Flache Lösungen des Vlasov-Poisson-Systems

Dissertation

zur Erlangung des akademischen grades eines Doktors
der naturwissenschaften der Fakultät für Mathematik und
Informatik der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Svetlana Dietz

München

eingereicht im November 2001

1. Berichterstatter: Prof. Dr. J. Batt
2. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Kalf
Tag der mündlichen Prüfung: 18.01.2002

An Wassily

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist das folgende nichtlineare System partieller Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x,v) + v\partial_x f(t,x,v) + K(t,x)\partial_v f(t,x,v) = 0 & (V) \\ \triangle U(t,x) = 4\pi\gamma\rho(t,x), & (P) \end{cases}$$

das in der kinetischen Theorie als Vlasov-Poisson-System bekannt ist. Dabei gilt

$$K(t,x) = -\partial_x U(t,x), \tag{1}$$

$$\rho(t,x) = \int_{\mathbf{R}^3} f(t,x,v)dv, \tag{2}$$

wobei $\gamma = \pm 1$, $t \geq 0$, $x, v \in \mathbb{R}^3$.
Dieses System beschreibt die zeitliche Entwicklung eines großen Systems von Teilchen im $\mathbb{R}^3$ unter dem Einfluß selbstkonsistenter Potenzialkräfte. Dabei unterscheidet man Systeme von Teilchen, die sich anziehen, also etwa Sternsysteme ($\gamma = +1$), oder Systeme von geladenen Teilchen, die sich abstoßen ($\gamma = -1$), wie z.B. Plasmen. In beiden Fällen bezeichnet $f = f(t,x,v) \geq 0$ die Verteilungsfunktion der Teilchen, wobei $t \geq 0$ die Zeit, $x \in \mathbb{R}^3$ die Orts- und $v \in \mathbb{R}^3$ die Geschwindigkeitskoordinate ist. Das Integral von $f(t)$ über ein kleines Volumen V im Phasenraum $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ergibt die Anzahl der Teilchen, die sich in den Punkten x befinden und die Geschwindigkeiten v haben mit $(x,v) \in V$. Die Funktion $\rho = \rho(t,x)$ ist die räumliche Dichte. $U = U(t,x)$ ist das Newtonsche bzw. elektrostatische Potenzial und $K = K(t,x)$ die von U induzierte Kraft.

Zur Motivierung der Gleichungen (V) und (P) betrachten wir im Phasenraum die Bahnen $s \mapsto (X(s,t,x,v), V(s,t,x,v))$ der sich nach dem zweiten Newtonschen Gesetz „Kraft = Masse · Beschleunigung“ bewegenden Teilchen als Lösungen des Systems:

$$\begin{cases} \partial_s X(s,t,x,v) = V(s,t,x,v) \\ \partial_s V(s,t,x,v) = K(s, X(s,t,x,v)), \end{cases} \tag{3}$$

Die Bezeichnungen sind so gewählt, daß zur Zeit $s = t$ die Anfangsbedingungen $X(t,t,x,v) = x$, $V(t,t,x,v) = v$ erfüllt sind. Nach dem Gesetz von der Erhaltung der Masse ändert sich die Verteilungsfunktion f längs dieser Bahnen nicht und dementsprechend gilt

$$\partial_s f(s, X(s,t,x,v), V(s,t,x,v)) = 0, \tag{4}$$

$s,t \geq 0,\ x,v \in \mathbb{R}^3$. Mit (3) liefert das Ausdifferenzieren dieses Ausdruckes und Einsetzen von $s = t$ gerade die Vlasov-Gleichung (V).

Die Poissonsche Gleichung (P) gründet sich auf das Newtonsche Anziehungsgesetz, bzw. das elektrostatische Abstoßungsgesetz: die Kraft, die auf das sich im Punkt x_1 befindende Teilchen mit der Masse (Ladung) m_1 vom Teilchen der Masse m_2 im Punkt x_2 ausgeübt wird, ist gleich

$$K = -\gamma \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|} \frac{m_1 m_2}{|x_1 - x_2|^2}.$$

Bei ,,Verschmieren“ der Teilchen, d.h. in dem hier betrachteten kontinuierlichen Fall, schreibt man für die auf das Teilchen der Masse 1 (Ladung) am Ort x zur Zeit t wirkenden Kraft

$$K(t,x) = -\partial_x U(t,x) = -\gamma \int\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{x-y}{|x-y|^3} \rho(t,y) dy \tag{$\tilde{P}$}$$

mit

$$U(t,x) = -\gamma \int\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\rho(t,y)}{|x-y|} dy. \tag{5}$$

In dieser Darstellung ist $U(t,x) = \gamma G * \rho(t)(x)$ mit der Fundamentallösung G von (P) im $\mathbb{R}^3$, $G(x) = \frac{1}{|x|}$, genau die Lösung von (P), die der Randbegingung

$$\lim_{|x| \to \infty} U(t,x) = 0$$

genügt. Das mathematisch zu behandelnde Problem lautet nun $(V\tilde{P})$.

Über das Vlasov-Poisson-System (VP) liegt inzwischen eine umfangreiche Literatur vor. Von erstem Interesse sind die Lösungen des Anfangswertproblems zu

$$f(0,x,v) = \overset{\circ}{f}(x,v)$$

mit einem gegebenen $\overset{\circ}{f}$. Im Jahre 1952 bewies der Astronom R. Kurth ([Ku52]) die (t-)lokale Existenz klassischer Lösungen. Die Existenz globaler klassischer Lösungen zu beweisen, scheiterte lange Zeit an der Singularität der Greenschen Funktion G. Für das gemittelte Problem (in dem G durch eine geglättete Singularitätenfunktion ersetzt wird) zeigte J. Batt ([Ba63]) die globale Existenz klassischer Lösungen. Für das ungemittelte Problem bewies J.Batt den ersten globalen Existenzsatz in der Klasse sphärisch symmetrischer Verteilungen. Unter der Vorausstezung von Zylindersymmetrie wurde die globale Existenz in [Ho81], [Ho82] gezeigt. Der Fall kleiner Anfangsdaten ohne Symmetrie wurde in [BaDe85] behandelt. Für allgemeine glatte Anfangsdaten wurde schließlich die globale Existenz klassischer Lösungen von K. Pfaffelmoser ([Pf], [Pf92]) und unabhängig von ihm von P.L.Lions und B.Perthame ([LiPe91]) bewiesen.

Zeitlich vor der Gewinnung dieses Resultats, war die globale Existenztheorie für schwache Lösungen entwickelt worden. Das erste Ergebnis im plasmaphysikalischen Fall $\gamma = -1$ stammt von A.A. Arsenev ([Ar75]). Die globale Existenz von schwachen L^p-wertigen Lösungen für $\gamma = \pm 1$ wurde in [HoHu84] gezeigt.

In dieser Arbeit wird eine spezielle Klasse singulärer Lösungen untersucht, die sich weder in die klassischen noch in die schwachen einordnen lassen.

Aus der astrophysikalischen Literatur (z.B. [To], [FrPo]) ist bekannt, daß viele real existierende Sternsysteme die Form einer flachen Scheibe haben. Die Dicke dieser Scheibe ist sehr klein im Vergleich zum Durchmesser. Bei solchen Systemen wird von der räumlichen Verteilung auf einer Ebene, etwa auf der Ebene $x_3 = 0$ im $\mathbb{R}^3$ gesprochen. Wenn anfanglich alle Geschwindigkeiten auch entsprechend gerichtet sind, also $v_3 = 0$ gilt, dann erwartet man, daß die Teilchen auch für spätere Zeiten im Unterraum $x_3 = 0, v_3 = 0$ bleiben. Insofern werden nur Anfangsdaten $\overset{\circ}{f}$: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ betrachtet und es wird nach einer Verteilung $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ als Lösung der Gleichung (V) mit $x, v \in R^2$ gesucht. Obwohl die Verteilungen in diesem Fall für $t \geq 0$ nur auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ betrachtet werden, ist hier $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ als Unterraum $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \times \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ des $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ zu verstehen. Die Teilchen werden als im $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ liegend gedacht und es ist offenbar, daß zwischen ihnen das 3-dimensionale

Anziehungsgesetz wirkt. Deshalb benutzt man weiter (5) und $(\tilde{P})$ mit $\gamma = 1$ zur Definiton des Potenzials und der Anziehungskraft. Es entsteht folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x,v) + v\partial_x f(t,x,v) + K(t,x)\partial_v f(t,x,v) = 0 & (V) \\ K(t,x) = -\int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{x-y}{|x-y|^3}\rho(t,y)dy, & (P') \end{cases}$$

wobei

$$\rho(t,x) = \int\limits_{\mathbf{R}^2} f(t,x,v)dv, \tag{6}$$

$x, v \in \mathbb{R}^2$. In dieser Arbeit wird durchwegs $\gamma = 1$ sein, aber alle Ergebnisse lassen sich - sogar leichter - auch für den Fall $\gamma = -1$ beweisen.

Mathematisch werden solche sogenannten „flachen“ Systeme durch eine distributionelle Verteilungsfunktion der Form

$$\tilde{f}(t,x_1,x_2,x_3,v_1,v_2,v_3) = f(t,x_1,x_2,v_1,v_2)\delta(x_3)\delta(v_3)$$

beschrieben, wobei f eine für $t \geq 0$ mindestens lokal-integrierbare Funktion von x_1, x_2, v_1, v_2 ist. Aufgrund der folgenden (formalen) Rechnung sieht man: $\tilde{f}$ ist eine Distributionslösung von $(V\tilde{P})$ genau dann, wenn f eine Lösung des Systems (VP') ist:

$$\begin{aligned} &<< \partial_t \tilde{f} + v\partial_x \tilde{f} + K\partial_v \tilde{f}, \sigma >>= \\ &= - << \tilde{f}, \partial_t\sigma + v\partial_x\sigma + K\partial_v\sigma >>= \\ &= - << f\delta(x_3)\delta(v_3), \partial_t\sigma + v\partial_x\sigma + K\partial_v\sigma >>= \\ &= - < f, \partial_t\sigma(t,\bar{x},0,\bar{v},0) + \bar{v}\partial_{\bar{x}}\sigma(t,\bar{x},0,\bar{v},0) + \bar{K}\partial_{\bar{v}}\sigma(t,\bar{x},0,\bar{v},0) >= \\ &= < \partial_t f + \bar{v}\partial_{\bar{x}} f + \bar{K}\partial_{\bar{v}} f, \sigma(t,\bar{x},0,\bar{v},0) >, \end{aligned}$$

wobei hier σ eine Testfunktion auf $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ist, und wir für ein $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, $\bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ definieren und $\mathbb{R}^2$ mit dem Unterraum $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ des $\mathbb{R}^3$ identifizieren; die Wirkung einer Distribution, die auf dem $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ erklärt ist, bezeichnen wir durch $<< \cdot, \cdot >>$, die einer Distribution auf dem $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ durch $< \cdot, \cdot >$. Für die 2 ersten Komponenten der

Kraft K haben wir formal:

$$\bar{K}(t,\bar{x}) = -\int\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\bar{x}-\bar{y}}{|\bar{x}-y|^3}\rho(t,\bar{y})\delta(y_3)dy = -\int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{\bar{x}-\bar{y}}{|\bar{x}-\bar{y}|^3}\rho(t,\bar{y})d\bar{y}.$$

Für das Problem (VP') werden wir das Stichwort ,,flach“ verwenden und von ,,flachen Galaxien“, ,,flachem Vlasov-Poisson-System“ sprechen. Die Funktion f nennen wir ,,Lösung des flachen Vlasov-Poisson-System“ oder kurz ,,flache Lösung“.

Eine andere Klasse singulärer Lösungen von (VP) wurde von C. Dietz in seiner Dissertation [Di] (siehe auch [DiSa99]) untersucht. Diese haben die Form

$$f(t,x,v) = \rho(t,x)\delta(v-u(t,x)).$$

Eine Distribution f von dieser Form ist Lösung von $(V\tilde{P})$ genau dann, wenn ρ und u den Euler-Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t\rho + div(\rho u) &= 0, \\ \rho(\partial_t u + (u\cdot\partial_x)u) &= \rho K \end{aligned}$$

genügt. Andere singuläre Lösungen, nämlich solche von der Form

$$f(t,x,v) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\delta(x-x_i(t))\delta(v-v_i(t))$$

wurden im eindimensionalen Fall von A.Majda und Y.Zheng ([MaZh96]) betrachtet. Eine allgemeine Theorie singulärer Lösungen (mit singulären Anfangsdaten) existiert bisher nicht.

Für das flache Vlasov-Poisson-System hat G. Rein in [Re99] bereits Stabilitätsergebnisse für sphärisch symmetrische Anfangsdaten erzielt. Er beweist die Existenz stationärer Lösungen als minimierende Elemente des Energie-Casimir-Funktionals und zeigt deren Stabilität unter der Voraussetzung, daß es globale zeitabhängige Lösungen gibt.

Wir untersuchen im Folgenden das System (VP') zur Anfangsbedingung

$$f(0,x_1,x_2,v_1,v_2) = \overset{\circ}{f}(x_1,x_2,v_1,v_2)$$

auf Existenz. Wir beweisen

1. die Existenz von lokalen klassischen Lösungen zu Anfangsdaten $\overset{\circ}{f} \in C_c^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$,
2. die Existenz von globalen schwachen L^p-wertigen Lösungen für Anfangsdaten $\overset{\circ}{f} \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq 2$.

Wie man sieht, vermeiden wir das Auftreten der δ-Funktion in der Vlasov-Gleichung dadurch, daß wir die Vlasov-Gleichung auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ reduzieren. Auf den ersten Blick gewinnen wir sogar dabei, denn jetzt haben wir nur mit 4 statt mit 6 Koordinaten zu tun. Aber diese in (V) nicht mehr in Erscheinung tretende δ-Singularität geht nun in die Poisson-Gleichung ein. Die Hauptschwierigkeit liegt darin, daß der Kern $\partial_x G(x) = \frac{x}{|x|^3}$, der nach $(\tilde{P})$ und (P') zur Definiton der Kraft benutzt wird, zwar noch im $\mathbb{R}^3$ lokal integrierbar ist, jedoch nicht mehr im $\mathbb{R}^2$. Dies hat zur Folge, daß im dreidimensionalen Fall K für $\rho(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3)$ erklärt wird, im flachen Fall wird dagegen K durch (P') nicht einmal für $\rho(t) \in C_c(\mathbb{R}^2)$ definiert. Dieser Unterschied führt verstärkt auf das Phänomen, das in der englischen Literatur als „loss of derivatives“ bezeichnet wird.

Auch bei der Gewinnung von schwachen Lösungen hat man mit dieser stärkeren Singularität zu kämpfen. Der singuläre Integraloperator verliert nämlich hier die Kompaktheitseigenschaften, die der entsprechende Operator im klassischen dreidimensionalen Fall besitzt.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert:

Nach der Festlegung der Notationen im ersten Kapitel stellen wir im zweiten Kapitel die wichtigsten funktionalanalytischen Hilfsmittel zusammen und erweitern sie. Zu diesen gehören unter anderem Aussagen zur Frage, welche Funktionenräume der durch (P') definierte singuläre Integraloperator in sich abbildet. Solche Aussagen über Hölder-Räume werden später zur Gewinnung klassischer Lösungen benötigt. Bemerkenswert ist, daß die ebenfalls in der Arbeit [Di] entstehende Schwierigkeit des „Verlustes der Ableitungen“ durch die Einführung der Hölderräume $C_c^{k,\alpha}$ behoben wird.
Für den späteren Beweis der Existenz von schwachen Lösungen erweitern

wir Abschätzungen vom Calderon-Zygmund-Typ auf Funktionen in Sobolevräumen. Um die fehlenden Kompaktheitseigenschaften des singulären Integraloperators zu kompensieren, setzen wir das Lemma von Golse-Lions-Perthame-Sentis ([GLPS88]) ein, das auch als ,,averaging lemma" bekannt ist. Dieses starke Resultat hat sich bereits beim Existenzbeweis von schwachen Lösungen des Vlasov-Maxwell-Systems ([DPLi89]) und der Boltzmann-Gleichung ([DPLi91]) als fundamentales Hilfsmittel erwiesen.

Im ersten Abschnitt des dritten Kapitels erinnern wir an die für unsere Arbeit relevanten Eigenschaften klassischer Lösungen des Vlasov-Poisson-Systems. Im zweiten Abschnitt beweisen wir die lokale Existenz klassischer Lösungen des flachen Vlasov-Poisson-Systems (Satz 3.14). Im dritten Abschnitt dieses Kapitels zeigen wir zur Vorbereitung des Beweises für die Existenz schwacher Lösungen die Existenz globaler klassischer Lösungen des ,,modifizierten" (,,geglätteten") flachen Vlasov-Poisson-Systems, d.h. des Systems, das entsteht, wenn man (V) mit

$$K^{\varepsilon}(t,x) = -\int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{x-y}{(|x-y|^2+\varepsilon)^{3/2}}\rho(t,y)dy \tag{P'_ε}$$

für $\varepsilon > 0$ koppelt.

Die im Abschnitt 3 von Kapitel 3 gewonnenen starken globalen Lösungen des modifizierten flachen Problem benutzen wir im vierten Kapitel, um die Existenz von schwachen Lösungen des strikten Problems (d.h. für $\varepsilon = 0$) zu beweisen. Dazu schätzen wir die kinetische Energie und die L^2-Norm der Dichte für die Lösungen des modifizierten Problems gleichmäßig in $\varepsilon > 0$ ab. Analoge Abschätzungen sind auch für die Existenztheorie bei [HoHu84] im dreidimensionalen Fall grundlegend. Entscheidend sind Aussagen und Abschätzungen von Größen, die gleichmäßig in $\varepsilon > 0$ gelten. Diese ermöglichen zu zeigen, daß die Familie von Lösungen f^{ε} der modifizierten Probleme einem Auswahlsatz genügen, und der Grenzwert einer Auswahlfolge eine globale schwache Lösung des flachen (VP) ist. Die Eindeutigkeit schwacher Lösungen bleibt auch bei diesem Problem offen.

Ich möchte meinen Dank Prof. Dr. J. Batt aussprechen, der diese Arbeit betreut hat und ohne den sie nicht möglich gewesen wäre. Ausserdem danke ich Priv.-Doz. Dr. G.Rein, Priv.-Doz. Dr. G. Schlüchtermann und Dr. C. Dietz für ihr reges Interesse und ihre Unterstützung. Ferner danke ich den Trägern der Graduiertenkollegs ,,Mathematik im Bereich ihrer Wechselwirkung mit der Physik", dessen Stipendiatin ich war, für ihre mannigfaltige Unterstützung, wie auch Prof R. Glassey, Prof. C. Bardos, Prof. J. Dolbeault und vielen anderen für ihr Interesse und hilfreiche Gespräche.

1 Notationen

Mit $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir den n-dimensionalen euklidschen Raum, die euklidsche Norm darin sei $|x| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$. Die Kugel vom Radius $R > 0$ um 0 bezeichnen wir mit $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$ und ihr abgeschlossenes Komplement mit $B_R^c = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq R\}$. Außerdem bezeichnen wir die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ mit S^{n-1}. Für das Skalarprodukt von zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir xy. Mit id_x bezeichnen wir die Einheitsmatrix auf $\mathbb{R}^n$: für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $id_x x = x$. Die charakteristische Funktion einer Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\mathcal{X}_E$. Ist E eine Borel-Menge, so verwenden wir die Notation $\lambda^n(E)$ für das Lebesgue-Maß von E. Wenn nichts anderes vermerkt, bezeichnet B eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ oder den Abschluß einer solchen Teilmenge.

Wir benutzen die Notationen: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | \ x \geq 0\}$.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $k \in \mathbb{N}$. Sei $t \in I$, $x \in \mathbb{R}^n$. Ist $B := I$ oder $B := \mathbb{R}^n$ oder $B := I \times \mathbb{R}^n$ und $f : B \to \mathbb{R}^k$ eine hinreichend glatte Funktion, so bezeichnen wir die partielle Ableitung nach t mit $\partial_t f$, die erste partielle Ableitung nach x_i mit $\partial_{x_i} f$ und die zweite partielle Ableitung nach x_i, x_j mit $\partial^2_{x_i,x_j} f$; weiter verwenden wir für jeden Multiindex β die Notation $\partial^\beta f$. Den Gradienten von f bezüglich x bezeichnen wir mit $\partial_x f$, die zweite Ableitung bezeichnen wir mit $\partial_x^2 f$ und verstehen darunter die symmetrische bilineare Abbildung, die durch

$$\partial_x^2 f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \ \ (y, z) \mapsto \partial_x^2 f[y, z] = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \partial^2_{x_i,x_j} f(x) y_i z_j$$

gegeben ist. Ist $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ für ein $m, k \in \mathbb{N}$ und wollen wir die Unterscheidung zwischen $x \in \mathbb{R}^m$ und $y \in \mathbb{R}^k$ verdeutlichen, so schreiben wir $\partial_{x_i} f$, $\partial_{y_i} f$, $\partial_x f$, $\partial_y f$ für partielle Ableitungen und Gradient von f nach x bzw. y. Weiter benutzen wir

$$|\partial_x f| := \sup_{\substack{1 \leq i,k \leq n \\ x \in \mathbf{R}^n}} |\partial_{x_i} f^k(x)|,$$

$$|\partial_x^2 f| := \sup_{\substack{1\le i,k\le n\\ x\in\mathbf{R}^n}} |\partial^2_{x_i x_j} f^k(x)|$$

und für jeden Multiindex β

$$|\partial^\beta f| := \sup_{\substack{1\le k\le n\\ x\in\mathbf{R}^n}} |\partial^\beta f^k(x)|.$$

Mit supp f bezeichnen wir den Träger von f.
Für $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty]$ und $s \in \mathbb{R}$ bezeichnen $(L^p(B,\mathbb{R}^k), \|\cdot\|_{p,B})$ die bekannten L^p-Räume und $(H^s(B), \|\cdot\|_{H^s(B)})$ die kanonischen Sobolevräume mit der Norm: $\|f\|_{H^s(\mathbf{R}^n)} = \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\widehat{f}(x)|^2(|x|^2+1)^s dx$ für $B = \mathbb{R}^n$ und $\|f\|_{H^s(B)} = \inf\limits_{g\in H_s(\mathbf{R}^n):g|_B=f} \|g\|_{H_s(\mathbf{R}^n)}$ für offene $B \subset \mathbb{R}^n$. Den Raum der Testfunktionen auf offenen B bezeichnen wir mit $\mathcal{D}(B)$. Für die Fourier-Transformation von f schreiben wir $\hat{f}$, wenn f von einer Variablen abhängt. Hängt f von mehreren Variablen, etwa von x, t ab, so benutzen wir auch die Schreibweise $\mathcal{F}_t f$, $\mathcal{F}_x f$, um zwischen den Fourier-Transformationen bezüglich der Variablen t, x zu unterscheiden.

Für einen linearen beschränkten Operator $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1,\infty]$ bezeichnet $\|T\|_p$ die Norm des Operators; ist $T : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, so schreiben wir $\|T\|_{H^s(\mathbf{R}^n)}$ für die Norm von T.

Für $\alpha \in (0,1]$, $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ führen wir die folgenden grundlegenden Funktionenräume ein:

$$\begin{aligned}
&C(B,\mathbb{R}^k) := C^0(B,\mathbb{R}^k) := \{f : B \to \mathbb{R}^k | f \text{ ist stetig}\},\\
&C_c(B,\mathbb{R}^k) := \{f \in C(B,\mathbb{R}^k)| \text{ hat kompakten Träger}\},\\
&C_c^{0,\alpha}(B,\mathbb{R}^k) := \{f \in C_c(B,\mathbb{R}^k)||f|_{0,\alpha,B} < \infty\},\\
&C^m(B,\mathbb{R}^k) := \{f \in C(B,\mathbb{R}^k)|f \text{ ist m-mal stetig differenzierbar}\},\\
&C_c^m(B,\mathbb{R}^k) := \{f \in C^m(B,\mathbb{R}^k) \cap C_c(B,\mathbb{R}^k)\},\\
&C^{m,\alpha}(B,\mathbb{R}^k) := \{f \in C^m(B,\mathbb{R}^k)||f|_{m,\alpha,B} < \infty\},\\
&C_c^{m,\alpha}(B,\mathbb{R}^k) := \{f \in C_c^m(B,\mathbb{R}^k)||f|_{m,\alpha,B} < \infty\},
\end{aligned}$$

wobei definiert wird:

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{\infty,B} &:= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in B} |f(x)|, \text{ für } f : B \to \mathbb{R}^k \\
|f|_{m,B} &:= \sup_{0\le|\beta|\le m} \|\partial^\beta f\|_{\infty,B}, \text{ für } f \in C^m(B,\mathbb{R}^k), \\
[f]_{0,\alpha,B} &:= \sup_{x,y\in B, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}, \text{ für } f \in C^{0,\alpha}(B,\mathbb{R}^k), \\
[f]_{m,\alpha,B} &:= \sup_{|\beta|=m} [\partial^\beta f]_{\alpha,B}, \text{ für } f \in C^{m,\alpha}(B,\mathbb{R}^k), \\
|f|_{m,\alpha,B} &:= |f|_{m,B} + [f]_{m,\alpha,B}, \text{ für } f \in C^{m,\alpha}(B,\mathbb{R}^k),\ m \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}
$$

Hängt eine Funktion $f \in C^{m,\alpha}(B_x \times B_v, \mathbb{R}^k)$ von zwei Variablen $x \in B_x \subset \mathbb{R}^n$, $v \in B_v \subset \mathbb{R}^l$ ab, so können wir außerdem die Hölder-Konstanten von f bezüglich x und v betrachten. Bezeichnet y eine der Variablen x, v und y' entsprechend die andere, so definieren wir

$$
\begin{aligned}
[f]_{(y),0,\alpha,B_x\times B_v} &:= \sup_{y'\in B_{y'}} [f(\cdot,y')]_{\alpha,B_y}, \text{ für } f \in C^{0,\alpha}(B_x \times B_v,\mathbb{R}^k), \\
[f]_{(y),m,\alpha,B_x\times B_v} &:= \sup_{|\beta|=m} [\partial^\beta f]_{(y),0,\alpha,B_x\times B_v}, \text{ für } f \in C^{m,\alpha}(B_x \times B_v,\mathbb{R}^k); \\
|f|_{(y),m,\alpha,B_x\times B_v} &:= |f|_{m,B_x\times B_v} + [f]_{(y),m,\alpha,B_x\times B_v}.
\end{aligned}
$$

Ist k in einem Abschnitt fest, so lassen wir den Wertebereich $\mathbb{R}^k$ in den oberen Definitionen weg. Stimmt B mit dem ganzen Raum $\mathbb{R}^n$ überein, so lassen wir B in den Bezeichnungen der Normen weg. Ist schließlich $B = B_R$, so schreiben wir

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{\infty,B} &=: \|f\|_{\infty,R}, \\
|f|_{m,B} &=: |f|_{m,R}, \\
[f]_{m,\alpha,B} &=: [f]_{m,\alpha,R}, \\
|f|_{m,\alpha,B} &=: |f|_{m,\alpha,R}.
\end{aligned}
$$

Außerdem verwenden wir die Schreibweise $|||f|||_2 := \|f\|_{2,I\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2}$.

Ist X ein Banachraum, so bezeichnen wir mit X' den Raum der linearen stetigen Funktionale auf X. Für ein $x \in X$ und $x' \in X'$ bezeichnet $< x', x >$ die Wirkung von x' auf x. Den Raum X, versehen mit seiner schwachen

Topologie, bezeichnen wir mit $(X, \sigma(X, X'))$. Die Konvergenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset X$ gegen ein $x \in X$ in dieser Topologie wird durch $x_n \rightharpoonup x$ bezeichnet. Die schwache Topologie von $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq p < \infty$ wird mit $\sigma(p, p')$ bezeichnet mit dem zu p konjugierten p'.

Schließlich benutzen wir stets, wenn nichts anderes vermerkt ist, die Notation $C(x_1, \ldots, x_n)$, um eine Konstante, die nur von den Größen $x_1, \ldots, x_n$ abhängt, zu bezeichnen, ohne auf die genaue Beschreibung der Konstanten einzugehen. Wollen wir jedoch die letzte in einer Reihe von solchen Konstanten festhalten, so werden wir die Bezeichnung $C_*(x_1, \ldots, x_n)$ oder ähnliches benutzen.

2 Funktionalanalytische Hilfsmittel

In diesem Kapitel bereiten wir die mathematischen Grundlagen für die späteren Existenzsätze vor. Wichtig ist die Wahl von passenden Grundräumen. Die meisten Schwierigkeiten wird uns der singuläre Integraloperator bereiten. Deswegen suchen wir nach den Räumen, die unter der Wirkung dieses Integraloperators erhalten bleiben. Wir haben zwei Sorten solcher Räume: Hölderräume $C^{k,\alpha}$ liegen den klassischen Lösungen zugrunde; L^p-Räume den schwachen Lösungen.

Für ein $\varepsilon > 0$, $0 < \eta < \delta$ und ein meßbares $e : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definieren wir zunächst formal folgende Operatoren, die auf $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $1 < p < \infty$ oder $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $0 < \alpha < 1$ wirken:

$$T_e^{\varepsilon}(f)(x) := \int\limits_{|x-y|\geq\varepsilon} e(x-y)f(y)dy, \tag{7}$$

$$T_e(f) := \lim_{\varepsilon\to 0} T_e^{\varepsilon}(f), \tag{8}$$

$$T_e^{\eta,\delta}(f)(x) := \int\limits_{\eta\leq|x-y|\leq\delta} e(x-y)f(y)dy, \tag{9}$$

$$T_e^{,\delta}(f) := \lim_{\eta\to 0} T_e^{\eta,\delta}(f). \tag{10}$$

Für die meßbare Funktion $e : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ setzen wir im folgenden voraus:

$e_1)$ $\forall R_1, R_2, 0 < R_1 < R_2 < \infty \quad \int\limits_{R_1<|x|<R_2} e(x)dx = 0,$

$\exists B > 0$ mit

$e_2)$ $\forall x \neq 0 \quad |e(x)| \leq B|x|^{-n},$

$e_3)$ $\forall y \neq 0 \quad \int\limits_{|x|\geq 2|y|} |e(x-y) - e(x)|dx \leq B.$

Außerdem betrachten wir für eine meßbare Funktion $\Omega : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^m$ folgende Eigenschaften:

$\Omega_1)$ $\forall \alpha > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$\Omega(\alpha x) = \Omega(x);$$

$\Omega_2)\quad \int\limits_{S^{n-1}} \Omega(x)dx = 0;$

es gibt $B_0 > 0$, so daß

$\Omega_3)$ $\forall x \in S^{n-1}$ gilt $|\Omega(x)| \leq B_0$;

$\Omega_4)$ Ω erfüllt die Dini-Bedingung, d.h.

ist $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ der Stetigkeitsmodul von Ω auf S^{n-1}, d.h.

$$\omega(\delta) := \sup_{\substack{|x-x'|\leq\delta \\ |x|,|x'|=1}} |\Omega(x) - \Omega(x')|,$$

dann sei $\displaystyle\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta < B_0$.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit betrachten wir nur den Fall von skalarwertigen Ω, also den Fall $m = 1$. Der allgemeine Fall $m > 1$ ergibt sich dann, wenn wir die skalare Theorie komponentenweise anwenden.

Daneben betrachten wir für stetig differenzierbare Funktionen $\bar{\Omega} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften:
$\exists \bar{\omega} > 0$, so daß $\forall\, r \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$\bar{\Omega}_1)$ $0 \leq \bar{\Omega}(r) \leq \bar{\omega}$,

$\bar{\Omega}_2)$ $0 \leq \bar{\Omega}'(r) \leq \dfrac{\bar{\omega}}{r}$,

aus denen offenbar

$\bar{\Omega}_3)$ $\exists \lim\limits_{r\to\infty} \bar{\Omega}(r) =: \bar{\omega}^* \leq \bar{\omega}$

folgt.

Bemerkung 2.1 *Erfülle Ω die Bedingungen $\Omega_1) - \Omega_4)$ mit B_0, $\bar{\Omega}$ erfülle die Bedingungen $\bar{\Omega}_1) - \bar{\Omega}_2)$ mit $\bar{\omega}$. Dann erfüllt*

$$e(x) := \frac{\Omega(x)}{|x|^n}\bar{\Omega}(|x|)$$

die Eigenschaften $e_1) - e_3)$ mit einer Konstanten $B = C(n)B_0\bar{\omega}$, wobei $C(n)$ nur von n abhängt.

Beweis. Wir orientieren uns an Satz 3 aus [St, S.39]. Dort ist der Fall $\bar{\Omega} = 1$ betrachtet worden. Im folgenden setzen wir $\bar{\Omega}(x) := \bar{\Omega}(|x|)$.

