi, \omega_0, b_{00}), \quad x_a = \begin{cases} +1 & \phi \\ -1 & \omega_0, b_{00} \end{cases},$$

$$\frac{\partial\mathcal{E}_C}{\partial\rho_{n,p}} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_{n,p}} + C'_B(\rho) = \mu_{(n,p)c}, \quad (6.35)$$

leicht verifiziert werden. Dazu bestimmt man allgemein die partielle Ableitung $\partial\sigma_{\text{nuc}}/\partial\rho_c$, die in vier Schritten erhalten werden kann. Zunächst schreibt man allgemein:

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_c} = \sum_{\chi_a = \phi, \omega_0, b_{00}} \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\chi_a} \frac{\partial\chi_a}{\partial\rho_c} + \sum_{\chi'_a = \phi', \omega'_0, b'_{00}} \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\chi'_a} \frac{\partial\chi'_a}{\partial\rho_c} + \sum_{a=n,p} \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_a} \frac{\partial\rho_a}{\partial\rho_c}. \quad (6.36)$$

Durch partielle Integration des Summanden im zweiten Term von (6.36) erhält man unter Verwendung der Feldgleichungen (6.34) die Beziehung:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\chi'_a} \frac{\partial\chi'_a}{\partial\rho_c} dz &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\chi'_a} \frac{d}{dz} \frac{\partial\chi_a}{\partial\rho_c} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a \chi'_a \frac{d}{dz} \frac{\partial\chi_a}{\partial\rho_c} dz \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} x_a \chi''_a \frac{\partial\chi_a}{\partial\rho_c} dz = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d}{dz} \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\chi'_a} \right) \frac{\partial\chi_a}{\partial\rho_c} dz \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\chi_a} \frac{\partial\chi_a}{\partial\rho_c} dz. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Damit liefert die Integration von (6.36) den Ausdruck:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_c} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \sum_{a=n,p} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_a} \frac{\partial \rho_a}{\partial \rho_c} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \sum_{a=n,p} (\mu_{a_c} - C'_B(\rho)) \frac{\partial \rho_a}{\partial \rho_c}. \quad (6.38)$$

Mit der Produktregel

$$\sum_{a=n,p} \frac{\partial}{\partial \rho_c} (e_\infty \rho_a) = \sum_{a=n,p} \frac{\partial e_\infty}{\partial \rho_c} \rho_a + e_\infty \frac{\partial \rho_a}{\partial \rho_c}, \quad (6.39)$$

dem chemischen Potential

$$\mu_{(n,p)_c} = e_\infty + \frac{C_B(\rho_c)}{\rho_c} \pm (1 \mp \delta_c) \frac{\partial e_\infty}{\partial \delta_c} \quad (6.40)$$

und Gl. (6.38) erhält man schließlich für die partielle Ableitung der nuklearen Oberflächenspannung σ_{nuc} (6.30) nach der zentralen Dichte ρ_c :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\text{nuc}}(\rho_c, \delta_c)}{\partial \rho_c} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\frac{C_B(\rho_c)}{\rho_c} - C'_B(\rho(z; \rho_c, \delta_c)) \right] \frac{\partial \rho(z; \rho_c, \delta_c)}{\partial \rho_c} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial e_\infty(\rho_c, \delta_c)}{\partial \rho_c} \rho(z; \rho_c, \delta_c) \right\} dz \\ &\quad - \frac{\partial e_\infty(\rho_c, \delta_c)}{\partial \delta_c} \frac{\partial}{\partial \rho_c} \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho_3(z; \rho_c, \delta_c) + \delta_c \rho(z; \rho_c, \delta_c)) dz. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Das letzte Integral in (6.41) kann dabei nach Ref. [107] durch die Neutronenhautdicke Θ ,

$$\begin{aligned} \Theta(\rho_c, \delta_c) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\rho_n(z; \rho_c, \delta_c)}{\rho_{nc}} - \frac{\rho_p(z; \rho_c, \delta_c)}{\rho_{pc}} \right) dz, \\ \rho_{(n,p)_c} &\equiv \lim_{z \rightarrow -\infty} \rho_{n,p}(z; \rho_c, \delta_c), \\ \Theta(\rho_c, \delta_c = 0) &\equiv 0, \end{aligned} \quad (6.42)$$

ausgedrückt werden:

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho_3(z; \rho_c, \delta_c) + \delta_c \rho(z; \rho_c, \delta_c)) dz = \frac{\rho_c(1 - \delta_c^2)}{2} \Theta(\rho_c, \delta_c). \quad (6.43)$$

Für gesättigte symmetrische SINM mit $\rho_c = \rho_0$ und $\delta_c = 0$ verschwinden sowohl das erste Integral in Gl. (6.41) als auch die Neutronenhautdicke Θ , woraus sich $\dot{\sigma} = 0$ ergibt.

Da im Falle nukleonischer Zusatzterme die Feldgleichungen (6.34) formal nicht verändert werden, empfiehlt es sich, bei der Auswertung von (6.41) für beliebige Werte von δ_c skalierte Grundzustandsdichten ($\rho^{\text{g.s.}}$) gemäß der Vorschrift

$$\begin{aligned} \rho_{n,p}(z; \rho_c, \delta_c) &\equiv q \rho_{n,p}^{\text{g.s.}}(z/q^\beta; \delta_c), \\ q &\equiv \frac{\rho_{nc}}{\rho_{n0}} = \frac{\rho_{pc}}{\rho_{p0}} = \frac{\rho_c}{\rho_0(\delta_c)}, \\ \rho_{(n,p)_0} &\equiv \lim_{z \rightarrow -\infty} \rho_{n,p}^{\text{g.s.}}(z; \delta_c) \end{aligned} \quad (6.44)$$

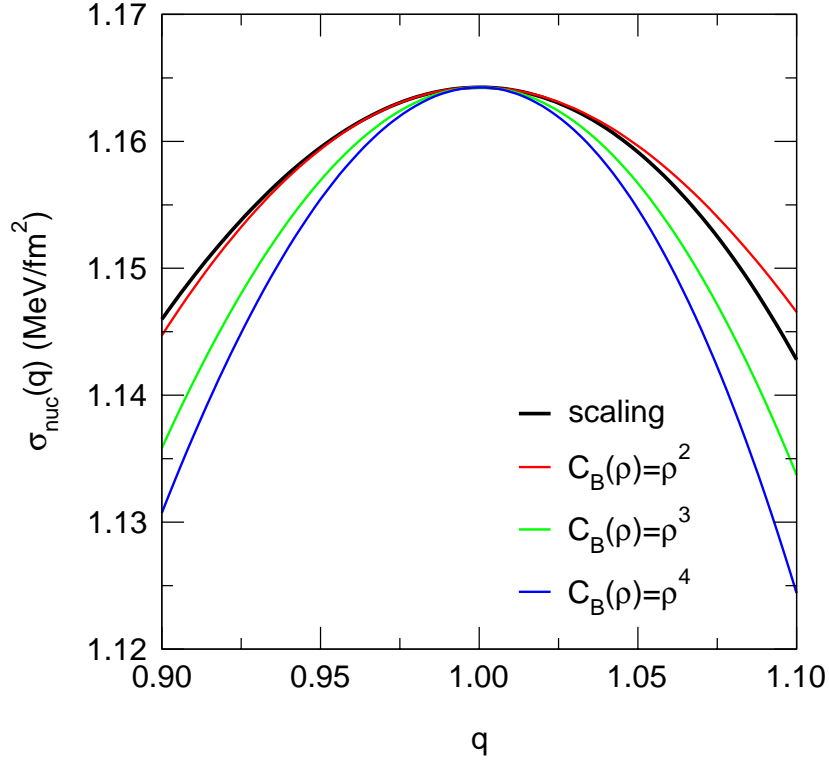


Abb. 6.1. Nuklearer Anteil σ_{nuc} der Oberflächenspannung σ_c in RTF-Näherung als Funktion des zentralen Kompressionsverhältnisses q in symmetrischer SINM für die Skalierungsmode (scaling) sowie die Zusatzterme $C_B(\rho) = \rho^2, \rho^3, \rho^4$ (Parametersatz NL1).

vorzugeben. Der reelle Parameter β steuert dabei den Dichteverlauf im Oberflächenbereich unter Kompression. Ein zu dem Ansatz (6.44) korrespondierender Zusatzterm $C_B(\rho)$ ließe sich bei konkreten Rechnungen prinzipiell nach erfolgter Lösung des Gleichungssystems (6.34) aus den Thomas-Fermi-Beziehungen (6.35) numerisch extrahieren [34]. Zur Veranschaulichung zeigt Abb. 6.1 σ_{nuc} von komprimierter isospinsymmetrischer SINM als Funktion des zentralen Kompressionsverhältnisses q für die sogenannte Skalierungsmode ($\beta = -1/3$ in Gl. (6.44)). Zusätzlich werden auch die Graphen für die Zusatzterme $C_B(\rho) = \rho^2, \rho^3, \rho^4$ wiedergegeben. Alle gezeigten Kurven bestätigen – unabhängig von dem gewählten Zusatzterm bzw. der gewählten Technik – numerisch die Gültigkeit des „ $\dot{\sigma} = 0$ “-Theorems.

Für die Dichtewahl (6.44) ergibt sich für die partielle Ableitung von Θ (6.42) nach der zentralen Dichte ρ_c :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Theta(\rho_c, \delta_c)}{\partial \rho_c} &= \frac{1}{\rho_0(\delta_c)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\rho_n^{g.s.}(z/q^\beta; \delta_c)}{\rho_{n0}} - \frac{\rho_p^{g.s.}(z/q^\beta; \delta_c)}{\rho_{p0}} \right) \left(\frac{-\beta z}{q^{\beta+1}} \right) dz \\
 &= \frac{1}{\rho_0(\delta_c)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\rho_n^{g.s.}(z/q^\beta; \delta_c)}{\rho_{n0}} - \frac{\rho_p^{g.s.}(z/q^\beta; \delta_c)}{\rho_{p0}} \right) \left(\frac{\beta}{q^{\beta+1}} \right) dz \quad (6.45) \\
 &= \frac{1}{\rho_0(\delta_c)} \frac{\beta}{q^{\beta+1}} \Theta(\rho_c, \delta_c).
 \end{aligned}$$

Damit erhält man für den Sättigungsfall ($q = 1$, $\rho_c = \rho_0(\delta_c)$, $C_B \equiv 0$) für Gl. (6.41) den Ausdruck:

$$\left. \frac{\partial \sigma_{\text{nuc}}(\rho_c, \delta_c)}{\partial \rho_c} \right|_{\rho_c = \rho_0(\delta_c)} = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial e_{\infty}(\rho_c, \delta_c)}{\partial \delta_c} \right|_{\rho_c = \rho_0(\delta_c)} (1 - \delta_c^2)(1 + \beta) \Theta(\rho_0(\delta_c), \delta_c). \quad (6.46)$$

Er zeigt, daß im allgemeinen – mit Ausnahme von $\beta = -1$ – für beliebiges δ_c die partielle Ableitung von σ_{nuc} nach der zentralen Dichte ρ_c an der jeweiligen Sättigungsdichte $\rho_0(\delta_c)$ nicht verschwindet.

Kapitel 7

Komprimierte Kerne in Relativistischer Thomas-Fermi-Näherung

In diesem Kapitel wird ein Zugang zur Beschreibung komprimierter endlicher Kerne über die relativistische Thomas-Fermi-Näherung des nichtlinearen σ - ω - ρ -Modells vorgestellt [108]. Dabei werden sowohl Struktur und Eigenschaften schwach komprimierter Kerne, wie sie etwa während isoskalärer Monopolresonanzen vorliegen (s.a. Kap. 10), als auch das Verhalten von Kernen unter starker Kompression diskutiert. Als Basis für konkrete Rechnungen dient der Parametersatz NL1 für die Mittelfeld-Lagrangedichte (2.24).

7.1 Variationsprinzip für Kernkompressionen

Für die Simulation eines externen Drucks wird im folgenden ein von der Baryondichte $\rho = \rho_n + \rho_p$ abhängiger Zusatzterm $\mathcal{C}(\rho)$ gewählt. Die gesamte Energiedichte $\mathcal{E}_{\text{CRTF}}$ des komprimierten Systems ist damit nach Gl. (6.27) durch

$$\mathcal{E}_{\text{CRTF}} = \mathcal{E}_{\text{RTF}}(\chi_a, \chi'_a, \rho_p, \rho_n) + \mathcal{C}(\rho) \quad (\chi_a \equiv \phi, \omega_0, b_{00}, A_0) \quad (7.1)$$

gegeben. Die Minimierung der totalen Energie des sphärisch-symmetrischen Kerns,

$$\delta \left[4\pi \int_0^\infty (\mathcal{E}_{\text{RTF}}(r) + \mathcal{C}(\rho) - \mu_{n_c} \rho_n(r) - \mu_{p_c} \rho_p(r)) r^2 dr \right] = 0, \quad (7.2)$$

liefert dann in Analogie zum Grundzustandsfall (2.88) unter der Nebenbedingung erhaltener Teilchenzahlen die Bestimmungsgleichungen des komprimierten Systems:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{C}(\rho)}{\partial \rho_p} \right) + g_\omega \omega_0(r) + g_\rho b_{00}(r) + e A_0(r) + \epsilon_{\text{F}_p}^*(r) = \mu_{p_c}, \quad (r \leq \tilde{r}_{p_u}), \quad (7.3)$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{C}(\rho)}{\partial \rho_n} \right) + g_\omega \omega_0(r) - g_\rho b_{00}(r) + \epsilon_{\text{F}_n}^*(r) = \mu_{n_c}, \quad (r \leq \tilde{r}_{n_u}), \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}(\rho)}{\partial \rho_p} = \frac{\partial \mathcal{C}(\rho)}{\partial \rho_n} = \frac{d\mathcal{C}(\rho)}{d\rho}. \quad (7.5)$$

Die Lagrange-Multiplikatoren μ_{nc} und μ_{pc} hängen von dem Zusatzterm \mathcal{C} ab und sind deshalb von den Grundzustandsgrößen (2.93) und (2.94) verschieden. Die aus der Variation (7.2) gewonnenen Feldgleichungen sind formal mit den in (2.89) – (2.92) angegebenen Ausdrücken identisch. Durch deren Kopplung mit den CRTF-Beziehungen (7.3) und (7.4) weisen die Felder jedoch eine implizite Abhängigkeit von \mathcal{C} auf. Auch die klassischen Umkehrpunkte \tilde{r}_{nu} und \tilde{r}_{pu} des Kompressionsfalls differieren im allgemeinen von denen des Grundzustands.

Für die Berechnung konkreter Lösungen der Gln. (2.89) – (2.92), (7.3) und (7.4) muß die funktionale Gestalt von \mathcal{C} noch festgelegt werden. Bei der Wahl eines realistischen Zusatzterms kann das nichtrelativistische Pocket-Modell aus Ref. [103] behilflich sein. Ausgehend von einer einfachen, aber realistischen Energiedichte für SINM konnte dort für eine Klasse von Zusatztermen $\mathcal{C}_{q,\beta}$,

$$\mathcal{C}_{q,\beta}(\rho(z)) = \frac{K_\infty}{18} \frac{\rho^2(z)}{\rho_c} \left[\frac{\rho(z)}{\rho_c} (q^{-2\beta} - q^2) - 2q^{-2\beta} + 2q \right], \quad (7.6)$$

die komprimierte Dichte ρ analytisch als symmetrische Fermi-Funktion ermittelt werden:

$$\rho(z) = \frac{\rho_c}{1 + e^{(z/\alpha_c)}}. \quad (7.7)$$

Der Oberflächenparameter α_c ist dabei über den Grundzustandswert α_0 , das INM-Kompressionsverhältnis $q = \rho_c/\rho_0$ und die Kompressionsmode β durch folgende Beziehung gegeben:

$$\alpha_c = \alpha_0 q^\beta = \alpha_0 \left(\frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^\beta. \quad (7.8)$$

β steuert das Kompressionsverhalten im Oberflächenbereich. Die Wahl $\beta = 0$ bewirkt eine Multiplikation der Sättigungsdichte mit einem konstanten Faktor (Multiplikationsmode). Das Minimum der Oberflächenspannung erhält man für den Wert $\beta = 1$. Unter dieser auch Anti-Scaling genannten Kompressionsmode ist die Oberflächenregion im Mittel dem geringsten Druck ausgesetzt. Bei der in Kap. 10 eingehender behandelten dynamischen Monopolresonanz wird dagegen die Dichte gut durch die Skalierung

$$\rho_\lambda(r) \equiv \frac{1}{\lambda^3} \rho^{g.s.}(r/\lambda) \quad (7.9)$$

der Grundzustandsdichte $\rho^{g.s.}$ beschrieben [119].

Bei der Anwendung des Ausdrucks (7.6) auf endliche Systeme ist zu berücksichtigen, daß bei Kernen bereits im Grundzustand Kompressionseffekte vorliegen, die von der Oberflächenspannung und der Coulombkraft zwischen den Protonen herrühren (s.a. Abschnitte 3.2 und 3.3). Aus diesem Grund kann das zentrale Kompressionsverhältnis q nicht von vorneherein festgelegt werden, es stellt sich vielmehr erst nach einer selbstkonsistenten Rechnung ein. Um diesem Aspekt Rechnung zu tragen, muß Gl. (7.6) geeignet modifiziert werden. Für den CRTF-Zusatzterm wird daher folgender Ansatz gemacht:

$$\mathcal{C}_{\kappa,\beta}^{\text{CRTF}}(\rho(r)) = \frac{K_\infty}{18} \frac{\rho^2(r)}{\rho(0)} \left[\frac{\rho(r)}{\rho(0)} (\kappa^{-2\beta} - \kappa^2) - 2\kappa^{-2\beta} + 2\kappa \right]. \quad (7.10)$$

Anstelle von q enthält Gl. (7.10) nun den Parameter κ , der die zentrale Kompression bei $r = 0$ steuert. $\kappa = 1$ entspricht dabei dem unkomprimierten Grundzustand ($\mathcal{C}^{\text{CRTF}} \equiv 0$).

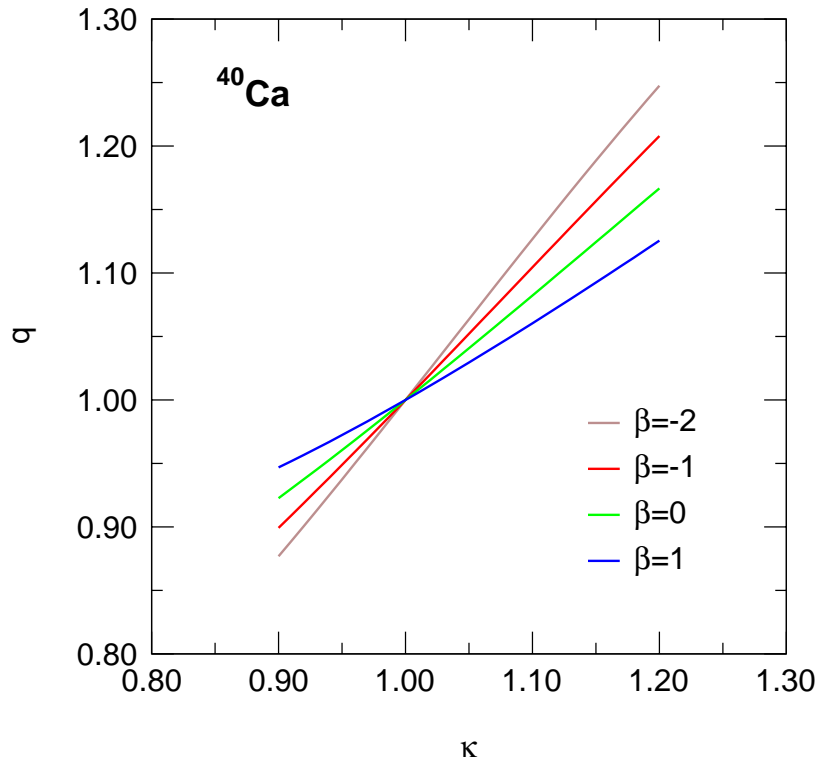


Abb. 7.1. Zentrales Kompressionsverhältnis q in ^{40}Ca als Funktion des Steuerparameters κ für verschiedene Kompressionsmoden β (Parametersatz NL1).

Die CRTF-Gleichungen (2.89) – (2.92), (7.3), (7.4) und (7.10) müssen analog zum Grundzustandsfall in einem Iterationsverfahren numerisch gelöst werden, wobei in jedem Iterationsschritt eine Anpassung der Lagrange-Multiplikatoren μ_{nc} und μ_{pc} zu erfolgen hat (vgl. Unterabschn. 2.5.1). Das resultierende zentrale Kompressionsverhältnis

$$q = q(\kappa, \beta) \equiv \frac{\rho(0; \kappa, \beta)}{\rho^{\text{g.s.}}(0)} \quad (7.11)$$

läßt sich – wie bereits vermerkt – erst im nachhinein aus den ermittelten Dichten extrahieren.

Abbildung 7.1 zeigt für den Kern ^{40}Ca das zentrale Kompressionsverhältnis q als Funktion des Steuerparameters κ für unterschiedliche Moden β . Eine genäherte lineare Beziehung zwischen q und κ kann für alle Werte von β entnommen werden, eine näherungsweise Gleichheit sogar für $\beta = -1$.

Abbildung 7.2 veranschaulicht den Einfluß der Kompressionsmode β auf den Oberflächenbereich endlicher Kerne. Für die $N=Z$ -Kerne mit $A = 40$, $A = 200$ und $A = 20000$ ist die sich ergebende 90%-10%-Oberflächendicke t bei abgeschalteter Coulombkraft gegen das zentrale Kompressionsverhältnis q aufgetragen. Die Kurven des Grenzfalles semi-unendlicher Kernmaterie sind ebenfalls dargestellt. Bei Experimenten ist zu erwarten, daß neben dem Bulk-Bereich von Kernen ebenso deren Oberflächenregion komprimiert wird. Daher erscheinen skalierungsartige Zusatzterme, die auf eine Abnahme von t bei zunehmenden Werten von q führen, als realistisch.

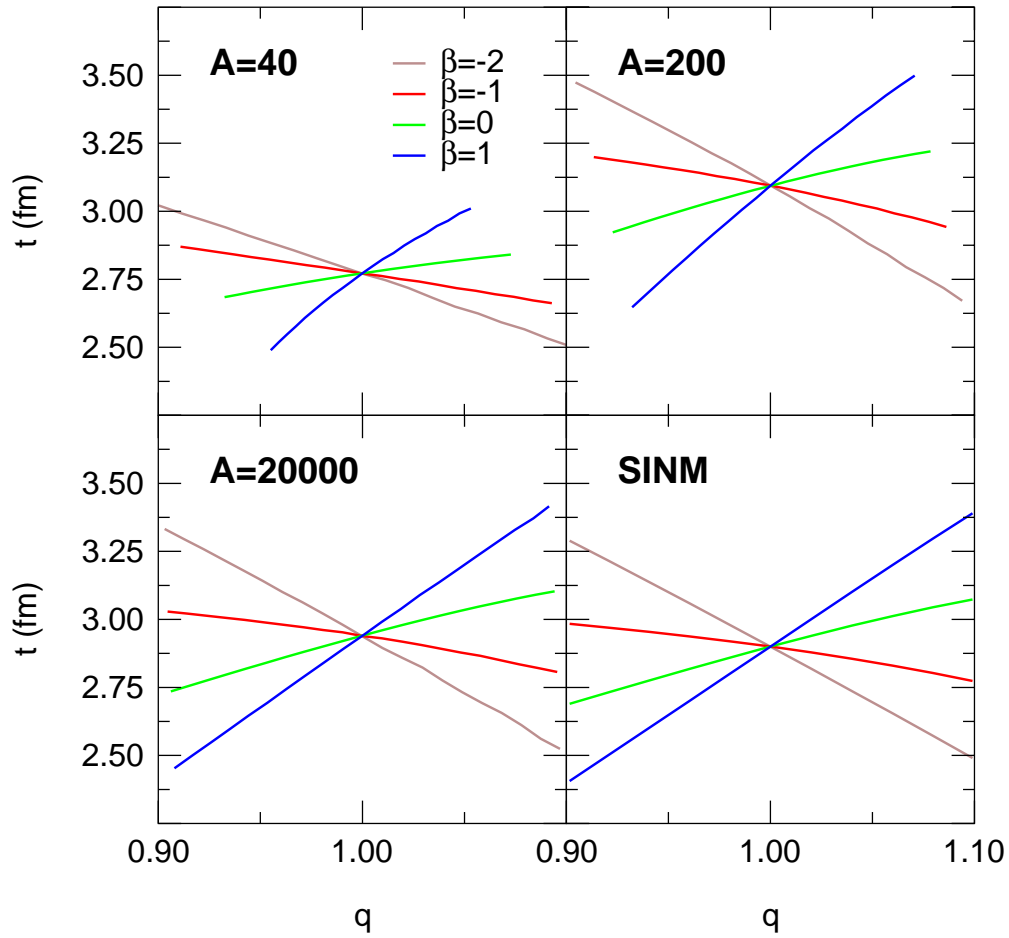


Abb. 7.2. 90%-10%-Oberflächendicke t als Funktion des zentralen Kompressionsverhältnisses q für einige $N=Z$ -Kerne bei abgeschalteter Coulombkraft. Für einen Vergleich sind die entsprechenden SINM-Kurven ebenfalls dargestellt (Parametersatz NL1).

In semi-unendlicher Kernmaterie besteht die Möglichkeit, Kompressionen direkt durch die Vorgabe komprimierter Dichten wie beispielsweise (6.44) zu realisieren. Der auf endliche Kerne übertragene Ansatz

$$\rho_{n,p}(r; q, \beta) = q \rho_{n,p}^{g.s.} \left(\frac{r}{q^\beta} \right) \quad (7.12)$$

mit dem sowohl für Neutronen als auch für Protonen geltenden Kompressionsverhältnis

$$q = \frac{\rho_{n,p}(0)}{\rho_{n,p}^{g.s.}(0)} \quad (7.13)$$

führt allerdings zu Teilchenzahlen, die ausschließlich im Fall der Skalierungsmode ($\beta =$

$-1/3$) erhalten sind:

$$\begin{aligned} N &= 4\pi \int_0^\infty \rho_n(r; q, \beta) r^2 dr \\ &= 4\pi q^{(3\beta+1)} \int_0^\infty \rho_n^{g.s.}(r') r'^2 dr', \end{aligned} \quad (7.14)$$

$$Z = 4\pi q^{(3\beta+1)} \int_0^\infty \rho_p^{g.s.}(r') r'^2 dr'. \quad (7.15)$$

Das Skalierungsverfahren (Ansatz (7.9) bzw. Gl. (7.12) mit $\beta = -1/3$) hat gegenüber der Verwendung eines Zusatzterms \mathcal{C} den Vorteil, die Feldgleichungen (2.89) – (2.92) unabhängig von den CRTF-Beziehungen (7.3) und (7.4) lösen zu können. Dies ist gerade bei einer Vielzahl zu berechnender Kerne bzw. Kompressionen mit einer erheblichen Zeiterparnis verbunden. Äquivalente Zusatzterme lassen sich dann bei Bedarf nachträglich aus den numerischen Skalierungsergebnissen gemäß den Gln. (7.3) und (7.4) extrahieren.

7.2 Nukleare Energie komprimierter Kerne

Der nukleare Anteil der Energie komprimierter Kerne wird durch Raumintegration des Ausdrucks (2.86) für die Grundzustandsenergiedichte unter Verwendung der Kompressionsergebnisse gewonnen. Für die Kerne ^{40}Ca und ^{208}Pb ist die nukleare Energie pro Teilchen E_{nuc}/A für mehrere Werte von β in Abb. 7.3 wiedergegeben. Zum Vergleich sind die Kurven für den Skalierungsfall (7.9) ebenfalls dargestellt. Bei beiden Kernen ist eine recht gute Übereinstimmung mit den Graphen für $\beta \approx -1$ zu erkennen. Aufgrund der bereits erwähnten Kompressionsaspekte im Grundzustand ist bei endlichen Kernen im Gegensatz zur Situation in SINM keine einheitliche, energetisch favorisierte Kompressionsmode auszumachen. Während beispielsweise bei ^{40}Ca die Kurve für $\beta = 0$ am tiefsten liegt, ist beim Kern ^{208}Pb die Mode $\beta = 1$ energetisch ausgezeichnet.

Im Falle kleiner Kompressionen kann für die nukleare Energie pro Nukleon die Entwicklung

$$\left(\frac{E_{\text{nuc}}}{A}\right)(\rho_c) = \left(\frac{E_{\text{nuc}}}{A}\right)(\rho^{g.s.}(0)) + \frac{1}{18}K_A \left(\frac{\rho_c - \rho^{g.s.}(0)}{\rho^{g.s.}(0)}\right)^2 + \dots, \quad \rho_c \equiv \rho(0) \quad (7.16)$$

um die zentrale Grundzustandsdichte $\rho^{g.s.}(0)$ angesetzt werden. Die Kerninkompressibilität

$$K_A \equiv 9 \left[\rho_c^2 \frac{\partial^2 (E_{\text{nuc}}/A)}{\partial \rho_c^2} \right]_{\rho_c = \rho^{g.s.}(0)} \quad (7.17)$$

hängt dabei von der betrachteten Kompressionsmode β ab. Gleichung (7.16) zeigt, daß solche Moden energetisch favorisiert sind, die ebenfalls die Kerninkompressibilität K_A minimieren. Die numerisch bestimmten K_A -Werte aus Kompressionsrechnungen für $N=Z$ -Kerne bei ausgeschalteter Coulombkraft sind dazu in Abb. 7.4 dargestellt. Für $\beta = -2$ nimmt K_A durchwegs größere Werte als die INM-Inkompressibilität K_∞ an. Dies deutet auf eine atypische SINM-Kompressionsmode mit $(d^2\sigma/dq^2)(q=1) > 0$ hin. In

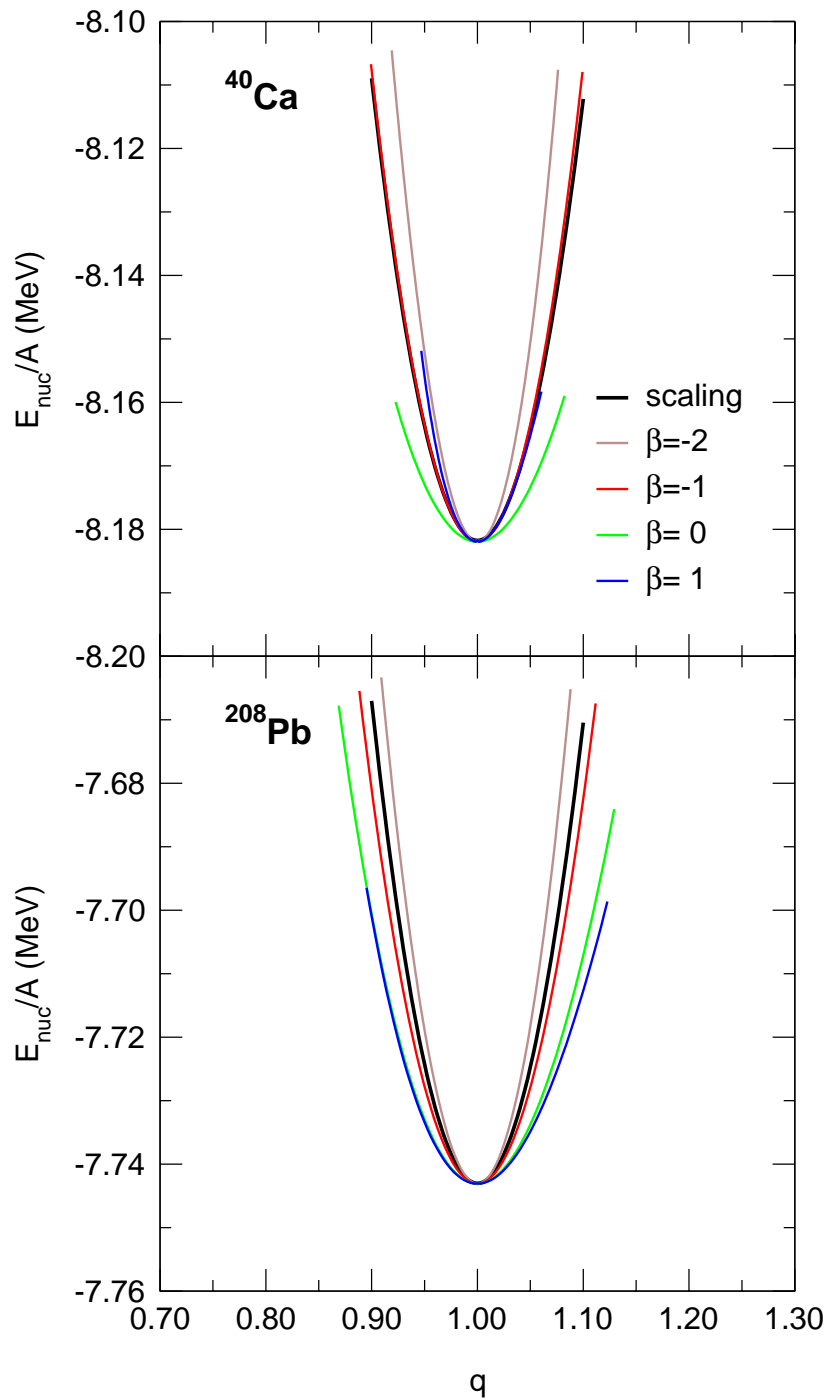


Abb. 7.3. Nukleare Energie pro Nukleon E_{nuc}/A der Kerne ^{40}Ca (obere Abb.) und ^{208}Pb (untere Abb.) als Funktion des zentralen Kompressionsverhältnisses q für verschiedene CRTF-Kompressionsmoden β . Zum Vergleich wurden die Ergebnisse für die Skalierungsmode (scaling) ebenfalls eingezeichnet.

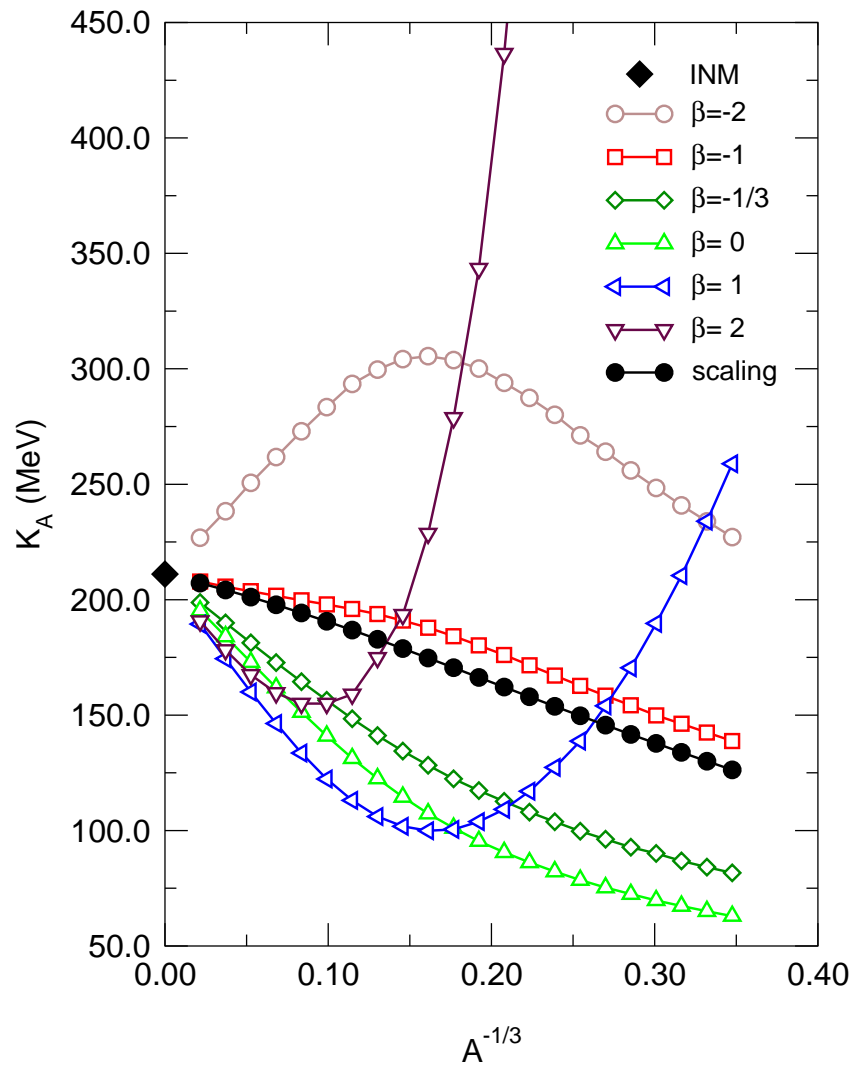


Abb. 7.4. Kerninkompressibilität K_A von $N=Z$ -Kernen bei ausgeschalteter Coulombkraft als Funktion von $A^{-1/3}$ für verschiedene Kompressionsmoden β . Das ausgefüllte Symbol an der Ordinate repräsentiert die INM-Inkompressibilität K_∞ .

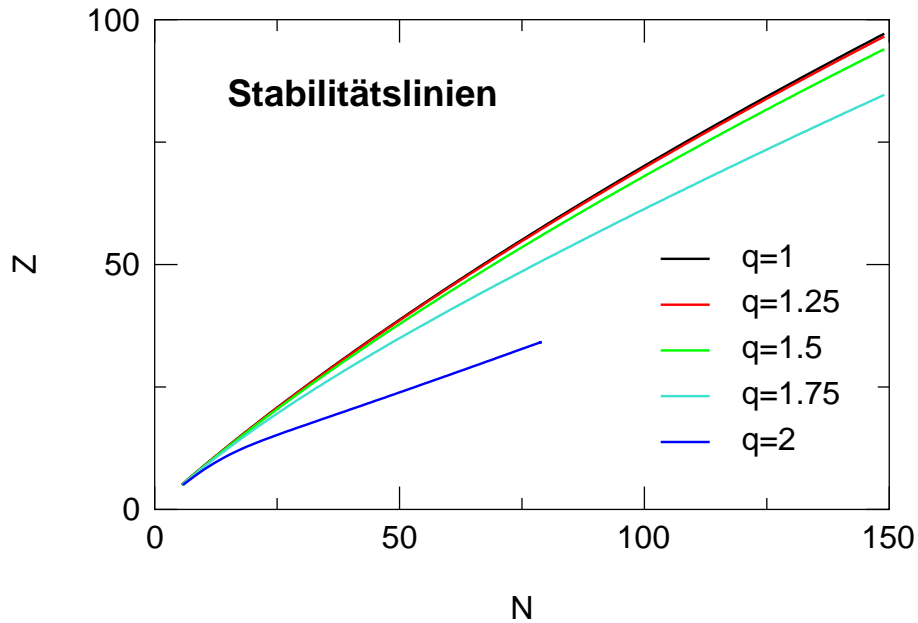


Abb. 7.5. β -Stabilitätslinien komprimierter Kerne für einige Werte des zentralen Kompressionsverhältnisses q . Die Linien wurden numerisch aus RTF-Skalierungsrechnungen für den Parametersatz NL1 extrahiert.

Kap. 9 wird der Frage nachgegangen, inwiefern sich K_A speziell im Falle der Skalierungsmode um gesättigte INM und SINM entwickeln läßt, und welche Konvergenzeigenschaften eine solche Entwicklung aufweist.

7.3 Stabilitätseigenschaften komprimierter Kerne

Für Kerne im Vakuum können Aussagen über Stabilität gegenüber β -Zerfall oder Teilchenemissionen durch eine Energiebilanzierung getroffen werden, die die Energien des Kernanfangs- und -endzustandes sowie die Massen der emittierten Teilchen umfaßt [52–54] (s.a. Unterabschn. 2.5.1). Für komprimierte Kerne lassen sich in analoger Weise deren Stabilitätseigenschaften extrahieren, wenn man für den β -Zerfall und Teilchenemissionen annimmt, daß Anfangs- und Endkonfiguration unter dem Einfluß desselben Zusatzterms stehen, wobei Kerne vor und nach dem β -Zerfall bzw. einer Teilchenevaporation dasselbe zentrale Kompressionsverhältnis q aufweisen. In diesem Fall ist die β -Stabilitätslinie durch

$$\left. \frac{\partial B(A, I; q, \beta)}{\partial I} \right|_{A; q, \beta} = 0 \quad (7.18)$$

definiert. Die Protonen- und Neutronenabbruchkante folgen dann ebenso den Definitionen des Grundzustandsfalls.

Sowohl die β -Stabilitätslinie als auch die Neutronen- und Protonenabbruchkante wurden aus Skalierungsrechnungen mit fixiertem q extrahiert. Abbildung 7.5 zeigt die β -Stabilitätslinie in der (N, Z) -Ebene für Kompressionsverhältnisse im Bereich $1 \leq q \leq 2$. Die Linien werden mit zunehmender Kompression immer stärker zu neutronenreichen

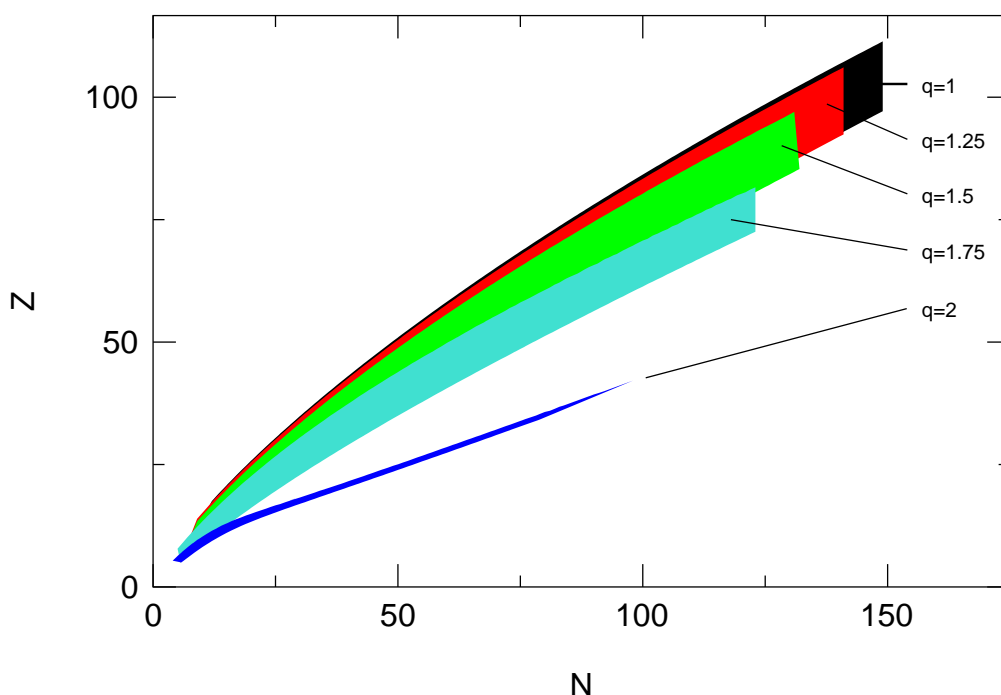


Abb. 7.6. Aus RTF-Skalierungsrechnungen gewonnene Stabilitätsbereiche zwischen Protonenabbruchkante (obere Begrenzung) und β -Stabilitätslinie (unterer Rand) komprimierter Kerne (Parametersatz NL1).

Kernen hin verschoben. Dies hat für einen ursprünglich im Vakuum stabilen Kern eine β^+ -Instabilität zur Folge. Die Stabilitätsbereiche zwischen Protonenabbruchkante ($S_p(Z, N; q) = 0$) und β -Stabilitätslinie wurden in Abb. 7.6 für die q -Werte aus Abb. 7.5 farblich gekennzeichnet. Man erkennt, daß Kerne in der (N, Z) -Ebene durch genügend starke Kompression sogar oberhalb der Protonenabbruchkante und damit im Bereich negativer Protonenseparationsenergie liegen können. Die Emission eines Protons hilft, die repulsive Coulombenergie zu reduzieren. Die Neutronenabbruchkante, die der Übersichtlichkeit halber in Abb. 7.6 nicht wiedergegeben worden ist, wird unter Kompression weniger stark in die Gegend protonenreicher Kerne verschoben.

7.4 Spaltung komprimierter Kerne

Die Stabilität eines sphärisch-symmetrischen Kerns gegenüber Deformation wird im Tropfenmodell durch das Wechselspiel zwischen der Oberflächenenergie und der Coulombenergie bestimmt. Wird ein Kern ausgehend von der Kugelgestalt deformiert, so nimmt die Oberflächenenergie zu, da die Kernoberfläche gegen die Oberflächenspannung vergrößert wird. Gleichzeitig nimmt aber durch die Vergrößerung des mittleren Ladungsabstandes die Coulombenergie ab. Größe und Vorzeichen der daraus resultierenden potentiellen Energie werden bei Quadrupoldeformationen durch den Spaltungsparameter

$$x \equiv \frac{Z^2/A}{(Z^2/A)_{\text{crit}}}, \quad (Z^2/A)_{\text{crit}} \equiv \frac{40\pi\sigma r_0^3}{3e^2} \quad (7.19)$$

dominiert [109–111, 52, 54]. Für Kerne mit $Z^2/A \geq (Z^2/A)_{\text{crit}}$ ($x \geq 1$), bei denen die Potentialbarriere verschwindet bzw. negativ wird, ist die sphärische Geometrie instabil gegenüber Verformung, was auf eine Instabilität bezüglich der spontanen Spaltung führt. Der kritische Wert liegt bei ungefähr $(Z^2/A)_{\text{crit}} \approx 50$.

Unter einer Kompression mit zentralem Kompressionsverhältnis q ändern sich sowohl die Oberflächenspannung $\sigma \rightarrow \sigma(q)$ als auch der Kernradiusparameter $r_0 \rightarrow r_c(q)$. Der Spaltungsparameter x ist damit durch

$$x(q) = \frac{Z^2/A}{(Z^2/A)_{\text{crit}}(q)}, \quad (Z^2/A)_{\text{crit}}(q) \equiv \frac{40\pi\sigma(q)r_c^3(q)}{3e^2} \quad (7.20)$$

gegeben. Er ist wegen $q = r_0^3/r_c^3(q)$ über die Beziehung

$$x(q) = x(q=1) \frac{\sigma}{\sigma(q)} q \quad (7.21)$$

mit der Größe $x(q=1) \equiv x$ (7.19) des unkomprimierten Falls verknüpft.

Im oberen Teil von Abb. 7.7 ist die Oberflächenspannung σ als Funktion von q für die Kompressionsmoden $\beta = 0$ und $\beta = 1$ sowie für den Skalierungsfall abgebildet. Die Ergebnisse ähneln den nichtrelativistischen Resultaten aus Ref. [103]. Mit zunehmender Kompression nimmt die Oberflächenspannung für die drei gezeigten Moden ab und weist bei $q \approx 1.6$ sogar eine Nullstelle auf. Die untere Graphik in Abb. 7.7 zeigt die nach Gl. (7.20) berechneten Kurven für $(Z^2/A)_{\text{crit}}$. Kleinere Werte von $(Z^2/A)_{\text{crit}}$ für $q > 1$ führen zu einer Erhöhung von $x(q)$. Damit wird ein Kern unter steigender Kompression zunehmend instabiler gegenüber Spaltung. Die Verminderung der stabilisierenden Oberflächenspannung sowie die Erhöhung der destabilisierenden Coulombenergie bewirken jeweils eine Reduktion der Spaltbarriere, was auf den ersten Blick der Anschauung zu widersprechen scheint, weil man bei Druck von außen eigentlich einen besseren Zusammenhalt des Kerns erwarten würde. Die Höhe der Spaltbarriere hängt dabei empfindlich von der Oberflächenspannung σ ab, die in RTF im Vergleich zu RH leicht überschätzt wird (s.a. Abschn. 2.7). Dies führt zu unrealistisch hohen RTF-Werten von Spaltbarrieren, deren explizite Berechnung daher erst in Kap. 8 mittels RH erfolgen soll.

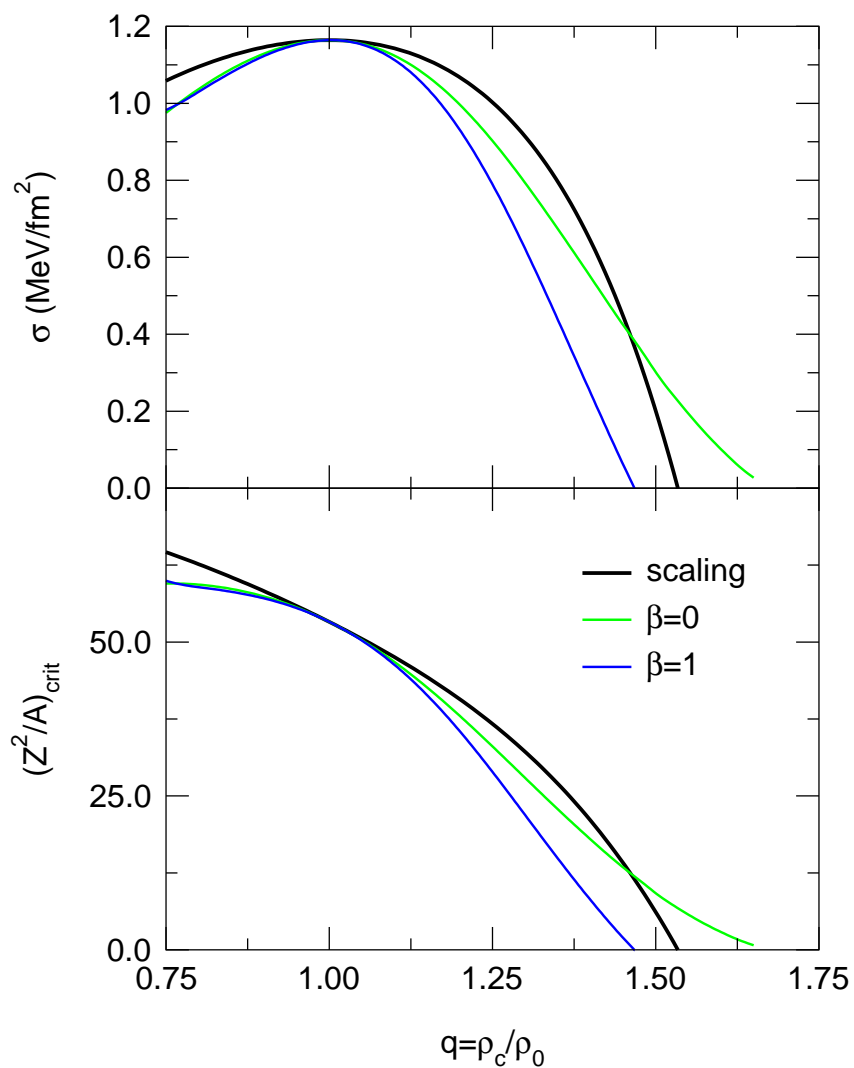


Abb. 7.7. Der kritische Wert $(Z^2/A)_{crit}$ und die Oberflächenspannung σ als Funktionen des Kompressionsverhältnisses q . σ wurde aus SINM-Rechnungen mit dem Parametersatz NL1 für die CRTF-Moden $\beta = 0$ und $\beta = 1$, sowie durch Vorgabe skaliertes Dichten (scaling) gewonnen.

Kapitel 8

Komprimierte Kerne in Relativistischer Hartree-Näherung

Im vorangegangenen Kapitel wurden die Auswirkungen von Kernkompressionen auf nukleare Energien, die β -Stabilitätslinie und Spaltbarrieren für den Fall der RTF-Näherung untersucht. Einteilcheneigenschaften, die im Bereich der Festkörperphysik Kompressionseffekte stark beeinflussen und so zu Phasenübergängen wie beispielsweise zwischen nicht-metallischen und metallischen Zuständen führen, bleiben in der Thomas-Fermi-Näherung jedoch unberücksichtigt. In diesem Kapitel erfolgt deshalb eine Betrachtung der Eigenschaften komprimierter Kerne im Rahmen der relativistischen Hartree-Methode. Nach der Wahl eines geeigneten mesonischen Zusatzterms werden zunächst Einteilchenkompressionseffekte speziell für den Kern ^{40}Ca studiert und anschließend mit den Ergebnissen für weitere Kerne, unterschiedliche Wechselwirkungen und Zusatzterme verglichen. Abschließend wird, wie bereits in Abschn. 7.4 angekündigt, die Spaltung komprimierter Kerne nochmals diskutiert. Die wichtigsten Ergebnisse der Abschnitte 8.1 – 8.3 wurden in der Studie [112] publiziert.

8.1 Wahl des Zusatzterms

Für die Behandlung komprimierter Kerne in RTF-Näherung wurde als Zusatzterm \mathcal{C} der dichteabhängige Ansatz (7.10) gewählt. Er kann ebenso bei Hartree-Kompressionsrechnungen verwendet werden. Durch ihn wird die stationäre Einteilchen-Dirac-Gleichung (2.33) gemäß Gl. (6.18) modifiziert. Die Feldgleichungen (2.26) – (2.29) werden dagegen nicht verändert.

Eine einfachere Methode besteht in der Wahl des mesonischen Zusatzterms

$$\mathcal{C} \equiv \frac{1/\kappa - 1}{2} \alpha_\sigma m_\sigma^2 \phi^2 - \frac{\kappa - 1}{2} \alpha_\omega m_\omega^2 \omega^\lambda \omega_\lambda, \quad (8.1)$$

der in Mittelfeldnäherung durch den Ausdruck

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\text{(RMF)}} \frac{1/\kappa - 1}{2} \alpha_\sigma m_\sigma^2 \phi^2 - \frac{\kappa - 1}{2} \alpha_\omega m_\omega^2 \omega_0^2 \quad (8.2)$$

gegeben ist. Die Parameter α_σ und α_ω stellen dabei einfache Schalter mit den Werten 0 oder 1 dar. Der numerische Parameter κ steuert die Stärke der Kompression bzw.

Dekompression des nuklearen Systems. $\kappa = 1$ ($\mathcal{C} \equiv 0$) entspricht dem unkomprimierten Fall.