Die Bedingung e_1) folgt aus Ω_1) und Ω_2). Wegen Ω_1) gilt für alle $x \neq 0$ $|\Omega(x)| \leq B_0$, und daher

$$|e(x)| = \frac{|\Omega(x)|}{|x|^n}\bar{\Omega}(|x|) \leq \frac{B_0\bar{\omega}}{|x|^n},$$

also haben wir e_2) gezeigt. Um e_3) zu zeigen, schreiben wir

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{|x|\geq 2|y|} |e(x-y) - e(x)|dx = \\
&\leq \int\limits_{|x|\geq 2|y|} \frac{|\Omega(x-y) - \Omega(x)|}{|x-y|^n}|\bar{\Omega}(|x-y|)|dx + \\
&\quad + \int\limits_{|x|\geq 2|y|} |\Omega(x)|\frac{|\bar{\Omega}(x-y) - \bar{\Omega}(x)|}{|x-y|^n}dx + \\
&\quad + \int\limits_{|x|\geq 2|y|} |\Omega(x)||\bar{\Omega}(x)|\left|\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right| dx =: I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Um I_3 abzuschätzen, stellen wir zuerst fest, daß für alle x, y mit $|x| \geq 2|y|$ und alle $\theta \in [0,1]$ gilt

$$|y| \leq \frac{|x|}{2} \leq |x - \theta y| \leq \frac{3|x|}{2}.$$

Dann gilt auch

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{|x|\geq 2|y|} \left|\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right| dx = \int\limits_{|x|\geq 2|y|} \frac{||x|^n - |x-y|^n|}{|x-y|^n|x|^n}dx \leq \\
&\leq \int\limits_{|x|\geq 2|y|} \sup_{\theta\in[0,1]} n|x-\theta y|^{n-1}\frac{|y|}{|x-y|^n|x|^n}dx \leq \\
&\leq \frac{3^{n-1}n|y|}{2^{n-1}} \int\limits_{|x|\geq 2|y|} \frac{1}{|x-y|^n|x|}dx \leq \\
&\leq \frac{3^{n-1}n|y|}{2^{n-1}} \int\limits_{|x|\geq 2|y|} \frac{2^n}{|x|^{n+1}}dx \leq C(n).
\end{aligned}$$

Also folgt $|I_3| \leq C(n)B_0\bar{\omega}$. Um I_1 abzuschätzen, bemerken wir, daß der euklidische Abstand auf der Einheitssphäre für $|x| \geq 2|y|$ die Abschätzungen

$$\left|\frac{x-y}{|x-y|} - \frac{x}{|x|}\right| = \frac{|(x-y)|x| - x|x-y||}{|x-y||x|} \leq$$
$$\leq \frac{|(x-y-x)|x| + x(|x| - |x-y|)|}{|x-y||x|} \leq \frac{|y||x| + |x||y|}{|x-y||x|} = \frac{2|y|}{|x-y|} \leq \frac{4|y|}{|x|}$$

erfüllt. Mit den Eigenschaften Ω_1) und Ω_3) kann dann I_1 folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$I_1 = \int\limits_{|x|\geq 2|y|} \frac{\left|\Omega\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right) - \Omega\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|}{|x-y|^n} |\bar{\Omega}(|x-y|)|dx \leq$$
$$\leq C(n)\bar{\omega} \int\limits_{|x|\geq 2|y|} \omega\left(4\left|\frac{y}{x}\right|\right)\frac{1}{|x|^n}dx = C(n)\bar{\omega}\int\limits_0^2 \frac{\omega(\delta)}{\delta}d\delta \leq C(n)B_0\bar{\omega},$$

wobei wir $\bar{\Omega}_1$) und $\bar{\Omega}_4$) benutzt haben.
Nun schätzen wir I_2 ab. Wir bemerken, daß für $|x| \geq 2|y|$ und $\theta \in [0,1]$ Abschätzungen

$$|x-\theta y| \geq |x| - \theta|y| \geq 2|y| - \theta|y| \geq |y|$$

und dann

$$|x-y| \leq |x-\theta y| + |(1-\theta)y| \leq 2|x-\theta y|$$

gelten. Mit $\bar{\Omega}_2$) gilt dann

$$I_2 \leq \int\limits_{|x|\geq 2|y|} \frac{|\bar{\Omega}(x-y) - \bar{\Omega}(x)|}{|x-y|^n}|\Omega(|x-y|)|dx \leq$$
$$\leq B_0 \int\limits_{|x|\geq 2|y|} |y| \sup_{\theta\in[0,1]} \bar{\Omega}'(|x-\theta y|)\frac{1}{|x-y|^n}dx \leq$$
$$\leq 2B_0|y|\bar{\omega} \int\limits_{|x|\geq 2|y|} \frac{1}{|x-y|^{n+1}}dx \leq 2B_0|y|\bar{\omega}\int\limits_{|x|\geq 2|y|} \frac{2^{n+1}}{|x|^{n+1}}dx \leq C(n)B_0\bar{\omega},$$

wobei wir auch Ω_4) benutzt haben. Insgesamt sehen wir, daß e_2), e_3) mit der Konstanten B erfüllt sind.□

Für ein $e : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \delta > 0$ definieren wir eine Hilfsfunktion

$$e_\delta(x) := \begin{cases} e(x) & : \quad |x| \geq \delta \\ 0 & : \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

2.1 Hölderabschätzungen für singuläre Integraloperatoren

In diesem Abschnitt betrachten wir $e(x) := \dfrac{\Omega(x)}{|x|^n}$. Das Ziel des folgenden Satzes ist es zu zeigen, daß die zunächst formale Definition (8) einen stetigen Operator $T_e : \; C_c^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n) \to C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ definiert. Dafür werden wir in $C_c^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < 1$ die folgende äquivalente Norm ([St], S.146; [Ca61]) benutzen:

$$|f|_{0,\alpha} \sim \|f\|_\infty + \sup_{x,h \in \mathbf{R}^n)} \frac{|f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)|}{|h|^\alpha}.$$

Satz 2.2 Ω *erfülle die Vorausetzungen* $\Omega_1) - \Omega_4)$ *mit* B_0. *Dann existiert für alle Funktionen* $\rho \in C_c^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *der Limes aus (8) in* $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und gilt* $T_e\rho \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. *Außerdem gilt: Für jedes* $n \in N$ *und* $\alpha \in]0,1[$ *existiert eine Konstante* $A = A(n, \alpha, B_0)$, *so daß für alle Funktionen* $\rho \in C_c^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *mit* supp$\rho \subset B_R$ *für ein* $R > 0$ *gilt*

$$|T_e\rho|_{0,\alpha} \leq AR^\alpha |\rho|_{0,\alpha}.$$

Beweis. Da Ω $\Omega_1) - \Omega_4)$ besitzt, erfüllt nach Bemerkung 2.1 e die Eigenschaften $e_1) - e_3)$ mit einer Konstanten $B = B(B_0)$. Sei $\rho \in C_c^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Wir betrachten zuerst den Fall supp $\rho \subset B_1$. Dabei benutzen wir die Idee des Beweises von [Ta], der den Fall eines periodischen ρ betrachtet (siehe auch [Pr], [CaZy]).

Sei e_δ wie oben definiert. Es gilt

$$\begin{aligned} T_{e_\delta}\rho(x) &= \int\limits_{B_1} \rho(x-z)e_\delta(z)dz + \int\limits_{B_1^c} \rho(x-z)e_\delta(z)dz = \\ &= \int\limits_{B_1} (\rho(x-z) - \rho(x))e_\delta(z)dz + \int\limits_{B_1^c} \rho(x-z)e_\delta(z)dz =: I_1 + I_2 \end{aligned}$$

wegen Ω_2). Es gilt

$$|I_1| \le BC(n)[\rho]_{0,\alpha} \int\limits_{r\le 1} r^{\alpha-1}dr = \frac{1}{\alpha}BC(n)[\rho]_{0,\alpha};$$

$$|I_2| \le BC(n) \int\limits_{B_1^c} |\rho(x-z)|dz \le BC(n)\|\rho\|_1 \le BC(n)\|\rho\|_\infty,$$

da wegen e_2) $|e_\delta(z)| \le B$ für $|z| > 1$ und wegen supp$\rho \subset B_1$ $\|\rho\|_1 \le C(n)\|\rho\|_\infty$ gilt. Also gilt

$$\|T_{e_\delta}\rho\|_\infty \le BC(n,\alpha)[\rho]_{0,\alpha} + BC(n)\|\rho\|_\infty \le BC(n,\alpha)|\rho|_{0,\alpha}.$$

Analog gilt für $\delta_2 > \delta_1 > 0$

$$\|T_{e_{\delta_1}}\rho - T_{e_{\delta_2}}\rho\|_\infty \le [\rho]_{0,\alpha}BC(n) \int\limits_{\delta_1<r<\delta_2} r^{\alpha-1}dr = \frac{C(n)}{\alpha}[\rho]_\alpha(\delta_2^\alpha - \delta_1^\alpha).$$

Daraus folgt, es gibt ein $\rho^* \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\|T_{e_\delta}\rho - \rho^*\|_\infty \to 0$ für $\delta \to 0$ und

$$\|\rho^*\|_\infty \le C(n,\alpha)|\rho|_{0,\alpha}. \tag{11}$$

Wir wollen beweisen: Für alle h, $|h| < 1/6$ gilt

$$\|\rho^*(\cdot + 2h) - 2\rho^*(\cdot) + \rho^*(\cdot - 2h)\|_\infty \le A_1|\rho|_{0,\alpha}|h|^\alpha$$

für ein nur von n und α abhängiges $A_1 > 0$. Wir setzen

$$F_{e_\delta}\rho(x) = \int\limits_{B_1} \rho(x-z)e_\delta(z)dz.$$

Dann gilt

$$T_{e_\delta}\rho(x) = F_{e_\delta}\rho(x) + \int\limits_{B_1^c} \rho(x-z)e_\delta(z)dz.$$

Sei $d(x,h,z) := \rho(x-z+2h) - 2\rho(x-z) + \rho(x-z-2h)$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} &T_{e_\delta}\rho(x+2h) - 2T_{e_\delta}\rho(x) + T_{e_\delta}\rho(x-2h) = \\ &= (F_{e_\delta}\rho(x+2h) - 2F_{e_\delta}\rho(x) + F_{e_\delta}\rho(x-2h)) + \\ &+ \int\limits_{B_1^c} d(x,h,z)e_\delta(z)dz =: D(x,h) + I(x,h). \end{aligned}$$

Wegen $\text{supp}\rho(x+2h-\cdot) \subset B_1(x+2h)$, $\text{supp}\rho(x-\cdot) \subset B_1(x)$, $\text{supp}\rho(x-2h-\cdot) \subset B_1(x-2h)$, gilt $\text{supp}d(x,h,\cdot) \subset B_{1+2|h|}(x) \subset B_{4/3}(x)$. Außerdem gilt für alle $x, z, h \in \mathbb{R}^n$ $|d(x,h,z)| \leq [\rho]_{0,\alpha}|h|^\alpha$. Deswegen erhalten wir

$$|I(x,h)| \leq B[\rho]_{0,\alpha}|h|^\alpha \int\limits_{B_1^c \cap B_{4/3}(x)} dz \leq C(n)B[\rho]_{0,\alpha}|h|^\alpha.$$

Jetzt schätzen wir $D(x,h)$ ab.

$$F_{e_\delta}\rho(x) = \int\limits_{|z|<3|h|} (\rho(x-z)-\rho(x))e_\delta(z)dz +$$

$$+ \int\limits_{3|h|<|z|\leq 1} (\rho(x-z)-\rho(x+h))e_\delta(z)dz =: I_1(x,h)+I_2(x,h),$$

wobei wir wieder e_1) benutzt haben. Für I_1 gilt offenbar

$$|I_1(x,h)| \leq [\rho]_{0,\alpha}BC(n) \int\limits_{r<3|h|} r^{\alpha-1}dr = \frac{1}{\alpha}BC(n)[\rho]_{0,\alpha}|h|^\alpha.$$

In I_2 machen wir die Substitution $z = y-h$ und setzen dann wieder $z := y$.

$$I_2(x,h) = \int\limits_{3|h|<|z-h|\leq 1} (\rho(x+h-z)-\rho(x+h))e_\delta(z-h)dz =$$

$$= \int\limits_{3|h|<|z|\leq 1} (\rho(x+h-z)-\rho(x+h))e_\delta(z-h)dz + g(x,h), \tag{12}$$

wobei

$$g(x,h) = \int\limits_{3|h|<|z-h|\leq 1} (\rho(x+h-z)-\rho(x+h))e_\delta(z-h)dz -$$
$$- \int\limits_{3|h|<|z|\leq 1} (\rho(x+h-z)-\rho(x+h))e_\delta(z-h)dz.$$

Wir zeigen jetzt

$$\|g(\cdot,h)\|_\infty \leq C(n,\alpha)[\rho]_{0,\alpha}|h|^\alpha$$

für ein geeignetes $C(n,\alpha)$. Sei $G_h^1 := \{z : 3|h| < |z| \leq 1\}$, $G_h^2 := \{z : 3|h| < |z-h| \leq 1\}$. Dann gilt

$$g(x,h) = \int\limits_{G_h^2 \setminus G_h^1} (\rho(x+h-z) - \rho(x+h))e_\delta(z-h)dz -$$
$$- \int\limits_{G_h^1 \setminus G_h^2} (\rho(x+h-z) - \rho(x+h))e_\delta(z-h)dz.$$

Wir schätzen nun das zweite Integral ab. Die Abschätzung für das erste ergibt sich analog. Es gilt

$$\left| \int\limits_{G_h^1 \setminus G_h^2} (\rho(x+h-z) - \rho(x+h))e_\delta(z-h)dz \right| \leq$$
$$\leq \int\limits_{G_h^1 \setminus G_h^2} |\rho(x+h-z) - \rho(x+h)||e_\delta(z-h)|dz \leq$$
$$\leq \int\limits_{1-|h|<|z|\leq 1} |\rho(x+h-z) - \rho(x+h)||e_\delta(z-h)|dz +$$
$$+ \int\limits_{2|h|<|z|\leq 3|h|} |\rho(x+h-z) - \rho(x+h)||e_\delta(z-h)|dz =: J_1(x,h) + J_2(x,h).$$

Da nun wegen e_2) und $3|h| \leq |z|$

$$|e_\delta(z-h)| \leq \frac{B}{|z-h|^n} \leq \frac{3^n B}{2^n |z|^n}$$

gilt, erhalten wir mit der Hölder-Beschränktheit von f

$$|J_1(x,h)| \leq B\frac{3^n}{2^n}[\rho]_{0,\alpha} \int\limits_{1-|h|<|z|\leq 1} |z|^\alpha |z|^{-n} dz = BC(n)[\rho]_{0,\alpha} \int\limits_{1-|h|}^{1} r^{\alpha-1} dr =$$
$$= \frac{BC(n)}{\alpha}[\rho]_{0,\alpha}(1-(1-|h|)^\alpha) \leq \frac{BC(n)}{\alpha}[\rho]_{0,\alpha}|h|^\alpha.$$

Analog gilt für $J_2(x,h)$

$$|J_2(x,h)| \leq B[\rho]_{0,\alpha} \int\limits_{2|h|<|z|\leq 3|h|} |z|^\alpha |z|^{-n} dz = \frac{BC(n)}{\alpha}[\rho]_{0,\alpha}((3|h|)^\alpha - (2|h|)^\alpha) =$$

$$= \frac{BC(n)(3^\alpha - 2^\alpha)}{\alpha}[\rho]_{0,\alpha}|h|^\alpha,$$

was die gewünschte Abschätzung für $g(x,h)$ zeigt.

Sei jetzt $l(x,h) := I_1(x,h) + g(x,h)$. Wir haben dann mit (12):

$$F_{e_\delta}(x) = \int\limits_{3|h|<|z|\le 1} (\rho(x+h-z) - \rho(x+h))e_\delta(z-h)dz + l(x,h),$$

$$F_{e_\delta}(x) = \int\limits_{3|h|<|z|\le 1} (\rho(x-h-z) - \rho(x-h))e_\delta(z+h)dz + l(x,-h),$$

$$F_{e_\delta}(x+2h) = \int\limits_{3|h|<|z|\le 1} (\rho(x+h-z) - \rho(x+h))e_\delta(z+h)dz + \\ +l(x+2h,-h),$$

$$F_{e_\delta}(x-2h) = \int\limits_{3|h|<|z|\le 1} (\rho(x-h-z) - \rho(x-h))e_\delta(z-h)dz + \\ +l(x-2h,h).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} D(x,h) &= F_{e_\delta}(x+2h) - 2F_{e_\delta}(x) + F_{e_\delta}(x-2h) = \\ &= \int\limits_{3|h|<|z|\le 1} (\rho(x+h-z) - \rho(x+h) + \rho(x-h) - \rho(x-h-z)) \cdot \\ &\quad \cdot (e_\delta(z+h) - e(z-h))dz + l^*(x,h) =: P(x,h) + l^*(x,h), \end{aligned}$$

wobei

$$l^*(x,h) = l(x+2h,-h) - l(x,h) - l(x,-h) + l(x-2h,h)$$

mit $\|l^*(\cdot,h)\|_\infty \le C|\rho|_{0,\alpha}|h|^\alpha$. Wie im Beweis von Bemerkung 2.1 (mit $\bar{\Omega} = 1$), gibt es eine Konstante $C(n) > 0$, die nur von n abhängt, so daß für $|h| \le 1/6$ gilt

$$\int\limits_{3|h|<|z|\le 1} |e_\delta(z+h) - e_\delta(z-h)|dz \le B_0 C(n).$$

Dann gilt:

$$\|P(\cdot,h)\|_\infty \le 2[\rho]_{0,\alpha}|h|^\alpha \int\limits_{3|h|<|z|\le 1} |e_\delta(z+h)-e_\delta(z-h)|dz \le$$
$$\le C(n)B_0[\rho]_{0,\alpha}|h|^\alpha.$$

Damit haben wir $D(x,h)$ abgeschätzt. Insgesamt haben wir also für alle $x,h \in \mathbb{R}^n$, $|h|\le 1/6$ gezeigt

$$|T_{e_\delta}(x+2h)-2T_{e_\delta}(x)+T_{e_\delta}(x-2h)| \le C(n,\alpha)\max\{B,B_0\}[\rho]_{0,\alpha}|h|^\alpha.$$

Da nun

$$T_{e_\delta}(\cdot+2h)-2T_{e_\delta}(\cdot)+T_{e_\delta}(\cdot-2h) \to \rho^*(\cdot+2h)-2\rho^*(\cdot)+\rho^*(\cdot-2h)$$

in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und unsere Abschätzungen von δ nicht abhängen, gilt für alle $|h|\le 1/6$ auch

$$\|\rho^*(\cdot+2h)-2\rho^*(\cdot)+\rho^*(\cdot-2h)\|_\infty \le C(n,\alpha)|\rho|_{0,\alpha}|h|^\alpha.$$

Für $|h|>1/6$ gilt mit (11)

$$\|\rho^*(\cdot+2h)-2\rho^*(\cdot)+\rho^*(\cdot-2h)\|_\infty \le 4\|\rho^*\|_\infty \le$$
$$\le 4\cdot 6^\alpha\|\rho^*\|_\infty|h|^\alpha \le C(n,\alpha)|\rho|_{0,\alpha}|h|^\alpha,$$

also. $[\rho^*]_{0,\alpha}\le C(n,\alpha)|\rho|_{0,\alpha}$. Mit (11) erhalten wir jetzt auch $|\rho^*|_{0,\alpha}\le A|\rho|_{0,\alpha}$ mit einer geeigneten Konstanten $A=A(n,\alpha,B_0)$. Damit haben wir den Fall $\operatorname{supp}\rho \subset B_1$ komplett untersucht.

Wir nehmen jetzt supp $\rho \subset B_R, R>1$ an. Wir definieren eine Hilfsfunktion $\rho_1(x):=\rho(Rx)$. Es gilt supp $\rho_1\subset B_1$. Dann gilt die Ungleichung:

$$|T_e\rho_1|_{0,\alpha}\le A|\rho_1|_{0,\alpha}.$$

Weiter gilt für alle $x,y\in\mathbb{R}^n$:

$$\frac{|\rho_1(x)-\rho_1(y)|}{|x-y|^\alpha} = \frac{|\rho(Rx)-\rho(Ry)|}{|R^\alpha x-R^\alpha y|^\alpha}R^\alpha.$$

Folglich gilt

$$[\rho_1]_{0,\alpha} = R^\alpha[\rho]_{0,\alpha}. \tag{13}$$

Andererseits gilt aber wegen der Homogenität von Ω

$$T_e\rho_1(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} \rho_1(y)\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} \rho(Ry)\frac{\Omega(Rx-Ry)}{|Rx-Ry|^n}R^n dy.$$

Setzen wir jetzt $Ry =: z$, $R\varepsilon =: \varepsilon_1$ so erhalten wir

$$T_e\rho_1(x) = \lim_{\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{|Rx-z|>\varepsilon_1} \rho(z)\frac{\Omega(Rx-z)}{|Rx-z|^n}dz = T_e\rho(Rx).$$

Deswegen gilt analog zu (13)

$$[T_e\rho_1]_{0,\alpha} = R^\alpha [T_e\rho]_{0,\alpha}.$$

Außerdem gilt

$$\|\rho\|_\infty = \|\rho_1\|_\infty,$$
$$\|T_e\rho\|_\infty = \|T_e\rho_1\|_\infty.$$

Insgesamt haben wir also

$$|T_e\rho|_{0,\alpha} = [T_e\rho]_{0,\alpha} + \|T_e\rho\|_\infty = \frac{1}{R^\alpha}[T_e\rho_1]_{0,\alpha} + \|T_e\rho_1\|_\infty \leq$$
$$\leq |T_e\rho_1|_{0,\alpha} \leq A|\rho_1|_{0,\alpha} \leq A([\rho]_{0,\alpha} + R^\alpha\|\rho\|_\infty) \leq AR^\alpha|\rho|_{0,\alpha}.\square$$

Bemerkung 2.3 *Die Funktion* $\Omega : x \mapsto \dfrac{x}{|x|}$ *genügt den Bedingungen* $\Omega_1) - \Omega_4)$ *mit* $B_0 = 1$.

2.2 L^p- und H^s-Abschätzungen für singuläre Integraloperatoren

Wie im vorangehenden Abschnitt betrachten wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit nur den Fall $m = 1$.

Der folgende Satz zeigt insbesondere, daß die zunächst formalen Definitionen (7),(9) lineare beschränkte Operatoren $T_e^\varepsilon, T_e^{\varepsilon,\delta} : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ definieren, daß die Grenzwerte in (8),(10) in $L^p(\mathbb{R}^n)$ existieren und die so definierten Operatoren auch linear und beschränkt sind.

Satz 2.4 (Calderon-Zygmund-Ungleichung) *Sei* $p \in]1, +\infty[$. *Dann gilt*
1) $\forall B > 0\ \exists A_p = A_p(B) > 0\ \forall e$ *mit* $e_1) - e_3)$ *bzgl.* $B\ \forall \varepsilon > 0$ *gilt*

$$\|T_e^\varepsilon\|_p \leq A_p.$$

2) $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *existiert der Limes* $T_e(f) := \lim_{\varepsilon \to 0} T_e^\varepsilon(f)$ *in* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *gleichmäßig für alle* e, *die* $e_1) - e_3)$ *mit derselben Konstanten* B *erfüllen.*
3) $T_e : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ *erfüllt ebenfalls die Abschätzung aus 1).*

Der **Beweis** von 1) und 3) ist in [St, S.35-38] durchgeführt worden. Wir zeigen nur die Gleichmäßigkeit des Limes in Punkt 2). Dafür nehmen wir zuerst $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ an. Sei dabei der Träger von f in der Kugel vom Radius r. Dann gilt mit der Eigenschaft $e_1)$

$$\begin{aligned} T_e^\varepsilon f(x) &= \int\limits_{|y| \geq \varepsilon} e(y) f(x-y) dy = \\ &= \int\limits_{|y| \geq 1} e(y) f(x-y) dy + \int\limits_{1 \geq |y| \geq \varepsilon} e(y)(f(x-y) - f(x)) dy. \end{aligned}$$

Es gilt $e \cdot \mathcal{X}_{B_1^c(0)} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ wegen der Eigenschaft $e_2)$. f liegt in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Deswegen gilt $e \cdot \mathcal{X}_{B_1^c(0)} * f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, also liegt das erste Integral in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Die Funktion unter dem zweiten Integral kann aufgrund der Eigenschaft $e_2)$ und der Differenzierbarkeit von f so abgeschätzt werden:

$$|e(y)(f(x-y) - f(x))| \leq B|y|^{-n} \cdot \|\partial_x f\|_\infty |y|.$$

Das zweite Integral hat seinen Träger in der Kugel vom Radius $r + 1$. Also konvergiert es für $\varepsilon \to 0$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ gleichmäßig für alle e mit derselben Konstanten B.
Ein allgemeines $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ kann durch ein $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ approximiert werden, und die Behauptung ergibt sich dann mit Hilfe 1) aus

$$T_e f - T_e^\varepsilon f = T_e(f - f_1) - T_e^\varepsilon(f - f_1) + (T_e - T_e^\varepsilon) f_1$$

und

$$\|T_e(f - f_1)\|_p,\ \|T_e^\varepsilon(f - f_1)\|_p \leq A_p \|f - f_1\|_p,$$

wobei die letzten Abschätzungen offenbar gleichmäßig für alle e mit derselben Konstanten B gelten. □

Korollar 2.5 *Gilt* $\rho \in L^p([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, *so gilt auch* $((t,x) \mapsto T_e\rho(t)(x)) \in L^p([0,T] \times \mathbb{R}^n)$. *Überdies gilt*

$$\|T_e\rho\|_{L^p([0,T]\times\mathbf{R}^n)} \leq A_p\|\rho\|_{L^p([0,T]\times\mathbf{R}^n)}$$

mit der Konstanten A_p *aus Satz 2.4.*

Beweis. Gilt $\rho \in L^p([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, so gilt für fast alle $t \in [0,T]$: $\rho(t) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Aus Satz 2.4 folgt dann

$$\|T_e\rho(t)\|_p \leq A_p\|\rho(t)\|_p.$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\|T_e\rho\|_{L^p([0,T]\times\mathbf{R}^n)} = \left(\int_0^T \|T_e\rho(t)\|_p^p dt\right)^{1/p} \leq A_p \left(\int_0^T \|\rho(t)\|_p^p dt\right)^{1/p} =$$
$$= A_p\|\rho\|_{L^p([0,T]\times\mathbf{R}^n)}. \quad \Box$$

Satz 2.6 *Erfülle e die Eigenschaften* $e_1) - e_3)$ *mit der Konstanten* B. *Dann gilt:*
1) $\forall \delta > 0$ *gilt* $e_\delta \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
2) $\exists C = C(n)\, \forall \delta > 0$ *gilt*

$$\|\widehat{e_\delta}\|_\infty \leq CB.$$

Beweis [St, S.36].

Satz 2.7 *Erfülle e die Voraussetzungen von Bemerkung 2.1. Dann gilt:*
1) $\exists m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, *so daß für alle* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\widehat{T_e f} = m\hat{f}.$$

Mit der Konstanten $C > 0$ *aus Satz 2.6 gilt:*
2) Man hat die Darstellung

$$m(x) = lim_{\delta\to 0}\hat{e}_\delta(x) \text{ für alle } x \neq 0,$$

insbesondere also

$$\|m\|_\infty \leq CB.$$

3) Sei $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
Ist $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap H^s(\mathbb{R}^n)$, so gilt auch $T_e f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|T_e\|_{H^s(\mathbf{R}^n)} \leq CB.$$

4) Sei $s \in \mathbb{R}$, $T > 0$. Dann gilt:
Ist $f \in H^s([0,T] \times \mathbb{R}^n) \cap L^2(B_R \times \mathbb{R}^n)$, so ist auch $T_e f \in H^s([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ und

$$\|T_e\|_{H^s([0,T]\times\mathbf{R}^2)} \leq CB.$$

Beweis. Zum Beweis von 1) und 2) definieren wir für $0 < \delta < \eta$ die Hilfsfunktion

$$e_{\delta,\eta}(x) := \begin{cases} e(x) & : \quad \delta \leq |x| \leq \eta \\ 0 & : \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Für diese Funktion gilt $e_{\delta,\eta} \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, und für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ haben wir die Darstellung

$$\widehat{e_{\delta,\eta} * f} = \widehat{e_{\delta,\eta}} \widehat{f}. \tag{14}$$

Wir beweisen zunächst:
a) $\exists C_* \; \forall \delta, \eta > 0, \; \delta < \eta$

$$\|\widehat{e_{\delta,\eta}}\|_\infty \leq C_*,$$

b) $\exists m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so daß für alle $x \neq 0$ gilt

$$m(x) = \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \eta \to \infty}} \widehat{e_{\delta,\eta}}(x).$$

Dafür führen wir für $x \neq 0$ Polarkoordinaten ein. Wir bezeichnen

$$R := |x|, \; x' := x/R, \; r := |y|, \; y' := y/r, \; \text{also } x', y' \in S^{n-1}, \; R, r > 0.$$

Wir haben dann wegen der Eigenschaft Ω_1)

$$\widehat{e_{\delta,\eta}}(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \exp(2\pi i\, xy)\; e_{\delta,\eta}(y) dy =$$

$$= \int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_\delta^\eta \exp(2\pi i\; Rrx'y')\Omega(y')\bar{\Omega}(r) \frac{dr}{r}\; dS^{n-1} =$$

$$= \int\limits_{S^{n-1}} \left(\int\limits_{\delta}^{\eta} (\cos(2\pi\ Rrx'y') - \cos(2\pi Rr))\bar{\Omega}(r)\frac{dr}{r} \right) \Omega(y')\ dS^{n-1} +$$
$$+i \int\limits_{S^{n-1}} \left(\int\limits_{\delta}^{\eta} \sin(2\pi\ Rrx'y')\bar{\Omega}(r)\frac{dr}{r} \right) \Omega(y')\ dS^{n-1},$$

da wegen der Eigenschaft Ω_2)

$$\int\limits_{\delta}^{\eta} \int\limits_{S^{n-1}} \Omega(y')\frac{dr}{r}\ dS^{n-1} = 0$$

gilt. Sei $\lambda := 2\pi R\, x'y',\ \mu := 2\pi R$. Die Menge $\{y' \in S^{n-1}, x'y' = 0\}$ ist eine Nullmenge auf S^{n-1}. Daher setzen wir $\lambda \neq 0$ voraus. Wir betrachten zuerst $Re\ \widehat{e_{\delta,\eta}}$. Nach einer bekannten Formel gilt

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos(\lambda r) - \cos(\mu r)}{r} dr = \ln(|\lambda|/\mu) = \ln|x'y'| = -\ln 1/|x'y'| \leq 0 \quad (15)$$

wegen $|x'y'| \leq 1$. Wir bemerken, daß für $\lambda \neq 0$ und alle $\xi \geq 0$ gilt:

$$\left| \int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{\cos(\lambda r) - \cos(\mu r)}{r} dr \right| \leq \ln 1/|x'y'|. \quad (16)$$

In der Tat, für $\xi = 0$ ist dies bereits erfüllt. Sei also $\xi > 0$. Wir bemerken, daß für jedes $a \neq 0$ die uneigentlichen Integrale $\int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{\cos(ar)}{r} dr$ existieren. Deswegen ist folgende Rechnung erlaubt:

$$\int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{\cos(\lambda r)}{r} dr - \int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{\cos(\mu r)}{r} dr =$$
$$= \int\limits_{|\lambda|\xi}^{\infty} \frac{\cos r}{r} dr - \int\limits_{\mu\xi}^{\infty} \frac{\cos r}{r} dr = \int\limits_{|\lambda|\xi}^{\mu\xi} \frac{\cos r}{r} dr.$$

Also gilt

$$\left|\int_{\xi}^{\infty} \frac{\cos(\lambda r) - \cos(\mu r)}{r} dr\right| \leq \left|\int_{|\lambda|\xi}^{\mu\xi} \frac{1}{r} dr\right| = |\ln(\mu\xi) - \ln(|\lambda|\xi)| =$$

$$= \left|\ln \frac{\mu}{|\lambda|}\right|.$$

Daraus folgt sofort für alle $\xi_1 < \xi_2$

$$\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\cos(\lambda r) - \cos(\mu r)}{r} dr\right| =$$

$$= \left|\int_{\xi_1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda r) - \cos(\mu r)}{r} dr - \int_{\xi_2}^{\infty} \frac{\cos(\lambda r) - \cos(\mu r)}{r} dr\right| \leq$$

$$\leq 2 \left|\ln \frac{\mu}{|\lambda|}\right|.$$

Jetzt benutzen wir (15) und schließen daraus mit dem Abelschen Satz ([Fi], S. 585): Für alle $y' \in S^{n-1}$ mit $x'y' \neq 0$ existiert der Grenzwert

$$\phi(x, y') := \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \eta \to \infty}} \int_{\delta}^{\eta} \frac{\cos(\lambda r) - \cos(\mu r)}{r} \bar{\Omega}(r) dr,$$

da die Funktion $\bar{\Omega}$ monoton und beschränkt ist. Mit dem zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es für $0 < \delta < \eta$ ein $\xi(\delta, \eta)$ mit

$$\int_{\delta}^{\eta} \frac{\cos \lambda r - \cos \mu r}{r} \bar{\Omega}(r) dr = \bar{\Omega}(\eta) \int_{\xi(\delta,\eta)}^{\eta} \frac{\cos \lambda r - \cos \mu r}{r} dr,$$

und hieraus folgt mit $\bar{\Omega}_1$)

$$\left|\int_{\delta}^{\eta} \frac{\cos \lambda r - \cos \mu r}{r} \bar{\Omega}(r) dr\right| \leq$$

$$\leq \bar{\omega} \left|\int_{\xi(\delta,\eta)}^{\eta} \frac{\cos \lambda r - \cos \mu r}{r} dr\right| \leq 2\bar{\omega} \ln 1/|x'y'|.$$

Da die letzte Abschätzung gleichmäßig in η, δ ist, folgt sofort auch

$$|\phi(x,y')| \leq 2\bar{\omega} \ln 1/|x'y'|$$

und

$$\int\limits_{S^{n-1}} |\phi(x,y')| dS^{n-1} \leq 2\bar{\omega} \int\limits_{S^{n-1}} \ln 1/|x'y'| dS^{n-1} \leq C\bar{\omega}$$

für alle $y' \in S^{n-1}$ mit $x'y' \neq 0$. Weiter folgt

$$|Re\ \widehat{e_{\delta,\eta}}| \leq C\bar{\omega} \int\limits_{S^{n-1}} \ln 1/|x'y'||\Omega(y')| dS^{n-1} \leq C\bar{\omega} B_0 \int\limits_{S^{n-1}} |\phi(x,y')| dS^{n-1} \leq C_*.$$

Jetzt behandeln wir $Im\ \widehat{e_{\delta,\eta}}$. Wir bemerken, daß gilt

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin \lambda r}{r} dr = \frac{\pi}{2} \text{sign } \lambda.$$

Also haben wir

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \eta \to \infty}} \int\limits_\delta^\eta \frac{\sin(\lambda r)}{r} dr = \frac{\pi}{2} \text{sign}(x'y').$$

Hieraus schließen wir wie bei der Behandlung von $Re\ \widehat{e_{\delta,\eta}}$: Es existiert der Grenzwert

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \eta \to \infty}} \int\limits_\delta^\eta \frac{\sin \lambda r}{r} \bar{\Omega}(r) dr =: \psi(x,y')$$

und es gibt ein $\xi(\delta,\eta) \geq 0$ mit

$$\int\limits_\delta^\eta \frac{\sin \lambda r}{r} \bar{\Omega}(r) dr = \bar{\Omega}(\eta) \int\limits_{\xi(\delta,\eta)}^\eta \frac{\sin \lambda r}{r} dr.$$

Die Grösse $\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ ist in δ stetig und besitzt Grenzwerte für $\delta \to 0$ und $\delta \to \infty$, ist also in δ beschränkt. Daraus folgt offenbar: $\int\limits_{\delta}^{\eta} \frac{\sin t}{t} dt$ ist in δ, η beschränkt. Also gilt mit $\bar{\Omega}_1$)

$$\left| \int\limits_{\delta}^{\eta} \frac{\sin \lambda r}{r} \bar{\Omega}(r) dr \right| \leq \bar{\omega} C$$

gleichmäßig in δ, η. Deswegen gilt auch

$$|\psi(x, y')| \leq \bar{\omega} C$$

mit einer von λ unabhängigen Konstanten C. Wegen der Beschränktheit von Ω gilt weiter

$$|Im\ \widehat{e_{\delta,\eta}}| \leq C\bar{\omega} \int\limits_{S^{n-1}} |\Omega(y')| dS^{n-1} \leq C\bar{\omega} B_0 =: C_*$$

und

$$\int\limits_{S^{n-1}} |\psi(x, y')| dS^{n-1} \leq \bar{\omega} \int\limits_{S^{n-1}} dS^{n-1} \leq C\bar{\omega}.$$

Dies zeigt die Eigenschaft a), und aus dem Satz von Lebesgue folgt die Existenz der Grenzwerte in b). Nun gilt

$$m(x) := \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \eta \to \infty}} \widehat{e_{\delta,\eta}(x)} = \lim_{\delta \to 0} \widehat{e_\delta(x)}$$

für $x \neq 0$. Also gilt in $L^2(\mathbb{R}^n)$ für jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit (14)

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \eta \to \infty}} \widehat{e_{\delta,\eta} * f} = \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \eta \to \infty}} \widehat{e_{\delta,\eta}} \hat{f} = m\hat{f}.$$

Nach dem Satz von Plancherel konvergiert daher auch $e_{\delta,\eta} * f$ für $\delta \to 0, \eta \to \infty$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ für jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, und zwar gegen $T_e f$, was insgesamt 1)

und 2) beweist.
Jetzt beweisen wir 3). Es gilt

$$\|T_e f\|^2_{H^s(\mathbf{R}^n)} = \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\widehat{T_e f}(x)|^2 (|x|^2+1)^s dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbf{R}^n} |m(x)|^2 |\widehat{f}(x)|^2 (|x|^2+1)^s dx \leq$$
$$\leq \|m\|^2_\infty \|f\|^2_{H^s(\mathbf{R}^n)}.$$

Wenden wir jetzt 2) an, so bekommen wir die Abschätzung

$$\|T_e f\|_{H^s(\mathbf{R}^n)} \leq BC \|f\|_{H^s(\mathbf{R}^n)},$$

die die Behauptung 3) zeigt.
4) Für $f \in L^2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ gilt nach Satz 2.7

$$\mathcal{F}_{t,x}\, T_e f(t)(\cdot, y) = \mathcal{F}_t \left(\mathcal{F}_x T_e f(t)\right)(y) = \mathcal{F}_t \widehat{T_e f(t)}(y) =$$
$$= \mathcal{F}_t(m(y)\widehat{f(t)})(y) = m(y) \mathcal{F}_t \widehat{f(t)}(y) =$$
$$= m(y) \left(\mathcal{F}_{t,x} f\right)(\cdot, y).$$

Und daher ähnlich wie im Beweis von 3)

$$\|T_e f\|^2_{H^s((0,T)\times\mathbf{R}^n)} = \int\limits_{(0,T)} \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\mathcal{F}_{t,x} T_e f(\tau, y)|^2 (|y|^2 + |\tau|^2 + 1)^s \, dy \, d\tau =$$
$$= \int\limits_{(0,T)} \int\limits_{\mathbf{R}^n} |m(y)|^2 |\mathcal{F}_{t,x} f(\tau, y)|^2 (|y|^2 + |\tau|^2 + 1)^s \, dy \, d\tau \leq$$
$$\leq \|m\|^2_\infty \int\limits_{(0,T)} \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\mathcal{F}_{t,x} f(\tau, y)|^2 (|y|^2 + |\tau|^2 + 1)^s \, dy \, d\tau \leq$$
$$\leq \|m\|^2_\infty \|f\|^2_{H^s((0,T)\times\mathbf{R}^n)} \leq (CB)^2 \|f\|^2_{H^s((0,T)\times\mathbf{R}^n)},$$

wobei wir 1) benutzt haben. □

Bemerkung 2.8 *Das Besondere an der Aussage 1) aus dem letzten Satz ist, daß sie eine Verallgemeinerung der Gleichung* $\widehat{e * f} = \widehat{e}\widehat{f}$ *darstellt, die für* $e, f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *gilt. Die Aussage 4) ist für uns wichtig, weil wir bei der Behandlung schwacher Lösungen die Abschätzungen der Form*

$$\|T_e\|_2 \leq BC$$

benötigen, aus der ersichtlich ist, wie Abschätzungen der Operatornorm $\|T_e\|_2$ *von* B *abhängen. Solche Abschätzungen, aus denen die Abhängigkeit von* B *hervorgeht, benötigen wir nicht für die Operatornorm* $\|T_e\|_p$, $p\ \in]1,2[$. *Es wäre möglich, solche Abschätzungen durch Interpolation zwischen* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *und* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *zu erhalten, beziehungsweise durch Interpolation zwischen* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *und* $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *für* $p \in [2,\infty[$.