Der Ansatz (8.2) bietet zum einen den Vorteil, daß die Dirac-Gleichung (6.18) formal mit der des Grundzustandsfalls übereinstimmt. Zum anderen vereinfachen sich die Feldgleichungen (6.19) – (6.22) unter Verwendung der effektiven Mesonenmassen \bar{m}_σ und \bar{m}_ω ,

$$\bar{m}_\sigma^2 \equiv m_\sigma^2(1 + (1/\kappa - 1)\alpha_\sigma) = \begin{cases} m_\sigma^2 & \alpha_\sigma = 0 \\ m_\sigma^2/\kappa & \alpha_\sigma = 1 \end{cases}, \quad (8.3)$$

$$\bar{m}_\omega^2 \equiv m_\omega^2(1 + (\kappa - 1)\alpha_\omega) = \begin{cases} m_\omega^2 & \alpha_\omega = 0 \\ \kappa m_\omega^2 & \alpha_\omega = 1 \end{cases}, \quad (8.4)$$

zu:

$$-\Delta\phi + \bar{m}_\sigma^2\phi = g_\sigma\rho_s - b_2\phi^2 - b_3\phi^3, \quad (8.5)$$

$$-\Delta\omega_0 + \bar{m}_\omega^2\omega_0 = g_\omega\rho, \quad (8.6)$$

$$-\Delta b_{00} + m_\rho^2 b_{00} = g_\rho\rho_3, \quad (8.7)$$

$$-\Delta A_0 = e\rho_p. \quad (8.8)$$

Die modifizierte Lagrangedichte \mathcal{L}_C (6.1) kann zudem – aufgrund der speziellen Gestalt von \mathcal{C} – durch die ursprüngliche Lagrangedichte \mathcal{L} (2.2) dargestellt werden, wenn man in dieser die Mesonenmassen m_σ und m_ω durch die effektiven Größen \bar{m}_σ bzw. \bar{m}_ω ersetzt. Dies bedeutet, daß die Lösung einer Kompressionsrechnung formal aus einer Grundzustandsrechnung mit den Mesonenmassen \bar{m}_σ und \bar{m}_ω erhalten werden kann. Die hierdurch ermittelte Energie ist dann die gesamte Energie E_C inklusive Kompressionsanteil. Da man nur die Mesonenmassen, *nicht* aber die Kopplungskonstanten g_σ und g_ω modifizieren möchte, müssen die dimensionslosen INM-Kopplungsgrößen $C_{\sigma,\omega}^2 = g_{\sigma,\omega}^2 M^2 / m_{\sigma,\omega}^2$ ebenfalls gemäß den Beziehungen

$$\bar{C}_\sigma^2 \equiv \frac{1}{1 + (1/\kappa - 1)\alpha_\sigma} C_\sigma^2, \quad \bar{C}_\omega^2 \equiv \frac{1}{1 + (\kappa - 1)\alpha_\omega} C_\omega^2 \quad (8.9)$$

angepaßt werden. Die nichtlinearen Parameter b_2 und b_3 und damit auch die INM-Konstanten $b = b_2/(g_\sigma^3 M)$ und $c = b_3/g_\sigma^4$ bleiben dagegen unverändert. Die Bestimmung der nuklearen Energie E_{nuc} kann dann separat über die Beziehung (6.26) erfolgen.

Unabhängig von der Wahl des Zusatzterms ist bei konkreten Kompressionsrechnungen darauf zu achten, daß während des iterativen Lösungsverfahrens in jedem Iterationsschritt die Einteilchenenergien ε_α neu sortiert und dementsprechend die Besetzungsgewichte w_α angepaßt werden, da sich durch den externen Druck grundsätzlich eine andere Anordnung der ε_α als im Grundzustand einstellen kann.

8.2 Verhalten des Kerns ^{40}Ca unter Kompression

In diesem Abschnitt werden zunächst die Kompressionseigenschaften des Kerns ^{40}Ca studiert. Die vorgestellten Ergebnisse stammen aus systematischen Rechnungen für den Parametersatz NL1 und den mesonischen Zusatzterm (8.2) mit $\alpha_\sigma = 1$ und $\alpha_\omega = 0$. Auf den Fall $\alpha_\sigma = 0$, $\alpha_\omega = 1$ in Gl. (8.2) und den dichteabhängigen Zusatzterm (7.10) wird im darauffolgenden Abschnitt eingegangen.

8.2.1 Energien und Dichten

Die obere linke Figur von Abb. 8.1 zeigt die totale Energie E_C von ^{40}Ca als Funktion des Kompressionsparameters κ . Im unteren linken Teil findet sich der rms-Radius r_{rms} , aufgetragen gegen κ . Der Verlauf der Kurve für r_{rms} zeigt, daß $\kappa < 1$ zu einer Dekompression des Kerns führt, $\kappa > 1$ zu einer Kompression. $\kappa = 1$ ($\mathcal{C} \equiv 0$) entspricht dem Grundzustandsfall des unkomprimierten Kerns. Die untere rechte Graphik von Abb. 8.1 gibt das zentrale Kompressionsverhältnis q wieder, das durch

$$q \equiv \frac{\rho(r=0; \kappa)}{\rho(r=0; \kappa=1)} \quad (8.10)$$

definiert ist. Man erkennt, daß bei einem kritischen Wert κ_{crit} sich r_{rms} , q und sogar die nukleare Energie pro Nukleon E_{nuc}/A (oberer rechter Teil von Abb. 8.1) unstetig verändern. Die totale Energie E_C weist bei κ_{crit} einen stetigen Knick auf.

Die Protonen- und Neutronendichte sowie deren Summe und Differenz sind in Abb. 8.2 als Funktion des radialen Abstands r aufgetragen. Die Kurven zeigen ein skalierungsartiges Verhalten unter (De)Kompression für $\kappa \leq \kappa_{\text{crit}}$. Bei dem kritischen Wert κ_{crit} verändert sich die Kerngeometrie eines kompakten Kerns sprunghaft zu einer Blasenstruktur. Testrechnungen mit abgeschalteter Coulombkraft führten unabhängig vom gewählten Zusatzterm ab gewissen kritischen κ -Werten ebenfalls zu Blaskernen. Der hier vorliegende Effekt kann daher nicht auf den Faraday-Becher-Effekt zurückgeführt werden, der in den Arbeiten [73, 76] aufgrund der starken Coulombabstoßung zwischen den Protonen für die Blasenbildung verantwortlich war (s.a. Kap. 3).

Der Effekt bei κ_{crit} zeigt Parallelen zu konventionellen Phasenübergängen in kondensierter Materie auf, die im Gegensatz zu dem hier beschriebenen Effekt eine unendliche Teilchenzahl implizieren. Das Einsetzen der Blaskernstruktur wird durch eine neue, differierende Verteilung der Nukleonen verursacht, die ab κ_{crit} zu einer geringeren totalen Energie E_C führt. Der damit verbundene Sprung in der nuklearen Energie E_{nuc} kann auf eine unstetige Änderung in der Kompressionsenergie – bedingt durch die plötzliche Volumenverkleinerung – zurückgeführt werden.

Während der numerischen Rechnungen tauchten in der Gegend von κ_{crit} starke Konvergenzprobleme im iterativen Gesamtschrittverfahren auf, die nur durch eine geeignete Anpassung der numerischen Parameter und besonders durch eine starke Unterrelaxation in jedem Iterationsschritt umgangen werden konnten. Da um κ_{crit} zwei Lösungszweige existieren, die auf unterschiedliche Geometrien mit gleichzeitig nicht stark differierenden Energien führen, zeigte das numerische Verfahren eine Metastabilität wie bei realen Phasenübergängen. Durch das folgende Kettenverfahren ließen sich aber beide Lösungszweige bis in die metastabilen Bereiche hinein ansteuern: Für den Zweig mit kompakten Kernen wurde κ ausgehend vom Grundzustand sukzessiv erhöht, für Blasenlösungen von einer maximalen Kompression startend schrittweise reduziert. Das numerische Iterationsverfahren wurde hierbei mit den Ergebnissen der jeweils vorangegangenen Rechnung initialisiert. Eine zusätzliche Stabilisierung ließ sich durch eine eingeschränkte Auswahl an besetzbaren Einteilchenniveaus erzielen.

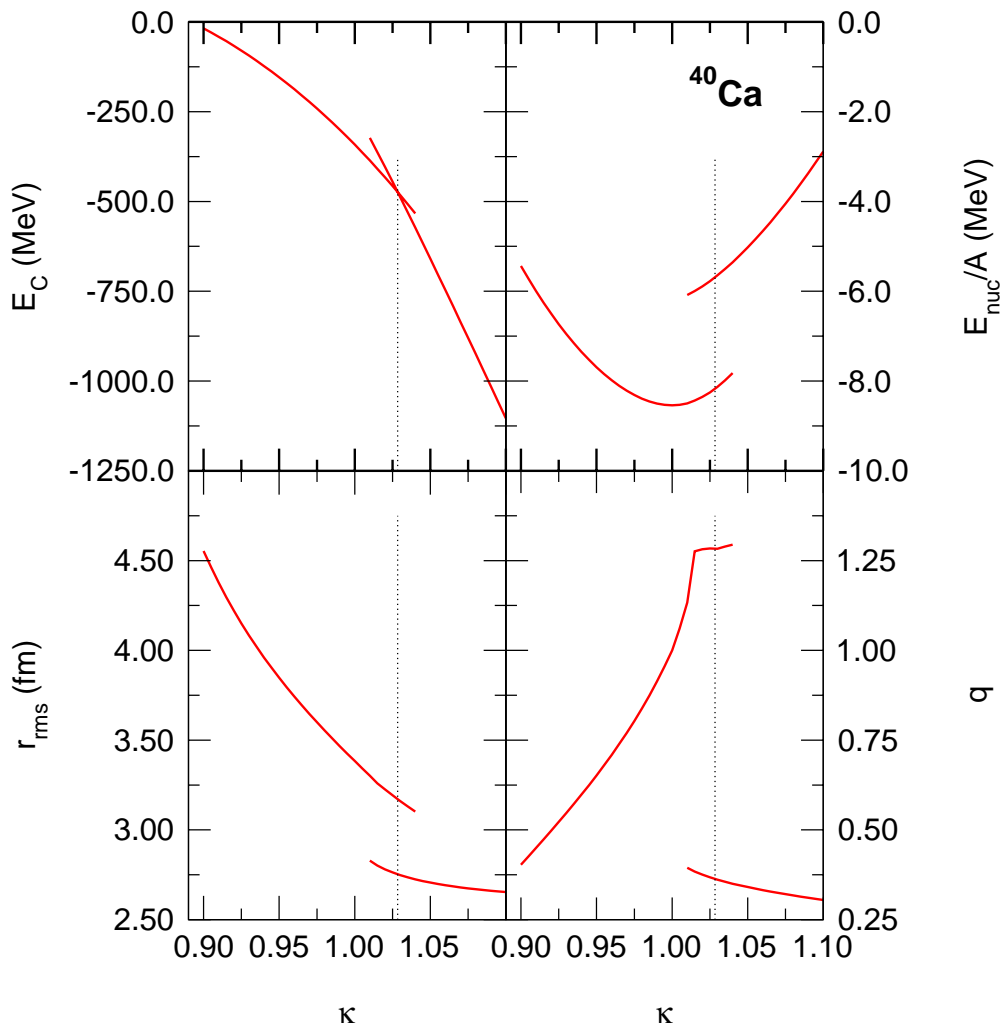


Abb. 8.1. Die totale Energie E_C , die nukleare Energie pro Nukleon E_{nuc}/A , der rms-Radius r_{rms} und das zentrale Kompressionsverhältnis q für den komprimierten Kern ^{40}Ca , aufgetragen gegen den Kompressionsparameter κ . Die Ergebnisse stammen aus Kompressionsrechnungen mit dem mesonischen Zusatzterm (8.2) mit $\alpha_\sigma = 1$, $\alpha_\omega = 0$. Der kritische Wert κ_{crit} wurde mit gepunkteten vertikalen Linien gekennzeichnet.

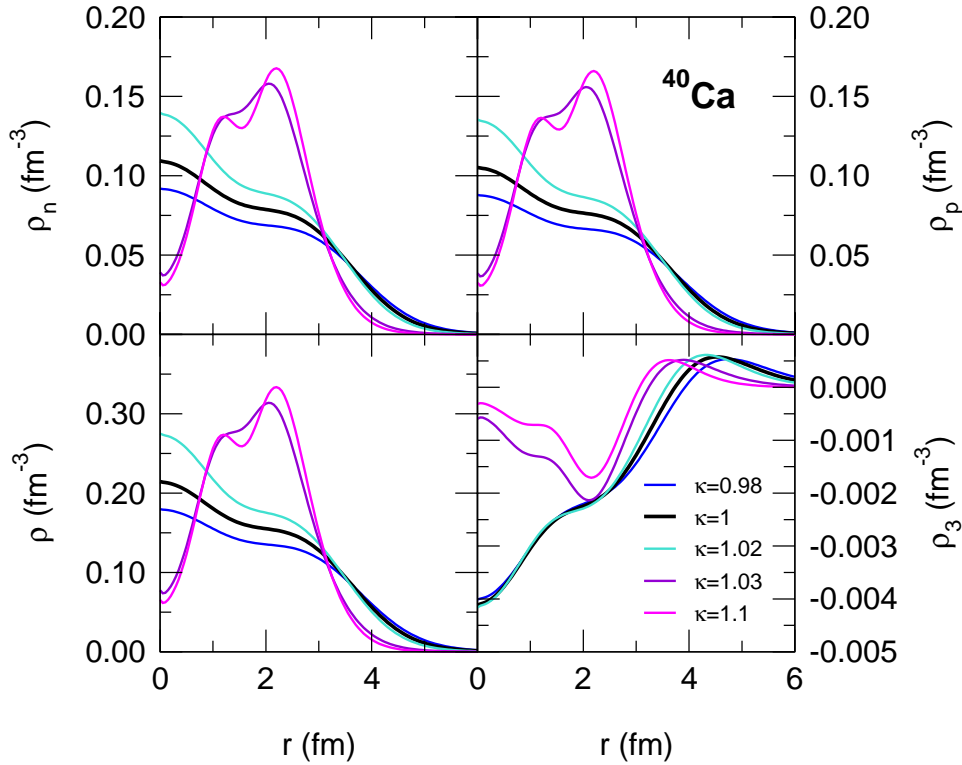


Abb. 8.2. Neutronendichte ρ_n , Protonendichte ρ_p , Baryondichte ρ sowie Isospindichte $\rho_3 = \rho_p - \rho_n$ eines komprimierten ^{40}Ca -Kerns für unterschiedliche Werte des Kompressionsparameters κ .

8.2.2 Einteilcheneigenschaften

Die Neuordnung der Nukleonen und das damit verbundene Ausbilden der Blasenkernstruktur bei κ_{crit} werden besonders durch das Verhalten der Einteilchenenergien ε_α verdeutlicht. Im Sinne der Dichtefunktionaltheorie [113–115] sind die ε_α Hilfsgrößen der Hartree-Gleichungen und können nur genähert als physikalische Einteilchenenergien angesehen werden. Sie ermöglichen aber dennoch das Studium des bei κ_{crit} einsetzenden Effekts.

Abbildung 8.3 zeigt die Einteilchenzustände in ^{40}Ca von Protonen und Neutronen als Funktionen des Kompressionsparameters κ . Im Bereich schwacher Kompressionen nehmen die Werte der ε_α mit zunehmendem κ ab, was auf eine stärkere Bindung der Einteilchenzustände unter Kompression zurückgeführt werden kann. Bei κ_{crit} erkennt man einen Sprung in den Einteilchenenergien und sogar eine teilweise Umbesetzung der einzelnen Zustände: In der Blasenkonfiguration liegt der $1f_{7/2}$ -Zustand energetisch tiefer als der zuvor vollbesetzte $2s_{1/2}$ - und $1d_{3/2}$ -Zustand und wird daher nun (partiell) besetzt. Neben dem $1s_{1/2}$ -, $1p_{3/2}$ - und $1p_{1/2}$ -Niveau erfährt auch der $1d_{5/2}$ -Zustand – im Gegensatz zum korrespondierenden $1d_{3/2}$ -Niveau – eine stärkere Bindung. Die Spin-Bahn-Aufspaltung der $1p$ -Zustände nimmt jenseits von κ_{crit} mit wachsender Kompression ab und dreht sich in der Gegend von $\kappa \approx 1.1$ vom Vorzeichen her sogar um. Abbildung 8.4 zeigt dazu die beiden $1p$ -Radialwellenfunktionen $G_{1p_{3/2}}/r$ und $G_{1p_{1/2}}/r$ des Spinoransatzes (2.123) zusammen

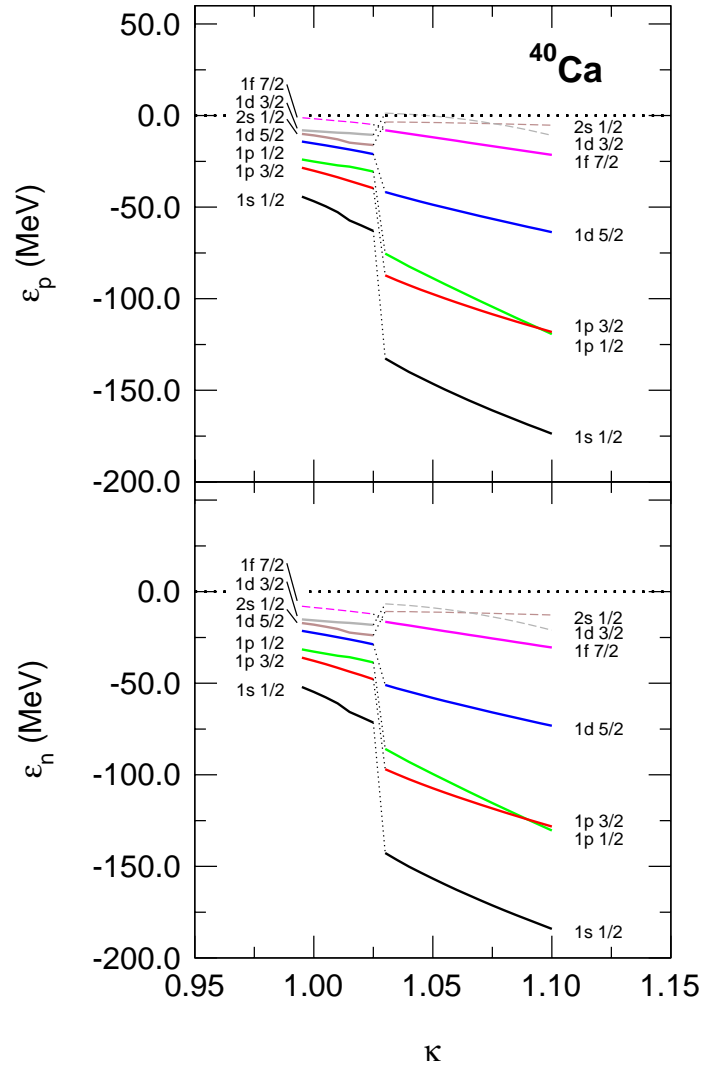


Abb. 8.3. Einteilchenenergien ε_α von ^{40}Ca als Funktionen des Kompressionsparameters κ . (Unbesetzte Zustände sind durch gestrichelte Linien gekennzeichnet.)

mit dem Orbitalanteil W ,

$$W(r) = \frac{dV(r)/dr + dS(r)/dr}{[2M - (V(r) + S(r))]^2}, \quad (8.11)$$

des Spin-Bahn-Potentials $V_{\text{is}} = 2W/r$ [20] für Neutronen. Sowohl für den kompakten Kern (obere linke Abb.) als auch für die Blasenform (obere rechte Abb.) erkennt man eine näherungsweise Proportionalität von W zur ersten Ableitung der Dichte ρ (vgl. Abb. 8.2). Der Radialanteil W weist bei der Blasenkonfiguration einen zusätzlichen inneren Anteil mit positivem Vorzeichen auf. Die absoluten Werte von W sind durch die kompressionsbedingte erhöhte Bindung im Vergleich zum Grundzustand sehr groß. Innerhalb der nicht-relativistischen Schrödinger-Theorie ist die Größe der Spin-Bahn-Aufspaltung durch das Spin-Bahn-Potential V_{is} proportional zum Bahndrehimpuls l . Zustände mit Gesamtspin $j = l + 1/2$ erfahren bei negativem V_{is} eine stärkere Bindung, Zustände mit $j = l - 1/2$

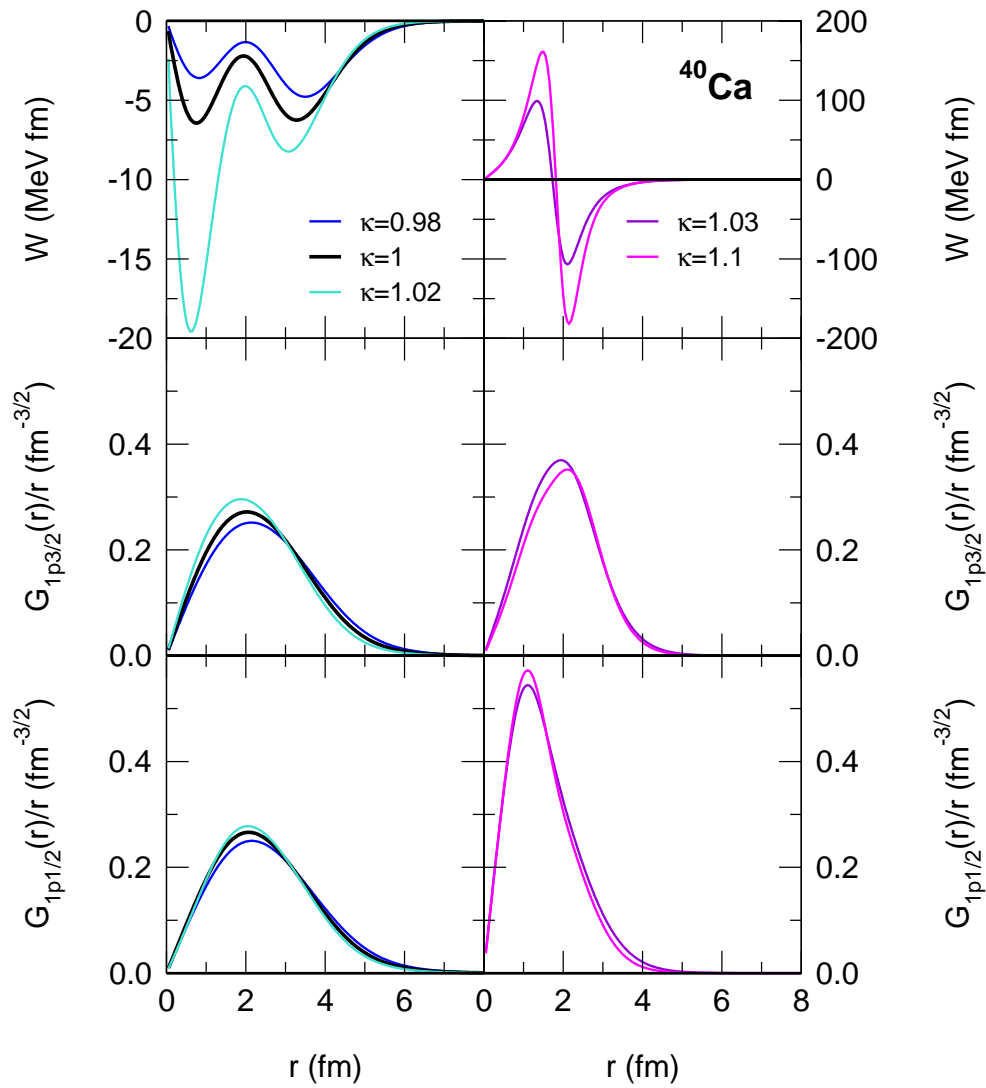


Abb. 8.4. Radialanteil W des Spin-Bahn-Potentials V_{ls} für Neutronen, sowie die Neutronenradialwellenfunktionen $G_{1p3/2}/r$ und $G_{1p1/2}/r$ in einem komprimierten ^{40}Ca -Kern für verschiedene Werte des Kompressionsparameters κ .

werden energetisch angehoben. Bei positivem V_{is} liegt das umgekehrte Verhalten vor. Im Falle des Blasenkerns deutet der Verlauf der Radialwellenfunktion $G_{1p_{3/2}}/r$ darauf hin, daß sich der positive und der negative Anteil von W in ihrer Wirkung auf die Einteilchenenergie des $1p_{3/2}$ -Zustands in etwa die Waage halten. Der $1p_{1/2}$ -Zustand dagegen ist stärker im Bereich des Zentrums lokalisiert und steht damit hauptsächlich unter dem Einfluß des positiven W -Beitrags. Dies hat eine energetische Absenkung des $1p_{1/2}$ -Zustands zur Folge und führt zu einer Reduktion bzw. Umkehr der gesamten Aufspaltung mit steigender Kompression.

8.3 Allgemeines Verhalten von Kernen unter externem Druck

Neben ^{40}Ca wurden ebenfalls ausgiebige Kompressionsrechnungen mit dem Zusatzterm (8.2) mit $\alpha_{\sigma} = 1$, $\alpha_{\omega} = 0$ für die Kerne ^{56}Ni , ^{90}Zr und ^{208}Pb durchgeführt. Daneben wurde für ^{40}Ca und ^{208}Pb ebenso der Fall $\alpha_{\sigma} = 0$, $\alpha_{\omega} = 1$ im Ansatz (8.2) untersucht. Zusätzlich wurde der Pocket-Modell-basierte Zusatzterm (7.10) auf eine Reihe von Kernen angewandt. In allen Fällen setzte ab einer gewissen kritischen Kernkompression, bedingt durch eine Neuordnung und -besetzung der Einteilchenzustände, eine plötzliche Dichteänderung von einem kompakten Kern zu einer Blasenkernelstruktur hin ein. Der Übergang hing dabei im wesentlichen nicht von dem gewählten Zusatzterm ab, vielmehr war die durch diesen vermittelte Kompression ausschlaggebend für das Einsetzen der Strukturänderung. Wegen der Vielzahl besetzter Einteilchenzustände ließen sich bei schweren Kernen sogar mehrere Wechsel zwischen unterschiedlichen Blasenformen feststellen.

Allgemein kann das Einsetzen von Strukturänderungen auf eine starke energetische Anhebung der Zustände mit $n \geq 2$ sowie auf eine erhöhte Bindung von Zuständen mit höheren Drehimpulsen zurückgeführt werden. Als Beispiel hierfür zeigt Abb. 8.5 das Termeschema des im Grundzustand doppelt-magischen Kerns ^{56}Ni für den Zusatzterm (8.2) mit $\alpha_{\sigma} = 1$, $\alpha_{\omega} = 0$. Die schwächere Bindung des $2s_{1/2}$ -Zustands führt gleichzeitig bei Protonen und Neutronen zu einer partiellen Besetzung des $1g_{9/2}$ -Zustands in der Blasenkonfiguration. Ebenso wie ^{40}Ca verliert der Kern ^{56}Ni unter Kompression seine Magizität.

Bei mittelschweren und schweren Kernen wie beispielsweise ^{208}Pb oder ^{90}Zr ergibt sich eine für Blasenkerne wohl typische Anordnung der Einteilchenenergien, bei der vornehmlich Zustände mit $n = 1$ besetzt sind. Diese Niveaufolge zeigt große Ähnlichkeit mit der eigentlicher Blasenkerne [75, 77], die sich im Gebiet exotisch großer Kerne durch Coulombeffekte bereits im Grundzustand einstellen.

Es stellt sich die Frage, ob der phasenübergangsartige Strukturwechsel, der für den Parametersatz NL1 mit einer INM-Inkompressibilität von $K_{\infty} = 211$ MeV gefunden wurde, auch bei anderen Wechselwirkungen auftritt. Aus diesem Grund wurden ebenfalls Kompressionsrechnungen für den Parametersatz NL-Z ($K_{\infty} = 173$ MeV) sowie NL3 ($K_{\infty} = 272$ MeV) für ^{40}Ca unter Verwendung des Zusatzterms (8.2) mit $\alpha_{\sigma} = 1$, $\alpha_{\omega} = 0$ durchgeführt. In beiden Fällen konnte der Übergang zu einer Blasenkernelstruktur bestätigt werden. Speziell stellt sich dabei das kritische Volumen, bis zu dem ^{40}Ca komprimiert werden muß, um einen energetisch favorisierten Blasenkernel zu erhalten, als umso kleiner heraus, je größer die Inkompressibilität K_{∞} ist.