Lemma 2.9 *Für ein* $f,\sigma \in L^2([0,T]\times\mathbb{R}^2)$ *gilt gleichmäßig für alle* e, *die den Bedingungen* $e1) - e3)$ *mit derselben Konstanten* B *genügen,*

$$\int\limits_0^T \int \sigma(t,x) T_e^{;\delta} f(t)(x)dxdt \to 0, \text{ für } \delta \to 0.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst nur Testfunktionen der Form $\sigma = \sigma_1\sigma_2$, $\sigma_1 \in C([0,T]), \sigma_2 \in C_c(\mathbb{R}^2)$.
In der folgenden Rechnung ist $\lim\limits_{\eta\to 0}$ stets im Sinne von $L^2(\mathbb{R}^2)$ zu verstehen:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^T \int \sigma_1(t)\sigma_2(x) T_e^{;\delta} f(t)(x)dxdt = \\
&= \int \int\limits_0^T \sigma_1(t)\sigma_2(x)\left(\lim_{\eta\to 0} T_e^{\eta,\delta} f(t)\right)(x)dtdx = \\
&= \int \sigma_2(x)\left(\lim_{\eta\to 0}\int\limits_0^T \sigma_1(t) T_e^{\eta,\delta} f(t)\right)(x)dtdx = \\
&= \int \sigma_2(x)\left(\lim_{\eta\to 0}\int\limits_0^T \sigma_1(t)\left[\int\limits_{\eta<|y-x|<\delta} e(x-y)f(t,y)dy\right]dt\right)dx = \\
&= \int \sigma_2(x)\lim_{\eta\to 0}\left(\int\limits_{\eta<|y-x|<\delta} e(x-y)\int\limits_0^T \sigma_1(t)f(t,y)dt\right)dydx = \\
&= \int \sigma_2(x) T_e^{;\delta} f_{\sigma_1}(x),
\end{aligned}$$

wobei $f_{\sigma_1}(y) = \int\limits_0^T \sigma_1(t) f(t,y) dt, y \in \mathbb{R}^2$.
Wir zeigen jetzt, daß $f_{\sigma_1} \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Für $y \in \mathbb{R}^2$ haben wir

$$|f_{\sigma_1}(y)| \leq \int\limits_0^T |\sigma_1(t) f(t,y)| dt \leq \|\sigma_1\|_2 \left(\int\limits_0^T |f(t,y)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Also

$$\left(\int |f_{\sigma_1}(y)|^2 dy \right)^{1/2} \leq \|\sigma_1\|_2 \left(\int \int\limits_0^T f(t,y)^2 dt dy \right)^{1/2} = \|\sigma\|_2 \|\!| f \|\!|_2.$$

Aufgrund der Gleichung $T_e^{;\delta} = T_e - T_e^\delta$ und nach Satz 2.4 gilt für jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\|T_e^{;\delta} f\|_2 = \|T_e f - T_e^\delta f\|_2 \to 0 \text{ für } \delta \to 0$$

gleichmäßig für alle e, die die Bedingungen $e1) - e3)$ mit derselben Konstanten B erfüllen. Also gilt

$$\begin{aligned} &\left| \int \int\limits_0^T \sigma_1(t) \sigma_2(x) T_e^{;\delta} f(t)(x) dt dx \right| = \\ = &\left| \int \sigma_2(x) T_e^{;\delta} f_{\sigma_1}(x) dx \right| \leq \\ \leq &\|\sigma_2\|_2 \|T_e^{;\delta} f_{\sigma_1}\|_2 \to 0 \text{ für } \delta \to 0 \end{aligned}$$

gleichmäßig für e. Der Fall eines allgemeinen $\sigma \in L^2([0,T] \times \mathbb{R}^2)$ ergibt sich aus der Dichtheit von Funktionen der Form

$$\sigma = \sum_{m=1}^N \sigma_1^m \sigma_2^m$$

mit $\sigma_1^m \in C([0,T]), \sigma_2^m, \in C_c(\mathbb{R}^2), m = 1, \dots N$ in $L^2([0,T] \times \mathbb{R}^2)$. Denn wir können schreiben

$$\begin{aligned} \int \int \sigma(t,x) T_e^{;\delta} f(t)(x) dt dx = &\int \int (\sigma - \sum_{m=1}^n \sigma_1^m \sigma_2^m) T_e^{;\delta} f(t)(x) dt dx + \\ &+ \sum_{m=1}^n \int \int \sigma_1^m \sigma_2^m T_e^{;\delta} f(t)(x) dt dx. \end{aligned}$$

Der erste Term kann mit Hilfe von Satz 2.4 folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$\left| \int \int (\sigma - \sum_{m=1}^{n} \sigma_1^m \sigma_2^m) T_e^{;\delta} f(t)(x) dt dx \right| \leq$$

$$\leq \|\sigma - \sum_{m=1}^{n} \sigma_1^m \sigma_2^m \|_2 \| T_e^{;\delta} f \|_2 \leq 2A_2 \|f\| \|\sigma - \sum_{m=1}^{n} \sigma_1^m \sigma_2^m \|_2.$$

Nun kann man für ein vorgegebenes $\eta > 0$ ein $N(\eta) \in \mathbb{N}$ und $\sigma_1^m \in C([0,T])$, $\sigma_2^m \in C_c(\mathbb{R}^2)$, $m = 1, \dots N(\eta)$ finden, so daß dieser Term klein als $\eta/2$ wird. Für diese σ_1^m, $\sigma_2^m, m = 1, \dots N(\eta)$ konvergiert der zweite Term gegen 0 für $n \to \infty$, wie wir es für die separierenden Funktionen bereits oben gezeigt haben. Also findet sich ein $n_0(\eta) > 0$, so daß für alle $n > n_0(\eta)$ der zweite Term auch kleiner als $\eta/2$ wird. Daraus folgt die Behauptung. □

Lemma 2.10 *Sei* $\sigma \in C_c^1(\mathbb{R}^m)$ *und* $0 < s < 1$.
Dann gilt: $\forall f \in H^s(\mathbb{R}^m)$ *ist* $f\sigma \in H^s(\mathbb{R}^m)$ *und* $\exists C(\sigma, s)$ *mit* $\|f\sigma\|^2_{H^s(\mathbf{R}^m)} \leq C(\sigma, s)\|f\|^2_{H^s(\mathbf{R}^m)}$.

Beweis. Z.B. [Wl, s.71].

2.3 Das Lemma von Golse-Lions-Perthame-Sentis

Lemma 2.11 (Golse-Lions-Perthame-Sentis) *Sei* $m \in \mathbb{N}_0$, $R \in]0, +\infty]$, *und es sei* $\psi \in \mathcal{D}(B_R)$.
Dann $\exists C = C(m, R, \psi) > 0 \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times B_R)$ *und für jede Familie* $(g_\eta)_{|\eta| \leq m, \eta \in \mathbf{N}_0^n} \subset L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times B_R)$ *mit*

$$\partial_t f + v \cdot \partial_x f = \sum_{|\eta| \leq m} D_v^\eta g_\eta \ \textit{in} \ \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times B_R)$$

gilt

$$\int_{B_R} f(\cdot, \cdot, v)\psi(v) dv \in H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$$

mit $s = \frac{1}{2}\frac{1}{1+m}$, *und*

$$\| \int_{B_R} f(\cdot, \cdot, v)\psi(v) dv \|_{H^s(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n)} \leq$$

$$\leq C\left(\|f\|^2_{2,\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times B_R}+\sum_{|\eta|\leq m}\|g_\eta\|^2_{2,\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times B_R}\right)^{1/2}$$

Beweis [GLPS88]. In dieser Variante siehe auch [Kr].

2.4 Kompaktheitssätze

Satz 2.12 (Dunford-Pettis) *Eine Teilmenge $F \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ ist relativ schwach kompakt genau dann, wenn gilt:*
(i) F ist beschränkt,
(ii) $\int_E |f(z)|dz \to 0, \lambda^n(E) \to 0$ gleichmäßig für $f \in F$,
(iii) $\int_{|x|\geq R} |f(z)|dz \to 0, R \to \infty$ gleichmäßig für $f \in F$.

Beweis: z.B. in [DuSc]

Satz 2.13 *Sei I ein separabler topologischer Raum und sei X ein Banach-Raum. Sei F eine Familie von Funktionen $f : I \to X$, so daß gilt:*
(i) $\forall t \in I$ $\{f(t); f \in F\}$ ist relativ schwach kompakt,
(ii) $\forall x' \in X'$ ist $\{x' \circ f; f \in F\}$ gleichgradig stetig.
Dann gilt: für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset F$ existiert eine Teilfolge $(f_{i_n})_{n\in\mathbf{N}}$ und eine stetige Funktion $f_0 : I \to (X, \sigma(X, X'))$, so daß $\forall x' \in X'$ $x' \circ f_{i_n} \to x' \circ f_0$ gleichmäßig auf I .

Beweis: [HoHu84]

Satz 2.14 *Seien $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 < s_2$ und $B \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt:*

1. *Die Einbettung $H^{s_2}(B) \subset H^{s_1}(B)$ ist stetig.*

2. *Ist außerdem B beschränkt, so ist diese Einbettung kompakt.*

Beweis von 1. siehe [BeLo], S. 153. Punkt 2. ist in [Wl] für $0 \leq s_1 < s_2$ bewiesen worden. Um den Fall $s_1 < s_2 \leq 0$ behandeln zu können, benutzen wir die Dualität und Reflexivität von Sobolev-Räumen mit positiven und negativen Indizes. Wir betrachten den Einbettungsoperator $l_{s_2,s_1} : H^{s_2}(B) \to H^{s_1}(B)$, $s_1 < s_2 \leq 0$ und den zu ihm konjugierten Operator $l^*_{s_2,s_1} : H^{-s_1}(B) \to H^{-s_2}(B)$, der für alle $\sigma^* \in H^{-s_1}(B)$ durch $\sigma^* \mapsto \sigma^* l_{s_2,s_1}$ definiert ist. Wir wollen zeigen, daß dieser konjugierte Operator mit dem Einbettungsoperator $l_{-s_1,-s_2} : H^{-s_1}(B) \to H^{-s_2}(B)$ übereinstimmt. In der Tat, es gilt für alle $\sigma^* \in H^{-s_1}(B)$

$$l^*_{s_2,s_1}\sigma^* = \sigma^* l_{s_2,s_1}.$$

Dies ist im Sinne von Funktionalen zu verstehen, also gilt für alle $\phi \in H^{s_2}(B)$

$$l^*_{s_2,s_1}\sigma^*\phi = \sigma^* l_{s_2,s_1}\phi. \tag{17}$$

Für die Funktionale $\phi \in H^{s_2}(B)$ gilt $l_{s_2,s_1}\phi = \phi|_{H^{s_1}(B)}$, d.h. für $\sigma^* \in H^{-s_1}(B)$ gilt $l_{s_2,s_1}\phi\sigma^* = \phi\sigma^*$, oder äquivalent $\sigma^* l_{s_2,s_1}\phi = \sigma^*\phi$. Wir setzen es in (17) ein und erhalten

$$l^*_{s_2,s_1}\sigma^*\phi = \sigma^*\phi.$$

Für die Funktionen σ^* gilt $l_{-s_1,-s_2}\sigma^* = \sigma^*$ und daraus folgt

$$l^*_{s_2,s_1}\sigma^*\phi = l_{-s_1,-s_2}\sigma^*\phi.$$

Da dies für alle $\phi \in H^{s_2}(B)$ und $\sigma^* \in H^{-s_1}(B)$ gilt, schließen wir

$$l^*_{s_2,s_1} = l_{-s_1,-s_2}$$

als Operator $H^{-s_1}(B) \to H^{-s_2}(B)$.

Der Operator $l_{-s_1,-s_2}$, $0 \le -s_2 < -s_1$ ist kompakt, wie wir oben bemerkt haben. Da nach dem Satz von Schauder ein Operator genau dann kompakt ist, wenn der konjugierte kompakt ist, ist auch der Operator l_{s_2,s_1} kompakt. Der Fall $s_1 \le 0 \le s_2$ folgt aus den beiden oben Betrachteten. □

2.5 Das Lemma von Gronwall

Lemma 2.15 (Gronwall) *Sei Φ stetig auf $[a,b]$. Sei $\alpha, \beta \in C([a,b])$, $\alpha < \beta$, $\beta \ge 0$.*

1. *Gilt auf $[a,b]$*

$$\Phi(t) \le C + \int_a^t \alpha(\tau)d\tau + \int_a^t \beta(\tau)\Phi(\tau)d\tau,$$

so gilt dort auch

$$\Phi(t) \leq \exp(\int_a^t \beta(\tau)d\tau)[C + \int_a^t \alpha(\tau)\exp(-\int_a^\tau \beta(\sigma)d\sigma)d\tau].$$

2. *Gilt auf* $[a, b]$

$$\Phi(t) \leq C + \int_t^b \alpha(\tau)d\tau + \int_t^b \beta(\tau)\Phi(\tau)d\tau,$$

so gilt dort auch

$$\Phi(t) \leq \exp(\int_t^b \beta(\tau)d\tau)[C + \int_t^b \alpha(\tau)\exp(-\int_\tau^b \beta(\sigma)d\sigma)d\tau].$$

Korollar 2.16 *Seien die Voraussetzungen von Lemma 2.15 erfüllt und sei außerdem auch* $\alpha \geq 0$ *auf* $[0, T]$*.*

1. *Gilt auf* $[a, b]$

$$\Phi(t) \leq C + \int_a^t \alpha(\tau)d\tau + \int_a^t \beta(\tau)\Phi(\tau)d\tau,$$

so gilt dort auch

$$\Phi(t) \leq [C + \int_a^t \alpha(\tau)d\tau]\exp(\int_a^t \beta(\tau)d\tau).$$

2. *Gilt auf* $[a, b]$

$$\Phi(t) \leq C + \int_t^b \alpha(\tau)d\tau + \int_t^b \beta(\tau)\Phi(\tau)d\tau,$$

so gilt dort auch

$$\Phi(t) \leq [C + \int_t^b \alpha(\tau)d\tau]\exp(\int_t^b \beta(\tau)d\tau).$$

3 Klassische Lösungen

3.1 Eigenschaften klassischer Lösungen

Wir betrachten zuerst die Bewegung eines Teilchens im $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ in einem Kraftfeld $K(t,x)$ auf dem Zeitintervall I mit linkem Randpunkt 0. Wir setzen voraus, daß $K \in C^1(I \times \mathbb{R}^2)$ und für jedes kompakte Teilintervall $J \subset I$ $K|_{J\times\mathbf{R}^2}$ beschränkt ist, und betrachten das System

$$\begin{cases} \dot{X} = V \\ \dot{V} = K(t,X). \end{cases} \tag{18}$$

Für dieses System sind folgende Aussagen bekannt.

Lemma 3.1 *Es gilt:*

1. *Für alle $t \in I$ und alle Anfangsdaten $z \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ existiert eine eindeutige Lösung $s \mapsto Z(s,t,z)$ auf I von (18) mit $Z(t,t,z) = z$;*

2. *Die Abbildung $Z: \; I \times I \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ist stetig differenzierbar und $Z(s,t,\cdot) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ist ein C^1-Diffeomorphismus mit der Inversen $Z(t,s,\cdot)$, $s,t \in I$ (eine solche Abbildung nennen wir "Phasenstrom");*

3. *Die Abbildung $Z(s,t) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ist maßerhaltend, d.h.*

$$det\partial_z Z(s,t,z) = 1,$$

   $s,t \in I$, $z \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$;

4. *Die Abbildung $\partial_t Z$ genügt dem System*

$$\begin{cases} \partial_t X(s,t,z) = -v - \int\limits_s^t \partial_t V(\tau,t,z)d\tau \\ \partial_t V(s,t,z) = -K(t,x) - \int\limits_s^t \partial_x K(\tau, X(\tau,t,z))\partial_t X(\tau,t,z)d\tau, \end{cases}$$

   $s,t \in I$, $z \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

5. *Die Abbildung $\partial_z Z$ erfüllt das System*

$$\begin{cases} \partial_s \partial_z X(s,t,z) = \partial_z V(s,t,z) \\ \partial_s \partial_z V(s,t,z) = \partial_x K(t, X(s,t,z)) \partial_z X(s,t,z) \end{cases}$$

zur Anfangsbedingung $\partial_z Z(t,t,z) = id_z$.

Lemma 3.2 *Es gilt:*

1. *Eine Funktion $f \in C^1(I \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ erfüllt (V) genau dann, wenn f konstant längs jeder Lösung von (18) ist;*

2. *Für $\overset{\circ}{f} \in C^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ ist die Funktion $f(t,z) := \overset{\circ}{f}(Z(0,t,z)), t \in I, z \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ die eindeutig bestimmte Lösung in $C^1(I \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ von (V) mit $f(0) = \overset{\circ}{f}$;*

3. *Gilt $\overset{\circ}{f} \in L^p(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$, dann ist $f(t) \in L^p(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ und es gilt $\|f(t)\|_p = \|\overset{\circ}{f}\|_p$, $t \in I$, $p \in [1, \infty]$.*

3.2 Das singuläre Problem

3.2.1 Das Potenzial

In diesem Abschnitt studieren wir die Eigenschaften des Potenzials U, das für ein bestimmtes ρ durch

$$U(x) := -\int \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy$$

(zunächst formal) definiert ist. Die sich aus Bedingungen an ρ ergebenden Eigenschaften für U folgern wir zum Teil aus Satz 2.2, zu einem anderen Teil aus dem folgenden Lemma.

Lemma 3.3 *Ist $\rho \in C_c^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2)$, so ist $U \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2)$. Ist* $\mathrm{supp}\rho \subset B_R$*, so hat man im einzelnen:*

1. $\|U\|_\infty \leq 2\pi R \|\rho\|_\infty$,

2. $\partial_x U$ *besitzt die Darstellung*

$$\partial_x U(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} \frac{x-y}{|x-y|^3}\rho(y)dy = V.P. \int \frac{x-y}{|x-y|^3}\rho(y)dy$$

und erfüllt die Abschätzung

$$|\partial_x U|_{0,\alpha} \leq A(\alpha) R^\alpha |\rho|_{0,\alpha}$$

mit der Konstanten $A(\alpha)$ *aus Satz 2.2.*

3. Für $i, j = 1, 2$ *gilt*

$$\partial^2_{x_j,x_i} U(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^3}\partial_{x_j}\rho(y)dy$$

mit der Abschätzung

$$|\partial^2_x U|_{0,\alpha} \leq A(\alpha) R^\alpha |\rho|_{1,\alpha}.$$

Beweis. 1. Es gilt

$$|U(x)| \leq \int\limits_{|x-y|\leq R} \frac{\rho(y)}{|y-x|}dy \leq$$
$$\leq \|\rho\|_\infty \int\limits_{|x-y|\leq R} \frac{1}{|x-y|}dy = \|\rho\|_\infty 2\pi \int\limits_0^R \frac{1}{r} r dr = \|\rho\|_\infty 2\pi R.$$

Damit erhalten wir die angegebene Abschätzung. Weil ρ überdies stetig ist und der Kern $\frac{1}{|x|}$ lokal integrierbar, ist U insbesondere auch stetig.
2. Wegen der Glattheit von ρ existiert $\partial_x \rho$ und ist wegen der Kompaktheit des Trägers insbesondere integrierbar. Dann ist auch U differenzierbar und für $\partial_x U$ gilt die Darstellung

$$\partial_x U(x) = -\partial_x \int \frac{1}{|y|}\rho(x-y)dy =$$
$$= -\int \frac{1}{|y|}\partial_x \rho(x-y)dy = -\int \frac{1}{|x-y|}\partial_x \rho(y)dy.$$

Mit der Greenschen Formel erhalten wir dann

$$\partial_x U(x) = -\int \frac{1}{|x-y|}\partial_y \rho(y)dy = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} \frac{1}{|x-y|}\partial_y \rho(y)dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(- \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} \frac{1}{|x-y|}\frac{x-y}{|x-y|}\rho(y)dS_y + \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} \frac{x-y}{|x-y|^3}\rho(y)dy \right).$$

Für das erste Integral gilt

$$\left| \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} \frac{1}{|x-y|}\frac{x-y}{|x-y|}\rho(y)dS_y \right| =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left| \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} \frac{x-y}{|x-y|}(\rho(y)-\rho(x))dS_y \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} |x-y|^\alpha [\rho]_{0,\alpha} dS_y = \varepsilon^{\alpha-1}[\rho]_{0,\alpha} 2\pi\varepsilon \to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0.$$

Das zeigt die gewünschte Darstellung.
Setzen wir nun $\Omega(x) := \frac{x}{|x|}$ und $e(x) := \frac{\Omega(x)}{|x|^2}$, so können wir Satz 2.2 im Zusammenhang mit Bemerkung 2.3 anwenden und erhalten $\partial_x U \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ mit der angegebenen Abschätzung.
3. Wegen der Voraussetzungen an ρ existiert insbesondere $\partial_x \rho$ und ist integrierbar. Wir benutzen jetzt die Darstellung 2.. Wir bemerken, daß gilt

$$\partial_{x_j} \int\limits_{\varepsilon<|z|<R} \frac{z_i}{|z|^3}\rho(x-z)dz = \int\limits_{\varepsilon<|x-y|<R} \frac{x_i-y_i}{|x-y|^3}\partial_{x_j}\rho(y)dy.$$

Satz 2.2 im Zusammenhang mit Bemerkung 2.3 ergibt ferner, daß die Limites

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|z|>\varepsilon} \frac{z_i}{|z|^3}\rho(x-z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} \frac{x_i-y_i}{|x-y|^3}\rho(y)dy$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|z|>\varepsilon} \frac{z_i}{|z|^3}\partial_{x_j}\rho(x-z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} \frac{x_i-y_i}{|x-y|^3}\partial_{x_j}\rho(y)dy$$

gleichmäßig in x existieren. Dann ist die folgende Rechnung erlaubt:

$$\partial^2_{x_j,x_i}U(x) = \partial_{x_j}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x-y|>\varepsilon}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^3}\rho(y)dy =$$

$$= \partial_{x_j}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|z|>\varepsilon}\frac{z_i}{|z|^3}\rho(x-z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\partial_{x_j}\int\limits_{|z|>\varepsilon}\frac{z_i}{|z|^3}\rho(x-z)dz =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|z|>\varepsilon}\frac{z_i}{|z|^3}\partial_{x_j}\rho(x-z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x-y|>\varepsilon}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^3}\partial_{x_j}\rho(y)dy.$$

Satz 2.2 ergibt dann auch die nötige Abschätzung. □

Lemma 3.4 *Ist $\rho \in C^{1,\alpha}_c(\mathbb{R}^2)$, so erfüllt das Potenzial U die Abfallbedingungen:*

1. *$U(x) \sim \frac{1}{|x|}$, für $|x| \to \infty$;*

2. *$\partial_x U \sim \frac{1}{|x|^2}$, für $|x| \to \infty$.*

Beweis. Sei R so, daß supp $\rho \subset B_R$ und sei $|x| > 2R$. Dann gilt

$$|U(x)| = \left|\int \frac{\rho(y)}{|x-y|}dy\right| = \left|\int\limits_{|y|\le R}\frac{\rho(y)}{|x-y|}dy\right| \le \frac{1}{|x|-R}\|\rho\|_1 \le \frac{2\|\rho\|_1}{|x|}.$$

Analog gilt für $\partial_x U$:

$$|\partial_x U(x)| = \left|\int\limits_{|y|\le R}\frac{x-y}{|x-y|^3}\rho(y)dy\right| \le \frac{1}{(|x|-R)^2}\|\rho\|_1 \le \frac{4\|\rho\|_1}{|x|^2}.\square$$

3.2.2 Das Iterationsverfahren

Im folgenden betrachten wir einen festen Anfangswert $\overset{\circ}{f}\in C^{1,\alpha}_c(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ und beweisen die lokale Existenz einer Lösung des Problems (VP). Dazu definieren wir zunächst formal einen Operator F wie folgt. Sei $T > 0$.

1. Für $f \in C^{1,\alpha}_c([0,T]\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ definieren wir die Dichte

$$\rho(t,x) := \int f(t,x,v)dv;$$

2. Wir setzen

$$U(t,x) := -\int \frac{\rho(t,y)}{|x-y|}dy,$$
$$K(t,x) := -\partial_x U(t,x);$$

3. Wir bestimmen die Lösung $Z(\cdot,\cdot,\cdot)$ des Systems

$$\begin{cases} \dot{X} = V \\ \dot{V} = K(t,X) \end{cases}$$

mit Lemma 3.1;

4. Schließlich setzen wir $(Ff)(t,z) := \overset{\circ}{f}(Z(0,t,z))$ (dies ist die Lösung von (V) zur Anfangsbedingung $\overset{\circ}{f}$).

Der Existenzbeweis wird dann in den beiden folgenden Schritten durchgeführt werden:

1. Wir zeigen in Abschnitt 3.2.2.1, daß der Operator F als Operator von $C_c^{1,\alpha}([0,T]\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ nach $C_c^{1,\alpha}([0,T]\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ wohldefiniert ist.

2. Wir beweisen dann in Abschnitt 3.2.2.2, daß die induktiv definierte Folge

$$f_0(t) := \overset{\circ}{f},$$
$$f_{n+1} := F(f_n)(t), \quad t \in [0,T]$$

eine Teilfolge enthält, die gegen Lösung des Problems konvergiert.

Im folgenden seien $\overset{\circ}{R} \geq 1$ und $\overset{\circ}{P} \geq 1$ so gewählt, daß gilt:

$$\overset{\circ}{f}(x,v) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2,\ |x| > \overset{\circ}{R} \text{ und für alle } v \in \mathbb{R}^2,$$
$$\overset{\circ}{f}(x,v) = 0 \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^2,\ |v| > \overset{\circ}{P} \text{ und für alle } x \in \mathbb{R}^2.$$

3.2.2.1 Der Operator F

Für eine Funktion $f : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ betrachten wir die folgenden Eigenschaften:

f_1) $f \in C_c^{1,\alpha}([0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$;

f_2) es gibt ein $R \in C([0,T])$, $R(t) \geq 1$ mit $f(t,x,v) = 0$ für $|x| > R(t)$, $v \in \mathbb{R}^2$;
und ein $P \in C([0,T]), P(t) \geq 1$ mit $f(t,x,v) = 0$ für $|v| > P(t)$, $x \in \mathbb{R}^2,\ t \in [0,T]$.

Für eine Funktion $\rho : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ betrachten wir die folgenden Eigenschaften:

ρ_1) $\rho \in C_c^{1,\alpha}([0,T] \times \mathbb{R}^2)$;

ρ_2) es gibt ein $Q \in C([0,T])$ mit $\rho(t,x) = 0$ für $|x| > Q(t),\ t \in [0,T]$.

Für eine Funktion $K : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ betrachten wir die folgenden Eigenschaften:

K_1) $K \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}^2)$,

K_2) $\partial_{(t,x)} K(t) \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2), t \in [0,T]$,

K_3) $|\partial_{(t,x)} K|_{(x),0,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2} < \infty$.

Im folgenden betrachten wir die Variable $w := (t,z)$.
Für einen Phasenstrom Z auf $[0,T] \times [0,T]$ betrachten wir die folgenden Eigenschaften:

Z_1) $\partial_w Z \in C([0,T] \times [0,T] \times B_{r_x} \times B_{r_v})$
für alle $r_x > 0, r_v > 0$.

Z_2) $\partial_w Z(s) \in C^{0,\alpha}([0,T] \times B_{r_x} \times B_{r_v})$
für alle $s \in [0,T]$ und für alle $r_x > 0, r_v > 0$.

Lemma 3.5 *Erfülle f die Bedingungen $f_1) - f_2)$. Wir definieren auf*

$[0,T]\times\mathbb{R}^2$

$$\rho(t,x) := \int f(t,x,v)dv.$$

Dann erfüllt ρ die Bedingungen $\rho_1) - \rho_2)$ und es gelten folgende Abschätzungen:

1. $\|\rho(t)\|_\infty \le \pi P^2(t)\|f\|_\infty$;
2. $[\rho(t)]_{0,\alpha} \le \pi P^2(t)[f(t)]_{0,\alpha}$;
3. $\|\partial_x\rho(t)\|_\infty \le \pi P^2(t)\|\partial_x f(t)\|_\infty$;
4. $[\partial_x\rho(t)]_{0,\alpha} \le \pi P^2(t)[\partial_x f(t)]_{0,\alpha}$;
5. $|\rho|_{1,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2} \le \pi P^2(t)|f|_{1,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2}$.

Beweis. $\rho_2)$ Für $|x| > R(t)$ ist $\rho(t,x) = 0$, also kann man $Q(t) := R(t)$ setzen.
Aus der Darstellung

$$\rho(t,x) = \int\limits_{|v|<P(t)} f(t,x,v)dv$$

ergibt sich die Abschätzung $\|\rho(t)\|_\infty \le \pi P^2(t)\|f\|_\infty$. Weiter folgt aus derselben Darstellung $[\rho(t)]_{0,\alpha} \le \pi P^2(t)[f(t)]_{0,\alpha}$.
Analog gilt für $y = x$ oder $y = t$

$$\partial_y\rho(t,x) = \int\limits_{|v|<P(t)} \partial_y f(t,x,v)dv,$$

woraus die Abschätzungen 3.,4.,5. folgen. Dann ist auch $\rho_1)$ klar. □

Lemma 3.6 *Erfülle ρ die Bedingungen $\rho_1) - \rho_2)$. Dann erfüllt*

$$K(t,x) := V.P.\int \frac{x-y}{|x-y|^3}\rho(t,y)dy$$

die Bedingungen $K_1) - K_3)$ und es gilt mit der Konstanten $A(\alpha)$ aus Satz 2.2

1. $|K(t)|_{0,\alpha} \leq A(\alpha)Q^\alpha(t)|\rho(t)|_{0,\alpha}$;

2. $|\partial_x K(t)|_{0,\alpha} \leq A(\alpha)Q^\alpha(t)|\partial_x \rho(t)|_{0,\alpha}$,

3. $|\partial_{(t,x)} K|_{(x),0,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2} \leq A(\alpha)\sup_{t\in[0,T]} Q^\alpha(t)|\rho|_{1,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2}$.