Die Abbildungen 8.3 und 8.5 lassen darauf schließen, daß bei kompressionsbedingten

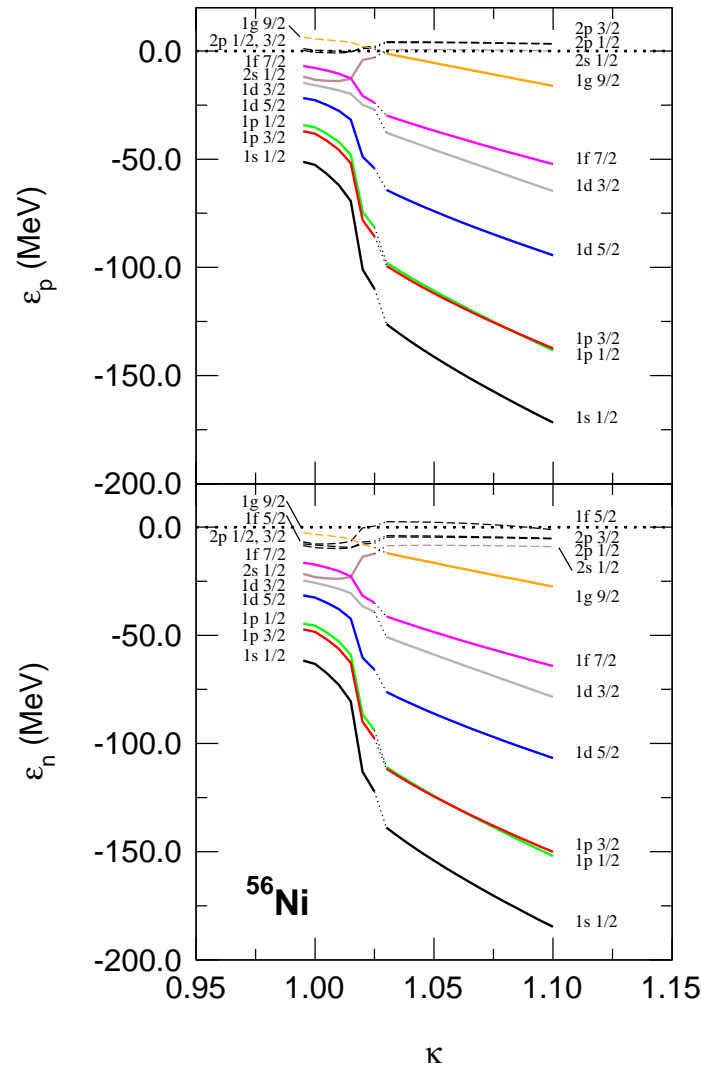


Abb. 8.5. Einteilchenenergien ε_α von ^{56}Ni als Funktionen des Kompressionsparameters κ . (Unbesetzte Zustände sind durch gestrichelte Linien gekennzeichnet.)

Blaskernen neue magische Zahlen zu erwarten sind, die bei großen Kernen aufgrund der ähnlichen Niveaufolge denen von Coulomb-Blaskernen entsprechen sollten. Die partielle Besetzung der höchstgelegenen Blaskzustände deutet zudem auf eine Deformation von ursprünglich im Grundzustand sphärisch-symmetrischen Kernen unter Kompression hin. Bei noch stärkeren Kompressionen muß zusätzlich die Anregung der Nukleonresonanzen Δ^0 und Δ^+ (Ruhemasse 1232 MeV) berücksichtigt werden, die von Hasan, Lee und Vary durch Vorgabe des rms-Radius mit der nichtrelativistischen Hartree-Fock-Methode in den Studien [116–118] untersucht wurden.

8.4 Spaltung komprimierter Kerne

Für eine Verformung sphärisch-symmetrischer Kerne im Vakuum ist die Deformationsenergie E_{def} durch die Differenz der Energien der deformierten und sphärischen Konfigu-

ration gegeben:

$$E_{\text{def}}(y) = E(y) - E(y = 0). \quad (8.12)$$

Der Parameter y spezifiziert hierbei die Stärke der Deformation, $y = 0$ entspricht dem sphärisch-symmetrischen Fall. Im Tropfenmodell wird E_{def} ausschließlich durch die Änderungen in der Oberflächenenergie ΔE_{sf} und der Coulombenergie ΔE_{Coul} bestimmt:

$$\begin{aligned} E_{\text{def}}(y) &= E_{\text{sf}}(y) + E_{\text{Coul}}(y) - E_{\text{sf}}(y = 0) - E_{\text{Coul}}(y = 0) \\ &\equiv \Delta E_{\text{sf}}(y) + \Delta E_{\text{Coul}}(y). \end{aligned} \quad (8.13)$$

Volumenbeiträge fallen in Gl. (8.13) durch die Grundannahme eines inkompressiblen Flüssigkeitstropfens heraus. Mit der Definition

$$B_{\text{sf}}(y) \equiv \frac{E_{\text{sf}}(y)}{E_{\text{sf}}(y = 0)} \quad (8.14)$$

für das Verhältnis der Oberflächenenergien E_{sf} und entsprechend

$$B_{\text{Coul}}(y) \equiv \frac{E_{\text{Coul}}(y)}{E_{\text{Coul}}(y = 0)} \quad (8.15)$$

für die Coulombenergien E_{Coul} erhält man unter Verwendung des Spaltungsparameters x Gl. (7.19) für die Deformationsenergie E_{def} den Ausdruck [109–111]:

$$E_{\text{def}}(y) = \{[B_{\text{sf}}(y) - 1] + 2x [B_{\text{Coul}}(y) - 1]\} E_{\text{sf}}(y = 0). \quad (8.16)$$

Die relativen Energien B_{sf} und B_{Coul} hängen als Funktionen von y von der konkreten Gestalt der Kernoberfläche ab. Für die Berechnung von E_{def} werden im weiteren Verlauf die in Ref. [110] tabellierten Werte der sogenannten Nix-Family, die eine Parametrisierung für axialsymmetrisch deformierte Kerne darstellt, herangezogen. Mit den Ersetzungen $x \rightarrow x(q)$ Gl. (7.20) und $E_{\text{sf}}(y = 0) \rightarrow E_{\text{sf}}(q, y = 0)$,

$$E_{\text{sf}}(q, y = 0) \equiv 4\pi R^2(q)\sigma(q) = 4\pi r_0^2 \sigma(q) \left(\frac{A}{q}\right)^{2/3}, \quad (8.17)$$

lassen sich dann mit Gl. (8.16) auch Deformationsenergien von komprimierten Kernen mit zentralem Kompressionsverhältnis q berechnen.

Abbildung 8.6 zeigt den Verlauf von E_{def} bei der symmetrischen Spaltung der Kerne ^{238}U und ^{240}Pu für unterschiedliche Werte von q . Die in Gl. (8.17) eingehende Oberflächenspannung $\sigma(q)$ wurde dazu aus SINM-Sättigungsrechnungen mit dem Parametersatz NLC für den mesonischen Zusatzterm (8.2) mit $\alpha_\sigma = 1$, $\alpha_\omega = 0$ über die Beziehung (6.31) für die κ -Werte $\kappa = 0.99, 1, 1.01$ und 1.02 ermittelt. Das resultierende zentrale Kompressionsverhältnis q im Bulk-Bereich ($z \rightarrow -\infty$) konnte aus entsprechenden INM-Rechnungen entnommen werden. Für ^{240}Pu wurde in Abb. 8.6 zusätzlich der in Ref. [14] angegebene empirische Tropfenmodellwert der Spaltbarriere des unkomprimierten Kerns von ca. 3.8 MeV gekennzeichnet. In Übereinstimmung mit den in Kap. 7 angestellten Betrachtungen werden die Spaltbarrieren bei beiden Kernen unter anwachsender Kompression zunehmend reduziert. Die prinzipielle Abnahme von Spaltbarrieren verdeutlicht Abb. 8.7, in der das Verhältnis von Sattelpunktenergien ($y = 1 - x$ [111]) zur Oberflächenenergie

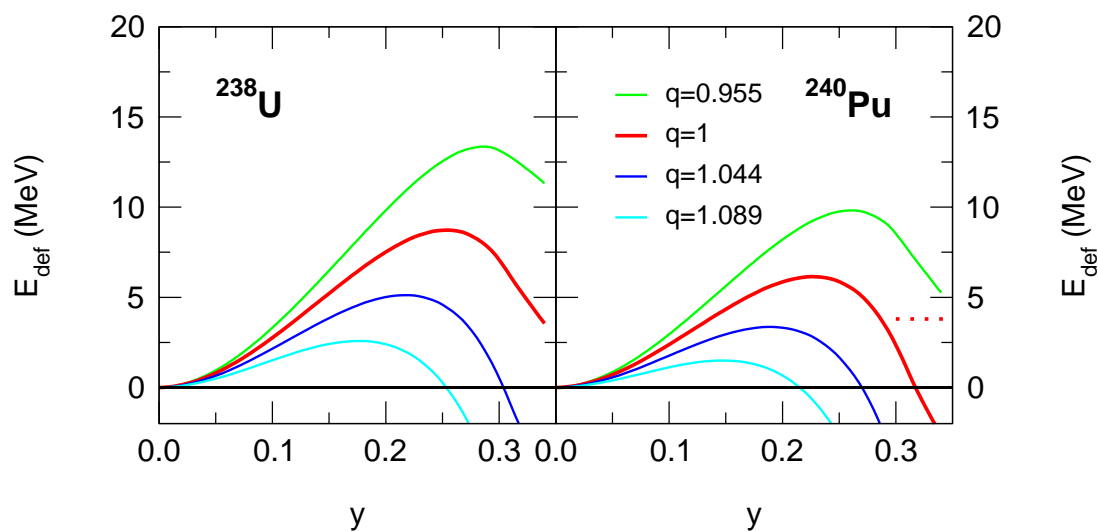


Abb. 8.6. Deformationsenergie E_{def} als Funktion des Deformationsparameters y der Nix-Family [110] für die Kerne ^{238}U und ^{240}Pu bei unterschiedlichem zentralen Kompressionsverhältnis q (Parametersatz NLC). Die gestrichelte horizontale Linie repräsentiert den empirischen LDM-Wert der Spaltbarriere von ^{240}Pu aus Ref. [14].

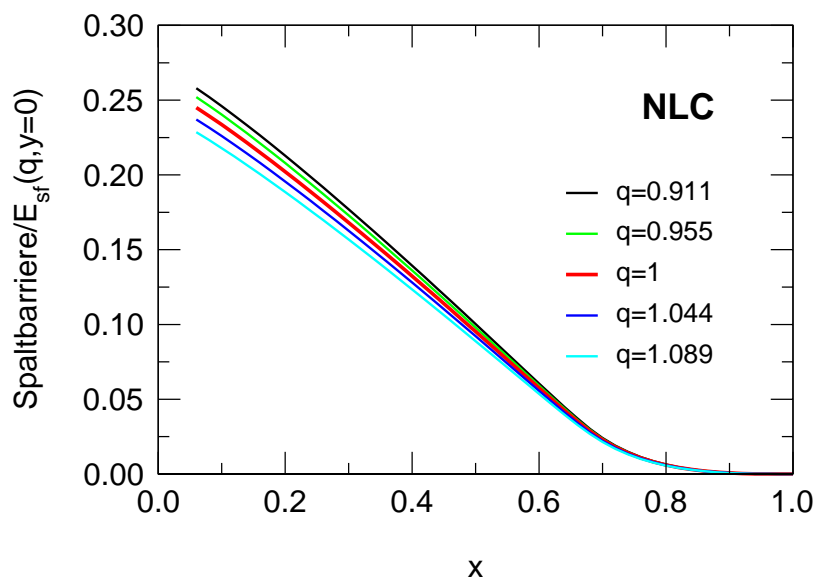


Abb. 8.7. Spaltbarrieren komprimierter Kerne im Verhältnis zur Oberflächenenergie $E_{sf}(q, y = 0)$ des undeformierten Kerns als Funktionen des Spaltungsparameters x .

des unkomprimierten Kerns Gl. (8.17) als Funktion des Spaltungsparameters x wiedergegeben wird.

Für den Parametersatz NL1 fällt die Spaltbarriere bei den beiden Kernen in Abb. 8.6 bereits für $\kappa = 1$ noch größer als bei NLC aus. Für ^{240}Pu beträgt sie ungefähr 11 MeV. Das Zustandekommen dieses hohen Wertes läßt sich folgendermaßen erklären: Die Spaltbarriere wird nach Gl. (8.16) sowohl durch den Spaltungsparameter x (7.19) als auch durch $E_{\text{sf}}(q = 1, y = 0)$ (8.17) festgelegt. Der Wert beider Größen wird für einen gegebenen Kern nur durch r_0 und σ bestimmt: x durch den Kehrwert des Produkts $(r_0^3 \sigma) \propto (\sigma/\rho_0)$, $E_{\text{sf}}(q = 1, y = 0)$ durch $r_0^2 \sigma \propto \sigma/\rho_0^{2/3}$. Da die relative Energie B_{sf} für alle Deformationen stets größer als eins, B_{Coul} dagegen stets kleiner als eins ist, führt eine Erhöhung von x zu einer kleineren Deformationsenergie. Insgesamt bewirken daher kleinere Werte von σ bzw. r_0 kleinere Verhältnisse σ/ρ_0 und $\sigma/\rho_0^{2/3}$ und damit eine Reduktion der Spaltbarriere. In Abb. 8.8 sind die Deformationsenergien für ^{240}Pu nochmals für alle sechs grundzustandsäquivalenten Wechselwirkungen aus Tabelle B.1 abgebildet. Man erkennt praktisch übereinstimmende Kurven im Falle der Parametersätze NL-Z und NLC, NL1 und NL3 sowie NL-RA und NL-SH. Die Ursache hierfür ist, daß trotz unterschiedlicher Werte von ρ_0 und σ die Wechselwirkungen aus Tabelle B.1 paarweise nahezu dieselben Werte für die Quotienten σ/ρ_0 und $\sigma/\rho_0^{2/3}$ aufweisen. Diesen Sachverhalt verdeutlicht Tabelle 8.1. Zum Vergleich enthält Abb. 8.8 ebenso die Kurve für die nichtrelativistische Skyrme-Wechselwirkung SkM* [14], deren Parameter durch eine zusätzliche Anpassung an den LDM-Wert der Spaltbarriere in ETF-Rechnungen bestimmt wurden. Lediglich die beiden Parametersätze NL-Z und NLC zeigen eine relativ gute Übereinstimmung mit dem empirischen Wert, während NL1 ebenso wie die drei übrigen Parametersätze deutlich zu hoch liegen. Um die Verhältnisse σ/ρ_0 und $\sigma/\rho_0^{2/3}$ auf realistische Werte von ca. 6.7 – 6.8 MeV fm bzw. 3.6 – 3.7 MeV einschränken zu können, wäre es erforderlich, bei der Anpassung von Wechselwirkungen nicht nur Oberflächeneigenschaften sondern auch Spaltbarrieren zu berücksichtigen. Im Falle von Parametersätzen des nichtlinearen σ - ω - ρ -Modells wird nach den Ausführungen in Kap. 4 dann aber trotzdem noch eine Abweichung in der Oberflächendicke t zu erwarten sein.

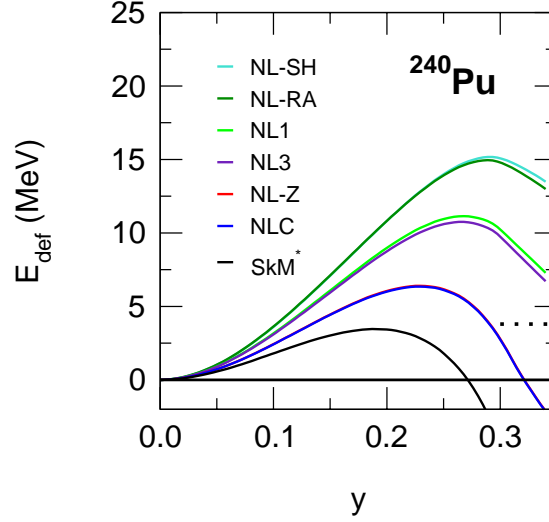


Abb. 8.8. Deformationsenergie E_{def} als Funktion des Deformationsparameters y für einen unkomprimierten ^{240}Pu -Kern für die grundzustandsäquivalenten Wechselwirkungen aus Tabelle B.1 sowie die Skyrme-Kraft SkM^* (ETF).

Tabelle 8.1. INM-Sättigungsdichte ρ_0 , SINM-Oberflächenspannung σ sowie die Quotienten σ/ρ_0 und $\sigma/\rho_0^{2/3}$ für die sechs grundzustandsäquivalenten Wechselwirkungen aus Tabelle B.1. (Anordnung der Parametersätze gemäß Abb. 8.8.)

	ρ_0 (fm^{-3})	σ (MeV fm^{-2})	σ/ρ_0 (MeV fm)	$\sigma/\rho_0^{2/3}$ (MeV)
NL-SH	0.1460	1.092	7.48	3.94
NL-RA	0.1570	1.169	7.45	4.02
NL1	0.1518	1.098	7.23	3.86
NL3	0.1482	1.069	7.21	3.82
NL-Z	0.1508	1.038	6.88	3.66
NLC	0.1485	1.021	6.87	3.64

Kapitel 9

Leptoderme Entwicklung der Inkompressibilität endlicher Kerne

Der Dichteverlauf gesättigter Kerne im Grundzustand zeichnet sich durch seine leptoderme Struktur, d.h. durch die Aufteilung in ein Gebiet mit nahezu homogener Dichte (Bulk) und eine im Vergleich dazu kleine Oberflächenregion, aus. Kernkompressionen, unter denen diese prinzipielle Eigenschaft nicht verändert wird, bezeichnet man ebenfalls als leptoderm. Für sie läßt sich innerhalb des Tröpfchenmodells eine Entwicklung der Inkompressibilität $K(A, I)$ nach Potenzen von $A^{-1/3}$ und I^2 ansetzen [119]:

$$K(A, I) = K_v + K_{sf}A^{-1/3} + K_{vs}I^2 + K_{Coul}Z^2A^{-4/3} + \dots \quad (9.1)$$

Der Volumenbeitrag K_v ist dabei durch die Inkompressibilität K_∞ symmetrischer unendlicher Kernmaterie gegeben. Für andere, die Leptodermizität aufhebende Kompressionsmoden, die sich beispielsweise bei der Vorgabe des mittleren quadratischen Radius einstellen, ist der Grenzwert K_v für $A \rightarrow \infty$ im allgemeinen von K_∞ verschieden [120, 121]. Während in Gl. (9.1) der Volumensymmetriebeitrag mit K_{vs} und der Coulombterm mit K_{Coul} nur durch Eigenschaften unendlicher Kernmaterie bestimmt sind, hängt die Oberflächeninkompressibilität K_{sf} implizit von der betrachteten Kompressionsmode ab. Speziell für das Skalierungsmodell erhält man die folgenden Ausdrücke [119]:

$$K_{vs} = K_{sym} + L \left(\frac{K'}{K_v} - 6 \right), \quad (9.2)$$

$$K_{Coul} = \frac{3e^2}{5r_0} \left(\frac{K'}{K_v} - 8 \right), \quad (9.3)$$

$$K_{sf} = \left(22 - 2\frac{K'}{K_v} \right) a_{sf} + 36\pi r_0^2 \rho_0^2 \ddot{\sigma}. \quad (9.4)$$

$\ddot{\sigma}$ ist die zweite Ableitung der nuklearen Oberflächenspannung σ komprimierter symmetrischer SINM nach der zentralen Dichte ρ_c , ausgewertet an der Sättigungsdichte ρ_0 .

Eine Erweiterung der Entwicklung (9.1) um die Beiträge der nächsthöheren Ordnung wurde in Ref. [122] gegeben und innerhalb der nichtrelativistischen Extended-Thomas-Fermi-Methode (ETF) [14] für Skyrme-Wechselwirkungen untersucht:

$$K(A, I) = K_v + K_{sf}A^{-1/3} + K_{vs}I^2 + K_{Coul}Z^2A^{-4/3} + K_4I^4 + K_{ss}I^2A^{-1/3} + K_{cv}A^{-2/3} + \dots \quad (9.5)$$

Sie enthält die Beiträge mit dem zusätzlichen Volumensymmetriekoeffizienten K_4 , dem Krümmungskoeffizienten K_{cv} und der Oberflächensymmetrie-Inkompressibilität K_{ss} .

Die Entwicklungskoeffizienten des nuklearen Anteils von $K(A, I)$ lassen sich über eine leptoderme Entwicklung der Energie pro Teilchen E/A endlicher Kerne bei abgeschalteter Coulombkraft gewinnen. Dazu startet man von der Identität

$$E(A, I) = e_\infty(\rho_c, \delta_c)A + \Delta E(A, I), \quad (9.6)$$

$$\Delta E(A, I) \equiv 4\pi \int_0^\infty (\mathcal{E}(r; A, I) - e_\infty(\rho_c, \delta_c)\rho(r; A, I)) r^2 dr \quad (9.7)$$

für die Energie $E(A, I)$ eines sphärisch-symmetrischen Kerns mit zentraler Dichte

$$\rho_c \equiv \rho_c(A, I) \equiv \rho(r=0; A, I) \quad (9.8)$$

und zentraler Asymmetrie

$$\delta_c \equiv \delta_c(A, I) \equiv \frac{\rho_n(r=0; A, I) - \rho_p(r=0; A, I)}{\rho_n(r=0; A, I) + \rho_p(r=0; A, I)}. \quad (9.9)$$

Da der Integrand in (9.7) vornehmlich im Oberflächenbereich Beiträge zur Energiedifferenz ΔE liefert [14], führt man in (9.7) die Variablensubstitution

$$r = u + R_s \quad (9.10)$$

durch. Sie umfaßt neben der neuen Integrationsvariablen u den Radius R_s , der die Lage des schmalen Oberflächenbereichs charakterisiert, in dem die Dichte von einem nahezu konstanten Wert auf Null abfällt. Mit (9.10) erhält man den folgenden Ausdruck für ΔE :

$$\begin{aligned} \Delta E(A, I) &= 4\pi R_s^2 \int_{-R_s}^\infty \mathcal{E}_{sf}(u + R_s; A, I) du + 8\pi R_s \int_{-R_s}^\infty u \mathcal{E}_{sf}(u + R_s; A, I) du \\ &\quad + 4\pi \int_{-R_s}^\infty u^2 \mathcal{E}_{sf}(u + R_s; A, I) du, \end{aligned} \quad (9.11)$$

$$\mathcal{E}_{sf}(u + R_s; A, I) \equiv \mathcal{E}(u + R_s; A, I) - e_\infty(\rho_c, \delta_c)\rho(u + R_s; A, I).$$

Der Radius R_s wird seinerseits über die Integralbeziehung

$$\begin{aligned} A &= 4\pi \int_0^\infty \rho(r; A, I) r^2 dr = \rho_c \frac{4}{3}\pi R_s^3 + \Delta A, \\ \Delta A &\equiv 4\pi \rho_c \int_{-R_s}^\infty (u^2 + 2R_s u + R_s^2) \left(\frac{\rho(u + R_s; A, I)}{\rho_c} - \Theta(-u) \right) du \end{aligned} \quad (9.12)$$

für die Teilchenzahl A bestimmt.

Die leptoderme Näherung besteht nun darin, bei den Integralen für ΔE (9.11) und ΔA (9.12) die Integrationsuntergrenzen durch $-\infty$ zu ersetzen, da alle dort vorkommenden Integranden nur für betragsmäßig kleine u -Werte von Null verschiedene Werte liefern.

Dadurch ist es möglich, die Dichte ρ und Energiedichte \mathcal{E} in den Gln. (9.11) und (9.12) durch die entsprechenden Größen ρ^{SINM} und $\mathcal{E}^{\text{SINM}}$ komprimierter SINM zu nähern. Aufgrund der Translationsinvarianz des semi-infiniten Systems kann dabei der Dichteverlauf ρ^{SINM} zusammen mit $\mathcal{E}^{\text{SINM}}$ so entlang der z -Achse verschoben werden, daß sein Oberflächenbereich im Gebiet um $z = 0$ zu liegen kommt. In den Gln. (9.11) und (9.12) können dann $\rho(u + R_s; A, I)$ und $\mathcal{E}(u + R_s; A, I)$ durch $\rho^{\text{SINM}}(z; \rho_c, \delta_c)$ und $\mathcal{E}^{\text{SINM}}(z; \rho_c, \delta_c)$ ersetzt werden.

Um eine explizite A -Abhängigkeit in $E(A, I)$ (9.6) zu erhalten, wird zusätzlich die Nukleonenzahl A (9.12) nach dem inversen Kernradius $1/R_s$ entwickelt. Die gewonnene Gleichung läßt sich invertieren und führt im Skalierungsmodell auf die Beziehung [14, 122]:

$$\begin{aligned} R_s &= q^{-1/3} r_0 A^{1/3} - q^{-1/3} z_0 + \dots, \quad q \equiv \frac{\rho_c}{\rho_0}, \\ z_0 &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\rho_{\text{g.s.}}^{\text{SINM}}(z; \rho_0, \delta_c = 0)}{\rho_0} - \Theta(-z) \right] dz. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Das in den Arbeiten [14] und [122] auftretende Produkt $c_0 \alpha$ bzw. $c_0 \alpha_0$ für Dichteverteilungen mit expliziter Abhängigkeit vom Oberflächenparameter α wurde an dieser Stelle durch das Produkt $q^{-1/3} z_0$ ersetzt. q ist die zentrale SINM-Kompression im Limes $z \rightarrow -\infty$, z_0 der sogenannte äquivalente scharfe Radius der Dichte $\rho_{\text{g.s.}}^{\text{SINM}}$ von gesättigter symmetrischer SINM. Zusätzlich wurde für den dichteabhängigen Kernradiusparameter $r_0(\rho_c)$ aus [14, 122] das Produkt $q^{-1/3} r_0$ verwendet.

Setzt man die Entwicklung (9.13) in Gl. (9.11) ein, erhält man schließlich für die Energie pro Teilchen E/A den Ansatz [122]:

$$\begin{aligned} E/A &= e_\infty(\rho_c, \delta_c) + 4\pi r_0^2 q^{-2/3} b_0(\rho_c, \delta_c) A^{-1/3} \\ &\quad + 8\pi r_0 (q^{-1/3} b_1(\rho_c, \delta_c) - q^{-2/3} z_0 b_0(\rho_c, \delta_c)) A^{-2/3} + \dots, \end{aligned} \quad (9.14)$$

mit den semi-infiniten Größen

$$b_n(\rho_c, \delta_c) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} z^n (\mathcal{E}^{\text{SINM}}(z; \rho_c, \delta_c) - e_\infty(\rho_c, \delta_c) \rho^{\text{SINM}}(z; \rho_c, \delta_c)) dz \quad (n = 0, 1), \quad (9.15)$$

die eine implizite Abhängigkeit von der SINM-Kompressionsmode aufweisen. Die Größen e_∞ , $b_0 = \sigma(\rho_c, \delta_c)$ und b_1 können ihrerseits um die Sättigungsdichte ρ_0 symmetrischer Kernmaterie nach Potenzen der Asymmetrie δ_c und dem dimensionslosen Parameter

$$\varepsilon \equiv \frac{\rho_c - \rho_0}{\rho_0} \quad (9.16)$$

entwickelt werden [35, 122]:

$$\begin{aligned} e_\infty(\rho_c, \delta_c) &= a_v + \frac{1}{18} K_v \varepsilon^2 - \frac{1}{162} K' \varepsilon^3 + \frac{1}{1944} K'' \varepsilon^4 + \dots \\ &\quad + \delta_c^2 \left\{ J + \frac{1}{3} L \varepsilon + \frac{1}{18} K_{\text{sym}} \varepsilon^2 - \frac{1}{162} K'_{\text{sym}} \varepsilon^3 + \dots \right\} \\ &\quad + \delta_c^4 \left\{ M + \frac{1}{3} U \varepsilon + \frac{1}{18} V \varepsilon^2 + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (9.17)$$

$$\begin{aligned} b_0(\rho_c, \delta_c) &= \sigma + \frac{1}{3} C \varepsilon + \frac{1}{18} D \varepsilon^2 - \frac{1}{162} G \varepsilon^3 + \dots \\ &\quad + \delta_c^2 \left\{ \tau_0 + \frac{1}{3} \Lambda \varepsilon + \frac{1}{18} \Gamma \varepsilon^2 + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (9.18)$$

$$b_1(\rho_c, \delta_c) = \mu_0 + \frac{1}{3} X \varepsilon + \frac{1}{18} Y \varepsilon^2 + \dots \quad (9.19)$$

Mit den Grundzustandswerten $\bar{\rho}_c$ und $\bar{\delta}_c$, die über eine Minimierung von (9.14) bezüglich ρ_c und δ_c gewonnen werden, erhält man mit $e(\bar{\rho}_c, \bar{\delta}_c)$ eine Massenformel für die Energie pro Nukleon E/A . Die Auswertung der Inkompressibilität $K(A, I)$,

$$K(A, I) = 9\bar{\rho}_c^2 \left. \frac{\partial^2 e(\rho_c, \delta_c)}{\partial \rho_c^2} \right|_{(\bar{\rho}_c, \bar{\delta}_c)}, \quad (9.20)$$

führt dann schließlich auf die Tröpfchenmodellkoeffizienten (9.2) – (9.4) sowie die in Ref. [122] angegebenen Ausdrücke für die Größen K_4 , K_{cv} und K_{ss} . Ihr Einfluß auf die Konvergenz der Entwicklung (9.5) soll im folgenden für die sechs Parametersätze aus Tabelle B.1 explizit untersucht werden.

Die Koeffizienten der Entwicklungen (9.17) – (9.19) wurden dazu aus Rechnungen für asymmetrische Kernmaterie und komprimierte SINM im Skalierungsmodell extrahiert. Für die Bestimmung der Inkompressibilität $K_v = K_\infty$, der Anharmonizität K' , der Symmetrie-Energie J , des Dichtesymmetriekoeffizienten L und der Größe K_{sym} konnten dabei die in Ref. [123] und Ref. [18] angegebenen Formeln herangezogen werden. Die weiteren Koeffizienten K'' , K'_{sym} , M , U und V wurden numerisch ermittelt. Als Kontrolle dienten Kernmaterievergleichsrechnungen im Dichtebereich $0.7\rho_0(\delta_c) \leq \rho_c \leq 1.3\rho_0(\delta_c)$ für Asymmetriewerte $0 \leq \delta_c \leq 0.2$. Dabei ergab sich ein relativer Fehler der Entwicklung (9.17) von maximal 0.1%.

Die restlichen Koeffizienten der Entwicklungen (9.18) und (9.19) wurden aus Kompressionsrechnungen für semi-infinite Kernmaterie in RTF-Näherung gewonnen. Die Oberflächenspannung b_0 und die Größe b_1 wurden hierzu bei unterschiedlichen Werten der zentralen Asymmetrie δ_c für elf Kompressionsverhältnisse in einem engen Bereich um die Sättigungsdichte ρ_0 symmetrischer Kernmaterie bestimmt. Die Berechnungen erfolgten bis dicht an die jeweilige Neutronen-Drip-Line im äquidistanten Abstand von ca. $\Delta\delta_c^2 \approx 0.002 - 0.004$. Mittels Mehrpunkt-Differenzenformeln wurden im Anschluß daran die Ableitungen

$$b_{i,k} \equiv \left. \frac{\partial^k}{\partial \rho_c^k} b_i(\rho_c, \delta_c) \right|_{\rho_c=\rho_0} \quad (i = 0, 1; k = 0, 1, \dots) \quad (9.21)$$

berechnet. Hieraus ergeben sich für $\delta_c = 0$ direkt die Koeffizienten C , D und G für b_0 sowie X und Y für b_1 . Die weiteren Koeffizienten τ_0 , Λ und Γ der Entwicklung von b_0 wurden als die Ableitungen

$$\left. \frac{d}{d\delta_c^2} b_{i,k}(\delta_c^2) \right|_{\delta_c^2=0} \quad (9.22)$$

mittels rechtsseitiger Differenzenformeln ermittelt.

Tabelle 9.1 enthält eine Auflistung aller extrahierten Entwicklungsgrößen für die sechs zu untersuchenden Parametersätze, angeordnet nach aufsteigenden Werten der Inkompressibilität K_v . Stellvertretend für nichtrelativistische Skyrme-Wechselwirkungen enthält die Tabelle ebenfalls eine Spalte mit den Ergebnissen aus Ref. [122] für den Parametersatz SkM* [14]. Zusätzlich sind die Werte des Krümmungskoeffizienten a_{cv} und der Oberflächensteifheit Q [35] angeführt. Q ist dabei über die Beziehung

$$\tau_0 = \frac{9}{16\pi r_0^2} \frac{J^2}{Q} \quad (9.23)$$

Tabelle 9.1. *INM- und SINM-Entwicklungskoeffizienten von e_∞ , b_0 und b_1 in RTF-Näherung. (Anordnung der Parametersätze nach aufsteigenden Werten von $K_v = K_\infty$.) Zum Vgl. sind ebenso die entsprechenden Werte aus Ref. [122] für SkM* angeführt.*

	NL-Z	NL1	SkM*	NLC	NL3	NL-RA	NL-SH
ρ_0 (fm ⁻³)	0.1508	0.1518	0.1603	0.1485	0.1482	0.1570	0.1460
a_v (MeV)	-16.18	-16.42	-15.77	-15.77	-16.24	-16.25	-16.35
r_0 (fm)	1.17	1.16	1.14	1.17	1.17	1.15	1.18
K_v (MeV)	172.8	211.1	216.6	224.5	271.5	320.5	355.3
K' (MeV)	422.5	32.7	386.1	278.1	-203.0	-216.2	-601.6
K'' (MeV)	12188.3	14671.5	1768.8	6224.7	9365.8	3866.7	5058.1
J (MeV)	41.72	43.46	30.03	35.02	37.40	38.90	36.12
L (MeV)	133.91	140.07	45.78	107.97	118.53	119.09	113.64
K_{sym} (MeV)	140.20	142.68	-155.93	76.91	100.88	62.11	79.77
K'_{sym} (MeV)	-577.07	-444.67	-330.47	-235.59	-181.31	-26.64	23.26
M (MeV)	0.63	0.64	1.9	0.62	0.63	0.64	0.63
U (MeV)	1.43	1.43	3.32	1.60	1.58	1.72	1.66
V (MeV)	-7.80	-7.88	3.91	-2.30	-3.71	-1.23	-1.94
z_0 (fm)	-0.314	-0.288	–	-0.257	-0.236	-0.210	-0.194
t (fm)	2.99	2.90	2.56	2.43	2.42	2.10	2.09
σ (MeV fm ⁻²)	1.083	1.164	1.050	1.028	1.121	1.189	1.150
C (MeV fm ⁻²)	0.0022	0.0021	0.0624	0.0014	0.0015	0.0011	0.0011
D (MeV fm ⁻²)	-23.56	-35.25	-32.94	-32.69	-44.27	-52.18	-56.12
G (MeV fm ⁻²)	89.70	263.19	78.53	128.23	303.82	303.92	395.95
τ_0 (MeV fm ⁻²)	9.689	10.084	3.424	6.424	7.078	6.803	5.957
Q (MeV)	23.68	24.80	36.16	24.91	25.75	30.12	28.24
Λ (MeV fm ⁻²)	20.442	16.914	6.474	9.963	8.961	7.807	5.919
Γ (MeV fm ⁻²)	-106.970	-165.294	-55.121	-110.669	-160.087	-171.096	-171.641
μ_0 (MeV fm ⁻¹)	0.1937	0.1941	-0.1185	0.1299	0.1389	0.1141	0.1102
X (MeV fm ⁻¹)	5.813	6.210	3.525	4.611	5.149	4.822	4.734
Y (MeV fm ⁻¹)	23.71	38.14	25.17	26.44	38.52	37.64	41.33
a_{cv} (MeV)	15.62	15.47	12.79	11.62	11.87	10.51	9.88

Tabelle 9.2. Koeffizienten der leptodermen Entwicklung (9.5) in RTF-Näherung (Anordnung der Parametersätze gemäß Tabelle 9.1).

	NL-Z	NL1	SkM*	NLC	NL3	NL-RA	NL-SH
K_v (MeV)	172.8	211.1	216.6	224.5	271.5	320.5	355.3
K_{sf} (MeV)	-86.0	-170.3	-231.0	-218.0	-310.1	-405.7	-469.7
K_{vs} (MeV)	-335.9	-676.1	-349.0	-437.1	-698.9	-732.8	-794.5
K_{Coul} (MeV)	-4.12	-5.83	-4.70	-4.99	-6.45	-6.52	-7.11
K_4 (MeV)	2795.4	3696.2	38.3	785.5	1398.9	737.7	754.3
K_6 (MeV)	-27857.2	-18661.6	–	-2315.7	-2620.1	-608.7	-465.8
K_8 (MeV)	164669.2	44800.0	–	5159.7	1977.4	157.6	-53.8
K_{ss} (MeV)	158.4	2900.1	496.9	1289.6	2852.3	2537.9	2905.0
K_{cv} (MeV)	-227.9	-489.7	-129.1	-213.4	-370.9	-272.5	-311.5

und a_{cv} über

$$\mu_0 = \frac{1}{8\pi r_0} a_{cv} + z_0 \sigma \quad (9.24)$$

gegeben (für eine Diskussion des geometrischen und dynamischen Beitrags zu a_{cv} im Falle relativistischer Mittelfeldnäherungen siehe Ref. [124]). Da alle sechs relativistischen Parametersätze u.a. durch Fits an die Massen endlicher Kerne ermittelt worden sind, erhält man nahezu konstante Werte für die Größen ρ_0 , a_v , r_0 und σ . Die Werte des Koeffizienten $C = 3\rho_0\dot{\sigma}$ zeigen eine recht gute Übereinstimmung mit dem sogenannten „ $\dot{\sigma} = 0$ “-Theorem [35], nach dem die Ableitung der Oberflächenspannung σ nach der zentralen Dichte am Sättigungspunkt symmetrischer Kernmaterie identisch verschwindet. Weiterhin fällt eine systematische Abnahme der Anharmonizität K' sowie der 90%-10%-Oberflächendicke t symmetrischer gesättigter SINM auf. Dieser Sachverhalt war ausführlicher Diskussionsgegenstand des Kap. 4 über grundzustandsäquivalente Wechselwirkungen und soll deshalb an dieser Stelle nicht weiter verfolgt werden.

Tabelle 9.2 zeigt die Werte der Koeffizienten der Entwicklung (9.5), berechnet mit den Größen aus Tabelle 9.1. Zusätzlich sind die weiteren Volumensymmetriekoeffizienten K_6 und K_8 angeführt (s.a. Gl. (9.26)). Auffallend ist, daß für alle relativistischen Wechselwirkungen der Wert von K_4 deutlich größer als bei den in Ref. [122] angegebenen nichtrelativistischen Skyrme-Parametrisierungen ausfällt. Der Wert des Oberflächensymmetriekoeffizienten K_{ss} unterscheidet sich ebenfalls teilweise um eine Größenordnung von dem von SkM*. Selbst der Krümmungskoeffizient K_{cv} ist im Falle des Parametersatzes NL1 ungefähr dreimal so groß. In Übereinstimmung mit den nichtrelativistischen Ergebnissen nimmt der Betrag der Oberflächeninkompressibilität K_{sf} mit größer werdender Inkompressibilität K_v zu.

Um die Konvergenzeigenschaften der Entwicklung (9.5) analysieren zu können, wurden ebenfalls Kompressionsrechnungen im Skalierungsmodell für endliche Kerne bei abgeschalteter Coulombkraft für die Parametersätze NL-Z, NL1 und NLC durchgeführt. Die Wahl der Nukleonenzahl A erfolgte hierbei äquidistant in $A^{-1/3}$. Die Werte von $K(A, I)$ wurden mit Hilfe von Differenzenformeln für die zweite Ableitung der Energie pro Nukleon ermittelt.

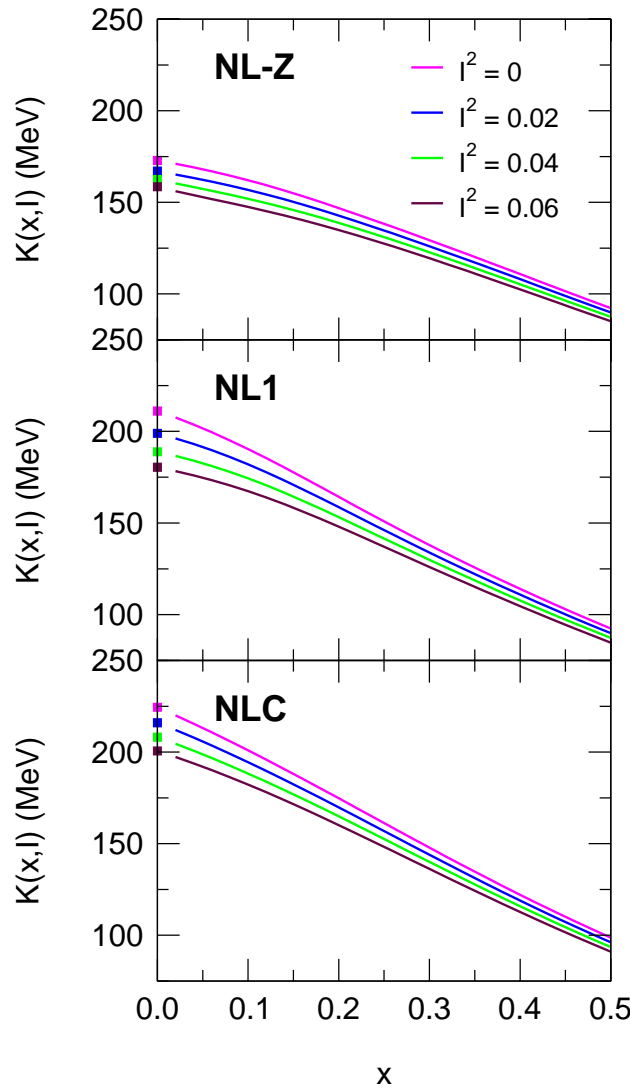


Abb. 9.1. Inkompressibilität $K(x, I)$ endlicher Kerne (ohne Coulombkraft) als Funktion der Variablen $x = A^{-1/3}$ für verschiedene Werte von I^2 .

Abbildung 9.1 zeigt die resultierenden Inkompressibilitäten für die I^2 -Werte 0, 0.04 und 0.06 als Funktion der Variablen

$$x \equiv A^{-1/3}. \quad (9.25)$$

Die korrespondierenden Kernmateriegrenzwerte sind an der Stelle $x = 0$ durch farbige Symbole gekennzeichnet. Eine quadratische Extrapolation der Kurven bis $x = 0$ liefert in Anbetracht eventueller numerischer Ungenauigkeiten eine erstaunlich gute Übereinstimmung mit den INM-Werten bis auf 0.006% für NL-Z, 0.003% für NL1 bzw. 0.2% für NLC.

Es stellt sich allerdings die Frage, wie gut die INM-Werte selbst durch Gl. (9.5) approximiert werden. Im Grenzwert $x \rightarrow 0$, bei dem der Neutronenüberschuß I in die Asymmetrie δ_c infinites Kernmaterie übergeht, erhält man die Entwicklung

$$K_\infty(\delta_c) = K_v + K_{vs}\delta_c^2 + K_4\delta_c^4 + K_6\delta_c^6 + K_8\delta_c^8 + \dots \quad (9.26)$$

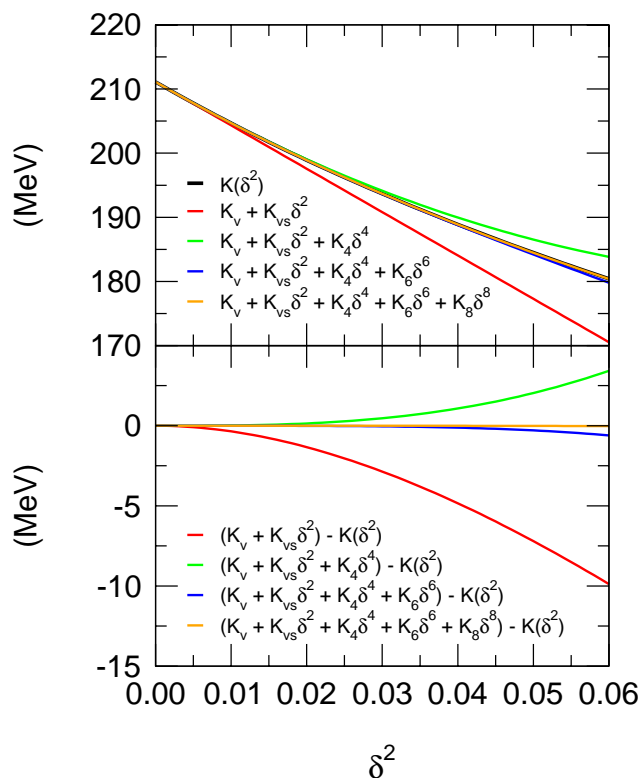


Abb. 9.2. Konvergenz der Partialsummen der Entwicklung (9.26) (farbige Kurven) gegen die Inkompressibilität $K_\infty(\delta_c)$ infiniter Kernmaterie (fett gezeichnete schwarze Linie) für den Parametersatz NL1.

für die Inkompressibilität $K_\infty(\delta_c)$ um den symmetrischen Fall $\delta_c = 0$. In Abb. 9.2 werden für den Parametersatz NL1, der von allen in Tabelle 9.2 angeführten Parametersätzen den größten Wert für K_4 aufweist, die Partialsummen von (9.26) mit der entsprechenden Kurve einer INM-Rechnung verglichen. Man erkennt eine deutliche Verbesserung der Näherungswerte durch die Hinzunahme des K_4 -Terms gegenüber der linearen Approximation (9.1), was im Falle des Kerns ^{208}Pb ($I^2 = 0.045$) zu einer Verringerung des Fehlers von ca. -6 MeV (-3%) auf ungefähr 1.5 MeV (1%) führt. Bei der Entwicklung 4. Ordnung beträgt die Abweichung sogar nur noch ca. -7 keV (-0.004%).

Zur Bestimmung der Oberflächeninkompressibilität K_{sf} wurden die Kurven für $I = 0$ aus Abb. 9.1 einmal numerisch nach x differenziert. Die resultierenden Verläufe sind im oberen Teil der Abb. 9.3 wiedergegeben. Die farbigen Symbole entlang der Ordinatenachse stellen die entsprechenden K_{sf} -Werte nach Gl. (9.4) dar. Eine lineare Extrapolation der Kurven liefert Werte für die Oberflächeninkompressibilität, die von den SINM-Werten um ca 2% (NL-Z), 0.1% (NL1) bzw. 0.5 % (NLC) abweichen. In der unteren Figur von Abb. 9.3 sind die Kurven für die numerisch ermittelte Größe $(1/2)d^2K(x, I = 0)/dx^2$ dargestellt. Als Grenzwerte für $x \rightarrow 0$ wurden auch hier wieder die entsprechenden SINM-Resultate farbig gekennzeichnet. Die Kurven für NL-Z und NLC weisen in ihrer Asymptotik eine recht gute Übereinstimmung mit den K_{cv} -Werten nach Gl. (21e) in Ref. [122] auf. Eine Verlängerung der Kurve von NL1 zu $x = 0$ würde dagegen einen betragsmäßig deutlich kleineren Wert für K_{cv} liefern. Über eine Regressionsgerade für x -Werte kleiner als 0.3 läßt

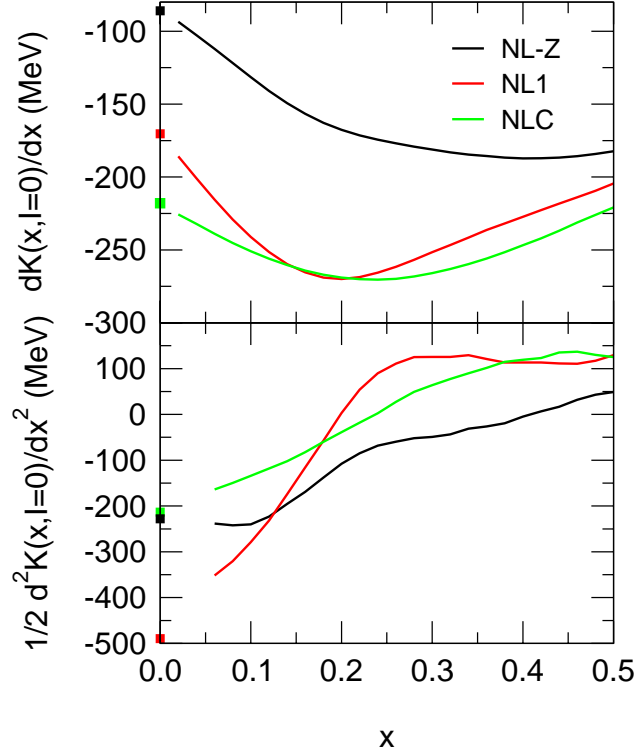


Abb. 9.3. Erste und zweite Ableitung der Inkompressibilität $K(x, I)$ endlicher Kerne (ohne Coulombkraft) nach der Variablen $x = A^{-1/3}$ für die drei Parametersätze NL-Z, NL1 und NLC.

sich jedoch auch hier eine gute Übereinstimmung mit dem entsprechenden SINM-Wert erzielen.

Allgemein läßt sich für eine Entwicklung von $K(x, I)$ auch schreiben:

$$K(x, I) = K_{\text{vol}}(I^2) + K_{\text{surf}}(I^2)x + K_{\text{curv}}(I^2)x^2 + \dots \quad (9.27)$$

Die Oberflächeninkompressibilität K_{surf} sowie der Krümmungskoeffizient K_{curv} können dabei ihrerseits nach Potenzen von I^2 entwickelt werden:

$$\begin{aligned} K_{\text{surf}} &= K_{\text{sf}} + K_{\text{ss}}I^2 + K_{\text{s4}}I^4 + \dots, \\ K_{\text{curv}} &= K_{\text{cv}} + K_{\text{cvs}}I^2 + K_{\text{cv4}}I^4 + \dots. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Die Entwicklung des Volumenbeitrags K_{vol} wurde bereits in Gl. (9.26) gegeben. Die Größe

$$\zeta \equiv \frac{K(x, I) - K(x, 0) - (K_{\text{vol}}(I^2) - K_{\text{v}})}{xI^2} \quad (9.29)$$

besitzt damit eine Entwicklung der Form

$$\zeta = (K_{\text{ss}} + K_{\text{s4}}I^2 + \dots) + (K_{\text{cvs}} + K_{\text{cv4}}I^2 + \dots)x + \dots \quad (9.30)$$

und eignet sich daher gut zu einer Analyse der Oberflächensymmetriebeiträge zu $K(x, I)$.

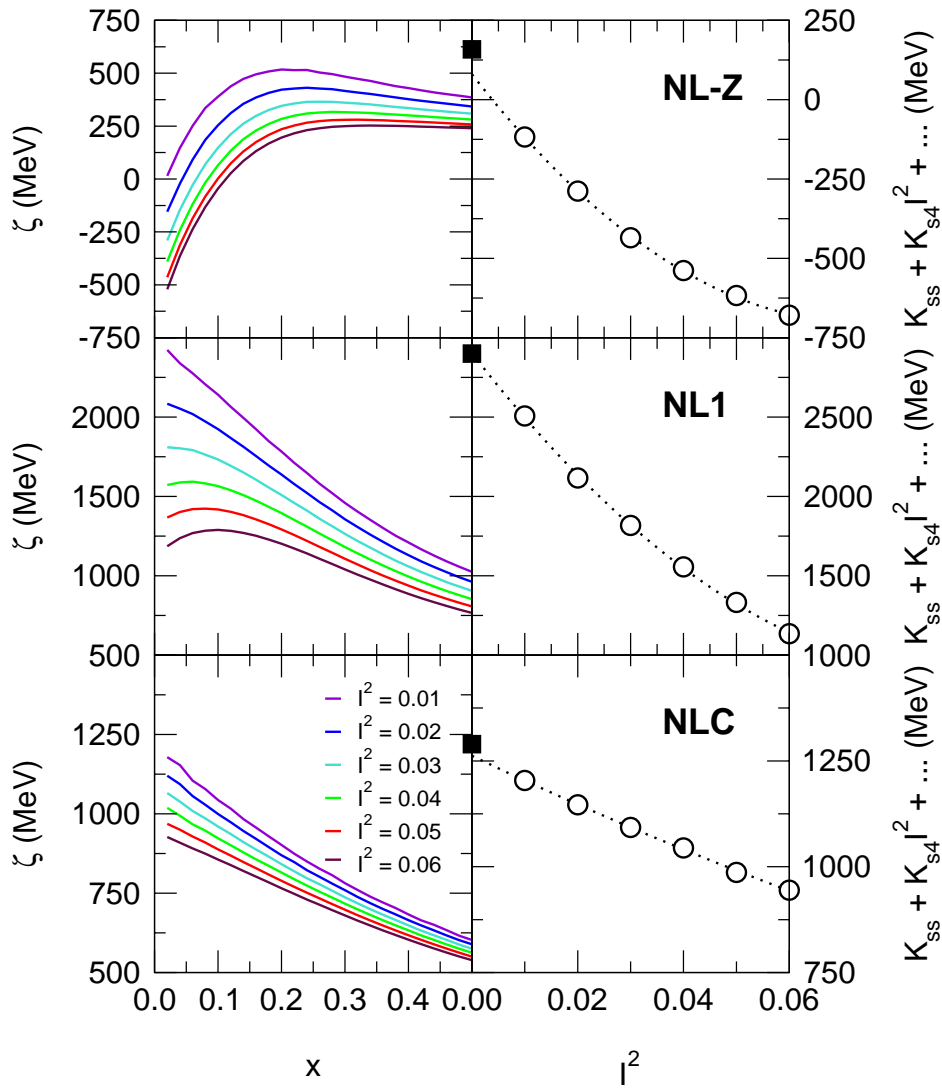


Abb. 9.4. ζ (9.29) als Funktion von $x = A^{-1/3}$ für unterschiedliche Werte von I^2 (linker Teil) und die durch Extrapolation gewonnenen SINM-Grenzwerte für $x \rightarrow 0$ (rechter Teil) für die Parametersätze NL-Z, NL1 und NLC. Die gepunkteten Linien stellen Ausgleichsparabeln an die asymmetrieabhängigen Grenzwerte von ζ dar.

In der linken Spalte von Abb. 9.4 sind die Graphen von ζ als Funktion von x für unterschiedliche Werte von I^2 für die drei ausgewählten Parametersätze wiedergegeben. Eine Abweichung von der durch Gl. (9.30) suggerierten Geradenform ist besonders für NL-Z erkennbar.

Über eine lineare Extrapolation der Kurven zu $x = 0$ erhält man nach (9.30) Schätzwerte für die Entwicklung $K_{ss} + K_{s4}I^2 + \dots$, die in der rechten Hälfte von Abb. 9.4 mit offenen Symbolen eingezeichnet worden sind. Zur Bestimmung von K_{ss} wurden Ausgleichsparabeln (punktierte Linien) an diese Werte ermittelt und anschließend bis $I^2 = 0$ extrapoliert. Die so gewonnenen Näherungswerte weisen eine recht gute Übereinstimmung mit den entsprechenden SINM-Resultaten (ausgefüllte Rechtecke) auf. Die starke I^2 -Abhängigkeit der Näherungswerte (besonders im Falle von NL1) deutet allerdings auf eine schwache Konvergenz der Entwicklung (9.5) bezüglich der Oberflächensymmetriebeiträge hin.