Beweis. Die erste und die zweite Abschätzung ergeben sich aus Lemma 2.2 im Zusammenhang mit der Bemerkung 2.3 und der Darstellung

$$\partial_x K(t,x) = -V.P. \int \frac{x-y}{|x-y|^3}\partial_x \rho(t,y)dy.$$

Wir bemerken, daß analog zur Darstellung im Punkt 2. aus Satz 3.3 die Darstellung

$$\partial_t K(t,x) = -V.P. \int \frac{x-y}{|x-y|^3}\partial_t \rho(t,y)dy$$

gilt. Wenden wir jetzt Satz 2.2 im Zusammenhang mit der Bemerkung 2.3 auf $\partial_t\rho(t)$ an, dann ergibt sich aus dieser Darstellung die Abschätzung für die Hölder-Norm von $\partial_t K$ bezüglich x, was die Eigenschaften $K_1)$ und $K_2)$ zeigt. Bilden wir dann das Supremum über $t \in [0,T]$, so erhalten wir mit der Eigenschaft $\rho_1)$ auch die Abschätzung 3.. □

Lemma 3.7 *Erfüllt K die Voraussetzungen $K_1) - K_3)$, dann besitzt Z als Phasenstrom, der zu dem System*

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = K(t,x) \end{cases}$$

erklärt ist, die Eigenschaften $Z_1), Z_2)$. Im einzelnen hat man für $s,t \in [0,T]$ und $r_x, r_v > 0$ die folgenden Abschätzungen:

1. $\|Z(s,t)\|_{\infty,r_x,r_v} \leq (r_x + r_v + \int\limits_0^T \|K(\tau)\|_\infty) \exp|t-s|$,

   also

   $\|Z\|_{\infty,[0,T]\times[0,T]\times B_{r_x}\times B_{r_v}} \leq (r_x + r_v + T\|K\|_{\infty,[0,T]\times\mathbf{R}^2}) \exp T$;

Sei $A_K(t) := \int\limits_0^t (|\partial_x K(\tau)|_{0,\alpha} + 1)d\tau$. *Dann gilt:*

2. $\|\partial_z Z(s,t)\|_\infty \le \exp\left|\int\limits_s^t (1+\|\partial_x K(\tau)\|_\infty)d\tau\right| \le A_K(\max\{s,t\})$,
also

$\|\partial_z Z\|_{\infty,[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} \le$

$\le \exp(T(1+\|\partial_x K\|_{\infty,[0,T]\times\mathbf{R}^2})) =: g_z(T,\|\partial_x K\|_{\infty,[0,T]\times\mathbf{R}^2})$;

3. $|\partial_z Z(s,t)|_{0,\alpha} \le A_K(\max\{s,t\})(1+\exp((2+\alpha)A_K(\max\{s,t\})))$,
also

$|\partial_z Z|_{(z),0,\alpha,[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} \le A_K(T)(1+\exp((2+\alpha)A_K(T))) =:$
$=: h_z^{(z)}(\alpha,T,|\partial_x K|_{(x),0,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2})$,

Außerdem gibt es Konstanten $h_t^{(0)}(\alpha,T,r_v,|K|_{(x),1,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2})$, $h_z^{(t)}(\alpha,T,r_v,|K|_{(x),1,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2})$, $h_t^{(z)}(\alpha,T,r_x,r_v,|K|_{(x),1,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2})$, $h_t^{(t)}(\alpha,T,r_v,|K|_{(x),1,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2},\|\partial_t K\|_{\infty,[0,T]\times\mathbf{R}^2})$, *so daß folgende Abschätzungen gelten:*

4. $\|\partial_t Z\|_{\infty,[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^2\times B_{r_v}} \le h_t^{(0)}$;

5. $[\partial_z Z]_{(t),0,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2\times B_{r_v}} \le h_z^{(t)}$;

6. $[\partial_t Z]_{(z),0,\alpha,[0,T]\times[0,T]\times B_{r_x}\times B_{r_v}} \le h_t^{(z)}$;

7. $[\partial_t Z]_{(t),0,\alpha,[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^2\times B_{r_v}} \le h_t^{(t)}$.

Beweis. Im folgenden bezeichne der Punkt die Ableitung nach s. Nach Voraussetzung erfüllt dann Z das System

$$\begin{cases} \dot X(s,t,z) = V(s,t,z) \\ \dot V(s,t,z) = K(s,X(s,t,z)), \end{cases} \tag{19}$$

also in in integrierter Form

$$\begin{cases} X(s,t,z) = x + \int\limits_s^t V(\tau,t,z)d\tau \\ V(s,t,z) = v + \int\limits_s^t K(\tau,X(\tau,t,z))d\tau. \end{cases} \tag{20}$$

Wir zeigen zunächst 1. und nehmen zuerst $s \leq t$ an. Wir erhalten

$$|X(s,t,z)| + |V(s,t,z)| \leq |z| + \int_s^t |V(\tau,t,z)| + |K(\tau, X(\tau,t,z))| d\tau \leq$$

$$\leq |z| + \int_0^t \|K(\tau)\|_\infty d\tau + \int_s^t |Z(\tau,t,z)| d\tau,$$

und mit Korollar 2.16 2. haben wir für $z = (x,v)$ mit $|x| \leq r_x$, $|v| \leq r_v$

$$\|Z(s,t)\|_{\infty,r_x,r_v} \leq (r_x + r_v + \int_0^T \|K(\tau)\|_\infty d\tau) \exp(t-s).$$

Im Falle $s > t$ bekommen wir analog

$$|X(s,t,z)| + |V(s,t,z)| \leq |z| + \int_t^s |V(\tau,t,z)| + |K(\tau, X(\tau,t,z))| d\tau \leq$$

$$\leq |z| + \int_0^T \|K(\tau)\|_\infty d\tau + \int_t^s |Z(\tau,t,z)| d\tau,$$

und die Anwendung von Korollar 2.16 2. ergibt dann

$$\|Z(s,t)\|_{\infty,r_x,r_v} \leq (r_x + r_v + \int_0^T \|K(\tau)\|_\infty d\tau) \exp(s-t) \leq$$
$$\leq (r_x + r_v + T\|K\|_{\infty,[0,T]\times\mathbf{R}^2}) \exp(s-t).$$

Insgesamt erhalten wir die erste Abschätzung in 1. Die zweite folgt aus ihr unmittelbar. Um Abschätzung 2. zu zeigen, leiten wir System (19) nach z ab. Dann erhalten wir

$$\begin{cases} \partial_z \dot{X}(s,t,z) = \partial_z V(s,t,z) \\ \partial_z \dot{V}(s,t,z) = \partial_x K(s, X(s,t,z)) \partial_z X(s,t,z)), \end{cases} \tag{21}$$

also in integrierter Form

$$\begin{cases} \partial_z X(s,t,z) = \partial_z x + \int_s^t \partial_z V(\tau,t,z) d\tau \\ \partial_z V(s,t,z) = \partial_z v + \int_s^t \partial_x K(\tau, X(\tau,t,z)) \partial_z X(\tau,t,z)) d\tau, \end{cases} \tag{22}$$

Wir unterscheiden wieder die beiden Fälle $s \leq t$ und $s > t$. Im Fall $s \leq t$ erhält man

$$|\partial_z X(s,t,z)| + |\partial_z V(s,t,z)| \leq$$
$$\leq 1 + \int_s^t (1 + \|\partial_x K(\tau)\|_\infty)(|\partial_z X(\tau,t,z)| + |\partial_z V(\tau,t,z)|)d\tau.$$

Die Anwendung von Korollar 2.16 2. liefert nun

$$|\partial_z X(s,t,z)| + |\partial_z V(s,t,z)| \leq \exp \int_s^t (1 + \|\partial_x K(\tau)\|_\infty)d\tau,$$

also

$$\|\partial_z Z(s,t)\|_\infty \leq \exp(\int_s^t (1 + \|\partial_x K(\tau)\|_\infty)d\tau).$$

Im Fall $s > t$ erhalten wir analog mit Korollar 2.16 1.

$$\|\partial_z Z(s,t)\|_\infty \leq \exp(\int_t^s (1 + \|\partial_x K(\tau)\|_\infty)d\tau).$$

Damit ist die erste Ungleichung von 2. gezeigt , aus der die zweite unmittelbar folgt.

Jetzt zeigen wir 3. Wir definieren zuerst

$$d_X(s,t,z_1,z_2) := \frac{|\partial_z X(s,t,z_1) - \partial_z X(s,t,z_2)|}{|z_1 - z_2|^\alpha},$$
$$d_V(s,t,z_1,z_2) := \frac{|\partial_z V(s,t,z_1) - \partial_z V(s,t,z_2)|}{|z_1 - z_2|^\alpha},$$

$$d_Z(s,t,z_1,z_2) := d_X(s,t,z_1,z_2) + d_V(s,t,z_1,z_2). \tag{23}$$

Offenbar gilt mit dieser Bezeichnung

$$\sup_{z_1 \neq z_2} d_Z(s,t,z_1,z_2) = [\partial_z Z(s,t)]_{0,\alpha}.$$

Aus der ersten Zeile des Systems (22) ergibt sich dann

$$|\partial_z X(s,t,z_1) - \partial_z X(s,t,z_2)| \le \int_s^t |\partial_z V(\tau,t,z_1) - \partial_z V(\tau,t,z_2)| d\tau =$$

$$= \int_s^t d_V(\tau,t,z_1,z_2)|z_1 - z_2|^\alpha.$$

Die Abschätzung der zweiten Zeile von (22) liefert

$$\int_s^t |\partial_z V(\tau,t,z_1) - V(\tau,t,z_2)| d\tau \le$$

$$\le \int_s^t |\partial_x K(\tau, X(\tau,t,z_1))\partial_z X(\tau,t,z_1) -$$

$$-\partial_x K(\tau, X(\tau,t,z_2))\partial_z X(\tau,t,z_2)| d\tau \le$$

$$\le \int_s^t |\partial_x K(\tau, X(\tau,t,z_1)) - \partial_x K(\tau, X(\tau,t,z_2))||\partial_z X(\tau,t,z_1)| +$$

$$+|\partial_x K(\tau, X(\tau,t,z_2))||\partial_z X(\tau,t,z_1) - \partial_z X(\tau,t,z_2)| d\tau \le$$

$$\le \int_s^t [\partial_x K(\tau)]_{0,\alpha} |X(\tau,t,z_1) - X(\tau,t,z_2)|^\alpha \|\partial_z X(\tau,t)\|_\infty +$$

$$+\|\partial_x K(\tau)\|_\infty |\partial_z X(\tau,t,z_1) - \partial_z X(\tau,t,z_2)| d\tau \le$$

$$\le \int_s^t ([\partial_x K(\tau)]_{0,\alpha} \|\partial_z X(\tau,t)\|_\infty^{1+\alpha} +$$

$$+\|\partial_x K(\tau)\|_{\infty,r_x,r_v} d_X(\tau,t,z_1,z_2)) d\tau |z_1 - z_2|^\alpha.$$

Wir betrachten den Fall $s \le t$. Das Addieren der zwei letzten Abschätzungen ergibt

$$d_Z(s,t,z_1,z_2) \le \int_s^t ([\partial_x K(\tau)]_{0,\alpha} \|\partial_z X(\tau,t)\|_\infty^{1+\alpha} +$$

$$+\|\partial_x K(\tau)\|_\infty d_X(\tau,t,z_1,z_2) + d_V(\tau,t,z_1,z_2)) d\tau \le$$

$$\le \int_s^t [\partial_x K(\tau)]_{0,\alpha} \|\partial_z X(\tau,t)\|_\infty^{1+\alpha} d\tau +$$

$$+\int_s^t (1+\|\partial_x K(\tau)\|_\infty) d_Z(\tau,t,z_1,z_2)d\tau.$$

Mit Korollar 2.16 2. folgt dann:

$$\begin{aligned} &d_Z(s,t,z_1,z_2) \leq \\ \leq &(\int_s^t [\partial_x K(\tau)]_{0,\alpha} \|\partial_z X(\tau,t)\|_\infty^{1+\alpha} d\tau) \cdot \exp \int_s^t (|\partial_x K(\tau)|_{0,\alpha}+1)d\tau. \end{aligned}$$

Setzen wir jetzt die Abschätzung 2. ein, so gilt:

$$\begin{aligned} &|d_Z(s,t,z_1,z_2)| \leq \\ \leq &\int_s^t [\partial_x K(\tau)]_{0,\alpha} \exp\left((1+\alpha)\int_s^\tau (1+\|\partial_x K(\sigma)\|_\infty)d\sigma\right) d\tau \cdot \\ &\cdot \exp \int_s^t (1+\|\partial_x K(\tau)\|_\infty)d\tau \leq \\ \leq &\exp\left((1+\alpha)\int_s^t (1+|\partial_x K(\sigma)|_{0,\alpha})d\sigma\right) \int_s^t |\partial_x K(\tau)|_{0,\alpha} d\tau \cdot \\ &\cdot \exp \int_s^t (1+|\partial_x K(\tau)|_{0,\alpha})d\tau \leq \exp\left((2+\alpha)A_K(t))d\sigma\right) A_K(t). \end{aligned}$$

Diese Abschätzung zusammen mit Abschätzung 2. ergibt Abschätzung 3. im Fall $s \leq t$. Der Fall $s > t$ ergibt sich mit Korollar 2.16 1. analog.
Jetzt zeigen wir 4. Dafür benutzen wir die Darstellung 4. aus Lemma 3.1:

$$\begin{cases} \partial_t X(s,t,z) = -v - \int_s^t \partial_t V(\tau,t,z)d\tau \\ \partial_t V(s,t,z) = -K(t,x) - \int_s^t \partial_x K(\tau, X(\tau,t,z))\partial_t X(\tau,t,z)d\tau. \end{cases} \tag{24}$$

Wir betrachten zuerst den Fall $s \leq t$ und stellen fest

$$\|\partial_t X(s,t)\|_{\infty,\mathbf{R}^2\times B_{r_v}} + \|\partial_t V(s,t)\|_{\infty,\mathbf{R}^2\times B_{r_v}} \leq r_v + \|K(t)\|_\infty +$$

$$+\int_s^t (\|\partial_t V(\tau,t)\|_{\infty,\mathbf{R}^2\times B_{r_v}} + \|\partial_x K(\tau)\|_\infty \|\partial_t X(\tau,t))\|_{\infty,\mathbf{R}^2\times B_{r_v}})d\tau \leq$$

$$\leq r_v + \|K(t)\|_\infty + \int_s^t \|\partial_t Z(\tau,t)\|_{\infty,\mathbf{R}^2\times B_{r_v}}(1+\|\partial_x K(\tau)\|_\infty)d\tau.$$

Mit Korollar 2.16 2. gilt

$$\|\partial_t Z(s,t)\|_{\infty,\mathbf{R}^2\times B_{r_v}} \leq$$
$$\leq (r_v + \|K(t)\|_\infty)\exp\int_s^t (1+\|\partial_x K(\tau)\|_\infty)d\tau.$$

Im Fall $s > t$ bekommen wir mit Korollar 2.16 1.

$$\|\partial_t Z(s,t)\|_{\infty,\mathbf{R}^2\times B_{r_v}} \leq$$
$$\leq (r_v + \|K(t)\|_\infty)\exp\int_t^s (1+\|\partial_x K(\tau)\|_\infty)d\tau.$$

Hieraus folgt Abschätzung 4. mit

$$h_t^{(0)}(\alpha,T,r_v,|K|_{(x),1,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2}) :=$$
$$:= (r_v + T|K|_{(x),1,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2})\exp(T(1+|K|_{(x),1,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2}).$$

Jetzt zeigen wir 5. Um die Hölder-Konstante von $\partial_z Z(s)$ bezüglich t abzuschätzen, dürfen wir ohne Einschränkung $t_1 < t_2$ voraussetzen. Wir definieren

$$d_X(s,t_1,t_2,z) := \frac{|\partial_z X(s,t_1,z) - \partial_z X(s,t_2,z)|}{|t_1-t_2|^\alpha},$$
$$d_V(s,t_1,t_2,z) := \frac{|\partial_z V(s,t_1,z) - \partial_z V(s,t_2,z)|}{|t_1-t_2|^\alpha},$$

$$d_Z(s,t_1,t_2,z) := d_X(s,t,z_1,z_2) + d_V(s,t,z_1,z_2) \tag{25}$$

und bemerken, daß gilt

$$\sup_{\substack{t_1\neq t_2\\ t_1,t_2\in[0,T]\\ z\in\mathbf{R}^2\times B_{r_v}}} d_Z(s,t_1,t_2,z) = [\partial_z Z(s)]_{(t),0,\alpha,\mathbf{R}^2\times B_{r_v}}.$$

Dann gilt für $s \leq t_1$ und $z \in \mathbb{R}^2 \times B_{r_v}$:

$$
\begin{aligned}
&|\partial_z X(s,t_1,z) - \partial_z X(s,t_2,z)| \leq \\
\leq &\int\limits_s^{t_1} |\partial_z V(\tau,t_1,z) - \partial_z V(\tau,t_2,z)| d\tau + \int\limits_{t_1}^{t_2} |\partial_z V(\tau,t_2,z)| d\tau \leq \\
\leq &\int\limits_s^{t_1} d_V(\tau,t_1,t_2,z) d\tau |t_1 - t_2|^\alpha + \\
&+ \|\partial_z V\|_{\infty,[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} |t_1 - t_2|
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&|\partial_z V(s,t_1,z) - \partial_z V(s,t_2,z)| \leq \\
\leq &\int\limits_s^{t_1} (|\partial_x K(\tau, X(\tau,t_1,z)) - \partial_x K(\tau, X(\tau,t_2,z))||\partial_z X(\tau,t_1,z)| + \\
&+ |\partial_x K(\tau, X(\tau,t_2,z))|\partial_z X(\tau,t_1,z) - \partial_z X(\tau,t_2,z))|) \, d\tau + \\
&+ \int\limits_{t_1}^{t_2} \partial_x K(\tau, X(\tau,t_2,z))||\partial_z X(\tau,t_2,z))| d\tau \leq \\
\leq &\int\limits_s^{t_1} ([\partial_x K(\tau)]_{0,\alpha} \|\partial_t X\|^\alpha_{\infty,[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^2\times Br_v} \|\partial_z X\|_{\infty,[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} + \\
&+ \|\partial_x K\|_{\infty,[0,T]\times\mathbf{R}^2} d_X(\tau,t_1,t_2,z)) d\tau |t_1 - t_2|^\alpha + \\
&+ \|\partial_x K\|_{\infty,[0,T]\times\mathbf{R}^2} \|\partial_z X\|_{\infty,[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} |t_1 - t_2|.
\end{aligned}
$$

Das Addieren der zwei letzten Abschätzungen liefert jetzt

$$
\begin{aligned}
&d_Z(s,t_1,t_2,z)) \leq \\
\leq &\|\partial_z Z\|_{\infty,[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} (1 + \|\partial_x K\|_{\infty,[0,T]\times\mathbf{R}^2}) T^{1-\alpha} + \\
&+ \|\partial_z Z\|_{\infty,[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} \|\partial_t Z\|^\alpha_{\infty,[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} \int\limits_0^T |\partial_x K(\tau)|_{0,\alpha} d\tau + \\
&+ \int\limits_s^{t_1} (1 + |\partial_x K(\tau)|_\infty) d_Z(\tau,t_1,t_2,z)) d\tau.
\end{aligned}
$$

Die Anwendung von Korollar 2.16 2. liefert nun

$$\begin{aligned}
&d_Z(s,t_1,t_2,z)) \leq \\
\leq\ &(\|\partial_z Z\|_{\infty,[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2}(1+\|\partial_x K\|_{\infty,[0,T]\times\mathbf{R}^2})T^{1-\alpha} + \\
&+\|\partial_z Z\|_{\infty,[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2}\|\partial_t Z\|^{\alpha}_{\infty,[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2}\int_0^T|\partial_x K(\tau)|_{0,\alpha}d\tau)\cdot \\
&\cdot\exp\int_s^T(1+|\partial_x K(\tau)|_{\infty})d\tau,
\end{aligned}$$

und analog folgt der Fall $s > t_1$. Hieraus folgt unter Berücksichtigung von 2. und 4. Abschätzung 5. mit

$$\begin{aligned}
&h_z^{(t)}(\alpha,T,r_v,|K|_{(x),1,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2}) := \\
=:\ &(g_z T^{1-\alpha}(1+|K|_{(x),1,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2}) + \\
&+{h_t^{(0)}}^{\alpha} h_z^{(z)}\ |K|_{(x),1,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2}T)\exp(\alpha T(1+|K|_{(x),1,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2})).
\end{aligned}$$

Nun zeigen wir 6.. Um die Hölder-Konstante von $\partial_t Z$ bezüglich z auf $B_{r_x}\times B_{r_v}$ abzuschätzen, benutzen wir Darstellung (24). Sei $z_i = (x_i, v_i)$. Wir benutzen Notationen (23), wobei wir $\partial_z X, \partial_z V, \partial_z Z$ durch $\partial_t X, \partial_t V, \partial_t Z$ ersetzen. Dann gilt für $s \leq t$

$$\begin{aligned}
&|\partial_t X(s,t,z_1) - \partial_t X(s,t,z_2)| \leq \\
\leq\ &|v_1 - v_2| + \int_s^t |\partial_t V(\tau,t,z_1) - \partial_t V(\tau,t,z_2)|d\tau \leq \\
\leq\ &|v_1 - v_2| + \int_s^t d_V(\tau,t,z_1,z_2)d\tau|z_1 - z_2|^{\alpha}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&|\partial_t V(s,t,z_1) - \partial_t V(s,t,z_2)| \leq |K(t,x_1) - K(t,x_2)| + \\
&+\int_s^t(|\partial_x K(\tau,X(\tau,t,z_1)) - \partial_x K(\tau,X(\tau,t,z_2))||\partial_t X(\tau,t,z_1)| + \\
&+|\partial_x K(\tau,X(\tau,t,z_2))|\partial_t X(\tau,t,z_1) - \partial_t X(\tau,t,z_2)|)d\tau \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \|\partial_x K(t)\|_\infty |x_1 - x_2| + \int\limits_s^t ([\partial_x K(\tau)]_{0,\alpha} |\partial_x X(\tau,t)|_\infty^\alpha +$$
$$+ \|\partial_x K(\tau)\|_\infty d_X(\tau,t,z_1,z_2)) d\tau |z_1 - z_2|^\alpha.$$

Das Addieren der zwei letzten Abschätzungen liefert nun

$$d_Z(s,t,z_1,z_2) \leq (1 + \|\partial_x K(t)\|_\infty)((2r_x)^{1-\alpha} + (2r_v)^{1-\alpha}) +$$
$$+ \int\limits_s^t [\partial_x K(\tau)]_{0,\alpha} \|\partial_x X(\tau,t)\|_\infty^\alpha d\tau +$$
$$+ \int\limits_s^t (1 + \|\partial_x K(\tau)\|_\infty) d_Z(\tau,t,z_1,z_2) d\tau.$$

Die Anwendung von Korollar 2.16 2. liefert jetzt

$$d_Z(s,t,z_1,z_2) \leq ((1 + \|\partial_x K(t)\|_\infty)((2r_x)^{1-\alpha} + (2r_v)^{1-\alpha}) +$$
$$+ \int\limits_s^t [\partial_x K(\tau)]_{0,\alpha} \|\partial_x X(\tau,t)\|_\infty^\alpha d\tau) \exp \int\limits_s^t (1 + \|\partial_x K(\tau)\|_\infty) d\tau.$$

Analoges erhalten wir für $s > t$. Daraus folgt Abschätzung 6. mit

$$h_t^{(z)}(\alpha, T, r_x, r_v, |\partial_x K|_{(x),0,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2}) :=$$
$$:= ((1 + |\partial_x K|_{(x),0,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2})((2r_x)^{1-\alpha} + (2r_v)^{1-\alpha}) +$$
$$+ T|\partial_x K|_{0,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2} {g^{(z)}}^\alpha) \exp(T(1 + |\partial_x K|_{(x),0,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2}).$$

Analog behandeln wir die Hölder-Konstante von $\partial_t Z(s)$ bezüglich t. Mit Notationen (25) (mit $\partial_t Z$ etc. an Stelle von $\partial_z Z$ etc.) erhalten wir für $s \leq t_1 < t_2$ und $z \in \mathbb{R}^2 \times B_{r_v}$

$$|\partial_t X(s,t_1,z) - \partial_t X(s,t_2,z)| \leq$$
$$\leq \int\limits_s^{t_1} |\partial_t V(\tau,t_1,z) - \partial_t V(\tau,t_2,z)| d\tau + \int\limits_{t_1}^{t_2} |\partial_t V(\tau,t_2,z)| d\tau \leq$$
$$\leq \int\limits_s^t d_V(\tau,t_1,t_2,z) d\tau |t_1 - t_2|^\alpha +$$
$$+ \|\partial_t V\|_{\infty,[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^2\times B_{r_v}} |t_1 - t_2|$$

und

$$
\begin{aligned}
&|\partial_t V(s,t_1,z)-\partial_t V(s,t_2,z)| \leq |K(t_1,x)-K(t_2,x)| + \\
&+\int\limits_s^{t_1} |\partial_x K(\tau,X(\tau,t_1,z))-\partial_x K(\tau,X(\tau,t_2,z))||\partial_t X(\tau,t_1,z)| + \\
&+|\partial_x K(\tau,X(\tau,t_2,z))|\partial_t X(\tau,t_1,z)-\partial_t X(\tau,t_2,z))|d\tau + \\
&+\int\limits_{t_1}^{t_2} |\partial_x K(\tau,X(\tau,t_2,z))||\partial_t X(\tau,t_2,z)|d\tau \leq \\
\leq\ & \|\partial_t K\|_{\infty,[0,T]\times\mathbf{R}^2}|t_1-t_2| + \int\limits_s^{t_1}([\partial_x K(\tau)]_{0,\alpha}\|\partial_t X\|^{\alpha}_{\infty,[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^2\times B_{r_v}} + \\
&+\|\partial_x K(\tau)\|_\infty d_X(\tau,t_1,t_2,z))d\tau|t_1-t_2|^\alpha + \\
&+\|\partial_x K\|_{\infty,[0,T]\times\mathbf{R}^2}\|\partial_t X\|_{\infty,[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^2\times B_{r_v}}|t_1-t_2|.
\end{aligned}
$$

Das Addieren der zwei letzten Abschätzungen liefert nun

$$
\begin{aligned}
&d_Z(s,t_1,t_2,z) \leq \|\partial_t K\|_{\infty,[0,T]\times\mathbf{R}^2}T^{1-\alpha} + \\
&+\|\partial_x K\|_{\infty,[0,T]\times\mathbf{R}^2}\|\partial_t Z\|_{\infty,[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2}T^{1-\alpha} + \\
&+\int\limits_0^T |\partial_x K(\tau)|_{0,\alpha}\|\partial_z X(\tau)\|^\alpha_{\infty,[0,T]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2}d\tau + \\
&+\int\limits_s^{t_1}(1+\|\partial_x K(s)\|_\infty)d_Z(\tau,t_1,t_2,z)d\tau.
\end{aligned}
$$

Die Anwendung von Korollar 2.16 2. liefert jetzt für $s \leq t_1$

$$
\begin{aligned}
&d_Z(s,t_1,t_2,z) \leq \\
\leq\ & \Big((\|\partial_t K\|_{\infty,[0,T]\times\mathbf{R}^2} + \|\partial_t Z\|_{\infty,[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^2\times B_{r_v}}\|\partial_x K\|_{\infty,[0,T]\times\mathbf{R}^2})T^{1-\alpha} + \\
&+\int\limits_0^T |\partial_x K(\tau)|_{0,\alpha}\|\partial_z X(\tau)\|^\alpha_{\infty,[0,T]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2}d\tau\Bigg)\cdot \\
&\cdot\exp\int\limits_s^{t_1}(1+\|\partial_x K(\tau)\|_\infty)d\tau.
\end{aligned}
$$

Der Fall $s > t_1$ ergibt sich analog und wir erhalten Abschätzung 7. mit

$$h_t^{(t)}(\alpha, T, r_v, |K|_{(x),1,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2}, \|\partial_t K\|_{\infty,[0,T]\times\mathbf{R}^2}) :=$$
$$:= \Big(\|\partial_t K\|_{\infty,[0,T]\times\mathbf{R}^2} + h_t^{(0)}\|\partial_x K\|_{\infty,[0,T]\times\mathbf{R}^2} T^{1-\alpha} +$$
$$+ T|\partial_x K|_{0,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2} g_z^\alpha\Big) \exp T(1 + |\partial_x K|_{\infty,[0,T]\times\mathbf{R}^2}).$$

Aufgrund der Aussagen 4.-7. besitzt Z auch die Eigenschaften $Z_1) - Z_2)$. $\Box$
Für den Beweis vom nächsten Lemma bemerken wir noch, daß für ein $\phi \in C_c^\alpha(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp}\phi \subset B_Q$ gilt

$$|\phi|_{1,\alpha,\mathbf{R}^n} = |\phi|_{1,\alpha,B_Q}.$$

Lemma 3.8 *Erfülle der Phasenstrom Z die Bedingungen $Z_1), Z_2)$. Dann besitzt $f(t,x,v) := \overset{\circ}{f}(Z(0,t,x,v))$ die Eigenschaften $f_1) - f_2)$, wobei für $t \in [0,T]$ folgende Abschätzungen gelten:*

1. $P(t) \leq \overset{\circ}{P} + \int\limits_0^t \|\partial_s V(\tau, t)\|_\infty d\tau$;
2. $R(t) \leq \overset{\circ}{R} + \int\limits_0^t P(\tau) d\tau$;
3. $\|f(t)\|_\infty = \|\overset{\circ}{f}\|_\infty$;
4. $[f(t)]_{0,\alpha} \leq [\overset{\circ}{f}]_{0,\alpha} \|\partial_z Z(0,t)\|^\alpha_{\infty,R(t),P(t)}$
5. $\|\partial_w f(t)\|_\infty \leq \|\partial_z \overset{\circ}{f}\|_\infty \|\partial_w Z(0,t)\|_{\infty,R(t),P(t)}$;
6. $[\partial_w f(t)]_{0,\alpha} \leq |\overset{\circ}{f}|_{1,\alpha} |\partial_w Z(0,t)|_{0,\alpha,R(t),P(t)}(1 + |\partial_w Z(0,t)|^\alpha_{0,\alpha,R(t),P(t)})$,
7. *Gibt es zusätzlich $R, P > 0$ mit $R(t) \leq R$, $P(t) \leq P$ für alle $t \in [0,T]$, so gilt*
$$|f|_{1,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} \leq |\overset{\circ}{f}|_{1,\alpha}(1 + |\partial_w Z(0)|_{0,\alpha,[0,T]\times B_R\times B_P} +$$
$$+ |\partial_w Z(0)|^{1+\alpha}_{0,\alpha,[0,T]\times B_R\times B_P}).$$

Beweis. Sei

$$P(t) := \overset{\circ}{P} + \int\limits_0^t |\partial_s V(\tau, t, z)| d\tau.$$

Sei $x, v \in \mathbb{R}^2$ und $|v| > P(t)$. Dann ist

$$f(t, z) = \overset{\circ}{f}(X(0, t, z), V(0, t, z)) = 0,$$

da

$$|V(0, t, z)| = |v + \int\limits_0^t \partial_s V(\tau, t, z) d\tau| > P(t) - \int\limits_0^t \|\partial_s V(\tau, t, z)\| d\tau = \overset{\circ}{P}.$$

also haben wir 1. gezeigt. Eigenschaft 2. gilt analog. Eigenschaft 3. ist klar. Abschätzung 5. folgt durch Ausdifferenzieren der Darstellung
$f(t, z) = \overset{\circ}{f}(Z(0, t, z))$.

Um die weiteren Abschätzungen zu zeigen, bemerken wir, daß für alle $t \in [0, T]$

$$|f(t)|_{1,\alpha} = |f(t)|_{1,\alpha,R(t),P(t)}$$

gilt. Deswegen betrachten wir weiter ohne Einschränkung für jedes $t \in [0, T]$
$|x| \leq R(t)$, $|v| \leq P(t)$.
Wir zeigen nun 4. Wir betrachten $z_i := (x_i, v)$, $i = 1, 2$.
Für x_1, x_2 mit $|x_1|, |x_2| \leq R(t)$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{|f(t, z_1) - f(t, z_2)|}{|z_1 - z_2|^\alpha} &\leq \frac{|\overset{\circ}{f}(Z(0, t, z_1)) - \overset{\circ}{f}(Z(0, t, z_2))|}{|z_1 - z_2|^\alpha} \leq \\ &\leq [\overset{\circ}{f}]_{0,\alpha} \frac{|Z(0, t, z_1) - Z(0, t, z_2)|^\alpha}{|z_1 - z_2|^\alpha} \leq [\overset{\circ}{f}]_{0,\alpha} \|\partial_x Z(0, t)\|^\alpha_{\infty,R(t),P(t)}.\end{aligned}$$

Der Fall $z_i = (x, v_i)$ ergibt sich analog. Dann gilt die Abschätzung

$$[f(t)]_{0,\alpha} \leq [\overset{\circ}{f}]_{0,\alpha} \|\partial_z Z(0, t)\|^\alpha_{\infty,R(t),P(t)} + \|f(t)\|_\infty.$$

Wir zeigen nun Abschätzung 6.. Sei $z_i := (x_i, v)$, $i = 1, 2$ mit $|x_i| \leq R(t)$. Dann haben wir

$$\frac{|\partial_w f(t,z_1) - \partial_w f(t,z_2)|}{|z_1 - z_2|^\alpha} \leq \frac{1}{|z_1 - z_2|^\alpha} |\partial_z \overset{\circ}{f}(Z(0,t,z_1))\partial_w Z(0,t,z_1) -$$

$$-\partial_z \overset{\circ}{f}(Z(0,t,z_2)\partial_w Z(0,t,z_2))| \leq$$

$$\leq \frac{|\partial_z \overset{\circ}{f}(Z(0,t,z_1)) - \partial_z \overset{\circ}{f}(Z(0,t,z_2))|}{|z_1 - z_2|^\alpha} |\partial_w Z(0,t,z_1)| +$$

$$+ \frac{|\partial_w Z(0,t,z_1) - \partial_w Z(0,t,z_2))|}{|z_1 - z_2|^\alpha} |\partial_z \overset{\circ}{f}(Z(0,t,z_2)| \leq$$

$$\leq [\overset{\circ}{f}]_{1,\alpha} \|\partial_w Z(0,t)\|^{1+\alpha}_{\infty,R(t),P(t)} + [\partial_w Z(0,t)]_{0,\alpha,R(t),P(t)} \|\partial_z \overset{\circ}{f}\|_\infty \leq$$

$$\leq |\overset{\circ}{f}|_{1,\alpha} |\partial_w Z(0,t)|_{0,\alpha,R(t),P(t)} (1 + |\partial_w Z(0,t)|^\alpha_{0,\alpha,R(t),P(t)}).$$

Der Fall $z_i = (x, v_i)$, $i = 1, 2$ geht analog. Insgesamt gilt jetzt

$$[\partial_w f(t)]_{0,\alpha} \leq |\overset{\circ}{f}|_{1,\alpha} |\partial_w Z(0,t)|_{0,\alpha,R(t),P(t)} (1 + |\partial_w Z(0,t)|^\alpha_{0,\alpha,R(t),P(t)}).$$

Es ist nun geblieben, Abschätzung 7. zu zeigen. Wie beim Beweis von 5. bekommen wir

$$[\partial_w f]_{(t),0,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} \leq |\partial_z \overset{\circ}{f}|_{0,\alpha} (|\partial_w Z(0)|_{(t),0,\alpha,[0,T]\times B_R \times B_P} +$$
$$+ |\partial_w Z(0)|^{1+\alpha}_{(t),0,\alpha,[0,T]\times B_R\times B_P}).$$

Aus dieser Abschätzung zusammen mit den Abschätzungen 3.,5.,6. ergibt sich jetzt auch Abschätzung 7.. □

Aus den Lemmata 3.5-3.8 ergibt sich nun, daß der am Anfang von Abschnitt 3.2.2 formal eingeführte Operator $F : C_c^{1,\alpha}([0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \to C_c^{1,\alpha}([0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ wohldefiniert ist.