Die Konvergenzgüte beider $K(A, I)$ -Entwicklungen veranschaulicht Abb. 9.5. In der linken Hälfte finden sich für den symmetrischen Fall ($I = 0$) die Kurven der eigentlichen RTF-Rechnung sowie der Vorhersagen der Gln. (9.1) und (9.5). Im Falle von NL-Z ist die Übereinstimmung von (9.5) selbst bis $x = 0.3$ ($A \approx 37$) überraschend gut. Am schlechtesten ist sie für den Parametersatz NL1 mit dem betragsmäßig größten Wert von K_{cv} . Für den Kern ^{208}Pb ($x \approx 0.17$) liest man beispielsweise eine Abweichung von ca. 10 MeV bei der Entwicklung (9.1) ohne Krümmungsbeiträge ab. Mit Gl. (9.5) erhält man dagegen ca. -4.5 MeV. Aus Abb. 9.4 läßt sich für ^{208}Pb ($I^2 = 0.045$) ein Oberflächensymmetriebeitrag $\zeta x I^2$ von ungefähr 11 MeV entnehmen. Um diesen Betrag unterschätzt Gl. (9.1) den Wert von $K(^{208}\text{Pb})$. Die Mitnahme des K_{ss} -Terms in Gl. (9.5) liefert dagegen einen um ca. 11 MeV zu großen Wert. Für die ursprüngliche Entwicklung (9.1) ergibt damit die Summe der Abweichungen in Volumen-, Krümmungs- und Oberflächensymmetriebeiträgen einen verbleibenden Restfehler von ca. $-6 \text{ MeV} + 10 \text{ MeV} - 11 \text{ MeV} = -7 \text{ MeV}$. Die erweiterte Entwicklung (9.5) führt zu einer Gesamtabweichung von ca. $1.5 \text{ MeV} - 4.5 \text{ MeV} + 11 \text{ MeV} = 8 \text{ MeV}$. Unter Hinzunahme der Volumenbeiträge mit K_6 und K_8 zu Gl. (9.1) könnte sogar ein genauere Wert mit ca. 1 MeV Fehler erhalten werden.

In der rechten Spalte von Abb. 9.5 wird dieses gegenseitige Kompensieren von Volumen-, Krümmungs- und Oberflächensymmetriebeiträgen nochmals graphisch für $I^2 = 0.05$ dargestellt. Im Gebiet schwerer bis mittelschwerer Kerne reproduziert die ursprüngliche Entwicklung die tatsächlichen $K(A, I)$ -Werte bereits mit einer Genauigkeit von ca. 2% (NL-Z und NLC) bzw. 5% (NL1). Im Falle von NL-Z und NL1 ist in diesem Bereich Gl. (9.1) sogar genauer als die erweiterte Entwicklung (9.5). Im Falle von NLC führen die zusätzlichen Terme in (9.5) nur zu einer unmerklichen Fehlerreduktion auf durchschnittlich 1.5%.

Eine Verbesserung der Entwicklung (9.5) ließe sich über die Hinzunahme von Termen noch höherer Ordnung erzielen. So legt der Verlauf der zweiten Ableitung von $K(x, I)$ in Abb. 9.3 die Berücksichtigung eines reinen x^3 -Terms nahe. Zusätzlich zeigt Abb. 9.4 den Einfluß der Terme $K_{s4}xI^4$, $K_{cv5}x^2I^2$, $K_{cv4}x^2I^4$ und sogar der Terme mit x^3I^2 und x^3I^4 .

Abschließend bleibt noch der Einfluß der Coulombkraft auf die Inkompressibilität endlicher Kerne zu untersuchen. In diesem Zusammenhang gilt es abzuklären, wie gut der Ausdruck $K_{\text{Coul}}Z^2A^{-4/3}$, der der Inkompressibilität einer homogen geladenen Kugel entspricht, den Coulombbeitrag zu $K(A, I)$ reproduziert, und welcher Gesamtfehler daraus

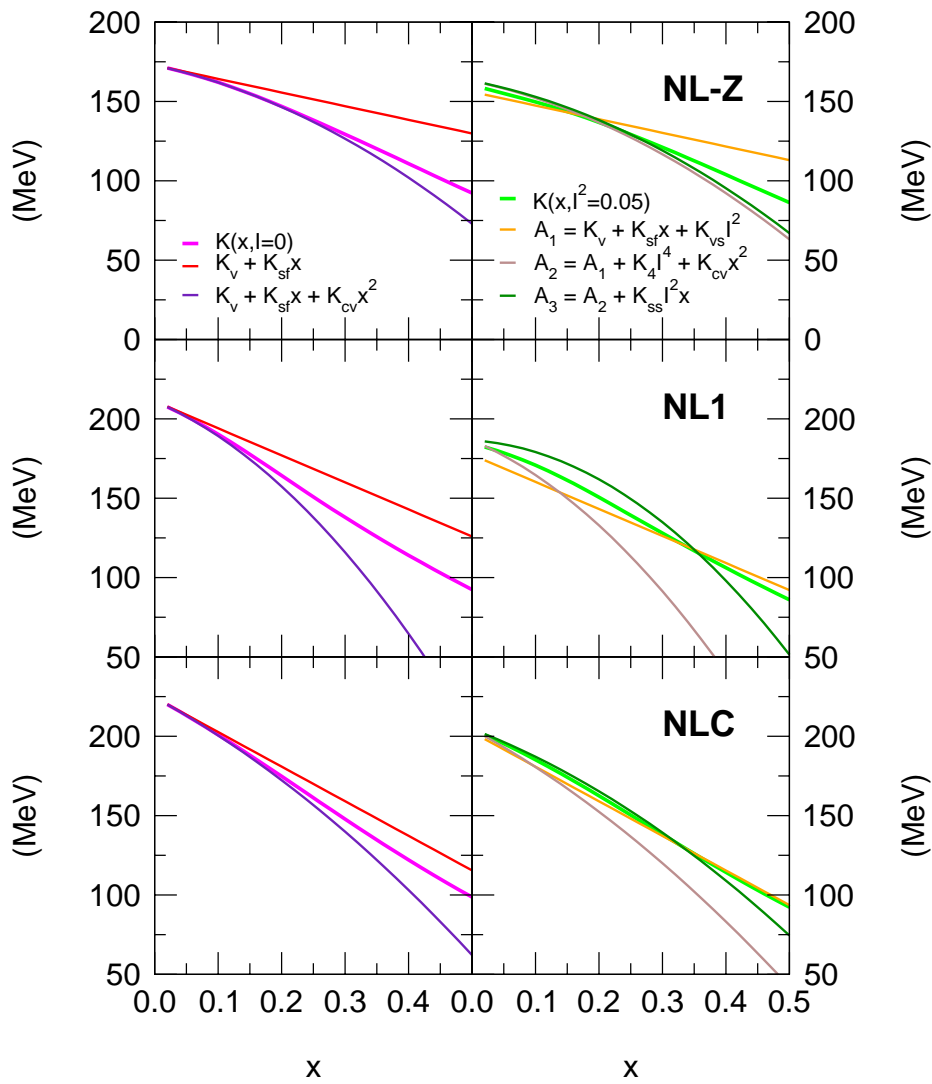


Abb. 9.5. Konvergenzeigenschaften der leptodermen Entwicklungen (9.1) und (9.5) bei ausgeschalteter Coulombkraft für den symmetrischen Fall $I = 0$ (linke Hälfte) sowie $I^2 = 0.05$ (rechter Teil) für die Parametersätze NL-Z, NL1 und NLC.

für die Entwicklungen (9.1) und (9.5) resultiert.

Abbildung 9.6 zeigt die Inkompressibilität $K^{\sigma\omega\rho\gamma}(A, I)$, gewonnen aus RTF-Skalierungsrechnungen bei eingeschalteter Coulombkraft, als Funktion der Nukleonenzahl A für $N=Z$ -Kerne sowie den Extremwert $I \approx 0.22$ ($I^2 = 0.05$). Zum Vergleich wurden ebenso die um $K_{\text{Coul}} Z^2 A^{-4/3}$ korrigierten Werte $K^{\sigma\omega\rho}(A, I)$ aus Rechnungen ohne Coulombkraft eingezeichnet. Im Falle von $I = 0$ überschätzt der Coulombbeitrag der leptodermen Entwicklung die Reduktion von $K^{\sigma\omega\rho}(A, I)$ im Bereich $90 \leq A \leq 240$ um durchschnittlich 3% (NL-Z), 7% (NL1) bzw. 2% (NLC). Für $I \approx 0.22$ ist die Abweichung nur noch rund halb so groß. Aufgrund der Tatsache, daß die Protonendichte bei wachsender Protonenzahl immer mehr von der einer homogen geladenen Kugel abweicht, nimmt der Fehler in allen Fällen mit wachsender Nukleonenzahl A zu. Weiterhin zeigt Abb. 9.6 die Näherungswerte der beiden Entwicklungen (9.1) (Kurve F_1) und (9.5) (Kurve F_2). Besonders die Graphik für NL-Z mit $I = 0$ (obere linke Abb.) verdeutlicht, daß eine bessere Approximation von $K^{\sigma\omega\rho}(A, I)$ nicht unbedingt gleichbedeutend mit genaueren Vorhersagen für die Größe $K^{\sigma\omega\rho\gamma}(A, I)$ ist. Für $90 \leq A \leq 240$ reproduziert die verkürzte Entwicklung (9.1) die Werte von $K^{\sigma\omega\rho\gamma}(A, I)$ mit einem mittleren Fehler von ca. 3% im Schnitt doppelt so gut wie Gl. (9.5). Dieser Effekt beruht auf einer teilweisen Kompensation des Fehlers im Coulombbeitrag durch vernachlässigte Krümmungsterme. Im asymmetrischen Fall hingegen führt die Überschätzung von Oberflächensymmetriebeiträgen zu einer besseren Übereinstimmung mit Gl. (9.5). Der mittlere Fehler beträgt dabei maximal 4% (NL1). Im Falle des Kerns ^{208}Pb ($x = 0.17$, $I^2 = 0.045$) führt die Entwicklung (9.1) bei allen Parametersätzen aus Tabelle B.1 zu Abweichungen zwischen 2 MeV (1.6%, NL-Z) und 13 MeV (10%, NL-1). Die zusätzlichen Terme in Gl. (9.5) reduzieren den Fehler auf maximal 3.3 MeV (1.7%, NL-SH).

Die Terme höherer Ordnung in Gl. (9.5) führen aufgrund von Auslöschungseffekten nur bei großen Werten von I zu einer deutlichen Verbesserung der Schätzwerte für die Inkompressibilität endlicher Kerne. Selbst für einen hohen Neutronenüberschuß erhält man bereits mit der ursprünglichen leptodermen Entwicklung (9.1) einen verlässlichen Schätzwert für $K(A, I)$. Dieser Sachverhalt wird eine maßgebliche Rolle bei der Analyse von experimentellen Breathing-Mode-Energien im nächsten Kapitel spielen.

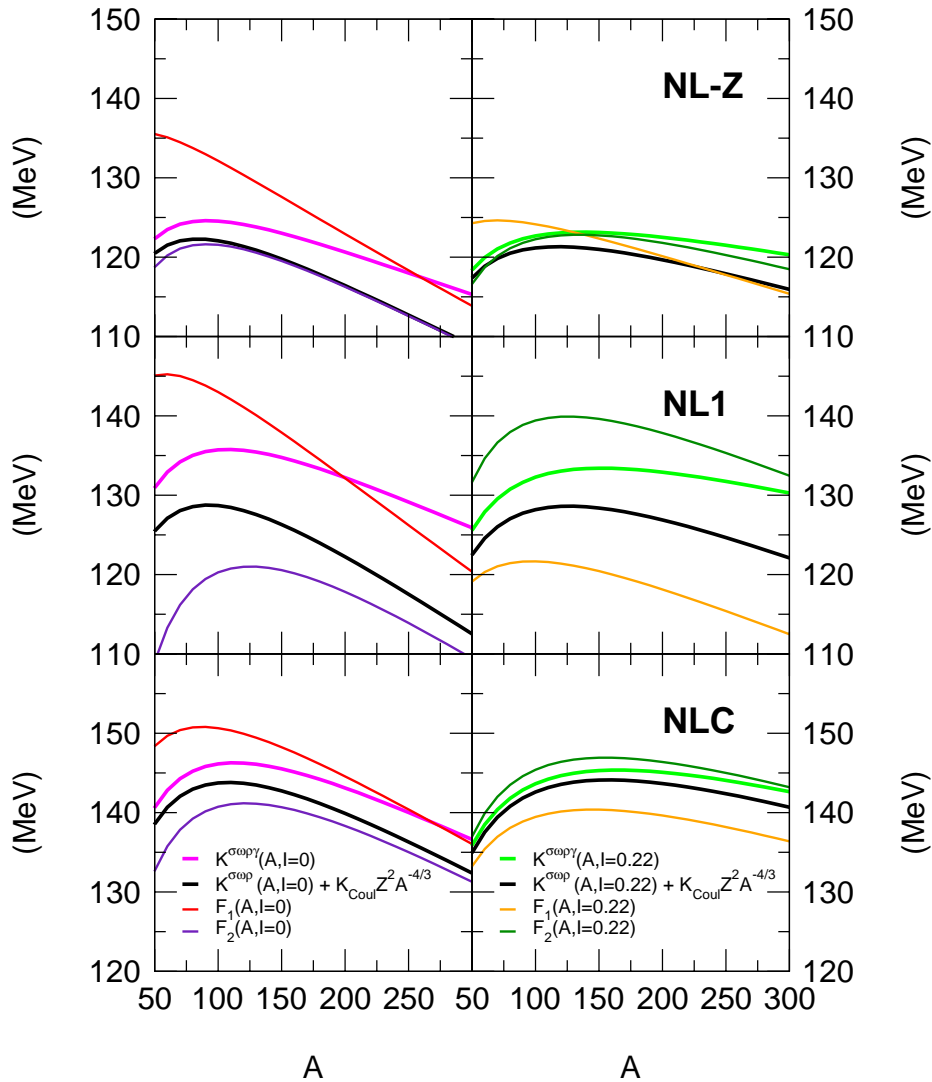


Abb. 9.6. Inkompressibilität $K^{\sigma\omega\rho\gamma}(A, I)$ endlicher Kerne, aufgetragen gegen die Nukleonenzahl A für den symmetrischen Fall ($I = 0$, linke Hälfte) sowie den Neutronenüberschuß $I \approx 0.22$ ($I^2 = 0.05$, rechter Teil). Zum Vergleich wurden ebenfalls die um den leptodermen Beitrag $K_{\text{Coul}} Z^2 A^{-4/3}$ korrigierten Werte $K^{\sigma\omega\rho}(A, I)$ aus RTF-Rechnungen ohne Coulombkraft eingezeichnet. Die mit F_1 und F_2 bezeichneten Kurven entsprechen den Vorhersagen der Entwicklungen (9.1) bzw. (9.5).

Kapitel 10

Skalierungsmodell-Analyse experimenteller Breathing-Mode-Energien

Bei der auch Breathing-Mode genannten isoskalaren Monopolriesenresonanz (GMR) in Kernen handelt es sich um kollektive Dichteschwingungen um den Grundzustand mit kleinen Amplituden. Im Rahmen des von Blaizot, Grammaticos *et al.* eingeführten Skalierungsmodells [24, 119] geht man davon aus, daß die nukleare Dichte während der dynamischen Dichteoszillationen zu jedem Zeitpunkt der Skalierungsvorschrift (7.9) gehorcht. Unter dieser Annahme ist die Inkompressibilität $K(A, I)$ (7.17) endlicher Kerne dann über die Beziehung [119]

$$K(A, I) = \frac{M}{\hbar^2} \langle r^2 \rangle E_{\text{br}}^2 \quad (10.1)$$

mit der Breathing-Mode-Energie E_{br} und dem rms-Massenradius $\langle r^2 \rangle$ verknüpft. Bei mikroskopischen RPA-Rechnungen [119] stellte sich heraus, daß zumindest für schwere und mittelschwere Kerne Breathing-Moden gut durch skalierte Dichten wiedergegeben werden können. Rechnungen innerhalb eines nichtrelativistischen hydrodynamischen Modells [125] zeigten eine praktisch perfekte Übereinstimmung mit den Vorhersagen des Skalierungsmodells für Kerne mit Massenzahlen im Bereich von $125 \leq A \leq 130$. Selbst der Kern ^{208}Pb wurde durch die Annahmen des Skalierungsmodells gut reproduziert.

In einer nichtrelativistischen mikroskopischen Analyse [9] basierend auf realistischen effektiven Gogny-Kräften wurde die Schlußfolgerung gezogen, daß mikroskopische Methoden bei der Beschreibung von Monopolresonanzen verlässlicher als leptoderme Entwicklungen wie etwa Gl. (9.1) sind. Der Ansatz (9.1) kann aber trotzdem als ein nützliches Werkzeug für eine erste Analyse von Breathing-Mode-Energien angesehen werden. Für Kompressionsmodelle, bei denen der mittlere quadratische Radius durch eine Nebenbedingung vorgegeben wird [120], können ebenfalls tröpfchenmodellartige Entwicklungen von $K(A, I)$ gewonnen werden. Obwohl der führende Term $(7/10)K_\infty$ um 30% von dem aus Gl. (9.1) differiert, liefern diese vergleichbare Werte für $K(A, I)$. Auch die sogenannte Generator-Coordinate-Methode [126, 127] wurde zu einer relativistischen Beschreibung der Monopolresonanzen herangezogen. In diesem Verfahren (wie auch in dem von Ref. [120]) weist die Kerndichte während der Dichteschwingung im Gegensatz zum Skalierungsmodell keine klare Trennung in einen Bulk- und einen Oberflächenbereich mehr auf.

Im Rahmen einer Skalierungsmodell-Analyse liegt der Gedanke nahe, die Koeffizienten der leptodermen Entwicklung (9.1) durch einen Fit an experimentelle Daten zu bestimmen. Dieses Verfahren eignet sich allerdings nicht für die Extraktion eines eindeutigen Wertes von K_v [128, 129], denn es erlaubt Werte im Bereich zwischen 100 – 400 MeV, die alle kompatibel mit den experimentellen Groningen-Daten [130–132] sind. Es gibt daher keine Alternative zu der bereits in Ref. [24] entwickelten Methode, $K(A, I)$ für verschiedene Wechselwirkungen zu berechnen und dadurch Rückschlüsse auf K_v zu ziehen.

Für das Skalierungsmodell werden nachfolgend zunächst die Ergebnisse einer RH-Analyse [133] vorgestellt und anschließend mit den Resultaten aus RTF-Rechnungen verglichen.

Eine Skalierung der Nukleonendichte ρ läßt sich bei der nichtrelativistischen Hartree-Fock-Methode problemlos durch einen adäquaten Skalierungsansatz für den Ortsanteil der Nukleonwellenfunktionen erzielen (s. z.B. [134]). Im Falle der relativistischen Hartree-Näherung wird man aber mit dem Umstand konfrontiert, daß ein entsprechendes Verfahren für die große *sowie* die kleine Komponente des Nukleonenfeldspinors (2.123) bzw. (2.145) gleichzeitig auch eine Skalierung der skalaren Dichte ρ_s bedeutet. Dies würde im Bulk-Bereich ($z \rightarrow -\infty$) komprimierter SINM, d.h. im Gebiet komprimierter Kernmaterie, zu einer Proportionalität zwischen ρ und ρ_s führen. In der üblicherweise gewählten Normierung (2.44) der Kernmateriespinoren U_α (2.40) und V_α (2.41) zeigt jedoch die skalare Dichte ρ_s für zunehmende Werte von ρ eine charakteristische Absättigung gegen einen konstanten Wert [18]. Damit ist die direkte Umsetzung des Skalierungsmodells bei der relativistischen Hartree-Näherung streng genommen nicht möglich. Eine Skalierung der Dichte ließe sich sowohl bei endlichen Kernen als auch bei komprimierter SINM nur über eine geeignete Nebenbedingung erreichen. Diese Problematik wurde in einer früheren Analyse [123] von Breathing-Mode-Energien durch die Verwendung der leptodermen Entwicklung (9.1) und einer Pocket-Formel für $\check{\sigma}$ umgangen. Die Formel, in die nur Grundzustandsgrößen Eingang finden, wurde unter Verwendung eines allgemeinen Energiedichtefunktional für die energetisch favorisierte Kompressionsmode abgeleitet. Sie führt allerdings zu Werten von $\check{\sigma}$, die vom Betrag her um bis zu 30% größer als die des Skalierungsmodells [102, 135] ausfallen.

In der hier vorgestellten Studie [133] wurde die Analyse [123] für die sechs Parametersätze aus Tabelle B.1 nochmals aufgegriffen. Für $\check{\sigma}$ wurde jedoch der Ausdruck

$$\check{\sigma} \equiv \left(\frac{d^2\sigma}{d\rho_c^2} \right)_{\rho_c=\rho_0} = \frac{1}{\rho_0^2} \frac{K_v \rho_0 \alpha}{18} (\beta^2 - 2\beta - 5) \Big|_{\beta=-1/3} = -\frac{19}{81} \frac{K_v \alpha}{\rho_0} \quad (10.2)$$

des nichtrelativistischen Pocket-Modells [103] gewählt, der dem Skalierungsverhalten der Dichte Rechnung trägt und damit die Dynamik von Breathing-Moden stärker berücksichtigt als die entsprechende Formel der Untersuchung [123]. Der Parameter α in Gl. (10.2) stellt den Oberflächenkoeffizienten einer symmetrischen Fermi-Funktion dar und muß im Falle numerisch bestimmter Hartree-Dichten über einen Fit ermittelt werden.

Ein Vergleich der $\check{\sigma}$ -Werte des Pocket-Modells für die energetisch am tiefsten liegende statische Kompressionsmode mit den Werten aus Ref. [123] läßt auf eine Unsicherheit von ca. 8% schließen, was einem Fehler von ungefähr 10 MeV für die Werte von $K(A, I)$ entspricht. Der Fehler der leptodermen Entwicklung (9.1) wurde im vorangegangenen Kapitel im Rahmen der RTF-Näherung eingehend untersucht. In Übereinstimmung mit der dort ermittelten Abschätzung liefert eine nichtrelativistische Analyse auf der Basis

Tabelle 10.1. *RH-Werte von INM- und SINM-Koeffizienten für die Parametersätze aus Tabelle B.1. (Für eine Erläuterung der einzelnen Größen siehe Text.)*

	NL-Z	NL1	NLC	NL3	NL-RA	NL-SH
a_v (MeV)	-16.18	-16.42	-15.77	-16.24	-16.25	-16.35
ρ_0 (fm ⁻³)	0.1508	0.1518	0.1485	0.1482	0.1570	0.1460
r_0 (fm)	1.17	1.16	1.17	1.17	1.15	1.18
K_v (MeV)	172.8	211.1	224.5	271.5	320.5	355.3
K' (MeV)	422.5	32.7	278.1	-203.0	-216.2	-601.6
J (MeV)	41.72	43.46	35.02	37.40	38.90	36.12
L (MeV)	133.91	140.07	107.97	118.53	119.09	113.64
K_{sym} (MeV)	140.20	142.68	76.91	100.88	62.11	79.77
σ (MeV fm ⁻²)	1.038	1.098	1.021	1.069	1.169	1.092
a_{sf} (MeV)	17.71	18.66	17.61	18.47	19.43	19.04
α (fm)	0.5279	0.5160	0.4763	0.4546	0.4289	0.4125
$\ddot{\sigma}$ (MeV fm ⁴)	-141.9	-168.4	-168.9	-195.4	-205.3	-235.5
K_{sf} (MeV)	-192.9	-188.3	-234.1	-233.0	-303.4	-304.6
K_{vs} (MeV)	-335.9	-676.1	-437.1	-698.9	-732.8	-794.5
K_{Coul} (MeV)	-4.12	-5.83	-4.99	-6.45	-6.52	-7.11

der Arbeiten [136, 122] einen Nettfehler in der Größenordnung von 10 MeV. Schließlich verbleibt die Frage nach der Gültigkeit des Skalierungsmodells selbst. Ein Vergleich mit RPA-Rechnungen zeigte [137], daß das Skalierungsmodell $K(A, I)$ um nicht mehr als 10 MeV überschätzt.

Zur Überprüfung der hier angewandten Methode diente ein Vergleich der Skalierungsmodellwerte von $K(A, I)$ ($90 \leq A \leq 208$) aus Ref. [122] mit den Näherungswerten von Gl. (9.1) unter Verwendung der α -Parameter aus Ref. [14] für die Skyrme-Wechselwirkungen SIII, Ska und SkM*. Die Abweichung betrug dabei 2% (SIII), 6% (Ska) und 10% (SkM*). Erwartungsgemäß ergab sich eine umso bessere Übereinstimmung, je kleiner die Asymmetrie der Nukleonendichte war. Da im Falle der RH-Näherung die SINM-Dichten der hier betrachteten Parametersätze sogar genauer durch eine Fermi-Funktion approximiert werden können, sollte Gl. (10.2) eine recht zuverlässige Abschätzung der Inkompressibilität endlicher Kerne ermöglichen.

Tabelle 10.1 zeigt die RH-Werte der SINM-Größe a_{sf} (2.76), der Oberflächenspannung σ und die Werte des Oberflächenparameters α , die aus Fits der SINM-Dichten an eine symmetrische Fermi-Funktion gewonnen wurden. Der experimentelle Wert von α ist recht genau bekannt und beträgt (0.53 ± 0.03) fm [43, 82, 83, 85]. Zusätzlich sind in Tabelle 10.1 die Werte von $\ddot{\sigma}$ (10.2) sowie die Werte von K_{sf} , K_{vs} und K_{Coul} (9.2) – (9.4) angeführt. Der Vollständigkeit halber wurden ebenfalls die benötigten INM-Entwicklungskoeffizienten aus Tabelle 9.1 aufgelistet.

Abbildung 10.1 zeigt die berechneten Werte von $K(A, I)$ im Vergleich zu den experimentellen Werten [123], die über die Beziehung (10.1) aus den Refn. [130–132] extrahiert wurden. Eine Übereinstimmung mit den Werten des Skalierungsmodells ist nur für die

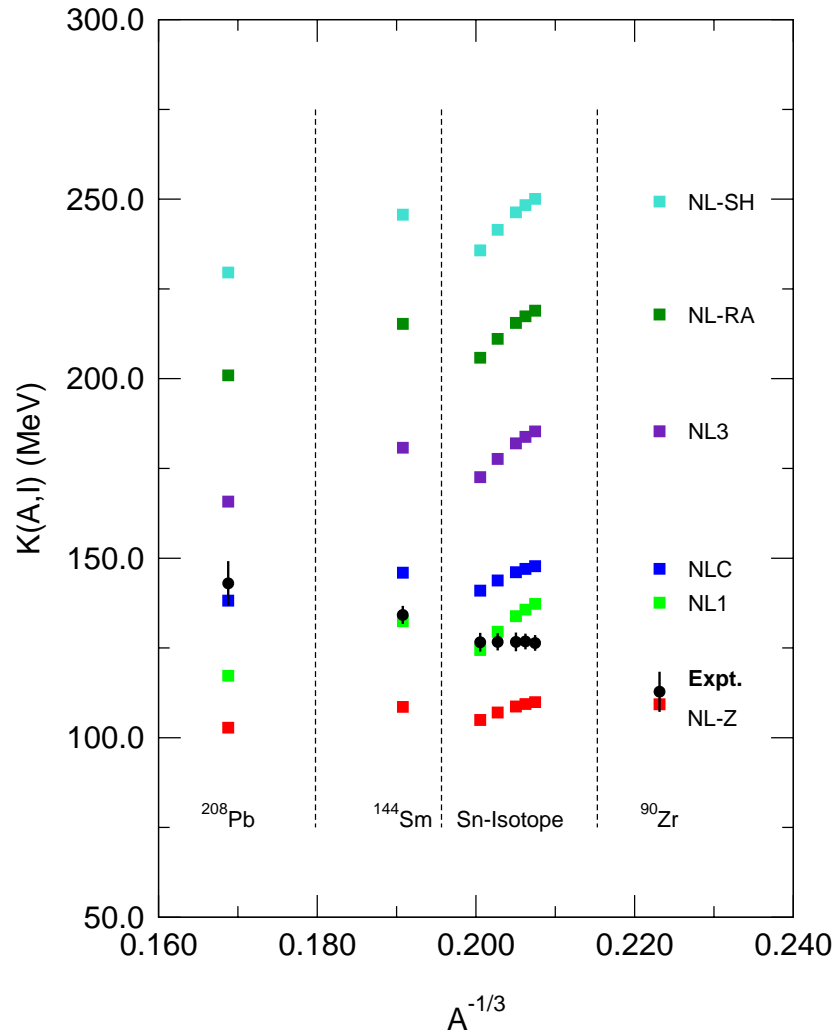


Abb. 10.1. Inkompressibilität $K(A, I)$ endlicher Kerne, berechnet mit der leptodermen Entwicklung (9.1) unter Verwendung der RH -Werte aus Tabelle 10.1.