3.2.2.2 Auswahl einer konvergenten Folge

Mit Hilfe des in 3.2.2.1 erklärten Operators $F : C_c^{1,\alpha}([0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \to C_c^{1,\alpha}([0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ ist die in 3.2.2 iterativ erklärte Funktionsfolge $(f_n) \subset$

$C_c^{1,\alpha}([0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ wohldefiniert. Unsere Bezeichnung ist die folgende: Für $n = 0$ definieren wir den Phasenstrom $Z_0(s,t,z) := z$, und dann $f_0(t) := \overset{\circ}{f}(Z_0(0,t)) = \overset{\circ}{f}$. Ist für ein $n \in \mathbb{N}_0$ Z_n bereits definiert, so erklären wir f_n durch $f_n(t) := \overset{\circ}{f}(Z_n(0,t))$ und sodann ρ_n zu f_n, U_n zu ρ_n, K_n zu U_n, Z_{n+1} zu K_n gemäß Abschnitt 3.2.2 (Anfang). Wir werden zunächst in den Lemmata 3.10-3.12 beweisen: Es gibt ein kleineres Zeitintervall $[0,\delta]$ und Größen $R, P \geq 1$, so daß die zu den f_n gehörenden Größen $R_n(t), P_n(t)$ durch R beziehungsweise P majorisiert sind und die Normen $|f_n|_{1,\alpha,[0,\delta]\times B_R \times B_P}$, $|\rho_n|_{1,\alpha,[0,\delta]\times \mathbf{R}^2}$, $|K_n|_{1,\alpha,[0,\delta]\times \mathbf{R}^2}$ und $|\partial_w Z_n(0)|_{0,\alpha,[0,\delta]\times B_R\times B_P}$ in n beschränkt sind.

Lemma 3.9 *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $s,t \in [0,T]$ gilt:*

1. $|f_n(t)|_{1,\alpha} \leq 2|\overset{\circ}{f}|_{1,\alpha}(1 + |\partial_z Z_n(0,t)|_{0,\alpha} + |\partial_z Z_n(0,t)|_{0,\alpha}^{1+\alpha})$;

2. $|\rho_n(t)|_{1,\alpha} \leq 2\pi|\overset{\circ}{f}|_{1,\alpha}(1 + |\partial_z Z_n(0,t)|_{0,\alpha}+$
   $+|\partial_z Z_n(0,t)|_{0,\alpha}^{1+\alpha})P_n^2(t)$;

3. $|K_n(t)|_{1,\alpha} \leq C(\overset{\circ}{f},\alpha)R_n^\alpha(t)P_n^2(t)\cdot$
   $\cdot(1 + |\partial_z Z_n(0,t)|_{0,\alpha}^\alpha + |\partial_z Z_n(0,t)|_{0,\alpha}+$
   $+|\partial_z Z_n(0,t)|_{0,\alpha}^{1+\alpha})$, *wobei* $C(\overset{\circ}{f},\alpha) = 4\pi A(\alpha)|\overset{\circ}{f}|_{1,\alpha} + 1$
   mit $A(\alpha)$ aus Satz 2.2;

4. $|\partial_z Z_{n+1}(0,t)|_{0,\alpha} \leq$
   $\leq (1 + A_n(t)\exp((1+\alpha)A_n(t)))\exp A_n(t)$,
   wobei $A_n(t) := C(\overset{\circ}{f},\alpha)\int\limits_0^t (1 + R_n^\alpha(\tau)P_n^2(\tau))(1 + |\partial_z Z_n(\tau,t)|_{0,\alpha}^\alpha+$
   $+|\partial_z Z_n(\tau,t)|_{0,\alpha} + |\partial_z Z_n(\tau,t)|_{0,\alpha}^{1+\alpha})d\tau$;

5. $P_{n+1}(t) \leq \overset{\circ}{P} + C(\overset{\circ}{f},\alpha)\int\limits_0^t R_n^\alpha(\tau)P_n^2(\tau)|\partial_z Z_n(\tau,t)|_{0,\alpha}^\alpha d\tau$;

6. $R_{n+1}(t) \leq \overset{\circ}{R} + \int\limits_0^t P_n(\tau)d\tau.$

Beweis. Abschätzung 1. folgt unmittelbar aus 3.,5.,6. von Lemma 3.8 mit $|\partial_z Z_n(0,t)|_{0,\alpha,R_n(t),P_n(t)} \leq |\partial_z Z_n(0,t)|_{0,\alpha}$.

Zu 2.. Vermöge 1.,3.,4. von Lemma 3.5 wird $|\rho_n(t)|_{1,\alpha}$ durch $|f_n(t)|_{1,\alpha}$ abgeschätzt und diese Größe aufgrund von 3.,5.,6. von Lemma 3.8 durch $|\partial_z Z_n(0,t)|_{0,\alpha,R_n(t),P_n(t)} \leq |\partial_z Z_n(0,t)|_{0,\alpha}$.

Zu 3. Aus 1.,2.. von Lemma 3.6 mit $Q(t) := R_n(t)$ folgt die Abschätzung von $|\partial_x K_n(t)|_{0,\alpha}$ durch $|\partial_x \rho_n(t)|_{0,\alpha}$ und $R_n(t)$, und die Abschätzung von $\|K_n(t)\|_\infty$ durch $|\rho_n(t)|_{0,\alpha}$ und $R_n(t)$. Die Grössen $|\rho_n(t)|_{1,\alpha}$ werden gemäß Abschätzung 2. durch $|\partial_z Z_n(0,t)|_{0,\alpha}$ und $P_n(t)$ abgeschätzt und $|\rho_n(t)|_{0,\alpha}$ gemäß 1. und 2. von Lemma 3.5 durch $|f_n(t)|_{0,\alpha}$ und $P_n(t)$, und $|f_n(t)|_{0,\alpha}$ nach 4. aus Lemma 3.8 wiederum durch $|\partial_z Z_n(0,t)|_{0,\alpha,R_n(t),P_n(t)} \leq |\partial_z Z_n(0,t)|_{0,\alpha}$.

Zu 4. Gemäß 3. von Lemma 3.7 werden $|\partial_z Z_n(0,t)|_{0,\alpha}$ durch $|K_n(t)|_{1,\alpha}$ und $|K_n(t)|_{1,\alpha}$ nach Abschätzung 3. wiederum durch $|\partial_z Z_n(0,t)|_{0,\alpha}$ abgeschätzt.

Zu 5. P_{n+1} wird nach 1. von Lemma 3.8 durch $\int\limits_0^t \|K(\tau)\|_\infty d\tau$, $\|K(\tau)\|_\infty$ wird nach 1. von Lemma 3.6 durch $|\rho(\tau)|_{0,\alpha}$, $|\rho(\tau)|_{0,\alpha}$ wird nach 2. von Lemma 3.5 durch $[f(\tau)]_{0,\alpha}$ und diese Grösse wiederum nach 4. von Lemma 3.8 durch $|\partial_z Z_n(0,t)|_{0,\alpha,R_n(t),P_n(t)} \leq |\partial_z Z_n(0,t)|_{0,\alpha}$ abgeschätzt.

6. folgt direkt aus 2. von Lemma 3.8.□

Lemma 3.10 $\exists\delta > 0,\ \exists R > 1,\ P > 1,\ W > 2,$ *so daß* $\forall n \in \mathbb{N}_0,\ \forall t \in [0,\delta]$ *gilt*
$R_n(t) \leq R,\ P_n(t) \leq P,\ |\partial_z Z_n(0)|_{0,\alpha,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} \leq W.$
Außerdem gilt supp $f_n(t) \in B_R \times B_P$, supp $\rho_n(t) \in B_R$.

Beweis. Wir betrachten das System

$$\begin{cases} A(t) = C(\overset{\circ}{f},\alpha)\int\limits_0^t (1+R^\alpha(\tau)P^2(\tau))(1+W(\tau)^\alpha + W(\tau)+W(\tau)^{1+\alpha})d\tau \\ P(t) = \overset{\circ}{P} + C(\overset{\circ}{f},\alpha)\int\limits_0^t P^2(\tau)R^\alpha(t)W^\alpha(\tau)d\tau \\ R(t) = \overset{\circ}{R} + \int\limits_0^t P(\tau)d\tau, \end{cases} \tag{S}$$

wobei

$$W(t) := (1+\exp((2+\alpha)A(t)))A(t).$$

Dieses System besitzt genau eine maximale Lösung $t \mapsto (A(t), P(t), R(t))$ auf einem Intervall $[0, \delta_0[$ mit $\delta_0 > 0$. Die Anfangsbedingung ist $A(0) = 0$, $P(0) = \overset{\circ}{P} \geq 1, R(0) = \overset{\circ}{R} \geq 1, W(0) = (2\overset{\circ}{R})^{1-\alpha} \geq 2$. Da sogar $\dot{A}(t), \dot{P}(t), \dot{R}(t) > 0$ auf $]0, \delta_0[$ gilt, sind A, P, R streng monoton wachsend und man erhält $A(t) > 0, P(t) > \overset{\circ}{P} \geq 1, R(t) > \overset{\circ}{R} \geq 1, W(t) > (2\overset{\circ}{R})^{1-\alpha} \geq 2$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und für alle $s, t \in [0, \delta_0[$

$$\begin{cases} P_n(t) \leq P(t) \\ |\partial_z Z_n(s,t)|_{0,\alpha} \leq W(\max\{s,t\}) \\ R_n(t) \leq R(t). \end{cases} \tag{26}$$

Wir beweisen dies mit Induktion nach n. Für $n = 0$ gilt $P_0(t) = \overset{\circ}{P} \leq P(t)$, $R_0(t) = \overset{\circ}{R} \leq R(t)$. Außerdem gilt $|\partial_z Z_0(s,t)|_{0,\alpha,R_0,P_0} = 1 \leq W(\max\{s,t\})$.
Seien jetzt für ein $n \geq 0$ die Ungleichungen (26) erfüllt. Sei außerdem zunächst $s \leq t$. Nach 5. von Lemma 3.9 und der Induktionsvoraussetzung gilt dann

$$P_{n+1}(t) \leq \overset{\circ}{P} + C(\overset{\circ}{f},\alpha)\int\limits_0^t R_n^\alpha(\tau)P_n^2(\tau)|\partial_z Z_n(\tau,t)|^\alpha_{0,\alpha,R_n(t),P_n(t)}d\tau \leq$$

$$\leq \overset{\circ}{P} + C(\overset{\circ}{f},\alpha)\int\limits_0^t R^\alpha(\tau)P^2(\tau)(1+W(t)^\alpha)d\tau = P(t).$$

Nach der Induktionsvoraussetzung und nach 6. von Lemma 3.9 gilt weiter

$$R_{n+1}(t) \leq \overset{\circ}{R} + \int_0^t P_n(\tau)d\tau \leq \overset{\circ}{R} + \int_0^t P(\tau)d\tau = R(t).$$

Schließlich gilt nach 4. von Lemma 3.9 und der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
&A_n(t) = C(\overset{\circ}{f}, \alpha) \int_0^t (1 + R_n^\alpha(\tau) P_n^2(\tau)) \cdot \\
&\cdot (1 + |\partial_z Z_n(\tau, t)|^\alpha_{0,\alpha,R_n(t)),P_n(t)} + |\partial_z Z_n(\tau, t)|_{0,\alpha,R_n(t),P_n(t)} + \\
&+ |\partial_z Z_n(\tau, t)|^{1+\alpha}_{0,\alpha,R_n(t),P_n(t)}) d\tau \leq \\
\leq\, & C(\overset{\circ}{f}, \alpha) \int_0^t (1 + R^\alpha(\tau) P^2(\tau))(1 + W(\tau)^\alpha + W(\tau) + W(\tau)^{1+\alpha}) d\tau = A(t)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&|\partial_z Z_{n+1}(s, t)|_{0,\alpha,R_{n+1}(t),P_{n+1}(t)} \leq (1 + \exp((2 + \alpha) A_n(t))\, A_n(t) \leq \\
\leq\, & (1 + \exp((2 + \alpha) A(t))\, A(t) = W(t).
\end{aligned}$$

Im Fall $s > t$ erhalten wir analog

$$\begin{aligned}
&|\partial_z Z_{n+1}(s, t)|_{0,\alpha,R_{n+1}(t),P_{n+1}(t)} \leq (1 + \exp((2 + \alpha) A_n(s))\, A_n(s) \leq \\
\leq\, & (1 + \exp((2 + \alpha) A(s))\, A(s) = W(s),
\end{aligned}$$

und damit sind Ungleichungen (26) gezeigt.

Wir wählen jetzt ein $\delta \in]0, \delta_0[$. Sei $R := R(\delta)$, $P := P(\delta)$, $W := W(\delta)$. Dann gilt auf $[0, \delta]$

$$\begin{aligned}
&R_n(t) \leq R(t) \leq R, \\
&P_n(t) \leq P(t) \leq P, \\
&|\partial_z Z_n(s, t)|_{0,\alpha,R_n(t),P_n(t)} \leq W(\max\{s, t\}) \leq W,
\end{aligned}$$

wobei die Konstanten R, P, W von α und δ abhängen.
Da $B_{R_n(t)} \subset B_R$, $B_{R_n(t)} \subset B_R$, gilt offenbar supp $f_n(t) \subset B_R \times B_P$, supp $\rho_n(t) \subset B_R$. □

Bemerkung 3.11 *Aus dem Beweis von Lemma 3.10 ergibt sich: Bezeichnet man mit $[0,\delta_0[$ das maximale Existenzintervall der Lösung des Systems (S), so kann als δ jede positive Größe kleiner als δ_0 gewählt werden.*

Lemma 3.12 *Es gibt ein $Q \geq 0$, so daß gilt:*

1. $|f_n|_{1,\alpha,[0,\delta]\times B_R\times B_P} \leq Q$;

2. $|\rho_n|_{1,\alpha,[0,\delta]\times B_R} \leq Q$;

3. $|K_n|_{(x),1,\alpha,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \leq Q$,
   $\|\partial_t K_n\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \leq Q$;

4. $\|\partial_z Z_n\|_{\infty,[0,\delta]\times[0,\delta]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} \leq Q$,
   $|\partial_w Z_n(s,\cdot,\cdot)|_{0,\alpha,[0,\delta]\times B_R\times B_P} \leq Q$ *für alle* $s\in[0,\delta]$.

Beweis. Mit Lemma 3.10 und Lemma 3.9 gibt es ein $Q \geq 0$, so daß für alle $n\in\mathbb{N}$ und $t\in[0,\delta]$ gilt

$$|f_n(t)|_{1,\alpha} \leq Q,$$
$$|\rho_n(t)|_{1,\alpha} \leq Q,$$
$$|K_n(t)|_{1,\alpha} \leq Q.$$

Bilden wir jetzt in der letzten Ungleichung das Supremum über $t\in[0,\delta]$, so erhalten wir

$$|K_n|_{(x),1,\alpha,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \leq Q.$$

Dann gilt mit 2.,3., 5. und 6. von Lemma 3.7 für $s\in[0,\delta]$

$$\|\partial_z Z\|_{\infty,[0,\delta]\times[0,\delta]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} \leq g_z(\delta,Q),$$
$$|\partial_z Z(s)|_{0,\alpha,[0,\delta]\times B_R\times B_P} \leq h_z^{(z)}(\alpha,\delta,,Q)+h_z^{(t)}(\alpha,\delta,P,Q),$$
$$|\partial_t Z(s)|_{(z),0,\alpha,[0,\delta]\times B_R\times B_P} \leq h_t^{(z)}(\alpha,\delta,R,P,Q).$$

Nach Lemma 3.8 5., 6. gilt dann auch

$$|\partial_w f_n|_{(z),0,\alpha,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} \leq Q_1$$

mit einer neuen Konstanten $Q_1 > 0$. Nach Lemma 3.5 gibt es weiter ein $Q_2 > 0$, so daß

$$|\partial_w \rho_n|_{(x),0,\alpha,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \leq Q_2,$$

insbesondere also

$$|\partial_t \rho_n|_{(x),0,\alpha,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \le Q_2,$$

und nach Lemma 3.6 gilt wiederum

$$\|\partial_t K_n\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \le A(\alpha)R^\alpha |\partial_t \rho_n|_{(x),0,\alpha,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \le A(\alpha)R^\alpha Q_2 := Q_3.$$

Dann gilt schließlich nach Lemma 3.7 7.

$$[\partial_t Z(s)]_{(t),0,\alpha,[0,T]\times\mathbf{R}^2\times B_P} \le h_t^{(t)}(\alpha,\delta,P,Q,Q_3)$$

für alle $s \in [0,\delta]$ und nach Lemma 3.8 7. auch

$$[\partial_t f_n]_{(t),0,\alpha,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} \le Q_4,$$

mit einem $Q_4 > 0$. Gegebenfalls nach Vergrößerung von Q erhält man also

$$\begin{aligned}
&|\partial_t f_n|_{1,\alpha,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} \le Q,\\
&|\partial_t \rho_n|_{1,\alpha,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} \le Q,\\
&\|\partial_t K_n\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \le Q,\\
&|K_n|_{(x),1,\alpha,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \le Q,\\
&\|\partial_z Z\|_{\infty,[0,\delta]\times[0,\delta]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} \le Q,\\
&|\partial_w Z(s)|_{0,\alpha,[0,T]\times B_R\times B_P} \le Q
\end{aligned}$$

für alle $s \in [0,\delta]$. $\square$

Aufgrund der Lemmata 3.10 und 3.12 ist nun klar, daß für $t \in [0,\delta]$ die Funktionen $f_n(t)$ ihren Träger in $B_R \times B_P$ haben und

$$f_n \in C^{1,\alpha}([0,\delta]\times B_R \times B_P), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

gilt. Wir schließen von der Kompaktheit der Einbettung

$$C^{1,\alpha}([0,\delta]\times B_R\times B_P) \subset C^{1,\beta}([0,\delta]\times B_R\times B_P) \text{ für alle } \beta \in]0,\alpha[$$

auf die relative Kompaktheit der Menge $\{f_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ im Raum $C^{1,\beta}([0,\delta] \times B_R \times B_P)$ für alle $\beta \in]0,\alpha[$. Es ergibt sich folgender Satz.

Lemma 3.13 *Es gibt eine Teilfolge* (f_{n_k}) *der Folge* (f_n) *und Grenzwerte* $f \in C^{1,\alpha}([0,\delta] \times B_R \times B_P)$, $\rho \in C^{1,\alpha}([0,\delta] \times B_R)$, $U \in C^{2,\alpha}([0,\delta] \times \mathbb{R}^2)$, $K \in C^{1,\alpha}([0,\delta] \times \mathbb{R}^2)$, Z *mit* $Z(s) \in C^{1,\alpha}([0,\delta] \times B_R \times B_P$ *für alle* $s \in [0,\delta]$, *so daß für alle* $\beta \in]0,\alpha[$ *gilt*

1. $f_{n_k} \to f$ *in* $C^{1,\beta}([0,\delta] \times B_R \times B_P)$,
2. $\rho_{n_k} \to \rho$ *in* $C^{1,\beta}([0,\delta] \times B_R)$,
3. $U_{n_k} \to U$ *in* $C^{2,\beta}([0,\delta] \times \mathbb{R}^2))$,
   also $K_{n_k} \to K$ *in* $C^{1,\beta}([0,\delta] \times \mathbb{R}^2))$,
4. $Z_{n_k} \to Z$ *in* $C^1([0,\delta] \times [0,\delta] \times B_R \times B_P)$.

Beweis. 1. Wir wählen β: $0 < \beta < \alpha$, eine aufsteigende Folge $\beta_i \to \alpha$ und benutzen die Kompaktheit der Einbettungen

$$C^{1,\alpha}(B) \subset C^{1,\beta_i}(B)$$

für $B := [0,\delta] \times B_R \times B_P$. Es gilt $\{f_n\} \subset C^{1,\alpha}(B) \subset C^{1,\beta_1}(B)$. Dann gibt es eine Teilfolge (n_k^1), so daß $\{f_{n_k^1}\}$ konvergiert in $C^{1,\beta_1}(B)$. Jetzt gilt $\{f_{n_k^1}\} \subset C^{1,\alpha}(B) \subset C^{1,\beta_2}(B)$ und man findet eine Teilfolge (n_k^2), so daß $\{f_{n_k^2}\}$ konvergiert in $C^{1,\beta_2}(B)$. So verfahren wir induktiv weiter und konstruieren (n_k^i), so daß $\{f_{n_k^i}\}$ konvergiert in $C^{1,\beta_i}(B)$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Nehmen wir jetzt die Folge (m_k), $m_k := n_k^k$, so besitzt sie die Eigenschaft, daß $\{f_{m_k}\}$ konvergiert in allen $C^{1,\beta_i}(B)$, $i \in \mathbb{N}_0$, insbesondere in $C^{1,\beta}(B)$. Da die Konvergenz insbesondere auch punktweise gilt, existiert $f \in C^1(B)$ mit

$$f_{m_k} \to f \text{ in } C^1(B).$$

Wir zeigen nun: $f \in C^{1,\alpha}(B)$. In der Tat, nach [Ad, S.11] gilt

$$\frac{|\partial_w f_{m_k}(w_1) - \partial_w f_{m_k}(w_2)|}{|w_1 - w_2|^{\beta_{m_k}}} \le [\partial_w f_{m_k}]_{0,\beta_{m_k},B} \le 3[\partial_w f_{m_k}]_{0,\alpha,B} \le 3Q.$$

Jetzt können wir im linken Teil zum Limes bei $m_k \to \infty$ übergehen und erhalten

$$\frac{|\partial_w f(w_1) - \partial_w f(w_2)|}{|w_1 - w_2|^{\alpha}} \le 3Q.$$

Dies zeigt $f \in C^{1,\alpha}(B)$.
Wir definieren nun ρ, U, K, Z zu f gemäß Abschnitt 3.2.2.1.

2. Nach dem soeben Gezeigten gilt $f \in C^{1,\alpha}([0,\delta] \times B_R \times B_P)$. Wegen der Darstellung für die Dichte und der Kompaktheit des Trägers gilt

$$\rho_{n_k}(t,x) - \rho(t,x) = \int\limits_{|v| \leq P} (f_{n_k}(t,x,v) - f(t,x,v))dv.$$

Zusammen mit 5. aus Lemma 3.5 impliziert dies die Konvergenz $\rho_{n_k} \to \rho$ in $C^{1,\beta}([0,\delta] \times B_R)$ für alle $\beta < \alpha$.

3. Nach Lemma 3.6 gilt $K \in C^1([0,\delta] \times \mathbb{R}^2)$ und $K(t) \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ für alle $t \in [0,\delta]$. Aus Lemma 3.3 1. folgt weiter:

$$\|U_{n_k}(t) - U(t)\|_\infty \leq 2\pi R \|\rho_{n_k}(t) - \rho(t)\|_\infty.$$

Daraus ergibt sich sofort

$$\|U_{n_k} - U\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \leq 2\pi R |\rho_{n_k} - \rho|_{0,\alpha,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} = 2\pi R |\rho_{n_k} - \rho|_{0,\alpha,[0,\delta]\times B_R}.$$

Für die Kräfte gilt Abschätzung 2. aus Lemma 3.6:

$$|K_{n_k} - K|_{1,\beta,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \leq A(\beta) R^\beta |\rho_{n_k} - \rho|_{1,\beta,[0,\delta]\times B_R}.$$

Daraus folgt sofort für alle $\beta \in]0,\alpha[$ die $C^{1,\beta}([0,\delta] \times \mathbb{R}^2)$-Konvergenz der Kräfte. Benutzen wir außerdem

$$\|U_{n_k} - U\|_{2,\beta,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} = \|U_{n_k} - U\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} + \|K_{n_k} - K\|_{1,\beta,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2},$$

so haben wir 3. gezeigt.

4. Für die Charakteristiken gelten folgende Abschätzungen.

$$\begin{cases} X_{n_k}(s,t) - X(s,t) = \int\limits_s^t (V_{n_k}(\tau,t) - V(\tau,t))d\tau \\ V_{n_k}(s,t) - V(s,t) = \; -K_{n_k}(s,x) + K(s,x) - \\ \qquad\qquad - \int\limits_s^t (K_{n_k}(\tau, X_{n_k}(\tau,t)) - K(\tau, X(\tau,t))d\tau, \end{cases}$$

woraus folgt

$$\|Z_{n_k}(s,t)-Z(s,t)\|_\infty \le \|K_{n_k}-K\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2}+$$
$$+\int\limits_s^t (\|V_{n_k}(\tau,t)-V(\tau,t)\|_\infty + |K_{n_k}(\tau,X_{n_k}(\tau,t))-K(\tau,X(\tau))|)d\tau \le$$
$$\le \|K_{n_k}-K\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2}+\int\limits_s^t (\|V_{n_k}(\tau,t)-V(\tau,t)\|_\infty + \|\partial_x K_{n_k}\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2}\cdot$$
$$\cdot\|X_{n_k}(\tau,t)-X(\tau,t)\|_\infty + \|K_{n_k}-K\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2})d\tau \le$$
$$\le (1+\delta)\|K_{n_k}-K\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2}+\int\limits_s^t ((\|V_{n_k}(\tau,t)-V(\tau,t)\|_\infty +$$
$$+\|X_{n_k}(\tau,t)-X(\tau,t)\|_\infty)(1+\|\partial_x K_{n_k}\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2}))d\tau$$

für $s \le t$. Dann folgt mit Korollar 2.16 2. die Abschätzung

$$\|Z_{n_k}(s,t)-Z(s,t)\|_\infty \le (1+\delta)\|K_{n_k}-K\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2}\cdot$$
$$\cdot\exp\int\limits_s^t (1+\|\partial_x K_{n_k}(\tau)\|_\infty)d\tau \le \|K_{n_k}-K\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2}\exp\delta Q,$$

wobei wir die Beschränktheit von $\|\partial_x K_{n_k}\|_{0,\alpha,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \le Q$ aus Lemma 3.12 benutzt haben. Analog behandeln wir den Fall $s > t$. Bilden wir in dieser Abschätzung das Supremum über $t \in [0,\delta]$, dann gilt wegen der Konvergenz $\|K_{n_k}-K\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \to 0$ aus Punkt 3) auch die Konvergenz der Charakteristiken. Weiter haben wir für die Ableitungen von Charakteristiken:

$$\begin{cases} \partial_z X_{n_k}(s,t)-\partial_z X(s,t) = \int\limits_s^t (\partial_z V_{n_k}(\tau,t)-\partial_z V(\tau,t))d\tau \\ \partial_z V_{n_k}(s,t)-\partial_z V(s,t) = \int\limits_s^t (\partial_x K_{n_k}(\tau,X_{n_k}(\tau,t))\partial_z X_{n_k}(\tau,t)- \\ \qquad -\partial_x K(\tau,X(\tau,t))\partial_z X(\tau,t))d\tau, \end{cases}$$

woraus folgt

$$\|\partial_z Z_{n_k}(s,t)-\partial_z Z(s,t)\|_\infty \le$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_s^t (\|\partial_z V_{n_k}(\tau,t) - \partial_z V(\tau,t)\|_\infty + \\
&+|\partial_x K_{n_k}(\tau, X_{n_k}(\tau,t)) - \partial_x K(\tau, X(\tau))||\partial_z X_{n_k}(\tau,t)| + \\
&+|\partial_z X(\tau,t) - \partial_z X_{n_k}(\tau,t)||\partial_x K(\tau, X(\tau))|)d\tau \leq \\
&\leq \int_s^t (\|\partial_z Z_{n_k}(\tau,t) - \partial_z Z(\tau,t)\|_\infty (1 + \|\partial_x K\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2}) + \\
&+\|\partial_x K_{n_k} - \partial_x K\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \|\partial_z Z_{n_k}\|_{\infty,[0,\delta]\times[0,\delta]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} d\tau \leq \\
&\leq (1+Q) \int_s^t (\|\partial_z Z_{n_k}(\tau,t) - \partial_z Z(\tau,t)\|_\infty d\tau + \\
&+Q\delta \|\partial_x K_{n_k} - \partial_x K\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2}
\end{aligned}
$$

für $s \leq t$. Dann folgt mit Lemma 2.16 1. die Abschätzung

$$
\|\partial_z Z_{n_k}(s,t) - \partial_z Z(s,t)\|_\infty \leq Q\delta \|\partial_x K_{n_k} - \partial_x K\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \exp((1+Q)\delta),
$$

wobei wir die Beschränktheit

$$
\|\partial_z Z_{n_k}\|_{\infty,[0,\delta]\times[0,\delta]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2}, \|\partial_x K_{n_k}\|_{0,\alpha,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \leq Q
$$

aus Lemma 3.12 benutzt haben. Analog behandeln wir den Fall $s > t$. Bilden wir in dieser Abschätzung das Supremum über $s, t \in [0,\delta]$, dann gilt wegen der Konvergenz $\|\partial_x K_{n_k} - \partial_x K\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \to 0$ aus Punkt 3. auch die Konvergenz

$$
\|\partial_z Z_{n_k} - \partial_z Z\|_{\infty,[0,\delta]\times[0,\delta]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} \to 0.
$$

Nun benutzen wir Darstellung 4. aus Lemma 3.1 und erhalten:

$$
\begin{cases}
\partial_t X_{n_k}(s,t,z) - \partial_t X(s,t,z) = -\int_s^t (\partial_t V_{n_k}(\tau,t,z) - \partial_t V(\tau,t,z))d\tau \\
\partial_t V_{n_k}(s,t,z) - \partial_t V(s,t,z) = -(K_{n_k}(t,x) - K(t,x)) - \\
\quad -\int_s^t \partial_x K_{n_k}(\tau, X_{n_k}(\tau,t,z))\partial_t X_{n_k}(\tau,t,z) - \partial_x K(\tau, X(\tau,t,z))\partial_t X(\tau,t,z))d\tau,
\end{cases}
$$

woraus folgt

$$
\|\partial_t Z_{n_k}(s,t) - \partial_t Z(s,t)\|_{\infty,R,P} \leq
$$

$$\le |K_{n_k}(t,x) - K(t,x)| + \int\limits_s^t (\|\partial_t V_{n_k}(\tau,t) - \partial_t V(\tau,t)\|_{\infty,R,P} +$$
$$+ \sup_{z\in B_R\times B_P} |\partial_x K_{n_k}(\tau, X_{n_k}(\tau,t,z)) - \partial_x K(\tau, X(\tau,t,z))| \cdot$$
$$\cdot \|\partial_t X_{n_k}(\tau,t)\|_{\infty,R,P} +$$
$$+ \sup_{z\in B_R\times B_P} |\partial_t X(\tau,t,z) - \partial_t X_{n_k}(\tau,t,z)| \|\partial_x K(\tau)\|_\infty) d\tau \le$$
$$\le \|K_{n_k} - K\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} +$$
$$+ \int\limits_s^t (\|\partial_t Z_{n_k}(\tau,t) - \partial_t Z(\tau,t)\|_{\infty,R,P}(1 + \|\partial_x K\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2}) +$$
$$+ \|\partial_x K_{n_k} - \partial_x K\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \|\partial_t Z_{n_k}\|_{\infty,[0,\delta]\times[0,\delta]\times B_R\times B_P}) d\tau \le$$
$$\le (1+Q) \int\limits_s^t (\|\partial_t Z_{n_k}(\tau,t) - \partial_t Z(\tau,t)\|_{\infty,R,P} d\tau +$$
$$+ (1+Q\delta)|K_{n_k} - K|_{1,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2}$$

für $s \le t$. Dann folgt mit Korollar 2.16 2. die Abschätzung

$$\|\partial_z Z_{n_k}(s,t) - \partial_z Z(s,t)\|_\infty \le (1+Q\delta)\|K_{n_k} - K\|_{1,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \exp((1+Q)\delta),$$

wobei wir die Beschränktheit von $\|\partial_t Z_{n_k}\|_{\infty,[0,\delta]\times[0,\delta]\times B_R\times B_P}$ aus Lemma 3.12 benutzt haben. Analog behandeln wir den Fall $s > t$. Bilden wir in dieser Abschätzung das Supremum über $s,t \in [0,\delta]$, dann gilt wegen der Konvergenz $\|K_{n_k} - K\|_{1,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \to 0$ aus Punkt 3. auch die Konvergenz

$$\|\partial_t Z_{n_k} - \partial_t Z\|_{\infty,[0,\delta]\times[0,\delta]\times B_R\times B_P} \to 0.$$

Schließlich gilt

$$\begin{cases} \partial_s X_{n_k}(s,t,z) - \partial_s X(s,t,z) = V_{n_k}(s,t,z) - V(s,t,z) \\ \partial_s V_{n_k}(s,t,z) - \partial_s V(s,t,z) = K_{n_k}(s, X_{n_k}(s,t,z)) - K(s, X(s,t,z)), \end{cases}$$

woraus sofort folgt

$$\|\partial_s Z_{n_k} - \partial_s Z\|_{\infty,[0,\delta]\times[0,\delta]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} \le \|V_{n_k} - V\|_{\infty,[0,\delta]\times[0,\delta]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} +$$
$$+ \|K_{n_k}(s, X(s,t)) - K(s, X(s,t))\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} +$$
$$+ \|\partial_x K_{n_k}\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \|X_{n_k}(s,t) - X(s,t)\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} \le$$
$$\le \|Z_{n_k} - Z\|_{\infty,[0,\delta]\times[0,\delta]\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2}(1+Q) +$$
$$+ \|K_{n_k} - K\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \to 0$$

für $n \to \infty$, wobei wir den Punkt 3. und die oben bewiesene Konvergenz der Charakteristiken benutzt haben. Damit haben wir auch Punkt 4. gezeigt. □

Damit sind wir bereit, folgenden Satz zu beweisen.

Satz 3.14 *Für jedes* $\overset{\circ}{f} \in C_c^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ *für ein* $\alpha \in]0,1[$ *existiert ein* $\delta > 0$ *und eine klassische Lösung* $f \in C_c^{1,\alpha}([0,\delta] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ *des flachen Vlasov-Poisson-Systems mit* $f(0) = \overset{\circ}{f}$.

Beweis. Nach Lemma 3.13 genügt es zu zeigen, daß die in Lemma 3.13 konstruierte Funktion f die Vlasov-Gleichung (V) mit K erfüllt. Da f_{n_k} bereits (V) mit K_{n_k} erfüllt, werden wir zeigen, daß

$$\begin{aligned}
&(\partial_t f(t,x,v) - \partial_t f_{n_k}(t,x,v)) + v(\partial_x f(t,x,v) - \partial_x f_{n_k}(t,x,v)) + \\
&+K(t,x)\partial_v f(t,x,v) - K_{n_k}(t,x)\partial_v f_{n_k}(t,x,v) = \\
= &(\partial_t f(t,x,v) - \partial_t f_{n_k}(t,x,v)) + v(\partial_x f(t,x,v) - \partial_x f_{n_k}(t,x,v)) + \\
&+((K(t,x) - K_{n_k}(t,x))\partial_v f(t,x,v) + \\
&+K_{n_k}(t,x)(\partial_v f(t,x,v) - \partial_v f_{n_k}(t,x,v)) \to 0
\end{aligned}$$

für $k \to \infty$. In der Tat, wegen der Konvergenz $\partial_t f - \partial_t f_{n_k} \to 0$ in $C_c^{0,\alpha}([0,\delta] \times B_R \times B_P)$, die insbesondere auch punktweise gilt, konvergiert die erste Klammer gegen 0. Die zweite Klammer verschwindet für $|v| > P$, und für $|v| \le P$ konvergiert sie gegen 0 wegen $\partial_x f - \partial_x f_{n_k} \to 0$ in $C_c^{0,\alpha}([0,\delta] \times B_R \times B_P)$. Für die dritte Klammer gilt

$$|(K(t,x) - K_{n_k}(t,x))\partial_v f(t,x,v)| \le \|K - K_{n_k}\|_{\infty,[0,\delta]\times\mathbf{R}^2} \|\partial_v f\|_{\infty,[0,\delta]\times B_R \times B_P} \to 0$$

wegen $K - K_{n_k} \to 0$ in $C^{0,\alpha}([0,\delta] \times \mathbb{R}^2)$. Für die vierte Klammer gilt

$$|K_{n_k}(t,x)(\partial_v f(t,x,v) - \partial_v f_{n_k}(t,x,v))| \le Q\|\partial_v f - \partial_v f_{n_k}\|_{\infty,[0,\delta]\times B_R \times B_P} \to 0$$

wegen $\partial_v f - \partial_v f_{n_k} \to 0$ in $C_c^{0,\beta}([0,\delta] \times B_R \times B_P)$. □

Die klassische Lösung f zusammen mit den dazugehörigen Größen ρ, K, Z besitzt folgende weitere Eigenschaften.

Korollar 3.15 *Für die klassische Lösung* f *gilt:*

1. *Für alle $s, t \in [0, \delta]$ ist die Abbildung $Z(s, t)$: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ maßerhaltend, d.h. für alle $s, t \in [0, \delta]$ gilt*

$$\det \partial_z Z(s, t) = 1.$$

Gilt außerdem $\overset{\circ}{f} \geq 0$, so haben wir weiter:

2. *Für alle $t \in [0, \delta]$ gilt $f(t) \geq 0$;*

3. *Für alle $p \in [1, \infty]$ und für alle $t \in [0, \delta]$ gilt $f(t) \in L^p(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ mit*

$$\|f(t)\|_p = \|\overset{\circ}{f}\|_p;$$

4. *Für alle $t \in [0, \delta]$ gilt $\rho(t) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ mit*

$$\|\rho(t)\|_1 = \|\overset{\circ}{f}\|_1.$$

Der **Beweis** ergibt sich aus den Lemmata 3.1 und 3.2. □

3.3 Das geglättete Problem

In diesem Abschnitt nehmen wir $\varepsilon > 0$ an und untersuchen das System

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x, v) + v\partial_x f(t, x, v) + K(t, x)\partial_v f(t, x, v) = 0 & (V) \\ K^\varepsilon(t, x) = -\int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{x - y}{(|x - y|^2 + \varepsilon)^{3/2}} \rho(t, y) dy & (P'_\varepsilon) \end{cases}$$

auf Existenz. Wir verfahren ähnlich wie in Abschnitt für das singulare Problem.

3.3.1 Das Potenzial

Zunächst studieren wir die Eigenschaften des Potenzials U^ε, das für ein bestimmtes $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$U^\varepsilon(x) := -\int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{(|x-y|^2+\varepsilon)^{1/2}}\rho(y)dy$$

definiert worden ist. Die Kraft wird dann mit

$$K^\varepsilon(x) := -\partial_x U^\varepsilon(x)$$

berechnet. Wie man leicht sieht, gelten für das Potenzial U^ε folgende Aussagen.

Lemma 3.16 *Ist $\rho \in C_c(\mathbb{R}^2)$, so ist $U^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und es gilt*

1. $\|U^\varepsilon\|_\infty \le \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\|\rho\|_1$.
   Überdies gelten die Darstellungen

2. $\partial_x U^\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{x-y}{(|x-y|^2+\varepsilon)^{3/2}}\rho(y)dy$ *mit*
   $\|\partial_x U^\varepsilon\|_\infty \le \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\|\rho\|_1,$

3. $\partial^2_{x_i,x_j} U^\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{\delta_{i,j}(|x-y|^2+\varepsilon) - 3(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{(|x-y|^2+\varepsilon)^{5/2}}\rho(y)dy$ *mit*
   $\|\partial^2_x U^\varepsilon\|_\infty \le \frac{3}{\varepsilon^{1/2}}\|\rho\|_1$.

Analog zum Abschnitt 3.1.1 erhalten wir auch

Lemma 3.17 *Ist $\rho \in C_c(\mathbb{R}^2)$, so erfüllt U^ε die Abfallsbedingungen*

1. $U^\varepsilon(x) \sim \frac{1}{|x|}$, *für* $|x| \to \infty$;

2. $\partial_x U^\varepsilon \sim \frac{1}{|x|^2}$, *für* $|x| \to \infty$.

3.3.2 Das Iterationsverfahren

Sei jetzt der Anfangswert $\overset{\circ}{f} \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ fest. Wir betrachten die Größen $\overset{\circ}{R} > 0$, $\overset{\circ}{P} > 0$ mit
für alle $x \in \mathbb{R}^2$, $|x| > \overset{\circ}{R}$ und alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt $\overset{\circ}{f}(x,v) = 0$;
für alle $v \in \mathbb{R}^2$, $|v| > \overset{\circ}{P}$ und alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt $\overset{\circ}{f}(x,v) = 0$.

Sei außerdem $T > 0$. Für eine Funktion $f \in C_c^1([0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ betrachten wir zu diesem f zugehörige stetige Funktionen $R : [0,T] \to \mathbb{R}^+$, $P : [0,T] \to \mathbb{R}^+$ mit folgenden Eigenschaften:
für alle $x \in \mathbb{R}^2$, $|x| > R(t)$ und alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt $f(x,v) = 0$;
für alle $v \in \mathbb{R}^2$, $|v| > P(t)$ und alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt $f(x,v) = 0$.

Wie am Anfang von Abschnitt 3.1 definieren wir (formal) den Operator $F^\varepsilon : C_c^1([0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \to C_c^1([0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$:

1. Für ein $f \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ setzen wir

$$\rho(t,x) := \int f(t,x,v)dv; \tag{27}$$

2. wir definieren

$$U^\varepsilon(t,x) := -\int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{(|x-y|^2+\varepsilon)^{1/2}} \rho(t,y)dy \tag{28}$$

$$K^\varepsilon(t,x) := -\partial_x U(t,x) = -\int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{x-y}{(|x-y|^2+\varepsilon)^{3/2}} \rho(t,y)dy; \tag{29}$$

3. wir bestimmen die Lösung $Z(\cdot,\cdot,\cdot)$ des Systems des Systems

$$\begin{cases} \dot{X} = V \\ \dot{V} = K^\varepsilon(t,X) \end{cases} \tag{30}$$

   mit Lemma 3.1;

4. schließlich setzen wir $(F^\varepsilon f)(t,z) := \overset{\circ}{f}(Z(0,t,z))$.

Die folgenden Lemmata zeigen insbesondere, daß der Operator F^ε wohldefiniert ist.

Lemma 3.18 *Ist $f \in C_c^1([0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ und $R, P : [0,T] \to \mathbb{R}^+$ mit* supp $f(t) \subset B_R \times B_P$ *für alle $t \in [0,T]$, so ist das durch (27) definierte $\rho \in C_c^1([0,T] \times \mathbb{R}^2)$ und es gilt*

1. *Für alle alle $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^2$, $|x| > R(t)$ gilt $\rho(t,x) = 0$;*

2. $\|\rho(t)\|_1 = \|f(t)\|_1$;

3. $\|\rho(t)\|_\infty \leq \pi P^2(t) \|f(t)\|_\infty$;

4. $\|\partial_x \rho(t)\|_\infty \leq \pi P^2(t) \|\partial_x f(t)\|_\infty$.

Lemma 3.19 *Gilt $\rho \in C_c^1([0,T] \times \mathbb{R}^2)$, so gilt für das durch (29) definierte K: $K \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}^2)$ mit*

1. $\|K(t)\|_\infty \leq \dfrac{1}{\varepsilon^{1/2}} \|\rho(t)\|_1$;

2. $\|\partial_x K(t)\|_\infty \leq \dfrac{1}{\varepsilon^{1/2}} \|\rho(t)\|_1$.

Lemma 3.20 *Gilt $K \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}^2)$, so gilt für das mit (30) definierte Z: $Z \in C^1([0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ mit*

1. $\|\partial_z Z(s,t)\|_\infty \leq \exp \displaystyle\int_0^t (1 + \|\partial_x K(\tau)\|_\infty d\tau$;

2. $\det \partial_z Z(s,t) = 1$

für alle $s, t \in [0,T]$.

Lemma 3.21 *Ist $Z(s,t,z)$ die Lösung des Systems (30) und setzen wir $f(t,z) := \overset{\circ}{f}(Z(0,t,z))$, so gilt $f \in C_c^1([0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ und für f und dazugehörige $R(t), P(t)$ gilt*

1. $\|f(t)\|_\infty = \|\overset{\circ}{f}\|_\infty$;

2. $\|\partial_z f(t)\|_\infty \leq \| \overset{\circ}{f} \|_\infty \|\partial_z Z(0,t)\|_\infty$;

3. $P(t) \leq \overset{\circ}{P} + \int\limits_0^t \|K(\tau)\|_\infty d\tau$;

4. $R(t) \leq \overset{\circ}{R} + \int\limits_0^t P(\tau) d\tau$.

Mit den Lemmata 3.18-3.21 ist der Operator F^ε wohldefiniert. Wie im Abschnitt 3.1.2 definieren wir iterativ die Folge f_n^ε, $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$\begin{aligned} f_0^\varepsilon(t,z) &:= \overset{\circ}{f}(z), \\ f_n^\varepsilon(t,z) &:= F^\varepsilon f_{n-1}^\varepsilon(t,z), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Lemma 3.22 *Es gibt ε-abhängige Konstanten $R, P, Q, W, L > 0$, so daß für alle $t \in [0,T]$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:*

1. $R_n^\varepsilon(t) \leq R$;

2. $P_n^\varepsilon(t) \leq P$;

3. $\|\rho_n^\varepsilon(t)\|, \ \|\partial_x Z_n^\varepsilon(t)\|_\infty \leq W$;

4. $\|K_n^\varepsilon(t)\|, \ \|\partial_x K_n^\varepsilon(t)\| \leq Q$;

5. $\|\partial_x \rho_n^\varepsilon(t)\|, \|\partial_z f_n^\varepsilon(t)\| \leq L$.

Beweis. Zuerst zeigen wir 4. Wir setzen $Q := \frac{3}{\varepsilon^{1/2}} \| \overset{\circ}{f} \|_1$. Aus den Lemmata 3.18, 3.19 folgt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \|K_n^\varepsilon(t)\| &\leq \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \| \overset{\circ}{f} \|_1 \leq Q, \\ \|\partial_x K_n^\varepsilon(t)\| &\leq \frac{3}{\varepsilon^{1/2}} \| \overset{\circ}{f} \|_1 \leq Q. \end{aligned}$$

Weiter setzen wir $P := \overset{\circ}{P} + TQ$ und $R := \overset{\circ}{R} + TP$. Dann folgt mit Lemma 3.21 für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$P_n^\varepsilon(t) \leq \overset{\circ}{P} + \int_0^t \|K_n^\varepsilon(\tau)\|_\infty d\tau \leq P,$$

$$R_n^\varepsilon(t) \leq \overset{\circ}{R} + \int_0^t P_n^\varepsilon(\tau) d\tau \leq R,$$

und damit gelten die Abschätzungen 1., 2..
Mit den Lemmata 3.18, 3.20 folgt

$$\|\rho_n^\varepsilon(t)\|_\infty \leq \pi (P_n^\varepsilon)^2(t) \|f_n^\varepsilon\|_\infty \leq \pi P^2 \|\overset{\circ}{f}\|_\infty;$$

$$\|\partial_z Z_n^\varepsilon(s,t)\|_\infty \leq \exp \int_0^t (1 + \|\partial_x K_n^\varepsilon(\tau)\|_\infty d\tau \leq \exp(T(1+Q)).$$

Setzen wir jetzt $W := \max\{\pi P^2 \|\overset{\circ}{f}\|_\infty, \exp(TQ)\}$, so haben wir 3. gezeigt. Schließlich setzen wir $L := W\|\partial_z \overset{\circ}{f}\|_\infty \max\{1, \pi P^2\}$. Dann gilt nach den Lemmata 3.18, 3.21

$$\|\partial_z f_n^\varepsilon(t)\|_\infty \leq \|\partial_z \overset{\circ}{f}\|_\infty \|\partial_z Z_n^\varepsilon(s,t)\|_\infty \leq W \|\partial_z \overset{\circ}{f}\|_\infty \leq L$$

$$\|\partial_x \rho_n^\varepsilon(t)\|_\infty \leq \pi (P_n^\varepsilon)^2(t) \|\partial_x f_n\|_\infty \leq \pi P^2 W \|\partial_x \overset{\circ}{f}\|_\infty \leq L$$

und damit haben wir auch 5. gezeigt. □

Lemma 3.23 *Es gibt eine Funktion* $f^\varepsilon \in C_c^1([0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ *und die dazugehörigen Größen* $\rho^\varepsilon \in C_c^1([0,T] \times \mathbb{R}^2)$, $U^\varepsilon \in C^2([0,T] \times \mathbb{R}^2)$, $K^\varepsilon \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}^2)$, $Z^\varepsilon \in C^1([0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ *mit*

1. $\|f_n^\varepsilon(t) - f(t)\|_\infty \to 0$ *gleichmäßig in* $t \in [0,T]$;
2. *a)* $\|\rho_n^\varepsilon(t) - \rho(t)\|_1 \to 0$,
   b) $\|\rho_n^\varepsilon(t) - \rho(t)\|_\infty \to 0$ *gleichmäßig in* $t \in [0,T]$;
3. *a)* $\|U_n^\varepsilon(t) - U(t)\|_\infty \to 0$,
   b) $\|K_n^\varepsilon(t) - K(t)\|_\infty \to 0$,
   c) $\|\partial_x K_n^\varepsilon(t) - \partial_x K(t)\|_\infty \to 0$ *gleichmäßig in* $t \in [0,T]$;

4. a) $\|Z_n^\varepsilon(s,t) - Z(s,t)\|_\infty \to 0$ *gleichmäßig in* $s,t \in [0,T]$ *für* $n \to \infty$.

Beweis. Mit den Lemmata 3.19, 3.18 bekommen wir für die Differenzen der Kräfte

$$\|K_{n+1}^\varepsilon(t) - K_n^\varepsilon(t)\|_\infty \le \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\|\rho_{n+1}^\varepsilon(t) - \rho_n^\varepsilon(t)\|_1 \le$$

$$\le C_1\|f_{n+1}^\varepsilon(t) - f_n^\varepsilon(t)\|_\infty \tag{31}$$

mit $C_1 := \dfrac{(4\pi)^2}{\varepsilon^{1/2}}R^2P^2$. Außerdem gilt

$$\|f_{n+1}^\varepsilon(t) - f_n^\varepsilon(t)\|_\infty = \|\mathring{f}(Z_n^\varepsilon(0,t)) - \mathring{f}(Z_{n-1}^\varepsilon(0,t))\|_\infty \le$$

$$\le \|\partial_z \mathring{f}\|_\infty \|Z_n^\varepsilon(0,t) - Z_{n-1}^\varepsilon(0,t)\|_\infty. \tag{32}$$

Für die Charakteristiken gilt

$$\|X_{n+1}^\varepsilon(s,t) - X_n^\varepsilon(s,t)\|_\infty \le \int_s^t \|V_n^\varepsilon(\tau,t) - V_{n-1}^\varepsilon(\tau,t)\|_\infty d\tau$$

und

$$\|V_{n+1}^\varepsilon(s,t) - V_n^\varepsilon(s,t)\|_\infty \le$$

$$\le \int_s^t \|K_n^\varepsilon(\tau, X_n^\varepsilon(\tau,t)) - K_{n-1}^\varepsilon(\tau, X_{n-1}^\varepsilon(\tau,t))\|_\infty d\tau$$

$$\le \int_s^t \|K_n^\varepsilon(\tau, X_n^\varepsilon(\tau,t)) - K_{n-1}^\varepsilon(\tau, X_n^\varepsilon(\tau,t))\|_\infty d\tau +$$

$$+ \int_s^t \|K_{n-1}^\varepsilon(\tau, X_n^\varepsilon(\tau,t)) - K_{n-1}^\varepsilon(\tau, X_{n-1}^\varepsilon(\tau,t))\|_\infty d\tau \le$$

$$\le \int_s^t (C_1\|f_n^\varepsilon(\tau) - f_{n-1}^\varepsilon(\tau)\|_\infty + \|\partial_x K_{n-1}\|_\infty \|X_{n+1}^\varepsilon(\tau,t) - X_n^\varepsilon(\tau,t)\|_\infty) d\tau \le$$

$$\le (C_1 + Q)\int_s^t (\|f_n^\varepsilon(\tau) - f_{n-1}^\varepsilon(\tau)\|_\infty +$$

$$+Q\|X_{n+1}^\varepsilon(\tau,t) - X_n^\varepsilon(\tau,t)\|_\infty) d\tau.$$

für $s \le t$. Wenden wir Korollar 2.16 2. an, so bekommen wir

$$\|Z^\varepsilon_{n+1}(s,t) - Z^\varepsilon_n(s,t)\|_\infty \le$$

$$\le (C_1 + Q)\exp((1+Q)T)\left|\int\limits_s^t \|f^\varepsilon_n(\tau) - f^\varepsilon_{n-1}(\tau)\|_\infty d\tau\right|, \tag{33}$$

und das Gleiche auch für $s > t$. Jetzt setzen wir die letzte Ungleichung in (32) ein

$$\|f^\varepsilon_{n+1}(t) - f^\varepsilon_n(t)\|_\infty \le C_* \int\limits_0^t \|f^\varepsilon_n(\tau) - f^\varepsilon_{n-1}(\tau)\|_\infty d\tau, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{34}$$

$$\|f^\varepsilon_1(t) - f^\varepsilon_0(t)\|_\infty \le 2\|\overset{\circ}{f}\|_\infty \tag{35}$$

mit $C_* := 2\|\overset{\circ}{f}\|_\infty \exp((1+Q)T)\|\partial_z \overset{\circ}{f}\|_\infty$ und weiter folgt mit Induktion über n

$$\|f^\varepsilon_{n+1}(t) - f^\varepsilon_n(t)\|_\infty \le (C+Q)\frac{C_*^n t^n}{n!} \le (C+Q)\frac{C_*^n T^n}{n!}$$

für alle $t \in [0,T]$. Das zeigt, daß die Folge $\{f_n\}$ eine Cauchy-Folge in $C_c([0,T]\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ ist und einen Grenzwert $f \in C_c([0,T]\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ besitzt, gegen den sie in $C_c([0,T]\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ konvergiert. Damit haben wir 1.a) gezeigt.

Zu diesem f definieren wir nun ρ gemäß (27) und U gemäß (28). Die Konvergenz der Dichten folgt nun mit Lemma 3.18 aus

a) $\|\rho^\varepsilon(t) - \rho^\varepsilon_n\|_1 \le \pi P^2 R^2 \|f^\varepsilon(t) - f^\varepsilon_n(t)\|_\infty$,
b) $\|\rho^\varepsilon(t) - \rho^\varepsilon_n\|_\infty \le \pi P^2 \|f^\varepsilon(t) - f^\varepsilon_n(t)\|_\infty$.

Die Differenz der Potenziale kann mit Lemma 3.18 und Lemma 3.19 folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$\|U^\varepsilon(t) - U^\varepsilon_n(t)\|_\infty \le C\|f^\varepsilon(t) - f^\varepsilon_n(t)\|_\infty \to 0$$

gleichmäßig in $t \in [0,T]$. Aus (31) folgt ebenfalls

$$\|K^\varepsilon(t) - K^\varepsilon_n(t)\|_\infty \le C\|f^\varepsilon(t) - f^\varepsilon_n(t)\|_\infty \to 0$$

gleichmäßig in $t \in [0, T]$. Und analog gilt

$$\|\partial_x K^\varepsilon(t) - \partial_x K_n^\varepsilon(t)\|_\infty \le C\|f^\varepsilon(t) - f_n^\varepsilon(t)\|_\infty \to 0$$

gleichmäßig in $t \in [0, T]$.
Schließlich folgt wie in (33)

$$\|Z^\varepsilon(s,t) - Z_n^\varepsilon(s,t)\|_\infty \le (C_1 + Q)\exp((1+Q)T)\int_0^T \|f^\varepsilon(\tau) - f_n^\varepsilon(\tau)\|_\infty d\tau.$$

Da $\|f^\varepsilon(t) - f_n^\varepsilon(t)\|_\infty \to 0$ gleichmäßig in $t \in [0, T]$, konvergiert auch das letzte Integral, und damit haben wir die Konvergenz der Charakteristiken gezeigt. Mit Lemma 3.20 gilt dann $Z^\varepsilon \in C^1([0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$. Mit Lemma 3.18 gilt auch $\rho^\varepsilon \in C_c^1([0,T] \times \mathbb{R}^2)$, und damit haben wir alle Aussagen bewiesen. $\square$

Satz 3.24 *Sei* $\overset{\circ}{f} \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ *und* $\varepsilon > 0$. *Dann existiert eine eindeutige globale klassische Lösung* f^ε *von* (VP^ε) *zum Anfangswert* $\overset{\circ}{f}$.

Beweis. Wir nehmen ein beliebiges $T > 0$. Dann können wir die iterativ definierte Folge (f_n^ε) konstruieren und nach Lemma 3.23 besitzt diese Folge einen Grenzwert $f^\varepsilon \in C_c^1([0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ mit den dazugehörigen Größen ρ^ε, U^ε, K^ε, Z^ε. Für die Funktion f^ε gilt $f^\varepsilon = \overset{\circ}{f}(Z^\varepsilon(0,t,z))$. Also gilt nach Lemma 3.2, daß f die Lösung von (VP'_ε) ist. Um Eindeutigkeit zu zeigen, betrachten wir zwei Lösungen $f_{(1)}, f_{(2)}$ von (VP_ε) zum Anfangswert $\overset{\circ}{f}$ und bemerken, daß die Ungleichung (34) auch für sie gilt:

$$\|f_{(2)}(t) - f_{(1)}(t)\|_\infty \le C_* \int_0^t \|f_{(2)}(\tau) - f_{(1)}(\tau)\|_\infty d\tau. \tag{36}$$

In der Tat, wenn man $Ff_{(1)}$ und $Ff_{(2)}$ statt $f_{n+1}^\varepsilon(t)$ und $f_n^\varepsilon(t)$ einsetzt, bekommt man mit denselben Argumenten wie bei der Herleitung von (34)

$$\|Ff_{(2)}(t) - Ff_{(1)}(t)\|_\infty \le C_* \int_0^t \|f_{(2)}(\tau) - f_{(1)}(\tau)\|_\infty d\tau. \tag{37}$$

Nun gilt $Ff_{(i)} = f_{(i)}$, weil jede Lösung von (VP_ε) ein Fixpunkt des Operators F ist. Dies liefert die nötige Abschätzung (36). Aus dieser Abschätzung folgt nun mit Korollar 2.16 1., daß für alle $t \in [0,T]$ gilt

$$f_{(2)}(t) - f_{(1)}(t) = 0.$$

Das zeigt die Eindeutigkeit. Da $T > 0$ beliebig ist, existiert die Lösung auch global. $\square$

4 Schwache Lösungen

4.1 Der Hauptsatz

Das Ziel dieses Kapitels ist die Gewinnung einer globalen Existenzaussage für das flache Vlasov-Poisson-System. Dabei legen wir den Begriff der „schwachen" Lösung zugrunde, den wir im folgenden für das geglättete und das strikte Problem definieren.

Wir erinnern uns an die Notationen von Abschnitt 2.2 und definieren $e^\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $e^\varepsilon(x) = \dfrac{x}{(|x|^2 + \varepsilon)^{3/2}}$. Dann hat die Kraft, die zu dem geglätteten (strikten) Problem gehört, die Darstellung

$$K^\varepsilon(t,x) = -(\rho^\varepsilon(t) * e^\varepsilon)(x) = -T_{e^\varepsilon}(\rho^\varepsilon(t))(x). \tag{38}$$

Definition 4.1 *Sei $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = 0$). Eine Funktion $f^\varepsilon : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ heißt globale schwache Lösung des flachen geglätteten (strikten) Vlasov-Poisson-Systems (VP^ε), wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:*

1. *$\forall t \geq 0$ gilt $f^\varepsilon(t) \in L^p(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$, und $t \mapsto f^\varepsilon(t)$ ist $\sigma(p,p')$-stetig für $p \in [1,2]$.*

2. *Die zu $f^\varepsilon(t)$ gehörige Dichte $\rho^\varepsilon(t)$ und die zu $\rho^\varepsilon(t)$ gehörige Kraft $K^\varepsilon(t)$ seien gegeben durch*

$$\rho^\varepsilon(t,x) := \int f^\varepsilon(t,x,v)dv,$$
$$K^\varepsilon(t,x) := -(\rho^\varepsilon(t) * e^\varepsilon)(x).$$

Dann gilt für alle $p \in [1,2]$ und fast alle $t \in \mathbb{R}^+$: $\rho^\varepsilon(t) \in L^p(\mathbb{R}^2)$ und für alle $p \in]1,2]$ und fast alle $t \in \mathbb{R}^+$: $K^\varepsilon(t) \in L^p(\mathbb{R}^2)$.

3. *Für jedes* $\sigma \in C_c^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ *gilt*

$$\int\int\int (\partial_t\sigma + v\partial_x\sigma + \partial_v\sigma K^\varepsilon\ ) f^\varepsilon\, dt\, dx\, dv\ = 0. \qquad (V_w)$$

4. $f^\varepsilon(0) = \overset{\circ}{f}$.

Bemerkung 4.2 *Für* $\varepsilon > 0$, *die Lösung* f^ε *aus Satz 3.24 und für alle* $\tau \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ *gilt für* $t \geq 0$: $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int\int \tau f^\varepsilon(t) dx dv = \int\int \partial_x \tau v f^\varepsilon(t) dx dv + \int\int \partial_v \tau K^\varepsilon f^\varepsilon(t) dx dv.$

Der Satz, den wir beweisen wollen, ist der folgende

Satz 4.3 *Es sei* $\overset{\circ}{f} \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$, $\overset{\circ}{f} \geq 0$. *Dann existiert eine globale schwache Lösung* f^0 *von* (VP^0).*Außerdem gilt für* $p \in [1,2]$, $t \geq 0$

$\|f^0(t)\|_p \leq \|\overset{\circ}{f}\|_p,$
$\|f^0(t)\|_1 = \|\overset{\circ}{f}\|_1,$
$f^0(t) \geq 0$ *f. ü.*.

Der Beweis stützt sich auf die im vorigen Kapitel bewiesene Aussage, daß wir für alle $\varepsilon > 0$ globale klassische Lösungen f^ε von (VP^ε) gewonnen haben. Wir werden im folgenden in ε gleichmäßige Abschätzungen der kinetischen Energie erhalten, hieraus in ε gleichmäßige Abschätzungen der L^2-Norm der Dichte ρ^ε folgern und dann mit Ergebnissen von Kapitel 2 auf gleichmäßige Abschätzungen der Kräfte schließen. Die Anwendung eines Kompaktheitssatzes erlaubt dann, für eine Teilfolge $\varepsilon \to 0$ zur Grenze überzugehen.

4.2 Die Energie

4.2.1 Die Energieerhaltung

Lemma 4.4 (Energieerhaltung) *Für* $\varepsilon \geq 0$ *seien* f^ε *die klassischen Lösungen von* (VP^ε) *zum Anfangswert* $\overset{\circ}{f} \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$, $\overset{\circ}{f} \geq 0$ *auf dem Existenzintervall* I^ε. U^ε, ρ^ε *seien die zugehörigen Dichten und Potenziale. Sei*

$$E^\varepsilon(t) := E^\varepsilon_{kin}(t) + E^\varepsilon_{pot}(t) := \frac{1}{2}\int\int v^2 f^\varepsilon(t) dx dv + \frac{1}{2}\int U^\varepsilon(t)\rho^\varepsilon(t) dx$$

Dann gilt für $t \in I^\varepsilon$: $E^\varepsilon(t) = const = E^\varepsilon(0)$.

Beweis. Wir bemerken zuerst, daß die klassischen Lösungen von (VP^ε) für $\varepsilon > 0$ global existieren, also $I^\varepsilon = [0, +\infty[$ für $\varepsilon > 0$ (siehe Lemma 3.24). Für $\varepsilon = 0$ ist nach Satz 3.14 I^0 nicht leer. Die Lösungen sind insbesondere differenzierbar und besitzen einen kompakten Träger, so daß alle Integrale in den Rechnungen unten existieren und die partielle Integration erlaubt ist.

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(E^\varepsilon_{kin}(t) + E^\varepsilon_{pot}(t)) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\int\int v^2 \partial_t f^\varepsilon(t,x,v)dxdv - \int\int \frac{\partial_t \rho^\varepsilon(t,x)\rho^\varepsilon(t,y)}{(|x-y|^2+\varepsilon)^{1/2}}dxdy\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\underbrace{\int\int v^2 v\cdot\partial_x f^\varepsilon(t,x,v)dxdv}_{=0} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\int\int v^2\partial_x U^\varepsilon(t,x)\partial_v f^\varepsilon(t,x,v)dxdv + \int U^\varepsilon(t,x)\partial_t\rho^\varepsilon(t,x)dx = \\
&= \frac{1}{2}\int\int v^2\partial_x U^\varepsilon(t,x)\partial_v f^\varepsilon(t,x,v)dxdv - \\
&\quad - \int\int U^\varepsilon(t,x)v\cdot\partial_x f^\varepsilon(t,x,v)dxdv - \\
&\quad + \underbrace{\int\int U^\varepsilon(t,x)\partial_x U^\varepsilon(t,x)\partial_v f^\varepsilon(t,x,v)dxdv}_{=0} = \\
&\quad + \int\int \left(U^\varepsilon(t,x)v\cdot\partial_x f^\varepsilon(t,x,v) - U^\varepsilon(t,x)v\cdot\partial_x f^\varepsilon(t,x,v)\right)dxdv = 0.\square
\end{aligned}
$$

4.2.2 Die Beschränktheit der kinetischen Energie

Satz 4.5 *Sei $\varepsilon_0 > 0$. Dann existieren Konstante $J, \tilde{J}$ so, daß für alle $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ und für alle $t \in I^\varepsilon$ $E^\varepsilon_{kin}(t) \leq J$ und $\|\rho^\varepsilon(t)\|_2 \leq \tilde{J}$. Überdies gilt $\|\rho^\varepsilon(t)\|_2 \leq C(\mathring{f})E^\varepsilon_{kin}(t)^{1/2}$.*

Für den Beweis benötigen wir folgende Lemmata.

Lemma 4.6 (Sobolev-Ungleichung) *Seien $r_1, r_2 \in]1, +\infty[$, $N \in \mathbb{N}$, $\lambda \in [0, N[$ und $r_1^{-1} + r_2^{-1} + \lambda/N = 2$. Dann existiert eine Konstante $C = C(r_1, r_2, \lambda, N)$, so daß für alle $\sigma_1 \in L^{r_1}(\mathbb{R}^N), \sigma_2 \in L^{r_2}(\mathbb{R}^N)$*

$$\int \frac{|\sigma_1(z)||\sigma_2(w)|}{|z-w|^\lambda}dz^N dw^N \leq C\|\sigma_1\|_{r_1}\|\sigma_2\|_{r_2}.$$

Beweis z.B. in [ReSi].

Lemma 4.7 (Interpolation) *Sei* $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^N) \cap L^{p_2}(\mathbb{R}^N)$, $p_1, p_2 \in [1, \infty]$, $0 \leq \theta \leq 1$ *und* $p \in [1, \infty]$ *gegeben durch* $\frac{1}{p} := \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}$. *Dann gilt* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, *und*

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_1}^{1-\theta} \|f\|_{p_2}^{\theta}.$$

Beweis z.B. in [We].