Parametersätze NL-Z, NL1 und NLC mit einer Inkompressibilität $K_v < 230$ MeV ersichtlich. Weder der generelle experimentelle Trend in A noch die Isospin-Abhängigkeit werden in Abb. 10.1 durch die theoretischen Werte zufriedenstellend reproduziert. Im vorangegangenen Kapitel wurde gezeigt, daß Beiträge höherer Ordnung zu Gl. (9.1) zumindest die I -Abhängigkeit bei den Zinnisotopen in Abb. 10.1 verbessern würden. Durch einen nachfolgenden Vergleich mit RTF-Resultaten kann abgeschätzt werden, inwiefern Krümmungs- und Oberflächensymmetrieterme ebenfalls die A -Abhängigkeit korrigieren können.

In Abb. 10.2 wurden die $K(A, I)$ -Werte für den Kern ^{208}Pb aus Abb. 10.1 nochmals gesondert als Funktion von K_v dargestellt. Zu Vergleichszwecken wurde der experimentelle Wert mit seinem Fehler an der Ordinate mit einem rechteckigen Symbol angedeutet. Die $K_{\text{sf-}}$, $K_{\text{vs-}}$ und K_{Coul} -Terme in der $K(A, I)$ -Entwicklung (9.1) liegen im Falle der grundzustandsäquivalenten RMF-Parametersätze aus Tabelle B.1 in der Größenordnung von etwa $-0.15 K_v$ und reduzieren in der Summe den Hauptbeitrag K_v um ca. 36 – 44%.

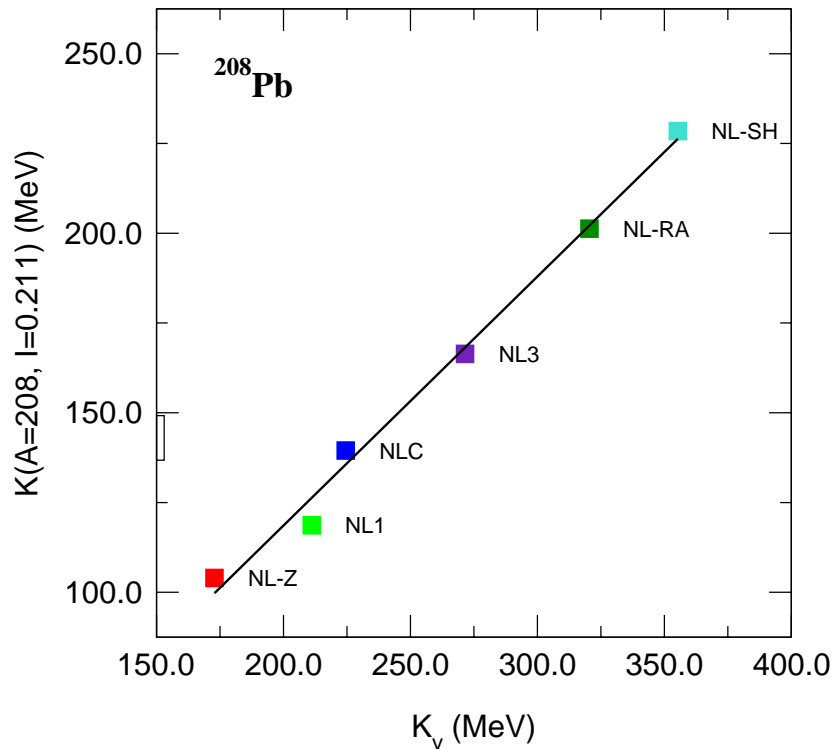


Abb. 10.2. Inkompressibilität $K(A = 208, I = 0.211)$ des Kerns ^{208}Pb als Funktion von K_v , berechnet mit Gl. (9.1) unter Verwendung der RH-Werte aus Tabelle 10.1. Der experimentelle Wert und sein Fehler sind an der Ordinate als Rechteck angedeutet. Die durchgezogene Linie $K(A = 208, I = 0.211) = -20.07 \text{ MeV} + 0.69 K_v$ wurde über eine lineare Regression gewonnen.

Dies führt auf eine genähert lineare Beziehung zwischen $K_A(^{208}\text{Pb})$ und K_v . Wie bereits in Kap. 4 ausgeführt, gewährleistet eine Berücksichtigung von Oberflächeneigenschaften bei der numerischen Anpassung von effektiven Wechselwirkungen eine Beschränkung der Inkompressibilität infinitesimaler Kernmaterie. Die in der Regel angepaßten Grundzustandseigenschaften – vornehmlich Massen und Radien – erlauben dagegen nicht die Extraktion eines eindeutigen Wertes von K_v . Die Analyse von Breathing-Mode-Energien kann jedoch dabei behilflich sein, einen realistischen Wert von K_v und somit einen verlässlichen, einheitlichen RMF-Parametersatz zu ermitteln. Die strikte Auswertung der Regressionsgeraden aus Abb. 10.2 für den experimentellen Wertebereich von $K_A(^{208}\text{Pb})$ ergibt: $K_v = 235 \pm 9 \text{ MeV}$.

Die Resultate aus RTF-Skalierungsrechnungen für die Kerne aus Abb. 10.1 sind in Abb. 10.3 dargestellt. Im Vergleich mit den RH-Näherungswerten von Abb. 10.1 fällt besonders eine verbesserte Isospin-Abhängigkeit speziell im Fall der Zinnisotope auf. Die RTF-Werte von $K(A, I)$ sind für alle betrachteten Kerne unabhängig von A und I praktisch konstant. Die tendenzielle Abnahme der experimentellen Daten mit fallender Nukleonenzahl A wird von keinem der Parametersätze zufriedenstellend reproduziert. Abbildung 10.4 zeigt, daß auch im Falle von RTF in guter Näherung eine lineare Beziehung zwischen $K_A(^{208}\text{Pb})$ und K_v besteht. Die RTF-Werte stimmen dabei innerhalb einer ma-

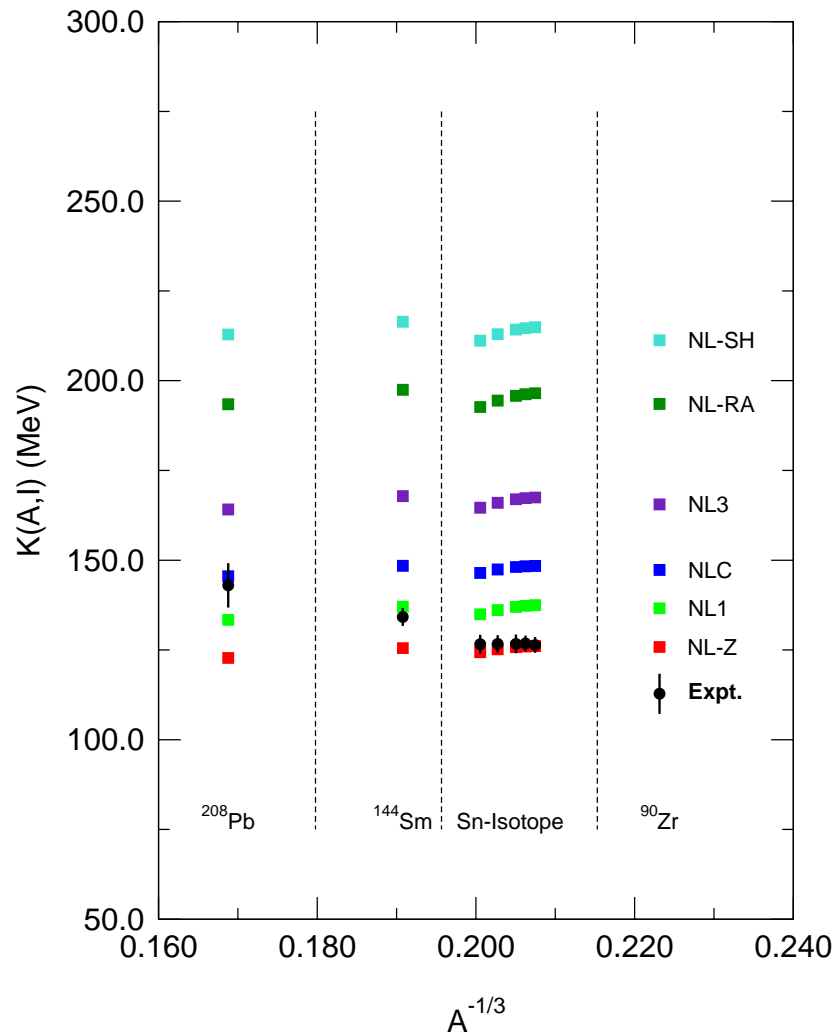


Abb. 10.3. RTF-Skalierungswerte von $K(A, I)$ für die Kerne aus Abb. 10.1.

ximalen Abweichung von ca. 19 MeV mit denen der RH-Analyse (Abb. 10.2) überein. Die Auswertung der RTF-Regressionsgeraden liefert den für K_V zulässigen Wertebereich 221 ± 12 MeV. Der Vergleich mit dem zuvor genannten RH-Bereich ergibt die Überdeckung $K_V = 230 \pm 4$ MeV. Die gemeinsame Regressionsgerade an die RH- sowie die RTF-Werte von $K_A(^{208}\text{Pb})$ führt auf 230 ± 10 MeV.

Zusammenfassend läßt sich also festhalten, daß RMF-Parametersätze eine INM-Inkompressibilität von maximal ca. 230–240 MeV aufweisen sollten, um mit experimentellen Breathing-Mode-Energien kompatibel zu sein. Diese Schlußfolgerung ist in Übereinstimmung mit einer nichtrelativistischen Skyrme-Analyse im Skalierungsmodell [5], einem Fit an Kernmassen und experimentelle GMR-Energien [138] sowie den mikroskopischen RPA-Rechnungen aus Ref. [9], die in Verbindung mit einer Analyse von Breathing-Mode-Energien [129, 139, 25] den Wert von K_V auf den Bereich 231 ± 5 MeV einschränken. Bemerkenswerterweise fällt die Inkompressibilität $K_V = 234$ MeV des nichtrelativistischen TF-SB-Modells von Myers und Swiatecki [13] aus Tabelle 4.1 genau in diesen Bereich. Die Parameter der darin verwendeten generalisierten Seyler-Blanchard-Wechselwirkung wur-

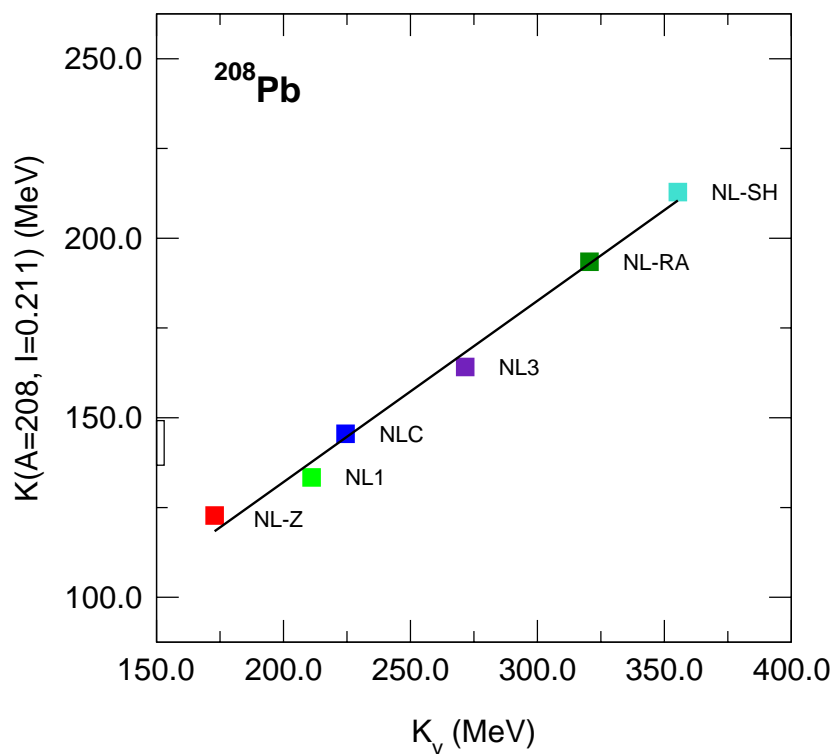


Abb. 10.4. *RTF-Resultate für $K(A = 208, I = 0.211)$ (s.a. Abb. 10.2). Regressionsgerade: $K(A = 208, I = 0.211) = 31.13 \text{ MeV} + 0.50 K_v$.*

den im Rahmen der Thomas-Fermi-Näherung durch Fits an Massen *und* Oberflächeneigenschaften endlicher Kerne angepaßt (vgl. die Diskussion über grundzustandsäquivalente Wechselwirkungen in Kap. 4).

Kapitel 11

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit werden Kompressionseigenschaften von Kernen innerhalb der Relativistischen Mittelfeldnäherung (RMF) untersucht. Die Arbeit wurde dazu in zwei Teile aufgeteilt: Teil I behandelt nukleare Systeme in ihrem Grundzustand. Oberflächeneigenschaften wie die Oberflächenspannung σ gesättigter, isospinsymmetrischer semi-infiniter Kernmaterie (SINM) und die 90%-10%-SINM-Oberflächendicke t spielen dabei eine zentrale Rolle. Teil II setzt sich mit dem Verhalten von Kernen unter äußerem Druck in statischer Näherung auseinander.

Als Basis für alle weiteren Betrachtungen wird in Teil I zunächst eine Einführung in das nichtlineare σ - ω - ρ -Modell [18, 23] der Quantenhydrodynamik gegeben (Kap. 2). Feldtheoretische Grundzüge und die Annahmen der RMF werden dargestellt und auf das Modellsystem Infinite Kernmaterie (INM) sowie Systeme mit ortsabhängiger Dichte angewandt. Als Näherungsverfahren für alle konkreten Berechnungen werden die Relativistische Thomas-Fermi-Näherung (RTF) sowie die Relativistische Hartree-Näherung (RH) für SINM und sphärisch-symmetrische Kerne beschrieben.

Druck- und Kräfteverhältnisse in gesättigten nuklearen Systemen werden in Kap. 3 feldtheoretisch anhand des Spannungstensors T_{ik} , dem Raumanteil des Energie-Impulstensors $T_{\mu\nu}$, in RTF-Näherung studiert. Speziell für isospinsymmetrische SINM stellt sich heraus, daß das Element T_{33} identisch verschwindet und damit die Kräftefreiheit des semi-infiniten Systems entlang der z -Achse widerspiegelt. In endlichen Kernen verbleibt selbst bei abgeschalteter Coulombkraft noch ein zentraler Druck, der insbesondere bei schweren Kernen mit der elementaren Tröpfchenmodellbeziehung $p = 2\sigma/R$ zwischen dem Druck p , der Oberflächenspannung σ und dem Kernradius R sehr gut übereinstimmt. Das Einschalten der Coulombkraft führt in exotisch großen Kernen zu Dichten mit Blasenstruktur. Die Entstehung solcher Blasenkerne [70–74, 12, 75–78] beruht dabei auf einer Art Faraday-Becher-Effekt, bei dem die Protonen durch die gegenseitige elektrostatische Abstoßung fast vollständig in den Oberflächenbereich des Kerns drängen, um dadurch den Coulombbeitrag zur gesamten Energie zu reduzieren.

Die Betrachtungen zu grundzustandsäquivalenten Wechselwirkungen in Kap. 4 nehmen einen zentralen Stellenwert im ersten Teil dieser Arbeit ein. Grundzustandsäquivalent werden solche effektiven Wechselwirkungen genannt, deren freie Parameter durch die Anpassung an Grundzustandseigenschaften wie Kernmassen und -radien bestimmt wurden. Für unterschiedliche RMF-Parametersätze, die gebräuchlichsten nichtrelativistischen Skyrme- und Gogny-Wechselwirkungen sowie generalisierte Thomas-Fermi-Seyler-Blanchard-Ansätze läßt sich genähert eine lineare Beziehung zwischen der Inkompressi-

bilität K_∞ und der Anharmonizität K' feststellen. Auch für den Kehrwert der SINM-Oberflächendicke t ist ein linearer Zusammenhang mit K_∞ bei den betrachteten Wechselwirkungen zu erkennen. Ein Vergleich mit dem empirischen Wert $t = 2.2 - 2.4$ fm ergibt, daß grundzustandsäquivalente Wechselwirkungen zusätzlich an Oberflächeneigenschaften wie etwa Ladungsdichten, Diffraktionsradien oder Oberflächendicken angepaßt werden sollten, um einen realistischen Wert von ca. 220 – 240 MeV für K_∞ garantieren zu können. Dieser Wertebereich ergibt sich aus Analysen von experimentellen Breathing-Mode-Energien der isoskalaren Monopolriesenresonanz (GMR) in Kernen.

Im Gegensatz zu nichtrelativistischen Methoden fällt im Falle des σ - ω - ρ -Modells die Oberflächendicke t jedoch zu klein aus, wenn man eine GMR-kompatible Inkompressibilität gewährleisten will. Es wird daher eine Modifikation des von Zimányi und Moszkowski vorgestellten Skalaren Ableitungskopplungsmodells (ZM) [26] in Kap. 5 als alternativer feldtheoretischer Ansatz untersucht. Das ursprüngliche ZM-Modell zeichnet sich besonders durch einen realistischen Wert (225 MeV) für K_∞ aus. Seine hohe effektive Masse M^* in gesättigter INM hat aber zu kleine Spin-Bahn-Aufspaltungen in Kernen zur Folge. Auch die Oberflächendicke t stellt sich als zu klein heraus. Zur ursprünglichen Lagrangedichte des ZM-Modells wird daher ein Tensorkopplungsterm hinzugefügt, der Kernmaterieeigenschaften unverändert läßt und sich nur im Oberflächenbereich inhomogener Systeme auswirkt. Durch ihn können Spin-Bahn-Aufspaltungen in Kernen deutlich verbessert werden. Die Anpassung der freien Parameter an endliche Kerne zeigt aber, daß das ZM-Modell trotz Modifikation keine zufriedenstellenden Oberflächeneigenschaften aufweist.

Das Verhalten von Kernen sowohl unter schwachen als auch unter starken Kompressionen wird in Teil II in statischer Näherung im Rahmen des nichtlinearen σ - ω - ρ -Modells studiert. In Kap. 6 wird die Lagrangedichte dazu eigens um einen Zusatzterm \mathcal{C} erweitert, der den äußeren Druck auf das nukleare System modelliert und eine Auslenkung des Systems aus seinem Grundzustand zur Folge hat. Allgemein kann \mathcal{C} beliebige invariante Kontraktionen von Feldern und deren Ableitungen enthalten. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden entweder rein nukleonische Stromdichtebeiträge, die in Mittelfeldnäherung Funktionen der baryonischen Dichte sind, oder rein mesonische Beiträge untersucht.

Zum Studium von komprimierten Kernen in RTF-Näherung wird in Kap. 7 ein realistischer dichteabhängiger Zusatzterm herangezogen. Der Einfluß der Kompressionsmode auf Energien und Kerninkompressibilitäten $K(A, I)$ wird diskutiert. Speziell für das Skalierungsmodell werden die Stabilitätseigenschaften komprimierter Kerne bezüglich Teilchenemission und β -Zerfall untersucht. Bei wachsender Kompression weisen ursprünglich stabile Kerne eine zunehmende β^+ -Instabilität auf. Eine genügend starke Kompression kann sogar zur Emission eines Protons führen. Auch die Stabilität von Kernen gegenüber Spaltung wird von einem äußeren Druck beeinflusst. Durch die Abnahme der Oberflächenspannung und die gleichzeitige Erhöhung der Coulombenergie werden Spaltbarrieren im Rahmen des Tropfenmodells (LDM) deutlich reduziert.

Einteilcheneffekte, die die RTF-Methode nicht berücksichtigt, werden im Rahmen der RH-Näherung in Kap. 8 untersucht. Dabei kommt vor allem ein mesonischer Zusatzterm zum Einsatz. Unabhängig davon, ob der gewählte Zusatzterm dichteabhängig oder rein mesonischen Ursprungs ist, kann bereits für kleine Kerne bei einer gewissen kritischen Kompression ein phasenübergangsartiger Sprung in der Kerndichte beobachtet werden. Es bildet sich eine Blasenkernelstruktur aus, die mit einer charakteristischen Umordnung der Einteilchenniveaus verbunden ist. Das sich daraus ergebende Termschema zeigt große

Ähnlichkeit mit dem eigentlichen Blasenkerne, die sich im Gebiet exotischer großer Kerne wegen der elektrostatischen Abstoßung der Protonen einstellen [75, 77]. Testrechnungen bei ausgeschalteter Coulombkraft führen ebenfalls ab einer gewissen kritischen Kompression zu einer Blasenform, so daß der in dieser Arbeit gefundene Effekt als ein rein kompressionsbedingter Einteilcheneffekt anzusehen ist. Neue magische Zahlen für komprimierte Kerne sind daher zu erwarten. Darüber hinaus zeichnet sich wegen der fallweise auftretenden partiellen Besetzung von Blasenkerzuständen eine Deformation ursprünglich sphärisch-symmetrischer Kerne unter Kompression ab. Bei einer noch stärkeren Kompression ist zudem eine Anregung der Nukleonresonanzen Δ^0 und Δ^+ (Ruhemasse 1232 MeV) zu erwarten, welche von Hasan, Vary *et al.* innerhalb der nichtrelativistischen Hartree-Fock-Methode untersucht wurden [116–118].

Kapitel 8 greift die Diskussion des vorhergehenden Kapitels über Kernspaltung unter äußerem Druck für den Fall der RH-Näherung auf. Deformationsenergien werden innerhalb des Tropfenmodells unter Verwendung der sogenannten Nix-Family [110], einer Parametrisierung für axialsymmetrisch deformierte Kerne, berechnet. Die prinzipielle Abnahme von Spaltbarrieren unter Kompression wird an den Kernen ^{238}U und ^{240}Pu verdeutlicht. Ein Vergleich mit dem empirischen Tropfenmodellwert der Spaltbarriere von ^{240}Pu zeigt, daß die in dieser Arbeit berücksichtigten grundzustandsäquivalenten RMF-Parametersätze bereits im unkomprimierten Fall LDM-Spaltbarrieren überschätzen. Als Ursache hierfür können zu hohe Werte für die Quotienten σ/ρ_0 und $\sigma/\rho_0^{2/3}$ angesehen werden. Eine zusätzliche Berücksichtigung von Spaltbarrieren wäre daher bei der Anpassung von effektiven Wechselwirkungen erforderlich, um die beiden Verhältnisse in ihrer Höhe einzuschränken.

Blaizot, Gogny und Grammaticos stellten in ihrer grundlegenden Random-Phase-Approximations-Analyse (RPA) [24] von Monopolriesenresonanzen eine allgemeine, tröpfchenmodellartige Entwicklung der Kerninkompressibilität $K(A, I)$ nach $A^{-1/3}$ und I^2 vor [24]. Die Ausdrücke für die Koeffizienten einer solchen Entwicklung wurden von Blaizot im Skalierungsmodell bestimmt [119]. Eine Erweiterung um die Beiträge der nächsthöheren Ordnung haben Nayak *et al.* für den Fall nichtrelativistischer Skyrme-Wechselwirkungen innerhalb der Extended-Thomas-Fermi-Näherung untersucht [122]. Die Güte beider Entwicklungen wird in Kap. 9 im Rahmen der RTF-Näherung durch einen Vergleich mit Skalierungsrechnungen für endliche Kerne bei ein- und ausgeschalteter Coulombkraft studiert. Die zusätzlichen Terme aus Ref. [122] führen nur bei einem großen Neutronenüberschuß I zu einer deutlich besseren Reproduktion der $K(A, I)$ -Werte. Selbst für hohe Werte von I erhält man bereits mit der ursprünglichen Entwicklung von Blaizot [119] einen verlässlichen Schätzwert für die Inkompressibilität endlicher Kerne.

Mit Hilfe der Entwicklung aus Ref. [119] erfolgt in Kap. 10 eine RH-Skalierungsmodell-Analyse experimenteller Breathing-Mode-Energien. Die Ergebnisse werden mit RTF-Skalierungsrechnungen für komprimierte endliche Kerne verglichen. Beide Verfahren schränken die Inkompressibilität K_∞ auf den Bereich 230 ± 10 MeV ein. Dieses Resultat ist in Übereinstimmung mit der Analyse von Youngblood, Clark und Lui [25], die zusammen mit den mikroskopischen RPA-Rechnungen von Blaizot *et al.* [9] den Wert von K_∞ auf 231 ± 5 MeV fixiert.

Anhang A

Notation und Dirac-Matrizen

Notation und Metrik

Raumvektoren werden fett gedruckt. Für den Betrag des Impulses $\mathbf{k} \equiv (k_x, k_y, k_z)^t$ wird $k \equiv \|\mathbf{k}\|$, für den Betrag des Ortsvektors $\mathbf{x} \equiv (x, y, z)^t$ wird $r \equiv \|\mathbf{x}\|$ geschrieben. Für das infinitesimale Volumenelement d^3x wird bei Raumintegralen häufig auch die Schreibweise d^3r verwendet.

Isospinvektoren werden mit einem Vektorpfeil versehen, ihre einzelnen Komponenten sind mit arabischen Zahlen durchnummeriert.

Für den kontravarianten Vierer-Vektor x^μ wird der Einfachheit halber auch

$$x \equiv x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^0, x, y, z) \equiv (t, \mathbf{x}) \quad (\text{A.1})$$

verwendet ($\hbar \equiv c \equiv 1$).

Der kovariante Vierer-Vektor x_μ ist über

$$x_\mu \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) = g_{\mu\nu} x^\nu \equiv (t, -\mathbf{x}) \quad (\text{A.2})$$

mit dem entsprechenden kontravarianten Vektor verknüpft. $g_{\mu\nu}$ bezeichnet dabei den metrischen Tensor:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Über doppelt vorkommende (stumme) griechische sowie lateinische Indizes ist, falls nicht extra vermerkt, gemäß der Einsteinschen Summenkonvention zu summieren.

Ko- und kontravariante Ableitungen nach den Koordinaten x^μ bzw. x_μ werden mit

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad (\text{A.4})$$

abgekürzt.

Dirac-Matrizen

Die γ -Matrizen erfüllen die Antivertauschungs- und Kommutatorrelationen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = i(g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \quad (\text{A.6})$$

und sind über die Beziehungen

$$\boldsymbol{\gamma} = \beta \boldsymbol{\alpha}, \quad \gamma^0 = \beta \quad (\text{A.7})$$

mit den Matrizen $\boldsymbol{\alpha}$ und β verknüpft.

Für die vierkomponentige Verallgemeinerung $\boldsymbol{\Sigma}$ der Paulimatrizen $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^t$,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

gilt:

$$\boldsymbol{\Sigma} \equiv \gamma^5 \boldsymbol{\gamma}^0 \boldsymbol{\gamma}, \quad (\text{A.9})$$

mit der Matrix

$$\gamma^5 = \gamma_5 \equiv i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3. \quad (\text{A.10})$$

Die Matrizen $\gamma^0 = \beta$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\alpha}$, γ^5 und $\boldsymbol{\Sigma}$ haben in der gebräuchlichen Dirac-Darstellung die Gestalt:

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 \\ 0 & -\underline{1} \end{pmatrix}, \quad \underline{1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \underline{1} \\ \underline{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

Anhang B

Parametersätze des σ - ω - ρ -Modells

Tabelle B.1. RMF-Parametersätze des σ - ω - ρ -Modells. Die Nukleonmasse M sowie die Mesonmassen m_σ , m_ω und m_ρ sind in MeV gegeben. $C_i^2 = g_i^2 (M/m_i)^2$, $i = \sigma, \omega, \rho$.