Beweis von Satz 4.5 . Sei $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Es gilt

$$-E_{pot}^{\varepsilon}(t) = \frac{1}{2} \int\int \frac{\rho^\varepsilon(t,x)\rho^\varepsilon(t,y)}{(|x-y|^2+\varepsilon)^{1/2}} dydx \leq \frac{1}{2} \int\int \frac{\rho^\varepsilon(t,x)\rho^\varepsilon(t,y)}{|x-y|} dydx,$$

wobei das Integral endlich ist aufgrund der Sobolev-Ungleichung (4.6). In der Tat, mit $\lambda = 1$, $N = 2$ und einem beliebigen $r_1 \in]1,2[$ gilt für r_2, definiert durch $r_1^{-1} + r_2^{-1} = 2 - \lambda/N = \frac{3}{2}$, $r_2 \in]1,2[$ und

$$\int\int \frac{\rho^\varepsilon(t,x)\rho^\varepsilon(t,y)}{|x-y|} dydx \leq C(r_1) \|\rho^\varepsilon(t)\|_{r_1} \|\rho^\varepsilon(t)\|_{r_2}.$$

Wegen $f^\varepsilon(t) \in C_c^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ (siehe 3.24) gilt insbesondere für die Dichten $\rho^\varepsilon(t) \in L^p(\mathbb{R}^2)$ für $p \in [1, +\infty]$. Definiert man jetzt θ_i durch $\frac{1}{r_i} =: \frac{1-\theta_i}{1} + \frac{\theta_i}{2}$, so gilt $\theta_i \in [1,2]$ und dann gilt aufgrund des Satzes 4.7

$$\|\rho^\varepsilon(t)\|_{r_i} \leq \|\rho^\varepsilon(t)\|_1^{1-\theta_i} \|\rho^\varepsilon(t)\|_2^{\theta_i}.$$

Aus der Beziehung

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1-\theta_1}{1} + \frac{\theta_1}{2} + \frac{1-\theta_2}{1} + \frac{\theta_2}{2} = \frac{4-(\theta_1+\theta_2)}{2}$$

folgt dann, daß $\theta_1 + \theta_2 = 1$ und damit

$$\|\rho^\varepsilon(t)\|_{r_1} \|\rho^\varepsilon(t)\|_{r_2} \leq \|\rho^\varepsilon(t)\|_1^{2-(\theta_1+\theta_2)} \|\rho^\varepsilon(t)\|_2^{\theta_1+\theta_2} = \|\rho^\varepsilon(t)\|_1 \|\rho^\varepsilon(t)\|_2.$$

Im folgenden bezeichnen wir mit $C_i(\mathring{f}), i = 1, 2, \ldots$ stets Konstante, die nur von $\mathring{f}$ abhängen.

Insgesamt haben wir jetzt

$$-E_{pot}^{\varepsilon}(t) \leq C(r_1)\|\rho^{\varepsilon}(t)\|_1\|\rho^{\varepsilon}(t)\|_2 = C_1(\overset{\circ}{f})\|\rho^{\varepsilon}(t)\|_2.$$

Mit einem beliebigen $R > 0$ gilt jetzt:

$$\rho^{\varepsilon}(t,x) = \int\limits_{|v|\leq R} f^{\varepsilon}(t,x,v)dv + \int\limits_{|v|\geq R} f^{\varepsilon}(t,x,v)dv \leq$$

$$\leq \pi R^2\|f^{\varepsilon}(t)\|_{\infty} + \frac{1}{R^2}\int v^2 f^{\varepsilon}(t,x,v)dv.$$

Ferner gilt

$$\|f^{\varepsilon}(t)\|_{\infty} = \|f^{\varepsilon}(0)\|_{\infty} = \|\overset{\circ}{f}\|_{\infty}.$$

Wenn wir jetzt R so wählen, daß

$$\pi R^2\|\overset{\circ}{f}\|_{\infty} = \frac{1}{R^2}\int v^2 f^{\varepsilon}(t,x,v)dv,$$

also (wenn wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\overset{\circ}{f} \neq 0$ annehmen)

$$R := \left(\pi\|\overset{\circ}{f}\|_{\infty}\right)^{-1/4}\left(\int v^2 f^{\varepsilon}(t,x,v)dv\right)^{1/4},$$

dann folgt

$$\rho^{\varepsilon}(t,x) \leq C_2(\overset{\circ}{f})\left(\int v^2 f^{\varepsilon}(t,x,v)dv\right)^{1/2}.$$

Und daraus folgt

$$\|\rho^{\varepsilon}(t)\|_2 \leq C_2(\overset{\circ}{f})E_{kin}^{\varepsilon}(t)^{1/2}.$$

Jetzt gilt also:

$$-E_{pot}^{\varepsilon}(t) \leq C_1(\overset{\circ}{f})\|\rho^{\varepsilon}(t)\|_2 \leq C_3(\overset{\circ}{f})E_{kin}^{\varepsilon}(t)^{1/2}.$$

Andererseits folgt mit $\overset{\circ}{\rho}(x) := \int \overset{\circ}{f}(x,v)dv$ aus

$$E^{\varepsilon}_{pot}(0) = -\frac{1}{2}\int\int \frac{\overset{\circ}{\rho}(x)\,\overset{\circ}{\rho}(y)}{(|x-y|^2+\varepsilon)^{1/2}}dxdy,$$
$$E^{\varepsilon}_{kin}(0) = \frac{1}{2}\int\int v^2\,\overset{\circ}{f}(x,v)dxdv,$$

daß

$$E^{0}_{kin}(0) = E^{\varepsilon}_{kin}(0),$$
$$-E^{0}_{pot}(0) \geq -E^{\varepsilon}_{pot}(0) \geq -E^{\varepsilon_0}_{pot}(0),$$

da $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Also gilt insgesamt

$$E^0(0) \leq E^{\varepsilon}(0) \leq E^{\varepsilon_0}(0)$$

und

$$E^{\varepsilon}_{kin}(t) - C_3(\overset{\circ}{f})E^{\varepsilon}_{kin}(t)^{1/2} \leq E^{\varepsilon}(0) \leq E^{\varepsilon_0}(0).$$

Hieraus folgt: es gibt $C_4(\overset{\circ}{f})$, so daß $E^{\varepsilon}_{kin}(t) \leq C_4(\overset{\circ}{f})$.
Setzen wir $J := C_4(\overset{\circ}{f})$, $\tilde{J} := C_2(\overset{\circ}{f})C_4(\overset{\circ}{f})^{1/2}$, dann sind die beiden Aussagen des Lemmas bewiesen. □

4.3 Reguläre und singuläre Kerne

Wir betrachten $e^{\varepsilon}(x) = \dfrac{x}{(|x|^2+\varepsilon)^{3/2}}$ für $n = 2$. Außerdem betrachten wir $\Omega(x) := \dfrac{x}{|x|}$ und $\bar{\Omega}_{\varepsilon}(r) := \dfrac{r^3}{(r^2+\varepsilon)^{3/2}}$. Offenbar gilt $e^{\varepsilon}(x) = \dfrac{\Omega(x)}{|x|^2}\bar{\Omega}_{\varepsilon}(|x|)$.

Lemma 4.8 *Seien $\Omega, \bar{\Omega}_{\varepsilon}$ die soeben definierten Funktionen. Dann gilt :*
1) Ω erfüllt die Eigenschaften $\Omega_1) - \Omega_4)$ (mit $B_0 = 1$).
2) $\forall \varepsilon \geq 0$ gilt: $\bar{\Omega}^{\varepsilon}$ erfüllt $\bar{\Omega}_1) - \bar{\Omega}_4)$ mit der Konstanten $\bar{\omega} = 3/4$.

Beweis. 1) folgt aus Bemerkung 2.3.
2) Es gilt offenbar $\bar{\Omega}_{\varepsilon} \in C^1(\mathbb{R}^+)$, $\bar{\Omega}_{\varepsilon}(r) < 1$. Weiter gilt

$$0 < \bar{\Omega}'_{\varepsilon}(r) = \frac{3r^2\varepsilon}{(r^2+\varepsilon)^{5/2}} \leq \frac{3(r^2+\varepsilon)^2}{4(r^2+\varepsilon)^{5/2}} \leq \frac{3}{4(r^2+\varepsilon)^{1/2}} \leq \frac{3}{4r}.$$

woraus sich $\bar{\Omega}_1$) und $\bar{\Omega}_4$) ergibt. $\bar{\Omega}_2$) und $\bar{\Omega}_3$) sind offenbar. □

Mit Bemerkung 2.1 ergibt sich das folgende

Korollar 4.9 *e^ε erfüllt die Eigenschaften $e_1)-e_3)$ mit derselben Konstanten $B > 0$ gleichmäßig für alle $\varepsilon \geq 0$ und damit auch die Voraussetzungen von Satz 2.4.*

Lemma 4.10 *Für jedes $\delta > 0$, $\varepsilon \geq 0$ und jedes $p \in]1, \infty[$ gilt:*

$$\|T^\delta_{e^\varepsilon} - T^\delta_{e^0}\|_p \leq C\frac{\varepsilon}{\delta^2}$$

für $C := 13\pi/2$.

Beweis. Sei $B^c_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq \delta\}$. Dann gilt $T^\delta_{e^\varepsilon} - T^\delta_{e^0} = T^\delta_{e^\varepsilon - e^0} = T^\delta_{(e^\varepsilon - e^0)\mathcal{X}_{B^c_\delta}}$. Wir zeigen, daß $(e^\varepsilon - e^0)\mathcal{X}_{B^c_\delta}$ die Voraussetzungen $e_1)-e_3)$ mit der Konstanten $B = 58\pi\frac{\varepsilon}{\delta^2}$ erfüllt. Dann kann Satz 2.4 für $T^\delta_{(e^\varepsilon - e^0)\mathcal{X}_{B^c_\delta}}$ angewendet werden. Um $e_1)$ zu zeigen, stellen wir fest: für $|x| < \delta$ ist $(e^\varepsilon - e^0)\mathcal{X}_{B^c_\delta}(x) = 0$. Es gilt :

$$|e^\varepsilon(x) - e^0(x)| = |x|\left|\frac{1}{|x|^3} - \frac{1}{(|x|^2+\varepsilon)^{3/2}}\right| \leq \varepsilon|x| \sup_{\theta\in[0,\varepsilon]}\left|\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)'\Bigg|_{|x|^2+\theta}\right| \leq$$

$$\leq \varepsilon|x| \cdot \frac{3}{2}\sup_{\theta\in[0,\varepsilon]}\frac{1}{(|x|^2+\theta)^{5/2}} = \frac{3}{2}\varepsilon|x|^{-4}. \tag{39}$$

Für $|x| \geq \delta$ gilt also

$$|e^\varepsilon(x) - e^0(x)| \leq \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\delta^2}\frac{1}{|x|^2}.$$

Die Eigenschaft $e_2)$ ist trivial. Wir beweisen nun $e_3)$. Es gilt

$$\partial_{x_j}(e^\varepsilon - e^0)_i(x) = \frac{\delta_{i,j}|x|^2 - 3x_ix_j}{|x|^5}(\bar{\Omega}_\varepsilon(|x|) - 1) + \frac{x_i}{|x|^3}\bar{\Omega}'_\varepsilon(|x|)\frac{x_j}{|x|}$$

und

$$|\bar{\Omega}_\varepsilon(|x|) - 1| \leq \varepsilon \sup_\varepsilon |\partial_\varepsilon \bar{\Omega}_\varepsilon(|x|)| \leq \frac{3\varepsilon}{2|x|^2}$$

woraus folgt

$$\sup_{i,j=1,2}\left|\partial_{x_j}(e^\varepsilon - e^0)_i(x)\right| \leq 7\varepsilon\frac{1}{|x|^5} \leq 7\frac{\varepsilon}{\delta^2}\frac{1}{|x|^3} \tag{40}$$

für $|x| \geq \delta$. Nun betrachten wir eine Zerlegung von $\{y : |x| \geq 2y\}$ in die Mengen

$$\begin{aligned}
B_1(x) &:= \{y : |x| \geq 2|y|, |x-y| > \delta, |x| > \delta\},\\
B_2(x) &:= \{y : |x| \geq 2|y|, |x-y| > \delta, |x| \leq \delta\},\\
B_3(x) &:= \{y : |x| \geq 2|y|, |x-y| \leq \delta, |x| > \delta\},\\
B_4(x) &:= \{y : |x| \geq 2|y|, |x-y| \leq \delta, |x| \leq \delta\}.
\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{|x|\geq 2|y|} |(e^\varepsilon - e^0)(x-y)\mathcal{X}_{B_\delta^c}(x-y) - (e^\varepsilon - e^0)(x)\mathcal{X}_{B_\delta^c}(x)|dx =\\
&= \left(\int\limits_{B_1(x)} + \int\limits_{B_2(x)} + \int\limits_{B_3(x)} + \int\limits_{B_4(x)}\right) |(e^\varepsilon - e^0)(x-y)\mathcal{X}_{B_\delta^c}(x-y) -\\
&\quad -(e^\varepsilon - e^0)(x)\mathcal{X}_{B_\delta^c}(x)|dx =: S_1 + S_2 + S_3 + S_4.
\end{aligned}$$

Der erste Term kann mit (40) abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int\limits_{B_1(x)} |(e^\varepsilon - e^0)(x-y) - (e^\varepsilon - e^0)(x)|dx \leq\\
&\leq \int\limits_{B_1(x)} |y| \sup_{i,j=1,2}\left|\frac{\partial}{\partial_{x_j}}(e^\varepsilon - e^0)(x)_i\right| dx \leq\\
&\leq |y| \int\limits_{|x|\geq 2|y|} 7\frac{\varepsilon}{\delta^2}\cdot\frac{1}{|x|^3}dx \leq \frac{7}{2}\pi\frac{\varepsilon}{\delta^2}dx.
\end{aligned}$$

Mit (39) gilt

$$\begin{aligned}
S_2 &= \int\limits_{B_2(x)} |(e^\varepsilon - e^0)(x-y)|dx \leq \int\limits_{|x-y|>\delta} \frac{3}{2}\varepsilon\frac{1}{|x-y|^4}dx =\\
&= \int\limits_{|z|>\delta} \frac{3}{2}\varepsilon\frac{1}{|z|^4}dz = \frac{3}{2}\varepsilon\pi\frac{1}{\delta^2},
\end{aligned}$$

$$S_3 = \int\limits_{B_3(x)} |(e^\varepsilon - e^0)(x)|dx \leq \int\limits_{|x|>\delta} \frac{3}{2}\varepsilon\frac{1}{|x|^4}dx = \frac{3}{2}\varepsilon\pi\frac{1}{\delta^2}.$$

$$S_4 = \int\limits_{B_4(x)} |(e^\varepsilon - e^0)(x-y)\mathcal{X}_{B^c_\delta}(x-y) - (e^\varepsilon - e^0)(x)\mathcal{X}_{B^c_\delta}(x)|dx = 0.$$

Insgesamt gilt also:

$$\int\limits_{|x|\geq 2|y|} |(e^\varepsilon - e^0)(x-y) - (e^\varepsilon - e^0)(x)|dx \leq \frac{13}{2}\pi\frac{\varepsilon}{\delta^2},$$

was das Gewünschte zeigt. □

Lemma 4.11 *Der Operator T_{e^ε} ist antisymmetrisch in $L_2(\mathbb{R}^2)$.*

Beweis. Für alle $\delta > 0$ ist der Operator $T^\delta_{e^\varepsilon}$ antisymmetrisch, weil e^ε_δ ungerade ist, das heißt

$$\int T^\delta_{e^\varepsilon} f(x)dx = -\int f(x) T^\delta_{e^\varepsilon} g(x)dx$$

für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Da nun

$$T_{e^\varepsilon} f = \lim_{\delta\to 0} T^\delta_{e^\varepsilon} f$$

in $L^2(\mathbb{R}^2)$ gilt, ist auch T_{e^ε} antisymmetrisch.□

4.4 Die Auswahl einer schwachkonvergenten Folge

Zuerst formulieren wir Aussagen, die uns weiter behilflich sein werden.

Lemma 4.12 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Dann existiert eine Funktion $G \in C^1(\mathbb{R})$, so daß $G > 0$, $0 \leq G' \leq 1$, $G'(r) = 0$ für $r \in]-\infty, 1]$, $\lim\limits_{r\to\infty} G(r) = \infty$ und $\int G(|x|) \cdot f(x)dx < \infty$.*

Beweis [HoHu84].

Wir wenden jetzt Lemma 4.12 auf $\overset{0}{\rho} \in L^1(\mathbb{R}^2)$ an und bezeichnen weiter mit G die Funktion aus diesem Lemma.

Lemma 4.13 *Es gibt eine positive stetige Funktion L auf $\mathbb{R}^+$, so daß für alle $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ und alle $t \geq 0$ gilt*

$$\int G(|x|) \cdot f^\varepsilon(t)(x,v)dxdv \leq L(t).$$

Beweis. Mit Satz 4.5 sehen wir, daß

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int G(|x|)|f^\varepsilon(t)(x,v)|dxdv = \\
&= \frac{d}{dt}\int G(|X^\varepsilon(t,0,x,v)|)\overset{\circ}{f}(x,v)dxdv = \\
&= \left|\int G'(|X^\varepsilon(t,0,x,v)|)\frac{X^\varepsilon(t,0,x,v)\cdot V^\varepsilon(t,0,x,v)}{|X^\varepsilon(t,0,x,v)|}\overset{\circ}{f}(x,v)dxdv\right| \leq \\
&\leq \int |V^\varepsilon(t,0,x,v)|\overset{\circ}{f}(x,v)dxdv = \int |v| f^\varepsilon(t)(x,v)dxdv \leq \\
&\leq \left(\int v^2 f^\varepsilon(t)(x,v)dxdv\right)^{1/2}\left(\int f^\varepsilon(t)(x,v)dxdv\right)^{1/2} \leq J^{1/2}\|\overset{\circ}{f}\|_1^{1/2}.
\end{aligned}$$

Durch Integration über t bekommen wir die Behauptung. □

Lemma 4.14 *Es gibt eine positive Nullfolge (ε_n) und ein zugehöriges stetiges $f^0 : [0,\infty[\to (L^1(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2), \sigma(1,\infty))$, so daß für alle $\tau \in L^\infty(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ gilt*

$$\int\int \tau f^\varepsilon(t)dxdv \to \int\int \tau f^0(t)dxdv \tag{41}$$

lokal gleichmäßig in t auf $\mathbb{R}^+$ und f^0 ferner die folgenden Eigenschaften hat:
1) $f^0(t) \geq 0$ f.ü. auf $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$, $t \geq 0$,
2) $f^0(t) \in L^p(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ für alle $p \in [1,2]$, $t \geq 0$ und für alle $p \in [1,2]$ und alle $\tau \in L^{p'}(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ gilt

$$\int\int \tau f^{\varepsilon_n}(t)dxdv \to \int\int \tau f^0(t)dxdv \text{ für } \varepsilon_n \to 0$$

lokal gleichmäßig in t auf dem $\mathbb{R}^+$,
3) $\|f^0(t)\|_1 = \|\overset{\circ}{f}\|_1$, $t \geq 0$,
4) $\|f^0(t)\|_p \leq \|\overset{\circ}{f}\|_p, p \in]1,2]$, $t \geq 0$,
5) $\int\int v^2 f^0(t,x,v)dxdv \leq J$, $t \geq 0$, mit der Konstanten J aus Satz 4.5.

Beweis Wir zeigen (vgl. auch [HoHu84]), daß die Familie $\{f^\varepsilon|_{[0,T]}\}_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}$ auf $[0,T] =: I$ den Voraussetzungen von Satz 2.13 mit $X := L^p(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ genügt. Nach (i) ist zu zeigen: Für alle $t\in[0,T]$ ist die Menge $\{f^\varepsilon(t),\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]\}$ relativ schwach kompakt in $L^p(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$.

Für $p>1$ ist diese Eigenschaft offenbar, weil nach 3.2 gilt $\|f^\varepsilon(t)\|_p = \|\mathring{f}\|_p$, und damit ist die Familie $\{f^\varepsilon(t),\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]\}$ in $L^p(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ beschränkt.
Für $p=1$ sind die Voraussetzungen von Satz 2.12 zu prüfen.
Zu (i): Die Beschränktheit von $\{f^\varepsilon(t),\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]\}$ in $L^1(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ folgt auch aus der Eigenschaft $\|f^\varepsilon(t)\|_1 = \|\mathring{f}\|_1$, $\varepsilon>0, t\in\mathbb{R}^+$ klassischer Lösungen.
Zu (ii): Nach 3.1 erhält die Abbildung $Z^\varepsilon(t,0,\cdot,\cdot)$ das Maß. Deswegen gilt für jede meßbare Menge B

$$\int\limits_B f^\varepsilon(t)(x,v)dxdv = \int\limits_{(Z^\varepsilon(t,0,\cdot,\cdot))(B)} \mathring{f}(x,v)dxdv \to 0 \text{ für } \lambda^4(B)\to 0$$

gleichmäßig für alle $\varepsilon>0$.
Zu (iii): Wegen der Stetigkeit der Funktion L aus Lemma 4.12 gilt für jedes $R>0$

$$\begin{aligned}\int\limits_{|v|\geq R}\int\limits_{|x|\geq R} f^\varepsilon(t)(x,v)dxdv &\leq \left(\int\int\limits_{|x|\geq R} + \int\limits_{|v|\geq R}\int\right) f^\varepsilon(t)(x,v)dxdv \leq \\ &\leq G(R)^{-1}\int G(|x|)f^\varepsilon(t)(x,v)dxdv + R^{-2}\int v^2 f^\varepsilon(t)(x,v)dxdv \leq \\ &\leq G(R)^{-1}L(t) + R^{-2}J \leq G(R)^{-1}\|L\|_{\infty,[0,T]} + R^{-2}J \to 0 \text{ für } R\to\infty\end{aligned}$$

gleichmäßig für $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ und gleichmäßig in $t\in[0,T]$.
Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2.12 für $\{f^\varepsilon(t),\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]\}$ geprüft, und damit ist diese Familie für alle $p\in[1,2]$ relativ schwach kompakt in $L^p(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$.
Nun zeigen wir die Voraussetzung (ii) von Satz 2.13: $\forall\tau\in L^\infty(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ ist die Abbildung

$$t\mapsto\int\tau f^\varepsilon(t)dxdv$$

auf $[0,T]$ in $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ gleichgradig stetig.
Für $\tau\in C_c^1(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ folgt dies aus der folgenden Überlegung. Zuerst bemerken wir, daß $K^\varepsilon = T_{e^\varepsilon}\rho^\varepsilon$. Wir wählen R_1, R_2 so, daß $\operatorname{supp}\tau\subset B_{R_1}\times B_{R_2}$. Dann

gilt nach Lemma 4.2, Lemma 4.5 und Satz 2.4

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{d}{dt}\int\int \tau f^\varepsilon(t)dxdv\right| = \left|\int\int(\partial_x\tau v - \partial_v\tau K^\varepsilon)f^\varepsilon(t)dxdv\right| \leq \\
&\leq \|\partial_x\tau\|_\infty \int\limits_{B_{R_1}}\int\limits_{B_{R_2}} |v|f^\varepsilon(t)dxdv + \int\limits_{B_{R_1}}\int\limits_{B_{R_2}} |T_{e^\varepsilon}\rho^\varepsilon(t)f^\varepsilon(t)\partial_v\tau|dxdv \leq \\
&\leq \|\partial_x\tau\|_\infty R_2\|f^\varepsilon(t)\|_1 + \pi R_2^2\|T_{e^\varepsilon}\rho^\varepsilon(t)\|_2\|f^\varepsilon(t)\|_2\|\partial_v\tau\|_\infty \leq \\
&\leq \|\partial_x\tau\|_\infty R_2\|\mathring{f}\|_1 + \pi R_2^2 A_2\|\rho^\varepsilon(t)\|_2\|\mathring{f}\|_2\|\partial_v\tau\|_\infty \leq \\
&\leq \|\partial_x\tau\|_\infty R_2\|\mathring{f}\|_1 + \pi R_2^2 A_2 J\|\mathring{f}\|_2\|\partial_v\tau\|_\infty =: g(\tau).
\end{aligned}$$

Dies zeigt die gleichgradige Stetigkeit.

Für $\tau \in L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ folgt das Resultat aus dem folgenden Approximationsargument. Sei $\tau \neq 0$. Wie wir oben beim Beweis der Eigenschaft (iii) aus Satz 2.12 gezeigt haben, gibt es für ein vorgegebenes $\eta > 0$ ein $R > 0$, so daß für alle $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ und alle $t \in [0, T]$ gilt

$$\int\limits_{|v|>R}\int\limits_{|x|>R} f^\varepsilon(t)dxdv \leq \frac{\eta}{6\|\tau\|_\infty}.$$

Die Funktion $\tau\mathcal{X}_{B_R\times B_R}$ liegt jetzt in $L^2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$, kann also durch $C_c^1(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$-Funktionen in $L^2(B_R \times B_R)$ approximiert werden. Also wählen wir ein $\sigma \in C_c^1(B_R \times B_R)$ mit

$$\|\tau - \sigma\|_{2,B_R\times B_R} \leq \frac{\eta}{6\|\mathring{f}\|_2}.$$

Schließlich wählen wir $\Delta(\eta) := \dfrac{\eta}{3g(\sigma)}$, mit g aus dem ersten Fall des Beweises der gleichgradigen Stetigkeit. Also gilt für alle $t_0, t \in [0, T]$ mit $|t_0 - t| < \Delta(\eta)$

$$\left|\int\int \sigma(f^\varepsilon(t) - f^\varepsilon(t_0))dxdv\right| \leq \Delta(\eta)g(\sigma) = \frac{\eta}{3}.$$

Insgesamt haben wir für diese t_0, t

$$\begin{aligned}
&\left|\int\int \tau(f^\varepsilon(t) - f^\varepsilon(t_0))dxdv\right| \leq \\
&\leq \left|\int\int(\tau - \tau\cdot\mathcal{X}_{B_R\times B_R})(f^\varepsilon(t) - f^\varepsilon(t_0))dxdv\right| +
\end{aligned}$$

$$+\left|\int\int(\tau\cdot\mathcal{X}_{B_R\times B_R}-\sigma)(f^\varepsilon(t)-f^\varepsilon(t_0))dxdv\right|+$$
$$+\left|\int\int\sigma(f^\varepsilon(t)-f^\varepsilon(t_0))dxdv\right|\leq$$
$$\leq\int\limits_{|v|>R}\int\limits_{|x|>R}(f^\varepsilon(t)+f^\varepsilon(t_0))dxdv\|\tau\|_\infty+2\|\tau-\sigma\|_{2,B_R\times B_R}\|\overset{\circ}{f}\|_2+$$
$$+\Delta(\eta)g(\sigma)\leq\eta.$$

Für ein $p\in]1,2]$, $\tau\in L^{p'}(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ können wir für jedes η eine Funktion $\sigma\in C_c^1(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ mit $\|\tau-\sigma\|_{p'}\leq\eta$ wählen. Die gewünschte Eigenschaft folgt nun wie oben aus der Abschätzung

$$\left|\int\int\tau(f^\varepsilon(t)-f^\varepsilon(t_0))dxdv\right|\leq\left|\int\int(\tau-\sigma)(f^\varepsilon(t)-f^\varepsilon(t_0))dxdv\right|+$$
$$+\left|\int\int\sigma(f^\varepsilon(t)-f^\varepsilon(t_0))dxdv\right|\leq$$
$$\leq\|\tau-\sigma\|_{p'}\|\overset{\circ}{f}\|_p+\left|\int\int\sigma(f^\varepsilon(t)-f^\varepsilon(t_0))dxdv\right|$$

für alle $t_0\in[0,T]$ und $t\in[t_0-\Delta(\eta),t_0+\Delta(\eta)]\cap[0,T]$. Damit ist die gleichgradige Stetigkeit auch in diesem Fall gezeigt.
Die Anwendung von Satz 2.13 für $X:=L^1(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ liefert jetzt die Existenz einer Nullfolge (ε_n) und einer Funktion f^0, so daß (41) gilt.
Jetzt zeigen wir die Eigenschaften $1)-5)$.
1) ist offenbar, denn für alle $\varepsilon>0$ und alle $t\geq 0$ gilt $f^\varepsilon(t)\geq 0$ und der positive Kegel von $L^1(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ ist schwach abgeschlossen.

2) Wie wir schon gezeigt haben, erfüllt die Familie $\{f^{\varepsilon_n}(t)\}$ die Voraussetzungen von Satz 2.13 mit $X:=L^p(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ auch für $p\in]1,2]$. Also enthält auch jede Teilfolge von $(f^{\varepsilon_n}(t))$ wiederum eine Teilfolge, die gegen eine Funktion etwa $\tilde{f}^0$ schwach in $L^p(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ konvergiert. Für alle $t\in\mathbb{R}^+$ und für alle Testfunktionen $\sigma\in C_c(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ gilt dann

$$\int\sigma(x,v)f^0(t,x,v)dxdv=\int\sigma(t,v)\tilde{f}^0(t,x,v)dxdv.$$

Und wegen der Dichtheit von $C_c(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ in $L^p(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2), p\in]1,2]$, muß für jedes $t\in[0,T]$ $f^0(t)=\tilde{f}^0(t)$ in $L^p(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ gelten. Damit enthält jede Teilfolge von $(f^{\varepsilon_n}(t))$ eine gegen $f^0(t)$ schwach konvergente Teilfolge. Deswegen

konvergiert die ganze Folge $(f^{\varepsilon_n}(t))$ selbst schwach gegen $f^0(t)$.
3) gilt, weil die Funktion $\sigma := 1$ auch in $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ liegt. 4) gilt, weil die Norm von $L^p(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ in der schwachen Topologie nach unten halbstetig ist.
5) Sei $t \geq 0$. Dann gilt für $R > 0$ mit Satz 4.5

$$\int\limits_{|x|\leq R} \int\limits_{|v|\leq R} v^2 f^0(t,x,v)dxdv = \int\int (v^2 \mathcal{X}_{\{|x|,|v|\leq R\}}(x,v) f^0(t,x,v)dxdv =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\int (v^2 \mathcal{X}_{\{|x|,|v|\leq R\}}(x,v) f^{\varepsilon_n}(t,x,v)dxdv \leq J.$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung 4.15 *Beim Beweis der gleichgradigen Stetigkeit unterscheidet sich unser Fall wesentlich von dem in [HoHu84] beschriebenen. In dieser Arbeit werden die Kompaktheitseigenschaften des Integraloperators, der die Kraft definiert, im 3-dimensionalen Raum benutzt. Diese Eigenschaften besitzt der entsprechende Operator in unserem Fall nicht, weil er ,,zu singulär" ist. Satz 2.4 kann in diesem Fall nur die Beschränktheit dieses Operators liefern.*

Lemma 4.16 *Für die Folge (f^{ε_n}) gilt für jedes $T > 0$ und jedes $p \in [1,2]$*

$$f^{\varepsilon_n} \rightharpoonup f^0 \text{ in } L^p([0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2).$$

Beweis. Nehmen wir zuerst $\sigma_1 \in C^1([0,T]), \sigma_2 \in C^1_c(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ an, dann gilt

$$\int\limits_0^T \int\int \sigma_1\sigma_2(f^{\varepsilon_n} - f^0)dxdvdt = \int\limits_0^T \sigma_1 \left(\int\int \sigma_2(f^{\varepsilon_n} - f^0)dxdv\right) dt.$$

Nach Lemma 4.14 konvergiert das innere Doppelintegral gegen 0 gleichmässig auf [0,T], also konvergiert das Ganze auch gegen 0 für $n \to \infty$.
Für eine allgemeine Testfunktion $\sigma \in L^{p'}([0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ benutzen wir einen Approximationsargument: Für $p > 1$ kann man σ direkt durch die Funktionen $\sigma = \sum\limits_m \sigma_1^m \sigma_2^m$ mit $\sigma_1^m \in C^1([0,T]), \sigma_2^m \in C^1_c(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ in $L^{p'}([0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ approximieren. Dann gilt offenbar

$$\int\limits_0^T \int\int \sigma(f^{\varepsilon_n} - f^0)dxdvdt =$$

$$= \int_0^T \int \int (\sigma - \sum_m \sigma_1^m \sigma_2^m)(f^{\varepsilon_n} - f^0) dx dv dt +$$

$$+ \int_0^T \int \int \sum_m \sigma_1^m \sigma_2^m (f^{\varepsilon_n} - f^0) dx dv dt.$$

Für das erste Integral gilt

$$\left| \int_0^T \int \int (\sigma - \sum_m \sigma_1^m \sigma_2^m)(f^{\varepsilon_n} - f^0) dx dv dt \right| \leq$$

$$\leq \|\sigma - \sum_m \sigma_1^m \sigma_2^m\|_{p'} \|f^{\varepsilon_n} - f^0\|_p \leq 2\|\mathring{f}\|_p \|\sigma - \sum_m \sigma_1^m \sigma_2^m\|_{p'}.$$

Das zweite Integral kann ebenfalls beliebig klein gemacht werden, wie wir es oben bereits gezeigt haben. Für $p = 1$ benutzen wir ein ähnliches Verfahren wie im Beweis der gleichgradigen Stetigkeit in Lemma 4.14. Aus diesem Beweis ergibt sich, daß es zu vorgegebenem η ein $R > 0$ gibt, so daß für alle $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ und alle $t \in [0, T]$ gilt

$$\int_{|v|>R} \int_{|x|>R} f^\varepsilon(t) dx dv \leq \frac{\eta}{6T\|\sigma\|_\infty}.$$

Daraus folgt

$$\int_0^T \int_{|v|>R} \int_{|x|>R} f^\varepsilon dx dv \leq \frac{\eta}{6\|\sigma\|_\infty}.$$

Da $f^0 \in L^1([0, T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$, gibt es ebenfalls ein R' mit

$$\int_0^T \int_{|v|>R'} \int_{|x|>R'} f^0 dx dv dt \leq \frac{\eta}{6\|\sigma\|_\infty}.$$

Wir wählen nun $R < 0$ so, daß beide Abschätzungen gelten. Die Funktion $\sigma \mathcal{X}_{[0,T] \times B_R \times B_R}$ liegt jetzt in $L^2([0, T] \times B_R \times B_R)$, kann also durch die separierenden $C_c^1([0, T] \times B_R \times B_R)$-Funktionen in $L^2(B_R \times B_R)$ approximiert werden. Also wählen wir wie oben $\sigma_1^m \in C^1([0, T])$, $\sigma_2^m \in C_c^1(B_R \times B_R)$ mit

$$\|\sigma - \sum_m \sigma_1 \sigma_2\|_{2,[0,T] \times B_R \times B_R} \leq \frac{\eta}{3\|\mathring{f}\|_2}.$$

Insgesamt gilt jetzt

$$\int_0^T \int \int \sigma(f^{\varepsilon_n} - f^0) dx dv dt = \int_0^T \int_{|x|>R} \int_{|v|>R} \sigma(f^{\varepsilon_n} - f^0) dx dv dt +$$

$$+ \int_0^T \int_{B_R} \int_{B_R} (\sigma - \sum_m \sigma_1^m \sigma_2^m)(f^{\varepsilon_n} - f^0) dx dv dt$$

$$+ + \int_0^T \int_{B_R} \int_{B_R} \sum_m \sigma_1^m \sigma_2^m (f^{\varepsilon_n} - f^0) dx dv dt.$$

Offenbar sind jetzt der erste und der zweite Integral kleiner als $\eta/3$ nach der Wahl von R und σ_1^m, σ_2^m und der letzte kann kleiner als $\eta/3$ gemacht werden, wie wir oben für separierende Funktionen gezeigt haben. □

Lemma 4.17 1) *Für* $\rho^0(t,x) := \int f^0(t,x,v)dv$*, für alle* $p \in [1,2]$ *und für alle* $T > 0$ *gilt*

$$\rho^{\varepsilon_n} \rightharpoonup \rho^0 \text{ in } L^p([0,T] \times \mathbb{R}^2).$$

2) *Für* $\sigma \in C_c(\mathbb{R}^2)$ *definieren wir* $\rho_\sigma^\varepsilon(t,x) := \int \sigma(v) f^\varepsilon(t,x,v)dv$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. *Dann gilt für alle* $p \in [1,2]$ *und alle* $T > 0$

$$\rho_\sigma^{\varepsilon_n} \rightharpoonup \rho_\sigma^0 \text{ in } L^p([0,T] \times \mathbb{R}^2).$$

Beweis 1) Schwache Konvergenz der Folge (f^{ε_n}) in $L^1([0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ impliziert die schwache Konvergenz der Folge (ρ^{ε_n}) in $L^1([0,T] \times \mathbb{R}^2)$, denn für jedes $\sigma \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)$ gilt:

$$\int \int \sigma(\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0) dt dx = \int \int \int \sigma(f^{\varepsilon_n} - f^0) dt dx dv \to 0, n \to \infty.$$

Und schwache Konvergenz in $L^1([0,T] \times \mathbb{R}^2)$ und gleichmäßige Beschränktheit in $L^p([0,T] \times \mathbb{R}^2)$, $p \in]1,2]$ implizieren die schwache Konvergenz in $L^p([0,T] \times \mathbb{R}^2)$ (aufgrund der Dichtheit von $C_c^1([0,T] \times \mathbb{R}^2)$ in $L^p([0,T] \times \mathbb{R}^2)$ für $p \in]1,2]$).
2) Für alle $\tau \in L^p([0,T] \times \mathbb{R}^2)$ und $\sigma \in C_c(\mathbb{R}^2)$ liegt die Produktfunktion $\tau\sigma : (t,x,v) \mapsto \tau(t,x)\sigma(v)$ in $L^p([0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$. Nach Lemma 4.14 gilt jetzt

$$\int \int \tau(t,x) \rho_\sigma^{\varepsilon_n}(t,x) dt dx = \int \int \int \tau(t,x)\sigma(v) f^{\varepsilon_n} dt dx dv \to$$

$$\int \int \int \tau(t,x)\sigma(v) f^0 dt dx dv = \int \int \tau(t,x) \rho_\sigma^0(t,x) dt dx$$

für $n \to \infty$. $\square$

4.5 Der Grenzübergang

Das im Abschnitt 4.1 angekündigte Hauptresultat des Kapitels ist bewiesen mit dem folgenden

Satz 4.18 *Die Grenzfunktion f^0 ist schwache Lösung des flachen (VPS) auf $\mathbb{R}^+$.*

Wir stellen fest, daß die Eigenschaften von 1. und 4. f^0, die zur Definition einer schwachen Lösung gehören, bereits in Lemma 4.14 gezeigt wurden. Nach Lemma 4.17 gilt für jedes $p \in [1, 2]$ $\rho^0 \in L^p([0, T] \times \mathbb{R}^2)$. Daraus folgt, daß für fast alle $t \in [0, T]$, $p \in [1, 2]$ gilt $\rho^0(t) \in L^p(\mathbb{R}^2)$. Sei K^0 wie in Punkt 2. von Definition 4.1. Dann gilt mit Satz 2.4 auch $K^0(t) \in L^p(\mathbb{R}^2)$ für jedes $p \in]1, 2]$ und für fast alle $t \in [0, T]$. Damit ist auch Punkt 2. gezeigt.

Der entscheidende Schritt für den Beweis des Satzes ist der Nachweis von 3., d.h., daß f^0 die Gleichung (V_w) erfüllt. Da die Approximationen (f^{ε_n}) insbesondere auch schwache Lösungen der geglätteten Gleichung sind, wird die Gültigkeit der Gleichung (V_w) äquivalent ausgedrückt in der Behauptung von

Lemma 4.19 *Für alle Testfunktionen $\sigma \in C_c^1([0, T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ gilt*

$$\begin{aligned} &\int\int\int \partial_t \sigma (f^{\varepsilon_n} - f^0) dt\, dx\, dv + \int\int\int v \partial_x \sigma (f^{\varepsilon_n} - f^0) dt\, dx\, dv - \\ &- \int\int\int \partial_v \sigma (K^{\varepsilon_n} f^{\varepsilon_n} - K^0 f^0) dt\, dx\, dv \to 0 \text{ für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Beweis. Man sieht leicht, daß die ersten beiden Terme gegen Null konvergieren, da $\partial_t \sigma, v \partial_x \sigma \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ und die Folge (f^{ε_n}) gegen f^0 schwach in $L^1([0, T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ konvergiert.

Wir zeigen nun die Konvergenz gegen Null im dritten Term. Wir setzen

$$\begin{aligned} I^n &:= \int\int\int \partial_v \sigma (K^{\varepsilon_n} f^{\varepsilon_n} - K^0 f^0) dt dx dv = \\ &= \int\int\int \partial_v \sigma (T_{e^{\varepsilon_n}} \rho^{\varepsilon_n} f^{\varepsilon_n} - T_{e^0} \rho^0 f^0) dt dx dv = \\ &=: I_2^n + I_1^n + I_3^n \end{aligned}$$

mit

$$I_1^n := \int\int\int \partial_v \sigma T_{e^{\varepsilon_n}}(\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0) f^{\varepsilon_n} dt dx dv,$$
$$I_2^n := \int\int\int \partial_v \sigma (T_{e^{\varepsilon_n}} - T_{e^0}) \rho^0 f^{\varepsilon_n} dt dx dv,$$
$$I_3^n := \int\int\int \partial_v \sigma T_{e^0} \rho^0 (f^{\varepsilon_n} - f^0) dt dx dv.$$

Wir zeigen $I_3^n \to 0$: Zunächst gilt $\rho^0 \in L^2([0,T] \times \mathbb{R}^2)$ nach Lemma 4.17, also gilt nach Korollar 2.5 $T_{e^0}\rho^0 \in L^2([0,T] \times \mathbb{R}^2)$. Also ist $\partial_v \sigma T_{e^0} \rho^0 \in L^2([0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ und $I_3^n \to 0$ gilt nach Lemma 4.14.

Zur Behandlung von I_1^n betrachten wir zunächst den Fall von Funktionen $\sigma \in C_c^1([0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$, die sich in der Form darstellen lassen $\sigma(t,x,v) = \sigma_1(t)\sigma_2(x)\tilde{\sigma}_3(v)$, mit $\sigma_1 \in C^1([0,T]), \sigma_2 \in C_c^1(\mathbb{R}^2),\ \tilde{\sigma}_3 \in \mathcal{D}(B_R)$ für ein R. Wir schreiben dann mit $\partial_v \tilde{\sigma}_3 =: \sigma_3$

$$I_1^n = \int\int\int \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 T_{e^{\varepsilon_n}}(\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0) f^{\varepsilon_n} dt dx dv =$$
$$= \int\int \sigma_1 \sigma_2 T_{e^{\varepsilon_n}}(\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0) \rho_{\sigma_3}^{\varepsilon_n} dt dx,$$

mit

$$\rho_{\sigma_3}^{\varepsilon_n} := \int \sigma_3 f^{\varepsilon_n} dv.$$

Als klassische Lösung von (VP^{ε_n}) erfüllt f^{ε_n} die Gleichung

$$\partial_t f^{\varepsilon_n} + v \partial_x f^{\varepsilon_n} = -\partial_v (K^{\varepsilon_n} \cdot f^{\varepsilon_n}) = -\partial_v (T_{e^{\varepsilon_n}} \rho^{\varepsilon_n} \cdot f^{\varepsilon_n}),$$

also genügt $f^{\varepsilon_n} \chi_{[0,T]}$ den Bedingungen von Lemma 2.11 mit $m = 1$, $s = 1/4$ und $g := T_{e^{\varepsilon_n}} \rho^{\varepsilon_n} \cdot f^{\varepsilon_n}$, denn es gilt nach Lemma 4.8, Korollar 2.5 und Lemma 4.5 zunächst

$$\|K^{\varepsilon_n} f^{\varepsilon_n}\|_2 \leq \|\mathring{f}\|_\infty \|T_{e^{\varepsilon_n}} \rho^{\varepsilon_n}\|_2 \leq \|\mathring{f}\|_\infty C B \|\rho^{\varepsilon_n}\|_2 \leq$$
$$\leq CBJT \|\mathring{f}\|_\infty.$$

Da der Träger von σ_3 in B_R liegt, folgt aus Lemma 2.11

$$\|\rho_{\sigma_3}^{\varepsilon_n}\|_{H^{1/4}((0,T) \times \mathbf{R}^2)} = \|\int_{B_R} \sigma_3 f^{\varepsilon_n} \chi_{(0,T)} dv\|_{H^{1/4}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2)} \leq$$

$$\leq C\left(\|f^{\varepsilon_n}\chi_{(0,T)}\|^2_{2,\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2\times B_R}+\|K^{\varepsilon_n}f^{\varepsilon_n}\chi_{(0,T)}\|^2_{2,\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2\times B_R}\right)^{1/2}\leq$$
$$\leq C\left(T^2\|\mathring{f}\|_2^2+C^2B^2J^2T^2\|\mathring{f}\|^2_\infty(\pi R^2)^2\right)^{1/2}=C(\sigma_3,T,\mathring{f}).$$

Jetzt zeigen wir, daß

$$T_{e^{\varepsilon_n}}(\rho^{\varepsilon_n}-\rho^0)\rightharpoonup 0 \text{ in } L^2((0,T)\times\mathbb{R}^2) \text{ für } n\to\infty.$$

Wir haben zu zeigen, daß für alle $\tau\in L^2((0,T)\times\mathbb{R}^2)$ gilt

$$\int_0^T\int\tau T_{e^{\varepsilon_n}}(\rho^{\varepsilon_n}-\rho^0)dxdt\to 0. \tag{42}$$

Wir spezialisieren zuerst auf den Fall $\tau(t,x)=\tau_1(t)\tau_2(x)$, wobei $\tau_1\in L^2((0,T)),\tau_2\in L^2(\mathbb{R}^2)$, und zeigen zunächst, daß

$$T_{e^{\varepsilon_n}}\tau_2\to T_{e^0}\tau_2 \text{ in } L^2(\mathbb{R}^2) \text{ für } n\to\infty.$$

In der Tat, für jedes $\delta>0$ gilt

$$T_{e^{\varepsilon_n}}\tau_2-T_{e^0}\tau_2=T_{e^{\varepsilon_n}-e^0}\tau_2=T^{\delta}_{e^{\varepsilon_n}-e^0}\tau_2+T'^{\delta}_{e^{\varepsilon_n}-e^0}\tau_2.$$

Nach Satz 2.4 2) konvergiert $T'^{\delta}_{e^{\varepsilon_n}-e^0}\tau_2\to 0$ für $\delta\to 0$ in $L^2((0,T)\times\mathbb{R}^2)$ gleichmäßig in $n\in\mathbb{N}$, da die Kerne $e^{\varepsilon_n}-e^0$ die Bedingungen $e_1)$–$e_3)$ (was aus Korollar 4.9 folgt) mit derselben Konstanten B erfüllen. Deswegen können wir zu einem vorgegebenen $\eta>0$ ein $\delta(\eta)>0$ wählen, so daß

$$\|T'^{\delta(\eta)}_{e^{\varepsilon_n}-e^0}\tau_2\|_2\leq\frac{\eta}{2}$$

für alle $n\in\mathbb{N}$. Nach Lemma 4.10 gilt für alle n mit $C\dfrac{\varepsilon_n}{\delta(\eta)^2}\leq\dfrac{\eta}{2}$

$$\|T^{\delta(\eta)}_{e^{\varepsilon_n}-e^0}\tau_2\|_2\leq\frac{\eta}{2}.$$

Dies zeigt die Konvergenz

$$T_{e^{\varepsilon_n}}\tau_2\to T_{e^0}\tau_2 \text{ in } L^2(\mathbb{R}^2)$$

für $n\to\infty$. Dann gilt auch

$$\tau_1T_{e^{\varepsilon_n}}\tau_2\to\tau_1T_{e^0}\tau_2 \text{ in } L^2((0,T)\times\mathbb{R}^2)$$

für $n \to \infty$. Um nun (42) in unserem Spezialfall zu zeigen, bemerken wir, daß nach Lemma 4.11 gilt

$$\int_0^T \int \tau_1 \tau_2 T_{e^{\varepsilon_n}} (\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0) dx dt = - \int_0^T \int (\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0) \tau_1 T_{e^{\varepsilon_n}} \tau_2 dx dt.$$

Die Folge $\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0$ konvergiert schwach in $L^2((0,T) \times \mathbb{R}^2)$ gegen 0, die Folge $\tau_1 T_{e^{\varepsilon_n}} \tau_2$ ist in $L^2((0,T) \times \mathbb{R}^2)$ stark konvergent. Dann konvergiert auch

$$\int_0^T \int (\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0) \tau_1 T_{e^{\varepsilon_n}} \tau_2 dx dt \to 0$$

für $n \to \infty$. Jetzt nehmen wir ein allgemeines $\tau \in L^2((0,T) \times \mathbb{R}^2)$. Es kann durch die Funktionen der Form $\sum\limits_{m=1}^{N} \tau_1 \tau_2$ mit $\tau_1 \in L^2((0,T)), \tau_2 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ in $L^2([0,T] \times \mathbb{R}^2)$ approximiert werden. Dann gilt

$$\int_0^T \int \tau T_{e^{\varepsilon_n}} (\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0) dx dt =$$

$$= \int_0^T \int (\tau - \sum_{m=1}^{N} \tau_1 \tau_2) T_{e^{\varepsilon_n}} (\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0) dx dt + \sum_{m=1}^{N} \int_0^T \int \tau_1 \tau_2 T_{e^{\varepsilon_n}} (\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0) dx dt.$$

Das erste Integral kann beliebig klein gemacht werden, weil

$$\| T_{e^{\varepsilon_n}} (\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0) \|_2 \leq 2BCTJ$$

und $\tau - \sum\limits_{m=1}^{N} \tau_1 \tau_2$ beliebig klein gemacht werden kann. Das zweite Integral konvergiert gegen 0, wie wir oben bereits gezeigt haben. Also haben wir insgesamt gezeigt, daß

$$T_{e^{\varepsilon_n}} (\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0) \rightharpoonup 0 \text{ in } L^2((0,T) \times \mathbb{R}^2) \text{ für } n \to \infty.$$

Dann gilt auch

$$\sigma_1 \sigma_2 T_{e^{\varepsilon_n}} (\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0) \rightharpoonup 0 \text{ in } L^2((0,T) \times \mathbb{R}^2) \text{ für } n \to \infty.$$

Wegen $L^2((0,T) \times \mathbb{R}^2) \subset H^{-1/4}((0,T) \times \mathbb{R}^2)$ (Satz 2.14) gilt

$$\sigma_1 \sigma_2 T_{e^{\varepsilon_n}} (\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0) \in H^{-1/4}((0,T) \times \mathbb{R}^2).$$

Sei $R_2 > 0$ so gewählt, daß gilt $\mathrm{supp}\sigma_2 \in \overset{\circ}{B}_{R_2}$. Dann gilt auch

$$\sigma_1\sigma_2 T_{e^{\varepsilon_n}}(\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0) \in H^{-1/4}((0,T)\times \overset{\circ}{B}_{R_2}),$$

wobei $\overset{\circ}{B}_{R_2}$ den offenen Kern von B_{R_2} bedeutet, und

$$\|\sigma_1\sigma_2 T_{e^{\varepsilon_n}}(\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0)\|_{H^{-1/4}((0,T)\times\mathbf{R}^2)} = \|\sigma_1\sigma_2 T_{e^{\varepsilon_n}}(\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0)\|_{H^{-1/4}((0,T)\times\overset{\circ}{B}_{R_2})}.$$

Da nach Satz 2.14 die Einbettung $L^2((0,T)\times \overset{\circ}{B}_{R_2}) \subset H^{-1/4}((0,T)\times \overset{\circ}{B}_{R_2})$ kompakt ist und wegen $\sigma_1\sigma_2 T_{e^{\varepsilon_n}}(\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0) \rightharpoonup 0$ in $L^2((0,T)\times \overset{\circ}{B}_{R_2})$ für $n \to \infty$ gilt

$$\sigma_1\sigma_2 T_{e^{\varepsilon_n}}(\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0) \to 0 \text{ in } H^{-1/4}((0,T)\times \overset{\circ}{B}_{R_2}) \text{ für } n \to \infty.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} |I_1^n| &\leq \|\sigma_1\sigma_2 T_{e^{\varepsilon_n}}(\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0)\|_{H^{-1/4}((0,T)\times\overset{\circ}{B}_{R_2})} \|\rho_{\sigma_3}^{\varepsilon_n}\|_{H^{1/4}((0,T)\times\overset{\circ}{B}_{R_2})} \leq \\ &\leq C(\sigma_3, T, \overset{\circ}{f})\|\sigma_1\sigma_2 T_{e^{\varepsilon_n}}(\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0)\|_{H^{-1/4}((0,T)\times\overset{\circ}{B}_{R_2})} \to 0 \text{ für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Der Fall eines allgemeinen $\sigma \in C_c^1((0,T) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ ergibt sich aus der Dichtheit von Funktionen der Form

$$\partial_v \sigma = \sum_{m=1}^{N} \sigma_1^m \sigma_2^m \sigma_3^m$$

mit $\sigma_1^m \in C((0,T)), \sigma_2^m, \sigma_3^m \in C_c(\mathbb{R}^2), m = 1, \ldots N$ in $L^2((0,T) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ (vgl. auch Beweis von Lemma 2.9). Dann kann man I_1^n folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned} I_1^n = &\int\int\int (\partial_v\sigma - \sum_{m=1}^{N} \sigma_1^m\sigma_2^m\sigma_3^m) T_{e^{\varepsilon_n}}(\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0) f^{\varepsilon_n} dtdxdv + \\ &+ \sum_{m=1}^{N} \int\int\int \sigma_1^m\sigma_2^m\sigma_3^m T_{e^{\varepsilon_n}}(\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0) f^{\varepsilon_n} dtdxdv. \end{aligned}$$

Der erste Term kann mit Hilfe von Satz 4.5 und Satz 2.4 folgendermassen abgeschätzt werden:

$$\left| \int\int\int (\partial_v \sigma - \sum_{m=1}^{N} \sigma_1^m \sigma_2^m \sigma_3^m) T_{e^{\varepsilon_n}} (\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0) f^{\varepsilon_n} dt dx dv \right| \leq$$
$$\leq \|\partial_v \sigma - \sum_{m=1}^{N} \sigma_1^m \sigma_2^m \sigma_3^m \|_2 \| T_{e^{\varepsilon_n}} (\rho^{\varepsilon_n} - \rho^0) f^{\varepsilon_n} \|_2 \leq$$
$$\leq \|\partial_v \sigma - \sum_{m=1}^{N} \sigma_1^m \sigma_2^m \sigma_3^m \|_2 2 A_2 J \| f^0 \|_\infty$$

und kann bei entsprechender Wahl der Approximation beliebig klein gemacht werden. Der zweite Term konvergiert gegen 0 für $n \to \infty$, wie wir es für die separierenden Funktionen bereits oben gezeigt haben.

Es bleibt noch, den Term I_2^n zu betrachten. Wir nehmen wieder zunächst $\sigma = \sigma_1^m \sigma_2^m \tilde{\sigma}_3^m$ als separiert an. Für jedes $\delta > 0$ haben wir

$$T_{e^{\varepsilon_n} - e^0} = T'^{,\delta}_{e^{\varepsilon_n} - e^0} + T^{\delta}_{e^{\varepsilon_n} - e^0},$$

dementsprechend zerlegen wir I_2^n wie folgt:

$$\begin{aligned} I_2^n &= \int\int\int \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 T_{e^{\varepsilon_n} - e^0} \rho^0 f^{\varepsilon_n} dt dx dv = \\ &= \int\int \sigma_1 \sigma_2 T_{e^{\varepsilon_n} - e^0} \rho^0 \rho^{\varepsilon_n}_{\sigma_3} dt dx = \\ &= \int\int \sigma_1 \sigma_2 T^{\delta}_{e^{\varepsilon_n} - e^0} \rho^0 \rho^{\varepsilon_n}_{\sigma_3} dt dx + \int\int \sigma_1 \sigma_2 T'^{,\delta}_{e^{\varepsilon_n} - e^0} \rho^0 \rho^{\varepsilon_n}_{\sigma_3} dt dx = \\ &=: I_{2,1}^n(\delta) + I_{2,2}^n(\delta). \end{aligned}$$

Zunächst schätzen wir $I_{2,1}^n(\delta)$ ab und notieren, daß nach Satz 4.5 und Lemma 4.10 gilt

$$\begin{aligned} |I_{2,1}^n(\delta)| &\leq \|\sigma_1\|_\infty \|\sigma_2\|_\infty \| T^{\delta}_{e^{\varepsilon_n} - e^0} \rho^0 \|_2 \| \rho^{\varepsilon_n}_{\sigma_3} \|_2 \leq \\ &\leq \|\sigma_1\|_\infty \|\sigma_2\|_\infty \|\sigma_3\|_\infty \left(\int_0^T \| T^{\delta}_{e^{\varepsilon_n} - e^0} \rho^0(t) \|_2^2 dt \right)^{1/2} JT \leq \\ &\leq C(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \| T^{\delta}_{e^{\varepsilon_n} - e^0} \|_2 \| \rho^0 \|_2 JT \\ &\leq C(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) JT \frac{\varepsilon_n}{\delta^2} \| \rho^0 \|_2. \end{aligned}$$

Zur Behandlung von $I^n_{2,2}(\delta)$ wählen wir $R > 0$ so, daß $\mathrm{supp}\sigma_2, \mathrm{supp}\sigma_3 \subset B_R$. Da

$$\|\rho^{\varepsilon_n}_{\sigma_3}\|_{L^2([0,T]\times\mathbf{R}^2)} \leq \pi R^2 \|\mathring{f}\|_\infty \|\sigma_3\|_\infty,$$

gilt

$$\begin{aligned}|I^n_{2,2}(\delta)| &\leq \|T^{,\delta}_{e^{\varepsilon_n}-e^0}\rho^0\|_{L^2([0,T]\times\mathbf{R}^2)} \|\sigma_1\sigma_2\rho^{\varepsilon_n}_{\sigma_3}\|_{L^2([0,T]\times\mathbf{R}^2)} \leq \\ &\leq \|T^{,\delta}_{e^{\varepsilon_n}-e^0}\rho^0\|_{L^2([0,T]\times\mathbf{R}^2)} \|\sigma_1\|_\infty \|\sigma_2\|_\infty \pi R^2 \|\mathring{f}\|_\infty \|\sigma_3\|_\infty.\end{aligned}$$

Da $e^{\varepsilon_n} - e^0$ die Bedingungen von Satz 2.4 mit derselben Konstanten B erfüllen, gilt

$$\|T^{,\delta}_{e^{\varepsilon_n}-e^0}\rho^0\|_{L^2([0,T]\times\mathbf{R}^2)} \to 0$$

für $\delta \to 0$ gleichmäßig in n. Deswegen können wir für ein vorgegebenes $\eta > 0$ ein $\delta(\eta) > 0$ so wählen, daß

$$\|T^{,\delta(\eta)}_{e^{\varepsilon_n}-e^0}\rho^0\|_{L^2([0,T]\times\mathbf{R}^2)} \leq \frac{\eta}{2\pi R^2 \|\sigma_1\|_\infty \|\sigma_2\|_\infty \|\mathring{f}\|_\infty \|\sigma_3\|_\infty}$$

gleichmäßig für $n \in \mathbb{N}$. Damit haben wir für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt

$$|I^n_{2,2}(\delta(\eta)) < \frac{\eta}{2}.$$

Jetzt können wir I^n_2 abschätzen. Aufgrund der Abschätzung von $I^n_{2,1}(\delta(\eta))$ und wegen $\varepsilon_n \to 0$ gibt es ein $n_0(\eta)$, so daß

$$|I^n_{2,1}(\delta(\eta))| \leq \frac{\eta}{2}, \quad n \geq n_0(\eta).$$

Hieraus ergibt sich $I^n_2 \to 0$ für $n \to \infty$. Wegen der Dichtheit der Summen von separierenden Funktionen in $L^2((0,T) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ ergibt sich die Behauptung analog zum Beweis von (42) auch im allgemeinen Fall. □

5 Offene Probleme

1. Eindeutigkeit.
   Gilt die Eindeutigkeit der klassischen Lösungen?
   Um die Hölder-Norm der Differenz $d = f_{(1)} - f_{(2)}$ von zwei Lösungen des flachen Vlasov-Poisson-Systems abzuschätzen, müßte die Hölder-Norm von $f_{(1)} - f_{(2)}$ gegen die Hölder-Norm von der Differenz der entsprechenden Charakteristiken abschätzen, also eine Abschätzung vom Typ

   $$|\overset{\circ}{f}(Z_{(1)(0,t,z_1)}) - \overset{\circ}{f}(Z_{(2)}(0,t,z_1)) - \overset{\circ}{f}(Z_{(1)}(0,t,z_2)) + \overset{\circ}{f}(Z_{(2)}(0,t,z_2))| \leq$$
   $$\leq C|Z_{(1)}(0,t,z_1) - Z_{(2)}(0,t,z_1) - Z_{(1)}(0,t,z_2) + Z_{(2)})(0,t,z_2)|$$

   erhalten können, was nicht möglich ist.

   Kann man die Nicht-Eindeutigkeit begründen?
   Daß die Maßlösungen nicht eindeutig zu sein brauchen, zeigt das Beispiel von [MaZh96] im eindimensionalen Fall.

2. Globale Existenz.
   Ist globale Existenz der klassischen Lösungen zu erwarten?
   Die Beweise von [Pf92], [Sch91], [LiPe91] können wegen der hohen Potenzen der Funktionen A, R, P im System (S) aus Lemma 3.10 nicht übetragen werden.

3. Singulärer Grenzübergang.
   Approximiert man die δ-Funktion in der Anfangsbedingung

   $$\tilde{f}(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3) = \overset{\circ}{f}(x_1, x_2, v_1, v_2)\delta(x_3)\delta(v_3)$$

   durch eine δ-Folge, ist dann Konvergenz der Lösungen des approximierten Problems gegen die des singulären zu erwarten?
   Ein ähnliches Problem ist in [DiSa99] behandelt worden. In unserem Fall hat man allerdings mit der dritten Komponenten der Kraft und deren Ableitung nach der dritten Ortskomponenten zu tun, die singulär ist.
   Diese Frage scheint insbesondere physikalisch relevant zu sein, da die real existierenden Galaxien eine endliche Dicke haben.

4. Stabilität stationärer Lösungen.
   Existenz und stabilität der stationärer Lösungen im 2×2-dimensionalen Phasenraum ist bereits in [Re99] bewiesen. Bleiben diese stationären Lösungen auch im vollen 3×3-dimensionalen Raum stabil?
   Dieses Problem scheint mit der Frage 3. verwandt zu sein.

5. Explizite Lösungen.
   Gibt es explizite Lösungen zum flachen Vlasov-Poisson-System?
   Ein Versuch explizite Lösungen im Sinne von [Ku52] zu konstruierten, scheitert an der Singularität der dritten Kraftskomponente.

Literatur

[Ad] Adams, R.A. Sobolev spaces. Academic press, New York San Francisco London (1975)

[Ar75] Arsenev, A.A.: Global existence of a weak solution of Vlasov's system of equations, U.S.S.R. Computational Math. and Mech. Phys. 15, no 1 (1975), 131-141

[Ba63] Batt, J.: Ein Existenzbeweis für die Vlasov-Gleichung der Stellardynamik bei gemittelter Dichte, Arch. Rational Mech. Anal. 13 (1963), pp. 296-308

[Ba77] Batt, J.: Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics, J. Differential Equations 25 (1977), 342-364

[BaDe85] Bardos, C., Degond, P.: Global existence for the Vlasov-Poisson equation in 3 space variables with small initial data, Ann.Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéare, 2 (1985), pp. 101-118

[Be] Beesack, P.R. Gronwall Inequalities. Carleton Mathematical Lecture Notes, Vol.11. Carleton (1975)

[BeLo] Bergh, J., Löfström, J. Interpolation Spaces. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York 1976

[Ca61] Calderon, A.P., Zygmund A.: Lebesque spaces of differentiable functions and distributions. Proc. Sympos. Pure Math. 4 (1961), pp. 33-49

[CaZy] Calderon, A.P., Zygmund A.: Singular integrals and periodic functions, Studia math. 14 (1954), pp. 249-271

[Di] Dietz, C.: Der hydrodynamische Limes des Vlasov-Poisson-Systems, Dissertation (1997)

[DiSa99] Dietz, C.; Sandor, V.: The hydrodynamical limit of the Vlasov-Poisson system, Transp. Theory and Stat. Physics 28 (1999), 499-520

[DPLi89] Di Perna, R.J., Lions, P.L., Global weak solutions of Vlasov-Maxwell systems, Commun. Pure Appl. Math. 42 (1989), 729-757

[DPLi91] Di Perna, R.J., Lions, P.L: On the Cauchy problem for Boltzmann equations: Global existence and weak stability, Arch. Rat. Mech. Anal. 144 (1991), 47-55

[DuSc] Dunford N.; Schwartz, J.: Linear operators, Interscience publischer, inc., New York 1967

[Ed] Edwards: Functional Analysis. New York 1965

[Fi] Fichtenholz, G.M.: Differential und Integralrechnung II, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1964

[FrPo] Fridman, A.M.; Polyachenko, V.L.: Physics of Gravitating Systems I New York; Springer-Verlag, 1984

[GLPS88] Golse, F.; Lions, P.L.; Perthame, B.; Sentis, R.: Regularity of the moments of the solution of a transport equation, J.Funct. Anal. 76 (1988), 110-125

[Ho81] Horst, E.: On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear Vlasov equation, Part I, Math. Meth. in the Appl. Sci., 3 (1981), pp. 229-248

[Ho82] Horst, E.: On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear Vlasov equation, Part II, Math. Meth. in the Appl. Sci., 4 (1982), pp. 19-32

[HoHu84] Horst E.; Hunze R.: Weak solutions of the initial Value problem for the non-linear Vlasov equation. Math. Meth. in Appl. Sci. 6 (1984) 262-279

[Kr] Kruse K.-O.: Ein neuer Zugang zur globalen Existenz von Distributionenlösungen des Vlasov-Maxwell-Systems partieller Differentialgleichungen, Diplomarbeit

[Ku52] Kurth, R.: Das Anfangswertproblem der Stellardynamik, Z. Astrophys. 30 (1952), 213-229

[LiPe91] Lions, P.L., Perthame, B.: Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system. Invent. Math. 105 (1991), pp. 415-430

[MaZh96] Majda, A.; Zheng, Y.: Existence of global weak solutions to one component Vlasov-Poisson and Fokker-Planck-Poisson systems in one-space dimension with measures as initial data. Comm. Pure Appl. Math.47 (1996), 1365-1401

[Pf] Pfaffelmoser, K.: Globale klassische Lösungen des dreidimensionalen Vlasov-Poisson-Systems, Dissertation, Universität München (1991)

[Pf92] Pfaffelmoser, K.: Global classical solitions of the Vlasov-poisson system in three dimensions for general initial data. J. Diff. Eqns. 95 (1992), 281-305

[Pr] Privalov, J.:Sur les fonctions conjuguées, Bull. Soc. Math. France 44 (1916), 100-103

[Re99] Rein, G.: Flat steady states in stellar dynamics - existence and stability, Commun. Math. Phys. 205 (1999), 229-247

[ReSi] Reed M.; Simon B.: Methods of Mathematical Physics, vol. II New York 1975

[Sch91] Schaeffer, J.: Global existence of smooth solutions to the Vlasov-Poisson system in three dimensions, Comm. Partial Differential Equations 16 no. 8-9 (1991), 1313-1335

[St] Stein E.: Singular integrals and differentiability property of functions. Princeton 1970

[Ta] Taibleson, M.H.: The preservation of Lipschitz spaces under singular integral operators, Studia Math. 24 (1963), 105-111

[To] Toomre, A.: Theories of Spiral Structure, Ann.Rev. Astron. Astophys. 15, 437-478 (1977)

[Wa] Walter W. Gewöhnliche Differentialgleichungen. Springer Verlag, New York 1976

[We] Werner D.: Funktionalanalysis, Springer-Verlag 1999

[Wl] Wloka J.: Partielle Differentialgleichungen. B.G. Teubner Stuttgart, 1982

Persönliche Angaben

Name:	Svetlana Dietz, geb. Shevchenko
Wohnsitz:	München

Lebenslauf

10.01.76	geboren in Charkow, Ukraine
09.82 - 05.85	Besuch der Grundschule
09.85 - 05.89	Besuch des allgemeinen Gymnasiums
09.89 - 05.92	Besuch des physikalisch-mathematischen Gymnasiums, Abschlüß: Abitur mit Auszeichnung
09.92 - 05.97	Studium der Mathematik an der Staatlichen Universität Charkow, Abschlüß: Diplom mit Auszeichnung
07.97	Übersidlung nach Deutschland
09.97- 02.98	Teilnahme am Deutschkurs am Goethe-Institut München
04.98- 03.01	Mitglied des Graduiertenkollegs “Mathematik im Bereich ihrer Wechselwirkung mit der Physik” an der LMU München
18.07.00	Geburt meines Sohnes Wassily Dietz