	NL-Z [20]	NL1 [20]	NLC [22]	NL3 [127]	NL-RA [140]	NL-SH[141]
M (MeV)	938.90	938.00	939.00	939.00	939.00	939.00
m_σ (MeV)	488.67	492.25	500.80	508.194	515.00	526.059
m_ω (MeV)	780.00	795.36	783.00	782.501	782.60	783.00
m_ρ (MeV)	763.00	763.00	770.00	763.00	763.00	763.00
C_σ^2	373.2479	373.1760	334.3711	356.3846	308.08	347.533
C_ω^2	241.4392	245.4580	214.1854	238.4424	204.00	240.997
C_ρ^2	35.6700	37.4175	27.8800	30.3161	31.00	29.0954
b	0.0027922	0.0024578	0.0028703	0.0020553	0.0019	0.0012747
c	-0.0039347	-0.0034334	-0.0036849	-0.0026508	-0.0019	-0.0013308

Abbildungsverzeichnis

2.1	Energie pro Nukleon in infiniten Kernmaterie (NL1).	15
2.2	(N, Z) -Ebene mit β -Stabilitätslinie, Teilchenabbruchkanten und Höhenlinien für B/A (RTF, NL1).	21
2.3	RTF- und RH-Dichten für den Kern ^{208}Pb sowie symmetrische SINM (NL1).	30
3.1	Die Diagonalelemente $T_{\theta\theta}^A$, $T_{\varphi\varphi}^A$ und T_{rr}^A des Spannungstensors T_{ab}^A (RTF).	37
3.2	Der zentrale Wert $T_{rr}^A(r=0)$ als Funktion der Nukleonenzahl A (RTF, NL1).	38
3.3	Relative Dichteänderung im Zentrum als Funktion von $A^{-1/3}$ (RTF).	39
3.4	RTF-Dichten kurz vor und nach der Kavitationsgrenze (NL1).	40
3.5	Dichten des Kerns $^{760}228$ (RH, NL1).	41
3.6	Einteilchenenergien von Protonen im Kern $^{760}228$ (RH, NL1).	43
4.1	INM-Anharmonizität K' vs. K_∞ für die Wechselwirkungen aus Tabelle 4.1.	47
4.2	$1/t$ vs. K_∞ für die Wechselwirkungen aus Tabelle 4.1.	48
5.1	σ und t des ZM-Modells als Funktion der Mesonenmasse m_σ (RH).	54
5.2	σ und t des MZM-Modells (RH).	55
5.3	Spin-Bahn-Potential in SINM für $k = k_F$ im MZM-Modell mit $f_v = 0$ (RH).	56
5.4	MZM-Spin-Bahn-Potential in SINM für $k = k_F$ mit $m_\sigma = 525$ MeV (RH).	57
5.5	Realistische Parameterbereiche in der (m_σ, f_v) -Ebene für das MZM-Modell.	58
5.6	Bindungsenergie pro Nukleon des Kerns ^{208}Pb im MZM-Modell (RH).	59
5.7	Spin-Bahn-Potential für den Kern ^{208}Pb im MZM-Modell (RH).	60
5.8	Dichte in ^{208}Pb im MZM-Modell für $m_\sigma = 525$ MeV (RH).	61
6.1	Nukleare Oberflächenspannung von komprimierter SINM (RTF).	72
7.1	Zentrales Kompressionsverhältnis in ^{40}Ca (RTF).	77
7.2	Oberflächendicke komprimierter Kerne und SINM in RTF.	78
7.3	Nukleare Energie/Nukleon der komprimierten Kerne ^{40}Ca und ^{208}Pb (RTF).	80
7.4	Kerninkompressibilität von $N=Z$ -Kernen als Funktion von $A^{-1/3}$ (RTF).	81
7.5	β -Stabilitätslinien komprimierter Kerne (RTF, Skalierungsmode).	82
7.6	Stabilitätsbereiche für komprimierte Kerne (RTF, Skalierungsmode).	83
7.7	Der kritische Wert $(Z^2/A)_{\text{crit}}$ und σ von komprimierten Kernen (RTF).	85
8.1	Energien, Radius und zentrale Kompression von komprimiertem ^{40}Ca (RH).	90
8.2	Dichten eines komprimierten ^{40}Ca -Kerns (RH).	91
8.3	Einteilchenenergien in einem komprimierten ^{40}Ca -Kern (RH).	92

8.4	Spin-Bahn-Potential und Radialwellenfunktionen in einem komprimierten ^{40}Ca -Kern (RH).	93
8.5	Einteilchenenergien eines komprimierten ^{56}Ni -Kerns (RH).	95
8.6	Deformationsenergien komprimierter ^{238}U - und ^{240}Pu -Kerne.	97
8.7	Relative Spaltbarrieren von komprimierten Kernen.	97
8.8	Deformationsenergien für ^{240}Pu für die Parametersätze aus Tabelle B.1 sowie die Skyrme-Kraft SkM^* (ETF).	99
9.1	Inkompressibilität endlicher Kerne als Funktion von $A^{-1/3}$ (RTF).	107
9.2	Konvergenz der Entwicklung der Inkompressibilität endlicher Kerne (RTF).	108
9.3	Erste und zweite Ableitung der Inkompressibilität endl. Kerne nach $A^{-1/3}$	109
9.4	ζ (9.29) und die SINM-Grenzwerte für $x \rightarrow 0$ (RTF).	110
9.5	Konvergenzeigenschaften der Entwicklungen (9.1) und (9.5) (RTF).	112
9.6	Inkompressibilität $K^{\sigma\omega\rho\gamma}(A, I)$ endlicher Kerne vs. A (RTF).	114
10.1	Inkompressibilität $K(A, I)$ endlicher Kerne, berechnet mit der leptodermen Entwicklung (9.1) unter Verwendung der RH-Werte aus Tabelle 10.1.	118
10.2	Inkompressibilität $K(A = 208, I = 0.211)$ des Kerns ^{208}Pb als Fkt. von K_v , berechnet mit Gl. (9.1) unter Verwendung der RH-Werte aus Tabelle 10.1.	119
10.3	RTF-Skalierungswerte von $K(A, I)$ für die Kerne aus Abb. 10.1.	120
10.4	RTF-Resultate für $K(A = 208, I = 0.211)$	121

Tabellenverzeichnis

2.1	RTF- und RH-Werte der Bindungsenergie und des Ladungsradius endlicher Kerne.	30
4.1	INM- und SINM-Koeffizienten für unterschiedliche Wechselwirkungen.	46
4.2	Werte der Pocket-Formel für K_∞ für die Wechselwirkungen aus Tab. 4.1.	49
5.1	Kopplungskonstanten und Mesonenmassen des MZM-Modells.	53
5.2	Kernmaterieeigenschaften des MZM-Modells.	53
5.3	Das Verhältnis σ/t (MZM-RH) für unterschiedliche Werte von m_σ und f_v	56
5.4	Bindungsenergien, Ladungsradien und Spin-Bahn-Aufspaltungen für ^{16}O , ^{40}Ca , ^{48}Ca und ^{208}Pb (MZM-RH).	61
8.1	ρ_0 , σ sowie σ/ρ_0 und $\sigma/\rho_0^{2/3}$ für die Wechselwirkungen aus Tab. B.1 (RH).	99
9.1	INM- und SINM-Entwicklungskoeffizienten in RTF-Näherung.	105
9.2	Koeffizienten der leptodermen Entwicklung von $K(A, I)$ (RTF).	106
10.1	INM- und SINM-Koeffizienten für die Parametersätze aus Tab. B.1 (RH).	117
B.1	RMF-Parametersätze des σ - ω - ρ -Modells.	129

Literaturverzeichnis

- [1] T. H. R. Skyrme, *Phil. Mag.* **1**, 1043 (1956).
- [2] T. H. R. Skyrme, *Nucl. Phys.* **9**, 615 (1959).
- [3] D. Vautherin und D. M. Brink, *Phys. Rev. C* **5**, 626 (1972).
- [4] P. Quentin und H. Flocard, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **28**, 523 (1978).
- [5] M. Farine, J. M. Pearson und F. Tondeur, *Nucl. Phys.* **A615**, 135 (1997).
- [6] D. Gogny, in *Nuclear self-consistent fields*, herausgegeben von G. Ripka und M. Porneuf (North-Holland, Amsterdam, 1975), S. 333.
- [7] J. F. Berger, M. Girod und D. Gogny, *Nucl. Phys.* **A502**, 85c (1989).
- [8] J. F. Berger, M. Girod und D. Gogny, *Comp. Phys. Comm.* **63**, 365 (1991).
- [9] J. P. Blaizot, J. F. Berger, J. Dechargé und M. Girod, *Nucl. Phys.* **A591**, 435 (1995).
- [10] W. D. Myers und W. J. Swiatecki, *Ann. Phys. (N.Y.)* **204**, 401 (1990).
- [11] P. Möller, J. R. Nix, W. D. Myers und W. J. Swiatecki, *At. Data Nucl. Data Tables* **59**, 185 (1995).
- [12] W. D. Myers und W. J. Swiatecki, *Nucl. Phys.* **A601**, 141 (1996).
- [13] W. D. Myers und W. J. Swiatecki, *Phys. Rev. C* **57**, 3020 (1998).
- [14] M. Brack, C. Guet und H. B. Håkansson, *Phys. Rep.* **123**, 275 (1985).
- [15] J. D. Walecka, *Ann. Phys. (N.Y.)* **83**, 491 (1974).
- [16] J. Boguta und A. R. Bodmer, *Nucl. Phys.* **A292**, 413 (1977).
- [17] B. D. Serot, *Phys. Lett. B* **86**, 146 (1979).
- [18] B. D. Serot und J. D. Walecka, in *The Relativistic Nuclear Many Body Problem*, Bd. 16 der Reihe *Advances in Nuclear Physics*, herausgegeben von J. W. Negele und E. Vogt (Plenum, New York, 1986).
- [19] R. J. Furnstahl, C. E. Price und G. E. Walker, *Phys. Rev. C* **36**, 2590 (1987).
- [20] P.-G. Reinhard, *Rep. Prog. Phys.* **52**, 439 (1989).

- [21] Y. K. Gambhir, P. Ring und A. Thimet, *Ann. Phys (N.Y.)* **198**, 132 (1990).
- [22] B. D. Serot, *Rep. Prog. Phys.* **55**, 1855 (1992).
- [23] B. D. Serot und J. D. Walecka, *Int. J. Mod. Phys.* **E6**, 515 (1997).
- [24] J. P. Blaizot, D. Gogny und B. Grammaticos, *Nucl. Phys.* **A265**, 315 (1976).
- [25] D. H Youngblood, H. L. Clark und Y.-W. Lui, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 691 (1999).
- [26] J. Zimányi und S. A. Moszkowski, *Phys. Rev. C* **42**, 1416 (1990).
- [27] J. D. Bjorken und S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw-Hill Companies, New York, 1964), deutsche Ausgabe: *Relativistische Quantenmechanik* (BI Hochschul-TB Bd. 98, Mannheim, 1966).
- [28] J. D. Bjorken und S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields* (McGraw-Hill Companies, New York, 1965), deutsche Ausgabe: *Relativistische Quantenfeldtheorie* (BI Hochschul-TB Bd. 101, Mannheim, 1967).
- [29] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Klassische Feldtheorie*, Bd. 2 der Reihe *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, 4. Ausg. (Akademie-Verlag, Berlin, 1967).
- [30] C. Itzykson und J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill Book Companies, New York, 1985).
- [31] S. A. Chin, *Ann. Phys. (N.Y.)* **108**, 301 (1977).
- [32] J. D. Walecka, *Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics, Oxford Studies in Nuclear Physics* (Oxford Univ. Press, Oxford, 1995).
- [33] H. Freyer, Diplomarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München, 1994.
- [34] T. v. Chossy, Diplomarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München, 1995.
- [35] W. D. Myers und W. J. Swiatecki, *Ann. Phys. (N.Y.)* **55**, 395 (1969).
- [36] W. J. Swiatecki, *Proc. Roy. Phys. Soc.* **64A**, 226 (1951).
- [37] N. M. Hugenholtz und L. van Hove, *Physica* **24**, 363 (1958).
- [38] W. D. Myers, W. J. Swiatecki und C. S. Wang, *Nucl. Phys.* **A436**, 185 (1985).
- [39] M. Farine und J. M. Pearson, *Phys. Lett. B* **167**, 259 (1986).
- [40] D. Von-Eiff, J. M. Pearson, W. Stocker und M. K. Weigel, *Phys. Lett. B* **324**, 279 (1994).
- [41] C. F. von Weizsäcker, *Z. Phys.* **96**, 431 (1935).
- [42] H. A. Bethe, *Rev. Mod. Phys.* **8**, 139 (1936).
- [43] A. Bohr und B. R. Mottelson, *Single-Particle Motion*, Bd. I der Reihe *Nuclear Structure* (Benjamin, New York, 1969).

- [44] W. D. Myers, Nucl. Phys. **A204**, 465 (1973).
- [45] G. Süßmann, Z. Phys. A **274**, 145 (1975).
- [46] B. D. Serot und J. D. Walecka, Phys. Lett. B **87**, 172 (1979).
- [47] G. Hämmerlin und K.-H. Hoffmann, *Numerische Mathematik*, 2. Ausg. (Springer, Berlin, 1991).
- [48] J. Stoer, *Numerische Mathematik 1*, 6. Ausg. (Springer, Berlin, 1993).
- [49] J. Stoer und R. Bulirsch, *Numerische Mathematik 2*, 3. Ausg. (Springer, Berlin, 1990).
- [50] S. E. Koonin und D. C. Meredith, *Computational Physics* (Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, California, 1990).
- [51] G. Engeln-Müllges und F. Reutter, *Numerik-Algorithmen mit ANSI-C-Programmen* (Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG, Mannheim, 1993).
- [52] T. Mayer-Kuckuk, *Kernphysik*, 4. Ausg. (B. G. Teubner, Stuttgart, 1984).
- [53] J. M. Pearson, *Nuclear Physics: Energy and Matter* (A. Hilger Ltd., Boston, 1986).
- [54] B. Povh, K. Rith, C. Scholz und F. Zetsche, *Teilchen und Kerne*, 5. Ausg. (Springer, Berlin, 1999).
- [55] A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, 2. Ausg. (Princeton Univ. Press, Princeton, 1960).
- [56] D. Hofer und W. Stocker, Nucl. Phys. **A492**, 637 (1989).
- [57] D. Hofer und W. Stocker, Phys. Lett. A **138**, 463 (1989).
- [58] W. Stocker, Nucl. Phys. **A140**, 305 (1969).
- [59] F. Tabakin und K. Amos, Nucl. Phys. **A100**, 574 (1967).
- [60] A. Bouyssy, J.-F. Mathiot, Nguyen Van Giai und S. Marcos, Phys. Rev. C **36**, 380 (1987).
- [61] M. K. Weigel, S. Haddad und F. Weber, J. Phys. **G17**, 619 (1991).
- [62] M. Centelles, X. Viñas, M. Barranco und P. Schuck, Nucl. Phys. **A537**, 486 (1992).
- [63] M. Centelles, X. Viñas, M. Barranco und P. Schuck, Ann. Phys. (N.Y.) **221**, 165 (1993).
- [64] C. Speicher, E. Engel und R. M. Dreizler, Nucl. Phys. **A562**, 569 (1993).
- [65] D. Von-Eiff, S. Haddad und M. K. Weigel, Phys. Rev. C **50**, 1244 (1994).
- [66] H. Uechi, Phys. Rev. C **41**, 744 (1990).

- [67] T. v. Chossy und W. Stocker, Phys. Rev. C **54**, 731 (1996).
- [68] W. Stocker, Nucl. Phys. **A324**, 21 (1979).
- [69] M. Farine und W. Stocker, Nucl. Phys. **A459**, 117 (1986).
- [70] H. A. Wilson, Phys. Rev. **69**, 538 (1946).
- [71] J. A. Wheeler, „Nucleonics Notebook“ (1950) (unveröffentlicht).
- [72] P. J. Siemens und H. A. Bethe, Phys. Rev. Lett. **18**, 704 (1967).
- [73] C.-Y. Wong, Ann. Phys. (N.Y.) **77**, 279 (1973).
- [74] W. J. Swiatecki, Physica Scripta **28**, 349 (1983).
- [75] K. Pomorski und K. Dietrich, Nucl. Phys. **A627**, 175 (1997).
- [76] K. Pomorski und K. Dietrich, Phys. Rev. Lett. **80**, 37 (1998).
- [77] J. Dechargé, J. F. Berger, K. Dietrich und M. S. Weiss, Phys. Lett. B **451**, 275 (1999).
- [78] Y. Yu, A. Bulgac und P. Magierski, Phys. Rev. Lett. **84**, 412 (2000).
- [79] Y. Aboussir, J. M. Pearson, A. K. Dutta und F. Tondeur, At. Data Nucl. Data Tables **61**, 127 (1995).
- [80] W. Stocker und T. v. Chossy, Phys. Rev. C **58**, 2777 (1998).
- [81] M. Farine, private Mitteilungen, 1997.
- [82] R. C. Barrett, Rep. Prog. Phys. **37**, 1 (1974).
- [83] W. D. Myers, *Droplet Model of Atomic Nuclei* (Plenum, New York, 1977).
- [84] J. Friedrich und N. Voegler, Nucl. Phys. **A373**, 192 (1982).
- [85] H. de Vries, C. W. de Jager und C. de Vries, At. Data Nucl. Data Tables **36**, 495 (1987).
- [86] G. Fricke, C. Bernhardt, K. Heilig, L. A. Schaller, L. Schellenberg, E. B. Shera und C. W. de Jager, At. Data Nucl. Data Tables **60**, 177 (1995).
- [87] Z. Patyk, A. Baran, J. F. Berger, J. Dechargé, J. Dobaczewski, P. Ring und A. Sobczewski, Phys. Rev. C **59**, 704 (1999).
- [88] W. Stocker, Phys. Lett. B **104**, 339 (1981).
- [89] M. Farine, Z. Phys. A **331**, 375 (1988).
- [90] A. Delfino, C. T. Coelho und M. Malheiro, Phys. Lett. B **345**, 361 (1995).
- [91] M. Malheiro, A. Delfino und C. T. Coelho, Phys. Rev. C **58**, 426 (1998).

- [92] M. Chiapparini, A. Delfino, M. Malheiro und A. O. Gattone, *Z. Phys. A* **357**, 47 (1997).
- [93] M. M. Sharma, S. A. Moszkowski und P. Ring, *Phys. Rev. C* **44**, 2493 (1991).
- [94] J. Németh, G. Papp und H. Feldmeier, *Nucl. Phys.* **A647**, 107 (1999).
- [95] T. S. Biró und J. Zimányi, *Phys. Lett. B* **391**, 1 (1997).
- [96] D. Von-Eiff, W. Stocker und M. K. Weigel, *Phys. Rev. C* **50**, 1436 (1994).
- [97] M. Onsi, R. C. Nayak, J. M. Pearson, H. Freyer und W. Stocker, *Phys. Rev. C* **55**, 3166 (1997).
- [98] Guo H., T. v. Chossy und W. Stocker, *Phys. Rev. C* **61**, 014307 (1999).
- [99] R. J. Furnstahl, B. D. Serot und Hua-Bin Tang, *Nucl. Phys.* **A615**, 441 (1997).
- [100] M. Del Estal, M. Centelles und X. Viñas, *Nucl. Phys.* **A650**, 443 (1999).
- [101] Guo H., Y. X. Liu und S. Yang, *Phys. Rev. C* **63**, 044320 (2001).
- [102] M. Farine, J. Côté, J. M. Pearson und W. Stocker, *Z. Phys. A* **309**, 151 (1982).
- [103] M. Brack und W. Stocker, *Nucl. Phys.* **A388**, 230 (1982).
- [104] P. Marshall, Diplomarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München, 1998.
- [105] H. Lenske und C. Fuchs, *Phys. Lett. B* **345**, 355 (1995).
- [106] C. Fuchs, H. Lenske und H. H. Wolter, *Phys. Rev. C* **52**, 3043 (1995).
- [107] M. Farine und J. M. Pearson, *Nucl. Phys.* **A422**, 1 (1984).
- [108] T. v. Chossy, P. Marshall und W. Stocker, *Phys. Rev. C* **60**, 064302 (1999).
- [109] J. R. Nix und W. J. Swiatecki, *Nucl. Phys.* **71**, 1 (1965).
- [110] J. R. Nix, *Nucl. Phys.* **A130**, 241 (1969).
- [111] M. Bolsterli, E. O. Fiset, J. R. Nix und J. L. Norton, *Phys. Rev. C* **5**, 1050 (1972).
- [112] T. v. Chossy und W. Stocker, *Phys. Lett. B* **503**, 109 (2001).
- [113] P. Hohenberg und W. Kohn, *Phys. Rev. B* **136**, 864 (1964).
- [114] W. Kohn und L. J. Sham, *Phys. Rev. A* **140**, 1133 (1965).
- [115] C. Speicher, R. M. Dreizler und E. Engel, *Ann. Phys. (N.Y.)* **213**, 312 (1992).
- [116] M. A. Hasan, T.-S. H. Lee und J. P. Vary, *Phys. Rev. C* **56**, 3063 (1997).
- [117] M. A. Hasan, J. P. Vary und T.-S. H. Lee, *Phys. Rev. C* **61**, 014301 (1999).
- [118] M. A. Hasan, J. P. Vary und T.-S. H. Lee, *Phys. Rev. C* **64**, 024306 (2001).

- [119] J. P. Blaizot, Phys. Rep. **64**, 171 (1980).
- [120] B. K. Jennings und A. D. Jackson, Phys. Rep. **66**, 141 (1980).
- [121] B. K. Jennings und A. D. Jackson, Nucl. Phys. **A342**, 23 (1980).
- [122] R. C. Nayak, J. M. Pearson, M. Farine, P. Gleissl und M. Brack, Nucl. Phys. **A516**, 62 (1990).
- [123] D. Von-Eiff, J. M. Pearson, W. Stocker und M. K. Weigel, Phys. Rev. C **50**, 831 (1994).
- [124] M. Centelles, X. Viñas und P. Schuck, Phys. Rev. C **53**, 1018 (1996).
- [125] M. Brack und W. Stocker, Nucl. Phys. **A406**, 413 (1983).
- [126] M. V. Stoitsov, M. L. Cescato, P. Ring und M. M. Sharma, J. Phys. G **20**, L149 (1994).
- [127] G. A. Lalazissis, J. König und P. Ring, Phys. Rev. C **55**, 1 (1997).
- [128] J. M. Pearson, Phys. Lett. B **271**, 12 (1991).
- [129] S. Shlomo und D. H. Youngblood, Phys. Rev. C **47**, 529 (1993).
- [130] S. Brandenburg, W. T. A. Borghols, A. G. Drentje, L. P. Ekström, M. N. Harakeh, A. van der Woude, A. Håkansson, L. Nilsson, N. Olsson, M. Pignanelli und R. de Leo, Nucl. Phys. **A466**, 29 (1987).
- [131] M. M. Sharma, W. T. A. Borghols, S. Brandenburg, S. Crona, A. van der Woude und M. N. Harakeh, Phys. Rev. C **38**, 2562 (1988).
- [132] W. T. A. Borghols, S. Brandenburg, J. H. Meier, J. M. Schippers, M. M. Sharma, A. van der Woude, M. N. Harakeh, A. Lindholm, L. Nilsson, S. Crona, A. Håkansson, L. P. Ekström, N. Olsson und R. de Leo, Nucl. Phys. **A504**, 231 (1989).
- [133] T. v. Chossy und W. Stocker, Phys. Rev. C **56**, 2518 (1997).
- [134] J. M. Pearson, M. Farine und J. Côté, Phys. Rev. C **26**, 267 (1982).
- [135] W. Stocker und M. M. Sharma, Z. Phys. A **339**, 147 (1991).
- [136] J. M. Pearson, M. Farine und F. Tondeur, in *Proceedings of 6th International Conference on Nuclei far from Stability, Bernkastel-Kues, 1992*, herausgegeben von R. Neugart und A. Wöhr (Institute of Physics Publishing, London, 1993), S. 857.
- [137] J. P. Blaizot und B. Grammaticos, Nucl. Phys. **A355**, 115 (1981).
- [138] K. C. Chung, C. S. Wang und A. J. Santiago, Phys. Rev. C **59**, 714 (1999).
- [139] D. H. Youngblood, Y.-W. Lui und H. L. Clark, Phys. Rev. C **55**, 2811 (1997).
- [140] M. Rashdan, Phys. Lett. B **395**, 141 (1997).
- [141] M. M. Sharma, M. A. Nagarajan und P. Ring, Phys. Lett. B **312**, 377 (1993).

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. W. Stöcker für seine von Engagement und großem Interesse geprägte Betreuung, während der er an wichtigen Punkten immer wieder meine Ergebnisse in den allgemeinen physikalischen Zusammenhang gestellt und so entscheidend zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

Für eine fruchtbare und erfolgreiche Zusammenarbeit bei der Untersuchung der Oberflächeneigenschaften eines modifizierten Zimányi-Moszkowski-Modells möchte ich mich bei Herrn Prof. Guo H. (Peking-University, China) bedanken.

Allen ehemaligen und jetzigen Mitarbeitern der Arbeitsgruppe für theoretische Kern- und Hadronenphysik danke ich für die angenehme Atmosphäre in den vergangenen Jahren. Für hilfreiche und fruchtbare Diskussionen bin ich speziell den Herren Dr. S. Typel, Dr. T. Gaitanos, Dr. H. Freyer, Dr. K. Strobel, Dr. A. Weigel und Dr. C. Fuchs zu Dank verpflichtet; insbesondere Herrn Dr. H. Freyer für zahlreiche Tips und Hilfestellungen bei L^AT_EX-Problemen.

Mein Dank geht auch an Frau D. Sucrow-Barthel für ihre Anregungen und Ratschläge bei der graphischen Gestaltung dieser Arbeit.

Lebenslauf

Thomas von Chossy, geboren am 03.01.1966 in Hof, Familienstand ledig.
Eltern: Dr. med. R. von Chossy, Dr. med. A. von Chossy (geb. Seliger).

1972 – 1976	Grundschule in München;
1976 – 1985	Gymnasium in München; Abschluß: Abitur (Durchschnittsnote 1,5);
07/1985 – 02/1986	Werkstudententätigkeit bei Siemens München: Öffentliche Vermittlungssysteme im Bereich Nachrichten- und Sicherungstechnik;
1986 – 1987	Wehrersatzdienst in der Evangelischen Akademie Tutzing;
1988 – 1995	Studium der Physik an der Ludwig-Maximilians-Universität (LMU) München; Studienabschluß: Diplom; Diplomarbeit in theoretischer Kernphysik; Gesamtnote: sehr gut;
seit 1995	selbständige wissenschaftliche Tätigkeit;
seit 1996	selbständige Tätigkeit als freiberuflicher EDV-Berater (Dipl. Phys.) im Bereich Automatisierung und sensorgeführte Laser-Schweiß-Applikationen in der Automobilindustrie;
1998 – 2000	Promotionsstudiengang an der LMU München;

Thomas von Chossy, *Oberflächen- und Kompressionseigenschaften von Kernen in relativistischer Mittelfeldnäherung*, Dissertation der Fakultät für Physik der Ludwig-Maximilians-Universität München, Dezember 2001.